

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Von der DNA zur Milchstraße

Die Fibonacci Zahlen in der Natur und ihr Zusammenhang
mit dem Goldenen Schnitt

verfasst von / submitted by

Stephanie Merkl, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of

Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna, 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /

degree programme code as it appears on UA 199 502 520 02

the student record sheet:

Studienrichtung lt. Studienblatt /

degree programme as it appears on

the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB)

Unterrichtsfach Biologie und Umweltkunde

Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ. Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Zusammenfassung

Die Fibonacci-Zahlenfolge ist nach wie vor eine der bekanntesten und am besten erforschten Zahlenfolgen der Welt. Diese Sequenz ist in vielerlei Hinsicht einzigartig. Kaum ein anderes mathematisches Thema ist so allumfassend und findet sich in der Natur in einer auch nur annähernd so breiten Palette von Beispielen wieder. Die Universalität dieser Sequenz verleiht ihr eine geheimnisvolle Aura, die in der Breite der Mathematik bis heute beispiellos ist.

Doch lange bevor Leonardo von Pisa diese Zahlen miteinander in Beziehung setzte, war bereits ein anderes mathematisches Phänomen bekannt: der Goldene Schnitt. Diese als ideal, ja fast göttlich angenommene Beziehung, war mindestens seit dem antiken Griechenland bekannt. Da dieses Verhältnis als die absolute Schönheit angesehen wurde, wurden sogar monumentale Tempel danach gebaut.

Erst lange nach den jeweiligen Erstbeschreibungen dieser Einzelphänomene konnte der Zusammenhang zwischen ihnen erkannt und erklärt werden.

Die Beispiele, in denen dieses mathematische Phänomen zu finden ist, sind buchstäblich überall um uns herum: Von der Struktur der DNA, der Entstehung von Leben wie wir es kennen, bis zur Entstehung von Galaxien selbst. Das Muster wiederholt sich öfter als man sich vorstellen kann. Es scheint ein fast universelles Schema zu sein.

Diese Arbeit zielt darauf ab, die Natur dieser Sequenz zu erforschen. Die Verbindung zum Goldenen Schnitt wird hervorgehoben. Nach einer kurzen Zusammenfassung der Geschichte dieser mathematischen Themen werden einige der prominentesten Beispiele des Goldenen Schnitts sowie der Fibonacci-Folge in der Natur diskutiert.

Abstract

The Fibonacci sequence of numbers is still one of the best known and best researched series of numbers in the world. This sequence is unique in many ways. Hardly any other mathematical topic is so all-encompassing and can be found in nature in an even remotely wide range of examples. The universality of this sequence gave it an aura of mystery that was unprecedented in the breadth of mathematics.

However, long before Leonardo of Pisa put these numbers in relation to each other, another mathematical phenomenon was already well known: the Golden ratio. This relationship, assumed to be ideal, almost divine, had been known at least since ancient Greece. As this ratio was seen as the absolute beauty, even monumental temples were built according to it.

Only long after the respective first descriptions of these individual phenomena could the connection between them be recognized.

The examples, where this mathematical phenomenon can be found, are literally everywhere: From the structure of the DNA, forming life as we know it, to the formation of galaxies themselves. The pattern repeats itself more times than one can fathom. It seems to be an almost universal schematic.

This work aims to explore the nature of this sequence. The connection to the Golden ratio will be highlighted. After a short recapitulation of the history of those mathematical topics, some of the most prominent examples of the golden ratio as well as the Fibonacci sequence in nature will be discussed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Definition der Fibonacci-Zahlenfolge und des Goldenen Schnittes	3
2.1	Definition der Fibonacci-Zahlenfolge	3
2.1.1	Arithmetische Folgen	4
2.1.2	Rekursive Folgen	9
2.2	Charakteristika der Fibonacci-Folge	11
2.2.1	Der Satz von Zeckendorf	16
2.2.2	Die Cassini - Identität	25
2.2.3	Identität von d'Ocagne	26
2.2.4	Identität von Catalan	29
2.2.5	Die Fibonacci - Folge der ganzen Zahlen	30
2.3	Definition des Goldenen Schnittes	34
2.4	Geometrische Darstellung des goldenen Schnittes	39
2.5	Das Goldene Dreieck	49
2.6	Von der Fibonacci-Zahlenfolge zum Goldenen Schnitt	58
2.7	Prominente Visualisierungen der Fibonacci-Folge	61
2.7.1	Die Fibonacci - Spirale	61
2.7.2	Das Goldene Rechteck	63
3	Geschichte der Fibonacci-Zahlen und des Goldenen Schnittes	65
3.1	Erste Erwähnungen und Antike	65
3.2	Verwendung durch im antiken Griechenland	66
3.3	Das Leben und die Entdeckungen des Leonardo von Pisa	69
3.3.1	Die Situation der Arithmetik im 12 Jhdt.	70
3.3.2	Der Weg zu <i>Liber abaci</i>	73
3.3.3	<i>Liber abaci</i>	73
3.3.4	Das Kaninchenproblem	74
4	Das Auftreten der Fibonacci - Folge und des Goldenen Schnittes in der Natur	76
4.1	Fibonacci in unserer DNA	77

4.1.1	Die Häufigkeit der Nuklide	77
4.1.2	Die Struktur der DNA	78
4.1.3	Ist es wirklich golden?	82
4.2	Fibonacci in der Botanik	85
4.2.1	Die Phyllotaxis	85
4.2.2	Ausgewählte Beispiele aus dem Pflanzenreich	88
4.3	Fibonacci in der Astronomie	96
5	Conclusio	98
6	Literaturverzeichnis	103
	Literatur	109

1 Einleitung

Auch wenn Dinge auf den ersten Blick nichts miteinander gemeinsam haben, so findet man bei einer genaueren Betrachtung oft mehr als erstaunliche Gemeinsamkeiten. Was haben beispielsweise die Samen einer Sonnenblume, die Milchstraße und die DNA-Doppelhelix gemeinsam? All diese Dinge, von der mikroskopisch kleinen DNA - Doppelhelix bis hin zur etwa 100000 Lichtjahre großen Milchstraße folgen in ihrem Aufbau derselben mathematischen Zahlenfolge: Den sogenannten Fibonacci-Zahlen. Dem Goldenen Schnitt, der angeblich, perfekten Proportion, folgen sogar noch zahlreiche weitere Naturphänomene [41].

Für die Wissenschaft stellen sich hier grundlegend 3 Fragestellungen, welche in dieser folgenden Arbeit adressiert werden sollen.

- (1) Wie lässt sich diese Zahlenfolge möglichst genau mittels Mathematik beschreiben?
Wie hängt die Folge mit dem Goldenen Schnitt zusammen?
- (2) Wo treten diese mathematischen Phänomene in der Geometrie und der Natur auf?
- (3) In welchen Bereichen und wie macht sich der Mensch diese Zahlenfolge und den Goldenen Schnitt zunutze?

Seit der Wiederentdeckung dieser Zahlenfolge durch Leonardo von Pisa (später Fibonacci genannt) im Mittelalter, wurde eine enorme Bandbreite von Naturphänomenen und Erscheinungen entdeckt, welche durch diese scheinbar simple Folge beschrieben werden kann. Die schiere Diversität dieser Phänomene macht die Fibonacci-Folge

zusammen mit ihrem Entdecker zu einer der berühmtesten und faszinierendsten mathematischen Themengebiete der Geschichte.

Während die Geschichte der Fibonacci-Zahlen jedoch bis ins frühe Mittelalter zum Erliegen gekommen ist, wurde der Goldene Schnitt bereits in den Hochkulturen der Antike angewandt. Die erste potenzielle Anwendung des Goldenen Schnittes wurde in der Struktur der großen Pyramiden von Gizeh (etwa 2580 v. Chr.) entdeckt, jedoch sind die Meinungen der Historiker, ob es sich hierbei um einen Zufall handelt oder nicht, gespalten. Sicher ist, dass das griechische Pantheon einem Goldenen Rechteck nachempfunden wurde. Somit ist dieses Verhältnis, zumindest seit 438 v. Chr. bekannt. Bis heute hat dieses als ideal angenommene Verhältnis einen enormen Einfluss auf unsere Architektur und unsere Kultur [7].

In dieser Arbeit wird der Zusammenhang dieser beiden Phänomene, der Fibonacci-Zahlen und des Goldenen Schnittes, detailliert dargestellt. Zuvor werden beide Themengebiete ausgiebig beschrieben und definiert. Anschließend werden ausgewählte Beispiele beleuchtet, wo der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Folge in der Natur zu finden sind. Das finale Kapitel wird den Nutzen dieser mathematischen Phänomene durch den Menschen behandeln.

Abschließend wird eine Conclusio einen Überblick über die behandelten Gesichtspunkte sowie einen vorsichtigen Ausblick in die Zukunft dieser mathematischen Themen bieten.

2 Definition der Fibonacci-Zahlenfolge und des Goldenen Schnittes

Bevor wir genauer auf die Geschichte oder die Anwendungen des Goldenen Schnittes und der Fibonacci-Zahlen eingehen, müssen wir genau definieren und beschreiben, um was es sich hierbei handelt.

2.1 Definition der Fibonacci-Zahlenfolge

Um zu verstehen, was die Fibonacci-Folge ausdrückt, müssen wir zuerst beschreiben, was eine Folge generell ist. Der Begriff *Folge* wird folgendermaßen definiert [56]:

Definition 1. *Eine Folge ist eine Funktion φ der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ in einer beliebigen Menge X . $\mathbb{N}^*$ entspricht der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ jedoch ohne 0. Kurz geschrieben gibt dies entweder $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow X$, oder $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow X$. Die Abbildung $\varphi(n)$ wird als n -tes Glied der Folge bezeichnet und in folgender Form dargestellt: $\varphi : n \mapsto \varphi(n) =: x$. Geläufig ist auch die Darstellung von Folgen in aufsteigender Form: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, \dots)$. Die abgekürzte Form hiervon wäre (y_i) .*

Ein triviales Beispiel hierzu wäre die Folge 4, 8, 12, 16,... Es ist auf den ersten Blick zu erkennen, dass es sich hierbei um die Menge der durch 4 teilbaren natürlichen Zahlen $\mathbb{N}^*$ handelt. Als Projektion dargestellt, kann man diese Zahlenfolge als $\varphi : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*, n \mapsto 4n$ beschreiben. Alternativ bietet sich die Schreibweise $x_i | x_i = (4i)_{i \in \mathbb{N}}$ an.

Im folgenden Abschnitt werden wir 2 Arten von Folgen etwas detaillierter beleuchten: Die arithmetischen Folgen, sowie die rekursiven Folgen [43] [4].

2.1.1 Arithmetische Folgen

Die sogenannten *arithmetischen Folgen* können in verschiedene Ordnungen unterteilt werden[6].

Arithmetische Folgen erster Ordnung:

Bei diesen Folgen wird schrittweise eine Zahl $d \in \mathbb{N}^*$ zu einem Grundwert x_0 addiert. Somit ist die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Folgenglieder immer konstant.

Definition 2. *Eine arithmetische Folge erster Ordnung sei also jede Zahlenfolge, für die gilt: $\{x_1 = x_0 + d; x_2 = x_0 + 2d; x_3 = x_0 + 3d; \dots\}$; in allgemeiner Schreibweise $x_n = x_1 + (n - 1) \cdot d$.*

Ein einfaches Beispiel wäre also die Folge der geraden Zahle 2, 4, 6, 8,... Somit sind bei Kenntnis zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder, sämtliche übrigen Glieder derselben arithmetischen Folge erster Ordnung eindeutig bestimmbar.

Schreibt man diese Folge nun mit ihren Differenzen, der *ersten Differenzenfolge*, an, so zeigt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{c} 2, 4, 6, 8, 10 \\ 2, 2, 2, 2 \end{array}$$

Wir stellen fest: Eine arithmetische Folge erster Ordnung zeichnet sich durch eine konstante erste Differenzenfolge aus.

Arithmetische Folgen zweiter Ordnung:

Eine arithmetische Zahlenfolge zweiter Ordnung ist beispielsweise die Folge der Quadratzahlen: 1, 4, 9, 16, 25,... Hier sind die Differenzen zweier Folgenglieder nicht ident. Betrachten wir nun die Differenzen dieser Folgenglieder genauer:

$$\begin{array}{c} 1, 4, 9, 16, 25 \\ 3, 5, 7, 9 \end{array}$$

Die Folge der Differenzen stellt offensichtlich eine arithmetische Folge erster Ordnung dar. Vervollständigen wir dieses Bild nun um die Folge der Differenzen der ersten Differenzenfolge. Wir erweitern also die Darstellung mit der *zweiten Differenzenfolge*:

$$\begin{array}{c} 1, 4, 9, 16, 25 \\ 3, 5, 7, 9 \\ 2, 2, 2 \end{array}$$

Wir stellen fest: eine arithmetische Folge zweiter Ordnung zeichnet sich durch eine konstante zweite Differenzenfolge aus.

Während eine arithmetische Folge erster Ordnung eindeutig durch nur zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder bestimmt werden kann, sind hierfür bei einer arithmetischen Folge zweiter Ordnung 3 aufeinanderfolgende Glieder notwendig.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \\ x_3 - 2x_2 + x_1 & & \end{array}$$

Da wir wissen, dass die dritte Zeile, die zweite Differenzenfolge, konstant ist können wir hiermit die Folge einfach fortsetzen.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & & \\ x_3 - 2x_2 + x_1 & x_3 - 2x_2 + x_1 & \dots & \end{array}$$

Wir wissen weiters, dass die erste Differenzenfolge eine arithmetische Folge erster Ordnung darstellt. Mittels Addition der Differenzen können wir diese zweite Zeile nun also ebenfalls trivial fortsetzen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 \\
 & x_2 - x_1 & & x_3 - x_2 & & 2x_3 - 3x_2 + x_1 & & 3x_3 - 5x_2 + 2x_1 & \\
 & & x_3 - 2x_2 + x_1 & & x_3 - 2x_2 + x_1 & & \dots & &
 \end{array}$$

Nun erhalten wir eine arithmetische Folge erster Ordnung mit zwei aufeinanderfolgenden Gliedern $y_1 = x_2 - x_1$ sowie $y_2 = x_3 - x_2$, wobei y_i einem allgemeinen Folgenglied entspricht. Das allgemeine Folgenglied y_i der ersten Differenzenfolge lässt sich nun ermitteln:

$$\begin{aligned}
 y_i &= i(y_2 - y_1) - y_2 + 2y_1 = \\
 &= i(x_3 - 2x_2 + x_1) - (x_3 - x_2) + 2(x_2 - x_1) = \\
 &= i(x_3 - 2x_2 + x_1) + 3x_2 - x_3 - 2x_1 = \\
 &= (i - 1)x_3 - (2i - 3)x_2 + (i - 2)x_1
 \end{aligned}$$

Für die ersten 6 Folgenglieder ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_2 - x_1 \\
 y_2 &= x_3 - x_2 \\
 y_3 &= 2x_3 - 3x_2 + x_1 \\
 y_4 &= 3x_3 - 5x_2 + 2x_1 \\
 y_5 &= 4x_3 - 7x_2 + 3x_1 \\
 y_6 &= 5x_3 - 9x_2 + 4x_1
 \end{aligned}$$

Das allgemeine Formelglied der eigentlichen Folge x_i kann nun berechnet werden.

$$x_i = x_{i-1} + y_{i-1} = x_1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_i = x_1 + \sum_{j=1}^{i-1} x_j$$

Wir setzen das zuvor berechnete allgemeine Folgenglied der ersten Differenzenfolge ein.

$$x_i = x_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} x_j = x_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} (j(x_3 - 2x_2 + x_1) + 3x_2 - x_3 - 2x_1) =$$

$$= x_1 + (x_3 - 2x_2 + x_1) \sum_{j=1}^{i-1} j + (3x_2 - x_3 - 2x_1) \sum_{j=1}^{i-1} 1 =$$

$$= x_1 + (x_3 - 2x_2 + x_1) \frac{i(i-1)}{2} + (3x_2 - x_3 - 2x_1)(i-1) =$$

$$= (x_3 - 2x_2 + x_1) \frac{i^2}{2} + (8x_2 - 3x_3 - 5x_1) \frac{i}{2} - (3x_2 - x_3 - 3x_1)$$

Arithmetische Folgen beliebiger Ordnung:

Von diesem Punkt aus ist das Definieren einer arithmetischen Folge beliebiger Ordnung nicht sehr komplex.

Eine Zahlenfolge ist eine arithmetische Folge der Ordnung n , wenn die n -te Differenzenfolge konstant ist. Eine solche Folge mit $n = 0$ inkludiert sämtliche Zahlen $\in \mathbb{N}$.

Beweis. Wenn wir nun annehmen, $f_n(x)$, so gilt:

$$f_n(x) = u_n x^n + \dots + u_1 x + u_0$$

$f_n(x)$ ist demnach ein Polynom des Grades n abgebildet in x .

Die Differenzenfolge ersten Grades dieses Polynoms wäre nun also ein Polynom des Grades $n-1$:

$$f_n(x) - f_n(x-1) = u_n(x^n - (x-1)^n) + \dots + u_2(x^2 - (x-1)^2) + u_1$$

Es gilt:

$$x^n - (x-1)^n = x^n - \sum_{j=0}^n U_x^j x^j = x^n - x^n - \sum_{j=0}^{n-1} U_x^j x^j = - \sum_{j=0}^{n-1} U_x^j x^j$$

Da ein Polynom ersten Grades eine arithmetische Folge des Grades 1 definiert, können wir nun mittels einer vollständigen Induktion beweisen, dass ein beliebiges Polynom des Grades n eine arithmetische Folge definiert.

□

2.1.2 Rekursive Folgen

Wir konnte nun beweisen, dass Polynome arithmetische Folgen bilden. Was ist aber mit Folgen, welche nicht durch Polynome definierbar sind? Nehmen wir als Beispiel die Folge $g_k = 3^k$ an. Die Folgenglieder ergeben folgendes Bild [34]:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, ...
 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458, ...
 4, 12, 36, 108, 324, 972, ...
 8, 24, 72, 216, 648, ...
 16, 48, 144, 432, ...
 32, 96, 288, ...
 64, 192, ...

Wir bemerken, dass keine Differenzenfolge konstant werden kann. Die Glieder dieser Folge sind nicht durch ihre Differenzen definiert, sondern vielmehr durch ihre Quotienten. Diese sind wie man unschwer feststellen kann konstant. Solch eine Folge ist als geometrische Folge bekannt. Bei solch einer allgemeinen geometrischen Folge, sind alle Folgenglieder berechenbar, sobald die ersten beiden Folgenglieder bekannt sind.

Gilt $p = \frac{x_2}{x_1}$, so gilt auch $x_i = x_1 \cdot p^{(i-1)}$

$$\begin{array}{cccccc}
 g_1 & g_1 \cdot p & g_1 \cdot p^2 & g_1 \cdot p^3 & g_1 \cdot p^4 & g_1 \cdot p^4 \\
 p & p & p & p & p & p
 \end{array}$$

Um geometrische Folgen zu vereinheitlichen, betrachten wir sie als sogenannte „lineare rekursive Folgen“. Diese besondere Betrachtungsweise zieht immer vorangegangene Glieder zur Berechnung der folgenden Glieder heran. Das mit Sicherheit berühmteste Beispiel einer

solchen Folge wäre:

$$g_k = g_{k-1} + g_{k-2}$$

Wenn man nun zwei explizite Folgenglieder g_1 und g_2 kennt, so lassen sich sämtliche weiteren Folgenglieder berechnen. Wir nehmen an:

$$g_1 = 1 \text{ und } g_2 = 1$$
$$(g_k)_{k=1}^\infty = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Somit gelangen wir zum Fokus dieser Arbeit, der bekannten **Fibonacci-Folge**.

Wir berechnen nun die ersten 20 Glieder dieser Folge:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; 620; 987; 1597; 2584; ...

2.2 Charakteristika der Fibonacci-Folge

Um dieses Kapitel zu bearbeiten, werden die Begriffe des „kleinsten gemeinsamen Vielfachen“ (kgV), sowie des „größten gemeinsamen Teilers“ (ggT) zuvor beleuchtet [34] [56].

