



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

Textaufgaben in Schulbüchern: Merkmale, Vorkommen,
Schülerschwierigkeiten und mögliche Lösungsansätze

verfasst von / submitted by

Thanh Bui Thai

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2020 / Vienna, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

UA 190 333 406

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Deutsch UF Mathematik

Betreut von / Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich den Textaufgaben und daraus resultierend auch der Frage nach ihren Anforderungen und ihrem Vorkommen in den Mathematikschulbüchern.

Nach einem Auftakt über die Wichtigkeit des Mathematikunterrichts für die Allgemeinbildung folgt eine Thematisierung der Textaufgaben wie auch ein Lösungsansatz, der auch eine Binnendifferenzierungsmaßnahme ist. Es handelt sich dabei um das mathematische Rätsel.

Da das Schulbuch ein Requisit des Mathematikunterrichts ist, soll in ausgewählten Mathematikschulbüchern das Vorkommen von Textaufgaben und mathematischen Rätseln erwogen werden.

Der Vergleich zeigt, dass Textaufgaben zwar einen großen Teil der Gesamtanzahl an Beispielen einnehmen, aber nicht mehr als die Hälfte. Weiters nimmt die Anzahl der mathematischen Rätsel in der Oberstufe ab, sodass in den Büchern der 12. Schulstufe gar keine mehr vorkommen. Obwohl DidaktikerInnen in mathematischen Rätseln unter anderem eine Möglichkeit zur Binnendifferenzierung sehen und sie auch als Maßnahme gegen die Grundstimmung „Im Mathematik muss gerechnet werden“ empfohlen werden. Jedoch kann bezüglich der Oberstufe argumentiert werden, dass Lernende bereits ausgeprägte Mathematik- und Lesekenntnisse besitzen und der Fokus nun auf die Standardisierte Reifeprüfung gelegt wird.

Abstract

The present work is devoted to maths text problems and, consequently, also to the question of their requirements and their occurrence in the mathematics textbooks.

After an introduction to the importance of mathematics teaching for general education, the difficulties of text problems follows as well as a solution, which is also an internal differentiation measure. It is the mathematical puzzle.

Since the textbook is a prop for mathematics lessons, the occurrence of text problems and math puzzles should be compared in selected math school textbooks.

The comparison shows that there are a lot of text problems in the textbooks, but the number of text problems never makes up more than half of the exercises in a textbook.

Additionally, even though educationalists suggest to integrate math puzzles as a measure of internal differentiations and also to prevent the prevalent statement “In Math there has to be calculatings”, the analysis shows that the number of math puzzles decreases with every school year. For example, the textbooks of the last class before graduating do not contain math puzzles anymore.

For the higher classes it can be argued that the students have already developed an advanced knowledge of math and language and therefore their textbooks are focusing more on exercises for the school leaving examination rather than mathematics problems.

Inhalt

0. Einleitung.....	6
1. Die Beziehung zwischen Allgemeinbildung und Mathematikunterricht.....	7
2. Sachaufgaben, Textaufgaben	14
2.1. Unterscheidung zwischen Sach- und Textaufgaben.....	15
2.2. Ziel und Kritik der Sach- und Textaufgaben	18
3. Problematik bei Textaufgaben	20
3.1. Sprachkompetenzen.....	21
3.2. Lesekompetenz	23
4. Rätsel als Lösungsansätze.....	25
4.1. Die Unterhaltungsmathematik.....	27
4.2. Was ist ein Rätsel?.....	28
4.3. Das mathematische Rätsel.....	29
5. Textaufgaben und Rätsel in österreichischen Schulbüchern	41
5.1. Mathematische Rätsel in den Schulbüchern der Unterstufe	42
5.2. Mathematische Rätsel in den Schulbüchern der Oberstufe	69
6. Mathematische Rätsel außerhalb der Mathematikbücher	78
7. Diskussion der Ergebnisse	79
8. Resümierende Zusammenfassung.....	82
9. Literaturverzeichnis	83

Danksagung

Auf der Suche nach einer geeigneten Danksagung fielen mir einerseits die richtigen Worte nicht ein, aber andererseits unentwegt mehr Personen, bei denen ich mich bedanken sollte. Denn schließlich beeinflussten mich jede Begegnung und Zusammenarbeit und bilden die Person, die sich nun mit dem Studium der Bildung und Mathematik beschäftigt.

Explizit gedankt muss jedoch auf jeden Fall meiner Mutter, die jeder Art von Bildung und Weiterentwicklung immer offen gegenüberstand.

Allen anderen Mitmenschen, LehrerInnen und ProfessorInnen danke ich für ihre Geduld, Ratschläge, Anregungen und Stütze im Laufe meines Studiums. Insbesondere gilt mein Dank an dieser Stelle meinem Betreuer Mag. Dr. Andreas Ulovec für unsere Zusammenarbeit.

0. Einleitung

Mit den heutigen mobilen Taschenrechnern können bereits einfache Rechenfunktionen ausgeführt werden, welche über die Grundrechenarten hinausgehen, beispielsweise kann folgende Rechnung in manchen Taschenrechner einfach eingetippt werden und das Ergebnis der Integralrechnung $\int_{-1}^{2,5} x^3 - 2x^2$ erscheint auf dem Bildschirm.

Woran SchülerInnen und Eltern hauptsächlich noch scheitern und wofür noch kein zertifiziertes Programm geschrieben wurde, sind Textaufgaben. Denn diese müssen hinsichtlich ihrer intertextuellen Informationen ausgewertet und analysiert werden, wofür neben Rechenkenntnissen, nun auch Sprachkenntnisse benötigt werden.

Aus diesem Grund widmet sich die vorliegende Arbeit den Merkmalen, dem Vorkommen und den Schülerschwierigkeiten der Textaufgaben in den Mathematikschulbüchern. Als mögliche Lösungsansätze werden mathematische Rätsel vorgestellt. Anhand dieser Hypothese, dass das mathematische Rätsel eine Lernhilfe darstellt, soll die Arbeit die Frage nach dessen Vorkommen in den Mathematikschulbüchern beantworten. Denn Mathematikschulbücher sollen als Werkzeug des Mathematikunterrichts angenommen werden.

Zuerst wird die Relevanz des Mathematikunterrichts und die Allgemeinbildung thematisiert, schließlich stellt sich bei der genannten Rechnung die Frage nach der Alltagsrelevanz. Anschließend werden die Sach- und Textaufgaben hinsichtlich ihres Wesens und Zwecks thematisiert.

Bevor auf das Vorkommen von mathematischen Rätseln in den Schulbüchern eingegangen wird, wird das mathematische Rätsel definiert und seine Subgattungen an Beispielen präsentiert.

Danach wird das Vorkommen von mathematischen Rätseln in den Mathematikschulbüchern untersucht und mit der Anzahl der vorkommenden Textaufgaben in Relation gestellt.

Mathematische Rätsel zählen zur Unterhaltungsmathematik und sollen mit ihrem Einzug in den Mathematikunterricht nicht nur einen amüsanten Beitrag leisten, sondern auch als Unterstützung für das Verständnis angesehen werden. Denn ein Rätsel verliert seinen Charme, wenn es immer wieder gestellt wird, auf diesem Prinzip beruht auch ein Scherz. Inwiefern das mathematische Rätsel im Unterricht thematisiert wird und zur Anwendung kommt, wäre ein möglicher Ausblick für diese Arbeit.

1. Die Beziehung zwischen Allgemeinbildung und Mathematikunterricht

Heutzutage wird es als selbstverständlich gesehen, dass der Mensch Lesen, Schreiben und Rechnen kann. Das Lesen und das Schreiben werden für die schriftliche Kommunikation benötigt und damit man beim Einkaufen nicht betrogen wird, sind Zahlen- und Rechenkenntnisse von Nöten. Ein Blick in die Geschichte zeigt, dass das Interesse und das Verständnis für Bildung nicht allzeit gegeben waren.

Das österreichische Schulsystem hat seinen Ursprung in der Zeit der Aufklärung im 18. Jahrhundert unter Maria Theresia, denn sie forderte die Unterrichtspflicht für alle Kinder des damaligen Habsburgerreich.

Heute beginnt für alle in Österreich lebenden Kinder die Unterrichtspflicht mit sechs Jahren und endet frühestens nach neun Pflichtschuljahren. Wenn die Kinder mit sechs Jahren eine Schule besuchen, fangen sie mit der Allgemeinbildenden Pflichtschule (zu denen gehören Volksschule und Neue Mittelschule) an, ambitionierte und gute SchülerInnen wechseln nach der vierjährigen Volksschule an die, in der Regel achtjährige, Allgemeinbildende höhere Schule (AHS). Aus den offiziellen Bezeichnungen der Schulen wird ersichtlich, dass die Weitergabe der Allgemeinbildung eine große Relevanz im Schulkontext innehat. Dies führt zu der Frage, was unter „Allgemeinbildung“ verstanden wird.

Im schulischen Kontext soll zwischen „Allgemeinbildung“ und „Allgemeinwissen“ differenziert werden.

Die DidaktikerInnen Hossiep und Schulte definieren das Allgemeinwissen als Informationen, die ein Individuum in Bezug auf seine Gesellschaft und Allgemeinheit besitze „um seine Umwelt zu verstehen, zu gestalten und zu verändern.“ (Hossiep, Schulte u.a., 2010, S. 42.)

Dabei soll das Individuum sein Wissen nutzen, „um

- Naturwissenschaft und Technik,
- individuelle Verhaltensweisen,
- zwischenmenschliche Interaktionsprozesse und -abläufe sowie
- Gesellschaftsentwicklungen und -strukturen

in Vergangenheit und Gegenwart zu verstehen und zukünftig erfolgreich zu gestalten.“. (Hossiep, Schulte u.a. 2010, S. 42)

Meyer fasste die „Allgemeinbildung“ als „die Fähigkeit eines Menschen kritisch, sachkompetent, selbstbewußt und solidarisch zu denken und zu handeln“ zusammen. (Jank, Meyer 1991, S. 139)

„Allgemeinwissen“ meint somit die fachspezifischen Kenntnisse, wie zum Beispiel das Wissen über Literaturepochen und ihre Merkmale. „Allgemeinbildung“ ist es, wenn Zweifel bei der Aussage „Wien war im 18. Jahrhundert als kulturelle Stadt uninteressant“ auftreten, wenn der Begriff „Kasperl“ kein Fremdwort ist.

Es stellt sich nun die Frage, inwiefern die Mathematik zur Allgemeinbildung gehört. Vollrath ist der Überzeugung, dass das Unterrichtsfach einen Teil der Allgemeinbildung ausmache. Ihm zufolge erfülle dieses Unterrichtsfach nämlich drei relevante Anforderungen zeitgleich:

- Allgemeinbildung
- Qualifizierung
- Authentizität

Den Didaktikern Vollrath und Roth zufolge, soll die Allgemeinbildung Aufgaben wie Entfaltung der Persönlichkeit, Aneignung von Fähigkeiten und Kenntnissen zum Leben in der Umwelt, Befähigung zur Teilhabe am Leben in der Gesellschaft und Vermittlung von Normen und Werten erfüllen. (Vollrath, Roth 2012, S.5)

Die Zahlen und Formen der Mathematik dienen bei der Persönlichkeitsentfaltung als Ausdrucksmöglichkeiten für Gedanken. Das Zählen, Rechnen und Zeichnen seien Kulturtechniken, die ebenfalls zur Entfaltung des Individuums beitragen. Für das Leben in der Gesellschaft sollen die SchülerInnen mit Hilfe der Mathematik Lösungswege auf die Problemen des täglichen Lebens übertragen können. (Vollrath, Roth 2012, S.12)

Verfügt man über die Kenntnisse der Mathematikfachsprache, so kann man auch an der wachsenden Mathematik teilnehmen. Im Mathematikunterricht ist das Begründen von Behauptungen essenziell und soll das nachvollziehbare Argumentieren begünstigen. (Vollrath, Roth 2012, S.17)

Unter „Qualifikationen“ im mathematischen Zusammenhang verstehen Vollrath und Roth die Fähigkeiten und Kenntnisse, die unter anderem in der Berufs- und Arbeitswelt verlangt werden. Sie sollen die SchülerInnen auch dazu verhelfen, ihre eigenen Finanzen zu verwalten. (Vollrath, Roth 2012, S.19)

Aber auch für SchulabgängerInnen ist das Unterrichtsfach von großer Relevanz, denn auch sie erhalten nach vorzeitigem Beenden der Schule Zeugnisse, mit denen ihre Fähigkeiten und Kenntnisse benotet werden, „die für den anschließenden Lebensabschnitt vorausgesetzt werden“ (Vollrath, Roth 2012, S.20).

Anzumerken sei auch, dass die Mathematiknote bereits nach der Volksschule eine große Rolle spiele, wenn SchülerInnen sich danach für ein Gymnasium entscheiden sollen oder wenn sie nach der Unterstufe eine Berufsschule oder eine andere weiterführende Schule besuchen wollen. (Vollrath, Roth 2012, S.24)

Der Mathematikunterricht solle die SchülerInnen auch auf das Studium an Hochschulen qualifizieren, denn er sei von allen anderen Schulfächern „wissenschaftspropädeutisch“ (Vollrath, Roth 2012, S.23). Schließlich kann der Mathematikunterricht als eine Vorbereitung auf die Methodik und notwendige exakte Sprache der Wissenschaften gesehen werden.

Dass der Mathematikunterricht authentisch sein soll, bedeutet für Vollrath und Roth, dass SchülerInnen „Mathematik in ihren vielfältigen Aspekten erleben.“. (Vollrath, Roth 2012, S.25) Diese Auffassung beinhaltet auch, dass Lernende auch dazu angeregt werden sollen, darüber nachzudenken, was die Mathematik ausmache und wie sie entstehe. Es gehe um das Bewusstwerden der „Aussagekraft und den Erkenntnisgewinn durch Mathematik“ (Vollrath, Roth 2012, S.27) aber auch darum, dass die Mathematik etwas Dynamisches sei. Die Mathematik sei nicht wie Geschichte, die etwas Vergangenes und Abgeschlossenes ist, sondern sie entwickle sich weiter, indem eine Vermutung aufgestellt, bewiesen und anschließend ein Algorithmus entwickelt werde. (Vollrath, Roth 2012, S.29)

Dieser Umstand ließe sich auch in den Gebieten der Mathematik erkennen. Die Mathematik gab es bereits im 3. Jahrhundert vor Christus, als Euklid oder Archimedes ihre mathematischen Sätze publizierten, damals soll der Umfang der Mathematik noch überschaubar gewesen sein. Erst in der Neuzeit entstanden neue Bereiche wie Algebra, Analysis, Stochastik und viele mehr, sodass „Das mathematische Wissen unserer Zeit [...] unüberschaubar geworden“ ist. (Vollrath, Roth 2012, S.36)

Der Mathematikunterricht

Aufgrund des Beitrags zur Allgemeinbildung und der Tatsache, dass Mathematik in allen Schulen ein verpflichtendes Fach ist, ist die Relevanz des Mathematikunterrichts unumstritten, spätestens bei der Betrachtung der Lehrpläne wird dieser Umstand ersichtlich.

Dieses Unterrichtsfach wird durchgehend von der ersten Schulklasse bis zur Reifeprüfung unterrichtet und benotet. Jede Matura beinhaltet die Absolvierung dieses Faches. Die gesetzlichen Vorgaben des Mathematikunterrichts sind in den Lehrplänen festgelegt. Für die allgemein höhere Schule sind diese in die Unterstufe und Oberstufe aufgeteilt, worin die Bildungs- und Lehraufträge sowie die Unterrichtsinhalte und Kompetenzen für die jeweilige Schulstufen beinhaltet sind.

Abhängig vom Schultyp variieren die Wochenstunden zwischen drei und vier Stunden oder die Gesamtstunden zwischen 12 und 14 Unterrichtsstunden, jedoch gilt für alle SchülerInnen einer AHS der durchgängige Mathematikunterricht von der fünften Schulstufe bis zur Maturaklasse. (Lehrplan AHS)

Bei den Unterrichtszielen im Fach Mathematik wird in der Unterstufe „produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, wobei sie dazu hingeführt werden sollen, Lernprozesse selbstständig zu gestalten“ verlangt. Unterrichtsinhalte sind die drei mathematischen Themengebiete Arithmetik, Elementare Algebra und Geometrie. (Lehrplan AHS, S.79)

Da die drei Thematiken sehr umfangreich sind, sollen sie auch aufbauend von der fünften bis zur achten Schulstufe unterrichtet und sukzessiv den SchülerInnen nähergebracht werden.

Im Lehrplan der Mathematik Unterstufe wird auch explizit das „Lesen mathematischer Texte, Fachsprache“ ab der fünften Schulstufe verlangt. (Lehrplan AHS, S.81)

Der Lehrplan für die Oberstufe im Unterrichtsfach Mathematik bezieht sich auf die Aspekte der Mathematik (schöpferisch-kreativ, sprachlich, erkenntnistheoretisch, pragmatisch-anwendungsorientiert, autonom, kulturell-historisch) und gliedert die zu erwerbenden mathematische Kompetenzen in Inhalts-, Handlungs- und Komplexitätsdimension. Die drei Dimensionen fordern sowohl das sprachliche Darstellen von mathematischen Inhalten als auch das Interpretieren und „Kritisch-argumentative[s] Arbeiten“ und das „Problemlösen und Reflektieren“ (Lehrplan AHS, S.167). Die Unterrichtsinhalte reichen von den Stoffgebieten

Arithmetik und Algebra aus den vorangegangenen Schulstufen, bis hin zur Trigonometrie, Statistik, Funktionen, Integral, Differentialrechnungen und den Komplexen Zahlen. (Lehrplan AHS, S.168-172)

Was heute an der Schule im Fach Mathematik unterrichtet werde, bestimme nicht nur der Staat sondern auch die Gesellschaft. Der Mathematikfachdidaktiker Leuders begründet diese Auffassung damit, dass sowohl Eltern als auch SchülerInnen Anforderungen an das Fach und die Allgemeinbildung stellen. (Leuders 2018, S.48)

Die meisten Schwierigkeiten sollen SchülerInnen im Laufe ihrer Zeit an allgemeinbildenden Schulen im Unterrichtsfach Mathematik haben. Dieser Umstand hänge auch mit der Auffassung der SchülerInnen zusammen, im Mathematikunterricht werde lediglich das Wissen abgefragt und weniger Wert auf die Anwendung und Zusammenhänge gelegt. (Heymann 2013, S.7)

Inwiefern ein logisch aufgebautes Unterrichtsfach vielen Lernenden Schwierigkeiten bereitet, ist sehr facettenreich. Die vorliegende Arbeit legt den Fokus bei der Suche nach einem Lösungsansatz auf Textaufgaben, insbesondere Textaufgaben, die im Mathematikschulbuch vorkommen.

Denn neben Stiften, Heften, Taschenrechnern und Schulbüchern seien Aufgaben ein zentraler Punkt eines Mathematikunterrichts. (Greefrath 2010, S.2)

Das Mathematikbuch

Im Rahmen der Schulbuchaktion 1972 müssen SchülerInnen nicht für die gesamten Kosten der Lernmaterialien aufkommen. Das Budget, welches den Schulen persönlich mitgeteilt werde, hängt von der jeweiligen Schule ab.¹

Heute gebe es in Österreich drei führende Verläge, nämlich VeritasVerlag, Österreichische Bundesverlag (ÖBV) und Hölder-Pichler-Tempsky-Verläge. Aber auch Schulbuchverlage aus Deutschland, wie Springer-Verlag und der Westermann-Verlag, kommen in Österreich zum Einsatz. (Bilgeri 2018, S.30)

Seit Jänner 2008 sind Schulbuchlisten im Internet für Eltern und SchülerInnen einsehbar, welche „ein Mitbestimmungsrecht auf Mitentscheidung bei der Festlegung von Unterrichtsmitteln (§ 58 Abs. 2 Z 2 lit. c und § 61 Abs. 2 Z 2 lit. c des Schulunterrichtsgesetzes)

¹ Online unter: <https://www.schulbuchaktion.at/index2.html> (zuletzt gesehen am 24.1.2020)

haben“. Es wird vom Bundesministerium für Bildung, Wirtschaft und Forschung weiters ein didaktisch sinnvoller Umgang bei der Ausgabe des Schulbuchbudget verlangt. (Hinteregger-Euller 2018, zuletzt gesehen am 24.1.2020)

Nach dem § 14 Abs. 1 des Schulunterrichtsgesetz seien Schulbücher sowohl ein Hilfsmittel um das Verständnis zu fördern, als auch eine Aufgabensammlung um den Unterrichtsertrag zu sichern.²

In der online Schulbuchliste, aus der die Lehrkräfte für jedes Schuljahr die Lehrmitteln für das kommende Schuljahr bestellen, wurden in der Buchliste der „Schulbuchaktion 2019/20 Allgemein Höhere Bildende Schule“³ für jede Schulstufe etwa 10 Buchreihen zur Auswahl gestellt.

Nach Schmidt sehen die meisten SchülerInnen in den Mathematikbüchern die Funktion der Aufgabensammlung (Schmidt 1984, S.52) und nach Greefrath seien Aufgaben ein „zentraler Punkt des Mathematikunterrichts“ (Greefrath 2010, S.2). Die Aufgaben bestehen aus Rechenaufgaben, teils auch Zeichenaufgaben, und Textaufgaben, welche von den Lehrenden selbst erstellt werden können oder gesammelt in den Mathematikschulbüchern zu finden sind.

Im Hinblick auf die Allgemeinbildung versuchen AutorInnen und Verlage mit den publizierten Mathematikbüchern darauf einzugehen und die Anforderungen zu erfüllen. So werden mathematische Symbole als eine Geheimsprache präsentiert und diese gilt es zu entziffern, was zur Entfaltung der Persönlichkeit beiträgt. Die Aneignung von Kenntnissen und die dadurch entstehende Möglichkeit der Partizipation am kulturell gesellschaftlichen Erbe werden anhand von Rechen- und Textbeispielen befestigt und erweitert. Der letzte Aspekt der Allgemeinbildung bildet die Vermittlung von Werten und Normen, welche in der Mathematik in der „Erziehung zu Sorgfalt, Genauigkeit, Gründlichkeit und Ordnung“ (Vollrath 2012, S.18) mündet. So werden in Mathematikbüchern saubere Beweisführungen verlangt, wie auch das kritische Begründen von Rechenergebnissen.

² Online unter:

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10009600/SchUG%2c%20Fassung%20vom%2025.01.2020.pdf> (zuletzt gesehen am 24.1.2020)

³ Online unter:

https://www.schulbuchaktion.at/sba_downloads/sba2019/1000_1100_sbl2019.pdf

Da ein Mathematikbuch aufgrund der unterschiedlichen Anforderungen der Allgemeinbildung nicht ohne Sprache und Text auskommt, ist es unausweichlich im Mathematikunterricht auch zu Lesen.

Vollrath unterscheidet zwischen dem Lesen von mathematischen Texten und dem Lesen eines literarischen Textes. Ihm zufolge stelle ein mathematischer Text andere Anforderungen an die LeserInnen. Kennzeichnend für mathematische Texte ist ihre Form: viele Informationen in wenigen Worten. (Vollrath 2012, S.150)

Diese Merkmale werden den LeserInnen zum Verhängnis, denn sie sollen dazu tendieren beim Lesen von mathematischen Texten einerseits nach den ersten paar Wörtern sehr früh Hypothesen über den nachfolgenden Text zu bilden und Alltagserfahrungen zu nutzen, um den Sinn der Texte zu erfassen. Andererseits werden die Texte zu schnell überflogen, sodass relevante Informationen nicht wahrgenommen werden. Maier und Schweiger stellten fest, dass diese beiden Herangehensweisen bei mathematischen Textaufgaben weniger hilfreich sind. (Maier, Schweiger 1999, S.65)

Nicht jedes Beispiel im Mathematikbuch ist eine Textaufgabe, daher soll im folgenden Kapitel auf die unterschiedlichen Typen von Textaufgaben eingegangen werden.

