

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

„Epidemiologische Modelle im Mathematikunterricht der
Sekundarstufe II anhand von SARS-CoV-2“

verfasst von / submitted by

Claudia Heindler, BSc BEd MSc

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2022 / Vienna 2022

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 199 520 523 02

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Lehrverbund
Unterrichtsfach Mathematik Lehrverbund
Unterrichtsfach Physik Lehrverbund

Betreut von / Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger,
Privatdoz.

Abstract

This master thesis deals with the use of epidemiological models in mathematics education on the basis of SARS-CoV-2. In order to gain an understanding of transmission mechanisms as well as to make predictions about disease spread, epidemiologists resort to mathematical models. These mathematical models can provide guideline recommendations for the handling and management of an epidemic as well as description of the current health situation in detail.

The branch of mathematics to which modeling can be assigned is that of applied mathematics. Applied mathematics plays an important role in mathematics education: In school mathematics, everyday as well as application references of mathematics are to be established in order to promote the motivation of the learners on the one hand, but also to ensure the formation of responsible citizens on the other hand. The examination of aspects of the SARS-CoV-2 pandemic in mathematics lessons therefore offers a current everyday and application reference, especially in the present time.

However, typical open modeling tasks are on the one hand often very overextending for school students. On the other hand, these modeling tasks are often very time-consuming. In everyday school lessons there is not much time to devote to these intensive modeling processes due to the dense curriculum and the competence catalog for the standardized school-leaving exams. Therefore, in the context of this work, tasks – including solutions – are designed that can be precisely assigned to the mathematics curriculum as well as to the competence catalog. These tasks only contain individual aspects of the modeling process and are therefore less time-consuming than typical, open modeling tasks.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz von epidemiologischen Modellen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II anhand von SARS-CoV-2. Um ein Verständnis für Übertragungsmechanismen sowie Vorhersagen über Krankheitsausbreitungen treffen zu können, greifen Epidemiolog:innen auf mathematische Modelle zurück. Diese mathematischen Modelle können Richtlinien-Empfehlungen zum Umgang und Management einer Epidemie liefern sowie die aktuelle Gesundheitssituation detailliert beschreiben.

Jener Teilbereich der Mathematik, dem das Modellieren zugeordnet werden kann, ist jener der angewandten Mathematik. Diese spielt auch in im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle: In der Schulmathematik sollen Alltags- und Anwendungsbezüge der Mathematik hergestellt werden, um einerseits die Motivation der Lernenden zu fördern, aber auch um die Ausbildung mündiger Bürger:innen sicherzustellen. Die Auseinandersetzung mit Aspekten der SARS-CoV-2-Pandemie im Mathematikunterricht bietet daher gerade in der jetzigen Zeit einen aktuellen Alltags- und Anwendungsbezug.

Typische, offene Modellierungsaufgaben sind jedoch einerseits oftmals für die Schüler:innen der Sekundarstufe II sehr überfordernd. Andererseits sind ebendiese Modellierungsaufgaben häufig auch sehr zeitintensiv. Im alltäglichen Schulunterricht bleibt aufgrund des dichten Lehrplans und des Grundkompetenzkatalogs für die standardisierte Reifeprüfung nicht viel Zeit, sich diesen intensiven Modellierungsprozessen zu widmen. Daher werden im Rahmen dieser Arbeit Aufgabenstellungen inklusive Musterlösungen konzipiert, die passgenau dem Mathematik-Lehrplan der Sekundarstufe II sowie dem Grundkompetenzkatalog zugeordnet werden können. Die konzipierten Aufgabenstellungen beinhalten jeweils nur einzelne Teilaspekte des Modellierungsprozesses und sind somit weniger zeitintensiv als typische, offene Modellierungsaufgaben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	1
1.2	Gliederung der Arbeit	3
2	Epidemiologische Modelle	4
2.1	Die Entstehung der mathematischen Epidemiologie	4
2.2	Die Mathematik hinter Epidemien	5
2.3	Klassen-Modelle	5
2.3.1	SIR-Modell	7
2.3.1.1	Der Beginn einer Epidemie	13
2.3.1.2	Die Basisreproduktionszahl R_0	14
2.4	Statistiken einer Epidemie	14
2.4.1	Herdenimmunität	14
2.4.2	Genauigkeit von Tests	15
3	Die SARS-CoV-2-Pandemie	17
3.1	Ein SIR-Modell für Österreich	17
3.2	Basisreproduktionszahl für SARS-CoV-2	18
3.3	Herdenimmunität bei SARS-CoV-2	18
3.4	Genauigkeit der PCR-Tests zum Nachweis einer SARS-CoV-2 In- fektion	19
3.5	Dunkelziffer	19
3.6	Politische Maßnahmen	21
3.6.1	Quarantänemaßnahmen und Schulschließungen	22
3.6.2	Social Distancing und Lockdown	24
3.6.3	Contact Tracing	25

4	Modellierung im Mathematik-	29
	unterricht	
4.1	Der Begriff des Modellierens in der didaktischen Diskussion	29
4.2	Der Modellierungskreislauf	31
4.3	Teilkompetenzen und Ziele des Modellierens	33
4.4	Modellierungsaufgaben	35
5	Schulmathematik in der	36
	Sekundarstufe II	
5.1	Forderungen an den Mathematikunterricht laut österreichischem Lehrplan	36
5.2	Wachstumsmodelle	38
5.2.1	Lineare Modelle	38
5.2.2	Exponentielle Modelle	39
5.2.3	Logistisches Wachstum	40
5.2.4	Änderungsmaße	41
5.3	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme	41
6	Aufgaben für den Mathematikunterricht	43
6.1	Mengen und Zahlen: Erhaltene Impfdosen in Österreich	44
6.2	Ungleichungen und Statistik: Die Corona-Schutzimpfung	46
6.3	Lineare Modelle: Infektionszahlen in Österreich	49
6.4	Exponentielle Modelle: Anzahl der Neuinfektionen in Österreich und den USA	54
6.5	Exponentielle Modelle: Infektionszahlen in Deutschland	58
6.6	Logistisches Wachstum: Coronazahlen in Deutschland	61
6.7	Änderungsmaße: Corona-Neuinfektionen in Österreich	64
6.8	Statistiken und Umfragen: Impfbereitschaft in Österreich und Deutsch- land	66
6.9	Bedingte Wahrscheinlichkeiten: SARS-CoV-2 Antigen Schnelltest	68
6.10	Baumdiagramme und bedingte Wahrscheinlichkeiten: SARS-CoV- 2 Antigen Schnelltest	71
6.11	Differentialgleichungen: Der Beginn einer Epidemie im SIR-Modell	74

7	Schluss	77
7.1	Persönliches Fazit	77
7.2	Schlusswort	78

Kapitel 1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Fachdidaktische Diskussionen im Bereich der Schulmathematik thematisieren immer wieder die soziokulturelle Bedeutung der Mathematik: Mathematik als Hilfsmittel im Alltag und in den Naturwissenschaften aber auch die Ausbildung mündiger Bürger:innen mithilfe von Mathematikunterricht. Jener Teilbereich, der dies leisten kann, wird auch als angewandte Mathematik bezeichnet [1]. In diesem Teilbereich spielt das mathematische Modellieren eine große Rolle. Die Kompetenz des mathematischen Modellierens berücksichtigt die Ausbildung der Schüler:innen zu demokratischen Entscheidungsträger:innen [2].

Der Ausbruch der SARS-CoV-2-Pandemie zu Beginn des Jahres 2020 rückte die mathematische Epidemiologie sowohl in den wissenschaftlichen als auch in den gesellschaftlichen Fokus. Die Aufgabe der mathematischen Epidemiologie besteht unter anderem darin, mathematische Modelle zu entwickeln, um Krankheitsausbrüche zu identifizieren. Darüber hinaus sollen Vorhersagen über den epidemischen Verlauf getroffen, sowie Maßnahmen zur Eindämmung analysiert werden [1]. Im Zuge dessen tauchten viele mathematische und epidemiologische Fachbegriffe in sämtlichen Medien und Nachrichten auf. Daher steckt in der SARS-CoV-2-Thematik ein großes Potenzial, um der soziokulturellen Bedeutung des Mathematikunterrichts gerecht zu werden. Das Aufgreifen der SARS-CoV-2-Pandemie im Mathematikunterricht ermöglicht es, einen Bezug zur angewandten Mathematik mit gesellschaftlicher Relevanz herzustellen. Dabei kann einerseits die mathematische Modellierung und andererseits die Ausbildung mündiger Bürger:innen gezielt gefördert werden. Darüber hinaus kann die Herstellung von alltagsbezogenen Verbindungen im Mathematikunterricht zu einer größeren Motivation bei den Lernenden führen.

Ziel dieser Arbeit ist es, aufzuzeigen, wie die aktuelle Thematik der SARS-CoV-2-Pandemie im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II lehrplanbezogen aufgegriffen werden kann. Dafür werden im Rahmen dieser Arbeit Aufgabenstellungen entwickelt, die im alltäglichen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II praxisnah einsetzbar sind. Dafür müssen die Aufgabenstellungen ein realistisches und für die Lernenden schaffbares Anforderungsniveau haben. Denn viele Modellierungsaufgaben aus der angewandten Mathematik sind für Schüler:innen oftmals zu schwierig und umfangreich in der Bearbeitung. Ein weiterer wichtiger Punkt für die Praxistauglichkeit ist auch der zeitliche Aspekt. Viele offen gehaltene Modellierungsaufgaben sind im Unterricht sehr zeitintensiv und eignen sich nur im Rahmen eines längerfristigen Projektunterrichts.

Um die grundlegende Idee dieser Masterarbeit zu motivieren, wurde am 26.11.2021 ein persönliches Interview mit dem Mathematiker und Simulationsforscher Dr. Popper geführt. Anhand eines von mir erstellten Interviewleitfadens wurde der Mathematiker unter anderem zu folgenden Themen befragt:

- Modellierung der SARS-CoV-2-Pandemie
- Bisherige persönliche Erfahrungen in der Kommunikation zwischen Expert:innen und Politiker:innen
- Spezielle Anforderungen an die Schulmathematik

Im Zuge dieses Interviews gab Dr. Popper an, dass ihm aus persönlicher Erfahrung mit seinen Kindern die zeitliche Limitation im Schulunterricht sehr bewusst ist. Daher liege der Fokus der Schulmathematik auf der Vermittlung von Grundlagen und das sei auch in jedem Fall notwendig. Gleichzeitig ist er aber auch überzeugt, „dass das Interesse für Mathematik höher wäre, wenn man die Zeit hätte, spannende Dinge zu erzählen, beispielsweise wie dynamische Prozesse funktionieren, z.B. epidemiologische Prozesse“ (Popper, Niki, persönliches Interview, Wien, 26.11.2021). Für ihn wäre es wichtig, dass man bei Kindern vor allem die Kompetenz Daten zu interpretieren und zu lesen, fördert. Möglich wäre das allerdings nicht nur in Mathematik, sondern auch in anderen Schulfächern, wie etwa Geografie, Biologie oder Geschichte. Dr. Popper betont allerdings, dass das ein Wunschdenken ist, da ihm die zeitlichen Ressourcen im Unterricht sehr bewusst sind. Um den aktuellen Corona-Diskussionen in den Medien folgen zu können, wäre es für Absolvent:innen einer allgemeinbildenden höheren Schule außerdem wichtig, Begriffe der Systemdynamik und der Statistik zu kennen (vgl. Popper, Niki, persönliches Interview, Wien, 26.11.2021).

Aus diesem Grund wurden im Rahmen dieser Masterarbeit eigene Aufgabenstellungen entwickelt, die Aspekte der SARS-CoV-2-Pandemie aufgreifen und dabei Begriffe der Systemdynamik und Statistik beinhalten¹. Aufgrund der zeitlichen Ressourcen im Schulunterricht wurden die Aufgabenstellungen so konzipiert, dass sie jeweils nur einen Teilaspekt des umfangreichen Modellierungskreislaufs abdecken. Des Weiteren wurden die Aufgaben so entwickelt, dass sie sowohl dem Lehrplan als auch dem Grundkompetenzkatalog für die standardisierte Reifeprüfung passgenau zugeordnet werden können. Dadurch können lehrplanrelevante Inhalte und mathematische Kompetenzen anhand ebendieser Aufgaben gelernt und gefördert werden, während gleichzeitig der Lehrplan erfüllt wird und maturarelevante Kompetenzen trainiert werden. Somit erlaubt diese Zuordnung eine zielgerichtete Einbettung der Aufgaben in den Mathematikunterricht der Sekundarstufe II einer allgemeinbildenden höheren Schule.

¹Aufgrund der Dynamik und des Andauerns der Pandemie muss hervorgehoben werden, dass sich diese Arbeit auf aktuelle Forschungsergebnisse und Daten vom Zeitraum 02/2019 bis 05/2021 bezieht.

1.2 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden zuerst für diese Arbeit relevante, mathematische Grundlagen der Epidemiologie erläutert. Anschließend werden in Kapitel 3 einige aktuelle Forschungsergebnisse, relevante Begriffe und auch politische Maßnahmen in Bezug auf die SARS-CoV-2-Pandemie präsentiert und zusammengefasst. In Kapitel 4 wird die Relevanz des Modellierungsaspektes für den Mathematikunterricht herausgearbeitet. Außerdem werden verschiedene Teilaspekte des mathematischen Modellierens und unterschiedliche Modellierungskreisläufe erklärt. In Kapitel 5 wird die Schulmathematik der Sekundarstufe II thematisiert: vom österreichischen Lehrplan über den Grundkompetenzkatalog für die standardisierte Reifeprüfung bis hin zu mathematischen Inhalten, die für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Aufgabenstellungen relevant sind. Dem Kapitel 6 sind schließlich die im Zuge dieser Arbeit entwickelten Aufgaben samt Musterlösungen zu entnehmen.

Kapitel 2 Epidemiologische Modelle

2.1 Die Entstehung der mathematischen Epidemiologie

Bereits Aristoteles hatte die Idee eines unsichtbaren, lebenden Erregers, der zur Ausbreitung von Krankheiten führt. 1662 wurde erstmals von John Graunt begonnen, Infektionskrankheiten anhand von gesammelten Daten zu untersuchen. Im 18. Jahrhundert entwickelte Daniel Bernoulli ein erstes mathematisches Modell der Epidemiologie, welches den Einfluss einer möglichen Inokulation auf die Ausbreitung der Pocken abschätzte. Dem folgten etwa Mitte des 19. Jahrhunderts eine Untersuchung der zeitlichen sowie räumlichen Strukturen der Cholerafälle während der Londoner Epidemie durch John Snow, sowie eine ähnliche Vorgehensweise von William Budd in Bezug auf Typhus. William Farr untersuchte ebenfalls etwa zu jener Zeit die Gesetze, die dem Auftreten und Verschwinden von Epidemien zugrunde liegen. Gleichzeitig wurde zum ersten Mal die Theorie von Krankheitskeimen behandelt und schließlich bis ins frühe 20. Jahrhundert weiterentwickelt. Das führte zur bis heute gültigen Ansicht, dass sich viele Krankheiten durch Kontakt mit einem Virus oder Bakterium ausbreiten.

Die ersten Beiträge zur modernen mathematischen Epidemiologie entstanden zwischen 1873 und 1894 von P.D. En'ko, gefolgt von Ross, Hamer, McKendrick und Kermack zu Beginn des 20. Jahrhunderts. W.H. Hamer argumentierte schon damals, dass die Ausbreitung einer Infektion von der Anzahl der anfälligen bzw. empfänglichen Individuen sowie der Anzahl der infektiösen Individuen abhängt. Sir R. A. Ross führte im Rahmen seiner Untersuchungen der Malaria-Krankheit erstmals die Reproduktionszahl ein, welche bis heute eine zentrale Kennzahl von Epidemien darstellt [3]. Kermack und McKendrick lieferten in den Jahren 1927 bis 1933 erste grundlegende Modelle zur mathematischen Beschreibung von übertragbaren Krankheiten [4].

Mehrere Krankheitsausbrüche zu Beginn des 21. Jahrhunderts, wie z.B. die SARS-Epidemie von 2002, die H5N1 Influenza-Epidemie 2005, die H1N1 Influenza-Pandemie 2009, sowie der Ebola-Ausbruch 2014 haben schließlich das Interesse und die Bedeutung von epidemiologischen Modellen für die Gesellschaft neu erweckt [3]. Die gesellschaftliche Relevanz des Themas gipfelt aktuell im Ausbruch der SARS-CoV-2-Pandemie, welche 2019 als Krankheit in China begann und schon im März 2020 von der WHO als Pandemie eingestuft wurde, die inzwischen weltweit das gesellschaftliche Leben stark beeinflusst. Durch den globalen Ausbruch dieser Pandemie sind epidemiologische Modelle und deren Relevanz vermehrt in den Fokus der breiten Öffentlichkeit gerückt [5]. Im Zeitraum von weniger als einem Jahr führte die SARS-CoV-2-Pandemie weltweit zu mehr als 33 Millionen Infektionen und forderte mehr als eine Million Todesopfer [6].

2.2 Die Mathematik hinter Epidemien

Um Erreger von Krankheitsausbrüchen zu identifizieren oder auch um Maßnahmen zu planen, welche die Ausbreitung von Krankheiten verhindern, greifen Epidemiolog:innen auf Daten, Beobachtungen, Wissenschaft und Theorie sowie vieles mehr zurück. Das Verständnis von Übertragungsursachen bzw. -modi ist essenziell, um Vorhersagen über die Krankheitsausbreitung treffen zu können. Dabei spielen mathematische Modelle eine entscheidende Rolle und sind ausschlaggebend für die Kontrolle und das Verständnis einer Krankheitsdynamik sowohl auf kurzer als auch langer Zeitskala. Ein wichtiges Ziel solcher mathematischen Modelle ist es, Richtlinien-Empfehlungen zum Umgang und Management der Epidemie auszusprechen. Dafür müssen die Modelle ausreichend detailliert sein, um eine akkurate Beschreibung der Gesundheitssituation zu liefern. Dabei ist aber auch zu betonen, dass Mathematiker:innen vor allem ein breites und fundiertes Allgemeinverständnis der Epidemie zum Ziel haben, wohingegen gerade Expert:innen des öffentlichen Gesundheitswesens praktische Ziele verfolgen, wie etwa die oben erwähnten Handlungsempfehlungen und Richtlinien zum Management der Epidemie.

Um nun ein Modell, welches die Ausbreitung einer Krankheit beschreibt, zu erhalten, müssen Annahmen über den Übertragungsmodus getroffen werden. Aktuell geht man davon aus, dass sich viele Krankheiten durch den Kontakt mit einem Virus oder Bakterium verbreiten. Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts hat W. H. Hamer behauptet, dass die Ausbreitung einer Krankheit auch von der Anzahl der gefährdeten bzw. anfälligen Individuen sowie der Anzahl der infektiösen Individuen abhängt, und formulierte als Folge davon ein Massenwirkungsgesetz für die Rate der Neuinfektionen. Dieser Ansatz war grundlegend für die Formulierung und Entwicklung von sogenannten Klassen-Modellen (engl. compartment models), im Rahmen derer die Individuen einer Population in verschiedene Klassen eingeteilt werden (zum Beispiel *infektiös* im Gegensatz zu *gefährdet/anfällig*) [3].

2.3 Klassen-Modelle

Die ersten Klassen-Modelle gehen unter anderem auf Kermack und McKendrick zurück und wurden schließlich weiterentwickelt sowie neu formuliert, um die Epidemie-Ausbrüche des anfänglichen 21. Jahrhunderts zu beschreiben. In Klassen-Modellen wird die Population unterteilt und einzelne Individuen werden zu Klassen zusammengefasst. Dabei werden Annahmen über die Zeitraten für den Übergang von einer Klasse in die andere getroffen [3]. Die Einteilung der Individuen in die jeweiligen Klassen erfolgt nach ihren Krankheitsstadien. Je nachdem welches Klassen-Modell betrachtet wird, gibt es unterschiedliche Klassen. Folgen-

de Klasseneinteilungen können dabei im Rahmen der Modellierung beispielsweise herangezogen werden:

- a) S (engl. susceptible) bezeichnet all jene Individuen, die nicht von der Krankheit betroffen sind aber potentiell gefährdet bzw. anfällig sind.
- b) E (engl. exposed) besteht aus denjenigen Individuen, die schon mit der Krankheit angesteckt sind, aber noch nicht infektiös auf Gesunde wirken (je nach Dauer dieser Zeitspanne spielt diese Klasse nicht für alle Krankheiten eine Rolle).
- c) I (engl. infectious) bezeichnet diejenigen Individuen, die die Krankheit verbreiten und wird im deutschen oft mit *infektiös* benannt.
- d) R (engl. removed/recovered) beinhaltet all jene Individuen, welche entweder wieder genesen sind und nun Immunverhalten zeigen, oder aber verstorben sind.

Je nach Krankheit müssen verschiedene Klassen im Modellierungsprozess zugelassen werden und auch unterschiedliche Übergänge zwischen den Klassen ermöglicht werden. Ist zum Beispiel die Zeitspanne, in der sich ein Individuum in der E-Klasse befindet, vernachlässigbar klein, so kann man zum Modellieren der Krankheit ein SIR-Modell verwenden. Das bedeutet, dass Individuen aus der S-Klasse in die I-Klasse übergehen können und anschließend dann in die R-Klasse überlaufen. Bei einem SIS-Modell können Individuen aus der S-Klasse ebenfalls in die I-Klasse überlaufen, genesen dann allerdings ohne Immunität gegenüber einer Neuinfektion und gehen somit wieder in die S-Klasse über. Solche Modelle eignen sich daher zur mathematischen Beschreibung von all jenen Epidemien, bei denen die Krankheit weder tödlich verläuft, noch eine Immunisierung stattfindet. [7] Um weitere Charakteristika der jeweiligen Infektionskrankheit im epidemiologischen Modell einzubeziehen, kann die Population in weitere Klassen unterteilt werden.

Im Rahmen des SEIR-Modells wird das SIR-Modell etwa um die E-Klasse erweitert. Diese Klasse beinhaltet jene Individuen, die schon mit der Krankheit infiziert sind, aber noch nicht infektiös auf anfällige Individuen wirken. An der Heiden und Buchholz [8] etwa modellieren Szenarien der SARS-CoV-2 Epidemie in Deutschland 2020 mit Hilfe eines angepassten SEIR-Modells.

Im SIRD-Modell beispielsweise werden all jene Individuen, welche genesen und immunisiert sind in der R-Klasse und all jene, welche an der Krankheit verstorben sind in der D-Klasse (*engl. Dead Individuals*) zusammengefasst. Im SIRD-Modell wird somit jedes Individuum nur einmal vom Krankheitserreger infiziert. Danach ist das Individuum entweder immunisiert oder verstorben [9].

Je nach Eigenschaften und Charakteristika der Krankheit stehen somit verschiedene Klassen-Modelle zur Verfügung.

2.3.1 SIR-Modell

Bereits 1927 haben erstmals Kermack und McKendrick [4] die Gleichungen des SIR-Modells aufgestellt, welches aktuell von mehreren Forschungsgruppen herangezogen wird, um die SARS-CoV-2-Pandemie zu modellieren [10, 11].

Fragen, die mit Hilfe eines SIR-Modells beantwortet werden können, sind etwa die folgenden:

- a) Welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit es zu einer Ausbreitung der Krankheit kommt?
- b) Wie groß ist die Maximalanzahl an erkrankten Individuen zu einem bestimmten Zeitpunkt? Wodurch wird diese Anzahl bestimmt und wann tritt sie auf?
- c) Wie groß wird das Gesamtausmaß der Krankheit sein? (D.h.: wie viele Individuen der Gesamtpopulation werden betroffen sein?)

Abbildung 1 zeigt, wie schon in Kapitel 2.3 erwähnt, die für das SIR-Modell relevanten Klassen und Übergänge. Gefährdete Individuen gehen im Falle einer Ansteckung in die Klasse der infektiösen Individuen über. Nach der Genesung mit Immunität (oder aber dem Tod) findet der Übergang in die Klasse der entfernten Individuen statt.