Definition 3. *Es seien die Zahlen $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ nicht alle $= 0$ und $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Die Zahl x für die nun gilt: $x \neq 0$ sowie $x \in \mathbb{Z}$, heißt gemeinsamer Teiler von $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, wenn*

$x|m_i; i = 1, \dots, n$ gilt. Falls ebenfalls gilt: $x'|m_i$ bei $i = 1, \dots, n$ für ein $x' \neq 0 \in \mathbb{Z}$ folgt $x|x'$, so ist der Teiler d der größte gemeinsame Teiler, oder auch ggT genannt.

Sollte dieser größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen 1 entsprechen, so gelten diese Zahlen als teilerfremd.

Die Zahl $w \in \mathbb{Z}$ wird als ein gemeinsames Vielfaches der Zahlen $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ nicht alle $= 0$ und $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet, falls gilt $m_i|w$ bei sämtlichen $i = 1, \dots, n$. Dieses gemeinsame Vielfache wird auch als kleinstes gemeinsames Vielfaches, oder kgV bezeichnet, von $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ falls gilt: Aus $m_i|w'$ bei allen $i = 1, \dots, n$ folgt $w|w'$

Im Folgenden stellen wir einige Aussagen auf und beweisen diese.

Lemma 1

Falls gilt $x, y \in \mathbb{N}$ und $x|y$, so gilt auch $f_x|f_y$.

Beweis. Per Definition gibt es ein $c \in \mathbb{N}$ für das gilt $y = c \cdot x$. Somit ist ein Induktionsbeweis über c möglich.

Es gilt:

$$f_{x \cdot (c+1)} = f_{(x \cdot c + x)} = f_{(x \cdot c - 1)} \cdot f_x + f_{x \cdot c} \cdot f_{x+1}$$

Falls $c = 1$ so muss $x = y$ folgen. Setzen wir nun $f_x|f_{c \cdot x}$. Bei dieser Gleichung sind nun beide Seiten durch f_x eindeutig teilbar. Es folgt,

dass gilt $f_x = f_{x \cdot (c+1)}$.

□

Lemma 2

Aufeinanderfolgende Zahlen der Fibonacci-Zahlenfolge sind immer teilerfremd.

Beweis. Um diese Aussage zu beweisen, führen wir einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an: f_x und f_{x+1} sind durch $c \geq 1 \in \mathbb{N}$ teilbar. Folglich müsste $f_{x+1} - f_x = f_{x-1}$ ebenfalls durch c geteilt werden.

Wenn man diese Differenzen fortsetzt ergibt sich:

$$c | f_{x-n}; n = 1, 2, 3, 4, \dots, x-1$$

Am Ende würde man $c | f_1 = 1$ erhalten, was nicht möglich ist. Es existieren also keine aufeinanderfolgenden Glieder innerhalb der Fibonacci - Zahlen, welche einen gemeinsamen Teiler > 1 besitzen. Sie sind somit teilerfremd.

□

Lemma 3

Für alle $x > 1$ bei $x \in \mathbb{N}$ existiert ein Glied der Fibonacci-Folge in den ersten $x^2 - 1$, welches durch x teilbar ist.

Diese Aussage nachzuweisen ist zwar etwas aufwendiger, jedoch dient sie auch gleichzeitig als Grundstein für eine Reihe weiterer Teilbarkeitsregeln. Um diesen Beweis jedoch durchführen zu können, müssen wir zuerst den Begriff der Restklassen definieren.

Definition 4. *Es sind x und y beide $\in \mathbb{Z}$. Zusätzlich sei $x \geq 2$. Die Restklasse modulo x von y , definiert als $\overline{y}$, beschreibt den Restwert, welcher bei einer Division von x durch y übrig bleibt. Weil y sich auch als $y = m \cdot x + c$ darstellen lässt, wobei gilt $m \in \mathbb{Z}$ und $c \in \{0, 1, \dots, x - 1\}$, kann man mit Sicherheit sagen, dass es genauso viele Restklassen modulo x exakt x gibt. Es zeigt sich, dass alle ganzen Zahlen modulo $y \in \mathbb{N}$ kongruent zu jeweils einer Zahl $1, \dots, x - 1$ sind. Das kleinste nicht-negative Restsystem modulo x wird daher als $0, 1, \dots, x - 1$ bezeichnet. Das vollständige Restsystem modulo x bezeichnet alle Mengen der ganzen Zahlen welche x paarweise modulo x inkongruent sind.*

Beweis. Um den Beweis zu obigen Satz anzutreten, verwenden wir folgende Folge:

$$(\overline{x_0}, \overline{x_1}), (\overline{x_1}, \overline{x_2}), (\overline{x_2}, \overline{x_3}), (\overline{x_3}, \overline{x_4}), \dots, (\overline{x_m}, \overline{x_{m+1}}), \dots,$$

Diese Folge besteht offensichtlich aus paarweisen Restklassen x aufsteigender Folgenglieder der Fibonacci-Folge. Es müssen bis zu x^2 unterschiedliche Paare von Restklassen existieren, weil es auch x Restklassen modulo x gibt.

Da es das Restklassenpaar $(\bar{0}, \bar{0})$ gibt, muss es zwei aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci-Folge geben, welche einen Teiler $x \geq 2$ haben. Dies steht in direktem Widerspruch zur obigen Aussage, dass zwei aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci-Folge jeweils teilerfremd seien. Daher gibt es sogar bloß $x^2 - 1$ Restklassenpaare.

Somit existieren innerhalb der ersten x^2 Folgenglieder der eingangs definierten Folge zumindest zwei Idente.

Angenommen $(\overline{x_n}, \overline{x_n + 1})$ ist das erste Folgenglieder der hier diskutierten Folge, so existiert ein Restklassenpaar $(\overline{x_j}, \overline{x_j + 1})$, für das gilt: $(\overline{x_j}, \overline{x_j + 1}) = (\overline{x_n}, \overline{x_n + 1})$, als auch $j > n$.

Um den Beweis zur obigen Aussage zu führen, zeigen wir einen Widerspruchsbeweis. Dieser wird zeigen, dass $(\overline{x_n}, \overline{x_n + 1}) = ((\bar{0}, \bar{1}) \rightarrow n = 0$.

Für diesen Widerspruchsbeweis, nehmen wir an es sei $n \geq 0$. Weiters sei $x_{j-1} = x_{j+1} - x_j$ und $x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$. Es folgt also: $\overline{x_{j+1}} = \overline{x_{n+1}}$ sowie $\overline{x_n} = \overline{x_j}$. Das Gliederpaar $(\overline{x_{n-1}}, \overline{x_n})$ ist somit doppelt in der

diskutierten Folge enthalten. Innerhalb der Folge ist es auch vor dem Paar $(\overline{x_n}, \overline{x_{n+1}})$ gereiht.

Die Bedingung, dass $(\overline{x_n}, \overline{x_n + 1})$ das erste Restklassenpaar mit diesen Charakteristika ist, ist hiermit eindeutig widerlegt. Es gilt daher $n = 0$.

Wir gehen jetzt davon aus, dass das Restklassenpaar $(\overline{0}, \overline{1})$ innerhalb der Folge $(\overline{x_0}, \overline{x_1}), (\overline{x_1}, \overline{x_2}), (\overline{x_2}, \overline{x_3}), (\overline{x_3}, \overline{x_4}), \dots, ((\overline{x_m}, \overline{x_{m+1}}), \dots$, an der Stelle t mit $(\overline{x_t}, \overline{x_t + 1}) = (\overline{0}, \overline{1})$ und $1 \leq t \leq x^2$ existiert.

So folgt: f_t ist durch x teilbar, da $f_t \equiv 0 \pmod{x}$.

Die Aussage ist daher durch Widerspruchsbeweis bewiesen.

□

2.2.1 Der Satz von Zeckendorf

Eine elementare Beobachtung im Rahmen der Fibonacci - Zahlen, wurde durch den belgischen Arzt Edouard Zeckendorf angestellt. Diese Beobachtung wurde als Satz von Zeckendorf berühmt. Als Grundlage gehen wir noch in einem kurzen Exkurs auf die Darstellbarkeit von Zahlen generell ein [5].

Das in Europa gebräuchliche Zahlensystem wird bekanntermaßen als Dezimalsystem bezeichnet. Somit stellen die Zahl 10 und ihre Potenzen die Größenordnungen unseres Zahlensystems dar. Innerhalb jeder Potenz von 10 lassen sich somit alle Zahlen $\in \mathbb{N}$ durch eine Kombi-

nation der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 darstellen. Dies können wir auch mathematisch angeben:

Satz 1

$$m = \sum_{j=0}^n x_j 10^j, x_j \in 0, 1, 2, 3, \dots, 9, x_n \neq 0$$

In dieser Darstellung stellt $n + 1$ die Anzahl der Stellen dar. Für n gilt: $n = \lfloor \frac{\log m}{\log 10} \rfloor$.

Diese Darstellung erweckt jedoch die Frage: Ist die Wahl von 10 als Basis unseres Zahlensystems nicht absolut willkürlich?

Und tatsächlich lässt sich, mithilfe einer entsprechend diversen Anzahl an Symbolen, jede Zahl $x \in \mathbb{N}$ als Basis eines funktionierenden Zahlensystems verwenden. Wie viele verschiedene Symbole werden also benötigt?

Bei einem Zahlensystem zur Basis x werden modulo x verschiedene Symbole zur Darstellung benötigt. Simpel gesagt bedeutet das: $\{0, 1, \dots, x - 1\}$.

Prominente Beispiele sind das Hexadezimalsystem ($n = 16$) oder das Binärsystem ($n = 2$). Lediglich ein System mit ($n = 1$) würde den Anwender vor Herausforderungen stellen. Hiermit wäre keine Darstellung der Zahl 0 möglich. Jede Zahl $x > 0$ kann theoretisch mit

Basis 1 dargestellt werden. Praktisch stellen die bei Gesellschafts- und Kartenspielen üblichen Strichlisten ein System mit Basis 1 dar.

Allgemein können wir jede natürliche Zahl in der sogenannten **g-adischen Darstellung** anschreiben:

$$m = \sum_{j=0}^n x_j g^j, x_j \in \{0, 1, \dots, g-1\}, x_n \neq 0$$

Treten wir nun den formalen Beweis hierzu an [5] [46]:

Beweis. Im ersten Schritt zeigen wir, dass die g-adische Darstellung korrekt ist. Hierzu definieren wir:

$$w_0 := m$$

Durch Division mit Rest erhalten wir:

$$w_0 = w_1 g + x_0, \quad 0 \leq x_0 < g$$

Mit w_1 bestimmen wir nun w_2 und x_1 :

$$w_1 = w_2 g + x_1, \quad 0 \leq x_1 < g \leq w_1$$

Hier seien nun Zahlen für $w_0, w_1, \dots, w_i$ und $x_0, x_1, \dots, x_i - 1$ mit $i \in \mathbb{N}$ definiert, um die Kriterien für

$$w_j = w_j + g_1 + x_j, \quad 0 \leq x_j < g \leq w_j$$

im Fall

$$j = 0, 1, \dots, i - 1$$

zu erfüllen. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{w_j}{g} &\geq w_{j+1} > 0 \\ &\text{und} \\ w_0 g^{-i} &\geq w_1 g^{-(i-1)} \geq \dots \geq w_i \geq 0 \\ &\text{bei} \\ j &= 0, 1, \dots, i - 1 \end{aligned}$$

An dieser Stelle können zwei verschiedene Optionen eintreten:

1) Es gilt $w_i \geq g$. In diesem Fall muss abermals dividiert werden, äquivalent zur Umformung oben, mit w_i und g . Hieraus resultiert $j = i$ und $w_i, x_i \in \mathbb{N}$. 2) Es gilt $w_i < g$. In diesem Fall wird $x_i := w_i$ definiert, gemäß $0 < x_i < g$.

Der zweite Fall tritt auf bei:

$$m = \frac{\log m}{\log g}$$

Im Rahmen dieses Beweises, sei dieser Zustand exakt bei $n > 0$ eingetreten. Somit definieren wir $j = 0, 1, \dots, n - 1$, sowie $0 < x_n := w_n < g$.

Durch Induktion erhalten wir nun:

$$w_0 = w_i g^i + \sum_{j=0}^{i-1} x_j g^j$$

Aus dieser Darstellung resultiert wiederum $i = n$. Mit Hilfe des Konstruktionsprinzips können wir davon ausgehen das weiters gilt: $x_0, x_1, \dots, x_n \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$. Somit ist die Existenz der eingangs notierten Verallgemeinerung nachgewiesen.

Nach der Existenz muss nun im zweiten, kürzeren Schritt, auch die Eindeutigkeit bewiesen werden.

Dank unseres bisherigen Wissens können wir feststellen das gilt:

$$g^n \leq m < g^{n+1}$$

sowie

$$n = \frac{\log m}{\log g}$$

Beides ist somit ganz eindeutig definiert. Es ergibt sich die allgemeine Schreibweise:

$$m = \sum_{j=0}^n x'_j g^j$$

Für x' gilt $x'_0, x'_1, \dots, x'_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ und $x'_n \neq 0$. Nun können wir diese allgemeine Abbildung für m von der eingangs aufgestellten Gleichung mittels Subtraktion abziehen und erhalten:

$$0 = \sum_{j=0}^n (x'_j - x_j) g^j$$

Was können wir hier nun ableiten? Wir wissen zwei Dinge: Erstens wissen wir, dass $g \mid x'_0 - x_0$ teilt. Zweitens wissen wir, dass gilt $|x'_0 - x_0| < g \Rightarrow x'_0 = x_0$. Folglich muss ebenso gelten: $(x'_1 - x_1) \cdot g$ wird durch g^2 geteilt. Durch Kürzen erhalten wir: $x'_1 - x_1$ wird durch g geteilt. Ein finaler Induktionsschritt macht nun deutlich: $x'_j = x_j$ bei $j = 0, 1, \dots, n$.

Die Eindeutigkeit wurde somit ebenso wie die Existenz gezeigt.

□

Satz 2

Der Satz von Zeckendorf, auch als Zeckendorf Theorem bekannt, besagt, dass jede Zahl x , für die gilt $x \in \mathbb{N}$ sowie $x \neq 0$, eindeutig als Summe von Fibonacci - Zahlen, welche nicht ident oder aufeinanderfolgend sind mit Indizes $j \geq 2$, geschrieben werden kann. Somit muss

es für jede Zahl x gelten:

$$x = \sum_{j=2}^n x_j f_j$$

Hierbei gelten folgende Bedingungen: $x_j \in \{0, 1\}$ sowie $x_j \cdot x_{j+1} = 0$. Hierbei entsteht eine Folge, welche gemeinhin als **Zeckendorf Sequenz** bekannt ist.

Jede Zeckendorf Sequenz ist, gemäß dieser Bedingungen, eine endliche Folge der Ziffern 0 und 1. Sie startet immer mit der Ziffer 1, es treten jedoch nie zwei 1 direkt hintereinander auf. Jede dieser Sequenzen kann eindeutig einer natürlichen Zahl, in unserem Fall bezeichnet als x , zugeordnet werden. Die zugehörige Zeckendorf Sequenz wird als $\phi(x)$ bezeichnet.

Treten wir also den Beweis für diese Eindeutigkeit an.

Beweis. Wir starten mit einer natürlichen Zahl $x > 0$ und definieren $x_0 := x$, sowie $c_1 = 1$. Nun gilt $x_1 := x_0 - n_k$. n_k ist definiert als das höchste Glied der Fibonacci-Folge, für welches gilt: $n_k \leq x_0$.

Wir wiederholen diesen Vorgang i mal, um eine Zahl x_i und eine Sequenz $(c_1, c_2, c_3, \dots, c_k)$ zu erhalten.

Als nächstes muss der Fall $i + 1$ betrachtet werden. Hierbei wird $n_k - 1$ gegen x_i verglichen. Sollte gelten: $n_{k-1} > x_i$, definieren wir

$c_{i+1} = 0$ sowie $x_{i+1} = x_i$. Falls jedoch gilt $n_{k-1} \leq x_i$, so definieren wir $c_{i+1} = 1$, sowie $x_{i+1} = x_i - n_{k-i}$.

Hier sollte noch beachtet werden, ob $x_k < n_{k-i+1}$ bei $i = 0, 1, \dots, k-1$ gilt.

Dies können wir durch vollständige Induktion auf triviale Weise zeigen. Im Falle $i = 0$ sei $x_0 = x < n_{k+1}$. Dies gilt, weil n_k eingangs als so groß wie möglich gewählt wurde, präzise: $n_k \leq x_0 = x$.

Im Falle einer Zahl y für die gilt $y < k-1$, gilt bekanntermaßen $x_y < n_{k-y+1}$. Sollte der Fall $x_y = x_{y+1}$ eintreten, so wissen wir bereits das ebenfalls $x_{y+1} < n_{k-y}$ gelten muss.

Für $x_{y+1} = x_y - n_{k-y}$, können wir auf $x_{y+1} = x_y - n_{k-y} < n_{k-y+1} - n_{x-y} = n_{k-y-1} \leq n_{k-y}$ schließen. Dies bestätigt die ursprüngliche Behauptung.

Aufgrund dieser oben beschriebenen Bedingungen, gilt:

$$x_{k-1} < n_{k-(k-1)+1} = n_2 = 1 \Rightarrow x_{k-1} = 0.$$

Somit wissen wir, dass unsere Konstruktion nach exakt $(k-1)$ Konstruktionsschritten abgeschlossen ist.

Dieses Verfahren weißt die Eindeutigkeit nach. Folglich muss noch gezeigt werden, dass diese eindeutigen Folgen auch tatsächlich Zeckendorf - Sequenzen entsprechen.

Wir wissen bisher, dass jede Sequenz, für die gilt $x \neq 0$, mit $c_1 = 1$ starten muss. Daher besteht der Nachweis der Zeckendorf - Sequenzen daraus, den Fall $c_j \cdot c_{j+1} = 1$ bei $j = 1, \dots, x - 2$ auszuschließen. Hierfür ziehen wir 2 Fälle heran:

Erster Fall: $c_1 = c_2 = 1$. Hieraus schließen wir $x_1 = x_0 - n_k \geq n_{k-1}$, da ebenfalls $c_2 = 1$ gilt. Somit würde gelten $x_0 \geq n_{k-1} + n_k = n_{k+1}$. Dies stünde allerdings im direkten Widerspruch zu $n_k < x_0 < n_{k+1}$, somit wäre $c_2 = 0$. Der Widerspruch ist in diesem Fall offensichtlich.

Zweiter Fall: $c_i = 0, c_{i+1} = c_{i+2} = 1$, bei $i \in \{2, 3, \dots, x - 3\}$. Im nächsten Schritt betrachten wir die einzelnen Aussagen dieses Falles im Detail:

$$c_i = 0 \Rightarrow x_{i-1} < n_{k-i+1}$$

$$c_i = 0 \Rightarrow x_{i-1} = x_i$$

$$c_{i+1} = 1 \Rightarrow x_i - n_{k-i} = x_{i+1}$$

$$c_{i+2} = 1 \Rightarrow x_{i+1} \geq n_{k-i-1}$$

Bildet man jetzt die Summe der unteren drei Ungleichungen, ergibt das $x_{i-1} - n_{k-i} \geq n_{k-i-1} = x_{i-1} \geq n_{k-i} + n_{k-i-1} = n_{k-i+1}$. Dies widerspricht definitiv der ersten Ungleichung ganz oben.

Wir wissen aus diesem System, dass entweder c_3 oder $c_4 = 0$ sein muss. Somit muss sukzessive auch gelten $c_3 = 0; c_4 = c_5 = 1$ oder $c_4 = 0; c_5 = c_6 = 1$. Dies wurde allerdings gerade widerlegt. Somit

wissen wir, dass in der gesamten Zahlenfolge keine aufeinanderfolgenden Stellen vorkommen die $= 1$ sind.

Zusätzlich zur Eindeutigkeit wurde somit in beiden Fällen das vorliegen einer tatsächlichen Zeckendorf - Sequenz bewiesen.

□

2.2.2 Die Cassini - Identität

Die Cassini - Identität ist auch als Simpson - Identität bekannt und ist wahlweise nach Giovanni Cassini oder Robert Simpson benannt. Diese beschreibt die Beziehung dreier aufeinanderfolgender Fibonacci - Zahlen [44].

Satz 3

Gemäß der Cassini - Identität gilt im Falle $n \in \mathbb{N}$ folgendes:

$$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$$

Um diese Relation zu beweisen, nutzen wir die Induktion:

Beweis. Wir nehmen zwei Fälle an: $n = 1$ sowie $n = 2$.

