

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Untersuchungen zur Matroidtheorie

verfasst von | submitted by
Alexander Donà BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 519 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Latein Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Dr. Michael Schlosser

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegt.

Datum: 15. November 2024

Unterschrift: _____

Danksagungen

Im Zuge meiner Beschäftigung mit der nun vorliegenden Masterarbeit bin ich von zahlreichen Menschen begleitet worden, denen besonderer Dank gebührt.

Meinen Eltern sei großer Dank ausgesprochen für die Unterstützung, die sie mir in den Jahren meines Studiums nicht nur finanziell, sondern auch hinsichtlich meiner Studienwahl und meiner Entscheidungen abseits des Studiums stets entgegengebracht haben. Danke für die Geduld insbesondere in den vergangenen zweieinhalb Jahren, in denen die Fertigstellung der Masterarbeit schleppender als erwünscht vorangegangen ist. Ich bin euch für die Bildungsmöglichkeiten, die ihr mir geboten habt, zutiefst dankbar.

Meinen Geschwistern sei großer Dank ausgesprochen für ihre Bestärkung und Ermutigung, die sie mir bei der Erarbeitung der Masterarbeit stets entgegengebracht haben. Danke für eure Expertise zu allen inhaltlichen und organisatorischen Fragen im Studium, auf die ich immer zählen durfte und für die ich sehr dankbar bin. Danke, dass ich auf euch auch abseits des Studiums immer zählen kann.

Meiner Großmutter sei großer Dank ausgesprochen für ihr ehrliches Interesse an meinem Studienfortschritt und zugleich für ihre liebevolle und ruhige Art, die mir stets eine optimistische Sichtweise geschenkt hat, wenn mein Zufriedenheitsgefühl unter dem teils schleppenden Vorankommen der Masterarbeit gelitten hat.

Meinen Freunden sei großer Dank ausgesprochen für ihre mentale Unterstützung, ihr ehrliches Interesse an meinem Studienfortschritt und ihre ehrliche Freude insbesondere in den vergangenen Wochen an meinem Vorankommen bei der Masterarbeit.

Meinem Betreuer Assoz. Prof. Dr. Michael Schlosser sei großer Dank ausgesprochen für die verständnisvolle Betreuung meines Arbeitsprozesses, die Unterstützung hinsichtlich inhaltlicher Schwerpunktsetzungen und auftretender Verständnisschwierigkeiten, und für die Geduld, die er mir in den letzten zweieinhalb Jahren stets entgegengebracht hat.

Der Direktion und Administration des GRG3 Kundmanngasse sei großer Dank ausgesprochen für das stets entgegengebrachte Verständnis, dass Studium und Beruf zeitlich oft nicht leicht zu vereinen sind, ihre Rücksichtnahme auf meine daraus resultierenden Wünsche und Bedürfnisse und ihr stetes Respektieren von Belastungsgrenzen.

Abstract

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Grundlagen der Matroidtheorie und behandelt neben unterschiedlichen Axiomensystemen für Matroide ausgewählte Matroidarten, Eigenschaften und Anwendungen von Matroiden. Die erfolgreiche Lektüre der Arbeit setzt kein Vorwissen zur Matroidtheorie voraus; grundlegende Kenntnisse im Bereich der linearen Algebra und der Graphentheorie sind dem schnelleren Verständnis gewiss dienlich, werden an erforderlicher Stelle aber auch stets in knapper Form vorgestellt, sodass auch etwaige anfängliche Wissenslücken dem verständigen Lesen nicht im Wege stehen sollten. Der Aufbau der Arbeit ist folgendermaßen gewählt: Ausgehend von der Betrachtung einer Matrix werden in Kapitel 2.1.1 jedem Matroid zugrundeliegende wesentliche Eigenschaften herausgearbeitet und diese für eine erste Definition (Definition 3) von Matroiden herangezogen. In Kapitel 2.1.2 wird der Bezug zwischen Graphentheorie und Matroidtheorie deutlich gemacht und somit die Matroidtheorie als Brücke zwischen linearer Algebra und der Graphentheorie dargestellt. Über die Verallgemeinerung vertrauter Begriffe aus linearer Algebra (Basen, Rang, lineare Hülle) und Graphentheorie (Kreis) werden in den verbleibenden Abschnitten aus Kapitel 2 weitere Axiomensysteme für Matroide vorgestellt.

Alle weiterführenden Kapitel dienen der Vertiefung des Verständnisses der Matroide. In Kapitel 3 bedienen wir uns der Axiomensysteme aus Kapitel 2, um daraus Matroide zu generieren, deren Ursprung nicht zwangsläufig eine Matrix oder ein Graph sein muss - und erweitern somit den Blick auf Matroide fundamental. In besonderer Weise betrachten wir in Abschnitt 3.1 uniforme Matroide und zeigen mittels des uniformen Matroids $U_{2,4}$, dass nicht allen Matroiden ein Graph zugrunde liegen muss. In Abschnitt 3.2 erarbeiten wir grundlegende Gedanken zu Transversalmatroiden, die am Ende der Arbeit in einer Anwendung des Kruskal-Algorithmus' (Abschnitt 5.2.1) nochmals aufgegriffen werden.

Kapitel 4 verallgemeinert den Begriff der Dualität aus der Graphentheorie. Innerhalb der Matroidtheorie ergibt sich dadurch eine effektive Möglichkeit, aus bereits bekannten Matroiden neue Matroide zu generieren, zudem führt Dualität zu einem tieferen Verständnis der Zusammenhänge besonderer Mengen innerhalb eines Matroids. Die Krönung dieses Kapitels folgt im Beweis von Theorem 33, dass das Vámos-Matroid V_8 keine ihr zugrundeliegende Matrix hat.

Im letzten Kapitel der Arbeit werden schließlich ausgewählte kombinatorische Fragestellungen und Vermutungen zur Matroidtheorie genauer untersucht. Im Zuge dieser Betrachtung lernen wir ein Verfahren kennen, um die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit einer Grundmenge, deren Mächtigkeit 9 nicht übersteigt, zu bestimmen. Das Gros der vorgestellten Ideen besteht aus unbewiesenen Vermutungen und macht deutlich, wie viel Erforschungspotenzial die Matroidtheorie auch knapp 100 Jahre nach ihrer Entwicklung birgt. In Kapitel 5.1.3 nehmen wir auf die Heron-Rota-Welsh-Vermutung Bezug, für deren kürzlich erbrachten Beweis June Huh 2022 mit der Fields-Medaille bedacht wurde, wodurch die Matroidtheorie in den Fokus der mathematischen Fachwelt rückte. Die vorliegende Arbeit schließt mit einer genaueren Untersuchung von Greedy-Algorithmen ab und liefert in Theorem 41 die fundamentale Erkenntnis, dass Greedy-Algorithmen nur für Matroide verlässlich funktionsfähig sind. Eine Anwendungen des Greedy-Algorithmus' innerhalb der Graphentheorie und eine

Anwendung für Transversalmatroide (Kapitel 5.2.1) streichen die Faszination und Anwendungsmöglichkeiten der Matroidtheorie abschließend heraus.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung	2
Danksagungen	3
Abstract	4
1 Vorbemerkungen	9
1.1 Historische Entwicklung der Matroidtheorie	9
1.2 Zur Struktur der vorliegenden Arbeit	10
1.3 Zur Nomenklatur	11
2 Axiomensysteme	12
2.1 Unabhängige Mengen eines Matroids	12
2.1.1 Matrizen als Ausgangspunkt für Matroide	12
2.1.2 Graphen als Ausgangspunkt für Matroide	16
2.2 Basen eines Matroids	28
2.3 Kreise eines Matroids	31
2.4 Rang eines Matroids	36
2.5 Hülle eines Matroids	37
2.6 Schlussbemerkungen zu den Axiomensystemen	38
3 Matroidarten	42
3.1 Uniforme Matroide	42
3.2 Transversalmatroide	45
4 Dualität	51
4.1 Grundsätzliches zur Dualität	51
4.2 Dualität bei Kreismatroiden	55
4.3 Dualität bei Vektormatroiden	56
5 Abzählbarkeiten und Anwendungen von Matroiden	65
5.1 Überlegungen zur Abzählbarkeit von Matroiden	65
5.1.1 Algorithmus zur Berechnung von Matroid-Anzahlen	66
5.1.2 Weitere Resultate	67
5.1.3 Die Heron-Rota-Welsh-Vermutung	71
5.2 Greedy-Algorithmen und ihr Bezug zur Matroidtheorie	72
5.2.1 Anwendungen des Kruskal-Algorithmus	76
6 Schlussbemerkung	80

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ein Graph entsteht	17
2.2	Unbeschrifteter Graph	17
2.3	Beschrifteter Graph	18
2.4	Weg in einem Graphen	18
2.5	Zyklus in einem Graphen	19
2.6	Kreis in einem Graphen	19
2.7	Baum in einem Graphen	20
2.8	Wald in einem Graphen	20
2.9	Graph Beispiel 4	21
2.10	Umbenannter Graph Beispiel 4	21
2.11	Graph Lemma 6	27
2.12	Veranschaulichung von (C3)	34
3.1	Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{0,n}$	43
3.2	Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{1,n}$	43
3.3	Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{n,n}$	43
3.4	Einfache Graphen mit vier Kanten	44
3.5	Bipartiter Graph zu Beispiel 22	45
3.6	Transversale inklusive Matchings zu Beispiel 22	46
3.7	$P_1 = \{1, 4\}$ zu Beispiel 22 mit unterschiedlichen Matchings	49
3.8	Matchings eines Transversalmatroids - Problematik	49
4.1	Graph G zu Beispiel 27	53
4.2	Erzeugung des dualen Graphen G^* aus dem (planaren) Graphen G	55
4.3	Der nicht-planare Graph $K_{3,3}$	56
4.4	Geometrische Veranschaulichung des Vámos-Matroids V_8	62
4.5	Geometrische Veranschaulichung des Vámos-Matroids V_8 mitsamt P	64
5.1	Gewichteter Graph G	76
5.2	Minimalgewichteter Spannbaum zu Abbildung 5.1	77

Tabellenverzeichnis

2.1	Linear unabhängige Spaltenvektoren von A	13
2.2	Linear abhängige Spaltenvektoren von A	14
2.3	Wälder des Graphen G	22
2.4	Zyklen des Graphen G	23
2.5	Überblick über matroidtheoretische Begriffe	40
2.6	Zusammenhang zwischen Axiomensystemen	41
4.1	Zusammenhang zwischen Mengen eines Matroids und des dualen Matroids .	54
4.2	Matrizen dualer Matroide finden	58
4.3	Orthogonalität und Dualität sind eng miteinander verknüpft	60
5.1	Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E und $0 \leq E \leq 9$. . .	68

1 Vorbemerkungen

1.1 Historische Entwicklung der Matroidtheorie

Die Vielfältigkeit jener mathematischen Überlegungen, die sich heute unter dem Forschungsgebiet der Matroide subsummieren lassen oder wenigstens einen fachlichen Bezug dazu aufweisen, macht es schwer, die „Geburtsstunde“ der Matroidtheorie historisch eindeutig festzulegen. Hassler Whitney führte in seiner Publikation *On the Abstract Properties of Linear Dependence* [36] den Begriff Matroid erstmals ein und eröffnete so den Weg zu einem eigenständigen Forschungsgebiet, zu dem in den nachfolgenden Jahrzehnten zahlreiche Erkenntnisse beigesteuert werden sollten. Schon bald nach Whitneys Veröffentlichung erkannten viele Mathematiker Zusammenhänge zwischen Whitneys und ihrer eigenen (teils früheren) Forschungsarbeit. Schrijver, der sich in seiner dreibändigen Publikation *Combinatorial Optimization* an einer Stelle auch detailliert mit den historischen Wurzeln der Matroidtheorie beschäftigt [31, S.672-687], identifiziert neben Whitneys fachlichen Beiträgen drei große Forschungsstränge, die – teils aus ganz unterschiedlichen Richtungen startend – schließlich in der Matroidtheorie münden.

- 1) Die Arbeit im Bereich der Verbandstheorie von Richard Dedekind [14] und George Birkhoff [7] zwischen 1897 und 1933 führte zur Entdeckung von semimodularen Punktverbänden, die eine Entsprechung im Bereich der Verbände geschlossener Mengen innerhalb der Matroidtheorie haben. Birkhoff [6] erkannte den Zusammenhang zur Matroidtheorie unmittelbar nach Whitneys erster Publikation 1935.
- 2) Forschungsarbeiten im Bereich der linearen und algebraischen Unabhängigkeit führten Hermann Graßmann [18] und Ernst Steinitz [32] bereits im ausgehenden 19. und frühen 20. Jahrhundert durch. Ihre Erkenntnisse wurden von Bartel van der Waerden [33] aufgegriffen, der darauf aufbauend eine Verallgemeinerung linearer und algebraischer (Un-)Abhängigkeit formulierte. In Verbindung mit der Matroidtheorie wurden die Forschungsergebnisse durch Birkhoff und Mac Lane [8] gebracht.
- 3) In der Nachfolge aller Mathematiker, die nach einer Axiomatisierung der Geometrie strebten, sieht Schrijver Takeo Nakasawa mit seiner 1935 veröffentlichten Publikation *Zur Axiomatisierung der linearen Abhängigkeit*. [25] Nakasawa erkannte bereits 1936, dass die Inhalte seiner Publikation mit jenen Whitneys [36] übereinstimmten. Dass zur gleichen Zeit unabhängig voneinander Forschungen mit dem Ziel einer Axiomatisierung des Abhängigkeitsbegriffs, aus dem die Matroidtheorie hervorgeht, durchgeführt wurden, zeugt davon, dass Whitneys Interesse für die Materie nicht exklusiv war, sondern vielerorts geteilt wurde. Oxley weist aufgrund des zeitlichen Zusammenfalls der

Publikationen Whitneys und Nakasawas beide gleichermaßen als Urheber der Matroidtheorie aus. [28, S.1]

Erst kürzlich erreichte die knapp 100-jährige Forschungsgeschichte zur Matroidtheorie mit der Verleihung der Fields-Medaille 2022 an June Huh für den Beweis der Heron-Rota-Welsh-Vermutung [2] für Matroide eine zwischenzeitliche Krönung (siehe Kapitel 5.1.3). Um genauere Einblicke in die historische Entwicklung der Matroidtheorie zu erhalten, sei der interessierte Leser auf Schrijver verwiesen [31, S.672-687]. Für uns soll der obige geschichtliche Abriss ausreichen, um zu verstehen, dass die Matroidtheorie als Ergebnis aus diversen Beschäftigungen mit dem Abhängigkeitsbegriff heraus entstand, vorausgegangene Forschung vereinte und dadurch mathematische Wissenslücken schloss. Entsprechend spricht Schrijver folgerichtig von der „Natürlichkeit des Konzepts“ eines Matroids [31, S.673]. Diese Natürlichkeit und so manch verblüffenden Zusammenhang zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten sichtbar zu machen und sich an den Überraschungen, die die Mathematik immer wieder auch in der Matroidtheorie für uns bereithält, zu erfreuen, ist ein wesentliches Ziel dieser Arbeit.

1.2 Zur Struktur der vorliegenden Arbeit

Die Literatur kennt im Wesentlichen zwei Wege, die Lesenden in die Matroidtheorie einzuführen. Der eine Weg führt über das Spezielle zum Allgemeinen und versucht über Anwendungsbezug und Teilgebiete der Matroidtheorie einen Zugang zu den, wie Jungnickel [19] es formuliert, „recht abstrakten und etwas trockenen axiomatischen Untersuchungen“ der Matroidtheorie zu finden. Jungnickel selbst nähert sich über die Transversaltheorie an, die er im Detail vorstellt und erst gegen Ende seines Buches in die ihr zugrundeliegende Matroidtheorie einbettet. Tatsächlich stellt nach Welsh [35, S.6] die Transversaltheorie jenen Anwendungsbereich dar, auf den zumindest die Matroidtheorie den größten Einfluss gehabt hat. Die Mehrheit der Lehrbücher (Welsh [35], Oxley [27], Schrijver[31], Aigner [3]) führt anders als Jungnickel zuerst die Axiomatik der Matroidtheorie ein (und steht somit in Nachfolge zu Whitney [36]), ehe sie an späterer Stelle auf Anwendungen der Matroidtheorie eingeht. Diesem Weg folgt auch die vorliegende Arbeit und orientiert sich in ihrer Struktur und der Nomenklatur stark an Oxley [27], dessen Publikation eine der rezentesten und zugleich eine der umfassendsten darstellt. Dort, wo dem zuvor mit der Matroidtheorie nicht vertrauten Autor bei der inhaltlichen Auseinandersetzung mit der Matroidtheorie zunächst Verständnisschwierigkeiten unterlaufen sind, wird in der vorliegenden Arbeit versucht, erklärende Beispiele einzubringen, die von manchen Lesern als übertriebene Ausführlichkeit wahrgenommen werden mögen. Die dahinterliegende Intention ist es, dadurch zu großer Abstraktion vorzubeugen, anschauliche Anknüpfungspunkte an Vorwissen herzustellen, vorgestellte Definitionen nachvollziehbar herzuleiten und auch dem Leser ohne großes Vorwissen eine nachvollziehbare Lektüre zu ermöglichen.

1.3 Zur Nomenklatur

Wir übernehmen folgende Schreibweisen von Oxley [27]:

$X - Y$ statt $X \setminus Y$ $X - e$ statt $X \setminus \{e\}$ $X \cup e$ statt $X \cup \{e\}$ $X \cap e$ statt $X \cap \{e\}$

2 Axiomensysteme

Eine besondere Charakteristik der Matroidtheorie stellt die Tatsache dar, dass die Axiomatisierung von Matroiden auf viele verschiedene, zueinander äquivalente Weisen erfolgen kann – ein Umstand, auf den bereits Whitney [36] in seiner Publikation eingeht und mit dem auch der inhaltliche Teil dieser Arbeit beginnt. Wie bereits eingangs erwähnt, erwuchs die Matroidtheorie aus dem Wunsch, Abhängigkeitsbegriffe zu verallgemeinern. Hassler Whitney konnte dabei auf seine früheren Forschungen im Bereich der linearen Algebra zurückgreifen, zudem hatte er gewisse Eigenschaften festgestellt, die Bäume und Zyklen in Graphen mit linear unabhängigen und linear abhängigen Vektoren teilen - wenn man nur den richtigen Blickwinkel wählt (diese Flexibilität in der Betrachtungsweise ist oft unerlässliche Quelle mathematischer Erkenntnisse, die Matroidtheorie stellt hier keine Ausnahme dar). Da dieser Zugang wenig Vorwissen voraussetzt, nähert sich auch diese Arbeit der Matroidtheorie über Matrizen und Graphen an. Whitneys Interesse im Bereich der linearen Algebra und der Graphentheorie ist es im Übrigen auch geschuldet, dass viele Begrifflichkeiten, die heute in der Matroidtheorie üblich sind, aus der Matrizenrechnung und Graphentheorie entlehnt wurden.

2.1 Unabhängige Mengen eines Matroids

2.1.1 Matrizen als Ausgangspunkt für Matroide

Als Whitney, nach einer Axiomatisierung von linearer Unabhängigkeit trachtend, auf Grundlage seiner Betrachtungen von Matrizen ein Axiomensystem entwarf, musste er bald feststellen, dass es zwar wesentliche Eigenschaften linearer Unabhängigkeit widerspiegelte, aber auch von Objekten erfüllt wurde, die keine Matrizen und als solche auch nicht darstellbar waren. Er war daher gezwungen, für die mathematischen Objekte, die seinem entworfenen Axiomensystem genügten, einen neuen Begriff ins Leben zu rufen. Er entschied sich für den Namen „Matroid“ („matrixähnlich“). In einem ersten Schritt wollen wir nachvollziehen, welche Axiome Whitney aus seinen Betrachtungen von Matrizen formulierte.

Beispiel 1 *Betrachten wir zunächst die Matrix A:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Vereinfachung unserer Überlegungen wollen wir die Spaltenvektoren von A durchnummern. Das führt zu folgender Identifikation:

Tabelle 2.1: Die Elemente von $\mathcal{I}$: Linear unabhängige Spaltenvektoren von A

$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\{3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\{4\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ $\{5\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\{6\}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\{1, 3\}$
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\{1, 4\}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\{1, 6\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ $\{3, 5\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\{3, 6\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ $\{4, 5\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\{4, 6\}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\{5, 6\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\emptyset$	

$$1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 3 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 5 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 6 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir nun die Menge aller Spaltenvektoren von A mit E, so ergibt sich, gemäß der obigen Notation, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Betrachten wir weiters die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ von E. Diese beinhaltet nun alle beliebigen Kombinationen an Indizes von 1 bis 6, wobei diese für die dahinterstehenden Spaltenvektoren stehen. Es folgt ein essenzieller Gedanke in Whitneys Überlegung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ von E zerfällt bei der Überprüfung hinsichtlich linearer Unabhängigkeit¹ in genau zwei Gruppen, nämlich in die Gruppe jener Mengen, deren Spaltenvektoren zueinander linear unabhängig, und in die zweite Gruppe jener Mengen, deren Spaltenvektoren zueinander linear abhängig sind. Im Fall der Matrix A ergibt sich für die Menge der linear unabhängigen Teilmengen, die wir mit $\mathcal{I}$ (vgl. englisch „independent“) bezeichnen wollen, das in Tabelle 2.1 festgehaltene Bild. Die Menge der abhängigen Teilmengen – sie sei hier mit $\mathcal{D}$ (vgl. englisch „dependent“) bezeichnet – beinhaltet alle verbleibenden Elemente der Potenzmenge von E, also $\mathcal{P}(E) - \mathcal{I}$. Alle Vektorengruppen von $\mathcal{D}$ widersprechen der Definition linearer Unabhängigkeit. Sie finden sich in Tabelle 2.2.

¹n Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Betrachten wir nun $\mathcal{I}$ aus Beispiel 1 (vgl. Tabelle 2.1) genauer, so stellen wir Folgendes fest:

1. Die leere Menge ist Teil von $\mathcal{I}$: $\boxed{\emptyset \in \mathcal{I}}$
2. Die zweielementigen Mengen, die in $\mathcal{I}$ liegen, beinhalten als Elemente Vektoren, die alle selbst wieder in $\mathcal{I}$ liegen. Allgemein gesprochen: Jede Teilmenge einer Menge, die in $\mathcal{I}$ liegt, ist selbst wieder Teil von $\mathcal{I}$: $\boxed{I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}}$
3. Für zwei Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit, die beide in $\mathcal{I}$ liegen, gilt: Der Menge mit größerer Mächtigkeit kann man ein Element entnehmen und der Menge mit kleinerer Mächtigkeit hinzufügen, sodass auch diese neue Menge in $\mathcal{I}$ enthalten ist: $\boxed{I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}}$

Tatsächlich sind die aufgezählten Eigenschaften nicht der Wahl des Beispiels geschuldet, sondern haben Gültigkeit für jede beliebige Matrix. Diesen Umstand wollen wir in einer allgemeineren Formulierung festhalten.

Theorem 2 Gegeben sei eine beliebige $m \times n$ -Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Menge der Spaltenvektoren und benenne diese mit E . Man betrachte die Menge $\mathcal{I}$, die alle Kombinationen von Spaltenvektoren von E enthält, die linear unabhängig sind. Für $\mathcal{I}$ gelten dann folgende Kriterien:

$$(I1) \quad \emptyset \in \mathcal{I}$$

$$(I2) \quad I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$$

$$(I3) \quad I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$$

Beweis Theorem 2 (Oxley [27, S.8]) Die Gültigkeit von (I1) und (I2) liegt in der Definition linearer Unabhängigkeit. Um die Gültigkeit von (I3) zu zeigen, nehmen wir an, dass I_1 und I_2 zwei linear unabhängige Teilmengen von E seien und (o.B.d.A.) $|I_1| < |I_2|$ gelte. W , aufgespannt von $I_1 \cup I_2$, sei ein Untervektorraum von V , dem von allen Vektoren der Matrix A aufgespannten Vektorraum. Die Dimension von W ist mindestens $|I_2|$ (weil I_2 unabhängig und somit eine Basis von W ist). Man nehme an, dass $\forall e \in I_2 - I_1$ die Menge $I_1 \cup e$ linear abhängig ist. Dann ist W bereits Teil der linearen Hülle von I_1 . Dann aber kann I_2 nicht linear unabhängig sein – ein Widerspruch. Daher muss es ein Element e geben, sodass $I_1 \cup e$ linear unabhängig und somit ein Element von $\mathcal{I}$ ist. $\square$

Anmerkung: Der Leser, der mit Begriffen wie (Unter-)Vektorraum, Basis und linearer Hülle nicht vertraut ist, sollte den Beweis zu Theorem 2 nachvollziehen können, sobald er die Kapitel 2.2, 2.4 und 2.5 gelesen hat.

Ein kleines Problem...

Whitney musste an dieser Stelle feststellen, dass die erarbeiteten Kriterien (I1) – (I3) zwar, wie eben gezeigt, für alle Matrizen Gültigkeit besitzen – aber nicht nur für Matrizen. [36, S.529f.] Er konstatierte daher, dass es „other theorems not deducible from these“ geben müsse, um lineare (Un-)Abhängigkeit eindeutig zu beschreiben, hielt aber gleich darauf fest: „Further theorems seem, however, to be quite difficult to find“. [36, S.509] Der Entschluss, sich nicht auf die Suche nach weiteren Axiomen zu machen, sondern Objekte zu untersuchen, die die schon erarbeiteten Axiome (I1) – (I3) erfüllen, ist gleichbedeutend mit der Geburtsstunde der Matroide, für die sich also folgende Definition ergibt:

Definition 3 *Ein Matroid ist ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{I})$ bestehend aus einer endlichen Menge E und einer Menge $\mathcal{I}$ von Teilmengen von E mit folgenden Eigenschaften:*

$$(I1) \quad \emptyset \in \mathcal{I}$$

$$(I2) \quad I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$$

$$(I3) \quad I_1, I_2 \in \mathcal{I}, |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \in \mathcal{I}$$

Man beachte, dass in der Definition von Matroiden die Begriffe „Matrix“, „Vektoren“ oder „lineare Abhängigkeit“ keine Rolle mehr spielen. Es ist dies der Schlüsselmoment der Abstraktion, aufgrund derer die Matroidtheorie von Oxley als „analysis of an **abstract** theory of dependence“ [27, S.7] bezeichnet wird. Matroide sind nüchtern betrachtet nicht mehr als ein Dupel zweier Mengen, von der die eine Menge eine Menge von Teilmengen der anderen ist und gewisse Eigenschaften, nämlich (I1) – (I3), erfüllt. Sich auf die Suche nach anderen Strukturen zu machen, die ebenso wie Matrizen die Voraussetzungen für Matroide erfüllen, heißt auch, sich auf die Suche nach Vernetzung bisher vermeintlich unzusammenhängender Teilgebiete der Mathematik zu machen, bei denen die Axiome der Matroide den „gemeinsamen Nenner“ darstellen. Und diese Suche sollte nicht ergebnislos bleiben.

2.1.2 Graphen als Ausgangspunkt für Matroide

Whitney erkannte aufgrund seiner früheren Beschäftigung mit der Graphentheorie, dass bei geeigneter Betrachtung auch aus Graphen Mengendupel gebildet werden könnten, die den Anforderungen (I1) – (I3) eines Matroids genügen. Ehe wir uns diesem Aspekt zuwenden, sei noch ein kurzer Überblick über einige (für uns) wesentliche Begrifflichkeiten der Graphentheorie gegeben.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Verbindet man auf einer Landkarte die österreichischen Landeshauptstädte teilweise miteinander, so ergibt sich ein Bild wie in Abbildung 2.1. Entfernt man nun die Landkarte im Hintergrund, bleiben nur die roten Verbindungslinien und die zu schwarzen Punkten reduzierten Landeshauptstädte übrig (siehe Abbildung 2.2).

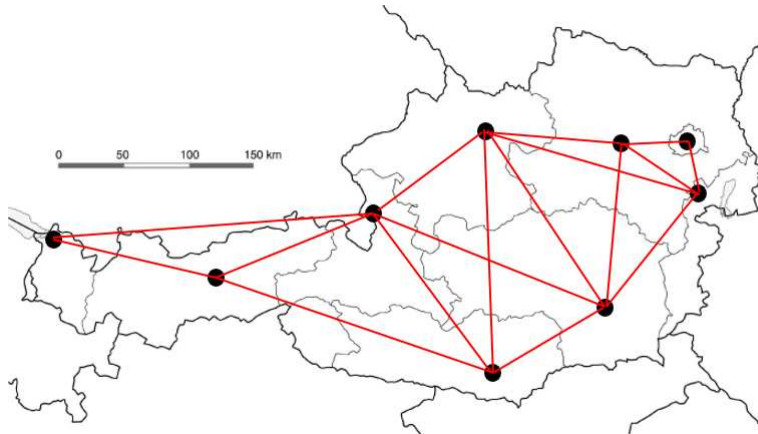


Abbildung 2.1

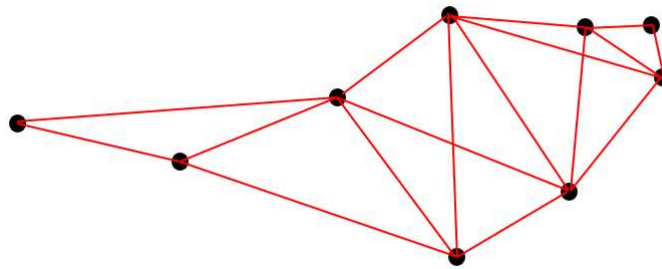


Abbildung 2.2

Das in Abbildung 2.2 vorliegende Objekt nennt man einen Graphen. Ein Graph besteht aus Knoten (schwarze Punkte) und Kanten (rote Linien), wobei eine Kante stets zwei Knoten verbindet (die zwei Knoten können auch ident sein, in diesem Fall nennt man die Kante „Schlinge“). Die Menge der Knoten wird üblicherweise mit V (vgl. englisch „vertices“) bezeichnet, die Menge der Kanten mit E (vgl. englisch „edges“). Der Graph, der aus der Knotenmenge V und der Kantenmenge E entsteht, wird üblicherweise mit $G(V, E)$ oder, sofern keine Verwechslung besteht, nur mit G bezeichnet. Benennen wir die Knoten des Graphen aus Abbildung 2.2 mit $v_1, v_2, \dots, v_9$ und die Kanten mit $e_1, e_2, \dots, e_9$, so ergibt sich ein Bild wie in Abbildung 2.3.

