



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Verborgene Geheimnisse von Sonnenblumen, Drohnen
und Kaninchenvermehrung
**Die Fibonacci-Zahlen und ihre Anwendungen in
Mathematik und Biologie**“

verfasst von / submitted by

Marlene Binder

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 445

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Mathematik, Biologie und Umweltkunde

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, am 12. März 2017

Marlene Binder

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung	i
Vorwort	vii
1 Einführung und Grundlagen	1
1.1 Die Anfänge der Fibonacci-Zahlen	2
1.2 Das Kaninchenproblem und die Rekursionsformel	5
1.3 Außergewöhnliche Summenformeln	8
1.3.1 Drei grundlegende Summenformeln	9
1.3.2 Die alternierende Summe von Fibonacci-Zahlen	10
1.3.3 Die Summe der Quadrate von Fibonacci-Zahlen	10
1.3.4 Die Summe von Produkten benachbarter Folgenglieder	11
1.3.5 Die halbarithmetische Summe	12
1.3.6 Die „umgedrehte“ halbarithmetische Summe	13
1.4 Spezielle Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen	13
1.4.1 Eine interessante Vernetzung	13
1.4.2 Die Identität von d’Ocagne	14
1.4.3 Die Simpson-Identität	15
1.4.4 Die Identität von Catalan	16
1.4.5 Eine Beziehung von vier „benachbarten“ Fibonacci-Zahlen	17
1.5 Die Formel von Binet – Explizite Darstellung	17
1.5.1 Eine Herleitung der Binet-Formel	17
1.5.2 Ein Beweis der Binet-Formel	19
1.5.3 Eine interessante Abschätzung der Fibonacci-Zahlen	20
1.5.4 Einige Folgerungen aus der Binet-Formel	20
1.6 Die Zeckendorf-Darstellung	21
1.7 Die Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes	23
1.8 Die Lucas-Folge	24
1.8.1 Beziehungen zwischen Lucas-Zahlen	26
1.8.2 Beziehungen zwischen Fibonacci- und Lucas-Zahlen	27
2 Fibonacci-Zahlen in der Linearen Algebra	29
2.1 Die Binet-Formel – eine etwas andere Herleitung	30
2.2 Die Darstellung als Determinanten von Matrizen	33
2.3 Verschiedenste Fibonacci-Identitäten	35
2.4 Die Fibonacci-Vektoren und Lukas-Vektoren	37

3	Fibonacci-Zahlen in der Zahlentheorie	43
3.1	Ein zahlentheoretischer Exkurs	44
3.1.1	Teiler und größter gemeinsamer Teiler	44
3.1.2	Vielfache und kleinstes gemeinsames Vielfache	47
3.1.3	Kongruenzen und Restklassen	47
3.1.4	Binomialkoeffizient und Gaußklammer	50
3.2	Die Fragestellung von Lamé	51
3.3	Die Fibonacci-Zahlen und ihre Teilbarkeiten	52
3.3.1	Bedeutende Teilbarkeitseigenschaften	52
3.3.2	Aussagen über Quotienten von Fibonacci-Zahlen	59
3.3.3	Teilbarkeitskriterien zu Fibonacci- und Lucas-Zahlen	63
3.4	Die Fibonacci-Folge <i>modulo</i> m	64
3.4.1	Die Periodenlänge <i>modulo</i> m	65
3.4.2	Die Fibonacci-Folge <i>modulo</i> p ($p \dots$ Primzahl)	68
3.5	Die Pythagoräischen Zahlentripel und abc-Tripel	71
3.5.1	Die Pythagoräischen Tripel	71
3.5.2	Die abc-Tripel	73
3.6	Der Binomialkoeffizient und die Fibonacci-Zahlen	75
3.6.1	Das Pascal'sche Dreieck und der Binomialkoeffizient	75
3.7	Quadrat- und Kubikzahlen der Fibonacci-Folge	80
4	Fibonacci-Zahlen in der Analysis & Stochastik	81
4.1	Grundlagen aus der Analysis	82
4.2	Die Fibonacci-Folge: Konvergenz oder Divergenz?	86
4.3	Der Grenzwert Φ	87
4.3.1	Die Folge von Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen	87
4.3.2	Der unendliche Kettenbruch	88
4.3.3	Die Folge einer interessanten Quadratwurzel	89
4.3.4	Die Folge der n -ten Wurzel von Fibonacci-Zahlen	89
4.3.5	Die „geschachtelte“ Wurzel	90
4.4	Die Fibonacci-Zahlen und ihre Reihen	91
4.4.1	Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}$	91
4.4.2	Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^j}}$	91
4.4.3	Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$	92
4.4.4	Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i}$	93
4.4.5	Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2^n}}$	95
4.4.6	Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}}$	96
4.4.7	Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}}$	98
4.5	Die Fibonacci-Zahlen und ihre Potenzreihe	99

4.6	Die Fibonacci-Funktion	101
4.7	Grundlagen aus der Stochastik	103
4.7.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	104
4.7.2	Die Zufallsvariable	105
4.8	Der Münzwurf und die Fibonacci-Zahlen	106
4.8.1	Der Erwartungswert von Kopf-Kopf	106
5	Fibonacci-Zahlen in der Geometrie	109
5.1	Der goldene Schnitt	110
5.1.1	Die Geschichte des goldenen Schnittes	110
5.1.2	Die Definition des goldenen Schnittes	110
5.1.3	Konstruktionsmöglichkeiten des goldenen Schnittes	112
5.2	Das goldene Dreieck	114
5.3	Das regelmäßige Fünfeck	115
5.4	Das goldene Rechteck	119
5.5	Die logarithmischen Spiralen	121
5.5.1	Die goldene Spirale	121
5.5.2	Die spira mirabilis	123
5.6	Der goldene Winkel	124
5.7	Ein geometrischer Trugschluss	124
6	Fibonacci-Zahlen in der Biologie	127
6.1	Drohnen und ihr Hang zur Haploidie	128
6.2	Das Phänomen der Phyllotaxis	132
6.2.1	Die Blüten- und Fruchtstände von Sonnenblumen	134
6.2.2	Die königliche Frucht – die Ananas und ihre Spiralen	136
6.2.3	Die weiblichen Blütenstände der Föhrengewächse	137
6.2.3.1	Die Kiefernzapfen	137
6.2.3.2	Die Fichtenzapfen	138
6.2.3.3	Die Tannenzapfen	139
6.2.4	Divergenzwinkel in Abhängigkeit der Fibonacci-Zahlen	140
6.2.5	Die Wuchsform von Achsen	142
6.2.6	Die Anzahl von Blattstrukturen	142
6.3	Die logarithmischen Spiralen in der Natur	144
6.3.1	Das Gehäuse von Mollusken	144
6.3.2	Die Cochlea des menschlichen Ohres	146
6.3.3	Die Milchstraße und andere Spiralgalaxien	146
6.3.4	Die Tiefdruckgebiete und ihre Erscheinung	147
6.3.5	Ungewöhnliche Flugbahnen	148
6.4	Die Fibonacci-Zahlen im Menschen	148
6.4.1	Wohldefinierte Proportionen	148
	Zusammenfassung	151
	Abstract	153
	Abbildungsverzeichnis	154

Tabellenverzeichnis	159
Literaturverzeichnis	160

Vorwort

Überblick

Die Mathematik begleitet uns in fast allen Lebensbereichen – ob bewusst oder unbewusst nimmt sie stets an unserem Alltag teil. Sie ist eine Weggefährtin, welcher tragende Funktionen zugeschrieben werden können. Neben den helfenden und unterstützenden Tätigkeiten im Zuge von Aufklärungen von Problemen schafft diese Wissenschaft Brücken zwischen Theorie und Praxis.

Meist wird der Begriff „Mathematik“ in einem Atemzug mit dem Zahlenbegriff genannt. Natürlich besitzen Zahlen einen essenziellen Stellenwert, der jedoch nicht nur auf dem Hantieren dieser beruht, sondern auch auf dem Erkennen von vorhandenen Strukturen und den daraus folgenden Verallgemeinerungen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Einblick in eine der bekanntesten Zahlenreihenfolgen der Welt zu geben und verborgene Geheimnisse dieser aufzudecken. In der Öffentlichkeit erlangte sie in den letzten Jahren vor allem durch den Bestsellerroman *Sakrileg* des Autors *Dan Brown* Aufmerksamkeit. Dieser setzte jene Zahlenreihenfolge bewusst in Szene und schrieb ihr eine Schlüsselrolle zu, indem der Kunstkurator des Louvre, *Jacques Saunière*, bei dessen Ermordung die ersten acht Glieder dieser bedeutenden Zahlenabfolge als Indiz hinterlässt. (vgl. [14], S. 44)

Wir reden hier von keiner geringeren Zahlenkombination als von der Fibonacci-Folge. Bis heute hält die faszinierende Wirkung dieser Zahlenreihenfolge, den sogenannten Fibonacci-Zahlen, an. Namensgeber dieser berühmten Folge ist *Leonardo von Pisa*, ein italienischer Mathematiker, der vor allem unter dem Namen – *Fibonacci* – Bekanntheit erlangte. In seinem im Jahre 1202 verfassten Werk *Liber Abaci*, welches uns Dank einer zweiten Auflage von 1228 erhalten geblieben ist, widmete er sich unter anderem einer besonderen Aufgabenstellung, dem sogenannten „Kaninchenproblem“, die ihn auf diese besondere Zahlenkombination hinführte. (vgl. [68], S. 1)

Doch soll diese Zahlenreihenfolge schon wesentlich früher den Menschen bekannt gewesen sein. Erste Aufzeichnungen gehen auf einen Gelehrten namens *Pingala* um 450 v. Chr. zurück. (vgl. [40], S. 1)

Die Arbeit wird die mathematischen Tiefen dieser außergewöhnlichen Folge ergründen und sie in den unterschiedlichen Bereichen der Mathematik, mit allen uns zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln, durchleuchten. Sowohl zahlentheoretische und geometrische Eigenschaften dieser Folge werden uns, neben der Auseinandersetzung mit den Fibonacci-Zahlen in der Analysis, Stochastik und Linearen Algebra, beschäftigen. Hierbei wird man auf sehr spezielle Zusammenhänge stoßen, die auf den ersten

Blick verwundern, doch bei näherer Betrachtung sehr einleuchtend erscheinen werden. Bei der intensiven Beschäftigung mit den Fibonacci-Zahlen werden wir natürlich auch über den Begriff des *goldenen Schnittes* stolpern. Die Faszination dieses besonderen Teilungsverhältnisses lässt sich bis in die Antike zurückverfolgen. Die Vielfalt der Erscheinungsmöglichkeiten sowie der ästhetische Hintergrund wird uns in Staunen versetzen. (vgl. [8], S. 9)

Nicht nur in der Mathematik verbirgt die Fibonacci-Folge Außergewöhnliches, sondern auch in der Biologie treten diese besonderen Zahlen in Erscheinung. Genauere Beobachtungen von Sonnenblumen, Blattrosetten, Tannenzapfen, aber auch von Ananasfrüchten zeigen erstaunliche Besonderheiten, welche in Kapitel 6 näher erläutert werden. (vgl. [40], Vorwort)

Auch in anderen Lebensbereichen bzw. Themengebieten treten Verbindungen zu den Fibonacci-Zahlen in Erscheinung (vgl. [14], S. 44). Um eine Vorstellung davon zu bekommen, werden nun kleine Einblicke gewährt, wobei im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht wiederkehrend darauf eingegangen wird.

Im musikalischen Bereich wurden einige Komponisten von der Fibonacci-Folge beeinflusst und ließen diese auf musikalische Art und Weise in ihre Werke miteinfließen, beispielsweise die *Tanz-Suite* von *Béla Bartók* (vgl. [14], S. 44-45). Auch bei anderen einzigartigen Meisterleistungen, wie den *Préludes* von *Frédéric Chopin*, *Mozarts Piano Sonaten*, *Wagners Preludium zu Tristan und Isolde* oder *Beethovens 5. Symphonie* kann man Verbindungen zu den Fibonacci-Zahlen finden – ob beabsichtigt oder zufällig, diese Frage bleibt offen (vgl. [48], S. 272-285). Genauere Details und Informationen über die Kombination von Musik und Fibonacci-Zahlen können im Werk [48] im Kapitel „The Fibonacci Numbers and Musical Form“ nachgelesen werden.

Auch in der Bildhauerei, Architektur und Kunst finden sich Schöpfungen, bei welchen Zusammenhänge zu den Fibonacci-Zahlen im Zusammenspiel mit dem *goldenen Schnitt* entdeckt werden können. Es gibt verschiedenste Ansätze, Vermutungen, aber auch Zweifel über die geplanten Absichten der Künstler und Architekten. Große Skepsis besteht beispielsweise gegenüber der Annahme, dass die *Cheopspyramide*, welche auch unter dem Namen *die große Pyramide von Gizeh* bekannt ist, beabsichtigt nach dem Prinzip des *goldenen Schnittes* konstruiert wurde. Wahrscheinlich handelt es sich beim *Parthenon* auf der Akropolis in Athen um das bekannteste architektonische Beispiel, bei welchem das *goldene Rechteck* eine besondere Rolle spielt. *Perikles* veranlasste den Bau um 447 – 432 v. Chr., wobei man davon ausgeht, dass die griechische Architektur sehr eng mit dem *goldenen Schnitt* verbunden war und es sich somit in diesem Fall um keine zufällige Erscheinung handelt. Zwei weitere erwähnenswerte und prominente Beispiele sind der *Dom in Florenz* sowie die *karolingische Königshalle* in Lorsch. (vgl. [8], S. 140-144)

Um abschließend ein moderneres Beispiel zu nennen, bietet sich das UN Hauptquartier in New York an, bei dessen Planung der Architekt *Le Corbusier* höchstwahrscheinlich beabsichtigte den *goldenen Schnitt* als Verhältnis von Gebäudehöhe zu dessen Breite einfließen zu lassen (vgl. [48], 242-243).

Wirft man nun einen Blick auf die Kunst, so darf natürlich ein Name nicht fehlen: *Leonardo da Vinci* (1452-1519). Da dieser außergewöhnliche Künstler über die Kenntnisse

des *goldenen Schnittes* verfügte, ist es nicht verwunderlich, dass sich in einem seiner bekanntesten Werke, der *Mona Lisa*, ein *goldenes Dreieck* sowie Proportionen finden lassen, die das Verhältnis des *goldenen Schnittes* darstellen. (vgl. [8], S. 156-157)

Jedem wird vermutlich die Abbildung des *vitruvianischen Menschen* bekannt sein, wenn auch nicht sofort unter dieser Bezeichnung. Redet man hingegen von der anatomischen Darstellung der Proportionen eines Mannes von *Leonardo da Vinci*, so wird jeder/jedem sofort ein Bild vor ihrem bzw. seinem geistigen Auge erscheinen. Dieses repräsentiert in seiner Perfektion den *goldenen Schnitt*. (vgl. [48], S. 257)

Neben den Werken von *Leonardo da Vinci* findet man auch Verbindungen in Gemälden von *Albrecht Dürer* (1471-1528), beispielsweise in seinem im Jahre 1500 entstandenen *Münchener Selbstbildnis* oder bei *Raffael* (1483-1520) in seinem berühmten Bildnis der *Sixtinischen Madonna* (vgl. [8], S. 152, 155, 157, 158).

Um erneut mit einem modernen Exemplar diese Ausführung zu beenden, eignet sich die Nennung der im Jahre 2007 entstandenen Skulptur *Seed* von *Peter Randall-Page*, welche ebenfalls auf der Geometrie der Fibonacci-Zahlen basiert (vgl. [14], S. 44-45). Bei *Beutelspacher und Petri* [8] sowie bei *Lehmann und Posamentier* [48] können sehr viele dieser Kunstwerke mit den eingezeichneten Hilfslinien betrachtet werden, um so den Zusammenhang besser erkennen zu können.

Diese Zahlen haben eine beachtliche Karriere hingelegt. Neben einem eigenen Journal, *The Fibonacci Quarterly*, welches seit 1963 erscheint, gibt es zahlreiche weitere Werke, Symposien etc. die sich ausschließlich dieser Zahlenreihenfolge verschrieben haben. (vgl. [40], S. 3) Im Jahre 1962 wurde die *Fibonacci Association* in Kalifornien gegründet, welche für die Herausgabe des Journals verantwortlich ist (vgl. [27], S. 288). Das Journal *The Fibonacci Quarterly* beschäftigt sich vorrangig mit neuen Fakten, Anwendungen, Beziehungen sowie herausfordernden Problemstellungen und innovativen Beweisen (vgl. [48], S. 28).

Diesem faszinierenden Phänomen werden wir nun unsere Zeit widmen und uns in den Bann der Fibonacci-Zahlen ziehen lassen. Somit willkommen bei der prominentesten Zahlenreihenfolge der Welt. (vgl. [14], S. 44)

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte aufzufinden, und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.

Die in diese Arbeit miteingebundenen Konstruktionen wurden mithilfe des Programmes *GeoGebra* erstellt und mit „vergleiche“ zitiert. Von mir aufgenommene Bilder sind im Abbildungsverzeichnis als solche gekennzeichnet und werden unter die Rechte CC-BY-NC-SA gestellt.

Motivation

Der Grundstein meiner Motivation für dieses Thema wurde bereits sehr früh gelegt. Der Ausgangspunkt war meine allererste Mathematik-Vorlesung, welche ich an der Universität Wien, bei Herrn Univ.-Prof. Dr. Karl Sigmund, besuchte. Die Zahlenfolge wurde zwar nur am Rande thematisiert, doch dieser kurze Exkurs reichte aus, um eine unglaubliche Faszination in mir auszulösen. Seither verfolgen mich die Fibonacci-Zahlen und der Reiz an dieser Zahlenreihenfolge ließ mich nicht mehr los. Sie kehrte in eini-

gen Vorlesungen und Seminaren wieder und beschäftigte mich abermals. Ich lernte sie aus sehr vielen mathematischen Blickwinkeln kennen, aber nicht nur die Mathematik, sondern auch andere Aspekte wie Architektur, Musik, Biologie, Kunst etc. wurden mit ihr in Einklang gebracht. Durch die zusätzliche Verbindung mit der Biologie – meiner zweiten großen Leidenschaft neben der Mathematik – wusste ich, dass sich die Auseinandersetzung mit dieser Zahlenreihenfolge lohnt und für mich der richtige Weg ist.

Ich hoffe, dass ich diese Begeisterung an all die Leserinnen und Leser meiner Diplomarbeit übertragen kann und sie jene Freude erleben, welche mir durch die Arbeit mit den Fibonacci-Zahlen zuteil wurde.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Menschen meinen herzlichsten Dank aussprechen, die mir diese Ausbildung ermöglicht und mich zu jeder Zeit unterstützt haben.

Zuallererst möchte ich mich bei dir, Peter, recht herzlich bedanken, nicht nur für deine ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit, sondern auch für die Unterstützung während meiner gesamten Studienlaufbahn. Du hast mir sehr großes Vertrauen entgegen gebracht und mir viele Chancen ermöglicht, für die ich dir sehr dankbar bin.

Dank gebührt natürlich auch meinen Eltern und meiner Schwester, die mich tatkräftig unterstützt haben. Ihr habt mir nicht nur die Möglichkeit geboten, diesen kostspieligen Ausbildungsweg in Angriff zu nehmen, sondern ihr seid mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Auch in schwierigen Zeiten konnte ich mich stets auf euch verlassen und ihr habt mich gelehrt, dass man alles erreichen kann, wenn man an sich glaubt.

Zuletzt möchte ich noch meinen Dank meinen Freunden aussprechen. Ihr habt mich während des gesamten Studiums begleitet und diese Zeit zu einer unvergesslichen gemacht. Durch euch habe ich gelernt, dass den Weg gemeinsam zu bestreiten, nicht nur bedeutet einen Lebensabschnitt gemeinsam zu absolvieren, sondern Sorgen, Hoffnungen, Freude und Leid miteinander zu teilen und füreinander einzustehen.

Kapitel 1

Einführung und Grundlagen

Dieses Kapitel soll die Geschichte einer außergewöhnlichen Folge erzählen. Es werden die Anfänge der Fibonacci-Zahlen geschildert und ihr Aufstieg dokumentiert. Danach wird auf die wesentlichen mathematischen Grundkenntnisse und Aspekte eingegangen, wozu neben einer umfangreichen Beschäftigung mit Summen von Fibonacci-Zahlen auch die Auseinandersetzung mit Beziehungen zwischen den einzelnen Folgengliedern gehört. Einen essenziellen Stellenwert nimmt die explizite Darstellungsmöglichkeit der Fibonacci-Zahlen, die sogenannte *Formel von Binet*, ein, deren Herleitung und Beweis näheren Betrachtungen unterzogen werden. Dabei stößt man auch auf eine bemerkenswerte Verbindung zu den natürlichen Zahlen, welche unter dem Namen *Zeckendorf-Theorem* in den Mathematikbüchern Eingang gefunden hat. Im weiteren Verlauf wird die Ausdehnung der Fibonacci-Zahlen auf andere Zahlenbereiche besprochen und ein Zugang zu den Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes geschaffen. Zuletzt wird das Interesse von einer „Zwillingsfolge“, einer der Fibonacci-Folge sehr ähnlichen Zahlenkombination, geweckt, der sogenannten *Lucas-Folge*. Ihre Beziehung zu den Fibonacci-Zahlen wird untersucht und Ergebnisse werden präsentiert. Dieses einleitende Kapitel soll einen Überblick über die wichtigsten Eckpfeiler dieser faszinierenden Zahlenkombination bieten, um einen Weg tiefer in die theoretischen Perspektiven dieser Zahlenreihenfolge zu ebnen und zu gewährleisten, vor allem in Hinblick auf die unterschiedlichen mathematischen Richtungen der darauffolgenden Kapitel.

„In den meisten Wissenschaften reißt eine Generation nieder, was eine andere aufgebaut hat, und was eine eingeführt hat, macht eine andere zunichte. Allein in der Mathematik baut jede Generation ein neues Stockwerk auf das alte Gebäude.“

HERMANN HANKEL
([11], S. 241)

1.1 Die Anfänge der Fibonacci-Zahlen

Die Ursprünge der Fibonacci-Zahlen gehen in Europa auf das im Jahre 1202 veröffentlichte Werk *Liber Abaci* von *Leonardo von Pisa* zurück. Vermutungen deuten jedoch darauf hin, dass diese Zahlenreihe schon wesentlich früher bekannt gewesen ist. Um 450 v. Chr. lassen sich die ersten Aufzeichnungen in einer Abhandlung eines Sanskrit-Grammatikers namens *Pingala* feststellen. (vgl. [40], S. 1)

Pingala soll sich mit einer Sammlung hinduistischer Schriften namens *Veda* beschäftigt haben, welche in Sanskrit verfasst wurde. Sein Interesse galt vor allem dem Versmaß, welches nicht auf einer besonderen Betonung beruhte, sondern alleine durch die Ausdehnung der Silben entstand. Man konnte zwischen langen und kurzen Silben unterscheiden, wobei die Dauer einer längeren genau zwei kürzeren entsprach. Der altindische Gelehrte stellte sich nun die Frage, wie viele Möglichkeiten von unterschiedlichen Vermustern bei vorgegebener, fixer Gesamtdauer existieren. Die Lösung dieser Aufgabenstellung führte ihn zu folgender Zahlenreihenfolge:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots,$$

welche durch eine weitere Ergänzung am Beginn heute unter dem Namen *Fibonacci-Folge* bekannt ist. (vgl. [64], S. 3)

Zuallererst gilt es jedoch zu ergründen, worum es sich überhaupt bei einer Folge und sogenannten Folgengliedern handelt (vgl. [40], S. 1).

Definition 1 (Folge und Folgenglieder). (vgl. [59], S. 23-24)

Wir definieren eine Folge a in einer beliebigen Menge M als eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow M.$$

Falls $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$ gilt, so spricht man von einer reellen oder komplexen Folge. Andere Schreibweisen für die Folge a sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(a_n)_n$ oder kurz (a_n) . Die Folgenglieder werden als $a_1, a_2, a_3, \dots$ angegeben.

Das Werk *Liber Abaci*, welches 1202 von *Leonardo von Pisa* verfasst wurde, ist aufgrund einer Kopie, welche im Jahre 1228 angefertigt wurde, überliefert (vgl. [71], S. 5). Der Begriff „abaci“ leitet sich nicht vom Rechenbrett, auch Abakus genannt, ab, sondern hat seine Wurzeln eher in der Bedeutung der „Rechenkunst“ (vgl. [11], S. 313). Der italienische Autor und Mathematiker dieses Werkes, welcher besser unter dem Namen *Fibonacci* bekannt ist, wurde ungefähr im Jahre 1170 geboren und verstarb um ca. 1240. *Fibonacci* ist die Abkürzung für *Figlio di Bonacci* oder für *Filius Bonaccii*, das übersetzt so viel wie „Sohn des Bonacci“ bedeutet. (vgl. [40], S. 1) Sein Vater besaß nämlich den Kosenamen „Bonaccio“, was gleichbedeutend mit „der Gutmütige“ ist (vgl. [34], S. 84).

Fibonacci entstammte einer wohlhabenden Familie. Sein Geburtsort liegt vermutlich in der Nähe von Pisa, wo er auch die ersten Jahre seines Lebens verbrachte. (vgl. [15], S. 27) Sein Vater, *Guilielmo Bonacci*, war Kaufmann und nahm seinen Sohn schon sehr früh bei seinen beruflichen Tätigkeiten nach Nordafrika mit, da *Fibonacci* das kaufmännische Rechnen erlernen sollte. Genau dort kam er erstmals mit den neun hinduistischen Zahlen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) sowie mit dem Symbol 0 in Kontakt. (vgl.

[48], S. 18-19) Er bemerkte die Vorteile der Verwendung des Zeichens 0 und ergänzte mit dieser zusätzlichen Zahl die hinduistische Zahlensymbolik (vgl. [14], S. 5).



Abbildung 1.1: Leonardo von Pisa

Ein muslimischer Lehrer brachte *Leonardo* in Kontakt mit dem Buch *Hisâb al-jabr w'al-muqabalah*, welches von dem persischen Mathematiker *al-Khowarizmi* verfasst worden war. Dieses Werk beeinflusste *Fibonacci* maßgeblich und lehrte ihn die algebraische Theorie. *Fibonacci* reiste in seinem Leben viel umher, dazu zählten Aufenthalte in Ägypten, Syrien, aber auch in Griechenland, Sizilien und der Provence, wo er sich neben geschäftlichen Gründen auch mit Mathematikern jener Zeit traf, um deren mathematischen Leistungen zu ergründen. (vgl. [48], S. 19) Er lernte weiters die griechische Methode der Definitionen, Beweise und Theoreme kennen. Zudem wurde er von den arabischen Gelehrten nicht nur mit den hinduistischen Zahlen vertraut gemacht, sondern auch mit dem Stellenwertsystem sowie den algorithmischen Abläufen zur Lösung arithmetischer Aufgaben. (vgl. [58], S. 3) Zur Jahrhundertwende um ca. 1200 kehrte *Fibonacci* nach Pisa zurück und widmete sich dort seiner Arbeit an dem Buch *Liber Abaci* (Rechenbuch). (vgl. [48], S. 19)

Sein Anliegen war es, mit diesem Werk, welches auch *Buch des Abakus* genannt wird, die Unterlegenheit des römischen gegenüber dem arabischen Zahlensystem und somit die Vorrangstellung des letzteren aufzuzeigen (vgl. [8], S. 87). Nicht nur das indische-arabische Ziffernsystem brachte dieser italienische Mathematiker nach Europa, sondern auch die Algebra (vgl. [43], S. 3). In seinem Buch kann man sämtliche algebraische und arithmetische Kenntnisse der damaligen Zeit nachlesen (vgl. [71], S. 5).

Bekanntheit erlangte *Liber Abaci* viele Jahre später durch eine simple Aufgabenstellung, welche er im Kapitel 12 seines Werkes behandelte, die zu Lebzeiten *Fibonacci*s nicht als „bemerkenswert“ identifiziert wurde. Er beschäftigte sich mit dem Zuwachs von Kaninchengenerationen unter Berücksichtigung gewisser Parameter. Diese Fragestellung führte ihn zu den berühmten Fibonacci-Zahlen. Jene Modellaufgabe ging unter dem Namen „Kaninchenproblem“ in die Geschichtsanalen ein, doch sie erfreute sich nicht von Beginn an solch großer Beliebtheit wie heute. Dieser Aufgabenstellung werden

wir uns im Abschnitt 1.2 genauer widmen. (vgl. [48], S. 25-27)

Neben der Abhandlung *Liber Abaci* verfasste *Fibonacci* weitere Werke, wie beispielsweise im Jahre 1220 *Practica geometriae*, welches sich mit der Geometrie und Trigonometrie beschäftigt. Hier können neben algebraischen Strategien zur Lösungsfindung geometrischer Fragestellungen auch präzise Vergleiche zu *Euklids* Arbeit nachgelesen werden. Die Werke *Flos* und *Liber quadratorum* wurden im Jahre 1225 fertiggestellt. (vgl. [48], S. 19-20) Die spezielle Zahlenkombination tauchte in keinem seiner anderen überlieferten Werke auf (vgl. [41], S. 197). Jedoch muss man berücksichtigen, dass viele seiner Schriften verloren gegangen sind (vgl. [48], S. 20).

Es vergingen Jahrhunderte, bis diese Zahlen wieder in einem Werk in Erscheinung traten. Angeblich findet man die Kaninchenaufgabe im *Libro di arimeticha* (1571) des Autors *Dionigi Gori*. Im selben Jahr veröffentlichte *Simon Jacob* die vierte Auflage seines *Rechenbüchleins*, welches diese Zahlenabfolge sowie eine Verbindung zum *goldenen Schnitt* anspricht. Bei diesen beiden Werken finden sich aber keine Verweise zum *Liber Abaci*. *Cataneo* kam in einem Schriftstück aus dem Jahre 1567 auf *Fibonacci* zurück. (vgl. [41], S. 230-231) Durch den deutschen Astronom und Mathematiker *Johannes Kepler* (1571-1630) kam es zu einer Erwähnung dieser Zahlenreihenfolge in einer seiner im Jahre 1611 veröffentlichten Schriften. Auch wenn jene Zahlensequenz immer wieder in einigen Publikationen erwähnt wurde, blieb ihre Unscheinbarkeit nach wie vor unangetastet – doch dies sollte sich bald ändern. (vgl. [48], S. 27)

Der Durchbruch gelang dieser Zahlenkombination erst im 19. Jahrhundert, als der französische Mathematiker *Lucas* sich mit dem „Kaninchenproblem“ auseinandersetzte. Dieser beschäftigte sich intensiv mit den daraus resultierenden Zahlen sowie weiteren ähnlichen Zahlenfolgen. (vgl. [43], S. 3) Diese spezielle Zahlenabfolge schaffte es nun die Aufmerksamkeit der mathematischen Gemeinschaft auf sich zu ziehen und erhielt ihren berühmten Namen, unter welchem sie bis heute bekannt ist – die *Fibonacci-Folge*. Diese Bezeichnung verdankt sie eben jenem großartigen französischen Mathematiker namens *François-Édouard-Anatole Lucas*, welcher anschließend, angelehnt an das Muster der Fibonacci-Folge, seine eigene kreierte und definierte, die sogenannte *Lucas-Folge*, mit welcher wir uns kurz in Abschnitt 1.8 beschäftigen werden. Zudem werden immer wieder Parallelen zu dieser, der Fibonacci-Folge doch sehr ähnlichen, Zahlenkombination gefunden. (vgl. [48], S. 27)

Gabriel Lamé (1795-1870), ein französischer Mathematiker, setzte sich mit den Folgentgliedern und deren Anzahl an Stellen auseinander und erkannte einen interessanten Zusammenhang. Aufgrund seines Beweises, welcher in Kapitel 3 nachgelesen werden kann, wurde diese Folge oftmals auch als *Lamé-Folge* bezeichnet. (vgl. [48], S. 29-30)

Leonardo von Pisa gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters (vgl. [12], S. 216). Einige sprechen sogar vom besten europäischen Mathematiker über drei Jahrhunderte hinweg (vgl. [34], S. 85). Einen sehr guten und detaillierten Überblick über den Werdegang sowie das Leben dieses einzigartigen Mathematikers kann man sich bei *Devlin* [15] als auch bei *Posamentier* und *Lehmann* [48] verschaffen.

1.2 Das Kaninchenproblem und die Rekursionsformel

Berühmtheit erlangten *Fibonacci* und sein Werk mit einer relativ „belanglosen“ Aufgabenstellung, welche im Folgenden besprochen wird (vgl. [9], S. 45). Die Problemstellung lautet in der Originalsprache:

„Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur. Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni. Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.“

(*Fibonacci* zitiert nach *Lucas* [44], S. 5)

Das Kaninchenproblem. Wir sehen uns die Vermehrung von Kaninchenpaaren anhand eines „abgeschlossenen“ Modells genauer an. Unser Augenmerk liegt dabei auf dem Zuwachs der einzelnen Kaninchengenerationen, wobei der Start mit null Kaninchenpaaren festgelegt wird. Im ersten Monat kommt das erste Kaninchenpaar hinzu. Ab diesem Zeitpunkt gilt es folgende mathematische Regeln zu beachten:

- (i) Erst im zweiten Lebensmonat wird das Kaninchenpaar fortpflanzungsfähig.
- (ii) Ab dem gebärfähigen Alter wirft das Paar pro Monat ein weiteres Kaninchenpaar.
- (iii) Kein Kaninchen stirbt, wird von außen hinzugefügt bzw. kann diese Gemeinschaft verlassen.

Beim Startpunkt null existiert somit noch kein Kaninchenpaar. Erst im ersten Monat wird nach unserer Voraussetzung genau ein Kaninchenpaar in das Modell eingebracht. Dieses Paar wird nach zwei Monaten fortpflanzungsfähig, wodurch die Anzahl im zweiten Monat bei einem Kaninchenpaar bestehen bleibt. Somit leben aber dann im dritten Monat das „Ursprungspaar“ und ein weiteres junges Kaninchenpaar. Im vierten Monat wirft das „Ausgangspaar“ ein weiteres Paar, währenddessen das andere Kaninchenpaar gebärfähig wird. Verfolgt man das Diagramm, so erkennt man, dass im fünften Mo-

nat bereits fünf und im sechsten Monat schon acht Kaninchenpaare vorhanden sind. (vgl. [9], S. 45-46, [40], S. 3, [70], S. 131)

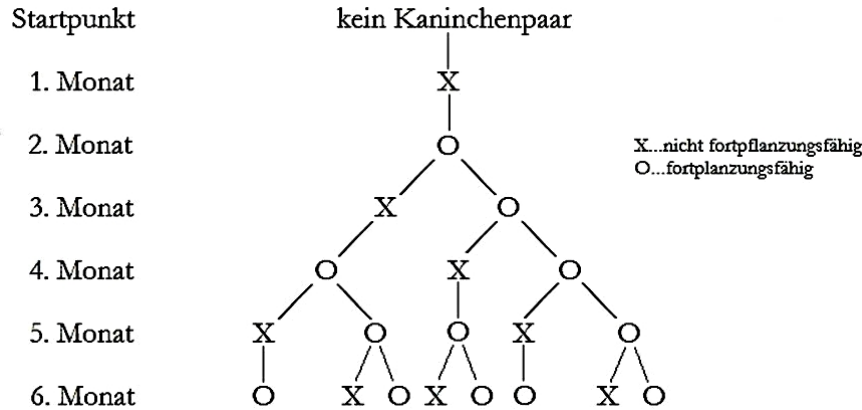


Abbildung 1.2: Kaninchenstammbaum (vgl. [9], S. 46)

Die ursprüngliche Fragestellung bezog sich auf die Anzahl der Kaninchenpaare nach genau einem Jahr, doch *Fibonacci* erwähnte, dass dieses Modell auch auf einen beliebig großen Zeitrahmen ausgedehnt werden kann (vgl. [71], S. 5, 7).

Die Anzahl der Paare im n -ten Monat werden mit f_n definiert. Dadurch ergibt sich:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad \dots$$

Wie viele Kaninchenpaare gibt es jetzt aber im n -ten Monat? (vgl. [9], S. 46)



Abbildung 1.3: Modell der Kaninchenpopulation

Bemerkung 1. Wir definieren die natürlichen Zahlen als $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Satz 1 (Rekursionsformel). (vgl. [9], S. 46)

Sei $n \in \mathbb{N}$, so ergibt die Summe zweier nacheinander auftretender Glieder das nächste Folgenglied. Somit gilt die Rekursionsformel:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \quad (1.1)$$

Beweis. (vgl. [9], S. 46-47, [8], S. 88)

Zum Zeitpunkt des $(n+1)$ -ten Monats sind laut Definition f_{n+1} Paare vorhanden. Jetzt stellen wir uns die Frage, wie viele der f_{n+1} Kaninchenpaare bereits fortpflanzungsfähig sind. Bei unseren Überlegungen hilft uns die Tatsache, dass die Kaninchenpaare erst im Alter von zwei Lebensmonaten gebärfähig werden. Somit können nur jene Kaninchenpaare ein neues Paar zur Welt bringen, die bereits im n -ten Monat existiert und somit mindestens das nötige Alter erreicht haben. Das heißt, dass genau f_n der f_{n+1} Kaninchenpaare fortpflanzungsfähig sind. Somit werfen f_n Paare im $(n+2)$ -ten Monat ein neues Kaninchenpaar. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_{n+2} &= \text{Kaninchenpaare im } (n+2)\text{-ten Monat} \\ &= \text{Kaninchenpaare im } (n+1)\text{-ten Monat} \\ &\quad + \text{Kaninchenpaare, die im } (n+2)\text{-ten Monat auf die Welt gekommen sind} \\ &= f_{n+1} + f_n. \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 2. Ab dem dritten Folgenglied ergeben sich die Werte als Summe der beiden vorangegangenen Glieder (vgl. [21], S. 1.1).

Durch diesen Satz erhält man nun die Möglichkeit, sehr rasch die Ergebnisse von $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ angeben zu können (vgl. [9], S. 47).

$n = 0$	$f_0 = 0$	$n = 10$	$f_{10} = 55$	$n = 20$	$f_{20} = 6765$
$n = 1$	$f_1 = 1$	$n = 11$	$f_{11} = 89$	$n = 21$	$f_{21} = 10946$
$n = 2$	$f_2 = 1$	$n = 12$	$f_{12} = 144$	$n = 22$	$f_{22} = 17711$
$n = 3$	$f_3 = 2$	$n = 13$	$f_{13} = 233$	$n = 23$	$f_{23} = 28657$
$n = 4$	$f_4 = 3$	$n = 14$	$f_{14} = 377$	$n = 24$	$f_{24} = 46368$
$n = 5$	$f_5 = 5$	$n = 15$	$f_{15} = 610$	$n = 25$	$f_{25} = 75025$
$n = 6$	$f_6 = 8$	$n = 16$	$f_{16} = 987$	$n = 26$	$f_{26} = 121393$
$n = 7$	$f_7 = 13$	$n = 17$	$f_{17} = 1597$	$n = 27$	$f_{27} = 196418$
$n = 8$	$f_8 = 21$	$n = 18$	$f_{18} = 2584$	$n = 28$	$f_{28} = 317811$
$n = 9$	$f_9 = 34$	$n = 19$	$f_{19} = 4181$	$n = 29$	$f_{29} = 514229$

Tabelle 1.1: Die ersten 30 Fibonacci-Zahlen

Es darf jedoch nicht vergessen werden, dass es sich hier um ein rein mathematisches Modell handelt, welches keine „reale“ Kaninchenpopulation darstellt. Kaninchen sind weder unsterblich noch erscheinen sie immer genau als Weibchen-Männchen-Paarung. Ebenso handelt es sich in der Realität nicht immer um eine „abgeschlossene“ Population, wo weder Zu- noch Abwanderungen möglich sind. (vgl. [40], S. 3)

Definition 2 (Fibonacci-Zahlen). (vgl. [21], S. 1.1)

Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$ werden anhand folgender Kriterien definiert

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definition 3 (Fibonacci-Folge). (vgl. [8], S. 89)

Die Zahlenreihenfolge $(f_0, f_1, f_2, \dots)$, welche sich durch die Aneinanderreihung der Fibonacci-Zahlen ergibt, wird als Fibonacci-Folge bezeichnet.

Bemerkung 3. Man kann jedoch auch die Fibonacci-Folge mit den Anfangswerten $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$ definieren und somit $f_0 = 0$ weglassen (vgl. [9], S. 47).

Erstmalig erlangte eine rekursive Folge in der mathematischen Geschichte Bekanntheit. Diese Rekursionsformel wurde aber erst einige Jahrhunderte später wieder in einer Publikation von *Albert Girard* im Jahre 1634 erwähnt. (vgl. [11], S. 315)

Nun gilt unsere Aufmerksamkeit einem sehr interessanten Beispiel mit einem vielleicht doch überraschenden Ausgang.

Beispiel 1. Wir betrachten eine Treppe, welche von einem Briefträger Tag für Tag nach einem bestimmten Schema bestiegen wird. Das Muster sieht wie folgt aus:

- (1) Er steigt immer auf die erste Stufe.
- (2) Danach ist es ihm überlassen, ob er eine Stufe oder zwei Stufen mit einem Schritt bewältigt.

Wir definieren vorab $t_0 = 0$ und beschäftigen uns fortan mit der Frage, wie viele Möglichkeiten t_n es für den Postboten gibt, um die n -te Treppenstufe zu erlangen.

Um eine Antwort auf dieses Problem zu erhalten, werden ein paar Überlegungen durchgeführt: Gibt es nur eine Stufe, so existiert auch nur eine Möglichkeit diese zu erreichen. Wie sieht es aber bei zwei Stufen aus? Auch hier existiert nur eine Möglichkeit, da er die erste Stufe in jedem Fall betreten muss und danach mit einem „kleinen“ Schritt die zweite Stufe erklimmt. Demzufolge lautet $t_1 = 1$ und $t_2 = 1$.

Wie viele Möglichkeiten hätte er aber bei $(n+2)$ Stufen? Dazu überlegen wir uns zwei Szenarien: Steht der Briefträger auf der $(n+1)$ -ten Stufe, so hat es t_{n+1} Möglichkeiten gegeben, diese zu erreichen. Somit existieren genau t_{n+1} verschiedene Varianten, um zur $(n+2)$ -ten Stufe zu gelangen. Gehen wir aber davon aus, dass er auf die n -te Stufe tritt und dann direkt mit einem „großen“ Schritt die $(n+2)$ -te Stufe erreicht, so liegen hierfür insgesamt t_n Möglichkeiten vor.

Fasst man diese Ergebnisse zusammen, gelangt man zu dem Resultat:

$$t_{n+2} = t_{n+1} + t_n.$$

Auf diese Weise erkennt man sofort die Verbindung zu den Fibonacci-Zahlen und es gilt: $t_n = f_n$. (vgl. [8], S. 89-90)

1.3 Außergewöhnliche Summenformeln

In diesem Unterkapitel wird im Wesentlichen auf die beiden Werke von *Lausch* [40] und *Worobjow* [71] zurückgegriffen.

Es können sehr viele Summenformeln von Fibonacci-Zahlen mit Hilfe der in Abschnitt 1.2 gewonnenen Rekursionsformel bzw. mit Variationen davon bewiesen werden. Einige dieser Summenformeln könnten, nebenbei bemerkt, auch gleich mit dem Index $i = 1$ beginnen, da keine Veränderung des Summenwertes hervorgerufen wird, zumal die Anfangsbedingung $f_0 = 0$ gilt. (vgl. [40], S. 3)

1.3.1 Drei grundlegende Summenformeln

Satz 2 (Drei grundlegende Summenformeln). (vgl. [40], S. 4)

Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt für

(a) die Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1,$$

(b) die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index (für $n \geq 1$)

$$\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n},$$

(c) die Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen mit geradem Index

$$\sum_{i=0}^n f_{2i} = f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

Beweis. (vgl. [71], S. 8-9, [40], S. 4)

(a) Verwendet man die Rekursionsformel, dann erhalten wir für

$$\begin{aligned} f_0 &= f_2 - f_1 \\ f_1 &= f_3 - f_2 \\ &\vdots \\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}. \end{aligned}$$

Addiert man nun diese Gleichungen und setzt für $f_1 = 1$ ein, so resultiert daraus

$$\sum_{i=0}^n f_i = f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - f_1 = f_{n+2} - 1.$$

(b) Uns ist bereits bekannt, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 \\ f_3 &= f_4 - f_2 \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2}. \end{aligned}$$

gelten. Die Summe dieser Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index ergibt:

$$\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}.$$

(c) Auf diese Aussage kann sehr leicht unter Verwendung von (a) und (b) geschlossen werden. Subtrahiert man von der Summe der ersten $2n+1$ Fibonacci-Zahlen ($f_0 + f_1 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+2} - 1$) die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index ($f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$), so ist das Ergebnis die Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen mit geradem Index. Im letzten Schritt wird wiederum die Rekursionsformel angewendet. Formal sieht dies wie folgt aus:

$$\sum_{i=0}^n f_{2i} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+1} - 1. \quad \square$$

1.3.2 Die alternierende Summe von Fibonacci-Zahlen

Satz 3 (Alternierende Summe der ersten $(n + 1)$ Fibonacci-Zahlen). (vgl. [40], S. 5)
 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt für die alternierende Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} f_i = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1.$$

Beweis. (vgl. [71], S. 9)

Subtrahiert man die in 1.3.1 gezeigten Summenformeln, sprich (c) von (b) und verwendet im Anschluss daran die Rekursionsformel, so präsentiert sich

$$-f_0 + f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + f_{2t-1} - f_{2t} = f_{2t} - f_{2t+1} + 1 = -f_{2t-1} + 1.$$

Addiert man diese Gleichung mit f_{2t+1} , dann führt uns dies zu:

$$-f_0 + f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots - f_{2t} + f_{2t+1} = -f_{2t-1} + 1 + f_{2t+1} = f_{2t} + 1.$$

Beide Gleichungen zusammen liefern uns den Beweis, da für n gerade ($n = 2t$) als auch für n ungerade ($n = 2t + 1$) folgende Aussage gilt:

$$-f_0 + f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \cdots + (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1. \quad \square$$

1.3.3 Die Summe der Quadrate von Fibonacci-Zahlen

Welches Ergebnis könnte die Summe der Quadrate der ersten $(n + 1)$ Fibonacci-Zahlen ergeben? Um eine Annahme bzw. eine mögliche Lösung für diese Summe zu erhalten, veranschaulichen wir uns diesen mathematischen Sachverhalt geometrisch. Dazu werden Quadrate mit Fibonacci-Zahlen als Seitenlängen angefertigt und diese passend aneinander gelegt, beginnend bei $f_1 = 1$. (vgl. [48], S. 39-40)

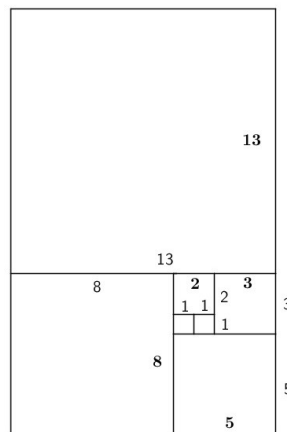


Abbildung 1.4: Summe der Quadrate der ersten acht Fibonacci-Zahlen (beachte f_0^2) (vgl. [48], S. 40)

In unserer Abbildung wurden die Quadrate bis $f_7 = 13$ eingezeichnet. Betrachtet man nun den gesamten Flächeninhalt, so ist dieser gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $f_7 = 13$ und $f_8 = 21$. Demnach kann der Schluss, dass die Summe

der Quadrate der ersten $(n + 1)$ Fibonacci-Zahlen gleich dem Produkt der n -ten und der $n + 1$ -ten Fibonacci-Zahl ist, gezogen werden. Dies muss nur noch für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden. (vgl. [48], S. 39-41)

Satz 4 (Summe der Quadrate der ersten $(n + 1)$ Fibonacci-Zahlen). (vgl. [40], S. 5)
Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt für die Summe der Quadrate der ersten $(n + 1)$ Fibonacci-Zahlen

$$\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_n f_{n+1}.$$

Beweis. (vgl. [71], S. 10, [40], S. 5)

Um diesen Satz beweisen zu können, macht man sich die Tatsache zunutze, dass die Gleichung $f_i f_{i+1} - f_{i-1} f_i = f_i(f_{i+1} - f_{i-1}) = f_i f_i = f_i^2$ für $i = 1, \dots, n$ Gültigkeit besitzt. Dies verdeutlichen wir uns durch nachstehende Formeln genauer:

$$\begin{aligned} f_0^2 &= 0 \\ f_1^2 &= f_1 f_2 \\ f_2^2 &= f_2 f_3 - f_1 f_2 \\ &\vdots \\ f_n^2 &= f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n. \end{aligned}$$

Addiert man anschließend diese Gleichungen, dann präsentiert sich das Ergebnis:

$$\sum_{i=0}^n f_i^2 = f_0^2 + f_n f_{n+1} = f_n f_{n+1}. \quad \square$$

1.3.4 Die Summe von Produkten benachbarter Folgenglieder

Auch die Summe von Produkten benachbarter Fibonacci-Zahlen $\left(\sum_{i=0}^n f_i f_{i+1}\right)$ kann geometrisch ermittelt werden, wobei zwischen zwei Fällen (n gerade und n ungerade) unterschieden werden muss (vgl. [48], S. 48).

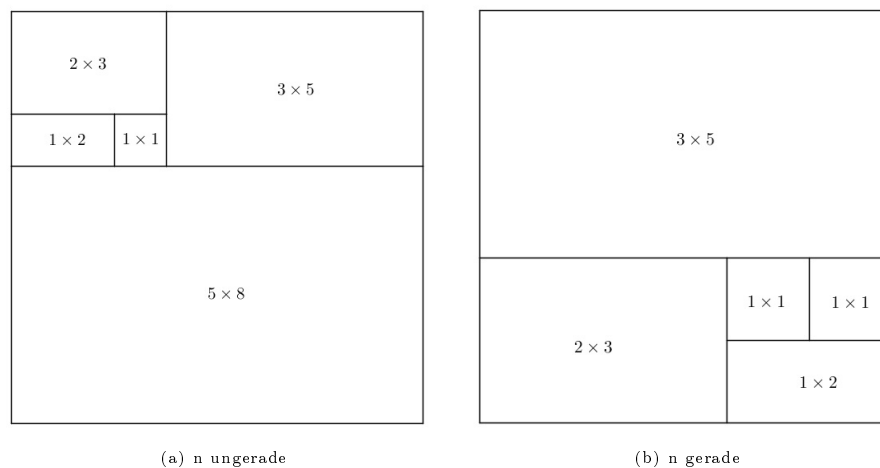


Abbildung 1.5: Summe von Produkten benachbarter Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 48)

Hierzu werden die entstehenden Rechtecke (Produkte benachbarter Fibonacci-Zahlen) geschickt aneinander gelegt, wobei man bei n gerade einen Trick anwendet und ein zusätzliches Quadrat mit der Seitenlänge eins hinzufügt. Erneut fällt das erste entstehende Produkt $f_0 \cdot f_1 = 0$ weg. Die Veranschaulichung zeigt einerseits die Darstellung für $n = 5$ und andererseits die Skizze für $n = 4$. Falls n ungerade ist, entspricht der entstehende Flächeninhalt dem eines Quadrates mit der Seitenlänge der $(n + 1)$ -ten Fibonacci-Zahl. Beim Fall n gerade ergibt sich der gesamte Flächeninhalt ebenfalls durch das Quadrat der $(n + 1)$ -ten Fibonacci-Zahl, wobei man natürlich den Wert eins für das zusätzlich hinzugefügte Quadrat abziehen muss. Wir gelangen zu folgendem Satz, der $\forall n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden muss. (vgl. [48], S. 48-49)

Satz 5 (Summe von Produkten benachbarter Fibonacci-Zahlen). (vgl. [40], S. 5-6)
Für die Summe von Produkten benachbarter Fibonacci-Zahlen gilt

$$\sum_{i=0}^n f_i f_{i+1} = \begin{cases} f_{n+1}^2 & \text{für ungerade } n \in \mathbb{N}, \\ f_{n+1}^2 - 1 & \text{für gerade } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Beweis. (vgl. [40], S. 6)

Beginnend mit dem Fall $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade ($n = 2m + 1$), formulieren wir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m+1} f_i f_{i+1} &= f_0 f_1 + f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i} f_{2i+1} + f_{2i+1} f_{2i+2}) \\ &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m f_{2i+1} (f_{2i} + f_{2i+2}) = f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i+2} - f_{2i}) (f_{2i+2} + f_{2i}) \\ &= f_1 f_2 + \sum_{i=1}^m (f_{2i+2}^2 - f_{2i}^2) = f_1 f_2 + f_{2m+2}^2 - f_2^2 = f_{2m+2}^2 = f_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Als Nächstes wird der Fokus auf den Fall für gerade $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2m$) gelegt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2m} f_i f_{i+1} &= f_0 f_1 + \sum_{i=1}^m (f_{2i-1} f_{2i} + f_{2i} f_{2i+1}) = \sum_{i=1}^m f_{2i} (f_{2i+1} + f_{2i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m (f_{2i+1} - f_{2i-1}) (f_{2i+1} + f_{2i-1}) = \sum_{i=1}^m (f_{2i+1}^2 - f_{2i-1}^2) \\ &= f_{2m+1}^2 - f_1^2 = f_{n+1}^2 - 1. \end{aligned} \quad \square$$

1.3.5 Die halbarithmetische Summe

Satz 6 (Halbarithmetische Summe). (vgl. [40], S. 6)

Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt für die halbarithmetische Summe

$$\sum_{i=0}^n i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2.$$

Beweis. (vgl. [11], S. 706)

Induktionsanfang Dieser führt uns für $n = 0$ zu: $0 \cdot f_0 = 0 = 0 \cdot f_2 - f_3 + 2$. Aufgrund dieser korrekten Gleichung kann die Induktionsvoraussetzung aufgestellt werden.

Induktionsvoraussetzung Wir nehmen an, dass die Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl n gilt.

Induktionsschritt Nun schließen wir von $n \rightarrow (n + 1)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n+1} i f_i &= \sum_{i=0}^n i f_i + (n+1) f_{n+1} \stackrel{Ind.vor.}{=} n f_{n+2} - f_{n+3} + 2 + (n+1) f_{n+1} \\
 &= (n+1) f_{n+2} - f_{n+4} + 2 + (n+1) f_{n+1} \\
 &= (n+1)(f_{n+1} + f_{n+2}) - f_{n+4} + 2 \\
 &= (n+1) f_{n+3} - f_{n+4} + 2.
 \end{aligned}$$

□

1.3.6 Die „umgedrehte“ halbarithmetische Summe

Satz 7 („Umgedrehte“ halbarithmetische Summe). (vgl. [68], S. 11)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die „umgedrehte“ halbarithmetische Summe

$$\sum_{i=0}^n [(n+1) - i] f_i = (n+1) f_0 + n f_1 + (n-1) f_2 + \cdots + 2 f_{n-1} + f_n = f_{n+4} - (n+3).$$

Beweis. (vgl. [40], S. 7)

Dieser Beweis verläuft etwas trickreicher, zumal die Ergebnisse aus Satz 2 und Satz 6 benötigt werden:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n [(n+1) - i] f_i &= \sum_{i=1}^n [(n+1) - i] f_i = \sum_{i=1}^n f_i + \sum_{i=1}^{n-1} f_i + \cdots + \sum_{i=1}^2 f_i + \sum_{i=1}^1 f_i \\
 &= (f_{n+2} - 1) + (f_{n+2} - 1 - f_n) + \cdots + \left(f_{n+2} - 1 - \sum_{i=2}^n f_i \right) \\
 &= n(f_{n+2} - 1) - \left(\sum_{i=n}^n f_i + \sum_{i=n-1}^n f_i + \cdots + \sum_{i=2}^n f_i \right) \\
 &= n(f_{n+2} - 1) - \left(n f_{n+2} - f_{n+3} + 2 - \sum_{i=1}^n f_i \right) \\
 &= n f_{n+2} - n - n f_{n+2} + f_{n+3} - 2 + f_{n+2} - 1 \\
 &= f_{n+3} + f_{n+2} - n - 3 \\
 &= f_{n+4} - (n+3).
 \end{aligned}$$

□

1.4 Spezielle Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen

1.4.1 Eine interessante Vernetzung

Folgender Satz besitzt einen essentiellen Stellenwert in der Theorie der Fibonacci-Zahlen. Durch ihn sind wir erst in der Lage, viele andere Zusammenhänge erkennen und beweisen zu können. (vgl. [40], S. 9)

Satz 8 (Interessante Vernetzung). (vgl. [68], S. 9)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, dann gilt eine interessante Beziehung:

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_nf_{m+1}. \quad (1.2)$$

Beweis. (vgl. [68], S. 9)

Induktionsanfang Für $m = 0$ folgt $f_{n+0} = f_{n-1}f_0 + f_nf_1 = f_n$ und für $m = 1$ ergibt sich $f_{n+1} = f_{n-1}f_1 + f_nf_2 = f_{n-1} + f_n$. Die Aussagen beider Gleichungen sind richtig und wir können somit zum nächsten Punkt des Induktionsbeweises übergehen.

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung möge für zwei beliebige, aber feste natürliche Zahlen m und $(m + 1)$ gelten.

Induktionsschritt Dieser wird von m und $(m + 1)$ auf $(m + 2)$ betrachtet, indem wir

$$f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_nf_{m+1} \text{ und } f_{n+m+1} = f_{n-1}f_{m+1} + f_nf_{m+2}$$

addieren und letztlich als Summe folgendes Ergebnis präsentieren können:

$$f_{n+m+2} = f_{n-1}f_{m+2} + f_nf_{m+3}. \quad \square$$

Einen Spezialfall dieses Satzes erhält man bei Gleichsetzung von m und n :

$$f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_nf_{n+1} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}). \quad (1.3)$$

Somit wurde nebenbei gezeigt, dass sich f_{2n} durch f_n teilen lässt. Des Weiteren kann man folgende Umformung mittels (1.1) vornehmen

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1}) = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n-1} + f_{n+1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2, \quad (1.4)$$

um zur Erkenntnis zu gelangen, dass die Differenzen bestimmter Quadrate von Fibonacci-Zahlen, welche sich um den Index zwei unterscheiden, wieder Fibonacci-Zahlen (mit geradem Index) ergeben. (vgl. [68], S. 10, [40], S. 9) Die nachstehende Gleichung

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &= f_{n+(n+1)} = f_{n-1}f_{n+1} + f_nf_{n+2} \\ &= (f_{n+1} - f_n)f_{n+1} + f_n(f_n + f_{n+1}) \\ &= f_{n+1}^2 - f_nf_{n+1} + f_n^2 + f_nf_{n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

lässt sich durch Satz 8 für $m = (n + 1)$ zeigen (vgl. [40], S. 10).

Analog kann man durch Einsetzen von $m = 2n$ die Gültigkeit der Formel

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{n-1}f_{2n} + f_nf_{2n+1} = f_{n-1}(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) + f_n(f_n^2 + f_{n+1}^2) \\ &= f_{n-1}f_{n+1}^2 - f_{n-1}^3 + f_n^3 + f_nf_{n+1}^2 = f_{n+1}^2(f_{n-1} + f_n) + f_n^3 - f_{n-1}^3 \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 \end{aligned}$$

feststellen (vgl. [68], S. 10).

1.4.2 Die Identität von d'Ocagne

Nachstehender Satz ist nach einem französischen Mathematiker namens *Maurice d'Ocagne*, welcher von 1862-1938 lebte, benannt (vgl. [40], S. 10).

Satz 9 (Identität von d'Ocagne). (vgl. [40], S. 10)

Seien m und n natürliche Zahlen mit $m \geq n$, so gilt folgender Zusammenhang

$$f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (-1)^n f_{m-n}, \quad (1.6)$$

welcher auch unter dem Namen „Identität von d'Ocagne“ bekannt ist.

