

DISSERTATION | DOCTORAL THESIS

Titel | Title

Dedekinds Philosophie der Arithmetik
Grundlegung eines prototopologischen Strukturalismus

verfasst von | submitted by

Edin Bošković BA MA

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Doktor der Philosophie (Dr.phil.)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 792 296

Dissertationsgebiet lt. Studienblatt | Field of
study as it appears on the student record
sheet:

Philosophie

Betreut von | Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Mag. Dr. Georg Schiemer

Abstrakt

Die vorliegende Dissertation widmet sich der Untersuchung spezifischer Fragestellungen im Kontext der Philosophie der Arithmetik von Richard Dedekind. Dabei wird nicht nur sein Beitrag zur begrifflichen Fundierung der natürlichen und reellen Zahlen analysiert, sondern insbesondere auch die Art und Weise, wie seine strukturellen Definitionen mit modernen Konzepten der mengentheoretischen Topologie in Beziehung gesetzt werden können. Im Zentrum der Arbeit steht die These, dass Dedekind im Verlauf seines mathematischen und philosophischen Schaffens eine methodische Neuausrichtung vollzogen hat, die als eine topologische Wende verstanden werden kann. Diese Wende manifestiert sich sowohl in der impliziten als auch in der expliziten Verwendung topologischer Grundbegriffe im Rahmen seiner Arbeiten zur Arithmetik. Damit liefert die Arbeit nicht nur einen neuen Blick auf die innere Logik und Dynamik von Dedekinds Theorieentwicklung, sondern hebt auch die bislang wenig beachtete Rolle hervor, die topologische Denkweisen bereits in der formativen Phase moderner Mathematik gespielt haben. Diese inhaltlichen Analysen bilden die Basis für eine methodische und philosophische Auseinandersetzung mit Dedekinds strukturalistischem Ansatz.

Abstract

The present dissertation is dedicated to the investigation of specific questions within the context of Richard Dedekind's philosophy of arithmetic. It not only analyzes his contribution to the conceptual foundation of natural and real numbers, but also in particular examines the way in which his structural definitions can be related to modern concepts of set-theoretic topology. At the heart of the work is the thesis that Dedekind, throughout his mathematical and philosophical work, underwent a methodological reorientation that can be understood as a topological turn. This turn is manifested both in the implicit and explicit use of fundamental topological concepts within his work on arithmetic. In doing so, the dissertation provides not only a new perspective on the internal logic and dynamics of Dedekind's theory development but also highlights the often overlooked role that topological thinking played in the formative phase of modern mathematics. These content-related analyses form the basis for a methodological and philosophical engagement with Dedekind's structuralist approach.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	11
1.1	Dedekind und die Philosophie	17
1.2	Intellektueller Kontext: Göttingen und Berlin	25
1.3	Anmerkungen zum Titel und dem Aufbau der Arbeit	30
1.4	Anmerkungen zu den Quellen und der Notation	31
2	Dedekinds Forschungsprogramm zur Arithmetik	33
2.1	Erweiterung und Definition der Zahlenbereiche	35
2.2	Arithmetisierung der Analysis	41
2.2.1	Der <i>wirkliche</i> Zusammenhang	45
2.2.2	Das Stetigkeitsaxiom der Geometrie	46
2.2.3	Die Schnitttheorie	47
2.2.4	Dedekind-Vollständigkeit und Supremumseigenschaft	49
2.3	Grundlegung der Arithmetik	50
2.3.1	Der Stellenwert der Kettentheorie	52
2.3.2	Die Existenz unendlicher Mengen	57
2.4	Strategien der Zahlenbereichserweiterungen	59
3	Der Eudoxos der Moderne	63
3.1	Der antike Zahlenbegriff	65
3.2	Die <i>standard Story</i> der antiken Inkommensurabilität	67
3.2.1	Arithmetica Universalis	67
3.2.2	Die Entdeckung der Inkommensurabilität	68
3.3	Eudoxos' Proportionenlehre	69
3.4	Die anthyphairetische Proportionenlehre	74
3.5	Die Notwendigkeit der vierten Proportionale	79
3.6	Archimedisches Axiom und Vollständigkeit	82
3.7	Ist Euklids Raum stetig?	85
3.7.1	Warum <i>funktioniert</i> Euklids System?	86
3.7.2	Bewegung als <i>Brücke</i> zur Stetigkeit?	88
3.8	Zwischenergebnis	93
4	Das Punktmengenkontinuum	95
4.1	Aristotelischer Synechismus	96
4.1.1	Das Kontinuum ist unbegrenzt teilbar	97

4.1.2	Das Kontinuum besteht nicht aus Punkten	99
4.2	Die Arithmetisierung des Kontinuums	101
4.3	Topologische Betrachtungen	105
4.4	Eine mereotopologische Annäherung	108
4.5	Dedekinds <i>Intervalle</i> und die Teilraumtopologie auf $\mathbb{Q}$	114
5	Die <i>unentbehrlichen</i> Grundbegriffe der Arithmetik	117
5.1	Mengen	118
5.2	Abbildungen	122
6	Zur historischen Genese topologischer Begriffe	127
6.1	Topologische Transformationsgruppen	131
6.2	Die Theorie der Punktmengen	137
6.3	Die Axiomatisierung topologischer Räume	140
7	Dedekinds topologische Wende	147
7.1	Topologiesprache	147
7.2	Die Axiomatisierung topologischer Phänomene im Kontext der Kettentheorie	150
7.3	Erste Ansätze zur Untersuchung des Baire-Raumes ${}^{\omega}\omega$	156
7.4	Schlussfolgerungen	158
8	Strukturelle Axiomatik	161
8.1	Axiomatik ohne „Axiome“	163
8.2	<i>Traditionelle</i> und <i>moderne</i> Axiomatik	168
8.3	Strukturelle Definitionen bei Dedekind und Hilbert	172
9	Metamathematische Aspekte	175
9.1	Wesensbestimmung	175
9.2	Konsistenz	178
9.3	Kategorizität	179
9.4	Vollständigkeit	184
10	Schattenhafte Gestalten	187
10.1	Dedekinds Abstraktions- und Schöpfungsbegriff	187
10.2	Strukturalistische Positionen in Bezug auf Dedekind	190
10.3	Dedekind-Abstraktion: eine mögliche historische Quelle	193
11	Schlussbemerkungen und Ausblick	197
A	Zeitangaben	201
A.1	Zeitangaben zu Dedekind	201
A.2	Zeitangaben zur Entwicklung der Topologie bis 1922	202
B	Überblick über relevante Primärquellen	203
C	Die Korrespondenz mit Keferstein: historischer Kontext ihrer Entstehung	207

Literaturverzeichnis

211

Abbildungsverzeichnis

1.1	Definitionen der Ordinalzahlen nach von Neumann und Zermelo	14
1.2	Neue Ansätze in der Mathematik im 19. Jahrhundert in Göttingen und Berlin . .	27
1.3	Beispiel der Einheitswurzel für $n = 10$	29
2.1	Zirkularität der Erweiterung der Zahlenbereiche	39
2.2	Grobe Darstellung der Architektur von SZ	44
2.3	Grobe Architektur von WZ	51
2.4	Beispiele für unendliche und endliche Ketten	53
2.5	Der Rekursionssatz	56
2.6	Dedekinds Gegenbeispiel zu #126	56
2.7	Strategien der Zahlenbereichserweiterung bei Dedekind	60
3.1	Der Ishango-Knochen	65
3.2	Streckenverhältnisse beim regulären Fünfecks	78
3.3	Streckenverhältnisse beim Quadrat	79
3.4	Streckenverhältnisse beim regulären Fünfecks	81
3.5	Satz 32 des Buches I der Elemente	87
3.6	Satz 1 des Buches I der Elemente	90
3.7	Weierstraß-Funktion	92
4.1	Standpunkte über die Natur des Kontinuums	101
4.2	Mereologische Relation <i>zwischen</i> in $\mathcal{L}[\circ]$	110
4.3	Mereologische Relation <i>Angrenzung</i> in $\mathcal{L}[\circ]$	110
4.4	Mereologische Relation <i>Kongruenz</i> in $\mathcal{L}[\circ]$	111
4.5	Biextension	111
4.6	Mereologische Relation <i>angrenzen</i> in $\mathcal{L}[\circ]$	113
6.1	Traktrix	133
6.2	Pseudosphäre	133
6.3	Beltrami-disk	134
6.4	Erste vier Iterationen der Cantor-Konstruktion	139
6.5	Die offenen Mengen $U_\varepsilon(x)$ und $U_\delta(y)$	143
9.1	Fehlgeschlagene Charakterisierungen im Rahmen der Wesensbestimmung	177
9.2	Kategorizität nach #132 und #133 nach Sieg und Morris (2018)	179
9.3	Syntaktische Rechtfertigung nach Sieg und Morris (2018, S. 273)	180
9.4	Dedekinds Schöpfungsprozess	184

A.1	Zeitstrahl zu Leben und Werk Richard Dedekinds (Auswahl)	201
A.2	Zeitstrahl zur Entwicklung der Topologie bis Kuratowski (1922) (Auswahl)	202
C.1	Faksimile zum Entwurf des ersten Briefs Dedekinds an Keferstein vom 9. Februar 1890: SUB Göttingen, Cod. Ms. R. Dedekind 13 : 22, Blatt 2.	210

Tabellenverzeichnis

6.1	Die Invarianten der wichtigsten Untergruppen der projektiven Gruppe	135
6.2	Offene und abgeschlossene Mengen nach Hausdorff (1914)	144

Kapitel 1

Einführung

Das Ziel dieses Dissertationsvorhabens¹ ist eine Rekonstruktion und philosophische Einordnung des grundlagentheoretischen Werkes zur Arithmetik von Richard Dedekind (1831 – 1916). Dieses Werk umfasst im Wesentlichen seine zwei Aufsätze zur Arithmetik, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* aus dem Jahr 1872 sowie *Was sind und was sollen die Zahlen?* aus dem Jahr 1888, seinen Habilitationsvortrag aus dem Jahr 1854 und einige weitere Quellen aus dem Nachlass.² Dedekinds Anliegen ist die Begründung der Arithmetik. Wir werden im Laufe der Arbeit feststellen, dass der Begriff der Arithmetik bei Dedekind weit gefasst ist und dass sich die erwähnte Begründung in strukturellen Definitionen der Zahlenbereiche widerspiegelt, die sowohl axiomatische als auch genetische Züge aufweisen. Unter einer genetischen Konstruktion der Zahlenbereiche verstehen wir in Anlehnung an Hilbert (1900) einen Aufbau bzw. eine Konstruktion neuer Zahlenbereiche aus bereits vorliegenden Zahlenbereichen. Neben diesen in der Literatur bereits eingehend diskutierten metamathematischen Fragestellungen soll auch auf inhaltliche Aspekte eingegangen werden. Dabei wird nicht nur sein Beitrag zur begrifflichen Fundierung der natürlichen und reellen Zahlen analysiert, sondern insbesondere auch die Art und Weise, wie seine strukturellen Definitionen mit modernen Konzepten der mengentheoretischen Topologie in Beziehung gesetzt werden können. Im Zentrum der Arbeit steht die These, dass Dedekind im Verlauf seines mathematischen und philosophischen Schaffens eine methodische Neuausrichtung vollzogen hat, die als eine *topologische Wende* verstanden werden kann. Diese Wende manifestiert sich sowohl in der impliziten als auch in der expliziten Verwendung topologischer Grundbegriffe im Rahmen seiner Arbeiten zur Arithmetik.

In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (kurz **SZ**) unternimmt Dedekind eine Begründung der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen heraus. Da nach dem damaligen Verständnis der rationale Zahlenbereich mit der Arithmetik gleichgesetzt wurde, kann dieses Vorhaben auch als Versuch der *Arithmetisierung der Analysis* bezeichnet werden.³ **SZ** wurde durch systematische

¹Um die Lesbarkeit sowie das Textverständnis in dieser Arbeit zu gewährleisten, wird keine gendergerechte Sprache verwendet. Die vorliegende Arbeit ist ausschließlich in männlicher Form verfasst, spricht jedoch alle Geschlechter an.

²Mein aufrichtiger Dank gilt der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen für die großzügige Bereitstellung von Auszügen aus dem Nachlass von Richard Dedekind. Diese wertvollen Materialien haben wesentlich zur Vertiefung meiner Forschung beigetragen und eröffnen neue Perspektiven auf das wissenschaftliche Wirken Dedekinds. Besonderer Dank gebührt Frau Dietlind Willer für ihre freundliche Unterstützung, ihre fachkundige Beratung und ihr Engagement bei der Bereitstellung der Dokumente. Ihre Hilfsbereitschaft und Expertise haben den Zugang zu diesem bedeutenden Quellenmaterial in besonderer Weise erleichtert.

³Dieser Begriff wird jedoch nicht einheitlich verwendet und ist Gegenstand der Analyse in Kapitel 2.2.

und didaktische Probleme motiviert, die Dedekind in einer *getrennten Entwicklung* der Arithmetik und Analysis sah. Diese Trennung hat ihre Wurzeln in der Antike und resultierte aus der Problematik der zahlentheoretischen Beschreibung des Begriffs der Stetigkeit. Der Grundgedanke bei Dedekind besteht darin, den Begriff der Stetigkeit ausgehend vom rationalen Zahlenbereich und unter Einbeziehung einer infinitistischen Mengenlehre zu fassen. Das Ergebnis dieser Bemühungen ist die Theorie der Dedekindschnitte. Diese ist bis heute eines der Standardverfahren zur Konstruktion der reellen Zahlen.

In *Was sind und was sollen die Zahlen?* (kurz **WZ**) liegt sein Anliegen dagegen in der Begründung der natürlichen Zahlen selbst. Nach Dedekind können diese auf die Prinzipien des menschlichen Denkens, die Logik, zurückgeführt werden. Dedekinds Logikbegriff ist erklärungsbedürftig und wird im Laufe der Arbeit eingehend untersucht. Der wesentliche Verdienst von **WZ** liegt in der Formulierung einer Vorform der Dedekind-Peano-Axiome, dem Beweis des Rekursionssatzes und dem Beweis der Kategorizität einfach unendlicher Systeme. Bis heute prägt dieser Aufsatz unsere Vorstellung von den Grundlagen der Arithmetik.

Neben den konkreten Ergebnissen der Arithmetik war es auch Dedekinds Methode, die neuartig war. Allgemeiner gesprochen ist es die Art und Weise, wie er an das Problem der Begründung der Arithmetik in **WZ** herantrat – sein spezifischer *Stil* – der hier Gegenstand der Untersuchung ist. Der mathematische Stil stellt eine Form der Präsentation und des Vorgehens bei mathematischen Problemen dar. Er steht in engem Zusammenhang mit der Methode, die zur Lösung von Problemen eingesetzt wird. Mathematische Objekte, bestimmte Beweisschritte oder andere Aspekte können in Abhängigkeit davon unterschiedlich akzentuiert werden. Der mathematische Stil spiegelt zu einem gewissen Maße auch immer die persönliche Auffassung des Mathematikers hinsichtlich seiner Untersuchungsobjekte wider. An diesem Punkt ist es von Bedeutung, den Autor ganzheitlich zu betrachten. Dedekinds origineller Ansatz in den beiden erwähnten Aufsätzen hat die zeitgenössische Literatur dazu motiviert, in ihm einen ersten Vertreter des *methodischen Strukturalismus* zu sehen. Unter dem methodischen Strukturalismus versteht man einen gewissen Stil der mathematischen Praxis.⁴ Bei diesem stellen die relationalen, strukturellen Aspekte zwischen mathematischen Objekten den zentralen Untersuchungsgegenstand dar. Die traditionellen mathematischen Objekte (z. B. Zahlen) treten in den Hintergrund.

Obwohl auch andere Mathematiker des 19. Jahrhunderts strukturalistische Tendenzen aufweisen und manche Autoren sogar von einer strukturalistischen Wende des 19. Jahrhunderts sprechen⁵, so ist bei keinem dieser Stil derart eng mit grundlagentheoretischen und philosophischen Auffassungen verbunden wie bei Dedekind. Trotz allem war Dedekind in seinem Verständnis der Mathematik in der damaligen Zeit nicht allein. Für Mancosu (2017) ist der mathematische Stil zugleich auch ein zentrales Konzept komparativer historischer Studien. Er verweist in diesem Sinne auf Chevalley (1935), der bereits im Jahr 1935 den individuellen Stil mit dem historischen Umfeld in Verbindung brachte:⁶

„Mathematical style, just like literary style, is subject to important fluctuations in passing from one historical age to another. Without doubt, every author possesses an individual style; but one can also notice in each historical age a general tendency that is quite well recognizable.

⁴Vgl. Reck und Ferreirós (2020): S. 59

⁵Vergleiche beispielsweise Schiemer (2020): S. 106

⁶Chevalley (1935): S. 375 in Übersetzung von Mancosu (2017)

This style, under the influence of powerful mathematical personalities, is subject every once in a while to revolutions that inflect writing, and thus thought, for the following periods.,

Die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts war gekennzeichnet von einer strukturalistischen Wende. Wir finden bereits bei Gauß einen ersten Beleg dafür, wenn er schreibt: „*Die Mathematik ist so im allgemeinsten Sinn die Wissenschaft der Verhältnisse, indem man von allem Inhalt der Verhältnisse abstrahiert.*“⁷ Diese allgemeine Auffassung war bedeutend, obwohl sie noch keine signifikanten Implikationen auf die mathematische Praxis hatte. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde dieser Gedanke von Mathematikern wie Dirichlet, Riemann und Dedekind weiterentwickelt. Dirichlet prägte in vielerlei Hinsicht die nachfolgende Generation der Mathematiker. Einerseits war es sein spezifischer Ansatz, der von der mathematischen Beweisführung ein hohes Maß an allgemeiner und abstrakter Gedankenarbeit abverlangte und die bisherige, rechnerische und algorithmische Praxis zu minimieren versuchte, andererseits war es jedoch auch die Auffassung, die reine Mathematik sei lediglich Arithmetik..⁸ Während die letzte Auffassung auch konstruktivistische Mathematiker wie Kronecker beeinflusste, war es primär die Erstere, die das grundlagentheoretische Werk von Dedekind prägte.⁹

Folglich gehörte Dedekind zu einer Gruppe von Mathematikern, die zwei grundlegende Prinzipien vertraten. Zum einen die Auffassung, dass die mathematische Beweisführung einen konzeptionellen Gedankengang verfolgen und beispielhafte und rechnerisch-algorithmische Aspekte vermeiden sollte und zum anderen die Auffassung, dass die Mathematik sich auf eine einzige Theorie zurückführen lässt. Gemäß Dirichlet ist diese Theorie die Arithmetik. Dedekind wird diesen Gedanken weiterführen und die Arithmetik selbst in der Logik begründet sehen. Seine Sichtweise hinsichtlich der damaligen grundlagentheoretischen Fragestellungen kann folgendermaßen zusammengefasst werden:¹⁰

1. Dedekind war ein Fürsprecher der *klassischen Mathematik*. Obwohl der Name anderes vermuten lässt, werden unter diesem Begriff die innovativsten Ansätze der damaligen Mathematik subsumiert. Beispiele sind die Anwendungen einer naiven infinitistischen Mengenlehre sowie eines allgemeinen Funktionsbegriffs bei mathematischen Untersuchungen. Diese Ansätze waren naturgemäß frei von konstruktivistischen Restriktionen, wie sie beispielsweise bei Kronecker vorzufinden sind.
2. Dedekind hat maßgeblich zur Entwicklung der Mengenlehre beigetragen und sie als Grundlage für seine Untersuchungen herangezogen.
3. Dedekind war ein Wegbereiter für spätere formalistische und strukturalistische Ansätze in der Mathematik. Er löste mathematische Konzepte aus der reinen Anschauung. Diese ersetzte er durch eine logische und strukturalistische Grundlage. Seine Arbeiten zur Theorie der Zahlen waren nicht nur ein fundamentaler Beitrag zur Analysis, sondern auch ein

⁷Gauß (1917): S. 396

⁸So schreibt Dedekind selbst im Vorwort von **WZ** Dirichlet den Ausspruch zu, „*daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt*“. Siehe dazu Dedekind (1888): S. 338. Minkowski bezieht sich dagegen auf die mathematische Praxis, wenn er das andere *Dirichletsche Prinzip* folgendermaßen formuliert: „*[...] mit einem Minimum an blinder Rechnung, einem Maximum an sehenden Gedanken [...]*“. Siehe dazu Minkowski (1905): S. 163.

⁹Für eine profunde historische Einführung in diese Epoche siehe, insbesondere Kapitel 10 „*Mathematik während der Industriellen Revolution*“ in Wußing et al. (2012).

¹⁰Vgl. Reck (2009): S. 152ff

paradigmatisches Beispiel für eine mathematische Begriffsbildung, die auf präzisen, strukturellen Prinzipien basiert.

In den vergangenen Jahrzehnten wurden Dedekinds grundlagentheoretische Arbeiten, allen voran **WZ**, hinsichtlich ihrer immanenten strukturalistischen Aspekte, verstärkt untersucht. Das rege Interesse der Fachwelt an Dedekind ist nicht zuletzt durch die Ausweitung der Forschung zum mathematischen Strukturalismus zu erklären. Diese Forschungen erfuhren in den 1960er Jahren einen Aufschwung und fanden breite Beachtung sowohl innerhalb der Philosophie als auch der Mathematik selbst.

Im Jahr 1965 legte Paul Benacerraf mit der Publikation seines richtungsweisenden Aufsatzes „*What Numbers Could Not Be*“ einen Grundstein für die strukturalistische Wende in der zeitgenössischen Philosophie der Mathematik. Die darin formulierten Überlegungen markierten den Beginn einer intensiven Auseinandersetzung mit der Frage nach der ontologischen und epistemologischen Verortung mathematischer Objekte im Rahmen strukturalistischer Theorieansätze.¹¹ Im Allgemeinen versteht man unter dem Strukturalismus die Auffassung, dass die Mathematik die Wissenschaft von Strukturen sei. Ihr Untersuchungsgegenstand ist somit nicht mit den *traditionellen mathematischen Objekten* wie Zahlen, geometrischen Figuren u.Ä. gleichzusetzen. Vielmehr untersucht sie Strukturen, die im Rahmen einer mathematischen Theorie explizit oder implizit definiert werden. Die Geometrie ist so beispielsweise nicht die Wissenschaft von Punkten, Linien, Ebenen und deren Relationen, sondern definiert (etwa im Rahmen ihrer axiomatischen Ausformung) eine spezifische Struktur, in der von der Bedeutung dieser Begriffe abstrahiert werden kann. In einer solchen Theorie ist der semantische Gehalt des Wortes *Punkt* nicht von Belang. Solange diese Begriffe, die implizit durch das axiomatische System definierte Struktur erfüllen, sprechen wir von einer Geometrie. Schon Hilbert wurde der Spruch zugeschrieben, dass die Axiome der Geometrie derart ausgestaltet sein müssen, dass man jederzeit anstelle von '*Punkten, Geraden, Ebenen*' auch '*Tische, Stühle, Bierseidel*' sagen können muss.¹²

Strukturalistische Ansätze wurden somit bereits im 19. Jahrhundert diskutiert. Es war jedoch Benacherraf, der durch ein einfaches Beispiel die Bedeutung der strukturalistischen Problemstellung in Erinnerung rief. Er stellt fest, dass in den zwei gängigen mengentheoretischen Ordinalzahlendefinitionen nach von Neumann und Zermelo bestimmte Eigenschaften (*mit*)definiert werden, die nicht von unserem Verständnis der Ordinalzahlen gedeckt werden und ihm sogar widersprechen. Zu diesem Zweck betrachten wir einen schematischen Vergleich der beiden Definitionen:

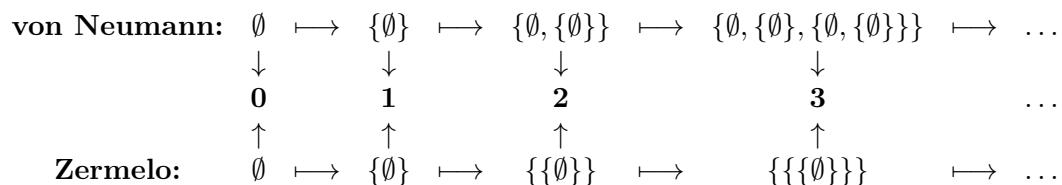


Abbildung 1.1: Definitionen der Ordinalzahlen nach von Neumann und Zermelo

Bei von Neumann werden die Ordinalzahlen als Mengen der vorhergehenden Mengen dar-

¹¹Vgl. Benacerraf (1965) für weitere Ausführungen.

¹²Vgl. Blumenthal (1970): S. 403

gestellt, während bei Zermelo eine Schachtelung der leeren Menge vollzogen wird. Die Definitionen unterscheiden sich somit hinsichtlich ihrer mengentheoretischen Ausformung. Für die mengentheoretische Definition der Ordinalzahlen nach von Neumann gilt offensichtlich $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Fasst man diese Ausdrücke tatsächlich als Definitionen der Ordinalzahlen auf, ergibt dies $1 \in 3$. Dieser Zusammenhang gilt jedoch nicht, wenn wir die mengentheoretische Ordinalzahlendefinition nach Zermelo heranziehen, denn offensichtlich ist $\{\emptyset\} \notin \{\{\{\emptyset\}\}\}$. Mit beiden Definitionen bestimmen wir somit zugleich auch jene Eigenschaften, die für eine Theorie der Ordinalzahlen nicht *notwendig* sind. Außerdem ist es für unser natürliches Verständnis unüblich, ein mengentheoretisches Elementprädikat in Bezug auf natürliche Zahlen zu verwenden. Für Benacherraf bedeutete dies, dass eine mengentheoretische Definition der Ordinalzahlen nicht das *Wesen* der Ordinalzahlen erfasst. Der Grund dafür liegt nicht etwa in der jeweiligen Definition selbst, sondern in der Tatsache, dass derartige Definitionen den strukturellen Eigenschaften der Ordinalzahlen nicht gerecht werden.¹³

Benacherrafs Aufsatz bildet den Auftakt für die Untersuchung mathematischer Strukturen der kommenden Jahrzehnte und den Ausgangspunkt der Frage nach dem Wesen der Struktur in der Mathematik. Obwohl seine Beobachtung plausibel erscheint, erklärt er nicht, was genau strukturelle Eigenschaften sind. Was ist der ontologische und epistemologische Status dieser Strukturen und welche Bedeutung hat dies alles für die mathematische Praxis? Untersuchungen, die solche Fragen thematisieren, werden unter dem Begriff des *philosophischen Strukturalismus* subsumiert.¹⁴ In Abhängigkeit davon, ob man den Strukturen eine eigenständige Existenz zuspricht oder nicht, kann zwischen nichteliminativem und eliminativem Strukturalismus unterschieden werden. Die Debatte zwischen diesen Positionen offenbarte eine Vielzahl ontologischer, epistemologischer, aber auch praktischer Fragen, die innerhalb der Philosophie der Mathematik ein großes Interesse geweckt haben. Die einzelnen Autoren versuchten dabei, ihre jeweilige Position historisch zu rechtfertigen, etwa durch Rückgriff auf Autoren des 19. Jahrhunderts. Es war vorrangig Dedekind, bei dem man sowohl eliminative als auch nichteliminative Züge zu erkennen bestrebt war. Shapiro, als Vertreter des nichteliminativen Strukturalismus, schrieb etwa:¹⁵

„A direct forerunner of ante rem structuralism is [...] Dedekind. His development of the notion of continuity and the real numbers, in [“Stetigkeit und irrationale Zahlen”], his presentation of the natural numbers via the notion of Dedekind infinity, in [“Was sind und was sollen die Zahlen”], and some of his correspondence constitute a structuralist manifesto“

Ähnlich argumentierte jedoch auch Hellman, ein Vertreter des eliminativen Strukturalismus, einige Jahre zuvor:¹⁶

„The idea that mathematics is concerned principally with the investigation of structures of various types in complete abstraction from the nature of individual objects making up those structures is not a novel one, and can be traced at least as far back as Dedekind’s classic essay, “Was sind und was sollen die Zahlen?”“

Die nähere Ausarbeitung der philosophischen Parallelen zwischen Dedekinds Sicht auf die Arithmetik und zeitgenössischen Positionen überließen die Autoren weitgehend der wissenschaftlichen Gemeinschaft. Diese richtete ihren Fokus in den folgenden Jahrzehnten vornehmlich auf

¹³Vgl. Benacherraf (1965): S. 55

¹⁴Vgl. Reck (2003): S. 378f

¹⁵Shapiro (1997): S. 14

¹⁶Hellman (1994): S. vii

die mathematisch-technischen und methodologischen Entwicklungen des 19. Jahrhunderts. In jüngerer Zeit jedoch ist ein zunehmendes Interesse an der philosophischen Kontextualisierung sowohl der damaligen Mathematik als auch von Dedekinds grundagentheoretischen Werk zu beobachten. Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, beiden Aspekten gleichermaßen Rechnung zu tragen.

Im Zentrum der methodenkritischen Analyse von Dedekinds Arbeiten zur Arithmetik steht die systematische Erschließung ihres strukturellen Gehalts. Dabei rückt die Topologie als konstitutives Moment in Dedekinds arithmetischem Denken verstärkt in den Fokus der Analyse. Eine zentrale These der vorliegenden Untersuchung besteht darin, dass topologische Fragestellungen im Verlauf seines Schaffens zunehmend an Relevanz gewonnen haben. Die *topologische Wende*, deren erste Ansätze sich bereits in den 1860er Jahren nachweisen lassen, findet ihre systematische Ausformung in der Kettentheorie, wie sie in **WZ** formuliert wird. Diese Theorie weist auffallende konzeptuelle Parallelen zu späteren Entwicklungen in der mengentheoretischen Topologie auf, insbesondere zu den Raumaxiomen bei Alexandroff (1925) sowie den Hüllenaxiomen bei Kuratowski (1922). Im Rahmen der ersten Forschungsfrage wird angestrebt, diese strukturellen Übereinstimmungen herauszuarbeiten und sie in ihren historischen Kontext einzuordnen:

1. Forschungsfrage: Inwieweit ist eine topologische Reinterpretation der Kettentheorie in **WZ** möglich, welche historischen Zusammenhänge zwischen Topologie und Dedekinds Forschung können identifiziert werden und welche Implikationen hat dies auf unser Verständnis seiner strukturalistischen Methodik?

Während **WZ** in der Fachliteratur weitgehend als strukturalistisches Werk anerkannt ist, äußern sich viele Autoren hinsichtlich Dedekinds früherer grundagentheoretischer Schrift **SZ** deutlich zurückhaltender. In dieser unternimmt Dedekind den Versuch einer Arithmetisierung der Analysis, verstanden als Definition der reellen Zahlen auf der Basis der rationalen Zahlen unter Rückgriff auf eine infinitistische Mengenlehre. Sein methodischer Zugang folgt einer übergreifenden genetischen Logik, in der neue Zahlenbereiche durch systematische Erweiterung bereits bestehender definiert werden.

Nichtsdestotrotz resultiert dieser Zugang stellenweise in impliziten Begriffsbildungen, die sich mit frühen axiomatischen Tendenzen, etwa bei Hilbert, vergleichen lassen. Dedekinds Einfluss auf Hilbert sowie die Frage nach dem axiomatischen Gehalt seiner Methode sind in der jüngeren Forschung Gegenstand intensiver Debatten. Ihre Beantwortung setzt jedoch eine integrierte Betrachtung von Dedekinds arithmetischen Schriften voraus. Während **WZ** eine Vielzahl metamathematischer Anknüpfungspunkte bietet, erscheinen diese in **SZ** weitaus weniger explizit. In entscheidender Weise hängt daher die Klärung methodologischer Fragen, insbesondere hinsichtlich des strukturalistischen Charakters von Dedekinds Ansatz, von einer differenzierten Analyse der **SZ** ab:

2. Forschungsfrage: Inwieweit kann bereits in **SZ** ein methodologischer Strukturalismus identifiziert werden? Wodurch unterscheidet sich die dortige Methodik von der Methodik in **WZ**?

Die ersten zwei Forschungsfragen beleuchten Dedekinds Methodik und den historischen Kontext ihrer Entwicklung. Sie bildet den Ausgangspunkt für die philosophische Einordnung seines

grundlagentheoretischen Projekts.

Im Mittelpunkt der dritten Forschungsfrage steht Dedekinds Auffassung von *Abstraktion* und *Schöpfung*. Diesen beiden Begriffen kommt eine wesentliche Bedeutung zu. Die *Schöpfung der Zahlen* steht in engem Zusammenhang mit dem in der Literatur häufig als *Dedekind-Abstraktion* bezeichneten Konzept.¹⁷

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung werden diese beiden Begriffe nicht nur als terminologische Phänomene betrachtet, sondern als Ausdruck von Dedekinds philosophischem Verständnis der Zahlen. Unter Einbeziehung neuerer philosophischer Debatten soll daher der Gehalt dieser beiden Begriffe in Dedekinds Werk weiter differenziert werden. Dabei gilt es, sowohl die theoretische Relevanz als auch die methodischen Implikationen dieser Konzepte zu untersuchen, um auf diese Weise Dedekinds Position weiter zu präzisieren:

3. Forschungsfrage: Wie kann der philosophische Strukturalismus von Dedekind charakterisiert werden? Inwieweit können im Nachlass Anhaltspunkte gefunden werden, die seinen Standpunkt näher beleuchten?

Die drei Forschungsfragen sollen einen Beitrag zur aktuellen Dedekindforschung und zur aktuellen Diskussion über den mathematischen Strukturalismus leisten. Die große Anzahl internationaler Publikationen in diesem Bereich zeugt von der Aktualität seines Denkens und dessen Relevanz für aktuelle Diskussionen innerhalb der Philosophie der Mathematik. Ein neuer Blick auf inhaltliche und historische Zusammenhänge zwischen seiner Arbeiten zur Arithmetik und der Topologie, sowie eine Auseinandersetzung mit Quellen aus seinem Nachlass können einen neuen Impuls dahingehend darstellen und ein neues Licht auf seine philosophischen Standpunkte zur Arithmetik werfen.

1.1 Dedekind und die Philosophie

Richard Dedekind wurde am 6. Oktober 1831 in Braunschweig geboren. Er stammte aus einer angesehenen und wohlhabenden Familie mit vielfältigen akademischen und staatlichen Verbindungen. Sein Vater, Julius Levin Ulrich Dedekind, von Beruf Jurist, war als Professor am Collegium Carolinum tätig. Seine Mutter Caroline Marie Henriette Emperius war die Tochter eines Professors und Enkelin eines kaiserlichen Postmeisters. Richard war das jüngste von vier Kindern. Während sein Bruder Adolf zum Präsidenten des Landgerichts in Braunschweig aufstieg, blieb Richard sein Leben lang unverheiratet und lebte über Jahrzehnte hinweg mit seiner Schwester Julie zusammen, die als Schriftstellerin lokale Anerkennung fand.¹⁸

Zwischen 1838 und 1847 besuchte Dedekind das Gymnasium Martino-Katharineum in Braunschweig. Anfangs galt sein Interesse den Naturwissenschaften, insbesondere der Chemie und Physik, doch schon bald wandte er sich der Mathematik zu, da er in ihr eine größere logische Strenge und Ordnung erkannte.¹⁹ 1848 trat er in das Collegium Carolinum ein – eine wissenschaftliche Anstalt, die zwischen Schule und Universität stand und auch von Carl Friedrich Gauß

¹⁷Vgl. W. W. Tait (1986): S. 369; Fußnote 12.

¹⁸Biermann (1971): S. 1f. Weiterführende Informationen zum Familienstammbaum findet man etwa bei Harborth und Gerke (1981).

¹⁹Vgl. Landau (1917): S. 51

besucht worden war. Als „*Vor-Universität*“ diente sie der Vorbereitung auf den späteren Besuch der Universität, da der einfache Schulunterricht die männlichen Landeskinder dazu unzureichend befähigte.²⁰ Dort eignete sich Dedekind ein breites Wissen in analytischer Geometrie, Analysis, Mechanik und den Naturwissenschaften an.²¹ 1850 nahm er sein Studium an der Universität Göttingen auf, wo er durch das mathematisch-physikalische Seminar von Moritz Stern, Wilhelm Weber und Johann B. Listing in Berührung mit der Zahlentheorie kam. Listing war auch der Namensgeber der, bis dahin *Analysis Situs* genannten, Topologie. Mit seinen *Vorstudien zur Topologie* gilt er als einer der Begründer der algebraischen Topologie, insbesondere der Knotentheorie.²² In welchem Ausmaß sich Dedekind mit diesen Arbeiten auseinandergesetzt hat, ist nicht bekannt.

Besonders tief prägten ihn in dieser Zeit die Vorlesungen von Gauß, dessen Lehrveranstaltung über die Methode der kleinsten Quadrate Dedekind zeitlebens als eine der eindrucksvollsten bezeichnete.²³ Bereits nach vier Semestern promovierte Dedekind im Jahr 1852 unter Gauß mit einer Arbeit über Eulersche Integrale. Gauß bescheinigte ihm umfassendes Wissen und ein selbstständiges Urteilsvermögen.²⁴

„Die von Hrn. Dedekind eingereichte Abhandlung beschäftigte sich mit einer Untersuchung aus der Integralrechnung, die keineswegs zu den alltäglichen gehört. Der Verf. legt darin nicht allein sehr gute Kenntnisse in dem betreffenden Felde an den Tag, sondern auch eine solche Selbstthätigkeit, die zu günstigen Erwartungen von seinen künftigen Leistungen berechtigen.“

Landau (1917) berichtet, dass Dedekind noch einige Monate vor seinem Tod, mit *besonderer Lebendigkeit*, über die Prüfungsfragen von Gauß erzählte.²⁵ Dennoch erkannte Dedekind, dass ihm zentrale Gebiete der modernen Mathematik noch fremd waren, etwa die neueren Entwicklungen der Geometrie und Algebra, wie sie in Berlin gelehrt wurden. In den folgenden Jahren vervollständigte er seine Ausbildung durch Selbststudium und den Besuch weiterer Vorlesungen.²⁶

Zwei Jahre danach habilitierte er mit einem Vortrag zur Einführung neuer Funktionen in die Mathematik. Dieser Vortrag wird in Kapitel 2 behandelt, da sich in ihm bereits erste Hinweise auf die spätere Ausrichtung von Dedekinds grundagentheoretischer Forschung finden lassen. In den folgenden Jahren blieb er als Privatdozent in Göttingen tätig und entwickelte enge Beziehungen zu Dirichlet und Riemann. Von Dirichlet, der 1855 Nachfolger Gauß geworden war, sagte Dedekind später, er habe ihn zu einem „*neuen Menschen*“ gemacht.²⁷ Auch privat war er bald in den Kreis der Dirichlets eingebunden. Landau (ebd.) überliefert den Ausspruch eines Mitschülers Dedekinds aus Dirichlets Kolleg, wonach man Dedekind nur vom Sehen kannte, denn dieser „*kam mit Dirichlet gemeinsam und verschwand nachher mit ihm*“.²⁸

Im Jahr 1858 erfolgte die Berufung an das Polytechnikum in Zürich. Hier begann er im Herbst desselben Jahres eine Vorlesung über die Einführung in die Analysis.²⁹ Während der Vorbereitungen für diese Vorlesung wurde ihm bewusst, dass es der Arithmetik an einer wissenschaftlichen

²⁰Vgl. Sonar et al. (2014): S. 19

²¹Vgl. Landau (1917): S. 51

²²Vgl. Listing (1848) sowie Breitenberger (1999).

²³Vgl. Biermann (1971): S. 1f

²⁴Landau (1917): S. 52

²⁵Vgl. Landau (ebd.): S. 52

²⁶Vgl. Biermann (1971): S. 2

²⁷Vgl. Biermann (ebd.): S. 2

²⁸Landau (1917): S. 52

²⁹Einen Eindruck über den Inhalt und den Stil des Vortrags Dedekinds zur Analysis gewinnt man mit der

Fundierung mangelte. Am 24. November 1858³⁰ kam ihm die Idee, den Begriff der Kontinuität über Schnitte in den rationalen Zahlen zu definieren. Dieser Gedanke führte wohlgemerkt erst 14 Jahre später, im Jahr 1872, zur Veröffentlichung von *Stetigkeit und irrationale Zahlen*.

1862 kehrte Dedekind nach Braunschweig zurück, wo er eine Professur an der aus dem Collegium Carolinum hervorgegangenen Technischen Hochschule übernahm. Dort blieb er bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1894 und lebte bis zu seinem Tod 1916 in enger familiärer und wissenschaftlicher Zurückgezogenheit.³¹ Für seine wissenschaftlichen Verdienste erhielt er zahlreiche Ehrungen, darunter die Mitgliedschaft in mehreren Akademien und Ehrendoktorwürden in Oslo, Zürich und Braunschweig.³² Noch während des Ersten Weltkriegs würdigte Camille Jordan, Präsident der Académie des Sciences, Dedekinds Theorie der algebraischen Zahlen als sein Hauptwerk und beklagte öffentlich seinen Tod – ein Zeichen der internationalen Anerkennung, die ihm weit über die deutschsprachige Welt hinaus zuteilwurde.³³

Dedekinds wissenschaftlicher Einfluss ist kaum zu überschätzen. Neben den bekannten grundlagentheoretischen Werken zur Arithmetik, die Gegenstand dieser Arbeit sind, arbeitete er gemeinsam mit Cantor an der Begründung der Mengenlehre, während er mit Heinrich Weber grundlegende Beiträge zur algebraischen Zahlentheorie lieferte, insbesondere zur Idealtheorie. Diese bahnbrechenden Konzepte, darunter auch die Begriffe *Körper*, *Ideal* und später *Ring*, prägten die Entwicklung der modernen Algebra maßgeblich.³⁴

Während man über den Mathematiker Richard Dedekind noch vieles mehr berichten könnte, fallen die Belege über den Philosophen Dedekind bescheiden aus. Dedekind selbst sah sich keineswegs als Philosoph, wie er in einem Brief an seine Schwester Mathilde humorvoll betonte:³⁵

„Doch wie kann ich so in die Philosophie gerathen! Was würde Fichte sagen, wenn er hörte, dass ein Individuum vor die anderen gesetzt würde! Das Grundprinzip seiner Philosophie ist ja: ‚Das Ich setzt sich selbst‘. Denke Dir, wie scharfsinnig der Mann gewesen sein muss, der aus diesem Axiome unsere ganze Weltordnung herleitet. Ja, wenn ich wiederkomme, werde ich Euch was vorphilosophieren, dass Euch die Haare zu Berge stehen; nur verstehe ich leider nicht recht viel davon, was ein Übelstand sein soll, den ich mir aber nicht sehr zu Herzen nehme, da ich auch ohne Philosophie ganz vergnügt sein kann, wenn ich citissime meine Cellosaiten erhalte.“

Ganz ohne Philosophie konnte Dedekind dann doch nicht auskommen. Der zitierte Brief ist datiert mit 11. Juni 1852 und wenn man der im Nachlass befindlichen Vorlesungsmitschrift Dedekinds Glauben schenkt, so besuchte er am Tag zuvor die Vorlesung von Hermann Lotze über *Die Deutsche Philosophie nach Kant* in der am selbigen Tag Fichte besprochen wurde.³⁶ Die Formulierung „Das Ich setzt sich selbst“ stellte in der *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre* aus dem Jahr 1794 einen wesentlichen Grundsatz von Fichtes transzendentalen Idealismus dar.³⁷

veröffentlichten Mitschrift der Vorlesung zur Differential- und Integralrechnung aus dem Wintersemester 1861/62 in Dedekind (1985).

³⁰Vgl. Dedekind (1872a): S. 316

³¹Zeitangaben zu Leben und Werks Dedekinds finden sich im Anhang A.

³²Vgl. Sonar et al. (2014): S. 21

³³Vgl. Jourdain (1916)

³⁴Für eine historische Untersuchung der Entwicklung der Algebra und Dedekinds Bedeutung siehe beispielsweise Corry (2004).

³⁵Scharlau (1981): S. 33

³⁶Vgl. Rudolph und Schlimm (2011)

³⁷Fichte (1794): S. 10

„Also das Setzen des Ich durch sich selbst ist die reine Thätigkeit desselben. – Das Ich setzt sich selbst, und es ist, vermöge dieses blossen Setzens durch sich selbst; und umgekehrt: das Ich ist, und es setzt sein Seyn, vermöge seines blossen Seyns. – Es ist zugleich das Handelnde, und das Product der Handlung; das Thätige, und das, was durch die Thätigkeit hervorgebracht wird; Handlung und That sind Eins und ebendasselbe; und daher ist das: Ich bin, Ausdruck einer Thathandlung; aber auch der einzig-möglichen, wie sich aus der ganzen Wissenschaftslehre ergeben muss.“

Diese Aussage impliziert, dass das *Ich* nicht durch ein externes Prinzip hervorgebracht wird, sondern sich in einem ursprünglichen, autonomen Akt selbst konstituiert. In Fichtes Denken stellt dieser Akt der Selbstsetzung die erste und grundlegende Handlung des Geistes dar, aus der sich sämtliche Formen des Bewusstseins und insbesondere des Selbstbewusstseins ableiten.

Das *Ich* als philosophischer Begriff wird von Dedekind Jahre später im Beweis des bekannten Satzes #66 über die Existenz unendlicher Mengen herangezogen.³⁸ Dort fungiert es als jenes Element, das kein Bild in der Gedankenwelt darstellt. Damit ist die zugrundeliegende Abbildung zwar injektiv (da alles gedacht werden kann), jedoch nicht surjektiv (da nicht alles, wie etwa das *Ich*, selbst ein Gedanke ist). Klev (2018) argumentiert, dass Dedekind hier bewusst einen unendlichen Regress vermeiden will. Falls das *Ich* sich selbst setzt, so eröffnet dies eine potenziell unendliche Begründungsproblematik.³⁹ Die philosophische Auseinandersetzung mit dieser Begründungsproblematik findet sich sowohl bei Lotze als auch Johann Friedrich Herbart, den Lotze in seinen Arbeiten kritisiert. Während Klev (ebd.) bei der Suche nach Parallelen zu Dedekind auf Lotzes *Logik*⁴⁰ Bezug nimmt, sieht Gandon (2009) in seiner *Metaphysik*⁴¹ eine Quelle der Inspiration für Dedekinds Satz #66.⁴²

Lotzes Logik bietet aber auch unabhängig von Satz #66 bemerkenswerte Parallelen zur Methodik Dedekinds. Im Kapitel *Formen der Definition* definiert er den Inhalt eines Begriffs durch Abstraktion, indem man auf mehrere Fälle verweist, in denen dieser vorliegt, und fordert, dass von diesen Fällen alles, was nicht zum Begriff gehört, abgetrennt wird.⁴³ Der Abstraktion setzt Lotze die Konstruktion gegenüber. Eine Definition des Inhalts eines Begriffs durch Konstruktion besteht darin, die Bestandteile, aus denen der Begriff zusammengesetzt ist, samt der Art ihrer Verknüpfung darzulegen.⁴⁴ Dedekinds Definition eines *einfach unendlichen Systems* lässt sich als Beispiel einer Konstruktion im Sinne Lotzes verstehen. Dieser Begriff setzt sich aus weiteren Begriffen wie der injektiven Abbildung und der Kette eines Systems zusammen. Auf Grundlage dieser Konstruktion definiert Dedekind in #73 in **WZ** den Begriff der natürlichen Zahlen durch das, was er selbst als Abstraktion bezeichnet: ein absichtsvolles Absehen von der konkreten Natur der Elemente eines gegebenen einfach unendlichen Systems.⁴⁵ Ähnliche Parallelen mit Lotze sehen auch Sieg und Schlimm (2017), indem sie schreiben: „*It seems clear then that Lotzean abstraction is at work and leads to the concept of a simply infinite system.*“⁴⁶

Wie Klev (2018) jedoch einräumt, gibt es keine Belege, dass Dedekind weder das eine noch

³⁸Siehe die Ausführungen in Kapitel 2.

³⁹Vgl. Klev (2018): S. 257ff

⁴⁰Vgl. Lotze (1874)

⁴¹Vgl. Lotze (1879)

⁴²Vgl. Klev (2018): S. 257 und Gandon (2009): S. 101.

⁴³Vgl. Lotze (1874): S. 194f; §157

⁴⁴Vgl. Lotze (ebd.): S. 197f; §159

⁴⁵Vgl. Klev (2018): S. 256

⁴⁶Sieg und Schlimm (2017): S. 25.

das andere Buch Lotzes gelesen hat. Mit Ausnahme der erwähnten Vorlesung lassen sich aus historischer Perspektive nur wenige belastbare Hinweise auf einen tatsächlichen Einfluss nachweisen.

Ein möglicher indirekter Einfluss auf Dedekind könnte zudem auch von Herbart ausgegangen sein. In seinem *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie* in der vierten Auflage aus dem Jahr 1874 bemerkt Herbart in §124 in Bezug auf den unendlichen Regress des *Ichs* Folgendes:⁴⁷

„Das reine Selbstbewußtsein nun also, wen stellt es eigentlich vor? Das Ich stellt vor Sich, d. h. sein Ich, d. h. sein Sich vorstellen; d. h. sein Sich als Sich vorstellend vorstellen; usw. Dies läuft ins Unendliche. Man erkläre jedesmal das Sich durch sein Ich, und dieses Ich wiederum durch das **Sich vorstellen**, so wird man eine unendliche Reihe erhalten, aber nimmermehr ein Antwort auf die vorgelegte Frage, die sich vielmehr bei jedem Schritte wiederholt. Das Ich ist also ein Vorstellen ohne Vorgestelltes; ein offener Widerspruch.“ [Hervorhebung durch Autor]

Ein möglicher Einfluss Herbarts auf Dedekind ergibt sich schon aus der Verwaltung des wissenschaftlichen Nachlasses Riemanns. Heinrich Weber begann 1874 mit der Aufarbeitung von Riemanns Nachlass. Er beschränkte sich dabei nicht nur auf die einundzwanzig Schriften Riemanns, sondern unternahm darüber hinaus eine eingehende Sichtung und kritische Analyse jener Teile des Riemannschen Nachlasses, die zuvor von Dedekind und Clebsch aufgrund ihres fragmentarischen Charakters und ihrer inhaltlichen Komplexität als nicht publikationswürdig erachtet worden waren. Bei dieser Arbeit wurde Weber teilweise von Richard Dedekind unterstützt.⁴⁸ Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass in der Korrespondenz zwischen Dedekind und Weber einige Anhaltspunkte über die philosophischen Fragmente Riemanns zu finden sind.⁴⁹ Den Einfluss Herbarts auf Riemann belegt dieser selbst wenn er schreibt:⁵⁰

„Der Verfasser ist Herbartianer in Psychologie und Erkenntnistheorie (Methodologie und Eidologie), Herbart's Naturphilosophie und den darauf bezüglichen metaphysischen Disciplinen (Ontologie und Synechologie) kann er meistens nicht sich anschliessen.“

Unter der Eidologie verstand Herbart die metaphysische Disziplin, die sich unter anderem auch mit dem *Problem des Ichs* beschäftigte. Synechologie setzte sich im weitesten Sinne mit den philosophischen Grundlagen des Raums auseinander.⁵¹

Der Einfluss Herbarts auf Riemann ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Wir beschränken uns hier auf die mögliche Wirkung, die Herbarts Philosophie über Riemann auf Dedekind entfalten haben könnte. Dazu sind zwei Punkte hervorzuheben. Der Begriff der *Gedankenwelt* im Beweis des Satzes #66 wird in der Literatur meist als direkter Einfluss der Philosophie Lotzes gesehen.⁵² Lotze benutzt den Begriff tatsächlich in seinen Ausführungen.⁵³

Weniger Beachtung findet der Umstand, dass Riemann in seinen Fragmenten zur Psychologie und Metaphysik die „*Geistesmasse*“ als eine „*innere Mannigfaltigkeit*“ definiert. Mit jedem

⁴⁷Herbart (1993): S. 202

⁴⁸Vgl. Sonar et al. (2014): S. 5 sowie allgemein Haffner (2017).

⁴⁹Siehe dazu Sonar et al. (2014): S. 52 sowie 58–59. In einem Brief vom 14. März 1875 äußert Dedekind Bedenken über die philosophischen Fragmente im Nachlass von Riemann, da sich die Zuordnung der Autorschaft als schwierig gestaltete. Auf Anraten von Clebsch und mit der Unterstützung von Stumpf wurden diese Fragmente geordnet und im Anhang aufgenommen. Siehe Riemann (1892): S. 508–538.

⁵⁰Riemann (ebd.): S. 508

⁵¹Vgl. Scholz (1982): S. 414

⁵²Siehe dazu etwa Klev (2018): S. 257f

⁵³Vgl. Gandon (2009): S. 101

Denkakt entstehen neue Geistesmassen in der Seele. Der Begriff der Geistesmasse könnte ebenfalls eine Inspiration für Dedekinds *Geisteswelt* gewesen sein.⁵⁴

Wie bereits erwähnt, setzte sich Riemann auch mit der Herbarts Eidologie auseinander. Diese enthielt bei Herbart unter anderem eine Kritik an dem *absoluten Ich* Fichtes. In den von Weber und Dedekind herausgegebenen philosophischen Fragmenten sind die Wesentlichen dieser Notizen Riemanns nicht enthalten. Scholz (1982) enthält eine Analyse jener Notizen die im Nachlass zu finden waren. Vor allem das Folio 140^r in der Mappe 18 thematisiert Herbarts Standpunkt zu Fichte.⁵⁵ Herbart grenzte sich in dieser Auseinandersetzung deutlich von Fichte ab, dessen Positionen er nur in bestimmten Aspekten für korrigierbar hielt. Riemann wiederum zeigte besonderes Interesse an Herbarts prägnanter Kritik an Fichtes Vorstellung vom absoluten Ichs. Herbart verstand die Ichheit als das relativste und am stärksten bedingte Moment, das sich keiner isolierten Betrachtung unterziehen lasse.⁵⁶

Der Einfluss von Herbart und Lotze auf Dedekind darf ungeachtet aller möglichen Parallelen nicht überbewertet werden. Abgesehen vom Besuch des Seminars bei Lotze sowie der indirekten Auseinandersetzung mit Herbart durch den Riemannschen Nachlass existieren bislang keine überzeugenden Belege, die die These stützen.

Was jedoch plausibel erscheint, ist, dass Dedekind ein *allgemeines Verständnis philosophischer Positionen* hatte und ihm insbesondere die Philosophie Kants nicht unbekannt war. Einige Autoren wie etwa McCarty (1995) sehen sogar starke Parallelen zwischen Dedekind Ausführungen und Kants *Kritik der reinen Vernunft*. Einige Inhalte in dem Zusammenhang hörte Dedekind tatsächlich im Rahmen der Vorlesung bei Lotze und machte darüber Notizen. McCarty (ebd.) argumentiert, dass Dedekind zwar grundsätzlich Kants Inventarium der geistigen Vermögen und ihrer Funktionen übernimmt, sich jedoch nicht mit der spezifischen Verteilung der erkenntnistheoretischen Aufgaben auf diese einverstanden erklärt. Insbesondere lehnt er Kants Zuweisung der Mathematik an die Anschauung ab und verlagert deren Begründung entschieden in den Bereich der reinen Vernunft. Der Autor sieht gerade darin die eigentümliche Nähe zwischen Dedekind und Kant begründet. Neben dem allgemeinen Inventar des transzendentalen Subjekts greift Dedekind auch auf einen zentralen Aspekt der transzendentalen Dialektik zurück – nämlich auf Kants systematische Darstellung der Ideen der reinen Vernunft. Man könnte daher sagen: Dedekind entwirft eine antikantianische Mathematik einer reinen Vernunft, die paradoxerweise in ihrer methodischen Orientierung zutiefst kantianisch bleibt.⁵⁷ Um dies zu belegen, weist McCarty (ebd.) bezogen auf die Ontologie von Dedekinds Satz #66 unter anderem auf die Parallelen zwischen Dedekinds Gedankenwelt und Kants Gottesbegriff, Dedekind *eigenes Ich* und Kants *psychologische Idee der Vernunft*. Dies sind nur einige Einflüsse Kants, die McCarty (ebd.) bestrebt ist, bei Dedekind zu identifizieren.⁵⁸

Parallelen allein genügen jedoch nicht, um von einem Einfluss Kants auf Dedekind zu schließen.⁵⁹ Meines Wissens gibt es keine Anhaltspunkte, dass Dedekind die *Kritik der reinen Vernunft* von Kant gelesen haben mag. Dies wäre jedoch erforderlich, um einen derart textuell verstreuten

⁵⁴Vgl. Riemann (1892): S. 509

⁵⁵Vgl. Scholz (1982): S. 432

⁵⁶Vgl. Scholz (2001): S. 167

⁵⁷Vgl. McCarty (1995): S. 71

⁵⁸Vgl. McCarty (ebd.): S. 70ff

⁵⁹In gewisser Weise bemerkt dies auch Klev (2018) auf Seite 261.

Einfluss Kants auf Dedekind nachzuvollziehen und zu stützen. Wir wollen jedoch auf eine weitere Verbindung mit Kant hinweisen.

Bereits in seinem Habilitationsvortrag im Jahr 1854 äußerte Dedekind, dass die Erweiterung der Zahlenbereiche auf irrationale und imaginäre Zahlen mit grundlegenden Schwierigkeiten verbunden sei.⁶⁰ Bemerkenswert ist, dass Dedekind zeitlebens weder eine Publikation noch ein Manuskript zum Thema der komplexen Zahlen verfasst hat. Heute ist man sich in der Literatur einig, dass dies auf seine Rezeption von Hamiltons *Lectures on Quaternions* zurückzuführen ist. Hamilton führte dort die komplexen Zahlen als geordnete Paare reeller Zahlen ein. Somit konnte Dedekind wenige Jahre nach seiner Habilitation die Frage nach der Begründung der komplexen Zahlen als zufriedenstellend gelöst betrachten. Darüber hinaus vertritt Ferreirós (2007) die Auffassung, dass Hamiltons Ausführungen zugleich die Inspiration für Dedekinds Darstellung der ganzen und rationalen Zahlen als Paare natürliche Zahlen im unveröffentlichten Manuskript *Ganze und natürliche Zahlen* gewesen sein mag.⁶¹ Tatsächlich belegt das Ausleihregister der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek, dass Dedekind im Jahr 1857 das 1853 erschienen Buch von Hamilton entlehnte.⁶²

Hamiltons Buch enthielt auch eine philosophische Elaboration der Arithmetik im Sinne Kants. Mit der Hoffnung, das Problem der Existenz irrationaler Zahlen zu umgehen, verstand er die Algebra⁶³ als Wissenschaft der reinen Zeit. Die Kontinuität der Zeit konnte so als Begründung für die Stetigkeit der reellen Zahlen herangezogen werden. Hamiltons Systematik bestand darin, dass die Geometrie aus der reinen Raumanschauung und die Algebra aus der reinen Zeitananschauung hervorging.⁶⁴ Dies war ganz im Sinne von Kants transzendentaler Ästhetik. Die starke Bindung an spekulativ-philosophische Vorstellungen Hamiltons führte dazu, dass seine Ideen kaum breite Anerkennung fanden. Seine Theorie der reellen Zahlen stellte eine fortgeschrittene Variante der griechischen Proportionentheorie dar. Er untersuchte *Schritte* oder Übergänge von einem Zeitpunkt zum nächsten und definierte reelle Zahlen als Verhältnisse solcher Schritte.⁶⁵ Durch die Lektüre von Hamiltons *Lectures* begegnete Dedekind nicht nur einer methodisch überzeugenden Form der genetischen Methode, wie Ferreirós (ebd.) bemerkt, sondern auch einer kantianischen Zahlenauffassung die ihren Ausgangspunkt zwar nicht in der räumlichen, aber dafür in der zeitlichen Anschauung nahm. Im Vorwort zur ersten Auflage von **WZ** nimmt Dedekind einen entgegengesetzten Standpunkt ein.⁶⁶

„Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte.“

Unter den „*neuesten Darstellungen*“, die in dieser Hinsicht keineswegs die Forderung nach wissenschaftlicher Begründung erfüllen, zählt er auch die Arbeiten von Kronecker und Helmholtz

⁶⁰Siehe Kapitel 2.

⁶¹Vgl. Ferreirós (2007): S. 221

⁶²Vgl. Ferreirós (ebd.): S. 220, Fußnote 2

⁶³Der Begriff *Algebra* bei Hamilton entspricht im Wesentlichen der *Arithmetik* im deutschsprachigen Raum des 19. Jahrhundert. Siehe dazu Ferreirós (ebd.): S. 14

⁶⁴Vgl. Hamilton (1853): S. 14ff; Vorwort

⁶⁵Vgl. Hamilton (ebd.): S. 119f

⁶⁶Dedekind (1888): S. 335

hinzu. Der letztere vertrat hinsichtlich der Begründung der Zahlen eine ähnliche Position wie Hamilton. Man kann daher festhalten, dass sich Dedekind der Inhalte von Kants transzendentaler Ästhetik und ihrer Bedeutung sowohl aus den Vorlesungen von Lotze, als auch aus den Arbeiten anderer Mathematiker bewusst war. Seine Argumentation im Sinne des obigen Logizismus ist daher in diesem Sinne zu lesen. Tiefergehende Kenntnisse von Kant und seiner Philosophie können jedoch nicht zufriedenstellend belegt werden.

Angesichts der Sachlage ist deshalb eine andere *Flughöhe* der Argumentation notwendig. Die kantianische Ideenwelt prägte das intellektuelle Klima des 19. Jahrhunderts in Deutschland in einem Maße, dass ihre Wirkung auch dort plausibel erscheint, wo direkte Bezugnahmen oder explizite Zitate fehlen. Die transzendentalphilosophische Denkweise hatte sich insbesondere in den Bildungsinstitutionen und im wissenschaftlichen Diskurs weitgehend durchgesetzt, sodass sie oftmals implizit als philosophischer Hintergrund vorausgesetzt wurde. Die Bedeutung des indirekten Einflusses kantianischer und anderer Philosophie auf Dedekind und die Problematik, die sich daraus für die wissenschaftshistorische Forschung ergibt, beschreibt Ferreirós eindrücklich.⁶⁷

„Studying Dedekind’s works, highly interesting for the change of (architectonic) style in mathematics, I found many indications of the possible influence of the philosophical ideas of Gottfried W. Leibniz and Kant. A first natural impulse was to follow them in detail and trace their genealogy in particular works of those philosophers. Even today I think it is highly likely that Dedekind may have read the Critique of Pure Reason (Kritik der reinen Vernunft), the New Essays on Human Understanding (Nouveaux Essais sur l’entendement humain), etc., and for the case of Leibniz I found an elaborate argument concerning the exact how and where of those supposed influences. Yet the critical exercise of historical research led me to realize that none of my arguments was certain enough. I came to understand that Kantian and Leibnizian ideas were so widely disseminated in the German-speaking nineteenth century that they could flow in many ways, through the writings not only of philosophers (Jakob Fries, Hermann Lotze—who taught Dedekind at Göttingen) but also of mathematicians (Carl Friedrich Gauss, Riemann, William R. Hamilton, Hermann Grassmann) or scientists (Wilhelm Weber and Helmholtz). Thus, I became circumspect and I learnt a valuable lesson about direct and indirect sources of cultural transmission.“ [Hervorhebung E. B.]

Auch ohne unmittelbare Belege für eine explizite Rezeption Kants anführen zu können, kann eine strukturelle Affinität zwischen der Mathematikauffassung Dedekinds und kantischer Philosophie geltend gemacht werden. Es ist historisch angemessen, Dedekinds Position als Ausdruck einer intellektuellen Kultur zu begreifen, in der kantianische Motive vielfach selbstverständlich waren.⁶⁸ An zugänglichen Quellen auch mathematischen Inhalts, die sich auf kantianische Auffassungen der transzendentalen Ästhetik beriefen und darauf aufbauend einem kantischen Verständnis der Arithmetik und Geometrie verpflichtet fühlten, mangelte es nicht.

Obwohl der konkrete Einfluss Kants auf Dedekind letztlich ungeklärt bleibt, lässt sich Dedekinds Auseinandersetzung mit den philosophischen Positionen anderer Denker hingegen eindeutig belegen.

Der bereits mehrmals erwähnte Satz #66 findet sich in ähnlicher Form auch bei Bolzano

⁶⁷Ferreirós (2022): S. 311; Hervorhebung E. B.

⁶⁸An anderer Stelle bemerkt Ferreirós direkt bezugnehmend auf McCarty (1995): „[...] we have no direct evidence for a Kantian Dedekind, and one should be careful with treatments like [McCarty 1995]. I myself started twice to write papers on Dedekind and Kant, and then Dedekind and Leibniz, until I became convinced that available evidence was too scanty to warrant conclusions.“ Siehe Ferreirós (2007): S. 242f; Fußnote 4.

(1851) in §13, wie Dedekind selbst in einer Fußnote bemerkt.⁶⁹ Dedekind erhielt bereits 1882 ein Exemplar von Bolzanos *Paradoxien des Unendlichen* von Cantor, wie die Korrespondenz zwischen beiden belegt.⁷⁰ Dies, zusammen mit dem Umstand, dass der erste Entwurf von **WZ** aus den 70er Jahren keinen Beweis der Existenz unendlicher Mengen enthielt, bekräftigt die Vermutung, dass Dedekind die Möglichkeit eines derartigen Beweises von Bolzano entnahm.⁷¹ Die Modifikationen, die Dedekind an Bolzanos Beweis vornahm, um einer zirkulären Begründung der natürlichen Zahlen zu entgehen, werden in Kapitel 2 analysiert.

Schlussendlich sei noch auf den neukantianischen Philosophen Ernst Friedrich Apelt hingewiesen, den Dedekind am Ende seines Habilitationsvortrags namentlich nennt.⁷² Dedekind erwähnt dort beiläufig, dass er wenige Stunden zuvor einen flüchtigen Blick in Apelts Buch werfen konnte, dass unter anderem eine Anwendung einer Theorie der Induktion auf die Mathematik enthielt. Klev (2018) weist darauf hin, dass dies ebenso eine Quelle und Inspiration für die spätere *Dedekind-Abstraktion* sein könnte.⁷³ Apelt fasst Induktion und Abstraktion als Formen des Schlusses vom Besonderen auf das Allgemeine auf, wobei er sie hinsichtlich ihrer methodischen Voraussetzungen differenziert. Die Induktion beruht auf einer Vielzahl einzelner Beobachtungen, während der Abstraktion bereits ein einzelner Fall als Ausgangspunkt genügt. Abstraktion wird dabei nicht als Mittel zur Begriffsbildung verstanden, sondern als erkenntnistheoretisches Verfahren zur Erfassung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten innerhalb wissenschaftlicher Zusammenhänge. In mehreren Hinsichten entspricht diese Auffassung Dedekinds. Wir gehen dem in Kapitel 10 nach.

1.2 Intellektueller Kontext: Göttingen und Berlin

Im 19. Jahrhundert entwickelte sich im deutschsprachigen Raum ein spezifischer Zugang zur Mathematik, der durch strenge Beweisführungen und hohe Allgemeinheit gekennzeichnet war. Diese Entwicklung geschah vor dem Hintergrund historischer Veränderungen innerhalb der universitären Landschaft Deutschlands.⁷⁴

Die radikale Transformation der deutschen Universitäten um 1810 war eine direkte Reaktion auf die Napoleonischen Kriege und führte zu einer grundlegenden Umgestaltung des Bildungssystems. Während früher eine eher utilitaristische und berufsorientierte Ausbildung im Vordergrund stand, rückte nun das Konzept der allgemeinen Bildung in den Vordergrund. Es ging nicht nur um die Vermittlung von praktischem Wissen, sondern auch um die ganzheitliche geistige Entwicklung des Einzelnen. Die deutschen Bildungsreformer verfolgten einen eigenständigen Weg, der nicht auf wirtschaftlichen Nutzen abzielte, sondern eine tiefere, umfassendere Bildung förderte. Eine eigenständige deutsche *Kultur* sollte sich von der französischen *Civilisation* absetzen.

Das Ideal wurde auch in der universitären Lehre deutlich. Vorlesungen dienten nicht mehr nur der reinen Wissensvermittlung, sondern sollten die Studierenden dazu befähigen, selbstständig zu

⁶⁹Vgl. Dedekind (1888): S. 357

⁷⁰Vgl. Dugac (1976): S. 256; Brief vom 7. Oktober 1882 von Cantor an Dedekind.

⁷¹Siehe Dugac (ebd.): S. 293ff

⁷²Vgl. Dedekind (1854): S. 438

⁷³Vgl. Klev (2018): S. 257

⁷⁴Für eine umfassende Analyse der Entwicklung der deutschen universitären Landschaft und ihrer Zusammenhänge mit Staat und Gesellschaft siehe McClelland (2009). Einen besonderen Fokus auf die mathematischen Institute bieten Rowe (2018) und Ferreirós (2007).

forschen und wissenschaftlich zu arbeiten. Die sich ab 1820 formierenden Forschungszirkel – zunächst um Jacobi in Königsberg, später um Dirichlet in Berlin – spielten eine entscheidende Rolle in der Entwicklung der mathematischen Forschung. Das neuhumanistische Bildungsideal führte an den Universitäten zu einer offenen Atmosphäre, in der naturwissenschaftliche und geisteswissenschaftliche Forschung nicht strikt getrennt waren. Das Ergebnis war eine enge Verflechtung mathematischer und philosophischer Forschungsgebiete.

Durch diese Reformen wurde der Grundstein für eine neue Wissenschaftskultur gelegt, die auch international große Beachtung fand. Ein wichtiges Zeugnis dieser Entwicklung war die Gründung des „*Journal für die reine und angewandte Mathematik*“ von Johann Crelle im Jahr 1826, das als eine der ersten Fachzeitschriften der Mathematik weltweit den wissenschaftlichen Austausch förderte und neue Forschungsansätze ermöglichte.⁷⁵

In diesem Zusammenhang lässt sich auch das Entstehen eines neuen methodischen Ansatzes bei Dirichlet verorten. Ferreirós (2007) beschreibt diesen Ansatz als einen spezifischen *mathematischen Stil*, der sich durch eine konsequente Betonung von Strenge, Allgemeinheit und Abstraktion auszeichnet und sich deutlich von den zuvor vorherrschenden, rechnerisch orientierten und repräsentantenabhängigen Verfahren abgrenzt.⁷⁶ Jacobi schrieb in einem Brief an Alexander von Humboldt am 21. Dezember 1846, über Dirichlet:⁷⁷

„*Er allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger mathematischer Beweis ist, sondern wir kennen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist eben so viel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß, ich lasse mich auf diese Delicatessen lieber gar nicht ein.*“

Dirichlets Ansatz war geprägt durch eine präzise Begriffsbildung und eine Herangehensweise, die über die bloße Anwendung rechnerischer Methoden hinausging. Seine Definition des Funktionsbegriffs war besonders einflussreich, da sie nicht mehr ausschließlich auf expliziten Formeln beruhte, sondern auf der allgemeinen Zuordnung zwischen Variablen. Dies war eine entscheidende Neuerung. Dirichlet legte großen Wert auf universelle Methoden anstelle der Betrachtung isolierter Einzelfälle, was sich besonders in seiner Arbeit zu Fourier-Reihen und der Potentialtheorie widerspiegelte.⁷⁸ Sein Beweis zur Konvergenz der Fourier-Reihen markierte einen Wendepunkt in der Entwicklung mathematischer Beweisführung und setzte neue Maßstäbe hinsichtlich Strenge und Methodik. Diesen Ansatz beschreibt Rudio (1895) bereits Ende des 19. Jahrhunderts folgendermaßen:⁷⁹

„*Das wesentliche Princip der neueren mathematischen Schule, die durch Gauss, Jacobi und Dirichlet begründet ist, ist im Gegensatz mit der älteren, dass während jene ältere durch langwierige und verwickelte Rechnung (wie selbst noch in Gauss' Disquisitiones) und Deduktionen zum Zweck zu gelangen suchte, diese mit Vermeidung derselben durch Anwendung eines genialen Mittels in einer Hauptidee die Gesamtheit eines ganzen Gebietes umfasst und gleichsam durch einen einzigen Schlag das Endresultat in der höchsten Eleganz darstellt. Während jene, von Satz zu Satz fortschreitend, nach einer langen Reihe endlich zu einigem fruchtbaren Boden gelangt, stellt diese gleich von vorn herein eine Formel hin, in welcher der vollständige Kreis der Wahrheiten eines ganzen Gebietes konzentriert enthalten ist und nur*

⁷⁵Vgl. Rowe (2018): S. 7

⁷⁶Vgl. Ferreirós (2007): S. 31

⁷⁷Humboldt et al. (1987): S. 99; Brief 22

⁷⁸Vgl. Spalt (2015): S. 365ff

⁷⁹Rudio (1895): S. 158f

herausgelesen und ausgesprochen zu werden darf. Auf die frühere Art konnte man die Sätze zwar auch zur Not beweisen, aber jetzt sieht man erst das wahre Wesen der ganzen Theorie, das eigentliche innere Getriebe und Räderwerk.“

Spezifische Ausformungen dieses Ansatzes finden wir bei den Vertretern der Berliner Schule sowie der Göttinger Gruppe vor.⁸⁰ Die Vertreter der Göttinger Gruppe, denen auch Dedekind angehörte, versuchten konsequent, mathematische Theorien im allgemeinsten geeigneten Rahmen zu fassen, sodass *äußere Darstellungsformen* vermieden wurden, neue Grundobjekte gewählt wurden und die Definition der charakteristischen *inneren* Eigenschaften dieser Objekte im Zentrum der Untersuchung standen.⁸¹

Dirichlet (1805 - 1859)



Abbildung 1.2: Neue Ansätze in der Mathematik im 19. Jahrhundert in Göttingen und Berlin

Die Mathematiker der Berliner Schule, insbesondere Kronecker, vertraten dagegen eine *repräsentantenlastige* und konstruktive Herangehensweise. Kronecker etwa lehnte Mengen unendlicher Kardinalität ab und setzte auf eine Mathematik, die sich nur auf endlich konstruierbare Objekte stützte. Weierstraß wiederum legte mit seiner epsilon-delta-Definition der Analysis Wert auf eine präzise, formale Beweisführung, die eine exakte Grundlage für die Analysis schaffen sollte.

Zur Veranschaulichung der genannten Unterschiede wird im Folgenden exemplarisch auf die Theorie der Ideale Bezug genommen. Die Entwicklung der Theorie der Ideale umfasst einen Zeitraum von etwa 50 Jahren (1844–1894), von der Entdeckung Kummers, dass eine solche Theorie notwendig und in Bezug auf zyklomatische Zahlen auch möglich ist, bis zu den Weiterentwicklungen von Kronecker und Dedekind.

Motiviert wurde diese Theorie durch den Umstand, dass der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, nämlich, dass es für jede natürliche Zahl stets eine eindeutige Primfaktorzerlegung gibt, nicht ohne Weiteres auf sämtliche algebraischen Zahlkörper erweiterbar war.

⁸⁰In Anlehnung an Ferreirós (2007) sprechen wir hier von der Berliner *Schule* und der Göttinger *Gruppe*, da der letzten, ungeachtet aller Gemeinsamkeiten von Dedekind, Riemann und Cantor, keine nennenswerten Forscher entsprungen sind. Siehe dazu Ferreirós (ebd.): S. xxiii

⁸¹Diese besondere Ausprägung bezeichnet Ferreirós (ebd.) als abstrakten konzeptionellen Ansatz. Siehe dazu Ferreirós (ebd.): S.31.

Betrachtet man etwa den Ring⁸²

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

findet man sehr schnell ein Beispiel zweier gegenseitig irreduzibler Zerlegungen. So kann man die Zahl 6 auf zwei Arten darstellen:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

Wir sehen daher, dass die eindeutige Faktorzerlegung, die die natürlichen Zahlen als Ganzes charakterisiert, in ihrer üblichen Form für gewisse Zahlenringe keine Gültigkeit besitzt. Hinsichtlich der eindeutigen Faktorzerlegung natürlicher Zahlen gelten bekanntlich zwei Gesetzmäßigkeiten: (1) eine Primzahl kann nicht als Produkt zweier (von 1 verschiedener) Zahlen dargestellt werden und (2) wenn ein Produkt durch eine bestimmte Primzahl teilbar ist, so ist zumindest einer der Faktoren durch ebendiese Primzahl teilbar.⁸³ Mindestens eines dieser beiden Gesetze ist für unseren obigen Zahlenring nicht erfüllt.

Betrachten wir nun ein elementares Beispiel:

$$50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10$$

Auch hier ist die Zerlegung nicht eindeutig, jedoch nur aus dem Grund, dass wir nicht *zur Genüge zerlegt haben* und nicht zu der eigentlichen Primfaktorzerlegung vorgedrungen sind. Denn die Zerlegung $50 = 2 \cdot 5^2$ ist jedenfalls eindeutig.

Nimmt man diesen Gedanken für unser Ausgangsbeispiel auf, so wäre eine mögliche Lösung der Problematik, dass wir auch hier nicht *zur Genüge zerlegt haben*, und es weitere Zahlen geben müsste, mit denen wir diese Aufgabe bewerkstelligen könnten. Genau diesen Grundgedanken verfolgte Ernst Eduard Kummer in seiner Theorie der idealen Zahlen. Mit diesen Zahlen, bemerkte Kummer, könnte die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung auch für problematische Zahlenringe wiederhergestellt werden. Die obigen Faktoren der Zahl 6 könnten dann weiter durch ideale Primfaktoren dargestellt werden:⁸⁴

$$6 = \underbrace{(p_1 p_2)}_2 \cdot \underbrace{(p_3 p_4)}_3 = \underbrace{(p_1 p_3)}_{1+\sqrt{-5}} \cdot \underbrace{(p_2 p_4)}_{1-\sqrt{-5}}$$

Es galt nun, die Eigenschaften dieser Zahlen zu bestimmen und in eine Theorie zu überführen.

Kummer entwickelte zu diesem Zweck die Theorie der *idealen Zahlen* und untersuchte die Faktorisierung in den Zahlringen der Kreisteilungskörper. Kreisteilungskörper (oder auch zyklomatische Körper) waren Erweiterungen des rationalen Zahlenkörpers $\mathbb{Q}$ um die primitiven n -ten Einheitswurzeln. Dabei nennen wir eine komplexe Zahl ζ die n -te Einheitswurzel, falls $\zeta^n = 1$ gilt. Diese ist primitiv, wenn alle Einheitswurzeln als Potenzen von ζ dargestellt werden können.

⁸²Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei zweistelligen Relationen, der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Für diese gelten die sogenannten Ringaxiome, sprich $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe und es gelten die Distributivgesetze.

⁸³Vgl. Alten et al. (2003): S. 398

⁸⁴Vgl. Klein (1979): S. 322

Ausgehend von der Eulerschen Identität $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, ist insbesondere die Zahl $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ eine n -te Einheitswurzel. In Abbildung 1.3 sind die Einheitswurzeln für $n = 10$ beispielhaft dargestellt.

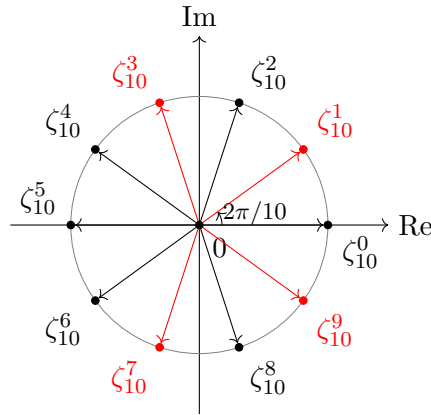


Abbildung 1.3: Beispiel der Einheitswurzel für $n = 10$

Der Ring der Kreisteilungszahlen $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ ist der Ganzzahlenring in solchen Körpern.

Diese Zahlen sind also dem Ausgangskörper fremd und werden hinzugefügt, um diesen zu *vervollständigen*. Jede Zahl im neuen Ring $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ kann dann eindeutig in ein Produkt von idealen Zahlen zerlegt werden. Für eine bestimmte Primzahl bedeutet dies konkret, dass Kummer die Irreduzibilität des Minimalpolynoms modulo dieser Primzahl untersucht. Was die idealen Zahlen sind, ergibt sich somit aus der spezifischen Konstruktion des Kreisteilungskörpers und ist somit **nicht** repräsentantenunabhängig. Zudem blieb unklar, wie eine derartige Theorie auf allgemeinere Zahlkörper ausgeweitet werden kann.

Dedekind wählte im Anschluss an Kummer einen anderen Ansatz. Statt den Ausgangskörper zu erweitern, führte er Untergruppen des Zahlenrings ein, die bestimmte algebraische Eigenschaften hatten. Diese Untergruppen nannte er Ideale. Dedekind publizierte im Laufe von 23 Jahren vier verschiedene Versionen seiner Theorie der Ideale. Während sich die erste Fassung noch in relativer Nähe zu Kummers algorithmisch geprägtem Ansatz bewegt, sind die späteren Versionen zunehmend durch eine Extensionalisierung im Sinne einer mengentheoretisch fundierten Begriffsbildung gekennzeichnet.⁸⁵ Dedekind selbst schreibt in diesem Zusammenhang:⁸⁶

„I did not arrive at a general theory . . . until I abandoned the old, more formal approach completely and replaced it by another, one that departs from the simplest basic conception and fixes the eyes directly on the end. In that approach, new creations are not needed any more, like those of Kummer’s ideal number. It is entirely sufficient to consider systems of really existing numbers, which I call ideals. The power of this notion rests on its extreme simplicity.“

Dahinter steht eine Abkehr von algorithmischen Ansätzen, die in Dedekinds Gesamtwerk an verschiedenen Stellen anzutreffen ist. Statt im kummerschen Sinne eine ideale Zahl p zu untersuchen, betrachtete Dedekind die Gesamtheit der algebraischen Zahlen im gegebenen Zahlenring,

⁸⁵Vgl. Reck und Ferreirós (2020): S. 71

⁸⁶Dedekind (1877): S. 268 in Übersetzung aus dem französischen von Reck und Ferreirós (2020): S. 71

die mit p teilbar sind und erhält somit eine unendliche Menge. Diese Menge nennt er Ideal. Ein Ideal war folglich eine unendliche Teilmenge der komplexen Zahlen.

Kronecker wählt dagegen einen diametral entgegengesetzten Ansatz. In seiner 1882 publizierten Festschrift zu Ehren Kummers lehnte er den Gebrauch mengentheoretischer Begriffe und folglich auch der Begriffe wie Ideal ab.⁸⁷ Klein formuliert diesen Umstand folgendermaßen:⁸⁸

„Dedekind nimmt eine Wendung zum Abstrakten, welche die Sache im Prinzip sehr vereinfacht und daher für die Denkweise und Darstellungsweise der Jüngeren vielfach vorbildlich geworden ist, während die älteren Forscher, z.B. Kronecker [...] sich damit nicht befreundeten konnten. Statt nämlich von (realen und idealen) Faktoren zu sprechen, redet er von der Gesamtheit der ganzen Zahlen des vorgelegten Körpers, die durch den Faktor teilbar sind.“

Kroneckers Teilertheorie war stark konstruktivistisch. Sie verzichtete sowohl auf abstrakte algebraische Strukturen als auch auf den Begriff der unendlichen Menge. Als solche war sie, ebenso wie Kummers Theorie der idealen Zahlen, nicht repräsentantenunabhängig.

In Dedekind (1877) beschreibt Dedekind dies folgendermaßen:⁸⁹

„Eine Theorie, welche sich auf Rechnung gründet, würde, wie es mir scheint, nicht das höchste Maß an Vollkommenheit darbieten; vorzuziehen ist es vielmehr – wie in der neueren Funktionentheorie – die Beweise nicht mehr aus Rechnungen zu schöpfen, sondern sie unmittelbar aus den eigentümlichen Grundbegriffen zu entwickeln und die Theorie in solcher Weise zu gestalten, dass sie umgekehrt imstande ist, die Resultate der Rechnung vorherzusagen (wie etwa die Zusammensetzung zerlegbarer Formen beliebigen Grades). Dieses Ziel ist es, welches ich in den folgenden Abschnitten dieser Abhandlung zu verfolgen beabsichtige.“

Das höchste Maß an Vollkommenheit bietet, so Dedekind, nur ein abstrakter Ansatz, der seine Beweise nicht aus Rechnungen schöpft, sondern aus klaren, begrifflichen Grundlagen entwickelt. Diese Arbeit widmet sich der Untersuchung dieses Ansatzes.

1.3 Anmerkungen zum Titel und dem Aufbau der Arbeit

Dedekind erweiterte den Begriff der Arithmetik in einer grundlegenden Weise, indem er der Arithmetik auch die Analysis und die Algebra zurechnete.⁹⁰ Die Arithmetik beschränkte sich nicht nur auf die elementaren Zahlensysteme, sondern umfasste auch die Untersuchung der zugrundeliegenden strukturellen und funktionellen Beziehungen innerhalb verschiedener mathematischer Systeme. Wenn wir in dieser Arbeit jedoch von der *Philosophie der Arithmetik* sprechen, so verstehen wir darunter die Arithmetik im heutigen Sinn. Folglich ist etwa die Algebra nicht expliziter Gegenstand dieser Arbeit. Wir streifen ihre Inhalte lediglich dort, wo sie für ein umfassenderes Verständnis von Dedekinds methodischer Ausrichtung notwendig sind. Die Inhalte der Analysis werden dagegen teilweise ausführlich behandelt. Insbesondere in den Kapiteln 3 und 4 liegt der Schwerpunkt auf der Untersuchung der reellen Zahlen und der damit eng verbundenen Thematik der Stetigkeit.

Im Kapitel 2 wird ein Überblick über Dedekinds Forschungsprogramm zur Arithmetik gegeben. Es umfasst eine grobe Exposition der wesentlichen Inhalte von **SZ** und **WZ** und verortet

⁸⁷Siehe Kronecker (1882)

⁸⁸Klein (1979): S. 323

⁸⁹Dedekind (1877): S. 296; Eigene Übersetzung in Anlehnung an Stein (1988): S. 245

⁹⁰Vgl. Dedekind (1888): S. 335

beide Werke in einem breiteren Kontext. Dies dient dazu, einen ersten Eindruck vom Untersuchungsgegenstand zu vermitteln. Metamathematische Aspekte werden jedoch ausgeklammert und bilden den Gegenstand des Kapitels 9.

Kapitel 5 setzt sich mit dem Mengen- und Abbildungsbegriff auseinander. Wie Dedekind selbst hervorhebt, sind diese beiden Begriffe grundlegend für die Arithmetik. Tatsächlich steht auch die erwähnte topologische Wende Dedekinds im Kontext der Entwicklung beider.

Die Eigenart der strukturellen Definitionen bei Dedekind wird in Kapitel 8 thematisiert. Wir gehen dort der Frage nach, inwieweit Dedekinds Ansatz axiomatisch, genetisch oder in gewissem Sinne beides zugleich ist.

Ausgehend von der Korrespondenz mit Lipschitz in der Dedekind die Bedeutung von **SZ** klarstellt, vollzieht das Kapitel 3 einen Vergleich der Theorie der Dedekindschnitte mit der eudoxischen Proportionenlehre. Im Anschluss darauf geht das Kapitel 4 auf die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Dedekinds Punktmengenkontinuum und dem klassischen Verständnis des Kontinuums bei Aristoteles ein. Basierend auf einem kurzen Manuskript aus dem Nachlass und der mereologischen Analyse von Hellman und Shapiro (2018) wird der Umgang Dedekinds mit dem topologischen Begriff des Zusammenhang analysiert.

Dies stellt zugleich den Übergang zu einer historischen Analyse der Genese topologischer Begriffe in Kapitel 6 dar. Die Rekonstruktion und zeitliche Einordnung der Entwicklung zentraler topologischer Begriffe sollen einen Vergleich zwischen Dedekinds Arbeiten und späteren Arbeiten zur mengentheoretischen Topologie ermöglichen. Dies erfolgt in Kapitel 7. Dort wird auch der topologische Charakter und der strukturalistische Stellenwert der Kettentheorie untersucht. Eine methodische und philosophische Einordnung von Dedekinds Begriff der Abstraktion erfolgt schlussendlich in Kapitel 10.

Im Rahmen dieser Arbeit wird auf bestimmte Aspekte von Dedekinds Denken bewusst verzichtet, da sie entweder den argumentativen Kern nicht unmittelbar betreffen oder einer eigenständigen Untersuchung bedürfen würden. So wird auf die umfangreiche Debatte um Dedekinds Stellung innerhalb des Logizismus, insbesondere im Vergleich zu Frege oder im Kontext der Kritik durch Russell, Dummett und Boolos nicht thematisiert.⁹¹ Auch seine Rezeption bei Denkern wie Cassirer, erfährt keine systematische Untersuchung. Überdies werden Dedekinds Beiträge zur Kategorientheorie ebenso wenig vertieft behandelt wie detaillierte Vergleiche mit den Arbeiten Peanos oder Zermelos. Schließlich finden auch weite Teile seiner algebraischen Arbeiten keine systematische Berücksichtigung, da der Fokus dieser Untersuchung primär auf den begrifflichen und strukturellen Aspekten seiner arithmetischen Theorieentwicklung liegt.

1.4 Anmerkungen zu den Quellen und der Notation

Die vorliegende Dissertation basiert auf dem Prinzip der wissenschaftlichen Transparenz und methodischen Nachvollziehbarkeit, wie sie insbesondere in der historischen Analyse mathematischer und begrifflicher Entwicklungen unabdingbar ist. Sie untersucht das Denken Dedekinds in seinen begrifflichen Dimensionen und seiner historischen Kontextualität.

Da Dedekinds Werk in hohem Maße sprachlich präzise und strukturell komplex ist, wurde

⁹¹Siehe dazu beispielsweise Reck (2013), Reck (2018a) und Benis Sinaceur (2017)

in der vorliegenden Arbeit eine ausführliche und textnahe Zitierpraxis gewählt. Dies umfasst sowohl veröffentlichte Schriften als auch Briefe, Manuskripte aus dem Nachlass und andere zeitgenössische Quellen. Die vollständige oder umfangreiche Wiedergabe zentraler Textpassagen ist ein wesentlicher Bestandteil der hier angewandten rekonstruktiven und interpretativen Methode. Nur durch die direkte Auseinandersetzung mit dem ursprünglichen Wortlaut kann die quellengetreue Rekonstruktion der Begriffsbildung gewährleistet werden. Dies eröffnet dem Leser die Möglichkeit einer eigenen Einschätzung der Sachlage. Eigene Übersetzungen sowie Hervorhebungen sind im jeweiligen Zitat gekennzeichnet. Bei wörtlichen Zitaten wird keine Abwandlung der Originalschreibung vorgenommen.