Ausgehend von Abbildung 2.3 wollen wir einige Begriffe näher definieren:

Weg: In Abbildung 2.4 ist ein Weg innerhalb des Graphen grün eingefärbt. Ein Weg ist eine geordnete Abfolge benachbarter Kanten in einem Graphen. In diesem Beispiel kann man diese Abfolge mit $(e_1, e_2, e_{11}, e_{12})$ bezeichnen. Alternativ ist es möglich, einen Weg über die Knoten zu beschreiben, die passiert werden, wobei auch hier die Reihenfolge wichtig ist. Im vorliegenden Falle führt das zu $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_6)$.

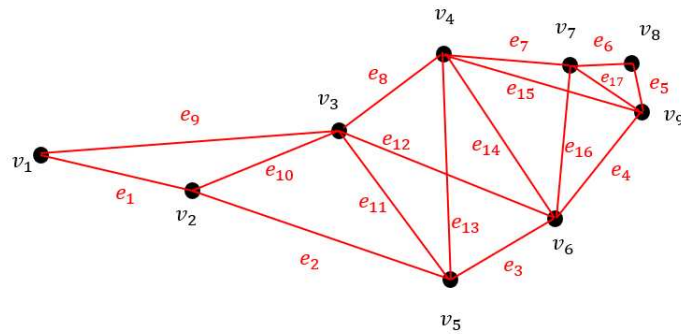


Abbildung 2.3

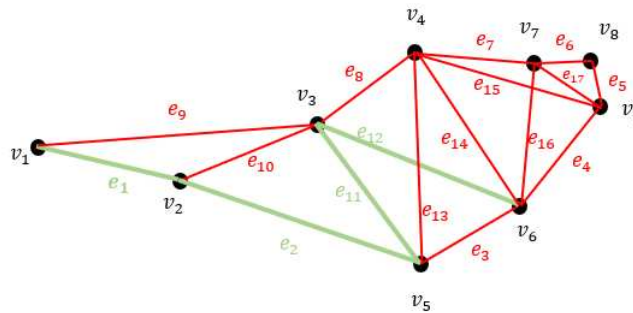


Abbildung 2.4

Geschlossener Weg: Ein Weg, dessen Start- und Zielknoten ident sind.

Zyklus: Ein geschlossener Weg, bei dem keine Kante mehrmals vorkommt (es können aber mehrmals dieselben Knoten passiert werden, Anfangs- und Endknoten sind per definitionem gleich). Jeder Zyklus ist ein geschlossener Weg, aber nicht jeder geschlossene Weg ein Zyklus. In Abbildung 2.5 ist der Zyklus $(e_1, e_2, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_8, e_9)$ grün eingefärbt, Knoten v_3 wird zweimal passiert.

Kreis: Ein geschlossener Weg, bei dem kein Knoten (abseits des Start- und Endknoten) mehrmals passiert wird (und somit auch keine Kante mehrmals vorkommt). Abbildung 2.6 zeigt einen Kreis. Jeder Kreis ist ein Zyklus, aber nicht jeder Zyklus ein Kreis. Allerdings enthält jeder Zyklus einen Kreis (in Abbildung 2.5 beispielsweise (e_8, e_{12}, e_{14}) oder (e_1, e_2, e_{11}, e_9)).

Wald: Ein Graph, der keine Zyklen enthält, heißt Wald. Abbildung 2.7 und Abbildung 2.8 zeigen Wälder, die durch das Löschen einiger Kanten von G aus Abbildung 2.3 entstehen. Ein Wald, der, wie in Abbildung 2.7, nur aus einer Komponente besteht, heißt Baum. Jeder

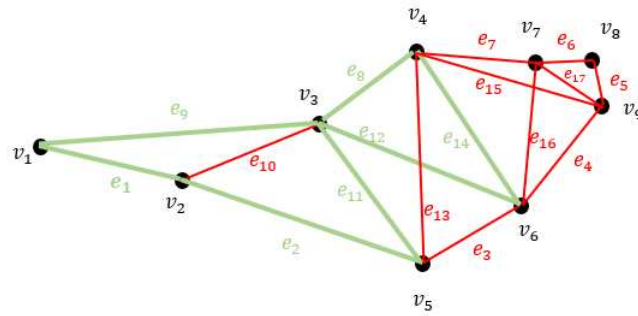


Abbildung 2.5: Ein Zyklus mit dem Kantenzug $(e_1, e_2, e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_8, e_9)$, dessen Start- und Endknoten v_1 ist. Da der Knoten v_3 mehrmals passiert wird, handelt es sich um keinen Kreis.

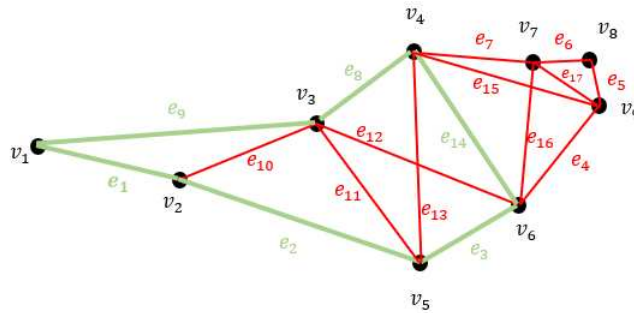


Abbildung 2.6: Ein Kreis mit dem Kantenzug $(e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{14}, e_8, e_9)$, dessen Start- und Endknoten v_1 ist. Die passierten Knoten sind dieselben wie im Zyklus in Abbildung 2.5, allerdings wird v_3 nicht mehrmals passiert.

Baum ist ein Wald, aber nicht jeder Wald ist ein Baum. Ein Wald (Baum), der durch das Löschen von Kanten aus einem (zusammenhängenden) Graphen entsteht und alle Knoten des Ursprungsgraphen enthält, heißt Spannwald (Spannbaum). Der Graph G_1 in Abbildung 2.7 ist ein Spannbaum von G .

Teilgraph: Ein Graph $T(V', E')$ heißt Teilgraph eines Graphen $G(V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ gilt und die Start- und Endknoten aller Kanten aus E' in V' liegen. Ein Teilgraph T ist also ein Graph, der entsteht, wenn Kanten oder Knoten von G gelöscht werden (auch G selbst ist ein (trivialer) Teilgraph von G). Wird ein Knoten v_x aus G gelöscht, so werden automatisch auch alle inzidenten Kanten (die Kanten, die v_x als einen Endknoten haben) gelöscht. Alle Graphen in den Abbildungen 2.4 - 2.8 sind Beispiele für Teilgraphen von G aus Abbildung 2.3.

Wir haben nun alle Begrifflichkeiten definiert, um Whitneys Gedankengang gut folgen zu können.

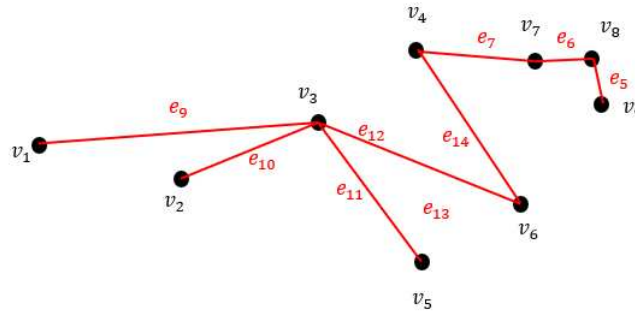


Abbildung 2.7: Durch geeignetes Entfernen von Kanten entsteht aus dem Graph G aus Abbildung 2.3 ein neuer Graph G_1 , der keine Zyklen enthält. G_1 ist ein Baum, und, da er alle Knoten von G enthält, sogar ein Spannbaum von G .

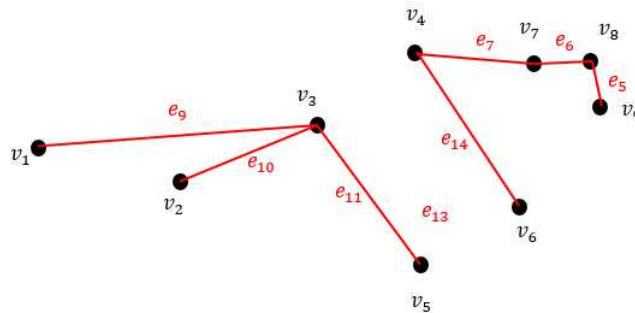


Abbildung 2.8: Durch Entfernung von e_{12} entsteht aus G_1 (Abbildung 2.7) ein neuer Graph G_2 . Dieser neue Graph G_2 setzt sich aus zwei zyklensfreien Teilgraphen zusammen und ist daher ein Wald.

Beispiel 4 Betrachten wir den zusammenhängenden Graphen $G(V, E)$ in Abbildung 2.9. Zur Vereinfachung der Überlegungen und aus Analogiegründen zu Beispiel 1 nummerieren wir zunächst die Kanten des Graphen durch: $1 := e_1, 2 := e_2, 3 := e_3, 4 := e_4, 5 := e_5, 6 := e_6$. Da wir die Knoten für die weiteren Überlegungen nicht benötigen, lassen wir die Beschriftung im Graphen weg (siehe Abbildung 2.10). Die Menge der Kanten des Graphen ist also $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Durch beliebiges Entfernen von Kanten in Abbildung 2.10 lassen sich Teilgraphen von G mit gleicher Knotenmenge V erzeugen.

Jene Menge, die die Kantenmengen aller Teilgraphen von G beinhaltet, ist, nach kurzer Überlegung, gleichbedeutend mit der Potenzmenge von E , also $\mathcal{P}(E)$. Whitney erkannte, dass es im Bereich der Graphentheorie ein Kriterium gibt, das die Teilgraphen eines Graphen ebenso in zwei disjunkte Mengen einteilt, wie es das Kriterium der linearen(Un-)Abhängigkeit bei der Potenzmenge der Spaltenvektoren einer Matrix tut (vgl. Beispiel 1). Das Kriterium bei den Graphen ist dabei „ist ein Wald“ auf der einen und „beinhaltet einen Zyklus“² auf der

²Genauso könnte man das Kriterium „beinhaltet einen Kreis“ heranziehen. In jedem Zyklus steckt ein

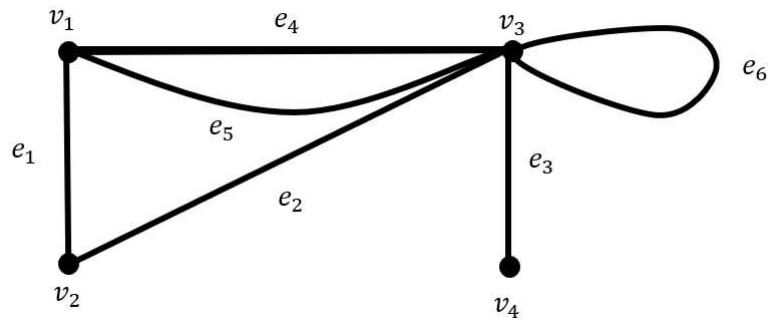


Abbildung 2.9

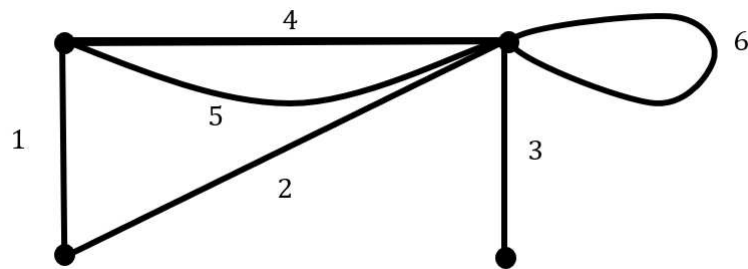


Abbildung 2.10

anderen Seite. Dass diese Kriterien disjunkt sind, liegt in der Definition eines Waldes („ein Graph, der keine Zyklen enthält“), und es bleibt auch kein Platz für eine dritte Möglichkeit, sodass gewiss jeder Teilgraph entweder Wald ist oder einen Zyklus beinhaltet. Wir wollen nun alle Teilgraphen vom Graphen G aus Abbildung 2.10 bilden und überprüfen, ob es sich dabei um Wälder oder Teilgraphen mit Zyklen handelt. Wir wollen die Menge jener Teilgraphen, die Wälder sind, mit $\mathcal{F}$ (vgl. englisch „forest“) benennen. Die Elemente von $\mathcal{F}$ sind in Tabelle 2.3 zu sehen. Die Menge $\mathcal{Z}$ der Teilmengen, die einen Zyklus enthalten, beinhaltet alle verbleibenden Elemente der Potenzmenge von E , also $\mathcal{P}(E) - \mathcal{F}$. Sie sind in Tabelle 2.4 abgebildet.

Kreis, Kreise sind in gewisser Weise die kleinsten Zyklen – im Abschnitt 2.3 werden wir uns das noch zunutze machen.

Tabelle 2.3: Die Elemente von $\mathcal{F}$: Teilgraphen von G , die Wälder sind

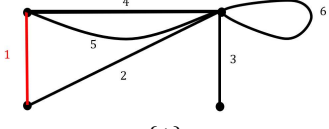
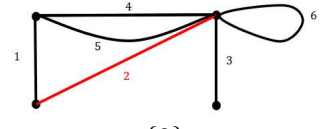
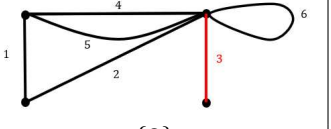
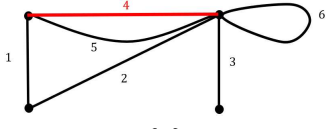
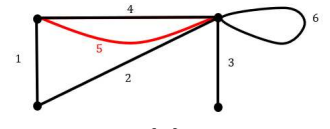
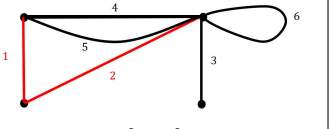
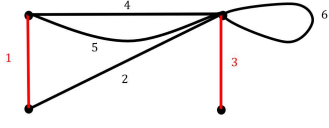
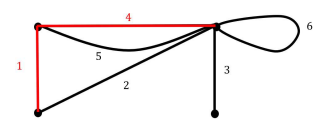
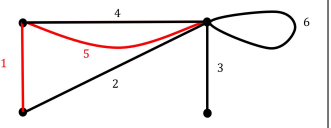
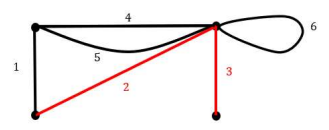
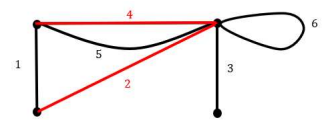
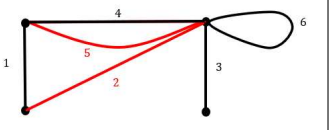
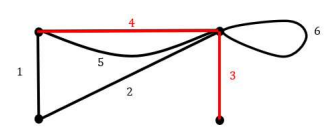
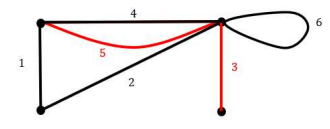
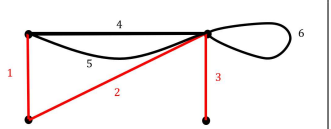
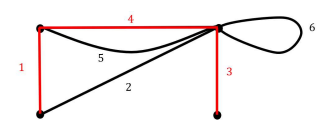
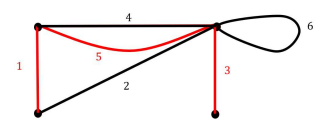
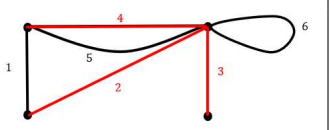
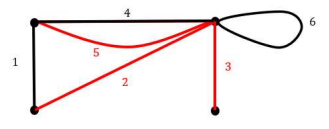
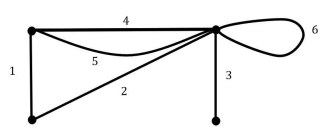
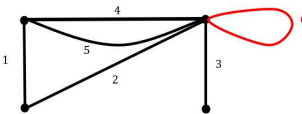
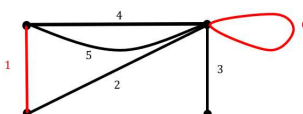
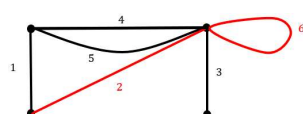
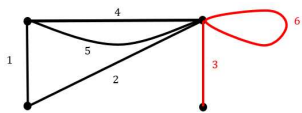
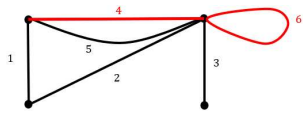
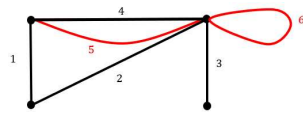
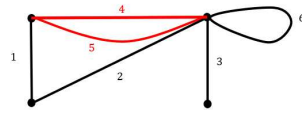
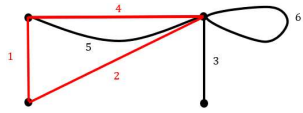
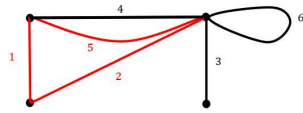
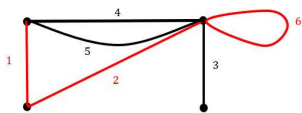
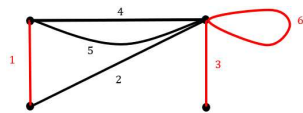
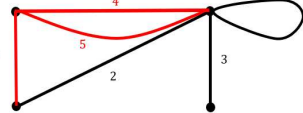
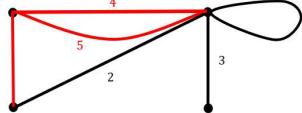
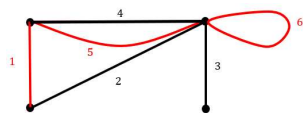
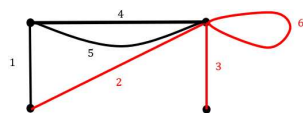
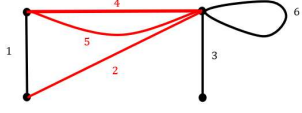
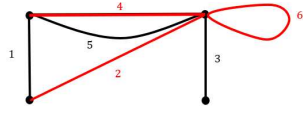
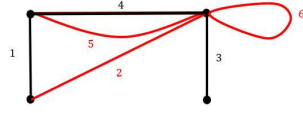
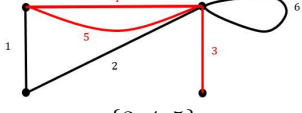
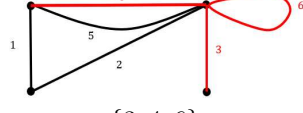
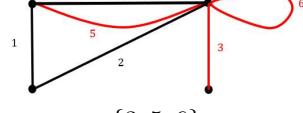
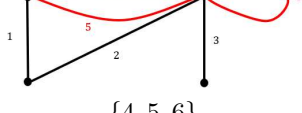
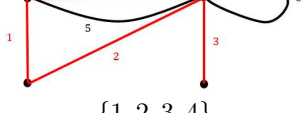
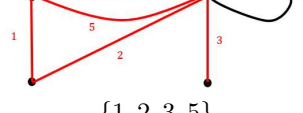
 $\{1\}$	 $\{2\}$	 $\{3\}$
 $\{4\}$	 $\{5\}$	 $\{1, 2\}$
 $\{1, 3\}$	 $\{1, 4\}$	 $\{1, 5\}$
 $\{2, 3\}$	 $\{2, 4\}$	 $\{2, 5\}$
 $\{3, 4\}$	 $\{3, 5\}$	 $\{1, 2, 3\}$
 $\{1, 3, 4\}$	 $\{1, 3, 5\}$	 $\{2, 3, 4\}$
 $\{2, 3, 5\}$	 $\emptyset$	

Tabelle 2.4: Die Elemente von $\mathcal{Z}$: Teilgraphen von G , die Zyklen enthalten

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung Tabelle 2.4

 $\{1, 2, 3, 6\}$	 $\{1, 2, 4, 5\}$	 $\{1, 2, 4, 6\}$
 $\{1, 2, 5, 6\}$	 $\{1, 3, 4, 5\}$	 $\{1, 3, 4, 6\}$
 $\{1, 3, 5, 6\}$	 $\{1, 4, 5, 6\}$	 $\{2, 3, 4, 5\}$
 $\{2, 3, 4, 6\}$	 $\{2, 3, 5, 6\}$	 $\{2, 4, 5, 6\}$
 $\{3, 4, 5, 6\}$	 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$	 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 $\{1, 2, 3, 5, 6\}$	 $\{1, 2, 4, 5, 6\}$	 $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$	 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$	

Betrachten wir nun $\mathcal{F}$ genauer, stellen wir folgende (vertraute) Eigenschaften fest:

(I1) Die leere Menge ist Teil von $\mathcal{F}$, da sie keinen Zyklus enthält und somit ein Wald ist:

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

(I2) Jede Teilmenge einer Menge, die in $\mathcal{F}$ liegt, ist selbst wieder Teil von $\mathcal{F}$, da jeder Teilgraph eines Waldes wiederum ein Wald ist: $F \in \mathcal{F}, F' \subseteq F \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$

- (I3) Vergleicht man zwei Wälder mit einer unterschiedlichen Anzahl an Kanten, so findet man beim Wald mit mehr Kanten eine Kante, die man dem Wald mit weniger Kanten hinzufügen kann, sodass der dadurch neu entstandene Graph ebenfalls ein Wald ist:

$$F_1, F_2 \in \mathcal{F}, |F_1| < |F_2| \Rightarrow \exists e \in F_2 - F_1 : F_1 \cup e \in \mathcal{F}$$

Das Mengendupel $(E, \mathcal{F})$ in diesem Beispiel genügt allen Anforderungen aus Definition 3: E ist eine endliche Menge, $\mathcal{F}$ eine Menge von Teilmengen von E , die die Kriterien (I1) – (I3) erfüllt. $(E, \mathcal{F})$ ist somit ein Matroid. Faszinierend genug, dass sich aus scheinbar so unterschiedlichen Objekten wie Matrizen und Graphen unter Heranziehung scheinbar so unterschiedlicher Kriterien wie linearer (Un-)Abhängigkeit und Zyklen(-freiheit) Mengendupel mit gleichen Eigenschaften formen lassen, stellt sich natürlich eine wesentliche Frage: Hat die Wahl des Graphen in Beispiel 4 das Resultat begünstigt, oder anders gefragt: Lässt sich aus jedem Graphen nach dem Schema in Beispiel 4 ein Matroid ableiten? Wir gehen in Theorem 5 dieser Frage auf den Grund.

Theorem 5 *Sei $G(V, E)$ ein beliebiger Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Kantenmengen jener Teilgraphen von G , die Wälder sind. Dann erfüllt $\mathcal{F}$ die Matroidaxiome (I1) – (I3), und somit ist $(E, \mathcal{F})$ ein Matroid.*

Beweis Theorem 5 (Cormen et al. [11, S.441]) Natürlich ist die leere Menge stets die Kantenmenge eines zyklusfreien Graphen, also eines Waldes: Es gilt daher stets $\emptyset \in \mathcal{F}$ und (I1) ist erfüllt. Ebenso einleuchtend ist es, dass für einen Wald F jeder Teilgraph selbst wieder nur ein Wald sein kann, da ja F sonst einen Zyklus beinhalten würde und dann kein Wald wäre. Somit ist auch die Eigenschaft (I2) für die Menge $\mathcal{F}$ eines beliebigen Graphen erfüllt. Um (I3) zu überprüfen, stellen wir uns zwei Teilgraphen $F_1(V, E_{F_1})$ und $F_2(V, E_{F_2})$ eines Graphen $G(V, E)$ vor, wobei F_1 und F_2 Wälder sind und $E_{F_1}, E_{F_2} \subseteq E$ und $|E_{F_2}| > |E_{F_1}|$ gelten soll. Aus der Graphentheorie ist bekannt, dass für einen Wald $X(V_X, E_X)$, bestehend aus t Bäumen, folgende Formel gilt:

$$|E_X| = |V_X| - t.$$

Durch Umformung folgt für die Anzahl der Bäume in einem Wald die Formel $t = |V_X| - |E_X|$. Somit besitzt F_1 insgesamt $|V| - |E_{F_1}|$ Bäume und F_2 insgesamt $|V| - |E_{F_2}|$. Wegen $|E_{F_2}| > |E_{F_1}|$ besitzt also F_1 mehr Bäume als F_2 . Es muss deshalb in F_2 einen Baum T geben, dessen Knoten sich in zwei verschiedenen verschiedenen Bäumen von F_1 befinden. Da T zusammenhängend ist, muss es darüberhinaus eine Kante e in T geben, deren zwei inzidente Knoten in F_1 in zwei verschiedenen Bäumen liegen. Fügt man diese Kante e zur Kantenmenge von F_1 hinzu, verknüpft man zwei zuvor unverbundene Bäume in F_1 und kann somit unmöglich einen Zyklus in F_1 erzeugen. Also existiert tatsächlich ein $e \in E_{F_2} - E_{F_1}$, sodass $E_{F_1} \cup e$ wieder die Kantenmenge eines Waldes ist. Es ist also auch (I3) erfüllt und Theorem 5 bewiesen. $\square$

Offensichtlich separiert das Kriterium „ist ein Wald“ die Menge der Teilgraphen eines Graphen G also in zwei disjunkte Mengen, bei der die Menge der Teilgraphen $\mathcal{F}$, die Wälder sind, die gleichen Axiome erfüllen wie die Teilmenge $\mathcal{I}$ linear unabhängiger Spaltenvektoren

bei einer Matrix. Es ist nicht sinnvoll, die beiden verschiedenen Bezeichnung $\mathcal{F}$ und $\mathcal{I}$ nebeneinander zu verwenden. Innerhalb eines Matroids wollen wir von nun an die Grundmenge stets mit E und die Menge von Teilmengen von E , die die Axiome (I1) – (I3) erfüllt, mit $\mathcal{I}$ und ihre Elemente als „unabhängige Mengen“ bezeichnen. Die Bezeichnung E entlehnen wir der Graphentheorie (vgl. „edges“), die Bezeichnung $\mathcal{I}$ (vgl. „independent“) der linearen Algebra.

Terminologie: Ein Matroid M , das von einem Graphen G abgeleitet wird, heißt Kreismatroid $M(G)$. Ein Matroid, das von einer Matrix A abgeleitet wird, heißt Vektormatroid $M[A]$. Ein Matroid, das aus einem Graphen abgeleitet werden könnte (d.h. das zu einem Kreismatroid isomorph ist), heißt graphisch. Ein Matroid M , das aus einer Matrix A über einem Körper $\mathbb{K}$ (üblicherweise ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) abgeleitet werden könnte (d.h. das zu einem Vektormatroid isomorph ist), nennt man $\mathbb{K}$ -darstellbar, und A ist eine $\mathbb{K}$ -Darstellung für M .

Sowohl bei der Betrachtung von Matrizen als auch bei der Betrachtung von Graphen entsteht der Eindruck, dass die Gültigkeit der Eigenschaften (I1) und (I2) bei mathematischen Objekten stets die Gültigkeit von (I3) nach sich zieht. Dass dem aber nicht so sein muss, lässt sich zeigen, wenn man beispielsweise im Graphen aus Abbildung 2.7 den Fokus auf die Betrachtung der Knotenmenge legt. Man suche nach Teilmengen der Knotenmenge $V = \{v_1, \dots, v_9\}$, sodass es bei der Menge der mit den ausgewählten Knoten inzidenten Kanten keine Überschneidung gibt, jede Kante also nur mit genau einem ausgewählten Knoten inzident ist. In Bezugnahme auf den Graphen aus Abbildung 2.7 bildet die Knotenmenge $\{v_3, v_4, v_8\}$ eine solche Teilmenge von V (alle Kanten des Graphen bilden die Menge der inzidenten Kanten, jedoch inzidiert jede Kante nur mit genau einem der drei Knoten v_3, v_4, v_8), ebenso die Knotenmenge $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_9\}$ (analog begründet). Klarerweise erfüllen diese beiden und alle weiteren nach dem soeben erklärten Auswahlkriterium gebildeten Teilmengen von V die Eigenschaft (I2) (denn bei Entfernung eines Knotens aus einer Menge kann es zu keiner Doppelinzidenz von Kanten mit zwei Knoten kommen, wenn diese zuvor nicht gegeben war), und natürlich ist auch (I1) erfüllt. (I3) hingegen ist in dem Beispiel nicht erfüllt, denn kein Knoten aus $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_9\}$ lässt sich der Menge $\{v_3, v_4, v_8\}$ hinzufügen, sodass die neu entstandene Knotenmenge noch eine dazugehörige Kantenmenge inzidenter Kanten besäße, die lediglich mit einem Knoten inzident wären.

Kehren wir nach diesem kurzen Exkurs zurück zur Betrachtung von Kreismatroiden. Tatsächlich ist es so, dass jedem Kreismatroid nicht nur ein Graph, sondern auch eine Matrix zugrunde gelegt werden kann, oder, mit den uns nun zur Verfügung stehenden Begrifflichkeiten ausgedrückt:

Lemma 6 *Zu jedem Kreismatroid M existiert eine Matrix A , die eine $\mathbb{K}$ -Darstellung von M ist.*

Beweis Lemma 6 (Oxley [27]): Wir wollen uns von der Richtigkeit der Aussage von Lemma 6 überzeugen, indem wir nochmals den Graphen G aus Beispiel 4 betrachten und

zeigen, wie man eine Matrix A finden kann, sodass $M(G) \cong M[A]$ gilt. Da es für die weitere Überlegung von Vorteil ist, benennen wir in Abbildung 2.11 auch die Knoten von G :

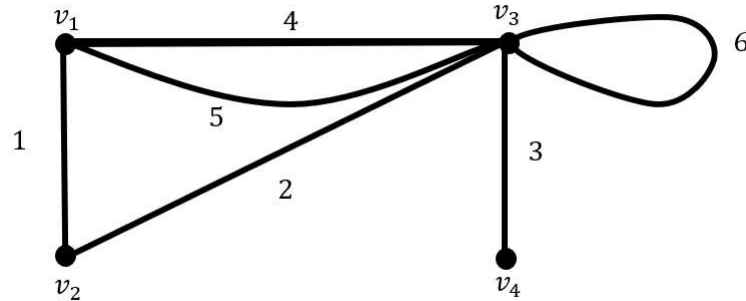


Abbildung 2.11

Die gesuchte Matrix A ergibt sich, indem man jeder Kante des Graphen eine Spalte in der Matrix zuordnet, jedem Knoten des Graphen hingegen eine Zeile der Matrix. Zum Verständnis sind in der nachfolgenden Matrix die Spalten und Zeilen entsprechend beschriftet:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Wie kommt es nun zu den Einträgen in der Matrix? Jede Kante in einem Graphen verbindet zwei Knoten miteinander. Wählen wir für jede Kante den Knoten mit dem niedrigeren Index als Startpunkt und jenen mit höherem Index als Endpunkt aus. Startpunkten ordnen wir die Zahl 1, Endpunkten die Zahl -1 zu. Jene Eckpunkte, die nicht mit der Kante inzidieren, erhalten den Eintrag 0. Dann erklärt sich, dass der Spaltenvektor 1, stellvertretend für die Kante 1 im Graphen G , die die Ecken v_1 und v_2 verbindet, in der v_1 -Zeile den Eintrag 1, in der v_2 -Zeile den Eintrag -1 und in der v_3 - und v_4 -Zeile jeweils den Eintrag 0 hat. Die Spaltenvektoren 2 – 5 werden analog gebildet. Kante 6 in G hat denselben Start- und Endpunkt, nämlich v_3 . Somit wird v_3 zugleich 1 und -1 zugeordnet, und da $1 + (-1) = 0$, ist beim Spaltenvektor 6 in der v_3 -Zeile der Eintrag 0 zu finden und der Spaltenvektor 6 der Matrix der Nullvektor. Die Menge linear unabhängiger Spaltenvektoren von A entspricht genau der Menge der Kantenmengen jener Teilgraphen von G , die Wälder sind (vgl. Beispiel 4). Es ist klar, dass sich nach diesem Konstruktionsprinzip jeder Graph in eine Matrixform übertragen lässt und dass dabei irrelevant ist, ob der Graph zusammen- oder unzusammenhängend ist. Auch ein etwaiger isolierter Knoten v_x in einem Graphen ist nicht hinderlich: Denn in einem Graphen erzeugt v_x keine neuen Wälder, und in der Matrix entsteht in der v_x -ten Zeile ein Nullzeilenvektor und somit keine neue lineare unabhängige Menge. Somit ist gezeigt, dass und wie jedes Kreismatroid auch als Vektormatroid aus einer entsprechenden Matrix resultieren kann. $\square$

Mittels der bisher definierten Begrifflichkeiten lassen sich die bisherigen Erkenntnisse ebenso zusammenfassen wie einige weiterführende Fragen stellen.