Beweis. (vgl. [40], S. 10-11)

Betrachtet man den Fall für $n = m$, dann muss

$$f_n f_{n+1} - f_n f_{n+1} = 0 = (-1)^n f_0$$

sein, wodurch die Annahme bestätigt ist.

Nun sehen wir uns den Fall für $m > n$ an und führen den Beweis anhand einer vollständigen Induktion durch.

Induktionsanfang Für $n = 0$ folgt die Gleichung $f_m f_1 - f_0 f_{m+1} = f_m = (-1)^0 f_m$ und für $n = 1$ gilt die Beziehung $f_m f_2 - f_1 f_{m+1} = f_m - f_{m+1} = -f_{m-1} = (-1)^1 f_{m-1}$.

Induktionsvoraussetzung Sei die Behauptung nun für beliebige, aber feste natürliche Zahlen $(n-1)$ und n mit $m > n$ bewiesen.

Induktionsschritt Wir werden nun von $(n-1)$ und n auf $(n+1)$ schließen, wobei $m > (n+1)$ ist. Laut Induktionsvoraussetzung gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} f_m f_n - f_{n-1} f_{m+1} &= (-1)^{n-1} f_{m-n+1} \text{ und} \\ f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} &= (-1)^n f_{m-n}. \end{aligned}$$

Demnach ist für $(n+1)$ folgender Schluss zulässig:

$$\begin{aligned} f_m f_{n+2} - f_{n+1} f_{m+1} &= f_m (f_{n+1} + f_n) - (f_n + f_{n-1}) f_{m+1} \\ &= f_m f_{n+1} + f_m f_n - f_n f_{m+1} - f_{n-1} f_{m+1} \\ &= (f_m f_n - f_{n-1} f_{m+1}) + (f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1}) \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} (-1)^{n-1} f_{m-n+1} + (-1)^n f_{m-n} = (-1)^n (f_{m-n} - f_{m-n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} (f_{m-n+1} - f_{m-n}) = (-1)^{n+1} f_{m-n-1} \\ &= (-1)^{n+1} f_{m-(n+1)}. \end{aligned} \quad \square$$

Ein spezieller Zusammenhang zwischen vier aufeinanderfolgenden Fibonacci-Gliedern ergibt sich, wenn man in die *Identität von d'Ocagne* $m = (n+2)$ einsetzt. Die Beziehung

$$f_{n+2} f_{n+1} - f_n f_{n+3} = (-1)^n$$

kann dadurch sehr einfach aufgestellt werden. (vgl. [40], S. 10)

1.4.3 Die Simpson-Identität

Satz 10 (Simpson-Identität). (vgl. [9], S. 50)

Sei n aus der Menge der natürlichen Zahlen mit $n \geq 1$, demnach unterscheidet sich das Produkt der beiden Fibonacci-Zahlen f_{n+1} und f_{n-1} von f_n^2 nur um ± 1 . Die Gleichung

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad (1.7)$$

wird als die „Simpson-Identität“ bezeichnet.

Beweis. (vgl. [9], S. 50-51)

Um diese Behauptung zu zeigen, wird das Hilfsmittel der Induktion verwendet.

Induktionsanfang Wir überprüfen die Aussagen einerseits für $n = 1$ und andererseits für $n = 2$, wodurch die beiden bestätigenden Gleichungen $f_2 f_0 - f_1^2 = -1 = (-1)^1$ und $f_3 f_1 - f_2^2 = 1 = (-1)^2$ als Ergebnis dokumentiert werden können.

Induktionsvoraussetzung Die Gültigkeit der Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $n \geq 1$ wird vorausgesetzt.

Induktionsschritt Schlussendlich führt man den Induktionsschritt von $n \rightarrow (n + 1)$:

$$\begin{aligned}
 f_{n+2} f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n) f_n - f_{n+1}^2 = f_{n+1} (f_n - f_{n+1}) + f_n^2 \\
 &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} f_{n+1} (f_n - f_{n+1}) + f_{n+1} f_{n-1} - (-1)^n \\
 &= f_{n+1} (f_n - f_{n+1} + f_{n-1}) + (-1)^{n+1} = f_{n+1} \cdot 0 + (-1)^{n+1} \\
 &= (-1)^{n+1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

1.4.4 Die Identität von Catalan

Der nachstehende Satz stellt eine Verallgemeinerung der *Simpson-Identität* dar und erhielt seinen Namen aufgrund *Eugène Charles Catalan*, einem Mathematiker aus Belgien, der zwischen 1814 und 1894 lebte. Wählt man bei jener Identität $k = 1$, so führt dies zur *Simpson-Identität*. (vgl. [40], S. 11)

Satz 11 (Identität von Catalan). (vgl. [40], S. 12)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$, dann gilt die Beziehung

$$f_n^2 = f_{n-k} f_{n+k} + (-1)^{n-k} f_k^2, \quad (1.8)$$

welche auch unter der Bezeichnung „Identität von Catalan“ angeführt wird.

Beweis. (vgl. [40], S. 12)

Für den Fall $n = 0$ erhalten wir die korrekte Aussage $f_0^2 = f_0 f_0 + (-1)^0 f_0^2 = 0$.

Um diesen Satz für $n \geq 1$ zu beweisen, lässt sich f_{n-k} und f_{n+k} unter Verwendung von Satz 8 und Satz 9 folgendermaßen umformulieren:

$$\begin{aligned}
 f_{n-k} f_{n+k} + (-1)^{n-k} f_k^2 &= (-1)^{-k} (f_n f_{k+1} - f_k f_{n+1}) (f_{n-1} f_k + f_n f_{k+1}) + (-1)^{n-k} f_k^2 \\
 &= (-1)^{-k} (f_k f_{k+1} f_{n-1} f_n - f_k^2 f_{n-1} f_{n+1} + f_{k+1}^2 f_n^2 - f_k f_{k+1} f_n f_{n+1}) + (-1)^{n-k} f_k^2 \\
 &= (-1)^{-k} [f_k f_{k+1} f_n (f_{n-1} - f_{n+1}) - f_k^2 f_{n-1} f_{n+1} + f_{k+1}^2 f_n^2] + (-1)^{n-k} f_k^2.
 \end{aligned}$$

Der nächste Schritt beinhaltet die Anwendung von Satz 10 und (1.1) in abgewandelter Form $f_{n-1} - f_{n+1} = -f_n$:

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{-k} [-f_k f_{k+1} f_n^2 - f_k^2 (f_n^2 + (-1)^n) + f_{k+1}^2 f_n^2] + (-1)^{n-k} f_k^2 \\
 &= (-1)^{-k} f_n^2 (-f_k f_{k+1} - f_k^2 + f_{k+1}^2) - f_k^2 (-1)^{n-k} + (-1)^{n-k} f_k^2 \\
 &= (-1)^{-k} f_n^2 [f_{k+1} (f_{k+1} - f_k) - f_k^2] = (1)^{-k} f_n^2 (f_{k+1} f_{k-1} - f_k^2).
 \end{aligned}$$

Nutzt man erneut die Aussage von Satz 10, dann ergibt das:

$$= (-1)^{-k} f_n^2 [f_k^2 + (-1)^k - f_k^2] = f_n^2. \quad \square$$

1.4.5 Eine Beziehung von vier „benachbarten“ Fibonacci-Zahlen

Eine nette Kuriosität wird im Folgenden dargestellt. Wählt man vier aufeinanderfolgende Fibonacci-Glieder $(f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, f_{n+2})$ aus und bildet anschließend die Differenz der Quadrate der inneren beiden Fibonacci-Zahlen, so erhält man genau das Produkt der beiden äußeren Folgenglieder. Mathematisch formuliert, beschäftigen wir uns also mit diesem Sachverhalt (vgl. [64], S. 12):

Satz 12 (Beziehung von vier benachbarten Fibonacci-Zahlen). (vgl. [64], S. 12, 45)
Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 = f_{n-1}f_{n+2}.$$

Beweis. (vgl. [64], S. 45)

Durch „geschicktes“ Umformen kann nachstehendes Ergebnis präsentiert werden:

$$\begin{aligned} f_{n+1}^2 - f_n^2 &= (f_n + f_{n-1})^2 - f_n^2 = f_n^2 + 2f_nf_{n-1} + f_{n-1}^2 - f_n^2 \\ &= f_{n-1}(2f_n + f_{n-1}) = f_{n-1}(f_n + \underbrace{f_n + f_{n-1}}_{= f_{n+1}}) = f_{n-1}f_{n+2}. \quad \square \end{aligned}$$

Selbstverständlich können noch weitere Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen gefunden werden. Die wichtigsten wurden bereits aufgezählt und bewiesen, doch lässt sich eine weitere Identität in Kapitel 3 entdecken, welche uns die Tür zu den *pythagoräischen Tripeln* öffnen wird.

1.5 Die Formel von Binet – Explizite Darstellung

1.5.1 Eine Herleitung der Binet-Formel

Nun widmen wir uns einer neuen Fragestellung: Welche Zahl ergibt das 155-te (f_{155}) oder das 1001-te (f_{1001}) Folgenglied der Fibonacci-Reihenfolge?

Hier ergibt sich eine Schwierigkeit: Um dies beantworten zu können, müsste man mit der rekursiven Darstellung alle Folgenglieder bis zum Gesuchten berechnen. Dies ist natürlich sehr aufwendig und würde einiges an Zeit in Anspruch nehmen. Deshalb beschäftigen wir uns jetzt damit, ob es auch eine direkte Möglichkeit gibt f_n zu erhalten, also eine Formel die unabhängig von ihren Vorgängern ist. Am geeignetsten wäre eine explizite Darstellung, welche nur vom Index $n \in \mathbb{N}$ der Fibonacci-Zahl abhängt. Dies ermöglicht uns die sogenannte *Formel von Binet*. Der Name dieser Formel geht auf den französischen Mathematiker *Jacques Philippe Marie Binet* zurück, welcher von 1786-1856 lebte und diese Formel im Jahre 1843 entdeckte. Angeblich war diese Formel bereits auch schon anderen Mathematikern weitaus früher bekannt. Zu diesen Personen zählen neben *Abraham de Moivre* (1667-1754), *Leonhard Euler* (1707-1783) auch *Daniel Bernoulli* (1700-1782). Obwohl *Binet* vermutlich nicht der „Erst-Entdecker“ dieser Formel war, wird sie meist nur unter seinem Namen geführt. (vgl. [40], S. 15)

Herleitung (vgl. [21], S. 1.1-1.2, [40], S. 18-19)

Zu Beginn betrachtet man Folgen (x_n) , welche der rekursiven Darstellungsweise

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.9)$$

entsprechen, ohne aber noch Anfangswerte festzusetzen. Uns interessiert das Wachstum der Folgenglieder und da diese sehr schnell, sehr große Werte annehmen, vermuten wir, dass ein exponentielles Wachstum vorliegt. Deshalb wird der Ansatz

$$x_n := \lambda^n$$

ausgewählt, wobei es sich bei λ um eine unbekannte Zahl aus der Menge der reellen (oder komplexen) Zahlen handelt, welche noch bestimmt werden muss. Es ergibt sich die rekursive Bedingung:

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n.$$

Dividiert man nun durch λ^n und formt anschließend die Gleichung um, so folgt

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Bei dieser Gleichung handelt es sich um das charakteristische Polynom der Rekursionsformel (1.9). Die Ergebnisse dieser quadratischen Gleichung lauten

$$\lambda_1 = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \Psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \lambda_1 = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Eine besondere Zahl stellt Φ dar, da es sich hierbei um den *goldenen Schnitt* handelt. Auf diesen doch sehr unscheinbar wirkenden Ausdruck werden wir noch des Öfteren zurückgreifen und Verblüffendes entdecken. Doch jetzt wird mit unserer Herleitung fortgefahren. Die Folge

$$x_n := c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \quad \text{mit } n \geq 0$$

erfüllt für beliebige reelle (oder komplexe) Konstanten c_1, c_2 die Rekursionsformel (1.9). Wählt man nun die beiden Konstanten c_1 und c_2 so, dass die Startwerte der Fibonacci-Zahlen gelten, dann resultiert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f_0 = 0 &= c_1 + c_2 \\ f_1 = 1 &= c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{aligned}$$

Daher muss $c_1 = -c_2$ gelten. Zudem erhalten wir durch Einsetzen der Werte von λ_1 und λ_2 die Lösungen für

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Demnach ist man ab jetzt in der vorteilhaften Lage die Fibonacci-Zahlen explizit darstellen zu können:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}.$$

1.5.2 Ein Beweis der Binet-Formel

Satz 13 (Formel von Binet). (vgl. [9], S. 48)

Sei n eine natürliche Zahl, dann lassen sich die Fibonacci-Zahlen explizit durch

$$f_n = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}} \text{ mit } \Phi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ und } \Psi = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ angeben.}$$

Bemerkung 4. Beeindruckenderweise erhält man als Resultat für f_n immer eine natürliche Zahl, da sich die Wurzelterme sehr „geschickt“ aufheben (vgl. [9], S. 48).

Beweis. (vgl. [9], S. 48-49)

Induktionsanfang Die Behauptung wird für $n = 0$ und $n = 1$ überprüft.

Für $n = 0$ folgt:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0 = f_0.$$

Für $n = 1$ präsentiert sich:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Induktionsvoraussetzung Wir nehmen an, dass die Behauptung für beliebige, aber feste natürliche Zahlen n und $(n-1)$ mit $n \geq 1$ gelten.

Induktionsschritt Jetzt wird von $(n-1)$ und n auf $(n+1)$ geschlossen. Hierfür benutzen wir die rekursive Schreibweise $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ sowie die Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right]}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Durch die Tatsache, dass die Aussagen

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

gelten, können wir in unserer Beweisführung fortfahren und erhalten:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

□

1.5.3 Eine interessante Abschätzung der Fibonacci-Zahlen

Satz 14. (vgl. [40], S. 18)

Sei $n \in \mathbb{N} \geq 2$, demnach ist f_n jener Wert aus der Menge der natürlichen Zahlen, welcher sich am wenigsten weit von $\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n$ entfernt befindet. Daher kann folgende Abschätzung aufgestellt werden:

$$f_n \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n + 1.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 18)

Die *Binet-Formel* liefert uns $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^n - \Psi^n]$. Da $|\Psi| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 0,65$ ist, folgt für $n > 1$: $|\Psi^n| = \left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{2}$. Somit muss in jedem Fall auch $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{2}$ sein. Demnach gilt $\left|\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - f_n\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left|\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right| < \frac{1}{2}$. Des Weiteren erhalten wir aufgrund der obigen Abschätzungen:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Psi^n \leq \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\Psi^n\right| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n + 1. \quad \square$$

1.5.4 Einige Folgerungen aus der Binet-Formel

Die *Formel von Binet* ermöglicht es, gewisse Summen von Fibonacci-Zahlen (jene mit Vielfachen von natürlichen Zahlen als Indizes) zu bestimmen. Es wird hierauf jedoch nicht näher eingegangen, doch nutzen wir die Möglichkeit einen Satz mit einigen interessanten Zusammenhängen festzuhalten. Der Beweis kann leicht anhand der *Binet-Formel* eigenständig hergeleitet werden. (vgl. [40], S. 21)

Satz 15. (vgl. [40], S. 21-26)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für

(a) die Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen mit einem durch 3 teilbaren Index

$$\sum_{i=0}^n f_{3i} = \frac{1}{2}(f_{3n+2} - 1),$$

(b) die Summe der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen mit einem durch 6 teilbaren Index

$$\sum_{i=0}^n f_{6i} = \frac{1}{4}(f_{6n+3} - 2),$$

(c) die Summe der dritten Potenzen (für $n \geq 1$)

$$\sum_{i=1}^n f_i^3 = \frac{1}{10}(f_{3n+2} - 6 \cdot (-1)^n f_{n-1} + 5) = \frac{1}{2}(f_n f_{n+1}^2 - (-1)^n f_{n-1} + 1),$$

(d) die Summe der dritten Potenzen der ersten $(n+1)$ Fibonacci-Zahlen mit geradem Index

$$\sum_{i=0}^n f_{2i}^3 = \frac{1}{20}(f_{6n+3} - 12f_{2n+1} + 10) = \frac{1}{4}(f_{2n+1} - 1)^2(f_{2n+1} + 2).$$

1.6 Die Zeckendorf-Darstellung

Jetzt beschäftigen wir uns mit der Darstellung von natürlichen Zahlen $N \geq 1$ mit Hilfe der Fibonacci-Sequenz. Der belgische Mediziner *Edouard Zeckendorf*, welcher von 1901 bis 1983 lebte, befasste sich zeitlebens nur in geringem Ausmaß mit der Mathematik, doch erlangte er folgende interessante Erkenntnis: (vgl. [40], S. 142)

Satz 16 (Zeckendorf-Darstellung). (vgl. [11], S. 324)

Jedes $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ kann als Summe unterschiedlicher, nicht aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen angegeben werden:

$$N = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r},$$

$$\text{mit } k_{j+1} \geq k_j + 2 \text{ für } 1 \leq j \leq r-1 \quad \text{und} \quad k_1 \geq 2.$$

Beweis. (vgl. [66], S. 108)

Falls es sich bei N um eine Fibonacci-Zahl handelt, beispielsweise $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ oder $N = 5$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. $N = 4$ lässt sich auch als $N = 4 = f_4 + f_2$ schreiben und bestätigt daher die Aussage. Angenommen die Behauptung ist für alle N kleiner gleich f_n gültig und es sei $f_{n+1} > N > f_n$. Man kann nun N als $N = f_n + (N - f_n)$ angeben und erkennt, dass $(N - f_n) < f_n$ gilt. Somit existiert eine derartige Darstellung für $(N - f_n)$ und demzufolge auch für N . $\square$

Solch eine Darstellung von N als Summe von Fibonacci-Zahlen mit den oben genannten Kriterien wird auch als *kanonisch* bezeichnet (vgl. [66], S. 108).

Satz 17 (Eindeutigkeit der kanonischen Darstellung). (vgl. [66], S. 108)

Die kanonische Darstellung ist eindeutig.

Beweis. (vgl. [66], S. 108-109, [11], S. 324, [53], S. 22)

Zu Beginn beweisen wir, dass die Fibonacci-Zahl f_n auf jeden Fall in dieser bestimmten Schreibweise von N mit $f_{n+1} > N > f_n$ vertreten sein muss. Denn indirekt angenommen f_n wäre nicht in der *kanonischen Darstellung* von N enthalten, dann könnte der Wert N auch bei Verwendung aller zulässigen Fibonacci-Zahlen nicht erreicht werden. Falls n gerade ist, können wir es in der Form $n = 2k$ anschreiben und erhalten dadurch:

$$f_{2k-1} + f_{2k-3} + \cdots + f_3 = \sum_{i=2}^k f_{2i-1} = f_{2k} - 1 = f_n - 1 < N$$

und für n ungerade, also $n = 2k + 1$:

$$f_{2k} + f_{2k-2} + \cdots + f_2 = \sum_{i=1}^k f_{2i} = f_{2k+1} - 1 = f_n - 1 < N.$$

Somit muss f_n ein Bestandteil der *kanonischen Darstellung* sein. Da $0 < N - f_n < f_{n-1}$ gilt, kann f_{n-1} kein Summand der *kanonischen Darstellung* sein, wodurch eine weitere Bedingung des *Zeckendorf-Theorems* erfüllt ist. Demnach ist der Satz mittels Induktion bewiesen. $\square$

Definition 4 (Zeckendorfsequenz). (vgl. [40], S. 142-143)

Wir bezeichnen eine Folge mit einer endlichen Anzahl an Gliedern $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1})$ mit $\varphi_1 = 1$ und $\varphi_i \in \{0, 1\}$ sowie der Bedingung, dass das Produkt zweier aufeinanderfolgender Glieder immer null ergeben muss ($\varphi_i \cdot \varphi_{i+1} = 0 \ \forall i$ mit $1 \leq i \leq k-2$) als Zeckendorfsequenz.

Bemerkung 5. Das Zeckendorf-Theorem könnte auch mittels Zeckendorfsequenz thematisiert werden, wodurch N mit $f_k \leq N < f_{k+1}$ auch als

$$N = f_k \varphi_1 + f_{k-1} \varphi_2 + \dots + f_2 \varphi_{k-1}$$

angegeben werden hätte können. Demnach wäre $\Phi(N) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1})$ die eindeutige Zeckendorfsequenz von N gewesen. Daher kann jede natürliche Zahl ($N > 0$) nur mit einer einzigen Sequenz dargestellt werden. Umgekehrt gilt natürlich ebenso, dass jede Sequenz genau einer natürlichen Zahl zugeordnet wird. (vgl. [40], S. 143-145)

Jetzt versuchen wir die Zeckendorfsequenz zu einem vorgegebenen Wert zu bestimmen und umgekehrt anhand einer gegebenen Sequenz die dazugehörige natürliche Zahl zu ermitteln (vgl. [40], S. 145-146).

Beispiel 2. Gesucht ist die Zeckendorfsequenz zu $N = 160$. Dazu betrachtet man $f_{12} = 144 \leq 160 < 233 = f_{13}$. Aufgrund der Tatsache dass $\varphi_1 = 1$ sein muss, können wir $160 - 144 = 16$ schreiben. Die Angabe $f_7 = 13 \leq 16 < 21 = f_8$ führt uns zu $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, $\varphi_5 = 0$ und $\varphi_6 = 1$. Es folgt $16 - 13 = 3$ mit $f_4 = 3 \leq 3 < f_5 = 5$, wodurch $\varphi_7 = 0$, $\varphi_8 = 0$, $\varphi_9 = 1$, $\varphi_{10} = 0$ und $\varphi_{11} = 0$ gelten muss. Als Ergebnis erhalten wir:

$$\begin{aligned} N &= f_{12} \varphi_1 + f_{11} \varphi_2 + f_{10} \varphi_3 + f_9 \varphi_4 + f_8 \varphi_5 + f_7 \varphi_6 + f_6 \varphi_7 + f_5 \varphi_8 + f_4 \varphi_9 + f_3 \varphi_{10} + f_2 \varphi_{11} \\ &= f_{12} + f_7 + f_4 = 144 + 13 + 3 = 160. \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Zeckendorfsequenz:

$$\Phi(N) = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0). \text{ (vgl. [40], S. 145)}$$

Beispiel 3. Welche natürliche Zahl verbirgt sich hinter der Zahlensequenz $\Phi(N) = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$? Da es sich um neun Ziffern handelt, muss f_{10} die größte Fibonacci-Zahl sein, welche in der Darstellung vertreten ist. Die Ermittlung der gesuchten Zahl ist daher schon fast geschafft:

$$N = f_{10} + f_8 + f_5 + f_3 = 55 + 21 + 5 + 2 = 83. \text{ (vgl. [40], S. 146)}$$

Proposition 1. (vgl. [40], S. 146)

Die Anzahl der Zeckendorfsequenzen mit genau k Gliedern beträgt f_k .

Beweis. (vgl. [40], S. 146)

Diese Aussage lässt sich sehr einfach beweisen. Jede Zeckendorfsequenz stellt genau eine Zahl aus der Menge der natürlichen Zahl dar und umgekehrt wird jeder natürlichen Zahl nur eine einzige Sequenz zugewiesen. Betrachtet man die Ungleichung $f_{k+1} \leq N < f_{k+2}$, so muss die Sequenz, welche N darstellt, k Ziffern aufweisen. Nun fehlt nur noch die Überlegung, wie viele N zwischen (inklusive) f_{k+1} und f_{k+2} liegen: $f_{k+2} - f_{k+1} = f_k$. Bewiesen wurde somit, dass die Zahl der k -ziffrigen Zeckendorfsequenzen f_k beträgt. $\square$

1.7 Die Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes

Man kann die rekursive Darstellungsmöglichkeit der Fibonacci-Zahlen (1.1) auch auf negative Indizes ausdehnen. Hierbei wird die Gleichung

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

umgeformt zu

$$f_{n-2} = f_n - f_{n-1}. \quad (1.10)$$

Ausgehend von den Anfangsbedingungen $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ sind wir in der Lage, Folgenglieder mit negativen Indizes Schritt für Schritt rückwärts zu ermitteln, von Fibonacci-Zahlen mit größeren Indizes zu Fibonacci-Zahlen mit kleineren Indizes:

$$\begin{aligned} f_{-1} &= f_1 - f_0 = 1 \\ f_{-2} &= f_0 - f_{-1} = 0 - 1 = -1 \\ f_{-3} &= f_{-1} - f_{-2} = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

Demnach lässt sich sehr einfach nachstehende Tabelle aufstellen:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
f_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55

Tabelle 1.2: Fibonacci-Zahlen mit positiven und negativen Indizes (vgl. [53], S. 10)

Aufgrund dieser Ergebnisse liegt die Vermutung nahe, dass die Verallgemeinerung

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

gilt. (vgl. [68], S. 37, [40], S. 28)

Beweis. (vgl. [40], S. 28)

Induktionsanfang Für $n = 1$ und $n = 2$ bestätigen wir die beiden Aussagen:

$$\begin{aligned} f_{-1} &= 1 = (-1)^2 f_1 \quad \text{und} \\ f_{-2} &= -1 = (-1)^3 f_2. \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung möge für beliebige, aber feste natürliche Zahlen n und $(n-1)$ gelten, wobei $n \geq 2$ ist.

Induktionsschritt Letztlich führen wir den Induktionsschritt von $(n-1)$ und n nach $(n+1)$ aus. Laut Induktionsvoraussetzung gelten bereits die Gleichungen:

$$f_{-(n-1)} = (-1)^n f_{n-1} \quad \text{und} \quad f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n,$$

welche unter Verwendung von (1.10) zu

$$\begin{aligned} f_{-(n+1)} &\stackrel{(1.10)}{=} f_{-(n-1)} - f_{-n} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} (-1)^n f_{n-1} - (-1)^{n+1} f_n = (-1)^{n+2} (f_{n-1} + f_n) \\ &= (-1)^{n+2} f_{n+1} \end{aligned}$$

verbunden werden können. □

Demnach wurde die Fibonacci-Folge auf die Menge $\mathbb{Z}$ ausgedehnt. Ebenso können die bisher besprochenen Gleichungen und Formeln auch für ganzzahlige Indizes übernommen werden. Jedoch gehen wir darauf sowie auf die Möglichkeit, Fibonacci-Zahlen mit reellen Indizes anzugeben nicht näher ein. (vgl. [40], S. 28-29) In der weiteren Abhandlung fokussieren wir uns auf jene Fibonacci-Zahlen mit Indizes aus der Menge der natürlichen Zahlen, nur in Ausnahmefällen wird auf Folgenglieder mit negativen Indizes zurückgegriffen.

1.8 Die Lucas-Folge

Bei der Lucas-Folge handelt es sich um eine der Fibonacci-Folge sehr ähnliche Zahlenabfolge. Diese geht auf den französischen Mathematiker *François-Édouard-Anatole Lucas* (1842-1891) zurück, welcher sich zeitlebens mit der Fibonacci-Folge beschäftigte und dieser auch ihren Namen verlieh. In Anlehnung an diese berühmte Folge entwickelte er die Lucas-Zahlen. Seine mathematischen Spiele, zu denen unter anderem die *Türme von Hanoi* zählen, wurden unter dem Pseudonym *M. Claus* (Anagramm für *Lucas*) veröffentlicht und erfreuen sich auch noch heute großer Beliebtheit. Durch eine Schnittverletzung, welche er sich auf einem Bankett durch einen herunterfallenden Teller an der Wange zuzog, starb er einige Tage später an Erysipel. (vgl. [48], S. 27)



Abbildung 1.6: *François-Édouard-Anatole Lucas*

Definition 5 (Lucas-Zahlen). (vgl. [66], S. 10, [16], S. 161)

Die Lucas-Zahlen $(l_n)_{(n \geq 0)}$ werden definiert durch

$$l_0 = 2 \quad l_1 = 1 \quad l_{n+2} = l_{n+1} + l_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge, welche sich durch die Aneinanderreihung der einzelnen Lucas-Zahlen ergibt $(2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots)$, entsteht auf die gleiche Art und Weise wie die Fibonacci-Folge – und zwar ergeben sich die Glieder immer aus der Summe der beiden Vorgänger. Der einzige Unterschied besteht in den verschiedenen Startwerten. (vgl. [16], S. 161)

Definition 6 (Lucas-Folge). (vgl. [16], S. 161)

Die Zahlenreihenfolge $(l_0, l_1, l_2, \dots)$, welche sich durch Aneinanderreihung der Lucas-Zahlen ergibt, bezeichnen wir als Lucas-Folge.

Bemerkung 6. Wie bei der Fibonacci-Folge wäre es zulässig, als Startwerte die Glieder $l_1 = 1$ und $l_2 = 3$ zu bestimmen (vgl. [43], S. 36).

$n = 0$	$l_0 = 2$	$n = 10$	$l_{10} = 123$	$n = 20$	$l_{20} = 15127$
$n = 1$	$l_1 = 1$	$n = 11$	$l_{11} = 199$	$n = 21$	$l_{21} = 24476$
$n = 2$	$l_2 = 3$	$n = 12$	$l_{12} = 322$	$n = 22$	$l_{22} = 39603$
$n = 3$	$l_3 = 4$	$n = 13$	$l_{13} = 521$	$n = 23$	$l_{23} = 64079$
$n = 4$	$l_4 = 7$	$n = 14$	$l_{14} = 843$	$n = 24$	$l_{24} = 103682$
$n = 5$	$l_5 = 11$	$n = 15$	$l_{15} = 1364$	$n = 25$	$l_{25} = 167761$
$n = 6$	$l_6 = 18$	$n = 16$	$l_{16} = 2207$	$n = 26$	$l_{26} = 271443$
$n = 7$	$l_7 = 29$	$n = 17$	$l_{17} = 3571$	$n = 27$	$l_{27} = 439204$
$n = 8$	$l_8 = 47$	$n = 18$	$l_{18} = 5778$	$n = 28$	$l_{28} = 710647$
$n = 9$	$l_9 = 76$	$n = 19$	$l_{19} = 9349$	$n = 29$	$l_{29} = 1149851$

Tabelle 1.3: Die ersten 30 Lucas-Zahlen

Mit dieser Zahlenreihenfolge können genauso erstaunliche „Spielereien“ wie mit der Fibonacci-Sequenz durchgeführt werden. Betrachtet man beispielsweise die Summenformeln der Fibonacci-Zahlen aus 1.3.1 und 1.3.3, dann besteht die Möglichkeit, ähnliche auch für Lucas-Zahlen anzugeben, deren Beweise analog verlaufen. (vgl. [40], S. 7)

Satz 18 (Summen von Lucas-Zahlen). (vgl. [40], S. 7)

Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt für

(a) die Summe der ersten $(n + 1)$ Lucas-Zahlen

$$\sum_{i=0}^n l_i = l_{n+2} - 1,$$

(b) die Summe der ersten n Lucas-Zahlen mit ungeradem Index ($n \geq 1$)

$$\sum_{i=1}^n l_{2i-1} = l_{2n} - 2,$$

(c) die Summe der ersten $(n + 1)$ Lucas-Zahlen mit geradem Index

$$\sum_{i=0}^n l_{2i} = l_{2n+1} + 1,$$

(d) die Summe der ersten $(n + 1)$ Lucas-Quadratzahlen

$$\sum_{i=0}^n l_i^2 = l_n l_{n+1} + 2.$$

Zudem stellt sich hier ebenfalls die Frage, ob man in der Lage ist, die Lucas-Zahlen explizit darzustellen, und auch in diesem Fall lautet die Antwort: Ja (vgl. [40], S. 18).

Satz 19 (Formel von Binet für Lucas-Zahlen). (vgl. [40], S. 18)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir die Lucas-Zahlen explizit durch

$$l_n = \Phi^n + \Psi^n \text{ mit } \Phi = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ und } \Psi = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \text{ angeben.}$$

Dieser Satz lässt sich mittels vollständiger Induktion überprüfen (vgl. [40], S. 18).

Wenn im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Rede von der *Formel von Binet* ist, wird damit die explizite Darstellungsweise der Fibonacci-Zahlen gemeint. Satz 19 wird immer unter dem vollständigen Namen *Formel von Binet für Lucas-Zahlen* geführt, sodass sich Verwechslungen vermeiden lassen sollten.

Zusätzlich lassen sich auch die Lucas-Zahlen für negative Indizes definieren:

$$l_{-n} = (-1)^n l_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (1.11)$$

Analog zu den Fibonacci-Zahlen gelten auch hier alle Formeln für ganzzahlige Indizes (vgl. [40], S. 29).

Man kann neben einigen interessanten Beziehungen zwischen den einzelnen Lucas-Gliedern auch Verbindungen zu den Fibonacci-Zahlen herstellen, auf welche wir uns im Wesentlichen konzentrieren werden. Man könnte die Lucas-Folge einer genauso intensiven Betrachtung wie der Fibonacci-Folge unterziehen, doch werden wir die Erwähnung dieser Zahlenfolge eher in geringem Ausmaß vornehmen und uns auf die wichtigsten Aspekte beschränken. Beispielsweise in den Werken von *Vajda* [66], *Lausch* [40] und *Lotz-Grütz* [43] können weitere Informationen zu den Lucas-Zahlen eingeholt werden.

1.8.1 Beziehungen zwischen Lucas-Zahlen

In diesem Absatz werden wenige, aber wichtige Zusammenhänge zwischen den einzelnen Gliedern der Lucas-Folge aufgezählt, wobei die Beweise nicht thematisiert werden. Diese können in den jeweiligen Werken nachgelesen werden.

Satz 20. (vgl. [43], S. 37)

Quadriert man eine Lucas-Zahl l_n , dann beträgt die Differenz zu l_{2n} genau ± 2 :

$$l_n^2 = l_{2n} + 2 \cdot (-1)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 21. (vgl. [43], S. 38)

Das Quadrat einer Lucas-Zahl l_n unterscheidet sich um ± 5 vom Produkt $l_{n-1} \cdot l_{n+1}$:

$$l_n^2 = l_{n+1}l_{n-1} + 5 \cdot (-1)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Kombiniert man diese beiden Sätze, so erhalten wir eine weitere Beziehung zwischen den Lucas-Zahlen, welche sich in folgender Aussage festhalten lässt (vgl. [43], S. 39).

Satz 22. (vgl. [43], S. 39)

Die Differenz zwischen der $2n$ -ten Lucas-Zahl und dem Produkt aus Vorgänger- und Nachfolglied der n -ten Lucas-Zahl beträgt ± 3 :

$$l_{2n} = 3 \cdot (-1)^n + l_{n+1}l_{n-1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Satz 23. (vgl. [66], S. 26)

Seien m und n aus der Menge der natürlichen Zahlen mit $m \geq n$, so gilt die besondere Formel

$$l_{m+n} + (-1)^n l_{m-n} = l_m l_n.$$

1.8.2 Beziehungen zwischen Fibonacci- und Lucas-Zahlen

Dieser Abschnitt wird grōßteils anhand von *S. Vajda* [66], S. 24-26, besprochen. Die Verwendung anderer Quellen wird deutlich gekennzeichnet.

Satz 24 (Verbindung der Fibonacci- und Lucas-Zahlen). (vgl. [66], S. 24)

Sei n aus der Menge der natūrlichen Zahlen mit $n \geq 1$. Die Summe aus dem Vorgänger und dem Nachfolger der n -ten Fibonacci-Zahl ergibt die n -te Lucas-Zahl:

$$f_{n-1} + f_{n+1} = l_n. \quad (1.12)$$

Beweis.

Induktionsanfang Sei $n = 1$ dann erhalten wir die korrekte Aussage $f_0 + f_2 = 1 = l_1$. Bei $n = 2$ ist die Behauptung mit $f_1 + f_3 = 3 = l_2$ ebenfalls erfüllt.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage soll nun für eine beliebige, aber feste natūrliche Zahl n sowie für eine weitere Zahl $(n + 1)$ mit $n \geq 1$ stimmen.

Induktionsschritt Dieser wird von n und $(n + 1)$ nach $(n + 2)$ demonstriert. Dementsprechend können wir laut Induktionsvoraussetzung mit den Gleichungen

$$f_{n-1} + f_{n+1} = l_n \text{ und } f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$$

arbeiten, aus denen durch Addition die Formel

$$f_{n+1} + f_{n+3} = l_{n+2}$$

resultiert, wodurch die Behauptung bewiesen wurde. $\square$

Sehr einfach kann man nun einige Formeln, wie beispielsweise

$$(i) \ l_{n-1} + l_{n+1} = 5f_n \quad (ii) \ f_{n+2} - f_{n-2} = l_n \quad (iii) \ f_n + l_n = 2f_{n+1}$$

unter Verwendung von (1.12) sowie der Rekursionsformel (1.1) zeigen (vgl. [66], S. 24).

Zudem lassen sich mit den in Unterkapitel 1.4 besprochenen Formeln sehr viele Verbindungen zwischen Fibonacci- und Lucas-Zahlen herleiten. Unter anderem ergibt sich folgendes Ergebnis mithilfe der *Identität von d'Ocagne*:

Satz 25. (vgl. [66], S. 25)

Für m und n aus den natūrlichen Zahlen mit $m \geq n$ gilt

$$f_{m+n} + (-1)^n f_{m-n} = l_n f_m. \quad (1.13)$$

Beweis.

Gesondert betrachten wir den Fall für $n = 0$ und können die wahre Aussage $f_m + f_m = 2f_m$ zur Kenntnis nehmen. Die *Identität von d'Ocagne* besagt $f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} = (-1)^n f_{m-n}$ für $m \geq n$, zudem benötigt man die Formel (1.2) sowie (1.12), welche für $n \geq 1$ zum Einsatz kommen dürfen, um wie folgt vorzugehen:

$$\begin{aligned} \underbrace{f_{m+n}}_{\stackrel{(1.2)}{=} f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}} + \underbrace{(-1)^n f_{m-n}}_{\stackrel{(1.6)}{=} f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1}} &= f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} + f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1} \\ &= (f_{n-1} + f_{n+1})f_m \stackrel{(1.12)}{=} l_n f_m. \end{aligned} \quad \square$$

Ein interessanter Spezialfall des Satzes 25 ergibt sich durch das „geschickte“ Setzen von m , indem $m = n$ gewählt wird und sich somit

$$f_{2n} = l_n f_n \quad (1.14)$$

ergibt. Anhand dieser Gleichung kann man sehr rasch die Behauptung

$$f_{n+1} l_{n+1} - f_n l_n = f_{2n+2} - f_{2n} = f_{2n+1}$$

zeigen. (vgl. [66], S. 25)

Satz 26. (vgl. [66], S. 26)

Seien m und n aus den natürlichen Zahlen mit $m \geq n$, dann gilt die Beziehung:

$$f_{m+n} - (-1)^n f_{m-n} = l_m f_n.$$

Beweis.

Eine ähnliche Vorgehensweise wie beim vorhergehenden Beweis bringt uns letztlich zu dem gewünschten Resultat:

$$\begin{aligned} \underbrace{f_{m+n}}_{\stackrel{(1.2)}{=} f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}} - \underbrace{(-1)^n f_{m-n}}_{\stackrel{(1.6)}{=} f_m f_{n+1} - f_n f_{m+1}} &= f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1} + f_n f_{m+1} \\ &= 2f_n f_{m+1} + f_m(f_{n-1} - f_{n+1}) \\ &= 2f_n f_{m+1} + (f_{m+1} - f_{m-1})(-f_n) \\ &= f_n f_{m+1} + f_n f_{m-1} \stackrel{(1.12)}{=} f_n l_m. \end{aligned}$$

Um genau zu sein, muss die Behauptung noch zusätzlich für $n = 0$ und $m = 0$ durch Einsetzen überprüft werden, da die verwendeten Formeln (1.2) sowie (1.12) in unserem Fall nur für $n, m \geq 1$ überprüft wurden. Die erfreulichen Ergebnisse dieser beiden Fälle sind sofort ersichtlich, weswegen der Satz für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ bewiesen ist. $\square$

Durch die Addition von Satz 25 und Satz 26 erhalten wir $2f_{m+n} = l_n f_m + l_m f_n$. Die Differenz der beiden Sätze bewirkt wiederum die Formel: $2 \cdot (-1)^n f_{m-n} = l_n f_m - l_m f_n$, welche eine weitere bemerkenswerte Beziehung darstellt. (vgl. [66], S. 26)

Satz 27. (vgl. [43], S. 41)

Ein interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen folgenden Quadratzahlen:

$$l_n^2 = 5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. (vgl. [43], S. 41)

Um die Behauptung beweisen zu können, stellt man zuerst die Richtigkeit der Aussage für $n = 0$ mit $l_0^2 = 4 = 5f_0^2 + 4 \cdot (-1)^0 = 4$ fest. Anschließend wird die *Simpson-Identität* benötigt, um folgenden Schluss ziehen zu können:

$$\begin{aligned} l_n^2 &= (f_{n-1} + f_{n+1})^2 = (f_{n-1} + f_{n-1} + f_n)^2 = (2f_{n-1} + f_n)^2 \\ &= f_n^2 + 4f_{n-1}(f_{n-1} + f_n) = f_n^2 + 4 \underbrace{f_{n-1}f_{n+1}}_{\stackrel{(1.7)}{=} f_n^2 + (-1)^n} = 5f_n^2 + 4 \cdot (-1)^n. \end{aligned} \quad \square$$

Mit diesen Erkenntnissen werden wir nun das Einführungskapitel beenden und uns den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik zuwenden, beginnend mit einem Ausflug in die Lineare Algebra.

Kapitel 2

Fibonacci-Zahlen in der Linearen Algebra

Was uns in diesem Kapitel erwarten wird:

Wir dringen nun in die Tiefen der Linearen Algebra ein und setzen uns mit Matrizen, Determinanten etc. in Bezug zu den Fibonacci-Zahlen auseinander. Angefangen bei einer ungewöhnlichen Herleitung der *Binet-Formel*, in welcher uns lineare Abbildungen, Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalmatrizen und vieles mehr erwarten werden, darf man auch auf eine neue Darstellungsweise der Fibonacci-Zahlen gespannt sein. Wir freuen uns mit dem Gedanken an, Fibonacci-Zahlen als Determinanten von Matrizen darstellen zu können. In weiterer Folge existiert keine Möglichkeit, den sogenannten Fibonacci-Identitäten zu entkommen, welche uns im Laufe des Kapitels fortan begleiten werden. Sie ermöglichen es uns, komplexe Zusammenhänge zwischen Fibonacci-Zahlen erkennen zu lassen. Zuletzt widmen wir unsere Aufmerksamkeit neben den Fibonacci-Vektoren auch den Lucas-Vektoren und deren interessanten Zusammenhängen.

Die Ausführungen der Fibonacci-Zahlen in der Linearen Algebra werden nach *H. Lausch* [40], S. 31-46, behandelt. Die Verwendung anderer Quellen wird deutlich aus dem Kontext heraus ersichtlich sein.

„Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen.“

JEAN-HENRI FABRE
([10])

2.1 Die Binet-Formel – eine etwas andere Herleitung

Wie in 1.5 beschrieben, ist es möglich, die explizite Formel der Fibonacci-Zahlen sehr einfach und mit wenigen Hilfsmitteln herzuleiten. Nun wollen wir eine „komplexere“ Herleitung betrachten, die auf der Eigenwertrechnung basiert. Bekannterweise setzen sich die Fibonacci-Zahlen immer aus den beiden Vorgängern zusammen. Dies erinnert uns an eine lineare Abbildung in einem Vektorraum mit der Dimension zwei.

Um im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ den Vektor $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ auf folgenden Vektor $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}$ abzubilden, benötigt man die Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Dazu wird die Matrix F mit dem Vektor wie folgt multipliziert:

$$F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Bezieht man die Anfangsbedingungen f_0 und f_1 mit ein und startet bei $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$, so ergibt sich

$$F \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 + f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

und in weiterer Folge

$$F^2 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 + f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Durch den wiederholten Multiplikationsvorgang mit F präsentiert sich:

$$F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} + f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Diese Behauptung muss noch mittels vollständiger Induktion $\forall n \in \mathbb{N}$ bewiesen werden.

Beweis.

Induktionsanfang Für $n = 0$ resultiert $F^0 \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$, nebenbei bemerkt handelt es sich bei E um die Einheitsmatrix. Die beiden Induktionsanfänge für die Werte $n = 1$ und $n = 2$ wurden vorhin überprüft.

Induktionsvoraussetzung Wir nehmen an, dass die Behauptung für eine beliebige, aber fixe natürliche Zahl n gilt.

Induktionsschritt Wir zeigen den Induktionsschritt von $n \rightarrow (n + 1)$:

$$\begin{aligned} F^{n+1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} &= F F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} F \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Unser Interesse gilt somit der linearen Abbildung

$$\vec{x} \rightarrow F\vec{x}$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ auf sich selbst mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Bei dieser Abbildung handelt es sich zudem um einen Isomorphismus, da F ein Inverses $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Zusätzlich ermöglicht uns diese Matrix ebenfalls die Erweiterung der Fibonacci-Zahlen auf ganzzahlige Indizes.

Zurück zu unserem eigentlichen Vorhaben, der Herleitung einer expliziten Darstellungsmöglichkeit für Fibonacci-Zahlen: Um unser Ziel zu erreichen, muss F^n berechnet werden und dazu wird jenes Lemma benötigt:

Lemma 1.

Hat eine Matrix F nur unterschiedliche Eigenwerte, so kann man diese auf die sogenannte Diagonalmatrix D umwandeln bzw. transformieren. Die Gleichung $D = T^{-1}FT$ wird erfüllt, wobei sich die Eigenwerte von F in den Diagonaleinträgen der Matrix D und die Eigenvektoren von F als Spaltenvektoren der Transformationsmatrix T wiederfinden.

Aufgrund der Gültigkeit von $D = T^{-1}FT$, ergibt sich durch Umformen $F = TDT^{-1}$. Der Fokus wird nun auf die Gleichung

$$F^n = (TDT^{-1})^n = \underbrace{TDT^{-1}TDT^{-1} \dots TDT^{-1}}_{n\text{-mal}} = TD^nT^{-1}$$

gelegt. Der Ausdruck D^n kann sehr einfach ermittelt werden, da es sich bei den Diagonaleinträgen um die n -ten Potenzen der ursprünglichen Werte der Diagonale von D handelt.

Die Transformationsmatrix T und die Diagonalmatrix D sollen bestimmt werden. Dazu benötigt man neben dem charakteristischen Polynom auch die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix F .

Wir beginnen mit dem **charakteristischen Polynom** $\chi(\lambda)$:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Der nächste Schritt beinhaltet die Ermittlung der beiden **Eigenwerte** durch Lösen der quadratischen Gleichung, da es sich bei den Nullstellen um die Eigenwerte handelt:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \Psi.$$

Infolgedessen lässt sich nun die **Diagonalmatrix** D mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

angeben. Als Nächstes müssen die **Eigenvektoren** von F zu den beiden Eigenwerten ermittelt werden:

(i) Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 :

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Demnach ergeben sich die Gleichungen

$$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_2.$$

Setzt man $x_1 = 1$, dann erhalten wir für x_2 die Lösung $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lambda_1$. Dadurch ist der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert λ_1 bedingt.

(ii) Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 :

Analog zu (i) erkennt man sehr rasch, dass es sich bei $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ um einen Eigenvektor zum Eigenwert λ_2 handelt.

Jetzt endlich gelingt es uns, die **Transformationsmatrix** T und die inverse Matrix T^{-1} aufzustellen:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aus $D = T^{-1}FT$ folgt die Formel $F = TDT^{-1}$, welche wir zusammen mit der Gleichung $F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ verwenden. Setzt man nun alles Bekannte ein, dann führt uns dies zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} &= F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = (TDT^{-1})^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = TD^nT^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die erste Komponente auf beiden Seiten der Gleichung, dann stellt sich Folgendes heraus:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Diese Formel ist uns bereits unter dem Namen die *Formel von Binet* bekannt, doch wurde sie jetzt auf eine andere Art und Weise, als in 1.5 beschrieben, hergeleitet.

Des Weiteren ist man bei dieser Herleitung auf die Matrix F und ihre Potenzen gestoßen, welche sogleich berechnet wurden. Bemerkenswerterweise kann auch eine sehr interessante Verbindung zwischen den Fibonacci-Zahlen und F^n hergestellt werden.

Satz 28. (vgl. [70], S. 133)

Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, so gilt

$$F^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Beweis. (vgl. [70], S. 133)

Induktionsanfang Dieser wird für $n = 1$ einer Überprüfung unterzogen:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}.$$

Induktionsvoraussetzung Wir setzen die Richtigkeit der Behauptung für eine beliebige, aber fixe natürliche Zahl n mit $n \geq 1$ voraus.

Induktionsschritt Letztlich wird der Induktionsschritt von $n \rightarrow (n + 1)$ besprochen:

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} + f_n \\ f_{n+1} & f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

2.2 Die Darstellung als Determinanten von Matrizen

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich auch als Determinanten von passenden Matrizen darstellen.

Satz 29 (Darstellung als Determinante einer Matrix).

Die Darstellung des $(n + 1)$ -ten Gliedes der Fibonacci-Folge für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ kann auch in Bezug zu einer $n \times n$ Matrix F_n als Determinante erfolgen:

$$\det F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = f_{n+1}.$$

Beweis.

Induktionsanfang Dieser Beweisschritt soll für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ überprüft werden.

Für $n = 1$ gilt: $\det F_1 = \det(1) = 1 = f_2$,

für $n = 2$ folgt: $\det F_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = f_3$

und für $n = 3$ erhalten wir: $\det F_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 = f_4$.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage möge für die beiden beliebigen, aber festen Werte n und $(n - 1)$ mit $n \in \mathbb{N} \geq 2$ gelten.

Induktionsschritt Dieser wird von $(n-1)$ und n auf $(n+1)$ vorgeführt. Dafür unterziehen wir die folgende Determinante einer Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned}
 \det F_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot \det F_n - 1 \cdot \det G_n.
 \end{aligned}$$

Bei $\det G_n$ wird, in einem Zwischenschritt, eine weitere Entwicklung durchgeführt, dieses Mal nach der ersten Spalte:

$$\det G_n = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\det F_{n-1}.$$

Durch Zusammenfügen aller Bausteine sowie unter Miteinbeziehung der Induktionsvoraussetzung für n und $(n-1)$ gelangen wir zu

$$\det F_{n+1} = \det F_n - \det G_n = \det F_n + \det F_{n-1} \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} f_{n+1} + f_n = f_{n+2}. \quad \square$$

Es besteht ebenso die Möglichkeit, die Fibonacci-Zahlen als Determinante einer komplexen Matrix darzustellen.

Satz 30 (Darstellung als Determinante einer komplexen Matrix).

Das $(n+1)$ -te Glied der Fibonacci-Folge lässt sich für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in Bezug zu einer komplexen $n \times n$ Matrix H_n mit $i = \sqrt{-1}$ als Determinante wie folgt angeben:

$$\det H_n = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix} = f_{n+1}.$$

Beweis.

Dieser Induktionsbeweis wird analog zum vorhergehenden Beweis geführt. $\square$

2.3 Verschiedenste Fibonacci-Identitäten

Wir beschäftigen uns nun mit den Fibonacci-Identitäten, welche mithilfe der Matrizenrechnung hergeleitet werden. Momentan ist man im Stande, anhand der Hilfsmittel, welche uns die Lineare Algebra zur Verfügung stellt, einzelne Folgenglieder anzugeben. Dies soll nun aber weiter ausgedehnt werden, um verschiedene Beziehungen zwischen den einzelnen Folgengliedern, ähnlich zu denen aus Kapitel 1, mit wenig Mühe herstellen zu können. Dazu wird eine 3×3 „Hilfsmatrix“ benötigt:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix hat die Form: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Durch die Annullierung des charakteristischen Polynoms durch die Matrix R folgt nun

$$R^3 - 2R^2 - 2R + E = 0,$$

wobei es sich bei E um die 3×3 Einheitsmatrix und bei 0 um die Nullmatrix handelt. Durch die Multiplikation mit R^n erhalten wir die Gleichung:

$$R^{n+3} - 2R^{n+2} - 2R^{n+1} + R^n = 0. \quad (2.2)$$

Das Erstaunliche an diesen Matrizen ist, dass die Einträge Produkte von Gliedern der Fibonacci-Folge darstellen.

Satz 31.

Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 1$, so gilt

$$R^n = \begin{pmatrix} f_{n-1}^2 & f_{n-1}f_n & f_n^2 \\ 2f_nf_{n-1} & f_{n+1}^2 - f_{n-1}f_n & 2f_nf_{n+1} \\ f_n^2 & f_nf_{n+1} & f_{n+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Induktionsanfang Für $n = 1$ folgt

$$R = \begin{pmatrix} f_0^2 & f_0f_1 & f_1^2 \\ 2f_1f_0 & f_2^2 - f_0f_1 & 2f_1f_2 \\ f_1^2 & f_1f_2 & f_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

womit der Induktionsanfang gezeigt wurde.

Induktionsvoraussetzung Man nehme an, dass die Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $n \geq 1$ bewiesen ist.

Induktionsschritt Wir zeigen den Induktionsschritt von $n \rightarrow (n + 1)$:

$$R^{n+1} = R^n R \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} \begin{pmatrix} f_{n-1}^2 & f_{n-1}f_n & f_n^2 \\ 2f_nf_{n-1} & f_{n+1}^2 - f_{n-1}f_n & 2f_nf_{n+1} \\ f_n^2 & f_nf_{n+1} & f_{n+1}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} f_n^2 & f_{n-1}f_n + f_n^2 & f_{n-1}^2 + 2f_{n-1}f_n + f_n^2 \\ 2f_nf_{n+1} & f_{n+1}^2 - f_{n-1}f_n + 2f_nf_{n+1} & 2f_nf_{n-1} + 2(f_{n+1}^2 - f_{n-1}f_n) + 2f_nf_{n+1} \\ f_{n+1}^2 & f_nf_{n+1} + f_{n+1}^2 & f_n^2 + 2f_nf_{n+1} + f_{n+1}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_n^2 & f_n(f_{n-1} + f_n) & (f_{n-1} + f_n)^2 \\ 2f_nf_{n+1} & (f_{n+1} + f_n)^2 - f_n(f_n + f_{n-1}) & 2f_{n+1}(f_{n+1} + f_n) \\ f_{n+1}^2 & f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) & (f_n + f_{n+1})^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_n^2 & f_nf_{n+1} & f_{n+1}^2 \\ 2f_nf_{n+1} & f_{n+2}^2 - f_nf_{n+1} & 2f_{n+1}f_{n+2} \\ f_{n+1}^2 & f_{n+1}f_{n+2} & f_{n+2}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Demzufolge ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Wie können wir jetzt aber auf Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen schließen? Durch die Gegebenheit, dass zugehörige Einträge von R, R^{n+1}, R^{n+2} und R^{n+3} die Gleichung (2.2) erfüllen müssen, wodurch man verschiedenste Zusammenhänge herstellen kann. Im Anschluss ein paar exemplarische Beispiele:

- (a) Sieht man sich den Eintrag der 3. Spalte der 1. Zeile an, so präsentiert sich

$$f_{n+3}^2 - 2f_{n+2}^2 - 2f_{n+1}^2 + f_n^2 = 0.$$

- (b) Nimmt man den Eintrag der 3. Spalte der 2. Zeile, dann ergibt dies die nachstehende Gleichung:

$$2f_{n+3}f_{n+4} - 4f_{n+2}f_{n+3} - 4f_{n+1}f_{n+2} + 2f_nf_{n+1} = 0.$$

- (c) Verwendet man den Eintrag der 2. Spalte der 1. Zeile, so folgt demgemäß

$$f_{n+2}f_{n+3} - 2f_{n+1}f_{n+2} - 2f_nf_{n+1} + f_{n-1}f_n = 0.$$

Dies kann mit allen Einträgen der Matrix R^n durchgeführt werden, wodurch sich mit geringem Aufwand einige interessante Beziehungen nachweisen lassen.

Die Matrix R verbirgt jedoch noch eine weitere erwähnenswerte Eigenschaft:

Satz 32.

Seien $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt dieser Zusammenhang

$$R^m(R + E)^{2n+1} = 5^n R^{n+m}(R + E).$$

Beweis.

Induktionsanfang Wird für $n = 1$ die Formel (2.2) verwendet, dann zeigt sich:

$$\begin{aligned}
(R + E)^3 &= R^3 + 3R^2 + 3R + E = \underbrace{(R^3 - 2R^2 - 2R + E)}_{=0} + 5R^2 + 5R \\
&= 5(R^2 + R) = 5R(R + E).
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit R^m , so ist das Ergebnis

$$R^m(R + E)^3 = 5R^{m+1}(R + E),$$

also genau die Aussage für den Wert $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung Es wird angenommen, dass die Behauptung für eine beliebige, aber fixe natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt.

Induktionsschritt Die Beweisführung verläuft von n nach $(n+1)$:

$$\begin{aligned} R^m(R+E)^{2(n+1)+1} &= R^m(R+E)^{2n+1}(R+E)^2 \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} 5^n R^{n+m}(R+E)^3 \\ &\stackrel{(2.2)}{=} 5^n R^{n+m}[5R(R+E)] = 5^{n+1} R^{(n+1)+m}(R+E). \quad \square \end{aligned}$$

Dadurch wird uns die Möglichkeit geboten, bestimmte Summenformeln aufstellen zu können. Um dies zu veranschaulichen, werden zwei Beispiele angeführt:

- (i) Sieht man sich die Einträge der 1. Zeile der 3. Spalte der Matrizen von Satz 32 an und führt eine Entwicklung der linken Seite mittels *binomischen Lehrsatzes* durch, dann erhalten wir, wenn noch zusätzlich (1.5) genutzt wird, Folgendes:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k+m}^2 = 5^n (f_{n+m+1}^2 + f_{n+m}^2) \stackrel{(1.5)}{=} 5^n f_{2(n+m)+1}. \quad (2.3)$$

- (ii) Verwendet man die Einträge der 1. Zeile der 2. Spalte der Matrizen von Satz 32 und erinnert sich zurück an (1.3), so gilt:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k-1+m} f_{k+m} = 5^n (f_{n+m} f_{n+m+1} + f_{n+m-1} f_{n+m}) \stackrel{(1.3)}{=} 5^n f_{2(n+m)}.$$

Der Vorteil dieses Verfahrens beruht auf der großen Anzahl der daraus erworbenen Formeln. Mit verhältnismäßig geringer Anstrengung kann eine Vielzahl von Identitäten angegeben werden.

2.4 Die Fibonacci-Vektoren und Lucas-Vektoren

In einem im Jahre 2007 erschienenen Werk wurde eine komplett andere Richtung eingeschlagen, welche das Ziel verfolgte, Beziehungen von Gliedern der Fibonacci- und Lucas-Folge aufzustellen. Mathematiker versuchten sich aus diesem Grund an Fibonacci- und Lucas-Vektoren.

Definition 7 (n -ter Fibonacci-Vektor und n -ter Lucas-Vektor).

Der n -te Fibonacci-Vektor bzw. der n -te Lucas-Vektor mit einer fixierten Länge d wird $\forall n \in \mathbb{Z}$ und $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$ definiert durch

$$\vec{f}_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \\ \vdots \\ f_{n+d-1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{l}_n = \begin{pmatrix} l_n \\ l_{n+1} \\ \vdots \\ l_{n+d-1} \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich geben wir zwei weitere Vektoren $\vec{\lambda}_1 = \vec{\Phi}$ und $\vec{\lambda}_2 = \vec{\Psi}$ an:

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Phi \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ \Phi^{d-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Psi \\ \Psi^2 \\ \vdots \\ \Psi^{d-1} \end{pmatrix}.$$

Mithilfe dieser Vektoren ist man nun im Stande eine allgemeine Version der *Binet-Formel* anzugeben.

