



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Wie lassen sich Grundkompetenzerwerb und Technologieeinsatz vereinbaren? - Ein Blick auf den Mathematikunterricht der AHS-Oberstufe nach Einführung der Zentralmatura

verfasst von / submitted by

Ines Jorda

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 406 884

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik und
UF Informatik und Informatikmanagement

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

“ *Some mathematics becomes more important because technology requires it,
some mathematics becomes less important because technology replaces it,
some mathematics becomes possible because technology allows it.*

Bert Waits, zit. n. [112], S. 23

DANKSAGUNG

An dieser Stelle spreche ich all jenen Personen, die mich während meines Studiums und der Verfassung dieser Arbeit begleitet haben, meinen herzlichen Dank aus, da beides ohne sie nicht möglich gewesen wäre.

Meinem Mann danke ich für seine unendliche Geduld.

Meinen Eltern danke ich für die immerwährende Unterstützung.

Andrea Fröwis danke ich für den Rückhalt und das offene Ohr.

Peter Raith danke ich für die kompetente und motivierende Betreuung während all dieser Jahre.

1 INHALT

I	Einleitung.....	1
II	Die neue standardisierte Reife- und Diplomprüfung.....	2
1	Kritik am ursprünglichen System	2
2	Verbesserungen im neuen System	3
3	Bildungstheoretisches Konzept.....	4
4	Konzept der Mathematik-Zentralmatura.....	6
4.1	Grundkompetenzen	8
4.2	Inhaltsbereiche.....	10
4.3	Kontexte	13
4.4	Kompetenzmodell	14
4.5	Das O-M-A-Modell	21
4.6	Entwicklung von Klausuraufgaben.....	27
4.7	Lehrplan vs. Grundkompetenzmodell	27
5	Struktur der Zentralmatura	33
5.1	Die schriftliche Reifeprüfung	33
5.2	Einsatz elektronischer Hilfsmittel.....	44
5.3	Kompensationsprüfung.....	45
5.4	Mündliche Matura	47
III	Der kompetenzorientierte Unterricht	50
1	Didaktische Aspekte	50
1.1	Kognitive Aktivierung der Lernenden.....	51
1.2	Vernetzung.....	54
1.3	Festigung und individuelle Lernbegleitung.....	56
1.4	Entwicklung überfachlicher Kompetenzen	56
1.5	Kompetenzorientierte Leistungsfeststellung und -beurteilung.....	56
1.6	Lernpsychologische Aspekte.....	60
2	Aufgabengestaltung.....	62
IV	Technologieeinsatz.....	66
1	Der technologische Werkzeugkasten	66
1.1	Computer-Algebra-System.....	68
1.2	Grafik- und Geometriesoftware, FunktionenPlotter.....	69
1.3	Tabellenkalkulation	71
1.4	Wahrscheinlichkeitsrechner	72

1.5	Werkzeugkompetenz	73
1.6	Dokumentationskompetenz	163
2	Didaktische Aspekte eines kompetenzorientierten Technologieeinsatzes	165
2.1	Lernphasen	165
2.2	White Box und Black Box.....	188
V	Fazit	194
VI	Zusammenfassung/Abstract	196
VII	Literaturverzeichnis.....	198
VIII	Abbildungsverzeichnis	214
IX	Tabellenverzeichnis	222

I EINLEITUNG

Im Zuge meiner Tätigkeit als Lehrkraft in einem Nachhilfeinstitut betreue ich seit vielen Jahren Schüler¹ verschiedenster Schulstufen und Schularten, wobei mein besonderer Fokus auf dem Bereich der Maturavorbereitung liegt. Die Einführung der *Standardisierten Reife- und Diplomprüfung* im Schuljahr 2014/2015 brachte neben Änderungen bezüglich der Prüfungsmodalitäten auch große Modifikationen und Erneuerungen hinsichtlich der Aufgabenformate mit sich, wodurch der Unterricht und somit auch der Lernprozess maßgeblich beeinflusst wurden. Hierbei galt es dem oftmals „rezeptartigen“ Lösen von Beispielen nach einem vorgegebenen Schema F durch eine Ausbildung von Kompetenzen als „längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten“ ([1], S. 18) entgegenzuwirken. Besonderer Aufmerksamkeit kam in den AHS dabei den sogenannten *Grundkompetenzen* zu, welche einen Teilbereich derartiger Kompetenzen beschreiben, der „aufgrund fachlicher und gesellschaftlicher Relevanz als grundlegend und unverzichtbar gilt“ (ebd., S. 18).

Neben dieser neuen Aufgabengestaltung wurde der Mathematikunterricht durch den immer größer werdenden (mittlerweile verpflichtenden) Einsatz von Technologie grundlegend verändert. In meiner täglichen Arbeit mit den Schülern hat sich gezeigt, dass sowohl im Schulunterricht als auch bei der Hausübung nun häufig das „Durchhackern“ maturarelevanter Aufgaben unter möglichst effizientem Einsatz von Technologie im Vordergrund stehen. In meinen Augen besteht dabei eine große Gefahr, dass einem verständigen Wissensaufbau durch die Auslagerung sämtlicher operativer Tätigkeiten sowie auch durch die oftmals unzureichend entwickelten Fähigkeiten im Umgang mit diesen technologischen Hilfsmitteln entgegengewirkt wird.

Meine Intention ist es daher, mit dieser Arbeit aufzuzeigen, dass sich die Einführung der neuen Zentralmatura nicht nur auf das Auftreten neuer Aufgabentypen beschränkt und der Einsatz von Technologie in diesem Zusammenhang von größter Bedeutung sein kann. Dem Konzept des kompetenzorientierten Unterrichts liegt eine Bildungstheorie zugrunde, welche die Basis für die Entwicklung inner- und außermathematischer Kompetenzen bildet und deren Kernaussage meiner Meinung nach im derzeit vorherrschenden Mathematikunterricht zu wenig Beachtung geschenkt wird. Durch einen sinnvollen Einsatz von Technologie eröffnen sich dabei wertvolle Möglichkeiten, mathematischen Inhalten dieser Bildungstheorie entsprechend zu begegnen. Um die (Grund)kompetenzentwicklung durch einen Technologieeinsatz zu unterstützen, braucht es allerdings entsprechende Kompetenzen bei der Anwendung dieser Hilfsmittel sowie auch eine zielgerichtete Unterrichtsplanung, innerhalb welcher deren Einsatz an die jeweiligen Lernphasen anpasst wird.

¹ Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im Folgenden stets die grammatikalisch näher liegende Form gewählt, die Angaben beziehen sich jedoch stets auf VertreterInnen aller Geschlechter.

II DIE NEUE STANDARDISIERTE REIFE- UND DIPLOMPRÜFUNG

1 KRITIK AM URSPRÜNGLICHEN SYSTEM

„Eine in Klasse A erfolgreich bewältigte Abituraufgabe kann man in keiner anderen österreichischen Klasse zum Abitur geben, ohne dort eine Katastrophe auszulösen. (Dem hoch differenzierten österreichischen Mathematikunterricht mangelt es an sichtbaren Gemeinsamkeiten bzw. Verbindlichkeiten.)²“

([2], S. 213)

Nachdem der Ruf nach einer Reformierung des Maturawesens immer lauter wurde, betraute das Unterrichtsministerium im Sommer 2008 das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik am Institut für Didaktik der Mathematik der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt mit der Aufgabe, ein Konzept für eine zentrale kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik zu entwickeln. Im Rahmen dieses Projekts erfolgte ein Schulversuch an 20 Schulen, in welchen im Mai 2012 eine Reifeprüfung nach eben diesem Konzept durchgeführt wurde. (Vgl. [2], S. 211)

Unter Berücksichtigung der dabei erhaltenen Informationen führte man schließlich im Schuljahr 2014/2015 erstmals flächendeckend die standardisierte Reife- und Diplomprüfung³ in den allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) durch.

Die Kritik am ursprünglichen System der schriftlichen Reifeprüfung umfasste unter anderem folgende Punkte, die zum Großteil auf die Gegebenheit zurückgeführt werden konnten, dass Lehrer und Prüfer von einer Person dargestellt wurden (vgl. [3], S. 132):

- Die *fehlende Objektivität* bei der Beurteilung. (Vgl. [4], S.11)
- Das Dominieren von Aufgaben, bei denen eine *rezeptartige Wiedergabe* genügte, wodurch tatsächliche Problemlösefähigkeiten in den Hintergrund gerieten. Die Ursache lag vor allem darin, dass im Unterricht ein paar unterschiedliche Aufgabentypen eingeübt wurden, von welchen die Lehrperson einige bei der Schulbehörde einreichte. Vier dieser Aufgabentypen wurden dann schlussendlich den Schülern bei der schriftlichen Matura vorgelegt. (Vgl. [3], S. 132; [4], S. 11)
Diese Vorgehensweise begünstigte das sogenannte *teaching to the test*, einem „mechanische[n] Üben von Aufgaben, die so oder so ähnlich in den Vergleichsarbeiten drankommen“ ([5], S. 63), etwas spitzer formuliert, könnte man es auch „Dressur des Unverstandenen“ nennen (vgl. [6], S.49). Dadurch wirkte man einer Ausbildung von längerfristig verfügbaren Befähigungen, kurz Kompetenzen, entgegen und prüfte lediglich überwiegend kurzfristig verfügbare Fähigkeiten und Fertigkeiten ab (vgl. [3], S. 132; [4], S.11).

² In Österreich: Abitur = Matura

³ Statt des offiziellen Terminus wird im Folgenden die Bezeichnung *Zentralmatura* verwendet.

Der Vorteil dieses Konzepts liegt natürlich auf der Hand: auch schwache Schüler waren so in der Lage, ohne tieferes Verständnis die Matura positiv zu bestehen. Reinhard Winkler, der in der Steuergruppe des Projekts AHS-Zentralmatura mitwirkte, fasst diesen Sachverhalt, zugegebenermaßen etwas polemisch, folgendermaßen zusammen: „Unweigerlich entstanden Potemkinsche Dörfer, wo als Fassade eine Komplexität mathematischen Wissens vorgetäuscht wurde, der keinerlei fachliche Substanz entsprach“ ([3], S.131).

- Die *fehlende Auskunft* über tatsächliches Fachwissen oder Können, da bedingt durch die Missstände, die im vorhergehenden Kritikpunkt angeführt wurden, die Matura als Prüfung lediglich zum Selbstzweck diene (vgl. [3], S. 135).
- Der *Mangel an einer Vergleichbarkeit* der Leistungen über den Klassenraum hinweg, welcher auch mit dem Fehlen verpflichtender, gemeingültiger Mindeststandards einherging (vgl. [4], S. 11; [3], S. 132).
- Die Bemängelung von *mangelhaften Kenntnissen der Studienanfänger* vonseiten der Lehrenden an Universitäten (vgl. [3], S. 131).

2 VERBESSERUNGEN IM NEUEN SYSTEM

„Das wesentliche Ziel einer standardisierten Reifeprüfung in Mathematik ist die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen für alle österreichischen AHS-Maturantinnen und -Maturanten.“

([1], S. 7)

Dem alten Maturasystem stand die neue standardisierte schriftliche Reifeprüfung als großer Hoffnungsträger gegenüber. Folgende Merkmale zeichneten diese neue Form der Reifeprüfung aus und versprachen eine fortschrittliche Umgestaltung des Systems:

- Die *optimierte Vergleichbarkeit* der Abschlussnoten zwischen verschiedenen Schulen und Klassen (vgl. [3], S. 132).
- Die bundesweite *Vereinheitlichung der Leistungsanforderung* durch die Konzentration auf sogenannte Grundkompetenzen (vgl. [4], S. 11),

„die auf wesentliche inhaltliche Bereiche der Oberstufenmathematik fokussieren und aufgrund ihrer fachlichen sowie gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind [...] und zugleich einer punktuellen schriftlichen Überprüfung zugänglich sind.“ ([7], S.7)

- Die Definition gewisser *Mindestanforderungen* durch die Einführung oben genannter Grundkompetenzen, wodurch Studiengänge, in denen Mathematik von Bedeutung ist, einen Anhaltspunkt bezüglich ihrer Curricula erhalten (vgl. [3], S. 132).

- Das Bestreben, ein *tieferes Verständnis* und nicht die Reproduktion mathematischer Inhalte und Abläufe sowie die in diesem Zusammenhang *notwendigen Fertigkeiten* in den Mittelpunkt zu stellen (vgl. [3], S. 133).
- Ein Gewinn an *Aussagekraft der Prüfungsergebnisse*, da der Lehrperson die Prüfungsfragen nicht bekannt sind und somit einem teaching-to-the-test vorgebeugt werden kann. Dies führt in weiterer Folge dazu, dass einer punktuellen Abdeckung des Lehrstoffes entgegengewirkt werden soll (vgl. [3], S.136; [8], S. 29).
- Der *verstärkte Einsatz des Computers*, der als didaktisches Hilfsmittel fungieren kann und dessen Nutzung aus einem modernen Unterricht einfach nicht mehr wegzudenken ist (vgl. [8], S. 54).
- Eine *verstärkte Objektivierung der Beurteilung* und der Leistungsanforderung - einerseits durch vorgegebene Beurteilungsschemata, an die sich jeder Lehrer bei der Korrektur und Benotung gleichermaßen zu halten hat, und andererseits durch die zentral erstellten Aufgaben, die auch den Lehrpersonen vor der Prüfung nicht bekannt sind (vgl. [4], S. 11f).
- Ein *bildungstheoretisches Konzept*, das der Frage nach den Erwartungen der Gesellschaft an das Fach Mathematik nachgeht. Auf dieses Konzept möchte im Folgenden genauer eingehen, da es maßgeblich für die Ausrichtung der Zentralmatura und infolgedessen für die Aufgaben- und Unterrichtsgestaltung ist.

3 BILDUNGSTHEORETISCHES KONZEPT

Das bildungstheoretische Konzept, auf dem die Zentralmatura beruht, stellt das „Individuum und dessen Rolle in unserer hochdifferenzierten, arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft und nicht die (objektive Seite der) Mathematik“ ([9], S. 35) in den Mittelpunkt. Es ist auf eine Bildungstheorie von Roland Fischer zurückzuführen, in welcher er die Fähigkeit zur Kommunikation mit Experten und der Allgemeinheit als maßgebendes Ziel einer Allgemeinbildung, Fischer nennt diese *Fächerorientierte (höhere) Allgemeinbildung*, herausstreicht. Als Grundlage solider Urteile und Entscheidungen werden fachliches Grund- und Reflexionswissen bzw. Reflexionsfähigkeit genannt. (Vgl. [3], S. 132-133; [10], S. 1)

Nach Fischer werden die meisten Entscheidungen im Alltag über Sachverhalte getroffen, bei denen der Entscheidungsträger auf die Expertise anderer angewiesen ist, da er selbst nur oberflächlich oder auch gar nicht über das notwendige Wissen verfügt. (Vgl. [10], S. 1-3)

Derlei Überlegungen sind im Zusammenhang mit dem Mathematikunterricht insofern von Bedeutung, als dass gerade diesem oft vorgeworfen wird, kaum Praxisbezug oder auch -relevanz aufzuweisen. Hier setzt Fischer mit seinem Bildungskonzept an und sieht Lernbereiche, die in ihrer Anwendung über Alltagshandlungen hinausgehen, als maßgeblich für die Entwicklung der Fähigkeit, über den eigenen Tellerrand hinauszublicken, an. Dies sei nach Fischer genau dann von großer Relevanz, wenn es zur Interaktion mit anderen Personen komme, bei welcher die Kommunikation in Form einer

Informationsbeschaffung, des Fragen-stellens, oder auch des Verstehens eine zentrale Rolle spielen. In weiterer Folge werde man dabei auch oft damit konfrontiert, Problemlöseangebote zu beurteilen und somit auch Entscheidungen zu treffen. (Vgl. [10], S. 1-3)

Dem Erlernen einer entsprechenden Kommunikationsfähigkeit liegen laut Fischer folgende drei Bereiche zugrunde (vgl. [10], S. 4-5):

- *Grundkenntnisse*: Die Kenntnisse über und das Verstehen von grundlegenden Konzepten, Begriffen und Darstellungsformen und die Befähigung, mit Hilfe dieser einfache Handlungen ausführen zu können.
- *Operieren*: Die Kompetenz unter Anwendung der oben genannten Grundkenntnisse auch komplexere Handlungen durchzuführen und darüber hinaus auch kreative Problemlösungen zu entwickeln. Dies führt oftmals auch dazu, dass neues Wissen erschaffen oder auch Probleme anhand von speziellen Methoden gelöst werden.
- *Reflexion*: Das Interpretieren von Wissen und Handlungen angesichts der Anforderungen im jeweiligen (Problem)Kontext, das Einordnen in größere Zusammenhänge sowie das Bewerten konkreter Situationen.

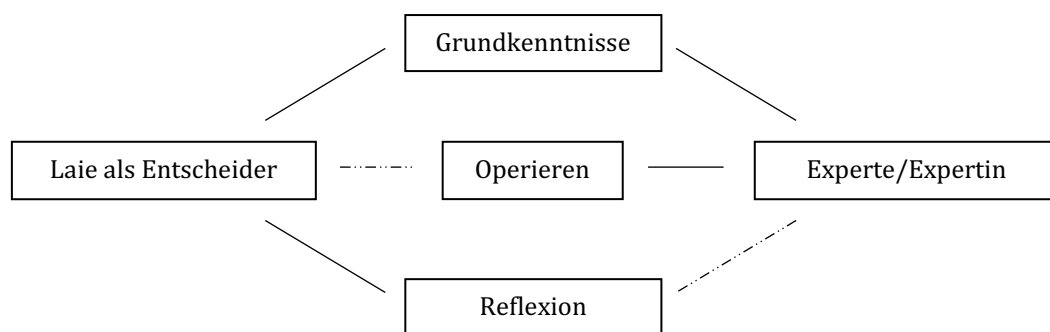


Abb. 1: Fächerorientierte Allgemeinbildung, ([10], S. 5)

Abb.1 zeigt, welche Gewichtung Fischer diesen drei Bereichen in Hinblick auf den Laien als Entscheidungsträger auf der einen und den Experten auf der anderen Seite zukommen lässt. Seiner Meinung nach kommen weder der Laie noch der Experte ohne Grundkenntnisse aus, wobei diese natürlich beim Experten überwiegen würden. Anhand besagter Grundkenntnisse sei es die Aufgabe des Experten, zu operieren, spezielle Methoden zur Problemlösung anzuwenden und auch neues Wissen zu schaffen. Dem Laien falle die Aufgabe des Beurteilens und Bewertens zu, wofür neben den Grundkenntnissen Reflexion von großer Bedeutung sei. Natürlich könne es auch für den Lernprozess nutzbringend sein, dass auch der Laie Operationen durchführt, da dies ein tieferes Verständnis sowie auch die Motivation fördere. (Vgl. [10], S.5)

Fischer betont jedoch: „Aus der Sicht des langfristigen Zieles von Unterricht kommt dem fachlichen Operieren aber ein geringerer Stellenwert zu als der Reflexion.“ ([10], S. 5)

4 KONZEPT DER MATHEMATIK-ZENTRALMATURA

Im Sinne der bildungstheoretischen Orientierung liegt der Fokus der standardisierten Reifeprüfung auf dem reflektierten Grundwissen und dessen flexibler Nutzung in Kommunikationssituationen.

([1], S. 18)

Im Zuge der Erstellung eines Konzepts zur Zentralmatura orientierte man sich bei der Auswahl von Inhalten an der oben genannten Fähigkeit zur Kommunikation mit Experten und der Allgemeinheit. Diese wird als grundlegend für die Lebensvorbereitung angesehen, da sie die Schüler dazu befähigt „passende Fragen an Expertinnen und Experten zu stellen, Antworten zu gewichten und daraus Schlüsse zu ziehen, sowie eine Vermittlerrolle zwischen Expertinnen und Experten und der Allgemeinheit auszufüllen.“ ([1], S. 6)

Im Sinne Fischers wird auch hier im Zusammenhang mit Allgemeinbildung ein „über-den-Tellerrand-schauen“ in Form einer *Weltorientierung* ([11], S. 149) propagiert. Die Schüler sollen in der Lage sein, unterschiedliche Perspektiven einnehmen zu können und „Mathematik als eine mögliche Art der Weltbegegnung erfahren, eine spezifische Brille erhalten, um die Welt um sich herum zu sehen bzw. zu modellieren.“ ([1], S. 6)

Die Fähigkeit zur Kommunikation mit Experten und der Allgemeinheit in Bezug auf mathematische Inhalte fußt - der oben genannten Bildungstheorie entsprechend - auf einem soliden Grund- als auch Reflexionswissen. Durch den zunehmenden Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht fällt dieser Reflexionsfähigkeit eine immer größer werdende Rolle zu, da eine Verschiebung des Fokus weg vom eigenständigen Operieren hin zum Hinterfragen von Ergebnissen, die nicht selbst produziert wurden, stattfindet. (Vgl. [9], S. 38) Rainer Schmid-Zartner (vgl. [12], S. 111) weist jedoch darauf hin, dass sich die Reflexion im mathematischen Kontext nicht allein auf die Mathematik beschränken, sondern als Mittel dienen sollte, die Verbindungen zwischen dem Individuum, der Welt und der Gesellschaft besser zu verstehen. Dieser Ansatz entspricht wiederum auch der bereits erwähnten *Weltorientierung* im Zuge einer fächerorientierten Allgemeinbildung.

Wie eine derartige Reflexion im Unterricht ausschauen könnte, wurde im Rahmen eines Projekts zum Thema *Messung im sozialen Kontext*, das in einer Bildungsanstalt für Kindergartenpädagogik durchgeführt wurde, veranschaulicht. Hierbei wurde aufgezeigt, dass „Anspruchsvolle Reflexion gesellschaftlicher Verhältnisse mit Hilfe der Mathematik im Sinne authentischen Philosophierens der Schülerinnen und Schüler“ ([12], S. 114) möglich ist und infolgedessen den Schülern die Relevanz der Mathematik im alltäglichen Leben nähergebracht werden konnte. (Vgl. [12], S. 114)

Etwas konkreter und für den Unterricht anschaulicher wird am Beispiel des arithmetischen Mittels in *Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht* (siehe Tab. 1) von Peschek, Prediger und Schneider ([13], S.5) auf das Reflexionswissen eingegangen. Hier finden sich auch die beiden anderen, nach Fischer für die Ausbildung einer Kommunikationsfähigkeit notwendigen, Bereiche *Grundwissen* und *Operieren* wieder.

Kompetenzbereich	Beispiel „arithmetisches Mittel“
Grundwissen	▪ Den Begriff (Definition) des arithmetischen Mittels als Modellierung von „Durchschnitt“ kennen. ▪ Wichtige Eigenschaften (wie metrische Daten, Ausreißerempfindlichkeit u. Ä.) und Anwendungsgebiete des arithmetischen Mittels kennen.
Operatives Wissen und Können	▪ Das arithmetische Mittel aus einer Liste von Daten (auch Häufigkeitstabellen) berechnen können.
Reflexion(swissen)	▪ Nachdenken darüber, warum man eine ganze Liste von Daten durch eine Kennzahl (z.B. arithmetisches Mittel) repräsentieren will. ▪ Nachdenken darüber, ob das arithmetische Mittel ein geeignetes Durchschnittsmaß für die Körpergröße von Schülerinnen und Schülern sein kann. ▪ Wissen, warum das arithmetische Mittel zur Mittelung von Noten kaum geeignet ist.

Tab. 1: Kompetenzbereiche am Beispiel des arithmetischen Mittels, ([13], S. 5)

Außerdem wird auch der Wunsch nach Reduktion der Ansprüche in Bezug auf das Operieren-Können als Bildungsziel zugunsten einer Erhöhung der Anforderungen hinsichtlich einer Reflexionstätigkeit angeführt. Natürlich sei es notwendig, dass Schüler die Berechnung des Mittelwertes beherrschten. Umso wichtiger wäre jedoch eine Auseinandersetzung mit der Sinnhaftigkeit und Aussagekraft im jeweiligen Kontext. (Vgl. [13], S. 6)

Um Prozesse des Reflektierens im Unterricht besser forcieren zu können, wird auf eine Differenzierung innerhalb dieser hingewiesen. Die Autoren beziehen sich hierbei auf die Systematisierung von Skovsmose (vgl. [14], S. 199f) und unterscheiden vier verschiedene Arten der Reflexion (vgl. [13], S. 5-9):

- *Mathematisch orientiertes Reflektieren:* Dies umfasst unter anderem folgende Aufgabenformate: Überprüfen auf Korrektheit der mathematischen Operationen, Aufsuchen von Denkfehlern, Begründungs – und/oder Verbalisierungsaufträge. Welche Veränderung durchläuft beispielsweise das arithmetische Mittel bei Vergrößerung oder Verkleinerung eines Wertes der zugrundeliegenden Datenreihe?
- *Modellorientiertes Reflektieren:* Hierbei stehen unter anderem Fragen hinsichtlich der Qualität und der Grenzen mathematischer Modelle im Mittelpunkt. Macht es zum Beispiel Sinn, das arithmetische Mittel zur Beschreibung der fächerübergreifenden Leistung eines Schülers zu verwenden?
- *Kontextorientiertes Reflektieren:* In diesen Bereich fällt das Hinterfragen der Auswirkungen auf den Kontext durch die Mathematisierung. Welche Rolle spielt das gewählte mathematische Modell in einem bestimmten Zusammenhang, welche Folgen hat es in Bezug auf die Argumentation und welche Bedeutung kommt ihm selbst dabei zu? Welchen Zweck hat beispielsweise das arithmetische Mittel in der Realität, wenn es als Mittel zur Selektion bei der Aufnahme zu einem Studium gewählt wird? Ist man mit einem Notendurchschnitt von 1,3 wirklich schlechter für ein Studium geeignet als mit einem Durchschnitt von 1,2?

- *Lebensweltorientierte Reflexion*: Besonders herausgestrichen wird der Aspekt, dass ein Reflektieren nicht notwendigerweise fundamentaler mathematischer Kenntnisse bedarf, sondern möglichst schülernah stattfinden soll. Man bezieht sich auch hier auf Fischer und betont, dass es in unserer arbeitsteiligen Gesellschaft von enormem Wert sei, „Ergebnisse von Expertinnen und Experten zu bewerten, ohne selbst Expertin oder Experte zu sein“. ([13], S. 10)

Der Ruf nach einer Intensivierung der reflexiven und kommunikativen Tätigkeiten im Unterricht ist jedoch nicht gänzlich neu - Heinrich Winter spricht zum Beispiel bereits 1995 von folgenden drei Grunderfahrungen, die im Mathematikunterricht nicht fehlen sollten:

„(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

([15], S. 37)

Des Weiteren bricht auch Hans Werner Heymann im selben Jahr eine Lanze für einen Mathematikunterricht, der eine *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch* bietet und plädiert dafür, die Mathematik den Schülern in Form einer Unterstützung im Alltagsdenken näher zu bringen (vgl. [15], S. 25).

4.1 GRUNDKOMPETENZEN

Zu allererst stellt sich die Frage, was man unter Kompetenz im Allgemeinen und im Speziellen auf die Mathematik bezogen verstehen kann. Peschek und Heugl liefern in ihrem Standardkonzept folgende Definition:

*„Unter **Kompetenzen** werden hier längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen. Mathematische Kompetenzen beziehen sich auf mathematische Tätigkeiten, auf **mathematische Inhalte** sowie auf die Art und Komplexität der erforderlichen Vernetzungen.“*

([16], S. 9)

Um eigenständig operieren und reflektieren zu können, sind neben einem fundierten Grundwissen dementsprechend grundlegende mathematische Kompetenzen erforderlich, die in diesem Zusammenhang als *Grundkompetenzen* bezeichnet werden:

„Mathematische Grundkompetenzen meinen hier somit grundlegende, gesellschaftlich relevante mathematische Fähigkeiten, die allen österreichischen Maturant(inn)en längerfristig verfügbar sein sollten und einer produkt- bzw. zustandsorientierten Überprüfung zugänglich sind.“ ([4], S. 13)

Bei der Auswahl derartiger Grundkompetenzen galt es somit einiges zu beachten. Einerseits sollten sie wesentliche Inhaltsbereiche der Oberstufenmathematik abdecken, die sowohl aufgrund der gesellschaftlichen als auch fachlichen Relevanz grundlegend und unabdingbar sind (vgl. [17], S. 4). Andererseits mussten sie einer punktuellen (schriftlichen) Überprüfung und (internationalen) Vergleichbarkeit genügen. Es sollte sich also um Leistungen handeln, welche die Schüler längerfristig aufweisen und anhand „einer produkt- bzw. zustandsorientierten (schriftlichen) Überprüfung“ ([18], S. 7) evaluiert werden konnten. Des Weiteren galt der Lehrplan für den Mathematikunterricht in der AHS als inhaltlicher Wegweiser. Die dort angeführten Inhalte und Bildungsziele dienten somit als Grundlage bei der Festlegung der Grundkompetenzen (vgl. [7], S. 7).

Zu alledem galt es auch noch den bereits angesprochenen bildungstheoretischen Aspekt in die Überlegungen miteinzubeziehen. Der Mathematikunterricht in den weiterführenden Schulen sollte sich deutlich vom Unterricht in der Pflichtschule unterscheiden. Dies wollte man anhand neuer Inhalte, eines verstärkten Technologieeinsatzes und ganz besonders durch eine Schwerpunktsetzung auf die Ausbildung eines Kommunikations- und Reflexionsvermögens (im Rahmen der Mathematik) erreichen. Der Fokus lag – der Bildungstheorie Fischers folgend – auf einem soliden Grundwissen und im Speziellen auf der Reflexionsfähigkeit, da diese maßgeblich für das Entwickeln eines tieferen inhaltlichen Verständnisses ist. Sie bildet somit die Basis für eine gelungene Kommunikation mit der Allgemeinheit und befähigt die Schüler dazu, bestimmte Begriffe oder auch Verfahren kontextbezogen anzuwenden oder auch zu hinterfragen. (Vgl. [17], S. 4) Das Grundwissen umfasste dabei „fundierte Kenntnisse hinsichtlich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete [...]“ ([17], S. 4).

Der Mathematikunterricht sollte neben dem fachspezifischen Aspekt demnach Schüler vor allem dazu befähigen, in die Rolle eines Vermittlers zwischen Experten und Allgemeinheit treten zu können (vgl. [18], S. 10). Bei der Auswahl der relevanten Kompetenzen wurden daher die Kommunikations- und Reflexionsfähigkeit in den Mittelpunkt gestellt, wobei der Lehrplan und die Natur einer standardisierten schriftlichen Prüfung die Auswahl etwas eingrenzten (vgl. [18], S.13).

Man einigte sich schlussendlich auf vier wesentliche Inhaltsbereiche, die auf Basis dieser bildungstheoretischen Überlegungen hinsichtlich der zugrundeliegenden Grundkompetenzen konkretisiert wurden (vgl. [17], S.4):

- Algebra und Geometrie
- Funktionale Abhängigkeiten
- Analysis
- Wahrscheinlichkeit und Statistik

Die einzelnen Bereiche wurden dahingehend gegliedert, dass die grundlegenden Kompetenzen aufschienen, die (ergänzend zum gültigen Lehrplan) im Unterricht gelehrt werden sollten (vgl. [17], S.3). Dabei wurde darauf geachtet, verschiedenste Gesichtspunkte unterzubringen, unter anderem jene der

„Generalisierung und operative Beweglichkeit, der verständige Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten sowie deren geometrische Veranschaulichung, die Verwendung von Funktionen als (mathematisches) Werkzeug sowie die Bereitstellung von Konzepten zur formalen und operativen Beschreibung diskreter und stetiger Änderungsverhalten oder die Verwendung von Darstellungsformen und (grundlegenden) Verfahren der Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.“

([17], S.5)

4.2 INHALTSBEREICHE

Ich werde im Folgenden mein Hauptaugenmerk auf die bildungstheoretische Ausrichtung der einzelnen Bereiche legen, den gesamten Grundkompetenzkatalog kann man unter [17] einsehen.

4.2.1 ALGEBRA UND GEOMETRIE

Algebra, als *die* Sprache der Mathematik, stellt im Zusammenhang mit Kommunikation natürlich ein unerlässliches Mittel dar. Ein grundlegendes Verständnis, sprich Grundwissen, über die Begriffe und Konzepte ist dabei zweifelsfrei zwingend erforderlich, um angemessen mit diesen operieren und kontextbezogene Interpretationen sachgerecht durchführen zu können. Durch die Algebra wird unter anderem die Reflexion über beispielsweise die Anzahl verschiedener Lösungsfälle, die Lösbarkeit von Gleichung(ssystemen), die Sinnhaftigkeit abstrakter Formulierungen oder auch die Eignung bestimmter Konzepte ermöglicht. Sie bietet weiters einen Wechsel zwischen einer geometrisch-anschaulichen und einer algebraischen Ebene an, sodass ein Problemlösen auf verschiedene Arten erfolgen kann. Die Fähigkeit, Inhalten auf verschiedenen Ebenen zu begegnen und zwischen Darstellungen wechseln zu können, ist für den Unterricht aus bildungstheoretischer Sicht unerlässlich, da sie in Reflexions- und Kommunikationssituationen ebenfalls eine große Rolle spielt. (Vgl. [17], S. 6)

4.2.2 FUNKTIONALE ABHÄNGIGKEITEN

Funktionen eignen sich hervorragend, um die angeführten vier Reflexionsarten in den Unterricht einzubringen. Mathematisch orientiertes Reflektieren kann etwa in Form von Begründungsaufgaben (z.B. Zusammenhang zwischen Variablen in einer

Funktionsgleichung, Auswirkungen durch Änderung einer oder mehrerer Variablen) stattfinden. Das Wissen über die verschiedenen Funktionstypen und deren situative Verwendung führt unweigerlich zu modellorientiertem Reflektieren. Kontextorientierte Reflexion ist notwendig, wenn das Verständnis um die Eignung oder auch die Grenzen bestimmter Modelle eine Rolle spielt. Durch den immer weiter fortschreitenden Technologieeinsatz kommt die lebensweltorientierte Reflexion im Zusammenhang mit Funktionen fast schon automatisch ins Spiel, da durch die Frage nach der Sinnhaftigkeit bestimmter Operationen (z.B. händisches Zeichnen eines Funktionsgraphen) ein Reflektieren über typische mathematische Vorgehensweisen stattfindet. (Vgl. [13], S. 9)

Das Grundwissen, das eine solche Reflexion überhaupt erst ermöglicht, setzt sich in diesem Bereich aus der Kenntnis der verschiedenen Funktionstypen, der typischen Verläufe der zugehörigen Graphen, sowie der charakteristischen Eigenschaften zusammen. Zudem ist es auch unabdingbar für eine verständige Kommunikation, die zum Beispiel in Form von Begründungs-, Verbalisierungs- oder Interpretationsaufgaben auftritt. Zusätzlich spielt der Wechsel zwischen Darstellungsformen, wie auch in der Algebra, ebenfalls eine große Rolle. (Vgl. [17], S. 9)

4.2.3 ANALYSIS

In diesem Bereich kommt die Rolle der Kommunikation mit der Allgemeinheit und mit Experten besonders zum Tragen. Das Wissen über mathematische Begriffe, wie zum Beispiel des Differenzen- und des Differentialquotienten, ist in der Kommunikation auf Experten-Ebene das Um und Auf. Stellt sie doch die Basis einerseits für das Erkennen von Zusammenhängen bestimmter Fachbegriffe und andererseits für das Deuten in Anwendungssituationen, die unter Umständen auch über die reine Mathematik hinausgehen (z.B. in der Physik), dar. Das Verständnis über diese Fachbegriffe sollte sich jedoch nicht allein auf die Kommunikation mit Experten reduzieren, da viele dieser Bezeichnungen auch im alltäglichen Sprachgebrauch auftauchen. Man denke nur an Ausdrücke wie Momentangeschwindigkeit, Beschleunigung oder auch degressives/progressives Wachstum. Um an einer Kommunikation mit der Allgemeinheit teilnehmen zu können, ist es also von großer Wichtigkeit, ein Gefühl für die konkrete mathematische Bedeutung dieser Begriffe zu entwickeln. Nur so ist es auch möglich, die unterschiedlichen Änderungsmaße kontextbezogen (qualitativ und quantitativ) einzuordnen und im Idealfall zur Bildung neuer Begriffe zu nutzen. (Vgl. [17], S. 13)

Im Zusammenhang mit dem Integral bewegt man sich hingegen vornehmlich auf der Ebene der Kommunikation mit Experten. Hierbei sollte das Konzept des bestimmten Integrals sowohl als Grenzwert einer Summe von Produkten als auch als probates Mittel in Anwendungssituationen bekannt sein. (Vgl. [17], S. 13)

Im Sinne der Reflexionsfähigkeit ist es sowohl in der Differential- als auch der Integralrechnung von großer Bedeutung, zwischen den unterschiedlichen symbolischen und auch graphischen Darstellungsformen wechseln (z.B. Leibniz'sche Schreibweise, verschiedene Darstellungen des Differenzen- und Differentialquotienten, bestimmtes Integral als Differenz der Funktionswerte der Stammfunktion) und diese auch selbst als Darstellungsmittel nutzen zu können. Der Bildungstheorie nach Fischer folgend, wird von einem allzu kalkülhaften Operieren abgesehen und zum Beispiel auf das selbständige

Berechnen komplexer Differentiale verzichtet. Stattdessen wird der Fokus auf ein inhaltliches Verständnis, das Wissen über die wesentlichen Eigenschaften und Zusammenhänge, sowie die Kenntnis über die verschiedensten Darstellungsformen gelegt. (Vgl. [17], S. 13)

4.2.4 WAHRSCHEINLICHKEIT UND STATISTIK

In diesem Bereich kommt dem Wissen über die verschiedenen Begriffe und Darstellungsformen die größte Bedeutung zu, da es zur Ausbildung einer Kommunikations- und Reflexionsfähigkeit besonders wichtig ist, stochastische und statistische Bezeichnungen und auch Darstellungen kontextbezogen interpretieren und deren Güte abschätzen zu können. Das Durchführen von komplexen Berechnungen spielt diesbezüglich nur eine untergeordnete Rolle, weshalb davon im Unterricht abgesehen werden kann und auf grundlegende Vorgänge reduziert werden sollte. (Vgl. [17], S. 16)

So betonen Borneleit et al. zum Beispiel bereits 2001 in ihrer *Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe*:

„Zum Aufbau von Grundvorstellungen ist es notwendig, dass bewusst die kalkül-orientierten Teile in Zeitaufwand und Wertigkeit zu Gunsten der inhaltlich orientierten Teile reduziert werden.“

([19], S. 14)

Das Ausbilden dieser Grundvorstellungen kommt nach Hauer-Typelt insbesondere dann zum Tragen, wenn es darum geht, stochastische Inhalte auch außerhalb des Mathematikunterrichts auszumachen und bewerten zu können (vgl. [20], S. 2). Gerade in diesem Zusammenhang gibt es einige Begriffe, wie zum Beispiel *Zufall* oder auch *Wahrscheinlichkeit*, die durch den häufigen umgangssprachlichen Gebrauch eine im mathematischen Sinn falsche oder unzureichende Konnotation erhalten. Deshalb sei es in diesem Bereich nach Hauer-Typelt besonders wichtig, im Unterricht solch unpassende Vorstellungen aufzugreifen und im Rahmen des Lernprozesses durch angemessene Anschauungen zu ersetzen (vgl. [20], S. 3).

Diese Überlegungen dienen als Grundlage dafür, die Wahrscheinlichkeit den Schülern als eine Modellierung und Quantifizierung des Zufalls, sowie als Bindeglied zwischen beschreibender und schließender Statistik näher zu bringen. Im Bereich der schließenden/beurteilenden Statistik fällt die Deutung und Bewertung von Konfidenzintervallen besonders ins Gewicht, da diese im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit (zum Beispiel im Rahmen von Hochrechnungen) einen nicht zu vernachlässigenden Faktor darstellen. (Vgl. [17], S. 18)

4.3 KONTEXTE

Grundsätzlich werden die für ein Beispiel notwendigen Begriffe und Kontexte innerhalb des Angabetextes näher ausgeführt und erklärt. Folgende Inhalte und ihre Zusammenhänge werden jedoch als bekannt vorausgesetzt und in der Aufgabenstellung nicht weiters erläutert (vgl. [17], S. 18):

Einheiten und Größen

Größenverhältnisse und physikalische Einheiten, deren Zusammenhänge und auch deren symbolische Darstellung sind im technisch-naturwissenschaftlichen Kontext notwendig, um Kausalitäten erkennen, um damit operieren sowie auch, um eine Kommunikationsfähigkeit in diesem Bereich entwickeln zu können. Diese findet man jedoch größtenteils auch in der *Formelsammlung für die standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung* ([21]), sodass ein Auswendiglernen nur teilweise notwendig ist.

Zu den nicht angeführten Inhalten gehören laut den *Inhaltlichen und organisatorischen Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen*, die vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung ausgegeben wurden (vgl. [17], S. 19):

- 1 Prozent = 10^{-2} = 10 000 ppm = Teile pro Hundert = 1 %
1 Promille = 10^{-3} = 1 000 ppm = Teile pro Tausend = 0,1 % = 1 ‰
1 ppm (parts per million) = 10^{-6} = Teile pro Million = 0,0001 %
- Die Bedeutung der Symbole bzw. Vorsilben laut SI-Einheitensystem:

Bedeutung	Symbol	Bedeutung	Symbol
Billion	T	Zehntel	d
Milliarde	G	Hundertstel	c
Million	M	Tausendstel	m
tausend	k	Millionstel	μ
hundert	h	Milliardstel	n
zehn	da	Billionstel	p

Tab. 2: Vorsilben

Finanzmathematische Grundlagen: Neben naturwissenschaftlich-technischen Inhalten, werden im Lehrplan auch wirtschaftliche Inhalte behandelt. Die dafür benötigten Grundlagen beziehen sich rein auf das Wissen über die Zinseszinsrechnung. Die zugehörige Formel ist in der Formelsammlung angeführt.

Kosten- und Preistheorie: Die Begriffe, die es diesbezüglich zu kennen gilt, können ebenfalls in der Formelsammlung nachgeschlagen werden. Genauere Erklärungen oder Definitionen werden hier allerdings (bis auf die Erläuterung des Break-Even-Points) nicht angeführt. Einzig die Beziehungen zwischen variabler, fixer und Gesamtkostenfunktion, zwischen Gewinn-, Erlös- und Kostenfunktion und Erlös- und Nachfragefunktion sind angegeben.

4.4 KOMPETENZMODELL

Kompetenzen können nicht allein auf einen inhaltlichen Bereich reduziert werden, sondern zeichnen sich dadurch aus, dass bestimmte Handlungen innerhalb dieses Inhaltsbereichs mit einer gewissen Komplexität durchgeführt werden. Im *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe* [1] dienen daher die drei Bereiche *Handlung*, *Inhalt* und *Komplexität* als Grundlage für die Charakterisierung und Spezifikation einzelner mathematischer Kompetenzen. (Vgl. [1], S. 18)

Diese werden folgendermaßen unterteilt:

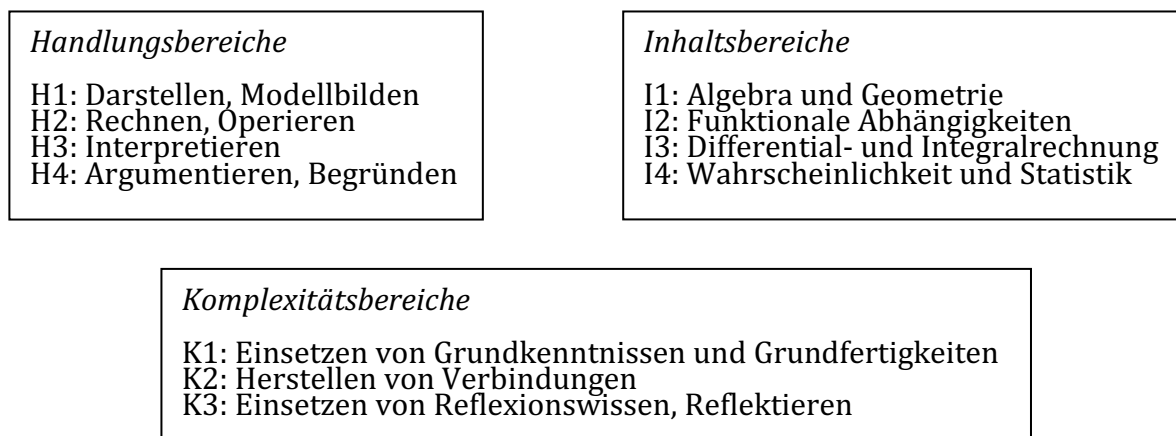


Abb. 2: Kompetenzbereich

Während die Inhaltsbereiche durch den Grundkompetenzkatalog und den Lehrplan ausführlich beschrieben werden, gilt es den Handlungs- und Komplexitätsbereichen etwas mehr Aufmerksamkeit zu schenken.

4.4.1 HANDLUNGSBEREICHE

In einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht ist es essenziell, den Schülern im Lernprozess den Wechsel vom Inhalt hin zur Handlung näher zu bringen. Deshalb ist es bei der Analyse von mathematischen Kompetenzen von großer Bedeutung, die dabei auftretenden Handlungen anhand unterschiedlicher Handlungsdimensionen zu spezifizieren, die naturgemäß in konkreten Anwendungssituationen natürlich eher selten isoliert in Erscheinung treten werden. (Vgl. [1], S. 20)

In [1] findet man diesbezüglich folgende Charakterisierung:

H1: DARSTELLEN, MODELLBILDEN

Darstellen bezieht sich auf den Vorgang, vorgegebene mathematische Inhalte in andere Repräsentationsformen zu übertragen. Das *Modellbilden* erfordert darüber hinaus die

Fähigkeit, mathematische Zusammenhänge und Beziehungen innerhalb der vorgelegten Sachverhalte zu erkennen, sodass diese dann – unter Umständen auch mithilfe von Vereinfachungen oder auch Idealisierungen – in geeigneter mathematischer Form repräsentiert werden können. Aufgabestellungen, die in diesen Tätigkeitsbereich fallen, können zum Beispiel das Übersetzen von Alltagssprachlichen Formulierungen in mathematische Sprache oder auch Darstellungen, sowie das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen verlangen. Das Erstellen, Nutzen oder auch Interpretieren eines oder auch verschiedener adäquater mathematischer Modelle fällt ebenso in diesen Bereich. Außerdem spielen die Auswahl geeigneter Darstellungsformen und der passenden Technologie hierbei ebenfalls eine Rolle. (Vgl. [1], S.21)

H2: RECHNEN, OPERIEREN

Mit *Rechnen* ist sowohl das Ausführen von Rechenoperationen auf Zahlenebene als auch das Umformen mit Variablen gemeint. *Operieren* beschreibt etwas ausführlicher den Vorgang der Planung und der exakten Ausführung von Rechen- und Konstruktionsvorgängen, die zum Beispiel in Form von Konstruktionen in der Geometrie oder auch dem Erstellen und Nutzen von Tabellen und Grafiken auftreten können. Zusätzlich schließt dies auch die zweckmäßige Verwendung von Technologie als Unterstützung auf operativer Ebene mit ein. Die für diesen Bereich typischen Handlungen sind neben der Durchführung und Planung grundlegender Rechenoperationen auch das Abschätzen und Runden von Ergebnissen, das Arbeiten mit Tabellen und Grafiken, das (geometrische) Konstruieren sowie die Auswahl des richtigen Lösungswegs. (Vgl. [1], S. 21)

H3: INTERPRETIEREN

Interpretieren schließt das Erkennen, Deuten und Wiedergeben von Daten und Beziehungen aus mathematischen Darstellungen mit ein. Die Schüler sind dazu angehalten, Informationen und Zusammenhänge aus Tabellen und Grafiken herauslesen und kontextbezogen analysieren zu können. Tätigkeiten, die in diesen Bereich fallen, sind unter anderem ein bewusster Umgang mit sowie das Schließen von Informationen aus Termen, Gleichungen, Formeln und auch Ungleichungen. Kontextbezogenes Bewerten von Rechenergebnissen und Deuten unterschiedlicher Darstellungen (Tabellen, Grafiken, Symbole) sind außerdem von großer Wichtigkeit. Dazu kommt das Einschätzen der Sinnhaftigkeit und Gültigkeit verschiedener mathematischer Auslegungen und Formulierungen. (Vgl. [1], S. 22)

H4: ARGUMENTIEREN, BEGRÜNDEN

Mit *Argumentieren* ist das Abwägen und Darlegen von konkreten Betrachtungsweisen und Standpunkten im mathematischen Kontext gemeint. Dies bedarf einer angemessenen Nutzung mathematischer Eigenschaften und Regeln sowie einer fachspezifischen Sprache. Beim *Begründen* geht es darum, logische Argumente vorzubringen, die zu gewissen Schlussfolgerungen führen. Aufgaben, die diesen Bereich auszeichnen, können

zum Beispiel das Darlegen der Gründe, weshalb man sich für eine bestimmte Darstellung oder Vorgehensweise ausspricht, beinhalten. Außerdem können Herleitungen oder Beweise von mathematischen Formeln und Sätzen verlangt werden. Weiters treten das Untersuchen von Argumentationen auf deren Richtigkeit und infolgedessen die Ausformulierung einer Begründung auf. (Vgl. [1], S. 22)

4.4.2 KOMPLEXITÄTSBEREICHE

Die Anforderungen, die eine Aufgabenstellung an Schüler stellt, können nicht nur nach inhaltlichen und operativen Blickpunkten differenziert werden. Ganz maßgeblich für die konkrete Einordnung eines Beispiels innerhalb der Anspruchsdimension ist die Unterscheidung nach Komplexitätsgraden. Diese werden in Großteils vom Fach unabhängigen Merkmalen wie *Reproduktion*, zum Beispiel in Form einer Durchführung von grundlegenden mathematischen Operationen, *Transfer*, wie etwa beim Kombinieren von Verfahren oder Begrifflichkeiten und *Reflexion*, beispielsweise beim Abschätzen der Güte eines Modells, abgebildet (vgl. [22], S. 15). In *Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben* werden die Komplexitätsbereiche folgendermaßen charakterisiert (vgl. [22], S. 16):

K1: EINSETZEN VON GRUNDKENNTNISSEN UND GRUNDFERTIGKEITEN

In diesen Bereich fallen Aufgaben, die durch das Kennen und Anwenden von wesentlichen mathematischen Fertigkeiten und theoretischen Grundlagen gelöst werden können. Diese Art des Problemlösens kann sowohl in Form einer Reproduktionsleistung als auch durch konkretes Nutzen von Informationen, die unmittelbar aus dem Vorgegebenen gewonnen werden können, auftreten.

K2: HERSTELLEN VON VERBINDUNGEN

Um Beispiele dieser Kategorie lösen zu können, bedarf es der Fähigkeit, Beziehungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Gebieten zu kennen und für die Anwendung zu nutzen. Ebenso kann eine Verknüpfung verschiedener Ausdrücke, Vorgehensweisen oder auch Darstellungsformen gefordert werden.

K3: EINSETZEN VON REFLEXIONSWISSEN; REFLEKTIEREN

Beim Reflektieren handelt es sich um den Vorgang des Betrachtens, Bewertens und Abschätzens von Informationen und Wechselbeziehungen, die nicht direkt ersichtlich sind. Es geht beispielsweise darum, das Für und Wider bestimmter Lösungsverfahren, Darstellungsformen, Deutungen oder auch Begründungen abzuwägen. Das dadurch erhaltene Reflexionswissen äußert sich infolgedessen zum Beispiel durch passende Argumentation, Begründung oder auch Beschreibung einer Lösungsstrategie.

An dieser Stelle ist es wichtig, auf die unterschiedlichen Bedeutungen von *Komplexität* und *Schwierigkeit* hinzuweisen. *Schwierigkeit* bezieht sich im schulischen Kontext auf die relative Lösungshäufigkeit, die ein Beispiel aufweist. So erfordern die Additionen $3 + 5$ und $3,452 + 12,087$ dieselbe kognitive Leistung, werden also demselben Komplexitätsbereich zugeordnet, unterscheiden sich jedoch im Schwierigkeitsgrad.

Im Unterricht ist es somit von großer Bedeutung, bei der Aufgabenstellung nicht nur den Schwierigkeitsgrad als Mittel der Differenzierung oder auch Förderung im Kopf zu behalten. Gerade schwächere Schüler können zum Beispiel im Lernprozess von einer Aufgabe, die eine höhere Komplexität, aber einen niedrigen Schwierigkeitsgrad aufweist, profitieren. (Vgl. [23], S. 1f); [22], S. 15)

4.4.3 EXEMPLARISCHE ANWENDUNG DES KOMPETENZMODELLS

Im Folgenden wird die Anwendung des Kompetenzmodells anhand von zwei Aufgabenstellungen demonstriert.

AUFGABE 4.1

Parameterdarstellung einer Geraden

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g: X =$ _____

Abb. 3: Aufgabe 4.1, [137]

Hierbei kommen folgende Kompetenzbereiche zum Tragen:

- **H2:** elementare Rechenoperationen in den jeweiligen Inhaltsbereichen planen und durchführen
- **I1:** Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen
- **K1:** Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten

Bei dieser Aufgabe wird somit die Handlung des Rechnens bzw. Operierens innerhalb des Inhaltsbereichs *Algebra und Geometrie* unter Einsatz von Grundkenntnissen und -fertigkeiten verlangt. Das Zusammenspiel der einzelnen Kompetenzbereiche wird in der nachfolgenden Graphik dargestellt:

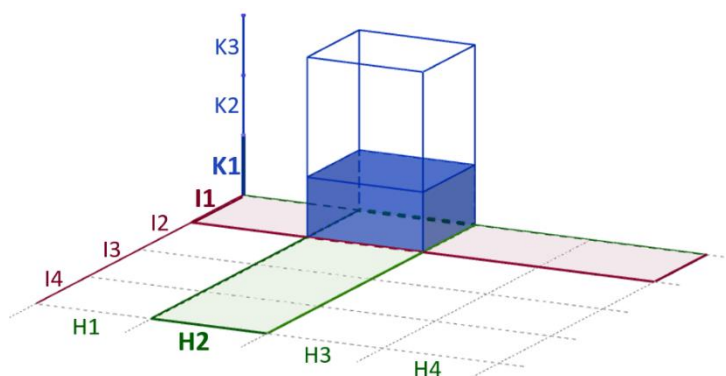


Abb. 4: Kompetenzbereiche - Aufgabe 4.1

Bezogen auf das Konzept der standardisierten Reifeprüfung, kurz SRP-Konzept, spiegelt das Beispiel die folgende Grundkompetenz wider:

Grundkompetenzbezug	
AG	Algebra und Geometrie
AG 3	Vektoren
AG 3.4	Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können

Tab. 3: Grundkompetenzbezug - Aufgabe 4.1, vgl. [24]

AUFGABE 4.2

Im Unterricht ist es selbstverständlich wichtig, sich nicht ausschließlich auf Fragestellungen zu beschränken, die nur eine (Grund)kompetenz ansprechen. Innerhalb des Lernprozesses kommt der *Vernetzung* (siehe *Kap. III*) auf verschiedenen Ebenen eine große Bedeutung zu. Einerseits ist es für den Schüler beim Auffinden einer Lösungsstrategie von großem Nutzen, eine Aufgabe aus verschiedenen Perspektiven betrachten zu können, wofür es einer Kenntnis über die Verbindungen der einzelnen Inhaltsbereiche bedarf. Andererseits spielt das Erkennen von Zusammenhängen bei der

Ausbildung eines grundlegenden Verständnisses eine große Rolle, da dies unter anderem auch ein Übertragen von bereits Gelerntem auf neue Inhalte ermöglicht. Dadurch wird zudem das Konzept eines nachhaltigen Lernens unterstützt, bei dem es nicht mehr nur um das Aneignen automatisierter Handlungsabfolgen geht. (Vgl. [1], S. 126) Nicht zuletzt kommt auch hier wieder die zugrundeliegende Bildungstheorie ins Spiel. Um zum Beispiel angemessen reflektieren zu können, ist es wichtig, das Vorgelegte aus verschiedenen Blickwinkeln betrachten zu können.

Die folgende Aufgabe weist ein solches Vernetzen von Kompetenzen auf:

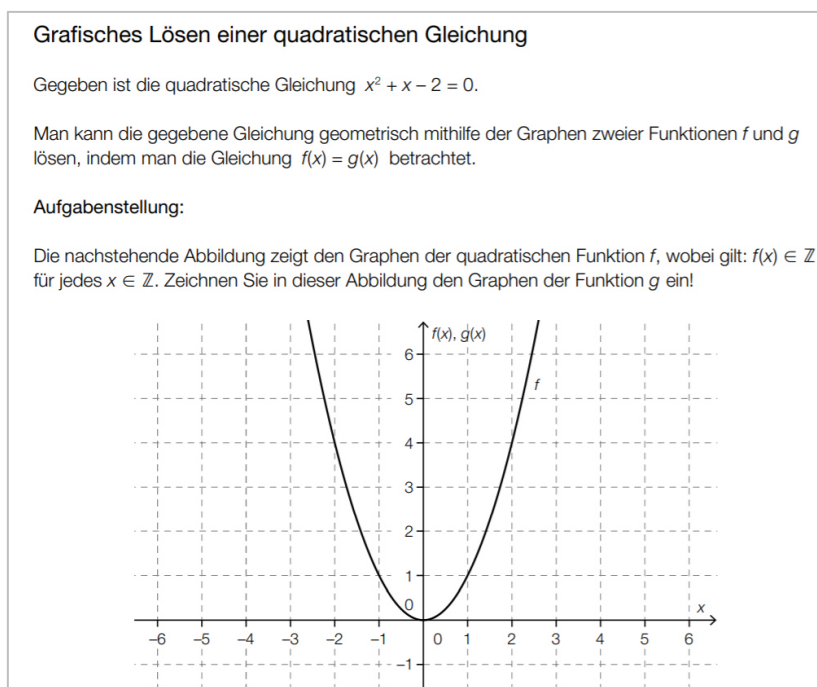


Abb. 5: Aufgabe 4.2, [133]

Lösungserwartung

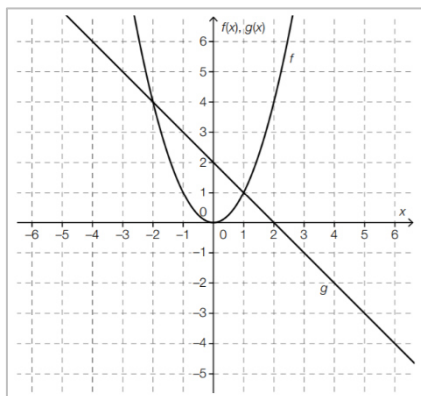


Abb. 6: Aufgabe 4.2 – Lösung, [133]

Hier findet eine Vernetzung von Funktionenlehre und Algebra statt. Beim Lösen der Aufgabe muss der Schüler einerseits in der Lage sein, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln, um aus dem Graphen die Funktionsgleichung von $f(x)$ zu erhalten. Andererseits muss er auf algebraischer Ebene erkennen, dass die Funktionsgleichung, $f(x) = x^2$, einem Teil der gegebenen quadratischen Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$ entspricht. Zudem muss er den restlichen Teil der Gleichung in Verbindung mit der gesuchten Funktion $g(x)$ bringen, wobei er davor auch noch die Gleichung entsprechend umzuformen vermag, um die gesuchte Funktionsgleichung zu erhalten. Im letzten Schritt muss dann wieder zwischen zwei Darstellungen – der als Gleichung und jener als Graphik – gewechselt werden, um den Graphen der linearen Funktion entsprechend in das Koordinatensystem einzuzichnen. Über all dem steht natürlich das grundlegende Verständnis darüber, dass das Umformen bzw. Lösen einer Gleichung dem geometrischen Schneiden zweier Funktionsgraphen entspricht.

Grundkompetenzbezug	
FA	Funktionale Abhängigkeiten
FA 1	Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
FA 1.6	Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können
FA 2	Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$
FA 2.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
FA 3	Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$; $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$
FA 3.1	Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
AG	Algebra und Geometrie
AG 2	(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme
AG 2.3	Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Tab. 4: Grundkompetenzbezug - Aufgabe 4.2, [25]

Hinsichtlich des Kompetenzmodells findet in dieser Aufgabenstellung eine starke Vernetzung innerhalb der verschiedenen Bereiche statt:

- **Handlungsbereich:**
Die Aufgabe verlangt ein Übertragen von Gleichungen in Graphen (und umgekehrt), dazu ist das Erkennen von mathematischen Beziehungen notwendig
→ H1 Darstellen, Modellbilden

Grundlegend für das Entwickeln einer Lösungsstrategie sind hierbei das Umformen von Gleichungen, sowie das Planen und Ausführen von Konstruktionsvorgängen → H2 Rechnen, Operieren

- *Inhaltsbereich:*
I1 Algebra und Geometrie
I2 Funktionale Abhängigkeiten
- *Komplexitätsbereich:*
Unter dem Einsatz von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (→ K1) werden Verbindungen hergestellt (→ K2), sodass ein Reflexionswissen genutzt werden kann (→ K3).

4.5 DAS O-M-A-MODELL

Neben dem oben beschriebenen Modell, das auch in der Sekundarstufe 1 zur Verwendung kommt, wird bei der Erstellung der Zentralmatura-Aufgaben auf ein weiteres Kompetenzmodell zurückgegriffen. Dieses wurde im Auftrag des Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation und Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) erstellt und dient vor allem der Untersuchung der einzelnen Aufgaben hinsichtlich ihrer Klassifizierung und Komparabilität. (Vgl. [26], S. 68)

Sattelberger und Kramer beschreiben die Einsatzgebiete des Modells folgendermaßen:

- *Formulierung von Kompetenzstufen, um Testleistungen inhaltlich vergleichbar zu interpretieren*
- *Orientierungsgrundlage für die Entwicklung und Einstufung von (Lern- und Prüfungsaufgaben*
- *Theoretisch und empirisch begründeter Erwartungshorizont für die Performanz von Schülerinnen und Schülern*

([26], S. 68)

Wie man anhand der nachfolgenden Tabelle erkennen kann, erfolgt eine Unterteilung der Handlungsdimensionen *Operieren*, *Modellieren* und *Argumentieren* hinsichtlich ihrer Komplexitätsstufen, weshalb dieses Modell in der Literatur auch als *Kompetenzstufenmodell* aufscheint.

Stufe	Operieren	Modellieren	Argumentieren
1	• Identifizieren der Anwendbarkeit eines gegebenen bzw. vertrauten Verfahrens • Abarbeiten / Ausführen einer gegebenen bzw. vertrauten Vorschrift	• Identifizieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt • Realisieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt	• einfache fachsprachliche Begründung ausführen (realisieren), durch die Verwendung eines Begriffs, Zusammenhangs oder Verfahrens um ein Ergebnis zu begründen bzw. eine Aussage zu verifizieren • verständliche/vertraute Aussagen (über Zusammenhänge oder Verfahren) auf eine gegebene innermathematische Situation prüfen und entscheiden • die Passung eines Begriffs auf eine gegebene (innermathematische) Situation prüfen (Verwendung von Operatoren) • Beispiele und Gegenbeispiele zu mathematischen Aussagen finden
2	• Abarbeiten / Ausführen mehrschrittiger Verfahren / Vorschriften • Nutzung von Technologie zum Abarbeiten/Ausführen mehrschrittiger Verfahren/ Vorschriften wird erwartet	• Verwendung vertrauter und direkt erkennbarer Standard-Modelle unter der Berücksichtigung (dem Setzen) von Rahmenbedingungen • Erkennen unter welchen Voraussetzungen die erzielten Ergebnisse unter Einsatz des mathematischen Standard-Modells zur Situation passen • Deuten der math. Resultate im gegebenen Kontext • (deskriptive) Beschreibung der vorgegebenen Situation durch mathematische Standardmodelle	• Nachvollziehen mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen in Argumentationsketten und Kontexten • Erläutern mathematischer Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen in Argumentationsketten und Kontexten
3	• Erkennen ob ein bestimmtes Verfahren / eine bestimmte Vorschrift für eine gegeben Situation passt • das Verfahren / die Vorschrift passend machen und ausführen	• Anwenden von Standard-Modellen auf neuartige Situationen • Finden einer Passung zwischen geeignetem mathematischen Modell und realer Situation	• fachlich und fachsprachlich korrekte Formulierung und Erklärung von mathematischen Sachverhalten • mehrschrittige mathematische Argumentationen punktuell prüfen bzw. vervollständigen • mehrschrittige mathematische Standard-Argumentationen durchführen und analog zu bekannten Mustern notieren • unterschiedliche Begründungen eines Sachverhaltes vergleichen und beurteilen
4	• Makros⁴ entwickeln/bilden und bereits verfügbare Makros neu zusammenfügen	• komplexe Modellierung einer vorgegebenen Situation; Reflexion der Lösungsvarianten bzw. der Modellwahl und Beurteilung der Exaktheit bzw. Angemessenheit zugrunde gelegter Lösungsverfahren	- eigenständige Argumentationsketten aufbauen • eine Beweisidee bzw. Vorgehensstrategie einer Herleitung erläutern • Begründung von Resultaten und Entscheidungen (z.B. auch über ein gewähltes Beweisverfahren; Unterscheidung z.B. zwischen Existenz- und Allaussagen) • Erklären von Gültigkeitsbereichen bestimmter Aussagen

Tab. 5: Kompetenzstufenmodell O-M-A ([26], S. 68)

⁴ aggregierte mathematische Vorschriften

Bezüglich der drei Dimensionen *Operieren, Modellieren und Argumentieren* knüpft das Modell inhaltlich an die Handlungsdimensionen des unter Kap. 4.4 genannten Kompetenzmodells an.

Mit Hilfe des O-M-A-Modells ist es möglich, die Verknüpfung der einer Grundkompetenz zugehörigen mathematischen Teilhandlung zu erkennen und zu beschreiben (vgl. [27], S. 373). Somit erhält die Lehrperson zum einen ein Hilfsmittel, um den Kenntnis- und Kompetenzstand der Schüler einordnen zu können. Zum anderen wird ihr dadurch die passende Aufgabenauswahl (für Übungs- und Prüfungsaufgaben) erleichtert. Außerdem bietet sich das Modell als diagnostisches Instrument an, mit dessen Hilfe die Aufgaben der verschiedenen Prüfungstermine hinsichtlich der geforderten Handlungs- und Komplexitätsanforderungen untereinander verglichen und bei der Erstellung neuer Beispiele dementsprechend angeglichen werden können. (Vgl. [26], S. 69f)

Typ-1-Aufgaben charakterisieren sich dadurch, dass sie nur einem Kompetenzbereich zugeordnet werden können und die Komplexitätsstufe 1 selten verlassen (vgl. [28], S. 1136). Bei Typ-2-Aufgaben können mehrere Bereiche hingegen auch vernetzt und über die Stufen 1 bis 3 verteilt auftreten (vgl. [29], S. 591). Aufgaben, die der Stufe 4 zugeordnet werden können, finden in Prüfungssituationen kaum Anwendung, da diese eine selbstständige Ausbildung von Prozessen erfordern. Diesbezüglich sollte dafür Sorge getragen werden, dass eine derartige Prozessentwicklung im Unterricht Platz findet. (Vgl. [30], S. 36)

4.5.1 EXEMPLARISCHE ANWENDUNG DES O-M-A-MODELLS

Eine Klassifizierung anhand des O-M-A-Modells wird exemplarisch an einer Typ-1- und einer Typ-2-Aufgabe gezeigt:

TYP-1-AUFGABE

Bei einem Versuch ist eine bestimmte Wassermenge für eine Zeit t auf konstanter Energiestufe in einem Mikrowellengerät zu erwärmen. Die Ausgangstemperatur des Wassers und die Temperatur des Wassers nach 30 Sekunden werden gemessen.

Zeit (in Sekunden)	$t = 0$	$t = 30$
Temperatur (in °C)	35,6	41,3

Ergänzen Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion, die die Temperatur $T(t)$ zum Zeitpunkt t beschreibt!

$T(t) = \underline{\hspace{2cm}} \cdot t + 35,6$

Abb. 7: Typ-1-Aufgabe [153]

Grundkompetenzbezug	
FA	Funktionale Abhängigkeiten
FA 2	Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$
FA 2.2	Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können

Tab. 6: Grundkompetenzbezug ([24], S.10)

Bezug zum O-M-A-Modell	
Handlungsdimension	Modellieren
Stufe	1
Realisieren eines Darstellungswechsels zwischen Kontext und mathematischer Repräsentation und umgekehrt	

Tab. 7: O-M-A – Bezug ([26], S. 68)

TYP-2-AUFGABE

Intercity-Express (ICE)

Als ICE werden verschiedene Baureihen von Hochgeschwindigkeitszügen der Deutschen Bahn bezeichnet. Mit einer Höchstgeschwindigkeit von bis zu 330 km/h (rund 91,7 m/s) handelt es sich dabei um die schnellsten Züge Deutschlands. Sie sind ca. 200 Meter lang und ca. 400 Tonnen schwer und bestehen aus jeweils acht Wagen. Im Rahmen von Zulassungsfahrten müssen Beschleunigungs- und Brems tests absolviert werden. Ergebnisse dieser Tests können grafisch dargestellt werden.

Aufgabenstellung:

a) Die Daten eines Beschleunigungstests vom Stillstand bis zur Höchstgeschwindigkeit (die Geschwindigkeit $v_i(t)$ ist in Metern pro Sekunde und die Zeit t in Sekunden angegeben) sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm näherungsweise dargestellt.

Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0 \text{ s}; 700 \text{ s}]$ und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit größer ist als die ermittelte mittlere Änderungsrate!

☐ Interpretieren Sie das bestimmte Integral $\int_0^{700} v_i(t) dt$ im gegebenen Kontext!

Abb. 8: Typ-2-Aufgabe ([154], S.5)

b) Bei einem Bremsstest werden Daten aufgezeichnet. Diesen Daten kann man für den zurückgelegten Weg $s(t)$ entnehmen: $s(t) = 70 \cdot t - 0,25 \cdot t^2$ mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern ab Bremsbeginn.

Geben Sie die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v_z für den Bremsstest in Form von $v_z(t) = k \cdot t + d$ an und deuten Sie die auftretenden Parameter k und d im gegebenen Kontext!

Bestimmen Sie die Länge derjenigen Strecke, die der ICE vom Bremsbeginn bis zum Stillstand zurücklegt!

Abb. 9: Typ-2-Aufgabe ([154], S.5)

Grundkompetenzbezug	
AN	Analysis
AN 1	Änderungsmaße
AN 1.2	Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient (momentane Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können
AN 1.3	Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
AN 3.2	Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
AN 4	Summation und Integral
AN 4.3	Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können
FA	Funktionale Abhängigkeiten
FA 2	Lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$
FA 2.3	Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

Tab. 8: Grundkompetenzbezug ([24], S.10, 14f)

Bezug zum O-M-A-Modell		
Aufgabe	Handlungsbereich	Stufe
a	Operieren	1
	Modellieren	1
b	Modellieren	1
	Operieren	2

Tab. 9: O-M-A-Bezug (vgl. [30], S. 43)

4.5.2 DAS O-M-A-MODELL IN DER ZENTRALMATURA

Die folgende Graphik zeigt die Verteilung der Typ-1- und Typ-2-Aufgaben des Haupttermins der Zentralmatura vom 11.05.2015 nach dem Kompetenzstufenmodell. Hierbei kann man sehr gut erkennen, dass sich Typ-1-Aufgaben fast ausschließlich in Stufe 1, Typ-2-Aufgaben ziemlich gleichmäßig über die ersten beiden Komplexitätsstufen verteilt einordnen lassen.

