



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

An die Grenzen gehen – die Bedeutung des Grenzwerts
in der Analysis und die Umsetzung im Schulunterricht

verfasst von / submitted by

Florian Höllwarth

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2019 / Vienna, 2019

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Geschichte,
Sozialkunde und Politische Bildung

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstaatliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am

Unterschrift

Danksagung

„Keine Schuld ist dringender als die, Dank zu sagen.“ (Marcus Tullius Cicero)

In erster Linie danke ich meinem Diplomarbeitsbetreuer Peter Raith. Dafür, dass Sie ohne Bedenken die Betreuung übernommen haben, ständig Verbesserungsvorschläge lieferten und oftmals Ihre wertvolle Zeit in mich investiert haben, damit die vorliegende Arbeit entstehen konnte. Ohne Sie wäre all das nicht möglich gewesen.

Besonderer Dank gebührt meiner „Studienehefrau“ Irena Reinwein, die mich nun mehrere Jahre auf diesem Weg begleitet hat. Wir haben gemeinsam viel durchlitten, zahlreiche Erfahrungen auf mehreren Ebenen gesammelt und so wie ich deinen, so hast du auch meinen Studienabschluss auf ähnliche Art und Weise miterlebt. Für all die Gespräche innerhalb des letzten Jahres, für alle aufbauenden Worte, für jede Hilfestellung – für all das und noch so viel mehr danke ich dir von ganzem Herzen.

Ebenso danke ich für ähnliche Dienste meiner Schwester Barbara Höllwarth. Auch du bist mir mit Rat und Tat immer unterstützend zur Seite gestanden. Es gibt wenige Menschen, denen ich mich so anvertrauen kann, wie dir. Danke für jedes Gespräch, für jede Nachricht, für all das, was mich immer wieder aufgebaut hat.

Liebe Barbara, liebe Irena, dass ich im letzten Jahr nicht aufgegeben habe, verdanke ich euch beiden auf besondere Art und Weise!

In diesem Zusammenhang möchte ich einer weiteren Person Dank aussprechen: meiner Mutter Eveline Höllwarth, der es stets wichtig war, dass ihre Kinder eine adäquate Ausbildung genießen dürfen. Aufgrund dessen konnte ich überhaupt erst Höheres in Form eines Studiums erfahren. Danke dafür und für die gesamte Unterstützung in meiner Ausbildung!

Ebenso gebühren Daniela Jarosz und Eva Jachs Dank für das Korrekturlesen der vorliegenden Diplomarbeit. Vielen Dank auch an alle Familienmitglieder, Kolleginnen und Kollegen und Freunde, die mich auf meinem gesamten Weg begleitet haben. Ihr alle habt mir geholfen, mich auf dieser Reise durchzusetzen, sie zu überstehen und schlussendlich auch zu beenden. Danke für alles!

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	5
2. Folgen und Grenzwerte.....	7
2.1 Grundlegende Definitionen.....	7
2.2 Sätze über konvergente Folgen.....	10
2.2.1 Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.....	10
2.2.2 Jede konvergente Folge ist beschränkt.....	11
2.2.3 Limesregeln für die Folgenarithmetik.....	12
2.2.4 Konvergenz von Cauchyfolgen.....	14
3. Grenzwerte in der Funktionsanalyse.....	20
3.1 Der Funktionsbegriff.....	20
3.2 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen.....	22
3.2.1 Definition des Grenzwerts und der Stetigkeit.....	23
3.2.2 Stetigkeit spezieller Funktionen.....	25
3.2.3 Zwischenwertsatz, Extremalsatz, Nullstellensatz.....	28

3.3 Der Differenzialquotient.....	31
3.3.1 Definitionen und grundlegende Ableitungsregeln.....	32
3.3.2 Die Ableitung spezieller Funktionen.....	37
3.3.3 Ableitungsregeln.....	42
3.4 Der Grenzwert in der Integralrechnung.....	47
3.4.1 Begrifflichkeiten und Grundlagen.....	47
3.4.2 Integrationsmethoden und das uneigentliche Integral.....	54
4. Der Grenzwert im Schulunterricht.....	59
4.1 Lehrplananalyse.....	59
4.1.1 Lehrplan der sechsten Klasse.....	59
4.1.2 Lehrplan der siebten Klasse.....	60
4.1.3 Lehrplan der achten Klasse.....	61
4.2 Grenzwerte in der sechsten Klasse.....	62
4.2.1 Einführung des Folgen- und des Grenzwertbegriffs.....	62
4.2.2 Sätze über Grenzwerte in Schulbüchern.....	68
4.3 Grenzwerte in der siebten Klasse.....	71
4.3.1 Einführung der Ableitungsfunktion.....	71
4.3.2 Beweise von Ableitungsregeln.....	75
4.3.2.1 Die Ableitung von Potenz- und Polynomfunktionen	75

4.3.2.2 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.....	78
4.3.2.3 Die Ableitungsregeln für spezielle Funktionen.....	83
4.4 Grenzwerte in der achten Klasse.....	85
4.4.1 Die Einführung der Integralrechnung.....	86
4.4.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.....	90
5. Resümee.....	94
6. Literaturverzeichnis.....	96
7. Abstract.....	99
7.1 Deutsch.....	99
7.2 Englisch.....	99

1. Einleitung

*„Man kann die eigenen Grenzen nur feststellen, indem man sie gelegentlich überschreitet.
Das gilt für jene, die man sich selbst setzt, ebenso wie für jene, die einem andere setzen.“*
(Josef Broukal)

Wir begegnen ihnen überall – Grenzen. Manche sind unsichtbar, andere wiederum haben eine feste Gestalt. Im Hinblick auf Gebiet und Territorium wird abgegrenzt. Teilweise durch Mauern, oder aber auch durch Zäune. Man grenzt hier nicht nur ein, man grenzt sogar aus. Auch im Hinblick auf Wissenschaft sind Grenzen vorhanden und mitunter auch nötig. Grenzziehung ist darüber hinaus eine menschliche Eigenschaft. Wir grenzen uns selbst ab, wenn es uns schlecht geht, wenn wir Bestimmtes ablehnen und um uns selbst zu definieren. Oftmals erreichen wir unsere eigenen Grenzen, weil wir nicht mehr leisten können, weil wir ab und zu auch einfach nicht weiter können und vor allem, weil es manchmal nicht weiter geht. Dennoch schaffen wir mehr, als wir uns vorstellen können und überschreiten Grenzziehungen.

Die vorliegende Diplomarbeit setzt sich mit dem Grenzwert in der Mathematik auseinander. In diesem Zusammenhang werden anfänglich die zentralen Begrifflichkeiten „Folge“ und „Grenzwert“ beschrieben und in weiterer Folge entscheidende Sätze über den Limes formuliert und bewiesen. Außerdem wird auf all die Gebiete der Analysis eingegangen, die sich durch die Anwendung des Grenzwerts ergeben. Konkret geht es in dieser Hinsicht um die Funktionsanalyse. Es wird gezeigt, dass die Stetigkeit, der Differentialquotient und die Integralrechnung spezielle Arten von Grenzwertbetrachtungen sind.

Da die vorliegende wissenschaftliche Arbeit das Lehramtsstudium beendet, setzt sie sich ebenso das Ziel, die Umsetzung des Grenzwerts in der Schule zu analysieren. Hierfür wird in erster Linie im Rahmen einer Lehrplanbetrachtung herausgearbeitet, in welchen Bereichen der Limes in der Schule Anwendung findet. In weiterer Folge wird mit Hilfe der drei Schulbücher „Thema Mathematik“, „Mathematik verstehen“ und „Lösungswege Mathematik Oberstufe“ ein Vergleich im Hinblick auf die einzelnen Einführungen, die entsprechenden Sätze und die vorhandenen Beweisführungen erzielt.

Da sich diese Diplomarbeit sowohl mit fachmathematischen, als auch mit schulmathematischen Inhalten auseinandersetzt, stellt sich folgende Forschungsfrage:

„Welche Bedeutung hat der Grenzwert in der Mathematik und inwiefern gestaltet sich die Umsetzung im Schulunterricht?“

Eben diese Fragestellung wird durch die Analyse der oben genannten Schulbücher und weiterer Fachwerke bearbeitet. Sämtliche in dieser Diplomarbeit vorhandene Grafiken entstanden durch das Computerprogramm „Geogebra“.

2. Folgen und Grenzwerte

2.1 Grundlegende Definitionen

Die vorliegende Diplomarbeit setzt sich das Ziel, den Grenzwert von Zahlenfolgen und seine Anwendung im Schulunterricht zu untersuchen. In diesem Zusammenhang scheint es anfänglich notwendig, die Begriffe „*Folge*“ und „*Grenzwert*“ zu definieren.

Definition 1: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen, d.h. jedem $n \in \mathbb{N}$ wird eine Zahl a_n zugeordnet.¹

Bei einer Folge handelt es sich demnach um eine eindeutige Zuordnung. Oftmals ist eben diese durch konkrete Bildungsgesetze gegeben. Ein Beispiel hierfür wäre die Folge $(a_n) = \frac{3n-2}{n+1}$. Durch das Einsetzen natürlicher Zahlen erhält man die einzelnen Glieder dieser Zahlenfolge:

Für $n = 1$ erhält man das erste Folgenglied $(a_1) = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1 + 1}$ und das liefert $\frac{1}{2}$.

Für $n = 2$ erhält man das zweite Folgenglied $(a_2) = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2 + 1}$ und das liefert $\frac{4}{3}$.

Für $n = 3$ erhält man das dritte Folgenglied $(a_3) = \frac{3 \cdot 3 - 2}{3 + 1}$ und das liefert $\frac{7}{4}$.

In diesem Zusammenhang spielt der Begriff der Monotonie eine zentrale Rolle. Man unterscheidet zwischen (streng) monoton steigend und fallend und definiert diese Eigenschaften wie folgt:

¹ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.23.

Definition 2: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt monoton steigend (fallend), falls $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} \leq a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, streng monoton steigend (fallend), falls $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, monoton, falls sie monoton steigend oder fallend ist, beschränkt (nach oben, unten), falls $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt (nach oben, unten) ist.²

Offensichtlich handelt es sich im obigen Beispiel um eine streng monoton wachsende Folge, da die einzelnen Folgenglieder stets größer werden. Aufgrund der Tatsache, dass die natürlichen Zahlen unbeschränkt sind, lassen sich unendlich viele Folgenglieder finden. Für $n = 100$ erhält man beispielsweise $(a_{100}) = \frac{298}{101}$. Für $n = 1\,000$ wiederum $(a_{1000}) = \frac{2998}{1001}$. Die Vermutung liegt demnach nahe, dass sich die Folge für wachsendes n immer mehr der Zahl 3 annähert, diesen Wert allerdings nicht übersteigen wird. Man spricht in diesem Zusammenhang davon, dass es sich hierbei um den Grenzwert handelt, dieser wird wie folgt definiert:

Definition 3: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Man sagt, die Folge konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Die Zahl a heißt dann Grenzwert (auch: Limes) der Folge.³

Heuser liefert in seiner Monographie ebenso eine Grenzwertdefinition.⁴ Vergleicht man diese beiden Begriffserklärungen, so sind sie im Hinblick auf ihren Inhalt sehr ähnlich, unterscheiden sie sich doch lediglich in ihren Notationen. Dies ist bei den meisten Definitionen des Grenzwertbegriffs gegeben, da sie alle im Wesentlichen gleich sind. Die beiden Formulierungen nutzen in diesem Zusammenhang zudem den Begriff „konvergent“. Einer Folge wird diese Eigenschaft zugesprochen, wenn sie einen Grenzwert besitzt. Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , so werden folgende Notationen verwendet: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ mit $n \rightarrow \infty$.⁵ Im Gegensatz zur konvergenten Folge heißt eine Zahlenfolge „divergent“, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.⁶

² Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011), S.72.

³ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.24.

⁴ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.144.

⁵ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.24.

⁶ vgl. Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011), S.73.

Eine Folge, die gegen Null konvergiert, wird als Nullfolge bezeichnet. In ihrem Werk „Mathematik für Physiker 1“ bieten Helmut Fischer und Helmut Kaul eine formale Definition. Sie geben an, dass eine Folge (a_n) Nullfolge heißt, wenn es zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Dann wird $a_n \rightarrow a$ durch $a_n - a$ ist eine Nullfolge definiert.⁷ Zu erwähnen ist an dieser Stelle, dass eben dieser Zugang zu einer äquivalenten Definition führt. Nullfolgen sind in der Mathematik dahingehend notwendig, da sie bei der Grenzwertberechnung anderer Zahlenfolgen behilflich sind.

Betrachtet man erneut die in dieser Arbeit angeführte Folge $(a_n) = \frac{3n-2}{n+1}$, so lässt sich ihr Grenzwert folgendermaßen berechnen: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$. Strebt n nun gegen Unendlich, so konvergieren $\frac{2}{n}$ und $\frac{1}{n}$ gegen 0, da es sich hierbei um Nullfolgen handelt, die bei wachsendem n gegen 0 streben. Für $n \rightarrow \infty$ folgt demnach $\frac{3-0}{1+0} = 3$. Daher ist 3 tatsächlich der Grenzwert der Folge $(a_n) = \frac{3n-2}{n+1}$.

Mit Hilfe der Grenzwertdefinition kann dieses Faktum nun folgendermaßen bewiesen werden:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N > \frac{5}{\varepsilon}$. Sei $n \geq N$, dann gilt

$$|a_n - a| = \left| \frac{3n-2}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n-2-3n+9}{n+1} \right| = \left| \frac{-5}{n+1} \right| = \frac{5}{n+1} \leq \frac{5}{N} < \varepsilon.$$

Schlussendlich spielen in diesem Zusammenhang noch zwei weitere Begriffe eine zentrale Rolle: das Infimum (inf) und das Supremum (sup). Ersteres meint die kleinste obere Schranke einer Menge, das Infimum hingegen ist die größte untere Schranke. Beide können dabei selbst Elemente der entsprechenden Menge sein.⁸ Oliver Deiser stützt sich im Hinblick auf eine Grenzwertdefinition monotoner und beschränkter Folgen auf eben diese beiden Begriffe. Hierbei wird zunächst für eine monoton wachsende beschränkte Folge der Grenzwert als das Supremum dieser Folge definiert, wie wir in Satz 1 beweisen werden.

⁷ vgl. Helmut Fischer, Helmut Kaul, Mathematik für Physiker 1. (Stuttgart 1990), S.34.

⁸ vgl. Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011), S.72.

2.2 Sätze über konvergente Folgen

Innerhalb dieses Kapitels sollen nun mehrere Eigenschaften von konvergenten Folgen bewiesen werden. So wird mitunter gezeigt, dass der Grenzwert eindeutig ist und entsprechende Folgen stets beschränkt sind. Darüber hinaus wird der Begriff Cauchyfolge definiert und gezeigt, dass es sich hierbei immer um konvergente Zahlenfolgen handelt. Außerdem werden die zentralen Grenzwertsätze bewiesen.

2.2.1 Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert

Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so stellt sich automatisch die Frage, ob dieser eindeutig ist oder ob gar weitere existieren. Diese Frage lässt sich durch folgenden Satz beantworten:

Satz 1: *Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Der folgende Beweis stammt von Oliver Deiser und ist in seinem Werk „*Analysis 1*“ zu finden.

Beweis: Angenommen die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt die beiden unterschiedlichen Grenzwerte a und b . Für $\varepsilon > 0$ existieren $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ und $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$. Nun sei $n_2 \geq n_0, n_1$, also beispielsweise das Maximum $\max(n_0, n_1)$ von n_0 und n_1 . Dann gilt für alle $n \geq n_2$, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Diese Aussage gilt vor allem für n_2 . Nach der Dreiecksungleichung gilt wiederum:

$$|a - b| = |a - a_{n_2} + a_{n_2} - b| \leq |a - a_{n_2}| + |a_{n_2} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aufgrund der Tatsache, dass $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $a = b$.⁹

□

⁹ vgl. Oliver Deiser, *Analysis 1*. (Berlin/Heidelberg 2011), S.73f.

2.2.2 Jede konvergente Folge ist beschränkt

Ein vorangegangenes Kapitel dieser Diplomarbeit beinhaltet das konkrete Beispiel der Folge $(a_n) = \frac{3n-2}{n+1}$. Es wurde gezeigt, dass der Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder mit wachsendem n immer kleiner wird und sich die Folge selbst immer mehr der Zahl 3 nähert. Es handelte sich hierbei anfänglich um eine Schranke, in weiterer Folge konnte man aufgrund der angeführten Grenzwertdefinition von Dieser sogar schlussfolgern, dass es sich dabei um den konkreten Grenzwert handelt. Allgemein gilt, dass jede konvergente Zahlenfolge beschränkt ist. Hofmaier und Lasser formulieren in diesem Zusammenhang folgenden Satz:

Satz 2: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, so ist die Menge $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.¹⁰

Anders formuliert bedeutet dies, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Der Beweis hierfür wird folgendermaßen geführt.

Beweis: Wenn $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dann folgt daraus die Existenz von $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ gilt, dass $|a_n - a| < 1$. Daher $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nun $|a_n| \leq M$ mit $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$.¹¹ □

Hofmaier und Lasser formulieren in diesem Zusammenhang einen weiteren relevanten Satz:

Satz 3: (1) Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen das Supremum von $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$, d. h.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$.¹²
(2) Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strebt gegen ihr Infimum.

¹⁰ Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.25.

¹¹ vgl. ebd., S.25.

¹² ebd., S.26.

Beweis: Es genügt (1) zu zeigen, da der Beweis (2) analog geführt werden kann.

Sei s das Supremum von $\{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ und $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \varepsilon$, da s sonst nicht die kleinste obere Schranke wäre. Mit $a_N \leq a_n \leq s$ folgt $|a_n - s| \leq s - a_N < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.¹³ $\square$

Betrachtet man nun ein letztes Mal das konkrete Folgenbeispiel $(a_n) = \frac{3n-2}{n+1}$, so wurde bereits festgestellt, dass sich für wachsendes n die Folge immer mehr der Zahl 3 nähert. Es handelt sich hierbei nicht nur um ihren Grenzwert, sondern auch um ihr Supremum. Bei der obigen Definition von Oliver Dieser handelt sich aber vielmehr um einen Satz, der zwar einen Spezialfall abdeckt, aber keine allgemein gültige Definition darstellt.

2.2.3 Limesregeln für die Folgenarithmetik

Gegeben seien zwei verschiedene Zahlenfolgen mit $(a_n) = \frac{4n-2}{2n}$ und $(b_n) = \frac{6n+8}{2n-1}$. Die Aufgabe besteht nun darin, folgende Berechnungen durchzuführen: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n).$$

Für $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ erhält man $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-2}{2n} + \frac{6n+8}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(4n-2)(2n-1) + 2n(6n+8)}{2n(2n-1)} \right) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20n^2 + 8n - 2}{4n^2 - 2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20 + \frac{8}{n} - \frac{2}{n^2}}{4 - \frac{2}{n}} \right).$$

Strebt n nun gegen Unendlich, so erhält man für

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5.$$

Betrachtet man anschließend $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$, so erhält man

¹³ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.26.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n-2}{2n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+8}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-\frac{2}{n}}{2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6+\frac{8}{n}}{2-\frac{1}{n}} \right)$. Strebt in diesem Fall n gegen Unendlich, so liefert dies $2 + 3 = 5$.

Offensichtlich gilt an dieser Stelle, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$. Diese Tatsache ist nicht nur bei der Addition feststellbar, sondern auch bei den restlichen Grundrechnungsarten. Verallgemeinert gilt:

Satz 4: Für zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ gilt:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n * b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n * \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a * b$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (c * a_n) = c * \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c * a$
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b$
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$ falls $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$ ¹⁴.

Beweise:

1) Für $\varepsilon > 0$ existieren $n_0 \leq n_1$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $n \geq n_1$ gilt, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dadurch gilt aber für alle $n \geq n_1$, dass $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.¹⁵

2) Innerhalb dieser Arbeit wurde bereits bewiesen, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert nun ein $M > 0$, sodass $|a_n| \leq M$. Nun sei $K := \max\{|b|, M\}$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt

¹⁴ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.93.

¹⁵ vgl. Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011), S.75.

$$|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < K \frac{\varepsilon}{2K} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.^{16}$$

3) Dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (c * a_n) = c * \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c * a$ folgt aus der bereits bewiesenen zweiten Behauptung. Betrachtet man die konstante Zahlenfolge $(c, c, c, \dots)$, so scheint ersichtlich, dass sie gegen den Grenzwert c strebt.¹⁷

4) Diese Behauptung lässt sich durch die erste und dritte begründen. Für den Faktor $c = -1$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (-b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = a - b.$ ¹⁸

5) Aufgrund der zweiten Behauptung reicht es hier, den Fall $a_n = 1$ zu betrachten. Für alle $n \geq n_0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|b| - |b_n| \leq |b - b_n| < \frac{|b|}{2}$. Daraus folgt, dass $\frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Zu zeigen bleibt an dieser Stelle noch, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$, sodass für alle $n \geq N$ $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} |b|^2$. Daraus folgt wiederum, dass

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n||b|} |b_n - b| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \frac{\varepsilon |b|^2}{2} = \varepsilon.^{19} \quad \square$$

2.2.4 Konvergenz von Cauchyfolgen

Wenn wir mithilfe der Definition des Grenzwerts die Konvergenz einer Folge beweisen wollen, müssen wir den Limes bereits kennen. Oftmals will man aber die Konvergenz einer Zahlenfolge beweisen, ohne den Kenntnis des konkreten Grenzwerts. Das nachfolgende Kapitel zeigt einen Zugang hierfür.

Innerhalb der Mathematik existiert die sogenannte Cauchyfolge, benannt nach Augustin Louis

¹⁶ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.27.

¹⁷ vgl. Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011), S.75.

¹⁸ vgl. ebd., S.75.

¹⁹ vgl. Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012), S.27.

Cauchy. Der französische Mathematiker lebte von 1789 bis 1857 und hat das Gebiet der Analysis nachhaltig geprägt. Bei solchen Zahlenfolgen wird die Differenz von Folgengliedern für große Indizes beliebig klein.²⁰

Für die formale Definition der Cauchyfolge stützt sich Harro Heuser auf eine laut ihm höchst bemerkenswerte Verdichtungseigenschaft, die bei konvergenten Folgen gegeben sei. Er argumentiert damit, dass für $a_n \rightarrow a$ nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ein N existiert, sodass für $n > N$ stets $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ bleibt. Sind demnach die beiden Indizes m und n beide größer als N , so ist $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Dies meint, dass die späten Glieder einer konvergenten Folge beliebig dicht beieinander liegen.²¹ Heuser definiert daraufhin eine derart „verdichtete“ Folge als Cauchyfolge.

Definition 4: Die Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so daß für alle $m, n > N$ stets $|a_m - a_n| < \varepsilon$ gilt.²²

Aufgrund der obigen Einleitung erhalten wir folgendes Resultat:

Satz 5: Falls (x_n) eine konvergente Folge ist, dann ist (x_n) eine Cauchyfolge.²³

Umgekehrt gilt, dass falls (x_n) eine Cauchyfolge ist, dann konvergiert (x_n) . Um auch dies beweisen zu können, ist in erster Linie allerdings der nachfolgende Satz nötig, den Otto Forster in drei Teilen beweist. Hierfür benutzen wir die Bezeichnung $\text{diam}(I)$ für die Länge eines Intervalls I .²⁴

Satz 6: Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.²⁵

²⁰ vgl. Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger, Hellmuth Stachel, Mathematik. (Berlin/Heidelberg 2015), S.184.

²¹ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.156.

²² vgl. ebd., S.156.

²³ vgl. ebd., S.157.

²⁴ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.49f.

²⁵ vgl. ebd., S.49.

Beweis:

a) Aufgrund der Tatsache, dass die Folge beschränkt ist, existieren die Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Demnach ist die gesamte Folge im Intervall $[A; B] := \{x \in \mathbb{R} : A \leq x \leq B\}$ enthalten. Durch vollständige Induktion folgt nun die Konstruktion einer Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k \subseteq \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ mit den nachfolgenden Eigenschaften:

i) In I_k sind unendlich viele Glieder der Folge (a_n) enthalten.

ii) $I_k \subseteq I_{k-1}$ für $k \geq 1$.

iii) $\text{diam}(I_k) = 2^{-k+1} \text{diam}(I_1)$.