Satz 33 (Verallgemeinerung der Binet-Formel).

(a) Betrachtet man die Fibonacci-Vektoren $\forall n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\vec{f}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n \vec{\Phi} - \Psi^n \vec{\Psi}).$$

(b) Sieht man sich die Lucas-Vektoren $\forall n \in \mathbb{Z}$ an, dann erhält man

$$\vec{l}_n = \Phi^n \vec{\Phi} + \Psi^n \vec{\Psi}.$$

Beweis.

Beginnend mit den Fibonacci-Vektoren widmen wir uns der rechten Seite der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n \vec{\Phi} - \Psi^n \vec{\Psi}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\begin{pmatrix} \Phi^n \\ \Phi^{n+1} \\ \Phi^{n+2} \\ \vdots \\ \Phi^{n+d-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi^n \\ \Psi^{n+1} \\ \Psi^{n+2} \\ \vdots \\ \Psi^{n+d-1} \end{pmatrix} \right].$$

Durch zusätzlichen Gebrauch der *Binet-Formel für Fibonacci-Zahlen* präsentiert sich uns genau die zu überprüfende Aussage.

Geht man über zur zweiten Aussage und wendet hier die *Binet-Formel für Lucas-Zahlen* an, dann liefert uns dieses Vorgehen sehr rasch die gesuchte Behauptung. $\square$

Das Ergebnis von Satz 33 kann auch geometrisch durch die von $\vec{\Psi}$ und $\vec{\Phi}$ gegebene Ebene veranschaulicht werden. In dieser Ebene lassen sich alle Fibonacci- und Lucas-Vektoren mit der festen Länge d finden.

Satz 34 (Skalarproduktberechnungen von $\vec{\Phi}$ und $\vec{\Psi}$).

Über die Skalarprodukte sind nachstehende Aussagen mit $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$ zulässig:

(a)

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} = \begin{cases} \sqrt{5} f_d \Phi^{d-1} & \text{für gerades } d \\ l_d \Phi^{d-1} & \text{für ungerades } d \end{cases},$$

(b)

$$\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi} = \begin{cases} -\sqrt{5} f_d \Psi^{d-1} & \text{für gerades } d \\ l_d \Psi^{d-1} & \text{für ungerades } d \end{cases},$$

(c)

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Psi} = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } d \\ 1 & \text{für ungerades } d \end{cases}.$$

Beweis.

Durch die Gültigkeit der Formel $\Phi \cdot \Psi = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1$ können die Gleichung $\Phi = -\frac{1}{\Psi}$ und dadurch wiederum die Aussage $\Phi^2 = -\frac{\Phi}{\Psi}$ aufgestellt werden. Zusätzlich erinnern wir uns an die Partialsummen geometrischer Folgen ($s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ mit $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (vgl. [59], S. 21)):

$$\begin{aligned} \vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} &= \sum_{i=0}^{d-1} \Phi^{2i} = \sum_{i=0}^{d-1} \left(-\frac{\Phi}{\Psi}\right)^i \\ &\stackrel{\text{geom. Summe}}{=} \frac{1 - \left(-\frac{\Phi}{\Psi}\right)^d}{1 - \left(-\frac{\Phi}{\Psi}\right)} = \frac{1 - \frac{(-1)^d \Phi^d}{\Psi^d}}{1 + \frac{\Phi}{\Psi}} \\ &= \frac{(\Psi^d - (-1)^d \Phi^d) \Psi}{\underbrace{\Psi^d (\Psi + \Phi)}_{=1}} = \frac{\Psi^d - (-1)^d \Phi^d}{\Psi^{d-1}} \\ &= (-1)^{d-1} \Phi^{d-1} [\Psi^d - (-1)^d \Phi^d] \\ &= \Phi^{d-1} [(-1)^{d-1} \Psi^d + \Phi^d]. \end{aligned}$$

Jetzt unterscheidet man zwischen zwei Fällen, beginnend mit d gerade, verwenden wir die *Formel von Binet*:

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} = \Phi^{d-1} (-\Psi^d + \Phi^d) = \sqrt{5} f_d \Phi^{d-1}.$$

Für ungerade d lässt sich unter Bezugnahme auf die *Formel von Binet für Lucas-Zahlen* nachstehende Beziehung präsentieren:

$$\vec{\Phi} \cdot \vec{\Phi} = \Phi^{d-1} (\Psi^d + \Phi^d) = l_d \Phi^{d-1}.$$

Das Skalarprodukt $\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}$ wird völlig analog dazu bewiesen.

Somit verbleibt nur noch die Aussage des letzten Unterpunktes für $\vec{\Psi} \cdot \vec{\Phi}$. Angegeben als

$$\vec{\Psi} \cdot \vec{\Phi} = \sum_{i=0}^{d-1} (\Phi \Psi)^i = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i,$$

erkennt man als Ergebnis für gerade d die Zahl 0 und für ungerade d den Wert 1. $\square$

Anhand der letzten beiden Sätze können nun Summenformeln gewonnen werden, welche Beziehungen von Skalarprodukten von Fibonacci- und Lucas-Vektoren repräsentieren.

Satz 35 (Skalarproduktberechnungen von Fibonacci- und Lucas-Vektoren).

Seien n, m aus der Menge der ganzen Zahlen sowie d fest aus der Menge der positiven ganzen Zahlen, dann gilt für

(a) das Skalarprodukt zweier Fibonacci-Vektoren:

$$\vec{f}_n \cdot \vec{f}_m = \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+i} f_{m+i} = \begin{cases} f_d f_{n+m+d-1} & \text{für gerades } d \\ \frac{1}{5}(l_d l_{n+m+d-1} - (-1)^n l_{m-n}) & \text{für ungerades } d \end{cases},$$

(b) das Skalarprodukt zweier Lucas-Vektoren:

$$\vec{l}_n \cdot \vec{l}_m = \sum_{i=0}^{d-1} l_{n+i} l_{m+i} = \begin{cases} 5 f_d f_{n+m+d-1} & \text{für gerades } d \\ l_d l_{n+m+d-1} + (-1)^n l_{m-n} & \text{für ungerades } d \end{cases},$$

(c) das Skalarprodukt eines Fibonacci-Vektors mit einem Lucas-Vektor:

$$\vec{f}_n \cdot \vec{l}_m = \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+i} l_{m+i} = \begin{cases} f_d l_{n+m+d-1} & \text{für gerades } d \\ l_d f_{n+m+d-1} + (-1)^{n+1} f_{m-n} & \text{für ungerades } d \end{cases}.$$

Beweis.

(a) Erste Überlegungen sind:

$$\begin{aligned} \vec{f}_n \cdot \vec{f}_m &\stackrel{\text{Satz } 33}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^n \vec{\Phi} - \Psi^n \vec{\Psi}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^m \vec{\Phi} - \Psi^m \vec{\Psi}) \\ &= \frac{1}{5} [\Phi^{n+m} \vec{\Phi} \vec{\Phi} + \Psi^{n+m} \vec{\Psi} \vec{\Psi} - (\Phi^n \Psi^m + \Phi^m \Psi^n) \vec{\Phi} \vec{\Psi}]. \end{aligned}$$

Für gerade d gilt nach Satz 34 und unter Verwendung der *Formel von Binet*:

$$\begin{aligned} \vec{f}_n \cdot \vec{f}_m &\stackrel{\text{Satz } 34}{=} \frac{1}{5} [\Phi^{n+m} \sqrt{5} f_d \Phi^{d-1} - \Psi^{n+m} \sqrt{5} f_d \Psi^{d-1}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} f_d [\Phi^{n+m+d-1} - \Psi^{n+m+d-1}] \\ &\stackrel{F.v.B.}{=} f_d f_{n+m+d-1}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall für ungerade d , so folgt mittels *Formel von Binet für Lucas-Zahlen*:

$$\begin{aligned} \vec{f}_n \cdot \vec{f}_m &\stackrel{\text{Satz } 34}{=} \frac{1}{5} [\Phi^{n+m} l_d \Phi^{d-1} + \Psi^{n+m} l_d \Psi^{d-1} - (\Phi^n \Psi^m + \Phi^m \Psi^n)] \\ &= \frac{1}{5} [l_d (\Phi^{n+m+d-1} + \Psi^{n+m+d-1}) - \Phi^n \Psi^n (\Psi^{m-n} + \Phi^{m-n})] \\ &\stackrel{F.v.B.f.L.}{=} \frac{1}{5} (l_d l_{n+m+d-1} - (-1)^n l_{m-n}). \end{aligned}$$

Damit wurde der erste Teil des Satzes bewiesen. Die Behauptungen (b) und (c) können analog zu (a) überprüft werden. $\square$

Satz 35 wird erst bei besonderer Wahl von n und m richtig interessant. Werden beispielsweise die beiden Variablen m und n beim ersten Unterpunkt (a) gleichgesetzt, dann erwartet uns diese bemerkenswerte Beziehung:

$$\vec{f}_n \cdot \vec{f}_n = \|\vec{f}_n\|^2 = \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+i}^2 = \begin{cases} f_d f_{2n+d-1} & \text{für gerades } d, \\ \frac{1}{5}(l_d l_{2n+d-1} - 2(-1)^n) & \text{für ungerades } d. \end{cases} \quad (2.4)$$

Durch die Beziehung (2.4) sind wir in der Lage Resultate für Summen als auch für Differenzen von Fibonacci-Quadratzahlen herzuleiten.

Satz 36 (Summe der Quadrate von Fibonacci-Zahlen).

Seien n und m aus der Menge der ganzen Zahlen, dann kann die Summe der Quadrate von zwei Gliedern der Fibonacci-Folge angegeben werden als

$$f_n^2 + f_m^2 = \begin{cases} f_{m-n}f_{m+n} & \text{falls } (m-n) \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{5}(l_{m-n}l_{m+n} - 4 \cdot (-1)^n) & \text{falls } (m-n) \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis.

Für $m = (n + d - 1)$ folgt

$$f_n^2 + f_m^2 = \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+i}^2 - \sum_{i=0}^{d-3} f_{(n+1)+i}^2 \quad .$$

Vorausgesetzt $(m - n) = (d - 1)$ ist gerade, so ist d letztlich ungerade. Wendet man nun (2.4) sowohl auf die erste als auch auf die zweite Summe an und gebraucht im allerletzten Schritt nochmals $(m - n) = (d - 1)$, dann führt uns dies zu

$$\begin{aligned} f_n^2 + f_m^2 &= \frac{1}{5} [l_d l_{2n+d-1} - 2 \cdot (-1)^n - l_{d-2} l_{2n+d-1} + 2 \cdot (-1)^{n+1}] \\ &= \frac{1}{5} [(l_d - l_{d-2}) l_{2n+d-1} - 4 \cdot (-1)^n] \\ &= \frac{1}{5} [l_{d-1} l_{2n+d-1} - 4 \cdot (-1)^n] \\ &= \frac{1}{5} [l_{m-n} l_{n+m} - 4 \cdot (-1)^n] . \end{aligned}$$

Abschließend muss man sich natürlich noch um den Fall $(m - n) = (d - 1)$ ist ungerade und demnach um gerade d kümmern. Dazu wird auf dieselbe Art und Weise vorgegangen:

$$\begin{aligned} f_n^2 + f_m^2 &= f_d f_{2n+d-1} - f_{d-2} f_{2n+d-1} = (f_d - f_{d-2}) f_{2n+d-1} \\ &= f_{d-1} f_{2n+d-1} = f_{m-n} f_{n+m} . \end{aligned} \quad \square$$

Ähnlich zu Satz 36 kann eine weitere Formel für die Differenz zweier Fibonacci-Quadratzahlen aufgestellt werden.

Satz 37 (Differenz der Quadrate von Fibonacci-Zahlen).

Für alle n, m aus der Menge der ganzen Zahlen gilt, dass die Differenz der Quadrate von zwei Zahlen der Fibonacci-Folge wie folgt dargestellt werden kann

$$f_m^2 - f_n^2 = \begin{cases} f_{m-n}f_{m+n} & \text{falls } (m-n) \text{ gerade,} \\ \frac{1}{5}(l_{m-n}l_{m+n} + 4 \cdot (-1)^n) & \text{falls } (m-n) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis.

Angenommen $m = (n + d)$, so lässt sich die Differenz als

$$f_m^2 - f_n^2 = \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+1+i}^2 - \sum_{i=0}^{d-1} f_{n+i}^2$$

formulieren. Falls $(m - n) = d$ gerade ist, erhält man unter Verwendung von (2.4):

$$\begin{aligned} f_m^2 - f_n^2 &= f_d f_{2n+d+1} - f_d f_{2n+d-1} = f_d (f_{2n+d+1} - f_{2n+d-1}) \\ &= f_d f_{2n+d} = f_{m-n} f_{m+n}. \end{aligned}$$

Sei $(m - n) = d$ ungerade, dann schreiben wir

$$\begin{aligned} f_m^2 - f_n^2 &= \frac{1}{5} (l_d l_{2n+d+1} - 2 \cdot (-1)^{n+1} - l_d l_{2n+d-1} + 2 \cdot (-1)^n) \\ &= \frac{1}{5} (l_d (l_{2n+d+1} - l_{2n+d-1}) + 4 \cdot (-1)^n) \\ &= \frac{1}{5} (l_{m-n} l_{m+n} + 4 \cdot (-1)^n). \end{aligned} \quad \square$$

Das Vorgehen im Zuge der Aufarbeitung dieses Kapitels beruht mit Ausnahme einer einzigen Textpassage sowie einem kleinen Vermerk, welche beide gekennzeichnet wurden, auf dem Werk [40], S. 31-46.

Mit diesem Ergebnis beenden wir das Kapitel der Fibonacci-Zahlen in der Linearen Algebra und wenden uns einem neuen mathematischen Abschnitt mit spannenden Anwendungen aus der Zahlentheorie zu.

Kapitel 3

Fibonacci-Zahlen in der Zahlentheorie

Dieses Kapitel wird einen Einblick in die zahlentheoretischen Eigenschaften der Fibonacci-Folge gewähren. Ausgewählte Aspekte dieser mathematischen Disziplin werden zu Beginn wiederholt, welche im Hinblick auf neue Erkenntnisse unumgänglich sind. Anknüpfend daran beschäftigen wir uns einerseits mit der Fragestellung von *Lamé* und andererseits mit den bemerkenswerten Teilbarkeitseigenschaften der Fibonacci-Zahlen, auf welche ein besonderes Augenmerk gelegt wird. Dabei werden sowohl erstaunliche Zusammenhänge als auch ungelöste Probleme diskutiert. Erneut lassen sich vereinzelt Brücken zu den Lucas-Zahlen ziehen. Ein faszinierender Aspekt der Fibonacci-Folge – die Periodizität – lässt uns nicht mehr los. Dieses Phänomen wird einem intensiven Studium unterzogen. Weiters tauchen wir in die Tiefen der Kongruenzen und Restklassen ein und können unerwartete Ergebnisse präsentieren. Die *pythagoräischen Tripel* und *abc-Tripel* sind weitere Kuriositäten, mit denen sich eine Auseinandersetzung lohnt. Anschließend lassen wir uns von den Zusammenhängen des *Pascal'schen Dreiecks* mit der Fibonacci-Sequenz überraschen. Ein letzter Blick wird auf die Quadratzahlen sowie die Kubikzahlen der Fibonacci-Folge geworfen, welche gemeinsam besprochen werden.

„Mathematics is the queen of the sciences, and the theory of numbers is the queen of mathematics.“

CARL FRIEDRICH GAUSS
([46], S. 165)

3.1 Ein zahlentheoretischer Exkurs

In diesem kurzen Abschnitt werden grundlegende Ergebnisse der Zahlentheorie, auf welche wir im weiteren Verlauf zurückgreifen, zusammengefasst. Manche Hilfssätze bzw. Korollare werden nur erwähnt, nicht aber bewiesen. Eine ausführliche Erklärung dieser findet sich bei den jeweiligen Literaturangaben wieder bzw. es besteht die Möglichkeit, sie mit verhältnismäßig geringem Aufwand eigenständig herzuleiten. Diese Vorbemerkungen werden großteils anhand des Werkes [6] vorgenommen. Zu Beginn sind einige zentrale Begriffsdefinitionen zu finden:

3.1.1 Teiler und größter gemeinsamer Teiler

Definition 8 (Teiler und Komplementärteiler). (vgl. [6], S. 3)

Seien m, n aus der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Wir definieren m als Teiler von n , sprich m teilt n bzw. $m \mid n$, falls ein $d \in \mathbb{Z}$ existiert mit $n = m \cdot d$. Wobei d als Komplementärteiler zu m von n bezeichnet wird. Handelt es sich bei m um keinen Teiler von n , dann gibt man dies mathematisch als $m \nmid n$ an.

Lemma 2. (vgl. [6], S. 3)

Seien $m, m_1, m_2, \dots, n, n_1, n_2, \dots, l, l_1, l_2, \dots \in \mathbb{Z}$.

- (a) Für jedes n gilt $1 \mid n$, $n \mid n$ und zusätzlich $n \mid 0$. Sollte der Fall $0 \mid n$ eintreten, dann muss $n = 0$ sein.
- (b) Aus $m \mid n$ erhalten wir $(-m) \mid n$ und $m \mid (-n)$.
- (c) Falls $m \mid n$ und $n \neq 0$ vorliegt, muss $|m| \leq |n|$ gelten.
- (d) Die Teilbarkeiten $m \mid n$ und $n \mid m$ führen uns entweder zu $n = m$ oder zu $n = -m$, wodurch $|m| = |n|$ gilt. Sieht man sich den Spezialfall $n \mid 1$ an, dann ergibt sich $n \in \{-1, 1\}$.
- (e) Gelten $l \mid m$ und $m \mid n$, so lässt sich $l \mid n$ folgern.
- (f) Aus $m \mid n$ erhält man $(lm) \mid (ln)$.
- (g) Angenommen $(lm) \mid (ln)$ und $l \neq 0$, dann ergibt sich die Teilbarkeit: $m \mid n$.
- (h) Aus $m \mid n_i$ mit $1 \leq i \leq k$ folgt $m \mid (l_1 n_1 + \dots + l_k n_k)$.
- (i) Für $m_i \mid n_i$ mit $1 \leq i \leq k$ lässt sich die Teilbarkeit $(m_1 m_2 \dots m_k) \mid (n_1 n_2 \dots n_k)$ angeben.

Bemerkung 7. Somit ist jede beliebige Zahl $n \in \mathbb{Z}$ durch $1, -1, n$ und $-n$ teilbar. Angenommen $d \mid n$ und $d \in \mathbb{Z}$ sei verschieden von $\{1, -1, n, -n\}$, so handelt es sich bei d um einen echten Teiler von n . (vgl. [6], S. 4)

Definition 9 (Gemeinsamer Teiler und ggT). (vgl. [6], S. 5)

Angenommen $n_1, n_2, \dots, n_k$ sind aus der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $m \mid n_i$ ($1 \leq i \leq k$). Dann ist m ein gemeinsamer Teiler von $n_1, n_2, \dots, n_k$. In der Menge der gemeinsamen Teiler befindet sich immer der Wert 1, wodurch sie niemals leer sein kann und dementsprechend eine obere Schranke aufweisen muss.

Sind nicht alle Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ gleich 0, so definieren wir den größten gemeinsamen Teiler von $n_1, n_2, \dots, n_k$ als

$$\text{ggT}(n_1, n_2, \dots, n_k) := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \mid n_i \text{ für } 1 \leq i \leq k\}.$$

Bemerkung 8. Bei der Zahl 1 handelt es sich immer um einen gemeinsamen Teiler, weshalb sich bei der Suche nach dem ggT eine Einschränkung auf positive Werte von gemeinsamen Teilern vornehmen lässt. Es folgt $ggT(n_1, \dots, n_k) = ggT(|n_1|, \dots, |n_k|)$ für alle ganzen Zahlen $n_1, \dots, n_k$, wobei nicht alle gleich 0 sind. (vgl. [6], S. 5)

Satz 38 (Euklidischer Algorithmus). (vgl. [6], S. 5)

Man betrachtet $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $b \leq a$ und wendet wiederholte Male die Division mit Rest an:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, & 0 \leq r_1 < b \\ b &= r_1q_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{m-1} &= r_mq_m + r_{m+1}, & 0 \leq r_{m+1} < r_m. \end{aligned}$$

Weil wir $r_1 > r_2 > r_3 > \dots > r_m > r_{m+1} > \dots \geq 0$ erhalten, existiert ein „minimales“ n für welches $r_{n+1} = 0$ gilt. Somit folgt $r_n = ggT(a, b)$.

Beweis. (vgl. [6], S. 6)

Zuerst beschäftigen wir uns damit, dass r_n sowohl a als auch b teilt, es sich somit bei r_n um einen gemeinsamen Teiler handelt. Aufgrund der Gleichung $r_{n-1} = r_nq_n$ resultiert $r_n \mid r_{n-1}$. Geht man einen Schritt weiter, so muss aus $r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$ sowie Lemma 2 (h) die Teilbarkeit $r_n \mid r_{n-2}$ folgen. Setzt man diesen Vorgang sukzessive fort und wurde bereits $r_n \mid r_{m+1}$ sowie $r_n \mid r_m$ bewiesen, dann erhalten wir neben $r_n \mid r_{m-1}$ letztlich sogar $r_n \mid b$ und $r_n \mid a$.

Angenommen ein beliebiges positives d teilt a und b . Aus $r_1 = a - bq_0$ kann $d \mid r_1$ ermittelt werden und aus $r_2 = b - r_1q_1$ ist man in der Lage auf $d \mid r_2$ zu schließen. Auch diese Vorgehensweise kann Schritt für Schritt weitergeführt werden, bis wir bei den Teilbarkeiten $d \mid r_{m-1}$ und $d \mid r_m$ landen. Dementsprechend ergibt sich aufgrund von $r_{m+1} = r_{m-1} - r_mq_m$ die Schlussfolgerung $d \mid r_{m+1}$ und somit auch $d \mid r_n$. Unter Verwendung des Lemmas 2 führt $d \mid r_n$ zur Ungleichung $d \leq r_n$. $\square$

Korollar 1. (vgl. [6], S. 7)

Betrachtet man $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, wobei nicht alle den Wert 0 annehmen sowie ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $d > 0$, dann gilt die Äquivalenz:

$$d = ggT(n_1, \dots, n_k) \Leftrightarrow d \mid n_i \text{ und falls } d' \mid n_i, \text{ so folgt } d' \mid d \text{ mit } 1 \leq i \leq k \text{ und } d' \in \mathbb{Z}.$$

Definition 10 (Relativ prim und paarweise relativ prim). (vgl. [6], S. 9)

Die ganzen Zahlen $n_1, \dots, n_k$ werden genau dann als relativ prim bzw. teilerfremd bezeichnet, falls $ggT(n_1, \dots, n_k) = 1$ gilt. Sie werden paarweise relativ prim bzw. paarweise teilerfremd genannt, sollte $ggT(n_i, n_j) = 1$ mit $1 \leq i, j \leq k$ und $i \neq j$ gelten.

Bemerkung 9. Aus $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ paarweise relativ prim erkennt man sofort, dass diese Zahlen auch relativ prim sind (vgl. [6], S. 9).

Definition 11 (Primzahl). (vgl. [6], S. 10)

Eine Primzahl ist als eine Zahl p aus der Menge der natürlichen Zahlen definiert, welche größer als 1 ist und nur von 1, $-1, p, -p$ geteilt wird (also durch $\pm$ sich selbst und ± 1 teilbar ist).

Um die Behauptung des Satzes 45 beweisen zu können, werden etwaige Hilfsmittel benötigt, die im Anschluss besprochen werden (vgl. [68], S. 57-58).

Lemma 3. (vgl. [68], S. 56)

Ist b ein Teiler von c , so folgt $ggT(a, b) = ggT(a + c, b)$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (vgl. [68], S. 56)

Durch die Teilbarkeit $b \mid c$ kann c auch als $c = c_1 b$ formuliert werden. Wenden wir nun den euklidischen Algorithmus auf $(a + c)$ und b an, dann führt uns dies zu

$$\begin{aligned} a + c &= (q_0 + c_1)b + r_1 \\ b &= r_1 q_1 + r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= r_n q_n. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich auch hier r_n als größter gemeinsamer Teiler und es folgt $ggT(a + c, b) = ggT(a, b)$. $\square$

Lemma 4. (vgl. [68], S. 55)

Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $ggT(a, b) \mid ggT(a, bc)$.

Beweis. (vgl. [40], S. 53)

Wir erkennen $ggT(a, b)$ als Teiler von b und somit auch von bc . Offensichtlich ist ja auch a durch $ggT(a, b)$ teilbar. Im Beweis des euklidischen Algorithmus wurde gezeigt, dass jeder beliebige gemeinsame Teiler von zwei Zahlen auch den ggT dieser beiden Zahlen teilt. Daraus resultiert die Behauptung $ggT(a, b) \mid ggT(a, bc)$. $\square$

Lemma 5. (vgl. [68], S. 55)

Die Beziehung $ggT(ac, bc) = ggT(a, b)c$ besitzt Gültigkeit $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (vgl. [68], S. 55)

Dieser Beweis kann sehr einfach anhand des euklidischen Algorithmus gezeigt werden. Multipliziert man in dessen Beweis alle Gleichungen mit c , dann erhält man als größten gemeinsamen Teiler von ac und bc genau $r_n c$. Demzufolge ergibt sich $ggT(ac, bc) = r_n c = ggT(a, b)c$. $\square$

Lemma 6. (vgl. [68], S. 55)

Seien a und c teilerfremd, sprich $ggT(a, c) = 1$, dann gilt die Gleichung $ggT(a, bc) = ggT(a, b)$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (vgl. [68], S. 55)

Nach Lemma 4 ist $ggT(ab, bc)$ durch $ggT(a, bc)$ teilbar. Zudem kommt man laut Lemma 5 zu folgendem Schluss:

$$ggT(ab, bc) = ggT(a, c)b = 1 \cdot b = b,$$

wodurch nun $ggT(a, bc)$ als Teiler von b und trivialerweise auch von a feststeht. Demnach wissen wir über die Teilbarkeit $ggT(a, bc) \mid ggT(a, b)$ Bescheid (siehe Beweis des euklidischen Algorithmus). Durch Lemma 4 kennt man aber auch den Zusammenhang $ggT(a, b) \mid ggT(a, bc)$, weshalb die Gleichheit $ggT(a, bc) = ggT(a, b)$ vollständig gezeigt wurde. $\square$

3.1.2 Vielfache und kleinstes gemeinsames Vielfache

Definition 12 (Vielfaches und kgV). (vgl. [6], S. 14)

Angenommen $n_1, \dots, n_k$ sind aus der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und für $m \in \mathbb{Z}$ gilt $n_i \mid m$ für alle i mit $1 \leq i \leq k$. Dann ist m ein gemeinsames Vielfaches von $n_1, \dots, n_k$. Für $n_1, \dots, n_k \neq 0$ befindet sich in der nach unten beschränkten Menge der ausschließlich positiven gemeinsamen Vielfachen immer $|n_1 \cdots n_k|$.

Das kleinste gemeinsame Vielfache definiert sich für $n_1, \dots, n_k \neq 0$ durch

$$\text{kgV}(n_1, \dots, n_k) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid n_i \mid m \text{ für } 1 \leq i \leq k \text{ und } m > 0\}.$$

Korollar 2. (vgl. [6], S. 14-15)

(a) Nachstehende Äquivalenz besitzt für $n_1, \dots, n_k, m, m' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $m, m' > 0$ Gültigkeit:

$$m = \text{kgV}(n_1, \dots, n_k) \Leftrightarrow n_i \mid m \text{ und } n_i \mid m' \text{ für } 1 \leq i \leq k, \text{ so folgt } m \mid m'.$$

(b) Angenommen für die natürlichen Zahlen $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \neq 0$ gilt $n_i \cdot m_i = a$ mit $1 \leq i \leq k$, so erhalten wir

$$\text{kgV}(n_1, \dots, n_k) \text{ggT}(m_1, \dots, m_k) = a.$$

(c) Für $n_1, \dots, n_k$ aus der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie $N_i := \frac{n_1 \cdots n_k}{n_i}$ mit $1 \leq i \leq k$ präsentiert sich dieser Zusammenhang:

$$\text{kgV}(n_1, \dots, n_k) \text{ggT}(N_1, \dots, N_k) = n_1 \cdots n_k.$$

(d) Für die beiden natürlichen Zahlen $n_1, n_2 \neq 0$ kann eine interessante Beziehung angegeben werden:

$$\text{kgV}(n_1, n_2) \text{ggT}(n_1, n_2) = n_1 n_2.$$

(e) Angenommen $k \geq 2$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so können die unten angeführten Aussagen als äquivalent angesehen werden:

$$n_1, \dots, n_k \text{ sind paarweise relativ prim} \Leftrightarrow \text{kgV}(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdots n_k.$$

3.1.3 Kongruenzen und Restklassen

Definition 13 (Kongruenz). (vgl. [6], S. 16)

Seien a, b ganze Zahlen und m eine natürliche Zahl ungleich 0, falls die Teilbarkeit $m \mid (a - b)$ besteht, so werden a und b als kongruent modulo m definiert. Mathematisch wird dies als $a \equiv b \pmod{m}$ bzw. $a \equiv b \pmod{m}$ angegeben, wobei m auch als Modul bezeichnet werden kann. Gilt $m \nmid (a - b)$, dann sind a und b inkongruent modulo m , das heißt $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Lemma 7. (vgl. [6], S. 16)

Bei einer Kongruenz modulo $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ handelt es sich um eine Äquivalenzrelation, somit sind die folgenden Eigenschaften $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ erfüllt:

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$
- (ii) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
- (iii) $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}.$

Beweis. (vgl. [6], S. 16)

- (i) Dieses Ergebnis kann sofort aus $m \mid 0 = (a - a)$ abgelesen werden.
- (ii) Aus $m \mid (a - b)$ können wir $m \mid (-1) \cdot (a - b)$ ableiten, wodurch sich die Teilbarkeit $m \mid (b - a)$ angeben lässt.
- (iii) Aus $m \mid (a - b)$ und $m \mid (b - c)$ ergibt sich $m \mid ((a - b) + (b - c))$ und somit $m \mid (a - c)$. $\square$

Lemma 8. (vgl. [6], S. 16-17)

Für $a, b, c, d, k, a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{Z}$ und $m, n, s \in \mathbb{N}$ mit $k, m, n, s \neq 0$ lassen sich nachstehende Beziehungen aufstellen:

- (a) Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ erhält man $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- (b) Falls $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$ gelten, trifft $ac \equiv bd \pmod{m}$ zu.
- (c) Für $a \equiv b \pmod{m}$ und $k \mid m$ ergibt sich $a \equiv b \pmod{|k|}$.
- (d) Wenn $a \equiv b \pmod{m}$ gilt, folgt $ka \equiv kb \pmod{(|k|m)}$.
- (e) Durch $ka \equiv kb \pmod{m}$ kann man auf $a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{ggT}(k, m)}}$ schließen.
- (f) Aus $a \equiv b \pmod{m}$ und $a \equiv b \pmod{n}$ lässt sich die Kongruenz $a \equiv b \pmod{\text{kgV}(m, n)}$ ableiten.
- (g) Aus $a \equiv b \pmod{m}$ ergibt sich $a + c \equiv b + c \pmod{m}$ sowie $ac \equiv bc \pmod{m}$.
- (h) Sollte $a_i \equiv b_i \pmod{m}$ mit $1 \leq i \leq s$ vorliegen, so können jene Aussagen getroffen werden:

$$\sum_{i=1}^s a_i \equiv \sum_{i=1}^s b_i \pmod{m} \text{ und } \prod_{i=1}^s a_i \equiv \prod_{i=1}^s b_i \pmod{m}.$$

- (i) Aus $a \equiv b \pmod{m}$ kann $a^s \equiv b^s \pmod{m}$ gefolgert werden.
- (j) Durch $sa \equiv sb \pmod{m}$ und $\text{ggT}(s, m) = 1$ ergibt sich $a \equiv b \pmod{m}$.
- (k) Falls $a \equiv b \pmod{m}$ sowie $a \equiv b \pmod{n}$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$ gelten, führt uns dies zu $a \equiv b \pmod{mn}$.

Definition 14 (Lineare Kongruenz). (vgl. [6], S. 19)

Falls $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$, so heißt $ax \equiv b \pmod{m}$ lineare Kongruenz. Es wird versucht jene $x \in \mathbb{Z}$ zu finden, welche die lineare Kongruenz lösen, wobei man Ergebnisse sucht, welche inkongruent modulo m sind.

Lemma 9. (vgl. [6], S. 19)

Für $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$ erhalten wir die Äquivalenz:

$$ax \equiv b \pmod{m} \text{ ist lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ggT}(a, m) \mid b.$$

Daher besitzt diese lineare Kongruenz modulo m genau $\text{ggT}(a, m)$ inkongruente Lösungen.

Definition 15 (Simultane (lineare) Kongruenz). (vgl. [6], S. 21)

Falls $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, so wird nachstehendes System

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

als simultane (lineare) Kongruenz bezeichnet. Das Augenmerk liegt auf allen $x \in \mathbb{Z}$, welche obiges System für die gesamten k Kongruenzen lösen.

Lemma 10. (vgl. [6], S. 22)

Falls das System

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

für $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ gelöst werden kann, so handelt es sich bei der Lösung modulo $\text{kgV}(m_1, \dots, m_k)$ um ein eindeutig bestimmtes Ergebnis.

Satz 39 (Chinesischer Restsatz). (vgl. [6], S. 22)

Seien $m_1, \dots, m_k$ paarweise teilerfremd, wobei $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, so verfügt das System

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{m_2}, \quad \dots, \quad x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

über genau eine inkongruente Lösung modulo $m_1 \cdots m_k$.

Beweis. (vgl. [6], S. 22)

Sei $M_i := \frac{m_1 \cdots m_k}{m_i}$ mit $1 \leq i \leq k$, so muss $\text{ggT}(m_i, M_i) = 1$ gelten.

Denn indirekt angenommen m_i und M_i wären nicht teilerfremd, dann gäbe es eine Primzahl p , welche $p \mid m_i$ und $p \mid (m_1 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k)$ erfüllt. Somit müsste ein $j \neq i$ aus der Menge $\{1, \dots, k\}$ existieren, für welches $p \mid m_j$ gilt. Dies ergibt jedoch einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass $m_1, \dots, m_k$ paarweise relativ prim sind. Laut Lemma 9 muss es für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ ein $y_j \in \mathbb{Z}$ geben, welches $M_j y_j \equiv 1 \pmod{m_j}$ erfüllt. Wir behaupten nun, dass es sich bei $x_0 = \sum_{i=1}^k a_i M_i y_i$ um eine Lösung der simultanen Kongruenz handelt. Daraus resultiert die Gültigkeit von $a_i M_i y_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ für $1 \leq i \leq k$ mit $i \neq j$ wegen der Teilbarkeit $m_j \mid M_i$. Es folgt somit für $i \in \{1, \dots, k\}$:

$$x_0 = a_1 M_1 y_1 + \cdots + a_k M_k y_k \equiv a_j \underbrace{M_j y_j}_{\equiv 1 \pmod{m_j}} \equiv a_j \pmod{m_j}.$$

Laut Lemma 10 handelt es sich modulo $\text{kgV}(m_1, \dots, m_k)$ um eine eindeutig bestimmte Lösung. Zusätzlich verhilft uns Korollar 2 (e) zu dem Endresultat: $\text{kgV}(m_1, \dots, m_k) = m_1 \cdots m_k$. $\square$

Wir erinnern uns zurück an einen weiteren wichtigen Satz aus der Zahlentheorie, den sogenannten *kleinen Satz von Fermat*. Benannt wurde dieser nach dem Franzosen *Pierre de Fermat*, welcher im 17. Jahrhundert als Mathematiker und Jurist tätig war. Auf die Aussage dieses Satzes muss schon bald zurückgegriffen werden. (vgl. [40], S. 60)

Satz 40 (Kleiner Satz von Fermat). (vgl. [6], S. 29)

Für eine Primzahl p gilt:

(i) Für $a \in \mathbb{Z}$ und $p \nmid a$ folgt die Aussage $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(ii) Sei $a \in \mathbb{Z}$, so gilt $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Laut Lemma 7 handelt es sich bei einer Kongruenz $\pmod{m}$ mit $0 < m \in \mathbb{N}$ um eine sogenannte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Es lässt sich demnach die **Äquivalenzklasse**

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid m \mid (x - a)\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - a = km\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x = a + km\} = \{a + km \mid k \in \mathbb{Z}\} = a + m\mathbb{Z} \end{aligned}$$

für $a \in \mathbb{Z}$ angeben. (vgl. [6], S. 24)

Definition 16 (Restklasse modulo m). (vgl. [6], S. 24)

Sei $m \neq 0$ aus der Menge der natürlichen Zahlen, so handelt es sich bei jeder Äquivalenzklasse $\bar{a} \pmod{m}$ um eine Restklasse $\pmod{m}$. Die Elemente $x \in \bar{a}$ stellen jeweils einen Repräsentanten von $\bar{a}$ dar. Die Menge der Restklassen modulo m kann als $\mathbb{Z}_m = \{\bar{a} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ angegeben werden.

Lemma 11. (vgl. [6], S. 24)

Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq 0$ gilt:

$$|\mathbb{Z}_m| = m, \text{ das heißt } \mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}.$$

Beweis. (vgl. [6], S. 24)

Angenommen a ist eine ganze Zahl, die sich als $a = qm + r$ mit $0 \leq r \leq m-1$ schreiben lässt. Dann muss $a \equiv r \pmod{m}$ gelten, woraus $\bar{a} = \bar{r}$ folgt. Daher kann es maximal die Restklassen $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$ geben. Weil für alle $0 \leq r, s \leq m-1$ die Inkongruenz $r \not\equiv s \pmod{m}$ besteht, muss r von s verschieden sein. $\square$

Definition 17 (Vollständiges Restsystem). (vgl. [6], S. 24)

Wir bezeichnen eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit m Elementen als vollständiges Restsystem modulo m ($m \in \mathbb{N}, m \neq 0$), falls sie jeweils einen Vertreter von jeder Restklasse vorweist. Mathematisch formuliert: Bei $\{r_1, \dots, r_m\}$ handelt es sich genau dann um ein vollständiges Restsystem $\pmod{m}$, sollte $r_i \not\equiv r_j \pmod{m}$ für alle $1 \leq i, j \leq m$ mit $i \neq j$ erfüllt sein.

Definition 18 (Prime Restklasse). (vgl. [6], S. 26)

Liegt $\text{ggT}(a, m) = 1$ für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{Z}$ vor, so bezeichnet man $\bar{a} \in \mathbb{Z}_m$ als prime Restklasse.

3.1.4 Binomialkoeffizient und Gaußklammer

Definition 19 (Binomialkoeffizient). (vgl. [56], S. 52)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$, dann kann der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ mithilfe der nachstehenden Regeln angegeben werden:

- (a) $\binom{0}{0} := 1$
- (b) $\binom{n}{k} := 0$, falls $k < 0$ oder aber $k > n$
- (c) $\binom{n}{k} := \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Des Weiteren werden nun einige Eigenschaften des Binomialkoeffizienten aufgezählt, dessen Beweise eigenständig mittels vollständiger Induktion überprüft werden können.

Satz 41. (Geschlossene Darstellung des Binomialkoeffizienten) (vgl. [56], S. 53)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$, dann lässt sich folgende Beziehung aufstellen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Lemma 12. (vgl. [40], S. 55)

Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ formulieren wir die Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} & \text{(c)} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \\ \text{(b)} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \text{(d)} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \quad \forall n > 0. \end{array}$$

Definition 20 (Binomischer Lehrsatz). (vgl. [56], S. 56)

Seien a, b reelle Zahlen und n aus der Menge der natürlichen Zahlen, so folgt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Definition 21 (Gaußklammer). (vgl. [22], S. 26-27)

Die Gaußklammer $\lfloor x \rfloor$ beschreibt für reelle x den eindeutigen Wert n aus der Menge der ganzen Zahlen mit

$$n \leq x < n + 1.$$

3.2 Die Fragestellung von Lamé

Zur Zeit von *Lamé* hatte die Zahlenfolge noch nicht ihren heute gebräuchlichen Namen. *Lamé* brachte neue Erkenntnisse über die Folgenglieder zu Tage, weswegen sie beispielsweise von *Binet* als *Lamésche Zahlen* bezeichnet wurden. Aber auch Bezeichnungen wie *keplersche Reihe* konnte man in Aufzeichnungen finden, da *Kepler* sich bereits vor *Lamé* mit der Folge auseinandergesetzt hatte. Nun soll diese spezielle Fragestellung von *Lamé* und dessen Lösung vorgestellt werden. (vgl. [42], S. 183)

Satz 42 (Satz von Lamé). (vgl. [42], S. 183)

Für $k \geq 1$ aus der Menge der natürlichen Zahlen existieren zwischen vier und maximal fünf Folgenglieder mit k Stellen, wobei nur Fibonacci-Zahlen f_n mit $2 \leq n \in \mathbb{N}$ betrachtet werden.

Beweis. (vgl. [42], S. 183-184)

Werden die einstelligen Folgenglieder, ausgenommen $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$, untersucht, so lassen sich insgesamt fünf Zahlen: $f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8$ mit dieser Eigenschaft finden. Sei die Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $k \geq 1$ gültig, dann sei f_n das kleinste Folgenglied mit $k + 1$ Stellen, wodurch wir $f_{n-1}, f_{n-2} < 10^k$ folgern und zusätzlich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} < 2 \cdot 10^k \\ f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} < 3 \cdot 10^k \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n < 5 \cdot 10^k \\ f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} < 8 \cdot 10^k \end{aligned}$$

erhalten. Dadurch ergibt sich die Existenz von mindestens vier Folgenglieder f_n, f_{n+1}, f_{n+2} und f_{n+3} mit $(k + 1)$ Stellen. Zumal $f_{n-2} < f_{n-1}$ gilt, lässt sich die Beziehung

$$10^k \leq f_n = f_{n-1} + f_{n-2} < 2 \cdot f_{n-1}$$

und demnach

$$f_{n-1} > \frac{1}{2} \cdot 10^k$$

aufstellen. Begutachtet man die nachfolgenden Glieder mit

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} > \frac{3}{2} \cdot 10^k \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n > \frac{5}{2} \cdot 10^k \\ f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} > \frac{8}{2} \cdot 10^k \\ f_{n+4} &= f_{n+3} + f_{n+2} > \frac{13}{2} \cdot 10^k \\ f_{n+5} &= f_{n+4} + f_{n+3} > \frac{21}{2} \cdot 10^k, \end{aligned}$$

so muss f_{n+5} zumindest $(k+2)$ Stellen besitzen, wodurch die Behauptung überprüft wurde. $\square$

3.3 Die Fibonacci-Zahlen und ihre Teilbarkeiten

3.3.1 Bedeutende Teilbarkeitseigenschaften

Der Fokus wird nun auf die Teilbarkeitsregeln der Fibonacci-Zahlen gelegt, welche im nächsten Abschnitt einer umfassenden Untersuchung unterzogen werden (vgl. [71], S. 24).

Satz 43. (vgl. [71], S. 24)

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt die Gleichung $\text{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$. Demzufolge besitzen zwei direkt aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen keinen gemeinsamen Teiler; sie sind somit teilerfremd.

Beweis. (vgl. [71], S. 24-25)

Indirekt angenommen die Behauptung sei falsch, dann hätten f_n und f_{n+1} ein $d > 1$ als gemeinsamen Teiler, den auch die Differenz $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ aufweisen müsste. Führt man diesen Gedankengang sukzessive weiter (Überprüfung mittels Induktion!), so liefert uns dies $d \mid f_{n-2}$, $d \mid f_{n-3}$, $\dots$ bis hin zu $d \mid f_1$. Hier stößt man jedoch auf einen Widerspruch, da $d > 1$ kein Teiler von $f_1 = 1$ sein kann. Dadurch kann kein Teiler $d > 1$ zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen existieren. $\square$

Bemerkung 10. Dieser Satz gilt auch für Lucas-Zahlen und kann analog dazu bewiesen werden (vgl. [40], S. 65).

Satz 44. (vgl. [68], S. 51)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und m ein Teiler von n , dann handelt es sich bei f_m um einen Teiler von f_n . Demnach ist der unten angeführte Schluss zulässig:

$$m \mid n \Rightarrow f_m \mid f_n.$$

Beweis. (vgl. [68], S. 51)

Setzt man die Teilbarkeit $m \mid n$ voraus, dann lässt sich n als $n = mk$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$ angeben. Gesondert wird die Behauptung für $n = 0$ betrachtet, deren Aussage offensichtlich erfüllt ist. Falls $m = 0$ ist, muss laut unserer Festlegung auch n den Wert 0 annehmen. Im nächsten Schritt widmen wir uns dem Satz für $n, m \geq 1$.

Induktionsanfang Für $k = 1$ gilt $n = m$, wodurch klarerweise die Aussage $f_m \mid f_n$ bewiesen ist.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage möge nun für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $k \geq 1$ gelten.

Induktionsschritt Präsentiert wird der Induktionsschritt von $k \rightarrow (k + 1)$.

Nach der Formel (1.2) kann jene Gleichung

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1}f_m + f_{mk}f_{m+1}$$

aufgestellt werden. Die Summe auf der rechten Seite lässt sich durch f_m teilen, da das erste Produkt $f_{mk-1}f_m$ trivialerweise und der zweite Term $f_{mk}f_{m+1}$ infolge der Induktionsvoraussetzung ($f_m \mid f_{mk}$) den Teiler f_m aufweisen. Somit muss auch die linke Seite der Gleichung $f_{m(k+1)}$ durch f_m teilbar sein. $\square$

Satz 45. (vgl. [68], S. 57)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann ist der größte gemeinsame Teiler zweier Fibonacci-Zahlen wieder ein Folgenglied dieser speziellen Zahlenabfolge. Mathematisch formuliert kann dies wie folgt angegeben werden:

$$ggT(f_m, f_n) = f_{ggT(m,n)}.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 68, [68], S. 57-58)

Es kann von der Voraussetzung $m > n$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit ausgegangen werden. Durch den euklidischen Algorithmus erhalten wir für m und n den Wert r_t als größten gemeinsamen Teiler:

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1, & 0 \leq r_1 < n \\ n &= r_1q_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t, & 0 \leq r_t < r_{t-1} \\ r_{t-1} &= r_tq_t. \end{aligned}$$

Zudem wird man dazu veranlasst die Umformulierung $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0+r_1}, f_n)$ vorzunehmen. Wird weiters die Formel (1.2) gebraucht, so führt uns dies zur Gleichung: $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1} + f_{nq_0}f_{r_1+1}, f_n)$. Wird nun zusätzlich die Aussage aus Satz 44 ($n \mid nq_0 \Rightarrow f_n \mid f_{nq_0}$) sowie die Behauptung von Lemma 3 ($f_n \mid f_{nq_0}f_{r_1} \Rightarrow ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1} + f_{nq_0}f_{r_1+1}, f_n) = ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1}, f_n)$) verwendet, so präsentiert sich

$$ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{nq_0-1}f_{r_1}, f_n).$$

Es kann keinen gemeinsamen Teiler $e > 1$ der beiden Folgenglieder f_{nq_0-1} und f_n geben, da ansonsten $ggT(f_{nq_0}, f_{nq_0-1}) = 1$ nicht gelten würde. Dies ist aber laut Satz 43 unakkömlich. Aufgrund der Teilerfremdheit von f_{nq_0-1} und f_n besteht nun die Möglichkeit

Lemma 6 anzuwenden, wonach die Gleichheit $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{r_1}, f_n)$ gegeben sein muss. Analog dazu kann die Gültigkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} ggT(f_{r_1}, f_n) &= ggT(f_{r_2}, f_{r_1}) \\ ggT(f_{r_2}, f_{r_1}) &= ggT(f_{r_3}, f_{r_2}) \\ &\vdots \\ ggT(f_{r_{t-1}}, f_{r_{t-2}}) &= ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}}) \end{aligned}$$

überprüft werden. Fügt man alle Gleichungen zusammen, dann liefert uns dies $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}})$. Durch $r_t \mid r_{t-1}$ folgt aus Satz 44 die Teilbarkeit $f_{r_t} \mid f_{r_{t-1}}$ und man erhält $ggT(f_m, f_n) = ggT(f_{r_t}, f_{r_{t-1}}) = f_{r_t} = f_{ggT(m,n)}$. $\square$

Bemerkung 11. Haben zwei Fibonacci-Zahlen f_m und f_n keinen gemeinsamen Teiler, so nimmt laut Satz 45 der größte gemeinsame Teiler von m und n entweder den Wert 1 oder den Wert 2 an, genauer $ggT(f_m, f_n) = 1 = f_1 = f_2 = f_{ggT(m,n)}$ (vgl. [43], S. 107).

Bemerkung 12. Fibonacci-Zahlen, deren Indizes keinen gemeinsamen Teiler aufweisen, sind ebenfalls teilerfremd. Die Erklärung liefert uns auch hierbei Satz 45 mit $f_{ggT(m,n)} = f_1 = 1 = ggT(f_m, f_n)$. (vgl. [43], S. 102)

Satz 46. (vgl. [68], S. 58)

Falls f_m ein Teiler von f_n ist, dann lässt sich n durch m teilen; kurz gesagt:

$$f_m \mid f_n \Rightarrow m \mid n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. (vgl. [68], S. 58)

Angenommen f_m teilt f_n , so ist der größte gemeinsame Teiler dieser Zahlen gleich f_m . Durch die Aussage des vorhergehenden Satzes führt uns dies zu folgender Gleichung $f_m = f_{ggT(n,m)}$, wodurch $m = ggT(n, m)$ gelten muss. Demgemäß ergibt sich nun die Teilbarkeit $m \mid n$. $\square$

Durch die Vereinigung von Satz 44 und Satz 46 lässt sich sogleich ein zentrales und wichtiges Resultat präsentieren (vgl. [68], S. 58):

Satz 47. (vgl. [68], S. 58)

f_m ist genau dann ein Teiler von f_n , wenn m ein Teiler von n ist. Mathematisch veranschaulicht bedeutet das

$$f_m \mid f_n \Leftrightarrow m \mid n \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Satz 48. (vgl. [71], S. 24)

Bei f_n handelt es sich für nicht prime $n \in \mathbb{N} \setminus \{4\}$ um eine Zahl, welche zusammengesetzt ist.

Beweis. (vgl. [71], S. 24)

Solch ein zusammengesetztes n kann man auch mit $n = n_1 n_2$ darstellen, wobei für n_1 und n_2 die Bedingung $1 < n_1, n_2 < n$ sowie entweder die Ungleichung $n_1 > 2$ oder $n_2 > 2$ erfüllt sein muss. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $n_1 > 2$ an. Aus Satz 47 kann wegen $n_1 \mid n$ die Teilbarkeit $f_{n_1} \mid f_n$ abgeleitet werden, wodurch sich der Zusammenhang $1 < f_{n_1} < f_n$ feststellen lässt. Dadurch ist f_n keine Primzahl, sondern eine zusammengesetzte Zahl. $\square$

Bemerkung 13. Der Umkehrschluss von Satz 48 – aus einer Primzahl n folgt, dass die n -te Fibonacci-Zahl ebenfalls prim ist – darf jedoch nicht vorgenommen werden. Ein Gegenbeispiel wäre $f_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. (vgl. [43], S. 98)

Bemerkung 14. Fibonacci-Zahlen f_p mit p prim und $p > 3$ besitzen keine Fibonacci-Teiler $f_t \neq f_p$. Die Umkehrung, falls eine Fibonacci-Zahl $f_i > 3$ nicht durch eine Fibonacci-Zahl $f_t \neq f_i$ teilbar ist, dass folglich der Index $i = p$ prim sein muss, gilt ebenfalls. (vgl. [43], S. 96-97)

Leider existiert noch keine Möglichkeit, um eine Voraussage über eine beliebige Fibonacci-Zahl f_n und deren Primzahlcharakter zu tätigen. Es liegt bisher auch noch keine Gewissheit über die Mächtigkeit der Menge an Primzahlen unter den Fibonacci-Gliedern vor. Bis heute handelt es sich bei der Fibonacci-Zahl f_{2971} , welche insgesamt 621 Stellen aufweist, um das größte bekannte prime Folgenglied dieser speziellen Zahlenabfolge. (vgl. [11], S. 315)

Der nächste Satz wird weitreichende Auswirkungen haben, da sich die natürlichen Zahlen als Teiler der Fibonacci-Zahlen herausstellen werden (vgl. [40], S. 65).

Satz 49. (vgl. [40], S. 65)

Sei $m \geq 2$ aus der Menge der natürlichen Zahlen, so ist eine Fibonacci-Zahl unter den ersten $m^2 - 1$ Folgengliedern durch m teilbar.

Beweis. (vgl. [40], S. 65-66)

Wir arbeiten jetzt mit Restklassen *modulo* m und sehen uns dazu die Folge aus Restklassenpaaren von benachbarten Fibonacci-Gliedern an:

$$(\bar{f}_0, \bar{f}_1), (\bar{f}_1, \bar{f}_2), (\bar{f}_2, \bar{f}_3), \dots, (\bar{f}_n, \bar{f}_{n+1}), \dots \quad (3.1)$$

Es gibt höchstens m^2 unterschiedliche Restklassenpaare, aufgrund der Existenz von m Restklassen *mod* m . Laut Satz 43 gibt es zudem nur $m^2 - 1$ andersartige Paare, da sich aus dem Vorhandensein von $(\bar{0}, \bar{0})$ zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler $m \geq 2$ ergeben. Dies lässt sich jedoch nicht mit Satz 43 vereinbaren, weshalb innerhalb der ersten m^2 Glieder von (3.1) mindestens zwei Zahlen existieren, die übereinstimmen. Wenn $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1})$ als das erste Paar von (3.1) angenommen wird, für welches dies zutrifft, so gibt es ein Glied $(\bar{f}_l, \bar{f}_{l+1})$ für welches $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}) = (\bar{f}_l, \bar{f}_{l+1})$ mit $k < l$ gilt. Indem ein Widerspruch hergeleitet wird, lässt sich demonstrieren, dass $k = 0$ und somit $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}) = (\bar{0}, \bar{1})$ gelten muss.

Es wird $k > 0$ vorausgesetzt und anhand der beiden Gleichungen $f_{l-1} = f_{l+1} - f_l$ und $f_{k-1} = f_{k+1} - f_k$ ergibt sich die Gleichheit: $\bar{f}_{l-1} = \bar{f}_{k-1}$. Demnach kommt das Paar $(\bar{f}_{k-1}, \bar{f}_k)$ bereits doppelt in (3.1) vor und dies führt zu einem Widerspruch unserer Annahme, da $(\bar{f}_k, \bar{f}_{k+1})$ die erste Paarung sein sollte, für welche diese Eigenschaft zutrifft, weshalb wir nun den zulässigen Schluss ziehen dürfen, dass k den Wert 0 annimmt.

Vorausgesetzt die Paarung $(\bar{0}, \bar{1})$ kommt an der u -ten Stelle $(\bar{f}_u, \bar{f}_{u+1}) = (\bar{0}, \bar{1})$ mit $1 \leq u \leq m^2$ in (3.1) wiederholt vor, dann muss m ein Teiler von f_u , aufgrund der Kongruenz $f_u \equiv 0 \pmod{m}$, sein. $\square$

Da diese Eigenschaft bei der Fibonacci-Sequenz nicht aber bei der Lucas-Folge vorliegt, spiegelt dies die Einzigartigkeit der Fibonacci-Zahlen wider. Des Weiteren wissen wir

speziell durch diesen Satz, dass natürlich auch alle Primzahlen die Funktion als Teiler von Fibonacci-Zahlen erfüllen. (vgl. [40], S. 66)

Interessanterweise verfügen nahezu alle Fibonacci-Glieder über primitive Primteiler. Eine Primzahl p heißt **primitiver Primteiler** von f_n , falls f_n das erste durch p teilbare Folgenglied ist und demnach $p \nmid f_k$ für $k < n$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt. Beispielsweise verfügt f_7 über 13, f_9 hat 17 und f_{10} besitzt 11 als primitiven Primteiler. Nur $f_1 = f_2 = 1$, $f_6 = 8$ und $f_{12} = 144$ weisen keine primitiven Primteiler auf. Eine Herleitung dieses Resultats kann bei Vorobiev [68], S. 79-86, nachgelesen werden. (vgl. [40], S. 66)

Es existieren aber auch einige Folgenglieder mit mehreren Teilern dieser besonderen Art. Als Beispiel kann man hier neben f_{19} mit den primitiven Primteilern 37 und 113 auch f_{27} mit den beiden primitiven Primteilern 53 und 109 anführen. Bis jetzt ist aber noch nicht bekannt, wie mächtig die Menge der Fibonacci-Zahlen mit mehreren primitiven Primteilern ist. (vgl. [68], S. 86-87)

Bemerkung 15. Die Paarung $(\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{f}_u, \bar{f}_{u+1})$ tritt in (3.1) nach $u < m^2$ Gliedern erneut auf, wodurch sich $\bar{f}_{u+2} = \bar{f}_u + \bar{f}_{u+1} = \bar{0} + \bar{1}$ usw. ergibt. Somit führt uns dies zu einer Periodizität der Reste in der Restklassenfolge $\{\bar{f}_n\}$, begründet durch das Prinzip der Rekursionsformel. (vgl. [40], S. 66-67)

Proposition 2. (vgl. [48], S. 33)

Addiert man 10 beliebige aufeinanderfolgende Glieder der Fibonacci-Folge, so lässt sich die daraus resultierende Summe durch 11 teilen.

Beweis. (vgl. [48], S. 350-351)

Betrachtet man die Fibonacci-Zahlen *modulo* 11, so präsentiert sich uns die Abfolge

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, \dots$$

Bei näherer Betrachtung stellt sich ein Muster der Reste, welches sich nach 10 Gliedern wiederholt, heraus. Der Grund dafür ist die Periodizität der Fibonacci-Folge f_m *modulo* m , welche vorhin erwähnt wurde. Allgemein wird diese im Unterkapitel 3.4.1 thematisiert. Für den weiteren Verlauf des Beweises muss folglich nur gezeigt werden, dass die Summe aufeinanderfolgender 10 Reste durch 11 dividierbar ist. Hierzu stellen wir uns einen Kreis mit den Resten vor, welcher durchlaufen wird.