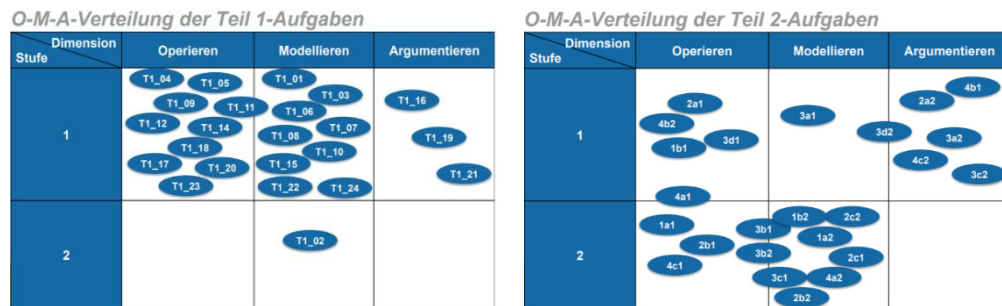


Abb. 10: O-M-A-Verteilung [155]

Da bei der Erstellung von Klausurheften ein *Konstanthalten des Schwierigkeitsgrades* ([26], S. 69) der verschiedenen Prüfungstermine, sowie auch eine gleichmäßige Verteilung der Aufgaben über alle Handlungsdimensionen innerhalb eines Termins anvisiert wird, bietet die Einordnung der Aufgaben nach dem O-M-A-Modell auch hier ein probates Mittel, um diesbezüglich vergleichende Aussagen treffen zu können. (Vgl. [26], S. 69f)

Wie so ein Vergleich ausschauen könnte, kann man in der nachfolgenden Abbildung sehen, die die Einstufung der Prüfungsaufgaben aus den Maturaterminen vom 11.05.2015 und 10.05.2016 darstellen:

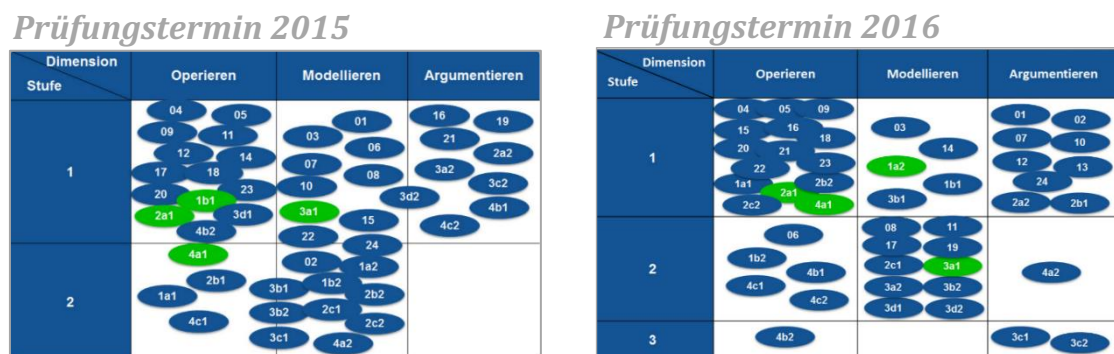


Abb. 11: O-M-A-Verteilung ([26], S. 69)

Christina Fuchs stellte im Rahmen ihrer Diplomarbeit [30] fest, dass die Zuordnung nach dem Kompetenzstufenmodell durch Lehrpersonen nicht immer eindeutig ausfällt und oftmals auch von der des Bundesministeriums für Bildung abweicht. Große

Übereinstimmungen gibt es beim Handlungsbereich *Operieren* und bei der Identifikation der Komplexitätsstufe, wohingegen die Handlungsbereiche *Argumentieren* und *Modellieren* bezüglich der konkreten Zuordnung stark divergieren. Eine alleinige Einordnung der Aufgaben mit Hilfe des O-M-A-Modells ist in der Schulpraxis somit eher unzureichend. (Vgl. [30], S. 65ff)

4.6 ENTWICKLUNG VON KLAUSURAUFGABEN

Bei der Entwicklung von Klausuraufgaben wird bei der Einordnung und Überprüfung der Qualität (beispielsweise hinsichtlich der Verhältnismäßigkeit und Streuung des Komplexitätsgrades, der Verständlichkeit der Fragestellung und/oder Anweisungen oder auch psychometrischer Aspekte) allerdings nicht nur auf Kompetenzmodelle zurückgegriffen (vgl. [31], S. 25). Potentielle Aufgaben durchlaufen einen mehrstufigen Qualitätssicherungsprozess, der damit beginnt, dass diese nach der Erstellung zur Durchsicht an eine Kleingruppe weitergegeben werden, die sich auf fachliche oder didaktische Mängel konzentriert (vgl. [30], S. 15). Danach wird im Zuge von Feldtestungen die Qualität der Aufgaben hinsichtlich der oben genannten Anhaltspunkt untersucht und die daraus erhaltenen Erkenntnisse in Form einer statistischen Auswertung und Analyse festgehalten, welche auch bei der Entwicklung weiterer Aufgaben als Grundlage dient. Schlussendlich wird in einem Approbationsverfahren durch Experten der Bezug zum aktuellen Lehrplan und den (allgemeinen und fachlichen) Bildungszielen überprüft, sowie eine Einordnung der Aufgaben anhand des O-M-A-Modells durchgeführt. Die an dem gesamten Überprüfungsprozess beteiligten Personen kommen sowohl aus dem universitären als auch aus dem schulischen Bereich, wodurch weitgefächertes Expertenwissen aus der Fachdidaktik bis hin zur Schulpraxis Anwendung findet. (Vgl. [9], S. 10; [32], S. 96)

4.7 LEHRPLAN VS. GRUNDKOMPETENZMODELL

„Für den Bildungsauftrag des Faches Mathematik ist der Lehrplan maßgebend. Die SRP-Grundkompetenzen drücken den unverzichtbaren Kernbereich aus, der bei der standardisierten, kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung verlangt wird.“
([1], S. 23)

Der Mathematikunterricht muss inhaltlich in erster Linie am derzeit gültigen Lehrplan ausgerichtet werden. Der für die Zentralmatura verbindliche Grundkompetenzkatalog beschreibt denjenigen Teilbereich an Begrifflichkeiten, Fähig- und Fertigkeiten, der den wesentlichen Schwerpunkt des Lehrstoffes bildet und somit maßgeblich für das Bestehen der Matura ist. (Vgl. [31], S. 1)

Die Gestaltung des Unterrichts sollte also derart erfolgen, dass dem im Lehrplan festgelegten Bildungsauftrag nachgekommen wird und im Zuge dessen eine Ausbildung der im Katalog angeführten Grundkompetenzen stattfindet (vgl. [1], S. 6). Hierbei ist es wichtig, dass Lehrpersonen in Hinblick auf die Reifeprüfung den Fokus nicht ausschließlich auf eben jene Grundkompetenzen richten und die Bereiche, die exklusiv Teil des Lehrplans sind, zugunsten einer Maturavorbereitung vernachlässigen oder gar streichen (vgl. [17], S. 1). So meint auch Werner Peschek, der neben anderen die Projektleitung bei der Erstellung des der Zentralmatura zugrundeliegenden Konzepts innehatte:

„Ein Mathematikunterricht, der sich der Sicherung von wohl begründeten Grundkompetenzen entzieht, ist bildungstheoretisch wie gesellschaftlich inakzeptabel und weitgehend obsolet. Ein Mathematikunterricht, der sich auf die Vermittlung von Grundkompetenzen beschränkt (sofern dies überhaupt möglich ist), ist armselig und ebenso inakzeptabel.“

([1], S. 6)

Es gilt also neben den grundlegenden Kompetenzen, die von der Allgemeinheit der Schüler längerfristig abruf- und abprüfbar sein sollten, auch jene mathematischen Fertigkeiten und Fähigkeiten im Auge zu behalten, die nur über einen kurzen Zeitraum präsent sind und sich durch spezielleres fachspezifisches Können auszeichnen.

Sowohl kurz- als auch längerfristig verfügbare Kompetenzen können anhand einer punktuellen (schriftlichen) Leistungsüberprüfung gemessen werden können. Die Art der Überprüfung kann bei ersteren, den Grundkompetenzen, in Gestalt zentraler Vergleichstest (wie etwa der Zentralmatura) durchgeführt werden. Bei zweiteren, den spezifischeren Kompetenzen, handelt es sich um Befähigungen, deren Ausprägung zum Beispiel auf Unterschiede im Schultyp, im Klassenniveau oder auch der individuellen Schwerpunktsetzung durch die Lehrkraft zurückzuführen ist. Die Leistungskontrolle kann hier mittels Schularbeiten, schriftlichen oder mündlichen Arbeiten (beispielsweise Referaten) oder auch anhand von Arbeitsblättern erfolgen. (Vgl. [18], S. 7)

Dem gegenüber stehen Leistungen, die sich über einen längeren Zeitraum hinweg ausbilden und sich zum Beispiel in Form von mathematischer Kreativität, Reflexionsfähigkeit oder auch Sozialkompetenz äußern. Diese Fähigkeiten genügen jedoch keiner punktuellen Überprüfung und bedürfen einer Evaluierung, die sich ebenfalls über einen längeren Zeitraum erstrecken muss. Überprüfbar sind etwa Handlungsweisen und auch Entwicklungsverläufe, die innerhalb des Lernprozesses entstehen und beobachtet werden können. Eine Feststellung erfolgt über ebendiese Beobachtungen oder zum Beispiel auch in Form von Portfolios oder Protokollen, die von den Schülern erstellt werden. (ebd., S. 7)

Der Lehrplan sollte in diesem Zusammenhang nicht als notwendiges Übel oder zusätzliche Belastung, sondern als Möglichkeit zur Differenzierung durch die dadurch entstehenden Freiräume betrachtet werden. Derartige Spielräume entstehen durch die unterschiedlichsten Voraussetzungen, denen man in einer Schulklasse begegnet und bieten der Lehrperson eine gewisse Autonomie in der Fokussierung auf bestimmte Inhalte, die über das reine Aneignen der Grundkompetenzen hinausgehen. Als Grundlage dafür könnte etwa der Leistungsstand der Klasse, der Schultyp oder auch eine individuelle Differenzierung innerhalb der Klasse dienen. Eine reine Reduktion der Schularbeiten auf den Inhalt des Grundkompetenzkatalogs würde diesbezüglich dazu führen, dass Leistungen, die in den zuletzt genannten Bereich fallen, aus Schülersicht keine

entsprechende Anerkennung finden und in deren Augen somit obsolet sind. (Vgl. [18], S. 6)

In [33] wird der Inhalt des Lehrplans und des Grundkompetenzkatalogs exemplarisch am Beispiel der 7. Klasse gegenübergestellt, wobei sich die Aufzählung nach der Einteilung der Inhalte laut Lehrplan richtet (siehe Tabelle EINFÜGEN).

Anmerkung: Die kursiv gesetzten Teile des Lehrplans gelten als verpflichtend für die Schulstufen, die mit mehr als drei Wochenstunden festgesetzt sind. (Vgl. [34])

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen	AG Algebra und Geometrie AG 1 Grundbegriffe der Algebra
• Abspalten reeller Linearfaktoren von Polynomen • Reflektieren über die Zweckmäßigkeit des Erweiterns der reellen Zahlen • Rechnen mit komplexen Zahlen	• Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit • Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können • - - Anmerkung: Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen. Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben, erklären und verständig verwenden können.
	FA Funktionale Abhängigkeit FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$
• <i>Kennenlernen des Fundamentalsatzes der Algebra</i>	• Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen
Differentialrechnung	AN Analysis AN 1 Änderungsmaße
• Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen	• Den Zusammenhang <i>Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate)</i> auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können • Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{k \cdot x}]' = k \cdot e^{k \cdot x}$.

Tab. 10: (Teil 1) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
Kennen des Begriffes Ableitungsfunktion, Berechnen von Ableitungen elementarer Funktionen	• Den Begriff <i>Ableitungsfunktion/Stammfunktion</i> kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können - Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
	FA Funktionale Abhängigkeiten FA 2 lineare Funktion $f(x) = k \cdot x + d$
	• Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können: $f(x + 1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = f'(x)$
	FA 5 Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}$
	• Charakteristische Eigenschaften $f(x + 1) = b \cdot f(x)$; $(e^x)' = e^x$ kennen und im Kontext deuten können
	FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion
	• Wissen, dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\cos(x)]' = -\sin(x)$
	AN Analysis AN 1 Änderungsmaße
• Deuten der zweiten Ableitung in inner- und außermathematischen Bereichen	• Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
	AN 2 Regeln für das Differenzieren
• Herleiten von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)	• Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich <i>Funktionale Abhängigkeiten</i>) Anmerkung: Im Teil <i>Vernetzung von Grundkompetenzen</i> können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.
	AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion
• Untersuchen einfacher und im Hinblick auf Anwendungen sinnvoller Funktionen bezüglich Monotonie und Krümmungsverhalten, Ermitteln von Extrem- und Wendestellen	• Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen
	FA Funktionale Abhängigkeiten FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften
	• Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen • Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständlich arbeiten können

Tab. 11: (Teil 2) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)

Lehrplan 7. Klasse	SRP-Grundkompetenzen
	FA 4 Polynomfunktion $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$
• Lösen von Extremwertaufgaben • Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit • <i>Kennenlernen weiterer Anwendungen der Differentialrechnung</i>	• Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen • -- • -- • --
Nichtlineare analytische Geometrie	--
• Beschreiben von Kreisen, Kugeln und Kegelschnittslinien durch Gleichungen • Schneiden von Kreisen bzw. Kegelschnittslinien mit Geraden, Ermitteln von Tangenten • Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen • <i>Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen</i>	• -- • -- • -- • --
Stochastik	WS Wahrscheinlichkeit und Statistik WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)
• Kennen der Begriffe diskrete Zufallsvariable und diskrete Verteilung • Kennen der Zusammenhänge von relativen Häufigkeitsverteilungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen; von Mittelwert und Erwartungswert sowie von empirischer Varianz und Varianz	• Die Begriffe <i>Zufallsvariable</i>, <i>(Wahrscheinlichkeits-)Verteilung</i>, <i>Erwartungswert</i> und <i>Standardabweichung</i> verständig deuten und einsetzen können
	WS 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung
• Arbeiten mit diskreten Verteilungen (insbesondere mit der Binomialverteilung) in anwendungsorientierten Bereichen	• Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können
	WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)
	• Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen • Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann

Tab. 12: (Teil 3) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)

Man kann hier gut erkennen, dass die inhaltlichen Bereiche durch den Lehrplan in Form von Überbegriffen abgedeckt werden. Der Grundkompetenzkatalog bietet oftmals eine exaktere Definition oder auch Ausformulierung bestimmter Teilbereiche, wodurch einerseits die Lehrplaninhalte ergänzt werden, aber andererseits auch teilweise eine stärkere Fokussierung einzelner Punkte stattfindet. (Vgl. [35], S. 84) Durch die exakte Formulierung der zu erreichenden Kompetenzen, liegt es nicht mehr (nur) an den Lehrkräften, anhand der Lehrplaninhalte die Zielvorgaben des Unterrichts zu bestimmen. Sie erhalten so hingegen den Auftrag, anhand der vorgegebenen Kompetenzen die Unterrichtsinhalte dementsprechend zu wählen, dass auf Schülerseite eine Entwicklung eben dieser Kompetenzen im Rahmen des Lernprozesses stattfindet.

Es fällt allerdings auf, dass Lehrplan und Grundkompetenzkatalog inhaltlich nicht gänzlich übereinstimmen, da nicht alle Bereiche des Lehrplans auch durch den Grundkompetenzkatalog abgedeckt werden. In der Oberstufe betrifft dies folgende Kapitel der Schulmathematik (ich beziehe mich hierbei auf den Teil des Lehrplans, der für alle Schultypen gleichermaßen gilt):

Funktionen
• Abschnittsweise definierte Funktionen
Trigonometrie
• Berechnungen an allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (mittels Sinus- und Cosinussatz) durchführen können • Polarkoordinaten verwenden können
Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$
• Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen lösen können • Ebenen durch Parameterdarstellungen bzw. Gleichungen (Normalvektordarstellungen) beschreiben können
Wahrscheinlichkeit & Statistik
• Bedingte Wahrscheinlichkeiten und (stochastische) Unabhängigkeit von Ereignissen kennen • Die Normalverteilung in anwendungsorientierten Bereichen verwenden können • Einfache statistische Hypothesentests durchführen und deren Ergebnisse interpretieren können
Differentialrechnung
• Extremwertaufgaben • Den Begriff Stetigkeit kennen und erläutern können
Komplexe Zahlen
• Komplexe Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ kennen; mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können • Den Fundamentalsatz der Algebra kennen
Nichtlineare analytische Geometrie
Folgen und Reihen
Differentialgleichungen & Grundlagen der Systemdynamik

Tab. 13: Lehrplan [36]

Diese Diskrepanz zwischen Grundkompetenzkatalog und Lehrplan führt aus meiner Erfahrung oftmals dazu, dass viele Lehrkräfte durch die alleinige Orientierung an maturarelevanten Inhalten die restlichen Gebiete nur streifen oder überhaupt nicht ansprechen.

5 STRUKTUR DER ZENTRALMATURA

5.1 DIE SCHRIFTLICHE REIFEPRÜFUNG

5.1.1 AUFBAU & INHALT

Innerhalb der Aufgabenstellung findet eine Unterscheidung nach Typ-1-Aufgaben und Typ-2-Aufgaben statt:

TYP-1-AUFGABEN

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben liegt es an den Schülern, zu zeigen, dass sie die im Katalog aufgelisteten Grundkompetenzen beherrschen. Die Aufgabenstellungen folgen einer reinen Kompetenzorientierung und erfordern keinerlei darüberhinausgehendes Wissen oder Können, das eigenständig angewendet werden muss. (Vgl. [37], S. 23) Das Lösen einer Aufgabe dieses Typs erfordert die Anwendung bzw. das Wissen über eine spezifische Grundkompetenz aus dem zugrundeliegenden Katalog. (Vgl. [17], S. 22)

TYP-2-AUFGABEN

Hierbei wird ein vernetzter Einsatz der Grundkompetenzen verlangt, der sich auch durch die selbsttätige Nutzung von theoretischem Wissen und praktischem Können äußert. Diese Aufgaben unterscheiden sich auch strukturell von Typ-1-Aufgaben, da nicht nur der Umfang des Lösungswegs, sondern auch der des Angabetextes weitaus größer ausfällt. Dieser Text dient zunächst als Einleitung, in welcher die Thematik der Aufgabe und allenfalls notwendige Zusatzinformationen, wie Begriffe, inhaltliche Zusammenhänge oder auch Größen, erläutert werden. Hierbei können allerdings auch Fakten, Aspekte, Begriffe oder auch Zahlen angeführt werden, die keinerlei Bewandnis für den Lösungsweg haben. Im Gegensatz zu den Aufgaben aus dem ersten Teil gilt es (innerhalb eines Beispiels) nicht nur eine, sondern durchaus auch eine Mehrzahl von kontextbezogenen Fragen zu beantworten. Die einzelnen Teilaufgaben sind jedoch nicht voneinander abhängig, sodass Lösungsschwierigkeiten bei einer Teilaufgabe nicht zur Unlösbarkeit des ganzen Beispiels führen. Der Fokus auf das Operieren ist bei der

Beantwortung der Fragen hier wesentlich größer als bei den Typ-1-Aufgaben, bei welchen das Anwenden von theoretischem Wissen oft im Vordergrund steht. Außerdem wird in den Typ-2-Aufgaben auch der bildungstheoretische Aspekt der Zentralmatura ganz besonders aufgegriffen. Dies erfolgt durch ein breites Spektrum an Aufgabenstellungen, welche sich auf die Anwendung, den Kontext oder auch innermathematische Fragen beziehen können, wobei die „höhere Allgemeinbildung“ im Sinne der zugrundeliegenden Bildungstheorie im Mittelpunkt steht. (Vgl. [37], S. 23; [33], S. 21f)

Demzufolge können Aufgabenstellungen zum Beispiel gemäß eines *Strukturierens und Darstellens mathematischer Themengebiete* auftreten, bei welchem das Einordnen, Gliedern, Verknüpfen und Ausführen von Grundwissen zu einem gegebenen Thema, welches sich auch auf mehrere Inhaltsbereiche beziehen kann, verlangt wird. Auch die oftmals geforderte *Kommunikation mit Experten* kann bei dieser Art von Aufgabe zum Tragen kommen. Hierbei erhalten die Schüler die mathematische Beschreibung von Sachverhalten, aus welchen sie die wesentlichen Aspekte ausmachen, im Sachzusammenhang entsprechend bewerten und die Schlussfolgerungen daraus fachlich korrekt repräsentieren müssen. Eine weitere mögliche Aufgabenstellung kann sich in einer *Reflexion von Expertenwissen und der Erzeugung von weiterführenden Informationen* äußern. Auch hier wird den Schülern eine mathematische Thematik vorgegeben, aus welcher sie die relevanten Informationen ermitteln und anhand von Reflexionsarbeit und/oder operativen Tätigkeiten weitere Informationen generieren müssen. (Vgl. [4], S. 28)

5.1.2 RAHMENBEDINGUNGEN

Die Prüfung besteht aus 24 Typ-1-Aufgaben und vier bis sechs Typ-2-Aufgaben, von welchen jede wiederum zwei bis sechs Teilaufgaben beinhaltet. Die Maturanten können von insgesamt 270 Minuten reiner Arbeitszeit Gebrauch machen.

Ursprünglich wurden die unterschiedlichen Aufgabentypen auf zwei Teile aufgeteilt, die separat an die Schüler ausgegeben wurden. Der erste Teil bestand aus 18 bis 25 Teil-1-Aufgaben, die innerhalb von 120 Minuten gelöst und danach abgegeben werden mussten. Danach erhielten die Maturanten den zweiten Teil, in welchem vier bis sechs Typ-2-Aufgaben in 150 Minuten zu bearbeiten waren. Seit dem Haupttermin 2019 werden beide Teile gemeinsam ausgeteilt, sodass die Schüler in der Reihenfolge der Abarbeitung der Fragen völlig frei agieren können und auch zeitlich keine Einschränkung bezüglich eines bestimmten Teils erfolgt.

5.1.3 ANTWORTFORMATE

In [33] werden die unterschiedlichen Antwortformate charakterisiert, wobei es diesbezüglich 2019 eine Anpassung gab ([17]):

A. OFFENE FORMATE

a) Offenes Antwortformat

Hierbei erfolgt die Antwort abhängig von der Fragestellung frei und in eigener Formulierung.

Gleichung einer Geraden aufstellen Die Punkte $A = (7 6)$, $M = (-1 7)$ und $N = (8 1)$ sind gegeben. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A und steht normal auf der Verbindungsgeraden durch die Punkte M und N. Aufgabenstellung: Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

Abb. 12: Offenes Antwortformat [132]

Vorteile: Bei dieser Art von Antwortformat stehen das Reproduzieren von Wissen und die fachlich korrekte Formulierung im Vordergrund. So ist es für die Lehrperson wesentlich einfacher, den Gedankengang der Schüler nachzuvollziehen, womit sie auch einen guten Eindruck über den Leistungs- und Wissenstand in Bezug auf das Grundlagewissen und -können des Schülers bekommt. Außerdem ist ein Lösen der Aufgabe nach dem Zufallsprinzip so gut wie unmöglich. (Vgl. [33], S. 22; [38], S. 41)

Nachteile: Bei diesem Format ist der zeitliche Aufwand im Vergleich zu den anderen Antwortformaten sowohl bei der Beantwortung von Seiten der Schüler als auch beim Korrigieren durch die Lehrer meist am größten. Zudem büßt man hierbei unter Umständen etwas an Objektivität bei der Auswertung ein. Ein weiteres Manko könnten auch eventuell vorhandene Mehrdeutigkeiten innerhalb der Antwort darstellen. Zusätzlich spielt das Artikulationsvermögen der Schüler hier eine sehr große Rolle, sodass Defizite diesbezüglich auch bei vorhandenem fachlichem Wissen zu Nachteilen führen können. (Vgl. [38], S. 41)

b) Halboffenes Antwortformat

Es werden beispielsweise Formeln, Funktionen, Variablen, etc. angegeben, in welche die richtige Antwort eingesetzt werden muss.

Lineares Gleichungssystem

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x_1 und x_2 . Es gilt: $a, b \in \mathbb{R}$.

I: $3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 = a$
 II: $b \cdot x_1 + \quad x_2 = a$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass für die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{(2; -2)\}$ ist.

$a =$ _____

$b =$ _____

Abb. 13: Halboffenes Antwortformat [156]

Vorteile: Ein Vorteil gegenüber dem offenen Antwortformat ist hier sicherlich die präzise Ausformulierung des Gefragten. Könnte es bei der offenen Variante eventuell Unklarheiten diesbezüglich geben, werden hier exakt jene Variablen angegeben, die gesucht sind. Durch diese Präzisierung in der Fragestellung wird auch der Inhaltsumfang der Antwort eingegrenzt und einer falschen Formulierung von Seiten der Schüler vorgebeugt. (Vgl. [39], S. 31)

Nachteil: Man könnte das Wegfallen des eigenständigen Formulierens (wie bei allen geschlossenen Formaten natürlich auch) als Nachteil bezüglich der Überprüfung und Festigung der Kommunikationsfähigkeit ansehen.

c) Konstruktionsformat

Bei dieser Art von Aufgabenstellung, ist das Eintragen oder Ergänzen von (zum Beispiel) Punkten, Geraden, Vektoren, Graphen oder auch der Skalierung in ein vorgegebenes Koordinatensystem oder eine angegebene Grafik erforderlich.

Vektoraddition

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der Abbildung einen Vektor $\vec{v}_2$ so, dass $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ ist!

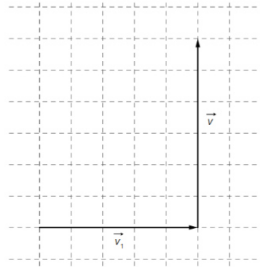


Abb. 14: Konstruktionsformat [144]

Vorteil: Antworten dieses Formats sind schnell und einfach auszuwerten und auch eindeutig einzuordnen (vgl. [40], S. 86). Zusätzlich bieten sie den Vorteil, dass ein Lösen nach dem Zufallsprinzip kaum möglich ist und dass hierbei, wie auch beim offenen Format, ein Nachvollziehen des Gedankengangs ermöglicht wird und die für den Lösungsweg notwendigen Grundkenntnisse und -fertigkeiten zu Tage treten. (Vgl. [33], S. 22)

B. GESCHLOSSENE FORMATE

a) Multiple-Choice-Antwortformat

■ 2 aus 5

Zwei der fünf angegebenen Antwortmöglichkeiten sind richtig und müssen vom Schüler angekreuzt werden.

Mittlere Änderungsrate interpretieren

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. Die mittlere Änderungsrate von f hat im Intervall $[x_1; x_2]$ den Wert 5.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen können über die Funktion f sicher getroffen werden? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es mindestens eine Stelle x mit $f(x) = 5$.	☐
$f(x_2) > f(x_1)$	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[x_1; x_2]$ monoton steigend.	☐
$f'(x) = 5$ für alle $x \in [x_1; x_2]$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	☐

Abb. 15: 2 aus 5 [136]

■ 1 aus 6

Eine der sechs angegebenen Antwortmöglichkeiten ist richtig und muss vom Schüler angekreuzt werden.

Winkel mit gleichem Sinuswert

Gegeben sei eine reelle Zahl c mit $0 < c < 1$. Für die zwei unterschiedlichen Winkel α und β soll gelten: $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = c$. Dabei soll α ein spitzer Winkel und β ein Winkel aus dem Intervall $(0^\circ; 360^\circ)$ sein.

Aufgabenstellung:

Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β ? Kreuzen Sie die zutreffende Beziehung an.

$\alpha + \beta = 90^\circ$	☐
$\alpha + \beta = 180^\circ$	☐
$\alpha + \beta = 270^\circ$	☐
$\alpha + \beta = 360^\circ$	☐
$\beta - \alpha = 270^\circ$	☐
$\beta - \alpha = 180^\circ$	☐

Abb. 16: 1 aus 6 [145]

b) Zuordnungsformat

Bei diesem Aufgabenformat geht es um die Auswahl von vier aus sechs Aussagen und deren passende Zuordnung zu vorgegebenen Antwortmöglichkeiten.

Zellkulturen

Im Rahmen eines biologischen Experiments werden sechs Zellkulturen günstigen und ungünstigen äußeren Bedingungen ausgesetzt, wodurch die Anzahl der Zellen entweder exponentiell zunimmt oder exponentiell abnimmt. Dabei gibt $N_i(t)$ die Anzahl der Zellen in der jeweiligen Zellkultur i Tage nach Beginn des Experiments an ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier beschriebenen Veränderungen jeweils die zugehörige Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.		A	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 0,15^t$
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.		B	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 0,5^t$
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.		C	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 0,85^t$
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.		D	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 1,5^t$
		E	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 1,85^t$
		F	$N_i(t) = N_i(0) \cdot 2^t$

Abb. 17: Zuordnungsformat [147]

Vorteil: Auf diese Weise kann ein Inhalt größeren Umfangs auf sehr kleiner Fläche untergebracht und abgefragt werden. Ein richtiges Lösen durch zufälliges Ausfüllen ist schwer möglich – sofern die Anzahl der Antwortmöglichkeiten die der Aussagen übersteigt. (Vgl. [41], S. 43)

c) Lückentext

Hierbei geht es darum, in zwei Lücken, die ein vorgegebener Satz aufweist, die passende Antwort bzw. Aussage einzutragen. Pro Lücke stehen drei Antwortmöglichkeiten, aus denen die richtige ausgewählt werden muss, zur Verfügung.

Quadratische Funktion

Gegeben ist eine quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn _____ ① _____ gilt, so hat die Funktion f auf jeden Fall _____ ② _____.

①		②	
$a < 0$	☐	einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☐
$b = 0$	☐	zwei reelle Nullstellen	☐
$c > 0$	☐	ein lokales Minimum	☐

Abb. 18: Lückentext [139]

Vorteile aller geschlossenen Formate: Antworten, die auf diese Weise gegeben werden, sind sehr einfach, schnell und mit hoher Objektivität auszuwerten und bedürfen keiner längeren Überprüfung auf ihre Richtigkeit (vgl. [40], S. 86). Bei diesem Formattyp ist es möglich, die Bandbreite der Besonderheiten und Charakteristika, die einer bestimmten Grundkompetenz innewohnen, möglichst groß zu gestalten. Durch den Einsatz von Distraktoren wird das Reflexionswissen der Schüler angesprochen, welches notwendig ist, um diese gezielt erkennen und ausschließen zu können. (Vgl. [33], S. 22)

Nachteil aller geschlossenen Formate: Hierbei findet wenig bis gar keine Leistung auf Reproduktions- sondern hauptsächlich auf Rekonstruktionsebene statt. Zusätzlich nimmt die Ratewahrscheinlichkeit mit der Anzahl der richtig zugeordneten/ausgewählten Antwortalternativen zu. (Vgl. [38], S. 44; [33], S. 22) Um diesem Phänomen vorzubeugen, ist es, wie bereits an anderer Stelle erwähnt, wichtig, dass die Anzahl der Antwortmöglichkeiten gegenüber der angegebenen Aussagen überwiegt und diese Distraktoren in ihren Aussagen hinsichtlich der Komplexität untereinander äquivalent sind. (Vgl. [41], S. 44) Nicht zuletzt aufgrund der optimalen Wahl der geeigneten Distraktoren überwiegt der Aufwand beim Erstellen von Aufgaben des geschlossenen Formats sicherlich dem der offenen Aufgabenformate.

Bei Typ-2-Aufgaben stehen der vernetzte Gebrauch der Grundkompetenzen, das Operieren, sowie der Einsatz von Reflexionswissen im Mittelpunkt, weshalb größtenteils offene und halboffene Formate Verwendung finden (vgl. [33], S.22).

Ein Beispiel einer Typ-2-Aufgabe, in welcher ein offenes und ein halboffenes Format auftreten, ist in Abb. 19 zu sehen.



Abb. 19: Offenes und halboffenes Typ-2-Aufgabenformat [114]

Selten kommt bei Typ-2-Aufgaben auch das Konstruktionsformat zur Anwendung:

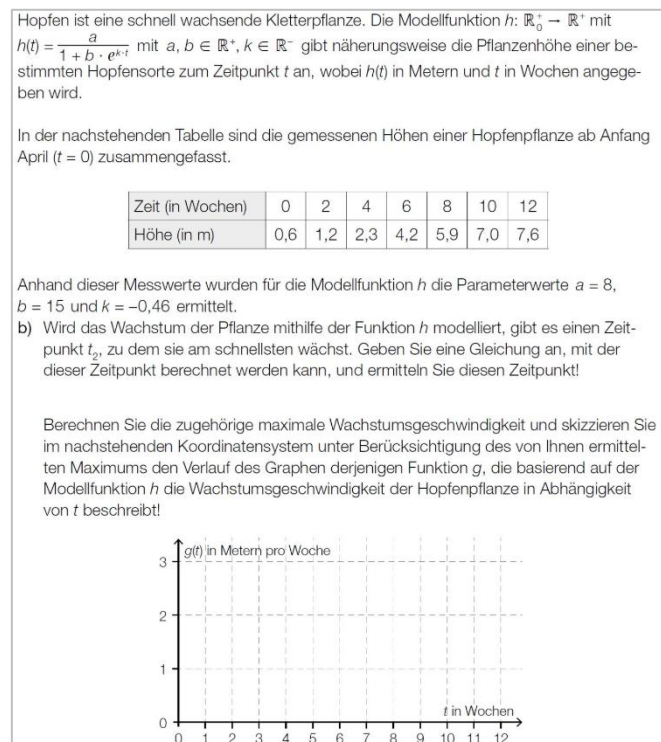


Abb. 20: Konstruktionsformat einer Typ-2-Aufgabe [115]

5.1.4 BEURTEILUNGSSYSTEM

Bei der Beurteilung der Leistungen haben sich Lehrpersonen an die in der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) [42] angeführten Anleitungen und Anweisungen zu halten.

A. BEURTEILUNG DER AUFGABENBEREICHE

Die Gesamtnote setzt sich aus den Leistungen, die in beiden Aufgabenbereichen erbracht werden, zusammen.

a) Typ-1-Aufgaben

„Die Typ-1-Aufgaben („Grundkompetenzen“) stellen den gemäß LBVO definierten ‚wesentlichen Bereich‘ dar und decken verschränkt Grundkompetenzen ab. Dazu kommen einzelne Komponenten von Typ-2-Aufgaben, die ebenfalls noch für die Überprüfung der Grundkompetenzen herangezogen werden.“

([31], S. 33)

Hierbei findet demgemäß die Prüfung über die Anwendungsleistung der Grundkenntnisse- und -fertigkeiten gemäß der Auflistung im Grundkompetenzkatalog in dafür charakteristischen Aufgabestellungen statt (vgl. [17], S. 24).

Eine Bewertung der Aufgaben aus diesem Bereich erfolgt über eine Punktevergabe mittels 0 oder 1 Punkten bzw. 0, $\frac{1}{2}$ oder 1 Punkten. Die jeweils zu erreichende Punktzahl ist bei der Aufgabenstellung angegeben und somit für den Schüler ersichtlich, wie man an den nachfolgenden Abbildungen (Abb. 21 und 22) erkennen kann (vgl. ebd., S.24).

Trefferwahrscheinlichkeit

Bei einem Training wirft eine Basketballspielerin einen Ball sechsmal hintereinander zum Korb. Fällt der Ball in den Korb, spricht man von einem Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit dieser Spielerin beträgt bei jedem Wurf 0,85 (unabhängig von den anderen Würfen).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses beschreibt!

Die Spielerin trifft genau einmal.	A $1 - 0,85^6$
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	B $0,15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^1 \cdot 0,15^5$
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	C $1 - 0,15^6$
Die Spielerin trifft genau zweimal.	D $0,85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^5 \cdot 0,15^1$
	E $6 \cdot 0,85 \cdot 0,15^5$
	F $\binom{6}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^4$

[0/½/1 Punkt]

Lösungserwartung:

Die Spielerin trifft genau einmal.	E
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	B
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	C
Die Spielerin trifft genau zweimal.	F

A	1 - 0,85 ⁶
B	$0,15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^1 \cdot 0,15^5$
C	$1 - 0,15^6$
D	$0,85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^5 \cdot 0,15^1$
E	$6 \cdot 0,85 \cdot 0,15^5$
F	$\binom{6}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^4$

Lösungsschlüssel:

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Ereignisse ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Abb. 21: Bewertung der Typ-1-Aufgaben [122]

Ungleichungen lösen Gegeben sind zwei lineare Ungleichungen. I: $7 \cdot x + 67 > -17$ II: $-25 - 4 \cdot x > 7$ Aufgabenstellung: Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die beide Ungleichungen erfüllen. Geben Sie die Menge dieser Zahlen als Intervall an! [0/1 Punkt]	Lösungserwartung: mögliche Vorgehensweise: I: $7 \cdot x + 67 > -17 \Rightarrow x > -12$ II: $-25 - 4 \cdot x > 7 \Rightarrow x < -8$ Menge aller reellen Zahlen x, die beide Ungleichungen erfüllen: $(-12; -8)$ Lösungsschlüssel: Ein Punkt für das richtige Intervall. Andere Schreibweisen der Lösungsmenge sind ebenfalls als richtig zu werten. Bei Angabe eines halboffenen oder geschlossenen Intervalls ist der Punkt nicht zu geben.
--	---

Abb. 22: Bewertung der Typ-1-Aufgaben [143]

Es gibt jedoch auch Typ-1-Aufgaben, bei welchen im Falle eines Rechenfehlers bei korrektem Ansatz trotz eines falschen Ergebnisses die Lösung als richtig gewertet wird, da dem Nachweis der dem Beispiel zugrundeliegenden Grundkompetenz mehr Gewicht zukommt als dem formal richtigen Rechenergebnis. Eine solche Aufgabenstellung und den bei der Korrektur anzuwendenden Lösungsschlüssel kann man in der folgenden Graphik sehen:

Wurfhöhe eines Körpers Ein Körper wird aus einer Höhe von 1 m über dem Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Die Geschwindigkeit des Körpers nach t Sekunden wird modellhaft durch die Funktion v mit $v(t) = 15 - 10 \cdot t$ beschrieben ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden). Aufgabenstellung: Geben Sie diejenige Höhe (in Metern) über dem Erdboden an, in der sich der Körper nach 2 s befindet. [0/1 Punkt]
Lösungserwartung: mögliche Vorgehensweise: $v(t) = 15 - 10 \cdot t$ $s(t) = 15 \cdot t - 5 \cdot t^2 + h_0$ $s(0) = 1 = h_0$ $s(t) = 15 \cdot t - 5 \cdot t^2 + 1$ $s(2) = 30 - 20 + 1 = 11$ Der Körper befindet sich nach 2 s in einer Höhe von 11 m über dem Erdboden. Lösungsschlüssel: Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Abb. 23: Bewertung von Rechenfehlern [146]

b) Typ-2-Aufgaben

„Die Typ-2-Aufgaben (Anwendung und Vernetzung von Grundkompetenzen) stellen die ‚(weit) über das Wesentliche hinausgehenden Bereiche‘ dar und sind auch als Ausgleich für Mängel in der Durchführung von Typ-1-Aufgaben heranzuziehen. Einige dieser Aufgaben enthalten Komponenten, die auch noch den ‚wesentlichen Bereichen‘ zuzuordnen sind‘.

([31], S. 33)

Wie bereits an anderer Stelle erwähnt, wird bei dieser Art von Aufgabe überprüft, ob Schüler Grundkenntnisse und -fertigkeiten auch in komplexeren, vernetzten und für sie teilweise unbekannten Situationen anwenden und als Hilfsmittel zur Reflexion verwenden können (vgl. [31], S. 25).

Für jede Teilaufgabe, aus denen sich eine Typ-2-Aufgabe zusammensetzt, werden 0, 1 oder 2 Punkte vergeben. Jene Teilaufgaben, die mit einem **A** (sogenannte Ausgleichspunkte) gekennzeichnet sind, werden mit 0 oder 1 Punkt bewertet und zählen zum wesentlichen Bereich, der den Typ-1-Aufgaben zugeordnet wird (vgl. [17], S. 25).

Eine derartige Aufgabenstellung und die dazugehörige Korrekturanweisung samt Lösungsschlüssel zeigen die nachfolgenden Abbildungen:

Kino

Ein Kino hat drei Säle. Im ersten Saal sind 185 Sitzplätze, im zweiten Saal 94 und im dritten Saal 76. Neue Filme starten üblicherweise an einem Donnerstag. Der Kinobetreiber nimmt modellhaft an, dass an so einem Donnerstag bei einer Vorstellung eines neuen Films in allen drei Sälen jeder einzelne Sitzplatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % belegt ist.

Aufgabenstellung:

a) Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 355$ und $p = 0,95$.

- 1) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P(X < 350)$ im gegebenen Kontext.
Zum Schulschluss mietet eine Schule alle drei Säle für denselben Film zur selben Beginnzeit. Alle Sitzplätze werden vergeben, jede Besucherin/jeder Besucher bekommt ein Ticket für einen bestimmten Sitzplatz in einem der drei Säle. Alle Tickets haben zusätzlich zur Platznummer noch eine fortlaufende, jeweils unterschiedliche Losnummer. Unmittelbar vor der Vorstellung werden zwei Losnummern ausgelost. Die beiden Personen, die die entsprechenden Tickets besitzen, erhalten jeweils eine große Portion Popcorn.
- 2) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass diese beiden Personen Tickets für denselben Saal haben.

b) Der Betreiber des Kinos möchte wissen, wie zufrieden seine Kundschaft mit dem gebotenen Service (Buffet, Sauberkeit etc.) ist. Bei einer Umfrage geben von 628 Besucherinnen und Besuchern 515 Besucher/innen an, dass sie mit dem gebotenen Service im Kino insgesamt zufrieden sind.

- 1) **A** Bestimmen Sie auf Basis dieser Befragung ein symmetrisches 95 %-Konfidenzintervall für den relativen Anteil aller Besucher/innen dieses Kinos, die mit dem gebotenen Service insgesamt zufrieden sind.
Bei einer zweiten Befragung werden viermal so viele Personen befragt, wobei der relative Anteil der mit dem gebotenen Service insgesamt zufriedenen Besucher/innen wieder genauso groß wie bei der ersten Befragung ist.
- 2) Geben Sie an, wie sich diese Vergrößerung der Stichprobe konkret auf die Breite des aus der ersten Befragung ermittelten symmetrischen 95 %-Konfidenzintervalls auswirkt.

Abb. 24: (Teil 1) Punkteverteilung einer Typ-2-Aufgabe [116]

a) Lösungserwartung:
a1) mögliche Beschreibung: Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Vorstellung eines neuen Films (in allen drei Sälen zusammen) mindestens 350 Sitzplätze belegt sind.
a2) Anzahl der Sitzplätze insgesamt: 355
$P = \frac{185}{355} \cdot \frac{184}{354} + \frac{94}{355} \cdot \frac{93}{354} + \frac{76}{355} \cdot \frac{75}{354} \approx 0,3858 = 38,58 \%$
Lösungsschlüssel:
a1) Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung des Terms im gegebenen Kontext.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b) Lösungserwartung:
b1) mögliche Vorgehensweise: $n = 628, h = \frac{515}{628} \approx 0,82$ $0,82 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,82 \cdot 0,18}{628}} \approx 0,82 \pm 0,03 \rightarrow [0,79; 0,85]$
b2) mögliche Interpretation: Eine Erhöhung der Anzahl der Befragten auf das Vierfache führt (bei gleichem relativem Anteil h) zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.
Lösungsschlüssel:
b1) Ein Ausgleichspunkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,76; 0,80] Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,83; 0,86] Grundkompetenz: WS 4.1 Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b2) Ein Punkt für die Angabe der richtigen Auswirkung auf die Breite.

Abb. 25: (Teil 2) Punkteverteilung einer Typ-2-Aufgabe [116]

B. GESAMTBEURTEILUNG

In der Handreichung *Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen* [17] werden folgende Richtlinien zur Beurteilung der Klausurarbeit vorgegeben, die sich nach § 38 Abs. 3 SchUG (BGBl. Nr. 472/1986 i.d.g.F.) und (BGBl. Nr. 371/1974 i.d.g.F.) richten.

Die Punkte innerhalb eines Klausurbogens werden wie folgt verteilt:

	Punkte
24 Typ-1-Aufgaben	24
4 Ausgleichsaufgaben ☐ als Teil der Typ-2-Aufgaben	4
Typ-2-Aufgaben ohne Ausgleichspunkte	20

Tab. 14: Punkteverteilung [17]

Die Gesamtnote wird gemäß des folgenden Beurteilungsschlüssels bestimmt, der zwischen zwei verschiedenen Beurteilungswegen unterscheidet:

	Genügend	Befriedigend	Gut	Sehr gut
Grundkompetenzpunkte (Typ-1 & A) ≥ 16	16 – 23,5	24 – 32,5	33 – 40,5	41 – 48
Grundkompetenzpunkte (Typ-1 & A) < 16 aber insgesamt (Typ-1 & Typ-2) ≥ 24	24 – 28,5	29 – 35,5		

Tab. 15: Notenschlüssel [17]

Wenn *weniger als 16 Grundkompetenzpunkte* (aus den Typ-1-Aufgaben und den Ausgleichsaufgaben) und *insgesamt weniger als 24 Punkte* erreicht werden, wird die Arbeit mit „Nicht genügend“ bewertet.

5.2 EINSATZ ELEKTRONISCHER HILFSMITTEL

Neben den üblichen Hilfsmitteln, wie Zirkel, Geo-Dreieck oder auch Lineal, sowie der bereits erwähnten Formelsammlung [21], werden bei der Zentralmatura auch elektronische Geräte als zusätzliche Arbeitshilfen zugelassen und sind seit dem Haupttermin 2018 sogar verpflichtend (vgl. [17], S. 22).

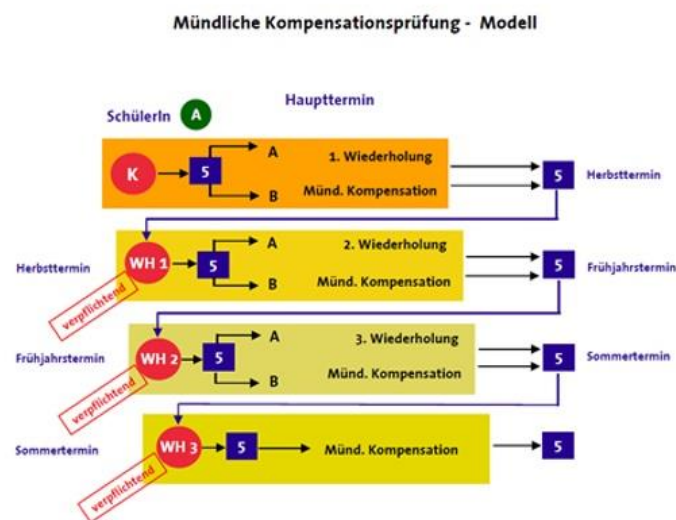
In § 18 Abs. 3, Prüfungsordnung AHS [43], werden die Systemanforderungen, die ein solches elektronisches Hilfsmittel zumindest aufweisen muss, angeführt:

„Die Minimalanforderungen an elektronische Hilfsmittel sind grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik.“

In den meisten Schulen kommen hierbei die kostenlose Software *GeoGebra*, die neben einer dynamischen Geometrieoberfläche auch mit einer algebraische Schnittstelle aufwartet, oder auch das *TI-Nspire™ CX CAS Handheld*, das ebenfalls ein Computeralgebrasystem und eine Graphikfunktion bereitstellt, zur Anwendung. Diese Hilfsmittel werden in *Kapitel IV* genauer betrachtet.

5.3 KOMPENSATIONSPRÜFUNG

Im Falle einer negativen Beurteilung der schriftlichen Klausurarbeit steht es dem Schüler frei, sich diese Note mittels einer mündlichen Prüfung, der sogenannten *Kompensationsprüfung*, auszubessern. Dazu muss der Kandidat bis spätestens drei Tage nach Verkündung der negativen Beurteilung einen Antrag stellen (vgl. [44], S. 1). Für den Fall, dass keine Kompensationsprüfung beantragt wird, gilt die negative Beurteilung der schriftlichen Klausur. Der Schüler erhält jedoch die Möglichkeit, bei einem der folgenden Klausurtermine wiederholt anzutreten, wobei auch hier wieder im Falle einer negativen Beurteilung eine Kompensationsprüfung abgelegt werden kann (vgl. [45]). Dieser Vorgang kann bis zu drei Mal wiederholt werden und ist in der folgenden Graphik dargestellt:



(K = Klausur; WH 1 = 1. Wiederholung im Herbst; WH 2 = 2. Wiederholung im Frühjahr; WH 3 = 3. Wiederholung im folgenden Sommertermin/Haupttermin)

Abb. 26: Kompensationsprüfung [140]

5.3.1 AUFGABENSTELLUNG

Eine Kompensationsprüfung umfasst fünf voneinander unabhängige Aufgaben, die dem Nachweis der (dem Grundkompetenzkatalog für die schriftliche Reifeprüfung entsprechenden) Grundkompetenzen dienen. Eine Aufgabe besteht aus einer Aufgabenstellung, die sich auf eine Grundkompetenz bezieht, und einer Leitfrage, die wiederum auf diese Grundkompetenz Bezug nimmt (vgl. [46], S. 1). Wie auch die Aufgaben der schriftlichen Reifeprüfung werden die der Kompensationsprüfung ebenfalls vom Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) erstellt.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Aufgabe einer Kompensationsprüfung:

Vierecke

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A = (0|0|0)$, $B = (6|-2|3)$, C und $D = (3|6|z_D)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die fehlende Koordinate des Eckpunkts D und die Koordinaten des Eckpunkts C !

Leitfrage:

Gegeben ist ein weiteres Viereck $PQRS$ mit den Eckpunkten $P = (0|0|0)$, $Q = (7|y_Q|-4)$, $R = (8|15|0)$ und $S = (x_S|8|4)$.

Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte Q und S so, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist!

Überprüfen Sie, ob das Parallelogramm auch ein Rechteck, eine Raute oder ein Quadrat ist, und erläutern Sie jeweils Ihre Vorgehensweise!

Abb. 27: Aufgabe einer Kompensationsprüfung ([135], S.3)

5.3.2 FACHDIDAKTISCHER ASPEKT

Grundsätzlich spielt bei mündlichen Prüfungen die Kommunikation naturgemäß eine große Rolle, wobei ihr bei der Kompensationsprüfungen neben dem fachlichen Aspekt eine besonders große Bedeutung zu kommt. Der Kandidat muss einerseits seinen Lösungsweg zu der Aufgabenstellung bezüglich der gefragten Grundkompetenz selbständig präsentieren. Andererseits wird die Beantwortung der Leitfrage in einem Dialog mit dem Prüfer abgehalten, sodass der Schüler seine Kommunikationsfähigkeit in einem Beispiel in zwei unterschiedlichen Situationen unter Beweis stellen kann. Erstere bezieht sich grundsätzlich auf das Kommunizieren mit und über mathematische Kompetenzen in Form einer Präsentation, zweite bietet dem Kandidaten die Möglichkeit, seine Reflexions- und Transferfähigkeit im Dialog zu demonstrieren. Im Gegensatz zur schriftlichen Reifeprüfung kommen hauptsächlich offene Antwortformate zur Anwendung, da geschlossene Formate den kommunikativen Charakter der Prüfung wenig begünstigen würden (vgl. [46], S. 1f).

5.3.3 BEURTEILUNG

„Die Kandidatinnen und Kandidaten müssen über den Nachweis der jeweiligen Grundkompetenz hinaus durch die kommunikativen Elemente in der mündlichen Prüfungssituation entsprechende Reflexionsaspekte nachweisen. Jede Aufgabenstellung bzw. jede Leitfrage stellt einen Indikator für die Erfüllung der Anforderungen gemäß LBVO dar und ist daher mit jeweils null Punkten oder einem Punkt zu bewerten. Somit ist für jede Aufgabenstellung ein Grundkompetenzpunkt und für jede Leitfrage ein Leitfragenpunkt zu erreichen. Insgesamt können maximal zehn Punkte erreicht werden.“

([46], S. 3)

Dadurch ergibt sich folgendes Beurteilungsschema:

Note	erreichte Punkte
„Genügend“	4 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte
	3 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
„Befriedigend“	5 Grundkompetenzpunkte + 0 Leitfragenpunkte
	4 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
	3 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
„Gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 1 Leitfragenpunkt
	4 Grundkompetenzpunkte + 2 Leitfragenpunkte
	3 Grundkompetenzpunkte + 3 Leitfragenpunkte
„Sehr gut“	5 Grundkompetenzpunkte + 2 (oder mehr) Leitfragenpunkte
	4 Grundkompetenzpunkte + 3 (oder mehr) Leitfragenpunkte

Tab. 16: Beurteilungsschema ([47], S.3)

Für die Gesamtbeurteilung der Reifeprüfung in Mathematik wird sowohl das Ergebnis der schriftlichen Prüfung als auch das der Kompensationsprüfung berücksichtigt, wodurch der Schüler insgesamt keine bessere Beurteilung als „Befriedigend“ erreichen kann (vgl. [46], S. 3).

5.4 MÜNDLICHE MATURA

Im Rahmen der mündlichen Matura gibt es auch die Möglichkeit in Mathematik anzutreten. Die Aufgaben werden hierbei im Gegensatz zu schriftlicher Reifeprüfung und Kompensationsprüfung nicht vom BMBWF bereitgestellt, sondern standortspezifisch von Fachlehrern ausgearbeitet. Auf Grundlage des Lehrplans werden sogenannte Themenpools bzw. Themenkörbe fixiert, aus welchen der Kandidat bei der Prüfung (blind) zwei ziehen und im Anschluss einen auswählen muss. Pro Themenpool sind vom Kandidaten mindestens zwei Aufgabenstellungen vorzubereiten. Das Lehrerteam, das für die Erstellung der Aufgaben zuständig ist, hat dabei ebenfalls der Kompetenzorientierung zu folgen (vgl. [48]). Wie bei Kompensationsprüfungen kommen auch bei der mündlichen Matura der Reflexions- und Transferleistung große Bedeutung zu, weshalb sich die Aufgabenstellungen nicht auf reines Grundwissen und Grundfertigkeiten beschränken dürfen (vgl. [49], S.6). Ebenso wenig ist die Reduktion auf einen einzigen Handlungsbereich erwünscht (vgl., [49], S. 36). Daneben werden vom Schüler außerdem noch Reproduktionsleistung, beispielsweise in Form einer fachspezifischen Anwendung von Begriffen oder auch Techniken, sowie auch Problemlösefähigkeit verlangt (vgl. [50], S. 12).

Bei der Erstellung der Aufgaben sollte nicht nur der Lehrplan, sondern auch das bereits mehrfach erwähnte Kompetenzmodell beachtet werden. Demzufolge zeichnet sich eine kompetenzorientierte Aufgabenstellung in diesem Zusammenhang durch eine Vielzahl an Kriterien aus. Neben dem *Inhaltskriterium*, das den inhaltlichen Bezug zum Lehrplan garantiert, gilt es auch das *Handlungskriterium*, welches die Einbindung aller vier Handlungsbereiche (laut Kompetenzmodell) fordert, einzubeziehen. Des Weiteren muss bei der Aufgabenerstellung auch noch das *Vernetzungskriterium* berücksichtigt werden. Dieses bezieht sich einerseits darauf, dass ein Themengebiet Inhalte verschiedener

Schulstufen enthalten kann. Andererseits können auch aufeinander aufbauende Themenbereiche in vernetzter Form innerhalb eines Themenpools behandelt werden. Außerdem sollte gewährleistet sein, dass die Relevanz mathematischer Inhalte in Anwendungssituationen aufscheint. Dieses *Anwendungskriterium* bietet zusätzlich die Möglichkeit, eine standortspezifische Schwerpunktsetzung einzubringen, welche im Rahmen der standardisierten (schriftlichen) Reifeprüfung keinerlei Raum findet. Zu guter Letzt gilt es auch zu beachten, dass der Einsatz von Technologie die Aufgabenstellung maßgeblich beeinflusst. Somit gilt es das *Technologiekriterium* in die Erstellung miteinzubinden sowie auch innerhalb der Themenbeschreibung den Einsatz technologischer Hilfsmittel zu konkretisieren (vgl. [49], S. 19f).

Die nachfolgende Graphik zeigt eine mögliche Formulierung eines Themenpools und wurde als Orientierungshilfe für die Ausformulierung der Themenbereiche vom BMBWF veröffentlicht:

Thema 2b: Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen	
Inhalt und Handlung	Vernetzung und Anwendung
• Quadratische Funktionen beim Modellbilden nutzen • Quadratische Gleichungen lösen; Reflektieren über Lösungsstrategien und Lösungsfälle • Zusammenhang Gleichung $\leftrightarrow$ Funktion für die grafische Interpretation von Lösungen der Gleichung nutzen • Lösungsformeln für die quadratische Gleichung herleiten • Den Einfluss von Parametern auf die Lösungsfälle einer quadratischen Gleichung untersuchen • Den Einfluss von Parametern auf die Lage eines Funktionsgraphen untersuchen  Gleichungen mit Hilfe von Technologie algebraisch und grafisch lösen; Lösungen grafisch interpretieren  Funktionen mit Hilfe von Technologie darstellen (Graph, Term, Tabelle)	• Vernetzung quadratische Funktion $\leftrightarrow$ quadratische Gleichung  Nutzen von quadratischen Funktionen beim anwendungsorientierten Problemlösen; reflektieren über Grenzen des Modells, über die Sinnhaftigkeit von Lösungen bezüglich des gestellten Problems

Abb. 28: Beispiel eines Themenpools ([49], S. 23)

Wie in der ersten Spalte zu sehen ist, werden Schulen dazu angehalten, neben einer Auflistung der themenrelevanten Inhalte auch die in diesem Zusammenhang vom Schüler auszuführenden Handlungen anzugeben. Außerdem werden die Einsatzmöglichkeiten technologischer Hilfsmittel angeführt. Darüber hinaus wird in der zweiten Spalte auf die Vernetzung der Themenbereiche sowie auf mögliche Anwendungsfelder hingewiesen (vgl. [49], S. 20).

Wie eine Aufgabenstellung bei der mündlichen Matura aussehen könnte, sieht man in der folgenden Abbildung, die ebenfalls als Hilfestellung für die Entwicklung passender Aufgaben vorgegeben wird. Man kann hierbei auch den Bezug zu den Komplexitätsbereichen des zugrundeliegenden Kompetenzmodells erkennen.

Thema 17: Die Ableitungsfunktion und ihre Nutzung

Ein Radrennfahrer startet bei einem Einzelzeitfahren. Sein zurückgelegter Weg in den ersten neun Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktion $s: t \mapsto s(t)$ mit

$$s(t) = \frac{t^3}{30} + \frac{t^2}{20} \text{ modellieren (t in Sekunden, s in Meter).}$$

- (1) Ermitteln Sie die Geschwindigkeitsfunktion v und die Beschleunigungsfunktion a .
(Reproduktion, Transfer)
- (2) Stellen Sie diese beiden Funktionen jeweils in einem passenden Koordinatensystem im Zeitintervall $0 \leq t \leq 9$ graphisch dar.
(Reproduktion)
- (3) Welche Schlüsse in Bezug auf die Bewegung des Radrennfahrers können aus dem Verlauf der beiden Graphen gezogen werden?
(Reflexion)
- (4) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Radrennfahrers in den ersten neun Sekunden und seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 5$ Sekunden! Geben Sie die beiden Ergebnisse in km/h an und erklären Sie die Begriffe mittlere Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit!
(Reproduktion, Transfer)

Abb. 29: Aufgabenstellung - mündliche Matura ([49], S. 44)

Wie bereits erwähnt, dient bei der mündlichen Matura der Lehrplan - und nicht wie bei der schriftlichen Reifeprüfung der Grundkompetenzkatalog - als Grundlage für die inhaltliche Auswahl der Themenpools. Somit können im Rahmen der mündlichen Klausur auch diejenigen Themengebiete in den Prüfungsstoff fallen, die zwar im Lehrplan jedoch nicht im Grundkompetenzkatalog aufscheinen. Dies bietet neben dem oben genannten Anwendungskriterium eine weitere Möglichkeit, standortspezifische Schwerpunkte zu setzen. Dennoch ist es im Rahmen der mündlichen Matura wichtig, trotz fehlender Standardisierung bzw. Zentralisierung eine objektive und auch vergleichbare Prüfung zu gewährleisten. Es wird versucht, dieser Forderung durch die Kompetenzzentrierung der Aufgabenstellungen und das Ziehen der Themenpools durch den Maturanten Folge zu leisten (vgl. [50], S. 6).

III DER KOMPETENZORIENTIERTE UNTERRICHT

«Was will ich eigentlich machen? Warum mache ich das? Was soll bei den Schülerinnen und Schülern hängen bleiben?»; also nicht einfach: «Jetzt nehmen wir die Römer durch», sondern: «Was sollen die Schülerinnen und Schüler – fachlich und überfachlich – lernen, wenn wir uns mit den Römern beschäftigen?»

([51], S. 333)

Eine Kompetenzorientierung bedeutet nicht automatisch, den herkömmlichen Unterricht und die bekannten Aufgabenstellungen über Bord zu werfen und von Grund auf neu zu erfinden. Es geht vielmehr darum, das Hauptaugenmerk weg von den Inhalten hin zu den (mathematischen) Handlungen zu richten. Als Anhaltspunkt dienen hierbei die Handlungen, die im Grundkompetenzkatalog bei den jeweiligen Inhalten angeführt werden, sowie die Handlungsbereiche, die zu Beginn beschriebenen Kompetenzmodells. Es gilt somit den Unterricht und die Aufgabenstellung daran auszurichten und die Handlungsdimension als grundlegend für die Ausbildung des Lernprozesses zu verstehen (vgl. [1], S. 20). Dies führt in weiterer Folge weg von einer reinen Input- zu einer Outputorientierung und der Fokussierung auf den Schüler statt auf den Lehrenden (vgl. [52], S. 1).

Um einer solchen Orientierung gerecht zu werden, heißt es neben didaktischen Überlegungen, die einen durchdachten Einsatz von Unterrichts- und Evaluationsmethoden einschließen, auch lernpsychologische Aspekte miteinzubeziehen. Einen besonders hohen Stellenwert hat in diesem Zusammenhang zudem die Aufgabengestaltung, welche ein wichtiges Instrument in der Unterrichtsgestaltung darstellt und im Rahmen der Kompetenzorientierung in den Mittelpunkt gerückt wurde.

1 DIDAKTISCHE ASPEKTE

Folgende Aspekte werden unter anderem als wesentlich für eine Unterrichtsgestaltung, die sich an Kompetenzen orientiert, angeführt ([1], S. 44):

- Kognitive Aktivierung des Lernenden
- Vernetzung
- Festigung und individuelle Lernbegleitung
- Entwicklung überfachlicher Kompetenzen
- Kompetenzorientierte Leistungsfeststellung und -beurteilung

1.1 KOGNITIVE AKTIVIERUNG DER LERNENDEN

Es gilt die Schüler dabei zu unterstützen, eine eigenverantwortliche und autonome Arbeitsweise zu entwickeln. Eine gute Möglichkeit dafür bieten das gelenkte Entdecken oder auch selbst entdeckende Lernen (vgl. [1], S. 44), da diese im Gegensatz zu schematisch ausgeführten Routineoperationen einen nachhaltigen und auch aktiven Lernprozess begünstigen. Hierbei ist es besonders wichtig, dass Schüler auf ein gefestigtes Basiswissen zurückgreifen können, da dieses unabdingbar ist, um neuen Inhalten und Aufgabenstellungen auf theoretischer und praktischer Ebene zu begegnen. In diesem Zusammenhang spielen somit Grundkompetenzen ebenfalls eine große Rolle. Das Wiederholen und immer wieder Nutzen derselben führt zu einem nachhaltigen Wissensaufbau und einer langfristigen Verfügbarkeit, weshalb dieser Wiederholung auch im Unterricht unbedingt Sorge getragen werden sollte. So liegt es an der Lehrperson, eine Unterrichtskultur zu entwickeln, die zum Erkunden und Erforschen aber auch Reproduzieren von bereits Gelerntem anregt. (Vgl. [1], S. 44, 47)

Leuders (vgl. [53], S. 103) spricht sich dafür aus, zugunsten eines solch anregenden Unterrichts auf eine Methodenmonokultur zu verzichten und das selbstgesteuerte Lernen der Schüler zu stärken. Dazu braucht es Unterrichtsformen, in welchen der Lehrer eine moderierende und der Schüler eine aktive Rolle einnimmt, wodurch auch die Fähigkeit zu eigenverantwortlichem, selbständigem Arbeiten und elaborativem Lernen gefördert werden (vgl. [53], S. 121; [1], S. 48).

Dies kann einerseits in Form von unterschiedlichen Aufgabenstellungen (siehe Kap. 2) oder aber auch durch die Art der gewählten Unterrichtsmethode bzw. Sozialform (Gruppenarbeit, Einzelarbeit, Partnerarbeit, Lernen im Klassenverband) realisiert werden. Beispiele hierfür wären etwa Projektarbeiten, Stationenbetrieb, Freiarbeit, Referate/Präsentationen oder auch Portfolios (vgl. [53], S. 121ff).

Im Sinne einer Kompetenzorientierung bedarf es passender Aufgaben- bzw. Problemstellungen sowie auch einer Überprüfbarkeit des dabei entstehenden Outputs, beispielsweise in Form von Präsentationen oder auch geeigneter Dokumentationen.

Ebenso wichtig ist die lenkende Rolle der Lehrperson während der schülerzentrierten Einheiten, die sich einerseits in Form einer unterstützenden und moderierenden Funktion äußert, andererseits aber auch für die Steuerung der Lernprozesse verantwortlich ist (vgl. [1] S. 48).

Bei all diesen Überlegungen sollte der Fokus auf dem (selbst)entdeckenden Lernen der Schüler liegen, welches nach Winter

„weniger die Beschreibung einer Sorte von beobachtbaren Lernvorgängen (wenn so etwas überhaupt direkt möglich ist), sondern ein theoretisches Konstrukt, die Idee nämlich, dass Wissenserwerb, Erkenntnisfortschritt und die Ertüchtigung in Problemlösefähigkeiten nicht schon durch Information von außen geschieht, sondern durch eigenes aktives Handeln unter Rekurs auf die schon vorhandene kognitive Struktur, allerdings in der Regel angeregt und somit erst ermöglicht durch äußere Impulse,“
([54], S. 3)

ist.

Besonders herausstreichen möchte ich in diesem Zusammenhang auch den Nutzen, den Hausübungen darstellen können, da diese als eigenständige Unterrichtsmethode oftmals in Vergessenheit geraten oder auch einfach nur als notwendiges Übel angesehen werden. Dabei sind Hausaufgaben ein besonders gutes Mittel, um selbständiges Lernen und Selbstorganisation zu fördern. Zudem bieten sie die Möglichkeit, Lernstoff zu reflektieren, zu festigen und auch zu vernetzen (vgl. [53], S. 124).

Für die Aneignung mathematischer Kompetenzen sind eine selbständige Auseinandersetzung mit Inhalten und ein eigenständiges Lösen von Aufgaben unentbehrlich (vgl. ebd., S. 81). Das Potential, das in Hausübungen steckt, hängt jedoch sehr stark von den ausgewählten Aufgaben, der Form der Kontrolle und auch der Regelmäßigkeit, mit der sie aufgegeben werden, ab (vgl. ebd., S. 80f). Es konnte beispielsweise in einer Untersuchung im Rahmen des Projekts *Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis in verschiedenen Unterrichtskulturen* festgestellt werden, dass nicht das Ausmaß, sondern die Häufigkeit der Hausübungen relevant für eine Leistungssteigerung ist (vgl. [55], S. 260). Ein weiterer wichtiger Aspekt, der sich im Zuge der Untersuchung herausstellte, bezog sich auf die Art der Hausübungskontrolle. So zeigte sich,

„[je] stärker die Schülerinnen und Schüler der Ansicht sind, dass sich ihr Mathematiklehrer bzw. ihre Mathematiklehrerin für ihre Lösungswege bei den Hausaufgaben interessiert und je deutlicher die Schülerinnen und Schüler einen positiven Umgang des Lehrers mit Schwierigkeiten und Fehlern im Kontext der Hausaufgabenpraxis wahrnehmen“,

([53], S. 261)

desto besser wurden die erbrachten Leistungen.

Es gilt außerdem nicht außer Acht zu lassen, welchen Einfluss die Motivation auf die Bereitschaft, sich selbständig mit Inhalten zu beschäftigen, hat. Demzufolge sollte der nötige Arbeitsaufwand und die Wahl der Aufgaben bei der Vergabe von Hausübungen im Auge behalten werden (vgl. ebd., S. 82). Ein reines Wiederholen von Aufgaben aus dem Unterricht, die sich nur in der Auswahl der benötigten Zahlen unterscheiden, sollte im Sinne der Kompetenzorientierung vermieden und den Schülern auch die Möglichkeit gegeben werden, über Neues nachdenken zu dürfen (vgl. [55], S. 263).

Ebenso muss den Schülern die Sinnhaftigkeit der Hausübungen kommuniziert werden, sodass diese den Nutzen darin erkennen und Motivation dafür entwickeln können. Bruder und Komorek sprechen in diesem Zusammenhang unter anderem das *Üben, Anwenden, Vertiefen, Sammeln persönlicher Problemlöseerfahrungen* und *Lernen lernen* als mögliche Funktionen einer Hausübung an (vgl. [53], S. 82).

Weiters ist für die Entwicklung einer Leistungsmotivation wichtig, dass Schüler bei der Erledigung der Hausübung Erfolgserlebnisse haben und sich nicht einer ständigen Überforderung ausgesetzt sehen (vgl. ebd., S. 84). Dies kann beispielsweise durch eine differenzierte Aufgabenstellung, die sich nach dem individuellen Leistungsstand richtet, erreicht werden (vgl. ebd., S. 90). „[D]ass eigenständige Leistungen nur dann verlangt werden dürfen, sofern dafür keine außerschulische Unterstützung notwendig ist“ ([1], S. 137), wird bei der Vergabe von Hausübungen in meinen Augen oftmals nicht berücksichtigt oder schlicht und einfach unterschätzt. Eine derartige (regelmäßige) Überforderung der Schüler ist jedoch immens kontraproduktiv und kann auf lange Sicht dazu führen, dass Motivation und Lernwille verloren gehen.

Da es zudem auch auf fachlicher Ebene keinen Wissenszuwachs gibt, wäre es meiner Ansicht nach sehr wichtig, als Lehrperson die Vorgehensweise diesbezüglich gründlich zu reflektieren und wenn möglich auch anzupassen. Zumal eine wohlüberlegte Vergabe von

Hausübungen die Chance bietet, Informationen über den aktuellen Leistungsstand der Schüler zu erhalten, sowie die Vorbereitung der Klasse auf weitere Unterrichtsstunden und -inhalte zu gewährleisten. (Vgl. [53], S. 82)

Ich persönlich habe die Erfahrung gemacht, dass eine Hausübung, die aus Typ-1-Aufgaben besteht, welche die Schüler nicht bloß lösen, sondern ausarbeiten müssen, viele der oben angeführten Aspekte berücksichtigt und für die Schüler von großem Nutzen sein kann. Die Schüler werden dabei dazu angehalten, Rechenwege anzugeben und im Falle eines Technologieeinsatzes, die einzelnen Schritte und verwendeten Befehle anzuführen. Die Auswahl der falschen und richtigen Antworten bei Multiple-Choice-Aufgaben muss in beiden Fällen begründet werden. Zudem sollen benötigte Formeln und eine kurze Übersicht über die wichtigsten inhaltlichen Grundlagen des einem Beispiel zugrundeliegenden Themas beschrieben werden. Auf diese Weise erhalten die Schüler im Laufe des Schuljahres eine Art Grundkompetenz-Mappe, die ständig erweitert werden kann und eine gute Übersicht und Lerngrundlage für Schularbeiten und schlussendlich auch die Matura bietet.

Je nach Leistungsstand der Schüler ist es auch möglich, Typ-2-Aufgaben zu inkludieren, welche in weiterer Folge für den gesamten Klassenverband kopiert und eine Hilfestellung bei der Maturavorbereitung darstellen können.

Unerlässlich ist hierbei (bei jeder Art von Aufgabe) natürlich eine genaue Kontrolle der Ausarbeitungen durch die Lehrperson und eventuell auch ein Besprechen im Klassenplenum. Weiters bietet es sich auch an, einzelne Schüler die ausgearbeiteten Beispiele der Klasse zu präsentieren, wodurch Kommunikations- und Präsentationskompetenz, die üblicherweise im Unterricht meist zu kurz kommen, geschult werden.

Bei all der Methodenvielfalt ist aber auch die Lehrerzentrierung nicht aus dem Unterrichtsgeschehen weg zu denken, da sich beispielsweise nicht jedes Thema dafür eignet, um es selbst entdeckend erarbeiten zu können. Zudem entscheidet das Leistungsvermögen einer Klasse über die Notwendigkeit oder auch das Ausmaß der Anleitung und Einweisung durch den Lehrer. (Vgl. [1], S. 48)

Um Schüler bei der Entwicklung einer selbständigen Lernkompetenz zu unterstützen, braucht es im Vorfeld oftmals einen Frontalunterricht, der durch gezielte Anleitung den Lernprozess in Richtung eines selbstgesteuerten Lernens führt und die Grundlage für das Erlangen der dafür notwendigen Problemlösekompetenzen darstellt (vgl. [56], S. 163; S. 182). Wie bereits erwähnt, tragen Lernmotivation und Selbstkompetenz maßgeblich zum Erlangen solcher Problemlösekompetenzen bei – auch hier kann nach Gudjons ein dementsprechend gestalteter Frontalunterricht eine gute Unterstützung bieten:

„In einem Frontalunterricht, der durch das Vorbild der Lehrkraft Modelle für angemessenes, erfolgreiches Handeln vermittelt, der Schüler und Schülerinnen methodische Kompetenzen für das eigenes Lernen und Arbeiten lehrt, können sie Vertrauen und Sicherheit für die Lösung schwieriger Aufgaben lernen [...]“
([56], S. 85).

Neben einem reinen Instruieren oder Vortragen, sollte eine Lehrerzentrierung auch in Form eines fragend-entwickelnden Gesprächs in den Unterricht integriert werden. Hierbei erfolgt die Erarbeitung einer neuen Thematik oder Methode im Rahmen eines durch den Lehrer gelenkten Unterrichtsgesprächs, wodurch Schüler zu eigenen

Überlegungen, Antworten aber auch Fragen angeregt werden sollen. Gudjons beschreibt ein solches Unterrichtsgeschehen folgendermaßen:

„Die Lehrkraft lenkt die Interaktion direkt, Lehrerfragen und Schülerantworten wechseln sich ab, die Lehreraktivitäten zeigen ein breites Spektrum, das von offenen Impulsen über eine Fülle unterschiedlicher Fragearten bis zu sehr engen suggestiven Fragen mit Ein-Wort- oder Ein-Satz-Antwortmöglichkeiten reicht. Interaktionen unter den Schülern werden zugelassen, soweit sie dem Unterrichtsziel der Lehrkraft dienen. Insgesamt geht es darum, die Denkschritte der Lehrkraft nachzuvollziehen. Beim Erarbeiten eines Unterrichtsthemas wechseln in der Regel wohl dosierte Informationen der Lehrkraft mit Fragen an die Schüler und Schülerinnen ab. Dabei dürften die Äußerungen der Lehrkraft den weitaus größten Anteil ausmachen, – eine Art Mini-Lehrervorträge im Laufe des Erarbeitens.“

([56], S. 59)

Dabei gilt es jedoch darauf zu achten, den Schülern genügend Zeit zum Nachdenken, Ausprobieren und auch Fehler machen zu gewähren. Ebenso wichtig ist es auch, einen fragend-entwickelnden Unterricht nicht zu einer „Lückensatz-vervollständigung“ verkommen zu lassen, sondern – ganz im Sinne der Entwicklung einer Kommunikationskompetenz - Wert auf eine eigenständige Formulierung vonseiten der Lernenden zu legen (vgl. [1], S. 48). Andernfalls besteht die Gefahr, dass vermeintliche Erfolgserlebnisse tatsächlich nur auf Lehrerseite eingefahren werden, den Schülern durch Suggestivfragen oder auch „vorgekaute“ Formulierungen jedoch der Vorteil eines eigenständigen, entdeckenden Lernens verwehrt bleibt. (Vgl. [56], S. 61)

Es obliegt somit der Lehrkraft, die der Klasse, der Thematik und auch dem gewünschten Output entsprechende Methode zu finden und dabei im Sinne des (selbst) entdeckenden Lernens die Worte Freudenthals im Hinterkopf zu behalten: „Telling a kid a secret he can find out himself is not only bad teaching, it is a crime.“ ([57], S. 424)

1.2 VERNETZUNG

Wie bereits angesprochen, kommt der Vernetzung im Rahmen eines wirksamen Kompetenzaufbaus große Bedeutung zu. Diese kann in unterschiedlicher Form in den Unterricht einfließen:

- Vernetzung auf *fachlicher Ebene* in *horizontaler* (beispielsweise zwischen Funktionenlehre und Algebra) oder *vertikaler* (etwa zwischen Folgen und Differentialrechnung) Weise, welche es erfordert, auf Zusammenhänge zwischen Themengebieten im Unterricht dezidiert hinzuweisen und diese nicht als isolierte Einheiten abzuhandeln (vgl. [1], S. 45).
- Vernetzung unterschiedlicher *Handlungsbereiche*: bei der Bearbeitung einer Aufgabenstellung bedarf es meist keiner gesonderten Nutzung der bereits erwähnten Bereiche (Darstellen, Modellbilden, Rechnen, Operieren, Interpretieren, Argumentieren, Begründen). So wird etwa beim Modellbilden ebenfalls oft eine Interpretationsfähigkeit benötigt. Auch hier liegt es an der Lehrperson,

Aufgabenstellungen in den Unterricht zu integrieren, die diesen Sachverhalt aufzeigen. (Vgl. [1], S. 45)

- Vernetzung zu *anderen Fach- und Lebensbereichen*: der Bildungstheorie Fischers folgend, gilt es den Schülern den Nutzen und die Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in verschiedenen Lebenssituationen und -bereichen in Form einer besonderen Art von Weltbegegnung näher zu bringen, sodass auch Motivation und Volition im Rahmen des Lernprozesses gezielt angesprochen und ausgebildet werden. (vgl. ebd., S. 45).