Im Falle $n = 1$ ergibt sich:

$$f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = (-1) = (-1)^1$$

Im Falle $n = 2$ ergibt sich:

$$f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = 1 = (-1)^2$$

Nun folgt der Induktionsschritt von $n \rightarrow (n + 1)$:

$$\begin{aligned}
 f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= \\
 (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= \\
 f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1}) + f_n^2 &= \\
 f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1}) + f_{n+1} \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} &= \\
 f_{n+1} \cdot (f_n - f_{n+1} + f_{n-1}) + (-1)^{n+1} &= \\
 f_{n+1} \cdot 0 + (-1)^{n+1} &= \\
 (-1)^{n+1} &
 \end{aligned}$$

□

Die Identität von Cassini lässt sich jedoch noch verallgemeinert darstellen. Hieraus ergibt sich dann die sogenannte Catalan - Identität. Erstaunlicherweise wurde diese erst nach der Cassini - Identität definiert, vom belgischen Mathematiker Eugène Catalan im Jahr 1879. Um den Beweis hierzu erfolgreich führen zu können, fehlt uns jedoch noch ein wichtiges Werkzeug: die Identität von d'Ocagne.

2.2.3 Identität von d'Ocagne

Diese Identität der Fibonacci - Zahlen wurde nach dem Franzosen Hilbert d'Ocagne benannt [44].

Satz 4

Wenn gilt $x, y \in \mathbb{N}$ und $x \geq y$ so gilt weiter:

$$f_x \cdot f_{y+1} - f_y \cdot f_{x+1} = (-1)^y \cdot f_{x-y}$$

Um diesen Satz zu beweisen, nutzen wir abermals einen Induktionsbeweis.

Beweis. Wir nehmen den speziellen Fall $x = y$ an. Hier gilt

$$f_y \cdot f_{y+1} - f_y \cdot f_{y+1} = 0 = (-1)^y \cdot f_0$$

Anschließend betrachten wir den Fall $x > y$ und beweisen mittels vollständiger Induktion:

Falls $y = 0$ gilt, so folgert sich:

$$f_x \cdot f_1 - f_0 \cdot f_{x+1} = f_x = (-1)^0 \cdot f_m$$

Falls $y = 1$ gilt, so folgert sich:

$$f_x \cdot f_2 - f_1 \cdot f_{x+1} = f_m - f_{m+1} = -f_{m-1} = (-1)^1 \cdot f_{m-1}$$

Als Voraussetzung für die Induktion sei nun dieser Satz für alle $y \in \mathbb{N}(y-1)$ bei $x > y$ als gegeben angenommen.

Somit können wir zwei Gleichungen als gesichert annehmen:

$$f_x \cdot f_{y+1} - f_y \cdot f_{x+1} = (-1)^n f_{x-y}$$

sowie

$$f_x \cdot f_y - f_{y-1} \cdot f_{x+1} = (-1)^{y-1} \cdot f_{x-y+1}$$

Daher lässt sich folgende Schlussfolgerung im Fall $(y+1)$ simpel ziehen:

$$\begin{aligned} & f_x \cdot f_{y+2} - f_{y+1} \cdot f_{x+1} = \\ & f_x \cdot (f_{y+1} + f_y) - (f_y + f_{y-1}) \cdot f_{x+1} = \\ & f_x \cdot f_{y+1} + f_x \cdot f_y - f_y \cdot f_{x+1} - f_{y-1} \cdot f_{x+1} = \\ & (f_x \cdot f_y - f_{y-1} \cdot f_{x+1}) + (f_x \cdot f_{y+1} - f_y \cdot f_{x+1}) = \\ & (-1)^{y-1} \cdot f_{x-y+1} + (-1)^y \cdot f_{x-y} = (-1)^y \cdot (f_{x-y} - f_{x-y+1}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{y+1} \cdot f_{x-y+1} - f_{x-y} &= (-1)^{y+1} \cdot f_{x-y-1} = \\
&= (-1)^{y+1} \cdot f_{x-(y+1)}
\end{aligned}$$

□

2.2.4 Identität von Catalan

Kehren wir nun, ausgestattet mit diesem neuen Tool, zurück zur Identität von Catalan [19]. Diese besagt folgendes:

Satz 5

Im Falle $x \geq k$ sowie $x, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_x^2 = f_{x-k} \cdot f_{x+k} + (-1)^{x-k} \cdot f_k^2$$

Beweis. Sei $x = 0$, so enden wir mit folgender wahrer Aussage:

$$f_0^2 = f_0 \cdot f_0 + (-1)^0 f_0^2 = 0$$

Nun sei $n \geq 1$ und wir machen uns die Identität von d'Ocagne zunutze.

$$\begin{aligned}
& f_{x-k} \cdot f_{x+k} + (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 = \\
& (-1)^{-k} \cdot (f_x \cdot f_{k+1} - f_k \cdot f_{x+1}) \cdot (f_{x-1} \cdot f_k + f_x \cdot f_{k+1}) + (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 = \\
& (-1)^{-k} \cdot (f_k \cdot f_{k+1} \cdot f_{x-1} \cdot f_x - f_k^2 \cdot f_{x-1} \cdot f_{x+1} + f_{k+1}^2 \cdot f_x^2 - f_k \cdot f_{k+1} \cdot \\
& \quad f_x \cdot f_{x+1}) + (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 \\
& (-1)^{-k} \cdot (f_k \cdot f_{k+1} \cdot f_x \cdot (f_{x-1} - f_{x+1}) - f_k^2 \cdot f_{x-1} \cdot f_{x+1} + f_{k+1}^2 \cdot f_x^2) + \\
& \quad (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 = \\
& (-1)^{-k} \cdot (-f_k \cdot f_{k+1} \cdot f_x^2 - f_k^2 \cdot (f_x^2 + (-1)^x) + f_{k+1}^2 \cdot f_x^2) + (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 = \\
& \quad (-1)^{-k} \cdot f_x^2 \cdot (-f_k \cdot f_{k+1} - f_k^2 + f_{k+1}^2) - f_k^2 \cdot (-1)^{x-k} \cdot f_k^2 = \\
& \quad (-1)^{-k} \cdot f_x^2 \cdot (f_{k+1} - f_k) - f_k^2 = \\
& \quad (+1)^{-k} \cdot f_x^2 \cdot (f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2) = \\
& \quad (-1)^{-k} \cdot f_x^2 \cdot (f_k^2 + (-1)^k - f_k^2) = \\
& \quad f_n^2
\end{aligned}$$

□

2.2.5 Die Fibonacci - Folge der ganzen Zahlen

Nun, nachdem wir einige Zeit mit speziellen Eigenschaften der Fibonacci - Zahlen untereinander verbracht haben, gilt der Fokus nun einer speziellen Fragestellung: „Gibt es auch Glieder der Fibonacci - Folge mit negativen Indizes, also in der Menge $\mathbb{Z}$?“. Wir gehen für diese Fragestellung von folgender Darstellung aus [8]

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

Diese Darstellung lässt sich jedoch auch so anschreiben:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} =$$

$$f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$$

Sei nun $f_0 = 0$ sowie $f_1 = 1$. Wir rechnen nun rückwärts, um die Fibonacci - Zahlen mit negativen Indizes zu berechnen. Hierzu dient folgende Tabelle:

$$f_0 = f_2 - f_1 = 0$$

$$f_{-1} = f_1 - f_0 = 1$$

$$f_{-2} = f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1$$

$$f_{-3} = f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2$$

Durch triviales Weiterrechnen erhalten wir die Fibonacci - Zahlen mit negativen Indizes. In der anschließenden Tabelle vergleichen wir jeweils die Fibonacci - Glieder mit Indizes verschiedener Vorzeichen.

n	f_n	f_{-n}
0	0	0
1	1	1
2	1	-1
3	2	2
4	3	-3
5	5	5
6	8	-8
7	13	13
8	21	-21
9	34	34
10	55	-55

Die offensichtlich gewordene Verbindung lässt in allen $n \in \mathbb{N}$ darstellen durch:

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$$

Um die allgemeine Gültigkeit dieser Aussage zu zeigen, nutzen wir einen Induktionsbeweis.

Beweis. Die Aussage sei für alle $n = 1$ und $n = 2$ bewiesen.

Somit gilt:

$$f_{-1} = 1 = (-1)^2 \cdot f_1$$

sowie

$$f_{-2} = -1 = (-1)^3 \cdot f_2$$

Wir setzen voraus das folgendes gilt:

Die Behauptung gilt für alle Zahlen $n, n - 1 \in \mathbb{N}$ sowie $n > 1$.

Die Induktion wird nun von $n - 1$ sowie n nach $n + 1$ durchgeführt.

Folgende Gleichungen haben somit Gültigkeit:

$$f_{-(n-1)} = (-1)^n \cdot f_{n-1}$$

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$$

Es lässt sich folgern:

$$f_{-(n+1)} = f_{-(n-1)} - f_{-n} =$$

$$f_{-(n+1)} = (-1)^n \cdot f_{n-1} - (-1)^{n+1} \cdot f_n = (-1)^{n+2} \cdot (f_{n-1} + f_n) =$$

$$f_{-(n+1)} = (-1)^{n+2} \cdot f_{n+1}$$

Somit konnte die Fibonacci - Folge in den Bereich der $\mathbb{Z}$ erfolgreich erweitert werden.

□

2.3 Definition des Goldenen Schnittes

„Geometrie besitzt zwei große Sätze: einer ist das Theorem des Pythagoras; der andere ist die Teilung einer Linie in das äußere und das mittlere Verhältnis. Die erste mögen wir mit dem Wiegen des Goldes vergleichen; die zweite verdient den Namen eines Edelsteines.“ - Johannes Kepler

Der Goldene Schnitt ist für die meisten Menschen automatisch mit Ästhetik und Kunst konnektiert. So hört man auf die Frage wie ein Bild aufzuteilen ist, oder wie die Proportionen eines Bauwerks dimensioniert sein sollten oft die Antwort „na im Goldenen Schnitt!“. Diese simplifizierte Version hat jedoch meist nur peripher mit der exakten Definition des Goldenen Schnittes zu tun. So wird in der Fotografie meist von der „Drittelregel“ gesprochen [16]. Hierbei wird ein Bild in ein Drittel auf der einen Seite des Motivs und zwei Drittel auf der anderen Seite unterteilt. Etwas präziser ist die Einteilung in 5 Achtel zu 3 Achtel.

Keine der obigen Einteilungen definiert den wahren Goldenen Schnitt allerdings exakt. Im folgenden wollen wir den Goldenen Schnitt mathematisch definieren [38]. Um hierfür allerdings gerüstet zu sein, definieren wir zuvor den Begriff des Teilungsverhältnisses generell [34].

Definition 5. Eine Strecke $[AB]$ wird durch einen Punkt $T \in$ der Geraden $[AB]$, in zwei Teile geteilt. Das Verhältnis wird als $\overline{AT} : \overline{TB} = \lambda$ definiert. Hierbei beschreibt λ das Teilverhältnis der Strecken $\overline{AT}$ und $\overline{TB}$. Die Strecke $[AB]$ wird somit durch T Verhältnis λ geteilt. Liegt T hierbei auf der Strecke $[AB]$, so handelt es sich um einen inneren Teilpunkt. Sollte T außerhalb der Strecke $[AB]$, aber immer noch auf der Geraden AB liegen, so handelt es sich um einen äußeren Teilpunkt.

Als ästhetisch ansprechendste Version einer inneren Teilung, wird generell der Goldene Schnitt betrachtet. Eine simple Darstellung des Goldenen Schnittes ist in Abbildung 1 dargestellt. Hierfür gilt die folgende Definition:

Definition 6. Wird eine Strecke durch einen Punkt geteilt, sodass das Verhältnis des größeren Teils zum Ganzen ident ist zum Verhältnis des kleineren Teils zum größeren Teil, so teilt dieser Punkt die Strecke im Goldenen Schnitt.

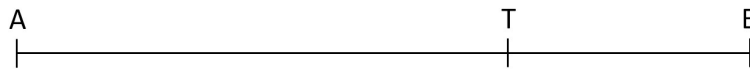


Abbildung 1: Einfache grafische Darstellung des Goldenen Schnittes

Somit gilt:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AT}}$$

Weiter gilt:

$$\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB}.$$

Somit erhalten wir:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = \frac{\overline{AT} + \overline{TB}}{\overline{AT}}$$

Ist dieser Fall gegeben sprechen wir von einem Teilungsverhältnis im Goldenen Schnitt.

Durch Umformung der obigen Gleichung erhalten wir nun:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = 1 + \frac{\overline{TB}}{\overline{AT}}$$

Für den weiteren Verlauf werden wir das Teilungsverhältnis $\overline{AT} : \overline{TB}$ als $\varphi = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}}$ bezeichnet. Für φ erhalten wir nun:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Durch Anwendung der kleinen Lösungsformel erhalten wir folgende Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$\varphi_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

φ ist damit die einzige Lösung zu folgender Gleichung:

$$y\check{s} - y - 1 = 0$$

Die irrationale Zahl φ ist auch als **Goldene Zahl** bekannt.

Diese Irrationalität von φ lässt sich folgendermaßen zeigen:

Beweis. Wäre φ rational, so müsste es zwei teilerfremde ganze Zahlen p und q geben mit $\varphi = \frac{p}{q}$. Es müsste dann folgende Gleichung gelten:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0.$$

Hierfür müssten zwei eindeutige Variablen p und q existieren.

Es lässt sich folgern:

$$p \cdot (p - q) = q^2$$

Wir erkennen somit, dass p ein Teiler von q^2 sein muss. Zusätzlich wissen wir allerdings auch, dass p und q teilerfremd sein müssen. Daher kann nur gelten: $p = 1$.

Durch Addition von $p \cdot q$ zur Gleichung oben, so erhalten wir:

$$p^2 = q \cdot (q + p)$$

Hier sehen wir nun eindeutig, dass q p teilt. Es muss somit ebenfalls gelten: $q = 1$.

Einsetzen zeigt uns allerdings recht schnell, dass dies keine Lösung für die quadratische Gleichung zu Beginn darstellt. Wir haben hier somit einen Widerspruch zur Rationalität und wissen somit, dass φ irrational sein muss.

□

Wie in späteren Beispielen zur Konstruktion ersichtlich werden wird, trifft φ_1 auf Beispiele mit inneren Teilpunkten zu, während φ_2 bei äußeren Teilpunkten zu finden ist. Eine Teilung im Verhältnis des Goldenen Schnittes entspricht auch einer sogenannten stetigen Teilung. Dies erklärt sich durch folgende Eigenschaft.

Trägt man den kleineren Abschnitt $\overline{TB}$ auf dem größeren Teil $\overline{AT}$ ab, so wird $\overline{AT}$ durch den neu gewonnenen Teilpunkt ebenso stetig geteilt, wie nachfolgender Beweis zeigt:

$$\text{Es sei } \frac{x}{y} = \varphi \rightarrow x = \varphi \cdot y$$

Hieraus lässt sich folgender Beweis ableiten:

$$\begin{aligned} \text{Beweis. } \frac{y}{x-y} &= \frac{y}{(\varphi-1) \cdot y} = \frac{1}{\varphi-1} = \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right)} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \\ &= \frac{2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi \end{aligned}$$

□

Schlussendlich können wir somit definieren:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618033988749894... \approx 1.618$$

Der Goldene Schnitt ist eine irrationale Zahl und besitzt somit unbegrenzt viele Nachkommastellen [10].

2.4 Geometrische Darstellung des goldenen Schnittes

Um den goldenen Schnitt grafisch darstellen zu können, stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Im folgenden Abschnitt werden

drei gut geeignete Verfahren beispielhaft ausgeführt und erklärt [34] [31].

Verfahren 1:

Dieses Verfahren nutzt die innere Teilung. Gegeben sei hier eine Strecke $[YZ]$, welche durch den inneren Punkt $T \in [YZ]$ im Goldenen Schnitt geteilt werden soll.

1. Schritt:

Konstruktion von $[ZX] \perp [YZ]$, wobei hier gilt:

$$X : \overline{ZX} = \frac{1}{2}\overline{YZ}$$

2. Schritt:

Konstruktion von $[YX]$.

3. Schritt:

Konstruktion eines Kreises mit Zentrum X und dem Radius $\overline{XZ}$. Der Schnittpunkt des Kreis mit $[YX]$ wird als U definiert.

4. Schritt:

Konstruktion eines Kreises mit Zentrum Y und dem Radius $\overline{YU}$. Der Schnittpunkt des Kreis mit $[YZ]$ wird als T definiert.

T teilt nun $[YZ]$ exakt im Verhältnis des Goldenen Schnittes φ . Dies ist in Abbildung 2 gezeigt.

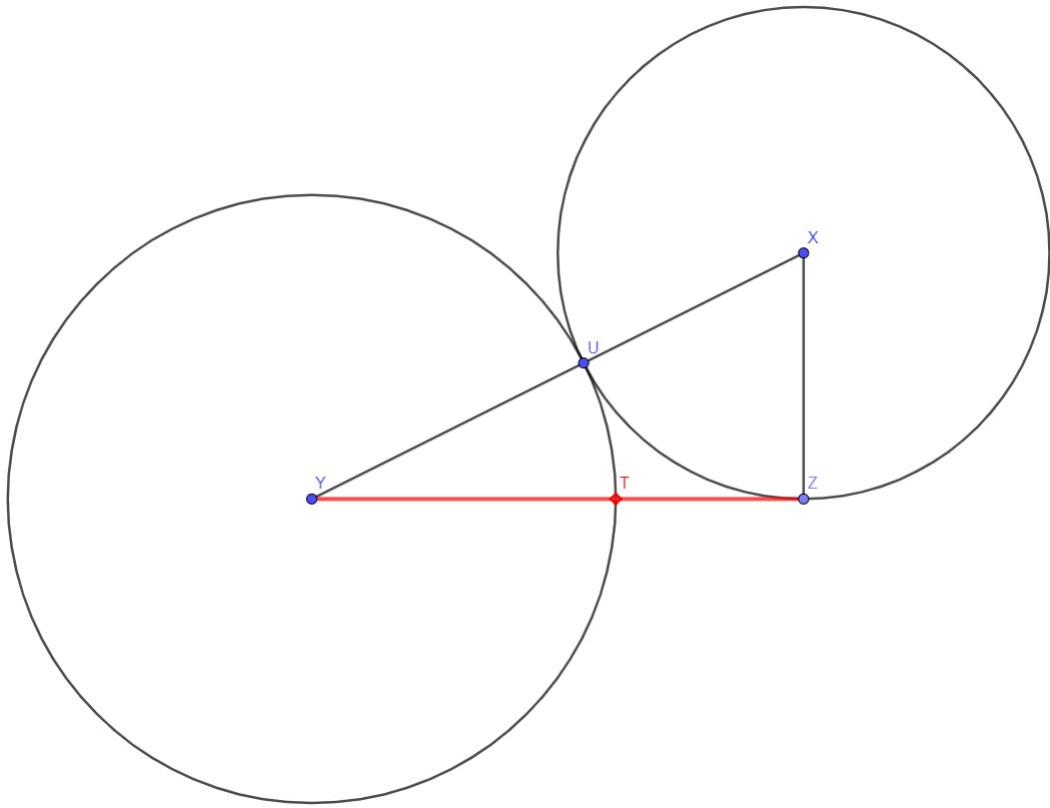


Abbildung 2: Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode mit innerer Teilung

Beweis. Wie bei jedem rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\overline{YX}^2 = \overline{YZ}^2 + \overline{ZX}^2$$

$$\rightarrow \overline{ZX} = \frac{1}{2}\overline{YZ}$$

$$\rightarrow \overline{YX}^2 = \frac{5}{4}\overline{YZ}^2$$

Daraus folgt:

$$\overline{YX} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{YZ}$$

Daher gilt:

$$\overline{YT} = \overline{YU} = \overline{YX} - \overline{XU} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{YZ} - \frac{1}{2}\overline{YZ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{YZ}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{YZ}}{\overline{YT}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

$$\frac{\overline{YT}}{\overline{TZ}} = \frac{\sqrt{5}-1}{-\sqrt{5}+3} =$$

$$\frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (3+\sqrt{5})}{(-\sqrt{5}+3) \cdot (3+\sqrt{5})} =$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi_1$$

□

Verfahren 2:

Im Unterschied zu Verfahren 1, liegt bei diesem Verfahren eine äußere Teilung vor [42]. Gegeben ist hierbei die Strecke $[YT]$. Der Punkt Z ist nun so zu wählen, dass die neue Strecke $[YZ]$ von T im Verhältnis φ geteilt wird.