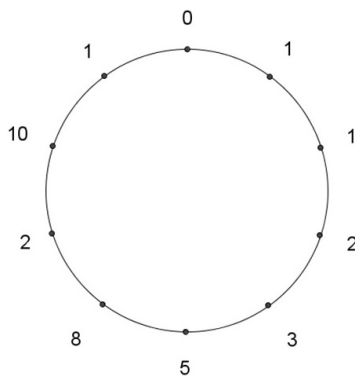


Abbildung 3.1: Reste der Fibonacci-Folge *mod* 11 (vgl. [48], S. 351)

Selbst bei beliebiger Wahl des Ausgangspunktes sind die Reste immer dieselben, da eine Periodenlänge von 10 vorliegt:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1.$$

Als Summe dieser Zahlen ergibt sich 33, welche eindeutig den Teiler 11 aufweist. $\square$

Nun werden verschiedene Eigenschaften für Fibonacci-Zahlen durchbesprochen, um schnell und effizient eine Aussage über spezielle Teilbarkeiten von Folgengliedern treffen zu können. (vgl. [71], S. 26)

Korollar 3. (vgl. [71], S. 26, [40], S. 69, [43], S. 80-81, [68], S. 59)

Ein Glied der Fibonacci-Folge f_m ($m \in \mathbb{N}$) weist genau dann

$$\text{den Teiler } \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \\ 13 \\ 16 \\ 21 \end{array} \right\} \text{ auf, falls sich ihr Index durch } \left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \\ 10 \\ 7 \\ 12 \\ 8 \end{array} \right\} \text{ teilen lässt.}$$

Beweis. (vgl. [71], S. 27)

Um die Beweise für diese Teilbarkeiten zu erhalten, wird Satz 47 benutzt, welcher uns die Zusammenhänge auf eine sehr schnelle Art und Weise liefert:

- | | |
|--|--|
| (a) $3 \mid m \Leftrightarrow f_3 = 2 \mid f_m$ | (f) $6 \mid m \Leftrightarrow f_6 = 8 \mid f_m$ |
| (b) $4 \mid m \Leftrightarrow f_4 = 3 \mid f_m$ | (g) $10 \mid m \Leftrightarrow f_{10} = 55 = 5 \cdot 11 \mid f_m$ |
| (c) $6 \mid m \Leftrightarrow f_6 = 8 = 2 \cdot 4 \mid f_m$ | (h) $7 \mid m \Leftrightarrow f_7 = 13 \mid f_m$ |
| (d) $5 \mid m \Leftrightarrow f_5 = 5 \mid f_m$ | (i) $12 \mid m \Leftrightarrow f_{12} = 144 = 9 \cdot 16 \mid f_m$ |
| (e) $8 \mid m \Leftrightarrow f_8 = 21 = 3 \cdot 7 \mid f_m$ | (j) $8 \mid m \Leftrightarrow f_8 = 21 \mid f_m$. $\square$ |

Dieses Verfahren gewährleistet die Aufstellung vieler weiterer Teilbarkeitskriterien, wie beispielsweise anhand der Zahl $f_9 = 34 = 2 \cdot 17$, wodurch wir $9 \mid m \Leftrightarrow 17 \mid f_m$ erkennen.

Unterzieht man den Fall (f) einer genaueren Untersuchung, so stellt sich 4 als Teiler von $f_6 = 8$ heraus. Genau genommen ist f_6 die erste und somit kleinste Fibonacci-Zahl mit dieser Eigenschaft. Existieren nun aber auch Folgenglieder, die durch 4 teilbar sind, aber nicht den Teiler 8 aufweisen? (vgl. [40], S. 69)

Satz 50. (vgl. [40], S. 69)

Eine Fibonacci-Zahl f_r lässt sich genau dann als erstes Folgenglied durch m teilen, wenn alle Fibonacci-Zahlen f_s , die durch m teilbar sind, auch den Teiler f_r besitzen ($m, r, s \in \mathbb{N}$).

Beweis. (vgl. [40], S. 69)

Angenommen alle Fibonacci-Zahlen f_s mit dem Teiler m verfügen auch über den Teiler f_r . Offensichtlich folgt daraus die Beziehung $f_r \leq f_s$, wodurch sich f_r als die kleinste

Fibonacci-Zahl mit der Eigenschaft $m \mid f_r$ herausstellt.

Kehren wir dies jetzt um und setzen f_r als die kleinste und f_s als eine beliebige Fibonacci-Zahl mit dem Teiler m voraus. Demgemäß muss für den $ggT(f_r, f_s)$ trivialerweise $ggT(f_r, f_s) \leq f_r$ gelten. Verwendet man nun die Kenntnisse aus Satz 45, so erhalten wir $m \mid ggT(f_r, f_s) = f_{ggT(r,s)}$, wodurch sich letztlich $ggT(f_r, f_s) = f_r$ ergibt, um die Existenz einer kleineren durch m teilbaren Zahl $f_{ggT(r,s)} < f_r$ zu verhindern. $\square$

Dementsprechend lässt sich nun die vorhin gestellte Frage sehr leicht beantworten: Es existiert keine Fibonacci-Zahl, die den Teiler 4, aber nicht den Teiler 8 besitzt, da $f_6 = 8$ das erste bzw. kleinste Folgenglied mit der Eigenschaft $4 \mid f_6$ ist. Führt man diesen Gedankengang weiter, so weist beispielsweise jede Fibonacci-Zahl, welche durch 7 teilbar ist, auch die Teiler 21 und 3 auf, da $f_8 = 21$ die erste Fibonacci-Zahl mit dem Teiler 7 ist. (vgl. [40], S. 70)

Satz 51. (vgl. [68], S. 64)

Betrachtet man jene Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index, so weisen die ungeraden Teiler dieser Zahlen die Gestalt $4t + 1$ mit $t \in \mathbb{N}$ auf.

Beweis. (vgl. [68], S. 62, 64, 65)

Vorausgesetzt $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, so verhilft uns die Simpson-Identität zu

$$-1 = f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = f_{n-1}(f_{n-1} + f_n) - f_n^2 = f_{n-1}^2 + f_{n-1}f_n - f_n^2.$$

Es wird p als Primzahl mit $p \neq 2$ und als Teiler von f_n angenommen. Aus $f_{n-1}^2 + f_{n-1}f_n - f_n^2 + 1 = 0$ kann auf die Teilbarkeit $f_n \mid (f_{n-1}^2 + 1)$ geschlossen werden, weshalb sogleich $p \mid (f_{n-1}^2 + 1)$ folgt und wir zur Kongruenz

$$f_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod{p}$$

gelangen. Betrachtet man nun nachstehende Potenz, so gilt:

$$(f_{n-1}^2)^{\frac{p-1}{2}} = f_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Wegen der Aussage $ggT(f_{n-1}, f_n) = 1$ müssen p und f_{n-1} teilerfremd sein, da die Teilbarkeit $p \mid f_n$ besteht. Alle Voraussetzungen zur Anwendung des *kleinen Satzes von Fermat* sind gegeben, wodurch sich $f_{n-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ und $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ergibt. Damit dies stimmen kann, muss $\frac{p-1}{2}$ gerade sein und somit der Form $p = 4t + 1$ für $t \in \mathbb{N}$ entsprechen. Demnach besitzen alle Primteiler $p \neq 2$ von f_n diese bestimmte Gestalt. Stellt man des Weiteren einige Überlegungen bezüglich der ungeraden Teiler von f_n an, welche sich trivialerweise als Produkt dieser ungeraden Primzahlen ergeben, so können wir davon ausgehen, dass diese Teiler ebenfalls der Form $4t + 1$ genügen. Dies muss allerdings einer Überprüfung unterzogen werden:

Seien $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ ungerade Primteiler von der Form $4t + 1$ mit $t \in \mathbb{N}$, so gilt

$$p_1 \equiv 1 \pmod{4}, \quad p_2 \equiv 1 \pmod{4}, \quad \dots, \quad p_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Dann folgt für das Produkt dieser Zahlen die Kongruenz:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass sich das Produkt in der Form $4t + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$ schreiben lässt. $\square$

3.3.2 Aussagen über Quotienten von Fibonacci-Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit den Teilbarkeitsregeln der Quotienten von Fibonacci-Zahlen auseinandersetzen. Doch zuvor ist es notwendig, zwei Hilfssätze zu besprechen, die uns in unserem Vorhaben unterstützen werden. (vgl. [40], S. 70)

Lemma 13. (vgl. [68], S. 74)

f_n^2 erweist sich als Teiler von $f_{mn-1} - f_{n-1}^m$, falls für $n, m \in \mathbb{N}$ die Bedingungen $m \geq 1$ und $n \geq 2$ erfüllt sind.

Beweis. (vgl. [68], S. 74-75)

Mithilfe eines Induktionsbeweises wird versucht die Aussage zu belegen.

Induktionsanfang Für $m = 1$ erhalten wir $f_{n-1} - f_{n-1} = 0$, weswegen die Behauptung $f_n^2 \mid 0$ erfüllt ist.

Induktionsvoraussetzung Die Gültigkeit der Aussage wird für ein beliebiges, aber festes $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt.

Induktionsschritt Nun soll der Induktionsschritt von $m \rightarrow (m+1)$ überprüft werden:

$$f_{(m+1)n-1} - f_{n-1}^{m+1} = f_{mn+(n-1)} - f_{n-1}^{m+1} \stackrel{\text{Satz 8}}{=} (f_{mn-1}f_{n-1} + f_{mn}f_n) - f_{n-1}^{m+1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich die Kongruenz $f_{mn-1} \equiv f_{n-1}^m \pmod{f_n^2}$ aufstellen. Wird diese Erkenntnis in die obige Gleichung eingesetzt, dann kann die Beziehung

$$f_{(m+1)n-1} - f_{n-1}^{m+1} \equiv f_{n-1}^m f_{n-1} + f_{mn}f_n - f_{n-1}^{m+1} = f_{mn}f_n \pmod{f_n^2}$$

formuliert werden. Nach Satz 44 ist f_n Teiler von f_{mn} , insofern muss $f_{mn}f_n$ durch f_n^2 teilbar sein, weshalb sich die Kongruenz

$$f_{mn}f_n \equiv 0 \pmod{f_n^2}$$

angeben lässt. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache, gelangt man zu dem Ergebnis

$$f_{(m+1)n-1} - f_{n-1}^{m+1} \equiv 0 \pmod{f_n^2}. \quad \square$$

Lemma 14. (vgl. [40], S. 71)

Falls $m \geq 1$ und $n \geq 2$, dann lässt sich $f_{mn} - f_{n+1}^m + f_{n-1}^m$ durch f_n^3 teilen.

Beweis. (vgl. [40], S. 71)

Induktionsanfang Für $m = 1$ trifft man auf $f_n - f_{n+1} + f_{n-1} = f_{n+1} - f_{n+1} = 0$, womit die Aussage $f_n^3 \mid 0$ bestätigt ist.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage möge für ein beliebiges, aber festes $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$ gelten.

Induktionsschritt Dieser wird von m auf $(m+1)$ ausgeführt, wozu die Induktionsvoraussetzung $f_{mn} \equiv f_{n+1}^m - f_{n-1}^m \pmod{f_n^3}$ verwendet wird:

$$\begin{aligned} f_{(m+1)n} - f_{n+1}^{m+1} + f_{n-1}^{m+1} &\stackrel{\text{Satz 8}}{=} f_{mn-1}f_n + f_{mn}f_{n+1} - f_{n+1}^{m+1} + f_{n-1}^{m+1} \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} f_n f_{mn-1} + (f_{n+1}^m - f_{n-1}^m)f_{n+1} - f_{n+1}^{m+1} + f_{n-1}^{m+1} \pmod{f_n^3} \\ &\equiv f_n f_{mn-1} + f_{n-1}^m(f_{n+1} - f_{n+1}) \pmod{f_n^3} \\ &\equiv f_n f_{mn-1} - f_n f_{n-1}^m \equiv f_n(f_{mn-1} - f_{n-1}^m) \pmod{f_n^3} \\ &\stackrel{\text{Lemma 13}}{=} 0 \pmod{f_n^3}. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 52. (vgl. [68], S. 76)

Über die Primzahlen p und q können folgende Aussagen für $n \in \mathbb{N} > 2$ getroffen werden:

- (a) Ein Primfaktor q von f_n mit $q \neq p$ ist kein Teiler von $\frac{f_{np}}{f_n}$.
- (b) Ein ungerader Primfaktor p von f_n ist ein Teiler von $\frac{f_{np}}{f_n}$, jedoch lässt sich dieser Quotient nicht durch p^2 teilen.
- (c) Ist 4 ein Teiler von f_n , dann ist der Quotient $\frac{f_{2n}}{f_n}$ durch 2, nicht aber durch 4 teilbar.
- (d) Weist f_n den Teiler 2, nicht aber den Teiler 4 auf, so ist der Bruch $\frac{f_{2n}}{f_n}$ durch 4 teilbar, besitzt aber keinesfalls den Teiler 8.

Beweis. (vgl. [68], S. 76-78, [40], 71-73)

Verwendet man die Aussage aus Lemma 14 und nimmt $m = p$ an, so verfügt der Term $f_{np} - f_{n+1}^p + f_{n-1}^p$ über den Teiler f_n^3 . Zudem lässt sich f_{np} durch f_n teilen und wir können wie folgt argumentieren:

$$f_{n+1}^p + f_{n-1}^p = (f_{n+1} - f_{n-1}) \cdot \sum_{i=0}^{p-1} f_{n-1}^i f_{n+1}^{p-1-i} = f_n \cdot \sum_{i=0}^{p-1} f_{n-1}^i f_{n+1}^{p-1-i}.$$

Somit ist f_n^2 ein Teiler von

$$\frac{f_{np}}{f_n} - \sum_{i=0}^{p-1} f_{n-1}^i f_{n+1}^{p-1-i} \quad (3.2)$$

und es kann zusätzlich

$$\frac{f_{np}}{f_n} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} f_{n-1}^i f_{n+1}^{p-1-i} \pmod{f_n} \quad (3.3)$$

vermerkt werden. Die Kongruenz $\frac{f_{np}}{f_n} \equiv p \cdot f_{n+1}^{p-1} \pmod{f_n}$ gilt aufgrund des Zusammenhangs $f_{n+1} \equiv f_{n-1} \pmod{f_n}$. Folglich haben $\frac{f_{np}}{f_n}$ und f_n sowie p und f_n dieselben gemeinsamen Teiler und es lässt sich $ggT\left(\frac{f_{np}}{f_n}, f_n\right) = ggT(p, f_n)$ festhalten.

Ein Primfaktor q von f_n mit $q \neq p$ kann kein Teiler von $ggT(p, f_n)$ sein, da der größte gemeinsame Teiler dieser beiden Zahlen nur den Wert 1 oder p annehmen kann. Demzufolge lässt sich sofort auf die Eigenschaft $q \nmid ggT\left(\frac{f_{np}}{f_n}, f_n\right)$ schließen, wodurch die Behauptung (a) belegt wurde.

Nun widmen wir der Aussage (b), wozu ein ungerader Primfaktor p von f_n betrachtet wird. Durch (3.2) kann der Zusammenhang

$$\frac{f_{np}}{f_n} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} f_{n-1}^i f_{n+1}^{p-1-i} \pmod{p^2}.$$

aufgestellt werden. Des Weiteren können wir die Kongruenzen

$$\begin{aligned} f_{n+1} &\equiv r_1 p + r' \pmod{p^2}, \\ f_{n-1} &\equiv r_2 p + r'' \pmod{p^2}, \end{aligned}$$

mit $0 \leq r_1, r_2, r', r'' < p$ angeben. Wegen der Gleichung $f_{n+1} - f_{n-1} = f_n$ sowie der Teilbarkeit $p \mid f_n$ bleibt uns keine andere Wahl, als den Schluss $r' = r'' = r$ zu ziehen.

Zudem wird $r \neq 0$ aufgrund der Teilerfremdheit von f_{n-1} und p als auch von f_{n+1} und p festgestellt, daher ergibt sich

$$\frac{f_{np}}{f_n} \equiv \sum_{i=0}^{p-1} (r_2 p + r)^i (r_1 p + r)^{p-1-i} \pmod{p^2}.$$

Durch Entwickeln der Ausdrücke auf der rechten Seite mittels *binomischen Lehrsatzes* lautet der k -te Term $\pmod{p^2}$:

$$\begin{aligned} (r_1 p + r)^{p-k} (r_2 p + r)^{k-1} &\equiv \binom{p-k}{1} r_1 p r^{p-k-1} r^{k-1} + r^{p-k} \binom{k-1}{1} r_2 p r^{k-2} + r^{p-k} r^{k-1} \\ &\equiv (p-k) p r_1 r^{p-2} + (k-1) p r_2 r^{p-2} + r^{p-1} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Führt man eine Addition aller Terme mit $k = 1, 2, \dots, p$ durch, so liefert uns dies

$$\begin{aligned} \frac{f_{np}}{f_n} &\equiv \frac{p(p-1)}{2} p r_1 r^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} p r_2 r^{p-2} + p r^{p-1} \pmod{p^2} \\ &\equiv p r^{p-1} \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Anhand des *kleinen Satzes von Fermat* (Satz 40) ist p ein Teiler von $r^{p-1} - 1$, da $p \nmid r$ gilt. In unserem Fall veranlasst uns dies zur Feststellung von $p^2 \mid p r^{p-1} - p$ und somit von

$$\frac{f_{np}}{f_n} \equiv p \pmod{p^2},$$

wodurch nun auch die Behauptung (b) bewiesen ist.

Angekommen bei Aussage (c) wird $p = 2$ gesetzt und dies in (3.4) verwendet:

$$\frac{f_{2n}}{f_n} \equiv 2(r_1 + r_2 + r) \pmod{4}. \quad (3.5)$$

Betrachtet man die Fibonacci-Folge *modulo* 4, so präsentiert sich $0, 1, 1, 2, 3, \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, 1, \dots$ und dadurch $f_{n+1} \equiv 1 \pmod{4}$ und $f_{n-1} \equiv 1 \pmod{4}$, da $4 \mid f_n$ gilt. Daraus ergibt sich $r_1 = r_2 = 0$ und $r = 1$, weshalb folgendes Ergebnis für (c) formuliert werden kann:

$$\frac{f_{2n}}{f_n} \equiv 2 \pmod{4}.$$

Wenden wir uns der letzten Aussage des Satzes zu. Möge 2 ein Teiler von f_n sein, aber f_n sich nicht durch 4 teilen lassen, dann kann man erneut einen Blick auf die Fibonacci-Folge *modulo* 4 werfen: $0, 1, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 1, 0, 1, 1, \dots$. So muss $f_{n-1} \equiv 1 \pmod{4}$ und $f_{n+1} \equiv 3 \pmod{4}$ gelten, was allerdings nichts anderes bedeutet als $r_2 = 0$ und $r_1 = r = 1$. Setzt man dies in (3.5) ein, so folgt

$$\frac{f_{2n}}{f_n} \equiv 0 \pmod{4}.$$

Jetzt muss nur noch gezeigt werden, dass $\frac{f_{2n}}{f_n}$ sich nicht durch 8 teilen lässt. Angenommen 8 wäre ein Teiler von $\frac{f_{2n}}{f_n}$, dann wäre f_{2n} auch durch 16 teilbar. Wie in Korollar 3 gezeigt, ist eine Fibonacci-Zahl genau dann durch 16 teilbar, wenn ihr Index sich durch 12 teilen lässt. Demzufolge müsste $2n$ den Teiler 12 besitzen bzw. müsste n somit durch 6 teilbar sein. Wegen des Korollars 3 wäre somit eine Teilbarkeit durch 4 anzunehmen ($4 \mid f_n$). Dies ist jedoch ein Widerspruch zu unserer Bedingung, da f_n zwar den Teiler 2, nicht aber den Teiler 4 aufweist. Daher ist nun auch (d) bewiesen. $\square$

Lemma 15. (vgl. [40], S. 73)

Seien $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so muss die Kongruenz $f_{kn-1} \equiv f_{n-1}^k \pmod{f_n}$ gelten.

Beweis. (vgl. [40], S. 73)

Dieses Lemma lässt sich sehr einfach mithilfe der vollständigen Induktion überprüfen.

Induktionsanfang Setzt man $k = 1$, so liefert uns dies $f_{n-1} \equiv f_{n-1}^1 \pmod{f_n}$, weswegen der Induktionsanfang bewiesen ist.

Induktionsvoraussetzung Ist die Aussage bereits für ein beliebiges, aber fixes $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ gezeigt, so kann zum letzten Punkt des Beweises übergegangen werden.

Induktionsschritt Abschließend versucht man den Induktionsschritt von $k \rightarrow (k+1)$ aufzuarbeiten:

$$\begin{aligned} f_{(k+1)n-1} &= f_{kn+(n-1)} \stackrel{\text{Satz 8}}{=} f_{kn-1}f_{n-1} + f_{kn}f_n \\ &\stackrel{\text{Ind.vor.}}{\equiv} f_{n-1}^k f_{n-1} \equiv f_{n-1}^{k+1} \pmod{f_n}. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 53. (vgl. [40], S. 73)

Seien k und n aus der Menge der natürlichen Zahlen mit $n, k \geq 1$, dann besitzt die Teilbarkeit $\text{ggT}(f_n, \frac{f_{kn}}{f_n}) \mid k$ Gültigkeit.

Beweis. (vgl. [40], S. 73-74)

Bevor mit dem eigentlichen Beweis begonnen werden kann, muss noch folgende Kongruenz überprüft werden:

$$\frac{f_{kn}}{f_n} \equiv k \cdot f_{n-1}^{k-1} \pmod{f_n}.$$

Induktionsanfang Für $k = 0$ wird der Induktionsanfang mit $\frac{f_0}{f_n} = 0 \equiv 0 \pmod{f_n}$ belegt.

Induktionsvoraussetzung Der Satz sei bereits für ein beliebiges, aber fixes $k \in \mathbb{N}$ bewiesen, demnach wenden wir uns dem nächsten Punkt zu.

Induktionsschritt Dieser wird von k nach $(k+1)$ präsentiert:

$$\begin{aligned} \frac{f_{(k+1)n}}{f_n} &\stackrel{\text{Satz 8}}{=} \frac{1}{f_n} (f_{kn-1}f_n + f_{kn}f_{n+1}) = \frac{1}{f_n} [f_{kn-1}f_n + f_{kn}(f_n + f_{n-1})] \\ &= \frac{1}{f_n} (f_{kn-1}f_n + f_{kn}f_n + f_{kn}f_{n-1}) = f_{kn-1} + f_{kn} + \frac{f_{kn}}{f_n} f_{n-1}. \end{aligned}$$

Unter Bezugnahme von Lemma 15, der Induktionsvoraussetzung sowie der Teilbarkeit $f_n \mid f_{kn}$, lautet das Ergebnis

$$\frac{f_{(k+1)n}}{f_n} \equiv f_{n-1}^k + k \cdot f_{n-1}^{k-1} f_{n-1} \equiv (k+1) f_{n-1}^k \pmod{f_n},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. Verwendet man nun diese Kongruenz in Verbindung mit Lemma 3 und Lemma 6 und der Tatsache, dass $\text{ggT}(f_n, f_{n-1}) = 1$ gilt, so liefert uns dies für den größten gemeinsamen Teiler

$$\text{ggT}\left(f_n, \frac{f_{kn}}{f_n}\right) = \text{ggT}\left(f_n, k \cdot f_{n-1}^{k-1}\right) = \text{ggT}(f_n, k) \mid k. \quad \square$$

3.3.3 Teilbarkeitskriterien zu Fibonacci- und Lucas-Zahlen

Auf die Verbindungen zwischen Teilbarkeiten von Fibonacci- und Lucas-Zahlen wird nur ein kurzer Blick geworfen, um zwei wichtige Aussagen hervorzuheben.

Satz 54. (vgl. [40], S. 78)

Über den größten gemeinsamen Teiler der n -ten Fibonacci-Zahl und der n -ten Lucas-Zahl ($n \in \mathbb{N} \geq 1$) kann Folgendes festgehalten werden:

$$ggT(f_n, l_n) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 3 \mid n, \\ 1 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

Beweis. (vgl. [40], S. 78)

Wegen des Satzes 24 ($f_{n-1} + f_{n+1} = l_n$) und des Lemmas 3 kann $ggT(f_n, l_n) = ggT(f_n, f_{n-1} + f_{n+1}) = ggT(f_n, 2f_{n-1} + f_n) = ggT(f_n, 2f_{n-1})$ geschrieben werden. Aufgrund der Teilerfremdheit zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen erhalten wir als ggT für ein gerades f_n , dessen Index nach Korollar 3 durch 3 teilbar ist, die Lösung 2. Handelt es sich um ein ungerades f_n , so muss 1 der größte gemeinsame Teiler sein. $\square$

Satz 55. (vgl. [66], S. 67)

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ sowie $n > 0$, so gilt

(a) für ungerade k mit $k \geq 3$:

$$\frac{f_{kn}}{f_n} = \sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}} (-1)^{i \cdot n} l_{(k-2i-1)n} + (-1)^{(k-1) \cdot \frac{n}{2}},$$

(b) für gerade k mit $k \geq 2$:

$$\frac{f_{kn}}{f_n} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-1} (-1)^{i \cdot n} l_{(k-2i-1)n}.$$

Beweis. (vgl. [43], S. 54, 57, 58, 68, 69)

Auch bei diesem Beweis kommt das Hilfsmittel der vollständiger Induktion zum Tragen.

Induktionsanfang Unter Verwendung der *Formel von Binet für Fibonacci-Zahlen* als auch für Lucas-Zahlen sowie der Gleichung $\Phi \cdot \Psi = -1$, erhält man für $k = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{f_{3n}}{f_n} &\stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^0 (-1)^{i \cdot n} l_{(3-2i-1)n} + (-1)^n = l_{2n} + (-1)^n \\ \frac{f_{3n}}{f_n} &= \frac{\Phi^{3n} - \Psi^{3n}}{\Phi^n - \Psi^n} = \Phi^{2n} + \Phi^n \Psi^n + \Psi^{2n} \\ l_{2n} + (-1)^n &= \Phi^{2n} + \Psi^{2n} + (\Phi \cdot \Psi)^n = \Phi^{2n} + \Phi^n \Psi^n + \Psi^{2n}. \end{aligned}$$

Der Induktionsanfang für $k = 2$ ergibt

$$\frac{f_{2n}}{f_n} = \sum_{i=0}^0 (-1)^{i \cdot n} l_{(1-2i)n} = l_n.$$

Diese Formel wurde bereits im Abschnitt über die Beziehungen zwischen Fibonacci- und Lucas-Zahlen hergeleitet (siehe dazu Satz 25, Formel (1.14)). Demnach ist der Induktionsanfang für beide Fälle gezeigt.

Induktionsvoraussetzung Hierbei muss man zwei Fälle unterscheiden, wobei mit der Annahme, dass die Behauptung für eine beliebige, aber feste ungerade natürliche Zahl $k \geq 3$ gilt, begonnen wird.

Induktionsschritt Dieser wird von k (ungerade) $\rightarrow (k+1)$ (gerade) durchgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{f_{(k+1)n}}{f_n} &= \frac{\Phi^{(k+1)n} - \Psi^{(k+1)n}}{\Phi^n - \Psi^n} = \sum_{i=0}^k \Phi^{(k-i) \cdot n} \Psi^{i \cdot n} \\ &= \Phi^{kn} + \Phi^{(k-1)n} \Psi^n + \dots + \Phi^n \Psi^{(k-1)n} + \Psi^{kn}. \end{aligned}$$

Addiert man diese Terme paarweise unter Verwendung der *Formel von Binet für Lucas-Zahlen* sowie der Gleichung $\Phi \cdot \Psi = -1$, so erhält man die Summe:

$$\begin{aligned} &= l_{kn} + (-1)^n l_{(k-2)n} + (-1)^{2n} l_{(k-4)n} + \dots + (-1)^{(k-1) \cdot \frac{n}{2}} l_n \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{k+1}{2}-1} (-1)^{i \cdot n} l_{(k-2i)n} \quad , \end{aligned}$$

wodurch der erste Fall bewiesen ist.

Nun wird der zweite Fall der Induktionsvoraussetzung näher untersucht:

Induktionsvoraussetzung Sei jetzt die Aussage für eine beliebige, aber feste gerade natürliche Zahl $k \geq 2$ bewiesen, dann können wir uns dem Induktionsschritt zuwenden.

Induktionsschritt Besprochen wird der Induktionsschritt von k (gerade) $\rightarrow (k+1)$ (ungerade):

$$\frac{f_{(k+1)n}}{f_n} = \frac{\Phi^{(k+1)n} - \Psi^{(k+1)n}}{\Phi^n - \Psi^n} = \sum_{i=0}^k \Phi^{(k-i) \cdot n} \Psi^{i \cdot n}.$$

Diese Summe hat für gerade k eine ungerade Anzahl an Termen, somit bleibt nach dem paarweisen Summieren der Summand $(\Phi^{\frac{k}{2}} \Psi^{\frac{k}{2}})^n = (-1)^{\frac{kn}{2}}$ übrig:

$$\begin{aligned} &= l_{kn} + (-1)^n l_{(k-2)n} + (-1)^{2n} l_{(k-4)n} + \dots + (-1)^{\frac{k-2}{2} \cdot n} l_{2n} + (-1)^{\frac{kn}{2}} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} (-1)^{i \cdot n} l_{(k-2i)n} + (-1)^{k \cdot \frac{n}{2}} \quad . \end{aligned} \quad \square$$

3.4 Die Fibonacci-Folge *modulo* m

Im Folgenden wird die Zahlenabfolge *modulo* m genauer unter die Lupe genommen und dabei werden erstaunliche Fakten offenbart. Anschließend wird p als Primzahl vorausgesetzt und die Fibonacci-Folge *modulo* p betrachtet. (vgl. [40], S. 78)

Zur Aufarbeitung dieses Unterkapitels orientieren wir uns größtenteils an *Lausch* [40].

3.4.1 Die Periodenlänge *modulo* m

Im Anschluss an Satz 49, bei welchem der Beweis mit der Folge (3.1)

$$(\bar{f}_0, \bar{f}_1), (\bar{f}_1, \bar{f}_2), (\bar{f}_2, \bar{f}_3), \dots, (\bar{f}_n, \bar{f}_{n+1}), \dots$$

aufgebaut wurde, führten wir die interessante Bemerkung 15 an. Sie wies auf das Vorhandensein einer gewissen Periodizität hin, die sich in der Wiederholung des Paares $(\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{f}_u, \bar{f}_{u+1})$ in (3.1) nach $1 \leq u < m^2$ Schritten äußerte. Aufgrund der Gültigkeit von $f_{u+2} = f_u + f_{u+1}$ können wir aus dem Hantieren mit Restklassen auf $\bar{f}_{u+2} \equiv \bar{f}_u + \bar{f}_{u+1} \equiv \bar{f}_0 + \bar{f}_1 \equiv \bar{f}_2 \pmod{m}$ schließen. Somit ergibt sich eine Periodizität der Restklassen ab der u -ten Stelle $(\bar{f}_0, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{u-1})$. Es folgt $f_u \equiv f_0 \pmod{m}$, $f_{u+1} \equiv f_1 \pmod{m}$, $\dots$, $f_{2u-1} \equiv f_{u-1} \pmod{m}$, $f_{2u} \equiv f_0 \pmod{m}$. Dieses Erkenntnis erlangt man sofort aus der rekursiven Darstellungsform dieser Zahlenreihenfolge und unter Verwendung der vollständigen Induktion. Somit handelt es sich bei den Fibonacci-Zahlen $\pmod{m}$ um eine periodische Folge, wobei die Länge der Periode u beträgt. Abschließend kann das Ergebnis auf diese Weise formuliert werden: (vgl. [40], S. 66, 67, 78, 79)

Satz 56. (vgl. [40], S. 79)

Die Fibonacci-Folge f_m weist eine Periodizität modulo m auf ($m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Die Länge der Periode, die oftmals auch unter dem Namen Wall-Zahl $\lambda(m)$ geführt wird, ist kleiner m^2 . Somit erhält man die Kongruenzen $f_{\lambda(m)} \equiv 0 \pmod{m}$ und $f_{\lambda(m)+1} \equiv 1 \pmod{m}$, wobei es sich bei $\lambda(m)$ um den kleinstmöglichen Wert mit dieser Beschaffenheit handelt.

Bemerkung 16. Es obliegt jedem selbst, ähnlich zur Herleitung der Periodizität für Fibonacci-Zahlen, eine Übertragung dieses Beweises auf Lucas-Zahlen vorzunehmen, um eine periodische Lucas-Folge zu dokumentieren (vgl. [40], S. 74).

Beispiel 4. Wir betrachten nun einzelne Beispiele im Zusammenspiel mit der Periodizität von Fibonacci-Zahlen:

- (a) Untersucht man die Fibonacci-Folge *modulo* 2, so wird eine Wiederholung ab dem 4. Folgenglied (f_3) erkannt:

$$0, 1, 1, \mathbf{0, 1}, 1, \dots,$$

wodurch sich eine Periodenlänge von $\lambda(2) = 3$ ergibt.

- (b) Die Fibonacci-Folge *modulo* 3 besitzt die Periodenlänge $\lambda(3) = 8$,

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, \mathbf{0, 1}, 1, \dots,$$

da die Paarung $(0, 1)$ erneut bei (f_8, f_9) erscheint.

- (c) Die Fibonacci-Folge *modulo* 4 verläuft folgendermaßen:

$$0, 1, 1, 2, 3, 1, \mathbf{0, 1}, 1, \dots,$$

weswegen sich eine Periodenlänge $\lambda(4) = 6$ ergibt.

- (d) Bei der Fibonacci-Folge *modulo* 5 kann eine Periodenlänge von $\lambda(5) = 20$ vermerkt werden:

$$0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, \mathbf{0, 1}, 1, \dots$$

Diese Auflistung ermöglicht es, sehr interessante Kongruenzen $f_5 \equiv f_{10} \equiv f_{15} \equiv f_{20} \pmod{5}$ zu erkennen. (vgl. [40], S. 79)

Ausgiebig mit der Periodenlänge von Fibonacci-Zahlen hat sich *D.D. Wall* beschäftigt. Einige seiner bemerkenswertesten Erkenntnisse auf diesem Gebiet werden nun präsentiert. (vgl. [40], S. 79)

Satz 57. (vgl. [40], S. 79)

Seien $n, r \in \mathbb{Z}$ und $m > 1$ aus der Menge der natürlichen Zahlen, dann existiert zu jedem m ein $d = d(m) \in \mathbb{N}$, womit die Gleichung $n = dr$ sowie die Kongruenz $f_n \equiv 0 \pmod{m}$ erfüllt ist.

Beweis. (vgl. [40], S. 79-80)

Wir setzen die Gültigkeit von $f_k \equiv 0 \pmod{m}$ und $f_l \equiv 0 \pmod{m}$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $l \geq k$ voraus, zumal sich daraus wegen der Teilerfremdheit benachbarter Fibonacci-Glieder aus Satz 8, $f_{l+k} = f_{l-1}f_k + f_l f_{k+1}$, die Tatsache $f_{l+k} \equiv 0 \pmod{m}$ ergibt. Betrachtet man $f_l = f_{(l-k)+k} = f_{l-k-1}f_k + f_{l-k}f_{k+1}$ und formt dies zu $f_{l-k}f_{k+1} = f_l - f_{l-k-1}f_k$ um, so folgt $f_{l-k} \equiv 0 \pmod{m}$. Dadurch handelt es sich bei der Menge der Indizes n aus den ganzen Zahlen mit $f_n \equiv 0 \pmod{m}$ um eine abgeschlossene Menge bezüglich der Addition und Subtraktion. Demgemäß liegt eine (additive) echte Untergruppe $d\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ vor, womit die Aussage bewiesen wurde. $\square$

Wir können uns nun die Lineare Algebra zunutze machen, um die Periodenlänge zu erforschen. Dabei kommen uns einige Ergebnisse aus Kapitel 2 sehr gelegen, vor allem die zu Beginn bewiesene Formel (2.1):

$$F^n \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \text{ mit } F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu sieht man sich diesen Ausdruck *modulo* m unter dem Gesichtspunkt $n = \lambda(m)$ an:

$$F^{\lambda(m)} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \pmod{m}. \quad (3.6)$$

Zudem lässt sich durch die Aussage des Satzes 28 folgende Beziehung

$$F^{\lambda(m)} = \begin{pmatrix} f_{\lambda(m)-1} & f_{\lambda(m)} \\ f_{\lambda(m)} & f_{\lambda(m)+1} \end{pmatrix} \equiv E \pmod{m} \quad (3.7)$$

angeben, wobei E die 2×2 Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ darstellt. (vgl. [40], S. 80)

Satz 58. (vgl. [40], S. 80)

Falls n durch m teilbar ist, so ist $\lambda(m)$ ein Teiler von $\lambda(n)$, das heißt

$$m \mid n \Rightarrow \lambda(m) \mid \lambda(n) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 80)

Wie kurz zuvor gezeigt, gilt die Kongruenz $F^{\lambda(n)} \equiv E \pmod{n}$, weswegen wir aufgrund der Teilbarkeit von $m \mid n$ den Zusammenhang $F^{\lambda(n)} \equiv E \pmod{m}$ darstellen können. Laut Definition ist $\lambda(m)$ die kleinstmögliche Zahl aus der Menge der natürlichen Zahlen, für die $F^{\lambda(m)} \equiv E \pmod{m}$ erfüllt ist. Dadurch muss es sich bei $\lambda(m)$ um einen Teiler von $\lambda(n)$ handeln. $\square$

Satz 59. (vgl. [40], S. 81)

Für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$ kann die Gleichung $\lambda(mn) = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))$ aufgestellt werden.

Beweis. (vgl. [40], S. 81)

Für den Beweis dieses Satzes werden das Korollar 2 (a) sowie der berühmte *chinesische Restsatz* benötigt. Die Argumentation wird mit der Feststellung, dass m als auch n Teiler von mn sind, begonnen, wodurch man Satz 58 anwenden kann und $\lambda(m) \mid \lambda(mn)$ sowie $\lambda(n) \mid \lambda(mn)$ erhält. Wählen wir $k = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))$, so gilt laut Korollar 2 (a): $k \mid \lambda(mn)$, weswegen sich nachstehende Kongruenzen ergeben:

$$\begin{aligned} f_k &\equiv f_0 \equiv 0 \pmod{m} & f_k &\equiv f_0 \equiv 0 \pmod{n} \\ f_{k+1} &\equiv f_1 \equiv 1 \pmod{m} & f_{k+1} &\equiv f_1 \equiv 1 \pmod{n}. \end{aligned}$$

Da m und n teilerfremd sind, lässt sich mittels *chinesischem Restsatz* $f_k \equiv 0 \pmod{mn}$ und $f_{k+1} \equiv 1 \pmod{mn}$ feststellen. Folglich besteht die Teilbarkeit $\lambda(mn) \mid k$, was aber nichts anderes bedeutet als $\lambda(mn) = k = \text{kgV}(\lambda(m), \lambda(n))$. $\square$

Satz 60. (vgl. [40], S. 81)

Für $\lambda(p^k)$ mit p prim und $1 < k \in \mathbb{N}$ ist eine der beiden folgenden Gleichungen gültig:

$$\lambda(p^k) = \lambda(p^{k-1}) \text{ oder } \lambda(p^k) = p \cdot \lambda(p^{k-1}).$$

Beweis. (vgl. [40], S. 81-82)

Satz 58 wird in diesem Zusammenhang verwendet, um $\lambda(p^{k-1}) \mid \lambda(p^k)$ und weiters $\lambda(p^k) = r \cdot \lambda(p^{k-1})$ für ein passendes $r \in \mathbb{Z}$ schreiben zu können. Für $r = 1$ ist demnach unsere Beweisführung abgeschlossen.

Sei nun $r \neq 1$, dann wird Gebrauch von den Gleichungen (3.6) und (2.1) gemacht, womit wir zu dem Ausdruck

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{p^{k-1}}$$

gelangen, welcher unter Berücksichtigung passender $a, b \in \mathbb{Z}$ auch zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p^{k-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

umformuliert werden kann. Sieht man sich diese Formel *modulo* p^k an, dann sind a, b aus der Menge $\{0, 1, \dots, p-1\}$ zu wählen. Wird anschließend eine Multiplikation mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})}$$

durchgeführt, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})} \left[p^{k-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \pmod{p^k}.$$

Ein Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ kann anhand von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\lambda(p^{k-1})}$ auf einen weiteren Vektor der Form $\begin{pmatrix} a+p^{k-1}c \\ b+p^{k-1}d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + p^{k-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ abgebildet werden, wobei $c, d \in \mathbb{Z}$ passend gewählt sind.

Aufgrund des Wegfallens von $p^{k-1} \cdot p^{k-1} \binom{c}{d} = p^{2k-2} \binom{c}{d}$ für $k \geq 2 \pmod{p^k}$ bildet sich der Vektor $p^{k-1} \binom{a}{b} \pmod{p^k}$ auf sich selbst ab:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\equiv p^{k-1} \binom{a}{b} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p^{k-1} \binom{a}{b} \pmod{p^k} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot p^{k-1} \binom{a}{b} \pmod{p^k}. \end{aligned}$$

Durch sukzessives t -faches Wiederholen dieses Multiplikationsvorganges resultiert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{t\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot p^{k-1} \binom{a}{b} \pmod{p^k}.$$

Der Ausdruck $t \cdot p^{k-1} \binom{a}{b}$ fällt nur dann weg, falls die Teilbarkeit $p \mid t$ besteht, da die Elemente a, b ja nur die Werte $0, \dots, p-1$ annehmen können. Weil uns das kleinste t mit dieser Eigenschaft interessiert, erhält man $p = t$ und somit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{p\lambda(p^{k-1})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod{p^k}.$$

Aufgrund dessen, dass die Hochzahlen kleinstmöglich gewählt wurden, kommen wir auf die Gleichung: $\lambda(p^k) = p \cdot \lambda(p^{k-1})$. $\square$

3.4.2 Die Fibonacci-Folge *modulo* p ($p \dots$ Primzahl)

Satz 61. (vgl. [40], S. 85)

Nachstehende Aussagen modulo p (prim) sind gültig:

$$\begin{aligned} \text{Für } p \equiv \pm 1 \pmod{5}: \quad & f_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}, \quad f_p \equiv 1 \pmod{p}, \quad f_{p+1} \equiv 1 \pmod{p}. \\ \text{Für } p \equiv \pm 2 \pmod{5}: \quad & f_{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad f_p \equiv -1 \pmod{p}, \quad f_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Beweis. (vgl. [40], S. 86)

Sei $p \neq 2$ und $p \neq 5$, so wird unter Verwendung des *binomischen Lehrsatzes* und der *Binet-Formel*

$$\begin{aligned} f_p &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^p \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{2^p} \right) \left[1 + \binom{p}{1} \cdot \sqrt{5} + \binom{p}{2} \cdot 5 + \dots + \binom{p}{p-1} \cdot 5^{\frac{p-1}{2}} + (\sqrt{5})^p \right. \\ &\quad \left. - 1 + \binom{p}{1} \cdot \sqrt{5} - \binom{p}{2} \cdot 5 + \dots - \binom{p}{p-1} \cdot 5^{\frac{p-1}{2}} + (\sqrt{5})^p \right] \end{aligned}$$

geschrieben. Um mit dem Beweis fortfahren zu können, wird ein weiterer Hilfssatz benötigt:

Lemma 16. (vgl. [40], S. 55)

- (a) Sei p prim, dann gilt $p \mid \binom{p}{k}$ für $1 \leq k \leq p-1$.
- (b) Für p prim besteht die Teilbarkeit $p \mid \binom{p+1}{k}$ für $2 \leq k \leq p-1$.

Die Überprüfung zu diesem Lemma kann bei *Lausch* [40], S. 55, nachvollzogen werden.

Anhand dieses Hilfssatzes ist man nun in der Lage, den obigen Ausdruck zu vereinfachen, da für alle $i \in \{1, \dots, p-1\}$ die Kongruenz $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ erfüllt wird. Des Weiteren vereinfacht sich die Klammer wesentlich, da sich alle Ausdrücke mit geraden Exponenten von $\sqrt{5}$ wegekürzen. Insofern bleibt lediglich

$$f_p \equiv \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right) \cdot 5^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

über. Aufgrund der Teilerfremdheit von 2 und p ist der *kleine Satz von Fermat* (Satz 40) anwendbar, der uns zu folgendem Ergebnis verhilft: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. An dieser Stelle wird ein weiteres Lemma benötigt:

Lemma 17. (vgl. [40], S. 84)

- (a) Für p prim mit der Gestalt $p = 5s \pm 1$ kann die Kongruenz $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ angegeben werden.
- (b) Sei $p \neq 2$ prim mit der Gestalt $p = 5s \pm 2$, dann gilt $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

Dieser Beweis kann mittels *Legendre-Symbol* in Verbindung mit dem *Euler-Kriterium* und dem *Quadratischen Reziprozitätsgesetz* sehr elegant gezeigt werden. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dieses Resultat über einen anderen Zugang herzuleiten, dazu siehe [40], S. 84-85.

Für unseren weiteren Verlauf der Argumentation bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} 5^{\frac{p-1}{2}} &\equiv 1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 1 \pmod{5} \text{ und} \\ 5^{\frac{p-1}{2}} &\equiv -1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

gelten, zumal wir daraus

$$\begin{aligned} f_p &\equiv 1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 1 \pmod{5} \text{ und} \\ f_p &\equiv -1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

erhalten. Führt man eine Entwicklung der *Binet-Formel* mittels *binomischen Lehrsatzes* für f_{p+1} durch, so stoßt man auf

$$\begin{aligned} f_{p+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{p+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{p+1} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2^{p+1}} \left[\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} (\sqrt{5})^i - \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} (-\sqrt{5})^i \right]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer kann erneut elegant aufgelöst werden, indem sich auch hier die geraden Exponenten von $\sqrt{5}$ aufheben und zusätzlich sind, laut Lemma 16, beinahe alle Binomialkoeffizienten kongruent 0 modulo p , jedoch trifft dies nicht auf $\binom{p+1}{1}$ und $\binom{p+1}{p}$ zu. Zurück bleibt daher nur noch:

$$f_{p+1} \equiv \frac{1}{2^p} \left[p + 1 + (p+1) \cdot 5^{\frac{p-1}{2}} \right] \pmod{p}$$

$$\equiv \frac{1}{2^p} \left(1 + 5^{\frac{p-1}{2}}\right) \equiv \frac{1}{2} \left(1 + 5^{\frac{p-1}{2}}\right) \pmod{p}.$$

Wenden wir abermals den *kleinen Satz von Fermat* sowie Lemma 17 an, um

$$\begin{aligned} f_{p+1} &\equiv \frac{1}{2} \cdot (1 + 1) \equiv 1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 1 \pmod{5} \text{ und} \\ f_{p+1} &\equiv \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) \equiv 0 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

zu erhalten. Im nächsten Schritt muss man nur noch die Kongruenzen für f_{p-1} zeigen. Diese können sehr einfach mittels Rekursionsformel, $f_{p-1} = f_{p+1} - f_p$, hergeleitet werden, um zu dem erwünschten Resultat zu gelangen:

$$\begin{aligned} f_{p-1} &\equiv 0 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 1 \pmod{5} \text{ und} \\ f_{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \text{ für } p \equiv \pm 2 \pmod{5}. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 62. (vgl. [40], S. 87)

Sei p (prim), dann gilt für $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ die Teilbarkeit $\lambda(p) \mid (p-1)$ und für $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ kann $\lambda(p) \mid 2(p+1)$ und $\lambda(p) \nmid (p+1)$ festgehalten werden.

Beweis. (vgl. [40], S. 88)

Für $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ lassen sich bereits die Kongruenzen $f_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$ und $f_p \equiv 1 \pmod{p}$ angeben, wodurch ein zu $(0, 1)$ kongruentes Paar (f_{p-1}, f_p) bekannt ist. Im Endeffekt ist demnach $p-1$ ein Vielfaches der Länge der Periode, wodurch $\lambda(p)$ einen Teiler von $(p-1)$ darstellt.

Für $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ liegen uns die Kongruenzen $f_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}$ und $f_p \equiv f_{p+2} \equiv -1 \pmod{p}$ vor. Hier kann leider nicht sofort eine zu $(0, 1)$ kongruente Paarung angegeben werden, weshalb wir $\lambda(p) \nmid (p+1)$ erhalten.

Um solch eine Paarung aufzuspüren, ist es möglich Satz 8 anzuwenden, um

$$\begin{aligned} f_{2(p+1)} &= f_{(p+1)+(p+1)} = f_p f_{p+1} + f_{p+1} f_{p+2} \equiv -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \equiv 0 \pmod{p} \text{ und} \\ f_{2(p+1)+1} &= f_{(p+1)+(p+2)} = f_p f_{p+2} + f_{p+1} f_{p+3} \equiv -1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

präsentieren zu können. Soeben wurde ein Paar mit der Eigenschaft $(f_{2(p+1)}, f_{2(p+1)+1}) \equiv (0, 1) \pmod{p}$ ermittelt, weswegen $\lambda(p) \mid 2(p+1)$ erfüllt sein muss. $\square$

Bemerkung 17. Das so eben besprochene Resultat, genauer die Gültigkeit von $\lambda(p) \mid 2(p+1)$ und $\lambda(p) \nmid (p+1)$ für $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$ lässt auf eine gerade Periodenlänge $\lambda(p)$ schließen. Nun könnte womöglich der Verdacht aufkommen, dass $\lambda(m)$ mit Ausnahme von $m = 2$ einen geraden Wert annimmt. (vgl. [40], S. 88)

Satz 63. (vgl. [40], S. 88)

Sei $m > 2$ und betrachtet man die Fibonacci-Folge modulo m , so ist die Länge der Periode $\lambda(m)$ immer durch 2 teilbar und demnach gerade.

Beweis. (vgl. [40], S. 88-89)

Indirekt angenommen die Periodenlänge $\lambda(m)$ der Fibonacci-Folge modulo m lässt sich nicht durch 2 teilen und kann demgemäß in der Form $\lambda(m) = 2r + 1$ mit $r \in \mathbb{N}$ dargestellt werden. Zumal die anknüpfenden Kongruenzen $\pmod{m}$

$$-f_{\lambda(m)} \equiv 0 = f_0$$

$$\begin{aligned}
f_{\lambda(m)-1} &= f_{\lambda(m)+1} - f_{\lambda(m)} \equiv 1 = f_1 \\
-f_{\lambda(m)-2} &= -f_{\lambda(m)} + f_{\lambda(m)-1} \equiv f_0 + f_1 = f_2 \\
&\vdots \\
(-1)^{t-1} f_{\lambda(m)-t} &= (-1)^{t-1} f_{\lambda(m)-t+2} + (-1)^t f_{\lambda(m)-t+1} \equiv f_{t-2} + f_{t-1} = f_t \\
&\vdots \\
(-1)^{r-2} f_{r+2} &\equiv f_{r-1} \\
(-1)^{r-1} f_{r+1} &\equiv f_r
\end{aligned}$$

erfüllt sind, sind für ungerade r die Aussagen $f_{r+1} \equiv f_r \pmod{m}$ und $f_{r-1} = f_{r+1} - f_r \equiv 0 \pmod{m}$ zulässig. Falls r gerade ist, erhalten wir $-f_{r+1} \equiv f_r \pmod{m}$ und $f_{r+2} = f_{r+1} + f_r \equiv 0 \pmod{m}$ sowie wegen $f_{r+2} \equiv f_{r-1} \pmod{m}$ die Kongruenz $f_{r-1} \equiv 0 \pmod{m}$. Laut Satz 57 existiert ein $d \in \mathbb{N}$ mit $d \mid (r-1)$ und dadurch gilt trivialerweise $d \mid (2r-2)$. Des Weiteren wird $\lambda(m)$ von d geteilt, sprich $d \mid (2r+1)$, wodurch wir zu $d \mid [2r+1 - (2r-2)] = 3$ gelangen, weswegen d den Wert 3 annehmen muss, da für $d = 1$ alle Fibonacci-Zahlen f_n den Teiler m aufweisen würden – dies wäre aber widersprüchlich bezüglich der Teilerfremdheit benachbarter Folgenglieder. Es gilt somit $f_d = f_3 = 2 \equiv 0 \pmod{m}$, aber genau dies führt uns zu $m = 2$, womit unsere Annahme ($\lambda(m)$ ungerade) nur für $m = 2$ erfüllt sein kann. Demnach ist die Länge der Periode für alle $m > 2$ gerade. $\square$

3.5 Die Pythagoräischen Zahlentripel und abc-Tripel

3.5.1 Die Pythagoräischen Tripel

Zu Beginn stellt sich natürlich die Frage: Worum handelt es sich überhaupt bei den sogenannten *pythagoräischen Zahlentripeln*? Um dies beantworten zu können, müssen wir in der mathematischen Geschichte zu den Anfängen einer zahlentheoretischen Lehre und zwei herausragenden Mathematikern namens *Pythagoras* und *Fermat* zurückblicken. Das Geburtsjahr von *Pythagoras* wird Schätzungen nach auf ca. 580-562 v. Chr. datiert und sein Geburtsort liegt vermutlich auf Samos, einer ägäischen Insel. Der Franzose *Pierre de Fermat* (1607-1665), welcher zeitlebens als Beamter und Jurist tätig war, beschäftigte sich nur nebenbei mit der Mathematik. Überraschenderweise hatte ausgerechnet dieser „Nicht-Mathematiker“ den größten Anteil an den mathematischen Entwicklungen und Neuerungen der damaligen Zeit. *Fermat* vermochte es nicht, seine Entdeckungen mit der breiten Öffentlichkeit zu teilen, stattdessen verfasste er kleine, geheime Aufzeichnungen, deren Inhalte, wenn überhaupt, nur für Freunde offengelegt wurden. Die wohl bekannteste seiner Randnotizen wurde 1637 schriftlich festgehalten, in welcher er die *Fermatsche Vermutung* äußerte, dass keine ganzen Zahlen für $2 < n \in \mathbb{N}$ existieren, um die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ zu lösen, angenommen natürlich man bringt den Wert 0 mit ein. Sehen wir uns allerdings jetzt die diophantische Gleichung ausgerechnet für $n = 2$ sowie ausschließlich für Lösungen aus den natürlichen Zahlen an:

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (3.8)$$

Durch Anwenden dieser Gleichung auf ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Kathetenlängen x, y und der Hypotenusenlänge z landet man bei dem allseits bekannten *Satz des Pythagoras*:

In einem rechtwinkligen Dreieck ergibt die Summe der Quadrate über den Katheten das Hypotenusenquadrat.

Äquivalente Suchaufträge sind einerseits alle positiven Lösungen der Gleichung (3.8) mit den Kathetenlängen x, y und der Hypotenusenlänge z im rechtwinkligen Dreieck zu finden sowie andererseits alle möglichen rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen anzugeben. *Pythagoras* selbst fand Lösungen, doch blieb es ihm verwehrt, alle Dreiecke mit dieser Eigenschaft angeben zu können. Dies gelang *Euklid* erst einige Jahre später. Um wieder auf unsere ursprüngliche Frage zurückzukehren, definieren wir nun ein *pythagoräisches Tripel*. (vgl. [11], S. 13, S. 100, S. 269, S. 270)

Definition 22 (Pythagoräisches Tripel). (vgl. [43], S. 125)

Bei einem pythagoräischen Zahlentripel $\{x, y, z\}$ handelt es sich um jene drei Zahlen aus der Menge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen.

Definition 23 (Primitives pythagoräisches Tripel). (vgl. [11], S. 270)

Man bezeichnet ein pythagoräisches Zahlentripel als primitives pythagoräisches Tripel, falls $\{x, y, z\}$ teilerfremd sind, also $\text{ggT}(x, y, z) = 1$ vorliegt.

Anschließend wird die Identität vorgestellt, welche am Ende des Unterkapitels 1.4 angesprochen wurde. Diese verbindet die Fibonacci-Zahlen mit den *pythagoräischen Tripeln* auf eine sehr beeindruckende Art und Weise. (vgl. [11], S. 328)

Satz 64. (vgl. [11], S. 328)

Die nachstehende Beziehung gilt für alle $n \geq 1$:

$$(f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 = (f_{2n+3})^2.$$

Beweis. (vgl. [11], S. 710)

Beginnend mit der Aufstellung gewisser Gleichungen, deren Auswahl doch für manchen willkürlich erscheinen mag, werden wir versuchen die Behauptung zu belegen. Dazu gilt unsere Aufmerksamkeit zuerst

$$f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2} = (f_{n+2} - f_n) f_{n+2} = f_{n+2}^2 - f_n f_{n+2},$$

dessen Aussage zu

$$f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+2} + f_n f_{n+1} = f_n f_{n+3}$$

umformuliert werden kann. Durch Einbeziehen der Formel (1.2) folgt

$$f_{2n+3}^2 = f_{(n+2)+(n+1)}^2 = (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)^2 = f_{n+1}^4 + 2f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 + f_{n+2}^4.$$

Betrachtet man nun den gesuchten Ausdruck unter Berücksichtigung dieser beiden Gleichungen, dann präsentiert sich uns das Ergebnis:

$$\begin{aligned} (f_n f_{n+3})^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 &= (f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2)^2 + (2f_{n+1} f_{n+2})^2 \\ &= f_{n+2}^4 + 2f_{n+1}^2 f_{n+2}^2 + f_{n+1}^4 = (f_{2n+3})^2. \end{aligned} \quad \square$$

Über den Flächeninhalt eines *pythagoräischen Dreiecks* besteht die Möglichkeit, eine äußerst ungewöhnliche Erkenntnis zu gewinnen (vgl. [11], S. 328):

Satz 65. (vgl. [11], S. 328)

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch das Produkt von vier benachbarten Gliedern der Fibonacci-Folge $f_n f_{n+1} f_{n+2} f_{n+3}$ für $0 < n \in \mathbb{N}$ angegeben.

Beweis. (vgl. [11], S. 710-711)

Der Flächeninhalt eines *pythagoräischen Dreiecks* mit den Kathetenlängen x, y und der Hypotenusenlänge z wird mit $\frac{xy}{2}$ berechnet. Berücksichtigt man das Ergebnis des vorhergehenden Satzes und setzt o. B. d. A. $x = (f_n f_{n+3})$ und $y = (2f_{n+1} f_{n+2})$, so gilt:

$$\frac{xy}{2} = \frac{1}{2}(f_n f_{n+3})(2f_{n+1} f_{n+2}) = f_n f_{n+1} f_{n+2} f_{n+3}. \quad \square$$

Die obige Identität tritt in den unterschiedlichsten Facetten, wie wir den folgenden Beispielen entnehmen können, auf:

- $(f_{n-2} f_{n+1})^2 + (2f_{n-1} f_n)^2 = (f_{n-2}^2 + 2f_n f_{n-1})^2 \quad \forall n \geq 3; n \in \mathbb{N}$ (vgl. [43], S. 138)
- $(f_n^2 - f_{n-1}^2)^2 + (2f_n f_{n-1})^2 = (f_{2n-1})^2 \quad \forall n \geq 3; n \in \mathbb{N}$ (vgl. [40], S. 118)

Überraschenderweise lassen sich *pythagoräische Tripel* auch im Zusammenspiel mit den Lucas-Zahlen auf bemerkenswerte Arten angeben (vgl. [43], S. 132, 134).

Satz 66. (vgl. [43], S. 132)

Pythagoräische Tripel können durch die sogleich genannte Identität erzeugt werden:

$$(l_n^2 - f_n^2)^2 + (2l_n f_n)^2 = (l_n^2 + f_n^2)^2 \quad \forall n \geq 2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Durch getrenntes Ausrechnen der beiden Seiten wird sofort die zu überprüfende Behauptung erreicht (vgl. [43], S. 132).

Satz 67. (vgl. [43], S. 134)

Für alle $n \geq 2$ aus den natürlichen Zahlen gilt:

$$(l_{n-2} l_{n+1})^2 + (2l_{n-1} l_n)^2 = (l_{n-2}^2 + 2l_n l_{n-1})^2.$$

Beweis. (vgl. [43], S. 134)

Mithilfe der bereits bekannten Rekursionsformel für Lucas-Zahlen, $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$, gelangt man durch etwaige spielerische Umformungen zu

$$\begin{aligned} (l_{n-2} l_{n+1})^2 + (2l_{n-1} l_n)^2 &= [(l_n - l_{n-1}) \cdot (l_n + l_{n-1})]^2 + (2l_{n-1} l_n)^2 \\ &= (l_n^2 - l_{n-1}^2)^2 + 4l_{n-1}^2 l_n^2 = (l_n^2 + l_{n-1}^2)^2 \\ &= [(l_{n-2} + l_{n-1}) l_n + l_{n-1} (l_n - l_{n-2})]^2 \\ &= [2l_{n-1} l_n + l_{n-2} (l_n - l_{n-1})]^2 = (2l_{n-1} l_n + l_{n-2}^2)^2. \quad \square \end{aligned}$$

3.5.2 Die abc-Tripel

Nun lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf die sogenannten *abc-Tripel* und klären zu Beginn, welche mathematische Besonderheit sich dahinter verbirgt.

