



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Wittgensteins Philosophie der Mathematik in ihrer
Beziehung zum Lehren und Lernen von Mathematik“

verfasst von / submitted by

Maximilian Wieländer, BA

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the
degree of

Magister der Philosophie (Mag.phil.)

Wien, 2017 / Vienna, 2017

Studienkennzahl lt. Studienblatt/
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 299

Studienrichtung lt. Studienblatt/
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Lehramtsstudium
UF Mathematik
UF Psychologie und Philosophie

Betreut von/ Supervisor:

Assoz. Prof. MMag. DDr. Esther Ramharter,
Privatdoz.

*Lernt das Kind nur Sprechen oder auch Denken? Lernt es den Sinn des
Multiplizierens vor oder nach dem Multiplizieren? (MS 213, 225)*

INHALT

1 Einleitung	1
2 Philosophie der Mathematik und mathematische Fachdidaktik	2
2.1 Philosophie der Mathematik	2
2.1.1 Definition	2
2.1.2 Entdecken vs. Erfinden – Klassische Theorien in der Philosophie der Mathematik	3
2.1.2.1 Platonismus und Wahrheitswert-Realismus.....	4
2.1.2.2 Formalismus	6
2.1.2.3 Intuitionismus und Konstruktivismus.....	7
2.2 Mathematische Fachdidaktik	9
2.2.1 Definition	9
2.2.2 Philosophische Einflüsse auf Unterricht und Fachdidaktik	12
2.3 Wechselwirkung von Philosophie, Unterricht und Didaktik der Mathematik	15
3 Wittgensteins Philosophie der Mathematik.....	16
3.1 Die Rolle des Lehrens und Lernens in Wittgensteins Spätphilosophie	16
3.2 Sprachspiele und Regelfolgen	17
3.1.1 Sprachspiele beim Lernen von Sprache.....	18
3.1.2 Regelfolgen	23
3.2 Mathematik als Erfinden	26
3.2.1 Beweis/Rechnung vs. Experiment.....	26

3.2.2 Beweise bilden Begriffe	29
3.3 Wittgenstein über das Lehren und Lernen von Mathematik ..	35
3.3.1 Abrichtung/Training beim Rechnen lernen	35
3.3.2 Relativität verursacht Zwang	41
3.3.3 Die Rolle des Rechenfehlers	45
3.3.4 Überzeugung durch übersichtliche Beweise als andere Art des Mathematik Lernens.....	51
4 Anknüpfungspunkte in Fachdidaktik und Lerntheorie..	54
4.1 Vertritt Wittgenstein eine (behavioristische) Lerntheorie?	54
4.1.1 Formuliert Wittgenstein eine konsistente Theorie des Lernens?	54
4.1.2 Ist Wittgenstein ein Behaviorist und „Abrichtung“ nichts anderes als „Konditionierung“?	56
4.2 Wittgenstein und das „entdeckende Lernen“ im Mathematik- Unterricht.....	59
4.2.1 Wittgenstein und Bruners „Akt der Entdeckung“	59
4.2.2 Wie „persönlich“ können „Einsichten“ in der Mathematik sein?	61
4.2.3 „Entdeckung“ in der Mathematik als irreführende Analogie	64
4.2.4 Ein neuer Umgang mit Fehlern beim selbstständigen Arbeiten.....	68
4.3 Experimenteller Mathematikunterricht.....	70
4.3.1 Quasi-empirische Mathematik.....	71
4.3.2 Wittgenstein und das „operative Prinzip“	75
5 Abschluss	78
Siglenverzeichnis.....	79
Literaturverzeichnis.....	80
Anhang	86

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, die Vielzahl an Texten und Passagen aus Ludwig Wittgensteins Nachlass, welche sich mit dem Thema des Lehren und Lernens von Mathematik auseinandersetzen, aus einer mathematik-didaktischen Perspektive zu betrachten und zu analysieren. Ein solches Vorhaben bewegt sich naturgemäß immer an einer Schnittstelle verschiedener wissenschaftlicher Fachgebiete, die mit ihren je eigenen methodischen und inhaltlichen Schwerpunkten oft leicht vereinbar, dann jedoch wieder äußerst unterschiedlich erscheinen. Im Falle dieser Arbeit werden also Texte aus dem Bereich der Philosophie der Mathematik beschrieben und erläutert, um dann im Kontext der mathematischen Fachdidaktik verglichen und bewertet zu werden. Diese Arbeit muss also mit der Frage anheben, ob eine solche „Gratwanderung“ überhaupt möglich und methodisch begründbar ist.

Die Beschreibung von Unterrichtssituationen ist jedenfalls nichts Neues in der Philosophie der Mathematik. Schon Platons „Menon“ beschäftigt sich direkt mit dem Thema des Lehrens und Lernens von Mathematik und stellt damit sowohl für die Philosophie als auch für die Fachdidaktik der Mathematik einen zentralen Bezugspunkt dar. Wittgenstein scheint diese Tradition fortzusetzen, wenn er an vielen Stellen Lernsituationen beschreibt, an denen er seine philosophischen Ansichten darstellt und entwickelt. Es erscheint also sinnvoll, diesen Konnex von Philosophie und Pädagogik bei Wittgenstein genauer zu untersuchen. Dies soll in dieser Arbeit passieren. Dabei möchte ich einerseits Wittgensteins Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik aus seinen Texten herausarbeiten und andererseits mögliche Impulse und Anknüpfungspunkte für die mathematische Fachdidaktik skizzieren. Es soll somit gezeigt werden, dass Wittgensteins Ansichten eine fruchtbare Basis liefern, um Praxis, Reflexion und Beschreibung des Mathematikunterrichts zu untersuchen.

Im ersten Kapitel soll die Beziehung zwischen Philosophie der Mathematik und mathematischer Fachdidaktik beleuchtet werden. Dies erscheint notwendig, da der Vergleich zwischen Literatur aus beiden Disziplinen eher unüblich ist und daher einer Begründung bedarf. Im zweiten Kapitel soll dann Wittgensteins

Philosophie der Mathematik im Allgemeinen skizziert und sein Schreiben über Lehren und Lernen von Mathematik genauer analysiert werden. Der Brückenschlag zur mathematischen Fachdidaktik erfolgt schließlich im Kapitel 4. Dabei werde ich Wittgensteins Sichtweise mit Theorien des „entdeckenden Lernens“ und des „experimentellen Mathematikunterrichts“ vergleichen.

2 Philosophie der Mathematik und mathematische Fachdidaktik

Da es der Anspruch dieser Arbeit ist, Literatur aus der Philosophie der Mathematik einerseits und aus der mathematischen Fachdidaktik andererseits zu vergleichen, müssen in einem ersten Schritt das Verhältnis und die Beziehung dieser beiden wissenschaftlichen Disziplinen beleuchtet werden. Dabei sollen beide Disziplinen definiert und die klassischen Theorien und Schulen darin vorgestellt werden. Dadurch wird es erst möglich sein, Ludwig Wittgensteins Philosophie der Mathematik und sein Schreiben über das Lehren und Lernen von Mathematik in diesen Disziplinen zu verorten.

2.1 Philosophie der Mathematik

2.1.1 Definition

Definitionen der „Philosophie der Mathematik“ nehmen oft die Gestalt einer Aufzählung wichtiger Fragestellungen innerhalb dieser Disziplin an. So schreibt etwa Steward Shapiro im „Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics“

Most of these questions come from general philosophy: matters of ontology, epistemology, and logic. What, if anything, is mathematics about? How is mathematics pursued? Do we know mathematics and, if so, how do we know mathematics? What is the methodology of mathematics, and to what extent is this methodology reliable? What is the proper logic for mathematics? To what extent are the principles of mathematics objective and independent of the mind, language, and social structure of mathematicians? (Shapiro 2007, S.5)

Shapiro definiert die zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik also, indem er die klassischen Fragestellungen der Philosophie auf den Gegenstandsbereich der Mathematik überträgt. Die Philosophie der Mathematik wäre damit keine eigene Disziplin, mit eigenen Fragestellungen und Methoden, sondern Ontologie, Epistemologie, Wissenschaftsphilosophie, die auf die Mathematik angewendet wird. In einer solchen Definition spielen Fragen des Lernens von Mathematik, wenn überhaupt, dann eine marginale Rolle in der Philosophie der Mathematik. Dennoch soll hier versucht werden, herauszuarbeiten, wie die klassischen Theorien in der Philosophie der Mathematik das Lernen von Mathematik beschreiben würden. Damit soll vor allem gezeigt werden, dass die jeweilig vertretene Philosophie der Mathematik nicht unabhängig von einer gewissen Sicht auf beziehungsweise Einstellung zum Lehren und Lernen von Mathematik ist.

2.1.2 Entdecken vs. Erfinden – Klassische Theorien in der Philosophie der Mathematik

Ob und wie Wittgensteins Philosophie der Mathematik in der traditionellen Philosophie der Mathematik genau zu verorten ist, ist eine vieldiskutierte Frage, die im Rahmen dieser Arbeit nicht in einer befriedigenden Art und Weise zu klären ist. Allerdings wird es notwendig sein, einen knappen Überblick über die traditionellen Theorien der Philosophie der Mathematik zu geben und dabei vor allem herauszuarbeiten, wie diese klassischen Theorien das Lehren und Lernen von Mathematik beschreiben und betrachten würden. So wird sich zumindest die Frage beantworten lassen, ob Wittgensteins Ansichten über Unterrichtsvorgänge in der Mathematik in Zusammenhang mit einer klassischen philosophischen Theorie zu betrachten sind, oder aber einen neuen Aspekt in der Philosophie der Mathematik darstellen. Die Einteilung der klassischen Philosophie der Mathematik in „Mathematik als Entdecken“ und „Mathematik als Erfinden“ dient hier vor allem heuristischen Zwecken, lässt sich aber dennoch durch einige Textstellen Wittgensteins, zumindest im Rahmen dieser Arbeit, als legitimiert betrachten.¹

¹ Siehe dazu: BGM I, §168, BGM III, §31

2.1.2.1 Platonismus und Wahrheitswert-Realismus

Die platonistische Position in der Philosophie der Mathematik wird üblicherweise durch eine ontologische Aussage identifiziert, nämlich, dass mathematische Objekte und Gegenstände unabhängig von den geistigen Operationen des Menschen existieren. (Vgl.: Redecker 2006, S.245) Daneben gibt es allerdings auch eine andere, nicht-ontologische, Möglichkeit, den mathematischen Platonismus zu charakterisieren, nämlich die Position, dass man allen wohlformulierten Sätzen der Mathematik eindeutige und objektive Wahrheitswerte zuschreiben kann, die davon unabhängig sind, ob sie von uns gewusst oder bewiesen werden können. (Vgl.: Linnebo 2013) Im Folgenden möchte ich diese schwächere Position „Wahrheitswert-Realismus“ nennen. (Vgl.: Linnebo 2013) Die Frage, die uns im Zusammenhang dieser Arbeit interessiert, ist natürlich: Wie würde eine platonistische Beschreibung des Lehrens und Lernens in der Mathematik aussehen?

Interessanterweise beginnt schon Platon selbst damit, im Dialog Menon, dem - sowohl in Bezug auf Mathematik als auch auf Didaktik - wohl am meisten rezipierten Text Platons, einen Lehr- und Lernprozess zu beschreiben. Philosophische Fragen zur Mathematik standen somit, zumindest für Platon, im Kontext des Lernens von Mathematik, beziehungsweise wurden von ihm in Zusammenhang mit mathematischen Lernerfahrungen erläutert. Insofern zeigt sich, wie wir später sehen werden, eine enge Verbindung von Platons und Wittgensteins Schreiben über Mathematik.

Die genaue Interpretation von Platons Menon soll hier nicht einmal im Ansatz versucht werden. Im Kontext dieser Arbeit ist es allerdings wichtig, darauf hinzuweisen, dass Platon den Lernvorgang des Sklaven ganz eindeutig als ein „Entdecken“ und ganz und gar nicht als ein „Erfinden“ beschreibt. Sokrates möchte Menon ja beweisen, dass der Sklave ganz ohne seinen Unterricht, nur durch die Mäeutik, zu mathematischer Einsicht gelangt, und zwar zu genau derjenigen Einsicht, die als allgemeingültig vorausgesetzt werden kann.

Sokrates: Ohne daß ihn also Jemand lehrt sondern nur ausfragt, wird er wissen, und wird die Erkenntnis nur aus sich selbst hervorgeholt haben (Menon 85 D)

In dieser Sichtweise gibt es keine Erfindung, keine Konstruktion des Schülers/der Schülerin und ein Fehler ist ein Fehler der Einsicht des Lernenden. Im Sinne der Anamnese muss ja jede/r zwangsläufig dieselben Wahrheiten entdecken beziehungsweise erinnern. Dies wird in der Platonrezeption teilweise als Hinweis auf Platons Ideenlehre interpretiert, für unsere Arbeit ist jedoch nur von Belang, dass Platon im Menon direkt oder indirekt eine bestimmte Sicht auf das Lehren und Lernen von Mathematik schildert: Der/Die Schüler/in entdeckt mathematische Begriffe und Sätze ohne Zutun des Lehrers/der Lehrerin. Diese Entdeckung verläuft, wie im Dialog sichtbar, alles andere als zufällig. Vielmehr scheint es gewiss, dass jede/r Schüler/in genau dieselbe mathematische Wahrheit entdecken wird.

Für ontologische Platonist/innen im strengen Sinn kommt daher nur eine Beschreibung des Lernens von Mathematik in Frage: Wenn mathematische Objekte unabhängig von uns existieren, dann ist in keiner Weise Platz für „Erfindung“ im Lernprozess. Vielmehr wird es in irgendeiner Form um ein Erfassen der Eigenschaften dieser abstrakten Objekte gehen. Die Frage an den/die Platonist/in, wie genau dieses Erfassen oder Entdecken vor sich gehen kann, bleibt einer der größten Kritikpunkte an jeder (ontologisch) platonistischen Theorie.² Der/die Platonist/in schuldet uns also auch in Bezug auf das Verständnis vom Lernen von Mathematik als ein Entdecken eine plausible Theorie, wie wir uns auf die abstrakten Objekte der Mathematik beziehen können. (Vgl.: Horsten 2012)

Wie würde aber der (nicht-ontologische) Wahrheitswert-Realismus das Lernen von Mathematik beschreiben? Da hier der Bezug zu abstrakten Entitäten nicht gegeben sein muss, fällt jedenfalls die Notwendigkeit des Bezugs zu der platonistischen Ideenwelt weg. Zumal aber auch für den Realisten/die Realistin die mathematischen Sätze und Tatsachen notwendig und unveränderbar wahr sind, unabhängig vom menschlichen Geist, kann das Beweisen und Lernen dieser Tatsachen auch hier nur als „Entdecken“ beschrieben werden. (Vgl.: Blanchette 2016)

² Paul Benaceraff hat diese Kritik am Platonismus prominent in (Benaceraff 1973) vorgebracht.

2.1.2.2 Formalismus

Der klassische Formalismus in der Philosophie der Mathematik geht auf David Hilbert und seine Axiomatisierung der Geometrie zurück. Hilbert führt die Begriffe „Punkt“, „Gerade“ und „Ebene“ in den „Grundlagen der Geometrie“ (Hallett/Majer 2004) unabhängig von jeglicher Anschauung und Intuition, rein durch ihre Beziehungen untereinander, ein. Durch diese Abbildung eines gesamten Gebiets des Wissens auf ein „Fachwerk von Begriffen“ - samt logischen Ableitungen - erreicht Hilbert, dass die Untersuchung der mathematischen Theorie völlig unabhängig von einer Anwendung auf ein reales (existentes) „System von Dingen“ erfolgen kann. Geometrie ist also nicht mehr eine Beschreibung des physikalischen Raumes, sondern kann, nach dem aus den gewählten Axiomen alle Theoreme abgeleitet worden sind, auf den physikalischen Raum nur *angewendet* werden.

Die Frage nach der Existenz der Entitäten, von denen das formale System handelt, stellt sich hier nicht. Hilbert schreibt in der berühmten Korrespondenz mit Gottlob Frege:

Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definierten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz. (Hilbert 1941, S.17)

Hilberts Formalismus setzt also die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems an die Stelle von Wahrheit der Aussagen und Existenz der mathematischen Objekte. Die Referenz der formalen Zeichen ist für den/die Mathematiker/in in Hilberts Augen also irrelevant. Gödels Unvollständigkeitssatz hat schließlich gezeigt, dass jedes Axiomensystem, das stark genug wäre, um die Arithmetik zu formalisieren, seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Somit war der klassische Formalismus Hilberts in einem entscheidenden Punkt gescheitert. Der Formalismus moderner Prägung lässt sich jedoch, nach Michael Detlefsen, nicht auf einen Standpunkt reduzieren, sondern stellt vielmehr eine Familie verschiedener Standpunkte in demselben Rahmen dar. Er charakterisiert diesen Rahmen durch mehrere Aspekte: die Ablehnung der Teilung der Mathematik in verschiedenen Teilgebiete, die Betonung von

Abstraktion im Gegensatz zur Intuition, die Verteidigung einer nicht-repräsentativen Rolle der Sprache in der Mathematik und die Idee der kreativen Freiheit der Mathematiker/innen. (Vgl.: Detlefsen 2005, S.237)

Die These, dass die philosophische Position des Formalismus nicht nur Konsequenzen für die Betrachtung des Mathematikunterrichts, sondern sogar auf konkrete didaktische Theorien und Bildungsreformen (beispielsweise im Amerika der 60er Jahre) hat, vertritt Reuben Hersh. Wenn die Mathematik, dem Formalismus nach, in erster Linie nichts anderes ist als präzise formale Ableitung aus einem formalen Axiomensystem, dann ist klar, dass sie den Schüler/innen auch so vermittelt und präsentiert werden sollte. So war die Implementierung der mengentheoretischen Notation und Axiomatik für Hersh eine direkte Folge der vorherrschenden formalistischen Doktrin in der Philosophie der Mathematik. (Vgl.: Hersh 1998, S.13)

2.1.2.3 Intuitionismus und Konstruktivismus³

Die meisten Theorien in der Philosophie der Mathematik, die als Konstruktivismus klassifiziert werden, beziehen sich in irgendeiner Form auf L.E.J. Brouwers Intuitionismus. (Vgl.: Brown 2008, S.120) Die mathematische Abstraktion beginnt für Brouwer in einer Ur-Intuition, die unabhängig von jeder empirischen Sinneserfahrung erfolgt. Damit ist natürlich jedes mathematische Wissen a priori gültig. (Vgl.: Posy 2005, S.332) Aus dieser Ur-Intuition werden, wiederum unabhängig von jeder Sinneserfahrung, im individuellen Bewusstsein weitere mathematische Objekte konstruiert. „Existenz“ eines Objekts bedeutet hier nichts anderes als „Konstruierbarkeit“. Vermeintliche mathematische Entitäten, die nicht in Brouwers Sinn konstruiert worden sind, existieren einfach nicht. (Vgl.: Posy 2005, S.333) Dies ist die gemeinsame Grundaussage von allen sogenannten „konstruktivistischen Theorien“ in der Philosophie der

³ Der Terminus „Konstruktivismus“ kommt in dieser Arbeit nicht nur im Rahmen der Philosophie der Mathematik, sondern auch im Kontext der mathematischen Fachdidaktik und der Lerntheorie vor. Die Gemeinsamkeiten dieser verschiedenen „Konstruktivismen“ herauszuarbeiten, wäre sicherlich lohnenswert, kann aber im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen. Deshalb wird im Folgenden immer ganz klar angegeben, in welchem Zusammenhang der Terminus „Konstruktivismus“ gerade verwendet wird.

Mathematik, allerdings unterscheiden sich die jeweilig zulässigen Konstruktionsmethoden. Damit werden nicht-konstruktive Beweismethoden wie indirekte Beweise und die Anwendung des Tertium non datur im Allgemeinen abgelehnt. Brouwers Intuitionen sind dabei nur eine Möglichkeit, die Konstruktion zu begründen. So sind beispielsweise für Brouwer die natürlichen Zahlen durch die Intuition zweifelsfrei gegeben und der einzige akzeptable Teil der Mathematik ist alles von den natürlichen Zahlen „konstruktiv“ Abgeleitete. (Vgl.: Hersh 1998, S.16f.) Der Sprache und der Notation kommt damit in der Mathematik keine wichtige Rolle zu. Damit widersetzt sich Brouwer sowohl dem Platonismus als auch dem Formalismus.

Durch die Ersetzung des Anspruchs von objektiver Wahrheit mathematischer Aussagen zu Gunsten der „Konstruierbarkeit“, in welcher Form auch immer, liegt es konstruktivistischen Philosophien der Mathematik damit nahe, Mathematik als eine menschliche Tätigkeit zu beschreiben:

Mathematics, for Brouwer, is first and foremost an *activity*. Mathematicians do not discover pre-existing things, as the Platonists holds and they do not manipulate symbols, as the formalist holds. Instead, mathematicians make things. It is a languageless activity, just as doing physics or eating lunch. (Brown 2008, S.121)

Diese Betrachtung von Mathematik als Aktivität findet sich auch bei späteren konstruktivistischen Theorien in der Philosophie der Mathematik und eben auch bei Ludwig Wittgenstein wieder.⁴

Wie könnte nun eine konstruktivistische oder intuitionistische Sichtweise des Lehrens und Lernens von Mathematik aussehen? Die konstruktivistische Prämisse macht, wie oben gesehen, Mathematik zu einer menschlichen Aktivität unter vielen anderen. Weiters führt sie nicht zu einem Wahrheitswert-Realismus gegenüber mathematischen Aussagen. Das bedeutet, im Rahmen konstruktivistischer Theorien ist eine Beschreibung des Lernens von Mathematik als ein Erfinden durchaus denkbar. Für Brouwer entspringt beispielsweise jede Mathematik aus einer subjektiven Ur-Intuition, aus der dann

⁴ Interessanterweise ist Wittgenstein gerade durch einen Vortrag Brouwers in Wien zur Wiederaufnahme seiner philosophischen Arbeit über Mathematik angestoßen worden. (Vgl.: Marion 2003, S.103)

komplexere Begriffe gebildet werden. Diese Intuitionen müssten demnach also auch im Unterricht die Basis jegliches Lehrens und Lernens von Mathematik bilden. Das Problem an dieser Position ist allerdings, dass so nicht klar ist, warum das Lernen von Mathematik zu intersubjektiv gleichen Ergebnissen führen sollte. Dieses Problem werden wir später bei Ludwig Wittgenstein wiederfinden, der beispielsweise von Paul Ernest als „sozialer Konstruktivist“ kategorisiert wird. (Vgl.: Ernest 1998, S.135) Die Frage, ob und wie diese Kategorisierung zulässig ist, werden wir auf Basis der vorangehenden Skizzierung der klassischen Philosophie der Mathematik im Kapitel 3 behandeln.

