

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Kettenbrüche, Farey-Folgen und diophantische Approximation“

verfasst von / submitted by

Julia Ebner, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2023 / Vienna 2023

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 199 502 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
UF Biologie und Umweltkunde UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Leonhard Summerer

Abstract

The question may arise as to whether there are connections among continued fractions, Farey sequences, and the Diophantine approximation. This master's thesis attempts to elaborate the basics of these three mathematical concepts and explore their relations with one another. Continued fractions and Farey sequences are useful tools for approximating real numbers, especially those of the infinite, non-periodic decimal kind. One such number is that of π , in which there has been a great deal of interest for thousands of years to learn about its qualitatively good approximation. Diophantine approximation is a discipline of mathematics, which has set itself the goal of making statements and inferences about the quality of approximations. From that point of view, continued fractions and Farey sequences provide good approximations with small margins for error.

The focus of this thesis is on *Dirichlet's approximation theorem* of 1842. This theorem indicates that there is a sequence of good rational approximations for every real number. In addition, it provides a necessary and sufficient condition for the irrationality of a number, which can be derived from minor additions to the theorem.

Abriss

Auf den ersten Blick stellt sich möglicherweise die Frage, nach dem Zusammenhang zwischen Kettenbrüchen, Farey-Folgen und der diophantischen Approximation. In der Literaturarbeit wird die Bedeutung von Kettenbrüchen, Farey-Folgen und der Approximationstheorie erarbeitet, und zuletzt in Relation zueinander gesetzt.

Kettenbrüche und Farey-Folgen sind nämlich ein nützliches Werkzeug, um reelle Zahlen anzunähern, vor allem jene die unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen aufweisen. Eine solche Zahl, für die es jahrtausendlang von großem Interesse war, auf eine qualitativ gute Näherung zurückzugreifen, ist die Kreiszahl π . Die diophantische Approximation ist ein Teilgebiet der Mathematik, welche es sich zum Ziel gesetzt hat, Aussagen über die Güte einer Näherung zu treffen. Aus dem Blickwinkel der diophantischen Approximation liefern Kettenbrüche und Farey-Folgen gute Näherungen an reelle Zahlen mit geringem Fehler.

Ein zentraler Satz der vorliegenden Masterarbeit ist der *Approximationssatz von Dirichlet* aus dem Jahre 1842. Dieser liefert nicht nur die Erkenntnis, dass es zu jeder reellen Zahl eine Folge guter rationaler Näherungen gibt, sondern es lässt sich auch eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für die Irrationalität einer Zahl durch geringe Ergänzungen des Theorems ableiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kettenbrüche	3
2.1	Einführung	3
2.1.1	Historische Betrachtung	3
2.2	Definition: Kettenbrüche	4
2.3	Endliche Kettenbrüche	6
2.3.1	Näherungsbrüche und Matrixdarstellung endlicher regelmäßiger Kettenbrüche	6
2.3.2	Kettenbruchdarstellung rationaler Zahlen	10
2.3.3	Eigenschaften endlicher Kettenbrüche	14
2.3.4	Geometrische Deutung	16
2.4	Unendliche Kettenbrüche	19
2.4.1	Eigenschaften unendlicher Kettenbrüche	20
2.4.2	Beispiele unendlicher Kettenbrüche	23
2.5	Anwendungen	25
2.6	Kettenbrüche im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse	26
3	Farey-Folgen	28
3.1	Einführung	28
3.1.1	Historische Betrachtung	28
3.2	Definition	28
3.3	Eigenschaften	30
3.4	Stern-Brocot Baum	33
3.5	Darstellung von Farey-Folgen: Ford-Kreise	36
3.6	Anwendungen	40
3.7	Farey-Folgen im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse	42
4	Diophantische Approximation	43
4.1	Einführung	43
4.1.1	Historische Betrachtung	45
4.2	Grundlegendes	46
4.2.1	Diophantische Approximation und Kettenbrüche	50
4.2.2	Diophantische Approximation und Farey-Folgen	53
4.2.3	Zusammenfassung	55
4.3	Diophantische Approximation im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse	56

Abbildungsverzeichnis

1	Grafisches Verfahren regelmäßiger Kettenbrüche	18
2	Stern-Brocot Baum [3]	34
3	Darstellung einer rationalen Zahl als Kreis. [8]	37
4	Lage zweier Ford-Kreise. [8]	37
5	Ford-Kreise und der Zusammenhang mit Farey-Folgen. [2]	40

1 Einleitung

Kettenbrüche und Farey-Folgen zeichnen sich nicht nur durch ihre einzigartigen mathematischen Eigenschaften aus, sondern sind auch ein wichtiges Hilfsmittel zur Approximation reeller Zahlen. Bereits im frühen Jugendalter, in der Sekundarstufe 1 des österreichischen Schulsystems, werden Lernende mit der Tatsache konfrontiert, dass es reelle Zahlen gibt, die unendlich viele, nicht-periodische Nachkommastellen besitzen. Stellvertretend dafür, wird in diesem Zusammenhang die Kreiszahl π und die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats genannt. Meist weisen Lehrende ausschließlich darauf hin, dass bei Berechnungen diverser Aufgaben ein sinnvolles Runden reeller Zahlen ausreichend ist, um die Fragestellungen zufriedenstellend zu beantworten. Der Lehrplan sieht nicht vor, entsprechendes Wissen zu vermitteln, das es ermöglicht, reelle Zahlen mit vergleichsweise kleinem Fehler abzuschätzen. [4] Aus der Sicht der diophantischen Approximationstheorie ist eine Darstellung reeller Zahlen, vor allem jener mit unendlich vielen, nicht periodischen Nachkommastellen, mittels Kettenbrüchen und Farey-Folgen empfehlenswert, da diese exakter ist.

Das Ziel der Masterarbeit ist es, ein fundiertes Wissen über Kettenbrüche und Farey-Folgen zu vermitteln und diese mit wichtigen Resultaten der diophantischen Approximation in Verbindung zu bringen. Dazu behandelt Kapitel 2 die Grundlagen endlicher und unendlicher Kettenbrüche mit den zugehörigen wichtigsten Eigenschaften. Kapitel 3 nimmt Farey-Folgen und deren Eigenschaften, den Stern-Brocot-Baum und Ford-Kreise genauer unter die Lupe. Die Bedeutung von Kettenbrüchen und Farey-Folgen im Rahmen der diophantischen Approximation wird im finalen Kapitel 4 der Literatuarbeit verdeutlicht. Ein kurzer Abschnitt der drei großen Kapitel soll außerdem einer fachdidaktischen Analyse gewidmet sein, da diese drei genannten mathematischen Objekte auch großen schulischen Mehrwert haben können. So können Kettenbrüche beispielsweise zahlentheoretisches Interesse anregen, Farey-Folgen algebraische Fehler bei der Addition von Brüchen in ein neues Licht mithilfe des Wissens über Mediantenbildung rücken, oder diophantische Approximation ein tiefergehendes Verständnis reeller Zahlen bedingen. [9, 15, 13] Zentrale Sätze der vorliegenden Literatuarbeit sind der *Satz von Dirichlet*, der *Satz von Liouville* und der *Satz von Thue-Siegel-Roth*, die in Kapitel 4 aufgegriffen werden.

Notation

In der Literaturarbeit wird folgende Definition für die Zahlenmengen verwendet:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ werden im Laufe der Masterarbeit eingeführt.

2 Kettenbrüche

2.1 Einführung

In Kapitel 2 werden Kettenbrüche und deren Eigenschaften, Anwendungen und didaktische Eignung im Detail beleuchtet. Kettenbrüche sind nicht nur als eigenständige mathematische Objekte von großem Interesse, sondern ihnen wird die wichtige Aufgabe zuteil, reelle Zahlen mittels rationaler Näherungen zu approximieren, weshalb die genauere Auseinandersetzung ein zentraler Aspekt der Literaturarbeit ist. Die theoretischen Grundlagen der Kettenbrüche sind eine essentielle Basis für das finale Kapitel 4 „Diophantische Approximation“.

Hervorzuheben ist überdies die lange historische Entwicklung, auf die in folgendem Kapitel 2.1.1 genauer eingegangen wird.

2.1.1 Historische Betrachtung

Die Verwendung des Kettenbruchkalküls blickt auf eine lange Tradition in vielen Kulturen der Erde zurück. Bereits seit der Antike sind Vorläufer von Kettenbrüchen bekannt, mit denen unter anderem die Gelehrten *Archimedes* und *Diophantos von Alexandria* durch die Anwendung erster kurzer Kettenbrüche assoziiert werden. [1] Bemerkenswert ist, dass die indischen Gelehrten *Aryabhata der Ältere* und *Bhaskara der Ältere* im 6. Jahrhundert nach Christus Kettenbrüche verwendeten, um beispielsweise Lösungen für lineare diophantische Gleichungen zu finden. Diophantische Gleichungen sind Gleichungen, deren Lösungen ausschließlich im Bereich der Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ gesucht werden. [19]

Obwohl Kettenbrüche über viele Jahrzehnte gar Jahrhunderte hinweg Einsatz in diversen mathematischen Bereichen hatten, dauerte es vergleichsweise lange bis zur Entwicklung einer einheitlichen und ganzheitlichen Theorie. *Cataldi*, *Schwentner* und *Huygens* zählen zu den namhaften Mathematikern, die erstmals Ansätze zur Theorie der Kettenbrüche lieferten. [21] Der niederländische Astronom und Mathematiker *Christiaan Huygens* beispielsweise entwickelt im 17. Jahrhundert einen systematischen Ansatz der Kettenbruchtheorie, die er im Zuge des Baues eines mechanischen Sonnensystemmodells formulierte. [19] Erst *Leonhard Euler* gelang es aber, eine einheitliche Theorie der Kettenbrüche zu entwickeln. Eine Vielzahl Eulerscher Abhandlungen zeugen von seiner intensiven Auseinandersetzung mit der Thematik der Kettenbrüche. [21] Wie wichtig die historische Entwicklung der Kettenbruchtheorie ist, wird unter anderem bei der Festlegung des Kalenders klar. Näheres zur Unterscheidung zwischen julianischem und gregorianischem Kalender wird in Kapitel 2.5 dargelegt.

Zusammenfassend kann jedoch ganz allgemein festgestellt werden, dass sich die Kettenbruchtheorie aus der Notwendigkeit heraus entwickelte, Brüche mit großen Nennern und Zählern

durch simple Brüche anzunähern. [24]

2.2 Definition: Kettenbrüche

Zunächst werden die wichtigsten Definitionen, Notationen und Sprechweisen für Kettenbrüche eingeführt, die anschließend für die Analyse der Eigenschaften herangezogen werden. Dieses Kapitel folgt den Ausführungen der Werke von *Perron* (1977) [21] und *Bundschuh* (2008) [5].

Definition (Kettenbrüche). Ein (endlicher) Kettenbruch hat die allgemeine Form

$$b_0 + \frac{c_1}{b_1 + \frac{c_2}{b_2 + \frac{c_3}{\ddots + \frac{c_i}{b_i}}}}, \quad (2.1)$$

wobei b_n und c_n reelle Zahlen sind, die jedoch so gewählt sein müssen, dass kein Nenner $= 0$ ist und $i \in \mathbb{N}$.

Die Elemente b_n werden in der Literatur oftmals auch als Teilnenner bezeichnet, wobei b_0 schon durch die Bezeichnung Anfangsglied eine Eigenstellung erhält. Denn ist das Anfangsglied $b_0 = 0$, so kann es mitsamt des nachfolgenden Rechenzeichens weggelassen werden.

Die Elemente c_n werden Teilzähler genannt. Ferner wird der Bruch $\frac{c_n}{b_n}$ als n -tes Glied oder als n -ter Teilbruch bezeichnet. Diese Bezeichnungen sind für alle Kettenbrucharten anwendbar, insbesondere auch bei den Spezialfällen. [21, 5]

Wir haben eben die allgemeine Form eines Kettenbruches anhand eines endlichen Kettenbruches statuiert. Ein Kettenbruch kann jedoch auch unendlich, sprich nicht-abbrechend, sein. Die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche ist für weitere Überlegungen und Ausführungen essentiell. Den unendlichen Kettenbrüchen ist daher nachfolgend ein eigenes Kapitel gewidmet, da sie unter anderem für die Darstellung irrationaler Zahlen herangezogen werden. [21, 5]

Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall der Kettenbrüche, die regelmäßigen Kettenbrüche. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass alle Teilzähler c_n den Wert 1 aufweisen.

Definition (Regelmäßige Kettenbrüche). Sei $b_0 \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2, \dots, b_i \in \mathbb{N}$, so weist

ein endlicher regelmäßiger Kettenbruch die Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_i}}}}, \quad (2.2)$$

auf. Aufgrund der Übersichtlichkeit kann man einen endlichen regelmäßigen Kettenbruch wie folgt notieren:

$$[b_0; b_1, b_2, \dots, b_i].$$

Da es sich um einen endlichen Kettenbruch handelt, ist der Ausdruck $(i + 1)$ -gliedrig, da das Anfangsglied b_0 mitgezählt werden muss.

Lässt man die Konvergenz eines unendlich regelmäßigen Kettenbruches vorerst außer Acht, kann vorhergehende Notation auf unendliche regelmäßige Kettenbrüche umgemünzt werden.

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (2.3)$$

oder kurz

$$[b_0; b_1, b_2, \dots]. \quad [21, 5]$$

Bemerkungen:

- (i). Regelmäßige Kettenbrüche werden in der Literatur oft als einfache oder reguläre Kettenbrüche bezeichnet. Im englischen Sprachraum sind sie unter dem Begriff *regular* oder *simple continued fractions* bekannt.
- (ii). Obwohl die ausführlichere Notation der Kettenbrüche mehr über die Gestalt preisgibt, hat sich die Kurzschreibweise mittels eckiger Klammern aufgrund der Prägnanz ebenso bewährt.
- (iii). Zusammenfassend zeichnet sich ein regelmäßiger endlicher oder unendlicher Kettenbruch dadurch aus, dass alle Teilzähler den Wert 1 annehmen. [21, 5]

2.3 Endliche Kettenbrüche

Definition (Endliche Kettenbrüche). Für den endlichen Kettenbruch (2.1) wurde die prägnante Schreibweise

$$b_0 + \frac{c_1}{b_1} + \frac{c_2}{b_2} + \cdots + \frac{c_i}{b_i}$$

eingeführt. [21]

In der Literatur findet man noch weitere Abwandlungen dieser gedrängten Schreibweise. Eine Ausführung dieser minimalen Veränderungen ist vernachlässigbar, kann jedoch im Werk von Perron (1977) [21] eingesehen werden.

2.3.1 Näherungsbrüche und Matrixdarstellung endlicher regelmäßiger Kettenbrüche

Das Kapitel 2.3.1 beschäftigt sich zunächst mit Näherungsbrüchen endlicher Kettenbrüche. Dabei handelt es sich, vereinfacht formuliert, um den Bruch, der entsteht, wenn man die Kettenbrüche nach k Schritten abbricht. Die Bedeutung der Näherungsbrüche liegt vor allem darin, dass sie Näherungsbrüche steigender Komplexität liefern. Überdies besitzen Näherungsbrüche besondere Eigenschaften, die folglich nicht unterschlagen werden sollen.

Definition (Näherungsbrüche). Die zu dem Kettenbruch $\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_i]$ gehörenden Näherungsbrüche $\frac{C_n}{B_n} = \alpha^{(n)} = [b_0; b_1, \dots, b_n]$ heißen Näherungsbrüche n -ter Ordnung für $n \in \{0, 1, 2, \dots, i\}$. Bei endlichen Kettenbrüchen sind der letzte Näherungsbruch und der Kettenbruch per se identisch. C_n wird als Näherungszähler und B_n als Näherungsnenner n -ter Ordnung bezeichnet. Beim n -ten Näherungsbruch werden die ersten $n + 1$ Glieder miteinbezogen. Die letzten $i - n$ Glieder werden schlichtweg weggelassen. [21]

Wir wollen explorativ die Näherungsbrüche der Ordnung 0, 1 und 2 angeben. Dazu sei α ein regelmäßiger endlicher Kettenbruch der Form $\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_i]$.

Wir fassen nun den Kettenbruch α als rationale Funktion auf, und geben die Funktionswerte für $n = 0, 1, 2$ an. [21]

$$\alpha^{(0)} = [b_0] = \frac{b_0}{1}, \quad (2.4)$$

$$\alpha^{(1)} = [b_0; b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + 1}{b_1}, \quad (2.5)$$

$$\alpha^{(2)} = [b_0; b_1, b_2] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2}} = \frac{b_0 b_1 b_2 + b_0 + b_2}{b_1 b_2 + 1}. \quad (2.6)$$

Wie man ohnehin erkennen kann, gewinnen die Polynome des Quotienten zunehmend an Komplexität, wodurch die Berechnung weiterer Funktionswerte immens langwierig wird. Hierfür ist es praktischer, sich der Theorie zu bedienen, die durch Rekursion eine Möglichkeit zur Berechnung des n -ten Näherungsbruchs bietet. Die ausführliche Herleitung mittels Rekursion zur Entwicklung eines n -ten Näherungsbruchs ist im Werk von Perron (1977) [21] dargelegt.

Satz 2.1. Sei $\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_i]$ ein beliebiger regelmäßiger Kettenbruch und sei $\alpha^{(n)} = [b_0; b_1, \dots, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}^*$ und $0 \leq n \leq i$ der zugehörige Näherungsbruch n -ter Ordnung, dann gilt

$$\begin{aligned} C_0 &:= b_0, & B_0 &:= 1 & \text{für } n = 0 \\ C_1 &:= b_0 b_1 + 1, & B_1 &:= b_1 & \text{für } n = 1 \\ \text{und } C_n &:= b_n \cdot C_{n-1} + C_{n-2}, & B_n &:= b_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2} & \text{für } n \geq 2. \end{aligned} \quad [24]$$

Beweis. Die Näherungsbrüche $\alpha^{(0)} = \frac{C_0}{B_0}$ und $\alpha^{(1)} = \frac{C_1}{B_1}$ wurden bereits zuvor explorativ entwickelt und sind somit als gültig zu klassifizieren. Mittels Induktionsbeweis soll gezeigt werde, dass für alle Näherungsbrüche $\alpha^{(n)}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\alpha^{(n)} = \frac{C_n}{B_n} = \frac{b_n \cdot C_{n-1} + C_{n-2}}{b_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2}} \quad (2.7)$$

- *Induktionsanfang:* Der Fall $n = 2$, siehe (2.6), wurde ebenfalls bereits in den Vorüberlegungen verifiziert.
- *Induktionsschritt:* Es gelte die obige rekursive Formel zur Entwicklung des n -ten Näherungsbruchs eines allgemeinen Kettenbruchs. Zu zeigen ist, dass der Ausdruck (2.7) für alle $\alpha^{(n+1)}$ gilt. Wir verwenden dafür die Identität

$$[b_0; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}] = \left[b_0; b_1, \dots, b_n + \frac{1}{b_{n+1}} \right],$$

spricht, man kann jeden allgemeinen Kettenbruch mit $n + 2$ Gliedern durch einen Kettenbruch mit $n + 1$ Gliedern ausdrücken.

Wir setzen $\left[b_0; b_1, \dots, b_n + \frac{1}{b_{n+1}} \right] := [\beta_0; \beta_1, \dots, \beta_n]$ mit $b_v = \beta_v$ für alle $0 \leq v \leq n-1$.

Außerdem ist $\frac{1}{b_{n+1}} := \beta_n$. Wir erkennen, dass die ersten n Glieder der beiden Kettenbrüche übereinstimmen, und somit auch deren Näherungsbrüche $\frac{C_v}{B_v}$ für $0 \leq v < n$.