Die Benennungen von Dedekind sind inzwischen veraltet. Bei wörtlichen Zitaten wird diese jedoch weiterhin beibehalten. Im Wesentliche geht es dabei um folgende Begriffspaare:

System - Menge; Gemeinteil - Durchschnitt; Gemeinheit - Schnittmenge.

sowie um folgende Symbolpaare:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z} &\equiv \subset \text{ bzw. } \subseteq \text{ bzw. } \in \text{ (in Abhängigkeit vom Kontext)} \\ \mathfrak{m} &\equiv \cup \\ \mathfrak{G} &\equiv \cap \\ \overline{\varphi} &\equiv \varphi^{-1} \\ R &\equiv \mathbb{Q} \\ \mathfrak{R} &\equiv \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es ist hervorzuheben, dass Dedekind nicht strikt zwischen injektiven und bijektiven Abbildungen trennt. Wir werden deshalb die modernen Begrifflichkeiten dort nutzen, wo sie für das Verständnis der Zusammenhänge notwendig sind.

Die in dieser Dissertation wiedergegebenen mathematischen Beweise und Konzepte basieren auf historischen Arbeiten und wurden teilweise in einer modernen Formulierung präsentiert. Ausgewählte Beweise werden aus mehreren Gründen wiedergegeben: Zum einen, um die historische Entwicklung und den Kontext der mathematischen Ideen nachzuvollziehen, zum anderen, um die Relevanz dieser Ideen in der heutigen Mathematik zu verdeutlichen. Während einige Beweise und Ergebnisse in ihrer ursprünglichen Form aus der Perspektive ihrer Entstehungszeit betrachtet werden, wurden andere modernisiert, um eine bessere Verständlichkeit zu gewährleisten.

Als Hauptquelle dienen uns die *Gesammelten mathematischen Werke* Dedekinds:

- **R. Dedekind (1930):** *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 1. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 397 S.
- **R. Dedekind (1931):** *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 2. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 442 S.
- **R. Dedekind (1932):** *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 508 S.

Die Jahreszahlen bei der Zitation von Dedekinds Schriften beziehen sich stets auf das Jahr der Erstveröffentlichung beziehungsweise das Jahr der (vermuteten) Niederschrift, auch wenn bei der Seitenangabe auf etwa die *Gesammelten mathematischen Werke* Bezug genommen wird.

Kapitel 2

Dedekinds Forschungsprogramm zur Arithmetik

„[...] die größte Kunst des Systematikers.“

Dedekind (1854): S. 430

Die Gesamtheit von Dedekinds Arbeiten zur Arithmetik lässt sich als Ausdruck eines übergreifenden mathematischen Forschungsprogramms verstehen.¹ Der Wissenschaftstheoretiker Imre Lakatos beschreibt Forschungsprogramme als theoretische Gebilde mit einem stabilen Grundbestand an Überzeugungen (dem *harten Kern*), der durch einen methodisch flexiblen *Schutzgürtel* an Hypothesen ergänzt wird.² Der harte Kern eines Forschungsprogramms besteht aus den zentralen und unveränderlichen Grundannahmen, die von den Vertretern des Programms nicht infrage gestellt werden dürfen. Diese Annahmen bilden die *identitätsstiftende Basis* des Programms und sind in gewisser Weise dogmatisch geschützt. Unter der *negativen Heuristik* des Forschungsprogramms versteht Lakatos (2013) Forschungswege, die man vermeiden soll.³ Sie „*verbietet uns, den Modus tollens gegen diesen ‚harten Kern‘ zu richten*“⁴. Im Falle von Problemen muss dieser vielmehr auf den Schutzgürtel an Hypothesen gerichtet werden. Diese Hypothesen können bei Bedarf angepasst werden, um den neuen Herausforderungen des Forschungswegs gerecht zu werden.

¹Die Auffassung, dass man in Bezug auf die Arithmetik bei Dedekind von einem Forschungsprogramm sprechen kann, dessen Ansätze bereits in Habilitationsvortrag ersichtlich sind, vertreten unter anderem Ewald (2005): S. 755, Sinaceur in Dedekind (2008): S. 219 sowie Ferreiros (1999): S. 217. Sieg und Schlimm (2005) verneinen jedoch die Existenz eines Programms, heben jedoch zugleich hervor, dass sich schon in den Überlegungen des Habilitationsvortrags zentrale Charakteristika seines wissenschaftlich-theoretischen Denkens als auch besondere Eigenheiten seiner Auffassung der klassischen Zahlbereiche widerspiegeln. Siehe Sieg und Schlimm (ebd.): S. 156 sowie S. 125. Ich vertrete in dieser Arbeit einen minimalistischen Ansatz in Bezug auf den Habilitationsvortrag ebenso wie Sieg und Schlimm (ebd.), spreche jedoch weiterhin von einem Forschungsprogramm im weiter unten genanntem Sinn.

²Die wissenschaftstheoretische Perspektive Lakatos' fungiert in dieser Arbeit als nichtnormativer Ordnungsrahmen, der dazu beiträgt, die begrifflichen Strukturen des Untersuchungsgegenstands verständlich zu machen und systematisch zu ordnen, ohne dabei eine bestimmte methodische Ausrichtung vorzuschreiben. Beispielsweise wird hier der Begriff des Forschungsprogramms für Forschungsprojekte, Erwartungen und Präferenzen einzelner Personen verwendet und weicht unter Umständen von der begrifflichen Bestimmung Lakatos' ab. Worum es hier geht, ist folglich keine Anwendung der wissenschaftstheoretischen Überlegungen Lakatos' in ihrer Gesamtheit auf Dedekind, sondern um eine Entlehnung bestimmter Begrifflichkeiten aus dieser zum Zwecke einer besseren Ordnung des Untersuchungsgegenstands. Einen ähnlichen Ansatz verfolgt auch Ferreirós (2007): S. xxiv.

³Vgl. Lakatos (2013): S. 46f

⁴Lakatos (ebd.): S. 48

Während die negative Heuristik den harten Kern des Forschungsprogramms spezifiziert, der für den Protagonisten unwiderlegbar ist, besteht die positive Heuristik in einer „*partiell artikulierten Reihe von Vorschlägen oder Hinweisen, wie man die ‚widerlegbaren Fassungen‘ des Forschungsprogramms verändern und entwickeln soll und wie der ‚widerlegbare‘ Schutzgürtel modifiziert und raffinierter gestaltet werden kann*“⁵.

Dedekinds zentrales Anliegen in seinen Schriften zur Arithmetik ist die begriffliche Konstitution der Zahlenbereiche. Er ist überzeugt, dass Zahlen keine anschaulich gegebenen oder empirisch zugänglichen Entitäten sind, sondern sich aus allgemeinen, logischen Begriffen⁶ konstruieren lassen. Diese Konstruktion muss ohne Rückgriff auf die naive Raum- und Zeitanschauung vollzogen werden.

Bereits relativ früh, in seinem Habilitationsvortrag, tritt diese Überzeugung deutlich zutage. Dort fordert Dedekind eine prinzipiengeleitete Befassung mit mathematischen Gegenständen. Dieses Leitmotiv wird in **SZ** und in **WZ** konsequent weiterverfolgt. Der *harte Kern* seines Forschungsprogramms besteht unter anderem in dem, was Detlefsen (2011) das *Dedekind-Prinzip* nennt.⁷ Dieses Prinzip findet sich bereits im ersten Satz von **WZ**:⁸

„Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden.“

Nur was sich aus klaren Voraussetzungen mittels wohldefinierter Regeln ableiten lässt, kann als gültig gelten. Diese allgemeine Forderung nach einer strengen Beweisführung steht in direktem Zusammenhang mit zwei weiteren Aspekten. Die erwähnte Strenge steht auch für eine gewisse Theoriereinheit der Arithmetik. Die naive Raumanschauung soll bei ihr gänzlich vermieden werden. Die Arithmetik, so Dedekind, soll „*sich aus sich selbst heraus entwickeln*“⁹. Zudem impliziert die Notwendigkeit der wissenschaftlichen Beweisführung auch eine *resiliente Begriffsbildung*. Diese spiegelt sich in einem anhaltenden Verallgemeinerungsprozess der mathematischen Begriffe wider. In der Arithmetik manifestiert sich dieses *Prinzip der Induktion*¹⁰ in der Erweiterung und Definition neuer Zahlenbereiche. Diese drei Aspekte, so die hier vertretene These, stellen den *harten Kern* von Dedekinds Forschungsprogramm zur Arithmetik dar:

- (1) Der Verallgemeinerungsprozess als Strategie der Zahlenerweiterung
- (2) Die Theoriereinheit der Arithmetik, vorrangig in Bezug auf die Anschauung
- (3) Die Notwendigkeit der wissenschaftlichen Beweisführung

Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir diesen Aspekten in seinem Habilitationsvortrag, **SZ** und **WZ** sowie einigen Quellen aus dem Nachlass nachgehen. Was Dedekind unter einer wissenschaftlichen Beweisführung versteht, hängt in erster Linie vom zugrundeliegenden deduktiven System ab. Eng damit verbunden ist auch die Frage der Theoriereinheit der Arithmetik. Beiden gehen wir in Kapitel 8 nach. Der Verallgemeinerungsprozess der Zahlenerweiterungen wird im Fortgang dieses Kapitels untersucht. Im Zuge dessen werden wir feststellen, dass sich Dedekinds

⁵Lakatos (2013): S. 49

⁶Den *unentbehrlichen* Grundbegriffen der Arithmetik, siehe Kapitel 5.

⁷Vgl. Detlefsen (2011): S. 210

⁸Dedekind (1888): S. 335

⁹Dedekind (1872a): S. 321

¹⁰Vgl. Dedekind (1854): S. 430

Methode im Laufe der Jahre gewandelt hat. Die begriffliche Konstitution der Zahlenbereiche in **SZ** und **WZ** tritt an die Stelle der Forderung nach der Ausführbarkeit von Umkehroperationen des Habilitationsvortrags. Obwohl beide einen Verallgemeinerungsprozess anstreben, kommt es zu einem methodischen Wandel bei der Zahlenerweiterung von einem *operationalen* zu einem *begrifflichen* Zugang. Während im Habilitationsvortrag Zahlenerweiterungen direkt aus der Notwendigkeit der Ausführbarkeit der Umkehroperation nicht nur legitimiert werden, sondern auch aus dieser resultieren, ändert sich dies bereits in *Ganze und rationale Zahlen*. Dieses vor der Publikation von **SZ** verfasste Manuskript legt den methodischen Wandel bei Dedekind offen zutage. Die Ausführbarkeit der Umkehroperation ist nun zwar Grundlage der Wesensbestimmung oder, wie Dedekind es nennt, der Analyse, dient jedoch nun lediglich als Hilfsmittel für die Definition der neuen Zahlenbereiche. Dieser Zugang beinhaltet bereits einen wesentlichen Aspekt der strukturalistischen Methode seiner späteren Arbeiten. Bei dieser werden im Rahmen einer Wesensbestimmung die charakteristischen Merkmale eines Begriffs herausgearbeitet. In **SZ** und **WZ** wird dies zwar beibehalten, jedoch um topologische Aspekte ergänzt. Dies ergibt sich bereits aus dem Untersuchungsgegenstand selbst, der sich einer gänzlich algebraischen Begriffsbestimmung entzieht. Diese methodische Veränderung steht, so meine These, im Kontext einer allgemeinen topologischen Wende, die Dedekind über die Jahrzehnte seiner Schaffenszeit vollzogen hat.¹¹

2.1 Erweiterung und Definition der Zahlenbereiche

Dedekind hat 1854 zum Thema *Über die Transformationsformeln für rechtwinklige Koordinaten* in Göttingen habilitiert. Sein Habilitationsvortrag, traditionell zu einem anderen Thema, trug den Namen *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik*.¹² Obwohl der Titel des Vortrags zur Annahme verleiten würde, er behandle dort spezielle Funktionen, berichtigt Dedekind diese Erwartung gleich zu Anfang:¹³

„Diese Vorlesung hat nicht etwa, wie man vielleicht die Schrift deuten könnte, die Einführung einer bestimmten Klasse neuer Funktionen in die Mathematik, sondern vielmehr allgemein die Art und Weise zum Gegenstande, wie in der fortschreitenden Entwicklung dieser Wissenschaft neue Funktionen, oder, wie man ebensowohl sagen kann, neue Operationen zu der Kette der bisherigen hinzugefügt werden.“

Worum es Dedekind geht, ist folglich eine epistemologisch-wissenschaftstheoretische Untersuchung der Entwicklungsvoraussetzungen der Mathematik. Die Einführung neuer Funktionen ist nur eine der vielen Entwicklungen, die die Mathematik in den Jahrzehnten vor Dedekinds Vortrag durchlaufen hat. Bevor er sich jedoch der Mathematik zuwendet, schickt er einige allgemeine wissenschaftstheoretische Überlegungen voraus.

Die Hauptaufgabe der Wissenschaft, so Dedekind, besteht in der „*Ergründung der Wahrheit*“.

¹¹Siehe dazu Kapitel 7.

¹²Der Vortrag wurde am 30. Juni 1854 im Haus des Althistorikers Prof. Dr. Karl Friedrich Christian Hoeck abgehalten. Anwesend waren Hoeck selbst, Carl Friedrich Gauß, der Physiker Wilhelm Weber sowie der Rechtshistoriker Georg Waitz. Es ist naheliegend, dass Dedekind die Beispiele aus der Wissenschaften (etwa Mineralogie und Rechtswissenschaften) in Anbetracht der Anwesenden gewählt hat. Siehe dazu Müller-Stach (2017): S. 20f. Bereits Noether wies in Dedekind (1932) darauf hin, dass Dedekind auch in der Vorrede von **WZ** auf den Habilitationsvortrag und die Bedeutung der Begriffsbildung hingewiesen habe. Dies mag mit dem Wohlwollen von Gauß zusammenhängen, dass er dort erfahren hat.

¹³Dedekind (1854): S. 433

Diese Wahrheit ist keine „*willkürliche Schöpfung*“ des Menschen.¹⁴ Sie entfaltet vielmehr eine „*von unserem Zutun unabhängige Notwendigkeit*“.¹⁵ Der Weg, auf dem wir zu ihr gelangen, ist jedoch nicht geradlinig. Die wissenschaftliche Praxis ist durch die unbegrenzte Vielfalt der Darstellungsformen charakterisiert, die unterschiedliche Zugänge zum Untersuchungsgegenstand ermöglichen. Dedekind führt die Mineralogie und die Rechtswissenschaften als Beispiele an. In beiden Wissenschaften existieren verschiedene, teilweise sogar konträre, Ansätze zur Systematisierung des Untersuchungsgegenstandes. Diese Ansätze heben stets ein bestimmtes Merkmal hervor und führen darauf aufbauend Begriffe und Definitionen ein, die eine entsprechende Beschreibung ermöglichen sollen. Diese Einführung neuer Begriffe ist „*gewissermaßen eine Hypothese, welche man an die innere Natur der Wissenschaft stellt*“¹⁶. Im Unterschied zur Wahrheit sind der wissenschaftliche Betrieb und auch die wissenschaftliche Begriffsbildung durch eine gewisse Willkür gekennzeichnet. Dieser Willkür muss mit einem externen Kriterium Einhalt geboten werden. Als solches kann dieses Kriterium nur in jenem Bereich verortet sein, der von Willkür frei ist, nämlich der Wahrheit selbst. Dedekind stellt hier eine Art Falsifikationskriterium für die Wissenschaft auf und prüft die Wirksamkeit der neuen Begriffsbildung an ihrem Wert hinsichtlich der Erklärung der „*inneren Natur*“¹⁷ des Untersuchungsgegenstandes.¹⁸

„Diese Wahrheiten wirken aber selbst wieder auf die Bildung der Definitionen zurück. So zeigt sich wohl, daß die aus irgendeinem Motive eingeführten Begriffe, weil sie anfangs zu beschränkt oder zu weit gefaßt waren, einer Abänderung bedürfen, um ihre Wirksamkeit, ihre Tragweite auf ein größeres Gebiet erstrecken zu können. Dieses **Drehen und Wenden der Definitionen**, den aufgefundenen Gesetzen oder Wahrheiten zuliebe, in denen sie eine Rolle spielen, bildet die **größte Kunst des Systematikers**.“ [Hervorhebung E. B.]

Die größte Kunst des Systematikers besteht somit im *Drehen und Wenden von Definitionen*, der *Wahrheit zuliebe*. Während dieser Kunst in den meisten Wissenschaften keine Grenzen gesetzt werden, die Systematisierungsaufgabe somit durch die bereits erwähnte Willkür gekennzeichnet ist, ist dies in der Mathematik nicht der Fall. Bedingt durch den Grundsatz der Allgemeingültigkeit der bestehenden Gesetze, werden der Erweiterung von Definitionen Grenzen gesetzt. Folglich ist etwa in der Arithmetik eine willkürliche Definition der Zahlenbereiche nicht denkbar. Diesen wird durch die notwendige Geltung bestehender arithmetischer Operationen und Gesetze eine Beschränkung auferlegt. Dedekind formuliert deshalb die Frage der Erweiterung der Definitionen, als ein *Prinzip der Induktion*¹⁹, in der Mathematik folgendermaßen:²⁰

„Wie muß die allgemeine Definition gefaßt werden, damit dem gefundenen charakteristischen Gesetze stets Genüge geschieht?“

Geleitet von diesem Prinzip, wendet sich Dedekind nun der Arithmetik zu. Die grundlegende Operation dieser ist der sukzessive Übergang von einer natürlichen Zahl zur jeweils nächsten. Auf dieser Nachfolgeroperation fußen alle weiteren Operationen im Bereich der natürlichen Zahlen.

¹⁴Der Begriff der *Schöpfung* darf nicht mit der *freien Schöpfung* in **SZ**, **WZ** oder der Korrespondenz verwechselt werden. Wir kommen auf diese Zusammenhänge in Kapitel 9 zu sprechen.

¹⁵Vgl. Dedekind (1854): S. 428

¹⁶Dedekind (ebd.): S. 429

¹⁷Dedekind (ebd.): S. 429

¹⁸Dedekind (ebd.): S. 430; Hervorhebung E. B.

¹⁹Vgl. Dedekind (ebd.): S. 430; Nicht zu verwechseln mit der vollständigen mathematischen Induktion.

²⁰Dedekind (ebd.): S. 430

Die Addition ist nichts anderes als eine wiederholte Ausführung dieser Operation, zusammengefasst in „einen einzigen Akt“²¹. Ebenso sind Multiplikation und Potenzierung iterative Anwendungen der Nachfolgeroperation und der Operation der Addition.²² An die Arithmetik stellt Dedekind nun zwei Forderungen:

- (i) **Ausführbarkeit der Umkehroperationen:** Die Forderung der Ausführbarkeit der Umkehroperationen der bereits bestehenden Operationen im Bereich der natürlichen Zahlen, etwa der Subtraktion und der Division, führt zur Notwendigkeit der Erweiterung der Zahlenbereiche:²³

„[...] die Forderung der unbedingten Ausführbarkeit der indirekten, umgekehrten Operationen, der Subtraktion, Division usw., führt auf die Notwendigkeit, **neue Klassen von Zahlen zu schaffen**, da mit der ursprünglichen Reihe der absoluten ganzen Zahlen dieser Forderung kein Genüge geleistet werden kann. So erhält man die negativen, gebrochenen, irrationalen und endlich auch die sog. imaginären Zahlen.“ [Hervorhebung E. B.]

Die Art und Weise, wie Dedekind neue Klassen von Zahlen erschafft, ist eine der zentralen Fragen dieser Arbeit. Am Ende dieses Kapitels werden wir festhalten, dass die *Schöpfung* der Zahlen im Habilitationsvortrag eine andere Qualität aufweist als in seinen späteren Arbeiten.

- (ii) **Neudefinition der bisherigen Operationen auf dem neuen Zahlengenbereich:** Die Operationen im Bereich der natürlichen Zahlen, etwa Addition und Multiplikation, müssen auf dem neuen Zahlenbereich definiert werden. So folgt etwa aus dem Umstand, dass die Addition für den Bereich der natürlichen Zahlen eine wohldefinierte Operation ist, nicht notwendigerweise, dass dies auch für den Bereich der ganzen Zahlen gilt. Im Geiste des Prinzip der strengen Beweisführung (siehe Seite 34) muss dies bewiesen werden.

Mit diesen Forderungen war Dedekind nicht allein. Vor allem (ii) erinnert an das, was heute das Hankelsche Permanenzprinzip genannt wird. Auch die Ausführbarkeit der Umkehroperationen als Begründung der Notwendigkeit von Zahlenbereichserweiterungen ist keineswegs eine Neuheit gewesen.²⁴ Dedekind hatte das Thema bereits zwei Jahre zuvor, im Rahmen seiner Inauguraldissertation zum Thema *Über die Elemente der Theorie der Euler Integrale* ebenfalls gestreift:²⁵

„Es ist bekannt, daß die Ausführung der indirekten Operationen in der Analysis meist auf viel bedeutendere Schwierigkeiten stößt, als die der direkten; aber gerade dieser scheinbar unglückliche Umstand hat auf die Entwicklung der Mathematik stets den günstigsten Einfluß ausgeübt. Nicht nur, daß die Besiegung dieser Schwierigkeiten, wenn sie möglich, immer einen eigentümlichen Reiz für den Mathematiker darbietet, sondern auch gerade die Fälle, in welchen dies mit den früher eingeführten Begriffen und Hilfsmitteln nicht möglich war, haben immer der weiteren Ausbildung der Mathematik ganz neue Felder eröffnet; so führen z. B. die Operationen der Subtraktion, Division und Wurzelauszziehung auf die Begriffe der

²¹Dedekind (ebd.): S. 431

²²Neben dieser arithmetischen Grundoperationen führt Dedekind auch weitere Beispiele an. Er diskutiert trigonometrische Funktionen, Eulersche Integrale (Γ - und Ψ -Funktionen) und elliptische Funktionen.

²³Dedekind (ebd.): S. 431; Hervorhebung E. B.

²⁴Für eine historische Einordnung in Bezug auf Ohm und Hankel siehe Ferreirós (2007): S. 121 sowie Haffner (2014): S. 206–207.

²⁵Dedekind (1852): S. 1f

negativen, gebrochenen und imaginären Zahlen, von denen jeder das Gebiet der Mathematik so außerordentlich erweitert hat.“

Während die Notwendigkeit der Zahlenerweiterung aufgrund der Forderung (i) keiner besonderen Erklärung bedarf, ist die Forderung (ii) oft mit Schwierigkeiten verbunden. Deshalb geht Dedekind in seinem Habilitationsvortrag auf einige Beispiele ein. Wir geben das Beispiel der Multiplikation mit negativen Multiplikatoren sinngemäß wieder.²⁶

Negative Multiplikatoren können in der oben beschriebenen Arithmetik natürlicher Zahlen nicht auftreten. Die Forderung nach der Ausführbarkeit der Umkehroperation der Addition, der Subtraktion, eröffnet nun den Zahlenbereich der ganzen Zahlen. Ausgehend von dieser Erweiterung muss auch die Multiplikation von ihrer anfänglichen Beschränkung *befreit* werden. Darunter ist die Definition negativer Multiplikatoren zu verstehen. Damit diese Definition von *Willkürlichkeit* frei ist, muss ihr eine Untersuchung vorausgeschickt werden. Diese besteht darin zu klären, „*welchen Gesetzen das Produkt unterworfen ist, wenn der Multiplikator sukzessive dieselben Veränderungen erleidet, durch welche überhaupt aus der absoluten ganzen Zahlenreihe die der negativen erzeugt wurde*“²⁷. Betrachten wir das Additionstheorem für die Multiplikation:

$$a(x + y) = ax + ay$$

Dieses entsteht durch eine iterative Wiederholung der Nachfolgeroperation für $a(x + 1) = ax + a$, was wiederum aus der Definition der Multiplikation als iterative Wiederholung der Addition resultiert. Die Forderung der Ausführbarkeit der Subtraktion führte zur Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen und die Null. Der neue Zahlenbereich umfasst folglich alle Zahlen der Form $(x - y)$, wobei x und y beliebige natürliche Zahlen sind.²⁸ Aus dem obigen Additionstheorem kann nun ein Subtraktionstheorem abgeleitet werden:

$$a(x - y) = ax - ay$$

Wie Dedekind selbst hervorhebt, ist das Subtraktionstheorem jedoch nur für den Fall definiert, dass x größer als y ist. Falls dies nicht der Fall ist, muss die Gültigkeit des Theorems dadurch sichergestellt werden, dass das Gesetz für allgemeingültig erklärt wird:²⁹

„Erklärt man nun diese Gesetze für allgemeingültig, also auch für den Fall, wo die Differenz, welche den Multiplikator darstellt, negativ wird, so erhält man hieraus die Definition der Multiplikation mit negativen Multiplikatoren; und es ist dann natürlich kein Zufall mehr, daß das allgemeine Gesetz, dem die Multiplikation gehorcht, für beide Fälle genau dasselbe ist.“ [Hervorhebung E. B.]

Sieg und Schlimm (2005) diagnostizieren in dieser Vorgehensweise Dedekinds eine *subtile Zirkularität*. Tatsächlich ist die Forderung (ii) im Grunde nichts anderes als die Umkehrung der Forderung nach der Ausführbarkeit der Umkehroperation. Die neuen Zahlen entstehen durch eine unbeschränkte Ausführung der inversen Operation für eine auf einen beschränkten Bereich geltende Operation. Diese Operation wird im Anschluss auf den neuen Zahlenbereich erweitert.³⁰

²⁶Vgl. Dedekind (1854): S. 431f

²⁷Dedekind (ebd.): 432

²⁸Vgl. Sieg und Schlimm (2005): S. 128

²⁹Dedekind (1854): S. 432; Hervorhebung E. B.

³⁰Vgl. Sieg und Schlimm (2005): S. 127

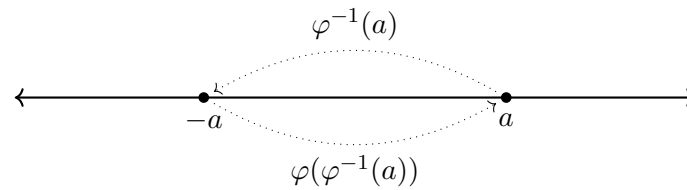


Abbildung 2.1: Zirkularität der Erweiterung der Zahlenbereiche

Die Autoren verfolgen dieses Problem bei Dedekind bis in die 1870er Jahre und den *Arithmetischen Grundlagen*³¹, einem Manuskript aus dem Nachlass, dessen Niederschrift sie im Jahr 1872 vermuten.³² Das Manuskript findet man in Dedekinds Nachlass in drei verschiedenen Versionen vor. Es enthält eine Fortführung und Erweiterung elementarer Überlegungen zu den arithmetischen Operationen. Die ersten beiden Versionen beinhalten den *Akt der Schöpfung* der Ordinalzahlen durch eine über die Addition definierte Nachfolgeroperation „Act +1“ (jeweils in §1), die Erklärung der Addition als $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ (jeweils in §2) und im Anschluss der Kommutativitäts-, Assoziativitäts- und Distributivitätsgesetze.³³ Ebenso wie im Habilitationsvortrag bemerken wir auch hier ein *Primat der Operationen* gegenüber den Zahlenbereichen selbst und damit einhergehend die bereits erwähnte Zirkularität.

Dies ändert sich in *Ganze und rationale Zahlen*.³⁴ Dort vollzieht Dedekind eine methodische Veränderung, die in vielerlei Hinsicht auch in seinen späteren Arbeiten zur Arithmetik zu beobachten ist. Durch die Bildung von Paaren natürlicher Zahlen (m, n) **definiert** er dort die negativen und rationalen Zahlen.³⁵ Für das *Gebiet* der ganzen Zahlen und den *Körper* der rationalen Zahlen, können etwa die Identität definiert werden:³⁶

$$\begin{aligned} (m, n) &= (a, b) \quad \text{für} \quad m + a = n + b \quad \text{für ganze Zahlen, sowie} \\ (m, n) &= (a, b) \quad \text{für} \quad m \cdot a = n \cdot b \quad \text{für rationale Zahlen.} \end{aligned}$$

Das, was Dedekind hier erstmalig vollzieht, unterscheidet sich wesentlich von seinen bisherigen Versuchen der Zahlenbereichserweiterungen. Er definiert neue mathematische Objekte. Basierend auf ihrer Konstruktion erfüllen diese neuen Objekte die geforderten arithmetischen Gesetze von vornherein. Sieg und Schlimm (ebd.) heben hervor, dass Dedekind hier Modelle präsentiert, die die axiomatischen Merkmale der ganzen und rationalen Zahlen erfüllen.³⁷ Wir beobachten hier somit den Wandel von einem *operationalen* Zugang zur Zahlenbereichserweiterung zu einem *begrifflichen* Zugang. In *Ganze und rationale Zahlen* ist dieser begriffliche Zugang noch gänzlich *algebraisch*. Die Wesensbestimmung der neuen Zahlenbereiche erfolgt durch eine algebraische

³¹Unveröffentlichtes Manuskript aus dem Nachlass; Cod. Ms. Dedekind III, 4, II; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

³²Vgl. Sieg und Schlimm (ebd.): S. 133

³³Vgl. Sieg und Schlimm (ebd.): S. 131f

³⁴Unveröffentlichtes Manuskript aus dem Nachlass, Cod. Ms. Dedekind III,4,I; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung). Für die vollständige Transkription siehe Schlimm (2000): S. 101–106.

³⁵Ferreirós (2007) bemerkt, dass Dedekind durch die Lektüre von Hamilton *Vorlesungen* Kenntnis von der genetischen Methode erlangt hat. Siehe Ferreirós (ebd.): S. 220.

³⁶Vgl. Schlimm (2000): S. 101ff

³⁷Vgl. Sieg und Schlimm (2005): S. 137

Analyse. Dedekinds Definition basiert auf der Analyse algebraischer Zusammenhänge der Form „Aus $p + r = q + r$ folgt $p = q$ “ und „Aus $pr = qr$ folgt $p = q$ “.³⁸ Für eine Erweiterung auf die ganzen und rationalen Zahlen genügt eine algebraische Analyse vollends. Anders ist dies jedoch in **SZ**, wo sich der Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen definitionsgemäß einer algebraischen Wesensbestimmung entzieht. Im Habilitationsvortrag erklärte Dedekind die Erweiterung auf die algebraischen irrationalen Zahlen aus der Forderung der Ausführbarkeit der Potenz mit gebrochenen Exponenten:³⁹

„Um nun auch auf **Potenzen mit gebrochenen Exponenten** zu kommen, muß man zuerst, was leicht geschieht, aus dem erwähnten Additionstheorem das Gesetz ableiten, daß einer Multiplikation des Exponenten eine gleichhohe Potenzierung der Potenz entspricht, woraus sogleich leuchtet, daß jede Division eines Exponenten zuerst verlangt, die eine Umkehrung der ursprünglichen Operation der Potenzierung auszuführen, nämlich eine gegebene Zahl in eine gleichfalls gegebene Anzahl gleicher Faktoren zu zerlegen. Man wird bei dieser Aufgabe abermals auf neue Zahlengebiete geführt, indem das bisherige der Forderung der allgemeinen **Ausführbarkeit der arithmetischen Operationen nicht mehr Genüge leistet**; man ist dadurch gezwungen, die irrationalen Zahlen, mit welchen zugleich der Begriff der Grenze auftritt, und endlich auch die imaginären Zahlen **zu schaffen**.“ [Hervorhebung E. B.]

Transzendente Zahlen entziehen sich hingegen diesem algebraischen Zugang, da sie definitionsgemäß keine Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen. Im Unterschied zu den algebraischen irrationalen Zahlen, die als Lösungen etwa quadratischer oder höhergradiger Gleichungen eine klare Verankerung im Rahmen algebraischer Operationen besitzen, lassen sich transzendente Zahlen nicht durch ein endliches System solcher Gleichungen erfassen. Angesichts dessen fehlt bei transzendenten Zahlen eine unmittelbar operationale Motivation für ihre Einführung: Es gibt keine algebraische Umkehroperation, deren Ausführbarkeit eine zwingende Forderung zur Erweiterung des Zahlenbereiches um transzendente Zahlen darstellen würde. Die Erweiterung des Zahlenbegriffs in Richtung transzendenter Zahlen beruht somit nicht auf einer algebraischen Strukturdefizienz, sondern auf der Einsicht, dass bestimmte zentrale mathematische Zusammenhänge nur außerhalb des algebraisch erfassbaren Bereichs vollständig beschreibbar sind. Dedekind ist sich dieser Problematik bewusst und thematisiert deshalb den Begriff der Grenze. Wie genau jedoch das **erschaffen** dieser Zahlen erfolgen soll, bleibt im Habilitationsvortrag noch offen:⁴⁰

„Diese Fortschritte sind so unermesslich, daß es schwer zu entscheiden ist, welche der vielen verschiedenen Bahnen, die sich hier auftun, man zuerst treten soll.“

Wenn sich diese Zahlen einer algebraischen Wesensbestimmung entziehen, so muss ihre begriffliche Bestimmung eine andere Grundlage haben. Zum Zweck der Wesensbestimmung der reellen Zahlen greift Dedekind deshalb bereits im Umfeld von **SZ**⁴¹ implizit auf topologische Begriffe zurück.⁴²

³⁸Vgl. Schlimm (2000): S. 101

³⁹Dedekind (1854): S. 433; Hervorhebung E. B.

⁴⁰Dedekind (ebd.): S. 434

⁴¹Siehe dazu die Analyse zum Manuskript *Intervalle*, dass dem Entwurf von **SZ** aus dem Jahr 1871 zugeordnet werden kann, in Kapitel 4.

⁴²Einen ähnlichen Standpunkt vertritt auch Ferreirós (2007): S. 121, indem er schreibt „[...] with $\mathbb{R}$ we are not facing an algebraic completion, but a topological one.“

2.2 Arithmetisierung der Analysis

Klein beschrieb 1895 im Rahmen eines Vortrags in Göttingen die Arithmetisierung als einen Prozess der „*logischen Verschärfung*“, der aus der Forderung resultierte, die Mathematik einer „*Neuerarbeitung*“ zu unterziehen.⁴³ Diese Neuerarbeitung war notwendig, da die Mathematik, vor allem jedoch die Analysis, im 18. Jahrhundert eine rasante Entwicklung erfahren hat. Die Vielzahl der neuen Ergebnisse galt es nun, dort einer strengen Beweisführung zu unterziehen, wo diese entweder bisher nicht geglückt war, oder bei denen die naive Anschauung eine wesentliche Rolle spielte. Die Zielsetzung der Arithmetisierung bestand deshalb in einer strengen arithmetischen Beweisführung und einer Entledigung der naiven Raumanschauung:⁴⁴

„Allmählich erst erwacht wieder eine strengere Kritik, welche nach der logischen Berechtigung der kühnen Entwicklungen fragt, - gleichsam eine Wiederaufrichtung der geordneten Verwaltung nach einem langen Eroberungszuge.“

Als den Hauptvertreter dieser Bestrebung sah er Weierstraß, rechnete ihr aber unter anderem ebenso Gauß, Abel, Dirichlet, Cauchy und auch Kronecker hinzu.⁴⁵ Der letztere verwendet den Begriff der *Arithmetisierung* auch explizit im Rahmen seines Aufsatzes *Über den Zahlbegriff*:⁴⁶

„[...] Dabei ist aber das Wort ‚Arithmetik‘ nicht in dem üblichen beschränkten Sinne zu verstehen, sondern es sind alle mathematischen Disciplinen mit Ausnahme der Geometrie und Mechanik, also namentlich die Algebra und Analysis, mit darunter zu begreifen. Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesamten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu ‚arithmetisieren‘, d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen [...]“ [Hervorhebung E. B.]

Für Kronecker war die Forderung der Arithmetisierung das Ergebnis einer tief verwurzelten epistemologischen Grundüberzeugung. Sie war nicht nur eine Forderung nach methodischer Strenge, sondern auch direktes Resultat seines Realismus in Bezug auf den Untersuchungsgegenstand der Mathematik. Wie jede andere Naturwissenschaft müsse die Mathematik, so Kronecker, ihren Anfang bei der empirischen Wirklichkeit, den mathematischen Phänomenen nehmen:⁴⁷

*„Man hat häufig gesagt, die Mathematik müßte mit Definitionen beginnen, und aus ihnen zusammen mit den postulierten Grundsätzen seien die mathematischen Sätze abzuleiten. Nun sind aber Definitionen an sich schon eine Unmöglichkeit, wie Kirchhoff zu sagen pflegte, denn jede Definition braucht ihre Begriffe, welche wieder zu definieren sind u.s.f. Man kann doch nicht, wie es allerdings die Hegelsche Philosophie thut, aus dem Nichts das Sein entwickeln! Ferner sagte Kirchhoff, die Aufgabe der Mechanik und der Naturwissenschaften überhaupt sei, die Phänomene einfach und vollständig zu beschreiben. Nun ist aber die **Mathematik nichts anderes als eine Naturwissenschaft** und es kommt also auch bei ihr darauf an, die **Erscheinungen** ‚einfach und vollständig zu beschreiben‘.“* [Hervorhebungen E. B.]

Für Kronecker war die Mathematik eine Naturwissenschaft, die nicht auf Definitionen, sondern auf Phänomenen fußte. In dieser Auffassung folgte er dem Physiker Kirchhoff. Die Erscheinungen, die die Mathematik (Geometrie und Mechanik ausgenommen) zum Gegenstand hat, sind empirisch gesehen nur die natürlichen Zahlen. Als Experimentalwissenschaft basiert

⁴³Klein (1895): S. 84

⁴⁴Klein (ebd.): S. 82

⁴⁵Vgl. Klein (ebd.): S. 82f

⁴⁶Kronecker (1887): S. 338; Hervorhebung E. B.

⁴⁷Kronecker (1891): S. 225f; Hervorhebung E. B.

sie auf der Erfahrung der Ordinalzahlen. Diese bedürfen keiner weiteren Begründung und werden als gegeben angenommen.⁴⁸ Bei der Definition der Kardinalzahlen wählte Kronecker einen ähnlichen Ansatz wie Frege und Russell und untersuchte bijektive Abbildungen zwischen endlichen Mengen. Im Unterschied zu diesen wählte er jedoch einen bestimmten Repräsentanten als Invariante.⁴⁹ Die Ablehnung von Definitionen führte zu einer repräsentantenabhängigen und konstruktivistischen Methodik. Diese Methodik war in ihrer Ausgestaltung stark algorithmisch und finit. Kroneckers Realismus erhebt die Forderung der Arithmetisierung und mündet in einen ontologischen Reduktionismus, der der mathematischen Methodik eine strenge Beschränkung⁵⁰ auferlegte.⁵¹

Im letzten Abschnitt von *Über den Zahlbegriff* zeigt sich diese Beschränkung am eindrucklichsten. Dort unternimmt Kronecker eine Rückführung der negativen, gebrochenen (rationalen) und algebraischen Zahlen auf natürliche Zahlen. Das zugrundeliegende Motiv besteht darin, zu zeigen, dass die Zahlenbereiche auf diese Weise *entbehrlich* werden können.⁵² So sagt er beispielsweise in Bezug auf die negativen Zahlen:⁵³

„Der Begriff der **negativen** Zahlen kann vermieden werden, indem in den Formeln der Factor -1 durch eine Unbestimmte x und das Gleichheitszeichen durch das **Gauss'sche** Congruenzzeichen **modulo** $(x + 1)$ ersetzt wird. So wird die Gleichung:

$$7 - 9 = 3 - 5$$

in die Congruenz:

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \pmod{x + 1}$$

transformiert “ [Hervorhebung durch den Autor]

Die Strategie Kroneckers besteht darin, die erwähnten Zahlenbereiche durch Kongruenzen zu ersetzen. Der Faktor -1 wird durch die Gleichung $x + 1 = 0$ ersetzt. Die obige Kongruenz ist für sämtliche natürlichen Zahlen x definiert. Durch das Einsätzen der „Grösse“ x aus $x + 1 = 0$ ist es möglich, auch die „negativen Zahlen“ zu erhalten. Auf ähnliche Weise führt Kronecker auch die rationalen Zahlen ein. Die algebraischen irrationalen Zahlen ergeben sich als Nebenprodukt der Ordnungsrelation auf den rationalen Zahlen.⁵⁴ Ihr Wesen erfasst er durch die Isolierung dieser Zahlen, die stark an Eudoxos erinnert. Mangels finiter Konstruierbarkeit spricht Kronecker den irrationalen Zahlen die Existenz ab.⁵⁵

Ungeachtet aller Unterschiede zwischen Kronecker und Dedekind, erinnert Kroneckers Zugang in Bezug auf die Einführung der *negativen Einheit* -1 methodisch an die operationenzentrierte Methode Dedekinds in seinem Habilitationsvortrag:⁵⁶

„[...] sie gewinnt dadurch auch an Inhalt, da die Congruenz für jede positive ganze Zahl x eine Bedeutung hat, nämlich die, dass $7 + 9x$ bei der Division durch $x + 1$ denselben Rest lässt wie $3 + 5x$ und andererseits geht diese Congruenz unmittelbar in die Gleichung über,

⁴⁸Vgl. Boniface (2005): S. 144ff

⁴⁹Vgl. Boniface (ebd.): S.146

⁵⁰Edwards (1995) erwähnt in diesem Zusammenhang den Ruf Kroneckers als *Verbotsdiktator*. Siehe S. 46

⁵¹Vgl. Haffner (2014): S. 388

⁵²Vgl. Kronecker (1887): S. 347

⁵³Kronecker (ebd.): S. 345

⁵⁴Kronecker (ebd.): S. 345ff

⁵⁵Vgl. Kronecker (ebd.): S. 353f

⁵⁶Kronecker (ebd.): S. 345

sobald man x nicht mehr als Unbestimmte, sondern als eine **durch die Gleichung** $x+1=0$ **definierte** ‚Grösse‘ auffasst und also die ‚negative Einheit‘ einführt.“ [Hervorhebung E. B.]

Mangels direkter Definition der neuen Zahlenbereiche muss Kronecker, ebenso wie Dedekind in seinem Habilitationsvortrag und in den *Arithmetischen Grundlagen* auf Umkehroperationen zurückgreifen. Die Wahl der Kongruenzen bei Kronecker kann nicht darüber hinwegtäuschen, dass auch bei ihm eine gewisse Zirkularität bemerkbar ist. Im Grunde wird die Einführung der negativen Einheit -1 durch die Durchführbarkeit der Umkehroperation der Addition für die konkrete Gleichung $x+1=0$ **gefordert**. Durch eine direkte Definition der Zahlenbereiche in *Ganze und rationale Zahlen* konnte Dedekind dieses Problem umgehen. Die zugrundeliegende Problematik beschreibt Dedekind in einem Brief an Weber, nachdem er bereits vor Jahren den Wandel von einem operationalen zu einem begrifflichen Zugang bei Zahlenbereichserweiterungen vollzogen hat:⁵⁷

„Du schreibst: „Ich kann dann auch nichts Falsches darin sehen, wenn man z. B. sagt $\sqrt{2}$ suchen heißt eine Zahl suchen, deren Quadrat sich von 2 so wenig unterscheidet als vorgeschrieben ist und daß $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ist, ist dann auch bewiesen“. **Erstens gefällt mir hieran nicht recht, daß mehr die Operation, als das Resultat der Operation definiert wird**; ich mag es lieber, wenn z.B. die Summe als eine durch die Summanden vollständig bestimmte Zahl definiert wird, als wenn das Addiren erklärt wird; dies schon bei den rationalen Zahlen.“ [Hervorhebung E. B.]

Diese Methodik kam auch in **SZ** zur Anwendung. Die Durchführbarkeit der Umkehroperation ist zwar weiterhin eines der *Motive* der Erweiterung der Zahlenbereiche durch Dedekind, aber nicht mehr die *Methode* der Zahlenbereichserweiterung.⁵⁸

Auch Dedekind strebt dort eine Arithmetisierung an. Die Arithmetisierung Dedekinds besteht in erster Linie in der Forderung der Theoriereinheit der Arithmetik. Weder zeitliche noch räumliche Anschauung dürfen bei der Begründung der Zahlenbereiche herangezogen werden. Dies entspricht der Forderung (2) des *harten Kerns* auf Seite 34. Die Begründung der Zahlenbereiche muss einem *logischen Aufbau* folgen. Wie er selbst sagt, ist seine Auffassung „wesentlich verschieden“ von Kroneckers.⁵⁹ Während Kroneckers Arithmetisierung einem ontologisch begründeten Reduktionismus folgt, besteht Dedekinds Anliegen in der methodischen Reinheit der Arithmetik. Dass Algebra und Analysis auf der Arithmetik fußen, und diese wiederum auf der Logik, ist bei Dedekind nicht eine ontologische Forderung, sondern ergibt sich aus der Möglichkeit der Konstruktion des Zahlenbegriffs aus den *reinen Denksetzen*. Dedekinds Arithmetisierung folgt somit keinem ontologischen, sondern einem methodischen Reduktionismus.

Wie Dedekind berichtet, entstand der grundlegende Gedanke von **SZ** bereits im Jahr 1858, eine Veröffentlichung unterblieb jedoch zunächst und er teilte seine Überlegungen nur einem kleinen Kreis persönlicher Vertrauter mit. Forschungen anderer Mathematiker (wie Eduard Heine, den er namentlich erwähnt) hatten ihn dazu bewogen, seine Arbeit letztlich zu publizieren.⁶⁰ Im Gegensatz zu seinem Habilitationsvortrag steht nun nicht die Erweiterung der Anwendbarkeit der arithmetischen Operationen im Vordergrund, sondern vielmehr die neuen Zahlenbereiche selbst.

⁵⁷Sonar et al. (2014): S. 214; Hervorhebung E. B.; Brief Dedekinds an Weber von 19. November 1878.

⁵⁸Vgl. Haffner (2014): S. 411

⁵⁹Vgl. Dedekind (1888): S. 335

⁶⁰Vgl. Dedekind (1872a): S. 316f

Dedekind setzt verstärkt auf die Mengenlehre als Hilfsmittel seiner Untersuchungen. In seinem Habilitationsvortrag fand diese keine Erwähnung. Im Fortgang des Kapitels gehen wir auf einige Aspekte der Arbeit ein. Die folgende Grafik⁶¹ gibt einen Überblick.

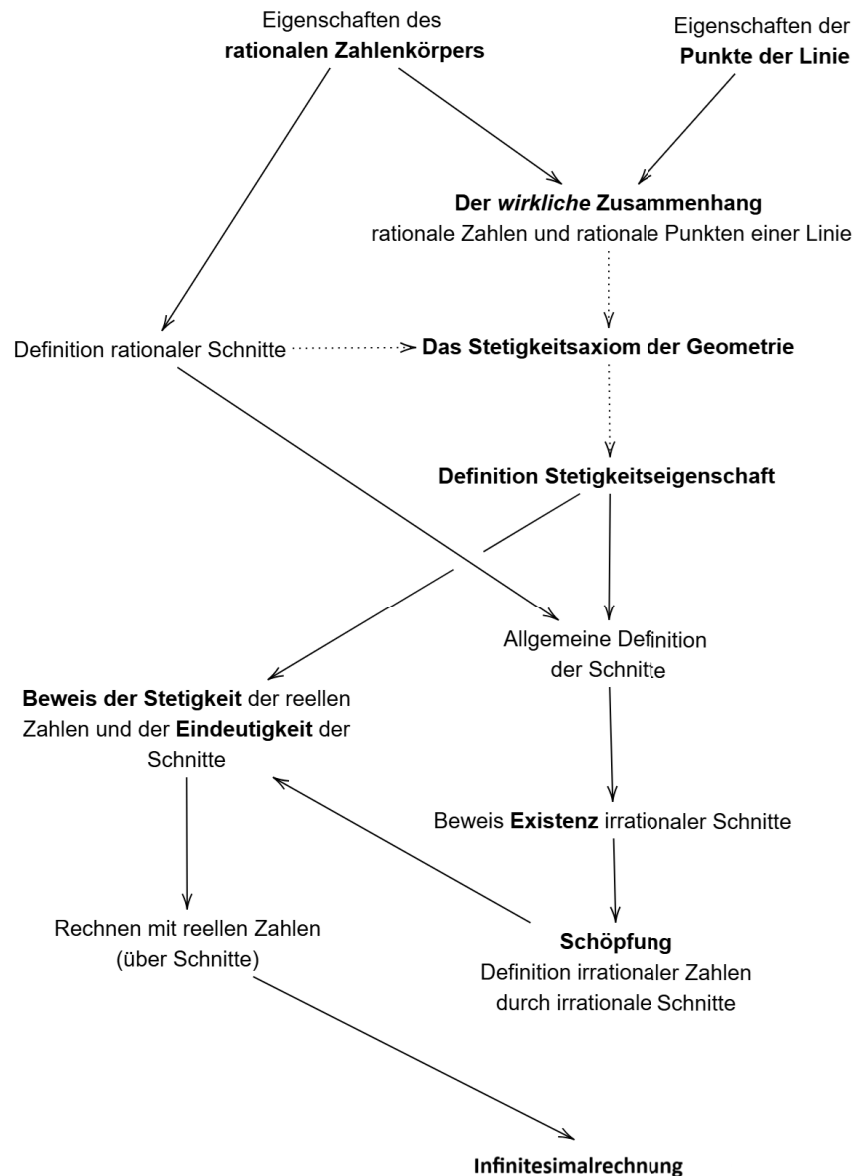


Abbildung 2.2: Grobe Darstellung der Architektur von **SZ**

⁶¹Es ist anzumerken, dass die dargestellten Pfeile weder den syntaktischen noch den semantischen Zusammenhang wiedergeben, sondern Schritte in einer groben Rekonstruktion sind und streng genommen nur eine mögliche Darstellungsform. Gestrichelte Pfeile deuten darauf hin, dass das Stetigkeitsaxiom der Geometrie lediglich als *Motivation* und *Basis der Wesensbestimmung* gedient hat.

2.2.1 Der *wirkliche* Zusammenhang

In einem ersten Schritt (§1 und §2) erläutert Dedekind die Analogie zwischen den rationalen Zahlen und den Punkten einer Gerade hinsichtlich ihrer Ordnung. Beide sind geordnet und nach *beiden Seiten hin* unendlich. Die *größer-kleiner*-Relation bei den rationalen Zahlen entspricht dabei der *rechtslinks*-Relation der geraden Linie. In modernem Vokabular sind folgende Eigenschaften beiden gemeinsam:⁶²

- **Trichotomie:** Die Ordnung der rationalen Zahlen (als auch der geraden Linie hinsichtlich ihrer Punkte) bewirkt, dass zwei Zahlen a und b eine (und nur eine) der drei Relationen erfüllen: $a = b$, $a < b$ oder $a > b$.
- **Transitivität:** Falls $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$.
- **Dichte:** Für jede zwei verschiedenen Zahlen a und b , gibt es unendlich viele Zahlen c , die zwischen beiden liegen. Demnach gibt es im Falle von $a < b$ unendlich viele Zahlen c mit $a < c < b$. Dieser Zusammenhang ist heute bekannt als die *Dichte der rationalen Zahlen*.
- **Möglichkeit der Partitionierung:** Hinsichtlich eines beliebigen Punktes q kann die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in zwei unendliche Teilmengen U_q und O_q aufgeteilt werden. Die erste beinhaltet alle rationalen Zahlen kleiner als q und die zweite alle rationalen Zahlen größer als q . Wir nennen die erste deshalb die *untere Menge von q* und die zweite die *obere Menge von q* . q selbst kann entweder der ersten oder der zweiten Teilmenge zugeordnet werden.

Wählt man nun auf einer Geraden einen Ausgangspunkt o , so existiert ein *wirklicher Zusammenhang* zwischen den Punkten der Geraden und der rationalen Zahlen:⁶³

„Diese Analogie zwischen den rationalen Zahlen und den Punkten einer Geraden wird bekanntlich zu einem **wirklichen Zusammenhang**, wenn in der Geraden ein bestimmter Anfangspunkt oder Nullpunkt o und eine bestimmte Längeneinheit zur Ausmessung der Strecken gewählt wird. Mit Hilfe der letzteren kann für jede rationale Zahl a eine entsprechende Länge konstruiert werden, und trägt man dieselbe von dem Punkte o aus nach rechts oder links auf der Geraden ab, je nachdem a positiv oder negativ ist, so gewinnt man einen bestimmten Endpunkt p , welcher als der der Zahl a entsprechende Punkt bezeichnet werden kann; der rationalen Zahl Null entspricht der Punkt o . Auf diese Weise entspricht jeder rationalen Zahl a , d. h. jedem Individuum in $\mathbf{R}$, ein und nur ein Punkt p , d. h. ein Individuum in $\mathbf{L}$.“ [Hervorhebung E. B.]

Der hier erwähnte *wirkliche* Zusammenhang ist aus zwei Gründen bedeutend. Einerseits begründet Dedekind mit diesem die Strukturgleichheit der Ordnungsstruktur der rationalen Zahlen und der (rationalen) Punkte der Geraden und gibt implizit einen Hinweis auf die Möglichkeit einer Kategorizität zwischen zwei Systemen. Andererseits handelt es sich hierbei um einen intuitiven Versuch, die Zusammenhänge zwischen strukturähnlichen Systemen mittels Abbildungen zu beschreiben. Wieso Dedekind dies nicht für die vollständige Ordnungsstruktur der reellen Zahlen thematisiert, ist Gegenstand von Kapitel 9.

⁶²Vgl. Dedekind (1872a): S. 319; Die Benennung der Eigenschaften erfolge bei Dedekind nicht. Wir finden sie aber im Lehrbruch von Weber. Siehe beispielsweise Weber (1895): S. 481.

⁶³Dedekind (1872a): S. 320

2.2.2 Das Stetigkeitsaxiom der Geometrie

Dedekind nutzt den Begriff des Axioms in **SZ**, wenn er sich auf die räumliche Anschauung bezieht. Er bemerkt, dass die geometrische Gerade durch ihren Zusammenhang charakterisiert ist.⁶⁴

*„Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Teilmengen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Teilmenge links von jedem Punkte der zweiten Teilmenge liegt, so existiert **ein und nur ein Punkt**, welcher diese **Einteilung** aller Punkte in zwei Teilmengen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke **hervorbringt**.“* [Hervorhebung E. B.]

Im Grunde stellt dies die Umkehrung der erwähnten Partitionierung im Bereich der rationalen Zahlen dar. In Kapitel 8 werden wir sehen, wieso dies eine der beiden Stellen in **SZ** ist, in der Dedekind den Begriff des *Axioms* nutzt. An dieser Stelle ist es jedoch wichtig hervorzuheben, dass das hier erwähnte Stetigkeitsaxiom der Geometrie und nicht der Arithmetik zuzuordnen ist. Die Stetigkeit der geometrischen Linie muss axiomatisch eingeführt werden, da sie nicht direkt aus der Anschauung hervorgeht. Für Dedekind ist die Stetigkeit des euklidischen Raumes nicht selbstverständlich. Wir setzen uns in Kapitel 3 mit seinem Standpunkt zur Geometrie näher auseinander. In **SZ** hat dieses Axiom nur einen *motivierenden* Charakter und wird im Beweisgang der Arbeit nicht herangezogen. Es dient der Wesensbestimmung der Stetigkeit, die später bei der Begriffsbildung der Schnitte Orientierung geben soll. Die Existenz eines Schnittpunktes der Gerade wird in der Geometrie durch ein Axiom sichergestellt. Die Vollständigkeit der Gerade wird axiomatisch eingeführt.⁶⁵

*„Die Annahme dieser Eigenschaft der Linie ist nichts als ein **Axiom**, durch welches wir erst der Linie ihre Stetigkeit zuerkennen, durch welches wir die Stetigkeit in die Linie hineindenken.“* [Hervorhebung E. B.]

Diese Auffassung teilt Dedekind, wie er selbst bemerkt, mit Cantor.⁶⁶ Cantor schreibt in §2 seines Aufsatzes „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“:⁶⁷

*„[...] Um aber den [...] definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein **Axiom** hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, daß auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße [...] Ich nenne diesen Satz **Axiom**, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.“* [Hervorhebung durch den Autor]

Wie Cantor in der dazugehörigen Fußnote erklärt, kann die bijektive Abbildung der Zahlengrößen auf die Gerade nicht bewiesen, sondern nur als Axiom eingeführt werden. Zahlengrößen werden bei Cantor in §1 seiner Schrift definiert. Von einer Abbildung im Sinne eines *wirklichen Zusammenhangs* zwischen den Geraden und Zahlen spricht auch Dedekind in §2 von **SZ**. Er bezieht sich jedoch nicht auf reelle, sondern rationale Zahlen. Wie wir feststellen konnten, ist der erwähnte Zusammenhang einer zwischen den rationalen Zahlen und rationalen Streckenschnitten der Geraden. Sobald es jedoch um die reellen Zahlen geht, sehen sowohl Dedekind als auch Cantor die Notwendigkeit eines Axioms gegeben.⁶⁸

⁶⁴Dedekind (1872a): S. 322; Hervorhebung E. B.

⁶⁵Dedekind (ebd.): S. 322

⁶⁶Vgl. Dedekind (ebd.): S. 317

⁶⁷Cantor (1872): S. 128

⁶⁸Dieser Aspekt wird bei der Behandlung der Kategorizität in Kapitel 9 erneut aufgegriffen.

2.2.3 Die Schnitttheorie

Durch die Einteilung der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ anhand einer rationalen Zahl q in zwei Teilmengen U_q und O_q erhalten wir das Dupel (U_q, O_q) . Dieses Dupel ist nicht eindeutig bestimmt, da die Grenzzahl q selbst entweder der Teilmenge U_q oder der Teilmenge O_q zugeordnet werden kann. Es gibt somit für jede rationale Zahl q zwei mögliche Varianten des Dupels (U_q, O_q) . In der Ersten besitzt die Teilmenge U_q ein größtes Element und in der Zweiten besitzt die Teilmenge O_q ein kleinstes Element. Die Ordnung der rationalen Zahlen erlaubt es Dedekind, die Elemente dieser zwei Teilmengen in Relation zu setzen. Jedes Element der Teilmenge U_q ist trivialerweise kleiner als jedes Element der Teilmenge O_q .

Um die erwähnte Zweideutigkeit zu vermeiden, definieren wir das Dupel (U_r, O_r) für jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ eindeutig mit⁶⁹

$$U_r := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$$

$$O_r := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq r\}.$$

Für jede rationale Zahl r bezeichnen wir das derart definierte Dupel (U_r, O_r) als Dedekindschnitt (oder kurz Schnitt) für r . Durch den Ausschluss der Zweideutigkeit mittels Definition existiert offensichtlich eine bijektive Abbildung aus der Menge der rationalen Zahlen in die Menge der (rationalen) Dedekindschnitte.⁷⁰

Die obige Definition definiert die rationalen Dedekindschnitte. Allgemein und somit unabhängig von der Existenz einer rationalen Zahl r kann der Dedekindschnitt (U_α, O_α) als eine Zweiteilung der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ in zwei nichtleere Teilmengen U_α und O_α mit folgenden zwei Eigenschaften definiert werden:⁷¹

- (1) U_α hat kein Maximum
- (2) $\forall p \in U_\alpha \forall q \in O_\alpha : p < q$

Bemerken wir nun den Unterschied zwischen dieser allgemeinen Definition eines Schnittes und der ersten Definition eines rationalen Schnittes. Im Fall, dass die Teilmenge O_α ein kleinstes Element besitzt, haben wir es mit einem rationalen Schnitt zu tun. Dieser wird durch eine rationale Zahl *hervorgebracht*.⁷²

Die Frage, die sich stellt, ist, ob es tatsächlich Schnitte gibt, die nicht durch rationale Zahlen hervorgebracht werden. Dedekind verweist zu diesem Zweck auf eine Partitionierung der rationalen Zahlen auf Basis von irrationalen Quadratwurzeln. Betrachten wir den Schnitt (U_α, O_α) mit

$$U_\alpha := \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 < 2\}$$

$$O_\alpha := \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \wedge q^2 > 2\}$$

⁶⁹Wir wählen hier eine moderne Darstellungsform um den späteren Beweis der Äquivalenz der Dedekind-Vollständigkeit und des Vollständigkeitsaxioms vorzubereiten. Vergleiche hierzu Dedekind (1872a): S. 323f.

⁷⁰Dedekind bemerkt ebenfalls, dass die Zuordnung der Zahl q zu der einen oder anderen Teilmenge keinen wesentlichen Unterschied macht. Siehe Dedekind (ebd.): S. 323

⁷¹Dedekind nennt die zweite Eigenschaft die *charakteristische Eigenschaft* der Einteilung. Vergleiche dazu Dedekind (ebd.): S. 323.

⁷²Vgl. Dedekind (ebd.): S. 324f

Da O_α kein kleinstes Element besitzt, existiert keine rationale Zahl, die diesen Schnitt hervorbringt. Dennoch erfüllt das Dupel (U_α, O_α) die allgemeine Definition des Schnittes. Somit existieren (unendlich viele) Schnitte, die nicht durch rationale Zahlen hervorgebracht werden. Diese nennt Dedekind *irrationale Schnitte*.⁷³

Nun kommen wir zu einem wesentlichen Aspekt von Dedekinds Konstruktion der reellen Zahlen - ihrer eigentlichen *Schöpfung*. Wir geben den relevanten Absatz wieder.⁷⁴

*„In dieser Eigenschaft, daß nicht alle Schnitte durch rationale Zahlen hervorgebracht werden, besteht die Unvollständigkeit oder Unstetigkeit des Gebietes R aller rationalen Zahlen. Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so **erschaffen** wir eine neue, eine **irrationale Zahl** α , welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen; wir werden sagen, daß die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt. Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl und wir sehen zwei Zahlen stets und nur dann als verschieden oder ungleich an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen.“* [Hervorhebung E. B.]

Während in der Geometrie die Stetigkeit und somit die Vollständigkeit der Geraden axiomatisch eingeführt werden musste, definiert Dedekind in **SZ** den allgemeinen Begriff des Schnittes. Die *Schöpfung* der irrationalen Zahlen im obigen Absatz ist ein zusätzlicher Abstraktionsschritt. Rationale und irrationale Zahlen sind durch ihre Schnitte „vollständig definiert“. ⁷⁵ Ihrem Wesen nach entsprechen sie ihren Schnitten, sind ihnen jedoch nicht gleichzusetzen. Wir kommen auf diesen Standpunkt in Kapitel 9 zurück.

Ungeachtet des bisher Gesagten, muss Dedekind die *Wohldefiniertheit* seiner Zahlen sicherstellen. Wir haben festgestellt, dass irrationale Schnitte existieren. Zu zeigen ist somit noch die Eindeutigkeit der Konstruktion. Im zweiten Teil von **§5** beweist er folgenden Satz:⁷⁶

„IV. Zerfällt die Menge $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Teilmengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ von der Art, dass jede Zahl α_1 der Teilmenge $\mathfrak{A}_1$ kleiner ist als jede Zahl α_2 der Teilmenge $\mathfrak{A}_2$, so existiert eine und nur eine Zahl α , durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.“

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus der Dichte der rationalen Zahlen oder genauer gesagt dem archimedischen Axiom, das Dedekind nicht namentlich nennt.

In **§6** werden einige Rechenoperationen mit reellen Zahlen eingeführt. Damit wird der Forderung (ii) auf Seite 37 Genüge getan. Zuletzt zeigt Dedekind noch in **§7** das Kriterium der monotonen Konvergenz, um auch die Anwendbarkeit seiner Konstruktion auf die Differential- und Integralrechnung zu belegen. Das Kriterium der monotonen Konvergenz besagt, dass eine monoton wachsende oder fallende Folge genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist. Eine solche Folge hat also nur dann einen Grenzwert, wenn sie durch eine obere oder untere Schranke begrenzt wird. Er macht in diesem Zusammenhang eine wichtige Bemerkung:⁷⁷

„Dieser Satz ist äquivalent mit dem Prinzip der Stetigkeit, d. h. er verliert seine Gültigkeit, sobald man auch nur eine reelle Zahl in dem Gebiete $\mathfrak{R}$ als nicht vorhanden ansieht; oder anders ausgedrückt: ist dieser Satz richtig, so ist auch der Satz IV in § 5 richtig.“

⁷³Vgl. Dedekind (1872a): S. 325

⁷⁴Dedekind (ebd.): S. 325

⁷⁵Vgl. Dedekind (ebd.): S. 325

⁷⁶Dedekind (ebd.): S. 329

⁷⁷Dedekind (ebd.): S. 332

Die heute für jeden Mathematiker verständliche Behauptung war zu Dedekinds Zeit nicht ohne Weiteres erkennbar. Obwohl die Vollständigkeit der reellen Zahlen bereits vor Dedekind allgemeiner Grundsatz der Analysis war, hat er es als einer der Ersten geschafft, diese Vollständigkeit für eine Begründung der reellen Zahlen selbst zu nutzen.

2.2.4 Dedekind-Vollständigkeit und Supremumseigenschaft

An dieser Stelle ist ein kleiner Exkurs erforderlich, um die Zusammenhänge zwischen der Dedekind-Vollständigkeit, wie hier definiert, und dem Vollständigkeitsaxiom in seiner modernen Ausprägung zu verdeutlichen. Wir greifen dazu Kapitel 4 vor und zitieren Dedekinds Korrespondenz mit Lipschitz in Bezug auf **SZ**:⁷⁸

„[...] Begriff des stetigen d.h. denkbar vollständigsten Grössen-Gebietes, dessen Wesen in der Eigenschaft besteht: ,zerfallen alle Grössen eines stetig abgestuften Grössen-Gebietes in zwei Classen von der Art, dass jede Grösse der ersten Classe kleiner ist als jede Grösse der zweiten Classe, **so existirt entweder in der ersten Classe eine grösste, oder in der zweiten Classe eine kleinste Grösse**‘. Wenn diese Eigenschaft nicht ausdrücklich in den Begriff des Grössen-Gebietes aufgenommen wird, so bleibt auch das zugehörige Zahlen-Gebiet unvollständig, und es sind schon deshalb allgemein-gültige Definitionen der arithmetischen Operationen geradezu unmöglich [...]“ [Hervorhebung E. B.]

In diesem Brief verteidigt Dedekind gegenüber Lipschitz sein Vorgehen in **SZ**. Wir sehen, dass das hier erwähnte Vollständigkeitskriterium nicht ohne Weiteres aus dem bisher Gesagten abgeleitet werden kann. Offensichtlich haben wir es hier mit zwei unterschiedlichen Definitionen der Stetigkeit der reellen Zahlen zu tun. Durch die *Schöpfung* der irrationalen Zahlen in **SZ** vollzieht Dedekind das, was wir heute die Dedekind-Vervollständigung einer linearen Ordnung bezeichnen.⁷⁹ Das im Brief erwähnte Kriterium für die Vollständigkeit der reellen Zahlen (genauer gesagt ihre Stetigkeit) ist dagegen die Supremumseigenschaft. Demnach besitzt jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen ein Supremum. Es kann gezeigt werden, dass die Supremumseigenschaft mit der Dedekind-Vervollständigung äquivalent ist.⁸⁰

Betrachten wir zu diesem Zweck eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ und zeigen im Kontext der Dedekindschnitte, dass diese ein Supremum besitzt. Wir zeigen, dass

$$s := \left(\bigcup_{\alpha \in M} U_\alpha, \bigcap_{\alpha \in M} O_\alpha \right)$$

die gesuchte Zahl ist. Der erste Schritt besteht darin, zu zeigen, dass s ein Schnitt ist, indem die beiden Eigenschaften für Schnitte bewiesen werden. Gemäß der ersten Eigenschaft haben die Mengen U_α für sämtliche α 's kein größtes Element. Demnach wird auch die Menge $\bigcup_{\alpha \in M} U_\alpha$ kein größtes Element besitzen. Somit wäre die erste Eigenschaft erfüllt.

Betrachten wir nun ein beliebiges $x \in U_s$ und ein beliebiges $y \in O_s$. Für die zweite Eigenschaft ist es notwendig zu zeigen, dass x stets kleiner als y ist. Die Konstruktion der Zahl s stellt dies sicher, denn $x \in \bigcup_{\alpha \in M} U_\alpha$ bedeutet, dass es ein $\bar{\alpha} \in M$ gibt, sodass $x \in U_{\bar{\alpha}}$ ist. Zudem wird y in jeder Menge O_α mit $\alpha \in M$ enthalten sein und somit auch in $O_{\bar{\alpha}}$. Demnach überträgt der

⁷⁸Lipschitz (1986): S. 67f; Brief Dedekind an Lipschitz vom 10. Juni 1876.

⁷⁹Vgl. Deiser (2004): S. 386

⁸⁰Vergleiche für die folgenden Ausführungen etwa Kaltenböck (2015): S. 55.

Schnitt $(U_{\bar{\alpha}}, O_{\bar{\alpha}})$ seine Ordnung auf x und y und wir erhalten $x < y$. Damit ist auch die zweite Eigenschaft erfüllt und s stellt einen Schnitt dar.

Zu zeigen ist nun, dass s eine obere Schranke von M ist und zugleich die kleinste solche Schranke. Ersteres folgt aus der Definition von U_s als Vereinigung aller unteren Mengen der Elemente aus M . Nehmen wir nun an, s ist nicht die kleinste obere Schranke von M und es gibt ein $\bar{s}$, das kleiner ist. In diesem Fall ist für alle α die untere Menge U_{α} eine Teilmenge von $U_{\bar{s}}$. Daraus folgt jedoch

$$U_s = \bigcup_{\alpha \in M} U_{\alpha} \subseteq U_{\bar{s}}.$$

Es folgt unmittelbar, dass $s \leq \bar{s}$, was einen Widerspruch darstellt. Demnach ist s die kleinste obere Schranke der Menge M und somit ihr Supremum. Auch aus der Existenz eines Supremums kann trivialerweise die Dedekind-Vollständigkeit gezeigt werden. Die Dedekind-Vollständigkeit ist deshalb äquivalent zur Supremumseigenschaft oder dem Vollständigkeitsaxiom:

$$\boxed{\text{Dedekind-Vollständigkeit}} \Leftrightarrow \boxed{\text{Vollständigkeitsaxiom}}$$

Dedekind-Vollständigkeit, Supremumseigenschaft und Vollständigkeitsaxiom werden deshalb im Fortgang der Arbeit, wenn nichts anderes gesagt wird, synonym verwendet.

2.3 Grundlegung der Arithmetik

Das Vorwort der ersten Auflage von **WZ** enthält bereits auf der ersten Seite eine prägnante Rekapitulation jener Grundsätze, die wir auf Seite 34 unter dem Begriff des *harten Kerns* von Dedekinds Forschungsprogramm zusammengefasst haben. Im Zentrum steht die Forderung, dass alles, was in der Mathematik beweisbar ist, auch tatsächlich nur auf Grundlage eines Beweises akzeptiert werden darf. Für Dedekind ergibt sich daraus die methodische Konsequenz, dass sämtliche Sätze der Arithmetik einer strengen Beweisführung unterzogen werden müssen. Diese Beweisführung hat sich auf logisch definierte Begriffe zu stützen und darf keinerlei Rückgriff auf räumliche oder zeitliche Anschauung nehmen. Ziel ist ein systematischer und in sich geschlossener Aufbau der Wissenschaft von den Zahlen, der vollständig auf einer begrifflich-logischen Grundlage ruht. Den wesentlichen Schritt in diesem Aufbau vollzieht Dedekind in **WZ** indem er die natürlichen Zahlen mittels infinitärer Mengenlehre und einem allgemeinen Abbildungsbegriff definiert:

*„Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen **Teil der Logik** nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich **unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit**, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte. Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind **freie Schöpfungen des menschlichen Geistes**, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlen-Reich beziehen.“* [Hervorhebungen E. B.]

WZ stellt für Dedekind einen zentralen Meilenstein in der Entwicklung seiner arithmetischen

2.3.1 Der Stellenwert der Kettentheorie

Aufbauend auf einer naiven infinitistischen Mengenlehre und einem allgemeinen Abbildungsbegriff etabliert Dedekind in **WZ** die Kettentheorie. Der Begriff der Kette wird dabei in §4 definiert.⁸⁶ Dieser Abschnitt trägt den Titel *Abbildungen einer Menge in sich selbst*. Das Hauptaugenmerk liegt folglich auf Abbildungen, die eine gegebene Menge wiederum in dieselbe Menge abbilden. Eine Abbildung φ bildet eine Menge S in sich selbst ab, falls folgender Zusammenhang gilt:⁸⁷

$$\varphi(S) \subseteq S.$$

Wir sagen dann, dass die Abbildung φ eine *In-sich-Abbildung* für die Menge S ist.

Auf Grundlage dieser Definition lässt sich der Begriff der Kette präzise formulieren. Dedekind versteht unter einer Kette **eine Menge** K deren Abbildung $\varphi(K)$ eine Teilmenge der Menge K selbst ist. Er hebt hervor, dass die Frage, ob eine Menge $K \subseteq S$ eine Kette sei oder nicht, nur hinsichtlich der Beschaffenheit von K und der Abbildung φ geklärt werden kann.⁸⁸ Eine Kette zu sein, ist daher keine intrinsische Eigenschaft der Menge K . Für eine bestimmte Abbildung φ kann eine bestimmte Menge $K \subseteq S$ eine Kette sein oder auch nicht. Wir zeigen dies anhand eines einfachen Beispiels. Es sei

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto 2n + 1$$

und die folgenden zwei Mengen gegeben:

$$G := \{2n | n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad U := \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

Zunächst ist festzustellen, dass die Abbildung φ eine *In-sich-Abbildung* ist. Tatsächlich folgt aus ihrer Definition augenscheinlich $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Erst, wenn eine *In-sich-Abbildung* für die Grundmenge vorliegt, ist es sinnvoll zu untersuchen, ob Teilmengen dieser Grundmenge Ketten sind oder nicht.⁸⁹ Betrachten wir nun die Mengen $G \subseteq \mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{N}$.

Hinsichtlich der Abbildung φ ist die Menge U eine Kette und die Menge G keine Kette. Die Bildmenge der Abbildung φ ist die Menge der ungeraden Zahlen (ohne 1) und hat mit der Menge G keine gemeinsamen Elemente. Es gilt $\varphi(G) \not\subseteq G$ jedoch $\varphi(U) \subseteq U$.

Betrachten wir nun die Abbildung $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto 2n$. Auch diese Abbildung ist eine *In-sich-Abbildung* für die Grundmenge $\mathbb{N}$. Wir bemerken jedoch, dass im Falle dieser Abbildung die Menge G eine Kette ist und die Menge U dagegen keine Kette.

Dieses Beispiel kann zur Annahme verleiten, dass Ketten definitionsgemäß unendliche Mengen sind. Ketten müssen jedoch nicht unendliche Mengen sein, sie müssen lediglich mit der

⁸⁶Den Begriff *Kette* nutzt Dedekind jedoch auch an einer anderer Stelle. Neben den in Kapitel 2.3 erwähnten Vorarbeiten finden wir den Begriff auch in **SZ** wieder, jedoch in einem allgemeinen Kontext bezogen auch auf die Reihe der natürlichen Zahlen. Vgl. Dedekind (1872a): S. 318

⁸⁷Vgl. Dedekind (1888): S. 352; Wie in Abschnitt 1.4 bereits angemerkt, unterscheidet Dedekind nicht zwischen der allgemeinen Inklusion ($\subseteq$) und der echten Inklusion ($\subset$) und bezeichnet beide Relationen mit '3'. Aus dem Zusammenhang ist jedoch zu schließen, dass er die allgemeine Inklusion meint. Wir werden in den folgenden Ausführungen (auch bei wörtlichen Zitaten) diese Unterscheidung jedoch treffen. Der Leser ist auch Dedekind (ebd.) verwiesen.

⁸⁸Vgl. Dedekind (ebd.): S. 352

⁸⁹Dies wird vor allem in Beweis des Satzes der vollständigen Induktion in #59 relevant sein.

Abbildung φ einen **unendlichen Abbildungsprozess** ermöglichen können. Somit sind auch zirkuläre Konstruktionen denkbar, wie die Abbildung 2.4 zeigt:

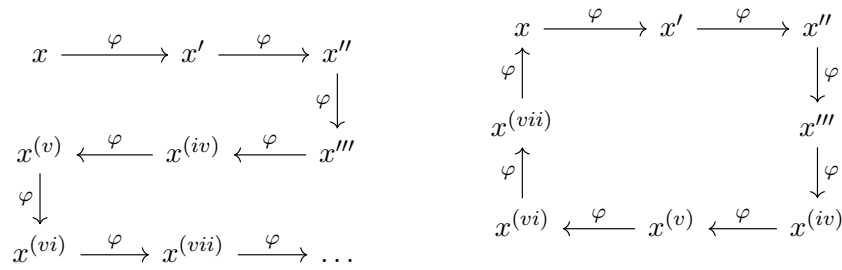


Abbildung 2.4: Beispiele für unendliche und endliche Ketten

Wir halten also fest: Eine Kette ist eine hinsichtlich einer bestimmten Abbildung *invariante Menge*. Diese Invarianz ist dahingehend zu relativieren, dass $\varphi(K)$ nicht unbedingt K entspricht, sondern ebenso eine Untermenge von K darstellen kann. Will man die Menge aller Ketten einer Grundmenge S formal beschreiben, so wäre dies in moderner Notation folgendermaßen möglich:

$$K \in S_K :\Leftrightarrow \exists \varphi (\varphi : S \rightarrow S \wedge K \subseteq S \wedge \varphi(K) \subseteq K)$$

Eine Menge K ist Element der Menge aller Ketten über S (bezeichnet als S_K) im Falle, dass eine Abbildung φ existiert, die K in sich selbst abbildet.

Die Kettentheorie bildet das zentrale methodische Instrument in Dedekinds Schrift dar. Wir wenden uns deshalb der Frage zu, aus welchem Grund Dedekind die Kettentheorie überhaupt einführt. Eines der Anliegen Dedekinds in **WZ** besteht in der Bestimmung der charakteristischen Merkmale⁹⁰ einfach unendlicher Mengen. Gemäß #71 besteht das *Wesen* einer einfach (abzählbar) unendlichen Menge $\mathcal{N}$ in der Existenz einer Abbildung φ von $\mathcal{N}$ und eines Elementes 1, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\alpha. \varphi(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$$

$$\beta. \mathcal{N} = 1_0, \mathcal{N} \text{ ist die Kette der Menge } \{1\}.$$

$$\gamma. 1 \notin \varphi(\mathcal{N})$$

$$\delta. \varphi \text{ ist ähnlich}$$

Wie Sieg und Morris (2018) hervorheben, handelt es sich dabei nicht um die Definition einer konkreten Struktur im Sinne der modernen Modelltheorie, da weder das Grundelement noch die Nachfolgerfunktion explizit angegeben werden. Stattdessen sind beide lediglich existenziell quantifiziert. Ein System von Objekten $\mathcal{N}$ wird als einfach unendlich bezeichnet, wenn es innerhalb dieses Systems ein Element $1 \in \mathcal{N}$ sowie eine Abbildung $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ gibt, die bestimmte charakteristische Eigenschaften erfüllen. Dedekind formuliert damit eine Definition höherer Ordnung, die nicht auf eine bestimmte Konstruktion abzielt, sondern eine strukturelle Beschreibung liefert, unter die konkrete einfach unendliche Systeme als Ausprägungen fallen.⁹¹

⁹⁰Siehe #72.

⁹¹Vgl. Sieg und Morris (2018): S. 6

Zu diesem Zweck führt er eine Analyse des naiven Verständnisses der natürlichen Zahlen durch. Es ist nicht von ungefähr, dass der Untertitel des Erstentwurfs von **WZ** aus dem Zeitraum 1872 bis 1878 „*Versuch einer Analyse der Zahl-Begriffs vom naiven Standpunkte aus*“ lautet.⁹² Wie er im Brief an Keferstein ausführt, sieht er die Kettentheorie als wesentlichen Bestandteil dieser Bestimmung an. Mithilfe dieser kann Dedekind die Zirkularität der Bestimmung der natürlichen Zahlen umgehen.

Er bemerkt dort, dass eine naive Definition einer Zahlenreihe den Grundbegriff der natürlichen Zahlen meist voraussetzt. Eine Charakterisierung im Sinne von ‚*eine Zahl ist natürlich, falls ich, ausgehend von 1 durch ein Weiterzählen, früher oder später zu ihr gelange*‘ birgt einen Zirkelschluss. Indem die Kettentheorie über den Hüllenoperator $(*)_0$ das jeweilige System von fremden Elementen reinigt, ermöglicht sie erst die Wesensbestimmung der natürlichen Zahlen. Die Kettentheorie filtert jene Eigenschaften der Reihe der natürlichen Zahlen, die sie von beliebigen unendlichen Systemen unterscheidet. Für Dedekind ist sie das Mittel, mit dem eine Charakterisierung der Reihe der natürlichen Zahlen erfolgreich vollendet werden kann. Wir zitieren einen Ausschnitt aus dem erwähnten Brief an Keferstein:⁹³

„Alle diese Thatsachen wurden auch noch für jedes System $\mathcal{S}$ gelten, welches außer der Zahlenreihe $\mathcal{N}$ noch ein System $\mathcal{T}$ von beliebigen anderen Elementen t enthält, auf welches die Abbildung φ sich stets so ausdehnen läßt, daß sie den Charakter der Ähnlichkeit behält, und daß $\varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ wird. Aber ein solches System $\mathcal{S}$ ist offenbar etwas ganz Anderes, als unsere Zahlenreihe $\mathcal{N}$, und ich könnte es so wählen, daß in ihm kaum ein einziger der arithmetischen Sätze bestehen bliebe. Was muß also zu den bisherigen Thatsachen noch hinzu kommen, um unser System $\mathcal{S}$ von solchen fremden, alle Ordnung **störenden Eindringlingen** t wieder zu reinigen und auf $\mathcal{N}$ zu beschränken?“ [Hervorhebung E. B.]

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir die Menge

$$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \triangle, \diamond, \square, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{\triangle, \diamond, \square\}$$

und definieren die Abbildung $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ mit

$$\varphi(n) = \begin{cases} n+1 & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

In $\langle \mathbb{N}^*, \varphi, 1 \rangle$ einer derart definierten *Nachfolgerfunktion* φ ist die Geltung der üblichen arithmetischen Gesetze nicht mehr gegeben. Die Kettentheorie verhindert jedoch, dass $\mathbb{N}^*$ als System der natürlichen Zahlen aufgefasst wird, obwohl drei der vier Axiome erfüllt sind. Denn es gilt $\varphi(\mathbb{N}^*) \subseteq \mathbb{N}^*$, φ ist eine injektive Funktion und $1 \notin \varphi(\mathbb{N}^*)$. Erst das letzte Axiom (β) kann, ausgehend von der Kettentheorie, $\mathbb{N}^*$ ausschließen. Denn offensichtlich ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}^*$ eine Kette, die 1 enthält. Die Gleichsetzung von 1_0 mit N bewirkt somit eine *Reinigung* von $\mathbb{N}^*$ von den fremden Elementen $\{\triangle, \diamond, \square\}$. Die Einführung des topologischen Hüllenoperators $(*)_0$ stellt folglich den wesentlichen Faktor für den Erfolg der Wesensbestimmung der natürlichen Zahlen bei Dedekind dar. Sie ermöglicht es Dedekind, die späteren unendlichen Mengen als Modelle der natürlichen Zahlen überhaupt zu formulieren.

⁹²Vgl. Dugac (1976): S. 293

⁹³Vgl. Müller-Stach (2017): S. 186; Hervorhebung E. B.

Dem Operator $(*)_0$ kommt somit in der Systematik von **WZ** eine wesentliche Bedeutung zu. Dedekind definiert die *Kette einer Menge* A als

$$A_0 := \bigcap \{K \subseteq S \mid A \subseteq K \wedge K \text{ ist eine Kette}\}$$

Dies ist somit eine Art Minimalkette für eine gegebene Menge A . Trivialerweise ist diese Menge selbst eine Kette. Sie bietet das notwendige Instrumentarium, um die *störenden Eindringlinge* $\Delta, \diamond, \square$ herauszufiltern.

Die Bedeutung der Kettentheorie hatte Dedekind auch in seinem unveröffentlichten Aufsatz „Über den Begriff des Unendlichen“, der als Antwort auf Kefersteins Rezension „Über den Begriff der Zahl“ im Jahr 1890 verfasst wurde, klargestellt.⁹⁴ Keferstein hatte in seiner Rezension versucht, die Kettentheorie durch eine Umformulierung der Definition #71 zu umgehen, indem er die Bedingung β ($\mathcal{N} = 1_0$) auslässt. Obiges Gegenbeispiel basiert auf Dedekinds Antwort, wieso diese Vereinfachung unzulässig ist. Abschließen schreibt er:⁹⁵

„[...] er hat geglaubt, meine Definition des einfach unendlichen Systems durch Vermeidung des Begriffs der **Kette**, welcher freilich mit den dazu gehörigen wichtigsten Folgerungen eine Erklärung von grosser Ausdehnung erfordert (D. 36–60), nur in etwas veränderter, offenbar vereinfachter Form wiederzugeben, ohne damit den Inhalt zu treffen. Er würde gewiss den hierin liegenden grossen Irrtum und die Unentbehrlichkeit des Begriffs der Kette erkannt haben, wenn er einmal versucht hätte, auf Grund seiner Definition die Gesetze der Zahlenreihe streng abzuleiten, was nach dem Obigen ganz unmöglich ist.“ [Hervorhebung durch Autor]

Dennoch ist hervorzuheben, dass die Kettentheorie für sich genommen nicht ausreicht, um die Definition der arithmetischen Gesetze vollständig zu gewährleisten. Das zuvor angeführte Beispiel könnte leicht den Eindruck erwecken, mit der Einführung der Minimalkette sei bereits das Ziel erreicht. Dieser Eindruck resultiert jedoch ausschließlich daraus, dass in dem genannten Beispiel sowohl $\mathbb{N}^*$ als auch $\mathbb{N}$ unendliche Mengen darstellen. Dem Hinweis, dass Ketten nicht nur unendliche, sondern auch endliche Mengen sein können, ist dabei ausschlaggebend. In der Systematik von **WZ** kann dies am Beispiel der vollständigen Induktion verdeutlicht werden.

In #59 formuliert Dedekind den *Satz der vollständigen Induktion*. Die Elemente von A_0 erfüllen die entsprechende Eigenschaft, sprich $A_0 \subseteq \Sigma$ ⁹⁶ wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:⁹⁷

- $A \subseteq \Sigma$
- $\varphi(A_0 \cap \Sigma) \subseteq \Sigma$

Man kann also sagen, dass die Elemente der Kette A_0 eine gewisse Eigenschaft erfüllen, falls sowohl die Elemente der Menge A als auch die Elemente der Menge $\varphi(A_0 \cap \Sigma)$ diese Eigenschaft erfüllen. Da $A_0 \cap \Sigma$ aufgrund des ersten Punktes nicht leer sein kann, ist das zugrundeliegende Prinzip wohldefiniert. In #80 findet sich die Formulierung des Satzes für Zahlenketten. Durch die Abstraktionsleistung in #73 erhielt Dedekind aus der Definition #71 einfach unendlicher

⁹⁴Für eine historische Einordnung siehe Anhang C.

⁹⁵Sinaceur und Dedekind (1974): S. 265f

⁹⁶Dedekind benutzt das Symbol ‚3‘ sowohl für die Mengeninklusion als auch die Elementrelation. Mit Ausnahme von wörtlichen Zitaten verwenden wir sinngemäß die moderne Symbolik.

⁹⁷Vgl. Dedekind (1888): S. 354f

Systeme die *Elemente der natürlichen Zahlen*, für die nun in #80 der Satz der vollständigen Induktion ausgehend vom allgemeinen Satz #59 gezeigt wird. Wir haben es in #80 somit mit einer unendlichen Kette zutun, während in #59 auch endliche Ketten möglich sind.

Für die Definition der arithmetischen Gesetze benötigt Dedekind nun den Rekursionssatz aus #126. Dieser ist jedoch nicht direkt das Ergebnis der erwähnten Sätze der vollständigen Induktion. Dedekind verdeutlicht dies in der Bemerkung #130 indem er ein Gegenbeispiel nennt. Der Satz #126 besagt Folgendes: Es sei ein System Ω gegeben, eine (nicht notwendig bijektive) Abbildung $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ und ω ein bestimmtes Element aus Ω . Dann gibt es genau eine Abbildung $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \Omega$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\psi(\mathcal{N}) \subseteq \Omega$
2. $\psi(1) = \omega$
3. $\psi(\varphi(n)) = \theta(\psi(n))$ mit $n \in \mathcal{N}$.

Die folgende Abbildung gibt diesen Zusammenhang wider:⁹⁸

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(1) & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(\varphi(1)) & \xrightarrow{\varphi} & \dots \xrightarrow{\varphi} \varphi^{(n)}(1) \xrightarrow{\varphi} \dots \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \omega & \xrightarrow{\theta} & \theta(\omega) & \xrightarrow{\theta} & \theta(\theta(\omega)) & \xrightarrow{\theta} & \dots \xrightarrow{\theta} \theta^{(n)}(\omega) \xrightarrow{\theta} \dots
 \end{array}$$

Abbildung 2.5: Der Rekursionssatz

Während somit Satz #59 eine allgemeine Aussage über Ketten trifft, behauptet Satz #126 die Existenz einer Abbildung ψ mit den oben genannten Eigenschaften. Die Existenz einer solchen Abbildung ist nicht selbstverständlich und folgt nicht notwendigerweise aus dem Satz der vollständigen Induktion. Durch eine zirkuläre *In-sich-Abbildungen* für zwei endliche Mengen kann Dedekind dies in Bemerkung #130 vorführen.

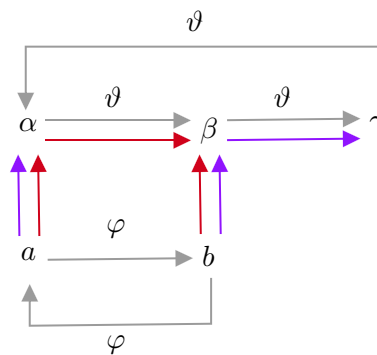


Abbildung 2.6: Dedekinds Gegenbeispiel zu #126

Es seien die Menge $S = \{a, b\}$ sowie $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ mit den *In-sich-Abbildungen* φ und θ mit $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$ sowie $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \gamma$, $\theta(\gamma) = \alpha$ gegeben. Mit diesem Beispiel zeigt Dedekind, dass es möglich ist, eine Abbildung zu formulieren, die die Bedingungen aus #126

⁹⁸Vgl. Sieg und Morris (2018): S. 269

nicht erfüllt beziehungsweise zu einem Widerspruch führt. Die folgende Abbildung illustriert eine derartige Abbildung ψ . Es gilt $\psi(a) = \alpha$ und $\psi(b) = \beta$ jedoch

$$\psi(\varphi(b)) = \psi(a) = \alpha \neq \beta = \theta(\alpha) = \theta(\psi(a))$$

was ein Widerspruch darstellt.