1. Schritt:

Konstruktion von $[YX] \perp [YT]$. Durch Abschlagen von $\overline{YT}$ auf der neuen Strecke $[YX]$ erhält man den Punkt X .

2. Schritt:

Konstruktion des Punktes U , für den gilt:

$$\overline{YT} \cdot \frac{1}{2} = \overline{YU}$$

3. Schritt:

Konstruktion eines Kreises mit Zentrum U und dem Radius $\overline{UX}$.
Der Schnittpunkt des Kreis mit $[YT]$ wird als Z definiert.

4. Schritt:

Die verlängerte Strecke $\overline{YZ}$ wird nun durch T exakt im Verhältnis φ geteilt.

Diese Methode wird grafisch in Abbildung 3 dargestellt.

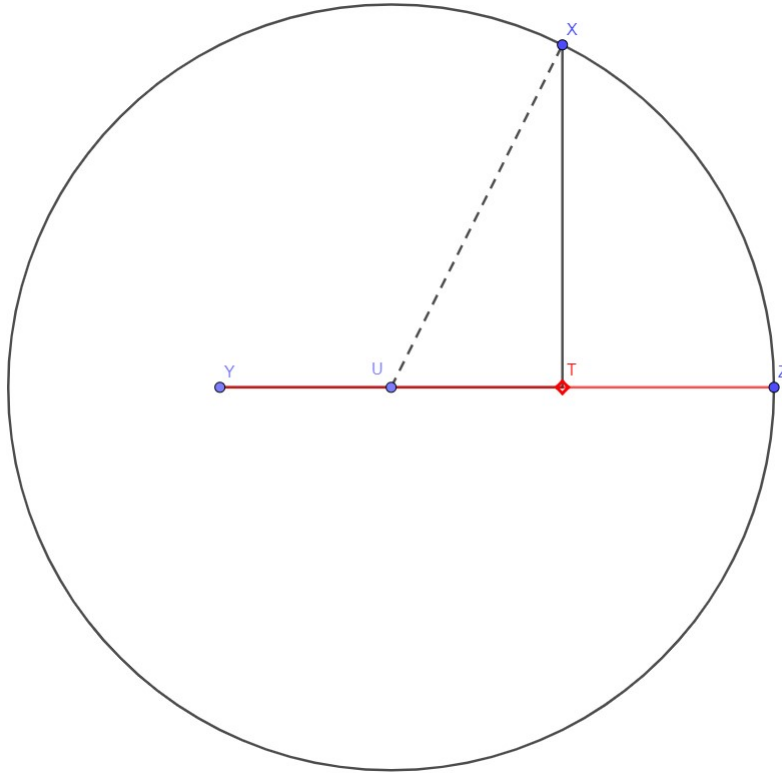


Abbildung 3: Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode mit äußerer Teilung

Beweis. Zum Beweis hilft uns abermals der Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 \overline{UX}^2 &= \overline{UT}^2 + \overline{TX}^2 = \\
 &\frac{1}{4}\overline{YT}^2 + \overline{YT}^2 = \\
 &\frac{5}{4}\overline{YT}^2 \\
 \rightarrow \overline{UX} &= \overline{UZ} = \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{YT}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\overline{YZ} &= \overline{YU} + \overline{UZ} = \\ &= \frac{1}{2}\overline{YT} + \frac{\sqrt{5}}{2}\overline{YT} = \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overline{YT}\end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$\overline{TZ} = \overline{YZ} - \overline{YT} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{YT} = \varphi_2$$

□

Verfahren 3:

Das dritte und letzte der hier gezeigten Verfahren ist ein relativ neuer Konstruktionsweg. Er wurde 1982 vom US-Amerikaner George Odom entdeckt. Odom war Künstler und fasziniert vom goldenen Schnitt. [33]. Durch seine langjährige Freundschaft mit dem Mathematiker und Geometer Harold Scott MacDonald Coxeter entdeckte er die mathematische Komponente seiner Arbeit.

1. Schritt:

Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks XYZ mit einer Seitenlänge von $2x$.

2. Schritt:

Zwei dieser Seiten werden nun halbiert. Ihre Mittelpunkte werden fortan als U und D bezeichnet.

3. Schritt:

Konstruktion des Umkreises des Dreiecks XYZ .

4. Schritt:

Konstruktion der Gerade UD , welche den Umkreis im Punkt A schneidet.

5. Schritt:

Nun teilt der Punkt D die Strecke UA im Verhältnis exakt im Verhältnis φ .

Eine Visualisierung dieser Methodik ist in Abbildung 4 gezeigt.

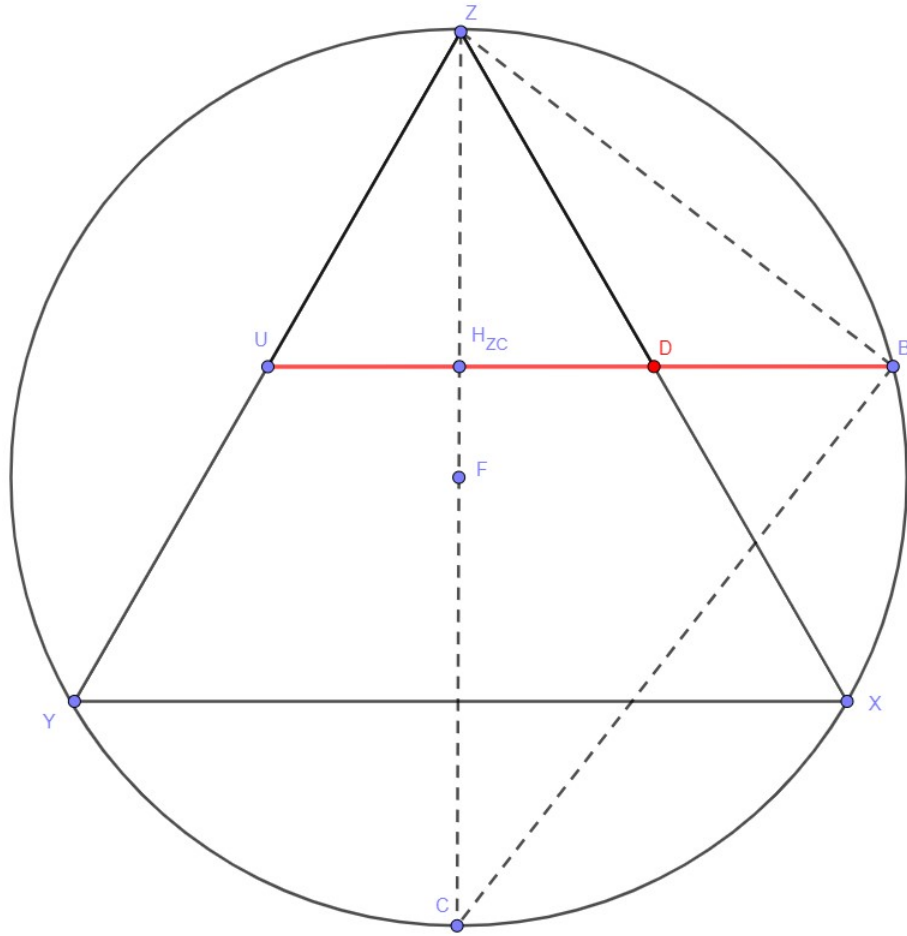


Abbildung 4: Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode nach Odom

Um die Richtigkeit dieser Methode zu zeigen, berechnen wir zuerst $\overline{DB}$. Gemäß dem Satz des Thales ist das neu entstehende Dreieck ZCB ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem orthogonalen Winkel in B . Somit ist der Höhensatz hier anwendbar:

$$\overline{QP}^2 = \overline{ZH_{ZC}} \cdot \overline{H_{ZC}C}$$

Dem Strahlensatz folgend muss $\overline{ZH_{ZC}}$ die halbe Länge der Höhe h_{ZC} besitzen.

Das Zentrum des Umkreises F stellt gleichzeitig den Mittelpunkt der Höhe des Dreiecks YXZ dar.

Beweis. Wir führen nun den Beweis wie folgt:

$$\begin{aligned}\overline{ZC} &= 2 \cdot \overline{FC} = \frac{4}{3} \cdot x\sqrt{3} \\ \overline{H_{ZC}C} &= \overline{ZC} - \overline{ZH_{ZC}} = \frac{4}{3} \cdot x\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{3} = \frac{5}{6} \cdot x\sqrt{3}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\overline{H_{ZC}B}^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot x\sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot x\sqrt{3}\right) = \frac{5}{4}x^2 \\ \overline{H_{ZC}B} &= \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{5}\end{aligned}$$

Da $\overline{H_{ZC}D} = \frac{x}{2}$ lässt sich schließen:

$$\overline{DB} = \overline{H_{ZC}B} - \overline{H_{ZC}D} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{5} - \frac{1}{2} \cdot x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot x$$

Zusammengefasst ergibt sich noch folgendes Bild:

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{DB}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

□

Aliquot zum goldenen Schnitt existiert auch der Goldene Winkel. Dieser entsteht durch ein Teilen des Vollwinkels 360° im Goldenen Schnitt:

$$\frac{2 \cdot \pi}{\varphi} \approx 3,88 \approx 222,5^\circ$$

Meist wird jedoch nicht dieser Winkel, sondern seine Differenz zum vollen Winkel als „Goldener Winkel“ bezeichnet.

$$2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{\varphi} \approx 2,40 \approx 137,5^\circ$$

Da der exakte Goldene Winkel eine irrationale Zahl darstellt, entstehen per Definition niemals exakte Überschneidungen wenn Drehungen mit dem Goldenen Winkel aneinandergereiht werden.

2.5 Das Goldene Dreieck

In der dritten hier erwähnten Konstruktionsmethode für den Goldenen Schnitt wurde ein gleichseitiges Dreieck verwendet. Während

gleichseitige und gleichschenkelige Dreiecke allgemein bekannt sind, gibt es ebenso eine Bezeichnung für Dreiecke, deren Seiten im Verhältnis des Goldenen Schnittes zueinander stehen: Diese Dreiecke werden als Goldene Dreiecke bezeichnet.

Goldene Dreiecke stellen eine Sonderform der gleichschenkeligen Dreiecke dar. Da das Verhältnis der Seiten zueinander in dieser Dreiecksform fest definiert ist, so lassen sich auch die Innenwinkel dieser Form eindeutig berechnen [45].

Um diese Winkel exakt bestimmen zu können, sehen wir uns zuerst folgende Aussage an:

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{(2 \cdot \varphi_0)}$$

Beweis. Um diese Behauptung zu beweisen fokussieren wir uns zuerst auf folgendes:

$$\begin{aligned} \sin 72^\circ &= 2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ = 4 \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2) \\ &\rightarrow \cos 18^\circ = 4 \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2) \end{aligned}$$

An diesem Punkt ist es möglich eine Division durch $\cos 18^\circ$ durchzuführen, da $\cos 18^\circ \neq 0$ ist. Somit ergibt sich:

$$1 = 4 \cdot \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2)$$

Wenn wir nun $\sin 18^\circ$ wie oben beschrieben ersetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= 4y(1 - 2y^2) \\ &\rightarrow 8y^3 - 4y + 1 = 0 \\ &\rightarrow (4y^2 + 2y - 1) \cdot (2y - 1) = 0 \end{aligned}$$

Das Ergebnis des ersten Teils der Gleichung $(4y^2 + 2y - 1)$ muss folglich $y = \sin 18^\circ$ sein, da $\sin 18^\circ \neq \frac{1}{2}$ ist. Kombiniert mit dem zweiten Teil ergibt sich folgendes Gesamtbild:

$$\begin{aligned} y_{1;2} &= \pm \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) \\ y_1 &= -\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) \\ y_2 &= +\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Da $\sin 18^\circ$ definitiv positiv ist, müssen wir die Lösung y_1 verwerfen und wir verbleiben mit:

$$\sin 18^\circ = +\frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1) \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2 \cdot \varphi}$$

Nun da die allgemeine Gültigkeit der Aussage belegt wurde gilt:

$$\begin{aligned} \sin 54^\circ &= \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ + \cos 18^\circ \cdot \sin 36^\circ = \\ &= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2) + \cos 18^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot 2 = \\ &= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2) + 2 \cdot \sin 18^\circ \cdot (\cos 18^\circ)^2 = \\ &= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2 \cdot (\sin 18^\circ)^2 + 2 \cdot (1 - (\sin 18^\circ)^2)) = \\ &= \sin 18^\circ \cdot (3 - 4 \cdot (\sin 18^\circ)^2) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) \left(3 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1)^2\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{5} - 1) \left(3 - \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{5})\right) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot (3 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot \sqrt{5} - 3 - \sqrt{5} + 5) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varphi \end{aligned}$$

□

Ein klassisches Goldenes Dreieck wird in Abbildung 5 gezeigt.

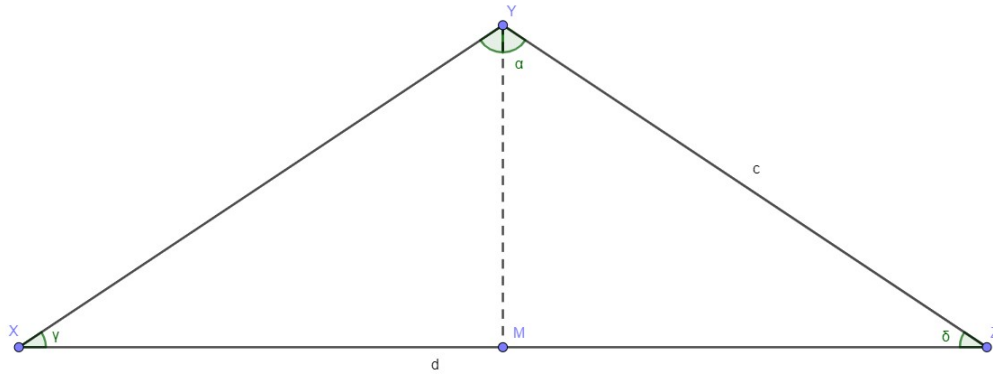


Abbildung 5: Darstellung eines Goldenen Dreiecks

Wir konstruieren nun ein gleichschenkeliges Dreieck XYZ mit der Seitenlänge c und der Basis d . Hierbei definieren wir:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{c} = \frac{d}{2 \cdot c}$$

Jedes Goldene Dreieck folgt entweder

$$\frac{c}{d} = \varphi$$

oder

$$\frac{d}{c} = \varphi$$

Aus den vorherigen Beweisführungen folgt nun:

$$\begin{aligned}\frac{d}{x} &= \frac{1}{\varphi} \rightarrow \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{d}{2 \cdot c} &= \frac{1}{2 \cdot \varphi}\end{aligned}$$

Es wurde bereits gezeigt das gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} &= 18^\circ \\ \alpha &= 36^\circ\end{aligned}$$

Von hier aus auf die übrigen Winkeln im Dreieck rückzuschließen
($\gamma; \delta$) ist nun trivial:

$$\gamma = \delta = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

In diesem Fall gilt:

$$\frac{a}{2} = \sin 18^\circ = \frac{1}{2 \cdot \varphi} = \frac{d}{2 \cdot c}$$

Somit handelt es sich um ein Goldenes Dreieck.

Alternativ kann der Winkel gegenüber der Basis d ebenso 108° betragen. In diesem Fall gilt für die übrigen Winkel $(\gamma; \delta)$:

$$\gamma = \delta = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

Im Folgenden wird eine einfache Methode zur Konstruktion und damit zur grafischen Darstellung dieser Goldenen Dreiecke erklärt[21].

Gegeben sei hier eine Strecke $[YZ]$, welche durch den inneren Punkt $T \in [YZ]$ im Goldenen Schnitt geteilt werden soll.

1. Schritt:

Konstruktion einer Orthogonalen g durch Y und Markierung des Punktes $H \in g$. Für H gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{YZ} = \overline{YH}$$

2. Schritt:

Markierung des Punktes $K \in g$. Für H gilt:

$$\overline{HZ} = \overline{HK}$$

3. Schritt:

Markierung des Punktes T . Für T gilt:

$$\overline{YK} = \overline{YT}$$

Weiters gilt hier:

$$\frac{\overline{YT}}{\overline{ZT}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{YT}} = \varphi$$

4. Schritt:

Markierung des Punktes N . Für N gilt:

$$\overline{ZN} = \overline{TN} = \overline{YT}$$

Durch Verbinden der nun markierten Punkte ergeben sich die Goldenen Dreiecke $[YTN]$ und $[TZN]$. $[TZN]$ stellt ein Goldenes Dreieck erster Ordnung dar, während $[YTN]$ ein Goldenes Dreieck zweiter Ordnung darstellt.

Der Winkel α in $[TYN]$ hat somit ein fix definiertes Winkelmaß von 108°

Beide Winkel, β und γ haben folglich das jeweilige Winkelmaß 36°

Eine Konstruktionsmethode für ein Goldenes Dreieck wird in Abbildung 6 gezeigt.

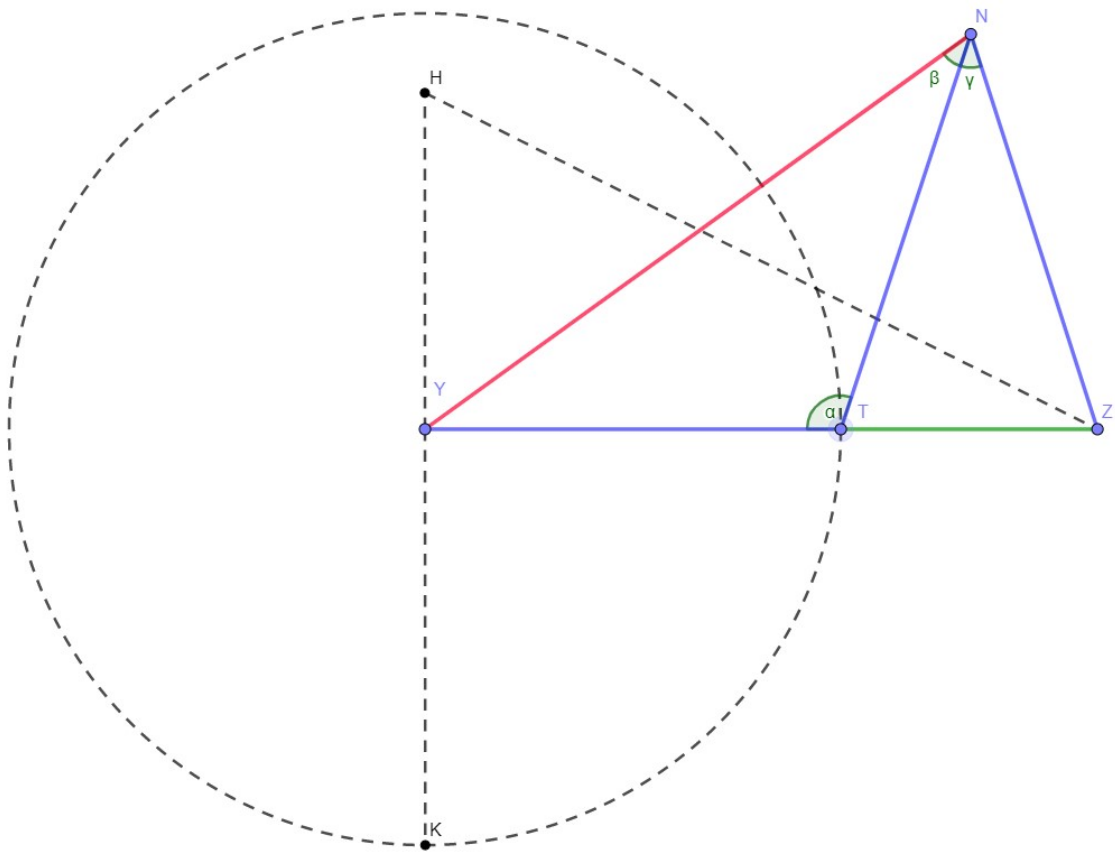


Abbildung 6: Konstruktion der Goldenen Dreiecke

2.6 Von der Fibonacci-Zahlenfolge zum Goldenen Schnitt

Auf den ersten Blick scheint zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt kein offensichtlicher Zusammenhang zu bestehen. Betrachten wir nun aber die Quotienten jeweils zweier aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge so zeichnet sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1} & \rightarrow 1,0000000000000000 \\ \frac{2}{1} & \rightarrow 2,0000000000000000 \\ \frac{3}{2} & \rightarrow 1,5000000000000000 \\ \frac{5}{3} & \rightarrow 1,6666666666666670 \\ \frac{8}{5} & \rightarrow 1,6000000000000000 \\ \frac{13}{8} & \rightarrow 1,6250000000000000 \\ \frac{21}{13} & \rightarrow 1,615384615384620 \\ \frac{34}{21} & \rightarrow 1,619047619047620 \\ \frac{55}{34} & \rightarrow 1,617647058823530 \\ \frac{89}{55} & \rightarrow 1,618181818181820 \\ \frac{144}{89} & \rightarrow 1,617977528089890 \\ \frac{233}{144} & \rightarrow 1,618055555555560 \\ \frac{377}{233} & \rightarrow 1,618025751072960 \\ \frac{610}{377} & \rightarrow 1,618037135278510 \end{array}$$

Die Quotienten scheinen sich mit steigendem Folgenglied dem goldenen Schnitt anzunähern. Als Verallgemeinerung ergibt sich:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} = \frac{f_n}{f_{n-2}} = \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{f_{n-2}} = \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} + 1$$

Um besser zu verstehen, um was es hier geht, lohnt es sich zuerst den Begriff des Grenzwertes zu definieren.