2. Sachaufgaben, Textaufgaben

Die meisten Lehrenden sollen das Mathematiklehrbuch hauptsächlich als eine Aufgabensammlung im Unterricht anwenden, aus dem sie eine sukzessive Auswahl treffen, schließlich können sie zum Wiederholen des Gelernten gut angewendet werden. (Schmidt 1984, S.25)

Das Mathematikschulbuch hat jedoch mehr zu bieten, wie zum Beispiel Faltmodelle, Erklärung, Erläuterungen, Geschichte, Arbeiten am Computer.

Für die weitere Arbeit sind die Aufgaben von Bedeutung, deshalb werden im weiteren Verlauf die Aufgaben thematisiert, ausgehend von zwei Großtypen. Diese sind die Rechenaufgaben und die Textaufgaben.

- Rechenaufgabe / Rechenaufforderung

128–134: Multipliziere die Klammern aus und fasse zusammen!

128 Führe die Probe für $x = 2$, $y = 3$ durch!

a) $(3x + 2)(5x + 1) =$	c) $(x + y)(2x + 3y) =$	e) $(4y + 3x)(-2x - 5y) =$
b) $(y - 4)(3y + 5) =$	d) $(4x - y)(7x - 2y) =$	f) $(y - 3x)(-5y - 2x) =$

129 Führe die Probe für $a = 2$ durch!

a) $(2a^2 + a^5)(a + 3a^3) =$	c) $(a - 2a^4)(-a^3 + 3a) =$	e) $(-2a^3 - a)(2a + 4a^3) =$
b) $(5a + 4a^2)(2a - 3a^2) =$	d) $(3a^3 + 4a^2)(-2a - a^5) =$	f) $(-2a + 5a^3)(4a^2 - 2a) =$

130 Führe die Probe für $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 1$ durch!

a) $(2p + 3q - 4r)(5p - q) =$	c) $(p^2 - pq + q^2)(p + q) =$	e) $(p^2 - 2pq + q^2)(-p + q) =$
b) $(3p - q + 5r)(2q + 7r) =$	d) $(p^2 + pq + q^2)(p - q) =$	f) $(-p^2 + 2pq - q^2)(-p - q) =$

Aus: Das ist Mathematik 4, 2010 S.39.

- Sach- und Textaufgaben

580 Eine Schulklasse mit 24 Schülerinnen und Schülern erhebt die Anzahl der SMS, die jeder von ihnen in einem Monat versendet hat. Dabei ergeben sich folgende Zahlen:

0, 0, 0, 8, 44, 52, 58, 63,
66, 70, 70, 73, 74, 76, 76, 77,
81, 88, 89, 96, 108, 120, 131, 156

a) Berechne Mittelwert und Median der Anzahl der SMS!
b) Berechne Varianz und Standardabweichung der Anzahl der SMS!
c) Berechne 1. und 3. Quartil der Anzahl der SMS!

581 Gegeben sind drei Zahlenreihen:
Reihe 1: 1, 2, 3, 4, 5 Reihe 2: 6, 7, 8, 9, 10 Reihe 3: 2, 4, 6, 8, 10

a) Berechne das arithmetische Mittel, den Median und die Standardabweichung der drei Reihen!
b) Wie kann man die entsprechenden Werte für Reihe 2 und Reihe 3 direkt aus den Werten von Reihe 1 berechnen? Begründe!

Aus: Das ist Mathematik 4, 2010 S. 147.

Für die vorliegende Arbeit sind die Sach- und Textaufgaben von Relevanz, dementsprechend werden sie im weiteren Verlauf charakterisiert.

2.1. Unterscheidung zwischen Sach- und Textaufgaben

Sach- und Textaufgaben kommen im Bereich des Sachrechnens vor, bei dem es um die „Mathematik (rechnen) und den Bezug zur realen Welt (Sache)“ geht. (Greefrath 2010, S.9) Somit seien es Aufgaben, die sich mit der Umwelt der SchülerInnen auseinandersetzen und einen Bezug zur Wirklichkeit haben. (Greefrath 2010, S.12)

Winter definierte für das Sachrechnen drei Funktionen, ihm zufolge dient das Sachrechnen der Vermittlung von mathematischen Inhalten, aber auch zur Motivation oder Veranschaulichung und Übung von dem gelernten Inhalt, wie auch der Auseinandersetzung mit der Umwelt, bei dem die Sache näher betrachtet werde. (Winter 2003, S-15-17)

Er übt jedoch Kritik an der verbreiteten Vorgehensweise im Mathematikunterricht, nämlich die zuerst stattfindende Einführung eines mathematischen Themas und anschließend das Einüben der Inhalte anhand eingekleideter Sachaufgaben. (Winter 2003, S. 30)

Sach- und Textaufgaben werden auch mit Modellierungsaufgaben in Verbindung gebracht, nach Winter seien Modellierungstätigkeiten der Kern des modernen Sachrechnens, das der Umwelterschließung dient. (Winter 2003, S. 32).

So sei Modellieren „die Arbeit mit Problemen aus der Umwelt“ und Sachrechnen beschreibe „die Auseinandersetzung mit der Umwelt im Mathematikunterricht“. Modellierungsaufgaben seien, Greefrath zufolge, keine eingekleideten Textaufgaben, sondern Probleme in der Realität, welche dann mit mathematischen Methoden gelöst werden. (Greefrath 2010, S.41)

Zur Unterscheidung zwischen den Aufgabentypen, ausgenommen Modellierungsaufgaben, erstellte Greefrath eine Tabelle zur Veranschaulichung.

Tabelle 4.4 Klassische Aufgabentypen

	eingekleidete Aufgabe	Textaufgabe	Sachaufgabe
Schwerpunkt	rechnerisch	mathematisch	sachbezogen
Ziel	Anwendung und Übung von Rechenfertigkeiten	Förderung mathematischer Fähigkeiten	Umwelterschließung mit Hilfe von Mathematik
Darstellung	in einfache Sachsituationen eingekleidet	in (komplexere) Sachsituationen eingekleidet	reale Daten und Fakten bzw. offene Angaben
Kontext	kein wirklicher Realitätsbezug	kein wirklicher Realitätsbezug	echter Realitätsbezug
Tätigkeiten	Rechnen	Übersetzen, Rechnen, Interpretieren	Recherchieren, Vereinfachen, Mathematisieren, Rechnen, Interpretieren, Validieren

Aus: Greefrath (2010), S.86

Zu den Unterscheidungen folgen nun Beispiele zur Verdeutlichung.

Beispiel für eine eingekleidete Aufgabe:

In einem Stall werden 42 Tiere gezählt. Es sind Pferde und Fliegen. Zusammen haben sie 196 Beine. Wie viele Fliegen und wie viele Pferde sind es? (Greefrath 2010, S.83)

Beispiel für eine Textaufgabe:

Herr Stein bekommt 11 € Stundenlohn. Die monatlichen Abzüge betragen 363 €. Er erhält daher am Ende des Monats Mai 2035 €. Wie viele Stunden hat er im Mai gearbeitet? (Greefrath 2010, S.85)

Beispiel für eine Sachaufgabe:

Sonja hat zum Geburtstag ein 21-Gang-Fahrrad bekommen. Kritisch fragt sie sich, wie viele Gänge es wohl wirklich hat. Was meint ihr? (Hinrichs 2008, S. 164)

Diese drei Beispiele sollen die Unterschiede zwischen den verschiedenen Aufgabentypen repräsentieren. Die eingekleidete Aufgabe hat keinen Bezug zur Realität der SchülerInnen, da sich die SchülerInnen weder auf einem Bauernhof befinden, noch kaum auf einem Bauernhof auf die Idee kämen die Anzahl der Beine der Tiere dort zu zählen. Bei der ausgewählten Textaufgabe gebe es zwar einen Realitätsbezug, nämlich das Ausrechnen des Lohns nach dem Stundenentgelt. Dieser versuchte Realitätsbezug sei aber für SchülerInnen kaum von Interesse, wenn sie noch nicht erwerbstätig sind. Zur Bewältigung der Sachaufgabe müssen die Inhalte reflektiert und hinterfragt werden, wie bei dem angeführten Beispiel. (Greefrath 2010, S. 84-86)

Ein weiterer wichtiger Teil des Sachrechnens ist nach Greefrath das Modellieren. (Greefrath 2010, S.12) Er appelliert dafür, dass Sachrechnen in Zukunft „stärker mit Modellierungstätigkeiten als mit dem Lösen eingekleideter Textaufgaben in Verbindung gebracht werden“ (Greefrath 2010, S.37) sollen. Daher soll der Begriff Sachrechnen neben den Modellierungsaufgaben weiterhin bestehen, da Modellierungsaufgaben nicht alle Aspekte des Sachrechnens abdecken, wie zum Beispiel einfache Sachaufgaben. (Greefrath 2010, S.37)

Allerdings legte Greefrath in seinen Forschungen einen Schwerpunkt auf den realistischen Alltagsbezug der Aufgaben in einem Mathematikschulbuch, welches für die vorliegende Arbeit nicht so streng gewertet wird. Deshalb werden in den nächsten Schritten unter dem Begriff „Textaufgaben“ alle Beispiele verstanden, deren Kontext einen versuchten Alltagsbezug haben. Darunter fallen somit Sachaufgaben, eingekleidete Aufgaben und Modellierungsaufgaben ohne zusätzliche Recherche außerhalb des Schulbuches.

2.2. Ziel und Kritik der Sach- und Textaufgaben

Sachrechnen mit seinen Sach- und Textaufgaben ist heute nicht mehr aus dem Mathematikunterricht wegzudenken, weshalb sie auch ein Teil der Standardisierten Reifeprüfung Mathematik ist.

Die Ziele des Sachrechnens sind sehr umfangreich, sie reichen von Wiederholen bis hin zum Vertiefen der mathematischen Operationen, dennoch verfolgt es das Ziel der „Befähigung zur Wahrnehmung und zum Verstehen von Erscheinungen unserer Welt“ (Greefrath 2010, S.15) und darüber hinaus das „Erreichen von Modellierungskompetenzen“ (Greefrath 2010, S.17). Bereits Westermann vertrat die Ansicht, dass das Sachrechnen aufgrund seines Bezugs zur Umwelt die Ziele des Mathematikunterrichts ergänzt. (Westermann 2003, S. 148)

Dennoch wird das Sachrechnen beanstandet, wie zum Beispiel vom Didaktiker Greefrath. Er beurteilt sowohl eingekleidete Aufgaben als auch Textaufgaben, denn beim Fehlen der Einkleidung geht auch der Bezug zur Realität im Mathematikunterricht verloren. (Greefrath 2010, S. 84)

Weiters kritisiert er auch die ausgedehnte Anwendung im Unterricht, da dieses Einüben von Textaufgaben dazu führe, dass SchülerInnen nicht über das gestellte mathematische Problem nachdenken, sondern vielmehr nur ihre Herangehensweise auf weitere Aufgaben übertragen. (Greefrath 2010, S.85)

Die Kritik Greefraths kann mit den Behauptungen anderer Didaktiker wie Gaidoschik und Radatz in Verbindung gesetzt werden, nämlich dass SchülerInnen mit der Zeit einen Reflex entwickeln, wenn ihnen mathematische Textaufgaben begegnen. SchülerInnen würden dazu tendieren, lieber sinnlos zu rechnen, als gar nicht, anstatt den Text kritisch zu hinterfragen. (Gaidoschik 2003, S.4)

Ausgehend von der Annahme, dass Kinder eine gewisse Einstellung zu Textaufgaben entwickelt haben sollen, wie etwa, dass es besser sei etwas zu rechnen als gar nichts oder dass alle im Text vorkommenden Zahlen genutzt werden müssen, untersuchte der Didaktiker Selter seine weitere Vermutung. Er konzentrierte sich nämlich auf den psychologischen Aspekt, dass Kinder Kapitänsaufgaben lösen würden, weil es von ihnen im Unterricht aus ihrer Sicht verlangt wird. Bei seinen Untersuchungen sollen die Kinder auch ihre Rechenschritte erklären, was zu originellen Antworten führten, wobei den Kindern sehr wohl bewusst war, dass bei den Aufgaben etwas nicht stimmte. (Selter 2004, S.8)

Als einen weiteren Aspekt betrachtete Schneeberger das Dilemma der Schlüssel- und Signalwörtern in Textaufgaben, denn „je höher und authentischer die Aufgaben sind, desto schwieriger sind sie in der Regel – und umgekehrt: je künstlicher, desto einfacher und damit lösbarer.“ (Schneeberger 2009, S.58) Seiner Ansicht nach verleiten Schlüssel- und Signalwörter die SchülerInnen zu blindem Rechnen. (Schneeberger 2009, S.58)

Um diesem blinden Rechnen vorzubeugen und das Verständnis des Lehrinhalts zu festigen, empfiehlt Gaidoschik den „gezielte[n] Einsatz von Kapitänsaufgaben“. (Gaidoschik 2003, S.6)

Im nächsten Kapitel werden zwei ausgewählte Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit Textaufgaben auftreten, näher erläutert.

3. Problematik bei Textaufgaben

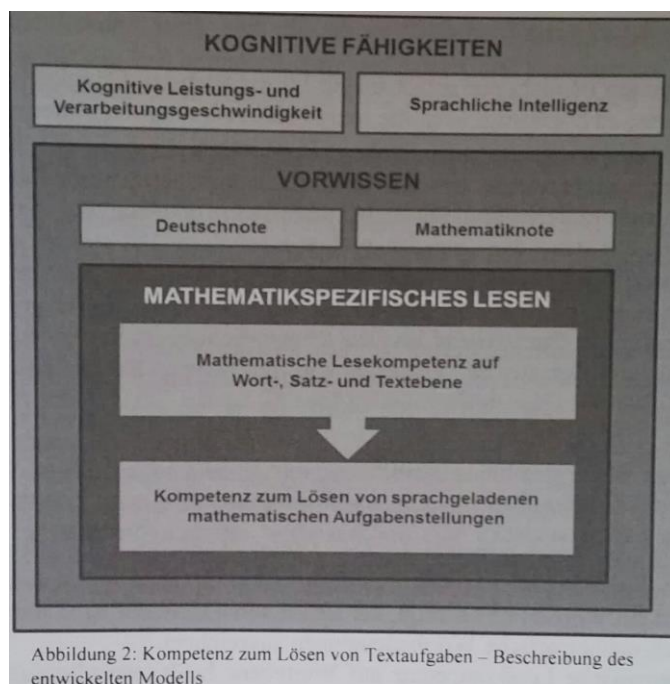
Rechenausdrücke wie $54+48= \dots$ und $\int 2e^x dx = \dots$ können von mehr Menschen gelöst werden als mathematische Textaufgaben wie zum Beispiel die folgende Aufgabe:

„Mama Dijana ima šetero djece. Odlučila je 45 bombona podijeliti svojoj djeci tako da svako dijete dobije jednako mnogo bombona. Može li to učiniti? Koliko će bombona dobiti svako dijete? Hoće li što ostati neraspodijeljeno?“ (Hrovatek, S.8)

Mathematikunterricht ohne jegliche Sprache zu betreiben ist unmöglich, folglich erfordert er Sprachkompetenzen. Insbesondere bei der Arbeit mit dem Mathematikschulbuch bedarf es an Sprachkenntnissen, um die Aufgabenstellungen zu verstehen.

Wobei die Mathematik sich einer eigenen Sprache bedient, die Ähnlichkeiten mit der Alltagssprache aufzeigt, aber eben doch eine andere explizite Bedeutung haben. Aus diesem Grund sind Sprachkenntnisse und -kompetenzen sowie auch Lesekompetenzen in Hinblick auf die Bewältigung der Textaufgaben im Mathematikunterricht unerlässlich.

Völkl, Krammer und Schwetz untersuchten 2014 an 139 SchülerInnen der 5. Schulstufe AHS und NMS welche Faktoren Lernende bei der Bearbeitung einer Textaufgabe benötigen. Sie gingen dabei von einem hierarchischen Aufbau der Einflussfaktoren aus: kognitive Fähigkeiten, Vorwissen und mathematikspezifisches Lesen. Die folgende Abbildung soll den hierarchischen Aufbau der „Kompetenz zum Lösen von Textaufgaben“ verdeutlichen.



Aus: Benischek (2014), S.205

Ihre Ergebnisse ergaben, dass Textaufgaben eher erfolgreich bewältigt werden, wenn SchülerInnen höhere sprachliche Kompetenzen und mathematisches Vorwissen besitzen. (Benischek 2014, S. 201)

Somit hängt der Erfolg beim Lösen der Textaufgaben nicht nur von den mathematischen Fähigkeiten und Kompetenzen ab, sondern auch von der Sprachbeherrschung des Einzelnen. Daher fordern die AutorInnen, dass sprachliche Elemente im Mathematikunterricht von Lehrenden bewusst integriert werden sollen, beispielsweise mit dem Führen eines Vokabelheftes und Lernende sollen für das Lesen und die Sprache im Mathematikunterricht sensibilisiert werden. (Benischek 2014, S.214)

Die Didaktikerin Nadine Wilhelm veröffentlichte 2016 ihre Untersuchung in Deutschland zum Thema „Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben“, insbesondere bei sprachlich schwachen SchülerInnen im Alter zwischen 15 und 17 Jahren. Für ihre Untersuchung analysierte sie 200 Mathematikprüfungen der Mittleren Schulreife in Nordrhein-Westfalen und führte 40 Interviews mit Lernenden. Sie kam dabei zu dem Fazit, dass sprachlich schwache Lernende aufgrund der Defizite ihrer Bildungssprache und daraus resultierende Sprachdefizite allgemein, Schwierigkeiten beim Lösen von Textaufgaben aufweisen. (Wilhelm 2016, S. 302)

Wilhelm unterscheidet zwischen zwei Prozessen, bei denen es beim Lösen von Textaufgaben Schwierigkeiten auftreten könnten, der Leseprozess und der Rechen- und Löseprozess. Bei dem Leseprozess einer Textaufgabe betrachtet sie die Sprach- und Lesekompetenzen.

3.1. Sprachkompetenzen

Bezüglich der Notwendigkeit von Sprachkompetenzen beim Bearbeiten von mathematischen Textaufgaben verwies Wilhelm auf eine Studie des englischsprachigen Kollegen Brown.

Brown wies die Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenzen und Mathematikleistungen bei „literacy-based performance assessments“ bei Englischlernenden im Unterschied zu SchülerInnen mit Englisch als Erstsprache nach und fordert deshalb die „Vermeidung sprachlicher Biases“ (Vallen 2005, S. 171) um die Mathematikleistung zu fördern. Mit sprachlicher Biases werden die zusätzlichen Kenntnisse und Fähigkeiten bezeichnet, die für das Lösen von Textaufgaben notwendig sind. (Wilhelm 2016, S.11)

Er nennt anschließend acht Ursachen, die die Mathematikleistungen der Lernenden beeinflussen:

1. Die Mathematik sei eine eigene Sprache
2. Mathematisches Lernen ist aufbauend
3. Die mathematische Sprache kommt im nächsten Umfeld nicht vor
4. Die Sprache der Mathematik weist spezifische und hochkomplexe Syntax auf
5. Sprachlernende, auch LernerInnen der mathematischen Sprache, sind langsame LeserInnen
6. Es gibt unterschiedliche Lösungs- und Rechenwege, die sich auch kulturell unterscheiden
7. Interpretationen der Lösungen sind soziokulturell abhängig
8. Meist ist der Kontext der mathematischen Textaufgaben für Sprachlernende unbekannt

(Brown 2005, S.340-342)

Die Didaktikerin Wilhelm weist darauf hin, dass es im deutschsprachigen Raum zu wenige Studien zum Thema Verhältnis zwischen Sprachkompetenz und Mathematik gebe, weshalb sie sich auf Brown berufe. Im deutschsprachigen Raum gebe es aber einige nennenswerte Studien, welche in der Grundschule durchgeführt wurden. Wie zum Beispiel das Projekt SOKKE, welches zu dem zentralen Resultat kam, dass ein „zunehmender Einfluss des Sprachniveaus der Lernenden vom Ende der ersten Klasse [...] bis zum Ende der vierten Klasse [...] auf Leistungen u.a. in Mathematik“ wahrnehmbar sei. Daher seien „Fähigkeiten in der Unterrichtssprache die zentrale Bedingung“ für das Erwerben und Anwenden von mathematischen Kenntnissen in der Schule. (Wilhelm 2016, S.32)

Sprachen dienen einerseits der Verständigung und Mitteilung, wie auch andererseits dem Erkenntnisgewinn, daher ist der Ausgangspunkt der Didaktikerin Wilhelm, dass die Sprache die Denk- und Verstehensprozesse beim Erkenntnisgewinn unterstützt. Sie sieht das Sprechen zwischen LeserInnen und mathematischen Textaufgaben als einen „persönlichen Dialog mit der Sprache“ der Mathematik. (Wilhelm 2016, S.36)

Unumstritten sei auch die Notwendigkeit der Beherrschung der Bildungssprache im Mathematikunterricht. (Heinze et al. 2011, S. 11) Wilhelm fasst diese Behauptung auf und weitet diese aus, indem sie die Bildungssprache als ein Lernmedium sehe, das als Voraussetzung für ein erfolgreiches Lernen gelte. Die Bildungssprache sei nicht nur „Werkzeug

des Denkens“, sondern auch die „Eintrittskarte für schulerfolgreiche Laufbahnen“, insbesondere im Hinblick auf den Mathematikunterricht. (Wilhelm 2016, S.36)

3.2. Lesekompetenz

Lesekompetenzen setzen sich, nach DidaktikerInnen wie Lenhard et al., aus folgenden Ebenen zusammen:

- Wortverständnis
- Satzverständnis
- Textverständnis

Wilhelms empirische Studie bezieht sich auf die Lesepsychologie und unterscheidet ebenfalls zwischen Wort-, Satz- und Textverständnis.