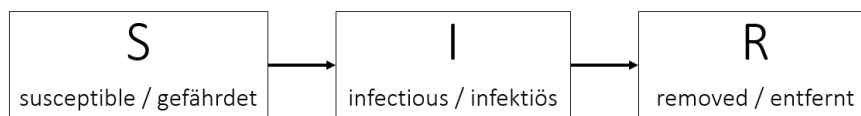


Abbildung 1: Die Klassen S, I und R des SIR-Modells sowie die möglichen Übergänge zwischen den Klassen.

Für das SIR-Modell wird angenommen, dass sich die Klassen S, I und R in einer homogenen Population mit konstanter Größe N befinden. Geburten und Todesfälle (ausgenommen Todesfälle im Sinne der R-Klasse) spielen für den betrachteten Zeitraum keine Rolle. Aufgrund der zeitlichen Abhängigkeit des Krankheitsverlaufs werden die Anzahlen der Individuen in den jeweiligen Klassen mit $S(t)$, $I(t)$ sowie $R(t)$ bezeichnet. Es gilt daher:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (1)$$

Des Weiteren wird angenommen, dass pro Zeiteinheit ein konstanter Anteil an Individuen die I-Klasse verlässt und in die R-Klasse übergeht. Dies geschieht für ein Individuum mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit, unabhängig davon, wie lange das Individuum schon in der I-Klasse verweilt. Darüber hinaus wird die

Annahme getroffen, dass zu Beginn des Krankheitsausbruchs eine kleine Anzahl $I(0) = I_0$ von Infizierten in die Gesamtpopulation eingebracht wird. Da es zu Beginn des Ausbruchs keine Individuen in der R-Klasse gibt, gilt folgende Anfangsbedingung: $R(0) = 0$. Für die S-Klasse gilt jedoch $S(0) = S_0$, da von Beginn an Individuen potenziell gefährdet sind. Es gilt daher:

$$S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 = N . \quad (2)$$

Beim SIR-Modell wird der Ansatz gewählt, dass sich die Anzahl der Individuen in der S-Klasse pro Zeiteinheit proportional zur Anzahl der infizierten und gefährdeten Individuen ändert. Außerdem nimmt als Folge der Ansteckung die Anzahl $S(t)$ der Gefährdeten mit der Zeit ab. Es gilt daher:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (\beta > 0) , \quad (3)$$

mit der Proportionalitätskonstante (β) .

Die einzelnen Individuen verlassen demnach als Folge der Ansteckung die S-Klasse und gehen in die I-Klasse über. Des Weiteren können Individuen aufgrund einer Gesundung (oder eines Todesfalls) die I-Klasse aber auch wieder verlassen. Daher wird für die zeitliche Änderung der Anzahl der Infektiösen $I(t)$ folgender Ansatz getroffen:

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \quad (\gamma > 0) . \quad (4)$$

Der Parameter γ kann dabei als Gesundungsrate interpretiert werden.

Die Anzahl der Individuen in der R-Klasse ändert sich nur dann, wenn Individuen die I-Klasse verlassen, daher gilt:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I . \quad (5)$$

Der Kehrwert $\frac{1}{\gamma}$ der Gesundungsrate kann als Maß für die durchschnittliche Krankheitsdauer interpretiert werden [12].

Die Gleichungen (3) - (5) bilden die Differentialgleichungen des SIR-Modells. Ein beispielhafter Verlauf einer Epidemie, der aus den Gleichungen des SIR-Modells resultiert, ist in Abbildung 2 zu sehen.

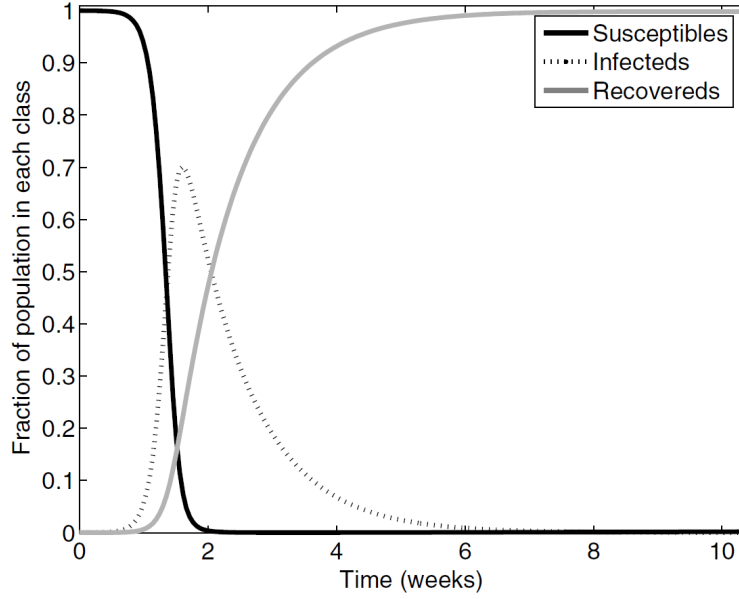


Abbildung 2: Beispielhafte zeitliche Entwicklung der relativen Modellklassen S/N , I/N und R/N im Falle eines einzigen infizierten Individuums und einer vollständig gefährdeten Population zu Beginn einer Epidemie. Parameterwerte: $\beta = 1,428$ pro Tag, $\frac{1}{\gamma} = 7$ Tage und infolge $R_0 = 10$ [13]. (Die Definition von R_0 folgt in Gleichung 18.)

Um das Differentialgleichungssystem des SIR-Modells (3) - (5) zu lösen, wird Gleichung (4) durch Gleichung (3) dividiert und es folgt:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S}. \quad (6)$$

Diese Differentialgleichung kann mittels Trennung der Variablen analytisch gelöst werden:

$$\int dI = \int \left(-1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S} \right) dS. \quad (7)$$

Integration auf beiden Seiten liefert:

$$I(S) = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + c, \quad (8)$$

mit der Integrationskonstante c . Diese kann mit Hilfe von Gleichung (2) und Gleichung (8) wie folgt bestimmt werden:

$$S_0 + I_0 = N \quad (9)$$

$$S_0 + \left(-S_0 + \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 + c \right) = N \quad (10)$$

$$\frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 + c = N \quad (11)$$

$$c = N - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 . \quad (12)$$

Somit erhält man als vollständige Lösung von Gleichung (8):

$$I(S) = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + N - \frac{\gamma}{\beta} \ln S_0 = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(\frac{S}{S_0} \right) . \quad (13)$$

Eine direkte Antwort auf die zu Beginn dieses Kapitels gestellte Frage b) ist bisher noch nicht möglich. Jedoch kann nun untersucht werden, wo das Maximum der Funktion $I(S)$ aus Gleichung (13) eintritt. Dafür wird die erste Ableitung der Funktion (Gleichung (6)) Null gesetzt:

$$-1 + \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S} = 0 \quad (14)$$

und nach S aufgelöst:

$$S = \frac{\gamma}{\beta} . \quad (15)$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung wird überprüft, ob an der Stelle $S = \frac{\gamma}{\beta}$ tatsächlich ein Maximum vorliegt:

$$\frac{d^2 I}{dS^2} = -\frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{S^2} \quad (16)$$

$$\left. \frac{d^2 I}{dS^2} \right|_{S=\frac{\gamma}{\beta}} = -\frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2} = -\frac{\gamma}{\beta} < 0 . \quad (17)$$

Die Funktion $I(S)$ besitzt daher an der Stelle $S = \frac{\gamma}{\beta}$ ein Maximum.

Dieses Verhältnis von Gesundungsrate γ und Ansteckungsrate β führt zur Definition der Basisreproduktionszahl R_0 :

$$S = \frac{\gamma}{\beta} =: \frac{1}{R_0} . \quad (18)$$

Mittels Division von Gleichung (3) durch Gleichung (5) kann S in Abhängigkeit von R ausgedrückt werden:

$$\frac{dS}{dR} = \frac{-\beta SI}{\gamma I} = -R_0 S . \quad (19)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen analytisch gelöst werden:

$$\int \frac{1}{S} dS = -R_0 \int dR \quad (20)$$

$$\ln S = -R_0 \cdot R + c \quad (21)$$

$$S(R) = e^{-R_0 R} \cdot \tilde{c} . \quad (22)$$

Die Integrationskonstante $\tilde{c}$ wird mit Hilfe der Anfangsbedingungen $R(0) = 0$ und $S(0) = S_0$ ermittelt:

$$S(0) = e^{-R_0 R(0)} \cdot \tilde{c} \stackrel{!}{=} S_0 \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{c} = S_0 . \quad (24)$$

Daher folgt für $S(R)$ folgender Ausdruck [7]:

$$S(R) = S_0 \cdot e^{-R_0 R} . \quad (25)$$

Mittels Gleichungen (1) und (25) kann (5) folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma(N - R - S) = \gamma(N - R - S_0 \cdot e^{-R_0 R}) . \quad (26)$$

Bei moderaten epidemischen Verläufen ist $R_0 \cdot R < 1$ und Gleichung (26) kann durch Taylorentwicklung des exponentiellen Terms bis zur zweiten Ordnung vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \gamma \left[N - R - S_0 \cdot \left(1 - R_0 R + \frac{R_0^2 R^2}{2} \right) \right] = \\ &= \gamma \left[N - S_0 + (S_0 R_0 - 1) \cdot R - \frac{S_0 R_0^2}{2} R^2 \right] . \end{aligned} \quad (27)$$

Diese Differentialgleichung kann gelöst werden, indem die rechte Seite faktorisiert wird. Integration und algebraische Umformungen liefern schließlich:

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{\beta^2}{S_0} \left[(S_0 R_0 - 1) + a \cdot \tanh \left(\frac{a\gamma t}{2} - \Phi \right) \right], \text{ mit} \\ a &= \left[(S_0 R_0 - 1)^2 + 2S_0 R_0^2 (N - S_0) \right]^{\frac{1}{2}} \text{ und} \\ \Phi &= \frac{1}{a} \tanh^{-1} (R_0 S_0 - 1). \end{aligned} \quad (28)$$

Somit kann man im Fall von moderaten Epidemien $\frac{dR}{dt}$ folgendermaßen approximieren:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma a^2}{2S_0 R_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\gamma a t}{2} - \Phi \right) = p_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{p_2 t}{2} - p_3 \right), \quad (29)$$

wobei die sech-Funktion wie folgt definiert ist:

$$\operatorname{sech}(x) := \frac{1}{\cosh(x)}. \quad (30)$$

Aufgrund von Gleichung (5) kann nun eine Approximation für $I(t)$ angegeben werden:

$$\boxed{I(t) = \frac{a^2}{2S_0 R_0} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\gamma a t}{2} - \Phi \right) = p_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{p_2 t}{2} - p_3 \right).} \quad (31)$$

mit den drei unbekannten Parametern p_1 , p_2 und p_3 . Diese folgen aus der Ansatzfunktion $I(t)$ (31) mittels einer Parameterschätzung anhand von realen Gesundheitsdaten [12]. Abbildung 3 zeigt den epidemischen Verlauf der approximierten Lösung $I(t)$ für die Pest in Bombay von 1905 bis 1906.

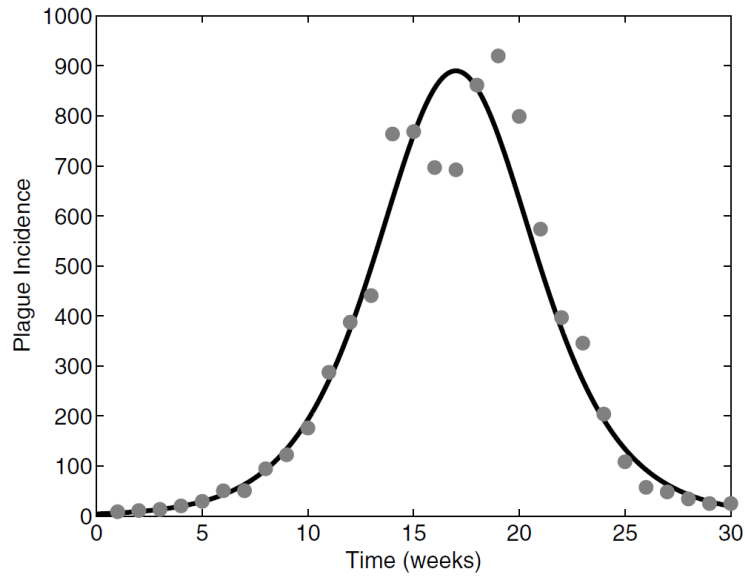


Abbildung 3: Epidemischer Verlauf der Pest in Bombay vom 17. Dezember 1905 bis zum 21. Juli 1906. Die Kreise stellen die wöchentlichen Todesfälle dar. Die durchgezogene Linie ist die approximierte Lösung des SIR-Modells, gegeben durch: $I(t) = 890 \operatorname{sech}^2(0, 2t - 3, 4)$ [13].

2.3.1.1 Der Beginn einer Epidemie

Um den Beginn einer Epidemie zu modellieren, wird im folgenden zur Betrachtung von relativen Häufigkeiten übergegangen. Es gilt daher: $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. Zu Beginn der Epidemie kann vereinfacht angenommen werden, dass $S \approx 1$ gilt. Somit vereinfacht sich Gleichung (4) zu:

$$\frac{dI}{dt} \approx (\beta - \gamma)I. \quad (32)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden und liefert folgende Näherung:

$$I(t) \approx e^{(\beta - \gamma)t} \cdot c, \quad (33)$$

mit der Integrationskonstante c . Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ liefert: $c = I_0$. Somit kann die Zahl der Infizierten zu Beginn einer Epidemie exponentiell approximiert werden [11]:

$$I(t) \approx I_0 e^{(\beta - \gamma)t}. \quad (34)$$

2.3.1.2 Die Basisreproduktionszahl R_0

Diese wurde schon in Gleichung (18) definiert und kann als die durchschnittliche Anzahl derjenigen Individuen, die von einem infizierten Individuum angesteckt werden, verstanden werden². R_0 ist eine wichtige Kenngröße zur Quantifizierung von Krankheitsübertragungen und ist maßgeblich für das dynamische Verhalten des Systems:

1. Die Epidemie-Schwelle wird erreicht, wenn $S_0 > \frac{1}{R_0}$, mit $0 < S(0) < 1$, gilt. In diesem Fall kommt es zur epidemischen Ausbreitung der Krankheit, unabhängig von der Anfangszahl an infektiösen Individuen I_0 .
2. Das Ausmaß der Epidemie hängt nicht von der Anfangszahl an infektiösen Individuen I_0 ab, sondern nur von den anfangs gefährdeten Individuen S_0 und von der Basisreproduktionszahl R_0 [14].

Erst wenn $R_0 > 1$ gilt, kommt es zum Ausbruch einer Epidemie. Typische Werte für die Basisreproduktionszahl R_0 für einige Infektionskrankheiten finden sich in Tabelle 1 [15].

Infektionskrankheit	Basisreproduktionszahl R_0
Keuchhusten	17.5
Masern	15.6
Mumps	11.5
Röteln	7.2
Diphtherie	6.1

Tabelle 1: Typische Werte für die Basisreproduktionszahl R_0 einiger Infektionskrankheiten [15].

2.4 Statistiken einer Epidemie

2.4.1 Herdenimmunität

Herdenimmunität entsteht, wenn ein großer Anteil der Population entweder durch eine Infektion oder eine Impfung bereits immun gegen den Krankheitserreger ist. Sie ist somit eine Form des indirekten Schutzes für die noch gefährdeten Individuen in der Population [9]. Wie schon beschrieben, kommt es zum Ausbruch der Epidemie sobald $S_0 > \frac{1}{R_0}$. Infolgedessen kommt es nicht zum Ausbruch der

²Dies gilt unter der Voraussetzung, dass die Gesamtpopulation vollständig gefährdet ist, es also vor einer Infektion keine Immunität gibt.

Epidemie, wenn $S_0 \leq \frac{1}{R_0}$. Unter der Annahme, dass zu Beginn eine Person infiziert ist ($I_0 = 1$ und daher $S_0 \approx N$) und mit relativen Häufigkeiten ausgedrückt, führt das zu: $1 \leq \frac{1}{R_0}$.

Der Anteil der gefährdeten Individuen, der geimpft wird, wird im folgenden mit ρ bezeichnet. Demnach ist ρ der Anteil an geimpften Individuen, der aus der S-Klasse in die R-Klasse übergeht. Somit beträgt der Anteil an gefährdeten Individuen in der S-Klasse nur mehr $(1 - \rho)$. Um eine Epidemie zu verhindern, muss daher gelten:

$$(1 - \rho) \leq \frac{1}{R_0} . \quad (35)$$

Umformen auf ρ führt zu

$$\rho \geq 1 - \frac{1}{R_0} . \quad (36)$$

Welcher Anteil der Population geimpft werden muss, damit ein Herdeneffekt auftritt und die Epidemie nicht weiter ausbricht, kann somit mithilfe von R_0 bestimmt werden.

2.4.2 Genauigkeit von Tests

Mit Hilfe eines diagnostischen Tests soll zwischen Erkrankten und Nicht-Erkrankten unterschieden werden [16]. Der Begriff der Validität eines Tests beschreibt eben diese Fähigkeit zur Unterscheidung. Die Validität setzt sich aus der Sensitivität und der Spezifität des Tests zusammen:

- Die Sensitivität gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer erkrankten Person ein positives Ergebnis liefert. Im Sinne von bedingten Wahrscheinlichkeiten bedeutet das: $P(\text{Test positiv} \mid \text{Person erkrankt})$.
- Die Spezifität gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer nicht-erkrankten Person ein negatives Ergebnis liefert. Im Sinne von bedingten Wahrscheinlichkeiten bedeutet das: $P(\text{Test negativ} \mid \text{Person nicht-erkrankt})$.

In der praktischen Anwendung von diagnostischen Tests kann es zu falschen Ergebnissen kommen. Dabei gibt es zwei mögliche falsche Testergebnisse:

- i) Der Test ist falsch-negativ, d.h. eine erkrankte Person erhält ein negatives Testergebnis: $P(\text{Test negativ} \mid \text{Person erkrankt})$.

- ii) Der Test ist falsch-positiv, d.h. eine gesunde Person erhält ein positives Testergebnis: $P(\text{Test positiv} \mid \text{Person nicht-erkrankt})$.

Ein Maß für die Güte eines diagnostischen Tests ist der sogenannte Likelihood-Quotient. Der positive Likelihood-Quotient LH_+ ist definiert als:

$$LH_+ := \frac{P(\text{Test positiv} \mid \text{Person erkrankt})}{P(\text{Test positiv} \mid \text{Person nicht-erkrankt})} = \frac{\text{Sensitivität}}{1 - \text{Spezifität}} \quad (37)$$

Der negative Likelihood-Quotient LH_- ist definiert als:

$$LH_- := \frac{P(\text{Test negativ} \mid \text{Person erkrankt})}{P(\text{Test negativ} \mid \text{Person nicht-erkrankt})} = \frac{1 - \text{Sensitivität}}{\text{Spezifität}} \quad (38)$$

Nimmt einer der beiden Quotienten einen Wert nahe 1 an, so ist der Test unbrauchbar. Als Orientierung für die Praxistauglichkeit eines Tests (im Sinne der Güte) gilt [16]:

$$LH_+ > 3 \wedge LH_- < \frac{1}{3} . \quad (39)$$

Kapitel 3 Die SARS-CoV-2-Pandemie

Im Folgenden werden die in Kapitel 2 vorgestellten mathematischen Modelle und Statistiken, die relevant sind um eine Epidemie zu charakterisieren, konkret auf die SARS-CoV-2-Pandemie angewandt.

3.1 Ein SIR-Modell für Österreich

Die in Kapitel 2.3.1 aus dem SIR-Modell erhaltene Ansatzfunktion $I(t)$ (Gleichung (31)) wird an die Corona-Daten von Österreich aus dem Zeitraum vom 26.02.2020 bis zum 24.04.2021 angepasst. Damit soll verdeutlicht werden, dass je nach Modellierungszweck selbst auch das einfachste Klassen-Modell den Epidemieverlauf womöglich genügend gut approximiert und beschreibt. In Abbildung (4) sind sowohl die realen Gesundheitsdaten für die Anzahl der Neuinfizierten $I(t)$ als auch die beiden Ansatzfunktionen $I_1(t)$ und $I_2(t)$ für den ersten und zweiten epidemischen Hochpunkt Österreichs zu sehen. Dabei bezeichnet $t = 0$ den 26. Februar 2020 und $t = 450$ den 24. April 2021.

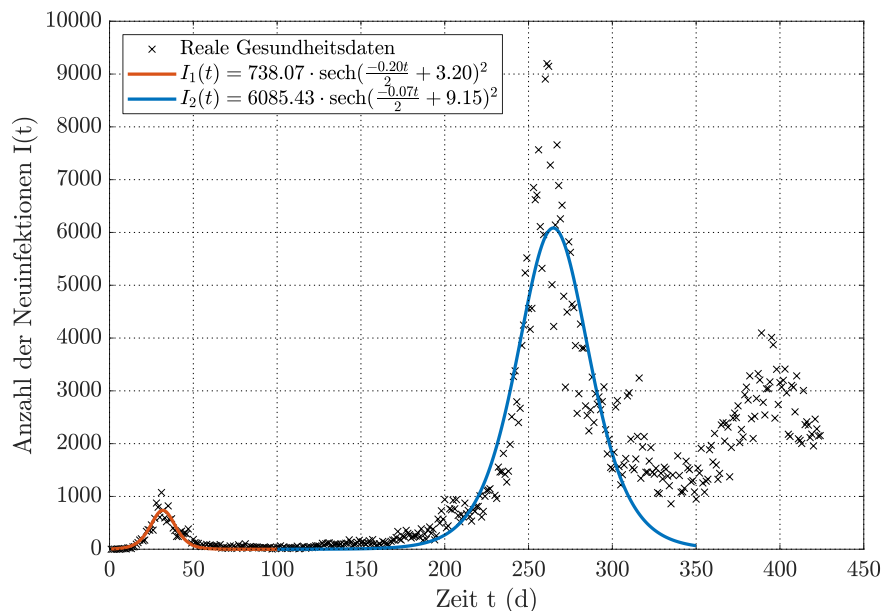


Abbildung 4: Reale Corona-Daten von Österreich im Zeitraum vom 26.02.2020 bis zum 24.04.2021. Mit Hilfe der im Kapitel 2.3.1 im Rahmen des SIR-Modells hergeleiteten Näherungsfunktion für $I(t)$ wurden die ersten beiden epidemischen Peaks jeweils mit $I_1(t)$ bzw. $I_2(t)$ gefittet.

Betrachtet man die Gesundheitsdaten, so ist zu erkennen, dass die Zahl der Neuinfektionen nach dem ersten Hochpunkt wieder nahe an Null gesunken ist, bis es schließlich zum Beginn der zweiten Infektionswelle kam. Nach diesem zweiten Ausbruch konnte die Zahl der Neuinfektionen kaum mehr auf unter 1000 tägliche Neuinfektionen gedrückt werden und es kam zur Ausbildung eines dritten Hochpunkts.³

In Tabelle 2 sind für beide epidemischen Hochpunkte der jeweilige Approximationszeitraum sowie die aus der Parameterschätzung erhaltenen Werte für p_1 , p_2 und p_3 gelistet.

	Approximationszeitraum	p_1	p_2	p_3
Peak 1	26.02.2020-05.06.2020	738.07	-0.20	-3.20
Peak 2	06.06.2020-10.02.2021	6085.43	-0.07	-9.15

Tabelle 2: Jeweiliger Zeitraum, in dem die österreichischen Corona-Daten mit Hilfe von Gleichung (31) gefittet wurden sowie die erhaltenen Parameterwerte für p_1 , p_2 und p_3 .