Was gilt:

- a) Sei E die Menge der Spaltenvektoren einer Matrix. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ wird unter Betrachtung linearer Unabhängigkeit in zwei disjunkte Mengen geteilt. Die Menge $\mathcal{I}$ der linear unabhängigen Vektoren erfüllt die Eigenschaften (I1) – (I3), somit ist $(E, \mathcal{I})$ ein (Vektor-)Matroid.
- b) Sei E die Menge der Kanten eines Graphen. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(E)$ wird unter Betrachtung von Zyklensfreiheit in zwei disjunkte Mengen geteilt. Die Menge $\mathcal{I}$ der zyklusfreien Teilgraphen erfüllt die Eigenschaften (I1) – (I3), somit ist $(E, \mathcal{I})$ ein (Kreis-)Matroid.
- c) Zu jedem Kreismatroid gibt es eine Matrix A , sodass A eine $\mathbb{K}$ -Darstellung für dieses Matroid ist. Insbesondere ist daher die Menge der Kreismatroide eine Teilmenge der Menge der Vektormatroide.

Was noch nicht geklärt ist:

- d) Ist jedes Matroid $\mathbb{K}$ -darstellbar? (siehe Kapitel 4.3)
- e) Ist jedes Matroid graphisch? (siehe Kapitel 3.1)
- f) Ist jedes Vektormatroid graphisch? (siehe Kapitel 3.1)

2.2 Basen eines Matroids

Am bisherigen Punkt angelangt, haben wir mittels der Matroidtheorie eine Verallgemeinerung linearer Unabhängigkeit und Wälder in Graphen ausformuliert und wesentliche Gemeinsamkeiten herausgearbeitet. Nichts hindert uns daran, gleiches für weitere Begriffe der linearen Algebra und der Graphentheorie zu tun. Daraus erwachsen, wie wir auf den folgenden Seiten sehen werden, weitere Axiomensysteme für Matroide. Machen wir uns zunächst bewusst, dass anhand von Tabelle 2.1 (Beispiel 1) und Tabelle 2.3 (Beispiel 4) klar wird, dass es schnell sehr aufwendig wird, unabhängige Mengen von Matroiden vollständig anzuschreiben (von den abhängigen Mengen in Tabelle 2.2 und Tabelle 2.4 ganz zu schweigen, wir werden darauf in Kapitel 2.3 darauf Bezug nehmen). Es stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, einige wenige Elemente aus der Menge $\mathcal{I}$ auszuwählen, mittels derer man auf alle anderen Elemente schließen kann. So könnten in Tabelle 2.1 alle zweielementigen Mengen betrachtet werden – denn alle verbleibenden unabhängigen Mengen sind Teilmengen irgendeiner dieser zweielementigen Mengen (bei Theorem 2 drücken (I2) und (I3) gemeinsam genau das aus). Gleiches funktioniert in Tabelle 2.3: In den Wäldern, die aus drei Kanten bestehen, sind auch alle anderen Wälder mit weniger Kanten enthalten. Die zweielementigen Mengen in Tabelle 2.1 sind, in der Sprache der linearen Algebra, Basen des Vektorraums, der durch

die Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird. Die dreielementigen Teilgraphen in Tabelle 2.3 sind, in der Sprache der Graphentheorie, Spannbäume (allgemeiner: Spannwälder) des Graphen G . Whitney [36] entlehnte den Begriff Basen aus der linearen Algebra für Matroide, sodass wir auch für Kreismatroide von Basen und nicht von Spannwäldern sprechen, auch wenn man sagen kann, dass die Basen eines Kreismatroids $M(G)$ den Spannwäldern von G entsprechen.

Definition 7 *Eine maximal unabhängige Menge innerhalb eines Matroids M heißt Basis von M . Die Menge aller Basen eines Matroids M wird mit $\mathcal{B}$ oder $\mathcal{B}(M)$ bezeichnet.*

Nutzen wir noch einmal Beispiel 1 und Beispiel 4, um einige Mutmaßungen zu den Eigenschaften von Basen eines Matroids anzustellen. Es fällt auf, dass in beiden Beispielen die Basen jeweils gleiche Mächtigkeit haben, und wir beweisen, dass das für jedes Matroid gilt:

(B0): Wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Beweis (Oxley [27, S.15]): Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $|B_1| < |B_2|$. Dann gibt es nach (I3) ein Element $e \in B_2 - B_1$, sodass $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Das widerspricht aber der Maximalität von B_1 . Daher ist $|B_1| \geq |B_2|$, und genauso gilt nach Umkehrung des Beweises $|B_2| \geq |B_1|$, und somit $|B_1| = |B_2|$. $\square$

In Beispiel 1 und Beispiel 4 lassen sich Basen finden - das ist kein Zufall. Da für jedes Matroid $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ gilt, kann $\mathcal{B}$ wegen (I1) nicht leer sein. Wir halten diese Eigenschaft als (B1) fest:

(B1): $\mathcal{B}$ ist nicht leer. $\square$

Weniger offensichtlich ist folgende weitere Eigenschaft von $\mathcal{B}$:

(B2): Wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 - B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 - B_1$, sodass $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Beweis (Oxley [27, S.16]): $B_1 - x$ muss nach (I2) eine unabhängige Menge sein, auch B_2 ist unabhängig. Nach (B0) gilt $|B_1 - x| < |B_2|$. Somit gibt es nach (I3) ein $y \in B_2$, sodass $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{I}$. Daher muss $(B_1 - x) \cup y$ in einer Basis B_3 enthalten sein. Es muss wegen (B0) $|B_1| = |B_3|$ gelten. Offensichtlich gilt aber auch $|(B_1 - x) \cup y| = |B_3|$, und somit muss $(B_1 - x) \cup y = B_3$ gelten, und $(B_1 - x) \cup y$ ist eine Basis. $\square$

In Worten ausgedrückt besagt (B2), dass man beim Vergleich zweier Basen ein Element, das es nur in der einen Basis gibt, durch ein Element, das es nur in der anderen Basis gibt, ersetzen kann und wieder eine Basis erhält. Oxley [27] bezeichnet dieses Axiom als „basis exchange axiom“.

Es ließen sich noch weitere Eigenschaften von $\mathcal{B}$ herausarbeiten, etwa alternative „basis exchange axioms“ (siehe Oxley [27, S.19f.]; die gezeigten Eigenschaften (B1) und (B2) sind aber bewusst ausgewählt. Es ist nämlich nicht nur so, dass, wie wir gezeigt haben, $\mathcal{B}$ die

Eigenschaften (B1) und (B2) erfüllt. Die Eigenschaften (B1) und (B2) definieren auch eindeutig $\mathcal{B}$. Das bedeutet:

Theorem 8 *Eine Menge $\mathcal{X}$, die (B1) und (B2) erfüllt und eine Menge von Teilmengen einer Menge E ist, muss $\mathcal{B}$ in einem Matroid $(E, \mathcal{I})$ sein. Dabei ergibt sich die Menge $\mathcal{I}$ als Menge all jener Mengen, die Teilmengen eines Elements von $\mathcal{X}$ sind.*

Beweis Theorem 8 (Oxley [27, S.16]) Wir wollen zunächst überprüfen, ob eine Menge $\mathcal{X}$, die (B1) und (B2) erfüllt, stets auch (B0) erfüllt – denn tut sie das nicht, dann kann sie unmöglich $\mathcal{B}$ sein, und wir haben einen schnellen Weg gefunden, Theorem 8 zu widerlegen. Gehen wir dazu davon aus, dass $\mathcal{X}$ Elemente unterschiedlicher Mächtigkeit enthält, (B0) also nicht gilt. Dann kann man zwei unterschiedliche Elemente X_1 und X_2 aus $\mathcal{X}$ auswählen, für die (o.B.d.A.) $|X_1| > |X_2|$ gilt und $|X_1 - X_2|$ minimal ist (also möglichst wenige Elemente enthält). Die Menge $X_1 - X_2$ kann aufgrund der größeren Kardinalität von X_1 nicht leer sein, sodass wir ein Element $x \in X_1 - X_2$ wählen können. Nach (B2) finden wir ein Element $y \in X_2 - X_1$, sodass $(X_1 - x) \cup y \in \mathcal{X}$. Es gilt natürlich $|(X_1 - x) \cup y| = |X_1|$ (es wurde ja nur ein Element getauscht) und somit $|(X_1 - x) \cup y| > |X_2|$. Nun ist aber $|((X_1 - x) \cup y) - X_2| < |X_1 - X_2|$, und dadurch $|X_1 - X_2|$ gar nicht wie angenommen minimal. Durch den entstandenen Widerspruch muss die Annahme, (B0) gelte nicht, verworfen werden, und (B0) gilt offenbar für eine Menge $\mathcal{X}$ wie in Theorem 8 beschrieben. Das stützt zwar die Gültigkeit von Theorem 8, beweist sie aber noch nicht.

Um die Gültigkeit von Theorem 8 zu belegen, müssen wir stattdessen überprüfen, ob das dort definierte Mengendupel $(E, \mathcal{I})$ tatsächlich ein Matroid ist. Dafür ist zu zeigen, dass alle in Definition 3 ausformulierten Anforderungen erfüllt sind. Dass dann $\mathcal{X}$ auch die Menge der Basen $\mathcal{B}$ ist, ergibt sich aus der Konstruktion von $\mathcal{I}$ aus $\mathcal{X}$ in Theorem 8, und Theorem 8 ist dann somit bewiesen.

Zunächst ist $\mathcal{I}$ aus Theorem 8 tatsächlich eine Menge von Teilmengen von E . Da $\mathcal{I}$ gemäß (B1) die Menge von sämtlichen Teilmengen einer nicht-leeren Menge $\mathcal{X}$ ist, enthält $\mathcal{I}$ auch die leere Menge, und (I1) ist erfüllt. Nach Konstruktion von $\mathcal{I}$ in Theorem 8 gilt offenkundig: Wenn $I \in \mathcal{I} : \exists X \in \mathcal{X}$, sodass $I \subseteq X$. Natürlich gilt dann für Teilmengen folgende Implikation: $I' \subseteq I \Rightarrow I' \subseteq X$, und daraus folgt die Gültigkeit von (I2). Die Beweiskette für die Gültigkeit von (I3) ist etwas ausführlicher:

Nehmen wir an, dass (I3) nicht erfüllt würde. Dann kann man in $\mathcal{I}$, wie es in Theorem 8 konstruiert wird, zwei Elemente I_1 und I_2 mit $|I_1| < |I_2|$ wählen, sodass gilt: $\forall e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$. Nach der Konstruktion von $\mathcal{I}$ gibt es Elemente $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, sodass $I_1 \subseteq X_1$ und $I_2 \subseteq X_2$. Weil wir annehmen, dass (I3) scheitert, gilt: $I_2 - X_1 = I_2 - I_1$. Wählen wir X_2 so, dass $|X_2 - (I_2 \cup X_1)|$ minimal ist. Gehen wir davon aus, dass $X_2 - (I_2 \cup X_1)$ nicht leer ist. Dann gibt es ein Element a dieser Menge und wir können gemäß (B2) ein Element b aus $X_1 - X_2$ wählen, sodass $(X_2 - a) \cup b \in \mathcal{X}$ gilt. Dann aber ist $|((X_2 - a) \cup b) - (I_2 \cup X_1)| < |X_2 - (I_2 \cup X_1)|$. Das widerspricht der Minimalität von $|X_2 - (I_2 \cup X_1)|$, und die Annahme, $X_2 - (I_2 \cup X_1)$ sei nicht leer, ist falsch: $X_2 - (I_2 \cup X_1) = \emptyset$. Mittels eines Venn-Diagramms sieht man, dass dann

$X_1 - X_2 = I_2 - X_1$ gilt. Mithilfe des obigen Resultats $I_2 - X_1 = I_2 - I_1$ folgt $X_2 - X_1 = I_2 - I_1$. Analog zum Beweis, dass $X_2 - (I_2 \cup X_1)$ leer ist, lässt sich auch zeigen, dass $X_1 - (I_1 \cup X_2)$ leer ist, und es folgt $X_1 - X_2 = I_1 - X_2$. Da sicher $(I_1 - X_2) \subseteq (I_1 - I_2)$ gilt, gilt damit auch $(X_1 - X_2) \subseteq (I_1 - I_2)$. Da, wie weiter oben gezeigt, alle Elemente von $\mathcal{X}$ gleiche Mächtigkeit haben, gilt $|X_1| = |X_2|$, und daher gilt $|X_1 - X_2| = |X_2 - X_1|$. Wegen $(X_1 - X_2) \subseteq (I_1 - I_2)$ gilt also $|I_1 - I_2| \geq |X_1 - X_2| = |X_2 - X_1|$. Gleichzeitig gilt wegen $X_2 - X_1 = I_2 - I_1$ auch $|I_1 - I_2| \geq |X_1 - X_2| = |X_2 - X_1| = |I_2 - I_1|$ und damit insbesondere $|I_1 - I_2| \geq |I_2 - I_1|$. Das kann nur sein, wenn $|I_1| \geq |I_2|$ - ein Widerspruch zur Annahme, dass $|I_1| < |I_2|$. Wir können nur schlussfolgern, dass die Grundannahme, (I3) sei nicht erfüllt, falsch war. Also ist auch (I3) gültig, $\mathcal{X}$ die Menge der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{I}$ die Menge der unabhängigen Mengen eines Matroids $(E, \mathcal{I})$. $\square$

Somit gilt einerseits, dass die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Matroids die Bedingungen (B1),(B2) erfüllt. Andererseits gilt, dass eine Menge, die eine Menge von Teilmengen einer Menge E ist und die Bedingungen (B1),(B2) erfüllt, die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ ist, wobei $\mathcal{I}$ wie in Theorem 8 beschrieben ermittelt wird. Salopp geschrieben:

- (a) $\mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Matroids $\Rightarrow \mathcal{X}$ erfüllt (B1),(B2).
- (b) $\mathcal{X}$ erfüllt (B1),(B2) $\Rightarrow \mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Matroids

Die Schlussfolgerung aus (a) und (b) ist daher:

Lemma 9 $\mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Matroids $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ erfüllt (B1),(B2). $\square$

Anmerkungen zu Lemma 9: Alle weiteren Eigenschaften von $\mathcal{B}$, insbesondere (B0), lassen sich aus (B1) und (B2) ableiten.

Matroide sind also auch anders als in Definition 3 beschreibbar:

Definition 10 *Matroide sind nicht nur ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{I})$, wobei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gilt und $\mathcal{I}$ die Bedingungen (I1) - (I3) erfüllt. Matroide sind genauso ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gilt und $\mathcal{B}$ die Bedingungen (B1),(B2) erfüllt.*

2.3 Kreise eines Matroids

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 hat sich gezeigt, dass Matroide mittels zweier Axiomensysteme beschrieben werden können. Es erscheint nicht undenkbar, dass es sogar weitere Axiomensysteme gibt. Denn mit Blick auf Beispiel 1 bzw. Beispiel 4 zerfällt die Potenzmenge der Menge der Spaltenvektoren einer Matrix unter Betrachtung linearer (Un-)Abhängigkeit bzw. die Potenzmenge der Menge der Kanten eines Graphen unter Betrachtung der (Nicht-)Existenz von Zyklen in zwei disjunkte Mengen, von denen wir bisher lediglich die unabhängigen (d.h. linear unabhängigen bzw. zyklusfreien) untersucht haben. Nun wollen wir uns den abhängigen Mengen zuwenden, also der Menge der linear abhängigen bzw. zyklusenthaltenden

Teilmengen.

Im vorherigen Kapitel haben wir mit $\mathcal{B}$ eine effektive Möglichkeit kennengelernt, mittels deutlich weniger Elementen als in $\mathcal{I}$ die Menge unabhängiger Mengen zu beschreiben. Es stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, auch für die Menge der abhängigen Mengen, konkret für $\mathcal{D}$ in Beispiel 1 (siehe Tabelle 2.2) und $\mathcal{Z}$ in Beispiel 4 (siehe Tabelle 2.4), einige wenige Elemente auszuwählen, mittels derer man auf alle anderen Elemente schließen kann.

So eine Auswahl existiert tatsächlich: In Tabelle 2.2 und Tabelle 2.4 sind die entsprechenden Elemente, die zu der Auswahl gehören, grün geschrieben. Sie stellen die „nicht-reduzierbaren Konfigurationen“ in der Menge der abhängigen Mengen dar – soll heißen: Jede abhängige Menge in Tabelle 2.2 beinhaltet zumindest eine der grün geschriebenen Konfigurationen in Tabelle 2.2, jede abhängige Menge in Tabelle 2.4 zumindest eine der grün geschriebenen Konfigurationen in Tabelle 2.4. Umgekehrt gilt für beide Beispiele auch, dass es keine Konfiguration gibt, die eine nicht-reduzierbare Konfiguration enthält und unabhängig wäre. Man könnte also mithilfe der nicht-reduzierbaren Konfigurationen als „kleinste Bausteine“ eine Art „Bauanleitung“ formulieren, um die ganze Menge der abhängigen Mengen sowohl in Tabelle 2.2 als auch in Tabelle 2.4 zu erzeugen:

1. Nimm eine nicht-reduzierbare Konfiguration.
2. Füge beliebige Elemente der Grundmenge hinzu.
3. Du erhältst eine abhängige Menge.

Diese Bauanleitung funktioniert für beide Beispiele, und so scheinen die nicht-reduzierbaren Konfigurationen tatsächlich eine repräsentative Auswahl aus der Menge der abhängigen Mengen zu sein – man kann durch sie eindeutig auf alle anderen abhängigen Mengen schließen. Mit den gerade beschriebenen Eigenschaften wird klar, dass die nicht-reduzierbaren Konfigurationen die minimal abhängigen Mengen sind. Minimal abhängige Mengen haben die Eigenschaft, dass durch die Entfernung eines beliebigen Elements eine neue Menge entsteht, die unabhängig ist. Whitney entschied sich, diesen minimal abhängigen Mengen den aus der Graphentheorie entlehnten Namen „circuits“ zu geben und die Menge all dieser minimal abhängigen Mengen mit $\mathcal{C}$ abzukürzen. Diese Bezeichnung ist eigentlich irreführend, da „circuits“ in der Graphentheorie „Zyklen“ meint. Allerdings sind **alle** in Tabelle 2.4 dargestellten Teilgraphen Zyklen im Sinne der Graphentheorie, wohingegen $\mathcal{C}$ **nur** aus genau jenen Teilgraphen besteht, die **Kreise** sind. Daher wollen wir im Deutschen die Bezeichnung „Kreise“ der Bezeichnung „Zyklen“ vorziehen. In der deutschsprachigen Literatur finden sich die Begriffe „Zirkuit“ oder „Kreis“ parallel nebeneinander (von Felbert [17, S.21f.]).

Definition 11 *Eine minimal abhängige Menge innerhalb eines Matroids M heißt Kreis von M . Die Menge aller Kreise eines Matroids M wird mit $\mathcal{C}$ oder $\mathcal{C}(M)$ bezeichnet.*

Aus Tabelle 2.2 lässt sich folgender für Matroide gültiger Zusammenhang zwischen $\mathcal{C}$ und der Menge aller abhängigen Mengen $\mathcal{D}$ herausarbeiten: $\mathcal{D} = \{\{C \cup X\} : C \in \mathcal{C}, X \subseteq E\}$. Könnte es nun sein, dass Matroide auch mittels der Menge der Kreise $\mathcal{C}$ beschrieben werden

könnten? Um das herauszufinden, suchen wir, ähnlich wie bei den Axiomen (I1) - (I3) oder (B1) - (B2), nach wesentlichen Eigenschaften für $\mathcal{C}$. Nutzen wir dazu noch einmal Beispiel 1 (Tabelle 2.2) und Beispiel 4 (Tabelle 2.4), um einige Mutmaßungen zu den Eigenschaften von Kreisen eines Matroids anzustellen. Es fällt auf, dass weder $\mathcal{C}$ in Beispiel 1 noch $\mathcal{C}$ in Beispiel 4 die leere Menge enthalten: Das gilt offensichtlich allgemein für Matroide, denn gemäß (I1) ist die leere Menge immer in $\mathcal{I}$ und daher nie in $\mathcal{C}$:

(C1): $\emptyset \notin \mathcal{C}$ □

Die Elemente von $\mathcal{C}$ in Beispiel 1 und von $\mathcal{C}$ in Beispiel 4 sind keine Teilmengen voneinander. Das folgt aus der Definition der Menge $\mathcal{C}$ bzw. deren Elementen, die ja minimal abhängig sein sollen: Da aber jede echte Teilmenge einer minimal abhängigen Menge unabhängig und somit nicht in $\mathcal{C}$ ist, können die Elemente von $\mathcal{C}$ für kein Matroid Teilmengen voneinander sein.

(C2): $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$. □

Weniger offensichtlich ist folgende weitere Eigenschaft von $\mathcal{C}$:

(C3): $C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2: e \in (C_1 \cap C_2) \Rightarrow \exists C_3 \in \mathcal{C}: C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

Beweis (Oxley [27, S.9]): Wir beweisen indirekt: Nehmen wir an, dass für $e \in (C_1 \cap C_2)$ die Menge $(C_1 \cup C_2) - e$ kein $C_3 \in \mathcal{C}$ enthält. Dann ist $(C_1 \cup C_2) - e \in \mathcal{I}$. Gemäß (C2) ist $C_2 - C_1$ nicht-leer: Nehmen wir das Element f aus dieser Menge. Da C_2 minimal abhängig ist, ist $(C_2 - f) \in \mathcal{I}$. Wählen wir nun eine Teilmenge $I \subseteq (C_1 \cup C_2)$, die maximal unabhängig ist und $C_2 - f$ enthält. Natürlich gilt $f \notin I$. Da $C_1 \in \mathcal{C}$, ist irgendein Element $g \in C_1$ nicht in I . Da $f \in (C_2 - C_1)$, ist $f \neq g$. Es gilt:

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) - (f \cup g)| = |(C_1 \cup C_2)| - 2 < |(C_1 \cup C_2) - e|$$

Wir haben I als maximal unabhängig gewählt. Da aber auch $(C_1 \cup C_2) - e$ unabhängig ist und eine größere Mächtigkeit hat, widerspricht das gegen die angenommene Maximalität von I . Dieser Widerspruch führt zur Erkenntnis, dass (C3) erfüllt sein muss. □

In Worten ausgedrückt besagt (C3), dass man in der Vereinigungsmenge zweier Kreise, in der man ein gemeinsames Element entfernt, einen neuen Kreis finden kann. Was abstrakt klingt, wird bei Betrachtung von Kreisen in Graphen nachvollziehbar, wie in Abbildung 2.12 dargestellt.

Wir wählen exemplarisch die zwei Kreise $C_1 = \{1, 2, 4\}$ und $C_2 = \{1, 2, 5\}$ aus Tabelle 2.4 aus, die unter anderem die Kante 1 gemeinsam haben. Fusionieren wir diese beiden Kreise und entfernen $\{1\}$, so ergibt sich der Teilgraph $(C_1 \cup C_2) - \{1\} = \{2, 4, 5\}$ von G , der wiederum einen Kreis enthält, nämlich $C_3 = \{4, 5\}$.

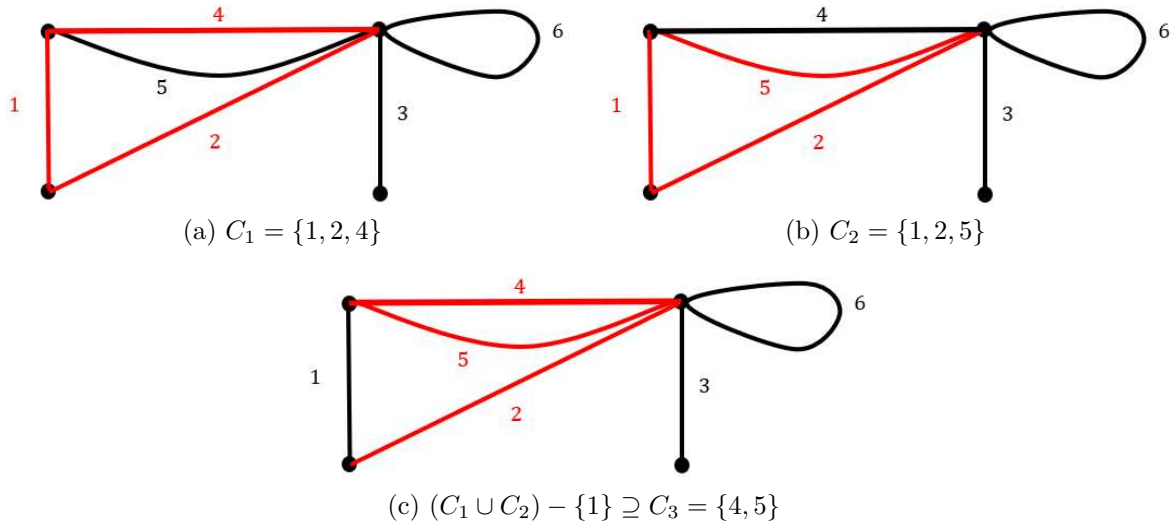


Abbildung 2.12: Veranschaulichung von (C3)

Es ließen sich noch weitere Eigenschaften von $\mathcal{C}$ herausarbeiten. Die gezeigten Eigenschaften (C1) – (C3) sind aber bewusst ausgewählt. Es ist nämlich nicht nur so, dass, wie wir gezeigt haben, $\mathcal{C}$ in jedem Matroid die Eigenschaften (C1) – (C3) erfüllt. Die Eigenschaften (C1) – (C3) definieren auch eindeutig $\mathcal{C}$. Das bedeutet:

Theorem 12 *Eine Menge $\mathcal{X}$, die (C1) – (C3) erfüllt und eine Menge von Teilmengen einer Menge E ist, muss $\mathcal{C}$ in einem Matroid $(E, \mathcal{I})$ sein. Dabei ergibt sich $\mathcal{I}$ als Menge all jener Teilmengen von E , die kein Element von $\mathcal{X}$ enthalten.*

Beweis Theorem 12 (Oxley [27, S.9f.]) Um die Gültigkeit von Theorem 12 zu belegen, müssen wir überprüfen, dass das dort definierte Mengendupel $(E, \mathcal{I})$ tatsächlich ein Matroid ist. Dafür ist zu zeigen, dass alle in Definition 3 ausformulierten Anforderungen erfüllt sind. Dass dann $\mathcal{X}$ auch die Menge der Kreise $\mathcal{C}$ ist, ergibt sich aus der Konstruktion von $\mathcal{I}$ aus $\mathcal{X}$ in Theorem 12, und Theorem 12 ist bewiesen.

Zunächst ist $\mathcal{I}$ aus Theorem 12 tatsächlich eine Menge von Teilmengen von E . Da $\mathcal{X}$ gemäß (C1) die leere Menge nicht enthält, ist die leere Menge also eine Teilmenge von E , die nicht in $\mathcal{X}$ und somit nach Konstruktion in Theorem 12 in $\mathcal{I}$ liegt – (I1) ist erfüllt. Nach Konstruktion von $\mathcal{I}$ in Theorem 12 gilt offenkundig: Wenn $I \in \mathcal{I} \Rightarrow \nexists X \in \mathcal{X} : X \subseteq I$. Natürlich gilt dann für Teilmengen folgende Implikation: $I' \subseteq I \Rightarrow \nexists X \in \mathcal{X} : X \subseteq I'$, und daraus folgt die Gültigkeit von (I2). Die Beweiskette für die Gültigkeit von (I3) ist etwas ausführlicher:

Nehmen wir an, dass (I3) nicht erfüllt würde. Dann kann man in $\mathcal{I}$, wie es in Theorem 12 konstruiert wird, zwei Elemente I_1 und I_2 mit $|I_1| < |I_2|$ wählen, sodass gilt: $\forall e \in (I_2 - I_1) : (I_1 \cup e) \notin \mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ besitzt sicher eine Menge, die eine Teilmenge von $I_1 \cup I_2$ ist und mehr Elemente als I_1 hat. Wählen wir unter allen in Frage kommenden Teilmengen jene Menge I_3 aus, sodass $|I_1 - I_3|$ minimal wird, das heißt, I_3 enthält so viele Elemente von I_1 wie möglich. Da (I3) versagt, ist $I_1 - I_3$ nicht leer (denn sonst wäre $I_1 \subset I_3$ und die

Annahme, dass $\forall e \in (I_2 - I_1) : (I_1 \cup e) \notin \mathcal{I}$ gilt, falsch), und wir können ein Element e von $I_1 - I_3$ auswählen. Wählen wir zudem ein Element f von $I_3 - I_1$ (f existiert sicher, da I_3 mehr Elemente als I_1 hat). Wir bilden die Menge $(I_3 \cup e) - f$ und benennen sie mit T_f . Mit Sicherheit gilt $T_f \subseteq (I_1 \cup I_2)$ und auch $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$. Weil wir aber davon ausgegangen sind, dass $I_3 \subseteq (I_1 \cup I_2)$ jene unabhängige Teilmenge ist, sodass $|I_1 - I_3|$ minimal wird, muss $T_f \subseteq (I_1 \cup I_2)$ wohl abhängig sein und dadurch ein Element $C_f \in \mathcal{C}$ beinhalten. Da ja $T_f = (I_3 \cup e) - f$ gilt, gilt $C_f \subseteq (I_3 \cup e) - f$. f ist also nicht in C_f , hingegen muss $e \in C_f$ gelten, weil sonst $C_f \subseteq I_3$ gelten würde, was wegen $I_3 \in \mathcal{I}$ in einem Widerspruch mündet. C_f hat die Eigenschaft, dass $C_f \cap (I_3 - I_1) \neq \emptyset$ gilt. Wäre nämlich $C_f \cap (I_3 - I_1) = \emptyset$, dann wäre C_f eine Teilmenge der Komplementärmenge von $I_3 - I_1$, also $C_f \subseteq ((I_1 \cap I_3) \cup e)$, was wiederum eine Teilmenge von I_1 und somit unabhängig wäre - ein Widerspruch. Es gibt also ein Element g aus $C_f \cap (I_3 - I_1)$, und es lässt sich analog zu C_f auch ein C_g bilden mit $C_g \subseteq T_g$ und $T_g = (I_3 \cup e) - g$. Gewiss sind C_f und C_g verschieden, denn g ist in C_f , aber nicht in C_g . Es gilt $e \in (C_f \cap C_g)$, und (C3) fordert, dass es in $\mathcal{X}$ ein Element C gibt, sodass $C \subseteq ((C_f \cap C_g) - e)$.