Definition 7. Die bestimmte Zahl $x \in \mathbb{C}$ wird als Grenzwert, oder Limes, einer komplexen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, wodurch für alle Indizes $n \geq N$ gilt: $|x_n - x| < \varepsilon$

Nun können wir beweisen, dass sich der Quotient zweier Fibonacciglieder, bei steigender Größe der Glieder, dem Goldenen Schnitt φ angleicht.

Beweis. Wir beginnen den Beweis, indem wir die Ausgangslage folgendermaßen definieren:

$$y_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \text{ bei } n \geq 1$$

Im Fall $n \geq 2$ folgt daher:

$$y_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + 1 = \frac{1}{y_{n-1}} + 1 =$$

$$y_n = 1 + \frac{1}{y_{n-1}}$$

Nun bilden wir die Differenz von φ und y_n :

$$\varphi - y_n = \frac{1}{\varphi} + 1 - \left(1 + \frac{1}{y_{n-1}}\right) = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{y_{n-1}} = \frac{y_{n-1} - \varphi}{y_{n-1} \cdot \varphi}$$

Da sowohl y_{n-1} als auch $\varphi > 0$ sind, ergibt sich:

$$|\varphi - y_n| = \frac{|\varphi - y_{n-1}|}{\varphi \cdot y_{n-1}}$$

Wir wissen weiters, dass gilt: $y_{n-1} \geq 1$, wodurch wir diese Ungleichung erhalten:

$$|\varphi - y_n| \leq \frac{|\varphi - y_{n-1}|}{\varphi}$$

Hieraus ergibt sich folgende Reihe:

$$|\varphi - y_n| \leq \frac{|\varphi - y_{n-1}|}{\varphi} \leq \frac{|\varphi - y_{n-2}|}{\varphi^2} \leq \dots \leq \frac{|\varphi - y_2|}{\varphi^{n-2}}$$

dementsprechend:

$$|\varphi - y_n| \leq \frac{|\varphi - y_2|}{\varphi^{n-2}}$$

Aufgrund von $\varphi > 1$ ist es trivial zu erkennen, dass $|\varphi - y_n|$ bei steigendem n immer weiter anwächst. Hieraus schließen wir eindeutig, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \varphi$.

□

Der Quotient zweier Glieder der Fibonacci-Folge nähert sich im Unendlichen beliebig φ an [7].

2.7 Prominente Visualisierungen der Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge lässt sich in verschiedensten Arten visualisieren. Manche dieser Abbildungen, wie die Fibonacci-Spirale, sind bekannter, andere eher unbekannt. Kenntnis über diese Visualisierungen sind unabdingbar, wenn man die Folge in ihren mannigfaltigen Ausprägungen in der Natur entdecken und verstehen will. Im Folgenden wollen wir einige Abbildungen beispielhaft thematisieren [56].

2.7.1 Die Fibonacci - Spirale

Diese, wohl bekannteste der Darstellungen, besteht aus Quadraten, welche die Fibonacci - Zahlen als Seitenlänge besitzen. Man startet mit einem Quadrat mit Seitenlänge von 1. Der Reihe nach werden

Quadrate mit entsprechenden Seitenlängen um das Startquadrat herum angebracht. So entstehen der Reihe nach Quadrate der Seitenlänge 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

An Abbildung 7 sieht man bereits gut, wie schnell diese Zahlenfolge wächst.

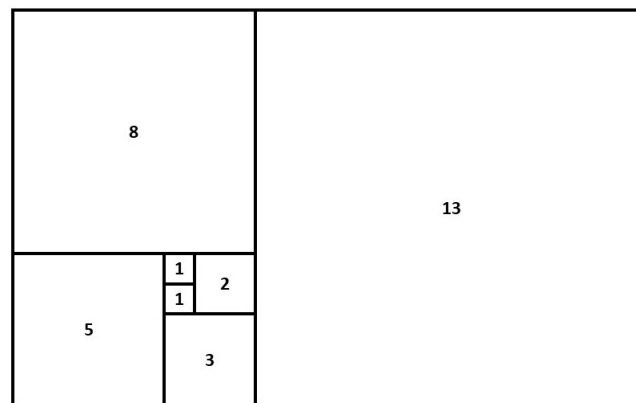


Abbildung 7: Eine Aneinanderreihung von Quadraten mit jeweils einer Fibonacci-Zahl als Seitenlänge bildet den Grundstein für die Darstellung

Um nun die namensgebende Spirale zu erhalten, füllen wir jedes Quadrat mit einem Kreisbogen. In jedem Quadrat befindet sich eine Vierteldrehung des Kreises, bevor er in das nächste Quadrat übertritt. Die Spirale folgt dabei den Quadraten mit Seitenlängen der aufsteigenden Fibonacci - Zahlen. Der Viertelkreis vergrößert sich mit jedem Quadrat um einen interessanten Faktor:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Die fertige Spirale ist in Abbildung 8 in das oben dargestellte Grundgerüst eingepflegt.

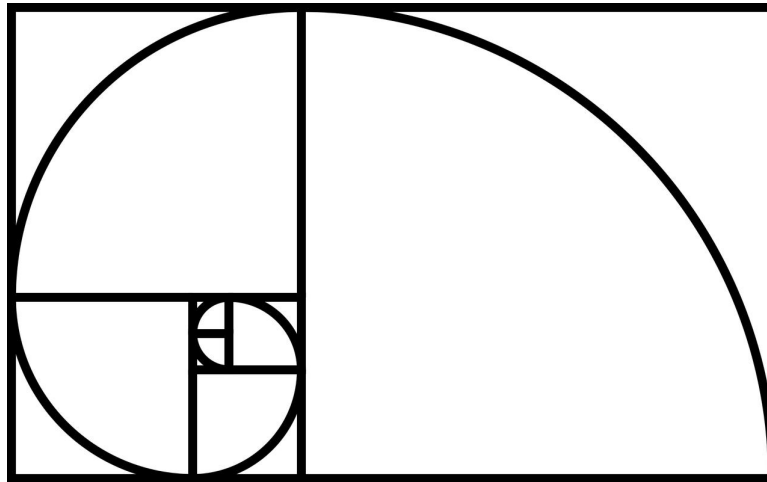


Abbildung 8: Fertige Fibonacci - Spirale [11]

Wie wir bereits ausführlich beleuchtet haben, nähert sich dieser Quotient der Goldenen Zahl φ an.

2.7.2 Das Goldene Rechteck

Das Rechteck, gebildet aus aneinandergereihten Quadranten mit aufsteigenden Fibonacci - Zahlen als Seitenlängen, stellt in Bezug auf seine Seitenlängen ebenso einen Goldenen Schnitt dar.

Zur Konstruktion starten wir mit einem Quadrat $WXYZ$.

1. Schritt:

Markierung der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender, parallelen Seiten. In diesem Fall die Mittelpunkte von $[WX]$ und $[YZ]$. Diese bezeichnen wir als A und B .

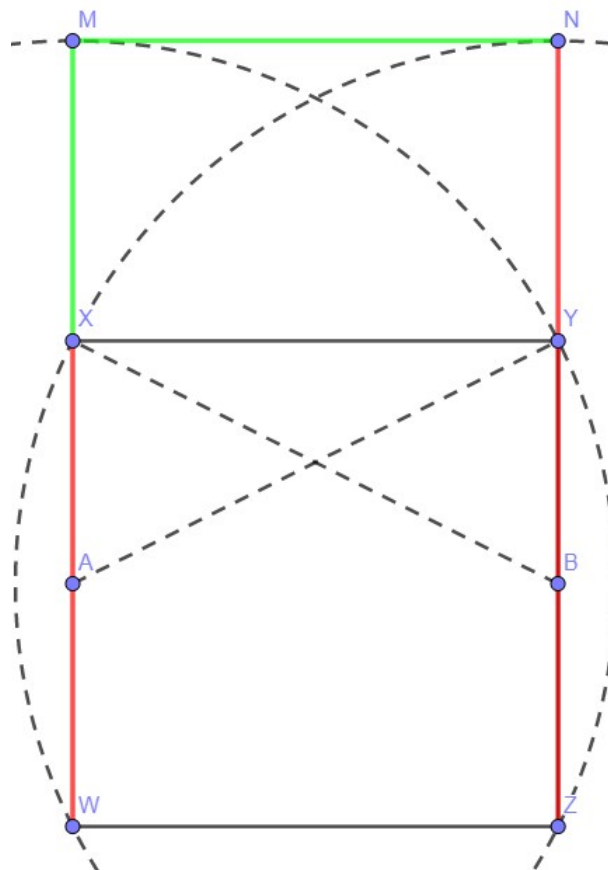


Abbildung 9: Eine Kombination zweier Goldener Rechtecke. Konstruiert nach der oben beschriebenen Methodik

2 Schritt:

Konstruktion eines Kreises k mit Mittelpunkt A und Radius $[AY]$.

3 Schritt:

Verlängerung der Quadratseite $[WX]$ bis zum Schnittpunkt M mit dem Kreis k .

4 Schritt:

Anwendung derselben Methodik analog für die gegenüberliegende

Seite.

Man erhält den Kreis k' und den Schnittpunkt N .

4 Schritt:

Man erhält mit dieser Methode zwei goldene Rechtecke: $WMNZ$ mit $[WX] : [ZN]$, sowie $XMNY$ mit $[MN] : [MX]$. Beide „Goldenen Streckenpaare“ sind in Abbildung 9 entweder grün, bzw. rot eingezeichnet.

3 Geschichte der Fibonacci-Zahlen und des Goldenen Schnittes

3.1 Erste Erwähnungen und Antike

Die Geschichte der später als Fibonacci-Folge bekannten Zahlenfolge beginnt weit früher als die Geschichte des Mathematikers, nach dem sie benannt wurde. Bereits etwa 700 Jahre vor Christus beschäftigen sich Gelehrte im alten Indien, vor allem der Gelehrte Virahanka, mit einer Quantifizierung der Versmaße im Sanskrit. Die Variationen der Verse im Sanskrit, der Matra-Vrta, formen hierbei die Zahlenfolge, welche wir heute als Fibonacci-Folge kennen [52]. Ein Auszug aus einem solchen Sanskrit Textstück ist in Abbildung 10 zu sehen.

Während die Fibonacci-Zahlen, abgesehen von der Erwähnung im Sanskrit - Versmaß, noch lange unbekannt waren, so war die Eleganz des goldenen Schnittes bereits in der Antike bekannt.



Abbildung 10: Ein altes Sanskrit Transkript, welches Verse in der Fibonacci-Folge enthält [23]

Die ersten Bauwerke, welche aus heutiger Sicht den Goldenen Schnitt enthalten, war die Cheops Pyramide im alten Ägypten. Diese monumentale Grabstätte für den Pharao Cheops wurde um das Jahr 2580 v. Chr. erbaut und stellt die Größte der drei Pyramiden von Gizeh dar. Es gilt heute allerdings als umstritten, ob der Goldene Schnitt bei der Planung der Pyramide bewusst verwendet wurde oder ob es lediglich ein zufälliges Ergebnis der idealen Form eines solchen Bauwerks ist [48]. Die Cheops Pyramide ist in Abbildung 11 zu sehen.

3.2 Verwendung durch im antiken Griechenland

Die antiken Griechen waren sich der Ästhetik des Goldenen Schnittes, im Gegensatz zu den Ägyptern davor, bereits durchaus bewusst. Die erstmalige Erwähnung dieser Proportion geht auf den Gelehrten Euklid zurück. Dieser erwähnte diese berühmte Proportion erstmals in seinem Werk *Elemente*, welches etwa 300 Jahre vor Christus verfasst wurde. Nach heutigen Erkenntnissen gilt jedoch Euklid nicht



Abbildung 11: Cheops Pyramide zu Gizeh [12]

mehr als Vater der Idee des Goldenen Schnittes. Der ursprüngliche Entdecker dürfte wesentlich früher gelebt haben. Man ist sich heute uneins, ob es sich hierbei um Hippasos von Metapont oder Eudoxos von Knidos handelt. Während Hippasos etwa 600 Jahre vor Christus gelebt hat, lebte Eudoxos lediglich 370 Jahre vor Christus. Neuere Indizien deuten stark darauf hin, dass Hippasos hier die Ehre gebührt [53].

Bis heute verewigt wurde der Goldene Schnitt jedoch durch den Politiker Perikles. Dieser lebte etwa 400 Jahre vor Christus. Er verfasst zwar keine bedeutenden literarischen Werke, doch gab er den Auftrag für einige der beeindruckendsten Bauwerke der Athener Akropolis. Das Wichtigste hierunter war zweifellos der Pantheon. Dieser monumentale Tempel wurde zwischen 447 und 438 vor Christus erbaut und war der Göttin Athene gewidmet.

Als Baumeister für dieses Großprojekt diente ein Mann mit Namen Phidias. Phidias hatte, wie viele Gelehrte des antiken Griechenlands, Kenntnis vom Goldenen Schnitt. Da diese Proportion als das „absolut Schöne“ galt, versuchte er seine Werke danach auszurichten. Im Falle des Parthenon wurde die prominente Front des Gebäudes nach Goldenen Rechtecken aufgebaut. Dies ist in Abbildung 12 eindeutig ersichtlich [20].

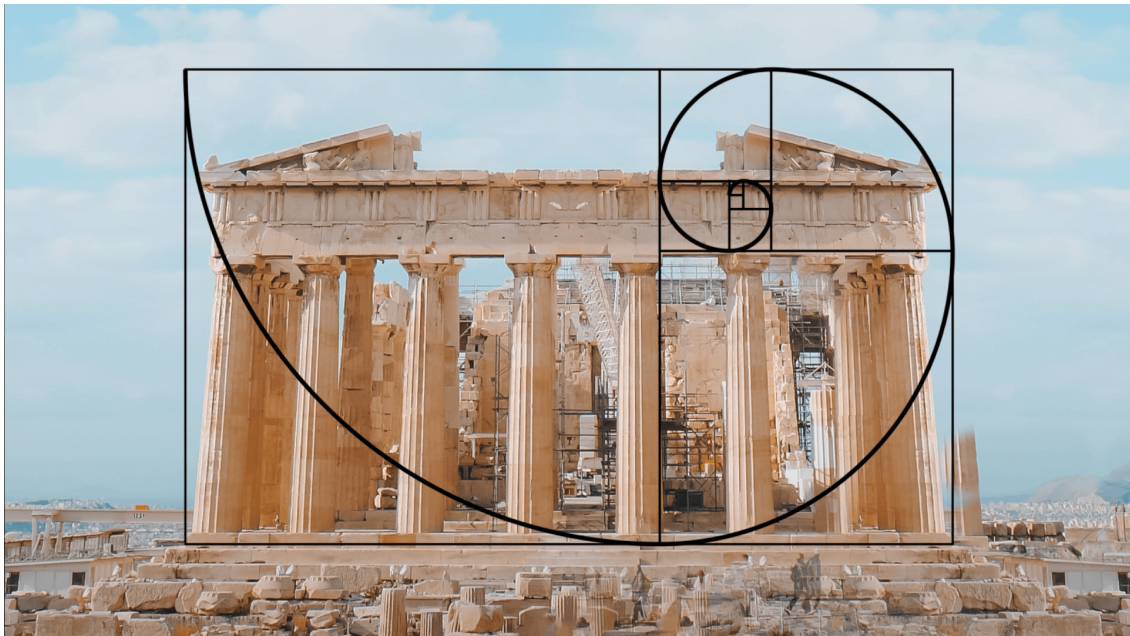


Abbildung 12: Abbildung des Parthenons mit eingezeichneten Verhältnis des Goldenen Schnittes [20]

Durch die eindrucksvolle Arbeit von Phidias beeindruckt, wurde das Verhältnis des Goldenen Schnitts im Folgenden meist einfach durch φ gekennzeichnet [54].

3.3 Das Leben und die Entdeckungen des Leonardo von Pisa

Leonardo von Pisa, heute besser bekannt als *Fibonacci* wurde um das Jahr 1170 nach Christus in der italienischen Stadt Pisa geboren. Sein Vater, ein italienischer Diplomat und Geschäftsmann, hieß Bonacci. Leonardo wurde daher regelmäßig *filius Bonacci*, also *Sohn des Bonacci*, genannt. Daher rührt auch seine heutige Bekanntheit unter dem Namen Fibonacci [14]. Eine zeitgenössische Abbildung von Leonardo von Pisa ist in Abbildung 13 gezeigt.



Abbildung 13: Abbildung von Leonardo von Pisa [26]

3.3.1 Die Situation der Arithmetik im 12 Jhdt.

Die Mathematik im 12 Jhdt. in Europa hatte ein Problem: Sie war durch die Verwendung des römischen Zahlensystems gut in der Lage Additionen und Subtraktionen durchzuführen. Multiplikationen und Divisionen jedoch stellten dieses System vor eine schier unlösbare Aufgabe. Die Addition $2121 + 1315$ wurde im 12 Jhdt. folgendermaßen durchgeführt:

$$\begin{array}{rcccc}
 & \text{MM} & \text{C} & \text{XX} & \text{I} \\
 + & \text{M} & \text{CCC} & \text{X} & \text{V} \\
 \hline
 & \text{MMM} & \text{CCCC} & \text{XXX} & \text{VI}
 \end{array}$$

So weit, so trivial. Das System ist allerdings schnell an seinen Grenzen angelangt:

$$\begin{array}{rcccc}
 \text{M} & \text{CCC} & \text{XX} & \text{I} \\
 + & \text{D} & \text{C} & \text{X} \\
 + & \text{M} & \text{XX} & \text{VII} \\
 + & \text{MMM} & \text{C} & \text{D} \\
 + & \text{L} & \text{X} & \text{II} \\
 \hline
 ??? & ??? & ??? & ???
 \end{array}$$

Umgemünzt auf unser heutiges arabisches Zahlensystem entspricht diese Rechnung:

$$\begin{array}{r}
 1321 \\
 + 610 \\
 + 1027 \\
 + 3400 \\
 + 29 \\
 \hline
 6387 \\
 \cong \text{MMMMMMCCCLXXXVII}
 \end{array}$$

Um solch, augenscheinlich komplexe, Rechnungen in einer vertretbaren Zeit lösen zu können, wurde der sogenannte Abakus erfunden. Diese Erfindung geht bis in das Reich der Sumerer etwa 2500 vor Christus zurück. Der Abakus besteht aus einer Platte mit mehreren Spalten, welche mit Kugeln befüllt waren. Jede Ziffer, welche berechnet werden musste, wurde ein Wert auf dem Abakus, je nach Platz und Spalte, zugeordnet. Dieses System hatte allerdings zwei elementare Defizite [6]:

1) Während sich hiermit Additionen und Subtraktionen leicht umsetzen ließen, mussten Multiplikationen und Divisionen über einzelne Schritte durchgeführt werden. Um $157 \cdot 5$ rechnen zu können,

musste $157 + 157 + 157 + 157 + 157$ gerechnet werden. Für Divisionen wurde so lange eine Zahl subtrahiert, bis es nicht mehr möglich war. Anschließend wurden die Schritte gezählt.