3.2 Basisreproduktionszahl für SARS-CoV-2

D'Arienzo und Coniglio [17] erhalten anhand von Daten aus dem Zeitraum vom 25. Februar bis zum 12. März 2020 im Rahmen eines SIR-Modells die folgenden Basisreproduktionszahlen R_0 für acht italienische Städte, welche von der SARS-CoV-2-Pandemie betroffen waren, sowie auch für ganz Italien:

Rahman et al. [18] erhalten im Rahmen eines SIR-Modells für Länder des Nahen Ostens anhand von Daten der WHO eine durchschnittliche Basisreproduktionszahl von $R_0 = 3.76$ für SARS-CoV-2. Zum Vergleich nennen etwa Biggerstaff M. et. al. [19] eine Basisreproduktionszahl von 1.19-1.37 für die saisonale Influenza.

3.3 Herdenimmunität bei SARS-CoV-2

Unter Verwendung der typischen Werte für R_0 aus Abbildung 5, erhält man für die Herdenimmunität folgendes Intervall:

$$\rho = \left[1 - \frac{1}{2,52} ; 1 - \frac{1}{3,10} \right] \approx [60\%; 68\%] \quad (40)$$

³Hier ist ein Fit allerdings nicht sinnvoll, da der Datenzeitraum nicht ausreichend lang ist.

3.4 Genauigkeit der PCR-Tests zum Nachweis einer SARS-CoV-2 Infektion

City	Population	R_0
Bergamo	122,161	2.52
Lodi	45,872	3.09
Cremona	72,680	2.93
Brescia	198,536	2.61
Piacenza	103,942	2.76
Milano	1,389,834	2.70
Pavia	73,195	2.43
Parma	197,499	2.46
Italy	60,483,973	3.10

Abbildung 5: D’Arienzo und Coniglio nennen folgende R_0 Werte für SARS-CoV-2 in acht italienischen Städten sowie für ganz Italien. Daten aus dem Zeitraum vom 25. Februar bis zum 12. März 2020 wurden mit einem SIR-Modell gefittet [17].

Damit unter der Annahme der Basisreproduktionszahlen aus Abbildung 5 ein Herdeneffekt gegenüber dem Erreger von SARS-CoV-2 auftritt, müssen also in etwa 60% bis 68% der Gesamtpopulation immunisiert sein [9]⁴.

3.4 Genauigkeit der PCR-Tests zum Nachweis einer SARS-CoV-2 Infektion

Die Krankheit COVID-19 kann mittels des Nachweises von SARS-CoV-2-RNA diagnostiziert werden. Dabei können die Erreger-Viren mit Hilfe der Methode der Polymerase-Kettenreaktion (PCR) nachgewiesen werden. Unter der Annahme einer Spezifität von 100% für den diagnostischen PCR-Test nennen Kanji et. al [20] eine falsch-negativ Rate von 9.3% sowie eine Sensitivität von 90.7%⁵. Die falsch-negativ Rate eines PCR-Tests hängt von mehreren Faktoren ab und weist für Rachenabstrich-Proben einen anderen Wert auf als für Nasenabstrich-Proben. Ebenso spielt der Zeitraum der Probenentnahme eine essentielle Rolle. Die Wahrscheinlichkeit für einen positiven PCR-Test eines infizierten Patienten sinkt mit der Anzahl der Tage ab Beginn der Symptome (siehe Abbildung 6) [21].

3.5 Dunkelziffer

Wie groß die Dunkelziffer von COVID-19 Erkrankten tatsächlich ist, ist nicht eindeutig zu beantworten. Da die Zahl der unentdeckten Fälle eine große Rolle

⁴Mittlerweile ist jedoch bekannt, dass dieser Wert zu gering ist.

⁵Im Rahmen dieser Studie wurden 100 001 SARS-CoV-2 PCR-Tests von 95 919 Patienten in Alberta, Kanada, untersucht.

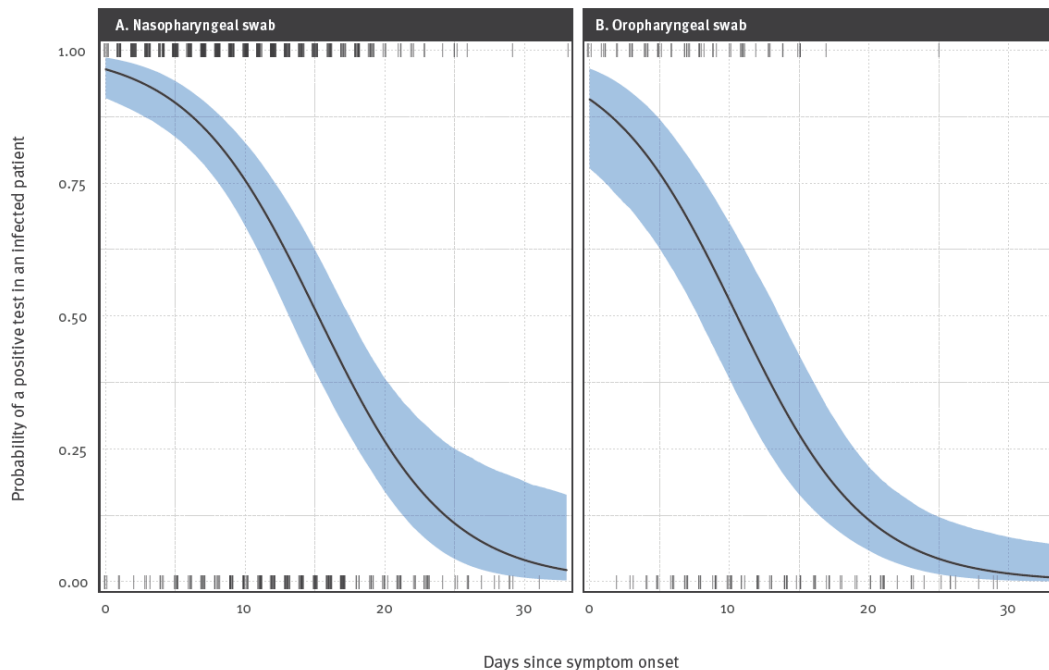


Abbildung 6: Zeitabhängigkeit (ab Symptombeginn) der Wahrscheinlichkeit eines positiven PCR-Tests eines infizierten Patienten unter Verwendung von (A) Nasenabstrichen und (B) Rachenabstrichen ($n = 95$). Der farblich hinterlegte Bereich um die Kurve zeigt das 95%-Konfidenzintervall. Die schwarzen Streifen oben zeigen positive, jene unten negative Tests [21].

für die Ausbreitung der Krankheit spielt, ist die Frage nach der Dunkelziffer von großer Bedeutung. Welcher Wert für die Dunkelziffer angegeben werden kann, hängt einerseits von der Teststrategie aber auch vom Anteil der asymptomatischen Krankheitsverläufe ab. Studien aus Island beispielsweise schätzen Letzteres auf 43% aller positiven Fälle. Um einen Schätzwert für die Dunkelziffer zu erhalten, können Studien mittels PCR-Tests oder Antikörper-Tests durchgeführt werden. Wichtig dabei ist, dass solche Studien zwar einen Schätzwert liefern, aber nur für einen gewissen Zeitraum im Infektionsgeschehen. Das Verhältnis von entdeckten zu unentdeckten Fällen hängt stark vom Zeitpunkt innerhalb des Epidemie-Verlaufs ab. Schätzwerte aus Screening-Studien müssen somit immer im Hinblick auf die jeweilige epidemische Phase interpretiert werden. In Österreich wurden bisher drei verschiedene Prävalenz-Screening Studien durchgeführt, um einen Näherungswert für die Dunkelziffer zu erhalten [22].

Ogris G. und Oberhuber F. [23] erhalten im Rahmen der SORA-Studie einen Anteil von 0.33% an positiv getesteten Personen in der gewichteten Stichprobe, mit einem 95%-Konfidenzintervall von $[0.12\%; 0.77\%]$. Das entspricht einem Anteil von 10200 bis 67400 infizierten Personen in der Gesamtbevölkerung.

Böhning D. et. al. nennen die in Abbildung (7) gelisteten Zahlen an unentdeck-

Institut	Zeitraum	Stichprobengröße	Positive Tests
SORA	01.-06. April 2020	1544	6
Statistik Austria	22.-25. April 2020	1432	1
Statistik Austria	26.-30. Mai 2020	1279	0

Tabelle 3: Bisher in Österreich durchgeführte Screening-Studien zur Schätzung der COVID-19 Dunkelziffer [22].

ten COVID-19 Fällen sowie Fällen insgesamt und geben dafür ebenfalls ein 95%-Konfidenzintervall an, sowie das Verhältnis von Gesamtfällen zu entdeckten Fällen (am 18.04.2020) [24].

Country	Hidden cases	Total cases	95% CI	Total/observed
Italy	211,768	384,201	381,649–386,762	2.23
Germany	178,451	315,890	312,429–319,350	2.30
Spain	232,057	423,783	421,112–426,454	2.21
UK	149,150	257,842	255,482–260,202	2.37
Greece	2,901	5,108	4,718–5,499	2.31
Austria	17,264	29,560	28,412–30,709	2.40

Abbildung 7: Geschätzte unentdeckte COVID-19 Fälle und Fälle insgesamt (mit 95%-Konfidenzintervall) nach Land, sowie das Verhältnis von Gesamtfällen zu entdeckten Fällen (am 18.04.2020) [24].

Für das Verhältnis von Gesamtfällen zu entdeckten Fällen zeigt sich eine überraschende Stabilität um den Wert 2.3. Dieses Verhältnis bedeutet, dass für jeden entdeckten Fall statistisch betrachtet 1.3 Fälle unentdeckt bleiben [24].

3.6 Politische Maßnahmen

Solange keine Virostatika zur Behandlung von COVID-19 oder ein Impfstoff vorliegen, setzen Regierungen weltweit Maßnahmen, die zur Eindämmung der Pandemie führen sollen. Ziel dabei ist es, die Übertragungsrate zu verlangsamen und so weit zu minimieren, dass Gesundheitssysteme (vor allem Intensivstationen) nicht überlastet werden. Mögliche Maßnahmen, die daher von Regierungen gesetzt wurden und werden sind Social-Distancing Maßnahmen, Isolation von einzelnen erkrankten Personen und Quarantänemaßnahmen (für womöglich infizierte Personen, aber auch ganze Städte oder Gebiete). Ersteres kann etwa durch Schließungsmaßnahmen wie beispielsweise Schulschließungen oder durch

Lock-Down Strategien erreicht werden. Mittels contact tracing können außerdem Infektionen zurückverfolgt werden.

3.6.1 Quarantänemaßnahmen und Schulschließungen

Chang S. et. al. [25] modellieren den Effekt von diversen politischen Maßnahmen auf die Ausbreitung der SARS-CoV2-Epidemie in Australien. Dabei werden konkret folgende Maßnahmen untersucht:

- i) Isolation von bestätigten Fällen (case isolation, CI)
- ii) häusliche Quarantäne von Haushalten, die Kontakt zu bestätigten Fällen hatten (home quarantine, HQ)
- iii) Schulschließungen in Kombination mit i) und ii) (school closures, SC)

Dabei wird angenommen, dass sich 50% der Personen an die häusliche Quarantänemaßnahme halten. Die Schulschließungen werden im Modell zu 100% eingehalten. Abbildung 8 zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchung. Eine Kombination aus Isolation von bestätigten Fällen und häuslicher Quarantäne verschiebt den Höhepunkt der Epidemie zeitlich nach hinten und verringert gleichzeitig auch die Ausprägung dieses Hochpunkts. Werden weiters noch Schulschließungen hinzugezogen, so verschiebt sich der epidemiologische Höhepunkt noch weiter nach hinten, die Langzeiteffekte sind jedoch gering. Alle Maßnahmen zeigen deutliche Effekte im Vergleich zu keiner Intervention (no intervention, NI).

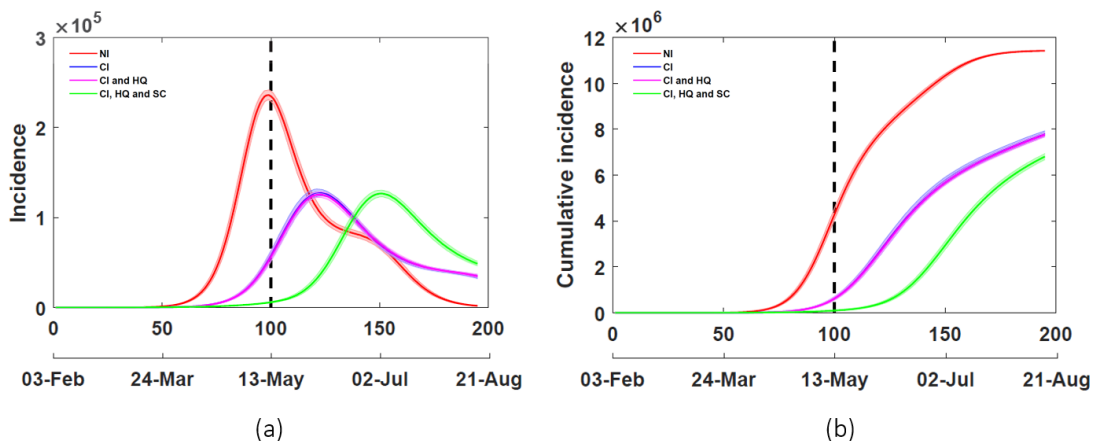
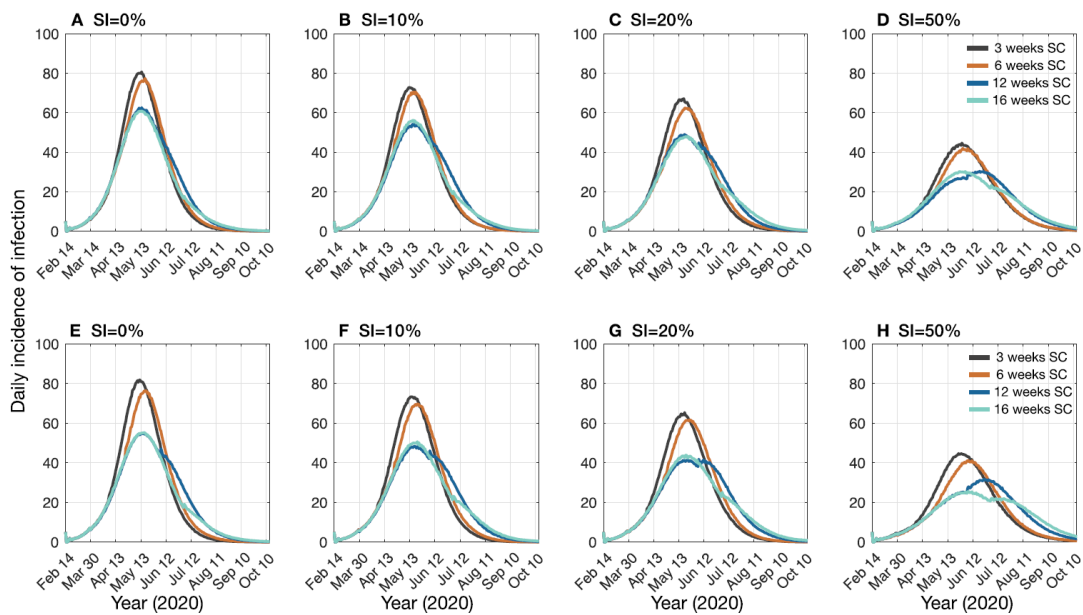


Abbildung 8: Inzidenz (a) sowie kumulierte Inzidenz (b) für Australien im Zeitraum von Anfang Februar bis Mitte August 2020 in Abhängigkeit von verschiedenen Maßnahmen, wie case isolation (CI), home quarantine (HQ) und school closing (SC) im Vergleich zu keiner Intervention (NI) [25].

Abdollahi E et. al. [26] betrachten im Rahmen eines mathematischen Modells ebenfalls die Auswirkungen von Schulschließungen (school closures, SC) auf die COVID-19 Fälle im Jahr 2020 in Ontario, Kanada. Dabei werden Schließungsmaßnahmen über einen Zeitraum von drei Wochen bis hin zu 16 Wochen untersucht. Ebenfalls berücksichtigt wird der Effekt von zusätzlicher Isolation von einzelnen Erkrankten, die Symptome zeigen (self isolation, SI). Die Ergebnisse sind in Abbildung (9) zu sehen. In **A** bis **D** wurde angenommen, dass sich durch die Schulschließungen die Anzahl der Kontakte unter Schulkindern im Alter von fünf bis 19 Jahren um 60% reduzieren, in **E** bis **H** wurde eine Reduktion um 80% zu Grunde gelegt.



Abbildungung 9: Auswirkungen von Schulschließungen (SC) unterschiedlicher Dauer sowie verschiedener Einhaltungquoten von Isolation einzelner Erkrankter (SI) auf die tägliche Inzidenz von COVID-19 Fällen pro 10 000 Einwohner:innen in Ontario, Kanada. In **A** bis **D** führen Schulschließungen zu einer Kontaktreduktion unter Schulkindern um 60%, in **E** bis **H** um 80% [26].

Ohne jegliche Eindämmungsmaßnahmen nennen Abdollahi et. al. eine Erkrankungsrate von 60% in der Gesamtbevölkerung (unter der Annahme einer Basisreproduktionszahl von $R_0 = 2.5$).

Unter der Annahme, dass Schulschließungen die Kontakte unter den Schulkindern um 60% reduzieren, führt eine Verlängerung der Schulschließungen von drei auf 16 Wochen zu einer zeitlichen Verschiebung des epidemiologischen Höhepunkts um eine Woche und einer Reduktion der Höhe des Hochpunkts um 24.4%, sowie der Erkrankungsrate um 8.1%. Weiters prognostiziert diese Maßnahme eine Abnahme der Zahl der Intensivpatient:innen um 4.6%. Wenn sich darüber hinaus

noch 10% aller symptomatisch Erkrankten in Einzelisolation begeben, wird der epidemiologische Höhepunkt durch die 16-wöchige Schulschließung im Vergleich zur dreiwöchigen um zwei Wochen nach hinten verschoben. Abbildung (9) ist auch zu entnehmen, dass die Maßnahme von Schulschließungen ohne Isolation einzelner Erkrankter nur beschränkt Wirkung zeigt. Zu betonen ist auch, dass unter der Voraussetzung von 50%-iger Einzelisolation schon eine Schulschließung von drei Wochen den epidemiologischen Höhepunkt deutlich verringert und auch zeitlich nach hinten verschiebt.

3.6.2 Social Distancing und Lockdown

Chang S. et. al. [25] untersuchen nicht nur den Einfluss von Quarantänemaßnahmen und Schulschließungen auf die COVID-19 Fallzahlen in Australien, sondern auch den Effekt von social distancing (SD). Wenn ein Individuum die social distancing Maßnahmen einhält, werden infolgedessen im Modell alle Arbeitskontakte entfernt und alle weiteren sozialen Kontakte, die nicht aus dem Haushalt stammen, um die Hälfte reduziert. Da sich nicht alle Individuen vollständig an die social distancing Maßnahmen halten werden, zeigt Abbildung 10 den Effekt von social distancing (zusätzlich zur Isolation von bestätigten Fällen, Quarantänemaßnahmen von Kontaktpersonen sowie Reisebeschränkungen) auf die Inzidenz⁶ sowie die kumulierte Inzidenz für unterschiedliche Einhaltungsstufen. Werden die Maßnahmen zu 80% oder mehr eingehalten, kann dadurch die Epidemie während dieser Einhaltungsdauer unter Kontrolle gehalten werden. Im Falle einer 70%-igen Einhaltung ist das bereits nicht mehr der Fall.

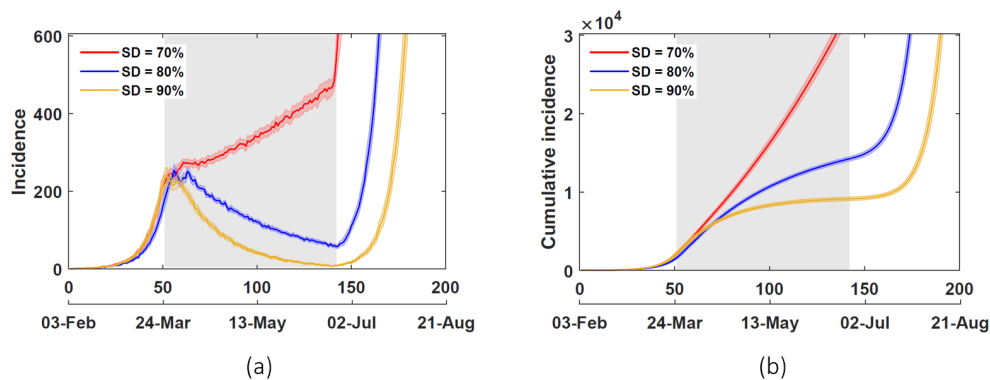


Abbildung 10: Einfluss von social distancing (SD) Maßnahmen (in Kombination mit Isolation von bestätigten Fällen, Quarantänemaßnahmen von Kontaktpersonen sowie Reisebeschränkungen) für verschiedene Einhaltungsstufen (70%, 80%, 90%) jeweils über 13 Wochen hinweg (grau hinterlegt) [25].

⁶Die Inzidenz einer Krankheit beschreibt die Zahl der Neuerkrankungen, die in einem Jahr pro 100.000 Menschen auftreten.

3.6.3 Contact Tracing

Bicher M. et. al. [27] modellieren verschiedene contact tracing Maßnahmen für Österreich. Contact tracing ist eine mögliche Maßnahme, um die COVID-19 Fallzahlen gering zu halten. Dabei können potenziell infizierte Personen erfasst und vorsichtshalber isoliert werden. Geschieht das, bevor die Person tatsächlich infektiös wird, können so Ansteckungsketten unterbrochen und weitere Krankheitsfälle vermieden werden. Der Nachteil dabei ist jedoch die womöglich sehr große Anzahl an Personen, die aus Vorsichtsgründen in Isolation geschickt werden. Das wiederum kann zu wirtschaftlichen Einbußen aber auch zu Auswirkungen auf die individuelle, psychische Gesundheit führen. Bicher et. al. untersuchen daher für Österreich den Effekt von sechs möglichen tracing Varianten:

- i) keine Nachverfolgung von Kontaktpersonen (no tracing)
- ii) Nachverfolgung im Haushalt (household t.)
- iii) Nachverfolgung am Arbeitsplatz (workplace t.)
- iv) Nachverfolgung im Haushalt und am Arbeitsplatz (combined t.)
- v) Nachverfolgung von individuellen Kontaktpersonen: 50% aller Personen nutzen Geräte/Apps zu Nachverfolgung (individual t. 50%)
- vi) Nachverfolgung von individuellen Kontaktpersonen: 75% aller Personen nutzen Geräte/Apps zu Nachverfolgung (individual t. 75%)

Die Nachverfolgung der Kontaktpersonen kann beispielsweise über Tracing-Apps oder Geräte aber auch über Patientenbefragung stattfinden. Abbildung 11 zeigt die Anzahl der (vorsichtshalber) täglich neu unter Quarantäne gestellten Personen in Abhängigkeit von der jeweiligen tracing-Variante für Österreich im Zeitraum von Mitte April bis Mitte Juni 2020. Dabei ist zu sehen, dass diese Anzahl für die Variante *individual t. 75%* am größten ist.