2.2 Mathematische Fachdidaktik

2.2.1 Definition

Das wissenschaftliche Betätigungsfeld, das im Folgenden als „mathematische Fachdidaktik“ bezeichnet werden wird, lässt sich nur schwer als eine einheitliche und klar definierte wissenschaftliche Disziplin skizzieren. Dafür spricht schon allein die Tatsache, dass es keine einheitliche Bezeichnung dieser Wissenschaft gibt; „Mathematische Fachdidaktik“, „Mathematik-didaktik“ und „Didaktik der Mathematik“ finden sich häufig als Begriffe in Studienprogrammen oder als Bezeichnung von Universitäts- oder Forschungsinstituten. Da nun also schon ein einheitlicher Begriff dieser Wissenschaft fehlt, divergieren die Definitionen der mathematischen Fachdidaktik (in dieser Arbeit wird dieser Begriff einheitlich verwendet werden) in noch größerem Ausmaß.

Eine klassische Definition findet sich bei Heinz Griesel. Dieser definiert „Didaktik der Mathematik“ als:

Wissenschaft von der Entwicklung praktikabler Kurse für das Lernen im Bereich der Mathematik sowie der praktischen und empirischen Überprüfung der Kurse einschließlich der Überlegungen zur Zielsetzung der Kurse und der Stoffauswahl. (Griesel 1971, S.296)

In dieser knappen Definition zeigt sich der enge Bezug der mathematischen Fachdidaktik zur Praxis des Mathematikunterrichts. Nach Griesel ist also das vorrangige Verständnis der Fachdidaktik ein konstruktives, eben die Entwicklung von Lehrplänen, Lernmaterialien und Konzepten für den Mathematikunterricht nach wissenschaftlichen Kriterien. Wenn allerdings nun nachgefragt wird, was diese wissenschaftlichen Kriterien sind und wie die Fachdidaktik diese konstruktive Aufgabe erfüllen kann, wird klar, dass hier ein wesentlich breiteres Feld der fachdidaktischen Forschung aufgemacht wird. Die Frage danach, was einen guten Mathematikunterricht, gute Lernmaterialien und Lehrpläne ausmacht, verweist sofort auf verschiedene andere wissenschaftliche Disziplinen wie die Mathematik selbst, die Psychologie, die Pädagogik und die Philosophie. Um dieses weite Tätigkeitsfeld überschaubar zu machen, hat Erich Wittmann vier Dimensionen des Tätigkeitsfelds der mathematischen Fachdidaktik charakterisiert:

- (a) fachliche Dimension (Lernprozesse beziehen sich auf Lerninhalte, deren fachliche Struktur von der Mathematik bestimmt ist);
- (b) pädagogische Dimension (...) (Lernprozesse intendieren übergeordnete Lernziele an Lerninhalten);
- (c) psychologische Dimension (...) (Lernprozesse müssen die Disposition der Lernenden berücksichtigen);
- (d) konstruktive Dimension (Planung und praktischer Vollzug des Unterrichts erfordern mündige und handwerkliche gekonnte Entscheidungen, in die mathematische, pädagogische und psychologische Faktoren eingehen).
(Wittmann 1974, S.2)

In Bezug auf diese Dimensionen arbeitet die mathematische Fachdidaktik nach Wittmann integrativ, das heißt, sie versucht sämtliche Dimensionen des Tätigkeitsfeldes in ein kohärentes System zu bringen. (Vgl.: Wittmann 1974, S.3) In diesem Sinne verbindet die Fachdidaktik also Resultate und Methoden aus anderen Wissenschaften und bezieht diese in ihre Tätigkeit ein. Zu diesen Wissenschaften zählt Wittmann auch die „Geschichte und Erkenntnistheorie der Mathematik“ und somit indirekt auch die Philosophie. (Vgl.: ebenda)

Fischer und Malle wiederum definieren die „Didaktik der Mathematik“ wesentlich allgemeiner:

Didaktik der Mathematik ist für uns die Beschäftigung mit dem Verhältnis zwischen der Mathematik einerseits und dem Menschen, der Gesellschaft andererseits. Sie umfaßt alle Fragen der Kommunikation über die Mathematik und in der Mathematik. Sie führt zu neuen Erkenntnissen über Mathematik, über Wissenschaft allgemein, über die Gesellschaft und über den Menschen. (Fischer/Malle 1985, S.8)

In dieser Definition wird der enge Bezug der Fachdidaktik auf den Unterricht scheinbar komplett aufgelöst und der Gegenstand der mathematischen Fachdidaktik auf alle Berührungspunkte von Mathematik und Gesellschaft ausgedehnt. Jedoch bezieht sich die große Mehrzahl der Kapitel in (Fischer/Malle 1985) dennoch auf den Mathematikunterricht. Im Rahmen dieser Arbeit ist an dieser Definition vor allem interessant, dass das Verhältnis der Mathematik zu Mensch und Gesellschaft als zentraler Gegenstand der Fachdidaktik definiert wird. Dieses Verhältnis schließt natürlich, so Fischer und Malle, die Fragen der Entstehung der Mathematik, ihrer Anwendung und ihrer Grundlegung ein. (Vgl.: Fischer/Malle 1985, S.31) Nach dieser Definition sind also philosophische Theorien und Ansichten, die sich mit genau diesem Verhältnis beschäftigen, wenn nicht gar als Teil der mathematischen Fachdidaktik, so zumindest als wichtiger Bezugspunkt derselben, zu betrachten.

Wir sehen also, dass die mathematische Fachdidaktik in verschiedenen Definitionen (bei Wittmann und Fischer/Malle) als sehr offene Disziplin definiert wird, welche aufgrund ihres Aufgabenfeldes immer auch auf andere Wissenschaften verwiesen ist. Die Philosophie wird dabei, wenn nicht an erster Stelle, so zumindest indirekt als Bezugspunkt genannt. Dieses Verhältnis von Philosophie und mathematischer Fachdidaktik soll nun genauer skizziert werden.

2.2.2 Philosophische Einflüsse auf Unterricht und Fachdidaktik

Zunächst soll kurz die Frage untersucht werden, ob die Philosophie der Mathematik, beziehungsweise philosophische Überzeugungen und Ansichten über Mathematik, einen Einfluss auf den Mathematikunterricht haben können. Es erscheint zumindest plausibel, dass Überzeugungen wie „Zahlen existieren wirklich“ oder „Mathematik ist vom Menschen erfunden“, welche in jedem Fall zumindest einen philosophischen Hintergrund besitzen, eine Auswirkung auf die Art und Weise, wie Mathematik unterrichtet wird haben. Zu dieser Frage findet sich allerdings eine Vielzahl an empirischen Studien, die versuchen, genau diesen Einfluss von individuellen Einstellungen und Ansichten gegenüber der Mathematik auf den Unterricht, sowohl auf Lehrer/innen- als auch auf Schüler/innenseite, zu messen. Grigutsch, Raatz und Törner führten 1994 eine groß angelegte Studie unter Mathematiklehrer/innen durch, bei der deren Einstellungen gegenüber der Mathematik kategorisiert wurden. Dabei unterscheiden sie zwei antagonistische Leitvorstellungen von „Mathematik als Schema“ einerseits und „Mathematik als Prozeß“ andererseits.

Die grundsätzlichen Leitvorstellungen über Mathematik und damit auch die übergeordneten Grundüberzeugungen ('Philosophien') für den Mathematikunterricht sind die Positionen, daß Mathematik in vereinfachter Form in statischer Sicht als System oder in dynamischer Sicht als Prozeß bzw. als Tätigkeit aufgefaßt werden kann. (Grigutsch/Raatz/Törner 1998, S.11)

Im Rahmen unserer Arbeit ist hier vor allem interessant, dass diese beiden Leitvorstellungen zwar nicht als genuin philosophische Ansichten, im Sinne von Philosophie als Wissenschaft, bezeichnet werden können, aber dennoch ein starker Zusammenhang zu klassischen Grundrichtungen in der Philosophie der Mathematik besteht. „Mathematik als System“ scheint direkt auf Formalismus und Platonismus zu verweisen, während „Mathematik als Prozeß“ dem Konstruktivismus und eben Wittgensteins Philosophie der Mathematik nahe zu stehen scheint. Dass die Einstellungen gegenüber der Mathematik und dem Lernen von Mathematik das Handeln von Lehrer/innen beeinflussen und sogar einen Einfluss auf die Leistung der Lernenden haben, wurde in zahlreichen Studien untersucht und empirisch belegt. (Vgl.: Staub/Stern 2002, Stipek 2001)

Die Frage danach, ob die Philosophie der Mathematik einen starken Einfluss auf die wissenschaftliche Disziplin der mathematischen Fachdidaktik hat, lässt sich hingegen wohl am besten mit einem Blick auf entsprechende Fachliteratur beantworten. Der Mathematiker und Fields-Medaillen-Träger René Thom vertritt diesbezüglich eine eher radikale Ansicht:

Tatsächlich beruht nun, ob man es wahrhaben will oder nicht, alle mathematische Pädagogik (...) auf einer Philosophie der Mathematik. (Otte 1974, S.5)

Diese etwas plakative Aussage lässt natürlich offen, in welchem Sinn, philosophische Ansichten über Mathematik die jeweilige Pädagogik begründen. Der Didaktiker Michael Otte nennt in Anknüpfung an das obige Zitat ein paar grundlegende Fragen, in denen die mathematische Fachdidaktik auf die Philosophie verwiesen sei:

Einer „Philosophie der Mathematik“ im Thomschen Sinne bedarf die Mathematikdidaktik in einer Reihe grundlegender Fragen: Da sind die Fragen nach dem Verhältnis von mathematischer Abstraktion und Erfahrung, da sind die Schwierigkeiten, die (...) für die Problematik einer produktiven Aneignung mathematischer Begriffe und Methoden unmittelbar Bedeutung haben; da sind die komplexen Beziehungen zwischen Mathematik und ihren Anwendungen in der gesellschaftlichen Praxis, die in vielfältiger Form im Rahmen der Diskussion um Inhalt und Aufbau eines Mathematikcurriculums und seine Integration in den Gesamtunterricht eine Rolle spielen; da ist schließlich das Problem des Wechselverhältnisses des theoretischen Systems der Mathematik auf der einen, der Inhalte und Methoden des Mathematikunterrichts auf der anderen Seite. (Otte 1974, S.6f.)

Eine etwas spezifischere Argumentation für einen starken Zusammenhang von Philosophie, beziehungsweise philosophischen Ansichten oder Überzeugungen, und Fachdidaktik liefert Willibald Dörfler. Es sind hier, so Dörfler, vor allem spezifische Überzeugungen darüber, wie sich die Bedeutung von mathematischen Begriffen konstituiert, sowie Überzeugungen über die Mathematik als Wissenschaft und darüber, wie das Verstehen von mathematischen Begriffen und Inhalten funktioniert, die einen Einfluss auf den Mathematikunterricht und die mathematische Fachdidaktik haben.

Ein globales und wie selbstverständlich akzeptiertes Ziel jedes Mathematikunterrichts ist Verständnis auf Seite der Lernenden, was oft gleichgesetzt wird mit dem Erfassen von Sinn und Bedeutung der mathematischen Inhalte. Und darin liegt auch schon eine gravierende Problematik, denn auf die Frage nach Sinn und Bedeutung gibt es viele verschiedene und durchaus einander widersprechende Antworten und allgemeinere Positionen, die sich auch historisch und gesellschaftlich immer wieder verändern und entwickeln, natürlich auch im Zusammenhang mit Entwicklungen in der Mathematik als Wissenschaft. (Dörfler 2013, S.73)

Nach Dörfler spielen also Sinn, Bedeutung und Verständnis von mathematischen Begriffen eine tragende Rolle für den Mathematikunterricht und damit auch für die mathematische Fachdidaktik. Da aber andererseits Sinn und Bedeutung von mathematischen Begriffen und damit auch Wahrheit von mathematischen Sätzen, wie oben gesehen, schon per definitionem zu den Kernthemen der Philosophie der Mathematik zu rechnen sind, ist die mathematische Fachdidaktik zumindest an dieser zentralen Stelle auf die Philosophie der Mathematik verwiesen. Wenn philosophische Theorien und Ansichten auch nicht im Zentrum der fachdidaktischen Literatur stehen müssen, so kann andererseits aber auch eine Ignoranz philosophischer Literatur nicht gerechtfertigt werden. Reuben Hersh formuliert dies folgendermaßen:

The problems of truth and meaning are not technical issues in some recondite branch of logic or set theory. They confront anyone who uses or teaches mathematics. If we wish, we can ignore them. To do so, however, is to leave oneself the prisoner of one's unexamined philosophical preconceptions. It would be surprising if this had no practical consequences. (Hersh 1998, S.12)

Die „philosophischen Vorurteile“ von Lehrer/innen und Fachdidaktiker/innen müssen natürlich nicht einer ausgefeilten philosophischen Theorie entsprechen, allerdings wäre es verwunderlich, wenn diese nicht generell kategorisiert werden könnten nach den oben geschilderten klassischen Theorien in der Philosophie der Mathematik. Insofern kann eine Betrachtung von philosophischen Theorien in Bezug auf den Mathematikunterricht, wie sie in dieser Arbeit angestrebt wird, dazu beitragen, diese philosophischen Vorannahmen herauszufordern und zu reflektieren.

2.3 Wechselwirkung von Philosophie, Unterricht und Didaktik der Mathematik

Als erstes Zwischenfazit dieser Arbeit, und als Vorbereitung für die genauere Betrachtung von Wittgensteins Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik, können wir also festhalten, dass Philosophie, Unterricht und Didaktik der Mathematik in einer wechselseitigen Beziehung zueinander stehen. Zunächst haben wir gesehen, dass die Ansichten zum Mathematikunterricht einerseits explizit in philosophischen Texten auftreten und, dass es andererseits zumindest möglich ist, zu den klassischen Theorien in der Philosophie der Mathematik eine entsprechende Sichtweise des Mathematikunterrichts zu skizzieren.

Weiters wurde auf Basis empirischer Studien argumentiert, dass die philosophischen Überzeugungen und Ansichten gegenüber der Mathematik, die auf Lehrer/innen- und Schüler/innenseite vorliegen, einen messbaren Effekt auf die Art und Weise des Mathematikunterrichts haben. Und schließlich zeigen auch vielfältige Beispiele aus der mathematischen Fachdidaktik, dass klassische und moderne Positionen in der Philosophie der Mathematik fachdidaktisch rezipiert und verwendet werden. Eine prägnante Zusammenfassung dieser wechselseitigen Beziehungen findet sich bei Reuben Hersh:

What's the connection between philosophy of mathematics and teaching of mathematics? Each influences the other. The teaching of mathematics *should* affect the philosophy of mathematics, in the sense that philosophy of mathematics must be compatible with the fact that mathematics can be taught. (...) In the other direction, the philosophy of mathematics held by the teacher can't help but effect her teaching. The student takes in the teacher's philosophy through her ears and the textbook's philosophy through her eyes. (Hersh 1997, 237f.)

Natürlich ergeben sich in Bezug auf diesen Zusammenhang weitere äußerst interessante Fragen. So beantwortet Hersh an dieser Stelle die Frage danach, welche Philosophie der Mathematik den Mathematikunterricht am meisten berücksichtigt, ganz klar gegen Platonismus und Formalismus und für eine

konstruktivistische Sichtweise. Die Ersteren würden die Lehrbarkeit einerseits ignorieren beziehungsweise verdunkeln und andererseits würde der Platonismus es argumentierbar machen, dass manche Menschen einfach keinen Zugang zur Mathematik finden können. (Vgl.: ebenda) Diese Neigung zu einer konstruktivistischen Philosophie der Mathematik teilen viele Didaktiker/innen wie auch Paul Ernest (Vgl.: Ernest 1998). Da sich diese Arbeit ab dem nächsten Kapitel allerdings nur mehr mit Ludwig Wittgenstein beschäftigen wird, ist diese Frage für uns nicht relevant. Es wird vielmehr darum gehen, Wittgenstein in diesem Spannungsfeld von Philosophie, Unterricht und Didaktik der Mathematik zu verorten und die spezifische Rolle seiner Philosophie der Mathematik herauszuarbeiten.

In jedem Fall können wir den Vorwurf ausschlagen, dass es sich bei Didaktik und Philosophie der Mathematik um zwei inkompatible wissenschaftliche Disziplinen handelt. Insofern kann die Absicht dieser Arbeit, nämlich mögliche Implikationen von Wittgensteins Philosophie der Mathematik für die mathematische Fachdidaktik, und den Mathematikunterricht selbst, zu untersuchen, als legitimiert betrachtet werden.

3 Wittgensteins Philosophie der Mathematik

3.1 Die Rolle des Lehrens und Lernens in Wittgensteins Spätphilosophie

Die nächstliegende Methode, um die Frage dieser Arbeit, nämlich welche Implikationen Wittgensteins Philosophie der Mathematik für Unterricht und Fachdidaktik haben kann, zu beantworten, wäre es natürlich, zunächst einmal Wittgensteins Philosophie der Mathematik in ihren Grundsätzen zu schildern und anschließend, analog zu den traditionellen Strömungen in der Philosophie der Mathematik in Kapitel 2, ein entsprechendes Bild des Mathematikunterrichts zu entwerfen. Wittgenstein zieht aber die Lehrbarkeit von Sprache und Mathematik nicht nur in Betracht, für ihn sind vielmehr Lehr- und Lernsituationen ein integraler Bestandteil seiner philosophischen

Argumentation. So finden sich in den „Philosophischen Untersuchungen“ (PU) schon in §1, aber auch an vielen weiteren Stellen, Schilderungen von Unterrichtssituationen. Dasselbe Bild ergibt sich in den „Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik“ (BGM) und ganz allgemein in Wittgensteins Texten. Diese Beschreibungen können also durchaus als eine grundlegende philosophische Methode Wittgensteins angesehen werden. Es ist demnach gar nicht möglich, Wittgensteins Philosophie der Mathematik zunächst einmal in Grundzügen zu schildern, um dann anschließend ihre Implikationen für das Lehren und Lernen von Mathematik zu untersuchen, weil er selbst seine philosophische Sichtweise schon durch die Beschreibung von Unterrichtssituationen darlegt und argumentiert. Deshalb ist es notwendig, Wittgensteins Philosophie der Mathematik entlang seiner Beschreibungen dieser Lehr- und Lernsituationen zu skizzieren. Dabei soll argumentiert werden, dass Wittgenstein ein bestimmtes Bild des Mathematikunterrichts beschreibt, welches eigentlich nicht als Folge seiner Philosophie der Mathematik, sondern vielmehr als deren Grundlage zu betrachten ist. Im nächsten Kapitel soll dieses Bild dann mit anderen Strömungen in der mathematischen Fachdidaktik verglichen werden.

3.2 Sprachspiele und Regelfolgen

Die beiden Grundbegriffe „Sprachspiel“ und „Regelfolgen“ bilden den Ausgangspunkt für unsere Betrachtung von Wittgensteins Philosophie der Mathematik und des Mathematiklernens. Dieses Vorgehen erscheint vor allem deshalb sinnvoll, weil Wittgenstein selbst in den PU im Rahmen der Philosophie der Mathematik die Einführung dieser Begriffe durch Beschreibungen von Lernsituationen vornimmt. Wir sehen hier also einerseits die oben beschriebene Methode Wittgensteins in Aktion und können erste Rückschlüsse darauf ziehen, wie Wittgenstein Lernprozesse im Allgemeinen beschreibt. Weiters stehen diese beiden Begriffe für das neue Bild von Sprache, das Wittgenstein in seinem Spätwerk vertritt. Dieses neue Bild hat auch Auswirkungen auf seine Sichtweise von Mathematik. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.15)

3.1.1 Sprachspiele beim Lernen von Sprache

Eine bestimmte Beschreibung des Lernens von Sprache dient Wittgenstein schon im §1 der „Philosophischen Untersuchungen“ (PU) als Beispiel, um seine neue Sprachphilosophie zu erläutern und sich von den Ansichten über Sprache aus dem Tractatus logico-philosophicus (TLP) abzugrenzen. Er zitiert dabei Augustinus, der sein eigenes Erlernen von Sprache als Nachahmung der Namen für die Gegenstände durch das Kind beschreibt. Wittgenstein hebt bei dieser Beschreibung des Spracherwerbs an und klassifiziert sie als die Beschreibung einer „primitiven Sprache“, die allerdings als Modell dafür dienen kann, wie Sprache funktioniert. (Vgl.: PU, §2) Er konstruiert nun ein eigenes Modell einer primitiven Sprache:

Denken wir uns eine Sprache, für die die Beschreibung, wie Augustinus sie gegeben hat, stimmt: Die Sprache soll der Verständigung eines Bauenden A mit einem Gehilfen B dienen. A führt einen Bau auf aus Bausteinen; es sind Würfel, Säulen, Platten und Balken vorhanden. B hat ihm die Bausteine zuzureichen, und zwar nach der Reihe, wie A sie braucht. Zu dem Zweck bedienen sie sich einer Sprache, bestehend aus den Wörtern: »Würfel«, »Säule«, »Platte«, »Balken«. A ruft sie aus; -B bringt den Stein, den er gelernt hat, auf diesen Ruf zu bringen. - Fasse dies als vollständige primitive Sprache auf. (PU, §2)

Dies ist die erste exemplarische Beschreibung eines „Sprachspiels“ im Sinne Wittgensteins Spätphilosophie. Sprachspiele haben also zunächst einmal eine heuristische Funktion: Sie zeigen modellhaft, wie wichtig der Kontext einer sprachlichen Äußerung bei der Konstitution seiner Bedeutung ist. (Vgl.: Schulte 1989, S.138) Allerdings spielt das Konzept des Sprachspiels in Wittgensteins Philosophie der Mathematik eine weitaus bedeutendere Rolle als die des Modells. Im Hinblick auf die Fragestellung dieser Arbeit ist vor allem hervorzuheben, dass Wittgensteins Erläuterungen zu Sprachspielen nicht nur eng mit der Beschreibung des Spracherwerbs verknüpft sind, sondern, dass Wittgenstein anscheinend tatsächlich der Ansicht ist, dass Kinder Sprache mittels solcher Sprachspiele erlernen. Das legt zumindest die folgende Passage nahe:

Kinder lernen ihre Muttersprache mittels solcher Sprachspiele, und hier haben sie vielfach den unterhaltenden Charakter des Spiels. (BrB, S.21)

Dies erlaubt uns, im Hinblick auf das Erlernen von Sprache zunächst einmal den Schluss zu ziehen, dass Sprachspiele darin eine zentrale Rolle spielen und somit die genaue Analyse dieses Konzepts aufschlussreich für Wittgensteins Ansichten zu Lernprozessen im Allgemeinen, also auch in der Mathematik, sein muss. Auch in den PU zeigt sich diese Verknüpfung des Sprachspiels aus §2 und dem Lernen von Sprache erneut:

Solche primitiven Formen der Sprache verwendet das Kind, wenn es sprechen lernt. Das Lehren der Sprache ist hier kein Erklären, sondern ein Abrichten. (PU, §5)

Wittgenstein verwendet hier den Begriff der Abrichtung, um zu betonen, dass Kinder zu Beginn des Lernens von Sprache zunächst einmal unhinterfragt lernen. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.18) Denn, falls die Bedeutung von sprachlichen Ausdrücken wirklich durch Erklären gelernt werden sollte, so müssten die lernenden Kinder schon eine Sprache beherrschen, um diese Erklärungen zu verstehen. Erklärungen erfolgen immer schon sprachlich, insofern muss das erste Erlernen von Sprache ohne Erklärungen auskommen. Es ist vielmehr ein Einüben in eine Praxis, in den Gebrauch der Sprache.