Im Hinblick auf den Induktionsanfang wird das Intervall $I_1 := [A; B]$ gewählt. Nun folgt der Induktionsschritt $k \rightarrow k+1$. Das Intervall $I_k = [A_k; B_k]$ mit den obigen drei Eigenschaften sei bereits konstruiert worden. $M := \frac{A_k + B_k}{2}$ sei die Mitte des Intervalls. Aufgrund der Tatsache, dass in I_k unendlich viele Glieder der Folge enthalten sind, muss nun mindestens eines der beiden Teilintervalle $[A_k; M]$ und $[M; B_k]$ unendlich viele Folgenglieder enthalten. Man setzt nun $I_{k+1} := [A_k; M]$, wenn in diesem Intervall unendlich viele Glieder liegen, ansonsten $I_{k+1} := [M; B_k]$. Das Intervall I_{k+1} besitzt ebenfalls die Eigenschaften i) bis iii).

b) Nun wird induktiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ definiert. Im Induktionsanfang wird $n_1 := 1$ gesetzt, sodass $a_{n_1} = a_1$, anschließend folgt der Induktionsschritt $k \rightarrow k+1$. Aufgrund der Tatsache, dass im Intervall I_{k+1} unendlich viele Glieder der Folge (a_n) enthalten sind, existiert ein $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

c) Schlussendlich wollen wir zeigen, dass die Teilfolge (a_{n_k}) konvergent ist. Wegen der Konstruktion der Intervalle I_k ist die Folge der linken Randpunkte (A_{n_k}) monoton steigend und durch A und B beschränkt. Auf Satz 1 folgt, dass (A_{n_k}) konvergent ist. Setze $a = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k}$. Sei $\varepsilon > 0$, weil $\lim_{r \rightarrow \infty} 2^{-r+1} \text{diam}(I_1) = 0$ können wir ein N wählen, sodass für $k \geq N$ sowohl $A_{n_k} > a - \varepsilon$ als auch $\text{diam}(I_{n_k}) < \varepsilon$ gelten. Sei jetzt $k \geq N$, dann ist $a - \varepsilon < A_{n_k} \leq a_{n_k}$ und $a_{n_k} \leq A_{n_k} + \text{diam}(I_{n_k}) < a + \varepsilon$. Somit ist $a - \varepsilon < a_{n_k} < a + \varepsilon$, also $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. Es ist damit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ und deshalb ist (a_{n_k}) konvergent. $\square$

Kommt man nun zur ursprünglichen Behauptung zurück, dass falls (a_n) eine Cauchyfolge ist, dann konvergiert (a_n) , so setzt sich Harro Heuser in seinem Werk „Lehrbuch der Analysis Teil 1“ mit einer entsprechenden Herleitung auseinander.

Satz 7: Wenn (a_n) eine reelle Cauchyfolge ist, dann konvergiert (a_n) in $\mathbb{R}$.

Beweis: Ist (a_n) eine Cauchy-Folge, so besteht die Aufgabe darin zu zeigen, dass sie einen Grenzwert besitzt. Für $\varepsilon = 1$ existiert ein n_0 , sodass für $m, n > n_0$ stets folgt, dass $|a_m - a_n| < 1$. Weil $||a_m| - |a_n|| \leq |a_m - a_n|$ folgt $||a_m| - |a_n|| < 1$. Entspricht der Index von n nun $N := n_0 + 1$, so gilt für $m > n_0$ stets $|a_m| < 1 + |a_N|$. Dadurch wiederum ist dann aber für alle n $|a_n| \leq \max(|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a_N|)$. Daraus folgt, dass die Folge (a_n) beschränkt sein muss. Es existiert nun nach Satz 6 zumindest eine Teilfolge (a_{n_k}) für (a_n) , die gegen einen Grenzwert a strebt. Dafür wird für ein $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n > N$. Wir wählen jetzt k so groß, dass sowohl $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ als auch $n_k > N$. Sei $n > N$. Dann ist $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sodass auch (a_n) gegen a streben muss.²⁶ □

In weiterer Folge werden in diesem Zusammenhang nun zwei konkrete Beispiele beleuchtet. Als erste Aufgabenstellung betrachten wir $x_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Für $m \geq n \geq 1$ ist $|x_n - x_m| = \sum_{k=n+1}^{k_1} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{k_1} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Durch Anwendung der geometrischen Reihe folgt $|x_n - x_m| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Sei $\varepsilon \geq 0$. Wähle $N \geq 1$ so, dass $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Seien $n, m \geq N$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $m \geq n \geq 1$ gilt. Dann ist $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Damit ist (x_n) eine Cauchyfolge und nach Satz 7 konvergiert (x_n) . Diesen Grenzwert definiert man als e .

²⁶ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.157.

Definition 5: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.²⁷

Als zweites Beispiel setze $x_1 := 1$ und für $n > 1$ setze $x_n := \frac{57}{13+2x_{n-1}}$. Zuerst beweisen wir durch Induktion, dass $x_n \in [1; 4]$ für alle n gilt. Für $n = 1$ ist $x_1 = 1 \in [1; 4]$. Jetzt sei $n > 1$. Dann ist $x_{n-1} \in [1; 4]$ und daher $15 \leq 13 + 2x_{n-1} \leq 21$. Deshalb ist $\frac{57}{21} \leq \frac{57}{13+2x_{n-1}} \leq \frac{57}{15}$, also $x_n \in [1; 4]$.

Jetzt zeigen wir, dass $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{4} |x_n - x_{n-1}|$. Es ist $|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{57}{13+2x_n} - \frac{57}{13+2x_{n-1}} \right|$
 $= \left| \frac{57((13+2x_{n-1}) - (13+2x_n))}{(13+2x_n)(13+2x_{n-1})} \right| = \frac{114 |x_n - x_{n-1}|}{(13+2x_n)(13+2x_{n-1})} \leq \frac{114}{225} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{3}{4} |x_n - x_{n-1}|$.

Nun zeigen wir durch Induktion, dass $|x_{n+1} - x_n| \leq 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ für alle n gilt. Für $n = 1$ ist $|x_2 - x_1| = \left| \frac{57}{15} - 1 \right| = \frac{42}{15} \leq 3 = 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^1$. Sei $n > 1$. Dann ist $|x_n - x_{n-1}| \leq 4 \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Damit gilt $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{4} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{3}{4} * 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Sei $m \geq n$. Dann ist

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leq 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} + 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^{m-2} + \dots + 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Verwenden wir die geometrische Reihe, so ergibt sich

$$|x_m - x_n| \leq 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^n * \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 16 * \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N so, dass $16 * \left(\frac{3}{4}\right)^N < \varepsilon$. Jetzt sei $n, m \geq N$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \geq n$ annehmen. Dann ist

$$|x_n - x_m| \leq 16 * \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 16 * \left(\frac{3}{4}\right)^N < \varepsilon,$$

also ist (x_n) eine Cauchyfolge. Wegen Satz 7 konvergiert (x_n) . Setze $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dann gilt nach Satz 4, dass $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{57}{13+2x_{n-1}} = \frac{57}{13+2x}$. Also ist $2x^2 + 13x - 57 = 0$ und diese Gleichung liefert die Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -9,5$. Da $-9,5$ allerdings nicht im Intervall $[1; 4]$ liegt, muss $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ gelten.

²⁷ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.172.

Für dieses Beispiel war nötig zu wissen, dass (x_n) konvergiert. Etwa für $x_1 = 6$ und $x_n = 16 - x_{n-1}$ würde das nicht funktionieren, weil hier $x_n = \begin{cases} 6, & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ 10, & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$ und daher (x_n) nicht konvergiert. Würde man hier zuvor $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ setzen, so wäre $x = 16 - x$, also $x = 8$ und das wiederum eine falsche Aussage.

3. Grenzwerte in der Funktionsanalyse

Da sich diese Diplomarbeit mit den Anwendungen des Grenzwerts in der Mathematik auseinandersetzt, scheint die Beleuchtung eines Gebiets unausweichlich – die Funktionsanalyse. Kein anderes Gebiet ist in solch einem Ausmaß von Grenzwertberechnungen abhängig wie dieses. Der Differentialquotient, die Stetigkeit, uneigentliche Integrale, aber auch der Hauptsatz der Differential- und der Integralrechnung – all diese und noch viele weitere Beispiele ergeben sich durch Limesberechnungen. Harro Heuser verrät bereits im Vorwort seines Werks *„Lehrbuch der Analysis Teil 1“* die Reichweite dieses Werkzeugs, denn *„als das mächtige und unverzichtbare Hilfsmittel für jede in die Tiefe dringende Untersuchung solcher Fragen wird sich der Begriff des Grenzwerts in seinen vielfältigen Formen und Abwandlungen erweisen. Er ist das Herzstück und der Kraftquell der Analysis und wird ab dem Kapitel III gleichsam der ewig jugendliche Held des analytischen Dramas sein.“*²⁸ In den nachfolgenden Kapiteln der vorliegenden Diplomarbeit werden eben all jene Bereiche der Funktionsanalyse beleuchtet, die auf Limesberechnungen beruhen.

3.1 Der Funktionsbegriff

Der Differenzen- und der Differentialquotient, die Ableitungsfunktion, die Stetigkeit und das uneigentliche Integral – diese und noch viele weitere Begrifflichkeiten und Eigenschaften sind in Bezug auf die Analyse einer Funktion zu nennen. Um eben all diese Bereiche, die sich durch Grenzwertberechnungen ergeben, beleuchten zu können, bedarf es in erster Linie einer Definition des Funktionsbegriffs. Betrachtet man all jene Begriffserklärungen, die in den gängigen wissenschaftlichen Werken zu finden sind, so sind unterschiedliche Formulierungen auffällig. Im Rahmen dieser Arbeit werden drei verschiedene Definitionen analysiert und im Hinblick auf Gleichheiten und Unterschiede verglichen.

²⁸ Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. (Wiesbaden 2009), S.5.

Hans-Jürgen Dobner und Bernd Engelmann bieten in ihrer Monographie „*Analysis 1. Grundlagen der Differenzialrechnung*“ folgende Funktionsdefinition.

Definition 6: Wird jeder reellen Zahl x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Zahl y einer Menge $W \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig zugeordnet, so spricht man von einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen bzw. kurz von einer Funktion in Abhängigkeit von x und bezeichnet dies mit: $f: D \rightarrow W$ bzw. $y = f(x)$. Die Variable x wird als Argument oder unabhängige Variable und D als Definitionsbereich der Funktion bzw. y als Funktionswert oder abhängige Variable und W als Wertebereich der Funktion bezeichnet.²⁹

Es handelt sich hierbei um die gängigste Möglichkeit, den Begriff der Funktion zu definieren. Die entsprechende Bedingung, dass es sich um eine eindeutige Zuordnung handelt, wird anfänglich festgehalten. Auftretende Begriffe wie Argument, Funktionswert und Definitionsmenge werden einerseits näher beleuchtet und andererseits mit entsprechenden Synonymen gleichgesetzt.

Auch in „*Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*“ von Kurt Meyberg und Peter Vachenauer ist eine Definition der Funktion zu finden. Sie werden durch den Graphen (die Kurve) $y = f(x)$ veranschaulicht, er (sie) besteht aus denjenigen Punkten (x, y) – einer mit kartesischen (x, y) – Koordinaten versehenen Ebene – mit $x \in D$ und $y = f(x)$.³⁰

Betrachtet man diese Definition des Funktionsbegriffs, so unterscheidet er sich von den beiden vorherigen deutlich. Obgleich auch hier von einer Zuordnung gesprochen wird, wird dennoch die geometrische Bedeutung einer Funktion hervorgehoben. Dieses Faktum fehlt bei den anderen Begriffserklärungen, dafür fehlt bei dieser über weite Strecken die Beschreibung all jener Größen, die im Rahmen dieser Definition auftreten.

²⁹ Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, *Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung*. (München 2007), S.87.

³⁰ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, *Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.58.

Meyberg und Vachenauer beschreiben in weiterer Folge zudem verschiedene Möglichkeiten, durch die Funktionen gegeben sein können. In diesem Zusammenhang sprechen sie unter anderem von Tabellen, die beispielsweise bei Versuchsreihen auftreten. Eine Funktion kann allerdings auch durch eine verbale Vorschrift in Form eines Textes gegeben sein. Die wohl gängigste Form ist allerdings eine konkrete Funktionsgleichung. Als Beispiel wird hierfür die Funktion $f(x) = x^2$ genannt. Meyberg und Vachenauer sprechen zuletzt auch noch von Graphen, sodass hier erneut der geometrische Bezug deutlich wird, der bereits bei der Definition des Funktionsbegriffs angesprochen wurde.³¹

Wie bereits bei all den Definitionen einer Zahlenfolge im Rahmen dieser Diplomarbeit, wird auch bei jenen Erklärungen des Funktionsbegriffs eines deutlich: Sie unterscheiden sich zumeist lediglich in ihren Formulierungen. Die drei Beispiele, die hier angeführt wurden, haben eines gemein, denn sie sprechen allesamt die wesentliche Eigenschaft der Funktion an. Es handelt sich hierbei um eine eindeutige Zuordnung. Während in der ersten und in der zweiten Definition zudem sämtliche auftretende Größen beschrieben werden, wird bei der dritten Begriffserklärung der geometrische Aspekt angesprochen. Zudem wird hier aufgezeigt, in welchen Formen Funktionen angegeben werden können.

3.2 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Funktionen weisen zahlreiche Eigenschaften auf, die vor allem durch ihre Graphen deutlich werden. Betrachtet man beispielsweise Winkelfunktionen, so ist in erster Linie ihre Periodizität wahrnehmbar. Eine Polynomfunktion ungeraden Grades besitzt stets eine Wendestelle, da ihr Graph zumindest einmal sein Krümmungsverhalten ändert.

Im Hinblick auf die natürliche Exponentialfunktion wäre in diesem Zusammenhang das asymptotische Verhalten bezüglich der x-Achse zu nennen. Eben diese drei Funktionen weisen eine Gemeinsamkeit auf: Sie sind auf ihren gesamten Definitionsbereich stetig. Die nachfolgenden Kapitel der vorliegenden Diplomarbeit setzen sich mit ebendieser Eigenschaft

³¹ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.58.

auseinander. Anfänglich wird eine Definition des Grenzwerts einer Funktion und der Stetigkeit gegeben und anschließend werden entsprechende Sätze über stetige Funktionen formuliert und bewiesen.

3.2.1 Definition des Grenzwerts und der Stetigkeit

Der Grenzwert ist jenes Werkzeug in der Mathematik, das vor allem in der Funktionsanalyse in zahlreichen Gebieten Anwendung findet. So existieren ebenso Funktionsgrenzwerte, wobei sich diese als Antwort auf die Frage „nach dem Verhalten der Funktionswerte $f(x)$, wenn sich x mit $x \neq a$ der Stelle $x = a$ annähert“³² ergeben. Meyberg und Vachenaue unterscheiden in diesem Zusammenhang zwischen linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert und definieren diese Begrifflichkeiten folgendermaßen.

Definition 7: Sei I ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat $f(x)$ für x gegen a den rechtsseitigen Grenzwert (bzw. linksseitigen Grenzwert) c , in Zeichen $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c$), wenn für jede Zahlenfolge $(x_n)_{n \geq 0}$ aus I mit $x_n \rightarrow a$ und $a < x_n$ für alle n (bzw. $x_n \rightarrow a$ und $x_n < a$ für alle n) die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n \geq 0}$ gegen c strebt. $f(x)$ hat für x gegen a den Grenzwert c , in Zeichen $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, wenn gilt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c$.³³

Vor allem im Hinblick auf die Stetigkeit spielt der Funktionsgrenzwert eine zentrale Rolle. In der gängigen Fachliteratur folgt der Begriffserklärung einer reellen Funktion für gewöhnlich jene für die Stetigkeit. Betrachtet man beispielsweise die nachfolgende Definition, so wird die Daseinsberechtigung der Stetigkeit innerhalb dieser Diplomarbeit deutlich, da auch sie über den Grenzwert funktioniert.

³² vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenaue, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelber/New York 2001), S.103.

³³ vgl. ebd., S.103.

Definition 8: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Man nennt eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ stetig, wenn bei der Annäherung $x \rightarrow x_0$ die Funktionswerte $f(x)$ gegen $f(x_0)$ streben. Also f in x_0 stetig: $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Für $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man f stetig, falls f stetig für alle $x \in (a; b)$ und $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$ und $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$.³⁴

Die Möglichkeit, dass eine Funktion an einer Stelle stetig ist, impliziert natürlich auch den Fall, dass ein Graph an einer bestimmten Stelle auch unstetig sein kann. Heuser gibt an, dass dies bedeute, dass es eine gegen x_0 strebende Folge (x_n) aus I gibt, für die $(f(x_n))$ entweder überhaupt nicht oder gegen einen Wert $\neq f(x_0)$ konvergiert.³⁵

Die obige Begriffserklärung der Stetigkeit wird auch von Harro Heuser in dieser Form gegeben. Dennoch existiert eine weitere Definition, die ebenso in der gängigen Fachliteratur zu finden ist und prinzipiell in der Analysis häufiger verwendet wird. Sie ist auch Teil von Heusers Monographie „*Lehrbuch der Analysis Teil 1*“ und lautet wie folgt:

Definition 9: Eine auf X definierte Funktion f ist genau dann in x_0 stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, so dass für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ immer $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ausfällt.³⁶

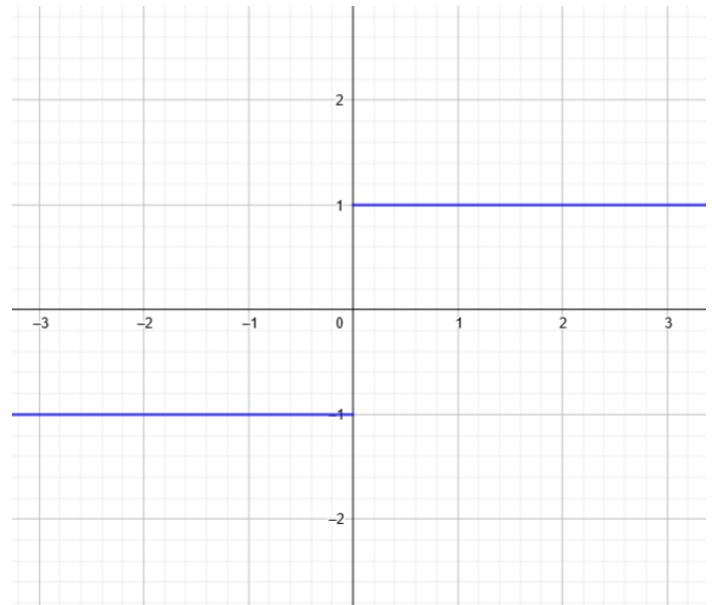
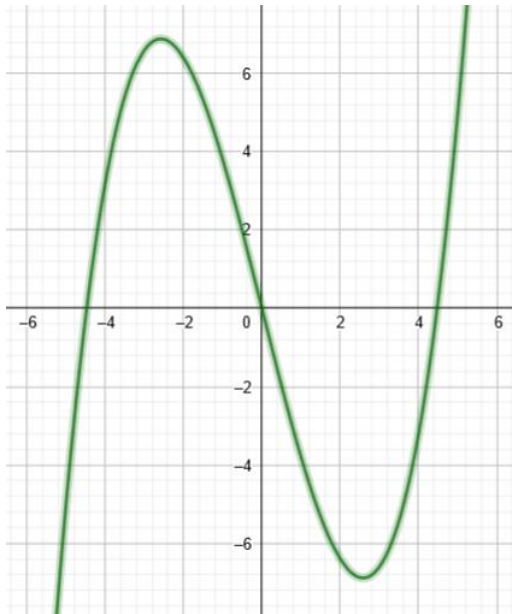
Hans-Jürgen Dobner und Bernd Engelmann liefern in ihrem Werk „*Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung*“ neben den bereits bekannten Definitionen der Stetigkeit auch eine graphische Interpretation. Sie geben zum Besten, dass die Gleichheit des Grenzwerts und des Funktionswerts bedeute, dass der Graph der Funktion an der entsprechenden Stelle einen ununterbrochenen Verlauf aufweist. Diese Aussage ist vereinfacht, da es bei der Funktion $f(x) = x * \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ schwierig ist, an der Stelle $x = 0$ von einem ununterbrochenen Verlauf zu sprechen. Im Vergleich dazu zeige sich Unstetigkeit in Form von Unterbrechungen oder

³⁴ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.106.

³⁵ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.213.

³⁶ vgl. ebd., S.215.

Unendlichkeitsstellen.³⁷ Nachfolgend sind zwei unterschiedliche Funktionen dargestellt. Die linke Abbildung zeigt die Polynomfunktion $f(x) = 0,2x^3 - 4x$, die auf ihren gesamten Definitionsbereich stetig ist. In der rechten Abbildung hingegen ist der Graph der Funktion $g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ dargestellt, die an der Stelle $x = 0$ unstetig ist. Dies lässt sich dadurch begründen, da beispielsweise $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt, $f\left(\frac{1}{n}\right)$ hingegen nicht gegen $f(0)$.³⁸



Wurde in der Einleitung dieses Abschnitts angemerkt, dass die natürliche Exponentialfunktion, Winkelfunktionen und auch Polynomfunktionen auf ihren gesamten Definitionsbereich stetig seien, so soll dieses Faktum im nachfolgenden Kapitel dieser Arbeit bewiesen werden.

3.2.2 Stetigkeit spezieller Funktionen

Innerhalb des nachfolgenden Kapitels wird nun mitunter beleuchtet, welche Arten von

³⁷ vgl. Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung. (München 2007), S.101.

³⁸ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.213.

Funktionen stetig sind. Es enthält Beweise für verschiedene Funktionstypen, aber auch für algebraische Verknüpfungen und der Komposition zweier Funktionen.

Harro Heuser gibt in seiner Monographie an, dass beispielsweise Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, rationale Funktionen, die Logarithmusfunktion und Potenzfunktionen ausnahmslos an jeder Stelle stetig seien.³⁹ Entsprechende Beweise liefert er für diese Behauptung allerdings nicht. Meyberg und Vachenauer gehen in ihrer Monographie zumindest auf eine Herleitung für Potenz- und Polynomfunktionen ein.

Beweis: Hierfür argumentieren sie, dass die lineare Funktion $f(x) = x$ offensichtlich auf den gesamten Definitionsbereich stetig ist. Demnach sind auch $f^2(x) = x^2, \dots, g^n(x) = x^n$ und daher $a_0 + a_1f + \dots + a_nf^n$ stetig.⁴⁰ $\square$

Otto Forster liefert in seiner Monographie einen entsprechenden Beweis für die Stetigkeit der Exponentialfunktion, die er prinzipiell mit $\exp(x)$ beschreibt. Hierfür ist jedoch noch folgender Satz nötig:

Satz 8: $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.⁴¹

Beweis: Forster arbeitet in seiner Ausführung mit der sogenannten Restgliedabschätzung, auf die er in seinem Werk „Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen“ auf den Seiten 76 und 77 genauer Bezug nimmt.⁴² Für die Herleitung des oben genannten Satzes geht Forster darauf ein, dass die Restgliedabschätzung für $N = 0$ $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$ für $|x| \leq 1$ liefert. Sei (x_n) eine beliebige Folge und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Dann gilt $|x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$ und

³⁹ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.212.

⁴⁰ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.108.

⁴¹ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.100.

⁴² vgl. ebd., S.76f.

demnach $|\exp(x_n) - 1| \leq 2|x_n|$ für $n \geq n_0$. Daraus folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} |\exp(x_n) - 1| = 0$ und daher wiederum $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x_n) = 1$, was zu beweisen war.⁴³ $\square$

Durch diese Erkenntnis lässt sich nun in weiterer Folge die Stetigkeit der Exponentialfunktion herleiten.

Beweis: Hierfür sei $a \in \mathbb{R}$ und die Aufgabe liegt darin, $\lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \exp(a)$ zu zeigen. Die Herleitung selbst funktioniert über eine beliebige Folge (x_n) , deren Grenzwert a und demnach $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0$ ist. Forster gibt nun an, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$ und demnach folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = 1$. Aufgrund der Funktionalgleichung ergibt sich daraus, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(a) \exp(x_n - a)) = \exp(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = \exp(a)$, was zu zeigen war.⁴⁴ $\square$

Obgleich Heuser keine Beweise für die obige Behauptung in Bezug auf stetige Funktionen liefert, geht er in seinem Werk genauer auf die Stetigkeit bei algebraischen Verknüpfungen ein und formuliert diese wie folgt:

Satz 9: Sind die Funktionen f und g auf X definiert und in x_0 stetig, so sind auch die (auf X erklärten) Funktionen $f + g$, $f - g$, αf und $f g$ in x_0 stetig. Gilt außerdem, dass $g(x_0) \neq 0$, so ist die auf $\{x \in X: g(x) \neq 0\}$ definierte Funktion $\frac{f}{g}$ ebenfalls in x_0 stetig.⁴⁵

Beweis: Auch hier funktionieren die entsprechenden Beweise über eine Zahlenfolge (x_n) mit $x_n \in X$ und dem Grenzwert a . Um den obigen Satz herzuleiten, ist laut Definition folgendes zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \pm g)(x_n) = (f \pm g)(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha f)(x_n) = (\alpha f)(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f g)(x_n) = (f g)(a)$$

beziehungsweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$. Entsprechend der Voraussetzungen sind

⁴³ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.100f.

⁴⁴ vgl. ebd., S.102.

⁴⁵ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.214.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$.⁴⁶ Die Behauptungen selbst ergeben sich demnach aus den Limesregeln für die Folgenarithmetik, die im Rahmen dieser Diplomarbeit allerdings schon bewiesen wurden und daher an dieser Stelle darauf verzichtet wird. $\square$

Stattdessen wird nun konkret auf die Stetigkeit der Komposition stetiger Funktionen eingegangen.

Satz 10: Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Die Funktion f sei in $a \in D$ und g in $b := f(a) \in E$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ in a stetig.⁴⁷

Beweis: Otto Forster verwendet für die Herleitung erneut eine Folge (x_n) die gegen den Grenzwert a konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von f in a gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Entsprechend der Voraussetzung ist $y_n := f(x_n) \in E$ und $\lim y_n = b$. Wegen der Stetigkeit von g in b folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b)$. Demnach folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$, womit die Behauptung bewiesen wäre.⁴⁸ $\square$

3.2.3 Zwischenwertsatz, Extremalsatz, Nullstellensatz

Durch die Stetigkeit selbst lassen sich nun drei entscheidende Sätze in Bezug auf die Funktionsanalyse definieren und beweisen: der Zwischenwertsatz, der Nullstellensatz und der Satz vom Minimum und Maximum.

⁴⁶ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.103.

⁴⁷ ebd., S.103.

⁴⁸ vgl. ebd., S.104.