Im nächsten Schritt betrachten wir den Näherungsbruch $\alpha^{(n+1)}$.

$$\begin{aligned}
\alpha^{(n+1)} &= [b_0; b_1, \dots, b_n, b_{n+1}] = \left[b_0; b_1, \dots, b_n + \frac{1}{b_{n+1}} \right] = \\
&= [\beta_0; \beta_1, \dots, \beta_n] = \frac{\beta_n \cdot C_{n-1} + C_{n-2}}{\beta_n \cdot B_{n-2} + B_{n-1}} = \\
&= \frac{(b_n + \frac{1}{b_{n+1}}) \cdot C_{n-1} + C_{n-2}}{(b_n + \frac{1}{b_{n+1}}) \cdot B_{n-1} + B_{n-2}} = \\
&= \frac{b_n b_{n+1} C_{n-1} + C_{n-1} + b_{n+1} C_{n-2}}{b_n b_{n+1} B_{n-1} + B_{n-1} + b_{n+1} B_{n-2}} = \\
&= \frac{b_{n+1} \cdot (b_n C_{n-1} + C_{n-2}) + C_{n-1}}{b_{n+1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2}) + B_{n-1}} = \\
&= \frac{b_{n+1} C_n + C_{n-1}}{b_{n+1} B_n + B_{n-1}} = \frac{C_{n+1}}{B_{n+1}}
\end{aligned}$$

Somit wurde die rekursive Formel zur Ermittlung des $(n+1)$ -ten Näherungsbruchs gezeigt, wodurch der Ausdruck auch für die Ermittlung von Näherungsbrüchen der Ordnung n zulässig ist. [24]

□

Bemerkungen:

- (i). Die Beweisführung mittels vollständiger Induktion ist streng genommen nur zulässig, wenn allgemeine Kettenbrüche betrachtet werden, da bei regulären Kettenbrüchen mit $b_n, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ der Ausdruck $\beta_n = b_n + \frac{1}{b_{n+1}}$ nur für $b_{n+1} = 1$ ganzzahlig ist. [24]
- (ii). Der Ausdruck (2.7) zur Ermittlung von Näherungsbrüchen regelmäßiger Kettenbrüche kann durch eine simple Adaption Gültigkeit für alle Kettenbrüche erlangen. [24]

$$\alpha^{(n)} = \frac{C_n}{B_n} = \frac{b_n \cdot C_{n-1} + c_n \cdot C_{n-2}}{b_n \cdot B_{n-1} + c_n \cdot B_{n-2}} \quad (2.8)$$

Beispiel. Bestimme alle möglichen Näherungsbrüche von $\frac{43}{9} = [4; 1, 3, 2]$.

Hierfür eignet sich am besten folgende Tabelle zur Übersichtlichkeit.

n	0	1	2	3
b_n	4	1	3	2
C_n	4	5	19	43
B_n	1	1	4	9

Es könnte an dieser Stelle die Frage auftreten, weshalb $C_2 = 19$ ist. Diese Zahl wurde durch $C_2 = b_2 \cdot C_1 + C_0 = 3 \cdot 5 + 4 = 19$ gefunden. Weiteres ist anzumerken, dass der Näherungsbruch der 3. Ordnung, also $\frac{C_3}{B_3} = \frac{43}{9}$, genau dem Ausgangsbruch $\frac{43}{9}$ entspricht. [24]

Lemma 2.2 (Matrixdarstellung der Näherungsbrüche). *Mit den vorhergehend verwendeten Bezeichnungen gilt: Die Formel (2.7) zur Bildung von Näherungsbrüchen beliebiger Kettenbrüche ergibt in Matrixdarstellung (beachte $(C_n = 1)$)*

$$\begin{pmatrix} C_{n-1} & C_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_n & C_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} C_{-1} & C_{-2} \\ B_{-1} & B_{-2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ergibt sich durch wiederholte Anwendung:}$$

$$\begin{pmatrix} C_n & C_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^n \begin{pmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. [16]$$

Satz 2.3 (Eigenschaften von Näherungsbrüchen). *Es gelten folgenden Aussagen (mit vorherigen Bezeichnungen):*

- (i). $C_{n+1} > C_n$ und $B_{n+1} > B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- (ii). $\text{ggT}(C_n, B_n) = 1$. Das heißt die Näherungsbrüche $\alpha^{(n)}$ sind irreduzibel bzw. vollständig gekürzt.
- (iii). $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^*$.
- (iv). $C_n \cdot B_{n-2} - C_{n-2} \cdot B_n = b_n \cdot (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$. [16]

Beweis. (i). Für $C_{n+1} = b_{n+1} \cdot C_n + C_{n-1}$ gilt $b_{n+1} \cdot C_n + C_{n-1} \geq C_n + C_{n-1}$, da alle b_n positiv sind für $n \geq 2$. Da alle Zähler der Näherungsbrüche $\alpha^{(n+1)}$ positiv sind, gilt $C_{n+1} > C_n$. Der Beweis ist analog für $B_{n+1} > B_n$ durchzuführen. [24]

- (ii). Wir nehmen an, dass die Beziehung $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ gilt, welches anschließend in Punkt (iii) bewiesen wird. Da der $\text{ggT}(C_n, B_n)$ auch Teiler von $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ sein muss, kann der $\text{ggT}(C_n, B_n)$ nur den Wert $+1$ oder -1 annehmen. Da die Näherungsbrüche somit alle relativ prim sind, liegen sie in ihrer irreduziblen Form vor. [16]

(iii). Zu zeigen ist, dass $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ gilt.

$$C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = \begin{vmatrix} C_n & C_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{vmatrix} = \det \prod_{i=0}^n \begin{pmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^n (-1) = (-1)^{n+1}. [16]$$

(iv). Durch das Ersetzen von $C_n := b_n C_{n-1} + C_{n-2}$ und $B_n := b_n B_{n-1} + B_{n-2}$, folgt aus dem vorherigem Beweis:

$$\begin{aligned} C_n \cdot B_{n-2} - C_{n-2} \cdot B_n &= (b_n C_{n-1} + C_{n-2}) \cdot B_{n-2} - C_{n-2} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2}) = \\ &= b_n C_{n-1} B_{n-2} + C_{n-2} B_{n-2} - C_{n-2} b_n B_{n-1} - C_{n-2} B_{n-2} = \\ &= b_n \cdot (C_{n-1} B_{n-2} - C_{n-2} B_{n-1}) = b_n \cdot (-1)^n. [16] \end{aligned}$$

□

Man benötigt das Wissen über Näherungsbrüche eines Kettenbruches unter anderem auch, um einen Kettenbruch in einen gewöhnlichen Bruch umzuwandeln. Genauere Ausführungen dazu, folgen unmittelbar in Kapitel 2.3.2.

2.3.2 Kettenbruchdarstellung rationaler Zahlen

Um eine rationale Zahl in die Gestalt eines Kettenbruches umzuwandeln, ist es notwendig sich zuallererst mit der Eindeutigkeit der Division mit Rest und anschließend mit einem der ältesten Algorithmen, dem Euklidischen Algorithmus, auseinanderzusetzen.

Satz 2.4 (Division mit Rest). *Sei $a, b \in \mathbb{N}$ und $b > 1$, dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$, mit*

$$a = bq + r \text{ mit } 0 \leq r < b.$$

Beweis. Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird die Existenz gezeigt und anschließend wird die Eindeutigkeit von q und r bewiesen. Die Beweisführung folgt im Wesentlichen den Ausführungen aus dem Buch *Reiss und Schmieder (2014)*. [22]

(i). **Existenz:** Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig und $b \neq 1$.

Fall I ($a < b$): Wir erhalten die offensichtliche Lösung $q = 0$ und $r = a$ aus $a = b \cdot 0 + a$.

Fall II ($a \geq b$): Sei $r = a - bq$ das kleinste Element, das durch Division von a und b entsteht. Angenommen $r \geq b$, dann folgt nach dem Umformen der Ungleichung

$r = a - qb \geq b \Rightarrow a - (q+1) \cdot b \geq 0$. Das führt zum Widerspruch, dass r das kleinste Element sein muss. Somit gilt $0 \leq r < b$ und folglich ist $a = bq + r$ eine valide Darstellung von a , wodurch die Existenz von q und r bewiesen wurde. [22]

(ii). **Eindeutigkeit:** Seien $q, \tilde{q}, r, \tilde{r} \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $0 \leq r, \tilde{r} < b$.

Angenommen $a = b\tilde{q} + \tilde{r} = bq + r$. Durch Umformen erhält man $b \cdot (\tilde{q} - q) = r - \tilde{r}$. Somit gilt $\tilde{q} \geq q$. Da nun außerdem $(\tilde{q} - q) \geq 0$ ist, folgt, dass der Ausdruck $(\tilde{q} - q) \cdot b \geq 0$ sein muss, und daher auch $r - \tilde{r} \geq 0$ gilt. Wir wissen laut Voraussetzung, dass $r - \tilde{r} < b$ ist, da für $r, \tilde{r}$ nur Elemente der Menge $\{0, 1, \dots, b-1\}$ herangezogen werden dürfen. Daher ist auch $b \cdot (\tilde{q} - q) = r - \tilde{r} < b$. Es folgt aus $b \cdot (\tilde{q} - q) < b$, dass $(\tilde{q} - q) = 0$ ist. Somit gilt $q = \tilde{q}$. Da nun $r - \tilde{r} = b \cdot (\tilde{q} - q) = 0 \Rightarrow r - \tilde{r} = 0 \Rightarrow r = \tilde{r}$, wodurch die Eindeutigkeit von q und r gezeigt wurden. [22]

□

Satz 2.5 (Der Euklidische Algorithmus). *Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b < a$ und $b \nmid a$. Durch wiederholtes Dividieren mit Rest wird der $\text{ggT}(a, b)$, der größte gemeinsame Teiler von a und b , auf folgende Weise bestimmt:*

$$\begin{array}{ll}
 a = q_0 \cdot b + r_1 & \text{mit } 0 < r_1 < b \\
 b = q_1 \cdot r_1 + r_2 & \text{mit } 0 < r_2 < r_1 \\
 r_1 = q_2 \cdot r_2 + r_3 & \text{mit } 0 < r_3 < r_2 \\
 \vdots & \vdots \\
 r_{i-2} = q_{i-1} \cdot r_{i-1} + r_i & \text{mit } 0 < r_i < r_{i-1} \\
 r_{i-1} = q_i \cdot r_i &
 \end{array}$$

Dann ist $r_i = \text{ggT}(a, b)$. [22]

Beweis. Wir verwenden nun die Eindeutigkeit der Division mit Rest (Satz 2.4). Durch die wiederholte Division mit Rest erhält man eine Folge $r_1, r_2, \dots, r_i \in \mathbb{N}$ der Reste. Für diese Folge gilt $0 < r_i < r_{i-1} < \dots < r_2 < r_1$. Aufgrund der Existenz eines kleinsten Elements in der Menge der natürlichen Zahlen, muss der Euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten abbrechen. Außerdem haben wir vorausgesetzt, dass $b < a$ ist, wodurch unsere Folge der Reste zumindest ein Element besitzt. Es folgt $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \dots = \text{ggT}(r_{i-2}, r_{i-1}) = \text{ggT}(r_{i-1}, r_i) = \text{ggT}(r_i, 0) = r_i$. Somit ist $r_i \in \mathbb{N}$ der kleinste Rest der Folge und schließlich der größte gemeinsame Teiler von a und b . [22]

□

Beispiel. Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 85 und 242 durch Anwendung des Euklidischen Algorithmus. Wir gehen nun folgendermaßen vor:

$$242 = 2 \cdot 85 + 72$$

$$85 = 1 \cdot 72 + 13$$

$$72 = 5 \cdot 13 + 7$$

$$13 = 1 \cdot 7 + 6$$

$$7 = 1 \cdot 6 + 1$$

$$6 = 6 \cdot 1$$

Daraus folgt, dass $\text{ggT}(242, 85) = 1$ ist.

Aus dem Euklidischen Algorithmus lässt sich ein wichtiges Lemma, der sogenannte *Satz von Bézout* folgern. Dieses Lemma wird zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal aufgegriffen.

Lemma 2.6 (Satz von Bézout). *Sei $ax + by = c$ eine lineare Gleichung mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Diese Gleichung besitzt genau dann ganzzahlige Lösungen, wenn $\text{ggT}(a, b) \mid c$. [19]*

Da nun das nötige Vorwissen erarbeitet wurde, wird nun anhand von Beispielen erklärt, wie die Kettenbruchentwicklung mit der Darstellung einer rationalen Zahl zusammenhängt.

Beispiel (Umwandlung eines Bruchs in einen regelmäßigen endlichen Kettenbruch). Zu Beginn wollen wir den Bruch $\frac{43}{9}$ mittels simpler Umformungen in einen regulären Kettenbruch verwandeln. Anschließend wollen wir überprüfen, ob durch die Verwendung des Euklidischen Algorithmus ein effizienterer und schnellerer Lösungsweg möglich ist.

▪ **Variante 1:**

$$\frac{43}{9} = 4 + \frac{7}{9} = 4 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}.$$

in Kurzschreibweise entspricht der Kettenbruch $[4; 1, 3, 2]$.

▪ **Variante 2: (Euklidischer Algorithmus)** Wir bestimmen den größten gemeinsamen

Teiler von 43 und 9 mittels Euklidischem Algorithmus.

$$\begin{aligned} 43 &= \boxed{4} \cdot 9 + 7 \\ 9 &= \boxed{1} \cdot 7 + 2 \\ 7 &= \boxed{3} \cdot 2 + 1 \\ 2 &= \boxed{2} \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Dies führt unmittelbar zur Kettenbruchdarstellung $[4; 1, 3, 2]$, welche mit obiger Darstellung ident ist. [22]

Bemerkung: Obwohl der Bruch einfach gehalten wurde, kann man bereits die Vorzüge des Euklidischen Algorithmus erkennen, vor allem die Fehleranfälligkeit aufgrund der Übersichtlichkeit des Algorithmus ist immens reduziert.

Beispiel (Umwandlung eines Kettenbruchs in einen gewöhnlichen Bruch). Es werden drei verschiedene Varianten zur Umwandlung eines Kettenbruchs in einen Bruch angeführt. Variante 1 hat den Vorteil anschaulicher zu sein, wohingegen Variante 2 nicht nur für regelmäßige, sondern für alle endlichen Kettenbrüche anwendbar ist und somit aufgrund der theoretischen Bedeutsamkeit nicht vorenthalten werden soll. Variante 3 beruht auf Vorkenntnis des Bildungsgesetzes von Näherungsbrüchen.

- **Variante 1:** Hierbei wird der reguläre Kettenbruch von "hinten nach vorne" bzw. "von unten nach oben" umgewandelt, sprich

$$4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 4 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 4 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 4 + \frac{7}{9} = \frac{43}{9}.$$

- **Variante 2:** Wir betrachten zunächst den allgemeinen bzw. theoretischen Weg, bevor wir die Theorie durch ein Zahlenbeispiel veranschaulichen.

Gegeben sei der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{c_1}{|b_1|} + \frac{c_2}{|b_2|} + \cdots + \frac{c_i}{|b_i|},$$

der in einen gewöhnlichen Bruch umgewandelt werden soll. Wir setzen zunächst $b_i = \alpha_i$ und $\alpha_n = b_n + \frac{c_{n+1}}{b_{n+1}} + \cdots + \frac{c_i}{b_i}$ mit $n = 0, 1, \dots, i - 1$. Daraus folgt, dass man die

gewünschten $\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}$ durch

$$\alpha_0 = b_0 + \frac{c_1}{\alpha_1}, \alpha_1 = b_1 + \frac{c_2}{\alpha_2}, \dots, \alpha_{i-1} = b_{i-1} + \frac{c_i}{\alpha_i}$$

sukzessive berechnen kann, wobei α_0 die gesuchte Darstellung des Kettenbruchs ist. Wir wollen nun den Kettenbruch

$$4 + \frac{7}{3} + \frac{9}{5} + \frac{4}{1}$$

in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln. Wie auch in Variante 1 zuvor, starten wir von hinten mit der Entwicklung in einen gewöhnlichen Bruch, so ist

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = 5 + \frac{4}{1} = 9, \alpha_3 = 3 + \frac{9}{9} = 3 + 1 = 4, \alpha_0 = 4 + \frac{7}{4} = \frac{23}{4},$$

wodurch wir mit $\alpha_0 = \frac{23}{4}$ unsere gesuchte rationale Zahl in Form eines gewöhnlichen Bruchs gefunden haben. [21]

- **Variante 3:** Zu einem endlichen Kettenbruch können mittels Lemma 2.2 alle $n + 1$ Näherungsbrüche für $0 \leq n \leq i$ gefunden werden, wobei der letzte Näherungsbruch genau dem ursprünglichem Bruch entspricht. [21]

Diese eben gewonnenen Erkenntnisse können nun in folgendem Satz festgehalten werden, der des Weiteren auch eine wichtige Eigenschaft endlicher Kettenbrüche darstellt.

2.3.3 Eigenschaften endlicher Kettenbrüche

Satz 2.7. Jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ kann in einen endlichen regulären Kettenbruch entwickelt werden. Weiteres gilt auch die Umkehrung der Aussage. Mit anderen Worten: Jeder endliche reguläre Kettenbruch stellt eine rationale Zahl $\frac{n}{m}$ dar. [21]

Beweis. ($\Rightarrow$) Das Vorgehen des Beweises dieser Richtung beruht auf dem Euklidischen Algorithmus, der zuerst ausgeführt wird, um im nächsten Schritt zu zeigen, wie die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl erfolgt.

Sei $\alpha_0 = \frac{n}{m}$ eine rationale Zahl größer 0, und der ggT(n, m) laute r_i . Wir führen nun den

Euklidischen Algorithmus für $i + 1$ Schritte aus:

$$n = b_0 \cdot m + r_1 \text{ mit } 0 \leq r_1 < m$$

$$m = b_1 \cdot r_1 + r_2 \text{ mit } 0 \leq r_2 < r_1$$

$\vdots$

$$r_{i-1} = b_i \cdot r_i$$

Um nun zu zeigen, dass eine rationale Zahl $\frac{n}{m}$ in eine Kettenbruch übergeführt werden kann, setzen wir schrittweise ein.

$$\begin{aligned} \frac{n}{m} &= b_0 + \frac{r_1}{m} = b_0 + \frac{1}{\frac{m}{r_1}} = \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{r_2}{r_1}} = \dots = \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \\ &\quad \dots \frac{1}{b_{i-1} + \frac{r_i}{r_{i-1}}} \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2} \dots \frac{1}{b_{i-1} + \frac{1}{b_i}}}} \end{aligned}$$

Dies führt zur gesuchten endlichen regelmäßigen Kettenbruchform der rationalen Zahl $\frac{n}{m}$.