Die Kettentheorie erweist sich bei Dedekind als ein zentrales methodisches Instrument zur Definition einfach unendlicher Mengen. Sie erlaubt es, die natürlichen Zahlen so zu bestimmen, dass ihre Eigenschaften nicht schon implizit in den Voraussetzungen enthalten sind. Die Ableitung des Rekursionssatzes sowie weiterer zentraler Ergebnisse beruht dabei nicht allein auf den allgemeinen Prinzipien der Kettentheorie, sondern setzt wesentlich den Begriff unendlicher Mengen voraus. Um die Gültigkeit dieser Ableitungen auf eine tragfähige Grundlage zu stellen, hält Dedekind es für unerlässlich, die Existenz unendlicher Mengen unabhängig zu begründen.

2.3.2 Die Existenz unendlicher Mengen

Dedekind nennt (in §5) eine Menge unendlich, falls das Bild einer bijektiven Abbildung dieser eine Teilmenge der Menge selbst ist. Dies ist gleichbedeutend mit dem Umstand, dass eine injektive, jedoch nicht surjektive Abbildung für die Gesamtmenge existiert. Falls eine derartige Abbildung nicht existiert, ist die Menge endlich. Der wesentliche Teil des §5 ist der Beweis der Existenz von unendlichen Mengen. Für Dedekind ist dies kein Axiom, sondern ein Satz, dessen Beweis er folgendermaßen formuliert:⁹⁹

*„Meine **Gedankenwelt**, d.h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich. Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der Gedanke s' daß s Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S , Sieht man dasselbe als Bild $\varphi(s)$ des Elementes s an, so hat daher die hierdurch bestimmte Abbildung φ von S die Eigenschaft, daß das Bild S' Teil von S ist; und zwar ist S' echter Teil von S , weil es in S Elemente gibt (z. B. mein eigenes Ich), welche von jedem solchen Gedanken s' verschieden und deshalb nicht in S' enthalten sind. Endlich leuchtet ein, daß, wenn a, b verschiedene Elemente von S sind, auch ihre Bilder a', b' verschieden sind, daß also die Abbildung φ eine deutliche (ähnliche) ist (26). Mithin ist S endlich, w. z. b. w.“* [Hervorhebung E. B.]

Wieso benötigt Dedekind einen Beweis der Existenz einer unendlichen Menge? Allgemein gesehen ergibt sich die Notwendigkeit schon aus dem Motto von **WZ** wonach nichts, was beweisbar ist, ohne Beweis geglaubt werden darf.¹⁰⁰ Auch im Brief an Keferstein geht er auf diese Frage ein. Unter Punkt 7) schreibt er:¹⁰¹

„Nachdem in meiner Analyse der wesentliche Charakter des einfach unendlichen Systems, dessen abstrakter Typus die Zahlenreihe $\mathcal{N}$ ist, erkannt war (71, 73), fragte es sich: existiert überhaupt ein solches System in unserer Gedankenwelt? Ohne den logischen Existenz-Beweis würde es immer zweifelhaft bleiben, ob nicht der Begriff eines solchen Systems vielleicht innere Widersprüche enthält. Daher die Nothwendigkeit solcher Beweise (66, 72 meiner Schrift).“

Für Boolos (1990) ist der Beweis dieses Satzes eine der *ungewöhnlichsten Beweisführungen* in der Geschichte der Logik.¹⁰² Gehen wir näher auf diesen Beweis ein. Die Argumentation kann

⁹⁹Dedekind (1888): S. 357; Hervorhebung E. B.

¹⁰⁰Vgl. Dedekind (ebd.): S. 335; erster Satz. Dass diese Forderung tatsächlich programmatisch zu sehen ist, bezeugt ebenso ein Brief Dedekinds an Weber bereits aus dem Jahr 1878. Vgl. Sonar et al. (2014): S. 215.

¹⁰¹Müller-Stach (2017): S. 187

¹⁰²Das vollständige Zitat lautet:

in moderner Sprache auf folgende Punkte zusammengefasst werden:¹⁰³

1. S ist eine Menge
2. φ ist eine Abbildung von S auf S
3. φ ist injektiv
4. φ ist nicht surjektiv

Alle diese Punkte sind erklärungsbedürftig, allerdings bietet **WZ** wenig Klarstellendes. In Anlehnung an Klev (2018) wollen wir versuchen, Dedekinds Verständnis dieses Satzes aus dem Nachlass zu rekonstruieren.

Betrachten wir zunächst den Umstand, dass die *Gedankenwelt* S eine wohldefinierte Menge ist. Klev (ebd.) sieht hier eine Parallele zu Lotze, da auch dieser den Begriff der Gedankenwelt heranzieht.¹⁰⁴ Auf eine weitere mögliche Quelle wurde in Bezug auf Riemanns Nachlass bereits verwiesen. Hinsichtlich der restlichen Punkte ist Dedekinds Aufsatz „Über den Begriff des Unendlichen“ aus dem Jahr 1890 aufschlussreich. Er setzt sich in diesem erneut mit Kefersteins Brief auseinander und schreibt:¹⁰⁵

„**Zuerst** wird in dem Beweise eine bestimmte Abbildung φ des Systems S definiert; jedem Elemente s von S entspricht als zugehöriges Bild $s' = \varphi(s)$ der (in Form eines Satzes, Urtheiles auszusprechende) Gedanke: dieses Element s kann Gegenstand meines Denkens sein. Da nun, dieser Gedanke s' selbst wieder Gegenstand meines Denkens sein kann (— ich darf Z.B. von diesem Gedanken s' denken, dass er selbstverständlich ist, dass er ein Subjekt und ein Prädikat besitzt u.s.w. —), so ist s' ebenfalls ein Element von S (nach Definition von S), mithin ist das Bild $S' = \varphi(S)$ ein Teil von S (d.h. S wird durch φ in selbst abgebildet). **Zweitens:** mein Ich kann Gegenstand meines Denkens sein, ist also ein Element von S ; aber mein Ich ist doch nicht selbst ein Gedanke (nicht ein in Form eines Satzes ausdrückbares Urtheil mit bestimmtem Subjekt und Prädikat), er ist also verschieden von jedem obigen Bild s' , er ist also nicht in S' enthalten; mithin ist S' ein echter Teil von S (D. 6). **Drittens:** sind a und b verschiedene Elemente von S , so sind auch die Bilder a' und b' verschieden, weil der Gedanke a' von dem Subjekt a , der Gedanke b' aber nicht von dem Subjekt a , sondern von dem Subjekt b handelt; mithin ist φ eine ähnliche Abbildung von S (D. 26), also ist das System S ähnlich seinem echten Teile $S' = \varphi(S)$ (D. 32) und folglich ist S ein unendliches System (D. 64), w.z.b.w.“ [Hervorhebung E. B.]

Der erste Punkt ergibt sich für Dedekind aus dem Umstand, dass jegliche Gedanken wiederum Gegenstand des Denkens sein können. Die Abbildung des Denkens bildet deshalb die Gedankenwelt auf die Gedankenwelt ab. Diese Abbildung ist zwar injektiv, jedoch nicht surjektiv. Dedekind argumentiert dies damit, dass das *Ich* kein Gedanke ist.

Der obige Beweis war im Kontext der Russell-Zermelo-Paradoxie Gegenstand ausführlicher Kritik. Wie Noether bemerkte, war der Beweisgang die Grundlage für Zermelos „Axiom der Unendlichkeit“.¹⁰⁶ Auf einen möglichen Zusammenhang mit Bolzanos *Paradoxien des Unendlichen*

„One of the strangest pieces of argumentation in the history of logic is found in Richard Dedekind's *Was sind und was sollen die Zahlen?*, where, in the proof of that monograph's Theorem 66, Dedekind attempts to demonstrate the existence of infinite systems. Dedekind defines a system S as infinite if, as we would now put it, there are a one-one function φ from S to S and an element of S not in the range of φ .“

Siehe Boolos (1990): S. 71.

¹⁰³Vgl. Klev (2018): S. 244

¹⁰⁴Vgl. Klev (ebd.): S. 243

¹⁰⁵Vgl. Dedekind (1890): S. 262f; Hervorhebung E. B.

¹⁰⁶Vgl. Dedekind (1932): S. 391

haben wir bereits im letzten Kapitel hingewiesen. Inhaltlich unterscheidet sich Dedekinds Satz #66 von Bolzanos Beweis. Bolzano vertritt die Auffassung, die Gesamtheit aller „absoluten Sätze und Wahrheiten“ – bezeichnet als T – sei unendlich, und verweist dabei auf die strukturelle Ähnlichkeit zu der Reihe der natürlichen Zahlen. Er geht davon aus, dass es in T einen wahren Satz $t_1 \in T$ gibt, der nicht lediglich die Form „ t ist wahr“ besitzt, sowie ein Gesetz, das es erlaubt, aus gegebenen Sätzen neue Sätze zu gewinnen. Dieses Gesetz lässt sich als Abbildung $\varphi : T \rightarrow T$ interpretieren, wobei $\varphi(t) = \text{„}t \text{ ist wahr“}$ gilt. Dadurch entsteht eine Abbildung von T auf eine echte Teilmenge von sich selbst, also $\varphi(T) \subset T$. Aus diesem Sachverhalt folgert Bolzano, dass das System T müsse unendlich sein. Dedekinds Argumentation weist Ähnlichkeiten zu Bolzanos Beweis auf. In beiden Fällen beruht der Nachweis der Existenz einer unendlichen Menge auf der vorherigen Annahme einer umfassenden Totalität – sei es die Gesamtheit aller denkbaren Dinge oder die Gesamtheit aller absolut wahren Sätze. Ein wesentliches Merkmal Dedekinds besteht darin, den Beweis mengentheoretisch zu führen und unabhängig vom Begriff der natürlichen Zahlen, um so die Zirkularität in der späteren Ableitung der Reihe der natürlichen Zahlen zu vermeiden.

2.4 Strategien der Zahlenbereichserweiterungen

Lakatos charakterisiert ein Forschungsprogramm als eine strukturierte Abfolge wissenschaftlicher Theorien, die durch ein gemeinsames theoretisches Kernkonzept verbunden sind. Dieser „*harte Kern*“ wird durch einen „*Schutzgürtel*“ aus Hilfhypothesen abgeschirmt, der bei Bedarf angepasst werden kann, um das Programm gegen Falsifikation zu verteidigen.

Folgt man dieser Perspektive, so besteht der *harte Kern* des Forschungsprogramms Dedekinds aus drei Prinzipien: dem Anspruch auf strikte Beweisführung, der Ablehnung anschaulicher Begründungen in der Arithmetik sowie dem systematischen Streben nach begrifflicher Verallgemeinerung. Ein Streben, dass man auch in seinem Werk zur Algebra wie etwa der Theorie der Ideale beobachten kann.¹⁰⁷ Dieser harte Kern blieb während Dedekinds gesamter Schaffensperiode weitgehend beständig und bildete das epistemische Fundament seiner Philosophie der Mathematik.

Was sich jedoch im Laufe seiner Arbeit wandelte, war das, was Lakatos als den Schutzgürtel eines Forschungsprogramms bezeichnet: die konkreten Hilfhypothesen, formalen Werkzeuge und methodischen Zugänge, mit denen der harte Kern jeweils realisiert wurde. Die verschiedenen Strategien der Zahlenbereichserweiterungen sind ein solches Beispiel.

Während sich Dedekind in seinen frühen Arbeiten stark an den arithmetischen Operationen orientierte und diese als Ausgangspunkt für die Begriffsbildung nutzte, verlagerte sich sein methodischer Fokus im Laufe der Jahre zunehmend auf die Zahlenbereiche selbst. Vermutlich war es die von Sieg und Schlimm (2005) diagnostizierte Zirkularität in seinem Habilitationsvortrag gepaart mit der Lektüre von Hamiltons Vorlesungen, die bewirkt haben, dass Dedekind allmählich einen begrifflichen Zugang zu Zahlenbereichserweiterungen wählte. Bereits im Manuskript *Ganze und rationale Zahlen* konnten wir diese Veränderung beobachten. In einer späteren Schrift aus den 1890er Jahren, *Die Erweiterung des Zahlenbegriffs aufgrund der Reihe der natürlichen Zahlen*, begegnen wir einem ähnlichen Ansatz. Diesen Zugang nannten wir algebraisch, da er die

¹⁰⁷Eine ausführliche Untersuchung der Zusammenhänge zwischen dem algebraischen und dem grundlagentheoretischen Werk Dedekind bietet Haffner (2014).

Wesensbestimmung in einer Auseinandersetzung mit algebraischen Gesetzesmäßigkeiten verortet sah. Bei der Erweiterung der natürlichen auf die ganzen Zahlen und dieser auf die rationalen Zahlen ist Dedekinds Ansatz in abgewandelter Form bis heute gängig.

Bei der Erweiterung der rationalen auf die reellen Zahlen und bei der Begründung der natürlichen Zahlen konnte eine algebraische Wesensbestimmung allein nicht erfolgreich sein. Beide Zahlenbereiche entziehen sich, aus jeweils anderen Gründen, einer algebraischen Wesensbestimmung.

Strategien der Zahlenbereichserweiterungen

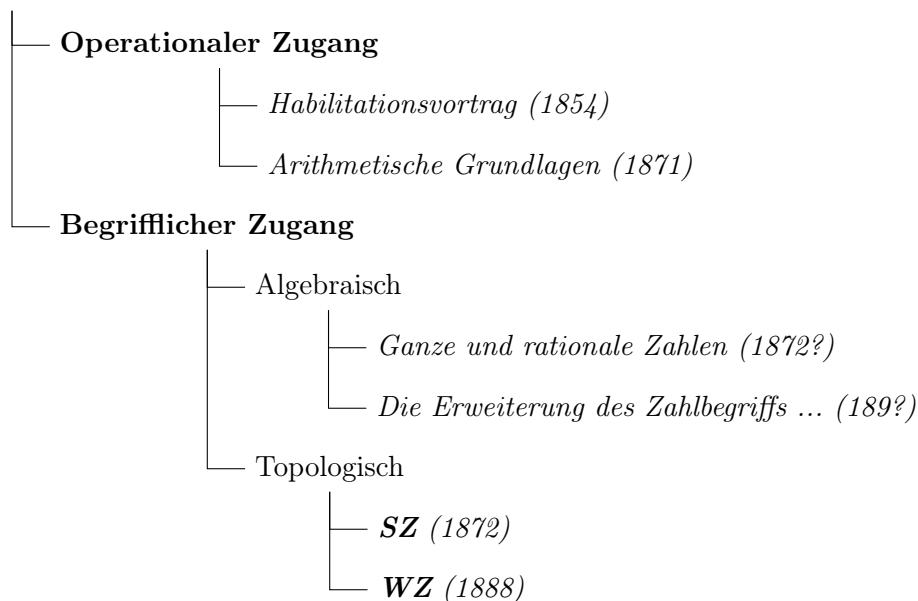


Abbildung 2.7: Strategien der Zahlenbereichserweiterung bei Dedekind

Bei den reellen Zahlen entziehen sich die transzendenten Zahlen definitionsgemäß einer algebraischen Erfassung. Es ist kein Zufall, dass sich Dedekind bereits in seinem Habitationsvortrag bei der Behandlung dieser Zahlen auf den Begriff der Grenze stützte. Doch erst Jahre später, im Kontext seiner Arbeiten an **SZ**, findet er einen Weg, die Wesensbestimmung für die reellen Zahlen zu vollziehen. Einen Eindruck davon bietet nicht nur das in **SZ** erwähnte Stetigkeitsaxiom, sondern auch das kurze Manuskript *Intervalle*, auf das wir in Kapitel 4 näher eingehen werden. Die grundlegende Eigenschaft, die die Menge der reellen Zahlen auszeichnet, ist ihr innerer Zusammenhang in topologischer Hinsicht.

Bei der Begründung der natürlichen Zahlen konnten algebraische Zusammenhänge ebenfalls alleine keine Wesensbestimmung vollbringen, ohne wiederum in einer zirkulären Argumentation zu münden. Die Wesensbestimmung erfolgt hier über die Kettentheorie. Diese Theorie ist jedoch viel mehr als eine einfache Kombination der Mengen- und Abbildungstheorie der ersten Paragraphen von **WZ**. In Kapitel 7 wird eine topologische Interpretation der Kettentheorie dargelegt. Sie zeigt überraschende Ähnlichkeiten zu späteren Arbeiten von Hausdorff (1914), Tietze (1923), Alexandroff (1925) und vor allem Kuratowski (1922). Der topologisch orientierte Begriffsansatz zur Zahlenbereichserweiterung wird in diesem Kapitel darüber hinaus im Rahmen einer umfas-

senderen topologischen Wende verortet.

Zum Abschluss sei noch auf die Rolle der *Arithmetisierung* bei Dedekind hingewiesen. Haffner (2014) argumentiert, dass die Charakterisierung des Begriffs durch Klein (1895) einen wesentlichen Aspekt bei Dedekind unberücksichtigt lässt. Demnach geht es Dedekind nicht nur um eine *logische Verschärfung* im Sinne einer strengen Begründung, sondern auch darum, den Untersuchungsgegenstand in eine *arithmetische Form zu bringen*.¹⁰⁸ Dabei meint Haffner (2014) nicht den Untersuchungsgegenstand in die Sphäre der Arithmetik zu überführen. Es geht vielmehr darum, die Arithmetik als epistemisches Werkzeug („*epistemic tool*“) zu verstehen. Die Arithmetisierung besteht folglich in einer methodischen Beschränkung auf die Mengentheorie und die rationale Arithmetik.

Diese Interpretation ist für weite Teile von Dedekinds Werk, insbesondere in Bezug auf seine algebraischen Arbeiten, zutreffend. Meines Erachtens lässt sich diese Einschätzung jedoch nicht uneingeschränkt auf seine grundagentheoretischen Schriften übertragen. Einerseits enthält Dedekinds Habilitationsvortrag keinerlei expliziten Bezug auf die Mengenlehre. Andererseits erweist sich die rationale Arithmetik, wie bereits in den vorangehenden Ausführungen dargelegt, als unzureichend für die begrifflichen Fundierungen, wie sie in **SZ** und **WZ** angestrebt werden. Beide Schriften nehmen bei der Wesensbestimmung der neuen Begriffe Bezug auf außerarithmetische, genauer topologische, Sachverhalte. Erst durch einen allgemeinen Abbildungsbegriff und dessen prototopologische Anwendung konnte Dedekind das Wesen der beiden genannten Zahlenbereiche bestimmen.

¹⁰⁸Vgl. Haffner (2014): S. 441ff

Kapitel 3

Der Eudoxos der Moderne

„Immer erwartete K., daß nun endlich die Straße zum Schloß einlenken müsse und nur, weil er es erwartete, ging er weiter; offenbar infolge seiner Müdigkeit zögerte er, die Straße zu verlassen, auch staunte er über die Länge des Dorfes, das kein Ende nahm, [...]“

Franz Kafka, Das Schloss, zitiert nach
Kafka (2023): S. 15.

Wenn wir heute von einem Verhältnis von geometrischen Größen sprechen, so denken wir stets an Zahlenverhältnisse. Zwei (geometrische) Größen a und b stehen in einem Verhältnis zueinander, falls ihre in Zahlen ausgedrückten Maße einer Zahl v entsprechen:

$$a : b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = v$$

Diese Definition mag uns tautologisch anmuten und es scheint, dass der Begriff des Verhältnisses von Zahlen mit dem des Verhältnisses von Größen stets gleichzusetzen ist. Denn alles kann gemessen werden und diese Maße können immer in ein Verhältnis gesetzt werden. Wenn es sich um gleichartige Größen handelt, so ist an diesem Gedanken auch nichts auszusetzen. Obwohl man stets eine Strecke in Verhältnis zu einer anderen Strecke setzen kann, ist das Verhältnis einer Strecke zu einer Fläche, wir würden heute sagen, nicht wohldefiniert. Beim Bilden von Verhältnissen von Größen muss man somit *dimensionstreu* vorgehen.¹

Ebenso können Verhältnisse in Relation gesetzt werden. Im Falle der Ordnungsrelation wäre dies:

$$\frac{a}{b} \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \frac{c}{d}$$

Derartige Relationen (wir nennen sie im Spezialfall Proportionen) sind ebenso wohldefiniert wie das Verhältnis selbst, gehen jedoch über die erwähnte *Gleichartigkeit* der Verhältnisse hinaus. Zwar kann eine Fläche nicht ins Verhältnis zu einer Strecke gesetzt werden, jedoch kann sehr wohl das Verhältnis zweier Flächen, dem Verhältnis zweier Strecken entsprechen. Dimensionstreue ist

¹Vgl. Sonar (2015): S. 24

im Falle der Proportionen somit weiter gefasst.

Dass dem so ist, ist jedoch geschichtlich gesehen eine relativ neue Auffassung und steht im Zusammenhang mit einer erheblichen Ausweitung dessen, was man in der Vergangenheit unter dem Begriff der Zahl verstand. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass der Zahlbegriff der griechischen Antike enger gefasst war. Die Erkenntnis, dass manche geometrischen Größen diesem nicht entsprechen, löste, so zumindest die sogenannte *standard Story der Inkommensurabilität*, die erste Grundlagenkrise der Mathematik aus. Das pythagoreische Weltbild, wonach *alles Zahl sei*, war nun infrage gestellt und es bedurfte einer eigenen Disziplin, die in mancherlei Hinsicht von der Arithmetik abwich, um der Mathematik ein stabiles Fundament zu geben. Dies war die Größenlehre. Während die Arithmetik natürliche Zahlen zum Gegenstand hatte, befasst sich die Größenlehre mit kontinuierlichen Größen.²

Die Dichotomie zwischen Arithmetik und Größenlehre sollte lange Bestand haben und wurde erst im 19. Jahrhundert durch Erweiterungen der Zahlenbereiche und eine zufriedenstellende Definition der reellen Zahlen aufgehoben. Daran maßgeblich beteiligt war Dedekind mit **SZ**. Dort führte er die reellen Zahlen genetisch (somit aus den rationalen Zahlen heraus) ein. Nun konnte man den kontinuierlichen Größen auch Zahlen zuordnen. Dies waren zwar nicht die natürlichen Zahlen der Antike, dennoch war der neue Zahlenbereich der reellen Zahlen, aus Sicht der modernen Mathematik, ebenso gut fundiert. Durch die Begründung der reellen Zahlen konnte die erwähnte Zweiteilung in Arithmetik und Größenlehre aufgehoben werden, was dem Ende der klassischen Größenlehre gleichkam.³ Das lineare Kontinuum wurde durch das arithmetische aufgehoben.⁴

Bei der Auseinandersetzung mit diesen Ergebnissen äußerten einige Mathematiker allerdings Bedenken. Inwieweit war Dedekinds Ansatz überhaupt ein Fortschritt im Vergleich zu den bekannten Methoden der Antike? Vor allem die Elemente des Euklid, genauer das fünfte Buch, beinhaltete eine Proportionenlehre, die große Ähnlichkeit mit Dedekinds Schnitten aufwies. Auch dort ging es im Wesentlichen um eine *Schachtelung* der reellen Zahlen mithilfe der rationalen Zahlen. Und auch dort war man sich im Klaren, dass eine derartige Schachtelung, auf dem archimedischen Axiom fußend, beliebig genau durchgeführt werden konnte. Ihrem Wesen nach, so der Vorwurf, sei die Theorie der Dedekindschnitte bereits im fünften Buch der Elemente ausführlich dargelegt. So schreibt Lipschitz 1876:⁵

„Sie haben mir Ihre Abhandlung über Stetigkeit und irrationale Zahlen die Freundlichkeit gehabt, zuzuschicken, und ich kannte daher den Inhalt Ihrer unter den Text zu setzenden Anmerkung schon früher auf das genaueste. Ich muss jetzt gestehen, dass ich die Berechtigung Ihrer Definition nicht leugne, dass ich aber der Meinung bin, dieselbe unterscheide sich nur in der Form des Ausdrucks, aber nicht in der Sache von dem, was die Alten festgestellt haben. Ich kann nur sagen, dass die von Euclid V,5 aufgestellte Definition, welche ich lateinisch anführe rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae possunt multiplicatae sese mutuo superare, und was folgt, für genau so befriedigend halte, als Ihre Definition.“

Wir wollen dieser Kritik hier begegnen. Zum einen stellt dies **SZ** in einen breiteren historischen Kontext, zum anderen aber ermöglicht dies auch eine bessere Einschätzung der methodischen Unterschiede zwischen Dedekind und seinen Vorläufern. Ich glaube, dass der letzte Punkt

²Vgl. beispielsweise Beckmann (1967): S. 13

³Vgl. beispielsweise Epple (1999)

⁴Vgl. Bedürftig und Murawski (2019): S. 19

⁵Lipschitz (1886): S. 58

einen Beitrag zum Verständnis des *Wesens der Stetigkeit* im Sinne von Dedekinds strukturalistischen Methode liefern kann.

Ausgehend von dieser Zielsetzung werden wir zunächst die Proportionenlehre des fünften Buches der Elemente analysieren (Kapitel 3.3) und sie in Kontrast zur älteren pythagoreischen Sicht auf inkommensurable Größen setzen. Begleitet wird dies durch eine Auseinandersetzung mit der sogenannten *standard Story* des Aufkommens der Inkommensurabilität in der antiken Mathematik. Wir folgen dabei Fowler (1999) und anderen Autoren, indem wir darauf hinweisen, dass diese Auffassung nicht mit den antiken Quellen vereinbar ist. Die Verbreitung der *standard Story* fußt eher auf ihrer inhaltlichen Popularität als auf tatsächlicher historischer Evidenz.

Darauf aufbauend soll die Proportionenlehre des Eudoxos mit der Theorie der Dedekindschnitte, so wie sie in **SZ** dargelegt wurde, gegenübergestellt werden (Kapitel 3.6). Wir stützen uns dabei maßgeblich auf Quellen aus dem Nachlass. In ihrer Gesamtheit stellt diese Analyse eine erste Überlegung hin zu einer Wesensbestimmung der Stetigkeit im Sinne Dedekinds dar. Die Überlegungen zur Stetigkeit werden in Kapitel 4 weitergeführt.

All dies beantwortet jedoch nicht die Frage nach dem geometrischen Raum, der in den Elementen etabliert wird. Im Falle, dass die Proportionenlehre des fünften Buches Stetigkeit nicht adäquat abbildet, stellt sich die Frage, *wieso und inwieweit Euklids System überhaupt funktioniert?* Wenn der in den Elementen etablierte Raum kein kontinuierlicher ist, mit was für einem Raum haben wir es zu tun? Oder anders gefragt: Was fehlt dem Raum Euklids zur Stetigkeit? Diesen Fragen gehen wir in Kapitel 3.7 auf den Grund.

3.1 Der antike Zahlenbegriff

In der nordwestlichen Region der Demokratischen Republik Kongo, am Nordwestufer des Eduardsees liegt das kleine Fischerdorf Ishango. In den 50er Jahren des vergangenen Jahrhunderts führte der belgische Archäologe Jean de Heinzelin De Braucourt dort Ausgrabungen durch und stieß auf einen steinzeitlichen Wohnplatz. Unter den vielen Artefakten, die er dort fand, befand sich auch der sogenannte Ishango-Knochen. Dieser ist ein ungefähr 10 cm langer Pavianknochen mit 16 Gruppen von Einkerbungen unterschiedlicher Länge:⁶

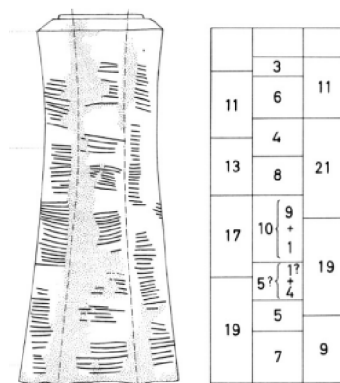


Abbildung 3.1: Der Ishango-Knochen

⁶Wußing et al. (2012): S. 11

Mittels Radiokarbonmethode geht man heute davon aus, dass er aus der Zeit zwischen 9000 und 6500 vor unserer Zeitrechnung stammt. Dies ist einer der älteste archäologischen Funde, der mit Rechnen und Zahlen im weitesten Sinne in Verbindung gebracht werden kann.⁷

Was kann man aus diesem Fund schließen? Fest steht, dass er ein Zeugnis der geistigen Tätigkeit des *Zählens* oder sogar des *Rechnens* im weitesten Sinne darstellt. Inwieweit die in Abbildung 3.1 dargestellten Ansammlungen von Strichen tatsächlich einen Zahlenbegriff voraussetzen, stellt die relativ junge Disziplin der Ethnomathematik vor eine schwierige Aufgabe. Die Quellenlage lässt oftmals lediglich eine Vermutung darüber zu, ob Zahlen tatsächlich *Gegenstand des Denkens* oder lediglich *Hilfsmittel des Denkens* gewesen sind.

Dies ändert sich spätestens in der griechischen Antike. Aristoteles thematisiert den Zahlenbegriff bereits in aller Ausführlichkeit. Eine Zahl ist nach ihm eine *Menge von Einheiten*, wobei die letzteren *ein Maß* für Vielheiten sind.⁸

Die griechische Antike kannte nur positive ganze (somit natürliche) Zahlen. Eine Zahl ist auch gemäß Euklids Elementen **VII.D2**⁹ eine zusammengesetzte Menge an Einheiten.¹⁰ Die Einheit ($\mu\nu\alpha\varsigma$) definiert er in **VII.D1** als das, „*wonach jedes Ding ganzes genannt wird*“.¹¹ Für derartige Zahlen war die Proportion der Definition **VII.D20** wohldefiniert:¹²

„Zahlen **stehen in Proportion**, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.“

Dabei ist Teil einer Zahl eine Zahl, „*die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt*“ und die Menge von Teilen, „*wenn sie sie nicht genau mißt*“.¹³ Nach diesen Definitionen sind die Zahlen 1, 2 und 3 Teile der Zahl 6, nicht jedoch die Zahl 6 selbst. Dagegen ist die Zahl 2 nicht Teil der Zahl 3, sondern die Menge der Teile. Für unser Anliegen ist besonders die Definition der Einheit ($\mu\nu\alpha\varsigma$) interessant. Euklid und Heath (1956) entnehmen wir, dass der Pythagoreer Thymaridas die Einheit als *Grenzgröße* verstanden hat. Sie stellte die Begrenzung der Vielzahl dar. Aufschlussreicher ist dagegen Iamblichos. Er berichtet ebenfalls, dass einige Pythagoreer die Einheit als eine Grenze zwischen den Zahlen und Teilen im obigen Sinne verstanden haben.¹⁴

Die Einheit war somit für einige Pythagoreer streng genommen keine Zahl, sondern eine Grenzgröße. Auf der einen Seite lagen die *Teile*, die beliebig klein, jedoch definitionsgemäß nicht negativ sein konnten, und auf der anderen waren die Zahlen, die beliebig groß werden konnten. Diese einfache Überlegung ist aus mehreren Gründen wichtig. Nach der Entdeckung der inkommensurablen Größen, ist es plausibel, dass diese einen ähnlichen Status eingenommen haben wie die Einheit. Auch dies waren, wie wir bei Euklid im Buch **V** sehen werden, Grenzgrößen. Die Zahlen bzw. Teile auf beiden Seiten dieser Größen konnten auf ähnliche Weise interpretiert werden und womöglich stellte gerade die pythagoreische Theorie der Einheit die Inspiration für die nachpythagoreische Proportionenlehre des Eudoxos dar. Zudem ist es nicht selbstverständlich, ein Objekt (in diesem Fall die Einheit) als eine *Grenze* aufzufassen. Eine Grenze unterscheidet

⁷Vgl. Wußing et al. (2012): S. 10f.

⁸Vgl. Aristoteles (2023a): S. 210; *Metaphysik*, X.5, 1053a

⁹Wir zitieren in dieser Arbeit Euklid und Thaer (2003) und beziehen uns auf Definitionen mit BUCH.D# und Propositionen mit BUCH.P#. Demnach stellt beispielsweise VII.D1 die erste Definition des siebten Buches dar.

¹⁰Vgl. Euklid und Thaer (ebd.): S. 141

¹¹Euklid und Thaer (ebd.): S. 141

¹²Euklid und Thaer (ebd.): S. 142

¹³Euklid und Thaer (ebd.): S. 141

¹⁴Vgl. Euklid und Heath (1956): S. 278

links von *rechts*, das *Vorher* vom *Nachher*. Dies ist nur möglich auf Basis einer Ordnungsstruktur, wie sie in den arithmetischen Büchern der Elemente entwickelt wird.

3.2 Die *standard Story* der antiken Inkommensurabilität

In der *standard Story der Inkommensurabilität*, wie durch Fowler (1999) wiedergegeben, wird oft die einfache und weitverbreitete Geschichte erzählt, dass die Entdeckung der Inkommensurabilität der Diagonale und der Seite eines Quadrats die Pythagoreer in eine tiefe Krise stürzte.¹⁵ Diese Entdeckung widersprach ihrer Vorstellung, dass alle mathematischen Größen in natürliche Zahlen oder ihren Verhältnissen übersetzbar waren. Dies war eine Herausforderung für die mathematische Weltanschauung der Pythagoreer, die sogenannte *Arithmetica Universalis*, und brachte die bisherige Proportionenlehre zum Erliegen.¹⁶ Begegnet wurde dieser Herausforderung später mit der Entwicklung einer alternativen Proportionenlehre, wie wir sie im fünften Buch der Elemente vorfinden.¹⁷

3.2.1 *Arithmetica Universalis*

Worin besteht nun diese Weltanschauung? Die *Arithmetica Universalis* der Pythagoreer stand für die Auffassung, dass das Universum von numerischen und mathematischen Beziehungen durchdrungen ist. Besonders im Bereich der Längenverhältnisse fanden sie heraus, dass zahlreiche musikalische Intervalle durch einfache ganzzahlige Verhältnisse der Schwingungsfrequenzen beschrieben werden konnten.¹⁸

Für gleichartige (dimensionstreue) Größen a und b würde man diesen Umstand heute folgendermaßen formalisieren:

$$\exists m, n \in \mathbb{N} : m \cdot a = n \cdot b$$

Solange zwei Größen gleichartig waren, existierte stets ein Verhältnis und somit zwei natürliche Zahlen m und n mit obigem Zusammenhang.¹⁹ Diese Auffassung ging auf eine alltägliche Messpraxis zurück. Eine Strecke x wurde hinsichtlich einer fixen Maßeinheit e analysiert, dessen Vielfaches sie war:

$$x = \underbrace{e + e + \dots + e}_{n\text{-mal}} = n \cdot e$$

Im metrischen System könnte für die Strecke der Länge $x = 6$ Meter, $e = 2$ Meter ein geeignetes Maß sein. Im Falle, dass die Länge von x eine Primzahl ist (wie in **VII.D11** definiert), so ist die Einheit ein geeignetes Maß. Falls eine Einheit so gewählt wird, dass die Länge x nicht ganzzahlig ist, etwa $x = 1,5$ Meter, so genügt es lediglich die Einheit zu ändern. In diesem Fall wären unter anderem Zentimeter ein geeignetes Maß. Für das Messen *einzelner* Größen bedarf es somit keiner Theorie der Proportionen, sondern lediglich einer geeigneten *Maßeinheit*. Will man jedoch zwei verschiedene Größen miteinander vergleichen, so wird eine derartige Theorie

¹⁵Die Auseinandersetzung mit dem Verhältnis der Diagonale und der Seite eines Quadrates ist bedeutend älter und findet sich schon bei den Babyloniern. Vergleiche dazu Sonar (2015): S. 13

¹⁶Vgl. Bedürftig und Murawski (2019): S. 31

¹⁷Vgl. Fowler (1999): S. 354

¹⁸Vgl. Kokkinos (1997): S. 43

¹⁹Vgl. Nikolić (1974): S. 229

notwendig. Historische Quellen legen nahe, dass bereits die Pythagoreer eine rudimentäre Theorie der Proportionen entwickelt hatten:²⁰

„[...] we have good reason for supposing that Pythagoras developed a theory of proportion. That theory was applicable to commensurable magnitudes only; but this would not be any obstacle to the use of the method so long as the existence of the incommensurable or irrational remained undiscovered.“

Diese Quellen stützen sich vorwiegend auf Untersuchungen zu damals bekannten Sätzen der elementaren Geometrie sowie deren Beweisgängen. Für die Kenntnis dieser Resultate mussten die Pythagoreer Größen in Verhältnis setzen und Aussagen über ihre Proportionen tätigen. In moderner Notation wäre folgender Zusammenhang der Grundpfeiler dieser Theorie:

$$A :: B \sim C :: D \Leftrightarrow \frac{a \cdot e}{b \cdot e} = \frac{c \cdot f}{d \cdot f} \Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Misst man die gleichartigen Größen A und B bzw. C und D jeweils mit einem bestimmten (nicht unbedingt gleichem) Maß e bzw. f , so stehen diese Größen in Proportion zueinander (ausgedrückt mit $\sim$), nämlich A zu B (ausgedrückt mit $A :: B$) so wie C zu D (ausgedrückt mit $C :: D$), wenn obiger Zusammenhang gegeben ist. a, b, c und d sind entsprechende natürliche Zahlen. Das, was in diesem Zusammenhang besonders wichtig ist, ist die letzte Äquivalenz. Da a, b, c und d Zahlen sind, entspricht das Produkt der Außenglieder dem Produkt der Innenglieder. Diese (pythagoreische) Proportionenlehre fußte auf der zahlentheoretischen Definition der Proportionen, wie wir sie im siebten Buch der Elemente in **VII.D20** vorfinden.

3.2.2 Die Entdeckung der Inkommensurabilität

Die Entdeckung der Inkommensurabilität, dass es Verhältnisse gibt, die nicht im obigen Zusammenhang darstellbar waren, stellte eine Zäsur dar. Diese Entdeckung wird Hippasos von Metapont, einem Mitglied der pythagoreischen Schule, zugeschrieben.²¹

Nach einer überlieferten Anekdote wurde Hippasos aufgrund seiner Entdeckung entweder mit dem Tode bestraft oder zumindest aus der pythagoreischen Gemeinschaft ausgeschlossen:²²

„Man sagt, sie hätten jenen, der als erster die Natur des Kommensurablen und des Inkommensurablen denen ausgeplaudert habe, die nicht würdig waren, die den Lehren teilzuhaben, als einen so widerlichen Menschen betrachtet, dass sie ihn nicht nur vom Zusammenleben in ihrem gemeinsamen Kreis ausschlossen, sondern sogar einen Grabstein für ihn errichteten, als wäre der Freund von damals aus dem Leben der Menschen überhaupt ausgeschieden“

Was waren die Folgen dieser Entdeckung? Was die *standard Story* nun aussagt ist, dass es nach der Entdeckung der Inkommensurabilität zu einem Erliegen der bisherigen pythagoreischen Proportionenlehre in Bezug auf geometrische Größen kam.²³ Zwar konnte diese weiterhin für Zahlenverhältnisse genutzt werden, jedoch war ihre Anwendung für (kontinuierliche) Größen widersinnig. Dies änderte sich erst mit dem Aufkommen der eudoxischen Proportionenlehre, wie sie

²⁰Heath (1981): S. 147

²¹Vgl. Wußing et al. (2012): S. 177

²²Dieser Bericht geht auf Iamblichos zurück, zitiert nach Mansfeld und Primavesi (2011): S. 171.

²³Vgl. Sonar (2015): S. 26

in Buch **V** wiedergegeben wird. Diese schaffte es sowohl kommensurable als auch inkommensurable Größen in einer einzigen Proportionenlehre zu vereinen, jedoch auf Kosten des einheitlichen Theoriegebäudes der Mathematik.

Die Unzulänglichkeit der pythagoreischen Proportionenlehre, sämtliche geometrischen Proportionen in zahlenmäßigen Verhältnissen auszudrücken, führte nicht nur zur Begriffsbildung von inkommensurablen Strecken, sondern auch zu einem Auseinanderdriften von Zahlentheorie und Geometrie. Während die Erstere weiterhin ihr *pythagoreisches Dasein* gemäß Buch **VII** der Elemente fortsetzte, sollte die Geometrie in einer Größenlehre aufgehen, deren Grundpfeiler die Proportionenlehre des Buches **V** der Elemente war. Diese Dichotomie entwickelte sich aus der grundlegenden und neuen Erkenntnis heraus, dass nicht alles, was man messen konnte, auch in Zahlen ausdrückbar war. Geometrische Größen konnte man weiterhin vergleichen, jedoch waren diese Vergleiche keineswegs immer Zahlenverhältnissen. Zahlen, und dies änderte sich in den kommenden Jahrhunderten bemerkenswert wenig, waren *Vielheiten von Einheiten*. Modern gesprochen, war eine Zahl für die griechische Antike immer eine natürliche Zahl. Negative, rationale oder gar irrationale Zahlen kannte die griechische Antike nicht. Dem entgegengesetzt waren Größen. Größen bezogen sich auf geometrische Figuren: Längen, Flächen und Volumina. Vergleichen konnte man nur *gleichartige* Größen. Ein Verhältnis einer Strecke und einer Fläche war unsinnig und wurde in den Formulierungen der Elemente penibel ausgeklammert.²⁴ Die Dichotomie zwischen einer derartigen Zahlentheorie und der Größenlehre wird sich als eine der langwierigsten der Mathematikgeschichte herausstellen. Die Größenlehre wird bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, auf die eine oder andere Art, weiterhin Bestand haben.

Die dargestellte *standard Story* der Entdeckung und des Umganges der Antike mit der Inkommensurabilität kann auf folgende zwei Aussagen komprimiert werden:

1. Die Entdeckung der Inkommensurabilität löste die erste Grundlagenkrise der Mathematik aus. Vor allem für die pythagoreische Philosophie stellte die Entdeckung inkommensurabler Strecken ein zentrales Problem dar. In gewisser Weise führte dies zu einem Stillstand der antiken Mathematik.
2. Als Antwort auf diese Entdeckung formulierte Eudoxos seine Proportionenlehre, die im Wesentlichen in Euklids Buch **V** der Elemente wiedergegeben wird.

Wir werden sehen, dass diese Interpretation ihre Grenzen hat. Basierend auf historischer Evidenz wird sie heute von den meisten Autoren abgelehnt. Die diese These stützenden Argumente können nur in einer Gegenüberstellung mit der Proportionenlehre des fünften Buches sachgerecht formuliert werden. Deshalb gehen wir nun auf diese näher ein.

3.3 Eudoxos' Proportionenlehre

Die Frage der Autorschaft von Euklids Elementen ist seit Jahrhunderten Gegenstand wissenschaftlicher Diskussionen. Während allgemein akzeptiert wird, dass Euklid das Werk verfasst

²⁴Im heutigen Vokabular wäre die Menge von gleichartigen Größen im Sinne der Elemente eine kommutative Halbgruppe.

hat, bestehen weiterhin unterschiedliche Ansichten bezüglich des genauen Ursprungs der einzelnen Bücher.²⁵

Betrachten wir das Buch **V** der Elemente. Die Definitionen und Sätze der Proportionenlehre des Buches **V** spielen in den Beweisgängen der kommenden Bücher eine untergeordnete Rolle. Ein expliziter Rekurs ist lediglich in **VI.P1**, **VI.P33**, **XI.P25** sowie **XII.P13** gegeben, die alle einen ähnlichen Beweisgang aufweisen. Deshalb ist es gerechtfertigt, wenn Menn (2018) danach fragt, wieso Euklid hier nicht den Satz **VI.P1** als Postulat herangezogen hat, statt eine komplizierte und später nur eingeschränkt verwendete Proportionenlehre zu entwickeln?²⁶ Seine Antwort besteht darin, auf den Zusammenhang zwischen dem Buch **V** und dem Buch **XII** zu verweisen. Folgt man der Fachliteratur, so gehen sowohl die Proportionenlehre des fünften Buches als auch die Methode der Exhaustion des zwölften Buches auf Eudoxos von Knidos zurück.

Die Begründung dieser Hypothese wird allgemein in Scholia verortet. Ein Scholium zum fünften Buch der Elemente besagt beispielsweise Folgendes:²⁷

„manche sagen, dieses Buch, das die allgemeine Theorie der Proportionen enthält, gleichermaßen anwendbar auf Geometrie, Arithmetik, Musik und alle mathematische Wissenschaft, sei die Entdeckung von Eudoxos, des Lehrers von Platon.“

Ebenso beinhalten die Sätze **XII.P2** und **XII.P10** Scholia, mit der knappen Randbemerkung

²⁵Euklids Elemente bestehen aus 13 Büchern. Zum Inhalt dieser Bücher sei Folgendes festgehalten: **Buch I** legt das Fundament der Geometrie, indem es die grundlegenden Begriffe wie Punkt, Linie, Fläche und Winkel definiert und zentrale Sätze formuliert, die die fundamentalen Beziehungen zwischen diesen Elementen festlegen. In **Buch II** wird die geometrische Algebra eingeführt, die sich mit den Beziehungen zwischen Flächen beschäftigt und grundlegende Eigenschaften von Figuren wie Rechtecken und anderen Polygonen untersucht. Dabei kommen erstmals algebraische Methoden zur Anwendung, um geometrische Objekte zu analysieren.

Buch III konzentriert sich auf die Eigenschaften von Kreisen und deren Beziehungen. **Buch IV** beschäftigt sich mit der Konstruktion von geometrischen Figuren, wie Rechtecken und Parallelogrammen. Im Zentrum des **Buchs V** steht die Theorie der Proportionen. **Buch VI** baut auf dieser Theorie auf und untersucht ähnliche Figuren, indem es die Kriterien der Ähnlichkeit formuliert. Die **Bücher VII und VIII** verlagern den Fokus auf die Zahlentheorie. Buch VII führt die fundamentalen Eigenschaften von Zahlen, einschließlich der Primzahlen, ein und behandelt die grundlegenden arithmetischen Operationen. **Buch VIII** erweitert diese Untersuchung und befasst sich mit den Verhältnissen zwischen Zahlen, insbesondere im Hinblick auf arithmetische und geometrische Proportionalitäten. Im **Buch IX** wird die Zahlentheorie weiter vertieft, indem die Teilbarkeit und die Klassifikation von Zahlen in gerade und ungerade Zahlen behandelt wird.

Buch X stellt die Theorie der irrationalen Zahlen vor und führt das Konzept der Inkommensurabilität ein – die Erkenntnis, dass bestimmte Verhältnisse von Größen nicht als Brüche ganzer Zahlen dargestellt werden können. **Buch XI** führt die Geometrie in den dreidimensionalen Raum ein, indem es die Eigenschaften von Körpern wie Zylindern, Pyramiden und Würfeln untersucht und grundlegende Methoden zur Berechnung von Volumen vorstellt.

Buch XII baut auf den Konzepten des Volumens auf und nutzt die Exhaustionsmethode von Eudoxos, um das Volumen komplexerer Körper zu bestimmen. Diese Methode, die als Vorläufer des modernen Integrationsbegriffs angesehen werden kann, stellt einen wichtigen Schritt in der Entwicklung mathematischer Techniken zur Bestimmung von Größen dar. **Buch XIII** schließt das Werk mit der Theorie der regulären Polyeder ab, also der Untersuchung geometrischer Körper, die durch spezielle symmetrische Eigenschaften gekennzeichnet sind, und präsentiert deren Klassifikation. Siehe dazu beispielsweise Heath (1981).

Hinsichtlich der Autorschaft der Bücher hält Heath (ebd.) fest:

„The Pythagoreans, before the next century was out (i.e. before, say, 450 B. C.), had practically completed the subject-matter of Books I-II, IV, VI (and perhaps III) of Euclid's Elements, including all the essentials of the 'geometrical algebra' which remained fundamental in Greek geometry; the only drawback was that their theory of proportion was not applicable to incommensurable but only to commensurable magnitudes, so that it proved inadequate as soon as the incommensurable came to be discovered.“

Siehe Heath (ebd.): S. 2.

²⁶Vgl. Menn (2018): S. 188

²⁷Heath (1981): S. 112 in Übersetzung von Beckmann (1967): S. 12.

„Εὐδοξός“. ²⁸ Van der Waerden (1975) wertet diese Berichte als wahrheitsgetreu: ²⁹

„The scholium sounds plausible, particularly since, as we have seen, Proclus also attributes a number of "general theorems" to Eudoxus and because there is moreover a certain unmistakable relatedness between the methods of Book V and those of Book XII. Both operate constantly with proportions, both are based on the postulate of Eudoxus, cited above, and both use, in a rigorous manner, approximations and inequalities which are used ultimately to prove equalities by a reductio ad absurdum. Furthermore, the scholia in Euclid usually square with what is known from other sources. We are therefore prepared to join the scholiast and to attribute Book V to Eudoxus.“

Somit kann die Proportionenlehre des fünften Buches als eudoxisch bezeichnet werden. Sie fußt auf einem nicht explizit definiertem Größenbegriff, ³⁰ dessen Kern in den ersten fünf Definitionen zu finden ist: ³¹

V.D1 „Teil einer Größe ist eine Größe, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau misst.“

V.D2 „Und Vielfaches die größere von der kleineren, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird.“

Für zwei Größen a und b können die obigen Zusammenhänge in moderner Notation als eine Äquivalenz dargestellt werden:

$$b \text{ ist } \mathbf{Teil} \text{ von } a \Leftrightarrow a \text{ ist } \mathbf{Vielfaches} \text{ von } b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a = n \cdot b$$

V.D3 „Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.“

Das hier erwähnte *certaine Verhalten* kann zweierlei bedeuten. Jedes Verhältnis ζ , kann zwischen den Größen a und b bestehen oder auch nicht. Somit

$$a : b = \zeta \text{ oder } a : b \neq \zeta$$

V.D4 „Dass sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.“

Die Definition **V.D4** gibt ein Kriterium an, das in vielerlei Hinsicht an das archimedische Axiom erinnert. Das archimedische Axiom besagt, dass für zwei beliebige Größen $a > 0$ und $b > 0$ stets eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $n \cdot a > b$. Dieses Prinzip stellt sicher, dass keine unendlich kleinen oder unendlich großen Größen in einem mathematischen System auftreten und jede Größe durch eine genügend oft wiederholte Addition einer kleineren Größe übertroffen werden kann.

²⁸Siehe dazu auch Euklid und Heath (1956): S. 112.

²⁹Van der Waerden (1975): S. 187

³⁰Vgl. Beckmann (1967): S. 22

³¹Für folgende Zitate siehe Euklid und Thäer (2003): S. 91.

Wäre nämlich das archimedische Axiom nicht erfüllt, so gebe es Größen o und a mit der Eigenschaft

$$\forall n \in \mathbb{N} : a > n \cdot o$$

Die Größe o wäre in diesem Fall *infinitesimal*.

Wie Stein (1990) richtigerweise bemerkt, ist die obige Definition jedoch um einiges schwächer als das archimedische Axiom. Sie setzt nämlich die Existenz eines Verhältnisses nicht voraus. Zwei Größen können somit im Verhältnis stehen, dann ist auch das Kriterium des *Übertreffens* in **V.D4** erfüllt, oder sie stehen nicht in einem Verhältnis und das Kriterium ist nicht erfüllt. Betrachtet man nämlich die Definition **V.D4**, so scheint es, dass Euklid die Möglichkeit offen gelassen hat, dass gleichartige Größen kein Verhältnis haben. Praktisch würde dies bedeuten, dass eine bijektive Abbildung zwischen den reellen Zahlen und den *Eudoxos-Zahlen* nicht möglich ist.³²

Relativiert wird dies dadurch, dass der Autor in den Sätzen **V.P8** und **V.P9** implizit das Axiom voraussetzt (sprich infinitesimale Größen ausschließt). Nehmen wir Satz **V.P9** als Beispiel:

„Sind Verhältnisse, in denen Größen zu derselben Größe stehen, gleich, dann sind die Größen gleich, ebenso wie wenn sie in gleichen Verhältnisse derselben Größe zu ihnen stehen.“

Unter anderem beinhaltet der Satz folgende Behauptung:

$$(a : c = b : c) \Rightarrow (a = b)$$

Der Beweis wird durch Widerspruch geführt und wir zeigen beispielhaft den Fall $a > b$. Dann gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot (a - b) > c$. Hier wird somit vom archimedischen Axiom gebracht gemacht, da die Größen $a - b > 0$ die Größe $c > 0$ für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ übertrifft. Ähnlich wird angenommen, es gibt eine kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot c > n \cdot b$. Daraus folgt $n \cdot b > (m - 1) \cdot c$. Zusammen bedeutet dies $n \cdot a > m \cdot c > n \cdot b$. Nun widerspricht die letzte Ungleichung der Definition der Proportionalität, die wir als Voraussetzung hatten. Somit kommen wir zu einem Widerspruch und die Annahme $a > b$ muss fallen gelassen werden.³³

Die erwähnte Einschränkung ist somit sicherlich nicht beabsichtigt. Obwohl streng genommen eine bijektive Abbildung zwischen Größen und reellen Zahlen nicht gegeben ist, so war dies keinesfalls, wie auch Stein (ebd.) vermutet, die Absicht des Autors. Vielmehr erschwert dies den Fortgang der Theorie. Wir schließen uns daher Stein (ebd.) an, wenn wir die Geltung des archimedischen Axioms für die eudoxische Proportionenlehre annehmen.³⁴

Die fünfte Definition des Buches **V** lautet:³⁵

³²Vgl. Stein (1990): S 170

³³Vgl. Sonar (2015): S. 31

³⁴Vgl. Stein (1990): S. 171f

³⁵Euklid und Thaer (2003): S. 91

V.D5 „Ist das Vielfache der ersten Größe größer als das Vielfache der zweiten, obwohl die dritte vervielfacht wie die erste nicht größer ist als die vierte vervielfacht wie die zweite, dann steht die erste zur zweiten in einem größeren Verhältnis wie die dritte zur vierten.“

V.D6 „Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen.“

Die Definition 5 des fünften Buches beschreibt die Gleichheit von Verhältnissen auf Grundlage der vergleichenden Betrachtung von Produkten. Sie ermöglicht eine präzise Behandlung von Verhältnissen auch bei inkommensurablen Größen, indem sie deren Gleichheit durch eine universelle Vergleichsregel für beliebige positive Vielfache der beteiligten Größen definiert. Versuchen wir, den Inhalt der Definition in moderner Sprache zu fassen. Gegeben seien zwei gleichartige Größen a und b sowie c und d . Dann formuliert die fünfte Definition folgenden Zusammenhang:

$$a : b \sim c : d \Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} : \begin{cases} m \cdot a > n \cdot b \Leftrightarrow m \cdot c > n \cdot d \\ m \cdot a = n \cdot b \Leftrightarrow m \cdot c = n \cdot d \\ m \cdot a < n \cdot b \Leftrightarrow m \cdot c < n \cdot d \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{Moderne Interpretation} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} > \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{n}{m} \\ \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{n}{m} \\ \frac{a}{b} < \frac{n}{m} \Leftrightarrow \frac{c}{d} < \frac{n}{m} \end{cases} \end{array}$$

Das, was Eudoxos hier prüft, ist, ob die Ordnung vom Vielfachen von a und b der Ordnung vom Vielfachen von c und d entspricht. Definition **V.D5** ermöglicht eine Ordnungsstruktur für kommensurable und inkommensurable Größen und zugleich die Etablierung von Äquivalenzklassen. Sie ähnelt in weiten Teilen Dedekinds Theorie der Schnitte. Auch dort wird die Menge der rationalen Zahlen basierend auf ihrer Ordnungsstruktur in *Teilmengen* geteilt. Der Umstand, dass Eudoxos eine Dreiteilung vornimmt, ändert am Ergebnis nicht viel.

Alle rationalen Zahlen $\frac{n}{m}$ werden hier in **drei** Mengen gegliedert:

- $A_1 = \{p \in \mathbb{Q} : a_1 < \frac{a}{b}\}$
- $A_2 = \{\frac{a}{b}\}$ und
- $A_3 = \{q \in \mathbb{Q} : a_3 > \frac{a}{b}\}$

Dies entspricht der Konstruktion der Dedekindschnitte, zumal A_1 und A_2 aufgrund der Definition **V.D4** und unter der Bedingung, dass die Größen a und b ein Verhältnis haben, nicht leer sein können.³⁶

In seiner modernen Rekonstruktion der Größenlehre der Elemente identifizierte Beckmann (1967) insgesamt 16 Axiome bzw. Definitionen, die Euklid bzw. Eudoxos implizit heranziehen. Drei dieser *Zusatzannahmen* sind hervorzuheben:³⁷

1. Satz **V.P5** macht implizit Gebrauch von der Existenz des n -ten Teils einer Größe (mit $n \in \mathbb{N}$). Jede Größe kann in eine beliebige Anzahl von Teilen geteilt werden.
2. Satz **V.P18** macht (wiederum implizit) Gebrauch von der Existenz der vierten Proportionale. Besonders hervorzuheben ist auch **XII.P2**, auf den wir später näher eingehen werden.

³⁶Vgl. Stein (1990): S.

³⁷Vgl. Beckmann (1967): S. 48f

3. Definition **V.D4** kann, basierend auf dem oben gesagtem, als das archimedische Axiom aufgefasst werden.

Die Erarbeitung einer Theorie der Proportionen im Buch **V** ermöglicht es, über Größen im Allgemeinen zu sprechen, unabhängig davon, ob es sich hierbei beispielsweise um Geraden oder Flächen handelt. Die Sätze des Buches **V** gelten allgemein und können auf jedwede Größen derselben Art angewendet werden. Um dieser Anwendung den ersten Impuls zu geben, muss Euklid jedoch einen initialen Beweis liefern, der ihm in **VI.P1** gelingt. Nach diesem Beweis entwickelt er sämtliche Sätze der folgenden Bücher allein auf Basis elementarer Geometrie und ohne Rekurs auf die Definitionen im Buch **V**.³⁸

Der verallgemeinernde Aspekt der eudoxischen Proportionenlehre wurde auch von Aristoteles bemerkt:³⁹

„Wenn also jemand beweise, dass die rechten Winkel sich nicht schneiden, so könnte es scheinen, als gelte die Demonstration dieser Sache deshalb, weil sie für alle Rechten gilt. Aber das ist nicht so – wenn die Demonstration denn wirklich gilt, nicht weil sie in dieser bestimmten Weise gleich sind, sondern weil sie in beliebiger Weise gleich sind. Und wenn ein Dreieck nichts anderes wäre als gleichschenkelig, so würde die Demonstration auf das Dreieck als gleichschenkliges zuzutreffen scheinen. Und es könnte auch von der Proportion scheinen, dass sie vertauschbar ist, insofern es um Zahlen und Linien und dreidimensionale Körper und Zeiten geht, so wie dies einst jeweils getrennt bewiesen wurde, während es doch für alle Dinge durch eine einzige Demonstration bewiesen werden kann. Aber weil alle diese Dinge nicht ein benanntes Eines sind – Zahlen, Längen, Zeiten, dreidimensionale Körper –, und sich der Art nach voneinander unterscheiden, wurden sie jeweils getrennt genommen. Nun aber ist es allgemein bewiesen; denn nicht auf sie als Linien oder als Zahlen traf es zu, sondern als dasjenige, wovon sie voraussetzen, dass es allgemein zutrifft.“

Der strukturelle Aufbau der Elemente lässt somit vermuten, dass Euklid zumindest einige Beweiswege der ersten vier Bücher umgeschrieben hat, um eine Verbindung mit der Proportionenlehre zu umgehen.⁴⁰ Das obige Aristoteles-Zitat gibt zudem der Vermutung Anlass, dass es neben der erwähnten pythagoreischen *Arithmetica Universalis*⁴¹ des siebten Buches und der eudoxischen Proportionenlehre des fünften Buches der Elemente zumindest noch eine weitere Proportionenlehre gab.

3.4 Die anthyphairetische Proportionenlehre

Sämtliche Definitionen und Resultate der Bücher **I-IV** beinhalten keinen Rekurs auf jedwede Theorie von Proportionen oder Ähnlichkeit zwischen geometrischen Gebilden. Sie behandeln

³⁸Die einzige Ausnahme bilden dabei zwei Beweise, die dem **VI.P1** nachempfunden sind. Dies sind **XI.P25** sowie **XII.P13**

³⁹Aristoteles (2023c): S. 263; *Zweite Analytik*, I.5, 74a

⁴⁰Menn (2018) begründet dies mit einer Textstelle in der Aristotelischen Physik, wonach der Beweisgang des Hippokrates von Kios bei der Flächenbestimmung von Halbmonden Gebrauch von der Proportionenlehre macht. Ebenso scheinen einige Beweise in den ersten vier Büchern, namentlich **I.P47** (der Beweis des Theorems von Pythagoras), **II.P14** (Flächenbestimmung eines Rechteckes) ihre Motivation in Beweisgängen späterer Bücher zu finden. Konkret sind dies **VI.P31** bzw. **VI.P8** und **VI.P13**, die bereits die Proportionenlehre des Buches **V** heranziehen. Besonders bemerkenswert ist jedoch auch die proportionenfreie Konstruktion eines regelmäßigen Fünfeckes in **II.P11**, die den Beweis in **VI.P30** modelliert. Eine andere Meinung zu dieser Interpretation vertrat W. R. Knorr (1975), um sich in R. W. Knorr (1991) der Mehrheitsmeinung anzuschließen. Siehe dazu Menn (2018), S. 187

⁴¹Vgl. Beckmann (1967): S. 9

elementare Ergebnisse von Dreiecken und Parallelogrammen (Buch **I**), der sog. geometrischen Algebra (Buch **II**), der Kreisgeometrie (Buch **III**) sowie reguläre Polygone und deren In- und Umkreise (Buch **IV**).

All diese Ergebnisse (inklusive des bekannten Satzes des Pythagoras) konnte Euklid mit elementarsten planimetrischen Überlegungen beweisen. Die Einführung einer komplizierten und verzweigten Proportionenlehre im Buch **V** wird allgemein mit der Entdeckung der Inkommensurabilität und der mangelnden Eignung der archaischen Proportionenlehre, dieser Rechnung zu tragen, begründet. Unter der archaischen Proportionenlehre wird die pythagoreische Theorie der Proportionen verstanden, die im Wesentlichen der in **VII.20** formulierten Definition von Proportionen zwischen Zahlen entspricht.

Diese vereinfachte historische Annahme hat jedoch weitreichende Implikationen. Demnach musste der Zeitraum zwischen der Entdeckung der Inkommensurabilität und der Definition der Proportionenlehre des Buches **V** ohne jedwede Theorie der Proportionen auskommen. Es ist jedoch höchst zweifelhaft, ob die griechischen Mathematiker aufgrund dieser Entdeckung die Beschäftigung mit der Proportionenlehre innerhalb der Geometrie gänzlich aufgegeben hätten.⁴² In der Literatur setzte sich vielmehr die Meinung durch, dass die Proportionenlehre des Buches **V** lediglich eine Entwicklungsstufe der antiken Auseinandersetzung mit der Inkommensurabilität war und es zwischen einer angenommenen archaischen Proportionenlehre und dieser mindestens eine, wahrscheinlich jedoch zwei weitere Theorien der Proportionen gab.⁴³

Betrachten wir folgende Stelle in der Aristotelischen *Topik* als Unterstützung dieser Meinung:⁴⁴

„Bei vielen Behauptungen ist es deshalb nicht leicht, sie zum Gesprächsgegenstand zu machen und an sie heranzukommen, weil die Bestimmung des Begriffs dabei nicht sauber angegeben wird, z. B. (bei der Frage): Hat eine Bestimmung ein Gegenteil oder (gibt es zu ihr) mehrere? Ist dagegen das, was zu ihr gegenteilig ist, wie sich's gehört, fest bestimmt, (so ist es) leicht zusammenzubekommen, ob es nun geht, daß eines und dasselbe mehrere Gegen- teile hat, oder nicht. Auf die gleich Weise bei allem anderen, das einer Begriffsbestimmung bedarf. Es scheint aber auch in der Mathematik, daß einiges wegen der Ermangelung eines bestimmten Begriffes nicht leicht zeichnerisch darzustellen ist, z. B. (die Behauptung), daß die Neben-der-Seite-her-Schneidende (d. h. Winkelhalbierende) die Fläche in gleiche Teile auseinandernimmt, sowohl die Grundlinie wie den Flächeninhalt. Ist dagegen die Begriffs- bestimmung vorgetragen, so ist das Gemeinte sofort klar: Die Flächen- und Streckenstücke haben die Eigenschaft, einander genau aufzuheben, das eben ist die Begriffsbestimmung des Verhältnisses "dasselbe".“

Ungeachtet des geometrischen Gehalts des Satzes, hat diese Stelle historische Relevanz, da sie offensichtlich eine Begriffsbestimmung für Verhältnissgleichheit enthält. Die Eigenschaft, *einander genau aufzuheben*, begründet, so Aristoteles hier, die Gleichheit von Verhältnissen. Inwieweit unterscheidet sich diese Methode von der fünften Definition des Buches **V**? Während einige Autoren wie Heiberg (1904) hier die eudoxische Proportionenlehre zu erkennen bestrebt waren, sahen Autoren wie Heath (1981), Zeuthen (1917), Becker (1933) und nicht zuletzt Fowler (1999) im obigen Aristoteles-Zitat einen Beleg für eine nichttriviale, voreudoxische Proportionenlehre,

⁴²Vgl. Menn (2018): S. 194

⁴³Vgl. Heath (1981): S. 112f

⁴⁴Aristoteles (2023d): S. 202; *Topik*, VIII.3, 158b

die sehr wohl mit Inkommensurabilität umgehen konnte.⁴⁵

Aristoteles schrieb den obigen Abschnitt womöglich 70 Jahre vor der Verfassung des Buches **V** der Elemente.⁴⁶ Der erwähnte Ausdruck *in gleichem Verhältnis* ist die deutsche Übersetzung des Begriffs *Antanairesis*. Becker (1933) war einer der ersten, der auf die etymologischen und inhaltlichen Parallelen dieses Begriffs mit *Anthyphairesis* hinwies. Den Begriff *Anthyphairesis* konnte man in den Büchern **VII** und **X** wiederfinden, wo er im Zusammenhang mit der sogenannten Wechselwegnahme oder dem Euklidischen Algorithmus stand.⁴⁷ Für Becker (ebd.) war dies der Beweis der Existenz einer anthyphairetischen Proportionenlehre.⁴⁸

Ähnlich argumentiert auch Fowler (1999) in seinem erstmals im Jahre 1995 erschienenen Buch *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*. Er zeigt, dass die Annahmen der *standard story* in weiten Teilen auf Quellen zurückzuführen ist, die Jahrhunderte nach Platon datierten oder gar eine Rekonstruktion moderner Historiker sind.

Betrachten wir etwa Buch **X**. Gemäß der *standard Story* sollten sich die dortigen Sätze an der Dichotomie kommensurabler und inkommensurabler Strecken orientieren. Davon ist jedoch im Buch selbst in keinerlei Hinsicht die Rede. Das Buch ist, so Fowler, eine *homogene Schicht* (*homogenous slab*), die sich der Standardinterpretation entzieht. Ähnliche Unvereinbarkeiten mit dieser, diagnostiziert er auch im Buch **XII** und auch in einigen älteren Quellen bei Platon und Aristoteles. Eine zufriedenstellende Rekonstruktion der antiken Mathematik muss jedoch derartige Quellen erklären können.⁴⁹

Ebenso wie Becker (1933) kommt auch Fowler (1999) zum Schluss, dass es verschiedene Konzepte zu Proportionen gab, von denen die anthyphairetische Proportionenlehre das Wichtigste war. Ihm zufolge gab es drei konkurrierende Definitionen: eine aus der Musiktheorie, eine aus der Astronomie (dies ist die, die dem Buch V der Elemente zugrunde liegt) und eine, die auf „*Anthyphairesis*“, also der rekursiven Subtraktion, basiert.⁵⁰

Doch worin besteht nun diese anthyphairetische Proportionenlehre und wie ging sie mit der Inkommensurabilität um? Nehmen wir an, wir wollen zwei Strecken ins Verhältnis setzen, ohne zu wissen, wie es um ihre Kommensurabilität steht. Das zugrundeliegende Verfahren bestand darin, dass man die kleinere Strecke so oft wie möglich von der größeren abträgt und wechselt dann dahingehend, dass man den Rest von der kleineren abträgt usw.⁵¹ Entweder würde dieses Verfahren irgendwann abbrechen und das gesuchte Verhältnis liefern oder es gab keinen Abbruch und wir haben es mit Inkommensurablen Größen zu tun.

Für den Fall, dass es abbricht, kann das Verfahren, in moderner Notation, für zwei Strecken

⁴⁵Für einen historischen Abriss der Entwicklung der Diskussion mit einem Fokus auf das obige Aristoteles-Zitat siehe beispielsweise Szabó (1964).

⁴⁶Vgl. Menn (2018): S. 195

⁴⁷Vgl. Becker (1933): S. 313

⁴⁸Vgl. Becker (ebd.): S. 313

⁴⁹Vgl. Fowler (1999): S. 354ff

⁵⁰Vgl. Fowler (ebd.): S. 354ff

⁵¹Vgl. Euklid und Thaer (2003): S. 213f

x_0 und x_1 folgendermaßen dargestellt werden:⁵²

$$\begin{aligned} x_0 &= n_1 x_1 + x_2 & \text{mit} & a_2 < a_1 \\ x_1 &= n_2 x_2 + x_3 & \text{mit} & a_3 < a_2 \\ x_2 &= n_3 x_3 + x_4 & \text{mit} & a_4 < a_3 \\ &\dots \\ x_{j-1} &= n_j x_j \end{aligned}$$

Das Verfahren endet also nach dem j -ten Schritt. Die philosophische Grundposition der Pythagoreer war es, dass alle Streckenverhältnisse kommensurabel waren und somit das **Verfahren der Wechselwegnahme stets endet**. Diese Erwartung war nicht unplausibel, berücksichtigt man den Umstand, dass die Maßeinheit beliebig klein gewählt werden kann.⁵³ Es gibt jedoch Wechselwegnahmen, die nicht abbrechen.

Eine unendliche Wechselwegnahme kann am Beispiel des Ordenssymbols der Pythagoreer, dem Pentagramm, gezeigt werden.⁵⁴ Sei $ABCDE$ ein reguläres Fünfeck. Bei einem regulären Fünfeck sind jeweils eine Diagonale und eine Seite parallel. Deshalb gilt

$$AB \parallel EC, BC \parallel AD, CD \parallel EB, DE \parallel AC \text{ und } EA \parallel BD$$

Aufgrund der Parallelität ihrer Seiten sind die zwei Dreiecke $\triangle AFB$ und $\triangle ECD$ ähnlich und das Viereck $EFCD$ ist ein Parallelogramm. Daraus folgt wiederum

$$EC : AB = DC : FB = AB : (EB - EF) = AB : (EC - AB)$$

⁵²Vgl. Mainzer (1983): S. 24

⁵³Es ist an dieser Stelle interessant anzumerken, dass dieses Verfahren einer Kettenbruchzerlegung gleichkommt:

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 &= n_1 + x_2 : x_1 \\ &= n_1 + \frac{1}{x_1 : x_2} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + x_3 : x_2} \\ &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{\dots}} \end{aligned}$$

⁵⁴Vgl. Mainzer (ebd.): S. 25 sowie Bedürftig und Murawski (2019): S. 10ff

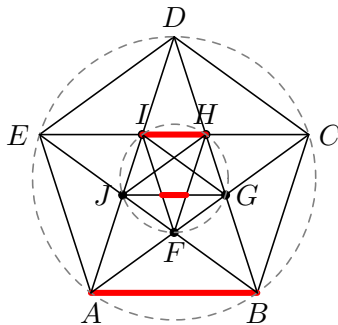


Abbildung 3.2: Streckenverhältnisse beim regulären Fünfecks

Somit ist das Streckenverhältnis zwischen Diagonale und Seite gleich dem Verhältnis zwischen Seite und Differenz der Diagonale und Seite. Aufgrund des spezifischen Streckenverhältnisses im regulären Fünfeck (*Goldener Schnitt*), kann die Seite des Fünfecks nur einmal von der Diagonale weggenommen werden. Dieses Verfahren kann beliebig weitergeführt werden: Die obigen Eigenschaften für das Fünfeck $ABCDE$, gelten ebenso für das Fünfeck $JFGHI$ usw. Wir erhalten somit für d_0 als Diagonale und a_0 als Seite des Fünfecks

$$\begin{aligned} d_0 : a_0 &= a_0 : d_1 & \text{mit} & \quad d_1 = d_0 - a_0 \\ a_0 : d_1 &= d_1 : a_1 & \text{mit} & \quad a_1 = a_0 - d_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

In der Abbildung 3.2 bilden die rot markierten Strecken die jeweilige Differenz der Wechselwegnahme. Falls die Seite und die Diagonale des Fünfecks kommensurabel wären, so müsste diese Differenz irgendwann dem Vielfachen einer bestimmten Maßeinheit entsprechen. Unabhängig davon, wie klein wir diese wählen, werden die rot markierten Strecken irgendwann kleiner als diese sein.

Ein anderes Beispiel ist die, bereits eingangs erwähnte, Inkommensurabilität der Seite und Diagonale eines Quadrates. Betrachten wir das Quadrat $ABCD$ in der Abbildung 3.3 und nehmen wir an, die Diagonale AC und Seite AB wären kommensurabel.

Der Kreis mit dem Radius AB und Zentrum in A schneidet die Diagonale AC in E . Gemäß unserer Annahme ist $EC = AC - AB$ und EC ist ebenfalls mit der Diagonale und Seite des Quadrates kommensurabel. Als nächsten Schritt konstruiert man ein Quadrat $ECGF$ unterhalb von EC mit der Seitenlänge EC . Die Frage ist nun, ob der so konstruierte Punkt F auf der Seite BC unseres Ausgangsquadrates liegt. Gemäß der Konstruktion wissen wir, dass $\angle EAB = 45^\circ$, $\angle EFC = 45^\circ$ sowie $\angle EFB = 135^\circ$, da $\angle AEF = \angle CEF = 90^\circ$. Somit beträgt $\angle CFB = 180^\circ$ und F liegt auf der Seite BC . Dies bedeutet, dass wir unsere Ausgangsfrage nach der Kommensurabilität der Diagonale und der Seite des Quadrates $ABCD$ auf die analoge Frage für das Quadrat $ECFG$ reduziert haben.

Proportionenlehre begründet werden. Doch auch ohne Anwendung einer ausgereifteren Proportionenlehre, wie der des Eudoxos, konnte man dieser Probleme Herr werden, allerdings auf Kosten einer starken Annahme: der Existenz der vierten Proportionale.

Wir wollen diese Annahme anhand eines Satzes und der Anwendung der *Methode der Exhaustion* im zwölften Buch aufzeigen. Bekanntlich geht die Methode der Exhaustion, ebenso wie das Buch **V**, auf Eudoxos zurück. Sie dient dazu, die Größe oder das Volumen von geometrischen Objekten zu bestimmen, indem man den Wert durch eine Reihe von Annäherungen immer weiter „ausschöpft“. Dabei wird die Fläche oder das Volumen eines Objekts durch die Summe von Flächen oder Volumina von einfacheren, bekannten Formen approximiert. Die Grundidee ist, dass diese Näherungen immer weiter verfeinert werden. Im Wesentlichen funktioniert die Methode so, dass man eine bestimmte Größe als das Grenzmaß der Summen von immer genaueren Annäherungen versteht. Dies bedeutet, dass die Differenz zwischen der Annäherung und dem tatsächlichen Wert immer kleiner wird, bis sie eine unmerkliche Grenze erreicht – ein Konzept, das der modernen Integralrechnung ähnelt. Die Methode der Exhaustion war somit ein Vorläufer des modernen Begriffs der Integration.

Ein klassisches Beispiel der Anwendung dieser Methode findet sich in **XII.P2**. Nach diesem Satz stehen Kreise im Verhältnis der Quadrate über ihren Durchmessern. Sein Beweisgang ist für uns dahingehend interessant, da er die Zusatzannahme der vierten Proportionale enthält. Um diese zu lokalisieren, geben wir den Beweisgang in etwas abgewandelter Form wieder.⁵⁷

Betrachten wir die zwei Kreise $k_1(O_1, r_1)$ und $k_2(O_2, r_2)$ mit den entsprechenden Durchmessern $|FH| = 2r_1$ sowie $|BD| = 2r_2$. Die moderne Interpretation dieses Resultates könnte folgendermaßen lauten:

$$\frac{\text{Fläche}(k_1)}{\text{Fläche}(k_2)} = \frac{r_1^2 \pi}{r_2^2 \pi} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{4r_1^2}{4r_2^2} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2} = \boxed{\frac{FH^2}{BD^2}}$$

Naturgemäß führte Eudoxos diesen Beweis ohne Rekurs auf irrationale Zahlen, sondern begründete ihn im Wesentlichen auf seiner in Buch **V** dargestellten Proportionenlehre. Der Beweis verläuft mittels Kontraposition. Wir nehmen an, dass obiger Zusammenhang nicht gegeben ist. In diesem Fall existiert jedenfalls eine Fläche S mit der Eigenschaft

$$\frac{\text{Fläche}(k_1)}{S} = \frac{FH^2}{BD^2}$$

mit $S \neq \text{Fläche}(k_2)$. Basierend auf der Trichotomie unterscheiden wir zwischen folgenden zwei Fällen: (1) $S < \text{Fläche}(k_2)$ und (2) $S > \text{Fläche}(k_2)$.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Innerhalb des Kreises k_1 kann das Quadrat $EFGH$ eingezeichnet werden, sodass FH eine seiner Diagonalen ist. Zugleich kann auch das Quadrat $E_0F_0F_1E_1$ um den Kreis gezeichnet werden. Beides ist in der folgenden Abbildung eingezeichnet:

⁵⁷Vergleiche dazu beispielsweise Sonar (2015): S. 31ff

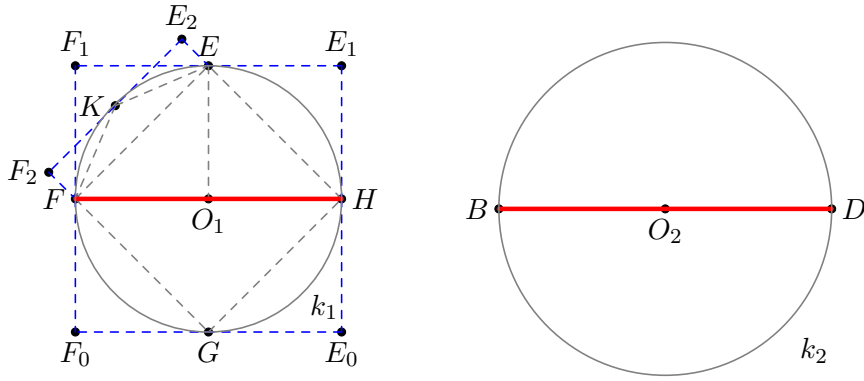


Abbildung 3.4: Streckenverhältnisse beim regulären Fünfecks

Ziel ist es nun innerhalb des Kreises k_1 ein Polygon zu konstruieren, dessen Fläche größer ist als die weiter oben eingeführte Fläche S . Das Quadrat $EFGH$ ist ein Polygon, das nicht notwendigerweise diese Eigenschaft besitzt. Es kann jedoch festgestellt werden, dass

$$\square F_0E_0E_1F_1 = 2 \cdot \square EFGH$$

Dies folgt beispielsweise aus der Betrachtung des Quadrates O_1HE_1E , das durch seine Diagonale EH in zwei gleich große Flächen geteilt wird. Dasselbe gilt für die anderen drei Quadrate EO_1F_1 , FO_1GF_0 und O_1GE_0H . Wir folgern aus all dem

$$\square EFGH = \frac{1}{2} \cdot \square F_0E_0E_1F_1 > \frac{1}{2} \square k_1$$

In analoger Weise betrachten wir nun das Rechteck FF_2E_2E . Auch hier gilt

$$\square FKE = \frac{1}{2} \cdot \square FF_2E_2E > \frac{1}{2} \cdot \widehat{\square FKE}$$

Durch derartige Konstruktionen wird jedes Mal mehr als die Hälfte der verbleibenden Fläche zusätzlich durch das neue Polygon abgedeckt. Somit ist sichergestellt, dass für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ wir ein 2^n -Polygon erhalten werden, dessen Fläche größer als die Fläche S sein wird. Aus **XII.P1** wissen wir jedoch, dass das Verhältnis der Flächen solcher Polygone proportional zum Verhältnis der Flächen der Quadrate über den Durchmessern der umschriebenen Kreise ist. Dies bedeutet

$$\frac{\square \text{Polygon}_1}{\square \text{Polygon}_2} = \frac{FH^2}{BD^2} = > \frac{S}{\square k_2}$$

Da jedoch $\square k_2 > \square \text{Polygon}_2$, erhalten wir auch $S > \square \text{Polygon}_1$ was der Konstruktion des zweiten Polygons widerspricht. Somit führt die Annahme $S < \square k_1$ zu einem Widerspruch. Ähnlich verfährt man auch im zweiten Fall und erhält somit, aus diesen zwei Widersprüchen, was zu zeigen war.

Der obige Beweis ist eine der einfachsten Anwendungen der Methode der Exhaustion. Der Beweis rekuriert auf den Satz **XII.P1**, der einen Zusammenhang zwischen den Polygonen und den Quadraten über den Durchmessern der entsprechenden Kreise aufzeigt: „Ähnliche Vielecke

in Kreisen verhalten sich wie Quadrate über den Durchmessern.“⁵⁸ Für den Beweis dieses Satzes verwendet Euklid die in Buch **VI** formulierte Ähnlichkeitslehre. Diese basiert zumindest teilweise auf der in Buch **V** entwickelten Proportionenlehre. Die Annahme, dass die konstruierten Polygone nach einer bestimmten Anzahl an Konstruktionen die Fläche S übersteigen werden, basiert zudem auch auf der Definition **V.D4**. Diese Definition stellt, wie wir sehen konnten, eine Abwandlung des archimedischen Axioms dar. Ausschlaggebender ist jedoch die **Annahme der Existenz einer bestimmten Fläche S** . Aus der Dichte der rationalen Zahlen folgt in keinerlei Hinsicht die Existenz einer vierten Proportionale S . Konkreter, der Umstand, dass man unendlich viele Polygone konstruieren kann, deren Fläche zwischen den Flächen $\square EFGH$ und $\square E_1F_1F_0F_0$ liegt, bedeutet nicht, dass wir auf die Existenz einer *bestimmten* Fläche S schließen können, unabhängig davon, ob wir diese mit unserer spezifischen Konstruktion jemals *erhalten* können oder nicht. Die Existenz dieser Fläche genauer gesagt der vierten Proportionale muss somit angenommen werden.

Becker (1933) sieht in dieser Annahme eine Abwandlung des dedekindschen Vollständigkeitsaxioms. In seiner Studie zur Existenzannahme der vierten Proportionale in der antiken Mathematik schreibt er:⁵⁹

„Warum also, [...], haben die Griechen an die Existenz eines dem Kreise flächengleichen Quadrates geglaubt? Und wir erhalten die Antwort: weil die dem Kreis eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone ein 'in doppelter Richtung' archimedisches System bilden. Die Griechen waren der Meinung, daß solche archimedisches Systeme auch im Dedekindschen Sinne stetig seien, d. h. daß jeder Dedekindsche 'Schnitt' in ihnen durch ein (und nur ein) trennendes Element hervorgebracht würde.“

Für Becker (ebd.) ist die Existenzannahme der vierten Proportionale nicht nur das Ergebnis der Dichte der rationalen Zahlen (und des archimedischen Axioms), sondern auch Beleg für ein antikes Vollständigkeitsaxiom. Obwohl die Existenzannahme der vierten Proportionale evident ist, lassen die Quellen, aus meiner Sicht, keinen Rückschluss auf eine stärkere Annahme zu. Die Annahme der Existenz eines Zwischenwertes scheint mir vielmehr das Ergebnis der Verwechslung von Dichte und Vollständigkeit zu sein. Es gilt nun auf diesen Umstand, mit Dedekind selbst, näher einzugehen.

3.6 Archimedisches Axiom und Vollständigkeit

Fassen wir die wesentlichen Unterschiede zwischen Dedekind und Eudoxos zusammen:

1. Die eudoxische Proportionenlehre entwickelt den Begriff der Verhältnisse von Größen indirekt. Es wird definiert, wann diese gleich sind, nicht jedoch, was Verhältnisse von Größen sind. Im Unterschied zu der Konstruktion Dedekinds wird hier kein neuer Zahlenbereich eingeführt. Die Definition **V.D5** entspricht jedoch im Wesentlichen der Konstruktion der Dedekindschnitte.
2. Die Definition **V.D4** ist, folgt man Stein (1990), streng genommen nicht mit dem archimedischen Axiom gleichzusetzen. Eudoxos' Theorie ist stärker als der Zahlenkörper der reellen Zahlen. Dieser Umstand verkompliziert die Theorie unnötig und wird zudem von Euklid

⁵⁸Euklid und Thaer (2003): S. 354

⁵⁹Vgl. Becker (1933): S. 387

selbst in späteren Sätzen implizit verworfen. Das archimedische Axiom kann somit als (zumindest implizite) Zusatzannahme der eudoxischen Proportionenlehre angesehen werden.

Derartige Zusatzannahmen sind jedoch, wie Dedekind selbst in seiner Korrespondenz mit Lipschitz bemerkt, keineswegs ein Garant für die Vollständigkeit eines Systems.⁶⁰

„Im Übrigen erfährt man, ausser diesen stillschweigend gemachten [...] Voraussetzungen, Nichts über die Ausdehnung oder Mannigfaltigkeit eines Gebietes von gleichartigen Grössen, und die Definition sagt nur, wann zwei in einem Grössengebiet vorhandenen Individuen dasselbe Verhältniss haben wie zwei andere“

und an anderer Stelle.⁶¹

„in meiner Schrift zeige ich, ohne jede Einmischung fremdartiger Dinge, dass in dem Gebiete der rationalen Zahlen selbst eine Erscheinung sich angeben lässt (der Schnitt), welche dazu benutzt werden kann, dieses Gebiet durch eine einzige Schöpfung von neuen, irrationalen Zahlen zu vervollständigen, und ich beweise, dass das so entstandene Gebiet aller reellen Zahlen die Eigenthümlichkeit besitzt, in welcher ich das Wesen der Stetigkeit (§ 3) erblicke [...] Zugleich behaupte ich, dass diese Sätze der Arithmetik zum grössten Theile (eigentlich fast alle bisher nicht bewiesen seien, und um wo möglich den Widerspruch aufs Äusserste zu reizen, sage ich, der Satz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei vorher noch nie bewiesen.“

Das, was Dedekind hier fehlt, ist das Vollständigkeitsaxiom. Modern formuliert besagt dieses, dass jede nichtleere und beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt das archimedische Axiom.⁶²

⁶⁰Lipschitz (1986): S. 66f

⁶¹Lipschitz (ebd.): S. 64f

⁶²Die Begriffe Supremum und Infimum stehen in Zusammenhang mit der Beschränktheit einer Menge. Sei $(M, \leq)$ geordnet, $A \subseteq M$. Man kann die Beschränktheit einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ folgendermaßen zum Ausdruck bringen:

$$\exists c \in \mathbb{R} \wedge (\forall x \in M \Rightarrow |x| \leq c)$$

Von der Bedeutung ist nun die Frage, ob es unter den (unendlich vielen) unteren und oberen Schranken einer nichtleeren Menge (sofern diese nach unten bzw. nach oben beschränkt ist) eine grösste untere bzw. eine kleinste obere Schranke gibt:

- **Definition Infimum:** Sei A nach unten beschränkt, $I := \{c \in M : \forall x \in A : x \geq c\}$. Falls ein $i \in S$ existiert mit $\forall c \in I : i \geq c$, so heisst dieses i kleinste obere Schranke von A oder Infimum von A , symbolisch $i := \inf A$.
- **Definition Supremum:** Sei A nach oben beschränkt, $S := \{c \in M : \forall x \in A : x \leq c\}$. Falls ein $s \in S$ existiert mit $\forall c \in S : s \leq c$, so heisst dieses s kleinste obere Schranke von A oder Supremum von A , symbolisch $s := \sup A$.

Das eigentliche **Archimedische Axiom** erscheint bei Vorliegen des Vollständigkeitsaxioms nun als beweisbares Theorem. In seiner modernen Ausprägung beinhaltet es folgende zwei Aussagen:

- $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Beweis. Wir zeigen beide Aussagen:

- Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, dann gäbe es ein $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Dann wäre nach der Definition des Supremums:

$$\exists n \in \mathbb{N} : s - 1 < n$$

Für ein solches n ist aber $n + 1 \in \mathbb{N}$ und $s < n + 1$ im Widerspruch zur Definition von s .

- Aus $\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \geq \varepsilon$ folgt

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} : n \leq \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

was bedeuten würde, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt wäre und einen Widerspruch zu (a) darstellen würde.

Umgekehrt ist dies jedoch nicht der Fall:

$$\boxed{\text{Vollständigkeitsaxiom}} \Rightarrow \boxed{\text{Archimedisches Axiom}}$$

$$\boxed{\text{Archimedisches Axiom}} \not\Rightarrow \boxed{\text{Vollständigkeitsaxiom}}$$

Nehmen wir als Beispiel die Menge S :

$$S = \{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}, n \text{ ist **keine** perfekte quadratische Zahl}\} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots\} \subset \mathbb{R}$$

Sie ist archimedisch, jedoch nicht vollständig. Sie erfüllt das archimedische Axiom, da sie weder unendlich kleine noch unendlich große Elemente besitzt. Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von S besitzt jedoch kein Supremum in S selbst. Ebenso, so Dedekind, verhält es sich mit dem *Größengebiet* der Elemente:⁶³

„Aber nirgends findet sich bei Euklid oder einem späteren Schriftsteller der Abschluss solcher Vervollständigung, der Begriff des stetigen d.h. denkbar vollständigsten Größen-Gebietes, dessen Wesen in der Eigenschaft besteht: ‚Zerfallen alle Größen eines stetig abgestuften Größen-Gebietes in zwei Classen von der Art, dass jede Grösse der ersten Classe kleiner ist als jede Grösse der zweiten Classe, so existirt entweder in der ersten Classe eine grösste, oder in der zweiten Classe eine kleinste Grösse‘. Wenn diese Eigenschaft nicht ausdrücklich in den Begriff des Größen-Gebietes aufgenommen wird, so bleibt auch das zugehörige Zahlen-Gebiet unvollständig, und es sind schon deshalb allgemein-gültige Definitionen der arithmetischen Operationen geradezu unmöglich [...] Nach allem diesem bleibe ich bei meiner Behauptung, dass die Euklidischen Principien allein, ohne Zuziehung des Principes der Stetigkeit, welches in ihnen nicht enthalten ist, unfähig sind, eine vollständige Lehre von den reellen Zahlen als den Verhältnissen der Größen zu begründen;“

Das, was Dedekind hier formuliert, ist das Vollständigkeitsaxiom in einer bemerkenswerten Klarheit. In **SZ**, so Dedekind selbst, formuliert er dieses für den reellen Zahlenbereich als Erster in einer stringenten und zufriedenstellenden Art und Weise:⁶⁴

„Abgesehen davon, dass mir wie schon oben bemerkt die Hereinziehung der Größen in die reine Zahlenlehre nicht gefällt, muss ich mich bestimmt gegen diese Ansicht erklären; die genannte Basis ist nach meiner Meinung nicht ausreichend, wenn nicht zu den Euklidischen Principien ausserdem noch der darin keineswegs enthaltene Kernpunct meiner Schrift, das Wesen der Stetigkeit (§ 3), hinzugethan wird. [...]“

Lipschitz dagegen, bringt ein stichhaltiges Gegenargument vor. Obzwar Euklid das genannte Vollständigkeitsaxiom nicht explizit nennt, so ist dies doch implizit in seinem System enthalten.⁶⁵ Er sieht die Existenz des Verhältnisses durch die geometrische Konstruktion gleichsam abgeleitet:⁶⁶

„[...] Euklid bei jener Definition die Existenz von Verhältnissen, die nicht dem Verhältniss von zwei ganzen Zahlen gleich sind, voraussetzt. [...] Euklid denkt sich eine Grösse durch das Mass einer scharf definirten Linie bestimmt, und unter diesem Gesichtspunkt kann er Linien

□

Vergleiche dazu beispielsweise Arens (2013): S. 123f sowie Kaltenbäck (2015): S. 18f

⁶³Lipschitz (1986): S. 67f

⁶⁴Lipschitz (ebd.): S. 66

⁶⁵Ebenso wie Becker (1933).