Dieses „Einüben in eine Praxis“ wird von Wittgenstein als Abrichten beschrieben, weil das Kind diese Praxis zunächst nicht hinterfragen oder begründen kann. Es kopiert Verhaltensweisen und lernt so auf gewisse Vorgaben zu reagieren. So schreibt Wittgenstein:

Wir könnten uns vorstellen, daß die Sprache im § 2 die ganze Sprache des A und B ist; ja, die ganze Sprache eines Volksstamms. Die Kinder werden dazu erzogen, diese Tätigkeiten zu verrichten, diese Wörter dabei zu gebrauchen, und so auf die Worte des Anderen zu reagieren. Ein wichtiger Teil der Abrichtung wird darin bestehen, daß der Lehrende auf die Gegenstände weist, die Aufmerksamkeit des Kindes auf sie lenkt, und dabei ein Wort ausspricht; z. B. das Wort »Platte« beim Vorzeigen dieser Form. (Dies will ich nicht »hinweisende Erklärung«, oder »Definition«, nennen, weil ja das Kind noch nicht nach der Benennung fragen kann. Ich will es »hinweisendes Lehren der Wörter« nennen. - Ich sage, es wird

einen wichtigen Teil der Abrichtung bilden, weil es bei Menschen so der Fall ist; nicht, weil es sich nicht anders vorstellen ließe.) (PU, §6)

Wir sehen hier wiederum, dass Wittgenstein davon ausgeht, dass dieses hinweisende Lehren der Wörter beim Spracherwerb von Kindern tatsächlich auftritt. Es stellt sich also nicht die (pädagogische) Frage, wie man Kindern Sprache beibringen sollte, es geht vielmehr darum, wie die Philosophie einen solchen Vorgang beschreiben sollte. Und Wittgenstein macht unmissverständlich klar: Dieser Vorgang kann nicht als „Erklärung“ oder als „Definition“ der Wörter beschrieben werden, da diese ja den Erwerb von Sprache schon voraussetzen. Das „hinweisende Lehren der Wörter“ kann also nur als eine Erziehung zu bestimmten Verhaltensweisen, bestimmten Gebrauchsarten dieser Wörter und bestimmten Reaktionen auf sprachliche Signale beschrieben werden. Und, um einen Gegenpol zu dem Narrativ des „Erklärens“ zu setzen, wählt Wittgenstein das Wort „Abrichtung“. Da dieses Wort in der modernen Pädagogik nicht besonders positiv konnotiert ist, soll hier noch einmal angemerkt werden, dass es Wittgenstein hier nicht um pädagogische Methoden geht, sondern um die philosophische Beschreibung von bestimmten Lernvorgängen. Diese Vorgänge des unhinterfragten Vormachens und Nachahmens treten, so viel kann wohl nicht bezweifelt werden, in einer Vielzahl von Lehr- und Lernsituationen auf, insbesondere im Mathematikunterricht, wie wir später sehen werden. Durch die Beschreibung als „Abrichtung“ wird klar, dass das Kind dabei in eine soziale Praxis eingeübt wird, die es zunächst einmal nicht in Frage stellen kann. Es gibt hier kein sinnvolles „Warum?“. (Schulte 1989, S.143f.) Eine naheliegende Frage, die sich auch beim Lernen von Mathematik wiederfinden wird, ist dann allerdings: Was bedeutet es in diesem Zusammenhang etwas zu verstehen? Dazu schreibt Wittgenstein:

Wenn aber das das hinweisende Lehren bewirkt, - soll ich sagen, es bewirkt das Verstehen des Worts? Versteht nicht der den Ruf »Platte!«, der so und so nach ihm handelt? - Aber dies half wohl das hinweisende Lehren herbeiführen; aber doch nur zusammen mit einem bestimmten Unterricht. Mit einem anderen Unterricht hätte dasselbe hinweisende Lehren dieser Wörter ein ganz anderes Verständnis bewirkt. (PU, §6)

In dieser Textstelle findet sich eine wiederkehrende Frage in Wittgensteins Beschreibungen von Lernprozessen, nämlich, wann beim „Lernen als Abrichten“ davon gesprochen werden kann, dass das Kind die Bedeutung des Wortes „verstanden“ hätte? Verstehen äußert sich darin, dass das Kind auf den Ruf nach den Erwartungen des Lehrers/der Lehrerin reagiert. Eine „tiefere“ Begründung des Verstehens kann es bei diesen Lernprozessen für Wittgenstein nicht geben. Die Lehrperson kann die Verhaltensweisen des/der Lernenden nur als korrekt oder als unkorrekt klassifizieren, nicht aber tiefer in das Erlernen von Sprache eingreifen, da ja jede Erklärung schon das Verstehen von Sprache voraussetzen würde. (Vgl.: Giesinger 2008, S.6) Dieses Problematisieren des Verstehens beim Erlernen von Sprache, und in weiterer Folge auch beim Erlernen von Mathematik, ist eine, wenn nicht sogar die zentrale, charakteristische Eigenschaft von Wittgensteins Schreiben über Lernprozesse. Wittgensteins Grundfrage könnte hier folgendermaßen formuliert werden: Wie ist Verstehen überhaupt möglich? Und daran anknüpfend: Wie hängen Verständnis und Verhalten zusammen? In diesem Zusammenhang spielen dann die Begriffe der „Regeln“ und des „Regelfolgens“ eine Rolle.

Ein wichtiger Aspekt des Sprachspielbegriffs ist, dass sich Wittgenstein damit von einem bestimmten Bild von Sprache abgrenzen möchte, welches ein einheitliches „Wesen“ der Sprache festmacht. Darunter fallen alle Vorstellungen einer fixen Sprache-Gegenstands-Beziehung, die Wittgenstein selber noch im *Tractatus logico-philosophicus* vertreten hat. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S. 15) Die verschiedenen Verwendungsweisen und Aufgaben von Sprache lassen sich nach Wittgenstein nicht in einer Theorie vereinheitlichen. Vielmehr zerfällt die Sprache in verschiedene „Sprachspiele“ mit je eigenen Regeln, Aufgaben und Konventionen. Der Versuch in den verschiedenen Verwendungsweisen von Sprache, also in den verschiedenen Sprachspielen, nach Gemeinsamkeiten zu suchen, um so doch noch zu einer einheitlichen Definition von Sprache zu gelangen, muss nach Wittgenstein fehlgehen. (Vgl.: Schulte 1989, S.150) Der Begriff „Sprachspiel“ selbst zeigt, dass dieses Unterfangen nicht zum erwünschten Ziel führen kann. Es ist nämlich, so Wittgenstein, gar nicht möglich zu definieren, was ein „Spiel“ ist, denn wir sehen keine grundlegenden gemeinsamen Eigenschaften, die alle Spiele teilen, sondern ein „kompliziertes

Netz von Ähnlichkeiten, die einander übergreifen und kreuzen“. (PU, §66) Dieses Netz nennt Wittgenstein an dieser Stelle „Familienähnlichkeiten“ und vergleicht es mit den Ähnlichkeiten verschiedener Mitglieder einer großen Familie. Dieser Begriff der Familienähnlichkeiten ist nach Schulte ein Punkt, an dem Wittgenstein „mit dem größten Teil der philosophischen Tradition bricht“. (Schulte 1989, S. 151) Es ist nämlich damit, und das wird sich auch in seiner Philosophie der Mathematik widerspiegeln, nicht mehr möglich, einen Begriff dadurch zu definieren, dass man die notwendigen Eigenschaften anführt, die ein Gegenstand erfüllen muss, um unter diesen Begriff zu fallen. Es ist vielmehr dieses komplexe Netz an verschiedenen Verwendungsweisen des Begriffs, und ihrer „Familienähnlichkeiten“, welches die Bedeutung des Begriffs konstituiert. Insofern fallen für Wittgenstein der Gebrauch und die Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks zusammen: *„Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache.“* (PU, §43) Derselbe sprachliche Ausdruck kann also auf verschiedene Art und Weise (in verschiedenen Sprachspielen) gebraucht werden und somit auch jeweils unterschiedliche Bedeutungen haben. (Vgl.: Ramharter/Weiber 2006, S. 17)

Ein naheliegender Vorwurf gegen diese Verknüpfung von Bedeutung und Gebrauch eines Wortes wäre, zu behaupten, dass somit die Bedeutung eines Wortes kompletter Beliebigkeit ausgesetzt wäre. Jede/r könnte sein/ihr eigenes Sprachspiel konstruieren und das Wort damit mit einer neuen Bedeutung versehen, wie er/sie es gerade für richtig hält. Gerade bei der Entgegnung zu diesem Einwand zeigt sich noch einmal die Raffinesse des „Sprachspiel“-Begriffs. Spiele setzen nämlich meistens einen von einer Gruppe an Mitspieler/innen geteilten und akzeptierten Satz von Spielregeln voraus und sind damit in keiner Weise ein Ort der Willkür oder Beliebigkeit. Die „Strenge“ und „Härte“ der Regeln variiert natürlich von Spiel zu Spiel, aber ein einseitiges Abweichen davon zerstört das jeweilige Spiel und schließt den „Abweicher“ gewissermaßen aus. Damit zeigt sich wiederum, wie schon beim Lernen als Abrichten, die Bedeutung der Begriffe „Regel“ und „Regelfolgen“ in Wittgensteins Sprachphilosophie.

3.1.2 Regelfolgen

Wie oben geschildert, liegt für Wittgenstein die Bedeutung eines sprachlichen Ausdrucks in seiner tatsächlichen Verwendung und diese ist nach Wittgenstein zentral durch Regeln bestimmt. Genau darauf möchte Wittgenstein mit seiner Konzeption des Sprachspiels hinweisen: Genau wie bei Spielen aller Art ist es bei der Verwendung von Zeichen und Ausdrücken relevant, nach welchen Regeln wir diese verwenden. Insofern, so schreibt Felix Mühlhölzer, können wir anstatt vom Verstehen eines sprachlichen Ausdrucks, „etwas allgemeiner, vom Verstehen einer Regel sprechen, denn die Verwendung des Ausdrucks ist ja sprachlich geregelt, und Wittgenstein fragt dann nach dem Zusammenhang von Verstehen einer Regel und deren Verwendung“. (Mühlhölzer 2010, S.41) In der Behandlung dieser Frage entwirft Wittgenstein das berühmte „Problem des Regelfolgens“, indem er eine „unüberbrückbare Kluft zwischen Regel und Anwendung“ (Vgl.: PB §164) konstatiert. Interessanterweise tritt diese Formulierung das erste Mal in einem Kontext (PB §164 und WWK S.152-158) auf, in dem Wittgenstein genuin mathematische Probleme und Beweise bespricht. Erst später wird er das Problem des Regelfolgens in den Philosophischen Untersuchungen auch auf das Lernen von sprachlichen Ausdrücken anwenden. Insofern scheint es, dass Wittgenstein das Problem des Regelfolgens als genuines Problem der Mathematik angesehen hat.

Worin besteht nun die „unüberbrückbare Kluft“ zwischen dem Verstehen und dem Anwenden einer Regel? Nach Mühlhölzer ist es einerseits die Tatsache, dass das Verstehen als endlicher, abgeschlossener geistiger Zustand erscheint, während die Anwendungen aus potentiell unendlich vielen Einzelhandlungen bestehen. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.41) Andererseits meint Wittgenstein mit dieser „Kluft“ aber auch, dass nicht klar ist, wie das Verstehen einer Regel bestimmen kann, was eine „richtige“ und was eine „falsche“ Anwendung der Regel ist. Also die Frage, wie das Verstehen die Verwendungen der Regel bestimmt. (Vgl.: ebenda, S.42) Zur Klärung dieser Frage verwendet Wittgenstein in den PU wieder einmal eine genaue Beschreibung eines Unterrichtsvorgangs:

Betrachten wir nun diese Art von Sprachspiel: B soll auf den Befehl des A Reihen von Zeichen niederschreiben nach einem bestimmten Bildungsgesetz. Die erste dieser Reihen soll die sein der natürlichen Zahlen im Dezimalsystem. - Wie lernt er dieses System verstehen? (PU §143)

Nun beschreibt Wittgenstein, wie die Lehrperson A die Folge der natürlichen Zahlen von 0 bis 9 an die Tafel schreibt und den Schüler B auffordert, dies zu kopieren. Vielleicht, so Wittgenstein, führt er ihm zunächst dabei sogar die Hand und anschließend muss der Schüler die Folge eigenständig reproduzieren. Falls der Schüler dabei einen Fehler macht, wird er vom Lehrer korrigiert.⁵

Der Schüler schreibe nun die Reihe 0 bis 9 zu unsrer Zufriedenheit. - Und dies wird nur der Fall sein, wenn ihm dies *oft* gelingt, nicht, wenn er es einmal unter hundert Versuchen richtig macht. (...) Aber nehmen wir nun an, er setzt, nach einigen Bemühungen des Lehrers, die Reihe richtig fort, d. h. so, wie wir es tun. Nun können wir also sagen: er beherrscht das System. - Aber wie weit muß er die Reihe richtig fortsetzen, damit wir das mit Recht sagen können? Es ist klar: du kannst hier keine Begrenzung angeben. (PU §145)

Der Schüler B lernt das System der Folge der natürlichen Zahlen also zu verstehen, indem er vom Lehrer in das Fortsetzen dieser Folge eingeübt wird. Es wird nicht erklärt, nicht definiert und nicht diskutiert, sondern der Schüler schreibt die Folge nach und der Lehrer korrigiert ihn dabei. Ramharter und Weiberg beschrieben dieses Beispiel folgendermaßen: „Es geht dabei nicht um ein Erklären, Diskutieren, und Hinterfragen, sondern um ein unhinterfragtes Annehmen und Auswendiglernen des Vorgegebenen.“ (Ramharter/Weiberg 2006, S.42) Das Kriterium dafür, dass der Schüler das System der Folge der natürlichen Zahlen verstanden hat, besteht also einzig und allein darin, dass dem Schüler die Reproduktion ohne Fehler gelingt. Auch in diesem mathematischen Kontext findet sich also das Moment des „Abrichtens“ wie schon im Beispiel des Sprachspiels aus Kapitel 3.1. In beiden Beispielen zeigt sich Wittgensteins spezifische Ansicht über die

⁵ Mit dem hier ausgelassenen Zwischenteil dieser Passage werden wir uns im Kapitel 3.3.2 ausführlicher beschäftigen.

Bedeutung von „Verstehen“: Jemand versteht einen sprachlichen oder mathematischen Ausdruck, wenn er/sie ihn in hinreichend vielen Fällen korrekt anwenden kann. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.43) Darüber hinaus gibt es für Wittgenstein keine „tiefere“ Bedeutung von Verstehen. Wenn wir jemanden Verstehen zusprechen, dann geht es nicht um irgendeinen „inneren“ Vorgang oder Zustand, es geht einzig und allein darum, ob die Person das erwartete Verhalten an den Tag legt oder nicht. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.43) Folgt man Wittgensteins Logik hier, so kann auch keine neurowissenschaftliche Studie darüber, wie menschliches Verstehen funktioniert, irgendeine Bedeutung für das Problem des Regelfolgens besitzen. Das Verstehen der Regel bleibt gewissermaßen eine „Blackbox“, da nur vom beobachteten Verhalten des/der Schüler/in auf sein/ihr Verständnis geschlossen werden kann.⁶ Wie oft der/die Schüler/in dieses Verhalten beweisen muss, dafür kann natürlich „keine Begrenzung gegeben werden“. Sollte er/sie irgendwann beginnen, wie es ja im Schulunterricht des Öfteren der Fall ist, die Folge wiederholt falsch zu reproduzieren, so wird ihm/ihr das Verständnis dieses Systems wohl wieder abgesprochen werden.

Damit zeigt sich im Problem des Regelfolgens, beim Einüben von sprachlichen oder mathematischen Verhaltensweisen, eine wesentliche Stoßrichtung von Wittgensteins Philosophie: Die Frage danach, was genau den Prozess des „Verstehens“ ausmacht, den der/die Schüler/in beim Erlernen einer mathematischen Praxis durchläuft, reduziert sich bei Wittgenstein radikal auf die Frage: Wann sprechen wir dem/der Schüler/in Verstehen zu? Unter welchen Umständen würden wir sagen: „Er/Sie hat es verstanden?“ Und die Antwort auf diese Frage kann eben mit Wittgenstein nur lauten: „Wenn er/sie es oft genug richtigmacht!“ In einem ersten Schritt kann man also aus dem Regelfolgenproblem folgende Grundaussage Wittgensteins extrahieren: Lehr- und Lernprozesse kommen nie ohne den Konnex von „richtigem, erwünschten Verhalten“ und der Zuschreibung von „Verstehen“ aus. Damit wendet sich

⁶ Diese Sichtweise rückt Wittgenstein auf den ersten Blick in die Nähe des Behaviorismus. Inwiefern diese Sichtweise zutrifft, vor allem in Hinblick auf die didaktischen Implikationen seiner Philosophie, wird in Kapitel 4.1.2 behandelt werden.

Wittgenstein gegen alle Theorien, die das Verstehen einer Regel als mentalen Zustand betrachten (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.46) und dies hat zweifelsohne eine Bedeutung für die Bewertung von Lerntheorien und Fachdidaktik.

3.2 Mathematik als Erfinden

Zur Skizzierung von Wittgensteins Philosophie der Mathematik und der Untersuchung ihrer Implikationen für den Mathematikunterricht erscheint es ratsam, zunächst einmal Wittgensteins Sichtweise auf die Mathematik als Wissenschaft und auf ihre Praxis zu beschreiben.

3.2.1 Beweis/Rechnung vs. Experiment

Ein Aspekt von Wittgensteins Schreiben über Mathematik der an einer Vielzahl an Stellen zeigt und sich für einen ersten Ausblick auf seine Philosophie der Mathematik gut eignet, ist Wittgensteins Gegenüberstellung und Vergleich von Beweisen und Experimenten. Da Wittgenstein an vielen Stellen, insbesondere in seinen Beschreibungen von Unterrichtsvorgängen, den operationalen Aspekt der Mathematik stark betont, könnte man vermuten, dass er eine empiristische Sicht der Mathematik vertritt. In dieser Sichtweise wären mathematische Sätze nichts anderes als „besonders sichere“ empirisch begründete Wahrheiten, die aus einer Vielzahl an „Experimenten“ und Erfahrungen (beispielsweise dem Abzählen von oder Operieren mit Objekten) gewonnen werden. (Vgl.: Ramharter/Weiberg, S.109) Wittgenstein grenzt sich allerdings sehr klar von einer solchen empiristischen Theorie ab. In der folgenden Textstelle beschreibt Wittgenstein einen mathematischen „Beweis“ oder eine „Demonstration“, welche in dieser Form auch in der Grundschule vorkommen könnte. Und zwar geht es um eine Menge von Kugeln, von der durch Anordnung in 10 Reihen von jeweils 10 Kugeln gezeigt werden soll, dass genau 100 Kugeln vorhanden sind.

Ich 'mache durch diese Umformung klar', daß dies 100 Kugeln sind. — Ist was ich dabei tue z.B. ein Experiment? Es kann ein Experiment genannt werden, welches zeigt, daß ich jetzt 100 Kugeln vor mir habe. Aber die Worte "ich mache klar"

gebrauche ich nur dann wenn ich voraussetze, daß keine der Kugeln dazu oder wekommt. (MS 121 51r)

Interessant ist hier, dass Wittgenstein der Meinung zu sein scheint, dass dieselbe Tätigkeit, nämlich die spezielle Anordnung der Kugeln, sowohl „Experiment“ als auch „Beweis“ genannt werden kann. Es geht also nicht darum, was es diese Tätigkeit wirklich „ist“, sondern, mit welchen Beschreibungen und Zuschreibungen diese Tätigkeit versehen wird. Man könnte auch sagen: Welche Rolle diese Tätigkeit in einem bestimmten Sprachspiel einnimmt.

Wenn die Anordnung der Kugeln die Rolle eines „Experiments“ spielen würde, dann könnte sie mit den Worten begleitet werden „ich überprüfe jetzt, ob hier 100 Kugeln vorhanden sind“. Denn im Rahmen eines Experiments ist das Ergebnis desselben prinzipiell offen: Es muss zumindest denkbar sein, dass auch mehr oder weniger als 100 Kugeln vorhanden sein könnten. Es geht also in diesem Falle in erster Linie um die Klärung der Frage, ob „jetzt“ 100 Kugeln vorhanden sind und eine mehrfache Wiederholung des Experiments erscheint sinnvoll, um auch wirklich sicher zu gehen. Es ist nämlich denkbar, dass während des Abzählvorgangs eine Kugel, wie Wittgenstein hier schreibt, „dazu oder wekommt“. Das ist natürlich für die Beantwortung der Frage, ob hier „jetzt“ 100 Kugeln vorhanden sind, höchst relevant.