Für einen nachhaltigen Aufbau von Kompetenzen bedarf es einer besonderen Konzentration auf die vertikale inhaltliche Vernetzung, sodass Schüler die Zusammenhänge zwischen den Themengebieten in Form von *Lernlinien* erkennen und verinnerlichen können (vgl. [1], S. 45). Im Spiralprinzip des Psychologen Jerome Bruner werden die Entwicklung eines derartigen lerntheoretischen Gerüsts und die dafür notwendigen Bedingungen beschrieben:

Spiralprinzip

- Inhalte immer wieder aufgreifen, ausdifferenzieren und mit neuen Vorstellungen anreichern
- Beachten von Vorwissen und Vorverständnis
 - Prinzip der Fortsetzbarkeit
 - Prinzip des vorwegnehmenden Lernens
 - Prinzip der Vereinfachung

Beispiel: Zahlbegriffsentwicklung

0. Vorschulische Erfahrungen mit Zahlen
1. Zahlbegriff in der Grundschule: $\mathbb{N}$
2. Sekundarstufe I: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$
3. Sekundarstufe I: $\mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}$
4. Sekundarstufe I: $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
5. Sekundarstufe II: evtl. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
6. Mathematikstudium, Lehre, ...

Abb. 30: Spiralprinzip nach Bruner ([150], S.2)

Um dem Prinzip Folge zu leisten, ist es auch in diesem Zusammenhang wichtig, Wiederholung und operatives Nutzen von bereits Gelerntem in den Unterricht einzubauen und vom separierten Abhandeln neuer Themen in Form von einzelnen „Häppchen“ Abstand zu gewinnen (vgl. [1], S. 46). Nur so ist es möglich, dass Schüler ein inhaltliches Basiskonzept entwickeln, das

die strukturierte Vernetzung aufeinander bezogener Begriffe, Theorien und erklärender Modellvorstellungen, die sich aus der Systematik eines Faches zur Beschreibung elementarer Prozesse und Phänomene als relevant herausgebildet haben,
 ([58], S. 125)

nutzt.

Um einen solchen Vorgang der Vernetzung gewährleisten zu können, liegt es an der Lehrperson, den Wissenshorizont der Schüler im Auge zu behalten. Eine entsprechende strukturelle Aufbereitung des Lehrstoffes spielt zudem für eine sinnvolle Einordnung der Inhalte auf Schülerseite eine große Rolle. (Vgl. [59], S. 13)

1.3 FESTIGUNG UND INDIVIDUELLE LERNBEGLEITUNG

In einem kompetenzorientierten Unterricht versteht man unter Festigung nicht (nur) das altbekannte Einüben von bereits durchgenommenem Lehrstoff, sondern das Erzeugen eines *Grundkompetenzbewusstseins* sowie die variable Anwendung des Gelernten. Die Variabilität kann sich dabei sowohl auf den Kontext als auch auf die Fragestellung beziehen. Eine große Rolle spielt in diesem Zusammenhang die Aufgabengestaltung, auf welche in *Kap. 2* näher eingegangen wird. Besonders wichtig ist hierbei die individuelle Lernbegleitung, die bedürfnisgerecht auf den jeweiligen Schüler abgestimmt werden sollte. Dies kann zum Beispiel in Form von Hausübungen oder auch Übungsaufgaben geschehen, die nicht einheitlich, sondern nach Leistungsstand des jeweiligen Schülers aufgegeben werden. (Vgl. [1], S. 46)

1.4 ENTWICKLUNG ÜBERFACHLICHER KOMPETENZEN

Bei der Ausbildung von Kompetenzen bedarf es keiner alleinigen Beschränkung auf fachliche Bereiche, sondern ebenso einer Berücksichtigung überfachlicher Aspekte (vgl. [1], S. 46). Unter besonderer Beachtung der bereits erwähnten Schülerzentrierung gilt es etwa auch den Erwerb von personalen und sozialen Kompetenzen im Auge zu behalten. In diesen Bereich fallen nach Bruder et al. etwa ein *kritisches Urteilsvermögen*, die *Fähigkeit zur Selbstverwirklichung*, eine *gesellschaftliche Verantwortung*, ein *selbständiges Gestalten des eigenen Lernens* oder auch ein *Kooperationsvermögen* (vgl. [53], S. 14). Dazu gehört somit auch die Entwicklung einer Selbstkompetenz der Schüler, welche sich auf die Fähigkeit zu selbstverantwortlichem Handeln bezieht (vgl. [60], S. 1). Unabhängig von fachlichen Inhalten ist auch die Methodenkompetenz, zum Beispiel in Form einer kritisch hinterfragenden Informationsbeschaffung aus dem Internet, zu schulen (vgl. [1], S. 46).

1.5 KOMPETENZORIENTIERTE LEISTUNGSFESTSTELLUNG UND -BEURTEILUNG

Der Lernprozess und das Lernverhalten von Schülern werden nicht nur durch die Gestaltung des Unterrichts, sondern auch durch Leistungsfeststellung und -beurteilung maßgeblich beeinflusst. Auf Grundlage der Leistungsbeurteilungsverordnung (LBVO) [42], der Lehrplanverordnung (LPVO) [36] und des Schulunterrichtsgesetzes (SchUG) [61] kommt der Lehrperson die Aufgabe zu, eine adäquate, kompetenzorientierte

Lernumgebung mithilfe unterschiedlicher Unterrichtsmethoden und einer dementsprechend angepassten Prüfungskultur zu schaffen. (Vgl. [1], S. 134)

Ich möchte im Folgenden nicht auf die Leistungsbeurteilung im Allgemeinen eingehen, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde, und gehe deshalb nur auf die Aspekte ein, die im Zusammenhang mit der Kompetenzorientierung eine Rolle spielen.

Im Fach Mathematik kann eine Leistungsfeststellung anhand von Schularbeiten, mündlichen Prüfungen, mündlichen Übungen und natürlich Mitarbeit erfolgen. Bei all diesen Feststellungsvarianten hat auch eine Überprüfung der Grundkompetenzen zu erfolgen, wobei es jedoch im Vorfeld einer Anwendung oder Wiederholung derselben bedarf (vgl. ebd., S. 137). Hierbei gilt es außerdem zu beachten, dass ein Einblick in den aktuellen Lernstand – und Fortschritt der Schüler nicht nur am Ende, sondern auch während einer Lern- und Aneignungsphase stattfinden sollte. Dahingehend bieten Hausübungen, Präsentationen oder auch Gruppenarbeiten ein hilfreiches Mittel (vgl. [53], S. 155ff).

Im kompetenzorientierten Unterricht darf sich die Evaluation zudem nicht allein auf fachliche Kompetenzen beschränken, sondern muss auch überfachliche Kompetenzen miteinbeziehen. Da eine solche Evaluation aufgrund der Voraussetzungen und verfügbaren Evaluationsmethoden im Schulalltag nur „die Spitze des Eisbergs“ abbilden kann, fällt es der Lehrperson zu, durch gezielte Unterrichtsplanung und Lernprozessbeobachtung die elementaren Aspekte des zugrundeliegenden Kompetenzmodells auszumachen und abzubilden.

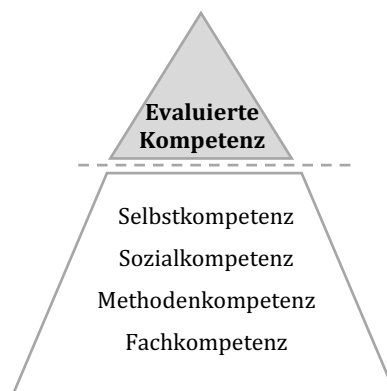


Abb. 31: Relation entwickelter und überprüfter Kompetenzen ([123], S. 57)

1.5.1 MITARBEIT

Im Rahmen der Mitarbeit kann ein Ermitteln des derzeitigen Wissenstand bezogen auf die Grundkompetenzen, die im aktuellen Unterricht zu Anwendung kommen, beispielsweise in schriftlicher Form geschehen. Diese Art der Leistungsfeststellung muss sich jedoch bezüglich des zeitlichen und inhaltlichen Umfangs stark von einem Test abgrenzen,

welcher in einem Schularbeitsfach nicht durchgeführt werden darf. Zudem erfolgt die Beurteilung nicht anhand von Ziffernnoten, sondern einer vom Lehrer eigens erstellten „Benotungsform“. Weiters zählen auch Hausübungen zur Mitarbeit und dürfen nicht separat benotet werden. In einem kompetenzorientierten Unterricht gilt es außerdem, den Fokus nicht allein auf eine reine produktorientierte Leistungsbeurteilung zu richten, sondern auch den Lernprozess, der zu diesem Produkt führt, zu bewerten. Dies bedeutet, dass neben den Schularbeits- und Prüfungsnoten auch der Mitarbeit eine ebenso große Gewichtung zukommen sollte. Der bereits erwähnte schülerzentrierte Unterricht bietet eine gute Grundlage für eine diesbezüglich notwendige Mitarbeitsbeobachtung, die beispielsweise anhand erbrachter Leistungen im Zusammenhang mit der Erarbeitung neuen Lernstoffes, praktischer und graphischer Leistungen oder auch Leistungen in Gruppenarbeiten erfolgen kann. (Vgl. [1], S. 137f; [42], § 4)

1.5.2 MÜNDLICHE ÜBUNGEN

Mündliche Übungen können zum Beispiel in Form von Referaten durchgeführt werden, bei welchen ein Thema in höchstens 15 Minuten der Klasse präsentiert wird (vgl. [42], § 6). Dadurch entsteht einerseits die Möglichkeit der Förderung und Evaluation der Präsentationskompetenz, andererseits gilt es den Vortragenden dazu anzuhalten, auf die korrekte Anwendung der Fachsprache zu achten, sodass der Entwicklung einer Kommunikationsfähigkeit mit Experten, welche ja einen Schwerpunkt im Bildungsauftrag bildet, ebenfalls Sorge getragen wird. In einer nachfolgenden Diskussion des Vortragenden mit der Klasse oder auch durch Fragen der Lehrperson an den Referierenden können zusätzlich Argumentations- und Diskurskompetenzen geschult und überprüft werden. (Vgl. [1], S. 138; [42], § 6)

1.5.3 MÜNDLICHE PRÜFUNGEN

Weiters muss auch bei der Durchführung von mündlichen Prüfungen den Grundkompetenzen verstärkt Beachtung zukommen. Der Geprüfte hat genau darüber in Kenntnis gesetzt zu werden, welche Teile der Prüfung auf Grundkompetenzen Bezug nehmen. Sollte sich die gesamte Prüfung auf Grundkompetenzen beschränken, kann höchstens die Note „Befriedigend“ vergeben werden. (Vgl. [1], S. 138) [

1.5.4 SCHULARBEITEN

Eine der größten Auswirkungen, welche die Einführung der Zentralmatura mit sich gebracht hat, betrifft jedenfalls den Aufbau und die Durchführung der Schularbeiten. Diese sollten von der fünften bis zur siebten Klasse immer mehr an das Prüfungsformat der Reifeprüfung angeglichen werden, um eine gezielte Vorbereitung auf die Matura zu ermöglichen (vgl. [62], S. 5).

Das bedeutet im Detail, dass eine Zweiteilung der Schularbeiten in der fünften und sechsten Klasse optional, in der siebten und achten Klasse obligatorisch ist (vgl. [63], S. 2). Angelehnt an die Reifeprüfung müssen hierbei im ersten Teil Grundkompetenzen in

Form von Typ-1-Aufgaben und im zweiten Teil die Vernetzung von Grundkompetenzen anhand von Typ-2-Aufgaben abgeprüft werden. Lehrplankonforme Inhalte, die über den Grundkompetenzkatalog hinausgehen, finden ebenso in beiden Teilen ihren Platz, müssen jedoch strukturell an den jeweiligen Aufgabentyp angepasst werden (vgl. [63], S. 2f). Somit setzt sich der Schularbeitsstoff aus Grundkompetenzen, die auf die vor der Schularbeit durchgenommenen inhaltlichen Bereiche Bezug nehmen und im Grundkompetenzkatalog angeführt sind, sowie aus Themengebieten, die darüber hinausgehend den Lehrplan abdecken, zusammen. Auch in diesen Themengebieten müssen im Prüfungsstoff Grundkompetenzen, die sich auf die grundlegenden Inhalte beziehen, angegeben werden. (Vgl. [62], S. 8)

Als Hilfestellung kann hierbei eine Art *Erweiterter Grundkompetenzkatalog* [64] dienen, wie ihn etwa die ARGE Mathematik AHS OÖ auf ihrer Seite bereitstellt.

Zusätzlich zu den Themengebieten, die vor der Schularbeit Inhalt des Unterrichts waren, können auch Grundkompetenzen zu Bereichen eines vorangegangenen Schuljahres in den Prüfungsstoff aufgenommen werden, sofern diese „zur Feststellung der Nachhaltigkeit des Kompetenzerwerbs dienen“ ([63], S. 1) und „mit dem aktuellen Prüfungsstoff in Beziehung stehen und im Unterricht wiederholt wurden“ ([62], S. 8).

In Anlehnung an die Zentralmatura sollen Schüler im Rahmen von Schularbeiten den expliziten Nachweis von Grundkompetenzen (und deren Vernetzung) erbringen, weshalb sich Prüfungsaufgaben von Übungsaufgaben insofern zu unterscheiden haben, als diese nicht dem Einüben neuen Wissens bzw. neuer Fertigkeiten oder auch dem Verständnisaufbau dienen, sondern nur die Funktion eines reinen „Beurteilungsinstrumentes“ übernehmen. Anhand der Aufgaben soll festgestellt werden können, ob der Schüler eine spezifische Grundkompetenz (und deren Vernetzung) aufweist, oder nicht. Insofern ist es wichtig, dass sich Lehrpersonen bei der Erstellung von Schularbeitsaufgaben an Maturaaufgaben orientieren und vor allem bei Typ-1-Aufgaben die wichtigsten Aspekte im Auge behalten, sodass dieser Aufgabentyp eine „möglichst punktgenaue Überprüfung einer einzelnen Grundkompetenz“ ([62], S. 8) ermöglicht, eine „einfache Struktur der Aufgabenstellung, die in der Regel nur einen Lösungsschritt erfordert und in relativ kurzer Zeit zu bearbeiten ist“ ([62], S. 8) aufweist, sowie auch Antwortformate verwendet, die jenen der Zentralmatura entsprechen (vgl. [62], S. 8f).

Um die Schüler auf einen solchen Nachweis der Grundkompetenzen vorzubereiten, bedarf es auch einer expliziten Thematisierung dieser Inhalte im Unterricht. Somit müssen Grundkompetenzen auch isoliert und nicht nur im Zusammenhang mit komplexeren Fragestellungen oder Inhalten angesprochen und behandelt werden. Nur so ist es möglich, den Schülern den grundlegenden Charakter dieser Kompetenzen nahe zu bringen, und deren Anwendbarkeit in unterschiedlichen Kontexten und Aufgabenstellungen aufzuzeigen. (Vgl. [62], S. 8; [42], § 7)

Bei der Erstellung der Typ-2-Aufgaben erhalten Lehrer einen gewissen Freiraum, um klassenspezifische und inhaltliche Schwerpunkte setzen zu können. Jedoch gilt es auch hier den kompetenzorientierten Aufgabencharakter im Auge zu behalten, sodass erkennbar sein muss, welche Kompetenzen abgefragt werden sollen. Je nach Komplexität der Fragestellung erfordert dies auch eine Aufspaltung in Teilaufgaben, sodass die Bewertung des Beispiels nicht im Gesamten, sondern anhand der Teilantworten erfolgt. (Vgl. [62], S. 9) Das BMBWF empfiehlt, in der siebten und achten Klasse die Typ-2-Aufgaben der Schularbeit stark angelehnt an die Typ-2-Aufgaben der Zentralmatura zu

erstellen, sodass die Schüler bestmöglich auf das Bearbeiten und Lösen dieses Aufgabentyps vorbereitet werden können (vgl. [62], S. 10).

Bei Schularbeiten gelten bezüglich des Technologieeinsatzes dieselben Bestimmungen wie bei der Zentralmatura (siehe [17], S. 22). Dies setzt allerdings eine regelmäßige Verwendung der Technologie im Unterricht und auch bei Hausübungen voraus, damit die Schüler einen selbständigen und versierten Umgang damit entwickeln können (vgl. [62], S. 12). Auf diesen Sachverhalt wird in *Kapitel IV* noch genauer eingegangen.

Die Beurteilung erfolgt grundsätzlich nach dem beschriebenen Beurteilungsschema der Matura, wobei ein Gestaltungsfreiraum bezüglich der Anzahl der Aufgaben (Typ-1 und Typ-2), der Gewichtung hinsichtlich Typ-1- und Typ-2-Aufgaben, der Punkteverteilung auf die einzelnen Aufgaben und auch der für ein „Gut“ bzw. „Sehr Gut“ zu erreichenden Mindestpunkteanzahl besteht.

Das BMBWF hat den *Leitfaden zur Erstellung von Schularbeiten in der Sekundarstufe 2 – AHS* [62] sowie *Hinweise und Empfehlungen zur Erstellung von Mathematikschularbeiten in der AHS-Oberstufe* [63] als Orientierungshilfen für die Erstellung von Schularbeiten in einem kompetenzorientierten Unterricht herausgegeben. Durch diese werden verpflichtende Rahmenbedingungen festgelegt, wobei darauf hingewiesen wird, dass den Lehrpersonen auch ein gewisser Gestaltungsspielraum bei der Erstellung der Schularbeiten obliegt. Durch Aufgaben, die über den GK Katalog hinausgehen, sowie eine variable Benotung erhalten Lehrpersonen einen gewissen didaktischen Freiraum, der zu einer klassenspezifischen Adaption und Schwerpunktsetzung genutzt werden soll. (Vgl. [63], S. 5)

1.6 LERNPSYCHOLOGISCHE ASPEKTE

Ergebnisse von Vergleichsarbeiten zeigen, dass jene Schüler/innen, die neuen Stoff mit bereits gelerntem zu vernetzen versuchen, bessere Leistungen erbringen als solche, die sich auf oftmaliges Einüben und Auswendiglernen verlegen. Dies gilt vor allem im Hinblick auf die Nachhaltigkeit der erworbenen Kompetenzen. Unterstützt wird das Lernen auch durch eine positive Wahrnehmung der eigenen Leistungsfähigkeit und echte, nicht durch Druck erzeugte Motivation.

([1], S. 35)

Lernmotivation ist ein wichtiger Faktor, der maßgeblich zum Lernerfolg der Schüler beiträgt, dem jedoch im „althergebrachten“, oftmals lehrerzentrierten Unterricht wenig Aufmerksamkeit geschenkt wurde (vgl. [1], S. 35). Neben der Art und Weise, mit der neue Inhalte an Schüler herangetragen werden, spielen Lernstrategien eine große Rolle, da diese grundlegend für die Verständnisbildung, für das (aktive) Beibehalten von Methoden und Informationen, sowie für einen nachhaltigen Wissensaufbau sind (vgl. [65], S. 2) und zusätzlich Einfluss auf die Entwicklung von Motivation im Lernprozess haben (vgl. [1], S.

37). Innerhalb dieser Strategien erfolgt eine sehr grobe Unterteilung in *elaborative* und *repetitive* Strategien (vgl. [1], S. 35).

Elaborationsstrategien dienen nach Friedrich und Mandl ([65], S. 2) dazu, „neue Informationen in bestehende Wissensstrukturen [...] zu integrieren, was den späteren Abruf erleichtert“. Neue Informationen und Themen werden den Schülern nähergebracht, indem auf vertraute Techniken und bekannte Inhalte zurückgegriffen und darauf aufgebaut wird. Das Herausstreichen und -arbeiten von Parallelen und Unterschieden soll dabei zu einer Vernetzung von Bekanntem und Neuem führen.

Repetitionsstrategien zielen hingegen darauf ab, durch mehrmalige Wiederholung Inhalte, Abläufe oder auch Methoden auswendig zu lernen bzw. ein zu üben. (Vgl. [1], S. 36) Es konnte gezeigt werden, dass sich elaborative Lernstrategien positiv auf die Lernmotivation und Leistung der Schüler auswirken, wohingegen bei repetitiven Lernstrategien in beiden Bereichen das Gegenteil der Fall ist (vgl. ebd., S. 36ff).

Außerdem spielen die beiden Strategien auch eine große Rolle im Zusammenhang mit der Entwicklung des mathematischen Selbstkonzeptes, sprich der Einschätzung der eigenen Leistung. Hier hat sich ebenfalls herausgestellt, dass elaborative Lernstrategien eher zu einem höheren mathematischen Selbstbildnis führen. (Vgl. [1], S. 37)

Ein Trennen der Strategien ist vielfach nicht möglich, sodass diese oftmals in vermischter Form im Unterricht auftreten, wobei Elaborationsstrategien dabei überwiegen sollten. Nur so kann gewährleistet werden, dass eine Lernkultur entsteht, die zu nachhaltigen Ergebnissen führt, da ein reines Auswendiglernen (durch Wiederholung) zu keiner intensiven Auseinandersetzung mit neuen Lerninhalten führt (vgl. ebd., S. 36). Auch Büchter und Leuders sprechen sich für den „Aufbau tragfähiger individueller Vorstellungen und Begriffe [...] auf Kosten [...] des Trainierens“ ([53], S. 161) aus, sodass in einem verstehensorientierten Unterricht das „unreflektierte Anwenden von Verfahren“ (ebd., S. 162) an Präsenz verliert.

Weiters kommt hier den Grundkompetenzen ebenfalls eine große Bedeutung zu, da diese das nötige Basiswissen darstellen, aufgrund dessen Schüler das Verständnis für neue Inhalte entwickeln und Vernetzungen zu altem Wissen aufbauen können.

Zudem zeigt sich in diesem Zusammenhang auch die Wichtigkeit einer ausgeprägten Kommunikationsfähigkeit. In einem verständnisorientierten Unterricht ist diese unerlässlich, da Aufgabenstellungen weg vom kalkülhaften Abarbeiten bzw. Anwenden von auswendig eingelernten Schemata hin zum Beschreiben von Zusammenhängen oder auch dem Begründen führen sollten.

Um diesen Vorgaben gerecht zu werden, braucht es im kompetenzorientierten Unterricht eine Aufgabenkultur, welche sich nicht allein auf ein Eintrainieren von mathematischen Verfahren beschränkt, sondern die Möglichkeit bietet, Schüler auf unterschiedlichen Ebenen im Lernprozesses anzusprechen.

All diese angeführten Aspekte im Hinterkopf behaltend, kann man zusammenfassen, dass in einem kompetenzorientierten Unterricht an die Lehrkräfte folgende Anforderungen gestellt werden (vgl. [66], S. 19):

- Überblick und Fachwissen über den aktuellen Stand des Grundkompetenzkatalogs und die zur Verfügung gestellten Übungsaufgaben
- dementsprechende Adaption oder auch Gestaltung von Unterrichtsaufgaben

- Methodenkompetenz
- Diagnostische Fähigkeiten hinsichtlich des Kompetenzaufbaus der Schüler
- Kenntnis von Kompetenzmodellen
- Beachtung der im Lehrplan angeführten überfachlichen Kompetenzen

2 AUFGABENGESTALTUNG

Die Wahl und der Einsatz geeigneter Aufgaben spielen im Mathematikunterricht eine oftmals sehr unterschätzte Rolle. Grundsätzlich kann das breite Spektrum an Aufgabenstellungen in *Lernaufgaben* und *Leistungsaufgaben* unterteilt werden (vgl. [67], S. 4). Lernaufgaben dienen in einem kompetenzorientierten Unterricht dem Aufbau, Leistungsaufgaben der Überprüfung von Kompetenzen, weshalb in [68] auch von *Aufgaben zum Kompetenzaufbau* und *Überprüfungsaufgaben* die Rede ist. Nach Luthiger (vgl. [67], S. 4) dienen erstere dazu, sowohl eine grundlegende als auch eine vertiefende Kompetenzaneignung zu realisieren. Zweitere haben den Zweck, die Ausprägung dieser Kompetenzen zu erheben und zu veranschaulichen.

Eine Unterscheidung nach Lern- und Leistungsaufgaben ist für den Unterricht essenziell, da der Vorgang des Wissenserwerbs anderen lernpsychologischen Prinzipien folgt als der der Wissensdiagnose. So können beispielsweise Fehler im Lernprozess durchaus zu einem Erkenntnisgewinn führen, wohingegen Prüfungssituationen möglichst fehlerfrei ablaufen sollten. (Vgl. [69], S. 4)

Weitere Unterschiede werden in der folgenden Abbildung aufgezeigt:

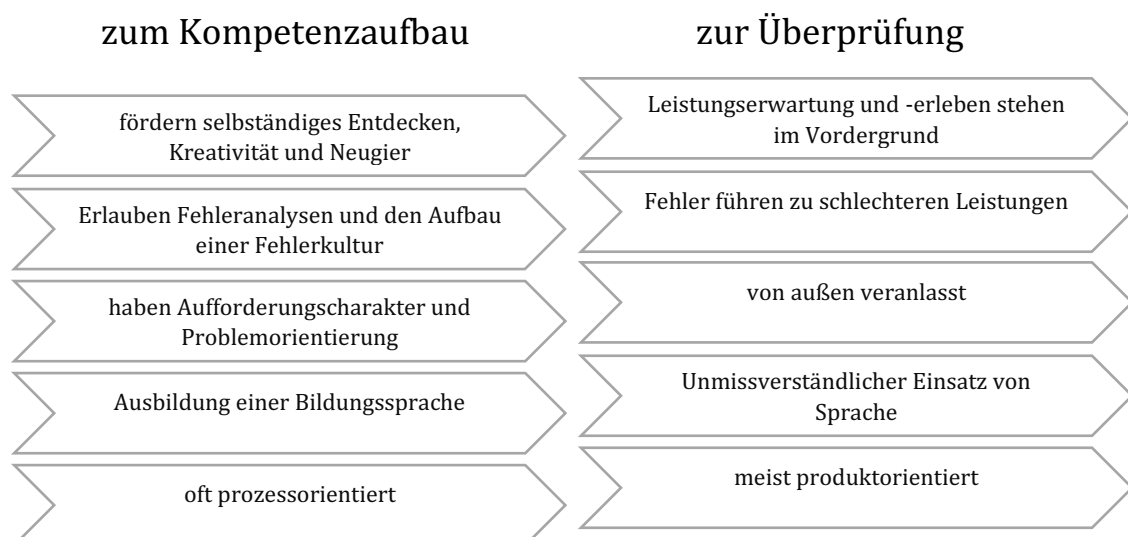


Abb. 32: Unterscheidung zw. Leistungs- und Lernaufgaben ([68], S. 116)

Wie bereits beschrieben, dienen Typ-1-Aufgaben der Kontrolle bzw. Messung von einzelnen Grundkompetenzen und werden daher als Leistungsaufgaben kategorisiert. Singer ist jedoch zu dem Ergebnis gekommen, dass Lehrkräfte Typ-1-Aufgaben im Unterricht in hohem Ausmaß als Übungsaufgaben verwenden (vgl. [40], S. 184-188) – eine Erkenntnis, die sich mit meinen Beobachtungen aus der Arbeit mit Schülern deckt.

Um dieser Entwicklung der reinen Ausrichtung des Unterrichts auf die Matura (und in weiterer Folge einem teaching-to-the-test) hin entgegenzuwirken, plädiert Bruder für eine Erweiterung des Aufgabenbegriffs (vgl. [53], S. 18f) und beschreibt Aufgaben als *Aufforderungen zum Ausführen von Lernhandlungen*:

„Dazu gehören Aufforderungen zum (elementaren) Identifizieren und Realisieren von mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren sowie von Anwendungen und Problemlösestrategien ebenso wie Aufforderungen zum Erkennen von Zusammenhängen, Beschreiben, Verknüpfen, Ausführen, Begründen und Interpretieren bis hin zu solch komplexen Handlungen wie Planen einer mathematischen Projektbearbeitung, Suchen nach geeigneten mathematischen Werkzeugen einschließlich Softwaretools für ein Problemfeld, Kommunizieren und Beurteilen verschiedener Lösungsansätze bis hin zu den Wirkungen von Mathematik in der Gesellschaft.“

([53], S. 19)

Dieses breitgefächerte Spektrum an Lernhandlungen bietet die besten Voraussetzungen, um im Unterricht eine nachhaltige Kompetenzentwicklung in unterschiedlichen Bereichen zu gewährleisten und den Vorgaben des zugrundeliegenden Kompetenzmodells zu entsprechen.

In der Aufgabengestaltung nach Bruder spielen eine Öffnung der Aufgaben, ein Hinführen der Schüler zur Reflexion der eigenen Lerntätigkeit, sowie das Betrachten eines Sachverhaltes aus verschiedenen Blickwinkeln eine zentrale Rolle (vgl. [53], S. 31). Dazu erfolgt eine Unterteilung in acht Aufgabentypen, welche sich in den Gegebenheiten der Ausgangssituation (z.B. Voraussetzungen, Informationen, gegebene Größen), des Lösungsweges (z.B. Methoden, Modelle, Beweise) und der Zielsituation (z.B. Gesuchtes, Ergebnis, Schlussfolgerungen) unterscheiden (vgl. [53], S. 28; [1], S. 116f).

In *Tabelle 17* werden die verschiedenen Möglichkeiten angeführt, die sich durch die Kombination der bekannten (✓) und unbekannten (✗) Komponenten (Start, Weg, Ziel) ergeben.

Start Gegebenes, Situation, Information	Weg Methode, Verfahren, Beweiskette	Ziel Ergebnis, Lösung, Gesuchtes	Bezeichnung des Aufgabentyps	Beispielaufgabe
✓	✓	✓	gelöste Aufgabe; Musteraufgabe; Aufgabe zur Fehlersuche	Finde den Fehler: $x^2 + 5x - 50 = 0$ $x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 50}$ $L = \{ \}$
✓	✓	✗	einfache Bestimmungsaufgabe (Grundaufgabe)	Löse die Gleichung: $3x^2 - x = 7$
✗	✓	✓	einfache Umkehraufgabe	Gib eine quadratische Gleichung an, die -4 und 3 als Lösung hat.
✗	✗	✓	schwierige Umkehraufgabe; Modellierungsaufgabe mit Zielvorgabe	Gib eine Gleichung zweiten Grades an, die genau eine reelle Lösung hat.
✓	✗	✓	Beweisaufgabe	Begründe, weshalb die Gleichung $x^2 + c \cdot x + 4 = 0$ für $c=4$ genau eine Lösung hat.
✓	✗	✗	Problemaufgabe; Entwickeln von Lösungswegen	Beschreibe anhand eines selbst gewählten Beispiels, wie man die Skizze des Graphen einer solchen Funktion erstellt: $f(x) = x^2 + px + q$
✗	✓	✗	Erfinden einer Aufgabe zu einem vorgegebenen Lösungsweg oder Ergebnis	Gib eine quadratische Gleichung an, die sich unter Verwendung des Produkt-Null-Satzes lösen lässt.
✗	✗	✗	Problemsituation mit offenem Ausgang	Beschreibe einen Fehler, der oftmals beim Lösen quadratischer Gleichungen auftritt. Gib dazu eine Beispielaufgabe an, anhand welcher du die Problematik deinen Schulkollegen erklärst.

Tab. 17: Aufgabengestaltung nach Bruder (Vgl. [53], S. 28f; [1], S. 117 – 125)

Durch eine Erweiterung des Aufgabenrepertoires und eine Variation der Aufgabentypen erhalten die Lernenden die Möglichkeit, ein tiefergehendes Verständnis, welches über das reine Anwenden hinausgeht, zu entwickeln. Das Bearbeiten von Aufgaben unterschiedlicher Typen innerhalb einer Unterrichtseinheit führt zu einem Perspektivwechsel sowie einer Vernetzung innerhalb des Themas und bietet (je nach Aufgabenstellung) zudem einen hohen Grad an Reflexionstätigkeit. (Vgl. [53], S. 30ff)

Die üblichen Routineaufgaben, die meist eine reine Reproduktionsleistung der Schüler verlangen, sollen daneben auch weiterhin einen Platz im Unterrichtsgeschehen finden, ermöglichen jedoch allein keine weitgefächerte Kompetenzentwicklung (vgl. [1], S. 118).

Durch eine Öffnung der Aufgaben(stellungen) werden die Schüler zu elaborativen Tätigkeiten angeregt (vgl. [1], S. 116), durch das Ausformulieren von mathematischen Zusammenhängen in ihrer Kommunikationskompetenz gefordert (vgl. ebd., S. 118) und daneben auch innerhalb von Umkehraufgaben zu Reflexionstätigkeiten angeleitet (vgl. [53], S. 31).

Dass eine solche Art der Aufgabenkultur einen erhöhten Aufwand - sowohl bei der Erstellung als auch bei der Kontrolle der Aufgaben – mit sich bringt, darf natürlich nicht außer Acht gelassen werden. Man sollte sich jedoch vor Augen führen, dass neben den Schülern auch man selbst als Lehrkraft profitiert, da bei der Beantwortung von offenen Fragestellungen ein besserer Einblick in die Gedankengänge und somit auch Defizite der Lernenden gewährleistet wird (vgl. [1], S. 124).

IV TECHNOLOGIEEINSATZ

Zum Lernen mit technologischer Unterstützung findet man im Lehrplan der AHS-Oberstufe folgenden Absatz [34]:

„Technologische Hilfsmittel sollen in allen Kompetenzbereichen sinnvoll zum Einsatz kommen. [...] Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen technologischer Hilfsmittel durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen. Die minimale Realisierung besteht im Einsatz entsprechender Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben und dem gelegentlichen Einsatz als didaktisches Werkzeug beim Erarbeiten neuer Inhalte. Die maximale Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien als Werkzeug beim Modellieren, Visualisieren und Experimentieren.“

Anhand dieser Formulierung kann man bereits das breitgefächerte Einsatzgebiet technologischer Hilfsmittel erkennen. Die Einsatzmöglichkeiten gehen von der Auslagerung komplexer/zeitintensiver Rechenoperationen (z.B. Lösen von Gleichungen, Umformen von Formeln, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten), über das Modellieren passender Funktionsgleichungen und das Visualisieren verschiedener Darstellungsformen, bis hin zum Einsatz in Form eines „Experimentierwerkzeugs“.

Neben der Einführung neuer Aufgabenformate hat der (mittlerweile verpflichtende) Einsatz technologischer Hilfsmittel den Mathematikunterricht gravierend beeinflusst. Er führt den Fokus weg vom reinen Operieren hin zum reflektierten Nutzen von (Grund)kompetenzen und ermöglicht somit eine Schwerpunktverlagerung zugunsten anderer Handlungsbereiche wie etwa dem Argumentieren oder auch Interpretieren (vgl. [70], S.9). Zudem konnte festgestellt werden, dass sich ein wohlbedachter Technologieeinsatz vorteilhaft auf die Lernmotivation der Schüler auswirkt und einen nachhaltigen Kompetenzaufbau unterstützt (vgl. [1], S. 42f; S. 75).

Neben all diesen positiven Aspekten werden aber auch immer wieder Kritikpunkte, wie der drohende Verlust von Rechenfertigkeiten, hohe Anschaffungskosten der Geräte oder auch eine stärkere Heterogenisierung innerhalb der Klasse angeführt (vgl. [71], S. 44). In diesem Zusammenhang gilt es die Betonung auf den *wohlbedachten* Technologieeinsatz zu legen – wie ein solcher ausschauen könnte, wird in weiterer Folge betrachtet.

1 DER TECHNOLOGISCHE WERKZEUGKASTEN

Folgende Anforderungen werden an technologische Hilfsmittel, die im Unterricht eingesetzt werden sollen, laut Lehrplan gestellt [34]:

„Technologische Hilfsmittel [...] müssen zumindest über grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionen, Kurven und anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik verfügen.“

Im Laufe der letzten Jahre haben sich technologische Hilfsmittel zu einer Art „Technologieumgebung“ entwickelt, die ein weites Spektrum an unterschiedlichen Werkzeugen zur Verfügung stellt. Diese lassen sich grob in folgende Kategorien unterteilen:

- Computer-Algebra-System (CAS)
- Grafik- und Geometriesoftware, Funktionenplotter
- Tabellenkalkulation
- Wahrscheinlichkeitsrechner

Da vom BMBWF keine gerätespezifischen Vorgaben, sondern nur funktionsbezogene Mindestanforderungen (siehe *Kap. II, 5.2*) ausgegeben wurden, findet kein einheitlicher Einsatz technologischer Systeme in den österreichischen Schulen statt. Dabei hat sich auf Softwareebene das Programm *GeoGebra* und auf Hardwareebene die zwei Handhelds *TI-Nspire™ CX CAS* und *Casio ClassPad II* durchgesetzt. Alle drei Varianten erfüllen die vom Ministerium vorgegebenen Anforderungen und warten auch allesamt mit einem CAS, einem Funktionsplotter und einer Tabellenkalkulation auf, weshalb ich nur sehr kurz auf die jeweilige Funktionsweise eingehen werde.

A. GEOGEBRA

Die kostenlose Software ist für alle gängigen Betriebssysteme, sowie auch als App für mobile Geräte verfügbar. In Laptop-Klassen wird die dafür zusätzlich benötigte Hardware vonseiten der Schüler in Form eines Laptops oder Tablets bereitgestellt und kann somit jederzeit im Mathematikunterricht verwendet werden. Andernfalls muss der Unterricht in den EDV-Raum der Schule verlegt werden, wodurch ein regelmäßiger Einsatz selten gegeben ist.

B. HANDHELDS

Die Handhelds *TI-Nspire™ CX CAS* und *Casio ClassPad II* erinnern an den klassischen Taschenrechner, der um ein größeres Display erweitert wurde. Im Gegensatz zu GeoGebra werden hierbei Software und Hardware in einem vergleichsweise kleinen Gerät vereint, sodass dieses jederzeit im Unterricht verwendet werden kann. Die Beschaffung und somit auch Finanzierung fallen hierbei den Schülern zu.

In weiterer Folge werde ich in dieser Arbeit das Programm *GeoGebra* verwenden, da es in meinen Augen sowohl durch die Darstellungs- als auch Eingabemöglichkeiten eine größere Benutzerfreundlichkeit als Handhelds aufweist. Außerdem habe ich die Erfahrung gemacht, dass Schülern der Umgang damit wesentlich einfacher fällt, wodurch sie einen weitaus größeren Nutzen ziehen können. Die angeführten Aufgaben können jedoch in gleicher (oder sehr ähnlicher) Weise auch mit Hilfe von Handhelds gelöst bzw. bearbeitet werden.

1.1 COMPUTER-ALGEBRA-SYSTEM

Unter Computer-Algebra-Systemen versteht man Programme, welche eine Verarbeitung von Termen oder Gleichungen in Form von Berechnungen oder auch graphischen Darstellungen ermöglichen. In der Literatur finden sich verschiedene Beschreibungen derartiger Systeme.

Barzel führt als grundlegende Funktionen eines CAS etwa diese an (vgl. [72], S. 74):

Numerisch: exaktes Ausgeben einer Lösung (z.B. $2\sqrt{3}$), sofern der Näherungswert nicht gefordert wird

Symbolisch: algebraisches Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen

Graphisch: Zeichnen von Funktionsgraphen in verschiedenen Koordinatensystemen und Formen

Algorithmisch: Implementation von Algorithmen (z.B. spezielle Funktionen, Prozeduren), sowie Möglichkeit zu Entwicklung neuer Algorithmen

DIDAKTISCHER ASPEKT

Durch Computer-Algebra-Systeme erhält man die Möglichkeit, einer *Dominanz des Operativen* ([73], S. 29), wie sie im herkömmlichen Mathematikunterricht oftmals beobachtet werden kann, entgegenzuwirken und stattdessen die Handlungsbereiche *Argumentieren*, *Begründen* und *Interpretieren* verstärkt in den Unterricht zu integrieren (vgl. ebd., S. 30). Dies führt in weiterer Folge auch zu einem intensiveren Einsatz von Grundkenntnissen, Grundfertigkeiten und Reflexionswissen, wodurch wiederum die Grundlage für eine Vernetzung des bereits Gelernten mit neuen Inhalten entsteht.

Somit bietet der Einsatz von Technologie ein probates Mittel, um der zu Beginn beschriebenen Bildungstheorie im Sinne einer allgemeinbildenden Lebensvorbereitung gerecht zu werden. Eine Auslagerung des Operativen entspricht auch Fischers *Fächerorientierten Allgemeinbildung*, in der er dem Operieren eine geringere Relevanz als der Reflexion zukommen lässt (vgl. [10], S. 5). Durch die Auslagerung der fachlichen Operationen an CAS wird dem Laien Zeit und Raum für Überlegungen gegeben, die eine *Kommunikation mit Experten* in vielen Fällen überhaupt erst ermöglichen (vgl. [73], S. 26ff).

Zusätzlich stellt sich die Frage, inwieweit das sture Einüben von Rechenschritten bzw. Umformungen in einer unbändigen Fülle von Übungsaufgaben dem Verständnis tatsächlich zuträglich ist. Der bereits erwähnten „Dressur des Unverstandenen“ (vgl. [6], S. 49) könnte man durch ein Reduzieren von Routineaufgaben ebenfalls entgegenwirken, indem man die dadurch gewonnenen Freiräume zur Ausbildung eines echten Verständnisses nutzt (vgl. [73], S. 29f).

Diese Idee dahinter ist allerdings nicht gänzlich neu, da sich Peschek bereits 1999 für eine Nutzung zeitgemäßer Mittel zur Auslagerung operativer Handlungen ausspricht:

„Die mathematische Ausbildung sollte sich bei der Einführung wie auch bei der Anwendung mathematischer Konzepte zeitgemäßer Mittel bedienen; sie sollte insbesondere auch versuchen, operatives Wissen und operative Fertigkeiten an diese auszulagern, soweit dies didaktisch sinnvoll möglich ist.“

([74], S. 407)

Wie auch von Peschek angesprochen, gilt es also die *didaktische Sinnhaftigkeit* des Technologieeinsatzes im Auge zu behalten. Eine Auslagerung operativer Tätigkeiten ist erst dann als sinnvoll anzusehen, wenn zuvor operative Grundkompetenzen und Grundlagenwissen durch „technologiefreies“ Operieren entwickelt werden konnten. Denn nur so ist es etwa möglich, eine *Strukturerkennungskompetenz* auszubilden, die es bei der Eingabe und Kontrolle von Befehlen im CAS braucht. Des Weiteren ist sowohl die Interpretation als auch die Reflexion der durch Technologieeinsatz erhaltenen Ergebnisse ohne ein zuvor erworbenes Grundlagenwissen nur sehr bedingt möglich.

Der Einsatz von CAS sollte also sehr bedacht geschehen und sich vor allem auch an der Lernphase ausrichten, in der sich die Lernenden befinden. Steht der Erwerb neuer Methoden und Begriffe im Vordergrund, sollte Technologie als Kontroll- oder auch Experimentiermittel verwendet werden. Befindet man sich allerdings in der Phase des Übens und Anwendens bereits bekannter Inhalte und Algorithmen, kann das Operieren an die Technologie ausgelagert werden und die dadurch eingesparte Zeit für einen nachhaltigen Kompetenzerwerb durch beispielsweise Reflexion und Interpretation genutzt werden. (Vgl. [70], S. 16)

1.2 GRAFIK- UND GEOMETRIESOFTWARE, FUNKTIONENPLOTTER

Das Erstellen von Konstruktionen mithilfe einer *Dynamischen Geometriesoftware* bietet im Gegensatz zum händischen Arbeiten mit Zirkel und Lineal den Vorteil, dass bei Änderungen (etwa bezüglich der Position oder auch Größe) einzelner geometrischer Objekte die Beziehungen zwischen den Objekten beibehalten werden (vgl. [75], S. 132). Im sogenannten *Zugmodus* können beispielsweise Punkte in der Grafiksicht verschoben werden – alle davon abhängigen Objekte werden automatisch angepasst. Unter Zuhilfenahme des *Spurmodus* kann man sich den Weg anzeigen lassen, den ein bestimmtes Objekt zurücklegt.

Derartige Konstruktionsaufgaben werden allerdings eher in der Unterstufe durchgeführt, in der Oberstufe findet der Einsatz meist nur beim Arbeiten mit Vektoren und Geraden im Rahmen der analytischen Geometrie statt (vgl. [70], S. 30). Der Themenbereich *Kegelschnitte* würde sich aber auch in der Oberstufe anbieten, um etwa die Konstruktion einer Ellipse mithilfe der Software durchzuführen, oder auch Eigenschaften der Kurven zu untersuchen.

Neben der dynamischen Geometriesoftware bietet GeoGebra auch einen *Funktionsplotter* samt *grafischer Werkzeuge* an, welche im Gegensatz zur konstruktiven Geometrie weitaus größere Verwendung in der Oberstufe finden. Hier stehen vor allem die Darstellung und Analyse von Graphen im Vordergrund, bei denen beispielsweise die Nutzung von Schiebereglern ein experimentelles Lernen ermöglicht.

DIDAKTISCHER ASPEKT

Durch eine solche entdeckende Arbeitsweise erfahren Schüler eine kognitive Aktivierung, wodurch nach Bruder der Lernprozess und die dadurch gewonnenen Erkenntnisse mit positiven Emotionen verbunden werden (vgl. [76], S. 361) und zu einem Kompetenzaufbau auf fachlicher und überfachlicher Ebene führen (vgl. [77], S. 159).

Der kombinierte Einsatz der Algebra- und Grafikfunktion ermöglicht es, denselben Sachverhalt aus zwei unterschiedlichen Perspektiven zu betrachten. Da die Anzeige der Algebra- und Grafiksicht in zwei benachbarten Fenstern erfolgt, werden „Visualisierungen und das Prinzip der Interaktion von Darstellungsformen“ ([78], S. 174ff) unterstützt.

Ein Beispiel dafür wird in der nachfolgenden Abbildung dargestellt:

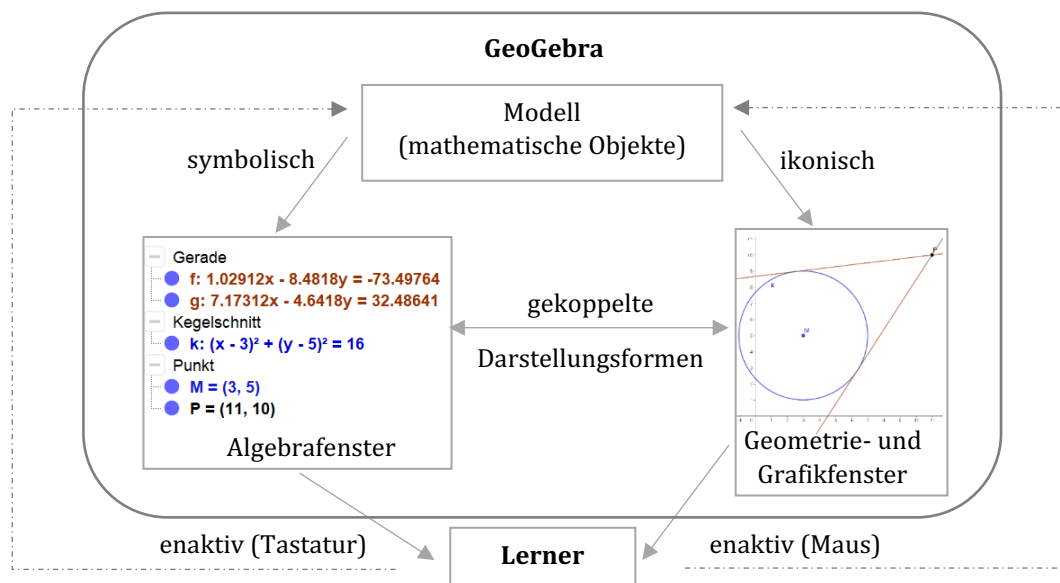


Abb. 33: Ikonische und symbolische Darstellung (vgl. [78], S. 174ff)

Der Kreis kann sowohl durch Eingabe im Algebrafenster, als auch durch direkte Manipulation (Verschieben) im Grafikfenster verändert werden. Ebenso können Tangenten unter Verwendung der Maus in der Grafiksicht konstruiert oder mithilfe eines Befehls im Algebrafenster erstellt bzw. deren Funktionsgleichungen eingegeben werden. Durch eine derartige *Interaktion der Darstellungsformen* ([78], S. 174ff) erfolgt ein Lernprozess auf enaktiver (handlungsbezogener), ikonischer (bildhafter) und symbolischer Ebene (vgl. ebd., S. 174ff), wodurch ein Kompetenzerwerb durch die von Winter (siehe Kap. II, 4) beschriebenen Grunderfahrungen ermöglicht wird.

1.3 TABELLENKALKULATION

Wie der Name es schon vermuten lässt, werden in einem Tabellenkalkulationsprogramm (numerische und alphanumerische) Daten in Form einer Tabelle eingegeben, verwaltet und verarbeitet. Es besteht die Möglichkeit, die Daten auf unterschiedliche Arten graphisch aufbereiten und statistische Parameter dazu berechnen zu lassen. (Vgl. [79])

DIDAKTISCHER ASPEKT

Die interaktive Verknüpfung mit Funktionsgraphen bietet einen weiteren großen Vorteil, da Änderungen am Graphen zeitgleich in der Tabelle aufscheinen (und umgekehrt) und somit eine zusätzliche Möglichkeit der *Interaktion der Darstellungsformen* ([78], S. 174ff) gegeben ist.

Der Einsatz (relativer) Bezüge erlaubt zudem einen neuen Blickwinkel auf den Themenbereich rekursiver Modelle (vgl. [70], S. 28), da den Schülern zeitaufwändige Rechenarbeit abgenommen und durch die graphische Darstellung ein Untersuchen des Modells erleichtert wird. Das Nutzen von Schiebereglern ermöglicht eine Simulation bei Änderung einzelner Parameter und bietet somit auch in diesem Bereich ein entdeckendes Lernen anhand experimenteller Zugänge. (Vgl. ebd., S. 75).

Weiters werden im Bereich der Statistik den Schülern zeitintensive Berechnungen bzw. das Erstellen von Diagrammen abgenommen, wodurch eine intensive Auseinandersetzung mit den Inhalten stattfinden kann und somit der von Fischer propagierten Lebensvorbereitung und Allgemeinbildung in die Hände spielt. Fischer bezieht sich in seinem Konzept auf eine Formulierung Heymanns der unter anderem meint,

„[es] werden im üblichen Mathematikunterricht viele Qualifikationen, die im beruflichen und privaten Alltag sehr hilfreich sind, nur unzureichend vermittelt: im beruflichen und gesellschaftlichen Alltag spielen zunehmend „weichere“ mathematiknahe Qualifikationen eine Rolle. Das „harte“ Rechnen kann in vielen Fällen Maschinen (Taschenrechnern, Computern) überlassen werden. Aber es kommt in vielen Situationen darauf an, ein „Feeling“ für Zahlen und quantitative Zusammenhänge entwickelt zu haben, sich Größenordnungen vorstellen zu können, Abschätzungen und Überschlüsse vornehmen zu können. Und da Mathematik als Kommunikationsmittel eine immer größere Bedeutung erlangt, ist es wichtig, Zahlenangaben (etwa zu Wahrscheinlichkeiten), Tabellen, Statistiken und graphische Darstellungen sachangemessen interpretieren zu können. Weiter kann der mathematisch verständige Umgang mit elektronischen Hilfsmitteln (die vielen Mathematiklehrern noch immer suspekt sind) im Alltag großen Nutzen bringen. Und last but not least ist dem Umsetzen einfacher Sachverhalte in mathematische Modelle und umgekehrt erheblich mehr Aufmerksamkeit zu schenken“.

([11], S. 150f)

1.4 WAHRSCHEINLICHSRECHNER

Außer der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mittels CAS bieten alle der oben genannten Software- und Hardwarelösungen auch einen Wahrscheinlichkeitsrechner an, der unter anderem Berechnungen zu verschiedenen Verteilungen, das Ermitteln von Konfidenzintervallen, das Testen von Hypothesen und (mit Einschränkungen) das Lösen von Umkehraufgaben ermöglicht.

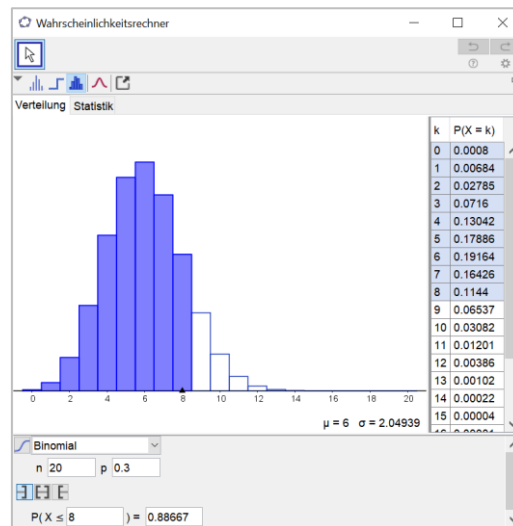


Abb. 34: GeoGebra: Wahrscheinlichkeitsrechner - Binomialverteilung

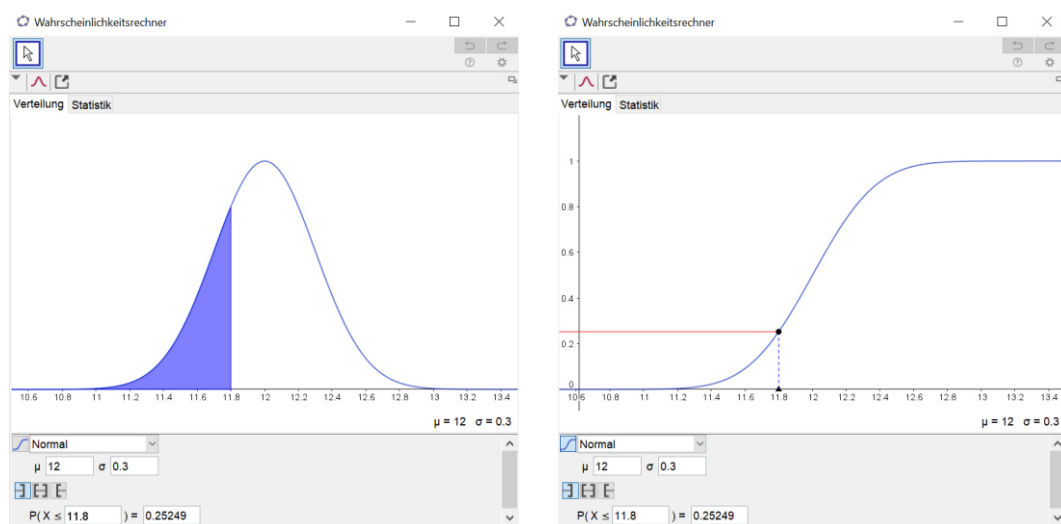


Abb. 35: GeoGebra: Wahrscheinlichkeitsrechner - Normalverteilung

Neben den bereits mehrfach angeführten Vorteilen der unterschiedlichen Darstellungsmodi, liegt die Stärke der Programme zweifellos in der raschen Berechnung (ohne mühselige Verwendung von Tabellen) auf der Hand, wodurch auch in diesem Bereich ein exploratives Lernen ermöglicht wird. Natürlich kommt auch hier die Frage auf, inwieweit bestimmte Inhalte bzw. Methoden (wie etwa die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung) durch den Einsatz von Technologie eventuell überholt sein mögen – dies zu hinterfragen obliegt jedoch den Erstellern des Lehrplans.

1.5 WERKZEUGKOMPETENZ

„Wenn im Prozess bestimmte notwendige Operationen nicht durchgeführt werden können, weil die dazu erforderlichen Werkzeuge nicht beherrscht werden, so beeinflusst das den Lernprozess. Der Umgang mit dem Werkzeug wird nun Gegenstand der Handlung.“ ([80], S. 23)

Die Betonung des Werkzeugcharakters macht hier insbesondere deutlich, dass diese Hilfsmittel im Mathematikunterricht einem ganz spezifischen Zweck unterliegen: Sie werden genutzt bzw. können genutzt werden, um in kompetenter Weise Mathematik zu betreiben. ([81], S. 10)

Der Einsatz der oben genannten Werkzeuge verlangt von Schülern eine zielgerechte Handhabung, eine Werkzeugkompetenz also, die neben mathematischen Kompetenzen im (kompetenzorientierten) Unterricht ebenfalls einen hohen Stellenwert einnehmen sollte. Im Zuge dessen kommt den bereits mehrfach erwähnten Grunderfahrungen nach Winter eine große Bedeutung zu, die alle drei bei der Entstehung und Schulung solcher Kompetenzen ins Gewicht fallen (vgl. [81], S. 11).

Werkzeugkompetenzen, die einen versierten Umgang mit technologischen Hilfsmitteln ermöglichen, setzen sich nach [81] aus folgenden Teilkompetenzen zusammen (vgl. ebd., S. 22):

- der *kontextgerechten Auswahl* des Werkzeuges
- der *Befähigung* das ausgewählte Werkzeug nutzen und einsetzen zu können
- der *Reflexionsfähigkeit* über den sinngerechten Einsatz und die Grenzen des Werkzeuges
- der entsprechenden *Dokumentation* hinsichtlich des Bearbeitungsvorgangs und der daraus erhaltenen Ergebnisse und Erkenntnisse

Das *Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA)* führte im Auftrag des Bildungsministeriums zwischen 1992 und 2005 Forschungsprojekte durch, in deren Rahmen die „Frage nach unverzichtbaren Grundkompetenzen beim Einsatz von Technologie“ ([82], S. 5) untersucht wurde. Dabei stellte man fest, dass sogenannte „Werkzeughandlungen“ in allen vier Handlungsbereichen des eingangs beschriebenen

Kompetenzmodells auftreten, weshalb man diese Handlungen in die bereits bestehenden Bereiche eingliederte. Angelehnt an die Handlungsbereiche formuliert Heugl ([83], S. 36) folgende vier „Unterbereiche“, die den jeweiligen Bereich hinsichtlich seines Technologiecharakters beschreiben (Vgl. [82], S. 5f):

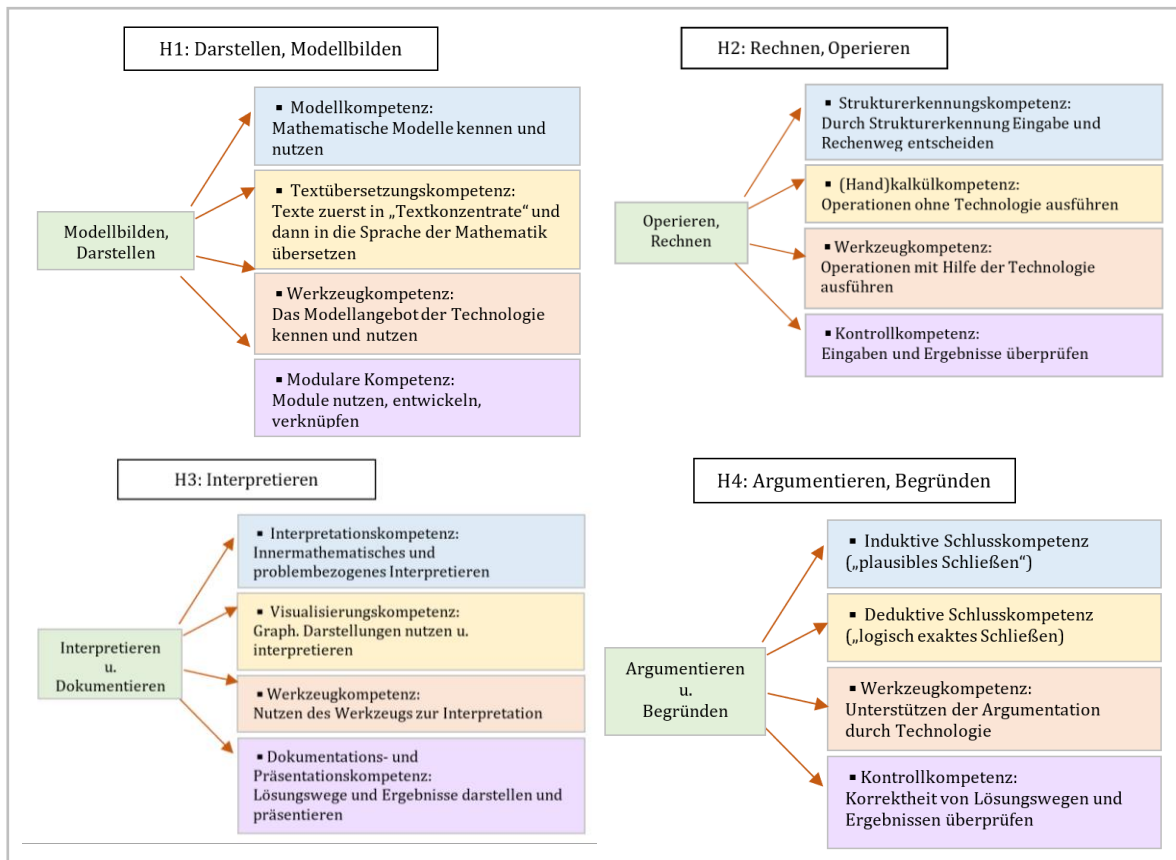


Abb. 36: Handlungsbereiche – Technologieeinsatz ([148], S. 35-39)

Heugl spricht sich für einen genetischen Zugang aus, der einen Erwerb der Werkzeugkompetenz anhand passender Problemstellungen innerhalb bestimmter Themen und nicht entkoppelt als „Werkzeugkompetenz auf Vorrat“ vorsieht (vgl. [70], S. 15).

Ich bekomme bei der Arbeit mit Schülern regelmäßig aufgezeigt, dass derartige Werkzeugkompetenzen meist nur sehr rudimentär ausgebildet sind. Dies führt dazu, dass Technologie entweder zur Gänze abgelehnt oder aber in Form eines reinen Ausprobierens angewandt wird. Auch, wenn ein explorativer Zugang grundsätzlich seine Vorteile bringen kann, ist es nicht das Ziel, sämtliche Arbeitsschritte auf diese Weise durchzuführen, da dies einerseits den Zeitrahmen sprengen würde und andererseits auch den eigentlichen Arbeits- und Lernprozess unterbrechen oder stören kann.

Im Folgenden werden einige Aufgabenstellungen vorgestellt, anhand welcher Werkzeugkompetenzen in den jeweiligen Bereichen vermittelt werden können. Dabei liegt das Hauptaugenmerk auf dem Arbeiten mit dem CAS, da Schülern dieses erfahrungsgemäß die größten Schwierigkeiten bereitet.

Die angeführten Trainingsaufgaben zielen darauf ab, ein grundlegendes Verständnis für die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des Programms zu entwickeln. Sie dürfen daher nicht (bzw. nur bedingt) als Aufgaben verstanden werden, die dem Grundkompetenzaufbau auf inhaltlicher Ebene dienen. Da jedoch für einen solchen Aufbau der zielgerichtete und verständliche Umgang mit der Software unabdingbar ist, bieten sie die Basis für das Bearbeiten von weiterführenden Aufgaben, weshalb ihnen in meinen Augen besondere Bedeutung zukommen sollte. Die angegebenen Lösungsmöglichkeiten konzentrieren sich auf die Vorgehensweise auf technologischer Ebene und entsprechen nicht dem ausformulierten Lösungsweg, der in diesem Zusammenhang von den Schülern erwartet wird. Zudem setzen sie voraus, dass bereits im Vorfeld der Einsatz der Werkzeuge besprochen wurde. Falls die Aufgaben nicht im Rahmen des Unterrichts mit dementsprechender Instruktion über das zu verwendende Werkzeug zur Anwendung kommen, muss die Angabe um die Anweisung darüber erweitert werden.

Anhand der Praxisbeispiele soll gezeigt werden, inwiefern die vorgestellten Werkzeugkompetenzen bei Aufgaben im Schulalltag Anwendung finden. Die Aufgaben sind meist Schulbüchern oder den Beispielsammlungen ⁵ zu Typ-1-Aufgaben des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung entnommen und spiegeln den Zugang der Schüler, welchen ich in der Arbeit mit diesen regelmäßig beobachten kann, wider. Auch hier geht es nicht in erster Linie um die Entwicklung eines Grundkompetenzaufbaus, sondern darum, den Einsatz von Technologie, wie er in der Praxis (vor allem in Prüfungssituationen) meist stattfindet, sowie die dabei oftmals auftretenden Schwierigkeiten darzustellen.

⁵ aufgabenpool.at und aufgabenpool.srdp.at

1.5.1 CAS-WERKZEUGKOMPETENZ



Abb. 37: Werkzeugleiste

Neben einer Leiste (siehe Abb. 37), über welche man Werkzeuge aus dem Bereich der Analysis und der Algebra auswählen kann, bietet GeoGebra auch die Möglichkeit, Befehle direkt in die Eingabezeile (Abb. 38) einzugeben. Alle verfügbaren Befehle werden in der *Eingabehilfe* (Abb. 38) aufgelistet, die man in den beiden derzeit gebräuchlichen Versionen des Programms folgendermaßen findet:

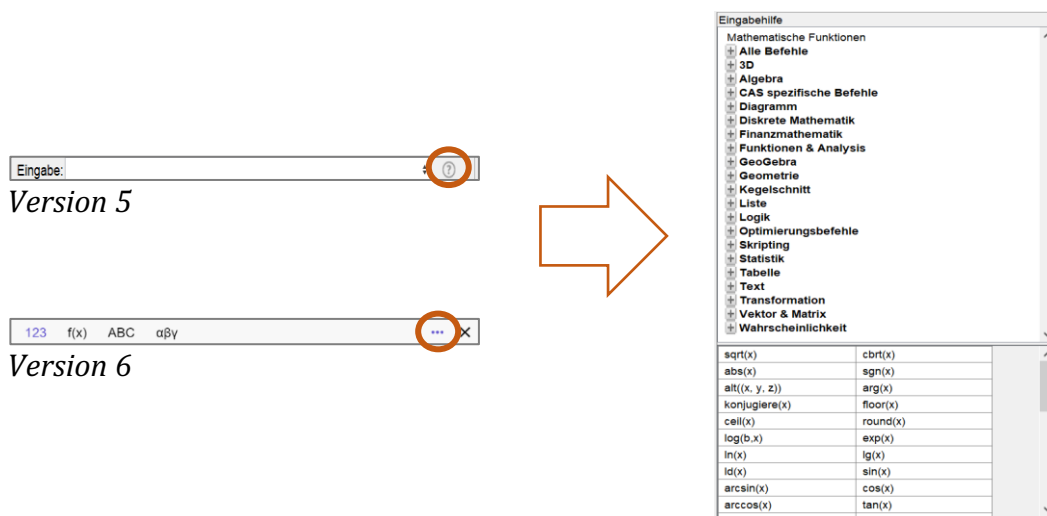


Abb. 38: Eingabezeile und Eingabehilfe

A. HÄUFIGE EINGABEFEHLER

Neben der richtigen Strukturerkennung bei der Eingabe, auf die ich im Folgenden noch genauer eingehe, konnte ich folgende Eingabefehler der Schüler häufig beobachten:

▪ Eingabe von Dezimalzahlen

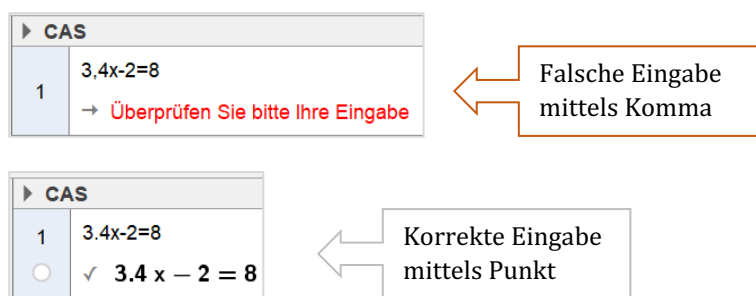


Abb. 39: Eingabe von Dezimalzahlen

- *Eingabe von (Form)Variablen*

Das Produkt zweier (oder mehrerer) Variablen erfordert die Eingabe eines Multiplikations- oder Leerzeichens:

CAS	
1	A=ab ✓ A = ab
2	A=a*b ✓ A = a b
3	A= a b ✓ A = a b

Falsche Eingabe: ab wird nicht als Produkt, sondern eine einzige Variable aufgefasst

Korrekte Eingabe mittels Multiplikationszeichens „*“

Korrekte Eingabe mittels Leerzeichens

Abb. 40: Eingabe eines Produkts zweier Variablen

Das Produkt aus einer Zahl und einer Variablen kann jedoch intuitiv erfolgen:

CAS	
1	5x-25=20 ○ → 5 x - 25 = 20
2	5*x-25=20 ○ → 5 x - 25 = 20

Die Eingabe von $5x$ kann sowohl mit als auch ohne Multiplikations- bzw. Leerzeichen erfolgen

Abb. 41: Eingabe eines Produkts einer Zahl und einer Variablen

- *Eingabe von Wurzeln*

CAS	
1	sqrt(4x-3) ○ → $\sqrt{4x-3}$
2	cbrt(9-2x) ○ → $\sqrt[3]{-2x+9}$

Die Eingabe der Quadrat- und Kubikwurzel kann mittels Befehl *sqrt* und *cbrt* erfolgen und bereitet meist keine Probleme

Abb. 42: Eingabe der Quadrat- und Kubikwurzel

Wurzeln mit anderen Wurzelexponenten werden über den Befehl *NteWurzel(Radikand, Wurzelexponent)* eingegeben, wobei Schüler oftmals Radikand und Wurzelexponent vertauschen:

CAS	
1	NteWurzel(4, 6) ○ ✓ $\sqrt[6]{4}$
2	NteWurzel(6, 4) ○ ✓ $\sqrt[4]{6}$

Korrekte Eingabe von $\sqrt[6]{4}$

Falsche Eingabe von $\sqrt[6]{4}$

Abb. 43: Eingabe von Wurzeln

▪ Definieren von Variablen und Funktionen

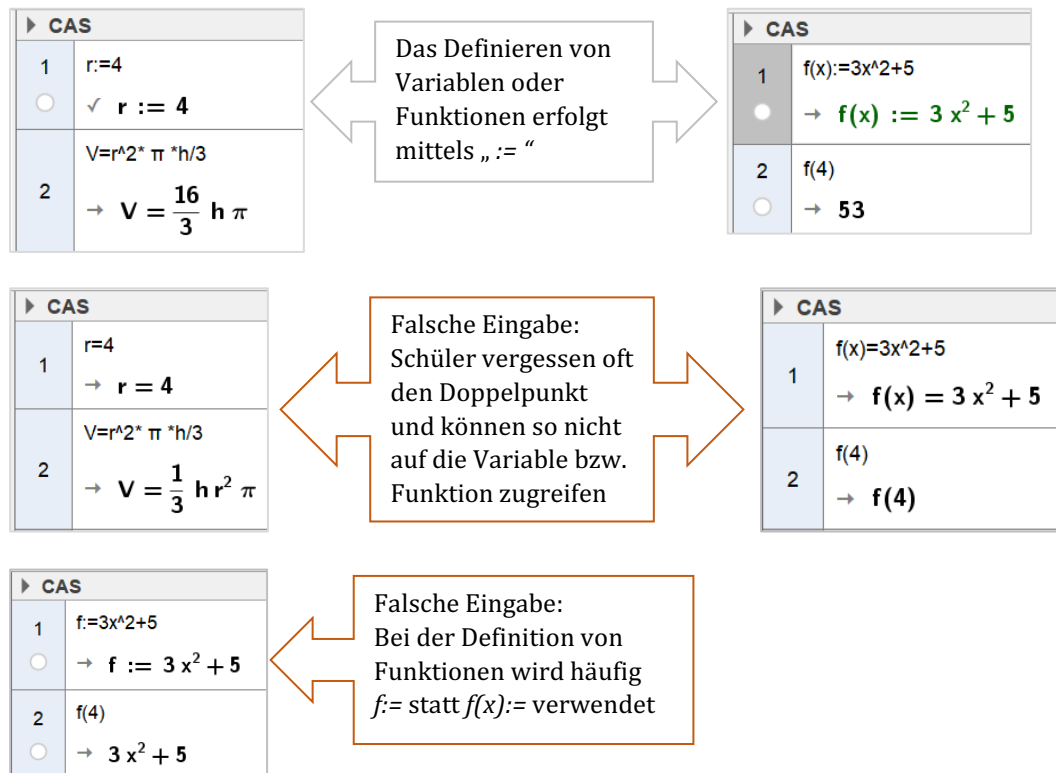


Abb. 44: Definieren von Variablen und Funktionen

B. STRUKTURERKENNUNG BEI DER EINGABE

Die sequentielle Eingabe von Termen, die von den meisten CAS verlangt wird, erfordert eine hohe *Strukturerkennungskompetenz*, welche somit bereits vor dem Einsatz von Technologie ausreichend geschult werden muss (vgl. [70], S. 17). Erfahrungsgemäß treten die meisten Probleme bei der Eingabe von Brüchen und Exponenten auf:

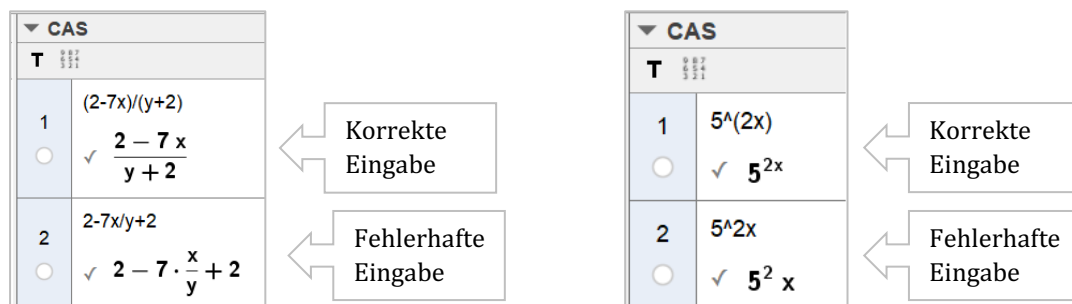


Abb. 45: Strukturerkennungskompetenz bei der Eingabe

TRAININGSAUFGABE 1

Gib die Ausdrücke ein und überprüfe deine Eingabe mit Hilfe von ☒ :

a) $(2a - b)^{3c}$

b) $\frac{x^4}{3x-4y^2}$

c) 4^{-x}

d) $\frac{3-2b}{4a+1}$

e) $\frac{\frac{4}{x}}{\frac{3-2x}{8y}}$

f) $\frac{1-\frac{6y}{3}}{(3-y)^{-2}}$

Anmerkung: Das Werkzeug *Behalte Eingabe* ☒ ermöglicht die Ausgabe eines Ausdrucks in unveränderter Form (es werden keine Vereinfachungen durchgeführt)

TRAININGSAUFGABE 1 - MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS	
T	
1	$(2a-b)^{3c}$ ✓ $(2a - b)^{3c}$
2	$x^4/(3x-4y)^2$ ✓ $\frac{x^4}{(3x - 4y)^2}$
3	$4^{(-x)}$ ✓ 4^{-x}

4	$(3a-2b)/(4a+1)$ ✓ $\frac{3a - 2b}{4a + 1}$
5	$(4/x)/((3-2x)/(8y))$ ✓ $\frac{\frac{4}{x}}{\frac{3-2x}{8y}}$
6	$(1-(6y)/3)/(3-y)^{-2}$ ✓ $\frac{1 - \frac{6y}{3}}{(3 - y)^{-2}}$

Abb. 46: Trainingsaufgabe 1 - Lösungsweg

DIDAKTISCHER ASPEKT

Wie bereits erwähnt, ist es für ein problemloses Arbeiten mit CAS unerlässlich, den Umgang mit Termen bereits im Vorfeld eingehend zu üben. Nur so ist es für Schüler möglich, die „vorliegende *Termstruktur* zu *erkennen* und mit der *Hierarchie von Rechenoperationen vertraut* zu sein“ ([73], S. 194). Ich habe außerdem die Erfahrung gemacht, dass die Eingabe eines Terms in ein CAS durchaus dazu anregen kann, über Termstrukturen nachzudenken. Auch Weigand, Weth ([84], S. 67) und Schneider ([73], S. 194) sprechen von einer Schulung der Strukturerkennung, welche etwa in Form eines „Trial-and-Error-Prinzips“ auf explorative Weise in den Lernprozess eingebaut werden kann bzw. gezwungenermaßen durchaus von selbst stattfindet.