Da aber $C_f, C_g \subseteq (I_3 \cup e)$, würde $C \subseteq I_3$ gelten, C also unabhängig sein - ein Widerspruch. Also ist auch (I3) gültig, $\mathcal{X}$ die Menge der Kreise $\mathcal{C}$ und $\mathcal{I}$ die Menge der unabhängigen Mengen eines Matroids $(E, \mathcal{I})$. $\square$

Somit gilt einerseits, dass die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise eines Matroids die Bedingungen (C1) – (C3) erfüllt. Andererseits gilt, dass eine Menge, die eine Menge von Teilmengen einer Menge E ist und die Bedingungen (C1) – (C3) erfüllt, die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ ist, wobei $\mathcal{I}$ wie in Theorem 12 beschrieben ermittelt wird. Salopp geschrieben:

- (a) $\mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise eines Matroids $\Rightarrow \mathcal{X}$ erfüllt (C1) – (C3)
- (b) $\mathcal{X}$ erfüllt (C1) – (C3) $\Rightarrow \mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise eines Matroids

Die Schlussfolgerung aus (a) und (b) ist daher:

Lemma 13 $\mathcal{X}$ ist die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise eines Matroids $\Leftrightarrow \mathcal{X}$ erfüllt (C1) – (C3). $\square$

Anmerkungen zu Lemma 13: Alle weiteren Eigenschaften von $\mathcal{C}$ lassen sich aus (C1) – (C3) ableiten.

Matroide sind also auch anders als in Definition 3 und Definition 10 beschreibbar:

Definition 14 *Matroide sind nicht nur ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{I})$, wobei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gilt und $\mathcal{I}$ die Bedingungen (I1) – (I3) erfüllt, oder ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gilt und $\mathcal{B}$ die Bedingungen (B1), (B2) erfüllt. Matroide sind genauso ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ gilt und $\mathcal{C}$ die Bedingungen (C1) – (C3) erfüllt.*

Sämtliche bereits vorgestellte Axiomensysteme für Matroide erwachsen Verallgemeinerungen von Begriffen aus der linearen Algebra oder der Graphentheorie. Aus der Verallgemeinerung zweier weiterer Begriffe der linearen Algebra lassen sich zwei weitere Axiomensysteme für

Matroide ableiten. Da wir sie für spätere Begriffe und Überlegungen dringend brauchen, stellen wir sie nachfolgend vor. Zugunsten einer kompakteren Darstellung werden in den Kapiteln 2.4 und 2.5 keine Beweise geführt. Sie können bei Oxley [27, S.20-32] nachgelesen werden.

2.4 Rang eines Matroids

Erinnern wir uns zunächst an die Eigenschaft (B0), die besagte, dass alle Basen eines Matroids die gleiche Mächtigkeit haben. Diese Eigenschaft ist eine Konsequenz aus der Eigenschaft von Basen eines Vektorraums, denn auch alle Basen eines Vektorraums haben dieselbe Mächtigkeit. Auch Spannwürder in Graphen erfüllen diese Eigenschaft: Die Anzahl an Kanten ist für alle Spannwürder eines Graphen gleich.

In der linearen Algebra bezeichnet man die Mächtigkeit der Basen eines Vektorraums V als die Dimension des Vektorraums $\dim(V)$. Für eine Matrix A bezeichnet der Rang $r(A)$ der Matrix die Mächtigkeit der Basen jenes Vektorraums V , den die Spaltenvektoren der Matrix A bilden. Für eine Matrix A , deren Spaltenvektoren den Vektorraum V bilden, gilt also: $r(A) = \dim(V)$. So könnte man mit Rückbezug auf Beispiel 1 sagen, dass die Matrix M den Rang $r(M) = 2$ und der durch die Spaltenvektoren von M gebildete Vektorraum V die Dimension $\dim(V) = 2$ hat. Natürlich kann man auch für Untervektorräume die Dimension bzw. für Untermatrizen den Rang ermitteln.

Auch wenn Begriffe wie Dimension, Rang und Untervektorraum bzw. Untermatrix in der Graphentheorie nicht existieren, ist es nicht schwer, diese anschaulich zu übertragen. Die „Dimension“ bzw. der „Rang“ eines Graphen G ist die Anzahl an Kanten in einem Spannwald. So könnte man mit Rückbezug auf Beispiel 4 sagen, dass der Graph G den Rang $r(G) = 3$ hat, da jeder Spannwald von G drei Kanten besitzt. Die Analogie zu einem Untervektorraum/einer Untermatrix ist ein beliebiger Teilgraph von G , zu dem sich wiederum der „Rang“ seines Spannwalds ermitteln lässt.

Nun lässt sich allgemeiner der Rang eines Matroids definieren. Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Dann ist der Rang $r(M)$ die Mächtigkeit einer Basis $B \in \mathcal{B}$ von M . So wie sich für jede Matrix durch das Entfernen von Spaltenvektoren Untermatrizen bilden und Ränge dafür bestimmen lassen bzw. für jeden Graphen Teilgraphen bilden und die Anzahl an Kanten in Spannwürdern bestimmen lassen, lässt sich für jede Teilmenge X von $E(M)$ ein Unterma-
troid $(X, \mathcal{I}(X))$ mit $\mathcal{I}(X) = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$ erzeugen und ebenfalls der Rang $r(X)$ als Mächtigkeit einer Basis dieses Matroids bestimmen. Man kann den Rang eines Matroids also als eine Funktion r auffassen, die für ein Matroid $M = (E, \mathcal{I})$ allen Elementen von $\mathcal{P}(E)$ die Mächtigkeit ihrer Basis zuordnet.

Für jede derartige Rangfunktion $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ eines Matroids gelten folgende Eigenschaften:

(R1) Sei $X \subseteq E \Rightarrow 0 \leq r(X) \leq |X|$ □

(R2) Sei $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$ □

(R3) Sei $X, Y \subseteq E \Rightarrow r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ □

Es ist aber nicht nur so, dass die Rangfunktion r in jedem Matroid die Eigenschaften (R1) – (R3) erfüllt. Die Eigenschaften (R1) – (R3) definieren auch eindeutig r . Das bedeutet:

Theorem 15 *Eine Funktion $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$, die (R1) – (R3) erfüllt, muss die Rangfunktion r in einem Matroid $(E, \mathcal{I})$ sein. Dabei ergibt sich $\mathcal{I}$ als Menge all jener Teilmengen X von E , für die $f(X) = |X|$ gilt.* □

Da die Rangfunktion eines Matroids (R1) – (R3) erfüllt, und jede Funktion $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$, die (R1) – (R3) erfüllt, die Rangfunktion eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ ist, folgt:

Lemma 16 *$f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ ist die Rangfunktion r eines Matroids $\Leftrightarrow f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ erfüllt (R1) – (R3).* □

Es ergibt sich ein weiteres Axiomensystem:

Definition 17 *Matroide sind ein geordnetes Paar (E, r) , wobei $r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion ist, die (R1) – (R3) erfüllt.* □

2.5 Hülle eines Matroids

Wie schon der Rang, so ist auch die Hülle ein Begriff der linearen Algebra. Für eine Matrix M bezeichne E die Menge der Spaltenvektoren von M . Die Hülle $cl(E)$ (vgl. englisch „closure“) ist dann die Menge aller Vektoren, die durch Linearkombinationen aus den Vektoren der Menge E erzeugt werden können. $cl(E)$ ist also der von den Spaltenvektoren E erzeugte Vektorraum V . Vergleichen wir also die Matrix M und die Matrix $M_{cl(E)}$, deren Spaltenvektoren die Vektoren aus $cl(E)$ sind, so besitzt $M_{cl(E)}$ im Regelfall deutlich mehr Spaltenvektoren als M . Da aber alle Vektoren aus $cl(E)$ als Linearkombinationen von Vektoren aus E erzeugt werden können, die Vektoren von E aber wiederum als Linearkombinationen einer Basis B von E , gilt $E \subseteq cl(B)$, und, weil B eine Basis ist, $cl(B) = cl(E)$. Der von B erzeugte Vektorraum ist also der von E erzeugte Vektorraum, und somit gilt $\dim(B) = \dim(E) = \dim(cl(E))$ und daher $r(M) = r(M_{cl(E)})$. Auch jede Teilmenge $X \subseteq E$ erzeugt eine Hülle $cl(X)$, und stets gilt $\dim(X) = \dim(cl(X))$. Anstatt für eine Menge X die Hülle $cl(X)$ durch das Generieren sämtlicher Linearkombinationen der Vektoren aus X zu ermitteln, kann man sie mithilfe der Dimension eines Vektorraums auch anders beschreiben: Die Hülle $cl(X)$ besteht aus all jenen Elementen, die man X hinzufügen kann, ohne dadurch $\dim(X)$ zu verändern. Obgleich es in der Graphentheorie den Begriff der Hülle nicht gibt, ermöglicht letztere Betrachtungsweise eine anschauliche Übertragung des Begriffs in die Graphentheorie: Von einem Graphen $G(V, E)$ betrachte man einen Teilgraphen $G'(V', E')$. Die „Hülle“ von E' ist die Menge aller Kanten, die E' hinzugefügt werden können, sodass jeder

Spannwald von G' auch ein Spannwald des neuen Graphen ist.

Nun lässt sich allgemeiner die Hülle eines Matroids definieren. Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid. Für eine Menge $X \subseteq E$ ist die Hülle $cl(X)$ wie folgt definiert: $cl(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}$.

Offensichtlich ist die Hülle eine Funktion, die für ein Matroid $(E, \mathcal{I})$ Elementen von $\mathcal{P}(E)$ wiederum Elemente von $\mathcal{P}(E)$ zuordnet, also: $cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Für jede Hüllenfunktion cl eines Matroids gelten die folgenden Eigenschaften:

- (CL1) Sei $X \subseteq E \Rightarrow X \subseteq cl(X)$ □
- (CL2) Sei $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow cl(X) \subseteq cl(Y)$ □
- (CL3) Sei $X \subseteq E \Rightarrow cl(cl(X)) = cl(X)$ □
- (CL4) Sei $X \subseteq E$ und $x \in E$ und $y \in (cl(X \cup x) - cl(X)) \Rightarrow x \in cl(X \cup y)$ □

Es ist aber nicht nur so, dass die Hüllenfunktion cl in jedem Matroid die Eigenschaften (CL1) – (CL4) erfüllt. Die Eigenschaften (CL1) – (CL4) definieren auch eindeutig cl . Das bedeutet:

Theorem 18 Eine Funktion $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, die (CL1) – (CL4) erfüllt, muss die Hüllenfunktion cl in einem Matroid $(E, \mathcal{I})$ sein. Dabei ergibt sich $\mathcal{I}$ als folgende Menge:
 $\mathcal{I} = \{X \subseteq E : x \notin cl(X - x) \ \forall x \in X\}$ □

Da die Hüllenfunktion eines Matroids (CL1) – (CL4) erfüllt, und umgekehrt jede Funktion $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, die (CL1)–(CL4) erfüllt, die Hüllenfunktion eines Matroids ist, folgt:

Lemma 19 $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ ist die Hüllenfunktion cl eines Matroids $\Leftrightarrow f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ erfüllt (CL1) – (CL4). □

Es ergibt sich ein weiteres Axiomensystem:

Definition 20 Matroide sind ein geordnetes Paar (E, cl) , wobei $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ eine Funktion ist, die (CL1) – (CL4) erfüllt. □

2.6 Schlussbemerkungen zu den Axiomensystemen

Es ist faszinierend, dass Matroide auf so vielfältige Weise durch unterschiedliche Axiomensysteme definiert werden können. Mit jedem Axiomensystem ergibt sich ein neuer Blickwinkel und ein tieferes Verständnis dieser Strukturen, und zugleich offenbart jedes Axiomensystem auch Gemeinsamkeiten zwischen der linearen Algebra und der Graphentheorie. In Tabelle 2.5 sind diese Zusammenhänge nochmals aufgelistet. Tabelle 2.6 gibt einen Überblick, wie

die Axiomensysteme untereinander zusammenhängen.

Alle bisherigen Eigenschaften und Feststellungen von Matroiden sind Schlussfolgerungen aus gemeinsamen Eigenschaften von Matrizen und Graphen. Durch jeden Beweis, der allgemein eine Eigenschaft von Matroiden beweist, wird zugleich im Speziellen die Eigenschaft für Matrizen und Graphen bewiesen. In den nachfolgenden Kapiteln entfernen wir uns mehr und mehr von den anschaulichen Matrizen und Graphen und wenden uns verstärkt den allgemein formulierten Definitionen und Eigenschaften der Matroide aus diesem Kapitel zu. Ausgehend davon lassen sich spezielle Matroidarten ableiten, die wir genauer untersuchen wollen. Damit verbunden werden wir auch die Fragen klären, ob alle Matroide eine Darstellung als Matrix oder Graph besitzen.

Tabelle 2.5: Axiomensysteme aus der Matroidtheorie und ihre Entsprechungen in der linearen Algebra und Graphentheorie

Begriff der Matroidtheorie ...	...im Kontext linearer Algebra	...im Kontext der Graphentheorie
$\mathcal{I}$: Die Menge der unabhängigen Teilmengen im Matroid $(E, \mathcal{I})$. $\mathcal{I}$ erfüllt (I1) – (I3).	$\mathcal{I}$ ist in einer Matrix M mit der Menge der Spaltenvektoren E die Menge aller Kombinationen von Spaltenvektoren, die linear unabhängig sind. $\mathcal{I}$ erfüllt (I1) – (I3).	$\mathcal{I}$ ist in einem Graphen G die Menge der Teilgraphen von G , die Wälder sind. $\mathcal{I}$ erfüllt (I1) – (I3).
$\mathcal{B}$: Die Menge der Basen im Matroid $(E, \mathcal{I})$. $\mathcal{B}$ erfüllt (B1) – (B2).	$\mathcal{B}$ ist in einer Matrix M mit der Menge der Spaltenvektoren E die Menge aller Kombinationen von Spaltenvektoren, die maximal linear unabhängig, also Basen des von E aufgespannten Vektorraums sind. $\mathcal{B}$ erfüllt (B1) – (B2).	$\mathcal{B}$ ist in einem Graphen G die Menge der Teilgraphen von G , die Spannwürder sind. $\mathcal{B}$ erfüllt (B1) – (B2).
$\mathcal{C}$: Die Menge der Kreise im Matroid $(E, \mathcal{I})$. $\mathcal{C}$ erfüllt (C1) – (C3).	$\mathcal{C}$ ist in einer Matrix M mit der Menge der Spaltenvektoren E die Menge aller Kombinationen von Spaltenvektoren, die minimal abhängig sind, sodass jedes Löschen eines Vektors zu linearer Unabhängigkeit führen würde. $\mathcal{C}$ erfüllt (C1) – (C3).	$\mathcal{C}$ ist in einem Graphen G die Menge der Teilgraphen von G , die Kreise sind. $\mathcal{C}$ erfüllt (C1) – (C3).
$r : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$: Die Rangfunktion eines Matroids $(E, \mathcal{I})$. r erfüllt (R1) – (R3).	r ist in einer Matrix M mit der Menge der Spaltenvektoren E die Funktion, die jeder Kombination von Spaltenvektoren die Dimension (Mächtigkeit ihrer Basis) zuordnet. Alternativ gesprochen ist r in einer Matrix M die Funktion, die jeder Untermatrix ihren Rang zuordnet. r erfüllt (R1) – (R3).	r ist in einem Graphen G eine Funktion, die jedem Teilgraphen G' von G die Anzahl der Kanten eines Spannwalds von G' zuordnet. r erfüllt (R1) – (R3).
$cl : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$: Die Hüllenfunktion eines Matroids $(E, \mathcal{I})$. cl erfüllt (CL1) – (CL4).	cl ist in einer Matrix M mit der Menge der Spaltenvektoren E die Funktion, die jeder Kombination X von Spaltenvektoren ihre Hülle zuordnet, das heißt alle Vektoren, die X hinzugefügt werden können, ohne die Dimension von X zu verändern. cl erfüllt (CL1) – (CL4).	cl ist in einem Graphen G eine Funktion, die jedem Teilgraphen G' die Kanten zuordnet, die $E(G')$ hinzugefügt werden können, ohne dass der neu entstandene Graph veränderte Spannwürder hat. cl erfüllt (CL1) – (CL4).

Tabelle 2.6: Zusammenhang zwischen Axiomensystemen

	...mittels $\mathcal{I}$ ausgedrückt ...	...mittels $\mathcal{B}$ ausgedrückt ...	...mittels $\mathcal{C}$ ausgedrückt ...	...mittels r ausgedrückt ...	...mittels cl ausgedrückt ...
Die Elemente von $\mathcal{I}$ eines Matroid $(E, \mathcal{I})$ sind ...	...die maximalen Teilmengen von E , die zu $\mathcal{I}$ gehören.	...die Teilmengen von E , die eine Teilmenge eines Elements von $\mathcal{B}$ sind.	...die Teilmengen von E , die kein Element von $\mathcal{C}$ enthalten	...die Teilmengen X von E , für die $r(X) = X $ gilt.	...die Teilmengen X von E , für die $x \notin cl(X - x) \forall x \in X$ gilt.
Die Elemente von $\mathcal{B}$ eines Matroid $(E, \mathcal{I})$ sind ...	...die maximalen Teilmengen von E , die zu $\mathcal{I}$ gehören.		...die maximalen Teilmengen von E , die kein Element von $\mathcal{C}$ beinhalten.	...die Teilmengen X von E , für die $r(X) = X $ gilt.	...die Teilmengen X von E , für die gilt: $x \notin cl(X - x) \forall x \in X$ und $cl(X) = E$
Die Elemente von $\mathcal{C}$ eines Matroid $(E, \mathcal{I})$ sind ...	...die minimalen Teilmengen von E , die nicht zu $\mathcal{I}$ gehören.	...die minimalen Teilmengen von E , die in keinem Element von $\mathcal{B}$ enthalten sind.		...die Teilmengen X von E , die nicht leer sind und für die gilt: $\forall x \in X : r(X - x) = X - 1 = r(X)$.	...die Teilmengen X von E , die nicht leer sind und für die gilt: $\forall x \in X : x \in cl(X - x)$.
Die Rangfunktion r eines Matroid $(E, \mathcal{I})$ ist ...	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E die Mächtigkeit der größten Menge $I \in \mathcal{I}$, die in X enthalten ist, zuordnet.	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E die Mächtigkeit einer maximalen Teilmenge $X' \subseteq X$ zuordnet, für die $X' \subseteq B(B \in \mathcal{B})$ gilt.	...die Funktion, die jeder Teilmenge $X \subseteq E$ die Zahl $ X $ zuordnet, wenn $ X $ keinen Kreis enthält, und $ X - n$, wenn X durch Entfernung von n Kanten keinen Kreis $C \in \mathcal{C}$ mehr enthält.		... die Funktion, die jeder Teilmenge $X \subseteq E$ die Mächtigkeit der kleinsten Menge $Y \subseteq E$ zuweist, für die $cl(Y) = cl(X)$ gilt.
Die Hüllenfunktion cl eines Matroid $(E, \mathcal{I})$ ist ...	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E , für die $I \in \mathcal{I}$ die größte in X enthaltene unabhängige Menge bezeichne, die Menge all jener Elemente zuweist, die X hinzugefügt werden können, sodass I immer noch die größte unabhängige Menge ist.	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E , für die $X' \subseteq B$ mit $B \in \mathcal{B}$ die größte in einer Basis enthaltene Teilmenge von X bezeichnet, die Menge all jener Elemente zuweist, die X hinzugefügt werden können, sodass X' immer noch die größte in einer Basis enthaltenen Teilmenge ist.	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E , für die $X' \subseteq C$ mit $C \in \mathcal{C}$ die größte in einem Kreis enthaltene Teilmenge von X bezeichnet, die Menge Y all jener Elemente y zuweist, die X hinzugefügt werden können, sodass die größte in einem Kreis enthaltene Teilmenge von $(X - x) \cup y \forall x \in X, y \in Y$ dieselbe Mächtigkeit wie X' hat.	...die Funktion, die jeder Teilmenge X von E eine Menge $Y \subseteq E$ zuordnet, sodass $\forall y \in Y$ die Gleichung $r(X \cup y) = r(X)$ gilt. Es gilt stets $X \subseteq Y$.	

3 Matroidarten

Durch die Einführung der Matroidtheorie über Matrizen und Graphen sind im vorausgegangenen Kapitel zwei Arten von Matroiden bereits zur Sprache gekommen: Vektormatroide und Kreismatroide. Die von diesen Matroidarten abgeleiteten Axiomensysteme wollen wir im Folgenden zur Erschließung weiterer Matroidarten verwenden und drehen somit in gewisser Weise unsere Vorgehensweise um. Führte im vorherigen Kapitel der Weg vom Speziellen zum Allgemeinen, leiten wir nun vom Allgemeinen das Spezielle ab.

3.1 Uniforme Matroide

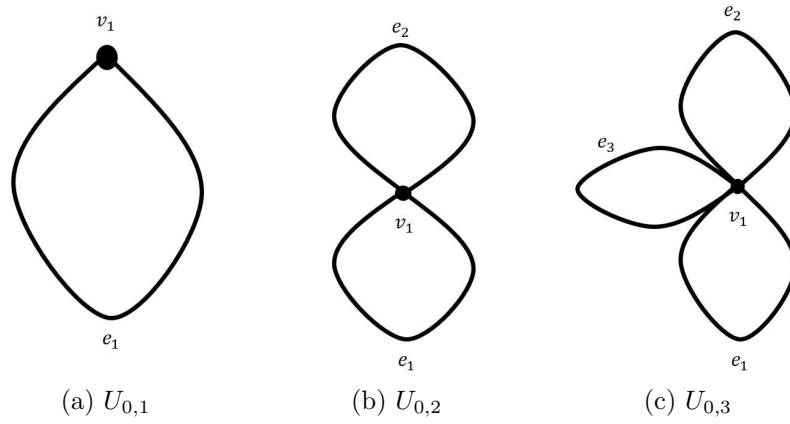
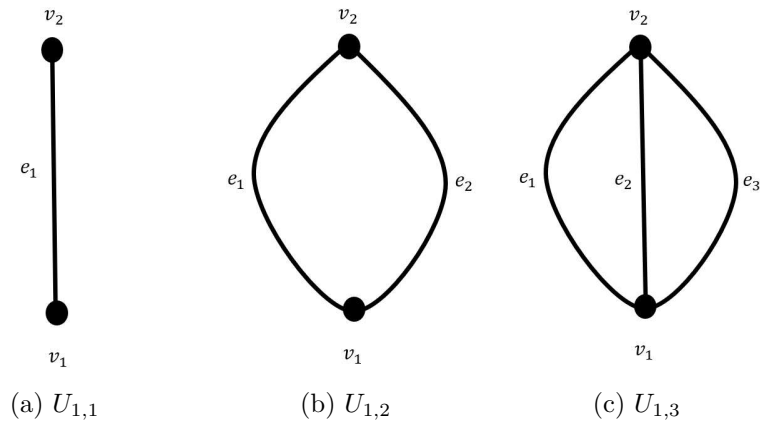
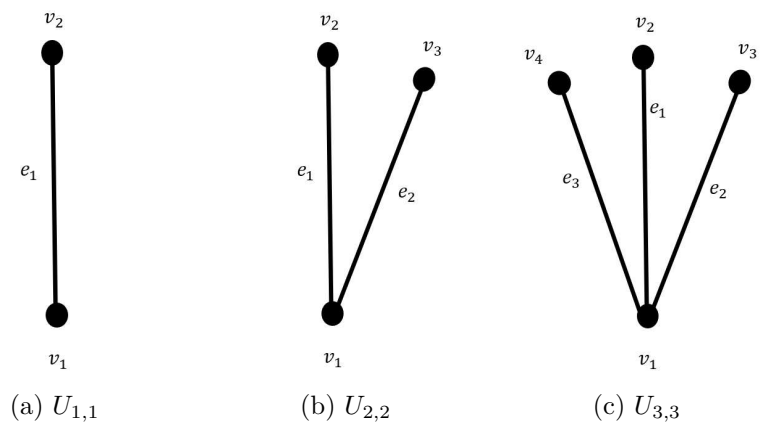
Aus Kapitel 2.2 ist bereits die Eigenschaft (B0) für Basen von Matroiden bekannt: Alle Basen haben dieselbe Mächtigkeit. Sowohl in Beispiel 1 als auch in Beispiel 4 ist aber sichtbar, dass im Allgemeinen nicht alle Teilmengen von E , die dieselbe Mächtigkeit wie eine Basis besitzen, auch in der Menge der Basen $\mathcal{B}$ enthalten sind. Da Theorem 8 dies aber auch nicht explizit ausschließt, wollen wir ein Matroid $(E, \mathcal{B})$ konstruieren, deren Basen **sämtliche** Teilmengen von E mit einer gewissen Mächtigkeit m sind.

Sei also E eine Menge und gelte $|E| = n$. Sei $\mathcal{X}$ die Menge aller m -elementigen Teilmengen von E , wobei $m \leq n$ gelten soll. Eine kurze Überprüfung ergibt, dass $\mathcal{X}$ gemäß Theorem 8 die Menge der Basen eines Matroids sein muss, denn (B1) und (B2) werden von $\mathcal{X}$ erfüllt. Ein derartiges Matroid wird als „uniformes Matroid $U_{m,n}$ “ vom Rang m über einer n -elementigen Menge bezeichnet. Für uniforme Matroide lässt sich nicht nur sehr leicht die Menge $\mathcal{B}$ beschreiben, sondern ausgehend von $\mathcal{B}$ auch eine einfache Charakterisierung der Mengen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{C}$ geben:

- $\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\}$
- $\mathcal{C}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| = m + 1\}$

Man beachte, dass für $m = n$ die Menge $\mathcal{C}$ keine Elemente besitzt.

Es stellt sich die Frage, wo uniforme Matroide innerhalb der uns schon bekannten Matroidarten einzuordnen sind. Klar ist, dass uniforme Matroide der Form $U_{0,n}$, $U_{1,n}$ und $U_{n,n}$ in jedem Fall graphisch sind. Erstere lassen sich nämlich durch Graphen darstellen, die genau n Kanten enthalten, die allesamt Schlingen sind. Zweitere lassen sich durch Graphen darstellen, die n Kanten beinhalten, die **allesamt** dieselben zwei Knoten verbinden (man nennt solche Kantenpaare *Parallelklassen*). Letztere lassen sich durch Graphen darstellen, bei denen alle n Kanten einen gemeinsamen Startknoten, aber unterschiedliche Endknoten haben. Die nachstehende Abbildung verdeutlicht das.


 Abbildung 3.1: Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{0,n}$

 Abbildung 3.2: Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{1,n}$

 Abbildung 3.3: Veranschaulichung von uniformen Matroiden der Form $U_{n,n}$

Gemäß Lemma 6 muss es zu allen in den Abbildungen 3.1, 3.2, 3.3 dargestellten uniformen Matroiden auch ein isomorphes Vektormatroid geben. So trivial es war, die in Abbildung 3.1-3.3 dargestellten Graphen zu finden, deren Kreismatroide isomorph zu den uniformen Matroiden waren, so sehr stößt man bei der Suche nach einem Graphen, dessen Kreismatroid isomorph zu $U_{2,4}$ wäre, an seine Grenzen. Denn:

Lemma 21 *Das uniforme Matroid $U_{2,4}$ ist nicht graphisch.*

Beweis Lemma 21: Um die zu überprüfenden Konstellationen von Graphen zu reduzieren und Lemma 21 zu beweisen, sollen zunächst einige Vorüberlegungen angestellt werden. Da bei $U_{2,4}$ alle zweielementigen Teilmengen Basen sind, ist klar, dass der dem zu $U_{2,4}$ isomorphen Kreismatroid zugrundeliegende Graph weder Schlingen noch Parallelklassen enthalten darf - in der Graphentheorie spricht man in diesem Kontext von *einfachen Graphen*. Da (ohne Beweis, vgl. [27, S.18]) jedem graphischen Matroid ein zusammenhängender Graph zugrundegelegt werden kann, müssen weiters lediglich zusammenhängende Graphen mit vier Kanten untersucht werden. Zusammenhängende Graphen mit lediglich drei Knoten (sie müssten eine Schlinge oder eine Parallelklasse enthalten) scheiden dabei genauso aus wie zusammenhängende Graphen mit fünf Knoten (sie wären kreisfrei). Somit verbleiben nur folgende unterschiedliche Konstellationen (keine Konstellation ist dabei eindeutig, jeder beliebige Graph, der nach den oben formulierten Maßstäben geformt wird, lässt sich aber durch Drehung, Spiegelung oder Drehspiegelung auf eine der präsentierten Konstellationen übertragen):

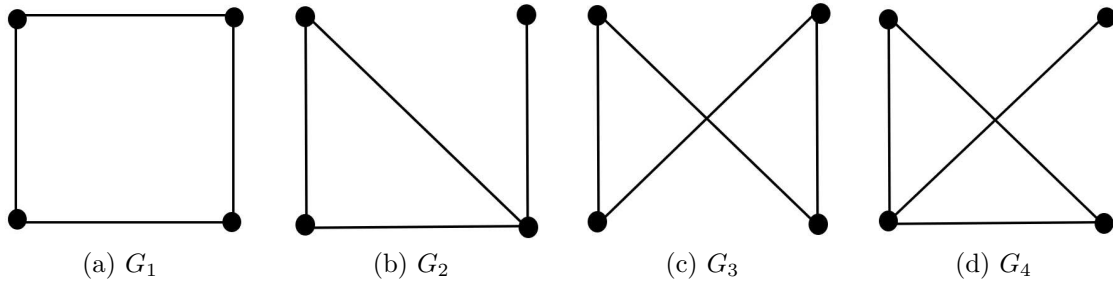


Abbildung 3.4: Einfache Graphen mit vier Kanten

Da offensichtlich durch keine der Konstellationen $U_{2,4}$ dargestellt werden kann, gibt es für $U_{2,4}$ keine graphische Darstellung. $\square$

Sehr wohl lässt sich aber ein zu $U_{2,4}$ isomorphes Vektormatroid finden, und zwar mit folgender Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Erkenntnis erlaubt es, zwei der am Ende von Kapitel 2.1 formulierten Fragen zu beantworten:

- e) **Ist jedes Matroid graphisch?** Nein, $U_{2,4}$ ist nicht graphisch.
- f) **Ist jedes Vektormatroid graphisch?** Nein, da es zwar ein zu $U_{2,4}$ isomorphes Vektormatroid, aber kein isomorphes Kreismatroid gibt.