Definition 24 (abc-Tripel). (vgl. [43], S. 140)

Ein abc-Tripel wird durch drei Zahlen $\{a, b, c\}$ aus der Menge $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $ggT(a, b, c) = 1$ definiert, welche die Gleichung $a + b = c$ erfüllen.

Diesbezüglich bleibt uns kaum eine andere Wahl, als sofort die nachstehende Aussage zu dokumentieren:

Satz 68 (Fibonacci-abc-Tripel). (vgl. [43], S. 140)

Für alle $n > 0$ aus der Menge der natürlichen Zahlen handelt es sich bei den benachbarten Fibonacci-Zahlen $\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}\}$ um abc-Tripel. In diesem Fall spricht man auch häufig von Fibonacci-abc-Tripel.

Beweis. (vgl. [43], S. 140)

Diese Behauptung ist sehr einleuchtend, sobald man sich die Bildung der Fibonacci-Zahlen $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ vor Augen führt und die Tatsache miteinbezieht, dass nach Satz 43 aufeinanderfolgende Folgenglieder teilerfremd sind. $\square$

Im weiteren Verlauf beschäftigen wir uns mit der sogenannten *Fibonacci-abc-Vermutung*, zuvor muss allerdings der Begriff des Radikals besprochen werden.

Definition 25 (Radikal). (vgl. [43], S. 144)

Zu einer natürlichen Zahl $n > 0$ kann ein sogenanntes Radikal r angegeben werden. Hierbei handelt es sich um das Produkt der unterschiedlichen Primfaktoren von n , wobei jeder Faktor nur einmal miteinbezogen wird.

Für das Radikal eines beliebigen abc-Tripels gilt trivialerweise

$$r(a, b, c) = r(a) \cdot r(b) \cdot r(c),$$

wegen der Teilerfremdheit von a, b und c (vgl. [43], S. 145).

Radikale spielen eine entscheidende Rolle in der sogenannten *abc-Vermutung*, welche sich mit *abc-Tripeln* beschäftigt. Weitere Informationen zu dieser Vermutung können in [43], S. 144-146, nachgelesen werden. Nun wollen wir uns aber einen Einblick in die *Fibonacci-abc-Vermutung* verschaffen.

Satz 69 (Fibonacci-abc-Vermutung). (vgl. [43], S. 146)

Die anschließende Ungleichung ist für jedes Fibonacci-abc-Tripel $\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}\}$ mit $n \in \mathbb{N} \geq 1$ erfüllt:

$$r(f_n) \cdot r(f_{n+1}) \cdot r(f_{n+2}) \geq f_{n+2}.$$

Ein Beweis könnte wie folgt in vier Schritten nach [43], S. 146-153 und S. 176-177, verlaufen:

- (1) Hat das Radikal von einer der drei Fibonacci-Zahlen den gleichen Wert wie das Folgenglied selbst, so ist die Ungleichung sofort erfüllt.
- (2) Für $r(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}) \geq \sqrt{f_n f_{n+1} f_{n+2}}$ folgt $r(f_n, f_{n+1}, f_{n+2}) > f_{n+2}$.
- (3) Des Weiteren kann man überprüfen, dass aus

$$P > p^j \text{ die Ungleichung } r(f) > \sqrt{f} \text{ resultiert,}$$

wobei p^j für das Produkt von Primzahlpotenzen mit dem größten auftretenden Exponenten $j \in \mathbb{N}$ steht und P das Produkt angibt, welches sich aus den potenzfreien Primfaktoren zusammensetzt.

- (4) Zuletzt müsste man die *Fibonacci-Vermutung* als Hilfssatz verwenden, welche besagt: Für jede Fibonacci-Zahl gilt $P > p^j$.
Falls die *Fibonacci-Vermutung* stimmt, dann wäre auch die *Fibonacci-abc-Vermutung* bewiesen.

3.6 Der Binomialkoeffizient und die Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen erscheinen an den unglaublichsten Stellen, die wir oftmals gar nicht für möglich gehalten hätten. Im Laufe dieses Abschnittes wird eine weitere erwähnenswerte Verbindung enthüllt.

3.6.1 Das Pascal'sche Dreieck und der Binomialkoeffizient

Der Ursprung des *Pascal'schen Dreiecks* geht vermutlich auf einen arabischen Mathematiker namens *Omar Khayyam* (1048-1122) zurück, jedoch sind die ersten schriftlichen Kenntnisse aus dem im Jahre 1303 entstandenen Manuskript *The Valuable Mirror of the Four Elements* des chinesischen Mathematikers *Chu Shih-Chieh* (1270-1330) überliefert. In der westlichen Welt wird *Pascal* die Entdeckung des Dreiecks, ohne Verweise zu früheren Aufzeichnungen, im Jahre 1653 zugeschrieben. (vgl. [48], S. 84) Es kann eine Verbindung zwischen dem *Pascal'schen Dreieck*, den Binomialkoeffizienten und den Fibonacci-Zahlen hergestellt werden. Zudem ist es uns möglich das *Pascal'sche Dreieck* mittels Binomialkoeffizienten aufzubauen. (vgl. [71], S. 13)

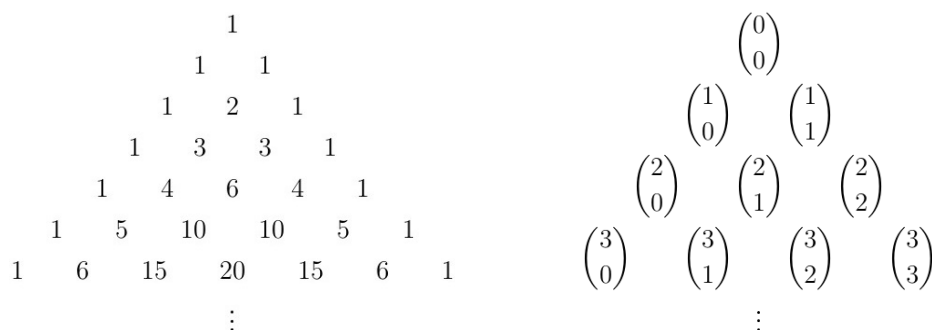


Abbildung 3.2: Das *Pascal'sche Dreieck* (vgl. [71], S. 13)

Verbindet man die Zahlen, welche auf einer Diagonale liegen, wie in folgender Abbildung ersichtlich und summiert diese anschließend, dann erhält man nacheinander in der „richtigen“ Abfolge die Fibonacci-Zahlen (vgl. [71], S. 13).

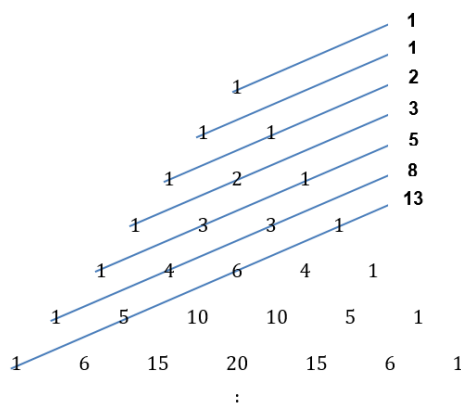


Abbildung 3.3: Verbindung des *Pascal'schen Dreiecks* zu den Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 91)

Die ersten beiden Diagonalen weisen jeweils nur ein Element auf – die Eins – und sind somit Fibonacci-Zahlen. Deswegen ist es ausreichend, wenn sich das Ergebnis der n -ten Diagonale als Summe aller Elemente der $(n-2)$ -ten sowie $(n-1)$ -ten Diagonale darstellen lässt. Dazu verwendet man den Binomialkoeffizienten bei zusätzlicher Betrachtung der $(n-2)$ -ten Diagonale

$$\binom{n-3}{0}, \quad \binom{n-4}{1}, \quad \binom{n-5}{2}, \quad \dots$$

sowie der Einträge der $(n-1)$ -ten Diagonale

$$\binom{n-2}{0}, \quad \binom{n-3}{1}, \quad \binom{n-4}{2}, \quad \dots,$$

um durch Addition dieser Terme

$$\binom{n-2}{0} + \left[\binom{n-3}{0} + \binom{n-3}{1} \right] + \left[\binom{n-4}{1} + \binom{n-4}{2} \right] + \dots$$

zu erhalten. Die Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten besagen, laut dem zahlentheoretischen Exkurs, dass $\binom{n-2}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$ und $\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$ erfüllt sind. Wird von diesen Gebrauch gemacht, dann ergibt sich der Ausdruck

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots,$$

welcher aber genau das Resultat der Elemente der n -ten Diagonale des *Pascal'schen Dreiecks* angibt. (vgl. [71], S. 13-14)

Eine andere Abbildung, um diesen Zusammenhang zu veranschaulichen, beruht auf der Darstellung der Fibonacci-Zahlen als Summe von Spalteneinträgen (vgl. [48], S. 92):

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1																	
1		1	1															
2			1	2	1													
3				1	3	3	1											
4					1	4	6	4	1									
5						1	5	10	10	5	1							
6							1	6	15	20	15	6	1					
7								1	7	21	35	35	21	7	1			
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9										1	9	36	84	126	126	84	36	9
10											1	10	45	120	210	252	210	120
11												1	11	55	165	330	462	462
12													1	12	66	220	495	792
13														1	13	78	286	715
14															1	14	91	364
15																1	15	105
16																	1	16
17																		1
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584

Tabelle 3.1: Verbindung des *Pascal'schen Dreiecks* zu den Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 92)

Allgemein kann demnach die Summe der Zahlen einer Diagonale mit Hilfe der Formel

$$f_{n+1} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r}, \quad n \in \mathbb{N}$$

angegeben werden. Diese lässt sich aus obigem Beweis herleiten bzw. auch durch vollständige Induktion sehr rasch überprüfen. (vgl. [47], S. 133-134)

Beweis. (vgl. [47], S. 134)

Induktionsanfang Dieser führt uns für $n = 0$ zu $f_1 = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} \binom{0-r}{r} = \binom{0}{0} = 1$. Betrachtet

man den Fall für $n = 1$, dann gelangt man zu dem Ergebnis: $f_2 = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{1-r}{r} = \binom{1}{0} = 1$.

Induktionsvoraussetzung Die Behauptung möge für beliebige, aber feste natürliche Zahlen $(n-1)$ und n gelten.

Induktionsschritt Letztlich wird der Induktionsschritt von $(n-1)$ und n nach $(n+1)$ gezeigt. Dazu muss zu Beginn eine Indexverschiebung durchgeführt werden:

$$f_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} = \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r-1} \quad \text{und} \quad f_{n+1} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} = 1 + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r}.$$

Verwendet man im Anschluss daran die Rekursionsformel sowie die Gleichung $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ aus Unterkapitel 3.1.4, dann ist f_{n+2} bestimmbar. Zudem sollten sorgfältige Überlegungen bezüglich des Ergebnisses hinsichtlich der Wahl von n (gerade bzw. ungerade) getätigt werden. Somit kann f_{n+2} wie folgt angegeben werden:

$$f_{n+2} = 1 + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r-1} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-r}{r} = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-r}{r}. \quad \square$$

Ein weiterer bemerkenswerter Zusammenhang lässt sich anhand der Fibonacci-Zahlen mit negativen Indizes sowie der Rekursionsformel darstellen (vgl. [48], S. 95):

$$\begin{aligned} f_n &= \mathbf{1} \cdot f_n \\ f_{n+1} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{1} \cdot f_{n-1} \\ f_{n+2} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{2} \cdot f_{n-1} + \mathbf{1} \cdot f_{n-2} \\ f_{n+3} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{3} \cdot f_{n-1} + \mathbf{3} \cdot f_{n-2} + \mathbf{1} \cdot f_{n-3} \\ f_{n+4} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{4} \cdot f_{n-1} + \mathbf{6} \cdot f_{n-2} + \mathbf{4} \cdot f_{n-3} + \mathbf{1} \cdot f_{n-4} \\ f_{n+5} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{5} \cdot f_{n-1} + \mathbf{10} \cdot f_{n-2} + \mathbf{10} \cdot f_{n-3} + \mathbf{5} \cdot f_{n-4} + \mathbf{1} \cdot f_{n-5} \\ f_{n+6} &= \mathbf{1} \cdot f_n + \mathbf{6} \cdot f_{n-1} + \mathbf{15} \cdot f_{n-2} + \mathbf{20} \cdot f_{n-3} + \mathbf{15} \cdot f_{n-4} + \mathbf{6} \cdot f_{n-5} + \mathbf{1} \cdot f_{n-6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dies können wir wiederum für $k, n \in \mathbb{N}$ zu

$$f_{n+k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_{n-i} \quad (3.9)$$

verallgemeinern und mittels Induktionsbeweis belegen. Zudem lässt sich diese Formel durch die rekursive Darstellungsweise der Fibonacci-Zahlen sowie einer Indizesverschiebung auch als

$$\begin{aligned} f_{n+k} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (f_{n-i-1} + f_{n-i-2}) = f_{n-1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} f_{n-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} f_{n-i-2} + f_{n-k-2} \\ &= f_{n-1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} f_{n-i-1} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} f_{n-i-1} + f_{n-k-2} \\ &= f_{n-1} + \sum_{i=1}^k \binom{k+1}{i} f_{n-i-1} + f_{n-k-2} = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} f_{n-i-1} \end{aligned}$$

schreiben. Verwendet man bei der „Ausgangsformel“ (3.9) die Eigenschaft aus Lemma 12, $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$, so lautet das Ergebnis:

$$f_{n+k} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f_{n-k+i}. \quad (3.10)$$

Nun kann durch die Annahme der Gleichheit $k = n$ der Spezialfall

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f_i$$

angegeben werden. Man hätte aber auch $n = s + m$ und $k = s$ für $s, m \in \mathbb{N}$ bei (3.10) festsetzen können, um folgenden bemerkenswerten Zusammenhang zu zeigen:

$$f_{2s+m} = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} f_{m+i}.$$

Natürlich ist man jetzt in der vorteilhaften Situation, sehr viele Formeln durch beliebiges Einsetzen für n und k angeben zu können, doch gilt unser gegenwärtiges Interesse einem speziellen Ausdruck, nämlich f_{n-k} in Zusammenhang mit dem Binomialkoeffizienten. Durch einen Induktionsbeweis lässt sich für alle $n \geq k$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$f_{n-k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f_{n+k-i} \quad (3.11)$$

sehr einfach beweisen. Auch hier gewinnt man durch analoges Anwenden von $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$ eine weitere Formel für f_{n-k} :

$$f_{n-k} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_{n+i}. \quad (3.12)$$

Sehen wir uns auch in diesem Fall das Resultat bei der Wahl von $n = m - s$ und $k = s$ genauer an,

$$f_{m-2s} = \sum_{i=0}^s (-1)^{s-i} \binom{s}{i} f_{m-s+i},$$

wobei die Bedingung $n \geq k$ und somit $m, s \in \mathbb{N}$ mit $m \geq s$ weiters berücksichtigt werden soll. (vgl. [66], S. 46-49)

Abschließend widmen wir uns einer bereits bekannten Formel (2.3) aus Kapitel 2, um eine andere Möglichkeit der Herleitung aufzuzeigen (vgl. [40], S. 94).

Satz 70. (vgl. [40], S. 94)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt die Beziehung:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k+m}^2 = 5^n f_{2(n+m)+1}.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 94-95)

Durch die *Binet-Formel* ist folgender Schluss zulässig:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k+m}^2 &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\Phi^{k+m} - \Psi^{k+m})^2 \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (\Phi^{2(k+m)} + \Psi^{2(k+m)} - 2(\Phi \cdot \Psi)^{k+m}) \\ &= \frac{1}{5} \left[\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \Phi^{2(k+m)} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \Psi^{2(k+m)} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (-1)^{m+1} \cdot \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Aussage von Lemma 12 wird dem allerletzten Summanden der Wert null zugeordnet. Wir sind jetzt aber an einen Punkt angelangt, wo ein kleiner künstlerischer Handgriff benötigt wird, um mit unserer Beweisführung fortfahren zu können. Der *binomische Lehrsatz* ermöglicht uns die Formulierung der Gleichungen

$$\begin{aligned} (1 + \Phi)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Phi^k \quad \text{und} \\ (1 + \Psi)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Psi^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Psi^k. \end{aligned}$$

Nutzt man diese Erkenntnisse, dann führt uns dies zu

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k+m}^2 = \frac{1}{5} \left[\Phi^{2m} (1 + \Phi^2)^{2n+1} + \Psi^{2m} (1 + \Psi^2)^{2n+1} \right].$$

Da die Formeln $\Phi^2 = 1 + \Phi$ und $\Psi^2 = 1 + \Psi$ gelten, besteht die Gelegenheit,

$$\begin{aligned} 1 + \Phi^2 &= 2 + \Phi = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\Phi \quad \text{und} \\ 1 + \Psi^2 &= 2 + \Psi = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}(-\Psi) \end{aligned}$$

zu schreiben. Weiter verfahren ergibt sich somit folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} f_{k+m}^2 &= \frac{1}{5} \left[\Phi^{2m} (\sqrt{5})^{2n+1} \Phi^{2n+1} + \Psi^{2m} (\sqrt{5})^{2n+1} (-\Psi)^{2n+1} \right] \\ &= 5^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^{2m+2n+1} - \Psi^{2m+2n+1}] = 5^n f_{2(n+m)+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Dieser kurze Auszug soll zeigen, wieviele unterschiedliche Möglichkeiten existieren, um Fibonacci-Zahlen anhand des Binomialkoeffizienten darzustellen. Die Menge an neuen Formeln kann ständig ergänzt werden und ein Ende ist noch lange nicht in Sicht. Doch nun wollen wir uns dem letzten Unterpunkt dieses Kapitels widmen.

3.7 Quadrat- und Kubikzahlen der Fibonacci-Folge

Ein weiterer wissenschaftlicher Aspekt thematisiert die Anzahl der Quadratzahlen unter den Fibonacci-Zahlen. Dazu lieferten *J. H. E. Cohn* und *O. Wyler* neue Erkenntnisse: Nur bei den Folgengliedern $f_0 = 0$, $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{12} = 144$ handelt es sich um Quadratzahlen, demnach können keine weiteren in der Fibonacci-Folge gefunden werden. Der Beweis kann bei [40], S. 98-99, nachgelesen werden.

Bei der Lucas-Folge existieren hingegen nur zwei Quadratzahlen: Zum einen $l_1 = 1$ und zum anderen $l_3 = 4$.

Einige Mathematiker haben sich auch mit den Kubikzahlen innerhalb der beiden Folgen beschäftigt und sind zu dem Schluss gekommen, dass drei Kubikzahlen bei den Fibonacci-Zahlen ($f_0 = 0 = 0^3$, $f_1 = 1 = 1^3$ und $f_6 = 8 = 2^3$) und nur eine einzige Kubikzahl ($l_1 = 1 = 1^3$) bei den Lucas-Zahlen vorkommen. (vgl. [40], S. 97, 99, 100)

Mit dieser Erkenntnis wollen wir uns nun von der Zahlentheorie verabschieden und uns einem neuen Kapitel zuwenden.

Kapitel 4

Fibonacci-Zahlen in der Analysis & Stochastik

In diesem Kapitel wird das Augenmerk auf zwei mathematische Teilbereiche gelenkt, die einige Besonderheiten im Zusammenspiel mit der Fibonacci-Folge für uns bereithalten werden. Beginnend mit der Analysis beschäftigen wir uns sehr intensiv mit der Fragestellung: Divergenz oder Konvergenz? Demnach spielen Grenzwertberechnungen im Hinblick auf diese einzigartige Begegnung mit den Fibonacci-Zahlen eine essentielle Rolle. Eine besondere Zahl wird abermals in Erscheinung treten und oftmals die Rolle des Limes übernehmen. Wir werden auf unendliche Kettenbrüche, eine „geschachtelte“ Wurzel und vieles mehr treffen. Unser Fokus gilt aber nicht nur den Folgen, sondern auch den Reihen, denen ein eigenes Unterkapitel gewidmet wird. Sogar der Begriff der Potenzreihe wird aufgegriffen und bemerkenswerte Zusammenhänge werden dazu festgehalten. Zuletzt steht das Zusammentreffen mit der außergewöhnlichen Fibonacci-Funktion im Zentrum unserer Aufmerksamkeit. Mit diesen neuen Erkenntnissen wird das Gebiet der Analysis verlassen und ein neues mathematisches Kapitel aufgeschlagen. In der Stochastik werden wir die Fibonacci-Folge bei einem so „banal“ wirkenden Versuch, wie beim wiederholten Münzwurf, erneut antreffen, wenn es heißt: *Kopf oder Adler*.

„Es gibt Dinge, die den meisten Menschen unglaublich erscheinen, die sich nicht mit Mathematik beschäftigt haben.“

ARCHIMEDES
([10])

4.1 Grundlagen aus der Analysis

Beginnend mit einer Wiederholung von Begriffen aus der Analysis, welche sich im weiteren Verlauf als nützlich erweisen werden, starten wir diesen Abschnitt.

Definition 26 ((Absolut-)Betrag). (vgl. [59], S. 13)

Sei $x \in \mathbb{R}$, so wird der Betrag definiert durch:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

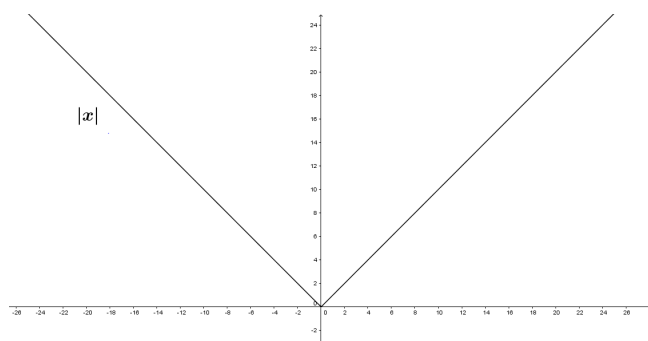


Abbildung 4.1: Graph der Betragsfunktion (vgl. [59], S. 13)

Der Funktion $|x| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ können für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften

- (1) $|x| \geq 0$ und zudem $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ gilt (positiv definit)
- (2) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (multiplikativ)
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Δ -Ungleichung)
- (4) $|-x| = |x|$ (spiegelsymmetrisch)
- (5) $|x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|$ (verkehrte Δ -Ungleichung)

zugeordnet werden (vgl. [59], S. 13).

Nun befassen wir uns mit der wichtigsten und grundlegendsten Definition der Analysis, mit der Definition des Grenzwertes (vgl. [59], S. 27):

Definition 27 (Grenzwert). (vgl. [59], S. 27)

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$ bzw. ist konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ ist.} \quad (4.1)$$

Wir nennen a den Grenzwert bzw. Limes der Folge (a_n) und geben dies formal als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ an.

Definition 28 (Divergenz). (vgl. [59], S. 28)

Existiert kein reelles a gegen welches die Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert, dann bezeichnet man die Folge (a_n) als divergent.

Definition 29 (Nullfolge). (vgl. [59], S. 28)

Tritt für die reelle Folge (a_n) der Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ein, dann spricht man bei (a_n) von einer Nullfolge.

Lemma 18. (vgl. [40], S. 104)

Sei (a_n) eine reelle Folge. Konvergiert die Folge $(|a_n|)$ gegen 0, dann handelt es sich bei (a_n) um eine Nullfolge. Die Umkehrung gilt ebenfalls.

Dieses Lemma ergibt sich sofort aus der Definition des Grenzwertes (vgl. [40], S. 104).

Beispiel 5. Das Standardbeispiel einer Nullfolge ist $(\frac{1}{n})$ (vgl. [59], S. 31).

Um die Konvergenz konkret überprüfen zu können, werden wir oftmals nicht auf die Definition, sondern auf das nachstehende Lemma zurückgreifen (vgl. [40], S. 104).

Lemma 19. (vgl. [40], S. 104)

Sei (a_n) eine reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ genau dann, wenn es sich bei $(a_n - a)$ um eine Nullfolge handelt.

Wirft man einen Blick auf die Definition des Grenzwertes, dann ist auch die Richtigkeit dieses Hilfssatzes festgestellt (vgl. [40], S. 104).

Definition 30 (Beschränkte Folge). (vgl. [59], S. 32)

Eine Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ bezeichnet man als $\left\{ \begin{array}{l} \text{nach oben beschränkt} \\ \text{nach unten beschränkt} \end{array} \right\}$, falls eine Schranke $K \in \mathbb{R}$ mit $\left\{ \begin{array}{l} a_n \leq K \\ a_n \geq K \end{array} \right\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Eine Folge (a_n) nennt man genau dann beschränkt, wenn sie sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt ist.

Satz 71 (konvergent $\Rightarrow$ beschränkt). (vgl. [59], S. 34)

Konvergiert eine reelle Folge, so ist diese beschränkt.

Beweis. (vgl. [59], S. 34)

Sei $\varepsilon = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dann führt dies unter Verwendung der Definition des Grenzwertes zu: $\exists N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$.

Betrachtet man jetzt $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| = |a_n - a + a| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

und definiert $K := \max\{|a_0|, |a_1|, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$, so ergibt sich

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Eine Umkehrung dieser Aussage ist jedoch nicht zulässig. Als Gegenbeispiel kann die sogenannte „Vorzeichenmaschine“: $(a_n) = (-1)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ herangezogen werden. Offensichtlich ist diese Folge mit $|a_n| \leq 1$ beschränkt, nicht aber konvergent. Die Divergenz dieser Folge lässt sich sehr einfach mit einem indirekten Beweis überprüfen. (vgl. [59], S. 31, 34)

Um einfach mit Folgen hantieren zu können, werden wir nun einige Rechenregeln besprechen (vgl. [59], S. 36).

Satz 72 (Summen und Produkte konvergenter Folgen). (vgl. [59], S. 37)

Die beiden reellen Folgen (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ erfüllen

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b$ und
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$.

Beweis. (vgl. [59], S. 37-38)

(a) Sei $\varepsilon > 0$, demnach ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, wodurch wir

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1 \quad \text{und} \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2 \end{aligned}$$

angeben können. Weiters folgt $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b) Aufgrund der Konvergenz der Folge (a_n) ist sie, nach Satz 71, auch beschränkt, also existiert ein $K_1 > 0$ für welches $|a_n| \leq K_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir K als $K := \max\{K_1, |b|\} > 0$ fest und nehmen $\varepsilon > 0$ an, dann gilt $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$. Aufgrund der Konvergenz der beiden Folgen resultiert die Aussage:

$$\begin{aligned} \exists M_1 \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_1 \quad \text{und} \\ \exists M_2 \in \mathbb{N}, \text{ sodass } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \forall n \geq M_2. \end{aligned}$$

Demnach gilt $\forall n \geq M := \max\{M_1, M_2\}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 4 (Linearkombinationen konvergenter Folgen). (vgl. [59], S. 38)

Die reellen Folgen (a_n) , (b_n) konvergieren und seien die beiden Variablen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Linearkombination $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergiert gegen $\lambda \lim a_n + \mu \lim b_n$.

Beweis. (vgl. [59], S. 38-39)

Dieses Korollar lässt sich sehr einfach mit Hilfe des Satzes 72 zeigen. Fasst man $(\lambda a_n)_n$ als Produkt von $(a_n)_n$ und der konstanten Folge $(\lambda)_n$ auf, wobei für die konstante Folge klarerweise $(\lambda)_n \rightarrow \lambda$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, so müssen $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$ und analog $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu b_n) = \mu \lim b_n$ erfüllt sein. Anhand des Wissens für die Summe konvergenter Folgen präsentiert sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim a_n + \mu \lim b_n. \quad \square$$

Definition 31 (Partialsumme und Reihe). (vgl. [59], S. 42, 74)

Für die reelle Folge (a_k) mit $k \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) Sei $m \in \mathbb{N}$, dann setzen wir die m -te Partialsumme s_m fest als

$$s_m := \sum_{k=0}^m a_k.$$

(b) Man definiert die (unendliche) Reihe als Folge der Partialsummen $(s_m)_m$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ bzw. } \sum a_k.$$

(c) Ist die Folge (s_m) konvergent, so wird auch die Reihe als konvergent bezeichnet. Der Grenzwert der Folge (s_m) gibt die Summe der Reihe an und dieser kann mit

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dargestellt werden, das heißt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Korollar 5 (Konvergente Reihe $\Rightarrow$ Folgenglieder sind Nullfolgen). (vgl. [59], S. 75)

Konvergiert eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, dann muss für den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ gelten.

Proposition 3 (Konvergente Reihe $\Leftrightarrow$ Partialsumme beschränkt). (vgl. [59], S. 76)

Für eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ohne negative Koeffizienten wird folgende Beziehung festgehalten:

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die m -te Partialsumme $s_m = \sum_{k=0}^m a_k$ beschränkt ist.

Die letzten beiden Beweise können bei [59], S. 75-76, nachgeschlagen werden.

Proposition 4 (Linearkombinationen von konvergierenden Reihen). (vgl. [59], S. 46)

Die Linearkombination zweier konvergenter Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist wiederum konvergent. Es folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis. (vgl. [59], S. 46)

Werden die Partialsummen unter der Verwendung von Korollar 4 betrachtet, dann erhält man sofort das obige Ergebnis. $\square$

Definition 32 (Absolute Konvergenz). (vgl. [59], S. 82)

Konvergiert die Reihe der Absolutbeträge der Folgenglieder $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, dann nennen wir

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Werden die Folgenglieder einer absolut konvergenten Reihe umgeordnet, dann bleibt die absolute Konvergenz sowie derselbe Limes bestehen (vgl. [59], S. 83).

Definition 33 (Potenzreihen). (vgl. [60], S. 48)

Für eine komplexe Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $z_0, z \in \mathbb{C}$ wird

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

als Potenzreihe definiert, wobei c_k den (Entwicklungs-)Koeffizienten und z_0 den Entwicklungspunkt darstellen.

Definition 34 (Konvergenzradius). (vgl. [60], S. 49, 54)

Der Konvergenzradius R einer Potenzreihe wird durch

$$R := \sup\{r \in [0, \infty) : \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ konvergiert in } K_r(z_0)\}$$

mit $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ angegeben. $K_r(z_0)$ gibt die abgeschlossene Kreisscheibe in den komplexen Zahlen mit dem Radius r um den Entwicklungspunkt z_0 an.

Vorerst sollten diese einführenden Worte genügen. Wir werden uns nun in das Abenteuer, Fibonacci-Zahlen in der Analysis, stürzen.

4.2 Die Fibonacci-Folge: Konvergenz oder Divergenz?

Diese Frage lässt sich durch kurzes Nachdenken sofort und eindeutig beantworten. Da die Fibonacci-Folge unbeschränkt ist, kann kein Grenzwert existieren und somit muss die Folge divergieren. Zudem können wir den Zusammenhang $f_n \geq n$ für alle $n \geq 5$ beweisen. (vgl. [59], S. 34)

Beweis. (vgl. [59], S. 34)

Induktionsanfang Für $n = 5$ gilt $f_5 = 5$ und für $n = 6$ folgt $f_6 = 8$. In beiden Fällen wird die Bedingung trivialerweise erfüllt.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage sei für beliebige, aber feste natürliche Zahlen n und $(n - 1)$ bewiesen.

Induktionsschritt Wir zeigen den Induktionsschritt von $(n - 1)$ und n nach $(n + 1)$:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \stackrel{\text{Ind.vor.}}{\geq} n + (n - 1) \stackrel{\text{Abschätzung}}{\geq} n + (2 - 1) = n + 1. \quad \square$$

Man kann verschiedene Grenzwertberechnungen bezüglich der Fibonacci-Folge aufstellen. Ein Beispiel hierfür wäre:

Beispiel 6. Überprüfe die Konvergenz bzw. Divergenz der Folge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2}$$

und berechne gegebenenfalls den Grenzwert.

Erinnert man sich an die *Simpson-Identität* (1.7) zurück und wendet diese sogleich an, dann präsentiert sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + f_n^2}{f_n^2} = \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{f_n^2}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^2}{f_n^2}}_{=1} = 1.$$

Somit ergibt sich der Grenzwert 1, da einerseits $f_n^2 \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und andererseits $(-1)^n$ beschränkt ist. (vgl. [22], S. 41)

4.3 Der Grenzwert Φ

In diesem Unterkapitel wird uns die *goldene Zahl*, welche bereits aus Kapitel 1 unter dem Symbol $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887\dots$ bekannt ist, in Form des Grenzwertes beschäftigen. (vgl. [40], S. 105)

4.3.1 Die Folge von Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen

Unsere Konzentration richtet sich nun auf Quotienten von Fibonacci-Zahlen. Dazu sieht man sich den Term

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ genauer an. Setzt man nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ für n ein, so erhalten wir für die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ die Werte

$$\{1; 2; 1,5; 1,\dot{6}; 1,6; 1,625; 1,\overline{615384}; 1,\overline{619047}; \dots\}.$$

Die Vermutung liegt nahe, dass sich die Zahlen einem Wert annähern, also diese Folge für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Es handelt sich bei dem vermutlichen Grenzwert aber nicht bloß um einen beliebigen Wert, sondern um ein spezielles Teilungsverhältnis, den sogenannten *goldenen Schnitt*. Um Gewissheit darüber zu haben, muss zuerst diese Annahme überprüft werden. (vgl. [8], S. 94)

Satz 73. (vgl. [8], S. 94)

Für den Grenzwert der nachstehenden Folge gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (4.2)$$

Beweis. (vgl. [8], S. 94-95)

Einfachheitshalber wird $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ für $n \geq 1$ festgesetzt. Der Satz lässt sich in drei Schritten beweisen:

(1) Man zeigt, dass $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$ für $n \geq 2$ gilt:

$$1 + \frac{1}{x_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = x_n.$$

(2) Wir überprüfen die Gleichung $|\Phi - x_n| = \frac{|\Phi - x_{n-1}|}{\Phi \cdot x_{n-1}}$:

$$\Phi - x_n = 1 + \frac{1}{\Phi} - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = \frac{1}{\Phi} - \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1} - \Phi)}{\Phi \cdot x_{n-1}}.$$

Da sowohl Φ als auch x_{n-1} ausschließlich positive Werte annehmen, führt uns dies zur obigen Aussage.

- (3) Zuletzt muss $|\Phi - x_n| \leq \frac{|\Phi - x_2|}{\Phi^{n-2}}$ bewiesen werden. Dafür wird neben Schritt zwei auch die Ungleichung $x_{n-1} \geq 1$ verwendet:

$$|\Phi - x_n| \leq \frac{|\Phi - x_{n-1}|}{\Phi} \leq \frac{|\Phi - x_{n-2}|}{\Phi^2} \leq \dots \leq \frac{|\Phi - x_2|}{\Phi^{n-2}}.$$

Weil $\Phi > 1$ gilt, wird der Betrag $|\Phi - x_n|$ für immer größer werdende n immer kleiner. Demnach kommt x_n dem Wert Φ beliebig nahe. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit der Konvergenz gegen Φ , also $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Im Jahre 1753 bewies *Robert Simson* von der Universität Glasgow die gerade eben besprochene Behauptung (vgl. [27], S. 287).

Bemerkung 18. Auch die Folge von Quotienten benachbarter Lucas-Zahlen $\left(\frac{l_{n+1}}{l_n}\right)$ ist konvergent und besitzt als Limes Φ (vgl. [8], S. 95).

Zudem kann man nun die Gleichung $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi\right| = \frac{1}{f_n} \cdot \frac{1}{\Phi^n}$ sehr einfach beweisen. Die Formel $|\Phi - x_n| = \frac{|\Phi - x_{n-1}|}{\Phi \cdot x_{n-1}}$, welche bei Schritt zwei gezeigt wurde, kann umgeschrieben werden zu $|x_n - \Phi| = \frac{|x_{n-1} - \Phi|}{\Phi \cdot x_{n-1}}$. Wendet man anschließend die Aussage für x_n aus Schritt eins wiederholte Male an, so ergibt sich:

$$|x_n - \Phi| = \frac{|x_1 - \Phi|}{\Phi^{n-1} x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1} = \frac{\left|1 - \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)\right|}{\Phi^{n-1} x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1} = \frac{1}{\Phi^n x_{n-1} x_{n-2} \dots x_1}.$$

Letztlich erhalten wir für

$$\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi\right| = \frac{1}{\Phi^n \frac{f_n \dots f_2}{f_{n-1} \dots f_1}} = \frac{1}{f_n} \cdot \frac{1}{\Phi^n},$$

indem wieder $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ eingesetzt wurde. (vgl. [40], S. 105-107)

Durch die Erkenntnis des Satzes 73 lässt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-m}}$ mit wenig Aufwand feststellen. Es genügt, die Aufschlüsselung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot \frac{f_{n-1}}{f_{n-2}} \cdot \frac{f_{n-2}}{f_{n-3}} \dots \frac{f_{n-m+1}}{f_{n-m}} = \Phi^m$$

vorzunehmen, um den Grenzwert zu erhalten. (vgl. [66], S. 102)

4.3.2 Der unendliche Kettenbruch

Dieser kurze Abschnitt bezieht sich auf *Lausch* [40], S. 105-107 sowie auf *Beutelspacher* und *Petri* [8], S. 94-95.

Die Folge der Quotienten nacheinander auftretender Fibonacci-Zahlen kann auch mittels Kettenbruchdarstellung angegeben werden. Dafür sehen wir uns erneut die Folge (x_n) an, welche definiert ist durch

$$x_1 := 1 \quad \text{und} \quad x_n := 1 + \frac{1}{x_{n-1}} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \geq 2. \quad (4.3)$$

Da neben $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}$ auch $\frac{f_2}{f_1} = 1$ übereinstimmt, stellen die Folgen $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$ und (x_n) ein und dieselbe dar, diese Erkenntnis kann ebenso aus dem ersten Punkt des vorhergehenden Beweises entnommen werden. Somit gilt natürlich auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \Phi$. Dementsprechend stellt (x_n) einen unendlichen Kettenbruch dar, dessen Lösung genau jener irrationalen *goldenen Zahl* Φ entspricht:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

4.3.3 Die Folge einer interessanten Quadratwurzel

Um den Limes der Folge

$$\left(\sqrt{\frac{f_{n+2}}{f_n}}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$ berechnen zu können, wird zuerst der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_n}$ betrachtet. Dazu könnte man folgendermaßen vorgehen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1} + f_n}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{f_{n+1}}{f_n}}_{=\Phi} + 1 = \Phi + 1.$$

Da die Gleichung $\Phi + 1 = \Phi^2$ erfüllt ist, ergibt sich durch Wurzelziehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{f_{n+2}}{f_n}}\right) = \Phi,$$

wodurch eine weitere Folge mit dem Limes Φ aufgezeigt wurde. (vgl. [49], S. 75)

4.3.4 Die Folge der n -ten Wurzel von Fibonacci-Zahlen

Unser Augenmerk legen wir jetzt auf eine spezielle Folge und ihren Grenzwert, es handelt sich dabei um

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n}.$$

Das Ziel wird sein herauszufinden, ob dieser Limes existiert und wenn ja, ihn in weiterer Folge zu bestimmen.

Das Folgenglied f_n lässt sich mittels *Formel von Binet* auch als $f_n = \frac{(\Phi^n - \Psi^n)}{\sqrt{5}}$ mit $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$ und $\Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6180339887$ angeben. Intuitiv könnte man sich überlegen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n = 0$ gelten, wodurch bei der Grenzwertberechnung im Zähler von f_n vermutlich Φ^n „stärker“ wäre. Zieht man danach die n -te Wurzel, dann würde Φ als Lösung hervorgehen. Doch diese Vermutung muss erst noch bestätigt werden. (vgl. [5], S. 23, 26)

Beweis. (vgl. [5], S. 26)

Es wird der Ausdruck

$$\sqrt[n]{f_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot \Phi \sqrt[n]{1 - \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n}$$

unter der Berücksichtigung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n = 0$ sowie einerseits $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = 1$ für $0 < c \in \mathbb{R}$ und andererseits $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$ für eine Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche gegen den Wert 1 konvergiert für $n \rightarrow \infty$, studiert. Demnach lautet unsere Erkenntnis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = \Phi. \quad \square$$

4.3.5 Die „geschachtelte“ Wurzel

Wir geben nun eine „geschachtelte“ Wurzel anhand der Folge (y_n) mit

$$y_0 := 1 \quad \text{und} \quad y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

an. Der Grenzwert dieser Folge, sprich $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, ist auch in diesem Fall die außergewöhnliche Zahl Φ . (vgl. [40], S. 107)

Beweis. (vgl. [40], S. 107 – 108)

Bevor diese Grenzwertberechnung vorgestellt wird, muss noch eine Aussage über die Folgenglieder, nämlich $y_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, überprüft werden, die uns im weiteren Verlauf von großem Nutzen sein wird:

Induktionsanfang Für $n = 0$ ist definitionsgemäß $y_0 = 1$.

Induktionsvoraussetzung Wir setzen die Richtigkeit der Aussage für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl n voraus.

Induktionsschritt Der Induktionsschritt wird von $n \rightarrow (n+1)$ durchgeführt. Verwendet man die Induktionsvoraussetzung, dann ergibt sich sofort $y_{n+1} = \sqrt{1 + y_n} \geq \sqrt{2} > 1$.

Jetzt wird der folgende Ausdruck unter Berücksichtigung der Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$ sowie durch Gebrauch der allgemeinen Formel $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ zu

$$\begin{aligned} |y_n - \Phi| &= |\sqrt{1 + y_{n-1}} - \Phi| = \left| \frac{1 + y_{n-1} - \Phi^2}{\sqrt{1 + y_{n-1}} + \Phi} \right| \\ &= \left| \frac{1 + y_{n-1} - (\Phi + 1)}{y_n + \Phi} \right| = \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{y_n + \Phi} \\ &\leq \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{1 + \Phi} = \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{\Phi^2} \end{aligned}$$

umgeformt. Im Anschluss daran wird dieser Vorgang wiederholte Male auf der rechten Seite der Ungleichung angewandt:

$$|y_n - \Phi| \leq \frac{|y_{n-1} - \Phi|}{\Phi^2} \leq \dots \leq \frac{|y_0 - \Phi|}{\Phi^{2n}} = \frac{|1 - (1 + \frac{1}{\Phi})|}{\Phi^{2n}} = \frac{1}{\Phi^{2n+1}}.$$

Nach Lemma 19 präsentiert sich als Grenzwert der „geschachtelten“ Wurzel sogleich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} = \Phi. \quad \square$$

4.4 Die Fibonacci-Zahlen und ihre Reihen

Dieses Unterkapitel thematisiert einige unterschiedliche Reihen, bei denen Fibonacci-Zahlen eine Rolle spielen. Wir werden diese genauer untersuchen und einige interessante Resultate festhalten.

4.4.1 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}$

Gestartet wird mit einer sehr speziellen Reihe, deren Summe ohne großen Aufwand bestimmbar ist (vgl. [40], S. 108):

Satz 74. (vgl. [40], S. 109)

Über die nachstehende Summe der Reihe kann Folgendes ausgesagt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}} = 1.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 109)

Sieht man sich den nächsten Ausdruck genauer an:

$$\frac{1}{f_n f_{n+1}} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+2} - f_n}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{f_{n+1}}{f_n f_{n+1} f_{n+2}} = \frac{1}{f_n f_{n+2}},$$

dann kann dementsprechend die n -te Partialsumme als

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i f_{i+2}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{f_i f_{i+1}} - \frac{1}{f_{i+1} f_{i+2}} \right) = \frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}}$$

angegeben werden. Da die beiden Fibonacci-Glieder $f_1 = f_2 = 1$ ergeben, erhalten wir für den ersten Term dieser Differenz das Ergebnis 1. Sieht man sich den Grenzwert des zweiten Ausdrucks an, so konvergiert dieser für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Aufgrund dessen präsentiert sich uns der Grenzwert der Partialsummen als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_{n+1} f_{n+2}} \right) = 1. \quad \square$$

4.4.2 Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^j}}$

Nicht nur bei Grenzwerten von Folgen tritt die Zahl Φ in Erscheinung, sondern auch bei Summen von Reihen (vgl. [66], S. 60):

Satz 75. (vgl. [66], S. 60)

Für den Grenzwert der folgenden Reihe gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^j}} = 4 - \Phi.$$

Beweis. (vgl. [66], S. 60-61)

Die Reihe soll anhand einer Folge dargestellt werden, um im Anschluss daran deren Limes zu bestimmen. Somit muss es sich bei diesem Grenzwert auch um den der Reihe handeln. Dazu ist die Gültigkeit der Darstellung für $n \geq 1$ zu beweisen:

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{f_{2^j}} = 3 - \frac{f_{2^n-1}}{f_{2^n}}.$$

Induktionsanfang Setzt man für $n = 1$ ein, dann ergibt sich $\sum_{j=0}^1 \frac{1}{f_{2^j}} = 2 = 3 - \frac{f_1}{f_2}$.

Induktionsvoraussetzung Die Aussage sei für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $n \geq 1$ bewiesen.

Induktionsschritt Wir zeigen den Induktionsschritt von n nach $(n+1)$. Zuerst wird der Ausdruck auf der rechten Seite umgeformt, indem man diesen mit l_{2^n} erweitert und anschließend die Formel (1.14) anwendet:

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{f_{2^j}} = 3 - \frac{l_{2^n} f_{2^n-1}}{l_{2^n} f_{2^n}} = 3 - \frac{l_{2^n} f_{2^n-1}}{f_{2^{n+1}}}.$$

Zieht man nun den Fall für $n+1$ heran

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{f_{2^j}} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{f_{2^j}} + \frac{1}{f_{2^{n+1}}} = 3 - \left(\frac{l_{2^n} f_{2^n-1}}{f_{2^{n+1}}} - \frac{1}{f_{2^{n+1}}} \right)$$

und erinnert sich einerseits an die Formel (1.13): $f_{m+k} + (-1)^k f_{m-k} = l_k f_m$ zurück und nimmt andererseits $k = 2^n$ (gerade) und $m = 2^n - 1$ an, so zeigt sich eingesetzt:

$$f_{2^{n+1}-1} + 1 = l_{2^n} f_{2^n-1},$$

wobei $f_{-1} = 1$ zusätzlich verwendet wurde. Demnach erlaubt uns dies nun die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{f_{2^j}} = 3 - \frac{f_{2^{n+1}-1}}{f_{2^{n+1}}}$$

aufzustellen. Unser Fokus wird jetzt auf die Grenzwertberechnung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{f_{2^{n+1}-1}}{f_{2^{n+1}}} \right)$$

gelegt, welche sich mithilfe des Satzes 73 relativ einfach durchführen lässt. Als Ergebnis präsentiert sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{f_{2^{n+1}-1}}{f_{2^{n+1}}} \right) = 3 - \frac{1}{\Phi} = 3 + \Psi = 4 - \Phi. \quad \square$$

4.4.3 Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$

Angelangt bei einer Reihe, die sich ohne Probleme auf eine sehr interessante Weise aufschlüsseln lässt, starten wir genau mit dieser Zerlegung. Dazu wird die Summe der

Glieder der Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n-1}}\right)$ für $n \geq 2$ aus den natürlichen Zahlen betrachtet:

$$\left(\frac{f_3}{f_2} - \frac{f_2}{f_1}\right) + \dots + \left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n-1}}\right) + \dots$$

Mittels *Simpson-Identität* (1.7) kann die Umformung

$$\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} - \frac{f_n}{f_{n-1}}\right) = \frac{f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2}{f_n f_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$$

vorgenommen werden. Sieht man sich nun die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$ unter dem Aspekt der Formel (4.2) an, dann zeigt sich

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}} = \Phi - 1.$$

Um Φ aber auch als unendliches Produkt formulieren zu können, ist es vorteilhaft, einen Blick auf das Produkt von Gliedern der Folge

$$\left(\frac{f_{n+1}}{f_n} \cdot \frac{f_n}{f_{n-1}}\right) \text{ für } n \geq 2, n \in \mathbb{N}$$

zu werfen. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_3}{f_2} \cdot \frac{f_4}{f_3} \cdot \dots \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi.$$

Werden nun gewisse Veränderungen an folgendem Ausdruck vorgenommen, gelangt man schlussendlich zu:

$$\frac{\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = \frac{f_{n+2}f_n}{f_{n+1}^2} \stackrel{(1.7)}{=} \frac{f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}}{f_{n+1}^2}.$$

Demgemäß lässt sich Φ auch als

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{f_{n+1}^2}\right)$$

angeben. (vgl. [66], S. 103, 106)

4.4.4 Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i}$

Jetzt ist es an der Zeit, um uns einer bemerkenswerten Reihe zu widmen, nämlich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i}.$$

Um eine Aussage über die Summe der Reihe treffen zu können, muss man an allererster Stelle einen Blick auf die Folge $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ für n aus der Menge der natürlichen Zahlen mit

$n \geq 1$ werfen. Im Wissen darüber, dass die Folgenglieder der Fibonacci-Zahlenfolge beliebig anwachsen, können wir sogar für $2 \leq n, m \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Folge mit $f_m < f_n$, falls $m < n$ gilt, festhalten. Welche Auswirkungen hat dies nun aber auf die Folge $\left(\frac{1}{f_n}\right)$?

Demnach gilt natürlich auch $\frac{1}{f_m} > \frac{1}{f_n}$ für $m < n$, wodurch es sich hierbei um eine streng monoton fallende Folge für $n, m \geq 2$ handelt. Somit identifizieren wir $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ als Nullfolge, was eine notwendige Voraussetzung im Zusammenspiel mit einer möglichen Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ darstellt. Doch darf man nicht außer Acht lassen, dass es sich bei dieser Folge um eine sogenannte Teilfolge von $\left(\frac{1}{f_n}\right)$ handelt und ja ausgerechnet die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ das Paradebeispiel einer divergenten Reihe ist. Um eine endgültige Aussage in unserem Fall treffen zu können, müssen wir die Partialsummen näher durchleuchten. Dafür definieren wir

$$s_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i}.$$

Als erstes Folgenglied zeigt sich $\frac{1}{f_1} = 1$. Betrachtet man die Situation für $n \geq 1$, so setzt sich s_{n+1} aus s_n und dem positiven Term $\frac{1}{f_{n+1}}$ zusammen, wodurch $s_n \geq 1$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gewährleistet wird. Das Monotonieverhalten dieser Folge der Partialsummen ist dementsprechend streng monoton wachsend. Unser Anliegen beruht nun auf dem Finden einer oberen Schranke für diese Folge. Dafür benötigen wir einen weiteren Hilfssatz. (vgl. [40], S. 109-110)

Lemma 20. (vgl. [40], S. 110)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, dann gilt die Beziehung:

$$\Phi^{n-1} < \Phi^n - \Psi^n.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 110)

Induktionsanfang Dieser führt uns für $n = 1$ zu $1 < \Phi - \Psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$, weswegen zum zweiten Punkt des Induktionsbeweises übergegangen werden kann.

Induktionsvoraussetzung Sei die Behauptung für eine beliebige, aber feste natürliche Zahl $n \geq 1$ gültig.

Induktionsschritt Letztlich führen wir den Induktionsschritt von $n \rightarrow (n+1)$. Dafür beginnen wir mit folgendem Ausdruck, wobei die Ungleichung $x - y \geq x - |y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ zusätzlich gebraucht wird:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}}{\Phi^n} &= \Phi - \Psi \cdot \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n \geq \Phi - \left|\Psi \left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n\right| = \Phi - |\Psi| \cdot \underbrace{\left|\left(\frac{\Psi}{\Phi}\right)^n\right|}_{< 1, \text{ da } \left|\frac{\Psi}{\Phi}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1} \\ &\geq \Phi - \Psi = \sqrt{5} > 1. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun auf beiden Seiten mit Φ^n , dann ergibt sich:

$$\Phi^n < \Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}.$$

□

Nutzen wir diese Erkenntnis sogleich, um eine Abschätzung der n -ten Partialsumme vorzunehmen. Dafür sehen wir uns den Term

$$\frac{1}{f_n} = \frac{\sqrt{5}}{\Phi^n - \Psi^n} < \frac{\sqrt{5}}{\Phi^{n-1}}$$

an und kommen für s_n auf

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} < \sqrt{5} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Phi^{i-1}}.$$

Der rechtsstehende Ausdruck $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Phi^{i-1}}$ erinnert uns an die geometrische Reihe, denn für $|q| < 1$ besitzt die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$$

Gültigkeit. Somit kommen wir in unserer Situation zu dem Fazit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{f_i} < \sqrt{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{\Phi \cdot \sqrt{5}}{\Phi - 1} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} < 6,$$

wodurch $1 \leq s_n < 6$ gilt. Nach Proposition 3 erhalten wir die Konvergenz der Reihe.

Mehr als die Existenz eines Limes s kann jedoch leider noch nicht festgestellt werden. Der Wert der Zahl s ist nicht bekannt, lediglich die Zahlenmenge, in welcher s zu finden ist, kann angegeben werden: $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (vgl. [40], S. 110-111)

4.4.5 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2n}}$

Nun werden die sogenannten *Lambert-Reihen*, welche die Form $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ besitzen und für $0 < x \in \mathbb{R} < 1$ konvergieren, benötigt. Dies kann eigenständig mittels Quotientenkriterium sehr einfach überprüft werden. Gegenwärtig widmen wir uns aber einer weiteren interessanten Beziehung (vgl. [52], S. 57):

Satz 76. (vgl. [52], S. 57)

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2n}} = \sqrt{5} \left[L\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - L\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \right].$$

Beweis. (vgl. [52], S. 58)

Beginnend mit der Betrachtung von

$$\frac{1}{f_n} = \frac{\sqrt{5}}{\Phi^n - \Psi^n} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{(-1)^n}{\Psi^n} - \Psi^n} = \frac{\sqrt{5}\Psi^n}{(-1)^n - \Psi^{2n}}$$

können wir uns anschließend dem Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi^{2n}}{1 - \Psi^{4n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Psi^{(4k+2)n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^{(4k+2)n}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^{4k+2}}{1 - \Psi^{4k+2}} = \frac{\Psi^2}{1 - \Psi^2} + \frac{\Psi^6}{1 - \Psi^6} + \frac{\Psi^{10}}{1 - \Psi^{10}} + \dots$$

zuwenden. Da $|\Psi| < 1$ ist, lässt sich die Reihe auch als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_{2n}} = \sqrt{5} [L(\Psi^2) - L(\Psi^4)] = \sqrt{5} \left[L\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) - L\left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right) \right]$$

schreiben, womit sich sofort das erwünschte Resultat präsentiert. $\square$

4.4.6 Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}}$

In Kürze werden die sogenannten *Jacobi-Theta-Reihen* benötigt, die umgehend besprochen werden. Diese finden vor allem in der theoretischen Behandlung der elliptischen Funktionen ihre Anwendung. (vgl. [52], S. 57)

Definition 35 (Jacobi-Theta-Reihe). (vgl. [52], S. 57)

Wir definieren die *Jacobi-Theta-Reihen* für $0 < |q| < 1$ und $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} \Theta_1(z, q) &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi iz} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi z) - 2q^{\frac{9}{4}} \sin(3\pi z) + 2q^{\frac{25}{4}} \sin(5\pi z) - \dots \\ \Theta_2(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi iz} \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi z) + 2q^{\frac{9}{4}} \cos(3\pi z) + 2q^{\frac{25}{4}} \cos(5\pi z) + \dots \\ \Theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi iz} \\ &= 1 + 2q \cos(2\pi z) + 2q^4 \cos(4\pi z) + 2q^9 \cos(6\pi z) + \dots \\ \Theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi iz} \\ &= 1 - 2q \cos(2\pi z) + 2q^4 \cos(4\pi z) - 2q^9 \cos(6\pi z) + \dots \end{aligned}$$

Angenommen $z = 0$, so zeigt sich:

$$\begin{aligned} \Theta_1(0, q) &= 0 \\ \Theta_2(0, q) &= 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + \dots \\ \Theta_3(0, q) &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \\ \Theta_4(0, q) &= 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots \quad (\text{vgl. [52], S. 57}). \end{aligned}$$

Umgehend lässt sich nun folgender Satz beweisen:

Satz 77. (vgl. [52], S. 57)

Die nachstehende Aussage ist erfüllt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} [\Theta_3(0, \Psi) - \Theta_2(0, \Psi^4)] \Theta_2(0, \Psi^4).$$

Beweis. (vgl. [52], S. 58-60)

Gestartet wird mit der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi^{2n+1}}{1 + \Psi^{4n+2}} = - \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{2n+1} (1 - \Psi^{4n+2} + \Psi^{8n+4} - \dots) \\ &= (-\Psi + \Psi^3 - \Psi^5 + \Psi^7 - \Psi^9 + \dots) \\ &\quad + (-\Psi^3 + \Psi^9 - \Psi^{15} + \Psi^{21} - \dots) \\ &\quad + (-\Psi^5 + \Psi^{15} - \Psi^{25} + \Psi^{35} - \dots) \\ &\quad + (-\Psi^7 + \Psi^{21} - \Psi^{35} + \Psi^{49} - \dots) + \dots \end{aligned}$$

Nun ist es unsere Aufgabe, den Koeffizienten von Ψ^m für ungerade m zu ermitteln. Wir beachten, dass die Reihe absolut konvergiert, weswegen die Terme umsortiert werden können. Ist m ungerade und durch d teilbar, dann erscheint Ψ^m in der Zeile angefangen mit $-\Psi^{\frac{m}{d}}$. Das Vorzeichen entfällt auf

$$\begin{cases} + & \text{falls } d \equiv 3 \pmod{4}, \\ - & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Folglich kann der Koeffizient als $c_m = \delta_3(m) - \delta_1(m)$ angegeben werden, wobei

$$\begin{aligned} \delta_1(m) &= \#\{d \mid 1 \leq d \leq m, d \mid m \text{ und } d \equiv 1 \pmod{4}\} \text{ und} \\ \delta_3(m) &= \#\{d \mid 1 \leq d \leq m, d \mid m \text{ und } d \equiv 3 \pmod{4}\} \text{ gelten.} \end{aligned}$$

Eine Erkenntnis von *Jacobi* verbindet die Subtraktion $\delta_1(m) - \delta_3(m)$ mit $r(m)$, der Darstellungsform von m als Addition zweier Quadratzahlen. Präziser formuliert, lasse $r(m)$ für die Anzahl von ganzzahligen Paaren (s, t) stehen, sodass $m = s^2 + t^2$. Er bewies die Aussage

$$r(m) = 4 [\delta_1(m) - \delta_3(m)].$$

Für die Anzahl $r'(m)$ der ganzzahligen Paare (s, t) mit $s > t \geq 0$ und $m = s^2 + t^2$ gilt weiters:

$$r'(m) = \begin{cases} \frac{r(m)}{8} & \text{falls } m \text{ keine Quadratzahl ist,} \\ \frac{r(m)-4}{8} + 1 = \frac{r(m)+4}{8} & \text{falls } m \text{ eine Quadratzahl ist.} \end{cases}$$

Demgemäß ist

$$c_m = -\frac{r(m)}{4} = \begin{cases} -2r'(m) & \text{falls } m \text{ keine Quadratzahl ist,} \\ -(2r'(m) - 1) & \text{falls } m \text{ eine Quadratzahl ist.} \end{cases}$$

Aufgrund der Tatsache, dass m ungerade ist, erhalten wir $s \not\equiv t \pmod{2}$ und dadurch

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ ungerade}}}^{\infty} c_m \Psi^m$$

$$\begin{aligned}
&= -2(1 + \Psi^4 + \Psi^{16} + \Psi^{36} + \dots)(\Psi + \Psi^9 + \Psi^{25} + \dots) \\
&\quad + (\Psi + \Psi^9 + \Psi^{25} + \dots) \\
&= -(1 + 2\Psi^4 + 2\Psi^{16} + 2\Psi^{36} + \dots)(\Psi + \Psi^9 + \Psi^{25} + \dots).
\end{aligned}$$

Darum ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}} = -\sqrt{5}(1 + 2\Psi^4 + 2\Psi^{16} + 2\Psi^{36} + \dots)(\Psi + \Psi^9 + \Psi^{25} + \dots).$$

Wird auf der Stelle die *Jacobi-Theta-Reihe* miteinbezogen, dann gelangt man zu

$$\begin{aligned}
(1 + 2\Psi^4 + 2\Psi^{16} + 2\Psi^{36} + \dots) &= (1 + 2\Psi + 2\Psi^4 + 2\Psi^9 + 2\Psi^{16} + \dots) \\
&\quad - (2\Psi + 2\Psi^9 + 2\Psi^{25} + \dots) \\
&= \Theta_3(0, \Psi) - \Theta_2(0, \Psi^4).
\end{aligned}$$

Zusätzlich können wir die Gleichung

$$\Psi + \Psi^9 + \Psi^{25} + \dots = \frac{1}{2}\Theta_2(0, \Psi^4)$$

formulieren und kommen letztendlich auf dieses famose Ergebnis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2n+1}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} [\Theta_3(0, \Psi) - \Theta_2(0, \Psi^4)] \Theta_2(0, \Psi^4). \quad \square$$

4.4.7 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}}$

Satz 78. (vgl. [16], S. 40)

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis. (vgl. [16], S. 40, 195)

Für den Beweis benötigt man neben der *Simpson-Identität* (1.7), in der Form $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n+1}$, auch die Additionstheoreme des Tangens. Erste Überlegungen zeigen

$$\begin{aligned}
\arctan \frac{1}{f_{2n}} - \arctan \frac{1}{f_{2n+2}} &= \arctan \frac{\left(\frac{1}{f_{2n}}\right) - \left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right)}{1 + \left(\frac{1}{f_{2n}}\right)\left(\frac{1}{f_{2n+2}}\right)} = \arctan \frac{f_{2n+2} - f_{2n}}{f_{2n}f_{2n+2} + 1} \\
&= \arctan \frac{f_{2n+1}}{f_{2n+1}^2} = \arctan \frac{1}{f_{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Demnach lässt sich sehr rasch für die Partialsumme erkennen, dass

$$\sum_{n=1}^k \arctan \frac{1}{f_{2n+1}} = \sum_{n=1}^k \left(\arctan \frac{1}{f_{2n}} - \arctan \frac{1}{f_{2n+2}} \right) = \arctan \frac{1}{f_2} - \arctan \frac{1}{f_{2k+2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{f_{2k+2}}$$

gilt. Hinsichtlich $k \rightarrow \infty$ erhält man sofort die zu bestätigende Behauptung aufgrund des Grenzwertes $\lim_{k \rightarrow \infty} \arctan \frac{1}{f_{2k+2}} = 0$. $\square$

Nebenbei bemerkt, können wir nach [1], S. 13, eine weitere Verbindung zwischen den Fibonacci-Zahlen und π angeben, die sogenannte *Formel von Matiyasevich*, auf die aber nicht näher eingegangen wird:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{6 \log(f_1 f_2 \cdots f_n)}{\log(kgV(f_1, \dots, f_n))}}.$$

4.5 Die Fibonacci-Zahlen und ihre Potenzreihe

Bevor wir loslegen, wird eine bestimmte reelle Funktion $F_n(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ durch

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i x^i$$

definiert. Betrachtet man in diesem Zusammenhang die *Binet-Formel*, so führt uns diese zu

$$F_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{5}} (\Phi^i - \Psi^i) x^i = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^n \Phi^i x^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^n \Psi^i x^i. \quad (4.5)$$

Nehmen wir $\Phi x \neq 1$ und $\Psi x \neq 1$ an, dann wird unter Verwendung von $\Phi + \Psi = 1$, $\Phi - \Psi = \sqrt{5}$ und $\Phi \cdot \Psi = -1$ sowie der Formel einer besonderen n -ten Partialsumme $\left(s_n(q) = \sum_{k=0}^n a_0 q^k = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\right)$, wobei hier die Form erst durch Herausheben und einer Indexverschiebung angepasst werden muss, die Gleichung

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\Phi^{n+1} x^{n+1} - \Phi x}{\Phi x - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\Psi^{n+1} x^{n+1} - \Psi x}{\Psi x - 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\Phi \Psi (\Phi^n - \Psi^n) x^{n+2} - (\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}) x^{n+1} + (\Phi - \Psi) x}{\Phi \Psi x^2 - (\Phi + \Psi) x + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5} x - (\Phi^n - \Psi^n) x^{n+2} - (\Phi^{n+1} - \Psi^{n+1}) x^{n+1}}{1 - x - x^2} \end{aligned}$$

formuliert. Unter erneuter Bezugnahme auf die Fibonacci-Zahlen liefert uns dies:

$$F_n(x) = \frac{x - f_n x^{n+2} - f_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^2}. \quad (4.6)$$

Angenommen $\Phi x = 1$, so gilt offensichtlich $x = \frac{1}{\Phi} = -\Psi$ und durch die Formel $\frac{\Psi^2}{1+\Psi^2} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ zeigt sich folgendes Resultat:

$$F_n\left(\frac{1}{\Phi}\right) = F_n(-\Psi) = \frac{1}{\sqrt{5}} n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^n (-\Psi^2)^i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[n - \frac{\Psi^2(1 - (-\Psi^2)^n)}{1 + \Psi^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[n - \frac{\Psi^2}{1 + \Psi^2} (1 - (-1)^n \Psi^{2n}) \right] \\
&= \frac{n}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{10} + (-1)^n \Psi^{2n} \frac{\sqrt{5} - 1}{10}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Potenzreihe wird als

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

bezeichnet. Um den Grenzwert zu bestimmen, wird zuerst der Fall für $x = \frac{1}{\Phi}$ einer genaueren Betrachtung unterzogen. Dazu zieht man (4.7) heran und kommt zu der Erkenntnis, dass die Reihe für $x = \frac{1}{\Phi}$ divergiert, da der erste Term für $n \rightarrow \infty$ auch gegen unendlich konvergiert und der letzte Summand aufgrund von $|\Psi| < 1$ für große n verschwindend klein wird.