Wird jedoch dieser Vorgang mit den Worten „Ich mache klar...“ begleitet, so stellt sich in keiner Weise die Frage, „ob“ hier 100 Kugeln vorhanden sind. Diese Tatsache steht von vornherein fest und somit gar nicht zur Debatte. Damit geht es hier sicherlich nicht um ein Experiment, denn es gibt hier keine zwei möglichen Versuchsausgänge. Die Umformung ist demnach bei dieser Beschreibung eine Demonstration beziehungsweise ein Beweis, deren Zweck nicht die Klärung einer Frage ist. In so einem Fall macht eine Wiederholung, wie sie bei einem Experiment angemessen ist, keinen Sinn. Der Beweis kann nämlich auf eine gewisse Art gar nicht bezweifelt werden: Fällt beispielsweise während des Beweises eine Kugel unter den Tisch, so würde die Reaktion im Rahmen eines Beweisvorganges nicht lauten: „Es sind doch nur 99 Kugeln.“, sondern eben: „Eine Kugel muss weggekommen sein.“ Und statt noch einmal

die Kugeln zu zählen, müsste die verlorene Kugel gesucht werden. Diese Art von Normativität des Beweises bei Wittgenstein ist bemerkenswert und es lässt sich vermuten, dass der Vergleich von Experimenten und Beweisen dazu dient, den „Zwang“, der von mathematischen Sätzen, Beweisen und Rechnungen ausgeht, darzustellen. Und in der Tat ist es, auch für die didaktischen Implikationen Wittgensteins, relevant, dass im Kontext von Rechnen und Beweisen eher an allem Anderen gezweifelt würde, als an der Rechnung, dem Beweis oder dem bewiesenen Satz selbst. Bei einer Nichtübereinstimmung der Rechnung mit der „Realität“ würden wir wohl eher an unserer Wahrnehmung oder an der Beschaffenheit der verwendeten Objekte zweifeln, als an der Rechnung selbst. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.111) Dieser Aspekt unserer Praxis des Rechnens zeigt somit, für Wittgenstein, dass Rechnungen keine Experimente sein können:

Wenn die Rechnung ein Experiment ist und die Bedingungen sind erfüllt dann müssen wir als Ausgang anerkennen, was kommt; und wenn die Rechnung ein Experiment ist, so ist der Satz, daß sie das und das ergibt, doch der Satz, daß unter solchen Bedingungen diese Art von Zeichen entsteht. Und entsteht also unter diesen Bedingungen einmal ein, einmal ein anderes Resultat, so darf man nun nicht sagen "da stimmt etwas nicht", oder "beide Rechnungen können nicht in Ordnung sein", sondern man müßte sagen: diese Rechnung ergibt nicht immer das gleiche Resultat (*warum*, muß nicht bekannt sein). Aber obwohl das Experiment nun ebenso interessant, ja vielleicht noch interessanter geworden ist, ist keine Rechnung mehr vorhanden. Und das ist natürlich wieder eine grammatische Bemerkung über den Gebrauch des Wortes "Rechnung". Und natürlich hat diese Grammatik eine Pointe. (BGM VII, §9)

Wiederum wird offensichtlich, dass es Wittgenstein nicht darum geht, festzustellen, was eine Rechnung „wirklich“ ist, sondern es geht ihm um unsere Verwendungsweise des Wortes Rechnung. Und würden wir Rechnungen mit Experimenten gleichsetzen, so würden wir uns einer charakteristischen Eigenschaft dieser Verwendung entledigen, nämlich der Normativität des Ergebnisses. Wir könnten dann bei einem unerwarteten Ergebnis nicht mehr sagen: „Da stimmt etwas nicht“, sondern müssten es als gleichberechtigten

Ausgang des Experiments anerkennen. Dies würde aber der üblichen Praxis des Rechnens widersprechen und ist somit zu verwerfen.

Wittgenstein stellt allerdings unmissverständlich klar, dass natürlich „die Rechnungshandlung auch ein Experiment sein kann“ (BGM VII, §17), dieses dient dann aber nur zur Überprüfung, wie „dieser Mensch unter solchen Umständen, auf diese Aufgabestellung hin, rechnet.“ (BGM VII, §17) Und das ist in jedem Fall nicht die Art und Weise, wie er mathematische Sätze verstehen möchte. In keiner Weise können mathematische Rechnungen und Beweise Experimente sein, welche mathematische Tatsachen hervorbringen. Dies bezeichnet Wittgenstein eindeutig als Irrglaube und vergleicht es mit der Auffassung: „weil doch nur Schauspieler im Stücke auftreten, so könnten auf der Bühne des Theaters auch keine andern Leute nützlich beschäftigt sein.“ (BGM VII, §18) Zusammenfassend können wir für den Vergleich von Experimenten und Rechnungen festhalten, dass Mathematik für Wittgenstein kein „experimentelles Forschungswissen“ lehrt und keine empirischen Tatsachen hervorbringt. (Vgl.: ebenda) Das „Sprachspiel“ der Mathematik funktioniert ganz anders als das der empirischen Wissenschaften und die Rolle von Rechnungen und Beweisen ist auf eine besondere Art und Weise zu behandeln.

Die Mathematik – will ich sagen - Lehrt dich nicht einfach die Antwort auf eine Frage; sondern ein ganzes Sprachspiel mit Fragen und Antworten. (BGM VII, §18)

3.2.2 Beweise bilden Begriffe

Wir haben oben gesehen, dass der gleiche Vorgang des Kugelzählens in den beiden Kontexten „Experiment“ und „Beweis“ zu ganz unterschiedlichen Reaktionen und Tätigkeiten führen kann. Im ersten Fall geht es um die Klärung einer Frage. Aber was ist nun genau die Rolle des Beweises für Wittgenstein?

Dazu stellt sich Wittgenstein, am Beispiel des oben beschriebenen Gruppierens der 100 Kugeln, wieder die methodische Frage, wie wir einen Beweisvorgang beschreiben würden. Eine mögliche Antwort auf diese Frage wäre, dass wir vielleicht sagen würden, dass hier eine *Eigenschaft entfaltet* wird. Da wir es aber hier mit keinem empirischen Experiment zu tun haben,

welches Tatsachen zu Tage fördert, kann es sich dabei um keine physikalische Eigenschaft der vorliegenden 100 Kugeln handeln. Eine mathematische Demonstration funktioniert ja auch ohne die konkreten Kugeln und kann auch als Zeichnung dargestellt werden. Deshalb nennt Wittgenstein die Eigenschaften, die hier entfaltet werden, „geometrisch“. (Vgl.: MS 121, 54r) Es wäre nun naheliegend, zu vermuten, dass damit abstrakte Eigenschaften mathematischer Objekte im Sinne des Platonismus gemeint sein könnten. Aber Wittgenstein ist, wie schon erwähnt, ein vehementer Kritiker des Platonismus in der Philosophie der Mathematik und beschreibt diesen Vorgang auf eine besondere Art und Weise als ein „Ausbauen des Begriffs“.

„Die Eigenschaften der Reihe von 100 Kugeln entfalten“ hieß hier also mathematische Eigenschaften der 100 entfalten und das heißt, den Begriff '100' ausbauen. Denn wir erhalten so z.B., ein neues Merkmal dafür daß 100 Gegenstände da sind. (MS 121, 54v)

Wittgenstein ersetzt also die Beschreibung des Beweisens als ein „Entfalten von abstrakten Eigenschaften eines Gegenstandes“ durch die Beschreibung als ein „Ausbauen eines Begriffs“. Natürlich wendet sich Wittgenstein damit sowohl gegen eine platonistische als auch gegen eine empiristische Auffassung von Mathematik. Diese Beschreibung von Beweisen spielt eine sehr grundlegende Rolle in Wittgensteins Philosophie der Mathematik. Wie ich schon in (Wieländer 2011) gezeigt habe, beschreibt Wittgenstein damit eine Vielzahl von Funktionen und Rollen, die Beweise einnehmen können, welche ich in der folgenden Liste zusammengefasst habe:

1. Beweise überzeugen mich von etwas (indem sie neue Begriffe einführen)
2. Beweise führen neue Begriffsverwendungen bzw. eine neue Praxis ein
3. Beweise führen neue Paradigmen ein bzw. sind neue Paradigmen
4. Beweise schaffen oder sind „neue Zeichen“
5. Beweise reihen die mathematischen Sätze in ein System
6. Beweise schaffen neue Zusammenhänge und den Begriff dieser Zusammenhänge. (Vgl.: Wieländer 2011, S.5f.)

Im Rahmen dieser Arbeit ist es klarerweise nicht zielführend, sich jeder dieser Funktionen im Detail zu widmen. Da aber, wie im obigen Beispiel zu sehen ist, bei Wittgenstein sehr wohl auch simple „Demonstrationen“, die in Unterrichtskontexten auftreten können, als Beweise bezeichnet werden, scheinen zumindest die Funktionen 1. bis 3. als sehr relevant für die didaktische Analyse seiner Philosophie der Mathematik. Sie hängen gewissermaßen eng zusammen und beschreiben doch drei verschiedene Blickwinkel auf das mathematische Beweisen. Dass uns Beweise in der Mathematik von etwas überzeugen, kann wohl als unproblematisch verbucht werden. Doch wovon überzeugt uns der Beweis? Aus platonistischer Sicht könnte die Antwort nur lauten: von der Wahrheit des bewiesenen Satzes beziehungsweise von der bewiesenen Tatsache. Wittgenstein widersetzt sich klar dieser Ansicht, indem er die Überzeugung, die auf einen Beweis folgt, direkt mit dem praktischen Verhalten der Personen in Verbindung bringt:

Der Beweis überzeugt uns von etwas – aber nicht der Gemütszustand des Überzeugtseins interessiert uns – sondern die Anwendungen, die diese Überzeugung belegen. Daher lässt uns die Aussage kalt: der Beweis überzeuge uns von der Wahrheit dieses Satzes, - da dieser Ausdruck der verschiedensten Auslegungen fähig ist. (BGM III, §25)

Der Beweis überzeugt Dich von etwas: das heißt, Du wirst etwas auf den Beweis hin tun. Oder auch: Du wirst überzeugt sein, daß Du das und das wirst ausführen können; Du wirst etwas unternehmen, Andern sagen, daß sie es unternehmen sollen, usw. (...) Wie hängt die Überzeugungskraft des Beweises damit zusammen, daß er einen Begriff bildet? (MS 127 196-197)“.

Der Beweis überzeugt uns also davon, etwas tun zu können, er gibt uns in irgendeinem Sinn eine neue mathematische Praxis. Damit wendet sich Wittgenstein gegen eine „klassische“ Sichtweise von Beweisen, nämlich, dass Beweise vor allem dazu dienen, einen mathematischen Satz aus schon bewiesenen Resultaten herzuleiten. Der Beweis wäre dann, um ein Bild Wittgensteins zu verwenden, eine Leiter, die man nach ihrer Verwendung wieder abstoßen kann, und relevant ist nur mehr das Ergebnis, das im mathematischen Satz aufgehoben ist. Wittgensteins Begriff von Beweisen

zeichnet sich demgegenüber durch eine wesentlich weitere Perspektive aus: Ich werde nach dem „Durchgehen“ des Beweises nicht einfach nur einen neuen mathematischen Satz akzeptieren, sondern ich werde eine neue Disposition haben, gewisse Dinge zu tun. Interessant wird es nun, wenn man Wittgensteins Frage folgt, wie die Überzeugungskraft eines Beweises damit zusammenhängt, dass er einen Begriff bildet. Dies lässt sich wiederum gut am Kugelbeispiel aus Kapitel 3.2.1 analysieren. Wie überzeugt uns hier die Demonstration, also die Anordnung der 100 Kugeln in 10er Reihen? Welcher Begriff wird hier verändert und welche Praxis wird eingeführt?

Wir haben schon gesehen, dass die dabei gewonnene Überzeugung nicht die sein kann, dass hier 100 Kugeln vorhanden sind, denn dann würden wir von einem Experiment und nicht von einer Demonstration sprechen. Dass ich vom Beweis überzeugt wurde, wird sich vielmehr darin äußern, dass ich diese Umformung von nun an selber als Verfahren anwenden kann. Ich habe also „ein neues Merkmal dafür, daß 100 Gegenstände da sind“ und habe damit meine Verwendungsweise des Begriffs „100“ erweitert. (Vgl.: MS 121, 54v) Somit habe ich nach dem Beweis neue Möglichkeiten, den Begriff 100 anzuwenden, werde beispielsweise bei jeder Gestalt dieser Art sofort erkennen, dass es sich um 100 Gegenstände handelt. (Vgl.: Wieländer 2011, S.8) Könnte man also sagen, dass ich damit eine neue Regel dafür erhalte, wann ich den Begriff „100“ anwenden kann?

Um diese Frage zu beantworten, muss ein Vergleich mit der in Kapitel 3.1 geschilderten Regelfolgen-Thematik erfolgen. Dort haben wir gesehen, dass Wittgenstein das Erlernen des Gebrauchs sprachlicher Ausdrücke als ein Abrichten zu einem gewissen regelgeleiteten Verhalten beschrieben hat. In der Mathematik entdecken wir eine analoge Beschreibung des Beweisvorgangs: Der Beweis gibt mir eine neue Verwendungsweise eines mathematischen Begriffs, beziehungsweise er stellt eine neue Regel für die Begriffsverwendung auf. Es besteht jedoch eine problematische Diskrepanz zwischen dem „Regelfolgen“ beim Spracherwerb und dem Beweisen in der Mathematik: In ersterem Fall erfolgt die Übernahme, wie gesehen, durch Abrichtung und unhinterfragtes Einüben in die Praxis der Begriffsverwendung. Im zweiten Fall aber gibt es keinen solchen Abrichtungsvorgang. Ganz im Gegenteil: Der

Beweis überzeugt mich und ich übernehme die von ihm vermittelte Begriffsveränderung deshalb in mein Repertoire des Gebrauchs dieses Begriffes auf; die Begriffsveränderung ist also meine *Entscheidung*. Diese Entscheidung basiert nicht auf irgendwelchen „mathematischen“ Sachverhalten, sondern auf der Überzeugungskraft des Beweises. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.52) Wittgenstein unterstreicht diese Ansicht beispielsweise an folgender Stelle:

Du bringst ihn zur Entscheidung dies Bild aufzunehmen. Und zwar durch Beweis, d.i., durch Vorführung einer Bilderreihe, oder einfach dadurch, daß Du ihm das Bild zeigst. Was zu dieser Entscheidung bewegt ist hierbei gleichgültig. (MS 125, 17r)

Wichtig ist also nur, dass ein Beweis zu einer Entscheidung führt, eine Regel zu übernehmen, welche dann ein „Muss“ impliziert. Das heißt, ich werde nach dem Durchgang des Beweises sagen: „Das MUSS so sein“. Dieses „Muss“ drückt ja auf sehr eindeutige Art und Weise aus, dass ich eine neue Regel übernommen habe.

Welchen Übergang mache ich von "es wird so sein" zu "es muß so sein"? Ich bilde einen andern Begriff. Einen, in dem inbegriffen ist was es früher nicht war. (MS 125, 41v)

Man ändert den Begriff so, daß das hat herauskommen müssen (MS 125 69v)

Der Ausdruck „Muss“ zeigt also an, dass ich nun eine neue Begriffsverwendung übernommen habe. Der Beweis hat mich überzeugt, ich habe mich dafür entschieden, das im Beweis Gezeigte anzunehmen und als Ausdruck dieser neuen Regel werde ich sagen: Das muss so sein.

Nun bleibt allerdings die Frage, wie der Beweis eine neue Begriffsverwendung „durch Überzeugung“ einführen kann, während bei der Abrichtung ein langer Prozess des Einübens in eine ebensolche Praxis notwendig war? Eine Möglichkeit, diese Frage zu beantworten, wäre natürlich zu sagen, dass auch ein Beweis nicht sofort verstanden wird. Dass also, wie immer beim Problem des Regelfolgens, eigentlich nie wirklich gesagt werden kann, wann der Beweis, und damit die von ihm veränderte Begriffsverwendung,

verstanden worden ist. Das erscheint allerdings im Kontext der Mathematik äußerst bizarr und Wittgenstein scheint eine solche Verallgemeinerung des Regelfolgeproblems auf die Mathematik nicht im Sinn zu haben. Es muss uns also der Beweis selbst klarmachen, wie wir den Begriff neu zu verwenden haben: „Der Beweis zeigt nicht bloß, *dass* es so ist sondern *wie* es so ist“. (BGM III, § 22) Der Beweis darf mithin keine Zweifel offenlassen, er muss uns ohne Umschweife dazu bringen, die neue Begriffsverwendung auch anwenden zu können. Genau an dieser Stelle bringt Wittgenstein den Begriff der „Übersichtlichkeit“ ins Spiel:

»Der Beweis muß übersehbar sein« - heißt: wir müssen bereit sein, ihn als Richtschnur unseres Urteilens zu gebrauchen. (...) Den Beweis macht man ein für alle Mal. (BGM III, §22)

Die Übersichtlichkeit eines Beweises ermöglicht nicht nur dessen problemlose Reproduktion, sie garantiert auch, dass die Begriffsverwendung, die der Beweis einführt, das zentrale Ergebnis, das er vermittelt, klar und unbezweifelbar ist. Deshalb zerstört der Zweifel in Wittgensteins Augen auch den Beweis:

Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Platz ist, (...) der *Beweis* zerstört ist. (BGM III, §43)

Hiermit ist klar: Bei der Begriffsveränderung durch Beweise greift das Regelfolgeproblem nicht. Es gibt keinen Zweifel daran, wie der Begriff verwendet werden muss, denn der Beweis selbst ist das Vorbild dieser Verwendung und dieser muss, nach Wittgenstein, übersichtlich und damit unmittelbar evident sein. Wir haben also beim Beweisen ein „Paradigma“, eine Richtschnur, die uns die Begriffsverwendung vorschreibt und müssen nicht überlegen, ob beispielsweise der/die Schüler/in den Begriff richtig anwendet. Es scheint also, als wären Abrichtung und Überzeugung zwei unabhängige und weitgehend verschiedene Möglichkeiten, eine neue Praxis im Begriffsgebrauch einzuführen. Ich werde in Kapitel 3.3.4 argumentieren, dass diese zweite Möglichkeit der Begriffsveränderung durch übersichtliche und überzeugende Beweise, welche uns zu einem „Muss“ und einem Paradigma führen, eine neue

Perspektive für Wittgensteins Bild des Lehrens und Lernens von Mathematik eröffnen kann.

3.3 Wittgenstein über das Lehren und Lernen von Mathematik

Dass Wittgenstein den Mathematikunterricht als heuristisches Beispiel verwendet hat, um seine Philosophie der Mathematik zu exemplifizieren, ist eine unbestrittene Meinung in der Sekundärliteratur. Hier soll allerdings nun der Fokus auf Stellen gerichtet sein, die über diese Rolle als Beispiel hinausgehen und ein bestimmtes Bild Wittgensteins vom Mathematikunterricht nahelegen. Zunächst erfordert dies eine genaue Textexegese, die zunächst unter den Schlagworten „Abrichtung“, „Zwang“ und „Rechenfehler“ passieren soll. Erst anschließend werde ich argumentieren, dass die „Überzeugung durch übersichtliche Beweise“ ein etwas anderes Bild des Lehrens und Lernens in der Mathematik ermöglicht.

3.3.1 Abrichtung/Training beim Rechnen lernen

Der zentrale Begriff in Wittgensteins Beschäftigung mit dem Lernen ist, wie wir schon in Bezug auf Sprachlernen gesehen haben, der Begriff der „Abrichtung“ (beziehungsweise in seiner englischen Übersetzung: Training). Dieser Begriff wird schon in den Philosophischen Untersuchungen, nicht nur in Bezug auf das Lernen von Sprache, sondern auch in Bezug auf das Lernen von Mathematik, eingeführt und erläutert. Dies zeigt sich vor allem in einer Passage (PU, §143ff.), die schon in Kapitel 3.2.1 kurz angeschnitten wurde. Dort stellt Wittgenstein klar, dass es ihm nicht um die Analyse des „inneren“ Vorgangs des Verstehens geht, er also keinen Psychologismus vertritt, sondern um die äußeren Kriterien des Verhaltens, die uns „Verstehen“ zuschreiben lassen. Dass ein/e Schüler/in etwas versteht, zeigt sich nach Wittgenstein darin, dass „er nun gewisse Anwendungen macht, in gewissen Fällen dies sagt und so handelt“. (BGM VII, §27) Damit ist auch klar, dass für Wittgenstein jeder Versuch einer „Erklärung“ oder „Durchleuchtung“ des Verstehensprozesses der Schüler/innen fehlgehen muss. Felix Mühlhölzer schreibt dazu:

Wenn der Lehrer sagt, dass der Schüler endlich das Plus-Zeichen verstanden hat, interessiert sich der Lehrer nicht für die inneren Zustände des Schülers, sondern für sein angemessenes Verhalten: endlich hat der Schüler jetzt hinreichend oft richtig addiert, so dass man erwarten darf, dass er es auch in Zukunft so tun wird. (Mühlhölzer 2010, S.43f.)

Diesen Punkt führt Wittgenstein an mehreren Stellen in seinem Nachlass genauer aus. Im „Großen Notizbuch“ findet sich die folgende Passage, bei der sich Wittgenstein klar zum Verstehen äußert:

Jemand fragt uns: „Hat N verstanden?“ Wir antworten „ja“. Darauf gibt der Fragende dem N einen Auftrag (den er nicht gegeben hätte wenn N das betreffende Wort nicht verstanden hätte).