Das Lesen sei ein aktiver Prozess, denn beim Lesen werden „das Vor- und Weltwissen in den Austausch mit dem zu lesenden Text“ in Relation gebracht. Bei diesem Leseprozess gebe es eine Wechselwirkung zwischen dem Text und den Rezipienten, die als bottom-up und text-down bekannt ist. (Wilhelm 2016, S.51)

Auf der Wortebene bezieht sich die Didaktikerin auf ihre Vermutung, dass bildungssprachtypische Wörter im Unterricht nicht explizit vermittelt werden und Strategien, wie beispielsweise durch den Kontext die Bedeutung herauslesen, bei innermathematischen Texten nicht weiterhelfen. Dann könne das falsche Verständnis eines Wortes in einer Textaufgabe zu einer voreiligen falschen Lösung führen. (Wilhelm 2016, S.57)

Ein weiteres Hindernis sieht Wilhelm im Satzbau, der insbesondere auf lange verdichtete Schachtelsätze bezogen sei und oft durch Präpositionaladverbien und Nominalphrasen erzeugt werde. (Wilhelm 2016, S.60-61)

Beim Bearbeiten von Textaufgaben müssen die Sätze zusammen verknüpft werden, sodass ein globaler Zusammenhang ermittelt werden kann. Diese Kohärenzbildung sei einfacher, wenn die Satzzusammenhänge eindeutig zu erkennen seien. Mathematische Aufgaben können auch aus Diagrammen und Texten bestehen. Wilhelm weist daraufhin, dass diese Fähigkeit auch explizit erlernt werden muss. Daher sieht sie die Hauptschwierigkeit beim Lösen von Textaufgaben in der Verbindung der einzelnen Wörter zum Kontext und zu einander, wie auch im Zusammenhang mit den vorangegangenen Informationen im Text. (Wilhelm 2016, S.62)

Bei ihrer Untersuchung konnte Wilhelm feststellen, dass die Sprachkompetenz mit den Mathematikleistungen zusammenhängen. Unter Sprachkompetenz versteht Wilhelm ein Konstrukt aus Mehrsprachigkeit, Lesekompetenz und Bildungssprache. (Wilhelm 2016, S.294)

Für einen internationalen Vergleich von Schülerleistungen und Bildungssystem untersucht PISA alle drei Jahre mit unterschiedlichen Schwerpunkten die Kompetenzen von SchülerInnen zwischen 14 und 15 Jahren. PISA legt dabei immer einen Fokus auf Mathematik, Lesen und Naturwissenschaften, um herauszufinden „wie gut die jungen Menschen in den teilnehmenden Staaten auf Herausforderungen der Wissensgesellschaft vorbereitet sind“.⁴ In den Jahren 2003 und 2012 lag der Schwerpunkt der PISA Studie auf „Mathematical literacy“. Das Konzept der Mathematical literacy verlangt Bewältigungsprozesse wie: Situationen durch mathematische Terme auszudrücken, die Anwendung und Interpretation der Vorgänge. Es gehe dabei um die Fähigkeiten eines Individuums Mathematik in unterschiedlichen Kontexten zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren.⁵

⁴ Online unter: <http://archiv.ipn.uni-kiel.de/PISA/> (zuletzt gesehen am 25.1.2020)

⁵ Online unter : <https://www.pisa.tum.de/kompetenzbereiche/mathematische-kompetenz/> (zuletzt gesehen am 25.1.2020)

4. Rätsel als Lösungsansätze

Aufgrund der Annahme von der Wichtigkeit der Mathematik für Heranwachsende in unserer Gesellschaft folgt die Notwendigkeit ihnen dieses kulturelle Erbe für weiterführende Fortschritte zu vermitteln. Dabei geht es nicht nur um das Auswendiglernen von Maßeinheiten oder Formeln, sondern auch um das Verständnis hinter diesen Vorgängen und deren Nutzen, dazu soll der Mathematikunterricht dienen.

Im deutschsprachigen Raum leiten Lehrende gewöhnlich für mehr als 20 SchülerInnen den Unterricht. Dabei sollen die SchülerInnen individuell, differenziert und selbstbestimmend betrachtet werden, was dem Ziel der Binnendifferenzierung entspricht. Ihr gemeinsames Ziel ist das Erlangen der Reifeprüfung oder zumindest der Allgemeinbildung.

Dem Lehrplan zufolge soll der Mathematikunterricht dabei auch jedem Lernenden den kritischen Zugang zu Thesen und Behauptungen ermöglichen. (Lehrplan AHS)

Für den Mathematikunterricht gilt somit, dass Lehrende an den jeweiligen Wissensstand der einzelnen Lernenden anknüpfen sollen und von dort mit dem zu vermittelnden Lehrstoff fortsetzen. Die Umsetzung in der Schulrealität mit mehr als 20 Individuen stoße auf Überforderung auf Seiten der Lehrenden. (Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold 2015, S. 517)

DidaktikerInnen wie Aschemann und Kaufmann verdeutlichen die Binnendifferenzierung anhand einer kurzen Fabel, die auf einfache Art den Sinn und das Ziel der Binnendifferenzierung beim Lehren und Erziehen verdeutlichen soll:

Die Schule der Tiere

Einmal organisierten die Tiere eine Schule. Auf dem Lehrplan standen Rennen, Klettern, Schwimmen und Fliegen. Alle Tiere nahmen an allen Fächern teil. Die Ente war hervorragend im Schwimmen. Sie war sogar besser als die Lehrerin, aber sie hatte nur mittelmäßige Noten im Fliegen und war sehr schlecht im Rennen. Weil sie so langsam lief, musste sie nach der Schule trainieren und konnte auch nicht in die Schwimmstunde gehen. Das ging so lange, bis die Schwimmhäute an ihren Füßen durchgelaufen waren und sie auch nur noch mittelmäßig gut schwimmen konnte. Mittelmäßigkeit war aber an der Schule akzeptabel, so machte sich niemand darüber Sorgen – nur die Ente. Der Hase war im Rennen der beste der Klasse. Er hatte aber einen Nervenzusammenbruch wegen all der Nachhilfe im Schwimmen. Das Eichhörnchen war ein exzellenter Kletterer. Im Flugunterricht wollte sein Lehrer aber, dass es

aus dem Stand startete und nicht von oben aus dem Baum. Es bekam Muskelkrämpfe vor Überanstrengung und hatte eine 4 im Klettern und schließlich eine 5 im Rennen. Der Adler war ein Problemkind und wurde hart bestraft. Im Kletterunterricht erreichte er die Baumwipfel immer als erster. Er bestand aber auf seiner eigenen Art, hinauf zu kommen. Am Ende des Jahres hatte ein unnormaler Aal, der sehr gut schwimmen und ein bisschen rennen, klettern und fliegen konnte, den höchsten Notendurchschnitt und wurde Schulbester... Hat diese Geschichte eine Moral?

(Kaufmann 2007, S. 186, zit. nach Reavis 1993, S.129-130, stark gekürzt)

Es stellt sich für Lehrende nun die Herausforderung „das Beste“ aus allen Lernenden entsprechend ihrer Kapazitäten herauszuholen und dabei auf jedes Kind individuell einzugehen, in diesem Blickpunkt sind die Lernenden heterogen. Lediglich im Hinblick auf das endgültige Ziel bilden sie eine Homogenität.

Basierend auf der Annahme der Mathematikunterricht werde mit dem Alter der SchülerInnen langweilig und ihre Note dementsprechend schlechter, appelliert Mitchell für einen abwechslungsreichen Unterrichtsverlauf. Dabei empfiehlt er unter anderem das partnerschaftliche Lösen von mathematischen Rätseln, um die mathematische Bildung zu verbessern. (Mitchel 1993, S.424-428)

Die DidaktikerInnen Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold plädieren für eine Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht, resultierend aus der Heterogenität der Lernenden. So sollen alle Lernende zu einem Ziel hingeführt werden, aber es soll auch ihre Individualität beachtet werden, zum Beispiel die unterschiedliche Wertschätzung von Arbeitsformen im Unterricht. Als eine Differenzierungsmaßnahme nennen Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold unter anderem „mathematische Spiele, Rätsel, Denksportaufgaben etc.“. (Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold 2015, S.517)

Was mathematische Rätsel sind, soll im Folgenden erläutert werden.

4.1. Die Unterhaltungsmathematik

Das Unterrichtsfach Mathematik sei ein „polarisierendes Fach“, es sei sowohl ein beliebtes als auch ein unbeliebtes Fach (Vollrath 2012, S. 2). SchülerInnen erleben im Mathematikunterricht zwar Frustrationen, aber auch Momente der Faszination, wenn der Moment der Erleuchtung eintritt. Manchmal werden Stunden nur an einer Fragestellung gearbeitet, sodass die Mathematik als aufwendig empfunden werden kann und doch kann das Interesse an der Mathematik immer wieder neu geweckt werden. (Vollrath 2012, S. 34)

Behrends beschrieb die Mathematik als „kreativ, spannend und unterhaltsam“ (Behrends 2016, S. V) und belegt seine Ansicht mit Beispielen aus der Architektur, Biologie, Gesellschaft und anderen Lebensbereichen. Nicht zu vergessen ist auch das heute beliebte und in Zeitungen publizierten Zahlenrätsel „Sudoku“ oder die unterschiedlichen Smartphone-Applikationen wie „NeuroNation – Gehirnjogging&Gedächtnistraining“, „Skillz – Logisches Denkspiel“, „2048“ und viele mehr.

Den Spaßfaktor entdeckten bereits viele WissenschaftlerInnen der Unterhaltungsmathematik, hierbei wird Mathematik eher als Zeitvertreib und zur Unterhaltung betrieben und weniger als erforschen und beweisen von Behauptungen in der Mathematik. Die Unterhaltungsmathematik solle erst ab Mitte des 20. Jahrhundert verbreitet worden sein, denn bis dahin habe es nur wenige Werke oder Rätselsammlungen gegeben. (Gardner, Martin 1998) Des Weiteren sah Gardner an der Unterhaltungsmathematik ihren spielerischen Aspekt, der darin bestand, dass die Texte für jeden verständlich und lösbar sind. Gardner vertritt die Meinung, „daß Unterhaltungsmathematik regelmäßiger Bestandteil des Unterrichtes sein sollte“ (Gardner, Martin 1998) und er ist auch der Auffassung, dass sie zu selten im Mathematikunterricht vorkommt.

4.2. Was ist ein Rätsel?

Die Menschheit und ihre Geschichte ist voller Rätsel, wenn man nach Schittek davon ausgeht, dass ein Rätsel etwas ist, „was man nicht versteht“ (Schittek 1989, S.8). Dieser vagen Definition zufolge können Phänomene und unerklärbare Ereignisse ebenfalls als „Rätsel“ bezeichnet werden. (Schittek 1989, S.8)

Dokumentiert seien Rätsel spätestens seit dem Mittelalter, zum Beispiel das „Berner Rätsel“, welches eine beliebte frühmittelalterliche lateinische Rätselsammlung sei, Philologen sehen in dem Werk „Parzival“ von Wolfram von Eschenbach auch Rätsel versteckt. (Tomasek 1994, S. 15)

Gegen Ende der „Berner Rätsel“ werde auch der pädagogische Aspekt dieser Rätsel erwähnt, denn der Mensch solle seinen Verstand nutzen. (Tomasek 1994, S.1)

Vor der Modifizierung des Buchdrucks durch Gutenberg musste alles mit der Hand abgeschrieben werden, Klöster waren Bildungszentren und dementsprechend sind aus dieser Zeit hauptsächlich biblische Texte erhalten. Deshalb resümierte Tomasek, dass Rätsel im Mittelalter einerseits didaktische und andererseits spielerische Funktionen hatten, sowie eine Art „Weisheitswettstreit“ darstellten. (Tomasek 1994, S.15)

Im Barock sollen Rätsel der geistigen Unterhaltung gedient haben, wie es heute der Fall ist, denn das Interesse habe den lösbaren Strukturen gegolten. (Tomasek 1994, S.13)

Eine von allen Wissenschaften akzeptierte Definition des Rätsels gebe es nach Schittek und Tomasek nicht, allerdings Versuche von vielen WissenschaftlerInnen, wie einer von Alfred Schönfeldt. Er bezeichnete das Rätsel als einen Text, der einer Verschlüsselung bedürfe und dementsprechend besitze jedes Rätsel eine Lösung. Weiters betonte Tomasek auch, dass ein Rätsel ohne Lösung kein „echtes“ Rätsel sei. (Tomasek 1994, S.26)

Nach weiteren Überlegungen nennt Tomasek für das Rätsel folgende Definition:

„Das Rätsel ist eine Textsorte, die einen Begriff (ein individuelles Objekt oder auch mehrere derselben), als Text verschlüsselt, zum Inhalt hat. Seiner Textfunktion (Illokution) nach stellt es eine Prüfungsfrage dar. Als „Verschlüsselung“ gilt jede Form der Merkmalsangabe und Frageeinleitung, die den Anforderungen geregelter Prüfungsfragen zuwiderläuft. Das Rätsel ist eine ungeregelte Prüfungsfrage, indem es in mindestens einem Falle die Bedingungen geregelter Prüfungsfragen durchbricht.“ (Tomasek 1994, S. 53)

4.3. Das mathematische Rätsel

Anhand dieser Definition soll nun ermittelt werden, was nun ein mathematisches Rätsel ist. Rätsel in der Mathematik können als mathematische Texte betrachtet werden. Lernende begegnen mathematischen Texten hauptsächlich in Schulbüchern oder sie werden von Lehrenden diktiert. (Vollrath 2012, S.149) Mathematische Texte zeichnen sich durch eine „hohe Informationsdichte und geringe Redundanz“ (Maier, Schweiger 1999, S. 66) aus und benötigen daher eine aufmerksame Lesart, welche beim Lesen von literarischen Texten nicht unabdingbar ist.

Mathematische Texte können somit Textaufgaben, Denksportaufgaben oder Rätsel sein. Als eine Textaufgabe wird, für die Differenzierung zum Rätsel, auch eine Übungsaufgabe bezeichnet. Denn Leuders zufolge, sei sie eine Aufgabe, die „durch Anwendung zuvor erarbeiteter Verfahren“ (Leuders 2018, S.119) abgearbeitet wird.

Als eine Denksportaufgabe, auch Knobelei, gelten Aufgabenstellungen, bei denen meist viel geknobelt und gerechnet wird. Rätseln unterscheiden sich im Gegensatz dazu, dass ihre Lösungen meist trivial sind. Jedoch sind Denksportaufgaben kaum von Rätsel zu unterscheiden, da mathematische Rätsel doch eine Unterkategorie von Denksportaufgaben sind.

Der Pädagoge Leuders betrachtet sowohl die Ausarbeitung von Textaufgaben als auch das Lösen von Rätseln als Aspekte des Problemlösen. Er vertritt den lerntheoretischen Standpunkt, dass jeder Lernvorgang ein Problemlöseprozess sei und Rätsel seien „trickreiche Aufgaben“ die auch dementsprechende Lösungen besitzen. Er betonte jedoch auch, dass „Erst dadurch, dass ein Problem über sich hinausweist, indem es zu tragfähigen mathematischen Ideen hinführt, wird es unterrichtlich produktiv.“ (Leuders 2018, S.120)

Mathematische Rätsel sind dennoch älter als die Pädagogik und etwa gleich alt wie das Unterrichtsfach Mathematik. Der Unterhaltungsmathematiker Heinrich Hemme sammelte mathematische Rätseln aus aller Welt und fand heraus, dass die ältesten Belege aus dem alten Ägypten stammen. Der Papyrus Rhind aus 1650 v. Chr. sei eines der ältesten, vollständig erhaltenen Mathematikbücher und enthielt heute bekannte mathematische Rätsel, wie zum Beispiel das Ursprungsbeispiel des Katzen-Mäuse-Problems. Das Kindergedicht aus dem 19. Jahrhundert, welches folglich angeführt wird, betonte den Spaß dieses Rätsels.

Katzen-Mäuse-Problem:

„In sieben Häusern leben je sieben Katzen, jede Katze frisst sieben Mäuse, jede Maus frisst sieben Ähren Gerste, aus jeder Ähre können sieben Scheffel Körner entstehen. Wie viele Scheffel Getreide sind das insgesamt, die den Katzen zu verdanken sind?“
(Hemme 2013, S.12)

Das englische Kindergedicht:

*„Als ich nach Saint Ives ging,
kam mir ein Mann mit sieben Frauen entgegen.
Jede Frau trug sieben Säcke,
und in jedem Sack waren sieben Katzen,
und jede Katze hatte sieben Kinder.
Wie viele Kätzchen, Katzen, Säcke und Frauen
gingen nach Saint Ives?“*
(Hemme 2013, S.13)

Der Journalist Gardner trug mathematische Rätsel von bekannten Rätselmachern wie Sam Loyd, Henry Ernest Dudeney und Zweistein zusammen und stellte fest, dass das Lösen von Rätseln die Mathematik eigentlich ausmache. Er begründet diese Aussage damit, dass bereits bekannte Mathematiker wie Leibniz und Euler durch ihren Hang zum Spiel erst mathematische Entdeckungen ermöglichten. (Gardner 1964, S.VIII)

Einer der wichtigsten Rätselersteller ist Sam Loyd, der sich ab 1870 den mathematischen Rätseln und Denkspielen widmete. In seiner Sammlung „Mathematische Rätsel und Spiele-Denkportaufgaben für kluge Köpfe“ traf er eine Einteilung der Rätsel in folgende Kategorien, die im Folgenden aufgezählt werden. Für das bessere Verständnis wird für jede Kategorie ein Beispiel angeführt.

- Arithmetik und Algebra

„Drei Bräute

Der alte Geldsack ließ verlautbaren, er gedenke die Mitgift seiner Töchter nach Körpergewicht in Gold aufzuwiegen, und so fanden sich rasch geeignete Freier. Die

Hochzeit fand für alle am gleichen Tag statt, und vor dem Wiegen labten sich die Bräute ausgiebig an nahrhaften Hochzeitstorten, worüber die Bräutigame sehr froh waren.

Zusammen wogen die Bräute 396 Pfund, wobei Nelly 10 Pfund mehr wog als Kitty und Minni 10 Pfund mehr als Nelly. John Brown, einer der Bräutigame, wog genausoviel wie seine Braut, wohingegen William Jones eineinhalbmal soviel wog wie seine Braut, und Charles Robinson zweimal soviel wie seine Braut. Alle Bräute und Bräutigame wogen zusammen eine halbe Tonne. Die Aufgabe besteht nun darin, die Namen der drei Bräute nach ihrer Heirat zu nennen.“ (Lloyd/Gardner 1978, S.61)

- Wahrscheinlichkeits- und Spieltheorie

Kartoffel-Rennen

Welcher Junge gewinnt?

In guter alter Zeit gehörte es zu jedem Jahrmarkt auf dem Lande ein Kartoffelrennen, und macherorts ist dieser Spaß für Jungen und Mädchen auch heute noch gang und gäbe. Auf dem Boden werden, je 10 Fuß voneinander entfernt, 100 Kartoffeln in einer Reihe hintereinander ausgelegt. 10 Fuß vor der ersten Kartoffel steht ein Korb. Die beiden Wettkämpfer starten beim Korb und rennen zur ersten Kartoffel. Wer sie zuerst erwischt, läuft mit ihr zurück zum Korb, während sich der andere Kandidat die zweite Kartoffel holt. Auf diese Art gelangen die Kartoffeln, immer eine nach der anderen, in den Korb, und wer als erster 50 Kartoffeln in den Korb gelegt hat, hat gewonnen.

Unsere erste Aufgabe besteht darin zu errechnen, welche Strecke jemand, der beim Korb gestartet ist und alle 100 Kartoffeln nacheinander aufgesammelt hat, zurücklegt.

Unsere zweite und weit schwierigere Frage betrifft ein Vorgaberennen zwischen Tom und Harry. Weil Tom 2,04 Prozent schneller läuft als Harry, gibt er diesem eine Kartoffel vor, d.h. Harry darf eine Kartoffel aufheben und in den Korb geben, bevor das Rennen überhaupt beginnt. Um das Rennen zu gewinnen, muß Tom also 50 Kartoffeln einsammeln, bevor Harry die übrigen 49 schafft. Das Ergebnis des Rennens wird jeweils davon abhängen, welche Kartoffel Harry wählt, um seine Chance am besten zu nutzen, und wie wird das Rennen ausgehen, wenn er die richtige gewählt hat? (Lloyd/Gardner 1978, S. 138-139)

- Probleme aus der Verfahrensforschung

Der Kaufmann von Bagdad

Zeigen Sie, wie der Kaufmann den Wein und das Wasser abfüllte

Ein Kaufmann aus Bagdad, der für das leibliche Wohl der Pilger, die die Wüste durchquerten, sorgte, sah sich einmal mit folgendem verblüffenden Problem konfrontiert. Der Führer einer Karawane suchte ihn auf, um bei ihm Wasser und Wein zu kaufen. Er händigte ihm drei 10-Gallonen-Gefäße aus und wollte im ersten 3 Gallonen Wein, im zweiten 3 Gallonen Wasser und im dritten 3 Gallonen Wasser für jedes seiner 13 Kamele.

Da Wasser und Wein nach orientalischer Sitte nur in Mengen von ganzen Gallonen verkauft werden, besaß der Kaufmann nur ein 2- und ein 4-Gallonen-Maß, mit denen er diese Aufgabe, die so unerwartete Schwierigkeiten aufwarf, durchführen mußte. Trotzdem füllte er, ohne auf Tricks irgendwelcher Art oder zusätzliche Hilfsmittel zurückzugreifen, die auch sonst bei derlei Problemen keine Verwendung finden, das Wasser aus einem vollen Oxhoft (das sind 63 Gallonen) und den Wein aus einem vollen Faß (in das $31 \frac{1}{2}$ Gallonen passen) in dem gewünschten Verhältnis ab, ohne auch nur das Geringste zu verschwenden. Welches ist die geringste Anzahl Umfüllungen, die für dieses Kunststück durchgeführt werden muß, wobei jedes Umschütten einer Flüssigkeit von einem Behälter in den anderen extra zu zählen ist? (Lloyd/Gardner 1978, S. 144-145)

- Aufgaben aus der Flächengeometrie

Das Schleifstein-Rätsel

Wie groß war der Schleifstein, als ihn der zweite Mann erhielt?

Es wird erzählt, daß sich einst zwei ehrenwerte Syrer zusammentaten und ihre ganzen Ersparnisse in einen Topf warfen, um sich davon einen Schleifstein zu kaufen. Da sie ein paar Meilen voneinander entfernt wohnten, kamen sie überein, daß der Ältere von ihnen den Schleifstein solange behalten sollte, bis er genau zur Hälfte abgewetzt war, und dann sollte ihn der andere bekommen.

Der Schleifstein hatte einen Durchmesser von genau 22 Zoll, mit einem $3 \frac{1}{7}$ Zoll großen Loch in der Mitte, das der Befestigung diente, genauso wie im Bild zu sehen ist. Welchen Durchmesser muß der Stein haben, wenn der andere ihn erhält. (Lloyd/Gardner 1978, S. 31)

- Geometrische Puzzles

Des Schreiners Problem

Schneiden Sie das Brett in so wenig Einzelstücke wie möglich und bilden Sie daraus ein Quadrat.

Studenten der Geometrie werden in dieser Aufgabe ein interessantes Grundproblem entdecken, das sich am besten durch experimentelle Rätselmethoden lösen läßt, auch wenn man die korrekte Antwort mit Hilfe eines wissenschaftlichen Gesetzes finden kann, das dem berühmten Satz des Euklid nicht unähnlich ist.

Der Schreiner hat ein Brett, das 4 Fuß lang und 2 Fuß breit ist und dessen eine Ecke fehlt. Das Rätsel besteht darin, das Brett in möglichst wenig Einzelteile zu zerlegen, um daraus ohne jeden Abfall eine quadratische Platte für den Tisch, [...], zusammenzusetzen.

(Lloyd/Gardner 1978, S. 64)

- Topologische Rätsel

Kästchen-Rätsel

Wie spielt man am günstigsten und wieviel Kästchen können dabei gewonnen werden?

Hier handelt es sich um ein vertrautes Rätselspiel aus dem fernen Osten, das unserem „1-2-3, drei in einer Reihe“ sehr ähnlich ist. Das eine der beiden chinesischen Mädchen schreibt, wie gezeigt, 16 Buchstaben in 4 Reihen auf eine Schiefertafel. Nachdem sie eine Linie von A nach B gezogen hat, übergibt sie die Tafel ihrer Gegnerin, die E mit A verbindet. Wenn die erste Spielerin nun E mit F verbindet, würde die andere eine Linie von B nach F ziehen und „ein Kästchen machen“, woraus sie das Recht erwirbt, eine weitere Linie zu zeichnen. Aber bislang haben beide so gut gespielt, daß keine einen Kasten gewinnen konnte, obgleich jede schon sechsmal am Zug war. Das Spiel erreicht einen kritischen Punkt, an dem eine der Mitspielerinnen gewinnen muß, denn ein Unentschieden gibt es nicht.

Jetzt ist das Mädchen auf dem Hocker an der Reihe, und wenn sie M mit N verbindet, gewinnt ihre Gegnerin in einem Zug 4 Kästchen und das Recht, eine weitere Linie zu ziehen, woraufhin sie H mit L verbinden und den gesamten Rest erhalten würde. Wie würden Sie nun vorgehen und wieviel Kästchen lassen sich im Optimalfall gegen die zweite Spielerin gewinnen?