⁶⁶Lipschitz (1986): S. 72

*aufweisen [...] Ich weiss es sehr wohl, dass Sie einwenden werden, es genüge Ihnen nicht, **die Existenz eines Verhältnisses aus der geometrischen Construction abzuleiten.***“

Lipschitz koppelt die Existenzannahme an die Konstruierbarkeit von geometrischen Größen. Durch die Konstruierbarkeit einer Größe in der Anschauung wird die Stetigkeit sichergestellt. Dedekind hingegen stellt dies infrage und geht sogar einen Schritt weiter. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass der Raum stetig sein muss, denn unsere Anschauung setzt nicht dringend einen stetigen Raum voraus.⁶⁷

„[...] ich kann mir den ganzen Raum und jede Linie in ihm, wie ich schon am Schlusse des § 3. meiner Schrift [...] ausgesprochen habe, durchweg unstetig vorstellen;“

Wir möchten diesen Gedanken aufgreifen. Es geht uns dabei nicht um die Frage der Ausgestaltung des Anschauungsraumes, und darum, ob dieser stetig ist oder nicht. Vielmehr stellt sich die Frage, welche Qualität der Raum der Elemente besitzt? Ist dieser Raum stetig und welche Rolle spielt dabei die von Lipschitz eingebrachte Konstruierbarkeit geometrischer Größen?

3.7 Ist Euklids Raum stetig?

Die Frage, der wir uns nun zuwenden, ist, inwieweit das von Euklid in seinen Elementen dargelegte System der Geometrie einen stetigen Raum etabliert? Die Klärung dieser Frage setzt jedoch eine begriffliche Trennung voraus. Euklids Raum, wir bezeichnen ihn in Anlehnung an Friedman (1985) mit $(\mathbb{Q}^*)^n$, unterscheidet sich grundlegend vom euklidischen Raum der modernen Mathematik, bezeichnet mit $\mathbb{R}^n$. Zunächst ist im Ersteren trivialerweise die Anzahl der Dimensionen mit $n \in \{1, 2, 3\}$ gegeben, beim zweiten hingegen sind auch höhere Dimensionen nicht ausgeschlossen. Ausschlaggebend ist jedoch die Frage der Stetigkeit. Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ der modernen Mathematik stellt eine Verallgemeinerung des 19. Jahrhunderts dar und fußt auf der stetigen Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Stetigkeit dieses Raumes ist somit durch die Basismenge sichergestellt. Die Frage, inwieweit Euklids Raum $(\mathbb{Q}^*)^3$ stetig ist, könnte analog auf Basis einer Untersuchung der Menge $\mathbb{Q}^*$ geklärt werden. Die Analyse dieser Menge gibt Antwort auf zwei grundlegende Fragen. Zum einen die Frage, wieso Euklids System überhaupt funktioniert, d.h. wieso sind Beweise in diesem System möglich? Und zweitens, wenn dieser Raum nicht stetig ist, wie kann die Existenz aller konstruierbarer Punkte gewährleistet werden?

Beide Fragen stellen den Untersuchungsgegenstand der einflussreichen Arbeit von Friedman (ebd.) dar. Friedmans Verteidigung der kantischen Philosophie der Geometrie im Lichte einer Analyse unterschiedlicher Voraussetzungen der klassischen und modernen Logik hat zum Zeitpunkt ihrer Publikation neues Licht auf Kants Philosophie der Mathematik als auch auf die Elemente des Euklid geworfen. Seine Argumentation fußt auf dem Hinweis, dass man Kants (und Euklids) Verständnis der Geometrie im Lichte der zum damaligen Zeitpunkt verfügbaren Mittel, in erster Linie der aristotelischen Logik, werten sollte. Friedman zeigt auf, dass eine kontextgetreue Auseinandersetzung mit Kants Philosophie der Geometrie als auch mit Euklids System selbst fruchtbar und erkenntnisreich sein kann.⁶⁸

⁶⁷Lipschitz (ebd.): S. 79

⁶⁸Vgl. Friedman (1985): S. 456f

In Anlehnung an Friedman wollen wir die zwei genannten Fragen näher untersuchen und somit die Diskussion um Eudoxos und Dedekind in einen breiteren Kontext setzen. Friedmans Argumentation bietet einen guten Aufsatzzpunkt zur Klärung beider.

3.7.1 Warum *funktioniert* Euklids System?

Vom logischen Standpunkt aus betrachtet folgen nicht alle Sätze der Elemente aus den vorangehenden Axiomen, Definitionen, Erläuterungen und Sätzen. Die monadische Logik, so Friedman, ermöglicht solche logischen Schlüsse nicht. In der monadischen Logik wird mit Aussagen und Quantoren gearbeitet, die sich auf nur ein einziges Element beziehen. Was ist es aber dann, das die Notwendigkeit der Resultate bei Euklid gewährleistet?

Einfachheitshalber betrachten wir im Folgenden die Ebene. Es gilt somit $n = 2$. Welches Instrumentarium liegt dem Raum $(\mathbb{Q}^*)^2$ zugrunde? Zunächst sind es die Axiome, Postulate und Definitionen. Diese entsprechen zwar nicht unserem heutigen Verständnis von Axiomen, da sie bei Euklid oftmals die Form von Erläuterungen annehmen, sie bilden dennoch die *Basis* seines Systems. Die Logik ist eine syllogistische, monadische Logik. Auch sie unterscheidet sich von der modernen Variante einer polyadischen Logik. Dieser Punkt ist für Friedman (1985) zentral. Friedman unterzieht im Rahmen seiner Neuinterpretation von Kants Philosophie der Geometrie auch das System der Elemente einer Analyse. Seine erste Schlussfolgerung besteht darin, dass gewisse Sätze der Elemente, basierend auf diesen zwei Ingredienzien (den Axiomen und der monadischen Logik) nicht ableitbar sind. Als Beispiel führt er **I.P32** an.⁶⁹

I.P32 „An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich.“

Dieser besagt, dass die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreieckes 180° beträgt. Friedman bemerkt, dass dieses Resultat nicht allein aus den Axiomen und den Schlussregeln der monadischen Logik folgen kann. Für den Beweis ist, und hier sieht er Kant im Recht, auch die **Konstruktion in der Ebene bzw. die Anschauung** notwendig. Ohne die Konstruktion in der Anschauung kann der Beweis nicht gelingen. Die Konstruktion, das Skizzieren der geometrischen Zusammenhänge, ist, so Friedman, für den euklidischen Beweis unabdingbar und daher für Kants Verständnis der Geometrie essenziell.

Wieso ist dem so? Auf Basis einer monadischen Logik mit k Formeln kann man ein Modell mit höchstens 2^k Objekten generieren. Dies genügt jedoch nicht, um eine stetige Linie zu zeichnen. In einer polyadischen Logik dagegen, können Formeln konstruiert werden, die Modelle ermöglichen, die unendlich viele Objekte haben.⁷⁰ Allein mithilfe der Axiome (und Definitionen) der Elemente und der zugrundeliegenden monadischen Logik war somit ein Beweis des Satzes über die Winkelsumme des Dreiecks nicht möglich. Es bedarf eines Substitutes, dass zumindest ansatzweise das leisten konnte, was die polyadische Logik der modernen Mathematik imstande war. Dieses Substitut war die Konstruktion in der Anschauung, die, nach Friedman, bei Euklid

⁶⁹Euklid und Thaer (2003): S. 23

⁷⁰Friedman bezieht sich hier auf eine Abwandlung des Löwenheim-Skolem Theorems.

implizit, bei Kant jedoch explizit vorzufinden ist.⁷¹

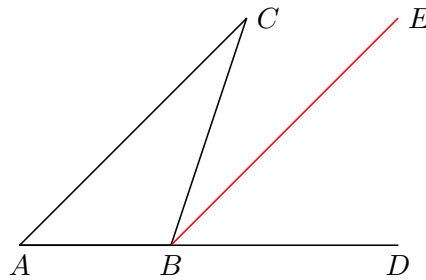


Abbildung 3.5: Satz 32 des Buches I der Elemente

Betrachten wir dies beispielhaft am erwähnten Satz. Gegeben sei das Dreieck $\triangle ABC$ wie in Abbildung 3.5. Basierend auf den elementaren planimetrischen Ergebnissen des Buches I der Elemente gilt offensichtlich

$$\angle CAB = \angle EBD \text{ sowie } \angle ACB = \angle CBE$$

Daraus folgt unverzüglich

$$180^\circ = \angle ABC + \angle CBE + \angle EBD = \angle ABC + \angle ACB + \angle CAB$$

Ohne die anschauliche Konstruktion der Geraden BE kann dieser Beweis im Kontext einer monadischen Logik nicht gelingen. Dies ist die Kernaussage von Friedmans Interpretation. Er sieht dies auch bei Kant an mehreren Stellen belegt: ⁷²

„Ich kann mir keine Linie, so klein sie auch sei, vorstellen, ohne sie in Gedanken zu ziehen. [...] Auf diese sukzessive Synthesis der produktiven Einbildungskraft, in der Erzeugung der Gestalt, gründet sich die Mathematik der Ausdehnung (Geometrie) mit ihren Axiomen [...]“

Es ist diese Synthesis der produktiven Einbildungskraft, die es ermöglicht, einen Beweis zu vollziehen, dessen Struktur nicht in den vorliegenden Begriffen immanent enthalten ist. Der Akt der Konstruktion stellt für Friedman eine Art Skolemfunktion dar, die in diesem spezifischen Fall, die Quantifikation der polyadischen Logik zu ersetzen vermag. Dabei geht es bei der Konstruktion der Gerade BE keineswegs um die einzelne, konkret gezeichnete Gerade selbst. Die Konstruktion steht vielmehr allgemeingültig für alle Anschauungen:⁷³

„Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunftkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen. Zur Konstruktion eines Begriffs wird also eine nicht empirische Anschauung erfordert, die folglich, als Anschauung, ein einzelnes Objekt ist, aber nichtsdestoweniger, als die Konstruktion eines Begriffs (einer allgemeinen Vorstellung), Allgemeingültigkeit für alle möglichen Anschauungen, die unter denselben Begriff gehören, in der Vorstellung ausdrücken muß. So konstruiere ich einen Triangel, indem ich den diesem Begriffe entsprechenden Gegenstand, entweder durch bloße Einbildung, in der reinen, oder nach derselben auch auf dem Papier, in der empirischen Anschauung, beidemale aber völlig a priori, ohne das Muster dazu aus irgendeiner Erfahrung geborgt zu haben, darstelle. Die

⁷¹Friedman (1985): S. 460f.

⁷²Kant (1956): S. 205; B203 - B205

⁷³Kant (ebd.): S. 613; B742

einzelne hingzeichnete Figur ist empirisch, und dient gleichwohl den Begriff, unbeschadet seiner Allgemeinheit, auszudrücken, weil bei dieser empirischen Anschauung immer nur auf die Handlung der Konstruktion des Begriffs, welchem viele Bestimmungen, z. B. der Größe, der Seiten und der Winkel, ganz gleichgültig sind, gesehen, und also von diesen Verschiedenheiten, die den Begriff des Triangels nicht verändern, abstrahiert wird. Die philosophische Erkenntnis betrachtet also das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besonderen, ja gar im Einzelnen, gleichwohl doch a priori und vermittelt der Vernunft, so daß, wie dieses Einzelne unter gewissen allgemeinen Bedingungen der Konstruktion bestimmt ist, ebenso der Gegenstand des Begriffs, dem dieses Einzelne nur als sein Schema korrespondiert, allgemein bestimmt gedacht werden muß.“

Die mathematische Erkenntnis, so Kant hier, bedarf der Anschauung, um im Einzelnen das Allgemeine zu *sehen*. Friedman sieht Kants Argumentation darin begründet, dass er versucht, die Begrenzungen der monadischen Logik über den iterativen Prozess der Konstruktion zu überwinden. Beweise der Geometrie sind für Kant nicht bloß räumliche, sondern auch zeitliche Objekte.⁷⁴ Konkret zu unserem Beweis der Winkelsumme gibt Kant ebenfalls Auskunft:⁷⁵

„Man gebe einem Philosophen den Begriff eines Triangels, und lasse ihn nach seiner Art ausfindig machen, wie sich wohl die Summe seiner Winkel zum rechten verhalten möge. Er hat nun nichts als den Begriff von einer Figur, die in drei geraden Linien eingeschlossen ist, und an ihr den Begriff von ebensoviel Winkeln. Nun mag er diesem Begriffe nachdenken, so lange er will, er wird nichts Neues herausbringen. Er kann den Begriff der geraden Linie, oder eines Winkels, oder der Zahl drei zergliedern und deutlich machen, aber nicht auf andere Eigenschaften kommen, die in diesen Begriffen gar nicht liegen. Allein der Geometer nehme diese Frage vor. Er fängt sofort davon an, einen Triangel zu konstruieren. Weil er weiß, daß zwei rechte Winkel zusammen gerade so viel austragen, als alle berührenden Winkel, die aus einem Punkte auf einer geraden Linie gezogen werden können, zusammen, so verlängert er eine Seite seines Triangels, und bekommt zwei berührende Winkel, die zweien rechten zusammen gleich sind. Nun teilt er den äußeren von diesen Winkeln, indem er eine Linie mit der gegenüberstehenden Seite des Triangels parallel zieht, und sieht, daß hier ein äußerer berührender Winkel entspringe, der einem inneren gleich ist, usw. Er gelangt auf solche Weise durch eine Kette von Schlüssen, immer von der Anschauung geleitet, zur völlig einleuchtenden und zugleich allgemeinen Auflösung der Frage.“

Mit Friedman können wir schlussfolgern, dass Euklids System *funktioniert*, weil die Konstruktion mit Lineal und Zirkel eine Art Skolemfunktion darstellt. Die Quantifizierung der polyadischen Logik kann mit dieser *in einem ausreichenden Maße* ersetzt werden, sodass der Beweis seine Notwendigkeit beibehält. Es wäre ein Anachronismus, würde man Kant oder gar Euklid ein *Umgehen* der monadischen Logik attestieren wollen. Der Aufsatz Friedmans gibt vielmehr eine profunde Antwort auf die Frage, wieso die Beweise der klassischen euklidischen Geometrie Notwendigkeit entfalten. Sie *funktioniert*, weil die Konstruktion in der Anschauung nicht bloß Hilfsmittel, sondern selbst eine Notwendigkeit darstellt.

3.7.2 Bewegung als *Brücke* zur Stetigkeit?

Nun mag zwar die raumzeitliche Konstruktion die Einschränkungen der monadischen Logik für Zwecke der praktischen Geometrie überwinden, es bleibt jedoch die Frage offen, was für einen Raum wir durch diesen Ansatz erhalten. Ziehen wir für diese Frage nochmals Dedekind selbst heran. In **WZ** geht er auf den Charakter des in den Elementen begründeten geometrischen Raumes ein:⁷⁶

⁷⁴Vgl. Friedman (1985): S. 459

⁷⁵Kant (1956): S. 615; B743

⁷⁶Dedekind (1888): S. 339

„Wählt man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, O nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernungen AB, AO, BO algebraische*) Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Punkte M als vorhanden an, für welche die Verhältnisse von AM, BM, OM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Punkten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden. Wenn mir aber jemand sagt, wir könnten uns den Raum gar nicht anders als stetig denken, so möchte ich das bezweifeln und darauf aufmerksam machen, eine wie weit vorgeschrittene, feine wissenschaftliche Bildung erforderlich ist, um nur das Wesen der Stetigkeit deutlich zu erkennen [...]“

Dies ist eine bemerkenswerte Einsicht. Geht man von drei Punkten im Raum aus, deren Streckenverhältnisse kommensurabel sind, kann durch die Anwendung der euklidischen Konstruktionen allein, nur ein unstetiger Raum konstruiert werden. Die Axiome der Elemente, zusammen mit der zugrunde liegenden Logik, implizieren keinen stetigen Raum. Was aber ist dann Euklids Raum?

In Anlehnung an Dedekind können wir diesen Raum einen *algebraischen Raum* nennen. Er ist der Raum $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ (bzw. $(\mathbb{Q}^*)^3$ bei drei Dimensionen), wobei $\mathbb{Q}^*$ die Menge der rationalen Zahlen erweitert um die Quadratwurzeln ist. Dieser Raum ist somit kein *rationaler Raum*, sondern seine Erweiterung. Eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ kann als Diagonale des Einheitsquadrates konstruiert werden. Allgemein ermöglicht also die Konstruktion mit Zirkel und Lineal die Erweiterung dieses Raumes um Strecken, deren Länge eine Quadratwurzel einer rationalen Zahl darstellt. Gleichwohl verbleibt er unstetig, da er unendlich viele Unstetigkeitsstellen im Sinne der transzendenten irrationalen Zahlen aufweist. Für Euklid sind nur Konstruktionen mit Lineal und Zirkel gestattet. Alle Punkte stehen somit in einem algebraischen Zusammenhang bzw. die Strecken, die diese Punkte verbinden, sind Unbekannte in einer algebraischen Gleichung. Transzendente Zahlen sind derart nicht konstruierbar, da sie keine Lösungen algebraischer Gleichungen sind. So kann etwa eine Strecke der Länge π im Raum $(\mathbb{Q}^*)^2$ nicht konstruiert werden.

Dieser Umstand verleitet Friedman (1985) zur Schlussfolgerung, dass Dedekinds Untersuchungen zur Stetigkeit in **SZ** die Ersten Ihrer Art sind. Er geht sogar so weit zu behaupten, dass vor Dedekind Stetigkeit mit Dichte gleichgesetzt wurde:⁷⁷

„First, the intuitive notion of ‘continuity’ [...] is not our notion continuity: in particular, it is not explicitly distinguished from denseness. This distinction was not even articulated until late nineteenth century; before Dedekind mathematicians would commonly give what we call the definition of denseness when explaining what they meant by ‘continuity’: namely, ‘for every element there is a smaller’ or ‘between every two elements there’.“

Belegen lässt sich diese Behauptung nur schwer. Tatsächlich sprechen mehr Anhaltspunkte dafür, dass diese Unterscheidung sehr wohl auch vor Dedekind nicht gänzlich unbekannt war. Bei Wilhelm von Ockham scheint die Verwechslung der Begriffe Dichte und Stetigkeit tatsächlich der Fall gewesen zu sein.⁷⁸ Dagegen findet man schon bei Aristoteles ein *prototopologisches* Verständnis vor, für welches Dichte eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingung der Stetigkeit darstellt.⁷⁹

⁷⁷Friedman (1985): S.462f

⁷⁸Vgl. dazu die Ausführungen in Bell (2022)

⁷⁹Wir gehen auf dies noch im nächsten Kapitel näher ein.

Wir halten somit fest: Die Konstruktion mit Zirkel und Lineal gewährleistet Dichte, jedoch keine Stetigkeit. Der Raum $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ wird somit der Stetigkeit des Raumes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nicht gerecht.

Der algebraische Raum $(\mathbb{Q}^*)^2$ ist für Friedman (1985) mit dem Raum der Axiomatik von Hilbert (1922) vergleichbar, da auch dieser vom Vollständigkeitsaxiom abstrahiert. Dies sind, in moderner Notation, folgende Axiome:⁸⁰

1. *Irreflexivität:* $a \not< a$
2. *Transitivität:* $a < c \wedge c < b \Rightarrow a < b$
3. *Trichotomie:* $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$
- 4./5. *Keine Endpunkte:* $\forall a \exists b(a < b)$ sowie $\forall b \exists a(a < b)$
6. *Dichte:* $\forall a \forall b \exists c(a < b \Rightarrow (a < c < b))$

Die Analyse des Stellenwertes der Konstruktion bei Kant, hat ergeben, dass die Implikationen der obigen sechs Axiome auch im Rahmen einer monadischen Logik ihre Kraft dahingehend entfalten können, da der Akt der Konstruktion in der Anschauung eine Art Skolemisierung des Existenzquantors ermöglicht. Dichte kann somit durch Konstruktion gewährleistet werden. Die Frage der Stetigkeit des Raumes bleibt jedoch dadurch unbeantwortet.

Am eindrucksvollsten zeigt sich dies anhand des ersten Satzes des Buches **I** der Elemente anhand der Konstruktionsanleitung für ein gleichseitiges Dreieck:⁸¹

I.P1 „Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.“

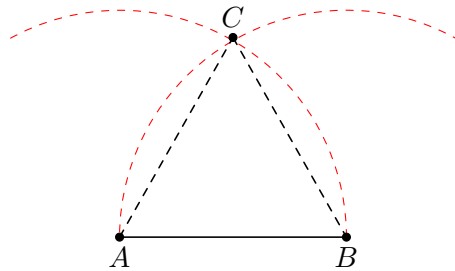


Abbildung 3.6: Satz 1 des Buches **I** der Elemente

Bereits Pasch (1926) wies darauf hin, dass die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Zirkel und Lineal, wie es die Elemente vorsehen, nichts über die Existenz des Punktes C aussagt. Im Unterschied zu Kant sieht er in der Konstruktion keineswegs ein notwendiges Hilfsmittel der Geometrie:⁸²

„Denn die Zuziehung der Abbildung ist überhaupt nichts Notwendiges. Sie erleichtert wesentlich die Auffassung der in dem Lehrsatz ausgesprochenen Beziehungen und der etwa zum Beweise angewandten Konstruktionen; sie ist überdies ein fruchtbares Mittel, um solche

⁸⁰Vgl. Hilbert (1922): S. S. 3ff

⁸¹Vgl. Euklid und Thaer (2003): S. 3

⁸²Pasch (1926): S. 43

Beziehungen und Konstruktionen zu entdecken. Aber wenn man das Opfer an Mühe und Zeit nicht scheut, so kann man beim Beweise eines jeden Lehrsatzes die Abbildung fortlassen; der Lehrsatz ist eben nur dann wirklich bewiesen, wenn der Beweis von der Abbildung vollkommen unabhängig ist.“

Konkret zur Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks schreibt er darüber hinaus:⁸³

„Es ist aber, unmittelbar, nachdem die beiden Kreise eingeführt sind, vom Punkte C die Rede, in dem sie sich schneiden. Nach welchem Satze existiert ein derartiger Punkt? Bei Euklid findet sich keine darauf bezügliche Angabe, und diese Lücke kann auch aus seinem Material nicht ergänzt werden, denn es geht dem ersten Lehrsatz keine Aussage voran, wonach jene Kreise sich schneiden müssen. [...] Daß hier die dem Satze vom gleichseitigen Dreieck beigegebene Abbildung alleine irreführt hat, erkennt man sofort, wenn man den Beweis ohne die Abbildung herzustellen versucht. Nach wie vor kann man die beiden Kreise einführen, weil man über das dritte Postulat verfügt; um jedoch von da weiterzukommen, fehlt jede Handhabe, solange man keine Abbildung vor Augen hat. Die Abbildung freilich läßt nicht in Zweifel darüber, ob der Punkt C existiert. [...]“

Tatsächlich impliziert das euklidische System nicht die Existenz dieses Punktes, da es kein Vollständigkeitsaxiom kennt. Unendliche Teilbarkeit sowie Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel generieren alleine keinen stetigen Raum. Das Resultat bleibt ein Raum mit abzählbar unendlich vielen Punkten.

Wir haben Pasch (ebd.) ausführlich zitiert, um einen wichtigen Punkt hervorzuheben. Ungeachtet von Paschs strukturalistischen Zugang zur Geometrie, sehe ich hinsichtlich der Frage der Stetigkeit keinen Widerspruch zwischen Pasch (ebd.) und Friedman (1985). Beide sind sich einig, dass mit den klassischen Mitteln der Konstruktion mittels Lineal und Zirkel kein stetiger Raum etabliert werden kann. Und beide diagnostizieren am Beispiel der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks die Unstetigkeit des Raumes $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$. Sie unterscheiden sich lediglich im Stellenwert der Konstruktion. Für Friedman sieht die Notwendigkeit der Konstruktion in der Anschauung dahingehend begründet, dass dadurch ein algebraischer Raum etabliert werden kann, während Pasch darin lediglich ein überwindbares Hilfsmittel sieht.

Wie kann die Existenz des Punktes *C*, ohne die Einführung eines Vollständigkeitsaxioms, gewährleistet werden? Eine Lösungsmöglichkeit sieht Friedman (ebd.) in der polyadischen Logik gegeben. Er argumentiert, dass die bisherigen Begriffe keinen erschöpfenden Gebrauch dieser Logik gemacht haben. Sie beinhalten lediglich die Dichte in der Form $\forall\exists$. Gleichwohl sieht er bei Kant nicht nur das Bewusstsein für das Problem, sondern auch einen ersten Lösungsansatz gegeben. Für Kant, so Friedman, ist der Begriff der Bewegung von herausragender Bedeutung. Geometrische Beweise sind, wie schon hervorgehoben, nicht nur räumliche, sondern raumzeitliche Objekte. Die Konstruktionen, die ihnen zugrunde liegen, entstehen durch Bewegung. Nur durch die Bewegung des Stiftes kann die Konstruktion vollzogen werden. Über diese Bewegung werden alle Punkte früher oder später erreicht.⁸⁴ Alles, was konvergiert, hat auch einen Grenzwert, oder modern gesprochen, der vorliegende Raum ist Cauchy-Vollständig. Für Friedman bedeutet dies, dass Kants Standpunkt folgendermaßen ausgedrückt werden kann:⁸⁵

⁸³Pasch (ebd.): S. 44

⁸⁴Trivialerweise muss es sich um eine gleichmäßige oder beschleunigende Bewegung handeln.

⁸⁵Vgl. Friedman (1985): S. 476

- Begriff der Konvergenz:

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m \forall n [m, n > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon]$$

- Konvergenz für ein bestimmtes Limit r :

$$\forall \varepsilon \exists N \forall m [m > N \Rightarrow |s_m - r| < \varepsilon]$$

- Cauchy Vollständigkeit: $\boxed{\forall \varepsilon \exists N \forall m \forall n [m, n > N \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon] \Rightarrow \exists r \forall \varepsilon \exists N \forall m [m > N \Rightarrow |s_m - r| < \varepsilon]}$

Diese Quantorenverkettungen übersteigen das, was man allein mit der Dichte der Form $\forall \forall \exists$ auszudrücken vermag. Die Bewegung, die der Konstruktion zugrunde liegt, ermöglicht eine Brücke zur Stetigkeit ohne die explizite Definition eines Vollständigkeitsaxioms.

Motiviert war der Stellenwert der Bewegung für Kant womöglich durch Entwicklungen innerhalb der Physik. So geht die Entwicklung der newtonschen Mechanik einher mit der Entwicklung der Differenzial- und Integralrechnung. Das geeignete Mittel, Bewegung zu beschreiben, sind für Newton die Mittel der Differenzialrechnung. Eine Bewegung ist, so Friedmans These, mit Differenzierbarkeit gleichzusetzen. Eine Kurve, die durch Bewegung entsteht, ist stets eine differenzierbare Kurve. Wie hängt dies jedoch mit der Stetigkeit zusammen? Inwiefern kann aus der Bewegung bzw. der Differenzierbarkeit einer Funktion auf ihre Stetigkeit geschlossen werden? Friedman sieht hier eine wesentliche Schwäche des kantischen Standpunktes.

Um dies zu erläutern, betrachten wir ein Teilchen, das sich im Raum bewegt. Die Flugbahn des Teilchens ist stetig, falls das Teilchen in beliebig kleinen Zeitabschnitten in der Nähe seines Ausgangspunktes verweilt. Es macht somit keine Sprünge. Differenzierbar ist die Flugbahn jedoch zusätzlich, wenn das Teilchen für genügend kleine Zeitabschnitte im initialen Richtungsvektor verweilt. Stetigkeit ist somit allgemeiner als Differenzierbarkeit. Alle differenzierbaren Funktionen sind stetig, aber nicht alle stetigen Funktionen sind zugleich differenzierbar.

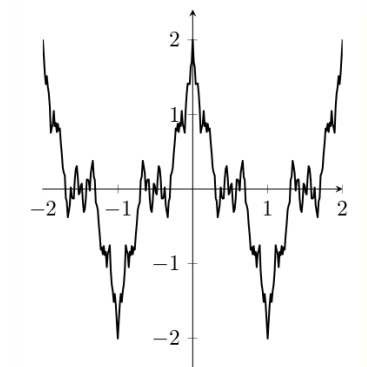


Abbildung 3.7: Weierstraß-Funktion

Friedman nennt hier die Weierstraß-Funktion als Beispiel einer stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion. Das bedeutet, gemäß der obigen Interpretation, dass keine Bewegung eines Teilchens auf der Flugbahn einer Weierstraß-Funktion denkbar ist. Bewegung stellt somit nicht das geeignete Kriterium für Stetigkeit dar. Eine kinetische Interpretation der Konstruktion in der Anschauung vermag, so Friedman (1985), die Stetigkeit nicht zu erklären.

3.8 Zwischenergebnis

Fassen wir die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen:

1. In der Antike entwickelten sich mehrere Theorien über Proportionen, die einen gewissen Umgang mit inkommensurablen Größen ermöglichten. Eine Art Vollendung erfuhren diese Theorien mit der Formulierung der eudoxischen Proportionenlehre im fünften Buch der Elemente.
2. Die Art und Weise, wie dort inkommensurable Größen in Proportion gesetzt wurden, entspricht dem Wesen nach der Konstruktion der Dedekindschnitte. Beide Ansätze bedienen sich der Ordnungsstruktur der rationalen Zahlen und teilen diese in zwei bzw. drei Teilmengen.
3. Der darauffolgende Schöpfungsakt der reellen Zahlen bei Dedekind ist bei Eudoxos jedoch keineswegs zu finden. Dies hängt damit zusammen, dass die Schnitte bei Dedekind, die ja unendliche Mengen darstellen, zu eigenständigen Objekten werden. Diese **definieren** für Dedekind die reellen Zahlen. Mangels transfiniter Mengenlehre konnte die Antike diesen Schritt nicht vollziehen.
4. Ebenso gab es bei Eudoxos keine explizite Definition eines Vollständigkeitsaxioms. Dieses gewährleistet bei Dedekind die Vollständigkeit des neuen Zahlenbereiches. Auch die Existenzannahme der vierten Proportionale kann über diesen Umstand meines Erachtens nicht hinwegtäuschen. Die analysierten Beweisgänge zeugen von einer Verwechslung von Dichte und Stetigkeit und einer *Überbewertung* des archimedischen Axioms.
5. Der Raum der Elemente ist mangels Vollständigkeitsaxiom, somit kein stetiger Raum. Die Konstruktion mittels Zirkel und Lineal erweitert diesen Raum zwar um Quadratwurzeln, führt jedoch nicht über einen algebraischen Raum hinaus. Dieser Raum ist „*überall dicht, wie ein unendlich feiner Staub, aber dennoch nicht kontinuierlich*“⁸⁶, wie es Hausdorff Jahre später beschreiben wird.
6. In Anlehnung an Kant könnte Bewegung als geeigneter Kandidat für die Überwindung dieser Schwierigkeiten angesehen werden. Die erwähnte Konstruktion in der Anschauung hat selbstverständlich auch einen kinetischen Aspekt. Falls man jedoch Bewegung mit der Differenzierbarkeit einer Funktion gleichsetzt, wie es Friedman (ebd.) tut, erhalten wir ein zu starkes Kriterium für Stetigkeit. Friedman (ebd.) ist bestrebt, so die Unzulänglichkeit von Kants Ansatz zu zeigen.

Dedekinds Theorie der Schnitte macht von einer transfiniten Mengenlehren Gebrauch, um die Stetigkeit der reellen Zahlen zu begründen. Die Antike hingegen verwirft den Begriff des Aktualunendlichen womit Eudoxos' Konstruktion im fünften Buch der Elemente streng genommen keine Begründung der reellen Zahlen liefern kann. Die Ähnlichkeit beider Konstruktionen darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Reichweite der Dedekindschnitte eine viel weitere ist.

⁸⁶Hausdorff (1903): S. 13

Durch die Anwendung einer transfiniten mengentheoretischen Methode war Dedekind in der Lage, Objekte zu formulieren, die in Ihrer Ausgestaltung von vornherein die Supremumseigenschaft erfüllten. Die Methode ermöglichte ihm eine *Vervollständigung* des rationalen Zahlenkörpers.

Kapitel 4

Das Punktmengenkontinuum

*„Wenn wir Ideales mit den realen
Substanzen verwechseln, indem wir in der
Ordnung des Möglichen aktuelle Teile,
und in der Zusammenballung von
Wirklichem unbestimmte Teile suchen,
dann verwickeln wir uns ins Labyrinth
des Kontinuums und in unauflösbare
Widersprüche.“*

Leibniz, Brief von 19. Januar 1706,
zitiert nach Fierz (1947): S. 111.

Im letzten Kapitel wurde die Frage untersucht, inwiefern der Raum der *Elemente* stetig ist. Es zeigte sich, dass dieser Raum, basierend auf den Axiomen, Definitionen und Sätzen der Elemente, lediglich eine Erweiterung des rationalen Raums darstellt, jedoch keinen stetigen Raum etabliert. Folglich wurde die Möglichkeit untersucht, dass die *Bewegung* bei der Konstruktion von geometrischen Figuren geeignet ist, die Stetigkeit im Raum zu gewährleisten. Friedman (1985) setzt diese Bewegung mit einer differenzierbaren Funktion gleich. An der Weierstraß-Funktion kann man sich jedoch vergewissern, dass es stetige, aber nirgends differenzierbare Funktionen gibt und die Begriffe Bewegung und Stetigkeit im mathematischen Sinne nicht gleichzusetzen sind.

Diese Argumentation setzt viel voraus. Sie geht davon aus, dass mathematische Funktionen die klassischen Kontinuitäten¹ adäquat darstellen können. Es ist jedoch nicht dasselbe, wenn man von der Stetigkeit klassischer Kontinuitäten, mathematischer Funktionen und Zahlenmengen spricht. Deshalb wollen wir in diesem Kapitel den klassischen aristotelischen Synechismus und Dedekinds Punktmengenkontinuum einem Vergleich unterziehen und so die Unterschiede und Gemeinsamkeiten herausarbeiten.

¹Wir benutzen den Begriff *Kontinuitäte* oder *Kontinua* in einem aristotelischen, intuitiven Sinne. Hausdorff (1914) dagegen versteht unter diesem Begriff **abgeschlossene** und zusammenhängende Mengen im topologischen Sinne. Der Begriff des Kontinuums steht heute jedoch für eine **kompakte** und zusammenhängende Teilmenge des topologischen Raumes, der dem zweiten Trennungsaxiom genügt. Siehe dazu Gähler (1994): S. 171ff.

4.1 Aristotelischer Synechismus

Die Auseinandersetzung mit dem Kontinuum in der griechischen Antike nahm ihren Anfang bei der Naturphilosophie und Metaphysik der frühen eleatischen Schule und kreiste um den Begriff *suneches*, der so viel bedeutet, wie *zusammen halten*. Die Ursprünge dieses Begriffs sind jedoch viel älter. Wir begegnen ihm bereits bei Homer und Hesiod, wo er mit einer *ununterbrochenen Aktivität* gleichgesetzt werden kann und somit offensichtlich für einen zeitlichen Zusammenhang stand.²

Bei Parmenides bekommt der Begriff dagegen eine ontologische Prägung. Im überlieferten Fragment des *Lehrstücks über die Natur* kennzeichnet der Gebrauch des Verbs *sunechein* und des davon abgeleiteten Adjektivs *suneches* die strenge Einheit im Sinne der *Kompaktheit des Seins*.³ Das Fragment lautet wie folgt:⁴

„[...]
denn es ist ein Ganzes und Bewegungsloses und nicht erst noch zu Vollendendes;
niemals war es, nie wird es sein, da es jetzt ist, alles zugleich,
das Eine, kontinuierlich; denn welche Erzeugung wirst du für es suchen?
[...]
Auch nicht teilbar ist es, da es ein Ganzes, in sich Gleichartiges, ist;
und da ist nicht irgendwie ein Mehr, das es stören könnte, in sich kontinuierlich zu sein,
[...]“

Das Sein ist *jetzt*. Es hat weder ein *Vorher* noch ein *Nachher*. Zeitliche Unterscheidungen sind ihm fremd, weshalb bei Parmenides auch nicht von der Kontinuität als ununterbrochener Aktivität gesprochen werden kann. Der temporale Gehalt des Begriffs *suneches* der frühen Literatur wird bei ihm durch einen ontologischen ersetzt. Doch nicht nur zeitliche Unterschiede werden dem Sein abgesprochen. Dieses ist vielmehr gleichartig (homogen), denn weder ein *Mehr* noch ein *Weniger* kann bei ihm vorgefunden werden. Die Homogenität impliziert zugleich auch einen Mangel an Unterscheidbarkeit. Zeitliche, örtliche, ontologische und logische Unterschiede werden durch sie ausgeschlossen. Über einen *Teil* von etwas kann nur sinnvoll gesprochen werden, wenn es vom *Ganzen* bzw. dem *Rest* qualitativ oder quantitativ unterschieden werden kann. Jede Teilbarkeit setzt Unterscheidbarkeit voraus. Das Sein kennt jedoch keine Unterschiede. Mangels Unterscheidbarkeit ist das Sein unteilbar. Homogenität impliziert Unteilbarkeit. Das Kontinuierliche ist folglich homogen und unteilbar.⁵

Zeno von Elea nahm sich zum Ziel, diese Argumentation mittels einiger Gedankenexperimente zu untermauern. Er zeigte, dass die Annahme der Teilbarkeit einer Strecke im Widerspruch mündet. Die Bewegung des Pfeils müsste in einer begrenzten Zeit eine unendliche Anzahl an Etappen durchlaufen, was einerseits dem Alltagsverständnis der Bewegung widerspricht, andererseits aber auch die Frage aufwirft, wie weit eine (theoretische) Teilung der Strecke durchgeführt werden kann. Bei der Auflösung des Problems bietet die Antike zwei mögliche Ansätze:⁶

²Vgl. Sattler (2020): S. 7

³Vgl. Rapp und Corcilius (2021): S. 285

⁴Kranz et al. (1992): Parmenides, DK 28 B8,6 sowie 22-25 in Übersetzung von Hans Zimmermann, <http://12koerbe.de/pan/parmen.htm###Nichtsein%20ist%20nicht%20denkbar>, aufgerufen am 16.08.2025.

⁵Vgl. Sattler (2020): S. 7ff

⁶Sattler (ebd.) sieht neben diesen beiden Ansätzen grundsätzlich noch eine dritte Möglichkeit. Für die moderne Mathematik ist die geometrische Gerade ein geometrischer Ort von Punkten. Ihre Anzahl ist überabzählbar. Aus dimensionslosen Objekten entsteht dort eine kontinuierliche Größe (die Gerade). Vergleiche Sattler (ebd.): S. 8f

1. Aus einem endlichen kontinuierlichen Ganzen, gelangt man durch Teilung zu unteilbaren Entitäten (Atomen, Punkten etc.).
2. Die Teilung eines endlichen kontinuierlichen Ganzen kann beliebig weit durchgeführt werden, ohne jemals an ein Ende zu gelangen.

Der zweite Standpunkt ist bis heute der ersten systematischen Behandlung des Kontinuums in der aristotelischen *Physik* verpflichtet und wird als *Synechismus* bezeichnet. Wenn Strömungen und Standpunkte keinen Namen haben, ist dies ein Beleg ihrer allgemeinen Akzeptanz. Auch beim Synechismus war dies der Fall. Seine Namensgebung erfolgte erst im 19. Jahrhundert durch Peirce.⁷

Dass eine kontinuierliche Größe beliebig teilbar ist, könnte Aristoteles aus der mathematischen Praxis entnommen haben.⁸ Dort war die Konstruktion eines Streckenmittelpunktes ein hinreichender Beleg für die Teilbarkeit einer kontinuierlichen Größe. Zumindest im dritten Buch der *Physik* finden wir einen Hinweis, dass Aristoteles hierbei auf eine lange mathematische Praxis zurückgreift:⁹

„Dafür, daß es etwas Unbegrenztes auch wirklich gebe, ergibt sich die zuversichtliche Annahme wohl, wenn man besonders fünf (Stücke) ins Auge faßt: (1) (ergibt sie sich) aus der Zeit – die ist unendlich –; (2) aus der Teilung bei den Größen – es benutzen ja auch die Mathematiker den Unendlichkeitsbegriff [...]“

Obwohl es naheliegend ist, dass er seinen Standpunkt unter Einfluss der mathematischen Praxis entwickelt hat, ist seine Argumentation eher physikalisch. Er untersucht mögliche topologische Ausgestaltungen physischer Objekte, um ein Unterscheidungsmerkmal für kontinuierliches und diskretes herauszuarbeiten. Um nicht in den von Zeno aufgezeigten Widerspruch zu verfallen, muss er dafür zunächst den Begriff der *unendlichen Teilung* näher bestimmen.

Unbegrenzte Teilbarkeit setzt den Begriff der Unendlichkeit voraus. Die Stellung des Unendlichen wird ebenfalls im dritten Buch der *Physik* thematisiert. Aristoteles bemerkt dort, dass es das Unbegrenzte „in bestimmtem Sinne gibt [...], in einem bestimmten anderen aber nicht [...]“¹⁰ Das Ergebnis seiner Analyse ist nun, dass „unbegrenzt“ nur in der Weise der Möglichkeit vorkommt.“¹¹ Die entscheidende Erkenntnis ist somit, dass Unendlichkeiten nur in der Potenz existierten. Sie bleiben stets unvollendet und besitzen somit auch keine Aktualität in der Welt.¹²

4.1.1 Das Kontinuum ist unbegrenzt teilbar

Worin diese Potenz besteht, kann unterschiedlich sein. Die Potenz der (natürlichen)¹³ Zahlen besteht in ihrem immerwährenden Fortgang. Das *Zählen* bleibt stets unvollendet, da es unendlich fortgeführt werden kann. Die Menge der (natürlichen) Zahlen selbst existiert in ihrer Aktualität dagegen für Aristoteles nicht.

⁷Vgl. Bell (2022): S.1

⁸Vgl. Sattler (2020): S. 14

⁹Aristoteles (2023b): S. 70; *Physik* III.4, 203b17-18

¹⁰Aristoteles (ebd.): S. 78; *Physik* III.6, 206a9-207a10

¹¹Aristoteles (ebd.): S. 79; *Physik* III.7, 207a33-b21

¹²Vgl. Becker (1990): S. 69

¹³Wir erinnern uns, dass die griechische Antike unter Zahlen nur natürliche Zahlen verstanden hat. Der Zusatz *natürliche* wird somit in diesem Kapitel gelegentlich ausgelassen.

Bei Kontinuitäten wie der Zeit, Bewegung und Ausdehnung finden wir einen anderen Aspekt vor. Ein Zeitabschnitt, eine Bewegung oder eine Strecke können begrenzt sein, eine Teilung dieser kann dagegen beliebig oft vorgenommen werden, ohne dass die Kontinuitäten ihre Eigenschaften verlieren. Während jeder Teil der Zeit zugleich auch Zeit darstellt, ist die Teilung einer (natürlichen) Zahl nicht unbedingt wieder eine (natürliche) Zahl. Es scheint, dass die *Teilbarkeit ohne Wesensverlust* eine grundlegende Eigenschaft von Kontinuitäten ist.

Die unbegrenzte Teilbarkeit ist für Aristoteles somit das Unterscheidungsmerkmal von kontinuierlichen Größen¹⁴ und dem diskreten Bereich der (natürlichen) Zahlen. Um dieses Unterscheidungsmerkmal herauszuarbeiten, führt er eine topologische Analyse durch, die sich an der möglichen Anordnung physikalischer Objekte orientiert. Demnach können zwei Objekte auf mehrere Arten angeordnet sein:¹⁵

„Danach wollen wir vortragen, was ‚beisammen‘ bedeutet und ‚getrennt‘, und was ‚berühren‘, was ‚inmitten‘, was ‚in Reihe folgend‘, was ‚anschließend‘ und ‚zusammenhängend‘, und (schließlich) welchen Gegenständen ein jedes davon seiner Natur nach eignet.“

Der Reihe nach getrennte Gegenstände folgen aufeinander, können jedoch sehr wohl Verschiedenes zwischen sich haben:¹⁶

„In Reihe folgend‘ ist solches, was nach dem Anfang kommt und so nach Anordnung und Form oder etwas anderem für sich abgegrenzt ist, und nichts ist inmitten von Gegenständen der gleichen Gattung (zwischen ihm) und dem, dessen in Reihe Folgendes es ist, – ich meine z. B. Strecke oder Strecken folgen auf Strecke, und auf Einheit folgt Einheit oder Einheiten, und auf Haus folgt Haus; etwas davon Verschiedenes darf ja ohne weiteres inmitten sein –; das in Reihe Folgende folgt einem Bestimmten nach und ist (selbst auch) ein bestimmtes Späteres: Eins folgt nicht in Reihe auf Zwei und nicht der Monatsanfang auf den zweiten Tag, sondern Letzteres dem Ersteren.“

Im Gegensatz dazu können sich diese Einheiten auch berühren, somit kein Verschiedenes dazwischen haben:¹⁷

„Anschließend‘ ist, was in Reihe folgt und in Berührung steht. [...]“

Von alledem zu unterscheiden ist jedoch das Zusammenhängende (*suneches*):¹⁸

„Zusammenhängend‘ ist einerseits ein besonderer Fall von »anschließend«, ich sage aber dagegen, »zusammenhängend« liege dann vor, wenn die Grenze beider, da wo sie sich berühren, eine und dieselbe geworden ist und, wie der Name ja schon sagt, zusammengehalten wird. Dies kann es aber so lange nicht geben, wie die beiden Ränder zwei sind. – Nachdem dies bestimmt festgelegt ist, ist klar, daß es Zusammenhang nur bei solchen Gegenständen geben kann, aus denen auf Grund von Zusammenfügung ein Eines werden kann; und so wie das zusammenhaltende (Teilstück) eines wird, genau so wird das Ganze eines sein, z. B. durch Nagel, Leim, Gelenkverbindung, Anwachsen.“

Die unbegrenzte Teilbarkeit als zentrales Unterscheidungsmerkmal zwischen kontinuierlichem und diskretem geht für Aristoteles in eben der Eigenschaft des *Zusammenhängens* auf:¹⁹

¹⁴Den Begriff der Größe setzt Aristoteles in der Physik voraus. Es ist anzunehmen, dass dieser den eudoxischen Begrifflichkeiten entlehnt ist.

¹⁵Aristoteles (2023b): S. 143; *Physik*, III.3, 226b

¹⁶Aristoteles (ebd.): S. 144; *Physik*, III.3, 227a

¹⁷Aristoteles (ebd.): S. 144; *Physik*, III.3, 227a

¹⁸Aristoteles (ebd.): S. 144; *Physik*, III.3, 227a

¹⁹Aristoteles (ebd.): S. 61; *Physik* III.1, 200b16-24

„Verändernde Bewegung scheint in den Bereich des Zusammenhängenden zu gehören, in dem Begriff ‚zusammenhängend‘ erscheint allererst (die Bestimmung) ‚unbegrenzt‘; wenn man nämlich ‚zusammenhängend‘ bestimmt, tritt nebenbei ein, daß man oftmals den Begriff ‚unbegrenzt‘ mitbenutzt, denn ‚unbegrenzt teilbar‘ – das ist eben ‚zusammenhängend‘. Zudem, ohne die Begriffe ‚Ort‘, ‚leer‘ und ‚Zeit‘ kann Veränderung nicht sein. Es ist also klar, daß deswegen und wegen der Tatsache, daß diese Begriffe für alles gemeinsam und allgemein sind, ihre Untersuchung durchzuführen ist“

Das obige Zitat verortet die verändernde Bewegung im Bereich des Zusammenhängenden und stellt die Begriffe *unbegrenzt teilbar* und *zusammenhängend* gleich. Fassen wir dies in moderner Sprache zusammen, so bedeutet diese Gleichsetzung zweierlei: alles unbegrenzt Teilbare ist kontinuierlich und alles Kontinuierliche ist zugleich unbegrenzt teilbar.

Während also Parmenides aus der Homogenität des Kontinuums die Unteilbarkeit folgert, sieht Aristoteles gerade darin die unbegrenzte Teilbarkeit begründet. Auch die von Zeno aufgeworfenen Probleme können in diesem Lichte relativiert werden. Die begrenzte Strecke kann beliebig oft geteilt werden. Dieser Prozess ist jedoch bei kontinuierlichen Größen nicht umkehrbar. Eine Zusammensetzung der Strecke aus unendlich kleinen Teilen ist ein Prozess, dessen *Vollendbarkeit* nicht daraus resultiert, dass die Teilung der Strecke möglich ist. Beim Prozess der Teilung bedienen wir uns der Potenzialität der unbegrenzten Teilbarkeit, wobei wir bei der Zusammensetzung ihre Aktualität voraussetzen. Dies ist jedoch, so Aristoteles, nicht zulässig.²⁰

Seine Argumentation fußt auf einer engeren Auffassung der Homogenität von Kontinuitäten. Während Parmenides aus der Homogenität die Ununterscheidbarkeit folgerte, sieht Aristoteles diese nur hinsichtlich gewisser Aspekte der Kontinuität gegeben. Andere, durchaus beliebige, Qualitäten können als *Unterscheidungsmaßstab* herangezogen werden. So ist für Aristoteles die Kontinuität einer Strecke nicht dadurch eingeschränkt, dass sie mit einem Maß *e* gemessen wird. Diese Abmessungen können dann für eine Teilung herangezogen werden. Die Unterscheidung und die darauf aufbauende Teilung sind somit nicht zwangsläufig durch die Natur der Kontinuität vorgegeben, sondern beliebig, aber dennoch möglich.²¹

4.1.2 Das Kontinuum besteht nicht aus Punkten

Die knappen Definitionen der Kontinuitätsbedingung im dritten Buch werden im sechsten Buch der *Physik* präzisiert. Aristoteles zeigt dort, warum das Kontinuierliche nicht aus unteilbaren Teilen bestehen kann.²² Am Beispiel der geometrischen Gerade wird argumentiert, wieso diese nicht aus dimensionslosen Punkten zusammengesetzt werden kann:²³

„Ist nun ‚zusammenhängend‘, ‚berührend‘ und ‚in Reihe folgend‘ (derartig), wie früher bestimmt: Zusammenhängend (also solche Dinge), deren Ränder eine Einheit bilden, in Berührung solche, deren (Ränder) beisammen (sind), in Reihenfolge (solche), bei denen nichts Gleichartiges zwischen (ihnen sich findet) –: dann ist es unmöglich, daß aus unteilbaren (Bestandteilen) etwas Zusammenhängendes bestehen könnte“

Das Stetige ist nicht aus diskreten Einheiten zusammengesetzt. Punkte sind ohne Teile und damit auch ohne Grenzen, da Grenzen immer in Bezug auf das Begrenzte existieren müssen,

²⁰Vgl. Sattler (2020): S.15f

²¹Vgl. Sattler (ebd.): S. 18

²²Vgl. Rapp und Corcilius (2021): S. 286

²³Aristoteles (2023b): S. 159; *Physik*, VI.1, 231a

die sich voneinander unterscheiden. Daraus folgt, dass Punkte weder ein Kontinuum bilden noch miteinander in Berührung kommen können. Berührung setzt entweder die Berührung von Teilen oder von einem Ganzen voraus, beides trifft jedoch auf Punkte nicht zu. Punkte sind weder Teile noch ein Ganzes, weshalb, wenn Punkte sich berühren würden, sie praktisch miteinander verschmelzen würden.²⁴

Dieser Standpunkt wird mit einem Widerspruchsbeweis untermauert. Die Annahme, dass eine bestimmte Größe oder Länge aus unteilbaren Teilen besteht, führt dazu, dass die Bewegung diese nicht durchlaufen kann. Andernfalls müsste etwas gleichzeitig in Bewegung sein und bereits die Bewegung abgeschlossen haben. In diesem Fall würde die Bewegung aus einer Reihe von sofortigen, diskontinuierlichen Bewegungsübergängen bestehen: *„Wenn eine (Raum-)Größe sich aus unteilbaren (Bestandteilen) zusammensetzt, dann wird auch die Bewegung ebendieser aus gleichen Bewegungsstücken sein, die unteilbar sind.“*²⁵ Ein Umstand, den es angesichts der bereits diskutierten Paradoxien des Zeno, zu vermeiden galt.

Insoweit er sich mit der Beschreibung des anschaulichen Kontinuums der Geometrie beschäftigt, wird der aristotelische Synechismus auch **Visualismus** genannt.²⁶ Linien sind, wie wir sehen konnten, unbegrenzt teilbar und weder aus Punkten noch aus anderen unteilbaren Objekten zusammengesetzt. Demnach können Punkte auch niemals Linienstücken entsprechen. Die Letzteren haben Ausdehnung, während Punkte in der aristotelischen Systematik lediglich Grenzen darstellen.

Eine Aufweichung erfährt der Visualismus im 17. Jahrhundert mit der Entwicklung der Differenzial- und Integralrechnung. Bei Leibniz spricht man in diesem Sinne schon von einem **Infinitesimalismus**, der neben Punkten auch unendlich kleine Linienstücke akzeptiert. Ungeachtet ihrer unendlich kleinen Ausdehnung sind auch diese Linienstücke weiterhin unendlich teilbar. Streng genommen stehen Visualismus und Infinitesimalismus nicht im Widerspruch. Das, was Leibniz macht, ist die Erweiterung des Visualismus um eine zusätzliche Art von Größen.²⁷

Praktisch verlor der Infinitesimalismus mit der Entwicklung des Konvergenzbegriffs durch Cauchy im 19. Jahrhundert an Bedeutung. Lediglich in der Physik blieben notationale Überreste erhalten. Dies änderte sich im 20. Jahrhundert durch die Arbeiten von Robinson und Laugwitz und dem Aufkommen der Nichtstandardanalysis. Diese sollte von der Idee infinitesimaler Größen Gebrauch machen und den Zahlenbereich der reellen Zahlen erneut einer Erweiterung unterziehen.

Die Auffassung, dass kontinuierliche Größen aus atomaren Bestandteilen zusammengesetzt sind, war der mögliche Ansatz, den wir bisher ausgespart haben. Eine Spielart des **finitistischen Atomismus** findet man bereits bei den Vorsokratikern wie Leukipp und Demokrit.²⁸ Die Strecke ist nach dieser Auffassung eine endliche Zusammensetzung von Punkten, die Linienstücke darstellen. Eine Strecke zerfällt so in **endlich** viele winzige Linienstücke, die selbst nicht mehr teilbar sind.²⁹

²⁴Vgl. Rapp und Corcilius (2021): S. 286

²⁵Aristoteles (2023b): S. 160; *Physik*, VI.1, 231b18-232a22

²⁶Für die folgende Kurzdarstellung der Standpunkte zum Kontinuum vergleiche Bedürftig und Murawski (2019): S. 213.

²⁷Vgl. Bedürftig und Murawski (ebd.): S. 213

²⁸Vgl. Rapp und Corcilius (2021): S. 285

²⁹Vgl. Bedürftig und Murawski (2019): S. 213

Johan Ludvig Heiberg entdeckte im Jahr 1906 das Archimedes-Palimpsest und so auch das bedeutende Werk *die Methode*, das Aufschluss über Archimedes' Annäherung an die Infinitesimalrechnung gab.³⁰ Der Inhalt dieser Schrift belegt, dass Archimedes zumindest praktisch in einen Zusammenhang mit dem Atomismus gestellt werden kann. Im Unterschied zu den frühen Atomisten zerfällt bei ihm die Strecke in unendlich viele unendlich kleine Linienstücke, die selbst nicht mehr teilbar sind. Diese Linienstücke entsprechen Punkten, woraus gefolgert werden kann, dass eine Linie eine Menge **unendlich** vieler Punkte ist. Deshalb wird diese Auffassung auch als **transfiniten Atomismus** bezeichnet.³¹

Die folgende Grafik gibt einen zusammenfassenden Überblick über die erwähnten Positionen.³²

Standpunkte zum Kontinuum

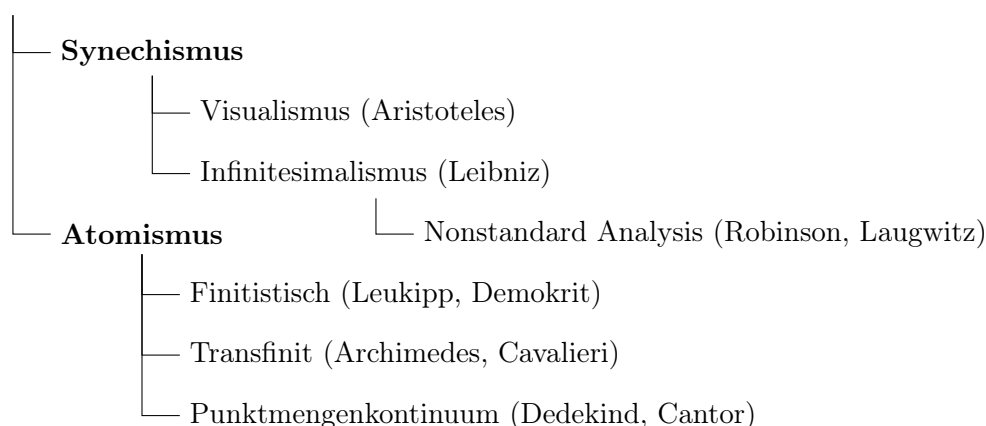


Abbildung 4.1: Standpunkte über die Natur des Kontinuums

Trans-transfinit ist dagegen der Atomismus, den wir bei Dedekind und Cantor im 19. Jahrhundert vorfinden. Die Anzahl der Punkte ist nun überabzählbar. Jedem Punkt entspricht eine Zahl und jeder Zahl entspricht ein Punkt.

4.2 Die Arithmetisierung des Kontinuums

Für Eudoxos und Archimedes war die Frage der Approximation eine rein geometrische. Diese stellte sich für den Bereich der Zahlen, da dieser zur Gänze aus natürlichen Zahlen bestand, naturgemäß nicht. Die Verhältnisse natürlicher Zahlen konnten exakt angegeben werden. Die Frage der Stetigkeit war deshalb eine Frage der räumlichen Ausdehnung. Mit der Entwicklung der Größenlehre kam es in der Antike somit zu einer *Geometrisierung der Algebra*. Algebraische Zusammenhänge wurden mangels Definition des Zahlenbereichs der reellen Zahlen in die Geometrie verlagert.

In den kommenden Jahrhunderten wandelte sich dieses Verständnis mit der Weiterentwicklung der Mathematik. Die Entwicklung der Algebra und Analysis bewirkte einen langwierigen

³⁰Siehe dazu das Supplement zu Archimedes und Heath (2002) auf der Seite 6ff des Supplements.

³¹Vgl. Schneider (2015): S. 81ff

³²In Anlehnung an Bedürftig und Murawski (2019): S. 213

und entgegengesetzten Prozess, der in der Literatur als *Arithmetisierung des Kontinuums* bezeichnet wird.³³ Dieser Prozess kulminiert im 19. Jahrhundert mit der Definition der reellen Zahlen durch Dedekind und Cantor und dem Ende der klassischen Größenlehre. Diese Entwicklung erklärt, wie es dazu kam, dass die Mathematik im Gegensatz zum anfangs vorherrschenden aristotelischen Kontinuum ein transfinites Punktmengenkontinuum etablierte.

Die Erfindung der mathematischen Formeln durch **Descartes** im 16. Jahrhundert bildete dabei den Auftakt. Selbst bei Galilei finden wir noch immer lediglich geometrische Figuren. Für ihn waren diese noch immer die *Buchstaben* der Mathematik. Auch für Descartes hatte die Geometrie eine herausragende Bedeutung. Basierend auf seiner dualistischen Weltsicht war es gerade die Geometrie, die die *eigentliche* Mathematik verkörperte. Er unterschied bekanntlich zwischen zwei Substanzen: der Materie (*Res Extensa*) und dem Geist (*Res Cogitans*). Alles in der Welt war nur eine Erscheinungsform einer dieser beiden Wesenheiten. Wenn wir daher Dinge in der Welt zählen, so beziehen wir uns immer auf die Dinge selbst. Die Zahlen sind, gemäß Descartes, lediglich Erscheinungsformen der Materie. Eine eigenständige Wissenschaft dieser Zahlen würde sich nur mit Erscheinungsformen beschäftigen und nicht mit der Sache selbst. Aus seiner Sicht kann es daher nur eine Wissenschaft der Ausdehnung geben, eben die Geometrie.³⁴ Die Methode, die Descartes dieser Wissenschaft zugrundelegt, ist in seiner allgemeinen Philosophie bereits begründet. In der anonym erschienenen Schrift *Discours de la méthode* aus dem Jahr 1637 schreibt er, dass, nur wenn etwas *klar* und *deutlich* dargestellt wird, das Bewusstsein in der Lage ist, es mit Gewissheit zu erkennen. Angewandt auf die Geometrie bedeutet dies eine Darstellung in der ersten oder zweiten Dimension. Einige Jahre zuvor, im Jahr 1628, hat Descartes dies bereits in seiner Schrift *Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft* versucht. In den dort enthaltenen zwölf Regeln einer allgemeinen wissenschaftlichen Methode nutze er bereits eine allgemeine Symbolik für geometrische Größen. Diese hielt sich jedoch weiterhin an das bereits in der Antike formulierte Homogenitätsgesetz: Die Addition, Subtraktion und Proportion sind nur bei gleichartigen Größen sinnvoll. Eine Strecke und eine Fläche konnten nicht addiert werden, doch sie konnten multipliziert werden. Das Produkt beider war ein Körper. Dies war bereits in der Antike bekannt und stellte zwar keine Neuheit dar, war jedoch für Descartes Methode schädlich. Wenn *klar* und *deutlich* erkennen, stets nur in der ersten oder zweiten Dimension stattfinden kann, so bewegte sich die Multiplikation außerhalb der zugelassenen wissenschaftlichen Methode. Das Problem löste Descartes dann schlussendlich in dem *Discourse* oder genauer in seinem letzten Buch *La Geometrie* indem er das Homogenitätsgesetz außer Kraft setzte. Er bediente sich dabei der grundlegenden Überlegung, die wir bereits im Rahmen unserer Untersuchung der pythagoreischen Proportionenlehre festgehalten haben. Die Einheit einer Messung kann beliebig gewählt werden. Indem Descartes dies in der Geometrie tut, kann er jeden symbolischen Zusammenhang homogenisieren. Der folgende Zusammenhang:³⁵

$$a = \frac{c^2}{d} + e^3$$

widerspricht, für beliebige Strecken a, c, d und e dem Homogenitätsgesetz. Nimmt man jedoch

³³Vergleiche beispielsweise Bedürftig und Murawski (2019): S. 216f

³⁴Vgl. Spalt (2019): S. 18ff

³⁵Vgl. Spalt (ebd.): S. 17f

eine Strecke $e = 1$ als Einheit, so kann er homogenisiert werden:

$$\frac{a}{1} = \frac{c^2}{d \cdot 1} + \frac{e^3}{1 \cdot 1 \cdot 1}$$

Allein durch die Definition einer Einheit ist es für Descartes möglich, das Homogenitätsgesetz zu umgehen und so algebraische Operationen sinnvoll in die Geometrie einzuführen.

Außerdem formulierte Descartes in seiner Analyse des Pappos-Problems eine Vorform unseres heutigen Koordinatensystems. Die notwendige Bedingung für eine künftige analytische Geometrie war somit gelegt. Die Analyse von geometrischen Zusammenhängen mittels bekannter und unbekannter Zahlen, ausgedrückt über Symbole einer formalen Algebra, bestand nun darin, eine geeignete Formel zu finden. War diese Formel gefunden, so stellte sie einen Zusammenhang zwischen den Unbekannten dar. Mit der Analyse und dem Auffinden der richtigen Formel ist die Sache jedoch nicht getan. Vielmehr bedarf es noch der Synthesis, der Konstruktion, um der Methode des *Discourse* Genüge zu tun. Hier zeigt sich der neuartige Charakter dieser Methode und zugleich auch ihre Limitation. In Euklids *Elementen* waren sowohl Punkte als auch Strecken definiert. Beide waren gegeben, ohne dass die Zweite aus der Ersten konstruiert werden musste. Punkte waren meist Schnittpunkte geometrischer Figuren. Anders jedoch bei Descartes. Wenn die Formel, der algebraische Zusammenhang zwischen Unbekannten, im Rahmen der Synthese als Konstruktionsgrundlage, etwa einer Linie, dienen soll, so muss der Zusammenhang zwischen dieser offenkundig diskreten Konstruktionsanleitung und der an sich stetigen Linie geklärt werden. Die Anzahl der Zusammenhänge, die man aus der Formel erhalten kann, ist zwar beliebig groß, jedoch stets diskret. Die Linie dagegen ist stetig. Die Antike hatte dieses Problem nicht. Geraden, Kreise und Flächen waren *per definitionem* stetig. Durch die **Algebraisierung der Geometrie** hatte Descartes somit die strenge Unterscheidung zwischen der Zahlentheorie und der Größenlehre verwässert. Mit der algebraischen Geometrie konnte man schwierige Zusammenhänge einfacher darstellen, jedoch nur um den Preis, dass das Problem der Stetigkeit erneut ein arithmetisches wurde. Die Frage, inwieweit sich eine geometrische Konstruktion einer Größe annäherte, war nun nicht mehr ein gänzlich geometrisches Problem.³⁶

Im 18. Jahrhundert wird Johann Bernoulli in seinem Differenzialkalkül gänzlich auf geometrische Größen verzichten und von *veränderlichen* Größen sprechen. Während es im Differenzialkalkül von Leibniz noch ausdrücklich um geometrische Größen ging, ja sogar seine Begründung auf der Ähnlichkeit von Dreiecken fußte, sieht Bernoulli keine Notwendigkeit mehr, bei der Ableitung der Differenzialregeln geometrische Beweise heranzuziehen. Die Theorie, die Leibniz einige Jahre zuvor entwickelt hatte, wurde von Bernoulli aus der Geometrie herausgelöst. Aus der kartesischen unbekannten Strecke wird bei Leibniz die geometrische veränderliche Größe. Davon bleibt bei Bernoulli nur mehr die veränderliche Größe. Diese Größen können zusammengefügt werden. Aus Descartes' Formel wird die Funktion.³⁷ Bernoulli im Jahre 1718 schreibt dazu:³⁸

„Mann nennt hier Funktion einer veränderlichen Größe eine in beliebiger Weise aus dieser veränderlichen Größe und aus Konstanten zusammengesetzte Größe.“

Präziser hingegen ist sein Schüler Euler, der in seiner *Einführung in die Analysis des Unendlichen*

³⁶Vgl. Spalt (ebd.): S. 32f

³⁷Vgl. Spalt (ebd.): S. 76ff

³⁸Zitiert nach Spalt (2015): S. 193

schreibt:³⁹

„Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist eine veränderliche Größe, welche durch einen analytischen Ausdruck beschrieben (dargestellt) ist, der auf irgendeine Weise aus der veränderlichen Größe und aus Zahlen oder aus konstanten Größen zusammengesetzt ist.“

Bernoullis zusammengesetzte Größe ist bei Euler der Rechenausdruck. Für Euler stellt aber nicht jeder Rechenausdruck eine Funktion dar. Heute würden wir sagen, dass konstante Funktionen keine Funktionen im Sinne Eulers sind. Diese sind beständige und keine veränderlichen Größen. Eine veränderliche Größe *„ist eine unbestimmte oder allgemeine Größe, welche alle bestimmten Werte ohne Ausnahme in sich begreift“*. Dies war eine wesentliche Neuerung. Der Funktionsbegriff, den Euler hier einführt, umfasst nicht nur natürliche Zahlen und ihre Verhältnisse (sprich rationale Zahlen), sondern alle *„denkbaren“* Zahlen. Selbst komplexe Funktionen stellen für Euler kein Problem dar. Er subsumiert unter *Werten* nicht nur komplexe Zahlen im heutigen Sinne, sondern auch unendliche Größen, sprich ∞ . Es ist zudem unerheblich, ob die Rechenausdrücke eine endliche oder eine unendliche Darstellungsform haben. Eine Beschränkung auf endliche Ausdrücke kennt er nicht. Somit sind auch Ausdrücke der Form

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

wie wir sie bereits bei Leibniz vorfinden als Funktionen zulässig.⁴⁰ Ausgehend von Bernoulli formuliert Euler somit einen weitreichenden Funktionsbegriff. Diese Funktionen sind Rechenausdrücke, die aus veränderlichen Größen und Konstanten zusammengesetzt sind. Diese Größen sind jedoch die Gesamtheit aller Werte und nicht bestimmte Werte. Obwohl Euler den Betrachtungshorizont erweitert, bleibt seine Analysis eine algebraische. Zentrale Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit können in ihr nicht hinreichend definiert werden, da es bei diesen um Werte, jedoch nicht die Gesamtheit aller Werte geht. Dennoch hat Euler einen Begriff von Stetigkeit. Stetig ist für ihn eine *krumme Linie*, wenn sie durch **einen** Rechenausdruck beschrieben werden kann. Eulers Funktionsbegriff führt zu einem aus heutiger Sicht abweichenden Stetigkeitsbegriff. Einerseits konnten Funktionen keinen eingeschränkten Wertbereich haben, andererseits konnten Funktionen mit mehreren Rechenausdrücken niemals stetig sein. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 2 \\ 3x & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

ist im heutigen Sinne stetig, nicht jedoch im Sinne Eulers.

Dennoch hat Euler unser heutiges Verständnis der Analysis und ihrer Grundbegriffe stark geprägt. Die Stetigkeit der geometrischen Größen wurde mit Descartes immer mehr auch zu einer Frage nach der Stetigkeit des Wertbereiches der Formeln im Rahmen einer formalen Algebra. Praktisch bedeutete dies eine Wandlung der Annäherung an geometrische Größen durch Konstruktion zu einer Annäherung durch algebraische Operationen. Leibniz ersetzt Descartes starre unbekannte Strecken durch geometrische veränderliche Größen. Bald entledigte man sich auch hier der geometrischen Beschränkungen. Der Funktionsbegriff Eulers umfasste alle *denkba-*

³⁹Euler und Walter (1983): S. 4; §5

⁴⁰Vgl. Spalt (2019): S. 101ff

ren Werte. Durch die Betrachtung dieser Werte in ihrer Gesamtheit blieb er jedoch weiterhin einer algebraischen Spielart der Analysis verhaftet. Die Abkehr von dieser algebraischen Analysis finden wir erst bei Bolzano und Cauchy. Dies zeigt bereits Bolzanos Funktionsbegriff:⁴¹

„Die veränderliche GröÙe W ist eine Funktion von einer oder mehreren veränderlichen GröÙen X, Y, Z , wenn es gewisse Sätze von der Form: die GröÙe W hat die Beschaffenheit w, w_1, w_2 gibt, welche ableitbar sind aus gewissen Sätzen der Form: die GröÙe X hat die Beschaffenheit ξ, ξ', ξ'' , - die GröÙe Y hat die Beschaffenheit η, η', η'' , die GröÙe Z hat die Beschaffenheit ζ, ζ', ζ'' usw.“

Seine Definition der Stetigkeit und der Konvergenz verlagerte die Frage der Annäherung auf die Ebene der Funktion. Stetig konnte nun lediglich eine Funktion sein. Die Konvergenz war bei ihm in Bezug auf Reihen definiert. Eine Reihe ist nach Euler konvergent, *„wenn ihre Glieder beständig kleiner werden und endlich völlig verschwinden“*. Konvergenz war somit eine Eigenschaft diskreter Objekte. Die moderne Definition dieses Begriffes in Zusammenhang mit Reihen finden wir erst einige Jahre später bei Bolzano:⁴²

„Besonders merkwürdig ist die Klasse derjenigen Reihen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Veränderung (Zu- oder Abnahme), welche ihr Wert durch eine auch noch so weit getriebene Fortsetzung ihrer Glieder erleidet, immer kleiner verbleibt als eine gewisse GröÙe, die wieder selbst so klein, als man nur immer will, angenommen werden kann, wenn man die Reihe schon vorher weit genug fortgesetzt hat.“

Dies ist eine moderne Erweiterung des antiken Verständnisses der Annäherung an eine geometrische GröÙe, ohne Rückgriff auf jegliche geometrische Interpretation.

Der letzte Schritt der Emanzipation der Analysis von der Geometrie sollte noch ausbleiben. Die Defizite der Definition des Konvergenzbegriffs durch Cauchy zeigten, dass ohne eine Begründung der reellen Zahlen auch keine Begründung der Analysis in ihrer Unabhängigkeit von der Geometrie möglich sein wird. Dies wurde 1872 von Dedekind mit der Definition des Punktmengenkontinuums der reellen Zahlen vollbracht.

4.3 Topologische Betrachtungen

Das aristotelische Kontinuum ist unbegrenzt teilbar. Diese Teilbarkeit bewirkt, dass es nicht aus Unteilbarkeiten besteht, sondern bis ins Unendliche weiter geteilt werden kann. Das Kontinuum der modernen Mathematik ist dagegen ein Punktmengenkontinuum. Es besteht aus überabzählbar vielen Punkten bzw. Zahlen, die über das Vollständigkeitsaxiom die Kontinuität gewährleisten. Der Atomismus des Punktmengenkontinuums bei Dedekind ist ein offensichtlicher Unterschied zu Aristoteles. Wir möchten im Fortgang des Kapitels darlegen, wieso dieser Unterschied, entgegen aller Erwartung, nicht wesentlich für den Gehalt des Kontinuums ist.

Zu diesem Zweck ist ein Perspektivenwechsel notwendig. Die meisten Darstellungen zur Kontinuumdebatte legen den Fokus auf die Auseinandersetzung zwischen Synechismus und Atomismus. Dies mag zwar in vielerlei Hinsicht philosophisch geboten sein, lässt jedoch anderweitige Gemeinsamkeiten außer Acht. Im Falle von Dedekinds Punktmengenkontinuum bezieht sich dies auf den

⁴¹Bolzano et al. (1975) zitiert nach Spalt (2015): S. 288

⁴²Bolzano (1817): S. 19f zitiert nach Spalt (2015): S. 284

topologischen Zugang zur Stetigkeit, der sowohl bei Aristoteles als auch bei Dedekind große Ähnlichkeiten aufweist. Allgemein kann man drei mögliche Zugänge zum topologischen Verständnis der Stetigkeit unterscheiden: *Stetigkeit als Annäherung*, *Dichte* oder *Zusammenhang*.

Stetigkeit als Annäherung: Als *nicht sinnvoll* erachtet Aristoteles die Aufklärung jener Fehler bei Naturuntersuchungen, die nicht aus Grundsätzen hergeleitet sind. Als Beispiel nennt er den Versuch der Kreisquadratur des Antiphon. Antiphon war ein aus Athen stammender Sophist, der im 5. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung lebte und sich mitunter mit mathematischen Problemen wie der Kreisquadratur beschäftigte. Eine detailliertere Auskunft gibt uns Simplicios in seinem Kommentar der *Physik* des Aristoteles:⁴³

„Antiphon aber beschrieb einen Kreis und zeichnete ein Polygon hinein, eines von denen, die eingeschrieben werden können. Es sei das eingeschriebene z. B. ein Quadrat. Indem er alsdann jede der Seiten des Quadrates halbierte, zog er von den Teilpunkten aus nach den Kreisbogen senkrechte Linien, von denen offenbar eine jede das zu ihr gehörige Segment des Kreises halbierte. Darauf zog er von den Teilpunkten nach den Endpunkten der Seiten des Quadrates Verbindungsgeraden, so dass vier Dreiecke über den Seiten entstanden, die ganze eingeschriebene Figur aber ein Achteck ward. Und indem er so wieder nach demselben Verfahren jede der Seiten des Achtecks halbierte, von dem Teilpunkte aus eine Senkrechte nach dem Kreisumfange zog und von den Punkten, in denen die Senkrechten die Kreisbogen trafen, Verbindungsgeraden nach den Endpunkten der geteilten Geraden führte, machte er das eingeschriebene zu einem Sechzehneck. Und indem er wieder in demselben Verhältnis die Seiten des eingeschriebenen Sechzehnecks teilte und Verbindungslinien zog und das eingeschriebene Polygon verdoppelte und dies beständig wiederholte, **glaubte er, dass schließlich einmal nach Erschöpfung der Fläche auf diese Weise dem Kreise ein Polygon werde eingeschrieben werden, dessen Seiten sich wegen ihrer Kleinheit mit dem Umfange des Kreises decken würden.**“

Antiphon versteht das Problem der *Stetigkeit als eine Frage der Annäherung*. Diese Annäherung, so Antiphon, ist enden wollend. Nach einer endlichen Anzahl der Konstruktionen von Polygonen endet der Vorgang und wir erhalten ein Polygon, dessen Fläche die Kreisfläche zur Gänze bedeckt. Das Argument, dass dies *wegen der Kleinheit* der Seiten des Polygons ergeben würde, erinnert stark an den finitistischen Standpunkt der frühen Atomisten. Rein mathematisch gesehen ist es dagegen wenig überzeugend, steht jedoch in einer langen Tradition der Approximation inkommensurabler Strecken. Die Möglichkeit der Approximation einer geometrischen Größe durch andere ist bereits in der Methodik des Beweises von **XII.2** beschrieben. Die Fläche der Polygonkonstruktionen näherte sich der Fläche des Kreises an. Plakativer ist dies bei Archimedes zu sehen, der eine Approximation für die Kreiszahl π vorlegt. Ausgehend vom Einheitskreis konnte er geometrisch einen Zusammenhang zwischen den Umfängen der eingeschriebenen und der umschriebenen Polygonkonstruktionen herleiten. Durch geschickte Polygonkonstruktionen ist somit eine Approximation der Kreisfläche und daher der Kreiszahl möglich. Diese Annäherung kann beliebig genau erfolgen. Archimedes startet bei einem regelmäßigen Sechseck und verdoppelt bei jeder Konstruktion die Anzahl der Seiten. Seine Approximation endet bei der Konstruktion des regelmäßigen 96-Ecks. Das Ergebnis der Annäherung ist gegeben mit

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

⁴³Zitiert nach Becker (1990): S. 43f

Historisch gesehen stellt dieses Intervall eine erhebliche Verbesserung der Abschätzung der Kreiszahl π dar.⁴⁴ Eine derartige Annäherung an eine (unbekannte) Größe ist jedoch nicht auf Grundlage der natürlichen Zahlen möglich. Die natürlichen Zahlen haben die Eigenschaft, dass in jedem Intervall $[a, b]$ natürlicher Zahlen eine endliche Anzahl natürlicher Zahlen vorzufinden ist. Eine beliebig genaue Approximation ist in diesem Zusammenhang weder möglich noch sinnvoll. Archimedes obige Annäherung erfolgt jedoch auf Basis der Menge der rationalen Zahlen bzw. (gemäß dem antiken Verständnis) auf Basis von Verhältnissen von (natürlichen) Zahlen. Dass dies möglich ist, liegt in der archimedischen Eigenschaft der rationalen Zahlen begründet, die bereits thematisiert wurde.⁴⁵

Stetigkeit ist jedoch nicht mit dem so verstandenen Prozess der Approximation gleichzusetzen. Dies resultiert schon daraus, dass die archimedische Eigenschaft eine Eigenschaft der rationalen Zahlen ist, die offenkundig unvollständig sind und keine stetige Menge darstellen. Dass man sich mit rationalen Zahlen an eine unbekannte Größe annähern kann, definiert diese Größe keineswegs. Die soeben skizzierte Approximation der Kreiszahl π durch Archimedes begründet diese Zahl nicht, zumal wir auch weder über die Eindeutigkeit dieser Approximation noch über die Größe π selbst aussagen können. Das, was in diesem Zusammenhang fehlt, ist eine Grenzwerttheorie. Diese entwickelte sich erst bei Cauchy und konnte selbst nur durch eine Definition der reellen Zahlen begründet werden.⁴⁶

Stetigkeit als Dichte: Eine direkte Konsequenz der archimedischen Eigenschaft ist auch die Dichte der rationalen Zahlen, die besagt, dass zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine dritte rationale Zahl liegt. Im letzten Kapitel sahen wir bereits, dass auch die Dichte, neben der Annäherung, als Stetigkeit missverstanden werden kann und Dedekind dies als sein wesentliches Unterscheidungsmerkmal zur Antike ansieht.

Ein Vorläufer dieser Auffassung ist Bryson aus Herakleia, Schüler des bereits erwähnten Antiphon. Er hat sich ebenfalls in der Kreisquadratur versucht, wovon uns ein Bericht von Proclus

⁴⁴Vgl. Archimedes und Heath (2002): S. 93ff

⁴⁵Der Begriff der archimedischen Eigenschaft oder auch das *Axiom des Archimedes* geht zurück auf den österreichischen Mathematiker Otto Stolz. In seiner Schrift *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, schreibt er in Stolz (1888) auf Seite 504:

„Es ist schon öfter hervorgehoben worden, dass Euclid implicite den Grundsatz gebraucht: eine Grösse kann so oft vervielfältigt werden, dass sie jede andere, ihr gleichartige, übertrifft (Vgl. insbesondere X. prop. 1). Bei Archimedes begegnet man einer ausdrücklichen Annahme, welche mit diesem Grundsatz übereinstimmt [...]. Derselbe mag daher kurz als Axiom des Archimedes bezeichnet werden.“

Stolz bezieht sich hier auf die Schrift *Die Quadratur der Parabel* von Archimedes. In der Übersetzung von Heath basierend auf der griechischen Edition von J.L. Heiberg schreibt Archimedes im Vorwort Folgendes:

„For it is here shown that every segment bounded by a straight line and a section of a right-angled cone [a parabola] is four-thirds of the triangle which has the same base and equal height with the segment, and for the demonstration of this property the following lemma is assumed: that the excess by which the greater of (two) unequal areas exceeds the less can, by being added to itself, be made to exceed any given finite area. The earlier geometers have also used this lemma; for it is by the use of this same lemma that they have shown that circles are to one another in the duplicate ratio of their diameters, and that spheres are to one another in the triplicate ratio of their diameters, and further that every pyramid is one third part of the prism which has the same base with the pyramid and equal height; also, that every cone is one third part of the cylinder having the same base as the cone and equal height they proved by assuming a certain lemma similar to that aforesaid. And, in the result, each of the aforesaid theorems has been accepted* no less than those proved without the lemma.“

Siehe dazu Archimedes und Heath (2002): S. 233f.

⁴⁶Vgl. Bedürftig und Murawski (2019): S. 220ff

vorliegt.⁴⁷

„Der Kreis, sagt Bryson, ist größer als jedes eingeschriebene und kleiner als jedes umgeschriebene Polygon. Im Vergleich, wozu aber Größeres und Kleineres existiert, dazu existiert auch Gleiches. Es existieren aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also existiert auch ein ihm gleiches.“

In dieser Argumentation liegt der Kern des Verständnisses der Stetigkeit als Dichte. Ausgehend von einem Kreis k werden Polygone p_1 und p_2 ein- bzw. umgeschrieben. Zwischen zwei Polygonen kann, analog der Konstruktion, die wir bereits bei Antiphon vorfinden, stets ein drittes Polygon konstruiert werden. Es existiert somit immer ein Polygon p_3 mit der Eigenschaft:

$$\square p_1 < \square p_3 < \square p_2$$

Dieser Vorgang kann beliebig oft fortgeführt werden. Aus ihm leitet Bryson eine Existenzaussage ab. Man könnte seinen Schluss modern auch so umformulieren: Aus der Dichte der Polygonkonstruktionen folgt die Existenz des Kreises.

Stetigkeit als Zusammenhang: Genauso wie bei Aristoteles kann auch Dedekinds Punktmengenkontinuum mit dem Begriff des Zusammenhangs erklärt werden. Auch dort haben wir es nicht nur mit Kontiguität im Sinne einer Angrenzung der Mengen A_1 und A_2 des Schnittes (A_1, A_2) zu tun. Vielmehr verschmelzen auch hier beide Teilmengen der rationalen Zahlen durch ihren gemeinsamen Schnitt. Die reelle Zahl ist die gemeinsame Grenze, die Verschmelzung der beiden Teilmengen A_1 und A_2 . Durch die Existenz der reellen Zahl *hängen* diese beiden Mengen *zusammen*.

Diese intuitive Parallele zwischen Aristoteles und Dedekind wurde in der Literatur bereits an einigen Stellen bemerkt. Nun gilt es, das eigentliche Unterscheidungsmerkmal des aristotelischen Synechismus und Dedekinds Punktmengenkontinuums herauszuarbeiten. Wir bedienen uns dabei einer relativ neuen Studie von Hellman und Shapiro (2018) in dem die beiden Konzepte mereologisch untersucht werden.

4.4 Eine mereotopologische Annäherung

Wir haben gesehen, dass ungeachtet aller offensichtlichen Unterschiede die Stetigkeitsbegriffe von Aristoteles und Dedekind dennoch Gemeinsamkeiten aufweisen. Die wesentliche Gemeinsamkeit besteht dabei in der topologischen Ausgestaltung des Kontinuums. In gewissem Sinne kann der *Zusammenhang* des Überlappens der Enden sowohl in den Ausführungen der *Physik* als auch in der Konstruktion der Dedekindschnitte vorgefunden werden.

Wie können diese Gemeinsamkeiten weiter analysiert werden? Rein methodisch gesehen, würde eine mengentheoretische Analyse zwar Dedekinds Punktemengenkontinuum gerecht werden, jedoch eine grundlegende Eigenschaft des aristotelischen Synechismus außer Acht lassen. Im Falle, dass das Kontinuum nicht aus Punkten zusammengesetzt werden kann, ist eine Analyse, die auf diskreten Elementen basiert, wenig Erfolg versprechend.

⁴⁷Zitiert nach Becker (1990): S. 46f

Alternativ dazu könnte man den Fokus auf die topologischen Gemeinsamkeiten legen und statt Punkten, genauer gesagt diskreten Elementen, die *Überlappung* selbst als Ausgangspunkt nehmen. Dies leistet eine mereologische Untersuchung, wie wir sie bei Hellman und Shapiro (ebd.) vorfinden.⁴⁸

Zu diesem Zweck gehen wir von einer Sprache der ersten Stufe mit Identität aus. Diese Sprache beinhaltet eine einzige deskriptive Konstante, nämlich $\circ$ für die Überlappung: $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\circ]$.

Das Identitätskriterium für mereologische Objekte kann, dem mengentheoretischen Extensionalitätsaxiom angelehnt, folgendermaßen formuliert werden:⁴⁹

$$\forall x \forall y (\forall z (z \circ x \Leftrightarrow z \circ y) \Leftrightarrow x = y).$$

Die Identität zweier mereologischer Objekte x und y ist somit dann und nur dann gegeben, wenn jede Überlappung z von x zugleich eine Überlappung von y ist.

Die Relationen der Überlappung und der Teilbeziehung sind naturgemäß nicht unabhängig. Wir sagen, dass ein Objekt x Teil eines anderen Objektes y ist, wenn jede Überlappung von x zugleich eine Überlappung von y darstellt. Wir können dies in der Sprache $\mathcal{L}$ folgendermaßen ausdrücken:⁵⁰

$$x \sqsubseteq y \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall z (z \circ x \Rightarrow z \circ y)$$

sowie wenn die Identität von x und y ausgeschlossen werden kann mit

$$x \sqsubset y \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (x \sqsubseteq y \wedge x \neq y).$$

Nun kann die *mereologische Summe* oder die *Fusion* eingeführt werden. Es handelt sich dabei um ein Axiomenschema und eine Analogie zum Komprehensionsprinzip der Mengenlehren:⁵¹

$$\exists u \Phi(u) \Rightarrow (\exists x \forall y (y \circ x \Leftrightarrow \exists z (\Phi(z) \wedge z \circ y)))$$

Insoweit es mindestens ein x mit der bestimmten Eigenschaft $\Phi[\cdot]$ gibt, existiert auch ein y , welches von allen Testobjekten z genau dann überlappt wird, wenn z mindestens ein x mit der besagten Eigenschaft überlappt.

Nun können Aristoteles' topologische Ausführungen in mereologische Begriffe gefasst werden. Vereinfachend beschränken wir den Untersuchungsraum auf die geometrische Linie. Auf dieser können die Relationen $L(x, y)$ für x liegt zur Gänze links von y sowie $R(x, y)$ für x liegt zur Gänze rechts von y sinnvoll definiert werden. Hellman und Shapiro (ebd.) führen nun, basierend auf diesen Begriffen, sämtliche aristotelischen topologischen Begriffe ein.⁵²

⁴⁸Die Mereologie befasst sich mit den Beziehungen zwischen Teilen und Ganzen. Der Begriff stammt vom griechischen Wort $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$ für *Teil*. In der Mereologie geht es also darum, wie Teile zu einem Ganzen gehören, wie sie miteinander in Beziehung stehen und welche Eigenschaften diese Beziehungen haben. Das Adjektiv *mereotopologisch* steht hier allgemein für einen Ansatz, der mittels mereologischer Methoden, topologische Begriffe wie Rand und Zusammenhang untersucht.

⁴⁹Vgl. Link (2020): S. 2ff

⁵⁰Vgl. Hellman und Shapiro (2018): S. 16

⁵¹Vgl. Hellman und Shapiro (ebd.): S. 16 sowie Link (2020): S. 47ff

⁵²Vgl. Hellman und Shapiro (2018): S. 17ff

- **Relation *zwischen*** $\boxed{Zw(x, y, z)}$:

$$Zw(x, y, z) \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} [L(x, y) \wedge R(z, y)] \vee [R(x, y) \wedge L(z, y)]$$

y liegt zur Gänze zwischen x und z . Es ist dabei unerheblich, wie y selbst beschaffen ist. In der Darstellung auf dem folgenden Bild besteht y beispielsweise aus zwei unverbundenen Teilen y_1 und y_2 . Um dies differenzieren zu können, ist die Eigenschaft des *verbunden seins* notwendig.