2) Ein Nachteil, welcher besonders den Geschäftsleuten Probleme bereitete war, dass mit dem Abakus keine Dokumentation möglich war. Ein Ergebnis wurde für den Moment berechnet und das Ergebnis konnte notiert werden. Es war jedoch nicht möglich, jedwede Zwischenschritte zu dokumentieren. Somit war eine Reproduktion des Ergebnisses nur durch eine komplett neue Berechnung durchführbar. Dies wurde mit steigender Komplexität der durchgeführten Transaktionen ein immer größeres Problem.

Ein Nachbau eines solchen Abakus ist in Abbildung 14 zu sehen.

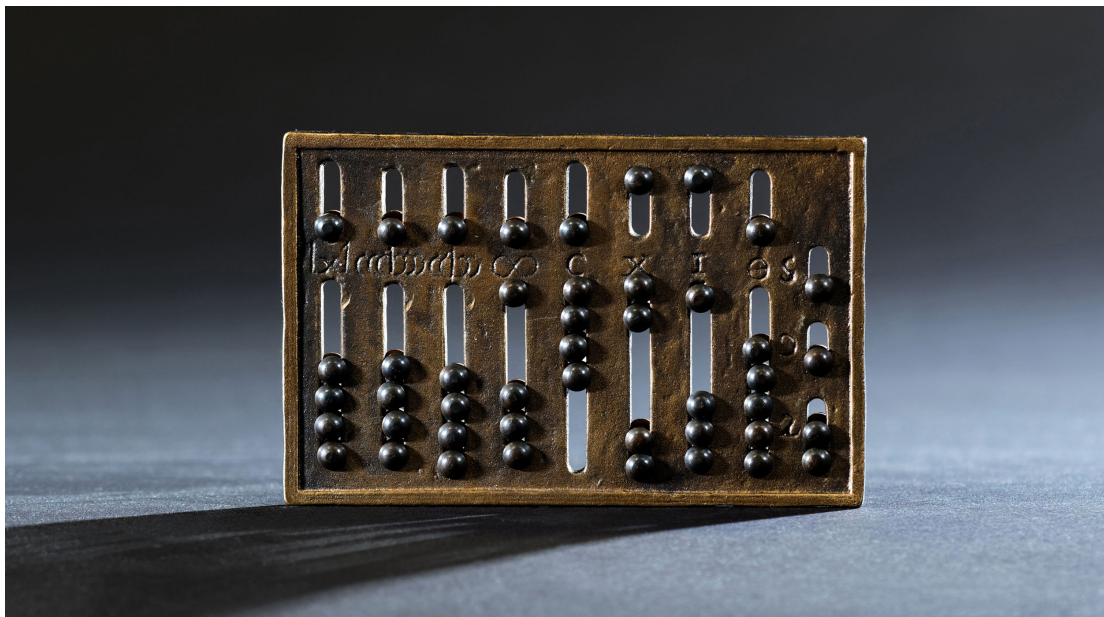


Abbildung 14: Nachbau eines römischen Abakus [1]

3.3.2 Der Weg zu *Liber abaci*

Leonardo von Pisa wuchs großteils in der wohlhabenden Handelsstadt Bugia im heutigen Algerien auf. Schon früh begann er bei führenden Mathematikern zu studieren und zu lernen. Bei seinen Studien stieß Leonardo auch auf das bis dahin weitgehend unbekannte indische Zahlensystem. Zwar war das System einigen gelehrten Geschäftsleuten in Bugia bekannt, allerdings erkannte keiner den Nutzen dieser doch so seltsamen Symbole.

Der junge Leonardo jedoch verstand schnell, welche enormen Vorteile dieses damals neue System mit sich brachte. Fasziniert von diesem Zahlensystem machte sich Leonardo nach seinem Studium in Bugia auf und lernte bei arabischen Mathematikern im gesamten Umland des Mittelmeeres. So studierte er mehrere Jahre im damaligen Konstantinopel, sowie in Syrien und Ägypten. Ungefähr im Jahre 1200 reiste er zurück nach Pisa. Er wollte ein Werk verfassen, in welchem er die Vorteile des neuen Zahlensystems aufzuzeigen versuchte, und so auch die anderen Mathematiker in Europa zu überzeugen [28][15].

3.3.3 *Liber abaci*

„Die neun indischen Figuren sind 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Mit diesen Figuren und mit dem Zeichen 0 kann jede Zahl geschrieben werden, wie wir nachstehend demonstrieren werden.“ - Einleitungssatz von *Liber abaci* von Leonardo von P

1202, als Fibonaccis erstes und auch einflussreichstes Werk, *Liber abaci* erschien, war er 27 Jahre alt. *Liber abaci*, verdankt seinen Namen dem altitalienischen Wort *liber* für Buch. *abaci* leitet sich vom damaligen Wort *abaco* ab, was das Rechnen mit dem Abakus bezeichnet. *abaci* bedeutet daher sinngemäß „rechnen ohne Abakus“[9].

Das Werk musste mangels Buchdruck händisch abgeschrieben werden. Auf etwa 450 Seiten, unterteilt in 15 Kapitel, erläuterte Fibonacci stichhaltig und trotzdem auf verständliche Art und Weise, dass von ihm als *Modus Indorum* bezeichnete, hindu-arabische Zahlensystem.

Während die ersten sieben Kapitel sich rein mit den Zahlensymbolen selbst beschäftigen, handeln die Kapitel acht bis elf von den praktischen Problemen und wieso diese nun leichter zu lösen sind.

Liber abaci erlangte rasche große Bekanntheit und setzte das neue Zahlensystem tatsächlich in Europa durch. Es kann zweifellos als bedeutendstes mathematisches Werk des Mittelalters bezeichnet werden.

3.3.4 Das Kaninchenproblem

Im dreizehnten Kapitel widmete sich Fibonacci mathematischen Problemen, so auch dem Kaninchenproblem. Fibonacci ahnte nicht, dass sein Name noch über Jahrhunderte mit dem Ergebnis dieses Problems konnektiert werden würde.

In einem geschlossenen System wird ein gemischtgeschlechtliches Paar Kaninchen ausgesetzt. Jeden Monat reproduziert sich das Paar und bekommt zwei, ebenfalls gemischtgeschlechtliche, Jungtiere. Diese sind nach einem Monat ebenfalls geschlechtsreif und bekommen ebenso zwei gemischtgeschlechtliche Jungtiere pro Monat. Wie viele Jungtiere kommen so in einem Jahr zur Welt?

Dieses berühmte Problem wird in Abbildung 15 veranschaulicht.

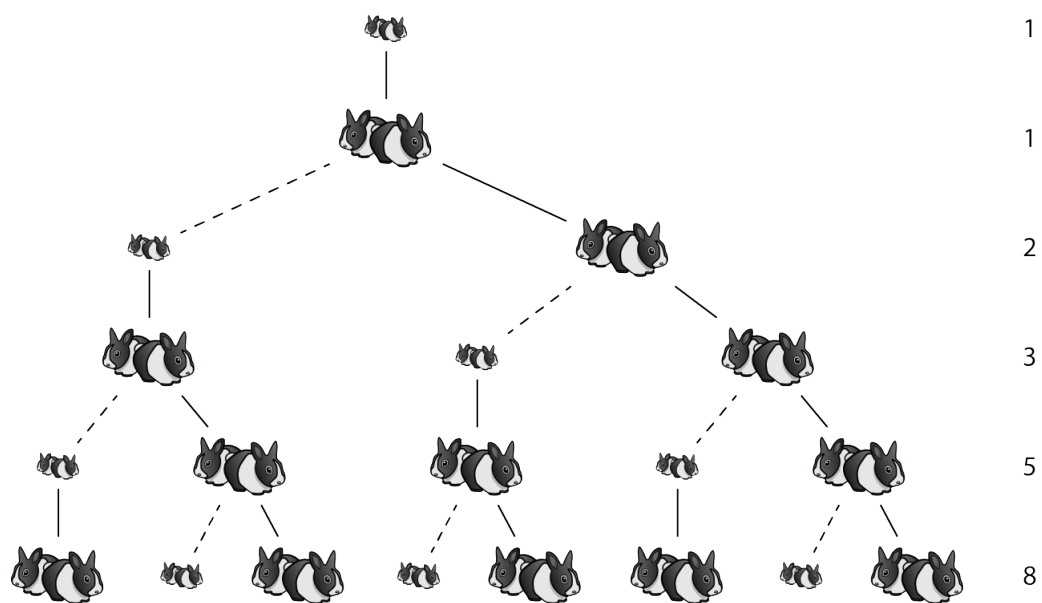


Abbildung 15: Das Kaninchenproblem. Gestrichelte Linien sind jeweils Nachkommen, durchgezogene Linien stellen ein bereits vorhandenes Paar dar. Die Paare sind zuerst für einen Monat lang nicht geschlechtsreif (also klein), bevor sie an der Vermehrung teilhaben [24].

Hieraus ergibt sich die heute weltbekannte Zahlenfolge:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Fibonacci stellte in seinem Werk keinen Zusammenhang zwischen der aus dem Kaninchenproblem resultierenden Zahlenfolge und dem Verhältnis φ her. Der Goldene Schnitt war ihm jedoch sehr gut bekannt, da er ihn am Ende seines Werkes zur Lösung eines Problems anwendet:

Gesucht seien Werte, für die gilt:

$$x + y = 10 \text{ und } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \sqrt{5}$$

Fibonacci führt dabei aus, dass im Falle $x > y$ das Verhältnis $10 : x = x : y$ gelten muss. Er folgert hierdurch, dass 10 exakt im Verhältnis des Goldenen Schnittes von x und y geteilt werden muss. Die Bezeichnung „Goldener Schnitt“ wird allerdings nicht verwendet und dürfte ihm somit noch nicht bekannt gewesen sein.

4 Das Auftreten der Fibonacci - Folge und des Goldenen Schnittes in der Natur

Die Fibonacci - Folge gehört zu den am längsten bekannten Zahlenfolgen der Welt. Ihr Vorkommen zieht sich durch unsere gesamte Umwelt. Dies ist allerdings nicht immer auf den ersten Blick ersichtlich. Im Folgenden werden einige dieser Vorkommen detailliert beschrieben, jedoch ist es unmöglich sämtliche Phänomene aufzuzählen. Aus diesem Grund wird der Fokus dieses Kapitels auf der Biologie liegen.

4.1 Fibonacci in unserer DNA

Die Fibonacci - Zahlenfolge hat in vielerlei Hinsicht Einfluss auf die Genetik. Bereits in den 1950er Jahren, lang vor der Sequenzierung des Genoms, wurden bereits statistische Erhebungen bei Teilstücken der DNA durchgeführt.

4.1.1 Die Häufigkeit der Nuklide

Eine der bis heute wichtigsten Entdeckungen sind die beiden Chargaff - Regeln [13]. Chargaff wusste bereits, dass die DNA aus vier Basen (Adenin, Thymin, Cytosin und Guanin) besteht. Bisher war allerdings keine Regelmäßigkeit in deren Auftreten festgestellt worden. Chargaffs erste Beobachtung betrifft doppelsträngige DNA:

Seien $P_A; P_T; P_C; P_G$ die Auftrittswahrscheinlichkeiten von Adenin, Thymin, Cytosin und Guanin. So gilt: $P_A = P_T$ und $P_C = P_G$. Dies ist bekannt als Erste Chargaff - Regel.

Gemeinsam mit der Arbeit von Watson und Crick 1953 legte Chargaff somit einen Grundstein zur gerade aufkommenden Doppelhelix - Theorie. Da wir heute wissen, dass unter normalen Umständen Adenin immer an Thymin und Cytosin immer an Guanin bindet, scheint uns diese Regel heute als selbstverständlich.

Chargaffs zweite Regel betrifft einzelsträngige - DNA:

In einzelsträngiger DNA gilt ebenfalls, jedoch nicht exakt: $P_A \cong P_T$,
sowie $P_C \cong P_G$. Das ist bekannt als Zweite Chargaff - Regel.

Diese Regel erscheint weniger logisch, wurde jedoch in zahlreichen wissenschaftlichen Arbeiten und Studien extensiv geprüft und hielt fast immer Stand. So gelten in sämtlichen 24 humanen Chromosomenpaaren beide Chargaff - Regeln.

Mit Hilfe dieser Regeln und der Fibonacci - Zahlenfolge konnte eine Forschungsgruppe 2006 ein mathematisches Modell aufstellen, um exakt die Auftrittswahrscheinlichkeit der einzelnen Basen in einem Genom zu berechnen. Hierbei wird explizit erwähnt, dass auch andere Zahlenkombinationen für das Modell versucht wurden, jedoch gelang die Berechnung nur mit Hilfe der Fibonacci - Zahlen [58].

4.1.2 Die Struktur der DNA

Eine wesentlich gravierendere Implikation der Fibonacci - Zahlen in der Genetik wurde 1986 von Harel et al. dargelegt. Die Form der DNA - Doppelhelix wird durch mehrere Faktoren beeinflusst: durch ihren Durchmesser, die Länge einer Periode und ihrem Offset. Die Doppelhelix hat abwechselnd große (major) und kleine (minor) Windungen (grooves). Der Unterschied zwischen einer großen und einer kleinen Windung wird als Offset bezeichnet [55].

Die Studie hat gezeigt, dass sowohl die Länge einer Periode zum Durchmesser, als auch der Durchmesser zum Offset im Verhältnis des Goldenen Schnittes φ zueinander stehen [40]. Daraus wird gefolgert, dass ebenso das Verhältnis der großen zu den kleinen Windungen im Goldenen Schnitt liegt. Sämtliche Abbildungen, zum Zeitpunkt der Publikation dieser bedeutenden Arbeit, in der DNA zeigen, dass die hier erwähnten Proportionen mit einer Genauigkeit von $\pm 1\%$ zu φ stehen. Hier ist allerdings anzumerken, dass die verwendeten Aufnahmen der DNA aus dem Jahr 1986 (als die Studie veröffentlicht wurde) noch nicht sehr präzise waren.

Eine Studie aus dem Jahr 2021 hat daher die Annahmen der Studie von Harel et al. aus 1986 einer erneuten Prüfung unterzogen [35]. Hierfür wurden allerdings keine Fotografien der DNA verwendet, sondern präzise Computer - Simulationen. Mit Hilfe eines Computerprogramms wurde sowohl der Quer- als auch der Längsschnitt eines durchschnittlichen DNA - Moleküls dargestellt. Um nun zu zeigen, ob der Goldene Schnitt hier wirklich zutrifft, wurde eine Reihe von Goldenen Dreiecken (siehe Kapitel 2.5) über den Querschnitt der DNA gelegt.

Verhältnis von Länge zu Durchmesser

Der Durchmesser eines durchschnittlichen DNA - Moleküls beträgt 20,978 Ångström [Å]. Ein Ångström stellt einen zehnmillionsten Teil eines Millimeters dar. Im Durchschnitt besteht jede vollständige Umdrehung der DNA - Doppelhelix aus 10 Basenpaaren. Jedes Basen-

paar benötigt eine Länge von 3,375 Å. Im Gesamten ergibt sich daraus eine Länge von 33,75 Å pro Umdrehung.

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Länge : Durchmesser} = \\ 33,75 : 20,978 = 1,60882829631042... \approx 1,6088 \approx \varphi \pm 0,5\% \end{aligned}$$

In diesem Punkt wurde also die Aussage von Harel et al. bestätigt, die Länge im Verhältnis zum Durchmesser der DNA folgt tatsächlich dem Goldenen Schnitt.

Achsensymmetrie

Aus dem obigen Absatz wissen wir, dass jede Umdrehung aus 10 Basenpaaren besteht. Da die DNA - Doppelhelix sich immer konstant dreht, kommt somit auf jedes Basenpaar eine Rotation von 36°. Aus Absatz 2.5 wissen wir, dass Goldene Dreiecke auch immer einen oder zwei Winkel mit 36° besitzen.

Die Abbildung 16 zeigt die Dreiecke, welche über den Querschnitt einer vollständigen DNA - Doppelhelix - Umdrehung gelegt wurden. Die strichlierte Linie oben zeigt die Abweichung zum echten Goldenen Dreieck. Die Abweichung ist, wie deutlich ersichtlich, minimal. Mit Hilfe des Koordinatensystem, welches die Forscher zur Orientierung verwendeten, ergab sich ein Verhältnis der Seiten der Dreiecke

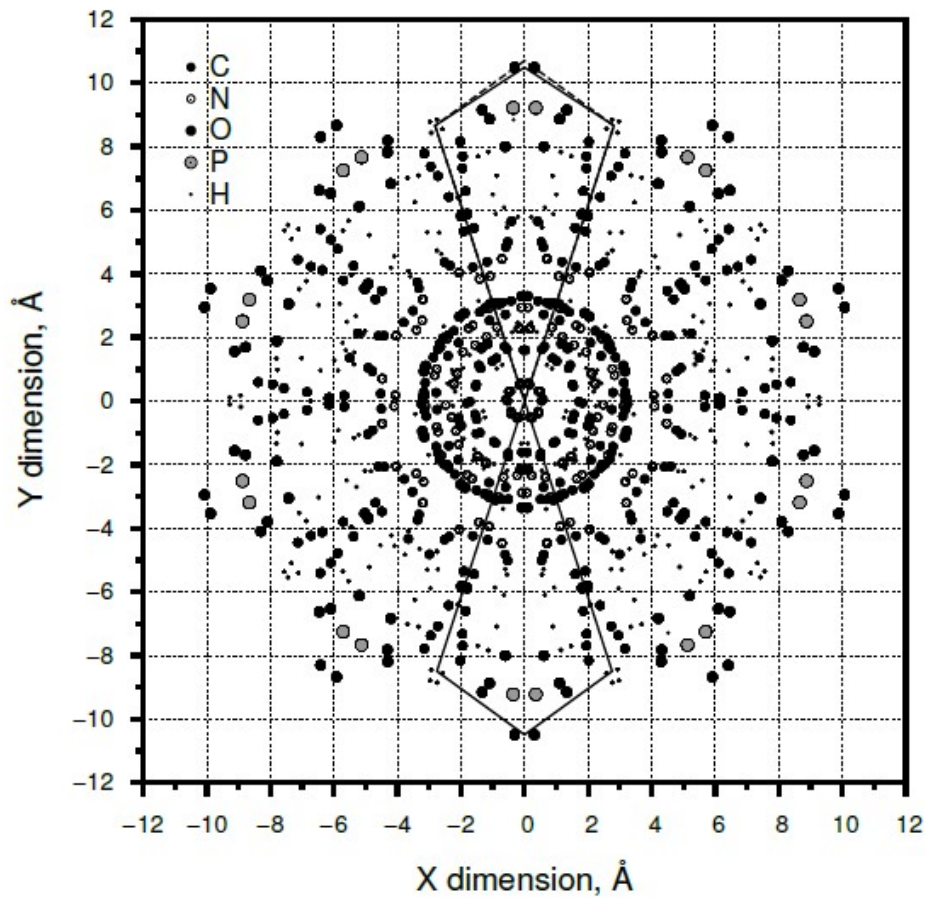


Abbildung 16: Eine Kombination zweier Goldener Dreiecke, welche über einen Querschnitt eines durchschnittlichen DNA Moleküls gelegt wurden. Im obersten Dreieck ist in gestrichelter Linie die Abweichung vom idealen Goldenen Dreieck eingezeichnet [35].

von $1,61996913550845... \approx 1,61997 \approx \varphi$. Abbildung 17 zeigt nun den Querschnitt der DNA - Doppelhelix, wenn 10 dieser Dreieckspaare eingezeichnet werden. Somit kann gezeigt werden, dass die DNA tatsächlich in ihrer Struktur dem Goldenen Schnitt folgt.