Vergessen Sie aber nicht: Wenn ein Spieler ein Kästchen macht, darf er noch einmal spielen. Nehmen wir zum Beispiel an, ein Spieler zieht eine Linie von D zu H, dann geht der zweite Spieler von H zu L, und egal, was der erste Spieler jetzt tut, der zweite Spieler gewinnt in ununterbrochener Reihenfolge alle Kästchen. [...] (Loyd/Gardner 1978, S. 124-125)

- Rätsel aus der Stereometrie

Der Deadwood-Express

Der Deadwood-Express kam mit zwei für eine junge Dame bestimmten Paketen in eine Bergbaustadt im Westen. Als bald entspann sich zwischen dem Beamten des Express und den Bergbaufreunden der Dame ein heftiger Streit. Die Schwierigkeit entstand, weil der Beamte für die Pakete ein Frachtgeld von 5 Dollar pro Kubikfuß kassieren wollte, wie es auf seinem Frachtbrief stand. Die Bergarbeiter protestierten jedoch heftig, denn sie waren es gewohnt, gemäß der Bergbaugesetze pro laufenden Fuß zu zahlen. Sie wollten nicht einsehen, wieso eine Expressgesellschaft das Recht besitzen sollte, sich mit dem „kubischen Inhalt“ eines Paketes, das einer jungen Dame gehörte, zu befassen!

Der Beamte mußte ihre Bedingungen schließlich akzeptieren, also maß er die Länge der Pakete und erhob dafür eine Gebühr von 5 Dollar pro laufenden Fuß. Beide Pakete hatten Würfelform, wobei das eine genau halb so hoch war wie das andere. Merkwürdig bei dieser ganzen leidigen Sache war nur, daß sich, als der Beamte die beiden Pakete zusammenstellte und ihre gemeinsame Länge maß, herausstellte, daß die Art der Kostenerhebung überhaupt keine Rolle spielte, denn es ergab sich nicht einmal der 1000. Teil eines Cents Unterschied dabei – bei 5 Dollar pro Kubikfuß oder bei 5 Dollar pro laufenden Fuß.

Wie groß waren die Pakete? (Loyd/Gardner 1978, S.101)

Diese Kategorien der mathematischen Rätsel spiegeln sich in den Stoffgebieten der Mathematik wider, wobei Sam Loyd sich darüber hinaus auch mit Rätsel zu Tisch- und Brettspielen beschäftigte.

Für die vorliegende Arbeit wird angenommen, dass mathematische Rätsel zwar zum Nachdenken anregen sollen, aber auch, dass die Lösungen manchmal gar kein langes Grübeln und Rechnen erfordert. Mathematische Rätseln sollen jedoch nicht mit Kapitänsaufgaben, wie zum Beispiel „Auf einem Schiff sind 26 Schafe, 5 Affen und 3 Hühner. Wie alt ist der Kapitän des Schiffs?“ verwechselt werden, denn mathematische Rätseln besitzen immer zumindest eine

Lösung. Wie das heute beliebte Zahlenrätsel „Sudoku“, besitzen mathematische Rätsel immer nur eine Lösung. Es gibt zwar mehrere Möglichkeiten ein Rätsel zu lösen, doch wird oft nach dem kürzesten Weg oder den wenigsten Umwegen gefragt. Weiters ist auch zu bedenken, dass Rätsel nicht unendlich oft abgefragt werden können, denn die Pointe bleibt den Gefragten oft in Erinnerung. Es verhält sich in dem Fall wie ein Witz, den man derselben Person gegenüber nicht ständig wiederholen kann. Ein mathematisches Rätsel, das keine Lösung besitzt ist auch eine weitumfassende Fragestellung, über die selbst WissenschaftlerInnen noch grübeln. In dieser Arbeit geht es jedoch um Rätsel, die zur Unterhaltung oder als Denkanstoß dienen.

Wille zählte die Eigenschaften mathematischer Rätsel auf, zu denen unter anderem eine überraschende Fragestellung, eine überraschende Antwort, Einkleidung in eine Geschichte, originelle Formulierung, Zeichnungen und große Sparsamkeit der Voraussetzungen, sodass eine eindeutige Lösung unmöglich erscheinen, gehören. (Wille 1983, S.54)

Definiert für die vorliegenden Analyse der Mathematikschulbücher zeichnet sich ein mathematisches Rätsel durch folgende Eigenschaften aus:

- Überraschende Fragestellung
- Überraschende Antwort
- Einkleidung in eine Geschichte
- besitzt eine Lösung

Da heute sehr viele Mathematikbücher auf dem Markt angeboten werden und nach Gardner immer mehr Beispiele aus der Unterhaltungsmathematik bereits 1959 veröffentlicht wurden, werden im Folgenden lediglich jeweils drei Lehrbücher aus der Unterstufe und Oberstufe analysiert. Es soll untersucht werden, inwiefern mathematische Rätsel in den Mathematikbüchern vorkommen.

Lösungen zu den Rätseln nach Loyd/Gardner 1978:

„Drei Bräute“:

Die Ehenamen der drei Bräute sind Kitty Brown, Nelly Jones und Minny Robinson. Kitty wog 122, Nelly 132 und Minny 142 Pfund.

„Kartoffel-Rennen“:

Um die 100 Kartoffeln einzusammeln, muß man 101000 Fuß zurücklegen, ein bißchen mehr als 19 Meilen (1 engl. Mile (Meile) = 5160 Fuß).

Harrys beste Taktik besteht darin, sich die 99. Kartoffel zu holen. Tom, der 2,04 Prozent schneller läuft, nimmt die 1. Kartoffel, Harry die 2., Tom die 3. und immer so weiter bis zur letzten. Tom ist nicht schnell genug, um 2 hintereinanderliegende Kartoffeln aufzuheben. Harry muß 49980 Fuß zurücklegen, um seine 49 Kartoffeln einzusammeln. Während der gleichen Zeit legt Tom 50999,592 Fuß zurück. Da er 51000 Fuß zurücklegen muß, um seine 50 Kartoffeln einzusammeln, gewinnt Harry um nicht ganz $\frac{1}{2}$ Fuß!

„Der Kaufmann von Bagdad“

Die Zahl am Ende eines jeden Absatzes zeigt die Anzahl der Umfüllungen an, die darin vorgenommen wurden:

Das Oxhoft enthält 63 Gallonen Wasser, und das Faß 31 $\frac{1}{2}$ Gallonen Wein. Füllen Sie die drei 10-Gallonen-Gefäße mit Wein und gießen Sie die übrigen 1 $\frac{1}{2}$ Gallonen in das 2-Gallonen-Maß, so daß das Faß leer ist. (4)

Mit Hilfe des 4-Gallonen-Maßes füllen Sie aus dem Oxhoft das Faß, wobei am Ende $\frac{1}{2}$ Gallone im 4-Gallonen-Maß übrigbleibt. Geben Sie diese $\frac{1}{2}$ Gallone dem Kamel Nr.1. Mit Hilfe des 4-Gallonen-Maßes schütten Sie 28 Gallonen Wasser aus dem Faß in das Oxhoft zurück. Schütten Sie 2 Gallonen Wasser aus dem Faß in das 2-Gallonen-Maß und schütten Sie es dann zurück in das Oxhoft. Schütten Sie die restlichen 1 $\frac{1}{2}$ Gallonen Wasser aus dem Faß in das 2-Gallonen-Maß und geben Sie dies dem Kamel Nr. 2. Schütten Sie 1 $\frac{1}{2}$ Gallonen Wein aus dem 4-Gallonen-Maß in das 2-Gallonen-Maß (37).

Wiederholen Sie den Vorgang, der im vorherigen Absatz geschildert wird, noch elfmal, so daß sechs Kamele je zweimal $\frac{1}{2}$ Gallone zu trinken bekommen haben und weitere 6 Kamele je zweimal 1 $\frac{1}{2}$ Gallonen. Aber bei der zehnten und elften Wiederholung geben Sie die 2 Gallonen nicht zurück in das Oxhoft, sondern an zwei beliebige Kamele, die bereits zweimal $\frac{1}{2}$ Gallone erhalten haben. Acht Kamele haben jetzt jeweils 3 Gallonen erhalten und vier Kamele jeweils 1 Gallone, und im Oxhoft sind noch 35 Gallonen Wasser übrig (407).

Füllen Sie das Faß aus dem Oxhoft, indem Sie das 4-Gallonen-Maß verwenden, und geben Sie $\frac{1}{2}$ Gallone an Kamel Nr. 13. Schütten Sie die restlichen 3 Gallonen aus dem Oxhoft in das 4-Gallonen-Maß (18).

Schütten Sie den gesamten Wein aus den 10-Gallonen-Flaschen in das Oxhoft. Leeren Sie das Faß in die drei 10-Gallonen-Flaschen und schütten Sie die übrigen $1 \frac{1}{2}$ Gallonen in das 2-Gallonen-Maß. Schütten Sie den Inhalt der drei Flaschen zurück ins Faß und $1 \frac{1}{2}$ Gallonen aus dem 2-Gallonen-Maß in die Flasche Nr.1 (12).

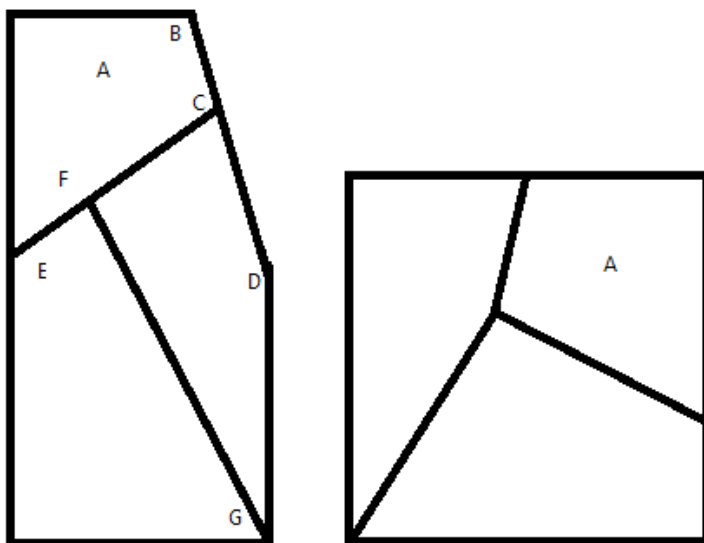
Füllen Sie das 2-Gallonen-Maß aus dem 4-Gallonen-Maß, lassen Sie 1 Gallone im 4-Gallonen-Maß. Füllen Sie das Faß aus dem 2-Gallonen-Maß und geben Sie die verbleibende $\frac{1}{2}$ Gallone an Kamel Nr. 13. Geben Sie den fünf Kamelen, die bisher nur je 1 Gallone erhalten haben, je 2 Gallonen aus dem Faß, dann haben jetzt alle Kamele zu trinken bekommen (13).

Füllen Sie die zwei leeren Flaschen aus dem Faß und geben Sie die übrigen $1 \frac{1}{2}$ Gallonen in Flasche Nr. 1. Schütten Sie den Inhalt aus den Flaschen Nr. 2 und 3 zurück ins Faß (5).

Schütten Sie die 1 Gallone aus dem 4-Gallonen-Maß in die Flasche Nr. 2. Geben Sie 6 Gallonen Wein in Flasche Nr. 3, wobei Sie das 2-Gallonen- und das 4-Gallonen-Maß verwenden. Leeren Sie die 1 Gallone aus Flasche Nr. 2 in das 4-Gallonen-Maß und füllen Sie den Inhalt des 4-Gallonen-Maßes in die Flasche Nr. 2. Nehmen Sie 2 Gallonen Wasser aus dem Faß und geben Sie es in die Flasche Nr. 2 (10).

Die 13 Kamele haben nun jedes 3 Gallonen Wasser erhalten, eine der 10-Gallonen-Flaschen enthält 3 Gallonen Wasser, die zweite 3 Gallonen Wein und die dritte 3 Gallonen Wein und 3 Gallonen Wasser gemischt. Das Oxhoft enthält $25 \frac{1}{2}$ Gallonen Wein und das Faß 18 Gallonen Wasser. Gesamtzahl der Umfüllungen: 506.

„Des Schreiners Problem“



Die beste Lösung ist es, zwei glatte Schnitte zu machen und den einen Teil umzudrehen.

Es macht keinen Unterschied, ob der Winkel von D nach B mehr oder weniger spitz ist. Ziehen Sie einfach von der Mitte der linken Seite eine Linie zur Mitte von BD. Dann ziehen Sie eine senkrechte Linie von Ecke G zu Linie EC. Wenn Sie nun Teil A umdrehen, bilden die drei Teile ein Quadrat – wie im Bild.

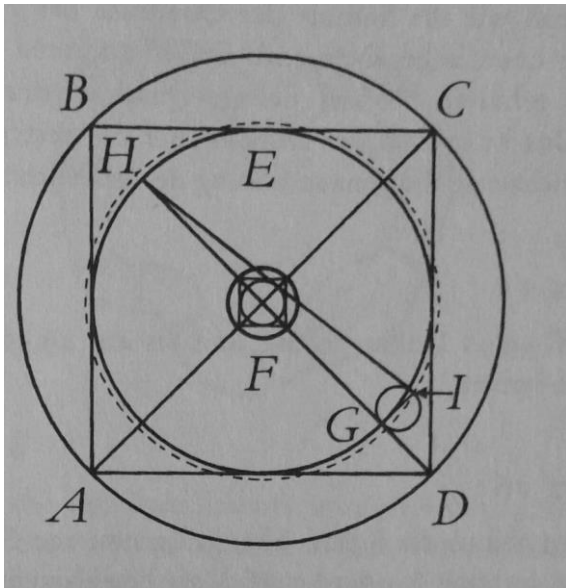
„Kästchen-Rätsel“

Dieses Spiel biete viele Überraschungen und gute spielerische Möglichkeiten. Der erste Spieler müßte insgesamt 7 Kästchen gewinnen, wenn sie eine Linie von G zu H zieht. Wenn der zweite Spieler dann von J zu K geht, erhält die erste zwei Kästchen, indem sie von K zu O und von P zu L geht und dann einen abwartenden Zug von L zu H spielt, anstatt sich zwei weitere Kästchen zu holen. Der andere Spieler nimmt nun zwei, indem er von G zu K geht, ist dann aber gezwungen, einen Zug zu machen, der dem ersten Spieler fünf weitere Kästchen einbringt.

Wenn der zweite Spieler, nachdem der erste GH gegangen ist, DH zieht, dann zieht der erste CG, BF, EF und beim abwartenden Zug MN, wodurch er sicher sein kann, 4 weitere Kästchen einzuholen. Diese kluge Taktik, auf zwei Kästchen zu verzichten, um später dafür um so mehr zu erhalten, ist es, die für dieses Spiel charakteristisch ist.

„Das Schleifstein-Rätsel“

Die beste Methode, dieses Problem zu lösen, beruht auf der Tatsache, daß Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional sind. Wenn wir ein Quadrat – ABCD – in einen Kreis eintragen, der die Größe des ursprünglichen Schleifstein[s] besitzt, dann ist der Flächeninhalt von Kreis E, der wiederum in dieses Quadrat gezogen wird, genau halb so groß wie der des größeren Kreises.



Die halbe Fläche des Schleifsteinlochs muß jetzt zu Kreis E hinzugefügt werden. Dazu zeichnen wir über das Loch ein Quadrat und in dieses Quadrat wieder einen Kreis. Der kleinere Kreis ist dann halb so groß wie die Fläche des Lochs. Wie ziehen den kleinen Kreis bei G, so daß sein Durchmesser die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, dessen Grundlinie HG der Durchmesser von Kreis E ist. Die Hypotenuse HI ist dann der Durchmesser eines Kreises mit einer Fläche, die ebenso groß ist wie die beiden Flächen von Kreis E und dem kleinen Kreis bei G zusammen. Dieser Kreis, der gestrichelt dargestellt ist, stellt die Größe des Schleifsteins dar, nachdem der Stein zur Hälfte abgenutzt ist.

Sein Durchmesser kann wie folgt errechnet werden: Der Durchmesser von Kreis E ist genauso groß wie die Seite des größten Quadrats. Da wir wissen, daß die Diagonale dieses Quadrats (=der Durchmesser des größten Kreises) 22 Zoll beträgt, erhalten wir durch die Quadratwurzel aus 242 ($= 2r^2$) die Länge einer Seite des Quadrats und damit den Durchmesser von Kreis E. Auf ähnliche Weise erhalten wir den Durchmesser des kleinsten Kreises, der sich aus der Quadratwurzel von 242/49 errechnet.

Das Quadrat des Durchmessers des gestrichelten Kreises ist genauso groß wie die Summe der Quadrate der beiden Durchmesser, die oben angegeben sind. Daher addieren wir 242 und 242/49 und erhalten 12100/49, dessen Quadratwurzel 110/7 oder 15 5/7 ist. Das ist in Zoll der Durchmesser des gestrichelten Kreises und gleichzeitig die genaue Lösung der gestellten Aufgabe.

„Der Deadwood-Express“

Das große Plakat muß 13,856 Zoll Seitenlänge haben, das kleinere 6,928 Zoll. Beide zusammen haben 2,784 Zoll oder 1,732 Fuß, was bei 5 Dollar pro laufenden Fuß 8,66 Dollar ergeben würde. Beide Pakete zusammen haben einen Rauminhalt von etwas über 2992 Kubikzoll oder 1,732 Kubikfuß. Bei einem Preis von 5 Dollar pro Kubikfuß würde sich das ebenfalls auf 8,66 Dollar belaufen.

5. Textaufgaben und Rätsel in österreichischen Schulbüchern

Mit dem Mathematikunterricht werden nicht nur Berechnungen und Formel verbunden, sondern auch Zirkel, Geodreiecke und Schulbücher. Mathematikbücher, die im Unterricht zur Anwendung kommen, soll es bereits im alten Ägypten gegeben haben. Von allen sei heute der Papyrus Rhind vollständig erhalten und Teil eines der ältesten Mathematikbücher. Das Buch habe einen Vorgänger, der etwa 200 Jahr älter sei und der Schreiber Ah-Mosè soll es um 1650v. Chr. von einer älteren Quelle abgeschrieben haben. Es enthalte 87 mathematische Textaufgaben (Hemme 2013, S.11), die Texte setzen sich aus Hieroglyphen zusammen.

Ein Mathematikbuch enthält somit nicht nur Zahlen, sondern auch viele Wörter, sodass Lese- und Sprachkompetenzen im Mathematikunterricht vorausgesetzt werden. Nicht alle Rechenbeispiele, die einen Text beinhalten, sind auch Textaufgaben. Diese Rechenbeispiele fordern Lernende dazu auf, etwas zu berechnen, konstruieren oder recherchieren.

Für die vorliegende Arbeit wird daher davon ausgegangen, dass Textaufgaben durch Verbindung zur Realität eine Einbeziehung des Lesenden herstellen wollen. Aus diesem Grund beinhalten Textaufgaben eine Einkleidung, indem bekannte Namen, Orte oder Situationen genannt werden.

Auf der Suche nach Antworten auf die Fragestellung, in welchem Rahmen mathematische Rätsel in Mathematikschulbüchern vorkommen, wurde in den vorangegangenen Kapiteln die Merkmale eines mathematischen Rätsels bestimmt. Um den Umfang dieser Arbeit überschaubar zu halten, werden jeweils 3 Buchreihen für jede Schulstufe analysiert. Es gibt keine Mathematikbuchreihe, die einerseits die Unter- und Oberstufe umfasst und andererseits von denselben AutorInnen herausgegeben wurden. Die Erscheinungsjahre erstrecken sich zwischen 2011 und 2019, hierfür begründen zwei Argumente diese Auswahl.

2016 wurde die Standardisierte Reifeprüfung fast flächendeckend das erste Mal durchgeführt, die bereits Jahre zuvor zur Diskussion stand. Die Verlage, deren Interesse im Verkauf der Schulbücher bestand, mussten auf die Veränderungen reagieren. Zum Beispiel ergänzte das Oberstufenlehrwerk bereits in seiner ersten Auflage 2013 eine Sammlung mit Aufgaben unter dem Titel „Vorbereitung auf den 2. Teil der schriftlichen Reifeprüfung“ (Götz, Reichel et.al, 2013, S.262)

Weiters gilt auch, dass ältere Auflagen nicht sofort mit dem Erscheinen der neuesten Auflagen eingestellt werden und somit werden die älteren Auflagen weiterhin angeboten, um den Verlust zu minimieren.

Der Aufbau eines Mathematikschulbuches folgt grob gefasst folgendem Schema:

- Wiederholung der vorausgesetzten Kompetenzen und Wissen
- Algebra und Arithmetik (Einführung, Beispiele, Vertiefung und Erweiterung)
- Geometrie (Einführung, Beispiele, Vertiefung und Erweiterung)
- Statistik (Einführung, Beispiele, Vertiefung und Erweiterung)

Beispiele, die in den Büchern vorkommen, fordern zum Konstruieren, Berechnen, und Umformen auf. Wenn sie in eine fiktive Situation eingebettet sind, werden sie zu Textaufgaben. Neben den Aufgaben beinhaltet ein Mathematikbuch auch Erklärungen, Musterlösungen, Faltmodelle und Vertiefendes hinsichtlich der Anwendungen der Mathematik in den Naturwissenschaften oder der Standardisierten Reifeprüfung.

In den folgenden Mathematikschulbüchern werden das Vorkommen von Textaufgaben und Rätsel analysiert, um einen kleinen Überblick zu verschaffen, inwiefern die Mathematikschulbücher mathematische Rätsel als Binnendifferenzierungsmöglichkeit anbieten.

Weiters wird zur Überprüfung der Annahme über die Notwendigkeit von Sprachkenntnissen für mindestens die Hälfte der angebotenen Beispiele, auch das Vorkommen der Textaufgaben im Vergleich zur Gesamtanzahl der angebotenen Beispiele gestellt.

Österreichische Schulen erhalten jedes Jahr eine Liste mit Schulbuchvorschlägen, aus denen die Lehrende die Bücher für das nächste Schuljahr auswählen. Für das Schuljahr 2019/20 sind etwa zehn Mathematikbuchtitel pro Schulstufe zu finden.

5.1. Mathematische Rätsel in den Schulbüchern der Unterstufe

Für die vorliegende Arbeit werden für die Unterstufe die Bücherreihen „Das ist Mathematik“, „ganz klar Mathematik“ und „Mathematik verstehen“ untersucht.

Die Reihe „Das ist Mathematik“ von den AutorInnen Reichel, Humenberger, Litschauer et.al. bietet für jedes Schuljahr eine eigene Ausgabe. Sie werden vom öbv-Verlag publiziert und reichen von 2010 bis 2013.

Vom Verlag Jugend&Volk Westermann bieten die AutorInnen Achleitner, Klampfer und Weikinger mit der Schulbuchreihe „ganz klar Mathematik“, mit den Ausgaben aus den Jahren 2013 bis 2017, eine Alternative auf dem Markt an. Die Unterschiede umfassen nicht nur das Buchformat, sondern auch das Textlayout und die Aufbereitung der einzelnen Kapitel. Das gesamte Paket besteht für jede Klasse aus einem Arbeitsbuch und zwei differenzierten Übungsbüchern A und B, welche jeweils ein beiliegendes Lösungsheft haben.

Die dritte untersuchte Schulbuchreihe lautet „Mathematik verstehen“ und wurde von den VerfasserInnen Salzger, Bachmann, Germ et al in den Jahren 2014 bis 2017 beim öbv-Verlag veröffentlicht.