Die Version 6 des Programms *GeoGebra* wartet mit einigen Änderungen auf, sodass bereits während der Eingabe des Terms die Darstellung in Bruchschreibweise oder auch in Form von hochgestellten Exponenten erfolgt. Dadurch wird beispielsweise ein Eingeben von Hochzahlen erleichtert, das korrekte Setzen von Klammern bei der Eingabe von Brüchen fällt aber auch hier nicht weg. Die Schüler erhalten auf diese Weise jedoch schon während des Eingabeprozesses eine Rückmeldung über die Richtigkeit des Eingetragenen, wodurch der Arbeitsvorgang vereinfacht wird.

Ein möglicher Lösungsweg zu Trainingsaufgabe 1)a)d)f) mit Version 6 schaut folgendermaßen aus:

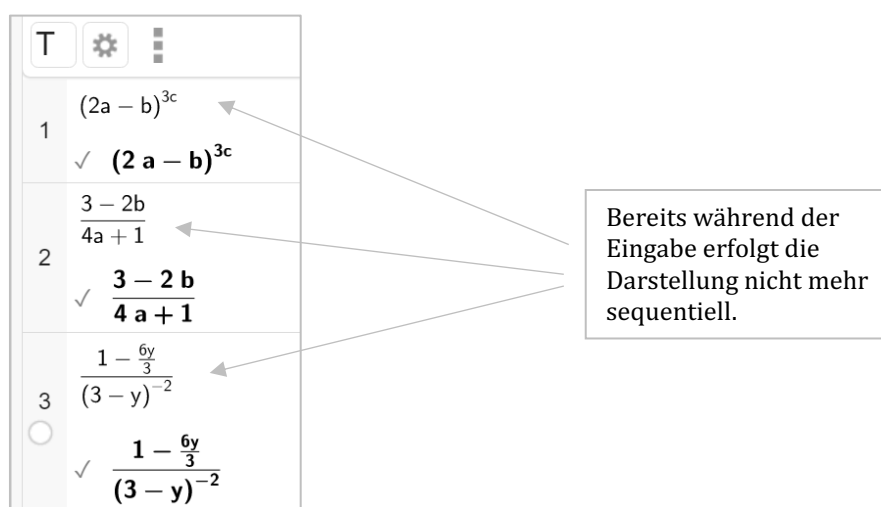


Abb. 47: Lösungsweg mit Version 6

C. STRUKTURERKENNUNG BEI DER AUSGABE

Eine Strukturerkennungskompetenz ist nicht nur bei der Eingabe, sondern auch bei der Interpretation der ausgegebenen Ausdrücke vonnöten, da CAS Ergebnisse meist in vereinfachter oder auch faktorisierter Form darstellen (vgl. [70], S. 18).

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 2

Zeige mithilfe geeigneter Werkzeuge/Befehle, dass diese drei Ausdrücke übereinstimmen:

- $4a^2 - 16ab + 16b^2$
- $(2a - 4b)^2$
- $\frac{(4a-8b)^2}{4}$

TRAININGSAUFGABE 2 - MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS		
1	$(2a-4b)^2$ Multipliziere: $4a^2 - 16ab + 16b^2$	Ausmultiplizieren mittels 
2	Vereinfache($(2a-4b)^2$) → $4(a - 2b)^2$	Vereinfachte Darstellung mittels Befehl <i>Vereinfache</i>
3	$(4a-8b)^2/4$ Multipliziere: $4a^2 - 16ab + 16b^2$	Ausmultiplizieren mittels 
4	Vereinfache($(4a-8b)^2/4$) → $4(a - 2b)^2$	Vereinfachte Darstellung mittels Befehl <i>Vereinfache</i>
5	Faktorisiere($4a^2-16ab+16b^2$) → $4(a - 2b)^2$	Faktorisieren des Ausdrucks mittels Befehl <i>Faktorisiere</i>

Abb. 48: Trainingsaufgabe 2 - Lösungsweg

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei der Interpretation und dem Vergleich von Ergebnissen, die nicht selbst durch Umformungen, Berechnungen und Vereinfachungen hervorgebracht wurden, braucht es einen geschulten Umgang mit den geeigneten Befehlen und Werkzeugen (vgl. [70], S. 18). Zudem sind grundlegende Kenntnisse bezüglich der Strukturerkennung und dem Arbeiten mit Termen ohne Technologieeinsatz unabdingbar.

BEISPIELE AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 1

Unbestimmtes Integral		
Aufgabennummer: 1_038		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)		Grundkompetenz: AN 4.2
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewählte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
Gegeben sind Aussagen über die Lösung eines unbestimmten Integrals. Nur eine Rechnung ist richtig. Die Integrationskonstante wird in allen Fällen mit $c = 0$ angenommen.		
Aufgabenstellung:		
Kreuzen Sie die korrekte Rechnung an!		
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = (6x + 5)^2$	☐	
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = 3x^2 + 5x$	☐	
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = (6x + 15)^2$	☐	
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = 3 \cdot (x^2 + 5x)$	☐	
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = 3x^2 + 15$	☐	
$\int 3 \cdot (2x + 5) dx = 6x^2 + 15x$	☐	

Abb. 49: Praxisbeispiel 1 [142]

Mögliche Probleme bei der Bearbeitung

In der Praxis hat sich gezeigt, dass Schüler bei dieser Aufgabe zwar oft den richtigen Einsatz der Befehle *Integral* oder auch *Ableitung* beherrschen, die dabei erhaltenen Ergebnisse jedoch aufgrund von Defiziten bei der Strukturerkennung nicht auf deren Übereinstimmung überprüfen können.

Die nachfolgende Aufgabe ist ein Beispiel dafür, dass durch den Einsatz eines CAS der Vorgang des Umformens zwar ausgelagert werden kann, der Arbeitsvorgang durch die dabei auftretenden Probleme bei der Strukturerkennung (sowohl bei der Ein- als auch bei der Ausgabe) jedoch nicht immer erleichtert oder beschleunigt wird.

PRAXISBEISPIEL 2

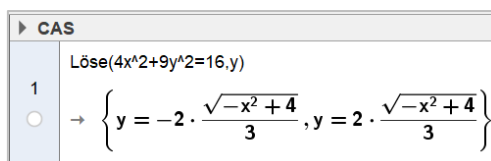
Ein Flächenstück, das vom Kegelschnitt $4x^2 + 9y^2 = 16$ und der x-Achse eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers (vgl. [85], S. 57).

Mögliche Probleme bei der Bearbeitung

Da für die Berechnung des Rotationsvolumens im Intervall $[a;b]$ um die x-Achse $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$ gilt,

bedarf es einer Umformung der Kegelschnittgleichung nach y^2 .

Dies ist jedoch im CAS nicht möglich, weshalb Schüler die Gleichung üblicherweise nach y umformen lassen:



CAS
Löse($4x^2+9y^2=16,y$)
1
→ $\left\{ y = -2 \cdot \frac{\sqrt{-x^2+4}}{3}, y = 2 \cdot \frac{\sqrt{-x^2+4}}{3} \right\}$

Abb. 50: Umformung nach y

Es treten beim Quadrieren des erhaltenen Ausdrucks mittels CAS in weiterer Folge meist große Probleme hinsichtlich der richtigen Struktureingabe auf. Zudem ist der Zeitaufwand wesentlich größer als bei einer Umformung, die ohne Technologieinsatz erfolgt. Die Schwierigkeiten, die durch den CAS-Einsatz auftreten, führen meinen Beobachtungen nach außerdem oftmals dazu, dass Schüler sich nur noch auf den Umgang mit dem Programm konzentrieren, der Inhalt des Beispiels und somit auch das grundlegende Verständnis dafür hingegen weitgehend auf der Strecke bleiben.

In meinen Augen ist es enorm wichtig, die Auslagerung von Rechengvorgängen im Unterricht sehr durchdacht einzusetzen, um einen Verständnisaufbau auf Schülerseite gezielt zu unterstützen. Außerdem ist es nur so möglich, dass Fertigkeiten wie beispielweise das elementare Umformen nicht verloren gehen. Leider geht der Trend – meinen Beobachtungen aus der Arbeit mit Schülern zufolge – jedoch eher in die Richtung, dass der Großteil der Rechenarbeit an CAS übergeben wird, wodurch Maturanten oftmals nicht mehr in der Lage sind, einfachste Gleichungen händisch zu lösen. Mangelt es zusätzlich noch an technologischen Werkzeugkompetenzen, verkommt das Lösen einer Aufgabe häufig zu einem reinen Ausprobieren, welches einem Wissensaufbau unter Umständen nur bedingt zuträglich ist.

Schneider spricht sich etwa dafür aus,

„dass es bei der Auslagerung keineswegs darum geht, auf mathematisches Verständnis zu verzichten, [sondern] das Gegenteil der Fall [ist]: Operatives Wissen und operative Fertigkeiten sollen nur soweit an CAS ausgelagert werden, als dies didaktisch sinnvoll erscheint (was in jedem Einzelfall abzuwägen, zu konkretisieren und – allenfalls auch mit den Schüler/innen – auszuhandeln ist).“

([73], S. 36)

Auf diese Problematik geht auch das nachfolgende Beispiel aus der Praxis ein:

PRAXISBEISPIEL 3

Algebraische Begriffe		
Aufgabennummer: 1_001		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: AG 1.2
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich
Für die Oberfläche O eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe h gilt $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.		
Aufgabenstellung:		
Welche der folgenden Aussagen sind im Zusammenhang mit der gegebenen Formel zutreffend? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!		
$O = 2r\pi \cdot (r + h)$ entsteht durch Umformung aus $O = 2r^2\pi + 2r\pi h$.		☐

Abb. 51: Praxisbeispiel 3 [129]

Mögliche Probleme bei der Bearbeitung

Bei der Aufgabe geht es unter anderem darum, die Richtigkeit der oben angeführten Aussage zu untersuchen. Dabei gehen Schüler oftmals wie folgt vor:

CAS	
1	$2r \cdot \pi \cdot (r+h) == 2r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot h$ $\rightarrow$ true

Mittels „==“ wird die Äquivalenz der beiden Ausdrücke überprüft

Abb. 52: Überprüfen der Äquivalenz

Natürlich führt dieser Weg – unter der Voraussetzung der strukturell korrekten Eingabe – aus Sicht der Schüler zu einem richtigen Ergebnis. Aus Perspektive der Lehrperson kann aber weder überprüft werden, ob der Schüler den mathematischen Hintergrund der Aufgabe verstanden hat, noch bietet diese Vorgehensweise die Möglichkeit einer Kompetenzentwicklung auf inhaltlicher Ebene.

Die zuletzt angeführte Problematik ist ein Paradebeispiel dafür, dass sich der Einsatz von Technologie zum Aufbau von Wissen und Kompetenzen oftmals vom Einsatz bei der

Wissensüberprüfung (bei Schularbeiten oder der Matura) unterscheiden sollte. Dass Schüler in Prüfungssituationen anhand gezielt eingesetzter Befehle oder Werkzeuge Abkürzungen auf dem Weg zum Ergebnis nehmen, ist nicht zu ändern – innerhalb des Lernprozesses ist es jedoch wichtig, darauf zu achten, dass Technologie nicht ausschließlich als Mittel zum Zweck sondern auch als hilfreiche Unterstützung zur Ausbildung eines Verständnisses eingesetzt wird. Dazu kann es allerdings auch in manchen Fällen notwendig sein, die Bearbeitung einer Aufgabe gänzlich ohne Verwendung der Technologie zu verlangen.

Bei der oben genannten Aufgabe (*Praxisbeispiel 3*) wäre eine Möglichkeit, die Schüler im Rahmen einer Hausübung nicht nur die richtigen Antworten ankreuzen, sondern zu jeder Aussage eine Begründung formulieren zu lassen.

D. LÖSEN EINER GLEICHUNG VS. BERECHNEN EINES AUSDRUCKS

In der Werkzeugleiste der CAS-Ansicht findet man unter anderem die Werkzeuge:

- *Berechne symbolisch*: liefert eine exakte Berechnung des Ausdrucks
- *Berechne numerisch*: gibt eine numerische Approximation des Ausdrucks aus
- *Löse*: bestimmt eine exakte Lösung der Gleichung
- *Löse numerisch*: bestimmt eine numerische Lösung der Gleichung

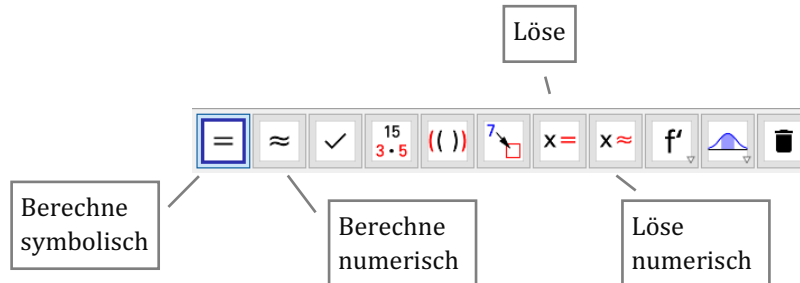


Abb. 53: Werkzeugleiste der CAS-Ansicht

In der Praxis hat sich gezeigt, dass es enorm wichtig ist, die Schüler auf die unterschiedlichen Bedeutungen dieser Werkzeuge hinzuweisen und deren Einsatz in verschiedenen Anwendungssituationen zu üben, sodass das *Löse-Werkzeug* nicht zur Berechnung eines Ausdrucks bzw. das *Berechne-Werkzeug* nicht zum Lösen einer Gleichung verwendet wird.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 3

- Berechne den Ausdruck $4 \cdot (-1)^3 + \frac{1}{3}$ exakt und näherungsweise.
- Löse die Gleichung: $3 - 2x = x + 1$ exakt und näherungsweise.

TRAININGSAUFGABE 3 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

3a)

1. Methode – Einsatz von Werkzeugen

CAS	
1	$4 \cdot (-1)^3 + 1/3$
☐	$\rightarrow -\frac{11}{3}$
2	$4 \cdot (-1)^3 + 1/3$
☐	≈ -3.66667

Exakte Berechnung mittels

Näherungsweise Berechnung mittels

Abb. 54: Einsatz von Werkzeugen (3a)

2. Methode – Einsatz von Befehlen

1	Multipliziere($4 \cdot (-1)^3 + 1/3$)	Exakte Berechnung mittels Befehl <i>Multipliziere</i>
☐	$\rightarrow -\frac{11}{3}$	
2	Numerisch($4 \cdot (-1)^3 + 1/3$)	Näherungsweise Berechnung mittels Befehl <i>Numerisch</i> x
☐	$\rightarrow -3.66667$	

Abb. 55: Einsatz von Befehlen (3a)

3b)

1. Methode – Einsatz von Werkzeugen

CAS	
T	
1	$3-2x=x+1$
☐	Löse: $\left\{ x = \frac{2}{3} \right\}$
2	$3-2x=x+1$
☐	NLöse: $\{ x = 0.66667 \}$

Exaktes Lösen mittels

Näherungswiseses Lösen mittels

Abb. 56: Einsatz von Werkzeugen (3b)

2. Methode – Einsatz von Befehlen

1	Löse($3-2x=x+1$)	Exaktes Lösen mittels Befehl <i>Löse</i>
☐	$\rightarrow \left\{ x = \frac{2}{3} \right\}$	
2	NLöse($3-2x=x+1$)	Näherungswiseses Lösen mittels Befehl <i>NLöse</i>
☐	$\rightarrow \{ x = 0.66667 \}$	

Abb. 57: Einsatz von Befehlen (3b)

TRAININGSAUFGABE 3 – HÄUFIGE FEHLER

Im Folgenden werden Fehler aufgezeigt, welche bei der Eingabe von Schülern in diesem Zusammenhang häufig zu beobachten sind:

Falscher Lösungsweg zu Aufgabe 3a)

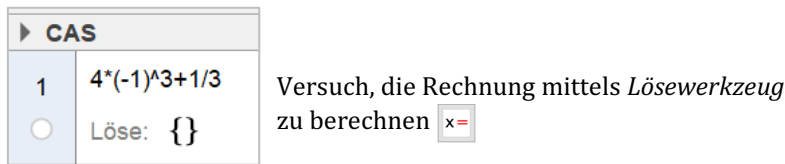


Abb. 58: Falscher Lösungsweg (3a)

Falsche Lösungswege zu Aufgabe 3b)

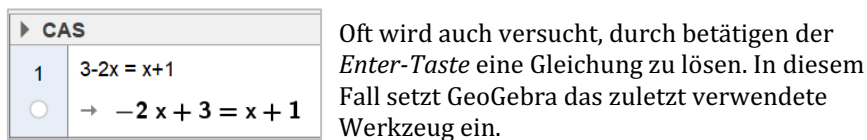
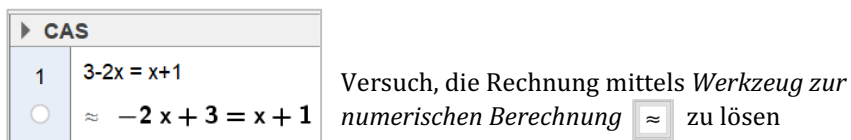


Abb. 59: Falsche Lösungswege (3b)

DIDAKTISCHER ASPEKT

In dieser Aufgabe geht es rein um den zielgerechten Einsatz der Befehle bzw. Werkzeuge und nicht um eine kompetenzorientierte Aufgabengestaltung. Eine solche sollte erfahrungsgemäß erst dann zum Einsatz kommen, wenn die Schüler eine ausreichende Werkzeugkompetenz entwickelt haben. Andernfalls wird eine Aneignung fachlichen Wissens durch eine Überforderung auf technischer Ebene überlagert, da sich die Lernenden rein auf den korrekten Technologieeinsatz konzentrieren. Das Lösen von Gleichungen muss von den Schülern natürlich bereits davor ohne Zuhilfenahme von Technologie beherrscht werden – der Einsatz der Befehle/Werkzeuge sollte hier nach dem *White Box/Black Box-Prinzip* (siehe Kap. IV, 2.2) erfolgen (vgl. [70], S. 19).

TRAININGSAUFGABE 4

Die Höhe einer brennenden Kerze wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$h(t) = -1,5t + 13$$

$h(t)$... Höhe der Kerze zur Zeit t in cm

t ... Zeit in min

- a) Auf welche Höhe ist die Kerze nach 3 Minuten abgebrannt?
Lass dir die Lösung als Dezimalzahl und als Bruch anzeigen.
- b) Nach welcher Zeit ist die Kerze nur noch 8 cm hoch?
Lass dir auch hier wieder die Lösung als Dezimalzahl und als Bruch anzeigen.

TRAININGSAUFGABE 4 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

4a)

CAS	
T	
1	$-1.5 \cdot 3 + 13$
	≈ 8.5
2	\$1
	$\rightarrow \frac{17}{2}$

Näherungsweise Berechnung mittels $\approx$

Die Ausgabe als Bruch erhält man, indem man in die nächste Zeile wechselt und $=$ auswählt. Der Zugriff auf die erste Zeile mittels \$1 ist in diesem Fall optional.

Abb. 60: Lösungsweg (4a)

4b)

1. Methode

CAS	
T	
1	$8 = -1.5t + 13$
	Löse: $\left\{ t = \frac{10}{3} \right\}$
2	\$1
	$\approx \left\{ t = 3.33333 \right\}$

Exaktes Lösen mittels $x=$

Die Ausgabe als Dezimalzahl erhält man, indem man in die nächste Zeile wechselt und $\approx$ auswählt. Der Zugriff auf die erste Zeile mittels \$1 ist in diesem Fall optional.

Abb. 61: Methode 1 - Lösungsweg (4b)

2. Methode

1	$8 = -1.5t + 13$
	Löse: $\left\{ t = \frac{10}{3} \right\}$
2	\$1
	NLöse: $\left\{ t = 3.33333 \right\}$

Die Ausgabe als Dezimalzahl kann auch mittels $x \approx$ erfolgen.

Abb. 62: Methode 2 - Lösungsweg (4b)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Nachdem die Werkzeugkompetenz zunächst anhand einfacher Aufgaben geübt wurde, kann man dazu übergehen, den Schwierigkeitsgrad der Beispiele zu steigern.

Auf eine Bearbeitung der Aufgaben unter Verwendung der Funktionsschreibweise wird hier absichtlich verzichtet, da es nur um die Werkzeugkompetenz bei der näherungsweise und exakten Berechnung von Ausdrücken bzw. dem näherungsweise und exakten Lösen von Gleichungen geht. Meiner Erfahrung nach ist es wichtig, die Schüler darauf hinzuweisen, dass eine Lösung auch im Nachhinein in „andere Form“ (exakt/näherungsweise) gebracht werden kann, da diese üblicherweise bei Auswahl des falschen Werkzeugs die gesamte Eingabe löschen und mit der Bearbeitung von vorne beginnen.

Das Lösen der Aufgaben wäre natürlich auch mithilfe von Befehlen möglich gewesen. Da dies aber bereits in *Trainingsaufgabe 3* beschrieben wurde und zudem der Einsatz von Werkzeugen meist zeitsparender und auch weniger fehleranfällig ist, wird hier von einer Lösungsangabe abgesehen.

TRAININGSAUFGABE 5

Ermittle die Lösungen der Gleichung a) über $\mathbb{R}$, b) über $\mathbb{C}$ sowohl durch Faktorisieren als auch mithilfe des geeigneten Löse-Befehls:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24 = 0$$

TRAININGSAUFGABE 5 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS		
1	Faktorisiere($x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$) → $(x - 3)(x + 2)(x^2 + 4)$	Faktorisieren mittels Befehl <i>Faktorisiere</i>
2	KFaktorisiere($x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$) → $(x - 3)(x + 2)(x + 2i)(x - 2i)$	Faktorisieren über $\mathbb{C}$ mittels Befehl <i>FKfaktorisiere</i>
3	Löse($x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$) → $\{x = -2, x = 3\}$	Lösen über $\mathbb{R}$ mittels Befehl <i>Löse</i>
4	KLöse($x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$) → $\{x = -2, x = 3, x = 2i, x = -2i\}$	Lösen über $\mathbb{C}$ mittels Befehl <i>KLöse</i>

Abb. 63: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 5

Anmerkung: mit *Faktorisiere* wird über den rationalen, mit *IFaktorisiere* über den irrationalen Zahlen faktorisiert

TRAININGSAUFGABE 6

Zeige, dass 5 eine Lösung der Gleichung $x^3 - 7x^2 + 3x + 35 = 0$ ist und ermittle die weiteren Lösungen durch Abspalten des Linearfaktors $x - 5$.

TRAININGSAUFGABE 6 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS	
1	Ersetze($x^3 - 7x^2 + 3x + 35=0$,x,5)
	→ $0 = 0$
2	Faktorisiere($x^3 - 7x^2 + 3x + 35$)
	→ $(x - 5)(x^2 - 2x - 7)$
3	Löse($x^2 - 2x - 7$)
	→ $\{x = -2\sqrt{2} + 1, x = 2\sqrt{2} + 1\}$

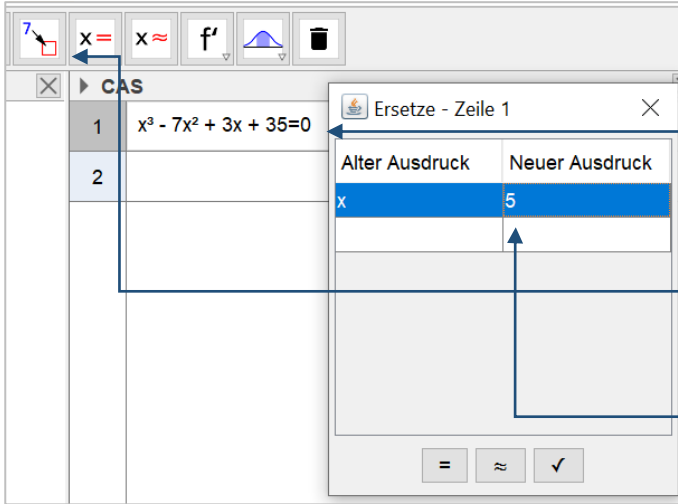
Mittels Befehl *Ersetze* wird x in der Gleichung durch 5 ersetzt

Abspalten des Linearfaktors durch *Faktorisiere*

Berechnen der restlichen Lösungen mittel *Löse*

Abb. 64: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 6

Das Ersetzen eines Ausdrucks kann auch mithilfe des Werkzeugs  erfolgen:



1 Eingeben der Gleichung

2 Auswahl des Werkzeugs

3 Eintragen, wodurch die Variable x ersetzt werden soll

4 Man erhält folgende Ausgabe

5 Berechnung mittels 

CAS	
1	$x^3 - 7x^2 + 3x + 35 = 0$
	Ersetze, $x=5$: $5^3 - 7 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 35 = 0$
2	\$1
	$\approx 0 = 0$

Abb. 65: Ersetzen eines Ausdrucks

DIDAKTISCHER ASPEKT

Anhand von *Trainingsaufgabe 5* und *Trainingsaufgabe 6* wird den Schülern gezeigt, dass das Lösen einer Gleichung auch auf anderem Weg als durch reinen Einsatz eines Löse-Befehls erfolgen kann. Zusätzlich wird von ihnen in Aufgabe 5 verlangt, die Lösungen anhand der erhaltenen Linearfaktoren ablesen zu können. Man bewegt sich bei diesen Aufgaben also einen Schritt weg von der Nutzung der Befehle als reine Black Box (siehe Kap. IV, 2.2) und leitet die Schüler stattdessen dazu an, mithilfe des CAS nur einzelne Schritte der händischen Berechnung zu „überspringen“.

Dies soll ihnen aufzeigen, dass ein CAS einerseits auch in Form einer Ergänzung oder Begleitung der eigenen Berechnungen bzw. Arbeitsschritte, andererseits aber auch als Kontrollwerkzeug verwendet werden kann (vgl. [70], S. 16).

E. ZEILENBEZÜGE

Der Einsatz von Zeilenbezügen kann die Eingabe im CAS vereinfachen und beschleunigen, wird jedoch von Schülern erfahrungsgemäß nicht gerne verwendet.

Der Lösungsweg zu *Trainingsaufgabe 5* unter Einsatz von Zeilenbezügen könnte folgendermaßen aussehen:

TRAININGSAUFGABE 5 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG - ZEILENBEZÜGE

CAS		
1	$x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$	Eingabe des Ausdrucks, auf den später zugegriffen werden soll
	$\rightarrow x^4 - x^3 - 2x^2 - 4x - 24$	
2	Faktorisiere(\$1)	Durch \$1 wird ein Bezug zur Ausgabe von Zeile 1 eingefügt
	$\rightarrow (x - 3)(x + 2)(x^2 + 4)$	
3	KFaktorisiere(\$1)	
	$\rightarrow (x - 3)(x + 2)(x + 2i)(x - 2i)$	
4	Löse(\$1 = 0)	
	$\rightarrow \{x = -2, x = 3\}$	
5	KLöse(\$1 = 0)	
	$\rightarrow \{x = -2, x = 3, x = 2i, x = -2i\}$	

Abb. 66: Zeilenbezüge

Anmerkung: In dieser Aufgabe wird ein *dynamischer Zeilenbezug \$1* verwendet. Änderungen in Zeile 1 wirken sich auch auf alle Berechnungen aus, in denen auf diese Zeile Bezug genommen wird.

Sollen Änderungen in der Bezugszeile in weiterer Folge keine Auswirkungen haben, muss man einen *statischen Zeilenbezug #1* verwenden.

BEISPIEL AUS DER PRAXIS

In der Praxis konnte ich beobachten, dass beispielsweise die folgende Aufgabe sowohl bezüglich der Strukturerkennung bei der Eingabe, der sinnvollen Ergebnisausgabe sowie auch des Einsatzes von Berechnungs- und Lösewerkzeugen ein gewisses Fehlerpotential aufweist.

PRAXISBEISPIEL 4

Halbwertszeit von Cobalt-60*	
Aufgabennummer: 1_554	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5
Das radioaktive Isotop Cobalt-60 wird unter anderem zur Konservierung von Lebensmitteln und in der Medizin verwendet. Das Zerfallsgesetz für Cobalt-60 lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,13149 \cdot t}$ mit t in Jahren; dabei bezeichnet N_0 die vorhandene Menge des Isotops zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die vorhandene Menge zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Aufgabenstellung: Berechnen Sie die Halbwertszeit von Cobalt-60!	

Abb. 67: Praxisbeispiel 4 [134]

PRAXISBEISPIEL 4 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

Methode 1

CAS	
1	$0.5 = e^{(-0.13149t)}$ $\rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{13149}{100000}t}$
2	\$1 NLöse: $\{t = 5.27148\}$

Näherungsweise
Lösen mittels ☒

Methode 2

CAS	
1	$0.5 = e^{(-0.13149t)}$ $\rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{13149}{100000}t}$
2	\$1 Löse: $\left\{t = \frac{100000}{13149} \ln(2)\right\}$
3	\$2 $\approx \{t = 5.27148\}$

Exaktes Lösen
mittels ☐

Ausgabe als
Dezimalzahl
mittels ☐

Abb. 68: Methoden zur Lösung von Praxisbeispiel 4

PRAXISBEISPIEL 4– HÄUFIGE FEHLER

CAS	
1	$0.5 = e^{-0.13149t}$ $\rightarrow \frac{1}{2} = t e^{-\frac{13149}{100000}}$

Bei der
Eingabe des
Exponenten
wird auf die
Klammer
vergessen

CAS	
1	$0.5 = e^{(-0.13149t)}$ $\rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{13149}{100000}t}$
2	\$1 Löse: $\left\{t = \frac{100000}{13149} \ln(2)\right\}$

Die exakte Ausgabe der
Lösung führt oft zu der
Annahme, ein falsches
Ergebnis erhalten zu haben.
Viele Schüler brechen die
Bearbeitung der Aufgabe
hier ab.

Abb. 69: Häufige Fehler (Praxisbeispiel 4, Teil 1)

CAS	
1	$0.5 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{(-0.13149t)}$ $\rightarrow \frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\frac{13149}{100000}t}$
2	$0.5 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{(-0.13149t)}$ Löse: $\{N_0 = 0\}$

Die Gleichung wird im Vorhinein nicht ausreichend vereinfacht

Mittels $\boxed{x=}$ erhält man dadurch keine Lösung

Abb. 70: Häufige Fehler (Praxisbeispiel 4, Teil 2)

F. UMFORMEN EINER GLEICHUNG

Ich sehe häufig, dass Schüler Gleichungen in einer Variablen problemlos mithilfe des CAS lösen können, jedoch das Umformen einer Gleichung oder Formel nach einer bestimmten Variablen meist nicht beherrschen.

Anhand des Befehls *Löse*(<Gleichung>, <Variable>) wird eine Gleichung bzw. Formel nach der angegebenen Variable umgeformt.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 7

Hier siehst du, wie mithilfe des CAS die Formel $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$ nach der Variable h umgeformt wurde:

CAS	
1	$\text{Löse}(V=(r^2 \cdot \pi \cdot h)/3, h)$ $\rightarrow \left\{ h = 3 \cdot \frac{V}{r^2 \pi} \right\}$

Abb. 71: Umformung nach Variable h

Forme im CAS die Formel $A = \frac{r^2 \pi \alpha}{360}$ zuerst nach r und danach nach α um!

TRAININGSAUFGABE 7 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS	
1	$\text{Löse}(A=(r^2 \cdot \pi \cdot \alpha)/360, r)$ $\rightarrow \left\{ r = 6 \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{A \alpha \pi}}{\alpha \pi}, r = -6 \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{A \alpha \pi}}{\alpha \pi} \right\}$
2	$\text{Löse}(A=(r^2 \cdot \pi \cdot \alpha)/360, \alpha)$ $\rightarrow \left\{ \alpha = 360 \cdot \frac{A}{r^2 \pi} \right\}$

Abb. 72: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 7

DIDAKTISCHER ASPEKT

Auch in diesem Fall ist es unerlässlich, dass Schüler bereits im Vorfeld das Umformen von Gleichungen bzw. Formeln ohne Technologieeinsatz beherrschen. Es geht auch in dieser Aufgabe wieder einzig um das Erlernen der korrekten Eingabe – die Interpretation der dabei erhaltenen Ergebnisse spielt in Anwendungsaufgaben natürlich eine große Rolle und erfordert weitere technologie-unabhängige Kompetenzen, denen neben den Werkzeugkompetenzen im Unterricht unbedingt Aufmerksamkeit geschenkt werden muss.

Da den Schülern hier nicht der Befehl mitsamt der korrekten Syntax, sondern eine exemplarisch gelöste Aufgabe vorgegeben wird, werden diese dazu angehalten, sich selbstständig mit der korrekten Eingabe auseinanderzusetzen, wodurch zusätzlich auch der Fokus auf die Strukturerkennung gerichtet werden muss.

G. LÖSEN EINES GLEICHUNGSSYSTEMS

Das Lösen eines Gleichungssystems kann unter Verwendung der bereits bekannten Werkzeuge $\boxed{x=}$ und $\boxed{x\approx}$ oder auch des Befehls *Löse*(<Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen>) erfolgen.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 8

Löse das Gleichungssystem I. $3x - 4y = 10$

$$\text{II. } \frac{1}{2}x - 2y = -5$$

- a) unter Verwendung eines Befehls aus der Werkzeugleiste
- b) mithilfe des Befehls *Löse*

TRAININGSAUFGABE 8 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

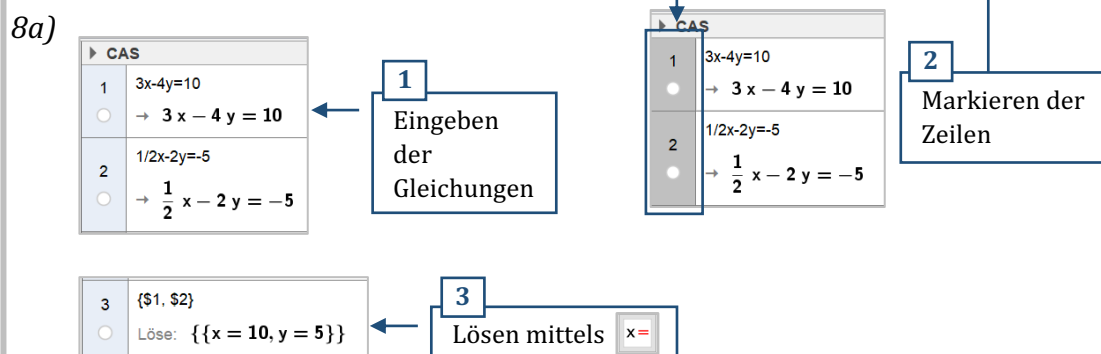


Abb. 73: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 8a

8b)

CAS	
1	Löse({3x-4y=10,1/2x-2y=-5},{x,y})
☐	→ {{x = 10, y = 5}}

Lösen des Gleichungssystems mittels Befehl
Löse(<Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen>)

Abb. 74: Lösen mittels Befehl

Das Lösen unter Verwendung von Zeilenbezügen ist natürlich ebenfalls möglich:

CAS	
1	3x-4y=10
☐	→ 3 x - 4 y = 10
2	1/2x-2y=-5
☐	→ $\frac{1}{2} x - 2 y = -5$
3	Löse({\$1, \$2},{x, y})
☐	→ {{x = 10, y = 5}}

Zugriff auf die Gleichungen über
dynamische Zeilenbezüge

Abb. 75: Lösen mittels Zeilenbezug

TRAININGSAUFGABE 9

Ermittle im CAS die Funktionsgleichung der abgebildeten Funktion $f(x)$:

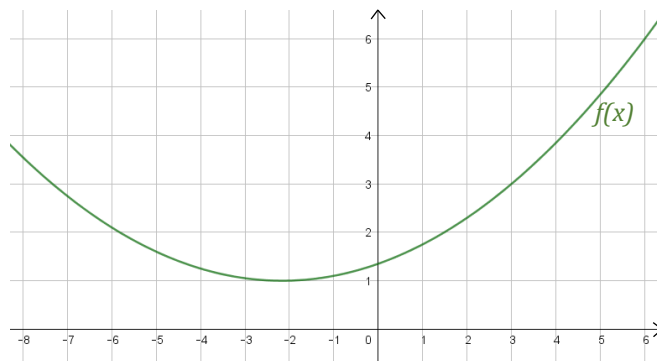


Abb. 76: Graph – Trainingsaufgabe 9

TRAININGSAUFGABE 9 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS	
1	$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 1$ → $4a - 2b + c = 1$
2	$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 3$ → $9a + 3b + c = 3$
3	$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 6$ → $36a + 6b + c = 6$
4	{ \$1, \$2, \$3 }
☐	Löse: $\left\{ \left\{ a = \frac{3}{40}, b = \frac{13}{40}, c = \frac{27}{20} \right\} \right\}$

- Herauslesen von drei Punkten auf $f(x)$ aus der Grafik
- Einsetzen der Koordinaten in $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lösen des Gleichungssystems mittels
 (Vergleiche Lösung zu Aufgabe 8a)

Abb. 77: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 9

DIDAKTISCHER ASPEKT

Die Verwendung der Funktionsschreibweise wurde bei der Lösung zu *Trainingsaufgabe 9* vermieden, da einzig das Lösen des Gleichungssystems geübt werden soll. Zusätzlich bietet diese Art der Lösung den Vorteil, dass Schüler auf dem Weg das – oft problembehaftete - Einsetzen von Koordinaten in Funktionsgleichungen bewerkstelligen müssen.

Das Verwenden von Befehlen oder Werkzeugen zum Lösen von Gleichungssystemen ist ebenfalls erst dann sinnvoll, wenn Schüler den Lösungsvorgang händisch beherrschen. Der Einsatz des CAS als Black Box (siehe *Kapitel IV, 2.2*) dient der Bearbeitung von Aufgaben, in welchen das Lösen des Gleichungssystems nicht im Mittelpunkt steht, und Schüler durch das Auslagern der operativen, teilweise zeitaufwendigen Handlungen den Fokus auf den eigentlichen Inhalt der Aufgabe (z.B. das Interpretieren von Sachverhalten) richten können.

Das folgende Beispiel aus der Praxis zeigt, wie eine derartige Aufgabenstellung aussehen kann.

BEISPIEL AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 5

Ermittle die Lage der drei Ebenen:

$$\varepsilon_1: x - y - z = -1$$

$$\varepsilon_2: 2x - 2y + z = 4$$

$$\varepsilon_3: -2x + 2y + 5z = 8$$

(vgl. [86], S.195)

PRAXISBEISPIEL 5 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

CAS	
1	$x-y-z=-1$
☒	$\rightarrow x - y - z = -1$
2	$2x-2y+z=4$
☐	$\rightarrow 2x - 2y + z = 4$
3	$-2x+2y+5z=8$
☐	$\rightarrow -2x + 2y + 5z = 8$
4	$\{\$1, \$2, \$3\}$
☐	Löse: $\{\{x = y + 1, y = y, z = 2\}\}$

Lösen des Gleichungssystems mittels 
(Vergleiche Lösungsweg zu Aufgabe 8a)

Abb. 78: Lösungsweg – Praxisbeispiel 5

Hier kommt den Schülern die Aufgabe zu, das durch Technologieeinsatz erhaltene Ergebnis (geometrisch) korrekt zu deuten. Es kommt somit zu einer Verschiebung des Schwerpunktes weg vom Operieren hin zum Interpretieren (vgl. [70], S. 22).

H. ARBEITEN MIT FUNKTIONEN

Durch das Definieren von Funktionen werden beispielsweise ein rasches Aufsuchen von Funktionsgleichungen, ein effizientes Arbeiten mit sowie das Untersuchen von Funktionen (auch in mehreren Variablen) ermöglicht.

CAS	
1	$f(x) := 3x^2 + 5$
	→ $f(x) := 3x^2 + 5$
2	$f(4)$
	→ 53

Das Definieren von Funktionen erfolgt mittels „:=“

Dadurch kann danach auf diese Funktion zugegriffen werden

Abb. 79: Definieren von Funktionen

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

Wie bereits erwähnt, kann *Trainingsaufgabe 9* auch unter Verwendung der Funktionsschreibweise gelöst werden:

TRAININGSAUFGABE 10

Ermittle im CAS die Funktionsgleichung der abgebildeten Funktion $f(x)$.
Definiere dafür zuerst die allgemeine Funktionsgleichung und erstelle danach das passende Gleichungssystem, indem du auf diese Funktionsgleichung zurückgreifst.

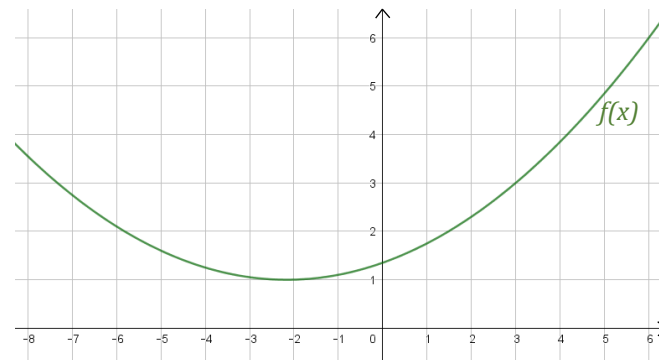


Abb. 80: Graph – Trainingsaufgabe 10

TRAININGSAUFGABE 10 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
	→ $f(x) := a x^2 + b x + c$
2	$f(-2)=1$
	→ $4a - 2b + c = 1$
3	$f(3)=3$
	→ $9a + 3b + c = 3$
4	$f(6)=6$
	→ $36a + 6b + c = 6$

1
Definieren der allgemeinen Funktionsgleichung

2
Das Einsetzen der Koordinaten erfolgt unter Verwendung der zuvor definierten Funktion

3
Lösen des Gleichungssystems mittels $x=$
(Vergleiche Lösungsweg zu Aufgabe 8a)

5

Löse: $\left\{ \left\{ a = \frac{3}{40}, b = \frac{13}{40}, c = \frac{27}{20} \right\} \right\}$

Abb. 81: Aufsuchen der Funktionsgleichung

Um die erhaltenen Koeffizienten möglichst unkompliziert in die Funktionsgleichung einzusetzen, hat sich folgende Vorgehensweise in der Praxis bewährt:

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ → $f(x) := a x^2 + b x + c$
2	$f(-2)=1$ → $4a - 2b + c = 1$
3	$f(3)=3$ → $9a + 3b + c = 3$
4	$f(6)=6$ → $36a + 6b + c = 6$
5	{ $\$2, \$3, \$4$ } Löse: $\left\{ \left\{ a = \frac{3}{40}, b = \frac{13}{40}, c = \frac{27}{20} \right\} \right\}$

1 → Zeile 5 in Zeile 1 „ziehen“:
- auf Zeile 5 klicken
- zu Zeile 1 ziehen und darüber „loslassen“

2 →

3 → Man erhält diese Ausgabe

4 → Durch Klicken auf den kleinen Kreis wird automatisch eine Funktion mit entsprechenden Koeffizienten erstellt (und auch im Grafik-Fenster angezeigt)

6 \$1
Ersetze, {a = 3 / 40, b = 13 / 40, c = 27 / 20}: $\frac{3}{40} x^2 + \frac{13}{40} x + \frac{27}{20}$

6
 $g(x) := \text{Ersetze}(\$1, \text{Reduzieren}(\{\$5\}))$
→ $g(x) := \frac{3}{40} x^2 + \frac{13}{40} x + \frac{27}{20}$

Abb. 82: Einsetzen der Koeffizienten

Das Einsetzen der berechneten Werte in die allgemeine Funktionsgleichung kann alternativ auch über die Verwendung des Befehls *Ersetze* erfolgen:

7	$g(x) := \text{Ersetze}(f, \$6)$ → $g(x) := 3 x^3 + 3 x^2 - x$
---	---

Das Ergebnis aus Zeile 6 wird mittels Zeilenbezug in den allgemeinen Funktionsterm von $f(x)$ eingesetzt. Der Graph der Funktion wird dabei automatisch im Grafikfenster angezeigt.

Abb. 83: Einsatz des Zeilenbezugs

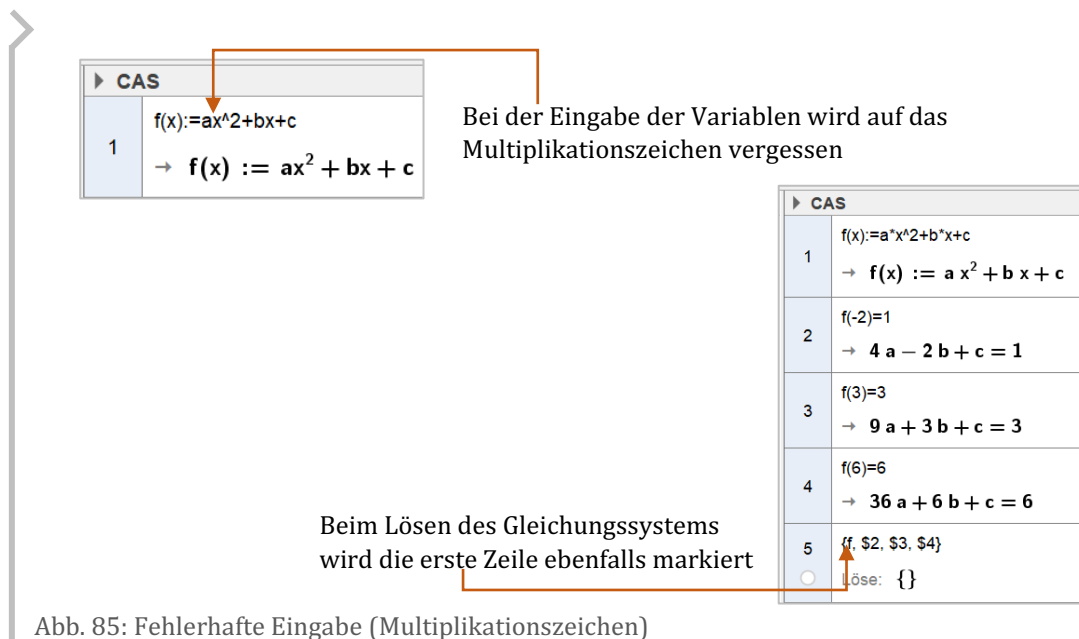
TRAININGSAUFGABE 10- HÄUFIGE FEHLER

Folgende Probleme konnte ich häufig bei der Bearbeitung von Aufgaben dieser Art beobachten:

1	$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ → $f(x) = a x^2 + b x + c$
---	---

Bei der Definition der Funktion wird auf den Doppelpunkt vergessen

Abb. 84: Fehlerhafte Eingabe (Doppelpunkt)



DIDAKTISCHER ASPEKT

Das Arbeiten mit Funktionen ist für viele Schüler problembehaftet, da oftmals die grundlegenden Vorstellungen, welche für eine funktionale Denkweise notwendig sind, unzureichend entwickelt wurden.

In [87] wird *funktionales Denken* folgendermaßen charakterisiert:

- *Phänomene*, denen funktionale Zusammenhänge zugrunde liegen (z.B. zeitliche Entwicklungen, Kausalzusammenhänge, willkürlich gesetzte Abhängigkeiten zwischen Größen), erfassen, beschreiben sowie die gefundenen Zusammenhänge interpretieren und für Problemlösungen verwenden,
- *Grundvorstellungen* zu Funktionen (Zuordnungsvorstellung, Kovariationsvorstellung, Objektvorstellung) situationsangemessen nutzen und zwischen verschiedenen Grundvorstellungen flexibel wechseln,
- *Darstellungsformen* von Funktionen (z.B. Tabelle, Term, Graph) verstehen, erstellen, interpretieren, ineinander transformieren und problemlösend nutzen.

[[87], S. 70]

Durch den Einsatz von Technologie erhält man die Möglichkeit, alle drei angeführten Aspekte in den Unterricht zu integrieren, wobei die Darstellung und der Wechsel zwischen den Darstellungsformen sicherlich besonders ins Gewicht fallen.

Bei der Arbeit mit Funktionen im CAS ist es meiner Meinung nach unerlässlich, dass Schüler bereits im Vorfeld ausreichende Grundvorstellungen auf diesem Gebiet entwickelt haben. Nur so ist es möglich, durch den Technologieeinsatz neues Wissen und zusätzliche Fertigkeiten generiert zu können, da andernfalls die fehlenden Kompetenzen und in diesem Zusammenhang vor allem der korrekte Einsatz der Funktionsschreibweise ein Arbeiten im CAS erschweren oder sogar verhindern.

PRAXISBEISPIEL 6

Die Flugbahn eines Balles wird durch die Funktion $s(t)$ beschrieben:

$$s(t) = -0,5t^2 + 2t + 0,7$$

$s(t)$... in Metern, t ... in Sekunden

- Berechne, aus welcher Höhe der Ball geworfen wird.
- Berechne, in welcher Höhe sich der Ball nach einer Sekunde befindet.
- Berechne, nach welcher Zeit der Ball eine Höhe von 2 Metern erreicht.

PRAXISBEISPIEL 6 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

CAS	
1	$s(t) := -0.5t^2 + 2t + 0.7$
☐	$\rightarrow s(t) := -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{10}$
2	$s(0)$
☐	$\rightarrow \frac{7}{10}$
3	$s(1)$
☐	$\rightarrow \frac{11}{5}$
4	$s(t)=2$
☐	$\rightarrow -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{10} = 2$
5	$\$4$
☐	NLöse: $\{t = 0.81678, t = 3.18322\}$

Berechnen der gesuchten Funktionswerte zu a) und b)

Lösen der Gleichung (zu c)) mittels $\times \approx$

Abb. 86: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 6

Üblicherweise gehen Schüler bei der Berechnung folgendermaßen vor:

4	$2 = -0.5t^2 + 2t + 0.7$
☐	$\rightarrow 2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{10}$
5	$\$4$
☐	NLöse: $\{t = 0.81678, t = 3.18322\}$

Trotz Definition der Funktion zu Beginn wird nicht auf diese zurückgegriffen und die Gleichung zur Gänze neu eingegeben.

Abb. 87: Umständliche Eingabe

Natürlich ist auch diese Art der Berechnung legitim – im Gespräch mit Schülern hat sich jedoch gezeigt, dass die Vorgehensweise auf mangelhaftes Verständnis im funktionalen Denken hinweisen kann.

PRAXISBEISPIEL 7

Im Schulbuch *Mathematik verstehen 7* findet man folgendes Beispiel:

Der Graph einer Polynomfunktion f vom Grad 3 geht durch den Ursprung. Die Tangente an den Graphen im Ursprung hat eine negative Steigung und schließt mit der positiven ersten Achse einen Winkel von 135° ein. Im Punkt $(1/5)$ hat die Tangente die Steigung 14. Gib eine Termdarstellung der Funktion f an!

([88], S. 63)

PRAXISBEISPIEL 7 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

► CAS		
1	$f(x):=a \cdot x^3+b \cdot x^2+c \cdot x+d$ $\approx \mathbf{f(x) := a \, x^3 + b \, x^2 + c \, x + d}$	Definition der Funktion
2	$f(0)=0$ $\approx \mathbf{d = 0}$	f geht durch den Ursprung
3	$f'(0)=\tan(135^\circ)$ $\approx \mathbf{c = -1}$	Steigungswinkel der Tangente im Ursprung beträgt 135°
4	$f(1)=5$ $\approx \mathbf{a + b + c + d = 5}$	f geht durch $(1/5)$
5	$f'(1)=14$ $\approx \mathbf{3 \, a + 2 \, b + c = 14}$	Steigung der Tangente an der Stelle 1 ist 14
6	$\{\$2, \$3, \$4, \$5\}$ ☐ Löse: $\{\{\mathbf{a = 3, b = 3, c = -1, d = 0}\}\}$	Lösen des Gleichungssystems (siehe Aufgabe 8a)
7	$g(x):=\text{Ersetze}(\$1,\text{Reduzieren}(\{\$6\}))$ ☒ $\rightarrow \mathbf{g(x) := 3 \, x^3 + 3 \, x^2 - x}$	Einsetzen der erhaltenen Koeffizienten in die Funktionsgleichung (siehe Aufgabe 10)

Abb. 88: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 7

Bei dieser Art von Aufgabe konnte ich häufig folgende Vorgehensweisen der Schüler beobachten:

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\approx f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	Ableitung(f) $\approx 3 a x^2 + 2 b x + c$
3	$3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 14$ $\approx 3 a + 2 b + c = 14$

Statt direkt auf die 1. Ableitung zuzugreifen, wird diese in einem Zwischenschritt ausgerechnet und danach „händisch“ eingesetzt.

Dies führt zu Problemen beim Lösen des Gleichungssystems mittels Werkzeug, da Schüler meist die Zeile, in welcher sie die Ableitung berechnet haben, ebenfalls markieren.

Abb. 89: Problematische Eingabe – Praxisbeispiel 7

CAS	
1	$f(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\approx f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$f(0) = \tan(45)$ $\approx c = 1.61978$

Bei der Eingabe des Winkels wird auf das Grad-Symbol (°) vergessen

Abb. 90: Fehlerhafte Eingabe – Praxisbeispiel 7

PRAXISBEISPIEL 8

Eine ehemalige Klausuraufgabe (Matura, 9.5. 2014) lautet wie folgt:

Punktladungen*	
Aufgabennummer: 1_348	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1
Der Betrag F der Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand r wird beschrieben durch die Gleichung $F = C \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ (C ... physikalische Konstante). Aufgabenstellung: Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Betrag F der Kraft ändert, wenn der Betrag der Punktladungen q_1 und q_2 jeweils verdoppelt und der Abstand r zwischen diesen beiden Punktladungen halbiert wird!	

Abb. 91: Praxisbeispiel 8 [117]

PRAXISBEISPIEL 8 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

CAS	
1	$F(q_1, q_2, r) := C \cdot q_1 \cdot q_2 / r^2$
2	$F(2q_1, 2q_2, r/2)$ $\rightarrow 16 C q_1 \cdot q_2 / r^2$
3	$\$2 / \1 $\rightarrow 16$

Definieren der Funktion

Schüler übersehen hierbei oft, dass die Funktion von q_1 , q_2 und r abhängen muss.

Falls Probleme beim Ablesen des Faktors auftreten, kann dessen Berechnung beispielsweise anhand von Zeilenbezügen erfolgen.

Abb. 92: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 8

1.5.2 GRAFIK/GEOMETRIE-WERKZEUGKOMPETENZ

Wie bereits erwähnt, findet das Erstellen geometrischer Konstruktionen mithilfe von Technologie hauptsächlich in der Unterstufe statt - in der Oberstufe kommen derartige Verfahren meist nur in der analytischen Geometrie zur Anwendung (vgl. [70], S. 30). Stattdessen kommt bei der Verwendung von Grafikwerkzeugen und -ansichten vor allem der Darstellung und Analyse von Funktionen große Bedeutung zu, weshalb sich die folgenden Trainingsaufgaben auch zum Großteil darauf beziehen.

Bei GeoGebra sind **Algebra** - und **Grafik** -Ansicht eng miteinander verknüpft:

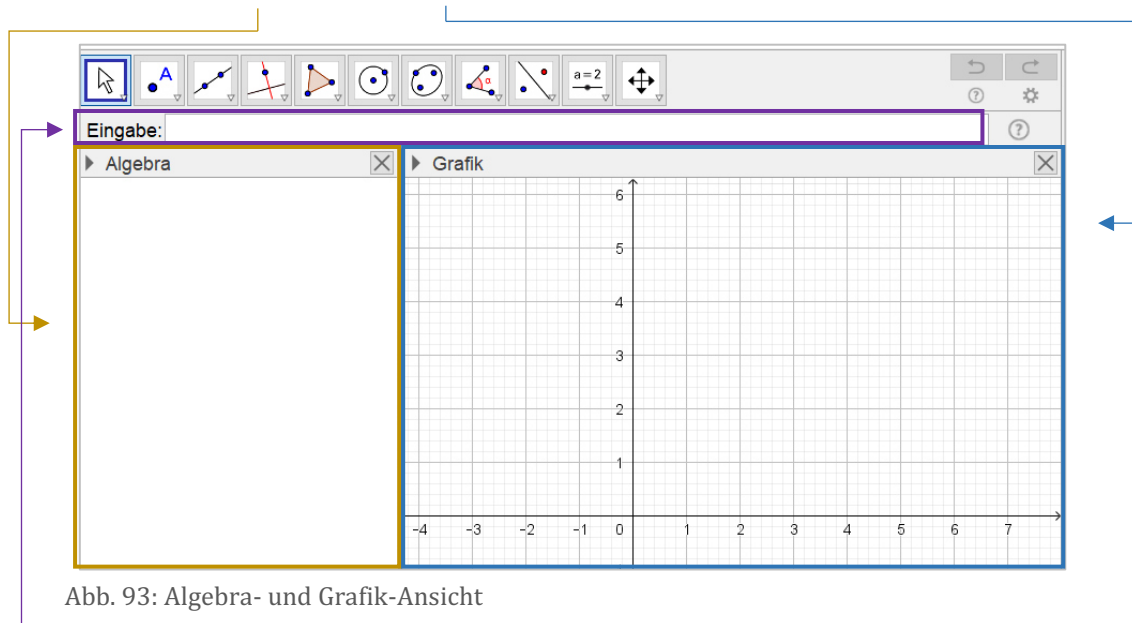


Abb. 93: Algebra- und Grafik-Ansicht

Zu Eingaben, die in der **Eingabezeile** getätigt werden, erfolgt (falls mathematisch möglich) eine Anzeige der zugehörigen Darstellungen im Grafikfenster. Zu Konstruktionen, die im Grafikfenster durchgeführt werden, werden im Algebrafenster die algebraischen oder numerischen Beschreibungen aufgelistet. (Vgl. [89], S. 5)

Objekte können entweder mithilfe der Werkzeuge, die in der Werkzeugleiste der Grafik-Ansicht aufgelistet sind, oder anhand von Befehlen direkt in der Eingabezeile erstellt werden.



Abb. 94: Werkzeugleiste der Grafik-Ansicht

Werkzeuge für Punkte



Punkt: durch klicken in die Grafikansicht wird ein Punkt erstellt

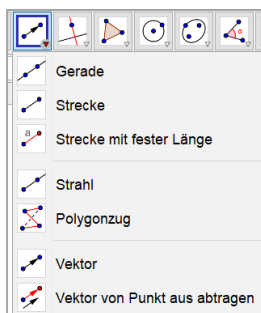
Schneide: zeigt den Schnittpunkt bzw. die Schnittpunkte zweier ausgewählter Objekte (die Auswahl kann sowohl im Algebra- als auch im Grafikfenster erfolgen) an

Extremum: bestimmt die lokalen Extremstellen einer Funktion

Nullstellen: bestimmt die Nullstellen einer Funktion

Abb. 95: Werkzeuge für Punkte

Werkzeuge für Geraden



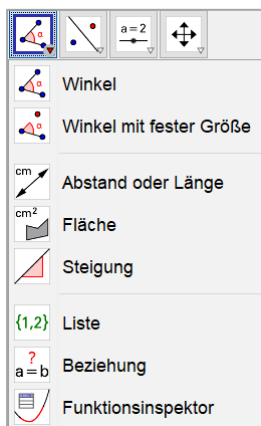
Gerade: durch Auswahl zweier Punkte wird eine Gerade durch diese Punkte erstellt

Vektor: erzeugt einen Vektor zwischen zwei Punkten

Vektor von Punkt aus abtragen: ermittelt jenen Punkt, der durch Anhängen eines Vektors an einen Punkt entsteht

Abb. 96: Werkzeuge für Geraden

Werkzeuge für Messungen



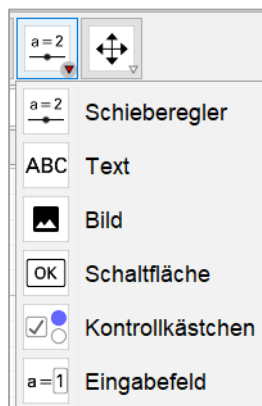
Winkel: bestimmt den Winkel zwischen zwei Objekten

Steigung: zeigt die Steigung und das Steigungsdreieck einer Geraden an

Funktionsinspektor: Analyse eine Funktion in einem vorgegebenen Intervall - z.B. Hoch- und Tiefpunkt, Nullstelle, Integral, Funktionswerte, ...

Abb. 97: Werkzeuge für Messungen

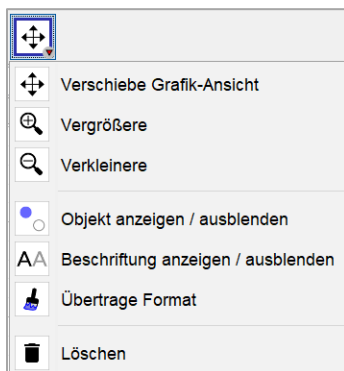
- *Werkzeuge für Aktionsobjekte*



Schieberegler: erstellen eines Schiebereglers, der die Beobachtung dynamischer Veränderungen (hinsichtlich verschiedener Objekte oder auch Berechnungen) ermöglicht

Abb. 98: Werkzeuge für Aktionsobjekte

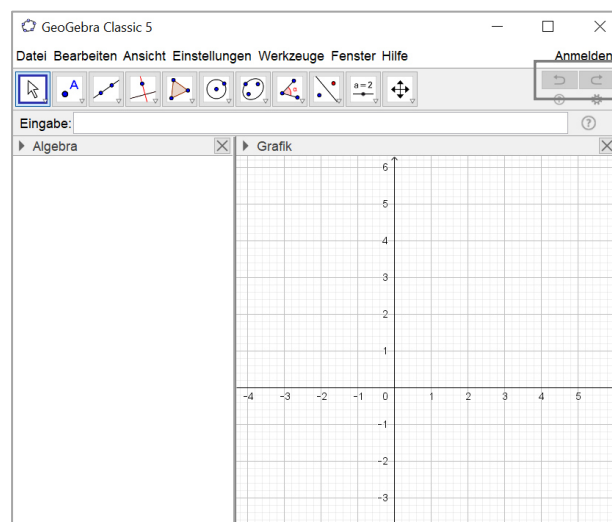
- *Allgemeine Werkzeuge*



Verschiebe Grafik-Ansicht: verschieben des angezeigten Bereichs und skalieren der Achsen

Vergrößere/Verkleinere: vergrößert bzw. verkleinert den dargestellten Bildausschnitt

Abb. 99: Allgemeine Werkzeuge



Rückgängig/Wiederherstellen:

In der rechten oberen Ecke findet man die Schaltflächen, mithilfe derer man die zuletzt durchgeführten Aktionen rückgängig machen bzw. wiederherstellen kann.

Abb. 100: Rückgängig/Wiederherstellen

A. DARSTELLUNG UND ANALYSE VON GRAPHEN

Bei der Darstellung von Graphen kommt es oft zu Problemen hinsichtlich der Einstellungen des dargestellten Bildbereichs, wodurch in weiterer Folge die Analyse erschwert oder sogar verhindert wird.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 11

a) Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 13$

- 1) Stelle den Graphen der Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
- 2) Bestimme die Nullpunkte graphisch und zeichne diese ein.
- 3) Bestimme die lokalen Extrempunkte graphisch und zeichne diese ein. Beschrifte den Hochpunkt mit H , den Tiefpunkt mit T .

b) Stelle den Funktionsgraphen der Funktion aus a) in einem zweiten Grafik-Fenster dar.

- 1) Berechne die Nullpunkte sowohl unter Verwendung eines Befehls als auch mithilfe eines Werkzeugs. Blende die Punkte in der Grafik-Ansicht aus, die du anhand des Befehls erhalten hast!
Vergleiche die erhaltenen Werte mit jenen aus a)2)!
- 2) Berechne die lokalen Extrempunkte anhand eines Befehls sowie unter Einsatz eines Werkzeugs. Blende die Punkte in der Grafik-Ansicht aus, die du anhand des Befehls erhalten hast!
Vergleiche die erhaltenen Werte mit jenen aus a)3)!
- 3) Ermittle den Schnittpunkt mit der zweiten Achse anhand einer Methode deiner Wahl. Beschrifte diesen mit S .

TRAININGSAUFGABE 11 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

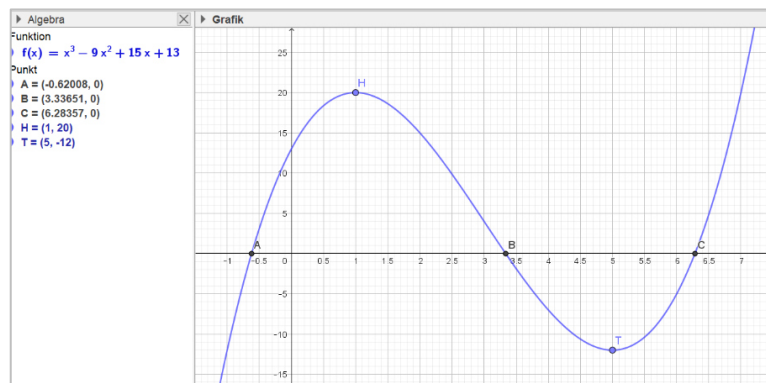
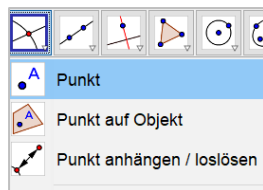


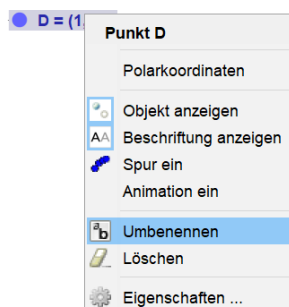
Abb. 101: Graph zu Trainingsaufgabe 11

Dafür benötigte Werkzeuge:



Einzeichnen der Punkte:

anhand des Werkzeugs *Punkt* und Auswahl (durch Klicken) direkt in der Grafik



Umbenennen von Objekten:

durch Rechtsklick auf den Punkt im Algebra- oder Grafikfenster und den Menüpunkt *Umbenennen*

Abb. 102: Für Trainingsaufgabe 11 benötigte Werkzeuge

Eine weitere Möglichkeit, um bestimmte Punkte auf einem Funktionsgraphen zu bestimmen, stellt das „Abfahren“ des Graphen dar:

Durch Auswahl des Werkzeugs  *Punkt* und anschließendes Klicken auf den Funktionsgraphen wird ein Punkt auf dem Graphen erzeugt. Mithilfe des Werkzeugs *Bewege*  kann man den Punkt entlang des Graphen bewegen und die Koordinaten der gesuchten Punkte im Algebra-Fenster ablesen.

Die Koordinaten des Punktes ändern sich automatisch bei der Bewegung entlang des Graphen

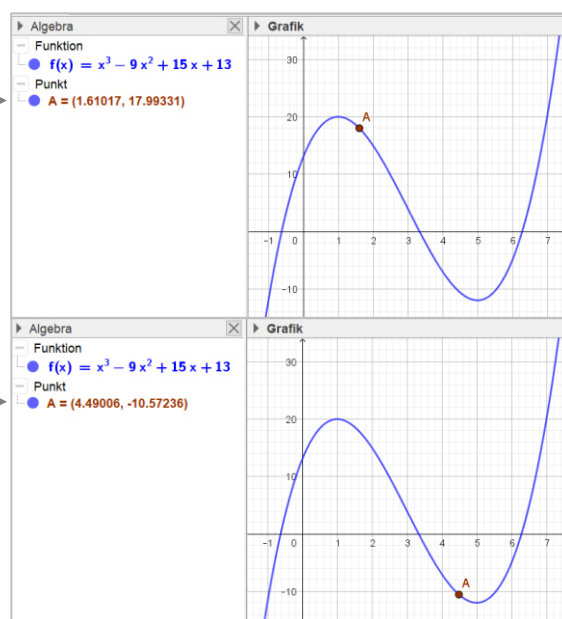
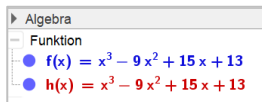
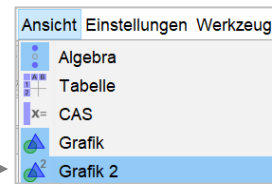


Abb. 103: Bewegen des Punktes entlang des Graphen

b)

Öffnen eines zweiten Grafik-Fensters:

Im Menüpunkt *Ansicht* findet man den Unterpunkt *Grafik 2*, welcher ein zweites Grafik-Fenster öffnet. Die Anzeige der Objekte, die anhand von Befehlen oder Werkzeugen erstellt werden, erfolgt im jeweils aktiven Fenster.



Um den Graphen derselben Funktion in beiden Fenstern anzuzeigen, muss der Funktionsterm zweimal mit unterschiedlicher Bezeichnung in die Eingabezeile eingegeben werden.

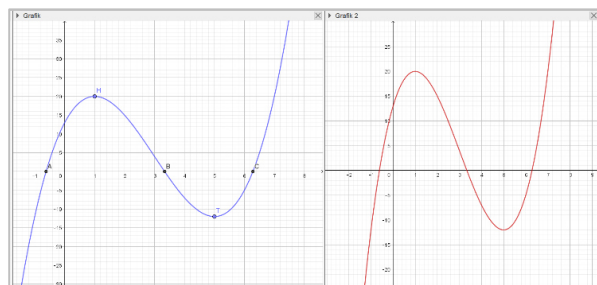


Abb. 104: Öffnen eines zweiten Grafik-Fensters

Dafür benötigte Werkzeuge:

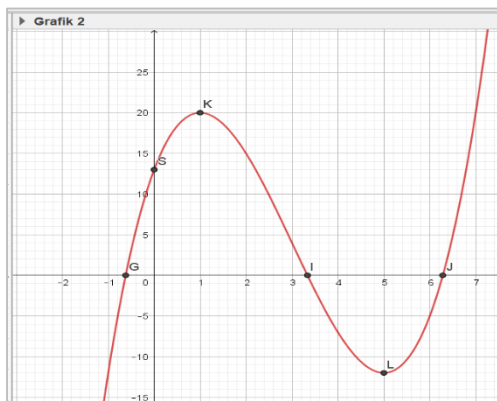


Abb. 105: Einzeichnen der Punkte

1) Nullpunkte:

- Befehl $\text{Nullstelle}(h(x))$
- Werkzeug Nullstellen
- Eine weitere Möglichkeit stellt das Schneiden der Funktion mit der x-Achse mittels Schneide dar

2) Lokale Extrempunkte:

- Befehl $\text{Extremum}(h(x))$
- Werkzeug Extremum

3) Schnittpunkt mit y-Achse:

- Befehl $\text{schneide}(h(x), x=0)$
- Werkzeug Schneide

Ein- bzw. Ausblenden von Objekten:

Durch Aktivieren bzw. Deaktivieren des kleinen Kreises im Algebra-Fenster, wird ein Objekt im Grafik-Fenster ein- bzw. ausgeblendet

→ B wird angezeigt: $B = (3.33651, 0)$

→ B wird nicht angezeigt: $B = (3.33651, 0)$

Ein nicht zu vernachlässigender Aspekt bei dieser Aufgabe ist es, die passenden Fenster- und Achseneinstellungen zu finden, sodass der Graph entsprechend angezeigt und analysiert werden kann. Hierbei ist es hilfreich, den Lernenden auch die Möglichkeit der Achsenanpassung anhand des Zusammen- oder Auseinanderziehens der Achsen nahezubringen, da sonst meist nur auf das Zoom-Werkzeug zurückgegriffen wird. Es kommt sehr oft vor, dass Schüler einen Arbeitsauftrag aufgrund ungeeigneter Einstellungen nur teilweise oder auch gar nicht durchführen können. In diesem Zusammenhang kommt somit häufig fehlendes Wissen über Eigenschaften von Funktionen und über das Aussehen der entsprechenden Graphen zum Vorschein. So ist es beispielsweise möglich, dass durch einen unpassenden Bildausschnitt der Funktion dritten Grades keinerlei Extremwerte zugeschrieben werden:

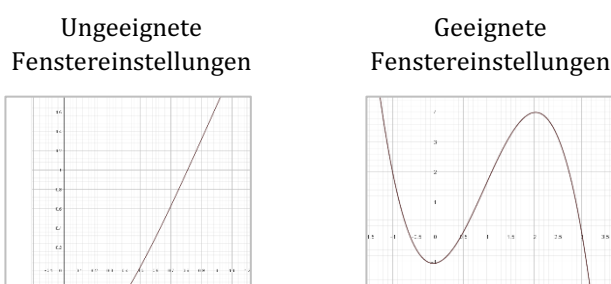


Abb. 106: Fenstereinstellungen

Fehlendes Grundlagenwissen führt jedoch auch dazu, dass die Darstellung nicht hinterfragt wird. Hier zeigt sich, dass der sinnvolle Gebrauch von Technologie oft auch die notwendigen Grundkompetenzen auf inhaltlicher Ebene erfordert.

Der Einsatz von Technologie zur Analyse von Graphen hängt sehr stark von der Lernphase, in welcher sich die Schüler befinden, ab. Beim ersten Kennenlernen des Themas kann es sinnvoll sein, das Programm in Form einer Black-Box zu verwenden, um an die notwendigen Informationen zu gelangen. Dies ermöglicht einen experimentellen und intuitiven Zugang zur Materie fernab von Kalkülorientierung oder „trockenem“ Theoriewissen (vgl. [84], S.90). In weiterer Folge liegt es an der Lehrperson, die Arbeitsaufträge dementsprechend anzupassen, dass der Technologieeinsatz in Form einer reinen Black-Box nicht mehr ausreicht (z.B. durch Einfordern von Rechenwegen oder Begründungen) (vgl. [70], S. 25).