3.2 Transversalmatroid

Die Transversalmatroiden stellen eine weitere Matroidart dar, deren Bedeutung sich vor allem im Bereich kombinatorischer Optimierung finden lässt. Betrachtet man eine endliche Menge S und kreiert aus ihr eine Sammlung mehrerer Teilmengen $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ von S , die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen, jedenfalls aber gleiche Elemente beinhalten dürfen, so bezeichnet man die Menge $\{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq S$ als Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, wenn $s_j \in A_j \forall j = 1, \dots, m$ gilt und alle s_j verschieden sind. Ein partielles Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ist ein Transversal für eine beliebige Auswahl von Mengen aus $(A_1, A_2, \dots, A_m)$.

Neben dieser recht technischen Beschreibung einer Zuordnung von Elementen aus S zu Teilmengen von S gibt es eine Möglichkeit, Transversale graphisch zu veranschaulichen. Erzeugen wir dafür einen Graphen, in dem einerseits jedes Element $s_1, s_2, \dots, s_n$ von S (mit $|S| = n$) durch einen Knoten repräsentiert ist, andererseits jede erzeugte Teilmenge $A_1, A_2, \dots, A_m$. Der erzeugte Graph besitzt also $|n + m|$ Knoten. Ist nun ein Element $s_x \in S$ mit $x = 1, \dots, n$ in einer Teilmenge $A_y \subseteq S$ mit $y = 1, \dots, m$ enthalten, so wird dies durch eine diese zwei Knoten verbindende Kante dargestellt, und jede im Graph aufscheinende Kante existiert nur, wenn eine derartige Beziehung existiert. Nachfolgendes Beispiel soll den bisherigen Gedankengang veranschaulichen.

Beispiel 22 Sei $S = \{1, 2, 3, 4\}$ und weiters $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{1, 4\}$. Gemäß der Definition von Transversalen stellt die Menge $T_1 = \{1, 2, 4\}$ ein Transversal von (A_1, A_2, A_3) dar, denn $1 \neq 2 \neq 4$ und $1 \in A_1, 2 \in A_2, 4 \in A_3$ (alternativ wäre auch die Zuordnung $1 \in A_3, 2 \in A_1, 4 \in A_2$ möglich). Weitere Transversale sind $T_2 = \{1, 2, 3\}$, $T_3 = \{1, 3, 4\}$ und $T_4 = \{2, 3, 4\}$.

Die nach obiger Erklärung erzeugte graphische Darstellung der gegebenen Situation sieht wie folgt aus:

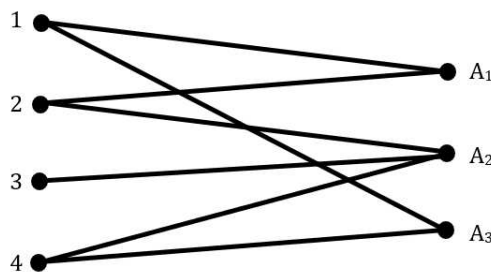


Abbildung 3.5: Bipartiter Graph zu Beispiel 22

Es fällt auf, dass es zwischen den Knoten 1, 2, 3, 4 ebenso keine Kanten gibt wie zwischen den Knoten A_1, A_2, A_3 . Graphen dieser Art, deren Knotenmenge man in zwei disjunkte Mengen V_1 und V_2 aufteilen kann, sodass es zwischen Knoten aus V_1 keine Kanten gibt und zwischen Knoten aus V_2 keine Kanten gibt, heißen bipartite Graphen. Alle Transversale lassen sich mittels eines solchen bipartiten Graphen darstellen. Nachfolgend sind die Transversale T_1, T_2, T_3 und T_4 für Beispiel 22 dargestellt: Sie entsprechen den blau markierten Knoten. Die rot markierten Kanten deuten an, wie die Elemente des entsprechenden Transversals den Mengen A_1, A_2, A_3 zugeordnet (mit diesen „gematched“) werden können.

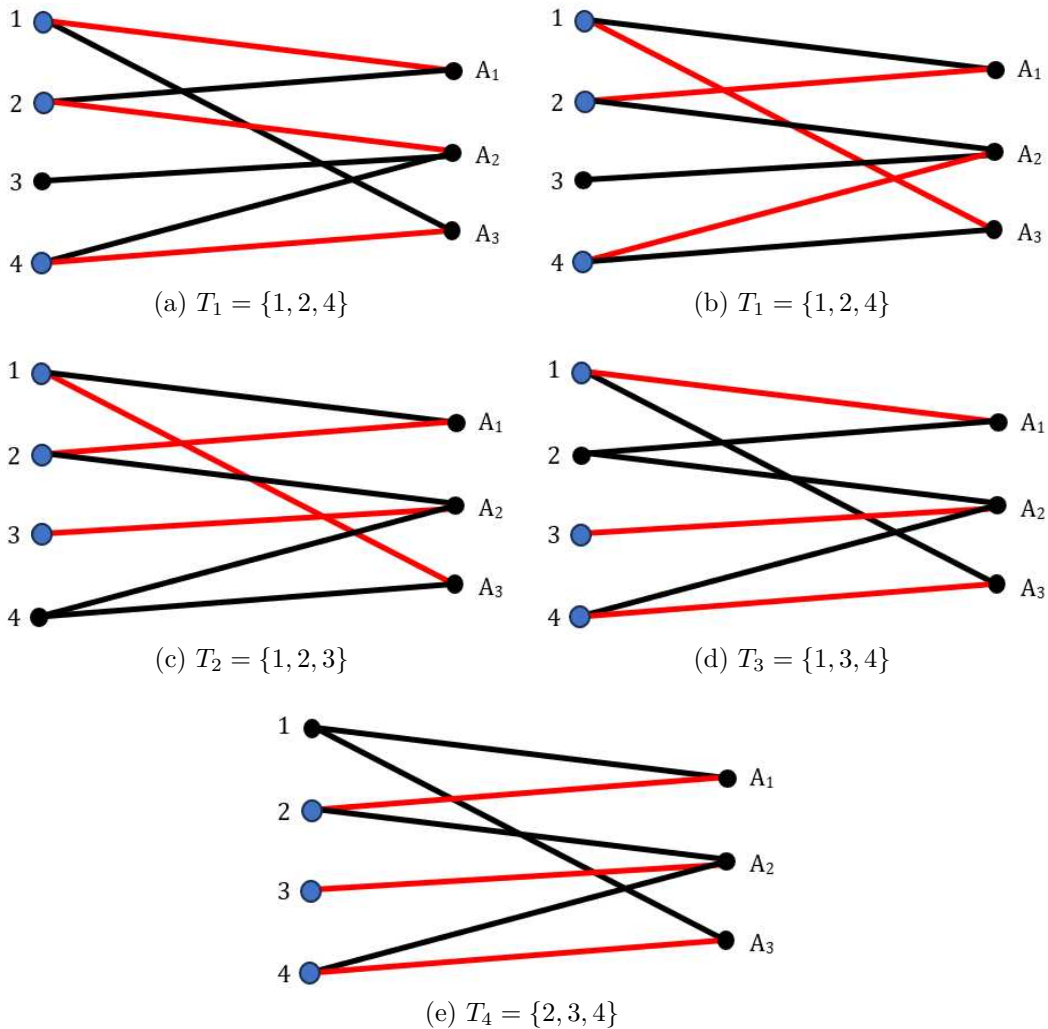


Abbildung 3.6: Transversale inklusive Matchings zu Beispiel 22

Offensichtlich besitzen die rot markierten Kanten, also die „matchings“, sämtlicher Transversale keine gemeinsamen Knoten. Tatsächlich lässt sich die Suche nach Transversalen in einem bipartiten Graphen auch allgemein aus diesem Blickwinkel angehen: Sucht man in einem bipartiten Graphen alle größtmöglichen Mengen von Kanten, die Knoten aus der Knotenmenge

S Knoten aus der Knotenmenge $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ zuordnen und keine gemeinsamen Knoten haben, so findet man alle Transversale als jene mit den gewählten Kanten inzidente Knoten, die zur Punktmenge S zählen. Sucht man in einem bipartiten Graphen allgemeiner alle Mengen von Kanten (nicht notwendigerweise maximal), die Knoten aus der Knotenmenge S Knoten aus der Knotenmenge $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ zuordnen und keine gemeinsamen Knoten haben, so findet man alle (partiellen) Transversale als jene mit den gewählten Kanten inzidente Knoten, die zur Punktmenge S zählen.

Es ist nun an der Zeit, eine Verknüpfung zwischen Transversalen und Matroiden herzustellen. Dass es überhaupt eine Verbindung geben könnte, zeigt sich zunächst an einigen uns bereits von Matroiden wohl bekannten Eigenschaften, die die Transversale im Beispiel 22 erfüllen: Zunächst besitzen offensichtlich alle Transversale T_1, T_2, T_3 und T_4 dieselbe Mächtigkeit - wir kennen diese Eigenschaft von den Basen eines Matroids. Man beachte zudem, dass die Menge $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ auch die Eigenschaften (B1) und (B2) aus Theorem 8 erfüllt, die von der Menge der Basen eines jeden Matroids erfüllt werden muss: Denn $\mathcal{T}$ ist nicht leer (womit (B1) erfüllt ist), zudem gilt für zwei beliebige Elemente T_i, T_j mit $T_i \neq T_j$ aus $\mathcal{T}$: $x \in T_i - T_j \Rightarrow \exists y \in T_j - T_i$, sodass $(T_i - x) \cup y \in \mathcal{T}$ (womit (B2) erfüllt ist). Dass zuletzt auch jedes beliebige partielle Transversal eine Teilmenge von T_1, T_2, T_3 oder T_4 ist, erlaubt uns folgende zwei Vermutungen:

- Für eine Menge S und eine Sammlung von Teilmengen $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ von S ist die Menge $\mathcal{T}$ der Transversale die Menge der Basen $\mathcal{B}$ eines Matroids mit Grundmenge S .
- Für eine Menge S und eine Sammlung von Teilmengen $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ von S ist die Menge $\mathcal{P}$ der partiellen Transversale die Menge der unabhängigen Mengen $\mathcal{I}$ eines Matroids mit Grundmenge S .

Nachfolgendes Theorem belegt unsere Vermutung:

Theorem 23 *Sei S eine endliche Menge und $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ eine Sammlung von Teilmengen von S . Sei $\mathcal{P}$ die Menge partieller Transversale von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$. Dann ist $\mathcal{P}$ die Menge der unabhängigen Mengen $\mathcal{I}$ eines Matroids mit Grundmenge S .*

Beweis Theorem 23 (nach [27, S.44]) Die leere Menge ist ein Transversal für die Auswahl keiner Menge aus $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, womit (I1) erfüllt ist. Wenn P ein partielles Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ist und $P' \subseteq P$ gilt, dann ist auch P' ein partielles Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$, also gilt auch (I2). Nehmen wir an, dass P_1 und P_2 zwei partielle Transversale sind, und o.B.d.A. soll $|P_1| < |P_2|$ gelten. Man stelle sich ein Matching für beide partiellen Transversale in einem bipartiten Graphen vor: Für das partielle Transversal P_1 das Matching M_1 , für das partielle Transversal P_2 das Matching M_2 . Nun färbe man die Kanten von $M_1 - M_2$ rot, die Kanten von $M_2 - M_1$ blau und die Kanten $M_1 \cap M_2$ gelb. Sei nun M der Teilgraph des bipartiten Graphens, der jene Kanten (und die mit ihnen inzidenten Knoten) beinhaltet, die rot oder blau sind. Da $|M_1| = |P_1|$ und $|M_2| = |P_2|$ gilt, muss es mehr blaue als rote Kanten in M geben. Da M_1 und M_2 Matchings sind, inzidieren bei

jedem Knoten in M eine (blaue oder rote) oder zwei (eine blaue, eine rote) Kanten. Jede zusammenhängende Komponente von M ist entweder ein Kreis oder ein Weg. Die Anzahl an Kanten in einem Kreis muss gerade sein, da wir von einem bipartiten Graphen ausgehen. Da zwei gleich gefärbte Kanten nicht aufeinandertreffen können (sonst wären M_1 und/oder M_2 keine Matchings gewesen), gibt es in jedem Kreis und in einem Weg mit einer geraden Anzahl an Kanten gleich viele rote wie blaue Kanten, und diese alternieren. Da es aber insgesamt mehr blaue als rote Kanten gibt, muss es einen Weg mit einer ungeraden Anzahl an Kanten geben - das bedeutet, dass die erste und die letzte Kante dieses Weges blau gefärbt sind. Bezeichnen wir diesen Weg mit W und bezeichnen wir die auftretenden Knoten mit $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$. Auf jeden Fall liegt v_1 oder v_{2k} in S und der jeweils andere Knoten in $(A_1, A_2, \dots, A_m)$. Sei nun o.B.d.A. $v_1 \in S$. Dann ist, da ja an v_1 eine blaue Kante anstößt, $v_1 \in P_2 - P_1$, und weiters sind die Knoten $\{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\} \subseteq (A_1, A_2, \dots, A_m)$ und die Knoten $\{v_3, v_5, \dots, v_{2k-1}\} \subseteq (P_1 \cap P_2)$. Wechselt man nun nur in W die Farben blau und rot und lässt sonst alles unverändert, so gibt es im neu gefärbten bipartiten Graphen nun eine rote Kante mehr als zuvor. Darüber hinaus ist nun jeder Knoten in $P_1 \cup v_1$ Endpunkt einer rot oder gelb eingefärbten Kante, und diese formen ein Matching. Wir schließen daraus, dass $P_1 \cup v_1$ ein partielles Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ ist. Offenbar ist (I3) daher erfüllt und die Menge $\mathcal{P}$ tatsächlich die Menge der unabhängigen Mengen $\mathcal{I}$ in einem Matroid mit Grundmenge S . Ein Matroid $M(S, \mathcal{I})$, deren Menge $\mathcal{I}$ sich als Menge partieller Transversale von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ mit $A_j \subseteq S$ ($j = 1, \dots, m$) erzeugen lässt, heißt Transversalmatroid. Da ein Transversal von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ offensichtlich die größte unabhängige Menge ist, ist die Menge $\mathcal{T}$ der Transversale auch die Menge $\mathcal{B}$ der Basen eines Transversalmatroids. $\square$

Im bipartiten Graphen ist Vorsicht geboten, den Zusammenhang zwischen partiellen Transversalen und Transversalen von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ nicht zu verkennen: Zwar lässt sich jedes partielle Transversal als Teilgraph eines Transversals und dessen Matching in einem bipartiten Graphen finden, allerdings nicht jedes beliebige Matching eines partiellen Transversals. Bemühen wir dafür nochmals die Angaben aus Beispiel 22 und die Graphiken 3.6 sowie 3.7. Mit Blick auf Abbildung 3.7a lässt sich das partielle Transversal $P_1 = \{1, 4\}$ von (A_1, A_2, A_3) inklusive eines Matchings M_1 erzeugen, indem beim Matching von Transversal $T_1 = \{1, 2, 4\}$ in Abbildung 3.6a die von 2 wegführende Kante entfernt wird. Jedoch ist auch das in Abbildung 3.7b abgebildete Matching M_2 für $P_1 = \{1, 4\}$ zulässig. Es lässt sich aber von keinem Matching irgendeines der Transversale aus Abbildung 3.6 ableiten.

Genauso wenig lässt sich das Matching eines Transversals in das Matching eines zweiten Transversals übertragen. In Beispiel 22 sind $T_1 = \{1, 2, 4\}$ und $T_2 = \{1, 2, 3\}$ in der Menge $\mathcal{T}$ der Transversale enthalten, und somit gilt gemäß (B2): $4 \in T_1 - T_2$ und $3 \in T_2 - T_1 \Rightarrow (T_1 - \{4\}) \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = T_2 \in \mathcal{T}$. Im bipartiten Graphen dürfen nun aber mit dem Tausch der Knoten 4 und 3 nicht automatisch die inzidenten Kanten mitgetauscht werden. Denn in Graphik 3.8c ist leicht zu sehen, dass sich so kein gültiges Matching ergibt.

Die von uns vorgenommene Betrachtungsweise bipartiter Graphen, die den Fokus auf Knotenmengen setzt, stimmt mit jener Betrachtung von Graphen, wie wir sie in vorherigen

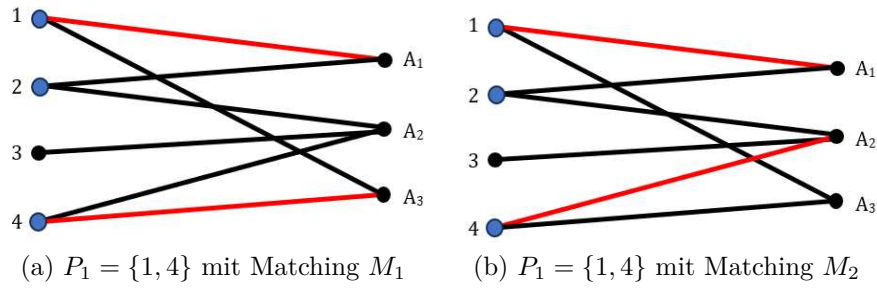
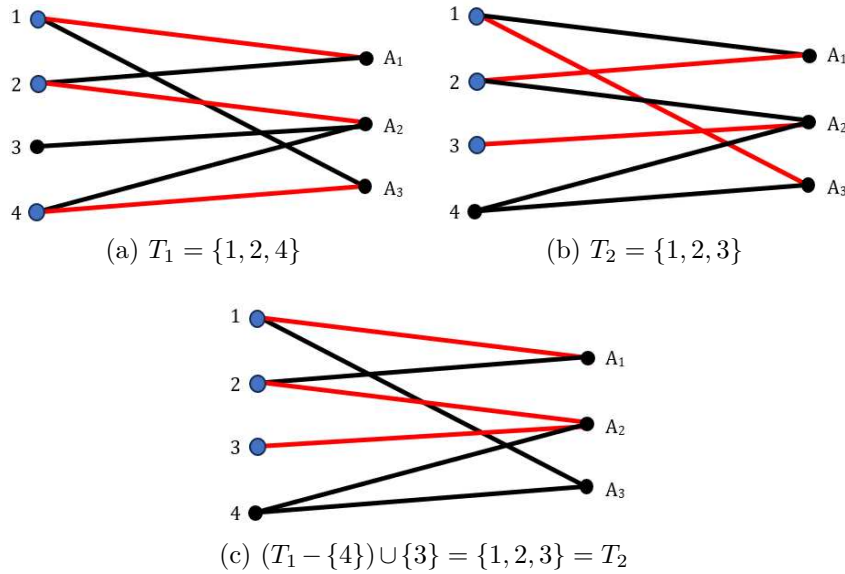

 Abbildung 3.7: $P_1 = \{1, 4\}$ zu Beispiel 22 mit unterschiedlichen Matchings


Abbildung 3.8: Das Vertauschen von Elementen eines Transversals gemäß (B2) ist gestattet, das Mitvertauschen von inzidenten Kanten kann ungültige Matchings erzeugen

Kapiteln in Bezug auf Matroide vorgenommen haben und die den Fokus auf Kantenmengen hatte, nicht überein. Es wäre daher ein Trugschluss zu glauben, dass alle Transversalmatroide graphisch wären, nur weil Transversale mittels bipartiter Graphen dargestellt werden können. Ganz im Gegenteil: Wir werden gleich ein uns schon bekanntes Gegenbeispiel bemühen, das zeigt, dass nicht alle Transversalmatroide graphisch sind. Zu diesem Zweck stellen wir uns abschließend die Frage, wo transversale Matroide im Vergleich zu uns schon bekannten Matroidarten einzuordnen sind. Recht schnell lässt sich zeigen, dass alle uniformen Matroide auch transversal sind. Denn zu einem uniformen Matroid $U_{m,n}$ mit Grundmenge S (aus Analogiegründen hier S statt E) lässt sich leicht die Sammlung der Teilmengen $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ mit $A_1 = A_2 = \dots = A_m = S$ erzeugen, und die Menge der Transversale von $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ entspricht dann genau der Menge der Basen des uniformen Matroids $U_{m,n}$. Nicht notwendigerweise muss $A_1 = A_2 = \dots = A_m = S$ gelten: So ist das in Beispiel 22 erzeugte Matroid eine Darstellung von $U_{3,4}$. Wenn alle uniformen Matroide in den Trans-

versalmatroiden enthalten sind, so gilt das insbesondere für $U_{2,4}$. Somit ist klar, dass nicht alle Transversalmatroide graphisch sind. Dass auch die Umkehrung nicht gilt, kann in einem Beispiel bei [27, S.46] nachgelesen werden. Hingegen gilt, dass jedes Transversalmatroid auch $\mathbb{K}$ -darstellbar für einen ausreichend großen Körper $\mathbb{K}$ ist. Der Beweis wird hier nicht geführt, der interessierte Leser sei auf [27, S.417ff.] verwiesen.

4 Dualität

4.1 Grundsätzliches zur Dualität

Im Zuge der Erarbeitung verschiedener Axiomensysteme sind ausgewählte Eigenschaften von Matroiden bereits zur Sprache gekommen. Eine grundlegende Eigenschaft, jene der Dualität, verdient eine genauere Untersuchung, da sie nicht zuletzt auch zur Genese neuer Matroide führt. Dualität bei Matroiden vereint (und erweitert) das Konzept der Dualität von planaren Graphen mit dem Konzept der Orthogonalität in Vektorräumen. Wir nähern uns dieser fundamentalen Eigenschaft von Matroiden zunächst über die uns nun zugängliche Sprache der Matroide, ehe wir Anknüpfungspunkte zu eventuell vertrauteren Konzepten in Graphentheorie und linearer Algebra offenlegen. Am Ende dieses Kapitels wird auch die Frage von Seite 26 geklärt sein, ob jedes Matroid $\mathbb{K}$ -darstellbar ist.

Theorem 24 *Betrachtet man ein Matroid $M(E, \mathcal{B})$, so lässt sich beweisen, dass es sich auch bei $M(E, \mathcal{B}^*)$ um ein Matroid handelt, wobei für $\mathcal{B}^*$ gilt:*

$$\mathcal{B}^* = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}\}$$

Beweis Theorem 24, nach [27, S.64]: Um den Beweis zu führen, benötigen wir nachfolgendes Lemma:

Lemma 25 *Wenn $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_2 - B_1$, dann gilt: $\exists y \in B_1 - B_2 : (B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$.*

Beweis Lemma 25: $B_1 \cup x$ muss nach der Definition einer Basis abhängig sein und beinhaltet daher einen einzigen Kreis $C(x, B_1)$. Da $C(x, B_1)$ abhängig ist, B_2 aber unabhängig, kann $C(x, B_1) - B_2$ nicht leer sein (sonst wäre $C(x, B_1)$ eine Teilmenge von B_2 und somit eine unabhängige Menge). Wir benennen das Element aus der Menge $C(x, B_1) - B_2$ mit y . Es muss auch $y \in B_1 - B_2$ gelten. Nun ist $(B_1 - y) \cup x$ gewiss unabhängig, da es $C(x, B_1)$ nicht enthält. Da außerdem $|(B_1 - y) \cup x| = |B_1|$ gilt, muss $(B_1 - y) \cup x$ eine Basis sein. $\square$

Beweis Theorem 24: Da $\mathcal{B}$ nicht leer ist, ist auch $\mathcal{B}^*$ nicht leer. Also erfüllt $\mathcal{B}^*$ die Bedingung (B1). Nehmen wir nun an, dass $x \in B_1^* - B_2^*$ gilt für $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$. Definiert man $B_1 = E(M) - B_1^*$ und $B_2 = E(M) - B_2^*$, so gilt natürlich $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Zudem gilt nach kurzer Überprüfung $B_1^* - B_2^* = B_1^* \cap (E - B_2^*) = (E - B_1) \cap B_2 = B_2 - B_1$. Somit gilt nicht nur $x \in B_1^* - B_2^*$, sondern auch $x \in B_2 - B_1$. Gemäß Lemma 25 gibt es nun ein Element $y \in B_1 - B_2$, sodass $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$. Weil $y \in B_1 - B_2$ gilt, gilt wegen $B_1 - B_2 = B_1 \cap (E - B_2) = (E - B_1^*) \cap B_2^* = B_2^* - B_1^*$ auch $y \in B_2^* - B_1^*$, außerdem gilt nach Konstruktion von $\mathcal{B}^*$ auch $E - ((B_1 - y) \cup x) \in \mathcal{B}^*$. Allerdings ist

$E - ((B_1 - y) \cup x) = ((E - B_1) - x) \cup y = (B_1^* - x) \cup y$. Da nun also für zwei Elemente $B_1^*, B_2^* \in \mathcal{B}^*$ und $x \in B_1^* - B_2^*$ sowie $y \in B_2^* - B_1^*$ gilt, dass $(B_1^* - x) \cup y \in \mathcal{B}^*$, erfüllt $\mathcal{B}^*$ sichtlich auch die Bedingung (B2). Wenn $\mathcal{B}^*$ (B1) und (B2) erfüllt, ist es nach Theorem 8 die Menge der Basen eines Matroids. $\square$

Das in Theorem 24 vorgestellte Matroid $M(E, \mathcal{B}^*)$ heißt *duales Matroid* zu $M(E, \mathcal{B})$ und wird bei [27], dessen Schreibweise wir übernehmen wollen, mit M^* abgekürzt. Spannend genug, dass sich auf eine so einfache Weise Matroide aus bereits bekannten Matroiden generieren lassen, stellt sich unweigerlich die Frage, welche Zusammenhänge zwischen einem Matroid M und seinem dualen Matroid M^* bestehen, welche Eigenschaften vererbbar und welche nicht vererbbar sind.

Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, bietet sich aufgrund der vergleichsweise einfachen Struktur für erste Überlegungen die Betrachtung uniformer Matroide an. Unmittelbar aus Theorem 24 folgt etwa, dass für ein uniformes Matroid $M = U_{m,n}$ mit Grundmenge E das dazugehörige duale Matroid M^* das ebenfalls uniforme Matroid $U_{n-m,n}$ mit Grundmenge E sein muss. Ob auch die dualen Matroide von Vektor- bzw. Kreismatroiden wiederum Vektor- bzw. Kreismatroide sind, wird an späterer Stelle besprochen, während auf Dualität transversaler Matroide hier nicht näher eingegangen wird. (siehe bei Interesse [27, S.93-99])

Jede Teilmenge $X \subseteq E(M)$ eines Matroids M , für die $cl(X) = E$ gilt, heißt „aufspannend“. Eine Teilmenge X ist genau dann aufspannend, wenn sie eine Basis B von M enthält, da Basen die kleinsten Teilmengen von $E(M)$ sind, deren Hülle E ist. Wenn X eine unabhängige Menge von $M = U_{m,n}$ ist (also $|X| \leq m$), so muss $E - X$ in M^* aufspannend sein, da $|E - X| \geq |E| - m = |B(M^*)| \forall B \in \mathcal{B}^*$ gilt und daher $E - X$ jedenfalls Teil einer Basis von M^* sein muss. Auch die Umkehrung gilt: Eine aufspannende Menge in $M = U_{m,n}$ ist eine unabhängige Menge in M^* .

Eine Teilmenge $X \subseteq E(M)$ eines Matroids M , für die $cl(X) = X$ und darüber hinaus $r(X) = r(M) - 1$ gilt, heißt „Hyperebene“. In einem uniformen Matroid $M = U_{m,n}$ ist X genau dann eine Hyperebene, wenn $|X| = m - 1$ gilt. Offenkundig muss dann $E - X$ in M^* ein Kreis sein, da in einem uniformen Matroid $M^* = U_{n-m,n}$ die Kreise genau jene Teilmengen von $E(M^*)$ sind, deren Mächtigkeit $n - m + 1$ ist. Und genau das trifft auf $E - X$ zu: $|E - X| = |E| - |X| = n - (m - 1) = n - m + 1$. Auch die Umkehrung gilt: Ein Kreis in $M = U_{m,n}$ ist eine Hyperebene in M^* .

Die Betrachtung uniformer Matroide hat uns die Findung obiger Eigenschaften leichter gemacht. Tatsächlich gelten diese Eigenschaften aber für beliebige Matroide:

Lemma 26 *Sei M ein Matroid mit Grundmenge E und sei $X \subseteq E$. Dann gilt:*

1. X ist aufspannend in $M \Leftrightarrow E - X$ ist unabhängig in M^*
2. X ist unabhängig in $M \Leftrightarrow E - X$ ist aufspannend in M^*
3. X ist eine Hyperebene in $M \Leftrightarrow E - X$ ist ein Kreis in M^*

4. X ist ein Kreis in $M \Leftrightarrow E - X$ ist eine Hyperebene in M^*

Beweis 26 (nach [10, S.9]) und [27, S.65]:

1. Nach Theorem 24 ist B genau dann eine Basis von M , wenn $E - B$ eine Basis von M^* ist. Da X genau dann aufspannend in M ist, wenn es eine Basis enthält, muss $E - X$ eine (echte) Teilmenge einer Basis von M^* und somit unabhängig in M^* sein. Umgekehrt muss, wenn $E - X$ eine (echte) Teilmenge einer Basis von M^* , also unabhängig, ist, X in M eine Basis und eventuell noch mehr enthalten, jedenfalls daher aber aufspannend sein.
2. Lässt sich durch Umformulierung des Beweises von (1) zeigen.
3. Wenn X eine Hyperebene in M ist, dann ist das gleichbedeutend damit, dass X eine nicht-aufspannende Menge in M ist, allerdings $\forall y \notin X$ die Menge $X \cup y$ aufspannend ist. Das wiederum bedeutet, dass $E - X$ abhängig in M^* ist, allerdings $(E - X) - y$ in M^* unabhängig $\forall y \in E - X$ ist. Genau das aber ist das Wesen eines Kreises, und somit ist $E - X$ ein Kreis von M^* . Da es sich bei der Argumentationskette um äquivalente Aussagen handelt, gilt auch die Umkehrung und (3) ist bewiesen.
4. Lässt sich durch Umformulierung des Beweises von (3) zeigen. □

Es ist üblich, folgende sprachliche Übereinkünfte in Bezug auf duale Matroide zu treffen: *Basen* von M^* sind *Kobasen* von M , *Kreise* von M^* sind *Kokreise* von M , *unabhängige* Mengen des Matroids M^* sind *kounabhängige* Mengen des Matroids M , *aufspannende* Mengen des Matroids M^* sind *koaufspannende* Mengen des Matroids M , ...