1. Klasse Unterstufe

Das ist Mathematik

Das Mathematikschulbuch „Das ist Mathematik 1“ aus dem Jahr 2011 bietet den Lernenden auf 271 Buchseiten insgesamt 1400 Beispiele, wovon 430 Textaufgaben sind, an. Auf den ersten Buchseiten von „Das ist Mathematik 1“ gibt es unter dem Kapitel „Denken macht Spaß“ zehn Rätseln, welche als Aufgabe, die nicht im Lehrstoff impliziert sind, gekennzeichnet sind. Es seien Aufgaben, die „zu überraschenden Ergebnissen führen“⁶sollen.

The image shows three numbered math puzzles from a book. Each puzzle is preceded by a yellow vertical line and a number in a yellow box. The puzzles are as follows:

13 Mein Opa möchte jedem seiner Enkel zehn Süßigkeiten geben. Als er merkt, dass dann für einen Enkel nichts übrig bleibt, gibt er jedem von uns acht Süßigkeiten. Nun bleiben sechs übrig. Wie viele Enkel hat unser Opa?
6 8 9 10 12

14 Pinocchio's Nase ist 3 cm lang. Bei jeder Lüge verdoppelt sie ihre Länge. Wie lang ist die Nase, nachdem Pinocchio 7-mal gelogen hat?
96 cm 182 cm 192 cm 384 cm 394 cm

15 Drei Fliegen machen einen Spaziergang auf dem Metermaß entlang. Fliege Alice wird als erste müde und ruht sich bei Nummer 24 aus. Fliege Betty ist am muntersten und marschiert bis zur 66 durch. Fliege Cynthia wählt zum Ausruhen genau die Mitte zwischen beiden aus. Auf welcher Zahl sitzt Cynthia?
33 35 42 45 48

⁶ Das ist Mathematik 1, S. 2.

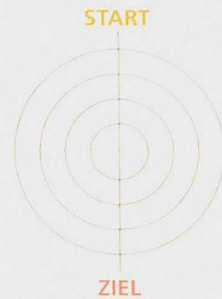
1 Mathematik macht Spaß

Aufgaben



1

Ziehe alle Linien der nebenstehenden Figur vom Start bis zum Ziel in einem Zug nach! Jede Linie darf dabei nur einmal durchlaufen werden. Markiere diesen Weg durch Pfeile!



2

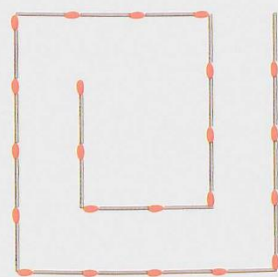
Schreibe die Zahl elftausend elfhundert elf in Ziffern auf!

3

Monika geht zuerst 100 m nach vorne, dann 100 m nach rechts, dann wieder 100 m nach vorne und schließlich 100 m nach links. Wie weit ist Monika nun von ihrem Ausgangspunkt entfernt?



4

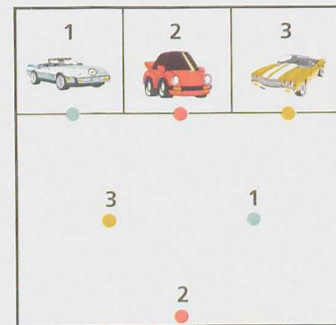


Lege zwei Zündhölzer so um, dass zwei Quadrate entstehen!



5

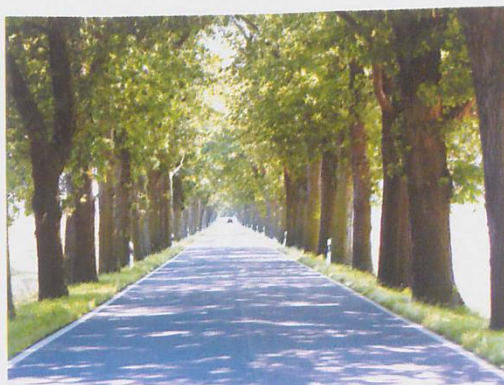
Das blaue Auto soll zum Parkplatz 1 fahren, das rote Auto zum Parkplatz 2 und das grüne Auto zum Parkplatz 3. Die Wege der drei Autos dürfen einander allerdings nicht schneiden und sie dürfen nicht außerhalb der begrenzten Fläche liegen. Wie verlaufen die drei Fahrtrouten?



6

Christoph hat einen 4-Liter-Krug mit Wasser gefüllt. Der 3-Liter-Krug und der 1-Liter-Krug sind leer. Wie soll Christoph beim Umfüllen vorgehen, damit danach im 4-Liter- und im 3-Liter-Krug jeweils zwei Liter Wasser sind?

7



Eine Allee besteht aus zwei Baumreihen. Der Abstand zwischen je zwei Bäumen beträgt 10 m. Vom ersten bis zum letzten Baum sind es 200 m. Wie viele Bäume hat die Allee?

Bei der Analyse der Buchbeispiele kam des Weiteren heraus, dass manche speziell gekennzeichneten Beispiele weniger mathematische Rätsel sind, denn sie fordern die SchülerInnen unter anderem dazu auf, in Lexika etwas nachzuschlagen oder Recherchen im Internet durchzuführen. In den einzelnen 14 behandelten Thematiken des Lehrbuchs kommen

vereinzelt mathematische Rätsel vor, die sich von der Aufgabensammlung abheben. Nach dem ersten Kapitel mit den abgebildeten Rätseln folgt ein Wiederholungskapitel, anhand dessen der Mathematikstoff aus der Volksschule wiederholt wird. Im Unterkapitel „Rechnen mit natürlichen Zahlen“ im ersten Großkapitel „Arithmetik“ ist das Beispiel 185 als spezielle Aufgaben gekennzeichnet, da sie die SchülerInnen zum Ausprobieren auffordern. Es handelt sich hierbei um eine verschlüsselte Rechnung, welche SchülerInnen entschlüsseln sollen.

185 Verschlüsselte Rechnung: Verschiedene Zeichen stehen für verschiedene Ziffern, gleiche für gleiche. Ersetze die Zeichen so durch Ziffern, dass richtige Rechnungen entstehen! Kontrolliere die Summen in den einzelnen Zeilen und Spalten, indem du die Gesamtsumme auf zwei Arten berechnest!

a) $\begin{array}{r} \text{☉} + \text{☼} = \text{☼} \text{ ☼} \\ \text{☼} + \text{☼} = \text{☼} \text{ ☼} \\ \hline \text{☉} \text{ ☼} + \text{☉} \text{ ☉} = \text{☉} \text{ ☼} \end{array}$

b) $\begin{array}{r} \text{☼} + \text{☼} = \text{☼} \text{ ☼} \\ \text{☼} + \text{☼} = \text{☼} \text{ ☼} \\ \hline \text{☼} \text{ ☼} + \text{☼} \text{ ☼} = \text{☼} \text{ ☼} \end{array}$

Anleitung: Überlege zuerst: Ist die Summe zweier einstelliger Zahlen eine zweistellige Zahl, so muss die erste Ziffer dieser zweistelligen Zahl 1 sein.

Weitere ähnliche Aufgaben stellen „Zauberquadrate“ und „Das magische Sternfünfeck“ dar.

237 Vervollständige zu einem „Zauberquadrat“ (→ Aufgabe 169, Seite 36)!

a)

67		82
	66	
		65

b)

142		359
	236	
113		

c)

279	307	305	285
301	289		295
293		299	

238 **Magisches Sternfünfeck**
In die leeren Ringe des Sternfünfecks sind die Zahlen 2, 3, 4 und 5 so einzusetzen, dass jeweils die Summe der längs der grünen Linien stehenden vier Zahlen gleich 24 ist!
Wie groß ist die Summe aller vorkommenden Zahlen?

Das Beispiel 453 wird von den AutorInnen auch als „Zahlenzauberei“ bezeichnet.

Beispiel 453:

Denk dir eine zweistellige Zahl! Addiere 7 und ziehe diese Summe von 110 ab! Addiere zum gefundenen Ergebnis 15 und schließlich die gedachte Zahl! Jetzt wird alles noch durch 2 geteilt. Von diesem Ergebnis ziehe 9 ab und multipliziere schließlich mit 3! Dein Ergebnis ist 150!

Bei einigen Beispielen, zum Beispiel 196, würde ein genaues und aufmerksames Lesen reichen um das Beispiel zu lösen.

Beispiel 196:

- a) *Wie groß ist die Differenz, wenn der Minuend um 47 größer als der Subtrahend ist?*
- b) *Wie groß ist die Differenz, wenn der Subtrahend um 374 kleiner als der Minuend ist?*

Weiters wird auch ein abgewandeltes Rätsel aus dem Gebiet der Verfahrensforschung, siehe Beispiel 239, 240 im Buch, aufgelistet.

Auch die berühmte Anekdote über Gauß, dass er von seinem Lehrer als Strafaufgabe alle Zahlen von 1 bis 100 addieren musste, kommt als ein Beispiel vor.

Beispiel 252:

Der große Mathematiker C.F. Gauß soll bereits mit neun Jahren seinen Lehrer verblüfft haben, als er die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, in wenigen Augenblicken gelöst hatte. Bist du auch ein kleiner Gauß? Versuche die Rechnung!

Weitere Beispiele, die die Merkmale eines Rätsels besitzen:

Beispiel 1019:

Zeichne einen offenen bzw. einen geschlossenen Streckenzug mit a) drei, b) vier, c) fünf, d) sechs Strecken!

Beispiel 1035:

Können vier Gerade 1) zwei, 2) drei, 3) vier, 4) fünf, 5) sechs, 6) sieben oder mehr Schnittpunkte haben? Zeichne – wenn möglich- jeweils eine Lösung!

In „Das ist Mathematik 1“ aus dem Jahr 2011 von Reichel, Litschauer und Groß gibt es etwa 28 Aufgaben, die auch als mathematische Rätselaufgaben betrachtet werden. Ihre Lösungswege und Antworten unterscheiden sich von den restlichen Übungsaufgaben im Buch.

Ganz klar Mathematik

Ein weiteres beliebtes Mathematikbuch der ersten Klasse Unterstufe ist die Buchreihe „ganz klar“. Die 2019 in erster Auflage erschienene Ausgabe enthält 1304 Beispiele, die neben den Übungsaufgaben auch historische Anmerkungen, Knobel- und Diskussionsaufgaben und mathematische Eselsbrücken beinhalten. Bei der Analyse der 218 Buchseiten stellte sich heraus, dass nicht alle gekennzeichneten Knobelaufgaben auch mathematische Rätsel sind, lediglich 23 mathematische Rätsel und 295 Textaufgaben wurden gefunden.

Das Kreuzworträtsel wurde neu interpretiert, es werden nicht Begriffe gesucht, sondern Rechenergebnisse., siehe Beispiel 13, 193 und Beispiel 259.

Rechne die Aufgaben in deinem Heft und trage die Ergebnisse in das Rätsel ein!

$104 - 90$	$1336 - 1287$	$11 \cdot 3$		$9132 - 4284$	$21 + 6$	$3 + 3$	$7020 - 6557$		$2292 + 4489$	$6 \cdot 43$	
		$3272 + 154$					$16 + 50$			$99 - 94$	
$82 + 10$			$61 + 26$			$3 \cdot 13$	$10 + 27$			$24 - 16$	
$55 + 511$	$2 \cdot 3$	$234 - 220$			$184 - 145$			$1442 - 1362$			$2 + 3$
			$283 \cdot 3$				$17 + 74$			$4 + 1$	

13

Folgende Beispiele erfordern ein aufmerksames Durchlesen und seltener eine Rechnung:

Beispiel 47:

Wenn jemand eine Woche lang täglich 8 Stunden schläft, wie viele Stunden hat er dann durchschnittlich pro Tag geschlafen?

Beispiel 5:

Josef hat 5 Schnüre. Er schneidet eine davon entzwei. Wie viele Schnüre hat er jetzt?

- ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Auch ein Rätsel im wortwörtlichen Sinne wurde abgedruckt,

Beispiel 436:

- a) (1) *Ich besitze 3 Flächen, 2 Kanten und 0 Ecken. Wer bin ich?*
(2) *Ich bin Besitzer von 5 Ecken und habe nur gerade Kanten, in einer einzigen Ecke treffen sich 4 Kanten. Wie heiße ich?*
- b) *Schreibe ein Rätsel über einen Körper und lass einen Mitschüler/eine Mitschülerin raten!*

In der Einleitung zum Teilgebiet der Algebra haben die AutorInnen ein mathematisches Rätsel eingefügt, um das Verständnis des Wagenprinzips bei einer Gleichung zu überprüfen, S. 95:

Wenn 5 Katzen in 5 Minuten 5 Mäuse fressen, wie viel Zeit brauchen 50 Katzen für 50 Mäuse?

Und das bekannte Verfahrensproblem, Beispiel 549:

In einer vollen Milchkanne sind 8l Milch. Mithilfe zweier leerer Kannen, in die 3 und 5 Liter passen, sollen 4 Liter abgemessen werden.

Mathematik verstehen

Die letzte Buchreihe, die auf die Anwesenheit von mathematischen Rätseln geprüft wird, ist die Reihe „Mathematik verstehen“ aus dem Jahr 2015. Neben Erläuterungen und Übungsaufgaben befinden sich auf rund 300 Buchseiten 1450 Beispiele, 501 Textaufgaben und etwa 15 Aufgaben der anderen Art, wie etwa ein Kreuzzahlworträtsel, aber auch Aufgaben, bei denen der Lösungsweg minimal ist.

Beispiel 20: ein Kreuzzahlrätsel



Kreuzzahlrätsel: Löst untenstehende Aufgaben und tragt die Ergebnisse zur Kontrolle waagrecht bzw. senkrecht in die gekennzeichneten Felder ein! In jedem Feld steht nur eine Ziffer.

A			B	C		D	E	F
G			H		I			
		J			K			
	L				M			
N				O		P		
Q					R			

waagrecht:

- A Anzahl der Stunden an einem Tag
- B 11 mit sich selbst multipliziert
- D das Vierfache von 65
- G Anzahl der Wochen im Jahr
- H Anzahl der Monate in zwei Jahren
- I $12 \cdot 12 \cdot 12$
- K die Summe von 2459 und 1142
- L das Dreifache von 462
- M Wie viele Minuten hat eine Stunde?
- N Wie viele Tage hat ein Jahr?
- O Anzahl der Februar-Tage im Schaltjahr?
- Q Wie viele Stunden hat ein Jahr?
- R Schreibe den 15. März als TTMM!

senkrecht:

- A das Doppelte von 125
- B $2000 - 752$
- C die Summe von 1540 und 896
- D das Zehnfache von 276
- E das Vierfache von 155
- F schreibe den 8. November als TTMM
- I $9999 + 3692$
- J das Dreifache von 2452
- L das Doppelte von 85 minus 3
- N die Differenz von 100 und 62
- P Anzahl der Tage im April

Beispiel 1.18:

Gib den Nachfolger des Vorgängers der Zahl a) 77, b) 123, c) 942, d) 2540, e) 6633 an!

Beispiel 2.57:

In einer Rechnung lauten Subtrahend und Differenz jeweils 4263. Wie lautet der Minuend?

Zur Überprüfung des Wortschatzes der Fachsprache Mathematik wurde auch ein Kreuzworträtsel, Beispiel 11.12, abgedruckt, welches aber bei der Analyse nicht als ein mathematisches Rätsel gezählt wird.

2. Klasse Unterstufe

Das ist Mathematik 2

Die erste Auflage aus dem Jahr 2011 des Buches „Das ist Mathematik“ beinhaltet 1207 Beispiele auf 269 Buchseiten, wovon 450 Textaufgaben sind. Es beginnt, wie auch in der Ausgabe für die erste Klasse, mit dem Kapitel „Mathematik macht Spaß“ und umfasst mathematische Rätsel und Denksport-/Knobelaufgaben.

Beispiel 1:

Ein Fährmann soll einen Hund, eine Katze und einen Vogel über den Fluss setzen. Er kann auf jeder Fahrt nur ein Tier mitnehmen. Außerdem darf er an einem Ufer weder Hund und Katze noch Katze und Vogel gemeinsam allein zurücklassen.

Wie oft muss der Fährmann den Fluss überqueren, um alle Tiere gut ans andere Ufer zu bringen? Begründe deine Antwort!

Beispiel 6:

In einer Familie gibt es vier Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wie viele Kinder gibt es in der Familie?

Beispiel 7:

Dieter hat ebenso viele Schwestern wie Brüder, aber seine Schwestern haben nur halb so viele Schwestern wie Brüder.

Wie viele Buben und Mädchen gibt es in dieser Familie?

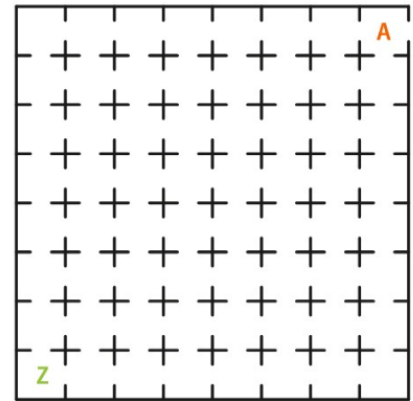
Beispiel 10:

Der Schelm Till Eulenspiegel hatte seinem Fürsten so viele Streiche gespielt, dass dieser ihn einsperren ließ. Das Gefängnis bestand aus 64 Zellen, die schachbrettartig angeordnet waren.

Jede Zelle war mit ihren Nachbarzellen durch je eine Tür verbunden, insgesamt waren es 112 Türen.

Eulenspiegel wurde in Zelle Z gefangen gehalten, ein Ausgang aus dem Gefängnis war aber nur in der Zelle A. Der Fürst versprach ihm die Freiheit: „Wenn es dir gelingt, von deiner Zelle

aus so zum Ausgang zu gelangen, dass du jede der anderen Zellen genau einmal betrittst und deine Zelle, nachdem du diese verlassen hast, auch nur einmal wieder betrittst, dann bist du frei!“ Auf welchem Weg konnte Eulenspiegel das Gefängnis verlassen?



Beispiel 11:

Rechnungen in einer „Geheimschrift“: Gleiche Zeichen stehen in allen vier Rechnungen für die gleichen Ziffern. Zwei Zeichen sind angegeben: $\square = 6$, $\blacksquare = 7$
Für welche Ziffern stehen die restlichen Zeichen?

1)
$$\begin{array}{r} \square \square \square \\ + \square \square \square \\ \hline \square \square \square \end{array}$$
 2)
$$\begin{array}{r} \square \blacksquare \triangle \\ - \triangle \square \blacksquare \\ \hline \triangle \bullet \square \end{array}$$
 3)
$$\begin{array}{r} \square \blacksquare \blacksquare \cdot \square \\ \triangle \bullet \square \blacksquare \end{array}$$
 4)
$$\begin{array}{r} \blacksquare \triangle \blacksquare : \blacksquare = \triangle \square \\ \star \blacksquare \star \end{array}$$

Beispiel 12:

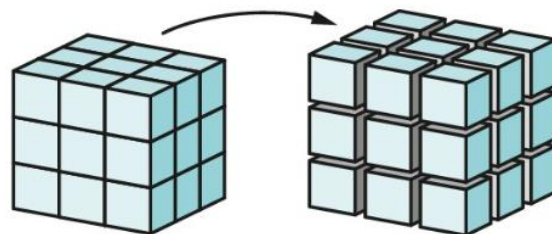
Addieren in einer „Geheimschrift“:

Zwei Spaltensummen und eine Zeilensumme sind angegeben. Die jeweiligen Symbole stehen für zweiziffrige Zahlen, wobei dasselbe Symbol für dieselbe Zahl steht. Welche Zahl ist für das Fragezeichen einzusetzen? Probieren!

♥	♦	♥	♠
♣	♠	♥	♦
♠	♦	♥	♥
♦	♠	♣	♣
?	50	60	85

Beispiel 13:

Ein Würfel mit 3 cm Kantenlänge wird blau gestrichen und in kleinere Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zersägt (→ Zeichnung). Wie viele kleine Würfel haben genau zwei blau gefärbte Flächen?



Auch das Rätsel um den Erbschaftstreit wird präsentiert, siehe Beispiel 279.

Beispiel 279:

Eine alte Geschichte erzählt:

Nach seinem Tod hinterlässt ein arabischer Scheich seinen drei Söhnen 11 Kamele. Man findet ein Testament des Scheichs, in dem er bestimmt, dass der älteste Sohn die Hälfte, der zweitälteste ein Viertel und der jüngste ein Sechstel der Kamele erben soll. Da es den Söhnen unmöglich ist, die Aufteilung der Kamele nach dem Willen des Vaters durchzuführen (warum?), fragen sie ihren weisen Nachbarn um Rat.

Dieser löste die Aufgabe so:

Er stellte sein eigenes Kamel zu den 11 aufzuteilenden dazu und übergibt dem ältesten Sohn dem Testament entsprechend 6 Kamele, dem zweiten 3 Kamele und dem jüngsten 2 Kamele. Das übriggebliebene zwölfte Kamel führt er wieder nach Hause.

Was sagst du zu dieser Aufteilung? Warum konnte der weise Nachbar sein eigenes Kamel ruhig in die Rechnung einfließen lassen ohne Angst haben zu müssen, dass er es verliert?

Auch das Zauberquadrat wurde erweitert und publiziert, siehe Beispiel 273.

a) Vervollständige das „Zauberquadrat“!

Die Summe in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale muss gleich sein.

$\frac{1}{8}$	$1\frac{7}{8}$	$1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{8}$
1		$1\frac{3}{8}$	
		$\frac{1}{4}$	

b) Berechne die fehlenden Zahlen!

$\frac{1}{3}$	+		=	
+		+		+
	+	$\frac{1}{6}$	=	
=		=		=
$\frac{7}{12}$	+		=	$2\frac{1}{4}$

Insgesamt sind rund 40 mathematische Rätsel unter den 1207 Beispielen verteilt im Buch zu finden.

Känguru-Aufgaben

-  **677** Unser Nachbar hat einen rechteckigen Gemüsegarten. Er möchte die Länge und die Breite des Gartens um je 10 % vergrößern.
Um wie viel Prozent wird sich dadurch die Fläche des Gartens vergrößern?
-  **678** Ein LKW wiegt ohne Ladung 2000 kg. Er wird so beladen, dass die Ladung 80 % des Gesamtgewichtes ausmacht. Beim ersten Halt wird ein Viertel der Ladung abgegeben. Welchen Prozentsatz des Gesamtgewichtes macht dann die Ladung aus?
-  **679** Wenn die Kameldame Desiree Durst hat, besteht ihr Körper zu 84 % aus Wasser. Wenn sie trinkt, steigt ihr Gewicht auf 800 kg, und das Wasser macht 85 % ihres Gewichtes aus. Wie viel wiegt Desiree, wenn sie Durst hat?
-  **680** An einer Schule haben 50 % der Schülerinnen und Schüler Fahrräder. Von den Schülerinnen und Schülern, die Fahrräder haben, besitzen 30 % auch Rollerblades. Welcher Prozentsatz der Jugendlichen hat ein Fahrrad und Rollerblades?
-  **681** In Kanada spricht ein Teil der Bevölkerung nur Englisch, ein Teil nur Französisch und ein Teil beide Sprachen. 85 % der Bevölkerung sprechen Englisch und 75 % sprechen Französisch. Jeder spricht mindestens eine der beiden Sprachen. Wie viel Prozent der Bevölkerung sprechen beide Sprachen?

Auch Känguru-Aufgaben werden namentlich in einem Unterkapitel erwähnt, wobei anzumerken ist, dass nicht alle Känguru-Aufgaben den Kriterien eines mathematischen Rätsels entsprechen. Denn die „überraschende“ Wende beim Lösen bleibt oftmals aus, es geht nicht darum, dass Lernende die Aufgabenstellung genau lesen müssen. Lernende werden hierbei mit Aufgaben konfrontiert, die über den Lehrstoff hinausgehen.