Z.B. wir erklären jemandem den Gebrauch des Kompasses (also die Bedeutung von 'Süd', 'Nord' etc.). Wir prüfen sein Verständnis (wie wir sagen würden) in irgend einer Weise. Darauf fragt uns M: „hat N verstanden?“ Wir sagen „ja“; und nun gibt M dem N einen Auftrag (Befehl), der das Verständnis der Himmelsrichtungen voraussetzt. (...) Wir könnten die Meinung daß N verstanden hat auch in der Form der Vermutung aussprechen daß er so und so handeln wird. Wir könnten also sagen: „Du kannst ihm ruhig diesen Auftrag geben. Er wird ihn ausführen.“ (MS 145 1)

Wittgensteins Herangehensweise zur Klärung der Rolle und Bedeutung von „Verstehen“ geht also nicht von einer (psychologischen oder philosophischen) Theorie des Verstehens aus. Er interessiert sich nicht für eine Erklärung von Verstehen als innere, mentale Prozesse. Wittgenstein fragt sich hier vielmehr: Wie und in welchem Kontext verwenden wir den Begriff „Verstehen“? Wann und warum sagen wir den Satz „N hat es verstanden!“? Und vor allem: Welche Implikationen hat es, wenn wir einem/einer Schüler/in Verständnis zusprechen? Hier wird sofort klar, dass mit der Zuschreibung von Verständnis eine Erwartung an eine gewisse Handlungsweise verknüpft ist. Die Behauptung „N hat es verstanden“ führt sofort zu einer Aufgabe, zu einer Prüfungssituation. Das Kriterium dafür, ob der/die Schüler/in etwas verstanden hat ist also, ob er/sie sich in der Prüfungssituation den Erwartungen der Lehrperson entsprechend verhält. Man könnte nun vermuten, dass Wittgenstein hier eine These über das

„Verstehen“ im Lernprozess aufstellt, die sich auf zwei Arten interpretieren lässt: In einer schwachen Interpretation wäre Verstehen ein undurchschaubarer Prozess und Wittgenstein würde nur behaupten, dass das einzige Kriterium, das dem/der Lehrer/in zur Verfügung steht, um Verständnis festzustellen, das beobachtete Verhalten des Schülers/der Schülerin sei. In einer starken Lesart würde sich Verstehen für Wittgenstein auf eine „Verhaltens-Disposition“ reduzieren. Verstehen wäre dann tatsächlich nichts anderes als die Disposition sich „so und so“ zu verhalten und zwar nicht im Sinne eines inneren Zustands: „Nicht *weil* jemand etwas versteht, verhält er sich so und so; sondern sein Sich-so-und-so-verhalten *macht* gerade sein Verstehen *aus*“. (Mühlhölzer 2010, S.44)

Ich möchte allerdings argumentieren, dass Wittgenstein genau genommen keine dieser Thesen konkret äußern möchte und vor allem auf gewisse, aus seiner Sicht fehlgeleitete, Interpretationen der konkreten Lernsituationen, durchaus polemisch, reagieren möchte. Dafür spricht einerseits, dass er selbst „Verstehen“ als „vagen Begriff“ bezeichnet und die Frage stellt: „warum soll er uns so sehr interessieren?“. (Vgl.: BGM VI, §13) Andererseits spricht dafür auch, dass er in Anschluss an die besprochene Passage aus den PU bezüglich des Lehrens und Lernens der Zahlenreihen den folgenden hypothetischen Einwand formuliert:

»Was du sagst läuft also darauf hinaus, es sei zum richtigen Befolgen des Befehls >+n< auf jeder Stufe eine neue Einsicht – Intuition – nötig.« – Zur richtigen Befolgung! Wie wird denn entschieden, welches an einem bestimmten Punkt der richtige Schritt ist? (...) Richtiger, als zu sagen, es sei an jedem Punkt eine Intuition nötig, wäre beinah, zu sagen: es sei an jedem Punkt eine neue Entscheidung nötig. (PU, §186)

Hier zeigt sich nun klar, dass Wittgenstein jede Rede von „Einsicht“ oder „Intuition“ als eigentliche Grundlage des „Verstehens“ beim Lernen von Mathematik bei Seite legen möchte. Er stellt diesem Narrativ des Lernens also eine Alternative gegenüber, in der „Verstehen“ durch „Verhalten“ und „Einsicht“ beziehungsweise „Intuition“ durch „Entscheidung“ ersetzt wird. Ganz ähnlich hat Wittgenstein auch schon die Überzeugungskraft eines Beweises darin gesehen,

dass er zu der Entscheidung bewegt, eine neue Regel für die Begriffsverwendung anzunehmen. Auch hier, in den PU, scheint Wittgenstein nun für das Lernen des Rechnens jede Art der Intuition oder Einsicht in mathematische Sachverhalte auszuschließen. Es geht vielmehr um eine Entscheidung des Schülers/der Schülerin auf die Instruktion so zu reagieren. Der Abrichtungsprozess bei Wittgenstein entfernt sich mit der Verwendung des Begriffs „Entscheidung“ zunehmend von einem unhinterfragten und stupiden Wiederholen von Verhaltensweisen und wird zu einem willentlichen Annehmen einer bestimmten Rechenpraxis durch den/die Schüler/in. Das „Training“ dient also nicht bloß dazu, eine bestimmte Regelmäßigkeit des Verhaltens herzustellen. Diese Regelmäßigkeit, so schreibt José Medina in (Medina 2002), ist nur eine Voraussetzung dafür, einen neuen Begriff zu bilden, das Rechnen auf diese Art und Weise als Norm anzunehmen. Wenn Wittgenstein von „Zwang“ beim Lernen des Rechnens spricht, meint er also nicht, dass die Lehrperson die/den Lernende/n zwingen muss, auf eine gewisse Art und Weise zu rechnen, sondern er meint die Normativität, die durch die (freiwillige) Entscheidung des/der Lernenden entsteht, dieses Ergebnis als Norm für die richtige Anwendung der Regel aufzunehmen. Beim Rechnen-lernen durch Abrichtung werden nach Wittgenstein also Erfahrungssätze, beispielsweise beim Operieren mit Kugeln oder Zahlen, zu Regeln „verhärtet“:

Es sagt nun jemand, daß in der Kardinalzahlenreihe, die der Regel $>>+1<<$ gehorcht, deren Technik uns so und so beigebracht wurde, 450 auf 490 folgt. Das ist nun nicht der Erfahrungssatz, daß wir von 449 zu 450 kommen, wenn es uns vorkommt, wir hätten die Operation $+1$ auf 449 angewandt. Vielmehr ist es die Bestimmung, wir haben diese Operation nur dann angewandt, wenn das Resultat 450 ist.

Es ist als hätten wir den Erfahrungssatz zur Regel verhärtet. Und wir haben nun nicht eine Hypothese, die durch die Erfahrung geprüft wird, sondern ein Paradigma, womit die Erfahrung verglichen und beurteilt wird. (BGM VI, §22)

Der Bezug des Rechnens zu der operationalen Praxis mit Gegenständen, Zeichen oder Zahlen ist also durch den Abrichtungsprozess gegeben: Die Schüler/innen werden durch das Einüben in einer gewissen Art der Operation

dazu gebracht, diese Art des Rechnens, beziehungsweise das Ergebnis der Rechnung, zukünftig als Paradigma für das richtige Ausführen dieser Operation zu gebrauchen. Die Erfahrungssätze, die beim ersten Schreiben der Zahlenreihe entstehen, werden also durch die „spontane Entscheidung“ des Schülers/der Schülerin in eine normative Regel transferiert, die dann sicherlich kein Erfahrungssatz mehr ist. (Vgl.: BGM VI, §24) Der Ausdruck dieser Transformation ist schließlich die Äußerung „es muß so sein“ durch die/den Lernende/n. Der/die Schüler/in wird am Ende der Abrichtung, sobald die notwendigen Begriffe oder Paradigmen gebildet worden sind, in der Lage sein, autonom die Rechenpraxis durchzuführen und die Richtigkeit der Ergebnisse selbst zu überprüfen. Die Abrichtung beim Lernen des Rechnens hat also letztlich das Ziel, die Kompetenz der Selbstkorrektur des/der Schüler/in zu lehren.

Die Kinder werden nicht nur im Rechnen geübt sondern auch in einer ganz bestimmten Stellungnahme gegen einen Rechenfehler. (BGM VII, §61)

Die Aufgabe der Lehrperson ist dabei für Wittgenstein nicht, die gelernte Rechen-Regel für die Schüler/innen in irgendeiner Weise zu interpretieren oder zu erklären. Die Lehrperson ist nicht in Besitz einer privilegierten Interpretation oder Erklärung der Rechenpraxis, sondern muss eine spezielle Lernumgebung schaffen, in der sie durch Demonstration die Anwendung der Regel vorzeigt und mit den Schüler/innen einübt.

Aber wie deutet denn also der Lehrer dem Schüler die Regel? (...) - Nun, wie anders, als durch Worte und Abrichtung? Und der Schüler hat die Regel (so gedeutet) inne, wenn er so und so auf sie reagiert.

Das aber ist wichtig, daß diese Reaktion, die uns das Verständnis verbürgt, gewisse Umstände, bestimmte Lebens- und Sprachformen als Umgebung, voraussetzt. (BGM VII, §47)

Die Lehrperson wird also bei Wittgenstein keineswegs auf eine „Abrichtungsmaschine“ reduziert, welche erwünschtes Verhalten verstärkt und unerwünschtes sanktioniert. Vielmehr muss sie einerseits in der Lage sein, die Lernumgebung so zu gestalten, dass eine kompetente Teilnahme an der

Rechenpraxis durch das Einüben ermöglicht wird und, andererseits, selbst die zu lehrende Regelfolgen-Praxis soweit beherrschen, dass sie das Verhalten der Schüler/innen in Einklang mit dem Verhalten der Gruppe (der Mathematiker/innen) bringen kann. (Vgl.: Medina 2002, S.163) Insofern führt Wittgensteins Abrichtungsbegriff in der Mathematik weg von der reinen „Konditionierung“, wie sie beispielsweise im Behaviorismus vertreten wird, hin zu einem komplexen Lehr- und Lernprozess, der durchaus mit dem Begriff der „Enkulturation“ aus der pädagogischen Literatur verglichen werden kann. José Medina schreibt diesbezüglich:

In other words, by interacting with masters who structure and regulate the learning environment, novices come to adopt structuring and regulatory activities of their own. The process of initiate learning is, therefore, a process of acquiring autonomy or gaining control in normative practices. What characterizes this process is a gradual shift of responsibility and authority, a developmental progression *from other-regulation to self-regulation*. Initiate learning is thus conceived as a process of *enculturation* or *apprenticeship*: we learn norms by being acculturated into rule-following practices, by mastering their techniques. (Medina 2002, S.165)

Wichtig ist hier, dass es immer eine Entscheidung der Schüler/innen bleibt, die gelehrte Rechenpraxis so als Norm anzunehmen.

Zwingt mich eine Linie dazu, ihr nachzufahren? - Nein; aber wenn ich mich dazu entschlossen habe, sie so als Vorlage zu gebrauchen, dann zwingt sie mich. - Nein; dann zwingt *ich* mich sie so zu gebrauchen. Ich halte mich gleichsam an ihr fest. - Aber wichtig ist hier doch, daß ich sozusagen ein für allemal den Entschluß mit der (allgemeinen) Deutung fassen und halten kann, und nicht bei jedem Schritt von frischem *deute*. (BGM VII, §48)

Zusammenfassend gesprochen ist das Lernen und Lehren von Mathematik, zumindest in Bezug auf mathematische Operationen, mit einem Einüben in eine Praxis durch Abrichtungsprozesse verbunden. Die Lehrperson ist dabei aber in keiner Weise in der Lage, die Interpretation oder Erklärung der Rechenregel anzugeben, sondern kann die Praxis nur durch Vorzeigen und Demonstrieren in einer speziell gestalteten Lernumgebung vermitteln. Dabei ist das Ziel des Abrichtungsprozesses, dass die Schüler/innen die Art und Weise, diese

Rechenoperation durchzuführen, als Norm annehmen. Dies ist allerdings eine Entscheidung des Schülers/der Schülerin, die durch die Erfahrung im Lernprozess induziert wird, und nicht eine Art von „Intuition“ oder „Einsicht“. Dieses Wechselspiel von „Entscheidung“ und „Zwang“ ist äußerst relevant für Wittgensteins Sicht des Lehrens und Lernens von Mathematik und soll nun genauer untersucht werden.

3.3.2 Relativität verursacht Zwang

Schon am Beginn der BGM findet sich eine Stelle, die den Mathematikunterricht mit den, im Kontext der Pädagogik wohl eindeutig negativ behafteten, Begriffen wie „Zwang“, „Erbarungslosigkeit“ und „Unerbittlichkeit“ in Verbindung bringt. Wittgenstein stellt sich an diesem Punkt selbst die Frage, wie weit sein „Konventionalismus“ gehen sollte.

»Soll das also heißen, daß es gleich richtig ist, auf welche Weise immer Einer zählt, und daß jeder zählen kann wie er will?« - Wir würden es wohl nicht »zählen« nennen, wenn jeder irgendwie Ziffern nacheinander ausspräche; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir »zählen« nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Tätigkeiten unseres Lebens. Das Zählen, und Rechnen, ist doch – z.B. - nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (und das heißt: so zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachen Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf »eins« »zwei«, auf »zwei« »drei« sagen usf. (BGM I, §4)

Zunächst einmal sehen wir hier, dass es Wittgenstein nicht darum geht, vorzuschreiben, wie Mathematik unterrichtet werden sollte, sondern es geht um eine reine Beschreibung dessen, wie Mathematikunterricht tatsächlich abläuft. So lernen wir eben rechnen: Wir können als Schüler/innen nicht einfach eine beliebige Reihenfolge der Zahlen postulieren, sondern werden „unerbittlich“ dazu gebracht, alle dieselbe Reihenfolge zu übernehmen. Interessant wird es nun, wenn wir danach fragen, was der Grund für diese Unerbittlichkeit ist. Und genau diese Frage eröffnet, so möchte ich argumentieren, einen der fruchtbarsten und kreativsten Gedanken von Wittgensteins Philosophie der

Mathematik: Nämlich den Zusammenhang zwischen der Relativität und Beliebigkeit unseres Systems zu rechnen und dem Zwang und der Normativität genau so zu rechnen. Gerade *weil* wir auch anders rechnen könnten, ergibt sich diese „Unerbittlichkeit“ des Mathematikunterrichts. Wenn ein anderes Rechnen undenkbar wäre, gäbe es ja keinen Grund für eine Abrichtung und der/die Schüler/in könnte durch Introspektion oder Intuition die ewigen Gesetze des Rechnens für sich selbst, ohne Lehrperson oder sozialen Kontext, entdecken. Da diese eine Praxis des Rechnens so eine grundlegende Rolle für unser alltägliches Leben spielt und nicht weiter begründet werden kann, etwa durch Hinweis auf eine metaphysische Wahrheit, die diesem Gebrauch entspricht, kann sie nur in einem Abrichtungsvorgang „erbarmungslos“ beigebracht werden. Aus didaktischer Sicht erscheint das Wort „erbarmungslos“ im Zusammenhang mit Unterricht auf den ersten Blick eher befremdlich. Allerdings eröffnet diese Stelle, so möchte ich argumentieren, auch eine andere, didaktisch interessantere, Lesart: Wittgenstein postuliert hier nicht, dass jeder Unterricht von Mathematik als „unerbittliche“, „erbarmungslose“ Abrichtung funktionieren muss. Er behauptet hier nur, dass dies einfach die Art und Weise ist, wie wir zählen lernen. Der Mathematikunterricht kann natürlich, und eben diese Folgerung eröffnet sich aus Wittgensteins Konventionalismus, auch betonen, dass unsere Art zu Rechnen nicht die einzige sein muss und wir auch anders rechnen könnten als wir rechnen. Allerdings, und das ist, denke ich, die zentrale Einsicht, die Wittgenstein hier vermitteln möchte, hat jedes Lehren und Lernen unserer Rechenpraxis einen Punkt, an dem ein Zwang ausgeübt wird, eine „Unerbittlichkeit“ an den Tag gelegt werden muss. Nämlich dann, wenn jede relativistische Überlegung abgebrochen werden muss und eben der Begriff „Rechnen“ auf „unsere Art zu Rechnen“ eingeschränkt wird. Für diesen Schritt gibt es eben keine weitere Begründung als die, dass wir eben so rechnen. Insofern zeigt Wittgenstein damit nur eine Dynamik auf, die in jedem Rechenunterricht, ob man will oder nicht, angelegt ist: Es ist immer eine gewisse „Unerbittlichkeit“ vorhanden, die uns dazu zwingt, so – und nur so – zu rechnen.

Anschließend wehrt sich Wittgenstein gegen den Vorwurf, er würde einen Relativismus in der Hinsicht vertreten, dass die Wahrheit eines mathematischen Satzes nichts anderes wäre, als Brauchbarkeit oder Nützlichkeit:

»Aber ist dieses Zählen also nur ein *Gebrauch*; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit?« Die *Wahrheit* ist, daß das Zählen sich bewährt hat. - »Willst du also sagen, daß >wahr-sein< heißt: brauchbar (oder nützlich) sein?« - Nein; sondern, daß man von der natürlichen Zahlenreihe – ebenso wie von unserer Sprache – nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern: sie sei brauchbar und, vor allem, sie werde verwendet. (BGM I, §4)

Damit ist, wie schon gesehen, klar, dass es für Wittgenstein keine die mathematischen Sätze wahr machende Wirklichkeit gibt. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.61) Eine „Wahrheit“, die dem mathematischen Satz Autorität verleiht, ist allerdings die Tatsache, dass wir so Rechnen und, dass sich dieses Rechnen bewährt hat. Interessant, auch für den Mathematikunterricht, wird es nun, wenn wir uns genauer ansehen, wie diese „Bewährung“ im Alltag und an der „Wirklichkeit“ für Wittgenstein genau aussieht.

Wir haben schon gesehen, dass „Bewährung“ für ihn sicherlich nicht bedeuten kann, dass wir mathematische Sätze und Rechenergebnisse, wie bei einem Experiment, aufgrund von empirischer Erfahrung *glauben*. Dem widerspricht, wie gesagt, das Zwangsmoment mathematischer Beweise, ausgesprochen im „Muss“. Die Ergebnisse unserer Rechnungen müssen nicht auf den Alltag „anwendbar“ sein beziehungsweise unseren Alltagserfahrungen entsprechen. (Vgl.: Ramharter 2002, S.46) Allerdings, und das ist äußerst relevant für Wittgensteins Sicht des Mathematikunterrichts, liegen in einem gewissen Sinne die „Grundlagen“ der Mathematik sehr wohl in unseren Alltagserfahrungen wie beispielsweise dem Operieren mit Objekten:

Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2, dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt,

verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus, (etwa darum weil, wie wir jetzt sagen würden, einmal von selbst eine dazu-, einmal eine wegstäbe), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber Stäben, Fingern, Strichen und den meisten anderen Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende.

»Aber wäre dann nicht doch $2 + 2 = 4$?« – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden.–“ (BGM I, §37)

Unsere Art zu rechnen ist für Wittgenstein somit eingebettet in unsere Alltagspraxis in dem Sinn, dass bei einer komplett anderen Alltagspraxis, beispielsweise in einer Welt, in der sich die Gegenstände ganz anders verhalten, auch unsere Rechenpraxis anders wäre. Dies ist natürlich wiederum eine klare Absage an die „Wahrheit“ mathematischer Sätze und setzt die „Brauchbarkeit“ in diesem Sinne an ihre Stelle. Für den Unterricht ist aber interessanter, dass Wittgenstein hier einen üblichen Impuls in der mathematischen Fachdidaktik diskreditiert. An dieser Stelle gelangen wir an einen äußerst fruchtbaren Punkt von Wittgensteins Philosophie der Mathematik für die mathematische Fachdidaktik, nämlich zur Gegenüberstellung mit Theorien des „experimentellen“ Mathematikunterrichts. Dieser Thematik werden wir uns in Kapitel 4.2.3 genauer widmen. Hier soll nur noch einmal betont werden, dass die „Bewährung“, die Wittgenstein an die Stelle einer absoluten Wahrheitskonzeption in der Philosophie der Mathematik setzt, keine empirische Bewährung darstellt, sondern eben die Einbettung in verschiedene unserer Alltagspraktiken. Ramharter fasst diesen Aspekt von Wittgensteins Philosophie der Mathematik folgendermaßen zusammen:

Die Bewährung an der sogenannten „Realität“ bedeutet, dass das *Tun* von Mathematik sich strukturell in unsere Möglichkeiten zu agieren und zu sprechen einpasst, dass wir beim Betreiben von Mathematik Regeln folgen, nicht dass *Ergebnisse* von Rechnungen unserer Alltagserfahrung entsprechen müssen. (Ramharter 2002, S.46)

3.3.3 Die Rolle des Rechenfehlers

Wittgensteins Ansichten zum Unterricht und insbesondere zum Verstehen im Rahmen der Regelfolge-Thematik implizieren eine spezielle Sichtweise auf den „Fehler“ in der Mathematik. Die Rolle von Rechenfehlern und ihre Bedeutung in Wittgensteins Philosophie der Mathematik wollen wir nun genauer betrachten.

Zunächst einmal ist klar, dass Fehler für Wittgenstein nicht nur notwendigerweise zu jedem Lernprozess dazu gehören, sondern diesen sogar ausmachen. Der Fokus auf den „Abrichtungsmoment“ des Lernens soll ja gerade betonen, dass wir nur anhand der Anwendung des Schülers/der Schülerin sehen können, ob er/sie die Regel verstanden hat oder nicht. Es gibt für Wittgenstein keinen „Wissenstransfer“, der ohne „Trial-and-error“ auskommen kann. (Vgl.: Ramharter 2002, S.46) Die Stellen, an denen sich Wittgenstein mit Rechenfehlern, mit „Nicht-Verstehen“ und „Nicht-Auskennen“ in Bezug auf die Mathematik beschäftigt, sind zahlreich. Es kommt dem Fehler nach Wittgenstein sogar eine „Schlüsselrolle“ in Bezug auf das Verständnis der Mathematik zu:

Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: »Ich muss mich verrechnet haben«. Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verständnis der >Grundlagen< der Mathematik. (BGM III, §90)

Diese Passage folgt auf einen längeren Nachlassabschnitt (MS 127, 260a-267), in dem sich Wittgenstein damit beschäftigt, was es bedeutet, sich in einem Kalkül nicht auszukennen beziehungsweise in einem Kalkül auf Widersprüche zu stoßen. Dabei skizziert Wittgenstein zwei Arten des „Sich-nicht-Auskennens“, beziehungsweise des Fehlers. Die erste Art, die Wittgenstein hier nicht interessiert, ist „der Fall des Wissenschaftlers, der verschiedene Hypothesen ausprobiert und mehr oder weniger bereit ist, die eine zugunsten einer andern aufzugeben“. (MS 127, 262) Der andere Fall, der davon strikt abzugrenzen ist, ist der Fall, bei dem wir in der Mathematik sagen, „das kann nicht sein, ich muss mich verrechnet haben“. Diese Unterscheidung zeigt wiederum sehr schön die Gegenüberstellung von Experiment und Beweis, die wir im Kapitel 3.2.1 betrachtet haben. Im zweiten Fall gibt es nicht mehrere mögliche Ergebnisse, wie bei Experimenten, die Hypothesen überprüfen,

sondern das Ergebnis steht fest und wenn beispielsweise in einer Rechnung etwas anderes herauskommt, weiß ich, dass ich einen Fehler gemacht haben muss. Es taucht also auch hier wieder ein „Muss“ auf, welches die Autorität des Rechenergebnisses ausdrückt. Wie wir schon gesehen haben, ist der Zwang, den dieses „Muss“ in der Mathematik ausübt, etwas, das für Wittgensteins Philosophie der Mathematik grundlegend ist. Und so erscheint das obige Zitat, in dem Wittgenstein das Verrechnen dieser zweiten Art als Schlüssel für die Grundlagen der Mathematik bezeichnet, verständlich.