Neben dem Anpassen der Fenstereinstellungen kommt der übersichtlichen Gestaltung in dieser Trainingsaufgabe große Bedeutung zu, denn auch das Ein- bzw. Ausblenden sowie Beschriften von Objekten spielt hinsichtlich einer strukturierten Darstellung eine große Rolle. Auf der einen Seite wird dadurch eine nachträgliche Kontrolle der Aufgaben durch die Lehrkraft erleichtert, auf der anderen Seite hilft es den Schülern, die erhaltenen Informationen und durchgeführten Aktionen zu einem späteren Zeitpunkt nachzuvollziehen.

Das Arbeiten mit zwei Grafik-Fenstern, die nebeneinander aufscheinen, erleichtert den Vergleich, bietet aber auch eine gute Möglichkeit, den Schülern aufzuzeigen, dass der

Graph derselben Funktion durch unterschiedliche Achseneinstellungen voneinander abweichende Formen annehmen kann.

TRAININGSAUFGABE 12

Gegeben ist die Funktion $f: [-3; 3] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$

- Stelle den Graphen der Funktion im angegebenen Definitionsbereich dar.
- Ermittle die Schnittpunkte mit den Achsen auf zwei Arten und zeichne diese ein. Blende mehrfach angezeigte Punkte aus.
- Bestimme alle lokalen und globalen Extremstellen - markiere und beschrifte diese in der Grafik.

TRAININGSAUFGABE 12 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

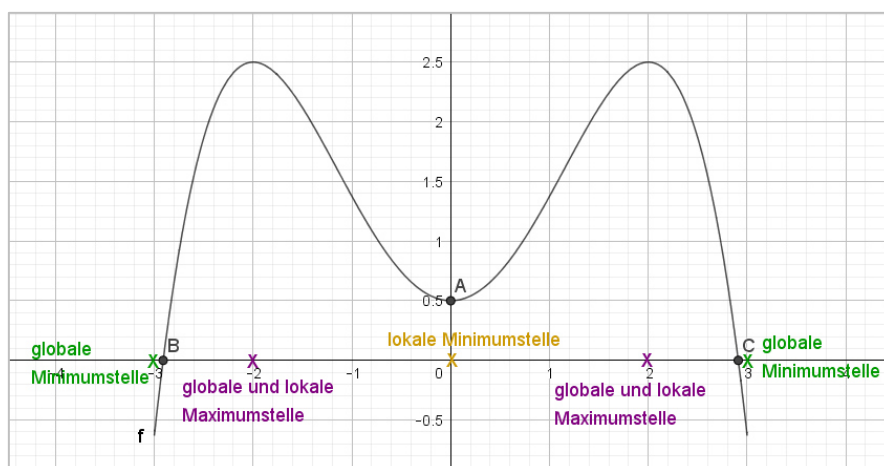


Abb. 107: Graphik zu Trainingsaufgabe 12

- Mittels Befehl *Funktion*(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) wird der Funktionsgraph nur im angegebenen Intervall angezeigt:

Eingabe: `Funktion(-1/8x^4+x^2+1/2, -3, 3)`

- Ermitteln und Ausblenden der Schnittpunkte: siehe *Trainingsaufgabe 11*
- Das Ermitteln der Extremstellen erfolgt entweder graphisch oder aber auch konstruktiv (z.B. über senkrechte Geraden, die mit der x-Achse geschnitten werden).

Anhand des Werkzeugs ABC Text wird die Beschriftung eingefügt. Mittels Rechtsklick auf den Text kann man über den Menüpunkt Eigenschaften ... die farbliche Gestaltung vornehmen.

DIDAKTISCHER ASPEKT

Die Aufgabenstellungen sind in diesem Fall relativ offengehalten, sodass die Schüler in ihrer Arbeitsweise nicht allzu stark eingeschränkt und zu einer gewissen Kreativität angeleitet werden. Dadurch erhält die Lehrkraft die Möglichkeit, Einblick in die Denkweise der Schüler und Informationen über den Stand der Werkzeugkompetenzen zu erhalten. Dies setzt natürlich voraus, dass der Einsatz von Werkzeugen und Befehlen vorab ausreichend eingeübt wurde.

Wie in *Trainingsaufgabe 11* kommt auch hier der übersichtlichen Formatierung und Darstellung große Bedeutung zu. In c) wurde außerdem absichtlich nicht darauf hingewiesen, die Extremstellen auf der x-Achse einzuzeichnen. So ermöglicht diese Aufgabe, den Wissenstand bzw. die Existenz von Grundkompetenzen nicht nur auf technologischer Ebene zu überprüfen.

TRAININGSAUFGABE 13

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x^3 + \frac{17}{6}x^2 + \frac{5}{6}x - 1$

- Ermittle graphisch und rechnerisch den Funktionswert an der Stelle 2.
- Kennzeichne den Funktionswert an der Stelle -1 in der Grafik. Achte auf eine passende Beschriftung!
- Bestimme alle Stellen für die gilt: $f(x) = 0$.
- Beschreibe das Monotonieverhalten, indem du die notwendigen Informationen aus der Grafik abliest.

TRAININGSAUFGABE 13 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a) Eine Möglichkeit zur *graphischen* Ermittlung des Funktionswerts:

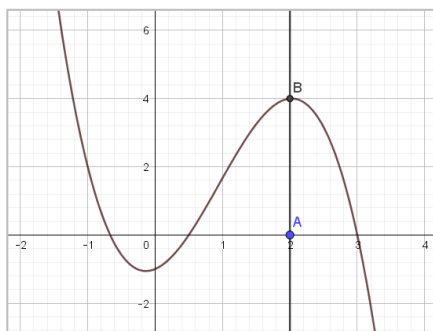


Abb. 108: Ermittlung des Funktionswerts

- Erstellen des Punktes $A=(2/0)$: Eingabe: **(2,0)**
- Konstruieren der Senkrechten durch A auf die x-Achse mittels Senkrechte Gerade
- Schnittpunkt B zwischen Funktion und senkrechter Gerade anhand von Schneide bestimmen
- y-Koordinate des Punktes B, der nun im Algebrafenster angezeigt wird, entspricht dem Funktionswert an der Stelle 2: **B = (2, 4)**

Die *rechnerische* Ermittlung des Funktionswerts erfolgt beispielsweise durch folgende Eingabe in die Eingabezeile: Eingabe: **f(2)**

Der berechnete Wert wird danach im Algebrafenster angezeigt: **a = 4**

b) Eine Möglichkeit zur Ermittlung und Kennzeichnung des Funktionswerts:

- Gerade $x = -1$ einzeichnen:
- Schnittpunkte (C und D) dieser Geraden mit der x-Achse und der Funktion bestimmen:  Schneide
- Ausblenden von $x = -1$:
☒ gl1: $x = -1$ $\Rightarrow$ ☐ gl1: $x = -1$
- Erstellen der Strecke zwischen den Punkten C und D: 
- Ausblenden der Punkte C und D
- Beschriften von $f(-1)$: Text

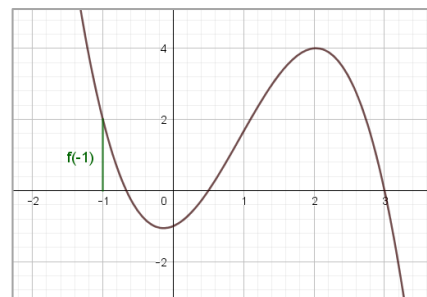
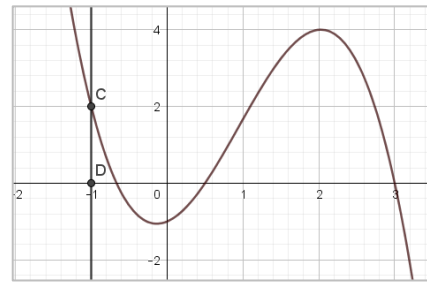


Abb. 109: Kennzeichnung des Funktionswerts

c) Ermitteln der Nullstellen beispielsweise durch Schneiden der Funktion mit der x-Achse:

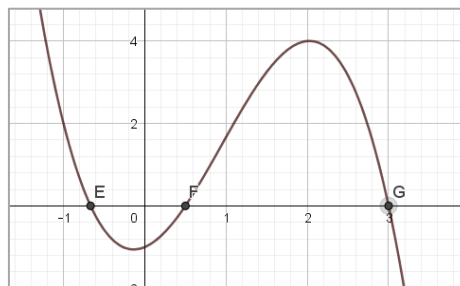


Abb. 110: Ermitteln der Nullstellen

d) Ablesen der Monotonieintervalle anhand der Koordinaten der zuvor bestimmten Extremstellen mit Hilfe von  Extremum :

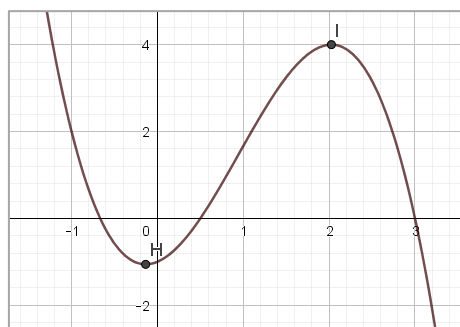


Abb. 111: Ermitteln der Extremstellen

Durch den konstruktiven Zugang bei der Ermittlung des Funktionswertes werden Schüler zu einer intensiven Auseinandersetzung mit der Thematik angehalten. Das Arbeiten mit Funktionen erweist sich in der Praxis häufig als sehr problembehaftet, da Schüler neben fehlendem theoretischem Wissen oftmals keine ausreichende Vorstellung bezüglich des *Funktionswerts an einer Stelle* haben. Umso wichtiger ist es in meinen Augen, diesem Sachverhalt besondere Bedeutung zukommen zu lassen und auf verschiedenen Ebenen zu begegnen.

So führt der Einsatz von Technologie oft dazu, dass durch Berechnung des Funktionswerts im CAS (z.B. durch Eingabe von $f(2)$) das Ergebnis nicht mehr mit einem „Einsetzvorgang“ verbunden wird, wodurch auch ein Verständnis auf inhaltlicher Ebene verloren geht. Dieser Problematik kann beispielsweise durch regelmäßiges händisches Berechnen entgegengewirkt werden.

Daneben spielt aber meiner Ansicht nach auch die graphische Interpretation zur Ausbildung eines Grundverständnisses eine große Rolle, weshalb diese in der Trainingsaufgabe im Mittelpunkt steht. Die exakte Bestimmung und Kennzeichnung des Funktionswerts setzt allerdings ein Mindestmaß an Wissen über den Einsatz der Konstruktionswerkzeuge voraus, weshalb auch dieser im Vorfeld (meist in der Unterstufe) genug Beachtung im Unterricht finden sollte. Andernfalls kann ein Unvermögen im konstruktiven Vorgang die eigentliche Thematik überlagern und auf Schülerseite zu Frustration anstelle eines Wissenszuwachses führen.

Die Berechnung des Funktionswerts über die Eingabezeile und die Darstellung des daraus erhaltenen Ergebnisses sollte meines Erachtens nach ebenfalls thematisiert werden. In meinen Augen ist diese nur bedingt sinnvoll, da sich durch die unübersichtliche Ausgabe im Algebra-Fenster zum Beispiel das Zurückgreifen auf das Ergebnis im Nachhinein oft als problematisch erweist. In diesem Zusammenhang ist ein Berechnen im CAS wesentlich übersichtlicher und dadurch zu einem späteren Zeitpunkt auch besser nachvollziehbar. In dieser Aufgabe geht es jedoch einzig um das Einüben von Werkzeugkompetenzen in der Grafik- und Algebra-Ansicht, weshalb die Möglichkeit der Berechnung auf diese Art der Vollständigkeit halber aufgezeigt wird.

PRAXISBEISPIEL 9

Asymptotisches Verhalten*	
Aufgabennummer: 1_463	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5
Gegeben sind fünf Funktionsgleichungen.	
Aufgabenstellung: Welche dieser Funktionen hat/haben eine waagrechte Asymptote? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Funktionsgleichung(en) an!	
$f_1(x) = \frac{2}{x}$	☐
$f_2(x) = 2^x$	☐
$f_3(x) = \frac{x}{2}$	☐
$f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	☐
$f_5(x) = x^{\frac{1}{2}}$	☐

Abb. 112: Praxisbeispiel 9 [130]

PRAXISBEISPIEL 9 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

Sollte die Darstellung der Funktionsgraphen nicht ausreichen, kann durch folgenden Befehl die Existenz der Asymptoten überprüft werden: Eingabe: **Asymptote(f)**

Etwaige Asymptoten werden danach sowohl im Algebra- als auch im Grafik-Fenster angezeigt:

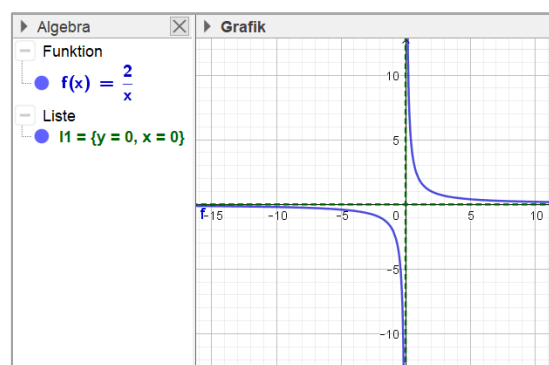


Abb. 113: Asymptoten

Obwohl diese Aufgabe zu Beginn meist zu großen Problemen führt, finden viele Schüler durch Ausprobieren den notwendigen Befehl heraus. So wird das Beispiel oft korrekt beantwortet – bei einem nachfolgenden Gespräch darüber stellt sich allerdings häufig heraus, dass dies ohne Verständnis über den Sachverhalt geschieht.

B. EINSATZ VON SCHIEBEREGLERN

Schieberegler bieten die Möglichkeit, auf experimentelle und dynamische Weise den Einfluss von Parameteränderungen auf grafischer, algebraischer und numerischer Ebene zu untersuchen. Um diese gezielt einsetzen können, braucht es auch in diesem Bereich eine Werkzeugkompetenz, welche sich vor allem auf die der jeweiligen Aufgabe entsprechenden Einstellungen des Schiebereglers bezieht.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 14

Gegeben ist eine Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

- Untersuche den Einfluss der Parameter a, b und c auf den Graphen von f .
- Wie müssen a, b und c gewählt werden, damit die Funktion 1) eine, 2) zwei bzw. 3) keine Nullstelle hat? Gib jeweils mindestens zwei verschiedene Funktionsterme an.

TRAININGSAUFGABE 14 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

Um auf einfache Weise Schieberegler zu erhalten, wird die allgemeine Funktionsgleichung in die Eingabezeile eingegeben. Man wird direkt nach der Eingabe von GeoGebra gefragt, ob man für a, b und c Schieberegler erstellen möchte:

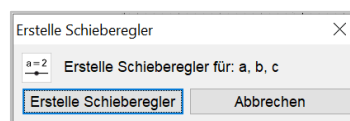


Abb. 114: Schieberegler

Alternativ kann man Schieberegler auch mithilfe von  erstellen.

Nach Auswahl des Werkzeugs wird durch Klicken in die Grafikanzeige der Schieberegler an der gewünschten Stelle platziert.

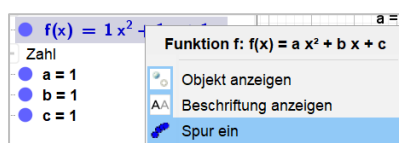


Abb. 115: Spurmodus

Durch Aktivieren des *Spurmodus* hinterlässt der Funktionsgraph bei Änderung des Schiebereglers eine Spur, anhand derer man die Auswirkungen auf den Graphen gut erkennen kann.

Mit Hilfe der Schieberegler werden die Werte der Parameter verändert und so deren Einfluss auf das Aussehen des Graphen untersucht:

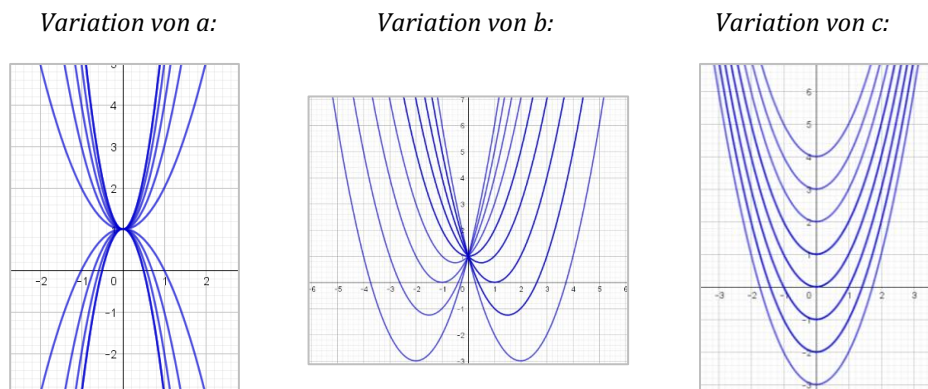


Abb. 116: Variation der Parameter

Aspekte, die bei der Bearbeitung der Aufgabe beachtet werden sollten:

- Die Schrittweite des Schiebereglers sollte relativ groß gewählt werden, da andernfalls die Anzeige im Spurmodus sehr unübersichtlich werden kann.

Durch Rechtsklick auf den Schieberegler kommt man über das Untermenü *Eigenschaften* zu den wichtigsten Einstellungsmöglichkeiten

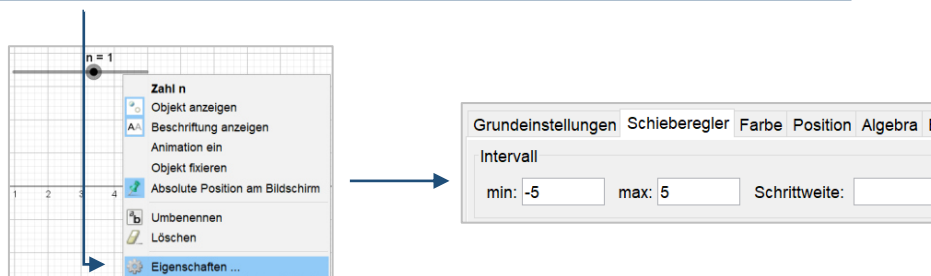


Abb. 117: Einstellungen des Schiebereglers

- Die Spur wird durch Verschieben oder Zoomen der Ansicht wieder ausgeblendet.
- Der Parameter a nimmt bei Variation des Schiebereglers auch den Wert 0 an, wodurch eine lineare Funktion angezeigt wird.

TRAININGSAUFGABE 14– HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

- Bei der Eingabe der allgemeinen Funktionsgleichung wird oft auf das Multiplikationszeichen vergessen: Eingabe: $f(x)=a*x^2+b*x+c$
- Schüler haben oft das Problem, den unterschiedlichen Darstellungen im Nachhinein die passenden Parameterwerte zuzuordnen. Sie sollten daher dazu angehalten werden, die Variation des Schiebereglers „schrittweise“ vorzunehmen und die dabei erhaltenen Graphen sofort zu beschriften.

- Bei Einsatz eines Schiebereglers wird meist auf die Einstellungsoptionen vergessen. Je nach Aufgabenstellung sollte deshalb thematisiert werden, welche Werte bestimmte Parameter (nicht) annehmen dürfen und wie die Schrittweite zu wählen ist.
- Um aussagekräftige Informationen bezüglich eines Parameters zu erlangen, ist es auch wichtig, die anderen beiden fest zu halten und sich auf die Variation eines einzigen Parameters zu konzentrieren - Schüler tendieren jedoch dazu, alle drei Parameter „gleichzeitig“ zu variieren.

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei dieser Art von Aufgabe geht es darum, Schülern auf experimentelle Weise die Parametervariation und deren Auswirkung auf den Funktionsgraphen näher zu bringen. Auch, wenn dieser Zugang eine aktive und anschauliche Auseinandersetzung mit der Thematik ermöglicht, sollte der Lehrperson bewusst sein, dass dieser meist nicht zu allgemeingültigen Aussagen hinsichtlich des Zusammenhangs der Anzahl der Nullstellen und der Werte der Parameter führt. Sollte dieser Aspekt ein Lernziel einer solchen Aufgabe sein, kann es sinnvoll sein, dies im Nachhinein genauer zu thematisieren. Heugl ([70], S. 27) spricht sich hier ebenfalls dafür aus, dass der experimentellen Phase ein algebraisches Begründen folgen sollte.

In meiner Arbeit mit Schülern hat sich gezeigt, dass ein Einsatz von Schieberegler vielfach dann erfolgt, wenn Probleme beim Lösen einer Aufgabe (nicht nur hinsichtlich grafischer Aspekte) auftreten. Auf diese Art wird erstaunlich oft die richtige Lösung bestimmt – im Gespräch mit den Schülern stellt sich jedoch häufig heraus, dass dies durch ein Ausprobieren und nicht aufgrund des notwendigen Verständnisses geschehen ist. Ein solcher Zugang ist innerhalb bestimmter Lernphasen dem Prozess des Verstehens zuträglich - es darf aber nicht außer Acht gelassen werden, dass dadurch oftmals nur der Anschein eines verständigen Lösevorgangs erweckt wird.

PRAXISBEISPIEL 10

Quadratische Funktion*																	
Aufgabennummer: 1_716	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐																
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 1.5																
Gegeben ist eine quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$).																	
Aufgabenstellung:																	
Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.																	
Wenn _____ ① _____ gilt, so hat die Funktion f auf jeden Fall _____ ② _____.																	
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">①</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$a < 0$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$b = 0$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$c > 0$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>	①		$a < 0$	☐	$b = 0$	☐	$c > 0$	☐	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">②</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>zwei reelle Nullstellen</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>ein lokales Minimum</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>	②		einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☐	zwei reelle Nullstellen	☐	ein lokales Minimum	☐
①																	
$a < 0$	☐																
$b = 0$	☐																
$c > 0$	☐																
②																	
einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☐																
zwei reelle Nullstellen	☐																
ein lokales Minimum	☐																

Abb. 118: Praxisbeispiel 10 [138]

PRAXISBEISPIEL 10- HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Durch Erstellen von Schiebereglern für a , b und c werden die Auswirkungen der Parametervariationen auf den Graphen beobachtet. Dabei wird oft vergessen, dass nicht nur der in der linken Box angeführte Parameter isoliert, sondern auch das Zusammenspiel aller Parameter untersucht werden muss.

Dies führt beispielsweise dazu, dass folgende Antwortmöglichkeit ausgewählt wird: Wenn $a < 0$ gilt, so hat die Funktion f auf jeden Fall zwei reelle Nullstellen.

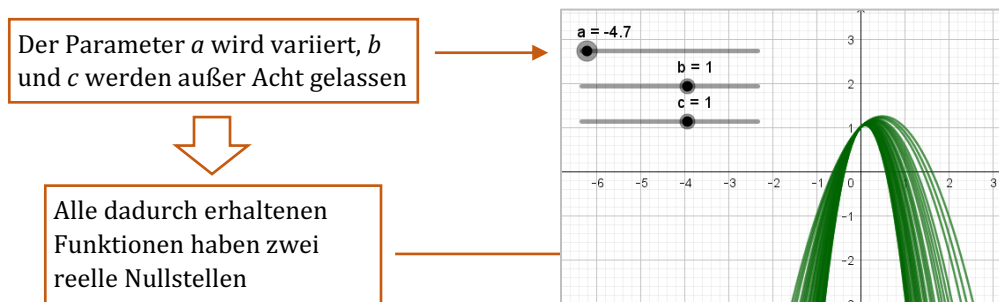


Abb. 119: Probleme - Praxisbeispiel 10

PRAXISBEISPIEL 11

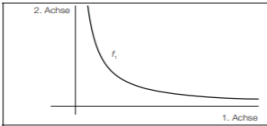
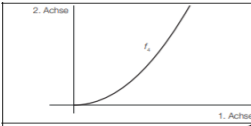
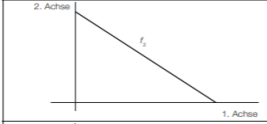
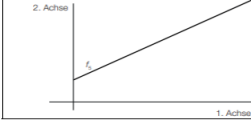
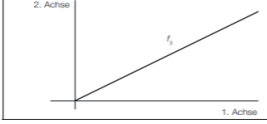
Funktionsdarstellung einer Formel			
Aufgabennummer: 1_240		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐	
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: FA 1.2	
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich	
Gegeben ist die Formel $r = \frac{2s^2t}{u}$ für $s, t, u > 0$. Aufgabenstellung: Wenn u und s konstant sind, dann kann r als eine Funktion in Abhängigkeit von t betrachtet werden. Kreuzen Sie denjenigen/diejenigen der unten dargestellten Funktionsgraphen an, der/die dann für die Funktion r möglich ist/sind!			
	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Abb. 120: Praxisbeispiel 11 [124]

PRAXISBEISPIEL 11 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

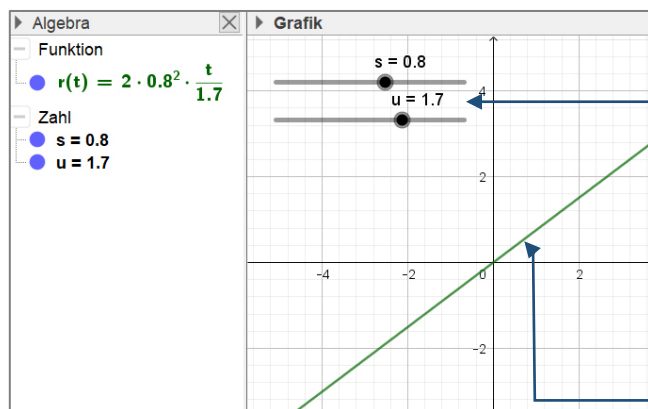


Abb. 121: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 11

1

Durch Eingabe von

Eingabe: $r(t) = 2s^2t/u$

werden automatisch Schieberegler für u und s erstellt

2

Bei Variation von u und s ändert sich der Graph nur hinsichtlich seiner Steigung und man kann erkennen, dass es sich um eine homogene lineare Funktion handeln muss

PRAXISBEISPIEL 11- HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Bei dieser Aufgabe wird häufig übersehen, dass s und u positiv gewählt werden müssen. Da aber bei den Antwortmöglichkeiten keine fallende homogene lineare Funktion zur Auswahl steht, fällt diese Problematik meist nur im direkten Gespräch mit Schülern auf. Insofern halte ich es für sinnvoll, Aufgaben mit Antwortmöglichkeiten zu (er)stellen, welche die Schüler auch diesbezüglich zum Nachdenken anregen.

Eine derartige Aufgabenstellung könnte zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

Durch $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ wird das Volumen eines Drehzylinders mit Radius r und Höhe h beschrieben. Kreuze diejenige Abbildung an, welche die Abhängigkeit des Volumens vom Radius bei konstanter Höhe darstellt!

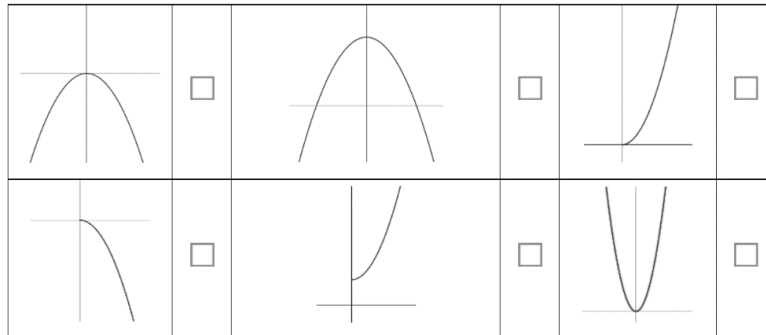


Abb. 122: Formel als Funktion

C. ARBEITEN MIT VEKTOREN

Aufgrund des visuellen Aspekts bietet GeoGebra ein hervorragendes Mittel zur Darstellung von und zum Arbeiten mit Vektoren – sowohl in der Ebene als auch im Raum.

Die Eingabe eines Vektors erfolgt entweder über den Befehl *Vektor*(*<Anfangspunkt>*, *<Endpunkt>*) oder über die direkte Eingabe der Koordinaten, ähnlich der Eingabe eines Punktes, jedoch durch Benennung anhand eines Kleinbuchstabens:

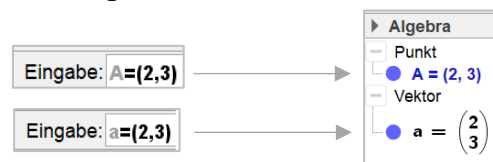


Abb. 123: Eingabe Punkt und Vektor

Alternativ kann mit Hilfe des Werkzeugs  *Vektor* und Auswahl des Anfangs- und Endpunktes im Grafik-Fenster ebenfalls ein Vektor erstellt werden.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 15

Von einem Parallelogramm sind die Eckpunkte $A(2/-3)$, $B(6/-1)$ und $C(5/5)$ gegeben.

- Bestimme grafisch mit Hilfe von Vektoren den fehlenden Eckpunkt D .
- Zeichne die Gerade g durch A und B ein. Gib eine Parameterdarstellung, die Steigung sowie einen Normalvektor von g an.
- Konstruiere die Gerade h , die auf g normal steht und durch den Punkt C geht. Gib die zugehörige Gleichung in der Form $y = k \cdot x + d$ an.

TRAININGSAUFGABE 15 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

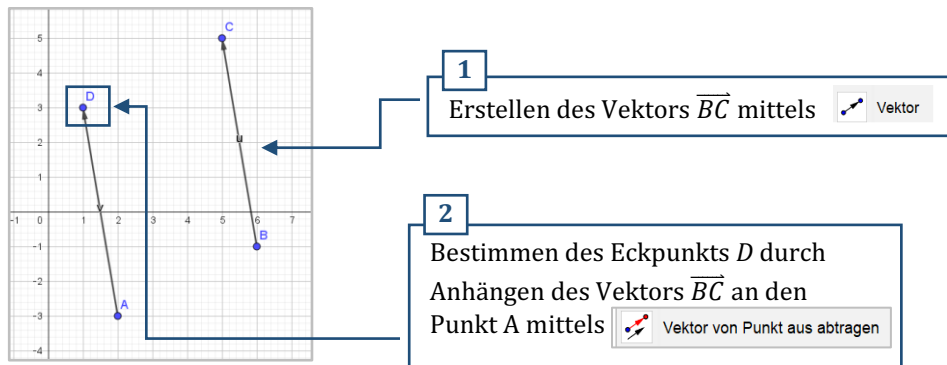


Abb. 124: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15a

b)

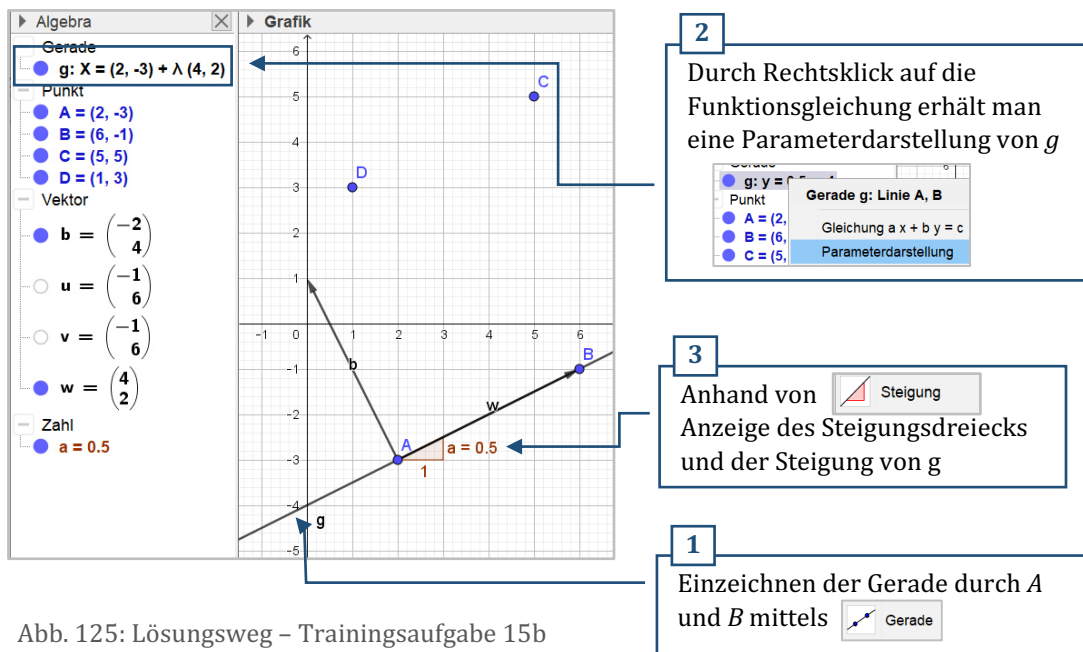


Abb. 125: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15b

c)

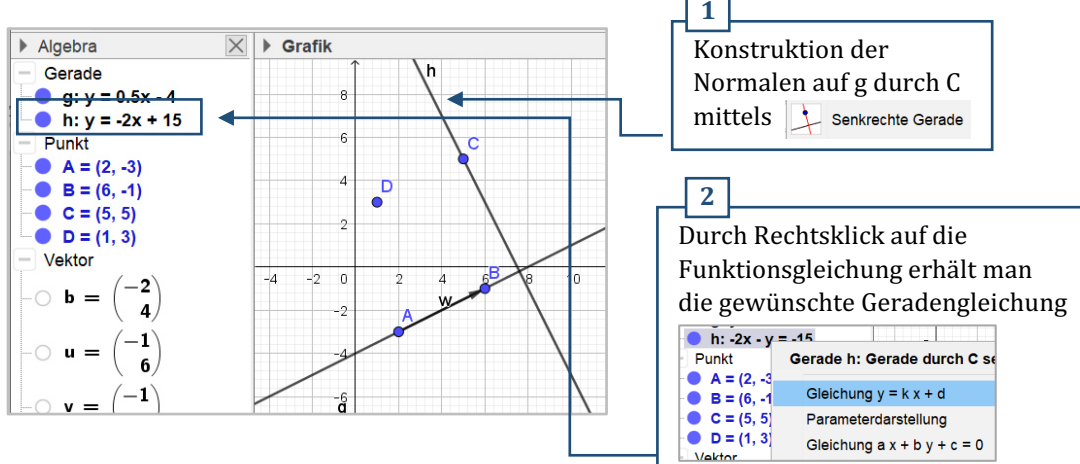


Abb. 126: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15c

DIDAKTISCHER ASPEKT

Im Gegensatz zu den meisten anderen Aufgaben, kommt dem Vorgang des Konstruierens – vor allem beim Erstellen von Geraden und deren Gleichungen – hier eine große Bedeutung zu. Man sollte sich jedoch als Lehrkraft vor Augen halten, dass diese Vorgehensweise zwar so gut wie immer zum Ziel führt, jedoch das verständige Arbeiten mit Vektoren kaum noch eine Rolle spielt. Derartige Aufgaben sollten bei der Einführung des Themas deshalb nur zur besseren Visualisierung der Sachverhalte herangezogen werden, der Rechenweg aber von Hand stattfinden. Schüler tendieren erfahrungsgemäß in der Arbeit mit Geraden grundsätzlich dazu, den konstruktiven anstelle des algebraischen Wegs zu nehmen. In meinen Augen ist es daher sinnvoll, bei Aufgaben, die etwa im Rahmen einer Hausübung gegeben werden, auszuformulieren, welcher Weg gewünscht ist oder auch beide Wege zu verlangen.

Zu einem späteren Zeitpunkt erhält man durch diese Art von Aufgabe allerdings die Möglichkeit, Geraden und deren Eigenschaften genauer zu untersuchen. Hier würden sich etwa Fragestellungen bezüglich der Zusammenhänge von Richtungs- und Normalvektoren der vorkommenden Geraden und auch deren Beziehung zur Steigung anbieten. Weiters könnte man nicht nur eine, sondern mehrere Parameterdarstellungen derselben Geraden einfordern. Da es in dieser Aufgabe jedoch nur um die Werkzeugkompetenz geht, wurde auf derlei Fragen verzichtet.

Bei Aufgaben dieses Formats sollte dem übersichtlichen Darstellen des Lösungswegs besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Bei der Abgabe solcher Beispiele ist es sinnvoll, Screenshots zusätzlich zur Dokumentation anzugeben. Hierbei sollten Schüler auf eine exakte Benennung der Objekte achten und die für den jeweils behandelten Unterpunkt der Aufgabe unwichtigen Informationen ausblenden lassen.

BEISPIELE AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 12

Geradengleichung*	
Aufgabennummer: 1_392	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4
Gegeben ist eine Gerade g mit der Gleichung $2 \cdot x - 5 \cdot y = -6$.	
Aufgabenstellung:	
Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die durch den Punkt $(0 0)$ geht und zur Geraden g parallel ist!	

Abb. 127: Praxisbeispiel 12 [118]

PRAXISBEISPIEL 12 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

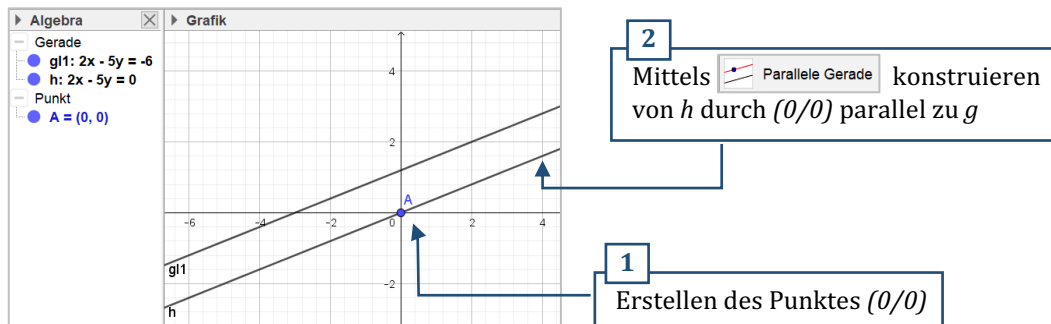


Abb. 128: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 12

DIDAKTISCHER ASPEKT

Dies ist eine der Aufgaben, die im Normalfall schnell und auch richtig beantwortet wird, bei der jedoch viele Schüler hinsichtlich der eigentlich zu erbringenden Grundkompetenz (AG 3.4) große Verständnisprobleme und inhaltliche Lücken aufweisen. Das händische Aufstellen der Geradengleichung wird dadurch in vielen Fällen nicht beherrscht.

PRAXISBEISPIEL 13

Geradengleichung*	
Aufgabennummer: 1_514	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4
Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben. Aufgabenstellung: Geben Sie mögliche Werte der Parameter a und b so an, dass die durch die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ gegebene Gerade h normal zur Geraden g ist! $a =$ _____ $b =$ _____	

Abb. 129: Praxisbeispiel 13 [119]

PRAXISBEISPIEL 13 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

Bei dieser Aufgabe konnte ich häufig folgende Lösungsstrategie beobachten:

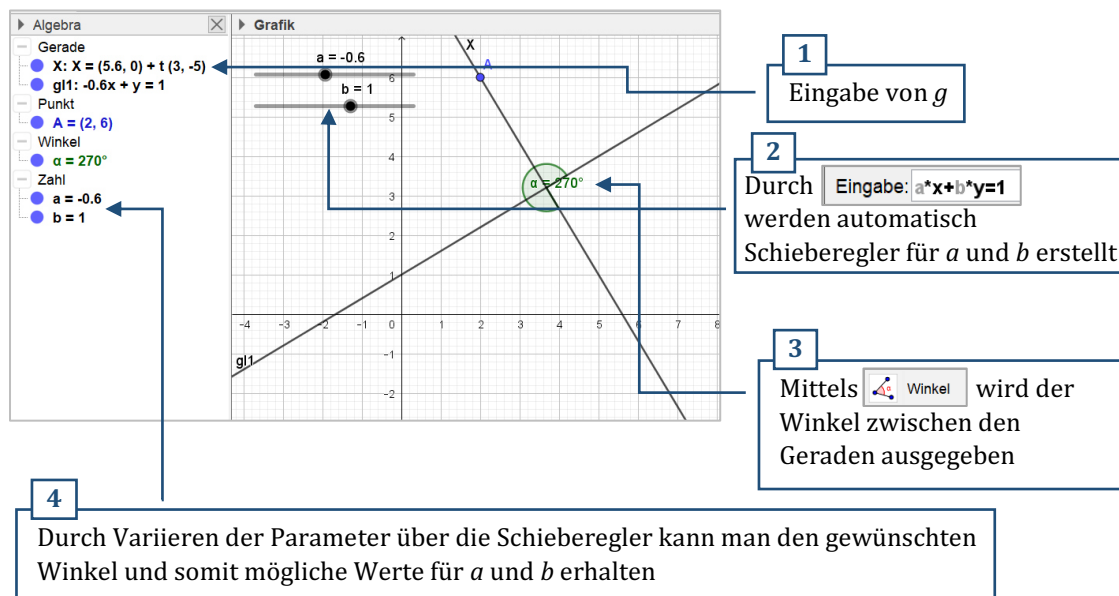


Abb. 130: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 13

PRAXISBEISPIEL 13 – HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Nach Eingabe der Parameterdarstellung kommt es oftmals zu einer veränderten Ausgabe:

Viele Schüler haben Probleme damit, zu erkennen, dass die ausgegebene Parameterdarstellung ebenfalls korrekt ist.

Unabhängig davon, dass dies eigentlich anhand der Graphik ersichtlich sein sollte, führt die Eingabe der Parameterdarstellung über den Befehl *Gerade*(*<Punkt>*, *<Richtungsvektor>*) meist zu weniger Problemen. Dazu muss allerdings zuvor der Richtungsvektor erstellt und danach dessen Bezeichnung in den Befehl eingesetzt werden.

Dadurch erhält man diese Ausgabe: , welche mittels Rechtsklick auf die gewünschte Parameterdarstellung gebracht wird:

Bei dieser Aufgabe zeigt sich, dass aufgrund von Verständnisproblemen bzw. unzureichend entwickelter Grundkompetenzen von vielen Schülern der eigentlich wesentlich arbeitsaufwendigere (und oftmals nicht exakte) experimentelle Weg über den Einsatz von Schieberegler genommen wird.

1.5.3 TABELLENKALKULATION-WERKZEUGKOMPETENZ

Durch den Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen erhält man die Möglichkeit der schnellen und auch anschaulichen Bearbeitung und Analyse von Datenmengen – unabhängig von deren Umfang. Zudem vereinfacht es den Zugang zum Thema der rekursiven Modelle, welche mit Hilfe des Technologieeinsatzes beispielsweise auch schon in der Unterstufe behandelt werden können. Zusätzlich erhält man ein weiteres Werkzeug, das ein Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten erleichtert und Beobachtungen hinsichtlich dynamischer Änderungen ermöglicht. (Vgl. [70], S. 28)

A. STATISTISCHE DATENANALYSE

Die Analyse von Daten hinsichtlich statistischer Kennzahlen oder auch das Erstellen von Diagrammen kann sowohl über Befehle als auch mit Hilfe von geeigneten Werkzeugen erfolgen. Erfahrungsgemäß ist der Einsatz von Werkzeugen dabei „benutzerfreundlicher“ und dadurch meist auch weniger fehleranfällig. Soweit möglich, wird im Folgenden deshalb die Nutzung der Werkzeuge aufgezeigt und nur in Ausnahmefällen auf Befehle zurückgegriffen.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 16

Gegeben ist die Datenliste:

8, 8, 10, 12, 12, 12, 12, 15, 16, 16, 21, 23, 23, 23, 23, 27, 28, 28

Bestimme:

- | | |
|-------------------------------|------------------------|
| a) Arithmetisches Mittel | d) Minimum und Maximum |
| b) Median | e) Standardabweichung |
| c) erstes und drittes Quartil | f) Modus |

TRAININGSAUFGABE 16 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

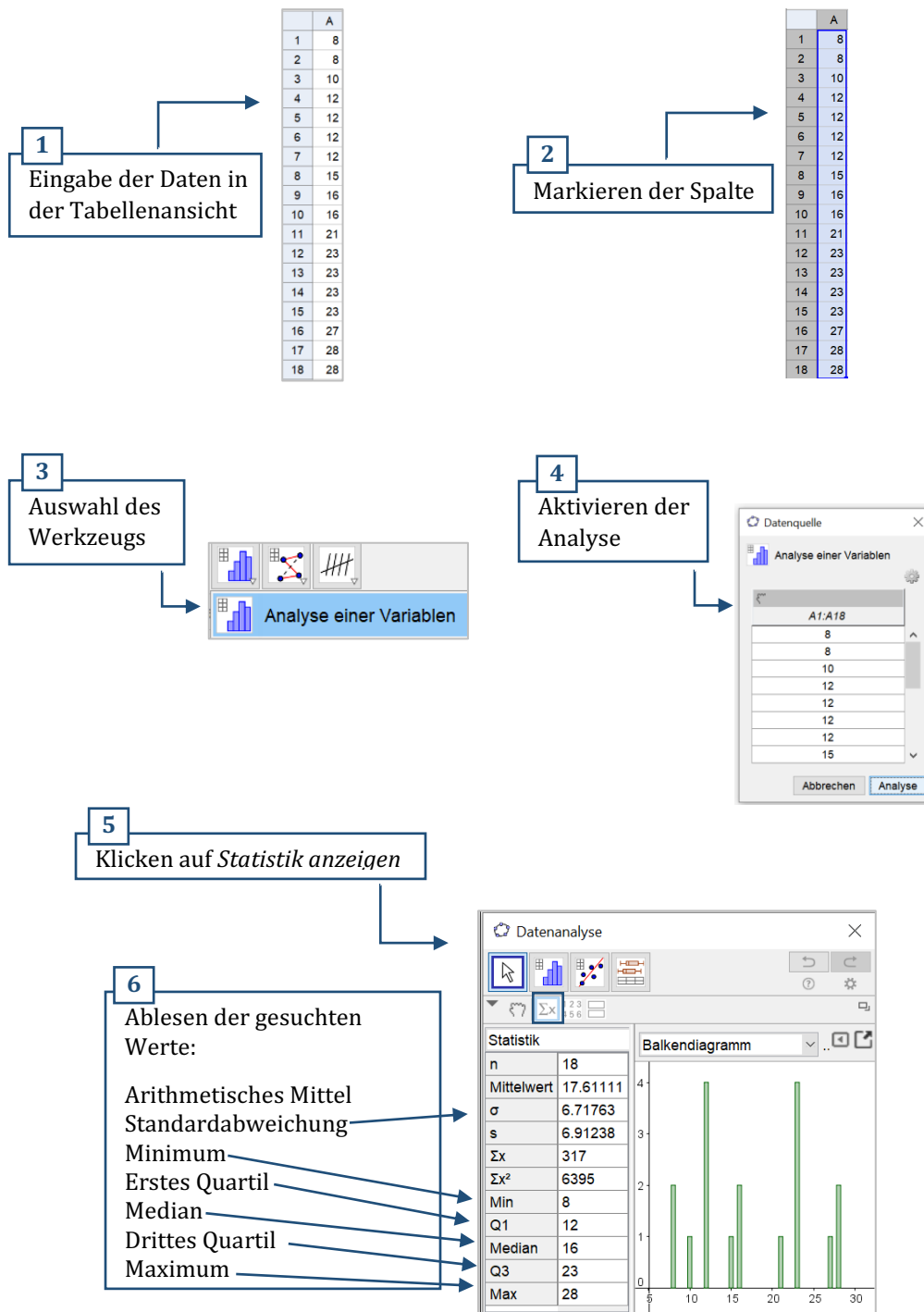


Abb. 131: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 16 a)-e)

Anmerkung: Bei Änderung eines oder mehrerer Werte in der Tabelle, erfolgt eine automatische Anpassung der Datenanalyse

Das Ermitteln des Modus bzw. Modalwerts kann nicht mit Hilfe der Datenanalyse, sondern muss über eine Verknüpfung von Tabellenkalkulation und Algebra/Grafik-Fenster erfolgen. Der Vollständigkeit halber gehe ich trotzdem bereits an dieser Stelle darauf ein:

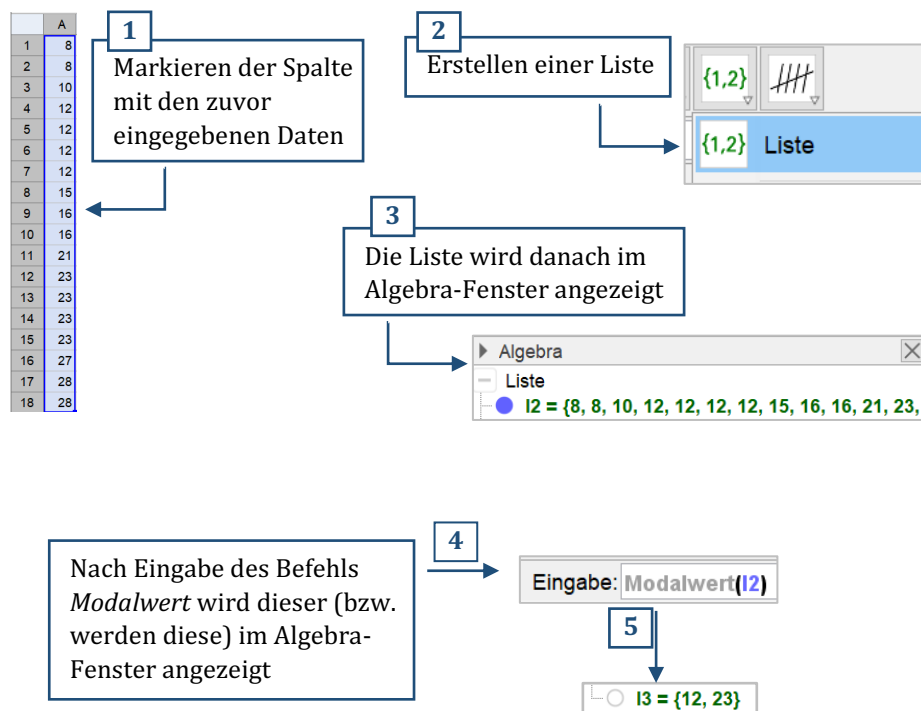


Abb. 132: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 16 f)

TRAININGSAUFGABE 17

In der folgenden Tabelle ist das Ergebnis der Mathematik-Schularbeit einer Klasse angegeben. Du kannst also ablesen, wie oft die jeweilige Note erreicht wurde.

Note	1	2	3	4	5
Häufigkeit	2	4	7	3	4

Tab. 18: Schularbeitsnoten

Erstelle einen passenden Boxplot!

TRAININGSAUFGABE 17 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

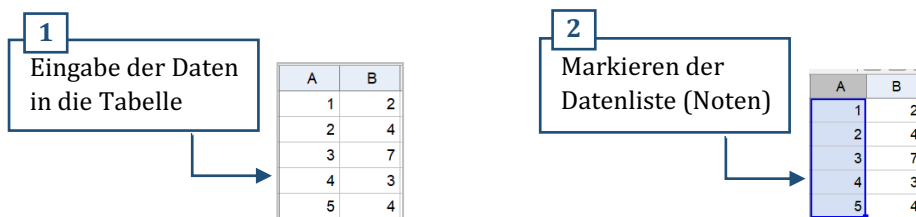


Abb. 133: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 17 (Teil 1)

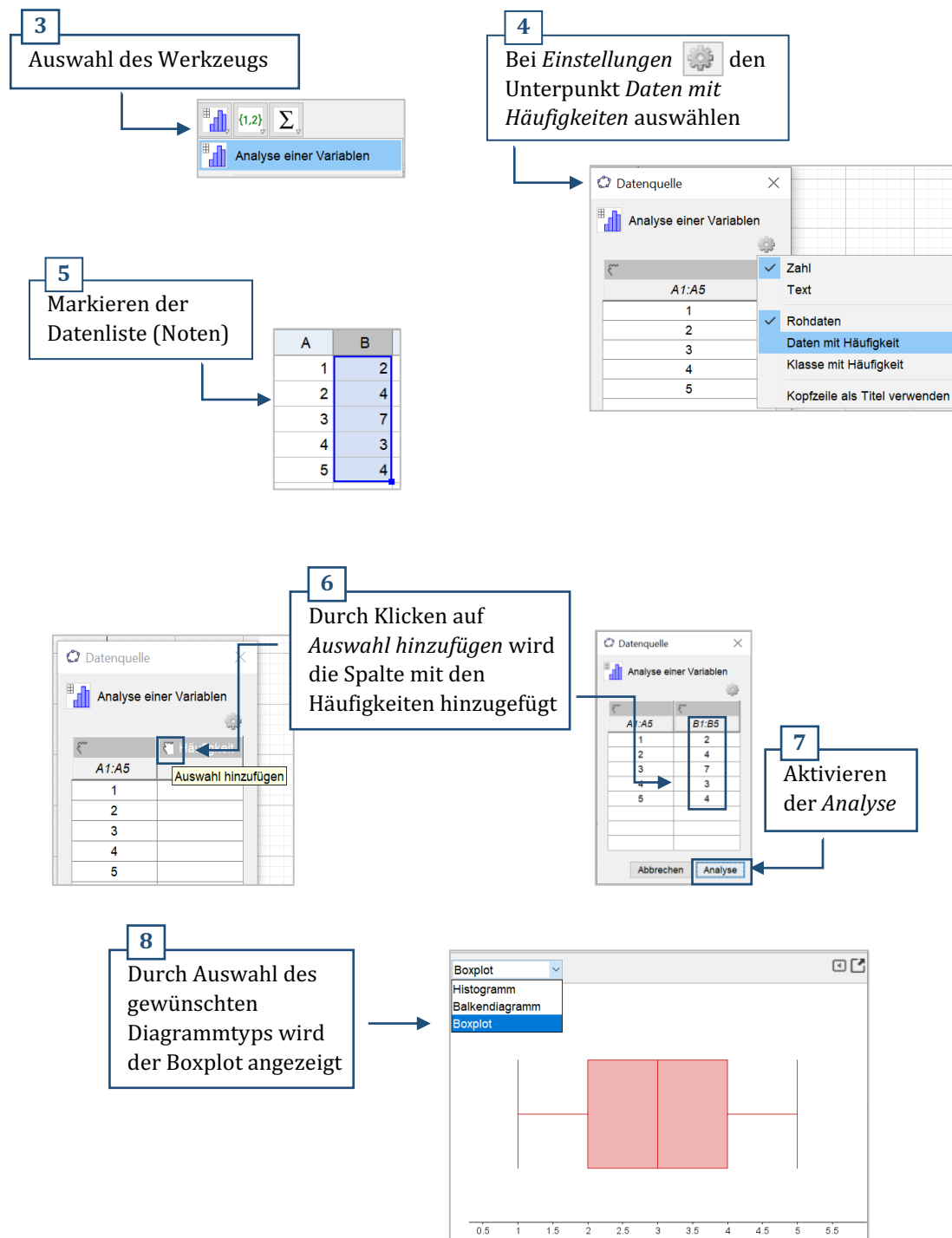


Abb. 134: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 17 (Teil 2)

TRAININGSAUFGABE 17 – HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Schüler tendieren bei Angabe einer Häufigkeitsliste dazu, nur diese zur Ermittlung der gefragten Werte zu nutzen. Bei dieser Aufgabe besteht beispielsweise die Gefahr, dass die Schularbeitsnoten nicht in die Berechnung mit einbezogen werden.

TRAININGSAUFGABE 18

Erstelle zur gegebenen Urliste ein Histogramm:

18, 2, 29, 11, 8, 18, 19, 15, 24, 7, 16, 20, 7, 26, 22, 14, 19, 27, 27, 9.

Verwende dazu folgende Klasseneinteilung: $[0;10)$, $[10;15)$, $[15; 25)$, $[25;30)$.

TRAININGSAUFGABE 18 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

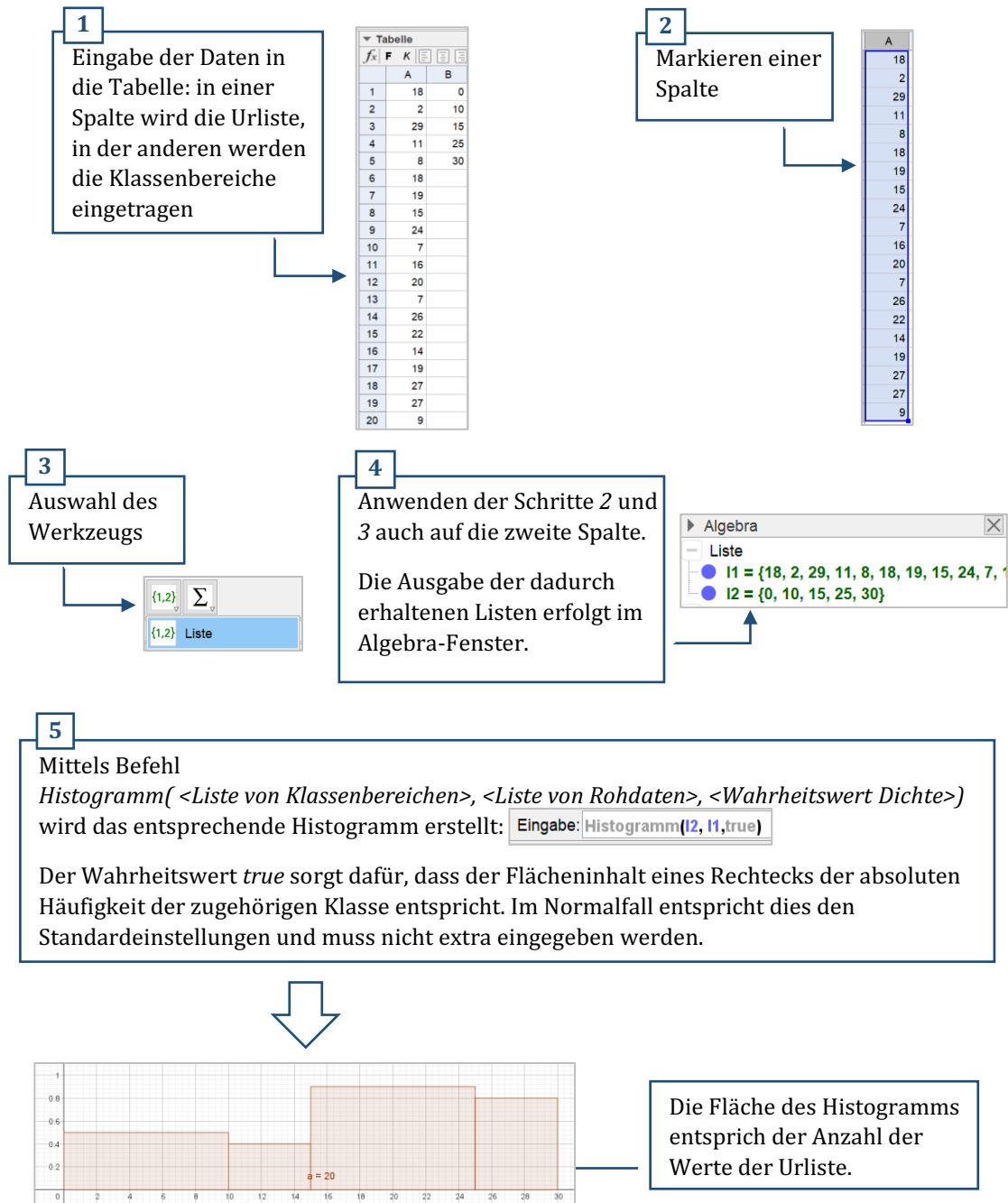


Abb. 135: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 18

TRAININGSAUFGABE 19

Bei einer Befragung von fünfzehn Personen nach der Anzahl der Geschwister ergab sich folgende Liste:

2, 4, 0, 5, 3, 1, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 2, 0

Erstelle eine Tabelle, in welcher die absoluten und relativen Häufigkeiten der Geschwisterzahlen aufscheinen.

TRAININGSAUFGABE 19 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

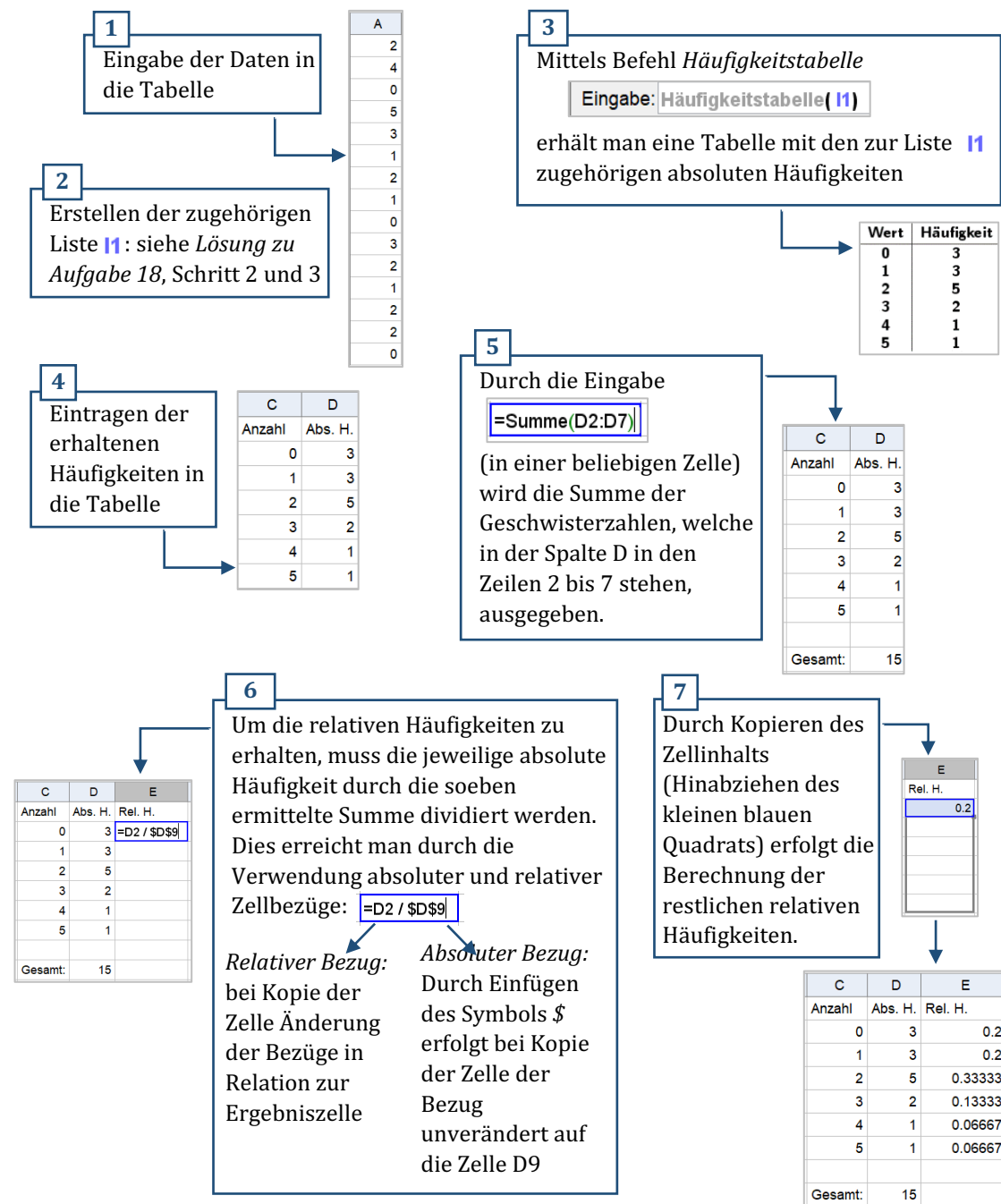


Abb. 136: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 19

Auch in diesem Bereich sollte der Einsatz von Technologie erst dann in Form einer Black Box (LINK) stattfinden, wenn ein grundlegendes Verständnis über die Kennzahlen und Diagrammformen entwickelt wurde. Auf dem Weg dorthin können aber einzelne Funktionen – wie etwa das Sortieren einer Liste anhand des Befehls *Sortiere* – in unterstützender Weise genutzt werden. Haben die Schüler bereits notwendige Grundkenntnisse erworben, erhält man durch die Tabellenkalkulation ein hilfreiches Mittel, um beispielsweise sehr umfangreiche Datenmengen zu analysieren, graphisch aufzubereiten oder Auswirkungen von Änderungen in der Urliste auf bestimmte Kennzahlen zu untersuchen.

Besondere Aufmerksamkeit sollte man dabei auf folgende Punkte legen:

- Schüler tendieren dazu, auf der Suche nach der Standardabweichung mittels Datenanalyse s anstelle von σ abzulesen:

Statistik	
n	18
Mittelwert	16,77778
σ	7,35267
s	7,36583
Σx	302

Abb. 137: Datenanalyse

- Die Definition der Rechteckshöhe eines Histogramms als Quotient aus absoluter Häufigkeit und Klassenbreite bereitet vielen Schülern Probleme. Umso wichtiger ist in meinen Augen ein anschaulicher Zugang, welcher vor dem Einsatz von Technologie zur Erstellung eines Histogramms gewählt werden sollte. Folgende Aufgabe bietet sich dafür durch die graphische Aufmachung und die gewählten Werte sehr gut an:

Beladung von LKWs*

Aufgabennummer: 1_475	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

Bei einer Verkehrskontrolle wurde die Beladung von LKWs überprüft. 140 der überprüften LKWs waren überladen. Details der Kontrolle sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

Überladung $\bar{U}$ in Tonnen	$\bar{U} < 1t$	$1t \leq \bar{U} < 3t$	$3t \leq \bar{U} < 6t$
Anzahl der LKWs	30	50	60

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle durch ein Histogramm dar! Dabei sollen die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden.



Abb. 138: Histogramm – fehlerhafte und korrekte Darstellung [131]

Da die absolute Häufigkeit der dritten Klasse exakt doppelt so groß ist wie jene der ersten Klasse, kann anhand eines Vergleichs der Flächeninhalte des ersten und dritten Rechtecks hier sehr gut verdeutlicht werden, weshalb die Schüler-Lösung falsch ist bzw. die Wahl der absoluten Häufigkeit als Rechteckshöhe die Darstellung verzerrt.

- Schüler sollten daraufhin gewiesen werden, dass Datenlisten nicht (der Größe nach) geordnet in die Tabelle eingegeben werden müssen. Dies ist ihnen oft nicht klar, weshalb die Bearbeitung der Aufgabe durch das Sortieren der Daten sehr viel Zeit in Anspruch nimmt.
- Beim erstmaligen Verwenden von Zellbezügen sollte genügend Zeit eingeplant werden, da häufig Verständnisprobleme hinsichtlich des korrekten Einsatzes und der Unterscheidung von relativen und absoluten Bezügen auftreten. Es sollte jedoch nicht auf deren Einsatz verzichtet werden, da diese in vielen Bereichen (z.B. funktionale Abhängigkeiten, rekursive Modelle) zur Anwendung kommen können.

BEISPIEL AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 14

Testergebnis

Aufgabennummer: 1_068		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)		Grundkompetenz: WS 1.2
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein Test enthält fünf Aufgaben, die jeweils nur mit einem Punkt (alles richtig) oder keinem Punkt (nicht alles richtig) bewertet werden. Die nebenstehende Grafik zeigt das Ergebnis dieses Tests für eine bestimmte Klasse.

Aufgabenstellung:

Welches der folgenden Kastenschaubilder (Boxplots) stellt die Ergebnisse des Tests richtig dar?

Kreuzen Sie das zutreffende Kastenschaubild an!

☐

☐

☐

☐

☐

☐

Abb. 139: Praxisbeispiel 14 [128]

PRAXISBEISPIEL 14 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

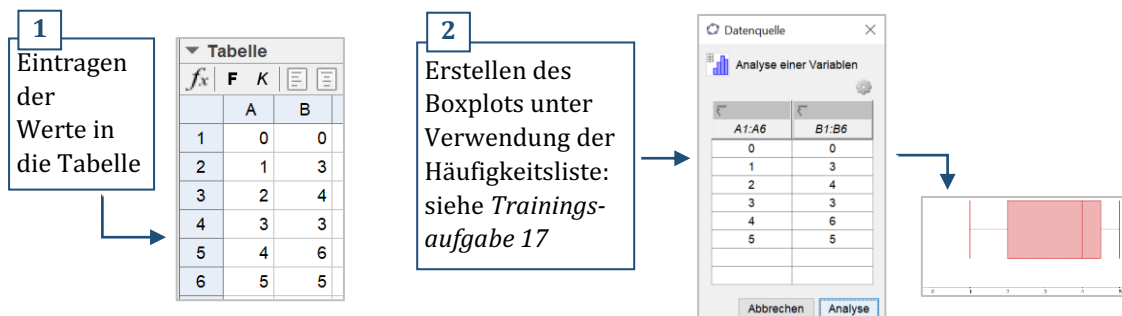


Abb. 140: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 14

B. REGRESSION

Mit Hilfe der Tabellenkalkulation erhält man ein Werkzeug, mit welchem man auf sehr unkomplizierte Weise Funktionsgleichungen erstellen bzw. die Güte der dadurch erhaltenen Modelle untersuchen kann.

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 20

Nutze zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben die Tabelle:

- a) Bestimme die Funktionsgleichung der linearen Funktion g durch $A(-1/3)$ und $B(3/8)$.
- b) Bestimme die Termdarstellung der quadratischen Funktion f , deren Graphen du hier abgebildet siehst:

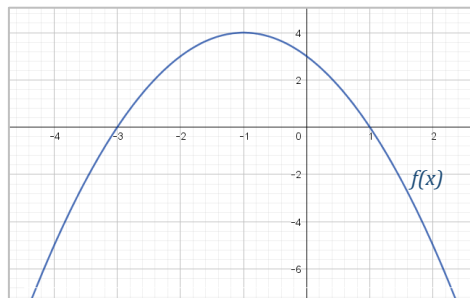


Abb. 141: Graph - Trainingsaufgabe 20

- c) Ermittle zur angegebenen Wertetabelle die Funktionsgleichung der zugehörigen Exponentialfunktion h in der Form $h(x) = a \cdot b^x$ und $h(x) = a \cdot e^{\lambda x}$:

x	1	3
$h(x)$	4,5	10,125

Tab. 19: Exponentialfunktion

TRAININGSAUFGABE 20 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

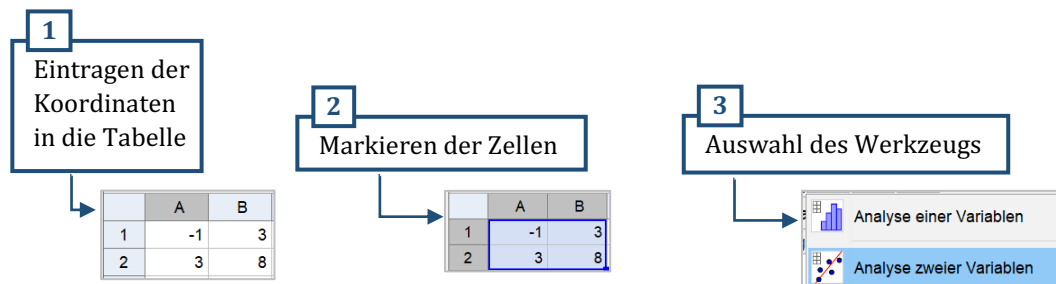
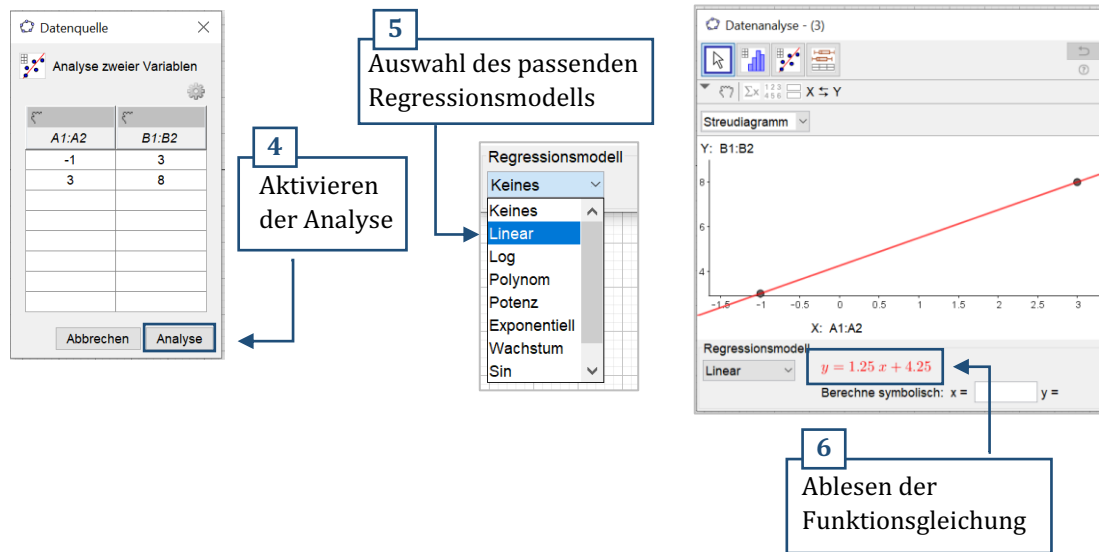
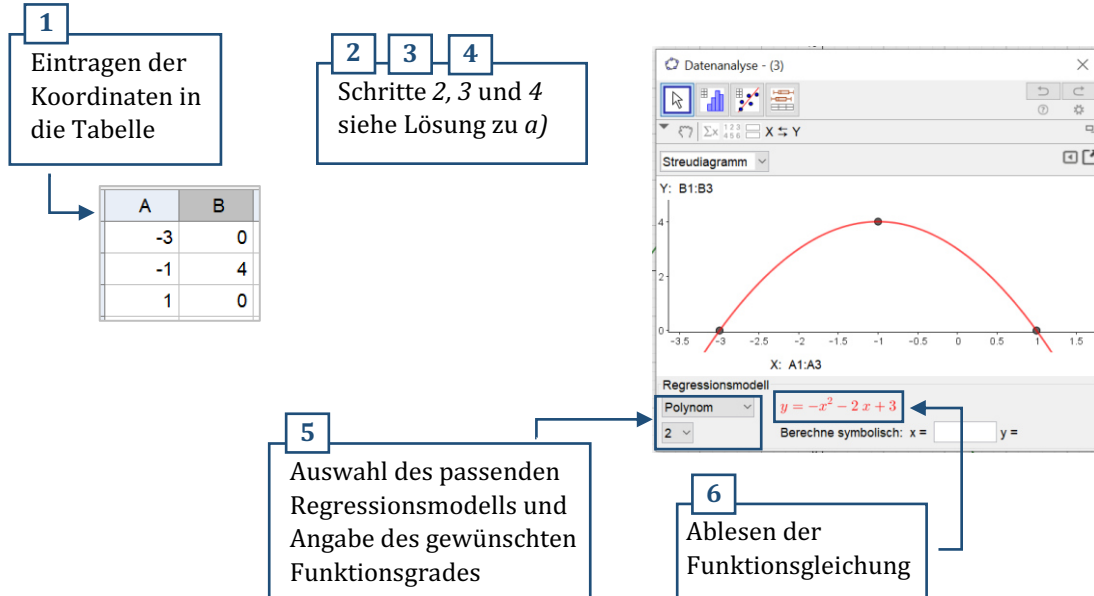


Abb. 142: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 20 (Teil 1)



b)



c)

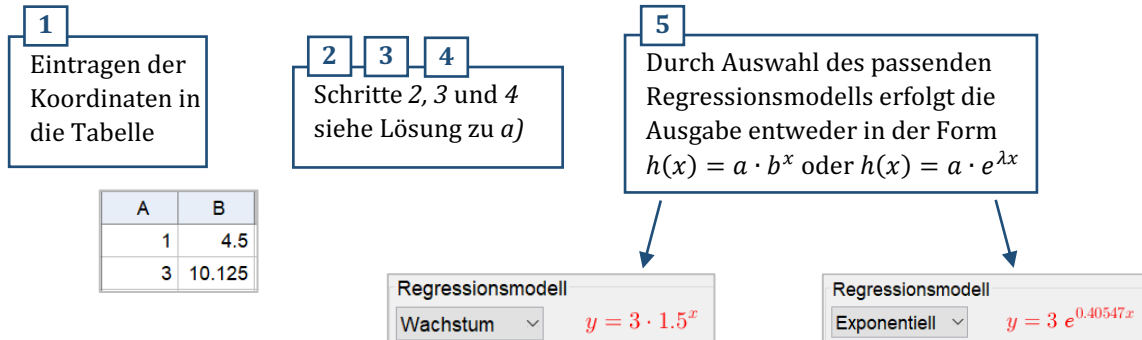


Abb. 143: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 20 (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Erfahrungsgemäß kommt diese Methode zur Erstellung von Funktionsgleichungen bei Schülern selten zur Anwendung. In Phasen, in denen GeoGebra als reine Black-Box zum Einsatz kommt, stellt sie allerdings einen schnellen und vor allem wenig fehlerbehafteten Weg dar, auf den nicht verzichtet werden sollte.