Jetzt nehmen wir den Fall für $|x| < \frac{1}{\Phi}$ mit $x \in \mathbb{R}$ genauer unter die Lupe. Es gelten $|\Phi x| < 1$ sowie $|\Psi x| < 1$, zudem ist durch (4.5) der Schluss

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Phi x)^i - \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Psi x)^i$$

zulässig. Demnach muss es den Limes von $F(x)$ geben, da es sich bei dem Ausdruck auf der rechten Seite um zwei geometrische Reihen handelt, deren Summen aufgrund unserer Annahme ($|\Phi x| < 1$ und $|\Psi x| < 1$) existieren. Dieser Grenzwert soll nun bestimmt werden, wozu die Formel (4.6) genutzt wird:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - f_n x^{n+2} - f_{n+1} x^{n+1}}{1 - x - x^2} = \frac{x}{1 - x - x^2} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n x^{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} x^n).$$

Mittels Satz 14 kann der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x^{n+1}$ abgeschätzt und letztendlich durch $|x| < 1$ und $|\Phi x| < 1$ angegeben werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x^{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} + 1 \right) x^{n+1} = \frac{x}{\sqrt{5}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\Phi x)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0.$$

Es ergibt sich der Wert 0 demnach auch für den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} x^n$, sodass $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ gilt. Fassen wir das Endergebnis konkret zusammen: (vgl. [40], S. 17, 21, 112, 113)

Satz 79. (vgl. [40], S. 114)

Für $|x| < \frac{1}{\Phi}$ lässt sich über die Potenzreihe $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i$ die Aussage treffen, dass diese konvergiert und es sich bei $\frac{1}{\Phi}$ um den Konvergenzradius handelt. Für die Fibonacci-Folge wird $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ als die erzeugende Funktion bezeichnet.

Welchen Nutzen beinhaltet jetzt aber dieses Resultat? Es verleiht uns die Möglichkeit, sehr rasch das Ergebnis der Reihe für bestimmte x , welche die Voraussetzung erfüllen, anzugeben. Beispielsweise ist man im Stande für $x = \frac{1}{3}$ sehr schnell $F(\frac{1}{3}) = \frac{3}{5}$ zu berechnen. Zudem verschafft uns diese Erkenntnis die Chance erstaunliche Entdeckungen für Dezimalbruchentwicklungen festzuhalten. (vgl. [40], S. 114)

Korollar 6. (vgl. [40], S. 114)

Folgende Beziehungen gelten für Brüche von Fibonacci-Zahlen:

$$(a) \frac{1}{f_{11}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{10^{i+1}} \quad (b) \frac{1}{f_5} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{3^{i+1}} \quad (c) \frac{1}{f_{10}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{8^{i+1}}.$$

Beweis. (vgl. [40], S. 114)

Diese Behauptungen lassen sich sehr einfach anhand des vorhergehenden Satzes zeigen:

$$(a) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{10^{i+1}} = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{10^i} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100}} = \frac{1}{89} = \frac{1}{f_{11}}.$$

Wir haben somit überprüft, dass die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{f_{11}} = \frac{1}{89}$ mit den Fibonacci-Zahlen startet.

$$(b) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{3^{i+1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{3^i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} = \frac{1}{f_5}.$$

$$(c) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{8^{i+1}} = \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i}{8^i} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{64}} = \frac{1}{55} = \frac{1}{f_{10}}. \quad \square$$

4.6 Die Fibonacci-Funktion

Dieser Abschnitt wird angelehnt an [53], S. 53-57, aufgearbeitet.

Betrachtet man nun die *Formel von Binet* aus einem anderen Blickwinkel, nämlich als Funktion, dann werden dabei die natürlichen Zahlen n abgelöst und der Definitionsbereich auf die komplexe Menge erweitert. Zudem wird die Exponentialfunktion miteinbezogen, wobei wir uns vor Augen halten, dass die Gleichung $a^x = e^{x \ln a}$ gilt. Jedoch werden wir so beim Logarithmieren auf ein Problem stoßen, da $\Psi < 0$ ist. Im komplexen Bereich kann aber die Exponentialfunktion auch negative Zahlenwerte erreichen. Aufgrund der Formel $e^{xi} = \cos(x) + i \sin(x)$ muss $e^{(2k+1)\pi i} = -1$ für $k \in \mathbb{Z}$ sein. Durch das Logarithmieren zeigt sich $\ln -1 = (2k+1)\pi i$ für ganzzahlige k . Demnach lässt sich $\ln -1 := \pi i$ bestimmen und daher

$$\ln x = \ln |x| + \pi i \quad \text{für } 0 > x \in \mathbb{R}$$

schreiben. Wir gebrauchen nun die Eigenschaft $\Phi \cdot \Psi = -1$ und formulieren die Gleichung zu

$$\ln \Psi = -\ln \Phi + \pi i$$

um. Mit dieser Vorarbeit ist man nun in der Lage, die Fibonacci-Funktion zu definieren. (vgl. [53], S. 55)

Definition 36 (Fibonacci-Funktion). (vgl. [53], S. 55-56)

Als *Fibonacci-Funktion* bezeichnen wir jene komplexe Funktion $L(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$L(z) := \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^z - \Psi^z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{z \cdot \ln \Phi} - e^{z \cdot \ln \Psi}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{z \cdot \ln \Phi} - e^{z(-\ln \Phi + \pi i)}). \quad (4.8)$$

Unser Fokus liegt nun auf der Interpolation der Fibonacci-Zahlen auf die Zahlenmenge $\mathbb{R}$. Dazu konzentriert man sich auf den Realteil der Fibonacci-Funktion, welcher einer Einschränkung auf $\mathbb{R}$ unterliegt. (vgl. [53], S. 56)

Satz 80. (vgl. [53], S. 56)

Für x aus der Menge der reellen Zahlen gilt

$$F(x) := \operatorname{Re}(L(x)) = \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x \cdot \ln \Phi} - e^{-x \cdot \ln \Phi} \cos(\pi x))$$

und sei n eine ganze Zahl, so ergibt sich: $F(n) = L(n) = F_n$.

Beweis. (vgl. [53], S. 56)

Durch Umformungen können wir den Realteil von $L(x)$ auch als

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L(x)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x \cdot \ln \Phi} - e^{x(-\ln \Phi + \pi i)})\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x \cdot \ln \Phi} - e^{-x \cdot \ln \Phi} e^{x\pi i})\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x \cdot \ln \Phi} - e^{-x \cdot \ln \Phi}(\cos(\pi x) + i \sin(\pi x)))\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{x \cdot \ln \Phi} - e^{-x \cdot \ln \Phi} \cos(\pi x)) \end{aligned}$$

schreiben. Aufgrund der beiden Gleichungen

$$\sin(\pi n) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(\pi n) = (-1)^n$$

für n aus der Menge der ganzen Zahlen kann die Beziehung

$$e^{-n \ln \Phi}(\cos(\pi n) + i \sin(\pi n)) = e^{-n \ln \Phi}(-1)^n = (-\Phi)^{-n} = \Psi^n$$

aufgestellt werden. erinnert man sich zudem an die Definition der *Formel von Binet* zurück, dann präsentiert sich sogleich das Ergebnis $F(n) = L(n) = F_n$. $\square$

Zudem sind wir nun in der günstigen Ausgangsposition, $F(x)$ sowohl oben als auch unten „umhüllen“ zu können. Dazu sind zwei spezielle Funktionen notwendig, die umgehend im Rahmen einer Wiederholung festgehalten werden. (vgl. [53], S. 56)

Definition 37 (Hyperbolische Funktionen). (vgl. [53], S. 53)

Wir unterscheiden zwischen dem sogenannten *Sinus Hyperbolicus* $\sinh(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und dem *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Die beiden werden wie folgt definiert:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

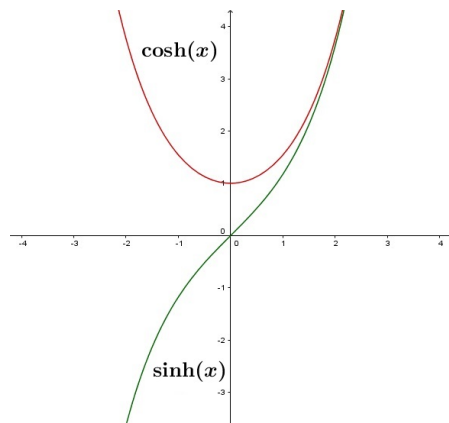


Abbildung 4.2: Funktionsgraph des $\sinh(x)$ und des $\cosh(x)$

Lemma 21. (vgl. [53], S. 54-55)

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich mithilfe der hyperbolischen Funktionen, wie nachstehend gezeigt, darstellen, wobei σ als $\ln \Phi$ definiert ist:

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{\sigma \cdot n} - e^{-\sigma \cdot n}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma n) & \text{für gerade } n, \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(e^{\sigma \cdot n} + e^{-\sigma \cdot n}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma n) & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Beweis. (vgl. [53], S. 54-55)

Dieser Beweis kann sehr einfach anhand der *Binet-Formel* und der Gleichung $\Psi = (-\Phi)^{-n}$ überlegt werden. Zudem zieht man abschließend noch die Definition des Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus heran. $\square$

Satz 81. (vgl. [53], S. 56)

Die zuvor kennengelernte Funktion $F(x)$ wird durch die beiden Hyperbelfunktionen

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma x) \text{ und } \frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma x)$$

mit $\sigma = \ln \Phi$ begrenzt.

Beweis. (vgl. [53], S. 56-57)

Aus $\cos(\pi x) = 1$ für gerade, ganzzahlige x und $\cos(\pi x) = -1$ für ungerade, ganzzahlige x folgt demnach $|\cos(\pi x)| \leq 1$. Dadurch erhalten wir sofort:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \sinh(\sigma x) \leq F(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \cosh(\sigma x). \quad \square$$

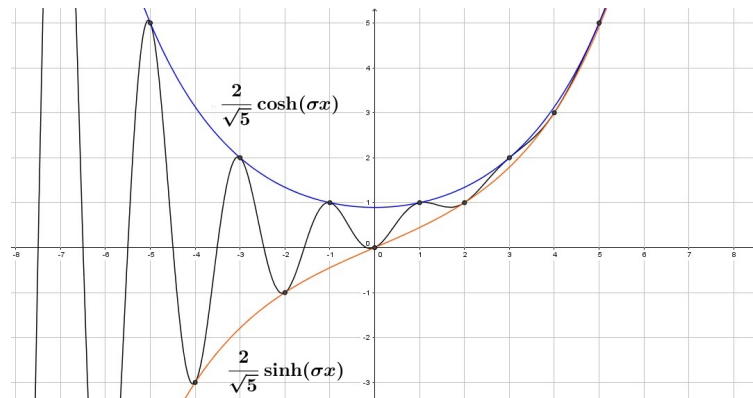


Abbildung 4.3: Die Funktion $F(x)$ mit den beiden begrenzenden Funktionen im Detail (vgl. [53], S. 57)

4.7 Grundlagen aus der Stochastik

Nun endlich landen wir im mathematischen Bereich der Stochastik. Zuerst werden elementare Resultate und Begriffe aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholt.

Die Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt sich mit den Gesetzmäßigkeiten bestimmter „Zufallsexperimente“. Dabei handelt es sich um beliebig oft wiederholbare Experimente, bei welchen der Versuchsausgang nicht vorherbestimmt ist, sondern einem statistischen Prinzip unterliegt. Das Paradebeispiel hierzu sind Würfelvorgänge. (vgl. [39], S. 1)

4.7.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Es existieren unterschiedliche Zugänge, um den Begriff der Wahrscheinlichkeit zu definieren. Wir werden kurz auf drei Möglichkeiten eingehen, wobei wir bei unseren Beschreibungen die „Ausdrucksweise“ der Mengenlehre aufgreifen werden.

Alle möglichen eintretenden Ereignisse des Zufallsexperiments finden sich in der Menge Ω wieder. Dabei legen wir unser Hauptaugenmerk auf ein bestimmtes Ereignis A , welches in Ω enthalten ist.

Zu Beginn stellen wir die *naive Definition*, anschließend die *Laplace'sche Definition* und letztendlich die *axiomatische Definition* vor. (vgl. [50], S. 1-2)

Definition 38 (Naiver Wahrscheinlichkeitsbegriff). (vgl. [50], S. 3)

Ein Experiment wird n -mal wiederholt, dabei kommt das Ereignis A insgesamt $N_n(A)$ -mal vor. Nun gibt man die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ von A wie folgt an:

$$„P(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(A)}{n}.“$$

Diese Definition weist Vor- aber auch Nachteile auf. Einerseits veranschaulicht sie unsere Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit („relative Häufigkeit“) sehr gut, andererseits wird der Grenzwertbegriff einer Folge verwendet, wobei genau genommen keine Folge vorliegt, da ein Versuch nicht unendlich oft wiederholt werden kann. Auch wenn wir eine Folge angeben könnten, gäbe es keine Sicherheit über deren Konvergenz. (vgl. [50], S. 1)

Definition 39 (Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsbegriff). (vgl. [51], S. 18)

Sei Ω eine endliche Menge und ereignen sich alle Elementarereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, dann gilt für das Ereignis A aus der Menge Ω :

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der günstigen Versuchsläufe}}{\text{Anzahl aller möglichen Versuchsläufe}} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Diese Definition hat ebenso ihre Vorzüge aber auch bestimmte Mängel. Die Herleitungen der bedeutendsten Regeln fallen einem mit dieser Definition sehr einfach, doch handelt es sich hierbei nur um einen Spezialfall, wodurch es uns nicht möglich ist einige Eigenschaften und Begriffe erklären bzw. begründen zu können. (vgl. [50], S. 1)

Nun ist ein Blick auf die *axiomatische Definition* angebracht:

Definition 40 (σ -Algebra). (vgl. [50], S. 6)

Wir bezeichnen eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von $\Omega \neq \emptyset$ als σ -Algebra, wenn:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (2) $A \in \mathcal{A}$, daraus folgt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ und somit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Definition 41 (W-Maß und W-Raum). (vgl. [50], S. 7)

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und lasse es sich bei $\mathcal{A}$ um eine σ -Algebra auf Ω handeln. In dem Fall wird die Funktion $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ als Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet, wenn

$$(1) P(A) \geq 0 \text{ für alle } A \in \mathcal{A}$$

$$(2) P(\Omega) = 1$$

(3) Sind $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, gilt demnach die Gleichung:

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \quad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Als Wahrscheinlichkeitsraum definieren wir nun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Die *axiomatische Definition* ist die mathematisch exakteste und wird dementsprechend am häufigsten verwendet. Diese Art und Weise des Aufbaus der Wahrscheinlichkeitstheorie verläuft auf einem sehr abstrakten Niveau. Somit muss ein umfangreiches Basiswissen geschaffen werden, um ein optimales Hantieren mit diesen Begrifflichkeiten zu gewährleisten. (vgl. [50], S. 2)

Im Folgenden ist es notwendig, zwei wichtige Definitionen festzuhalten, die uns im weiteren Verlauf noch von großem Nutzen sein werden.

4.7.2 Die Zufallsvariable**Definition 42 (Zufallsvariable).** (vgl. [50], S. 32)

Liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vor, dann nennen wir eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, wenn die Aussage

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Gültigkeit besitzt.

- Man bezeichnet eine Zufallsvariable X als *diskret*, wenn sie nur abzählbar oder endlich viele Werte besetzt.
- Bei einer Zufallsvariablen X handelt es sich genau dann um eine *kontinuierliche*, wenn eine Dichtefunktion (Verteilung) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, woraufhin $\forall a \leq b \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt \text{ gilt. (vgl. [50], S. 36)}$$

Für uns wird lediglich die diskrete Zufallsvariable (ZV) eine Rolle spielen, weshalb wir zum Schluss noch ihren Erwartungswert definieren.

Definition 43 (Erwartungswert einer diskreten ZV). (vgl. [50], S. 38)

Der Erwartungswert $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariable X , welche die Werte $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ annimmt, kann wie folgt bestimmt werden:

$$E(X) = \sum_{j \in \mathbb{J}} \alpha_j \cdot P(X = \alpha_j).$$

4.8 Der Münzwurf und die Fibonacci-Zahlen

Dieser Abschnitt wird nach *Humenberger* [33] thematisiert. Wir werden uns mit einem nur allzu bekannten stochastischen Problem des Münze-Werfens – *Kopf (K) oder Adler (A)* – auseinandersetzen. Uns interessiert vor allem das Schema Kopf-Kopf und wie oft man durchschnittlich dafür die Münze fallen lassen muss. Bemerkenswerterweise haben, bei der Betrachtung von Kopf-Kopf-freien Aneinanderreihungen der Länge n , die Fibonacci-Zahlen ihre Finger mit im Spiel. (vgl. [33], S. 15)

4.8.1 Der Erwartungswert von Kopf-Kopf

Die Informationen zu diesem Unterkapitel finden sich auf den Seiten 19 – 22 bei [33]. Um den Erwartungswert $E(KK)$ bestimmen zu können, ist zuerst die Anzahl von Münzserien ohne Kopf-Kopf-Aneinanderreihungen einer bestimmten Länge n von Bedeutung. Dazu definiert man Y als jene Zufallsvariable, welche die Anzahl bis zum ersten Auftreten von KK angibt. Genau genommen handelt es sich bei Y um eine diskrete Zufallsvariable. Natürlich kann KK erst ab zwei Würfeln möglich sein und deswegen definieren wir für $n = 1$ die „günstigen“ Möglichkeiten als $y_1 = 0$. Der Erwartungswert für die diskrete Zufallsvariable lässt sich wie folgt formulieren:

$$E(KK) = E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} nP(Y = n).$$

Wir müssen uns aber zuerst Gedanken über die Wahrscheinlichkeiten $P(Y = n)$ machen. Betrachtet man dazu die *Laplace'sche Wahrscheinlichkeit*:

$$P(Y = n) = \frac{\text{günstige Möglichkeiten}}{\text{alle Möglichkeiten}} = \frac{y_n}{2^n}.$$

Unsere Aufmerksamkeit legen wir daher auf die verschiedenen Möglichkeiten, die ersten $(n - 2)$ Stellen für $n \geq 2$ ohne KK Abfolge zu besetzen, um eine Situation wie

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{(n-2) \text{ Stellen}} \mid KK,$$

also mit KK am Ende nach den $(n - 2)$ Plätzen zu erhalten. Für den Fall $n = 2$ ist die Situation relativ eindeutig: Es existiert nur eine einzige „günstige“ Möglichkeit und somit muss $y_2 = 1$ sein. Sieht man sich den Fall für $n = 3$ an, so kommt auch hier nur ein „Münzverlauf“ $A \mid KK$ in Frage und $y_3 = 1$. Für $n = 4$ können zwei Möglichkeiten ($y_4 = 2$) auftreten, entweder $AA \mid KK$ oder $KA \mid KK$. Wenn wir uns über die drittletzte Stelle Gedanken machen, dann ist es einleuchtend, dass diese Position mit einem Adler A besetzt sein muss, da ansonsten bereits hier KK an der $(n - 1)$ -ten Position auftritt und nicht erst an der geforderten n -ten Stelle. Demnach ist unsere Fragestellung äquivalent mit der Situation:

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{(n-3) \text{ Stellen ohne } KK} \mid A \mid KK.$$

Betrachtet man die Fälle für $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$, so präsentiert sich:

- $y_5 = 3$: $AA \mid A \mid KK$, $KA \mid A \mid KK$ und $AK \mid A \mid KK$.
- $y_6 = 5$: $AAA \mid A \mid KK$, $KAA \mid A \mid KK$, $AKA \mid A \mid KK$, $AAK \mid A \mid KK$ und $KAK \mid A \mid KK$.
- $y_7 = 8$: $AAAA \mid A \mid KK$, $KAAA \mid A \mid KK$, $AKAA \mid A \mid KK$, $AAKA \mid A \mid KK$, $AAAK \mid A \mid KK$, $KAKA \mid A \mid KK$, $AKAK \mid A \mid KK$ und $KAAK \mid A \mid KK$.

Die Ergebnisse für y_n mit $n \geq 1$ springen uns natürlich sofort ins Auge:

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}.$$

Somit liegt die Vermutung nahe, dass es sich um die Abfolge der Fibonacci-Zahlen handelt. (vgl. [33], S. 19-20)

Satz 82. (vgl. [33], S. 20)

Für $n \geq 1$ existieren genau f_{n-1} Varianten, einen „Münzverlauf“ mit einer vorgegeben Länge n , wie folgt zu belegen:

$$\underbrace{\dots\dots\dots}_{(n-3) \text{ Stellen ohne } KK} \mid A \mid KK.$$

Demnach tritt KK zum ersten Mal an der n -ten Position auf.

Beweis. (vgl. [33], S. 20)

Für $n = 1$ bis $n = 7$ haben wir die Behauptung bereits überprüft. Nehmen wir an, dass beim ersten Münzwurf A fällt. Demgemäß gibt es insgesamt y_{n-1} Möglichkeiten, welche die geforderte Bedingung bzw. Abfolge aufweisen. Betrachten wir nun den Fall, dass der erste Wurf K ergibt, so muss an der zweiten Stelle A folgen, wodurch insgesamt y_{n-2} „günstige“ Möglichkeiten für diesen Fall existieren. Diese beiden Fälle zusammen ergeben y_n , wodurch sich

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

herausstellt. Da die Anfangsbedingungen von $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ erfüllt sind und diese mit den Startwerten der Fibonacci-Folge übereinstimmen, wurde $y_n = f_{n-1}$ für $n \geq 1$ bewiesen. $\square$

Wendet man sich wieder dem Erwartungswert zu und gebraucht sogleich den eben bewiesenen Satz, so zeigt sich:

$$E(KK) = E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{f_{n-1}}{2^n}.$$

Jetzt fehlt nur noch der konkrete Wert für den Erwartungswert $E(KK)$. Dieser lässt sich mittels der Potenzreihe $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i = \frac{x}{1-x-x^2}$ mit $|x| < \frac{1}{\Phi}$ aus Satz 79 bestimmen. Wird $F(x)$ mit x multipliziert und $f_0 = 0$ berücksichtigt, so führt dies zu

$$\frac{x^2}{1-x-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^{i+1} = \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-1} x^i.$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$\frac{2x - x^2}{(1 - x - x^2)^2} = \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-1} \cdot i \cdot x^{i-1}.$$

Setzen wir nun $x = \frac{1}{2} < \frac{1}{\Phi}$ ein, dann kommen wir auf dieses Zwischenresultat:

$$\frac{1 - \frac{1}{4}}{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = 12 = \sum_{i=2}^{\infty} i \frac{f_{i-1}}{2^{i-1}}.$$

Unser Endergebnis für den Erwartungswert lautet daher $E(KK) = \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{f_{n-1}}{2^n} = 6$.
(vgl. [33], S. 20, 22)

Kapitel 5

Fibonacci-Zahlen in der Geometrie

Worin besteht die Verbindung zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem mathematischen Teilbereich der Geometrie? Mit dieser Frage sehen wir uns im kommenden Kapitel konfrontiert und es wird ein weiteres Geheimnis hinter der besonderen Zahl Φ enthüllt. Der *goldene Schnitt* zieht sich wie ein roter Faden durch dieses Kapitel und der damit verbundenen Formenvielfalt. Die historischen Hintergründe werden aufgedeckt und Konstruktionsverfahren erläutert. Neben dem *goldenen Dreieck* stoßen wir auch auf *goldene Rechtecke* sowie *logarithmische Spiralen*. Zudem treten regelmäßige Fünfecke des Öfteren in Erscheinung, welche hinter einer doch sehr einfach aussehenden Fassade einige Besonderheiten für uns bereithalten werden. Zuletzt unterliegen wir einem geometrischen Trugschluss, der anschließend bravourös aufgeklärt wird. Um dieses Kapitel aufzuarbeiten werden hauptsächlich die beiden Autoren *Beutelspacher* und *Petri* [8] herangezogen. Im Großen und Ganzen beschränken wir uns auf die wichtigsten Aspekte der einzelnen Unterkapitel, da die Fibonacci-Folge die Geometrie nur am Rande streift bzw. damit in Berührung kommt.

„Die Natur kann nur der verstehen, der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik, und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren.“

GALILEO GALILEI
([30])

5.1 Der goldene Schnitt

5.1.1 Die Geschichte des goldenen Schnittes

Eine unglaubliche Faszination geht von einem besonderen Teilungsverhältnis einer Strecke aus, welches heute unter den Bezeichnungen *goldener Schnitt* oder aber auch *goldenes Verhältnis* bekannt ist. Anfänglich von *Euklid* noch als *proportio habens medium et duo extrema*, die *Teilung im äußeren und mittleren Verhältnis*, bezeichnet, fanden sich während der Zeit der Antike keine geeigneten, kurz formulierten und passenden Ausdrücke. Versucht man die Ursprünge dieses Verhältnisses zu erforschen, muss man in der Geschichte sehr weit zurückreisen. Gerüchten nach wurde beim Bau der Pyramiden in Ägypten der *goldene Schnitt* absichtlich verwendet, doch dies erscheint aus heutiger Perspektive als äußerst fragwürdig. Als Tatsache kann jedoch angesehen werden, dass den Pythagoräern um ca. 500 v. Chr. der *goldene Schnitt* bereits ein Begriff gewesen ist. Dieses spezielle Teilungsverhältnis wird meist *Hippasos von Metapont*, einem vermeintlichen Schüler von *Pythagoras*, zugeschrieben, der es im Zuge der Auseinandersetzung mit einem regelmäßigen Fünfeck entdeckt haben soll. Schriftliche Überlieferungen liegen jedoch nicht vor, darum kann eine eindeutige Zuordnung nicht garantiert werden. Die ersten schriftlichen Angaben gehen auf *Euklid* zurück, welcher ebenso erst durch die intensive Auseinandersetzung mit dem *regelmäßigen Fünfeck*, vor allem verbunden mit dessen Konstruktionen, auf dieses einzigartige Teilungsverhältnis gestoßen war. (vgl. [8], S. 9, 10, 11, 44, 45) *Euklid* soll sich bereits 300 v. Chr. mit diesem Thema beschäftigt und auch Schriften dazu verfasst haben. Aber erst im späten Mittelalter wurden immer mehr Werke über diese besondere Teilung veröffentlicht. (vgl. [36], S. 3) In weiterer Folge kam im 16. Jahrhundert eine neuartige Bezeichnung auf, die höchstwahrscheinlich *Luca Paciolo*, einem Venezianer, zugeschrieben werden kann. Er verwendete den Ausdruck *divina proportio*, das *göttliche Verhältnis* und stellte damit seine Wertschätzung dar. Es existieren noch unzählige weitere Bezeichnungen, wie beispielsweise *sectio proportionalis*, was übersetzt die *proportionale Teilung* bedeutet. Doch erst im 19. Jahrhundert fanden die Termini *goldener Schnitt* und *goldenes Verhältnis* Einklang in die mathematische Fachwelt. Die Besonderheit des *goldenen Schnittes* liegt aber nicht nur in seiner mathematischen Betrachtungsweise, sondern vor allem in seiner ästhetischen Schönheit. Warum gerade dieses Verhältnis als schön wahrgenommen wird, lässt sich allerdings nicht begründen. Wie bereits im Vorwort angemerkt, findet man dieses Teilungsverhältnis in den unterschiedlichsten Disziplinen, wie beispielsweise in der Architektur, Kunst, Musik, Literatur etc. (vgl. [8], S. 9-12)

5.1.2 Die Definition des goldenen Schnittes

Dieser Abschnitt baut auf den Erkenntnissen der Autoren *Beutelspacher* und *Petri* auf und findet sich in [8], S. 15-18, wieder.

Wie bei den Fibonacci-Zahlen hat der *goldene Schnitt* seinen Ursprung in einer besonderen Aufgabe, welche sich in *Euklids* Werk *Elemente* nachlesen lässt.

Die Aufgabenstellung. Teile eine vorgegebene Strecke so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks, welcher sich aus der Gesamtlänge mal dem kürzeren Abschnitt ergibt,

gleich groß ist wie der Flächeninhalt des Quadrates mit der Seitenlänge des größeren Abschnittes.

Definition 44 (Goldener Schnitt).

Wird eine Strecke $\overline{AB}$ durch einen Punkt S im goldenen Schnitt geteilt, dann verhält sich die Gesamtstrecke zum größeren Abschnitt genauso wie die größere zur kleineren Teilstrecke.

Logischerweise existieren demnach genau zwei Möglichkeiten für den Punkt S , die Gesamtstrecke im *goldenen Schnitt* zu teilen:



Abbildung 5.1: Der *goldene Schnitt* (vgl. [8], S. 15)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir ab jetzt $\overline{AS}$ als den größeren Teilabschnitt an. Demnach zeigt sich für diesen Fall das *goldene Verhältnis* als

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{SB}|}.$$

Zudem wird für die Streckenlänge $|\overline{AS}|$ die Bezeichnung *Major* (M) und für die Länge des kürzeren Teilabschnittes $|\overline{SB}|$ *Minor* (m) verwendet. Die Gesamtstreckenlänge $|\overline{AB}|$ kann demnach auch als $a = M + m$ dargestellt werden. Somit lässt sich die Formel

$$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$$

aufstellen, die wiederum umgeformt und durch das Ersetzen von a

$$M^2 - (M + m)m = 0$$

ergibt. Dividiert man anschließend durch m^2 , so präsentiert sich die quadratische Gleichung

$$\left(\frac{M}{m}\right)^2 - \frac{M}{m} - 1 = 0.$$

Löst man diese anhand der *kleinen Lösungsformel* für $\frac{M}{m}$, dann stellt sich als Resultat:

$$\frac{M}{m} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

heraus. Die Lösung $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kann sofort ausgeschlossen werden, da eine negative Zahl als Quotient zweier Längen nicht in Frage kommt. Damit gelangt man zu dem eindeutigen Ergebnis:

$$\frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Erneut ließ sich eine Verbindung zu den Fibonacci-Zahlen finden, wo uns dieser Ausdruck als Φ vorgestellt wurde. Demnach liegt genau dann der *goldene Schnitt* vor, wenn

$\frac{M}{m} = \Phi$ gilt. Namensgeber dieser außergewöhnlichen Zahl ist der griechische Bildhauer *Phidias* ($\Phi I \Delta I A \Sigma$), welcher dieses besondere Verhältnis sehr oft in seinen Werken einfließen ließ, weshalb zur Benennung dessen erster Buchstabe verwendet wurde. Der Ausdruck *goldener Schnitt* steht aber nicht nur für das Teilungsverhältnis bzw. für den Teilungsvorgang, sondern oftmals wird dieser auch für die Zahl Φ oder aber auch für den Teilungspunkt S verwendet.

Man kann nun drei Eigenschaften von Φ aufzählen, von denen uns die ein oder andere bereits bekannt erscheint. Die Aussagen können durch kurzes Nachrechnen eigenständig überprüft werden:

$$(1) \Phi^2 = \Phi + 1 \quad (2) \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (3) \Phi + \frac{1}{\Phi} = \sqrt{5}.$$

5.1.3 Konstruktionsmöglichkeiten des goldenen Schnittes

In diesem Teilabschnitt werden mehrere Arten von Konstruktionen des *goldenen Schnittes* vorgestellt. Dazu wird das Hauptwerk [8], S. 20-21, 23-25, herangezogen.

Zuerst muss zwischen zwei verschiedenen Aufgabenstellungen unterschieden werden. Einerseits kann $\overline{AB}$ gegeben sein und man muss einen Punkt S finden, der die Strecke $\overline{AB}$ im *goldenen Verhältnis* teilt (innere Konstruktion von Φ). Andererseits kann die Aufgabe auch von der Strecke $\overline{AS}$ ausgehen und man ist auf der Suche nach einem Punkt B , sodass S wiederum $\overline{AB}$ im *goldenen Verhältnis* teilt (äußere Konstruktion von Φ).

Konstruktionsverfahren 1

Es ist eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge a gegeben. Man zeichnet zuerst eine senkrechte Strecke (auf $\overline{AB}$) mit der Länge $|\overline{BC}| = \frac{a}{2}$ ausgehend vom Punkt B ein. Anschließend verbindet man die Punkte A und C und zeichnet einen Kreis mit Mittelpunkt C und Radius $|\overline{BC}|$ ein, wodurch wir den Schnittpunkt D erhalten. Konstruiert man nun einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $|\overline{AD}|$ und lässt diesen auf die Strecke $\overline{AB}$ treffen, dann ergibt sich der Punkt S , welcher $\overline{AB}$ im *goldenen Schnitt* teilt.

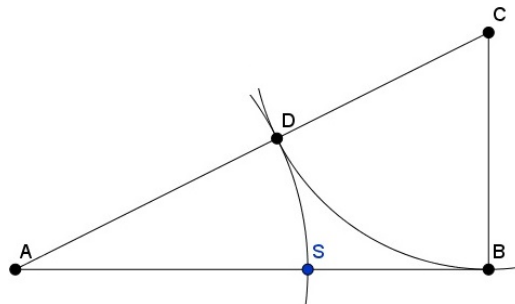


Abbildung 5.2: Konstruktion 1 (vgl. [8], S. 21)

Beweis.

Durch den *pythagoräischen Lehrsatz* lässt sich die Gleichung

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2$$

aufstellen und es gilt somit

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} = |\overline{AC}|^2,$$

wodurch wir für die Länge der Strecke

$$|\overline{AC}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

erhalten. Demnach kann

$$|\overline{AS}| = |\overline{AD}| = |\overline{AC}| - |\overline{CD}| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = \frac{a}{\Phi}$$

geschrieben werden und durch anschließendes Betrachten des Verhältnisses $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|}$, ergibt sich

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{a}{\frac{a}{\Phi}} = \Phi. \quad \square$$

Konstruktionsverfahren 2

Nun ist eine Strecke $\overline{AS}$ gegeben, ausgehend von dieser wird eine senkrechte Strecke vom Punkt S wegführend mit der Länge $|\overline{AS}| = |\overline{SC}|$ abgetragen. Die Mitte der Strecke $\overline{AS}$ wird eingezeichnet und mit E beschriftet. Anschließend konstruiert man einen Kreis mit Mittelpunkt E und Radius $|\overline{EC}|$ und schneidet diesen mit der Gerade, welche durch die Punkte A und S verläuft. Den näher gelegenen Schnittpunkt zu S nennen wir B . Somit teilt S die Strecke $\overline{AB}$ im *goldenen Schnitt*.

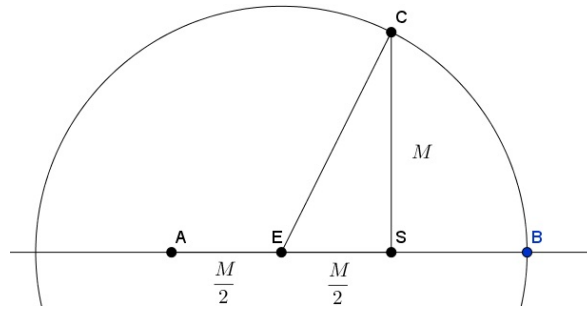


Abbildung 5.3: Konstruktion 2 (vgl. [8], S. 24)

Beweis.

Abermals kommt der *Satz des Pythagoras* zum Einsatz, um die Beziehung

$$|\overline{ES}|^2 + |\overline{SC}|^2 = |\overline{EC}|^2$$

aufzustellen und um somit

$$\frac{M^2}{4} + M^2 = \frac{5M^2}{4} = |\overline{EC}|^2$$

zu erhalten. Demnach gilt für die Länge der Strecke

$$|\overline{EC}| = \frac{M\sqrt{5}}{2}.$$

Wird abschließend ein Blick auf die Länge $|\overline{AB}|$ geworfen, so kann diese auch als

$$|\overline{AB}| = |\overline{AE}| + |\overline{EB}| = |\overline{AE}| + |\overline{EC}| = M \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) = M \cdot \Phi$$

geschrieben werden, wodurch wir letztlich folgendes Verhältnis festhalten:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AS}|} = \frac{M \cdot \Phi}{M} = \Phi. \quad \square$$

Konstruktionsverfahren 3

Jetzt wird eine Möglichkeit vorgestellt, weitere *goldene Verhältnisse* aus einem gegebenen (S in Bezug zur Strecke $\overline{AB}$) zu konstruieren. Man lässt den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $|\overline{AS}|$ auf die Gerade durch die beiden Punkte A und B treffen, um den Schnittpunkt C zu erhalten. Der Punkt A teilt nun die Strecke $\overline{BC}$ im *goldenen Verhältnis*. Wie in Abbildung 5.4 dargestellt, kann dieses Schema wiederholte Male erfolgreich angewendet werden.

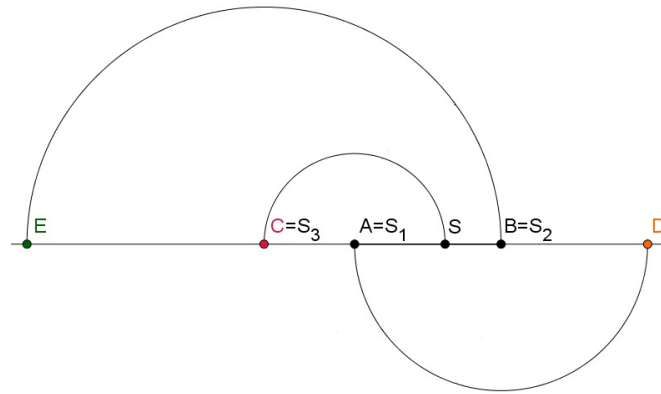


Abbildung 5.4: Konstruktion 3 (vgl. [8], S. 25)

Beweis.

Die Gleichung $|\overline{AC}| = |\overline{AS}| = \frac{|\overline{AB}|}{\Phi}$ lässt folgenden Schluss zu:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CA}|} = \frac{|\overline{AB}|}{\frac{|\overline{AB}|}{\Phi}} = \Phi. \quad \square$$

5.2 Das goldene Dreieck

Im weiteren Verlauf wird unser Augenmerk auf sogenannte *goldene Dreiecke* gelegt und anhand der Hauptliteratur [8], S. 34-37, aufgeschlüsselt.

Hinter dem Begriff des *goldenen Dreiecks* verbirgt sich ein gleichschenkeliges Dreieck mit Schenkellängen, welche ein Vielfaches von Φ betragen und einer Basislänge, die im Verhältnis $1 : \Phi$ zur Schenkellänge steht. Kurz gesagt, ein *goldenes Dreieck* besitzt die Seitenlängen: $c, c \cdot \Phi$ und $c \cdot \Phi$.

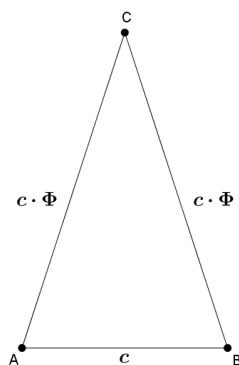


Abbildung 5.5: Goldenes Dreieck (vgl. [8], S. 34)

Ein mögliches Konstruktionsverfahren. Anhand der in Abschnitt 5.1.3 erworbenen Kenntnisse über den *goldenen Schnitt* kann eine Konstruktion des *goldenen Dreiecks* durchgeführt werden. Zu einer gegebenen Strecke $\overline{AS}$ konstruiert man einen Punkt B , sodass S die Strecke $\overline{AB}$ im *goldenen Verhältnis* teilt. Anschließend zeichnet man einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $|\overline{AB}|$ ein und zieht eine senkrechte Gerade durch die Mitte M der Strecke $\overline{AS}$. Es zeigen sich zwei Schnittpunkte C und D , die jeweils mit den Eckpunkten A und S ein *goldenes Dreieck* bilden, da die Schenkellängen jeweils $|\overline{AB}|$ betragen.

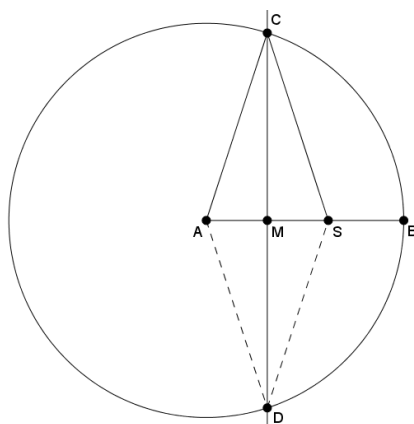


Abbildung 5.6: Konstruktion zweier goldener Dreiecke (vgl. [8], S. 35)

Es liegt genau dann ein *goldenes Dreieck* vor, wenn die beiden Basiswinkel 72° betragen, wodurch der dritte Winkel letztlich 36° aufweisen muss. Dies kann anschaulich mithilfe eines regelmäßigen Fünfecks überprüft werden.

5.3 Das regelmäßige Fünfeck

Zuerst wird der Begriff des **konvexen Vielecks**, bei welchem keine Innenwinkel vorliegen, die größer als 180° sind, genauer untersucht. Zusätzlich gelten für konvexe n -Ecke die allgemeinen Eigenschaften:

- (a) Von einer Ecke führen $(n - 3)$ Diagonalen weg.
- (b) Insgesamt existieren $n \cdot \frac{n-3}{2}$ Diagonalen in einem n -Eck.
- (c) Das konvexe n -Eck wird durch die Diagonalen, welche von einem Eckpunkt aus wegführen, in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegt. Somit muss die Summe der Innenwinkel genau $(n - 2) \cdot 180^\circ$ annehmen.

Diese lassen sich durch einfache Überlegungen sehr schnell belegen. (vgl. [38], S. 17)

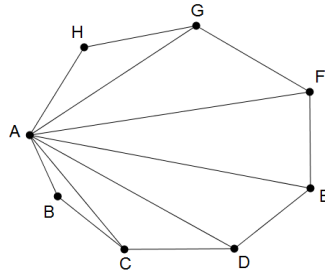


Abbildung 5.7: Konvexes 8-Eck (vgl. [38], S. 17)

Fortan beziehen wir uns in diesem Unterkapitel ausschließlich auf die Autoren *Beutelspacher* und *Petri* [8], S. 31-36, 44, 46.

Anschließend werden **regelmäßige bzw. reguläre Fünfecke** $ABCDE$, welche durch gleich lange Seiten und gleich große Winkel gekennzeichnet sind, betrachtet.

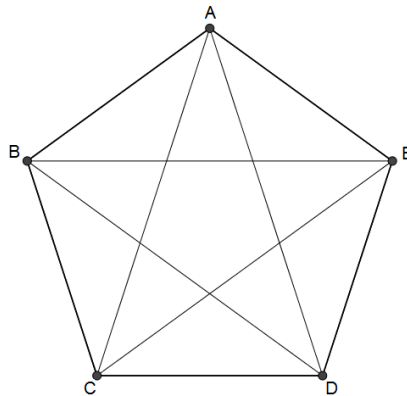


Abbildung 5.8: Fünfeck mit eingezeichneten Diagonalen (vgl. [8], S. 32)

Diese stellen konvexe Vielecke dar und verfügen zudem über folgende Eigenschaften:

- (a) Jeder Innenwinkel hat exakt 108° .
- (b) Die auftretenden Diagonalen sind gleich lang.
- (c) Die Diagonalen sind parallel zu den ihnen gegenüberliegenden Seiten.
- (d) Die Schnittpunkte der Diagonalen, welche nicht mit einem Eckpunkt gleich fallen, müssen einander im Verhältnis Φ teilen.
- (e) Der *goldene Schnitt* tritt in Erscheinung, wenn das Verhältnis der Diagonalenlänge zur Seitenlänge betrachtet wird.

Beweis.

(a) Da es sich bei einem Fünfeck um ein konvexes Vieleck handelt, können wir die Summe aller Innenwinkel anhand der Formel $(n - 2) \cdot 180^\circ$ bestimmen und erhalten ein Ergebnis von 540° . Bekanntlich sind alle Innenwinkel gleich groß, wodurch sich die Größe eines Winkels von 108° ergibt.

(b) Zwei Diagonalen, welche eine gemeinsame Ecke besitzen, verfügen aufgrund symmetrischer Eigenschaften über dieselbe Länge. Schlussendlich führt dies zu gleich langen Diagonalen des Fünfecks.

(c) Aus symmetrischen Gründen reicht es, diese Behauptung für nur eine einzige Diagonale zu überprüfen. Zeichnet man die Senkrechte, zum Beispiel jene vom Eckpunkt D ausgehend auf die Strecke $\overline{AB}$, ein, liefert dies offensichtlich eine Symmetrieachse, welche im rechten Winkel zu den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CE}$ steht. Demnach müssen diese beiden Strecken parallel zueinander sein.

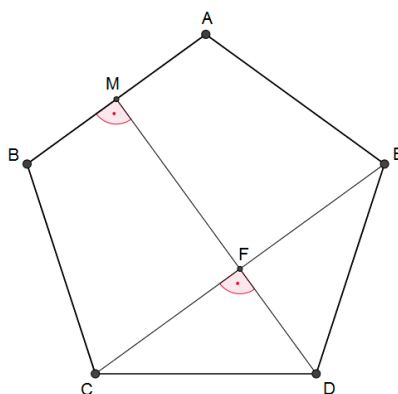


Abbildung 5.9: Fünfeck: Diagonale $\overline{CE} \parallel$ Seite $\overline{AB}$ (vgl. [8], S. 32)

(d) Wir zeichnen im Fünfeck die beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ ein und präsentieren F als Schnittpunkt. Aufgrund der beliebigen Auswahl dieser schneidenden Diagonalen reicht es, den *goldenen Schnitt* durch den Teilungspunkt F an einer Diagonale nachzuweisen, um die allgemeine Behauptung zu bestätigen.

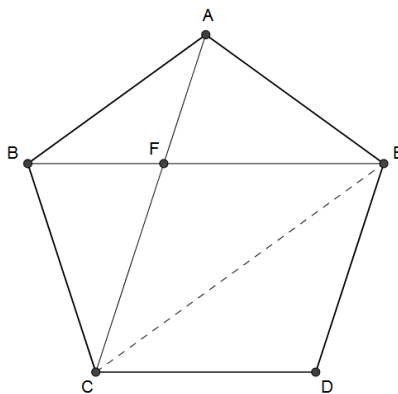


Abbildung 5.10: Fünfeck: Schnittpunkt F als besonderer Teilungspunkt (vgl. [8], S. 33)

Die Diagonale $\overline{CE}$ ist zur Seite $\overline{AB}$ parallel und mittels Strahlensatz kann die Beziehung

$$\frac{|\overline{FC}|}{|\overline{FA}|} = \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{AB}|}$$

ermittelt werden. Zudem besteht einerseits die Gleichheit $|\overline{AB}| = |\overline{DE}|$ und andererseits nach (b) auch der Zusammenhang $|\overline{AC}| = |\overline{CE}|$. Fügt man diese Einzelerkenntnisse zusammen, ergibt sich

$$\frac{|\overline{FC}|}{|\overline{FA}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{DE}|}.$$

Betrachtet man des Weiteren das Viereck $FCDE$, welches sich als Parallelogramm unter Berücksichtigung von (c) herausstellt, dann gilt im Speziellen die Gleichheit der beiden Seitenlängen $|\overline{FC}| = |\overline{DE}|$. Durch Einsetzen gelangen wir zu

$$\frac{|\overline{FC}|}{|\overline{FA}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{FC}|}.$$

Dies spiegelt aber genau die Definition des *goldenen Schnittes* wider.

(e) Die letzte Behauptung lässt sich nun sehr einfach aufgrund unserer Vorarbeit zeigen. Dazu kann das Resultat von (d) sowie die Gleichung $|\overline{FC}| = |\overline{DE}|$ verwendet werden, um folgenden Ausdruck zu formulieren:

$$\Phi = \frac{|\overline{FC}|}{|\overline{FA}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{FC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{DE}|}. \quad \square$$

Eine Konstruktionsmöglichkeit. Die letzte Eigenschaft verrät uns den „Aufenthalt“ so mancher *goldener Dreiecke* im regelmäßigen Fünfeck. Jede Diagonalenlänge kann als Produkt der Seitenlänge mal der Zahl Φ angegeben werden. Dadurch lässt sich ein regelmäßiges Fünfeck mit einer vorgegebenen Seitenlänge c sehr schnell konstruieren, indem wir ein *goldenes Dreieck* mit der Basislänge c und zwei gleichschenkelige Dreiecke mit den Basislängen $c \cdot \Phi$ und den Schenkellängen c zusammenfügen. Beginnend mit der Konstruktion des *goldenen Dreiecks* wird anschließend die Länge c von den Eckpunkten ausgehend abgeschlagen. Die Schnittpunkte B und E ergeben die fehlenden Eckpunkte des regulären Fünfecks.

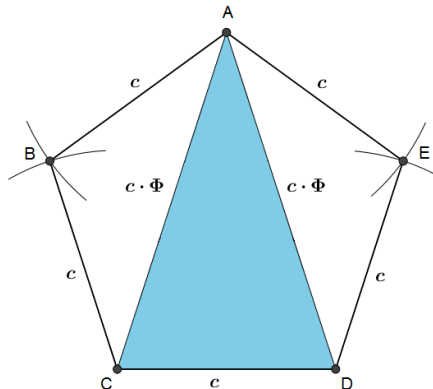


Abbildung 5.11: Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mithilfe eines *goldenen Dreiecks* (vgl. [8], S. 38)

Natürlich gibt es noch andere Wege regelmäßige Fünfecke anzufertigen, doch auf diese wird im Folgenden nicht näher eingegangen. Man findet einige, teilweise außergewöhnliche, Varianten bei *Beutelspacher* und *Petri* [8], S. 37-44.

Durch Verlängern der einzelnen Seiten des regelmäßigen Fünfecks erhalten wir eine neue Figur, das sogenannte **Pentagramm**, welches sich aus dem regelmäßigen Fünfeck in der Mitte und fünf *goldenen Dreiecken* als „Zacken“ zusammensetzt.

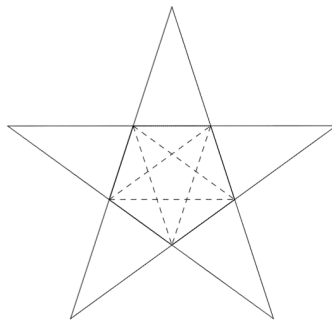


Abbildung 5.12: Pentagramm (vgl. [8], S. 44)

Bei den fünf äußeren Dreiecken des Pentagramms kann genau deshalb behauptet werden, dass es sich um *goldene Dreiecke* handelt, da ein Basiswinkel des Dreiecks mit dem Innenwinkel des regelmäßigen Fünfecks (108°) exakt 180° ergeben muss. Dementsprechend müssen die Basiswinkel der Dreiecke 72° betragen, aber genau das beschreibt, wie bereits bekannt, ein *goldenes Dreieck*.

5.4 Das goldene Rechteck

Die Informationen zu diesem Absatz finden sich auf den Seiten 47-50 bei [8].

Ein *goldenes Rechteck* hat die Seitenlängen a und $a \cdot \Phi$, somit beträgt das Verhältnis der längeren zur kürzeren Seite $\Phi : 1$.

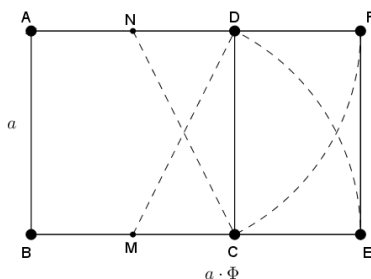


Abbildung 5.13: Goldenes Rechteck ABEF (vgl. [8], S. 47)

Ein möglicher Konstruktionsablauf. Unser Ausgangspunkt stellt ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a dar. Zu diesem konstruiert man die Punkte E und F , sodass einerseits $\overline{BE}$ von C und andererseits $\overline{AF}$ von D im *goldenen Verhältnis* geteilt

werden. Anhand des zweiten Konstruktionsverfahrens aus Abschnitt 5.1.3 kann dies sehr einfach vorgenommen werden.

Betrachtet man ein *goldenes Rechteck* und schneidet von diesem das größtmögliche Quadrat weg, so verbleibt abermals ein *goldenes Rechteck* als Rest. Die Seitenlängen des „neu“ entstandenen Rechtecks betragen a und $a \cdot \Phi - a$, wodurch sich ein Seitenverhältnis von $\frac{a}{a(\Phi-1)} = \frac{1}{\Phi-1} = \Phi$ ergibt. Dieser Vorgang des Abspaltens kann unzählige Male wiederholt werden und es zeigt sich stets wieder ein kleineres *goldenes Rechteck*.

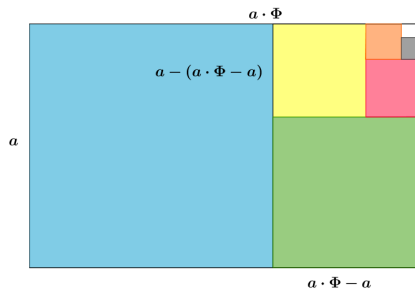


Abbildung 5.14: Abfolge von *goldenen Rechtecken* (vgl. [8], S. 48)

Eine letzte bemerkenswerte Beziehung darf natürlich nicht vorenthalten werden: Schreibt man ein Rechteck $A_1B_1C_1D_1$ auf eine spezielle Weise in ein Quadrat $ABCD$ ein, sodass die Eckpunkte des Rechtecks die Seitenlängen des Quadrates im *goldenen Verhältnis* teilen, dann handelt es sich bei $A_1B_1C_1D_1$ um ein *goldenes Rechteck*.

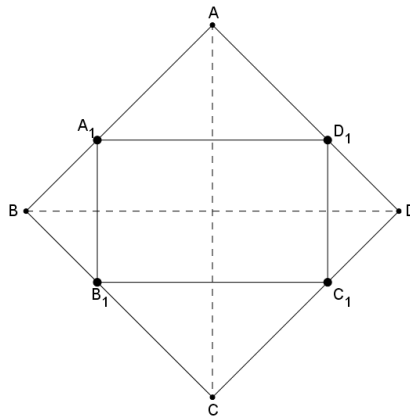


Abbildung 5.15: *Goldenes Rechteck* eingeschrieben in ein Quadrat (vgl. [8], S. 49)

Beweis.