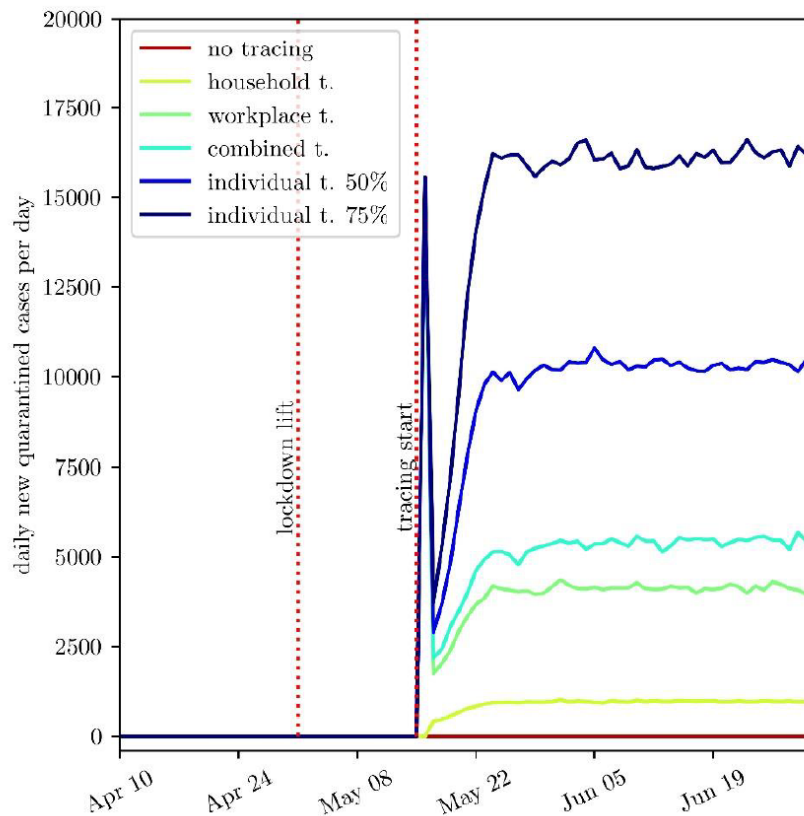


Abbildung 11: Anzahl der (vorsichtshalber) täglich neu in Quarantäne geschickten Personen pro Tag in Abhängigkeit von der jeweiligen tracing-Variante für Österreich im Zeitraum von Mitte April bis Mitte Juni 2020 [27].

Abbildung 12a zeigt, dass jedoch auch die Anzahl der täglichen Neuinfizierten für die Variante *individual t. 75%* am geringsten ist. Weiters ist aus Abbildung 12b zu entnehmen, dass die Anzahl der täglich neu in Quarantäne geschickten Personen für die Variante *individual t. 75%* zwar zu Beginn der tracing-Strategie am größten ist, ab einem gewissen Zeitpunkt jedoch stärker fällt als für jede andere tracing-Variante. Darüber hinaus sinkt außerdem die Anzahl der täglich neu unter Quarantäne gestellten Personen bei dieser Variante unter die Anzahlen der jeweiligen anderen Varianten.

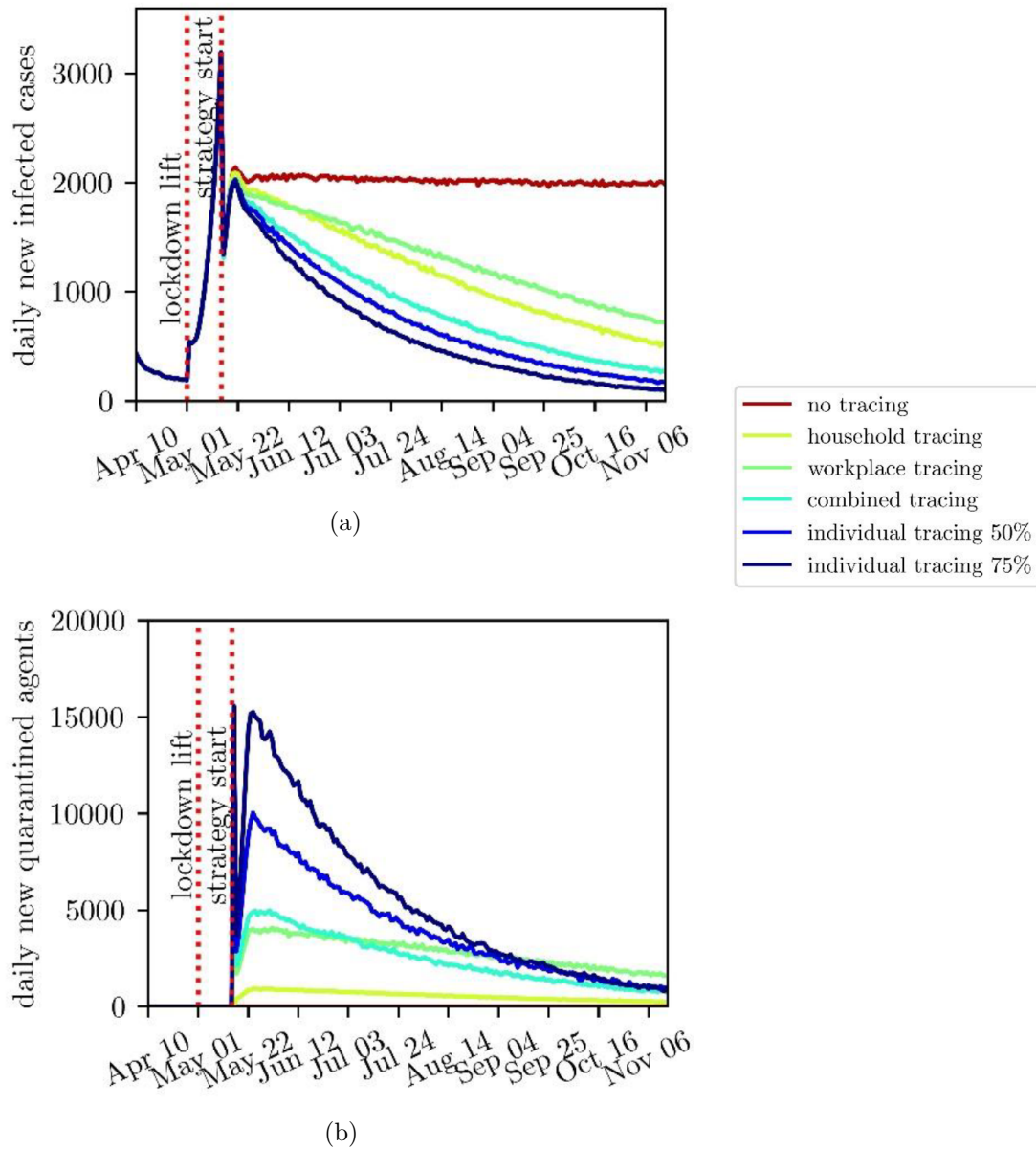


Abbildung 12: (a) Anzahl der täglich Neuinfizierten in Abhängigkeit von der jeweiligen tracing Methode für Österreich von Mitte April bis Anfang November 2020.

(b) Anzahl der (vorsichtshalber) täglich neu unter Quarantäne gestellten Personen in Abhängigkeit von der jeweiligen tracing Variante für Österreich im Zeitraum von Mitte April bis Anfang November 2020 [27].

Die Ergebnisse, die Bicher M. et. al. im Rahmen der Simulationen erhalten, finden sich in Abbildung 13. Dabei ist hervorzuheben, dass die kumulierte Anzahl der Infizierten für die Methode des *individual t. 75%* am geringsten ist, wobei

gleichzeitig die kumulierte Zahl der in Quarantäne geschickten Personen hierfür maximal ist. Um die verschiedenen tracing Varianten miteinander vergleichen zu können, wird die folgende Größe definiert:

$$QpIp := \frac{\text{Unter Quarantäne gestellte Personen}}{\text{Verhinderte Infektionen}}. \quad (41)$$

Tracing strategy	<i>cumulative infected agents (May 15th - Nov 15th)</i>	<i>difference to no-tracing strategy</i>	<i>cumulative preventively quarantined agents (May 15th - Nov 15th)</i>	<i>quarantined per infection prevented (QpIp)</i>
<i>no-tracing</i>	371 709	-	-	-
<i>household tracing</i>	220 046	151 663	104 182	0.69
<i>workplace tracing</i>	244 092	127 616	530 078	4.15
<i>combined tracing</i>	165 167	206 542	458 006	2.22
<i>50% individual tracing</i>	141 822	229 887	735 792	3.2
<i>75% individual tracing</i>	119 826	251 883	970 461	3.85

Abbildung 13: Simulationsergebnisse von Bicher M. et. al. für sechs verschiedene tracing Varianten in Österreich im Jahr 2020 [27].

Strengere und umfangreichere tracing Maßnahmen führen demnach zu einer stärkeren Abnahme der kumulierten Infektionszahlen, jedoch unter in Kaufnahme einer hohen Anzahl an vorsichtshalber unter Quarantäne gestellten Personen. Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass eine gut durchgeführte Nachverfolgung von Kontakten zu einer Infektiositätsreduktion von bis zu 5.18 % beitragen kann [27].

Kapitel 4 Modellierung im Mathematikunterricht

4.1 Der Begriff des Modellierens in der didaktischen Diskussion

Laut Loos und Ziegler steht die Frage nach der Natur der Mathematik aktuell in enger Relation zu ihrer Einbettung in die Gesellschaft. Dies wird oft auch als soziokulturelle Bedeutung der Mathematik bezeichnet. Diese Bedeutung der Mathematik betrifft nicht nur ihre Anwendung als Hilfsmittel im Alltag oder als Werkzeug in den Naturwissenschaften und der Technik, sondern auch die Ausbildung mündiger Bürger:innen. Der Teilbereich der Mathematik, der dies alles leisten kann, wird auch als angewandte Mathematik bezeichnet. Im Alltag und von der Gesellschaft aus wird meist nur die Verwendung von mathematischen Werkzeugen – vor allem für die Industrie – wahrgenommen. [1] Um einen zeitgemäßen Mathematikunterricht, der auch die oben angesprochene soziokulturelle Bedeutung der Mathematik fördert, zu ermöglichen, spielen Realitätsbezüge eine wesentliche Rolle. Schon Freudenthal forderte 1973 in Bezug auf den Einsatz von realitätsbezogenen Problemstellungen, dass Schüler:innen Mathematik selbst anwenden sollen und nicht nur angewandte Mathematik erlernen sollen. Da Schüler:innen im Wesentlichen jenes Bild der Mathematik, welches in der Schule geprägt wird, später mit auf ihren weiteren Lebensweg nehmen, muss das Anwenden von Mathematik auf Problemstellungen der realen Welt in der Schule erlernt werden. Die Kompetenz *mathematisches Modellieren* berücksichtigt diesen Aspekt zur Ausbildung von mündigen Bürger:innen, die im erwachsenen Alter unsere Gesellschaft als demokratische Entscheidungsträger mitgestalten [28]. Mathematische Modelle können als Verbindungen zwischen der realen Welt und der mathematischen Welt verstanden werden. Diese Verbindung kann laut Henry Pollak (1979) entweder durch simultane Betrachtung oder aber durch mehrfache wechselseitige Betrachtung geschehen (siehe Abb. 14).

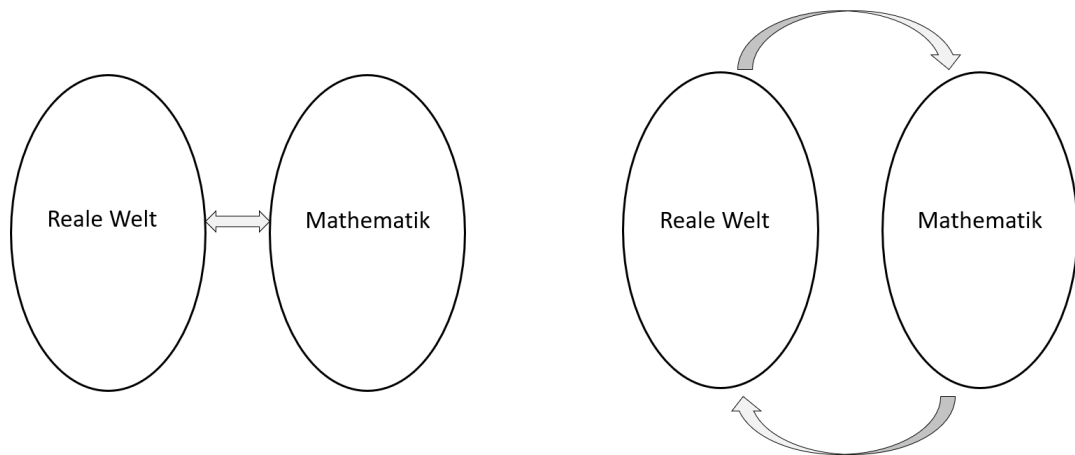


Abbildung 14: Die Verbindung zwischen realer Welt und Mathematik mittels Modellen kann entweder durch simultane Betrachtung (linke Darstellung), oder aber durch ständige wechselseitige Betrachtung stattfinden (rechte Darstellung).

Die Definition bzw. das Verständnis des Begriffs der *Modellierung* im mathematischen Kontext hängt von der jeweiligen theoretischen Strömung ab, aus der die Ziele für den Mathematikunterricht abgeleitet werden. So unterschied Kaiser-Meißner 1986 folgende didaktische Strömungen: Einerseits die wissenschaftlich-humanistische Strömung, deren Ziel die Vermittlung von Sichtweisen und Geisteshaltungen ist, und andererseits die pragmatische Strömung, deren Hauptziel darin besteht, außermathematische Probleme mit Hilfe von mathematischen Modellen zu lösen [29, 30]. Kaiser und Sriraman ergänzten 2006 [31] die beiden oben genannten Strömungen weiter, um schließlich zu folgenden Perspektiven in Bezug auf das Modellieren zu kommen:

- Realistisches Modellieren
- Kontextuelles Modellieren
- Pädagogisches Modellieren
- Sozio-kritisches Modellieren
- Theoretisches Modellieren
- Kognitives Modellieren

Vor allem die Perspektive des sozio-kritischen Modellierens adressiert die von Loos und Ziegler erwähnte soziokulturelle Bedeutung der Mathematik, da hierbei die gesellschaftliche Rolle der Mathematik im Vordergrund steht. Weiters wird die

Notwendigkeit des kritischen Denkens in Bezug auf die Rolle von mathematischen Modellen sowie mathematische Modellierung für die Gesellschaft hervorgehoben [31].

4.2 Der Modellierungskreislauf

Grundsätzlich findet man in der Literatur viele verschiedene Darstellungen des Modellierungsprozesses als idealisierten Kreislauf (vgl. Borromeo [29]). Eine mögliche Darstellung des Modellierungsprozesses findet sich etwa in [32] und ist in Abbildung 15 zu sehen. Dabei wird eine Problemstellung aus der realen Welt mittels Modellierung in ein mathematisches Problem übergeführt. Dieses wird mittels mathematischer Methoden gelöst. Schließlich wird die Lösung interpretiert und die so erhaltene Beschreibung des realen Problems wird überprüft.

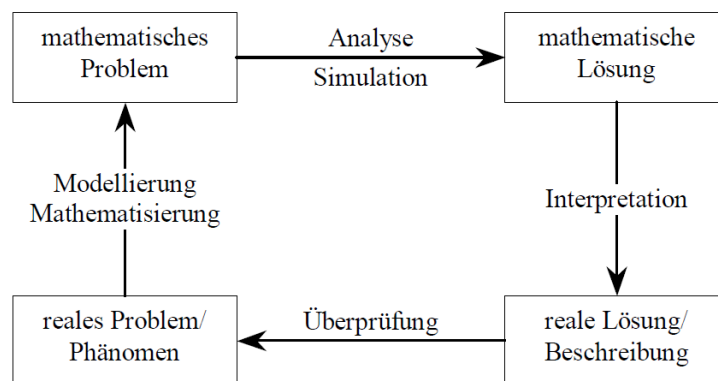


Abbildung 15: Mögliche Darstellung des Modellierungsprozesses: ein reales Problem wird durch Modellierung in ein mathematisches Problem übergeführt, welches mit mathematischen Methoden gelöst wird. Diese Lösung wird interpretiert und die so erhaltene Beschreibung des realen Problems wird überprüft [32].

Der Schritt der Mathematisierung kann dabei über unterschiedliche Modelle – je nach realem Problem – getätigt werden. Heute unterscheidet man grundsätzlich zwischen sogenannten normativen und deskriptiven Modellen. Erstere bieten eine Vorschrift, wie in der realen Welt vorzugehen ist, wohingegen letztere ein bestimmtes Problem aus der realen Welt wiedergeben.

In diesem Sinne können deskriptive Modelle weiter unterschieden werden in Modelle, die

- beschreiben,
- und/oder vorhersagen,
- und/oder erklären [1].

Oftmals ist das reale Problem, welches modelliert werden soll, so komplex, dass es zunächst auf der Sachebene vereinfacht werden muss, bevor es überhaupt mathematisiert werden kann. Diese Vereinfachung führt zum sogenannten Realmodell, welches dann schließlich mathematisch modelliert werden kann (siehe Abbildung 16) [33].

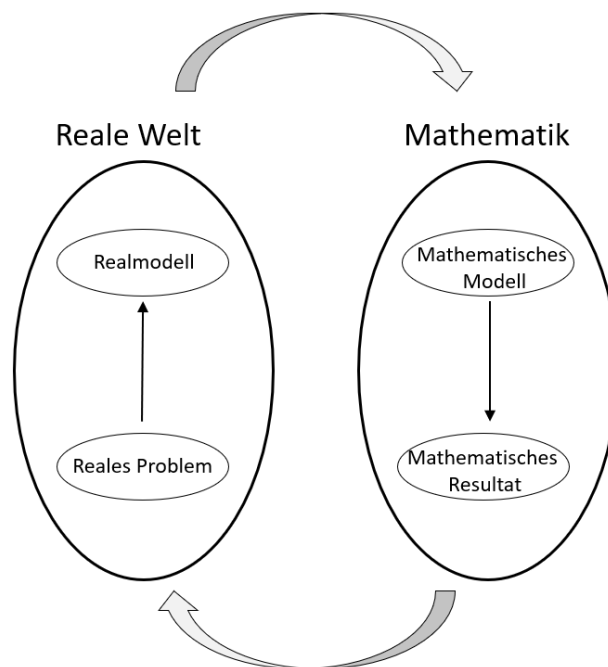


Abbildung 16: Ist das reale Problem zu komplex, so muss es zuerst in der Sachebene vereinfacht werden und in ein Realmodell überführt werden. Dieses kann dann im Laufe des Modellierungsprozesses mathematisiert werden.

Blum und Leiß erstellen einen noch detaillierteren Modellierungskreislauf, indem sie bisherige Darstellungen um das Situationsmodell erweitern. In diesem Kreislauf spielt das Individuum, welches modellierend arbeitet, eine große Rolle: Das Situationsmodell entspricht der mentalen Darstellung der Situation durch die modellierende Person. Das Individuum versteht die Realsituation, erstellt ein Situationsmodell, welches anschließend zum Realmodell vereinfacht, und schlussendlich mathematisiert wird. Das mathematische Modell liefert mathematische

Resultate, welche im Hinblick auf die Realsituation interpretiert und validiert werden müssen. Im Kreislaufdiagramm sind mehrere mathematische Fertigkeiten beinhaltet, wie etwa vereinfachen und strukturieren, mathematisch arbeiten, interpretieren, validieren, vermitteln und verstehen. Dieser Modellierungskreislauf ist in Abbildung 17 zu sehen [33].

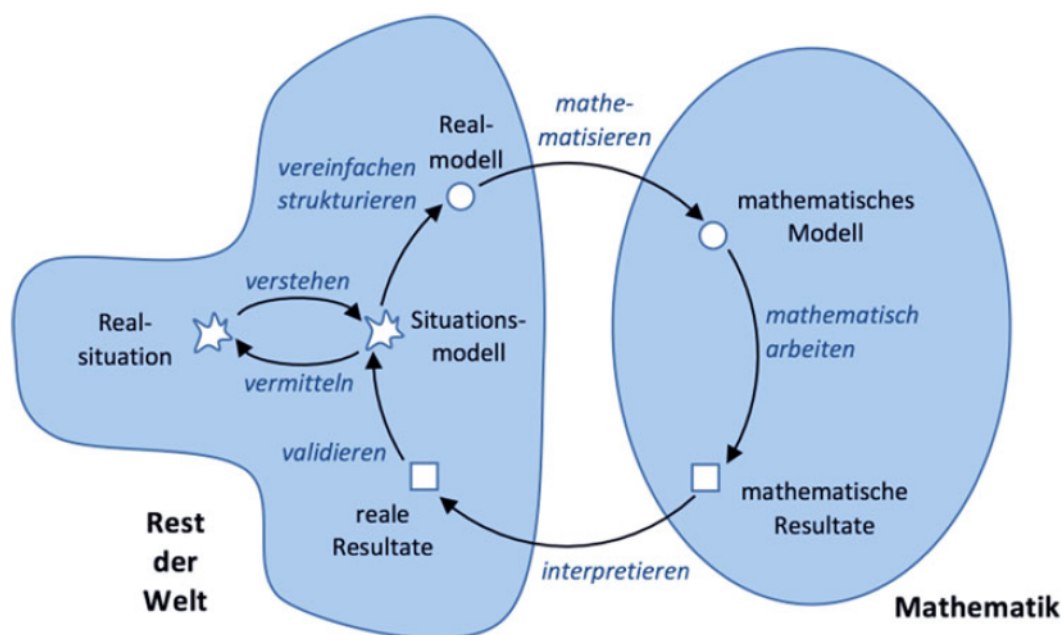


Abbildung 17: Ein detaillierter Modellierungskreislauf von Blum und Leiß. Das modellierend arbeitende Individuum erstellt ein Situationsmodell, welches der individuellen, mentalen Darstellung der Realsituation entspricht [33].

4.3 Teilkompetenzen und Ziele des Modellierens

Der Modellierungskreislauf in Abbildung 17 lässt darauf schließen, dass durch die Tätigkeit des Modellierens umfangreiche mathematische Kompetenzen und Fertigkeiten trainiert werden können. Eine Liste von Teilkompetenzen des Modellierens findet sich in Abbildung 18 [33].

Durch den Einsatz von Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht haben Schüler:innen einerseits die Möglichkeit, ihre Lebenswelt mit mathematischen Mitteln zu erschließen und dabei Begebenheiten der Umwelt wahrzunehmen und zu verstehen. Andererseits werden mathematische Kompetenzen gefördert, sowie die Fähigkeit zum Kommunizieren und Argumentieren wird trainiert. Modellierungsaufgaben können zum besseren Verstehen und längerfristigen Behalten der mathematischen Inhalte führen, aber auch zur Steigerung von Interesse und

Teilkompetenz	Indikator
Verstehen	Die Schülerinnen und Schüler konstruieren ein eigenes mentales Modell zu einer gegebenen Problemsituation und verstehen so die Fragestellung
Vereinfachen	Die Schülerinnen und Schüler trennen wichtige und unwichtige Informationen einer Realsituation
Mathematisieren	Die Schülerinnen und Schüler übersetzen geeignet vereinfachte Realsituationen in mathematische Modelle (z. B. Term, Gleichung, Figur, Diagramm, Funktion)
Mathematisch arbeiten	Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem mathematischen Modell
Interpretieren	Die Schülerinnen und Schüler beziehen die im Modell gewonnenen Resultate auf die Realsituation und erzielen damit reale Resultate
Validieren	Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die realen Resultate im Situationsmodell auf Angemessenheit Die Schülerinnen und Schüler vergleichen und bewerten verschiedene mathematische Modelle für eine Realsituation
Vermitteln	Die Schülerinnen und Schüler beziehen die im Situationsmodell gefundenen Antworten auf die Realsituation und beantworten so die Fragestellung
Beurteilen	Die Schülerinnen und Schüler beurteilen kritisch das verwendete mathematische Modell
Realisieren	Die Schülerinnen und Schüler ordnen einem mathematischen Modell eine passende Realsituation zu bzw. finden zu einem mathematischen Modell eine passende Realsituation

Abbildung 18: Liste an Teilkompetenzen sowie deren Indikatoren, welche sich aus dem Modellierungskreislauf von Blum und Leiß ableiten lassen [33].

Motivation im Mathematikunterricht. Des Weiteren wird den Schüler:innen ein ausgewogenes und möglichst reales Bild von Mathematik als Wissenschaft und Kulturgut vermittelt. Die Relevanz von Mathematik für Technik, Industrie, Wirtschaft und Gesellschaft kann verdeutlicht werden. Das wiederum unterstützt die Ausbildung mündiger und verantwortungsvoller Bürger:innen einer demokratischen Gesellschaft.