Ganz klar: Mathematik 2

Wie das Lehrwerk „Das ist Mathematik 1“ gibt es in „Ganz klar: Mathematik 2“ ebenfalls das Rätsel um die Erbschaft, siehe Beispiel 233.

Beispiel 233:

Ein Araber vererbte seine Kamelherde seinen drei Söhnen mit der Bestimmung, dass der älteste Sohn die Hälfte, der zweite ein Drittel und der jüngste ein Neuntel der Herde bekommen sollte. Die Herde zählte aber 17 Kamele und unter den Erben drohte ein Streit auszubrechen. Ein kluger Nachbar führte sein Kamel herbei und sagte: „Ich leihe euch das Kamel, bis ihr geteilt habt.“ Nun ging die Rechnung auf und der Nachbar konnte sein Kamel wieder mitnehmen.

Versucht mithilfe von 18 Spielsteinen den Inhalt der Geschichte zu erklären!

In dieser Buchreihe, aus dem Jahr 2013, gibt es im Arbeitsbuch insgesamt 1101 Beispiele auf 234 Seiten, davon sind 292 Textaufgaben. Im gesamten Arbeitsbuch gibt es etwa 20 mathematische Rätsel.

Beispiel 824:

Das Puzzle „Wabe“:

Zeichnet 7 regelmäßige Sechsecke auf einen Karton und schneidet sie aus! Jedes Sechseck soll an jeweils 2 Seiten mit derselben Farbe gekennzeichnet werden. Nun sollst du die in der Abbildung gezeigte Figur nachlegen, wobei immer gleiche Farben aneinanderstoßen müssen.



(Entwickelt von Tenter Sille & Lothar Hennappel, aus der Reihe Grips & Co. 8-Lagerspiele, Copyright 1994)

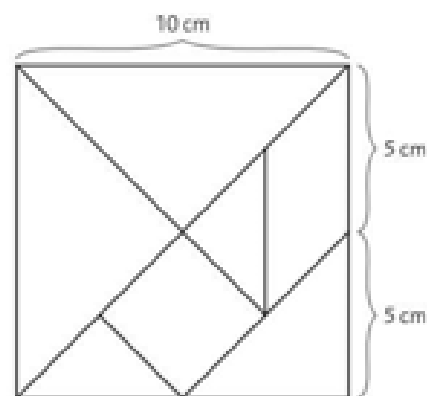


Auch ein Beispiel aus der Flächengeometrie wird im Buch vorgestellt, siehe Beispiel 827 und Beispiel 876.

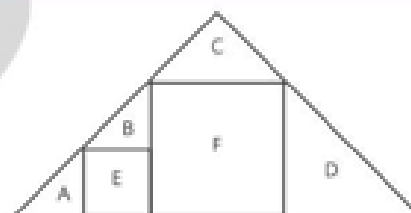
Zeichne das Tangram auf ein dickes Papier, bemale es und zerschneide es in die eingezeichneten Teile!

Ordne die Teilfiguren so an, dass daraus

- a) ein Rechteck
- b) ein rechtwinkliges Dreieck
- c) ein Parallelogramm entsteht!



Pause folgendes Dreieck ab und zerschneide es in die angegebenen Teile! Ordne die Teilfiguren so an, dass daraus ein Quadrat entsteht!



Mathematik verstehen 2

Im Jahr 2015 erschien dieses Mathematikschulbuch in der ersten Auflage. Auf 277 Buchseiten wurden 1385 Beispiele erstellt, wovon 472 Textaufgaben sind. Im ganzen Buch sind etwa zehn mathematische Rätsel verteilt.

Beispiel: 48 Kreuzzahlrätsel

48 Kreuzzahlrätsel:
Löst die untenstehenden Aufgaben! Tragt die Ergebnisse waagrecht bzw. senkrecht so in die gekennzeichneten Felder ein, dass in jedem Feld eine Ziffer bzw. die Ziffer an der Einerstelle samt Komma steht! Beachtet, dass bei der Kontrolle nicht nur die Ziffer sondern auch das Komma übereinstimmen muss! (Es gilt zB: $5 = 5,0 = 5,.$)

A	B	C	D	E	F	G	H
I			J	K			
L		M			N		
O	P	Q	R				
S	T	U	V				W
X		Y		Z			

waagrecht

A	$0,25 \cdot 3$
F	$100 - 1,3$
J	$650 + 1,62$
M	$2 - 0,57$
O	$156 : 2$
S	$8 - 7,8$
V	$20,78 \cdot 5$
Y	$21,7 + 1,3$

senkrecht

D	$27 : 10$
I	$100 + 4,2$
L	$17,26 \cdot 5$
N	$0,3 \cdot 10$
Q	$0,65 \cdot 4$
U	$0,7 \cdot 8$
X	$100 - 4,6$
Z	$9,4 \cdot 50$

A	$18 : 100$
C	$55 - 0,63$
E	$7,642 \cdot 1000$
G	$25,8 : 3$
K	$51,3 + 1,7$
P	$92,4 - 7,4$
R	$6,37 \cdot 10$
T	$22,4 + 2,6$

B	$176,5 \cdot 4$
D	$0,4 \cdot 5$
F	$90,8 + 0,2$
H	$24,1 \cdot 30$
M	$0,5 \cdot 2$
Q	$0,68 \cdot 3$
S	$0,3 \cdot 3$
W	$300 \cdot 0,3$

Beispiel 4.72:

Elvira sagt zu ihren Freunden: „Jeder von euch hat in seinem Leben wahrscheinlich schon oft diese oder ähnliche Aussagen im Alltag gemacht und sie sind nicht falsch: Neun weniger fünf ist gleich vier. Neun und fünf ist zwei.“ Was meint sie damit?

Auch im Geometrieteil wurde ein vereinfachtes Rätsel erstellt, siehe Beispiel 8.123 und Beispiel 8.124.

8.123



- a) Ein Rhombus soll mit **einem Schnitt** so zerlegt werden, dass aus den Einzelteilen ein Rechteck zusammengesetzt werden kann. Wie kann dieser Schnitt gewählt werden?
- b) Ein Trapez soll mit **zwei Schnitten** so zerlegt werden, dass aus den Einzelteilen ein Rechteck zusammengesetzt werden kann. Wie müssen diese Schnitte gewählt werden?

8.124



- a) Ein Quadrat mit der Seitenlänge 9 cm wird so zerschnitten, wie in Abbildung 8.1 gezeigt und danach mit den entstandenen Einzelteilen anders zusammengesetzt (Abb. 8.2). Warum ist plötzlich ein **Loch** von einem Quadratzentimeter vorhanden?

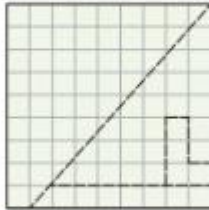


Abb. 8.1



Abb. 8.2

- b) Ein Quadrat mit der Seitenlänge 11 cm wird so zerschnitten, wie in Abbildung 8.3 gezeigt und danach mit den entstandenen Einzelteilen anders zusammengesetzt (Abb. 8.4). Warum ist plötzlich ein **Loch** von zwei Quadratzentimetern vorhanden?

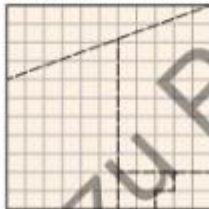


Abb. 8.3

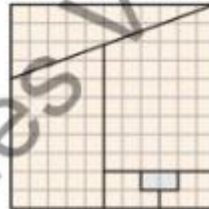


Abb. 8.4

3. Klasse Unterstufe

Das ist Mathematik 3

Auch in der ersten Auflage aus dem Jahr 2013 von „Das ist Mathematik 3“ fängt das Buch mit dem Kapitel „Mathematik macht Spaß“ an. Weiters sind auch gekennzeichnete Känguru-Aufgaben auf 265 Seiten verteilt zu finden, auf denen insgesamt 1210 Beispiele sind. Unter den 1210 Beispielen sind 287 Textaufgaben und im gesamten Buch gibt es rund 30 mathematische Rätsel.

Beispiel 7:

In einem Teich wachsen Seerosen. Jeden Tag vermehren sich die Seerosen auf das Doppelte. Wie viele Tage dauert es noch, bis der ganze Teich mit Seerosen bewachsen ist, wenn heute ein Achtel des Teiches bedeckt ist?

18

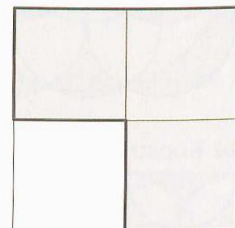


Lege fünf Streichhölzer so auf, dass zwei gleich große Dreiecke entstehen, die einander nur in einem Eckpunkt berühren!

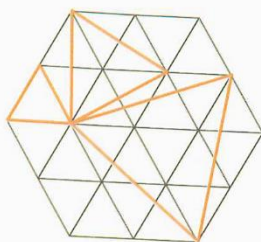
19

Aus einem Quadrat mit 5 cm Seitenlänge wird ein Viertel herausgeschnitten.

- 1) Zerschneide die restliche Figur in vier gleich große und kongruente Teilfiguren!
- 2) Wie groß ist der Umfang einer solchen Teilfigur?



20



Wie viele gleichseitige Dreiecke sind in der Zeichnung dargestellt?

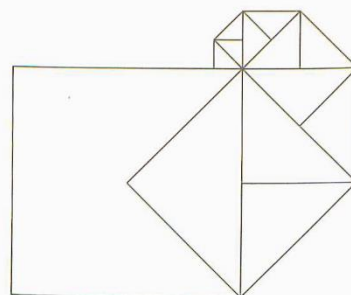
Bemerkung: Die nebenstehende Figur ist das „Markenzeichen“ des **Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerbes**, der jedes Jahr für Schülerinnen und Schüler durchgeführt wird. Die Aufgabe stammt aus dem Bewerb im Jahr 2000.

+ 21

Fliesenmuster

Das kleinste Quadrat in der abgebildeten Skizze hat in der Wirklichkeit 4 cm^2 Flächeninhalt.

Wie groß ist der Flächeninhalt der gesamten Figur?



10

Beispiel 26:

Karin nimmt ein Stück Papier und schneidet es in 10 Stücke. Dann nimmt sie eines dieser Stücke und schneidet es wiederum in 10 Stücke. Sie wiederholt diesen Prozess noch dreimal. Wie viele Stücke hat sie schließlich vor sich liegen?

- ☐ 36 ☐ 40 ☐ 46 ☐ 50 ☐ 56

Beispiel: 1169

Fünf Freunde Albert, Armin, Michael, Saeed und Stefan treffen einander anlässlich des Geburtstages von Albert in einem Restaurant zu einem guten Essen. Armin, Michael Saeed und Stefan bezahlen auch die Rechnung von Albert. Sie teilen sich die Gesamtkosten von 200€. Beim nächsten Treffen feiern sie die Geburtstage von Armin und Michael wieder in demselben Lokal

uns zahlen wieder 200€. Sie einigen sich auf folgende Aufteilung der Kosten: Albert, Saeed und Stefan je 60€, Armin und Michael je 10€.

Wie kommen die Freunde zu dieser Aufteilung der Rechnung?

Auch in der Geometrie lassen sich einige mathematische Rätsel finden, wie das Beispiel 1086.

1086 Auf einem Würfel $ABCDEFGH$ liegt der Punkt P auf der Kante AE , Q auf der Diagonale AH , R auf der Kante DH , S auf der Diagonale AF , T auf der Kante BF , U auf der Diagonale BG und V auf der Kante CG .

a) Durch die Punkte P und T verläuft eine Gerade g . In der Abbildung scheinen aber alle Punkte P, Q, R, S, T, U und V auf g zu liegen. Welche der Punkte sind „echte“, welche sind nur „scheinbare“ Schnittpunkte?

b) Wie Aufgabe a): Die Gerade g verläuft durch U und V .

Ganz klar: Mathematik 3

Im Jahr 2014 erschien das Mathematikschulbuch mit 1173 Beispielen auf 221 Seiten. Auf diesen 221 Buchseiten gibt es 329 Textaufgaben, rund 20 Beispiele lassen sich als mathematische Rätsel zuordnen. Im Gegensatz zu den anderen zwei Buchreihen gibt es in „Ganz klar: Mathematik 3“ etwa drei mathematische Kreuzworträtsel, siehe Beispiele 309, 318 und 731.

Waagrecht

- 1 Quadrat: $a = 5,2 \text{ cm}$ $A = ?$
- 2 Trapez: $a = 4,5 \text{ cm}$ $b = d = 3,7 \text{ cm}$ $c = 3,1 \text{ cm}$ $u = ?$
- 4 Deltoid: $e = 16,2 \text{ cm}$ $f = 8,2 \text{ cm}$ $A = ?$
- 8 Parallelogramm: $a = 14 \text{ cm}$ $h_a = 5,4 \text{ cm}$ $A = ?$

Senkrecht

- 1 Parallelogramm: $a = 3 \text{ cm}$ $h_a = 7 \text{ cm}$ $A = ?$
- 3 Rechteck: $a = 21 \text{ dm}$ $b = 3,6 \text{ dm}$ $A = ?$
- 5 Dreieck: $c = 40,4 \text{ cm}$ $h_c = 20 \text{ cm}$ $A = ?$
- 6 Raute: $e = 10,6 \text{ m}$ $f = 12 \text{ m}$ $A = ?$
- 7 Quadrat: $u = 108 \text{ cm}$ $a = ?$
- 9 Trapez: $a = 7 \text{ m}$ $c = 3,25 \text{ m}$ $h = 4 \text{ m}$ $A = ?$

Trage die Ergebnisse ohne Komma und Einheit in das Rätsel ein!

1	3		5	
2				
	4	6		9
7				
8				

309

Beispiel 50:

Als ein Radfahrer zwei Drittel der gesamten Strecke gefahren war, platzte ein Reifen des Fahrrades. Für den Rest der Strecke brauchte er zu Fuß doppelt so lang wie für die Fahrt mit dem Fahrrad.

Wie viel Mal schneller war er mit dem Fahrrad unterwegs?

Beispiel 213:

Angenommen, ihr könnt ein Blatt mit 0,1mm Dicke 10-mal falten, wie dick wäre es dann?

Bilde mit der gleichen Anzahl an Streichhölzern wie in der Abbildung vier gleichseitige Dreiecke!



In einem 3500 m² großen Teich wachsen die Seerosen so gut, dass sie sich pro Tag verdoppeln. Nach zwei Wochen ist der Teich völlig zugewachsen.

Nach welcher Zeit hatten die Seerosen den halben Teich bedeckt?



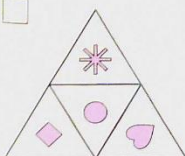
Geldmünzen können auch für Knobelaufgaben verwendet werden:

Nehmt sechs gleiche Münzen und legt sie laut Abbildung nebeneinander auf! Dreht nun jeweils zwei benachbarte Münzen um, ohne ihre Reihenfolge zu tauschen! Wer schafft es, in nur drei Umdrehvorgängen die Münzen so zu drehen, dass die Reihe abwechselnd Vorder- und Rückseite der Geldstücke zeigt?

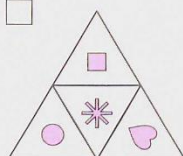


Drei dieser abgebildeten Netze gehören zum selben Tetraeder. Sie wurden bloß jeweils anders aufgeklappt. Welches Netz gehört nicht dazu? Kreuze an!

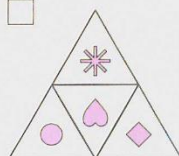
A ☐



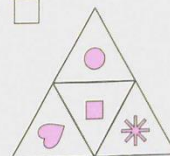
B ☐



C ☐



D ☐



Mathematik verstehen 3

„Mathematik verstehen 3“ erschien 2016 in Wien und umfasst auf 275 Seiten insgesamt 1328 Beispiele, davon sind 299 Textaufgaben. Zehn mathematische Rätsel im gesamten Buch verteilt runden das Schulbuch ab.

1.111



Die folgende Aufgabe könnt ihr sicherlich lösen. Aber ist dies in der Wirklichkeit möglich?
Wenn fünf **Personen** in einem Raum sind und sieben davon gehen hinaus, wie viele müssen wieder hineingehen, damit der Raum leer ist?

1.112



Füllt in dem gezeichneten **Zahlenhaus** die Felder so aus, dass die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonalen genau die im Dach angegebene Zahl ergibt!



2.98



Die 3B bekommt als **Hausübung** eine ganz lange Rechnung:

$$\left(-\frac{13}{37} + 8,01\right) \cdot \frac{45}{721} \cdot 12,724 \cdot \frac{1}{89} \cdot (14,6 - 52,671) \cdot \left(-\frac{45}{1066}\right) \cdot 7,16882 \cdot \left(-12\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{3}{9}\right) \cdot (3 - 3) \cdot \frac{12}{27} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$$

Bodo und Anita haben das Ergebnis schon nach wenigen Sekunden. Wie haben sie das gemacht?

3.77

Berechne im Kopf!

a) $\sqrt{13^2}$

b) $\sqrt{0,5^2}$

c) $\sqrt{56^2}$

d) $(\sqrt{22})^2$

e) $(\sqrt{1,9})^2$

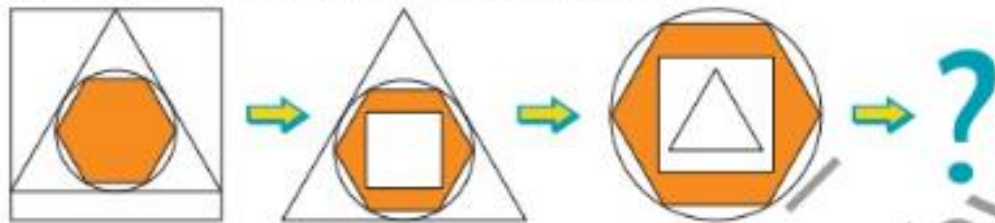
f) $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$

g) $(\sqrt{1^2})^2$

9.134



Die nachstehende Abbildung zeigt eine **Folge von Flächen**, die zusammen ein Muster ergeben. Wie müsste das nächste Muster dieser Folge aussehen?



9.135



Legt die Form der drei Quadrate mit zehn **Streichhölzern** auf! Nehmt danach ein Streichholz weg und legt die verbleibenden so um, dass daraus ein Quadrat und zwei Rhomben entstehen!



9.136



Schneidet aus kariertem Papier eine **Figur** wie in Abbildung 9.1 aus, zerlegt sie in die angegebenen sechs Flächenteile und setzt diese wie in Abbildung 9.2 zusammen! Warum sind auf einmal zwei Kästchen verloren gegangen?

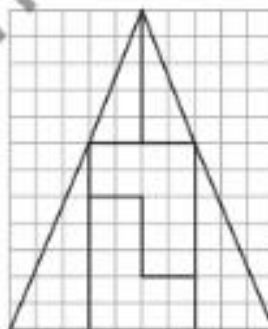


Abb. 9.1

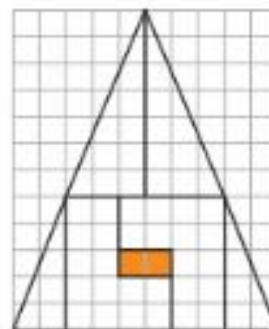


Abb. 9.2

4. Klasse Unterstufe

Das ist Mathematik 4

Der vierte Band der Reihe „Das ist Mathematik“ erschien 2010 in Wien und besteht aus 251 Seiten mit 1076 Beispielen und einer Formelsammlung. Von den 1076 Beispielen entsprechen 310 Beispiele den Textaufgaben und etwa vier sind Rätsel. Wie die anderen Bänder enthält auch der vierte Band einen Auftakt unter dem Titel „Mathematik macht Spaß“, welcher aus mathematischen Rätseln und Wiederholungsaufgaben besteht. Bei genauer Betrachtung werden lediglich zwei von 16 Beispielen der angenommenen Definition eines mathematischen Rätsels gerecht.

Beispiel 6:

Freitag schreibt einige verschiedene natürliche Zahlen, die alle kleiner als 11 sind, in einer Reihe in den Sand. Robinson Crusoe betrachtet die Zahlenfolge und stellt vergnügt fest, dass für benachbarte Zahlen immer gilt, dass eine Zahl durch die andere teilbar ist. Wie viele Zahlen hat Freitag höchstens in den Sand geschrieben?

☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10

Beispiel 8:

Aus einem vollen 468-Liter-Essigfass mit reinem Essig wird ein Sechstel Essig genommen und das Fass mit Wasser wieder aufgefüllt. Abermals wird ein Sechstel des nun verdünnten Essigs entnommen und das Fass nochmals mit Wasser aufgefüllt. Wie viel Liter Wasser sind nun im Fass?

Obwohl die AutorInnen die Beispiele 241 bis 251 als „Zahlenrätsel“ bezeichnen, räumten sie in der Anweisung ein, dass es Textaufgaben seien.

Beispiel 241:

Von drei Zahlen ist die zweite doppelt so groß wie die erste und die dritte so groß wie die erste und zweite zusammen. Berechne die drei Zahlen, wenn ihre Summe 102 ist!

Beispiel 251:

Der Nenner eines Bruches ist um 6 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler und zum Nenner jeweils 5, so erhält man einen Bruch mit dem Wert $\frac{4}{7}$. Berechne den ersten Bruch!

Weiters verbergen sich hinter den „Aufgaben aus alter Zeit“ lediglich weitere Textaufgaben.

Aufgaben aus alter Zeit

-  **291** Aus dem **Papyrus Rhind** aus Ägypten (um 1700 v. Chr.):
Gib zu einer Zahl zwei Drittel ihrer selbst hinzu und nimm dann vom bisherigen Ergebnis ein Drittel weg, so bleibt 10. Berechne die Zahl!
-  **292** Aus der Arithmetik des Inders **Bhaskara** (geb. 1114 n. Chr.):
Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beider Vermögen ist gleich groß. Berechne daraus den Preis eines Pferdes!
-  **293** Aus: „Rechnen auf den Linien mit der Feder“ von **Adam Ries** (1492–1559):
Drei Gesellen wollen ein Haus für 204 Gulden kaufen. Der erste gibt dreimal so viel wie der zweite, dieser viermal so viel wie der dritte. Berechne, wie viel jeder von ihnen bezahlt!
-  **294** Aus der „Algebra“ von **Leonhard Euler** (1707–1783):
Ein Mann hinterlässt 11 000 Taler für seine Witwe, seine zwei Söhne und seine drei Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau doppelt so viel bekommen wie ein Sohn, ein Sohn doppelt so viel wie eine Tochter. Berechne, wie viel Taler jede Erbin und jeder Erbe erhält!
-  **295** Löse durch Nachdenken!
Sokrates, Plato und Aristoteles lebten vor Christi Geburt in Griechenland.
Plato war Schüler des Sokrates, Aristoteles war Schüler des Plato.
Der Schüler war jeweils um 43 Jahre jünger als sein Lehrer. Die Zahl der erreichten Lebensjahre hat bei jedem dieser Philosophen die Ziffernsumme 8. Das von Plato erreichte Alter wird durch die größte zweistellige Zahl mit dieser Eigenschaft angegeben.
Sokrates starb im achten, Aristoteles im siebten Jahrzehnt seines Lebens. Vermehrt man die doppelte Summe der drei Lebensalter um 1, so erhält man das Geburtsjahr des Plato. Berechne für jeden der drei Philosophen das Geburts- und Todesjahr!

Ganz klar: Mathematik 4

„Ganz klar: Mathematik 4“ erschien 2017 in Wien. Dieses Schulbuch enthält auf 233 Seiten insgesamt 1338 Beispiele, wovon 413 Textaufgaben sind. Neben den üblichen Themen einer achten Schulstufe, beinhaltet es unterschiedlich orientierte Abschlusstests. Einer der Abschlusstests ist an die Oberstufe gerichtet, mit dem anderen Test sollen Fertigkeiten für die Arbeitswelt nachgemessen werden. Bei der Suche nach mathematischen Rätseln wurden etwa neun Rätsel im gesamten Buch verteilt, gefunden.