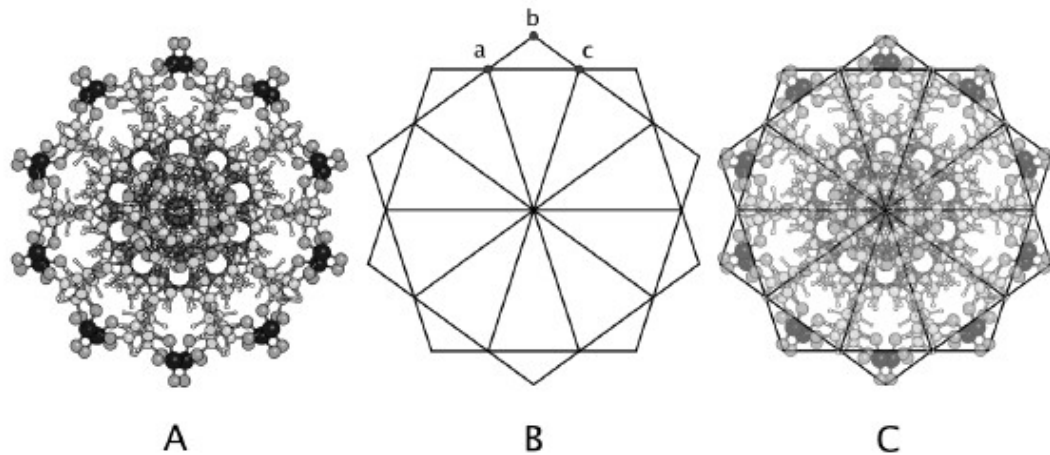


Abbildung 17: Abbildung A: Ein Querschnitt eines durchschnittlichen DNA Moleküls; Abbildung B: Eine Kombination aus 10 goldenen Dreiecken. Jedes Dreieck hat einen zentralen Winkel von 36° und deckt somit ein Basenpaar bzw. eine zehntel Umdrehung, des gesamten Moleküls ab. Abbildung C: Hier ist die Überlagerung der beiden vorherigen Abbildungen zu sehen. Man sieht deutlich die Übereinstimmung [35].

4.1.3 Ist es wirklich golden?

Aus den hier besprochenen Arbeiten zeigt sich allerdings ein folgenschweres Problem. Je intensiver man nach einem Zusammenhang sucht, umso eher wird man einen Zusammenhang sehen, wo eigentlich keiner ist.

Die Natur ist, wie allgemein bekannt, nicht mathematisch präzise. Kein in der Natur gefundener Wert entspricht exakt dem mathematischen Soll - Wert, aus dem einfachen Grund, dass die Natur nicht durch starre Funktionen generiert wird, sondern durch großteils der Stochastik unterworfenen Faktoren beeinflusst wird.

So wurde über lange Jahre hinweg angenommen, dass die Drehung der Schale der Nautilidae (Perlboote) eine logarithmische Spirale, welche mit dem Faktor φ wächst, darstellt. Falbo et al. zeigte jedoch 2017, dass es sich hierbei um einen weit verbreiteten Irrglauben handelt. Die Drehung der Schneckenschale läuft viel mehr zufällig ab und wird durch wesentlich mehr äußere Faktoren beeinflusst als ursprünglich angenommen [18].

Einen Querschnitt der Schale einer Nautilus Schnecke ist in Abbildung 18 gezeigt.



Abbildung 18: Abbildung einer leeren Schale der Nautilus Schnecke. Man ging lange Zeit davon aus hier ein Beispiel für den Goldenen Schnitt in der Natur gefunden zu haben. Dies war allerdings falsch und lediglich ein Zufallsbefund [51].

Da Prozesse in der Natur nie exakt präzise ablaufen können, ist es logisch, dass man nirgends den exakten Wert φ finden wird. Wie weit darf der gefundene Wert allerdings abweichen, um dennoch als „Goldener Schnitt“ gewertet werden zu können?

Aus dieser Diskussion heraus, fand sich der Konsens, dass gefundenen Proportionen eine Abweichung $\pm 2\%$ von φ haben dürfen um als Kandidaten für den Goldenen Schnitt zu gelten [36].

Sämtliche oben aufgezeigten Berechnungen und Beobachtungen im Rahmen der DNA erfüllen diese Qualifikationskriterien.

4.2 Fibonacci in der Botanik

Einige der prominentesten Erscheinungen der Fibonacci - Folge in unserer Umwelt fallen in den Fachbereich der Botanik. Diese Phänomene betreffen meist die Stellung von Blütenblättern und Ähnlichem.

4.2.1 Die Phyllotaxis

In der Biologie wird die Kunde über die Anordnung von Blättern aller Art als Phyllotaxis bezeichnet. Dieser Begriff wird uns durch den nächsten Abschnitt hindurch begleiten [3].

Bereits früh im 19 Jhdt. entdeckten zwei Botaniker, Schimper und Braun, dass erstaunlich viele Anordnungen und Regelmäßigkeiten im Rahmen der Phyllotaxis der Fibonacci - Folge entsprechen [49].

In den allermeisten Pflanzen sind die Blätter spiralförmig angeordnet. Diese Anordnung nennt man Parastichen. Interessanterweise ist die Anzahl der Spiralen welche im Uhrzeigersinn verlaufen, nicht ident mit der Anzahl der Spiralen, welche gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. Meist wird die Phyllotaxis als Bruchzahl angeschrieben. Eine Pflanze deren Blätter der Phyllotaxis $3/8$ entsprechen, hat beispielsweise 8 Blätterpositionen rund um den Stamm. Zusätzlich wis-

sen wir, dass je 3 Blätter für eine komplette Umrundung des Stammes notwendig sind. Dies wird durch Abbildung 19 verdeutlicht.

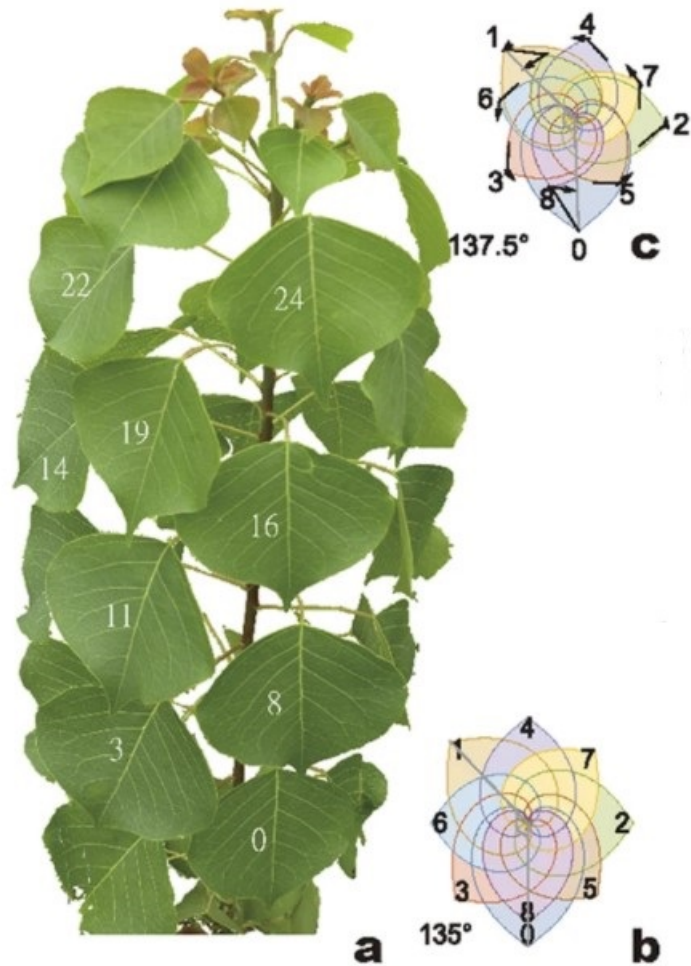


Abbildung 19: Abbildung der Phyllotaxis. a) zeigt die Pflanze als Ganzes, welche eine Phyllotaxis von $3/8$ beschreibt. b) zeigt die 8 Blattpositionen rund um den Stamm. c) zeigt die aufsteigende Nummerierung der Blätter nach ihrer Position. Man sieht deutlich, dass der Stamm mit jedem 3-ten Blatt umrundet wird. [29].

Faszinierenderweise entsprechen die gängigsten Phyllotaxis - Muster, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$, allesamt den Fibonacci - Zahlen. Aufgeschlüsselt

nach beispielhaften Pflanzen entspricht dies [2]

1/2: Linde, Ulme, Limette

1/3: Buche, Haselnuss

2/5: Apfelbaum, Eiche, Zwetschkenbaum, Kirschenbaum

3/8: Rose, Pappel, Pfirsich

5/13: Mandel

Es ist auf der ersten Blick ersichtlich, dass sämtliche der hier vorkommenden Zahlen Gliedern der Fibonacci - Zahlenfolge entsprechen.

Die Drehung bei aufsteigenden Blättern entspricht in beinahe allen Fällen, unabhängig von der Pflanzengattung, dem Goldenen Winkel ($\approx 137.5^\circ$) [27].

Bisher war es jedoch nicht klar, wieso gerade dieser Winkel bei Pflanzen so oft anzutreffen ist. Eine erstaunliche Studie, publiziert 2015 im renommierten Nature Journal, errechnete die durchschnittliche Energiebilanz verschiedener Phyllotaxis - Muster. Hierbei wurde die Differenz zwischen zum Wachstum benötigter Energie, sowie durch Sonneneinstrahlung produzierter Energie, herangezogen. Hierbei wurde ein Minimum der benötigten Energie, sowie ein Maximum der produzierten Energie bei einem Drehwinkel von $\approx 137.5^\circ$, also dem goldenen Winkel festgestellt. Die Studie hat ebenso gezeigt, dass im Laufe der Evolution die Pflanzen sich immer weiter an diesen idealen Winkel angepasst haben. Die Abweichungen der Phyllotaxis - Muster haben sich somit im Laufe der Äonen immer weiter dem Goldenen Winkel angenähert. Hierdurch entstanden die geläufigen Muster 1/3,

$2/5$, $3/8$, $5/13$.

Die zweit-effizienteste Konfiguration führt zu einem Phyllotaxis - Muster von $1/3$, $1/4$, $2/7$, $3/11$, $5/18$. Auch dieses Muster lässt sich in Einzelfällen finden. Während dies auf dem ersten Blick der Universalität des Goldenen Winkels widerspricht, so untermauert es bei genauerer Betrachtung doch nur die Folgerungen. Pflanzen näherten sich im Laufe der Evolution somit immer weiter einer idealen Energiebilanz an [29].

Die Ergebnisse dieser Studie sind in Abbildung 20 veranschaulicht.

Diese ideale Verteilung bei 137.5° wird durch mehrere Faktoren begünstigt. So wird durch die Drehung um eine irrationale Zahl erreicht, dass nie ein Blatt exakt über dem anderen steht. Somit wird das aufgefangene Sonnenlicht pro Blatt maximiert [39]. Erstaunlicherweise wurde durch Okabe et al. gezeigt, dass die Drehung der Blätter voneinander eine unterschiedliche Energiemenge benötigt. Dies wird durch die Statik, sowie den Einfluss äußerer Faktoren wie Regenfall und Wind begründet. Es wurde gezeigt, dass hier ebenfalls ein Winkel von 137.5° zu einem Minimum an benötigter Energie pro Blatt führt [29].

4.2.2 Ausgewählte Beispiele aus dem Pflanzenreich

Eine der berühmtesten Beispiele für die Fibonacci - Folge in der Natur ist in der *Helianthus annuus*, oder Sonnenblume, zu finden. Prä-

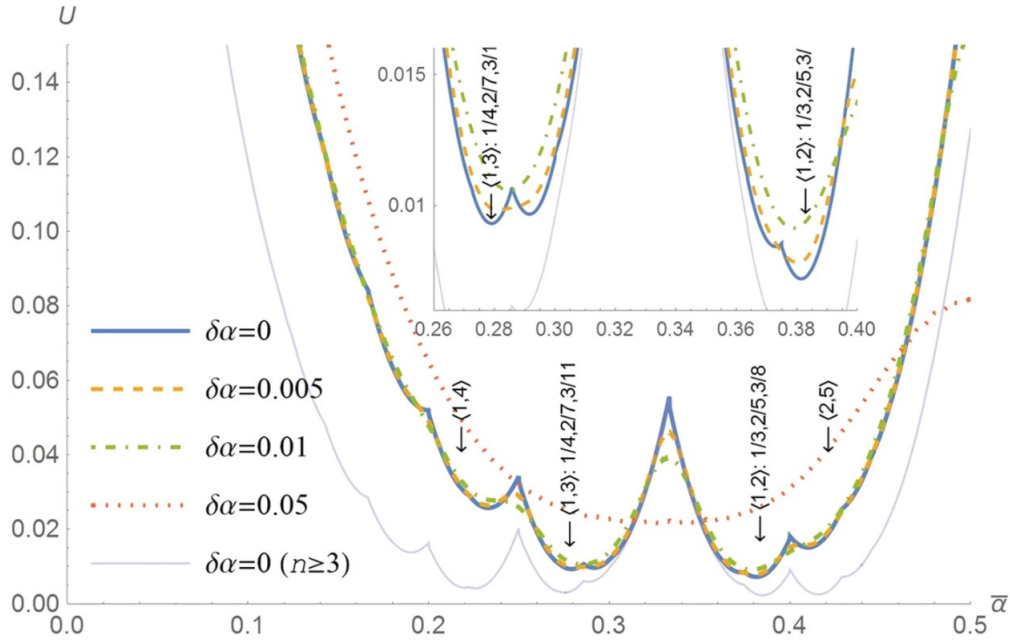


Abbildung 20: Abbildung der Energiebilanzen der Phyllotaxis - Muster. Die beiden idealen Positionen sind bei den jeweils niedrigsten Punkten zu finden. Während der linke, minimal höhere Punkt, dem Muster/3, 1/4, 2/7, 3/11, 5/18 entspricht, beschreibt das rechte Minimum der Kurve die ideale Energiebilanz beim Muster 1/3, 2/5, 3/8, 5/13 [29].

zise geht es hierbei um die Verteilung der Samen im Blütenstamm der Pflanze.

Eine Nahaufnahme der Samen in einer Sonnenblumen Blüte ist in Abbildung 21 zu sehen.

Vom Zentrum aus betrachtet, hat jeder Kern den Winkel 137.5° zum nächsten Kern. In Abbildung 22 wird für diesen Winkel die Bezeichnung Ψ verwendet. Die ersten 10 Kerne um das Zentrum herum sind hier dargestellt.



Abbildung 21: Abbildung einer Sonnenblumenblüte mit gut erkennbaren Kernen. [47].

Wenn man diese Aufteilung für beispielsweise 600 Kerne berechnen ergibt sich folgendes Bild, welches in Abbildung 23 gezeigt wird.

Eingezeichnet sind neben den Kernen ebenfalls die einzelnen Spiralen. Während es 34 nach links drehende Spiralen gibt, so existieren 55 rechtsdrehende Spiralen. Dies sind aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci-Folge.

Ein ähnliches Beispiel stellt *Brassica oleracea*, besser bekannt als Romanesco dar. Diese Untergattung des Brokkolis stammt aus Italien

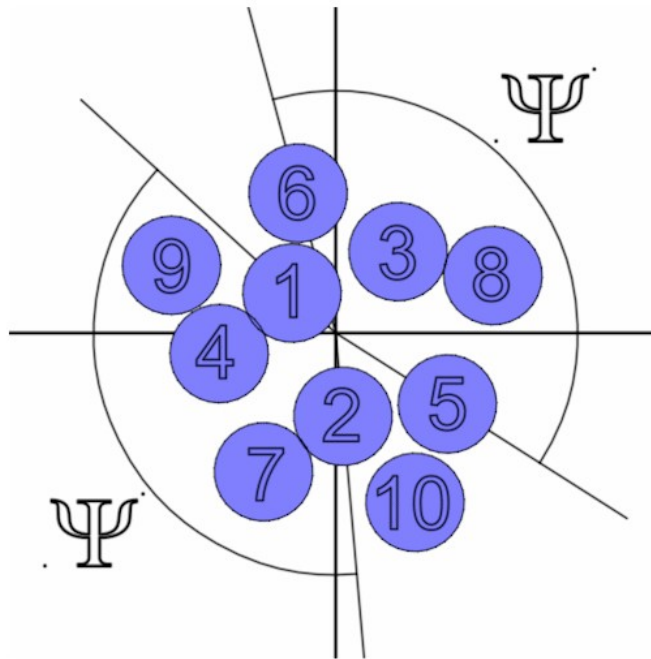


Abbildung 22: Abbildung der ersten 10 Kerne einer Sonnenblumenblüte. Die Winkel zwischen den Kernen 1/2 sowie 5/6 sind markiert. [37].

und besteht aus vielen einzelnen, turmartigen Blütenanlagen, wie in Abbildung 24 dargestellt ist.

In Abbildung 25 sind 8 Spiralen zu sehen, welche sich im Uhrzeigersinn drehen, sowie 13 welche sich eben gegen den Uhrzeigersinn drehen [17].

Die einzelnen turmartigen Blütenstände ähneln hierbei Fraktalen. Wie bei Sonnenblumenblüten und ihren Samen, so stellen auch die spiralförmig angeordneten Blütenstände des Romanescos aufeinanderfolgende Fibonacci - Zahlen dar.

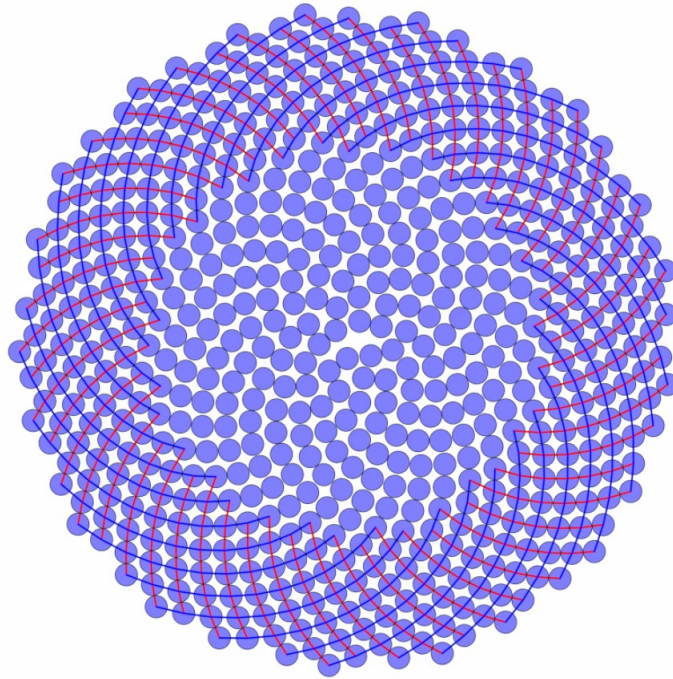


Abbildung 23: Aufteilung Sonnenblumensamen in einer Blüte bei 600 Samen. In rot markiert sind rechtsgerichtete Spiralen, in blau linksgerichtete [37].



Abbildung 24: Romanesco *Brassica oleracea* [25].

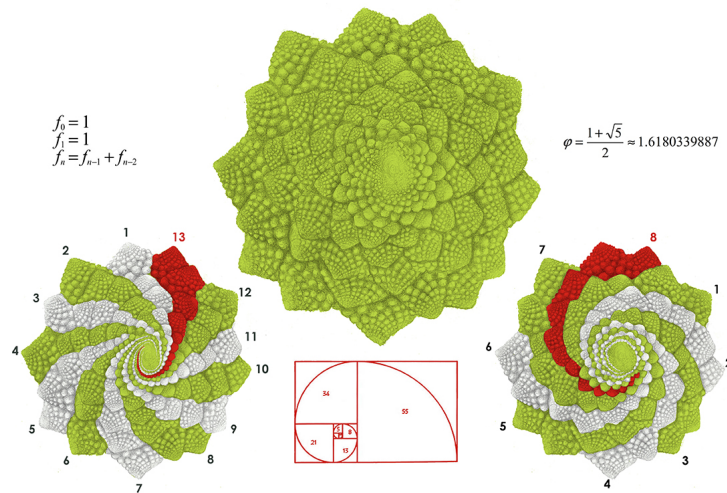


Abbildung 25: Fibonacci - Folge beim Romanesco - Brokkoli. Links unten sind die 13 Spiralen gegen den Uhrzeigersinn, rechts unten sind die 8 Spiralen im Uhrzeigersinn markiert [17].

Ein weiteres botanisches Beispiel ist die *Königin der Früchte*, bei uns besser als Ananas bekannt. Dieser Spitzname rührt von ihrem widerstandsfähigen, kronenartigen Blattschopf, sowie der auffälligen Farbe der einzelnen harten Beeren her. Diese Beeren bilden zusammen die Frucht.

Ananasse haben immer eine von zwei möglichen Formen:

1 Option:

8 Parallele Reihen von Kernen, welche sich waagrecht um die Pflanze wickeln.

13 Parallele Reihen von Kernen, welche sich schräg um die Pflanze wickeln.

21 Parallele Reihen von Kernen, welche sich senkrecht um die Pflanze

ze wickeln.