Natürlich ist ein großes Ziel von alltagsbezogenen Modellierungsaufgaben die Steigerung von Motivation und Interesse an der Mathematik. Schüler:innen sollen und können sich im Rahmen von Modellierungsaufgaben mit ihrer Umwelt beschäftigen sowie diese mit mathematischen Mitteln beschreiben. Des Weiteren können allgemeine Problemlösefähigkeiten trainiert werden und sprachliche Kompetenzen, wie etwa Argumentieren und Begründen, gefestigt werden. Außerdem hat die gemeinsame Arbeit an Modellierungsaufgaben das Ziel, soziale Kompetenzen zu stärken und das Sprechen über Mathematik zu fördern [34]. Laut Kaiser-Meßmer lernen die Schüler:innen auch, außermathematische Kontexte besser zu verstehen, sowie Mathematik auf Realsituationen anzuwenden. Viele von ihnen entwickeln des Weiteren eine adäquate Vorstellung von Mathematik und zeigen vermehrt

tes Interesse sowie Motivation. Jedoch weisen nur einige von ihnen langfristig erworbene Kompetenzen im Bereich des Modellierens auf [35].

4.4 Modellierungsaufgaben

Den gesamten Modellierungskreislauf im Rahmen des Mathematikunterrichts zu durchlaufen ist oft vor allem aufgrund von Zeitmangel eine Herausforderung. Daher werden im Schulunterricht häufig spezielle Modellierungsaufgaben herangezogen, die zumindest Teile des Modellierungsprozesses anregen sollen. Die Kategorisierung solcher Modellierungsaufgaben ist nicht immer eindeutig, grundsätzlich spricht man jedoch von eingekleideten Aufgaben, Textaufgaben und Sachproblemen bzw. -aufgaben. Vor allem erstere und zweitere findet man vorrangig in den Schulbüchern. Unter eingekleideten Aufgaben versteht man meist Aufgabenstellungen ohne wirklichen Realitätsbezug. Der Sachkontext wird um das mathematische Problem herum konzipiert. Ziel ist in erster Linie das Üben von Rechenfertigkeiten. Auch bei Textaufgaben ist der Sachkontext oft austauschbar und die Realität häufig schon von vornherein vereinfacht dargestellt. Die Schwierigkeit der sogenannten Mathematisierung stellt hier für viele Schüler:innen die größte Herausforderung dar. Erst die oben genannten Sachprobleme bieten tatsächlich einen konkreten Realitätsbezug. Um ein Sachproblem vollständig bearbeiten zu können, müssen oft fächerübergreifende Recherchen getätigt und reale Daten miteinbezogen werden. Folglich bietet eine Sachaufgabe das größte Potenzial für Modellierungsprozesse im Unterricht. Abbildung 19 bietet einen Überblick über die vorgestellte Kategorisierung [34].

	Eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet	reale Daten und Fakten bzw. offene Angaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug
Tätigkeiten	Rechnen	Übersetzen, Rechnen, Interpretieren	Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren, Validieren

Abbildung 19: Mögliche Kategorisierung für Modellierungsaufgaben. Die Sachaufgabe bietet das größte Potenzial im Hinblick auf tatsächliche Modellierung im mathematischen Sinne [34].

Kapitel 5 Schulmathematik in der Sekundarstufe II

5.1 Forderungen an den Mathematikunterricht laut österreichischem Lehrplan

Der allgemeine Teil des österreichischen Lehrplans für die AHS Oberstufe (Fassung vom 01.09.2018) [36] stellt umfangreiche Forderungen an den Mathematikunterricht. Im folgenden wird aufgezeigt, welches Potenzial in der Arbeit mit epidemiologischen Modellen in Bezug auf die Erreichung der geforderten Aspekte liegt. Im Lehrplan des Fachs Mathematik wird nicht nur der mathematische Lehrinhalt festgelegt, sondern es werden unter anderem auch *Beiträge zu den Bildungsbereichen*, *Didaktische Grundsätze*, sowie *Mathematische Kompetenzen* definiert.

Die Arbeit mit epidemiologischen Themen kann wichtige Beiträge zum Erreichen der im Lehrplan geforderten Aspekte und Ziele liefern. Abbildung 20 zeigt, welche Aspekte mithilfe epidemiologischer Themen adressiert werden können.

Beiträge zu den Bildungsbereichen	
Mensch und Gesellschaft:	Aufzeigen, dass Mathematik in vielen Bereichen des Lebens eine Rolle spielt, unter anderem in der Medizin
Gesundheit und Bewegung:	Phänomene aus dem Gesundheitswesen mathematisch beschreiben
Didaktische Grundsätze	
Lernen in anwendungsorientierten Kontexten:	Anwendungsorientierte Aufgaben- und Problemstellungen, Reflexion des Modellbildungsprozesses hinsichtlich Grenzen
Lernen mit medialer Unterstützung:	Informationsbeschaffung, eigenständige Abfassung und Präsentation mathematischer Texte
Lernen mit technologischer Unterstützung:	Darstellung von Funktionen und Kurven
Mathematische Kompetenzen	
Handlungsdimension:	Darstellend-modellierendes Arbeiten: Übersetzen von Alltagssprache in die Sprache der Mathematik
	Interpretierend-dokumentierendes Arbeiten: Übersetzen von mathematischen Darstellungen, Zusammenhängen und Sachverhalten in die Alltagssprache
	Kritisch-argumentatives Arbeiten: Argumentieren, Hinterfragen, Ausloten von Grenzen, Begründen und Beweisen
Komplexitätsdimension:	Problemlösen und Reflektieren

Abbildung 20: Die Auseinandersetzung mit epidemiologischen Themen bietet umfangreiche Möglichkeiten, verschiedene Teile des Mathematik-Lehrplans der Sekundarstufe II zu adressieren.

5.1 Forderungen an den Mathematikunterricht laut österreichischem Lehrplan

Des Weiteren können viele Teilgebiete des inhaltlichen Lehrstoffs durch das Arbeiten mit epidemiologischen Modellen adressiert werden, sodass der Einsatz dieser Thematik in jedem Jahrgang der Sekundarstufe II berechtigt ist (siehe Abbildung 21).

5. Klasse	
Mengen, Zahlen und Rechengesetze	Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können
	Mit Näherungswerten sinnvoll umgehen können
Funktionen	Mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten und als mathematische Modelle auffassen können
6. Klasse	
Reelle Funktionen	Exponentialfunktionen: typische Graphen skizzieren, sowie charakteristische Eigenschaften angeben und im Kontext deuten können
	Änderung von Größen durch Änderungsmaße (relative Änderung, absolute Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor) beschreiben können
	Exponentialfunktionen in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und ihre Grenzen reflektieren können
	Reelle Funktionen in mehreren Variablen kennen
Folgen	Zahlenfolgen durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeit	Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen und damit arbeiten können
	Bedingte Wahrscheinlichkeiten kennen
	Den Satz von Bayes kennen und anwenden können
7. Klasse	
Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariable kennen und deuten können
8. Klasse	
Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, beurteilende Statistik	Konfidenzintervalle ermitteln und interpretieren können
	Einfache statistische Hypothesentests durchführen und deren Ergebnisse interpretieren können
Differenzen- und Differentialgleichungen, Grundlagen der Systemdynamik	Diskrete Veränderungen von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben und diese im Kontext deuten können
	Kontinuierliche Veränderungen von Größen durch Differentialgleichungen beschreiben und im Kontext deuten können
	Einfache Differentialgleichungen lösen können
	Einfache dynamische Systeme mit Hilfe von Diagrammen oder Differenzengleichungen beschreiben und untersuchen können

Abbildung 21: Teilgebiete des Lehrstoffes, die sich insbesondere dafür eignen, im Rahmen epidemiologischer Themen adressiert zu werden.

Quer zum inhaltlichen Lehrstoff, der im Lehrplan zu finden ist, müssen die Schüler:innen im Rahmen des Mathematikunterrichts auch sogenannte Grundkompetenzen für die standardisierte Reifeprüfung erwerben. Dadurch soll sichergestellt werden, dass die Schüler:innen zur aktiven und selbstständigen Wissensaneignung sowie zur kritischen Auseinandersetzung mit ihrem eigenen Wissensstand ermutigt werden.

Die mathematischen Grundkompetenzen werden vier Inhaltsbereichen zugeordnet [37]:

- Algebra und Geometrie
- Funktionale Abhängigkeiten
- Analysis
- Wahrscheinlichkeit und Statistik

In Kapitel 6 finden sich zu den vier oben genannten Inhaltsbereichen Aufgabenstellungen mit Bezug zu epidemiologischen Modellen beziehungsweise der SARS-CoV-2-Pandemie.

5.2 Wachstumsmodelle

Wachstumsmodelle, die in der Schulmathematik der Sekundarstufe II laut Lehrplan unterrichtet werden, sind Lineare Modelle (5. Klasse), exponentielle Modelle sowie (optional) das Logistische Wachstum (beides 6. Klasse).

5.2.1 Lineare Modelle

Charakteristisch für lineare Modelle ist die konstante Zunahme k einer Größe $N(t)$ pro Zeitschritt $\Delta t = 1$. Das hat zur Folge, dass die mittlere Änderungsrate der Größe in jedem Zeitintervall konstant ist:

$$\frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0} = k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (42)$$

Durch Grenzwertbildung erhält man für den Differenzialquotienten folgenden Ausdruck:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \left(\frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0} \right) = N'(t) = k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (43)$$

Für lineare Modelle ist daher die momentane Änderungsrate für alle Zeitpunkte t konstant. Die Funktionsgleichung $N(t)$ kann direkt mittels Integration von Gleichung 43 erhalten werden:

$$\int_0^t dN(\tilde{t}) = \int_0^t k d\tilde{t} \quad (44)$$

$$N(t) - N(0) = k \cdot t \quad (45)$$

$$N(t) = k \cdot t + N(0) \quad (46)$$

Ein lineares Modell mit Startwert $N(t = 0) = N_0$ kann daher mittels folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$N(t) = k \cdot t + N_0 \quad (47)$$

Dabei gilt $k > 0$, damit lineares Wachstum vorliegt. Eine wichtige Eigenschaft des linearen Wachstums ist, dass es sich um unbegrenztes Wachstum handelt. Somit sind lineare Modelle eine hinreichend gültige Näherung für viele Prozesse, jedoch nur in einem gewissen Zeitraum.

5.2.2 Exponentielle Modelle

Bei vielen Wachstumsprozessen ist die Zunahme einer Größe $N(t)$ pro Zeitintervall $\Delta t = 1$ häufig proportional zum derzeitigen Wert dieser Größe: $N(t + 1) \propto N(t)$. Die Proportionalitätskonstante wird meist als Wachstumskonstante λ bezeichnet. Für die mittlere Änderungsrate der Größe in jedem Zeitintervall bedeutet das:

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot N(t) \quad (48)$$

Durch Grenzwertbildung erhält man den Differenzialquotienten:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} \right) = N'(t) = \lambda \cdot N(t) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (49)$$

Die Funktionsgleichung $N(t)$ kann mittels Integration von Gleichung 49 erhalten werden:

$$\int_0^t dN(\tilde{t}) = \int_0^t \lambda \cdot N(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (50)$$

$$\int_0^t \frac{1}{N(\tilde{t})} dN(\tilde{t}) = \int_0^t \lambda d\tilde{t} \quad (51)$$

$$\ln(N(t) - N(0)) = \lambda \cdot t \quad (52)$$

$$\ln \frac{N(t)}{N(0)} = \lambda \cdot t \quad (53)$$

$$N(t) = N(0) \cdot e^{\lambda t} \quad (54)$$

Dabei gilt für exponentielles Wachstum, dass $\lambda > 0$ ⁷. So wie auch beim linearen Wachstum handelt es sich beim exponentiellen Wachstum ebenfalls um eine unbegrenzte Zunahme. Auch hier ist also zu beachten, dass exponentielle Modelle im Anwendungskontext nur in einem gewissen Zeitrahmen sinnvolle Näherungen liefern.

5.2.3 Logistisches Wachstum

Das logistische Wachstum berücksichtigt die Tatsache, dass unbegrenztes Wachstum zu unrealistischen Modellierungsergebnissen führt und für die meisten Prozesse der Natur nur im ersten Zeitrahmen eine gute Näherung darstellt. Natürliche Wachstumsprozesse sind meist beschränkt durch Ressourcen- und Nahrungsknappheit, Platzmangel, Seuchen, Kriege, etc. Mathematisch kann diese Tatsache durch die Einführung einer Kapazitätsgrenze K berücksichtigt werden, die eine obere Schranke für den Wachstumsvorgang darstellt. Des Weiteren wird angenommen, dass die momentane Änderungsrate der Größe proportional zum derzeitigen Bestand ist aber gleichzeitig auch immer kleiner wird, je näher man der Schranke K kommt – d.h. je kleiner die Differenz $K - N(t)$ wird. Die momentane Änderungsrate ist daher proportional zu $N(t) \cdot (K - N(t))$:

$$N'(t) = c \cdot N(t) \cdot (K - N(t)) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (55)$$

Die Funktionsgleichung $N(t)$ kann durch Lösen der Differentialgleichung 55 mittels Trennung der Variablen erhalten werden:

$$\frac{dN}{d\tilde{t}} = c \cdot N(\tilde{t}) \cdot (K - N(\tilde{t})) \quad (56)$$

$$\frac{dN}{N(\tilde{t}) \cdot (K - N(\tilde{t}))} = c \cdot d\tilde{t} \quad (57)$$

$$\int_0^t \frac{1}{N(\tilde{t}) \cdot (K - N(\tilde{t}))} dN = \int_0^t c \cdot d\tilde{t} \quad (58)$$

$$\frac{\ln(N(\tilde{t})) - \ln(K - N(\tilde{t}))}{K} \Big|_0^t = c \cdot t. \quad (59)$$

Durchführen der algebraischen Umformungen und Einsetzen der Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ führt zur Funktionsgleichung des logistischen Wachstums:

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{N_0 + (K - N_0) \cdot e^{-K \cdot c \cdot t}}, \quad (60)$$

mit der Kapazitätsgrenze K , dem Anfangswert N_0 sowie $c \in \mathbb{R}^+$.

⁷Im Falle $\lambda < 0$ liegt eine exponentielle Abnahme vor.

5.2.4 Änderungsmaße

In österreichischen Schulbüchern sind folgende Änderungsmaße für eine allgemeine reelle Funktion f wie folgt definiert:

- absolute Änderung im Intervall $[a; b]$: $f(b) - f(a)$
- relative Änderung im Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$
bzw. prozentuelle Änderung im Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)} \cdot 100\%$
- mittlere Änderungsrate im Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, mit $b \neq a$
- Änderungsfaktor im Intervall $[a; b]$: $\frac{f(b)}{f(a)}$, mit $f(a) \neq 0$.

5.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Ereignis A eintritt, unter der Bedingung, dass das Ereignis B schon eingetreten ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist wie folgt definiert:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} . \quad (61)$$

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (61) folgt der Multiplikationssatz für zwei Ereignisse A und B:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) . \quad (62)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sowie Wahrscheinlichkeiten für das gemeinsame Eintreten von zwei Ereignissen A und B können z.B. auch im zweistufigen Baumdiagramm dargestellt werden (siehe Abbildung 22).

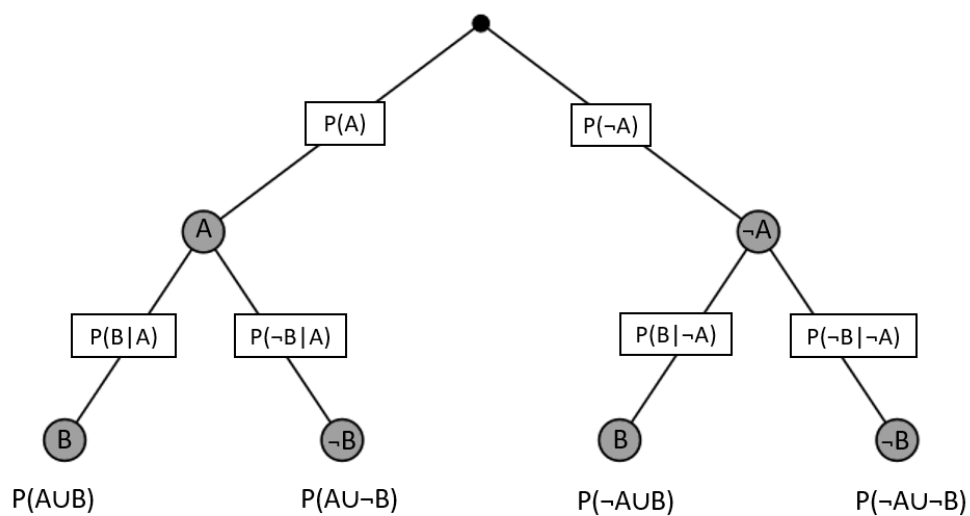


Abbildung 22: Bedingte Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm.

Kapitel 6 Aufgaben für den Mathematikunterricht

Auf den folgenden Seiten finden sich die im Rahmen dieser Masterarbeit entwickelten Aufgabenstellungen, die eine Möglichkeit bieten, die SARS-CoV-2- Thematik im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II aufzugreifen. Dafür werden zu jeder Aufgabe die passende Schulstufe, der Lehrplanbezug sowie die Grundkompetenzen laut Grundkompetenzkatalog angegeben. Außerdem wird aufgelistet, welche Aspekte des mathematischen Modellierens im Zuge der jeweiligen Aufgabe besonders gefördert werden. Des Weiteren ist jeder Aufgabenstellung auch eine Lösungserwartung beigelegt.

Wie schon in Kapitel 1 erwähnt, war es das Ziel, Aufgabenstellungen zu konzipieren, die praxistauglich sind und ein realistisches Anforderungsniveau für die Lernenden der Sekundarstufe II aufweisen.

Die oben genannten Ziele werden dadurch erreicht, dass jede Aufgabe dem Lehrplan und dem Grundkompetenzkatalog zugeordnet werden kann. Das realistische Anforderungsniveau wird gewährleistet, indem im Rahmen einer jeden Aufgabe nur Teile des Modellierungskreislaufs beinhaltet sind. Umgesetzt wurde letzteres durch klare, operative Formulierungen in den Aufgabenstellungen.

6.1 Mengen und Zahlen: Erhaltene Impfdosen in Österreich

Schulstufe: 5. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Mengen, Zahlen und Rechengesetze

- Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können; Rechenregeln für Zehnerpotenzen kennen.
- Mit Näherungswerten sinnvoll umgehen können.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AG 1.1	Wissen über die Zahlenmengen und -bereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

Das soll gefördert werden:

- Mathematisch argumentieren, beschreiben und begründen; Sprachkompetenz
- Verständnis für Prozentwerte und große Zahlen im Alltag

Aufgabenstellung:

Laut dem Gesundheitsministerium⁸ wird damit gerechnet, dass bis zur Kalenderwoche (KW) 24 des Jahres 2021 insgesamt ca. 7 Millionen Impfdosen in Österreich angekommen sind. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Verteilung der verschiedenen Impfstoffe:

Impfstoff	in Summe erhaltene Dosen bis KW 24
BioNTech/Pfizer	4728395
Moderna	750000
AstraZeneca	1430400
Janssen (Johnson & Johnson)	180900

Aktuell (Juni 2021) umfasst die impfbare Bevölkerung in Österreich 7872174 Personen. Österreich hat jedoch ca. $8,86 \cdot 10^6$ Einwohner:innen.

⁸<https://info.gesundheitsministerium.at/>, abgerufen am 11.06.2021

1. Welcher Prozentsatz der österreichischen Bevölkerung zählt zur impfbaren Bevölkerung? Woran könnte es liegen, dass nicht alle Einwohner:innen unter die Kategorie impfbar fallen?
2. Bestätige oder widerlege die vom Gesundheitsministerium genannte Zahl von 7 Millionen Impfdosen mithilfe der Tabelle.
3. Bei allen Impfstoffen außer Janssen ist es notwendig, dass jeder Person für eine vollständige Impfung zwei Dosen geimpft werden. Wie viele Personen können daher mit den bis zur KW 24 gelieferten Impfdosen vollständig geimpft werden? Runde dabei sinnvoll und gib die Zahl in Gleitkommadarstellung an! Wie groß ist der Prozentsatz der österreichischen Bevölkerung, der zu diesem Zeitpunkt noch auf weitere Impfdosen warten muss?

Lösungserwartung:

1. Den Prozentsatz p kann man auf folgende Weise berechnen:

$$p = \frac{A}{G} \cdot 100\% = \frac{7872174}{8,86 \cdot 10^6} \cdot \%100 = 88,85...\% \approx 89\% \quad (63)$$

Von den 8,86 Mio. Einwohnern zählen ca. 89% zur impfbaren Bevölkerung. Grund dafür ist, dass derzeit (Juni 2021) Kinder unter 12 Jahren noch nicht für die Impfung in Betracht gezogen werden.

2. Summiert man die Werte aus der Tabelle so erhält man als Ergebnis 7089695 Impfdosen. Die Aussage des Gesundheitsministeriums von ca. 7 Millionen gelieferten Impfdosen bis KW 24 kann daher bestätigt werden.
3. Betrachtet man alle Impfstoffe außer Janssen, so sind bis zu KW 24 voraussichtlich 6908795 Impfdosen vorhanden. Von diesen Impfstoffen benötigt jede Person allerdings zwei Dosen. Somit können mit diesen Dosen 3454397 Menschen vollständig geimpft werden. Dazu kommen nun noch die Impfdosen von Janssen. Das ergibt eine vollständige Impfung für ca. 3635297 Personen in Österreich. Das entspricht ca. $3,6 \cdot 10^6$ bzw. 3,6 Mio. Menschen.

Der Prozentsatz p , der voll immunisiert werden kann, kann auf folgende Weise berechnet werden:

$$p = \frac{A}{G} \cdot 100\% = \frac{3635297}{7872174} \cdot \%100 = 46,17...\% \approx 46\% \quad (64)$$

Daher müssen noch ca. 54% der impfbaren Bevölkerung auf weitere Dosen warten.

6.2 Ungleichungen und Statistik: Die Corona-Schutzimpfung

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Beschreibende Statistik; Wahrscheinlichkeit

- Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen und damit arbeiten können

Lehrplanbezug: Ungleichungen

- Mit Ungleichungen in einer Variablen arbeiten und diese lösen können

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AG 1.1	Wissen über die Zahlenmengen und -bereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können
AG 2.4	lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

Das soll gefördert werden:

- mathematisch argumentieren, beschreiben und begründen; Sprachkompetenz
- Verständnis für Prozentwerte und große Zahlen im Alltag

Aufgabenstellung:

In Zusammenhang mit der Corona-Pandemie ist immer wieder von Durchimpfungsrate und Herdenimmunität zu lesen. Wissenschaftler:innen gingen zuerst davon aus, dass eine Durchimpfungsrate von ca. 60% ausreicht, damit Herdenimmunität vorliegt. Herdenimmunität bedeutet, dass der immunisierte Anteil in der Bevölkerung so groß ist, dass auch die nicht-immunisierten Personen geschützt sind und die Krankheit ausstirbt. Aufgrund neuartiger Mutationen des Virus gehen Expert:innen mittlerweile (Stand Ende Oktober 2021) jedoch von einer Durchimpfungsrate von ca. 80% aus. Der ORF gibt am 25.10.2021 an, dass 5 576 204 Personen in Österreich laut elektronischem Impfpass vollständig immunisiert sind⁹.

⁹<https://orf.at/corona/daten/impfung>, abgerufen am 25.10.2021

1. Begründe, ob diese Anzahl an vollständig immunisierten Personen ausreicht, um Herdenimmunität zu erreichen.
2. Interpretiere die Ungleichung

$$\frac{x}{8,86 \cdot 10^6} > 0,8 \quad (65)$$

im Kontext von Herdenimmunität und Durchimpfungsrate. Löse dann die Ungleichung.