Gleich zu Beginn des Buches ist ein mathematisches Rätsel aus der Kategorie „Geometrisches Puzzle“ zu finden.

a) Übertrage die abgebildeten Figuren auf kariertes Papier! Bemale die 7 Einzelteile mit Farbe und schneide sie anschließend aus! Versuche nun das Quadrat mit den Einzelteilen auszulegen!

b) Ein wahrer Tangram-Meister bist du, wenn du das Puzzle zusammensetzt, ohne die Einzelteile auszuschneiden.

Ein Zahlenrätsel, Sudoku, ist das Beispiel 9. Es wird nicht explizit „Sudoku“ genannt, folgt aber den Prinzipien und Strategien seines Typs.

9 Die Summe der Zahlen in den magischen Quadraten muss in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale gleich 1 sein. Setze die fehlenden Zahlen ein!

a)

		$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	

b)

	$\frac{1}{6}$	
	$\frac{1}{3}$	
$\frac{7}{24}$		

c)

		$\frac{5}{12}$
$\frac{2}{3}$		
		$\frac{7}{12}$

Kurz innehalten und nicht übereifrig rechnen, sollten SchülerInnen beim Beispiel 16.

Beispiel 16:

Die Fläche einer Schwarz-Weiß-Fotografie besteht zu 70% aus Grauschattierungen und die restlichen 30% sind weiß. Das Foto soll nun auf den dreifachen Flächeninhalt vergrößert werden. Wie viel Prozent der Fläche des vergrößerten Fotos wird weiß sein? Kreuze die richtige Antwort an!

☐ 25% ☐ 30% ☐ 20% ☐ 40% ☐ 60%

Ein literarisch untermauertes mathematisches Rätsel ist das Schulbuchbeispiel 63.

In dem folgenden Gedicht von Prof. Alexander Aigner ist die Quadratwurzel aus 2 auf 42 Stellen genau angegeben:



63

Die Irrationale

O kann's denn Menschenwort beschreiben?
Der Geist bringt Zahlprobleme her.
Seitdem wir Rechnungen betreiben,
drohn Unverständlichkeiten sehr.

Erläuterungsbereit erklärte
Pythagoras: „O denket rational!“
Trotzdem bestehn da grundverkehrte
Definitionen manchesmal.

Unbändige Quadratdiagonale!
Beweisbar wirklich irrational.
Versagt, entzogen jedem Hoffungsstrahle.
Verflixte Wurzel, reinste Teufelszahl.

Jedes Wort des Gedichtes hat eine bestimmte Buchstabenanzahl, die die Ziffer an der entsprechenden Dezimalstelle angibt. Ist die Buchstabenanzahl größer als 9, musst du solange 10 abziehen, bis eine Zahl kleiner als 10 herauskommt. (Die Zeichen ? , ! . werden nicht mitgezählt.) Vor dem Komma steht eine 1, da „O“ ein Buchstabe ist. Nach dem Komma folgt eine 4, da das Wort „kann“ aus 4 Buchstaben besteht.

Ergänze die fehlenden Stellen!

$\sqrt{2} =$	1,	4													
															...

Mathematik verstehen 4

2017 erschien in Wien der vierte Band der Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“. Auf seinen 189 Seiten hat das Buch 1016 Beispiele, von denen 353 Textaufgaben sind. Unter den 1016 Beispielen waren etwa 14 Rätsel, abgerundet wird es mit Aufgaben zu den Bildungsstandards.

Ein Rätselversuch ist das Beispiel 47, die Herausforderung besteht darin, die Symbole zu entziffern.

47



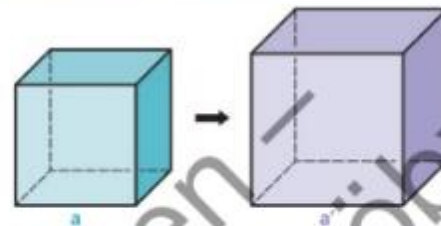
In der folgenden Aufgabe sind Terme mit Symbolen (anstatt Variablen) dargestellt. Unterstreicht jene Terme, die zu den gegebenen Termen 1) bis 7) äquivalent sind!

1) $\ast^2 - \clubsuit^2$			
$2\ast - 2\clubsuit$	$(\ast - \clubsuit)(\ast + \clubsuit)$	$(\ast - \clubsuit)^2$	$\ast(\ast - \clubsuit)$
2) $\circ\Box + \Box^2 + \circ\Box + \circ^2$			
$(\circ + \Box)^2$	$(\circ + 2\Box)^2$	$(2\circ + \Box)^2$	$2\circ\Box$
3) $45\Box^2 - 9\Box\Diamond$			
$5\Box(9\Box - \Diamond)$	$(5\Box - 3\Diamond)^2$	$5\Box^2 - 3\Diamond^2$	$9\Box(5\Box - \Diamond)$
4) $4\Diamond\ominus - 3\Diamond$			
$(4\Diamond - 3\Diamond)^2$	$\Diamond(4\Diamond - 3\Diamond)$	$4\Diamond(\Diamond - 3\Diamond)$	$\Diamond(4\Diamond - 3\Diamond)$
5) $(\star + \odot)^2 - (\star - \odot)^2$			
$-4\star\odot$	$\star^2 + \odot^2$	$\star^2 - \odot^2$	$4\star\odot$
6) $(\ast - \diamond)^2 + 2\ast\diamond$			
$\ast^2 - 4\ast\diamond + \diamond^2$	$\ast^2 - \diamond^2$	$-4\ast\diamond$	$\ast^2 + \diamond^2$
7) $(\odot + \ominus)^2 - (\odot^2 - \ominus^2)$			
$2\odot^2 + 2\odot\ominus$	$2\odot^2 + 2\odot\ominus$	$2\odot^2 - 2\odot\ominus$	$2\odot\ominus$

1.129



Laut einem Orakelspruch sollten die Bewohner der Insel Delos im 5. Jahrhundert v. Chr. den würfelförmigen Altar des Apoll so vergrößern, dass sein Volumen verdoppelt werden sollte. Man spricht hierbei auch vom **Delischen Problem**. Es sei a die Kantenlänge des ursprünglichen Würfels.



- Drückt mit Hilfe von a die Seitenlänge a' des neuen Würfels mit doppeltem Volumen aus!
- Ist das Problem mit rationalen Zahlen lösbar?

Einen literarischen Bezug hat auch Beispiel 6.04, bei dem ein Gedicht zur Ermittlung der Kreiszahl π führt.

Beispiel 6.04:

Der Schweizer Künstler Eugen JOST (*1950) hat das folgende kleine Gedicht verfasst:

Wie? O! Dies π
 Macht ernstlich so viele viele Müh'!
 Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
 Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein

Versucht herauszufinden, warum man nach dem Auswendiglernen dieses Gedichts automatisch die ersten 23 Nachkommaziffern von π beherrscht!

Die Kreiszahl π wurde auch in zwei weitere Rätsel verpackt, siehe Beispiele 6.80 und 6.83.

Beispiel 6.80:

Aufgrund schlechter Sicht fährt ein Piratenschiff drei Stunden lang mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4km/h im Kreis und kehrt so nach dieser Zeit wieder zum Ausgangspunkt zurück.

- 1) Wie groß ist der Durchmesser d dieses Kreises?*
- 2) Warum können die Seeräuber diese Aufgabe nicht exakt lösen?*

Beispiel 6.83:

Ein berühmtes Problem der Mathematik ist die Quadratur des Kreises, als die Umwandlung eines beliebigen Kreises in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat. Mit Mitteln der höheren Mathematik kann man beweisen, dass die Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist. Versucht jedoch zu zeigen, dass die Konstruktion in der nebenstehenden Abbildung zumindest zu einer Näherungslösung führt!

Hinweis: Der Kathetensatz spielt eine wichtige Rolle.

Tabellarische Zusammenfassung der Analyse:

	„Das ist Mathematik“	„Ganz klar: Mathematik“	„Mathematik verstehen“
5. Schulstufe	271 Buchseiten 1400 Beispiele 430 Textaufgaben 28 Rätsel	218 Buchseiten 1304 Beispiele 295 Textaufgaben 23 Rätsel	277 Buchseiten 1450 Beispiele 501 Textaufgaben 15 Rätsel
6. Schulstufe	269 Buchseiten 1207 Beispiele 450 Textaufgaben 40 Rätsel	234 Buchseiten 1101 Beispiele 292 Textaufgaben 20 Rätsel	277 Buchseiten 1385 Beispiele 472 Textaufgaben 10 Rätsel
7. Schulstufe	265 Buchseiten 1210 Beispiele 287 Textaufgaben 30 Rätsel	221 Buchseiten 1173 Beispiele 329 Textaufgaben 20 Rätsel	275 Buchseiten 1328 Beispiele 299 Textaufgaben 10 Rätsel
8. Schulstufe	251 Buchseiten 1076 Beispiele 310 Textaufgaben 4 Rätsel	233 Buchseiten 1338 Beispiele 413 Textaufgaben 9 Rätsel	189 Buchseiten 1016 Beispiele 353 Textaufgaben 14 Rätsel

5.2. Mathematische Rätsel in den Schulbüchern der Oberstufe

Der Abschluss einer Allgemeinbildende Schule beinhaltet idealerweise auch die bestandene Reifeprüfung. Nach den neun Pflichtschuljahren differenziert sich der Lehrplan in mehrere Zielorientierungen, die je nach Spezialisierung einen eigenen Lehrplan vorgegeben haben. Für die vorliegende Arbeit sei nochmal auf den Bezug zu einer Allgemeinbildende Schule hingewiesen, dementsprechend kommen drei Lehrbuchreihen der neunten bis zur zwölften Schulstufe, Oberstufe in Frage.

Eines davon ist das Lehrwerk „Mathematik verstehen“ von den AutorInnen Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Malle, Prof. Mag. Dr. Maria Koth et al, aus den Jahren 2010 bis 2012 vom öbv-Verlag.

Die zweite Alternative bildet die Reihe „Mathematik“ von den AutorInnen Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz, Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans-Christian Reichel et al, aus den Jahren 2010 bis 2013. Diese Schulbuchreihe wird auch vom öbv-Verlag publiziert.

Als dritte Option wurde die Reihe „Lösungswege Mathematik Oberstufe“, ebenfalls vom öbv-Verlag, aus den Jahren 2015 bis 2018 von den AutorInnen Philipp Freiler, Julia Marsik et al ausgewählt.

5. Klasse Oberstufe

Mathematik verstehen

2010 erschien das Mathematikschulbuch „Mathematik verstehen 5“ für die 9. Schulstufe in Wien. Das Buch hat 283 Seiten, auf denen insgesamt 1551 Beispiele zu finden sind. Im gesamten Schulbuch gibt es 364 Textaufgaben, wovon etwa vier Beispiele den mathematischen Rätseln zugeordnet werden können.

Beispiel 1.100:

Der griechische Mathematiker Diophant (250 n. Chr.) war ein Sechstel seines Lebens Kind, ein Zwölftel Jugendlicher und ein Siebentel Junggeselle. Fünf Jahre nach der Hochzeit bekam er einen Sohn, der aber leider nur halb so alt wie der Vater wurde. Diophant starb vier Jahre nach seinem Sohn. Wie alt wurde Diophant?

Beispiel 1.101:

Eine Aufgabe von Adam Ries:

Jemand spricht: „Gott grüßt euch, ihr 30 Gesellen!“ Man antwortete ihm: „Wenn wir noch einmal so viel wären und noch halb so viel, dann wären wir 30.“ Wie viele sind es gewesen?

Beispiel 1.102:

Noch eine Aufgabe von Adam Ries:

Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt er sei. Der Vater antwortet: „Wenn du wärest auch so alt und noch halb so alt und ein Drittel so alt und noch ein Jahr dazu, so wärest du 100 Jahre.“ Wie alt ist der Vater?

Bei diesen angeführten Beispielen handelt es sich nicht mehr um ein Rätsel, sobald das Prinzip der linearen Gleichungen durchschaut wurde. Sie zeichnen sich durch die Erwähnung von antiken Mathematikern und die Vorstellung ihrer Beispiele, wie auch die Verwendung einer heute nicht üblichen Standardsprache. Ähnlich wie das nächste Beispiel.

Beispiel 10.39:

Eine alte chinesische Aufgabe: In einem Stall sind Hühner und Kaninchen. Es sind insgesamt 35 Tiere mit zusammen 94 Beinen. Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen sind in dem Stall?

Diese vier angeführten Beispiele entsprechen vor allem wegen ihrer Sprache und Einleitung („Eine Aufgabe von Adam Ries“, „Eine alte chinesische Aufgabe“) den Kriterien eines mathematischen Rätsels und sind schlussendlich anders verpackte Sachaufgaben zum Wiederholen von Gleichungssystemen. Mathematische Rätsel, die eine überraschende Antwort beinhalten oder zum Knobeln und Entziffern einladen, sind im Schulbuch „Mathematik verstehen“ nicht zu finden.

Mathematik

Im selben Jahr erschien in Wien auch das Lehrwerk „Mathematik 5“. Auf seinen 263 Seiten sind 981 Beispiele verteilt. In diesem Buch gibt es 176 Textaufgaben, von denen etwa drei mathematische Rätsel sind.

178

- 1 Welche Botschaft ist in der Figur verschlüsselt? Lies (nochmals) Kapitel 2.7.1!
- 2 Im ASCII-Code (American Standard Code for Information Interchange), einem 1 Byte (= 8 bit) Code, können 256 Zeichen verschlüsselt dargestellt werden; sie sind von 0 bis 255 durchnummeriert, wobei die Zeichen bis 127 genormt sind. Die mit einer größeren Platznummer sind gerätespezifisch. Im Folgenden verwenden wir die IBM-Version (US-Zeichensatz). Ergänze die folgende Tabelle!

	Zeichen	10er-System	16er-System	2er-System
a	≈		F2	
b	\$		24	
c	≈			11110111
d	α			11100000
e	]	93		
f	/	47		
g	A		41	
h	l		49	



849

Findest du vom Labyrinthmittelpunkt (Ursprung) zurück zum Labyrintheingang ▶▶? Beschreibe den Weg durch **1** die Punkt-Koordinaten der *Wegecken*, **2** die Pfeil-Koordinaten der einzelnen *Wegstrecken*!



850

In einem ebenen Gelände findet der „Orientierungslauf für Schlaumeier“ statt; dabei ist die *Reihenfolge* des Anlaufens der einzelnen Stationen (mit Ausnahme von Start und Ziel) beliebig ▶▶. Wer siegen will, braucht neben Kraft und Ausdauer auch Köpfchen!



851

Die Stationen sind in der Reihenfolge A, B, C, D, E angeordnet. Beschreibe den kürzesten Weg vom Start zum Ziel durch die Stationen! (Hinweis: Der kürzeste Weg ist nicht eindeutig!)

852

Die Stationen sind in der Reihenfolge A, B, C, D, E angeordnet. Beschreibe den längsten Weg vom Start zum Ziel durch die Stationen! (Hinweis: Der längste Weg ist nicht eindeutig!)

71

6. Klasse Oberstufe

Mathematik verstehen

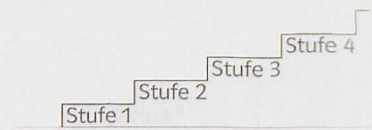
2010 erschien in der Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ ein Band für die 10. Schulstufe. Das Buch bietet auf seinen 283 Seiten insgesamt 1208 Beispiele zum Lernen und Wiederholen an, von denen 337 Textaufgaben sind. Unter den 1208 Beispielen gibt es etwa sechs Rätsel.

Beispiel 1.189:

Wie lang müsste ein Mensch zählen, wenn er die Zahl 10^{10} erreichen möchte, wobei er in jeder Sekunde um 1 weiterzählt und 10 Stunden am Tag zählt?

Beispiel 7.59:

7.59 Wir stehen vor einer Treppe mit vielen Stufen. Die Stufe 1 muss auf jeden Fall betreten werden. Danach steht es einem frei, ob man die nächste oder die übernächste Stufe betritt. Es sei f_n die Anzahl der Möglichkeiten, die Stufe n zu erreichen. Zeige, dass die Glieder f_n eine Fibonacci-Folge mit $n \geq 1$ bilden!



Ein mathematisches Rätsel, das bei allen drei Lehrwerken vorkommt, ist das folgende Schachbeispiel, siehe Beispiel 8.31.

Beispiel 8.31:

■ **8.31** Der Legende nach soll sich der Erfinder des Schachspiels *Sissa ibn Dahir* von seinem König *Shihram* als Lohn für seine Erfindung alle Weizenkörner erbeten haben, deren Anzahl man auf folgende Weise ermitteln kann:

Auf dem 1. Feld eines Schachbretts soll ein Weizenkorn liegen, auf dem 2. Feld sollen zwei Weizenkörner liegen, auf dem 3. Feld vier Weizenkörner usw. bis zum 64. Feld des Schachbretts.

Auf jedem Feld soll also die doppelte Anzahl an Weizenkörnern liegen wie auf dem vorangehenden Feld. König *Shihram* lachte über *Sissas* bescheidenen Wunsch. Tatsächlich aber hatte *Shihram* keinen Grund zum Lachen.

- 1) Wie viele Weizenkörner hätte man auf das letzte Feld legen müssen?
- 2) Wie viele Weizenkörner hätte *Sissa* insgesamt als Lohn erhalten?
- 3) Wenn ein Weizenkorn ca. 0,05 g wiegt und die gesamte Weltjahresproduktion an Weizen heute ca. 610 Millionen Tonnen beträgt, wie viele solche Weltjahresproduktionen wären dann nötig, um *Sissas* Lohn aufzubringen?



Auch bei dem Thema „Geraden und Ebenen im Raum“ bemühten sich die AutorInnen mit einem Rätsel um Abwechslung, siehe Beispiel 11.09.

Beispiel 11.09:

Ein Tisch mit vier Füßen kann wackeln, ein Tisch mit drei Füßen nicht. Erkläre diese Tatsache mit Hilfe des Wissens über Ebenen!

Mathematik

Die Buchreihe „Mathematik“ veröffentlichte 2010 ein Band für die zehnte Schulstufe einer allgemein höheren Schule in Wien. Auf den 263 Buchseiten gibt es insgesamt 1060 Beispiele, von denen 140 Textaufgaben sind. Bei der Untersuchung des Lehrwerks nach mathematischen Rätseln anhand der gegebenen Merkmale konnten drei ermittelt werden.

Beispiel 561:

Zwei Mathematiker werden aufgefordert, das n -te Glied der Folge $\langle 1; 16; 81; 256; \dots \rangle$ zu bestimmen und das fünfte Glied der Folge zu berechnen. Einer schreibt $x_n = n^4$, der andere – ein originell denkender Mensch – findet $x_n = 10n^3 - 35n^2 + 50n - 24$. Der erste errechnet $x_5 = 5^4 = 625$, der andere errechnet aus seinem n -ten Glied $x_5 = 601$.

Wer hat Recht? (Prüfe jeweils die ersten vier Glieder und berechne x_5 !)

Beispiel 605:

Entlang einer 100m langen Strecke werden im Abstand von je 1m Äpfel ausgelegt. Am Anfang der Strecke steht ein Korb. Die Äpfel sollen einzeln geholt und in den Korb gelegt werden. Rupert wettet dazu höchstens 1h zu brauchen. Kann er gewinnen? Welche Weglänge hat er zurückgelegt?

Auch das bekannte Schachbeispiel kommt in dieser Schulbuchreihe vor, siehe Beispiel 650.

650

Auf das erste Feld eines Schachbrettes werde ein Weizenkorn gelegt, auf das zweite zwei Körner, auf das dritte vier, usw. a) Angenommen, man könnte dieses „Verdopplungsspiel“ bis zum Ende aller Felder eines Schachbrettes fortsetzen, wie viele Weizenkörner würde man benötigen? b) Wie viel t Weizen ergäbe dieses „Spiel“, wenn ein Weizenkorn durchschnittlich 2 cg wiegt? c) Wie viel Weizen etwa käme auf eine Person, wenn die Weltbevölkerung mit rund 7,4 Milliarden Menschen angenommen wird?

200



Lösungswege Mathematik

Im Jahr 2016 erschien in Wien der zweite Band der Schulbuchreihe „Lösungswege Mathematik“, welcher an die zehnte Schulstufe AHS gerichtet ist. Das Schulbuch hat 275 Seiten, die mit 1048 Beispielen gefüllt sind. Von den 1048 Buchbeispielen sind 279 Textaufgaben. Bei der Analyse konnten etwa drei mathematische Rätsel gefunden werden.

Bei dem Kapitel der Winkelfunktionen gibt es ein Beispiel, das aufgrund seiner Sprache sehr an ein Rätsel erinnert, siehe Beispiel 405.

Beispiel 405:

Auf welche Winkelfunktion(en) trifft die Aussage zu?

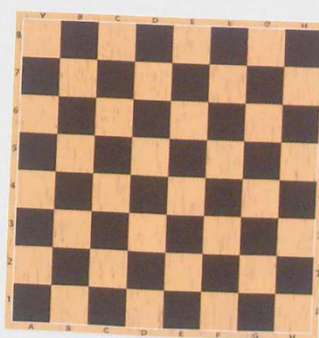
- a) *Bei $x = \pi + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ besitze ich Nullstellen.*
- b) *Ich bin nie streng monoton fallend.*
- c) *Meine Extremstellen sind bei π und allen Vielfachen von π .*
- d) *Ich bin eine periodische Funktion.*
- e) *Ich bin eine gerade Funktion.*

Das aus den anderen Schulbuchreihen bekannte Schachbeispiel ist auch hier vertreten, siehe Beispiel 562.

562. Der Erfinder des Schachspiels wollte als Belohnung die Menge an Weizenkörnern, die man insgesamt erhält, wenn man auf das erste der 64 Felder des Schachbretts ein Korn, auf das zweite Feld 2 Körner und auf jedes folgende Feld doppelt so viele Körner legt wie auf das vorhergehende.

- a) Wie viele Weizenkörner würde das ergeben?
- b) Wie viele Lastzüge zu je 50 Waggon mit je 20 Tonnen Fassungsvermögen könnten diese Weizenmenge befördern? ($2,2 \cdot 10^7$ Weizenkörner wiegen 1 Tonne)

563. Welchen Wert hat die endliche Reihe $5 + 15 + 45 + \dots + 32805$?



Aber auch eine vereinfachte Aufgabe aus dem Bereich der Flächengeometrie wurde wiedergegeben, siehe Beispiel 837.

837. 2006 exportierte Kanada doppelt so viele Güter in das Vereinigte Königreich und in die USA wie Norwegen. Um dies zu illustrieren wurden in der folgenden Darstellung die kanadische Flagge und die norwegischen Fahne dargestellt.

Norwegen



Kanada



- a) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt der kanadischen Fahne größer als jener der norwegischen Fahne?
- b) Welche Art der Manipulation wurde bei dieser Darstellung verwendet? Gib eine Darstellung an, die den Sachverhalt korrekt darstellt.

7. Klasse Oberstufe

Mathematik verstehen

2011 erschien der dritte Band für die Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ in Wien mit 261 Buchseiten. Er beinhaltet insgesamt 1166 Beispiele, wovon 242 Textaufgaben sind. Bei der Analyse des Buches wurde kein mathematisches Rätsel gefunden.