Beispiel 27 Um das bisher Erarbeitete nochmals anschaulich darzulegen, betrachten wir den Graphen G in der nachfolgenden Abbildung.

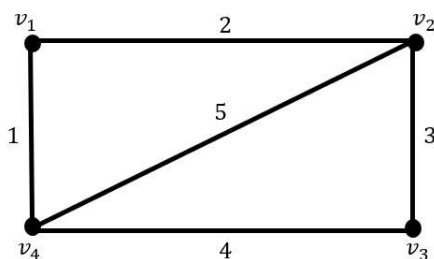


Abbildung 4.1: Graph G zu Beispiel 27

Die Menge der Basen $\mathcal{B}$, der Kreise $\mathcal{C}$ und der Hyperebenen $\mathcal{H}$ des dazugehörigen Kreismatroids $M(G)$ lassen sich wie folgt ablesen:

- $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$
- $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$
- $\mathcal{H} = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$

Nach Theorem 24 und Lemma 26 gelten für das duale Matroid $M^*(G)$ (auch „kographisches“ Matroid genannt):

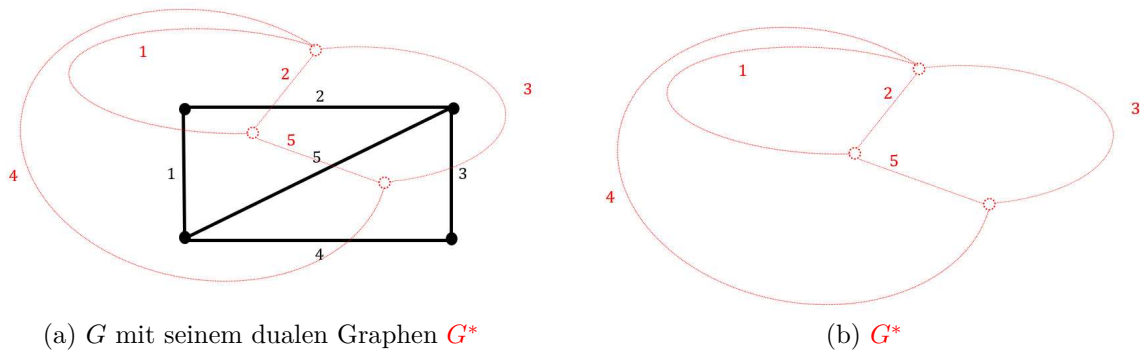
- $\mathcal{B}^* = \{\{4, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$
- $\mathcal{H}^* = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}, \{5\}\}$
- $\mathcal{C}^* = \{\{2, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}\}$

Der Zusammenhang zwischen einzelnen Mengen dualer Matroide ist in Tabelle 4.1 dargestellt. Die Tabelle ist spaltenweise zu lesen. Die Zahlen 1-5 stehen für die Kanten des Graphen G . Sind sie rot eingefärbt, so bilden sie zusammen das am oberen Ende der Spalte stehenden Element einer Menge des Matroids M , andernfalls (wenn sie grün gefärbt sind) bilden sie zusammen das am unteren Ende der Spalte stehenden Element einer Menge des dualen Matroids M^* . Es ist gut zu sehen, dass $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^*|$, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{H}^*|$ und $|\mathcal{H}| = |\mathcal{C}^*|$ gilt und sich jeweils ein Element aus $\mathcal{B}$ mit einem Element aus $\mathcal{B}^*$, ein Element aus $\mathcal{C}$ mit einem Element aus $\mathcal{H}^*$ und ein Element aus $\mathcal{H}$ mit einem Element aus $\mathcal{C}^*$ zu E vereinigen lässt.

Tabelle 4.1: Zusammenhang zwischen Mengen eines Matroids und des dualen Matroids

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	C_1	C_2	C_3	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
B_1^*	B_2^*	B_3^*	B_4^*	B_5^*	B_6^*	B_7^*	B_8^*	H_1^*	H_2^*	H_3^*	C_1^*	C_2^*	C_3^*	C_4^*	C_5^*	C_6^*

Es zeigt sich also, dass Kenntnisse über spezielle Mengen eines Matroids auch Kenntnisse über spezielle Mengen seines dualen Matroids gemäß dem in Lemma 26 beschriebenen Zusammenhang bedeuten.


 Abbildung 4.2: Erzeugung des dualen Graphen G^* aus dem (planaren) Graphen G

4.2 Dualität bei Kreismatroiden

Der Begriff der Dualität ist keine Erfindung der Matroidtheorie, sondern ist der Graphentheorie entlehnt. Die Erzeugung eines dualen Graphen G^* aus einem gegebenen Graphen ist in Abbildung 4.2 anhand des Graphen G aus Beispiel 27 dargestellt.

In jede Fläche, die von Kanten des Graphen G definiert wird, wird ein Knoten gesetzt – so entsteht die Knotenmenge $V(G^*)$. Die entstandenen Knoten werden mit Kanten (deren Gesamtheit dann $E(G^*)$ ergibt) verknüpft. Dabei ist es Vorgabe, dass jede Kante des dualen Graphen lediglich eine Kante des ursprünglichen Graphen G schneiden darf, ehe sie zwei (eventuell idente) Knoten des dualen Graphen verknüpfen muss. Sämtliche Kanten, die nach dieser Vorschrift eingezeichnet werden können, sind einzuzichnen – so entsteht der vollständige duale Graph. Die Genese von G^* kann in Abbildung 4.2a nachvollzogen werden, das Resultat in Abbildung 4.2b.

Eine kurze Überprüfung zeigt, dass die Mengen $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{H}$, die sich aus G^* für das Kreismatroid $M(G^*)$ ablesen lassen, exakt jenen Mengen entsprechen, die in Beispiel 27 dem dualen Matroid M^* zugeordnet wurden. Tatsächlich erzeugt der in Beispiel 27 geschilderte Prozess zur Findung dualer Matroide stets jenes Kreismatroid, das sich auch aus einem nach obigen Prinzip erzeugten dualen Graphen ableiten lässt. Der Begriff der Dualität bei Matroiden schließt das Prinzip von dualen Graphen also ein – mehr noch, erweitert ihn sogar. Denn in der Graphentheorie ist das Erzeugen dualer Graphen nach dem in Abbildung 4.2 dargestellten Schema nur für planare Graphen¹ möglich, wohingegen nichts dagegen spricht, den in Beispiel 27 dargestellten Prozess für beliebige (Kreis-)Matroide durchzuführen. Auch für nicht-planare Graphen mitsamt ihres Kreismatroids liefert die Erzeugung des dualen Kreismatroids und die Betrachtung der Mengen aber eine anschauliche Interpretation: Innerhalb eines Graphen bezeichnet man eine minimale Kantenmenge, deren Entfernung eine größere Anzahl an Komponenten erzeugt, als „minimalen Schnitt“. Für Graph G aus Beispiel 27 bilden die Kantenmengen $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ minimale Schnitte, denn in allen Fällen zerfällt der Graph G in zwei Komponenten, und es gibt keine geringeren

¹Ein Graph heißt planar oder plättbar, wenn er ohne Überschneidungen der Kanten dargestellt werden kann

Kantenmengen, die das erreichen würden. Es ist kein Zufall, dass diese Kantenmengen mit $\mathcal{C}^*$ aus Beispiel 27 übereinstimmt.

Theorem 28 ohne Beweis Sei ein beliebiger Graph G gegeben. Man erzeuge das Kreis-
matroid $M(G)$ und sein duales Matroid $M^*(G)$. Es gilt: Die Elemente der Menge $\mathcal{C}^*$ sind
ident mit den Kantenmengen minimaler Schnitte von G .

Wir führen den Beweis nicht, er kann bei [27, S.28,S.30,S.87] nachgelesen werden. Man be-
achte, dass Theorem 28 für G keine Planarität voraussetzt und daher auch für nicht-planare
Graphen Gültigkeit besitzt. Davon kann sich der Leser anhand des Graphen $K_{3,3}$ in Ab-
bildung 4.3 überzeugen. Es lässt sich zu diesem Graphen $K_{3,3}$, da er nicht planar ist, kein
dualer Graph $K_{3,3}^*$ erzeugen, dennoch stimmt die Menge $\mathcal{C}^*$ (siehe unten) des dualen Matro-
ids $M^*(K_{3,3})$, die sich gemäß Lemma 26 aus der Menge der Hyperebenen $\mathcal{H}$ von $M(K_{3,3})$
ableiten lässt, mit der Menge der Kantenmenge minimaler Schnitte in $K_{3,3}$ überein.

$$\mathcal{C}^* = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}\}$$

Die Färbungen im Graphen dienen lediglich der Übersichtlichkeit.

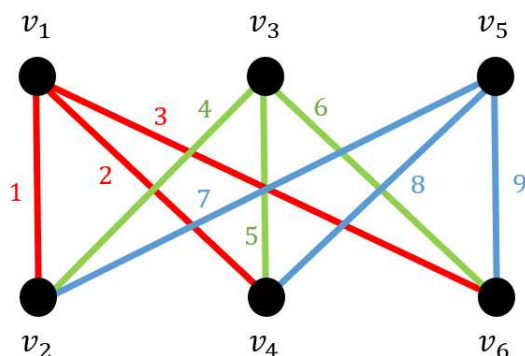


Abbildung 4.3: Auch für den nicht-planaren Graphen $K_{3,3}$ stimmt $\mathcal{C}^*$ des kographischen Ma-
troids mit der Menge der Kantenmenge minimaler Schnitte von $K_{3,3}$ überein.

Wir beschließen das Unterkapitel mit einigen interessanten Erkenntnissen, deren Beweise bei
[27, S.88-S.91] vollständig geführt, hier aber nicht dargelegt werden.

Lemma 29 Nicht jedes kographische Matroid ist graphisch. Zum Beispiel ist $M^*(K_{3,3})$ nicht
graphisch.

Theorem 30 Wenn G planar ist, dann ist $M^*(G)$ graphisch.

4.3 Dualität bei Vektormatroiden

Dualität ist ein Begriff, den man nicht nur in der Graphentheorie, sondern auch in der linea-
ren Algebra (Dualräume) kennt. Daher ist es lohnenswert, auch aus Sicht der Vektormatroiden

Dualität zu untersuchen und in der Verallgemeinerung einen weiteren überraschenden Zusammenhang zwischen Graphentheorie und linearer Algebra zu finden.

Wir wollen für grundlegende Überlegungen nochmals Matrix A aus Beispiel 1 betrachten:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir haben bereits erarbeitet, dass sich, betrachtet man die durchnummerierten Spaltenvektoren als Grundmenge $E(M)$, die Menge $\mathcal{B}$ der Basen des zugehörigen Kreismatroids $M[A]$ folgendermaßen zusammensetzt:

$$\mathcal{B} = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}$$

Das duale Matroid M^* muss folglich die Basismenge $\mathcal{B}^*$ besitzen:

$$\mathcal{B}^* = \{\{2, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Die Existenz dieses dualen Matroids ist unbestritten, spannend jedoch ist die Frage, ob es zu diesem auch wieder eine zugrundeliegende Matrix gibt und - falls ja - ob diese auch mittels eines standardisierten Prozesses aus der gegebenen Matrix A entwickelt werden kann. Diesen beiden Fragen wollen wir in Tabelle 4.2 auf den Grund gehen. Dass das dort geschilderte Prinzip immer funktioniert, hat [27, S.78f.] bewiesen. Der interessierte Leser sei dorthin verwiesen, der Beweis wird hier nicht geführt. Die Konsequenz aus der Gültigkeit dieses Prinzips ist aber nicht unwesentlich und wird in Lemma 31 zum Ausdruck gebracht.

Tabelle 4.2: Findungsprozess einer dem dualen Matroid $M^*[A]$ zugrundeliegenden Matrix

Spezielles Beispiel	Verallgemeinerung ([27, S.78f.])
Das Vektormatroid $M[A]$ verändert sich nicht, wenn man die Reihenfolge der Spaltenvektoren der Matrix A verändert, sofern man auch die Spaltenbezeichnungen mitvertauscht. Wir tun dies in der Absicht, die Einheitsmatrix I_2 an den Beginn der Matrix A zu stellen, und erhalten somit A'. $A = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{green}{1} & \textcolor{green}{0} & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \textcolor{green}{0} & \textcolor{green}{1} & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Man modifiziere die betrachtete Matrix A über dem Körper $\mathbb{K}$ mit Rang r so lange, bis man zur Matrix A' mit der Gestalt $A' = (I_r X)$ gelangt, wobei I_r die $r \times r$-Einheitsmatrix und X eine $r \times (n - r)$-Matrix ist (dh. die Anzahl an Spaltenvektoren ändert sich nicht!). Diese Modifikation gelingt immer (und zwar auch so, dass Matroid $M[A] = M[A']$ gilt), wenn man eine passende Abfolge folgender Operationen vornimmt ([27, S.77]: • Vertausche zwei Reihen. • Multipliziere eine Reihe mit einer Zahl $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$. • Ersetze eine Reihe durch die Summe der Reihe selbst mit einer anderen Reihe. • Füge eine Nullreihe hinzu oder entferne eine Nullreihe. • Vertausche zwei Spalten (mitsamt ihrer Spaltenbezeichnungen).
Die Matrix A' ist zusammengebaut aus der Einheitsmatrix I_2 und einer weiteren Matrix, die wir mit X bezeichnen wollen. In einem nächsten Schritt bilden wir eine neue Matrix A'', indem wir $-X$ transponieren und I_4 anhängen. Die Spaltenbezeichnungen sollen davon unberührt bleiben. Die Notwendigkeit, I_4 zu wählen, ergibt sich daraus, dass die transponierte Matrix $-X^T$ nun 4 Zeilen besitzt, wohingegen X nur zwei Zeilen besaß. $A'' = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Man bilde eine neue Matrix A'', indem man von $-X$ die transponierte Matrix $-X^T$ bildet (es handelt sich nun um eine $(n - r) \times r$-Matrix) und die I_{n-r}-Einheitsmatrix anhängt. Es gilt also: $A'' = (-X^T I_{n-r})$. Dh., die Anzahl an Spaltenvektoren ändert sich nicht.
Die Basen des Vektormatroids $M[A'']$ sind ident mit jenen des dualen Matroids $M^*[A]$ (vgl. $\mathcal{B}^*$ auf der Vorderseite).	Die Basen des Vektormatroids $M[A'']$ sind ident mit jenen des dualen Matroids $M^*[A]$.

Lemma 31 *Jedes $\mathbb{K}$ -darstellbare Vektormatroid M besitzt ein duales Vektormatroid M^* , das ebenfalls $\mathbb{K}$ -darstellbar ist.* $\square$

Die Konstruktion der Matrix A'' aus Tabelle 4.2 wollen wir an dieser Stelle noch nicht beiseite lassen, sondern noch auf einen weiteren interessanten Aspekt aufmerksam machen. Die Zeilen einer $r \times n$ -Matrix A' (der Leser kann sich die Matrix A' aus Tabelle 4.2 vorstellen) mit Rang r , deren Einträge dem Körper $\mathbb{K}$ entstammen, bilden nämlich einen Untervektorraum U von $\mathbb{K}^n$. Die Zeilen einer $(n - r) \times n$ -Matrix A'' (der Leser kann sich die Matrix A'' aus Tabelle 4.2 vorstellen) bilden ebenfalls einen Untervektorraum V von $\mathbb{K}^n$. Das besondere ist, dass die Vektorräume U und V orthogonale Komplemente voneinander sind: Das bedeutet, dass jeder Vektor in U orthogonal zu jedem Vektor in V steht. Der skizzierte Gedankengang wird in Tabelle 4.3 auf der nächsten Seite ausführlich dargelegt und dessen Gültigkeit bewiesen.

Der Begriff der Dualität in der Matroidtheorie ist somit um einen weiteren Aspekt reicher. Dualität beschreibt im Bezug auf die Graphentheorie verallgemeinert das Erzeugen dualer Graphen und (darüber hinaus) das Auffinden minimaler Schnitte. Im Bezug auf die lineare Algebra verallgemeinert Dualität den Begriff der Orthogonalität. Es ist dies ein weiterer Beweis für die faszinierenden und überraschenden Verknüpfungen, die die Matroidtheorie zwischen Graphentheorie und linearer Algebra schafft.

Am Ende des Kapitels soll, wie eingangs angedeutet, noch die Frage beantwortet werden, ob jedes Matroid $\mathbb{K}$ -darstellbar ist. Um die entsprechende Argumentation führen zu können, bedarf es noch einer Erklärung des Konzeptes „geometrischer Veranschaulichung“, das Oxley in seinem Buch ausführlicher beschreibt, das hier aber nur in aller Kürze vorgestellt werden soll. Es geht dabei darum, Beziehungen zwischen den Elementen von $E(M)$ eines Matroids M mit Rang $r \leq 4$ graphisch zu veranschaulichen (nicht zu verwechseln mit Graphen!). Dabei gilt der Leitgedanke, dass jedes Element der Grundmenge $E(M)$ durch einen Punkt verkörpert wird. Durch die gegenseitige Lagebeziehung der Punkte untereinander oder durch die Verbindung mittels Linien/Ebenen wird angedeutet, welche Teilmenge von Elementen aus $E(M)$ unabhängig und welche abhängig ist, und zwar nach folgenden Regeln [27, S.34]:

- Ist eine einelementige Teilmenge von $E(M)$ abhängig, so ist der entsprechende Punkt eingerahmt.
- Ist eine zweielementige Teilmenge von $E(M)$ abhängig, so werden die entsprechenden Punkte dicht nebeneinander eingezeichnet.
- Ist eine dreielementige Teilmenge von $E(M)$ abhängig, so sind die entsprechenden Punkte durch eine Linie miteinander verbunden.
- Ist eine vierelementige Teilmenge von $E(M)$ abhängig, so liegen die entsprechenden Punkte in einer gemeinsamen Ebene.
- Alle fünfelementigen Teilmengen von $E(M)$ sind abhängig.

Tabelle 4.3: Orthogonalität und Dualität sind eng miteinander verknüpft

Spezielles Beispiel	Verallgemeinerung und Beweis (nach [27, S.82f.])
Betrachten wir die einem Matroid $M[A]$ zugrundeliegende (3×7)-Matrix A', die schon in die Form $A' = (I_r X)$ gebracht wurde. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 0 & 1 & 0 & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & 0 & 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \end{pmatrix}$ Betrachten wir weiters die dem Matroid $M^*[A]$ zugrundeliegende (4×7)-Matrix A'' mit der uns aus Tabelle 4.2 bereits vertrauten Form $A'' = (-X^T I_{n-r})$. $A'' = \begin{pmatrix} -d_{11} & -d_{21} & -d_{31} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -d_{12} & -d_{22} & -d_{32} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d_{13} & -d_{23} & -d_{33} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -d_{14} & -d_{24} & -d_{34} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Betrachte die einem Matroid $M[A]$ zugrundeliegende $(r \times n)$-Matrix A' (mit $r < n$) mit der Form $A' = (I_r X)$. $\left(\begin{array}{cccc cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{11} & \cdots & \cdots & d_{1(n-r)} \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & d_{r1} & \cdots & \cdots & d_{r(n-r)} \end{array} \right)$ Betrachte die dem Matroid $M^*[A]$ zugrundeliegende $(n-r) \times n$-Matrix A'' mit der Form $A'' = (-X^T I_{n-r})$. $\left(\begin{array}{cccc cccc} -d_{11} & \cdots & \cdots & -d_{r1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -d_{1(n-r)} & \cdots & \cdots & -d_{r(n-r)} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$
Wähle eine beliebige Zeile der Matrix A' und bilde das Skalarprodukt mit einer beliebigen Zeile der Matrix A''. Hier wird exemplarisch Zeile 1 der Matrix A' und Zeile 2 der Matrix A'' gewählt. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_{12} \\ -d_{22} \\ -d_{32} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -d_{12} + d_{12} = 0$ Das Produkt ist 0, unabhängig von der Wahl der Zeilenvektoren von A' und A''. Offenkundig steht also jeder Zeilenvektor aus A' orthogonal auf jeden Zeilenvektor aus A''. Der von den Zeilenvektoren aus A'' aufgespannte Untervektorraum V ist somit eine Teilmenge des orthogonalen Komplements von U.	Wähle eine beliebige Zeile g der Matrix A' und bilde das Skalarprodukt mit einer beliebigen Zeile h der Matrix A''. Wir wählen für die Einträge von I_r die Schreibweise a_{ij} mit $i, j \in 1, \dots, r$ und setzen $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, aber $a_{ij} = 1$ für $i = j$. $\begin{pmatrix} a_{g1} = 0 \\ \vdots \\ a_{gg} = 1 \\ \vdots \\ a_{gr} = 0 \\ d_{g1} \\ \vdots \\ d_{gh} \\ \vdots \\ d_{g(n-r)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_{1h} \\ \vdots \\ -d_{gh} \\ \vdots \\ -d_{rh} \\ a_{h1} = 0 \\ \vdots \\ a_{hh} = 1 \\ \vdots \\ a_{h(n-r)} = 0 \end{pmatrix} = -d_{gh} + d_{gh} = 0$ Das Produkt ist stets 0, und der von den Zeilenvektoren aus A'' aufgespannte Untervektorraum V somit eine Teilmenge des orthogonalen Komplements von U.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Spezielles Beispiel	Verallgemeinerung und Beweis (nach [27, S.82f.])
Wir wollen nun zeigen, dass jeder Vektor $\vec{x}$, der im orthogonalen Komplement von U enthalten ist, in V liegt, dass also V nicht nur eine Teilmenge des orthogonalen Komplements, sondern tatsächlich das orthogonale Komplement von U ist. Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ des orthogonalen Komplements bilden wir das Skalarprodukt mit allen Zeilen der Matrix A'. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{14} \end{pmatrix} = x_1 + x_4 d_{11} + x_5 d_{12} + x_6 d_{13} + x_7 d_{14} = 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \\ d_{24} \end{pmatrix} = x_2 + x_4 d_{21} + x_5 d_{22} + x_6 d_{23} + x_7 d_{24} = 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \\ d_{34} \end{pmatrix} = x_3 + x_4 d_{31} + x_5 d_{32} + x_6 d_{33} + x_7 d_{34} = 0$	Wir wollen nun zeigen, dass jeder Vektor $\vec{x}$, der im orthogonalen Komplement von U enthalten ist, in V liegt, dass also V nicht nur eine Teilmenge des orthogonalen Komplements, sondern tatsächlich das orthogonale Komplement von U ist. Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ des orthogonalen Komplements bilden wir das Skalarprodukt mit allen Zeilen der Matrix A'. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{11} \\ \vdots \\ d_{1(n-r)} \end{pmatrix} = x_1 + x_{r+1} d_{11} + \dots + x_n d_{1(n-r)} = 0$... $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ d_{r1} \\ \vdots \\ d_{r(n-r)} \end{pmatrix} = x_r + x_{r+1} d_{r1} + \dots + x_n d_{r(n-r)} = 0$
Für x_1, x_2 und x_3 folgen aus den obigen Gleichungen folgende Wertigkeiten: $x_1 = -x_4 \cdot d_{11} - x_5 \cdot d_{12} - x_6 \cdot d_{13} - x_7 \cdot d_{14}$ $x_2 = -x_4 \cdot d_{21} - x_5 \cdot d_{22} - x_6 \cdot d_{23} - x_7 \cdot d_{24}$ $x_3 = -x_4 \cdot d_{31} - x_5 \cdot d_{32} - x_6 \cdot d_{33} - x_7 \cdot d_{34}$ Der Vektor $\vec{x}$ lässt sich daher als Linearkombination wie folgt schreiben: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -d_{11} \\ -d_{21} \\ -d_{31} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -d_{12} \\ -d_{22} \\ -d_{32} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \cdot \begin{pmatrix} -d_{13} \\ -d_{23} \\ -d_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_7 \cdot \begin{pmatrix} -d_{14} \\ -d_{24} \\ -d_{34} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	Für $x_1, \dots, x_r$ folgen aus den obigen Gleichungen folgende Wertigkeiten: $x_1 = -x_{r+1} \cdot d_{11} - x_{r+2} \cdot d_{12} - \dots - x_n \cdot d_{1(n-r)}$... $x_r = -x_{r+1} \cdot d_{r1} - x_{r+2} \cdot d_{r2} - \dots - x_n \cdot d_{r(n-r)}$ Der Vektor $\vec{x}$ lässt sich daher als Linearkombination wie folgt schreiben: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \cdot \begin{pmatrix} -d_{11} \\ \vdots \\ -d_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} -d_{1(n-r)} \\ \vdots \\ -d_{r(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
Die Vektoren der rechten Seite sind genau die Zeilenvektoren der Matrix A''. Offenkundig kann jeder Vektor $\vec{x}$ des orthogonalen Komplements als Linearkombination von Zeilenvektoren von A'' geschrieben werden. Es ist somit offenkundig, dass V nicht nur Teilmenge des orthogonalen Komplements, sondern das orthogonale Komplement selbst ist.	Die Vektoren der rechten Seite sind genau die Zeilenvektoren der Matrix A''. Offenkundig kann jeder Vektor $\vec{x}$ des orthogonalen Komplements als Linearkombination von Zeilenvektoren von A'' geschrieben werden. Es ist somit offenkundig, dass V nicht nur Teilmenge des orthogonalen Komplements, sondern das orthogonale Komplement selbst ist. $\square$

Da nicht jede Darstellung aus Punkten und Linien, die den obigen Anforderungen genügt, automatisch eine geometrische Veranschaulichung eines Matroids ist (vgl. „Eschermatroid“ [27, S.34f.]), bedarf es für Darstellungen im $\mathbb{R}^3$ einiger weiterer Vorgaben [27, S.37f.].

- Jede Linie beinhaltet zumindest zwei Punkte, und zwei Punkte liegen auf einer Linie.
- Jede Ebene beinhaltet zumindest drei nicht-kolineare Punkte, und drei nicht-kolineare Punkte liegen auf einer Ebene.
- Zwei unterschiedliche Ebenen, die sich in mehr als zwei Punkten schneiden, schneiden sich in einer Linie.
- Zwei unterschiedliche Linien schneiden sich höchstens in einem Punkt und liegen auf einer gemeinsamen Ebene.
- Eine Linie, die nicht auf einer Ebene liegt, schneidet diese höchstens in einem Punkt.

Beispiel 32 Die nachfolgende Graphik erfüllt alle zuvor aufgelisteten Erfordernisse einer geometrischen Veranschaulichung eines Matroids und ist daher als solche zu werten. Das dargestellte Matroid wird als „Vámos-Matroid“ V_8 bezeichnet. Um dem Leser die Möglichkeit zu geben, das Verständnis des Konzeptes geometrischer Veranschaulichung zu überprüfen, werden hier die Mengen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ausführlich angeschrieben.

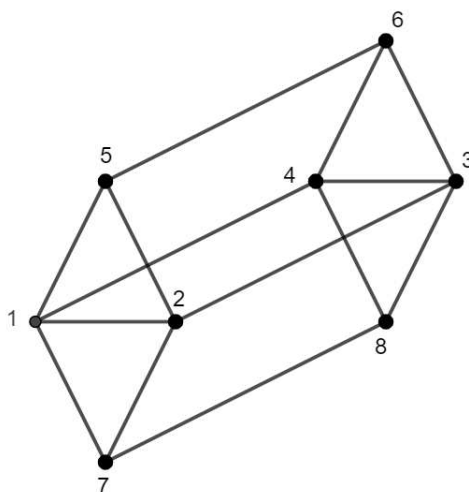


Abbildung 4.4: Geometrische Veranschaulichung des Vámos-Matroids V_8

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{ & \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 7\}, \{1, 2, 3, 8\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 7\}, \\ & \{1, 2, 4, 8\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 8\}, \{1, 2, 6, 7\}, \{1, 2, 6, 8\}, \{1, 2, 7, 8\}, \{1, 3, 4, 5\}, \\ & \{1, 3, 4, 6\}, \{1, 3, 4, 7\}, \{1, 3, 4, 8\}, \{1, 3, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 8\}, \{1, 3, 6, 7\}, \\ & \{1, 3, 6, 8\}, \{1, 3, 7, 8\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 8\}, \{1, 4, 6, 7\}, \{1, 4, 6, 8\}, \\ & \{1, 5, 6, 7\}, \{1, 5, 6, 8\}, \{1, 5, 7, 8\}, \{1, 6, 7, 8\} \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = \{ \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 7\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 7, 8\}, \{2, 3, 5, 6\}, \{2, 3, 7, 8\}, \{3, 4, 6, 8\} \}$$

Theorem 33 *Zum Vámos-Matroid V_8 existiert keine Matrix, es ist also nicht $\mathbb{K}$ -darstellbar.*

Beweis Theorem 33, nach [27, S.84f.]:

Eine Matrix A , die V_8 repräsentiert, muss, da die geometrische Veranschaulichung von V_8 acht Punkte beinhaltet, acht Spalten besitzen. Da alle Basen von V_8 Mächtigkeit 4 haben, besitzt das Matroid den Rang $r = 4$. Nach dem in Tabelle 4.2 beschriebenen Bildungsgesetz für A' darf die Matrix A mit vier Zeilen angenommen werden. Wir suchen also nach einer (4×8) -Matrix A . Die 1. Spalte ist mit Punkt 1 der geometrischen Veranschaulichung zu identifizieren, die 2. Spalte mit Punkt 2, usw. Nach dieser Konstruktion ist der Rang einer Teilmenge von $E(V_8)$ ident mit der Dimension des Vektorraums, den die entsprechenden Spalten von A aufspannen. Im Nachfolgenden wollen wir für eine Teilmenge $X \subseteq E(V_8)$ den aufgespannten Vektorraum mit $W(X)$ und die Dimension mit $\dim[W(X)]$ bezeichnen. Für die Beweisführung halten wir noch fest, dass folgende Gleichheit gilt:

$$\dim[W(X_1) \cap W(X_2)] = \dim[W(X_1)] + \dim[W(X_2)] - \dim[W(X_1) + W(X_2)]$$

Für die nun folgenden Überlegungen verwenden wir die soeben präsentierte Formel und die geometrische Veranschaulichung von V_8 , die der Leser fürs Nachvollziehen des Beweises vor Augen haben sollte. Zunächst gilt:

$$\dim[W(5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4)] = \dim[W(5, 6)] + \dim[W(1, 2, 3, 4)] - \dim[W(5, 6) + W(1, 2, 3, 4)] = 2 + 3 - 4 = 1$$

Offensichtlich gibt es also einen Vektor $\vec{v}$, der den Vektorraum $W(5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4)$ aufspannt, also $cl(\vec{v}) = W(5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4)$. Für die geometrische Veranschaulichung bedeutet das, dass ein Punkt P , der den Vektor $\vec{v}$ repräsentiert, der Schnittpunkt jener Ebene, die $\{1, 2, 3, 4\}$ beinhaltet, mit jener Linie, die $\{5, 6\}$ beinhaltet, sein muss. Gehen wir nun einen Schritt weiter.

$$\dim[W(1, 4, 5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4)] = \dim[W(1, 4, 5, 6)] + \dim[W(1, 2, 3, 4)] - \dim[W(1, 4, 5, 6) + W(1, 2, 3, 4)] = 3 + 3 - 4 = 2$$

Da $W(1, 4)$ gemäß der geometrischen Veranschaulichung ein zweidimensionaler Untervektorraum von $W(1, 4, 5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4)$ ist, gilt offenbar:

$$W(1, 4) = W(1, 4, 5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4) \supseteq W(5, 6) \cap W(1, 2, 3, 4) = cl(\vec{v})$$

Mit Blick auf die geometrische Veranschaulichung gilt aus Symmetriegründen auch $cl(v) \subseteq W(2, 3)$. Für die geometrische Veranschaulichung bedeutet das, dass ein Punkt P , der den Vektor $\vec{v}$ repräsentiert, auf derselben Linie wie $\{1, 4\}$ und auf derselben Linie wie $\{2, 3\}$ liegen muss. Gehen wir nun einen Schritt weiter.

$$\dim[W(1, 4) \cap W(2, 3)] = \dim[W(1, 4)] + \dim[W(2, 3)] - \dim[W(1, 4) + W(2, 3)] = 2 + 2 - 3 = 1$$

Da $cl(\vec{v})$ ein Untervektorraum von $W(1, 4) \cap W(2, 3)$ ist, muss $cl(\vec{v}) = W(1, 4) \cap W(2, 3)$ gelten. Für die geometrische Veranschaulichung bedeutet das, dass ein Punkt P , der den Vektor $\vec{v}$ repräsentiert, der Schnittpunkt jener Linien ist, auf denen $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ und $\{5, 6\}$ liegen. Darüber hinaus muss, mit Blick auf die Symmetrie der geometrischen Veranschaulichung,

auch die Linie mit den Punkten $\{7, 8\}$ den Punkt P beinhalten. Wir ergänzen die Abbildung 4.4 um den $\vec{v}$ darstellenden Punkt P . Das Ergebnis ist in Abbildung 4.5 zu sehen.