Folgende Aspekte konnte ich beim Einsatz der Tabellenkalkulation zur Bestimmung von Funktionsgleichungen und Regressionsmodellen beobachten:

- x- und y-Koordinaten werden vertauscht in die Tabelle eingetragen.
- Anstelle des Werkzeugs *Analyse zweier Variablen* wird das Werkzeug *Analyse einer Variablen* verwendet.
- Das Ablesen von Koordinaten der Punkte aus einem vorgegebenen Funktionsgraphen erfolgt sehr ungenau.
- Es wird eine Funktionsgleichung zu einem gegebenen Graphen erstellt, obwohl die Aufgabe auch ohne diese zu lösen wäre. Schüler erhalten so oftmals ebenfalls die korrekten Lösungen, jedoch führt ein derartiges Vorgehen während der Übungsphasen dazu, dass an der Entwicklung und Übung entsprechender Grundkompetenzen vorbei gearbeitet wird.

Dieses Vorgehen konnte ich beispielsweise bei folgender Aufgabe beobachten:

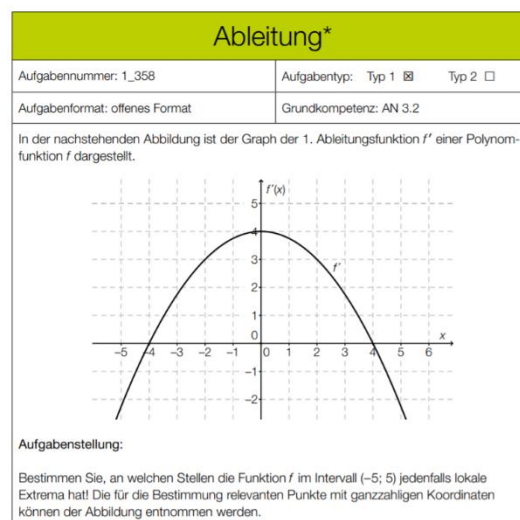


Abb. 144: Aufgabe „Ableitung“ [120]

Mit Hilfe der Tabellenkalkulation wird die Funktionsgleichung der abgebildeten Ableitungsfunktion erstellt. Durch Berechnung und Darstellung einer zugehörigen Stammfunktion können die lokalen Extremstellen abgelesen werden.

PRAXISBEISPIEL 15

Wachstum*	
Aufgabennummer: 1_340	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2
Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess der Form $f(t) = c \cdot a^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t .	
Aufgabenstellung:	
Ermitteln Sie für $t = 2$ und $t = 3$ die Werte der Funktion f !	
t	$f(t)$
0	400
1	600
2	$f(2)$
3	$f(3)$
$f(2) =$ _____	
$f(3) =$ _____	

Abb. 145: Praxisbeispiel 15 [121]

PRAXISBEISPIEL 15 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

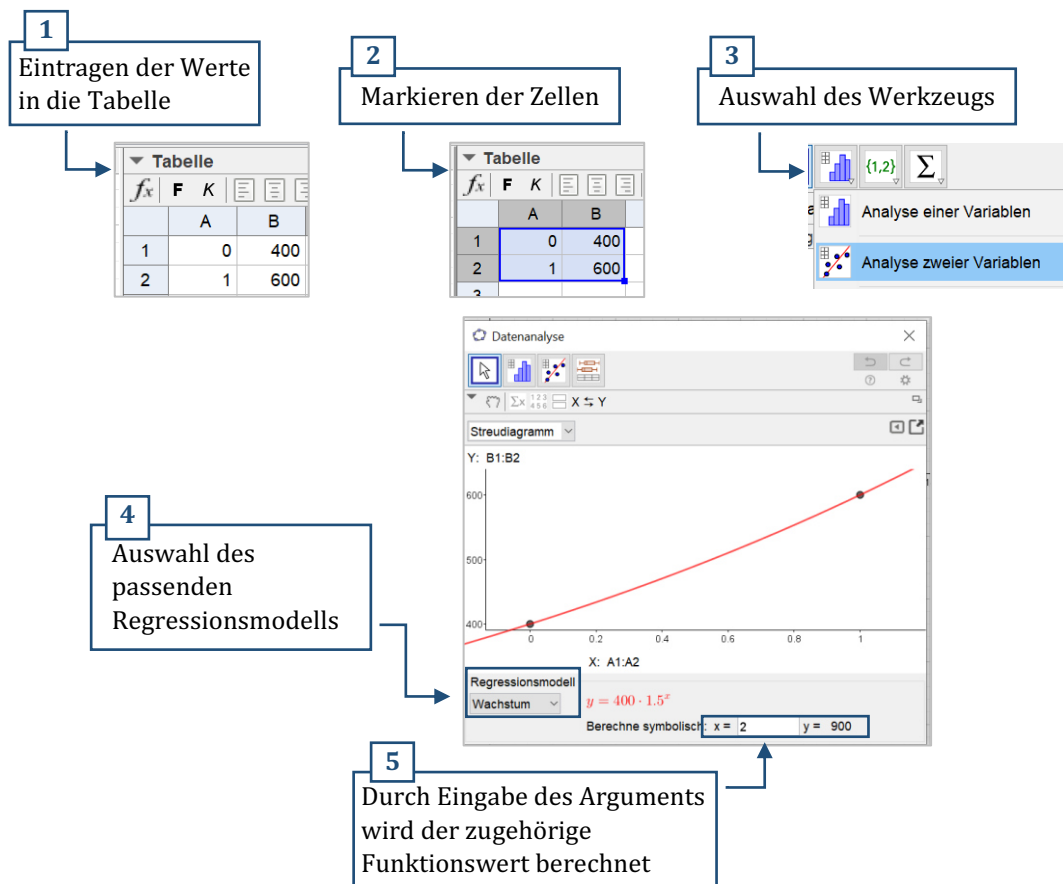


Abb. 146: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 15

PRAXISBEISPIEL 15- HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Hierbei wird oft übersehen, dass die Berechnung der Funktionswerte auch ohne vorherige Ermittlung der Funktionsgleichung erfolgen kann. Meist birgt die Berechnung der Werte auch nach Aufstellen der Funktionsgleichung noch große Schwierigkeiten.

PRAXISBEISPIEL 16

Im Schulbuch *Mathematik verstehen 6* findet man folgende Aufgabe ([86], S. 231):

Eine Wohnung wird mit Erdgas beheizt. Der Gasverbrauch hängt im Allgemeinen von der Außentemperatur ab. Um den ungefähren Gasverbrauch vorhersagen zu können, werden während einer Heizperiode (September – Juni) der durchschnittliche tägliche Gasverbrauch (in Kubikdezimeter) sowie die Durchschnittstemperatur gemessen:

Monat	Okt.	Nov.	Dez.	Jän.	Feb.	Mär.	Apr.	Mai	Jun.
Temperatur	9,7	3,4	-2,7	-1,9	-1,4	8,0	9,8	13,9	9,7
Gasverbrauch	147	173	246	241	249	139	127	71	31

Tab. 20: Gasverbrauch

Aufgabenstellung (adaptiert, vgl. ebd. S. 231):

- Kannst du einen (tendenziellen) Zusammenhang zwischen der Temperatur und dem Gasverbrauch erkennen?
- Ist es möglich, zur zugehörigen Punktwolke eine Passgerade einzuzeichnen?

PRAXISBEISPIEL 16 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

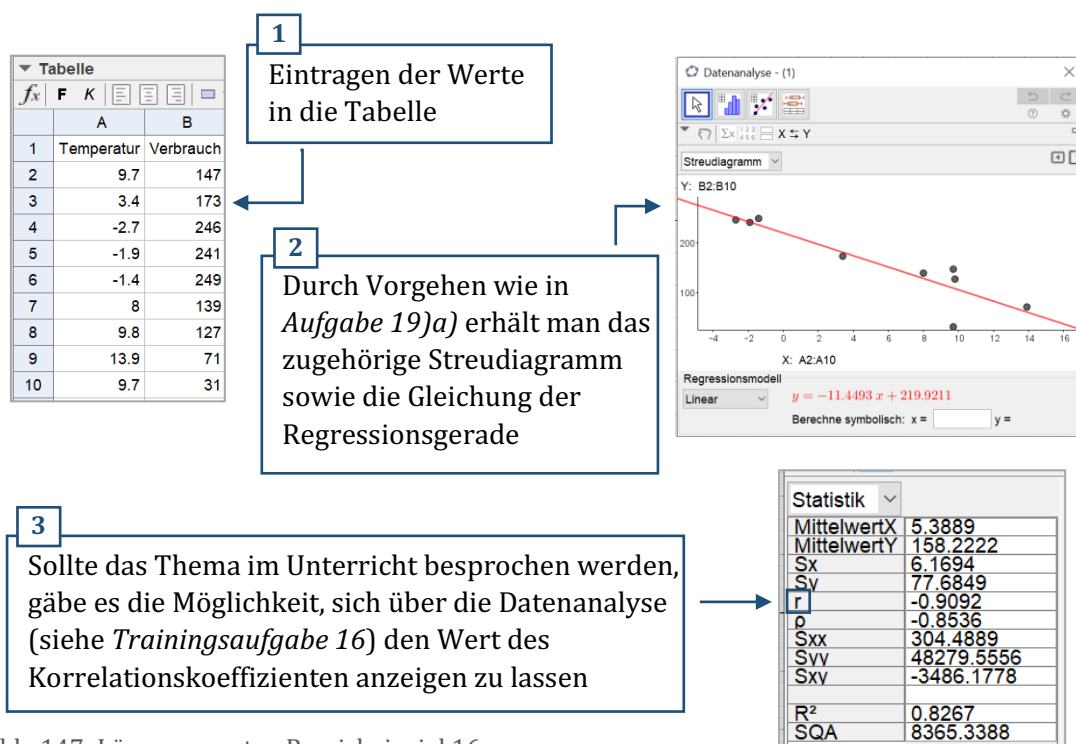


Abb. 147: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 16

C. REKURSIVE MODELLE

Wie bereits angesprochen, bietet die Tabellenkalkulation eine Möglichkeit, rekursive Modelle bereits in der Unterstufe zu behandeln. Dabei steht nicht das Erstellen der konkreten Termdarstellung, sondern das Formulieren des Wachstumsprozesses anhand von „Übersetzungsregeln“, die bereits im Zusammenhang mit dem Thema *Terme und Gleichungen* behandelt werden, im Vordergrund (vgl. [70], S. 80). Da derartige Übersetzungsvorgänge auch in der Oberstufe oft noch für Probleme sorgen, ist es meiner Ansicht nach sinnvoll, das intuitive Beschreiben der Vorgänge mithilfe des Technologieeinsatzes zu üben, bevor es zur Ausformulierung mathematischer Modelle kommt.

Dabei gilt es folgende Begriffe und Zusammenhänge zuvor zu wiederholen und in die Aufgabenstellungen einfließen zu lassen (vgl. ebd., S. 80):

- Abnahme/Zunahme um p %
- Abnahme/Zunahme auf p %
- Abnahme/Zunahme auf das r-fache
- Abnahme/Zunahme um das r-fache
- Relative/absolute Änderung
- Direkte Proportionalität
- Lineare(s)/exponentielle(s) Wachstum/Abnahme
- Falls bereits besprochen: beschränkte(s)/logistische(s) Wachstum/Abnahme

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 20

Raucher nehmen pro Zigarette ca. 1,5 mg Nikotin auf. Innerhalb einer Stunde baut der Körper rund 30 Prozent des vorhandenen Nikotingehalts ab. Wie hoch ist der Gehalt im Körper einer Person nach 7 Stunden, wenn diese stündlich eine Zigarette raucht und sich zu Beginn der Messung bereits 0,8 mg Nikotin im Körper befinden? (Vgl. [90])

TRAININGSAUFGABE 20 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

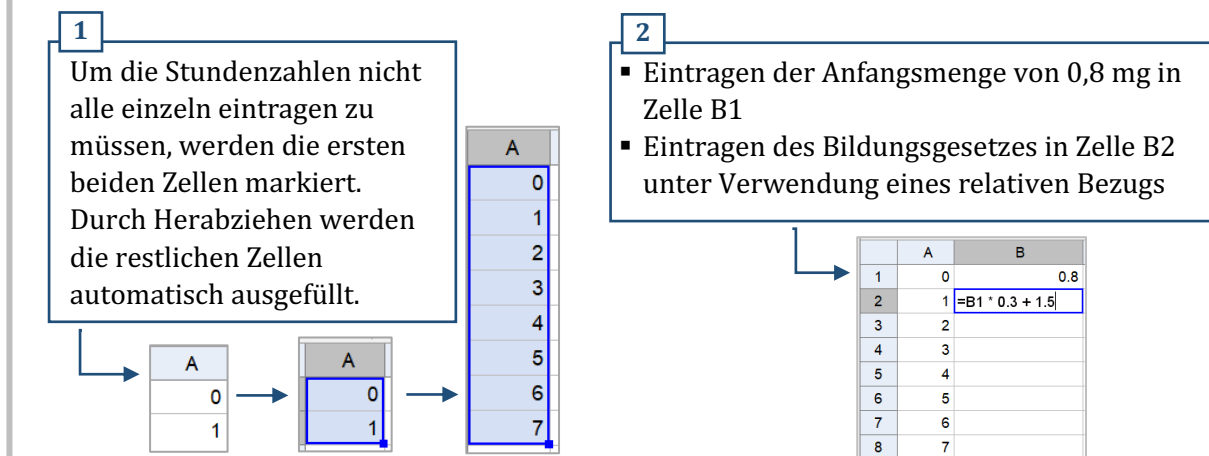


Abb. 148: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 20 (Teil 1)

3

Kopieren der Formel und automatisches Ausfüllen der restlichen Zellen durch Markieren und Herabziehen des Inhalts von Zelle B2.

	A	B
1	0	0.8
2	1	1.74
3	2	2.022
4	3	2.1066
5	4	2.13198
6	5	2.13959
7	6	2.14188
8	7	2.14256

Abb. 149: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 20 (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Die Übersetzung des Textes in ein entsprechendes mathematisches Modell spielt bei dieser Art von Aufgabe eine zentrale Rolle, weshalb davon abgesehen wurde, die Bildungsvorschrift anzugeben.

Vor der Behandlung des Themas ist es notwendig, den Einsatz relativer und absoluter Bezüge zu wiederholen. Die Verknüpfung der Tabellenkalkulation mit der Grafik-Ansicht ermöglicht weitere Untersuchungen und wird in *Kap. 1.5.5* näher dargestellt.

BEISPIEL AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 17

Eine Aufgabe im Buch *Mathematik verstehen: Maturatraining* lautet folgendermaßen ([91], S. 58):

In einer bestimmten Region leben zwei Vogelpopulationen, die einander im Bestand wechselseitig beeinflussen. Bei der Bestandsaufnahme am Ende des ersten Beobachtungsjahres umfasst die eine Population $V_1(1) = 120$ Tiere, die andere Population $V_2(1) = 80$ Tiere. Für die Entwicklung der Bestände der beiden Populationen haben Forscher folgendes Modell entwickelt, bei dem $V_1(n)$ und $V_2(n)$ die Bestände am Ende des n -ten Beobachtungsjahres angeben:

$$V_1(n+1) = 1,2 \cdot V_1(n) - 0,5 \cdot V_2(n)$$

$$V_2(n+1) = 0,2 \cdot V_1(n) + 0,9 \cdot V_2(n)$$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Bestand beider Vogelpopulationen am Ende des dritten Jahres! (Runden Sie, wenn nötig, auf eine ganze Zahl!)

PRAXISBEISPIEL 17 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

1

Eintragen von $V_1(1)$ in Zelle B2, $V_2(1)$ in Zelle C2

Tabelle			
	A	B	C
1		V_1	V_2
2	1	120	80

2

Eingabe der jeweiligen Formel:

→ in Zelle B3: $=1.2B2 - 0.5C2$

→ in Zelle C3: $=0.2B2 + 0.9C2$

3

Durch Kopieren der Zellen B3 und C3 (markieren und herabziehen) werden anhand der relativen Zellbezüge die Bestände berechnet

	V_1	V_2
1	120	80
2	104	96
3		
4		
5		

	V_1	V_2
1	120	80
2	104	96
3	76.8	107.2
4	38.56	111.84
5	-9.648	108.368

Abb. 150: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 17

PRAXISBEISPIEL 17 – HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Ich habe die Erfahrung gemacht, dass einige Schüler beim händischen Berechnen dieser Aufgabe große Probleme haben, den Überblick zu behalten. Hier kann es helfen, das Beispiel zunächst mit Hilfe von GeoGebra zu lösen und danach die Zelleninhalte und jeweiligen Formeln sowie durch Kopie entstandenen relativen Bezüge zu betrachten. Eine derartige Aufgabenstellung sollte jedoch nicht zu Beginn des Themas und erst nach Wiederholung des Einsatzes von Zellbezügen durchgenommen werden.

Der Einsatz von relativen und absoluten Zellbezügen kann bereits in der Unterstufe bei der Erstellung von Wertetabellen zu gegebenen Funktionsgleichungen erfolgen. Der Vorteil gegenüber der Berechnung der entsprechenden Funktionswerte im CAS liegt hierbei darin, dass der „Einsetzungscharakter“ beim Ausrechnen dieser Werte nicht verloren geht, sondern durch das Beziehen auf bestimmte Zellen in den Fokus rückt.

1.5.4 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNER-WERKZEUGKOMPETENZ

Das Berechnen von Wahrscheinlichkeiten kann sowohl anhand von Befehlen in der CAS- oder Algebra-Ansicht als auch über den *Wahrscheinlichkeitsrechner* erfolgen.

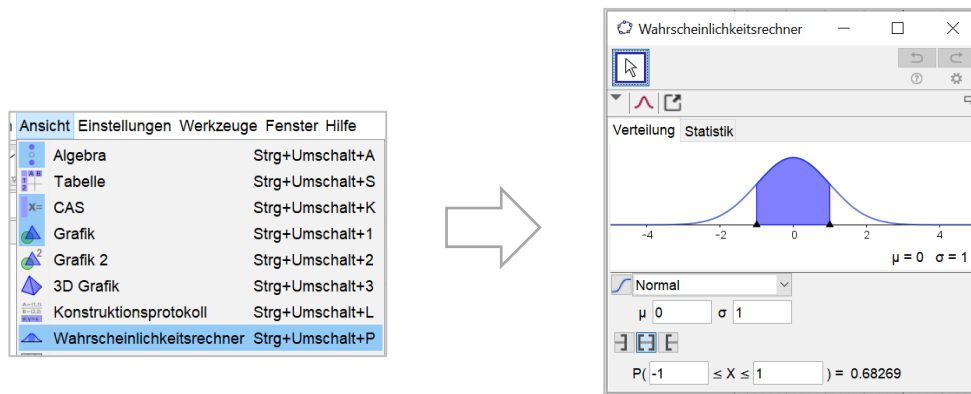


Abb. 151: Wahrscheinlichkeitsrechner

Da mit Hilfe des *Wahrscheinlichkeitsrechners* ein sehr intuitives Arbeiten ermöglicht wird, stellt dieser meist die „schülerfreundlichere“ Variante der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Darstellung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowie auch Durchführung statistischer Testverfahren dar (vgl. [92]).

WICHTIGE FUNKTIONEN

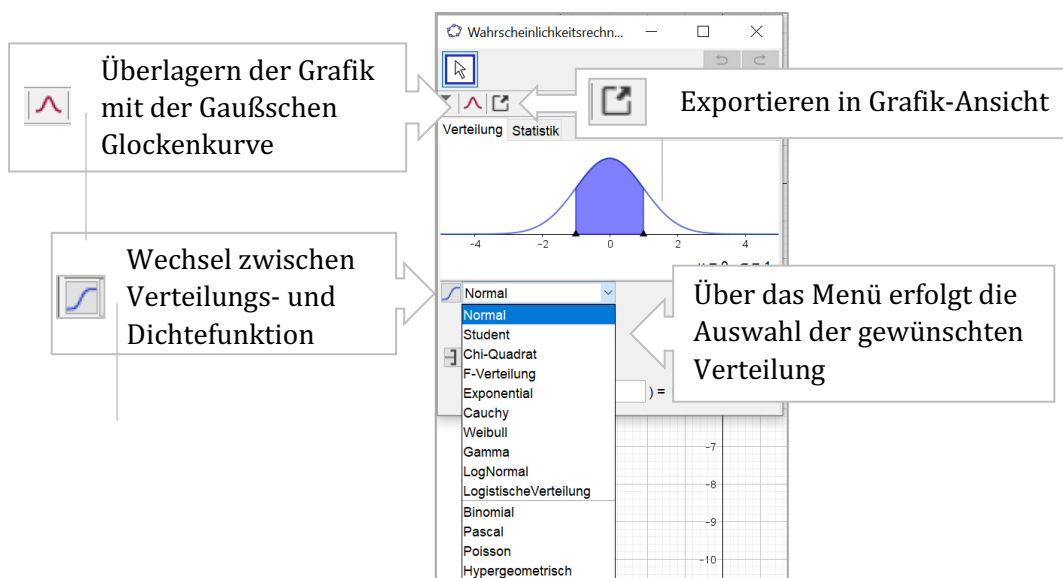


Abb. 152: Wahrscheinlichkeitsrechner – wichtige Funktionen

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 21

X sei eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $n = 20$ und $p = \frac{1}{3}$.

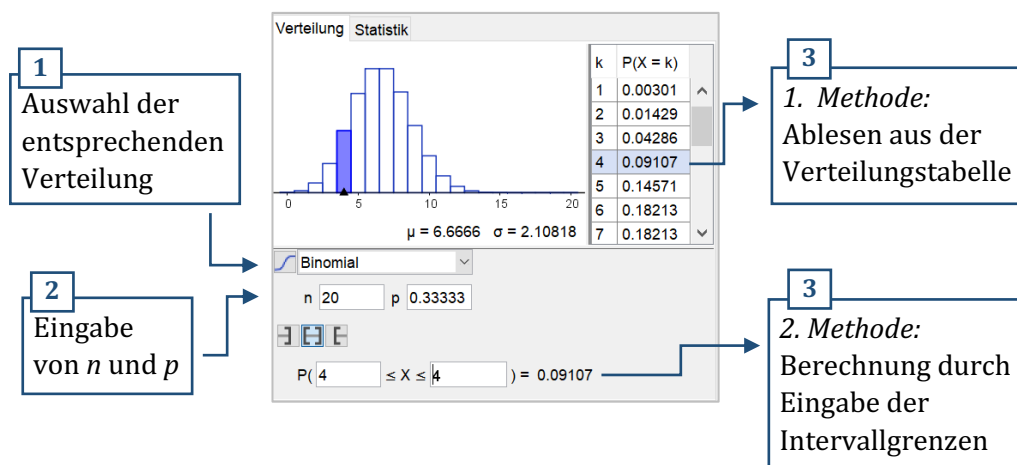
Gib den Erwartungswert und die Standardabweichung an.

Berechne außerdem folgende Wahrscheinlichkeiten:

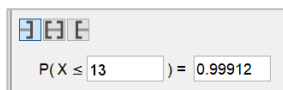
- a) $P(X = 4)$ d) $P(5 \leq X \leq 9)$
 b) $P(X \leq 13)$ e) $P(X < 7)$
 c) $P(X \geq 4)$ f) $P(X > 12)$

TRAININGSAUFGABE 21 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

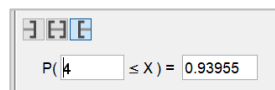
a)



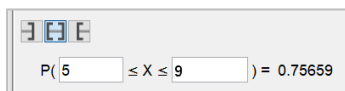
b)



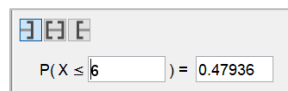
c)



d)



e)



f)

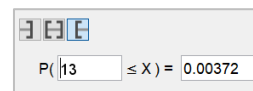


Abb. 153: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 21

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zur Binomialverteilung sollte der Wahrscheinlichkeitsrechner erst dann zum Einsatz kommen, wenn eine händische Berechnung mittels Formel reibungslos funktioniert. Zudem sollte auch danach nicht ausschließlich der Rechner verwendet, sondern auch immer wieder händische Berechnungen eingefordert werden, da Schüler erfahrungsgemäß große Schwierigkeiten bei der Interpretation von Umkehraufgaben aufweisen, welche meist auf fehlende Kenntnisse im Einsatz der Formel zurückzuführen sind (siehe *Praxisbeispiel 19*).

Bei dieser Aufgabe ist auf eine Einbettung in eine Anwendungssituation verzichtet worden, da hier der Einsatz des Werkzeugs im Vordergrund steht. Die Tatsache, dass für viele Schüler das „Übersetzen“ von Begriffen wie *höchstens* und *mindestens* Probleme bereitet, darf dabei nicht übersehen werden und sollte dementsprechend im Unterricht zur Sprache kommen.

Außerdem führt die Darstellung von $P(X \geq 4)$ in der Form $P(\boxed{4} \leq X)$ ebenfalls öfters zu Verwirrungen, weshalb auch dieser Sachverhalt thematisiert werden sollte.

BEISPIELE AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 18

Laplace-Wahrscheinlichkeit												
Aufgabennummer: 1_186		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: WS 2.3										
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
In einer Schachtel befinden sich ein roter, ein blauer und ein gelber Wachsmalstift. Ein Stift wird zufällig entnommen, dessen Farbe notiert und der Stift danach zurückgelegt. Dann wird das Experiment wiederholt. Aufgabenstellung: Beobachtet wird, wie oft bei zweimaligem Ziehen ein gelber Stift entnommen wurde. Die Werte der Zufallsvariablen X beschreiben die Anzahl der gezogenen gelben Stifte. Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an! <table border="1"> <tbody> <tr> <td>$P(X = 0) > P(X = 1)$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$P(X = 2) = \frac{1}{9}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$P(X \leq 2) = \frac{8}{9}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$P(X > 0) = \frac{5}{9}$</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>$P(X < 3) = 1$</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>			$P(X = 0) > P(X = 1)$	☐	$P(X = 2) = \frac{1}{9}$	☐	$P(X \leq 2) = \frac{8}{9}$	☐	$P(X > 0) = \frac{5}{9}$	☐	$P(X < 3) = 1$	☐
$P(X = 0) > P(X = 1)$	☐											
$P(X = 2) = \frac{1}{9}$	☐											
$P(X \leq 2) = \frac{8}{9}$	☐											
$P(X > 0) = \frac{5}{9}$	☐											
$P(X < 3) = 1$	☐											

Abb. 154: Praxisbeispiel 18 [125]

PRAXISBEISPIEL 18 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

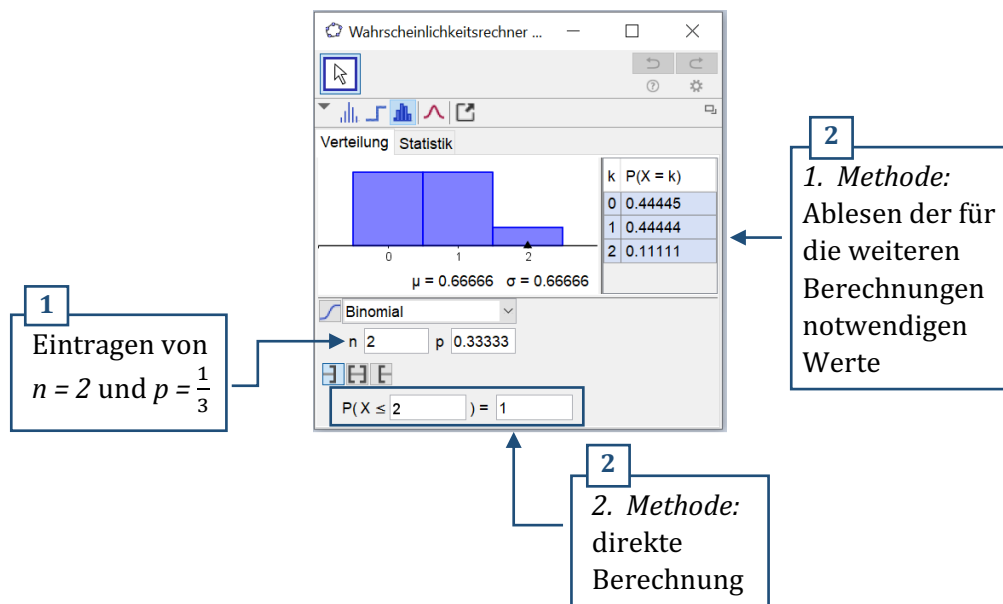


Abb. 155: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 18

Diese Aufgabe bereitet den Schülern erfahrungsgemäß große Probleme – meist wird übersehen, dass die Binomialverteilung zugrunde liegt.

Im Zusammenhang mit dem Thema *Binomialverteilung* konnte ich beobachten, dass dem händischen Berechnen im Unterricht häufig nur sehr wenig Aufmerksamkeit geschenkt wird. Dies führt dazu, dass Aufgaben wie die Folgende für viele Schüler eine große Herausforderung darstellen und – wenn überhaupt – nur auf sehr umständliche, zeitintensive Weise gelöst werden.

PRAXISBEISPIEL 19

Trefferwahrscheinlichkeit*	
Aufgabennummer: 1_708	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 3.2
Bei einem Training wirft eine Basketballspielerin einen Ball sechsmal hintereinander zum Korb. Fällt der Ball in den Korb, spricht man von einem Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit dieser Spielerin beträgt bei jedem Wurf 0,85 (unabhängig von den anderen Würfen). Aufgabenstellung: Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses beschreibt!	
Die Spielerin trifft genau einmal.	A $1 - 0,85^6$
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	B $0,15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^1 \cdot 0,15^5$
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	C $1 - 0,15^6$
Die Spielerin trifft genau zweimal.	D $0,85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,85^5 \cdot 0,15^1$
	E $6 \cdot 0,85 \cdot 0,15^5$
	F $\binom{6}{2} \cdot 0,85^2 \cdot 0,15^4$

Abb. 156: Praxisbeispiel 19 [122]

PRAXISBEISPIEL 19 – HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Da, wie bereits erwähnt, viele Schüler Probleme beim händischen Berechnen der Binomialverteilung (mittels Formel) haben, ist es für sie umso schwieriger, die Terme den vorgegebenen Ereignissen zuzuordnen. Oft wird die Berechnung dieser Ereignisse über GeoGebra durchgeführt, die vorgegebenen Terme ausgerechnet und im Anschluss die Ergebnisse verglichen. Um dieser Problematik vorzubeugen, ist es in meinen Augen wichtig, den Einsatz von GeoGebra bei der Einführung des Themas auf eine Kontrollfunktion der eigenen Berechnungen zu beschränken.

B. NORMALVERTEILUNG

WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 22

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 10$ und $\sigma = 0,7$.

1) Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners:

a) $P(X \leq 9,1)$

d) $P(X < 10,2)$

b) $P(X \geq 10,5)$

e) $P(X = 9,3)$

c) $P(5 \leq X \leq 9)$

f) $P(9,8 < X \leq 10,7)$

2) Löse die Aufgaben 1)a)b)c) auch im CAS.

TRAININGSAUFGABE 22 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

1)a)

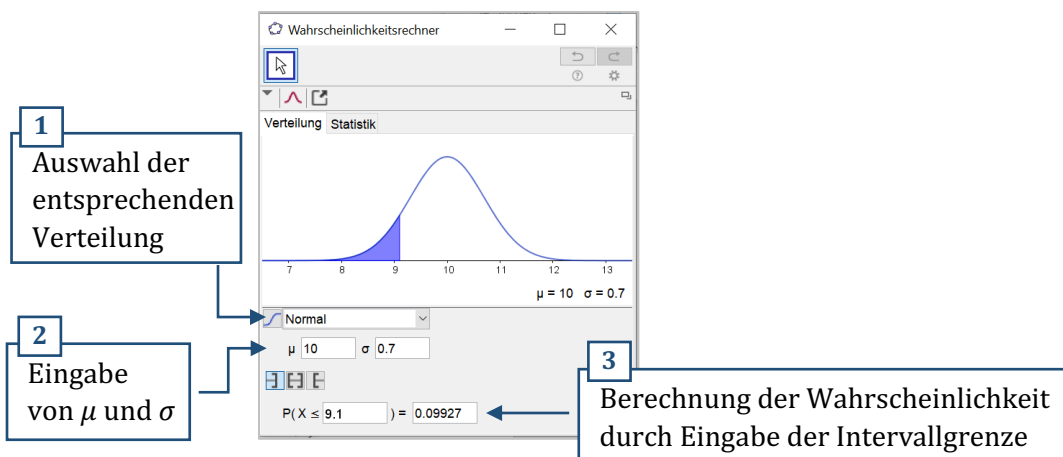


Abb. 157: Lösungsweg – Trainingsaufgabe (Teil 1)

Die Berechnung der Aufgaben 1)b) bis 1)f) erfolgt auf analog:

1)b)  $P(10.5 \leq X) = 0.23753$

1)c)  $P(5 \leq X \leq 9) = 0.07656$

1)d)  $P(X \leq 10.2) = 0.61245$

1)e)  $P(9.3 \leq X \leq 9.3) = 0$

1)f)  $P(9.8 \leq X \leq 10.7) = 0.4538$

2)a)  CAS
1 Normal(10, 0.7, 9.1)
≈ 0.09927

2)b)  CAS
1 1 - Normal(10, 0.7, 10.5)
≈ 0.23753

2)c)  CAS
1 Normal(10, 0.7, 9) - Normal(10, 0.7, 5)
≈ 0.07656

Die Berechnung erfolgt anhand des Befehls:

Normal(<Mittelwert>, <Standardabweichung>, <Wert der Variablen>)

Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass die Zufallsvariable kleiner oder gleich dem angegebenen Wert der Variablen ist.

Abb. 158: Lösungsweg – Trainingsaufgabe (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Die Tatsache, dass (im Gegensatz zur Binomialverteilung) bei normalverteilten Zufallsvariablen keine Unterscheidung zwischen $P(X \leq a)$ und $P(X < a)$ (bzw. $P(X \geq a)$ und $P(X > a)$) stattfindet, bereitet häufig Probleme.

Da im Wahrscheinlichkeitsrechner (bis auf die Skalierung der Achse) kein Unterschied hinsichtlich der Graphen der Dichtefunktionen mit unterschiedlichen Erwartungswerten und Standardabweichungen aufscheint, sehe ich es außerdem als wichtig an, regelmäßige händische Skizzen beim Lösen der Aufgaben von den Schülern einzufordern:

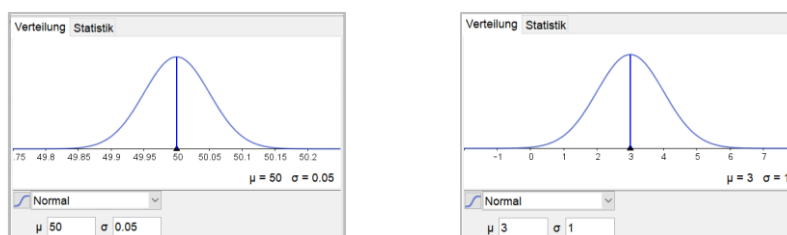


Abb. 159: Lösungsweg – Vergleich zweier Glockenkurven

Auch, wenn der Vergleich der Kurven über das Exportieren in die Grafik-Ansicht ebenso möglich ist, hat sich in der Praxis gezeigt, dass Skizzen, die vor dem Lösen der Aufgabe

per Hand erstellt werden, zu einem besseren Verständnis führen können. Dazu gilt es allerdings auch die diesbezüglich zugrunde liegenden Eigenschaften, wie etwa $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$ oder auch die Bedeutung der Wendepunkte des Graphen in diesem Zusammenhang, zu besprechen und bei der Erstellung der Skizzen mit einfließen zu lassen. So erhalten die Schüler die Möglichkeit, bereits vor der Berechnung abzuschätzen, in welchem Bereich das gesuchte Ergebnis liegen muss.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit im CAS gehört genau genommen nicht in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechner-Werkzeugkompetenz, jedoch ist ein Ermitteln des Erwartungswerts und der Standardabweichung nur auf diese Weise möglich. Meist kommt der Gebrauch des CAS-Befehls *Normal* im Unterricht erst bei der Bestimmung dieser beiden Werte zum Einsatz, wodurch oftmals Verständnisschwierigkeiten hinsichtlich der Tatsache, dass die Fläche „auf der linken Seite“ des angegebenen Variablenwerts berechnet wird, auftreten. So macht es in meinen Augen Sinn, die Verwendung von Anfang parallel zur Berechnung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners zu üben.

TRAININGSAUFGABE 23

X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 25$ und $\sigma = 2,3$.

1) Ermittle a näherungsweise, sodass gilt:

a) $P(X \leq a) = 0,75$

b) $P(X \geq a) = 0,18$

2) Ermittle ein um μ symmetrisches Intervall, in welchem 90% aller Werte liegen!

TRAININGSAUFGABE 23 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

1)a)

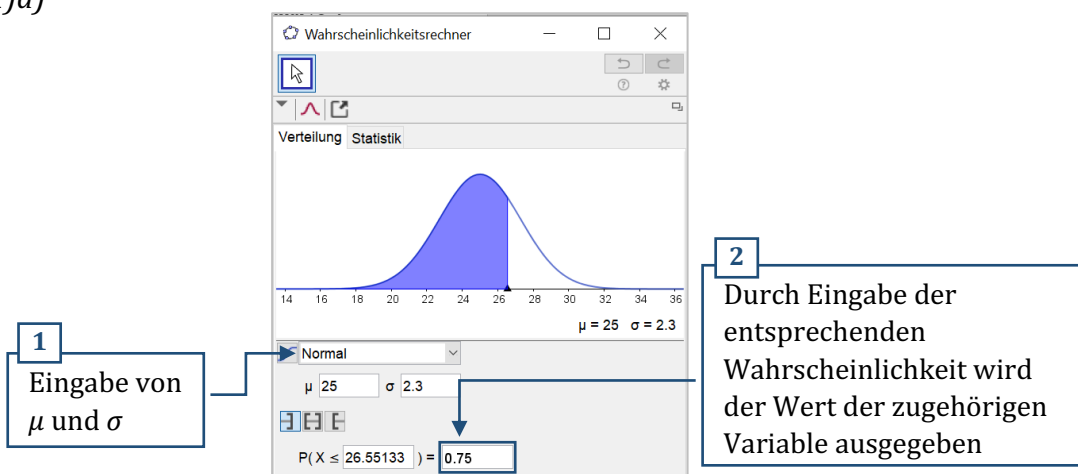
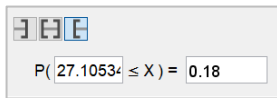


Abb. 160: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23 (Teil 1)

Die Berechnung der Aufgaben 1)b) und 2) erfolgt auf dieselbe Weise:

1)b)



2)

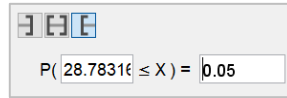
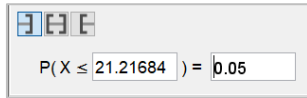


Abb. 161: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23 (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Auch bei dieser Art von Aufgabe hat sich das Erstellen einer Skizze per Hand bewährt, da Schüler so einerseits ein besseres Verständnis hinsichtlich der zugrundeliegenden Fragestellung (nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern der Wert der Zufallsvariable ist gefragt) erhalten, und andererseits bereits vor der tatsächlichen Berechnung den Wertebereich des gesuchten Ergebnisses eingrenzen können. Besonderer Aufmerksamkeit sollte hierbei der Berechnung des um den Erwartungswert symmetrischen Intervalls zukommen, da dessen Berechnung häufig problembehaftet ist.

Neben dem Eintragen der gegebenen Wahrscheinlichkeit, kann der gesuchte Wert auch durch Verschieben der Intervallgrenze auf experimentelle Weise erfolgen:

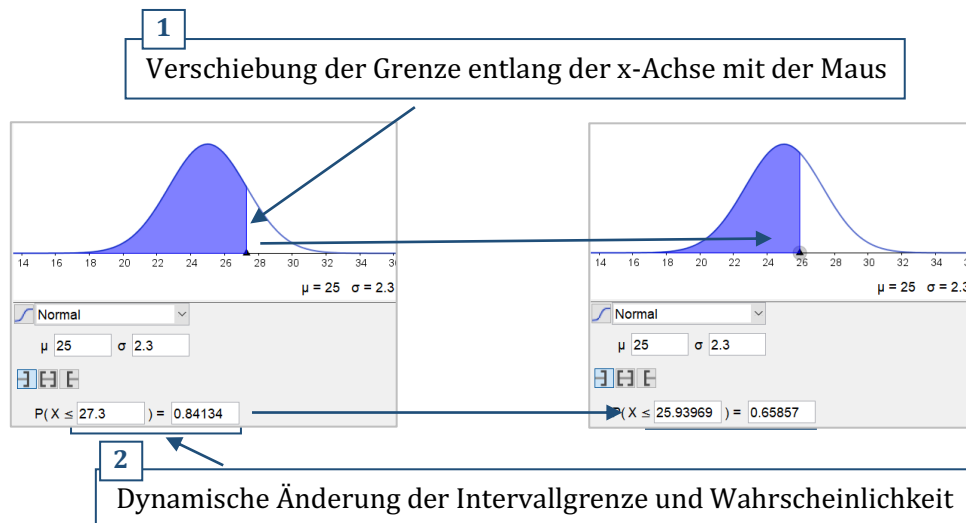


Abb. 162: Experimentelles Bestimmen der Intervallgrenzen

TRAININGSAUFGABE 23

- a) X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\sigma = 1,8$ und $P(X \leq 12) = 0,75$.
Ermittle den Erwartungswert!
- b) X sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 8,5$ und $P(X \geq 9) = 0,22$.
Bestimme die Standardabweichung!

TRAININGSAUFGABE 23 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

1

Eingabe des Befehls $\text{Normal}(\langle \text{Mittelwert} \rangle, \langle \text{Standardabweichung} \rangle, \langle \text{Wert der Variablen} \rangle)$, wobei der unbekannte Erwartungswert durch eine Variable ersetzt wird.

CAS	
1	$\text{Normal}(x, 1.8, 12)=0.75$
	NLöse: $\{x = 10.78592\}$

2

Gleichsetzen mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit und lösen der Gleichung mittels 

b)

CAS	
1	$\text{Normal}(8.5, x, 9)=0.78$
	NLöse: $\{x = 0.64751\}$

Vorgehen wie in Aufgabe a), wobei hier die unbekannte Standardabweichung durch eine Variable ersetzt wird.

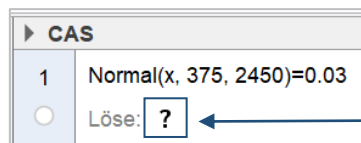
Abb. 163: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23

DIDAKTISCHER ASPEKT

Neben den bereits erwähnten Schwierigkeiten, die bei Berechnungen mit dem Befehl *Normal* auftreten können, gibt es Aufgaben, deren Lösung man nicht anhand der soeben beschriebenen Methode erhält.

Wie man in so einem Fall vorgehen kann, wird im Folgenden an einem Beispiel, das dem Schulbuch *Mathematik verstehen 8* ([93], S. 91) entnommen ist, dargestellt:

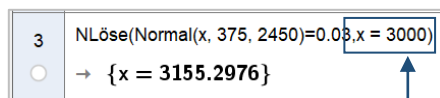
Von Tintenrollern des Typs *LongRun* gibt der Hersteller an, dass 97% der produzierten *LongRun*-Tintenroller eine Schreibleistung von mindestens 2450 m besitzen. Wie groß ist die mittlere Schreibleistung eines *LongRun*-Tintenrollers, wenn man voraussetzt, dass die Angaben des Herstellers zutreffen und die Schreibleistung normalverteilt mit $\sigma = 375m$ ist?



Das Vorgehen nach dem oben beschriebenen Weg führt in diesem Beispiel zu keinem Ergebnis.

Abb. 164: Berechnung des Erwartungswerts nicht möglich

Eine Möglichkeit der Berechnung stellt das Lösen der Gleichung über den Befehl *NLöse* (Numerisches Lösen) dar, wobei hier ein Startwert für die zugrunde liegende Iteration angegeben werden muss:



Bei der Angabe eines Startwerts kommt den Schülern die Aufgabe zu, anhand der angegebenen Informationen (Schreibleistung und Standardabweichung) einen sinnvollen Näherungswert zu bestimmen

Abb. 165: Berechnung des Erwartungswerts über NLöse

Alternativ kommt man auch auf graphischem Weg zu einer Lösung. Genau genommen kommt fällt diese Variante eigentlich in den Bereich der *Verknüpfung mehrerer Werkzeuge*, wird aber der Vollständigkeit halber bereits an dieser Stelle beschrieben. Hierbei empfiehlt es sich, mit den Schülern bereits davor Aufgaben zur Normalverteilung im Grafik-Fenster bearbeitet zu haben.

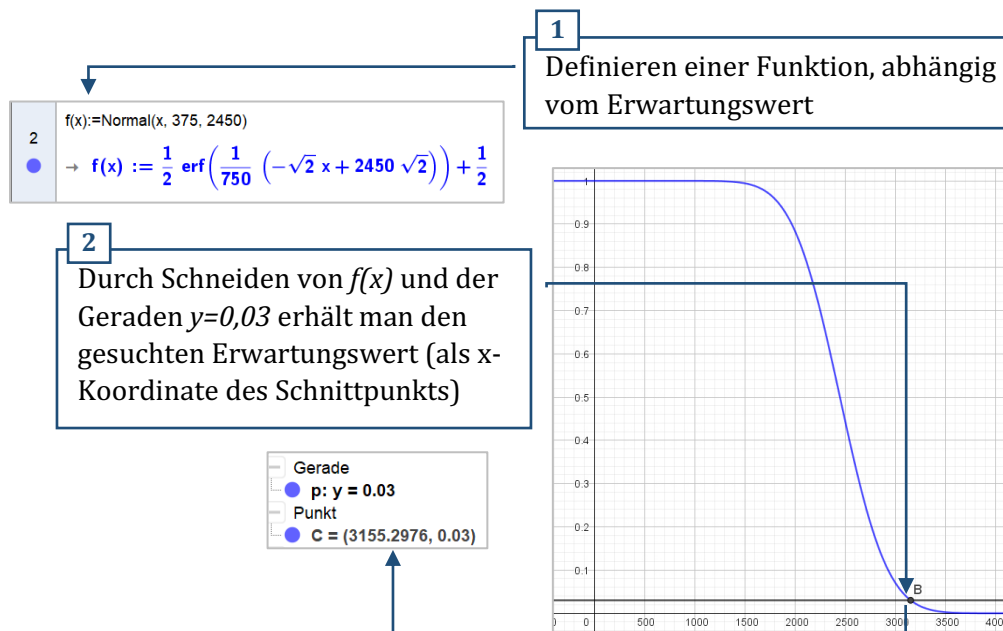


Abb. 166: Graphisches Ermitteln des Erwartungswerts

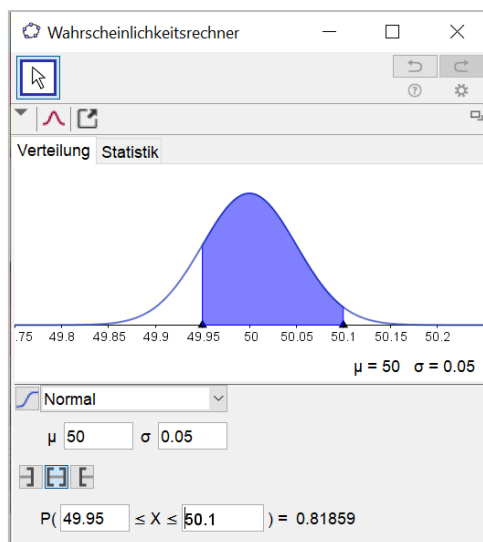
BEISPIEL AUS DER PRAXIS

PRAXISBEISPIEL 20

Folgende Aufgabe aus dem Schulbuch *Mathematik verstehen 8* stellt für Schüler häufig eine Herausforderung dar ([93], S. 84):

Bei der Produktion von Stromkabeln ist die Länge des aufgerollten Kabels annähernd normalverteilt mit $\mu = 50$ und $\sigma = 0,05$ (Angaben in Meter). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge des Kabels auf einer zufällig aus der Produktion herausgegriffenen Rolle außerhalb des Intervalls $[49,95; 50,10]$ liegt?

PRAXISBEISPIEL 20 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ



1

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:
 $P(49,95 \leq X \leq 50,1)$

2

Weitere Berechnung liefert
das gesuchte Ergebnis:
 $1 - 0,81859 = 0,18141$

Abb. 167: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 20

Anmerkung: Das Summieren von $P(X \leq 49,95)$ und $P(X \geq 50,1)$ ist natürlich ebenfalls möglich.

PRAXISBEISPIEL 20 – HÄUFIGE FEHLER/PROBLEME

Bei dieser Aufgabe habe ich die Erfahrung gemacht, dass vielen Schülern die grundlegende Vorstellung über den fragten Bereich fehlt. Auch hier können das Erstellen einer händischen Skizze (vor der Eingabe in GeoGebra!) und Markieren der gesuchten Fläche Abhilfe schaffen. Eine weitere Hürde stellt die Berechnung dar, da diese nicht ausschließlich über den Wahrscheinlichkeitsrechner erfolgen kann. In diesem Zusammenhang finde ich es wichtig, den Schülern verschiedene Lösungsansätze sowie auch (nicht nur bei dieser Thematik) immer wieder Alternativen zum Technologieeinsatz aufzuzeigen und auch einzufordern.

C. KONFIDENZINTERVALLE

Die Berechnung des Konfidenzintervalls erfolgt entweder über den Wahrscheinlichkeitsrechner:

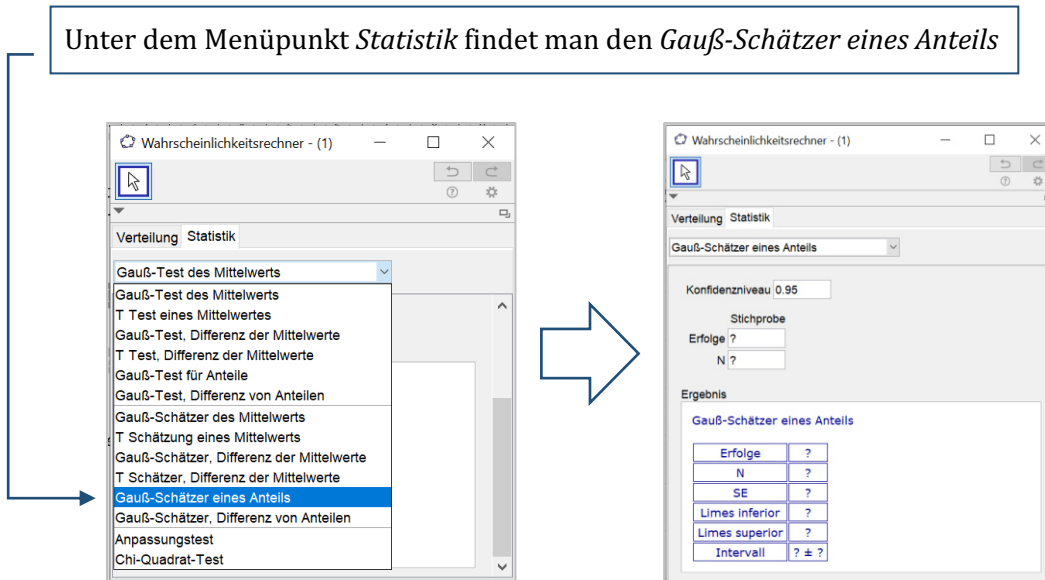


Abb. 168: Konfidenzintervall - Wahrscheinlichkeitsrechner

Oder durch Eingabe des folgenden Befehls im CAS:



Abb. 169: Konfidenzintervall - Befehl

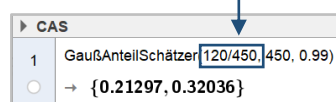
WERKZEUGKOMPETENZTRAINING

TRAININGSAUFGABE 24

Bei einer Umfrage unter 450 Personen gaben 120 Personen an, bei der kommenden Wahl die Partei A wählen zu wollen. Bestimme ein 99%-Konfidenzintervall für den unbekannten relativen Anteil der Wähler der Partei A dieser Gemeinde!

TRAININGSAUFGABE 24 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

Berechnung im CAS:



Hierbei gilt es zu beachten, dass die relative und nicht die absolute Häufigkeit der Wähler eingesetzt werden muss

Abb. 170: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 24 (CAS)

Berechnung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsrechners:

1 Eingabe des Konfidenzniveaus, der „Erfolge“ und des Stichprobenumfangs N

2 Ausgabe der unteren (Limes inferior) und oberen (Limes superior) Intervallgrenze

Gauß-Schätzer eines Anteils	
Erfolge	120
N	450
SE	0.02085
Limes inferior	0.21297
Limes superior	0.32036
Intervall	0.26667 ± 0.0537

Abb. 171: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 24 (Wahrscheinlichkeitsrechner)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei der Ermittlung von Konfidenzintervallen kommt es meist nur hinsichtlich der korrekten Eingabe der relativen oder auch absoluten Häufigkeit des untersuchten Merkmals zu Problemen. Erfahrungsgemäß ist eine Berechnung mittels Befehl im CAS weniger fehlerbehaftet als jene im Wahrscheinlichkeitsrechner, da den Schülern das Berechnen der relativen Häufigkeit (bei gegebener absoluter Häufigkeit) oft einfacher fällt, als das Ermitteln der absoluten Häufigkeit (bei gegebener relativer Häufigkeit).

Die Analyse von Konfidenzintervallen hinsichtlich bestimmter Eigenschaften stellt im Gegensatz zur Berechnung der Intervalle üblicherweise die größere Herausforderung dar (siehe *Praxisbeispiel 21*). Hier kann beispielsweise der Einsatz von Schiebereglern dazu anregen, den Sachverhalt auf experimentelle Weise zu untersuchen und daraus auf Gesetzmäßigkeiten zu schließen.

PRAXISBEISPIEL 21

Linkshänder												
Aufgabennummer: 1_308		Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐										
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)		Grundkompetenz: WS 4.1										
☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich										
Bei einer Umfrage in einem Bezirk werden 500 Personen befragt, ob sie Linkshänder sind. Als Ergebnis der Befragung wird das 95%-Konfidenzintervall $[0,09; 0,15]$ für den Anteil der Linkshänder in der Bezirkszeitung bekanntgegeben. Aufgabenstellung: Welche der nachstehenden Aussagen können Sie aufgrund dieses Ergebnisses tätigen? Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an! <table border="1"> <tbody> <tr> <td>Ungefähr 60 Personen haben angegeben, Linkshänder zu sein.</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>Hätte man 10 000 Personen befragt, wäre das 95%-Konfidenzintervall schmaler geworden.</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Linkshänder in der Umfrage kleiner gewesen wäre.</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>Der Anteil der Linkshänder im gesamten Bezirk liegt jedenfalls zwischen 9 % und 15 %.</td> <td>☐</td> </tr> <tr> <td>Das entsprechende 99%-Konfidenzintervall ist breiter als das 95%-Konfidenzintervall.</td> <td>☐</td> </tr> </tbody> </table>			Ungefähr 60 Personen haben angegeben, Linkshänder zu sein.	☐	Hätte man 10 000 Personen befragt, wäre das 95%-Konfidenzintervall schmaler geworden.	☐	Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Linkshänder in der Umfrage kleiner gewesen wäre.	☐	Der Anteil der Linkshänder im gesamten Bezirk liegt jedenfalls zwischen 9 % und 15 %.	☐	Das entsprechende 99%-Konfidenzintervall ist breiter als das 95%-Konfidenzintervall.	☐
Ungefähr 60 Personen haben angegeben, Linkshänder zu sein.	☐											
Hätte man 10 000 Personen befragt, wäre das 95%-Konfidenzintervall schmaler geworden.	☐											
Das Konfidenzintervall wäre breiter, wenn der Anteil der Linkshänder in der Umfrage kleiner gewesen wäre.	☐											
Der Anteil der Linkshänder im gesamten Bezirk liegt jedenfalls zwischen 9 % und 15 %.	☐											
Das entsprechende 99%-Konfidenzintervall ist breiter als das 95%-Konfidenzintervall.	☐											

Abb. 172: Praxisbeispiel 21 [126]

PRAXISBEISPIEL 21 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

Das Überprüfen der ersten und vierten Aussage kann nicht mit Hilfe von GeoGebra erfolgen. Allen anderen Aussagen begegnen Schüler meist durch Einsetzen geeigneter Werte und Vergleichen der dadurch erhaltenen Ergebnisse im CAS. Die größte Schwierigkeit bei dieser Aufgabe stellt meist die Bestimmung des Anteils der Personen, die angegeben haben, Linkshänder zu sein, dar.

CAS	
1	GaußAnteilSchätzer(0.12, 10000, 0.95)
☐	→ {0.11363, 0.12637}



Überprüfen der zweiten Aussage:

- Breite des Intervalls bei Stichprobenumfang 500: 6 %
- Breite des Intervalls bei Stichprobenumfang 10 000: $\approx 1,27$ %

CAS	
1	GaußAnteilSchätzer(0.03, 500, 0.95)
☐	→ {0.01505, 0.04495}



Überprüfen der dritten Aussage:

- Breite des Intervalls bei Anteil 0,12: 6 %
- Breite des Intervalls bei kleinerem Anteil (z.B. 0,03): 2,99 %

CAS	
1	GaußAnteilSchätzer(0.12, 500, 0.99)
☐	→ {0.08257, 0.15743}



Überprüfen der fünften Aussage:

- Breite des 95%-Konfidenzintervalls: 6%
- Breite des 99%-Konfidenzintervalls: $\approx 7,49$ %

Abb. 173: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 21

1.5.5 VERNETZUNG DER WERKZEUGE

Auch, wenn bereits durch die Nutzung einzelner Werkzeuge der Großteil der Aufgaben gelöst werden kann, eröffnet die Verknüpfung dieser Werkzeuge weitaus mehr Möglichkeiten und stellt somit den größten Vorteil des Technologieeinsatzes dar. Durch das Darstellen eines Sachverhalts auf unterschiedliche Arten, wird ein vernetztes Lernen auf mehreren Ebenen ermöglicht.

Ganz im Sinne der unter (einfügen) beschriebenen Handlungsdimensionen können Schüler auf diesem Weg „verschiedene mathematische Modelle für ein Problem entwickeln“ ([1], S. 21), werden dazu angehalten, diese auf ihre „Problemadäquatheit ab[zü]wägen“ (ebd., S. 21), und erhalten dabei ein Mittel, um „einen gegebenen mathematischen Sachverhalt in eine andere (tabellarische, grafische, symbolische, rekursive oder werkzeugspezifische) Darstellungsform [zu] übertragen“ und „zwischen Darstellungen oder Darstellungsformen [zu] wechseln“ (ebd., S.21).

Anmerkung: Die im Folgenden angeführten Aufgaben gehen teilweise - im Gegensatz zu den (meisten) bisher vorgestellten Werkzeugkompetenz-Trainingsaufgaben - über das reine Einüben der Technologiekompetenz hinaus. Es kommen zudem auch Beispiele aus der Schulpraxis (aus Schulbüchern oder auch den Beispielsammlungen des Bildungsministeriums) zur Anwendung, die dementsprechend adaptiert wurden. Einige Aufgaben sind zudem themenübergreifend, sodass sie gute Übungsbeispiele zur technologieunterstützten Maturavorbereitung darstellen und je nach Schulstufe gekürzt bzw. angepasst werden müssen. Auf den Einsatz von Werkzeugen, der bereits im Rahmen der Werkzeugkompetenz-Trainingsaufgaben thematisiert wurde, wird nicht mehr gesondert eingegangen.

TRAININGSAUFGABE 25

Die unter [94] einsehbare Aufgabe *Reisekosten* lautet wie folgt:

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x ... Fahrtstrecke in Kilometern (km)

$T(x)$... Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarife in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

Tab. 21: Tarife

- Übertrage die Daten in eine Tabelle und zeichne die entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem ein.
- Überlege anhand des in a) erstellen Punktediagramms, um welche Art von Funktion es sich bei $T(x)$ handeln könnte und bestimme eine Funktionsgleichung, welche die Abhängigkeit des Tarifs (in €) von der Fahrtstrecke (in km) möglichst gut beschreibt. Lass dir diese ebenfalls im Koordinatensystem anzeigen.
- Berechne den durchschnittlichen Preiszuwachs pro Kilometer für die Fahrtstrecke zwischen St. Pölten und Linz mit Hilfe der Funktionsgleichung aus b).
- Bestimme graphisch unter Verwendung der entsprechenden Punkte aus a) den durchschnittlichen Preiszuwachs pro Kilometer zwischen St. Pölten und Linz. Weshalb stimmt dieser nicht mit dem berechneten Wert aus c) überein?

TRAININGSAUFGABE 25 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

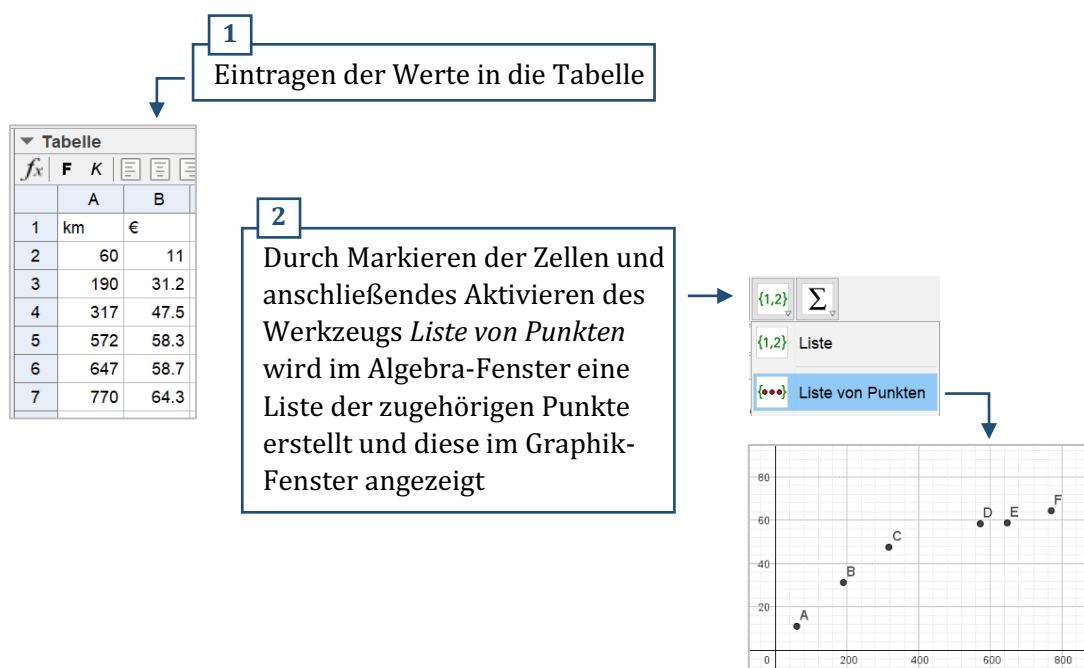
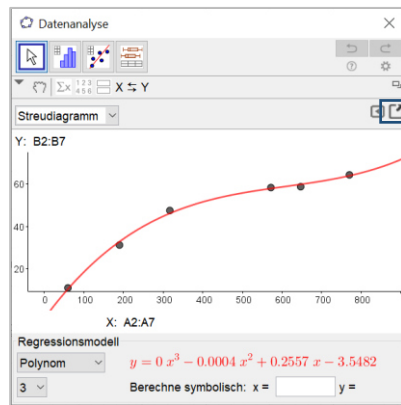


Abb. 174: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 25 (Teil 1)

b)

3

Durch Markieren der Zellen in der Tabelle und anschließendes Aktivieren des Werkzeugs  wird die Gleichung einer Polynomfunktion dritten Grades erstellt



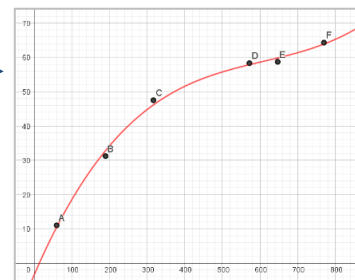
4

Durch Klicken auf

 In die Grafik-Ansicht kopieren
Kopiere in die Zwischenablage
 Export als Bild...

werden der Funktionsgraph in der Grafik-Ansicht und die Funktionsgleichung in der Algebra-Ansicht angezeigt

$$T(x) = 0.0000002069875 x^3 - 0.000377688816 x^2 + 0.2556704551594 x - 3.5482021060296$$



c)

5

Berechnung des Differenzenquotienten im Intervall [60;190]

CAS

1	$(T(190)-T(60))/(190-60)$
	≈ 0.17183

d)

6

- Konstruktion der Geraden durch die Punkte (60/11) und (190/31,20)
- Bestimmen der Steigung dieser Geraden

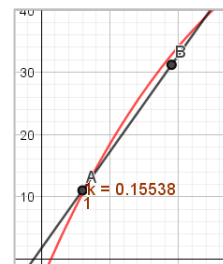


Abb. 175: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 25 (Teil 2)

Aspekte, die es bei dieser Aufgabe zu beachten gilt:

- Nach dem Erstellen der Punkte-Liste (Schritt 2), muss die Darstellung des Koordinatensystems (durch Zoomen oder Ziehen entlang der Achsen) angepasst werden, um die Punkte sehen zu können.

- Im Anschluss an das Kopieren in die Grafik-Ansicht (Schritt 4), wird die Funktionsgleichung meist in dieser Form angezeigt: $T(x) = 0x^3 - 0x^2 + 0.256x - 3.548$
Um eine sinnvolle Darstellung der Koeffizienten zu erhalten, muss die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen angepasst werden (über das Menü: *Einstellungen* → *Runden*).
- Bei der Berechnung des Differenzenquotienten (Schritt 5) wird meist darauf vergessen, dass auch im CAS auf Funktionen zugegriffen werden kann, deren Gleichung im Algebra-Fenster angezeigt wird. Schüler tendieren dazu, die Funktion erneut im CAS (anhand derselben Bezeichnung) zu definieren. Die Tatsache, dass GeoGebra automatisch eine andere Bezeichnung wählt, führt im Anschluss oftmals zu Schwierigkeiten bei der weiteren Berechnung.
- Die Ausgabe des Differenzenquotienten (Schritt 5) erfordert eine numerische Berechnung mittels $\approx$.
Es besteht außerdem (wie bereits an anderer Stelle erwähnt) die Gefahr, dass anstelle eines *Rechenwerkzeugs* ein Werkzeug zum Lösen einer Gleichung verwendet wird.

TRAININGSAUFGABE 26

- Erstelle 4 Schieberegler μ_1 , μ_2 , σ_1 und σ_2 mit den folgenden Eigenschaften:
 μ_1, μ_2 :
 Minimum: 20, Maximum: 50, Schrittweite: 5
 σ_1, σ_2 :
 Minimum: 5, Maximum: 10, Schrittweite: 1
- Definiere mithilfe des Befehls `Normal(<Erwartungswert>, <Standardabweichung>, <Wert der Variablen>, false)` die Funktionen f und g so, dass für f der Erwartungswert μ_1 und die Standardabweichung σ_1 , für g der Erwartungswert μ_2 und die Standardabweichung σ_2 verwendet werden
- Betrachte die Veränderung der beiden Graphen bei Variation der Schieberegler. Beschreibe deine Beobachtungen in eigenen Worten!

TRAININGSAUFGABE 26 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

- Erstellen der Schieberegler
- Einstellungen der Schieberegler anpassen
- Definieren der Funktionen:

`f(x)=Normal( $\mu_1$ ,  $\sigma_1$ , x, false)`

`g(x)=Normal( $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ , x, false)`

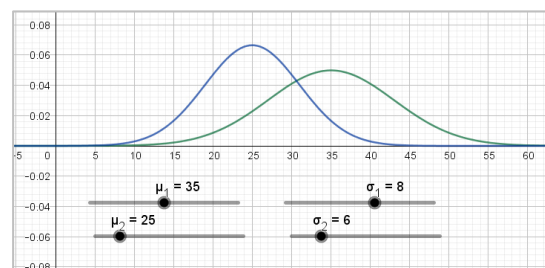


Abb. 176: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 26

Aspekte, die es bei dieser Aufgabe zu beachten gilt:

- Die Beschriftung anhand der griechischen Buchstaben kann entweder über das kleine Symbol α am Ende der Eingabezeile oder über folgende Tastenkombinationen erfolgen:
 μ ... Alt + m
 σ ... Alt + s
- Bei der Definition der Funktionen muss auf den Wahrheitswert *false* geachtet werden. Andernfalls wird anstelle der Dichte- die Verteilungsfunktion dargestellt.
- Um aussagekräftige Informationen über das Aussehen der Graphen zu erhalten, muss die y-Achse dementsprechend skaliert werden.

TRAININGSAUFGABE 27

Folgende Aufgabe ist zum Teil dem Aufgabenpool⁶ entnommen [95]:

Ein Patient, der an Bluthochdruck leidet, muss auf ärztliche Empfehlung ab sofort täglich am Morgen eine Tablette mit Wirkstoffgehalt 100 mg zur Therapie einnehmen. Der Körper scheidet im Laufe eines Tages 80 % des Wirkstoffs wieder aus. Derzeit sind bereits 100 mg Wirkstoff im Körper des Patienten vorhanden.

a) Stelle mit Hilfe geeigneter Berechnungen (oder Darstellungen) Überlegungen hinsichtlich der langfristigen Entwicklung der Wirkstoffmenge im Körper des Patienten an und kreuze im Anschluss in der ersten und zweiten Spalte die jeweils passende Aussage an:

Die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten wird langfristig 1, weil 2.

1	2
unbeschränkt wachsen	der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr abbaut und damit der Abbau letztlich die Zufuhr übersteigt
beschränkt wachsen	dem Körper täglich zusätzlicher Wirkstoff zugeführt wird, der nur zu 80 % abgebaut werden kann, und somit die Zufuhr im Vergleich zum Abbau überwiegt
wieder sinken	der Körper des Patienten mit steigendem Wirkstoffgehalt im Körper absolut immer mehr davon abbaut, auch wenn der Prozentsatz gleich bleibt

Tab. 22: Wirkstoffmenge

b) Gib eine Differenzengleichung an, anhand welcher man die Wirkstoffmenge W_n im Körper des Patienten nach n Tagen (rekursiv) aus der Menge des Vortags W_{n-1} bestimmen kann.

⁶ aufgabenpool.srdp.at

TRAININGSAUFGABE 27 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

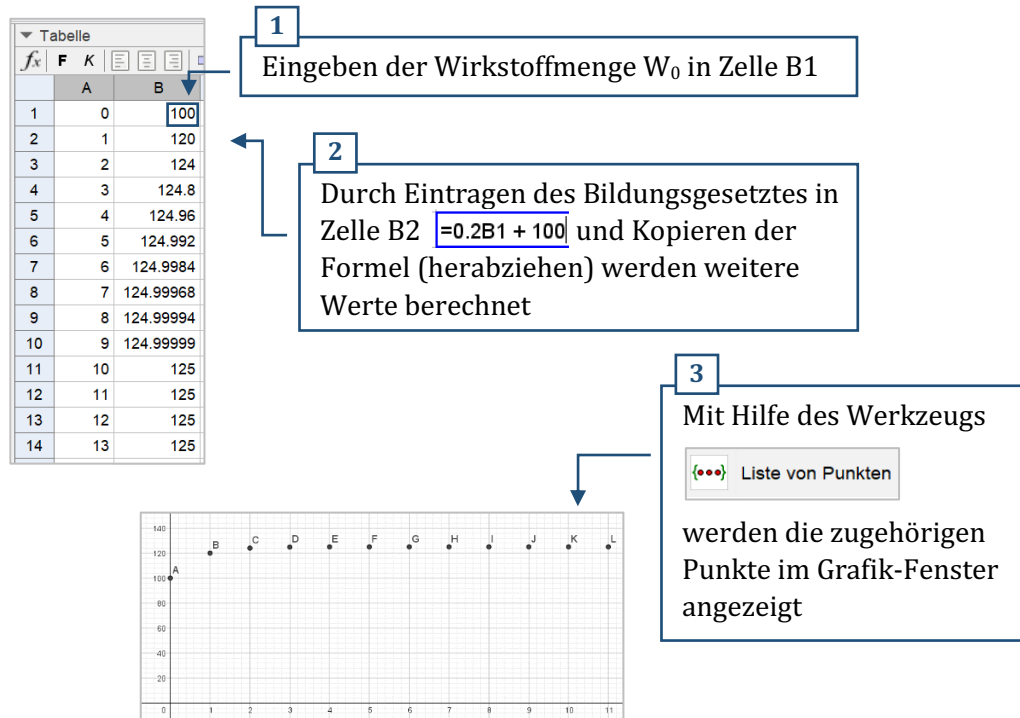


Abb. 177: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 27

DIDAKTISCHER ASPEKT

In der Originalaufgabe ist das zugrunde liegende rekursive Modell angegeben – die Schüler sind nur dazu angehalten, inhaltlich zu reflektieren. Zum Aufbau eines Grundverständnisses für derartige Zu- oder Abnahmemodelle ist die intensive Auseinandersetzung mit dem Übersetzen der Informationen in ein passendes mathematisches Modell jedoch unerlässlich, weshalb dieser „Übersetzungsprozess“ regelmäßig in den Unterricht integriert werden sollte. Das Erstellen der passenden Differenzengleichung fällt üblicherweise leichter, nachdem der Wachstums-bzw. Abnahmevergang mit Hilfe der Tabelle und dem Einsatz von Bezügen modelliert und in gewisser Weise auch visualisiert wurde.