Nullstellensatz: Ist $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a; b]$ stetig und gilt $f(a)f(b) < 0$, d.h. für die Funktionswerte in den Randpunkten liegt ein Vorzeichenwechsel vor, so gibt es im Inneren von $[a; b]$ mindestens eine Nullstelle der Funktion.⁴⁹

Beweis: Die folgende Herleitung ist eine Variante des Beweises von Heuser.⁵⁰ □

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ und $I_1 := [A_1; B_1]$. Mittels Induktion konstruieren wir ein Intervall $I_k = [A_k; B_k]$ mit $f(A_k) \leq 0$, $f(B_k) \geq 0$ und $\text{diam}(I_k) = 2^{-k+1} \text{diam}(I_1)$. Für $k > 1$ setzt man $M = \frac{A_{k-1} + B_{k-1}}{2}$. Falls $f(A_{k-1}) \leq 0$ und $f(M) \geq 0$, setze $A_k := A_{k-1}$ und $B_k := M$. Sonst ist $f(M) \leq 0$ und $f(B_{k-1}) \geq 0$ und man setze $A_k := M$ und $B_k := B_{k-1}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle N so, dass $2^{-N+1} \text{diam}(I_1) < \varepsilon$. Weil für $n, m \geq N$ stets $A_n, A_m, B_n, B_m \in I_k$ ist $|A_n - A_m| \leq 2^{-N+1} \text{diam}(I_1) < \varepsilon$ und

$|B_n - B_m| \leq 2^{-N+1} \text{diam}(I_1) < \varepsilon$, also sind (A_n) und (B_n) Cauchyfolgen. Wegen Satz 7 konvergiert (A_n) . Setze $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein N , sodass für $n \geq N$ gilt, dass $|A_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\text{diam}(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daher ist

$|B_n - x_0| \leq |B_n - A_n| + |A_n - x_0| \leq \text{diam}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = x_0$. Wegen der Stetigkeit ist $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) \leq 0$ und $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(B_n) \geq 0$, also $f(x_0) = 0$. □

Aus den Erkenntnissen des Nullstellensatzes folgt der Zwischenwertsatz, da für die Herleitung von diesem laut Harro Heuser der Nullstellensatz notwendig ist.

Zwischenwertsatz: Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetig, so wird jeder Wert zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ für ein $x \in [a; b]$ als Funktionswert angenommen.⁵¹

⁴⁹ Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung. (München 2007), S.103.

⁵⁰ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.223.

⁵¹ Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung. (München 2007), S.103.

Beweis: Im Rahmen der Beweisführung geht Harro Heuser auf drei verschiedene Fälle ein: Für $f(a) = f(b)$ ist nichts zu beweisen. Für $f(a) < f(b)$ wird hingegen ein beliebiger Punkt η aus $(f(a); f(b))$ angenommen. Die Behauptung folgt anschließend ohne Umstände aus der Anwendung des Nullstellensatzes auf die Funktion $g(x) := f(x) - \eta$. Und der dritte Fall des Beweises entspricht der Annahme, dass $f(a) > f(b)$. Hier verfährt man auf gleiche Art und Weise.⁵² $\square$

Aus der Stetigkeit folgen allerdings nicht nur der Nullstellensatz und der Zwischenwertsatz, sondern auch der Satz vom Maximum und Minimum, der auch unter dem Namen Extremalsatz bekannt ist und beispielsweise von Heuser in dieser Art und Weise bezeichnet wird.

Extremalsatz: Eine auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a; b]$ definierte stetige reelle Funktion $f: [a; b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr globales Minimum und Maximum an. Das heißt, es gibt eine globale Minimumstelle $x_1 \in [a; b]$ und eine globale Maximumstelle $x_2 \in [a; b]$, so dass für alle $x \in [a; b]$ gilt $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.⁵³

In der gängigen Literatur findet man stets die Herleitung für den Fall des Maximums. Für das Minimum funktioniert die Herleitung auf analoge Art und Weise.

Beweis: Innerhalb der Beweisführung wird damit argumentiert, dass die Funktion beschränkt ist. Angenommen, die Funktion sei nach oben unbeschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in [a; b]$ und $f(x_n) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Tatsache, dass die Folge wegen der Voraussetzung $x_n \in [a; b]$ beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $\bar{x} \in [a; b]$. Da die Funktion stetig ist, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$. Dies ist allerdings ein Widerspruch im Hinblick auf $f(x_{n_k}) > n_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Demnach ist die Funktion folglich nach oben beschränkt. In weiterer Folge ist die Existenz eines globalen Maximums zu zeigen. Da die Menge $\{f(x) : x \in [a; b]\} \subseteq \mathbb{R}$ entsprechend der vorherigen Überlegung beschränkt ist, besitzt sie das Supremum $\sup_{x \in [a; b]} f(x) =: s$. Daher existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a; b]$

⁵² vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.223.

⁵³ Michael Merz, Mario V. Wüthrich, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen. (München 2012), S.426.

mit $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s$, wobei für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$. Es gilt erneut, dass die beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert mit $\bar{x} \in [a; b]$ bezeichnet werden kann. Auch in diesem Fall folgt aus der Stetigkeit von f , dass $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$, was wiederum $f(\bar{x}) = s$ impliziert. Das bedeutet, dass $\bar{x} \in [a; b]$ die globale Maximumstelle und s das globale Maximum von f ist.⁵⁴ $\square$

Eben diese drei Sätze ebnen einen Weg, um Funktionen auf bestimmte Art und Weise untersuchen zu können. Allerdings existiert eine andere Methode, die das Ermitteln von weitaus mehr Funktionseigenschaften zulässt – die Differentialrechnung, die in den nachfolgenden Kapiteln der vorliegenden Diplomarbeit beleuchtet wird. Hierbei wird anfänglich auf verschiedene Definitionen und Begrifflichkeiten eingegangen und anschließend werden grundlegende Ableitungsregeln hergeleitet. Darüber hinaus wird der Fokus schließlich auf die Ableitung von speziellen Funktionen gelegt.

3.3 Der Differentialquotient

In einem vorangegangenen Kapitel dieser Arbeit wurde der Funktionsbegriff näher beleuchtet und herausgearbeitet, dass es sich hierbei um eine eindeutige Zuordnung handelt. Die Begriffserklärung von Meyberg und Vachenauer stellt zudem einen Zusammenhang zur Geometrie dar, denn Funktionen können durch Graphen visualisiert werden. Diese wiederum besitzen zahlreiche Eigenschaften wie Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. In der siebten Klasse werden Kurven im Hinblick auf all diese Besonderheiten analysiert. Ausgehend davon stellt man die Frage nach der momentanen Änderung beziehungsweise der konkreten Steigung einer Funktion an einer bestimmten Stelle. In den nächsten Kapiteln dieser Arbeit werden Funktionen und Grenzwerte miteinander verbunden. Ausgehend vom Differenzenquotient wird durch eine Limesberechnung der Differentialquotient eingeführt, der der eben angesprochenen Steigung entspricht. In diesem Zusammenhang wird die Ableitungsfunktion eingeführt, die jeder Stelle die entsprechende Tangentensteigung zuordnet. Außerdem werden spezielle

⁵⁴ vgl. Michael Merz, Mario V. Wüthrich, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen. (München 2012), S.426.

Regeln, durch die Funktionen differenziert werden können, in einem weiteren Kapitel formuliert und bewiesen.

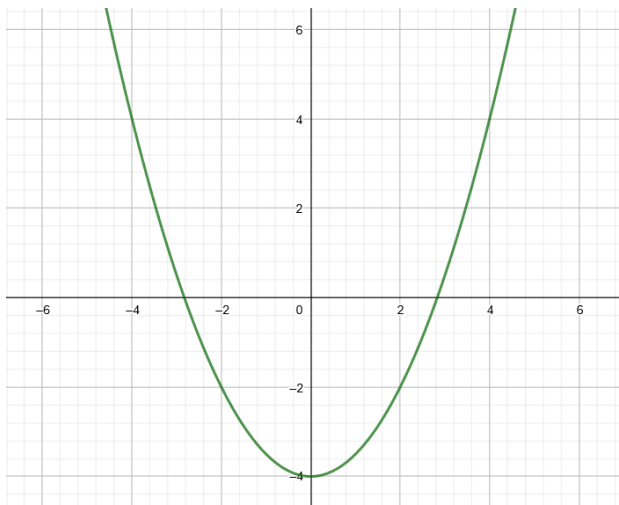
3.3.1 Definitionen und grundlegende Ableitungsregeln

Auf den nachfolgenden Seiten dieser Diplomarbeit wird der Differentialquotient beleuchtet. Beginnend mit der Frage nach der momentanen Änderung einer Funktion an einer konkreten Stelle wird gezeigt, dass der Differenzenquotient eine erste Annäherung dafür liefert. Anschließend wird durch einen Grenzübergang der Differentialquotient eingeführt. Darüber hinaus werden unterschiedliche Schreibweisen und Notationen angesprochen und schlussendlich elementare Ableitungsregeln bewiesen.

Kurt Meyberg und Peter Vachenauer formulieren die unterschiedlichen Arten der Monotonie einer Funktion wie folgt.

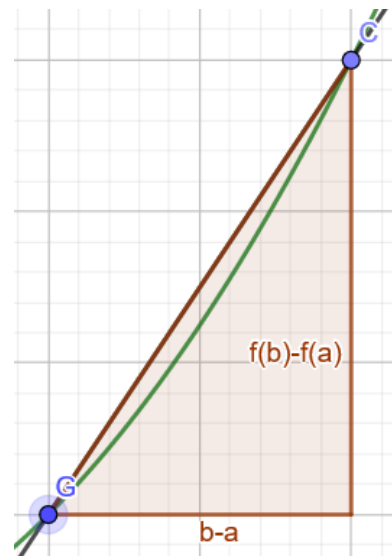
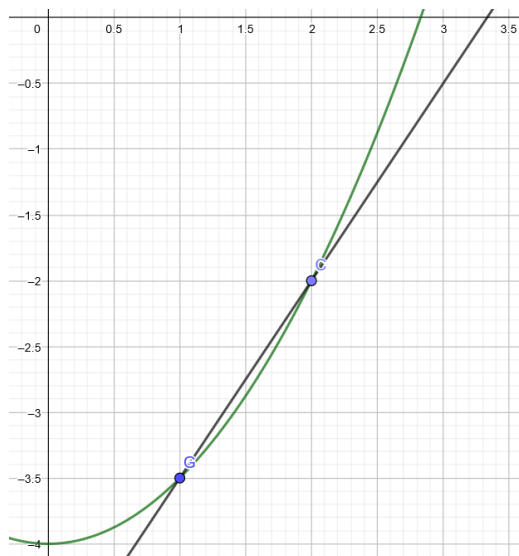
Definition 10: Man nennt eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(D \subseteq \mathbb{R})$
a) monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_2 > x_1$ die Ungleichung $f(x_2) \geq f(x_1)$ (bzw. $f(x_2) \leq f(x_1)$) gilt.
b) streng (oder strikt, echt) monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_2 > x_1$ die strikte Ungleichung $f(x_2) > f(x_1)$ (bzw. $f(x_2) < f(x_1)$) gilt.⁵⁵

⁵⁵ Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.60.



Betrachtet man in diesem Zusammenhang beispielsweise den nebenstehenden Graphen der Funktion $f(x) = 0,5x^2 - 4$, so lässt sich durch die obige Definition ihre Monotonie bestimmen. Auf dem Intervall $(-\infty; 0]$ ist sie beispielsweise streng monoton fallend, auf $[0; \infty)$ hingegen streng monoton steigend. An der Stelle $x = 0$ befindet sich ein lokales Minimum, an dem sich die Monotonie der Funktion ändert.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach der momentanen Änderung. Eine passende Fragestellung lautet beispielsweise, wie stark der Graph an einer bestimmten Stelle steigt. Um dies beantworten zu können, bedarf es einer Geraden, da die Steigung dieser wohl bekannt ist. Durch diese Antwort selbst stieß man allerdings in der Vergangenheit an mathematische Grenzen, aufgrund der Tatsache, dass es sich um eine lineare Funktion in einem Punkt handelt, das Aufstellen einer Geradengleichung allerdings zwei Punkte erfordert. Eine erste Annäherung wäre demnach eine Sekante, die durch zwei Punkte verläuft, wie in der linken Abbildung gezeigt wird.



Die Steigung dieser Sekante kann durch ein Steigungsdreieck berechnet werden, dieses ist in der rechten Abbildung dargestellt. Für diese Sekantensteigung gilt $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dieser

Quotient wird als Differenzenquotient bezeichnet und in der gängigen Fachliteratur wie folgt definiert.

Definition 11: Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ entspricht der Steigung der Sekante des Funktionsgraphen durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$.⁵⁶

Der Differenzenquotient liefert allerdings nur eine Annäherung für die Steigung der Funktion an der Stelle $x = 1$. Gesucht war jedoch die konkrete Steigung. Die Überlegung ist nun, den zweiten Punkt der Sekante dem ersten anzunähern. Dadurch erhält man eine weitere Gerade. Man kann allerdings stets bessere Annäherungen finden, wenn der zweite Punkt immer mehr in Richtung des ersten strebt. Demnach wird der Abstand der beiden Punkte unendlich klein, sodass die betreffende Gerade einer Grenzgeraden entspricht. Deren Steigung ergibt sich als Limesberechnung des Differenzenquotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, wobei b gegen a strebt. Der Abstand zwischen den beiden Stellen wird demnach unendlich klein und mit Δx bezeichnet. Der Grenzwert wird in diesem Zusammenhang als Differentialquotient bezeichnet. Dieser wird in der gängigen Fachliteratur wie folgt definiert.

Definition 12: Der Differentialquotient geht aus dem Differenzenquotienten dadurch hervor, daß man Δx gegen Null gehen läßt: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.⁵⁷

Eben dieser Grenzwert ebnet den Weg in ein essentielles Gebiet der Mathematik: der Differentialrechnung, denn „die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert.“⁵⁸ Auffällig scheinen in diesem Zusammenhang die unterschiedlichen Schreibweisen für den Differentialquotienten. Diese werden ebenfalls in der Definition von Harro Heuser verwendet. Er gibt zusätzlich an, dass der Grenzübergang für $x \rightarrow x_0$ und für $h \rightarrow 0$ derselbe sei. Dies lässt sich darin begründen, dass die

⁵⁶ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.155.

⁵⁷ May-Britt Kallenrode, Rechenmethoden der Physik. Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik. (Berlin/Heidelberg/New York 2003), S.37.

⁵⁸ Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung. (München 2007), S.137.

erste Notation beschreibt, dass sich die Grenzen einander nähern und die zweite demnach aussagt, dass der entsprechende Abstand dazwischen gegen Null strebt.⁵⁹ Diesen Grenzwert nennt man Ableitung.

Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ lässt sich durch den Differentialquotienten ohne Probleme finden, da

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x.$$

Ein ähnlicher Zugang wäre für die Ableitungsfunktion von $g(x) = x^3$ möglich, denn $g'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}$. Die Anwendung der Regel von Horner liefert in diesem Zusammenhang

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x_0 \rightarrow x} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x^2.$$

Für höhere Potenzfunktionen wird die Berechnung der Ableitung mithilfe des Differentialquotienten allerdings zunehmend komplizierter. Daher soll nun die Ableitungsregel für Potenzfunktionen bewiesen werden, denn diese besagt, dass für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ $f'(x) = n * x^{n-1}$ gilt.⁶⁰

Beweis: Die Herleitung dieser elementaren Rechenregel funktioniert durch die binomische Formel, denn $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1})$. Strebt h nun gegen Null, so bleibt lediglich der erste Summand in der Klammer übrig, sodass $f'(x) = n * x^{n-1}$.⁶¹ □

Demnach lässt sich durch diese Rechenregel jegliche Potenzfunktion differenzieren.

Ebenso essentiell für das Ableiten von Funktionen sind die Summen- und die Differenzenregel, die von Harro Heuser in „*Lehrbuch der Analysis Teil 1*“ formuliert und bewiesen werden. In diesem Zusammenhang gilt für zwei auf das Intervall I definierte und

⁵⁹ Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. (Wiesbaden 2009), S.261.

⁶⁰ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, *Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.112.

⁶¹ vgl. ebd., S.112.

in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktionen f und g , dass $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ beziehungsweise $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.⁶²

Beweis: Heuser führt den Beweis mithilfe des Differentialquotienten, denn

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(f - g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - g(x)] - [f(x_0) - g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) - g'(x_0).\end{aligned}$$

□

Betrachtet man in diesem Zusammenhang die Summenregel, so ist sie auch für mehrere Summanden gültig. Der Beweis funktioniert auf dieselbe Art und Weise mit mehr als zwei Summanden.

Kombiniert man die Potenz- und die Summenregel miteinander, so erhält man das Werkzeug, um auch Polynomfunktionen differenzieren zu können. Meyberg und Vachenaucher formulieren darüber hinaus eine entsprechende Ableitungsregel. Sie erläutern, dass für $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ die Ableitungsfunktion durch $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$ gegeben ist. Als Beweis verweisen sie erneut auf die Herleitungen der Potenz- und Summenregel.⁶⁴ So folgt beispielsweise für $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 9x + 12$, dass ihre Ableitung durch die Funktionsgleichung $f'(x) = 20x^3 - 21x^2 + 16x - 9$ gegeben ist.

⁶² vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.270.

⁶³ vgl. ebd., S.270.

⁶⁴ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenaucher, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.115.

3.3.2 Die Ableitung spezieller Funktionen

Im vorangegangenen Kapitel dieser Arbeit wurde einerseits der Differentialquotient einer reellen Funktion beleuchtet und andererseits die Summen- und die Potenzregel hergeleitet, durch deren Kombination auch Polynomfunktionen abgeleitet werden können. Innerhalb der Mathematik existiert allerdings eine Vielzahl an Funktionen. Zu nennen wären in diesem Zusammenhang die natürliche und die allgemeine Exponentialfunktion oder auch die Winkelfunktionen. Der Fokus dieses Kapitels wird nun auf entsprechende Ableitungsregeln gelegt, durch die auch diese speziellen Funktionen abgeleitet werden können.

Obgleich erst im nächsten Kapitel dieser Arbeit essentielle Ableitungsregeln beleuchtet werden, ist allerdings schon in diesem Abschnitt die Ableitung der Umkehrfunktion von Nöten. Es handelt sich in diesem Zusammenhang um eine Abbildung $f^{-1}: D' \rightarrow D$, die durch die Eigenschaft $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$ definiert ist.⁶⁵ Für den nachfolgenden Beweis ist die Kenntnis der Kettenregel erforderlich. Es handelt sich hierbei um den Satz über die Kettenregel aus dem nachfolgenden Kapitel dieser Arbeit.

Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion: Sei X ein offenes Intervall und sei $f: X \rightarrow K$ injektiv und in a differenzierbar. Ferner sei $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ in $b := f(a)$ stetig. Dann ist f^{-1} genau dann in b differenzierbar, wenn $f'(a)$ von Null verschieden ist. In diesem Fall gilt:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad b = f(a).^{66}$$

Eben diese Formulierung stammt von Herbert Amann und Joachim Escher, die ebenfalls die nachfolgende Beweisführung in ihrer Monographie liefern. Die Herleitung selbst funktioniert in beide Richtungen.

⁶⁵ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.177.

⁶⁶ vgl. Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006), S.322.

Beweis: „ $\rightarrow$ “ Durch die Voraussetzungen innerhalb des Satzes wird die Identität $f^{-1} \circ f = id_x$ impliziert. Daraus folgt aufgrund der Kettenregel, dass $1 = (id_x)'(a) = (f^{-1})'(f(a))f'(a)$. Aus diesem Ausdruck wird die Behauptung abgelesen.

„ $\leftarrow$ “ Es existiert eine Folge (x_k) in $X \setminus \{a\}$ mit $\lim x_k = a$. Aus der Stetigkeit der Funktion f folgt $\lim f(x_k) = f(a)$. Zudem ist f injektiv, woraus folgt, dass $f(x_k) \neq f(a)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Nun sei (y_k) eine Folge in Y mit $y_k \neq b$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\lim y_k = b$. Wird an dieser Stelle $x_k := f^{-1}(y_k)$ gesetzt, so gelten sowohl $x_k \neq a$, als auch $\lim x_k = a$, da f^{-1} in b stetig ist. Da $f'(a) = \lim_k \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} \neq 0$, existiert ein K mit $0 \neq \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a} = \frac{y_k - b}{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(b)}$ für $k \geq K$. Dies liefert für den Differenzenquotienten von f^{-1} die Beziehung

$$\frac{f^{-1}(y_k) - f^{-1}(b)}{y_k - b} = \frac{x_k - a}{f(x_k) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a}} \text{ für } k \geq K. \text{ Die Behauptung erfolgt schlussendlich}$$

durch einen Grenzübergang.⁶⁷

□

Im Hinblick auf Modellierungsprozesse scheint die Exponentialfunktion essentiell. Durch exponentielles Wachstum und Zerfall können zahlreiche Aufgabenstellungen mit Realitätsbezug berechnet werden. Stellt sich im Rahmen dieser Beispiele die Frage nach der Geschwindigkeit zu einem konkreten Zeitpunkt, so ist die Exponentialfunktion dementsprechend abzuleiten.

Satz über die Ableitung der Exponentialfunktion: Die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion stimmt mit derselben überein: $(e^x)' = e^x$.⁶⁸

Die wesentlichen Ideen für eben diese Herleitung finden sich in Heusers Monographie.⁶⁹ Dabei liefert er keine eigene Herleitung für die Ableitungsfunktion der natürlichen Exponentialfunktion, sondern schlussfolgert diese aus dem Beweis für die Ableitung von $f(x) = a^x$.

⁶⁷ vgl. Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006), S.322f.

⁶⁸ Klaus Dürrschnabel, Mathematik für Ingenieure. Eine Einführung mit Anwendungs- und Alltagsbeispielen. (Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2004), S.285.

⁶⁹ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.170f.

Beweis: In diesem Zusammenhang wird angeführt, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.⁷⁰ Für die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ gilt schließlich $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$. Dementsprechend folgt für die natürliche Exponentialfunktion, dass $(e^x)' = e^x * \ln e = e^x$.⁷¹ $\square$

Im Rahmen dieser Arbeit wurden nun zwei unterschiedliche Herleitungsmethoden für die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion beleuchtet. Anfänglich jene von Dürrschnabel, der den Beweis mithilfe der Umkehrfunktion führt und der Beweis von Heuser, der eine entsprechende Ableitungsregel aus der für die allgemeine Exponentialfunktion schlussfolgert. Beide Herleitungen sind an dieser Stelle zu kritisieren. Obgleich die komplette Beweisführung von Dürrschnabel korrekt ist, scheint das Differenzieren der Logarithmusfunktion fraglich, da ein entsprechender Beweis für diese Regel wiederum fehlt. Auf der anderen Seite ist bei Heuser keine konkrete Herleitung vorhanden, da die Ableitungsregel selbst nur aus einer anderen Erkenntnis folgt.

Für den Beweis der Ableitungsregel von der Exponentialfunktion arbeitet Klaus Dürrschnabel mit ihrer Umkehrfunktion, ohne eine entsprechende Ableitung dieser herzuleiten. Umgekehrt gilt in zahlreichen Fachwerken dasselbe: in diesen wird für die Beweisführung der Ableitungsfunktion der Logarithmusfunktion ihre Umkehrfunktion e^x verwendet. So leitet Guido Walz beispielsweise die entsprechende Ableitungsregel folgendermaßen her.

Beweis: Da der natürliche Logarithmus die Umkehrung der Exponentialfunktion $f(y) = e^y$ ist und deren Ableitung bekannt ist, gilt $(\ln x)' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.⁷² $\square$

Der Beweis selbst ist gültig und nachvollziehbar, da eine entsprechende Regel für die Exponentialfunktion bereits bewiesen wurde. Bei Dürrschnabel war dies allerdings nicht der Fall, sodass die Kritik an dieser Stelle berechtigt ist.

⁷⁰ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.235.

⁷¹ vgl. ebd., S.274.

⁷² vgl. Guido Walz, Mathematik für Fachhochschule, duale Hochschule und Berufsakademie. Mit ausführlichen Erläuterungen und zahlreichen Beispielen. (Heidelberg 2011), S.269.

Neben der Exponentialfunktion stellen auch die Sinusfunktion und die Cosinusfunktion spezielle Funktionen dar, deren Ableitungen in diesem Kapitel näher beleuchtet werden. Innerhalb der entsprechenden Beweise für die Ableitungsregeln von Sinus und Cosinus, die von Harro Heuser in „Lehrbuch der Analysis Teil 1“ gegeben sind, spielt das Additionstheorem eine entscheidende Rolle.