Aufgrund des Strahlensatzes lässt sich das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ als Parallelogramm beschreiben. Darüber hinaus verlaufen die Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel zu den Seiten des Parallelogramms, wonach diese im rechten Winkel aufeinander stehen. Dementsprechend muss es sich bei dem Viereck $A_1B_1C_1D_1$ um ein Rechteck handeln. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AA_1D_1$ und $\triangle A_1BB_1$ sowie der Voraussetzung $\frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \Phi$ führt uns dies zu $\frac{|A_1D_1|}{|A_1B_1|} = \Phi$. Demnach muss das Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ein *goldenes Rechteck* sein. $\square$

Ebenso interessante Erkenntnisse liefern *platonische Körper* im Zusammenhang mit dem *goldenen Schnitt*, welche im Werk [8], S. 50-56, nachgelesen werden können.

5.5 Die logarithmischen Spiralen

Ursprünglich wurden diese besonderen Spiralen von *R. Descartes* im 17. Jahrhundert mathematisch untersucht und erforscht. Die Worte *eadem mutata resurgo* gehen auf *J. Bernoulli* (1654-1705) zurück, welcher damit eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Spiralen hervorhebt: Sie können immer wieder durch eine Drehstreckung weitergeführt werden, wodurch sie sich zwar verändern, aber immer noch als dieselben erscheinen. Durch das Drehen der Kurve kann man die Illusion des Wachstums bzw. des immer Kleiner-Werdens der Spirale hervorrufen. (vgl. [8], S. 63-64) Definitionsgemäß unterliegt eine logarithmische Spirale der Gleichung $r = r_0 \cdot e^{a\varphi}$, wobei r_0 und a Werte aus der Menge der positiven reellen Zahlen annehmen. Vergrößert man den Polarwinkel φ , so nimmt der Radius r exponentiell zu. Somit ist φ logarithmisch von r abhängig, wodurch diese Spiralenart ihren Namen erhielt. (vgl. [65]) Auf diese bemerkenswerten Formen wird im letzten Kapitel nochmals Bezug genommen, aber hinsichtlich eines ganz anderen Themenbereichs. Im Folgenden gehen wir kurz auf zwei besondere Spiralen ein, die zu den *logarithmischen Spiralen* gezählt werden.

5.5.1 Die goldene Spirale

Die *goldene Spirale* kann über eine sogenannte **Drehstauchung** σ angegeben werden. Bei dieser Drehstauchung σ findet zuerst eine Drehung um 90° nach rechts und eine anschließende Streckung um Φ^{-1} , also eine Stauchung, statt. Dabei kommt es zu einer Abbildung der einzelnen Punkte auf einen anderen. Genauer wird der Punkt A auf C , dieser wiederum auf E etc. abgebildet. Wir erhalten einerseits die Abfolge $A, C, E, G, I, \dots$ und andererseits die Reihung $B, D, F, H, J, \dots$ (vgl. [8], S. 60)

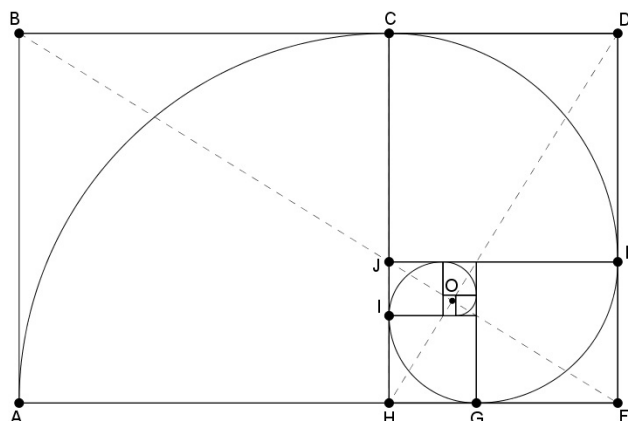


Abbildung 5.16: Approximation der *goldenen Spirale* (vgl. [8], S. 58)

Die Definition der *goldenen Spirale* kann jedoch auch über die Polarkoordinaten erfolgen, wobei r den Abstand von P zum Pol O und θ den Winkel zwischen OP und der

x -Achse angibt. Die **Drehstreckung** $\varrho = \sigma^{-1}$ veranlasst, dass jeder Punkt $P = (r, \theta)$ auf einen weiteren Punkt $\varrho(P) = (r\Phi, \theta + \frac{\pi}{2})$ abgebildet wird. Bei ϱ handelt es sich zuerst um eine Drehung um den Faktor $\frac{\pi}{2}$ und einer anschließenden Streckung um Φ . Definiert man nun einen Punkt E mit $\vec{E} := (1, 0)$, dann erhalten wir eine unendliche Ansammlung von Punkten, welche die Polarkoordinaten (r, θ) mit $r = \Phi^m$ und $\theta = m \cdot \frac{\pi}{2}$ für $m \in \mathbb{Z}$ aufweisen. Beispielsweise ergeben sich die Punkte:

$$\dots, I = (\Phi^{-2}, -\pi), G = \left(\Phi^{-1}, -\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad C = \left(\Phi, \frac{\pi}{2}\right), A = (\Phi^2, \pi), \dots$$

Demnach können wir daraus die Formel

$$r = \Phi^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

ableiten. (vgl. [8], S. 57, 60) Versucht man die einzelnen Komponenten bezüglich der allgemeinen Formel der *logarithmischen Spiralen* zu bestimmen, so ist $r_0 = 1$, $a = \frac{2\ln(\Phi)}{\pi}$ und $\varphi = \theta$. Die Spirale, welche durch diese Drehstreckung entsteht, bezeichnet man als die *goldene Spirale*. (vgl. [65], [8], S. 57-61)

Die Abbildung 5.16 stellt eine sehr gute Approximation an die tatsächliche *goldene Spirale* dar, welche nach *Kepler* konstruiert wurde. Diese ergibt sich durch eine Vorarbeit, die wir bereits im Abschnitt 5.4 besprochen haben. Die Skizze 5.14 spiegelt unsere Vorgehensweise wider, doch wird das Quadrat nun immer in der linken Hälfte des *goldenen Rechtecks* abgetrennt. Hat man das erste Quadrat abgeschnitten, so stellen wir uns vor, wie diese Konstruktion um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht und erneut das größtmögliche Quadrat links im kleineren Rechteck abgetrennt wird. Dieser Vorgang wird unzählige Male wiederholt. Anschließend werden Viertelkreise in die Quadrate eingeschrieben, die jeweils den Radius der Seitenlänge der einzelnen Quadrate aufweisen. Als Gesamtfigur ergibt sich nun eine Spirale, die der *goldenen Spirale* sehr nahe kommt. Der Unterschied zur „echten“ *goldenen Spirale* liegt darin, dass es sich um keine Zusammensetzung exakter Viertelkreise handelt. Somit dienen die Seitenlinien der *goldenen Rechtecke* nicht als Grenzen bzw. Tangenten der Spirale, sondern die Spirale verläuft leicht darüber hinausgehend. (vgl. [8], S. 57, 58, 60, 61)

Die *goldene Spirale* lässt sich aber auch mithilfe der *Fibonacci-Spirale* approximieren, da sich der Quotient benachbarter Fibonacci-Zahlen an Φ annähert (vgl. [40], S. 133).

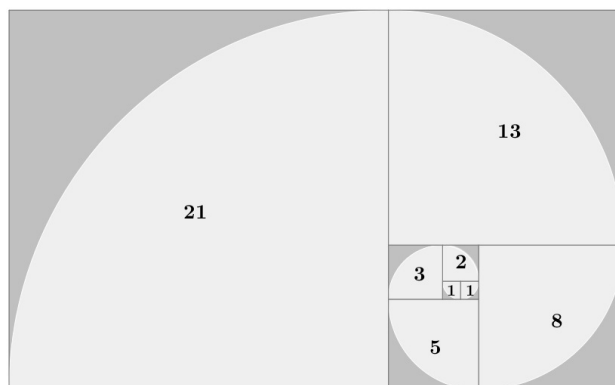


Abbildung 5.17: *Fibonacci-Spirale* (vgl. [40], S. 133)

Dazu legt man Quadrate mit der Seitenlänge der einzelnen Fibonacci-Zahlen aneinander. Begonnen wird, wie in der Abbildung dargestellt, mit zwei Quadraten der Seitenlänge eins. Es werden an diese weitere Quadrate mit den Seitenlängen zwei, drei, fünf, acht, dreizehn,... angeordnet. Zeichnet man schlussendlich auch noch Viertelkreise in die jeweiligen Quadrate, so wie oben ersichtlich, ein, ist das Ergebnis eine sogenannte *Fibonacci-Spirale*. (vgl. [40], S. 133)

5.5.2 Die spira mirabilis

Für diesen Teilabschnitt greifen wir, wenn nicht anders gekennzeichnet, auf die Literatur [8], S. 61-63, zurück.

Die Ausgangssituation dieser speziellen Spirale bildet ein *goldenes Dreieck* $\triangle ABC$, aus welchem durch eine Winkelhalbierung beim Punkt B ein weiteres Dreieck $\triangle BCD$ hervorgeht. Wir erkennen, dass es sich auch bei $\triangle BCD$ um ein *goldenes Dreieck* handeln muss. Argumentieren kann man dies leicht anhand der Winkel, welche in einem *goldenen Dreieck* vorliegen. Der Winkel $\angle CBD$ beträgt durch die Halbierung genau 36° , der Winkel $\angle DCB$ ist 72° , wodurch für den Winkel $\angle CDB$ eine Größe von 72° überbleibt. Aber genau dies charakterisiert ein *goldenes Dreieck*. Somit lässt sich auch sehr leicht die Schlussfolgerung nachvollziehen, dass D die Strecke $\overline{AC}$ im *goldenen Verhältnis* teilt, wenn man die Ähnlichkeit der Dreiecke miteinbezieht. Dieser Vorgang des Einschiebens von weiteren *goldenen Dreiecken* wird immer wieder vorgenommen. Letztlich werden die Punkte durch die Einzeichnung von Kreissektoren, wie in der Abbildung ersichtlich, verbunden, wobei der Mittelpunkt des jeweiligen Kreissektors der neue Eckpunkt des nächsten Dreiecks ist.

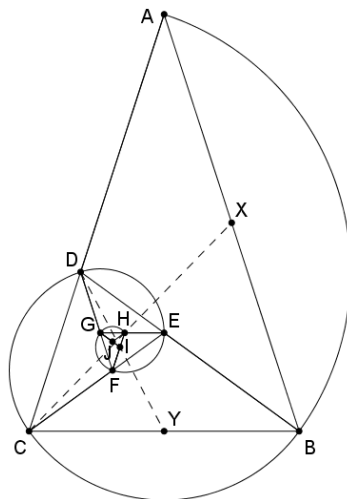


Abbildung 5.18: *Spira mirabilis* (vgl. [8], S. 61)

Formell kann die *Spira mirabilis* mittels Polarkoordinaten angegeben werden. Die Eckpunkte der Dreiecke $A, B, C, D, E, \dots$ weisen die Form (r, θ) mit $r = \Phi^{-m}$ und $\theta =$

$-\frac{3m\pi}{5}$ für $m \in \mathbb{Z}$ auf. Demnach zeigen sich die Punkte:

$$A = \left(\Phi, \frac{3\pi}{5}\right), \quad B = (1, 0), \quad C = \left(\frac{1}{\Phi}, -\frac{3\pi}{5}\right), \quad D = \left(\frac{1}{\Phi^2}, -\frac{6\pi}{5}\right), \quad \dots$$

Eine *Spira mirabilis* liegt somit genau dann vor, wenn r als

$$r = \Phi^{\frac{5\theta}{3\pi}}$$

formuliert werden kann.

Für die allgemeine Gleichung der *logarithmischen* Spiralen müsste man $r_0 = 1$, $a = \frac{5 \ln(\Phi)}{3\pi}$ und $\varphi = \theta$ wählen, um die sogenannte *Spira mirabilis* zu erhalten (vgl. [65], [8], S. 61-63).

5.6 Der goldene Winkel

Diese kurze Ausführung soll zeigen, dass sich auch ein Winkel von 360° im *goldenen Schnitt* teilen lassen kann. Dazu betrachten wir die Winkel

$$\alpha = \frac{360^\circ}{\Phi} \approx 222,5^\circ \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\alpha}{\Phi} = \frac{360^\circ}{\Phi^2} \approx 137,5^\circ.$$

Demnach werden offensichtlich die beiden Bedingungen

$$\frac{360^\circ}{\text{größerer Winkel}} = \frac{360^\circ}{\alpha} = \Phi \quad \text{und} \quad \frac{\text{größerer Winkel}}{\text{kleinerer Winkel}} = \frac{\alpha}{\beta} = \Phi$$

erfüllt, wodurch ein *goldenes Verhältnis* vorliegt. (vgl. [48], S. 148-149)

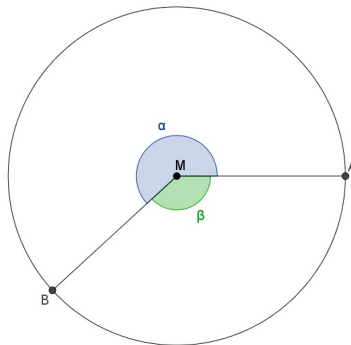


Abbildung 5.19: Goldener Winkel (vgl. [48], S. 148)

5.7 Ein geometrischer Trugschluss

Anschließend wird eine interessante geometrische Besonderheit genauer unter die Lupe genommen. Gemäß der *Simpson-Identität* können wir die Gleichung

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 1$$

angeben, welche die Basis für einen kleinen geometrischen „Zaubertrick“ bildet.

Ein Quadrat mit der Seitenlänge acht wird in vier kleinere Teilabschnitte zerschnitten, die wir anschließend zu einem Rechteck mit den Seitenlängen fünf und dreizehn zusammenfügen. Die Abbildung stellt diesen Vorgang optisch dar. (vgl. [8], S. 96-97 [11], S. 321)

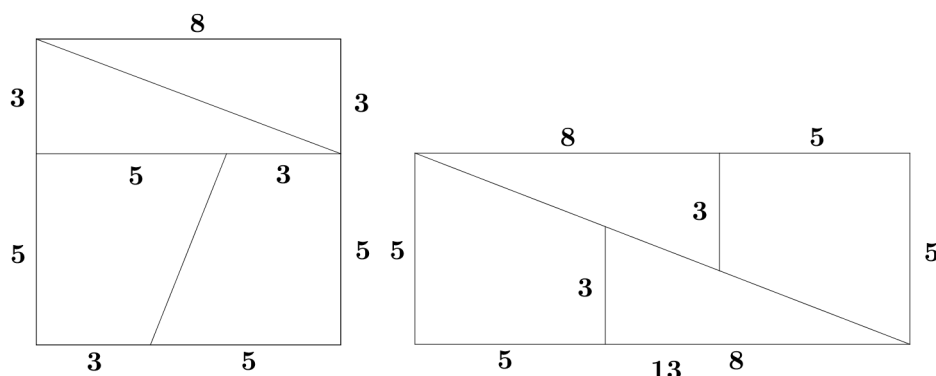


Abbildung 5.20: Ein geometrischer Trugschluss (vgl. [11], S. 321)

Soweit so gut, aber wirft man einen genaueren Blick auf die Flächeninhalte, so stehen wir vor einem Rätsel, denn der Flächeninhalt des Rechteckes beträgt $5 \cdot 13 = 65$, aber jener des Quadrates nur $8^2 = 64$. Wie kann das sein? Des Pudels Kern verbirgt sich hinter einer optischen Täuschung, die mit freiem Auge kaum ersichtlich ist. Dazu muss man das Rechteck deutlich vergrößern, um zu sehen, dass die einzelnen Teilstücke nicht exakt zueinander passen. (vgl. [11], S. 322)

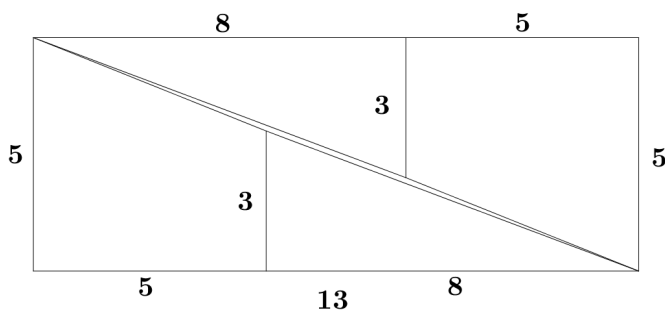


Abbildung 5.21: Ein geometrischer Trugschluss – Die Auflösung (vgl. [11], S. 321-322)

Dieser geometrische Trugschluss lässt sich aufgrund der oben angegebenen Formel sehr einfach für eine Fibonacci-Zahl der Form f_n als Seitenlänge des Quadrates zeigen. Der Unterschied der beiden Flächeninhalte ist so gering, dass dieser leicht übersehen werden kann. In unserem Fall wurde die Fibonacci-Zahl $f_6 = 8$ verwendet, wodurch sich das Rechteck $f_7 \cdot f_5$ ergeben hat, welches sich um die Einheit eins vom Flächeninhalt des Quadrates unterscheidet. (vgl. [8], S. 95-97, [11], S. 321-322)

Hätte man aber für n eine ungerade Zahl angenommen, dann wäre das Quadrat um eine Einheit größer als das Rechteck gewesen, wonach es beim Rechteck zu einer kaum

sichtbaren Überlappung gekommen wäre. Daher können folgende allgemeine Strukturen für diese Täuschung angegeben werden: (vgl. [8], S. 96-97)

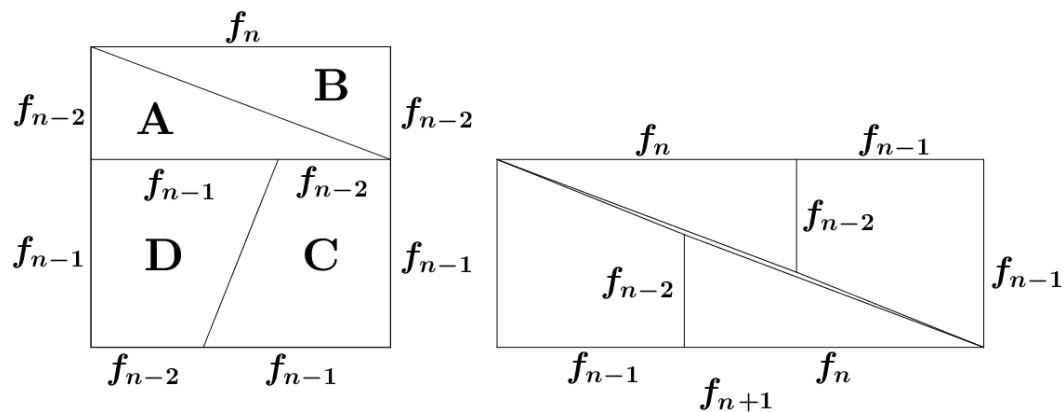


Abbildung 5.22: Allgemeine Darstellung des geometrischen Trugschlusses (vgl. [8], S. 96)

Mit dieser Auflösung beenden wir die geometrischen Ausführungen und wenden uns nun dem letzten Kapitel zu. Dieses wird uns in das Reich der Biologie entführen und eindrucksvolle Geheimnisse offenbaren.

Kapitel 6

Fibonacci-Zahlen in der Biologie

Ein einzigartiges Schauspiel offenbart sich im letzten Kapitel. Diese Naturspektakel werden uns in eine andere Welt entführen und die verborgenen Geheimnisse von Sonnenblumen, Zapfen, Drohnen etc. enthüllen. Unsere Aufmerksamkeit wird von einem weiteren unscheinbaren Begriff, der *Phyllotaxis*, geweckt. Zudem betreiben wir Ahnenforschung im Zuge einer Stammbaumanalyse, wobei sich interessante Resultate präsentieren lassen. Danach ziehen *logarithmische Spiralen* uns in ihren Bann, bei dessen biologischer Entdeckungsreise Mollusken, Zyklone und Spiralgalaxien angetroffen werden. Der Mensch und die *göttliche Teilung* sind ebenso sehr eng miteinander verbunden und halten Faszinierendes für uns bereit. Nichtsdestotrotz müssen diese Ergebnisse und Erkenntnisse immer mit gewisser Vorsicht betrachtet werden. Oftmals wird ein Suchender sehr leicht zu etwas verleitet oder schafft Verbindungen, welche gar nicht existieren. Somit gilt es, nicht jede noch so unglaubliche Erscheinung für bare Münze zu nehmen, sondern sich immer eine gewisse Skepsis dem gegenüber zu bewahren.

„Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet.“

DAVID HILBERT
([30])

6.1 Drohnen und ihr Hang zur Haploidie

Wir verschaffen uns zuerst einen Überblick über die bemerkenswerte Welt der Bienen. Zu diesem Zweck wird die bekannte **Honigbiene** *Apis mellifera* herangezogen. (vgl. [61], S. 5) Diese Art kann dem Stamm der Arthropoda (Gliederfüßer) und der Klasse der Insecta zugeordnet werden. Nebenbei bemerkt, handelt es sich bei dieser Klasse um jene mit der höchsten Artzahl im ganzen Tierreich. Die folgende Abbildung veranschaulicht die weitere taxonomische Klassifikation. (vgl. [69], S. 10, [55], S. 126, 214)

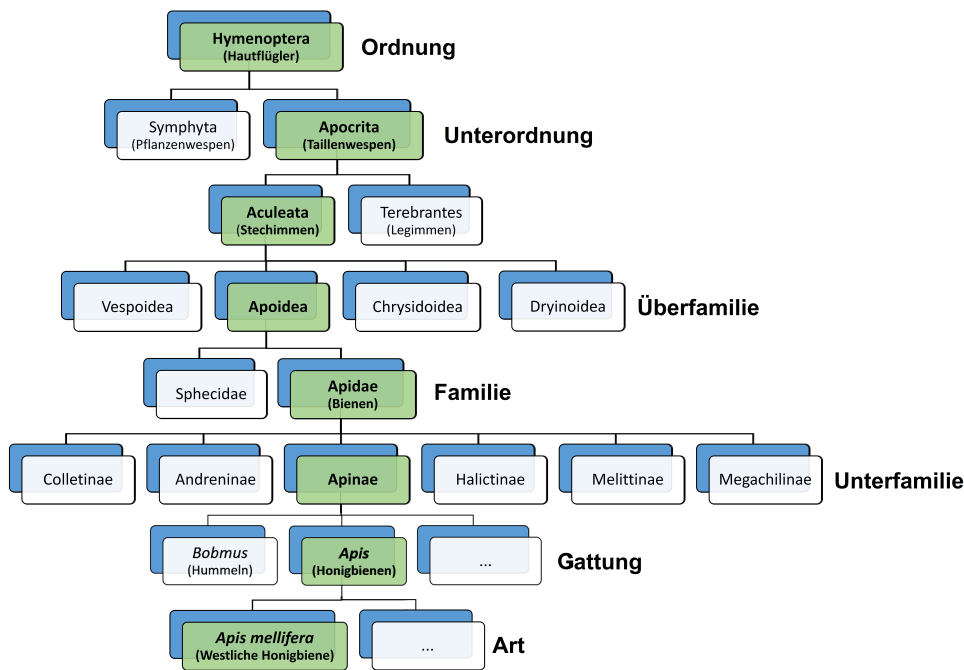


Abbildung 6.1: Taxonomische Übersicht (vgl. [55], S. 126, 214, 452, 453, 477, 478, [54], S. 119)

Die Einordnung in Aculeata und Terebrantes verfügt aus derzeitiger Sicht über keinen Stellenwert in der Systematik, jedoch ist sie aufgrund der leichten und einprägsamen Unterteilung auch noch heute sehr gebräuchlich (vgl. [69], S. 11).

Im englischsprachigen Raum wird dezidiert eine Unterscheidung zwischen den Begriffen *bee* und *honeybee* vorgenommen. Ist bei uns im alltäglichen Gebrauch von *der Biene* die Rede, so reduziert man diesen Begriff meist auf eine einzige Art, die Westliche Honigbiene, *Apis mellifera*, doch umfasst dieser Begriff weitaus mehr Spezies. (vgl. [54], S. 119) Neben den staatenbildenden Bienen, welche gemeinschaftlich in Bienenstöcken leben und Honig produzieren, kann man auch solitär lebende Bienen unterscheiden, welche einerseits keinen Honig produzieren und andererseits in weitaus höherer Anzahl als die staatenbildenden vertreten sind. Die gängige Bezeichnung für diese lautet: **Wildbienen**. (vgl. [69], S. 7) Beispielsweise fallen Erdbienen und Mauerbienen genau unter diese Kategorie. Der Begriff Honigbiene sollte aber nur für jene Vertreter aus der Gattung *Apis* vorbehalten sein. (vgl. [54], S. 119) Im Folgenden werden wir uns auf die Honigbienen und deren neun staatenbildenden Arten, insbesondere dem einzigen

in Europa vorkommenden Vertreter, *Apis mellifera*, beschränken (vgl. [61], S. 5).

Die Honigbiene ist ein typischer Blütenbesucher, der neben dem Sammeln von Pollen und Nektar vor allem als Bestäuber von wichtigen Nutzpflanzen agiert. Nektar dient ihr bei der Honigproduktion, während Pollen als proteinreiches Nahrungsmittel verzehrt wird. Zudem können die Honigbienen Propolis aus Harz erzeugen, welches im Bienenstock als Kittsubstanz Verwendung findet. Weiters sind sie in der Lage Wachs in speziellen Drüsen herzustellen, welches beim Bau der sechseckigen Waben eingesetzt wird. Diese Konstruktion dient ihnen einerseits zur Lagerung von Pollen und Honig sowie andererseits als Kinderstube. In solch eine sechseckige Zelle wird genau ein Ei gelegt, aus welchem in weiterer Folge eine Larve schlüpft, die sich bei fortschreitender Entwicklung innerhalb der Zelle verpuppt. (vgl. [62], S. 13, 14, 15, 18)

Sieht man sich nun den Aufbau eines Honigbienenvolkes an, stellt man fest, dass es sich durch eine hochkomplexe adaptive Vernetzung der einzelnen Verhaltensweisen der Bienen auszeichnet. Man kann von einem *Superorganismus* sprechen, der sich durch Anpassungsfähigkeit und Selbstorganisation ohne vorhandene Kontrollinstanz auszeichnet. (vgl. [63], S. 24) Bei vielen Arten der Hymenoptera tritt häufig neben der bisexuellen Fortpflanzung eine weitere Möglichkeit in Erscheinung, so auch bei den Honigbienen, die sogenannte *Parthenogenese*. Dieser unisexuelle Fortpflanzungsmechanismus wird auch als „Jungfernzeugung“ bezeichnet. Es gibt verschiedene Variationsformen dieses Vorganges, doch für uns ist nur eine relevant: Dabei nimmt der Ursprung der Entwicklung der Nachkommen Ausgang von einer einzelnen unbefruchteten Eizelle. Somit besitzen diese Individuen nur einen haploiden Chromosomensatz. In der Regel entstehen auf diese Art die fertilen männlichen Honigbienen, auch **Drohnen** genannt. Die weiblichen Honigbienen, **Königinnen** und **Arbeiterinnen**, entwickeln sich hingegen aus einer befruchteten Eizelle und weisen einen diploiden Chromosomensatz auf. (vgl. [13], S. 1345)

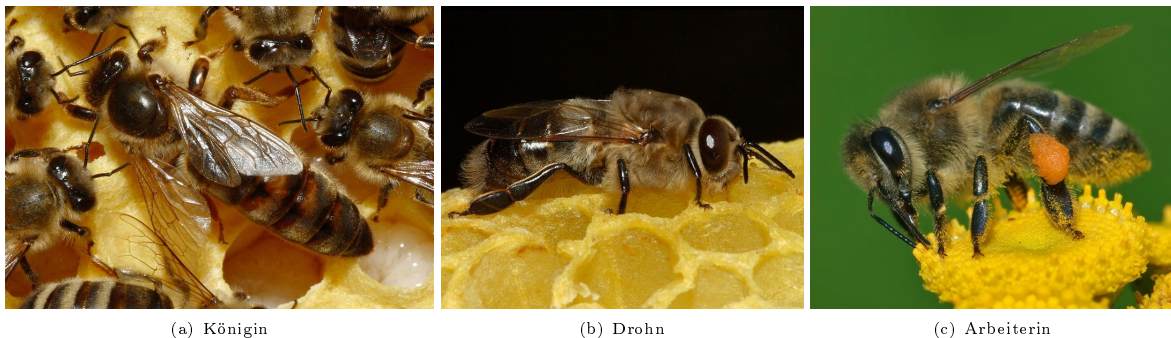


Abbildung 6.2: *Apis mellifera*

Somit weist ein Honigbienenvolk, welches aus bis zu 80.000 Individuen im Sommer bestehen kann, drei unterschiedliche Bienenwesen auf. Nur die Königin verfügt über die Eigenschaft der Eiablage, wodurch sie demnach die biologische Mutter aller in ihrem Bienenstaat vorkommender Volksgenossen ist. Der Großteil der Gemeinschaft besteht aus Arbeitsbienen und nur einige Hundert Männchen können gezählt werden. (vgl. [69], S. 100-101) Die im Detail beschriebene Geschlechtsbestimmung wird durch ein einzelnes Gen gesteuert, welches verschiedene Allele aufweisen kann. Liegt dieses Gen, unabhän-

gig in welcher Variationsform, nur ein einziges Mal vor (haploider Chromosomensatz), so entsteht ein Drohn. Kann dieses spezielle Gen in zweifacher Ausführung festgestellt werden (diploider Chromosomensatz), so entwickelt sich bei Heterozygotie eine weibliche Biene, bei Homozygotie überraschenderweise ein Drohn. Dieser Fall der diploiden Drohnen tritt häufiger auf als gedacht, doch werden diese meist schon im Larvenstadium von den Arbeiterinnen als andersartig erkannt und abgetötet. (vgl. [63], S. 26)

Worin unterscheidet sich nun die Entstehung einer Arbeiterin von der Entwicklung einer Königin? Die Königinnen reifen in speziellen Zellen, den sogenannten *Weiselwiegen*, heran, welche ausschließlich zur Entwicklung von Königinnen angefertigt werden. Zudem werden diese während der gesamten Larvenphase über mit einer besonderen Sekrets substanz, dem sogenannten *Gelée Royale*, versorgt. Dieses wird in den Kopfdrüsen der Ammenbienen, hierbei handelt es sich um noch sehr junge Honigbienen im Alter von fünf bis fünfzehn Tagen, produziert. Diese spezielle Mischung ist aber auch unter dem Namen „Schwesternmilch“ bekannt, welche zudem in veränderter Zusammensetzung den Arbeitsbienenlarven verabreicht wird. Die Königinnenlarven werden jedoch wesentlich häufiger mit Nahrung versorgt, weshalb die Weichenstellung der Entwicklung neben der Qualität auch an der Quantität liegt. Durch diese Substanz werden komplexe biochemische Vorgänge ausgelöst, die schlussendlich zu den unterschiedlichen Bienenwesen führen. (vgl. [62], S. 5, 145, 149, 151)

Woran lassen sich nun aber optische Unterschiede zwischen diesen „Bientypen“ von *Apis mellifera* feststellen (vgl. [69], S. 101)?

	Königin	Drohn	Arbeiterin
Körpergröße	1,5 mal so groß wie eine Arbeiterin	ungefähr gleich groß wie eine Königin	11-12 mm
Besonderheiten des Körperbaus	extrem langer Hinterleib (beinhaltet die Eierstöcke); Samenblase (Spermienspeicher)	plumper, abgerundeter und am Ende stark behaarter Hinterleib; riesige Augen; großer Kopf	zierlich
Pollensammelapparat	nicht vorhanden	nicht vorhanden	Körbchen-sammler: Bürste, Kamm und Schieber
Wachsdrüsen	nicht vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden
Stachel	vorhanden	nicht vorhanden	vorhanden

Tabelle 6.1: Unterschiede zwischen den Bienenwesen (vgl. [69], S. 36, 37, 98, 101, [55], S. 478, [23], S. 40, [7], S. 107)



Abbildung 6.3: Die verschiedenen „Bientypen“ (*Apis mellifera*)

Die Aufgabe der Königin ist einzig und allein die Eierproduktion (vgl. [23], S. 3). Dafür muss sie ein einziges Mal in jungen Jahren auf den sogenannten *Hochzeitsflug* gehen, bei welchem sie von mehreren Männchen begattet wird (vgl. [62], S. 23). Das Sperma der Drohnen lagert sie als Vorrat in der Samenblase ab, welches bis zu ihrem Tod ausreichend für die Befruchtung der Eier ist (vgl. [69], S. 101).

Wilhelm Buschs Worte „*gefräßig, dick und faul und dumm*“ beschreiben die männlichen Artgenossen auf eine humorvolle, aber doch sehr zutreffende Art und Weise. Diese helfen in der Gemeinschaft bei keiner Tätigkeit mit, sondern lassen sich sogar von den Arbeitsbienen mit Nahrung versorgen. Die Drohnen verfolgen nur ein Ziel, die Paarung zu vollziehen, dafür treffen sie sich an Sammelplätzen, um junge Königinnen zu begatten. (vgl. [23], S. 39) Zur Paarung gelangen nur wenige Männchen aus einem Bienenvolk, welche nach der Spermienübertragung sterben, da ein Teil des männlichen Begattungsorganes (Endophallus) im Weibchen verbleibt (vgl. [62], S. 114, 120). Die erfolglosen Drohnen finden oftmals nicht mehr zu ihrem eigenen Bienenvolk zurück und quartieren sich bei einem anderen Stock ein. Konnten sie keine Jungkönigin bis in den Hochsommer begatten, so werden sie in der Gemeinschaft nicht mehr geduldet. Stechend und beißend werden sie von den Arbeitsbienen aus dem Stock vertrieben, um so Ressourcen zu sparen und um die nun überflüssigen Drohnen nicht mehr versorgen zu müssen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der sogenannten *Drohnenschlacht*, da die Arbeitsbienen unter Umständen die Männchen töten bzw. die Drohnen alleine keine Nahrungsquellen auffinden können und somit letztlich verhungern. (vgl. [23], S. 39-40)

Die Arbeiterinnen verrichten nach einem bestimmten Ablauf unterschiedliche Aufgaben im Bienenvolk, abhängig von ihrem Lebensalter. Zu Beginn als „Hausbiene“ ist sie bildlich gesprochen als Putzbiene, Brutpflegebiene und Ammenbiene angestellt. Als Nächstes folgen die Tätigkeiten der Baubiene, der Futterabnehmerin, der Pollenstampferin und einer Wächterbiene. Im letzten Lebensabschnitt übernimmt sie die Aufgaben einer Sammelbiene und ist ständig auf der Suche nach Nektar und Pollen. Daraus lässt sich auch das Sprichwort „*Fleißig wie ein Bienchen*“ ableiten. (vgl. [23], S. 42-44)

Doch widmen wir nun unsere Aufmerksamkeit speziell dem Resultat dieser bemerkenswerten Fortpflanzungsmechanismen, welche interessante Verbindungen zu den Fibonacci-Zahlen zeigen werden. Überlegt man genauer, so stellt sich heraus, dass Drohnen keine Väter besitzen. Ein männliches Individuum hat somit niemals männliche Nachkommen in der ersten Generation (Söhne), kann aber männliche Nachfahren in der zweiten Generation (Enkelsöhne) hervorbringen. (vgl. [63], S. 26)

In der nachstehenden Abbildung wird der Stammbaum eines Drohns dargestellt und detailliert aufgeschlüsselt. Wie wir bereits unseren Überlegungen entnehmen können, weist ein Drohn lediglich ein Elternteil, in Form eines eierlegenden Weibchens, auf, welches aber ihrerseits wieder über beide Elternteile verfügen muss. Dieser Verlauf lässt sich immer weiter zurückverfolgen, wodurch sich im Endeffekt als Gesamtzahl jeder einzelnen Generation überraschenderweise eine Fibonacci-Zahl ergibt. Diese erscheinen in geordneter und somit aufsteigender Reihenfolge, weswegen sich hier eindeutig die Fibonacci-Folge präsentiert. Auch bei ausschließlicher Betrachtung der weiblichen oder aber nur der männlichen Individuen pro Generation lässt sich diese Zahlenabfolge

feststellen. Dieses Ergebnis mag verblüffen, doch konnte es eindeutig belegt werden, wodurch eine weitere Facette der Fibonacci-Folge aufgezeigt wurde. (vgl. [48], S. 60)

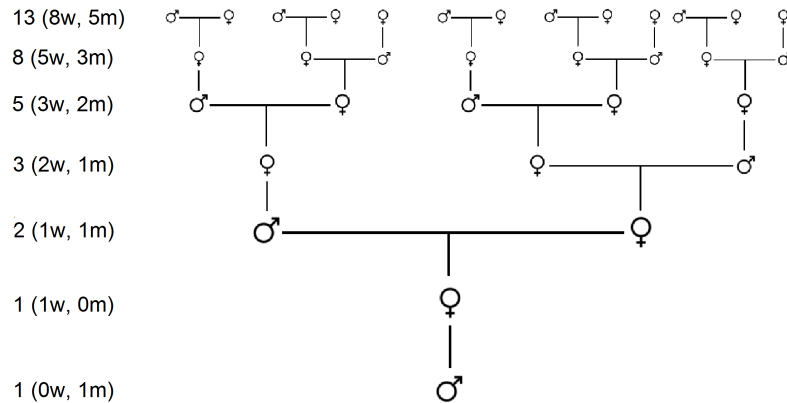


Abbildung 6.4: Drohnenstammbaum (vgl. [3], S. 53)

6.2 Das Phänomen der Phyllotaxis

Im Pflanzenreich lassen sich erstaunliche Vernetzungen zu den Fibonacci-Zahlen finden. Diese verborgenen Geheimnisse zeigen sich oftmals erst, wenn man sich genügend Zeit nimmt und ihnen Beachtung schenkt. Die meisten Menschen erfreuen sich an der Vielfalt der Blütenpflanzen, an den Farben, Formen und Gerüchen. Doch fast keiner beginnt die Strukturen dieser Pflanzen zu hinterfragen oder aber sich damit näher auseinanderzusetzen. Im Folgenden werden wir uns diese Zeit nehmen, um auf einzigartige Erscheinungen hinzuweisen und diese womöglich aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten.

Beginnt man mit dem Zählen einiger spiralförmiger Anordnungen, wie beispielsweise den Kronblättern und den Spiralen in manchen „Blütenköpfen“, so begegnen wir keinen beliebigen Zahlen, sondern stoßen meist auf Glieder der Fibonacci-Folge. Diese Phänomene werden unter dem Namen *Phyllotaxis* zusammengefasst. Dieses Wort leitet sich ursprünglich aus dem Griechischen von *phyllon* und *taxis* ab und bedeutet übersetzt soviel wie die *Blattanordnung*. (vgl. [35], S. 595) Sie beschäftigt sich demnach mit den Anordnungen von Laubblättern, Kronblättern, Kelchblättern, Ästen usw., aber auch mit den Mustern von Schuppen und Samen (vgl. [29], S. 19). Diesem Phänomen ist man schon lange auf der Spur und es wurde bereits vor einigen Jahrhunderten beschrieben, doch über den Mechanismus, welcher sich dahinter verbirgt, sind nur Mutmaßungen möglich. (vgl. [35], S. 595)

Das Bildungsgewebe, auch meristematisches Gewebe genannt, beschreibt eine undifferenzierte Zellansammlung, welche ständig Zellteilung betreibt (vgl. [35], S. 595, [13], S. 1818). Im Prinzip kann man bei Pflanzen aufgrund dieser Meristeme von einem unbegrenzten Wachstum sprechen, wobei berücksichtigt werden muss, dass manche Pflanzenorgane, wie beispielsweise Blüten und Blätter, ihre Wachstumsvorgänge ab einer gewissen Größe beenden. Grundsätzlich gilt es zwei verschiedene Arten von Bil-

dungsgewebe zu unterscheiden: einerseits die Apikalmeristeme, welche an den Spross- und Wurzelspitzen als auch in den Achselknospen zu finden sind und somit für das Längenwachstum bzw. primäre Wachstum verantwortlich sind und andererseits die Lateralmeristeme (Cambium und Korkcambium), die hauptsächlich für das sekundäre Dickenwachstum zuständig sind. (vgl. [13], S. 817, 1009, 1010) Beschäftigt man sich mit dem Apikalmeristem genauer, so erkennt man die Bildung neuer Pflanzenorgane aus den sogenannten Primordien (vgl. [35], S. 595). Zum Beispiel entspringen die Blätter aus den Blattanlagen (Blattprimordien), welche sich seitlich am Apikalmeristem befinden und die Form kleiner Zapfen aufweisen (vgl. [13], S. 1012). Bei der Entwicklung einer Pflanze könnte der Verdacht auftreten, als würden die Samen, welche von der Blütenspitze erzeugt werden, nach einem bestimmten, spiralförmigen Muster angeordnet werden. Als Gründe hierfür könnten neben dem spiralförmigen Wachstum auch die primordiale Bewegung, welche sternförmig vom Spitzenzentrum wegführend ausgerichtet ist, angesehen werden. Es gibt eine Vielzahl unterschiedlichster Theorien zur Erklärung der *Phyllotaxis*. Im Folgenden werden zwei Hypothesen präsentiert. (vgl. [35], S. 595)

Eine Möglichkeit sieht die Grundidee in der asymmetrischen Zellteilung. Ähnlich dem System der Kaninchenvermehrung müssen hier die juvenilen Zellen zuerst zu adulten Zellen heranreifen, um eine Teilung durchlaufen zu können. Durch kurzes Überlegen gelangt man zur Einsicht, dass die Anzahl der einzelnen Zellgenerationen den Fibonacci-Zahlen entspricht. Demnach ergibt sich insgesamt betrachtet eine Übereinstimmung mit der Fibonacci-Folge. In gewisser Hinsicht weisen diese Zellen einen „Stammzellen-Charakter“ auf, während sich eine Tochterzelle spezialisiert und somit differenziert, verbleibt die andere bei ihrem Status einer undifferenzierten, teilungsfähigen Zelle. Dieser Ansatz könnte das spiralförmige Wachstum des Pflanzenmeristems erklären. Zudem wäre anhand der asymmetrischen Zellteilung die Entstehung von einerseits rechts und andererseits links gewundenen Anordnungen in gleichen Verhältnissen plausibel. (vgl. [35], S. 595)

Eine andere Hypothese beruht auf einer optimalen Packung in Verbindung mit einer idealen Raumnutzung, weswegen diese Anordnung der Voraussetzung einer gleichen Samengröße unterliegt, unabhängig davon, ob es sich nur um große oder nur um kleine Samen handelt. Dadurch wird gewährleistet, dass es zu keiner Anhäufung im Zentrum oder aber Freiräumen am Rand kommt. Dieses Optimierungsmodell äußert sich in einem spiralförmigen Muster mit dem Auftreten meist benachbarter Fibonacci-Zahlen. (vgl. [48], S. 70)

Bereits *Louis Bravais* und sein Bruder *Auguste Bravais* konnten im Jahre 1837 voraussagen, an welchen Punkten neue Ansätze von Blättern erscheinen werden. Dabei fiel ein besonderer Winkel von $137,5^\circ$ in der Abfolge dieser Blattansätze auf. Diese Größe ist uns aber bereits ein Begriff, da wir sie im vorhergehenden Kapitel als *goldenen Winkel* eingeführt und somit kennengelernt haben. Nimmt man an, der Winkel sei nicht exakt der eines *goldenen Winkels*, sondern seine Größe belaufe sich stattdessen auf $\frac{8}{21} \cdot 360^\circ \approx 137,14^\circ$, so ergibt sich eine regelmäßige Anordnung von 21 Strahlen. Dieses Muster führt jedoch zu keiner optimalen Raumnutzung, wodurch eine kleine Abweichung des Winkels von $137,14^\circ$ idealerweise zu einer effizienteren Spiralenstruktur führt. (vgl. [36], S. 33-35)

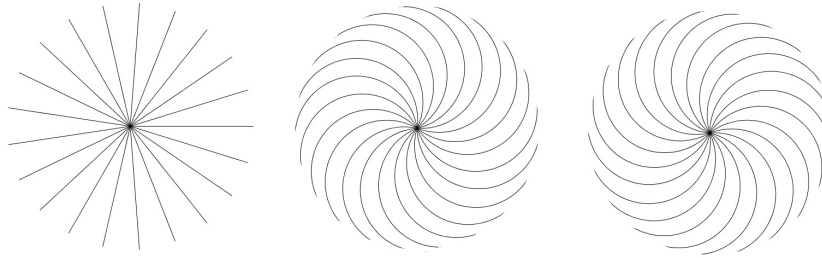


Abbildung 6.5: Winkelabstände von links nach rechts: $137,14^\circ$, $137,2^\circ$ und $137,09^\circ$ (vgl. [36], S. 35)

Doch wo trifft man nun diese spiralförmigen Anordnungen in der Natur an?

6.2.1 Die Blüten- und Fruchtstände von Sonnenblumen

Dieses Unterkapitel wird mit einem Beispiel aus der Familie der Asteraceae, auch Korbblütler genannt, die mit etwa 21.000 Arten die größte Familie unter den Angiospermen (Bedecktsamer) darstellt, eingeleitet. (vgl. [18], S. 90, [13], S. 820) Genau genommen werden wir uns im Folgenden mit der Gattung *Helianthus*, den Sonnenblumen, auseinandersetzen (vgl. [20], S. 900). Doch zuvor ist es angebracht, einige wichtige Informationen über die Familie zu geben und anschließend ausdrücklich auf die Gattung *Helianthus* einzugehen.

Die vorliegende Infloreszenz dieser Familie kann als Korb identifiziert werden. Dieser bestimmte Blütenstand setzt sich wiederum aus einem Köpfchen, das von Hochblättern dicht an der Unterseite umhüllt wird, dessen Fachbegriff Involucrum lautet, und einer verdickten aber abgeflachten scheibenförmigen Achse zusammen. Demnach liegt ein Pseudanthium vor, da die Blume aus mehreren Blüten besteht. Der Begriff *Blume* ist definiert als eine blütenbiologische Einheit, hinsichtlich der Bestäubungsbiologie und des funktionellen Gesamtkonstruktes. In unserer Beschreibung fortfahrend dokumentieren wir das Fehlen von Stipeln (Nebenblätter) sowie die schraubenförmige Anordnung der Laubblätter. Die Sepalen (Kelchblätter) sind umgebildet und treten meist in Form eines Pappus (Haarkranzes) in Erscheinung. Allgemein ordnet man den Vertretern der Asteraceae 5-zählige, verwachsene Blüten zu, bei welchen es sich im Speziellen um proterandrische Zwitterblüten handelt. Auffallend sind die röhrenbildenden Antheren (Staubbeutel), deren Filamente (Staubfäden) jedoch nicht miteinander verbunden sind. Die zwei verwachsenen Karpelle (Fruchtblätter) besitzen einen 2-narbigen Griffel sowie einen unterständigen Fruchtknoten (Ovar). Betrachtet man die äußersten Blüten, so unterscheiden sich diese zu „Strahlblüten“ entwickelten von denen in der Mitte meist gravierend, so auch bei *Helianthus*, wo die „Strahlblüten“ eine veränderte einseitige, zungenförmige Krone aufweisen, sodass von „Zungenblüten“ die Rede ist. Als Frucht ergibt sich eine einsamige Achäne, bei welcher die Fruchtknotenwand bis zu einem gewissen Anteil mit dem Samen verschmolzen ist. Die allgemeine Blütenformel lautet demnach:

$$* \text{ oder } \downarrow K_{0-\infty} [C_{(5)} A_{(5)}] G_{(2)}$$

Gehen wir jetzt im Detail auf die Gattung *Helianthus* ein, so ergeben sich doch klei-

ne Unterschiede. Zentral befinden sich hier die sogenannten „Röhrenblüten“, welche charakteristisch für ihre Kronröhren sind. Diese radiären (polysymmetrischen) Blüten verfügen über fünf Kronzipfel, wohingegen die zygomorphen (monosymmetrischen) Zungenblüten aus drei Petalen (Kronblättern) verwachsen sind. Zudem sind die Zungenblüten meist weiblich, da eine Verkümmernung des Andrözeums vorliegt. (vgl. [18], S. 23, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 90, 91)

Der Aspekt, welcher umgehend genauer untersucht wird, liegt sowohl in den Blüten- als auch in den Fruchtständen verborgen. Man bemerkt sofort die spiralförmige Anordnung der Röhrenblüten bzw. in einer späteren Phase der Reife jene der Früchte. Dabei kann jede Röhrenblüte bzw. Achäne einer linksgewundenen und rechtsgewundenen Spirale zugeordnet werden. Macht man sich nun den Aufwand und beginnt diese Spiralen abzuzählen, so lässt sich verwundert feststellen, dass sich zwei benachbarte Fibonacci-Zahlen ergeben. (vgl. [8], S. 127-128)

(a) *Helianthus* sp.

(b) Spiralen linksgewunden



(c) Spiralen rechtsgewunden

Abbildung 6.6: Spiralenmuster der Sonnenblumen

Tatsächlich ließen sich in dieser Abbildung $21 = f_8$ rechtsdrehende und $13 = f_7$ linksdrehende Spiralen erkennen. Im Laufe der Zeit vergrößert sich das Spiralmuster, weswegen ältere Sonnenblumen eine viel höhere Anzahl an Spiralen aufweisen. Obwohl diese Zahlen nicht konstant bleiben, ändert sich nichts an der stetigen Repräsentation zweier benachbarter Fibonacci-Zahlen. (vgl. [48], S. 68)

6.2.2 Die königliche Frucht – die Ananas und ihre Spiralen

Nun widmen wir uns einer interessanten tropischen Pflanze, welche nebenbei bemerkt zur Familie der Bromeliaceae (Ananasgewächse) zählt und oftmals als die *Königin der Früchte* bezeichnet wird. Ursprünglich beheimatet in den Tropen des zentralen und südlichen Amerikas wurde ihr Anbaugebiet auf die ganze Tropenzone ausgedehnt. Die Rede ist von der *Ananas sativus*, mit welcher wir uns fortan beschäftigen werden. (vgl. [57], S. 59-60)

Eine kurze morphologische Charakterisierung zu Beginn soll die wesentlichen Rahmenbedingungen klären. Typisch für diese krautigen Pflanzen sind neben dem verkürzten Stamm auch die großen Blätter, welche eine Länge von bis zu 80 cm, aber nur eine Breite von lediglich 8 cm erreichen können. Zudem tragen diese Laubblätter am äußeren Rand Stacheln und fügen sich zu einer Blattrosette zusammen, wobei sich zentral gelegen ein Fruchtstiel mit ca. 30 cm befindet. Als Blütenstand liegt eine Ähre vor. Aus jeder einzelnen Blüte kann eine Beere hervorgehen, die mit der Achse verschmilzt, wodurch letztlich die uns bekannte Frucht mit den endständigen kleinen, aber spitzen Blättern entsteht. (vgl. [57], S. 59-60) Die Frucht entspricht einem Fruchtverband, da die Diaspore, die ökologische Ausbreitungseinheit, einen Verband aus mehreren Früchten aus einem Blütenstand darstellt (vgl. [18], S. 36-37). Eine Besonderheit repräsentiert ein vorhandenes proteolytisches Enzym namens *Bromelain*, welchem medizinische Wirkungen zugeschrieben werden. Einerseits fördert es die Verdauung sowie die Durchblutung, andererseits hemmt es Entzündungen im Körper und führt zu Entwässerungen. (vgl. [32], S. 152)

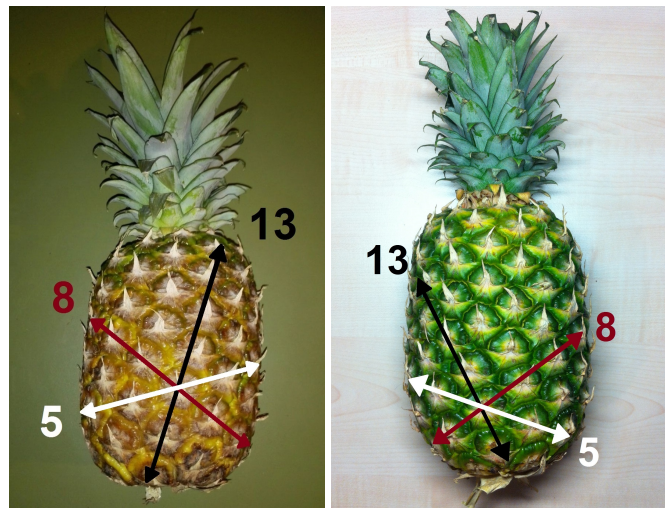


Abbildung 6.7: Spiralenmuster der Ananas

Bei den äußeren Segmenten der Ananas handelt es sich ursprünglich um die Fruchtblätter der einzelnen Blüten (vgl. [13], S. 1094). Kaum einer hat sich zuvor mit diesen Sechsecken der Ananas beschäftigt. Doch schenkt man ihnen mehr Aufmerksamkeit, dann lassen sich drei verschieden gerichtete Spiralenanordnungen identifizieren. Zählt man die einzelnen Spiralen dieser unterschiedlichen Richtungen ab, so präsentieren

sich erstaunlicherweise immer drei benachbarte Fibonacci-Zahlen: $f_5 = 5$, $f_6 = 8$ und $f_7 = 13$. Jene Spiralen verlaufen wie in Abbildung 6.7 links dargestellt. (vgl. [48], S. 63-64) Doch bei einem zweiten Exemplar wurden die Spiralen, entgegen der Beschreibungen in der Literatur, vertikal gespiegelt durch den Schnittpunkt festgestellt.

6.2.3 Die weiblichen Blütenstände der Föhrengewächse

Bei den Kiefern (*Pinus*) oder auch Föhren genannt, den Fichten (*Picea*) und den Tannen (*Abies*) handelt es sich um Gattungen der Familie der Pinaceae, auch als Föhrengewächse bekannt. Somit gehören diese Gattungen der Klasse der Pinopsida (Koniferen), der Unterabteilung der Coniferophytina (Nadel-Nacktsamer) und der Abteilung der Spermatophyta (Samenpflanzen) an. (vgl. [18], S. 62-64) Die evolutionär früher entstandenen Gymnospermen (Nacktsamer) bauen gemeinsam mit den jüngeren Angiospermen die Abteilung der Samenpflanzen auf (vgl. [26], S. 64).

Typischerweise treten die Blüten der rezenten Gymnospermen immer getrenntgeschlechtlich auf. Die männlichen Blüten weisen eine verhältnismäßig kleine Größe auf und sind aus einer Vielzahl an Staubblättern aufgebaut. Die weiblichen Blüten stellen Zapfen mit mehreren Samenanlagen dar, welche sich (ausgenommen bei der Familie der Taxaceae) immer auf einer Samenschuppe, einer vergrößerten, holzigen Achse, befinden, die aus der Achsel blattartiger verholzter Strukturen, sogenannter Deckschuppen hervorgeht. Aus diesen Schuppenkomplexen besteht nun ein Zapfen, somit kann dieser genau genommen auch als ein Blütenstand bezeichnet werden. (vgl. [26], S. 64, 67)

Die konkurrenzschwachen Koniferen findet man üblicherweise an ungünstigeren Standorten, wo sie sich nicht gegen die weitaus anspruchsvolleren sowie konkurrenzstarken Angiospermen durchsetzen müssen (vgl. [18], S. 63).

6.2.3.1 Die Kiefernzapfen

C. F. Schimper und *A. Braun* bemerkten in den 1830er Jahren beim Abzählen der Spiralen der Deck- und Samenschuppenanordnungen von Kiefernzapfen das Auftreten der Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 27).

Die Gattung *Pinus* umfasst weltweit ca. 100 Arten. Es lassen sich sowohl Kurz- als auch Langtriebe finden, wobei nur die Kurztriebe Nadeln besitzen. Die Langtriebe weisen hingegen schuppenartige, helle Niederblätter auf. Die Nadelanzahl der einzelnen Kurztriebe variiert artabhängig zwischen einer bis hin zu fünf Nadeln. Dies ist ein bedeutendes Merkmal, da bei vielen anderen Gattungen keine Begrenzungen hinsichtlich der Nadeln pro Kurztrieb vorliegen. (vgl. [18], S. 64)

In Österreich kommen nur 2- und 5-nadelige Vertreter dieser Gattung vor und zwar:

- *Pinus sylvestris* (Rot-Föhre, Weiß-Föhre, Wald-Föhre): Die Kurztriebe besitzen zwei, ungefähr 5 cm lange Nadeln. (vgl. [18], S. 64) Zudem sind die Zapfen mit einer Größe von maximal 6 cm relativ klein (vgl. [67], S. 762). Charakteristisch ist die rötliche Farbe der Borke im letzten Abschnitt des Stammes. Das natürliche Vorkommen liegt hauptsächlich in der montanen Stufe, doch wird diese Art auch forstwirtschaftlich genutzt und kultiviert. (vgl. [18], S. 64)

- *Pinus nigra* (Schwarz-Föhre): Diese Art kann ebenso zwei Nadeln auf den einzelnen Kurztrieben vorweisen, jedoch verfügen die Nadelblätter über eine Länge von 8 bis 15 cm. Ihre Zapfen sind größer als jene von *Pinus sylvestris*. Diese Art hat eine charakteristische, gleichmäßig grau gefärbte Borke. Hauptsächlich trifft man sie an Dolomitsteilhängen in der montanen bis submontanen Stufe an. Auch diese Exemplare erfreuen sich forstlicher Kultivierungen. Die Unterart *Pinus nigra nigra* stellt die einzige in Österreich beheimatete Schwarz-Föhre dar. Ihr größtes natürliches Vorkommen findet sich im Dinarischen Gebirgssystem, in Österreich treten kleine Areale in Niederösterreich und im südlichen Kärnten auf. (vgl. [18], S. 64)
- *Pinus cembra* (Zirbe, Arve, Zirbel-Kiefer): Bei dieser subalpinen Art kann man fünf, extrem weiche Nadeln auf den Kurztrieben erkennen (vgl. [18], S. 64). Die Länge der Nadeln kann mit ca. 5 bis 8 cm angegeben werden. Den eiförmigen Zapfen ordnet man eine Größe von ca. 6 bis 8 cm zu. (vgl. [67], S. 762).
- *Pinus mugo* (Latsche, Leg-Föhre): Dieses Gehölz findet sich in Hochmooren der montanen Stufe, aber vor allem in subalpinen Bereichen (vgl. [18], S. 64). Sie besitzt zwei leicht gekrümmte, etwa 3 bis 8 cm lange Nadeln pro Kurztrieb. Die Zapfen dieser Art können eine Länge von bis zu 7 cm erreichen. (vgl. [67], S. 762).

Die Kiefernzapfen weisen unterschiedliche Richtungen von Spiralen auf. Durch Abzählen dieser Strukturen erhält man abermals aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Diese Werte variieren zwischen den verschiedenen Arten. (vgl. [48], S. 65-66) In unserem Fall der *Pinus sylvestris* ergeben sich die Folgenglieder $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$ und $f_7 = 13$.



Abbildung 6.8: Zapfen der *Pinus sylvestris*

6.2.3.2 Die Fichtenzapfen

Nun werden die Zapfen der Gattung *Picea* einer näheren Untersuchung unterzogen. Die Nadeln der Fichten sind an einer kleinen verholzten Struktur befestigt. In Österreich ist die Gewöhnliche Fichte, welche auch unter dem Namen Rottanne oder der lateinischen Bezeichnung *Picea abies* bekannt ist, der einzige Vertreter dieser Gattung. Die Nadeln zeichnen sich durch ihre vierkantige Form sowie ihre kaum sichtbaren Wachsstreifen aus. Die hängenden Zapfen zerfallen nicht wie bei der Tanne, sondern man findet sie als Ganzes am Waldboden vor. Die Farbe der Borke kann als bräunlich definiert werden

und der Wipfel ist sehr spitz zusammenlaufend. Das Vorkommen dieses Flachwurzlers ist vor allem in montanen Waldzusammensetzungen von Bedeutung. Zusätzlich besteht eine starke forstwirtschaftliche Förderung dieser Baumart. (vgl. [18], S. 63-64)

Nicht nur bei den Kiefernzapfen, sondern auch bei den Fichtenzapfen treten die Fibonacci-Zahlen im Zusammenspiel mit der Anzahl der vorhandenen Spiralen in Erscheinung (vgl. [48], S. 64). Bei genauerer Betrachtung stellen sich drei Spiralverläufe heraus, von denen $f_4 = 3$, $f_5 = 5$ und $f_6 = 8$ Spiralen abgezählt werden können.