Das bedeutet allerdings nicht, dass der Fehler erster Art im Kontext des Mathematikunterrichts keine Rolle spielen könnte. Im Gegenteil gibt es sehr wohl psychologische Experimente, die beispielsweise die Rechengewohnheiten von verschiedenen Altersstufen oder Kulturen vergleichen. In einem solchen Kontext gibt es dann natürlich mehrere mögliche und gleichwertige Ergebnisse einer Aufgabe, denn genau darauf zielt das Experiment ja dann ab. An einer aus Sicht der Didaktik äußerst interessanten Stelle scheint Wittgenstein einen solchen Umgang mit Fehlern für den Mathematikunterricht vorzuschlagen:

Nimm an Menschen lernen rechnen, ungefähr, wie sie es tatsächlich tun; aber stell Dir nun verschiedene 'Umgebungen' vor, die das Rechnen einmal zu einem psychologischen Experiment, einmal zu einem physikalischen mit den Rechenzeichen, einmal zu etwas anderem macht! Wir nehmen an die Kinder lernen zählen und die einfachen Rechnungsarten durch Nachahmen, Aufmunterung und Zurechtweisung. Aber von einem gewissen Punkt wird nun die Nichtübereinstimmung der Rechnenden (also etwa die Rechenfehler) nicht als etwas Schlechtes, sondern als etwas psychologisch Interessantes behandelt. "Also das hieltest Du damals für richtig?" heißt es, "wir Andern haben es alle so gemacht". (MS 124, 97)

Auf den ersten Blick scheint es, dass Wittgenstein hier wirklich einen Mathematikunterricht skizziert, bei dem „Rechnen als Experimentieren“ gelehrt wird. Alle Rechenergebnisse würden dann als gleichwertig nebeneinander stehen und einen „Fehler“ würde es gar nicht mehr geben. Bei genauerer Betrachtung wird allerdings klar, dass ein Relativismus in diesem radikalen Sinne hier nicht gemeint sein kann. Erstens betont Wittgenstein, dass die Kinder die Rechnungsarten erst einmal gelernt haben müssen, und zwar auf

klassischem Wege (Nachahmen, Aufmunterung und Zurechtweisung), bevor es Sinn macht, die Rechenfehler als etwas „psychologisch Interessantes“ zu behandeln. Und Zweitens zeigt uns Wittgenstein im letzten Satz, dass der Zwang-Charakter der Mathematik selbst in einem solchen relativistischen Unterricht wieder zu finden ist. Die Aussage „Wir Andern haben es alle so gemacht“ ist im Prinzip eine versteckte Zurechtweisung und Korrektur. Sie isoliert das „falsche“ Rechnen des Schülers/der Schülerin und deklariert es als Abweichung. Diese Passage, so denke ich, eröffnet also einerseits die Perspektive eines anderen Umgangs mit Fehlern im Mathematikunterricht, indem sie nicht unbedingt als etwas „Schlechtes“ betrachtet werden müssen, zeigt aber andererseits auf, dass dennoch ein versteckter Abrichtungscharakter im Mathematikunterricht zurückbleibt. Diese Interpretation wird auch von einer darauffolgenden Passage unterstützt, in der Wittgenstein den Fall eines/einer hinterfragenden Schülers/Schülerin untersucht:

Wir haben also jemand die Technik des Multiplizierens beigebracht. Dabei verwenden wir Ausdrücke der Zustimmung und der Zurückweisung. Wir werden ihm auch manchmal das Ziel der Multiplikation anschreiben. "Das mußt Du erhalten, wenn es richtig sein soll" können wir ihm sagen. Kann nun der Schüler aber widersprechen und sagen: „Woher weißt Du das? Und ist, was Du willst, daß ich der Regel folgen soll, oder daß ich dies Resultat erhalten soll? Denn die beiden brauchen ja nicht zusammen zu treffen." Nun, wir nehmen nicht an, daß der Schüler das sagen kann; wir nehmen an, daß er die Regel von beiden Seiten her gelten läßt. Daß er den einzelnen Schritt und das Rechnungsbild — und also das Rechnungsergebnis — als Kriterien der Richtigkeit auffaßt, und daß, wenn diese nicht übereinstimmen er an eine Verwirrung der Sinne glaubt. (MS 124, 103)

Hier findet sich - wie oben - die Idee des Aussteigens aus dem Abrichtungsvorgang und des Hinterfragens der zu lernenden Regel wieder. Diesmal geht dies aber nicht - wie oben von der Lehrperson - sondern vom Schüler aus. Im Falle der Lehrperson hat Wittgenstein darauf hingewiesen, dass trotz möglicher Relativierung immer noch ein versteckter Abrichtungsvorgang vorhanden bleibt, im Falle des Schülers/der Schülerin scheint Wittgenstein jetzt aber die Möglichkeit des Widerspruchs überhaupt zu verwerfen. Um erfolgreich den Gebrauch einer Regel zu lehren, so scheint

Wittgenstein hier zu verdeutlichen, müssen wir annehmen können, dass der/die Schüler/in einerseits das angestrebte Multiplikationsergebnis als Kriterium für die Richtigkeit auffasst aber andererseits auch auf dem vorgegebenen Weg, also nach der vorgegebenen Regel, dort hingelangt. Das Resultat allein könnte ja auch durch irgendeine andere Methode erhalten worden sein, aber dann wäre dieser Lehr- und Lernvorgang abgebrochen, denn die erlernte Regel wäre nicht die von der Lehrperson intendierte Regel. Macht es nach Wittgensteins Sicht also überhaupt einen Sinn abweichende und abstruse Rechenarten zu akzeptieren? Ist der Abrichtungscharakter im Mathematikunterricht so stark, dass er entweder versteckt in Form von sozialem Zwang wiederkehrt oder der Lernvorgang überhaupt abgebrochen wird?

Denken wir uns folgenden Fall: Die Leute eines gewissen Stammes können nur mündlich rechnen. Sie kennen die Schrift noch nicht. Sie lehren ihre Kinder im Dezimalsystem zählen. Es kommen bei ihnen, auch bei allen Erwachsenen, sehr häufig Fehler im Zählen vor, sie lassen Ziffern aus, oder wiederholen sie, ohne es zu merken. Ein Reisender aber nimmt ihr Zählen phonographisch auf. Er lehrt sie die Schrift und schriftliches Rechnen, und zeigt ihnen dann wie oft sie sich beim bloß mündlichen Rechnen verrechnen. — Müssen diese Leute nun zugeben, sie hätten früher eigentlich nicht gerechnet? Sie wären nur herumgetappt, während sie jetzt gehen? Könnten sie nicht vielleicht sogar sagen: früher seien ihre Sachen besser gegangen, ihre Intuition sei nicht durch die toten Schreibmittel belastet gewesen. Man könne den Geist nicht mit toten Maschinen fassen. Sie sagen vielleicht: "Wenn wir damals, wie Deine Maschine behauptet, eine Ziffer wiederholt haben, so wird es wohl so recht gewesen sein." (BGM III, §81)

Hier eröffnet Wittgenstein die Problemlage in Bezug auf seine relativistische Tendenz in Bezug auf das Lernen von Mathematik nun vollständig. Diese Stelle reiht sich ein in einen Abschnitt, in dem sich Wittgenstein mit Hilberts Formalismus und seiner Forderung, dass nur Konsistenzbeweise die Sicherheit der Mathematik garantieren können, beschäftigt. Das Beispiel dieses Stammes von „tief sorglosen Mathematiker

n“ soll nun einen radikalen Kontrast zu unserer Art zu rechnen darstellen, mit dem Ziel die Grundlage unserer „vernünftigen“ und „sicheren“ Mathematik zu verstehen und zu hinterfragen. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.521) Die Frage lässt

sich also auch abschwächen auf: War das Rechnen der Menschheit immer „unsicher“ bevor wir gelernt haben, Konsistenzbeweise durchzuführen, oder den Kalkül der modernen Logik und Mengenlehre zur Verfügung hatten? Die Antwort, die Wittgenstein hier geben möchte ist, so denke ich, klarerweise: Nein, aber die Einführung dieser Praktiken in unsere Mathematik hat dazu geführt, dass wir sie als Paradigmen und Kriterien der „Sicherheit“ in unsere mathematische Praxis aufgenommen haben. Es gibt keine tiefere Begründung für diese Praktiken als eben unsere Überzeugung von ihrer Wichtigkeit. Insofern ist es den Stammesmitgliedern auch unbenommen, sich für ihre Praktiken zu entscheiden und unsere Standards abzulehnen. Mühlhölzer schließt daraus, dass es Wittgenstein hier vor allem darum geht, zu zeigen, wie sehr unsere Mathematik auf solchen Standards und Paradigmen beruht, und, dass es eine absolute Sicherheit nicht geben kann. Wittgenstein scheint sich hier nämlich - an dieser Stelle folge ich Mühlhölzer - auf gewisse anti-formalistische Gedanken des schon erwähnten Wiener Vortrags von Brouwer zu beziehen: „Es gibt also auch für die reine Mathematik keine sichere Sprache“. (Brouwer 1929, S.157) Sicherheit erhalten wir eben, um eine Leitlinie von Wittgensteins Philosophie der Mathematik noch einmal zu betonen, nur aus dem Zwang unserer Praxis, also aus der Tatsache, dass wir so rechnen. Die Betrachtung anderer „Rechenkulturen“ scheint an dieser Stelle also vor allem dazu zu dienen, die tatsächlichen Grundlagen unserer tatsächlichen mathematischen Praxis herauszuarbeiten. (Vgl.: Mühlhölzer 2010, S.523)

Dennoch bleiben hier Fragen offen. Wittgenstein betont im obigen Zitat, dass die Fehler passieren ohne, dass die betreffenden Personen es merken. Kann also das, was in unserer Art zu Rechnen als Fehler bezeichnet wird fester Bestandteil einer anderen Rechenkultur sein? Wittgenstein scheint dies oft nahezu legen.

Man könnte sagen, die Begriffe der Menschen zeigen, worauf es ihnen ankommt und worauf nicht. Aber nicht als erklärte das die besondern Begriffe, die sie haben. Es soll nur die Auffassung ausschließen, als hätten wir richtige, andre Leute falsche Begriffe. (Es gibt einen Übergang von einem Rechenfehler zu einer andern Art des Rechnens.) (MS 173, 86v)

Soweit ist Wittgenstein also sehr wohl Relativist. Allerdings bedeutet das eben nicht, dass damit der Willkür in der Mathematik und im Mathematikunterricht Tür und Tor geöffnet sind. Die Sicherheit, ja die Unerbittlichkeit, der Mathematik kommt für Wittgenstein ja, wie gesehen, aus der Anwendung ihrer Rechnungen im alltäglichen Kontext. Damit ist klar, dass in einer anderen Kultur, in der es vielleicht ganz andere Anwendungen des Rechnens gibt, auch die Regeln des Rechnens und die Definition des Rechenfehlers unterschiedlich sind. Auch unsere Art des Rechnens, so betont Wittgenstein mehrfach ausdrücklich, würde sich ändern, wenn sich aus irgendeinem Grund die Anwendung ändert. Wenn sich also die Dinge, die wir für gewöhnlich zählen, plötzlich ganz anders verhalten würden.

Man kann sich leicht Ereignisse vorstellen und in allen Einzelheiten ausmalen, die, wenn wir sie eintreten sähen uns an allen Urteilen irrewerden ließen. Sähe ich vor meinen Fenstern statt der altgewohnten eine ganz neue Umgebung, benähmen sich die Dinge darin, wie sie sich nie benommen haben, so würde ich etwa die Worte äußern "Ich bin wahnsinnig geworden", aber das wäre nur ein Ausdruck dafür, daß ich es aufgabe mich auszukennen. Und das gleiche könnte mir auch in der Mathematik zustoßen. Es könnte mir z.B. scheinen, als machte ich immer wieder Rechenfehler, so daß keine Lösung mir verlässlich erschiene. Das Wichtige aber für mich daran ist, daß es zwischen einem solchen Zustand und dem normalen keine klare Grenze gibt. (MS 127, 51a)

Wiederum wird hier betont, dass solche Zustände bei weitem nicht so abwegig sind, wie vielleicht angenommen. Und das soll zeigen, dass die Sicherheit unserer Mathematik weder auf irgendeiner Metaphysik oder Wahrheit, wie im Platonismus angenommen, noch auf einem speziellen Formalismus oder einer speziellen Sprache, wie in Hilberts Formalismus, sondern auf unserer Praxis beruht. Und es lässt sich zumindest denken, dass diese Praxis anders sein könnte, wenn sich dauerhaft andere alltägliche Erfahrungen mit dem Rechnen einstellen würden.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass ein Rechenfehler, der auch von dem/der Schüler/in als Fehler eingesehen wird, ein normaler und notwendiger Aspekt jedes Unterrichts einer Regel sein muss. Auf die Frage, was passiert, wenn der/die Schüler/in auf sein/ihr „fehlerhaftes“ Rechnen

beharrt und es nicht als Abweichung von der Regel ansieht, haben wir verschiedene Antworten Wittgensteins gefunden. Es kommt entweder zur Sanktion oder zum Abbruch des Lernvorgangs: „Wer (die Demonstration) *nicht* anerkennt, wer ihr nicht als Demonstration folgt, der trennt sich von uns, noch ehe es zur Sprache kommt.“ (BGM I, §61) Man kann hier nicht mehr von Missverständnis oder Irrtum sprechen, sondern der/die Schüler/in spielt sozusagen ein anderes Spiel. (Vgl.: Ramharter/Weiberg 2006, S.74) Dennoch wird Wittgenstein nicht müde, zu betonen, dass eine andere mathematische Praxis sehr wohl denkbar ist, wenn sich beispielsweise Äpfel und Birnen beim Zählen völlig anders verhalten würden. Dies ist allerdings vor allem ein heuristisches Gedankenexperiment, um zu argumentieren, dass die „Sicherheit“ der Mathematik auf unserer Art und Weise, im Alltag zu rechnen, fußt. Für den Unterricht bedeutet dies, dass ein Ansprechen von Fehlern, die zu einer anderen Art des Rechnens führen, auf jeden Fall möglich, vielleicht sogar erwünscht ist. Dennoch besteht für Wittgenstein am Ende immer der Zwang auf unsere Art und Weise zu rechnen. Und der Grund dafür ist ganz einfach, dass sie verwendet wird und sich bewährt hat.

3.3.4 Überzeugung durch übersichtliche Beweise als andere Art des Mathematik Lernens

Nach einem Fokus auf Wittgensteins Betrachtung des Abrichtens im Lernprozess soll nun eine mögliche weitere, in der Literatur weitaus weniger beachtete, Form des Lernens in der Mathematik in Betracht gezogen werden. Wie wir in 3.2.2 gesehen haben, kann sich der Gebrauch eines Begriffs in der Mathematik nicht nur durch Training und Abrichtung verändern, sondern auch durch „Überzeugung“, die wir durch übersichtliche Beweise gewinnen. Die anhand der Textevidenz zu argumentierende Behauptung ist nun, dass Wittgenstein damit auch wirklich eine weitere Form des Lehrens und Lernens von Mathematik im Blick hat.

Dafür spricht zunächst einmal, dass Wittgenstein die begriff-verändernde Wirkung von Beweisen anhand einer konkreten Demonstration in einem Unterrichtskontext illustriert. Wie wir schon gesehen haben, handelt es sich dabei um die Demonstration, dass 100 Kugeln in 10 Reihen von je 10 Kugeln

angeordnet werden können. Dieses Beispiel der 100 Kugeln ist klarerweise in einem Unterrichtskontext verortet und könnte sogar als prototypische Methode im Grundschulunterricht bezeichnet werden. (Vgl.: BGM I, §36f.) Diese Demonstration ist schließlich so überzeugend, dass der/die Schüler/in sich dazu entschließt den Begriff 100 zu erweitern. (Vgl.: MS 121, 51 -54)

Wichtig ist, zu betonen, dass Wittgenstein die Begriffsveränderung durch Überzeugung eindeutig in Bezug auf Beweise, Demonstrationen und Bilder beschreibt. Diese können durch ihre „Übersichtlichkeit“ den/die Schüler/in dazu bringen, sie als Paradigma aufzunehmen und seine/ihre Begriffe umgehend zu verändern. Es scheint also als unterschieden sich die zwei Arten des Lernens in der Mathematik vor allem durch ihren Fokus. Beim Einüben der elementaren Rechenoperationen gibt es notwendigerweise einen Abrichtungsprozess, der die Schüler/innen zu kompetenten Anwender/innen der Rechenregel macht. Beim Beweisen, dass eine Rechnung dieses Ergebnis hervorbringt, gibt es allerdings die Möglichkeit, durch ein übersichtliches Bild oder eine übersichtliche Demonstration das Annehmen der Regel durch Überzeugung herbeizuführen. Diese beiden Varianten des Lernens spiegeln sich auch in unterschiedlichen Aufgaben der Lehrperson wider: Auf die Aufgabenstellung „Berechne: $2+3$ “ muss der/die Schüler/in durch ein Vorgehen entlang der eingeübten Rechenregel mit dem richtigen Ergebnis antworten. Die Beurteilung durch die Lehrperson kann dann nur, ganz im Sinne des Abrichtungsprozesses, in den Kategorien „wahr“ und „falsch“ erfolgen. Es gibt aber auch die Möglichkeit, so beobachtet Wittgenstein, eine Aufgabe in der Form „Zeig mir wie 3 und 2 5 ergeben“ zu stellen. (Vgl.: BGM VI, §9) Die Antwort des Kindes muss dann eine Art von übersichtlicher Demonstration oder Darstellung sein, beispielsweise kann es „3 Kugeln zu 2 Kugeln schieben“. (Vgl.: ebenda) Wir sehen also, dass Wittgenstein diese Art des Lernens durch überzeugende Beweise gewissermaßen als nachträgliche Begründung der durch Einüben erlernten Regeln vorgesehen hat:

Und wenn das Kind nun zeigt, wie 3 und 2 5 geben, so zeigt es einen Vorgang, der als Grund der Regel $2+3=5$ betrachtet werden kann. (BGM VI, §9)

Voraussetzung dafür ist allerdings, dass das Kind in die Rechenpraxis schon eingeübt wurde und die Lehrperson nur überprüfen möchte, ob der/die Schüler/in „überhaupt versteht wovon hier die Rede ist“. (Vgl.: ebenda) Damit erscheint es als durchaus gerechtfertigt, dass Wittgenstein in der „Überzeugung durch übersichtliche Beweise“ eine vom Abrichtungsprozess unabhängige, ihn quasi im Nachhinein begründende, Art der Begriffsveränderung und damit des Lernens in der Mathematik gesehen hat.

Wir haben also gesehen, dass das Lernen von Mathematik bei Wittgenstein immer als Änderung einer Rechenpraxis beziehungsweise als Änderung eines Begriffs verstanden wird. Dabei eröffnen sich zwei Wege, die der Lehr- und Lernprozess einschlagen kann: Einerseits das Einüben einer bestimmten Art zu rechnen (durch Abrichtung), das letztendlich dazu führt, dass die Schüler/innen sich dazu entscheiden, diese Rechenpraxis als Norm beziehungsweise als Regel anzunehmen. Andererseits gibt es die Möglichkeit der Überzeugung durch übersichtliche Beweise oder Demonstrationen, die dazu führen, dass sich die Schüler/innen dazu entscheiden, einen neuen Begriff anzunehmen beziehungsweise die Demonstration als Paradigma aufzunehmen. Beide Möglichkeiten haben als zentrales Element eine letztlich freie Entscheidung, diese Norm so zu akzeptieren. Es gibt keine Einsicht in „tiefe Zusammenhänge“ oder „ewige Wahrheiten“. Der „Zwang“ des mathematischen „Muss“ entsteht gerade im Lernprozess und ist für Wittgenstein eindeutig aus unserer Praxis hergeleitet und keineswegs metaphysisch bedingt. Gerade die Möglichkeit komplett anders zu rechnen erfordert diesen praktischen Zwang, der durch die Entscheidung des Schülers/der Schülerin in Zukunft genau so zu rechnen selbst auferlegt wird. Damit grenzt sich Wittgensteins Sicht klar ab von jeder Form von empirischer Begründung der Mathematik. Unsere Art und Weise zu rechnen fußt zwar auf praktischen Operationen und empirischen Erfahrungen, die im Lernprozess gemacht werden, aber sie ist letztlich eine sozial bedingte Praxis, deren Notwendigkeit nicht aus der Erfahrung, sondern eben genau aus dem Lernprozess entsteht. Nun werden wir dazu übergehen, dieses Bild von Lehren und Lernen in der Mathematik mit klassischen Theorien der Fachdidaktik zu vergleichen.

4 Anknüpfungspunkte in Fachdidaktik und Lerntheorie

4.1 Vertritt Wittgenstein eine (behavioristische) Lerntheorie?

Eine Frage, die in der Wittgenstein Rezeption, vor allem in Bezug auf seinen Nachlass, immer wieder auftritt, ist jene, ob Wittgenstein in seinen Manuskripten und Notizen eine konsistente und stringente Theorie etwa der Sprache, des Lernens und der Mathematik vertritt. Auch in Bezug auf seine Sichtweise des Lehrens und Lernens von Mathematik kann eine solche Frage sicherlich gestellt werden. Ich möchte hier nun aus methodischen Gründen zwei unterschiedliche Varianten dieser Frage unterscheiden. Die erste Variante lautet: „Möchte Wittgenstein in den betreffenden Textpassagen überhaupt eine ernstzunehmende Theorie des Lehrens und Lernens von Mathematik aufstellen?“ Die zweite Variante würde lauten: „Vertritt Wittgenstein eine bestimmte Lerntheorie?“ Letztere ist vor allem in Bezug auf den Behaviorismus meist als Vorwurf gestellt worden.

4.1.1 Formuliert Wittgenstein eine konsistente Theorie des Lernens?

Dieser Frage zu Grunde liegt klarerweise der Einwand, dass Wittgenstein vielleicht überhaupt nichts Relevantes und Ernstzunehmendes über den Mathematikunterricht aussagen möchte, und ihn beispielsweise nur achtlos als Modell für seine Philosophie der Mathematik benutzt. Oder, noch stärker, könnte eingewendet werden, dass nur Texte, die gewisse Kriterien der Lerntheorie oder der Fachdidaktik erfüllen als Theorie des Mathematikunterrichts ernst genommen werden dürfen. Wittgensteins verstreute Bezugnahmen auf mathematische Lehr- und Lernprozesse hätten demnach allein aufgrund methodischer Mängel schon keine Bedeutung für die mathematische Fachdidaktik. Hacker und Baker formulieren diesen Vorwurf in Bezug auf die in Kapitel 3 behandelten Passagen der „Philosophischen Untersuchungen“:

Wittgenstein's strategy may be misunderstood. It may look like armchair learning-theory, long superseded by experimental psychological investigations. It may appear to introduce empirical data that are irrelevant to philosophical elucidation of

meaning, conflating genetic investigations with concept analysis. So it may seem to be a form of psychologism. (Baker/Hacker 2005, S.29)

The examination of teaching contexts is not a form of armchair learning theory, and its importance consists not in what it shows about learning, but what it shows about what is taught. (Baker/Hacker 2005, S.32)

Nach dieser Interpretation von Hacker und Baker wäre die Beschreibung von Lernkontexten bei Wittgenstein also lediglich eine philosophische Methode, ein konstruiertes heuristisches Modell, um seine Philosophie der Sprache oder der Mathematik zu illustrieren.