Satz 11: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dass $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ und

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.^{73}$$

Für die folgende Ausführung über die Ableitung der Winkelfunktionen ist die nachstehende Tatsache relevant:

Satz 12: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.^{74}$

Beweis: Die nachfolgende Beweisidee wird von Heuser kurz angedeutet, allerdings wird dort schlussendlich ein anderer Zugang gewählt.⁷⁵ Für den Beweis selbst wird die nebenstehende

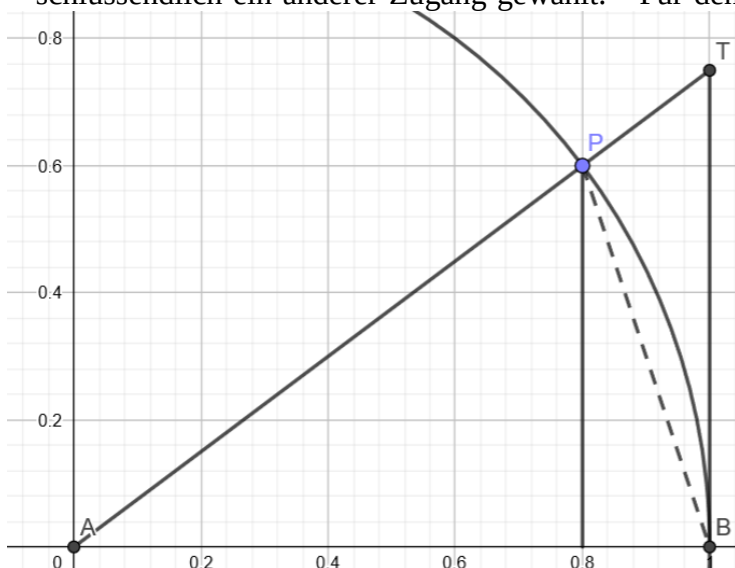


Abbildung betrachtet. Die Fläche des Dreiecks ABP entspricht $\frac{1}{2} \sin x$. Diese Fläche ist kleinergleich der Fläche des entsprechenden Kreissegments, also $\frac{1}{2} x$. Letztere ist kleinergleich der Fläche des Dreiecks ABT, also $\frac{1}{2} \tan x = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x}$. Somit ist $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$. Dividiert man den linken Teil durch x , so ergibt sich

$\frac{\sin x}{x} \leq 1$. Wenn wir den rechten Teil durch x dividieren und mit $\cos x$ multiplizieren, erhalten wir $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$. Insgesamt ist also $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$. Für $x \rightarrow 0$ konvergiert $\cos x \rightarrow 1$ und

⁷³ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.77.

⁷⁴ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.275.

⁷⁵ vgl. ebd., S.274f.

daher muss $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ sein. □

Mit dieser Erkenntnis lassen sich nun die Ableitungen der Winkelfunktionen herleiten, entsprechende Regeln werden wie folgt definiert.

Satz über die Ableitung der Kreisfunktionen: Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Es gilt

a) $\sin' x = \cos x$

b) $\cos' x = -\sin x$.⁷⁶

Beweis: Heuser erörtert, dass für $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ aus diesen Theoremen folgen muss, dass einerseits $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ und andererseits $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ gilt.⁷⁷ Aufgrund dessen gelten wiederum

$$\sin x = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{ und}$$

$$\sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Subtrahiert man an dieser Stelle eben diese beiden Gleichungen, so liefert dies

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Einen ähnlichen Zusammenhang erhält man für den Cosinus, wobei hier dann $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ gelten muss. Bildet man nun die einzelnen Differentialquotienten, so liefert das für den Sinus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow \cos x$$

und für den Cosinus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \rightarrow -\sin x$$

Dementsprechend gilt $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$.⁷⁸ □

⁷⁶ Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.116.

⁷⁷ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.275.

⁷⁸ vgl. ebd., S.275f.

Die Erkenntnisse dieses Kapitels haben gezeigt, dass spezielle Funktionen ebenso Ableitungsfunktionen besitzen und durch Differenzieren ermittelt werden können. So gilt beispielsweise für $f(x) = \ln x$, dass ihre Ableitung durch die Gleichung $f'(x) = \frac{1}{x}$ gegeben ist. Möchte man hingegen die Ableitung der Funktion $g(x) = \ln(3x^2 - 4x + 5)$ bestimmen, ist die Kenntnis einer entscheidenden Regel von Nöten: der Kettenregel. Diese und weitere Ableitungsregeln werden auf den nächsten Seiten der vorliegenden Diplomarbeit beleuchtet.

3.3.3 Ableitungsregeln

Innerhalb des nachfolgenden Kapitels werden verschiedene Beispiele behandelt, innerhalb derer die Ableitungsfunktionen ermittelt werden sollen. Es wird gezeigt, dass die bisherigen Erkenntnisse der Differentialrechnung nicht ausreichen, um diese zu lösen. In weiterer Folge werden hierfür nötige Ableitungsregeln formuliert und bewiesen und schlussendlich die entsprechenden Ableitungen berechnet.

Betrachtet man anfänglich die Funktionen $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ und $g(x) = 6x^2 - 5x + 8$, so lassen sich deren Ableitungsfunktionen durch Kombination der Summen- und Potenzregel aus einem vorangegangenen Kapitel bestimmen. Demnach ist $f'(x) = 6x - 4$ und $g'(x) = 12x - 5$. Die Ableitung einer Polynomfunktion zu finden ist demnach mit geringem Aufwand verbunden. Nun stellt sich jedoch die Frage, inwieweit die Ableitungsfunktion für das Produkt der Funktionen $(f * g)(x)$ oder ihren Quotienten $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ mit $x \neq 0$ ermittelt werden kann.

Im obigen Beispiel handelt es sich wie bereits erwähnt um Polynomfunktionen. Multipliziert man diese aus, so erhält man erneut eine Funktion dieser Art. Demnach gilt $f(x) * g(x) = (3x^2 - 4x + 5) * (6x^2 - 5x + 8) = 18x^4 - 38x^3 + 74x^2 - 57x + 40$. Die Ableitungsfunktion selbst wird anschließend durch Differenzieren ermittelt: $f'(x) = 72x^3 - 117x^2 + 148x - 57$. Wäre hingegen die Funktion f beispielsweise gegeben durch $f(x) = e^x$, so würde dies für $f(x) * g(x) = e^x * (6x^2 - 5x + 8)$ nicht mehr funktionieren. Ein derartiger Zugang wäre für den Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 4x + 5}{6x^2 - 5x + 8}$ ebenso wenig

umsetzbar. Hierfür bedarf es spezieller Ableitungsregeln: der Produkt- und der Quotientenregel, die in weiterer Folge definiert und bewiesen werden.

In ihrem Werk „*Analysis 1*“ setzen sich Herbert Amann und Joachim Escher mit eben diesen beiden Regeln auseinander. So formulieren die Autoren die Produktregel beispielsweise folgendermaßen:

Satz über die Produktregel: *Es seien $f, g: X \rightarrow K$ zwei in x_0 differenzierbare Funktionen. Dann ist auch der Ausdruck $f * g$ differenzierbar, und es gilt:*
 $(f * g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)$.⁷⁹

Unabhängig davon, in welchem Fachwerk man den Beweis für diese Regel nachschlägt, so sind die entsprechenden Herleitungen allesamt sehr ähnlich: sie alle funktionieren über den Differentialquotienten. Otto Forster liefert in seiner Monographie „*Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*“ die nachfolgende Beweisführung.

Beweis: Aufgrund des Differentialquotienten folgt aus
 $(f * g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$. Dies wiederum kann zu folgendem Ausdruck umgeschrieben werden: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))g(x)\}$.
Daraus folgt $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x)$. Strebt h nun gegen 0, so liefert das $f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, was der Produktregel entspricht.⁸⁰ □

Betrachtet man nun erneut das eingangsgestellte Beispiel mit $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ und $g(x) = 6x^2 - 5x + 8$, so ließe sich die Ableitungsfunktion $(f * g)'(x) = 72x^3 - 117x^2 + 148x - 57$ durch Ausmultiplizieren und Differenzieren finden. Verwendet man an dieser Stelle nun die Produktregel, so erhält man $(f * g)'(x) = (6x - 4) * (6x^2 - 5x + 8) + (3x^2 - 4x + 5) * (12x - 5) = 72x^3 - 117x^2 + 148x - 57$. Die Ableitungen stimmen somit überein, die Produktregel ist

⁷⁹ vgl. Herbert Amann, Joachim Escher, *Analysis 1*. (Basel 2006), S.321.

⁸⁰ vgl. Otto Forster, *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. (Wiesbaden 2011), S.161.

gültig, dennoch liefert reines Ausmultiplizieren und anschließendes Ableiten ein schnelleres Ergebnis. Für die bereits erwähnte Aufgabenstellung mit den Funktionsgleichungen $f(x) = e^x$ und $g(x) = 6x^2 - 5x + 8$ hingegen scheint die Anwendung der Produktregel unausweichlich. In diesem Zusammenhang gilt:

$$(f * g)'(x) = e^x * (6x^2 - 5x + 8) + e^x * (12x - 5) = (6x^2 + 7x + 3) * e^x.$$

Um $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 4x + 5}{6x^2 - 5x + 8}$ ableiten zu können, ist nach wie vor die Kenntnis der Quotientenregel notwendig. Diese wird beispielsweise von Amann und Escher wie folgt formuliert.

Satz über die Quotientenregel: Es seien $f, g: X \rightarrow K$ zwei in x_0 differenzierbare Funktionen und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch der Ausdruck f / g in x_0 differenzierbar und es gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.⁸¹

Einen entsprechenden Beweis liefert Harro Heuser in seiner Monographie „Lehrbuch der Analysis 1“ Auch hier wird mit der Definition des Differentialquotienten gearbeitet.

Beweis: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]$. Strebt x nun gegen x_0 , so liefert das $\frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, womit die Quotientenregel bewiesen wäre.⁸² $\square$

Demnach kann nun schlussendlich mithilfe der Quotientenregel die Ableitungsfunktion $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$ für die Funktionen $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ und $g(x) = 6x^2 - 5x + 8$ berechnet werden und das liefert $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(6x-4)(6x^2-5x+8) - (3x^2-4x+5)(12x-5)}{(6x^2-5x+8)^2} = \frac{9x^2-12x-7}{(6x^2-5x+8)^2}$.

Neben der Produkt- und der Quotientenregel existieren weitere essentielle Ableitungsregeln. Ein Beispiel hierfür wäre die Kettenregel, die es ermöglicht, eine Verkettung von Funktionen differenzieren zu können. Betrachtet man die Funktionsgleichung $f(x) = e^{3x^2 - 5x + 8}$, so stellt der Exponent $3x^2 - 5x + 8$ selbst eine quadratische Funktion dar. Mit jenen Ableitungsregeln,

⁸¹ vgl. Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006), S.321.

⁸² vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.271.

die im Rahmen dieser Diplomarbeit beleuchtet wurden, lässt sich die Funktion f nicht ableiten. Stattdessen wäre die Kenntnis der Kettenregel vonnöten. Für den entsprechenden Beweis geben Amann und Escher noch folgenden Satz an, der in der Herleitung Anwendung finden wird:

Satz 13: Für $f: X \rightarrow E$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist in a differenzierbar.

(ii) Es gibt ein $m_a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - m_a(x-a)}{x-a} = 0$.

(iii) Es gibt ein $m_a \in \mathbb{R}$ und eine in a stetige Funktion $r: X \rightarrow E$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = f(a) + m_a(x-a) + r(x)(x-a)$, $x \in X$.

In den Fällen (ii) und (iii) gilt: $m(a) = f'(a)$.⁸³

Beweis: Um dieses Theorem zu beweisen, wird $m_a := f'(a)$ gesetzt. In diesem Fall sei die Implikation (i) $\rightarrow$ (ii) klar. Für (ii) $\rightarrow$ (iii) ist folgende Definition zielführend

$$r(x) := \begin{cases} 0, & x = a \\ \frac{f(x) - f(a) - m_a(x-a)}{x-a}, & x \neq a \end{cases}, \text{ denn } r \text{ ist in } a \text{ stetig.}$$

Ebenso ergibt sich die Richtung (iii) $\rightarrow$ (i) von selbst.⁸⁴

□

Satz über die Kettenregel: Die Komposition $x \rightarrow f(g(x))$ zweier differenzierbarer Funktionen ist ebenfalls differenzierbar und es gilt $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$.⁸⁵

Beweis: Laut dem obigen Theorem gibt es eine in a stetige Funktion $r: X \rightarrow K$ mit $r(a) = 0$ und $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$ mit $x \in X$. Zudem existiert eine in $b := f(a)$ stetige Funktion $s: Y \rightarrow E$ mit $s(b) = 0$ und $g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + s(y)(y-b)$ für $y \in Y$. Es sei an dieser Stelle $x \in X$ und $y := f(x)$, dann folgt aus dem obigen Theorem, dass $(g \circ f)(x) = g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a))$

⁸³ Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006), S.317f.

⁸⁴ vgl. ebd., S.318.

⁸⁵ Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.116.

$= (g \circ f)(a) + g'(f(a))f'(a)(x - a) + t(x)(x - a)$, wobei für $x \in X$ gilt, dass $t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$ und $t: X \rightarrow E$ in a stetig ist. Demnach gilt $t(a) = g'(f(a))r(a) + s(b)(f'(a) + r(a)) = 0$. Die Behauptung der Kettenregel ergibt sich wiederum aus dem Theorem.⁸⁶ $\square$

Betrachtet man erneut das anfänglich eingeführte Beispiel $f(x) = e^{3x^2-5x+8}$, so lässt sich nun an dieser Stelle die Ableitung dieser Funktion durch die Kettenregel bestimmen. Im Hinblick auf $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$ gilt in dieser Aufgabenstellung, dass $g(x) = e^{3x^2-5x+8}$ und $f(x) = 3x^2 - 5x + 8$. Anwenden der Kettenregel liefert demnach $f'(x) = e^{3x^2-5x+8} * (6x - 5)$.

Bereits im vorangegangenen Kapitel dieser Diplomarbeit wurde die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion beleuchtet, um die Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion herleiten zu können. An dieser Stelle ist lediglich zu ergänzen, dass die Ableitung der Umkehrfunktion zwar nach wie vor im Lehrplan der siebten Klasse zu finden, aber nur noch sehr selten im Unterricht gelehrt wird. Dies liegt an der standardisierten Reifeprüfung, in der bestimmte Inhalte nicht mehr geprüft werden. Beispiele hierfür sind sämtliche Ableitungsregeln in diesem Kapitel. Dennoch besitzt vor allem die Ableitung der Umkehrfunktion in dieser Arbeit ihre Daseinsberechtigung, da sich durch diese andere Ableitungsregeln ergeben. Und eben diese Funktionen sind definitiv im Schulunterricht zu finden, da sie durchaus im Rahmen der Matura geprüft werden.

In diesem Kapitel wurden nun entscheidende Ableitungsregeln näher beleuchtet: die Produkt-, die Quotienten- und die Kettenregel. Hierfür wurden Theorie in Form von Sätzen und Beweisen und Praxis anhand von konkreten Beispielen miteinander in Verbindung gebracht. Neben diesen Ableitungsregeln existieren noch weitere, innerhalb dieser Diplomarbeit wird allerdings auf diese verzichtet, da der Fokus daraufgelegt wird, wie die Umsetzung im Schulunterricht gegeben ist. Und in diesem Zusammenhang spielen hauptsächlich die in diesem Abschnitt behandelten Ableitungsregeln zentrale Rollen.

⁸⁶ vgl. Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006), S.321f.

3.4 Der Grenzwert in der Integralrechnung

In der Mathematik existiert für jede Rechenoperation eine Gegenoperation, Beispiele hierfür wären die Addition und die Subtraktion, oder auch das Potenzieren und das Wurzelziehen. Wurde der Fokus in den vorangegangenen Kapiteln dieser Diplomarbeit auf die Differentialrechnung gelegt, so konzentrieren sich die nachfolgenden Abschnitte auf die Integralrechnung, denn „mit der Integration löst man das Umkehrproblem, aus der Ableitung f' die ursprüngliche Funktion f zu rekonstruieren.“⁸⁷. Grundidee der Integralrechnung ist allerdings die Flächenberechnung und nicht nur das Auffinden von Stammfunktionen, so wie von den Autoren geschildert. In diesem Zusammenhang werden anfänglich bedeutende Begrifflichkeiten beleuchtet und Grundlagen besprochen.

3.4.1 Begrifflichkeiten und Grundlagen

In der Einleitung für diesen Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass das Integral die Umkehrung des Differentials sei und demnach die Aufgabe darin besteht, für f eine Stammfunktion F zu finden, sodass $F' = f$ gilt. In diesem Zusammenhang wird F auch als unbestimmtes Integral bezeichnet und definiert dieses wie folgt.

Definition 13: Ist F auf dem Intervall I eine Stammfunktion zu der Funktion f , gilt also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, so sagen wir auch, F sei ein unbestimmtes Integral von f auf I .⁸⁸

Heuser geht in seinen Ausführungen darauf ein, dass ebenso jedes andere unbestimmte Integral von f auf I durch $F + c$ gegeben sei, wobei c in diesem Zusammenhang für eine beliebige Konstante steht. Eine reelle Funktion unbestimmt über das Integral I zu integrieren bedeute

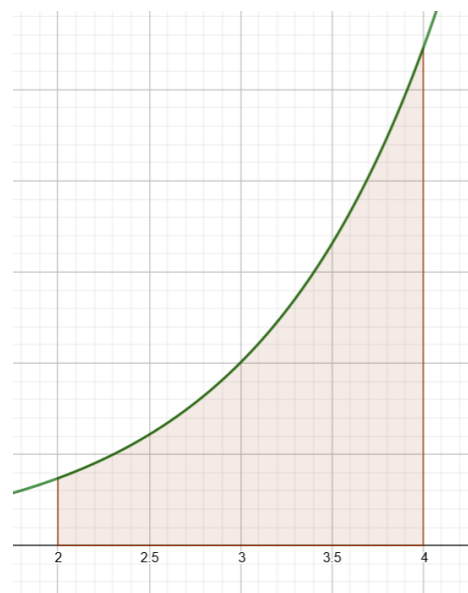
⁸⁷ Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.161.

⁸⁸ Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.435.

demnach, eine beliebige Stammfunktion zu ermitteln. Das unbestimmte Integral selbst wird seit Leibniz mithilfe der Symbole $\int f(x)dx$ oder $\int f dx$ bezeichnet.⁸⁹

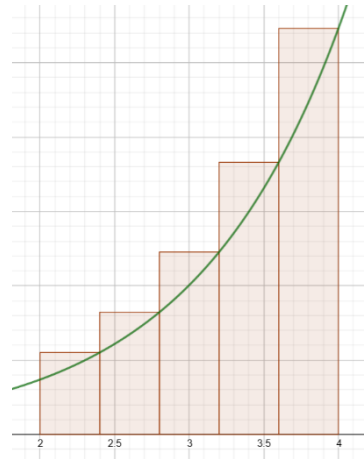
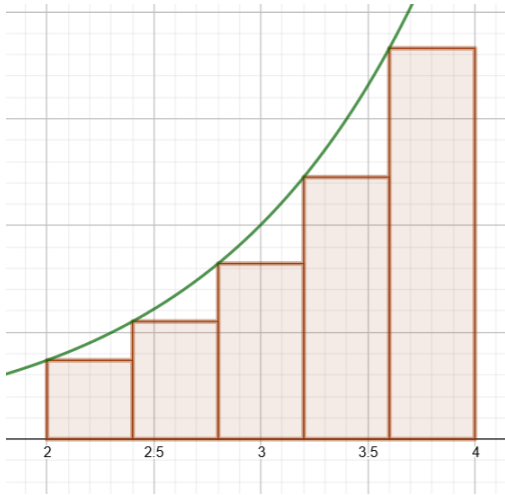
Es scheint an dieser Stelle nicht nötig, entsprechende Integrationsregeln zu formulieren. Sie alle ergeben sich aufgrund der Umkehrung der Differentialrechnung und sind in Form von Tabellen der Grundintegrale in den gängigsten Fachbüchern vorhanden. Ein Beispiel hierfür wäre „*Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*“ von Kurt Meyberg und Peter Vachenauer. In diesem Werk ist eine entsprechende Tabelle inklusive nötiger Bemerkungen auf Seite 167 zu finden.⁹⁰

Das Aufsuchen von Stammfunktionen ist nur ein Aspekt, der durch die Integralrechnung realisiert werden kann. Man unterscheidet zwischen unbestimmten und bestimmten Integralen, wobei letzteres mitunter der Lösung für das sogenannte Flächeninhaltsproblem entspricht. Hierbei handelt es sich um die Fragestellung, wie groß jene Fläche ist, die sich unterhalb der Kurve in einem Intervall befindet, so wie die nebenstehende Abbildung zeigt. Ein erster Zugang hierfür wäre die Approximation durch den Flächeninhalt von Rechtecken, da das Ermitteln dieser mit nur wenig Aufwand verbunden ist. Eine Annäherung kann demnach durch Rechtecke erfolgen, die sich unterhalb der gesuchten Fläche befinden, oder durch Rechtecke, die darüber liegen. In beiden Szenarien sind die einzelnen Breiten der Rechtecke gleich. Der erste Fall wird als Untersumme bezeichnet und ist in der nachfolgenden linken Abbildung ersichtlich. Der zweite Fall wird Obersumme genannt und ist rechts abgebildet. In der gängigen Fachliteratur werden diese wie folgt definiert.



⁸⁹ vgl. ebd., S.435.

⁹⁰ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, *Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung*. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.167.



Definition 14: Es sei f eine beschränkte und zunächst nichtnegative Funktion auf $[a, b]$ und $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ irgendeine Zerlegung von $[a, b]$ mit den Teilintervallen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$. Mit den Zahlen $m_k := \inf f(I_k)$, $M_k := \sup f(I_k)$ bilde man die Unter- und Obersumme $U(f, Z) := \sum_{k=1}^n m_k |I_k|$ bzw. $O(f, Z) := \sum_{k=1}^n M_k |I_k|$, die wir meistens kürzer mit $U(Z)$ bzw. $O(Z)$ bezeichnen werden.⁹¹

Offenbar ist die Untersumme kleiner, die Obersumme hingegen größer als der gesuchte Flächeninhalt. Je mehr Rechtecksflächen allerdings gewählt werden, umso genauer fällt im Endeffekt die Approximation der zu bestimmenden Fläche aus. In diesem Zusammenhang formuliert und beweist Harro Heuser folgenden Satz.

Satz 14: Sei $f \in B[a, b]$ und Z' eine Verfeinerung von Z . Dann ist

- a) $U(Z') \geq U(Z)$,
- b) $O(Z') \leq O(Z)$,
- c) $O(Z') - U(Z') \leq O(Z) - U(Z)$.

Für je zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 gilt stets

- d) $U(Z_1) \leq O(Z_2)$.⁹²

⁹¹ Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.465.

⁹² ebd., S.466.

Beweis:

a) Es wird angenommen, dass die Zerlegung Z' genau einen Punkt x' mehr enthalten würde als $Z := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, wobei $x_{j-1} < x' < x_j$. Wird hier nun $\mu_1 := \inf f([x_{j-1}, x'])$ und $\mu_2 := \inf f([x', x_j])$ gesetzt, so ist $m_j \leq \mu_1, \mu_2$ und demnach $m_j(x_j - x_{j-1}) = m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') \leq \mu_1(x' - x_{j-1}) + \mu_2(x_j - x')$, woraus wiederum für $k \neq j$ folgt, dass $U(Z) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) + \mu_1(x' - x_{j-1}) + \mu_2(x_j - x') = U(Z')$. Würde Z' hingegen $p > 1$ Punkte mehr als Z enthalten, so wendet man diesen Schluss insgesamt p -mal an.

Völlig analog wird b) hergeleitet, wobei hier anzumerken ist, dass $\mu_1 := \sup f([x_{j-1}, x'])$ und $\mu_2 := \sup f([x', x_j])$ beide $\leq M_j$ sind.

c) wiederum folgt unmittelbar aus a) und b)

d) Für Z_1 und Z_2 sei $Z := Z_1 \cup Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung. Aus a) und b) folgt zugleich $U(Z_1) \leq U(Z) \leq O(Z) \leq O(Z_2)$, also $U(Z_1) \leq O(Z_2)$, was zu zeigen war. $\square$

Die genaue Größe des gesuchten Flächeninhalts ergibt demnach ein Grenzübergang, wobei die Breite der einzelnen Rechtecke gegen 0 strebt. In diesem Fall stimmen Unter- und Obersumme überein. Eben dieser Grenzwert wird als bestimmtes Integral bezeichnet und wie folgt definiert.

Definition 15: Es sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Falls $\inf_Z O(Z) = \sup_Z U(Z)$ gilt, dann nennt man f integrierbar auf $[a; b]$. Man nennt dann $\int_a^b f(x) dx$ das Integral von f über $[a; b]$ und schreibt $\int_a^b f(x) dx$.⁹³

Stein liefert in seiner Monographie zwar eine weitaus kompliziertere Formulierung in Bezug auf das bestimmte Integral, der Grundgedanke ist jedoch derselbe. Auch in diesem

⁹³ vgl. Sherman K. Stein, Einführungskurs Höhere Mathematik II. Bestimmte Integrale. Hauptsätze der Infinitesimalrechnung. (Braunschweig/Wiesbaden 1997), S.14f.

Zusammenhang geht es um Unter- und Obersumme, aus deren Grenzwert das bestimmte Integral resultiert. An dieser Stelle wird erneut die Bedeutung des Limes in der Analysis deutlich, da er abermals einen weiteren Aspekt ermöglicht. Offen bleibt an dieser Stelle schließlich die Frage, wie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ berechnet werden kann. In diesem Zusammenhang spielt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Rolle, der in weiterer Folge beleuchtet wird.

Im Hinblick auf die Definition des unbestimmten Integrals wurde anfänglich darauf eingegangen, dass sich zwei Stammfunktionen lediglich durch einen konstanten Wert c unterscheiden. Da dieses Faktum für die Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nötig ist, wird in weiterer Folge ein entsprechender Satz formuliert und bewiesen, für den allerdings ein anderer bedeutender Satz in der Differentialrechnung relevant ist: der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Um eben diesen herleiten zu können, ist wiederum ein anderer Satz von Nöten: der Satz von Rolle.

Satz von Rolle: Sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und im Inneren des Intervalls differenzierbar. Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $x_0 \in (a; b)$ mit $f'(x_0) = 0$.⁹⁴

Die folgende Beweisführung stammt von Harro Heuser.