($\Leftarrow$) Die Umkehrung der Aussage folgt aus der Definition endlicher regelmäßiger Kettenbrüche und ist somit trivial. [21] □

Satz 2.8. Jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ kann auf eindeutige Weise durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt werden, deren letzter Teilnenner $b_i \geq 2$ ist. [21]

Beweis. Sei $\alpha = [b_0; b_1, \dots, b_i]$ ein beliebiger endlicher regulärer Kettenbruch mit $b_i \geq 2$. Die Existenz der Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl $\frac{n}{m}$ wurde bereits in Satz 2.7 gezeigt. Offensichtlich ist α größer als b_0 . Im nächsten Schritt setzen wir

$$\alpha_n := [b_n; b_{n+1}, \dots, b_i] \text{ mit } n \in \{0, 1, \dots, i\}$$

und daraus folgt, dass

$$\alpha_{n-1} = [b_{n-1}; b_n, \dots, b_i] = [b_{n-1}; \alpha_n] \text{ mit } n \in \{1, 2, \dots, i\}. \quad (2.9)$$

Wegen $i = n$ muss $\alpha_n = \alpha_i = b_i \geq 2$ sein, da $1 \leq n < i$ ist und $\alpha_n > 1$ für $n \in \{1, 2, \dots, i\}$. Außerdem gilt $\alpha_n > b_n \geq 1$. Die Zahl b_{n-1} ist die größte ganze Zahl, die in α_{n-1} enthalten ist, wegen der Gleichung (2.9). Daher ist b_0 die größte ganze Zahl in α_0 und eindeutig. Dies lässt sich nun für alle b_n aus α_n feststellen. [21] $\square$

Lemma 2.9. *Jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ lässt sich auf eindeutige Weise in einen endlichen, regulären Kettenbruch mit gerader bzw. ungerader Anzahl an Gliedern entwickeln.*

$$\frac{n}{m} = [b_0; b_1, \dots, b_i] = [b_0; b_1 \dots, b_i - 1, 1]$$

Beweis. Die Behauptung ist korrekt, da

$$[b_i - 1, 1] = b_i - 1 + \frac{1}{1} = b_i.$$

Die Aussage ist trivialerweise auch für $n = 0$ gültig. [21] $\square$

2.3.4 Geometrische Deutung

Wie bereits vorhergehend mehrfach angewendet und gezeigt, kann durch den Euklidischen Algorithmus der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen gefunden werden. Überdies bricht der Algorithmus ab, wenn die beiden gewählten Zahlen ganz sind. Daher ist es von noch größerem Interesse, zu welchen Ergebnissen die Anwendung des Euklidischen Algorithmus bei zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, wenn $a, b > 0$ ist, führt. Diese Betrachtung mit $a, b \in \mathbb{R}$ wird vermutlich den Beschreibungen Euklids am ehesten gerecht, da die Entscheidung, ob zwei Strecken als Vielfache derselben Grundeinheit gelten, sprich, ob sie *kommensurabel* sind, durch den Euklidischen Algorithmus getroffen werden kann. Es muss jedoch angemerkt werden, dass Euklid noch keine Kenntnis von reellen Zahlen hatte. [22]

Definition (Kommensurable Strecken). Zwei Strecken X_1, X_2 mit den zugehörigen Längen x_1 bzw. x_2 heißen *kommensurabel*, wenn zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ und eine Strecke L mit der Länge l existieren, sodass gilt

$$x_1 = a \cdot l \text{ und } x_2 = b \cdot l. \text{ [22]}$$

Ein Zugang den Euklidischen Algorithmus anschaulich darzustellen, wenn x_1, x_2 und l beliebige reelle Zahlen sind, ist das mehrmalige Abtragen auf der jeweils längeren Strecke. Angenommen X_1 ist länger als X_2 , dann trägt man X_2 so oft wie möglich auf der Strecke X_1 ab. Der dabei entstandene Rest wird danach mehrfach auf der Strecke X_2 abgetragen. Dieses Verfahren

kann mehrmalig wiederholt werden. Es bleibt jedoch durch diese Vorgehensweise offen, ob es sich hierbei immer um ein endliches Verfahren handelt oder nicht. Es ist aber offensichtlich, dass der Rest immer kleiner werden muss. [22]

Wir wollen folglich betrachten, unter welcher Bedingung Strecken mit beliebiger Längen kommensurabel sind.

Satz 2.10. *Zwei Strecken X_1, X_2 mit den zugehörigen Längen x_1 bzw. x_2 sind genau dann kommensurabel, wenn $\frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{Q}$ ist. [22]*

Beweis. ($\Rightarrow$) Angenommen, die Strecken X_1, X_2 sind kommensurabel, somit gilt wegen der Definition der Kommensurabilität der Strecken

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a \cdot l}{b \cdot l} = \frac{a}{b},$$

wobei $a, b \in \mathbb{N}$, da die Längen der Strecken positiv sind. Es folgt, dass $\frac{x_1}{x_2}$ eine rationale Zahl ist.

($\Leftarrow$) Gilt $\frac{a}{b} = \frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{Q}$ (mit $a, b \in \mathbb{N}$), dann folgt $x_1 = a \cdot \frac{x_2}{b}$ und $x_2 = b \cdot \frac{x_2}{b}$. Die Behauptung ist erfüllt, wenn $l = \frac{x_2}{b}$ ist. [22] $\square$

Bemerkungen: Logischerweise führt dieser Satz dazu, dass es Strecken gibt, die inkommensurabel sind. Ein Beispiel hierfür ist die Diagonale des Einheitsquadrats mit der Länge $\sqrt{2}$, da $\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. [22]

Um nun eine Entscheidung über die Kommensurabilität zweier Strecken treffen zu können, bietet sich wiederum der Euklidische Algorithmus an. Anders als zuvor geometrisch durch Abtragen auf der jeweils größeren Strecke vorgestellt, verwendet man nun die Längen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. [22]

Wir wenden nun den Euklidischen Algorithmus an. Im Falle $x_1 = x_2$ sind die beiden Strecken kommensurabel und $l = x_1 = x_2$. Angenommen $x_1 \neq x_2$, dann wird o. B. d. A. $x_1 > x_2$ vorausgesetzt. Somit ist

$$x_1 = q_1 \cdot x_2 + x_3 \text{ mit } q_1 \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq x_3 < x_2,$$

$$x_2 = q_2 \cdot x_3 + x_4 \text{ mit } q_2 \in \mathbb{N} \text{ und } 0 \leq x_4 < x_3,$$

$$\vdots$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} &= q_1 + \frac{x_3}{x_2} = q_1 + \frac{1}{\frac{x_2}{x_3}}, \\ \frac{x_2}{x_3} &= q_2 + \frac{x_4}{x_3} = q_2 + \frac{1}{\frac{x_3}{x_4}}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Diese vorhergehende Struktur lässt bereits die Kettenbruchform für $\frac{x_1}{x_2}$ erahnen:

$$\frac{x_1}{x_2} = q_1 + \frac{x_3}{x_2} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{x_3}{x_4}}} = \dots \quad [22]$$

Bemerkung: Handelt es sich um kommensurable Strecken, also ist der Quotient $\frac{x_1}{x_2}$ eine rationale Zahl, dann bricht der Euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten ab. Im Übrigen ist auch die Umkehrung dieser Aussage korrekt. [22]

Eine Möglichkeit zur Veranschaulichung endlicher regelmäßiger Kettenbrüche bietet die Darstellung mittels Vierecken. Durch dieses grafische Verfahren können die Teilnenner des Kettenbruches gefunden werden. Hierfür wird als Exempel $\frac{43}{9}$ herangezogen, da die Kurzschreibweise für diesen Bruch $[4; 1, 3, 2]$ bekannt ist und überdies mehrfach durch unterschiedlichste Verfahren überprüft wurde. Das grafische Verfahren läuft immer nach demselben Schema ab. Dazu wird ein Rechteck mit den Längen $a = 43$ und $b = 9$ konstruiert. Nun versucht man so viele Quadrate mit der Seitenlänge $b = 9$ wie möglich in das große Rechteck einzuschreiben. Insgesamt gelingt das bei unserem Beispiel viermal und eine 7×9 große Rechtecksfläche bleibt übrig. Folglich schreibt man ein Quadrat mit der Seitenlänge 7 einmal ein, wodurch ein 7×2 großes Rechteck noch ungenutzt bleibt. Das Verfahren wird so fortgesetzt, bis die ganze Fläche ausgefüllt wurde. Es ergibt sich die Darstellung in Abbildung 1. Um die prägnante

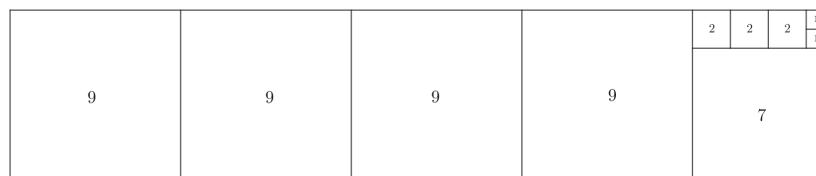


Abbildung 1: Grafisches Verfahren regelmäßiger Kettenbrüche

Schreibweise des endlich regulären Kettenbruchs herauszufinden, muss man schlichtweg die

Anzahl der gleich großen Quadrate abzählen und erhält somit $\frac{43}{9} = [4; 1, 3, 2]$. [14]

2.4 Unendliche Kettenbrüche

Ähnlich zur Definition endlicher Kettenbrüche werden die unendlichen Kettenbrüche eingeführt. Alle reellen Zahlen können mithilfe unendlicher Kettenbrüche dargestellt werden. Das gilt somit auch für transzendente Zahlen, wie die Eulersche Zahl e und π . Die Kettenbruchentwicklung der beiden eben genannten transzendenten Zahlen kann in Kapitel 2.4.2 eingesehen werden. Für die Mathematik sind vor allem unendliche regelmäßige Kettenbrüche von großer Bedeutung, weshalb sich die Ausführungen im folgenden Kapitel auf diese beschränkt.

Definition (Unendliche Kettenbrüche). Ein formaler unendlicher regelmäßiger Kettenbruch hat die allgemeine Form:

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_n \in \mathbb{N}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Die Bezeichnungen für allgemeine Kettenbrüche behalten weiterhin ihre Gültigkeit. Des Weiteren unterscheidet man zwischen unendlichen nicht-periodischen und unendlichen periodischen Kettenbrüchen. [21]

Periodische regelmäßige Kettenbrüche:

Wir beginnen mit dem Spezialfall der periodischen regulären Kettenbrüche, bei dem alle Teilnenner b gleich sind, also

$$\alpha_0 = [b; b, b, b, \dots].$$

Etwas allgemeiner bezeichnet man als reinperiodischen Kettenbruch, einen Kettenbruch der Gestalt

$$\beta_0 = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_0, b_1, b_2 \dots b_{j-1}, b_0, \dots].$$

Die Teilnenner $b_0; b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$ bilden hierbei die sogenannte Periode. Der Kettenbruch β_0 kann prägnanter notiert werden, durch

$$\beta_0 = [\overline{b_0; b_1, b_2, \dots, b_{j-1}}].$$

Es gilt, dass b_0 stets positiv ist, da es an späterer Stelle wiederholt wird, und $b_n = b_{n+j}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Folglich sind alle Näherungsbrüche positiv.

Im Gegensatz zu reinperiodischen Kettenbrüchen, beginnt bei gemischtperiodischen Ketten-

brüchen die Periode beispielsweise erst bei b_j , sprich

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= [b_0; b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_{n+j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots] = \\ &= [b_0; b_1, \dots, b_{j-1}, \overline{b_j, b_{j+1}, \dots, b_{n+j-1}}].\end{aligned}$$

Eine Periode heißt imprimitiv, wenn sie durch Zusammenfassen kleinerer Perioden gebildet werden kann. Andernfalls wird die Periode als primitiv bezeichnet. [21]

Die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche wird als Nächstes behandelt.

2.4.1 Eigenschaften unendlicher Kettenbrüche

Definition (Konvergenz unendlicher Kettenbrüche). Ein unendlicher Kettenbruch $[b_0; b_1, \dots]$, mit der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ganzer Zahlen mit $b_n \geq 1$ für $n \geq 1$ als Teilnenner, konvergiert, wenn die Folge der Näherungsbrüche $\frac{C_n}{B_n}$ konvergiert. [16]

Um nun die Konvergenz unendlicher regelmäßiger Kettenbrüche zu zeigen, genügt es, nachzuweisen, dass die Folge gerader Näherungsbrüche $\frac{C_{2n}}{B_{2n}}$ streng monoton wächst, und die Folge ungerader Näherungsbrüche $\frac{C_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ streng monoton fällt und die Differenz der beiden Näherungsbrüche $\frac{C_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{C_{2n}}{B_{2n}}$ gegen 0 strebt. Es sind die Folgenglieder der Näherungsbrüche also alternierend kleiner und größer als der Grenzwert ϵ . [16]

Lemma 2.11. Die Folge der Näherungsbrüche $\frac{C_n}{B_n}$ ist konvergent, wenn die Folge der Näherungsbrüche $\frac{C_{2n}}{B_{2n}}$ streng monoton wächst und die Folge der Näherungsbrüche $\frac{C_{2n+1}}{B_{2n+1}}$ streng monoton fällt und des Weiteren die Differenz $\frac{C_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{C_{2n}}{B_{2n}}$ gegen 0 strebt. [16]

Beweis. Wie schon in Satz 2.3 gezeigt, gilt folgender Zusammenhang für Näherungsbrüche $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Durch Division von $B_n B_{n-1}$ erhält man

$$\frac{C_n}{B_n} - \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{B_n B_{n-1}}.$$

Weitere Umformungen führen zu

$$\frac{C_n}{B_n} = \frac{C_0}{B_0} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{C_i}{B_i} - \frac{C_{i-1}}{B_{i-1}} \right) = \frac{b_0}{1} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{(-1)^{i+1}}{B_i B_{i-1}} \right).$$

Nach dem Kriterium von Leibniz konvergiert die alternierende Reihe, da die Terme $\frac{1}{B_n B_{n-1}}$ eine streng monotone Nullfolge bilden. Folglich konvergiert auch die Folge der Näherungsbrüche $\frac{C_n}{B_n}$.

Nun muss noch die strenge Monotonie gezeigt werden. Wie ebenfalls in Satz 2.3 bewiesen, gilt $C_n \cdot B_{n-2} - C_{n-2} \cdot B_n = b_n \cdot (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Durch Division von $B_n B_{n-2}$ erhält man

$$\frac{C_n}{B_n} - \frac{C_{n-2}}{B_{n-2}} = (-1)^n \cdot \frac{b_n}{B_n B_{n-2}}.$$

Die Glieder b_n, B_n, B_{n-2} sind ≥ 1 für alle $n \geq 2$, woraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{für } n \text{ gerade gilt} & \quad \frac{C_n}{B_n} > \frac{C_{n-2}}{B_{n-2}}, \\ \text{für } n \text{ ungerade gilt} & \quad \frac{C_n}{B_n} < \frac{C_{n-2}}{B_{n-2}}. \end{aligned} \quad [16]$$

□

Satz 2.12. Sei $[b_0; b_1, \dots]$ ein unendlicher Kettenbruch. Dann konvergiert die Folge der Brüche $\frac{C_n}{B_n} = [b_0; b_1, \dots, b_n]$ für $n \in \mathbb{N}^*$. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{B_n B_{n+1}} > \left| \epsilon - \frac{C_n}{B_n} \right|, \text{ wobei } \epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}. \quad [16] \quad (2.10)$$

Beweis. Sei $\epsilon = [b_0; b_1, \dots, b_n, \epsilon_n]$ mit $\epsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\epsilon_n > b_{n+1}$. So kann ϵ durch

$$\epsilon = \frac{\epsilon_n \cdot C_n + C_{n-1}}{\epsilon_n \cdot B_n + B_{n-1}}$$

dargestellt werden. Durch Einsetzen erhält man

$$\epsilon - \frac{C_n}{B_n} = \frac{\epsilon_n \cdot C_n + C_{n-1}}{\epsilon_n \cdot B_n + B_{n-1}} - \frac{C_n}{B_n} = \frac{C_{n-1} B_n - C_n B_{n-1}}{B_n \cdot (\epsilon_n B_n + B_{n-1})} = \frac{(-1)^{n+1}}{B_n \cdot (\epsilon_n B_n + B_{n-1})}.$$

Wegen $\epsilon_n > b_{n+1}$, folgt

$$\left| \epsilon - \frac{C_n}{B_n} \right| = \frac{1}{B_n \cdot (\epsilon_n B_n + B_{n-1})} < \frac{1}{B_n \cdot (b_{n+1} B_n + B_{n-1})} < \frac{1}{B_n B_{n+1}}.$$

Es lässt sich daraus ablesen, dass die Folge der Brüche $\frac{C_n}{B_n}$ gegen ϵ konvergiert. [16] □

Korollar 2.13. Jeder unendlich reguläre Kettenbruch konvergiert. Es gilt $[b_0; b_1, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_0; b_1, \dots, b_n]$. [16]

Bemerkung: Wegen Satz 2.12 werden die Brüche $\frac{C_n}{B_n}$ als Näherungsbrüche bezeichnet. [16]

Satz 2.14. *Ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch stellt eine irrationale Zahl ϵ dar. Des Weiteren gilt auch die Umkehrung, dass jede irrationale Zahl ϵ auf eindeutige Weise durch einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch dargestellt werden kann. [21]*

Beweis. ($\Rightarrow$) Zu zeigen ist, dass ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch eine irrationale Zahl ϵ darstellt.

Wie bereits in Satz 2.4.1 und 2.12 nachgewiesen, konvergiert ein unendlicher regelmäßiger Kettenbruch gegen einen Grenzwert ϵ .

Sei nun $\epsilon = [b_0; b_1, \dots]$ ein unendlicher Kettenbruch und $\beta'_n = [b_n; b_{n+1}, \dots]$ der n -te vollständige Quotient, das bedeutet, dass die Teilnenner $b_0, \dots, b_{n-1}$ weggelassen wurden. Daher ist

$$\begin{aligned}\beta'_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} [b_n; b_{n+1}, \dots, b_N] = \\ &= b_n + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{[b_{n+1}; \dots, b_N]} = b_n + \frac{1}{\beta'_{n+1}}\end{aligned}$$

und folglich ist

$$\epsilon = b_0 + \frac{1}{\beta'_1} = \beta'_0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}b_n &< \beta_n, \\ 0 &< b_{n+1} < \beta_n + 1', \\ 0 &< \frac{1}{\beta'_{n+1}} < 1,\end{aligned}$$

und somit ist $[\beta'_n] = b_n$. Sei nun ϵ eine irrationale Zahl, dann wissen wir bereits, dass der Euklidische Algorithmus nicht abbricht und durch dessen fortgesetzte Durchführung eine unendliche Reihe ganzer Zahlen $b_0, b_1, \dots$ entsteht. Wie zuvor können wir nun ϵ folgendermaßen ausdrücken,

$$\epsilon = [b_0; \beta'_1] = \dots = [b_0; b_1, \dots, b_n, \beta'_{n+1}],$$

wobei $b_{n+1} < \beta'_{n+1} = b_{n+1} + \frac{1}{\beta'_{n+2}}$ ist. Wenn man nun den Näherungsbruch $\frac{C_{\beta'_{n+1}}}{B_{\beta'_{n+1}}}$ bestimmt, erhält man

$$\frac{C_{\beta'_{n+1}}}{B_{\beta'_{n+1}}} = \frac{\beta'_{n+1} \cdot C_n + C_{n-1}}{\beta'_{n+1} \cdot B_n + B_{n-1}} = \epsilon.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\epsilon - \frac{C_n}{B_n} &= \frac{\beta'_{n+1} \cdot C_n + C_{n-1}}{\beta'_{n+1} \cdot B_n + B_{n-1}} - \frac{C_n}{B_n} = \\ &= \frac{C_{n-1}B_n - C_nB_{n-1}}{B_n(\beta'_{n+1}B_n + B_{n+1})} = \\ &= \frac{(-1)^n}{B_n(\beta'_{n+1}B_n + B_{n+1})}.\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$, geht gegen 0, wegen

$$\left| \epsilon - \frac{C_n}{B_n} \right| < \frac{1}{B_n(b_{n+1}B_n + B_{n+1})} = \frac{1}{B_nB_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0.$$

Schließlich ist

$$\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n} = [b_0; b_1, \dots],$$

wodurch die Existenz gezeigt wurde. [10]

($\Leftarrow$) Jede irrationale Zahl ϵ kann auf eindeutige Weise durch einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch dargestellt werden

Zunächst wird die Existenz einer solchen Kettenbruchentwicklung gezeigt und danach deren Eindeutigkeit.