2 Option:

5 Parallele Reihen von Kernen, welche sich waagrecht um die Pflanze wickeln.

8 Parallele Reihen von Kernen, welche sich schräg um die Pflanze wickeln.

13 Parallele Reihen von Kernen, welche sich senkrecht um die Pflanze wickeln.

Wir erkennen auf den ersten Blick, dass beide mögliche Konfigurationen dieser Pflanze die Fibonacci-Zahlen widerspiegeln. Diese Optionen sind in Abbildung 26 deutlich zu sehen und wurden zuerst durch Onderdonk et al. 1970 beschrieben [30].



Abbildung 26: Abbildungen von links nach rechts: Normale Ananas; Eine der acht parallelen Reihen, welche waagrecht um die Frucht herum verlaufen; Eine der 13 parallelen Reihen, welche schräg um die Frucht herum verlaufen; Eine der 21 parallelen Reihen, welche senkrecht um die Frucht herum verlaufen [30].

Als letzte beispielhafte Pflanzenfamilie seien hier die Blütenstände der Familie der Pinaceae genannt. Diese Pflanzen sind bei uns gemeinhin als Kieferngewächse bekannt.

Die Blüten der Pflanzen dieser Familie treten für gewöhnlich immer getrenntgeschlechtlich auf. So finden sich hier keine Zwitterblüten, sondern immer entweder männliche oder weibliche Blütenstände. Während die männlichen Blütenstände eine eher unscheinbare, kleine Ansammlung von Staubblättern darstellen, sind die weiblichen Blütenstände wesentlich größer. Gemeinhin bekannt sind die weiblichen Blütenstände als „Zapfen“. Diese Zapfen, seien es nun Kiefernzapfen, Tannenzapfen oder Exemplare anderer Gattungen, sind auch im Hinblick auf die Fibonacci-Zahlenfolge erwähnenswert. Biologisch betrachtet handelt es sich hierbei um einen Kern aus Holz, welcher schuppenartig von Samenanlagen ummantelt wird [22]. Blicken wir jedoch einmal mit „mathematischen Augen“ auf diese Blütenstände so offenbart sich das Folgende:

Als Beispiel dient uns ein Kiefernzapfen. Von unten betrachtet, erkennt man die Anordnung der einzelnen Schuppen als Spiralen. Diese können, wie bei der Ananas und dem Romanesco zuvor, entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn verlaufen. In der hier dargestellten Abbildung 27 eines Kiefernzapfens sind dies acht Spiralen im Uhrzeigersinn, sowie 13 Spiralen gegen den Uhrzeigersinn, abermals aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci - Folge [50].

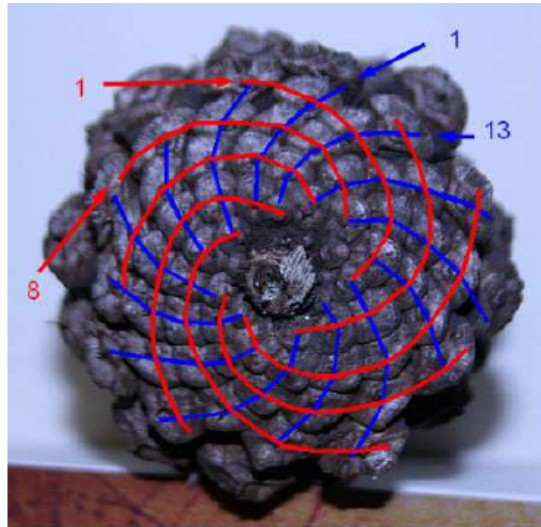


Abbildung 27: Abbildungen eines Kiefernzapfens von unten. Zu sehen in rot sind die Spiralen der Schuppen im Uhrzeigersinn, in blau gegen den Uhrzeigersinn [50].

Interessanterweise unterscheidet sich die Anzahl der Spiralen zwischen einzelnen Arten der Familie, jedoch sind die Anzahl der Drehungen immer aufeinanderfolgende Fibonacci - Zahlen.

4.3 Fibonacci in der Astronomie

Selbst einigen der größten Strukturen des bekannten Universums scheint die Fibonacci - Zahlenfolge nicht unbekannt zu sein. Spiralgalaxien stellen einige der eindrucksvollsten Gebilde des Universums dar. Als Beispiel dient unsere Heimat, die Milchstraße. Eine Spiralgalaxie besteht aus mehreren Spiralarmen, sowie einem Zentrum, genannt Bulge. Dieses Zentrum wird dominiert von einem einzelnen schwarzen Loch, im Falle der Milchstraße *Sagittarius A**.

Während in der zentralen Region rund um das Bulge besonders viele

alte Sterne beheimatet sind, wodurch es hell erstrahlt, so wirken die Arme eher bläulich. Dieser blaue Schimmer wird durch das ständige Bilden neuer Sterne in diesen Bereichen begründet. Die Milchstraße hat einen Durchmesser von ungefähr 30 000 000 Lichtjahre, was etwa $1 \cdot 10^{18}$ km entspricht, und ist etwa 13,6 Milliarden Jahre alt. Die Milchstraße ist in Abbildung 28 gezeigt.



Abbildung 28: Abbildung der Milchstraße. Das Bulge und die einzelnen Arme sind deutlich zu erkennen [57].

Jeder dieser Spiralarme stellt eine logarithmische Spirale dar. Diese Spiralen wachsen im ebenselben Verhältnis wie die Fibonacci - Spirale und sind ident geformt. Das beruht darauf, dass diese Arme ihren Ursprung im Bulge haben, und von hier aus wachsen. Durch die abnehmende Dichte nach außen hin, sowie der damit geringer werdenden Gravitation, bekommen die Arme ihre typische Form [32].

5 Conclusio

„To understand the universe, you must understand the language in which it is written. This language is called mathematics.“ - Galileo Galilei (1564 - 1642)

Dieses Zitat des italienischen Universalgelehrten Galileo Galilei trifft wohl auf nichts mehr zu als auf die Fibonacci - Folge. Es gibt wenige mathematische Themen, welche derart allumfassend und universal auf die gesamte Umwelt zutreffen als diese Zahlen.

Während die Zahlenfolge selbst simpel erscheint, so sind einige ihrer Charakteristika doch wesentlich komplexer als sich manch einer denken mag.

Der Entdecker der Fibonacci - Folge, Leonardo von Pisa, war einer der bedeutendsten Mathematiker der Geschichte. Der spätere Einfluss seiner Lösung auf sein berühmtes „Kaninchenproblem“, die Fibonacci - Zahlenfolge, war jedoch selbst ihm nicht bewusst.

Der Goldene Schnitt auf der anderen Seite, war bereits lange vor der Fibonacci - Folge bekannt. Er wurde als Schönheitsideal nahezu verehrt, und manche sahen darin gar die Definition der göttlichen Schönheit. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Themen war lange Zeit nicht offensichtlich.

Zusammen beschreiben diese beiden Phänomene praktisch die gesamte Umwelt. Angefangen von den kleinsten Einheiten des Lebens selbst, der DNA, bishin zur Form unserer Heimatgalaxie. All diese Sachen folgen dem hier beschriebenen mathematischen Leitlinien.

Abbildungsverzeichnis

1	Einfache grafische Darstellung des Goldenen Schnittes	35
2	Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode mit innerer Teilung	41
3	Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode mit äußerer Teilung	44
4	Fertige Darstellung der Konstruktionsmethode nach Odom	47
5	Darstellung eines Goldenen Dreiecks	53
6	Konstruktion der Goldenen Dreiecke	57
7	Eine Aneinanderreihung von Quadraten mit jeweils einer Fibonacci-Zahl als Seitenlänge bildet den Grundstein für die Darstellung	62
8	Fertige Fibonacci - Spirale [11]	63
9	Eine Kombination zweier Goldener Rechtecke. Konstruiert nach der oben beschriebenen Methodik . . .	64
10	Ein altes Sanskrit Transkript, welches Verse in der Fibonacci-Folge enthält [23]	66
11	Cheops Pyramide zu Gizeh [12]	67
12	Abbildung des Parthenons mit eingezeichneten Verhältnis des Goldenen Schnittes [20]	68
13	Abbildung von Leonardo von Pisa [26]	69
14	Nachbau eines römischen Abakus [1]	72

15	Das Kaninchenproblem. Gestrichelte Linien sind jeweils Nachkommen, durchgezogene Linien stellen ein bereits vorhandenes Paar dar. Die Paare sind zuerst für einen Monat lang nicht geschlechtsreif (also klein), bevor sie an der Vermehrung teilhaben [24].	75
16	Eine Kombination zweier Goldener Dreiecke, welche über einen Querschnitt eines durchschnittlichen DNA Moleküls gelegt wurden. Im obersten Dreieck ist in gestrichelter Linie die Abweichung vom idealen Goldenen Dreieck eingezeichnet [35].	81
17	Abbildung A: Ein Querschnitt eines durchschnittlichen DNA Moleküls; Abbildung B: Eine Kombination aus 10 goldenen Dreiecken. Jedes Dreieck hat einen zentralen Winkel von 36° und deckt somit ein Basenpaar bzw. eine zehntel Umdrehung, des gesamten Moleküls ab. Abbildung C: Hier ist die Überlagerung der beiden vorherigen Abbildungen zu sehen. Man sieht deutlich die Übereinstimmung [35].	82
18	Abbildung einer leeren Schale der Nautilus Schnecke. Man ging lange Zeit davon aus hier ein Beispiel für den Goldenen Schnitt in der Natur gefunden zu haben. Dies war allerdings falsch und lediglich ein Zufallsbefund [51].	84

19	Abbildung der Phyllotaxis. a) zeigt die Pflanze als Ganzes, welche eine Phyllotaxis von $3/8$ beschreibt. b) zeigt die 8 Blattpositionen rund um den Stamm. c) zeigt die aufsteigende Nummerierung der Blätter nach ihrer Position. Man sieht deutlich, dass der Stamm mit jedem 3-ten Blatt umrundet wird. [29].	86
20	Abbildung der Energiebilanzen der Phyllotaxis - Muster. Die beiden idealen Positionen sind bei den jeweils niedrigsten Punkten zu finden. Während der linke, minimal höhere Punkt, dem Muster $1/3$, $1/4$, $2/7$, $3/11$, $5/18$ entspricht, beschreibt das rechte Minimum der Kurve die ideale Energiebilanz beim Muster $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$ [29].	89
21	Abbildung einer Sonnenblumenblüte mit gut erkennbaren Kernen. [47].	90
22	Abbildung der ersten 10 Kerne einer Sonnenblumenblüte. Die Winkel zwischen den Kernen $1/2$ sowie $5/6$ sind markiert. [37].	91
23	Aufteilung Sonnenblumensamen in einer Blüte bei 600 Samen. In rot markiert sind rechtsgerichtete Spiralen, in blau linksgerichtete [37].	92
24	Romanesco <i>Brassica oleracea</i> [25].	92
25	Fibonacci - Folge beim Romanesco - Brokkoli. Links unten sind die 13 Spiralen gegen den Uhrzeigersinn, rechts unten sind die 8 Spiralen im Uhrzeigersinn markiert [17].	93

26	Abbildungen von links nach rechts: Normale Ananas; Eine der acht parallelen Reihen, welche waagrecht um die Frucht herum verlaufen; Eine der 13 parallelen Rei- hen, welche schräg um die Frucht herum verlaufen; Ei- ne der 21 parallelen Reihen, welche senkrecht um die Frucht herum verlaufen [30].	94
27	Abbildungen eines Kiefernzapfens von unten. Zu se- hen in rot sind die Spiralen der Schuppen im Uhrzei- gersinn, in blau gegen den Uhrzeigersinn [50].	96
28	Abbildung der Milchstraße. Das Bulge und die einzel- nen Arme sind deutlich zu erkennen [57].	97

6 Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] Heinz Nixdorf Museum, *Römischer Abakus*,
(<https://nat.museum-digital.de/index.php?t=objekt-oges=175019>)
- [2] Adam j. et al., *Mathematics in Nature: Modeling Patterns in the Natural World*. Hrsg. University Press, Princeton, 2006
- [3] Adler I. et al., *A History of the Study of Phyllotaxis*. Hrsg. Annals of Botany, Oxford, 1997
- [4] Arens T. et al., *Mathematik*. Hrsg. Springer Verlag, Berlin, 2018
- [5] Arens T. et al., *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen: Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Hrsg. Springer Verlag, Berlin, 2013
- [6] Benölken R., Gorski H. I., *Leitfaden Arithmetik: Für Studierende der Lehrämter*. Hrsg. Springer Verlag, Berlin, 2018
- [7] Beutelspacher A., *Der goldene Schnitt*. Hrsg. Spektrum Akademischer Verlag, Berlin, 1996.
- [8] Bergum G.E., *Applications of Fibonacci Numbers*. Hrsg. Springer Verlag, Berlin, 2012.
- [9] Boyer C., *A history of mathematics*. Hrsg. John Wiley and Sons, New York, 1968.

- [10] Bronstein I., Semendjajew K., *Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. Nauka Verlag, Moskau, 1979.
- [11] Bruchwitz A., *Der Goldene Schnitt - Inspirationen für die Bildgestaltung*. Hrsg. White-Wall Magazin, Frechen, 2017.
- [12] Planet Wissen, *Pyramidenbau*. Hrsg. Planet Wissen (ARD), (<https://www.planet-wissen.de/geschichte/antike/pyramidenbau/index.html>)
- [13] Chargaff E., *Structure and function of nucleic acids as cell constituents*. Hrsg. Federation Proceedings. Washington, 1951.
- [14] Devlin K., *Finding Fibonacci: The Quest to Rediscover the Forgotten Mathematical Genius Who Changed the World*. Hrsg. Princeton University Press. Princeton, 2017.
- [15] Devlin K., *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*. Hrsg. Walker Books. London, 2002.
- [16] Dubesset D., *Minimalistische Fotografie: Kunst und Praxis*. Hrsg. dpunkt Verlag. Heidelberg, 2018.
- [17] Fornara A., *Romanesco Broccoli* (<http://www.blog.illustraciencia.info/2018/06/romanesco-broccoli-anna-fornara.html>).jpg), Hrsg. Scientific illustrations, 2018
- [18] Falbo C., *The Golden Ratio—A Contrary Viewpoint*. Hrsg. The College Mathematics Journal . Washington, 2005.

- [19] Grimaldi R., *Fibonacci and Catalan Numbers: An Introduction*. Hrsg. John Wiley and Sons. New York, 2012.
- [20] Hague M., *In search of the golden ratio in architecture*(<https://www.theglobeandmail.com/life/home-and-garden/architecture/in-search-of-the-golden-ratio-in-architecture/article20040240/>), Hrsg. The Globe and Mail, Toronto,
- [21] Hausmann A., *Der goldene Schnitt: göttliche Proportionen und noble Zahlen*. Hrsg. A. Hausmann. Aachen, 2002.
- [22] Jäger E. et al., *Botanik*. Hrsg. pringer Verlag. Berlin, 2015.
- [23] Guruprasad 's Portal, *How Fibonacci number series originated in Ancient India* (<http://guruprasad.net/posts/fibonacci-number-series-originated-ancient-india/>)
- [24] Wang J., *Things you didn't know about Fibonacci* (<https://www.vincit.com/blog/things-you-didnt-know-about-fibonacci/>)
- [25] Leidus I., *Pyramidenbau*, Hrsg. Wikimedia, 2021
- [26] Fiboni V.O.F., *Abbildung von Leonardo von Pisa*, Spaubeek, Niederlande, (<https://www.fibonacci.com/fibonacci/>)
- [27] Lüttge U., *Faszination Pflanzen*. Hrsg. Springer Verlag. Berlin, 2017.
- [28] Gericke H., *Mathematik im Abendland Von den römischen Feldmessern bis zu Descartes*. Hrsg. Springer Verlag. Berlin, 1990.

- [29] Okabe T., *Biophysical optimality of the golden angle in phyllotaxis*. Hrsg. Nature Verlag. London, 2015.
- [30] Onderdonk P., *Pineapples and Fibonacci numbers*". Hrsg. Nature Verlag. London, 1970.
- [31] Posamentier A., Lehmann I., *The glorious golden Ratio*. Hrsg. Prometheus, Wuppertal, 2011
- [32] Quintano M., *Golden Ratio in Nature under Fibonacci Numbers*. Hrsg. Academia, Philadelphia, 2011
- [33] Roberts S. *A Reclusive Artist Meets Minds with a World-Famous Geometer: George Odom and H.S.M. (Donald) Coxeter* . Hrsg. Leonardo journal. Cambridge, 2007.
- [34] Lausch H. *Fibonacci und die Folge(n)*. Hrsg. Oldenbourg Verlag. München, 2009.
- [35] Larsen S., *DNA Structure and the Golden Ratio Revisited*. Hrsg. Multidisciplinary Digital Publishing Institute. Basel, 2021
- [36] Markowsky G., *Misconceptions about the Golden Ratio*. Hrsg. The College Mathematics Journal . Washington, 1992.
- [37] Meier J. *Sonnenblumen* (<http://www.3d-meier.de/tut22/Sonne/Seite1.html>), Hamburg, 2008.
- [38] Meisner G. *Der Goldene Schnitt Die Schönheit der Mathematik*. Hrsg. Librero Verlag. Köln, 2019.

- [39] Niklas K. et al., *The role of phyllotatic pattern as a “developmental constraint” on the interception of light by leaf surfaces*. Hrsg. Evolution. New York, 1988
- [40] Harel D. et al., *Beauty is in the genes of the beholder*. Hrsg. Trends in Biochemical Sciences. New York, 1986
- [41] Hemenway P. *Der geheime Code*. Hrsg. Evergreen Verlag. Köln, 2008.
- [42] Herrmann D. *Die antike Mathematik: Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen*. Hrsg. Springer Verlag. Berlin, 2013.
- [43] Holger S. *Zahlenfolgen*. Hrsg. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik. Berlin, 2001.
- [44] Koshy T. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. Hrsg. John Wiley and Sons. New York, 2001.
- [45] Krauter S. *Erlebnis Elementargeometrie: Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. Hrsg. Spektrum Akademischer Verlag. Berlin, 2005.
- [46] Remmert R., Ullrich P., *Elementare Zahlentheorie*. Hrsg. Springer-Verlag. Berlin, 2013.
- [47] Reinhard C. *Sonnenblume* (<https://www.fotocommunity.de/photo/sonnenblum-reinhard-d-l/44203809>). Hrsg. Historia Mathematica. Amsterdam, 2002.

- [48] Rossi C., Tout C., *Were the Fibonacci Series and the Golden Section Known in Ancient Egypt?*. Hrsg. Fotocommunity. 2021.
- [49] Schimper K. et al., *Beschreibung des Symphytum Zeyheri und seiner zwei deutschen verwandten der S. bulbosum Schimper und S. tuberosum*. Hrsg. Magazin für Pharmacie. Berlin, 1830
- [50] Scott T. et al., *On the Origin of the Fibonacci sequence* . Hrsg. History of Mathematics. Berlin, 2014
- [51] Simon M., *Absurd Creature of the Week: The Curious Case of the Elusive, Slimy Nautilus* (<https://www.wired.com/2015/09/absurd-creature-of-the-week-crusty-nautilus/>), Hrsg. Wired.com. Leipzig, 2015
- [52] Singh P. et al., *The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval India*. Hrsg. Elsevier Verlag. Amsterdam, 1985
- [53] Stegman D. et al., *Der Goldene Schnitt*. Hrsg. Universität Hildesheim, 2004
- [54] Toker S. et al., *Der Goldene Schnitt als irrationale Zahl. Eine Approximation durch Kettenbrüche und Fibonacci-Zahlen*. Hrsg. GRIN Verlag, München, 2015
- [55] Verma R., *Genes and Genomes*. Hrsg. Elsevier Verlag. Amsterdam, 1998.
- [56] Walser H., *Fibonacci, Zahlen und Figuren*. Hrsg. Eagle Verlag. Leipzig, 2012

- [57] Williams M., *Why Can't We See the Center of the Milky Way?* (<https://www.universetoday.com/120006/why-cant-we-see-the-center-of-the-milky-way/>), Hrsg. Universe Today. New York, 2015
- [58] Yamagishia M. et al., *Nucleotide Frequencies in Human Genome and Fibonacci Numbers*. Hrsg. Bulletin of Mathematical Biology. New York, 2007