Beweis: Heuser geht in seinen Einführungen darauf ein, dass der Satz von Rolle für konstante Funktionen trivial sei und daher von diesem Fall abgesehen wird. In weiterer Folge geht er auf den Extremalsatz ein. In diesem Zusammenhang werden die Minimumstelle x_1 und die Maximumstelle x_2 von f auf dem Intervall $[a; b]$ betrachtet. Dementsprechend gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und daher muss zumindest eine der beiden Stellen x_1 und x_2 , also beispielsweise x_1 in $(a; b)$ liegen. In diesem Fall wäre folglich $f'(x_1) = 0$.⁹⁵ $\square$

Für den Mittelwert der Differentialrechnung ist allerdings auch folgender Satz notwendig:

⁹⁴ vgl. Gerald Schmieder, Analysis. Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker. (Braunschweig/Wiesbaden 1994), S.96.

⁹⁵ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.279.

Satz 15: Sei f eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion und $x_0 \in I$. Falls x_0 ein lokales Extremum von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.⁹⁶

Beweis: Sei x_0 eine Maximalstelle in $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$. Mit $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ für $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ gilt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$ und ebenso erhält man wegen $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ für $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, dass $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \leq 0$. Folglich gilt $f'(x_0) = 0$.⁹⁷ $\square$

Durch eben diese Erkenntnisse lässt sich in weiterer Folge der Mittelwertsatz der Differentialrechnung herleiten, der in der gängigen Literatur wie folgt formuliert wird.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei die Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ stetig und zumindest im Inneren dieses Intervalls differenzierbar. So existiert zumindest eine Stelle $x_0 \in (a; b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.⁹⁸

Beweis: Meyberg und Vachnauer stützen sich in ihren Ausführungen auf die Funktion $F(x) = f(x) - (x - b) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Da $F(a) = F(b)$ gilt, folgt nach dem Satz von Rolle dementsprechend, dass $F'(x_0) = 0$ für ein passendes x_0 .⁹⁹ $\square$

Damit lässt sich nun folgender Satz herleiten.

Satz 16: Gegeben sei ein Intervall I . Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine weitere Funktion $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Stammfunktion von f , wenn $F - G$ eine Konstante ist.¹⁰⁰

⁹⁶ vgl. Kurt Meyberg, Peter Vachnauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.121.

⁹⁷ vgl. ebd., S.121.

⁹⁸ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.279.

⁹⁹ Kurt Meyberg, Peter Vachnauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelberg/New York 2001), S.123.

¹⁰⁰ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.210.

Beweis:

a) Sei $F - G = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Dann folgt daraus $G = F - c$ und für G' gilt $G' = (F - c)' = F' = f$.

b) Sei G eine Stammfunktion von f , dann gilt $G' = f = F'$. Demnach gilt ebenso $(F - G)' = 0$. Fixiere x_0 aus I und setze $c = F(x_0) - G(x_0)$. Für ein beliebiges x in I gilt dann nach dem Mittelwertsatz, dass

$(F - G)(x) - (F - G)(x_0) = (F - G)'(\xi) \cdot (x - x_0)$. Wegen $(F - G)' = 0$ ist daher $F(x) - G(x) = c$ woraus folgen muss, dass $F - G$ konstant ist.¹⁰¹ $\square$

Mithilfe dieses Satzes lässt sich nun der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweisen, dessen Idee von Harro Heuser folgendermaßen formuliert wird.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Sei $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f integrierbar und besitzt eine Stammfunktion. Falls F irgendeine Stammfunktion von f ist, dann gilt $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.¹⁰²

Die nachfolgende Herleitung stammt von Otto Forster.

Beweis: Für $x \in [a; b]$ sei $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$. Wenn F nun eine beliebige Stammfunktion von f ist, so existiert aufgrund des vorangegangenen Satzes ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - F_0 = c$. Demnach folgt $F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)dt$.¹⁰³ $\square$

Innerhalb dieser Beweisführung wurde jedoch nur bewiesen, dass die oben genannte Formel $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ für eine beliebige Stammfunktion gültig ist. Auf die Herleitung dafür, dass f integrierbar ist, eine Stammfunktion besitzt und es sich bei F_0 wiederum um eine handelt, wird an dieser Stelle verzichtet.

¹⁰¹ Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.210.

¹⁰² vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.450.

¹⁰³ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.210.

Betrachtet man an dieser Stelle schließlich das konkrete Beispiel $\int_1^2 (-x^3 + 9x)dx$, so lässt sich sein Wert nun durch all die Erkenntnisse in diesem Kapitel berechnen. In diesem Zusammenhang gilt

$$\int_1^2 (-x^3 + 9x)dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{9x^2}{2} \Big|_1^2 = -\frac{2^4}{4} + \frac{9 \cdot 2^2}{2} - \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{9 \cdot 1^2}{2} \right) = \frac{39}{4}$$

Dennoch existieren mitunter Funktionen, für die man weder auf diese Art und Weise eine Stammfunktion finden, noch den Wert des bestimmten Integrals ermitteln kann. In solchen Fällen sind verschiedene Methoden nötig, die im nachfolgenden Kapitel beleuchtet werden.

3.4.2 Integrationsmethoden und das uneigentliche Integral

Im Kapitel 3.3.3 dieser Diplomarbeit wurde darauf eingegangen, dass für das Differenzieren von $f(x) \cdot g(x)$ oder $\frac{f(x)}{g(x)}$ entsprechende Ableitungsregeln nötig sind. Ebenso erfolgt das Aufsuchen bestimmter Stammfunktionen durch eigene Integrationsmethoden, die in diesem Abschnitt formuliert und hergeleitet werden.

Betrachtet man beispielsweise die Funktionen $f(x) = 3x$ und $g(x) = e^x$, so bildete man $(3x \cdot e^x)'$ mithilfe der Produktregel. Im Hinblick auf die Integralrechnung ist für $\int (3x \cdot e^x)dx$ nun ebenfalls eine entsprechende Methode nötig, die in der gängigen Fachliteratur als Partielle Integration bezeichnet wird.

Partielle Integration: Seien $f, g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.^{104}$$

Dieselbe Formel gilt auch für das unbestimmte Integral. Innerhalb der folgenden

¹⁰⁴ Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.216.

Beweisführung wird erneut darauf eingegangen, dass das Differenzieren und Integrieren Gegenoperationen sind:

Beweis: Für $F := fg$ gilt aufgrund der Produktregel, dass $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Das Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert wiederum $\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = F(x) \Big|_a^b = f(x)g(x) \Big|_a^b$, woraus die Behauptung folgt.¹⁰⁵ $\square$

Durch Anwendung der Regel für Partielle Integration folgt demnach für das eingangsgestellte Beispiel $\int (3x * e^x)dx = 3x * e^x - \int (3e^x)dx = e^x * 3x - 3e^x = 3e^x * (x - 1)$.

Betrachtet man beispielsweise das Integral $\int 6x * e^{3x^2} dx$, so ist erneut eine spezielle Integrationsmethode von Nöten, die Harro Heuser in seiner Monographie Substitutionsregel nennt und wie folgt definiert.

Substitutionsregel: *Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

- a) *f sei auf dem Intervall I definiert,*
- b) *g besitzt auf dem Intervall I_0 eine niemals verschwindende Ableitung,*
- c) *es sei $g(I_0) = I$,*
- d) *$(f \circ g)g'$ besitzt auf I_0 eine Stammfunktion Φ .*

Unter diesen Annahmen existiert die Umkehrung g^{-1} von g auf I, und die Funktion $F(x) := \Phi(g^{-1}(x))$ ist dort eine Stammfunktion zu f, kurz:

$$\int f(x)dx = \left[\int f(g(t))g'(t)dt \right]_{t=g^{-1}(x)} \text{ auf } I. \text{ }^{106}$$

Beweis: Heuser geht in seiner Beweisführung darauf ein, dass $g^{-1}(t)$ auf I_0 entweder durchgehend positiv oder negativ sein muss. Aufgrund dessen ist g auf I_0 streng monoton,

¹⁰⁵ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.216.

¹⁰⁶ Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.442.

sodass $h := g^{-1}$ auf $g(I_0) = I$ existiert. Darüber hinaus ist h auf I differenzierbar und es gilt $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$ für alle $x \in I$.

Aufgrund der Tatsache, dass $\Phi'(t) = f(g(t))g'(t)$ und $g(h(x)) = x$, erhält man schließlich

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \Phi(h(x)) = \Phi'(h(x))h'(x) = f[g(h(x))]g'(h(x))h'(x)$$

$$= f(x)g'(h(x))\frac{1}{g'(h(x))} = f(x) \text{ für alle } x \in I.^{107} \quad \square$$

Im Hinblick auf das konkrete Beispiel $\int 6x * e^{3x^2} dx$ liefert die Substitution $t = 3x^2$ demnach $dx = \frac{dt}{6x}$ und daher $\int 6x * e^t \frac{dt}{6x} = \int e^t dt = e^t = e^{3x^2}$.

Obgleich eben diese beiden Integrationsmethoden nicht über den Grenzwert funktionieren, sind sie dennoch der Vollständigkeit wegen Teil der vorliegenden Diplomarbeit. Im Vergleich dazu existiert jedoch das uneigentliche Integral, das sehr wohl aus einer Limesberechnung resultiert. Otto Forster spricht in diesem Zusammenhang davon, dass bislang lediglich über endliche Intervalle integriert wurde beziehungsweise die entsprechenden Funktionen notwendigerweise beschränkt waren. Im Vergleich dazu spricht man von einem uneigentlichen Integral, wenn ein unendliches Integrationsintervall gegeben ist, oder die betreffende Funktion nicht beschränkt ist.¹⁰⁸ Meyberg und Vachnauer liefern hierfür zwei entsprechende Definitionen.

Definition 16: Die Funktion f sei auf dem rechts offenen Intervall $a \leq x < b$ erklärt und auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a; c]$, $c < b$, stückweise stetig, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Durch die Definition

$$(1) \int_a^b f(x)dx := \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x)dx, \text{ bzw. } \int_a^\infty f(x)dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x)dx$$

wird der Integralbegriff erweitert auf

- a) Integranden $f(x)$, die bei der Annäherung $x \rightarrow b$ – nicht beschränkt sind;
- b) unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty)$.

¹⁰⁷ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.442.

¹⁰⁸ vgl. Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011), S.227.

In diesen beiden Fällen nennt man die in (1) definierten Integrale uneigentlich (uneigentlich an der oberen Grenze). Bei entsprechenden Verhältnissen sind die an der unteren Grenze uneigentlichen Integrale definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x)dx, \text{ bzw. } \int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx.^{109}$$

Die zweite Definition der beiden Autoren beschäftigt sich mit dem Fall eines an beiden Grenzen uneigentlichen Integrals.

Definition 17: $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (mit $a < c < b$)

$$= \lim_{u \rightarrow a+} \int_u^c f(x)dx + \lim_{v \rightarrow b-} \int_c^v f(x)dx.$$

Im Fall $a = -\infty, b = \infty$ bedeutet das

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^c f(x)dx + \lim_{v \rightarrow \infty} \int_c^v f(x)dx.^{110}$$

Eben diese beiden Definitionen geben sowohl die Grundidee des unbestimmten Integrals und die Fälle, in denen sie auftreten, als auch die notwendigen Kriterien sehr gut wieder. An dieser Stelle werden nun zwei unbestimmte Integrale näher beleuchtet. Anfänglich wird der konkrete

Wert von $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{29}} dx$ berechnet. Hierfür wird entsprechend der obigen Definition folgender

$$\text{Grenzwert ermittelt: } \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^{29}} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{28x^{28}} \right) \Big|_1^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{28c^{28}} + \frac{1}{28} \right) = \frac{1}{28}.$$

Somit wird ersichtlich, dass durch den Grenzübergang der konkrete Wert von etwas Unbestimmten berechnet wird. Ebenso ist möglich, die Konvergenz verschiedener Integrale zu bestimmen, ohne den exakten Wert zu ermitteln. Gearbeitet wird hier in zahlreichen Fällen mit verschiedenen Tests, wie das nachfolgende Beispiel zeigen soll.

Zu prüfen ist die Konvergenz von $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{29}+1} dx$. Im vorangegangenen Beispiel wurde die

¹⁰⁹ Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelber/New York 2001), S.185.

¹¹⁰ ebd., S.187.

Existenz von $\int_1^\infty \frac{1}{x^{29}} dx$ bereits gezeigt. Aufgrund des Majorantentests ist nun zu folgern, dass auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^{29}+1} dx$ existiert. Wegen der Stetigkeit auf $[0; 1]$ existiert zudem auch $\int_0^1 \frac{1}{x^{29}+1} dx$, sodass $\int_0^\infty \frac{1}{x^{29}+1} dx$ auf dem gesamten Bereich existiert und konvergiert.

In diesem Zusammenhang ist der Begriff Majorantentest gefallen. Harro Heuser definiert diesen auch als das sogenannte Majorantenkriterium und beschreibt es als eine Möglichkeit, die Konvergenz uneigentlicher Integrale zu prüfen. Ebenso existieren das Minorantenkriterium, das Grenzwertkriterium oder auch das Cauchysche Konvergenzkriterium, die je nach Beispiel zu wählen sind.¹¹¹

¹¹¹ vgl. Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009), S.481f.

4. Der Grenzwert im Schulunterricht

4.1 Lehrplananalyse

Im theoretischen Teil dieser Arbeit wurde auf der einen Seite der Grenzwert von Zahlenfolgen definiert und auf der anderen Seite gezeigt, dass dieser in zahlreichen innermathematischen Bereichen Anwendung findet. Vor allem die Funktionsanalyse funktioniert über weite Strecken durch Limes-Berechnungen. Sei es beispielsweise die Steigung einer Funktion oder der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – der Grenzwert ist jenes Werkzeug, das in all diesen Aspekten angewendet wird. In diesem Kapitel wird nun der Lehrplan der Oberstufe analysiert, um zu beleuchten, in welchen Bereichen Grenzwertberechnungen im Schulunterricht zu finden sind. Hierfür wird das neue Curriculum für die NOST – die neue Oberstufe – herangezogen. Es handelt sich hierbei um jenes System, das Semestrierung vorsieht, in einigen Schulen bereits umgesetzt wurde und flächendeckend ab dem Schuljahr 2021/22 ganz Österreich betrifft.

4.1.1 Lehrplan der sechsten Klasse

In der sechsten Klasse werden Folgen und Grenzprozesse eingeführt. Im Hinblick auf reelle Zahlenfolgen sieht der Lehrplan vor, grundlegende Eigenschaften zu behandeln: *„Untersuchen von Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, intuitives Erfassen und Definieren des Begriffes Grenzwert“*¹¹²

Inwieweit der Lehrplan im Schulunterricht tatsächlich umgesetzt wird, ist der Lehrkraft überlassen. Die Einführung des Grenzwerts ist zwar Teil davon, aber das *„intuitive Erfassen*

¹¹² Lehrplan Mathematik Oberstufe, online unter:
https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. (aufgerufen am 28.10.2018).

und Definieren“ spiegelt nicht wider, wie umfangreich dieser Aspekt tatsächlich behandelt werden soll. Ebenso im Lehrplan der sechsten Klasse ist folgendes zu finden:

„Definieren der Eulerschen Zahl“¹¹³

Dies scheint dahingehend nötig, da die Exponentialfunktion und damit verbundene Zerfalls- und Wachstumsprozesse ebenso Lehrinhalte dieser Schulstufe sind.

4.1.2 Lehrplan der siebten Klasse

In der siebten Klasse wird die Differentialrechnung eingeführt. In dieser Schulstufe lernen die Heranwachsenden nicht nur das Ableiten elementarer Funktionen, sondern auch entsprechende Anwendungen. Beispiele hierfür wären die Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben. Aber auch außermathematische Aspekte im Hinblick auf Wirtschaft und Naturwissenschaft werden behandelt. Die Einführung in diese Thematik wird im Lehrplan folgendermaßen beschrieben: *„Definieren des Differentialquotienten (Änderungsrate), ausgehend vom Differenzenquotienten (mittlere Änderungsrate), Deuten dieser Begriffe als Sekantensteigung bzw. Tangentensteigung, weiteres Deuten in außermathematischen Bereichen“¹¹⁴*

Da der Übergang vom Differenzen- zum Differentialquotienten durch eine Limesberechnung erfolgt, ist hier bereits ein Aspekt des Grenzwerts in der siebten Klasse feststellbar. Zudem sieht der Lehrplan folgendes vor:

„Herleitung von Differentiationsregeln zur Ableitung von Polynomfunktionen, Kennen weiterer Differentiationsregeln (sofern sie für Funktionsuntersuchungen verwendet werden)“¹¹⁵

Durch die Grenzwertberechnung soll demnach eine allgemein gültige Regel für die Ableitungsfunktion von Polynomfunktionen bewiesen werden. Problematisch scheint auch hier in weiterer Folge die Auslegung des Lehrplans, denn im Hinblick auf weitere Ableitungsregeln ist die Rede von *„sofern sie für weitere Funktionsuntersuchungen verwendet werden“*. Obgleich

¹¹³ Lehrplan Mathematik Oberstufe, online unter:

https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. (aufgerufen am 28.10.2018).

¹¹⁴ ebd. (aufgerufen am 28.10.2018).

¹¹⁵ ebd. (aufgerufen am 28.10.2018).

das Curriculum vorsieht, dass entsprechende Regeln des Differenzierens besprochen werden, obliegt es der Lehrkraft, diese auch tatsächlich zu unterrichten.

Auch in Bezug auf die Stetigkeit reeller Funktionen findet der Grenzwert in der siebten Klasse Anwendung:

„Präzisieren einiger Grundbegriffe und Methoden der Differentialrechnung (insbesondere des Begriffes Grenzwert) unter Einbeziehung des Begriffes Stetigkeit“¹¹⁶

4.1.3 Lehrplan der achten Klasse

In der achten Klasse ist die zentrale Thematik des Mathematikunterrichts die Integralrechnung: *„Definieren des bestimmten Integrals, Deuten einer Summe von „sehr kleinen Produkten“ der Form $f(x) \cdot \Delta x$ als Näherungswert des bestimmten Integrals“¹¹⁷*

Mittels Limesberechnung von Unter- und Obersummen wird demnach auch in dieser Schulstufe der Grenzwert verwendet. Zudem sieht der Lehrplan auch den Hauptsatz der Analysis vor: *„Kennen des Zusammenhangs zwischen Differenzieren und Integrieren sowie des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung“¹¹⁸*

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der Grenzwert im Schulunterricht dem Lehrplan nach zu urteilen oftmals verwendet wird. Sei dies in der sechsten Klasse, in der Folgen und Grenzprozesse erstmals eingeführt werden, oder in der nachfolgenden Schulstufe, in der die Funktionsanalyse behandelt wird. Auch in der achten Klasse wird durch die Integralrechnung ein weiterer Aspekt der Grenzwertberechnung deutlich.

In den nachfolgenden Kapiteln der vorliegenden Diplomarbeit wird beleuchtet, inwieweit der Grenzwert im Schulunterricht tatsächlich Anwendung findet. Hierfür werden verschiedene Schulbücher unter anderem auf Definitionen, Rechenbeispiele und Beweise untersucht. Für

¹¹⁶ Lehrplan Mathematik Oberstufe, online unter:

https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. (aufgerufen am 28.10.2018).

¹¹⁷ ebd. (aufgerufen am 28.10.2018).

¹¹⁸ ebd. (aufgerufen am 28.10.2018).

eben diese Analyse werden die Buchreihen „*Thema Mathematik*“, „*Lösungswege Mathematik Oberstufe*“, sowie „*Mathematik verstehen*“ verwendet.

4.2 Grenzwerte in der sechsten Klasse

4.2.1 Einführung des Folgen- und des Grenzwertbegriffs

Im Rahmen des ersten Kapitels dieser Diplomarbeit wurden die zentralen Begriffe „*Folge*“ und „*Grenzwert*“ definiert. In der vorangegangenen Analyse des Lehrplans wurde festgestellt, dass die Grundlagen der reellen Zahlenfolgen in der sechsten Klasse gelehrt werden. In diesem Kapitel wird nun beleuchtet, wie eben diese Thematik eingeführt wird, inwieweit eine Begriffserklärung in Schulbüchern gegeben ist und inwiefern Unterschiede und Gleichheiten feststellbar sind.

Die Thematik der reellen Zahlenfolgen wird in „*Thema Mathematik 6*“ mit einem Iterationsprozess eingeführt. Durch das Heron-Verfahren, das zuvor theoretisch beleuchtet wird, soll $\sqrt{3}$ bestimmt werden. Dies geschieht in mehreren Etappen, die von Schritt zu Schritt eine bessere Annäherung liefern. Anschließend wird argumentiert, dass durch diese Methode eine Folge von Zahlen entsteht und die Notwendigkeit von Zahlenfolgen in der Mathematik begründet. Aufgrund der Tatsache, dass diese endlos sein können, lassen sich gesuchte Werte genauer bestimmen.¹¹⁹ Anschließend folgt eine formale Definition.

¹¹⁹ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 6*. (Linz 2015), S.54f.

Definition 18: Eine fortlaufende Anordnung reeller Zahlen $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ heißt eine reelle Zahlenfolge. Die einzelnen Zahlen werden als Glieder der Folge bezeichnet.¹²⁰

In „*Mathematik verstehen 6*“ erfolgt die Einführung in diese Thematik ebenfalls durch ein konkretes Beispiel. Hierfür wird $\sqrt{2}$ im Hinblick auf die Nachkommastellen untersucht und die entsprechenden Näherungswerte angegeben:

$a_1 = 1,4$; $a_2 = 1,41$; $a_3 = 1,414$; $a_4 = 1,4142$; ... Nun wird angemerkt, dass die Werte $a_1; a_2; a_3; \dots$ eine Zahlenfolge bilden und die Zahlen selbst ihre Glieder seien. Schlussendlich werden noch endliche und unendliche Folgen unterschieden und Schreibweisen für Zahlenfolgen angegeben.¹²¹ Eine formale Begriffsdefinition ist in diesem Werk allerdings nicht vorhanden.

In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“ stellt das achte Kapitel die Thematik der reellen Zahlenfolgen dar. Es werden anfänglich einfache Beispiele angegeben, beispielsweise die Folge der natürlichen Zahlen und der Quadratzahlen. Auch auf die Fibonacci-Folge wird konkret eingegangen und der Zusammenhang zur Natur erläutert. Darüber hinaus wird festgestellt, dass in zahlreichen IQ-Tests Beispiele zu finden sind, bei denen gegebene Zahlen fortgesetzt werden müssen. Auch hier handelt es sich um Zahlenfolgen, die sogar kritisch beleuchtet werden, da unterschiedliche logische Fortsetzungen existieren würden. Neben den alltäglichen Situationen, in denen reelle Zahlenfolgen auftreten, wird hier auch der Nutzen in der Mathematik beleuchtet. Es wird beispielsweise angegeben, dass es sich hierbei um ein Instrument handelt, durch das die Unendlichkeit erfasst werden kann. Außerdem wird begründet, dass irrationale Zahlen als Folgen wahrgenommen werden und dadurch beliebig genau angegeben werden können.¹²² Anschließend folgt eine konkrete Begriffserklärung.

Definition 19: Eine Zahlenfolge (kurz Folge) ist eine Aneinanderreihung von Zahlen, deren Position eindeutig festgelegt ist und nicht verändert werden darf.¹²³

¹²⁰ Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 6. (Linz 2015), S.56.

¹²¹ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 6. (Wien 2018), S.130.

¹²² vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6. (Wien 2016), S.120.

¹²³ ebd., S.121.

Gefolgt von eben dieser Definition finden sich konkrete Beispiele und weitere Erklärungen wieder. So wird angegeben, was die Glieder der Folge seien; dass zwischen endlichen und unendlichen Folgen unterschieden wird und welche konkreten Schreibweisen verwendet werden.¹²⁴

Die Einführung der reellen Zahlenfolgen ist in „*Thema Mathematik 6*“ und „*Mathematik verstehen 6*“ sehr ähnlich. In beiden Fällen geschieht dies durch das Bestimmen der irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Im ersten der beiden Werke wird dafür ein Iterationsprozess verwendet und die entstehenden Werte als Folge aufgefasst. In „*Mathematik verstehen 6*“ werden allerdings ohne nähere Begründungen lediglich die Werte angegeben und als Folge wahrgenommen. Es ist in dieser Analyse auch das einzige Schulbuch, in dem keine formale Definition für den Folgenbegriff angegeben wird. Zudem werden auch hier sowohl der Nutzen von Zahlenfolgen, als auch ihre Eigenschaften und Schreibweisen nur sehr kurz behandelt. Gelungen scheint die Einführung der Thematik in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“. Es ist das einzige Werk in dieser Untersuchung, das die Existenz von Folgen im Alltag beschreibt. Sei dies innerhalb der Natur, oder auch bei IQ-Tests, die darüber hinaus an dieser Stelle sogar kritisch betrachtet werden. Dies ist im Schulunterricht dahingehend notwendig, da der Bezug zum Alltag ohnehin oftmals fehlt. Sowohl die Einführung, als auch grundlegende Eigenschaften werden in diesem Werk zudem am deutlichsten und ausführlichsten beschrieben.

Im ersten Kapitel dieser Diplomarbeit wurde anschließend an die Folgendefinition die Eigenschaft der Beschränktheit angeführt, die schlussendlich zum Grenzwert führte. Dies geschieht ebenso in den Schulbüchern, auf denen diese Analyse beruht. In „*Thema Mathematik 6*“ wird dies beispielsweise folgendermaßen definiert.