3. Das Gesundheitsministerium Österreich veröffentlicht folgende Grafiken zum Thema Corona-Impfung:

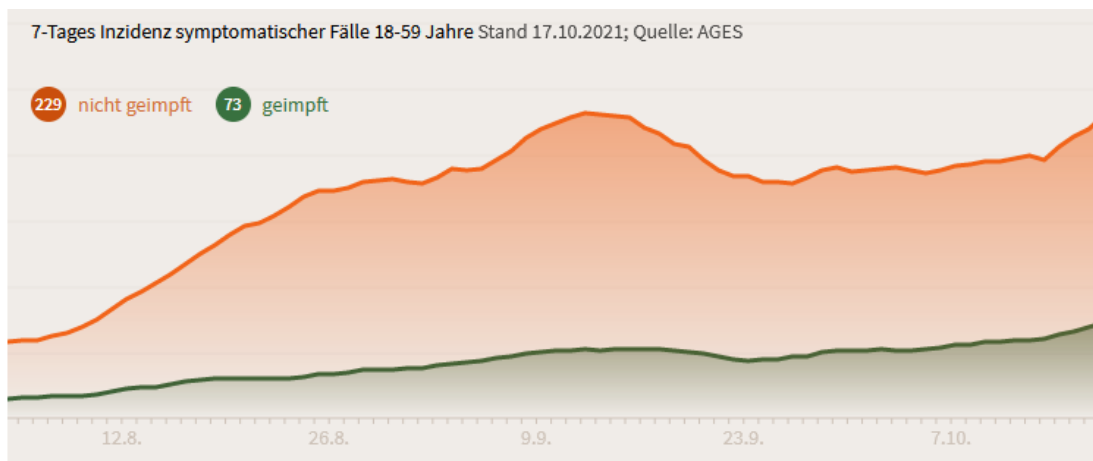


Abbildung 23: 7-Tages Inzidenz unter geimpften und nicht geimpften Personen in Österreich.

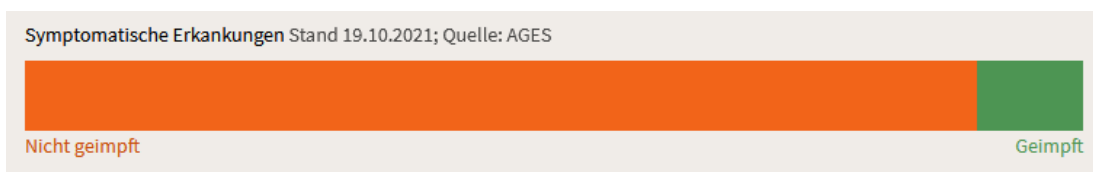


Abbildung 24: Symptomatische Corona-Erkrankungen in Österreich.

Die Überschriften zu diesen beiden Grafiken auf der Homepage des Gesundheitsministeriums lauten: „Das Risiko, mit Symptomen an Corona zu erkranken, wird durch die Schutzimpfung erheblich reduziert“ für Abbildung 23 sowie „90% aller symptomatischen Erkrankungen treten in der Gruppe der ungeimpften Bevölkerung auf“ für Abbildung 24.

- a) Begründe, ob du diesen beiden Überschriften zustimmen würdest. Erkläre die Vorteile einer Corona-Impfung anhand der beiden Grafiken.
- b) Gehe auf die Qualität der beiden statistischen Darstellungen ein und erläutere Verbesserungsvorschläge!

Lösungserwartung:

1. In Österreich leben ca. 8,86 Mio. Menschen, davon sind 5 576 204 Personen immunisiert. Das entspricht einer Durchimpfungsrate von ca. 62,29%. Somit ist die Herdenimmunität in Österreich aktuell noch nicht erreicht.
2. Die Variable x in der Ungleichung steht für die Anzahl an Personen, die immunisiert sind. Die Ungleichung beschreibt, welcher Anteil der Gesamtbevölkerung mindestens immunisiert sein muss, damit Herdenimmunität erreicht wird. Löst man die Ungleichung, so erhält man $x > 7088000$. Es müssen also mindestens knapp 7,1 Mio. Menschen geimpft sein.
- 3a) Die Abbildung 23 zeigt, dass die 7-Tages Inzidenz der Personen, die Symptome zeigen, für Nicht-Geimpfte höher ist als für Geimpfte. Es gibt aber trotz Impfung Personen, die symptomatisch erkranken. Auf jeden Fall ist die Überschrift problematisch, da den 7-Tages-Inzidenzen der geimpften Personen und der nicht geimpften Personen andere Grundgesamtheiten zu Grunde liegen. Zur zweiten Überschrift ist zu sagen, dass der Prozentstreifen keine Prozentangaben beinhaltet. Daher kann nicht abgelesen werden, ob es sich tatsächlich um 90% handelt. Außerdem liegen auch hier für die beiden Personengruppen unterschiedliche Grundgesamtheiten vor. Ein Beispiel: Wenn alle geimpft wären, dann wäre der Anteil der Geimpften unter allen Personen mit Symptomen gleich 100 Prozent. Woraus man allerdings nicht schließen kann, dass die Impfung nicht wirkt.
- 3b) Bei beiden Darstellungen fehlen die Achsenbeschriftungen, die Skalierungen der Achsen sowie auch die Größe der Grundgesamtheit. Um die Statistik in Abbildung 23 zu verbessern, müsste man die x-Achse mit „Zeit (in Tagen)“ und die y-Achse mit Anzahl „7-Tages Inzidenz“ beschriften, sowie skalieren. Auch in Abbildung 24 muss die Grundgesamtheit ergänzt werden und der Prozentstreifen mit Prozentwerten ergänzt werden.

6.3 Lineare Modelle: Infektionszahlen in Österreich

Schulstufe: 5. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Gleichungen und Gleichungssysteme

- Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen lösen können
- Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme anwenden können

Lehrplanbezug: Funktionen

- Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind, mittels Termen, Tabellen und Graphen beschreiben und über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren können.
- Lineare Funktionen beschreiben und untersuchen können.
- Mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten können; Funktionen als mathematische Modelle auffassen können.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AG 2.5	lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren und umformen/lösen können
FA 1.3	zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können
FA 2.1	verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 2.2	aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können
FA 2.5	die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können

Das soll gefördert werden:

- mathematisch argumentieren, beschreiben und begründen; Sprachkompetenz
- Umgang mit dem PC: Tabellenkalkulation und Erstellung von Diagrammen

Aufgabenstellung:

Die Erkrankung COVID-19 wird hervorgerufen durch den Erreger SARS-CoV-2 (auch bekannt unter Corona-Virus). Übertragen wird das Virus hauptsächlich durch Tröpfcheninfektion. Da es im Vergleich zu schon lange bekannten Viren weniger Erfahrungswerte bezüglich der Ausbreitung dieser Erkrankung gibt, sind mathematische Modelle und computergestützte Simulationen von essenzieller Bedeutung, um abschätzen zu können, wie schnell sich das Virus ausbreiten wird. Auch in Wiener Forschungsgruppen wird der Verlauf der Virus-Erkrankung auf Grundlage von mathematischen Berechnungen analysiert. Die Gruppe um Dr. Niki Popper von der Technischen Universität Wien arbeitet an entsprechenden Computer-Simulationen¹⁰. Am 26.02.2020 wurde in Österreich der erste Fall einer COVID-19 Infektion bestätigt. Der österreichische Bildungsminister behauptete am 11.3. das Folgende: „Wir sind noch in einem linearen Anstieg der bestätigten Fälle.“ Bearbeite mit Hilfe der in der Abbildung (25) angeführten Daten¹¹ folgende Fragen:

1. Arbeite mit Excel und vervollständige in der Tabelle die Spalte der Neuinfizierten. Stelle die Daten der Infizierten und auch der Neuinfizierten in einem Liniendiagramm graphisch dar. Beschreibe die Verläufe der beiden Graphen und vergleiche sie miteinander!
2. Nimm Bezug auf die Aussage des Bildungsministers! (Bestätige oder widerlege sie mit Hilfe der Daten.)
3. Betrachte nun die Daten von Tag 0 bis Tag 18. Würdest du die Anzahl der Infizierten mit einer linearen Funktion modellieren? Begründe! Beschreibe auch, was dieser Verlauf im Vergleich zu einer linearen Funktion für die Gesellschaft zu bedeuten hat.
4. Betrachte nun den Zeitraum von Tag 12 bis zum Tag 18 und stelle mithilfe der Datenpunkte dieser beiden Tage eine lineare Funktion auf, die in

¹⁰<https://www.derstandard.at/story/2000115331525/computermodell-simuliert-corona-ausbreitung-in-oesterreich>, abgerufen am 11.06.2021.

¹¹Quelle der Daten: [https://web.archive.org/web/20200101000000*/https://www.sozialministerium.at/Informationen-zum-Coronavirus/Neuartiges-Coronavirus-\(2019-nCov\).html](https://web.archive.org/web/20200101000000*/https://www.sozialministerium.at/Informationen-zum-Coronavirus/Neuartiges-Coronavirus-(2019-nCov).html), abgerufen am 20.03.2022.

diesem Zeitraum die Anzahl der Infizierten in Österreich modelliert. Gib außerdem zwei weitere Zeiträume an, in denen eine Modellierung der Anzahl der Infizierten mit einer linearen Funktion für dich sinnvoll erscheint.

Tag ab der ersten Infektion	Anzahl der Infizierten in AUT	Anzahl der Neuinfizierten in AUT
0	2	0
1	2	0
2	4	2
3	5	1
4	10	5
5	10	0
6	18	8
7	27	
8	41	
9	47	
10	74	
11	99	
12	112	
13	157	
14	206	
15	302	
16	428	
17	602	
18	800	

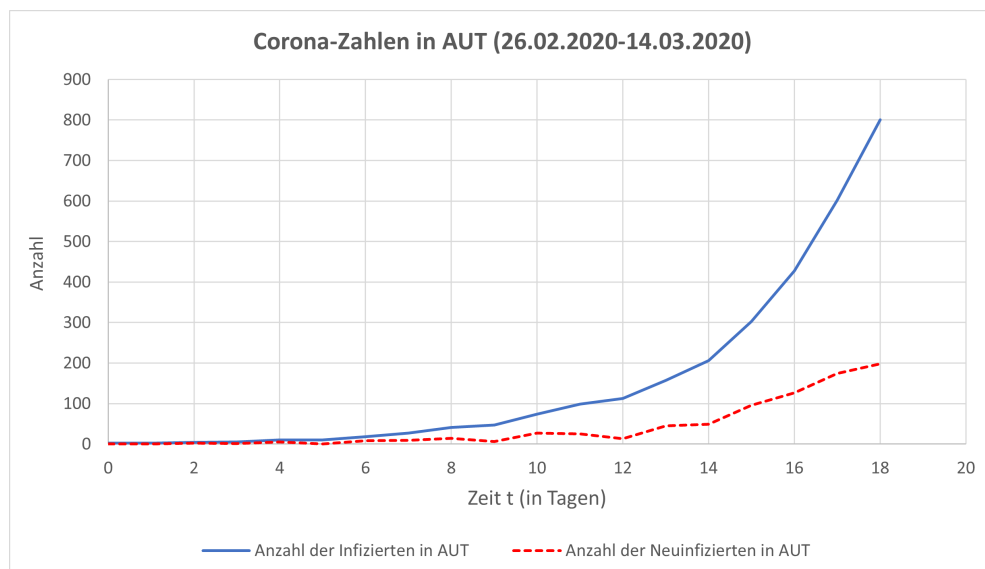
Abbildung 25: Anzahl der mit COVID-19 infizierten Personen und Neuinfizierten in Österreich im Zeitraum von 26.02.2020 bis 14.03.2020.

Lösungserwartung:

1. Die Tabelle kann z.B. mit Hilfe von Excel vervollständigt werden:

Tag ab der ersten Infektion	Anzahl der Infizierten in AUT	Anzahl der Neuinfizierten in AUT
0	2	0
1	2	0
2	4	2
3	5	1
4	10	5
5	10	0
6	18	8
7	27	9
8	41	14
9	47	6
10	74	27
11	99	25
12	112	13
13	157	45
14	206	49
15	302	96
16	428	126
17	602	174
18	800	198

Außerdem können die beiden Verläufe mit Hilfe von Excel in Form eines Liniendiagramms grafisch dargestellt werden:



Die Anzahl der Infizierten nimmt zu. Diese Zunahme verläuft während der ersten Tage sehr langsam. Gegen Ende hin steigt die Anzahl der Infizierten

immer steiler an. Die Anzahl der Neuinfizierten verläuft zu Beginn annähernd konstant und steigt erst ca. ab dem 12. Tag leicht an.

2. Der Bildungsminister behauptete am 11.03.2020, dass wir uns noch in einem linearen Anstieg der bestätigten Fälle befinden. Der 11.03.2020 entspricht dem Tag 15 in der obigen Darstellung. Der Verlauf der Kurve sieht allerdings nicht mehr aus wie der Graph einer linearen Funktion. In dem Fall wäre der Graph nämlich eine Gerade. Bei einer linearen Zunahme würde die Anzahl der Infizierten täglich um denselben Wert steigen. Das ist hier nicht mehr der Fall. Daher ist der Aussage des Bildungsministers nicht zuzustimmen.
3. Betrachtet man die Daten von Tag 0 bis Tag 18, so kann man die Anzahl der Infizierten in diesem Zeitraum nicht mit einer linearen Funktion modellieren, da die Anzahl der Infizierten immer mehr zunimmt. Bei einer linearen Zunahme würde die Anzahl der Infizierten jeden Tag um den gleichen Wert ansteigen. Daher würde ich diese Daten nicht mit einer linearen Funktion modellieren. Für die Gesellschaft bedeutet dieser Verlauf, dass immer mehr und mehr Menschen erkranken werden, bis die Krankenhäuser im schlimmsten Fall irgendwann überlastet sind. Je nachdem, wie schnell die Zahlen steigen, könnte das auch sehr schnell gehen.
4. Eine lineare Funktion f mit $f(x) = kx + d$ für den dritten Zeitraum kann mithilfe von zwei Datenpunkten aufgestellt werden: $f(12) = 112$ und $f(18) = 800$. Mit diesen Informationen erhält man ein Gleichungssystem mit zwei unbekannten:

$$I : k \cdot 12 + d = 112$$

$$II : k \cdot 18 + d = 800$$

Dieses Gleichungssystem kann z.B. mittels Additionsverfahren gelöst werden. Multipliziert man die zweite Gleichung mit (-1) und addiert sie zur ersten, erhält man folgendes:

$$-6k = -688$$

$$k = \frac{344}{3}$$

Setzt man den Wert für k beispielsweise in Gleichung I ein, so erhält man für den y-Achsenabschnitt d folgenden Wert:

$$d = -1264$$

Den Zeitraum von Tag 12 bis Tag 18 könnte man daher näherungsweise mit der linearen Funktion f mit $f(x) = \frac{344}{3}x - 1264$ modellieren. Man könnte zum Beispiel auch die Daten von Tag 0 bis Tag 5 und von Tag 6 bis Tag 11 mithilfe einer linearen Funktion modellieren.

6.4 Exponentielle Modelle: Anzahl der Neuinfektionen in Österreich und den USA

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Reelle Funktionen

- Exponentialfunktionen ($f(x) = a \cdot b^x$) definieren und darstellen können; typische Formen ihrer Graphen skizzieren können; charakteristische Eigenschaften angeben und im Kontext deuten können.
- Insbesondere Exponentialfunktionen, in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und Grenzen von Modellbildungen reflektieren können.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
FA 5.3	Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. $e^{\lambda x}$) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.
FA 5.6	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können.
FA 2.5	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können.

Das soll gefördert werden:

- Gesundheitsdaten in einen mathematischen Kontext setzen.
- Die Auswirkungen politischer Maßnahmen mathematisch begründen.

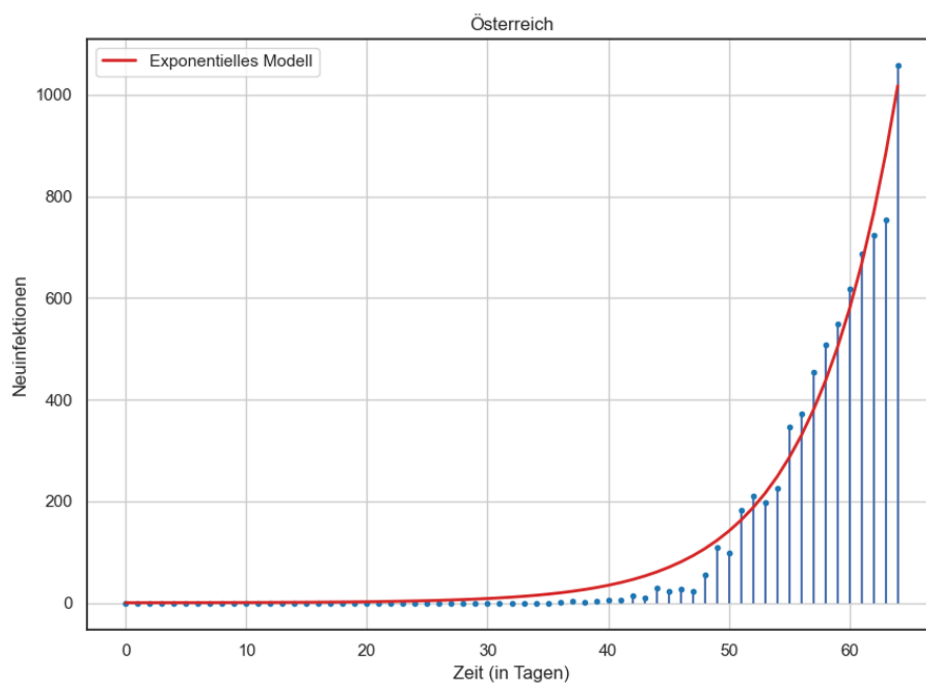
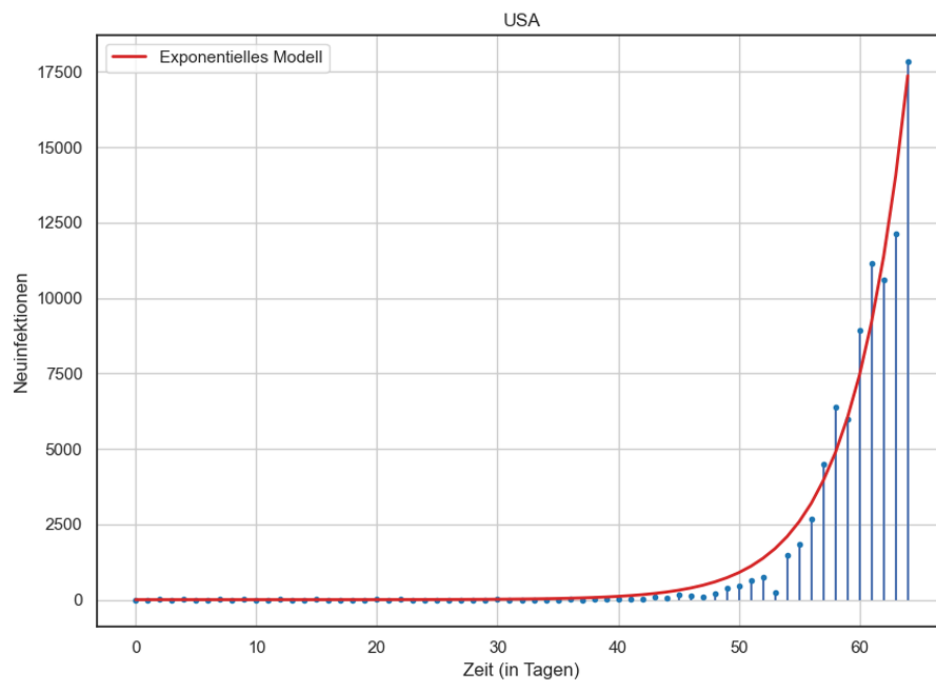
Aufgabenstellung:

Gerade der Beginn einer Epidemie lässt sich meist gut durch ein exponentielles Modell abbilden. In der folgenden Abbildung sind die Ausbrüche der Corona-Epidemie in Österreich sowie den USA zu sehen. Die Anzahlen der Neuinfektionen (blau) wurden in beiden Fällen durch eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = N_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$ angenähert.

Für die Daten aus den USA gilt: $f_1(x) = 0,0227 \cdot \exp(0,2117 \cdot t)$.

Für die Daten aus Österreich gilt: $f_2(x) = 0,1217 \cdot \exp(0,1411 \cdot t)$.

6.4 Exponentielle Modelle: Anzahl der Neuinfektionen in Österreich und den USA



1. Berechne für beide Länder den Änderungsfaktor a und interpretiere diese Werte im Kontext.
2. Berechne mithilfe der Funktionsgleichungen die Zahl der Neuinfektionen am hundertsten Tag nach dem Ausbruch der Epidemie und vergleiche die Werte der beiden Länder miteinander. Erläutere anhand deiner Ergebnisse auch die Sinnhaftigkeit dieser mathematischen Modellierung!
3. Berechne für beide Länder die Verdopplungszeit τ .
4. Um die Epidemie in den Griff zu bekommen, wurden in Österreich Maßnahmen zur Eindämmung des Infektionsgeschehens (z.B. social distancing, Lockdowns usw.) gesetzt. Erläutere den Einfluss dieser Maßnahmen auf die beiden Parameter N_0 und λ bzw. a des exponentiellen Modells. Recherchiere, ob auch die USA politische Maßnahmen zur Eindämmung der Epidemie gesetzt haben.

Lösungserwartung:

1. Es gilt der Zusammenhang $a = e^\lambda$.
Daher gilt für die USA $a = e^{0,2117} \approx 1,2358$. Die Zahl der Neuinfektionen steigt daher in den USA in den ersten 64 Tagen um ca. 23,58% pro Tag.
Für Österreich gilt $a = e^{0,1411} \approx 1,1515$. In Österreich steigt daher die Zahl der Neuinfektionen in den ersten 64 Tagen um ca. 15,15% pro Tag.
2. Für die USA gilt: $f(100) = 0,0227 \cdot \exp(0,2117 \cdot 100) \approx 35484610$.
Für Österreich gilt: $f(100) = 0,1217 \cdot \exp(0,1411 \cdot 100) \approx 163375$.
In den USA gibt es am Tag 100 nach Ausbruch der Epidemie laut dem exponentiellen Modell schon ca. 217-mal mehr Neuinfektionen als in Österreich. Hervorzuheben ist, dass diese Zahlen für beide Länder unrealistisch erscheinen und zeigen, dass hier das exponentielle Modell keine geeignete Näherung mehr darstellt.
3. Die Verdopplungszeit wird wie folgt berechnet:

$$2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot \tau} \quad (66)$$

$$2 = e^{\lambda \cdot \tau} \quad (67)$$

$$\ln(2) = \lambda \cdot \tau \cdot \ln(e) \quad (68)$$

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad (69)$$

Daher gilt für die Verdopplungszeit in den USA:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{0,2117} \approx 3,27 \quad (70)$$

Und für die Verdopplungszeit in Österreich:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{0,1411} \approx 4,91 \quad (71)$$

Die Verdopplungszeit in den USA beträgt im betrachteten Zeitraum ca. 3,27 Tage und in Österreich 4,91 Tage.

4. Maßnahmen wie etwa social distancing, Lockdowns, Schulschließungen usw. beeinflussen den Parameter λ bzw. a des exponentiellen Modells. Der Wert dieses Parameters wird dadurch kleiner. Der Startwert N_0 kann damit jedoch nicht beeinflusst werden. Auch in den USA gab es in allen Bundesstaaten Schulschließungen, jedoch gab es keinen landesweiten Lockdown. Hier wurden die Entscheidungen von den einzelnen Staaten separat getroffen. Das hatte auch zur Folge, dass es einige wenige Staaten gibt, in denen Bars und Lokale weiterhin geöffnet blieben.

6.5 Exponentielle Modelle: Infektionszahlen in Deutschland

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Reelle Funktionen

- Exponentialfunktionen ($f(x) = a \cdot b^x$) definieren und darstellen können; typische Formen ihrer Graphen skizzieren können; charakteristische Eigenschaften angeben und im Kontext deuten können.
- Insbesondere Exponentialfunktionen in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und Grenzen von Modellbildungen reflektieren können.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
FA 5.3	Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. $e^{\lambda x}$) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.
FA 5.6	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können.
FA 2.5	Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können.