Existenz: Die Existenz ist aufgrund des nicht-abbrechenden Euklidischen Algorithmus gegeben. Würde der Kettenbruchalgorithmus an einer gewissen Stelle abbrechen, wäre $\epsilon \in \mathbb{Q}$.

Eindeutigkeit: Sei $\epsilon = [b_0; b_1, \dots] \in \mathbb{I}$. Wir setzen $\epsilon_n = [b_n; b_{n+1}, \dots]$ mit $n \in \{1, 2, \dots\}$. Somit kann ϵ_{n-1} durch $\epsilon_{n-1} = [b_{n-1}; b_n, b_{n+1}, \dots]$ ausgedrückt werden. Es folgt, dass $\epsilon_{n-1} = [b_{n-1}; \epsilon_n] = b_{n-1} + \frac{1}{\epsilon_n}$. Folglich ist b_{n-1} die größte ganze Zahl von ϵ_{n-1} , wegen $1 \leq b_n < \epsilon_n$, und als solche eindeutig bestimmt. Diese Argumentation ist entsprechend für alle weiteren Teilnenner weiter zu führen, wodurch eine irrationale Zahl ϵ auf eindeutige Weise durch einen unendlichen regulären Kettenbruch dargestellt wird. [21] $\square$

2.4.2 Beispiele unendlicher Kettenbrüche

Kettenbruchdarstellung von quadratischen Irrationalzahlen

Gesucht sei die Kettenbruchdarstellung von $x = \sqrt{2}$. Dazu ist die bereits bekannte Anwendung

des Euklidischen Algorithmus notwendig, wodurch

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ &= 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}},\end{aligned}$$

oder in prägnanter Notation $x = [1; \bar{2}]$, entsteht. [10]

Bemerkung: Die Kettenbruchdarstellung von quadratischen Irrationalzahlen ist stets periodisch, siehe dazu *Satz von Lagrange* (Lemma 4.6).

Kettenbruchdarstellung des goldenen Schnitts

Die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ bzw. $x = \frac{x+1}{x}$ entspricht $x = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$. Dieses Ergebnis ist überdies die Lösung des Teilungsverhältnisses $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$ des goldenen Schnitts. Durch Umformen des Verhältnisses $x = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ lässt sich bereits im letzten Term eine Kettenbruchstruktur erkennen. Dadurch lässt sich die Zahl $x = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$ bzw. der goldene Schnitt durch den unendlichen periodischen Kettenbruch $[1; 1, 1, \dots]$ darstellen. [24]

Subtrahiert man vom unendlichen, periodischen Kettenbruch $[1; 1, 1, \dots]$ die Zahl 1, so erhält man den Kettenbruch $[0; 1, 1, \dots]$, wodurch man zur Kehrzahl von $x = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$, $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$, gelangt. [24]

Betrachtet man nun die Folge der Näherungsbrüche von $[0; 1, 1, \dots]$,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$$

genauer, so fällt unmittelbar auf, dass die Folge der Teilzähler und die Folge der Teilnenner jeweils der Fibonacci-Folge entsprechen. [22]

Kettenbruchdarstellung transzendenter Zahlen

Bevor man sich mit der Kettenbruchdarstellung von π und der Eulerschen Zahl e beschäftigt, ist eine Begriffserklärung von *transzendenten Zahlen* unumgänglich.

Definition (Transzendenz). Eine Zahl x heißt transzendent, wenn x keine Lösung einer algebraischen Gleichung der Form $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ mit $a_k \in \mathbb{Q}$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ist. Ist x hingegen eine Lösung einer solchen Gleichung, wird x als algebraische Zahl bezeichnet. [23]

Obwohl die folgenden Kettenbruchentwicklungen nicht periodisch sind, sind die Zahlen, die

sie beschreiben zentral für mathematische Berechnungen und daher von großer Bedeutung.

(i). *Kettenbruchentwicklung von π :*

Die Kreiszahl π kann durch einen unendlichen Kettenbruch der Gestalt

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \dots]$$

dargestellt werden. Durch die Ermittlung von Näherungsbrüchen von π können gute Approximationen an die Kreiszahl gefunden werden. Berechnet man beispielsweise den Näherungsbruch der 3. Ordnung, erhält man

$$\pi^{(3)} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = 3 + \frac{16}{133} \approx 3,14159292\dots$$

Die Wahl, den Näherungsbruch der Ordnung 3 zu bestimmen, war keinesfalls zufällig. Die nachfolgende Zahl 292, die für den Näherungsbruch 4. Ordnung herangezogen werden muss, ist nämlich vergleichsweise groß. Man erhält daher schon durch den 3. Näherungsbruch eine exzellente Approximation an π . Auf diese Thematik wird in Kapitel 4 noch einmal genauer eingegangen. [23]

(ii). *Kettenbruchentwicklung von e :*

Die Eulersche Zahl e kann in folgenden unendlichen Kettenbruch entwickelt werden:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

Obwohl die Kettenbruchdarstellung der Eulerschen Zahl e nicht periodisch ist, lässt sich ein Muster zur Fortsetzung erkennen. [23]

Bemerkung: Die Kettenbruchentwicklung der Eulerschen Zahl e kann zum Beweis der Transzendenz von e verwendet werden.

2.5 Anwendungen

Kettenbrüche finden Anwendung in vielerlei unterschiedlichen Gebieten, darunter Astronomie, Technik oder Physik. Besonders interessant, und vermutlich für jeden zugänglich, ist die Festlegung von Schaltjahren. Ein Jahr hat bekanntlich mehr als 365 Tage, um genau zu sein 365d 5h 48m 45,8s, oder anders notiert hat ein Jahr genau $365 + \frac{104629}{432000}$ Tage. Dieser Bruch $\frac{104629}{432000}$ kann in den endlichen regulären Kettenbruch $[0; 4, 7, 1, 3, 6, 2, 1, 170]$ umgewandelt werden. Im Laufe der Geschichte wurden unterschiedliche Näherungsbrüche herangezogen, um ein Kalenderjahr festzulegen. Im alten Ägypten wurden Schaltjahre nicht berücksichtigt.

Diese Festlegung entspricht den Näherungsbruch der Ordnung 0. Es war jedoch üblich, dass in einem größeren Abstand einige Tage zusätzlich hinzugefügt wurden. [24]

Julius Cäsar führte im Jahre 46 vor Christus den julianischen Kalender ein, der alle 4 Jahre ein Schaltjahr mit 366 Tagen vorsieht. Hierfür wird der Näherungsbruch 1. Ordnung mit $[0; 4] = \frac{1}{4}$ verwendet. Bald stellte sich heraus, dass diese Form des Kalenders ebenfalls unzureichend ist, da der Kalender der Jahreszeit um 10 Tage hinterherhinkte. [24]

Aus diesem Grund führte 1582 *Papst Gregor XIII.* den sogenannten gregorianischen Kalender ein. Dieser Kalender berücksichtigt den Näherungsbruch $[0; 4, 7, 1, 3, 6] = \frac{194}{800} \approx \frac{1}{4} - \frac{6}{800}$ und ist auch zum heutigen Zeitpunkt noch gültig. Dabei gilt die Schaltjahrregelung, dass alle 4 Jahre ein Schaltjahr ist, außer in den Jahren, die durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind. So war beispielsweise das Jahr 1900 kein Schaltjahr, 2000 hingegen war ein Schaltjahr, weil die Zahl 2000 durch 400 teilbar ist. [24]

2.6 Kettenbrüche im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse

Kettenbrüche werden im schulischen Setting nur selten behandelt, obwohl eine Auseinandersetzung mit dieser Thematik viele Vorteile für Lernende mit sich bringen könnte. Bereits 1962 wies *Moore* darauf hin, dass die Beschäftigung mit Kettenbrüchen im Unterricht das kreative Denken der Schüler:innen anregen kann. Außerdem kann die Aufarbeitung der wichtigsten Eigenschaften der Kettenbrüche Interesse an wichtigen Propositionen der Zahlentheorie wecken. *Moore* richtet sich in seinem Artikel gezielt an Lehrende höherbildender Schulen und pocht darauf im Unterricht auf verkürzte Schreibweisen der Kettenbrüche zu verzichten, damit Neugier aufgrund des neuen Schemas geweckt und die Thematik anschaulicher wird. Ein weiterer positiver Aspekt bei der Behandlung von Kettenbrüchen im Schulunterricht ist, dass Schüler:innen selbstständig Muster entdecken lernen. Hierfür soll folgendes Beispiel stellvertretend herangezogen werden. Wie in Kapitel 2.3.1 bereits erläutert, können alle möglichen Näherungsbrüche von $\frac{43}{9} = [4; 1, 3, 2]$ am übersichtlichsten durch eine Tabelle der Form

n	0	1	2	3
b_n	4	1	3	2
C_n	4	5	19	43
B_n	1	1	4	9

dargestellt werden. Bildet man nun die Kreuzprodukte der aufeinanderfolgenden C_n und B_n , erhält man:

$$5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 1$$

$$19 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -1$$

$$43 \cdot 4 - 19 \cdot 9 = 1$$

Dies liefert bereits einen Hinweis auf die Gültigkeit von $C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}^*$. [15] Es soll jedoch an dieser Stelle angemerkt sein, dass eine größere Tabelle das Muster selbstverständlich besser erkennen lassen würde, aber das Wesen des didaktischen Konzeptes ist auch an diesem prägnanten Beispiel ersichtlich.

Moore proklamiert, dass durch die Beschäftigung mit Kettenbrüchen und irrationalen Zahlen im Unterricht, Lernende ein tiefgreifendes Verständnis für die Verbindung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen gewinnen. Es wird empfohlen, auf quadratische Irrationalzahlen zurückzugreifen und diese mithilfe einer rationalen Zahl zu approximieren. Anschließend wäre ein Vergleich der Dezimaldarstellung der rationalen und der irrationalen Zahl sinnvoll, da man erkennt, dass die irrationale Zahl sehr gut durch Näherungsbrüche approximiert werden kann. [15] Ein weiterer und offensichtlicher Vorteil, der sich durch die Arbeit mit Kettenbrüchen ergibt, ist, dass Schüler:innen routinierter im Umgang mit Brüchen werden, so wird beispielsweise das Umformen von Brüchen zur Selbstverständlichkeit. [20]

3 Farey-Folgen

3.1 Einführung

In Kapitel 3 werden Farey-Folgen mitsamt deren wichtigsten Eigenschaften eingeführt. Grundsätzlich liefern Farey-Folgen, genauso wie Kettenbrüche, eine weitere Möglichkeit zur Darstellung reeller Zahlen, weshalb sie in vorliegender Arbeit aufgegriffen werden. Inwiefern Farey-Folgen und die Diophantische Approximation zusammenhängen, wird abschließend in Kapitel 4 ausführlich erörtert. Kapitel 3 soll sich voll und ganz den Farey-Folgen als solche widmen und deren historische und theoretische Grundlagen darlegen.

3.1.1 Historische Betrachtung

Die Bezeichnung Farey-Folgen geht auf den Geologen *John Farey* zurück. Der britische Geologe *Farey* wies im Jahre 1816 in seinem Bericht "*On a curious Property of vulgar Fractions.*"[6] auf Besonderheiten von spezifischen echten Brüchen hin. Erst *Cauchy*, der bekannte französische Mathematiker, gab Beweise für die von *Farey* erkannten Eigenschaften und Zusammenhänge. Es stellte sich jedoch heraus, dass schon 14 Jahre zuvor, also 1802, *Haros* ein mathematisches Konstrukt beschrieb, dass den Farey-Folgen im Wesentlichen gleicht. *Haros* veröffentlichte nämlich einen Artikel zur Approximation von Dezimalbrüchen durch echte Brüche und beschrieb darin die Farey-Folge für $n = 99$. [18] *Haros* bewies bereits zwei wichtige Eigenschaften der Farey-Folgen, die wir unter anderem in Kapitel 3.3 genauer beleuchten.

(i). Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zwei aufeinanderfolgende Brüche einer Farey-Folge F_n , dann gilt $|rq - ps| = 1$.

(ii). Wenn $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \frac{t}{u}$ drei aufeinanderfolgende Brüche einer Farey-Folge F_n sind, dann gilt $\frac{r}{s} = \frac{p+t}{q+u}$. [29]

3.2 Definition

Definition (Farey-Folgen). Die Farey-Folge F_n für $n \in \mathbb{N}$ ist eine der Größe nach geordnete Liste aller gekürzten Brüche mit Nenner $\leq n$ im Intervall $[0; 1]$. Als Menge aufgefasst, gilt also:

$$F_n := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : 0 \leq p \leq q \leq n \text{ und } p, q \text{ relativ prim} \right\}. [19]$$

Bemerkungen:

- (i). Wenn zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ relativ prim sind, bedeutet das, dass der $\text{ggT}(p, q) = 1$ ist. Man sagt auch, dass die beiden Zahlen p, q teilerfremd sind.
- (ii). Im englischen Sprachraum werden Farey-Folgen als *Farey sequence* oder *Farey series* bezeichnet, wobei letzter Begriff irreführend ist, da die Brüche nicht summiert werden.
- (iii). Auch im deutschsprachigen Raum gibt es diese Ungenauigkeit bei der Bezeichnung, da Farey-Folgen häufig mit den Begriffen Farey-Brüche oder Farey-Reihen gleichgesetzt werden. [19]

Beispiel. Wir betrachten folglich die ersten 5 Farey-Folgen. [19]

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \\
 F_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \\
 F_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \\
 F_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\
 F_5 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Durch obige Ausführungen ist unmittelbar erkennbar, dass $F_n \subset F_{n+1}$ gilt. Ab einem gewissen Index n ist jede rationale Zahl des Intervalls $[0, 1]$ in der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ enthalten. Die Menge der rationalen Zahlen ist bekannterweise abzählbar und die Definition der Farey-Folgen liefert:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \quad [19]$$

Die Vereinigung entspricht wegen $F_n \subset F_{n+1}$ gerade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n. \quad [19]$$

Definition (Benachbarte Elemente). Zwei Elemente derselben Farey-Folge F_n , $n \in \mathbb{N}$, die aufeinander folgen, werden *benachbart* genannt. [19]

3.3 Eigenschaften

Satz 3.1. [Nachbarbrüche] Es gilt $qr - ps = 1$, wenn $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ benachbarte Elemente der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ sind. [19]

Beweis. Wir betrachten die lineare Gleichung $qx - py = 1$. Da p und q laut Definition teilerfremd sind, besitzt die gegebene Gleichung nach dem *Satz von Bézout* (siehe Lemma 2.6) ganzzahlige Lösungen x, y . Aus der Gleichung ergibt sich, dass auch die Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind. Division durch qy ergibt:

$$\frac{x}{y} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qy}.$$

Wir nehmen an, dass $\frac{x}{y} > \frac{r}{s}$, wodurch folgt

$$\frac{x}{y} - \frac{r}{s} = \frac{xs}{ys} - \frac{ry}{ys} = \frac{xs - ry}{ys}$$

und dadurch ist

$$\frac{xs - ry}{ys} \geq \frac{1}{ys}.$$

Weiters ist

$$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{rq - sp}{sq} \geq \frac{1}{sq}.$$

Folglich ist

$$\frac{x}{y} - \frac{p}{q} = \frac{x}{y} - \frac{r}{s} + \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{ys} + \frac{1}{sq} = \frac{q + y}{sqy} > \frac{n}{sqy}.$$

Das führt dazu, dass $s > n$, welches einen Widerspruch zu $\frac{r}{s} \in F_n$ erzeugt. Dadurch muss $\frac{r}{s} \geq \frac{x}{y}$ gelten. Laut Voraussetzung gilt, dass $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ Nachbarbrüche sind, weshalb $\frac{r}{s} = \frac{x}{y}$ sein muss, also ist $qx - py = qs - pr = 1$. [19] $\square$

Definition (Mediante). Seien $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zwei Elemente der Farey-Folge F_n , dann heißt $\frac{p+r}{q+s}$ *Mediante* von $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$. [19]

Satz 3.2 (Mediante). Sei $\frac{p+r}{q+s}$ die Mediante von $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ und $\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s}$, dann gilt

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p+r}{q+s} \leq \frac{r}{s}. [25]$$

Beweis. Die Gleichheit ist offensichtlich nur dann zutreffend, wenn $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ist. [25] Wir betrachten nun den Fall $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$. Wir ersetzen nun $\frac{p+r}{q+s}$ durch $\frac{x}{y}$, also $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$. Wegen Satz 3.1 gilt für zwei Nachbarbrüche $qx - py = 1$ und $ry - sx = 1$. Multipliziert man nun mit p und r , erhält man durch anschließende Addition $x(qr - ps) = p + r$. Die Multiplikation mit q und s mit darauffolgender Addition liefert $y(qr - ps) = q + s$. Daraus folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{x(qr - ps)}{y(qr - ps)} = \frac{p+r}{q+s}. [19]$$

□

Bemerkungen:

- (i). Die Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ kann durch wiederholte Mediantenbildung aus $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ erzeugt werden. [19]
- (ii). Für zwei Elemente $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ aus der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ ist die Mediante aus F_{q+s} . [25]
- (iii). Die Mediante entspricht einem Mittelwert und ist nicht monoton. Das kann durch einfache Zahlenbeispiele überprüft werden, zum Beispiel ist

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{4} \text{ und } \frac{23}{36} < \frac{2}{3}, \text{ aber } \frac{1+23}{5+36} = \frac{24}{41} > \frac{3}{7} = \frac{1+2}{4+3}.$$

Dieses Phänomen wird *Simpson-Paradoxon* genannt und es gibt unendlich viele Zahlenbeispiele für dieses Paradoxon. [19] Vor allem im Bereich der Statistik ist das Simpson-Paradoxon häufig anzutreffen. [25]

Lemma 3.3. Seien $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \frac{t}{u}$ drei aufeinanderfolgende Brüche einer Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\frac{r}{s} = \frac{p+t}{q+u}$. [29]

Bemerkung: Lemma 3.3 ist im Wesentlichen lediglich eine Umformulierung des Satzes 3.2, denn zwischen zwei aufeinander folgenden Brüchen $\frac{p}{q} < \frac{t}{u}$ liegt die Mediante der Form $\frac{r}{s} := \frac{p+t}{q+u}$.

Nicht nur die Eigenschaften der Mediante und die der Nachbarbrüche sind bemerkenswert und von besonderem Interesse, sondern auch die Länge der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$, da es eine Verbindung zur *Eulerschen Phi-Funktion* $\varphi(n)$ gibt. Die Länge der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$,

und somit die Anzahl der Brüche, wird als $|F_n|$ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen der Länge der Farey-Folge $|F_n|$ und der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$ kann folgendermaßen dargestellt werden: [26]

n	$ F_n $	$\varphi(n)$
1	$2=1+\boxed{1}$	1
2	$3=1+1+\boxed{1}$	1
3	$5=1+1+1+\boxed{2}$	2
4	$7=1+1+1+2+\boxed{2}$	2
5	$11=1+1+1+2+2+\boxed{4}$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Satz 3.4 (Länge der Farey-Folge F_n). *Die Länge der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ ist:*

(i).

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n), \quad (3.1)$$

(ii). *anders formuliert:*

$$|F_n| = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k),$$

wobei $\varphi(n)$ der Eulerschen Phi-Funktion entspricht.