TRAININGSAUFGABE 28

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$.

- Bestimme die Stammfunktion von $f(x)$ und erstelle für die Integrationskonstante einen Schieberegler.
- Versuche durch Verändern der Integrationskonstante (mit Hilfe des Schiebereglers) die Lage der Stammfunktion so anzupassen, dass diese durch den Punkt $P(1/4)$ geht.
- Überprüfe dein Ergebnis durch Berechnung im CAS.

TRAININGSAUFGABE 28 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

1 Eingabe von $f(x)$ und Punkt P

2 Erstellen des Schiebereglers c

Algebra

Funktion

- $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
- $h(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 5$

Punkt

- $P = (1, 4)$

Zahl

- $c = -5$
- $c_1 = 0$

CAS

1 Integral(f)

$\rightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + c_1$

2

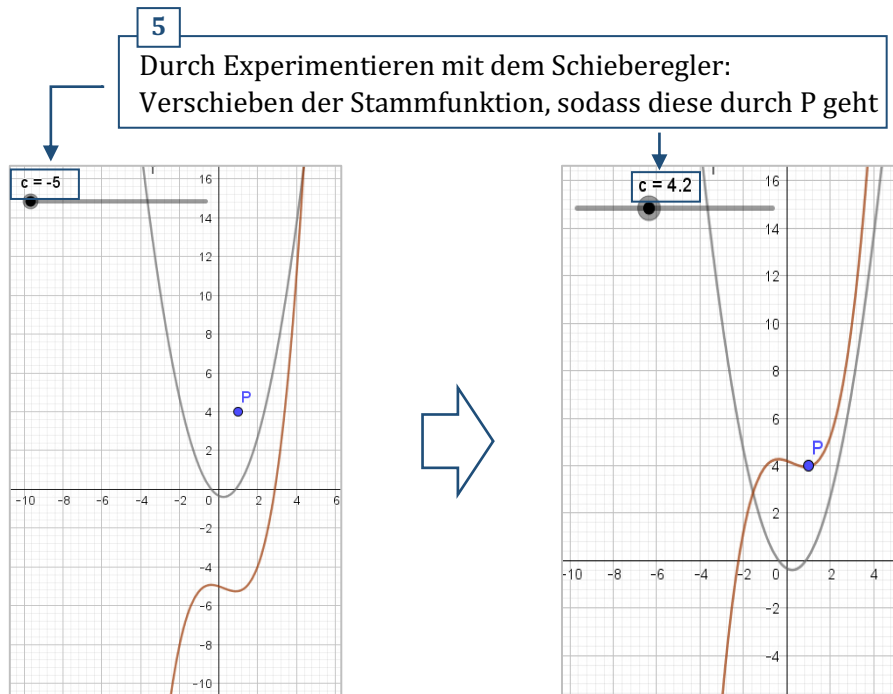
$h(x) := 1/3 x^3 - 1/4 x^2 - 1/3 x + c$

$\rightarrow h(x) := \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 5$

3 Berechnen der Stammfunktion

4 Definieren der Stammfunktion mit c als Integrationskonstante

b)



c)

3	$k(x) := 1/3 x^3 - 1/4 x^2 - 1/3 x + b$ $\rightarrow k(x) := \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + b - \frac{1}{3}x$
4	$k(1) = 4$ $\rightarrow b - \frac{1}{4} = 4$
5	$\$4$ Löse: $\left\{ b = \frac{17}{4} \right\}$
6	$\$5$ $\approx \left\{ b = 4.25 \right\}$

6 Definieren der Stammfunktion mit (unbelegter) Integrationskonstante

7 Einsetzen der Koordinaten von P in die Stammfunktion

8 Lösen der Gleichung

9 Ausgabe als Dezimalzahl, um das Ergebnis mit dem aus c) besser vergleichen zu können

Abb. 178: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 28

Aspekte, die es bei dieser Aufgabe zu beachten gilt:

- Beim Ermitteln der Stammfunktion über die Eingabezeile oder im CAS wird die Integrationskonstante gleich 0 gesetzt.
- Die Einstellungen des Schiebereglers (Min., Max., Schrittweite) müssen dementsprechend angepasst werden.
- Für die Berechnung der Aufgabe c) muss die Stammfunktion unter anderem Namen und unter Verwendung einer neuen (unbelegten) Integrationskonstante definiert werden.
- Wie bereits erwähnt, neigen Schüler dazu, Schieberegler als *das* Lösungswerkzeug anzusehen. Im Rahmen dieser Aufgabe sollte thematisiert werden, dass ein Auffinden von Lösungen auf experimentelle Weise oft nicht zu exakten Lösungen führt und erst die Berechnung das gewünschte Ergebnis liefert. (Vgl. [70], S. 37)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Durch die Kombination verschiedener Werkzeuge und Ansichten erfolgt eine grundlegende Modifikation der mathematischen Denk- und Handlungsweise. Vor dem Einsatz von Technologie wurden Aufgaben seriell abgearbeitet, wohingegen jetzt ein paralleler Zugang zur Materie ermöglicht wird. Heugl spricht in diesem Zusammenhang von der *Window Shuttle Methode*, die sich auf das *Pendeln* zwischen den verschiedenen Ansichten –insbesondere der Graphik- und Algebra-Ansicht – bezieht. (Vgl. [70], S. 36)

Anhand dieses veränderten Zugangs zu mathematischen Sachverhalten könne eine qualitative Änderung des Wissens sowie auch die Entwicklung neuer Kompetenzen bzw. Befähigungen unterstützt werden (vgl. [96], S. 164). Heugl (ebd., S. 164) bezieht sich in diesem Zusammenhang auf Dörfler, der bereits 1991 über den Einsatz des Computers schreibt:

"Allgemeinbegriffe bzw. Kategorien werden mittels prototypischer Repräsentanten oder Vertreter kognitiv verfügbar gemacht für kognitive Funktionen wie Gedächtnis, Problemlösen, Herstellen von Beziehungen zwischen Klassen. Es wird also i.a. mental nicht abstrakt mit definierten Eigenschaften oder Bündeln von Eigenschaften operiert, sondern gegenständlich mittels der mentalen Vorstellung charakteristischer Exemplare oder sogar direkt an materiellen prototypischen Repräsentanten." ([97] zit. n. [96], S. 164)

Über den Wechsel zwischen den unterschiedlichen Darstellungen sowie auch der dynamischen Anpassung aller Darstellungsformen bei Änderung in einer von diesen, wird die Entwicklung eines *inhaltlichen Begriffsverständnisses* begünstigt (vgl. [84], S. 81). Im Sinne der eingangs erwähnten Bildungstheorie, erhalten Schüler auf diese Weise die Möglichkeit, über Sachverhalte auf unterschiedlichen Ebenen zu reflektieren und bei entsprechender Aufgabengestaltung auch zu kommunizieren.

Die angeführten Aufgaben zeigen, dass technologische Werkzeuge unterschiedliche Rollen im Rahmen des Lernprozesses und somit bei der Entwicklung von Kompetenzen einnehmen können, die in ([70], S. 9) folgendermaßen eingegrenzt werden:

- Visualisierungsfunktion
- Modellierungsfunktion
- Experimentierfunktion
- Rechenfunktion

Durch den Technologieeinsatz ist es nun möglich, relativ mühelos und in sehr kurzer Zeit mathematische Inhalte graphisch darzustellen. Dies führt zu einer Veranschaulichung bzw. *Visualisierung* von (für Schüler) abstrakten Sachverhalten, wodurch der Aufbau von (Grund)kompetenzen sowie die Entwicklung von Lösungsstrategien in vielen Fällen überhaupt erst realisiert werden können. (Vgl. [70], S. 10)

Aufgrund der Tatsache, dass komplexe oder mühsame Berechnungen sowie Lösungsvorgänge vom Programm übernommen werden, kommt es zu einer Verschiebung im Bereich der *Modellierung*. Durch die vereinfachte Nutzung der Modelle kommt der Reflexion über die Modellwahl sowie der Analyse und Interpretation zugrunde liegender Eigenschaften größere Bedeutung zu. (Vgl. ebd., S. 9)

Vor dem Einsatz von technologischen Hilfsmitteln dieser Art war ein *Experimentieren* im Unterricht kaum möglich. Schüler können – zum Beispiel durch das Nutzen von Schiebereglern – Effekte von Parametervariationen beobachten oder auch Lösungen durch Ausprobieren finden bzw. eingrenzen (vgl. ebd., S. 11). Dieser Zugang spielt im Bereich der Lernphasen (siehe Kap. IV, 2.1) eine große Rolle und sollte dementsprechend genügend Platz im Unterricht finden.

Das Auslagern von komplexen operativen Vorgängen auf Werkzeuge bedeutet keinesfalls, dass händische *Berechnungen* grundsätzlich nicht mehr durchgeführt werden sollten (vgl. ebd., S. 13). Im Sinne Fischers und somit der der Zentralmatura zugrunde liegenden Bildungstheorie, gilt es jedoch der Reflexion im Unterricht zugunsten einer Kommunikationsfähigkeit mehr Bedeutung zukommen zu lassen als dem fachlichen Operieren (vgl. [10], S. 5). Auch Heugl sieht diesbezüglich keine

„Verarmung mathematischer Kompetenzen – ganz im Gegenteil: Es werden andere Kompetenzen damit unterstützt und neue Kompetenzen im Bereich des Operierens gewinnen an Bedeutung, wie etwa die Strukturerkennungskompetenz. Die Lernenden müssen Ergebnisse interpretieren, die sie nicht selbst produziert haben. Es ist also eine neue Art von Kontrollkompetenz erforderlich.“ ([70], S. 13)

Aus meiner Erfahrung ist es in diesem Zusammenhang jedoch wichtig, ein „gesundes“ Maß an Auslagerung des Operativen zu finden, sodass Schüler auch regelmäßig dazu angehalten werden, gewisse operative Tätigkeiten ohne Zuhilfenahme von Technologie durchzuführen.

Um mit Hilfe einer Vernetzung der Werkzeuge all die oben genannten Funktionen zur (Grund)Kompetenzentwicklung einsetzen zu können, bedarf es zuallererst aber einer ausreichenden Werkzeugkompetenz, deren Ausbildung somit genügend Zeit und Raum im Unterrichtsgeschehen zugestanden werden muss.

1.6 DOKUMENTATIONSKOMPETENZ

Neben dem korrekten Einsatz der Werkzeuge spielt die Dokumentation der dabei durchgeführten Arbeitsschritte und der dadurch erhaltenen Ergebnisse eine bedeutende Rolle, da diese einerseits wichtig für einen nachhaltigen Wissensaufbau und andererseits auch maßgeblich für die Ausbildung einer Kommunikationsfähigkeit (im Sinne Fischers) ist.

Zusätzlich zum Erstellen der zugehörigen GeoGebra-Dateien hat sich hierbei bewährt, dass Schüler in einem Textverarbeitungsprogramm Screenshots, etwaige Vorgehensweisen und weiterführende Erklärungen, Begründungen oder auch Schlussfolgerungen abspeichern. Eine solche Dokumentation sollte bereits während des Werkzeugkompetenztrainings eingefordert werden, da auch dieses Vorgehen oft eine Herausforderung für die Schüler darstellt und sozusagen als eigene Kompetenz erst entwickelt werden muss.

Neben der Entwicklung kommunikativer Kompetenzen auf Schülerseite erhält die Lehrperson durch die Dokumentation der Arbeitsschritte zusätzlich die Möglichkeit, die Gedankengänge der Schüler nachzuvollziehen. Wie bereits erwähnt, sind Schüler oft sehr geschickt darin, Lösungen experimentell zu „generieren“, sodass bei unzureichender Kontrolle der Anschein eines tatsächlich nicht vorhandenen Verständnisses erweckt werden kann.

Das Dokumentieren von Arbeitsschritten und daraus resultierenden Ergebnissen kommt außerdem auch dann zum Tragen, wenn Schüler der Bearbeitung und Erklärung einer Aufgabe durch die Lehrperson folgen und die wichtigsten Informationen dazu verschriftlichen müssen. Bevor Technologie im Unterricht zum Einsatz kam, wurden relevante Inhalte von der Lehrkraft ausschließlich auf der Tafel festgehalten und von der Klasse mit- bzw. abgeschrieben.

Im Gespräch mit Schülern konnte ich feststellen, dass heutzutage durch den Technologieeinsatz diesbezüglich häufig Probleme auftreten. Während Lehrer über einen Beamer die notwendigen Arbeitsschritte, die mit Hilfe der Technologie durchzuführen sind, vorzeigen, werden Schüler entweder nur dazu angehalten, zuzusehen oder aber es wird ihnen zu wenig Zeit eingeräumt, um das Gesehene festzuhalten. Auch, wenn die zugehörigen Dateien den Schülern zur Verfügung gestellt werden, haben diese oftmals Schwierigkeiten, die Abfolge der durchgeführten Arbeitsschritte und auch den Einsatz der verschiedenen Werkzeuge und Befehle im Nachhinein nachzuvollziehen.

In diesem Zusammenhang hat es sich als nützlich erwiesen, den Schülern die Möglichkeit zu geben, die vorgezeigten Arbeitsschritte simultan (oder auch etwas zeitversetzt) am eigenen Gerät durchzuführen, Screenshots anzufertigen und in ein Textdokument samt notwendiger Zusatzerklärungen zu erstellen. Dies erfordert allerdings auch einiges an zeitlichen Ressourcen, die in der Unterrichtsplanung nicht übersehen werden dürfen.

Hierbei möchte ich auf den praktischen Einsatz von *Freihandgleichungen*, die etwa vom Textverarbeitungsprogramm *Word* zur Verfügung gestellt werden, hinweisen. Diese ermöglichen den Schülern die Eingabe von mathematischen Formeln, Zeichen oder auch Operatoren entweder über die Maus, das Touchpad oder den Touchscreen, wodurch der oft mühsame, zeitintensive Einsatz der Formeleditoren in vielen Fällen umgangen werden kann.

Durch Eingabe in den Freihandeditor (links) erfolgt die entsprechende Ausgabe (rechts) in der Datei:

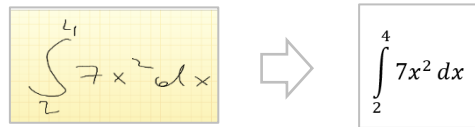


Abb. 179: Freihandeditor

Ebenso kann der Einsatz von Erklärvideos eine große Hilfe darstellen. Diese Videos können Schüler beispielsweise zur Wiederholung von bereits besprochenen Arbeitsschritten, die während des Unterrichts nicht zur Gänze verstanden bzw. mitverfolgt werden konnten, nutzen. Sie bieten aber auch die Möglichkeit, in Form einer *Flipped-Classroom-Sequenz* im Unterricht eingesetzt zu werden, bei welcher die Schüler im Rahmen der Hausübung neue technologische Einsatzmöglichkeiten bzw. Werkzeuge kennen lernen, um diese in der darauffolgenden Stunde selbständig anzuwenden. Derartige Videos können zwar relativ schnell anhand einer Screencast-Software erstellt werden, man kann jedoch als Lehrkraft auch auf das große Angebot, das es bereits online (z.B. auf YouTube) gibt, zurückgreifen.⁷

⁷ Unter <https://www.youtube.com/watch?v=9BLgzkl6hwl&t=6s> findet man ein solches Video, das von mir erstellt wurde.

2 DIDAKTISCHE ASPEKTE EINES KOMPETENZORIENTIERTEN TECHNOLOGIEEINSATZES

2.1 LERNPHASEN

Lernen in Phasen: Unter Beachtung der Vorkenntnisse sind Begriffe in der Regel in einer ersten Phase auf einer konkret-anschaulichen, intuitiven oder heuristischen Ebene zu behandeln, bei einfachen Anwendungen zu erproben und erst in einer späteren Phase zu vertiefen, ergänzen, verallgemeinern oder exaktifizieren. Die minimale Realisierung besteht in der Orientierung am Vorwissen der Studierenden und der Einführung von Begriffen über intuitive und heuristische Ansätze mit exemplarischen Exaktifizierungen, die maximale Realisierung in einer weit reichenden Präzisierung mathematischer Begriffe, Sätze und Methoden.(Lehrplan AHS, [98])

Bei der Planung eines kompetenzorientierten technologiegestützten Unterrichts sollten ausgehend vom *Inhalt* auch Überlegungen bezüglich der Auswahl der zu verwendenden *Technologiewerkzeuge* und der *Lernphase*, in welcher der Lernprozess stattfindet, angestellt werden (vgl. [33], S. 91).

Nach [33] wird in diesem Zusammenhang eine *kompetenzorientierte Inhaltsanalyse* empfohlen, welche folgende Punkte in die Betrachtungen miteinbezieht:

- Überlegungen zu Vorerfahrungen
- Analyse der erforderlichen Grundkompetenzen (früher erworbene, neue)
- Entwicklung neuer Begriffe und Algorithmen
- erforderliche Exaktifizierungsmaßnahmen
- Berücksichtigen aller Handlungsbereiche (Modellieren, Operieren, Interpretieren, Argumentieren)
- Überlegungen zur Anwendbarkeit und zu Vernetzungen (innermathematisch und anwendungsbezogen) (ebd., S. 91)

Nachdem inhaltliche Überlegungen konkretisiert wurden, gilt es sich darüber klar zu werden, an welcher Stelle des Lernprozesses man sich in der zu planenden Unterrichtssequenz befindet. Heugl geht von einem spiralförmigen *Weg der Lernenden in die Mathematik* ([70], S. 93) aus, wobei er sich auf das Spiralprinzip von Bruno Buchberger [99] bezieht. Ausgehend von dessen Überlegungen über die Entwicklung der Mathematik als Wissenschaft, beschreibt er die Stationen, die entlang eines Lernprozesses durchlaufen werden, anhand der sogenannten *Buchbergerschen Kreativitätsspirale* (vgl. [96], S. 65), die in *Abb. 180* dargestellt ist.

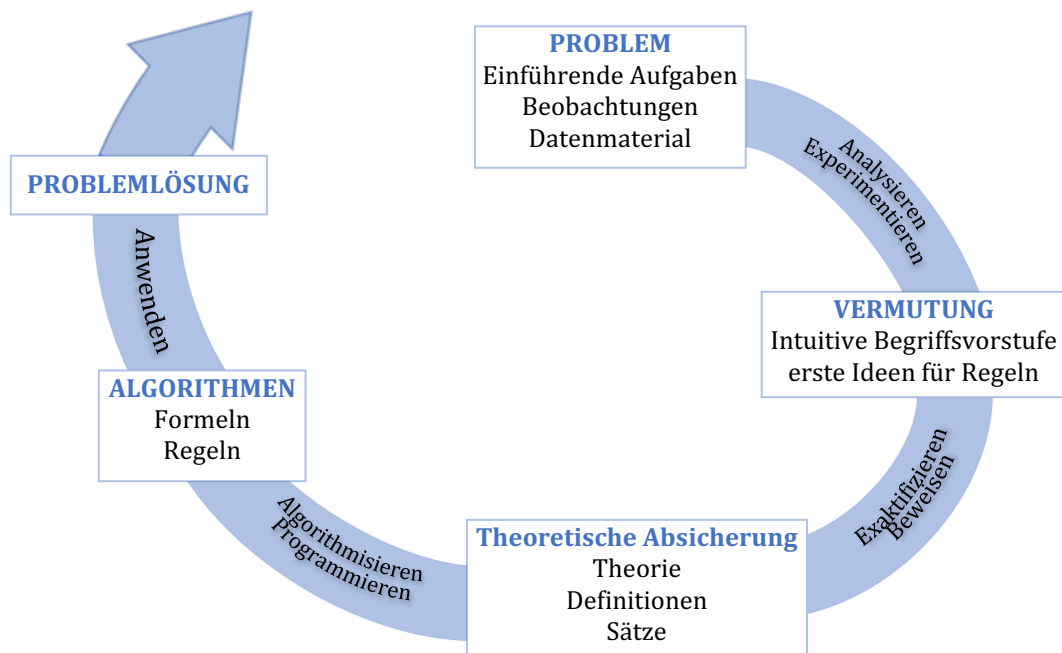


Abb. 180: Kreativitätsspirale ([70], S. 39; [33], S. 91)

Während einer „Runde“ entlang der Spirale kann der dabei durchlaufene Lernprozess grob in drei, sich teilweise überschneidende, Phasen unterteilt werden (vgl [70], S. 40):

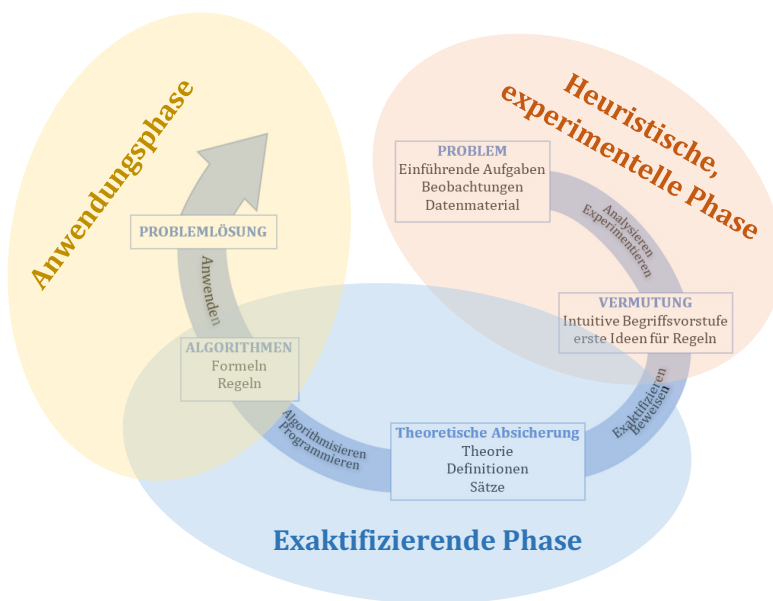


Abb. 181: Lernphasen ([70], S. 40)

2.1.1 HEURISTISCHE, EXPERIMENTELLE PHASE

Am Beginn der Spirale steht ein Problem, welches auf Beobachtungen, Datenmaterial oder auch verbal formulierten Informationen beruht (vgl. [70], S. 39). Auf der Suche nach Lösungen für dieses Problem, gilt es bereits bekannte Algorithmen herauszugreifen oder auch neue zu generieren (vgl. [33], S. 92). Anhand von experimentellem und analysierendem Vorgehen erfolgt das Anstellen von Vermutungen, Formulieren von Sätzen, Entwickeln von Beweisideen oder auch Bilden von Modellen (vgl. ebd., S.92; [70], S. 39).

Dieser Phase kommt im kompetenzorientierten Unterricht besonders große Bedeutung zu, da Schülerzentrierung und kognitive Aktivierung im Rahmen eines entdeckenden Lernens sowie das Zurückgreifen auf bereits gefestigtes Basiswissen bezeichnend für eine derartige Unterrichtsgestaltung und maßgeblich für eine verständige Kompetenzentwicklung sind. Dass ein experimenteller, heuristischer Zugang in vielen Fällen erst durch den Einsatz von Technologie ermöglicht wird, zeigt die Relevanz und Bedeutsamkeit eines solchen auf (vgl. [70], S. 40).

Nach Heugl (ebd., S. 40) sind „plausibles, induktives Schließen“, „experimentelles Arbeiten durch systematisches Probieren“ sowie ein Vorgehen nach der „Versuch-Irrtums-Methode“ kennzeichnend für die heuristische, experimentelle Phase. Mit Hilfe des Technologieeinsatzes kann dies etwa anhand folgender, teilweise bereits beschriebener Tätigkeiten und Funktionen umgesetzt werden ([70], S. 41; [96], S. 70f):

- Visualisierung
- Experimentieren (durch Ausprobieren werden Annahmen überprüft und Modelle auf deren Gültigkeit untersucht)
- Wechseln der Darstellungsarten (*Window Shuttle Methode*)
- Untersuchung der Konsequenzen durch Parametervariationen
- Zoomen (v.a. im Zusammenhang mit Funktionsgraphen von Bedeutung)
- Beleuchten von Spezialfällen, wodurch in weiterer Folge ein Generalisieren ermöglicht wird
- Einsatz von Technologie als Kontrollwerkzeug

BEISPIELAUFGABEN

AUFGABE 1 – STEIGUNG IN EINEM PUNKT

(Vgl. [81], S. 109)

Öffne das dynamische Arbeitsblatt *funktionenlupe.ggb*⁸.

Variiere mit Hilfe des Schiebereglers die Seitenlänge $2h$ des eingezeichneten Quadrats!

- a) Wie musst du h ändern, um etwas über die Steigung des Graphen von f im Punkt A aussagen zu können?

⁸ Zu finden unter: www.geogebra.org/m/pdgY55Gg

- b) Lass dir nun die Sekanten und deren Steigungsdreiecke anzeigen. Was kannst du bezüglich deren Verhalten bei Änderung der Seitenlänge des Quadrats beobachten?

AUFGABE 1 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

Das Arbeitsblatt ist in zwei Fenster untergliedert. Im linken Fenster werden die Funktion, ein Punkt A auf der Funktion sowie ein Quadrat mit Seitenlänge $2h$ angezeigt. Die Seitenlänge dieses Quadrats kann über einen Schieberegler h verändert werden. Im rechten Fenster wird die quadratische Umgebung des Punktes dargestellt. Bei Verkleinerung von h anhand des Schiebereglers erfolgt eine Übertragung der kleiner werdenden quadratischen Umgebung um den Punkt A in der rechten Ansicht. Da sich die Größe des rechten Fensters nicht ändert, wird somit in die Ansicht „hinein gezoomt“ und man erhält eine Art *Funktionenlupe* oder auch *Funktionenmikroskop*. (Vgl. [81], S. 108ff; [100])

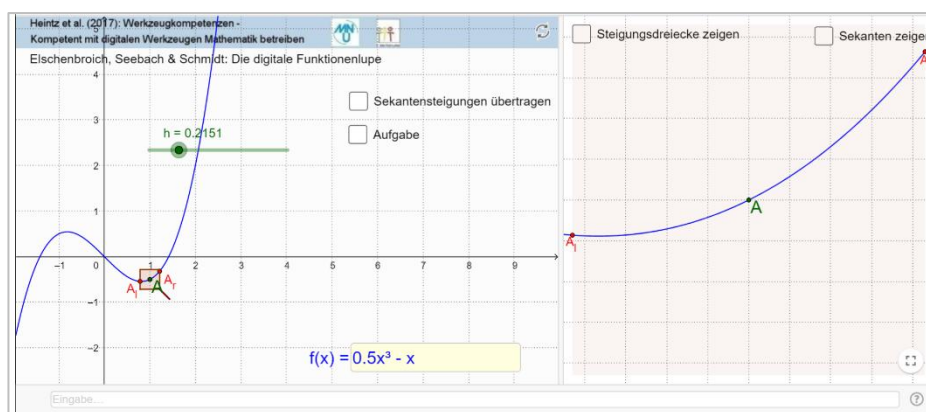


Abb. 182: Funktionenlupe

a)

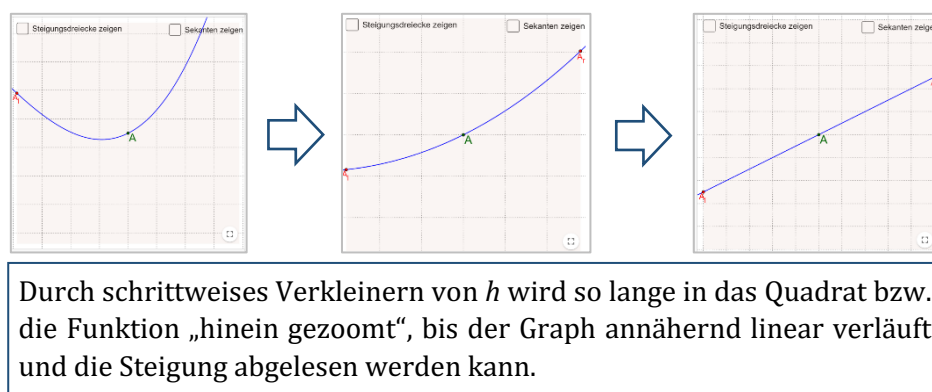
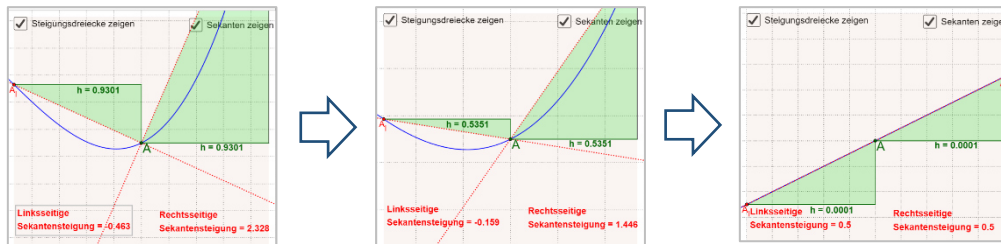


Abb. 183: „Hineinzoomen“

Anmerkung: alle Bilder auf dieser Seite sind durch Anwenden der Funktionenlupe⁹ entstanden.

⁹ www.geogebra.org/m/pdgY55Gg

b)



Für großes h unterscheiden sich die Graphen der Sekanten und deren Steigung. Bei schrittweiser Verkleinerung von h nähern sich aber sowohl die Graphen als auch die Steigungen an, bis sie schlussendlich nahezu übereinstimmen und die Sekanten tangential an der Funktion anliegen.

Abb. 184: Schrittweises Verkleinern von h

Anmerkung: alle Bilder auf dieser Seite sind durch Anwenden der Funktionenlupe¹⁰ entstanden.

DIDAKTISCHER ASPEKT

Diese Aufgabe ermöglicht einen kalkülfreien Zugang zum Thema *Steigung einer Funktion an einer Stelle* und in weiterer Folge der *Steigung der Tangente* (vgl. [81], S. 110ff). Im Sinne Arnold Kirschs, der die Idee des *Funktionenmikroskops* aufbrachte, wird nicht nach einer Geraden gesucht, die sich an den Graphen „anschmiegt“, sondern der Graph der Funktion selbst in einer kleinen Umgebung betrachtet (vgl. [101], S. 322). Die Schüler müssen dazu lediglich Vorwissen über die Steigung einer Geraden, Steigungsdreiecke sowie Sekanten (als Geraden durch (mindestens) zwei Punkte einer Kurve) aufweisen – durch die rein graphische Betrachtung kommt es zu keiner Berechnung von Grenzwerten (vgl. [81], S. 110). Im Vordergrund steht der Aufbau eines Grundverständnisses, welches als Basis für nachfolgende Überlegungen hinsichtlich des Differentialrechnungskalküls dienen soll (vgl. ebd., S. 112).

Durch die Möglichkeit, den Punkt (mit der Maus) entlang der Funktion zu bewegen, können auch weitere Punkte auf dem Graphen, wie etwa die lokalen Extrempunkte, oder auch andere Funktionen (die Gleichung kann direkt eingegeben werden) durch die Lupe betrachtet werden. Hierbei bietet sich beispielsweise die Analyse der Funktion $f(x) = |x|$ im Koordinatenursprung an. Anhand dieser graphischen Überlegungen kann somit eine anschauliche Einführung in das Thema *Differenzierbarkeit* erbracht werden. (Vgl. [81], S. 110)

An dieser Aufgabe zeigt sich, dass der Einsatz von GeoGebra auch in Form bereits vorgefertigter dynamischer Arbeitsblätter stattfinden kann, wodurch einerseits die Gefahr minimiert wird, dass ein Mangel an Werkzeugkompetenzen die Schüler von der eigentlichen Thematik ablenkt, und andererseits die mitunter zeitintensive Eingabe

¹⁰ www.geogebra.org/m/pdgY55Gg

wegfällt und die Schüler die dadurch gewonnene Zeit zum Experimentieren nutzen können. Dabei kann die Lehrkraft derartige dynamische Arbeitsblätter im Vorfeld selbstgestalten oder aber auch aus einem breiten Pool ¹¹ an bereits erstellten Arbeitsmaterialien schöpfen.

AUFGABE 2 – MOMENTANGESCHWINDIGKEIT

(Vgl. [70], S. 57; [102], S. 53f)

Die Höhe $h(t)$ eines lotrecht nach oben geworfenen Körpers zum Zeitpunkt t wird annähernd durch die Funktionsgleichung

$$h(t) = 9t - 5t^2$$

$h(t)$... in Metern, t ... in Sekunden

beschrieben.

Versuche in der Tabelle anhand der mittleren Geschwindigkeit einen Näherungswert für die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt 2 zu finden.

AUFGABE 2 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

1

Definieren der Funktion durch Eingabe in die Eingabezeile: $h(t) = 23t - 5t^2$

Alternativ kann die Definition auch über das CAS erfolgen:

$h(t):=23t-5t^2$

→ $h(t) := -5t^2 + 23t$

2

Eingabe der Intervallgrenzen für die Annäherung von rechts

Tabelle				
	A	B	C	D
1	rechts:			
2	2	3		-2
3	2	2.5		0.5
4	2	2.1		2.5
5	2	2.01		2.95
6	2	2.001		2.995
7	2	2.0001		2.9995
8	2	2.00001		2.99995
9				
10	links:			
11	1	2		8
12	1.5	2		5.5
13	1.9	2		3.5
14	1.99	2		3.05
15	1.999	2		3.005
16	1.9999	2		3.0005
17	1.99999	2		3.00005

3

Eintragen der Formel in Zelle D2 zur Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit im gegebenen Intervall:

$$=(h(B2)-h(A2))/(B2-A2)$$

4

Durch Kopieren der Formel werden die Durchschnittsgeschwindigkeiten in den restlichen Intervallen berechnet

5

Durchführen der Schritte 2 – 4 (unter Berücksichtigung der Zellbezüge), um sich von links anzunähern

Abb. 185: Lösungsansatz – Aufgabe 2

¹¹ <https://www.geogebra.org/materials>

DIDAKTISCHER ASPEKT

Im Vorfeld dieser Aufgabe gilt es den Aspekt der Durchschnittsgeschwindigkeit und deren Berechnung mit Hilfe des Differenzenquotienten bereits durchgenommen zu haben. Der Vorgang des Annäherns sollte in den meisten Fällen ebenfalls vor Durchführung der Aufgabe zumindest kurz angesprochen werden.

Der in diesem Beispiel gewählte Zugang zur *lokalen Änderungsrate* hat gegenüber dem klassischen Einstieg anhand von Tangenten und deren Steigung den Vorteil, dass über den Alltagsbezug die Frage nach dem *Warum* wegfällt. Das Anknüpfen an die Erfahrungswelt der Schüler (Sport, Auto/Moped,...) ermöglicht einen intuitiven Einstieg, der wie auch in *Aufgabe 1* ohne ein Vorwissen über Grenzwerte und deren Berechnung erfolgt. (Vgl. [102], S. 50,55) Dies entspricht auch der Grundkompetenz AN 1.2, die wie folgt im Grundkompetenzkatalog angegeben ist:

„den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differenzialquotient („momentane“ bzw. lokale Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs kennen und diese Konzepte (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können“ ([103], S. 14)

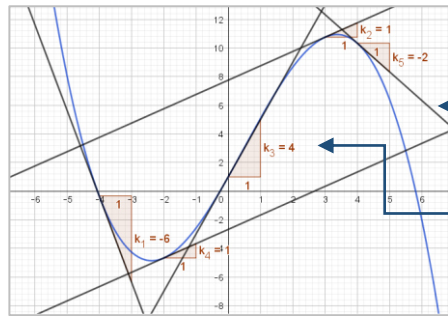
Zusätzlich erhält man auf diesem Weg ein Universalmodell, welches „überall dort, wo ein Änderungsverhalten *punktuell* beschrieben werden soll“ ([102], S. 56) angewandt werden kann.

AUFGABE 3 – GRAPHISCHES ABLEITEN I

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4x + 1$.

- Stelle den Graphen von f im Koordinatensystem dar.
- Zeichne die Tangenten an den Stellen $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 4$ ein.
- Bestimme die Steigungen der Tangenten aus *b*).
- Zeichne folgende Punkte in das Koordinatensystem ein:
A(-4/Steigung der Tangente an der Stelle -4), B(-2/Steigung d. Tangente a. d. Stelle -2), C(0/Steigung d. Tangente a. d. Stelle 0), D(3/Steigung d. Tangente a. d. Stelle 3), E(4/Steigung d. Tangente a. d. Stelle 4)
- Blende die Tangenten und falls vorhanden auch die zugehörigen Steigungsdreiecke aus.
- Überlege, welche Art von Funktion durch die eingezeichneten Punkte beschrieben wird und erstelle die zugehörige Funktionsgleichung. Lass dir danach den Graphen dieser Funktion ebenfalls anzeigen.

AUFGABE 3 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

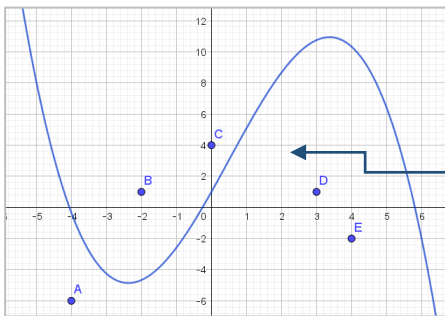


1

Nach Eingabe der Funktion werden mittels *Tangente*(<x-Wert>, <Funktion>) die Tangenten eingezeichnet

2

Die zugehörigen Steigungen werden entweder über das Werkzeug  *Steigung* oder *Steigung*(<Gerade>) bestimmt



3

Nach dem Erstellen der Punkte werden die Tangenten und deren Steigungsdreiecke ausgeblendet. Man kann nun erraten, um welchen Funktionstyp es sich bei der durch die Punkte vorgegebenen Funktion handelt.

4

Verschieden Methoden zur Bestimmung der zugehörigen Funktionsgleichung:

- Eingabezeile → Befehl *TrendPoly*(<Liste von Punkten>, <Grad des Polynoms>), hier: $p(x) = \text{TrendPoly}(\{A, B, C, D, E\}, 2)$

- CAS:

3	$p(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ → $p(x) := a x^2 + b x + c$	7	$p(3) = 1$ → $9a + 3b + c = 1$
4	$p(-4) = -6$ → $16a - 4b + c = -6$	8	$p(4) = -2$ → $16a + 4b + c = -2$
5	$p(-2) = 1$ → $4a - 2b + c = 1$	9	{ \$4, \$5, \$6, \$7, \$8 } ○ Löse: $\left\{ \left\{ a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 4 \right\} \right\}$
6	$p(0) = 4$ → $c = 4$		

- Tabelle:

	A	B
1	-4	-6
2	-2	1
3	0	4
4	3	1
5	4	-2

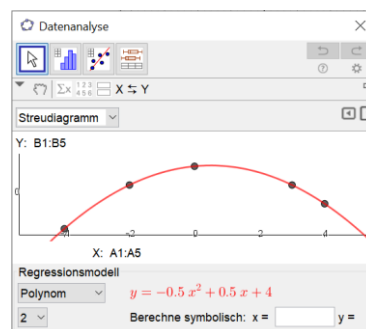


Abb. 186: Lösungsansatz – Aufgabe 3 (Teil 1)

5

Einzeichnen des Graphen in das Koordinatensystem

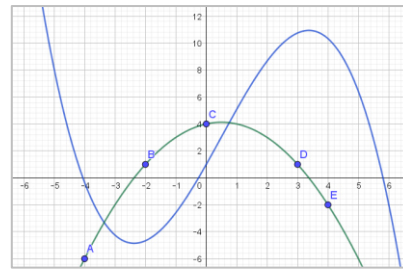


Abb. 187: Lösungsansatz – Aufgabe 3 (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei dieser Aufgabe erfolgt eine relativ detaillierte Angabe der Schritte, die im Programm durchzuführen sind, sodass der inhaltliche Fokus nicht durch Probleme bei der Durchführung aufgrund fehlender Werkzeugkompetenzen in den Hintergrund gerät. In leistungsstarken Klassen könnte man die Angabe dementsprechend anpassen, dass weniger Informationen diesbezüglich aufscheinen.

Im Mittelpunkt dieser Aufgabe steht das Ausbilden eines Verständnisses darüber, dass die Steigungen der Tangenten den Funktionswerten der ersten Ableitung entsprechen. Dies sollte explizit auch beim Bearbeiten der Aufgabe im Klassenverband oder der Nachbesprechung, falls in Einzelarbeit vorgegangen wurde, von der Lehrkraft angesprochen werden. In der Praxis konnte ich beobachten, dass dieser Abstraktionsschritt meist nicht vollzogen wird und Schüler häufig eigene (oft falsche) Gesetzmäßigkeiten bezüglich des graphischen Ableitens entwickeln. Da ein Wissen über diesen Sachverhalt aber notwendig für einen grundlegenden Kompetenzaufbau im Bereich der Differentialrechnung ist, sollte dem Üben und Besprechen (anhand von anschaulichen Aufgaben) genügend Zeit eingeräumt werden.

Hier kommt neben dem heuristischen Zugang bezüglich des graphischen Ableitens auch noch eine Wiederholung des Wissens über Funktionstypen, der Bestimmung der Funktionsgleichung und somit auch eine Vernetzung dieser Inhalte zur Anwendung. Die 1. Ableitung wird hierbei absichtlich nicht verwendet - der Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente und der ersten Ableitung sollte dabei dennoch schon im Vorfeld besprochen worden sein und eine Verbindung durch eine passende (nachfolgende) Aufgabenstellung hergestellt werden. Diese könnte wie folgt aussehen:

AUFGABE 4 – GRAPHISCHES ABLEITEN II

- a) Bestimme an den Stellen $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 4$ vier Punkte auf dem Graphen der 1. Ableitung der Funktion aus *Aufgabe 3*, indem du folgendermaßen vorgehst:

Punkt an der Stelle -1: Eingabe: $A=(-1, f'(-1))$

- b) Vergleiche das Ergebnis mit dem aus *Aufgabe 3*.

Im Anschluss daran sollten die Aufgaben im Klassenverband besprochen und weitere Zusammenhänge zwischen den Graphen von $f(x)$ und $f'(x)$ analysiert werden.

Eine Aufgabenstellung, die entweder alternativ zu *Aufgabe 4* oder auch zusätzlich zur Untersuchung weiterer Funktionen herangezogen werden kann, könnte folgendermaßen lauten:

AUFGABE 5 – GRAPHISCHES ABLEITEN III

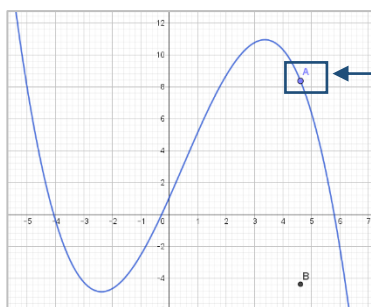
Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4x + 1$.

- Stelle den Graphen von f im Koordinatensystem dar.
- Zeichne mit Hilfe des Werkzeugs  einen Punkt A auf dem Graphen ein.
- Erstelle einen weiteren Punkt B , dessen x -Koordinate mit der des Punktes A übereinstimmt und dessen y -Koordinate der Steigung von f an dieser Stelle entspricht. Gib dazu folgendes in die Eingabezeile ein:

Eingabe: $B=(x(A), f'(x(A)))$
- Aktiviere den Spurmodus von B .
- Bewege den Punkt A entlang des Graphen – was kannst du beobachten?

x-Koordinate von Punkt A wird verwendet

AUFGABE 5 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ



Durch Bewegen des Punktes A entlang des Graphen von f wird gleichzeitig die zugehörige Spur – und somit Punkte auf dem Graphen von $f'(x)$ – eingezeichnet

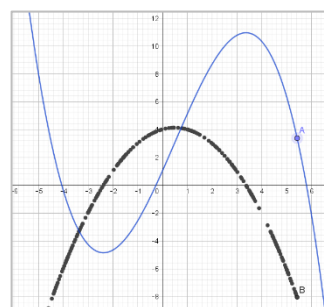


Abb. 188: Lösungsansatz – Aufgabe 5

Trainingsaufgabe 28a)b) (siehe Kap. IV, 1.5) ist ebenfalls dieser Lernphase zuzuordnen. Hierbei kann sehr gut erkannt werden, dass man durch rein heuristische Methoden oft auch an Grenzen stößt (vgl. [33], S. 95), weshalb es auf diese Phase aufbauend einer weiteren Phase bedarf, in welcher ein *höherer Grad an Exaktheit* (vgl. [70], S. 44) erreicht werden soll.

2.1.2 EXAKTIFIZIERENDE PHASE

Aufbauend auf die Vermutungen, die während der heuristischen Phase aufgestellt wurden, gilt es in der exaktifizierenden Phase diese durch Begründen und Beweisen abzusichern. Zu dieser Phase zählen Vorgänge, wie das Prüfen der Güte von Modellen oder auch die Entwicklung und das Einüben von Algorithmen und Programmen, welche für weitere Problemlösungsstrategien erforderlich sind. (Vgl. [33], S. 92) Schüler sollen dabei die Möglichkeit erhalten, Beziehungen und Abhängigkeiten zu entdecken, logische Schlussfolgerungen zu ziehen und das selbständige Anwenden mathematischer Methoden zu schulen und auszubauen (vgl. [96], S. 91). Der Einsatz von Technologie erlaubt uns dabei, komplexe operative Tätigkeiten auszulagern, sowie auch auf schnellem Weg zu hilfreichen Visualisierungen zu gelangen (vgl. [33], S. 97). Man erhält so ein Hilfsmittel, das eine Ablenkung, durch für den eigentlich zu untersuchenden Inhalt vorrangig nicht relevanten Vorgänge, vermindert (vgl. [96], S. 94).

BEISPIELAUFGABE

AUFGABE – ABLEITUNGSREGELN FINDEN

(Vgl. [33], S. 97; [70], S. 58f)

Bestimme den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für die gegebenen Funktionen. Vereinfache danach die Terme und ermittle den Grenzwert für $h \rightarrow 0$. Kannst du eine Regel erkennen? Falls ja, formuliere diese!

a) $f_1(x) = x^5, f_2(x) = x^9$

b) $f_3(x) = x^{-1}, f_4(x) = x^{-3}$

c) $f_5(x) = \sqrt{x}$

MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

a)

CAS	
1	$f_1(x) := x^5$
	$\rightarrow f_1(x) := x^5$
2	$dqf_1(x,h) := (f_1(x+h)-f_1(x))/h$
	$\rightarrow dqf_1(x,h) := \frac{-x^5 + (h+x)^5}{h}$
3	$dqf_1(x,h)$
	Multipliziere: $h^4 + 5h^3x + 10h^2x^2 + 10hx^3 + 5x^4$

1

Definieren des Differenzenquotienten von $f_1(x)$

2

Ausmultiplizieren

Abb. 189: Lösungsansatz a) (Teil 1)

4	Grenzwert(\$3,h,0)	→ $5x^4$	3 Bestimmen des Grenzwerts
5	$f_2(x) := x^9$	→ $f_2(x) := x^9$	
6	$dqf_2(x) := \frac{-x^9 + (h+x)^9}{h}$		Durchführen der Schritte 1 – 3 für $f_2(x)$
7	$dqf_2(x)$ Multipliziere: $h^8 + 9h^7x + 36h^6x^2 + 84h^5x^3 + 126h^4x^4 + 126h^3x^5 + 84h^2x^6 + 36hx^7 + 9x^8$		
8	Grenzwert(\$7,h,0)	→ $9x^8$	

Abb. 190: Lösungsansatz a) (Teil 2)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Der Einstieg in diese Aufgabe kann beispielsweise anhand der händischen Berechnung des Differentialquotienten für $f(x) = x^2$ erfolgen.

Nach Definition des Grenzwerts für $f_1(x)$ erhält man durch Ausmultiplizieren (Schritt 2) einen Ausdruck, anhand dessen der Grenzwert ebenfalls ohne Technologieeinsatz bestimmt werden kann. Zur Berechnung des Grenzwerts mit Hilfe des Programms (z.B. als Kontrolle der händischen Berechnung) ist ein Ausmultiplizieren nicht notwendig. Dies gilt ebenso für die Funktion $f_2(x)$.

Anhand der erhaltenen Ergebnisse kann bereits eine Vermutung bezüglich der Ableitungsregeln einer Potenzfunktion angestellt werden.

Möglicher Lösungsansatz für b):

CAS	
1	$f_3(x) := x^4(-1)$
2	→ $f_3(x) := \frac{1}{x}$
2	$dqf_3(x,h) := \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h}$
3	→ $dqf_3(x,h) := -\frac{1}{x^2 + hx}$
3	Grenzwert($dqf_3, h, 0$)
4	→ $-\frac{1}{x^2}$
4	$f_4(x) := x^4(-3)$
5	→ $f_4(x) := \frac{1}{x^3}$

5	$dqf_4(x) := \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{h}$
6	→ $dqf_4(x) := \frac{-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(h+x)^3}}{h}$
6	$dqf_4(x)$ Multipliziere: $\frac{-h^2 - 3hx - 3x^2}{h^3x^3 + 3h^2x^4 + 3hx^5 + x^6}$
7	Grenzwert($dqf_4(x), h, 0$)
8	→ $-\frac{3}{x^4}$

Abb. 191: Lösungsansatz b)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Auch bei dieser Aufgabe ist eine händische Berechnung des Grenzwerts anhand des durch das CAS ausgegebenen Terms (Zeile 2 und Zeile 6) möglich. Das Erkennen einer Gesetzmäßigkeit hinsichtlich der gesuchten Ableitungsregeln für Potenzfunktionen erfordert allerdings wesentlich höhere algebraische Kompetenzen der Schüler als es in Aufgabe a) der Fall war (vgl. [70], S. 59).

Möglicher Lösungsansatz für c):

CAS	
1	$f_5(x) := \sqrt{x}$ → $f_5(x) := \sqrt{x}$
2	$dqf_5(x) := (f_5(x+h) - f_5(x))/h$ → $dqf_5(x) := \frac{-\sqrt{x} + \sqrt{h+x}}{h}$
3	$dqf_5(x)$ Multipliziere: $\frac{-\sqrt{x} + \sqrt{h+x}}{h}$
4	Vereinfache($(-\sqrt{x} + \sqrt{h+x}) / h$) → $\frac{\sqrt{h+x} - \sqrt{x}}{h}$
5	Grenzwert($1/(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$, $h, 0$) → $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Weder Multiplizieren noch Vereinfachen führt zu einer Ausgabe eines Terms, anhand welcher der Grenzwert ohne Technologieeinsatz berechnet werden kann

Berechnen des Grenzwerts anhand des Terms, der händisch bestimmt wurde (siehe *didaktischer Aspekt*)

Abb. 192: Lösungsansatz c)

DIDAKTISCHER ASPEKT

Bei der Bestimmung eines Differentialquotienten von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten werden noch größere algebraische Fertigkeiten benötigt, weshalb diese Aufgabe eher für leistungsstärkere Schüler geeignet ist. Nachdem man weder über das Werkzeug *Multipliziere* noch über den Befehl *Vereinfache* zu einer günstigen Termabgabe gelangt, braucht es eine gewisse Strukturerkennungskompetenz, um aus dem erhaltenen Term auf den Einsatz von binomische Formeln zu schließen, sowie algebraische Kompetenzen, um diese ohne Technologieeinsatz richtig anzuwenden. (Vgl., [70], S. 59)

Durch das händische Erweitern des Ausdrucks erhält man einen Term, der das Bestimmen des Grenzwerts auch ohne Hilfe des Computers ermöglicht:

$$\frac{(-\sqrt{x} + \sqrt{h+x}) \cdot (-\sqrt{x} - \sqrt{h+x})}{h(-\sqrt{x} - \sqrt{h+x})} = \frac{x - (h+x)}{h(-\sqrt{x} - \sqrt{h+x})} = \frac{-h}{-h(\sqrt{x} + \sqrt{h+x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{h+x}}$$

Das Herauslesen einer Ableitungsregel aus dem erhaltenen Grenzwert ist hierbei allerdings noch komplexer als es bei Aufgabe b) der Fall war.

2.1.3 ANWENDUNGSPHASE

„So wie ein Sportler große Anstrengungen beim Kraft- oder Konditionstraining auch nur dann akzeptieren wird, wenn er erkennen kann, daß ihm diese Plage in seiner Sportart etwas bringt, sollte auch der Schüler erleben können, daß der entwickelte Algorithmus und der neue Begriff anwendbar sind, und zwar nicht nur im Sinne einer leichten Abprüfbarkeit bei der nächsten Prüfung, sondern um Probleme lösen zu können, die vorher nicht lösbar waren.“

([96], S. 95)

Hier kommt es zur Nutzung der in den zuvor durchlaufenen Phasen der Spirale hergeleiteten Begriffsvorstellungen, Regeln und auch Algorithmen, anhand welcher Lösungsstrategien zur Bearbeitung von Anwendungsproblemen entwickelt werden sollten (vgl. [70], S. 45). Durch den Einsatz von Technologie stellen große Datenmengen und komplexe oder auch zeitaufwändige Operationen keine Hürde mehr dar, weshalb es nun möglich ist, auch umfangreichere, praxisbezogene Aufgaben zu lösen (vgl. [33], S. 98) und sämtliche Handlungsbereiche (Darstellen, Modellbilden, Rechnen, Operieren, Interpretieren, Argumentieren, Begründen) aus dem der Matura zugrunde liegenden Kompetenzmodell einfließen zu lassen (vgl. [70], S. 40).

BEISPIELAUFGABEN

Aufgaben aus dem Bereich der Kosten- und Preistheorie stellen in meinen Augen sehr gute (realitätsnahe) Anwendungsbeispiele für diese Phase dar, da sie die Möglichkeit bieten, sämtliche Begriffe, Zusammenhänge und Algorithmen, die den Lernenden im Zuge der Behandlung des Themas *Differentialrechnung* nahe gebracht wurden, in praxisrelevante Aufgabenstellungen einzubauen. Zudem habe ich die Erfahrung gemacht, dass vielen Schülern bei Aufgaben aus diesem Themenbereich der sprichwörtliche Knopf aufgeht und häufig erst dabei der Sinn derartiger Berechnungen „eingesehen“ wird.

Anmerkung: Bei der Aufgabengestaltung wurde neben einer Orientierung an Lehrplan und Grundkompetenzkatalog darauf geachtet, den Großteil der in *Kap. III* angeführten Aufgabentypen nach Bruder einfließen zu lassen.

AUFGABE 1 – PRODUKTION- & GRENZKOSTEN

Über die Produktionskosten eines Herstellers kennt man folgende Daten:

Stückzahl x in STK	0	3	10	17	20	27
Kosten $K(x)$ in €	250	396,7	550	620	680	1019,5

Tab. 23: Produktionskosten

x ... Produktionsmenge in Stück (STK)

$K(x)$... Produktionskosten in Euro (€)

- Lass dir den zugehörigen Punktgraphen zeichnen und erstelle eine passende Funktionsgleichung der zugehörigen Kostenfunktion $K(x)$. Runde die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.
- Bestimme die Gesamtkosten bei einer Produktion von 100 Stück. Wie viel Stück können bei einer Investition von 900€ produziert werden?
- Berechne die Grenzkosten bei einer Produktion von 10 Stück und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

d) Ermittle unter Verwendung der Differentialrechnung diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten am kleinsten sind. Um welche besondere Stelle von $K(x)$ handelt es sich? (vgl. [104], S. 67)

e) Begründe, weshalb der im Folgenden dargestellte Graph nicht zu der Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gehören kann: (vgl. [104], S. 69)

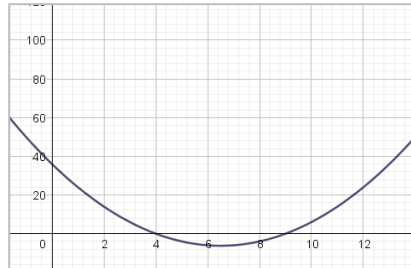


Abb. 193: Graph – Aufgabe 1

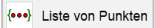
AUFGABE 1 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

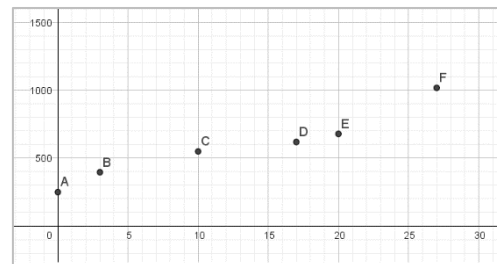
a)

▼ Tabelle			
f_x	F	K	
	A	B	
1	0	250	
2	3	396.7	
3	10	550	
4	17	620	
5	20	680	
6	27	1019.5	



1

Nach Einzeichnen des Punktgraphens mittels  Liste von Punkten kann anhand des Verlaufs vermutet werden, dass es sich um eine kubische Funktion handelt.



2

Mit Hilfe der *Analyse zweier Variablen* wird das passende Regressionsmodell erstellt:

$$K(x) = 0.1088 x^3 - 4.1147 x^2 + 60.2647 x + 250$$

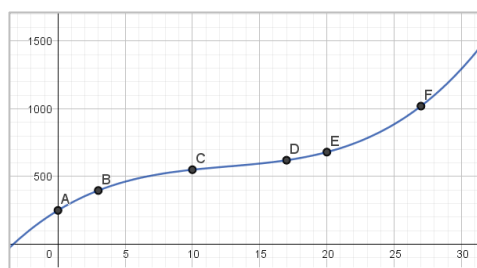


Abb. 194: Lösungsansatz – Aufgabe 1 (Teil 1)

CAS	
1	$K(x) := 0.1088x^3 - 4.1147x^2 + 60.2647x + 250$ ☒ $\approx K(x) := 0.1088x^3 - 4.1147x^2 + 60.2647x + 250$
2	$K(100)$ ☐ ≈ 73929.47
3	$K(x)=900$ ☐ $\approx 0.1088x^3 - 4.1147x^2 + 60.2647x + 250 = 900$
4	\$3 ☐ Löse: $\{x = 25.25302\}$
5	$K'(10)$ ☐ ≈ 10.6107
6	$K''(x)=0$ ☐ $\approx 0.6528x - 8.2294 = 0$
7	\$6 ☐ NLöse: $\{x = 12.60631\}$

b) Gesamtkosten bei Produktion von 100 Stück

Menge, die mit einem Kostenaufwand von 900€ produziert werden kann

c) Eine Steigerung der Produktion von 10 auf 11 Stück führt zu einer Kostensteigerung von annähernd 10,61€ / Stück

d) In der Wendestelle der Kostenfunktion ist der Kostenzuwachs am geringsten und die Grenzkosten somit am kleinsten.

Abb. 195: Lösungsansatz – Aufgabe 1 (Teil 2)

e)

Der dargestellte Funktionsgraph kann nicht zu der Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gehören, da diese keine lokalen Extremstellen und die Grenzkostenfunktion daher keine Nullstellen hat. (Alternativ: Begründung über Monotonieverhalten der Kostenfunktion)

AUFGABE 2 – AUFSUCHEN EINER FUNKTION

Von einer Kostenfunktion dritten Grades sind folgende Eigenschaften bekannt:

- die Gesamtkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 300 GE
- die Kostenkehre liegt bei 35 ME
- das Betriebsoptimum wird bei 60 ME angenommen
- die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 6 GE/ME

ME ... Mengeneinheiten, GE ... Geldeinheiten

- a) Bestimme die Funktionsgleichung $K(x)$ der zugehörigen Kostenfunktion.
- b) Gib die Bereiche an, in welchen $K(x)$ degressiv bzw. progressiv verläuft und interpretiere deine Beobachtungen im (wirtschaftlichen) Sachzusammenhang.
- c) Das Produkt wird um 20 GE/ME verkauft. Bestimme die gewinnmaximierende Menge sowie den maximalen Gewinn.

d) Wie hoch müsste der Verkaufspreis für das Produkt angesetzt werden, damit das Gewinnmaximum bereits bei 70 ME angenommen wird?

e) $G(x)$ sei die zugehörige Gewinnfunktion ($x \dots$ in ME, $G(X) \dots$ in GE)
Ordne den Beschreibungen (links) die jeweils richtige Gleichung (rechts) zu:

Der Break-Even-Point liegt bei x_2 ME	
Die Kostenkehre liegt bei x_1 ME	

A	$K(x_1) = 0$
B	$G'(x_2) = 0$
C	$K'(x_1) = 0$
D	$G''(x_2) = 0$
E	$G(x_2) = 0$

Tab. 24: Zuordnung

f) Versuche nun anhand von selbst gewählten Eigenschaften (ähnlich wie in der Angabe) die Gleichung einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion dritten Grades aufzustellen. Überprüfe nach dem Bestimmen der Funktionsgleichung, ob diese alle Bedingungen, die an eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion gestellt werden, erfüllt.

AUFGABE 2 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

a)

Aufstellen der Funktionsgleichung: siehe *Trainingsaufgabe 10* (LINK)

1	$K(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\rightarrow K(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
2	$S(x) := K(x)/x$ $\rightarrow S(x) := \frac{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d}{x}$
3	$K(10) = 300$ $\rightarrow 1000a + 100b + 10c + d = 300$
4	$K'(35) = 0$ $\rightarrow 210a + 2b = 0$
5	$S'(60) = 0$ $\rightarrow 120a + b - \frac{1}{3600}d = 0$
6	$K'(20) = 6$ $\rightarrow 1200a + 40b + c = 6$
7	$\{ \$3, \$4, \$5, \$6 \}$ Löse: $\left\{ \begin{cases} a = \frac{12}{3725}, b = -\frac{252}{745}, c = \frac{2334}{149}, d = \frac{25920}{149} \end{cases} \right\}$
8	$f(x) := \text{Ersetze}(\$1, \text{Reduzieren}(\$7))$ $\rightarrow f(x) := \frac{12}{3725}x^3 - \frac{252}{745}x^2 + \frac{2334}{149}x + \frac{25920}{149}$

Definieren der Kostenfunktion

Definieren der Stückkostenfunktion

Gesamtkosten

Kostenkehre

Betriebsoptimum

Grenzkosten

b)

Um die Krümmungsbereiche zu bestimmen, kann die Kostenkehre entweder im CAS mit Hilfe der Differentialrechnung berechnet oder im Grafik-Fenster mittels Befehl *Wendepunkt(f)* bestimmt werden.

9	$f''(x) = 0$ $\rightarrow \frac{72}{3725}x - \frac{504}{745} = 0$
10	$\$9$ Löse: $\{x = 35\}$

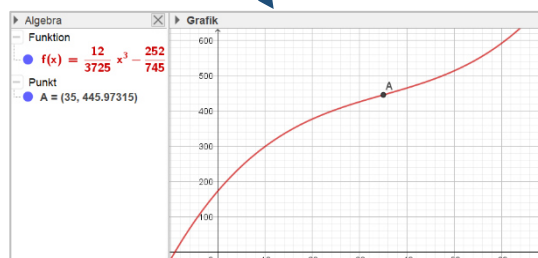


Abb. 196: Lösungsansatz – Aufgabe 2 (Teil 1)

c)

11	$E(x) := 20x$
12	$G(x) := E(x) - f(x)$
13	$G'(x) = 0$
14	$\rightarrow \frac{1}{3725} (-36x^2 + 2520x + 16150) = 0$
15	$G(75.90979)$
16	≈ -0.79074
17	$G(75.90979)$
18	≈ 695.15705

- 1 Aufstellen der Gewinnfunktion
- 2 Bestimmen der gewinnmaximierenden Menge
- 3 Berechnen des maximalen Gewinns

d)

17	$E_1(x) := p \cdot x$
18	$G_1(x) := E_1(x) - f(x)$
19	$G_1'(x) = 0$
20	$\rightarrow p - \frac{156644295302049}{1000000000000} = 0$
21	$\text{NLöse: } \{p = 15.66443\}$

Berechnung des Verkaufspreises

Abb. 197: Lösungsansatz – Aufgabe 2 (Teil 2)

e)

Der Break-Even-Point liegt bei 38 ME	E
Die Kostenkehre liegt bei 46 ME	F

A	$K(46) = 0$
B	$G'(38) = 0$
C	$K'(46) = 5$
D	$G''(38) = 0$
E	$G(38) = 0$
F	$K'''(46) = 0$

Tab. 25: Lösung - Zuordnung

f)

Nach der Auswahl der Eigenschaften kann im CAS probiert werden, eine passende Funktionsgleichung zu erstellen. Dies erfordert sowohl Grundkompetenzwissen über Polynomfunktionen als auch kontextbezogenes Wissen über Kostenfunktionen. Die dabei gefundene Funktion muss auf das Erfüllen folgender Eigenschaften kontrolliert werden (vgl. [105], S. 6-41):

- die Funktion ist streng monoton steigend für $x \geq 0$
- die Funktion hat keine lokalen Extremstellen
- die Funktion besitzt einen Wendepunkt im 1. Quadranten und weist davor ein negative und danach eine positive Krümmung auf
- der Ordinatenabschnitt der Funktion ist positiv (selten auch 0)

AUFGABE 3 – AUFSUCHEN EINER FUNKTION

(vgl., [104], S. 71)

Die Gesamtkosten, die bei einer monatlichen Produktion von x Mengeneinheiten (ME) eines bestimmten Produktes anfallen, werden durch folgende Funktion beschrieben:

$$K(x) = 8x + 17 \quad x \dots \text{in Mengeneinheiten (ME)}, K(x) \dots \text{in Geldeinheiten (GE)}$$

Innerhalb eines Monats können nicht mehr als 33 ME produziert werden.

- Erkläre, weshalb das Betriebsoptimum bei 33 ME liegen muss.
- Begründe, warum man in diesem Fall das Betriebsoptimum nicht anhand der Nullstelle der ersten Ableitung bestimmen kann.
- Auf der Suche nach der Funktionsgleichung einer (anderen) kubischen Kostenfunktion werden folgende Berechnungen im CAS durchgeführt:

CAS	
1	$K(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ → $K(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$K(0) = 6000$ → $d = 6000$
3	$K''(13) = 0$ → $78 a + 2 b = 0$
4	$K'(10) = 43$ → $300 a + 20 b + c = 43$
5	$K(30) = 8000$ → $27000 a + 900 b + 30 c + d = 8000$

Abb. 198: Berechnung im CAS

$K(x)$ in Geldeinheiten (GE), x ... in Mengeneinheiten (ME)

Interpretiere die Eingaben in den Zeilen 2 bis 5 im Sachzusammenhang - welche Informationen wurden hier verwendet?

AUFGABE 3 – MÖGLICHER LÖSUNGSANSATZ

- Da die Stückkostenfunktion $\bar{K}(x) = 8 + \frac{17}{x}$ mit zunehmender Produktionsmenge abnimmt, ist sie beim Erreichen der Kapazitätsgrenze am kleinsten.
- Die Stückkostenfunktion ist im gesamten Definitionsbereich ($x > 0$) streng monoton fallend, nimmt also kein lokales Minimum an. Die erste Ableitung ist somit stets negativ, weshalb man statt deren Nullstelle den rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) betrachten muss (siehe Lösung zu a)).

c)

CAS	
1	$K(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ → $K(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$K(0) = 6000$ → $d = 6000$
3	$K''(13) = 0$ → $78 a + 2 b = 0$
4	$K'(10) = 43$ → $300 a + 20 b + c = 43$
5	$K(30) = 8000$ → $27000 a + 900 b + 30 c + d = 8000$

Die Fixkosten betragen 6000 GE

Die Kostenkehre liegt bei 13 ME

Bei Produktion von 10 ME betragen die Grenzkosten 43 GE/ME

Bei Produktion von 30 ME betragen die Gesamtkosten 8000 GE

Abb. 199: Lösungsansatz – Aufgabe 3

AUFGABE 4 – BETRIEBSOPTIMUM

(vgl. [70], S. 46)

Gegeben ist die Kostenfunktion

$$K(x) = 0.017x^3 - 0.87x^2 + 17x + 56$$

x ... in Mengeneinheiten (ME), $K(x)$... in Geldeinheiten (GE)

- Zeichne den Graphen der zugehörigen Stückkostenfunktion ein.
- Berechne das Betriebsoptimum und zeichne es in der Graphik ein.
- Konstruiere eine Gerade durch den Koordinatenursprung, welche $K(x)$ berührt. Bestimme die Koordinaten dieses Berührungspunkts.
- Kannst du einen Zusammenhang zwischen dem Ergebnis aus b) und der Konstruktion aus c) erkennen?
- Begründe, weshalb die Tangente an den Graphen der Kostenfunktion an der Stelle des Betriebsoptimums durch den Koordinatenursprung gehen muss.

AUFGABE 4 – MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

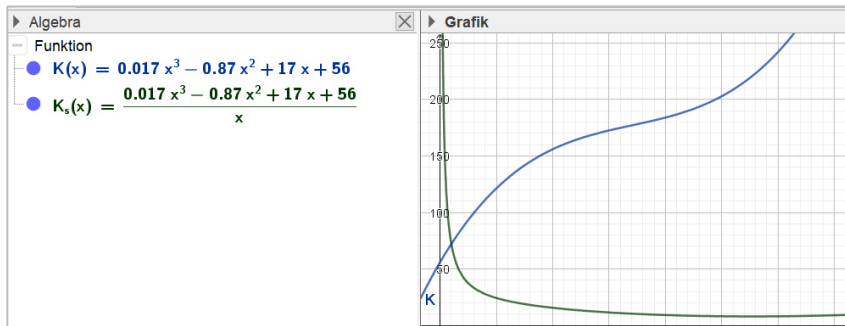
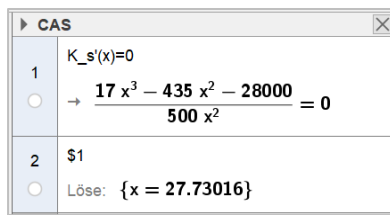
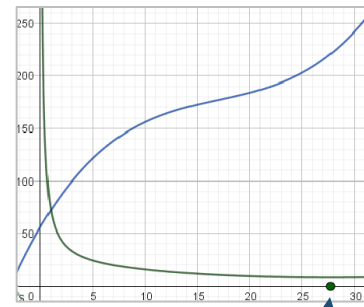


Abb. 200: Lösungsweg – Aufgabe 4a)

b)



Berechnung des Betriebsoptimums



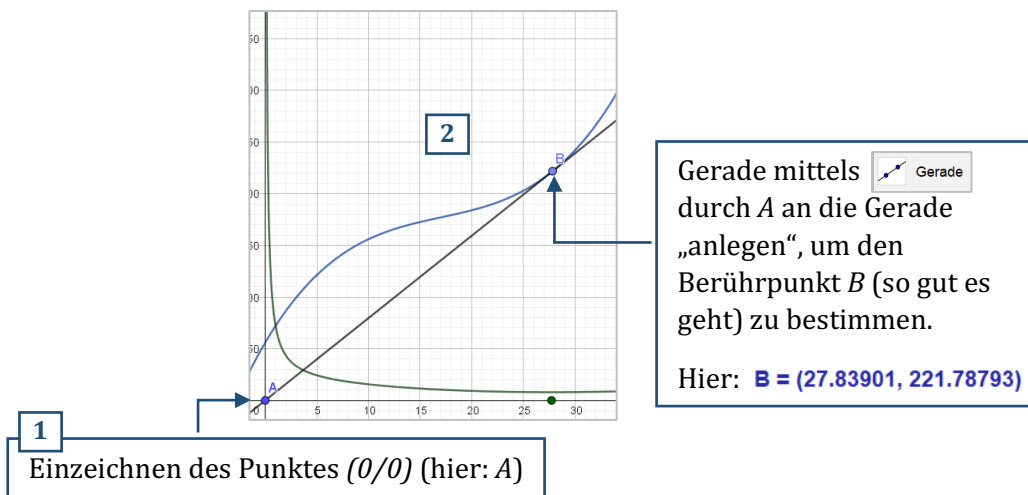
Einzeichnen in Graphik

Abb. 201: Lösungsweg – Aufgabe 4b)

c)

Das Konstruieren der Tangente kann auf mehrere Arten durchgeführt werden. Hier werden im Folgenden drei Methoden aufgezeigt:

1. Methode



2. Methode

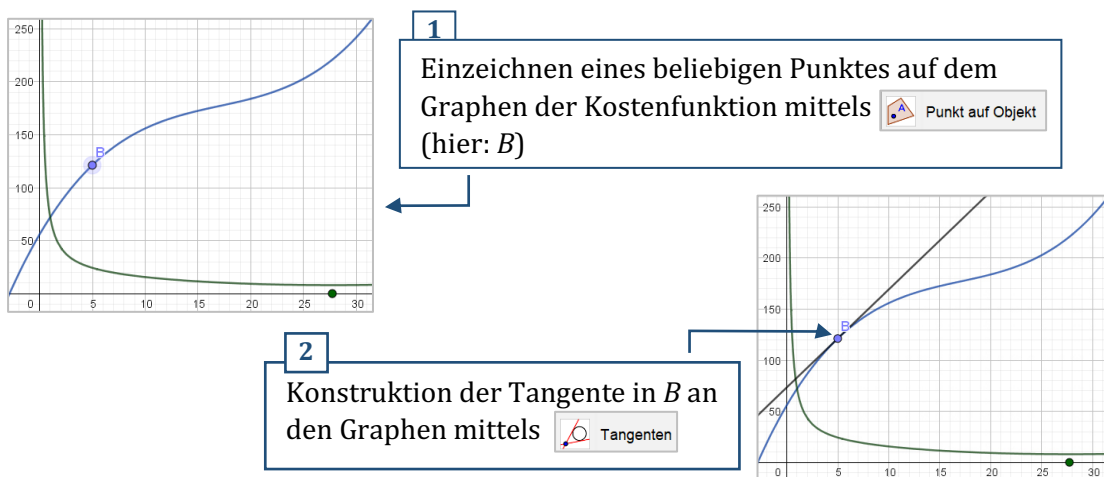
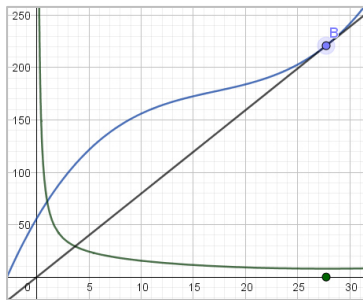


Abb. 202: Lösungsweg – Aufgabe 4c) (Teil 1)



3

Durch Bewegen von B entlang des Graphen wird versucht, die Tangente zu finden, die durch den Koordinatenursprung geht. Dadurch konnten hier für B folgende Koordinaten bestimmt werden: **$B = (27.73143, 220.92443)$**

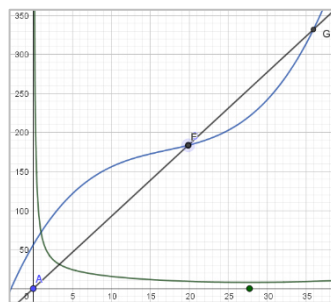
3. Methode

1

Einzeichnen von $A(0/0)$ und eines beliebigen Punktes auf dem Graphen (hier: F)

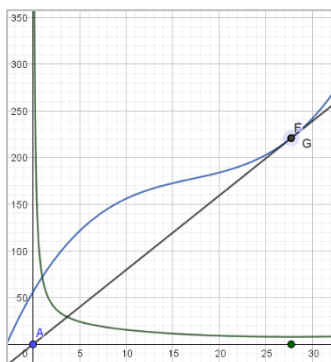
2

Konstruieren der Geraden durch A und F



3

Bestimmen der Schnittpunkte zwischen Kostenfunktion und Gerade. In der Graphik ist nur der relevante Schnittpunkt G zu sehen.