Definition 20: Eine reelle Zahl S_O heißt obere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn $a_n \leq S_O \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Eine reelle Zahl S_U heißt untere Schranke der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn $S_U \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.¹²⁵

¹²⁴ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*. (Wien 2016), S.121

¹²⁵ Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 6*. (Linz 2015), S.60.

In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“ wird im Vergleich dazu eine sehr ähnliche Definition angegeben.¹²⁶ Dass die Beschränktheit Teil dieser Schulbücher ist, lässt sich einerseits durch den Lehrplan erklären, der dies vorsieht. Andererseits wird hier aber in weiterer Folge damit argumentiert, dass eine beschränkte Folge konvergent sein kann. An dieser Stelle wird nun analysiert, wie die Einführung des Grenzwerts in den drei Schulbüchern gegeben ist und welche Gleichheiten und Unterschiede in den entsprechenden Grenzwertdefinitionen zu finden sind.

In „*Mathematik verstehen 6*“ folgt den Definitionen von Schranken und Monotonie von Zahlenfolgen eine intuitive Ermittlung des Grenzwerts. Hierfür werden die ersten Folgenglieder der Folge $(a_n) = 1 - \frac{1}{n}$ ermittelt. Durch die Auflistung der Glieder und der entsprechenden Darstellung am Zahlenstrahl wird eine Erkenntnis als bemerkenswert angesehen: Die Glieder nähern sich für wachsendes n immer mehr der Zahl 1 und kommen dieser sogar beliebig nahe.¹²⁷ Obgleich der Wert 1 an dieser Stelle nicht als konkreter Grenzwert bezeichnet wurde, folgt sogleich eine Grenzwertdefinition.

Definition 21: Nähern sich die Glieder einer Folge (a_n) „unbegrenzt“ einer bestimmten Zahl a (dh. kommen sie der Zahl a beliebig nahe), dann nennt man a den Grenzwert (Limes) der Folge und schreibt: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ [Lies: a ist der Limes von a_n für n gegen unendlich.].¹²⁸

Offensichtlich scheint an dieser Stelle die schülerfreundliche Formulierung. Die Definition an sich ist klar und nachvollziehbar, allerdings unvollständig aufgrund der Tatsache, dass hier keine Rede von jenem ε ist, welches beispielsweise in jeder Definition in der Fachliteratur zu finden ist. Der Grenzwertdefinition folgen die Begriffserklärungen „*konvergent*“ und „*divergent*“ und anschließend konkrete Rechenbeispiele, innerhalb derer die Grenzwerte zu ermitteln sind. Das Kapitel endet mit einer exakteren Grenzwertdefinition.

¹²⁶ Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*. (Wien 2016), S.126.

¹²⁷ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 6*. (Wien 2018), S.133.

¹²⁸ ebd., S.133.

Definition 22: Die Zahl a heißt Grenzwert (Limes) der Folge $(a_n | n \in \mathbb{N}^*)$, geschrieben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, wenn gilt: Zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.¹²⁹

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob es sinnvoll scheint, zwei verschiedene Grenzwertdefinitionen in einem Schulbuch anzuführen. Die erste der beiden ist unvollständig, sodass die zweite notwendig ist. Didaktisch ist diese Herangehensweise eher unklug: die zweite Definition ist vollkommen ausreichend, die erste hingegen gar nicht nötig. Die Einführung des Grenzwerts von Zahlenfolgen scheint durchaus gelungen, die Existenz verschiedener Definitionen wäre allerdings vermeidbar und würde vor allem schwache Schülerinnen und Schüler eher verwirren.

In „*Thema Mathematik 6*“ wird für den Grenzwert von Zahlenfolgen die nachfolgende Definition angegeben.

Definition 23: Wenn für jeden (beliebig kleinen, positiven) Abstand ε ab einem (entsprechend großen) n der Betrag $|a_n - a| < \varepsilon$ bleibt, so heißt a der Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$. Wir schreiben dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (Sprich: „Der Limes von a_n für n gegen unendlich ist a .“) Besitzt eine Folge einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, andernfalls divergent.¹³⁰

Diese Definition ist nicht korrekt, da n in verschiedenen Bedeutungen verwendet wird. Hingegen wirkt die Formulierung eines detaillierten Fließtextes dahingehend didaktisch sinnvoll, da Schülerinnen und Schüler mathematische Formulierungen und Zeichen nur bedingt verstehen. Nicht nur die Definition des Grenzwerts ist in diesem Schulbuch aufgrund des Fehlers fraglich, sondern die gesamte Einführung in die Thematik an sich: es gibt nämlich keine. Wurde im vorangegangenen Schulbuch der Grenzwert intuitiv durch ein konkretes Beispiel beleuchtet, so findet man in „*Thema Mathematik 6*“ lediglich die Definition mit der Grundvorstellung, dass ab dem n -ten Folgenglied entsprechende Zahlenfolgen in einem

¹²⁹ Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 6*. (Wien 2018), S.134.

¹³⁰ Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 6*. (Linz 2015), S.62.

gewissen Bereich $a \pm \varepsilon$ bleiben würden.¹³¹ Auch hier stellt sich die Frage nach der didaktischen Sinnhaftigkeit. Schülerinnen und Schüler werden dieser Grundvorstellung nicht folgen können.

In „*Mathematik verstehen 6*“ gelang die Einführung des Grenzwertbegriffs durch die Existenz eines konkreten Beispiels. Das Anführen zweier Definitionen ist didaktisch allerdings zu bemängeln. Im Gegensatz dazu fehlt in „*Thema Mathematik 6*“ die Herangehensweise an die Thematik, die Definition ist hingegen schülerfreundlich. In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“ werden beide Aspekte zufriedenstellend erfüllt. Auch hier geschieht die Einführung in Form der konkreten Zahlenfolge $(a_n) = \frac{6n}{1+2n}$. Es werden erneut die ersten Folgenglieder betrachtet und intuitiv vermutet, dass sich die Glieder für wachsendes n der Zahl 3 nähern. Anschließend folgt eine konkrete Definition.¹³² Diese entspricht über weite Strecken der zweiten Begriffserklärung von „*Thema Mathematik 6*“, ist sehr detailliert und schülerfreundlich formuliert. Eben diese Art von Definition ist für den Schulunterricht auf mehreren Ebenen zufriedenstellend. Einerseits ist sie nachvollziehbar und klar. Man könnte an dieser Stelle anmerken, dass die Begriffserklärung an und für sich sogar zu ausführlich ist. Man muss allerdings bedenken, dass es sich hierbei um ein Schulbuch handelt, das den Heranwachsenden Wissen vermitteln soll. Es kommt aufgrund des ausformulierten Fließtextes zu keinerlei Unklarheiten. Andererseits beinhaltet diese Definition zahlreiche weitere Informationen, Eigenschaften und Schreibweisen, die für die gesamte Thematik notwendig sind.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass in allen drei Schulbüchern sowohl in der Einführung des Folgenbegriffs, als auch bei der Definition des Grenzwerts Gleichheiten und Unterschiede zu finden sind. In „*Mathematik verstehen 6*“ und „*Thema Mathematik 6*“ gestaltet sich die Herangehensweise in Form von Iterationsprozessen. In beiden Fällen sollen irrationale Zahlen möglichst genau bestimmt werden. In beiden Büchern wird angegeben, dass es sich hierbei um Glieder von Zahlenfolgen handelt und deren Nutzen in der Mathematik beleuchtet. In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“ findet man zudem einen Bezug zu Folgen im Alltag, der in den anderen beiden Schulbüchern fehlt.

¹³¹ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 6. (Linz 2015), S.62.

¹³² Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6. (Wien 2016), S.127.

Auch im Hinblick auf die Grenzwertdefinition lassen sich Parallelen feststellen. So werden sowohl in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“, als auch in „*Mathematik verstehen 6*“ konkrete Beispiele beleuchtet, um den Grenzwert intuitiv einzuführen. Eine solche Herangehensweise fehlt im dritten Schulbuch. Die entsprechenden Definitionen sind in allen drei Werken ähnlich, sie unterscheiden sich lediglich in ihren Formulierungen und Notationen. Lediglich „*Mathematik verstehen 6*“ bedient sich an zwei verschiedenen Begriffserklärungen, wobei die erste nicht notwendig scheint und zudem unvollständig ist.

In einem vorangegangenen Kapitel dieser Arbeit wurde bewiesen, dass der Grenzwert eindeutig ist. Außerdem wurde gezeigt, dass jede konvergente Folge beschränkt ist. Auch wurden diverse Grenzwertsätze behandelt, die das Berechnen vereinfachen sollen. Im nachfolgenden Kapitel wird nun analysiert, ob derartige Sätze in den Schulbüchern der sechsten Klasse zu finden sind und inwiefern diese bewiesen werden.

4.2.2 Sätze über Grenzwerte in Schulbüchern

Betrachtet man die Einführung des Grenzwerts in der Fachliteratur, so scheint deutlich, dass die angeführten Definitionen einander sehr ähnlich sind. Die Analyse im vorangegangenen Kapitel dieser Diplomarbeit zeigte, dass sich die Grenzwertdefinition in Schulbüchern hingegen vor allem im Hinblick auf ihre Formulierungen unterscheiden. Man versucht hier stets, schülerfreundlich zu arbeiten, indem beispielsweise mathematische Zeichen vermieden werden und Bedingungen möglichst genau beschrieben werden.

Darüber hinaus wurde in jeder Monographie, die für den theoretischen Teil dieser Arbeit herangezogen wurde, der Satz bewiesen, dass der Grenzwert einer Zahlenfolge eindeutig ist. An dieser Stelle sei anzumerken, dass dies in keinem der verwendeten Schulbücher erwähnt wird. Es wird zwar in allen Werken eine detaillierte Definition des Limes gegeben, die Begriffe konvergent und divergent beschrieben und auch zahlreiche Beispiele behandelt, aber die Eindeutigkeit des Grenzwerts wird in keinem Buch angesprochen oder gar bewiesen.

Im Hinblick auf die zentralen Grenzwertsätze lässt sich Ähnliches feststellen: In der gängigen Fachliteratur werden diese Sätze formuliert und bewiesen, in Schulbüchern hingegen werden sie in der Regel nicht behandelt. Weder „Lösungswege Mathematik Oberstufe 6“, noch „Mathematik verstehen 6“ beinhalten diese Sätze. In „Thema Mathematik 6“ hingegen findet man zumindest deren Formulierung.

Satz 17: Sind $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \rangle = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle b_n \rangle = b$, so gilt:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \pm b_n \rangle = a \pm b \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n * b_n \rangle = a * b \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0).^{133}$$

Obgleich in diesem Schulbuch zwar die Grenzwertsätze formuliert werden, fehlen die entsprechenden Beweise. Es existieren in weiterer Folge nicht einmal Beispiele, die mit Hilfe dieser Sätze gelöst werden sollen. Daher stellt sich die Frage nach ihrer Daseinsberechtigung.

Auch in Bezug auf die Eigenschaft konvergenter Folgen, beschränkt zu sein, ist der Mangel an Sätzen in Schulbüchern feststellbar. In den Werken, die innerhalb dieser Arbeit analysiert wurden, ist „Mathematik verstehen 6“ das einzige, das diese Tatsache enthält. Darüber hinaus wird sogar die nachfolgende Herleitung dafür gegeben.

Beweis: Man betrachte die konvergente Folge $(a_n | n \in \mathbb{N}^*)$ mit dem Grenzwert a und den konkreten Wert $\varepsilon = 1$. Gesucht sei nun ein Index $n_0 \in \mathbb{N}^*$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < a_n < a + 1$. Daraus folgt, dass für $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_0-1}, a - 1$ die kleinste Zahl eine untere Schranke und die größte Zahl eine obere Schranke der Folge a_n sein muss.¹³⁴ □

Der obige Beweis wird an sich sehr vereinfacht geführt und ist der einzige, der im Hinblick auf die grundlegenden Eigenschaften von Folgen zu finden ist. Weder „Thema Mathematik 6“, noch „Lösungswege Mathematik Oberstufe 6“ beinhalten eine Beweisführung in diesem Zusammenhang. Obgleich verschiedene Sätze in diesen Schulbüchern formuliert werden,

¹³³ Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 6. (Linz 2015), S.62.

¹³⁴ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 6. (Wien 2018), S.284.

fehlen über weite Strecken deren Beweise. Spätestens an dieser Stelle muss angemerkt werden, dass der eigentliche Bezug zur Mathematik fehlt. Es geht nicht nur um das reine Erarbeiten von Rechenbeispielen, die in den Schulbüchern ausreichend vorhanden sind. Es geht vielmehr um die Frage nach dem „Warum?“, die in keinem Band entsprechend beantwortet wird. Dass beispielsweise die Eindeutigkeit des Grenzwerts in den für diese Analyse verwendeten Büchern verschwiegen wird, sollte an dieser Stelle zum Umdenken anregen.

Ebenso zu kritisieren ist die Tatsache, dass innerhalb der Einführung in den betrachteten Schulbüchern von konvergenten Folgen gesprochen, dies allerdings nicht bewiesen wird. So wurde in „*Thema Mathematik 6*“ die Konvergenz von $\sqrt{3}$ vorausgesetzt, dieses Faktum jedoch nicht gezeigt. Aufgrund der didaktischen Sinnhaftigkeit wäre der Beweis allerdings von Nöten gewesen. Dies hätte beispielsweise realisiert werden können, indem man zeigt, dass es sich um eine Cauchyfolge handelt.

Schlussendlich sollte noch angemerkt werden, dass nicht nur im Bereich der Zahlenfolgen dieser Mangel an Beweisen in den besagten Schulbüchern feststellbar ist. Diese Problematik ist in sämtlichen Lerngebieten der sechsten Klasse wahrnehmbar. In „*Thema Mathematik 6*“ befinden sich zwar zahlreiche Sätze, aber nur wenige werden tatsächlich bewiesen. Ab und an wird statt konkreten Rechenbeispielen den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe gestellt, mathematische Begebenheiten selbst herzuleiten. In den meisten Fällen geschieht dies allerdings ohne Hinweise oder gar Hilfestellungen, durch die das realisiert werden sollte. Im Anhang von „*Mathematik verstehen 6*“ befinden sich insgesamt 27 Beweise zu den unterschiedlichen Lerninhalten der sechsten Klasse. Auch die letzten Seiten von „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 6*“ beinhalten Beweisführungen. Es sind allerdings nur drei und diese beziehen sich auf das Kapitel „*Vektoren in Raum*“. Vor allem hier wird der immense Mangel an Beweisen im Schulunterricht deutlich.

4.3 Grenzwerte in der siebten Klasse

4.3.1 Einführung der Ableitungsfunktion

Betrachtet man den Lehrplan der Sekundarstufe II, so lässt sich feststellen, dass die Analyse von Funktionen mit weitem Abstand den größten Bereich der Oberstufenmathematik darstellt. In der fünften Klasse wird eine Definition des Funktionsbegriffes erzielt und grundlegendes Wissen vermittelt. Im darauffolgenden Jahr werden verschiedene Funktionsarten erarbeitet und Alltagsaufgaben durch diese modelliert. In der siebten Klasse wird die Differentialrechnung behandelt. In diesem Zusammenhang werden unterschiedliche Kurven diskutiert, Extremwertaufgaben durchgeführt und Beispiele aus der Wirtschaft und den Naturwissenschaften beleuchtet. Um all das realisieren zu können, ist die Kenntnis der Ableitungsfunktion nötig. Innerhalb dieses Kapitels wird nun analysiert, inwieweit die Einführung der Differentialrechnung in den Schulbüchern *„Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“* und *„Mathematik verstehen 7“* umgesetzt wird.

In *„Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“* wird die Thematik mit der Fragestellung eingeführt, welche Geschwindigkeit ein bewegter Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt habe. Es wird darauf eingegangen, dass die Geschwindigkeit der Quotient des zurückgelegten Wegs und der dafür nötigen Zeit sei. Da aber zu einem konkreten Zeitpunkt weder eine Wegstrecke zurückgelegt werde, noch Zeit verstreichen würde, führe diese Überlegung zu $\frac{0}{0}$ und wäre dementsprechend nicht zielführend. Man bezeichnet diese Aufgabenstellung als das Problem der Momentangeschwindigkeit, für das bereits in der griechischen Antike Lösungen entwickelt wurden. So wird darauf eingegangen, dass Zenon von Elea zum Schluss kam, Bewegung wäre lediglich eine Illusion. Auch wird darauf eingegangen, dass eine entsprechende Lösung dieser Problematik erst über 2000 Jahre später durch Newton und Leibniz gefunden wurde.¹³⁵ Das Problem der Momentangeschwindigkeit ist wohl die gängigste Art, die Differentialrechnung einzuführen und in zahlreichen Schulbüchern zu finden. Dieser Zugang ist dahingehend

¹³⁵ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*. (Wien 2016), S.24.

sinnvoll, da Schülerinnen und Schüler oftmals die Meinung vertreten, Mathematik sei langweilig und ohnehin wäre schon alles bewiesen worden. Gerade diese Einführung zeigt den Lernenden sehr deutlich, dass Fragestellungen existieren, deren mathematische Lösung erst Jahrtausende später erfolgten.

Aufgrund der Tatsache, dass der Differentialquotient auf dem Differenzenquotienten basiert, wird im Schulbuch Lösungswege Mathematik anfänglich für eben diesen die nachfolgende Begriffserklärung gegeben.

Definition 24: Sei f eine reelle Funktion, die auf dem Intervall $[a; b]$ definiert ist. Dann heißt $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Differenzenquotient oder die mittlere Änderungsrate von f in $[a; b]$.¹³⁶

Im Anschluss folgen zahlreiche rechnerische und geometrische Aufgabenstellungen, bis schlussendlich die momentane Änderung eingeführt wird. In diesem Zusammenhang wird ein konkretes Beispiel beleuchtet: der zurückgelegte Weg eines Springers beim Bungee-Jumping kann durch die Funktion $s(t) = 5t^2$ berechnet werden. Nun soll die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 4$ Sekunden berechnet werden. Dafür kann die mittlere Änderung als Annäherung verwendet werden und es wird argumentiert, dass man ein spezielles Intervall wählt und den Abstand der beiden Grenzen von Schritt zu Schritt kleiner wählt. Für das Intervall $[4;5]$ erhält man 45 m/s; für $[4;4,5]$ wiederum 42,5m/s und für $[4;4,2]$ 41m/s. Für das Intervall $[4;4,0001]$ beträgt die mittlere Änderung 40,0005m/s. In weiterer Folge wird deshalb angenommen, dass sich der Differenzenquotient immer mehr dem Wert 40 annähert, wenn das Intervall immer kleiner gewählt wird. Um diese Erkenntnis allerdings rechnerisch nachweisen zu können, bedarf es des Grenzwertbegriffs und einer entsprechenden Schreibweise: $s'(4) = v(4) = \lim_{t \rightarrow 4} \bar{v}(4; t) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{s(t)-s(4)}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5t^2-80}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{5(t-4)(t+4)}{t-4} = \lim_{t \rightarrow 4} (5t + 20) = 40m/s$, was der anfänglichen Vermutung entspricht.¹³⁷ Anschließend wird auf übliche Weise die Ableitung definiert und auch momentane oder lokale Änderungsrate genannt.

¹³⁶ Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016), S.26.

¹³⁷ vgl. ebd., S.33-35.

Wurde anfänglich der Differenzenquotient eingeführt, um zum Differentialquotienten überzugehen, folgt im Schulbuch der obigen Definition die geometrische Interpretation der momentanen Änderungsrate. Hierfür wird anfänglich die mittlere Änderung als Steigung der Sekante zwischen zwei Punkten einer Funktion wahrgenommen. In weiterer Folge wandert der zweite Punkt entlang der Kurve immer mehr in Richtung des ersten, sodass sich diese unendlich nahe annähern und eine sogenannte Grenzgerade entsteht. Diese wird als Tangente bezeichnet und es wird definiert, dass der Differentialquotient eben dieser Tangentensteigung entspricht.¹³⁸ Auch hier werden formale Definitionen angeführt, die im Wesentlichen jenen aus der Fachliteratur entsprechen.

Die Einführung des Differentialquotienten scheint in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ gelungen. Anfänglich wurde die mittlere Änderungsrate eingeführt und anhand zahlreicher Beispiele gefestigt, da sie die Grundlage für die momentane Änderung darstellt. In weiterer Folge wurde ein konkretes Beispiel präsentiert: es sollte die Geschwindigkeit eines Bungee-Jumpers zu einem bestimmten Zeitpunkt ermittelt werden. Diese konnte durch den Differenzenquotienten angenähert werden. Je mehr man die Grenzen annäherte, desto besser fiel die Näherung aus, sodass im Endeffekt eine Vermutung in Bezug auf die Geschwindigkeit erzielt werden konnte. In diesem Zusammenhang wurde argumentiert, dass es sich hierbei um eine Grenzwertberechnung handelt, da die eine Grenze gegen die andere strebt. Durch die nachvollziehbare Durchführung dieser Berechnung wurde gezeigt, dass die anfängliche Vermutung der tatsächlichen Geschwindigkeit entspricht. Zudem wurde der Differentialquotient geometrisch interpretiert und erläutert, dass es sich um die Tangentensteigung handelt. Schlussendlich wurde der Begriff der Ableitungsfunktion definiert. Sämtliche Ausführungen, Rechenwege und Definitionen sind vollkommen klar und nachvollziehbar, sodass Schülerinnen und Schüler der gesamten Argumentation folgen können.

Ähnlich wie in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ wird in „*Mathematik verstehen 7*“ der Differentialquotient durch eine Bewegungsaufgabe eingeführt. Auch hier handelt es sich um die Funktion $s(t) = 5t^2$, die den zurückgelegten Weg eines Bungee-Jumpers beschreibt. Es handelt sich hierbei nicht nur um das gleiche Beispiel mit identer Funktionsgleichung, sondern auch um ähnliche Aufgabenstellungen. Zu Beginn soll die mittlere Geschwindigkeit im

¹³⁸ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*. (Wien 2016), S.36.

Intervall $[1; 4]$ ermittelt, anschließend eine allgemeine Formel für das Intervall $[t; z]$ gefunden und schlussendlich die exakte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden.¹³⁹ „*Mathematik verstehen 7*“ und „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ bedienen sich demnach im Hinblick auf die Einführung des Differentialquotienten des selben Zugangs. Ein wesentlicher Unterschied liegt allerdings im Aufbau der Kapitel. In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ wird anfänglich die mittlere Änderungsrate eingeführt, im Rahmen von zahlreichen Beispielen anschließend geübt und gefestigt, bevor schlussendlich die Berechnung der momentanen Geschwindigkeit gezeigt wird. Da die mittlere Änderung einer Funktion allerdings im Stoffgebiet der sechsten Klasse zu finden ist, wird in „*Mathematik verstehen 7*“ auf all diese theoretischen Aspekte und rechnerischen Beispiele verzichtet. Hier wird die mittlere Änderung vorausgesetzt, nur kurz angesprochen und umgehend die momentane Änderungsrate eingeführt.

Ähnlich wie in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ werden auch in „*Mathematik verstehen 7*“ die mittlere und die momentane Änderungsrate im Anschluss an ihre Definitionen graphisch interpretiert. Auch hier wird der Fokus – der Thematik entsprechend – auf die Tangentengleichung gelegt. Schlussendlich wird darauf eingegangen, dass der Differentialquotient bislang nur für einzelne Stellen ermittelt wurde. Ist es allerdings möglich, jeder Stelle x eines Definitionsbereichs die momentane Änderung $f'(x)$ zuzuordnen, so kann auch die Funktion f' betrachtet werden, die im Wesentlichen wie in der Fachliteratur definiert wird.¹⁴⁰ Hier schließt sich der Kreis: beginnend mit der Frage nach der momentanen Geschwindigkeit eines Körpers endet der theoretische Input mit der Definition der Ableitungsfunktion.

Sowohl „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“, als auch „*Mathematik verstehen 7*“ führen die Thematik der Differentialrechnung sehr ähnlich ein. Dies ist allerdings nicht nur in diesen Schulbüchern, sondern auch in weiteren wahrnehmbar. Die vorliegende Diplomarbeit hat im Rahmen dieses Kapitels demnach sehr deutlich gezeigt, dass die Einführung der Ableitungsfunktionen in den Schulbüchern über weite Strecken ident ist. Sie unterscheiden sich lediglich in der Wiederholung bereits vorangegangener Lerninhalte und den Formulierungen der einzelnen Definitionen. Im nachfolgenden Kapitel wird nun beleuchtet, inwieweit die

¹³⁹ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 7*. (Wien 2016), S.12f.

¹⁴⁰ ebd., S.30.

einzelnen Ableitungsregeln reeller Funktionen in den Schulbüchern vorhanden sind und in welcher Form diese bewiesen werden. Aufgrund der sehr ähnlichen Einführung in die Thematik der Differentialrechnung wurde im Rahmen dieser Arbeit das Schulbuch „*Thema Mathematik 7*“ bewusst vernachlässigt. Im Zuge dessen wird der Fokus im nächsten Kapitel auf eben dieses Lehrbuch gelegt.

4.3.2 Beweise von Ableitungsregeln

Auf den nachfolgenden Seiten der vorliegenden Diplomarbeit werden die verschiedenen Ableitungsregeln und ihre Beweise untersucht, die in den gängigen Schulbüchern zu finden sind. Grundlage stellt hierbei das Lehrbuch „*Thema Mathematik 7*“ dar. Jedem Beweis aus diesem Buch wird ein weiterer aus „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ oder „*Mathematik verstehen 7*“ gegenübergestellt.