(iii). *Die Länge der Farey-Folge F_n kann durch*

$$|F_n| \approx \frac{3n^2}{\pi^2},$$

approximiert werden. [10] [26]

Beweis. (i). Sei E_n die Menge der Elemente der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$, die nicht in der Folge F_{n-1} enthalten sind, also ist $|F_n| = |F_{n-1}| + |E_n|$.

Es bleibt zu zeigen, dass $|E_n|$ der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$ entspricht. Dazu sei für jeden Bruch $\frac{a}{b} \in E_n$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1$ der Nenner $b = n$, da ansonsten $\frac{a}{b} \in F_{n-1}$ wäre. Die Mächtigkeit der Menge E_n entspricht der Anzahl der natürlichen Zahlen a zwischen 1 und n , für die der Bruch $\frac{a}{n}$ irreduzibel ist, also der $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist. Daraus folgt, dass somit $|E_n| = \varphi(n)$ ist. [27]

- (ii). Wir haben schon in der Tabelle oberhalb des Satzes 3.3 intuitiv festgestellt, dass dieser Zusammenhang zwischen der Mächtigkeit der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ und der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$ besteht. Es gilt $|F_1| = 1 + \varphi(1) = 1$. Es soll nun gezeigt werden, dass dieser Zusammenhang für jede Farey-Folge F_n mit $n > 1$ gilt. Hierfür benötigen wir die Notation aus Satz 3.3 (i):

$$\begin{aligned}
 |F_n| &= |F_{n-1}| + \varphi(n) \\
 &= |F_{n-2}| + \varphi(n-1) + \varphi(n) \\
 &\vdots \\
 &= |F_1| + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \cdots + \varphi(n) \\
 &= 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k). \quad [27]
 \end{aligned}$$

- (iii). Eine genauere Auseinandersetzung mit der Eulerschen Phi-Funktion $\varphi(n)$ würde den Rahmen sprengen, daher können genauere Informationen über diese Funktion dem Werk von Hardy und Wright (2008) [10] entnommen werden. An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass für die Summenfunktion der Eulerschen Phi-Funktion

$$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) = \frac{3n^2}{\pi^2} + O(n \log n)$$

gilt, wobei O das Landau-Symbol bezeichnet. Da die Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ genau $\Phi(n) + 1$ Elemente enthält, kann die Kardinalität von F_n durch $\frac{3n^2}{\pi^2}$ angenähert werden, mit einem Fehler, der nicht größer ist als eine Konstante mal $n \log n$. [10]

□

3.4 Stern-Brocot Baum

Der Stern-Brocot Baum wird grundsätzlich dazu verwendet, um alle Brüche einer Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ zu finden. Wie der Name Stern-Brocot Baum vermuten lässt, waren der deutsche Mathematiker *Moritz Stern* und der französische Uhrmacher *Achille Brocot* Entdecker des unendlich fortsetzbaren Baumes. Außergewöhnlich ist aber, dass die beiden diese Darstellung unabhängig voneinander innerhalb von wenigen Jahren entwickelten und veröffentlichten. [3]

Um den Aufbau des Stern-Brocot Baumes zu verstehen, ist einzig das Wissen über die

Mediantenbildung notwendig, sprich die Mediante zweier Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ ist $\frac{p+r}{q+s}$. So entsteht aus den Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ die Mediante $\frac{1}{2}$. Eine essentielle Eigenschaft der Medianten wird überdies tragend, und zwar, dass die Mediante zweier Brüche immer zwischen den beiden Brüchen selbst liegt. [3]

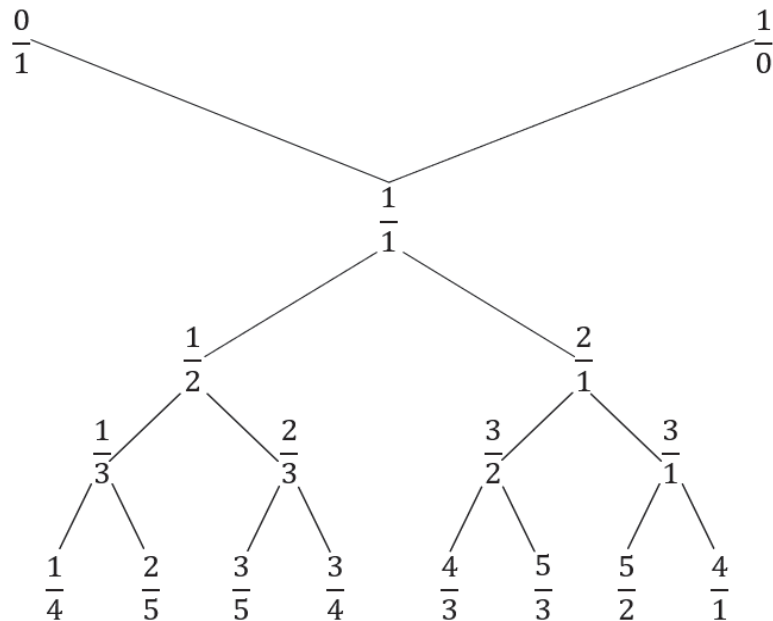


Abbildung 2: Stern-Brocot Baum [3]

Obwohl zu Beginn der unzulässige Quotient $\frac{1}{0}$ herangezogen wird, stellt es eine gute Möglichkeit dar, alle gesuchten positiven Brüche zu ermitteln.

Satz 3.5 (Stern-Brocot Baum). *Im Stern-Brocot Baum tritt jeder mögliche positive Bruch in seiner reduzierten Form nur ein einziges Mal auf.* [3]

Beweis. Aus Satz 3.1 ist bekannt, dass für zwei Nachbarbrüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ gilt:

$$qr - ps = 1 \quad (3.2)$$

Prüft man diese Relation für die beiden Ausgangsbrüche $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$, führt dies mit $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ zu einer wahren Aussage. Auch die Mediante muss diese Aussage erfüllen, also gilt für

$$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}.$$

$$q(p+r) - p(q+s) = 1$$

$$r(q+s) - s(p+r) = 1.$$

Da für $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ gilt, dass $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ ist, wird die natürliche Ordnung der Brüche eingehalten. Das bedeutet aber auch, dass kein Bruch zweimal oder öfter vorkommen kann.

Nun bleibt zu zeigen, dass jeder vorkommende Bruch im Stern-Brocot Baum in seiner reduzierten Form vorkommt. Sei hierfür $\frac{a}{b}$ ein Bruch mit $\text{ggT}(a, b) = 1$, sprich der Bruch ist irreduzibel. Wir wollen zeigen, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ an irgendeiner Stelle des Stern-Brocot Baumes auftritt. So lange dies nicht der Fall ist, gilt folgende Relation

$$\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$$

für einige Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$, die die Gleichung 3.2 erfüllen. Durch Umformungen von $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ um, erhält man

$$0 < aq - pb \text{ und } 0 < rb - sa.$$

Das impliziert

$$1 \leq aq - pb \text{ und } 1 \leq rb - sa.$$

Die Multiplikation von $p+q$ bzw. $r+s$ und anschließender Addition der beiden Ausdrücke führt zu

$$(r+s)(aq-pb) + (p+q)(rb-sa) \geq p+q+r+s.$$

Durch Umformungen und Anwendung von (3.2) erhält man

$$a+b \geq p+q+r+s$$

mit der Folgerung, dass nach maximal $a+b$ Schritten der Mediantenbildung ein Bruch dem Bruch $\frac{a}{b}$ entspricht. [3] □

Eine weitere Besonderheit des Stern-Brocot Baumes bemerkte der Kanadier *Pierre Lamothe* während seiner Forschungen im Bereich der Musik. Wie eben gezeigt, haben wir es bei den Brüchen des Stern-Brocot Baumes ausschließlich mit reduzierten Brüchen zu tun. Wenn man nun die Reihen des Baumes einzeln betrachtet und jeden Bruch $\frac{a}{b}$ der gewählten Reihe durch $\frac{1}{ab}$ ersetzt, ergibt die Summe stets 1. Betrachtet man nun die ersten 3 Reihen, kann die Behauptung vorerst verifiziert werden. [3]

Reihe n	Brüche $\frac{a}{b}$ der Reihe n	Summe der Brüche $\frac{1}{ab}$
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1} = 1$
1	$\frac{1}{2}, \frac{2}{1}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
2	$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$

Um zu beweisen, dass diese Behauptung auch für alle weiteren Reihen gilt, müssen wir auf die Tatsache zurückgreifen, dass von einem Bruch $\frac{a}{b}$ jeweils zwei Brüche der nachfolgenden Reihe ausgehen, die die Form $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{a+b}{b}$ haben. Der Beweis dieser Eigenschaft ist langwierig, diffizil und im Wesentlichen wenig relevant für diese Abhandlung und wird deshalb ausgespart. Wenn man die Brüche $\frac{a}{a+b}$ und $\frac{a+b}{b}$ wie zuvor umformt, erhält man

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{a+b}{ab(a+b)} = \frac{1}{ab}.$$

Mit anderen Worten bedeutet das, dass wenn die Behauptung für eine Reihe gilt, sie auch für die nächste stimmt. [3]

Nun bleibt zu zeigen, dass die Summe den Wert 1 ergibt, dazu muss man die Brüche gewichten. Reihe 0 enthält den Bruch $\frac{1}{1}$, also definieren wir $N(\frac{1}{1}) = 0$. Für die folgende Reihe 1 setzen wir $N(\frac{1}{2}) = 1$ und $N(\frac{2}{1}) = 1$, et cetera. Die Funktion X der gewichteten Brüche ist definiert durch

$$X\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{ab} \cdot 2^{-N(\frac{a}{b})-1}.$$

Bildet man nun die Summe der gewichteten Brüche, so erhält man stets 1. Wie bereits zuvor erwähnt, muss der reduzierte Bruch $\frac{a}{b}$ des Stern-Brocot Baumes in die Form $\frac{1}{ab}$ übergeführt werden, um die Eigenschaft zu erfüllen. Dieser Schritt ist auch in der Funktion X ersichtlich. Des Weiteren ist anzumerken, dass immer zwei Brüche innerhalb einer Reihe des Stern-Brocot Baumes denselben Wert besitzen, wenn sie nach $\frac{1}{ab}$ umgewandelt wurden, mit Ausnahme der Reihe 0. [3]

3.5 Darstellung von Farey-Folgen: Ford-Kreise

Sogenannte Ford-Kreise beruhen auf der Idee Brüche als Kreise darzustellen und wurden von *Lester R. Ford*, der namensgebend ist, entwickelt.

Wir betrachten folglich echte Brüche, die entlang der x -Achse in einem kartesischen Koordinatensystem als Punkte dargestellt werden können. Sei nun $\frac{n}{m}$ ein solcher irreduzibler Bruch auf der x -Achse mit $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann können wir durch diesen Punkt $\frac{n}{m}$ einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2m^2}$ tangential zur x -Achse im oberen Quadranten konstruieren. [8]

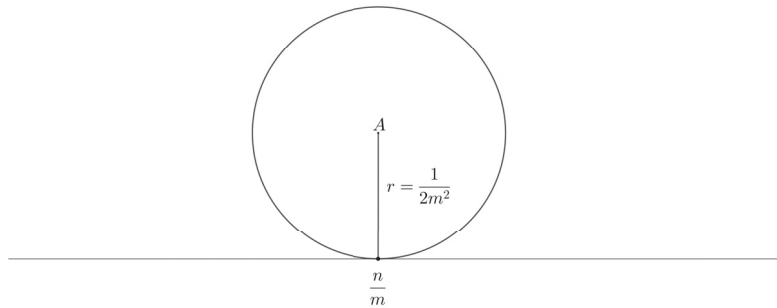


Abbildung 3: Darstellung einer rationalen Zahl als Kreis. [8]

Bemerkung: Für ganze Zahlen hat der Kreis stets einen Radius von $\frac{1}{2}$ und Brüche, deren Nenner 3 ist, zum Beispiel $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, et cetera, können durch Kreise mit Radius $\frac{1}{18}$ dargestellt werden. [8]

Satz 3.6 (Ford-Kreise). Seien $\frac{n}{m}$ und $\frac{N}{M}$ zwei verschiedene Brüche, die in ihrer reduzierten Form vorliegen. Die Ford-Kreise dieser beiden Brüche sind entweder tangential oder vollständig voneinander getrennt, siehe Abbildung 4. [8]

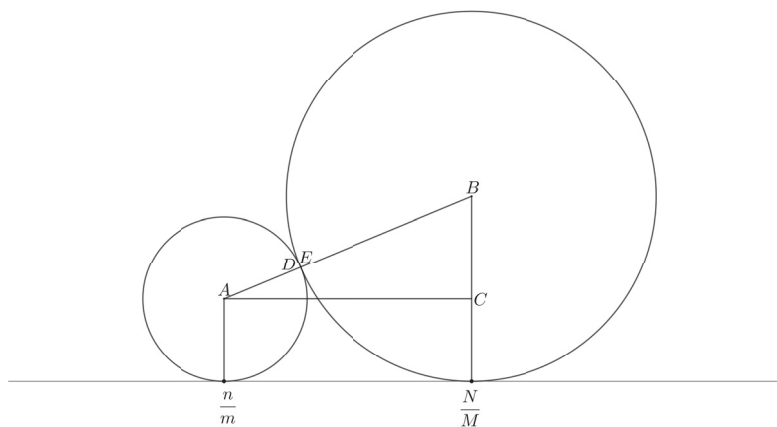


Abbildung 4: Lage zweier Ford-Kreise. [8]

Beweis. Um Aussagen über die Lage der beiden Kreise machen zu können, müssen wir den Abstand der beiden Kreismittelpunkte $\overline{AB}$ genauer betrachten. Der Abstand von $\overline{AC}$

entspricht $|\frac{N}{M} - \frac{n}{m}|$. Die Distanz zwischen den Punkten B und C ist der Radienunterschied $|\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2m^2}|$. Durch Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes folgt

$$AB^2 = (\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2m^2})^2 + (\frac{N}{M} - \frac{n}{m})^2$$

$$AB^2 = (\overline{AD} + \overline{EB})^2 + \frac{(Nm - nM)^2 - 1}{m^2 M^2}.$$

Im Falle $|Nm - nM| > 1$ sind die beiden Kreise vollständig voneinander getrennt, da $\overline{AD} + \overline{EB} < \overline{AB}$.

Für den Fall, dass $|Nm - nM| = 1$ ist, sind die beiden Kreise tangential, sprich sie berühren sich und $\overline{AD} + \overline{EB} = \overline{AB}$.

Es ist jedoch nicht möglich, dass $|Nm - nM| < 1$, da $(Nm - nM) \in \mathbb{Z}$ ist und somit $Nm - nM = 0$ ist. Daraus folgt, dass $\frac{n}{m} = \frac{N}{M}$ ist, wodurch eine Kontradiktion zur Voraussetzung $\frac{n}{m} \neq \frac{N}{M}$ erzeugt wird. [8] $\square$

Definition. Ein Bruch $\frac{N}{M}$ heißt Nachbarbruch zu $\frac{n}{m}$, wenn die beiden Ford-Kreise der Brüche sich berühren, sprich tangential zueinander sind. Die Bedingung $|Nm - nM| = 1$ wird erfüllt. [8]

Satz 3.7. Jeder Bruch $\frac{n}{m}$ besitzt einen benachbarten Bruch. [8]

Beweis. Es existieren zwei Zahlen $N, M \in \mathbb{Z}$, die die Bedingung $|Nm - nM| = 1$ erfüllen, siehe Satz 3.1. Der Beweis erfolgt induktiv. Sei $|m| = 1$, dann ist der Nachbarbruch zu $\frac{n}{1}$ trivialerweise $\frac{(n+1)}{1}$ und die Bedingung ist wegen $|1 \cdot (n+1) - n \cdot 1| = 1$ erfüllt. Wir setzen für den Bruch $\frac{n}{m}$ voraus, dass alle Brüche deren Nenner $< |m|$ ist, Nachbarbrüche besitzen. Dazu sei $x \in \mathbb{Z}$, die zu $\frac{n}{m}$ am nächsten ist, und $y \in \mathbb{Z}$, so ist

$$\frac{n}{m} = x + \frac{y}{m}, \text{ mit } 0 < |y| < |m|$$

Aufgrund von $|y| < |m|$, besitzt der Bruch $\frac{m}{y}$ ebenfalls einen benachbarten Bruch der Form $\frac{a}{b}$, mit $|mb - ya| = 1$.

Der Bruch

$$\frac{N}{M} = x + \frac{b}{a}$$

erfüllt die Bedingung $|Nm - nM| = |(xa + b) \cdot m - (xm + y) \cdot a| = |mb - ay| = 1$, und ist daher ein Nachbarbruch von $\frac{n}{m}$. [8] $\square$

Satz 3.8. Wenn $\frac{N}{M}$ ein Nachbarbruch von $\frac{n}{m}$ ist, dann sind alle Brüche der Form

$$\frac{N_x}{M_x} = \frac{N + xn}{M + xm}, \text{ mit } x \in \mathbb{Z}$$

benachbart zu $\frac{n}{m}$. [8]

Beweis. Durch Einsetzen in die Bedingung $|Nm - nM| = 1$ kann unmittelbar überprüft werden, ob die Brüche der Form $\frac{N_x}{M_x} = \frac{N+xn}{M+xm}$ Nachbarbrüche zu $\frac{n}{m}$ sind.

$$|N_x m - n M_x| = |(N + xn)m - (n(M + xm))| = |Nm - nM| = 1.$$

Die Bedingung ist außerdem erfüllt für die beiden Brüche $\frac{N_x}{M_x}$ und $\frac{N_{x+1}}{M_{x+1}}$, welche somit ebenfalls benachbart sind. [8] $\square$

Bemerkung: Die Ford-Kreise der Brüche $\frac{N_x}{M_x}$ bilden einen Ring um den Bruch $\frac{n}{m}$. Diese Kreise sind überdies allesamt tangential zum Ford-Kreis von $\frac{n}{m}$. Aus

$$\frac{N_x}{M_x} = \frac{N + xn}{M + xm} = \frac{n}{m} + \frac{Nm - nM}{m(M + xm)} = \frac{n}{m} \pm \frac{1}{m^2(x + \frac{M}{m})}.$$

folgt, dass $\frac{n}{m}$ komplett vom Ring der Nachbarbrüche umgeben ist, da sich für n gegen $-\infty$ die Nachbarbrüche von der linken Seite an $\frac{n}{m}$ nähern und für n gegen $+\infty$ nähern sich die Brüche $\frac{N_x}{M_x}$ von der anderen Seite an $\frac{n}{m}$ an. [8]

Korollar 3.9. Zusammenfassend kann aus Satz 3.1 und Satz 3.6 folgender Schluss gezogen werden: Seien $\frac{n}{m} < \frac{N}{M}$ zwei benachbarte Brüche mit $|Nm - nM| = 1$, dann gilt für die zugehörige Medianten dieser beiden Brüche

$$\frac{n}{m} < \frac{n + N}{m + M} < \frac{N}{M},$$

und der Ford-Kreis der Medianten berührt die Ford-Kreise der beiden Brüche $\frac{n}{m}$ und $\frac{N}{M}$. [2]

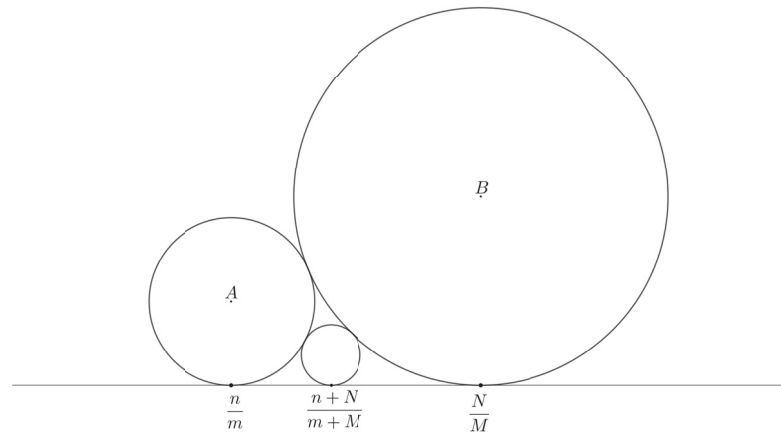


Abbildung 5: Ford-Kreise und der Zusammenhang mit Farey-Folgen. [2]

Beweis. Für $\frac{n}{m} < \frac{n+N}{m+M}$ folgt $|m(n+N) - n(m+M)| = |Nm - nM| = 1$ und aus $\frac{n+N}{m+M} < \frac{N}{M}$ erhält man $|(m+M)N - (n+N)m| = |Nm - nM| = 1$, daher ist $\frac{n+N}{m+M}$ ein Nachbarbruch der beiden Brüche und weil die Bedingung $|Nm - nM| = 1$ erfüllt ist, sind die Ford-Kreise tangential. [2] $\square$

Bemerkung: Aus Korollar 3.9 folgt, dass dieses Verfahren wiederholt angewendet, und somit die Farey-Folge F_n für $n \in \mathbb{N}$ konstruiert werden kann. [2]

3.6 Anwendungen

Farey-Folgen finden Anwendung in der Mechanik, die sich unter anderem mit dem Antrieb durch Zahnräder befasst.