Ich möchte diesem Einwand zunächst einmal entgegnen, dass die Frage, ab wann etwas als „Theorie“ bezeichnet werden kann einen wissenschaftstheoretischen Diskurs darstellt, der oft nicht einmal innerhalb einer wissenschaftlichen Disziplin unumstritten geklärt ist. Die Frage, ob Wittgenstein eine Theorie vertritt oder nicht ist also eine Frage der Definition des Begriffs „Theorie“ und im Zuge dieser Arbeit nicht wirklich sinnvoll. Hinzu kommt, dass Wittgensteins spezielle aphoristische Textform keinerlei Rücksicht auf methodische Kriterien irgendeiner Art nimmt. Ihm allerdings nur deshalb jegliche Relevanz für die Fachdidaktik abzusprechen, erscheint jedoch nicht gerechtfertigt. Insofern ist es also für den Punkt dieser Arbeit irrelevant, ob man Wittgensteins Sichtweise Theorie nennen möchte oder nicht. Weiters kann aus dem Fazit von Kapitel 1 gefolgert werden, dass jegliche philosophische Sichtweise der Mathematik immer auch einen Einfluss auf den konkreten Mathematikunterricht sowie auf fachdidaktische Theorien des Mathematikunterrichts hat, ganz gleich, ob sie als kohärente Theorie vorgetragen wird oder nicht. Dass Wittgenstein eine besondere Sichtweise der Mathematik und des Mathematikunterrichts in seinen Texten vorstellt, kann nach der Analyse in Kapitel 3 wohl nicht abgestritten werden. Vor allem auch da er das Lernen und Lehren von Mathematik nicht nur berücksichtigt, sondern als zentrale Methode und beispielhafte Anwendung seiner Philosophie der Mathematik verwendet. Somit ist klar, dass seine Beschreibungen eine Bedeutung für Fachdidaktik und Unterricht haben können.

Schwerer wiegt der darunterliegende Vorwurf, den Hacker und Baker formulieren, dass Wittgenstein von sich aus überhaupt nichts über das Lehren und Lernen aussagen möchte und die Bedeutung seiner Betrachtung des Lernens nur darin besteht, dass er damit etwas über das Gelernte (also Sprache oder Mathematik) aussagt. Dem kann allerdings entgegnet werden, dass Wittgenstein an keinem Punkt ausdrücklich davon spricht, dass er die Lernsituationen nur als „Modell“ verwendet. Ganz im Gegenteil finden sich, wie schon in Kapitel 3 ausführlich geschildert, einige Stellen, an denen Wittgenstein klar ausdrückt, dass er beschreiben möchte, wie Kinder *tatsächlich* Mathematik lernen. (Vgl. beispielsweise: BGM I, §4) Wenn man also behaupten möchte, dass Wittgenstein lediglich fiktive Lernsituationen rein aus heuristischen Gründen konstruiert, so müsste man dies aus der Textevidenz heraus argumentieren können. Solange solche Beweise aus der Textevidenz nicht vorgebracht werden, muss uns dieser Vorwurf im Folgenden nicht weiter beschäftigen.

4.1.2 Ist Wittgenstein ein Behaviorist und „Abrichtung“ nichts anderes als „Konditionierung“?

Die zweite Variante die Frage zu stellen lautet: Vertritt Wittgenstein eine bestimmte Lerntheorie? Kann er einer der klassischen Lerntheorien zugeordnet werden? Meistens wird diese Frage in Bezug auf den Behaviorismus gestellt. Und in der Tat lassen sich auf den ersten Blick viele Parallelen zwischen Wittgensteins Beschreibungen von Lernprozessen und behavioristischen Lerntheorien ausmachen. Wittgenstein wird vor allem in Bezug auf die Philosophie des Geistes und das Privatsprachenargument von manchen Kommentator/innen als Behaviorist bezeichnet. (Vgl. hierzu: Tanney 2015 und Mundle 1966) Diese Frage erscheint mir in Bezug auf seine Sichtweise des Mathematikunterrichts allerdings wiederum nur von klassifikatorischem Interesse zu sein. Ob es gerechtfertigt erscheint, Wittgenstein als Behaviorist zu bezeichnen, hängt davon ab, wie man „Behaviorismus“ definiert, und dient jedenfalls nicht dazu, die Frage dieser Arbeit, nämlich die mögliche Brauchbarkeit seiner Sichtweise für Unterricht und Didaktik, zu beantworten.

Deshalb soll hier nur kurz argumentiert werden, warum Wittgenstein keinen radikalen, reduktionistischen Behaviorismus vertritt.

Interessanterweise steht eine Nachlasspassage, in der sich Wittgenstein mit der Frage des Behaviorismus in seinen Ansichten auseinandersetzt, direkt im Kontext seiner Behandlung von mathematischen Sätzen. Zunächst scheint sich Wittgenstein gegen jede Art von „innerer Empfindung“ als Erklärung für die Bedeutung einer sprachlichen Äußerung zu wenden:

„Aber bist Du nicht doch nur ein verkappter Behaviorist? (...) Sagst Du nicht doch im Grunde, daß alles Fiktion ist, außer dem Benehmen?“ Aber Fiktion ist der Gegenstand hinter der Äußerung. Fiktion ist es, daß unsre Worte, um etwas zu bedeuten, auf ein Etwas anspielen müssen, das ich, wenn nicht einem Andern, doch mir selbst zeigen kann. (Grammatische Fiktion.) (...) Meine Kritik besteht darin, daß ich die gewöhnliche, primitive Auffassung der Funktion der Wörter im Gebrauch der Sprache als zu eng // bezeichne. (MS 124 5 /6)

An dieser Stelle folgt aber im Anschluss umgehend eine Behandlung von mathematischen Sätzen der Form „12 Zoll = 1 Fuß“ und „25x25 = 625“. In diesem Zusammenhang schreibt Wittgenstein dann:

Was ich zu tun habe, ist etwas, wie: das Amt eines Königs zu beschreiben; — wobei ich nicht in den Fehler verfallen darf, die königliche Würde aus der Nützlichkeit des Königs zu erklären; und doch weder Nützlichkeit noch Würde außer Acht lassen darf. (MS 124 13)

Diese sehr vage Aussage lässt sich in diesem Kontext, so denke ich, durchaus als Absage einer radikalen behavioristischen Reduktion auf Praxis und Verhalten interpretieren. Genau wie der Fiktion der Referenz bei der Wortbedeutung als „grammatische Fiktion“ eine bedeutende Rolle zukommt, die Wittgenstein in keiner Weise antasten will, ist die Königswürde auch Bestandteil des Königsamtes. Seine Kritik wendet sich gegen die primitive Auffassung der Wortfunktion und stellt keine Ablehnung der Idee der Wortreferenz im Allgemeinen dar. In Bezug auf das Lernen bedeutet dies, dass Wittgenstein durch seinen Fokus auf Abrichtung und Zwang eine primitive Auffassung des Lernprozesses kritisieren möchte, aber in keiner Weise zu der behavioristischen

Auffassung gelangt, dass Lernen auf Abrichtung und Verhaltensänderung *reduzierbar* wäre.

Mit dem Vorwurf des Behaviorismus schwingt auch der Einwand mit, dass Wittgenstein mit seiner Betonung der Notwendigkeit von Abrichtungsprozessen im Mathematikunterricht einfach nur ein veraltetes, autoritäres Bild von Unterricht reproduziert, welches allein aus ethisch-pädagogischen Gründen schon a priori abzulehnen und zu verwerfen ist.

Diesem Einwand muss entgegnet werden, dass, wie wir gesehen haben, Wittgenstein in seinen Schilderungen von Abrichtungsprozessen betont, dass es letztlich der/die Lernende ist, der/die sich dazu entscheidet, eine bestimmte Rechenpraxis als Paradigma anzunehmen. Die Lehrperson besitzt bei Wittgenstein eben keinen privilegierten Standpunkt, von dem aus sie die Regeln erklären kann, vielmehr ist sie ganz einfach erfahren im Gebrauch der Regel, die sie unterrichten möchte. Das Ziel des Abrichtungsprozesses ist schlussendlich die kompetente Teilnahme des Schülers/der Schülerin an der Rechenpraxis samt der Möglichkeit der Selbstkontrolle. (Vgl.: Medina 2002, S.163f.) Allein diese Aspekte sprechen schon dagegen, dass Wittgenstein ein „militärisches“ Unterrichtsbild propagieren wollte. Im Gegenteil eröffnet sich, wie oben gesehen, durch Wittgensteins Relativismus eine neue Möglichkeit, auch abweichendes Rechnen nicht als „falsch“, sondern einfach nur als „anders“ stehen zu lassen. Durch die Thematisierung der sozialen Bedingtheit der mathematischen Begriffe und Operationen ermöglicht Wittgenstein also gerade einen nicht-autoritären Gebrauch der Kategorien „richtig“ und „falsch“ in der Mathematik. Letztlich kommt die Lehrperson nach Wittgenstein nicht ohne den Hinweis auf den Fehler und die Hinlenkung auf das „erwünschte“ Verhalten aus, aber in welcher Art diese „Abrichtung“ im konkreten Unterricht erfolgt, darauf gibt Wittgenstein keine Antwort. Sie ist gewissermaßen ethisch „neutral“ zu sehen.

4.2 Wittgenstein und das „entdeckende Lernen“ im Mathematik-Unterricht

Strömungen, welche in der pädagogischen sowie insbesondere in der mathematikdidaktischen Literatur einen Schwerpunkt auf schülerzentriertes Unterrichten und entdeckendes Lernen setzen, sind prominent und zahlreich. Vor allem im Bereich der sogenannten „Reformpädagogik“ und der didaktischen Literatur der 70er und 80er Jahre spielt das selbstständige entdeckende Lernen eine, wenn nicht *die*, zentrale Rolle. Vordenker dieser Pädagogik und Lerntheorie war unter Anderen der kognitivistische Psychologe und Pädagoge Jerome Bruner.

4.2.1 Wittgenstein und Bruners „Akt der Entdeckung“

Bruner beschreibt in (Bruner 1961) den „Akt der Entdeckung“ als eine Neuordnung oder Transformation des Gegebenen, welches dann „zu weiteren neuen Einsichten kombiniert wird“. (Vgl.: Bruner 1961, S.16) Dieses Gewinnen neuer Einsichten erfolgt für Bruner, in starker Abgrenzung vom behavioristischen Lernbegriff, weitgehend autonom und ohne Einfluss „von außen“ wie Verstärkung oder Belohnung. Das Kind würde beim entdeckenden Lernen dazu neigen, „seine Lernaktivitäten mit autonomer Selbstbelohnung durchzuführen; genauer gesagt, mit der Belohnung der Entdeckung selbst“. (Vgl.: Bruner 1961, S.22) Dies erfolgt laut Bruner vor allem durch einen Prozess der „Internalisierung“:

Die Erzählform des Lernens ist wie ein Gespräch strukturiert. Der nächste Schritt bei der Entwicklung ist die Internalisierung des Gesprochenen und seiner „Konstruktionsregeln“, so daß das Kind nun fähig ist, die Erzählung selbst fortzusetzen. (...) Wenn das Kind einmal internalisiert hat, ist es in verschiedener Hinsicht in einer erheblich besseren Position – wichtig ist, daß es nun über die ihm gebotene Information hinausgehen kann, um weitere Gedanken hervorzubringen; diese können entweder unmittelbar durch Erfahrung geprüft werden oder sie können zumindest als Grundlage für die Formulierung sinnvoller Hypothesen dienen. Doch darüber hinaus kann das Kind nun Erfolg und Mißerfolg als Information und nicht als Belohnung und Bestrafung erleben. Denn hat es seine eigene Aufgabe und muß nicht Forderungen der Umgebung erfüllen, so wird es

gewissermaßen sein eigener Zahlmeister. Wenn es Kontrolle über seine Umwelt erlangen will, kann es Erfolg nun als Zeichen für den richtigen Weg betrachten, Mißerfolg als Zeichen dafür, daß es sich auf dem falschen Weg befindet. (Bruner 1961, S.23)

An dieser Stelle fällt zunächst sofort auf, dass Bruner nicht ausdrücklich angibt, wie die durch das entdeckende Kind neu gewonnen Informationen in die von ihm angegebenen Kategorien „Erfolg“ und „Misserfolg“ eingeordnet werden sollen. Wenn das „entdeckende Lernen“ wirklich vollkommen selbstständig und ohne Einfluss „von außen“ ablaufen soll, das Kind also wirklich „sein eigener Zahlmeister“ ist, dann muss es über Kriterien verfügen, mit denen es selbst überprüfen kann, ob die gewonnenen Einsichten als Erfolg oder als Misserfolg zu verbuchen sind. Aus der Sichtweise Wittgensteins kann hier wohl nur entgegnet werden, dass dies, zumindest in Bezug auf die Mathematik, als unmöglich zu bezeichnen ist. Wenn man, wie Wittgenstein, davon ausgeht, dass eine von unseren Konventionen komplett abweichende Art des Rechnens immer möglich ist und nicht einfach, beispielsweise durch Überprüfung mit der Erfahrung, ausgeschlagen werden kann, scheint es für die Kategorisierung der selbst gewonnen „Einsichten“ beim entdeckenden Lernen nur zwei Möglichkeiten zu geben: Entweder jedes selbst gewonnene Produkt des Kindes wird als Erfolg bezeichnet oder es kommt entgegen aller Grundannahmen des „entdeckenden Lernens“ doch zu einer Bewertung von „außen“. Die erste Variante scheint Bruner jedenfalls nicht im Sinn zu haben, wenn er eindeutig von der Möglichkeit des „Mißerfolgs“ spricht. Insofern gilt es, die zweite Variante genauer zu betrachten. In welcher Art kann nun diese Bewertung von außen erfolgen? Wittgenstein würde hier wohl die nachträgliche Bewertung der neu entdeckten Einsichten durch die Lehrperson oder das soziale Umfeld im Sinne von „so rechnen wir eben“ (siehe: Kapitel 3.3) ins Spiel bringen. Die vom Kind selbst entdeckten Informationen werden also in die Kategorien Erfolg und Misserfolg eingeordnet, indem überprüft wird, ob sie „unserer üblichen Art zu rechnen“ entsprechen oder nicht. Das hätte natürlich die Folge, dass, entgegen aller Voraussetzungen, auch beim „entdeckenden Lernen“ zu guter Letzt ein extrinsischer Prozess des Belohnens und Bestrafens durch die soziale Umwelt entscheidend ist. Wittgensteins Sichtweise ermöglicht also die kritische Frage

an die Theorie des „entdeckenden Lernens“, ob die behauptete Selbstständigkeit des Lernprozesses nicht eine Wunschvorstellung ist und die versteckte Rolle sozialer „Abrichtungsprozesse“ zu wenig in den Blick genommen wird.

Eine Möglichkeit, auf diesen Vorwurf zu reagieren, wäre natürlich, zu behaupten, wie es Bruner an dieser Stelle auch anklingen lässt, dass das Kind durch die „Erzählform des Lernens“ vor der Internalisierung schon das gesamte notwendige „Rüstzeug“ für das Entdecken neuer Einsichten, sowie für die nachträgliche Kategorisierung dieser Einsichten in diejenigen, die mit unserer Art Mathematik zu betreiben kompatibel sind und diejenigen, die dies nicht sind, erhält. Hier könnte man mit Wittgenstein nun entgegnen, dass dies den Abrichtungsprozess nur zeitlich vorverlegen würde: Das Kind wird solange „trainiert“ bis es nur mehr „erwünschte“ Resultate erzeugt und dann in den Prozess des „Entdeckens“ entlassen. Diese Art von Unterricht würde dann aber wieder nur scheinbar „vollkommen selbstständig“ ablaufen und wäre ganz klar schon im Vorhinein durch einen Prozess des Belohnens und Bestrafens geprägt. Insofern zeigt sich in einer ersten Annäherung, dass schon Bruners Konzeption des Entdeckenden Lernens mit Wittgensteins Sichtweise des Lernens von Mathematik nicht vereinbar erscheint, da sie implizit davon ausgeht, dass „Einsichten“ in mathematische Wahrheiten ohne Bezug zum sozialen Kontext möglich sind. Dieser Punkt der Unvereinbarkeit der beiden Positionen soll nun eingehender analysiert werden.

4.2.2 Wie „persönlich“ können „Einsichten“ in der Mathematik sein?

Auch in der Mathematik-didaktischen Literatur findet sich die oben geschilderte Grundannahme Bruners wieder, dass Lernen im Grunde aus dem ganz persönlichen Gewinnen von Einsichten besteht, wieder. So formuliert zum Beispiel der Mathematikdidaktiker Heinrich Winand Winter in seinem Buch „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“ (Winter 2016) diese Annahme in Bezug auf entdeckendes Lernen in der Mathematik folgendermaßen:

Etwas in Mathematik zu lernen, kann auf die Dauer nicht ohne *Gewinnen von Einsicht* erfolgreich sein. Scheinleistungen (Reproduktion angelernter verbaler Verhaltensweisen) sind zwar durchaus möglich und treten auch gehäuft real auf,

können aber nur immer zeitlich und inhaltlich lokal funktionieren. Auf die Dauer ist Lernen mit und durch Einsicht intellektuell sowohl ökonomischer als auch wirkungsvoller (im Sinne von Transferleistungen). Das Gewinnen von Einsicht kann aber nicht anders als ein Prozess gedacht werden, den der Lernende nur ganz für sich persönlich vollziehen kann. (Winter 2016, S.2)

Interessant erscheint hier, dass zwar behauptet wird, erfolgreiches Lernen in der Mathematik käme nicht ohne Einsicht aus, aber der Begriff der „Einsicht“ nicht weiter beschrieben und somit schon als bekannt vorausgesetzt wird. Winter stellt also zwei Formen des Mathematikunterrichts einander gegenüber: Einerseits einen Unterricht, der den Schüler/inne/n je ganz persönliche Einsichten in mathematische Sachverhalte ermöglicht, welche sie dann transferieren und weiter anwenden können. Andererseits einen Unterricht, der bloße „Reproduktion von Verhaltensweisen“ zum Ziel hat, welche Winter sogar als „Scheinleistungen“ bezeichnet.

Der Vergleich mit Wittgenstein drängt sich hier förmlich auf. Es ist ja gerade die Notwendigkeit von unhinterfragter „Reproduktion von Verhaltensweisen“ beim Lernen von Mathematik, die Wittgenstein so vehement betont. Und das Argument Wittgensteins, dass nämlich gerade die prinzipielle Relativität mathematischer Praxis, Begriffe und Sätze diese Abrichtung bedingt, lässt sich hier in eine kritische Analyse von Winters Grundannahme umformulieren. Es stellt sich nämlich sofort die Frage, wie ein Unterricht, der auf „Einsicht“ abzielt, mit einer Situation umgeht, in der ein/e Schüler/in eine von der mathematischen Norm abweichende, vielleicht sogar mit ihr inkompatible, Einsicht gewinnt? Wird diese Einsicht nämlich von der Lehrperson als „unrichtig“ abgetan, so offenbart sich, dass auch im „entdeckenden Lernen“ schlussendlich ein Abrichtungscharakter versteckt ist, ein Sanktionieren von „fehlerhaften“ Einsichten und ein Hinlenken zu einer bestimmten erwünschten mathematischen Praxis. Wird aber jede erdenkliche „Einsicht“ als gleich richtig anerkannt und in den Unterricht aufgenommen, so erscheint es fragwürdig, wie ein solcher Unterricht seine grundlegenden Ziele, allen voran die Vermittlung eines bestimmten Fachwissens, erreichen kann. Winter könnte nun auf diesen Einwand mit der Behauptung reagieren, dass mathematische Aussagen absolut wahr und mathematische Sachverhalte in irgendeiner Form objektiv sind,

könnte sich also an eine platonistische Philosophie der Mathematik wenden. Somit hat der/die Schüler/in entweder diese Einsicht in einen mathematischen Sachverhalt gewonnen - dann ist sie auch wahr - oder er/sie hat diese Einsicht nicht gewonnen. Die anschließende Frage wäre allerdings, wie der/die Schüler/in bemerken kann, ob sie diese Einsicht gewonnen hat oder nicht? Vor allem dann, wenn dieser Prozess letztlich „nur ganz persönlich“ vollzogen werden kann? Jedenfalls zeichnet sich Wittgensteins Sichtweise des Lehrens und Lernens der Mathematik dadurch aus, dass er dem „Gewinnen von Einsicht“ das „Einüben in eine Praxis“ gegenüberstellt, und damit auf tendenziell problematische Begriffe wie „Einsicht“, „Verstehen“ und „mathematischer Sachverhalt“ verzichtet. Er würde allerdings auch, wie schon bei Bruner gesehen, Winters Behauptung widersprechen, dass der/die Lernende schlussendlich den Lernprozess nur ganz für sich persönlich vollziehen kann. Wenn nämlich für Wittgenstein jede mathematische Praxis zu einem großen Teil sozial bedingt ist, dann fällt das Dogma der „Selbstständigkeit“ in sich zusammen. Es gäbe dann nur mehr ein scheinbares eigenes Entdecken, welches im Grunde immer sozial bewertet wird.