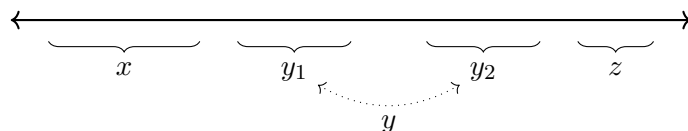


Abbildung 4.2: Mereologische Relation *zwischen* in $\mathcal{L}[\circ]$

- **Eigenschaft *verbunden sein*** $\boxed{Ver(y)}$:

$$Ver(x) \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} \forall y, z, u [z, u \sqsubseteq x \wedge Zw(z, y, u) \Rightarrow y \sqsubseteq x]$$

x ist verbunden, wenn alles, was zwischen zwei seiner beliebigen Teile liegt, ebenfalls Teil von x ist. Das obige Beispiel stellt ein Gegenbeispiel dar. Zwischen y_1 und y_2 besteht ein Streckenabschnitt, der definitionsgemäß nicht zu y gehört. Daher ist dort y nicht verbunden.

- **Eigenschaft *begrenzt sein*** $\boxed{Beg(y)}$:

$$Beg(x) \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} \exists x, y Zw(y, x, z)$$

Unabhängig davon, ob y verbunden ist oder nicht, kann es begrenzt sein. Im obigen Beispiel ist y durch x und z begrenzt.

- **Relation *Angrenzung* oder *Kontiguität*** $\boxed{\Lambda(x, y)}$:

$$\Lambda(x, y) \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} x|y \wedge \nexists u [Zw(x, u, y)]$$

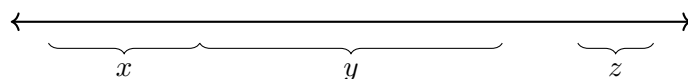
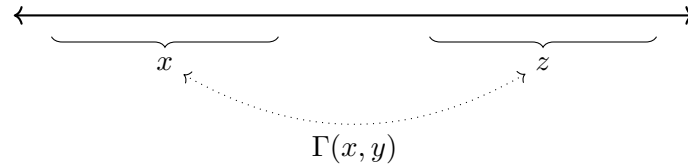


Abbildung 4.3: Mereologische Relation *Angrenzung* in $\mathcal{L}[\circ]$

Die Angrenzung kann in der obigen Grafik für x und y festgestellt werden.

- **Relation *Kongruenz*** $\boxed{\Gamma(x, y)}$: Die Kongruenz $\boxed{\Gamma(x, y)}$ soll „die Längen der Intervalle x und y sind gleich“ bedeuten. Daher werden die üblichen Axiome der ersten Ordnung herangezogen, die angeben, dass Γ eine Äquivalenzrelation ist.

Abbildung 4.4: Mereologische Relation *Kongruenz* in $\mathcal{L}[o]$

Augenscheinlich sind verbundene und begrenzte Objekte auf der geometrischen Gerade die klassischen Intervalle. Wir können jedoch nicht sagen, ob es sich dabei um offene, halboffene oder geschlossene Intervalle handelt, da uns der Begriff des Punktes an dieser Stelle fehlt. Für die angestrebte Rekonstruktion ist dies jedoch unerheblich.

Die Theorie, die auf diese Weise entsteht, nennen Hellman und Shapiro (2018) semi-aristotelisch (**Theorie SA**), da sie mereologisch und punktfrei ist, jedoch vom Aktualunendlichen Gebrauch macht. Zielsetzung ist nun, zu zeigen, dass in dieser Theorie zwei zentrale Eigenschaften des Punktmengenkontinuums bewiesen werden können: die archimedische Eigenschaft sowie die Dedekind-Vollständigkeit (bzw. die Supremumseigenschaft).⁵³

Für den Beweis beider Eigenschaften ist die Operation der *Biextension* notwendig. Diese Operation generiert auf beiden Seiten eines Intervalls kongruente und angrenzende Intervalle. Für ein beliebiges Intervall i kann gezeigt werden, dass genau zwei Intervalle j und k existieren, sodass

$$\Gamma(i, j) \wedge \Gamma(i, k) \wedge Kon(i, j) \wedge Kon(i, k) \wedge L(j, i) \wedge R(k, i)$$

Diese zwei Intervalle sind somit kongruent zu i und liegen zur Gänze links bzw. rechts von i und zwar auf die Art und Weise, dass sie i angrenzen. In diesem Fall schreiben wir $biext(i) = i + j + k$.⁵⁴

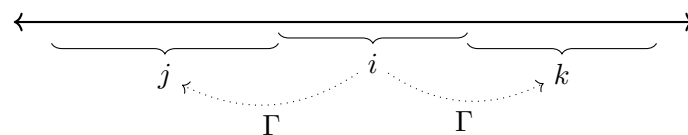


Abbildung 4.5: Biextension

Die Operation der *Biextension* kann herangezogen werden, um die beidseitig unendliche Ausdehnung der geometrischen Gerade zu zeigen. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst den Abschluss eines Intervalls i hinsichtlich der Operation $biext(\cdot)$. Dies ist eine Intervallmenge X mit der Eigenschaft, dass i in X ist und zudem jedes $biext(j)$ für ein beliebiges j aus X , ebenso in X ist. Die Menge X ist dann der Abschluss des Intervalls i hinsichtlich der Operation $biext(\cdot)$. Der gemeinsame Teil sämtlicher Mengen X_n , die ein Abschluss des Intervalls i hinsichtlich der Operation $biext(\cdot)$ sind, ist der minimale Abschluss oder die Hülle i^* .

G stellt die Fusion sämtlicher Objekte basierend auf den mereologischen Axiomen dar. Im gewissen Sinne ist dies der Raum. Hellman und Shapiro (ebd.) zeigen nun, dass diese Fusion der

⁵³Vgl. Hellman und Shapiro (2018): S. 1ff

⁵⁴Vgl. Hellman und Shapiro (ebd.): S. 20

Hülle eines beliebigen Intervalls i entspricht.⁵⁵

$$G = i^*$$

Bereits dieser Umstand garantiert die archimedische Eigenschaft der semi-aristotelischen Theorie. Gäbe es nämlich ein unendlich kleines Intervall ε , so könnte man den Raum G mittels Biextension nicht abdecken.⁵⁶

Der Beweis der Dedekind-Vollständigkeit setzt einige Definitionen voraus. Zunächst geht es um *Pluralitäten* oder Mengen von Intervallen. Eine derartige Menge X kann ein Element k (also ein Intervall) enthalten, das von allen anderen Intervallen in X **am meisten links liegt**. Dies ist gegeben, wenn für jedes Intervall m aus X , das nicht links-end-äquivalent zu k ist, ein Teil k' von k links von m liegt:⁵⁷

$$\exists k' : k' \sqsubseteq k \wedge L(k', m)$$

Wir sagen in diesem Fall, dass k das *linkeste Intervall* von X ist.

Doch auch Mengen in ihrer Gesamtheit kann man hinsichtlich der Lage ihrer Intervalle vergleichen. Wir sagen, dass sich eine Menge $Y \subseteq X$ **nach rechts genauso ausdehnt**, wie die Obermenge X ist, wenn kein Teil von Y rechts von allen Teilen von X liegt und auch kein Teil von X rechts von allen Teilen von Y liegt. Um die Begrenzung einer Menge nach rechts zu definieren, müssen Hellman und Shapiro (2018) auf die Begriffe der Hüllen und der Fusion zurückgreifen. Ein Intervall j begrenzt die Menge X nach rechts (ist somit eine Rechtsgrenze von X) falls:⁵⁸

- (1) $\forall k [k \in X \Rightarrow \exists j'(j' \sqsubseteq j \wedge R(j', k))]$ oder
- (2) für eine rechts-end-äquivalente Teilmenge $Y \subseteq X$ mit einem linkesten Intervall ist das Intervall j rechts-end-äquivalent mit der Fusion der lückenfüllenden Erweiterung Y' von Y . Die Menge Y' ist eine Erweiterung der Menge Y in der sämtliche Lücken zwischen den Intervallen von Y . Für diese Menge wird dann die Fusion F konstruiert.

Mit der lückenfüllenden Erweiterung Y können Hellman und Shapiro (ebd.) sicherstellen, dass die Fusion F ein Intervall ist. F ist im Grunde die Hülle aller Intervalle, die die Intervalle von Y' überlappen. Als solche ist sie aufgrund der Konstruktion von Y' , zusammenhängend und somit ein Intervall. Dass ein Intervall j mit der Fusion F rechts-end-äquivalent ist, ist somit wohldefiniert.

Ein Intervall j ist nun die kleinste Rechtsgrenze einer Menge X dann und nur dann, wenn

- (1) j eine Rechtsgrenze von X ist und
- (2) jedes k , das ebenfalls eine Rechtsgrenze von X ist und nicht rechts-end-äquivalent zu j ist, einen Teil k' besitzt, der zur Gänze rechts von j liegt.

Die Supremumseigenschaft lautet nun wie folgt:

⁵⁵Vgl. Hellman und Shapiro (2018): S. 22f

⁵⁶Eine Variante der archimedischen Eigenschaft, die der üblichen Definition in Bezug auf die Menge der reellen Zahlen ähnelt, kann ebenso bewiesen werden. Durch die Einführung von Cauchy-Folgen für Intervalle sind Repräsentationen der reellen Zahlen in G möglich. Siehe dazu Hellman und Shapiro (ebd.): S. 24ff

⁵⁷Vgl. Hellman und Shapiro (ebd.): S. 38

⁵⁸Vgl. Hellman und Shapiro (ebd.): S. 20ff

Supremumeigenschaft der Theorie $\mathcal{SA}$: Sei X eine rechtsbegrenzte Menge von Intervallen. Es existiert eine kleinste Rechtsbegrenzung von X , die bis auf die rechts-end-Äquivalenz eindeutig ist.

Hellman und Shapiro (ebd.) zeigen nun, dass die konstruierte Fusion F das gesuchte Intervall ist. Die Konstruktion von F impliziert bereits, dass es eine Rechtsgrenze von X darstellt. Als Intervall ist die Fusion stets rechts-end-äquivalent mit sich selbst. Zu zeigen ist daher lediglich, dass F auch die kleinste Rechtsgrenze von X ist und somit das Supremum der Menge X . Der obige Satz besagt schon, dass das Supremum bis auf rechts-end-Äquivalenz eindeutig ist. Um einen Widerspruchsbeweis zu führen, nehmen wir daher ein Intervall F' an, das nicht rechts-end-äquivalent ist, mit F , eine Rechtsgrenze von X darstellt und zugleich die kleinste solche Grenze ist. Doch die Annahme führt direkt zu einem Widerspruch. Da F' nicht rechts-end-äquivalent ist, existiert auch ein Teil von X , der rechts von F' liegt, was dem Umstand widerspricht, dass F' eine Rechtsgrenze von X darstellt.

Womit für die semi-aristotelische Theorie $\mathcal{SA}$ sowohl die archimedische Eigenschaft als auch die Dedekind-Vollständigkeit gezeigt werden konnte. Dies ist ein bemerkenswertes Resultat, da es mit einfachsten mereologischen Mitteln hergeleitet wurde. Notwendig war lediglich eine adäquate Definition aristotelischer Begrifflichkeiten im Rahmen der Theorie.

Man könnte gegen diese Theorie einwenden, dass der Berührungspunkt zweier Intervalle im rationalen Zahlenbereich unter Umständen gar nicht existiert. Im Falle, dass ein Dedekindschnitt im Punkt einer irrationalen Zahl stattfindet, könnten sich zwei Intervalle in diesem Punkt nicht berühren, da dieser zunächst nicht existiert. Der Umstand, dass sich Intervalle in der Theorie $\mathcal{SA}$ in einem Punkt berühren, setzt bereits den Zahlenbereich der reellen Zahlen voraus und ist somit zirkulär.

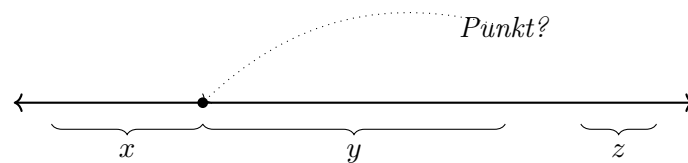


Abbildung 4.6: Mereologische Relation *angrenzen* in $\mathcal{L}[\circ]$

Diese Kritik ist jedoch unbegründet, da die Theorie $\mathcal{SA}$ auf anderen Begriffen fußt. Dass sich zwei Intervalle berühren, bedeutet in ihr lediglich, dass es nichts zwischen ihnen gibt. Ein Berührungspunkt wird in diesem Sinne nicht vorausgesetzt. Punkte treten erst später, über Cauchy-Folgen von Intervallen, auf und sind somit eine begriffliche *Erweiterung* der Theorie.⁵⁹

⁵⁹Vgl. Hellman und Shapiro (ebd.): S. 33f

4.5 Dedekinds *Intervalle* und die Teilraumtopologie auf $\mathbb{Q}$

Die semi-aristotelische Theorie von Hellman und Shapiro (2018) zeigt, dass die Frage des Atomismus im Kontext einer mereotopologischen Analyse nicht die Bedeutung hat, die man ihr anfangs zusprechen würde. *Topologisch* entspricht das aristotelische Kontinuum dem dedekindschen Punktmengenkontinuum. Wir gebrauchen das Adjektiv *topologisch* hier bezogen auf die Eigenschaft des Zusammenhangs einer Menge. Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft, die unter Homöomorphismen⁶⁰ invariant bleibt. Diese Eigenschaft ist folglich eine topologische Invariante. Mit der Definition der Schnitte konnte Dedekind den aristotelischen Begriff des Zusammenhangs mereotopologisch gesehen replizieren. So betrachtet, entspricht das Kontinuum, so wie es Aristoteles charakterisiert, dem Punktmengenkontinuum Dedekinds.

Es ist bemerkenswert, dass wir auch bei Dedekind erste explizite mereotopologische Überlegungen vorfinden. In einem kurzen Manuskript aus dem Nachlass mit dem Titel *Intervalle* untersucht Dedekind den Begriff des Zusammenhangs, ähnlich wie es auch Aristoteles in seiner Physik tat. Gemäß dem Kommentar von Scharlau (1982) ist dieses kurze Manuskript im Kontext des Entwurfs von **SZ** zu sehen.⁶¹ Wir nehmen daher an, dass auch hier die Niederschrift im Jahr 1871 erfolgte.

Dedekind definiert dort den Begriff des Intervalls als eine Menge **A rationaler** Zahlen, die die Eigenschaft besitzt, dass zwischen zwei Zahlen dieser Menge stets eine dritte Zahl aus A liegt. Die obere und untere Menge eines Schnittes sind dann gemäß dieser Definition auch Intervalle, ebenso wie die Menge der rationalen Zahlen selbst. Nun definiert er die Kontiguität über die Eigenschaft benachbarter Intervalle.⁶²

„Sind alle Zahlen eines Intervalls A auch in dem Intervall B enthalten, so heisst A ein Stück von B . [...] Zwei Intervalle A, B heissen benachbart, wenn sie keine gemeinschaftlichen Zahlen besitzen, und wenn alle in A und alle in B enthaltenen Zahlen zusammen wieder ein Intervall C bilden.“

Daraus folgert er:⁶³

„Die beiden Classen A_1, A_2 eines Schnitts sind benachbarte Intervalle.“

Diese Eigenschaft entspricht der weiter oben, bei Hellman und Shapiro (2018), aber auch Aristoteles selbst, definierten Angrenzung oder Kontiguität.⁶⁴ Betrachten wir nun die Definition der topologischen Eigenschaft des Zusammenhangs am Beispiel der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ in der die offenen Mengen über offene Intervalle der Form $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ definiert sind. Dieser topologische Raum ist zusammenhängend, falls es **nicht** möglich ist, zwei offene Mengen A_1 und A_2 zu finden, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (1) $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$
- (2) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

⁶⁰Homöomorphismen sind bijektiven stetigen Abbildungen, bei denen die Umkehrfunktion ebenfalls stetig ist.

⁶¹Vgl. Scharlau (1982): S. 15

⁶²Dedekind (1871a): S. 209

⁶³Dedekind (ebd.): S. 209

⁶⁴Im Anschluss deutet Dedekind an, dass auch andere Fälle der Beziehungen zwischen zwei Intervallen aufgezählt werden sollen, wobei dies im Manuskript nicht mehr geschieht.

(3) $A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$

Da die obere und untere Menge eines Schnitts ebenfalls Intervalle sind, kann ein Widerspruch über diese erfolgen. Dieser ergibt sich auf direktem Wege aus der Supremumseigenschaft. Dies wiederum bedeutet, dass der Raum zusammenhängend ist.

Betrachten wir dazu die Menge $M = \{m \in \mathbb{R} \mid [n, m] \subseteq A_1\}$ wobei n ein beliebiger Punkt aus A_1 ist. Da zumindest dieser die Eigenschaft $\{n\} = [n, n] \subseteq A_1$ erfüllt, ist die Menge M nicht leer, definitionsgemäß beschränkt und hat somit auch ein Supremum. Bezeichnen wir dieses Supremum mit s . Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

- (i) $s \in A_1$. Aus dem Umstand, dass A_1 eine offene Menge ist, folgt jedoch auch die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset A_1$. Dann ist jedoch auch $[n, s] \subset [n, s + \varepsilon] \subseteq A_1$, was der Definition des Supremums widerspricht.
- (ii) $s \in A_2$. Analog zu (i) folgt hier die Existenz eines $\delta > 0$ mit $(s - \delta, s + \delta) \subseteq A_2$. Dann gäbe es jedoch Punkte in A_2 , die kleiner als s wären und somit Elemente des Durchschnitts von A_1 und A_2 darstellen würden. Dies widerspricht jedoch der Annahmen, die Mengen wären disjunkt.

Es ist folglich nicht möglich, $\mathbb{R}$ in zwei disjunkten, nicht leeren offenen Mengen zu zerlegen. Damit wird dies im Kontext von Dedekinds obigen Überlegungen analysieren können, benötigen wir den Begriff der Teilraumtopologie.

Eine **Teilraumtopologie** auf einer Teilmenge $X \subseteq Y$ eines topologischen Raums $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ist die Topologie auf X , die durch die Mengen

$$\mathcal{T}_X = \{U \cap X \mid U \in \mathcal{T}_Y\}$$

gegeben ist, d.h. die offenen Mengen in X sind genau die Schnitte der offenen Mengen aus $\mathcal{T}_Y$ mit X . Teilraumtopologie ist somit die natürliche Struktur, die eine Teilmenge eines topologischen Raumes *erbt*.

Im Falle der rationalen Zahlen wird die Teilraumtopologie durch die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ induziert. Die offenen Mengen dieser Teilraumtopologie sind dann gegeben mit $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Auf dieser, von der Standardtopologie induzierten, Teiltopologie sind die obere und untere Menge eines irrationalen Schnitts offene und abgeschlossene Mengen. Mangels Supremumseigenschaft ist $\mathbb{Q}$ in der Teilraumtopologie (von $\mathbb{R}$) nicht zusammenhängend. Die rationalen Zahlen sind dicht in $\mathbb{R}$, obwohl sie in der Teilraumtopologie auf $\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend sind. Dedekinds Bemerkung, dass eine disjunkte und überdeckende Aufteilung dieser Teilraumtopologie möglich ist, entspricht der obigen Definition der Kriterien, die **nicht** im Falle eines Zusammenhangs allesamt erfüllt werden dürfen.

Wie man §6 in SZ entnehmen kann, dient ihm der Begriff der rationalen Intervalle der Definition der *Rechnungen mit reellen Zahlen*, also der Definition der arithmetischen Operationen im neuen Zahlenbereich.⁶⁵ In der Endfassung wurde zwar die Eigenschaft eines Intervalls, Teil eines anderen zu sein, beibehalten. Die Eigenschaft, zweier Intervalle benachbart zu sein, ist jedoch nicht mehr enthalten. Diese Eigenschaft hatte für die Definition der arithmetischen Operationen

⁶⁵Vgl. Dedekind (1872a): S. 330

in der Endfassung keine Bedeutung. Sie diene ihm vermutlich zur Untersuchung und *Verifikation* der Vollständigkeit des neuen Zahlenbereichs. Vielleicht ist auch deshalb das Manuskript *Intervalle* mit §4^a betitelt, berücksichtigt man, dass die *Schöpfung der irrationalen Zahlen* sowohl im Entwurf **SZ.E1** als auch in der Endfassung **SZ** in §4 zu finden ist.

Zwei nichtleere **reelle** Intervalle A_1 und A_2 mit $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ haben, basierend auf der Supremumseigenschaft, stets gemeinsame Elemente. Im Bereich der reellen Zahlen, wo die Supremumseigenschaft erfüllt ist, sind diese Intervalle folglich nicht benachbart im Sinne Dedekinds. Dedekind hat eine anordnungs-basierte und zusammenhängende Vorstellung vom Kontinuum der reellen Zahlen. Seine Idee von benachbarten Intervallen ist so gesehen eine Vorform des topologischen Zusammenhangs. Damit gibt das kurze Manuskript eine vorkonzeptionelle Antwort auf das, was später als eine wesentliche Eigenschaft der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ aufgefasst werden wird. Dedekinds Schnitte definieren die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als vollständige, total geordnete Körper-Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Versehen mit der durch die Ordnung induzierten Standardtopologie ist dieser neue Zahlenbereich zusammenhängend und entspricht mereotopologisch dem aristotelischen Kontinuum.

Kapitel 5

Die *unentbehrlichen* Grundbegriffe der Arithmetik

Im ersten Entwurf von **WZ** beschreibt Dedekind die Bedeutung von Mengen und Abbildungen:

„Verfolgt man genau, was wir beim Abzählen der Menge oder Anzahl von Dingen thun, so wird man nothwendig auf dem Begriff der Correspondenz oder Abbildung geführt. **Die Begriffe des Systems, der Abbildung**, welche im Folgenden eingeführt werden, um den Begriff der Zahl, der Anzahl zu begründen, bleiben auch dann für die Arithmetik **unentbehrlich**, selbst wenn man den Begriff der Anzahl als unmittelbar evident (Innere Anschauung) voraussetzen wollte.“ [Hervorhebung E. B.]

Ein zentrales Merkmal von Dedekinds Methode ist seine Überzeugung, dass alle eingeführten Begriffe rein logischer Natur sind. Im letzten Entwurf von **WZ** aus dem Jahr 1887 trug der Abschnitt, in dem die Eigenschaften von Mengen behandelt werden, den Titel „*Systeme von Elementen (Logik)*“. Der Umstand, dass in der Druckfassung die Klammerbemerkung gestrichen wurde, ändert daran nichts. Auch im Jahr 1897 betitelte Dedekind seine Theorie sogar als *Systemlehre der Logik*. Nach ihrer systematischen Etablierung in **WZ** behandelt er Mengen ausdrücklich als logische Einheiten.

Wir möchten uns in diesem Abschnitt der Frage zuwenden, wieso Dedekind dies tat. In Anlehnung an Ferreirós (2007) wird die These vertreten, dass die Logik der Mitte des 19. Jahrhunderts bereits eine enge Verbindung zwischen Begriffen und den dazugehörigen Mengen anerkannt hatte. Dedekind verstand Logik, in Anknüpfung an eine lang bestehende Tradition, als die Disziplin, welche die allgemeinsten Denkgesetze untersucht. Diese Denkgesetze haben stets Geltung. Dass die Mengenlehre als Bestandteil der Logik gesehen wurde, war ein natürliches Resultat dieser Tradition und bedurfte keiner gesonderten Begründung.

Das obige Zitat stellt Mengen und Abbildungen auf dieselbe Ebene. Beide Begriffe stellen die Grundlage allgemeiner Denkgesetze dar und sind somit für die Arithmetik unentbehrlich. Ferreirós (2017) bemerkt jedoch, dass bereits im letzten Entwurf von **WZ** aus dem Jahr 1887, als auch in der veröffentlichten Fassung, diese paritätische Bewertung fehlt.¹ Unentbehrlich ist für Dedekind 1887 nur der Abbildungsbegriff.²

¹Vgl. Ferreirós (2017): S. 320

²Dugac (1976): S. 224

„Verfolgt man genau, was wir beim Abzählen der Menge oder Anzahl von Dingen thun, so wird man nothwendig auf dem Begriff der Correspondenz oder Abbildung geführt. Die Begriffe des Systems, der Abbildung, welche im Folgenden eingeführt werden, um den Begriff der Zahl, der Anzahl zu begründen, bleiben auch dann für die Arithmetik **unentbehrlich**, selbst wenn man den Begriff der Anzahl als unmittelbar evident (Innere Anschauung) voraussetzen wollte.“
[Hervorhebung E. B.]

Ferreirós (2017) sieht hier die ersten Anzeichen einer *abbildungstheoretischen Wende* und verfolgt die Entwicklung des Mengenbegriffs bei Dedekind bis in das Jahr 1897 und seiner Arbeit zum Baire-Raum. Wir werden die Entwicklung des Abbildungsbegriffs ebenfalls, jedoch nur bis zum Jahr 1888, nachzeichnen. Die Wende, die Ferreirós (ebd.) bei Dedekind identifiziert, wird in dieser Arbeit in einem breiteren Kontext gesehen. Dedekind vollzieht eine Wende, jedoch ist diese keine abbildungstheoretische, sondern eine topologische Wende. Sie erscheint auf Abbildungen bezogen, weil der Abbildungsbegriff für topologische Begriffe unabdingbar ist. Der Fokus auf Abbildungen dient Dedekind nur als *Mittel*, um topologische Begriffe zu definieren. Der Kern der Wesensbestimmung der natürlichen Zahlen besteht nicht in Dedekinds Abbildungstheorie des §2 und §3 von **WZ**, sondern in der durchwegs topologischen Kettentheorie des §4. In Kapitel 7 wird dies erneut aufgegriffen.

5.1 Mengen

Mengentheoretische Begrifflichkeiten finden wir bei Dedekind relativ früh vor. Dies ist keineswegs zufällig. Vielmehr macht Dedekind bewusst Gebrauch von Begriffen wie *Domäne*, *Mannigfaltigkeit*, *Complex*, *Klasse* oder *System*.³ Die reine Verwendung von Begriffen der naiven Mengenlehre genügt jedoch nicht für das, was Ferreirós (1996) *Mengensprache* nennt. Wie wir später sehen werden, gibt die klassische syllogistische Logik bereits Anlass für erste mengentheoretische Überlegungen. Erst jedoch die Akzeptanz des Aktualunendlichen, sprich unendlicher Mengen, ist ein Beleg für eine *ernsthafte* Auseinandersetzung mit der Mengenlehre und somit eine weitere Stufe in der Entwicklung der Verwendung der Mengensprache. Dedekind vollzieht diese Entwicklung bereits in den 1850er Jahren mit seinen Arbeiten zur Algebra. Am eindrücklichsten belegt dies seine Arbeit zu höheren Kongruenzen aus dem Jahr 1857:⁴

„Die vorhergehenden Sätze entsprechen vollständig denen über die Teilbarkeit der Zahlen in der Weise, daß **das ganze System der unendlich vielen einander nach dem Modulus p congruenten Functionen einer Variablen** sich hier verhält, wie eine einzige bestimmte Zahl in der Zahlentheorie, indem jede einzelne Function eines solchen Systems jede beliebige andere desselben Systems in jeder Beziehung vollständig ersetzt; eine solche Function ist der Repräsentant der ganzen Classe; jede classe hat ihren bestimmten Grad, ihre bestimmten Divisoren usw., und alle diese Merkmale kommen jedem einzelnen Gliede einer Classe in derselben Weise zu. Das System der unendlich vielen incongruenten Classen — unendlich vielen, da der Grad unbegrenzt wachsen kann — entspricht der Reihe der ganzen Zahlen in der Zahlentheorie. [...]“ [Hervorhebung E. B.]

Wir erkennen hier, dass Dedekind unendliche Mengen als Hilfsmittel heranzieht. Folglich vollzog er bereits in den 1850er Jahren die Entwicklung von einer naiven Verwendung mengentheoretischer Begriffe hin zu einer ausgereiften Mengensprache. Seine späteren Untersuchungen

³Vgl. Ferreirós (2007): S. 86

⁴Dedekind (1857): S. 7

zur Arithmetik stellen in Bezug auf die Mengentheorie somit lediglich eine Vertiefung seiner bisherigen Arbeiten dar. Der systematische Aufbau der Mengentheorie als eigenständige Methode und zum Teilen eigener mathematischer Disziplin findet in **WZ** seinen Abschluss, dessen Entwurf bereits im Jahr 1872 sämtliche mengentheoretischen Formulierungen enthielt.⁵ Gehen wir auf diese Inhalte im Lichte unseres heutigen Verständnisses der Mengenlehre ein.

In § 1 von **WZ** führt Dedekind die wesentlichen Begriffe der (naiven) Mengenlehre ein, die er in kommenden Kapiteln für seine Untersuchungen heranziehen wird. Die Gesetze der Mengenlehre sind für Dedekind *Gesetze des Denkens* und somit integraler Bestandteil der Logik. Den Definitionen vorgelagert ist die Definition eines Dings:⁶ „Im Folgenden verstehe ich unter einem Ding jeden Gegenstand unseres Denkens.“ Eine Menge wird sodann extensional eingeführt.⁷

„Es kommt sehr häufig vor, daß verschiedene Dinge $a, b, c \dots$ aus irgendeiner Veranlassung unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte aufgefasst, im Geiste zusammengestellt werden, und man sagt dann, daß sie eine Menge S bilden; man nennt die Dinge $a, b, c \dots$ die Elemente der Menge S , sie sind enthalten in S ; umgekehrt besteht S aus diesen Elementen.“

Dedekind führt anschließend die bekannten mengentheoretischen Operationen ein (Durchschnitt, Vereinigung etc.). Die Ausführungen haben heute vor allem historische Bedeutung, da sie die erste systematische Behandlung der (naiven) Mengenlehre darstellen.

Allgemein gesprochen kommen bei ihm **implizit** folgende Gesetzmäßigkeiten zur Anwendung:⁸

- **Extensionalitätsaxiom:** Dedekinds Zugang zu Mengen ist extensional. Wie wir im obigen Zitat sehen können, werden verschiedene Dinge *unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt* gebildet.
- **Potenzmengenaxiom:** Dedekind gibt keine Einschränkungen hinsichtlich der Mengenbildung vor. Alles, was Gegenstand des Denkens sein kann, kann auch Element einer Menge sein – also auch Mengen selbst. Wie wir später feststellen werden, unterscheidet ihn dies von Kronecker. Allerdings formuliert er die Potenzmenge nicht explizit.⁹

⁵Die Entwürfe seiner Arbeiten sind beispielsweise zu finden in Dugac (1976): S. 293ff.

⁶Dedekind (1888): S. 344

⁷Dedekind (ebd.): S. 344f

⁸Vergleiche hierzu Reck (2018a), Tiles (2004), Ferreirós (1996) sowie vor allem Zermelo (1908).

⁹Dieser Aspekt steht im Zusammenhang mit prädikativen Sätzen. Prädikative Sätze oder Definitionen sind solche, bei denen ein Begriff nur unter Rückgriff auf bereits feststehende und definierte Begriffe bestimmt wird. Im Gegensatz dazu stehen imprädikative Sätze, bei denen eine Definition auf eine Gesamtheit Bezug nimmt, die den zu definierenden Begriff selbst einschließt.

Dieses Problem wurde in der Grundlagendebatte der Mathematik relevant, insbesondere durch Henri Poincaré und Bertrand Russell. Poincaré argumentierte, dass imprädikative Definitionen zu Zirkularität und logischen Paradoxien führen können, da sie den zu definierenden Begriff in einer übergeordneten Menge verwenden. Russells Antinomie zeigt ein solches Problem auf, indem sie die Menge aller Mengen betrachtet, die sich nicht selbst als Element enthalten – eine Konstruktion, die zu einem Widerspruch führt. Siehe dazu Russell (1908) auf Seite 237. Im Wesentlichen wollte man vermeiden, dass eine Menge sich selbst als Element enthalten kann. Ein Jahr später formulierte Russell (ebd.) das sogenannte vicious-circle principle (VCP), das eine allgemeine Regel darstellen sollte. Demnach durfte alles, was eine Variable enthält, nicht als Wert dieser fungieren können. Definitionen, die diesem Prinzip nicht Genüge tun, werden als imprädikativ bezeichnet.

Für Feferman (2007) ist die Definition des Infimum bzw. Supremum dahingehend problematisch. Er bemerkt auf Seite 597f:

„The existence of the g.l.b. can be recognized set-theoretically as the formation of a union in terms of the association of real numbers x with their upper Dedekind sections D_x in the rational numbers $\mathbb{Q}$,

- **Aussonderungssaxiom:** Er verwendet implizit auch eine Form des Aussonderungssaxioms. Demnach ist es möglich, aus einer festgelegten Menge jene Elemente *auszusondern*, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Gemäß dem Extensionalitätsaxiom kann eine derartige Teilmenge stets gebildet werden.
- **Unendlichkeitsaxiom:** Das Unendlichkeitsaxiom postuliert die Existenz induktiver Mengen. Dedekind benutzt dieses Axiom bei der Konstruktion von einfach unendlichen (heute würden wir sagen abzählbar unendlichen) Mengen. Sein Name ist dem Umstand geschuldet, dass diese Mengen unendlich sind. Zermelo nannte dieses Axiom auch Dedekinds Axiom, obwohl er in seinen Ausführungen nicht von einfach unendlichen Mengen, sondern der Mengensequenz

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$$

ausging.¹⁰ Für Dedekind (1888) handelt es sich hierbei, wie wir bereits sehen konnten, jedoch nicht um ein Axiom, sondern um den beweisbaren Satz (#66).

- **Vereinigungsaxiom:** Wie bereits erwähnt, gibt Dedekind hinsichtlich der Mengenbildung keine Restriktionen vor. Eine Menge kann auch andere Mengen als Elemente enthalten. Das Vereinigungsaxiom besagt nun, dass für jede solche Menge eine Menge existiert, die die Elemente der Elemente (der Mengen) der Ausgangsmenge enthält. Die resultierende Menge ist eindeutig bestimmt.
- **Axiom der Paarung:** Für zwei beliebige Mengen gibt es stets eine Menge, die genau diese Mengen als Elemente hat. Auch hier ist die resultierende Menge eindeutig bestimmt. Zusammen mit dem Vereinigungsaxiom ermöglicht das Paarungsaxiom die Definition der mengentheoretischen Operation der Vereinigung, die Dedekind im ersten Kapitel von **WZ** einführt.
- **Auswahlaxiom:** Für eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Mengen existiert eine Menge aus jeweils einem Element aus jeder dieser Mengen. Das Auswahlaxiom benutzt Dedekind implizit bei seinen Untersuchungen zu den Begriffen des Endlichen und Unendlichen.
- **Ersetzungsaxiom:** Wird in einer Menge jedes Element eindeutig durch eine beliebige Menge ersetzt, so geht die Ausgangsmenge in eine Menge über. Dieses Axiom benutzt Dedekind implizit bei der Behandlung von Rekursion und Induktion.

Frege kritisierte Dedekinds Ansatz hinsichtlich verschiedener Aspekte. In Bezug auf Mengen war es vorrangig die mangelnde Unterscheidung der Inklusion und der Mengenzugehörigkeit,

where

$$D_x = \{r : r \in Q \wedge x < r\}.$$

Let $S^* = \{D_x : x \in S\}$. Then the union U of the sets in S^* is the Dedekind section D_m where $m = g.l.b.(S)$; in this one invokes the Dedekind completeness (or continuity) of $\mathbf{R}$, according to which every Dedekind section determines a real number. Dually, the l.u.b. (S) is determined by the intersection of all the sets in S_* “

Auch Hermann Weyl schrieb in seinem Buch *Das Kontinuum*, dass die imprädikative Begriffsbildung bei Dedekind zirkulär sei. Siehe dazu Weyl (1918).

¹⁰Vgl. Zermelo (1908): S. 263

die Frege bemängelte. Zudem unterschied Dedekind nicht zwischen einem Singleton und seinem Element, sprich für ihn galt stets $a = \{a\}$. Außerdem führte er die leere Menge nicht ein. Vor allem bei Schnittmengen konnte diese jedoch auftreten. Ferreirós (2007) bemerkt, dass Dedekind in seinen späteren Manuskripten diese Kritik berücksichtigt und eine differenziertere Verwendung der Begriffe eingeführt hat.¹¹

Auf eine grundlegende Frage über den Status der Mengenlehre bei Dedekind ist an dieser Stelle noch einzugehen. Wie wir sehen konnten, fällt für ihn die Mengenlehre in den Bereich der Gesetze des Denkens und ist somit Bestandteil der Logik. Dies ist auch aus historischer Perspektive zumindest erklärungsbedürftig.

Einen überzeugenden Erklärungsansatz liefert Ferreirós (ebd.), aufbauend auf seiner älteren Arbeit in Ferreirós (1996). Er plädiert dafür, Dedekind im Kontext der damaligen Logik, genauer im Kontext der aristotelischen syllogistischen Logik, zu interpretieren. Obwohl auch idealistische Logikauffassungen zur damaligen Zeit weitverbreitet waren, belegen die Schriften und der Nachlass nicht nur von Dedekind, sondern auch von Riemann, der einen erheblichen Einfluss auf ihn hatte, dass sie sich ausschließlich mit Logikern aus der aristotelischen Traditionen auseinandergesetzt haben.¹²

Diese traditionelle Logik widmete sich als Wissenschaft der Denkformen der Analyse der grundlegendsten Strukturelemente des Denkens. Dazu zählen verschiedene Arten von **Begriffen** als grundlegende Denkeinheiten, **Urteile** als Verknüpfungen von Begriffen sowie **Schlussweisen** als Ableitungen von Urteilen aus anderen.¹³

Allgemein gilt Aristoteles als Begründer dieser Disziplin. Sein Werk *Organon* diente über Jahrhunderte hinweg als zentrale Referenz für Logiker, die es immer wieder aufgriffen und weiterentwickelten. Obwohl sich bei Aristoteles bereits Ansätze einer Gliederung finden, wurde die explizite Dreiteilung der Denkfiguren in Begriff, Urteil und Schluss erst von Petrus Ramus im 16. Jahrhundert vorgenommen. Diese Einteilung blieb bis ins 20. Jahrhundert ein zentrales Konzept der philosophischen Logik.¹⁴

In dieser Logik galten Begriffe als die grundlegenden Bausteine des Denkens, aus denen Urteile und Schlüsse gebildet werden. Ein charakteristischer Ansatz bestand darin, Begriffe als durch Abstraktion gewonnene allgemeine Vorstellungen zu verstehen. Dies führte immer wieder zur Frage nach ihrem logischen und erkenntnistheoretischen Ursprung.

Überdies befasste sich die traditionelle Begriffslehre damit, Begriffe in verschiedene Kategorien einzuteilen: in einfache und zusammengesetzte Begriffe nach ihrem Inhalt, in Individual- und Kollektivbegriffe nach ihrem Umfang oder nach ihrer Beziehung zueinander. Darauf aufbauend konnte eine Analyse von Begriffshierarchien, also der Strukturverhältnisse von Ober- und Unterbegriffen, durchgeführt werden. Bereits Aristoteles hat diese Hierarchien beschrieben und versuchte, mit seinen Kategorien zehn höchste Gattungsbegriffe zu bestimmen, unter die sämtliche anderen Kategorien fallen.

Die Systematisierung der Beziehung zwischen Ober- und Unterbegriffen wurde erheblich erleichtert, als Antoine Arnauld und Pierre Nicole in ihrer Logik von Port Royal (1662) erstmals

¹¹Vgl. Ferreirós (2007): S. 228

¹²Vgl. Ferreirós (1996): S. 9

¹³Vgl. Prediger (2000): S. 166ff

¹⁴Vgl. Prediger (ebd.): S. 166

eine klare Unterscheidung zwischen der *Extension* und der *Intension* eines Begriffs vornehmen. Während bereits in der Antike und im Mittelalter Begriffe implizit nach ihrem Umfang und Inhalt analysiert wurden, entwickelte sich ein präzises Verständnis dieser beiden Dimensionen erst im Laufe eines längeren intellektuellen Prozesses. Die Logik von Port Royal war die erste Abhandlung, in der Inhalt und Umfang eines Begriffs konkret definiert wurden. So heißt es dort:¹⁵

„Ich nenne Umfang der Idee die Subjekte, denen diese Idee zukommt, die man auch die einem allgemeinen Wort Untergeordneten nennt, wobei dieses auf sie das Übergeordnete heißt, wie sich die Idee des Dreiecks überhaupt auf alle verschiedenen Arten von Dreiecken erstreckt.“

Um die Brücke zu Dedekind zu schlagen, verweist Ferreirós (1996) auf den Umstand, dass Herbart (1837) der Begriff der Menge mit dem Umfang, also der Begriffsextension, in Zusammenhang stellt. Am eindrucklichsten ist dies in seinem Kapitel *Von den Begriffen* zu lesen:¹⁶

„Der Inhalt eines Begriffs ist die Summe seiner Merkmale; **der Umfang, die Menge der andern Begriffe**, worin jener als Merkmal vorkommt; dergestalt, daß der Inhalt wächst wie der Umfang abnimmt, und rückwärts. “ [Hervorhebungen E.B.]

Die Diskussion über die Begriffsextensionen war in der Logik des 19. Jahrhunderts vollkommen üblich und eng mit den zentralen Lehren der Syllogistik verknüpft. Als Mathematiker begannen, mit Mengen zu arbeiten, war der Weg geebnet, diese als logische Begriffe zu verstehen. Die Mengenlehre wurde daher als Teilbereich der Logik gesehen. Dedekinds Auffassung der Zugehörigkeit der Mengenlehre zur Logik ist ebenso in diesem Kontext zu sehen.

Bei Dedekind hängt dies jedoch auch mit seinem Verständnis der Arithmetik in Bezug auf den Logizismus zusammen. Die Möglichkeit, zentrale Bereiche der Arithmetik aus der Mengenlehre abzuleiten, wurde von manchen als Beweis dafür gewertet, dass die Arithmetik lediglich ein Teilbereich der Logik sei. Diese Schlussfolgerung setzt jedoch voraus, dass die Mengenlehre selbst als reine Logik betrachtet wird – eine Annahme, die über die bloße Verbindung von Begriffen und Mengen hinausgeht.¹⁷

5.2 Abbildungen

Die Einführung des allgemeinen Begriffs der Abbildung stellt möglicherweise den methodisch markantesten und zugleich bedeutendsten Schritt in Dedekinds Werk dar. Dieser Schritt markiert einen grundlegenden Wandel in der Art und Weise, wie mathematische Objekte begriffen und analysiert werden: Nicht mehr ihre inhaltliche oder anschauliche Bedeutung steht im Vordergrund, sondern die Relationen und Strukturen, die sie durch Abbildungen zueinander haben.

Die erste publizierte Erwähnung des Begriffs der *Abbildung* bei Dedekind geht auf das Jahr 1879 zurück.¹⁸ In der dritten Auflage zu Dirichlets Vorlesung zur Zahlentheorie steht der Begriff der Abbildung synonym zu Dedekinds Begriff der *Substitution*.¹⁹

¹⁵Arnauld (2005): S. 48 in der Übersetzung von Prediger (2000): S. 167.

¹⁶Herbart (1837): S. 55; Kapitel 1 §40

¹⁷Vgl. Ferreirós (1996): S. 16

¹⁸Vgl. Sieg und Schlimm (2017): S. 306f

¹⁹Dirichlet (1879): S. 470

„Es geschieht in der Mathematik und in anderen Wissenschaften sehr häufig, dass, wenn ein System Ω von Dingen oder Elementen ω vorliegt, jedes bestimmte Element ω nach einem gewissen Gesetze durch ein bestimmtes, ihm entsprechendes Element ω' ersetzt wird; einen solchen Act pflegt man eine Substitution zu nennen, und man sagt, dass durch diese **Substitution** das Element ω in das Element ω' , und ebenso das System Ω in das System Ω' übergeht. Die Ausdrucksweise gestaltet sich noch etwas bequemer, wenn man, was wir thun wollen, diese Substitution wie eine **Abbildung** des Systems Ω auffasst und demgemäss ω' das Bild von ω , ebenso Ω' das Bild von Ω nennt.“ [Hervorhebungen E. B.]

Diesen Absatz nimmt Ferreirós (2007) als Beleg für eine synonyme Verwendung der Begriffe Substitution und Abbildung bei Dedekind.²⁰ Der Begriff der *Substitution* wird dort, aus rein stilistischen Gründen, mit dem Begriff der *Abbildung* gleichgesetzt. Der letztere wurde im deutschen Sprachraum meist im Kontext der Geometrie gebraucht. So zieht Dedekind gegenüber Keferstein in **KF** das Gleichnis des Malers heran, um die *gefährliche Verwechslung* zwischen Abbildung und Bild zu verhindern.²¹

„Hier findet sich eine Verwechslung zwischen Abbildung und Bild; statt "Abbildung $\overline{\varphi}(S')$ " mußte es heißen "Abbildung $\overline{\varphi}$ des Systems S' . Nicht $\overline{\varphi}(S')$, sondern $\overline{\varphi}$ ist eine Abbildung (**der abbildende Maler**), die aus dem System (Original) S' das Bild $\overline{\varphi}(S') = S$ erzeugt wird. Solche Verwechslungen können aber bei unserer Untersuchung recht gefährlich werden.“ [Hervorhebung E. B.]

Durch eine Analyse der algebraischen Werke Dedekinds konnten Sieg und Schlimm (2017) jedoch zeigen, dass bei Dedekind eine Begriffsentwicklung stattfand und der Begriff der Abbildung am Ende einer Reihe von Erweiterungen steht.²² Bereits bei der Diskussion des Habilitationsvortrags in Kapitel 2.1 wurde auf den Unterschied zwischen Abbildungen und Funktionen hingewiesen. Heute würde man sagen, dass Funktionen spezielle Abbildungen sind. Sie sind Abbildungen von einem Zahlenbereich in den anderen. Der Begriff der Funktion war folglich zur Zeit Dedekinds enger gefasst.²³ Operationen sind wiederum bestimmte elementare Funktionen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Potenzfunktion zusammen mit ihren Inversen.²⁴ Da sein Habilitationsvortrag die Abbildung von Zahlenbereichen in Zahlenbereiche zum Gegenstand hat, spricht Dedekind dort auch nur von Funktionen.

Bereits ein paar Jahre danach, in seinen Notizen *Aus den Gruppen-Studien*, die in den 1850er Jahren niedergeschrieben wurden, finden wir den Begriff der Substitution in einem abweichenden Sinn vor als in dem in Dirichlet (1879) zitierten. Dort steht Substitution für eine äquivalente Korrespondenz zwischen zwei Gruppen. Substitutionen sind dort Isomorphismen im heutigen Sinne - folglich strukturerhaltende Bijektionen.²⁵

„Sind M und M_1 äquivalent, so entspricht jedem in M enthaltenen Objekt θ ein in M_1 enthaltenes Objekt θ_1 auf die angegebene Weise; wir sagen, daß M durch die Substitution

$$S = \begin{pmatrix} 1, & \theta, & \theta', & \dots \\ 1, & \theta_1, & \theta'_1, & \dots \end{pmatrix}$$

²⁰Vgl. Ferreirós (2007): S. 89

²¹Müller-Stach (2017): S. 188; Hervorhebung E. B.

²²Die folgenden Ausführungen basieren hauptsächlich auf Sieg und Schlimm (2017): S. 303-310.

²³Ein kurzer Abriss der Entwicklung des Funktionsbegriffs findet sich in Kapitel 4.2.

²⁴Vgl. Sieg und Schlimm (ebd.): S. 303

²⁵Scharlau (1982): S. 61

in M_1 übergeht.“

Die *angegebenen Weise* von der Dedekind hier spricht ist die Isomorphie. Zwei Gruppen sind somit isomorph oder äquivalent zueinander wenn eine Substitution zwischen ihnen angegeben werden kann.

Eine Verallgemeinerung erfährt der Begriff in den Vorlesungsnotizen *Eine Vorlesung über Algebra*, deren Niederschrift in der zweiten Hälfte der 1850er Jahre vermutet wird.²⁶ Dort schreibt Dedekind:²⁷

„Unter Substitution versteht man im Allgemeinen jenen Process, durch welchen gewisse Elemente $a, b, c, \dots$ in andere $a', b', c', \dots$ übergehen oder durch diese ersetzt werden; wir betrachten im Folgenden nur die Substitutionen, bei welchen der Complex der ersetzenden Elemente $a', b', c', \dots$ mit dem der ersetzten $a, b, c, \dots$ identisch ist.“

Auch hier untersucht Dedekind Isomorphismen, eröffnet jedoch zugleich die Möglichkeit, dass Substitutionen auch allgemein bijektive Abbildungen darstellen können. Das *Aufbrechen* dieser erfolgt dann im Supplement X in Dirichlet (1871). Bei der Untersuchung der Homomorphismen bei Körpern eröffnet Dedekind dort die Möglichkeit, dass eine Abbildung nicht injektiv ist.

„Entspricht ferner einer jeden Zahl a des Körpers A eine Zahl $b = \varphi(a)$ in der Weise, dass $\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$, und $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ ist, so bilden die Zahlen b (falls sie nicht sämtlich verschwinden) ebenfalls einen Körper $B = \varphi(A)$, welcher **mit A conjugirt** ist und durch die **Substitution φ** aus A hervorgeht; dann ist rückwärts auch $A = \psi(B)$ mit B conjugirt. Zwei mit einem dritten conjugirte Körper sind auch mit einander conjugirt, und jeder Körper ist mit sich selbst conjugirt. Correspondirende *len* in zwei conjugirten Körpern A und B , wie a und $b = \varphi(a)$, sollen **conjugirte Zahlen** heissen.“ [Hervorhebungen durch Autor]

In beiden Fällen bemerkt Dedekind, dass die durch Substitutionen bestimmte Relation symmetrisch, reflexiv und transitiv ist. Ein Unterschied zwischen den beiden Darstellungen besteht in der Art und Weise, wie Substitutionen eingeführt werden. Die spätere Version wirkt in dieser Hinsicht deutlich moderner. Hinsichtlich des Allgemeinheitsgrades zeigt sich jedoch eine Einschränkung. Wie bereits deutlich wurde, können die Elemente einer Gruppe bei Dedekind ganz unterschiedliche Arten von Objekten sein, während die Elemente eines Körpers stets als Zahlen aufgefasst werden. Substitutionen zwischen Körpern sind daher stets als zahlentheoretische Funktionen zu verstehen.²⁸

Im Zusammenhang mit Zahlenbereichserweiterungen begegnen wir in den bereits erwähnten Arithmetischen Grundlagen einer abbildungstheoretischen Darstellung der Nachfolgerfunktion. Eine weitere begriffliche Differenzierung erfolgt in Dedekind (1877). Im Jahr 1877 veröffentlichte Dedekind eine Darstellung seiner Idealtheorie in der Arbeit *Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques*. Ähnlich wie in den Ergänzungen zu Dirichlets Vorlesungen definiert Dedekind einen Körper als ein System von Zahlen. Im Hinblick auf Funktionen trifft er jedoch eine terminologische Unterscheidung: Er unterscheidet nun zwischen allgemeinen Funktionen und solchen, die die Struktur bewahren. Eine Substitution beschreibt er allgemein als einen Vorgang, der Objekte oder Elemente in neue verwandelt – ähnlich wie er es in seiner *Eine Vorlesung über Algebra* getan

²⁶Vgl. Sieg und Schlimm (2017): S. 305; Fußnote 33

²⁷Scharlau (1981): S. 60

²⁸Sieg und Schlimm (2017): S. 306

hatte. Was er in *Aus den Gruppen-Studien* (1855–1858) und in der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen (1871) noch als Isomorphismen bezeichnet hatte, nennt er nun Permutationen.

In **WZ** war sein Abbildungsbegriff bereits ausgereift:²⁹

„Unter einer Abbildung φ einer Menge S wird ein **Gesetz** verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird; wir sagen auch, daß $\varphi(s)$ dem Element s **entspricht**, daß $\varphi(s)$ durch die Abbildung φ aus s **entsteht** oder **erzeugt** wird, daß s durch die Abbildung φ in $\varphi(s)$ **übergeht**. Ist nun T irgendein Teil von S , so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten, welche der Einfachheit wegen wohl mit demselben Zeichen φ bezeichnet werden darf und darin besteht, daß jedem Element t der Menge T dasselbe Bild $\varphi(t)$ entspricht, welches t als Element von S besitzt; zugleich soll die Menge, welche aus allen Bildern $\varphi(t)$ besteht, das Bild von T heißen und mit $\varphi(T)$ bezeichnet werden, wodurch auch die Bedeutung von $\varphi(S)$ erklärt ist.“ [Hervorhebungen E. B.]

Er definiert eine Abbildung als Gesetz der Zuordnung sowohl für einzelne Elemente der Menge S als auch ihre Teile. Später führt er injektive und bijektive Abbildungen ein (und unterscheidet beide zum Leidwesen des Lesers nicht immer). Wie wir sehen konnten unterscheidet sich Dedekinds Zugang bei Abbildung zu modernen Ansätzen dadurch, dass er den Begriff der Abbildung nicht auf Mengen reduziert. Abbildungen sind grundlegend für das menschliche Denken und somit Bestandteil einer nicht mehr begründungsbedürftigen Logik. Genauso wie bei Mengen führt er auch bei Abbildungen keine Restriktionen ein. Wie die Domäne einer Abbildung unter Umständen ausgestaltet werden muss, lässt er offen.³⁰

Im Gegensatz zur Auffassung, dass Mengen lediglich ein Teil der Logik seien, war Dedekinds Idee, dass auch Abbildungen rein logische Objekte sind, eine Neuerung. Daher ist es naheliegend, dass er besonderes Interesse daran hatte, seine Leser von der Gültigkeit dieser Ansicht zu überzeugen.³¹ Am Anfang von **WZ** argumentiert er dies folgendermaßen:³²

„Verfolgt man genau, was wir bei dem Zählen der Menge oder Anzahl von Dingen tun, so wird man auf die Betrachtung der Fähigkeit des Geistes geführt, Dinge auf Dinge zu beziehen, einem Dinge ein Ding entsprechen zu lassen, oder **ein Ding durch ein Ding abzubilden, ohne welche Fähigkeit überhaupt kein Denken möglich ist**. Auf dieser einzigen, auch sonst ganz unentbehrlichen Grundlage muß nach meiner Ansicht, wie ich auch schon bei einer Ankündigung der vorliegenden Schrift ausgesprochen habe, die gesamte Wissenschaft der Zahlen errichtet werden.“

Das Zählen basiert auf der grundlegenden Fähigkeit des Geistes, Dinge miteinander zu verbinden. Diese Fähigkeit ist unerlässlich für jegliches Denken. Daher, so Dedekind, muss die gesamte Arithmetik auf dieser fundamentalen Grundlage aufbauen, die ihrerseits ebenso Teil der Logik sein muss.³³

²⁹Dedekind (1888): S. 348; Hervorhebungen E. B.

³⁰Vergleiche dazu auch Reck und Ferreirós (2020).

³¹Vgl. Ferreirós (1996): S. 45f

³²Dedekind (1888): S. 336

³³Dedekind bemerkt auch im Supplement XI von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, „[...] daß auf dieser Fähigkeit des Geistes, ein Ding a mit einem Ding a' zu vergleichen, oder a auf a' zu beziehen, oder dem a ein a' entsprechen zu lassen, ohne welche überhaupt kein Denken möglich ist, auch die gesamte Wissenschaft der Zahlen beruht. Die Durchführung dieses Gedankens ist seitdem veröffentlicht in meiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (Braunschweig 1888); die daselbst angewandte Bezeichnungsweise für Abbildungen und deren Zusammensetzung weicht äußerlich von der hier gebrauchten ein wenig ab.“. Siehe Dedekind (1932): S. 24; § 161.

Kapitel 6

Zur historischen Genese topologischer Begriffe

„[...] in einem Gebiet, wo schlechthin nicht selbstverständlich und das richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel sich und den Leser vor Täuschungen zu bewahren“

Hausdorff (1914): S. v

Das Aufkommen der Topologie als eigenständiger Teilbereich der Mathematik steht in engem Zusammenhang mit der Neukonstituierung der mathematischen Grundlagen im 19. Jahrhundert, als die klassische Geometrie und Analysis zunehmend von intuitiven Vorstellungen abgekoppelt wurden, um eine präzisere, formale Sprache zu entwickeln.

Sie entstand aus den Bemühungen, Konzepte wie Stetigkeit, Konvergenz und Nähe auf eine allgemeinere Weise zu fassen, ohne auf konkrete geometrische Modelle angewiesen zu sein. Die exakte Begriffsbildung des Grenzwerts durch d'Alembert und Cauchy, die Entwicklung von Kriterien für die Konvergenz unendlicher Reihen durch Gauß sowie die Klärung des Begriffs der stetigen Funktion durch Bolzano und Cauchy stellten die Grundlage für eine ausgereifte Auseinandersetzung mit bisher ungeklärten Fragen der Analysis dar.¹

Die Notwendigkeit, dieser eine solidere Grundlage zu verleihen, wurde besonders deutlich, als verschiedene pathologische Phänomene bei der Konvergenz von trigonometrischen Reihen, vor allem jedoch bei Fourier-Reihen, entdeckt wurden. In Kapitel 3.7 haben wir mit der Weierstraß-Funktion bereits ein solches Beispiel besprochen. Diese Funktion ist stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar. Trotz ihrer Stetigkeit hat die Weierstraß-Funktion an jeder Stelle eine Fourier-Reihe, die nicht konvergiert. Dieses Beispiel zeigt, dass es Funktionen gibt, deren Fourier-Reihen im klassischen Sinne nicht konvergieren, obwohl die Funktion stetig ist. Es zeigte jedoch auch die Limitationen der Fourier-Analyse und verdeutlichte, dass die klassischen Bedingungen für die Konvergenz von Fourier-Reihen in vielen Fällen nicht ausreichten.

¹Vgl. Engelking (1989): S. 18f

Fragen im Zusammenhang mit Fourier-Reihen motivierten auch Cantor in den 1870er Jahren, eine Reihe von Aufsätzen zur *Theorie der Punktmengen* zu publizieren. Diese Theorie nutzte explizit topologische Begrifflichkeiten, um die aufgeworfenen Probleme zu behandeln. Schon bei Heine stellte sich nämlich heraus, dass die Struktur der zugrundeliegenden Punktmenge bei der Konvergenz der Fourier-Reihen keineswegs unbedeutend war. Cantor nahm diese Gedanken auf und entwickelte eine eigenständige Theorie, die um topologische Begriffe wie Häufungspunkte, abgeschlossene Mengen und Ableitungen von Mengen kreiste.

Neben der Punktmengentheorie war es aber auch die Entwicklung der Geometrie, die direkten Einfluss auf die topologische Begriffsbildung hatte. Die Entwicklung der projektiven Geometrie zu einem eigenständigen Untersuchungsgegenstand sowie Arbeiten zur hyperbolischen Geometrie stellten die Mathematik unmittelbar vor eine scheinbar unlösbare Systematisierungsaufgabe. Denn auch die Topologie beschäftigt sich mit der Anordnung und den räumlichen Beziehungen von geometrischen Objekten. Ihre Aufmerksamkeit richtet sich auf die Eigenschaften mathematischer Strukturen, die durch stetige Verformungen unverändert bleiben. Dabei definiert die Topologie den Begriff der Stetigkeit in einer äußerst allgemeinen Weise.² Durch die Axiomatisierung des topologischen Raumes konnte auch ihre Stellung in der neuen Systematik untersucht werden.

Dedekind hat sich nachweislich mit topologischen Begrifflichkeiten auseinandergesetzt. Die Literatur verweist dabei auf sein nicht publiziertes Aufsatzfragment mit dem Titel *Allgemeine Sätze über Räume*.³ In seinem Habilitationsvortrag erklärte Riemann die Stetigkeit einer Mannigfaltigkeit, indem er sie auf die Möglichkeit kontinuierlicher Übergänge von jedem Punkt zu jedem anderen reduzierte.⁴ Diese Vorstellung entspricht dem heutigen Begriff des topologischen Wegzusammenhangs. Riemanns Erklärung war jedoch nahezu rein verbal. Dedekind schrieb in einem Brief an Cantor aus dem Jahr 1879, dass er bereits vor vielen Jahren „eine sehr gute Grundlage“⁵ für eine strenge Darstellung dieser Zusammenhänge, unabhängig von geometrischer Intuition, erarbeitet hatte. In der Literatur herrscht Konsens, dass er damit die topologischen Definitionen in den *Allgemeinen Sätzen* gemeint hat.⁶

Überdies enthält Dedekinds **SZ** die erste abstrakte Definition der Stetigkeit. Der Autor selbst betonte, dass die Definition vollkommen allgemein sei und „eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung *aller* stetigen Gebiete“⁷ biete. Für Autoren wie Ferreirós (2007) besteht kaum Zweifel, dass er seine Definition als relevant für Riemanns Mannigfaltigkeiten betrachtete.⁸ Er hebt hervor, dass es Dedekind nicht um eine *algebraische*, sondern um eine *topologische* Erweiterung der rationalen Zahlen ging.⁹

In diesem Kapitel werden wir diesen Hinweisen nachgehen und einen systematischen Überblick über Dedekinds Rolle in der mengentheoretischen Topologie geben. Zusätzlich möchten wir das aktuelle Bild über Dedekinds Beitrag zur Topologie erweitern. Ich vertrete hier die These,

²Vgl. Kline (1990): S. 1158

³Vgl. Ferreirós (2007): S. 137ff

⁴Vgl. Riemann und Jost (2013): S. 30

⁵Dedekind (1932): S. 355

⁶Vgl. Ferreirós (2007): S. 137

⁷Dedekind (1872a): S. 322; Hervorhebung im Original

⁸Vgl. Ferreirós (2007): S. 137

⁹Ferreirós (ebd.): S. 121; Im Gegensatz dazu ging es etwa Ohm eben um eine derartige Ausweitung der Operationen und nicht primär um eine Begründung der Zahlenbereiche.

dass der Kettentheorie in **WZ** eine ausgereifte Theorie topologischer Begrifflichkeiten zugrunde liegt, die bisher in der Literatur keine bis wenig Beachtung gefunden hat.¹⁰ Inwieweit die Kettentheorie die Ergebnisse späterer topologischer Arbeiten wie die von Hausdorff (1914), Kuratowski (1922), Tietze (1923) und Alexandroff (1925) vorwegnimmt, soll hier geklärt werden.

Dieses Vorhaben sieht sich einigen Problemen gegenüber, auf die wir an dieser Stelle näher eingehen wollen:

1. **Geschichtliche Entwicklung der Topologie:** Ein zentrales Problem in der geschichtlichen Entwicklung der Topologie ist die enge Verflechtung zwischen analytischen, geometrischen und mengentheoretischen Methoden. Während in der Analysis Konzepte wie Stetigkeit und Konvergenz funktionentheoretisch untersucht wurden, betrachtete die Geometrie topologische Fragen oft im Rahmen von Kurven, Flächen und Mannigfaltigkeiten. Erst durch Cantors Punktmengentheorie und Hausdorffs Axiomatisierung entstand eine mengentheoretische Topologie, die diese Ansätze systematisch ordnete. Gleichzeitig führte die Entwicklung der algebraischen Topologie zu einer weiteren methodischen Spannung: Während die mengentheoretische Topologie mit offenen Mengen und topologischen Räumen arbeitete, nutzte die algebraische Topologie algebraische Werkzeuge zur Untersuchung geometrischer Strukturen. Zahlreiche zentrale Ergebnisse, insbesondere hinsichtlich Kompaktheit und Stetigkeit, bewegten sich an der Schnittstelle zwischen beiden Strömungen, was ihre klare Zuordnung erschwerte. Die methodische Uneinigkeit führte lange Zeit zu unterschiedlichen Forschungsrichtungen, bis im 20. Jahrhundert durch axiomatische Vereinheitlichungen, darunter Bourbaki (2008) und die Kategorientheorie, eine systematische Einordnung topologischer Konzepte gelang. Eine stringente Abgrenzung zwischen mengentheoretischen und algebraischen Ergebnissen der Topologie wird, in Anbetracht des Zeitraums der hier Gegenstand der Untersuchung ist, nicht immer möglich sein.¹¹ Da Dedekinds Arbeiten, die hier behandelt werden, der mengentheoretischen Topologie zugeordnet werden, liegt der Fokus der folgenden Ausführungen auf dieser.
2. **Entwicklungsstufen der mengentheoretischen Topologie:** Bei der Ausformung der Begriffe der mengentheoretischen Topologie sehen wir uns einer ähnlichen Problematik entgegen wie Ferreirós (1996) bei seiner Analyse der Entwicklung der Mengenlehre. Anfangs wurden die Merkmale von Häufungspunkten, offenen Mengen, abgeschlossenen Mengen und anderen topologischen Begriffen implizit verwendet, ohne sie als eigenständige Begriffe zu betrachten. Beispielsweise verwendet Weierstraß die Eigenschaften von Häufungspunkten, ohne den Begriff der Häufungspunkte zu definieren. In der Punktmengentheorie Cantors waren Häufungspunkte, benannt als Grenzpunkte, dagegen explizit definiert. Die Untersuchung der Begriffsbildung der mengentheoretischen Topologie muss diesen beiden Entwicklungsstufen der Begriffsbildung Rechnung tragen. In Anlehnung an die Systematik, die

¹⁰ Ähnliche Überlegungen finden sich lediglich bei Joyce (2005), wobei dort weder ein expliziter Vergleich mit den zuvor genannten Autoren vorgenommen wird, noch ein Bezug zu den Hüllenaxiomen erfolgt. Dennoch plädiert der Autor für die Zulässigkeit einer Interpretation im Sinne der Kettentopologie. Siehe <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/numbers/dedekind.pdf>, aufgerufen am 31.08.2025.

¹¹ James (2001) geht so weit, alles aus diesem Zeitraum was nicht der mengentheoretischen Topologie zuordenbar ist, unter die kombinatorische Topologie zu subsumieren. Siehe James (ebd.): S. 809. Kreyszig (1997) hingegen sieht keine strenge Zweiteilung der Disziplinen und verweist auf *hybride Theorie* wie die Dimensionstheorie. Siehe dazu Kreyszig (ebd.): S. 367.

Ferreirós (1996) für die Mengenlehre vorsah, unterscheiden wir auch für die mengentheoretische Topologie einige Entwicklungsstufen ihrer Begriffsbildung. Die Entwicklung der mengentheoretischen Topologie lässt sich in drei wesentliche Phasen unterteilen, die den Übergang von einer intuitiven Nutzung topologischer Konzepte hin zu einer systematischen, axiomatischen Theorie markieren:

- (a) **Implizite Verwendung topologischer Eigenschaften:** In der frühen Phase wurden topologische Begriffe nicht explizit definiert, sondern lediglich im Rahmen konkreter mathematischer Fragestellungen angewendet. Die Stetigkeit spielte in der Analysis eine zentrale Rolle, ohne dass eine allgemeine Definition topologischer Räume existierte. Der Begriff der Häufungspunkte wurde bereits in der frühen Analysis verwendet, insbesondere im Zusammenhang mit Reihenentwicklungen und der Untersuchung von Punktmengen. Mathematiker wie Bolzano und Cauchy untersuchten Häufungspunkte, um Konvergenzverhalten zu analysieren, ohne jedoch eine mengentheoretische oder topologische Definition dieses Begriffs zu formulieren. Dies markiert die erste Phase der Begriffsentwicklung topologischer Konzepte.
 - (b) **Topologiesprache:** Mit der fortschreitenden Formalisierung mathematischer Begriffe begann eine explizite Definition dieser Konzepte. Die Phase ist vorrangig mit Cantors Arbeiten zur Punktmengenlehre in den 1870er Jahren verbunden. Obwohl er zentrale Begriffe der Topologie definierte, führte er nicht alle heute als grundlegend betrachteten Konzepte explizit ein – etwa den Begriff der offenen Menge. Dennoch markieren seine Arbeiten einen wichtigen Schritt in Richtung einer eigenständigen topologischen Theorie, da erstmals eine klare Sprache zur Beschreibung topologischer Phänomene entwickelt wurde.
 - (c) **Topologie als axiomatisches System:** Die letzte Phase der Entwicklung begann mit einer systematischen, axiomatischen Behandlung topologischer Strukturen, wie sie erstmals in Felix Hausdorffs *Grundzüge der Mengenlehre* aus dem Jahr 1914 deutlich wurde. In diesem Werk führte Hausdorff den Begriff des topologischen Raums explizit ein und formulierte Axiome für die Struktur eines Raumes, wodurch sich die Topologie als eigenständiges mathematisches Gebiet von der Analysis und Geometrie löste. Diese axiomatische Vorgehensweise ermöglichte eine allgemeine Definition von Konvergenz, Stetigkeit und kompakten Mengen, die nun nicht mehr an euklidische Räume oder intuitive Vorstellungen gebunden waren. Diese Ansätze entfernten sich weiter vom Anschauungsraum und operierten regelmäßig in abstrakten Räumen.
3. **Die Rolle Dedekinds:** Eine besondere Herausforderung stellt die Untersuchung von Dedekinds Rolle bzw. die Zuordnung seiner Arbeiten den obigen drei Entwicklungsstufen dar. Wir werden hier die Auffassung vertreten, dass Dedekind mit seinen fragmentarischen Untersuchungen zu den *Allgemeinen Sätzen über Räume* der zweiten Stufe zuzuordnen ist, da er dort explizit topologische Begriffe wie die offene Menge definiert.¹² Was jedoch nicht ganz offenkundig ist, ist die Zuordnung seiner Kettentheorie in **WZ**. Wie wir feststellen werden, werden dort ebenfalls topologische Begriffe definiert. Dabei entfaltet seine Ketten-

¹²Er nutzt dafür den Begriff *Körper*, zu unterscheiden vom gleichnamigen Begriff in der Algebra.

theorie ein beträchtliches Maß an Abstraktheit und kommt den axiomatischen Ansätzen von Hausdorff (1914) und vor allem Kuratowski (1922) sehr nahe. Es gilt nun, die *implizite topologische Struktur der Kettentheorie* herauszuarbeiten und mit diesen Arbeiten in Vergleich zu setzen.

6.1 Topologische Transformationsgruppen

Die Topologie beschäftigt sich mit der Lage und Anordnung geometrischer Strukturen im Raum. Sie untersucht die Eigenschaften mathematischer Objekte, die unter kontinuierlichen Deformationen unverändert bleiben. Dies sind topologische Invarianten. Die ersten systematischen Untersuchungen dieser Invarianten fanden im weitesten Sinne auch in Dedekinds Umfeld statt. Besonders hervorzuheben sind die Arbeiten von Johann Benedict Listing. Listing war in Göttingen tätig und verwendete bereits 1836 in einem Brief den Begriff *Topologie* und publizierte einige Jahre später die *Vorstudien zur Topologie*.¹³ Er schreibt dort:¹⁴

„Bei öftern Gelegenheiten durch den größten Geometer der Gegenwart auf die Wichtigkeit des Gegenstandes aufmerksam geworden, habe ich mich seit längerer Zeit verschiedentlich in der Analysis einzelner hierher gehöriger Fälle versucht, zu denen die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen vielfache Veranlassung darbieten, und indem ich wage, schon jetzt, noch bevor diese Betrachtungen Anspruch auf streng wissenschaftliche Form und Methode machen können, Einiges davon als **Vorstudien zu einer neuen Wissenschaft** mitzutheilen, kann meine Absicht nur darauf gerichtet sein, in propädeutischen Rudimenten, Beispielen und Materialien auf die Möglichkeit und die Bedeutung dieser Wissenschaft aufmerksam zu machen. Es mag erlaubt sein, für diese Art Untersuchungen räumlicher Gebilde den Namen '**Topologie**' zu gebrauchen statt der von Leibniz vorgeschlagenen Benennung 'geometria situs', welche an den begriff des Maßes, der hier ganz untergeordnet ist, erinnert [...] Topologie soll die **Lehre von den modalen Verhältnissen räumlicher Gebilde** verstanden werden, oder von den Gesetzen des **Zusammenhangs**, der gegenseitigen **lage** und **Aufeinanderfolge** von Punkten, Linien, Flächen, Körpern und ihren Teilen oder ihren Aggregaten im Raume, **abgesehen von Maß- und Größenverhältnissen**.“ [Hervorhebungen E. B.]

Die Topologie wird als eigenständige Disziplin etabliert, die sich mit den strukturellen Eigenschaften räumlicher Gebilde befasst, ohne Maß- und Größenverhältnisse zu berücksichtigen. Ihr Ziel ist die Untersuchung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten des Zusammenhangs sowie der relativen Lage und Anordnung von Punkten, Linien, Flächen und Körpern. Der Fokus liegt dabei auf den fundamentalen Beziehungen zwischen diesen Objekten, die bei stetiger Deformationen erhalten bleiben.

Es existieren keine historischen Belege dafür, dass Dedekind sich mit dieser Vorstufe der algebraischen Topologie von Listing befasst hat. Es liegt zwar die Vermutung nahe, dass er die Physikvorlesungen Listings besucht hat. Die Inhalte der *Vorstudien* waren jedoch nicht Gegenstand dieser Vorlesungen. Es existieren weder im Nachlass noch in der Literatur Hinweise darauf, dass Listings Arbeiten einen signifikanten Einfluss auf Dedekind gehabt haben. Parallelen zu **WZ** sind, wie wir noch sehen werden, eher in der mengentheoretischen als der kombinatorischen Ausformung der Topologie zu finden.

Ausgehend von diesen Invarianten lässt sich die Topologie auch im Kontext der Auseinandersetzung mit Transformationsgruppen untersuchen. Die Untersuchung der Hintereinanderausfüh-

¹³Vgl. James (1999): S. 914

¹⁴Listing (1848): S. 5f; Hervorhebungen E. B.

rung und Umkehrung geometrischer Transformationen war anfangs kein expliziter Gegenstand der Mathematik. Dies änderte sich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Allen voran die 1827 publizierte Arbeit von Möbius zum *barycentrischen Calcul* setzte sich explizit mit derartigen Transformationen auseinander. Möbius untersuchte projektive und affine Abbildungen und konnte zeigen, dass durch die Fixierung der uneigentlichen Gerade projektive Abbildungen zu Affinitäten werden, Ähnlichkeiten Spezialfälle dieser Affinitäten sind und schlussendlich die *Identität* ein Spezialfall der Ähnlichkeit ist. Durch Bestimmung und Fixierung der Freiheitsgrade konnte Möbius somit eine erste Systematisierung geometrischer Transformationen darlegen.¹⁵

Solche Untersuchungen waren der Anfang der Entwicklung eines systematischen Bildes zur Geometrie. Die Entwicklung nichteuklidischer Geometrien sowie die analytischen und synthetischen Spielarten der projektiven Geometrie rückten die Frage der Systematisierung zunehmend in den Vordergrund. Welche Beziehung besteht zwischen diesen Geometrien und wie kann man sie in ein einheitliches Theoriegebäude integrieren? Im 19. Jahrhundert war es erforderlich, eine Antwort auf diese Frage zu finden.

Ein entscheidender Schritt zur Lösung des Problems gelang Klein im Jahr 1871, indem er einen Zusammenhang zwischen der projektiven Metrik von Cayley (1859) und der hyperbolischen Geometrie herstellte.¹⁶ Obwohl die hyperbolische Geometrie in den Arbeiten von Bolyai und Lobatschewski eine verständliche und durchdachte Einführung erfuhr, war ihr metamathematischer Gehalt keineswegs geklärt. Da sie als kontraintuitiv angesehen wurde, lag der Schluss nahe, dass sie nicht konsistent sei und in ihr somit widersprüchliche Sätze ableitbar wären. Für die weitere Entwicklung und Akzeptanz der hyperbolischen Geometrie war es daher unerlässlich, einen Konsistenzbeweis dieser zu liefern.

Allgemein gesprochen besteht ein Konsistenzbeweis eines (axiomatischen) Systems in der Angabe eines Modells, in dem die Sätze des Systems als wahre Aussagen interpretiert werden können. Ein absoluter Konsistenzbeweis hat die Realität selbst als Modell, während ein relativer ein anderes System zu diesem Zweck heranzieht. Beltrami hat durch seine zwei Aufsätze *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* aus dem Jahr 1868 (kurz *Saggio*) sowie *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* ebenfalls aus dem Jahr 1868 (kurz *Theoria*) eben dies geleistet.¹⁷ Diese Interpretation seines Beitrags erfreut sich zwar großer Verbreitung, lässt jedoch eine fundierte historische Beleglage vermissen.¹⁸

Beltrami strebte nicht nach einem Konsistenzbeweis im modernen Sinne, sondern vielmehr danach, ein *reales Substrat* für die hyperbolische Geometrie zu identifizieren. Er zeigte im *Saggio* zwei Dinge:

1. Die Pseudosphäre (ein dreidimensionales euklidisches Gebilde, siehe Abbildung 6.2) ist ein Modell für **einen Teil** der reellen hyperbolischen Ebene. Sie entsteht durch Rotation der Traktrix um die entsprechende Achse. Im Fall der y -Achse ist dies in Abbildung 6.1 dargestellt. Die Traktrix ist eine spezielle Verfolgungskurve. Die Tangentensegmente dieser Kurve zwischen dem Tangentialpunkt und der y -Achse sind bei ihr konstant. Rotiert man

¹⁵Vgl. Scriba und Schreiber (2004): S. 442

¹⁶Vgl. Klein (1871)

¹⁷Keiner dieser Aufsätze ist bisher ins Deutsche übersetzt worden. Wir beziehen uns daher in den folgenden Ausführungen auf die in Stillwell (1996) zu findenden englischen Übersetzungen.

¹⁸Vgl. hierzu etwa Gray (2010): S. 2115ff

die Traktrix um die y -Achse erhält man die Pseudosphäre. Die Krümmung der Pseudosphäre ist abhängig von der gewählten Strecke r .

2. Die Kreisscheiben in der euklidischen Ebene ist ein Modell für die **gesamte** reelle hyperbolische Ebene. Siehe dazu Abbildung 6.3.

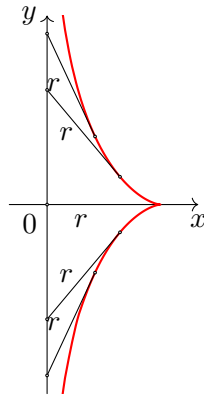


Abbildung 6.1: Traktrix

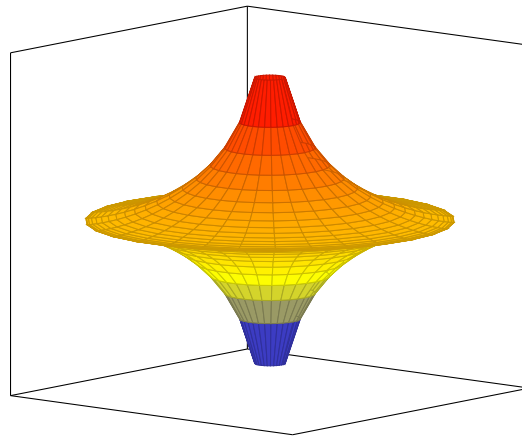


Abbildung 6.2: Pseudosphäre

Beltramis Untersuchungen kreisen um Flächen mit konstanter Krümmung. Genauer gesagt untersucht er Flächen mit konstanter negativer Krümmung, die er *pseudosphärisch* nennt.¹⁹ Derartige Flächen waren zu dieser Zeit bereits ausreichend bekannt und wurden vor allem vom Gaußschüler Minding in den 1840er Jahren untersucht. Greenberg (2007) weist darauf hin, dass sowohl Minding in den Jahren 1839 und 1840 als auch Codazzi im Jahr 1857 bereits einige Untersuchungen zu der Trigonometrie auf derartigen Flächen publiziert hatten. Was diesen Autoren jedoch nicht aufgefallen ist, ist der Zusammenhang dieser Ergebnisse mit der hyperbolischen Geometrie. Dies war der wesentliche Beitrag Beltramis. Um diesen Zusammenhang aufzuzeigen, nutzte er die bereits publizierten differentialgeometrischen Arbeiten von Riemann.²⁰

Doch wieso gerade Flächen mit konstanter negativer Krümmung? Die Antwort auf diese Frage gibt das *Resoluzione* und der dortige Beweis, dass derartige Flächen hinsichtlich der entsprechenden Projektion aus dem Koordinatenanfang die geodätischen Linien in Geraden abbilden. Sein Ansatz bestand darin, die übliche differentielle Metrik der Projektion einer Sphäre auf eine Ebene heranzuziehen und diese dahingehend abzuändern, sodass die Projektion lediglich im Inneren einer Kreisscheibe (oder genauer im Inneren des Grenzkreises) definiert ist. Diese Kreisscheibe hatte, obwohl eine endliche euklidische Ausdehnung, durch den Grenzkreis einen unendlichen Charakter. In ihrem Inneren galt das euklidische Parallelenspostulat nicht. Was jedoch weiterhin Gültigkeit hatte, waren die trigonometrischen Formeln, die bereits Lobatschewski in seiner *Theorie der Parallellinien* gezeigt hatte.

Beltrami gelang es somit, auf einem Teil der euklidischen Ebene (der Kreisscheibe) eine konsistente Interpretation der reellen hyperbolischen Ebene zu liefern. Heute würden wir sagen,

¹⁹Wir bemerken, dass eine pseudosphärische Fläche nicht unbedingt eine Pseudosphäre sein muss, eine Pseudosphäre ist jedoch stets pseudosphärisch.

²⁰Vgl. Greenberg (2007): S. 295ff

dass er damit einen *relativen Konsistenzbeweis* der hyperbolischen Geometrie vorlegte.²¹

Der Erfolg der projektiven Methode bei der Interpretation der hyperbolischen Geometrie legte die Vermutung nahe, dass man in der projektiven Geometrie ein Mittel gefunden hatte, das eine Systematisierung der verschiedenen Geometrien ermöglichte.

Der nächste Schritt bestand nun darin, ein gemeinsames *Maß* zu definieren. Das Ziel bestand darin, eine Metrik²² im Beltrami-Modell zu formulieren. Diese Leistung geht auf Klein (1871) zurück und basiert auf einer Untersuchung von Cayley (1859). Betrachten wir das Beltrami-Modell in Abbildung 6.3. Wir bestimmen dort zwei Punkte P und Q . Die Gerade durch diese Punkte schneidet den Kreis in den Punkten T und S .

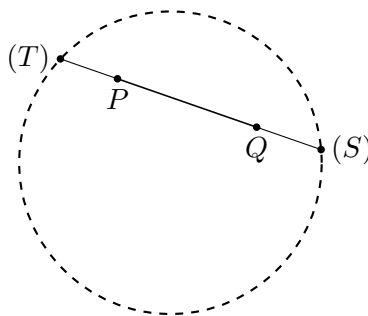


Abbildung 6.3: Beltrami-disk

Die zu definierende Metrik sollte ein Maß für die Strecke PQ ermöglichen. Im Unterschied zur euklidischen Ebene ist die Entfernung zwischen den Punkten P und T sowie Q und S jedoch unendlich. Dies muss bei der Definition der Metrik berücksichtigt werden. Die *Strecke* TS repräsentiert die **gesamte** Gerade und eine adäquate Metrik müsste diesem Umstand Rechnung tragen. Als Ausgangspunkt sollte daher eine Funktion gewählt werden, die endliche Strecken auf die gesamte Menge der reellen Zahlen abbildet. Klein (1871) gelang die Definition einer derartigen Funktion, womit ein Zusammenhang zwischen den Geometrien hergestellt wurde.

Im Jahr 1872 präsentierte er seine Erkenntnisse im Rahmen seines Programms zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexander-Universität in Erlangen. Der Titel seines Vortrages lautete *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*.²³ Für Klein war es bemerkenswert, dass man gerade über die projektive Geometrie, die sich einer Erfassung durch die euklidische Metrik entzieht, eine (zumindest ansatzweise) allgemeine Methode erhält, den verschiedenen nichteuklidischen Geometrien ein Maß zugrunde zu

²¹Für eine historische Einordnung der Bestrebungen und Ergebnisse der Arbeiten Beltramis siehe beispielsweise Gray (2010): S. 228.

²²Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt Metrik auf X , falls folgende Bedingungen gelten:

(M1): Definitheit: $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2): Symmetrie: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$

(M3): Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Die Metrik in einem n -dimensionalen euklidischen Raum wird durch die euklidische Norm induziert und kann ausgedrückt werden als:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Siehe dazu beispielsweise Arens (2013): S. 760

²³Vgl. Klein (1872)

legen. Klein (1872) schreibt in diesem Zusammenhang:²⁴

*„Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der projektivischen Geometrie die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projizieren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projektivischen Standpunkte aufzufassen, so daß nun **die projektivische Methode die gesamte Geometrie umspannt**. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise “* [Hervorhebungen E.B.]

Die projektive Methode hat zwar einen einheitlichen Zusammenhang für gewisse Geometrien gebildet, ihr eigener Zusammenhang zu anderen Ansätzen (wie beispielsweise der Geometrie der reziproken Radien und der Geometrie der rationalen Umformungen) blieb jedoch weiterhin unklar. Um der gesamthaften Entwicklung der Geometrie eine Systematik zu verleihen, müssen diese Zusammenhänge ebenso geklärt werden.²⁵ Diesem Ziel stellt sich das Erlanger Programm von Klein. Die grundlegende Idee bestand darin, eine Geometrie mit einem Raum (einer Menge) und einer Transformationsgruppe auf ihr zu identifizieren. Diese Transformationsgruppen lassen bestimmte *relevante* Eigenschaften invariant.²⁶

Den Gedanken der räumlichen Transformationen entwickelt Klein nun in §1 seines Vortrages. Die zentrale Bedeutung kommt dabei dem Begriff der Gruppe und darauf aufbauend der Transformationsgruppe zu:²⁷

„Beliebig viele Transformationen eines Raumes ergeben gesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, daß jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine Transformationsgruppe genannt werden.“

Einige dieser Transformationen lassen die *geometrischen Eigenschaften* der räumlichen Gebilde unverändert. Alle diese Transformationen nennt Klein **Hauptgruppe räumlicher Änderungen**. Die geometrischen Eigenschaften werden somit durch die Transformationen der Hauptgruppe unverändert gelassen. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über einige wesentliche Transformationen und die damit zusammenhängenden Invarianten:

Gruppe	Lage	Richtung	Orientierung	Abstand	Winkel	Parallelität	Kollinearität
Identität	•	•	•	•	•	•	•
Translationen		•	•	•	•	•	•
Bewegungen			•	•	•	•	•
Isometrien				•	•	•	•
Ähnlichkeitsabbildungen					•	•	•
Affinitäten						•	•
Projektionen							•

Tabelle 6.1: Die Invarianten der wichtigsten Untergruppen der projektiven Gruppe

²⁴Klein (ebd.): S. 460; Hervorhebungen E.B.

²⁵Vgl. Klein (ebd.): S. 461

²⁶Vgl. Schiemer (2020): S. 188

²⁷Klein (1872): S. 462

Dies führt zu einer grundlegenden Veränderung der Sicht auf die Geometrie. Die zentralen Merkmale einer Geometrie sind jene Eigenschaften, die durch bestimmte Transformationen unverändert bleiben. Diese geometrischen Eigenschaften sind hinsichtlich der Transformationen der Hauptgruppe invariant.

Unter der Bedingung eines gewissen Verlustes der Anschaulichkeit kann man diese Überlegungen auch auf beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten ausweiten. Für Klein ergibt sich daraus eine umfassende Fragestellung:²⁸

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Gruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Formationen der Gruppe nicht geändert werden.“

oder noch prägnanter:²⁹

„Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie“

Die Invariantentheorie einer bestimmten Gruppe untersucht für Klein jene Beziehungen von Gebilden, die unter ebendieser Gruppe unverändert bleiben. Seine Untersuchungen zum Beltrami Modell beinhalten jedoch schon implizit den Grundgedanken einer *einschränkenden Betrachtungsweise* innerhalb einer Mannigfaltigkeit und ihrer Hauptgruppe. Dies impliziert den Begriff der Untergruppe:³⁰

„Dann ist es ein selbstverständliches Prinzip, daß die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B ergibt, d. h. jede Eigenschaft, welche ein in A enthaltenes Gebilde mit Bezug auf die Gruppe B hat, ergibt eine Eigenschaft des sprechenden Gebildes in A mit Bezug auf die Gruppe B.“

Klein drückt damit aus, dass die Eigenschaften der Hauptgruppe naturgemäß auch innerhalb der Untergruppen ihre Geltung behalten.

Betrachtet man nun die Topologie, so drängt sich die Transformationsgruppe in Bezug auf die Stetigkeit auf. Bereits Möbius untersucht in seinem *barycentrischen Calcul* Abbildung, die in diesem Zusammenhang gesehen werden können.³¹ Auch Klein (1872) widmet der *Analysis situs* einen eigenen Absatz und ging auf den Zusammenhang mit Transformationsgruppen näher ein.³² Er betonte dabei die Bedeutung von Invarianten unter Homöomorphismen. Später griff Adolf Hurwitz dieses Konzept in einem Vortrag auf dem ersten internationalen Mathematikerkongress in Zürich auf und formulierte die zentrale Aufgabe dieser Disziplin: die Identifikation von Invarianten, die unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Dabei betrachtete er spezifische, eindeutig definierte Abbildungen geschlossener Mengen, wobei er den Begriff für diese Abbildungen nicht explizit benannte. Hurwitz erläuterte weiter, dass homöomorphe Punktmengen jeweils eine Klasse gleichwertiger Punktmengen bilden. In diesem Zusammenhang stellte er fest, dass die Klassifizierung von Punktmengen eine fundamentale Grundlage der Analysis Situs darstellt. Die zentrale Aufgabe dieser Theorie bestehe darin, die Invarianten zu bestimmen, die innerhalb jeder

²⁸Klein (1872): S. 463

²⁹Klein (ebd.): S. 464

³⁰Klein (ebd.): S. 464

³¹Vgl. Scriba und Schreiber (2004): S. 443

³²Vgl. Klein (1872): S. 482

dieser Klassen erhalten bleiben.³³ Im Wesentlichen reformulierte Hurwitz Kleins Erlanger Programm für die Topologie, indem die Hauptaufgabe der Punktmengentheorie nun das Auffinden topologischer Invarianten war.³⁴

6.2 Die Theorie der Punktmengen

Die Ursprünge der mengentheoretischen Topologie können auf die Punktmengentheorie Cantors zurückverfolgt werden. Die Entwicklung dieser Theorie ist untrennbar mit den Forschungen zur Eindeutigkeit von Fourier-Reihen verbunden, die im 19. Jahrhundert eine zentrale Rolle in der Analysis gespielt haben. Im Jahr 1822 legte Fourier in „*Théorie analytique de la chaleur*“ die Grundlage für die Fourier-Reihen und zeigte, dass jede periodische Funktion durch eine unendliche trigonometrische Reihe dargestellt werden kann:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Eine Vielzahl von Untersuchungen und Publikationen, darunter die von Dirichlet, Riemann und Weierstraß, befasste sich mit der Konvergenz und dem Verhalten solcher Reihen. Aufbauend auf Riemanns Habilitationsschrift, die auch seine Ausführungen zum Integralbegriff enthielt, wurde das Thema von Eduard Heine, einem Schüler von Dirichlet und engem Mitarbeiter von Weierstraß, ebenfalls aufgegriffen. Er sah sich mit der fundamentalen Problematik konfrontiert, ob die eindeutige Bestimmbarkeit einer Fourier-Reihe unter gegebenen Voraussetzungen gewährleistet werden kann.