Aufgabenstellung:

Gerade der Beginn einer Epidemie kann häufig durch exponentielle Modelle angenähert werden – das gilt auch für den Beginn der Corona-Pandemie in Deutschland im Jahr 2020. In der folgenden Tabelle sind die Anzahlen der Neuinfektionen in Deutschland zu Beginn der Corona-Pandemie (Tag 1 entspricht dem 26.02.2020) gelistet¹²:

Tag	Anzahl der Neuinfektionen
1	3
2	7
3	21
4	42
5	23
6	35
7	37
8	63
9	143
10	174
11	160
12	140
13	111
14	307
15	517
16	685
17	916
18	1317
19	1187
20	961
21	2054

Abbildung 26: Anzahl der Neuinfektionen pro Tag in Deutschland ab dem 26.02.2020.

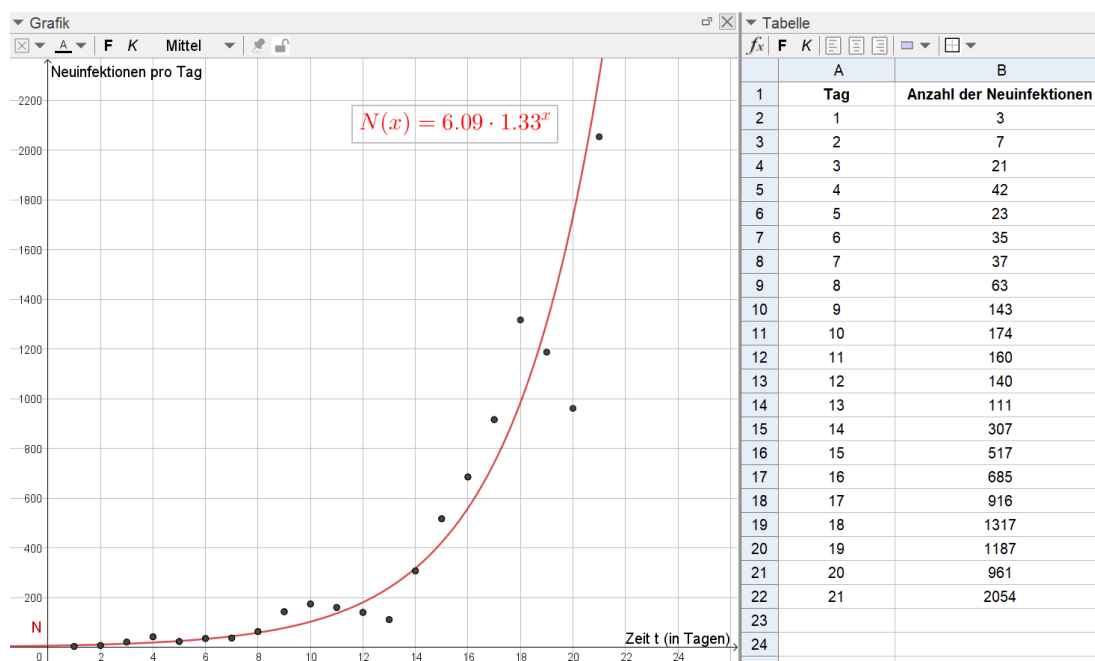
1. Übertrage die Daten in GeoGebra und erstelle eine Liste von Punkten. Nutze dann den Befehl *TrendExp2*, um eine exponentielle Trendlinie zu erhalten, die die Daten bestmöglich mit einer Funktion der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ annähert. Lies die beiden Parameter N_0 und den Änderungsfaktor a ab und interpretiere die Werte im Kontext.
2. Berechne mithilfe der erhaltenen exponentiellen Funktion die Anzahl der Neuinfektionen am 01.04.2020. Vergleiche den Wert des Modells mit dem tatsächlichen Datenpunkt und gib an, ob dieser Zeitraum sinnvoll durch ein exponentielles Modell angenähert werden kann.

¹²Quelle der Daten:

<https://interaktiv.morgenpost.de/corona-virus-karte-infektionen-deutschland-weltweit/>, abgerufen am 20.03.2022.

Lösungserwartung:

1. Die gelöste Aufgabe in GeoGebra sieht wie folgt aus:



Das exponentielle Modell liefert die Parameter $N_0 \approx 6,098$ und $a \approx 1,33$. Das bedeutet, dass sich am 26.02.2022 in Deutschland ca. 6 Personen neu infiziert haben und die Anzahl der Neuinfektionen in dem betrachteten Zeitraum um ca. 33% pro Tag zunimmt.

2. Der 31.03.2020 entspricht dem Tag 35.

Daher gilt: $f(35) = 6,09 \cdot 1,33^{35} \approx 131651$. Laut dem exponentiellen Modell gäbe es demnach am 31.03.2020 in Deutschland 131 651 Neuinfektionen. Der tatsächliche Wert der Neuinfektionen am 31.03.2020 in Deutschland lag jedoch bei 3802. Somit ist das exponentielle Modell keine gute Näherung für den gesamten Bereich bis hin zum 31.03.2020.

6.6 Logistisches Wachstum: Coronazahlen in Deutschland

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Ungleichungen; Reelle Funktionen

- Mit Ungleichungen in einer Variablen arbeiten und diese lösen können
- Reelle Funktionen in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und Grenzen von Modellbildungen reflektieren können

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AG 2.4	lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen deuten können
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

Das soll gefördert werden:

- mit tabellarischen Daten umgehen können
- Grenzen der Modellbildung reflektieren können

Aufgabenstellung:

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der mit Corona infizierten Personen in Deutschland ab dem 10. März 2020 :

t	0	1	2	3	4	5	6
N(t)	1140	1300	1570	2370	3060	3800	4840

Die Anzahl der Infizierten kann auch mithilfe der folgenden logistischen Wachstumsfunktion modelliert werden: $N(t) = \frac{48600}{1+41,4 \cdot e^{-0,25t}}$, wobei N die Anzahl der Infizierten beschreibt und t die Zeit ab dem 10. März 2020 in Tagen [38].

1. Vergleiche grafisch die obigen Datenpunkte mit den Werten der Modellfunktion für ein logistisches Wachstum!

2. Berechne die Anzahl der Infizierten für den Zeitraum vom 17. bis zum 21. März 2020 in Deutschland mithilfe der Modellfunktion.
3. Berechne jenen Zeitpunkt, ab dem sich mehr als 25000 Personen infiziert haben werden.
4. Erläutere, warum sich längerfristig eine logistische Wachstumsfunktion besser für die Modellierung der Anzahl der Infizierten eignet, als eine exponentielle Wachstumsfunktion!

Lösungserwartung:

1. Abbildung 27 zeigt den Verlauf der logistischen Modellfunktion sowie die Datenpunkte für die ersten 6 Tage. Ein grafischer Vergleich zeigt, dass die Datenpunkte in diesem Zeitraum gut mit den Werten der Modellfunktion übereinstimmen.

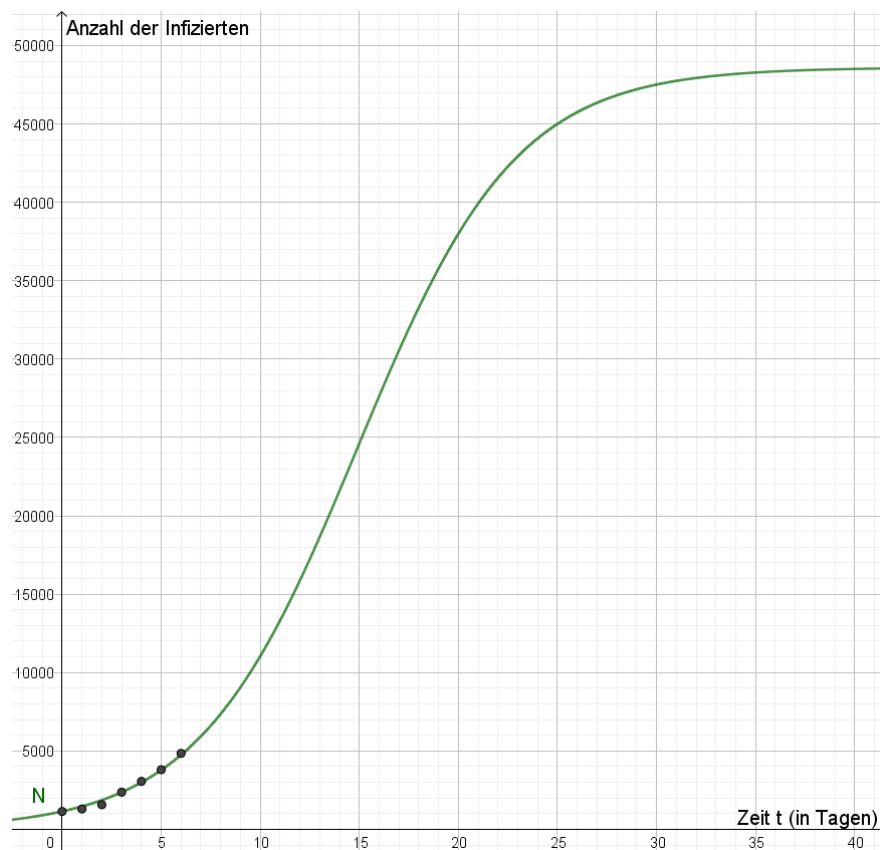


Abbildung 27: Logistische Wachstumsfunktion N sowie die tatsächliche Anzahl der mit Corona infizierten Personen in Deutschland für die ersten 6 Tage ab dem 10. März 2020.

2. Mithilfe der logistischen Modellfunktion erhält man für den Zeitraum vom 17. bis zum 21. März 2020 folgende Werte für die Anzahl der Corona-Infizierten in Deutschland:

Datum	17.03.	18.03.	19.03.	20.03.	21.03
Anzahl der Infizierten	5900	7360	9060	11050	13330

3. Um den Zeitpunkt zu berechnen, ab dem sich mehr als 25000 Personen mit Corona infiziert haben werden, muss folgende Ungleichung gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 N(t) &> 25000 \\
 \frac{48600}{1 + 41,4 \cdot e^{-0,25t}} &> 25000 \\
 48600 &> 25000 \cdot (1 + 41,4 \cdot e^{-0,25t}) \\
 1,92 &> 1 + 41,4 \cdot e^{-0,25t} \\
 0,92 &> 41,4 \cdot e^{-0,25t} \\
 \frac{0,92}{41,4} &> e^{-0,25t} \\
 \ln\left(\frac{0,92}{41,4}\right) &> -0,25t \\
 \frac{\ln\left(\frac{0,92}{41,4}\right)}{-0,25} &< t \\
 t &> 15,2266... \approx 16
 \end{aligned}$$

16 Tage nach dem 10. März werden sich mehr als 25000 Personen mit Corona infiziert haben. Das entspricht dem Datum des 26. März 2020.

4. Bei einer Modellierung durch ein exponentielles Wachstum würde im Rahmen dieses Modells die Anzahl der Infizierten beliebig hoch steigen. In der Realität ist das jedoch keineswegs der Fall, da die Anzahl der Personen, die sich potenziell infizieren können, begrenzt ist. Da das logistische Wachstum ein begrenztes Wachstum darstellt, eignet sich dieses besser für die Modellierung dieser Situation.

6.7 Änderungsmaße: Corona-Neuinfektionen in Österreich

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Reelle Funktionen:

- Änderungen von Größen durch Änderungsmaße beschreiben können (absolute und relative Änderung, mittlere Änderungsrate, Änderungsfaktor).

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AN 1.1	absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
FA 1.4	aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können
FA 1.7	Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können

Das soll gefördert werden:

- Mathematisch argumentieren und begründen.
- Ergebnisse in einen Kontext setzen und interpretieren können.

Aufgabenstellung:

Im Oktober 2021 stiegen die Zahlen der Corona-Neuinfektionen abermals an. Die folgende Tabelle zeigt einen Ausschnitt der neuen Coronafälle für Österreich im Oktober 2021:

Datum	Anzahl der Corona-Neuinfektionen
12.10.2021	1309
14.10.2021	2169
16.10.2021	2397
19.10.2021	2590
20.10.2021	3727
23.10.2021	3756
26.10.2021	3369

1. Berechne die mittlere Änderungsrate in der Zeit von (1) 12.-14.10.2021, (2) 19.-20.10.2021 und (3) 23.-26.10.2021. Interpretiere diese Werte jeweils im Kontext und vergleiche sie miteinander.

2. Argumentiere mithilfe der Differenzenquotienten aus 1., ob es sinnvoll wäre, diesen Datenbereich mit einer linearen Funktion zu modellieren.

Lösungserwartung:

1. Die mittlere Änderungsrate wird mithilfe folgender Formel berechnet:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Somit erhält man für (1) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2169-1309}{2} = 430$, für (2) $\frac{3727-2590}{1} = 1137$ und für (3) $\frac{3369-3756}{3} = -129$. Die Zahl der Corona-Neuinfektionen stieg daher von 12.-14.10.2021 durchschnittlich um 430 neue Fälle pro Tag an und von 19.10. auf 20.10. um durchschnittlich 1137 an. Von 23.10.-26.10.2021 nahm die Zahl der Neuinfektionen um durchschnittlich 129 Fälle pro Tag ab. Die mittlere Änderungsrate weist in diesem kurzen Zeitraum von ca. zwei Wochen große Schwankungen auf. Sie ist daher kein geeignetes Änderungsmaß zur Beschreibung der Entwicklung der Anzahl der Neuinfektionen.
2. Aufgrund der großen Schwankungen der mittleren Änderungsrate in 1. ist es nicht sinnvoll, diesen Datenbereich mit einer linearen Funktion zu modellieren. Die Modellierung mit einer linearen Funktion ist dann sinnvoll, wenn die mittlere Änderungsrate in etwa konstant ist, weil diese der Steigung der linearen Funktion entspricht.

6.8 Statistiken und Umfragen: Impfbereitschaft in Österreich und Deutschland

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Beschreibende Statistik:

- Darstellungen und Kennzahlen der beschreibenden Statistik kennen und damit arbeiten können
- Bestimmung eines relativen Anteils

Grundkompetenzen:

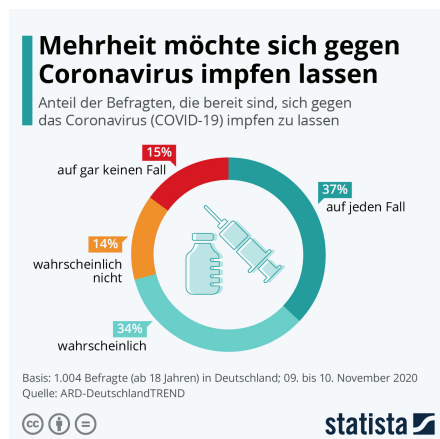
Bezeichnung	Beschreibung
WS 1.1	Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln, d. h. aus den Grafiken ablesbare Daten zur Berechnung weiterer Kennzahlen verwenden können) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

Das soll gefördert werden:

- Interpretieren und Vergleichen von Statistiken.
- Reflektierter Umgang mit Informationen aus den Medien.

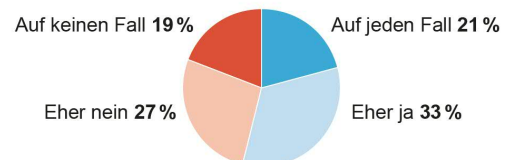
Aufgabenstellung:

Betrachte die beiden Statistiken zum Thema Coronavirus-Impfung und bearbeite die nachfolgenden Aufgabenstellungen:



Impfbereitschaft der Österreicher

„Würden Sie sich mit einem Impfstoff gegen das Coronavirus impfen lassen?“



Umfrage September/Oktober 2020, 545 Befragte

Grafik: © APA, Quelle: Wiener Städtische

APA

1. Berechne, wie viele Personen unter allen Befragten in Österreich sowie auch in Deutschland angeben, dass sie sich gegen das Coronavirus impfen lassen werden. Erkläre auch, warum es sinnvoll ist die Ergebnisse der beiden Umfragen in relativen und nicht in absoluten Häufigkeiten anzugeben.
2. Nimm an, dass die Umfrageergebnisse der Stichprobe das Meinungsbild der Grundgesamtheit aller Österreicher:innen widerspiegeln. Wie viele Personen in ganz Österreich würden sich demnach dann auf keinen Fall impfen lassen?
3. Beim Vergleichen und Interpretieren von Umfrageergebnissen ist immer Vorsicht geboten. Gib an, welche Informationen zur Durchführung der beiden Umfragen bekannt sind und beschreibe auch, welche Informationen noch offen sind bzw. nicht angegeben sind. Begründe, warum es wichtig ist, diese Aspekte zu beachten.

Lösungserwartung:

1. In Deutschland geben $1004 \cdot 0,37 \approx 371$ der befragten Personen an, sich auf jeden Fall impfen zu lassen. Unter allen Befragten in Österreich geben $545 \cdot 0,21 \approx 114$ Personen an, sich auf jeden Fall impfen zu lassen. Eine Angabe der relativen Häufigkeiten ist hier sinnvoller, da man die relativen Häufigkeiten direkt miteinander vergleichen kann: In Österreich würden sich 21% und in Deutschland 37% der Befragten auf jeden Fall impfen lassen. Die Impfbereitschaft in Deutschland ist somit höher. Der Vergleich der absoluten Häufigkeiten wäre nur sinnvoll, wenn auch der Stichprobenumfang angegeben wird.
2. Wenn man annimmt, dass die Umfrageergebnisse tatsächlich das Meinungsbild aller Österreicher:innen widerspiegeln, und dass in Österreich derzeit ca. 8,917 Mio. Menschen leben, so würden sich $8,917 \cdot 10^6 \cdot 0,19 \approx 1,6$ Mio. Menschen nicht impfen lassen.
3. In Österreich wurden 545 Personen im September/Oktober 2020 befragt. Es gibt keine Informationen zum Alter der Befragten, zur Geschlechterverteilung oder zum Durchführungsort der Umfrage. In Deutschland wurden 1004 Personen ab 18 Jahren befragt. Auch hier gibt es keine Informationen zur Geschlechterverteilung oder zum Durchführungsort der Umfrage. Für einen Vergleich und auch eine Interpretation der Umfrageergebnisse ist es wichtig, solche Informationen zu beachten. Eine Umfrage in ländlichen Gebieten kann ganz anders ausfallen als in städtischen Gebieten, ebenso können die Ergebnisse sehr von der Altersverteilung der Befragten abhängen. Um eine Stichprobe zu erhalten, die repräsentativ für ganz Österreich steht, ist es wichtig, alle Teile der Bevölkerung widerzuspiegeln.

6.9 Bedingte Wahrscheinlichkeiten: SARS-CoV-2 Antigen Schnelltest

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundbegriffe:

- Den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit kennen und verständlich einsetzen.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
WS 2.2	Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können

Das soll gefördert werden:

- Arbeiten mit tabellarischen Darstellungen

Aufgabenstellung:

In Österreich sind SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltests von mehreren Firmen am Markt erhältlich. Die Firma VivaChek Biotech gibt im Beipackzettel zum Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen Schnelltest unter Anderem folgende Information:

Insgesamt 533 Proben wurden mit dem VivaDiagTM SARS-CoV-2 Ag Schnelltest getestet. Diese Proben bestanden aus Nasopharynxabstrichen von symptomatischen Patienten. Die Leistung des VivaDiagTM SARS-CoV-2 Ag Schnelltests wurde mit einem kommerziellen molekularen Assay verglichen.

Tabelle: Zusammenfassung der Sensitivität/Spezifität des VivaDiagTM SARS-CoV-2 Ag Schnelltest im Vergleich zur PCR.

VivaDiag TM Pro SARS-CoV-2 Ag Schnelltest	PCR		
	positiv	negativ	Gesamt
positiv	99	0	99
negativ	3	431	434
Gesamt	102	431	533

Abbildung 28: Ausschnitt aus dem Beipackzettel des Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest der Firma VivaChek Biotech.

Des Weiteren wird im Beipackzettel behauptet, dass der Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest eine klinische Sensitivität von 97,06% sowie eine klinische Spezifität von 100% aufweist.

(Anmerkung: Bei einem medizinischen Test bezeichnet die Sensitivität die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine infizierte Person durch den durchgeführten Test auch tatsächlich als infiziert erkannt wird. Die Spezifität bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gesunde Person auch tatsächlich als gesund erkannt wird.)

1. Bestätige oder widerlege die oben genannten Behauptungen!
2. Angenommen, du machst einen Schnelltest der Firma VivaChek Biotech und er fällt negativ aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass du dennoch mit dem Corona-Virus infiziert bist?
3. Wie groß ist laut obiger Tabelle die Wahrscheinlichkeit für ein falsch-positives Schnelltest-Ergebnis?
4. Fasse nochmals in eigenen Worten zusammen, was man aufgrund der Information aus dem Beipackzettel über die entnommene Stichprobe weiß. Gibt es Informationen, die ebenfalls relevant wären, aber nicht genannt werden? Argumentiere anschließend, wie man noch genauere Schätzwerte für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten erhalten könnte!

Lösungserwartung:

1. Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass der Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest in 99 von insgesamt 102 positiven Fällen ein ebenfalls positives Ergebnis liefert. Daher gilt:

$$P(\text{Schnelltest positiv} | \text{PCR positiv}) = \frac{99}{102} = 0,970588... \approx 97,06\% \quad (72)$$

Analog kann entnommen werden, dass der Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest in 431 von insgesamt 431 negativen Fällen ein ebenfalls negatives Ergebnis liefert. Daher gilt:

$$P(\text{Schnelltest negativ} | \text{PCR negativ}) = \frac{431}{431} = 1 = 100\% \quad (73)$$

Die Behauptungen aus dem Beipackzettel können daher bestätigt werden: Der Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest weist eine klinische Sensitivität von 97,06% sowie eine klinische Spezifität von 100% auf.

2. Unter insgesamt 102 positiven Fällen zeigte der Schnelltest in 3 Fällen ein negatives Ergebnis an. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein negatives Schnelltest-Ergebnis zu erhalten, aber dennoch mit dem Corona-Virus infiziert zu sein:

$$P(\text{Schnelltest negativ} | \text{PCR positiv}) = \frac{3}{102} = 0,02941... \approx 2,94\% \quad (74)$$

3. Laut Tabelle lieferte der Schnelltest in Null von 431 PCR-negativen Fällen ein positives Ergebnis. Daher gilt:

$$P(\text{Schnelltest positiv} | \text{PCR negativ}) = \frac{0}{431} = 0 = 0\% \quad (75)$$

4. Es wurden Proben von 533 symptomatischen Patient:innen entnommen. Diese Patient:innen wurden sowohl einem Viva-DiagTM SARS-CoV-2 Antigen (Ag) Schnelltest als auch einem PCR-Test unterzogen. Genauere Informationen zum PCR-Test fehlen (Sensitivität und Spezifität). Um genauere Werte zu erhalten, könnte man den Stichprobenumfang deutlich vergrößern. Außerdem waren unter 533 Personen nur 102 positive Patient:innen. Interessant wäre es, vor allem diesen Anteil zu vergrößern. Des Weiteren fehlt auch die genaue Definition des Begriffs symptomatisch: inwiefern waren die Patient:innen symptomatisch und welche Symptome hatten sie? Waren die auftretenden Symptome über die gesamte Stichprobe hinweg vergleichbar?