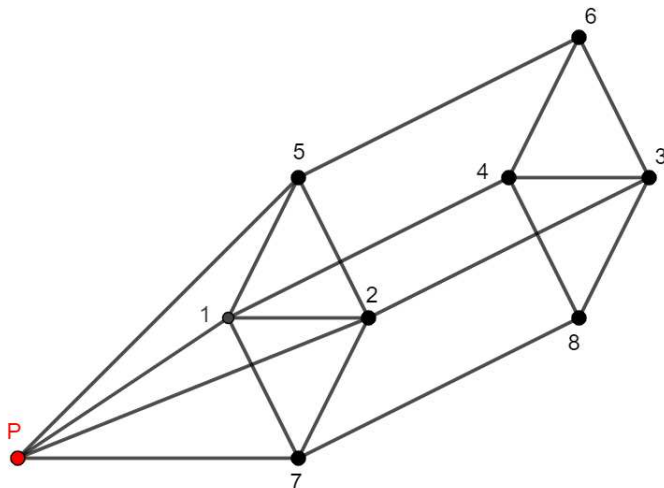


Abbildung 4.5: Geometrische Veranschaulichung des Vámos-Matroids V_8 mitsamt P

Da P sowohl auf der Linie mit $\{5, 6\}$ als auch auf der Linie mit $\{7, 8\}$ liegt, muss $\{5, 6, 7, 8\}$ eine Ebene bilden und daher $r(5, 6, 7, 8) \leq 3$ bzw. für die Matrix $\dim[W(5, 6, 7, 8)] \leq 3$ gelten. Mit Blick auf die in Beispiel 32 aufgelisteten Elemente von $\mathcal{B}$ sehen wir aber, dass auch $\{5, 6, 7, 8\}$ ein Element von $\mathcal{B}$ ist, also $r(5, 6, 7, 8) = 4$ gilt. Aus dem Widerspruch folgt, dass V_8 nicht $\mathbb{K}$ -darstellbar ist. $\square$

Abschlussbemerkung: Mit dem Beweis von Theorem 33 haben wir nun auch die letzte der am Ende von Kapitel 2.1.2 gestellten Fragen beantwortet.

d) **Ist jedes Matroid $\mathbb{K}$ -darstellbar?** Nein, das Vámos-Matroid V_8 ist nicht $\mathbb{K}$ -darstellbar.

Es würden sich noch viele Fragen zum Zusammenhang der Matroide untereinander stellen lassen, die aber an dieser Stelle nicht mehr weiter nachverfolgt werden. Eine interessante Übersicht findet der Leser bei [27, S.211].

5 Abzählbarkeiten und Anwendungen von Matroiden

Zahlreiche Autoren (wie z.B. [9], [13], [16], [20], [24], [29], [35]) haben sich mit der Frage auseinandergesetzt, ob bei gewissen Vorgaben die Anzahl an Matroiden, die diesen Vorgaben genügen, bestimmt oder zumindest abgeschätzt werden kann. Aus dieser Auseinandersetzung sind im Laufe der Jahrzehnte zahlreiche Sätze und nicht minder viele Vermutungen erwachsen. Die vorgestellte Auswahl ist keineswegs vollständig, sondern dient dazu, einen Einblick in das breite und interessante Feld der Abzählbarkeiten von Matroiden zu geben.

5.1 Überlegungen zur Abzählbarkeit von Matroiden

Wir wollen den Inhalt dieses Abschnitts mit einem Beispiel motivieren, das [27, S.12] in seiner Publikation schon früh zur Sprache bringt und das auf anschauliche Weise die Frage nach der Anzahl an Matroiden legitimiert.

Begeben wir uns auf die Suche nach der Anzahl nicht-isomorpher¹ Matroide mit Grundmenge E und $|E| = n$. Es lässt sich leicht überprüfen, dass alle Matroide mit Grundmenge E und $|E| \leq 3$ graphisch sind ([27, S.13] liefert eine vollständige Übersicht). Für ein Matroid mit $|E| = 0$ gibt es genau **ein** Matroid und einen Graphen (ein Knoten, keine Kante). Für ein Matroid mit $|E| = 1$ gibt es **zwei** grundlegend verschiedene (nicht-isomorphe) Matroide: Jenes mit Rang $r = 0$ (Graph mit einem Knoten und einer Schlinge) oder Rang $r = 1$ (Graph mit zwei Knoten und einer diese verbindenden Kante). Für ein Matroid mit $|E| = 2$ gibt es **vier** grundlegend verschiedene Matroide: Jenes mit Rang $r = 0$ (Graph mit einem Knoten und zwei Schlingen), zwei mit Rang $r = 1$ (Graph mit zwei Knoten und zwei Kanten, die beide die zwei Knoten verbinden (also einer Parallelklasse) oder Graph mit zwei Knoten und einer Kante, die die zwei Knoten verbindet, sowie einer Schlinge) und eines mit Rang $r = 2$ (Graph mit drei Knoten und zwei Kanten, die einen gemeinsamen Knoten haben). Ohne ins Detail zu gehen, stellen wir fest, dass es für $|E| = 3$ **acht** nicht-isomorphe Matroide (also acht verschiedene Graphen) gibt. Es liegt aufgrund der Zahlenverhältnisse folgende Vermutung nahe:

Vermutung 1: Die Anzahl nicht-isomorpher Matroide für eine Grundmenge E mit $|E| = n$ beträgt 2^n .

¹Zwei Matroide $M(E, \mathcal{I})$ und $M'(E', \mathcal{I}')$ sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : E \rightarrow E'$ gibt, sodass für alle $X \subseteq E(M)$ gilt, dass $f(X)$ genau dann unabhängig in M' ist, wenn X unabhängig in M ist.

Dass diese Anfangsvermutung nicht stimmt, kann relativ schnell überprüft werden, sind doch für $|E| = 4$ bereits **17** nicht-isomorphe Matroide zu finden und nicht, wie die Vermutung 1 nahelegt, $2^4 = 16$ nicht-isomorphe Matroide. Dennoch ist das Interesse an der Frage, wie und ob sich die Menge nicht-isomorpher Matroide bestimmter Kategorien ermitteln lässt, geweckt. Die Suche nach einer Formel, die die Mächtigkeit der Grundmenge zur Anzahl nicht-isomorpher Matroide in Bezug setzt, hat sich (mit Ausnahme eines Algorithmus' für $|E| \geq 9$) bisher als nicht erfolgreich erwiesen. Dennoch sind im Laufe der Jahrzehnte zahlreiche Abschätzungen und Erkenntnisse entstanden. Crapo und Rota [12] stellten die These auf, dass für die Anzahl z_n nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E und $|E| = n$ in etwa die Abschätzung $z_{n+1} \approx z_n^{\frac{3}{2}}$ gelten müsste. Knuth [20, 398f.] merkte an, dass mit Sicherheit $z_n \leq 2^{2^n}$ (woraus $\log_2 \log_2 z_n \leq n$ in nachstehender Gleichung folgt) gelten müsse (diese Abschätzung ergibt sich daraus, dass die Anzahl verschiedener Mengen wie $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, aus denen sich potenziell nicht-isomorphe Matroide ableiten lassen, nicht größer sein kann als die Mächtigkeit der Potenzmenge der Potenzmenge von E , also 2^{2^n}), und trug zudem in Verknüpfung mit Piff [29] zu einer Abschätzung für z_n mit einer unteren und einer oberen Grenze bei (der Ausdruck $O(\log_2 \log_2 n)$ in nachstehender Formel steht für eine Funktion, die in der Größenordnung von $\log_2 \log_2 n$ wächst):

$$n - \left(\frac{3}{2}\right)\log_2 n + O(\log_2 \log_2 n) \leq \log_2 \log_2 z_n \leq n - \log_2 n + O(\log_2 \log_2 n)$$

Bansal et al. [4] konnten vor einigen Jahren nachweisen, dass z_n näher an der unteren Grenze liegt. Mit der Arbeit von Blackburn et al. [9] gelang es mittels eines erarbeiteten Algorithmus', Anzahlen nicht-isomorpher einfacher Matroide² für die Bedingung $|E| \leq 8$ zu bestimmen. Weitere Autoren wussten dieses erfolgreiche Prinzip zu übernehmen und erweiterten die Erkenntnisse stückweise: Acketa [1] ergänzte die Auflistung auch für nicht-einfache Matroide mit $|E| \leq 8$ und Mayhew und Royle [24] schließlich auch für Matroide mit $|E| \leq 9$. Die Algorithmen von Blackburn et al. [9] und Mayhew und Royle [24] unterscheiden sich geringfügig, da zweiterer sich als effektiver erwiesen hat, wird er im Folgenden (stark verkürzt) skizziert.

5.1.1 Algorithmus zur Berechnung von Matroid-Anzahlen

(vgl. Mayhew und Royle [24], stark gekürzt) Eine Menge $X \subseteq E$, für deren Hüllenfunktion $cl(X) = X$ und für deren Rangfunktion $r(X \cup x) > r(X) \quad \forall x \in E - X$ gilt, wird als „Unterraum“ bezeichnet. Die namentliche Ähnlichkeit zu Untervektorräumen aus der linearen Algebra ist kein Zufall: Für ein Vektormatroid $M[A]$ entsprechen die Unterräume des Matroids den Untervektorräumen, die von den entsprechenden Spaltenvektoren der Matrix A aufgespannt werden [24, S.3]. Nun lässt sich, wie etwa bei Oxley [27, S.20] oder Mayhew und Royle [24, S.4] dargelegt wird, von einem Matroid M mit Grundmenge E ein neues Matroid $M - e$ ableiten, wenn der Grundmenge E das Element e entnommen wird. Betrachtet man die Menge $\mathcal{U}(M)$ der Unterräume von M und die Menge $\mathcal{U}(M - e)$ der Unterräume von $M - e$, so gilt folgender Zusammenhang:

²Ein Matroid heißt einfach, wenn jede Teilmenge $X \subseteq E$ mit $|X| \leq 2$ unabhängig ist.

$$\mathcal{U}(M - e) = \{U - e : U \in \mathcal{U}(M)\}$$

Besinnen wir uns nun auf die Intention, die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E und $|E| \leq 9$ bestimmen zu wollen. Kennt man die Menge nicht-isomorpher Matroide für $|E| = k$, so betrachte man für eines dieser Matroide M die Menge $\mathcal{U}$ an Unterräumen. Nach obigem Zusammenhang zwischen $\mathcal{U}(M - e)$ und $\mathcal{U}(M)$ muss für ein Matroid $N = M \cup e$, das sich aus dem Matroid M ergibt, indem die Grundmenge E um ein Element e erweitert wird, gelten, dass jeder Unterraum von N entweder U oder $U \cup e$ mit $U \in \mathcal{F}(M)$ ist. Die Menge der Unterräume eines Matroids legt das dazugehörige Matroid eindeutig fest, wodurch nachfolgender Prozess legitimiert wird:

Man suche für Grundmenge E mit $|E| = k$ alle nicht-isomorphen Matroide mitsamt ihrer Menge an Unterräumen. Man betrachte nun die Menge der Unterräume eines dieser Matroide M und bilde zu allen Matroiden $M \cup e$ mittels oben geschilderter Beziehungen die dazugehörige Mengen an Unterräumen. Diesen Prozess führt man für sämtliche nicht-isomorphe Matroide mit Grundmenge E ($|E| = k$) durch. Man erhält somit gewiss alle Matroide mit Grundmenge $E \cup e$ und Mächtigkeit $|E| = k + 1$. Eventuell entstehen bei dem Prozess aber zueinander isomorphe Matroide, die noch aussortiert werden müssen. Ist auch dieser Aussortierungsprozess abgeschlossen (dessen Vorgang das Konzept von „Unterraumgittern“ benötigt und hier nicht näher ausgeführt wird, bei Interesse kann für eine Einführung bei Oxley [27, S.48-58] nachgelesen werden), hat man alle zueinander nicht-isomorphen Sammlungen von Unterräumen zur Grundmenge $E \cup e$ ($|E| = k + 1$) gefunden. Die Anzahl derselben entspricht, da die Unterräume die dazugehörigen Matroide eindeutig festlegen, der Anzahl nicht-isomorpher Matroide zur Grundmenge $E \cup e$ ($|E| = k + 1$). Mittels Rekursion lässt sich dieser Prozess technikunterstützt wiederholen und die Anzahl nicht-isomorpher Matroide für eine Grundmenge E bis $|E| \leq 9$ erschließen. Dass dieser Algorithmus für $|E| \geq 10$ keine Lösung mehr liefert, liegt an der zu groß werdenden Anzahl nicht-isomorpher Matroide, die Mayhew und Royle alleine für die nicht-isomorphen „deckenden“ Matroide³ mit Rang $r = 5$ und $|E| = 10$ mit ca. $2.65 \cdot 10^{12}$ abschätzen [24, S.21]. In Tabelle 5.1 werden die computerermittelten Ergebnisse des eben geschilderten Algorithmus’ präsentiert (vgl. [24, S.8]).

5.1.2 Weitere Resultate

Tabelle 5.1 lässt sich, wie Oxley [27, S.594] übersichtlich dargelegt hat, verfeinert für spezifische Matroidarten (einfache Matroide, deckende Matroide, binäre Matroide⁴) darstellen. Dukes [16] hat zwischen diesen Matroidarten zahlreiche Beziehungen in Bezug auf ihre Mächtigkeiten dargelegt. Ausgehend von der Betrachtung der Tabelle 5.1 lassen sich einige Er-

³Deckende Matroide sind Matroide mit Rang r , deren Menge an Kreisen $\mathcal{C}$ ausnahmslos Elemente der Mächtigkeit r oder $r + 1$ enthält

⁴Binäre Matroide sind $\mathbb{K}$ -darstellbar für $\mathbb{K} = GF(2) = (0, 1)$ mit $0 + 0 := 0, 0 + 1 := 1, 1 + 0 := 1, 1 + 1 := 0$ und $0 \cdot 0 := 0, 0 \cdot 1 := 0, 1 \cdot 0 := 0, 1 \cdot 1 := 1$

Tabelle 5.1: Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E und $0 \leq |E| \leq 9$

$ E \backslash$ Rang r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2			1	3	7	13	23	37	58	87
3				1	4	13	38	108	325	1 275
4					1	5	23	108	940	190 214
5						1	6	37	325	190 214
6							1	7	58	1 275
7								1	8	87
8									1	9
9										1
Σ	1	2	4	8	17	38	98	306	1724	383 172

kenntnisse und Mutmaßungen motivieren, die in der Literatur der letzten Jahrzehnte diskutiert wurden und teils bisweilen noch werden. Zunächst fällt dem aufmerksamen Betrachter mit Blick auf die spaltenweise betrachtete Tabelle 5.1 womöglich eine gewisse Symmetrie der Einträge auf. Diese lässt sich, bezeichnen wir mit $z_n(r)$ die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E ($|E| = n$) und Rang r , wie folgt beschreiben:

Vermutung 2: Die Folge $z_n(r)$ für $1 \leq r \leq n$ ist unimodal und hat ihr Maximum bei $r = \lfloor n/2 \rfloor$. (Welsh [35])

Unimodale Folgen besitzen ein Maximum, bis zu dem die Folgenglieder streng monoton wachsen und nach dem sie streng monoton fallen. Mayhew und Royle [24, S.8] merken an, dass die in Tabelle 5.1 auftretende Unimodalität der Einträge sich durch Dualität ergibt. In Ermangelung der Kenntnis über die Anzahl an Matroiden für $|E| \geq 10$ kann Vermutung 2 nicht bestätigt werden, obgleich sie naheliegend erscheint. Dukes [16, S.4] weitet Vermutung 2 auch auf nicht-isomorphe einfache Matroide aus.

Zahlreiche weitere Vermutungen zur Matroidtheorie bauen auf dem Prinzip der Unimodalität auf, Oxley [27, S.585-588] widmet im Kapitel „Unsolved problems“ seines Buches den „unimodal conjectures“ sogar einen eigenen Abschnitt. Ehe wir in Abschnitt 5.1.3 eine aktuelle Sternstunde der Beschäftigung mit unimodalen Vermutungen im Bereich der Matroidtheorie thematisieren, seien einige weitere interessante und noch ungelöste unimodale Vermutungen vorgestellt:

Vermutung 3: Sei i_k die Anzahl an k -elementigen unabhängigen Mengen eines Matroids. Die Folge $(i_k : 0 \leq k \leq r(M))$ ist unimodal. (Welsh [34])

Vermutung 4: Sei W_k die Anzahl der Unterräume vom Rang k eines Matroids. Die Folge $(W_k : 1 \leq k \leq r(M) - 1)$ ist unimodal. (Rota [30])

Zahlreiche Autoren verweisen darauf, dass jede Folge unimodal ist, wenn sie logarithmisch konkav (dh. die Verkettung der Folge mit dem Logarithmus ist als Funktionsgraph vorgestellt negativ gekrümmt) ist. Für die Folgenglieder einer Folge $(f_i : 1 \leq i \leq n)$ bedeutet das $f_k^2 \geq f_{k-1}f_{k+1} \forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Für Vermutung 4 ergibt sich daraus folgende alternative Schreibweise:

Vermutung 4a: Sei W_k die Anzahl der Unterräume vom Rang k eines Matroids. Dann gilt $W_k^2 \geq \frac{k+1}{k} W_{k-1} W_{k+1}$. (Mason [23])

Besonderes Interesse hat Vermutung 4a für $k = 2$ hervorgerufen, da es hier auch eine geometrische Interpretation gibt:

Vermutung 4b: Im euklidischen dreidimensionalen Raum, in dem W_1 Punkte die Verbindung von W_2 Linien und W_3 Ebenen erzeugt, gilt $W_2^2 \geq \frac{3}{2} W_1 W_3$.

Dukes [16, S.7-9] konnte nachweisen, dass Vermutung 4b nur dann gelten kann, wenn sie für eine Sonderklasse von Matroiden vom Rang $r = 4$ gilt.

Wenden wir uns nun wieder der Tabelle 5.1 zu, deren Einträge in der letzten Zeile die These stützen, wonach $z_{m+n} \geq z_m + z_n (m, n \in \mathbb{N})$ gilt. Für über 30 Jahre (Crapo und Schmitt [13, S.1061]) nicht beweisbar, konnte erstmals Lemos [22] 2004, ein Jahr später dann auch Crapo und Schmitt [13] den Beweis führen:

Theorem 34 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bezeichne z_k die Anzahl nicht-isomorpher Matroide mit Grundmenge E ($|E| = k$). Dann gilt: $z_{m+n} \geq z_m + z_n$. $\square$

Im Zuge des Beweises von Crapo und Schmitt [13] wird mit dem freien Produkt zweier Matroide eine „in der Matroidtheorie relativ neue Operation“ ([27, S.282]) eingeführt, mittels derer ein neues Matroid aus bekannten Matroiden erzeugt werden kann. Das Feld der Erzeugung neuer Matroide ist in dieser Arbeit detaillierter nur in Form der Dualität zur Sprache gekommen, es ist aber ein lohnenswerter Aspekt der Matroidtheorie, im Zuge dessen auch Begriffe wie Minoren eines Matroids (siehe Definition 35) oder Notationen wie $M - e$ und $M \cup e$ (siehe Abschnitt 5.1.1) genauer untersucht werden. Die Beweise von Lemos [22] und Crapo und Schmitt [13] für Theorem 34 füllen jeweils mehrere Seiten und werden an dieser Stelle nicht geführt.

Am Ende dieses Abschnitts werden ausgewählte weitere Vermutungen präsentiert, die Oxley [27] in seinem Buch gesammelt hat und deren Bedeutung sich dem Leser nach einigen kurzen vorausgeschickten Ergänzungen mithilfe der bisher in dieser Arbeit thematisierten Aspekte der Matroidtheorie erschließen sollte.

Minoren eines Matroids, vgl. Oxley [28, S.4-6]: Das Konzept von Minoren ist in der Graphentheorie wohlbekannt: Ein Minor G' zu einem Graphen G entsteht, indem man eine Kante aus G löscht, kontrahiert (die zwei mit der Kante inzidenten Knoten werden zu

einem Knoten zusammengezogen) oder isolierte Knoten löscht. Dieses Prinzip wollen wir auf Matroide übertragen. Da im Falle eines graphischen Matroids lediglich die Kanten-, nicht aber die Knotenmenge betrachtet wird, brauchen wir die Operation des Löschens isolierter Knoten nicht weiter zu berücksichtigen.

1. *Löschen eines Elements:* Sei M ein Matroid $(E, \mathcal{C})$ und sei $x \in E$. Das Löschen von x von M erzeugt das Matroid $M - x = (E - x, \mathcal{C}')$ mit $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C}(M) : x \notin C\}$.
2. *Kontraktion eines Elements:* Sei M ein Matroid $(E, \mathcal{C})$ und sei $x \in E$. Die Kontraktion von x von M erzeugt das Matroid $M/x = (E - x, \mathcal{C}')$, wobei $\mathcal{C}'$ aus den minimalen Mitgliedern der Menge $\{C - x : C \in \mathcal{C}(M)\}$ besteht. Ist x ein Kreis, gilt $M - x = M/x$.

Definition 35 *Ein Minor eines Matroids M ist ein Matroid, das aus M mittels einer Verkettung von Löschungen und Kontraktionen erzeugt werden kann. Eine ausführlichere Betrachtung von Minoren von Matroiden findet sich bei Oxley [27, S.100-117].*

Minoren in der Graphentheorie dienen nicht zuletzt dazu, zu beurteilen, ob ein Graph planar ist oder nicht. So ist etwa in der Graphentheorie bekannt, dass ein Graph, der als Minor $K_{3,3}$ (Abbildung 4.3) besitzt, nicht planar sein kann. Ähnliche Schlussfolgerungen lassen sich in der Matroidtheorie aufstellen, wie etwa, dass ein Matroid mit Minor $U_{2,4}$ (Abschnitt 3.1) nicht graphisch, cographisch oder über jedem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ -darstellbar sein kann (Oxley [27, S.639]).

„Asymptotisch fast“: Wir übernehmen diesen Begriff von Oxley [27, S.595], der ihn zur Formulierung der Vermutungen 5-8 gebraucht, und beschränken uns auf eine für unsere Zwecke ausreichende, verkürzte Definition. Sei P eine untersuchte Eigenschaft und $P(n)$ die Anzahl nicht-isomorpher Matroide, die diese Eigenschaft erfüllen. Dann spricht man davon, dass „asymptotisch fast jedes Matroid die Eigenschaft P besitzt“, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{z_n} = 1$ gilt.

Vermutung 5: *Asymptotisch ist fast jedes Matroid deckend.*

Vermutung 6: *Sei N ein deckendes Matroid, dessen duales Matroid N^* ebenfalls deckend ist. Asymptotisch besitzt fast jedes Matroid einen solchen N -Minor.*

Vermutung 7: *Asymptotisch hat fast jedes Matroid V_8 als Minor.*

Da aus Theorem 33 bekannt ist, dass V_8 nicht $\mathbb{K}$ -darstellbar ist, folgt automatisch Vermutung 8:

Vermutung 8: *Asymptotisch ist fast jedes Matroid nicht $\mathbb{K}$ -darstellbar.*

Vermutung 8 macht bewusst, wie beschränkt das Wissen zur Matroidtheorie in vielen Teilen noch ist, haben wir uns doch in dieser Arbeit etwa beinahe ausschließlich mit $\mathbb{K}$ -darstellbaren Matroiden und dadurch offenbar mit einem nur verschwindend kleinen Prozentsatz aller Matroide beschäftigt.

5.1.3 Die Heron-Rota-Welsh-Vermutung

Die Matroidtheorie birgt, wie anhand der unbewiesenen Vermutungen sichtbar wird, also noch viele offene Fragen und Forschungspotenzial. Dass die Erforschung dieser offenen Fragen einen (gewichtigen) Platz in der modernen Mathematik hat und Fortschritte entsprechend honoriert werden, zeigt die Verleihung der Fields-Medaille 2022 an June Huh, dem es gemeinsam mit Karim Adiprasito und Erik Katz gelungen war, die Heron-Rota-Welsh-Vermutung für Matroide zu beweisen. [2] Für die Formulierung der Vermutung benötigen wir zunächst eine Definition.

Definition 36 *Charakteristisches Polynom eines Matroids M , nach Oxley [27, S.587]* Für ein Matroid M mit Grundmenge E und einer Zahl z ist das charakteristische Polynom $p(M; z)$ definiert als:

$$p(M; z) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} z^{r(M) - r(X)}$$

Mittels der Whitney-Zahlen 1.Ordnung $w_0, w_1, \dots, w_{r(M)}$ (Erklärung folgt) lässt sich das charakteristische Polynom auch folgendermaßen ausdrücken:

$$p(M; z) = \sum_{k=0}^{r(M)} w_k z^{r(M)-k}$$

Besitzen in einem Matroid $M(E, \mathcal{I})$ die Mengen $X_1, \dots, X_m \subseteq E$ den Rang k , so ist w_k also definiert als:

$$w_k = (-1)^{|X_1|} + (-1)^{|X_2|} + \dots + (-1)^{|X_m|}$$

Ausgehend von Definition 36 lässt sich die Heron-Rota-Welsh-Vermutung formulieren.

Theorem 37 *Heron-Rota-Welsh-Vermutung, Formulierung nach Oxley [27, S.588]* Für ein Matroid M ist die Folge $(w_k : 0 \leq k \leq r(M))$ logarithmisch konkav, es gilt also:

$$w_k^2 \geq w_{k-1} w_{k+1} \forall k \in \{1, 2, \dots, r(M) - 1\}$$

Insbesondere gilt dann, dass die Folge $(w_k : 0 \leq k \leq r(M))$ unimodal ist. □

Dass die Heron-Rota-Welsh-Vermutung erst 50 Jahre nach ihrer Formulierung gelöst werden konnte und somit eine Vermutung, die „withstood many advances in matroid theory“ [2, S.382], macht den Wert der Leistung von Adiprasito, Huh und Katz umso deutlicher. Dass für den Beweis Resultate der Hodge-Theorie verwendet und erst dadurch davor nicht bekannte Verknüpfungen zwischen Hodge-Theorie und Matroidtheorie aufgezeigt wurden, macht deutlich, wie viel Raum für neue Erkenntnisse und fruchtbaren Boden für genauere Erforschung die Matroidtheorie noch bereithält und wie viel noch unbekannt ist. Oxley formuliert diesen Umstand in Anbetracht der zahlreichen unbewiesenen Vermutungen so: „These interesting conjectures indicate how little is known about the properties of almost all matroids.“ [27, S.595]

5.2 Greedy-Algorithmen und ihr Bezug zur Matroidtheorie

Im Bereich kombinatorischer Optimierung zählen sogenannte „Greedy-Algorithmen“, mithilfe derer sich optimale Lösungen finden lassen, zu einem mächtigen und weitverbreiteten Instrument. Der Kruskal-Algorithmus [21] stellt einen solchen Algorithmus dar, mittels dessen sich innerhalb eines gewichteten Graphens⁵ Spannbäume optimalen - je nach Kontext minimalen oder maximalen - Gewichts finden lassen. Der vielfache aufgezeigte Konnex zwischen Graphentheorie und Matroidtheorie wirft die Frage auf, welche Rolle Greedy-Algorithmen in der Matroidtheorie spielen. Die Antwort darauf, deren Inhalt in Theorem 41 ausformuliert ist, ist einigermaßen verblüffend und eröffnet zugleich einen Blick in konkrete und anschauliche Anwendungen der Matroidtheorie. Wir beginnen dieses Kapitel mit der Vorstellung des Kruskal-Algorithmus' zur Erzeugung von Spannbäumen maximalen Gewichts in Graphen (siehe Definition 38).

⁵Bei einem gewichteten Graphen werden den einzelnen Kanten Zahlenwerte zugewiesen, die je nach Kontext für eine Wegstrecke, einen Preis, eine Zeitdauer, ... stehen können. Je höher die zugewiesene Zahl, von einem desto größeren Gewicht der Kante spricht man.