Wie bereits zuvor erwähnt, wurde der Stern-Brocot Baum unabhängig vom Mathematiker *Stern* und dem Uhrmacher *Brocot* entwickelt. Es mag überraschend sein, dass sich ein Uhrmacher mit Zahlentheorie beschäftigt, jedoch war es für seine Arbeiten mit Zahnräder notwendig ein Verhältnis anzunähern, wodurch er einen Algorithmus zur Approximation rationaler Zahlen entwickelte. [11]

Zahnräder werden grundsätzlich dazu verwendet, um die Antriebswelle, in diesem Fall, die des Zeigers, zu reduzieren und zu takten. Angenommen man hat eine Antriebswelle, mit einer Zeitspanne von einer Minute, will jedoch, dass der Stundenzeiger nur eine vollständige Umdrehung pro Tag zurücklegt, dann entspricht das Verhältnis der Geschwindigkeiten $1440 : 1$. Laut mechanischem Gesetz würde das bedeuten, dass man dafür ein kleines Zahnrad, auch Ritzel genannt, mit einem Zahn und ein großes Rad mit 1440 Zähnen benötigt, um den

Stundenzeiger täglich einen vollen Kreis zurücklegen zu lassen. Da Zahnräder mit einem Zahn schwer zu konstruieren sind, müsste man sogar auf die zehnfache Vergrößerung zurückgreifen, dabei wird aber das größere Rad mit 14400 Zähnen zu groß. Eine Möglichkeit dieses Dilemma zu beseitigen, ist das Hintereinandersetzen mehrerer Ritzel ($a, b, \dots$) und Räder ($A, B, \dots$), wodurch das Verhältnis durch die Multiplikation $\frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B}$ errechnet werden kann. An dieser Stelle stellt sich jedoch die Frage, wie die Anzahl der Zähne dieser Räder gefunden werden kann. *Brocot* fand hierfür einen simplen Algorithmus, um gewünschte Verhältnisse so gut wie möglich anzunähern. Er konstruierte zur Erklärung das Beispiel eines Verhältnisses von $\frac{191}{23}$. Da 191 und 23 beide Primzahlen sind, können Zahnräder das Verhältnis nur annähern. Durch Division erkennt man, dass $8 < \frac{191}{23} < 9$ ist. Das heißt, dass das Verhältnis zwischen 8 : 1 und 9 : 1 liegen muss. [11]

Für das Verhältnis 8 : 1 liegt der Fehler bei -7 , weil der Unterschied zwischen $\frac{8 \cdot 23}{23}$ und $\frac{8 \cdot 23}{23} - \frac{191}{23} = \frac{-7}{23}$ ist, und für 9 : 1 liefert es einen Fehler von $+16$, daher schreibt man:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & -7 \\ 9 & 1 & +16. \end{array}$$

Um die Tabelle nun zu vervollständigen, wird in die mittleren Spalte der Tabelle die Zeilen-summe eingetragen. Der errechnete Fehler wird mit der Zahl in der Mitte multipliziert. Die neu gewonnene Zeile wird immer an der Stelle eingefügt, bei der der Fehler verringert wird. So entsteht folgende Tabelle: [11]

$$\begin{array}{ccc} 8 & 1 & -7 \\ 33 & 4 & -5 \\ 58 & 7 & -3 \\ 83 & 10 & -1 \\ 191 & 23 & 0 \\ 108 & 13 & +1 \\ 25 & 3 & +2 \\ 17 & 2 & +9 \\ 9 & 1 & +16. \end{array}$$

Fasst man nun die erste Spalte als Zähler und die zweite Spalte als Nenner auf, erhält man einen kleinen, aber vollständigen Ausschnitt des Stern-Brocot Baumes. [11]

Um noch bessere Approximationen des Verhältnisses zu bekommen, muss man dem Objekt mehrere Zahnräder hinzufügen. Abschließend muss jedoch angemerkt werden, dass dieses Verfahren aufgrund moderner Technologien entbehrlich wurde, da ein Computer nur wenig Zeit benötigt, um die besten Kombinationen mit dem geringsten Fehler zu berechnen. [11]

3.7 Farey-Folgen im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse

Farey-Folgen eignen sich hervorragend für den Einsatz im Unterricht, speziell das Entdecken neuer Strukturen steht bei dieser Thematik im Vordergrund. Des Weiteren kann die Beschäftigung mit Farey-Folgen zu ersten Kontakten mit Beweisen führen. Ein Vorteil für das Arbeiten mit Farey-Folgen ist, dass kein komplexes mathematisches Vorwissen notwendig ist, denn es beschränkt sich auf elementare Bruchrechnungen. Geeignet für den schulischen Kontext ist außerdem die Auseinandersetzung mit Nachbarbrüchen und Medianten, da die Begriffe im Wesentlichen bekannt sind. Schüler:innen wissen nämlich bereits in der 5. Schulstufe, was benachbarte natürliche Zahlen sind, sprich, sie kennen Vorgänger und Nachfolger einer Zahl $n \in \mathbb{N}$. So ist intuitiv verständlich, wie der Begriff auf Brüche ausgedehnt werden kann. Um nun die Kreativität der Schüler:innen zu fördern, könnte man den Lernenden eigene Begriffe für Nachbarbrüche entwickeln lassen und anschließend die Strukturen durch Ausprobieren erfahrbar machen. Der Einsatz von Leitfragen ist eine didaktische Möglichkeit, um den Schüler:innen Hilfestellung beim Erkunden und Entdecken der für sie neuartigen Objekte zu geben. [13]

Auch die Beschäftigung mit Medianten hat ihre Berechtigung im Unterricht, denn vielfach passiert es, dass Schüler:innen Fehler bei der Addition zweier Brüchen $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ machen, und unwissentlich die Medianten $\frac{a+c}{b+d}$ bilden. Oftmals kommt es zur Verwechslung mit dem Prinzip der Multiplikation von Brüchen, sprich es wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner addiert. Es könnte der Vermeidung von Fehlern dienlich sein, eine gedankliche Brücke zu Medianten zu schlagen. Denn durch das Bewusstsein, dass die Mediantenbildung ein Mittel zum Finden eines dazwischenliegenden Bruches zweier Nachbarbrüche ist, könnte hilfreich sein diese zwei Vorgangsweisen nicht zu vertauschen. [13]

Eine mögliche didaktische Herangehensweise wäre es, Phänomene der Farey-Folgen am Beginn der Auseinandersetzung zu thematisieren, um dadurch das Interesse zu wecken und die Motivation der Lernenden zu erhöhen. Durch das Arbeiten mit Farey-Folgen kann unter anderem erreicht werden, dass Mathematik mehr als Prozess betrachtet wird. Wichtig ist es, auf das Niveau und das Alter der Lernenden einzugehen, da das Thema reichlich Potential für Differenzierung bietet, sollte dies kein Problem darstellen. [13]

4 Diophantische Approximation

4.1 Einführung

Die „Diophantische Approximation“ beschäftigt sich mit der Approximation von reellen Zahlen durch rationale Zahlen. Da die Darstellung reeller Zahlen in Form von Dezimalzahlen oft unzureichend aufgrund der approximativen Komponente und in vielen rechnerischen Belangen unhandlich ist, existiert das Bestreben reelle Zahlen durch rationale Zahlen anzunähern. Das folgende Kapitel beschäftigt sich daher mit der Güte der Approximationen durch rationale Zahlen, die unter anderem durch Kettenbrüche oder Farey-Folgen erzielt werden können. Zentrale Sätze des Kapitels 4 sind der *Satz von Dirichlet*, der *Satz von Liouville* und der *Satz von Thue-Siegel-Roth*.

Satz 4.1. *Rationale Zahlen und irrationale Zahlen liegen dicht in der Menge der reellen Zahlen, oder kurz: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$. [12]*

Beweis. Der Beweis gliedert sich in drei Teile, wobei (iii) eine Zusammensetzung der beiden zuvor geführten Abschnitte des Beweises ist.

- (i). *Zu zeigen ist, dass zwischen zwei reellen Zahlen immer zwei rationale Zahlen liegen.* Seien a, b reelle Zahlen, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b < a$. Daraus folgt, dass $0 < a - b$ und $0 < \frac{1}{a-b}$. Die Menge $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt in der Menge $\mathbb{R}$ nach dem archimedischen Axiom. Daher gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{a-b} < k.$$

Setzt man $n := 2 \cdot k$, ergibt das

$$\begin{aligned} \frac{2}{a-b} &< n, \\ nb + 2 &< na. \end{aligned}$$

Sei $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z}$, die größte Zahl, die kleiner oder gleich a ist. Es gilt:

$$\lfloor nb \rfloor + 1 \geq nb \geq \lfloor nb \rfloor.$$

Daraus folgt, dass

$$na > nb + 2 \geq \lfloor nb \rfloor + 2 > \lfloor nb \rfloor + 1 > nb,$$

$$a > \frac{\lfloor nb \rfloor + 2}{n} > \frac{\lfloor nb \rfloor + 1}{n} > b.$$

Bei den beiden Zahlen $\frac{\lfloor nb \rfloor + 2}{n}$, $\frac{\lfloor nb \rfloor + 1}{n}$ handelt es sich um zwei verschiedene rationale Zahlen, die zwischen a und b liegen. [12]

(ii). *Zu beweisen ist, dass zwischen zwei rationalen Zahlen beliebig viele Zahlen aus $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ liegen.*

Seien x, y rationale Zahlen, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x < y$. Wir wissen, dass $1 < \sqrt{2}$, wegen $1^2 < 2$. Somit gilt die folgende Ungleichung für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$0 < y - x < \sqrt{2} \cdot k \cdot (y - x).$$

Durch Umformungen erhält man

$$0 < \frac{y - x}{\sqrt{2} \cdot k} < y - x$$

$$x < x + \frac{y - x}{\sqrt{2} \cdot k} < y.$$

Wir definieren $z := x + \frac{y-x}{\sqrt{2} \cdot k}$. Falls der Ausdruck $x + \frac{y-x}{\sqrt{2} \cdot k}$ eine rationale Zahl wäre, so müsste auch $\frac{y-x}{(z-x) \cdot k} = \sqrt{2}$ eine rationale Zahl sein, was zu einem Widerspruch führt. [12]

(iii). *Zu zeigen ist, dass zwischen zwei reellen Zahlen stets eine irrationale Zahl liegt.*

Wie bereits zu Beginn des Beweises erwähnt, handelt es sich bei Punkt (iii) um eine Aneinanderreihung der beiden vorhergehenden Teile des Beweises. Zunächst bildet man zwischen zwei irrationalen Zahlen zwei rationale Zahlen und danach eine irrationale Zahl, die zwischen den beiden rationalen Zahlen liegt. [12]

□

Reelle Zahlen können beliebig gut durch rationale Zahlen angenähert werden. Die Güte der Approximation, also wie groß der Fehler der Näherung im Vergleich zur Komplexität des Näherungsbruchs ist, spielt dabei aber eine wesentliche Rolle. Bereits bei der Approximation der Kreiszahl π wurde darauf verwiesen, dass es je nach Wahl des Näherungsbruchs Unterschiede

bei der Güte der Approximation gibt.

Wir wissen, dass die Kreiszahl π dem unendlichen Kettenbruch $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots]$ entspricht. Bildet man nun den Näherungsbruch der 3. Ordnung, erhält man $3 + \frac{16}{133}$. Das bedeutet, dass der Wert des Fehlers $3 + \frac{16}{133} - \pi \approx 2,7 \cdot 10^{-7}$ ist. Im Vergleich dazu, ergibt sich für den Näherungsbruch 2. Ordnung ein Fehler von $\pi - 3 + \frac{15}{106} = 8,3 \cdot 10^{-5}$. An dieser Stelle lässt sich bereits vermuten, dass der 3. Näherungsbruch eine ausgezeichnete Approximation an π liefert, obwohl der Nenner noch sehr klein ist. Durch Bestimmen des 4. Näherungsbruchs wird ein großer Teilnenner mit 292 dem Kettenbruch hinzugefügt. Folglich erhält man $3 + \frac{4687}{33102}$ und einen Fehler von rund $5,8 \cdot 10^{-10}$. Der Fehler nimmt zwar kontinuierlich ab, jedoch wird der Nenner unentwegt größer. [19]

Schlussendlich können folgende Erkenntnisse zusammengefasst werden: Da rationale und irrationale Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, ist die Approximation reeller Zahlen durch rationale Zahlen stets mit beliebiger Genauigkeit möglich. Werden irrationale Zahlen durch rationale Zahlen immer besser angenähert, wird der Nenner der Approximierenden stets größer. Je größer dieser Nenner ist, desto genauer kann die Näherung sein. Aber auch Näherungsbrüche mit kleinen Nennern liefern brauchbare Ergebnisse. Die oben angeführten Näherungen an π entsprechen den sogenannten besten Approximationen. So gibt es beispielsweise keine rationale Zahl deren Nenner kleiner gleich 113 ist, die π besser annähern würde als $3 + \frac{16}{133}$. Der Mathematiker *Lagrange* formulierte und bewies dazu im Jahre 1770 das Gesetz der besten Approximation. Da dieses Gesetz mit der Verwendung von Kettenbrüchen einhergeht, widmet sich das Kapitel 4.2.1 "Diophantische Approximation und Kettenbrüche" diesem Zusammenhang genauer. [19]

4.1.1 Historische Betrachtung

Der Begriff "Diophantische Approximation" geht auf den antiken Mathematiker *Diophantos von Alexandria* zurück, dessen mathematischen Beiträge zur Zahlentheorie und Algebra dadurch Würdigung erfahren sollten. Genauso verhält es sich mit den sogenannten "Diophantischen Gleichungen". Doch wer war dieser Mathematiker? *Diophantos*, hat ähnlich zu den Elementen des Euklids, einen 13-teiligen Band namens *Arithmetica* verfasst, der sich unter anderem mit der Lösung algebraischer Gleichungen auseinandersetzt. Die Bücher dienten vielen Generationen an Mathematikern als Standardwerk und hatten enormen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik. Es muss jedoch an dieser Stelle angemerkt werden, dass europäische Mathematiker erst im 17. Jahrhundert Zugang zum Werk *Arithmetica* hatten, da erst 1621 eine lateinische Übersetzung erschien. *Diophantos von Alexandria* wird oftmals als Vater der Algebra betitelt, obwohl es keinen Zweifel daran gibt, dass viele Passagen der

Bücher dem verbreiteten Wissensstand der babylonischen Mathematik entsprechen. Über das Leben des *Diophantos* selbst, ist nahezu nichts bekannt. Selbst seine Lebensdaten können nur zwischen 100 vor Christus und 350 nach Christus geschätzt werden. [17]

Da nun die Namensherkunft geklärt ist, stellt sich die Frage, wie es zur Entwicklung der diophantischen Approximationen per se kam. Grundsätzlich stieß man in den unterschiedlichsten Bereichen auf das Problem, reelle Zahlen, so gut wie möglich, durch rationale Zahlen annähern zu müssen. Ein Beispiel hierfür ist die Kreiszahl π , die durch geometrische oder algebraische Verfahren angenähert wurde. Die erste überlieferte Annäherung an π stammt von einer Keilschrift-Tafel aus altbabylonischer Zeit um 500 vor Christus. Bei dieser Approximation entspricht π dem Wert 3,125. Bereits 100 nach Christus wurde durch das Vergleichen von Streckenzügen die Kreiszahl auf 3,14167... angenähert, deren Fehler nur minimal ist. Diese Approximation geht auf den Astronomen *Ptolemäos* zurück. Im Laufe der Zeit entwickelten sich immer bessere Annäherungen und das Zeitalter der Technologie beschleunigte diese Entwicklung immens. Ähnliche Entwicklungen gab es auch bei anderen reellen Zahlen, wie dem goldenen Schnitt. [23]

4.2 Grundlegendes

Satz 4.2 (Approximationssatz von Dirichlet, 1842). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und $Z \in \mathbb{N}$ (mit $1 \leq Z$), dann existieren $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq y \leq Z$, sodass

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{1}{yZ}.$$

Ist α eine Irrationalzahl, dann gibt es unendlich viele reduzierte Zahlen $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, sodass gilt

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^2}. [19]$$

Beweis. Wir definieren zunächst den gebrochenen Teil bzw. die Nachkommastellen von $a \in \mathbb{R}$ durch $\{a\} := a - \lfloor a \rfloor$. Im nächsten Schritt wird das Einheitsintervall $[0; 1]$ in gleich große Teilintervalle der Länge $\frac{1}{Z}$ unterteilt. Das bedeutet, dass folglich die Intervalle $\left[0; \frac{1}{Z}\right]; \left[\frac{1}{Z}; \frac{2}{Z}\right]; \dots; \left[\frac{Z-1}{Z}; 1\right]$ im Detail untersucht werden. Wir betrachten nun die $(Z+1)$ Zahlen der Gestalt 1 und $\{\alpha \cdot t\}$ mit $t \in \{0, 1, 2, \dots, Z-1\}$. Es gibt zumindest ein Teilintervall in welchem mindestens zwei der $(Z+1)$ Zahlen liegen. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- (i). **1. Fall:** Die Zahlen, die im Teilintervall liegen, haben die Gestalt $\{\alpha \cdot t\}$ mit $t \in \{0, 1, 2, \dots, Z-1\}$. Sind $\{\alpha \cdot t_1\}$ und $\{\alpha \cdot t_2\}$ zwei solche Zahlen und ohne Beschränkung

der Allgemeinheit $t_1 < t_2$, dann gilt

$$|\{\alpha \cdot t_2\} - \{\alpha \cdot t_1\}| \leq \frac{1}{Z}.$$

Aus

$$\begin{aligned} |\{\alpha \cdot t_2\} - \{\alpha \cdot t_1\}| &= |\alpha \cdot t_2 - \lfloor \alpha \cdot t_2 \rfloor - (\alpha \cdot t_1 - \lfloor \alpha \cdot t_1 \rfloor)| = \\ &= |\alpha \cdot (t_2 - t_1) - (\lfloor \alpha \cdot t_2 \rfloor - \lfloor \alpha \cdot t_1 \rfloor)| \leq \frac{1}{Z} \end{aligned}$$

und Ersetzen von $x := (\lfloor \alpha \cdot t_2 \rfloor - \lfloor \alpha \cdot t_1 \rfloor)$ und $y := (t_2 - t_1)$ folgt die Behauptung. [5]