4

Der Punkt F wird so lange an der Kostenfunktion verschoben bis er mit dem Schnittpunkt G zusammenfällt und aus der Sekante eine Tangente wird.

Hier wurden dadurch für F und G folgende Koordinaten bestimmt: **$F = (27.72274, 220.85525)$**
 $G = (27.73758, 220.9735)$

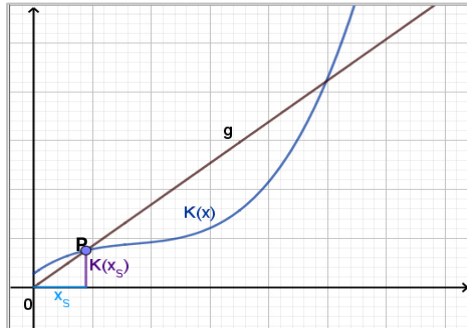
Abb. 203: Lösungsweg – Aufgabe 4c) (Teil 2)

d)

Auch, wenn der durch die Konstruktion ermittelte Punkt nicht ganz exakt dem Berührungspunkt der Tangente entspricht, kann man vermuten, dass dessen x-Koordinate mit dem Betriebsoptimum übereinstimmt.

e)

Die Begründung kann beispielsweise graphisch erfolgen (vgl. [104], S. 80):



Die Steigung k jeder Geraden g , die durch den Ursprung und einen beliebigen Punkt $P(x_s/K(x_s))$ der Kostenfunktion $K(x)$ geht, entspricht gerade den Stückkosten $\bar{K}(x)$ an dieser Stelle x_s :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k = \frac{K(x_s)}{x_s} = \bar{K}(x_s)$$

Abb. 204: Lösungsweg – Aufgabe 4e) (Teil 1)

Bewegt man den Punkt P so lange entlang des Graphen der Kostenfunktion bis die Gerade den Graphen von $K(x)$ nur noch in P berührt, erhält man jene Gerade mit kleinster Steigung k und somit auch die Stelle x_{opt} mit den geringsten Stückkosten – das Betriebsoptimum.

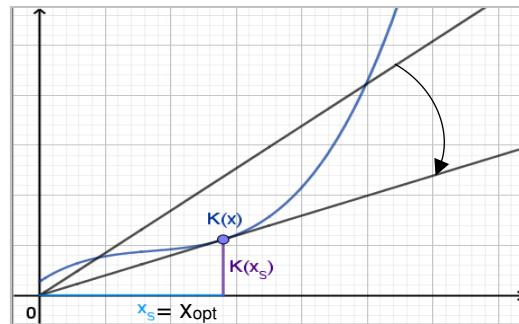


Abb. 205: Lösungsweg – Aufgabe 4e) (Teil 2)

Weiters kann die Begründung auch anhand der Differentialrechnung erfolgen (vgl. [106], S. 154; [70], S. 48): Falls das Betriebsoptimum nicht am Rand des Definitionsbereichs der Kostenfunktion $K(x)$ liegt, kann dieses über die Nullstellen der ersten Ableitung der Stückkostenfunktion $\bar{K}(x)$ bestimmt werden.

Für die Stückkostenfunktion gilt: $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = K(x) \cdot x^{-1}$

Die Ermittlung der Ableitung von $\bar{K}(x)$ erfolgt mit Hilfe der Produktregel:

$$\bar{K}'(x) = K'(x) \cdot x^{-1} + K(x) \cdot (-1) \cdot x^{-2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$$

Berechnung der Nullstellen von $\bar{K}'(x)$:

$$\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2} = 0 \quad \Bigg| \cdot x^2$$

$$K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \quad \Bigg| + K(x)$$

$$K'(x) \cdot x = K(x) \quad \Bigg| : x$$

$K'(x) = \frac{K(x)}{x}$ die Steigung der Tangente an $K(x)$ im Betriebsoptimum entspricht somit der Steigung der linearen homogenen Funktion an dieser Stelle.

In der Anwendungsphase zeigt sich deutlich, dass die einzelnen Phasen der Kreativitätsspirale nicht immer getrennt voneinander auftreten. Der Einstieg in den Modellierungsprozess erfolgt einerseits oft auf experimentelle Weise, bedarf jedoch andererseits auch häufig einer Reflexion oder auch Begründung. Im Zuge des Problemlösungsprozesses muss bei der Durchführung operativer Tätigkeiten ebenfalls oftmals zwischen experimentellem und exaktem Vorgehen abgewogen werden. (Vgl. [33], S. 93)

Besonderer Bedeutung kommt in dieser Phase - der Bildungstheorie nach Fischer entsprechend - dem Interpretieren und Begründen zu, welche durch den Einsatz von Technologie und der Auslagerung zeitintensiver oder komplexer Vorgänge überhaupt erst in diesem Maße ermöglicht werden. Um ein exaktes Begründen, wie es beispielsweise bei *Aufgabe 4)e)* der Fall ist, von den Schülern einfordern zu können, braucht es regelmäßige exaktifizierende Phasen, innerhalb derer ein derartiges Arbeiten aufgebaut und gefestigt wird (vgl. [70], S. 48).

Im Sinne eines Lernprozesses nach den in *Kap. III* angeführten Lernlinien unterstützen Aufgaben in der Anwendungsphase die intensive Auseinandersetzung mit neuen Inhalten, während welcher aber auch auf bereits bekanntes Grundlagenwissen und -können zurückgegriffen wird und in weiterer Folge eine Vernetzung von Neuem und Altem stattfindet. Dies ist allerdings nur möglich, wenn im Vorfeld ausreichende Werkzeugkompetenzen entwickelt wurden, da Schülern sonst das notwendige Rüstzeug für einen sinnbringenden Einsatz der Technologie fehlt.

2.2 WHITE BOX UND BLACK BOX

Um den Lernprozess gemäß der Kreativitätsspirale durch den Einsatz von Technologie nicht zu unterbrechen, indem gewisse Stationen ausgelassen bzw. übersprungen werden, braucht es ein Bewusstsein darüber, in welcher Entwicklungsphase des Lernens sich die Schüler befinden (vgl. [107], S.18). Hierbei findet eine Unterscheidung zwischen der *White-Box-Phase* und der *Black-Box-Phase* statt, die jeweils zwei unterschiedliche Stadien der zugrunde liegenden Lernphasen beschreiben (vgl. [96], S 130 ff).

2.2.1 WHITE BOX

In der White-Box-Phase als *Phase des verstehenden Lernens* (ebd., S. 130) geht es darum, Schüler mit „einem Begriff, einem Algorithmus, einem mathematischen Konzept“ (ebd., S. 130) vertraut zu machen. Die auf dem Weg dorthin ausgeführten operativen Tätigkeiten werden ohne technologische Hilfe durchgeführt und durch regelmäßige Anwendung eingeübt. Technologie kommt hierbei nur zum Einsatz, wenn der Lernprozess auf experimentellem Weg stattfinden soll oder bereits bekannte Zusammenhänge und Inhalte

in Form einer Black-Box (die zuvor ebenfalls in einer White-Box-Phase erarbeitet wurde) zum Wissenserwerb genutzt wird. (Vgl. [96], S. 130f)

2.2.2 BLACK BOX

Das in den White-Box-Phasen entwickelte Wissen und die zugehörigen operativen Fähigkeiten werden in der Black-Box-Phase, der *Phase des erkennenden und begründenden Anwendens* ([70], S. 98), gezielt eingesetzt, wobei die Ausführung der Operationen der Technologie überlassen werden und den Schülern das Entwickeln eines Konzepts zur Lösung der Aufgabenstellung und das Begründen der getroffenen Entscheidungen zukommt (vgl. [96], S. 131). Ganz im Sinne der *Fächerorientierten Allgemeinbildung* nach Fischer wird somit durch Auslagern des Operativen Zeit und Raum für Reflexion und somit einer intensiven verständnisorientierten Auseinandersetzung und in weiterer Folge auch für eine *Kommunikation mit Experten* gegeben (vgl. [10], S. 5; [70], S. 98).

Der Einsatz von White- und Black-Boxes erfolgt daher auf rekursive, „verschachtelte“ Weise – in einer White-Box-Phase werden bereits bekannte Konzepte in Form einer Black-Box angewandt, die wiederum davor in einer White-Box-Phase angeeignet wurden (vgl. [70], S. 98). Dieser Vorgang entspricht somit dem Aufbau eines Lernprozesses nach dem Spiralprinzip des Psychologen Jerome Bruner.

2.2.3 WHITE-BOX/BLACK-BOX PRINZIP

In dieser Phase kommen technologische Werkzeuge erst dann zum Einsatz, wenn die zugrundeliegenden Verfahren vom Schüler auch ohne Technologieeinsatz beherrscht werden (vgl. [108], S. 105). Nachdem ausreichende Kompetenzen auf „händischem Weg“ in der White-Box-Phase ausgebildet wurden, erfolgt eine Auslagerung der Tätigkeiten an das Programm, sodass sich Schüler in der Black-Box-Phase auf einer anderen Ebene mit der Problemstellung auseinandersetzen können (vgl. ebd., S. 105 f).

2.2.4 BLACK -BOX/WHITE-BOX PRINZIP

Hierbei erfolgt eine Umkehr der White- und Black-Box-Phasen, sodass Schüler anhand technologischer Black-Boxes neue Inhalte durch Experimentieren und im Sinne eines entdeckenden Lernens kennenlernen und analysieren. Die dadurch erhaltenen Vorstellungen und Vermutungen werden in der darauffolgenden White-Box-Phase behandelt und abgesichert (vgl. [96], S. 145).

So könnte beispielsweise beim Thema *Quadratische Gleichungen* anhand von Schieberegeln der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Lösungen, der Koeffizienten sowie in weiterer Folge dem Wert der Diskriminante untersucht und danach die dadurch erhaltenen Vermutungen durch händische Berechnungen untermauert werden:

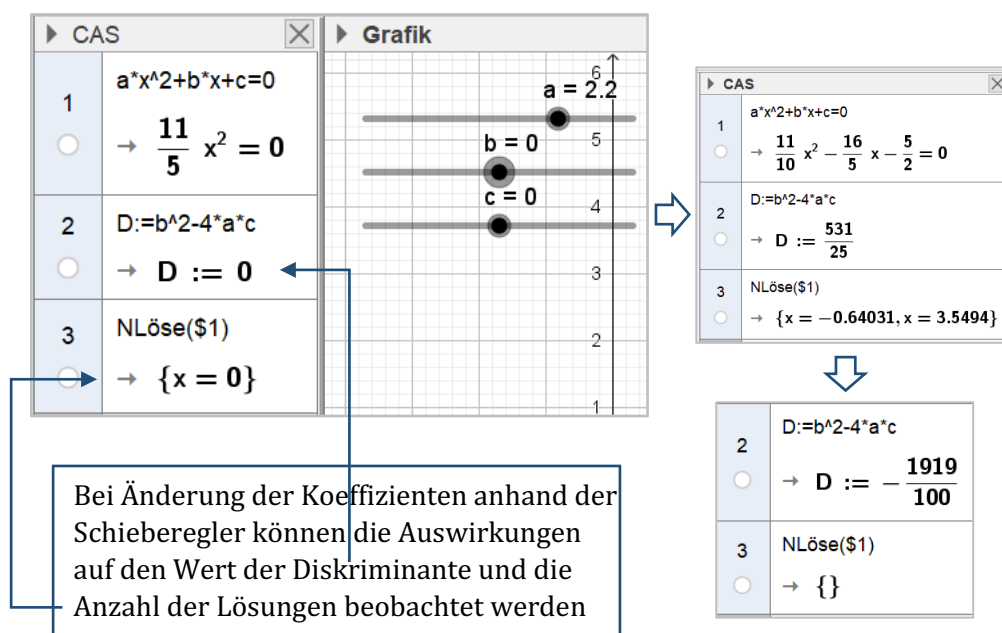
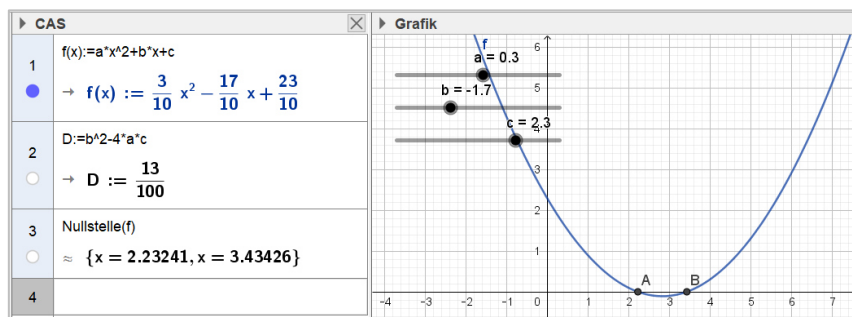


Abb. 206: Black-Box-Phase – Quadratische Gleichung

Dies kann auch im Zusammenhang mit *quadratischen Funktionen* unter Einbindung der Grafik-Ansicht als Black-Box geschehen:



Bei Änderung der Koeffizienten über die Schieberegler können die Auswirkungen auf den Wert der Diskriminante und die Anzahl der Nullstellen sowohl im CAS-Fenster als auch in der Grafik-Ansicht untersucht werden

Abb. 207: Black-Box-Phase – Quadratische Funktion

Anmerkung: In beiden Varianten sollte der Fall $a=0$ thematisiert werden.

LÖSUNGSMETHODEN LINEARER GLEICHUNGSSYSTEME

(Vgl. [70], S. 106)

Löse das Gleichungssystem mit Hilfe des CAS über die a) Komparationsmethode, b) Substitutionsmethode und c) Eliminationsmethode:

I. $4x - 3y = 9$

II. $5x + 2y = 17$

MÖGLICHER LÖSUNGSWEG

a)

CAS	
1	$4x-3y=9$ ☐ $\rightarrow 4x - 3y = 9$
2	$5x+2y=17$ ☐ $\rightarrow 5x + 2y = 17$
3	Löse($4x - 3y = 9, y$) ☐ $\rightarrow \left\{ y = \frac{4}{3}x - 3 \right\}$
4	Löse($5x + 2y = 17, y$) ☐ $\rightarrow \left\{ y = -\frac{5}{2}x + \frac{17}{2} \right\}$
5	$\frac{4}{3}x - 3 = -\frac{5}{2}x + \frac{17}{2}$ ☐ $\rightarrow \frac{4}{3}x - 3 = -\frac{5}{2}x + \frac{17}{2}$
6	\$5 ☐ Löse: $\{x = 3\}$
7	Ersetze($4x-3y=9, x, 3$) ☐ $\rightarrow -3y + 12 = 9$
8	\$7 ☐ Löse: $\{y = 1\}$

Umformen der Gleichungen nach y

Gleichsetzen der Terme

Lösen der entstandenen Gleichung mittels

Einsetzen der erhaltenen Lösung in Gleichung I

Lösen der Gleichung mittels

b)

CAS	
1	$4x-3y=9$ ☐ $\rightarrow 4x - 3y = 9$
2	$5x+2y=17$ ☐ $\rightarrow 5x + 2y = 17$
3	Löse($4x - 3y = 9, y$) ☐ $\rightarrow \left\{ y = \frac{4}{3}x - 3 \right\}$

Umformen von Gleichung I nach y

Abb. 208: Lösungsweg (Teil 1)

4	Ersetze($5x+2y=17$, $y, 4/3x-3$) → $\frac{23}{3}x - 6 = 17$
5	\$4 Löse: $\{x = 3\}$
6	Ersetze($y = 4 / 3x - 3$, $x, 3$) → $y = 1$

Ersetzen von y in Gleichung II durch den erhaltenen Term

Lösen der Gleichung mittels

Einsetzen der ermittelten Lösung in den Term aus Zeile 3

c)

CAS	
1	$4x-3y=9$ → $4x - 3y = 9$
2	$5x+2y=17$ → $5x + 2y = 17$
3	$2*(4x - 3y = 9)$ → $8x - 6y = 18$
4	$3*(5x + 2y = 17)$ → $15x + 6y = 51$
5	$(8x - 6y = 18) + (15x + 6y = 51)$ → $23x = 69$
6	\$5 Löse: $\{x = 3\}$
7	Ersetze($4x - 3y = 9$, $x, 3$) → $-3y + 12 = 9$
8	\$7 Löse: $\{y = 1\}$

Multiplizieren der Gleichungen, um die entsprechenden Koeffizienten für y zu erhalten

Addieren der Gleichungen

Lösen der Gleichung mittels

Einsetzen der erhaltenen Lösung in Gleichung I

Lösen der Gleichung mittels

Abb. 209: Lösungsweg (Teil 2)

Alternativer Lösungsweg über Nutzung der Zeilennummern

CAS	
1	$4x-3y=9$ → $4x - 3y = 9$
2	$5x+2y=17$ → $5x + 2y = 17$
3	$2\$1 + 3\2 → $23x = 69$
4	\$3 Löse: $\{x = 3\}$
5	Ersetze($\$1, x, 3$) → $-3y + 12 = 9$
6	\$5 Löse: $\{y = 1\}$

Das Zusammenfassen mehrerer Schritte ist ebenfalls möglich:

Löse($2\$1 + 3\$2, x$)
→ $\{x = 3\}$

Auf die Gleichungen wird über $\$Zeilennummer$ zugegriffen

Abb. 210: Alternativer Lösungsweg

Im Mittelpunkt dieser White-Box-Lernphase liegt die Auseinandersetzung mit Lösungsstrategien beim Arbeiten mit Gleichungssystemen. Das Umformen der Terme und Lösen der Gleichungen wird dabei von der Technologie als Black-Box übernommen, da die Durchführung dieser Operationen bereits in einer früheren White-Box-Phase erarbeitet wurde. Durch die Auslagerung dieser Handlungen erhalten Schüler die Möglichkeit, die zuvor auf händischem Weg eingeübten Methoden zur Lösung von Gleichungssystemen auf relativ schnellem Weg anzuwenden, den Fokus auf die Verfahrensweisen zu legen und dadurch die Durchführung der notwendigen Schritte zu festigen. (Vgl. [70], S. 106)

Im Vergleich zum rein händischen Operieren findet hierbei eine Veränderung der Perspektive und Wahrnehmung statt:

Wurde also beim traditionellen Weg „in den Gleichungen“ operiert, so arbeitet man jetzt „mit den Gleichungen“. Ein weiterer Abstraktionsschritt ist dann, „mit den Namen der Gleichungen“ zu arbeiten. Hier zeigt sich deutlich, dass Technologie nicht nur Kognition unterstützt, sondern Kognition verändert. Es werden neue mathematische Sprachelemente entwickelt, mit denen dann gearbeitet wird. (ebd., S. 106)

Um dem Thema auf diese Weise zu begegnen, braucht es zuvor ein grundlegendes Verständnis hinsichtlich des Einsatzes der Lösungsmethoden auf „herkömmlichem“ Weg und dazu eine ausreichende Ausbildung von technologischen Werkzeugkompetenzen. Die Verwendung der Technologie als Black-Box zum direkten Lösen von Gleichungssystemen, sollte erst nach einer angemessenen Übungsphase und Verinnerlichung dieser Vorgänge stattfinden.

Die Frage, wann Technologie in Form einer Black-Box zum Einsatz kommt, ist eine der wichtigsten, die bei der Planung von technologiegestützten Unterrichtseinheiten angestellt werden sollte. Kann es in manchen Fällen hilfreich sein, anhand einer solchen Black-Box operative Tätigkeiten, die für den Wissensgewinn in einer bestimmten Lernphase irrelevant oder sogar störend sind, auszulagern, besteht in anderen Situationen die Gefahr, durch deren Einsatz gewisse „Stationen“ der Kreativitätsspirale zu überspringen und dadurch den Aufbau eines grundlegenden Verständnisses bzw. grundlegender Fertigkeiten zu gefährden.

V FAZIT

Der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht bietet gänzlich neue Zugänge, durch die ein Erwerb von (Grund)kompetenzen im Sinne der bildungstheoretischen Orientierung nach Fischer unterstützt und in manchen Bereichen überhaupt erst ermöglicht wird.

Durch das Auslagern komplexer oder auch zeitintensiver Tätigkeiten kann eine Schwerpunktverlagerung in Richtung der Handlungsbereiche *Darstellen, Modellbilden, Interpretieren, Argumentieren* und *Begründen* erfolgen (vgl. [70], S. 9), welche grundlegend für eine *Kommunikation mit Experten und der Allgemeinheit* sind und in weiterer Folge die Basis für eine Lebensvorbereitung in Form einer *höheren Allgemeinbildung* schaffen. Dies entspricht somit der Forderung, „dass der Fokus der standardisierten schriftlichen Reifeprüfung auf reflektiertem Grundwissen und dessen flexibler Nutzung in Kommunikationssituationen“ ([24], S.3) liegen sollte. Sowohl der Aufbau als auch die Anwendung des dazu notwendigen Grundlagenwissens kann durch einen Einsatz von Technologie maßgeblich gefördert und verbessert werden. Dazu bedarf es allerdings einiger Aspekte, die es zu beachten gilt.

In meinen Augen ist in diesem Zusammenhang einer der wichtigsten Punkte, bei der Unterrichtsplanung zwischen *Leistungs-* und *Lernaufgaben* zu unterscheiden. Lernphasen, in welchen anhand von Lernaufgaben der Aufbau von Kompetenzen im Mittelpunkt stehen sollte, werden meiner Erfahrung nach im Unterricht oft vernachlässigt. Dabei erhält man durch den Einsatz von Technologie die Chance, experimentelle Lernphasen in den Unterricht zu integrieren und anhand dieser einen kompetenzorientierten Lernprozess durch die *kognitive Aktivierung der Lernenden* und verstärkte *Schülerzentrierung* zu ermöglichen.

Ich beobachte jedoch häufig, dass diese Lernphase umgangen und den Schülern das „fertige Produkt“ etwa in Form eines vorgegebenen Rechenwegs präsentiert wird. Dies kann dazu führen, dass wichtige Stationen beim Durchlaufen der *Buchbergerschen Kreativitätsspirale* übersprungen werden, wodurch einem vernetzten und nachhaltigen Wissensaufbau entgegengewirkt wird. Hier gilt es meiner Meinung nach anzusetzen und technologische Werkzeuge nicht als reine *Black-Boxes* zu verwenden, welche sämtliche Arbeitsschritte übernehmen und dadurch zu reinen „Ergebnisgeneratoren“ verkommen.

In der Praxis zeigt sich allerdings auch, dass ein Grundkompetenzaufbau oftmals mit dem Lösen von Typ-1-Aufgaben anhand der durch Technologie bereitgestellten Black-Boxes gleichgesetzt wird. Dieser Aufgabentypus entspricht jedoch dem einer *Leistungsaufgabe*, welche in Prüfungssituationen Anwendung finden sollte. Um einen Kompetenzaufbau zu gewährleisten, bedarf es entweder einer Adaption der Fragestellung (z.B. durch Einfordern von Begründungen oder auch Dokumentation der durchgeführten Arbeitsschritte) oder auch einer Integration solcher Beispiele in (die im Unterricht meist schwer vernachlässigten) *Anwendungsaufgaben*.

Durch den oft rigorosen, undurchdachten Einsatz von Technologie als Black-Box kommt neben der experimentellen auch der *exaktifizierenden Phase* oft wenig Beachtung zu,

wodurch einem grundlegenden Verständnisaufbau und dadurch in weiterer Folge dem Entwickeln von Problemlösestrategien entgegengewirkt wird. Insofern ist es besonders wichtig, auch genügend *White-Box-Phasen* in der Unterrichtsplanung zu berücksichtigen und zudem auch zu überlegen, wann ein Verzicht auf technologische Unterstützung Sinn macht. Hinsichtlich der oft zitierten Kommunikationskompetenz läuft man sonst Gefahr, dass Schüler eine Sprache nutzen, die sie nicht verstehen (vgl. [109], S. 89).

Um sämtliche Vorzüge, die der Technologieeinsatz unbestritten mit sich bringt, auch nutzen können, muss man sich jedoch im Klaren sein, dass durch diesen Einsatz auch eine neue Form von Kompetenz, eine *Technologiekompetenz* im Allgemeinen und *Werkzeugkompetenz* im Speziellen, im Unterricht Einzug hält. Ein technologiegestützter Kompetenzerwerb auf inner- und außermathematischer Ebene ist erst dann möglich, wenn durch Ausbilden ausreichender Werkzeugkompetenzen das Arbeiten damit kein Hindernis mehr darstellt.

Schenkt man all diesen Aspekten genügend Aufmerksamkeit, erhält man durch Technologie ein wirklich hervorragendes Hilfsmittel, um den Unterricht kompetenzorientiert zu gestalten und dadurch einen Grundkompetenzerwerb zu begünstigen und zu unterstützen.

VI ZUSAMMENFASSUNG/ABSTRACT

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit der mittlerweile verpflichtende Technologieeinsatz im kompetenzorientierten Mathematikunterricht der AHS zu einem nachhaltigen Grundkompetenzerwerb beitragen kann. Dazu wird zu Beginn das Konzept der österreichischen standardisierten Reife- und Diplomprüfung mit besonderem Fokus auf die zugrundeliegende Bildungstheorie beleuchtet, da dieses die Aufgabengestaltung und somit die Entwicklung von Grundkompetenzen im Unterricht maßgeblich beeinflusst. Im Anschluss daran wird ein Blick auf den kompetenzorientierten Unterricht samt den dabei zu berücksichtigenden didaktischen Aspekten und der Gestaltung passender Aufgaben geworfen. Das Hauptaugenmerk liegt auf dem letzten Kapitel, in welchem auf den gewinnbringenden Einsatz von Technologie im kompetenzorientierten Unterricht eingegangen wird. Dem Aufbau adäquater Werkzeugkompetenzen kommt dabei besonders große Bedeutung zu, weshalb dieser sehr ausführlich und anhand passender Aufgabenstellungen beschrieben wird. Zu guter Letzt wird der Einsatz derartiger Werkzeugkompetenzen anhand von unterrichtsrelevanten Beispielaufgaben in unterschiedlichen Lernphasen dargestellt.

ABSTRACT

This paper revolves around the question of in how far the now mandatory use of technology in competence-orientated math lessons in secondary school (AHS) contributes to a sustainable acquisition of basic skills. First, there will be a close look on the austrian standardised competence-orientated written school-leaving examination with focus on the underlying education theory since it profoundly influences the given tasks and therefore the development of basic skills within the lessons. Subsequently there will be a section on competence-orientated teaching including the didactical aspects and the process of designing of appropriate tasks for students. The main focus of this thesis lies on the last chapter, in which the profitable use of technology in competence-orientated teaching will be illustrated. The development of an adequate set of technological skills will be of considerable importance, which is why it will be illustrated in detail by means of relating tasks. Finally, the use of said set of technological skills will be shown through lesson-relevant exemplary tasks concerning different phases of learning and teaching.

VII LITERATURVERZEICHNIS

- [1] B. (Hrsg.), „Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe - Teil 1,“ 2013.
[Online]. Available: http://www.grg8.at/HP_GRG8_2016/lernen1/m/praxishandbuch01.pdf. [Zugriff am 02. 08. 2019].
- [2] M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel und M. Rathgeb, Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [3] Reinhard und R. Winkler, „Zentralmatura - quo vadis?,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 49, pp. 131-144, 2016.
- [4] M. Dangl, A. Dorfmayr, R. Fischer, G. Hainscho, P. Hauer-Typelt, W. Knechtel, B. Kröpfl, W. Peschek und F. Picher, „Das Projekt Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik Abschlussbericht,“ 12 2012. [Online]. Available: <https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/Abschlussbericht.pdf>. [Zugriff am 14. 08. 2019].
- [5] A. Helmke, „Guter Unterricht - nur ein Angebot?,“ *Friedrich Jahresheft* 2007, pp. 62-63, 2007.
- [6] J. Roth und H.-J. Vollrath, Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2012.
- [7] W. Peschek und R. Fischer, „Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 42, "Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik",“ 2009. [Online]. Available: <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2009%20Band%2042/VortragPeschek.pdf>. [Zugriff am 16. 08. 2019].
- [8] R. Winkler, „Zentralmatura in der Sackgasse?,“ *Internationale Mathematische Nachrichten* 237, pp. 27-58, 2018.
- [9] BIFIE, „Standardisierte kompetenzorientierte Reife- und Diplomprüfung | Grundlagen – Entwicklung - Implementierung,“ 2013. [Online]. Available: https://www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/SRDP/srdp_grundlagen_entwicklung_implementierung_2013-11-04.pdf. [Zugriff am 17. 08. 2019].
- [10] R. Fischer, „Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen,“ 2015. [Online]. Available: http://www.lehrplanforschung.ch/wp-content/uploads/2015/02/Fischer_Faecherorienterte_Allgemeinbildung.pdf. [Zugriff am 26. 08. 2019].

- [11] H. W. Heymann, „Was ist eine zeitgemäße mathematische Allgemeinbildung?“, in *Mathematische Bildung und neue Technologien*, Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 1999, pp. 147-165.
- [12] R. Schmid-Zartner, „Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 45,“ *Diskutieren im Mathematikunterricht - nicht nur (über) Kurven*, pp. 108-115, 2012.
- [13] S. Prediger, E. Schneider und W. Peschek, „Reflektieren und Reflexionswissen im Mathematikunterricht,“ 2008. [Online]. Available: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/08-PM-H20-Reflektieren-Vorfassung.pdf>. [Zugriff am 26. 08. 2019].
- [14] O. Skovsmose, „Linking mathematics education and democracy,“ *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 98/6, pp. 195-203, 1998.
- [15] H. Winter, „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung,“ *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* Nr. 61, pp. 37-46, 1995.
- [16] A.-A.-U. K. (. Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung, „Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe, Version 4/07,“ 2007. [Online]. Available: https://www.grg21oe.at/mathe_geom/2007-05-09_BIST-M8.pdf. [Zugriff am 28. 08. 2019].
- [17] BMBWF, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: 2019),“ 2019. [Online]. Available: <https://www.srdp.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=685dfd797193f067115157aa1830600942a5074f>. [Zugriff am 27. 08. 2019].
- [18] U. K. Institut für Didaktik der Mathematik Österr. Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik IFF, „Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen,“ 2009. [Online]. Available: <https://docplayer.org/9482579-Standardisierte-schriftliche-reifepruefung-aus-mathematik.html>. [Zugriff am 05. 10. 2019].
- [19] P. Borneleit, H.-W. Henn, R. Danckwerts und H.-G. Weigand, „Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe,“ *Journal für Mathematik-Didaktik* 22, pp. 73-90, 2001.
- [20] P. Hauer-Typpelt, „Angemessene Grundvorstellung zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln - Vorschläge für den Stochastikunterricht,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 43, 2010.
- [21] BMBWF, „Formelsammlung für die standardisierte kompetenzorientierte Mathematik (AHS),“ 2019. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/>

fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/MA/srdp_m_formelsammlung_2019-09-23.pdf. [Zugriff am 01. 02. 2020].

- [22] BMUKK, „Die kompetenzorientierte Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS | Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben,“ 2011. [Online]. Available: http://www.agi.tsn.at/add/mathe/SRP_M/RP_ahs_lf.pdf. [Zugriff am 18. 09. 2019].
- [23] S. Niederösterreich, „Aufgabenkultur, Teil 2, Aufgaben und Komplexität,“ 2016. [Online]. Available: [http://erlaesse.noeschule.at/Informationserlasse%20APS/NMS/II%20500-282-2016 %20Newsletter%20NMS%20September% 202016/3_Betrifft%20Aufgabenkultur_Teil%202_Depths%20of%20knowled.pdf](http://erlaesse.noeschule.at/Informationserlasse%20APS/NMS/II%20500-282-2016%20Newsletter%20NMS%20September%202016/3_Betrifft%20Aufgabenkultur_Teil%202_Depths%20of%20knowled.pdf). [Zugriff am 10. 10. 2019].
- [24] BMBWF, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik: Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen,“ April 2019. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=96731e3efb9cea71397b3063054a604396f213a7>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [25] BMBWF, „www.srdp.at: Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen,“ April 2019. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=96731e3efb9cea71397b3063054a604396f213a7>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [26] S. Kramer und E. Sattlberger, „Habemus Haupttermin – die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015 – wie war’s und wie geht’s weiter?,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 49*, pp. 60-73, 2016.
- [27] S. Keller und C. Reintjes (Hrsg.), *Aufgaben als Schlüssel zur Kompetenz*, Münster: Waxmann Verlag, 2016.
- [28] H.-S. Siller, R. Bruder, T. Linnemann, T. Hascher, E. Sattlberger, J. Steinfeld und M. Schodl, „Stufung mathematischer Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe II – eine Konkretisierung,“ in *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, Bd. 2, Münster, WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 2014, pp. 1135-1138.
- [29] T. Linnemann, H.-S. Siller, R. Bruder, T. Hascher, E. Sattlberger und J. Steinfeld, „Kompetenzstufenmodellierung am Ende der Sekundarstufe II,“ in *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, Münster, WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 2015, pp. 588-591.

- [30] C. Fuchs, „Kompetenzorientierte Analyse von Typ-2-Aufgaben nach dem O-M-A-Modell,“ 2017. [Online]. Available: <http://othes.univie.ac.at/47554/1/50418.pdf>. [Zugriff am 04. 10. 2019].
- [31] BIFIE, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik, Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: Oktober 2015),“ 2015. [Online]. Available: <https://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/gkk.pdf>. [Zugriff am 5. 10. 2019].
- [32] E. Sattlberger und J. Steinfeld, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung Mathematik (AHS) – Einsichten und Hintergrundinformationen,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 48*, pp. 94-107, 2015.
- [33] B. (Hrsg.), „Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe - Teil 2,“ 2013. [Online]. Available: http://www.grg8.at/HP_GRG8_2016/lernen1/m/praxishandbuch02.pdf [Zugriff am 08. 10. 2019].
- [34] BMDW, „Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen,“ [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568#header>. [Zugriff am 23 9 2019].
- [35] B. (Hrsg.), „Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis,“ 2011. [Online]. Available: https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2017/06/bist_vs_sek1_kompetenzorientierter_unterricht_2011-03-23.pdf. [Zugriff am 07. 10. 2019].
- [36] BMDW, „Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 20.12.2019,“ [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>. [Zugriff am 10. 10. 2019].
- [37] BIFIE, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik - Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen (Stand: März 2013),“ 2013. [Online]. Available: <https://www.srdp.at/index.php?elD=dumpFile&t=f&f=860&token=543d3db453ec3643ea9f76a289a3ee203ff68fed>.
- [38] H. Moosbrugger und A. Kelava (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*, Berlin: Springer, 2012.
- [39] A. Helfrich-Schkarbanenko, K. Rapedius, V. Rutka und A. Sommer, *Mathematische Aufgaben und Lösungen automatisch generieren*, Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2018.
- [40] K. Singer, *Auswirkungen der Einführung einer standardisierten Reifeprüfung im Fach Mathematik in Österreich*, Graz: Karl Franzens Universität Graz, 2015.

- [41] H. Moosbrugger und A. Kelava (Hrsg.), Testtheorie und Fragebogenkonstruktion, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [42] BMDW, „Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Leistungsbeurteilungsverordnung, Fassung vom 19.12.2019,“ Dezember 2019. [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009375>. [Zugriff am 19. 12. 2019].
- [43] BMDW, „Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Prüfungsordnung AHS, Fassung vom 19.12.2019,“ 19 Dezember 2019. [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007845>.
- [44] BMBWF, „Mündliche Kompensationsprüfung, Relevante Auszüge aus Gesetzen und Verordnungen für AHS und BHS,“ 3 Mai 2017. [Online]. Available: <https://www.srdp.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=1224&token=bdb5632883cba676443bc7475fcf03db3099c220>. [Zugriff am 19. 10. 2019].
- [45] BMBWF, „Kompensationsprüfungen - srdp.at,“ [Online]. Available: <https://www.srdp.at/schriftliche-pruefungen/kompensationspruefungen/>. [Zugriff am 19. 10. 2019].
- [46] BMBWF, „Kompensationsprüfung zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (AHS),“ März 2019. [Online]. Available: <https://www.srdp.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=1769&token=ae57e129c86d1039ba042610c1a3199a51945d10>. [Zugriff am 20. 10. 2019].
- [47] BMBWF, „Kompensationsprüfung zur standardisierten schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik (AHS),“ März 2019. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=1769&token=2fba2b82de11147e909facff9b8cd342d3b76f4>. [Zugriff am 03. 03. 2020].
- [48] BMBWF, „Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung an AHS,“ [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/zentralmatura/srdp_ahs.html. [Zugriff am 21. 10. 2019].
- [49] BMBF, „Die kompetenzorientierte Reifeprüfung Mathematik an AHS: Richtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben,“ 2012 Dezember. [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:973a3db1-5ba0-4c71-bfe5-90152dc433c2/reifepruefung_ahs_lfmth.pdf. [Zugriff am 21. 10. 2019].
- [50] BMBF, „Mündliche Reifeprüfung AHS, Handreichung,“ Oktober 2014. [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:ad025df3-bd56-49cf-b973-dd83c0a92948/reifepruefung_ahs_mrp.pdf. [Zugriff am 21. 10. 2019].
- [51] K. Reusser, „Kompetenzorientierung als Leitbegriff der Didaktik,“ *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung* 32 (2014), pp. 325-339.

- [52] G. Hanisch und I. Benischek, „Kompetenzorientierter Mathematikunterricht – Wie kann er umgesetzt werden?“, *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*, Bd. Heft 45, pp. 43-55, 2012.
- [53] R. Bruder, T. Leuders und A. Büchter, *Mathematikunterricht entwickeln, Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten*, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG, 2008.
- [54] H. W. Winter, *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.
- [55] F. Lipowsky, K. Rakoczy, E. Klieme, K. Reusser und C. Pauli, „Hausaufgabenpraxis im Mathematikunterricht - ein Thema für die Unterrichtsqualitätsforschung?“, in *Bildungsqualität von Schule. Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsentwicklung*, Münster, Waxmann, 2004, pp. 250-266.
- [56] H. Gudjons, *Frontalunterricht - Neu Entdeckt : Integration in Offene Unterrichtsformen*, Stuttgart Bad Heilbrunn: UTB GmbH, Klinkhardt, 2011.
- [57] H. Freudenthal, „Geometry between the Devil and the Deep Sea“, in *Educational Studies in Mathematics, Vol. 3, No. 3/4, Lectures of the Comprehensive School Mathematics Project (CSMP). Conference on the Teaching of Geometry (Jun., 1971)*, Springer, pp. 413-435.
- [58] I. Parchmann, W. Bünder, R. Demuth, J. Freienberger, R. Klüter und B. Ralle, „Lernlinien zur Verknüpfung von Kontextlernen und Kompetenzentwicklung“, *CHEMKON*, Bd. 13, pp. 124-131, Juli 2006.
- [59] G. Wagner und W. Huber, „Kompetenzorientierten Unterricht differenziert gestalten“, Juni 2015. [Online]. Available: https://www.oezbf.at/wp-content/uploads/2018/03/Kompetenzorienten-Unterricht-differenziert-gestalten_-GW_WH_Juni_2015_oezbf.pdf. [Zugriff am 23. 10. 2019].
- [60] I. Schrittemser, „Kompetenzorientierung: einige Überlegungen zu Trends in der Curriculumentwicklung“, 2014. [Online]. Available: <https://homepage.univie>.

ac.at/ilse.schrittesser/c/uploads/Schrittesser- Kompetenzorientierung.pdf.
[Zugriff am 24. 10. 2019].

- [61] BMDW, „Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Schulunterrichtsgesetz, Fassung vom 20.12.2019,“ [Online]. Available: [https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage= Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009600](https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009600). [Zugriff am 20. 12. 2019].
- [62] B. (Hrsg.), „Leitfaden zur Erstellung von Schularbeiten in der Sekundarstufe 2 – AHS,“ 2013. [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:edf79faa-b956-48ef-a56f-275ecd567d27/reifepruefung_ahs_ptsam_lf.pdf. [Zugriff am 02. 11. 2019].
- [63] BIFIE, „Hinweise und Empfehlungen zur Erstellung von Mathematikschularbeiten in der AHS-Oberstufe,“ 2013. [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/dam/jcr:53d829b1-0879-46e3-8b56-69d7f87f00fd/reifepruefung_ahs_ptsam_hw_25416.pdf. [Zugriff am 3. 11. 2019].
- [64] A. M. A. OÖ, „Handreichung zum Lehrplan Mathematik Oberstufe AHS,“ 9 5 2017. [Online]. Available: <https://argemathematikooe.files.wordpress.com/2016/11/lehrplanmathematik2016-handreichung-20170509.pdf>. [Zugriff am 4. 11. 2019].
- [65] H. Mandl und H. F. Friedrich (Hrsg.), Handbuch Lernstrategien, Göttingen: Hogrefe, 2006.
- [66] BMUKK, „Kompetenzorientiertes Unterrichten: Grundlagenpapier,“ November 2011. [Online]. Available: http://www.oezepts.at/wp-content/uploads/2011/12/Grundlagenpapier_KU_November2011.pdf. [Zugriff am 10. 11. 2019].
- [67] H. Luthiger, „Lern- und Leistungsaufgaben in einem kompetenzorientierten Unterricht,“ *Haushalt in Bildung & Forschung*, Nr. 3, pp. 3-14, 9 2012.
- [68] K. Singer, „Mathematikunterricht in der Implementierungsphase einer "Zentralmatura" in Österreich,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) (Heft 48)*, pp. 108-118, 2015.

- [69] J. Köster, „Lern- und Leistungsaufgaben im Deutschunterricht,“ *Deutschunterricht*, Nr. 61 (5), pp. 4-10, 2008.
- [70] H. Heugl, *Mathematikunterricht mit Technologie*, Linz: Veritas-Verlag, 2014.
- [71] A. Pallack, „Mit CAS zum Abitur,“ *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik*, pp. 43-46, 2007.
- [72] B. Barzel, „Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion: Evaluation einer Lernwerkstatt im 11.Jahrgang mit integriertem Einsatz von Computeralgebra,“ 2006. [Online]. Available: https://duepublico2.uni-due.de/servlets/MCRFileNodeServlet/duepublico_derivate_00014643/Disser-tationBarzel.pdf. [Zugriff am 4. 1. 2020].
- [73] E. Schneider, *Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht: Didaktische Orientierungen - Praktische Erfahrungen*, München - Wien: Profil, 2002.
- [74] W. Peschek, „Auslagerung als didaktisches Prinzip eines computerunterstützten Mathematikunterrichts,“ *Beiträge zum Mathematikunterricht 1999*, pp. 405-408, 1999.
- [75] A. Ulovec, „Dynamische Geometriesoftware – innerhalb und außerhalb der Geometrie,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, pp. 132-139, 2008.
- [76] R. Bruder, „Theorie und Empirie des Entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht,“ *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, pp. 361-364, 2018.
- [77] H. Pöchtrager, „Entdeckendes Lernen mit GeogGebra,“ in *Mathematikdidaktik im Dialog: Perspektiven und Wege*, L. Del Chicca und M. Hohenwarter, Hrsg., Linz, Trauner, 2015, pp. 155-169.
- [78] B. Kimeswenger und M. Hohenwarter, „Didaktische Prinzipien hinter GeoGebra,“ in *Mathematikdidaktik im Dialog*, L. Del Chicca und M. Hohenwarter, Hrsg., Linz, Trauner, 2015, pp. 170-178.
- [79] W. F. Inc., „Wikipedia: Tabellenkalkulation,“ Februar 2020. [Online]. Available: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tabellenkalkulation>. [Zugriff am 10. 02. 2020].

- [80] S. Schanze, „Neue Medien im Chemieunterricht aus fachdidaktischer Sicht,“ in *Lehren und Lernen mit neuen Medien*, A. Pitton, Hrsg., Berlin, LIT Verlag, 2006, pp. 18-26.
- [81] G. Heintz, H.-J. Elschenbroich, H. Laakmann, H. Langlotz, M. Rüsing, F. Schacht, R. Schmidt und C. Tietz, „Werkzeugkompetenzen: Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben,“ 2017. [Online]. Available: http://www.mnu.de/weko/Werkzeugkompetenzen_2017_MO.pdf. [Zugriff am 8. 1. 2020].
- [82] O. Wurnig, „Wie kann der Einfluss der Technologienutzung im Mathematikunterricht bei der Formulierung der Standards berücksichtigt werden? – Diskussionsstand in Österreich,“ 2006. [Online]. Available: <https://www.fachgruppe-computeralgebra.de/data/Tagungen/Schoenenberg2006/Pdf/Wurnig.pdf>. [Zugriff am 11. 1. 2020].
- [83] H. Heugl, „Vortrag, Standards und Technologie, österreichischer Stand der Bildungsstandarddiskussion im Lichte des Technologieeinsatzes,“ 11 2005. [Online]. Available: http://www.acdca.ac.at/material/vortrag/heugl_wels0511.pdf. [Zugriff am 11. 1. 2020].
- [84] H.-G. Weigand und T. Weth, *Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu alten Zielen*, Heidelberg - Berlin: Spektrum Akademischer Verlag, 2002.
- [85] P. Freiler, J. Marsik, F. Mayer, M. Olf und M. Witberger, *Lösungswege: Mathematik Oberstufe 8*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2018.
- [86] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger und A. Ulovec, *Mathematik verstehen 6*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2018.
- [87] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm und H.-G. Weigand, *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*, Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2016.
- [88] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger und A. Ulovec, *Mathematik verstehen 7*, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG,

2019.

- [89] A. Dorfmayr, C. Brand, J. Lechner, A. Mistlbacher und A. Nussbaumer, Thema Mathematik 5 -6: Mathematik mit GeoGebra, Linz: Veritas-Verlag, 2013.
- [90] D. Krebsforschungszentrum, „Wirkungsweise des Nikotins,“ [Online]. Available: https://www.dkfz.de/de/rauchertelefon/Nikotin_Wirkung.html. [Zugriff am 14. 02. 2020].
- [91] G. Malle, S. Malle, H. Woschitz, B. Salzger und M. Koth, Mathematik verstehen: Maturatraining, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2019.
- [92] I. G. Institute, „wiki.geogebra.org,“ 2020. [Online]. Available: <https://wiki.geogebra.org/de/Wahrscheinlichkeitsrechner>. [Zugriff am 16. 02. 2020].
- [93] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger und A. Ulovec, Mathematik verstehen 8, Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2016.
- [94] BIFIE, „Reisekosten,“ [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/srdp/teilb1/219/Reisekosten.pdf>. [Zugriff am 19. 02. 2020].
- [95] W. u. F. Bundesministerium für Bildung, „aufgabenpool.srdp.at,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=101&file=Wirkstoffe_im_Koerper.pdf. [Zugriff am 18. 02. 2020].
- [96] H. Heugl, W. Klinger und J. Lechner, „Mathematiklehren und -lernen mit Computeralgebra-Systemen: Unterrichtsbeispiele und didaktische Konzepte aus dem österreichischen DERIVE-Projekt,“ 1996. [Online]. Available: <http://www.acdca.ac.at/material/allgem/buch/buch96.pdf>. [Zugriff am 18. 02. 2020].
- [97] W. Dörfler, „Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium,“ *Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 21*, p. 51, 1991.
- [98] BMDW, „Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 26.02.2020,“ [Online]. Available: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>. [Zugriff am 26. 02. 2020].

- [99] B. Buchberger, *White-Box / Black-Box Principle etc. Vortrag beim Symposium „Mathematics and New Technologies: What to Learn, How to Teach?“*, Madrid, 2003.
- [100] H.-J. Elschenbroich, „Funktionenmikroskop 2.1,“ 2019. [Online]. Available: <https://www.geogebra.org/m/QxeVkgpf#material/xajxkkipj>. [Zugriff am 17.02. 2020].
- [101] M. Klinger, *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*, Wiesbaden: Springer Spektrum, 2018.
- [102] R. Danckwerts und D. Vogel, *Analysis verständlich unterrichten*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [103] BMBWF, „Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik,“ April 2019. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=861&token=96731e3efb9cea71397b3063054a604396f213a7>. [Zugriff am 19. 02. 2020].
- [104] C. Allerstorfer und M. Langer, *Angewandte Mathematik@HUM 4*, Linz: Veritas-Verlag, 2017.
- [105] J. Tietze, *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, 2003.
- [106] P. Hofbauer, D. Thurner und B. Wessenberg, *Kompetenz:Mathematik. Vorbereitung auf die Reife- und Diplomprüfung HUM*, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, 2014.
- [107] M. Müller, „Zur Schülerzentrierung im Mathematikunterricht mit Computer-algebra-Systemen - eine empirische Untersuchung der CAS-Einführung an Thüringer Schulen mit Oberstufe (Dissertation),“ 2015. [Online]. Available: http://www.db-thueringen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30890/Diss/DIS_MM.pdf. [Zugriff am 09. 10. 2019].
- [108] B. Barzel, „Mathematikunterricht zwischen Konstruktion und Instruktion: Evaluation einer Lernwerkstatt im 11.Jahrgang mit integriertem Einsatz von Computer-

algebra," 2006. [Online]. Available: https://duepublico2.uni-due.de/servlets/MCRFileNodeServlet/duepublico_derivate_00014643/DissertationBarzel.pdf.
[Zugriff am 4. 1. 2020].

- [109] H. Helmut, „Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter,“ *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft: Heft Nr. 33*, pp. 86-101, 2001.
- [110] G. GmbH, „GeoGebra,“ [Online]. Available: [geogebra.org](https://www.geogebra.org).
- [111] H.-J. Elschenbroich, „Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen,“ in *Digitale Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht*, Elschenbroich/Greefrath, Hrsg., MV-Wissenschaft, 2011, pp. 8-10.
- [112] S. Hegedus, C. Laborde, C. Brady, S. Dalton , H.-S. Siller, M. Tabach, J. Trgalova und L. Moreno-Armella, *Uses of Technology in Upper Secondary Mathematics Education*, Springer Open, 2017.
- [113] BIFIE, „Kosten,“ [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/srdp/teilb1/372/Kosten.pdf>. [Zugriff am 27 02 2020].
- [114] BMBWF, „Bitcoin,“ 2018. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-2/362/Bitcoin.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [115] BMBWF, „Hopfen,“ 2018. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-2/360/Hopfen.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [116] BMBWF, „Kino,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-2/476/Kino.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [117] BMBWF, „Punktladungen,“ 2014. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/59/Punktladungen.pdf>. [Zugriff am 05. 03. 2020].
- [118] BMBWF, „Geradengleichung,“ 2015. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/100/Geradengleichung.pdf>. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [119] BMBWF, „Geradengleichung,“ 2016. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/223/Geradengleichung.pdf>. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [120] BMBWF, „Ableitung,“ 2014. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/69/Ableitung.pdf>. [Zugriff am 06. 03. 2020].

- [121] BMBWF, „Wachstum,“ 2014. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/52/Wachstum.pdf>. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [122] BMBWF, „Trefferwahrscheinlichkeit,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/441/Trefferwahrscheinlichkeit.pdf>. [Zugriff am 07. 03. 2020].
- [123] G. Amesberger und R. Stadler, „Bildungsstandard für Bewegung und Sport: Handreichung für kompetenzorientiertes Lehren und Lernen,“ 12. 02. 2014. [Online]. Available: https://www.bildung-bgld.gv.at/fileadmin/user_upload/Downloads/Download-Verwaltung/Schulsport/Schulsport%20Recht/Bildungsstandards%20Handreichung.pdf. [Zugriff am 10. 29. 2019].
- [124] BIFIE, „Funktionsdarstellung einer Formel,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=428&file=Funktionsdarstellung_einer_Formel.pdf. [Zugriff am 05. 03. 2020].
- [125] BIFIE, „Laplace-Wahrscheinlichkeit,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=327&file=Laplace-Wahrscheinlichkeit.pdf. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [126] BIFIE, „Linkshänder,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=485&file=Linkshaender.pdf. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [127] BIFIE, „Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung | Reife- und Diplomprüfung Grundlagen – Entwicklung – Implementierung,“ 2013. [Online]. Available: <http://docplayer.org/53152998-Standardisierte-kompetenzorientierte-reifepruefung-reife-und-diplompruefung-grundlagen-entwicklung-implementierung.html>.
- [128] BIFIE, „Testergebnis,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=188&file=Testergebnis.pdf. [Zugriff am 06. 03. 2020].
- [129] BMBWF, „Algebraische Begriffe,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=96&file=Algebraische_Begriffe.pdf. [Zugriff am 04. 03. 2020].
- [130] BMBWF, „Asymptotisches Verhalten,“ 2016. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/172/Asymptotisches%20Verhalten.pdf>. [Zugriff am 05. 03. 2020].

- [131] BMBWF, „Beladung von LKWs,“ 2016. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/184/Beladung%20von%20Lkw.pdf>.
[Zugriff am 06. 03. 2020].
- [132] BMBWF, „Gleichung einer Geraden aufstellen,“ 2019. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/452/Gleichung%20einer%20Geraden%20aufstellen.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [133] BMBWF, „Grafisches Lösen einer quadratischen Gleichung,“ [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/369/Grafisches%20L%C3%B6sen%20einer%20quadratischen%20Gleichung.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [134] BMBWF, „Halbwertszeit von Cobalt-60,“ 2017. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/263/Halbwertszeit%20von%20Cobalt60.pdf>. [Zugriff am 05. 03. 2020].
- [135] BMBWF, „Kompensationsprüfung zur standardisierten kompetenzorientierten schriftlichen Reifeprüfung AHS,“ Juni 2018. [Online]. Available:
<https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=2583&token=623a108bf18bf8a09708db5f5c2fbf39119376c7>. [Zugriff am 03. 03. 2020].
- [136] BMBWF, „Mittlere Änderungsrate interpretieren,“ 2016. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/190/Mittlere%20%C3%84nderungsrate%20interpretieren.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [137] BMBWF, „Parameterdarstellung einer Geraden,“ [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/126/Parameterdarstellung%20einer%20Geraden.pdf>. [Zugriff am 01. 03. 2020].
- [138] BMBWF, „Quadratische Funktion,“ 2019. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/455/Quadratische%20Funktion.pdf>.
[Zugriff am 05. 03. 2020].
- [139] BMBWF, „Quadratische Funktion,“ 2019. [Online]. Available:
<https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/455/Quadratische%20Funktion.pdf>.
[Zugriff am 02. 03. 2020].
- [140] BMBWF, „Standardisierte kompetenzorientierte Reifeprüfung an AHS,“ 19. 6.

2019. [Online]. Available: https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/zentralmatura/srdp_ahs.html. [Zugriff am 19. 10. 2019].
- [141] BMBWF, „Trefferwahrscheinlichkeit,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/441/Trefferwahrscheinlichkeit.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [142] BMBWF, „Unbestimmtes Integral,“ [Online]. Available: https://aufgabenpool.srdp.at/srp_ahs/download.php?qid=136&file=Unbestimmtes_Integral.pdf. [Zugriff am 03. 03. 2020].
- [143] BMBWF, „Ungleichungen lösen,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/421/Ungleichungen%20l%C3%B6sen.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [144] BMBWF, „Vektoraddition,“ 2016. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/198/Vektoraddition.pdf>. [Zugriff am 03. 03. 2020].
- [145] BMBWF, „Winkel mit gleichem Sinuswert,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/454/Winkel%20mit%20gleichem%20Sinuswert.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [146] BMBWF, „Wurfhöhe eines Körpers,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/466/Wurfh%C3%B6he%20eines%20K%C3%B6rpers.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [147] BMBWF, „Zellkulturen,“ 2018. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/345/Zellkulturen.pdf>. [Zugriff am 02. 03. 2020].
- [148] H. Heugl, „ACDCA - Begleitpräsentation zu einem Vortrag über Bildungsstandards in Wels,“ 2005. [Online]. Available: http://www.acdca.ac.at/material/vortrag/heugl_wels0511.pdf. [Zugriff am 10. 01. 2020].
- [149] H. Heugl, G. Heinscho, G. Hainscho, M. Liebscher, E. Svecnik und G. Breyer, „Bildungsstandards Mathematik für die Sekundarstufe II der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) Auszug,“ [Online]. Available: http://www.brgkepler.at/~rath/pl_an/standards/standards_m_12.pdf.
- [150] M.-N. F. I. Humboldt-Universität zu Berlin, „Einige lerntheoretische Grundlagen

- und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht,“ 2015.
[Online]. Available: <http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/einfmadid2lernpsych.pdf>. [Zugriff am 23. 10. 2019].
- [151] W. Moldenhauer, „Zentralabitur mit CAS: Stand und Perspektiven,“ 2009.
[Online]. Available: https://ti-unterrichtsmaterialien.net/fileadmin/DE-Materialien/Zentralabitur_CAS.pdf. [Zugriff am 11. 11. 2020].
- [152] R. Müller, „Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 43, "Ist die Zentralmatura in Mathematik die (richtige) Antwort auf zentrale Fragen des Mathematikunterrichts?",“ 2010.
[Online]. Available: <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2010%20Band%2043/VortragMueller.pdf>.
- [153] BMBWF, „Erwärmung von Wasser,“ 2016. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/194/Erw%C3%A4rmung%20von%20Wasser.pdf>. [Zugriff am 08. 03. 2020].
- [154] BIFIE, „Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung, AHS, Mathematik, Teil-2-Aufgaben,“ 10. Mai 2016. [Online]. Available: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=772&token=39f307673a2a1ad703f1e42eb0272d62d483668d>. [Zugriff am 08. 03. 2020].
- [155] S. Kramer und E. Sattlberger, „Materialien zu den Vorträgen der ÖMG-Lehrer/innen/fortbildungstagung vom 1. April 2016: Habemus Haupttermin – Die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015,“ 01. 04. 2016. [Online]. Available: https://www.oemg.ac.at/DK/LFT_Vortraege/2016/Folien_SattlbergerKramer.pdf. [Zugriff am 04. 10. 2019].
- [156] BMBWF, „Lineares Gleichungssystem,“ 2019. [Online]. Available: <https://aufgabenpool.at/ahs/Typ-1/450/Lineares%20Gleichungssystem.pdf>. [Zugriff am 10. 03. 2020].

VIII ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abb. 1: Fächerorientierte Allgemeinbildung, ([[10], S. 5)	S. 5
Abb. 2: Kompetenzbereich.....	S. 14
Abb. 3: Aufgabe 4.1, [137]	S. 17
Abb. 4: Kompetenzbereiche - Aufgabe 4.1	S. 18
Abb. 5: Aufgabe 4.2, [133]	S. 19
Abb. 6: Aufgabe 4.2 – Lösung, [133]	S. 19
Abb. 7: Typ-1-Aufgabe [153]	S. 23
Abb. 8: Typ-2-Aufgabe ([154], S.5)	S. 24
Abb. 9: Typ-2-Aufgabe ([154], S.5)	S. 25
Abb. 10: O-M-A-Verteilung [155]	S. 26
Abb. 11: O-M-A-Verteilung ([26], S. 69)	S. 26
Abb. 12: Offenes Antwortformat [132]	S. 35
Abb. 13: Halboffenes Antwortformat [156]	S. 36
Abb. 14: Konstruktionsformat [144]	S. 36
Abb. 15: 2 aus 5 [136]	S. 37
Abb. 16: 1 aus 6 [145]	S. 37
Abb. 17: Zuordnungsformat [147]	S. 37
Abb. 18: Lückentext [139]	S. 38
Abb. 19: Offenes und halboffenes Typ-2-Aufgabenformat [114]	S. 39
Abb. 20: Konstruktionsformat einer Typ-2-Aufgabe [115]	S. 39
Abb. 21: Bewertung der Typ-1-Aufgaben [122]	S. 40
Abb. 22: Bewertung der Typ-1-Aufgaben [143]	S. 41
Abb. 23: Bewertung von Rechenfehlern [146]	S. 41
Abb. 24: (Teil 1) Punkteverteilung einer Typ-2-Aufgabe [116]	S. 42
Abb. 25: (Teil 2) Punkteverteilung einer Typ-2-Aufgabe [116]	S. 43
Abb. 26: Kompensationsprüfung [140]	S. 45
Abb. 27: Aufgabe einer Kompensationsprüfung ([135], S.3)	S. 46
Abb. 28: Beispiel eines Themenpools ([49], S. 23)	S. 48

Abb. 29: Aufgabenstellung - mündliche Matura ([49], S. 44)	S. 49
Abb. 30: Spiralprinzip nach Bruner ([150], S.2).....	S. 55
Abb. 31: Relation entwickelter und überprüfter Kompetenzen ([123], S. 57).....	S. 57
Abb. 32: Unterscheidung zw. Leistungs- und Lernaufgaben ([68], S. 116)	S. 62
Abb. 33: Ikonische und symbolische Darstellung (vgl. [78], S. 174ff)	S. 70
Abb. 34: GeoGebra: Wahrscheinlichkeitsrechner – Binomialverteilung	S. 72
Abb. 35: GeoGebra: Wahrscheinlichkeitsrechner – Normalverteilung	S. 72
Abb. 36: Handlungsbereiche – Technologieeinsatz ([148], S. 35-39).....	S. 74
Abb. 37: Werkzeugleiste	S. 76
Abb. 38: Eingabezeile und Eingabehilfe.....	S. 76
Abb. 39: Eingabe von Dezimalzahlen.....	S. 76
Abb. 40: Eingabe eines Produkts zweier Variablen	S. 77
Abb. 41: Eingabe eines Produkts einer Zahl und einer Variablen	S. 77
Abb. 42: Eingabe der Quadrat- und Kubikwurzel.....	S. 77
Abb. 43: Eingabe von Wurzeln	S. 77
Abb. 44: Definieren von Variablen und Funktionen	S. 78
Abb. 45: Strukturerkennungskompetenz bei der Eingabe.....	S. 78
Abb. 46: Trainingsaufgabe 1 – Lösungsweg.....	S. 79
Abb. 47: Lösungsweg mit Version 6	S. 80
Abb. 48: Trainingsaufgabe 2 – Lösungsweg.....	S. 81
Abb. 49: Praxisbeispiel 1 [142]	S. 81
Abb. 50: Umformung nach y	S. 82
Abb. 51: Praxisbeispiel 3 [129]	S. 83
Abb. 52: Überprüfen der Äquivalenz	S. 83
Abb. 53: Werkzeugleiste der CAS-Ansicht	S. 84
Abb. 54: Einsatz von Werkzeugen (3a).....	S. 85
Abb. 55: Einsatz von Befehlen (3a).....	S. 85
Abb. 56: Einsatz von Werkzeugen (3b).....	S. 85
Abb. 57: Einsatz von Befehlen (3b)	S. 85
Abb. 58: Falscher Lösungsweg (3a).....	S. 86

Abb. 59: Falsche Lösungswege (3b)	S. 86
Abb. 60: Lösungsweg (4a)	S. 87
Abb. 61: Methode 1 - Lösungsweg (4b)	S. 87
Abb. 62: Methode 2 - Lösungsweg (4b)	S. 87
Abb. 63: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 5	S. 88
Abb. 64: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 6	S. 89
Abb. 65: Ersetzen eines Ausdrucks	S. 89
Abb. 66: Zeilenbezüge	S. 90
Abb. 67: Praxisbeispiel 4 [134]	S. 91
Abb. 68: Methoden zur Lösung von Praxisbeispiel 4	S. 91
Abb. 69: Häufige Fehler (Praxisbeispiel 4, Teil 1)	S. 91
Abb. 70: Häufige Fehler (Praxisbeispiel 4, Teil 2)	S. 92
Abb. 71: Umformung nach Variable h	S. 92
Abb. 72: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 7	S. 92
Abb. 73: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 8a	S. 93
Abb. 74: Lösen mittels Befehl	S. 94
Abb. 75: Lösen mittels Zeilenbezug	S. 94
Abb. 76: Graph – Trainingsaufgabe 9	S. 94
Abb. 77: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 9	S. 94
Abb. 78: Lösungsweg – Praxisbeispiel 5	S. 95
Abb. 79: Definieren von Funktionen	S. 96
Abb. 80: Graph – Trainingsaufgabe 10	S. 96
Abb. 81: Aufsuchen der Funktionsgleichung	S. 96
Abb. 82: Einsetzen der Koeffizienten	S. 97
Abb. 83: Einsatz des Zeilenbezugs	S. 97
Abb. 84: Fehlerhafte Eingabe (Doppelpunkt)	S. 97
Abb. 85: Fehlerhafte Eingabe (Multiplikationszeichen)	S. 98
Abb. 86: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 6	S. 99
Abb. 87: Umständliche Eingabe	S. 99
Abb. 88: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 7	S. 100

Abb. 89: Problematische Eingabe – Praxisbeispiel 7	S. 100
Abb. 90: Fehlerhafte Eingabe – Praxisbeispiel 7	S. 101
Abb. 91: Praxisbeispiel 8 [117]	S. 101
Abb. 92: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 8.....	S. 101
Abb. 93: Algebra- und Grafik-Ansicht.....	S. 102
Abb. 94: Werkzeugleiste der Grafik-Ansicht.....	S. 102
Abb. 95: Werkzeuge für Punkte	S. 103
Abb. 96: Werkzeuge für Geraden	S. 103
Abb. 97: Werkzeuge für Messungen.....	S. 103
Abb. 98: Werkzeuge für Aktionsobjekte.....	S. 104
Abb. 99: Allgemeine Werkzeuge	S. 104
Abb. 100: Rückgängig/Wiederherstellen.....	S. 104
Abb. 101: Graph zu Trainingsaufgabe 11.....	S. 105
Abb. 102: Für Trainingsaufgabe 11 benötigte Werkzeuge.....	S. 106
Abb. 103: Bewegen des Punktes entlang des Graphen.....	S. 106
Abb. 104: Öffnen eines zweiten Grafik-Fensters.....	S. 107
Abb. 105: Einzeichnen der Punkte.....	S. 107
Abb. 106: Fenstereinstellungen.....	S. 108
Abb. 107: Graphik zu Trainingsaufgabe 12	S. 109
Abb. 108: Ermittlung des Funktionswerts.....	S. 110
Abb. 109: Kennzeichnung des Funktionswerts	S. 111
Abb. 110: Ermitteln der Nullstellen	S. 111
Abb. 111: Ermitteln der Extremstellen	S. 111
Abb. 112: Praxisbeispiel 9 [130]	S. 113
Abb. 113: Asymptoten	S. 113
Abb. 114: Schieberegler	S. 114
Abb. 115: Spurmodus.....	S. 114
Abb. 116: Variation der Parameter.....	S. 115
Abb. 117: Einstellungen des Schiebereglers	S. 115
Abb. 118: Praxisbeispiel 10 [138].....	S. 117

Abb. 119: Probleme - Praxisbeispiel 10	S. 117
Abb. 120: Praxisbeispiel 11 [124]	S. 118
Abb. 121: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 11	S. 118
Abb. 122: Formel als Funktion	S. 119
Abb. 123: Eingabe Punkt und Vektor	S. 119
Abb. 124: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15a	S. 120
Abb. 125: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15b	S. 120
Abb. 126: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 15c	S. 120
Abb. 127: Praxisbeispiel 12 [118]	S. 121
Abb. 128: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 12	S. 122
Abb. 129: Praxisbeispiel 13 [119]	S. 122
Abb. 130: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 13	S. 123
Abb. 131: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 16 a)-e)	S. 125
Abb. 132: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 16 f)	S. 126
Abb. 133: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 17 (Teil 1)	S. 126
Abb. 134: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 17 (Teil 2)	S. 127
Abb. 135: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 18	S. 128
Abb. 136: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 19	S. 129
Abb. 137: Datenanalyse	S. 130
Abb. 138: Histogramm – fehlerhafte und korrekte Darstellung [131]	S. 130
Abb. 139: Praxisbeispiel 14 [128]	S. 131
Abb. 140: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 14	S. 131
Abb. 141: Graph - Trainingsaufgabe 20	S. 132
Abb. 142: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 20 (Teil 1)	S. 132
Abb. 143: Lösungsweg - Trainingsaufgabe 20 (Teil 2)	S. 133
Abb. 144: Aufgabe „Ableitung“ [120]	S. 134
Abb. 145: Praxisbeispiel 15 [121]	S. 135
Abb. 146: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 15	S. 135
Abb. 147: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 16	S. 136
Abb. 148: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 20 (Teil 1)	S. 137

Abb. 149: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 20 (Teil 2)	S. 138
Abb. 150: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 17	S. 139
Abb. 151: Wahrscheinlichkeitsrechner.....	S. 140
Abb. 152: Wahrscheinlichkeitsrechner – wichtige Funktionen	S. 140
Abb. 153: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 21.....	S. 141
Abb. 154: Praxisbeispiel 18 [125].....	S. 142
Abb. 155: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 18	S. 143
Abb. 156: Praxisbeispiel 19 [122].....	S. 143
Abb. 157: Lösungsweg – Trainingsaufgabe (Teil 1).....	S. 144
Abb. 158: Lösungsweg – Trainingsaufgabe (Teil 2).....	S. 145
Abb. 159: Lösungsweg – Vergleich zweier Glockenkurven	S. 145
Abb. 160: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23 (Teil 1)	S. 146
Abb. 161: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23 (Teil 2)	S. 147
Abb. 162: Experimentelles Bestimmen der Intervallgrenzen.....	S. 147
Abb. 163: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 23.....	S. 148
Abb. 164: Berechnung des Erwartungswerts nicht möglich	S. 149
Abb. 165: Berechnung des Erwartungswerts über NLöse	S. 149
Abb. 166: Graphisches Ermitteln des Erwartungswerts.....	S. 149
Abb. 167: Lösungsansatz – Praxisbeispiel 20.....	S. 150
Abb. 168: Konfidenzintervall – Wahrscheinlichkeitsrechner	S. 151
Abb. 169: Konfidenzintervall – Befehl.....	S. 151
Abb. 170: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 24 (CAS).....	S. 151
Abb. 171: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 24 (Wahrscheinlichkeitsrechner)	S. 152
Abb. 172: Praxisbeispiel 21 [126].....	S. 153
Abb. 173: Lösungsansatz - Praxisbeispiel 21	S. 153
Abb. 174: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 25 (Teil 1)	S. 155
Abb. 175: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 25 (Teil 2)	S. 156
Abb. 176: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 26.....	S. 157
Abb. 177: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 27.....	S. 159
Abb. 178: Lösungsweg – Trainingsaufgabe 28.....	S. 160

Abb. 179: Freihandeditor	S. 164
Abb. 180: Kreativitätsspirale ([70], S. 39; [33], S. 91).....	S. 166
Abb. 181: Lernphasen ([70], S. 40).....	S. 166
Abb. 182: Funktionenlupe	S. 168
Abb. 183: „Hineinzoomen“.....	S. 168
Abb. 184: Schrittweises Verkleinern von h	S. 169
Abb. 185: Lösungsansatz – Aufgabe 2	S. 170
Abb. 186: Lösungsansatz – Aufgabe 3 (Teil 1)	S. 172
Abb. 187: Lösungsansatz – Aufgabe 3 (Teil 2)	S. 173
Abb. 188: Lösungsansatz – Aufgabe 5	S. 174
Abb. 189: Lösungsansatz a) (Teil 1).....	S. 175
Abb. 190: Lösungsansatz a) (Teil 2).....	S. 176
Abb. 191: Lösungsansatz b).....	S. 176
Abb. 192: Lösungsansatz c)	S. 177
Abb. 193: Graph – Aufgabe 1.....	S. 179
Abb. 194: Lösungsansatz – Aufgabe 1 (Teil 1)	S. 179
Abb. 195: Lösungsansatz – Aufgabe 1 (Teil 2)	S. 180
Abb. 196: Lösungsansatz – Aufgabe 2 (Teil 1)	S. 181
Abb. 197: Lösungsansatz – Aufgabe 2 (Teil 2)	S. 182
Abb. 198: Berechnung im CAS.....	S. 183
Abb. 199: Lösungsansatz – Aufgabe 3	S. 184
Abb. 200: Lösungsweg – Aufgabe 4a).....	S. 184
Abb. 201: Lösungsweg – Aufgabe 4b).....	S. 185
Abb. 202: Lösungsweg – Aufgabe 4c) (Teil 1)	S. 185
Abb. 203: Lösungsweg – Aufgabe 4c) (Teil 2)	S. 186
Abb. 204: Lösungsweg – Aufgabe 4e) (Teil 1).....	S. 187
Abb. 205: Lösungsweg – Aufgabe 4e) (Teil 2).....	S. 187
Abb. 206: Black-Box-Phase – Quadratische Gleichung	S. 190
Abb. 207: Black-Box-Phase – Quadratische Funktion.....	S. 190
Abb. 208: Lösungsweg (Teil 1).....	S. 191

Abb. 209: Lösungsweg (Teil 2).....	S. 192
Abb. 210: Alternativer Lösungsweg	S. 192

IX TABELLENVERZEICHNIS

Tab. 1: Kompetenzbereiche am Beispiel des arithmetischen Mittels, ([13], S. 5)	S. 7
Tab. 2: Vorsilben	S. 13
Tab. 3: Grundkompetenzbezug - Aufgabe 4.1, vgl. [24]	S. 18
Tab. 4: Grundkompetenzbezug - Aufgabe 4.2, [25]	S. 20
Tab. 5: Kompetenzstufenmodell O-M-A ([26], S. 68)	S. 22
Tab. 6: Grundkompetenzbezug ([24], S.10)	S. 24
Tab. 7: O-M-A – Bezug ([26], S. 68)	S. 24
Tab. 8: Grundkompetenzbezug ([24], S.10, 14f)	S. 25
Tab. 9: O-M-A-Bezug (vgl. [30], S. 43)	S. 25
Tab. 10: (Teil 1) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)	S. 29
Tab. 11: (Teil 2) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)	S. 30
Tab. 12: (Teil 3) Lehrplan & Grundkompetenzkatalog ([33], S. 14-18)	S. 31
Tab. 13: Lehrplan [36]	S. 32
Tab. 14: Punkteverteilung [17]	S. 43
Tab. 15: Notenschlüssel [17]	S. 44
Tab. 16: Beurteilungsschema ([47], S.3)	S. 47
Tab. 17: Aufgabengestaltung nach Bruder (Vgl. [53], S. 28f; [1], S. 117 – 125)	S. 64
Tab. 18: Schularbeitsnoten	S. 126
Tab. 19: Exponentialfunktion	S. 132
Tab. 20: Gasverbrauch	S. 136
Tab. 21: Tarife	S. 155
Tab. 22: Wirkstoffmenge	S. 158
Tab. 23: Produktionskosten	S. 178
Tab. 24: Zuordnung	S. 181
Tab. 25: Lösung – Zuordnung	S. 182