Definition 38 (Kruskal-Algorithmus für Graphen) Um innerhalb eines gewichteten Graphen G mit n Kanten einen Spannbaum maximalen Gewichts zu finden, gehe man folgendermaßen vor (nach Neel und Neudauer [26, S.35]):

1. Definiere die Menge $B := \emptyset$.
2. Suche im Graphen G eine Kante maximalen Gewichts e_i mit $i = 1, \dots, n$.
Haben mehrere Kanten maximales Gewicht, wähle eine davon aus.
3. Falls $B \cup e_i$ keine Kreise beinhaltet, definiere $B := B \cup e_i$ neu und setze bei Schritt 2 fort.
Falls $B \cup e_i$ einen Kreis beinhaltet, verwirf e_i und wiederhole Schritt 2 mit der Kante e_j zweitgrößten Gewichts (mit $j = 1, \dots, n$ und $j \neq i$).

Der Algorithmus endet, wenn keine Kante mehr gewählt werden kann, ohne dass die Vereinigung der Kante mit B einen Kreis beinhalten würde. Das Resultat B ist dann die Kantenmenge eines Spannbaums maximalen Gewichts.

Ehe der Beweis für die Gültigkeit des Kruskal-Algorithmus geführt wird, wollen wir diesen in Definition 39 in die Sprache der Matroidtheorie übertragen und somit verallgemeinern.

Definition 39 (Kruskal-Algorithmus für Matroide, Verallgemeinerung von Def.38) Um innerhalb eines Matroids $M(E, \mathcal{I})$ mit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, wobei $e_1, \dots, e_n$ gewichtet sind, eine Basis maximalen Gewichts zu finden, gehe man folgendermaßen vor:

1. Definiere die Menge $B := \emptyset$.
2. Wähle aus E ein Element maximalen Gewichts e_i mit $i = 1, \dots, n$.
Haben mehrere Elemente maximales Gewicht, wähle eine davon aus.
3. Falls $B \cup e_i$ keine Kreise beinhaltet, definiere $B := B \cup e_i$ neu und setze bei Schritt 2 fort.
Falls $B \cup e_i$ einen Kreis beinhaltet, verwirf e_i und wiederhole Schritt 2 mit dem Element e_j zweitgrößten Gewichts (mit $i = 1, \dots, n$ und $j \neq i$).

Der Algorithmus endet, wenn kein Element mehr gewählt werden kann, ohne dass die Vereinigung des Elements mit B einen Kreis beinhalten würden. Das Resultat B ist dann eine Basis maximalen Gewichts.

Die Formulierungen in Definition 39 legen die Vermutung nahe, dass der Kruskal-Algorithmus keineswegs auf Graphen beschränkt ist, sondern auf jede Matroidart (auch nicht-graphische!) angewandt werden kann. Theorem 40 bestätigt diese Vermutung:

Theorem 40 Der Kruskal-Algorithmus aus Definition 39 liefert für ein Matroid $M(E, \mathcal{I})$ mit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, wobei $e_1, \dots, e_n$ gemäß einer Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ gewichtet sind, eine optimale Lösung in Form einer Basis maximalen Gewichts.

Beweis Theorem 40, nach Neel und Neudauer [26, S.36f.]: Die Konstruktion des Algorithmus' aus Definition 39 bewirkt in jedem Fall, dass ein Kreis vermieden und eine Basis gebildet wird. Nehmen wir an, dass der Algorithmus für ein gewichtetes Matroid M die Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ erzeuge, und nehmen wir weiters an, es existiere eine zweite Basis $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, deren Gesamtgewicht größer als jenes von B ist. Nehmen wir darüberhinaus an, dass die Elemente der Basen bereits nach Gewicht w sortiert sind, beginnend mit dem größten, dass also $w(a_1) \geq w(a_2) \geq \dots \geq w(a_n)$ und $w(b_1) \geq w(b_2) \geq \dots \geq w(b_n)$ gilt. Gewiss gilt nach dem Kruskal-Algorithmus $w(b_1) \geq w(a_1)$. Wenn das Gesamtgewicht von A größer als jenes von B ist, so muss es ein erstes Element a_k geben, sodass $w(a_k) > w(b_k)$ gilt. Betrachten wir die unabhängige Mengen $I_1 = \{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ und $I_2 = \{a_1, \dots, a_k\}$. Gemäß (I3) aus Definition 3 muss es ein Element $a_j \in I_2$ geben, das I_1 hinzugefügt werden kann, sodass $I_1 \cup a_j$ unabhängig ist. Da $w(a_j) \geq w(a_k) > w(b_k)$ gelten muss, hätte nicht b_k , sondern a_j ausgewählt werden müssen. Aus dem Widerspruch folgt der Beweis, dass der Kruskal-Algorithmus für Matroide eine Basis maximalen Gewichts generiert. $\square$

Dass eine Vorgehensweise wie beim Kruskal-Algorithmus (und jedem Greedy-Algorithmus), die zunächst nur lokal eine beste Auswahl trifft, insgesamt zu einer global betrachteten besten Auswahl führt, ist gar nicht so selbstverständlich. Denn: „The person who decides she will always walk in the steepest uphill direction need not end up atop Mount Everest, and, indeed, most of the time such a walk would end instead atop some hill (that is, a local maximum) near her starting point.” [26, S.35] So bemerkenswert Theorem 40 angesichts dessen sein mag, umso mehr verblüfft Theorem 41, dessen Inhalt die Aussagekraft von Theorem 40 präzisiert und einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Matroiden und Greedy-Algorithmen offenbart.

Theorem 41 *Sei E eine Menge und $\mathcal{I}$ eine Menge von Teilmengen von E , die (I1) und (I2) erfüllt. Der Kruskal-Algorithmus aus Definition 39 liefert für jede Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine maximale Lösung **ausschließlich dann**, wenn $(E, \mathcal{I})$ ein Matroid mit Grundmenge E und der Menge unabhängiger Mengen $\mathcal{I}$ ist.*

Beweis Theorem 41, nach Dinitz [15, S.4]: Aus Theorem 40 wissen wir, dass der Kruskal-Algorithmus (und jeder Greedy-Algorithmus) für Matroide funktioniert. Es bleibt zu zeigen, dass, wenn er funktioniert, die zugrundeliegende Struktur ein Matroid sein **muss**. Wir beweisen indirekt und nehmen an, dass $(E, \mathcal{I})$ kein Matroid ist. Dann ist (I3) aus Definition 3 nicht erfüllt und es gibt $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ mit $|I_1| < |I_2|$, sodass $\forall e \in I_2 - I_1 : I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$. Es gilt bestimmt $|I_2 - I_1| > |I_1 - I_2|$, zudem ist $I_1 - I_2 \neq \emptyset$, da sonst $I_1 \subseteq I_2$ gelten würde und (I3) erfüllt wäre. Wir wählen eine positive reelle Zahl α , sodass $0 < (1+\alpha) \cdot |I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$ gilt. Definieren wir nun die Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

- $w(e) = 2$ wenn $e \in I_1 \cap I_2$
- $w(e) = \frac{1}{|I_1 - I_2|}$ wenn $e \in I_1 - I_2$
- $w(e) = \frac{1+\alpha}{|I_2 - I_1|}$ wenn $e \in I_2 - I_1$
- $w(e) = 0$ sonst

Der in Definition 39 beschriebene Kruskal-Algorithmus würde zunächst alle Elemente aus $I_1 \cap I_2$ (höchstes Gewicht) und anschließend jene Elemente aus $I_1 - I_2$ (zweithöchstes Gewicht) wählen. Insgesamt hätte der Algorithmus dann genau die Elemente von I_1 gewählt. Da wir angenommen haben, dass (I3) scheitert, darf kein Element von $I_2 - I_1$ hinzugefügt werden, da sonst ein Kreis entstehen würde. Wir sind am Ende des Prozesses angelangt, und das entsprechende Gewicht lautet:

$$2 \cdot |I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2| \cdot \frac{1}{I_1 - I_2} = 2 \cdot |I_1 \cap I_2| + 1$$

Für das Gewicht von I_2 , ebenfalls verlässlich eine unabhängige Menge, gilt allerdings:

$$2 \cdot |I_1 \cap I_2| + |I_2 - I_1| \cdot \frac{1+\alpha}{I_2 - I_1} = 2 \cdot |I_1 \cap I_2| + 1 + \alpha$$

Da das Gewicht von I_2 höher ist, hat der Kruskal-Algorithmus offenbar keine maximale Basis generiert. Unsere Annahme, $(E, \mathcal{I})$ sei kein Matroid, muss verworfen werden, und Theorem 41 ist bewiesen. $\square$

Die Bedeutung von Theorem 41 bringen Neel und Neudauer [26, S.27.] auf den Punkt: „Not only are matroids useful in these optimization settings, it turns out that they are the very characterizations of the problems. Recognizing that a problem involves a matroid tells us whether certain algorithms will return an optimal solution. Knowing that an algorithm effects a solution tells us whether we have a matroid.”

Anmerkung 1: Wir haben in den bisherigen Überlegungen den Kruskal-Algorithmus stellvertretend für andere Greedy-Algorithmen betrachtet. Tatsächlich gilt für sämtliche Greedy-Algorithmen, dass sie lediglich dann für alle Gewichtsfunktionen optimale Ergebnisse erzielen, wenn die Struktur, auf die der Algorithmus angewandt wurde, ein Matroid ist.

Anmerkung 2: Am Beginn des Kapitels wurde angedeutet, dass Greedy-Algorithmen auch Basen minimalen Gewichts erzeugen können. Um etwa den Kruskal-Algorithmus aus Definition 39 zur Suche Basen minimalen Gewichts anzuwenden, genügt es, anstelle der Gewichtsfunktion w die negative Gewichtsfunktion $-w$ zu wählen (vgl. Oxley [27, S.59]). Neel und Neudauer [26, S.37] weisen außerdem darauf hin, dass das Auffinden einer Basis maximalen Gewichts eines Matroids M zugleich das Auffinden einer Basis minimalen Gewichts des dualen Matroids M^* ermöglicht.

Eine Konsequenz aus der Gültigkeit von Theorem 41 ist eine weitere Möglichkeit, Matroide zu definieren:

Definition 42 Oxley [27, S.60] *Ein Matroid ist ein geordnetes Paar $(E, \mathcal{I})$ bestehend aus einer endlichen Menge E und einer Menge $\mathcal{I}$ von Teilmengen von E mit folgenden Eigenschaften:*

$$(I1) \quad \emptyset \in \mathcal{I}$$

(I2) $I \in \mathcal{I}, I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$

(G) Für jede Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt ein Greedy-Algorithmus ein Element aus $\mathcal{I}$ mit maximalem Gewicht. $\square$

5.2.1 Anwendungen des Kruskal-Algorithmus

Kruskal-Algorithmus für graphische Matroide

Nun, da wir den Kruskal-Algorithmus verallgemeinert haben, betrachten wir seine Wirkung in speziellen Matroidarten und starten mit einer Anwendung in der Graphentheorie. Die Anwendungen von Greedy-Algorithmen in der Graphentheorie sind zahlreich, da jede Art von Netzwerkstruktur mittels eines gewichteten Graphen betrachtet und dann mittels eines Greedy-Algorithmus optimiert werden kann. Benjamin, Chartrand und Zhang [5, S.67f.], an deren Ausführungen wir uns im Folgenden orientieren, wählen als diese Netzwerkstruktur beispielhaft eine Landschaft mit einzelnen Dörfern, zwischen denen zu möglichst geringen Kosten Straßen erbaut werden sollen, sodass man von jedem Dorf in jedes andere kommen kann. Die Situation ist in Abbildung 5.1 dargestellt: Die einzelnen Dörfer sind durch Knoten A-H, die sie verbindenden Straßen durch Kanten dargestellt. Die Kosten, die für den Bau der einzelnen Straßen anfallen, entsprechen den Gewichten der Kanten.

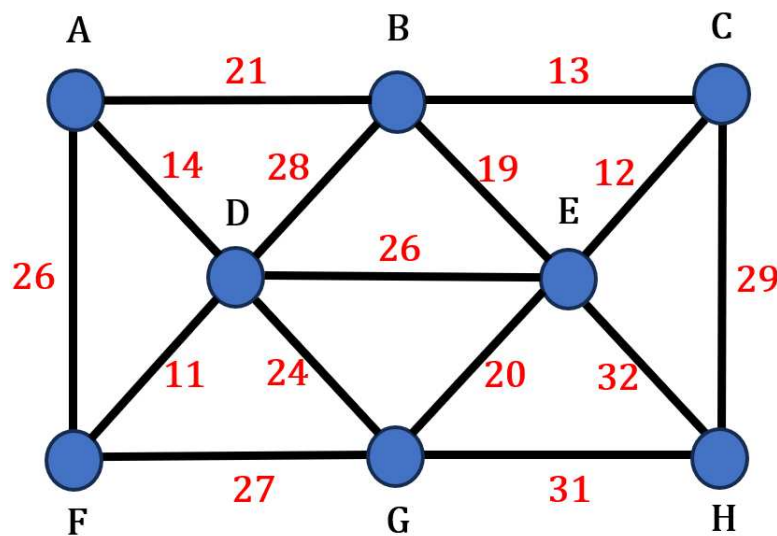


Abbildung 5.1: Mögliche Verbindungsstraßen mitsamt ihrer Baukosten (Kanten mit Gewichten) zwischen Dörfern (A-H) können gut mittels eines gewichteten Graphen dargestellt werden

Wenn das Reisen zwischen allen Dörfern zu möglichst geringen Kosten gewährleistet werden soll, gilt es, möglichst wenige Straßen zu möglichst geringen Kosten zu erbauen. Das führt unweigerlich zur Suche nach Spannbäumen minimalen Gewichts und somit zum Kruskal-Algorithmus nach Definition 39. Wir führen den Prozess für die geschilderte Situation im Folgenden Schritt für Schritt durch:

Kruskal-Algorithmus zur Suche minimaler Spannbäume des Graphen in Abbildung 5.1

1. Definiere $B := \emptyset$.
2. Wähle Kante DF mit Gewicht 11 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF\}$
3. Wähle Kante CE mit Gewicht 12 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE\}$
4. Wähle Kante BC mit Gewicht 13 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE, BC\}$
5. Wähle Kante AD mit Gewicht 14 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE, BC, AD\}$
6. Wähle Kante BE mit Gewicht 19. Es entsteht ein Kreis. Verwirf BE und ...
7. Wähle Kante EG mit Gewicht 20 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE, BC, AD, EG\}$
8. Wähle Kante AB mit Gewicht 21 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE, BC, AD, EG, AB\}$
9. Verwirf die Kanten DG, DE, AF, FG, BD , da ein Kreis entsteht, und ...
10. Wähle die Kante CH mit Gewicht 29 und definiere, da sich kein Kreis ergibt,
 $B := \{DF, CE, BC, AD, EG, AB, CH\}$
11. Verwirf die Kanten GH, EH , da ein Kreis entsteht. Keine Kante übrig $\rightarrow$ ENDE.
12. Der minimale Spannbaum des Graphen besitzt folgende Kantenmenge
 $B = \{DF, CE, BC, AD, EG, AB, CH\}$.

Der entsprechende Spannbaum ist in Abbildung 5.2 grün markiert. Es ist leicht zu sehen, dass man von jedem Ort mittels einer Abfolge von Straßen zu jedem anderen Ort gelangen kann.

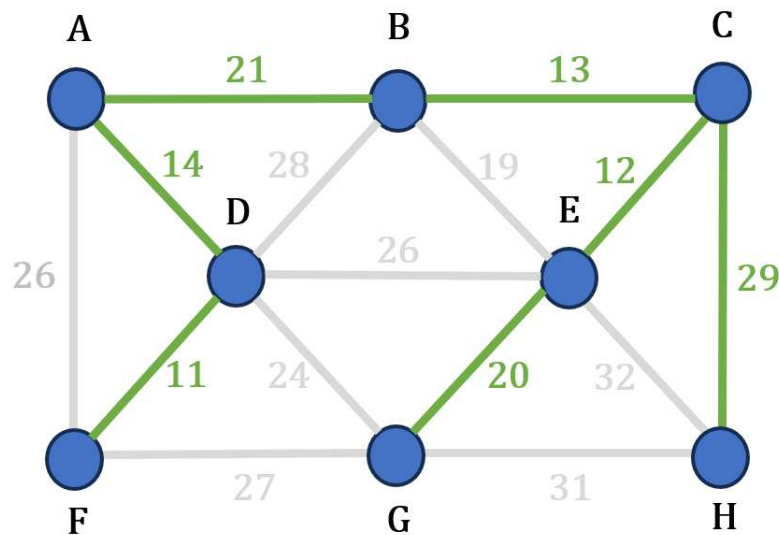


Abbildung 5.2: Der minimalgewichtige Spannbaum des Graphen aus Abbildung 5.1 ist grün markiert

Es ist offenkundig, dass für eine größer werdende Anzahl an Kanten die Suche nach Spannbäumen optimalen Gewichts ohne Kruskal-Algorithmus aussichtslos ist. Schon für obiges

Beispiel mit 15 Kanten und Spannbäumen mit 7 Kanten müssten ohne Kruskal-Algorithmus potenziell $\binom{15}{7} = 6435$ Möglichkeiten untersucht werden, um den Spannbaum mit Kantenmenge B zu finden.

Kruskal-Algorithmus für Transversalmatroide

In Anlehnung an Neel und Neudauer [26, S.37ff.] betrachten wir abschließend auch eine Anwendung des Kruskal-Algorithmus' für Transversalmatroide. Auch [27, 61f.] präsentiert eine Anwendung für Transversalmatroide, wir werden gegen Ende des Kapitels noch einmal auf ihn und eine wichtige Erkenntnis seinerseits verweisen. Für den Moment stellen wir uns vor, dass in einer Bildungseinrichtung die Kurse A, B, C, D, E, F, G innerhalb von vier Unterrichtsstunden H_1, H_2, H_3, H_4 folgendermaßen angeboten werden.

- $H_1 = \{C, E, F, G\}$
- $H_2 = \{A, B, D\}$
- $H_3 = \{C, E, G\}$
- $H_4 = \{D, F\}$

Nehmen wir an, dass ein Student der Bildungseinrichtung alle Kurse benötigt, um in seinem Studium voranzukommen, allerdings die Kurse mittels einer Gewichtsfunktion $w : \{A, B, C, D, E, F, G\} \rightarrow \mathbb{R}$ nach Dringlichkeit reiht, wobei niedrige Gewichte hohe Priorität bedeuten:

$$w(A) = 1, w(B) = 2, w(C) = 3, w(D) = 4, w(E) = 5, w(F) = 6, w(G) = 7$$

Nun stellt sich die Frage, welche für ihn optimale Kursbelegung der Student vornehmen sollte. Es ist offenkundig, dass eine optimale Belegung dann erreicht ist, wenn möglichst viele Kurse bei gleichzeitig möglichst geringem Gesamtgewicht (also maximaler Priorität) belegt werden können. Der Kruskal-Algorithmus gemäß Definition 39 erscheint ein geeignetes Werkzeug zum Lösen dieser Problemstellung zu sein. Wir ziehen den Optimierungsprozess vor, ehe wir uns im Anschluss versichern, dass obere Situation ein Transversalmatroid beschreibt und wir nach einer Basis minimalen Gewichts suchen.

Kruskal-Algorithmus zur Suche einer optimalen Kursbelegung

1. Definiere $K := \emptyset$.
2. Wähle Kurs A mit Gewicht 1 und definiere, da sich keine Terminkollision (H_2) ergibt, $K := \{A\}$
3. Wähle Kurs B mit Gewicht 2. Es gibt eine Terminkollision (H_2) mit A . Verwirf B und...
4. Wähle Kurs C mit Gewicht 3, und definiere, da sich keine Terminkollision (H_1 oder H_3) ergibt, $K := \{A, C\}$
5. Wähle Kurs D mit Gewicht 4, und definiere, da sich keine Terminkollision (H_4 , H_2 schon belegt) ergibt, $K := \{A, C, D\}$
6. Wähle Kurs E mit Gewicht 5, und definiere, da sich keine Terminkollision (H_1 oder H_3) ergibt, $K := \{A, C, D, E\}$
7. Es können nicht mehr als vier Kurse belegt werden $\rightarrow$ ENDE.

8. Die optimale Kursbelegung des Studenten lautet $K = \{A, C, D, E\}$.

Tatsächlich erhält man bei Anwendung des Kruskal-Algorithmus eine optimale Lösung, und gemäß Theorem 41 muss die oben geschilderte Situation daher in seiner Grundstruktur ein Matroid beinhalten. Betrachten wir nun, um uns des Matroids in dieser Aufgabe bewusst zu werden, nochmals die obige Aufgabenstellung. Die Mengen H_1, H_2, H_3, H_4 , stellen allesamt Teilmengen der Menge $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ dar, $\mathcal{H} = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ ist also eine Sammlung von Teilmengen von S . Somit ist aber $(S, \mathcal{H})$ ein Transversalmatroid, bei dem $\mathcal{H}$ die Menge partieller Transversale und somit die Menge unabhängiger Mengen darstellt. Die Suche nach einer optimalen Kursbelegung entspricht der Suche nach einem (partiellen) Transversal minimalen Gewichts, also der Suche nach einer unabhängigen Menge maximaler Mächtigkeit mit minimalem Gewicht. Der Kruskal-Algorithmus liefert gemäß Theorem 41 genau diese Lösung.

Man beachte, dass der Kruskal-Algorithmus zwar eine optimale Kursbelegung ergibt, allerdings keine Zuordnung der Kurse zu den einzelnen Stunden. Diese Zuordnungsaufgabe muss separat vorgenommen werden. Es gibt dafür eigene Algorithmen, auf die Oxley [27, S.61f.] verweist.

Mittels der Anwendung von Greedy-Algorithmen auf Transversalmatroide lassen sich unterschiedliche Zuordnungsprobleme optimieren. Oxley etwa führt als weiteres Beispiel die Zuordnung von Arbeitern zu einzelnen, gleichzeitig zu erledigenden Aufgaben, an. [27, S.61]

6 Schlussbemerkung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit damit auszugeben, ein vollständiges Bild der Matroidtheorie zu zeichnen, wäre vermessen und nicht machbar gewesen. Zu zahlreich sind dafür die einzelnen Teilgebiete der Matroidtheorie und zu vielfältig jeweils die Möglichkeiten, diese genauer zu untersuchen. Nächste Schritte innerhalb einer ausführlicheren Arbeit hätten eine genauere Untersuchung weiterer Matroidkonstruktionen (beispielsweise der Minoren eines Matroids), weiterer Matroideigenschaften (beispielsweise des aus der Graphentheorie für Matroide verallgemeinerten Zusammenhangsbegriffs) und eine genauere Untersuchung der Frage, wie einzelne Matroidarten untereinander zusammenhängen, sein können. All das und noch weit mehr lässt sich bei Oxley [27] nachlesen, und der interessierte Leser, der mehr über Matroide zu lernen wünscht, sei in erster Stelle an ihn weiterverwiesen - allerdings im Wissen, dass das Feld der Matroide in so vielen Teilen noch unerforscht ist, dass der Wunsch nach ganzheitlichem Wissen selbst bei der Lektüre aller Publikationen bei Weitem nicht erfüllt würde.

Das Hauptziel dieser Arbeit hingegen darf als erreicht betrachtet werden, wenn die Lektüre beim Leser das Interesse an der Auseinandersetzung mit Matroiden und die Freude an den Überraschungen, die die Beschäftigung mit Mathematik stets bereithält, geweckt hat. Wer hätte sich gedacht, dass Spannwürder in Graphen Zusammenhänge mit Basen eines Vektorraums aufweisen? Wer hätte geglaubt, dass ein Greedy-Algorithmus nicht deshalb funktioniert, weil ein Graph zugrundegelegt wird, sondern vielmehr, weil sich aus jedem Graphen ein Matroid ableiten lässt? Wer hätte einen Zusammenhang zwischen Planarität und daraus resultierender Dualität bei Graphen mit Orthogonalität eines Vektorraums vermutet? All diese keineswegs offensichtlichen Verbindungen hat die Beschäftigung mit Matroiden auf den vorausgegangenen Seiten aufgezeigt. Der Matroidtheorie wohnt nicht nur deshalb wie unzähligen anderen mathematischen Gebieten eine Ästhetik inne, an der man sich erfreuen und von der man sich überraschen lassen kann und die alleine dadurch schon wert ist, genauer untersucht zu werden. Dass gewonnene Einsichten einer komplexen Materie schließlich unvermittelt auch in anschaulichen Anwendungen münden (siehe Kruskals Algorithmus), macht die Faszination der Matroidtheorie nur umso größer und unterstreicht auch, dass Beschäftigung mit scheinbar Abstraktem seine Legitimation hat, mündet sie doch im Falle der Mathematik erstaunlich oft in unmittelbarem Nutzen. Dieser Aspekt erscheint mir, da sich auch im Schulkontext bisweilen der Eindruck ergibt, dass die Wertigkeit von Inhalten oft an deren unmittelbarem Nutzen gemessen wird. Die Mathematik braucht diesen Anspruch an sich nicht zu fürchten, sie würde aber einen nicht minder gewichtigen Teil ihrer selbst verleugnen, würde sie sich ausschließlich auf Anwendungsbezug fokussieren. Mathematik verdient nämlich nicht nur dort besonderes Interesse, wo sie offensichtlich in den Alltag hineinwirkt, sondern darf auch als hohe Kunst des Denkens, die Schönheit besitzt und Faszination her-

vorrucht, Anerkennung finden. Der menschliche Geist strebt von Natur aus nach Erkenntnis, und die Mathematik ist dabei Gegenstand und Produkt dieses Strebens zugleich – sie kommt einer faszinierenden Manifestation dessen, was das Intellekt des Menschen zu leisten im Stande ist, gleich, und kann dabei von großem Nutzen, genauso sehr aber von großer Freude sein. Diese Arbeit schließt in der Hoffnung, dass durch die Lektüre der vorliegenden Arbeit auch der Leser zu dieser Erkenntnis gelangt ist.

Literaturverzeichnis

- [1] D.M. Acketa: *A construction of non-simple matroids on at most 8 elements*, J. Combin. Inform. System Sci. 9, 121—132, (1984)
- [2] K. Adiprasito, J. Huh, E. Katz: *Hodge theory for combinatorial geometries*, Annals of Mathematics 188, S. 381–452, (2018)
- [3] M. Aigner: *Kombinatorik*, Teil II.: Matroide und Transversaltheorie, Springer-Verlag, (1976)
- [4] N. Bansal, R.A. Pendavingh, J.G. Van der Pol: *On the number of matroids*, Combinatorica 35 (3), S. 253—277, Bolyai Society-Springer-Verlag, (2015)
- [5] A. Benjamin, G. Chartrand, P. Zhang: *The fascinating world of graph theory*, Princeton University Press, (2015)
- [6] G. Birkhoff: *Abstract linear dependence and lattices*, American Journal of Mathematics, Vol. 57, S. 800—804, (1935)
- [7] G. Birkhoff: *On the combination of subalgebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 29, S. 441—464, (1933)
- [8] G. Birkhoff, S. Mac Lane: *A survey of modern algebra*, MacMillan, (1941)
- [9] J.E. Blackburn, H.H. Crapo, D.A. Higgs: *A catalogue of combinatorial geometries*, Math. Comp. 27, S. 155–166, (1973)
- [10] N. Bowler: *Matroidentheorie(Master)*, Wintersemester 2016/2017
- [11] T.H. Cormen, C.E. Leieron, R. Rivest, C. Stein, P. Molitor (Übersetzer): *Algorithmen – Eine Einführung*, Oldenbourg Verlag München, (2013)
- [12] H. Crapo, G.C. Rota: *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, Preliminary Edition, MIT Press, (1970)
- [13] H. Crapo, W. Schmitt: *The free product of matroids*, European J. Combin. 26, S. 1060–1065, (2005)
- [14] R. Dedekind: *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler*, in: Festschrift der Technischen Hochschule zu Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, (1897)

- [15] M. Dinitz: *Introductions to Algorithms*, (2014), abrufbar: <https://www.cs.jhu.edu/~mdinitz/IntroAlgorithms/Lectures/lecture15.pdf>, letzter Zugriff: 24.07.2024
- [16] W.M.B. Dukes: *On the number of matroids on a finite set*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire 51, Article B51g, (2004)
- [17] A. von Felbert: *Einführung in die Theorie der Matroide*, (2007)
- [18] H. Grassmann: *Die Ausdehnungslehre*, Enslin, (1862)
- [19] D. Jungnickel: *Transversaltheorie*, Geest & Portig, (1982)
- [20] D.E. Knuth: *The asymptotic number of geometries*, J. Combin. Theory Ser. A 17, S. 398–401, (1974)
- [21] J.B. Kruskal: *On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 7, S. 48–50, (1956)
- [22] M. Lemos: *On the number of non-isomorphic matroids*, Advances in Applied Mathematics Vol. 33(4), S. 733–746, (2004)
- [23] J. H. Mason: *Matroids: unimodal conjectures and Motzkin's theorem*, Combinatorics, S. 207–220, Institute of Math. and its Applications, Southend-on-Sea, (1972)
- [24] D. Mayhew, G. Royle: *Matroids with nine elements*, J. Combin. Theory Ser. B 98, S. 415–438, (2008)
- [25] T. Nakasawa: *Zur Axiomatisierung der linearen Abhängigkeit*, Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, Vol. 2(43), S. 235–255, (1935)
- [26] D.L. Neel, N.A. Neudauer: *Matroids You Have Known*, Mathematics Magazine, Vol.82 (1), S. 26–41, Mathematical Association of America, (2009-02)
- [27] J. Oxley: *Matroid Theory*, Oxford University Press, (2011)
- [28] J. Oxley: *Briefly, what is a matroid?*, (2014)
- [29] M.J. Piff: *An upper bound for the number of matroids*, J. Combin. Theory Ser. B 14, S. 241–245, (1973)
- [30] G. C. Rota: *Combinatorial theory, old and new*, Proc. Internat. Cong. Math, S. 229–233, (1971)
- [31] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency*, Volume B, (2003)
- [32] E. Steinitz: *Algebraische Theorie der Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 137, S. 167–309, (1910)
- [33] B. L. van der Waerden: *Moderne Algebra*, Springer-Verlag, 2.Auflage,(1937)

- [34] D. Welsh: *Combinatorial problems in matroid theory*. In *Combinatorial Mathematics and its Applications*, S. 291–306, Academic Press, (1971)
- [35] D. Welsh: *Matroid Theory*, Academic Press, (1976)
- [36] H. Whitney: *On the Abstract Properties of Linear Dependence*, American Journal of Mathematics, Vol. 57(3), S. 509–533, (1935)