- (ii). **2. Fall:** Die Zahl 1 und eine Zahl der Gestalt $\{\alpha \cdot t\}$ mit $t \in \{0, 1, 2, \dots, Z-1\}$ liegen im Unterintervall. Da aufgrund der Voraussetzung von $Z \geq 1$ die Zahl 0 nicht im Teilintervall liegen kann, muss $t > 0$ gelten. Die erste Aussage des Dirichletschen Approximationssatzes ist erfüllt, wenn man für $x = \lfloor \alpha \cdot t \rfloor + 1$ und $y = t$ setzt. [5]

Es gibt also zu jedem $Z \in \mathbb{N}, Z \geq 1$ ein Lösungspaar der Form $(x(Z), y(Z)) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ für das das Kriterium erfüllt ist:

$$|\alpha \cdot y(Z) - x(Z)| \leq \frac{1}{Z} \quad \text{mit } y(Z) < Z. \quad (4.1)$$

Laut Voraussetzung sind auch $(x(Z), y(Z))$ teilerfremd. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Lösungspaare der Form $(x(Z), y(Z))$ mit $Z \in \mathbb{N}, Z \geq 2$, dann würde ein Paar (x_0, y_0) existieren, sodass für unendlich viele Z gelten würde, dass $x_0 = x(Z)$ und $y_0 = y(Z)$ ist. Da für diese natürlichen Zahlen Z das Kriterium $(|\alpha \cdot y(Z) - x(Z)| \leq \frac{1}{Z})$ erfüllt sein muss, würde daraus folgen, dass $\alpha = \frac{x_0}{y_0} \in \mathbb{Q}$ wäre, entgegen der Voraussetzung des 2. Teils des Satzes. Daher folgt aus (4.1), dass

$$|\alpha \cdot y(Z) - x(Z)| \leq \frac{1}{y(Z)} \quad \text{mit } Z \in \mathbb{N}, Z \geq 2$$

gilt, wodurch der zweite Teil des Satzes gezeigt wurde. [5]

□

Bemerkungen:

- (i). Der obige klassische Beweis des *Dirichletschen Approximationssatzes* folgt dem sogenannten Schubfachprinzip. [5] In den folgenden Kapitel wird der Beweis noch einmal mithilfe von Farey-Folgen und mit Kettenbrüchen geführt.
- (ii). Mit anderen Worten, besagt der *Approximationssatz von Dirichlet*, dass es zu jeder

reellen Zahl α eine Folge qualitativ guter rationaler Näherungen an α gibt. [5]

- (iii). Das Irrationalitätskriterium, das sowohl notwendig als auch hinreichend ist, kann durch Ergänzung des *Dirichletschen Approximationssatzes* gewonnen werden. [5]

Korollar 4.3 (Irrationalitätskriterium). $\alpha \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Irrationalzahl, wenn das Kriterium $\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y^2}$ für unendlich viele teilerfremde Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ erfüllt ist. [5]

Beweis. Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$, dann kann α durch $\alpha = \frac{p}{q}$ dargestellt werden, wobei $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremde Zahlen sein müssen und $q > 0$ gelten muss. Durch Einsetzen und Umformen des Kriteriums erhält man

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| &< \frac{1}{y^2} \\ \left| \frac{p}{q} \cdot y - x \right| &< \frac{1}{y} \\ |py - qx| &< \frac{q}{y}. \end{aligned}$$

Wäre nun $x = p$ und $y = q$, würde die rechte Seite des Kriteriums verschwinden, wodurch aus $(x, y) \neq (p, q)$ folgt, dass $q > y$ und daraus $1 + |p| > |x|$. Die Ungleichung hat folglich endlich viele teilerfremde Lösungen (x, y) , wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$. Umgekehrt sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann besitzt die Ungleichung unendlich viele teilerfremde Lösungen. [5] $\square$

Bereits im antiken Griechenland war bekannt, dass es reelle Zahlen gibt, die nicht durch rationale Zahlen dargestellt werden können, die sogenannten irrationalen Zahlen. Man unterscheidet zwei Arten von irrationalen Zahlen: algebraische und transzendente Zahlen. [5] Die Definition der beiden Begriffe wurde bereits in Kapitel 2.4.2 gegeben. Nachfolgende Abschnitte behandeln nun die Approximierbarkeit der algebraischen Zahlen.

Definition (Grad einer algebraischen Zahl α). Das kleinste $n \geq 1$, zu dem ein normiertes Polynom P von Grad n mit rationalem Koeffizienten existiert, dessen Nullstelle α ist, heißt der Grad der algebraischen Zahl α . Dieses n ist zugleich der Grad des Minimalpolynoms von α . Der Grad von α wird in der Literatur oftmals durch das Symbol $\partial(\alpha)$ dargestellt. [5]

Satz 4.4 (Approximationssatz von Liouville). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl und $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $y > 0$ und $\alpha \neq \frac{x}{y}$. Dann existiert eine Konstante $c(\alpha) := c > 0$, sodass die folgende Ungleichung gilt.

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \geq c(\alpha) \cdot y^{-\partial(\alpha)}. \quad [5]$$

Beweis. Wir betrachten zunächst das Minimalpolynom der algebraischen Zahl α , welches in Form von $P_\alpha := a_{\partial(\alpha)} \cdot X^{\partial(\alpha)} + a_{\partial(\alpha)-1} \cdot X^{\partial(\alpha)-1} + \dots + a_1 X + a_0$ gegeben ist und $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Nach Voraussetzung darf $P\left(\frac{x}{y}\right)$ nicht 0 sein. Daher folgt aufgrund der ganzzahligen Koeffizienten, dass

$$\left| P_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y^{\partial(\alpha)} \right| = \left| a_{\partial(\alpha)} \cdot x^{\partial(\alpha)} + a_{\partial(\alpha)-1} \cdot x^{\partial(\alpha)-1} \cdot y + \dots + a_0 \cdot y^{\partial(\alpha)} \right| \geq 1.$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned} -P_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) &= P_\alpha(\alpha) - P_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\partial(\alpha)} a_n \cdot \left(\alpha^n - \left(\frac{x}{y}\right)^n \right) = \\ &= \left(\alpha - \left(\frac{x}{y}\right) \right) \cdot \sum_{n=1}^{\partial(\alpha)} a_n \left(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \frac{x}{y} + \dots + \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} \right), \end{aligned}$$

kann die Aussage getroffen werden, dass für jene x, y , für die $1 \geq \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \geq 0$ ist, $1 + |\alpha| > \left| \frac{x}{y} \right|$ sein muss, und die Abschätzung

$$\frac{1}{y^{\partial(\alpha)}} \leq \left| -P_\alpha\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \cdot \sum_{n=1}^{\partial(\alpha)} |a_n| \cdot \sum_{m=1}^{n-1} |\alpha|^m \cdot (1 + |\alpha|)^{n-1-m}$$

gilt. Betrachtet man nun den Faktor $\sum_{n=1}^{\partial(\alpha)} |a_n| \sum_{m=1}^{n-1} |\alpha|^m \cdot (1 + |\alpha|)^{n-1-m}$, erkennt man, dass

dieser ≥ 1 , und von α abhängig ist. Setzt man nun $c(\alpha)^{-1} := \sum_{n=1}^{\partial(\alpha)} |a_n| \cdot \sum_{m=1}^{n-1} |\alpha|^m \cdot (1 + |\alpha|)^{n-1-m}$, so erhält man für jene x und y , für die $1 + |\alpha| > \left| \frac{x}{y} \right|$ gilt, die Abschätzung $\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \geq c(\alpha) \cdot y^{-\partial(\alpha)}$. Für jene Zahlen x, y , für die $1 \leq \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|$ gilt, ist trivialerweise $\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \geq y^{\partial(\alpha)}$, wodurch der *Approximationssatz von Liouville* bewiesen ist. Es gilt jedoch unbedingt zu beachten, dass $0 < c(\alpha) \leq 1$ eingehalten wird. [5] $\square$

Bemerkung: Durch den *Satz von Liouville* wurde gezeigt, dass sich algebraische Zahlen nur mäßig gut durch rationale Zahlen approximieren lassen. Mithilfe dieses Satzes lässt sich eine notwendige Bedingung für die Algebraizität und eine hinreichende Bedingung für die Transzendenz einer Zahl formulieren. [5]

Des Weiteren zeigt der *Approximationssatz von Liouville* auch, dass der *Satz von Dirichlet* für $\partial(\alpha) = 2$ im Exponenten bestmöglich ist.

Der folgende Satz von Thue-Siegel-Roth ist eine bestmögliche Verschärfung des Approximationssatzes von Liouville: [28]

Satz 4.5 (Satz von Thue-Siegel-Roth). Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine algebraische Zahl und $\epsilon > 2$. Dann existiert eine Konstante $c(\alpha, \epsilon) > 0$, sodass für alle Paare $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung erfüllt wird:

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \geq c(\alpha, \epsilon) \cdot y^{-\epsilon}. [5]$$

Da nun die Grundlagen der Approximationstheorie erarbeitet wurden, soll in den beiden nächsten Kapiteln erarbeitet werden, wie nützlich das Wissen über Kettenbrüche und Farey-Folgen zur Approximation reeller Zahlen ist.

4.2.1 Diophantische Approximation und Kettenbrüche

Kettenbrüche sind ein nützliches Werkzeug, um reelle Zahlen anzunähern. Die Güte der Approximation spielt auch in diesem Zusammenhang eine große Rolle. Das Gesetz der besten Approximation von Lagrange (1770) ist ein zentraler Satz, der die Qualität der Approximation reeller Zahlen durch Kettenbrüche in Relation zueinander setzt.

Lemma 4.6. Sei α eine beliebige irrationale Zahl mit der Kettenbruchdarstellung $\alpha = [b_0; b_1, \dots]$ und zugehörigen Näherungsbrüchen $\frac{C_n}{B_n}$, $\forall n \in \{0, 1, \dots\}$, dann gilt

$$\left| \alpha - \frac{C_n}{B_n} \right| < \frac{1}{b_{n+1} \cdot B_n^2}. [19]$$

Folgende Abschätzung wurde bereits in Kapitel 2, Satz 2.12 gezeigt.

Satz 4.7 (Gesetz der besten Approximation). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, dann existieren Näherungsbrüche der Kettenbruchdarstellung $\frac{C_n}{B_n}$, sodass für $n \geq 2$ und zwei natürliche Zahlen p und q mit Eigenschaft $\frac{C_n}{B_n} \neq \frac{p}{q}$ und $B_n \geq q > 0$ gilt:

$$|\alpha \cdot q - p| > |\alpha \cdot B_n - C_n| \quad (4.2)$$

Da $B_n \geq q$ vorausgesetzt wurde, folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} |\alpha \cdot q - p| &> \frac{1}{B_n} |\alpha \cdot B_n - C_n|, \\ \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &> \left| \alpha - \frac{C_n}{B_n} \right|. [19] \end{aligned}$$

Beweis. Angenommen wird, dass die beiden natürlichen Zahlen p und q teilerfremd sind. Da die Ungleichung

$$|\alpha \cdot B_{n-1} - C_{n-1}| > |\alpha \cdot B_n - C_n|$$

gilt, muss die Aussage lediglich für die Annahme, dass $B_n \geq q > B_{n-1}$ ist, geprüft werden. Die allgemeingültige Aussage kann dann einfach durch vollständige Induktion verifiziert werden.

(i). **1. Fall:** Angenommen $B_n = q$, dann muss $p \neq C_n$ sein, und es gilt

$$\frac{1}{B_n} \leq \left| \frac{p}{q} - \frac{C_n}{B_n} \right|.$$

Aufgrund des Lemmas 4.6 ist

$$\frac{1}{2B_n} > \frac{1}{B_n^2} \geq \left| \alpha - \frac{C_n}{B_n} \right|.$$

Des Weiteren ist $3 \leq B_{n+1}$, da für $n \geq 2$ gilt. Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhält man schließlich

$$\left| \alpha - \frac{C_n}{B_n} \right| < \frac{1}{2B_n} < \left| \frac{C_n}{B_n} - \frac{p}{q} \right| - \left| \alpha - \frac{C_n}{B_n} \right| \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

Nach Multiplikation mit $B_n = q$ erhält man die zu beweisende Aussage (4.2). [19]

(ii). **2. Fall:** Wir betrachten den Fall $B_n > q > B_{n-1}$. Durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} p &= C_n \cdot X + C_{n-1} \cdot Y \\ q &= B_n \cdot X + B_{n-1} \cdot Y, \end{aligned}$$

erhält man für

$$\begin{aligned} x &= \frac{p \cdot B_{n-1} - q \cdot C_{n-1}}{C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n} = \pm(p \cdot B_{n-1} - q \cdot C_{n-1}) \\ y &= \frac{p \cdot B_n - q \cdot C_n}{C_n \cdot B_{n-1} - C_{n-1} \cdot B_n} = \pm(p \cdot B_n - q \cdot C_n). \end{aligned}$$

Die Lösung ist aufgrund der Cramerschen Regel eindeutig und es gilt $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wegen $B_{n+1} > q = B_n \cdot x + B_{n-1} \cdot y > B_{n-1}$ haben die beiden ganzen Zahlen x und y unterschiedliche Vorzeichen, wodurch auch $\alpha \cdot B_n - C_n$ und $\alpha \cdot B_{n-1} - C_{n-1}$

entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen. Daher sind die Vorzeichen bei $x(\alpha \cdot B_n - C_n)$ und $y(\alpha \cdot B_{n-1} - C_{n-1})$ dieselben. Es folgt

$$x(\alpha \cdot B_n - C_n) + y(\alpha \cdot B_{n-1} - C_{n-1}) = \alpha \cdot q - p,$$

wodurch sich die zu beweisende Behauptung ergibt

$$|\alpha \cdot B_n - C_n| < |\alpha \cdot B_{n-1} - C_{n-1}| < |\alpha \cdot q - p|. [19]$$

□

Bemerkung: Zusammengefasst, besagt das Gesetz der besten Approximation, dass durch die Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung die besten rationalen Approximationen erzielt werden.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde bereits der *Approximationssatz von Dirichlet* (1842) (siehe Satz 4.2) klassisch, durch das Schubfachprinzip, bewiesen. Nun soll dieser zentrale Satz mithilfe von Kettenbrüchen gezeigt werden.

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Ungleichung $|\alpha - \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}}| < \frac{1}{B_{n-1}^2}$ mit den Voraussetzungen von Satz 4.2 gilt. Wir wissen, dass α in Form von

$$\alpha = \frac{b_n \cdot C_{n-1} + C_{n-2}}{b_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2}}$$

dargestellt werden kann. Durch Einsetzen erhält man für

$$\alpha - \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{b_n \cdot C_{n-1} + C_{n-2}}{b_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2}} - \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{C_{n-2}B_{n-1} - C_{n-1}B_{n-2}}{B_{n-1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2})}.$$

Wegen Satz 2.3 ((iii)) ergibt sich für

$$\frac{C_{n-2}B_{n-1} - C_{n-1}B_{n-2}}{B_{n-1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2})} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2})}.$$

Es folgt wegen $\beta_n \leq b_n$ folgende Abschätzung

$$\left| \alpha - \frac{C_{n-1}}{B_{n-1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2})} \right| \leq \frac{1}{B_{n-1} \cdot (b_n B_{n-1} + B_{n-2})} = \frac{1}{B_n B_{n-1}} < \frac{1}{B_{n-1}^2},$$

wodurch der *Approximationssatz von Dirichlet* mittels Verwendung von Kettenbrüchen gezeigt wurde. [10] □

Bemerkung: Im Gegensatz zum Beweis mittels klassischem Schubfachprinzip beruht der eben dargelegte Beweis auf ein größeres zahlentheoretisches Vorwissen, vor allem Wissen über Kettenbrüche und Näherungsbrüche. Die Beweisführung unter Verwendung der Kettenbrüche ist dann durch simples Einsetzen möglich, wodurch sie kürzer erscheinen mag.

4.2.2 Diophantische Approximation und Farey-Folgen

Farey-Folgen sind nicht nur als abgegrenzte mathematische Objekte betrachtet von großer Bedeutung und durch ihre besonderen Eigenschaften hervorzuheben. Sie sind auch als Hilfsmittel zur diophantischen Approximation unerlässlich. Durch das Finden von Brüchen der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$, die der anzunähernden reellen Zahl bereits nahe kommen, können gute Annäherungsergebnisse erzielt werden. Durch fortlaufende Mediantenbildung wird diese Näherung an die reelle Zahl immer präziser.

Ein weiteres Mal soll nun der *Approximationssatz von Dirichlet*, 1842 (Satz 4.2) bewiesen werden. Hierfür werden nun Farey-Folgen als Instrument der Beweisführung verwendet.

Beweis. Erstens ist zu zeigen, dass für eine reelle Zahl α die Abschätzung $|\alpha - \frac{x}{y}| \leq \frac{1}{yZ}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}, Z \in \mathbb{N}, Z \geq 1$ und $y \leq Z$, gilt.

Wir nehmen an, dass die Abschätzung für $\alpha \in (0, 1]$ erfüllt wird. Seien nun $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ Elemente der Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$. Dabei sei $\frac{r}{s}$ der obere Nachbarbruch von $\frac{p}{q}$ der Folge F_n . Der Bruch $\frac{p}{q}$ sei maximal und $\alpha > \frac{p}{q}$. Des Weiteren wird vorausgesetzt, dass $q + s \geq Z \geq \max\{q, s\}$ gilt. Für die Medianten $\frac{p+r}{q+s}$ gelte folglich, entweder

$$\frac{p}{q} < \alpha \leq \frac{p+r}{q+s},$$

oder

$$\frac{p+r}{q+s} < \alpha \leq \frac{r}{s}.$$

Wegen $qr - ps = 1$ für zwei Nachbarbrüche $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in F_n$ aus Satz 3.1 folgt aus

$$\frac{p+r}{q+s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{q(q+s)} = \frac{1}{q(q+s)}$$

und

$$\frac{r}{s} - \frac{p+r}{q+s} = \frac{qr+ps}{s(q+s)} = \frac{1}{s(q+s)}.$$

Setzt man nun $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, oder $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$, erhält man

$$\left| \alpha - \frac{x}{y} \right| \leq \min \left\{ \frac{p+r}{q+s} - \frac{p}{q}; \frac{r}{s} - \frac{p+r}{q+s} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{q(q+s)}; \frac{1}{s(q+s)} \right\}.$$

Liegt α näher bei $\frac{p}{q}$, dann wählt man für $y = q$, ansonsten setzt man $y = s$. Das führt dann zu $Z \geq y$ und

$$\frac{1}{yZ} \geq \min \left\{ \frac{1}{q(q+s)}; \frac{1}{s(q+s)} \right\}.$$

Somit wurde mit $\frac{x}{y}$ eine rationale Approximation an α konstruiert, die die Abschätzung erfüllt. Mit größer werdendem Nenner q oder s folgt dann der erste Teil der Aussage des *Dirichletschen Approximationssatzes* für $Z \geq 1$.

Es bleibt der zweite Teil des Approximationssatzes 4.2 zu zeigen. Wenn α irrational ist, dann gilt die Ungleichung: $\frac{1}{y^2} > \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|$.