4.3.2.1 Die Ableitung von Potenz- und Polynomfunktionen

Die gängigste Funktionsart im Hinblick auf den Schulunterricht ist die Polynomfunktion. Obgleich auch andere Funktionstypen für Modellierungsprozesse in der Sekundarstufe II gelehrt und verwendet werden, ist die Polynomfunktion in mehreren Bereichen vertreten. Beispiele hierfür sind die Diskussion derartiger Funktionen, aber auch Beispiele aus der Wirtschaft und den Naturwissenschaften. Um allerdings die Ableitung einer solchen Funktion bilden zu können, bedarf es entsprechenden Ableitungsregeln, nämlich der Summen- und der Potenzregel.

In „*Thema Mathematik 7*“ wird zuerst in Form eines Musterbeispiels die Aufgabe gestellt, durch die Definition des Differentialquotienten zu zeigen, dass für differenzierbare Funktionen f und g gilt, dass $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. Anschließend wird die Vorgehensweise verbal beschrieben: die Ableitungen der Summe wird anfänglich mithilfe des Grenzwerts eines

Differenzenquotienten angeschrieben und in weiterer Folge vereinfacht. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis: } (f + g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).^{141}
 \end{aligned}$$

□

Der Beweis selbst ist nachvollziehbar und klar. Dies liegt vor allem daran, dass innerhalb der Ausführung mehrere Schritte vorhanden sind, die es ermöglichen, der Beweisführung zu folgen. Der Summenregel folgt die Produktregel, die im Rahmen dieser Arbeit hingegen erst im nächsten Kapitel beleuchtet wird. In „Thema Mathematik 7“ wird diese Regel allerdings dafür verwendet, um die Ableitungen von x^2, x^3, x^4 und x^5 bestimmen zu können und in weiterer Folge durch diese Ergebnisse die Potenzregel einführen zu können. So wird gezeigt, dass $(x^2)' = (x * x)' = x' * x + x * x' = 1 * x + x * 1 = 2x$. In weiterer Folge erhält man für $(x^3)' = 3x^2$, für $(x^4)' = 4x^3$ und für $(x^5)' = 5x^4$. Im Lehrbuch wird nun auf ein Muster aufmerksam gemacht: Der Exponent wird mit dem Koeffizienten multipliziert und gleichzeitig um 1 verringert. Allgemein gilt: $[x^n]' = n * x^{n-1}$.¹⁴²

Diese Erkenntnis wird durch den folgenden Beweis bestätigt.

$$\begin{aligned}
 \text{Beweis:} \quad \text{Wenn } f(x) &= x^n, \text{ dann gilt } f(x+h) = (x+h)^n. \text{ Aufgrund des Binomischen} \\
 \text{Lehrsatzes folgt } (x+h)^n &= \binom{n}{0} * x^n + \binom{n}{1} * x^{n-1} * h + \binom{n}{2} * x^{n-2} * h^2 + \dots + \binom{n}{n} * h^n. \\
 \text{Die Binomialkoeffizienten selbst sind natürliche Zahlen, } \binom{n}{0} &= 1 \text{ und } \binom{n}{1} = n. \text{ Daraus folgt} \\
 (x+h)^n &= x^n + n * x^{n-1} * h + h^2 * (...), \text{ wobei } (...) \text{ einen Term darstellt, der in weiterer} \\
 \text{Folge nicht relevant sei. Nun gilt } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n * x^{n-1} * h + h^2 * (...)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [n * x^{n-1} + h * (...)] = n * x^{n-1}.^{143}
 \end{aligned}$$

□

¹⁴¹ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.54.

¹⁴² vgl. ebd., S.56.

¹⁴³ vgl. ebd., S.56.

Der Beweis selbst scheint über weite Strecken klar und verständlich. Sämtliche Schritte werden verbal beschrieben, um keinerlei Unklarheiten zuzulassen. Lediglich der Ausdruck (...) scheint an dieser Stelle fraglich. Es wird zwar während der Beweisführung beschrieben, dass es sich um einen Term handelt, der allerdings nicht relevant sei. Es wird aber nicht begründet, warum dem so ist. Man hätte zumindest im letzten Schritt erörtern können, dass für $h \rightarrow 0$ der Ausdruck $h * (...)$ gegen 0 strebt und die Kenntnis des Klammersausdrucks demnach nicht nötig ist.

Sowohl die Summen- als auch die Potenzregel sind in „Thema Mathematik 7“ enthalten und werden nachvollziehbar bewiesen. Interessant scheint die Tatsache, dass innerhalb des Kapitels auch die Produktregel angeführt und bewiesen wird. Sie wird nämlich dafür benutzt, um die Potenzregel einzuführen. Dies ist ein interessanter Zugang, die Herangehensweise selbst ist in den untersuchten Schulbüchern allerdings einzigartig. In den anderen Lehrbüchern werden sie getrennt betrachtet.

In „Mathematik verstehen 7“ sind ebenso Beweise für die Ableitung von Polynomfunktionen enthalten. Im Vergleich zu „Thema Mathematik 7“ wird hier bei der Potenzregel allerdings nicht der Binomische Lehrsatz, sondern die Regel von Horner verwendet, wie die nachfolgende Herleitung zeigt:

$$\text{Beweis: Sei } f(x) = x^n, \text{ dann gilt nach eben dieser Regel } f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z^n - x^n}{z - x} =$$

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{(z-x) * (z^{n-1} + z^{n-2} * x + z^{n-3} * x^2 + \dots + z * x^{n-2} + x^{n-1})}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} (z^{n-1} + z^{n-2} * x + \dots + z * x^{n-2} + x^{n-1}),$$

wobei der Klammersausdruck selbst aus n Summanden besteht. Strebt z nun gegen x, so gilt $x^{n-1} + x^{n-2} * x + \dots + x * x^{n-2} + x^{n-1} = (x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1})$. Da innerhalb der Klammer nach wie vor n Summanden vorhanden sind, folgt $f'(x) = n * x^{n-1}$.¹⁴⁴ □

Auch diese Beweisführung ist klar und verständlich. Prinzipiell lässt sich bei der Analyse von Schulbüchern feststellen, dass Beweise stets mit einer Vielzahl von Schritten geführt werden, die teilweise weggelassen werden könnten. Dies lässt sich darin begründen, dass es den Lernenden sonst schwerfallen würde, der Argumentation zu folgen.

¹⁴⁴ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 7. (Wien 2016), S.30.

Der Beweis für die Potenzregel wurde in „*Mathematik verstehen 7*“ und in „*Thema Mathematik 7*“ unterschiedlich geführt: wurde innerhalb der Herleitung in dem einen Lehrbuch der Binomische Lehrsatz verwendet, stützte sich das andere Schulbuch auf die Regel von Horner. Beide Beweisführungen sind korrekt und vollständig. Didaktisch sinnvoll wäre allerdings auch der jeweils andere Beweis gewesen. Dadurch würden die Schülerinnen und Schüler einen weiteren Zugang sehen und dadurch erneut begreifen, dass es in der Mathematik eine Vielzahl an Lösungen und Herleitungen gibt. Im Vergleich dazu lässt sich hingegen feststellen, dass der Beweis für die Summenregel in beiden Lehrbüchern über weite Strecken ident ist.

4.3.2.2 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Um die Potenzregel einführen zu können, wurde in „*Thema Mathematik 7*“ anfänglich die Produktregel formuliert und bewiesen. In diesem Zusammenhang wird angegeben, dass für zwei Funktionen f und g gilt, dass $[f * g]' = f' * g + f * g'$. Die Herleitung hierfür wird folgendermaßen geführt.

Beweis: Aufgrund der Definition des Differentialquotienten gilt:

$$\begin{aligned}
 (f * g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f * g)(x + \Delta x) - (f * g)(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x)) - (f(x) * g(x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) * g(x + \Delta x) - f(x) * g(x + \Delta x) + f(x) * g(x + \Delta x) - f(x) * g(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} * g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
 &= f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x).^{145}
 \end{aligned}$$

□

In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ ist ebenfalls die gleiche Herleitung für die

¹⁴⁵ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.54.

Produktregel enthalten.¹⁴⁶ Es handelt sich hierbei in beiden Schulbüchern um jene Beweisführung, die auch in einer Vielzahl von Fachbüchern zu finden ist. Ein wesentlicher Unterschied im Hinblick auf diese Beweise liegt in ihren Notationen. Anzumerken wäre an dieser Stelle außerdem die Tatsache, dass in „Thema Mathematik 7“ die Ergänzung von $-f(x) * g(x + \Delta x) + f(x) * g(x + \Delta x)$ im dritten Schritt farbig markiert ist, um zu symbolisieren, dass die beiden Ausdrücke hinzugefügt wurden. Dies ist möglich, da sie einander aufheben würden und die Herleitung somit nicht verändern. Es fehlt allerdings eine verbale Aussage dahingehend, was in diesem Schritt konkret passiert und aus welchem Grund dies nötig ist. Schülerinnen und Schüler werden dem eigentlich sehr ausführlichen Beweis aus diesem Grund nicht folgen können, da ihre mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten unzureichend sind, um die Herleitung nachvollziehen zu können. Im Vergleich dazu ist sowohl derselbe Trick, als auch eine passende Begründung in „Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“ vorhanden. Allerdings ist hier die eigentliche Beweisführung deutlich knapper, da einzelne Zwischenschritte nicht angeführt werden. Auch dies ist didaktisch gesehen der falsche Zugang. Wird auf der einen Seite zwar Wesentliches beschrieben, um der Herleitung folgen zu können, fehlen auf der anderen Seite einzelne Schritte, wodurch möglicherweise Unklarheiten entstehen.

Vergleicht man in weiterer Folge die Herleitung der Produktregel mit jener der Quotientenregel, die in „Thema Mathematik 7“ gegeben ist, so ist die über weite Strecken ähnliche Herangehensweise ersichtlich. In diesem Schulbuch wird sie folgendermaßen formuliert:

Satz 18: Für differenzierbare f und g gilt, sofern $g(x) \neq 0$: $\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f' * g - f * g'}{g^2}$.¹⁴⁷

Beweis: Betrachtet wird die Funktion $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Für $q'(x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} q'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q(x+\Delta x) - q(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) * g(x) - f(x) * g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x) * g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) * g(x) - f(x) * g(x+\Delta x)}{\Delta x * g(x+\Delta x) * g(x)}. \end{aligned}$$

¹⁴⁶ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016), S.157.

¹⁴⁷ Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.58.

In weiterer Folge wird die Anwendung eines Tricks angesprochen, denn im Zähler wird der Ausdruck $-f(x) * g(x) + f(x) * g(x)$ hinzugefügt.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)*g(x)-f(x)*g(x+\Delta x)-f(x)*g(x)+f(x)*g(x)}{\Delta x*g(x+\Delta x)*g(x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x+\Delta x)-f(x)]*g(x)-f(x)*[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x*g(x+\Delta x)*g(x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} * \frac{g(x)}{g(x+\Delta x)*g(x)} - \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)*g(x)} * \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.
 \end{aligned}$$

Strebt Δx nun gegen 0, so liefert das

$$f'(x) * \frac{g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)}{(g(x))^2} * g'(x) = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{(g(x))^2}.^{148} \quad \square$$

Auch dieser Beweis ist in der gängigen Fachliteratur in dieser Form enthalten. Auffällig scheinen hier jedoch die verbalen Beschreibungen im Hinblick auf die Beweisführung. Es wird beispielsweise konkret darauf eingegangen, dass im Rahmen eines Tricks der Ausdruck $-f(x) * g(x) + f(x) * g(x)$ hinzugefügt werden muss. Derartige Formulierungen helfen den Schülerinnen und Schülern, der Herleitung folgen zu können. Interessanterweise ist dies bei der Quotientenregel gegeben, fehlt bei der Produktregel jedoch vollkommen.

Im Vergleich zu „Thema Mathematik 7“ wird in „Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“ kein Beweis für die Quotientenregel gegeben. Sie ist zwar als Satz im Lehrbuch zu finden und ebenso zahlreiche Beispiele, zu deren Lösung sie nötig ist, allerdings fehlt ihre Herleitung. Es existiert lediglich eine Aufgabenstellung, innerhalb derer die Schülerinnen und Schüler die Quotientenregel selbst herleiten sollen. Dies geschieht mithilfe dreier Unterpunkte: Zuerst soll der Differentialquotient der Funktion f mit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ an der Stelle x aufgestellt und in die Form $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{g(z)*h(x)-g(x)*h(z)}{(z-x)*h(z)*h(x)}$ gebracht werden. Anschließend ist im Zähler der Ausdruck $-g(x) * h(x) + g(x) * h(x)$ zu ergänzen und zu begründen, aus welchen Gründen dies zulässig sei. Schlussendlich ist dadurch die Quotientenregel herzuleiten.¹⁴⁹ Obgleich im

¹⁴⁸ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.58.

¹⁴⁹ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016), S.159.

selben Lehrbuch die Produktregel vollständig und richtig bewiesen wurde, ist eine Beweisführung für die Quotientenregel nur in dieser Form gegeben. Es stellt sich hier die Frage nach der didaktischen Sinnhaftigkeit. Einerseits wird versucht, Schülerinnen und Schüler im eigenständigen Erarbeiten mathematischer Inhalte zu schulen. Andererseits geschieht dies durch mehrere Unterpunkte, die zu lösen sind, worunter die Selbstständigkeit wiederum leidet. Auf der einen Seite existiert ein Beweis für die Produktregel, an dem sich die Lernenden beim Bewältigen dieser Aufgabe orientieren können. Andererseits wiederum ist keine Lösung für dieses Beispiel vorhanden. Demnach bleiben die Schülerinnen und Schüler im Ungewissen dahingehend, ob ihre Herleitung richtig ist.

Innerhalb des mathematischen Teils dieser Arbeit wurde auch die Kettenregel beleuchtet. Hier wurde gezeigt, dass die damit verbundene Beweisführung komplexer ist als jene von Produkt- und Quotientenregel. In diesem Kapitel wird nun schlussendlich die Einführung und Herleitung der Kettenregel innerhalb der Schulbücher untersucht.

In „Thema Mathematik 7“ wird anfänglich besprochen, was man unter einer Verkettung von Funktionen versteht. Dies geschieht auf Basis eines konkreten Beispiels mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 1 - 2x$. Für $(f \circ g)(x)$ gilt $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - 2x) = (1 - 2x)^3$, für $(g \circ f)(x)$ hingegen $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 1 - 2x^3$. Zudem wird darauf eingegangen, dass innerhalb der Verkettung die Reihenfolge essentiell sei und demnach folgt $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.¹⁵⁰ Anschließend folgt die Formulierung der Kettenregel.

Satz 19: Für differenzierbare Funktionen f und g gilt: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$.¹⁵¹

Der entsprechende Beweis wird lediglich verbal geführt. Es wird darauf hingewiesen, dass $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g} * \frac{\Delta g}{\Delta x}$ gilt, sofern sich $g(x)$ bei einer Änderung um Δx um Δg ändert. Hierfür muss die Änderung Δg allerdings für $f(x)$ eine Änderung von Δf bewirken. Sind f und g nun

¹⁵⁰ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.58.

¹⁵¹ ebd., S.59.

differenzierbar, so sind die Grenzwerte der Differenzenquotienten existent und es gilt $f(g(x))' = f'(g(x)) * g'(x)$.¹⁵²

Beurteilt man diese Einführung der Kettenregel, so sind sowohl positive, als auch negative Aspekte zu erörtern. Auf der einen Seite wird die Begrifflichkeit der Verkettung von Funktionen wiederholt und anhand eines konkreten Beispiels gefestigt. Auch die Definition der Ableitungsregel ist in weiterer Folge korrekt. Auf der anderen Seite wiederum liefert man den Versuch eines Beweises, der allerdings keiner richtigen Herleitung entspricht. Die reine Argumentation ist nicht nachvollziehbar, weder für Fachkundige und noch weniger für Schülerinnen und Schüler.

Misslungener wirkt allerdings die Einführung der Kettenregel in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“. In diesem Schulbuch wird diese Ableitungsregel als Verallgemeinerung der Konstantenregel verstanden. Es wird formuliert, dass für $f(x) = g(h(x))$ gilt, dass $f'(x) = g'(h(x)) * h'(x)$. Ebenso zu finden ist in diesem Zusammenhang eine verbale Erklärung, denn die Kettenregel würde besagen, dass die äußere Ableitung $g'(h(x))$ mit der inneren Ableitung $h'(x)$ multipliziert wird.¹⁵³ Der Definition folgt ein durchgerechnetes Musterbeispiel und zahlreiche Aufgabenstellungen. In einem vorangegangenen Kapitel dieser Arbeit wurde allerdings bereits angesprochen, dass im Vergleich zu anderen Lehrbüchern in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ nur sehr wenige Beweise enthalten sind. Das ist auch an dieser Stelle erneut wahrnehmbar. Obgleich andere Ableitungsregeln in diesem Buch hergeleitet wurden, fehlt eine entsprechende Beweisführung für die Kettenregel gänzlich. Die Autoren geben nicht einmal eine verbale Erklärung, sodass die didaktische Sinnhaftigkeit an dieser Stelle erneut zu hinterfragen ist. Es wird hier lediglich eine Regel angeboten, ohne eine Begründung für deren Gültigkeit aufzuzeigen. Den Heranwachsenden wird dadurch gelehrt, die Kettenregel anzuwenden, sie allerdings nicht zu hinterfragen. Man antwortet in diesem Zusammenhang auf die Frage, wie etwas funktionieren würde, aber nicht auf die Fragestellung, warum dem so ist. Und das ist wohl eines der größeren Probleme im Mathematikunterricht.

In „*Mathematik verstehen 7*“ ist hingegen durchaus eine Beweisführung für die Kettenregel

¹⁵² vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015), S.59.

¹⁵³ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016), S.160.

enthalten. Hierfür wird die Funktion $f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$ verwendet und der Differenzenquotient folgendermaßen umgeschrieben:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{u(v(z))-u(v(x))}{z-x} = \frac{u(v(z))-u(v(x))}{v(z)-v(x)} * \frac{v(z)-v(x)}{z-x}.$$
 Ein Grenzübergang für $z \rightarrow x$ würde folgenden Ausdruck liefern: $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = u'(v(x)) * v'(x)$. Schlussendlich wird allerdings angemerkt, dass dieser Beweis nicht vollgültig sei, da er nur für $v(z) - v(x) \neq 0$ ein entsprechendes Ergebnis liefert. Eine komplette Beweisführung würde existieren, wird allerdings in diesem Schulbuch nicht erläutert.¹⁵⁴ Dennoch stellt diese unvollständige Herleitung die grundlegende Idee gut dar.

Obgleich die Autoren selbst angeben, dass die Herleitung nicht vollgültig sei, ist sie wohl noch die gelungenste innerhalb dieser drei Lehrbücher. In „*Thema Mathematik 7*“ wurde lediglich eine nicht nachvollziehbare verbale Begründung gegeben, in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ fehlte der Beweis sogar gänzlich. Lediglich „*Mathematik verstehen 7*“ bemüht sich, eine entsprechende Beweisführung zu liefern. Auch wenn sie nicht vollgültig ist, ist sie nachvollziehbar. Es wurde zudem angesprochen, dass die Herleitung der Kettenregel komplexer ist und demnach scheint fraglich, ob Schülerinnen und Schüler dieser überhaupt folgen könnten.

4.3.2.3 Die Ableitungsregeln für spezielle Funktionen

In der sechsten Klasse werden verschiedene Arten von Funktionen behandelt. Neben der Potenz- und der Polynomfunktion wären hier Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen oder auch die Logarithmusfunktion zu nennen. Werden in dieser Schulstufe hauptsächlich Modellierungsprozesse durch diese Funktionsarten behandelt, werden in der siebten Klasse auch deren Ableitungsfunktionen und entsprechende Kurvenuntersuchungen gelehrt. In diesem Kapitel wird nun analysiert, wie sich die Einführung der entsprechenden Ableitungsregeln für diese speziellen Funktionen in den gängigen Schulbüchern gestaltet.

¹⁵⁴ vgl. vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 7*. (Wien 2016), S.93.

In „Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“ wird anfänglich eine Regel für die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion hergeleitet. Die Beweisführung gestaltet sich wie folgt.

Beweis: Für $f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{e^z - e^x}{z - x}$. In weiterer Folge setzt man $h = z - x$, das liefert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$. Nun wird h durch $\frac{1}{n}$ ersetzt, wobei n gegen

Unendlich strebt. Dadurch erhält man folgenden Ausdruck: $f'(x) = e^x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$. Setzt man

nun für die Zahl e deren Definition $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ein, so erhält man

$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = e^x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n}} = e^x. \quad \square$$

Diesem Beweis folgt jener für die Ableitungsregel der allgemeinen Exponentialfunktion $f(x) = a^x$.

Beweis: Hierfür kann der Zusammenhang $a^x = (e^{\ln(a)})^x$ verwendet werden. Im Schulbuch folgt nun die entsprechende Regel durch Anwendung der Kettenregel, denn für $f(x) = a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ folgt $f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$.¹⁵⁵ $\square$

In „Lösungswege Mathematik Oberstufe 7“ sind demnach zwei verschiedene Beweisführungen für die natürliche und die allgemeine Exponentialfunktion gegeben. Die erste scheint anfangs sehr gelungen. Durch die Definition des Differentialquotienten wird eben diese Regel bewiesen. Hierbei wird jeder einzelne Schritt verbal beschrieben. Dies hilft, um der gesamten Argumentation folgen zu können. Vorauszusetzendes Wissen aus vorangegangenen Schulstufen wird innerhalb des Beweises wiederholt und somit werden Unklarheiten auf der Stelle ausgemerzt. Ein Beispiel hierfür wäre die Definition der Zahl e , die im entsprechenden Schritt wiedergegeben wird. Diese Beweisführung ist allerdings als fehlerhaft zu kritisieren. Dies liegt darin begründet, dass zwar der Grenzwert für $\frac{1}{n}$ behandelt wurde, was aber nicht ausreicht, um den Grenzwert bestimmen zu können. Ebenso ist an der Tatsache Kritik zu üben,

¹⁵⁵ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016), S.273.

¹⁵⁶ vgl. ebd., S.273.

dass die Bemerkung fehlt, dass die Herleitung nicht vollständig ist. Parallel dazu misslingt die Beweisführung für die allgemeine Exponentialfunktion. Dies lässt sich darin begründen, dass die Kettenregel angewendet wird, die in diesem Schulbuch zwar formuliert, aber nicht einmal bewiesen wird. Es handelt sich demnach eher um ein einfaches Rechenbeispiel und nicht um eine entsprechende Beweisführung. Eine ähnliche Herangehensweise ist beispielsweise auch in „*Mathematik verstehen 7*“ feststellbar.¹⁵⁷ In „*Thema Mathematik 7*“ wiederum wird zwar eine Definition für die allgemeine Exponentialfunktion geliefert, ein entsprechender Beweis fehlt jedoch gänzlich. Allerdings wird diese Ableitungsregel dafür verwendet, um eine weitere Herleitungsmethode für die Potenzregel aufzuzeigen. In diesem Zusammenhang wird gezeigt, dass $[x^n]' = [e^{n \cdot \ln(x)}]' = e^{n \cdot \ln(x)} * [n * \ln(x)]' = x^n * \left(n * \frac{1}{x}\right) = n * x^{n-1}$.¹⁵⁸ $\square$

Ein derartiger Zugang ist in den untersuchten Schulbüchern einzigartig. In keinem anderen Schulbuch ist diese Überlegung enthalten oder gar bewiesen. Demnach ist „*Thema Mathematik 7*“ auch das einzige Buch, das mehr als eine Herleitung für die Potenzregel enthält. Bereits in einem vorangegangenen Kapitel der vorliegenden Arbeit wurde angesprochen, dass es für den Schulunterricht sinnvoll wäre, unterschiedliche Beweismethoden zu behandeln. Dadurch wird den Schülerinnen und Schülern gezeigt, dass innerhalb der Mathematik mehrere Möglichkeiten bestehen, allgemeingültige Sätze zu beweisen.

4.4 Grenzwerte in der achten Klasse

In der achten Klasse werden im Mathematikunterricht nur noch zwei Themen gelehrt: die Integralrechnung und die Normalverteilung. Vor allem im ersten dieser beiden Bereiche scheint die Kenntnis des Grenzwerts nötig, da aus diesem beispielsweise der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, aber auch das unbestimmte Integral resultieren. Die Umsetzung eben dieser Aspekte in den gängigen Schulbüchern wird in den nächsten Kapiteln dieser Arbeit

¹⁵⁷ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 7*. (Wien 2016), S.89.

¹⁵⁸ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 7*. (Linz 2015), S.67.

beleuchtet.

4.4.1 Die Einführung der Integralrechnung

In „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 7*“ war die Einführung in die Thematik der Differentialrechnung sehr gelungen. Wurde hier anfänglich auf die Fragestellung eingegangen, welche Geschwindigkeit ein bewegter Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt habe, sprach man in diesem Zusammenhang in weiterer Folge vom Problem der Momentangeschwindigkeit. Für eben dieses gab es zwar bereits in der Antike Lösungsvorschläge, eine passende Lösung konnte allerdings erst viele Jahrhunderte später gefunden werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde oftmals erwähnt, dass ein derartiger Zugang nötig ist, damit die Heranwachsenden einen groben Überblick der Thematik und auch im Hinblick auf den historischen Kontext erhalten. Einen ähnlichen Zugang bietet „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*“ im Hinblick auf die Einführung der Integralrechnung. Hierbei wird anfänglich angegeben, dass vor allem in physikalischen Anwendungen die Aufgabe oftmals darin besteht, die umgekehrte Richtung der Differentialrechnung zu beleuchten. Geht es nämlich beim Differenzieren in erster Linie darum, die Geschwindigkeit eines Körpers zu ermitteln, so berechnet man durch die entsprechende Gegenoperation den zurückgelegten Weg. In weiterer Folge wird innerhalb des Schulbuchs diskutiert, dass Umkehroperationen den Schülerinnen und Schülern bereits seit der Volksschule geläufig sind und die Umkehrung selbst die Wirkung einer mathematischen Operation rückgängig macht. Die Autoren beenden diese verbale Ausführung mit der Aussage, dass eben diese Tatsache bei der Umkehroperation des Differenzierens anders sei.¹⁵⁹ In weiterer Folge gehen sie dementsprechend auf die Definitionen der Stammfunktion und des unbestimmten Integrals ein:

¹⁵⁹ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*. (Wien 2018), S.6.