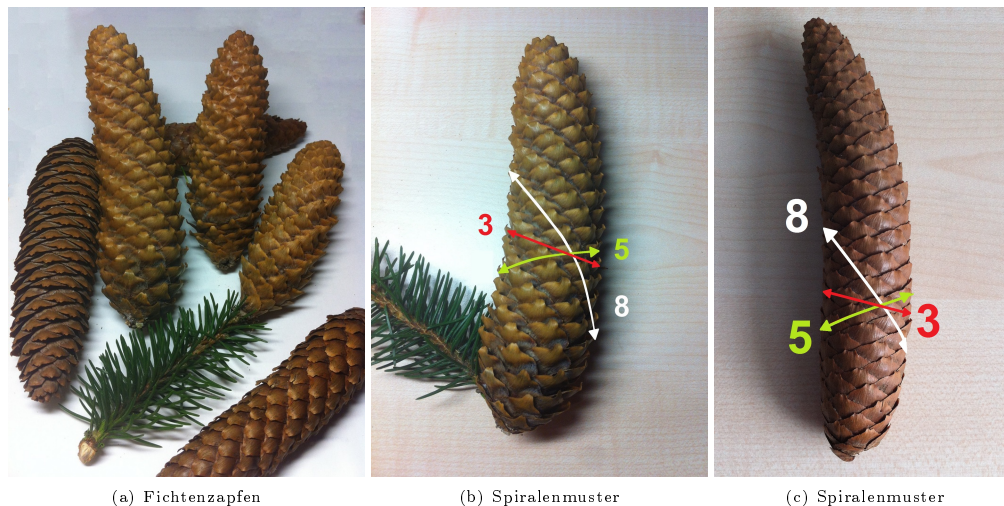


Abbildung 6.9: Zapfen der *Picea abies*

6.2.3.3 Die Tannenzapfen

Als letztes Untersuchungsobjekt in Bezug auf Schuppenanordnungen der Föhrengewächse dienen uns Tannenzapfen. Die Gattung *Abies* ist ebenso ein Bestandteil der Familie der Pinaceae, wie die beiden zuvor besprochenen Gattungen. Die linealischen, doch sehr flachen Nadeln finden sich hier auf kurzen kreisrunden Strukturen, sozusagen auf Sockeln, wieder. Ebenso ist ein deutliches, aber doch sehr kleines Stielchen an den Nadeln zu erkennen. Die in Österreich beheimatete *Abies alba* (Edeltanne, Weiß-Tanne) kann aufgrund ihrer beiden leicht erkennbaren Wachsstreifen an der Unterseite der Nadeln sehr einfach von den Fichten unterschieden werden. Zudem zerfallen die aufrecht stehenden Zapfen bei der Reife bereits am Baum. Die weiße Borke sowie der breite Wipfel sind zumal weitere gute Unterscheidungsmerkmale dieses Tiefwurzlers von der Gattung *Picea*. Ihr Verbreitungsareal befindet sich in der Montanstufe mit subozeanischen Präferenzen. Aufgrund des hohen Anspruches, der Frostempfindlichkeit, der Anfälligkeit für Luftschadstoffe sowie für Wildschäden und der enormen Rodung nimmt ihr Bestand stetig ab. (vgl. [18], S. 63)

Bei den Tannenzapfen lassen sich so wie bei den Fichtenzapfen ebenfalls drei verschieden gerichtete Verläufe, deren Spiralenanzahlen wiederum aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen repräsentieren, feststellen (vgl. [36], S. 33).

Abbildung 6.10: Zapfen der *Abies alba*

6.2.4 Divergenzwinkel in Abhängigkeit der Fibonacci-Zahlen

Schon während des 19. Jahrhunderts haben sich die beiden Biologen *K. Schimper* und *A. Braun* mit den Blattanordnungen beschäftigt und sind zu dem Schluss gekommen, dass eine gewisse Regelmäßigkeit vorliegt, die sie mit der Gleichung

$$D_n = \frac{f_n}{f_{(n+2)}} \cdot 360^\circ$$

präsentierten. Dabei gibt der Wert D_n den Divergenzwinkel, also den Drehwinkel zweier aufeinanderfolgender Blätter oder aber Knospen an. Die Ergebnisse dieser *Schimper-Braun'schen Hauptreihe* geben die am häufigsten auftretenden Winkelgrößen an, die jedoch nicht bei jeder Pflanzenart vorausgesetzt werden können. (vgl. [31], S. 43-44)

Im Folgenden werden gezielt die Laubblattstellungen herausgegriffen: Entspringen die Blätter alternierend immer auf der gegenüberliegenden Seite eines Astes, so wird diese Konstruktion mit einem Drehwinkel von 180° als $\frac{1}{2}$ -**Phyllotaxis** bezeichnet. Werden die Blätter durch einen Winkel von 120° getrennt, dann nennt sich dies $\frac{1}{3}$ -**Phyllotaxis**. Neben den bisher erwähnten Fällen sind $\frac{2}{5}$ -, $\frac{3}{8}$ - und $\frac{5}{13}$ -**Phyllotaxis** des Öfteren in der Natur vertreten. Auffallend ist die außergewöhnliche Zusammensetzung der Brüche aus je zwei Fibonacci-Zahlen. Diese Angaben beziehen sich auf Drehungen im Uhrzeigersinn. Überlegt man sich nun die Winkelgrößen gegen den Uhrzeigersinn, so entspricht eine Drehung von $\frac{1}{3}$ im Uhrzeigersinn genau einer von $\frac{2}{3}$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Spielt man dieses Prinzip mit allen angegebenen Brüchen durch, dann stellen sich Nenner und Zähler als jeweils aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen heraus. Vermutlich sind diese Laubblattstellungen vorteilhaft hinsichtlich einer optimalen Nutzung der vorhandenen Lichtverhältnisse. (vgl. [8], S. 128-129)

Angenommen es liegt ein Divergenzwinkel von 144° vor, so entspricht dies

$$D_3 = \frac{f_3}{f_5} \cdot 360^\circ = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ.$$

Demnach erreicht man genau nach fünf Schritten die Ausgangsstellung wieder, nur vertikal nach unten bzw. nach oben versetzt. Somit kann man allgemein von einer

Periodizität sprechen, in diesem konkreten Fall nach fünf Laubblättern und zwei Umdrehungen. (vgl. [4], S. 198)

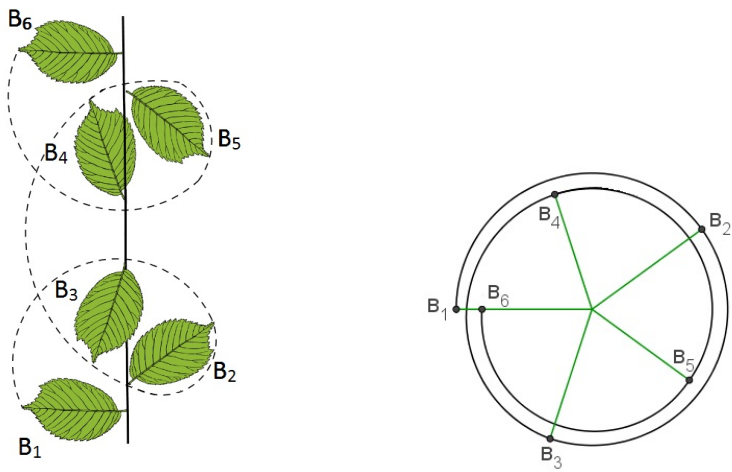


Abbildung 6.11: Blattanordnung mit einem Divergenzwinkel von 144° (vgl. [4], S. 198)

Demnach lässt sich bei der *Schimper-Braun’schen Hauptreihe* das Folgenglied f_n immer als Anzahl der Umdrehungen, welche pro Periode vorgenommen werden und $f_{(n+2)}$ als Laubblattanzahl innerhalb dieser interpretieren. (vgl. [4], S. 199)

Diese Blattstellung findet man aber nicht nur bei den herkömmlichen Laubblättern, sondern sie tritt sogar bei Nadeln von Gymnospermen und beispielsweise bei Schuppenanordnungen von Zapfen auf (vgl. [4], S. 199). Folgende Tabelle repräsentiert einige Vertreter mit diesen speziellen Divergenzwinkeln.

D_1 $= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ$	D_2 $= \frac{1}{3} \cdot 360^\circ$	D_3 $= \frac{2}{5} \cdot 360^\circ$	D_4 $= \frac{3}{8} \cdot 360^\circ$	D_5 $= \frac{5}{13} \cdot 360^\circ$	D_6 $= \frac{8}{21} \cdot 360^\circ$
horizontale Äste der Ulme	Buche	Aprikosen	Pappel	Mandelbäume	Schuppen bei Fichten- und Tannenzapfen
Linde	Haselnuss	Apfelbäume	Birnbäume	ein paar Weiden	
manche Zwiebelpflanzen (Blattwirtel)	Erle	häufig Weiden	Habichtskraut	Nadeln mancher Gymnospermen	
	Birke	Rosen	Kohl	Königskerze	
	Riedgras	Eichen	Astern		

Tabelle 6.2: Vertreter bestimmter Divergenzwinkel (vgl. [8], S. 128, [4], S. 199)

Eine kleine Notiz am Rande: *Rudolf Engelhardt* verglich 500 Eichenblätter miteinander und betrachtete die Höhe und ihr Verhältnis zur Breite. Diese Blätter stammten von mehr als 60 unterschiedlichen Bäumen. Das überraschende Ergebnis: Genau bei 235 Blättern stellte man den *goldenen Schnitt* fest. Weitere 93 Eichenblätter wichen davon nur um 1 mm und nochmals 92 Blätter nur um 2 mm ab. Die übrig gebliebenen

wiesen Abweichungen von 3 mm oder mehr auf. Ein Kritiker merkte jedoch den bei Messungen vorliegenden Schwankungsbereich an, wodurch die Versuchsleiterinnen und Versuchsleiter womöglich dazu „verführt“ wurden, den für sie passenderen Wert zu dokumentieren. (vgl. [8], S. 133)

6.2.5 Die Wuchsform von Achsen

Ein interessantes Schauspiel liefert die Wuchsform einer Vertreterin der Asteraceae, die Sumpf-Schafgarbe (*Achillea ptarmica*), bei welcher eine gewisse Abfolge in der Anzahl der Achsen im Laufe der Entwicklung festgestellt werden kann. Zählt man diese in den horizontalen Ebenen ab, so ergibt sich immer eine Fibonacci-Zahl. (vgl. [19], S. 5-6, [20], S. 908) Diese Struktur tritt auch bei der Gattung Nieswurz (*Helleborus*) auf, welche zur Familie der Ranunculaceae gehört (vgl. [8], S. 98, [20], S. 266).

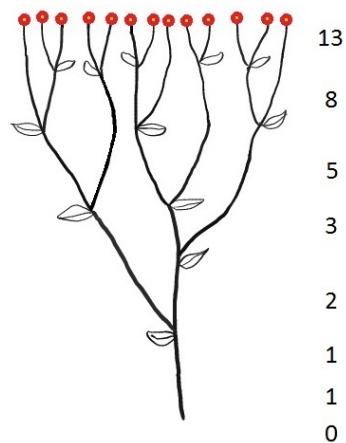


Abbildung 6.12: Wuchsform der Sumpf-Schafgarbe (vgl. [19], S. 6)

6.2.6 Die Anzahl von Blattstrukturen

In der Pflanzenwelt treten Blüten häufig mit einer bestimmten Anzahl an Kelch-, Kron-, Staub- oder Fruchtblättern auf. Dabei lassen sich des Öfteren vor allem bei Petalen und Sepalen Zahlen der Fibonacci-Folge finden. (vgl. [35], S. 595) In der *Exkursionsflora* der Autoren M. Fischer, K. Oswald und W. Adler, dem führenden botanischen Bestimmungswerk, können jegliche Details und Informationen zu allen in Österreich vorkommenden Arten eingeholt werden. Im Folgenden wird eine rein exemplarische Auflistung ausgewählter Familiennamen mit fünf Petalen präsentiert, deren Vollständigkeit in keinsten Weise gegeben ist. Es kann festgehalten werden, dass unter anderem die Vertreter der

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (a) Asteraceae (Korbblütler) | (f) Lamiaceae (Lippenblütler) |
| (b) Primulaceae (Primelgewächse) | (g) Fabaceae (Schmetterlingsblütler) |
| (c) Rosaceae (Rosengewächse) | (h) Apiaceae (Doldenblütler) |
| (d) Boraginaceae (Raubblattgewächse) | (i) Solanaceae (Nachtschattengewächse) |
| (e) Caryophyllaceae (Nelkengewächse) | (j) ... |

meistens mit je fünf Kronblättern ausgestattet sind. (vgl. [18], S. 71, 77, 78, 84, 85, 86, 88, 89, 90, [20], S. 681) Jedoch gibt es kein allgemein gültiges Gesetz, da es ständig zu Veränderungen (Mutationen, Hybridformen etc.) kommen kann.



(a) *Taraxacum officinale* (Echter Löwenzahn) - Asteraceae



(b) *Primula vulgaris* (Erd-Primel) - Primulaceae



(c) *Rosa canina* (Hunds-Rose) - Rosaceae



(d) *Myosotis scorpioides* (Eigentliches Sumpf-Vergissmeinnicht) - Boraginaceae



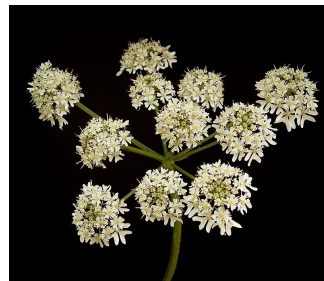
(e) *Dianthus carthusianorum* (Eigentliche Kartäuser-Nelke) - Caryophyllaceae



(f) *Lamium maculatum* (Große Taubnessel) - Lamiaceae



(g) *Trifolium pratense* (Wiesen-Klee) - Fabaceae



(h) *Heracleum sphondylium* (Wiesen-Bärenklau) - Apiaceae



(i) *Solanum dulcamara* (Bittersüßer Nachtschatten) - Solanaceae

Abbildung 6.13: Vertreter mit 5 Petalen (vgl. [20], S. 964, 965, 684, 685, 530, 536, 696, 698, 344, 345, 787, 788, 579, 580, 854, 724, 725)

Oftmals ist die Identifikation der Summe an Kronblättern nicht sehr einfach, da teilweise schwache bis sehr starke Verwachsungen vorliegen können. Beispielsweise bei den Lippenblüten repräsentiert die Oberlippe die Verschmelzung zweier Petale, wohingegen die Unterlippe aus drei Petalen zusammengesetzt ist. Zudem besitzen die Blüten der Fabaceae über einen sehr speziellen Aufbau. (vgl. [18], S. 77, 78, 88)

Einige Arten der Rosaceae haben aber weitaus mehr Kronblätter als fünf, doch liegt trotzdem meist als Anzahl eine Fibonacci-Zahl vor. Häufig lassen sich 34 oder aber 55 Kronblätter zählen. (vgl. [25], S. 413)

In derselben Art und Weise können weitere Listen für andere Fibonacci-Petalenzahlen erstellt werden. Natürlich muss man sich nicht nur auf Kronblätter beschränken, son-

dern kann Untersuchungen basierend auf diesem Muster auf **Kelch-, Staub- oder Fruchtblätter** ausdehnen. (vgl. [55])

Aber nicht nur die Anzahl der Strukturen erregt Aufsehen, sondern auch das Aussehen der Blüten erinnert oftmals an spezielle geometrische Konstrukte. Versucht man genauer darauf zu achten, so fällt einem besonders das regelmäßige Fünfeck sowie das Pentagramm in den **Blütenformen** mancher Arten auf. (vgl. [8], S. 132)



Abbildung 6.14: Blütenformen (vgl. [20], S. 266, 267, 860, 861, [8], S. 132)

Zuletzt muss angemerkt werden, dass die *Phyllotaxis* eine kunstvolle Darstellung der Fibonacci-Zahlen in der botanischen Welt ist, jedoch darf diese nicht als Gesetz der Natur verstanden werden. Die vereinzelt in Erscheinung tretenden Naturspektakel sollten deshalb immer mit gewisser Vorsicht betrachtet werden. (vgl. [8], S. 132)

6.3 Die logarithmischen Spiralen in der Natur

In diesem Abschnitt wird der Versuch unternommen einen kleinen Einblick in die verschiedenen Erscheinungsformen der *logarithmischen Spiralen* in der Biologie zu geben.

6.3.1 Das Gehäuse von Mollusken

Grund für das häufige Auftreten dieser *logarithmischen Spiralen* in den Strukturen der Molluskengehäusen ist die beim Wachstum beibehaltene Form. Sie sind die einzigen Spiralen mit dieser Eigenschaft der „Unveränderlichkeit“ beim Größenzuwachs. Wächst ein Weichtier in seinem Gehäuse, so vergrößert sich dieses äußere Gefüge, ohne sich in der Gestalt zu verändern, wodurch der Molluske immer ein identisches Gehäuse besitzt. Bei den auftretenden Windungen der harten Schale handelt es sich meistens um *logarithmische Spiralen*, welche aber nicht zwangsläufig einer *goldenen Spirale* oder aber einer *Spira mirabilis* entsprechen müssen. (vgl. [8], S. 64-66)

Ein interessantes Tier stellt in diesem Zusammenhang *Nautilus pompilius* aus der Familie der Perlboote, oder auch Nautiliden genannt, dar. Diese Familie gehört ihrerseits

zur Klasse der Kopffüßer (Cephalopoda) und wird somit dem Stamm der Weichtiere (Mollusca) zugeordnet. (vgl. [55], S. 67, 68, [13], S. 918-920, [8], S. 64-66) Die Perlboote besitzen eine gekammerte Schale, welche mit Luft gefüllt werden kann und demnach bei hydrostatischen Vorgängen von großem Nutzen ist. (vgl. [13], S. 919).

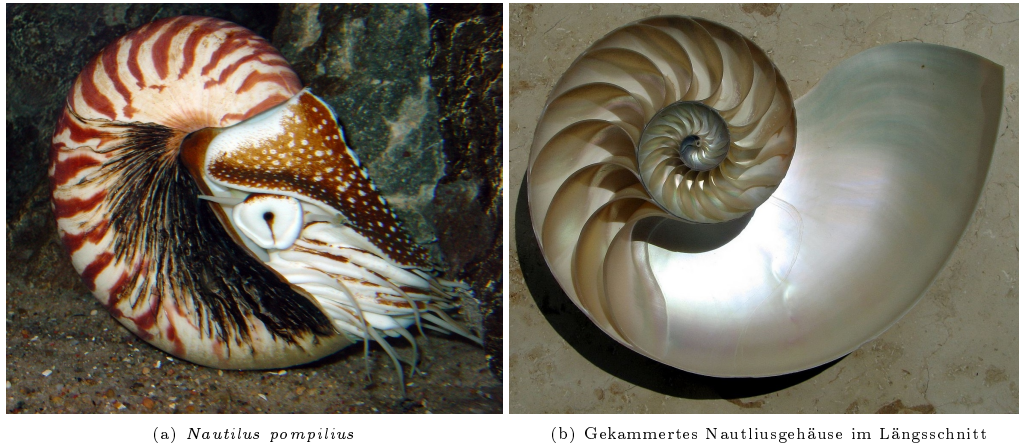


Abbildung 6.15: Spirale der *Nautilus pompilius*

Das nächste zoologische Anschauungsbeispiel ist jedem bekannt, den Hobbygärtnerinnen und Hobbygärtnern eher als lästige Erscheinung in Erinnerung, erfreut sich manch anderer an dessen wunderschönen, farbenprächtigen und doch sehr variationsreichen Gehäusen. Ungewöhnlicherweise treten diese Tiere sogar als „Haustiere“ auf. Die Rede ist von Schnecken der Klasse der Gastropoda (vgl. [55], S. 67-69). Es ist kaum zu glauben, dass es sich mittlerweile bei ca. $\frac{3}{4}$ aller rezenten Vertreter der Mollusken um Gastropoda handelt. Es existieren nicht nur landlebende Schnecken, sondern auch Süßwasserschnecken und jene, die das Meer als ihren Lebensraum bezeichnen dürfen. Man darf jedoch nicht von der fälschlichen Annahme ausgehen, dass alle Schnecken ein Gehäuse besitzen. (vgl. [13], S. 917-918) Betrachtet man jene harten Strukturen mancher Arten genauer, so erkennt man spiralenförmige Verläufe, welche sich auch in diesem Fall als *logarithmische Spiralen* herausstellen (vgl. [48], S. 133).



Abbildung 6.16: Spirale der Schnecken (vgl. [55], S. 79, 81)

6.3.2 Die Cochlea des menschlichen Ohres

Im menschlichen Körper trifft man ebenso auf eine sogenannte Schnecke, welche sich sowohl im rechten als auch im linken Innenohr befindet. Das Ohr kann man in drei große Abschnitte einteilen: Außenohr, Mittelohr und Innenohr. Die Schallwellen treffen auf die Ohrmuscheln, wo sie gebündelt und über den Gehörgang zu dem jeweiligen Trommelfell weitergeleitet werden. Die Schwingungen werden anschließend im Mittelohr von den Gehörknöchelchen – Malleus (Hammer), Incus (Amboss) und Stapes (Steigbügel) – aufgenommen und an das ovale Fenster und somit auf das Innenohr übertragen. Erwähnenswert ist im Mittelohr die eustachische Röhre (Tuba eustachii), welche eine Brücke zum Rachenraum schafft und für den Ausgleich des Druckes zuständig ist. Die Bogengänge, welche eine Rolle im Gleichgewichtssystem spielen sowie die Schnecke, auch Cochlea genannt, die für das Hören von entscheidender Bedeutung ist, bauen das mit Flüssigkeit gefüllte Innenohr auf. (vgl. [13], S. 1469) Die Cochlea stellt eine *logarithmische Spirale* im menschlichen Körper dar (vgl. [45], S. 80).

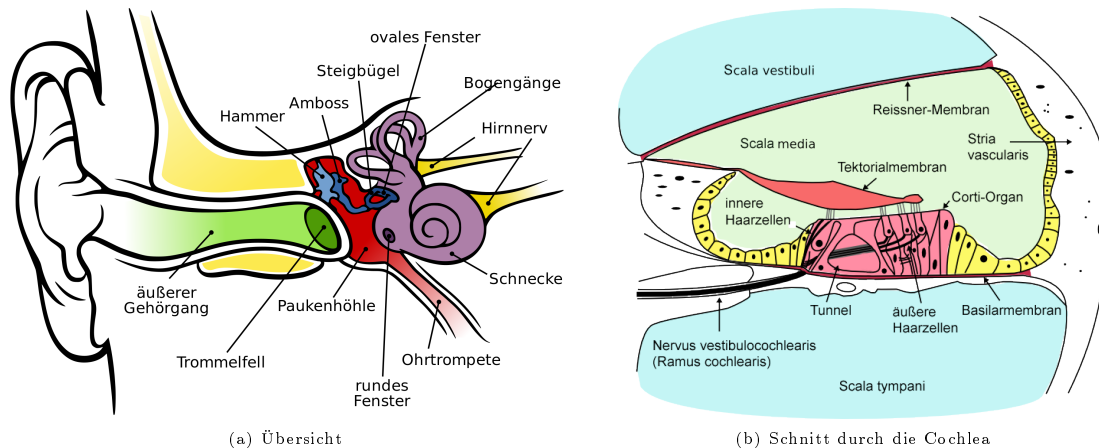


Abbildung 6.17: Aufbau des menschlichen Ohres

Die Cochlea sieht wie das Gehäuse einer Schnecke aus und besteht aus drei Kanälen – Scala vestibuli, Scala media (Ductus cochlearis) und Scala tympani. Von größter Bedeutung ist das Corti-Organ, welches auf der Basilarmembran der Scala media zu finden ist und die Mechanorezeptoren – die Haarsinneszellen mit den beweglichen Stereocilien – trägt. Diese Sinneszellen können in zwei Gruppen unterteilt werden, einerseits in die inneren, frei stehenden Haarzellen (Schallwahrnehmung) und andererseits in die äußeren, mit der Tektorialmembran verbundenen, Haarzellen (Schallverstärker). Durch die Übertragung des Schalls kommt es zu einer Wellenbewegung in der Schnecke, wodurch einzelne Haare umgebogen werden. Dadurch wird eine Potenzialveränderung hervorgerufen, weswegen es zu einer Signalweiterleitung kommt. (vgl. [13], S. 1469)

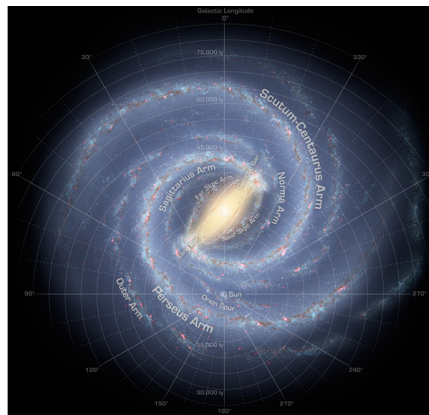
6.3.3 Die Milchstraße und andere Spiralgalaxien

Logarithmische Spiralen lassen sich zudem in den Armen von Galaxien finden. Bei ihnen handelt es sich um leuchtende Anordnungen von unzähligen Milliarden von Sternen in

Verbindungen mit einem gasförmigen Gemisch, welche durch Rotationskräfte in diese besonderen spiralförmigen Strukturen gebracht werden. (vgl. [24], S. 96)

(a) Spiralgalaxie *Messier 51*(b) Spiralgalaxie *Messier 101***Abbildung 6.18:** Spiralgalaxien

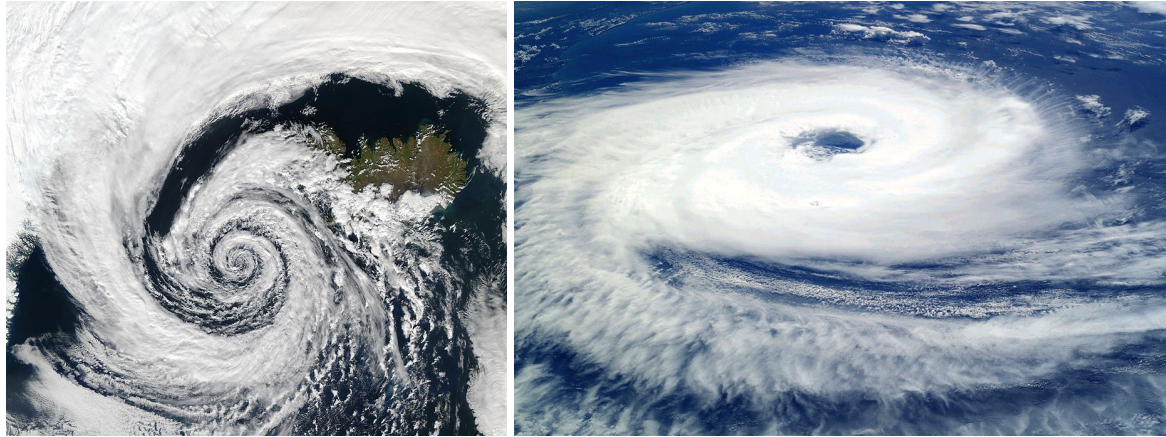
Die Galaxie, in welcher sich unser Sonnensystem befindet, wird als Milchstraße bezeichnet. Diese ist so wie jede andere Spiralgalaxie, aufgrund des Großteils der in einer Ebene liegenden Sterne, abgeflacht. (vgl. [17], S. 20) Die Milchstraße erscheint aufgrund unserer Perspektive, des Blickwinkels durch genau zwei Spiralarme hindurch, in einem weißlichen Glanz. (vgl. [24], S. 96)

**Abbildung 6.19:** Ein Blick auf unsere Milchstraße

6.3.4 Die Tiefdruckgebiete und ihre Erscheinung

Erstaunlicherweise können auch bei Tiefdruckgebieten *logarithmische Spiralen* beobachtet werden (vgl. [28], S. 104). Diese verlaufen auf der Nordhalbkugel zyklonal und auf der Südhalbkugel antizyklonal. Aufgrund ihrer rotierenden Eigenschaft wird diesen Wirbeln der Name Zyklone zugeteilt. Sie definieren sich über ein barometrisches Minimum, einen vollkommen abgeschlossenen Mittelpunkt des niedrigsten Luftdrucks. (vgl. [37], S. 115) Die Entstehung eines Zyklons an einer Polarfront und die unterschiedlichen Entwicklungsstadien beginnend beim Bodendruckfall und Wellenbildung

über Idealzyklone bis hin zu Okklusionsprozesse können bei [37] auf den Seiten 335-338 nachgelesen werden.



(a) Zyklon (Island, 2003)

(b) Zyklon Catarina (Brasilien, 2004)

Abbildung 6.20: Tiefdruckwirbel

6.3.5 Ungewöhnliche Flugbahnen

Es konnte nachgewiesen werden, dass Insekten ein Licht in einer bestimmten Flugbahn ansteuern. Der gleiche Verlauf ließ sich auch bei Habicht in Bezug zu deren Beute feststellen. Erstaunlicher Weise handelt es sich hierbei um *logarithmische Spiralen*. (vgl. [28], S. 104)

6.4 Die Fibonacci-Zahlen im Menschen

Neben der *logarithmischen Spirale* im Innenohr 6.3.2 treten noch weitere interessante Verbindungen zu den Fibonacci-Zahlen am menschlichen Körper auf, welche im Folgenden besprochen werden.

6.4.1 Wohldefinierte Proportionen

Im 19. Jahrhundert kam der Gedanke auf, dass im *goldenen Schnitt* etwas Göttliches verborgen liege. Demnach war es nicht verwunderlich die Konstruktion des Menschen als Schöpfung Gottes nach dessen Gesetzen anzusehen. (vgl. [8], S. 134)

Adolph Zeisinger, welcher von 1810 bis 1876 lebte, veröffentlichte 1854 seine Errungenschaften bezüglich des *goldenen Schnittes* am menschlichen Körper. Ausgehend vom Nabel, welcher die Gesamtlänge eines Menschen im *goldenen Verhältnis* teilt, kann man immer weitere Unterteilungen auf Basis dieses besonderen Verhältnisses vornehmen. (vgl. [2], S. 98-99) *Zeisinger* sah in dieser *göttlichen Teilung*

„überhaupt das Grundprinzip aller nach Schönheit und Totalität drängenden Gestaltung im Reich der Natur wie im Gebiet der Kunst enthalten [...] und daß

es von Uranfang an allen Formbildungen und formellen Verhältnissen, den kosmischen wie den individualisierenden, den organischen wie den anorganischen, den akustischen wie den optischen, als höchstes Ziel und Ideal vorgeschwebt, jedoch erst in der Menschengestalt seine vollkommenste Realisation erfahren hat. “

(Zeisinger zitiert nach Beutelspacher und Petri [8], S. 134)

Nachdem er den Startschuss setzte, widmeten sich weitere Interessierte ähnlichen Analysen, von denen jedoch einige zweifelhaften Ausmaßes sind. Der Anschein eines zwingenden Einbindens des *goldenen Schnittes* im Erscheinungsbild des Menschen wird leichterhand erweckt. (vgl. [8], S. 134-136)

Neufert versuchte sich an nachstehender Darstellung zur Veranschaulichung der bisher bekannten *goldenen Verhältnisse* am menschlichen Körper, welche sich in der *Bauentwurfslehre* finden lässt (vgl. [8], S. 134):

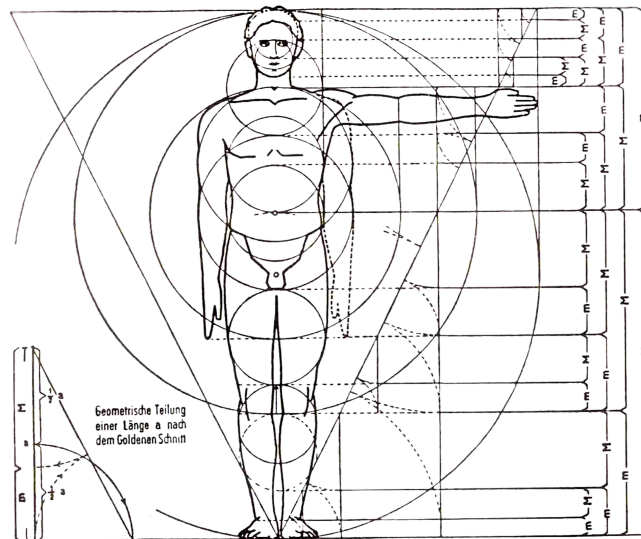


Abbildung 6.21: Auftreten des *goldenen Schnittes* am menschlichen Körper ([8], S. 135)

Die Idealisierung der Schuhsohle lässt sich zu *Hässelbarth* zurückverfolgen, welcher, auf genauen Untersuchungen basierend, Fußleisten anhand des folgenden Modelles entwarf (vgl. [8], S. 137):

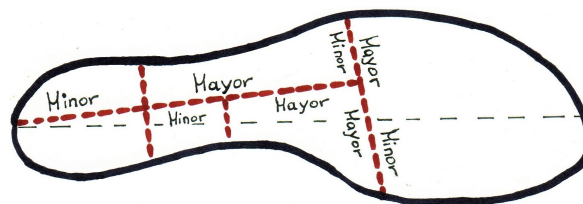


Abbildung 6.22: Fußsohle (vgl. [8], S. 137)

Mit diesem Beispiel endet die biologische Darstellung der Fibonacci-Zahlen in der Natur. Letztlich haben wir einige bemerkenswerte Erscheinungen hervorheben und besprechen können. Objektiv betrachtet lassen sich diverse Ähnlichkeiten zu dieser Zahlenabfolge finden, doch kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob diese der Fibonacci-Folge zu Grunde liegen. Nun obliegt es der Leserin bzw. dem Leser, über die Glaubwürdigkeit zu urteilen und der Faszination Fibonacci-Zahlen in der Biologie eine Chance zu geben. (vgl. [8], S. 133)

Zusammenfassung

Diese Arbeit erzählt den Werdegang einer wahrhaft einzigartigen Zahlenfolge durch den Lauf der Geschichte. Ihren Namen erhielt diese Folge erst sehr spät, doch sind diese Zahlen heute beinahe jeder und jedem ein Begriff: somit ein herzliches Willkommen bei den berühmt berüchtigten Fibonacci-Zahlen.

Lange in Vergessenheit geraten, ließ ihr Durchbruch einige Jahrhunderte auf sich warten. Erst durch eine bestimmte Aufgabenstellung, dem sogenannten „Kaninchenproblem“ erlangte die Fibonacci-Folge weltweit Anerkennung und Ruhm. Ihr anschließender Aufstieg verlief sehr schnell und ihre Popularität sowie das Interesse an diesen Zahlen nahm fortan stetig zu. Bis heute ist diese Folge Mittelpunkt von zahlreichen mathematischen Untersuchungen und wissenschaftlichen Forschungen.

Ziel der Arbeit ist es, einen umfangreichen Einblick in diese Zahlenabfolge zu gewähren. Geschichtliche Hintergründe werden neben den vorrangigen mathematischen Aspekten geschildert. Großer Stellenwert wird den Teilbereichen der Linearen Algebra, der Zahlentheorie, der Analysis, der Stochastik sowie der Geometrie beigemessen. Hinsichtlich dieser mathematischen Disziplinen werden die Fibonacci-Zahlen genauestens untersucht und die wichtigsten Eigenschaften präsentiert.

Das letzte Kapitel offenbart die biologischen Facetten dieser bemerkenswerten Folge, wobei verborgene Geheimnisse von Sonnenblumen, Drohnen, Zapfen, Ananasfrüchten etc. unsere Aufmerksamkeit erwecken. Zudem begegnen wir Zyklonen, Spiralgalaxien und Mollusken auf unserem Weg durch die mathematische Natur. Dieses Werk soll die Anwendungen der Fibonacci-Zahlen in der Mathematik und Biologie aufzeigen und interessante Erkenntnisse und Beobachtungen zutage bringen.

Abstract

This paper describes the development of a truly phenomenal and unique sequence throughout the course of history. Even though it was named rather late, it is known by almost anyone: Welcome to the Fibonacci numbers!

After almost being lost into oblivion for centuries this sequence finally made its breakthrough. Only due to a certain task, the so called *Rabbit enigma* the Fibonacci numbers gained worldwide fame and recognition. It's following ascend was extraordinary, rapid and the popularity as well as the interest about this sequence remains unbroken. Until today the Fibonacci sequence is the centre of countless mathematical studies and scientific research alike.

This paper aims to grant a general insight into the Fibonacci numbers. Thus, historic background as well as mathematical aspects will be discussed precisely. The lion's share however will be awarded to linear algebra, number theory, mathematical analysis, stochastic and geometry. The Fibonacci numbers will be thoroughly analysed regarding these mathematical disciplines and the most important findings alongside our endeavour shall be noted.

The last chapter reveals the biological facets about this exceptional sequence, in which the secrets of sunflowers, drones, pine cones, pineapples etc. will be the focus of our controversy. Furthermore, we shall come across cyclones, spiral galaxies and molluscs on our way through the mathematical nature. This paper is set to reveal both astonishing knowledge and observations in mathematical, as well as biological aspects of the Fibonacci numbers.

Abbildungsverzeichnis

1.1	<i>Leonardo von Pisa</i> https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci#/media/File:Fibonacci2.jpg , PD-OLD, bearbeitet, letzter Zugriff: 21.06.2016	3
1.2	Kaninchenstammbaum (vgl. [9], S. 46)	6
1.3	Modell der Kaninchenpopulation http://www.in4sweden.com/silhouette-sitting-rabbit-p25582/ , bearbeitet, letzter Zugriff: 28.08.2016	6
1.4	Summe der Quadrate der ersten acht Fibonacci-Zahlen (beachte f_0^2) (vgl. [48], S. 40)	10
1.5	Summe von Produkten benachbarter Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 48)	11
1.6	<i>François-Édouard-Anatole Lucas</i> https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas#/media/File:Elucas_1.png , PD-OLD, bearbeitet, letzter Zugriff: 19.07.2016	24
3.1	Reste der Fibonacci-Folge <i>mod 11</i> (vgl. [48], S. 351)	56
3.2	Das <i>Pascal'sche Dreieck</i> (vgl. [71], S. 13)	75
3.3	Verbindung des <i>Pascal'schen Dreiecks</i> zu den Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 91)	75
4.1	Graph der Betragsfunktion (vgl. [59], S. 13)	82
4.2	Funktionsgraph des $\sinh(x)$ und des $\cosh(x)$	102
4.3	Die Funktion $F(x)$ mit den beiden begrenzenden Funktionen im Detail (vgl. [53], S. 57)	103
5.1	Der <i>goldene Schnitt</i> (vgl. [8], S. 15)	111
5.2	Konstruktion 1 (vgl. [8], S. 21)	112
5.3	Konstruktion 2 (vgl. [8], S. 24)	113
5.4	Konstruktion 3 (vgl. [8], S. 25)	114
5.5	<i>Goldenes Dreieck</i> (vgl. [8], S. 34)	115
5.6	Konstruktion zweier <i>goldener Dreiecke</i> (vgl. [8], S. 35)	115
5.7	Konvexes 8-Eck (vgl. [38], S. 17)	116
5.8	Fünfeck mit eingezeichneten Diagonalen (vgl. [8], S. 32)	116
5.9	Fünfeck: Diagonale $\overline{CE}$ Seite $\overline{AB}$ (vgl. [8], S. 32)	117
5.10	Fünfeck: Schnittpunkt F als besonderer Teilungspunkt (vgl. [8], S. 33)	117
5.11	Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks mithilfe eines <i>goldenen Dreiecks</i> (vgl. [8], S. 38)	118

5.12	Pentagramm (vgl. [8], S. 44)	119
5.13	<i>Goldenes Rechteck ABEF</i> (vgl. [8], S. 47)	119
5.14	Abfolge von <i>goldenen Rechtecken</i> (vgl. [8], S. 48)	120
5.15	<i>Goldenes Rechteck</i> eingeschrieben in ein Quadrat (vgl. [8], S. 49)	120
5.16	Approximation der <i>goldenen Spirale</i> (vgl. [8], S. 58)	121
5.17	<i>Fibonacci-Spirale</i> (vgl. [40], S. 133)	122
5.18	<i>Spira mirabilis</i> (vgl. [8], S. 61)	123
5.19	<i>Goldener Winkel</i> (vgl. [48], S. 148)	124
5.20	Ein geometrischer Trugschluss (vgl. [11], S. 321)	125
5.21	Ein geometrischer Trugschluss – Die Auflösung (vgl. [11], S. 321-322)	125
5.22	Allgemeine Darstellung des geometrischen Trugschlusses (vgl. [8], S. 96)	126
6.1	Taxonomische Übersicht (vgl. [55], S. 126, 214, 452, 453, 477, 478, [54], S. 119)	128
6.2	<i>Apis mellifera</i> ; letzter Zugriff: 02.11.2016 (a) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bienenkoenigin_43a_cropped.jpg?uselang=de , CC-BY-SA-3.0-migrated, by Waugsberg, bearbeitet (b) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Drone_49a.jpg?uselang=de , CC-BY-SA-3.0-migrated, by Waugsberg, bearbeitet (c) https://de.wikipedia.org/wiki/Westliche_Honigbiene#/media/File:Apis_mellifera_Western_honey_bee.jpg , CC-BY-SA-2.5, by Andreas Trepte, bearbeitet	129
6.3	Die verschiedenen „Bientypen“ (<i>Apis mellifera</i>) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:1911_Britannica_-_Bee_-_Apis_mellifica.png , PD, bearbeitet, letzter Zugriff: 02.11.2016	130
6.4	Drohnenstammbaum (vgl. [3], S. 53); letzter Zugriff: 15.11.2016 https://de.wikipedia.org/wiki/Marssymbol#/media/File:Mars_symbol.svg , PD, bearbeitet https://de.wikipedia.org/wiki/Venussymbol#/media/File:Venus_symbol.svg , PD, bearbeitet	132
6.5	Winkelabstände von links nach rechts: 137, 14°, 137, 2° und 137, 09° (vgl. [36], S. 35)	134
6.6	Spiralenmuster der Sonnenblumen eigene Aufnahmen: Ehrendorf, 06.08.2016	135
6.7	Spiralenmuster der Ananas links: eigene Aufnahme: Ehrendorf, 03.11.2016 rechts: eigene Aufnahme: Wien, 10.11.2016	136
6.8	Zapfen der <i>Pinus sylvestris</i> eigene Aufnahmen: Ehrendorf, (a) 15.01.2017, (b, c) 04.11.2016	138
6.9	Zapfen der <i>Picea abies</i> eigene Aufnahmen: Ehrendorf, (a, b) 05.11.2016, (c) 15.01.2017	139

6.10	Zapfen der <i>Abies alba</i> https://commons.wikimedia.org/wiki/Abies_alba#/media/File:Abies-alba_Zapfen-1526.jpg , CC-BY-SA-3.0, by Mars 2002, letzter Zugriff: 14.01.2017	140
6.11	Blattanordnung mit einem Divergenzwinkel von 144° (vgl. [4], S. 198) .	141
6.12	Wuchsform der Sumpf-Schafgarbe (vgl. [19], S. 6)	142
6.13	Vertreter mit 5 Petalen; letzter Zugriff: 14.11.2016 (a) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gew%C3%B6hnlicher_L%C3%B6wenzahn.jpg?uselang=de , CC-BY-SA-3.0, by Thomas Wolf, bearbeitet (b) eigene Aufnahme: Ehrendorf, 14.04.2013 (c) https://de.wikipedia.org/wiki/Rosengew%C3%A4chse#/media/File:Hundsrose.jpg , CC-BY-SA-3.0, by W. J. Pilsak, bearbeitet (d) https://de.wikipedia.org/wiki/Vergissmeinnicht#/media/File:MyosotisScorpioides.jpg , CC-BY-SA-3.0, by Christian Fischer, bearbeitet (e) https://de.wikipedia.org/wiki/Kart%C3%A4usernelke#/media/File:Dianthus_carthusianorum_210505a.jpg , CC-BY-SA-3.0, by BerndH, bearbeitet (f) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lamium_maculatum_Bremgartenwald_2.JPG?uselang=de , CC-BY-SA-4.0, by MurielBendel, bearbeitet (g) https://de.wikipedia.org/wiki/Wiesen-Klee#/media/File:Trifolium_pratense_-_Keila.jpg , CC-BY-SA-4.0, by Ivar Leidus, bearbeitet (h) https://de.wikipedia.org/wiki/Wiesen-B%C3%A4renklau#/media/File:Heracleum_sphondylium_08_ies.jpg , CC-BY-SA-3.0, by Frank Vincentz, bearbeitet (i) http://www.europeana.eu/portal/en/record/11628/_FOTO_AM_UNITS_ITALY_14224.html?q=Solanum+dulcamara#&gid=1&pid=1 , CC-BY-SA, by Department Of Life Sciences - University Of Trieste, bearbeitet	143
6.14	Blütenformen; letzter Zugriff: 15.11.2016 (a) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stauden-Akelei_Aquilegia_vulgaris_blau.jpg?uselang=de , CC-BY-SA-3.0, by Aconcagua, bearbeitet (b) https://de.wikipedia.org/wiki/Wiesen-Glockenblume#/media/File:Campanula_patula_W.jpg , CC-BY-SA-3.0, by Fornax	144
6.15	Spirale der <i>Nautilus pompilius</i> ; letzter Zugriff: 12.11.2016 (a) https://de.wikipedia.org/wiki/Perlboote#/media/File:Nautilus-JB-01.jpg , PD, bearbeitet (b) https://de.wikipedia.org/wiki/Perlboote#/media/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg , CC-BY-SA-3.0, by Chris 73, bearbeitet	145

- 6.16 Spirale der Schnecken; letzter Zugriff: 12.11.2016
 (a) <https://pixabay.com/de/weinbergsschnecke-schneckenhaus-1506791/>,
 PD, bearbeitet
 (b) <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cepaea.hortensis.lindsey.jpg>,
 CC-BY-SA-3.0, by James K. Lindsey, bearbeitet 145
- 6.17 Aufbau des menschlichen Ohres; letzter Zugriff: 12.11.2016
 (a) https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Anatomy_of_the_Human_Ear_de.svg,
 CC-BY-2.5, by Chittka L. Brockmann
 (b) <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cochlea-crosssection-de.png>,
 CC-BY-SA-3.0, by en-user Oarih 146
- 6.18 Spiralgalaxie; letzter Zugriff: 16.01.2017
 (a) https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale#/media/File:Messier51.jpg, CC-BY-3.0, by NASA, ESA, S. Beckwith (STScI), and
 The Hubble Heritage Team STScI/AURA)
 (b) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:M101_hires_STScI-PR_C2006-10a.jpg,
 CC-BY-3.0, by European Space Agency & NASA 147
- 6.19 Ein Blick auf unsere Milchstraße
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:236084main_MilkyWay-full-annotated.jpg,
 PD, bearbeitet, letzter Zugriff: 16.01.2017 147
- 6.20 Tiefdruckwirbel
 (a) https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Spirale#/media/File:Low_pressure_system_over_Iceland.jpg,
 PD, letzter Zugriff: 13.11.2016
 (b) https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cyclone_Catarina_from_the_ISS_on_March_26_2004.JPG,
 PD, letzter Zugriff: 17.01.2017 148
- 6.21 Auftreten des *goldenen Schnittes* am menschlichen Körper ([8], S. 135) 149
- 6.22 Fußsohle (vgl. [8], S. 137) 149

Tabellenverzeichnis

1.1	Die ersten 30 Fibonacci-Zahlen	7
1.2	Fibonacci-Zahlen mit positiven und negativen Indizes (vgl. [53], S. 10) .	23
1.3	Die ersten 30 Lucas-Zahlen	25
3.1	Verbindung des <i>Pascal'schen Dreiecks</i> zu den Fibonacci-Zahlen (vgl. [48], S. 92)	76
6.1	Unterschiede zwischen den Bienenwesen (vgl. [69], S. 36, 37, 98, 101, [55], S. 478, [23], S. 40, [7], S. 107)	130
6.2	Vertreter bestimmter Divergenzwinkel (vgl. [8], S. 128, [4], S. 199) . . .	141

Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner. *Zahlentheorie. Eine Einführung mit Übungen, Hinweisen und Lösungen*. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2012. 1. Auflage.
- [2] B. Artmann. Albert van der Schoots. Die Geschichte des Goldenen Schnitts. *Mitteilungen der DMV*, 14(2): S. 98–99, 2006.
- [3] S. Basin. The Fibonacci Sequence As It Appears in Nature. *The Fibonacci Quarterly. The Official Journal of The Fibonacci Association*, 1(1): S. 53–56, Februar 1963.
- [4] E. Batschelet. *Einführung in die Mathematik für Biologen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979. 3. Auflage.
- [5] T. Bauer. *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul-und Hochschulmathematik – sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen*. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien (Spektrum), Wiesbaden, 2013.
- [6] C. Baxa. Einführung in die Zahlentheorie. Vorlesungsnotizen von Andreas Rarmert. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, http://www.unet.univie.ac.at/~a0406428/php/Zahlentheorie_2012.pdf, Sommersemester 2012.
- [7] M. Berenbaum. *Blutsauger, Staatsgründer, Seidenfabrikanten. Die zwiespältige Beziehung von Mensch und Insekt*. Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag, München, 2004.
- [8] A. Beutelspacher and B. Petri. *Der Goldene Schnitt*. BI-Wissenschaftsverlag & F.A. Brockhaus AG, Mannheim, 1995. 2. Auflage.
- [9] A. Beutelspacher and M. Zschiegner. *Diskrete Mathematik für Einsteiger. Bachelor und Lehramt*. Springer Fachmedien (Spektrum), Wiesbaden, 2014. 5. Auflage.
- [10] A. Brünner. Zitate. <http://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/zitate.htm>, 2005. letzter Zugriff: 13.08.2016.
- [11] D. Burton and H. Dalkowski. *Handbuch der elementaren Zahlentheorie. Mit über 1000 Übungsaufgaben und ihren Lösungen*. Heldermann Verlag, Lemgo, Deutschland, 2005. Berliner Studienreihe zur Mathematik Band 12.
- [12] H. Busard. Über die Entwicklung der Mathematik in Westeuropa zwischen 1100 und 1500. *N.T.M. Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin*, 5(1): S. 211–235, Dezember 1997. Birkhäuser Verlag, Basel.

- [13] N. Campbell, J. Reece et al. *Biologie*. Pearson Studium, 2009. 8. Auflage.
- [14] T. Crilly. *50 Schlüsselideen Mathematik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009. Nachdruck 2010.
- [15] K. Devlin. *The Man of Numbers. Fibonacci's Arithmetic Revolution*. Bloomsbury Publishing Plc, London, 2011. This paperback edition published 2012.
- [16] M. Erickson. *Mathematische Appetithäppchen. Faszinierende Bilder. Packende Formeln. Reizvolle Sätze*. Springer-Verlag (Spektrum), Berlin Heidelberg, 2015.
- [17] T. Ferris. *Galaxien*. Springer Basel AG, 1983.
- [18] M. Fischer. Arbeitsunterlagen für die Lehrveranstaltung. Einführung in die botanische Morphologie und Biosystematik sowie die ökologische Floristik für Schulbiologen (mit Pflanzenbestimmungsübungen) (MoSyÖk). Technical report, Institut für Botanik der Universität Wien, Sommersemester 2008. 6. Auflage.
- [19] R. Fischer. *Fibonacci Applications and Strategies for Traders*. John Wiley & Sons, New York, 1993.
- [20] M. Fischer, K. Oswald and W. Adler. *Exkursionsflora. Für Österreich, Liechtenstein und Südtirol*. Biologiezentrum der Oberösterreichischen Landesmuseen, Linz, 2008. 3. Auflage.
- [21] O. Forster. Einführung in die Zahlentheorie. Vorlesungsskript. <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/zth/noteszth.html>, Sommersemester 2004, Mathematisches Institut, LMU München.
- [22] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2011. 10. Auflage.
- [23] K. Frisch. *Aus dem Leben der Bienen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1977. 9. Auflage.
- [24] M. Gardner. *Logik unterm Galgen: Ein Mathematical in 20 Problemen*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1980. 2. Auflage.
- [25] G. Glaeser. *Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik*. Springer-Verlag (Spektrum), Berlin Heidelberg, 2014. 4. Auflage.
- [26] I. Greilhuber, C. König and W. Till. Vorlesungsskript. Diversität und Organisation der Pflanzen und Pilze. Fakultätszentrum für Biodiversität, Fakultät für Lebenswissenschaften, Universität Wien, Wintersemester 2012/2013.
- [27] J. Gullberg. *Mathematics. From the Birth of Numbers*. W. W. Norton & Company, New York, 1997.
- [28] J. Havil. *Verblüfft?! Mathematische Beweise unglaublicher Ideen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [29] H. Hellwig and T. Neukirchner. Phyllotaxis. Die mathematische Beschreibung und Modellierung von Blattstellungsmustern. *Mathematische Semesterberichte*, 57(1): S. 17–56, April 2010. Springer-Verlag.

- [30] D. Hilbert. Naturerkennen und Logik. Vortrag auf dem Kongress der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Königsberg, 1930.
- [31] D. Horstmann. *Mathematik für Biologen*. Springer-Verlag (Spektrum), Berlin Heidelberg, 2016. 2. Auflage.
- [32] W. Huber and A. Weissenhofer. *Naturraum Lateinamerika. Geographische und biologische Grundlagen*, Bekannte und wenig bekannte Nutzpflanzen Lateinamerikas (Biotische Faktoren), S. 145-174. Lit Verlag GmbH, Wien, 2006.
- [33] H. Humenberger. Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen. *Stochastik in der Schule*, 20(3): S. 15–22, 2000.
- [34] K. Jacobs. *Resultate. Ideen und Entwicklungen in der Mathematik. Band 1. Proben mathematischen Denkens*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1987. Band 1.
- [35] A. Klar. Fibonacci's flowers. *Nature*, 417, Juni 2002.
- [36] W. Kleijne and T. Konings. *Das Zebra-Buch zur Geometrie*, Der Goldene Schnitt, S. 1-47. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [37] B. Klose. *Meteorologie. Eine interdisziplinäre Einführung in die Physik der Atmosphäre*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015. 2. Auflage.
- [38] M. Koth. Schulmathematik 2 (Geometrie). Vorlesungsskript Elementargeometrie, Wintersemester 2013/2014. Fakultät für Mathematik, Universität Wien.
- [39] U. Krengel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2002. 6. Auflage.
- [40] H. Lausch. *Fibonacci und die Folge(n)*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2009.
- [41] H. Lüneburg. *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*. BI-Wissenschaftsverlag & F. A. Brockhaus AG, Mannheim, 1993. 2. Auflage.
- [42] H. Lüneburg. *Von Zahlen und Größen. Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis*. Birkhäuser Verlag, Basel, Schweiz, 2008. Band 1.
- [43] G. Lotz-Grütz. *Elementare Theorie der Fibonacci- und Lucas-Zahlen*. Books on Demand, Norderstedt, 2014. 2. Auflage.
- [44] E. Lucas. Recherche sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. Imprimerie des sciences mathématiques et physiques. Rome, 1877. Band 10.
- [45] S. Marinković et al. Cochlea and other spiral forms in nature and art. *American Journal of Otolaryngology - Head and Neck Medicine and Surgery. SciVerse ScienceDirect*, 33: S. 80–87, Dezember 2012. Elsevier.
- [46] G. Phillips. *Two Millennia of Mathematics. From Archimedes to Gauss*. Springer-Verlag, New York, 2000.

- [47] G. Phillips. *Mathematics Is Not a Spectator Sport*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2005.
- [48] A. Posamentier and I. Lehmann. *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. Prometheus Books, Amherst, New York, 2007.
- [49] A. Posamentier and I. Lehmann. *The Glorious Golden Ratio*. Prometheus Books, Amherst, New York, 2012.
- [50] P. Raith. Seminar für LAK (Wahrscheinlichkeitstheorie). Skript. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Wintersemester 2013.
- [51] P. Raith. Stochastik für LAK. Vorlesungsnotizen. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Sommersemester 2013.
- [52] P. Ribenboim. *My Numbers, My Friends. Popular Lectures on Number Theory*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [53] A. Ruhri. Zur Ubiquität der Fibonacci-Zahlen. Überarbeitete Version der ersten Staatsarbeit. Staatsarbeit, Fakultät für Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum, Jänner 2010. Betreut von Prof. Dr. Uwe Storch.
- [54] F. Ruttner. *Naturgeschichte der Honigbienen*. Ehrenwirth Verlag GmbH, München, 1992.
- [55] M. Schaefer. *Brohmer – Fauna von Deutschland. Ein Bestimmungsbuch unserer heimischen Tierwelt*. Quelle & Meyer Verlag GmbH & Co., Wiebelsheim, 2010. 23. Auflage.
- [56] H. Schichl and R. Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [57] R. Schröder. *Wirtschaftspflanzen der warmen Zonen*. Franckh'sche Verlagshandlung, W. Keller & Co. (Kosmos, Gesellschaft der Naturfreunde), Stuttgart, 1961. Band 229.
- [58] L. Sigler. *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag, New York, 2002. first softcover printing, 2003.
- [59] R. Steinbauer. Einführung in die Analysis. Vorlesungsskript. Korrigierte Version 14.06.2012. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Sommersemester 2012.
- [60] R. Steinbauer. Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK. Vorlesungsskript. Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Sommersemester 2013.
- [61] J. Tautz. Die Honigbiene – Neuigkeiten über ein bekanntes Insekt. *Unterricht Biologie – Zeitschrift für alle Schulstufen*, 283: S. 4–13, April 2003. UB 283/27. Jahrgang.
- [62] J. Tautz. *Phänomen Honigbiene*. Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag, München, 2007.

- [63] J. Tautz. Der Bien – ein Säugetier mit vielen Körpern. Superorgansimus Bienenstaat. *Biologie unserer Zeit*, 38: S. 22–29, 2008. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim; 1/2008 (38).
- [64] B. Thaller. Leonardo und der Goldene Schnitt. Technical report, Universität Graz, Dezember 2009. <http://mug.didaktik-graz.at/images/materialien/fibonacci/fibonacci.pdf>.
- [65] TU-Freiberg. <http://www.mathe.tu-freiberg.de/~hebisch/cafe/logspirale.html>. letzter Zugriff: 30.10.2016.
- [66] S. Vajda. *Fibonacci & Lucas Numbers, And The Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1989.
- [67] C. Vetter (Projektleitung). *Tiere und Pflanzen. Der große Kosmos-Naturführer. Über 1900 Arten*. Franckh-Kosmos Verlag-GmbH & Co. KG, Stuttgart, 2015.
- [68] N. Vorobiev. *Fibonacci Numbers*. Birkhäuser Verlag, Basel, Schweiz, 2002.
- [69] K. Weiß. *Bienen und Bienenvölker*. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1997.
- [70] K. Witt. *Mathematische Grundlagen für die Informatik. Mengen, Logik, Rekursion*. Springer Fachmedien (Vieweg), Wiesbaden, 2013.
- [71] N. Worobjow. *Die Fibonaccischen Zahlen. Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1954.