Bereits im Jahr 1870 formulierte Heine in seiner Arbeit „*Untersuchungen über die Grundlagen der Functionenlehre*“ 1870 ein erstes Eindeutigkeitskriterium, das sich mit der Struktur der Punktmengen befasste, auf denen eine Fourier-Reihe null ist. Er erkannte, dass nicht nur die Anzahl der Punkte in einer Punktmenge eine Rolle spielt, sondern vor allem deren innere Struktur entscheidend ist. In seiner Arbeit schrieb Heine:³⁵

„Soll eine trigonometrische Reihe (a.) von $-\pi$ bis π im allgemeinen in gleichem Grade convergiren und im allgemeinen Null vorstellen, wobei nicht vorausgesetzt wird, dass sie da, wo sie nicht verschwindet, einen endlichen Werth behält, so müssen alle Coefficienten α und β verschwinden und die Reihe stellt daher überall Null vor. [...] **Im allgemeinen, d. h. mit Ausnahme der Umgebung gewisser Punkte**, in gleichem Grade convergent von α bis β nenne ich eine Reihe, welche das Critérium der gleichmässigen Convergenz auf der ganzen Linie von α bis β erfüllt, nachdem man aus derselben vorher beliebig kleine Stücke ausgeschieden hat, welche die erwähnten Punkte einschliessen. Ob die Reihe in den kritischen Punkten selbst convergirt oder divergirt, ist hierbei durchaus unerheblich; es convergiren z. B. die Fourierschen Reihen für die endlichen Functionen mit endlichen Sprüngen auch an den Sprungstellen, und sie sind dennoch möglich in gleichem Grade convergent.“ [Hervorhebungen E.B.]

Heine argumentierte, dass die Struktur der Menge, auf der eine Fourier-Reihe null ist, von wesentlicher Bedeutung für ihre Eindeutigkeit ist. Er erkannte, dass die Eindeutigkeit einer Fourier-Reihe von der Art und Weise abhängt, wie die Punkte einer Menge angeordnet sind. Heine selbst

³³Vgl. Eppe et al. (2002): S. 682

³⁴Vgl. Crilly (1999): S. 11

³⁵Heine (1869): S. 355f; Hervorhebungen E.B.

ging nicht so weit, eine allgemeine Theorie der Punktmengen zu entwickeln, aber seine Erkenntnisse schufen die Grundlage für die Arbeiten von Cantor.

Georg Cantor begann seine Forschung zur Eindeutigkeit von Fourier-Reihen in den frühen 1870er Jahren. Auch er war von der Frage geleitet, wie sich die Struktur von Punktmengen auf das Verhalten von Fourier-Reihen auswirkt. Er stellte fest, dass eine trigonometrische Reihe, die auf einer perfekten und überabzählbaren Menge verschwindet, notwendigerweise überall null sein muss. Die Elemente der Mengen, die Cantor untersuchte, waren Punkte, weshalb er sie *Punktmengen*³⁶ nannte.³⁷

„Nach dem Vorhergehenden können die Zahlengrößen den Punkten einer Geraden zugeordnet gedacht werden. Der Anschaulichkeit wegen, (nicht dass es wesentlich zur Sache gehörte) bedienen wir uns dieser Vorstellung im Folgenden und haben, wenn wir von Punkten sprechen, stete Werthe im Auge, durch welche sie gegeben sind. Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen nenne ich der Kürze halber eine Werthmenge und dem entsprechende eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine **Punktmenge**. Was im Folgenden von Punktmengen gesprochen wird, lässt sich dem Gesagten gemäss unmittelbar auf Werthmengen übertragen.“ [Hervorhebungen E.B.]

Um die topologischen Eigenschaften dieser Punktmengen untersuchen zu können, benötigt Cantor den Begriff des Häufungspunktes, den er 1872 *Grenzpunkt* nannte:³⁸

„Unter einem **Grenzpunkt** einer Punktmenge P verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, dass in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, dass er ausserdem selbst zu der Menge gehört. Unter Umgebung eines Punktes sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt in seinem Innern hat. Darnach ist es leicht zu beweisen, dass eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende Menge stets zum Wenigsten einen Grenzpunkt hat.“ [Hervorhebungen E.B.]

Dies war das erste Mal, dass der Begriff des Häufungspunktes einer Menge definiert und publiziert wurde. G. H. Moore (2008) hebt jedoch hervor, dass bereits Weierstraß in seinen Vorlesungen zu den *Prinzipien der Theorie der analytischen Funktionen* den Grundgedanken eines Häufungspunktes in der Formulierung des heute als Bolzano-Weierstraß-Satz bekannten Theorems verwendet hat. Dies kann bereits in einer Mitschrift von Moritz Pasch aus dem Jahr 1865 belegt werden.³⁹ Weierstraß umschreibt jedoch die Eigenschaften der Häufungspunkte, ohne für sie einen eigenen Begriff einzuführen.⁴⁰ Daran ändert sich in den kommenden Jahren wenig, wie eine Mitschrift derselben Vorlesung aus dem Jahr 1874 von Georg Hettner bezeugt. Dort spricht Weierstraß zwar bereits von *Stellen*, erachtet es jedoch weiterhin nicht für notwendig, dafür einen eigenen Begriff einzuführen.⁴¹ Für Cantor hingegen war dies ein zentraler Begriff seiner neuen Theorie der Punktmengen. Er diente ihm als Grundlage für die Definition der Ableitung einer Menge als Menge aller Häufungspunkte.⁴² Für gewisse Mengen konnten die

³⁶Punktmengen waren ebenfalls Gegenstand von Untersuchungen von Du Bois-Reymond (1882). Siehe dazu Seite 187f.

³⁷Cantor (1872): S. 128; Hervorhebungen E.B.

³⁸Cantor (ebd.): S. 129; Hervorhebungen E.B.

³⁹Vgl. G. H. Moore (2008): S. 221f.

⁴⁰Er hatte allerdings einen Begriff für eine offene zusammenhängende Menge der Ebene, die er Gebiet nannte. Deshalb grenzt sich auch Hausdorff (1914) von seiner Begriffsdefinition ab, da er Gebiet allgemein als offene Menge definiert. Siehe dazu Hausdorff (ebd.): S. 215 sowie Eppe et al. (2002): S. 720f.

⁴¹Vgl. G. H. Moore (2008): S. 222

⁴²Vgl. Cantor (1872): S. 129

Ableitung als Operation verstanden und beliebig oft durchgeführt werden. Für Cantor war dies ein Instrumentarium zur Analyse der transfiniten Mengenlehre.

Diese Begrifflichkeiten ermöglichten auch die Analyse von pathologischen Mengen, die kontraintuitive Eigenschaften aufwiesen. Eine solche Menge ist die Cantor-Menge, die Cantor 1883 in der fünften Fortsetzung seines Aufsatzes „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ erwähnte:⁴³

„Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel:

$$z = c_1/3 + c_2/3^2 + \cdots + c_v/3^v + \cdots$$

enthalten sind, wo die Koeffizienten c_v nach Belieben die beiden Werte 0 und 1 anzunehmen haben und die Reihe sowohl aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.“

Die Cantor-Menge $C \subset [0, 1]$ ist die Menge aller reellen Zahlen in $[0, 1]$, deren Darstellung zur Basis 3 ausschließlich die Ziffern 0 und 2 enthält. Diese Menge kann durch eine iterative Entfernung von offenen Intervallen in $[0, 1]$ konstruiert werden. Ausgangspunkt ist das Intervall $C_0 = [0, 1]$. In jedem Schritt wird nun das offene mittlere Drittel aus jedem verbleibenden Intervall entfernt (siehe Abbildung 6.4). Schlussendlich ist die Cantor-Menge der Durchschnitt aller Iterationen:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Diese Konstruktion führt dazu, dass die Cantor-Menge eine überabzählbare Menge ist, obwohl die Summe der Längen der verbleibenden Intervalle im Grenzwert gegen null konvergiert.⁴⁴ Dies illustriert die kontraintuitive Eigenschaft, dass eine unendliche Menge ein Maß von null besitzen kann.



Abbildung 6.4: Erste vier Iterationen der Cantor-Konstruktion

Topologisch gesehen ist diese Menge *perfekt*, das heißt, sie enthält keine isolierten Punkte, sondern besteht ausschließlich aus Häufungspunkten. Gleichzeitig ist sie total unzusammenhängend, da sie keine zusammenhängenden Teilmengen mit mehr als einem Punkt enthält.

Cantor konnte nun zeigen, dass eine trigonometrische Reihe, die auf der Cantor-Menge null ist, auch tatsächlich überall null sein muss. Dies war eine wichtige Erkenntnis, weil es die Theorie der Fourier-Reihen auf eine neue, tiefere Ebene hob, indem es zeigte, dass die Struktur der Menge, auf der die Reihe null ist, ausschlaggebend für deren Eindeutigkeit ist.

Neben dem Begriff des Häufungspunktes definierte Cantor auch den Begriff der abgeschlossenen Menge ein. Eine abgeschlossene Menge war eine Menge, die sämtliche ihrer Häufungspunkte

⁴³Cantor (1883): S. 590

⁴⁴Dieses Verfahren geht auf Du Bois-Reymond (1882) zurück. Siehe dazu Du Bois-Reymond (ebd.): S. 188.

enthielt. Er führte eine erste Analyse derartiger Mengen durch und konnte einige ihrer Eigenschaften beweisen. So konnte er zeigen, dass eine abgeschlossene Menge stets die Ableitung einer anderen Menge ist sowie die Stabilität abgeschlossener Mengen unter der Vereinigung.

Bemerkenswerterweise führte Cantor den Begriff der offenen Menge nicht ein. Stattdessen sprach er lediglich von inneren Punkten einer Punktmenge.

Die erste Verwendung des Begriffs der offenen Menge im Rahmen einer Publikation erfolgte erst Jahrzehnte später im Rahmen seiner Dissertation „*Sur les fonctions de variables réelles*“ von René Baire im Jahr 1899.⁴⁵

6.3 Die Axiomatisierung topologischer Räume

Nach den ersten Begriffsbildungen führte der nächste Schritt in der Entwicklung der mengentheoretischen Topologie zur Ablösung euklidischer Räume durch abstrakte Räume. Im Zuge dessen wurde der Begriff der Punktmengen erweitert. Riemann führte 1854 das Konzept der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ein und wies auf die Möglichkeit hin, höherdimensionale Mannigfaltigkeiten sowie Funktionsräume zu untersuchen.⁴⁶ Bereits um 1900 erschienen Arbeiten, die die Existenz natürlicher topologischer Strukturen außerhalb der cantorschen Punktmengen in $\mathbb{R}^n$ untersuchten. Zum Zweck der Vereinheitlichung topologischer Phänomene unternahmen diese den Versuch, den Raumbegriff axiomatisch zu fassen.⁴⁷ Dieses übergeordnete Verständnis topologischer Zusammenhänge war jedoch nur auf Kosten der Anschaulichkeit des Raumbegriffs möglich. Der Vorteil bestand hingegen in einer hohen Allgemeinheit der Ergebnisse. Bereits in einer Studie aus dem Jahr 1905 beschreibt Fréchet diesen Vorteil folgendermaßen:⁴⁸

„Just as, in mechanics, a preparatory theory of vectors allows us to avoid repeating the same proofs for forces, for moments, and for velocities, etc.—in just this way it would be advantageous to separate out from the theories of sets of points, of functions, of curves, etc., and the real-valued functions defined on them, those properties which are shared by these theories.“

Fréchet bezog sich in diesem Zitat auf seine, ein Jahr zuvor eingeführten, $\mathcal{L}$ –Räume.⁴⁹ Er führte diese Räume ein, mit dem Ziel, den Bolzano-Weierstraß-Satz zu verallgemeinern.⁵⁰ Sie basierten auf einer grundlegenden Idee der Folgenkonvergenz. Der $\mathcal{L}$ –Raum war eine Menge X samt einer Funktion $F : S \rightarrow X$, wobei S die Menge unendlicher Folgen der Elemente von X darstellt. Für jedes S war $F(s)$ der Grenzwert der Folge s . Der Begriff der Folgenkonvergenz basierte dabei auf zwei Axiomen:⁵¹

(i) Für eine konstante Folge s mit dem Wert a , ist der Grenzwert der Folge s auch a .

(ii) Falls b der Grenzwert der Folge s ist, so ist b der Grenzwerte jeder Teilfolge von s .

⁴⁵Vgl. Baire (1899): S.

⁴⁶Riemann bezog sich zwar auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten, eröffnete jedoch den Weg zur Erforschung abstrakter Räume im Allgemeinen.

⁴⁷Vgl. Herrlich (1986): S. 175

⁴⁸Fréchet (1905): S. 27; zitiert in der Übersetzung von G. H. Moore (2008): S. 230

⁴⁹Vgl. G. H. Moore (ebd.): S. 230

⁵⁰Dieser besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

⁵¹Vgl. G. H. Moore (ebd.): S. 229

Dieser Ansatz hatte jedoch auch Schwächen. Wenn man mit $\bar{A}$ den Abschluss der Menge A bezeichnet, somit die Vereinigung von A und der Menge der Häufungspunkte der Folgen in A , ist $\bar{A}$ selbst hinsichtlich der Folgenkonvergenz nicht notwendigerweise abgeschlossen. Es kann eine Folge s geben, die in $\bar{A}$ liegt und gegen einen Punkt a konvergiert, der jedoch nicht in $\bar{A}$ enthalten ist. Dies widerspricht der üblichen Vorstellung von einem Abschluss, insbesondere in Räumen, in denen die topologische Abschlussbildung mit dem Abschluss bezüglich der Folgenkonvergenz übereinstimmt. Dies war in metrischen Räumen der Fall. Dies zeigte eine Diskrepanz zwischen der klassischen Konvergenztheorie in metrischen Räumen und der allgemeinen Topologie in nicht-metrisierbaren Räumen.

In seiner 1906 publizierten Dissertation beschäftigte sich Fréchet weiterhin mit den $\mathcal{L}$ -Räumen, führte aber zudem auch den Begriff des metrischen Raumes ein. Diesen benannte er zunächst *classe* (E) und später dann *classe* (D). Die Buchstaben in den Klammern standen für die französischen Bezeichnungen für Entfernung und Distanz.⁵² Die Verwendung des Namens „*metrische Räume*“ erfolgte erst durch Hausdorff (1914).⁵³ Fréchet zeigt dort, dass jeder metrische Raum ein $\mathcal{L}$ -Raum ist, dies jedoch umgekehrt nicht gilt. Die Ableitung einer Menge im metrischen Raum ist abgeschlossen, was in einem $\mathcal{L}$ -Raum nicht notwendigerweise der Fall sein muss. Obwohl er die cantorschen topologischen Begriffe Häufungspunkt, abgeschlossene und perfekte Menge definiert und verwendet, suchen wir auch bei ihm vergeblich nach dem Begriff der offenen Menge.⁵⁴

Einen anderen Ansatz der Axiomatisierung topologischer Räume begegnet uns bei Frigyes Riesz.⁵⁵ In seiner im selben Jahr publizierten Arbeit „*Die Genesis des Raumbegriffs*“ versucht er eine Axiomatisierung mittels des Begriffs der Häufungspunkte, für die er den Begriff der *Verdichtungsstellen* benutzt. Zwei Jahre später griff er, im Rahmen eines Vortrags in Rom, dieses Thema erneut auf und versuchte eine Definition des Raumes durch die Axiomatisierung des Begriffs der benachbarten Mengen, die er *Verkettungen* bezeichnete. Die dort definierten *idealen Verdichtungsstellen* versteht er als „*gemeinsame Verdichtungsstelle sämtlicher Mengen des definierenden Systems*“.⁵⁶

Während offene Mengen durch Baire im Kontext des n -dimensionalen euklidischen Raumes bereits eingeführt waren, wurde dieser Begriff im Kontext abstrakter Räume weder durch Fréchet noch Riesz, sondern Jahre später durch Hausdorff eingeführt. In seiner 1914 publizierten Abhandlung *Grundzüge der Mengenlehre* legte er zudem erstmals eine zufriedenstellende Definition topologischer Räume vor. Diese Definition war zwar axiomatisch, unterscheidet sich jedoch von den heute gängigen Axiomen eines topologischen Raumes, da sie nicht die offene Menge, sondern den Begriff der Umgebung als Ausgang nahm. G. H. Moore (2008) bezeichnet den Raum der *Grundzüge* deshalb als *Umgebungsraum*.⁵⁷ Unter einem topologischen Raum versteht Hausdorff

⁵²Vgl. Gähler (1994): S. 174

⁵³Vgl. Herrlich (1986): S. 176

⁵⁴Vgl. G. H. Moore (2008): S. 230

⁵⁵Riesz' Vorname war Frigyes, aber gemäß der in Europa damals üblichen Praxis nannte er sich je nach Sprache Frigyes, Friedrich oder Frédéric, je nachdem, ob er auf Ungarisch, Deutsch oder Französisch schrieb. In dieser Arbeit verwende ich stets die Namensformen der Mathematiker, die sie selbst in den zitierten Werken benutzt haben. Vergleiche dazu auch Folland (2010): S. 664.

⁵⁶Riesz (1908): S. 23

⁵⁷Jahre zuvor veröffentlichte David Hilbert eine kurze Mitteilung in den Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, in der er einen neuen Ansatz zur Fundierung der klassischen Geometrien präsentierte. Dabei betrachtete er sowohl die euklidische als auch die nichteuklidische Geometrie und führte topologische Axiome ein, um diese Systeme auf eine einheitlichere und strengere Grundlage zu stellen.

eine Menge E , deren Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden Umgebungsaxiome:

- (A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x und jede Umgebung U_x enthält den Punkt x .
- (B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x , so gibt es eine Umgebung W_x mit $W_x \subseteq U_x \cap V_x$.
- (C) Liegt der Punkt y in U_x , so gibt es eine Umgebung U_y , die Teilmenge von U_x ist ($U_y \subseteq U_x$).
- (D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x und U_y ohne gemeinsamen Punkt ($U_x \cap U_y = \emptyset$).

Im Anschluss an die Umgebungsaxiome beweist Hausdorff, dass metrische Räume spezielle topologische Räume sind, indem er zeigt, dass sie diese erfüllen. Sämtliche topologischen Begrifflichkeiten werden direkt im Anschluss formuliert. Offene Menge, bezeichnet als *Gebiete*⁵⁸, werden ebenfalls explizit definiert:

„Ist jetzt A eine Punktmenge, d. h. eine Teilmenge von E , so nennen wir einen Punkt x einen inneren Punkt von A , wenn es eine zu A gehörige Umgebung U_x , gibt. Auf Grund des Umgebungsaxioms (A) gehört dann x selbst zu A . Ein Punkt von A , der kein innerer Punkt ist, heißt ein Randpunkt von A . Die Menge A_i der inneren Punkte von A wird auch das Innere von A , die Menge A_r der Randpunkte der Rand von A genannt, und es gilt die Zerlegung in Inneres und Rand

$$A = A_i + A_r$$

[...] Eine Menge ohne Endpunkte, deren sämtliche Punkte also innere Punkte sind, nennen wir ein Gebiet. Ein Gebiet A ist also durch $A = 0$ oder $A_i = A$ definiert. Umgekehrt heiße eine Menge ohne innere Punkte eine Randmenge ($A_i = 0, A_r = A$). Die Nullmenge rechnen wir sowohl zu den Gebieten wie zu den Randmengen ($A_i = A_r = A = 0$).“

Hausdorff zeigt für diese Mengen eine wesentliche Eigenschaft, die später für topologische Räume grundlegend werden sollte und die wir auch in Dedekinds Kettentheorie erneut begegnen

In diesem Kontext definierte Hilbert die Ebene nicht mehr nur im traditionellen Sinne, sondern als eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Diese Definition betonte die strukturellen Eigenschaften der Geometrie und hob insbesondere die Rolle topologischer Eigenschaften in der mathematischen Fundierung hervor. Vergleiche dazu Eppe et al. (2002): S. 708. Ein Jahr später wurde der Aufsatz in den Anhang IV der Grundlagen der Geometrie aufgenommen und mit folgendem Kommentar versehenen (Hilbert (1922): S. 181):

„Auch bieten sie [die Forderungen – E.B.] die Grundlage für eine strenge axiomatische Behandlung der Analysis situs.“

Deswegen schreibt auch Bourbaki (1998) in Bezug auf Hausdorff (Bourbaki (ebd.): S. 143):

„With Hausdorff [...] general topology as it is understood today starts. Taking up again the notion of neighbourhood, he knew how to choose, among the axioms of Hilbert on neighbourhoods in the plane, those that could give to his theory at the same time all the precision and the generality that were desirable. The chapter where he develops its consequences remains a model of axiomatic theory, abstract but adapted to applications from the beginning.“

Eppe et al. (2002) sieht dagegen keine überzeugenden Belege für einen derartigen direkten Einfluss Hilberts auf Hausdorff. Vielmehr waren es andere allgemeine Entwicklungen, die ihn zu der Formulierung seiner Umgebungsaxiome verleitet haben. Vergleiche Eppe et al. (ebd.): S. 676.

⁵⁸Hausdorff nennt womöglich unter dem Einfluss von Weierstraß offene Mengen Gebiete, obwohl er darunter keine zusammenhängenden offenen Mengen wie letzterer versteht. Dies wird durch seinen Hinweis in Hausdorff (1914): S. 215 belegt, in dem er sich von Weierstraß abgrenzt. Erst Carathéodory (1918) wird ausgehend von ihrer Dualität zu abgeschlossenen Mengen, diese Mengen offen nennen. Siehe dazu Carathéodory (ebd.): S. 40.

werden. Die Vereinigung beliebig vieler und daher auch überabzählbar vieler offener Mengen ist wiederum eine offene Menge. Dagegen ist lediglich der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen eine offene Menge. Anders verhält es sich bei abgeschlossenen Mengen. Diese definiert Hausdorff als Mengen, die ihre Häufungspunkte enthalten. Ein Häufungspunkt x ist wiederum, im cantorschen Sinne, ein Punkt von A , „wenn in jeder Umgebung U_x unendlich viele Punkte von A liegen“.⁵⁹ Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wiederum eine abgeschlossene Menge. Jedoch ist lediglich die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen eine abgeschlossene Menge.

Diese Zusammenhänge können am Beispiel einer einfachen Grundmenge $X = \mathbb{R}^2$ in einem metrischen Raum veranschaulicht werden. In diesem Kontext kann man sich offene Mengen bildlich als Punktumgebungen vorstellen. Demnach ist eine offene Menge eines Punktes x , die Menge aller Punkte der ε -Umgebung von x . Wir schreiben für diese Menge $U_\varepsilon(x)$.

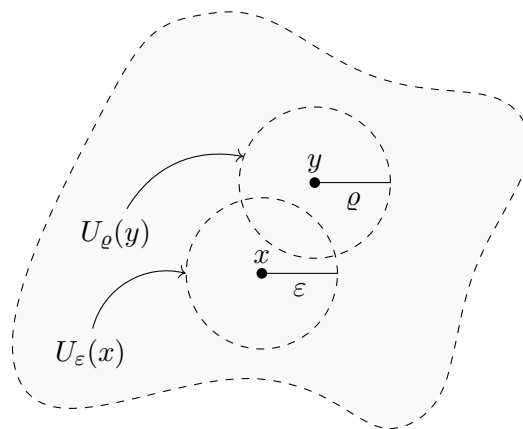


Abbildung 6.5: Die offene Mengen $U_\varepsilon(x)$ und $U_\delta(y)$

Die Vereinigung beliebig vieler solcher Mengen ist stets eine offene Menge, da sämtliche Punkte, die in diese Vereinigung fallen, dies mit ihren Umgebungen tun. Demnach sind hier keine Beschränkungen notwendig. Die Anzahl der Mengen in der Vereinigung kann ebenso unendlich sein.

Anders ist dies bei der Durchschnittsbildung. Der nichtleere Durchschnitt zweier offener Mengen $U_\varepsilon(x)$ und $U_\rho(y)$ enthält einen Punkt z . Dieser Punkt befindet sich in der ε -Umgebung von x und zugleich in der ρ -Umgebung von y . In diesem Fall existiert eine Umgebung von z mit $U_\vartheta(z) \subseteq U_\varepsilon(x) \cap U_\rho(y)$.

Problematisch ist dies jedoch bei einer unendlichen Mengenfamilie. In diesem Fall könnte der Durchschnitt verschwinden, da die Umgebung beliebig klein definiert werden kann. Das Resultat dieser Überlegung wäre ein Singleton (einelementige Menge). Zeigen wir dies für am Beispiel der Intervalltopologie über den reellen Zahlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) = \{x\}$$

Die einelementige Menge $\{x\}$ ist jedoch nicht offen in der Standardtopologie von $\mathbb{R}$. Fassen

⁵⁹Vgl. Hausdorff (1914): S. 219

wir diese Ergebnisse tabellarisch zusammen:

	„Gebiet“	Abgeschlossene Mengen
Durchschnitt	<u>endlich</u> viele enthalten	beliebig viele enthalten
Vereinigung	beliebig viele enthalten	<u>endlich</u> viele enthalten

Tabelle 6.2: Offene und abgeschlossene Mengen nach Hausdorff (1914)

Obwohl Hausdorff unserem heutigen Verständnis topologischer Räume und der in ihnen vorherrschenden Zusammenhänge nahe kommt, sind seine Umgebungsräume dennoch nicht topologische Räume im heutigen Sinne. Dies ist nicht nur auf das Primat des Umgebungsbegriffs zurückzuführen. Vielmehr definiert Hausdorff hier das was man heute *offene Umgebungsbasen* nennen würde.⁶⁰ Zudem ist der Punkt (D) (sein viertes Umgebungsaxiom) das Kriterium für sogenannte T_2 -Räume (oder Hausdorff-Räume).⁶¹ Deshalb entspricht der Umgebungsbegriff Hausdorffs nicht unbedingt dem Umgebungsbegriff topologischer Räume im modernen Sinne, die offene Mengen als Ausgangsbegriff nehmen.⁶² Um dies zu zeigen, genügt es einen topologischen Raum zu konstruieren, der kein T_2 -Raum ist.⁶³

Die erste Axiomatik, die mit unserem heutigen Verständnis topologischer Räume einhergeht, wurde von Kuratowski (1922) vorgelegt. Ein zentrales Problem in der Topologie besteht darin, eine Menge A in einem topologischen Raum so zu erweitern, dass alle Punkte, die auf eine Weise „nahe“ an A liegen, ebenfalls Teil der Menge werden. Das bedeutet, dass nicht nur die Punkte von A selbst berücksichtigt werden, sondern auch die Punkte, die durch Grenzwerte von Folgen oder Netzen, die in A konvergieren, also ihre Häufungspunkte, erreicht werden können. Der bei Kuratowski (ebd.) eingeführte Hüllenoperator ermöglicht, diese Erweiterung explizit zu formulieren.⁶⁴ Wenn man eine Teilmenge A eines Raumes betrachtet, ist der Hüllenoperator darauf ausgelegt, die kleinste abgeschlossene Menge zu bestimmen, die A enthält. Ein einfaches Beispiel, das die Motivation hinter dem Hüllenoperator illustriert, ist der Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Wenn man etwa die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ betrachtet, ist der Abschluss dieser Menge die Menge der reellen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, weil die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen sind. Der Hüllenoperator hilft hier, die kleinste abgeschlossene Menge zu bestimmen, die $\mathbb{Q}$ enthält, und zeigt, dass diese abgeschlossene Menge tatsächlich die gesamten reellen Zahlen umfasst. Ohne den Hüllenoperator wäre es schwieriger, diese Tatsache zu formulieren und zu zeigen, wie die Struktur der Menge sich verändert, wenn man die Grenzpunkte hinzufügt. Sei $A \subset X$ eine Menge und $\mathcal{C}(A)$ die Menge aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.⁶⁵ Der Abschluss von A ist dann definiert durch

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{C}(A) \quad (6.1)$$

⁶⁰Vgl. Eppe et al. (2002): S. 719 sowie G. H. Moore (2008): S. 231

⁶¹Vgl. Kreyszig (1997): S. 370

⁶²Hausdorff war sich jedoch sehr wohl dessen bewusst, dass der topologische Raumbegriff durch die Axiomatisierung verschiedener Konzepte gewonnen werden kann. Siehe dazu Hausdorff (1914): S. 211

⁶³Siehe dazu beispielsweise G. H. Moore (2008): S. 230

⁶⁴Kuratowski selbst definiert diesen jedoch nicht explizit über abgeschlossene Mengen, sondern implizit über dessen Eigenschaften oder genauer über die *Hüllenaxiome*.

⁶⁵Vgl. Kuratowski (1922): S. 182

Der Hüllenoperator $\overline{(*)}$ kann somit explizit über abgeschlossene Mengen in einem topologischen Raum definiert werden. Ein anderer Zugang besteht darin, diesen Operator als Ausgangsbegriff für den topologischen Raum zu nehmen und ihn axiomatisch und somit implizit zu definieren. Diesen Zugang wählte Kuratowski (ebd.) indem er folgende Axiome formulierte:⁶⁶

- (i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$
- (ii) $A \subset \overline{A}$
- (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- (iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Kuratowski (ebd.) nahm diesen Hüllenoperator als Ausgangspunkt seiner Untersuchung. Eine abgeschlossene Menge wurde definiert als Menge, die mit ihrem Abschluss identisch ist. Eine offene Menge dagegen entsprach dem Komplement des Abschlusses ihres Komplementen. Durch die strukturelle Formulierung obiger Axiome war eine explizite Definition eines Hüllenoperators wie in (6.1) bei Kuratowski (ebd.) nicht notwendig. Die Formel (6.1) gibt nur eine Anleitung, wie man den Hüllenoperator $\overline{(*)}$ in einem topologischen Raum *zurückgewinnt* im Falle, dass dieser offene Mengen als Ausgangspunkt nimmt.

Doch wie wir sehen konnten, nimmt Hausdorff (1914) ebenso wenig wie Kuratowski (1922) die offenen Mengen als Ausgangspunkt. Wie könnte sich dann unsere heutige, auf diesen Mengen basierende, Definition topologischer Räume herausbilden? Die erste Arbeit, die offene Mengen zu diesem Zwecke heranzieht und axiomatisch verfährt, ist Tietze (1923). Er orientiert sich stark an Hausdorff (1914) und versucht seine Umgebungsaxiome im Kontext offener Mengen umzuformulieren:⁶⁷

- (A°) Jeder Punkt x (des betrachteten topologischen Raumes) ist in mindestens einer offenen Menge $\mathcal{O}$ enthalten.
- (B°) Haben zwei offene Mengen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ wenigstens einen Punkt gemein, so ist auch ihr Durchschnitt $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ (Menge der gemeinsamen Punkte) eine offene Menge.
- (C°) Gibt es zu jedem in der Menge $\mathcal{O}$ enthaltenen Punkt x eine offene Menge, die x enthält und Teilmenge von $\mathcal{O}$ ist, so ist $\mathcal{O}$ selbst eine offene Menge.
- (D°) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei offene Mengen ohne gemeinsamen Punkt, von denen die eine x , die andere y enthält.

Alexandroff (1925) vereinfacht die Definition von Tietze (1923) erheblich, indem er lediglich zwei Forderungen für den Topologischen Raum, ausgehend von offenen Mengen, stellt:⁶⁸

1. Der Durchschnitt zweier Gebiete und die Vereinigungsmenge beliebig vieler Gebiete sind wiederum ein Gebiet.

⁶⁶Kuratowski (ebd.): S. 182

⁶⁷Tietze (1923): S. 294

⁶⁸Vgl. Alexandroff (1925): S. 298

2. Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es stets zwei, diese Punkte bzw. enthaltende zueinander fremde Gebiete

Das was bei Hausdorff (1914) beweisbare Sätze sind, zieht Alexandroff (1925) als die Basis des Raumes heran. Seine zwei Axiome unterscheiden sich von der heute gebräuchlichen Definition dahingehend, dass sie keine Aussage über die leere Menge und die Grundmenge selbst enthalten. Diese werden nicht als Gebiete bzw. offene Mengen postuliert.

Die Ausgestaltung und Etablierung der modernen topologischen Axiomatik ist maßgeblich den Arbeiten von Kelley (1955) und Bourbaki (1998) zu verdanken:⁶⁹

Sei X eine Menge, dann heißt eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ von X Topologie auf X und das Dupel $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, wenn gilt

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

(O2) Die Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört zu $\mathcal{T}$:

$$O_i \in \mathcal{T}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$$

(O3) Jeder Durchschnitt von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{T}$ gehört zu $\mathcal{T}$:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$$

Die Teilmengen von X , die zu $\mathcal{T}$ gehören, heißen offene Mengen von $(X, \mathcal{T})$; die Komplemente von offenen Mengen heißen abgeschlossene Mengen von $(X, \mathcal{T})$.

Alternativ dazu kann der topologische Raum auch über die Struktureigenschaften abgeschlossener Mengen definiert werden. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und die Menge $\mathcal{C}$ die Menge aller in $\mathcal{T}$ abgeschlossenen Teilmengen von X . Für jede Menge $F_i \in \mathcal{C}$ ist das Komplement $X \setminus F_i$ offen und es gelten die Eigenschaften:

(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$

(C2) Jeder Schnitt von Mengen aus $\mathcal{C}$ liegt wieder in $\mathcal{C}$:

$$F_i \in \mathcal{C}, i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{C}$$

(C3) Jede Vereinigung endlich vieler Mengen aus $\mathcal{C}$ liegt wieder in $\mathcal{C}$:

$$F_1, \dots, F_n \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{C}$$

Streng genommen wäre es möglich, in den obigen Definitionen **(O1)** und **(C1)** auszulassen, wie es Alexandroff (1925) tut. Tatsächlich kann aus **(O2)** mit der leeren Vereinigung für $I = \emptyset$ die leere Menge generiert werden und zudem in **(O3)** durch den leeren Schnitt (für $n = 0$) auch die Grundmenge X erhalten können. Analoges gilt für Axiomatik über abgeschlossene Mengen.

⁶⁹Für folgende Definitionen siehe beispielsweise Kelley (1955): S. 36ff.

Kapitel 7

Dedekinds topologische Wende

Dedekinds Untersuchungen zu den Grundlagen der Arithmetik und Analysis wurden in einem Zeitraum verfasst, in dem die mengentheoretische Topologie ihren Ursprung nahm. Der folgende Abschnitt widmet sich der Analyse dieser Untersuchungen im Lichte der mengentheoretischen Topologie.

Wir untersuchen zwei Manuskripte aus dem Nachlass, *Allgemeine Sätze über Räume* sowie *Beweis und Anwendungen eines allgemeinen Satzes über mehrfache ausgedehnte stetige Gebiete* sowie vor allem **WZ**, insbesondere die dortige Kettentheorie.

Zum einen geht es um die geschichtliche Einordnung seiner Arbeiten. Gemeinhin werden heute die Anfänge der mengentheoretischen Topologie bei Cantor (1872), Hausdorff (1914), Kuratowski (1922), Tietze (1923) und Alexandroff (1925) verortet, wie im letzten Kapitel ausgeführt wurde. Falls Dedekind explizit oder implizit bereits grundlegende Ideen dieser Arbeiten vorwegnimmt, wirft dies ein neues Licht auf die wissenschaftsgeschichtliche Entwicklung der Topologie als mathematischer Disziplin.

Zudem glaube ich, dass diese Frage auch für das Verständnis von Dedekinds strukturalistischer Methode von Relevanz ist. Die Definition des topologischen Raumes in der mengentheoretischen Topologie ist moderne Ausprägung des methodischen Strukturalismus. Die strukturalistische Methode steht in Zusammenhang mit der Invarianz von Eigenschaften und der axiomatische Aufbau der mengentheoretischen Topologie ab Hausdorff (1914) exemplifiziert dies am eindrucklichsten. Zielsetzung ist somit auch zu zeigen, dass bereits bei der *Wesensbestimmung der natürlichen Zahlen* implizite strukturalistische Sachverhalte gegeben sind.

7.1 Topologiesprache

Wir konnten in Abschnitt 6.2 feststellen, dass die Definition des Begriffs der offenen Mengen keineswegs am Anfang der Entwicklung der mengentheoretischen Topologie stand. Vielmehr erfuhr dieser Begriff erst in der Publikation durch Baire (1899) eine explizite Definition und das nur für eine Untermenge topologischer Räume. Cantor führte ihn dagegen in seiner Punktmengenlehre nicht ein.

In Dedekinds Nachlass ist eine explizite Einführung offener Mengen bereits in den 1860er Jahren dokumentiert. Dort steht sie in Verbindung mit seinen Untersuchungen zu Riemanns Mannigfaltigkeit. Wir zitieren einen Brief Dedekinds an Cantor datiert mit 19. Januar 1879, also

einige Zeit vor der Publikation von **WZ**.¹

„Bei einer Publikation würde ich es für wünschenswert halten, wenn die Namen oder **Kunstausdrücke der Mannigfaltigkeitslehre** (beiläufig gesagt, ich würde dem ebenfalls Riemann'schen Wort ‚Gebiet‘ seiner Kürze halber entschieden den Vorzug vor dem schwerfälligen Worte ‚Mannigfaltigkeit‘ geben) recht genau definiert würden; es wäre sehr verdienstlich, wenn diese ganze ‚Gebietslehre‘ ab ovo dargestellt würde, ohne die geometrische Anschauung zuzuziehen, und dabei müsste z.B. der Begriff einer von dem Punkte a nach dem Punkte b innerhalb des Gebietes G **stetig führenden Linie** recht bestimmt und deutlich definiert werden. Die Definitionen von Netto (dessen Abhandlung mir sehr wohl gefällt, und dessen Beweis, wie ich glaube, mit einigen Modifikationen ganz zutreffend wird) enthalten einen guten Keim, aber sie scheinen mir der Vereinfachung und zugleich einer Vervollständigung fähig. Ich würde mir ein solches Urteil nicht erlauben, wenn ich nicht vor vielen Jahren, als ich noch die Dirichlet'sche Potentialvorlesung herausgeben und dabei das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip strenger begründen wollte, mich schon recht viel mit solchen Fragen beschäftigt hätte. Ich habe einige solche Definitionen, die mir eine recht gute Grundlage zu geben scheinen, aber ich habe später die ganze Sache liegen lassen, und könnte für den Augenblick nur Unvollständiges geben, da ich durch die Umarbeitung der Dirichlet'schen Zahlentheorie ganz in Anspruch genommen bin.“ [Hervorhebungen E. B.]

Dieser Ausschnitt der Korrespondenz zwischen Dedekind und Cantor zeugt vom übergreifenden Versuch, die geometrische Anschauung aus der Grundlegung der Arithmetik und insbesondere Analysis überflüssig zu machen. Die Erweiterung der Mengenlehre (hier Gebietslehre genannt) sollte zu diesem Zwecke auch dem Phänomen der Stetigkeit Rechnung tragen. Dass diese Forderung auch umsetzbar ist, will Dedekind bereits in einer nicht publizierten Abhandlung in Ansätzen gezeigt haben. Sowohl die Herausgeber des Nachlasses² als auch die Fachliteratur³ sind sich einig, dass Dedekind hier den Aufsatzentwurf „*Allgemeine Sätze über Räume*“ meint.⁴ Tatsächlich enthält dieser, dessen Niederschrift Ferreirós (2007) in einem Zeitraum zwischen 1863 und 1866 vermutet⁵, die Definition einiger grundlegender Begriffe, die wir heute als topologisch charakterisieren würden. Allem voran wird in §1 des Aufsatzes der Begriff des *Körpers* eingeführt.⁶

„Ein System von Punkten $p, p' \dots$ bildet einen Körper, wenn für jeden Punkt p desselben sich eine Länge δ von der Beschaffenheit angeben lässt, daß alle Punkte, deren Abstand von p kleiner als δ ist, ebenfalls dem System P angehören. Die Punkte $p, p' \dots$ liegen innerhalb von P “

Das, was Dedekind hier *Körper* nennt, entspricht im Wesentlichen dem modernen Verständnis einer offenen Menge. In diesem Zusammenhang stellt offensichtlich P die Grundmenge dar, der die Punkte $p, p', \dots$ angehören. Der Körper ist, wie Dedekind später ausführt, bildlich als Kugel zu verstehen.⁷ Wir haben es hier somit mit der Untersuchung eines metrischen Raumes zu tun.

¹Dedekind (1932): S. 355; Hervorhebungen E. B.

²Vergleiche dazu den Kommentar von Emmy Noether in Dedekind (1863) auf Seite 355.

³Vergleiche etwa Ferreirós (2007): S. 138.

⁴Vgl. Dedekind (1863)

⁵Er begründet diese Datierung ausgehend von dem weiter oben zitierten Brief Dedekinds an Cantor. Demnach begann Dedekind die Niederschrift des Aufsatzes im Kontext der Herausgabe von Dirichlets Potentialvorlesung. Diese Vorlesung wurde erstmalig 1863 publiziert. Der Aufsatz blieb jedoch, angesichts seiner Arbeiten am Nachlass von Riemann, unvollendet. Da Dedekind im Jahr 1866 mit dem Nachlass betraut wurde, datiert Ferreirós den gegenständlichen Aufsatz im Zeitraum zwischen 1863 und 1866. Siehe dazu Ferreirós (2007): S. 138f.

⁶Dedekind (1863): S. 353

⁷Vgl. Dedekind (ebd.): S. 353

In §2 definiert er das Innere einer Menge, in §5 das Äußere sowie in §7 den Rand (System aller Grenzpunkte) einer Menge von Punkten in P .⁸

Dieser Aufsatzentwurf belegt, dass Dedekind bereits in den 1860er Jahren, somit vor Cantor, eine *Topologiesprache* im obigen Sinne entwickelt hatte. Auch der Begriff der offenen Menge wurde bei ihm explizit definiert. Wie wir der Korrespondenz entnehmen können, sah er diese Begriffe als notwendig für eine strenge Beschreibung der *stetigen Gebiete* an.

Weitere topologische Phänomene bespricht er auch in einem weniger bekannten Manuskript unter dem Namen „*Beweis und Anwendung eines allgemeinen Satzes über mehrfach ausgedehnte stetige Gebiete*“. Dieser, mit 1892 datierte Aufsatz, definiert die Begriffe *Beipunkt* und *selbstständiges System*. Bezogen auf einen metrischen Raum, der auch hier Untersuchungsgegenstand ist, entsprechen diese Begriffe dem heutigen Begriff des Berührungspunkts beziehungsweise dem Begriff der abgeschlossenen Mengen. Auch gebraucht der dort den Begriff der *Hülle*, der jedoch für eine n -dimensionale Würfelumgebung eines Punktes steht. Dedekind schafft es hier, diese Begriffe im Kontext seiner Untersuchung stetiger Funktion in Anwendung zu bringen.⁹

Zur Zeit der Niederschrift des Aufsatzes waren Dedekind die Ergebnisse der Punktmengentheorie Cantors bereits hinreichend bekannt. Tatsächlich verweist er darauf, dass seine Beizahl nicht mit Cantors Grenzpunkt verwechselt werden darf.¹⁰ Die historische Relevanz dieses Aufsatzes ist somit endend wollend. Er definiert zwar weitere topologische Phänomene, dies geschieht jedoch im Kontext einer bereits entwickelten und publizierten Punktmengenlehre.

Bemerkenswert ist jedoch Dedekinds Verwendung des Begriffs *Kunstaussdruck*. Wir begegnen diesem Begriff auch in der oben zitierten Korrespondenz mit Cantor. Dort bezieht sich der Begriff auf Begriffe der Mengenlehre als auch der mengentheoretischen Topologie im heutigen Sinne. Dedekind sah beide als Bestandteile der Mengenlehre an. Der zweite Aufsatzentwurf enthält ebenfalls eine Erwähnung dieses Ausdrucks. Am Anfang des §1 schreibt er:¹¹

„Ich bespreche zunächst eine Erscheinung, die bei Systemen von beliebigen Elementen eintreten kann, und benutze hierbei einige Begriffe und **Kunstaussdrücke** in demselben Sinne wie in meiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?““ [Hervorhebung E. B.]

In seinem Brief an Keferstein spricht Dedekind ebenfalls vom *Kunstaussdruck*, jedoch im Kontext seiner Kettentheorie.¹² Die Kette, die dort im Mittelpunkt steht, ist für ihn ein Kunstaussdruck. Folgt man dieser Bezeichnung, so kann gefolgert werden, dass Dedekind seine Kettentheorie in **WZ** im Kontext der Mengenlehre sieht. Diese umfasst auch solche Begriffe, die wir heute zur mengentheoretischen Topologie zählen würden. Es ist daher naheliegend, die Kettentheorie im Hinblick auf ihren topologischen Gehalt zu prüfen.

⁸Vgl. Dedekind (ebd.): S. 354

⁹Noether zeigt in einem kurzen Kommentar auch die Anwendbarkeit dieser Begriffe auf den Überdeckungssatz von Heine-Borel. Siehe dazu Dedekind (1892): S. 370.

¹⁰Modern gesprochen ist dies die Unterscheidung zwischen Randpunkten und Häufungspunkten.

¹¹Dedekind (ebd.): S. 357; Hervorhebung E. B.

¹²In dem Brief an Keferstein abgedruckt in Müller-Stach (2017): S. 187ff.

7.2 Die Axiomatisierung topologischer Phänomene im Kontext der Kettentheorie

Der erste Satz im Rahmen der Kettentheorie bezieht sich auf die Grundmenge S :¹³

[38] Satz:^a „ S ist eine Kette.“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348

Dedekind liefert keinen Beweis dieses Satzes. Offensichtlich besteht für ihn dahingehend keine Notwendigkeit, da er bereits in Erklärung #37 der Grundmenge S eine *In-sich-Abbildung* zugeordnet hat. Es existiert daher eine derartige Abbildung $\varphi : S \rightarrow S$. Folglich ist auch

$$\varphi(S) \subseteq S$$

und definitionsgemäß S ebenfalls eine Kette. Dedekind schreibt $\varphi(S)$ kurz als S' .¹⁴

An dieser Stelle können wir bereits eine Parallele zwischen der Kettentheorie und der Definition eines topologischen Raumes erkennen. Wenn man nun die *In-sich-Abbildung* φ in dem Sinne versteht, dass eine Kette *abgeschlossen* hinsichtlich der Abbildung φ ist, so könnte man Ketten als abgeschlossene Mengen eines topologischen Raumes interpretieren. Dies würde bedeuten, dass die Abbildung φ gewissermaßen strukturerhaltend ist, sprich, dass abgeschlossene Mengen wiederum in abgeschlossene Mengen abgebildet werden. Genau dies beweist Dedekind im folgenden Satz:¹⁵

[39] Satz:^a „Das Bild K' einer Kette K ist eine Kette.“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348

Dieser Satz folgt aus dem bereits in #22 bewiesenen Zusammenhang:

$$A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$$

für beliebige Abbildungen φ . Da K eine Kette ist, folgt daraus

$$\varphi(K) \subset K \Rightarrow \varphi(\varphi(K)) \subset \varphi(K).$$

Die Abbildung φ besitzt somit eine **Skalierungseigenschaft**. Sie ist eine injektive Abbildung, die abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen (Ketten auf Ketten) abbildet und dabei eine echte Teilmenge der Ausgangsmenge ist. Eine derartige *In-sich-Abbildung* ist in gewissem Sinne *strukturerhaltend*, weshalb die Analogie zwischen Ketten und abgeschlossenen Abbildungen gerechtfertigt ist.

Die *In-sich-Abbildung* bei Dedekind ist zwar abgeschlossen, jedoch nicht notwendigerweise

¹³Vgl. Dedekind (1888): S. 352

¹⁴Vgl. Dedekind (ebd.): S. 348

¹⁵Vgl. Dedekind (ebd.): S. 352

stetig. Sie bildet zwar abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen ab, jedoch können wir mangels Surjektivität nicht folgern, dass die Urbilder abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen sind.

Vergleichen wir Satz #38 mit der modernen Definition eines topologischen Raumes, so sehen wir auch hier die Parallele: Die Grundmenge S ist selbst abgeschlossen. Die Invarianz der Grundmenge hinsichtlich φ entspricht der elementaren Bedingung eines topologischen Raumes, dass die Grundmenge selbst im Raum enthalten ist. Vergleichen wir diesen Satz mit der Definition eines topologischen Raumes in Abschnitt 6.3 entspricht der Satz #38 im Wesentlichen der Forderung (C1) der Definition.

Um diesen Gedanken zu konkretisieren, definieren wir die Menge aller Ketten der Grundmenge S hinsichtlich einer bestimmten *In-sich-Abbildung* φ :

$$\mathcal{S}_\varphi \stackrel{\text{def.}}{=} \{K \mid K \subseteq S \wedge \varphi(K) \subseteq K\}$$

Ausgehend von den bisherigen Überlegungen bezeichnen wir $\mathcal{S}_\varphi$ als *Kettentopologie* über S . Wir wollen prüfen, ob es sich hierbei tatsächlich um eine Topologie im Sinne der Definition des Kapitels 6.3 handelt. Zu diesem Zweck betrachten wir die Sätze #42 und #43:

[42] Satz:^a „Eine aus lauter Ketten $A, B, C \dots$ zusammengesetzte Menge M ist eine Kette.“

[43] Satz:^b „Die Schnittmenge G von lauter Ketten $A, B, C \dots$ ist eine Kette.“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348

^bVgl. Dedekind (ebd.): S. 348

Der Unterschied zwischen der Definition eines topologischen Raumes basierend auf offenen und abgeschlossenen Mengen besteht unter anderem auch in der Ausgestaltung der Schnittmengen und der Vereinigungen, die wiederum im Raum enthalten sind. Im Falle der Definition über offene Mengen wie in Kapitel 6.3 spricht diese von einem Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathcal{T}$, wobei die Anzahl der Mengen bei der Bedingung zur Vereinigung auch abzählbar unendlich sein kann. Umgekehrt ist bei der Definition eines topologischen Raumes basierend auf abgeschlossenen Mengen die Anzahl der Mengen in der Vereinigung endlich, wobei die Anzahl der Mengen im Durchschnitt auch abzählbar unendlich sein kann.

Dedekind spricht im obigen Satz von *lauter* Mengen, ohne ihre Anzahl weiter zu spezifizieren. Dies scheint der Definition eines topologischen Raumes nicht zu genügen. In Dedekind (1932) begegnen wir jedoch einem ähnlichen Zusammenhang im Kontext der Topologie metrischer Räume. In diesem geht Dedekind auf die Problematik explizit ein.¹⁶ Nimmt man diese Ungenauigkeit in Kauf, so entsprechen die Sätze #42 und #43 vollends den Axiomen (C2) und (C3) der Definition eines topologischen Raumes über abgeschlossene Mengen.

Basierend auf diesen Überlegungen erscheinen uns alle Sätze der Kettentheorie als simple und grundlegende topologische Eigenschaften. Wir nutzen dies nun um die zentralen Begriffe und Ergebnisse der Kettentheorie zu rekonstruieren.

Für den Fortgang ist der Begriff der *Kette einer Menge* wichtig:

¹⁶Vgl. Dedekind (1892): S. 359

(44) Erklärung:^a

„Ist A irgendein Teil von S , so wollen wir mit A_0 die Schnittmenge aller derjenigen Ketten (z.B. S) bezeichnen, von welcher A Teil ist; diese Schnittmenge A_0 existiert [...], weil ja A selbst Durchschnitt aller dieser Ketten ist. Da ferner A_0 nach [43] eine Kette ist, so wollen wir A_0 die Kette der Menge A oder kurz die Kette von A nennen. Auch diese Erklärung bezieht sich durchaus auf die zugrunde liegende bestimmte Abbildung φ der Menge S in sich selbst, und wenn es später der Deutlichkeit wegen nötig wird, so wollen wir statt A_0 lieber das Zeichen $\varphi_0(A)$ setzen, und ebenso werden wir die einer anderen Abbildung ω entsprechende Kette von A mit $\varphi_0(A)$ bezeichnen. Es gelten nun für diesen sehr wichtigen Begriff die folgenden Sätze.“

^aVgl. Dedekind (1888): S. 348

Dedekind hebt hier hervor, dass die Eigenschaft *Kette einer Menge zu sein* ebenso von der zugrundeliegenden *In-sich-Abbildung* abhängt wie die Frage, ob eine Menge eine Kette ist. Um Verwechslungen zu vermeiden, führen wir für die Kette einer Menge A , sprich für A_0 , den Begriff der Minimalkette ein. Dieser Begriff gibt die Eigenschaft wieder, dass die Menge A_0 die kleinste Kette ist, die die Menge A enthält. Im Falle, dass A selbst eine Kette ist, folgt somit die Gleichheit $A_0 = A$. Die Menge A_0 stellt den Durchschnitt aller Ketten in S hinsichtlich einer Abbildung φ dar, die A enthalten. Wir erkennen, dass dies nichts anderes als der Abschluss der Menge A ist. In moderner Sprache kann man dies folgendermaßen formulieren:

$$A_0 := \bigcap \{K \subset S \mid A \subseteq K \wedge K \text{ ist eine Kette}\}$$

Die Konstruktion der Kette einer Menge A entspricht der Hüllenbildung für die Menge A ausgehend von abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes. Auch in diesem Fall entspricht Dedekinds Begriffsbildung dem, was wir in Kapitel 6.3 in Bezug auf die Ableitung des Hüllenoperators aus einem über abgeschlossene Mengen definierten topologischen Raum.

Im Anschluss untersucht Dedekind den Gehalt des Hüllenoperators $(*)_0$:

[45] Satz:^a „Es ist $A \subseteq A_0$.“

[46] Satz:^b „Es ist $\varphi(A_0) \subseteq A_0$.“

[47] Satz:^c „Ist A Teil einer Kette K , so ist auch $A_0 \subseteq K$.“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348; ' $\subseteq$ ' ist im Original bezeichnet mit ' $\supseteq$ '.

^bVgl. Dedekind (ebd.): S. 348; ' $\subseteq$ ' ist im Original bezeichnet mit ' $\supseteq$ '.

^cVgl. Dedekind (ebd.): S. 348; ' $\subseteq$ ' ist im Original bezeichnet mit ' $\supseteq$ '.

Der Abschluss einer Menge erfüllt die *kuratowskischen Hüllenaxiome*. Satz #45 ist somit nichts anderes als die Extensivität des Hüllenoperators, Satz #46 eine Variante der Idempotenz und Satz #47 eine Variante der Isotonie:

- **Extensivität:** $A \subseteq A_0$. Die Extensivität eines Hüllenoperators bedeutet, dass die „Hülle“ einer Menge mindestens die ursprüngliche Menge enthält. Der Hüllenoperator einer Menge nie Punkte entfernt, sondern höchstens neue hinzufügt.
- **Isotonie:** $A \subseteq B \Rightarrow A_0 \subseteq B_0$. Das bedeutet, dass der Hüllenoperator die Ordnung der

Mengen bewahrt

- **Idempotenz:** $(A_0)_0 = A_0$. Wenn der Operator auf eine abgeschlossene Menge angewendet wird, bleibt das Ergebnis unverändert. Das bedeutet, dass der Abschluss einer Menge immer wieder denselben Abschluss ergibt, unabhängig davon, wie oft der Operator angewendet wird. Diese Eigenschaft ist entscheidend, weil sie zeigt, dass der Abschluss einer Menge keine weiteren Punkte hinzufügt, sobald der Abschluss einmal gebildet wurde. Der Operator hat also eine stabilisierende Wirkung.

Mit der folgenden Bemerkung geht Dedekind jedoch einen Schritt weiter:

(48) Bemerkung:^a „Man überzeugt sich leicht, daß der in (44) erklärte Begriff der Kette A_0 durch die vorstehenden Sätze (45), (46), (47) vollständig charakterisiert ist.“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348

Von besonderem Interesse ist die Beobachtung Dedekinds, dass der Hüllenoperator nicht lediglich die zuvor formulierten Sätze erfüllt, sondern durch diese vollständig charakterisiert wird. Diese Feststellung impliziert, dass der Operator auch auf rein axiomatischer Grundlage über eben jene Sätze definierbar wäre – ein Zugang, wie er später exemplarisch bei Kuratowski (1922) gewählt wurde. Mit dieser Bemerkung unterstreicht Dedekind zugleich sein Bewusstsein für die fundamentale Rolle der genannten Sätze im Rahmen der begrifflichen Bestimmung des Hüllenoperators.

Der folgende Satz ergibt sich dann aus einfachen topologischen Umformungen:

[41] Satz: ^a

„Ist das Bild A' Teil einer Kette L , so gibt es eine Kette K , welche den Bedingungen $A \subseteq K$, $K' \subseteq L$ genügt; und zwar ist $A \cup L$ eine solche Kette K .“

^aVgl. Dedekind (ebd.): S. 348; ' $\subseteq$ ' ist im Original bezeichnet mit ' $\supseteq$ ' und ' $\cup$ ' mit ' $\mathfrak{m}$ '.

Es handelt sich hierbei um einen Satz, der in den kommenden Beweisführungen benötigt wird und dessen Resultat nicht direkt aus den Begrifflichkeiten folgt. Wir geben deshalb hier Dedekinds Beweis wieder. Er zeigt hier die Möglichkeit einer topologischen Einbettung der Menge A in eine kontrollierte, abgeschlossene Menge K .

$$\begin{array}{lll}
 A \subseteq A \cup L \xrightarrow{\#23,10} & (A' \cup L') \subseteq L & \text{Annahme, Definition Kette} \\
 \xrightarrow{\#23} & (A' \cup L') \subseteq A \cup L & \text{Definition der Kette} \\
 \xrightarrow{\#23} & (A \cup L)' \subseteq A \cup L &
 \end{array}$$

Die topologische Einbettung bedeutet intuitiv, dass jede Menge A durch eine geeignete Menge $K \in \mathcal{S}_\varphi$ so überdeckt werden kann, dass ihre Abbildung weiterhin in der Oberkette L liegt. Schlussendlich ist dadurch eine kontrollierte und wohldefinierte Überdeckung der Menge A und ihrer Häufungspunkte, somit eine Approximation möglich.

Zuletzt soll noch auf die Eigenschaften der Abbildung φ anhand des Satzes #57 näher eingegangen werden.

57 Satz und Erklärung: ^a

„Es ist $(A_0)' = (A')_0$, d. h. das Bild der Kette von A ist zugleich die Kette des Bildes von A . Man kann daher diese Menge kurz durch A'_0 bezeichnen und nach Belieben das Kettenbild oder die Bildkette von A nennen. Nach der deutlicheren in (44) angegebenen Bezeichnung würde der Satz durch $\varphi(\varphi_0(A)) = \varphi_0(\varphi(A))$ auszudrücken sein.“

^aVgl. Dedekind (1888): S. 348

Dieser Satz gibt Auskunft über die Beschaffenheit der *In-sich-Abbildung* φ . Es wurde bereits festgestellt, dass die Abbildung folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) φ ist eine *In-sich-Abbildung*, es gilt daher $\varphi : S \rightarrow S$.
- 2) φ ist eine injektive Abbildung, da aus $\varphi(x) = \varphi(y)$ folgt dass $x = y$.
- 3) φ ist keine surjektive Abbildung, da $\exists y \in Y \forall x \in X : f(x) \neq y$,
- 4) φ ist eine abgeschlossene Abbildung, da sie abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen (Ketten auf Ketten) gemäß #38 abbildet.

Aus den oben genannten Eigenschaften folgt jedoch keinesfalls die Stetigkeit der Abbildung. Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass eine stetige Funktion abgeschlossen ist, ist folgendermaßen gegeben:¹⁷

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig genau dann, wenn die Urbilder aller abgeschlossenen Teilmengen von Y abgeschlossen in X sind.

Dies resultiert jedoch weder aus den obigen Eigenschaften der Abbildung, noch aus der Ausgestaltung des Raumes selbst. Folglich ist Dedekinds *In-sich-Abbildung* nicht notwendigerweise eine stetige Abbildung.

Der Zusammenhang in Satz #57 muss daher auch den grundlegenden Eigenschaften von abgeschlossenen Abbildung in topologischen Räumen ohne Rückgriff auf ihre Stetigkeit erfolgen. Beide Inklusionen ergeben sich aus den oben genannten Eigenschaften der Abbildung φ sowie den Eigenschaften des Hüllenoperators $(*)_0$.

Zunächst zur Inklusion $(A_0)' \subseteq (A')_0$ ausgehend von #45:

$$\begin{array}{lll}
 A' \subseteq (A')_0 \xrightarrow{\#41} & \exists K \in \mathcal{S}_\varphi : A \subseteq K \wedge K' \subseteq (A')_0 & \text{Topologische Einbettung von } A \\
 & \xrightarrow{\#47} & \exists K \in \mathcal{S}_\varphi : A_0 \subseteq K \wedge K' \subseteq (A')_0 \quad \text{Definition des Hüllenoperators} \\
 & \xrightarrow{\#39} & \exists K \in \mathcal{S}_\varphi : (A_0)' \subseteq K' \wedge K' \subseteq (A')_0 \quad \text{Abgeschlossenheit der Abbildung} \\
 & \xrightarrow{\#7} & (A_0)' \subseteq (A')_0 \quad \text{Transitivität der Mengeninklusion}
 \end{array}$$

Die andere Inklusion $(A')_0 \subseteq (A_0)'$ erhält man ebenfalls ausgehend von #45:

¹⁷Vgl. Engelking (1989): S. 28

$A \subseteq A_0 \xrightarrow{\#22}$	$A' \subseteq (A_0)'$	Abgeschlossenheit der Abbildung
$\xrightarrow{\#39}$	$(A_0)' \in \mathcal{S}_\varphi$	Definition des Hüllenoperators
$\xrightarrow{\#47}$	$(A')_0 \subseteq (A_0)'$	Definition des Hüllenoperators

Durch den Beweis beider Inklusionen wäre auch der Satz #57 bewiesen. Der Beweis erfolgt allein auf Basis der topologischen Eigenschaften der abgeschlossenen Abbildung φ und der allgemeinen Eigenschaften des Hüllenoperators nach Kuratowski (1922).

Zuletzt sei noch der Satz der Vollständigen Induktion erwähnt. Der Satz der vollständigen Induktion ermöglicht es, zu zeigen, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Der Satz basiert auf der Idee, dass, wenn eine Aussage für die Zahl 1 wahr ist und wenn die Wahrheit der Aussage für eine beliebige Zahl n auch die Wahrheit für die nächste Zahl $n + 1$ impliziert, dann die Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Der Satz #59 bei Dedekind ist dagegen allgemeiner gehalten und bezieht sich auf die bisherigen Ergebnisse der Kettentheorie, in der kein Rückgriff auf den Begriff der natürlichen Zahlen vorzufinden ist:

[59] Satz: ^a

„Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeiner Menge Σ ist — mag letztere Teil von S sein oder nicht —, genügt es zu zeigen,

ρ daß $A \subseteq \Sigma$ und

σ daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist.“

^aVgl. Dedekind (1888): S. 348

Man kann also sagen, dass die Minimalkette A_0 eine gewisse Eigenschaft erfüllt, falls sowohl A als auch die Menge $\varphi(A_0 \cap \Sigma)$ diese Eigenschaft erfüllen. Dies entspricht der oben beschriebenen Logik der vollständigen mathematischen Induktion. Die Menge A fungiert hier als Ausgangselement (analog der obigen natürlichen Zahl n_0). Der Durchschnitt der Mengen A_0 und Σ ist derart konstruiert, dass

- (i) sämtliche Elemente in $A_0 \cap \Sigma$, die Eigenschaft ' Σ ' erfüllen, da $A_0 \cap \Sigma \subseteq \Sigma$ sowie
- (ii) durch den Hüllenoperator eine *Verbindung* zwischen dem *Ausgangselement* A und dem Postulat in σ sichergestellt werden kann, ohne auf den Begriff der natürlichen Zahlen zurückgreifen zu müssen.

Wieso hat der Hüllenoperator hier eine herausragende Bedeutung? Dies erfahren wir zum einen aus dem Beweisgang, zum anderen aber auch aus Dedekinds Erläuterungen im Brief an Keferstein.¹⁸ Betrachten wir zunächst einmal den Beweis. Da $A_0 \cap \Sigma$, aufgrund des ersten Punktes,

¹⁸Hans Keferstein war Oberlehrer in Hamburg und publizierte im Jahre 1890 einen Aufsatz über den Zahlenbegriff bei Frege und Dedekind. Obwohl nicht negativ im Ton, gab er dort einige Verbesserungsvorschläge an. Diese zeugten jedoch von einem Unverständnis der Sache und haben Dedekind dazu bewogen, in einem Brief, datiert mit 27. Februar 1890, einige seiner Überlegungen in **WZ** verständlicher zu formulieren. Sie dazu Heijenoort (2002): S. 98.

nicht leer sein kann, ist das zugrundeliegende Prinzip wohldefiniert. Zu zeigen ist somit, dass aus den Punkten ρ und σ , $A_0 \subseteq \Sigma$ folgt. Zunächst zu ρ :

$$\begin{array}{lll}
 A \subseteq \Sigma \xrightarrow{\#45} & G \equiv A_0 \cap \Sigma \neq \emptyset & \text{Annahme und Definition der Minimalkette} \\
 \xrightarrow{\#18,17} & G \subseteq S \wedge \boxed{G \subseteq A_0} & \text{Per Definition} \\
 \xrightarrow{\#55} & G' \subseteq A_0 & \text{Definition des Hüllenoperators}
 \end{array}$$

Nimmt man σ als Annahme hinzu folgt:

$$\begin{array}{lll}
 (A_0 \cap \Sigma)' \subseteq \Sigma \implies & G' \subseteq \Sigma & \text{Definition} \\
 \xrightarrow{\#18} & G' \subseteq (A_0 \cap \Sigma) = G & \text{Folgerung aus } \rho \\
 \xrightarrow{\#37} & G \in \mathcal{S}_\varphi & G \text{ ist abgeschlossen} \\
 \xrightarrow{\#47} & \boxed{A_0 \subseteq G} & \text{Definition Hüllenoperator} \\
 \implies & A_0 = G & \text{Aus den beiden markierten Ergebnissen} \\
 \implies & A_0 = A_0 \cap \Sigma & \text{Definition } G \\
 \xrightarrow{\#17} & A_0 \subseteq \Sigma &
 \end{array}$$

Die beiden Implikationen beruhen auf der vorausgesetzten Definition des Hüllenoperators und können im weiteren Sinne als Ausdruck der topologischen Durchdringung der Kettentheorie verstanden werden.

7.3 Erste Ansätze zur Untersuchung des Baire-Raumes ${}^\omega\omega$

Betrachten wir folgende zwei untere Mengen der Dedekindschnitte für die reellen Zahlen 1 und r :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\} \quad \text{sowie} \\
 U_r &= \left\{ q \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} : q < 1 - \frac{1}{10^n} \right\}
 \end{aligned}$$

Die Frage, ob die obigen Mengen identische Schnitte und somit reelle Zahlen definieren, folglich $r = 1$ ist, entspricht dem hinreichend bekannten, aber dennoch paradox anmutenden Zusammenhang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right) = 0,999 \dots \stackrel{?}{=} 1 = 1,000 \dots$$

Das paradoxe besteht hier in der Unvereinbarkeit der Approximationseigenschaft des Limes und der eindeutigen Dezimaldarstellung reeller Zahlen.¹⁹ Das Problem ergibt sich somit nicht aus einer unzulässigen Grenzbildung, sondern aus dem bereits in Kapitel 4 ausführlich untersuchten topologischen Zusammenhang reeller Zahlen. Dieser Umstand legt die Untersuchung der

¹⁹Vgl. Deiser (2008): S. 285

Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung der reellen Zahlen nahe, zumal wir es hierbei offensichtlich mit einem Phänomen zu tun haben, das mit den bisherigen topologischen Beschreibungen keine Eindeutigkeit entfaltet. Tatsächlich ist diese Eindeutigkeit in manchen Fällen vorteilhafter als die Approximationseigenschaft, vor allem um mengentheoretische Manipulationen geht, bei denen eine diskrete Fragmentierung zielführender ist. Ein Beispiel, das in diesem Kontext Deiser (2008) nennt, ist der Beweis der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ durch Konstruktion einer Bijektion, ohne Verwendung des Cantor-Bernstein-Theorems.²⁰

Praktisch setzt dies eine Untersuchung von Zahlenfolgen in einem Folgenraum wie dem Baire-Raum voraus. Der Baire-Raum $\mathcal{N}$ ist ein topologischer Raum auf der Grundmenge von Zahlenfolgen. Der Nähebegriff der bei der Definition der offenen Mengen dieses Raumes zur Anwendung kommt, bezieht sich auf *die Identität von Anfangsstücken* der Zahlenfolgen. Dieser ist eine *digitale Version* der reellen Zahlen:²¹

„One may think of as a ‚discrete‘ or ‚combinatorial‘ version of the ‚continuous‘ or ‚analog‘ []. A real number x is completely determined by a decimal expansion $x(0).x(1)x(2)\dots$, but two distinct decimal expansions may compute to the same real number. This is a big ‚but‘, it is the key fact behind the so-called topological connectedness of the real line which is of interest in analysis, to be sure, but of little set theoretic consequence. We may view Baire space as a ‚digital version‘ of $\mathbb{R}$ because it does not make any such identifications, each point x determines unambiguously its ‚digits‘ $x(0), x(1), \dots$ “

Der Baire-Raum ist somit der Folgenraum $\mathcal{N} =_{\text{def}} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$ und wird geschrieben $\omega\omega$ oder $\mathbb{N}\mathbb{N}$ in Abhängigkeit von der konkreten Sichtweise.

Im Nachlass Dedekinds befindet sich ein kurzes Manuskript mit dem Titel *„stetiges System aller Abbildungen der natürlichen Zahlenreihe N in sich selbst.“*²²

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, dass Dedekind selbst die heute zentrale Topologie auf dem Raum

$$\omega^\omega,$$

welche diesen zu einem abstrakten, mengentheoretischen Kontinuum macht, weder definiert noch untersucht hat. Sein entsprechendes Manuskript ist äußerst kurz – es umfasst lediglich die erste Seite eines möglicherweise geplanten Aufsatzes. Inhaltlich beschränkt es sich auf die Einführung einer Ordnungsrelation auf dem Raum

$$\omega^\omega$$

sowie auf den Nachweis der Transitivität dieser Relation.

Dedekind beginnt mit der Betrachtung einer Abbildung

$$\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

also einer Funktion, die jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl zuordnet. Für das Bild von n unter α verwendet er die Notation

$$n\alpha,$$

²⁰Vgl. Deiser (ebd.): S. 286

²¹Moschovakis (2006): S. 135; Fußnote 24

²²Vgl. Dedekind (1931): S. 371f

wobei stets gilt:

$$n\alpha \in \mathbb{N}.$$

Darauf aufbauend formuliert Dedekind eine Ordnungsrelation auf der Menge aller solcher Abbildungen, also auf dem Raum

$$\omega^\omega.$$

„Sind α, β Abbildungen von $\mathbb{N}$ in sich selbst und verschieden voneinander, so gibt es mindestens eine natürliche Zahl n , für welche die Differenz $n\alpha - n\beta$ von Null verschieden ist, und unter diesen Zahlen n gibt es eine kleinste r . Dann ist $x\alpha = x\beta$ falls $x < r$ [...]“

Die Tatsache, dass Dedekind dieses kurze Manuskript verfasste, in dem er das Kontinuum unmittelbar zu erschließen sucht, ohne die sonst üblichen Zwischenschritte über ganze oder rationale Zahlen, deutet darauf hin, dass er dem Begriff der Abbildung eine zentrale Rolle zuschrieb. Die Idee, ein Kontinuum aus Abbildungen der natürlichen Zahlen in sich selbst zu konstruieren, spricht dafür, dass er die Vorstellung einer Abbildung nicht nur als ein zentrales mathematisches Werkzeug, sondern geradezu als das grundlegende Prinzip reiner Mathematik ansah. Es scheint, als habe er überzeugt daran festgehalten, dass sich mathematische Strukturen letztlich auf dieses eine, grundlegende Konzept zurückführen lassen.²³

7.4 Schlussfolgerungen

Wir möchten nun das bisher Gesagte zusammenfassen und einen direkten Vergleich zwischen Dedekind und den anderen Autoren anstellen, die in der Entwicklung der Topologie eine bedeutende Rolle spielten. Besonders wichtig ist dabei der Umstand, dass Dedekind die meisten seiner Überlegungen zur Topologie nicht in veröffentlichter Form vorlegte. Diese wurden erst mit der Herausgabe seines Nachlasses in Dedekind (1932) einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich gemacht. Dies hatte zur Folge, dass Dedekinds Einfluss auf die Entwicklung der topologischen Begriffe im Vergleich zu anderen zeitgenössischen Mathematikern als eher begrenzt angesehen werden kann.

Im Gegensatz zu prominenten Mathematikern wie Henri Poincaré oder Georg Cantor, die ihre Arbeiten in der Topologie aktiv publizierten und damit den Diskurs in diesem Bereich direkt prägten, bleibt Dedekinds Beitrag weitgehend im Schatten seiner anderen Arbeiten zur Algebra und Zahlentheorie. Zwar enthalten seine Nachlass-Schriften wichtige Impulse für die spätere Entwicklung der Topologie, doch wurden diese Ideen nicht in einem Kontext präsentiert, der die Entwicklung des Fachs maßgeblich beeinflusste.

Dieser Umstand bedeutet nicht, dass Dedekinds Überlegungen keine Relevanz für die moderne Topologie haben. Im Gegenteil: Viele seiner Konzepte, insbesondere diejenigen, die sich mit der Struktur von Mengen und den Grundlagen der Zahlentheorie befassen, sind von entscheidender Bedeutung für das spätere Verständnis von topologischen Räumen und deren Eigenschaften. Dennoch führte der späte Zugang zu diesen Schriften dazu, dass Dedekinds Einfluss auf die unmittelbare Entstehung und Etablierung der Topologie im Vergleich zu anderen zentralen Denkern des 19. Jahrhunderts relativ gering blieb.

²³Vgl. Ferreirós (2017): S. 332

Ungeachtet dieser Tatsache kann er mit Recht als einer der Urväter der Topologie angesehen werden. Diese bisherige Ausführung nahm sich zum Ziel, dies auch historisch zu belegen. Wir halten die Ergebnisse zusammenfassend fest:

1. **Topologiesprache:** Neben der grundlegenden Begriffe der Mengenlehre entwickelte Dedekind in seinem Aufsatz *Über allgemeine Räume* bereits vor Cantor zentrale Begriffe der mengentheoretischen Topologie. Wir finden bei Dedekind die erste Definition des Begriffs der offenen Menge.

Allgemein kann festgehalten werden, dass Dedekind einer der Ersten, wenn nicht als Erster, den Entwicklungsschritt hin zu einer Topologiesprache vollzogen hat. Darunter verstehen wir die explizite Definition und Verwendung von Begriffen von topologischen Phänomenen und ihre Einbettung in einen Theoriezusammenhang. Dies übersteigt die bloße implizite Verwendung dieser Begriffe, wie wir dies bei Weierstraß vorfinden. Obwohl die ersten Publikationen, die in diesem Lichte zu sehen sind, die Untersuchungen Cantors zur Punktmengentheorie der 1870er Jahre sind, zeugt Dedekinds Nachlass, dass er diesen bereits Jahre zuvor den Entwicklungsschritt zur Topologiesprache vollzogen hat. Da er jedoch seine Untersuchungen weder vollendet und publiziert, noch in der Korrespondenz mit anderen Mathematikern thematisiert hat, hatten diese Arbeiten keinen Einfluss auf die geschichtliche Entwicklung der mengentheoretischen Topologie.

2. **Der axiomatische Ansatz:** Wir konnten feststellen, dass Dedekinds Kettentheorie in **WZ** bemerkenswerte Ähnlichkeit mit den späteren Arbeiten von Hausdorff (1914) und vor allem Kuratowski (1922) aufweist. Dedekind bewegt sich dort in einem allgemeinen Rahmen und beschränkt seine Untersuchungen nicht auf metrische Räume, wie in seinem Aufsatzfragment *Allgemeine Sätze über Räume*. Der Raum der Kettentopologie $\mathcal{S}_\varphi$ wird nicht axiomatisch eingeführt, sondern ergibt sich aus der Definition der *In-sich-Abbildung* φ sowie der entsprechenden Ketten. Dennoch bemerkt Dedekind in #48, dass eine derartige Axiomatisierung sehr wohl möglich ist. Durch die Extensivität, die Isotonie und die Idempotenz der Kette einer Menge, ist der Hüllenoperator vollständig charakterisiert. Das, was er an dieser Stelle vorwegnimmt, sind zum einen die allgemeine Abschlussoperatortheorie von E. H. Moore (1910) als auch im Speziellen die Hüllenaxiome von Kuratowski (1922).

Kapitel 8

Strukturelle Axiomatik

„What does matter, all that really matters, is the fruitfulness and promise of the mathematics itself“

Maddy (2011): S. 137

Im letzten Kapitel haben wir auf die augenscheinliche Ähnlichkeit der kuratowskischen Hüllenaxiome und der charakteristischen Merkmale von Dedekinds Begriff der *Kette einer Menge* hingewiesen. Beachtlich war auch Dedekinds Bemerkung #48 in der er belegt, dass er sich der Bedeutung der Sätze #45, #46 und #47 im Klaren ist. Dedekind schreibt dort, dass der Begriff der Kette einer Menge A_0 aus #44 durch diese Sätze *vollständig charakterisiert* ist. Kuratowski (1922) bezeichnet diese hingegen als Axiome.

Vergleicht man die Arbeiten von Kuratowski (ebd.) und Dedekind (1888), so wird klar, dass dieser Unterschied nicht nur begrifflicher Natur ist. Auch im Rahmen der Kettentheorie wählt Dedekind einen *genetischen Ansatz* indem er den Begriff der *Kette einer Menge* aus mengentheoretischen Eigenschaften und den zwischen diesen Mengen bestehenden Abbildungen ableitet. In unserer Interpretation führt Dedekind zunächst die Kettentopologie, also den Raum selbst, über abgeschlossene Mengen ein. Darauf aufbauend wird im zweiten Schritt der Hüllenoperator $(*)_0$ eingeführt. Die Kette einer Menge definiert er so aus den Begriffen des Raums mittels Bildung eines Durchschnitts. Ein Verfahren, das im Übrigen heute noch in vielen Lehrbüchern der Topologie gängig ist.

Die Bemerkung #48 stellt im Grunde eine strukturelle Definition des Begriffs der *Kette einer Menge* dar. Der Umstand, dass Dedekind diese Bemerkung überhaupt tätigt und zugleich auch darauf hinweist, dass der Begriff durch die genannten Sätze *vollständig charakterisiert* ist, zeugt von einem klaren Verständnis des strukturellen Gehalts des Begriffs.

Einem ähnlichen Sachverhalt begegnen wir auch im Satz #71 bei der Definition des einfach unendlichen Systems $\mathcal{N}$. Auch dieses System ist vollständig charakterisiert durch die Eigenschaften α, β, γ und δ . Ausgehend von der in #66 des §5 *gezeigten* Existenz unendlicher Mengen, formuliert Dedekind den Begriff der abzählbar unendlichen Mengen und stellt einen Zusammenhang zwischen ersteren und dem Begriff der Kette her. Eine Menge N ist dann abzählbar unendlich (oder nach Dedekind *einfach unendlich*), wenn eine injektive Abbildung φ existiert, die die Menge N in sich selbst abbildet, jedoch so, dass die Menge N als Kette eines Elementes

erscheint, welches nicht in $\varphi(N)$ enthalten ist. Dieses Element bezeichnet er als „1“. Das *Wesen* einer abzählbar unendlichen Menge N besteht, so Dedekind, in der Existenz einer Abbildung φ von N und eines Elementes 1, die in moderner Notation folgende Bedingungen erfüllen:¹

$$(\alpha) \quad \varphi(N) \subseteq N$$

$$(\beta) \quad N = 1_0$$

$$(\gamma) \quad 1 \notin \varphi(N)$$

(δ) Die Abbildung φ ist ähnlich.

Vergleicht man diese Eigenschaften mit den Axiomen von Peano, so ist auch hier die Äquivalenz augenscheinlich, ebenso wie der gänzlich unterschiedliche Zugang. Peano selbst bezieht sich in seinen Ausführungen explizit auf Dedekind, wählt jedoch keinen genetischen Zugang wie dieser.

Ein drittes Beispiel ist Dedekinds Ansatz in **SZ**. Auch dort ist sein Zugang genetisch (obgleich nicht konstruktiv im Sinne Kroneckers). Hilbert (1900) dagegen wählt ebenso wie Peano und Kuratowski einen direkten axiomatischen Ansatz.² Er führt gleich zu Anfang jene Axiome ein, die die Menge der reellen Zahlen bestimmen sollen.

In all diesen drei Beispielen unterscheidet sich Dedekinds Methode dadurch, dass er einen genetischen Ansatz wählt. Dennoch ist die Ähnlichkeit zu den zweifellos axiomatischen Arbeiten von Peano, Hilbert und Kuratowski augenscheinlich. Es stellt sich somit die Frage, ob Dedekinds Ansatz axiomatisch ist, ungeachtet seiner genetischen Ausprägung?

Die Beantwortung dieser Frage wirft zwei Problemfelder auf, die in der Literatur große Beachtung gefunden haben. Ich will auf den kommenden Seiten diese Problemfelder als jeweils eine Behauptung charakterisieren, die eine verkürzte und prägnante Fassung gewisser Positionen in der Literatur wiedergeben, obwohl sie in der Form und Klarheit meistens nicht vorzufinden sind:

1. Behauptung: *Dedekinds Vorgehensweise lässt sich nicht als axiomatisch bezeichnen, da er den Begriff „Axiom“ bewusst meidet. Diese Zurückhaltung ist keineswegs zufällig, sondern eine bewusste Wortwahl Dedekinds.*

Wenn wir heute von einem deduktiven System sprechen, so meinen wir üblicherweise ein formales System, das aus einer Menge von Axiomen (oder Grundannahmen) und Schlussregeln besteht, mit denen weitere Aussagen (Theoreme) logisch aus den Axiomen abgeleitet werden können. Das deduktive System Dedekinds in **WZ** unterscheidet sich in einigen wesentlichen Punkten von diesem Verständnis der Axiomatik. Statt Axiome zu verwenden, basiert Dedekind seine Argumentation auf Definitionen und Erläuterungen, deren Gehalt und Stellenwert in seinen Ausführungen variieren.

Dedekind hielt es zeitlebens für angebracht, eine Verbindung zwischen Axiomen und Arithmetik zu vermeiden. Dies hat Autoren wie Klev (2011) und Ferreiros (1999) (der seine Auffassung später änderte) dazu bewogen, Dedekinds Methode den axiomatischen Charakter abzusprechen. Ausgehend von Sieg (1990) haben dagegen Schlimm (2000), Sieg und Schlimm (2005) und Sieg

¹Vgl. Dedekind (1888): S. 359

²Vgl. Hilbert (1900)

(2020) in Dedekinds Ansatz, nichts anderes als die axiomatische Methode im Sinne des frühen Hilbert gesehen.

2. Behauptung: *Axiome gelten in der Mathematik traditionell als grundlegende, nicht ableitbare Annahmen, auf denen ein theoretisches System aufgebaut ist. Bei Dedekind trifft dies nicht zu. Seine Theorie ist nicht durch das Setzen von Anfangsannahmen, sondern durch eine schrittweise (genetische) begriffliche Ableitung gekennzeichnet. Diese zielt darauf ab, mathematische Objekte aus vorhergehenden Begriffen systematisch hervorgehen zu lassen, anstatt sie axiomatisch festzulegen. In diesem Sinne ist Dedekinds Ansatz nicht axiomatisch.*

Neben der Wahl der Begriffe ist es jedoch auch die Methode selbst, die Gegenstand der Diskussion ist. Die zentrale Frage besteht darin, inwiefern die genetische Methode mit der axiomatischen vereinbar ist. Ist es möglich, Dedekinds Methode ungeachtet seines genetischen Zugangs als axiomatisch zu charakterisieren?

Die Beantwortung dieser Fragen hängt in erster Linie von unserem Verständnis von Axiomatik im Allgemeinen ab. Erst eine Analyse dessen, was in der mathematischen Praxis als Axiomatik verstanden wird, eröffnet die Möglichkeit, Dedekinds Methode gerecht zu werden. In diesem Sinne könnte Dedekinds Methode auch axiomatisch in einem modernen Sinne verstanden werden, der von der oben skizzierten traditionellen Auffassung abweicht. Müller-Stach (2017) bezeichnet die Methode deshalb als *quasi-axiomatisch*.³

*„Das axiomatische Denken, wie es später von Peano, Hilbert und anderen entwickelt wurde, war zur Zeit von 1872, als die erste Version des Buches entstand [Der Autor bezieht sich hier auf die erste Version von **WZ**], noch gar nicht vorhanden. Dedekind schreibt in Erklärung 71 über das ‚Wesen‘ eines einfach unendlichen Systems $\mathbb{N}$. In der Essenz hat er damit natürlich genau das gemeint, was wir heute als Axiom nennen würden. Wir haben deshalb Dedekinds Methode [...] **quasi-axiomatisch** genannt.“* [Hervorhebung E. B.]

Wenn man Dedekinds Methode im Licht der frühen axiomatischen Ansätze Hilberts als modern versteht, stellt sich schließlich die Frage, wie Hilberts Äußerungen zur genetischen Methode zu deuten sind:

3. Behauptung: *In seinem Aufsatz „Über den Zahlbegriff“ positioniert sich Hilbert ausdrücklich gegen die genetische Methode und betont deren Gegensatz zu der von ihm vertretenen axiomatischen Vorgehensweise. Dies spricht gegen die Annahme, dass Hilberts axiomatische Methode maßgeblich von Dedekind beeinflusst wurde oder dass beide Ansätze miteinander vereinbar sind.*

Wir gehen nun auf diese drei Behauptungen näher ein.

8.1 Axiomatik ohne „Axiome“

Da Dedekind großen Wert auf klare Begriffe und genaue Definitionen legte, ist es kaum vorstellbar, dass er die Wahl seiner Begriffe dem Zufall überließ oder ihr nur geringe Bedeutung

³Müller-Stach (2017): S. 38; Hervorhebung E. B.

beimaß. Vielmehr ist davon auszugehen, dass seine Begriffswahl, insbesondere in grundlegenden theoretischen Kontexten, Ergebnis einer bewussten und wohlüberlegten Reflexion darstellte. Erkenntnistheoretische und methodologische Motive könnten bei der Verwendung des Begriffs des *Axioms* einen wesentlichen Einfluss ausgeübt haben.

Nach bisherigen Erkenntnissen sind lediglich drei Textstellen bekannt, in denen Dedekind den Begriff des Axioms benutzt:⁴

- (1) In §3 von **SZ** in Bezug auf die Stetigkeit der geometrischen Linie wie in Kapitel 2 ausgeführt.
- (2) Ebenfalls in **SZ**, wenn Dedekind darauf hinweist, dass auch Cantor das Stetigkeitsaxioms der geometrischen Linie anführt.
- (3) In einem Brief an seine Schwester Mathilde vom 11. Juni 1854, wie bereits auf Kapitel 1.1 im Kontext seines Kommentars zu Fichte zitiert.

Alle drei beziehen sich auf Bereiche außerhalb der Arithmetik. Die ersten beiden Punkte stehen im Kontext der Wesensbestimmung der Stetigkeit in **SZ**. Wie in Kapitel 2 bereits ausgeführt wurde, zieht Dedekind die Stetigkeit der geometrischen Linie im Rahmen der Wesensbestimmung der Stetigkeit des reellen Zahlenbereichs heran. Mit dem zweiten Punkt weist er darauf hin, dass auch Cantor die Stetigkeit der geometrischen Linie axiomatisch begründet. Beide Hinweise sind somit der Sphäre der Geometrie zuzurechnen.

Der dritte Punkt bezieht sich auf die Philosophie. Wie in Kapitel 1 besprochen, referenziert Dedekind hier auf einen Grundsatz von Fichte, den er einen Tag zuvor bei der Vorlesung von Hermann Lotze gehört hat.

Bevor wir uns der Bedeutung des *Fehlens der Axiome* für Dedekinds Methode zuwenden, gilt es, in Anlehnung an Ferreirós (2007), einige mögliche Gründe zu erörtern, die Dedekind dazu bewogen haben könnten, in seinen Arbeiten zur Arithmetik den Begriff „Axiom“ bewusst zu vermeiden. Dabei wähle ich gezielt die Formulierung *Begriff vermeiden*, anstatt, wie Ferreirós (ebd.) suggeriert, nach den Gründen für die Entscheidung zugunsten der genetischen Methode gegenüber der axiomatischen zu suchen.⁵ Ich bin zwar überzeugt, dass diese Gründe eine Erklärung für Dedekinds Methode bieten, jedoch nicht, dass sie den axiomatischen Charakter dieser widerlegen. Dedekind nutzt vielmehr die Vorteile der genetischen Methode, um eine theorieimmanente Rechtfertigung für das von ihm erzielte axiomatische Ergebnis zu liefern:

1. **Systematik:** Dedekinds Methode basierte auf der Überzeugung, dass die Arithmetik in letzter Instanz auf die allgemeinen Gesetze des Denkens zurückgeführt werden könne. In dieser Perspektive war sie nicht bloß ein eigenständiges Teilgebiet der Mathematik, sondern eine unmittelbare Ausprägung logischen Denkens. Gewissermaßen war sie ein Spezialfall der Logik selbst. Vor diesem Hintergrund erscheint es konsequent, dass Dedekind keine

⁴Ferreirós (2007) schreibt, dass Dedekind auch im Manuskript „*Die Voraussetzungen der reinen Geometrie der Lage und deren Beziehungen zur Zahlen-Wissenschaft*“ die projektive Geometrie auf Definitionen und *Axiomen* begründen will: „*In his Nachlass one can find the beginnings of a paper on the ‘presuppositions’ of projective geometry and its relations to arithmetic. He presented an axiomatization of the notion of projective space, based on definitions and axioms.*“ Siehe Ferreirós (ebd.): S. 238. Eine Sichtung des Manuskripts im Nachlass zeigte jedoch, dass Dedekind den Begriff *Axiom* dort nicht verwendet.

⁵Vgl. Ferreirós (ebd.): S. 120

Notwendigkeit sah, die Arithmetik durch ein eigenständiges System nicht weiter begründeter Axiome zu fundieren. Die für ihn fundamentalen arithmetischen Aussagen bedurften keiner zusätzlichen postulativen Absicherung, da sie aus der Logik selbst hervorgingen.