Definition der Stammfunktion: Es sind f und F zwei beliebige Funktionen mit derselben Definitionsmenge D gegeben. Man nennt F Stammfunktion von f , wenn gilt: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$.¹⁶⁰

Definition des unbestimmten Integrals: Ist f eine auf einem Intervall I definierte stetige Funktion und ist F eine Stammfunktion von f , dann gilt: $\int f(x)dx = F(x) + c_1$. Gilt für eine Funktion G $G(x) + c_2 = \int f(x)dx$, dann folgt $F(x) - G(x) = c$ $c \in \mathbb{R}$.¹⁶¹

Die in „Lösungswege Mathematik Oberstufe 8“ gegebenen Begriffserklärungen spiegeln sowohl die Idee der Stammfunktion, als auch jene des unbestimmten Integrals passend wider. Die Begriffserklärungen selbst sind klar und verständlich. Zudem ist ein passender Bezug zur Einleitung des Schulbuchs vorhanden: das Integrieren ist zwar die Gegenoperation des Differenzierens, allerdings ist diese Rechenoption nicht eindeutig bestimmt. An dieser Stelle ist jedoch zu kritisieren, dass die Definition der Stammfunktion ein $+c$ enthält.

Ähnlich wie in den Fachwerken folgt im Schulbuch den einführenden Definitionen zuerst eine Tabelle mit den wesentlichen Integrationsregeln und anschließend werden elementare Rechenregeln geliefert. Sowohl die Summen- und die Differenzenregel, als auch die Regel vom konstanten Faktor und die Konstantenregel werden explizit formuliert, bewiesen wird jedoch nur die erste Rechenregel, wobei hier mit der Anwendung des Differenzierens gearbeitet wird. Die beiden anderen Regeln sollen von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer eigenen Aufgabenstellung selbstständig hergeleitet werden.¹⁶²

Der einleitende Abschnitt von „Lösungswege Mathematik Oberstufe 8“ erörterte die Möglichkeit, mittels Integralrechnung den zurückgelegten Weg eines Körpers zu berechnen, wenn dessen Geschwindigkeitsfunktion gegeben ist. Im Vergleich dazu wird das Integral in „Thema Mathematik 8“ durch das Flächeninhaltsproblem eingeführt. Es wird hierbei argumentiert, dass eine Approximation einer krummlinig begrenzten Fläche durch ihre Zerlegung in Streifen möglich ist. Je schmaler diese gewählt werden, desto genauer fällt der

¹⁶⁰ Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 8. (Wien 2018), S.8.

¹⁶¹ ebd., S.9.

¹⁶² vgl. ebd., S.9-11.

angenäherte Flächeninhalt schließlich aus und bei einem entsprechenden Grenzübergang würde man die exakte Fläche erhalten.¹⁶³ Abseits der einführenden Worte ist die Herangehensweise in den beiden Schulbüchern über weite Strecken identisch. Auch in „*Thema Mathematik 8*“ werden anfänglich entsprechende Definitionen für die Stammfunktion und das unbestimmte Integral geliefert. In Folge dessen werden die elementaren Integrationsregeln formuliert und die entsprechenden Beweise durch Differenzieren erneut in Übungsaufgaben geprüft.¹⁶⁴

In den einzelnen Schulbüchern sind neben diesen grundlegenden Einführungen ebenso die partielle Integration und die Substitutionsmethode enthalten. In „*Mathematik verstehen 8*“ wird erstere folgendermaßen formuliert:

Satz 20: Sei f stetig, F eine Stammfunktion von f und g differenzierbar mit stetiger Ableitung.

Dann gilt: $\int_a^b f(x) * g(x) dx = F(x) * g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) * g'(x) dx.$ ¹⁶⁵

Vergleicht man eben diese Formulierung mit all jenen, die in den entsprechenden Fachwerken enthalten sind, so sind in erster Linie die unterschiedlichen Funktionen wahrnehmbar. Otto Forster nutzte für seinen Satz im Integral die Ableitung einer Funktion g , während in diesem Schulbuch wiederum die Funktion f integriert wird. Obgleich das Resultat dasselbe ist, ist diese Herangehensweise in all den Schulbüchern feststellbar.

Unterscheiden sich die einzelnen Formulierungen in den Schul- und Fachbüchern zwar im Hinblick auf ihre Notationen, so sind sich die entsprechenden Beweisführungen über weite Strecken sehr ähnlich. Forster nutzte im Rahmen seiner Herleitung das Differenzieren, der gleiche Zugang wird ebenso in „*Mathematik verstehen 8*“ gewählt.¹⁶⁶

Beleuchtet man hingegen die Substitutionsregel in den gängigen Lehrbüchern, so ähneln die einzelnen Formulierungen nicht einmal im Ansatz jener von Heuser, die im fachmathematischen Abschnitt dieser Arbeit gegeben wurde. Diese war sehr ausführlich und hat vor der eigentlichen Formulierung sehr detailliert wiedergegeben, in welchen Fällen die

¹⁶³ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 8*. (Linz 2015), S.5.

¹⁶⁴ vgl. ebd., S.18-21.

¹⁶⁵ Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 8*. (Wien 2012), S.57.

¹⁶⁶ vgl. ebd., S.57.

Substitutionsregel Anwendung findet. In den Schulbüchern hingegen findet man hingegen die folgende, stark gekürzte Variante:

Satz 21: „Ist f stetig und g differenzierbar, dann ist folgende Substitution möglich: $x = g(u)$ bzw. $dx = g'(u) * du \rightarrow \int f(x) * dx = \int f(g(u)) * g'(u) du$.“¹⁶⁷

Betrachtet man anschließend die in den Schulbüchern enthaltenen Beweise, so ist an dieser Stelle erneut Kritik an den Werken zu äußern. In „*Thema Mathematik 8*“ wird in diesem Zusammenhang die Stammfunktion $F(u)$ von $f(u)$ betrachtet und damit argumentiert, dass bei Ableitung der Funktion nach x aufgrund der Kettenregel $F(g(x))$ folglich eine Stammfunktion von $f(g(x)) * g'(x)$ sein muss.¹⁶⁸ Exakt dieselbe Begründung findet man lediglich mit anderen Notationen in „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*“.¹⁶⁹ Die Aussage an sich ist für Schülerinnen und Schüler weder nachvollziehbar, noch ist sie als Beweis ausreichend. Betrachtet man hingegen die Beweisführung von Harro Heuser, die ebenso Teil dieser Diplomarbeit ist, so stellt sich die Frage, inwieweit solch eine Umsetzung in den beleuchteten Schulbüchern sinnvoll scheint. Die Herleitung an sich ist weder kompliziert, noch besonders umfangreich. Zusätzlich befinden sich die Schülerinnen und Schüler in der letzten Schulstufe und kurz vor der Reifeprüfung. Ist in diesem Zusammenhang nicht anzunehmen, dass man einer solchen Beweisführung folgen könnte?

In „*Mathematik verstehen 8*“ wiederum wird zwar die Substitution als Regel formuliert, eine entsprechende Herleitung fehlt allerdings gänzlich.¹⁷⁰ Hier wäre sogar noch strengere Kritik zulässig. Vor allem im letzten Jahr der mathematischen Ausbildung sollte ein Mindestmaß an entsprechenden Fähigkeiten und Fertigkeiten zu erwarten sein. Dass hier auf komplette Beweisführungen verzichtet wird, selbst auf vage Formulierungen, die in den anderen Lehrbüchern gegeben werden, ist eigentlich nicht zu akzeptieren. Auch hier wird die Frage nach

¹⁶⁷ Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*. (Wien 2018), S.280.

¹⁶⁸ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 8*. (Linz 2015), S.28.

¹⁶⁹ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*. (Wien 2018), S.280.

¹⁷⁰ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 8*. (Wien 2012), S.52.

dem „Warum?“ komplett ignoriert und lediglich das „Wie?“ beleuchtet. Eben diese Kritik wurde bereits an anderen Stellen dieser Arbeit geäußert und wird hier erneut bestätigt.

Ebenso Teil der gängigen Schulbücher sind das bestimmte Integral und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, deren Einführung auf den nachfolgenden Seiten dieser Arbeit analysiert wird.

4.4.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In der Fachliteratur werden vor allem zwei Aspekte der Integralrechnung näher beleuchtet: das Aufsuchen von Stammfunktionen, aber auch die Flächenberechnung, die durch das bestimmte Integral realisiert wird. Dies ist ebenso im Lehrstoff der achten Klasse verankert, demnach im Schulunterricht zu finden und wird nun im Rahmen dieser Arbeit geprüft.

In vorangegangenen Kapiteln der vorliegenden Diplomarbeit wurde das Schulbuch „Lösungswege Mathematik Oberstufe“ immer wieder wegen der vorhandenen Einführungen verschiedener Thematiken gelobt. Die Autoren versuchen, neue Inhalte stets interessant zu gestalten und zugleich historische Rahmenbedingungen und Zusammenhänge aufzuzeigen. Ein ähnlicher Zugang wird ebenso im achten Band bei der Einführung des bestimmten Integrals gewählt. Im Vergleich zur Fachliteratur wird hier mit dem Flächeninhaltsproblem gearbeitet. In diesem Zusammenhang soll die Fläche einer krummlinig begrenzten Fläche bestimmt werden, wobei argumentiert wird, dass diese durch Flächen von Rechtecken angenähert werden kann. Der Zugang entspricht demnach komplett jenem aus der Fachliteratur. Auch in weiterer Folge wird hier auf ähnliche Art und Weise gearbeitet. So werden einerseits Unter- und Obersumme definiert und gezeigt, dass durch feinere Zerlegungen des Intervalls die Annäherung stets exakter wird. Schlussendlich wird das bestimmte Integral als Zahl definiert, die zwischen sämtlichen Unter- und Obersummen liegt, jedoch nicht als Grenzwert betrachtet oder gar angemerkt, dass es sich hierbei um eine derartige Berechnung handelt.¹⁷¹ Auch in den

¹⁷¹ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 8. (Wien 2018), S.22-27.

anderen beiden Schulbüchern der achten Klasse wird derselbe Zugang durch das Flächeninhaltsproblem gewählt. Allerdings ist „*Thema Mathematik 8*“ das einzige Lehrbuch, welches im Hinblick auf das bestimmte Integral den Grenzwert nutzt und folgende Definition liefert.

Definition 25: Ist f eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a; b]$, dann ist das bestimmte Integral von f in den Grenzen von a bis b definiert durch:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) * \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) * \Delta x$. Darin ist x_i ein beliebiger x -Wert im i -ten Intervall; $f(x_i)$ ist also die Höhe des i -ten Rechtecks, seine Breite beträgt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.¹⁷²

Die Begriffserklärung des bestimmten Integrals ist in „*Thema Mathematik 8*“ korrekt und nachvollziehbar, dennoch ist es das einzige Lehrbuch, in dem mit dem Grenzwert gearbeitet wird. Die Grundidee ist zwar in den anderen Schulbüchern ebenso enthalten, dennoch fehlt der nötige Grenzübergang. Dieses Faktum scheint an dieser Stelle nicht nachvollziehbar. Der Grenzwertbegriff ist den Schülerinnen und Schülern seit der sechsten Klasse bekannt. Seine Anwendungen waren auch immer wieder in den Lehrbüchern vorhanden. Beispiele hierfür wären der Differentialquotient und all die Ableitungsregeln, die daraus resultieren. Demnach scheint fraglich, warum im Hinblick auf das bestimmte Integral auf den Grenzübergang verzichtet, oder zumindest in Form einer zusätzlichen Erklärung nicht darauf hingewiesen wird.

In den gängigen Schulbüchern ist ebenso der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung enthalten, durch den bestimmte Integrale berechnet werden können. In „*Mathematik verstehen 8*“ wird dieser wie folgt formuliert.

Satz 22: Ist die reelle Funktion f im Intervall $[a; b]$ stetig und ist F eine beliebige Stammfunktion von f , dann gilt: $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.¹⁷³

Im Vergleich zu dieser Formulierung war jene aus dem fachmathematischen Abschnitt der

¹⁷² Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 8*. (Linz 2015), S.14.

¹⁷³ Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 8*. (Wien 2012), S.18.

vorliegenden Diplomarbeit weitaus detaillierter. Dieses Faktum war oftmals feststellbar in der Gegenüberstellung der Fach- und der Schulmathematik. Im Unterricht und den damit verbundenen Lehrbüchern sind die mathematischen Grundgedanken und -ideen zwar über weite Strecken gegeben, Formulierungen, Beweise und Erläuterungen werden aber auf ein bestimmtes Maß hinuntergekürzt, damit die Heranwachsenden den Inhalten folgen können.

Im Hinblick auf den Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung wird in weiterer Folge die Herleitung aus „Lösungswege Mathematik Oberstufe 8“ beleuchtet.

Beweis: Die Autoren argumentiert anfänglich, dass der Einfachheit halber eine auf dem Intervall $[a; b]$ monoton wachsende Funktion betrachtet wird, die nur positive Funktionswerte annimmt. Zusätzlich wird mit einer Funktion $A(x)$ gearbeitet, die die Fläche bezeichnet, die die Funktion mit der x-Achse im Intervall $[a; x]$ einschließt. In weiterer Folge wird beschrieben, dass eine neue Fläche entsteht, wenn man auf der x-Achse den Abschnitt Δx hinzufügen würde. Die Autoren gehen nun auf drei Möglichkeiten ein, den neuen Flächeninhalt berechnen zu können. Einerseits wäre die Berechnung $A(x + \Delta x) - A(x)$ zielführend, andererseits wäre aber auch das Arbeiten mit Ober- und Untersummen im Intervall $[x; x + \Delta x]$ möglich. Als dritte Option werden sogenannte Zwischensummen beschrieben, durch die die neue Fläche ebenso bestimmt werden kann. Da es sich hierbei um eine monoton wachsende Funktion handelt, existiert eine Zwischenstelle x_i im Intervall $[x; x + \Delta x]$, sodass die Rechtecksfläche mit Breite Δx und Höhe $f(x_i)$ dem neuen Flächeninhalt entsprechen würde. Demnach gilt $A(x + \Delta x) - A(x) = \Delta x * f(x_i)$. Dies wiederum liefert $f(x_i) = \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x}$. Wird Δx nun immer kleiner, so wird dementsprechend auch die neue Fläche immer kleiner und Δx nähert sich immer mehr x . Daher erhält man den Differentialquotienten

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_i) = f(x).$$
 Aufgrund der Tatsache, dass f wiederum die Ableitungsfunktion von A ist, hat man demnach eine Stammfunktion F von f gefunden. Schlussendlich bleibt noch zu zeigen, dass für jede beliebige Stammfunktion gilt, dass $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Setzt man an dieser Stelle $F(x) = A(x) + d$ beziehungsweise $A(x) = F(x) + c$, so lässt sich der Flächeninhalt, der von f und der x-Achse in Intervall $[a; b]$ eingeschlossen wird, auf folgende Art berechnen:

$\int_a^b f(x)dx = A(b) - A(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$. Demnach kann zur Berechnung eines bestimmten Integrals jede beliebige Stammfunktion F von f verwendet werden.¹⁷⁴ □

Obgleich in „*Thema Mathematik 8*“ der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sehr detailliert gegeben wird, fehlt eine entsprechende Herleitung.¹⁷⁵ In „*Mathematik verstehen 8*“ ist im Vergleich dazu hingegen eine Beweisführung enthalten.¹⁷⁶ Dennoch wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit bewusst jene Herleitung aus „*Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*“ gewählt. Es handelt sich hierbei um jenes Schulbuch, dass im Gesamten gesehen die wenigsten Beweise in sämtlichen Bereichen enthält. Dennoch ist die obige Beweisführung sehr detailliert und nachvollziehbar. Besonders auffällig ist an dieser Stelle die verbale Ausführung, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, dem Beweis folgen zu können. Zusätzlich wird im Rahmen der Herleitung mit einer Limesberechnung gearbeitet, sodass sich hier der Kreis schließt. Es wird dadurch erneut gezeigt, dass es sich beim Grenzwert in der Mathematik um ein vielschichtiges Instrument handelt, durch das sich viele Bereiche ergeben.

¹⁷⁴ vgl. Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, *Lösungswege Mathematik Oberstufe 8*. (Wien 2018), S.280.

¹⁷⁵ vgl. Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, *Thema Mathematik 8*. (Linz 2015), S.24.

¹⁷⁶ vgl. Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, *Mathematik verstehen 8*. (Wien 2012), S.18.

5. Resümee

Die eingangs gestellte Forschungsfrage „*Welche Bedeutung hat der Grenzwert in der Mathematik und inwiefern gestaltet sich die Umsetzung im Schulunterricht?*“ lässt sich nun wie folgt beantworten:

Der Grenzwert selbst ist wohl eine der wichtigsten Eigenschaften von Zahlenfolgen, wobei dessen Existenz mit unterschiedlichen Bedingungen verbunden ist. So hat die vorliegende Diplomarbeit beispielsweise gezeigt, dass eine konvergente Folge beschränkt und der Limes selbst eindeutig ist. Darüber hinaus wurde die Cauchyfolge behandelt und bewiesen, dass eben diese stets konvergiert. Dadurch konnten Beispiele von Folgen beleuchtet werden, deren konkreter Grenzwert nicht bekannt war.

Der Limes selbst spielt aber nicht nur im Hinblick auf Zahlenfolgen eine zentrale Rolle, sondern auch in anderen Bereichen der Analysis, die sich durch Grenzwertberechnungen ergeben. Innerhalb der Funktionsanalyse wären in diesem Zusammenhang die Stetigkeit, der Differentialquotient und die Integralrechnung zu nennen. So konnten innerhalb dieser Arbeit verschiedene Arten stetiger Funktionen, deren Ableitungsfunktionen, spezielle Ableitungsregeln und auch der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung durch Limesberechnungen behandelt werden.

Die vorliegende Diplomarbeit setzte sich zudem das Ziel, die Umsetzung des Grenzwerts im Schulunterricht zu beleuchten. Hierfür wurde anhand der drei Schulbuchreihen „*Lösungswege Mathematik Oberstufe*“, „*Thema Mathematik*“ und „*Mathematik verstehen*“ die Einführung, entsprechende Sätze und deren Beweise der oben genannten Themenbereiche analysiert. Festzustellen war in diesem Zusammenhang, dass sich die in den Lehrbüchern vorhandenen Definitionen über weite Strecken gleichen und sich lediglich in ihren Notationen und Beschreibungen unterscheiden. Zudem ist an dieser Stelle zu erwähnen, dass vorhandene Begrifflichkeiten in Schulbüchern jenen in Fachwerken ähneln.

Im Hinblick auf Beweisführungen ist diese Ähnlichkeit über weite Strecken nicht mehr

feststellbar. Innerhalb der zur Analyse verwendeten Schulbücher werden viele Tatsachen und Sätze nicht oder nur unzureichend bewiesen. Einige Herleitungen sind wiederum fehlerhaft. In zahlreichen Bänden werden die Beweise nicht vollständig geführt und darüber hinaus wird darauf nicht einmal eingegangen. Die Tatsache, dass der Grenzwert von Zahlenfolgen eindeutig ist, wurde beispielsweise in keinem der Lehrbücher erwähnt oder gar bewiesen.

Die Schulbuchreihe „*Lösungswege Mathematik Oberstufe*“ umfasst beispielsweise die wenigsten Beweisführungen im kompletten Lehrstoff der Sekundarstufe II. Demnach ist an dieser Stelle anzumerken, dass in der Schulmathematik über weite Strecken nur noch Antworten auf die Frage nach dem „*Wie?*“ geliefert werden, jedoch nicht mehr das „*Warum?*“ beleuchtet und dadurch der eigentliche Kern der Mathematik nicht mehr behandelt wird.

6. Literaturverzeichnis

Herbert Amann, Joachim Escher, Analysis 1. (Basel 2006).

Tilo Arens, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelkorn, Klaus Lichtenegger, Hellmuth Stachel, Mathematik. (Berlin/Heidelberg 2015).

Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 6. (Linz 2015).

Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 7. (Linz 2015).

Clemens Brand, Anita Dorfmayr, Josef Lechner, August Mistlbacher, Alfred Nussbaumer, Thema Mathematik 8. (Linz 2015).

Erhard Cramer, Johanna Nešlehová, Vorkurs Mathematik. Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen. (Heidelberg 2009).

Oliver Deiser, Analysis 1. (Berlin/Heidelberg 2011).

Hans-Jürgen Dobner, Bernd Engelmann, Analysis 1. Grundlagen und Differenzialrechnung. (München 2007).

Klaus Dürschnabel, Mathematik für Ingenieure. Eine Einführung mit Anwendungs- und Alltagsbeispielen. (Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2004).

Helmut Fischer, Helmut Kaul, Mathematik für Physiker 1. (Stuttgart 1990).

Otto Forster, Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. (Wiesbaden 2011).

Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 6. (Wien 2016).

Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 7. (Wien 2016).

Philipp Freiler, Julia Marsik, Markus Olf, Markus Wittberger, Lösungswege Mathematik Oberstufe 8. (Wien 2018).

Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1. (Wiesbaden 2009).

Frank Hofmaier, Rupert Lasser, Analysis 1+2. Ein Wegweiser zum Studienbeginn. (Berlin/Heidelberg 2012).

May-Britt Kallenrode, Rechenmethoden der Physik. Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik. (Berlin/Heidelberg/New York 2003).

Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 6. (Wien 2018).

Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 7. (Wien 2016).

Maria Koth, Günther Malle, Bernhard Salzger, Helge Woschitz, Mathematik verstehen 8. (Wien 2012).

Michael Merz, Mario V. Wüthrich, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen. (München 2012).

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer, Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. (Berlin/Heidelber/New York 2001).

Gerald Schmieder, Analysis. Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker. (Braunschweig/Wiesbaden 1994).

Sherman K. Stein, Einführungskurs Höhere Mathematik II. Bestimmte Integrale. Hauptsätze der Infinitesimalrechnung. (Braunschweig/Wiesbaden 1997).

Guido Walz, Mathematik für Fachhochschule, duale Hochschule und Berufsakademie. Mit ausführlichen Erläuterungen und zahlreichen Beispielen. (Heidelberg 2011).

Lehrplan Mathematik Oberstufe, online unter:
https://bildung.bmbwf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf. (aufgerufen am 28.10.2018).

7. Abstract

7.1 Deutsch

Die vorliegende Diplomarbeit setzt sich mit dem Grenzwert von Folgen auseinander. In diesem Zusammenhang werden anfänglich eben diese und weitere zentrale Begrifflichkeiten definiert und darüber hinaus entscheidende Sätze über konvergente Folgen formuliert und bewiesen. In weiterer Folge setzt sich diese Arbeit das Ziel, die Anwendungen des Grenzwerts in der Mathematik zu beleuchten. Stetige Funktionen, die Differentialrechnung und auch die Integration wären als Beispiele für entsprechende Gebiete zu nennen, da mitunter der Differentialquotient oder auch das bestimmte Integral Resultate von Grenzwertberechnungen sind.

Ebenso Teil dieser Diplomarbeit ist die Umsetzung der oben genannten mathematischen Bereiche im Schulunterricht. Durch die Analyse der drei Schulbuchreihen „*Mathematik verstehen*“, „*Thema Mathematik*“ und „*Lösungswege Mathematik Oberstufe*“ werden einerseits die entsprechenden Einleitungen, Sätze und Beweise geprüft und andererseits miteinander verglichen. Darüber hinaus werden die dadurch erlangten Erkenntnisse jenen aus der gängigen Fachliteratur gegenübergestellt, um auch hier Unterschiede und Gleichheiten herauszuarbeiten. Hier lässt sich feststellen, dass innerhalb der Schulbücher zahlreiche Unterschiede im Hinblick auf Formulierungen und Erläuterungen gegeben sind. Zudem sind zahlreiche Beweisführungen unvollständig oder fehlen gänzlich. Zu kritisieren scheint an dieser Stelle, dass der Mathematikunterricht eher die Frage nach dem „Wie?“ behandelt und die Frage nach dem „Warum?“ – von der die Mathematik lebt – außer Acht lässt.

7.2 Englisch

The present diploma thesis deals with the limit of sequences. In this context, these and other

central terminologies are initially defined and furthermore, crucial sentences about convergent sequences are formulated and proven. Consequently, this thesis aims to examine the limit's applications in mathematics. Constant functions, the differential calculus as well as the integration are to be named as examples of respective areas, since the differential quotient or the definite integral are results of limit calculations.

Also part of this diploma thesis is the implementation of the aforementioned mathematical areas in the school lessons. By analyzing the three textbooks *Mathematik verstehen*“, „*Thema Mathematik*“ and „*Lösungswege Mathematik Oberstufe*“, the corresponding introductions, sentences and proofs are looked at and compared with each other. In addition, the obtained findings are contrasted with the ones from the subject literature in order to explain differences and similarities. It can be noted that there are considerable differences in terms of formulations and explanations within the textbooks. Moreover, numerous argumentations are incomplete or entirely absent. What needs to be criticized at this point is that the “how?” is rather approached than the “why?” within the mathematic lessons.