Mathematik

Im selben Jahr veröffentlichten die AutorInnen der Schulbuchreihe „Mathematik“ ebenfalls das Unterrichtsbuch für die elfte Schulstufe. Sie publizierten auf 263 Buchseiten insgesamt 1055 Beispiele, unter ihnen 110 Textaufgaben. Unter den 1055 Buchbeispielen gibt es etwa zwei Rätsel.

Bei Beispiel 349 handelt es sich wegen der beigefügten Abbildung um ein vereinfachtes mathematisches Rätsel, denn ohne sie wäre es eine Fangfrage zur Überprüfung der Funktionen.

- 349 Muss ein Hochpunkt stets höher als ein Tiefpunkt liegen? Überlege anhand von Fig. 3.4 und gib ein konkretes Beispiel an!

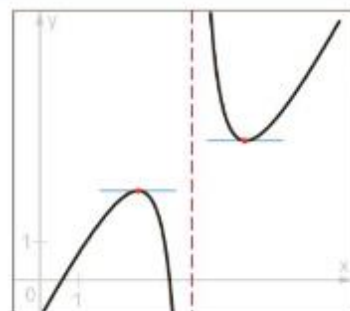
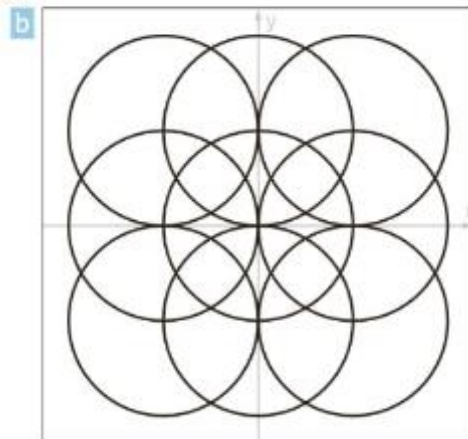
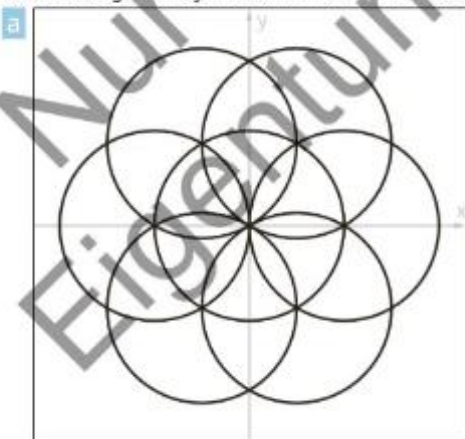


Fig. 3.4

Bei dem Thema „Geometrie“ konzipierten die AutorInnen ein Beispiel, bei dem das Rätsel darin besteht, eine Einheitslösung zu finden.

- 701 Gib die Gleichungen aller Kreise (Radius r) und die Koordinaten aller ihrer Schnittpunkte an! Die Beachtung von Symmetrien kann dir viel Arbeit sparen!



Lösungswege Mathematik

Keine mathematischen Rätseln wurden im Schulbuch „Lösungswege Mathematik 7“ aus dem Jahr 2016 gefunden. Auf den 267 Buchseiten gibt es 966 Beispiele, wovon es 202 Textaufgaben gibt.

5.2.1. 8. Klasse Oberstufe

Mathematik verstehen

Für die Maturaklasse erfassten die AutorInnen der Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ 2012 das schulstufenzugehörige Mathematikbuch. Es hat 263 Seiten, die 721 Beispiele beinhalten, von denen 296 Beispiele Textaufgaben sind. Die Suche nach mathematischen Rätseln war vergeblich.

Mathematik

Keine Treffer wurden auch bei der Schulbuchreihe „Mathematik“ für die zwölfte Schulstufe, im Jahr 2013 veröffentlicht, bezüglich mathematischer Rätseln gefunden. Auf 275 Buchseiten sind 1174 Beispiele verteilt, 361 davon sind Textaufgaben.

Lösungswege Mathematik

„Lösungswege Mathematik“ für die zwölfte Schulstufe wurde 2018 in Wien veröffentlicht. Es hat 279 Buchseiten, auf denen 795 Beispiele abgebildet sind, davon sind 336 Textaufgaben. Mathematische Rätsel wurden auch in diesem Lehrwerk nicht gefunden.

Tabellarische Zusammenfassung der Analyse

	„Mathematik verstehen“	„Mathematik“	„Lösungswege Mathematik“
9. Schulstufe	283 Buchseiten 1551 Beispiele 364 Textaufgaben 4 Rätsel	236 Buchseiten 981 Beispiele 176 Textaufgaben 3 Rätsel	265 Buchseiten 1059 Beispiele 190 Textaufgaben 0 Rätsel
10. Schulstufe	283 Buchseiten 1208 Beispiele 337 Textaufgaben 6 Rätsel	263 Buchseiten 1060 Beispiele 140 Textaufgaben 3 Rätsel	275 Buchseiten 1048 Beispiele 279 Textaufgaben 3 Rätsel
11. Schulstufe	261 Buchseiten 1166 Beispiele 242 Textaufgaben 0 Rätsel	263 Buchseiten 1055 Beispiele 110 Textaufgaben 2 Rätsel	267 Buchseiten 966 Beispiele 202 Textaufgaben 0 Rätsel
12. Schulstufe	263 Buchseiten 721 Beispiele 296 Textaufgaben 0 Rätsel	275 Buchseiten 1174 Beispiele 361 Textaufgaben 0 Rätsel	279 Buchseiten 795 Beispiele 336 Textaufgaben 0 Rätsel

6. Mathematische Rätsel außerhalb der Mathematikbücher

Am Ehestens begegnen Lernenden mathematische Rätseln, wenn sie am Känguru der Mathematik-Wettbewerb teilnehmen. Känguru der Mathematik ist ein Wettbewerb für Mathematikgruppen, der 1978 in Australien entstand. Das Ziel war es, „sehr anregende“ Aufgaben zu erstellen, sodass jeder Teilnehmer etwas Interessantes für sich findet, denn der Leitsatz des Wettbewerbs laute „Freude an der Beschäftigung mit Mathematik“. Seit den 1990er findet der Wettbewerb weltweit jeden dritten Donnerstag im März statt, die Aufgaben sollen auch weltweit gleich sein, mit wenigen internen Regelungen.⁷

Das Ziel des Wettbewerbs ist keineswegs ein Vergleich zwischen den Teilnehmerstaaten, sondern lediglich eine Möglichkeit den Spaß und die Zusammenhänge von Mathematik zu verdeutlichen.

Heute gibt es unzählige Möglichkeiten mathematische Rätseln für jedes Alter zu finden, sowohl im Internet als auch als Sammlungen in den Buchhandlungen.

„Mathematische Rätsel und Spiele-Denksportaufgaben für kluge Köpfe“ von SamLoyd/Martin Gardner, gab auch unter anderem den Anstoß für die vorliegende Arbeit.

Im Netz sind folgende Links zu nennen:

<https://www.logisch-gedacht.de/>

<http://www.denksport-raetsel.de/>

<http://www.matheraetsel.de/archiv.html>

<http://www.mathpuzzle.com/>

⁷ <https://www.mathe-kaenguru.de/international/index.html>

7. Diskussion der Ergebnisse

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Nachweis über das Vorkommen von mathematischen Rätseln in den österreichischen Schulbüchern.

Anhand von je drei Schulbuchreihen für die Unterstufe und die Oberstufe AHS konnte festgestellt werden, dass das Vorkommen von mathematischen Rätseln mit dem Beginn der Oberstufe abnimmt. Die meisten Rätseln kommen in den Schulbüchern der Unterstufe vor, wobei manche auch explizit gekennzeichnet sind.

Da Textaufgaben im Mathematikunterricht insbesondere für lernschwache Lernende fälschlicherweise auch ein Rätsel darstellen, wurde auch die Anzahl der Textaufgaben in den jeweiligen Schulbüchern gezählt. Verglichen mit der Anzahl der Beispiele in einem Schulbuch, stellen die Textaufgaben, die einen versuchten Bezug zur Realität und zum Lesenden herstellen, in keiner Buchreihe und für keine Schulstufe die Hälfte der Aufgaben dar.

In den Schulbüchern der Unterstufe im Fach Mathematik kommen jeweils höchstens 40 und mindestens neun Rätseln vor, die Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ nutzt das Potential der mathematischen Rätsel als ein Auffrischungskapitel in jeder Reihe am Anfang des Buches. Die Reihe „Mathematik verstehen“ nutzt die letzten Seiten der einzelnen Kapitel für eine Vertiefung des vorangegangenen Stoffes mittels einigen Rätseln, jedoch sind die meisten Rätseln mit den Beispielen gut vermischt, so wie bei der Schulbuchreihe „ganz klar: Mathematik“.

Mit der steigenden Schulstufe nimmt die Anzahl der mathematischen Rätsel in den Schulbüchern ab, in den drei Buchreihen wurden für die 12. Schulstufe keine mathematischen Rätseln gefunden, wobei schon in der 11. Schulstufe kaum noch welche vorkommen.

Die Schulbücher der Oberstufe AHS sind bereits ab der neunten Schulstufe stark maturaorientiert, sie enthalten gekennzeichnete Aufgaben, wie sie bei der Standardisierten Reifeprüfung zu finden sind. Aufgrund dieses Schwerpunktes und der vor einigen Jahren umgesetzten Umsetzung der Standardisierten Reifeprüfung in Mathematik kann davon ausgegangen werden, dass dieser Fokus im Zeitraum der Umsetzung ab 2015 im Vordergrund steht. Weiters ist die Abwesenheit der mathematischen Rätsel auch damit zu deuten, dass der Besuch einer Oberstufe auf das Erlangen der höheren Allgemeinbildung abzielt und deshalb die behandelten Thematiken nicht aufeinander abgestimmt sind.

Eine weitere Deutung für das marginale Vorkommen von mathematischen Rätseln in den Schulbüchern der Oberstufe könnte mit dem Aspekt der Allgemeinbildung argumentiert

werden. In Österreich endet die allgemeine Unterrichtspflicht mit neun Pflichtschuljahren, jede weitere Weiterbildung liegt über den Wissensvoraussetzungen und außerhalb der Verpflichtung des Staates. Ein Merkmal eines mathematischen Rätsels sei nach Gardner auch seine Reichweite, es werde nicht nur für eine Gruppe von Experten geschrieben, sondern soll von möglichst vielen Menschen verstanden werden.⁸

Analog wie auch digital gibt es im Internet und in den Buchhandlungen in Österreich Rätselsammlungen für jede Altersstufe.

Die Unterhaltungsmathematik als eine eigenständige Disziplin hat sich in der Wissenschaft bis heute nicht vollkommend durchgesetzt, sodass sie immer noch als Unterhaltungsschnittstelle zwischen der Wissenschaft Mathematik und den Lebenskontexten dient. Als eine Schnittstelle zwischen Mathematik und den Lernenden und auch als eine Binnendifferenzierungsmaßnahme zählen DidaktikerInnen wie auch Bruder, Linneweber-Lammerskitten und Reibold mathematische Spiele, Rätsel, Denksportaufgaben auf. (Bruder, Linneweber-Lammerskitten, Reibold 2018, S.517)

Mathematische Rätsel haben darüber hinaus das Potential einen sprachsensiblen Fachunterricht zu ermöglichen, weil sie sowohl den flexiblen als auch sicheren Umgang mit Sprachkenntnissen und Mathematikkompetenzen und Mathematikkenntnissen fördert.

An die Arbeit fortsetzend wäre eine Analyse der Bewältigung der Känguru-Aufgaben interessant, wie Lernende abschneiden und inwiefern der Känguru-Wettbewerb ihre Sichtweisen auf den Mathematikunterricht beeinflusst hat. Da der Spaßfaktor beim Känguru-Wettbewerb eine zentrale Rolle spielt, wäre ein internationaler Vergleich mit dem einhergehenden Druck der Gesellschaft ein riskantes Unterfangen und es wird auch von seitens der WettbewerbbetreiberInnen abgelehnt.

Im Anschluss an diese Arbeit wäre auch eine empirische Untersuchung über den wirklichen Einsatz von mathematischen Rätseln im Unterricht von Bedeutung, inwiefern und wie sie von Lehrenden gezielt angewendet werden. Denn Mitchell behauptete, dass mathematische Rätsel, im Sinne der Modellierungsaufgaben, eine Diskussion mit den SitznachbarInnen eröffnen würden. Weiters plädiert Mitchell für das partnerschaftliche Lösen von mathematischen Rätseln als Brücke zwischen der Binnendifferenzierung und der Kommunikation im Mathematikunterricht.

⁸ Online unter <https://www.spektrum.de/magazin/ein-vierteljahrhundert-unterhaltungsmathematik/824953> (zuletzt gesehen am 19.3.2020)

8. Resümierende Zusammenfassung

Ausgehend von der Frage, welchen Ausmaß Textaufgaben, und insbesondere mathematische Rätsel, in den Mathematikschulbüchern einnehmen, wurden für die vorliegende Arbeit jeweils drei Schulbuchreihen von der fünften bis zur zwölften Schulstufe analysiert.

Am Anfang der Arbeit wurde die Bedeutung des Mathematikunterrichts thematisiert, anschließend werden die Textbeispiele beschrieben. Welchen Schwierigkeiten Lernende beim Lösen von Textaufgaben begegnen und die Lösungsmaßnahmen von DidaktikerInnen werden im nächsten Schritt herausgearbeitet. Da Sprachkompetenzen beim Lösen von Textaufgaben eine große Rolle spielen, wurde die Schwierigkeit in Relation zur Sprache in zwei Aspekten untersucht, die Lesekompetenz und die Sprachkompetenz.

Basierend auf der Feststellung von Bruder, Linneweber-Lammeskitten und Reibold mathematische Rätsel als eine Maßnahme der Binnendifferenzierung in Betracht zu ziehen, wurden anschließend mathematische Rätsel definiert. Nach der Findung einer Definition folgt die Analyse in den insgesamt 24 Schulbüchern.

Hierbei werden die Buchseiten, Anzahl der Beispiele, Anzahl der Textaufgaben und Anzahl der mathematischen Rätsel ausgewertet.

Mittels der Schulbuchanalyse konnte festgestellt werden, dass Textaufgaben mit ihren versuchten Alltagsbezug unabhängig von Schulstufe und Schulbuchreihe immer weniger als die Hälfte der Aufgabensammlung ausmachen. Mathematische Rätsel kommen in den Büchern der Unterstufe am ehestens vor, sind jedoch unter den Beispielen „versteckt“. In der Oberstufe bilden die mathematischen Rätsel eine Minderheit, in der zwölften Schulstufe sind sie gar nicht zu finden.

Der Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ jedoch bietet für die Lernenden der Oberstufe eine schulstufenadäquate Möglichkeit, um mathematische Rätsel kennenzulernen.

9. Literaturverzeichnis

Behrends, Ehrhard / Gritzmann, Peter u.a.: Pi und Co.. Kaleidoskop der Mathematik. Heidelberg: Springer Verlag² (2016).

Bilgeri, Carmen Denise: Mathematikaufgaben in Schulbüchern der 6. und 7. Schulstufe des 20. und 21. Jahrhunderts. Diplomarbeit. Univ. Wien. 2018.

Brown, Clara Lee: Equity of Literacy-Based Math Performance Assessments for English Language Learners. In: Bilingual Research Journal 29/ 2 (2005), S. 337–363.

Bruder, Regina / Linneweber-Lammerskitten, Helmut u.a.: Individualisieren und differenzieren. In: Handbuch der Mathematikdidaktik (2015), S. 513-534.

Hefendehl-Hebeker, Lisa, Schmidt-Thieme, Barbara, & Weigand, Hans-Georg. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik (2015 ed.). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Gaidoschik, Michael: Österreichische Kinder müssen schlauer sein als bayrische. Muss das sein?. In: Österreichisches Rechenschwächen Magazin Nr.8 (2003), S.1-7.

Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Probleme. Braunschweig: Vieweg 1964.

Gardner, Martin: Ein Vierteljahrhundert Unterhaltungsmathematik (1998). Online unter: <https://www.spektrum.de/magazin/ein-vierteljahrhundert-unterhaltungsmathematik/824953> (zuletzt gesehen am 25.1.2020)

Greefrath, Gilbert: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2010. (Vol. 0, Mathematik Primar- und Sekundarstufe)

Heinze, Aiso / Herwartz-Emden, Leonie u.a.: Die Rolle von Kenntnissen der Unterrichtssprache beim Mathematiklernen. Ergebnisse einer quantitativen Längsschnittstudie in der Grundschule. In: Prediger, Susanne (Hg.): Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung in Deutschland. Münster: Waxmann 2011 (Mehrsprachigkeit 32), S. 11–34.

Hemme, Heinrich: Kopfnuss. 101 mathematische Rätsel aus vier Jahrtausenden und fünf Kontinenten. München: Beck² 2013.

Heymann, Hans Werner: Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim und Basel: Beltz Verlag² 2013. <https://www.beltz.de/fileadmin/beltz/leseproben/978-3-407-29323-7.pdf> (zuletzt gesehen am 24.1.2020)

Hinrichs, Gerd: Modellierung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag 2008. (Vol. 0, Mathematik Primar- und Sekundarstufe)

Hinteregger-Euller, Sonja: Schulbücher im Schuljahr 2018/19. Rundschreiben Nr.6/2018. Online unter: https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulrecht/rs/2018_06.html (zuletzt gesehen: 24.1.2020)

Hossiep, Rüdiger / Schulte, Marcus u.a.: Was ist Wissen – und wie lässt es sich messen? In: Trepte, Sabine / Verbeet, Markus (Hg.): Allgemeinbildung in Deutschland. Erkenntnisse aus dem SPIEGEL-Studentenpisa-Test. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften 2010, 39–54.

Jank, Werner / Meyer, Hilbert: Didaktische Modelle. Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor 2002

Kaufmann, Susan: Heterogenität und Binnendifferenzierung im DaZ-Unterricht. In: Fortbildung für DaZ-Kursleitende 1 (2007), S. 186 – 214.

Lenhard, Wolfgang / Lenhard, Alexander et al.: ELFE II - Ein Leseverständnistest für Erst- bis Siebtklässler 2017. Online unter: <https://www.psychometrica.de/elfe2.html> (zuletzt gesehen am 25.1.2020)

Leuders, Timo: Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Verlag⁸ 2018.

Loyd, Sam / Gardner, Martin: Mathematische Rätsel und Spiele. Denksportaufgaben für kluge Köpfe. 117 Aufgaben und Lösungen. Köln: DuMont-Schauberg (1978).

Maier, Hermann / Schweiger, Fritz: Mathematik und Sprache. Wien: öbv&hpt 1999.

Mitchell, Mathew: Situational Interest: Ist Multifaced Structure in the Secondary School Mathematics Classroom. In: Journal of Educational Psychology 46 (2011), S.424-436.

Schittek, Claudia: Flog ein Vogel federlos. Was uns die Rätsel sagen. München, Wien: Hanser 1989.

Selter, Christoph: Rechnen auf eigenen Wegen. In: Schule heute 4. Zeitschrift des Verbandes Bildung und Erziehung (2004), S. 9–11.

Schmidt, Jürgen: Lehrerhilfen im Mathematikunterricht. Eine Untersuchung der Rolle von Lehrerhilfen für die Arbeit von Gymnasiallehrern bei der Unterrichtsvorbereitung und Unterrichtsdurchführung. Dissertation. Univ. Tübingen 1984.

Schneeberger, Martin: Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog. Der Erwerb von Mathematisierungskompetenz als Initiation in eine spezielle Diskurspraxis. 529. Münster: Waxmann Verlag 2009.

Tomasek, Tomas: Das deutsche Rätsel im Mittelalter. Tübingen: Niemeyer 1994.

Vallen, Ton: Sprache und Testfairness. Potenzielle linguistische Quellen von Item Bias für Schüler aus ethnischen Minderheitsgruppen in den CITO-Abschlusstests der niederländischen Basisschule. In: Migration und sprachliche Bildung. Interkulturelle Bildungsforschung 15 (2005), S.169-184.

Vollrath, Hans-Joachim, & Roth, Jürgen.: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. (2012). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag² 2012.

Westermann, Bernd: Anwendungen und Modellbildung. In: Leuders, Timo (Hg.): Mathematikdidaktik. Praxisbuch für die Sekundarstufe I und II (2003), S.148-162.

Wilhelm, Nadine: Zusammenhänge zwischen Sprachkompetenz und Bearbeitung mathematischer Textaufgaben. Quantitative und qualitative Analysen sprachlicher und konzeptueller Hürden. Wiesbaden: Springer Fachmedien 2016.

Wille, Friedrich: Humor in der Mathematik. Eine unnötige Untersuchung lehrreichen Unfugs, mit scharfsinnigen Bemerkungen, durchlaufender Seitennumerierung und freundlichen Grüßen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1983.

Winter, Heinrich: Sachrechnen in der Grundschule. Berlin: Cornelsen Scriptor⁶ 2003.

Mathematikschulbücher der Analyse:

Reichel, Humenberger et al.: Das ist Mathematik 1. Wien: öbv Verlag 2011.

Reichel, Humenberger et al.: Das ist Mathematik 2. Wien: öbv Verlag 2011.

Reichel, Humenberger et al.: Das ist Mathematik 3. Wien: öbv Verlag 2013.

Reichel, Humenberger et al.: Das ist Mathematik 4. Wien: öbv Verlag 2010.

Achleitner, Klampfer et al.: Ganz klar Mathematik 1. Wien: Jugend&Volk Westermann 2019.

Achleitner, Klampfer et al.: Ganz klar Mathematik 2. Wien: Jugend&Volk Westermann 2013.

Achleitner, Klampfer et al.: Ganz klar Mathematik 3. Wien: Jugend&Volk Westermann 2014.

Achleitner, Klampfer et al.: Ganz klar Mathematik 4. Wien: Jugend&Volk Westermann 2017.

Salzger, Bachmann et al.: Mathematik verstehen 1. Wien: öbv Verlag 2015.

Salzger, Bachmann et al.: Mathematik verstehen 2. Wien: öbv Verlag 2015.

Salzger, Bachmann et al.: Mathematik verstehen 3. Wien: öbv Verlag 2016.

Salzger, Bachmann et al.: Mathematik verstehen 4. Wien: öbv Verlag 2017.

Malle, Koth et al.: Mathematik verstehen 5. Wien: öbv Verlag 2010.

Malle, Koth et al.: Mathematik verstehen 6. Wien: öbv Verlag 2010.

Malle, Koth et al.: Mathematik verstehen 7. Wien: öbv Verlag 2011.

Malle, Koth et al.: Mathematik verstehen 8. Wien: öbv Verlag 2012.

Götz, Reichel et al.: Mathematik 5. Wien: öbv Verlag 2010.

Götz, Reichel et al.: Mathematik 6. Wien: öbv Verlag 2010.

Götz, Reichel et al.: Mathematik 7. Wien: öbv Verlag 2011.

Götz, Reichel et al.: Mathematik 8. Wien: öbv Verlag 2013.

Freiler, Marsik et al.: Lösungswege Mathematik Oberstufe 5. Wien: öbv Verlag 2015.

Freiler, Marsik et al.: Lösungswege Mathematik Oberstufe 6. Wien: öbv Verlag 2016.

Freiler, Marsik et al.: Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. Wien: öbv Verlag 2016.

Freiler, Marsik et al.: Lösungswege Mathematik Oberstufe 8. Wien: öbv Verlag 2018.

Onlinequellen:

<https://www.schulbuchaktion.at/index2.html> (zuletzt gesehen am 24.1.2020)

https://www.schulbuchaktion.at/sba_downloads/sba2019/1000_1100_sbl2019.pdf (zuletzt gesehen am 24.1.2020)

Lehrplan AHS:

<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/10009600/SchUG%2c%20Fassung%20vom%2025.01.2020.pdf> (zuletzt gesehen am 24.1.2020)