2. **Akzeptanz:** Neben den systematischen Erwägungen könnten auch psychologische bei der Wahl der methodischen Herangehensweise eine nicht unerhebliche Rolle gespielt haben. Es erscheint plausibel, dass eine unmittelbare, axiomatisch orientierte Einführung der reellen Zahlen im wissenschaftlichen Kontext des späten 19. Jahrhunderts kaum auf breite Zustimmung gestoßen wäre. Eine derart abstrakte und symbolhafte Darstellungsweise hätte in jener Zeit, etwa um das Jahr 1870, vermutlich den Eindruck erweckt, es handle sich lediglich um ein rein formales Konstrukt, *ein Spiel mit Symbolen*, dem die intuitive und anschauliche Verankerung im mathematischen Denken fehlte. Betrachtet man etwa die Arbeiten, die Dedekind selbst im Vorwort von **SZ** anführt, so bestand deren Anliegen, die reellen Zahlen nicht nur zu charakterisieren, sondern auch zu begründen (oder im Fall von Kronecker zu widerlegen). Wie Ferreirós (ebd.) ebenfalls anführt, kommt in **WZ** auch die Mengenlehre hinzu. Die Akzeptanz dieser hat sich in den Jahren vom Erstentwurf von **WZ** in den Jahren zwischen 1872 und 1880 und Hilberts *Über den Zahlbegriff* im Jahr 1899 erheblich gesteigert. Hilbert, geprägt von der frühen Auseinandersetzung mit der Mengentheorie, konnte sein System präsentieren, ohne den unterstützenden theoretischen Rahmen explizit zu benennen, was bei Dedekind noch erforderlich war.⁶
3. **Theoriereinheit:** Ein weiterer Beweggrund für Dedekinds Entscheidung zugunsten eines genetischen Ansatzes könnte in der bewussten Distanzierung von Kants Konzeption liegen, der den Axiombegriff eng mit der sinnlichen Anschauung verknüpfte. Dedekinds Anliegen bestand jedoch gerade darin, die Arithmetik *ohne fremde Einflüsse* zu begründen.

Ich glaube, dass diese drei Gründe, einzeln oder in ihrer Kombination, Dedekind bewegt haben könnten, bereits seit seinem Habilitationsvortrag einen genetischen Zugang zu den Zahlenbereichen zu wählen. Dies bedeutet jedoch keineswegs, dass einer dieser Gründe die axiomatische Methode ausschließt. Bei den ersten beiden werden im Grunde nur zwei Vorteile der genetischen Methode benannt. Dass ein genetischer Zugang für die geforderte Systematik der Arithmetisierung und des Logizismus im Sinne Dedekinds vorteilhaft ist, ist genauso plausibel wie die Akzeptanz dieser Methode selbst. Zum letzteren Punkt sei nur auf Hilberts Anmerkung über den „pädagogischen Wert“ dieser Methode hingewiesen.

Die Frage der Theoriereinheit bedarf jedoch einer ausführlicheren Elaboration. Bezugnehmend auf diesen Aspekt nannte Ferreiros (1999) Dedekinds Methode *antiaxiomatisch*.⁷ Die Vermeidung des Begriffs des Axioms ist jedoch aus meiner Sicht nicht Ausdruck Dedekinds antiaxiomatischer Auffassung im Allgemeinen, sondern seiner antiaxiomatischen Auffassung im Sinne Kants. Um dies zu verstehen, müssen wir Kants Verständnis des Begriffs Axiom und des weiter gefassten Begriffs *Grundsatz* berücksichtigen:⁸

„Unmittelbar gewisse Urteile a priori können Grundsätze heißen, sofern andere Urteile aus

⁶Vgl. Ferreirós (ebd.): S. 463

⁷Vgl. Ferreiros (1999): S. 247

⁸Kant (1958): S. 541; §34

ihnen erwiesen, sie selbst aber keinem anderen subordiniert werden können. Sie werden um deswillen auch Prinzipien (Anfänge) genannt.“

Ein Grundsatz ist für Kant ein Urteil, das direkt und ohne Zweifel wahr ist. Andere Urteile können aus diesem Grundsatz abgeleitet oder bewiesen werden, aber der Grundsatz selbst kann nicht von etwas anderem abgeleitet werden. Axiome selbst sind spezielle Grundsätze:⁹

„Grundsätze sind entweder intuitive oder diskursive. — Die ersteren können in der Anschauung dargestellt werden und heißen Axiome (axiomata); die letzteren lassen sich nur durch Begriffe ausdrücken und können Akroame (acroamata) genannt werden“

Dabei unterscheiden sich Axiome grundlegend von analytischen Urteilen:¹⁰

„Analytische Prinzipien sind nicht Axiome, denn sie sind diskursiv. Und synthetische Prinzipien sind auch nur dann Axiome, wenn sie intuitiv sind“

Im Allgemeinen sind für Kant mathematische Sätze synthetische Urteile und sind von analytischen Urteilen zu unterscheiden. Bei den letzteren gehört das Prädikat derart zum Subjekt, dass es im Begriff des Subjekts bereits enthalten ist. Falls das Prädikat *gänzlich außerhalb* des Subjekts liegt, so sprechen wir von synthetischen Urteilen. Bei den analytischen Urteilen, so Kant, wird die Verknüpfung zwischen Subjekt und Prädikat somit durch die Identität gedacht (im Falle, dass sie bejahend sind) und bei synthetischen ohne Identität. Analytische Urteile nennt Kant deshalb auch Erklärungsurteile, während synthetische Erweiterungsurteile genannt werden können.¹¹

Wesentlich ist, dass analytische Urteile unsere Erkenntnis nicht erweitern können. Da ihr Gehalt bereits im Subjekt liegt, machen sie, so Kant, nur das bereits Bekannte verständlicher. Anders ist dies bei Erfahrungsurteilen. Diese sind dahingehend *a posteriori*.¹²

Mathematische Sätze sind hingegen für Kant synthetische Urteile *a priori*. Als Beispiel nennt er den arithmetischen Satz

$$7 + 5 = 12$$

Kant widerspricht der Annahme, dieser Satz sei analytisch. In diesem Fall wäre im Begriff der 12 bereits das Prädikat *Summe von 7 und 5 sein* enthalten. Nach Kant ist dies ein Fehlschluss, da nichts darauf schließen lässt, dass die Begriffe der einen Seite der Gleichung in den Begriffen der anderen Seite bereits enthalten sind. Es handelt sich somit um einen synthetischen Satz. Er resultiert jedoch auch nicht aus der Erfahrung und ist somit auch nicht *a posteriori*, sondern *a priori*.¹³ Denn man findet in der Welt nirgends die Erfahrung, dass die Summe der Zahlen 7 und 5 gleichzusetzen mit 12 ist. Für Kant ist die Quelle dieses Urteils in der Anschauung verortet:¹⁴

„Denn ich nehme zuerst die Zahl 7, und indem ich für den Begriff der 5 die Finger meiner Hand als Anschauung zu Hilfe nehme, so thue ich die Einheiten, die ich vorher zusammennahm, um die Zahl 5 auszumachen, nun an jenem meinem Bilde nach und nach zur Zahl 7 und sehe so die Zahl 12 entspringen. [...] wir möchten unsere Begriffe drehen und wenden, wie wir wollen, wir, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen, vermittelst der bloßen Zergliederung unserer Begriffe, die Summe niemals finden könnten.“

⁹Kant (1958): S. 542; §35

¹⁰Kant (ebd.): S. 542; §36

¹¹Vgl. Kant (1956): S. 52

¹²Vgl. Ebd.: S. 53ff

¹³Vgl. Kant (ebd.): S. 54ff

¹⁴Kant (ebd.): S.56

Dedekind sieht dagegen arithmetische Sätze in der Logik begründet. Für der Begründung der Arithmetik bedarf es zu keinem Moment der Anschauung. Die Logik stellt die grundlegenden Gesetze des Denkens bereit, die für eine vollständige Begründung der Arithmetik ausreichen. Dass Dedekind die Anschauung aus der Begründung der Arithmetik ausschließen möchte, erwähnt er sowohl in seinen Arbeiten als auch in seiner Korrespondenz. Dass er dabei nicht nur die räumliche, sondern auch die zeitliche Anschauung meint, stellt er in **WZ** klar:¹⁵

„Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff für gänzlich unabhängig von den Vorstellungen oder Anschauungen des Raumes und der Zeit, daß ich ihn vielmehr für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte.“

In Kapitel 1 wurde die These vertreten, dass Dedekind mit den zentralen Aspekten von Kants transzendentaler Ästhetik zumindest in grundlegender Weise vertraut war. Einerseits wurden diese Inhalte im Rahmen der Vorlesung von Lotze besprochen und andererseits kam Dedekind bei Hamilton und Helmholtz mit kantianischen Standpunkten in Berührung. Beide hatte er nachweislich gelesen. Meines Erachtens besteht somit kein Zweifel, dass er sich im obigen Zitat auf die kantianische Auffassung der Bedeutung der Anschauung für die Mathematik bezieht. Da diese im Begriff des Axioms ihre Verkörperung fand, ist es naheliegend, dass er diesen deshalb vermied, um dem logizistischen Standpunkt Ausdruck zu verleihen. Die Umkehrung, die Dedekind etwa in **SZ** vollzieht, ist eine direkte Abwendung der kantianischen Auffassung der Mathematik. Nicht die Anschauung ermöglicht die *Zahlen-Wissenschaft*, sondern ein rein logischer Aufbau der Zahl-Wissenschaft ist die Voraussetzung einer Untersuchung von Raum und Zeit:¹⁶

„Durch den rein logischen Aufbau der Zahlen-Wissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlen-Reich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen.“

Wenn die Logik die Grundlage des Denkens ist und die Arithmetik ein direktes Produkt dieser, so muss diese sowohl der räumlichen als auch der zeitlichen Anschauung vorgelagert sein und kann nicht selbst durch diese hervorgebracht worden sein. Es ist daher nicht die zeitliche Anschauung, die die Sätze der Arithmetik ermöglicht, sondern es sind umgekehrt eben diese Sätze, die überhaupt die zeitliche Wahrnehmung und Anschauung ermöglichen. Ohne uns in weitere phänomenologische Untersuchungen zu vertiefen, können wir daher festhalten, dass Dedekind die Theoriereinheit der Begründung der Arithmetik sehr ernst nahm. Das *Ende der Größenlehre*¹⁷ war mit seinen grundlagentheoretischen Schriften (als auch den Arbeiten anderer Zeitgenossen) vollbracht und geometrische Evidenz sollte in Zukunft nur als Veranschaulichung und didaktisches Hilfsmittel dienen, nicht jedoch als Begründung der Zahlenbereiche selbst.

Kehren wir zurück zu der ersten Behauptung. Die bisherigen Ausführungen legen die Vermutung nahe, dass Dedekinds Wortwahl tatsächlich nicht zufällig ist und er den Begriff des Axioms aus philosophischen Gründen und in Abgrenzung zu Kant vermeidet. Der zweite Satz der Behauptung kann somit bestätigt werden. Dennoch bedeutet dies nicht, dass seine Methode dadurch weniger axiomatisch oder gar antiaxiomatisch ist. Die Verwendung der Begriffe gibt

¹⁵Dedekind (1888): S. 335

¹⁶Dedekind (ebd.): S. 335

¹⁷Siehe dazu beispielsweise die Ausführungen in Eppe (1999).

wenig Auskunft über die zugrundeliegende Methode. Selbst Euklid, dessen Methode zweifellos axiomatisch ist, verwendet den Begriff des Axioms nicht in seinen Ausführungen. Dennoch sprechen wir von euklidischen Axiomen.¹⁸ Ferreirós (2007) argumentiert auch, dass Dedekind in seinem Manuskript *Die Voraussetzungen der reinen Geometrie der Lage und deren Beziehungen zur Zahlen-Wissenschaft* zur projektiven Geometrie eine Axiomatisierung des Begriffs des projektiven Raums vorlegt, die auf Definitionen und Axiomen basierte.¹⁹ Betrachtet man jedoch das Manuskript selbst, so erwähnt Dedekind dort nicht den Begriff „Axiom“.

Wieso wir ungeachtet dieser Tatsachen Euklids System und auch Dedekinds Manuskript unter einem axiomatischen Gesichtspunkt betrachten, liegt nicht so sehr in den verwendeten Begriffen, sondern in einer klassischen Auffassung von Axiomatik, die unser Urteil einschränkt. Euklids System basiert auf Grundannahmen und leitet aus diesen sämtliche Sätze der Elemente ab. Zumindest ist dies die Grundhaltung, mit der uns als Lesern das Werk präsentiert wird. Bei der klassischen Auffassung geht es somit nicht so sehr um die Wortwahl, sondern um den Aufbau der Theorie. Deshalb wenden wir uns der zweiten Behauptung zu, um zu untersuchen, ob ein genetischer Aufbau einer Theorie Axiomatik grundsätzlich ausschließt.

8.2 Traditionelle und moderne Axiomatik

Bisher wurden drei Vorteile der genetischen gegenüber einer nichtgenetischen Methode im Kontext von Dedekinds Arbeiten genannt. Dass eine Methode nichtgenetisch ist, bedeutet jedoch nicht, dass sie notwendigerweise axiomatisch ist, genauso wenig wie ein genetischer Aufbau einer Theorie die Axiomatik dieser ausschließt. Aus den bisherigen Ausführungen ist ersichtlich geworden, dass der *entweder-oder*-Standpunkt aus einem klassischen Verständnis der Axiomatik herrührt. Der *sowohl-als-auch*-Standpunkt, den ich vertreten möchte, bedingt deshalb eine Relativierung dieser traditionellen Lesart der Axiomatik. Vielmehr ist es berechtigt zu hinterfragen, ob die traditionelle Auffassung allein gültig ist und ob Dedekinds Methode ausschließlich daran gemessen werden sollte, ob sie sich in dieses Schema einordnen lässt.

Dass Dedekinds Theorie nicht in das Raster des „klassischen Modells“ einordnen lässt, bemerkt auch Klev (2011). Diese Einschätzung basiert auf einer Analyse klassischer deduktiver Wissenschaftsmethoden durch Jong und Betti (2010) wonach die klassische wissenschaftliche Methode, bezogen auf ein deduktives System $\mathcal{S}$, durch folgende Eigenschaften bestimmt war:²⁰

- (1) Alle Aussagen und alle Konzepte (oder Begriffe) von $\mathcal{S}$ betreffen eine bestimmte Menge von Objekten oder beziehen sich auf einen bestimmten Seinsbereich.
- (2a) In $\mathcal{S}$ gibt es eine Anzahl sogenannter fundamentaler Konzepte (oder Begriffe).
- (2b) Alle anderen in $\mathcal{S}$ vorkommenden Konzepte (oder Begriffe) sind aus diesen fundamentalen Konzepten (oder Begriffen) zusammengesetzt (oder aus ihnen definierbar).
- (3a) In $\mathcal{S}$ gibt es eine Anzahl sogenannter fundamentaler Aussagen.
- (3b) Alle anderen Aussagen von $\mathcal{S}$ folgen aus oder sind begründet in (oder aus ihnen beweisbar bzw. ableitbar) diesen fundamentalen Aussagen.

¹⁸Vgl. Ferreirós (2007): S. 233

¹⁹Vgl. Ferreirós (ebd.): S. 238

²⁰Risi (2016): 186; eigene Übersetzung

- (4) Alle Aussagen von $\mathcal{S}$ sind wahr.
- (5) Alle Aussagen von $\mathcal{S}$ sind in gewisser Weise universal und notwendig.
- (6) Alle Aussagen von $\mathcal{S}$ sind als wahr erkennbar. Eine nichtfundamentale Aussage ist durch ihren Beweis in $\mathcal{S}$ als wahr erkennbar.
- (7) Alle Konzepte oder Begriffe von $\mathcal{S}$ sind hinreichend bekannt. Ein nicht-fundamentales Konzept ist durch seine Zusammensetzung (oder Definition) hinreichend bekannt.

Klev (2011) bemerkt, dass bei Dedekind keine fundamentalen Aussagen vorzufinden sind. Sämtliche Aussagen folgen vielmehr aus Definitionen oder Begriffen. Dedekinds Methode widerspricht somit den Punkten (3a) und (3b) des klassischen Modells nach Jong und Betti (2010). Dies führte Klev (2011) zum Schluss, sie sei *leicht idiosynkratisch*.²¹

Obwohl diese Bemerkung zutreffend ist, ist die von Jong und Betti (2010) aufgestellte Charakterisierung des klassischen Modells nicht vollumfänglich haltbar. Diese Position vertreten Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022) in Anlehnung an Risi (2016):²²

„It should at least be noted, however, that many mathematicians in the Early Modern Age believed that axioms and postulates were in fact provable from definitions. They were not so much considered to be statements which admitted of no proof as statements which required none (since they were sufficiently evident already in themselves).“

Und in Bezug auf den deutschen Sprachraum:²³

„In Germany the surviving Scholastic idea that all the axioms should ultimately be proven from the definitions also engendered several axiomless textbooks which enjoyed a wide diffusion (the most important representatives of these being Christian Wolff’s, Andreas Segner’s and Wenceslaus Karsten’s German and Latin treatments of elementary mathematics).“

Besonders bei Wolff diagnostizieren Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022) eine Abweichung von der klassischen methodischen Ausgestaltung. Bei ihm findet man, ebenso wie bei Dedekind eine *definitionsbasierte Mathematik* vor.²⁴ Beide Systeme weisen, so Ferreirós und Lassalle-Casanave (ebd.), ungeachtet ihrer inhaltlichen Unterschiede, erhebliche methodische Gemeinsamkeiten auf. Die Begründung eines deduktiven Systems auf Definitionen bei Wolff nimmt grundlegende Charakteristika von Dedekinds Methode vorweg. So schreibt Wolff (1713):²⁵

*„Alles, was sich unmittelbar aus der Betrachtung dessen ergibt, was in einer Definition enthalten ist, wird als Axiom bezeichnet, wenn es aussagt, dass einer Sache eine Eigenschaft zukommt oder nicht zukommt; Postulat hingegen, wenn es behauptet oder verneint, dass etwas möglich ist oder nicht. Zum Beispiel: Aus der Entstehung des Kreises ergibt sich, dass alle von seinem Zentrum zur Peripherie gezogenen Strahlen gleich lang sind, da sie ein und dieselbe Linie in unterschiedlicher Richtung darstellen. Diese Aussage wird daher als Axiom betrachtet. Ebenso **folgt aus derselben Definition**, dass man aus jedem beliebigen Punkt mit jedem beliebigen Abstand einen Kreis zeichnen kann – dies wird unter die Postulate eingeordnet.“* [Hervorhebungen E. B.]

²¹Vgl. Klev (2011): S. 647

²²Risi (2016): S. 602

²³Risi (ebd.): S. 601

²⁴Vgl. Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022): S. 345

²⁵Wolff (1713): S. 9; §30

Offensichtlich folgen bei Wolff (1713) die Axiome aus den Definitionen. Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022) folgern daraus, dass eine wolffische Auffassung eines deduktiven Systems S bestimmte Elemente des „klassischen Modells“ von Risi (2016) beibehält, nämlich die Punkte (1), (2b) und (4)–(7), jedoch die Punkte (2a) und (3) modifiziert. Konkret gibt es in S eine Anzahl sogenannter fundamentaler Begriffe (oder Definitionen). Diese werden jedoch nicht nur als einzelne Basiskonzepte verstanden, sondern als *destillierte Ausdrucksform* des gesamten Inhalts des Systems S . Dies widerspricht dem Punkt (2a). Zudem müssen die sogenannten fundamentalen Aussagen oder Axiome nicht zwangsläufig eine zentrale Rolle im System spielen. Sie werden als unmittelbare Konsequenzen der fundamentalen Begriffe betrachtet – also als eine direkte Ausdrucksform ihres Inhalts, ebenso wie Dedekinds Erklärung #71. Dies wiederum widerspricht dem Punkt (3a). Schlussendlich bedeutet dies, dass sämtliche Aussagen von S nicht aus den Axiomen folgen, wie dies (3b) fordert, sondern aus den grundlegenden Begriffen und Definitionen.²⁶

Entgegen der Auffassung von Klev (2011) schließen Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022) daraus, dass Dedekinds Methode kein Ausnahmefall war und sehen in den Arbeiten von Wolff eine gewisse Ähnlichkeit gegeben. All dies klärt jedoch nur bedingt unsere Ausgangsfrage und bleibt einer traditionellen Sichtweise auf die Axiomatik verhaftet.

Um Dedekinds Methode angemessen zu würdigen und die Frage zu klären, inwieweit sie als axiomatisch im modernen Sinne verstanden werden kann, ist es erforderlich, eine systematische Typologie axiomatischer Methoden zu entwickeln. Eine solche Klassifikation bietet Schlimm (2013), an der sich der weitere Verlauf dieses Kapitels orientiert. Die verbreitete Auffassung, Axiome seien nicht weiter begründbare Wahrheiten, wird dem tatsächlichen mathematischen Umgang mit ihnen nicht gerecht. Schlimm (ebd.) zeigt, dass Axiome häufig im Rahmen eines *orthodoxen* Verständnisses verortet werden, dem zufolge sie als Grundlage für die formale Darstellung einer Theorie dienen. Dieses Verständnis folgt einem idealisierten Modell wissenschaftlicher Theoriebildung, das auf Aristoteles zurückgeht. Axiomatisierung gilt hier als abschließender Schritt, durch den ein bereits entwickeltes Theoriegebäude in geordnete Form gebracht wird.²⁷

Schlimm (ebd.) vertritt die Auffassung, dass Axiomatik als ein erkenntnistheoretisches und methodisches Instrument zu begreifen ist, das in der mathematischen Praxis auf vielfältige Weise eingesetzt werden kann. Axiome übernehmen dabei keine einheitliche Funktion, sondern können je nach Kontext unterschiedliche Rollen erfüllen. Die gängigen Anforderungen, wonach Axiome möglichst wenige, einfach und unmittelbar einleuchtend sein sollten, betrachtet er als idealisierte Zielvorstellungen, die jedoch keineswegs notwendige Bedingungen für ein axiomatisches System darstellen. Zudem betont er, dass sich die Bedeutung von Axiomen keineswegs auf die Begründung und Absicherung mathematischer Theorien beschränkt. Vielmehr haben sie auch eine heuristische Funktion und können als produktive Werkzeuge zur Entdeckung neuer mathematischer Einsichten dienen. Um der Vielfalt axiomatischer Praktiken gerecht zu werden, schlägt Schlimm (ebd.) vor, Axiome²⁸ anhand der drei Dimensionen ihrer Darstellung, ihrer Rolle im Theoriezusammenhang und ihrer Funktion zu analysieren. Diese Unterscheidung ermögliche eine präzisere

²⁶Vgl. Ferreirós und Lassalle-Casanave (2022): S. 350

²⁷Vgl. Schlimm (2013): S. 38

²⁸In seinen Überlegungen nimmt Schlimm (ebd.) auch implizit Bezug auf unsere erste Behauptung zu Dedekind, wonach es relevant wäre, dass er den Begriff des *Axioms* nicht verwendet. Für die Analyse mathematischer Praxis ist es dabei unerheblich, inwieweit sich Mathematiker bestimmter begrifflicher Differenzierungen bewusst sind oder den Ausdruck *Axiom* in einem präzise definierten Sinne verwenden. Siehe Schlimm (ebd.): S. 44

Diskussion verschiedener Anwendungen der Axiomatik in der Mathematik.²⁹ Zunächst können Systeme nach der Ausgestaltung der zugrundeliegenden Sprache klassifiziert werden. Demnach gibt es axiomatische Systeme, die vollends in der natürlichen Sprache formuliert werden. Andere hingegen benutzen Symbole für bestimmte Begriffe. Meistens handelt es sich dabei um die Grundbegriffe der Sprache. Im Falle, dass auch die Schlussregeln eine symbolische Darstellung erfahren, spricht der Autor von einer formalen Sprache. Eng mit der Sprache zusammenhängend, aber dennoch ein eigenes Klassifikationsmerkmal, ist die Ausgestaltung der Schlussregeln im System. Diese können implizit oder explizit sein.

Die Ausgestaltung der Sprache und der Schlussregeln ist unabhängig von der Rolle und der Funktion der Axiome.³⁰ Bei der Rolle unterscheidet Schlimm (ebd.) zwischen einer semantischen und einer syntaktischen Rolle. Einerseits können wir uns darauf konzentrieren, was die Axiome bedeuten. In diesem Fall spielen sie eine semantische Rolle, indem sie ein oder mehrere Modelle beschreiben oder definieren. Ein anschauliches Beispiel dafür sind die Axiomatisierungen von Dedekind und Peano für die natürlichen Zahlen oder auch die axiomatischen Darstellungen von algebraischen Gruppen und Körpern. Zudem können wir auch die Axiome als Sätze betrachten. In diesem Fall übernehmen sie eine syntaktische Rolle, indem sie die Sätze einer Theorie organisieren und darstellen. Hier bestimmen die Axiome (zusammen mit den Schlussregeln) welche Sätze oder Theoreme wir aus ihnen ableiten können. Eine Axiomatisierung ist somit nicht nur eine Festlegung der Grundannahmen einer Theorie, sondern auch eine erste Art der Strukturierung der wissenschaftlichen Sprache, die später durch die Definition neuer Begriffe erweitert werden kann. Ein Beispiel dafür sind Euklids und Hilberts Axiomatisierungen der Geometrie, die oft in diesem Licht betrachtet werden.

Diese beiden Rollen der Axiome müssen nicht voneinander getrennt werden. In Wirklichkeit kann jedes Axiomensystem beide Rollen erfüllen, und häufig tun sie das sogar gleichzeitig. Diese Unterscheidung hängt also vorrangig davon ab, worauf wir unseren Fokus richten, wenn wir mit Axiomen arbeiten. Ein Beispiel dafür ist die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie. In den frühen Phasen dieser Entwicklung wurden die Axiome hauptsächlich in ihrer syntaktischen Rolle verwendet, um aus der Negation von Euklids Parallelpostulat einen Widerspruch abzuleiten. Später, als nach Modellen für diese Theorien gesucht wurde, kam dann die semantische Rolle der Axiome ins Spiel.³¹

Hinsichtlich ihrer Funktion können Axiome auch als präskriptiv oder deskriptiv kategorisiert werden. Schlimm (ebd.) erklärt den Unterschied zwischen deskriptiven und präskriptiven Axiomatisierungen anhand der Bedeutungen der darin enthaltenen primitiven Begriffe. Wenn davon ausgegangen wird, dass die primitiven Begriffe eine Bedeutung haben, die außerhalb des Axiomensystems existiert und unabhängig von diesem ist, betrachtet er die Axiomatisierung als deskriptiv. In diesem Fall spricht er von einer *materiellen* oder *inhaltlichen* Axiomatisierung. Für Schlimm bedeutet eine deskriptive Axiomatisierung, dass die primitiven Begriffe eine vorgegebene Bedeutung haben, die nicht durch das Axiomensystem selbst bestimmt wird.³²

Andererseits, wenn die Bedeutung der primitiven Begriffe vollständig von den Beziehungen

²⁹Vgl. Schlimm (ebd.): S. 39f

³⁰Vgl. Schlimm (ebd.): S. 45

³¹Vgl. Schlimm (ebd.): S. 49

³²Vgl. Schlimm (ebd.): S. 50

abhängt, die durch die Axiome selbst definiert werden, bezeichnet Schlimm (2013) die Axiomatisierung als präskriptiv. In einem präskriptiven Axiomensystem legen die Axiome fest, was das betreffende Fachgebiet ist, und Schlimm (ebd.) spricht in diesem Zusammenhang von „*impliziten Definitionen*“. In diesem Fall bestimmen die Axiome die Eigenschaften, die die Instanzen, die unter den Begriff fallen, erfüllen.³³

Wenden wir uns nun erneut Dedekinds Ansatz zu. Die Definition einfach unendlicher Systeme in #71 erfolgt bei ihm in symbolischer Sprache und auf der Grundlage einer impliziten Schlussweise. Betrachtet man die Struktur und Zielsetzung dieses Systems im Lichte der oben skizzierten Kategorien, so lässt es sich als ein semantisch-präskriptives Axiomensystem einordnen. Es ist semantisch, insofern Dedekind einem genetischen Zugang folgt – ein wesentlicher Unterschied etwa zu den Ansätzen Euklids und Hilberts. Was Dedekind jedoch mit Hilbert verbindet, ist der präskriptive Charakter ihres axiomatischen Vorgehens. Beide definieren zentrale Begriffe nicht explizit, sondern durch ihre Stellung innerhalb eines Systems im Sinne impliziter oder strukturalistischer Definitionen.

Auch wenn Dedekinds System nicht in einem traditionellen Sinn als *axiomatisch* bezeichnet werden kann, erfüllt es doch zentrale Merkmale einer semantisch-präskriptiven Axiomatik. Ob man seinen Zugang als axiomatisch bezeichnet, hängt letztlich davon ab, welches Verständnis von Axiomatik man zugrunde legt. Bezieht man die Vielfalt mathematischer Praxis mit ein, zeigt sich, dass Axiomatik nicht nur auf eine Weise realisiert werden kann. Dedekinds Zugang kann deshalb in dem oben genannten Sinne als *modern axiomatisch* verstanden werden.

8.3 Strukturelle Definitionen bei Dedekind und Hilbert

Die dritte und letzte Behauptung, die wir adressieren werden, bezieht sich auf die Vereinbarkeit von Dedekinds Methode mit Hilberts früher Axiomatik in Hilbert (1899), *Grundlagen der Geometrie*, und Hilbert (1900), „*Über den Zahlbegriff*“. Im Letzteren geht Hilbert auf die aus seiner Sicht methodische Unvereinbarkeit zwischen der genetischen und der axiomatischen Methode ein, wenn er schreibt:³⁴

„*Meine Meinung ist diese: Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug.*“

Betrachtet man jedoch die Methodik Dedekinds und Hilberts in den oben genannten Arbeiten im Detail, so verschwimmen die Unterschiede. Ein Anhaltspunkt stellen hierzu auch die Erläuterungen Hilberts im Rahmen seiner Korrespondenz mit Frege dar.³⁵ Eines der Themen,

³³Vgl. Schlimm (2013): S. 50f

³⁴Hilbert (1900): S. 181

³⁵Es handelt sich dabei um sechs Briefe im Zeitraum zwischen Dezember 1899 und September 1900 zwischen Frege und Hilbert. 1895 fand in Lübeck die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte statt. Im Rahmen dieser Tagung hielt Frege einen Vortrag über den Gebrauch mathematischer Symbolik, in dem er deren Vor- und Nachteile kritisch beleuchtete. Im Anschluss daran kam es zu einem kurzen, aber inhaltlich aufschlussreichen Gespräch zwischen Frege und Hilbert über die Rolle der Symbolik in der Mathematik. Dieses Gespräch bildete den Ausgangspunkt für einen kurzen Briefwechsel im selben Jahr.

Im Jahr 1899 wurden Hilberts *Grundlagen der Geometrie* veröffentlicht. Dies veranlasste Frege erneut zur Aufnahme der Korrespondenz. Anlass war seine grundlegende Skepsis gegenüber der in den *Grundlagen* verfolgten methodologischen Vorgehensweise. Es folgten insgesamt drei Briefe Freges an Hilbert sowie vier – teils sehr knappe

die dort aufgegriffen wird, bezieht sich auf die Abgrenzung von Definitionen und Axiomen. Frege schreibt dazu:³⁶

„Es wäre an der Zeit, meine ich, dass man sich einmal darüber verständigte, was eine Definition ist und leisten soll, und welche Grundsätze beim Definieren demgemäss zu befolgen sind (Meine Grundgesetze der Arithmetik Bd. I § 33). Jetzt scheint mir darin völlige Anarchie und subjektives Belieben obzuwalten.“

Dieser *Anarchie* möchte Frege durch eine klare Abgrenzung der Definitionen von den Axiomen entgegenwirken.³⁷

„Jede Definition enthält Zeichen (einen Ausdruck, ein Wort), das vorher noch keine Bedeutung hatte, dem erst durch die Definition eine Bedeutung gegeben wird. Nachdem dies geschehen ist, kann man aus der Definition einen selbstverständlichen Satz machen, der wie ein Axiom zu gebrauchen ist. Es ist aber daran festzuhalten, dass in der Definition nichts behauptet, sondern etwas festgesetzt wird. Es darf also nie etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder sonst einer Begründung seiner Wahrheit bedarf.“

Ohne die Definition der Begriffe *Punkt*, *Gerade* und *zwischen* haben die Axiome in Hilberts *Grundlagen*, so Frege, keine Bedeutung. Ein Axiom kann nicht auf Begriffen fußen, deren Bedeutung nicht bereits durch Definition *vollständig und unzweideutig* bestimmt ist. Ein Axiom der Geometrie setzt somit gewisse Definitionen der Grundbegriffe voraus. Andererseits schreibt Hilbert in § 6, dass die Axiome der Axiomengruppe der Kongruenz den Begriff der Kongruenz bzw. der Bewegung *definieren*. Für Frege ist dies ein unzulässiger Gebrauch der Axiome. Eine Definition bzw. Festsetzung der Begriffe kann nicht durch Axiome, sondern nur durch Definitionen erfolgen. Frege schließt seine Ausführungen mit einer Forderung nach Verständigung:³⁸

„Zunächst scheint mir jedenfalls eine Verständigung über die Ausdrücke: ‚Erklärungen‘, ‚Definitionen‘, ‚Axiom‘ nötig zu sein, worin Sie von dem mir Geläufigen und auch wohl Hergebrachten stark abweichen, wodurch es mir schwer wird, diese Ausdrücke in Ihrer Darstellung auseinander zu halten und den logischen Bau in voller Klarheit zu erkennen.“

Im Kern trifft dies die weiter oben beschriebene Unterscheidung zwischen einer deskriptiven und präskriptiven Axiomatik. Hilbert selbst weist darauf hin, dass die begriffliche Wahl zwischen *Axiomen* und *charakteristischen Merkmalen* nicht entscheidend ist. Ähnlich argumentiert er auch in seinem 1899 gehaltenen Vortrag *„Über den Zahlbegriff“*. Bereits der Titel verweist auf den damaligen intellektuellen Kontext: Zwölf Jahre zuvor hatte Kronecker unter demselben Titel einen vielbeachteten Aufsatz veröffentlicht, in dem er eine Möglichkeit skizzierte, (algebraische) irrationale Zahlen einzuführen, jedoch ohne das allgemeine Konzept solcher Zahlen anzuerkennen. Hilberts Anliegen bestand demgegenüber darin, gerade diesem allgemeinen Begriff mithilfe der axiomatischen Methode eine tragfähige Grundlage zu verleihen.

Das von Hilbert entworfene Axiomensystem für die reellen Zahlen ist dabei nicht im formal-logischen Stil der späteren mathematischen Logik gehalten, sondern folgt einem algebraischen Zugang. Es setzt die Existenz eines Systems voraus, dessen Elemente die geforderten Axiome

– Antwortschreiben Hilberts. Ab dem Jahr 1900 brach Hilbert die inhaltliche Auseinandersetzung ab, während Frege die Diskussion weiterhin für publikationswürdig hielt. Er bat Hilbert um die Genehmigung zur Veröffentlichung des Briefwechsels, welche dieser jedoch verweigerte. Frege sah sich daher, wie er selbst anmerkt, gezwungen, seine Kritik in einer Reihe von Aufsätzen öffentlich zu artikulieren.

³⁶Gabriel et al. (1980): S. 62

³⁷Gabriel et al. (ebd.): S. 62

³⁸Gabriel et al. (ebd.): S. 64

erfüllen. Die Konsistenz dieses Systems sollte durch entsprechende Beweise sichergestellt werden. Aufgrund dieser vorausgesetzten Existenz sprechen Hilbert und Bernays in den 1920er-Jahren von einer *existenziellen Axiomatik*. Sieg (2020) schlägt vor, diesen methodischen Ansatz als *strukturelle Axiomatik* zu bezeichnen – in bewusster Abgrenzung zur formalen Axiomatik.³⁹ Hilberts schreib in diesem Sinne:⁴⁰

„Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit $a, b, c, \dots$. Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht: [...]“

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich eine deutliche methodische Nähe zwischen Dedekind und Hilbert. Beide bedienen sich struktureller beziehungsweise impliziter Definitionen und verfolgen einen axiomatischen Zugang im modernen Verständnis. Wie Sieg (ebd.) anmerkt, haben weder Hilbert noch Frege einen Vergleich mit Dedekind angestellt.⁴¹

„Neither Hilbert nor Frege remembered that Dedekind presented in his (1888) under the heading *Erklärung* the definition of a simply infinite system: a system $\mathcal{N}$ is simply infinite if and only if there is an element 1 and a mapping φ , such that the characteristic conditions $(\alpha) - (\delta)$ hold for them. “

Ganz im Gegenteil grenzt sich Hilbert in demselben Aufsatz von der genetischen Methode ab.⁴²

„Meine Meinung ist diese: Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode dient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug. “

Wie ist dies zu verstehen? Für Ferreiros (1999) war dies zunächst ein deutlicher Hinweis darauf, dass Dedekinds Methode als *antiaxiomatisch* zu bewerten sei. In der zweiten Auflage seines Werks (Ferreirós 2007) revidierte der Autor jedoch diese Einschätzung auf Grundlage einer vertieften Auseinandersetzung mit Hilberts Verständnis des genetischen Zugangs. Hilberts Verwendung des Begriffs *genetisch* ist mit konstruktivistischen Bedeutungsaspekten verbunden, die sich nicht ohne Weiteres auf Dedekinds Werk übertragen lassen. Eine genauere Analyse von Hilberts Ausführungen macht deutlich, dass sich seine Kritik weniger auf Dedekind selbst richtet, sondern vielmehr auf bestimmte konstruktive Lesarten, wie sie etwa mit Weierstraß' Interpretation von Cantors Fundamentalfolgen verbunden sind. Dies wird besonders deutlich in jenem Abschnitt, in dem Hilbert die Endlichkeit seines Axiomensystems betont – im Gegensatz zur prinzipiell unbegrenzten Anzahl möglicher *Gesetze*, mit denen sich die Elemente einer cantorschen Fundamentalfolge festlegen ließen. Diese Problematik ergibt sich allerdings nur unter der Voraussetzung eines algorithmisch verstandenen Zugangs, nicht aber aus der abstrakt-strukturellen Perspektive Dedekinds, die letztlich auch Cantor selbst übernahm.⁴³

Hilberts methodische Bedenken treffen daher nicht Dedekinds Ansatz. Vielmehr lässt sich zeigen, dass beide in ihrer axiomatischen Grundhaltung weitgehend übereinstimmen.⁴⁴

³⁹Vgl. Sieg (2020): S. 143

⁴⁰Gabriel et al. (1980): S. 62

⁴¹Sieg (2020): S. 62

⁴²Hilbert (1900): S. 181

⁴³Vgl. Ferreirós (2007): S. 460

⁴⁴Weitere Evidenz könnte in Folge der Publikation der *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1894-1917* Ende 2026 vorgelegt werden.

Kapitel 9

Metamathematische Aspekte

Nachdem die strukturelle Axiomatik im vorangehenden Abschnitt analysiert und in ihren theoretischen Zusammenhang gestellt wurde, richtet sich der Blick nun auf metamathematische Aspekte im weitesten Sinne. Die Art, wie Dedekind mathematische Begriffe entwickelt, folgt einer charakteristischen Logik, die wir im Folgenden unter dem Begriff der *Wesensbestimmung* zusammenfassen. Darunter verstehen wir im weitesten Sinne das, was andernorts *konzeptionelle Analyse* genannt wird.¹

Zur Charakterisierung eines axiomatischen Systems genügt es nicht allein auf die abstrakte, genauer strukturalistische Begriffsbildung zu verweisen. Vielmehr legt diese bereits nahe, sich mit Fragen der Konsistenz (die Widerspruchsfreiheit des Systems), der Kategorizität (die eindeutige Bestimmbarkeit der Modelle bis auf Isomorphie) sowie der Vollständigkeit (die Fähigkeit des Systems, jede in ihm formulierbare Aussage entweder zu beweisen oder zu widerlegen) auseinanderzusetzen. Diese metamathematischen Aspekte sind konstitutiv für das, was in der modernen Auffassung unter einer *Axiomatik* verstanden werden kann. Deshalb wenden wir uns nun ihrem Stellenwert in **WZ** aber auch vor allem **SZ** zu.

9.1 Wesensbestimmung

Die Ausgangsfrage der Wesensbestimmung in Bezug auf eine geeignete Axiomatisierung der Arithmetik beschrieb Wang (1957) folgendermaßen:²

„I once asked myself the question: How were the famous axiom systems, such as Euclid’s for geometry, Zermelo’s for set theory, Peano’s for arithmetic, originally obtained? This was to me more than merely a historical question, as I wished to know how the basic concepts and axioms were to be singled out, and, once they were singled out, how one could establish their adequacy.“

Worin besteht die mathematische Praxis, die der Formulierung axiomatischer Systeme vorausgeht? Wie entstehen axiomatische Systeme? Oder konkreter, wie kam Dedekind zu den charakteristischen Merkmalen einfach unendlicher Mengen und des vollständig geordneten Körpers der reellen Zahlen? In Bezug auf Ersteres gibt die Korrespondenz zwischen Keferstein und Dedekind Auskunft:³

¹Vgl. Schlimm (2006): S. 58

²Wang (1957): S. 145

³Müller-Stach (2017): S. 185

„**Wie ist meine Schrift entstanden?** Gewiß nicht in einem Tage, sondern sie ist eine nach langer Arbeit aufgebaute **Synthese**, die sich auf eine **vorausgehende Analyse** der Reihe der natürlichen Zahlen stützt, so wie diese sich, gewißermaßen erfahrungsmäßig, unserer Betrachtung darbietet. Welches sind die von einander unabhängigen Grundeigenschaften dieser Reihe $\mathcal{N}$, d.h. diejenigen Eigenschaften, welche sich nicht aus einander ableiten lassen, aus denen aber alle anderen folgen? Und wie muß man diese Eigenschaften ihres spezifisch arithmetischen Charakters entkleiden, der Art, daß sie sich allgemeineren Begriffen und solchen Tätigkeiten des Verstandes unterordnen, ohne welche überhaupt kein Denken möglich ist, mit welchen aber auch die Grundlage gegeben ist für die Sicherheit und Vollständigkeit der Beweise, wie für die Bildung widerspruchsfreier Begriffserklärungen?“

Dedekind fragt sich, welche grundlegenden Eigenschaften die Zahlenreihe $\mathcal{N}$ ausmachen, also solche, die unabhängig voneinander sind und aus denen sich alle anderen Eigenschaften ableiten lassen. Gleichzeitig will er diese Eigenschaften von ihrem rein arithmetischen Charakter lösen und auf allgemeinere Begriffe und Denkprozesse zurückführen. Die oben erwähnte Analyse umfasst nach Dedekind nicht nur die intuitive Charakterisierung einfach unendlicher Mengen, sondern auch metamathematische Aspekte, die außerhalb der Wesensbestimmung, wie wir sie hier verstehen, liegen, jedoch mit ihr im Zusammenhang stehen.

Autoren wie Sieg (1997) und Schlimm (2013) beschreiben die Wesensbestimmung als *konzeptionelle Analyse* und deuten auf ihre Relevanz für die mathematische Praxis und Dedekind im Speziellen hin:⁴

„Mathematicians often have a more or less clear conception of the objects of their investigations and sometimes they employ axioms to characterize these objects as sharply as possible. If practiced in this sense, axiomatization is a method of conceptual analysis, broadly understood.“

Worin besteht nun diese Analyse in **WZ** und **SZ**? Während in **SZ** motivierende Überlegungen allgegenwärtig sind, sind diese in **WZ** selten. Dedekind führt weiter aus, dass der Ausgangspunkt der Analyse in **WZ** der alltägliche Begriff der natürlichen Zahlen war. Die Frage, die es zu klären galt, war, welche Eigenschaften der intuitiv gefassten Zahlenmenge $\mathbb{N}$ ihren spezifischen *arithmetischen Charakter* verleihen?

Der erste Schritt stellt somit eine Analyse **eines** bereits vorhandenen Modells dar und besteht in einer oder mehrerer Abstraktionsleistungen $\mathfrak{A}_{(n)}$ wonach, für den jeweiligen Kontext relevante Merkmale identifiziert werden. Diese Abstraktionsleistungen sind prekategoriell, da sie keinerlei Anspruch auf Endgültigkeit haben und erst mit der Rechtfertigung im Sinne der Kategorizität ihren Abschluss finden. Die aus der Abstraktionsleistung resultierende Charakterisierung der Objekte kann sich als ungenügend oder zu weit gefasst erweisen. Somit ist die Charakterisierung $\mathfrak{C}_{(n)}$ lediglich eine Momentaufnahme im Rahmen der übergreifenden Wesensbestimmung. Die Abbildung 9.1 gibt dies schematisch wieder. Die erste prekategoriale Abstraktion $\mathfrak{A}_{(1)}$ führt zu einer ersten Charakterisierung $\mathfrak{C}_{(1)}$. Diese stellt sich jedoch als ungenügend heraus, wodurch ein erneuter Versuch, die prekategoriale Abstraktion $\mathfrak{A}_{(2)}$ notwendig wird.

⁴Schlimm (2013): S. 58

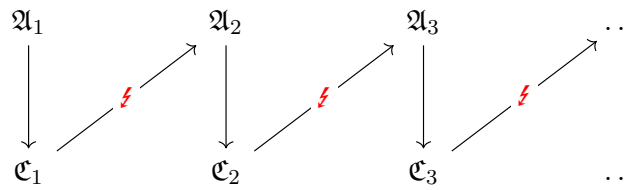


Abbildung 9.1: Fehlgeschlagene Charakterisierungen im Rahmen der Wesensbestimmung

In moderner Terminologie beginnt Dedekind somit mit einer sorgfältigen Analyse eines intendierten Modells⁵. Bereits in Kapitel 2 haben wir ein Beispiel einer fehlgeschlagenen Charakterisierung untersucht. Mit der Menge

$$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \triangle, \diamond, \square, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{\triangle, \diamond, \square\}$$

und der spezifischen Abbildung φ sind wir zum Schluss gekommen, dass die Charakterisierung nicht erfolgreich war. Eine weitere Abstraktionsleistung war erforderlich. Sie bestand in der Entwicklung der Kettentheorie und in der Definition der Kette einer Menge. Die Bedeutung dieser Theorie wird besonders deutlich in Dedekinds Untersuchung der sogenannten *kefersteinschen Mengen* in seiner Schrift *Über den Begriff des Unendlichen*. Ein Beispiel für eine solche Menge wurde bereits in Kapitel 2 betrachtet. Mithilfe der Definition des Hüllenoperators $(*)_0$ und der Bedingung β , nach der $\mathcal{N} = 1_0$ für einfach unendliche Mengen gilt, konnten die *störenden Eindringlinge* aus der untersuchten Menge entfernt werden. Durch die Kettentheorie, also durch eine zusätzliche Abstraktionsstufe, wurden die Elemente $\{\triangle, \diamond, \square\}$ samt den zugehörigen Abbildungsgesetzen als *fremd* erkannt und ausgeschlossen. Die Kettentheorie eröffnet die Möglichkeit, das auf Endlichkeit beruhende Kriterium der Nachfolgerbildung durch ein transfinites Prinzip zu ersetzen.⁶ Auf diese Weise kann eine abschließende Wesensbestimmung einfach unendlicher Mengen erreicht werden. Da diese Wesensbestimmung, wie wir in Kapitel 7 zeigen konnten, auf topologischen Begriffen fußt und um den topologischen Hüllenoperator $(*)_0$ kreist, kann sie auch als *topologische Wesensbestimmung* bezeichnet werden. Eine topologische Wesensbestimmung basiert auf einer prekategorialen Abstraktionsleistung, die sich der mengentheoretischen Topologie bedient.

Der Zusammenhang zwischen Abstraktion und Charakterisierung ist daher ein fortlaufender Prozess und entspricht der Erfahrung mathematischer Praxis. Die Charakterisierung der natürlichen Zahlen durch die Kettentheorie hat sowohl eine ontologische als auch eine erkenntnistheoretische Bedeutung. Streng genommen endet eine Wesensbestimmung jedoch nicht mit einer gelungenen Charakterisierung. Um sie tatsächlich als gültig anerkennen zu können, braucht es ein übergeordnetes Kriterium und eine daraus hervorgehende Rechtfertigung. Dieses Kriterium ist die Kategorizität. Wesensbestimmung und Kategorizität stehen somit in einem engen Verhältnis zueinander.

Auch in **SZ** erfolgt die Wesensbestimmung auf Basis eines intendierten Modells. In diesem Fall ist dies die geometrische Gerade. Aus Gründen, die in Kapitel 3 beschrieben wurden, wird die Stetigkeit dieser axiomatisch eingeführt. Die charakteristischen Merkmale für stetige Gebilde

⁵Vgl. Schlimm (ebd.): S. 59

⁶Weyl (2014) sieht darin einen kritischen Punkt bei Dedekind. Vgl. Weyl (ebd.): S. 67

aller Art, somit auch die reellen Zahlen, werden auf Basis dieses Modells herausgearbeitet. Die Existenz eines Schnitts als Abwandlung der Supremumseigenschaft wird im Rahmen der prekategorialen Abstraktion als das *Wesen* der Stetigkeit identifiziert.⁷

„Ich finde nun das **Wesen der Stetigkeit** in der Umkehrung, also in dem folgenden Prinzip: ‚Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Teilmengen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Teilmenge links von jedem Punkte der zweiten Teilmenge liegt, so existiert ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Teilmengen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.‘“ [Hervorhebung E. B.]

Es kann festgehalten werden, dass die Wesensbestimmung im Sinne einer konzeptuellen Analyse eines intendierten Modells mit dem Ziel der Herausarbeitung charakteristischer Merkmale oder Axiome einen zentralen Bestandteil von Dedekinds methodischem Vorgehen sowohl in **WZ** als auch in **SZ** bildet. Hervorzuheben ist, dass Dedekind in beiden Aufsätzen von *einem* Modell ausgeht, der Prozess jedoch praktisch iterativ verläuft.

9.2 Konsistenz

Im 19. Jahrhundert betrachteten Logiker die Konsistenz eines Begriffs aus semantischer Perspektive, indem sie seine *Modellierbarkeit* als entscheidendes Kriterium ansahen. Auch Dedekind nähert sich dem Konsistenzproblem des Begriffs eines einfach unendlichen Systems aus genau dieser traditionellen Sichtweise.⁸ Ein mathematischer Begriff existiert für Dedekind genau dann, wenn er widerspruchsfrei ist, das heißt, wenn sich aus seinen *charakteristischen Merkmalen* kein Widerspruch ableiten lässt. Dedekind verfolgt somit einen semantischen Konsistenzbegriff.

Sein Standpunkt in Bezug auf die Notwendigkeit eines Konsistenzbeweises in **WZ** wurde bereits in Kapitel 2 untersucht. Er spiegelt sich im Satz #66 und dem Beweis der Existenz unendlicher Mengen wider. Doch welche Rolle spielt dies in der Systematik der Arbeit? Basierend auf dem Existenzbeweis schließt Dedekind auf die Konsistenz des Begriffs unendlicher Mengen.⁹ Der Beweis der Existenz einer unendlichen Menge in #66 stellt die Konsistenz des in #71 definierten Begriffs der unendlichen Mengen dar. In #72 wird bewiesen, dass in jeder unendlichen Menge eine einfach unendliche Teilmenge existiert. Da nun die Existenz einer unendlichen Menge gezeigt wurde, ist entsprechend auch die Existenz einer einfach unendlichen Menge sichergestellt. Über den Satz #72 kann die Konsistenz des Begriffs der unendlichen Mengen auf einfach unendliche Mengen transferiert werden. Somit ist auch der in #71 definierte Begriff konsistent. Wie in „Über den Begriff des Unendlichen“ ausgeführt sieht Dedekind einen direkten Zusammenhang zwischen Existenz und Konsistenz.¹⁰

„Ohne den logischen Existenzbeweis würde es immer zweifelhaft bleiben, ob nicht der Begriff eines solchen Systems vielleicht innere Widersprüche enthält.“

Die Notwendigkeit einer derartigen Beweisführung bekräftigt Dedekind auch im Kontext der Stetigkeit reeller Zahlen im Rahmen seines Briefwechsels mit Lipschitz.¹¹

⁷Dedekind (1872a): S. 322; Hervorhebungen E. B.

⁸Vgl. Sieg (2020): S. 146

⁹Zur Veranschaulichung siehe die Grafik 2.3.

¹⁰Dedekind (1890): S. 275

¹¹Lipschitz (1986): S. 77f

„[...] weil Nichts in der Mathematik gefährlicher ist, als ohne genügenden Beweis Existenzen anzunehmen und zwar erst dann, wenn die Noth, das augenblickliche Bedürfniss es gebet. Woran sollen die erlaubten Existenz-Annahmen erkannt und von den unzähligen unerlaubten unterschieden werden“

In **SZ** finden wir jedoch keinen Existenzbeweis, aus dem die Konsistenz eines vollständig geordneten Systems folgern könnte. Aufbauend auf den Axiomen eines geordneten Körpers und dem Beweis der topologischen Vollständigkeit der Menge aller Schnitte, resultiert die Widerspruchslöslichkeit des Untersuchungsgegenstandes.¹² Einen explizit geführten Existenzbeweis wie in #66 ist deshalb nicht notwendig. Die Konsistenz der Begriffe resultiert bereits aus dem Körper der rationalen Zahlen, der topologischen Vollständigkeit der Menge der Schnitte und ihrer Eindeutigkeit.

9.3 Kategorizität

Dedekind definiert abstrakte Begriffe mittels strukturalistischer Definitionen. Diese Definitionen spiegeln sich in den charakteristischen Bedingungen dieser Begriffe wider und dienen als Ausgangspunkt für die späteren Beweise. Sobald man verschiedene Modelle betrachtet, die unter diese Definitionen fallen, erscheint es naheliegend, die Zusammenhänge zwischen diesen Modellen zu untersuchen. Eine derartige metamathematische Untersuchung zielt unter anderem auf die Kategorizität der Definition ab und bedient sich des Abbildungsbegriffs.¹³

In Anlehnung an Awodey und Reck (2002) heißt eine Theorie T *kategorisch* (relativ zu einer gegebenen Semantik), wenn für alle Modelle M und N von T ein Isomorphismus zwischen M und N existiert.¹⁴

Dedekind liefert einen Kategorizitätsbeweis im Kontext einfach unendlicher Mengen in den Sätzen #132 und #133 von **WZ**.¹⁵

- #132: „Alle einfach unendlichen Systeme sind der Zahlenreihe N und folglich (nach 33) auch einander ähnlich.“
- #133: „Jedes System, welches einem einfach unendlichen System und folglich (nach 132, 33) auch der Zahlenreihe N ähnlich ist, ist einfach unendlich.“

Wir folgen Sieg und Morris (2018) indem wir den übergreifenden Zusammenhang dieser beiden Sätze grafisch darstellen:¹⁶

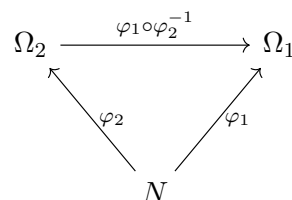


Abbildung 9.2: Kategorizität nach #132 und #133 nach Sieg und Morris (2018)

¹²Vgl. Sieg (1990): S. 264f

¹³Vgl. Sieg und Schlimm (2017): S. 293

¹⁴Vgl. Awodey und Reck (2002): S. 3

¹⁵Dedekind (1888): S. 376

¹⁶Vgl. Sieg und Morris (2018): S. 268

Die Beweisidee besteht in der Formulierung einer Isomorphie zwischen zwei einfach unendlichen Systemen Ω_1 und Ω_2 unter Verwendung des Rekursionssatzes. Das obige kommutative Diagramm gibt diesen Zusammenhang wieder: Falls zwischen N und Ω_1 sowie Ω_2 , respektive eine isomorphe Abbildung φ_1 bzw. φ_2 formuliert werden kann, so ist es stets möglich eine Isomorphie zwischen Ω_1 und Ω_2 zu formulieren. Im obigen Beispiel wäre dies $\Omega_1 = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\Omega_2)$.

Kategorizität fungiert als eine Art *Rechtfertigung* der Wesensbestimmung. Erst durch die Kategorizität sind wir in der Lage, den iterativen Prozess der Wesensbestimmung erfolgreich abzuschließen. Die Isomorphie verschiedener Systeme, deren einzige Gemeinsamkeit die beobachtete Struktur ist, rechtfertigt die vorausgehende Charakterisierung dieser Struktur. Doch worin besteht diese Rechtfertigung? Oder besser gesagt, welche Art der Legitimation ermöglicht die Kategorizität? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die, auf den Kategorizitätsbeweis in **WZ**, folgende Bemerkung #134:¹⁷

„Zufolge der beiden vorhergehenden Sätze 132, 133 bilden alle einfach unendlichen Systeme eine Klasse im Sinne von 34. Zugleich leuchtet mit Rücksicht auf 71, 73 ein, daß jeder Satz über die Zahlen, d. h. über die Elemente n des durch die Abbildung φ geordneten einfach unendlichen Systems N , und zwar jeder solche Satz, in welchem von der besonderen Beschaffenheit der Elemente n gänzlich abgesehen wird und nur von solchen Begriffen die Rede ist, die aus der Anordnung φ entspringen, ganz **allgemeine Gültigkeit** auch für jedes andere durch eine Abbildung θ geordnete einfach unendliche System Ω und dessen Elemente v besitzt, und daß **die Übertragung** von N auf Ω (z. B. auch **die Übersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer Sprache in eine andere**) durch die in 132, 133 betrachtete Abbildung ψ geschieht, welche jedes Element n von N in ein Element v von Ω nämlich in $\psi(n)$ wandelt.“ [Hervorhebung E. B.]

Die allgemeine Gültigkeit der Sätze der Arithmetik ist somit gekoppelt an die Übersetzbarkeit eines arithmetischen Satzes von der Sprache eines Systems in die Sprache eines anderen Systems. Dedekind benutzt den Begriff der *Übersetzung* auch an anderen Stelle, wenn er den Abbildungsbegriff erläutert: „Als ein Beispiel einer Abbildung eines Systems ist schon die Belegung seiner Elemente mit bestimmten Zeichen oder Namen anzusehen.“¹⁸ Falls nun die Übersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer kanonischen Sprache (eines System) in eine andere gänzlich durch eine Abbildung dargestellt werden kann, so hat Dedekind in #134 eine syntaktische Vorstellung von der Übertragung von N auf Ω . Diese Interpretation vertreten Sieg und Morris (2018). Sie versuchen Dedekinds Übersetzungsleistung in #134 über die bereits vorhandenen Abbildungen zu rekonstruieren. Dafür ziehen sie folgendes kommutatives Diagramm heran:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}^N & \xrightarrow{\tau} & \mathfrak{L}^\Omega \\ \downarrow \chi_N^{-1} & & \uparrow \chi_\Omega \\ N & \xrightarrow{\psi} & \Omega \end{array}$$

Abbildung 9.3: Syntaktische Rechtfertigung nach Sieg und Morris (2018, S. 273)

Die Übersetzungsleistung zwischen zwei (genügend reichhaltigen und kanonischen) Sprachen $\mathfrak{L}^N$ und $\mathfrak{L}^\Omega$, die Dedekind in #134 erwähnt, ist mit τ gekennzeichnet. Diese Abbildung wird durch

¹⁷Dedekind (1888): S. 377f; Hervorhebungen E. B.

¹⁸Dedekind (ebd.): S. 348

die Isomorphie ψ zwischen den einfach unendlichen Systemen N und Ω induziert, da sie ebenfalls die Rekursionsbedingungen $\tau(1) = \omega$ und $\tau(\varphi(n)) = \theta(\tau(n))$ (aus #126) erfüllen muss. χ_N und χ_Ω stellen die *Benennungsabbildungen* der jeweiligen Systeme in ihre Sprache dar. Basierend auf der Abbildung 9.3 gilt dann folgender Zusammenhang:¹⁹

$$\tau = \chi_\Omega \circ \psi \circ \chi_N^{-1}$$

Dies bedeutet, dass die Benennungsabbildungen bis auf eine Übersetzungsisomorphie äquivalent sind.²⁰ Die Übersetzungsabbildung τ hängt somit im Wesentlichen von den Benennungsabbildungen.

Die Interpretation orientiert sich vordergründig an **WZ** und scheint zunächst eine plausible Deutung von #134 wiederzugeben. Versucht man jedoch diese auf **SZ** auszuweiten, so ergeben sich unmittelbar Probleme. Wie Sieg und Morris (ebd.) selbst einräumen, ist bei den Benennungsabbildungen eine abzählbar unendliche Kardinalität des Systems und der Sprache notwendig.²¹ Bei reellen Zahlen hingegen haben wir es mit einem überabzählbaren Definitionsbereich zu tun. Anders ausgedrückt, die Sprachen $\mathfrak{L}^N$ und $\mathfrak{L}^\Omega$ würden in diesem Fall nicht ausreichen, um die entsprechenden Systeme zur Gänze zu benennen. Sieg und Morris (ebd.) versuchen, diese Problematik mit einem Verweis auf Dedekinds Korrespondenz mit Weber zu umgehen. Im Brief vom 24. Januar 1888 schreibt Dedekind:²²

„Ob ferner die Zeichensprache ausreicht, um alle neu zu schaffenden Individuen einzeln zu bezeichnen, fällt nicht ins Gewicht; sie reicht immer dazu aus, um die in irgend einer (begrenzten) Untersuchung auftretenden Individuen zu bezeichnen.“

Wie diese Eingrenzung im konkreten Fall der reellen Zahlen aussehen kann, erläutern Sieg und Morris (ebd.) nicht weiter. Die Problematik ist jedoch aus meiner Sicht mit dem obigen Hinweis nicht gelöst. Zum einen spricht Dedekind kurz vor dem obigen Zitat über die natürlichen Zahlen bzw. über **WZ** und zum anderen wissen wir (und Dedekind wusste es im Jahre 1888 ebenso), dass die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen auch in Intervallen nachweisbar ist. Selbst eine *Besprechung* des Intervalls $[1, 2]$ wäre ohne sukzessive (!) Erweiterungen der Sprache nicht möglich. Eine Charakterisierung der Übersetzungsabbildung τ wie wir sie oben vornehmen, bedarf jedoch eines einheitlichen Aktes der Definition, um die gewünschte Rechtfertigung zu gewährleisten. Anders wäre diese Sprache in jedem Schritt ihrer Erweiterung abzählbar unendlich und würde die Vollständigkeit der reellen Zahlen niemals erfassen. Gerade dies ist jedoch das zentrale Anliegen von **SZ**.

Eine andere Möglichkeit wäre es die Bemerkung #134 semantisch zu lesen. Demnach wäre eine Folgerung der Kategorizität die semantische Vollständigkeit der zugrundeliegenden Theorie. Im Fall von **WZ** wäre dies die semantische Vollständigkeit der Theorie der Dedekind-Peano-Axiome (bezeichnen wir diese mit $\mathbb{T}$). Dies bedeutet, dass für alle Sätze α und alle Modelle M und N von $\mathbb{T}$ folgender Zusammenhang gilt:

$$M \models \alpha \Rightarrow N \models \alpha$$

¹⁹Vgl. Sieg und Morris (2018): S. 273

²⁰Vgl. Ebd.: S. 274

²¹Vgl. Sieg und Morris (ebd.): S. 274

²²Dedekind (1888): S. 490

Diese Interpretation wird von Awodey und Reck (2002) vertreten. Diese semantische Vollständigkeit führt, so die Autoren, im weiteren Verlauf von **WZ** zur Rechtfertigung der arithmetischen Grundoperationen. Darin sehen sie eine relative Vollständigkeit der Arithmetik hinsichtlich der Theorie der Dedekind-Peano-Axiome. Demnach ist eine Theorie relativ vollständig hinsichtlich einer Teilmenge der Sprache, falls jeder Satz dieser Teilmenge in der Theorie beweisbar ist. Die Rechtfertigung der Theorie $\mathbb{T}$ ergibt sich nach Awodey und Reck (ebd.) somit aus ihrer semantischen Vollständigkeit.

Obwohl von Awodey und Reck (ebd.) nur am Rande behandelt, ist eine Anwendbarkeit dieser Überlegungen auf die reellen Zahlen denkbar.²³ Dennoch müssen wir festhalten, dass Dedekind wohl kaum semantische Vollständigkeit in der dargelegten Form im Sinn hatte. Allgemein finden wir weder in **WZ** noch in **SZ** oder in seinen späteren Werken Ansätze von syntaktischen oder semantischen Überlegungen. Dedekind war sich der Reichweite und Bedeutung seines Kategorizitätsbeweises bewusst. Dies legen die vorliegenden Quellen zweifellos wieder. Und egal, ob die Rechtfertigung der Wesensbestimmung syntaktischer, semantischer Natur (oder eine Mischung beider) war, sie ermöglichte eine Sicherstellung der Merkmale der untersuchten Struktur.

Unser Anliegen besteht jedoch darin, **SZ** und **WZ** in Vergleich zu setzen. Finden wir in **SZ** ebenfalls etwas wie den Kategorizitätsbeweis vor? Die Antwort ist ganz klar, nein, Dedekind präsentiert keinen Kategorizitätsbeweis in **SZ**. Es gibt jedoch Andeutungen, dass er sich der Kategorizität auch im Kontext der reellen Zahlen durchaus bewusst war. In einem Brief an Lipschitz schreibt er:²⁴

*„Umgekehrt aber wird durch meine Theorie der irrationalen Zahlen das vollkommene **Muster eines stetigen Gebietes** erschaffen, welches eben deshalb fähig ist, jedes Grössen-Verhältniss durch ein bestimmtes in ihm enthaltenes Zahl-Individuum zu charakterisieren.“*
[Hervorhebung E.B.]

Durch die Theorie der Dedekindschnitte in **SZ** wird das Muster eines stetigen Gebiets definiert, dass als Grundlage aller stetigen Gebiete dienen kann:²⁵

*„Worin besteht denn nun eigentlich diese Stetigkeit? In der Beantwortung dieser Frage muß Alles enthalten sein, und nur durch sie wird man eine wissenschaftliche Grundlage für die Untersuchung **aller** stetigen Gebiete gewinnen.“* [Hervorhebung durch Autor]

Das Fehlen eines Kategorizitätsbeweises in **SZ**, wird in der Literatur unterschiedlich interpretiert. Auf Basis seiner stark kantianischen Lesart Dedekinds, vertritt McCarty (1995) die Auffassung, dass ein derartiger Zusammenhang zwischen der Stetigkeit der geometrischen Linie und der Menge der Schnitte streng mathematisch nicht gezeigt werden kann:²⁶

„If SZ truly involves two continua, Dedekind's arithmetical set of reals and a geometrical object he calls 'the straight line,' why doesn't Dedekind attempt to confirm his conception of continuity by proving them isomorphic? To this the short - but by my lights correct - answer is: Dedekind thinks that such an isomorphism would be impossible to establish. This is because the Dedekindian geometrical continuum is conceived neither as mathematical object nor as possible object for strictly mathematical determination. Dedekind holds that the properties of

²³Dies hängt nicht zuletzt mit der Ausweitung der Begrifflichkeiten durch Awodey und Reck (2002) auf höherstufige Logiken zusammen.

²⁴Lipschitz (1986): S. 68; Hervorhebung E.B.

²⁵Dedekind (1872a): S. 322

²⁶McCarty (1995): S. 81

the straight line are not open to any rigorous mathematical demonstration. “ [Hervorhebung durch Autor]

Für diese Interpretation spricht auch der Umstand, dass Dedekind auch auf das Stetigkeitsaxiom von Cantor verweist:²⁷

„Wie ich bei raschem Durchlesen finde, so stimmt das Axiom in § 2 derselben, abgesehen von der äußeren Form der Einkleidung, vollständig mit dem überein, was ich unten in § 3 als das Wesen der Stetigkeit bezeichne.“

Betrachtet man jedoch Cantors Axiom wie in 2.2.2 zitiert, so handelt sich dabei nicht um das Stetigkeitsaxiom wie bei Dedekind, sondern das was axiomatisch eingeführt wird, ist gerade die Abbildung zwischen den reellen Zahlen und der geometrischen Linie. Falls dieser Zusammenhang für Cantor und Dedekind nur axiomatisch eingeführt werden kann, so ist es nicht möglich die Isomorphie mathematisch zu zeigen. Dedekind Sicht auf die Stetigkeit der Geometrie und der axiomatische Charakter des Zusammenhangs könnte ein Grund sein, wieso Dedekind für diese zwei Systeme keinen Kategorizitätsbeweis angestrebt haben mag.

Sieg und Schlimm (2005) betonen, dass Dedekind zum Zeitpunkt der Abfassung von **SZ** noch nicht über die nötigen Mittel verfügte. Vor allem fehlte ihm ein allgemeiner Begriff der Abbildung, wie er für einen Isomorphiebeweis erforderlich gewesen wäre. Warum Dedekind diesen in späteren Auflagen nicht nachgereicht hat, erklären die Autoren mit einem Mangel an Zeit.²⁸

Dass er keinen Kategorizitätsbeweis für alternative Definitionen der reellen Zahlen geführt hat (etwa für Cantors Zugang über Cauchy-Folgen) könnte daran liegen, dass ein solcher Beweis eine eigene Abhandlung verlangt hätte. Dass er die Isomorphie zwischen der geometrischen Geraden und der Menge der Schnitte nicht explizit gezeigt hat, liegt meiner Einschätzung nach weniger an fehlendem Werkzeug oder Zeit, sondern eher daran, dass er einen solchen Beweis nicht für nötig hielt. Aus seiner Sicht war der Zusammenhang durch das axiomatische Vorgehen bereits hinreichend klar. Unbestritten ist jedenfalls, dass Dedekind die Bedeutung der Kategorizität auch in **SZ** erkannt hat – selbst wenn er sie nicht ausdrücklich bewiesen hat.

Wie wir festgestellt haben, werden die strukturellen Eigenschaften durch die Wesensbestimmung herausgearbeitet. Eine erfolgreiche Wesensbestimmung ist gegeben, wenn eine Kategorizität zwischen den einzelnen Systemen $\mathcal{S}_n$ gezeigt werden kann. Dies bedeutet, dass diese Systeme bis auf Isomorphie identisch sind. Die Schöpfung des eigentlichen neuen Objekte der Mathematik geschieht im Anschluss im Rahmen eines postkategorialen Abstraktionsakt ($\mathfrak{A}$). Erst danach wird das neue Objekt $\mathbb{S}$ *hervorgebracht*.

Wie bereits bereits hervorgehoben, dass dieser Prozess nicht geradlinig verläuft. Die Erklärung #71, die eine Abwandlung der Dedekind-Peano-Axiome enthält, ist das Ergebnis einer grundlegenden Auseinandersetzung mit den Eigenschaften der Struktur der natürlichen Zahlen. Die prekategoriale Abstraktionsleistung ist kontextabhängig, da sie bei der Analyse der gegebenen Objekte (geometrische Linie, natürliche Zahlen) anhebt. Dies zeigt sich einerseits in Dedekinds Ausführungen im Brief an Keferstein, andererseits aber auch in der Ausgestaltung seiner Ketentheorie, wie in Kapitel 7 besprochen. Erst wenn diese Eigenschaften erfolgreich herausgearbeitet wurden, können sie ihre Rechtfertigung im Rahmen eines Kategorizitätsbeweises erfahren. Im

²⁷Dedekind (1872a): S. 317

²⁸Vgl. Sieg und Schlimm (2005): S. 156

Anschluss an diese Rechtfertigung erfolgt eine finale und somit postkategoriale Abstraktionsleistung, die die neuen Objekte gleichsam hervorbringt.

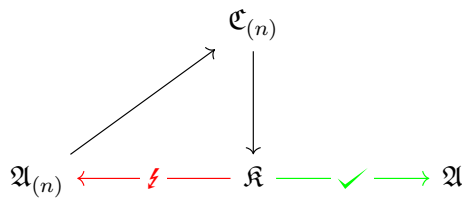


Abbildung 9.4: Dedekinds Schöpfungsprozess

9.4 Vollständigkeit

Die Vollständigkeit der Theorie nimmt in Dedekinds Überlegungen ebenso eine bedeutende Rolle ein. Unter Punkt 9) im Brief an Keferstein bringt er die Vollständigkeit in Bezug auf die natürlichen Zahlen mit dem Rekursionssatz in Verbindung:²⁹

„Endlich: ist es auch möglich, die Definitionen für Zahlen-Operationen widerspruchsfrei für alle Zahlen n aufzustellen? Ja! Dies wird durch den Satz 126 meiner Schrift in der That geleistet. Damit war die Analyse beendet, und der synthetische Aufbau konnte beginnen; er hat mir doch noch Mühe genug gemacht!“

und noch konkreter:

*„Und wie muß man diese Eigenschaften ihres spezifisch arithmetischen Charakters entkleiden, der Art, daß sie sich allgemeineren Begriffen und solchen Tätigkeiten des Verstandes unterordnen, ohne welche überhaupt kein Denken möglich ist, mit welchen aber auch die Grundlage gegeben ist für die Sicherheit und **Vollständigkeit der Beweise**, wie für die Bildung widerspruchsfreier Begriffserklärungen?“*

Beachtenswert ist hier Dedekinds Betonung der „Vollständigkeit der Beweise“. Dieser Ausdruck spiegelt sein Ziel wider, alle stillschweigenden oder verborgenen Annahmen aus seinen Beweisen auszuschließen. Alles, was für die verwendeten mathematischen Begriffe relevant ist – und ebenso, was es nicht ist – soll ausdrücklich genannt werden. Damit knüpft Dedekind auch an den ersten Satz des Vorworts zur Erstausgabe von **WZ** an.³⁰ Dedekind folgert die Vollständigkeit direkt aus der Kategorizität wie der Bemerkung #134 entnommen werden kann. In Abhängigkeit der Lesart dieser kann auch bei der Vollständigkeit syntaktisch oder semantisch verstanden werden. Jedenfalls beinhaltet **WZ** einen, wie Awodey und Reck (2002) es bezeichnen, praktisches Verständnis des späteren Begriffs der Vollständigkeit.³¹

Auch im Kontext der reellen Zahlen ist die Beweisbarkeit der bekannten Resultate für Dedekind ein Qualitätskriterium der Theorie, wie man der Korrespondenz mit Lipschitz entnehmen kann.³²

²⁹Müller-Stach (2017): S. 187

³⁰Vgl. Awodey und Reck (2002): S. 6

³¹Vgl. Awodey und Reck (ebd.): S. 7; Fußnote 20

³²Lipschitz (1986): S. 65

*„Zugleich behaupte ich, dass diese Sätze der Arithmetik zum grössten Theile (eigentlich fast alle) bisher nicht **bewiesen** seien, und um wo möglich den Widerspruch aufs Äusserste zu reizen, sage ich, der Satz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ sei vorher noch nie bewiesen.“* [Hervorhebung durch Autor]

In diesem Zusammenhang sollte auch der Beweis des Satzes in §7 von **SZ** gelesen werden. Dedekind ist der Auffassung, dass dieser und die ihm äquivalenten Sätze ein hinreichendes Fundament der Infinitesimalrechnung darstellen.³³ Durch seinen Beweis ist, nach Auffassung Dedekinds, die Ableitbarkeit sämtlicher bekannter Resultate der Analysis sichergestellt.

³³Vgl. Dedekind (1872a): S. 316

Kapitel 10

Schattenhafte Gestalten

*„Aber ich weiß sehr wohl, daß gar
Mancher in den schattenhaften
Gestalten, die ich ihm vorführe, seine
Zahlen, die ihn als treue und vertraute
Freunde durch das ganze Leben begleitet
haben, kaum wiedererkennen mag [...]“*

Dedekind (1888): S. 336

In der gegenwärtigen philosophischen Auseinandersetzung mit dem Strukturalismus wird Dedekinds Werk häufig herangezogen – und dabei mitunter sehr unterschiedlich, teils sogar widersprüchlich interpretiert. Besonders große Aufmerksamkeit finden seine Äußerungen zur *freien Schöpfung* neuer mathematischer Objekte, wie sie in **SZ**, **WZ** sowie in seinem Briefwechsel mit Weber und Lipschitz zu finden sind. Zwar gibt es Stimmen, die diese Bemerkungen als nebensächlich abtun möchten, doch mehrere Autoren – darunter W. Tait (1998) und Reck (2003) – betonen ausdrücklich ihre Bedeutung. Ihrer Auffassung nach sollte Dedekinds Idee der Schöpfung nicht relativiert oder übergangen werden, da gerade die bewusste Erzeugung (von Systemen) spezifischer mathematischer Objekte ein zentrales Merkmal seines strukturalistischen Denkens darstellt. Wir möchten auf einige dieser Argumente eingehen, ohne eine Klärung der Debatte hier anzustreben. Es soll jedoch im Laufe des Kapitels auf wenig beachteten einen historischen Zusammenhang, eine mögliche Quelle für Dedekinds Verständnis der Abstraktion, hingewiesen werden.

10.1 Dedekinds Abstraktions- und Schöpfungsbegriff

An verschiedenen Stellen haben wir bisher Gründe gefunden, Dedekinds Methode strukturalistisch zu nennen. Allein die Art der Wesensbestimmung samt Kategorizitätsbeweis genügt schon, um auf ein Näheverhältnis Dedekinds zu modernen strukturalistischen Ansätzen zu schließen. Worum es hier nun geht, ist eine Untersuchung der postkategorialen Abstraktion, oder gemeinhin der *Dedekind-Abstraktion*. Das Verständnis dieser Abstraktion bedingt den ontologischen Status der angestrebten mathematischen Strukturen. Was die natürlichen und reellen Zahlen bei Dedekind sind, ist im Wesentlichen von der Interpretation dieser Abstraktionsleistung ab-

hängig. Zudem steht die postkategoriale Abstraktion auch in direktem Zusammenhang mit dem Begriff der (freien) Schöpfung, der an mehreren Stelle in seinem Werk vorgefunden werden kann. Wir wenden uns nun den zentralen Textquellen zu, insbesondere **SZ**, **WZ** sowie dem erhaltenen Briefwechsel, um den Gebrauch und die konzeptuelle Entwicklung des betreffenden Begriffs im Kontext seiner grundlagentheoretischen Überlegungen nachvollziehen zu können.

Bereits in seinem Habilitationsvortrag begegnen wir dem Begriff der Schöpfung im Rahmen seiner allgemeinen wissenschaftstheoretischen Überlegungen zur Erweiterung von Begriffen. Er spricht dort von der willkürlichen Schöpfung im Rahmen der wissenschaftlichen Begriffsbildung, der durch die Wahrheit im Sinne eines Falsifikationskriteriums Einhalt geboten wird. Im Kontext der Mathematik, die durch Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit ihrer Gesetze charakterisiert ist, wird diese Willkür naturgemäß ausgeschlossen. Dort ist von einer Schöpfung nicht mehr die Rede.¹

Dies ändert sich bereits im Manuskript „*Arithmetische Grundlagen*“. Die Bedeutung des Begriffs der Schöpfung wandelt sich im Kontext der Arithmetik und erfährt eine spezifischere inhaltliche Ausrichtung. Dedekind beschreibt dort den Akt der Schöpfung der Ordinalzahlen als Addition der Einheit. Bemerkenswert ist, dass dieser Akt sequenziell ist, d.h. die einzelnen natürlichen Zahlen werden durch eine Sequenz von Schöpfungsakten generiert. Die natürlichen Zahlen als Gesamtheit sind somit nicht das Ergebnis eines, sondern vieler Schöpfungsakte.²

Den Gedanken einer sukzessiven Schöpfung der natürlichen Zahlen behält Dedekind auch in **SZ** bei. Das Zählen, so Dedekind, ist der einfachste Akt und Grundlage der Erschaffung der natürlichen Zahlen.³

*„Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zählens, an, und das Zählen selbst ist nichts anderes als die **sukzessive Schöpfung** der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird; der einfachste Akt ist der Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauffolgenden **neu zu erschaffenden**.“* [Hervorhebungen E. B.]

Doch bereits bei der Konstitution der negativen und rationalen Zahlen spricht Dedekind von einem einzigen Schöpfungsakt:⁴

*„[...] gerade diese Beschränktheit in der Ausführbarkeit der indirekten Operationen ist jedesmal die eigentliche Ursache **eines neuen Schöpfungsaktes** geworden; so sind die negativen und gebrochenen Zahlen durch den menschlichen Geist erschaffen, und es ist in dem System aller rationalen Zahlen ein Instrument von unendlich viel größerer Vollkommenheit gewonnen.“* [Hervorhebungen E. B.]

Diesen einheitlichen Schöpfungsakt charakterisiert Dedekind als frei. Die negativen und rationalen Zahlen werden durch einen freien und einheitlichen Schöpfungsakt generiert.⁵ Inwieweit der Schöpfungsakt nun frei ist, weil er einheitlich ist, kann auch **SZ** nicht abschließend geklärt

¹Vgl. Dedekind (1854): S. 428

²Siehe „*Arithmetische Grundlagen*“. Nachlass; Cod. Ms. Dedekind III, 4, II; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung). Zitiert auch in Sieg und Schlimm (2005): S. 161, Fußnoten 22 und 23.

³Dedekind (1872a): S. 317

⁴Dedekind (ebd.): S. 322

⁵Vgl. Dedekind (ebd.): S. 322

werden. Dieser Schluss wird auch dahingehend relativiert, dass Dedekind zwar auch bei irrationalen Zahlen von einer freien Schöpfung spricht, jedoch in weiterer Folge die Einheitlichkeit des Aktes nicht zwingend vorsieht.⁶

„Jedes mal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so **erschaffen** wir eine neue, eine **irrationale Zahl** α , welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen; wir werden sagen, dass die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder dass sie diesen Schnitt hervorbringt. Es entspricht also von jetzt ab jedem bestimmten Schnitt eine und nur eine bestimmte rationale oder irrationale Zahl und wir sehen zwei Zahlen stets und nur dann als **verschieden** oder **ungleich** an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen.“ [Hervorhebungen E. B.]

Die Frage, ob irrationale Zahlen durch sukzessive Akte hervorgebracht oder in einem einheitlichen Schöpfungsakt erzeugt werden, thematisiert Dedekind unter anderem in seiner Korrespondenz mit Lipschitz. Dort betont er ausdrücklich, dass ihre Entstehung auf einem einzigen, abgeschlossenen Akt der Schöpfung beruht.⁷ Die Forderung nach dieser Einheitlichkeit des Schöpfungsprozesses wird schließlich in Dedekind (1877) explizit formuliert.⁸

Während in **SZ** noch Raum für Interpretationen in Bezug auf den Schöpfungsakt offen ließ, wird der freie und einheitliche Schöpfungsakt in **WZ** ins Zentrum gerückt.⁹

„Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind **freie Schöpfungen** des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“ [Hervorhebungen E. B.]

Angesichts der Tatsache, dass die Zahlen im Zuge einer Abstraktion von jeglichem inhaltlichen Gehalt befreit werden, insbesondere von anschaulichen oder empirischen Bestimmungen, erscheint es gerechtfertigt, sie als eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes zu bezeichnen:¹⁰

„Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffaßt, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zueinander gesetzt sind, so heißen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heißt die Grundzahl der Zahlenreihe N . **In Rücksicht auf diese Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt (Abstraktion) kann man die Zahlen mit Recht eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes nennen.**“ [Hervorhebungen E. B.]

Wie Reck (2003) richtigerweise ausführt, darf die Phrase *freie Schöpfung des menschlichen Geistes* nicht in einem psychologistischen Sinne verstanden werden. Die bisherige Darlegung seines Werkes zeigt, dass Zahlen für Dedekind keinen individuellen Charakter haben. Frei ist diese Schöpfung dadurch, dass sie sich der Methoden der Mengenlehre bedient und nicht deshalb, weil der Schöpfungsakt jedem Individuum frei steht. Dedekind verfolgt in seinen Formulierungen keine psychologisierenden Intentionen. Die eigentliche Herausforderung des Abstraktionsprozesses liegt vielmehr in der Frage nach dem ontologischen Status des resultierenden Abstractums. Diese Problemstellung berührt zentrale Themen der gegenwärtigen strukturalistischen Diskussion in der Philosophie der Mathematik. Im Weiteren sollen ausgewählte Positionen dieser Debatte sowie mögliche inhaltliche Bezüge zu Dedekinds Konzeption knapp skizziert werden.

⁶Dedekind (ebd.): S. 325

⁷Vgl. Lipschitz (1986): S. 64

⁸Vgl. Dedekind (1877): S. 268ff

⁹Dedekind (1888): S. 335

¹⁰Dedekind (ebd.): S. 360

10.2 Strukturalistische Positionen in Bezug auf Dedekind

Der methodologische und der philosophische Strukturalismus sind zwei verwandte, aber deutlich voneinander zu unterscheidende Perspektiven, die sich mit der Natur mathematischer Objekte und ihrer Beziehungen zueinander befassen. Während der methodologische Strukturalismus primär eine Arbeitsweise innerhalb der Mathematik beschreibt, die mathematische Objekte nicht als isolierte Entitäten betrachtet, sondern als Elemente einer Struktur untersucht, geht es beim philosophischen Strukturalismus um grundlegende erkenntnistheoretische und ontologische Fragen zur Existenz und Natur mathematischer Objekte. Beide Ansätze basieren auf der zentralen Idee, dass diese Objekte nicht durch ihre individuellen Eigenschaften bestimmt sind, sondern ausschließlich durch die Relationen, in denen sie zueinander stehen.

Im methodologischen Strukturalismus steht die Art und Weise im Mittelpunkt, wie Mathematiker mit mathematischen Objekten umgehen. Anstatt sich mit der Frage nach dem Wesen von Zahlen, Mengen oder geometrischen Figuren zu beschäftigen, konzentriert sich dieser Ansatz darauf, die Strukturen zu analysieren, in denen solche Objekte eingebettet sind. Die moderne mengentheoretische Topologie bietet, wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, eine Vielzahl solcher Beispiele. Hausdorff (1914) etwa definierte den topologischen Raum nicht explizit, sondern formulierte jene Eigenschaften oder Axiome, die eine Menge erfüllen muss, *damit* sie einen topologischen Raum darstellt. Diese methodische Ausrichtung tritt insbesondere dort deutlich hervor, wo implizite Definitionen im Rahmen einer axiomatischen Mathematik Anwendung finden. Wie in Kapitel 8 aufgezeigt wurde, ist Dedekind nicht lediglich der axiomatischen Methode zurechenbar, sondern zählt vielmehr zu ihren frühen Wegbereitern.¹¹

Der philosophische Strukturalismus hingegen geht über die mathematische Praxis hinaus und thematisiert etwa die Frage, ob mathematische Objekte unabhängig von den Strukturen, in denen sie auftreten, existieren oder ob sie nur als Positionen innerhalb dieser Strukturen Bedeutung haben. Eine zentrale These vieler philosophischer Strukturalisten ist es, dass Zahlen, Mengen oder geometrische Figuren nicht als eigenständige Entitäten verstanden werden können, sondern nur durch die Beziehungen definiert sind, die sie innerhalb eines strukturellen Gefüges einnehmen. So existiert etwa die Zahl Zwei nicht als isoliertes Objekt, sondern nur als eine bestimmte Position innerhalb der Dedekind-Peano-Axiomatik der natürlichen Zahlen.

Der grundlegende Unterschied zwischen methodologischem und philosophischem Strukturalismus liegt also in ihrem jeweiligen Erkenntnisinteresse. Während der methodologische Strukturalismus ein praktischer Ansatz innerhalb der Mathematik ist, der sich auf die Analyse und Anwendung struktureller Eigenschaften konzentriert, handelt es sich beim philosophischen Strukturalismus um eine tiefere Reflexion über die Natur mathematischer Objekte und deren Existenzstatus. Beide Ansätze haben jedoch gemeinsam, dass sie die traditionelle Vorstellung einer eigenständigen, substanziellen Existenz mathematischer Entitäten zugunsten eines relationalen Verständnisses zurückweisen und damit die Mathematik nicht als Ansammlung von Objekten, sondern als Gefüge von Beziehungen begreifen.

Mit dem Ziel, Dedekinds Position im Kontext des philosophischen Strukturalismus einzuordnen, stellt Reck (2003) verschiedene strukturalistische Ansätze einander gegenüber. Er prüft

¹¹Vgl. hierzu beispielsweise Reck (2003).

Dedekind hinsichtlich der zentralen metaphysischen Thesen der jeweiligen Positionen.¹²

Spielarten des *formalistischen Strukturalismus*, wonach die philosophischen Fragen und Implikationen einer strukturalistischen Praxis bedeutungslos sind, es sich um ein reines Spiel von Symbolen handle oder das worauf es ankommt, lediglich das ist, was aus den Axiomen gefolgert werden kann, vertreten alle eine gewisse Form des Eliminativismus. Diese Position steht für eine Ablehnung der ontologischen Relevanz mathematischer Strukturen außerhalb ihrer Instantiierungen. Die bisherigen Ausführungen zu Dedekind zeugen davon, dass er die Frage nach dem Status mathematischer Strukturen keineswegs abgetan habe. Stein (1988) ist überzeugt, dass Dedekind sich nicht primär dafür interessiert, was die Zahlen ihrem Wesen nach sind. Im Gegensatz zu Frege ist er nicht davon geleitet, Zahlen als bestimmte „Objekte“ oder „Entitäten“ zu identifizieren. Er ist vielmehr frei von jener ontologischen Fixierung. Stein (ebd.) antwortet deshalb für Dedekinds auf die Frage was Zahlen sind mit, dass es *gleichgültig ist, was Zahlen an sich sind; entscheidend ist allein, dass sie ein einfach unendliches System bilden*.¹³ Ich teile diese Auffassung nicht. Dedekinds Korrespondenz mit Lipschitz und Weber zeugt, wie in dieser Arbeit zur Genüge hingewiesen, vielmehr davon, dass er der Beantwortung dieser Frage einen besonderen Stellenwert zusprach.