Sei α irrational und es gelte: $0 \leq \frac{1}{l} < \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|$ für hinreichend große $l \in \mathbb{N}$. Da für zwei Nachbarbrüche $\frac{P}{Q} < \frac{R}{S}$ der Farey-Folge F_l gilt, dass der Abstand der beiden Zahlen maximal $\frac{1}{l}$ sein darf, ergibt sich nach Satz 3.1

$$\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} = \frac{QR - PS}{QS} = \frac{1}{QS} \leq \frac{1}{l} < \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|.$$

Liegt nun α zwischen den beiden Nachbarbrüchen $\frac{P}{Q} < \frac{R}{S}$, dann

$$\frac{R}{S} - \alpha, \alpha - \frac{P}{Q} < \frac{1}{l} < \left| \alpha - \frac{x}{y} \right|.$$

Die Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{R}{S}$ sind zwei voneinander verschiedene Brüche zur bereits bekannten Näherungen $\frac{x}{y}$. Das vorher geführte Argument aus dem Beweis von Teil 1 kann nun nach und nach für $\frac{P}{Q}$ statt $\frac{p}{q}$ und $\frac{R}{S}$ statt $\frac{r}{s}$ fortgesetzt werden. [19] $\square$

Bemerkungen:

- (i). Wie auch schon beim Beweis des *Dirichletschen Approximationssatzes* durch Kettenbrüche ist auch beim Beweis mit Farey-Folgen einiges an Vorwissen notwendig. Ist das mathematische Werkzeug jedoch bekannt, kann diese Art der Beweisführung abermals einfacher als das Schubfachprinzip erscheinen.

- (ii). Nun soll eine nützliche Anwendung des bereits erworbenen Wissens vom *Dirichletschen Approximationssatz* und den Farey-Folgen dargelegt werden. Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, zu zeigen, dass der goldene Schnitt durch fortlaufende Medianantenbildung sehr gut approximiert werden kann. Wir wissen, dass der goldene Schnitt $x = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) = 1,618033\dots$ entspricht. Da vor allem der Bereich nach dem Komma für unsere weiteren Überlegungen von großem Interesse ist, betrachten wir folglich statt x : $X := x - 1 = 0,618033\dots$. Würde man nun eine rationale Näherung durch willkürliches Abtrennen des Dezimalbruches gewinnen, erhält man beispielsweise für $\frac{61}{100}$ einen relativ großen Fehler von $X - \frac{61}{100} \approx 8 \cdot 10^{-3}$, obwohl der Nenner des Bruches im Vergleich zu den Brüchen der Farey-Folge groß ist. [19]
- Wenn man nun die Elemente einer Farey-Folge F_n mit $n \in \mathbb{N}$ genauer untersucht, erhält man für die beiden Nachbarbrüche $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ bereits gute Näherungen mit vergleichsweise kleinem Fehler

$$X - \frac{3}{5} \approx 1,8 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{5}{8} - X \approx 7 \cdot 10^{-3}. [19]$$

Wie zuvor erwähnt, sollen durch fortwährende Medianantenbildungen immer bessere Ergebnisse erzielt werden. Die Mediante der Brüche $\frac{3}{5} < \frac{5}{8}$ ist $\frac{8}{13}$, und man erhält den Fehler

$$X - \frac{8}{13} \approx 3 \cdot 10^{-3}. [19]$$

Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass durch einen Bruch mit kleinem Nenner $1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$ eine bessere Näherung an den goldenen Schnitt erzielt wurde, als durch die Approximation durch willkürliches Abtrennen des Dezimalbruches. [19]

Wie auch schon in Kapitel 2, als der goldene Schnitt mit Kettenbrüchen in Verbindung gesetzt wurde, kann auch hier ein Konnex zur Fibonacci-Folge gefunden werden. Die besten rationalen Approximationen an den goldenen Schnitt werden nämlich durch die Quotienten von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen gefunden. Die Erklärung für dieses Phänomen kann in *Oswald und Steuding* (2015) nachgelesen werden. [19]

4.2.3 Zusammenfassung

Bevor zur didaktischen Analyse der diophantischen Approximation übergegangen wird, sollen an dieser Stelle die wichtigsten Erkenntnisse aus Kapitel 4 zusammengetragen werden.

Die diophantische Approximation ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit der Güte von Näherungen reeller Zahlen beschäftigt. Wie bereits gezeigt wurde, liefert das

willkürliche Abbrechen der Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl mit unendlich vielen nicht-periodischen Nachkommastellen eine Näherung mit vergleichsweise großem Fehler. Bessere mathematische Werkzeuge zur Approximation reeller Zahlen sind hingegen Kettenbrüche oder Farey-Folgen. Bei genauerer Betrachtung dieser mathematischen Objekte stößt man auch immer wieder auf Zusammenhänge zwischen den beiden.

Ein zentraler Satz der Theorie der diophantischen Approximation ist der *Dirichletsche Approximationssatz* aus dem Jahre 1842, aus welchem sogar das Irrationalitätskriterium gewonnen werden kann. [5] Diese Abschätzung, die durch den *Approximationssatz von Dirichlet* festgelegt wurde, kann auf verschiedene Weise gezeigt werden, unter anderem mithilfe von Farey-Folgen und Kettenbrüchen. Diese Tatsache zeigt, wiederum, dass auf den ersten Blick unscheinbarer Zusammenhang zwischen der diophantischen Approximation, Kettenbrüchen und Farey-Folgen verborgen liegt.

4.3 Diophantische Approximation im schulischen Kontext: Eine fachdidaktische Analyse

Schon in der Sekundarstufe 1 österreichischer Schulen wird man als Schüler:in mit der Tatsache konfrontiert, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht ausreichend und somit unvollständig ist. Denn möchte man beispielsweise die Diagonale d eines Quadrats mit der Seitenlänge $a = 1$ berechnen, erhält man mittels Satz des Pythagoras für $d = \sqrt{2} = 1,414213562 \dots$. Diese Zahl mit nicht-periodischen, unendlichen Nachkommastellen lässt sich auf keine Weise exakt durch einen Bruch darstellen. Daher muss eine Erweiterung der bekannten Zahlenmengen vollzogen werden und der Begriff der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ rückt in den Fokus der Lernenden. Intuitiv ist bereits seit dem Unterrichtsthema Zahlenstrahl klar, dass die Menge der Zahlen nicht nur aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ bestehen kann, da sonst Lücken im Zahlenstrahl auftreten würden. Mathematisch ist nun festzustellen, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vollständig ist. [9] Im schulischen Kontext wird erfahrungsgemäß oft mit gerundeten Werten irrationaler Zahlen weitergearbeitet. Wie es um die Güte solcher Näherungen durch willkürliches Abbrechen der Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen beschaffen ist, kann zum Beispiel in Kapitel 4.2.2 im Vergleich zur Näherungen mittels Farey-Folgen noch einmal nachempfunden werden.

Auch im Unterricht der Sekundarstufe 1 vorgesehen ist, die Beschäftigung mit der Kreiszahl π im Zusammenhang mit der Kreisflächen- und Kreisumfangsberechnung. Wie schon mehrmals erwähnt, handelt es sich bei der Kreiszahl um eine transzendente Zahl, die ebenfalls ein Element der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist. [9] Hervorzuheben ist außerdem, dass der Lehrplan österreichischer Mittelschulen vorsieht, dass Schüler:innen in der 8. Schulstufe *Näherungswerte oder Schranken für irrationale Zahlen angeben können, auch unter Verwendung elektronischer*

Hilfsmittel. [4]

Des Weiteren wird auch gefordert, dass Lernende selbstständig Entscheidungen darüber treffen können, mit welchen Näherungswerten nachfolgend gerechnet und welche Genauigkeit der Zahlenwerte für die jeweilige Aufgabe sinnvoll ist. [4] Im Wesentlichen müssen die Schüler:innen also bereits in jungen Jahren mit der Güte von Approximationen hantieren, und bewegen sich somit im Fachbereich der diophantischen Approximation, ohne in den meisten Fällen entsprechendes Hintergrundwissen darüber zu besitzen.

Um das Kapitel zu finalisieren, soll an einem konkreten Beispiel nachvollzogen werden, wie das Thema diophantische Approximation im Unterricht nach dem Spiralprinzip der Mathematikdidaktik Eingang finden kann. Dazu soll die Kalenderrechnung und deren Problematik im Laufe der Geschichte aufgearbeitet werden. Das Spiralprinzip der Mathematikdidaktik besagt, dass Schüler:innen in ihrer Schullaufbahn immer wieder mit derselben Thematik konfrontiert werden, sich die Komplexität nach der Wiederholung des bereits erworbenen Wissens jedoch fortlaufend steigert. [7]

In österreichischen Schulen wird man als Lernender bereits in der Primarstufe mit den Begriffen und einfachen Überlegungen zu Tagen, Wochen, Monaten, Jahren und Schaltjahren vertraut. Dieses Wissen wird in der Sekundarstufe 1 im Zusammenhang mit Größen und natürlichen Zahlen noch einmal wiederholt und vertieft. [4] An dieser Stelle des Lernfortschrittes werden einfache Berechnungen mit natürlichen Zahlen durchgeführt. Es würde sich zu diesem Zeitpunkt eignen mit den Schüler:innen Überlegungen anzustellen, welche Gründe es für das Berücksichtigen von Schaltjahren haben kann. Dazu ist ein kurzer Exkurs in die Physik bzw. Astronomie notwendig. Es kann unter anderem erklärt werden, dass die Dauer eines Tages darauf zurückzuführen ist, dass sie der Dauer einer Drehung der Erde um die eigene Achse entspricht. Auf weitere Ausführungen wird nun verzichtet, da das Vorwissen der Schüler:innen sehr unterschiedlich sein kann und demnach unterschiedlichste Erläuterungen nötig wären, die in diesem Kontext den Rahmen sprengen würden. Wichtig ist es jedoch aufmerksam darauf zu machen, dass ein Jahr 365 d 5 h 48 m 45,8 s dauert. Wenn bereits Dezimalzahlen eingeführt wurden, kann eine Übersetzung dieser Zahl in rund 365,2422 d geschehen. [24] Auch auf die historische Entstehung des Kalenders kann zu diesem Zeitpunkt eingegangen werden, die in Kapitel 2.5 bereits ausführlich dargelegt wurden. Um die didaktische Reduktion sollte man als Lehrender in diesem Konnex allerdings bemüht sein, da Kettenbrüche für den Großteil der Schüler:innen der betroffenen Altersgruppe zu komplex erscheinen mögen.

In der Sekundarstufe 2 kann das Thema altersadäquat ein weiteres Mal aufgegriffen werden. Nach theoretischer Hinführung und geschichtlicher Einbettung sind folgende Aufgaben zur Bearbeitung in chronologischer Reihenfolge denkbar [24, 19]:

- **Stellen Sie 365 d 5 h 48 m 45,8 s in Form von Tagen dar.**

Lösung: $\approx 365,2422$ d

- **Stellen Sie die Nachkommastellen der vorhergehenden Lösung als Bruch dar.**

Lösung: $\frac{104629}{432000}$

- **Entwickeln Sie einen endlichen regelmäßigen Kettenbruch zum eben gefundenen Bruch.**

Lösung: $[0; 4, 7, 1, 3, 6, 2, 1, 170]$

- **Berechnen Sie die ersten 6 Näherungsbrüche des vorher entwickelten Kettenbruchs.**

Lösung: $\frac{C_0}{B_0} = 0; \frac{C_1}{B_1} = \frac{1}{4}; \frac{C_2}{B_2} = \frac{7}{29}; \frac{C_3}{B_3} = \frac{8}{33}; \frac{C_4}{B_4} = \frac{31}{128}; \frac{C_5}{B_5} = \frac{194}{801}; \frac{C_6}{B_6} = \frac{419}{1730}.$

- **Der julianische Kalender berücksichtigte alle 4 Jahre ein Schaltjahr. Überlegen und argumentieren Sie, worauf diese Berechnung zurückzuführen ist und worin mögliche Schwächen liegen.**

Lösungserwartung: Es wurde der Näherungsbruch erster Ordnung verwendet. Der Zähler steht für die Schaltjahre und der Nenner für die gewöhnlichen Jahre mit 365 Tagen. Sprich: Eines von insgesamt 4 Jahren ist ein Schaltjahr. Ein Problem ist, dass die Verwendung des ersten Näherungsbruchs im Vergleich zu Näherungsbrüchen höherer Ordnung einen relativ großen Fehler mit sich bringt.

- **Der gregorianische Kalender, der den julianischen Kalender ablöste, und heute noch gültig ist, geht auf einen Näherungsbruch höherer Ordnung zurück. Recherchieren Sie weitere Regeln für Schaltjahre und überlegen und argumentieren Sie auf welchen Näherungsbruch der Kalender von *Papst Gregor XIII.* zurückzuführen ist.**

Lösungserwartung: Vereinfacht man den Näherungsbruch 5. Ordnung $\frac{194}{801} \approx \frac{194}{800} = \frac{97}{400}$, erhält man die Aussage, dass innerhalb von 400 Jahren 97 Schaltjahre stattfinden. Das bedeutet, dass 3 Schaltjahre ausgelassen wurden, da $100 - 97 = 3$ ist. Dies deckt sich mit der Regel für Schaltjahre, die in unzähligen Quellen nachgelesen werden kann, dass Jahre, die durch 100 teilbar, Schaltjahre sind. Ausnahme für diese Regelung sind Jahre, die durch 400 teilbar sind. Auch diese Regelung kann aus dem Näherungsbruch abgelesen werden. [19]

Bemerkung: Eine ausführliche Beschäftigung mit den theoretischen Grundlagen zu Kettenbrüchen ist für die Durchführung dieses Beispiels im Schulkontext ratsam, um die Lernenden nicht zu überfordern. Ist das mathematische Konstrukt bekannt, bietet diese Thematik mit

Sicherheit eine Möglichkeit an das Alltagswissen der Schüler:innen anzuknüpfen und Neugier an zahlentheoretischen Grundlagen zu generieren. Überdies ist eine Erweiterung des obigen Beispiels möglich, dabei sollte bestenfalls auf die Interessen der Lernenden eingegangen werden.

Literatur

- [1] F. L. Bauer. „Kettenbruch-Phänomene: Teil I: Periodische Kettenbrüche“. de. In: *Informatik-Spektrum* 32 (Feb. 2009), S. 54–64. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s00287-008-0309-2> (besucht am 05.07.2022).
- [2] A. Bogomolny. *Ford's touching circles*. en. 1996-2018. URL: <https://www.cut-the-knot.org/proofs/fords.shtml> (besucht am 29.08.2022).
- [3] A. Bogomolny. *Stern-Brocot Tree*. en. 1996-2018. URL: <https://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml> (besucht am 24.08.2022).
- [4] Wissenschaft und Forschung Bundesministerium für Bildung. *Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur, mit der die Lehrpläne der Mittelschulen erlassen und die Lehrpläne für den Religionsunterricht an den Mittelschulen bekannt gemacht werden. BGBl. II Nr. 185/2012*. URL: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850> (besucht am 15.01.2023).
- [5] P. Bundschuh. *Einführung in die Zahlentheorie*. de. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-76491-5>.
- [6] J. Farey. „LXXIX. On a curious property of vulgar fractions“. en. In: *The Philosophical Magazine* 47.217 (Mai 1816), S. 385–386. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786441608628487> (besucht am 09.08.2022).
- [7] A. Filler. *Einführung in die Mathematikdidaktik, Teil 2. Einige lerntheoretische Grundlagen und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht. Zur Lerntheorie von J. S. Bruner*. de. Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung. Berlin, 2015. URL: <https://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/einfmadid2lernpsych.pdf> (besucht am 09.04.2023).
- [8] L. R. Ford. „Fractions“. en. In: *The American Mathematical Monthly* 45.9 (Nov. 1938), S. 586–601. URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00029890.1938.11990863> (besucht am 09.08.2022).
- [9] S. Goebbels und S. Ritter. *Mathematik verstehen und anwenden*. de. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2018. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-57394-5> (besucht am 11.01.2023).

- [10] G. H. Hardy und E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. en. 6. Aufl. New York: Oxford University Press, 2008.
- [11] B. Hayes. „Computing Science: On the Teeth of Wheels“. en. In: *American Scientist* 88.4 (2000), S. 296–300.
- [12] J. Hilgert, M. Hoffmann und A. Panse. *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten*. de. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2015. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-45512-8> (besucht am 04.12.2022).
- [13] H. Humenberger. „Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen - entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen“. de. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 62.2 (2009), S. 109–115. URL: <https://homepage.univie.ac.at/hans.humenberger/Aufsaeetze/ZurDisk.gestellt.pdf> (besucht am 05.09.2022).
- [14] D. McDuff. „Symplectic embeddings and continued fractions: a survey“. en. In: *Japanese Journal of Mathematics* 4.121 (Dez. 2009), S. 121–139. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11537-009-0926-9> (besucht am 06.09.2022).
- [15] C. G. Moore. „Continued fractions“. en. In: *The Mathematics Teacher* 55.4 (Apr. 1962), S. 256–263. URL: <https://www.jstor.org/stable/27956592> (besucht am 13.04.2022).
- [16] S. Müller-Stach und J. Piontkowski. *Elementare und algebraische Zahlentheorie. Ein moderner Zugang zu klassischen Themen*. de. 2., erw. Aufl. Studium Algebra und Zahlentheorie. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [17] J. J. O'Connor und E. F. Robertson. *Diophantus of Alexandria - Biography*. en. 1999. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus/> (besucht am 21.11.2022).
- [18] J. J. O'Connor und E. F. Robertson. *John Farey - Biography*. en. 2000. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Farey/> (besucht am 19.08.2022).
- [19] N. Oswald und J. Steuding. *Elementare Zahlentheorie. Ein sanfter Einstieg in die höhere Mathematik*. de. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2015. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-44248-7> (besucht am 05.07.2022).
- [20] J. Parker. „Continued Fractions“. en. In: *Mathematics in School* 24.2 (März 1995), S. 8–11. URL: <https://www.jstor.org/stable/30215147> (besucht am 13.04.2022).

- [21] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. de. 3. Aufl. Bd. 1: Elementare Kettenbrüche. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1977. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-663-12289-0> (besucht am 11.07.2022).
- [22] K. Reiss und G. Schmieder. *Basiswissen Zahlentheorie. Eine Einführung in Zahlen und Zahlenbereiche*. de. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2014. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-39773-8> (besucht am 05.07.2022).
- [23] H.-D. Rinkens und K. Krüger. *Die schönste Gleichung aller Zeiten: Von mathematischen Grundkenntnissen zur eulerschen Identität*. de. 1. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2020. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-658-28466-4> (besucht am 05.07.2022).
- [24] H. Scheid und W. Schwarz. *Elemente der Arithmetik und Algebra*. de. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48774-7>.
- [25] R. Šleževičienė-Steuding und J. Steuding. „Simpson's Paradox In The Farey Sequence“. en. In: *INTEGERS: Electronic Journal Of Combinatorial Number Theory* 6 (2006), S. 9.
- [26] V. Sukhoy und A. Stoytchev. „Formulas and Algorithms for the Length of a Farey Sequence“. en. In: *Scientific Reports* 11.22218 (Dez. 2021), S. 1–18. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-021-99545-w> (besucht am 01.09.2022).
- [27] V. Sukhoy und A. Stoytchev. „Supplementary Information for "Formulas and Algorithms for the Length of a Farey Sequence"“. en. In: *Scientific Reports* 11.22218 (Dez. 2021), S. 1–24. URL: <https://www.nature.com/articles/s41598-021-99545-w> (besucht am 01.09.2022).
- [28] F. Toenniessen. *Das Geheimnis der transzendenten Zahlen: Eine etwas andere Einführung in die Mathematik*. de. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2019. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-58326-5> (besucht am 15.01.2023).
- [29] G. Walz, Hrsg. *Lexikon der Mathematik: Band 2. Eig bis Inn*. de. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2017. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-53504-2> (besucht am 17.08.2022).