6.10 Baumdiagramme und bedingte Wahrscheinlichkeiten: SARS-CoV-2 Antigen Schnelltest

Schulstufe: 6. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Grundbegriffe:

- Den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit kennen und verständlich einsetzen.
- Additionsregel und Multiplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten anwenden und interpretieren
- Situationen mit Hilfe von Baumdiagrammen darstellen und diese Darstellungen interpretieren

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
WS 2.2	Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können
WS 2.3	Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

Das soll gefördert werden:

- Mathematisch argumentieren, beschreiben und begründen
- Komplexe Zusammenhänge erkennen und den Einfluss einzelner Parameter einschätzen können

Aufgabenstellung:

„Probleme mit der Statistik bei positiven Schnelltests“ lautet eine Schlagzeile des Norddeutschen Rundfunks (NDR) am 24.04.2021. Denn laut dem Hamburger Senat, lag die Rate der falsch positiven Schnelltest-Ergebnisse“ in den Wochen vom 22. März bis zum 11. April bei 31,5%.¹³ Worum geht es hierbei? Die Antigen-Schnelltest-Ergebnisse müssen im Hinblick auf das gesamte Infektionsgeschehen betrachtet werden. Die Aussagekraft der Testergebnisse hängt nicht nur von Spezifität und Sensitivität des Tests ab, sondern auch vom Infektionsgeschehen, d.h. vom Anteil der Infizierten unter allen Getesteten. Die Abbildung 29 soll den Einfluss der tatsächlich infizierten Personen auf die Testergebnisse zeigen.

¹³<https://www.ndr.de/nachrichten/hamburg/coronavirus/Probleme-mit-der-Statistik-bei-positiven-Schnelltests,schnelltests166.html>, abgerufen am 25.06.2021.

1. Ergänze die fehlenden Werte in den weißen Kästchen der Grafik!
2. Zufällig hörst du eine Gruppe von Eltern vor dem Schulgebäude diskutieren: „Ich halte nicht viel von diesen Schultests, immerhin sind sowieso immer so viele Tests falsch-positiv!“, meint einer der Väter. Vergleiche die beiden Baumdiagramme und überlege, wodurch eine hohe falsch-positiv Rate hervorgerufen wird. Was könntest du im Falle einer solchen Diskussion antworten?

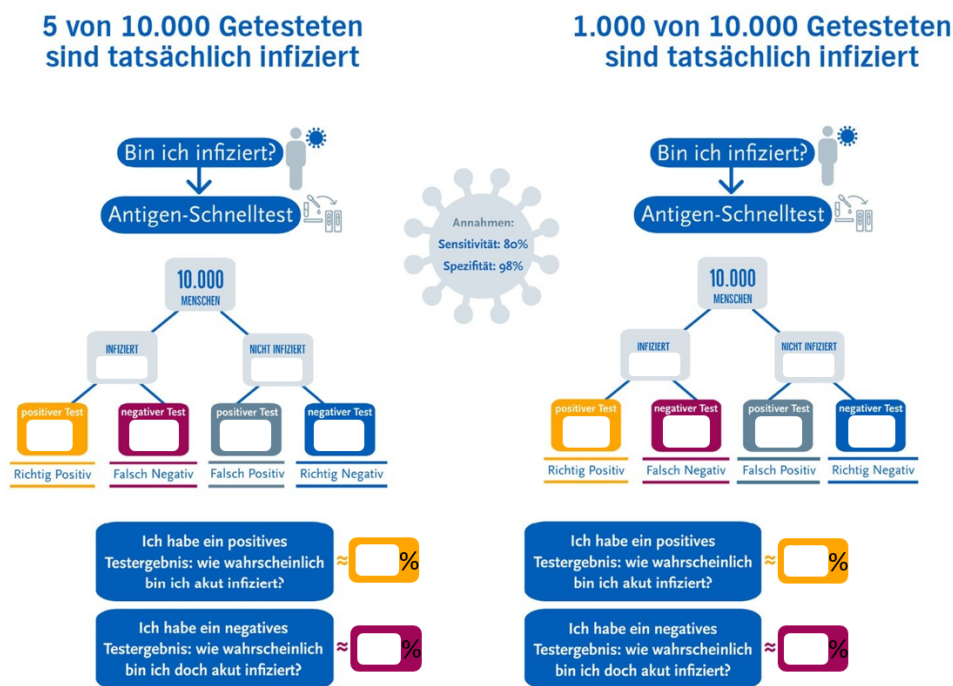
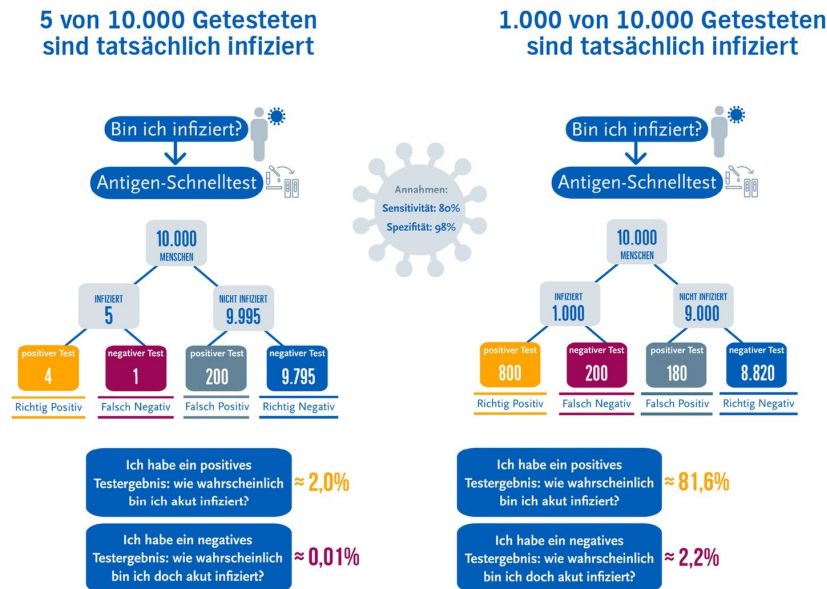


Abbildung 29: Einfluss der tatsächlich infizierten Personen auf die Testergebnisse der Antigen-Schnelltests.

Lösungserwartung:

1. Die Grafik wird wie folgt ergänzt:



2. Wie viele Tests falsch-positiv sind, hängt stark vom Infektionsgeschehen ab. Man erkennt anhand der beiden Baumdiagramme, dass in beiden Darstellungen jeweils 10000 Personen getestet wurden, im linken Baumdiagramm allerdings 200 falsch-positive Tests auftreten und im rechten Baumdiagramm 180 wohingegen jedoch auch 800 Ergebnisse richtig-positiv sind. Anders gesagt: Im linken Diagramm sind 200 von insgesamt 204 positiven Tests falsch. Im rechten Diagramm sind jedoch nur 180 von insgesamt 980 positiven Tests falsch. Die falsch-positiv Rate hängt somit auch davon ab, wie groß der Anteil der tatsächlich Infizierten unter den Getesteten ist.

6.11 Differentialgleichungen: Der Beginn einer Epidemie im SIR-Modell

Schulstufe: 8. Klasse AHS

Lehrplanbezug: Differenzen- und Differentialgleichungen; Grundlagen der Systemdynamik

- Kontinuierliche Veränderungen von Größen durch Differentialgleichungen beschreiben und diese im Kontext deuten können.
- Einfache Differentialgleichungen lösen können.
- Einfache dynamische Systeme mit Hilfe von Diagrammen oder Differenzengleichungen beschreiben und untersuchen können.

Grundkompetenzen:

Bezeichnung	Beschreibung
AN 1.4	Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Das soll gefördert werden:

- Mathematisch argumentieren, beschreiben und begründen
- Komplexe Zusammenhänge erkennen und den Einfluss einzelner Parameter einschätzen können

Aufgabenstellung:

Eine Epidemie kann vereinfacht mit dem SIR-Modell mathematisch modelliert werden. Dabei bezeichnet $S(t)$ den relativen Anteil an gefährdeten Personen der Gesamtbevölkerung, $I(t)$ den relativen Anteil an infizierten Personen der Gesamtbevölkerung und $R(t)$ den relativen Anteil an genesenen Personen der Gesamtbevölkerung. Es gilt daher: $S(t) + I(t) + R(t) = 1$. Zu Beginn einer Epidemie kann die zeitliche Veränderung (t in Tagen) des Anteils der Infizierten vereinfacht mithilfe der folgenden Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\frac{dI}{dt} \approx (\beta - \gamma)I . \quad (76)$$

Der Parameter $-\beta$ kann dabei als Infektionsrate und γ als Gesundungsrate interpretiert werden.

1. Löse diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$.
2. Setze nun $\beta = 0,136$ und $\gamma = 0,079$ [39] und stelle die Funktion I mithilfe der Software GeoGebra grafisch dar. Erstelle für I_0 einen Schieberegler mit Startwert 0 und Endwert 1 und beschreibe in eigenen Worten, wie sich $I(0)$ auf den Funktionsverlauf auswirkt. *Tipp: Auf der y-Achse ist der relative Anteil der Infizierten dargestellt. Wähle daher in der Grafikeinstellung $y_{max} = 1$.*
3. Nimm nun an, dass zu Beginn in einer Grundgesamtheit von 100 Personen genau eine Person infiziert war. Berechne mithilfe der in 1. erhaltenen Funktion I und den Parameterwerten aus 2., wie viel Prozent der Population nach 30 Tagen bereits infiziert sind.
4. Verwende weiterhin die Werte aus 2. und 3. und gib nun an, ab welchem Zeitpunkt dieses Modell auf jeden Fall keine sinnvolle Näherung mehr darstellt. Begründe deine Antwort!

Lösungserwartung:

1. Zu lösen ist die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dI}{dt} \approx (\beta - \gamma)I . \quad (77)$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{1}{I}dI \approx (\beta - \gamma)dt \quad (78)$$

$$\int \frac{1}{I}dI \approx \int (\beta - \gamma)dt \quad (79)$$

$$\ln(I(t)) \approx (\beta - \gamma) \cdot t + c \quad (80)$$

$$I(t) \approx e^{(\beta - \gamma) \cdot t + c} \quad (81)$$

$$I(t) \approx e^{(\beta - \gamma) \cdot t} \cdot e^c , \quad (82)$$

$$(83)$$

mit der Integrationskonstante c . Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ liefert: $e^c = I_0$. Somit erhält man näherungsweise für die Zahl der Infizierten zu Beginn einer Epidemie:

$$I(t) \approx I_0 e^{(\beta - \gamma)t} . \quad (84)$$

2. Man erkennt, dass der Parameter I_0 der Anteil der Infizierten zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Je größer I_0 , desto höher der Startwert der Funktion und desto größer der relative Anteil der Infizierten zum Zeitpunkt $t = 0$.
3. Wenn man annimmt, dass zu Beginn eine Person von 100 infiziert ist, gilt: $I_0 = 0,01$. Beispielsweise erhält man dann mithilfe von GeoGebra $I(30) = 0,055$. Daher sind laut diesem Modell nach 30 Tagen ca. 5,5% der Population infiziert.
4. Wie man am Graphen in der Grafiksicht von GeoGebra erkennt, wächst die Modellfunktion I unbegrenzt exponentiell. Das ist jedoch kein sinnvolles Modell, da auf der y-Achse der relative Anteil der Infizierten aufgetragen ist. Dieser kann den Wert 1 jedoch nicht überschreiten.
Löst man die Gleichung $1 = 0,01 \cdot \exp((0,136 - 0,079)t)$, so erhält man $t = 80,79... \approx 80$. Somit liefert jenes Modell spätestens nach ca. 80 Tagen keine sinnvolle Näherung mehr, voraussichtlich jedoch schon früher, da laut Angabetext nur der Beginn der Epidemie sinnvoll angenähert werden kann.

Kapitel 7 Schluss

7.1 Persönliches Fazit

Da ich persönlich das Masterstudium Lehramt Mathematik und Physik berufsbegeleitend absolviere, war es mir möglich, die Aufgabenstellungen 6.3, 6.8, 6.9 und 6.10 auch tatsächlich im Rahmen meines Mathematikunterrichts einzusetzen. Dabei konnte ich feststellen, dass sich diese vier Aufgaben als praxistauglich erwiesen haben. Sowohl der zeitliche Aspekt als auch das Anforderungsniveau waren für meine Schüler:innengruppe adäquat. Die Aufgabenstellung 6.3 haben meine Schüler:innen im Rahmen einer Hausübung bearbeitet, die ausnahmslos von allen pünktlich, ordentlich und vollständig abgegeben wurde. Die Aufgabenstellung 6.8 wurde im Rahmen einer Partnerarbeit im Unterricht bearbeitet. Aus dieser heraus ist dann aufgrund des hohen Interesses der Schüler:innen ein Projekt zum Thema Statistik entstanden. Im Zuge dieses Projekts haben die Lernenden ein kurzes Portfolio erstellt, in dem sie Statistiken zur Corona-Thematik präsentiert und reflektiert haben. Ebenso wurde die Aufgabenstellung 6.9 im Unterricht behandelt und im Anschluss daran die Aufgabenstellung 6.10 in Form einer Hausübung bearbeitet. Auch der Einsatz dieser beiden Aufgabenstellungen hat dazu geführt, dass angeregte Gespräche und Diskussionen über Mathematik im Klassenraum entstanden sind. Zu betonen ist jedoch, dass die Schüler:innenlösungen bei Handlungsaufforderungen der Form *begründe*, *erkläre*, *beschreibe* sowie *interpretiere* meist deutlich kürzer und weniger genau als in der Lösungserwartung ausfielen. Was mich als Lehrperson dennoch besonders erfreut hat, war, dass vor allem Aufgabenstellung 6.10 auch in den Pausen und in anderen Unterrichtsstunden von den Schüler:innen wieder aufgegriffen bzw. angesprochen wurde. Ich persönlich schließe daraus, dass man durch das Einbringen aktueller Themen und das Aufzeigen der Relevanz von Mathematik einen lebendigen Unterricht ermöglichen kann. Ich habe den Eindruck gewonnen, dass die Motivation meiner Schüler:innen beim Bearbeiten dieser Aufgabenstellungen höher war, als beim Bearbeiten herkömmlicher Aufgabenstellungen aus dem Schulbuch. Des Weiteren glaube ich, dass sie trotz der anfänglichen Schwierigkeiten bzw. Unsicherheiten in Bezug auf die Handlungsaufforderungen *begründe*, *erkläre*, *beschreibe* sowie *interpretiere* im Laufe der Zeit ihre Selbstsicherheit ausbauen konnten und sich mittlerweile auch zutrauen, solche Aufgabenstellungen ausführlicher zu bearbeiten.

Natürlich bietet die SARS-CoV-2-Pandemie noch weitere unzählige Einsatzmöglichkeiten im Mathematikunterricht, daher wurde im Zuge dieser Masterarbeit ein erster Einblick in mögliche Aufgabenstellungen geboten. Dabei hat sich gezeigt, dass sich der Lehrplan der Sekundarstufe II sowie der Grundkompetenzkatalog für Mathematik sehr gut eignen, um epidemiologische Modelle konsequent im

Mathematikunterricht der Sekundarstufe II von der 5. bis zu 8. Klasse zu thematisieren.

7.2 Schlusswort

Die im Zuge dieser Arbeit konzipierten Aufgaben sind mit dem Ziel erstellt worden, dass sie im alltäglichen Mathematikunterricht der Sekundarstufe II gut einsetzbar sind. Sie sollen gewährleisten, dass sowohl der Mathematik-Lehrplan erfüllt als auch die mathematischen Grundkompetenzen trainiert werden. Im Zuge dieser Arbeit ist deutlich geworden, dass der Mathematik-Lehrplan der Oberstufe umfangreiche Möglichkeiten für das Aufgreifen von epidemiologischen Themen bietet. Des Weiteren zeigte sich, dass auch im Rahmen von epidemiologischen Aspekten und Modellierungsaufgaben die mathematischen Grundkompetenzen aus dem Grundkompetenzkatalog trainiert und gefördert werden können.

Der Einsatz dieser Aufgabenstellungen soll die Kernkompetenzen des mathematischen Modellierens fördern, ohne die Lernenden dabei zu überfordern. Es wurde versucht, im Rahmen der Aufgabenstellungen die Schüler:innen immer wieder zur Reflexion anzuregen und sie aufzufordern, Erklärungen und Erläuterungen zu liefern. Das soll dazu beitragen, die soziokulturelle Bedeutung der Mathematik hervorzuheben und so die Jugendlichen zu mündigen, demokratischen Entscheidungsträger:innen auszubilden. Gerade im Hinblick auf die SARS-CoV-2-Thematik sollen diese Aufgabenstellungen auch dazu beitragen, ein Verständnis für die Begriffe und Zusammenhänge zu entwickeln, die uns seit Beginn der Pandemie tagtäglich in den Medien begleiten. Diese Materialien sollen dazu führen, dass die Jugendlichen den Diskussionen, Berichten und Expert:inneninterviews in den Medien folgen, und womöglich sogar mathematische Ungereimtheiten oder Falsch-Aussagen entlarven können.

Literatur

- [1] R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, and H.-G. Weigand, eds., *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2015. OCLC: 908624077.
- [2] G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, and G. Greefrath, “Anwendungen und Modellieren,” in *Handbuch der Mathematikdidaktik* (R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, and H.-G. Weigand, eds.), pp. 357–383, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [3] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, and Z. Feng, *Mathematical Models in Epidemiology*, vol. 69 of *Texts in Applied Mathematics*. New York, NY: Springer New York, 2019.
- [4] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 115, pp. 700–721, Aug. 1927.
- [5] M. Wolff, “Zum Aufbau epidemiologischer Modelle - Entwicklung eines SEI 3 RSD-Modells zur Ausbreitung von SARS-CoV-2,” 2020. Publisher: Unpublished.
- [6] B. Salzberger, F. Buder, B. Lampl, B. Ehrenstein, F. Hitzenbichler, T. Holzmann, B. Schmidt, and F. Hanses, “SARS-CoV-2/COVID-19 – Epidemiologie und Prävention,” *Der Nephrologe*, vol. 16, pp. 3–9, Jan. 2021.
- [7] R. Schuster, *Grundkurs Biomathematik*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1995.
- [8] M. An Der Heiden and U. Buchholz, “Modellierung von Beispielszenarien der SARS-CoV-2-Epidemie 2020 in Deutschland,” Mar. 2020. Publisher: Robert Koch-Institut.
- [9] Tödter, Karl-Heinz, “Ein SIRD-Modell zur Infektionsdynamik mit endogener Behandlungskapazität und Lehren für Corona-Statistiken,” vol. No. 141, 2020.
- [10] Y.-C. Chen, P.-E. Lu, C.-S. Chang, and T.-H. Liu, “A Time-Dependent SIR Model for COVID-19 With Undetectable Infected Persons,” *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 7, pp. 3279–3294, Oct. 2020.

- [11] I. Cooper, A. Mondal, and C. G. Antonopoulos, “A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 139, p. 110057, Oct. 2020.
- [12] J. D. Murray, *Mathematical biology*. Interdisciplinary applied mathematics, New York: Springer, 3rd ed ed., 2002.
- [13] M. J. Keeling and P. Rohani, *Modeling infectious diseases in humans and animals*. Princeton: Princeton University Press, 2008. OCLC: ocn163616681.
- [14] A. Huppert and G. Katriel, “Mathematical modelling and prediction in infectious disease epidemiology,” *Clinical Microbiology and Infection*, vol. 19, pp. 999–1005, Nov. 2013.
- [15] A. Krämer and R. Reintjes, eds., *Infektionsepidemiologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [16] C. Weiß, *Basiswissen Medizinische Statistik*. Springer-Lehrbuch, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2019.
- [17] M. D’Arienzo and A. Coniglio, “Assessment of the SARS-CoV-2 basic reproduction number, R_0 , based on the early phase of COVID-19 outbreak in Italy,” *Biosafety and Health*, vol. 2, pp. 57–59, June 2020.
- [18] B. Rahman, I. A. Aziz, F. W. Khdhr, and D. F. Mahmood, “Preliminary Estimation of the Basic Reproduction Number of SARS-CoV-2 in the Middle East,” preprint, nCoV, May 2020.
- [19] M. Biggerstaff, S. Cauchemez, C. Reed, M. Gambhir, and L. Finelli, “Estimates of the reproduction number for seasonal, pandemic, and zoonotic influenza: a systematic review of the literature,” *BMC Infectious Diseases*, vol. 14, p. 480, Dec. 2014.
- [20] J. N. Kanji, N. Zelyas, C. MacDonald, K. Pabbaraju, M. N. Khan, A. Prasad, J. Hu, M. Diggle, B. M. Berenger, and G. Tipples, “False negative rate of COVID-19 PCR testing: a discordant testing analysis,” *Virology Journal*, vol. 18, p. 13, Dec. 2021.
- [21] P. S. Wikramaratna, R. S. Paton, M. Ghafari, and J. Lourenço, “Estimating the false-negative test probability of SARS-CoV-2 by RT-PCR,” *Eurosurveillance*, vol. 25, Dec. 2020.
- [22] C. Rippinger, M. Bicher, C. Urach, D. Brunmeir, N. Weibrecht, G. Zauner, G. Sroczynski, B. Jahn, N. Mühlberger, U. Siebert, and N. Popper, “Evaluation of undetected cases during the COVID-19 epidemic in Austria,” *BMC Infectious Diseases*, vol. 21, p. 70, Dec. 2021.

-
- [23] Ogris Günther, Oberhuber Florian, “Spread of SARS-CoV-2 in Austria. PCR tests in a representative sample.,” Apr. 2020.
- [24] D. Böhning, I. Rocchetti, A. Maruotti, and H. Holling, “Estimating the undetected infections in the Covid-19 outbreak by harnessing capture–recapture methods,” *International Journal of Infectious Diseases*, vol. 97, pp. 197–201, Aug. 2020.
- [25] S. L. Chang, N. Harding, C. Zachreson, O. M. Cliff, and M. Prokopenko, “Modelling transmission and control of the COVID-19 pandemic in Australia,” *Nature Communications*, vol. 11, p. 5710, Dec. 2020. arXiv: 2003.10218.
- [26] E. Abdollahi, M. Haworth-Brockman, Y. Keynan, J. M. Langley, and S. M. Moghadas, “Simulating the effect of school closure during COVID-19 outbreaks in Ontario, Canada,” *BMC Medicine*, vol. 18, p. 230, Dec. 2020.
- [27] M. Bicher, C. Rippinger, C. Urach, D. Brunmeir, U. Siebert, and N. Popper, “Evaluation of Contact-Tracing Policies Against the Spread of SARS-CoV-2 in Austria – An Agent-Based Simulation,” preprint, *Epidemiology*, May 2020.
- [28] A. Büchter and H.-W. Henn, “Schulmathematik und Realität – Verstehen durch Anwenden,” in *Handbuch der Mathematikdidaktik* (R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, and H.-G. Weigand, eds.), pp. 19–49, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015.
- [29] R. Borromeo Ferri and G. Stillman, *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Vieweg + Teubner research Perspektiven der Mathematikdidaktik, Wiesbaden: Vieweg + Teubner Research, 1. auflage ed., 2011. OCLC: 845697831.
- [30] W. Blum, R. Borromeo Ferri, C. Knipping, and K. Maaß, “Gabriele Kaisers wissenschaftliches Werk,” in *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (W. Blum, R. Borromeo Ferri, and K. Maaß, eds.), pp. 1–15, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [31] G. Kaiser and B. Sriraman, “A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education,” *ZDM*, vol. 38, pp. 302–310, June 2006.
- [32] C. P. Ortlieb, “Mathematische Modelle und Naturerkenntnis,” vol. *Mathematica Didactica*, no. 27 (1), pp. 23–40, 2004.
- [33] G. Greefrath, *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht: Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018.
-

- [34] R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, and G. Kaiser, eds., *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.
- [35] W. Blum, R. Borromeo Ferri, and K. Maaß, eds., *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2012.
- [36] W. u. F. Bundesministerium für Bildung, “Verordnung des Bundesministers für Unterricht und Kunst vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen,” Sept. 2018.
- [37] Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, “Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS),” Feb. 2022.
- [38] Franz Lemmermeyer, “Logistisches Wachstum,” Feb. 2020. <https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~flemmermeyer/HA/K2-19-CPD.pdf>.
- [39] I. dos Santos, G. Almeida, and F. de Moura, “Adaptive SIR model for propagation of SARS-CoV-2 in Brazil,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 569, p. 125773, May 2021.