Angesicht der Bedeutung mengentheoretischer Konstruktionen in **SZ** und insbesondere in **WZ** könnte man seinen Standpunkt auch einem mengentheoretischen Strukturalismus gegenüberstellen. Für den *mengentheoretischen Strukturalismus* ist die Mengenlehre der geeignete Rahmen für die Mathematik. Dieser Standpunkt reichert diese weitverbreitete Auffassung jedoch mit einer wesentlichen metaphysischen These an, nämlich, dass Mengen allein Existenz zugesprochen wird. Dies unterscheidet ihn von älteren Ansätzen, die ihre Überlegungen auf einzelne Objekte (wie etwa Zahlen) konzentriert hatten. Der Umstand, dass es verschiedene mögliche *Repräsentationen* mathematischer Objekte durch Mengen gibt, ist für den mengentheoretischen Strukturalismus nicht problematisch. Gerade der Standpunkt, dass all diese Repräsentationen isomorph sind, macht aus ihm eine strukturalistische Position. Obwohl dieser Ansatz Ähnlichkeiten mit Dedekind aufweist, so besitzen wir klare Evidenz, dass Dedekind die metaphysischen Thesen des mengentheoretischen Strukturalismus nicht teilte. Es genügt, auf seine Korrespondenz zu verweisen, in der er unter anderem schreibt:¹⁴

„[...] wo Du sagst, die Irrationalzahl sei überhaupt Nichts anderes als der Schnitt selbst, während ich es vorziehe, **etwas Neues (vom Schnitte Verschiedenes) zu erschaffen**, was dem Schnitte entspricht, und wovon ich sage, daß es den Schnitt hervorbringe, erzeuge. [...] Die rationalen Zahlen erzeugen doch auch Schnitte, aber ich werde die rationale Zahl gewiß **nicht für identisch ausgeben mit dem von ihr erzeugten Schnitte**; und auch nach Einführung der irrationalen Zahlen wird man von Schnitt-Erscheinungen oft mit solchen Ausdrücken sprechen, ihnen solche Attribute erkennen, die auf die entsprechenden Zahlen selbst angewendet gar **seltsam** klingen würden.“

Dieses *seltsame* wird viele Jahre später bei Benacerraf (1965) der Ausgangspunkt der modernen Strukturalismusdebatte sein. Eine Zuordnung Dedekinds zum mengentheoretischen Strukturalismus kann allein aus dem obigen Zitat ausgeschlossen werden. Für Dedekind sind die neuen Strukturen nicht mit ihrer mengentheoretischen Konstruktion identisch. Das oben angeführte

¹²Vgl. Reck (ebd.): S. 370ff

¹³Vgl. Stein (1988): S. 247

¹⁴Dedekind (1932): S. 489f

Zitat legt nahe, dass Dedekind die Auffassung vertrat, Zahlen käme eine Existenzweise zu, die über ihre konkrete mengentheoretische Realisierung hinausreicht. Dedekinds Ausführungen zur Schöpfung der Zahlen können im Kontext eines mengentheoretischen Strukturalismus nicht zufriedenstellend erklärt werden. Wie im weiter oben zitierten Brief an Heinrich Weber vermittelt Dedekind vielmehr den Eindruck, die spezifisch mengentheoretischen Eigenschaften der Schnitte sind für die Begründung der irrationalen Zahlen ebenso schädlich wie die Raumanschauung. Zudem ermöglicht die *ontologische Wirtschaftlichkeit*, die den mengentheoretischen Strukturalismus attraktiv erscheinen lässt, nur eine Verlagerung des Problems. Falls nur Mengen Existenz zugesprochen werden kann, muss dies ebenso begründet werden. Die Objekt-Struktur-Dichotomie verlagert sich im mengentheoretischen Kontext und tritt dort in neuer theoretischer Gestalt zutage.

Eine weitere eliminative Alternative ist mit dem *modaltheoretischen Strukturalismus* gegeben. Der modaltheoretische Strukturalismus versucht mittels modaltheoretischer Überlegungen abstrakte Strukturen, egal wie geartet, zu vermeiden. Zu sagen, dass zwei Systeme eine Struktur gemeinsam haben, bedeutet nichts anderes, als dass sie isomorph sind und dieselben strukturellen Eigenschaften besitzen. Solange man lediglich die strukturellen Eigenschaften betrachtet, ist es egal, welches System man heranzieht. Wie der mengentheoretische Strukturalismus ist auch der modaltheoretische somit eliminativ. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden ist die modallogische Neuinterpretation mathematischer Sätze. Ein mögliches Beispiel wäre: *Es wäre möglich, dass Objekte mit der Struktur der natürlichen Zahlen existieren. In diesem Fall folgt aus der Struktur notwendigerweise, dass es unendlich viele Primzahlenzwillinge gibt.* Reck (2003) sieht eine Parallele zwischen Dedekind und der modaltheoretischen Variante des Strukturalismus in der Bemerkung #134 in **WZ** gegeben.¹⁵ Die Übersetzungsabbildung τ würde so die *Elimination* der Struktur in **WZ** rechtfertigen. Diesen Punkt greifen vor allem Sieg und Morris (2018) auf, wie bereits in Kapitel 9 besprochen.

Andere Quellen hingegen geben wenig Anlass zur Vermutung, dass Dedekind Strukturen abgelehnt habe. Ein möglicher Beleg ist etwa der auf Seite 194 zitierte Absatz aus dem Entwurf von **WZ**. Dort spricht Dedekind explizit von einem abstrakten System $\mathfrak{A}$.

Falls nun im Rahmen der Abstraktion die Struktur erst entsteht, so wäre Dedekinds Position mit dem *ante rem-Strukturalismus* vergleichbar. Dieser vertritt die Auffassung, dass die Struktur eine Universalie ist, die sich von den einzelnen Systemen (Partikularien) unterscheidet. Ihr kommt eine eigenständige Existenz zu. Demnach ist etwa die Struktur der natürlichen Zahlen weder eine Menge noch aus Mengen zusammengesetzt. Ihre Komponenten sind *strukturlose Punkte* oder Positionen, die mit einzelnen partikularen Objekten *befüllt* werden können.

Dieser Ansatz scheint am vielversprechendsten zu sein. Doch seine weittragenden metaphysischen Behauptungen können nur bedingt Dedekind zugeschrieben werden. Für Reck (2003) sind es vorrangig zwei Aspekte, die die beiden Ansätze voneinander unterscheiden. Der erste Unterschied betrifft den jeweiligen Objektbegriff. Während im ante rem-Strukturalismus numerische Entitäten lediglich als Positionen innerhalb einer Struktur aufgefasst werden, schreibt Dedekind diesen Objekten einen eigenständigen Status zu. Wie Reck (ebd.) hervorhebt, scheinen die natürlichen Zahlen für Dedekind derselben ontologischen Kategorie anzugehören wie die konkreten

¹⁵Vgl. Reck (2003): S. 381

Systeme selbst. Für diese Interpretation spricht erneut das Zitat auf Seite 194, in dem Dedekind von einer „*deutlichen Abbildung*“ zwischen der Struktur N und einem bestimmten System $\mathfrak{A}$ spricht.¹⁶

Der zweite mögliche Unterschied betrifft die platonische Grundhaltung des ante rem-Strukturalismus. So schreibt Shapiro: „*Structures exist wheather they are exemplified in a non-structural realm or not.*“¹⁷ Für Reck (ebd.) ist eine gänzlich unabhängige Existenz der Struktur von ihren Systemen nur mit einem formalistischen Existenzbegriff vereinbar. Demnach ist Existenz in der Mathematik gleichbedeutend mit Konsistenz. Es ist jedoch zu bezweifeln, dass Shapiro (1997) dies unter Existenz verstanden hat.¹⁸

Eben dieser formalistische Existenzbegriff greift jedoch Reck (2003) selbst auf. In Opposition zu den bisherigen Ansätzen vertritt er die Auffassung, dass Dedekind einen eigenständigen strukturalistischen Standpunkt vertreten hat. Er bezeichnet diesen als *logischen Strukturalismus*. Zentral ist aus seiner Sicht sein *schwacher* Objektbegriff. Der logische Strukturalismus kann durch folgende Standpunkte charakterisiert werden:¹⁹

- (1) Der Wahrheitswert von arithmetischen Sätzen ist *determiniert* durch einen logischen Prozess, in dem dieser (semantisch) aus den grundlegenden Prinzipien folgt.
- (2) Die Abstraktion stellt ebenfalls einen logischen Prozess dar, indem wir uns auf das beschränken, was durch die grundlegenden Begriffe ausgedrückt werden kann.
- (3) Schöpfung bedeutet dann die eindeutige *Identifikation* eines neuen Systems mathematischer Objekte mit einer bestimmten konzeptionellen Möglichkeit. Dieses System besitzt dann nur arithmetische und keine weiteren Merkmale. Die natürlichen Zahlen sind dann ein System von *sui generis* Objekten.
- (4) Da die Sprache und die Semantik für natürliche Zahlen in einem Zuge determiniert werden, werden auch diese selbst alle auf einmal bestimmt.

Der erste Punkt resultiert aus der semantischen Interpretation der Rechtfertigung, die wir bereits in Kapitel 9.3 kennengelernt haben. Doch wie ist die konzeptionelle Möglichkeit zu verstehen? Wie kommen wir von den Dedekind-Peano-Axiomen zu der konzeptionellen Möglichkeit eines mengenunabhängigen Systems der natürlichen Zahlen? Oder anders gefragt, was ist der Gehalt der Dedekind-Abstraktion im Lichte des logischen Strukturalismus?²⁰

10.3 Dedekind-Abstraktion: eine mögliche historische Quelle

Wie wir sehen konnten, versteht Dedekind unter der Abstraktion eine *Befreiung der Elemente von jedem anderen Inhalt*. W. W. Tait (1986) prägte den Begriff der *Dedekind-Abstraktion*. In seinem Aufsatz „*Truth and Proof: The Platonism in Mathematics*“ schrieb er dazu (wohlgemerkt in einer Fußnote):²¹

¹⁶Vgl. Reck (ebd.): S. 401f

¹⁷Shapiro (1997): S. 89

¹⁸Vgl. Reck (2003): S. 402

¹⁹Vgl. Reck (ebd.): S. 400ff

²⁰Eine weiterführende Antwort und Rekonstruktion bietet beispielsweise Reck (2018b).

²¹W. W. Tait (1986): S. 369

„There is another method of obtaining new types which derives from Dedekind (1888) and which we may refer to as ‚Dedekind abstraction‘. For example, in set theory we construct the system $\langle \omega, \phi, \sigma \rangle$ of finite von Neuman ordinals, where $\sigma x = x \cup \{x\}$. We may now abstract from the particular nature of these ordinals to obtain the system $\mathcal{N}$ of natural numbers. In other words, we introduce $\mathcal{N}$ together with an isomorphism between the two systems. In the same way we can introduce the continuum, for example, by Dedekind abstraction from the system of Dedekind cuts. In this way, the arbitrariness of this or that particular ‚construction‘ of the numbers or the continuum in connection with the numbers in Benacerraf (1965), is eliminated.“

W. W. Tait (1986) bezieht sich hier auf den Aufsatz „What numbers could not be“ von Benacerraf aus dem Jahr 1965 und auf die postkategoriale Abstraktion $\mathfrak{A}$. Über den Charakter dieser Abstraktionsleistung erfahren wir bei Dedekind ebenso wenig wie bei Benacerraf. Eine Interpretation liefern Sieg und Morris (2018). Demnach würde die Abstraktion keine neuen abstrakten Strukturen hervorbringen. *Abstraktion* wird eher als konzeptionelle Abstraktion verstanden. Diese sehen die Autoren bereits in Kants *Logik* beschrieben:²²

„die Abstraktion oder die Absonderung alles übrigen, worin die gegebenen Vorstellungen sich unterscheiden. [...] Wir müssen nicht sagen: etwas abstrahieren (abstrahere aliquid), sondern von etwas abstrahieren (abstrahere ab aliquo). — Wenn ich z. B. beim Scharlach-Tuche nur die rote Farbe denke: so abstrahiere ich vom Tuche [...]“

Eine Verallgemeinerung dieser findet sich bei Lotze, bei dem Dedekind Philosophie lernte. Demnach werden bei der Abstraktion nicht Merkmale fallen gelassen, sondern diese durch allgemeinere ersetzt. Für eine derartige Abstraktion benötigt man jedoch ein Ausgangssystem. Im Falle der natürlichen Zahlen wäre dies ein einfach unendliches System. Sieg und Morris (ebd.) sehen darin die Begründung für #66 in **WZ**. Erst durch diesen wird die Abstraktion überhaupt möglich.

Obleich sich Dedekind hinsichtlich der Rolle der Anschauung in der Arithmetik von Kant abgrenzt, ist sein Verständnis des Begriffs Axiom, wie wir sehen konnten, kantianisch geprägt. Es wäre folglich möglich, dass er sich auch in seiner Auffassung zum Begriff der Abstraktion, unter Einfluss von Lotze, bei dem er Philosophie lernte, von Kant leiten ließ. Sieg und Morris (ebd.) leiten ihre Interpretation aus Änderungen am Manuskript von **WZ** ab. Konkret beziehen sich die Autoren auf folgenden Abschnitt:²³

„Da durch diese Abstraction die ursprünglich vorliegenden Elemente n von N (und folglich auch N selbst in ein neues abstraktes System $\mathfrak{A}$) in neue Elemente n , nämlich in Zahlen umgewandelt sind, so kann man mit Recht sagen, daß die Zahlen ihr Dasein einem freien Schöpfungsacte des Geistes verdanken. Für die Ausdruckweise ist es aber bequemer, von den Zahlen wie von den ursprünglichen Elementen des Systems N zu sprechen, und den Übergang von N zu $\mathfrak{A}$, welcher selbst eine deutliche Abbildung ist, außer Acht zu lassen, wodurch, wie man sich mit Hilfe der Sätze über Definition durch Recursion [...] überzeugt, nichts Wesentliches geändert, auch Nichts auf unerlaubte Weise erschlichen wird.“

Dass dieser Absatz nicht in der finalen Version von **WZ** erscheint, darf jedoch nicht überbewertet werden. Meines Erachtens ist allein der Umstand, dass Dedekind eine Abbildung zwischen N und $\mathfrak{A}$ andeutet, Grund genug, den ontologischen Status von $\mathfrak{A}$ nicht vorschnell reduktionistisch abzutun. Sein Verschwinden kann auch stilistische oder andere, weniger bedeutsame, Gründe haben.

²²Kant (1958): S. 525; Elementarlehre §6, 145-146

²³Manuskript zur dritten Version von **WZ** aus dem Jahr 1887. Aufbewahrt in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. Dedekind, III, 1:III; §5 zitiert nach Sieg und Morris (2018): S. 20f.

Nimmt man die Abstraktionsleistung und Dedekinds Schöpfungsbegriff ernst, im Sinne eines nichteliminativen Strukturalismus, ist der Gehalt dieser zu bestimmen. Ausgehen vom bereits erwähnten *logischen Strukturalismus* unternimmt Reck (2018b) einen Versuch, die Dedekind-Abstraktion inhaltlich zu fassen. Neben eliminativen Varianten, die ihren Ausgangspunkt in der Äquivalenzklasse isomorpher Systeme nehmen, untersucht Reck (ebd.) in Anlehnung an Linnebo und Pettigrew (2014) auch zwei nichteliminative Varianten: eine neo-fregeanische und eine neo-cantorsche Ausprägung der Abstraktion. Die erstere verfolgt einen *bottom-up* Ansatz, führt jedoch bei rigiden Systemen (Systeme mit nichttrivialen Automorphismen) zu widersprüchlichen Ergebnissen. Als Alternative konstruiert Reck (2018b) die zweite Variante, die einen *top-down* Ansatz verfolgt und zudem auch sämtliche Bedingungen erfüllt, die an eine Abstraktion gestellt werden. Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter auf diese Rekonstruktion eingehen, jedoch einen weiteren Aspekt anführen, der methodischen Unterschied zwischen der neo-fregeanischen Abstraktion und der Dedekind-Abstraktion darstellt. Während die Erstere ihren Ausgangspunkt bei mehreren Systemen nimmt, erfolgt die Abstraktion bei Dedekind auf Basis eines Systems. Die Schöpfung der natürlichen Zahlen erfolgt in #71 ausgehend von einem einfach unendlichen System dessen Existenz in #66 bewiesen wurde. Ebenso erfolgt die Schöpfung der reellen Zahlen aus einem vollständig geordneten System, nämlich dem System der Dedekind-Schnitte. Die Dedekind-Abstraktion benötigt zur Generierung der Struktur lediglich **ein** System aus der Menge der isomorphen Systeme. Diesen Umstand bemerkt auch Klev (2018) wenn er die Parallele zwischen Dedekind und Apelt zieht.²⁴ Tatsächlich verweist Dedekind selbst auf Apelt und sein Buch *Die Theorie der Induction* am Ende seines Habilitationsvortrags.²⁵

„[...] und ich breche daher hiermit meinen Vortrag ab, indem ich nur noch hinzufügen will, daß durch einen merkwürdigen Zufall vor wenigen Stunden mir ein soeben erschienenen Buch von Prof. Apelt zugegangen ist, welches, nach einem flüchtigen Anblick zu urteilen, nicht nur eine allgemeine Theorie der Induktion, sondern auch spezielle Anwendungen derselben auf die Mathematik zu geben versucht.“

Apelt thematisiert nicht nur die von Dedekind erwähnte Induktion, sondern auch eine besondere Form der Abstraktion. Abstraktion und Induktion sind für ihn beides Denkwege, bei denen man vom Einzelnen zum Allgemeinen gelangt. Doch sie tun dies auf ganz unterschiedliche Weise: Die Induktion arbeitet mit Beweisen, die Abstraktion dagegen mit einer Zerlegung.²⁶

„Abstraction sowohl wie Induction ist ein regressiver Gedankengang d. h. ein Rückgang vom Besondern zum Allgemeinen. Aber die Art des Regressus vom Besondern zum Allgemeinen ist bei dem einen und bei dem andern Verfahren gänzlich verschieden. Die Induction geht durch Beweise, die Abstraction durch Zergliederung rückwärts.“

Aber auch der Ausgangspunkt beider unterscheidet sich. Während die Induktion alle oder einige Fälle als Ausgangspunkt nimmt, genügt der Abstraktion ein einziger Fall:²⁷

„Zur Induction gehört die Kenntniss aller oder wenigstens vieler Fälle, der Abstraction genügt schon ein einziger Fall.“

²⁴Vgl. Klev (2018): S. 257

²⁵Dedekind (1854): S.

²⁶Apelt (1854): S. 56

²⁷Apelt (ebd.): S. 57

Apelt unterscheidet in seiner Theorie zwei erkenntnistheoretische Verfahren, die beide auf eine Bewegung vom Besonderen zum Allgemeinen abzielen: Induktion und Abstraktion. Während die Induktion auf der systematischen Sammlung und dem Nachweis mehrerer Einzelfälle beruht, vollzieht sich die Abstraktion durch eine analytische Zerlegung eines einzelnen Falles. Beide Denkwege sind regressiv angelegt, unterscheiden sich jedoch grundlegend in ihrer methodischen Ausgestaltung. Die Induktion operiert über empirisch gestützte Beweisführungen, wohingegen die Abstraktion bereits aus einem singulären Beispiel allgemeine Strukturen herauslöst. Damit markiert Apelt eine klare Differenzierung zwischen empirisch-verallgemeinerndem und analytisch-abstrahierendem Denken. Dedekind, der Apelt nachweislich gelesen hat, könnte die postkategoriale Abstraktion in Anlehnung an die apeltsche Abstraktion konzipiert haben. Tatsächlich ist sowohl die Menge der natürlichen Zahlen in **WZ**, als auch die Menge der reellen Zahlen in **SZ** das Ergebnis einer Abstraktionsleistung aus *einem einzigen Fall*.

Kapitel 11

Schlussbemerkungen und Ausblick

Im Verlauf des 19. Jahrhunderts erlebte die Mathematik einen derart tiefgreifenden Wandel, dass in der Fachliteratur nicht selten von einer „zweiten Geburt“ der Disziplin die Rede ist. Dieser Umbruch betraf keineswegs lediglich die Erweiterung des mathematischen Wissensbestandes oder die Verfeinerung praktischer Rechenverfahren. Vielmehr vollzog sich ein fundamentaler Perspektivwechsel: Die Mathematik entwickelte sich zunehmend zu einer abstrakten und strukturalistisch geprägten Wissenschaft. In diesem Zusammenhang ist in der Forschungsliteratur zunehmend von einer *strukturalistischen Wende* die Rede. Richard Dedekinds Zugang zur Arithmetik steht exemplarisch für diese Entwicklung. Sein Denken weist zahlreiche Berührungspunkte mit dem Strukturalismus auf. Dedekinds Konzeption der natürlichen Zahlen, seine Konstruktion der reellen Zahlen sowie sein generelles Verständnis mathematischer Begriffe lassen sich als paradigmatische Ausprägungen eines strukturalistischen Standpunkts interpretieren. Das Aufkommen dieser Denkweise im 19. Jahrhundert wurde in der vorliegenden Arbeit in ausgewählten Aspekten nachgezeichnet.

Ein zentraler Aspekt des Strukturalismus ist die Idee, dass mathematische Objekte nicht durch eine inhärente Natur definiert sind, sondern allein durch die Beziehungen, die sie zueinander haben. Diese Perspektive wird in Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen?* besonders deutlich, wo er die natürlichen Zahlen durch die Struktur einer einfach unendlichen Menge definiert. Die Zahlen werden dort nicht als eigenständige Entitäten betrachtet, sondern als Positionen innerhalb einer relationalen Struktur. Dies ist eine direkte Antizipation des modernen mathematischen Strukturalismus, wie er später von Paul Benacerraf und anderen formuliert wurde, insbesondere in der Auffassung, dass es nicht darauf ankommt, was Zahlen sind, sondern lediglich darauf, wie sie zueinander in Beziehung stehen. Die drei Eingangs genannten Forschungsfragen nahmen sich zum Ziel den Gehalt von Dedekinds Strukturalistischer Methode näher zu untersuchen. Den Ausgangspunkt bildete die erste Forschungsfrage, die darauf abzielte, die spezifische Gestalt des methodischen Strukturalismus im Licht der Methoden und theoretischen Ansätze der modernen mengentheoretischen Topologie vergleichend zu betrachten.

Die vorhandene Sekundärliteratur zu Dedekind hat den Zusammenhang seiner Arbeiten mit der mengentheoretischen Topologie bislang nur am Rande behandelt. Nur dort, wo explizit topologische Fragestellungen im Vordergrund stehen, wird Dedekind als ein früher Wegbereiter der später entstandenen Topologie betrachtet. Eine der Zielsetzungen dieser Arbeit bestand darin, diesen Beitrag in einem breiteren Kontext zu untersuchen. Es konnte gezeigt werden, dass

Dedekind sich nicht nur vereinzelt mit topologischen Phänomenen auseinandersetzt, sondern im Verlauf seiner wissenschaftlichen Tätigkeit eine Entwicklung vollzieht, die als *topologische Wende* bezeichnet werden kann. Erste Ansätze dieser Denkweise finden sich bereits in **SZ**, entfalten jedoch erst mit der Kettentheorie in **WZ** den Anspruch einer systematischen Theorie. Die Analyse ergab, dass Dedekind im Rahmen dieser Theorie im Grunde einen *prototopologischen Raum* beschreibt, der mit wenigen Ausnahmen zentrale Elemente der späteren Definitionen bei Alexandroff (1925) und Kuratowski (1922) vorwegnimmt. Dedekind ist sich der Tragweite seiner Überlegungen durchaus bewusst. Wie später auch Kuratowski, argumentiert er, dass die in **WZ** formulierten Sätze beziehungsweise die sogenannten Hüllenaxiome als charakteristische Merkmale einer topologischen Struktur gelten können. Der Begriff der Hülle, beziehungsweise der *Kette einer Menge*, wird bei Dedekind sowohl explizit als auch implizit in einem strukturalistischen Sinn verwendet. Der Zusammenhang zwischen mengentheoretischer Topologie und Dedekinds Methode erschöpft sich nicht in inhaltlichen Parallelen. Er ist zugleich Ausdruck eines strukturalistischen Zugangs zur Mathematik. Was in dieser Arbeit als Wesensbestimmung bezeichnet wurde und einer konzeptionellen Analyse entspricht, erfolgt bei Dedekind unter Verwendung topologischer Begriffe. Die Wahl der Topologie zur Bestimmung des Wesens der natürlichen und reellen Zahlen ist insofern nachvollziehbar, als sich beide Zahlenbereiche einer rein algebraischen Definition entziehen. Bei den natürlichen Zahlen würde dies zu einer zirkulären Argumentation führen, wie im Rahmen der Analyse seines Habilitationsvortrags diagnostiziert wurde. Bei den reellen Zahlen, insbesondere den transzendenten, ist eine solche Wesensbestimmung definitionsgemäß nicht möglich. Die Antwort auf die erste Forschungsfrage nach der Bedeutung der Topologie für Dedekinds strukturalistische Methode fällt daher eindeutig aus. Die topologische Wesensbestimmung bildet den notwendigen Ausgangspunkt für die Herausarbeitung der strukturellen Eigenschaften der natürlichen und reellen Zahlen.

Dieser Umstand stellt zugleich die erste erkennbare Parallele zwischen den in **SZ** und **WZ** angewandten methodischen Ansätzen dar. Die zweite Forschungsfrage dieser Arbeit zielte darauf ab, den strukturalistischen Gehalt von **SZ** systematisch zu untersuchen. Zu diesem Zweck war es zunächst erforderlich, Dedekinds Zugang zur Axiomatik eingehender zu analysieren. Die strukturalistische Axiomatik, die sowohl in **WZ** als auch in **SZ** erkennbar ist, bringt bestimmte metamathematische Anforderungen mit sich. Diese betreffen insbesondere die Kriterien der Konsistenz, der Kategorizität und der Vollständigkeit. Während sich alle drei Aspekte in **WZ** nachweisen lassen, sind sie in **SZ** nur teilweise und meist implizit vorhanden. Daher wurde in dieser Arbeit untersucht, in welchem Umfang diese metamathematischen Merkmale auch in **SZ** identifizierbar sind. Der fehlende Kategorizitätsbeweis in **SZ** wurde in der Forschungsliteratur wiederholt kritisch hinterfragt. Unsere Analyse zeigt jedoch, dass Dedekind selbst keinen Bedarf für einen expliziten Nachweis sah. Dies lässt sich nicht allein durch das Fehlen geeigneter begrifflicher Mittel wie eines präzisen Abbildungsbegriffs erklären, sondern auch durch die Tatsache, dass Dedekind sowohl die Stetigkeit der geometrischen Linie als auch deren eindeutige Zuordnung zu den reellen Zahlen als axiomatisch gegeben voraussetzt. Ein Verweis auf Cantors Ausführungen legt nahe, dass Dedekind diesen Zusammenhang als hinreichend begründet betrachtete. Insgesamt unterscheidet sich die Methodik in **SZ** nicht grundsätzlich von jener in **WZ**. Sie bleibt jedoch in ihrer formalen Klarheit und systematischen Ausarbeitung hinter der in

WZ entwickelten Konzeption zurück.

Die zentralen Aussagen dieser Arbeit ließen sich nur durch eine eingehende Auseinandersetzung mit dem Nachlass Richard Dedekinds herausarbeiten. Erst durch eine systematische Untersuchung einer Vielzahl von Quellen aus dem Nachlass konnte auch Dedekinds philosophische Position sowie seine Sicht auf den ontologischen Status der postkategorialen Abstraktion näher beleuchtet werden. Die von Dedekind behandelten Zahlenbereiche, jene schattenhaften Gestalten seiner Theorie, gehen für ihn über eine rein mengentheoretische Definition hinaus. Sie entfalten eine Form von Eigenständigkeit, die sich nicht allein aus ihrer formalen Konstruktion ableiten lässt. Wie diese Existenz im Einzelnen zu charakterisieren ist, ergibt sich aus dem verfügbaren Material nicht mit letzter Sicherheit. Dennoch vermitteln die Quellen im Nachlass ein konsistentes Bild davon, dass Dedekind seine Untersuchungen keineswegs als abgeschlossen betrachtete. Vielmehr erscheinen seine Ausführungen als Einladung zur Weiterführung und als Anstoß für zukünftige Arbeiten, die sich vertieft mit Dedekinds Denken und dessen strukturalistischer Dimension auseinandersetzen. Die Analyse zeigt, dass Dedekinds methodische Überlegungen und die philosophische Fundierung seiner Konzepte nicht nur im historischen Kontext bedeutsam sind, sondern auch substanzielle Impulse für gegenwärtige Debatten in der Philosophie der Mathematik liefern. Was bleibt, ist das stille Weiterwirken eines Denkens, das sich nicht erschöpft, sondern öffnet. Dedekinds Werk hinterlässt nicht nur fertige Antworten, sondern auch Spuren, denen zu folgen sich lohnt.

Anhang A

Zeitangaben

A.1 Zeitangaben zu Dedekind

TIMELINE 1: *Richard Dedekind (Auswahl)*

- 1831 • Geburt in Braunschweig (6. Oktober)
- 1848 • Studium der Mathematik am Collegium Carolinum in Braunschweig
- 1850 • Studienbeginn in Göttingen
- 1850 • Vorlesung *Methode der kleinsten Quadrate* bei Gauß
- 1852 • Promotion bei Gauß über Euler-Integrale
- 1854 • Habilitationsvortrag
- 1855 • Begegnung mit Dirichlet in Göttingen
- 1858 • Berufung ans Polytechnikum Zürich
- 1858 • Erste Arbeiten an *Stetigkeit und irrationale Zahlen*
- 1862 • Rückkehr nach Braunschweig, Professur
- 1862 • Korrespondierendes Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften
- 1863 • Edition von Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie* mit eigenen Ergänzungen
- 1871 • Supplement X zur zweiten Auflage von Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie*
- 1872 • Veröffentlichung von *Stetigkeit und irrationale Zahlen*
- 1872-78 • Erster Entwurf von *Was sind und was sollen die Zahlen?*
- 1876 • Edition von *Riemanns gesammelten mathematischen Werken* zusammen mit Heinrich Weber
- 1877 • Veröffentlichung von *Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques*
- 1879 • Supplement XI zur dritten Auflage von Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie*
- 1880 • Korrespondierendes Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften
- 1881 • Veröffentlichung der Theorie der algebraischen Zahlen
- 1882 • Zusammenarbeit mit Heinrich Weber
- 1888 • Veröffentlichung von *Was sind und was sollen die Zahlen?*
- 1890 • Briefwechsel mit Keferstein
- 1896 • Emeritierung
- 1900 • Korrespondierendes Mitglied der Académie des sciences in Paris
- 1916 • Tod in Braunschweig (12. Februar)
- 1917 • Veröffentlichung ausgewählter Manuskripte aus dem Nachlass
- 1930 • Emmy Noether ediert und publiziert Teile von Dedekinds Nachlass

Abbildung A.1: Zeitstrahl zu Leben und Werk Richard Dedekinds (Auswahl)

A.2 Zeitangaben zur Entwicklung der Topologie bis 1922

TIMELINE 2: *Entwicklung der Topologie bis 1922 (Auswahl)*

-
- 1736 • Euler löst das Königsberger Brückenproblem – Ursprung der Graphentheorie
 - 1827 • *Barycentrisches Calcul* von Möbius
 - 1848 • Listing verwendet erstmals den Begriff Topologie (statt Analysis Situs)
 - 1871 • Kleins *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*
 - 1872 • Kleins Vortrag *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*
 - ab 1872 • Cantors Arbeiten zur Punktmengentheorie
 - 1895 • Poincaré veröffentlicht *Analysis Situs* – Begründer der algebraischen Topologie
 - 1898 • Borel entwickelt Borelmengen – entscheidend für die Maß- und Mengentheorie
 - 1899 • Baire *Sur les fonctions de variables réelles*
 - 1901 • Fréchet definiert metrische Räume im abstrakten Sinn
 - 1902 • Lebesgue entwickelt Maßtheorie, zentrale Grundlage für moderne Analysis und Topologie
 - 1906 • Fréchet verwendet *Topologie* im modernen Sinn (abstrakte Strukturen)
 - 1907 • Brouwer führt das Konzept der Homotopie ein
 - 1909 • Lusin und Suslin untersuchen analytische Mengen
 - 1911 • Brouwer zeigt den topologischen Fixpunktsatz für die 2-Sphäre
 - 1912 • Brouwer formuliert den Satz über Invarianz der Dimension
 - 1913 • Alexandrow beginnt mit Arbeiten zur Netztheorie
 - 1914 • Baire-Kategorien-Theorie wird systematisiert
 - 1914 • Hausdorff definiert topologische Räume, inkl. Trennungsaxiomen
 - 1922 • Kuratowski formuliert die Axiome topologischer Räume und den Abschlussoperator

Abbildung A.2: Zeitstrahl zur Entwicklung der Topologie bis Kuratowski (1922) (Auswahl)

Anhang B

Überblick über relevante Primärquellen

Zur Wahrung des Überblicks werden für einige Arbeiten Dedekinds in der Literatur bereits übliche Abkürzungen verwendet. Die folgende Liste enthält eine Übersicht über die Primärquellen, denen in der vorliegenden Arbeit besondere Bedeutung zukommt. Der kurze Kommentar im Anschluss beinhaltet Informationen zur Datierungen sowie den Stellenwert in der vorliegenden Arbeit:

(1) Dissertation, Habilitation und Habilitationsvortrag:

- (1.i) **R. Dedekind (1852):** “Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1930)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 1. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 1–26.

Kommentar: Dissertation verfasst bei Gauß.

- (1.ii) **R. Dedekind (1855):** “Ein Satz aus der Theorie der dreiachsigen Koordinatensysteme”. In: *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 1. Reprint 1930; erstmals erschienen in *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 50, S. 272–275 (1855). Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 32–35.

Kommentar: Dieser Aufsatz ist Dedekinds ein Jahr zuvor verfassten Habilitationsschrift zugehörig zu sehen. Diese trägt jedoch den Titel „Über die Transformationsformeln für rechtwinklige Koordinaten“.¹

- (1.iii) **R. Dedekind (1854):** “Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Habilitationsvortrag gehalten am 30. Juni 1854, posthum veröffentlichtes Manuskript. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 433–443.

Kommentar: Traditionell musste der Habilitationsvortrag zu einem anderen Thema als dem der Habilitationsschrift erfolgen. Vorsitzender der Kommission war Gauß. Im Vorwort zu *Was ist und was sollen die Zahlen* nimmt Dedekind Bezug auf diesen Vortrag.

(2) Manuskripte zu den Grundlagen der Arithmetik aus den Nachlass:

- (2.i) „*Arithmetische Grundlagen*“. Nachlass; Cod. Ms. Dedekind III, 4, II; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

¹Vgl. Müller-Stach (2017): S. 20

Kommentar: Dieses Manuskript nimmt das Thema der Zahlenbereichserweiterungen des Habilitationsvortrags erneut auf. Im Nachlass sind drei Versionen zu finden, von denen die dritte eine methodische Besonderheit aufweist. Dort nutzt Dedekind explizit den Abbildungsbegriff zur Emanzipation der Nachfolgeroperation von der Addition. Einige Auszüge aus dem Manuskript sind zu finden in Sieg und Schlimm (2005).²

- (2.ii) „*Die Schöpfung der Null und der negativen Zahlen*“. Nachlass, Cod. Ms. III, 4, I; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

Kommentar: Das Manuskript behandelt die Zahlenbereichserweiterungen um die negativen Zahlen und die Null. Wir begegnen hier einer Zweiteilung der Untersuchung in *Analysis* und *Synthesis*. Die vollständige Transkription ist zu finden bei Schlimm (2000): S. 98-100.

- (2.iii) „*Ganze und rationale Zahlen*“. Nachlass, Cod. Ms. Dedekind III,4,I; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

Kommentar: Dedekind führt hier die ganzen und rationalen Zahlen über natürliche Zahlenpaare (m, n) ein. Es werden die Eigenschaften und Operationen für diese neuen Zahlenbereichen gezeigt. Eine vollständige Transkription ist zu finden bei Schlimm (ebd.): S. 101-106.

- (2.iv) „*Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen*“. Nachlass; Cod. Ms. Dedekind III, 2, I; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

Kommentar: Erste Seite abgedruckt in Dugac (1976) auf S. 315.

(3) Quellen im Zusammenhang mit *Stetigkeit und irrationale Zahlen*:

- (3.i) **R. Dedekind (1871a):** „Intervalle“. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Hrsg. von P. Dugac. Nachlass, Cod. Ms. III, 10; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, vermutlich verfasst im Jahr 1871. Paris: Vrin, S. 209.

- (3.ii) **R. Dedekind (1871b):** „Stetigkeit und irrationale Zahlen [1. Entwurf]“. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Hrsg. von P. Dugac. Nachlass, Cod. Ms. III, 17; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, verfasst im Zeitraum 1871-1872. Paris: Vrin, S. 203–209.

- (3.iii) **[SZ] - R. Dedekind (1872a):** „Stetigkeit und irrationale zahlen“. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 315–334.

(4) Quellen im Zusammenhang mit *Was sind und was sollen die Zahlen?*:

- (4.i) **R. Dedekind (1872b):** „Was sind und was sollen die Zahlen? [1. Entwurf]“. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Nachlass, Cod. Ms.

²Vgl. Sieg und Schlimm (2005): S. 161, Fußnoten 22 und 23.

III, 1; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, verfasst im Zeitraum 1872-1878. Paris: Vrin, S. 293–309.

- (4.ii) **R. Dedekind (1887b)**: “Was sind und was sollen die Zahlen? [3. Entwurf]”. Nachlass, Cod. Ms. III, 1, III; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Niederschrift vermutet im Jahr 1887.
- (4.iii) **R. Dedekind (1887a)**: “Was sind und was sollen die Zahlen? [2. Entwurf]”. Nachlass, Cod. Ms. III, 1, II; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).
- (4.iv) **WZ** - **R. Dedekind (1888)**: “Was sind und was sollen die Zahlen?” In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 335–391.

(5) Manuskripte mit topologischem Inhalt aus dem Nachlass:

- (5.i) **R. Dedekind (1863)**: “Allgemeine Sätze über Räume”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1930)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Posthum veröffentlichtes Manuskript, datiert auf den Zeitraum 1863–1873. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 353–355.
- (5.ii) **R. Dedekind (1891)**: “stetiges System aller Abbildungen der natürlichen Zahlenreihe $\mathbb{N}$ in sich selbst”. In: *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 2. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 371–372.
- (5.iii) **R. Dedekind (1892)**: “Beweis und Anwendung eines allgemeinen Satzes über mehrfach ausgedehnte stetige Gebiete”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Bd. 3. Posthum veröffentlichtes Manuskript 1892. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 356–370.

Anhang C

Die Korrespondenz mit Keferstein: historischer Kontext ihrer Entstehung

Im Jahr 1890 wurde in Hamburg das 200-jährige Bestehen eines der ältesten mathematischen Vereine Deutschlands gefeiert. Der Verein wurde im Jahr 1690 von Heinrich Meisner gegründet, mit dem Ziel, den fachlichen Austausch unter Mathematikern zu fördern und die Beschäftigung mit mathematischen Fragestellungen systematisch zu pflegen.¹ Im Zuge dessen wurde von der Gesellschaft eine Festschrift herausgegeben, die in ihrem zweiten Teil auch den kurzen Aufsatz des Hamburger Oberlehrers Hans Keferstein mit dem Titel „Über den Begriff der Zahl“ enthielt. In diesem Aufsatz rezensierte Keferstein Dedekinds **WZ** und Freges *Grundlagen der Arithmetik*. Beide Schriften kommentierte Keferstein in einer, wie es Dedekind selbst später ausführt, *aner-kennenden Weise*², übt jedoch auch Kritik an gewissen Stellen und gab Verbesserungsvorschläge. Die genannte Kritik wie auch viele seiner weiterführenden Bemerkungen deuten darauf hin, dass die methodische Vorgehensweise Dedekinds nicht in ihrer konzeptionellen Tiefe erfasst wurde. Wir fassen einige wesentliche Punkte hier zusammen:

- (1) **Kritik am Beweis von #66:** Angesichts des bisher Gesagtem erscheint Kefersteins Kritik am Beweisgang des Satzes #66, wonach unendliche Mengen existieren, überraschend. Sie gilt dem Umstand, dass er Bijektion und Identität verwechselt:³

„Dieser Beweis ist freilich mißlungen und mußte mißlingen, weil bei der Definition ähnlicher Systeme der Begriff der Gleichheit von Dedekind in dem Sinne gebraucht wird, daß $a = b$, wenn a und b nur Zeichen für ein und dasselbe Ding sind, und eine Gleichheit in dieser Bedeutung zwischen einem System und einem echten Teile desselben selbstverständlich ausgeschlossen ist.“

- (2) **Verwerfung von #66:** Angesichts seiner Auffassung über die Fehlerhaftigkeit des Beweises in #66 und mangels Verständnis für seine Bedeutung in der Systematik Dedekinds, verwirft Keferstein den Satz und wendet sich der allgemeinen Definition in #66 zu:

„Unter Verwerfung jener Definition unendlicher Systeme halten wir uns daher an die andere (D. p. 17, Anmerkung): S heißt unendlich, wenn es einen echten Teil von S giebt, in welchen S sich ähnlich abbilden läßt.“

¹Vgl. Schubert et al. (1890): S. 3

²Vgl. Sinaceur und Dedekind (1974): S. 259

³Keferstein (1890): S. 123f

- (3) **Veränderung der Definition einfach unendlicher Mengen:** Keferstein thematisiert die Kettentheorie nicht in seinem Aufsatz und gibt eine alternative Definition einfach unendlicher Mengen, die die Bedingung β wonach $\mathcal{N} = 1_0$ ist nicht enthält:

„Hieran läßt sich nun sofort die von Dedekind gegebene Erklärung eines einfach unendlichen Systems in folgender etwas veränderten Form anschließen: Ein System $\mathcal{N}$ heißt einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung von $\mathcal{N}$ in sich selbst giebt, daß $\varphi(\mathcal{N})$ ein und nur ein Element von $\mathcal{N}$ nicht enthält.“

- (4) **Definition der Zahl 1:** Ebenso scheint Keferstein die Zusammenhänge in der Definition einfach unendlicher Systeme und die Bedeutung des Elements 1 im strukturalistischen Zusammenhang des Satzes nicht erschlossen zu haben:

„Sowohl Frege (F.p. 89,90), als auch Dedekind, der übrigens den Begriff der Anzahl erst aus dem zuerst definierten der Ordinalzahl (D. p. 21, 54) herleitet, haben unserer Ansicht nach den Begriff der Zahl 1, im Grunde genommen, ohne zureichende Erklärung eingeführt. Versuchsweise schlagen wir die Definition vor: ‚Die Anzahl eines Systems R ist 1‘ heißt, R gehört der Klasse an, deren Repräsentant der Begriff des eigenen Ichs ist. Wir verstehen dabei unter letzterem einfach das denkende Ich des Descartes, welches zwar nie erkannt werden würde ohne Erfahrung, gleichwohl aber doch die Grundbedingung aller Erfahrung ist.“

Am **9. Februar** desselben Jahres sandte Dedekind einen Briefs an Keferstein samt des Aufsatzes „Über das Unendliche“ als Beilage zu. Dedekind bat Keferstein, diesen Aufsatz in den Sitzungsberichten der mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu veröffentlichen, es sei denn, Keferstein wollte eine Notiz einreichen, in der er seine Einwände formulierte und seine Fehler zugab. Der Entwurf dieses Briefs befindet sich im Nachlass von Dedekind, der in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek in Göttingen aufbewahrt wird. Es ist wichtig zu bemerken, dass Dedekind nachträglich oft Abschriften seiner Briefe für seine persönlichen Unterlagen anfertigte, insbesondere wenn es sich um inhaltlich bedeutende Korrespondenz handelte.⁴ Eine Transkription des Artikels wurde in Sinaceur und Dedekind (1974) veröffentlicht.⁵

In seiner Antwort vom **14. Februar** 1890 ging Keferstein erneut auf die in seinem Artikel aufgeworfenen Einwände gegen Dedekinds Arbeiten ein. Besonders betonte er, dass der dritte Einwand weiterhin Gültigkeit besitze, selbst wenn man Dedekinds Definition eines „einfach unendlichen Systems“ ablehne. Dedekind reagierte darauf mit einem ausführlichen Schreiben vom 27. Februar 1890, in dem er die Entstehung seines Werkes über die Zahlentheorie und die fundamentale Bedeutung der Kettentheorie für die Strukturierung der natürlichen Zahlen erklärte. Dabei legte er dar, wie die Kettentheorie dazu dient, die Ordnung der natürlichen Zahlen vor jeglicher Störung zu schützen.

Dedekind setzte sich in seinem Schreiben vom **27. Februar** 1890 eingehend mit den von Keferstein vorgebrachten Punkten auseinander. Die geäußerte Kritik erschien ihm im Kern unbegründet. Darüber hinaus äußerte er sich missbilligend über den sprachlichen Stil Kefersteins. Auf die zentralen mathematischen Argumente dieses Briefes, insbesondere auf den Begriff der Ketten und die daraus abgeleiteten Eigenschaften der natürlichen Zahlen, sind wir im Laufe der Arbeit ausführlich eingegangen.

⁴Der Entwurf befindet sich auf der Rückseite eines Brief an Krüss: Cod. Ms. R. Dedekind 13 : 22; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).

⁵Vgl. Sinaceur und Dedekind (1974): S. 259-269

Am **19. März** 1890 sendete Keferstein erneut eine Antwort, in der er Dedekinds Erläuterungen dankte und den Begriff der Kette als eine Definition dessen anerkennt, was man gemeinhin als „*Nachfolge in einer Folge*“ bezeichnet.

Doch bereits am **1. April** 1890 wies Dedekind Keferstein in einem weiteren Brief darauf hin, dass der Ausdruck „*Nachfolge der Dinge in einer Folge*“ eine präzisere und allgemeinere Bedeutung erhalten müsse, wenn er mit seiner eigenen Definition des Kettenbegriffs übereinstimmen sollte. Dedekind betonte, dass jeder Begriff, der durch seine Definitionen eingeführt werde, einen eigenen, inneren Untersuchungsprozess erfordere, der strikt der Weise entspreche, wie der Begriff eingeführt worden sei. Ein solcher Begriff würde an Präzision verlieren, wenn er auf einen Spezialfall reduziert würde.

Im weiteren Verlauf der Korrespondenz, am **19. Dezember** 1890, informierte Keferstein Dedekind, dass die Mathematische Gesellschaft die Veröffentlichung seiner Antwort sowie von Dedekinds Erwiderung abgelehnt habe, unter Verweis auf Platzmangel in den Sitzungsberichten. Keferstein kündigte jedoch an, im Jahresbericht, der im Februar veröffentlicht werden würde, eine Rücknahme seiner Verbesserungsvorschläge zu erklären, ohne jedoch anzuerkennen, dass seine Einwände widerlegt worden seien.

Daraufhin schickte Dedekind ihm am **23. Dezember** 1890 eine Antwort, in der er Keferstein mitteilte, dass er in dessen schriftlicher Erwiderung „eine ununterbrochene Folge neuer Missverständnisse und unangebrachter Behauptungen“ festgestellt habe. Dedekind zog daraus den Schluss, dass Keferstein seine Arbeit nicht gelesen oder die einschlägige Fachliteratur nicht gekannt haben konnte, da er ansonsten kaum Fragen aufgeworfen hätte, die von Cantor bereits vor Jahren geklärt worden seien. Schließlich bekräftigte Dedekind, dass, falls Keferstein in einem Bericht über seinen Vortrag zur natürlichen Zahlenfolge auf Dedekinds Abhandlung eingehen sollte, er als Dedekinds Sprecher auftreten und klarstellen solle, dass Dedekind in keinem Punkt Kefersteins Auffassung teile.

1890. 2. 9. Herrn Oberlehrer Dr. H. Kesperstein, Mitgl.
d. Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.

Hochgeachteter Herr!

Da meine Befunden mir nicht geblieben, die strengsten
Forderungen des Math. Gesellschafts zum Füreis ist, habe ich,
festen Entschluß zu fassen, so erlaube ich mir, Ihnen die
beifolgende Aufzeichnung mit der Bitte um eine günstige
Betrachtung zu übersenden. Das wichtigste Bestreben
würde meiner Meinung nach darin bestehen, daß die Ges.
Gesellschaft sich hierbei erkläre, diese Aufzeichnung in einem
ihre nächsten Sitzungsberichte abgedrucken. Falls
dies aber nicht statthaben oder nicht erlaubt werden
sollte, so bitte ich Sie umgekehrt, mir diese Schrift,
auf welche ich mich berufen werde, zu überlassen, um dieselbe
in der nächsten Sitzung der Gesellschaft zu veröffentlichen. Für diesen
Fall würde die - natürlich vorausgesetzt, daß Sie
sich aus der Möglichkeit meiner Aufzeichnung selbst in
allen Punkten vollständig überzeugen - sich vielleicht
erklären, eine solche Aufzeichnung in einem der nächsten
Sitzungsberichte zu veröffentlichen eine Erklärung der Gesellschaft
abzugeben, Sie haben sich dies ein vorübergehendes
meiner Schrift davon zu versichern, daß die in Ihrer Abwesenheit
(T. 123-124) aufgetretenen Schwierigkeiten und Änderungen,
Vorschläge auf einen Mißverständnisse Ihrerseits be-
ruhen, und daß Sie dieselben zu berücksichtigen.

Indem ich Sie bitte, die Bemerkung, welche ich Ihnen
vertraulich, in Rücksicht darauf, worin ich verbleibe,
daß mir die Verteidigung meiner, und mir lang,
jährigen Arbeit vorzuzugewandt, nicht an Ihnen
liegt, verbleibe ich mit größtem Hochachtung

Respektvoll,
H. Kesperstein

9. Februar 1890.
Hamburg.

Abbildung C.1: Faksimile zum Entwurf des ersten Briefs Dedekinds an Keferstein vom 9. Februar 1890: SUB Göttingen, Cod. Ms. R. Dedekind 13 : 22, Blatt 2.

Mein aufrichtiger Dank gilt der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen für die großzügige Bereitstellung von Auszügen aus dem Nachlass von Richard Dedekind. Diese wertvollen Materialien haben wesentlich zur Vertiefung meiner Forschung beigetragen und eröffnen neue Perspektiven auf das wissenschaftliche Wirken Dedekinds. Besonderer Dank gebührt Frau Dietlind Willer für ihre freundliche Unterstützung, ihre fachkundige Beratung und ihr Engagement bei der Bereitstellung der Dokumente. Ihre Hilfsbereitschaft und Expertise haben den Zugang zu diesem bedeutenden Quellenmaterial in besonderer Weise erleichtert. Das oben gezeigte Faksimile wurde mit freundlicher Genehmigung in diese Publikation aufgenommen.

Literatur

- Alexandroff, P. (1925):** “Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie”. In: *Mathematische Annalen* 94.1, S. 296–308. ISSN: 0025-5831; 1432-1807/e.
- Alten, H.-W. et al. (2003):** *4000 Jahre Algebra: Geschichte. Kulturen. Menschen.* 1. Aufl. 2003; 2., korr. Nachdruck 2008. Berlin: Springer. 672 S. ISBN: 978-3-540-43554-9.
- Apelt, E. F. (1854):** *Die Theorie der Induction.* Leipzig: Wilhelm Engelmann. 223 S.
- Archimedes; Heath, T. L. (2002):** *The Works of Archimedes.* Mineola, New York: Dover Publications Inc. 326 S. ISBN: 978-0-486-42084-4.
- Arens, T. (2013):** *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen.* Berlin Heidelberg: Springer Spektrum. 1181 S. ISBN: 978-3-8274-2308-5.
- Aristoteles (2023a):** *Metaphysik.* Übers. von H. Seidl; H. Bonitz. Philosophische Schriften. Band 5. Hamburg: Felix Meiner. 332 S. ISBN: 978-3-7873-3600-5.
- **(2023b):** *Physik. Vorlesung über Natur / Über die Seele.* Übers. von K. Corcilius; H. G. Zekl. Philosophische Schriften. Band 6. Hamburg: Felix Meiner. 353 S. ISBN: 978-3-7873-3601-2.
- **(2023c):** *Porphyrios: Einführung in die Kategorien des Aristoteles.* Übers. von H. G. Zekl; W. Detel. Philosophische Schriften. Band 1. Hamburg: Felix Meiner. 347 S. ISBN: 978-3-7873-3596-1.
- **(2023d):** *Topik / Topik, neuntes Buch oder Über die sophistischen Widerlegungsschlüsse.* Übers. von H. G. Zekl. Philosophische Schriften. Band 2. Hamburg: Felix Meiner. 290 S. ISBN: 978-3-7873-3597-8.
- Arnauld, A. (2005):** *Die Logik oder die Kunst des Denkens.* Übers. von C. Axelos. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft. 392 S. ISBN: 978-3-534-03710-0.
- Awodey, S.; Reck, E. H. (2002):** “Completeness and Categoricity, Part II: Twentieth-Century Metalogic to Twenty-first-Century Semantics”. In: *History and Philosophy of Logic* 23.2, S. 77–94. ISSN: 0144-5340; 1464-5149/e.

- Baire, R. (1899):** “Sur les fonctions de variables réelles”. In: *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 3.1, S. 1–123. ISSN: 0373-3114; 1618-1891/e.
- Becker, O. (1933):** “Eudoxosstudien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen?” In: *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik Abteilung B: Studien*. Hrsg. von O. Neugebauer et al. Bd. 2. Berlin: Springer, S. 369–387.
- (1990): *Grundlagen der Mathematik: In geschichtlicher Entwicklung*. 4. Aufl. Frankfurt am Main: Suhrkamp. 437 S. ISBN: 978-3-518-27714-0.
- Beckmann, F. (1967):** “Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids”. In: *Archive for History of Exact Sciences* 4.1, S. 1–144. ISSN: 0003-9519; 1432-0657/e.
- Bedürftig, T.; Murawski, R. (2019):** *Philosophie der Mathematik*. 4. Aufl. Berlin, Boston: De Gruyter. ISBN: 978-3-11-054519-7.
- Bell, J. L. (2022):** “Continuity and Infinitesimals”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von E. N. Zalta. Metaphysics Research Lab, Stanford University. ISBN: 1095-5054/e.
- Benacerraf, P. (1965):** “What Numbers Could not Be”. In: *The Philosophical Review* 74.1, S. 47–73. ISSN: 0031-8108; 1558-1470/e.
- Benis Sinaceur, H. (2017):** “Dedekind’s and Frege’s views on logic”. In: *Mathematische Semesterberichte* 64.2, S. 187–198. ISSN: 0720-728X; 1432-1815/e.
- Biermann, K.-R. (1971):** “Dedekind”. In: *Dictionary of Scientific Biography*. Hrsg. von C. C. Gillispie. Bd. 4. Princeton University Press, S. 1–5. ISBN: 978-0-684-10115-6.
- Blumenthal, O. (1970):** “Lebensgeschichte”. In: *David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 3. Reprint 2016 der zweiten Auflage 1970. Berlin: Springer, S. 388–429. ISBN: 978-3-662-48785-3.
- Bolzano, B. (1817):** *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Facsimile-Druck Berlin 1894. Mayer & Müller. Prag: Gottlieb Haase. 61 S.
- (1851): *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig: Reclam. 180 S.
- Bolzano, B. et al. (1975):** *Bernard Bolzano Gesamtausgabe / Reihe II: Nachlaß. A. Nachgelassene Schriften. Band 7: Einleitung in die Größenlehre und erste Begriffe der allgemeinen Größenlehre*. 1. Aufl. Stuttgart: frommann-holzboog. 297 S. ISBN: 978-3-7728-0466-3.
- Boniface, J. (2005):** “Leopold Kronecker’s conception of the foundations of mathematics”. In: *Philosophia Scientiæ. Travaux d’histoire et de philosophie des sciences* (CS 5 2005), S. 143–156. ISSN: 1281-2463; 1775-4283/e.

- Boolos, G. (1990):** “The Standard of Equality of Numbers”. In: *Meaning and Method: Essays in Honor of Hilary Putnam*. Hrsg. von G. Boolos. Cambridge University Press, S. 261–77. ISBN: 978-0-521-11585-8.
- Bourbaki, N. (1998):** *Elements of the History of Mathematics*. Berlin, Heidelberg: Springer. 301 S. ISBN: 978-3-540-64767-6.
- (2008): *General Topology: Chapters 1-4*. Berlin, Heidelberg: Springer. 452 S. ISBN: 978-3-540-64241-1.
- Breitenberger, E. (1999):** “Johann Benedikt Listing”. In: *History of Topology*. Hrsg. von I. M. James. Amsterdam: North-Holland, S. 909–924. ISBN: 978-0-444-82375-5.
- Cantor (1872):** “Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”. In: *Mathematische Annalen* 5, S. 123–132. ISSN: 0025-5831; 1432-1807/e.
- (1883): “Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 5. Fortsetzung.” In: *Mathematische Annalen* 21, S. 545–591. ISSN: 0025-5831; 1432-1807/e.
- Carathéodory, C. (1918):** *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner. 734 S.
- Cayley, A. (1859):** “A Sixth Memoir upon Quantics”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 149, S. 61–90. ISSN: 0035-1571; 0261-0523/e.
- Chevalley, C. (1935):** “Variations du style mathématique”. In: *Revue de Métaphysique et de Morale* 3, S. 375–384. ISSN: 0035-2343; 2105-6360/e.
- Corry, L. (2004):** *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. 2. Aufl. Basel ; Boston: Springer. 472 S. ISBN: 978-3-7643-7002-2.
- Crilly, T. (1999):** “The Emergence of Topological Dimension Theory”. In: *History of Topology*. Hrsg. von I. M. James. Amsterdam: North-Holland, S. 1–24. ISBN: 978-0-444-82375-5.
- Dedekind, R. (1852):** “Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1930)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 1. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 1–26.
- (1854): “Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Habilitationsvortrag gehalten am 30. Juni 1854, posthum veröffentlichtes Manuskript. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 433–443.
- (1855): “Ein Satz aus der Theorie der dreiachsigen Koordinatensysteme”. In: *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 1. Reprint 1930; erstmals erschienen in *Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. 50, S. 272–275 (1855). Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 32–35.

- Dedekind, R. (1857):** “Abriss einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.” In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 54, S. 1–26. ISSN: 0075-4102; 1435-5345/e.
- **(1863):** “Allgemeine Sätze über Räume”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1930)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Posthum veröffentlichtes Manuskript, datiert auf den Zeitraum 1863–1873. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 353–355.
- **(1871a):** “Intervalle”. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Hrsg. von P. Dugac. Nachlass, Cod. Ms. III, 10; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, vermutlich verfasst im Jahr 1871. Paris: Vrin, S. 209.
- **(1871b):** “Stetigkeit und irrationale Zahlen [1. Entwurf]”. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Hrsg. von P. Dugac. Nachlass, Cod. Ms. III, 17; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, verfasst im Zeitraum 1871–1872. Paris: Vrin, S. 203–209.
- **(1872a):** “Stetigkeit und irrationale zahlen”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 315–334.
- **(1872b):** “Was sind und was sollen die Zahlen? [1. Entwurf]”. In: *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques (1976)*. Nachlass, Cod. Ms. III, 1; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Posthum veröffentlichtes Manuskript, verfasst im Zeitraum 1872–1878. Paris: Vrin, S. 293–309.
- **(1877):** “Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques”. In: *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 3. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 262–296.
- **(1887a):** “Was sind und was sollen die Zahlen? [2. Entwurf]”. Nachlass, Cod. Ms. III, 1, II; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung).
- **(1887b):** “Was sind und was sollen die Zahlen? [3. Entwurf]”. Nachlass, Cod. Ms. III, 1, III; Göttingen: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek (Handschriftenabteilung), Niederschrift vermutet im Jahr 1887.
- **(1888):** “Was sind und was sollen die Zahlen?” In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 335–391.
- **(1890):** “Über den Begriff des Unendlichen”. In: *L’infini et les nombres: Commentaires de R. Dedekind à « Zahlen » La correspondance avec Keferstein*. Revue d’histoire des sciences 1974 - 27. Hrsg. von M. Sinaceur. Posthum veröffentlichtes Manuskript, verfasst im Jahr 1890, S. 51–278. ISSN: 0151-4105; 1969-6582/e.

- (1891): “stetiges System aller Abbildungen der natürlichen Zahlenreihe N in sich selbst”. In: *Gesammelte mathematische Werke*. Bd. 2. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 371–372.
 - (1892): “Beweis und Anwendung eines allgemeinen Satzes über mehrfach ausgedehnte stetige Gebiete”. In: *Gesammelte mathematische Werke (1932)*. Bd. 3. Posthum veröffentlichtes Manuskript 1892. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, S. 356–370.
 - (1930): *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 1. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 397 S.
 - (1931): *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 2. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 442 S.
 - (1932): *Gesammelte mathematische Werke*. Hrsg. von E. Noether et al. Bd. 3. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 508 S.
 - (1985): *Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1861/62*. Hrsg. von W. Scharlau. Reprint der 1. Aufl. 1985. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. 363 S. ISBN: 978-3-528-08902-3.
 - (2008): *La création des nombres*. Hrsg. von H. B. Sinaceur. Paris: Vrin. ISBN: 978-2-7116-2146-0.
- Deiser, O. (2004):** *Einführung in die Mengenlehre: Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. 551 S. ISBN: 978-3-540-20401-5.
- (2008): *Reelle Zahlen: Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag. 553 S. ISBN: 9783540793755.
- Detlefsen, M. (2011):** “Dedekind Against Intuition: Rigor, Scope and the Motives of His Logicism”. In: *Logic and Knowledge*. Hrsg. von E. Ippoliti et al. Cambridge Scholar Publishing, S. 205–221.
- Dirichlet, P. G. L. (1871):** *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Hrsg. von R. Dedekind. 2. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. 380 S.
- (1879): *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Hrsg. von R. Dedekind. 3. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn.
- Du Bois-Reymond, P. (1882):** *Die allgemeine Functionentheorie. Erster Theil: Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function*. Tübingen: Lauppische Buchhandlung. 356 S.
- Dugac, P. (1976):** *Richard Dedekind Et Les Fondements Des Mathematiques*. Paris: Vrin. 336 S. ISBN: 978-2-711-60220-9.

- Edwards, H. M. (1995):** “Kronecker on the Foundations of Mathematics”. In: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*. Hrsg. von J. Hintikka. Synthese Library. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 45–52. ISBN: 978-94-015-8478-4.
- Engelking, R. (1989):** *General Topology: Revised and completed edition*. Berlin: Heldermann. 540 S. ISBN: 978-3-88538-006-1.
- Epple, M. (1999):** “Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860–1910”. In: *Geschichte der Analysis*. Hrsg. von H. N. Jahnke et al. 2009 Nachdruck Auflage 1999. Heidelberg: Springer, S. 372–410. ISBN: 978-3-8274-0392-6.
- Epple, M. et al. (2002):** “Zum Begriff des topologischen Raumes”. In: *Felix Hausdorff Gesammelte Werke, Band II: Grundzüge der Mengenlehre*. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 675–744. ISBN: 978-3-540-42224-2.
- Euklid; Heath, T. L. (1956):** *The Thirteen Books of Euclid’s Elements, Volume 1 (Books I and II)*. 2. Aufl. New York: Dover Publications Inc. 464 S. ISBN: 978-0-486-60088-8.
- Euklid; Thaer, C. (2003):** *Die Elemente*. 4. Aufl. Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel. 499 S. ISBN: 978-3-8085-5482-1.
- Euler, L.; Walter, W. (1983):** *Einleitung in die Analysis des Unendlichen: Erster Teil*. Übers. von H. Maser. 2014 Reprint der ersten Auflage 1983. Berlin, Heidelberg: Springer. 356 S. ISBN: 978-3-662-02339-6.
- Ewald, W. (2005):** *From Kant to Hilbert Volume 2: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. 1. Aufl. Oxford: Oxford University Press, USA. 712 S. ISBN: 978-0-19-850536-5.
- Feferman, S. (2007):** “Predicativity”. In: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press, S. 590–624. ISBN: 978-0-19-532592-8.
- Ferreiros, J. (1999):** *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Hrsg. von E. Hiebert et al. 1. Aufl. Basel: Birkhäuser Verlag. 461 S. ISBN: 978-3-7643-5749-8.
- Ferreirós, J. (1996):** “Traditional Logic and the Early History of Sets, 1854-1908”. In: *Archive for History of Exact Sciences* 50.1, S. 5–71. ISSN: 0003-9519; 1432-0657/e.
- (2007): *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. 2. Aufl. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser. 466 S. ISBN: 978-3-7643-8349-7.
- (2017): “Dedekind’s Map-theoretic Period”. In: *Philosophia Mathematica* 25.3, S. 318–340. ISSN: 0031-8019; 1744-6406/e.
- (2022): “Mappings, Models, Abstraction, and Imaging: Mathematical Contributions to Modern Thinking Circa 1900”. In: *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*. Birkhäuser, Cham, S. 309–331. ISBN: 978-3-030-97833-4.

- Ferreirós, J.; Lassalle-Casanave, A. (2022):** “Dedekind and Wolffian Deductive Method”. In: *Journal for General Philosophy of Science / Zeitschrift für Allgemeine Wissenschaftstheorie* 53.4, S. 345–365. ISSN: 0925-4560; 1572-8587/e.
- Fichte, G. (1794):** *Grundlage der gesamten Wissenschaftslehre*. Leipzig: Christian Ernst Gabler. 367 S.
- Fierz, M. (1947):** “Das "Labyrinth des Kontinuums und die "prästabilisierte Harmonie in ihrer Beziehung zum mathematischen Denken Leibniz"". In: *Studia philosophica: Schweizerische Zeitschrift für Philosophie = Revue suisse de philosophie = Rivista svizzera della filosofia = Swiss journal of philosophy* 7, S. 103. ISSN: 0081-6825.
- Folland, G. B. (2010):** “A Tale of Topology”. In: *The American Mathematical Monthly* 117.8, S. 663–672. ISSN: 0002-9890; 1930-0972/e.
- Fowler, D. H. (1999):** *The Mathematics of Plato's Academy: A New Reconstruction*. Second Edition. Oxford, New York: Oxford University Press, 29. Juli 1999. 441 S. ISBN: 978-0-19-850258-6.
- Fréchet, M. R. (1905):** “Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles”. In: *Comptes rendus de l'Académie des sciences* 140, S. 27–29.
- Friedman, M. (1985):** “Kant's Theory of Geometry”. In: *The Philosophical Review* 94.4, S. 455–506. ISSN: 0031-8108; 1558-1470/e.
- Gabriel, G. et al. (1980):** *Gottlob Freges Briefwechsel: mit D. Hilbert, E. Husserl, B. Russell sowie ausgewählte Einzelbriefe Freges*. Unveränderter Print-on-Demand-Nachdruck der Ausgabe von 1980. Edition. Hamburg: Meiner, F. ISBN: 978-3-7873-0482-0.
- Gähler, W. (1994):** “Die Theorie der Kontinua - ein Gebiet, in dem die Anschauung teilweise versagt”. In: *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*. Hrsg. von E. Eichorn; E. J. Thiele. Berlin: Heldermann, S. 171–190. ISBN: 978-3-88538-105-1.
- Gandon, S. (2009):** “«To bring Dedekind's research into its proper relation to general metaphysical inquiry» : Royce et Russell, critiques de Bradley”. In: *Philosophiques* 36.1, S. 83–108. ISSN: 0316-2923, 1492-1391/e.
- Gauß, C. F. (1917):** *Werke. Nachträge zur reinen Mathematik*. 10.1 Bde. Herausgegeben durch die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig: Teubner.
- Gray, J. (2010):** *Worlds Out of Nothing: A Course in the History of Geometry in the 19th Century*. London: Springer. 412 S. ISBN: 978-0-85729-059-5.
- Greenberg, M. J. (2007):** *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 4th ed. 2007 Edition. New York: WH Freeman. 500 S. ISBN: 978-0-7167-9948-1.

- Haffner, E. (2014):** “The Science of Numbers in action in Richard Dedekind’s works: between mathematical explorations and foundational investigations”. Diss. Université Paris Diderot - Paris 7.
- (2017): “Insights into Dedekind and Weber’s edition of Riemann’s *Gesammelte Werke*”. In: *Mathematische Semesterberichte* 64.2 (1. Okt. 2017), S. 169–177. ISSN: 0720-728X; 1432-1815/e.
- Hamilton, W. R. (1853):** *Lectures on Quaternions*. Dublin, London: Hodges und Smith; Whittaker.
- Harborth, H.; Gerke, K. (1981):** “Zum Leben des Braunschweiger Mathematikers Richard Dedekind”. In: *Festschrift zur Ausstellung "Brunswick 1031 - Braunschweig 1981"*. Hrsg. von G. Spies. Braunschweig: Städt. Museum Braunschweig, S. 657–694. ISBN: 3-87884-012-8.
- Hausdorff, F. (1903):** “Das Raumproblem”. In: *Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen*. Springer, Vienna, S. 83–108. ISBN: 978-3-7091-9532-1.
- (1914): *Grundzüge der Mengenlehre*. Von Veit. 502 S. ISBN: 978-3-11-098985-4.
- Heath, T. L. (1981):** *History of Greek Mathematics: From Thales to Euclid: From Thales to Euclid Volume 1*. New York: Dover Publications Inc. 464 S. ISBN: 978-0-486-24073-2.
- Heiberg, J. L. (1904):** *Mathematisches zu Aristoteles: Mit 30 Fig. im Text*. Teubner. 195 S. ISBN: 978-0-19-824034-1.
- Heijenoort, J. v., Hrsg. (2002):** *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*. Hrsg. von J. v. Heijenoort. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. 664 S. ISBN: 978-0-674-32449-7.
- Heine, E. (1869):** “Ueber trigonometrische Reihen.” In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 71, S. 353–365. ISSN: 0075-4102; 1435-5345/e.
- Hellman, G. (1994):** *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*. Clarendon Press, 13. Jan. 1994. 168 S.
- Hellman, G.; Shapiro, S. (2018):** *Varieties of Continua: From Regions to Points and Back*. Illustrated Edition. Oxford: Oxford University Press (OUP). 224 S. ISBN: 978-0-19-871274-9.
- Herbart, J. F. (1837):** *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie*. Unter Mitarb. von Wellcome Library. Königsberg : August Wilhelm Unzer. 330 S.
- (1993): *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie*. Reprint 1997. Hamburg: Meiner Felix Verlag GmbH. 482 S. ISBN: 978-3-7873-1096-8.

- Herrlich, H. (1986):** *Topologie - I: Topologische Räume*. Berlin: Heldermann. 314 S. ISBN: 978-3-88538-102-0.
- Hilbert, D. (1899):** “Grundlagen der Geometrie”. In: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen*. Leipzig: B. G. Teubner, S. 1–92.
- **(1900):** “Über den Zahlbegriff.” In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8, S. 180–183. ISSN: 0012-0456; 1869-7135/e.
- **(1922):** *Grundlagen der Geometrie*. 5. Aufl. 1922. Softcover reprint of the original 5th ed. 1922 Edition. Vieweg+Teubner Verlag. 276 S. ISBN: 978-3-663-15383-2.
- Humboldt, A. v. et al. (1987):** *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und C.G. Jacob Jacobi*. Akademie-Verlag. 334 S. ISBN: 978-3-05-000240-8.
- James, I. M., Hrsg. (1999):** *History of Topology*. Hrsg. von I. M. James. 1. Aufl. Amsterdam New York: North Holland. 1056 S. ISBN: 978-0-444-82375-5.
- **(2001):** “Combinatorial Topology Versus Point-Set Topology”. In: *Handbook of the History of General Topology*. Springer, Dordrecht, S. 809–834. ISBN: 978-94-017-0470-0.
- Jong, W. R. d.; Betti, A. (2010):** “The Classical Model of Science: A Millennia-Old Model of Scientific Rationality”. In: *Synthese* 174.2, S. 185–203. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.
- Jourdain, P. E. B. (1916):** “Richard Dedekind. (1833-1916.)” In: *The Monist* 26.3, S. 415–427. ISSN: 0026-9662; 2153-3601/e.
- Joyce, D. E. (2005):** *Notes on Richard Dedekind’s*. Unveröffentlichte Notizen zu WZ.
- Kafka, F. (2023):** *Das Schloss: Roman*. Frankfurt am Main: FISCHER Taschenbuch. 416 S. ISBN: 9783596709618.
- Kaltenbäck, M. (2015):** *Fundament Analysis*. Lemgo: Heldermann, N. 498 S. ISBN: 978-3-88538-126-6.
- Kant, I. (1956):** *Kritik der reinen Vernunft*. Bd. 2. Werke. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.
- **(1958):** *Logik*. Bd. 3. Werke. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt.
- Keferstein, H. (1890):** “Über den Begriff der Zahl”. In: *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg*. Bd. Zweiter Teil: Wissenschaftliche Abhandlungen. Leipzig: B. G. Teubner, S. 119–125.
- Kelley, J. (1955):** *Generall Topology*. Princeton, New Jersey: D. Van Norstrand Company. 298 S. ISBN: 978-0-387-90125-1.

- Klein, F. (1871):** “über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie”. In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von R. Fricke; A. Ostrowski. Bd. 1. 3 Bde. Berlin: Julius Springer, S. 255–305.
- **(1872):** “Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen”. In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von R. Fricke; A. Ostrowski. Bd. 1. 3 Bde. Berlin: Julius Springer, S. 460–497.
- **(1895):** “Über die Arithmetisierung der Mathematik”. In: *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Geschäftliche Mitteilungen, Heft 2*. Göttingen: Dieterich’schen Verlagsbuchhandlung, S. 82–91.
- **(1979):** *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I und II: Teil I*. Reprint. Berlin: Springer. 593 S. ISBN: 978-3-540-09235-3.
- Klev, A. (2011):** “Dedekind and Hilbert on the Foundations of the Deductive Sciences”. In: *Review of Symbolic Logic* 4.4, S. 645–681. ISSN: 1755-0203; 1755-0211/e.
- **(2018):** “A Road Map of Dedekind’s Theorem 66”. In: *HOPoS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science* 8.2. Publisher: The University of Chicago Press, S. 241–277. ISSN: 2152-5188; 2156-6240/e.
- Kline, M. (1990):** *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Volume 3*. Cary: Oxford University Press. 1211 S. ISBN: 978-0-19-506137-6.
- Knorr, R. W. (1991):** “What Euclid Meant: On the Use of Evidence in Studying Ancient Mathematics”. In: *Science and Philosophy in Classical Greece*. Hrsg. von A. C. Bowen, S. 119–163.
- Knorr, W. R. (1975):** *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Springer Science & Business Media. 402 S. ISBN: 978-90-277-0509-9.
- Kokkinos, J. (1997):** *Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon: Dissertationsschrift*. Frankfurt am Main ; New York: Peter Lang GmbH, Internationaler Verlag der Wissenschaften. 240 S. ISBN: 978-3-631-31491-3.
- Kranz, W. et al. (1992):** *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Unveränderte Neuauflage Hildesheim 2023. Bd. 1. Berlin: Weidmannsche Hildesheim, 31. Dez. 1992. 516 S. ISBN: 978-3-615-12201-5.
- Kreyszig, E. (1997):** “Interaction between General Topology and Functional Analysis”. In: *Handbook of the History of General Topology*. Springer, Dordrecht, S. 357–389. ISBN: 978-94-017-0468-7.
- Kronecker, L. (1887):** “Ueber den Zahlenbegriff”. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 101.

- Kronecker, L. (1882):** *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. Google-Books-ID: ryNRAAAAYAAJ. Berlin: G. Reimer. 202 S.
- (1891): “Über den Begriff der Zahl in der Mathematik”. In: ‘*Sur le concept de nombre en mathématique*’ *Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891) (2001)*. Hrsg. von J. Boniface; N. Schappacher, S. 219–275. ISBN: 1262-022X; 1777-568X/e.
- Kuratowski, K. (1922):** “Sur l’opération A de l’Analysis Situs”. In: *Fundamenta Mathematicae* 3, S. 182–199.
- Lakatos, I. (2013):** *Die Methodologie der wissenschaftlichen Forschungsprogramme*. Hrsg. von J. Worrall; G. Currie. Reprint der 1. Aufl. 1982. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. 268 S. ISBN: 978-3-663-08083-1.
- Landau, E. (1917):** “Richard Dedekind”. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen*, S. 50–70.
- Link, G. (2020):** *Collegium Logicum - Logische Grundlagen der Philosophie und der Wissenschaften*. Bd. 1. 2 Bde. Brill. ISBN: 978-3-96975-110-7.
- Linnebo, Ø.; Pettigrew, R. (2014):** “Two Types of Abstraction for Structuralism”. In: *The Philosophical Quarterly* 64.255, S. 267–283. ISSN: 0031-8094; 2153-3601/e.
- Lipschitz, R. (1986):** *Briefwechsel Mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass Und Andersen*. Braunschweig. 271 S. ISBN: 978-3-528-08969-6.
- Listing, J. B. (1848):** *Vorstudien zur Topologie*. Göttingen: Vandenhoeck u. Ruprecht.
- Lotze, H. (1874):** *Logik. drei Bücher: vom Denken, vom Untersuchen und vom Erkennen*. Unter Mitarb. von Robarts - University of Toronto. Leipzig : Hirzel. 620 S.
- (1879): *Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie*. 2. Aufl. System der Philosophie. Leipzig: S. Hirzel. 620 S.
- Maddy, P. (2011):** *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Reprint Edition. Oxford: Oxford University Press. 162 S. ISBN: 978-0-19-967148-9.
- Mainzer, K. (1983):** “Reelle Zahlen”. In: *Zahlen*. Hrsg. von H.-D. Ebbinghaus et al. Grundwissen Mathematik. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 23–44. ISBN: 978-3-642-96783-2.
- Mancosu, P. (2017):** “Mathematical Style”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Hrsg. von E. N. Zalta. 2017. Aufl. Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Mansfeld, J.; Primavesi, O. (2011):** *Die Vorsokratiker: Griechisch/Deutsch*. Stuttgart: Reclam, Philipp, jun. GmbH, Verlag, 1. Okt. 2011. 800 S. ISBN: 978-3-15-010730-0.

- McCarty, D. C. (1995):** “The Mysteries of Richard Dedekind”. In: *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*. Hrsg. von J. Hintikka. Synthese Library. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 53–96. ISBN: 978-94-015-8478-4.
- McClelland, C. (2009):** *State, Society and University in Germany 1700-1914*. Reissue Edition. Cambridge University Press. 392 S. ISBN: 978-0-521-10206-3.
- Menn, S. (2018):** “Eudoxus’ Theory of Proportion and his Method of Exhaustion”. In: *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor of W.W. Tait*. Hrsg. von E. Reck, S. 326. ISBN: 978-1-84890-287-9.
- Minkowski, H. (1905):** “Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine bedeutung für die heutige mathematik: Rede”. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Hrsg. von A. Gutzmer. Bd. 14. Leipzig: B. G. Teubner, S. 149–168.
- Moore, E. H. (1910):** *Introduction to a Form of General Analysis*. Yale University Press. 168 S. ISBN: 978-0-598-85345-5.
- Moore, G. H. (2008):** “The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology”. In: *Historia Mathematica* 35.3, S. 220–241. ISSN: 0315-0860; 1090-249X/e.
- Moschovakis, Y. (2006):** *Notes on Set Theory*. 2. New York: Springer New York. 292 S. ISBN: 978-0-387-28723-2.
- Müller-Stach, S. (2017):** *Richard Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. 1. Aufl. Berlin: Springer Spektrum. 216 S. ISBN: 978-3-662-54338-2.
- Nikolić, M. (1974):** “The Relation between Eudoxus’ Theory of Proportions and Dedekind’s Theory of Cuts”. In: *For Dirk Struik: Scientific, Historical and Political Essays in Honor of Dirk J. Struik*. Hrsg. von R. S. Cohen et al. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 225–243. ISBN: 978-94-010-2115-9.
- Pasch, M. (1926):** *Vorlesungen über die neuere Geometrie: Mit einem Anhang von Max Dehn: Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung*. 2. Aufl. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-642-65612-5.
- Prediger, S. (2000):** “Mathematische Logik in der Wissensverarbeitung”. In: *Mathematische Semesterberichte* 47.2 (1. Dez. 2000), S. 165–191. ISSN: 0720-728X; 1432-1815/e.
- Rapp, C.; Corcilius, K. (2021):** *Aristoteles-Handbuch: Leben – Werk – Wirkung*. 2., aktualisierte und erweiterte Aufl. 2021 Edition. Berlin, Germany: J.B. Metzler. 626 S. ISBN: 978-3-476-05741-9.
- Reck, E. H. (2003):** “Dedekind’s Structuralism: An Interpretation and Partial Defense”. In: *Synthese* 137.3. Publisher: Springer, S. 369–419. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.

- (2009): “Dedekind, structural reasoning, and mathematical understanding”. In: *Proceedings of New Perspectives on Mathematical Practices - Essays in Philosophy and History of Mathematics*, S. 150–172. ISBN: 978-981-281-222-3.
- (2013): “Frege or Dedekind? Towards a Reevaluation of Their Legacies”. In: *The Historical Turn in Analytic Philosophy*. Palgrave Macmillan, London, S. 139–170. ISBN: 978-1-137-30487-2.
- Hrsg. (2018a): *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor of W. W. Tait*. Hrsg. von E. H. Reck. London: College Publications. 326 S. ISBN: 978-1-84890-287-9.
- (2018b): “On Reconstructing Dedekind Abstraction Logically”. In: *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor of W. W. Tait*. Hrsg. von E. H. Reck. London: College Publications, S. 113–138. ISBN: 978-1-84890-287-9.
- Reck, E. H.; Ferreirós, J. (2020): “Dedekind’s Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions”. In: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*. Hrsg. von G. Schiemer; E. H. Reck. Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-064122-1.
- Riemann, B. (1892): *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Hrsg. von R. Dedekind; H. Weber. Unter Mitarb. von Kelly - University of Toronto. 2. Aufl. Leipzig: Teubner. 708 S.
- Riemann, B.; Jost, J. (2013): *Bernhard Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“*. 2013. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. 130 S. ISBN: 978-3-642-35120-4.
- Riesz, F. (1908): “Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre”. In: *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici*. Bd. II. Rom, S. 18–24.
- Risi, V. D. (2016): “The Development of Euclidean Axiomatics: The Systems of Principles and the Foundations of Mathematics in Editions of the Elements in the Early Modern Age”. In: *Archive for History of Exact Sciences* 70.6, S. 591–676. ISSN: 0003-9519; 1432-0657/e.
- Rowe, D. E. (2018): *A Richer Picture of Mathematics: The Göttingen Tradition and Beyond*. 1. Aufl. Cham: Springer. 480 S. ISBN: 978-3-319-67818-4.
- Rudio, F. (1895): *“Eine” Autobiographie von Gotthold Eisenstein: mit ergänzenden biographischen Notizen*. Teubner. 70 S.
- Rudolph, R.; Schlimm, D. (2011): “Richard Dedekind’s notes from Hermann Lotze’s lecture course “Geschichte der deutschen Philosophie seit Kant” held in the summer semester 1852 in Göttingen”. Unveröffentlichtes Transkript von SUB Göttingen 4 Cod. Ms. philos. 1 i.

- Russell, B. (1908):** “Mathematical Logic as Based on the Theory of Types”. In: *American Journal of Mathematics* 30.3, S. 222–262. ISSN: 0002-9327; 1080-6377/e.
- Sattler, B. M. (2020):** “Divisibility or Indivisibility: The Notion of Continuity from the Pre-socratics to Aristotle”. In: *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*. Hrsg. von S. Shapiro; G. Hellman. Oxford: Oxford University Press, S. 6–26. ISBN: 978-0-19-880964-7.
- Scharlau, W. (1981):** *Richard Dedekind 1831–1981:: Eine Würdigung Zu Seinem 150. Geburtstag*. Wiesbaden: Vieweg. ISBN: 978-3-528-08498-1.
- **(1982):** *Findbuch zum Nachlass von Richard Dedekind*. Göttingen 2010.
- Schiemer, G. (2020):** “Transfer Principles, Klein’s Erlangen Program, and Methodological Structuralism”. In: *The Prehistory of Mathematical Structuralism*. Hrsg. von E. H. Reck; G. Schiemer. Oxford University Press, S. 106–141. ISBN: 978-0-19-064122-1.
- Schlimm, D. (2000):** *Richard Dedekind: Axiomatic Foundations of Mathematics*. M.A. Thesis. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon University. 119 S.
- **(2006):** “Axiomatics and progress in the light of 20th century philosophy of science and mathematics”. In: *Foundations of the Formal Sciences IV*. Hrsg. von B. Löwe et al. Studies in Logic Series. London: College Publications, S. 233–253.
- **(2013):** “Axioms in Mathematical Practice†”. In: *Philosophia Mathematica* 21.1, S. 37–92. ISSN: 0031-8019; 1080-6377/e.
- Schneider, I. (2015):** *Archimedes: Ingenieur, Naturwissenschaftler, Mathematiker*. 2. Aufl. 2016 Edition. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. 188 S. ISBN: 978-3-662-47129-6.
- Scholz, E. (1982):** “Herbart’s influence on bernhard Riemann”. In: *Historia Mathematica* 9.4, S. 413–440. ISSN: 0315-0860; 1873-2119/e.
- **(2001):** “Bernhard Riemanns Auseinandersetzung mit der Herbartschen Philosophie”. In: *Herbarts Kultursystem; Perspektiven der Transdisziplinarität im 19. Jahrhundert*. Hrsg. von A. Schneider; L. Hoeschen. Würzburg: Königshausen und Neumann, S. 163–183.
- Schubert, H. et al., Hrsg. (1890):** *Festschrift der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890*. Hrsg. von H. Schubert et al. Leipzig: B. G. Teubner.
- Scriba, C. J.; Schreiber, P. (2004):** *5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen*. 2. Berlin: Springer. 644 S. ISBN: 978-3-540-22471-6.
- Shapiro, S. (1997):** *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. New e. Edition. Oxford: Oxford University Press USA. 296 S. ISBN: 978-0-19-513930-3.

- Sieg, W. (1990):** “Relative consistency and accessible domains”. In: *Synthese* 84.2, S. 259–297. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.
- **(1997):** “Step by Recursive Step: Church’s Analysis of Effective Calculability”. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 3.2, S. 154–180. ISSN: 1079-8986; 1943-5894/e.
- **(2020):** “The Ways of Hilbert’s Axiomatics: Structural and Formal”. In: S. 142–165. ISBN: 978-0-19-064122-1.
- Sieg, W.; Morris, R. (2018):** “Dedekind’s Structuralism: Creating Concepts and Deriving Theorems”. In: *Logic, Philosophy of Mathematics, and their History: Essays in Honor W.W. Tait*. Hrsg. von E. Reck. College Publications.
- Sieg, W.; Schlimm, D. (2005):** “Dedekind’s Analysis of Number: Systems and Axioms”. In: *Synthese* 147.1, S. 121–170. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.
- **(2017):** “Dedekind’s Abstract Concepts: Models and Mappings†”. In: *Philosophia Mathematica* 25.3, S. 292–317. ISSN: 0031-8019; 1744-6406/e.
- Sinaceur, M.-A.; Dedekind, R. (1974):** “L’infini et les nombres: Commentaires de R. Dedekind à « Zahlen » La correspondance avec Keferstein”. In: *Revue d’histoire des sciences* 27.3, S. 251–278. ISSN: 0151-4105; 1969-6582/e.
- Sonar, T. (2015):** *Die Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton: Geschichte – Kulturen – Menschen: Geschichte – Kulturen – Menschen - Mit einem ... Knobloch*. 1. Aufl. Berlin: Springer Spektrum. 623 S. ISBN: 978-3-662-48861-4.
- Sonar, T. et al. (2014):** *Der Briefwechsel Richard Dedekind – Heinrich Weber*. 1. Aufl. Berlin: De Gruyter Oldenbourg. 512 S. ISBN: 978-3-110-37366-0.
- Spalt, D. D. (2015):** *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit: Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundbegriffe*. 1. Aufl. Baden-Baden: Verlag Karl Alber. 789 S. ISBN: 978-3-495-48740-2.
- **(2019):** *Eine kurze Geschichte der Analysis: für Mathematiker und Philosophen*. 1. Aufl. 2019 Edition. Berlin: Springer Spektrum. 300 S. ISBN: 978-3-662-57815-5.
- Stein, H. (1988):** “Logos, logic, and logistiké: some philosophical remarks on nineteenth-century transformation of mathematics”. In: *History and philosophy of modern mathematics*. Hrsg. von W. Aspray; P. Kitcher. Minnesota studies in the philosophy of science 11. Minneapolis: University of Minnesota Press, S. 238–259. ISBN: 978-0-8166-1567-4.
- **(1990):** “Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics”. In: *Synthese* 84.2, S. 163–211. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.
- Stillwell, J. (1996):** *Sources of Hyperbolic Geometry*. UK ed. Edition. Providence; London: American Mathematical Society. 153 S. ISBN: 978-0-8218-0922-8.

- Stolz, O. (1888):** “Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes”. In: *Mathematische Annalen* XXII. Band, S. 504.
- Szabó, Á. (1964):** “EIN BELEG FÜR DIE VOREUDOXISCHE PROPORTIONENLEHRE? ARISTOTELES: TOPIK Θ . 3, p. 158 b 29-35”. In: *Archiv für Begriffsgeschichte* 9, S. 151–171. ISSN: 0003-8946; 2702-1432/e.
- Tait, W. W. (1986):** “Truth and Proof: The Platonism of Mathematics”. In: *Synthese* 69.3, S. 341–370. ISSN: 0039-7857; 1573-0964/e.
- Tait, W. (1998):** *Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein*. Chicago, Ill.: Open Court, 31. Dez. 1998. 300 S. ISBN: 978-0-8126-9344-7.
- Tietze, H. (1923):** “Beiträge zur allgemeinen Topologie. I”. In: *Mathematische Annalen* 88.3 (1. Sep. 1923), S. 290–312. ISSN: 0025-5831; 1432-1807/e.
- Tiles, M. (2004):** *The Philosophy of Set Theory: An: An Historical Introduction to Cantor’s Paradise*. Illustrated Edition. Mineola, N.Y: Dover Publications Inc. 256 S. ISBN: 978-0-486-43520-6.
- Van der Waerden, B. L. V. D. (1975):** *Science Awakening I*. Übers. von A. Dresden. 1975. Aufl. Kluwer Academic Publishers. 344 S. ISBN: 9789401071154.
- Wang, H. (1957):** “The Axiomatization of Arithmetic”. In: *The Journal of Symbolic Logic* 22.2, S. 145–158. ISSN: 0022-4812; 1943-5886/e.
- Weber, H. (1895):** *Lehrbuch der Algebra*. Bd. 1. 3 Bde. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 688 S.
- Weyl, H. (1918):** *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*. Leipzig: Veit. 83 S.
- (2014): “Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis”. In: *Gesammelte Abhandlungen II*. Hrsg. von K. Chandrasekharan. Reprint 1968. Berlin, Heidelberg: Springer, 43–50 (Nr. 32). ISBN: 978-3-662-44236-4.
- Wolff, C. (1713):** *Elementa matheseos universae*. Unter Mitarb. von Wellcome Library. Halae Magdeburgicae : Prostat in Officina Libraria Rengeriana. 998 S.
- Wußing, H. et al. (2012):** *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 2. Von Euler bis zur Gegenwart*. 2009. Edition. Berlin: Springer Spektrum. 693 S. ISBN: 978-3-642-31998-3.
- Zermelo, E. (1908):** “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.” In: *Mathematische Annalen* 65, S. 261–281. ISSN: 0025-5831; 1432-1807/e.
- Zeuthen, H. G. (1917):** *Hvorledes matematikken i tiden fra Platon til Euklid blev rationel videnskab*. Google-Books-ID: Q72W8DUapwMC. A. F. Høst & søn. 185 S.