Dieser Vorwurf, dass das „entdeckende Lernen“ mit der Behauptung, dass die „Entdeckung“ immer ein rein persönlicher, interner Akt ist, zu weit geht, ist natürlich kein Vorwurf, der allein durch Wittgensteins Philosophie der Mathematik formulierbar wird. Ausubel, Novak und Hanesian haben diesen Vorwurf beispielsweise schon in (Ausubel/Novak/Hanesian 1978) vorgebracht:

Die allgemeinste und am meisten metaphysische ist die bekannte Behauptung, daß der Lernende eine Kenntnis oder eine Idee, die er erworben hat, nur *wirklich* besitzt, wenn er sie selbst oder durch eigene Einsicht entdeckt hat. Diese Ansicht hat ihren Ursprung zum Teil in der Vergötterung des kreativen Entdeckungsaktes beim Problemlösen im Verfahren des Aktivitätsprogramms für den Unterricht und in John Deweys überspitzter These, das eigentliche Kriterium der Intelligenz sei nicht die Fähigkeit, Kenntnisse zu erwerben, sondern die Fähigkeit Probleme zu lösen. Zum Teil liegt dieser Ansicht auch die kindzentrierte oder schülerzentrierte Auffassung zugrunde, jeder Mensch sei selbst am besten in der Lage, den Prozeß des Lernens über die eigene Person und ihre Welt zu bestimmen und jede

Einmischung in die Autonomie sei daher für die Lernergebnisse per definitionem schädlich. (Ausubel/Novak/Hanesian 1978, S.30)

Wir haben es also in den Augen von Ausubel, Novak und Hanesian hier mit einem zentralen Dogma der modernen Pädagogik zu tun.⁷ Dieses Dogma hätte einen wichtigen Ursprung in der Ablehnung des Lehrer/innen-vortrags als „autoritäre Unterrichtsmethode“. Nach den Proponenten des entdeckenden Lernens, so Ausubel, Novak und Hanesian, zwingt die Lehrperson die Schüler/innen beim Lehrer/innen-vortrag dazu, ihre Version der „Wahrheit“ bedingungslos auf Treu und Glauben blind anzunehmen, statt ihnen Gelegenheit zu geben, sie selbst zu entdecken“. (Vgl.: Ausubel/Novak/Hanesian 1978, S.39) Was ist also nun die spezielle Sichtweise Wittgensteins in Bezug auf entdeckendes Lernen? Um dies zu beantworten, soll im Weiteren Wittgensteins Schreiben über die „Begriff-Veränderung“ in der Mathematik untersucht werden.

4.2.3 „Entdeckung“ in der Mathematik als irreführende Analogie

Nun muss auch noch Wittgensteins zweite Möglichkeit des Lernens in der Mathematik in Betracht gezogen werden. Macht es einen Sinn bei der Begriffsänderung durch übersichtliche Beweise oder Demonstrationen in irgendeiner Form von einer „Entdeckung“ zu sprechen? Interessanterweise setzt sich Wittgenstein an mehreren Stellen mit der üblichen Sprechweise auseinander, dass mathematische Beweise etwas „entdecken“. Er schildert diese Sprechweise als Produkt einer „irreführenden Analogie“ von mathematischen Beweisen mit „unserem naturwissenschaftlichen Denken“. (Vgl.: MS 211, 631) Im Falle der Mathematik haben wir es laut Wittgenstein mit der Einführung neuer Konstruktionen und Verwendungsweisen von Begriffen zu tun und nicht mit der Entdeckung von wahren Sachverhalten. So schreibt er in Bezug auf die Einführung der irrationalen Zahlen:

Wenn man die irrationalen Zahlen einführt, so tut man immer so, als hätte man nun etwas Neues entdeckt (etwa neue Punkte zwischen den alten). Während es

⁷ Wie wir weiter unten sehen werden, kann diese Behauptung auch dem aktuellen „kompetenzorientierten“ Modell des Mathematikunterrichts zu Grunde gelegt werden.

sich nicht um eine neue Entdeckung, sondern um eine neue Konstruktion handelt (die man dann auch "Zahl" nennen kann, oder nicht). (MS 211, 38)

Dies steht nun direkt in Zusammenhang mit Wittgensteins Bild der begriffsverändernden Funktion von Beweisen. Durch diese neue Definition der irrationalen Zahlen wird nicht eine Entität „entdeckt“, wie sie die Analogie mit den Naturwissenschaften nahelegen würde, sondern die Anwendungsmöglichkeiten des Begriffs „Zahl“ werden erweitert.

Hier könnte nun gegen Wittgenstein eingewandt werden, dass komplexere Begriffe wie „irrationale“ oder „rationale“ Zahl schon in den fundamentalen Rechenoperationen angelegt wären, dass quasi im Begriff der natürlichen Zahl schon der Begriff des Bruchs enthalten ist und vom Kind schließlich nur noch entfaltet werden müsste, indem es zum Beispiel entdeckt, dass bei der Division natürlicher Zahlen auch ein Rest bleiben kann. Wittgenstein formuliert genau in Bezug auf die „Entdeckung“ der periodischen Zahlen beim Dividieren natürlicher Zahlen:

$\frac{1}{1} : 3 = 0,3$ entscheidet durch ihre Periodizität nichts, was früher offen gelassen war. Wenn vor der Entdeckung der Periodizität Einer vergebens nach einer 4 in der Entwicklung von $1:3$ gesucht hätte, so hätte er doch die Frage "gibt es eine 4 in der Entwicklung von $1:3$ " nicht sinnvoll stellen können (...) "Aber als Folge der Entdeckung der Periodizität hört er nun doch gewiß auf, nach einer 4 zu suchen! Sie überzeugt ihn also, daß er nie eine finden wird". — Nein. Die Entdeckung der Periodizität bringt ihn vom Suchen ab, wenn er sich nun neu einstellt. Man könnte ihn fragen: "Wie ist es nun, willst Du noch immer nach einer 4 suchen?" (Oder hat Dich, sozusagen, die Periodizität auf andere Gedanken gebracht.)

Und die Entdeckung der Periodizität ist in Wirklichkeit die Konstruktion eines neuen Zeichens und Kalküls. Denn es ist irreführend ausgedrückt, wenn wir sagen, sie bestehe darin, daß es uns aufgefallen sei, daß der erste Rest gleich dem Dividenten ist. (MS 211, 747)

Hier macht Wittgenstein ganz klar, dass aus seiner Sicht nicht einmal die einfachsten „Entdeckungen“, nämlich die der periodischen Zahlen aus dem Dividieren, „Entdeckungen“ in dem Sinne sind, dass dem/der Rechnenden plötzlich auffällt, dass es „periodische Zahlen“ gibt. Wittgenstein beschreibt

diesen Vorgang völlig anders: Die Durchführung der Division der natürlichen Zahlen 1 und 3 bringt ihn/sie dazu, diese Rechnung ab einem gewissen Punkt nicht mehr weiter zu führen, aber seine/ihre Reaktion darauf ist zunächst völlig offen. Es besteht laut Wittgenstein absolut keine Notwendigkeit, dass der/die Schüler/in den Begriff der Periodizität oder der periodischen Zahlen nun von sich aus entwickelt. Und in der Tat reagieren Kinder auf ein solches „Problem“ meist mit sehr unterschiedlichen Methoden. „Diese Division kann man nicht durchführen“, „Da muss man einfach nach der ersten Stelle aufhören“ wären denkbare und jedenfalls nach Wittgenstein nicht a priori „falsche“ Reaktionen. Aufbauend auf dieser Rechenerfahrung kann anschließend der Begriff „Periodizität“ eingeführt werden. Die Schüler/innen werden diesen Begriff annehmen und ihre Rechenpraxis ändern. Aber, und das ist für Wittgenstein hier der springende Punkt, der Begriff „Periodizität“ erklärt sich aus der Rechenerfahrung, aber er wird nicht in ihr „entdeckt“. Er ist schlussendlich eine Festlegung der Mathematiker/innen. Man könnte also sagen, dass Wittgenstein nicht die Praxis des Unterrichts kritisiert, sondern die ihn begleitende Beschreibung als „entdeckend“.

Nun könnte man entgegnen, dass das „entdeckende Lernen“ in der mathematik-didaktischen Literatur überhaupt keinen solchen „Akt der Entdeckung“ meint. Dass also gar nicht behauptet wird, dass die Schüler/innen in einem subjektiven Entdeckungsprozess wirklich dieselben objektiven mathematischen Begriffe – jede/r für sich in einem subjektiven Entdeckungsprozess - finden müssen. Könnte es nicht sein, dass, wie oben schon angesprochen, damit eher eine gewisse Art von Unterricht, von Lehrer/innen-verhalten gemeint ist?

Die Beantwortung dieser Frage würde einer großzügigen Analyse der fachdidaktischen Literatur zu diesem Thema bedürfen. In diesem Rahmen möchte ich nur argumentieren, dass sich die Bezugnahme auf ein solches, aus Wittgensteins Sicht problematisches, metaphysisch-motiviertes Verständnis von „Entdeckung“ sehr wohl in der fachdidaktischen Literatur findet. Das obige Zitat von Winter (Winter 2016, S.2) ist ein Beispiel dafür. Ein weiteres findet sich in (Küspert 2010):

Hinterfragt man die Bedeutung des Begriffs „entdecken“, dann ergibt sich im Sinne von „ent-decken“ ein Blick unter die Oberfläche, der ein tieferes Eindringen in die Problematik und damit auch ein tieferes Verständnis der Situation ermöglicht. So ist auch „entdeckendes Lernen“ im schulischen Mathematik-Unterricht zu verstehen: Indem Kindern Lösungswege nicht vorgegeben werden, sondern sie sich aktiv und eigenständig mit (mathematischen) Problemen auseinandersetzen dürfen, gelangen sie zu tiefen Einsichten in mathematische Zusammenhänge. (...) Es ist jedoch wissenschaftlich längst belegt, dass ganz besonders auch schwache Rechner von einem Unterricht, der konzeptuelles Wissen vermittelt und das selbstständige Ermitteln von Lösungswegen fördert, profitieren. (Küspert 2010, S.178)

Dieses Verständnis von „tiefen Einsichten in mathematische Zusammenhänge“ entspricht genau dem Bild von Mathematik, dass Wittgenstein in seiner Philosophie der Mathematik zu konterkarieren versucht. Hinter Küsperts Überlegungen scheint also klarerweise eine platonistische Philosophie der Mathematik, in der „tiefe“ Einsicht in ewig wahre Zusammenhänge möglich ist, zu stehen. Die Dichotomie zwischen einem Mathematikunterricht, der auf „tiefes Verständnis“ abzielt und einem Unterricht, der rein „prozedurales Wissen“ und reine Nachahmung von Verhaltensweisen zum Ziel hat, findet sich also auch hier wieder. Wenn mathematische Aussagen unabhängig von uns und objektiv wahr oder falsch sind, benötigt der/die Schüler/in den/die Lehrer/in eigentlich nur geringfügig als Gesprächspartner oder Coach, die Einsicht kommt von ihm/ihr selbst. Wenn mathematische Sätze aber als sozial konstruiert betrachtet werden, bekommt die Lehrperson eine viel stärkere Aufgabe: sie muss den /die Schüler/in dazu bringen, den Weg einzuschlagen, der unseren sozialen Normen und Gebräuchen entspricht. Jeder Weg wäre prinzipiell gangbar und der/die Schüler/in hat ohne die Lehrperson gar keine Chance, auf die richtige Spur zu kommen, weil ihm/ihr sonst die soziale Dimension des Lernens völlig abhandenkommt. Diese Überlegung ist eine, die Wittgenstein in allen Philosophien und Lerntheorien, die als konstruktivistisch beschrieben werden, am stärksten betont hat. So schreibt Paul Ernest:

For didactics, Wittgenstein's importance is to show that the "certainty" and "necessity" of mathematics are the result of social processes of development, and

that all knowledge, including that in education, presupposes the acquisition of language in meaningful, already existing social contexts and interactions. (Ernest, S. 341)

Die Rolle der Lehrperson ist es also nicht, den/die Schüler/in sich selbst zu überlassen, sondern sie in einen bedeutungsvollen sozialen Kontext der mathematischen Praxis einzuführen. Der Vorwurf, den man mit Wittgenstein an die didaktischen und pädagogischen Theorien des „entdeckenden Lernens“ stellen könnte, ist also, dass diese wichtige und verantwortungsvolle Rolle der Lehrperson allzu leicht in den Hintergrund gerät.

4.2.4 Ein neuer Umgang mit Fehlern beim selbstständigen Arbeiten

Nimmt man Wittgensteins Kritik an und verbannt jede Auffassung von „Einsichten“ und „Entdeckungen“ beim Lernen von Mathematik, so zeigt sich, dass Wittgensteins Sichtweise nicht prinzipiell gegen selbstständiges Arbeiten der Schüler/innen im Mathematikunterricht gerichtet ist. Im Gegenteil lässt sich die Möglichkeit eines neuen Umgangs mit abweichenden „Entdeckungen“ skizzieren. In den oben geschilderten Theorien des entdeckenden Lernens in der Mathematik blieb ja schlussendlich die Frage, wie mit solchen Abweichungen vom intendierten Ergebnis umgegangen werden soll. Es erscheint jedenfalls aus einer solchen Sichtweise plausibel, dass die eine, nicht den Normen und Konventionen entsprechende, Entdeckung zumindest nicht mehr gleichwertig neben anderen stehen kann. Der Grund für diesen normativen Aspekt liegt aber laut Wittgenstein nun nicht in einer Metaphysik oder platonistischen Philosophie der Mathematik, sondern er liegt eben genau in der Relativität und sozialen Konstruiertheit der Mathematik. Gerade *weil* unsere mathematische Praxis relativ und sozial konstruiert ist, kann am Ende des Entdeckungsvorgangs keine Erklärung, sondern nur eine normative Festlegung stehen. Es eröffnet sich damit auch eine neue Perspektive auf das entdeckende Lernen in der Mathematik: Die normative Festlegung und Abrichtung, die zumindest versteckt in jedem entdecken Lernen vorhanden ist, muss jedenfalls nicht entlang der Kategorien „wahr/falsch“ erfolgen. Die Lehrperson kann genau im Sinne Wittgensteins die Relativität des Rechnens zum Thema machen. Die Ergebnisse der Schüler/innen würden dann

gleichwertig nebeneinanderstehen und die notwendige „Ablehnung“ der mit unserer Rechenpraxis inkompatiblen Ergebnisse erfolgt dann nicht aufgrund eines Fehlers des/der Schüler/in, sondern aufgrund unserer Praxis zu rechnen. „Ja, so könnte man es auch machen, aber wir rechnen halt eben so“. Der pädagogische Vorteil einer solchen Vorgehensweise wäre klarerweise, dass ein Prädikat des „Fehlers“ in Bezug auf eine selbstständige Schüler/innen-tätigkeit vermieden wird und die Normativität beziehungsweise die „Unerbittlichkeit“ des Mathematikunterrichts nicht versteckt ausgeübt, sondern offen angesprochen wird.

Es erscheint zumindest plausibel, dass solch ein offener Umgang mit Relativität und Normativität in der Mathematik einen positiven Effekt auf den Mathematikunterricht haben könnte: Nehmen wir an, ein Kind verrechnet sich bei einer einfachen Addition wie $2+2=5$. Nach den platonistischen Annahmen, die, wie gesehen, von einer Sprechweise des „Entdeckens“ impliziert werden, wäre diese Gleichung absolut wahr und könnte nur „eingesehen“ oder „entdeckt“ werden. Insofern muss geschlossen werden, dass dieses Kind noch keine „Einsicht“ in diesen Zusammenhang gewonnen hat oder diese Tatsache noch nicht „verstanden“ hat. Förderung würde demnach so aussehen, dem Kind, vielleicht mit einigen Hilfsmitteln, diese Einsicht zu ermöglichen.

Wie würde, im Gegensatz dazu, Wittgenstein eine solche Situation analysieren? Ramharter schreibt dazu:

Wenn wir, wie Wittgenstein sagt, Sprache [sowie Mathematik, Anm.] auch durch Nachmachen lernen müssen, verändert das in der Folge die adäquate Sicht von Fehlern. Fehler sind dann Verstöße nur insofern, als wir nicht der Intention dessen, der uns etwas vormacht, entsprechend handeln, aber sie bedeuten nicht, dass wir etwas nicht wissen, was wir wissen müssten. Fehler entstehen dadurch, dass Schüler/innen anderen Regeln folgen, als wir von ihnen erwarten. (Ramharter 2002, S.47)

Insofern wäre das Verrechnen oder der Fehler nichts anderes als das Folgen einer Regel durch den/die Schüler/in, welche a priori nicht „falsch“ ist, sondern im Kontext des Mathematikunterrichts einfach nicht erwünscht ist. Der Fehler hat dann also nichts mit einer fehlenden „Einsicht“ oder einem falschen

Verständnis zu tun, sondern wäre einfach ein unerwünschtes Verhalten. Durch Wittgenstein erhalten wir also eine neue Art und Weise, Fehler zu beschreiben und zu kommentieren, also eine Änderung des Sprachgebrauchs. Im Mathematikunterricht wäre dies ein Übergang vom „Das hast du nicht verstanden“ zum „So wie du das rechnest könnte man es schon machen, aber es gibt Gründe, warum wir es anders machen“. Ob diese Transformation der Beschreibung von Fehlern im konkreten Unterricht wirklich einen positiven Einfluss, beispielsweise auf die Leistung von Kindern mit Dyskalkulie, hat, lässt sich natürlich nur empirisch beantworten und dies kann im Rahmen einer philosophischen Arbeit nicht geleistet werden. Für Oliver Scholz scheint eine Sichtweise wie diejenige Wittgensteins, welche mathematisches Verstehen „entmystifiziert“, indem es keine „geniale“ Einsicht in ewige Zusammenhänge erfordert, als pädagogisch fruchtbar, weil sie Frustrationen und „Genietheorie“ vermeiden kann:

Die Mystifikation des mathematischen Verstehens hat negative Auswirkungen im Mathematikunterricht: Der Lehrer orientiert sich nur an den allerbesten Schülern. Die für elementare Formen des mathematischen Verstehens relevanten Fähigkeiten werden nicht genügend eingeübt. Die meisten Schüler sind so bald abgehängt und frustriert. (Scholz 2011, S. 13)

Somit würde Wittgensteins Mathematikunterricht, der auf die Begriffe „Einsicht“ oder „Intuition“ verzichtet und „Verstehen“ mit Verhalten und Fähigkeiten gleichsetzt, helfen, die vermeintlich schicksalhafte mathematische Unfähigkeit von Kindern mit Schwierigkeiten in Mathematik als Produkt einer mystifizierenden Philosophie der Mathematik zu entlarven.

4.3 Experimenteller Mathematikunterricht

Wir kommen nun auf einen Punkt in Wittgensteins Philosophie der Mathematik zurück, dessen Vergleich mit fachdidaktischer Literatur, wie in Kapitel 3.3.2 schon erwähnt, sich förmlich aufdrängt: Aufgrund Wittgensteins häufiger Gegenüberstellung von Rechnungen und Experimenten erscheint es sehr naheliegend, seine Ansichten mit dem sogenannten „experimentellen

Mathematikunterricht“ oder ganz allgemein der Verwendung von „Experimenten“ im Mathematikunterricht zu vergleichen.⁸

4.3.1 Quasi-empirische Mathematik

Wie wir in Kapitel 3.2.1 gesehen haben, verwirft Wittgenstein eindeutig die Annahme, dass mathematische Tatsachen empirisch über Experimente aus der Erfahrung gewonnen werden. Der „Zwang“ und die „Normativität“ mathematischer Sätze und Rechnungen verhindern ein „Überprüfen“ dieser Sätze oder Rechnungen an der Erfahrung, denn falls beim Zusammenlegen von 2 Kugeln und 2 Kugeln nicht genau 4 Kugeln entstehen würden, würden wir eher am „Experiment“ mit den Kugeln als an der Wahrheit der Gleichung „ $2+2=4$ “ zweifeln. Es gibt also bei einer Rechnung keine Frage, die durch ein Experiment beantwortet werden könnte, es gibt nichts, das bestätigt oder widerlegt werden könnte. Insofern würde, aus der Perspektive Wittgensteins, ein Unterricht, der die Schüler/innen zum „Überprüfen“ von Rechnungen oder mathematischen Ergebnissen durch scheinbare Experimente anregt, den spezifischen Charakter mathematischer Aussagen komplett verkennen und die Mathematik fälschlicherweise als quasi-empirische Wissenschaft verkaufen. Die Frage, die sich stellt, ist also, wie der Einsatz von Experimenten im Mathematikunterricht in der mathematik-didaktischen Literatur begründet wird und welche philosophischen Annahmen über den empirischen Status mathematischer Aussagen dahinterstehen.

Kathleen Phillip hat in (Phillip 2013) eine umfangreiche Begründung der Bedeutung des „experimentellen Denkens“ in der Mathematik und im Mathematikunterricht vorgelegt. Das „experimentelle Denken“ ist nach Phillip eine „mathematische Kompetenz“ und geht empirisch nach den Prinzipien der Induktion und der Abduktion vor. Dabei würden Beispiele „als Träger mathematischer Phänomene als empirische Daten fungieren“. (Vgl.: Phillip 2013, S.2) Hierbei stützt sie sich einerseits auf Peirce und Polya und andererseits auf die Soziologin Bettina Heintz.

⁸ Siehe dazu beispielsweise: BGM I §36f., BGM I §157-162, BGM III §39, BGM VII §9, MS 121 51r

Vor diesem Hintergrund kann man also festhalten, dass innermathematisches Experimentieren bei der Entstehung mathematischen Wissens eine tragende Rolle spielt: Hypothesen werden generiert und geprüft, eine Hypothese kann durch Einzelfälle oder Fakten widerlegt oder bekräftigt werden. In beiden Fällen findet Erkenntnisgewinn statt und erst, wenn eine Hypothese gut an Einzelfällen abgesichert ist, ist es sinnvoll zur Beweissuche und Beweisführung überzugehen. (Phillip 2013, S.16)

Dieses Vorgehen bei der Generierung mathematischen Wissens durch Mathematiker/innen nennt Phillip in Anknüpfung an Heintz „quasi-empirisch“. Was allerdings, laut Heintz, nichts mit Erfahrungstatsachen zu tun hat, sondern das „Denken und Hantieren mit Beispielen“ meint. (Vgl.: Heintz 2000, S.150) Der Begriff des Experiments, den Heintz in Bezug auf den Mathematikunterricht verwendet, ist also nicht im Sinne einer empirischen Hypothesenbildung und ihrer Überprüfung an der empirischen Sinneserfahrung gemeint, sondern ganz einfach die soziologische Beobachtung, dass Mathematiker/innen Beispiele untersuchen bevor sie einen mathematischen Satz beweisen. (Vgl.: Heintz 2000, S.144) Dies inkludiert beispielsweise die Suche von Gegenbeispielen für einen mathematischen Satz. Die Tatsache, dass solche Methoden unter den Mathematiker/innen verbreitet sind, würde Wittgenstein wohl in keiner Weise in Frage stellen. Er würde allerdings die Beschreibung dieser Methode als „Überprüfen einer Hypothese“ ablehnen, weil sie eine empirische Verifikationsmöglichkeit impliziert. Wittgenstein fragt sich beispielsweise, wie in der Mathematik „Hypothesen über die Verteilung von Primzahlen“ möglich sind, und schreibt:

Es fragt sich wieder, welche Art der Verifikation lasse ich für meine Hypothese gelten? Oder kann ich vorläufig — *faute de mieux* — die empirische gelten lassen, solange ich noch keinen „strengen Beweis“ habe? Nein. Solange ein solcher Beweis nicht besteht, besteht gar keine Verbindung zwischen meiner Hypothese und dem „Begriff“ der Primzahl. (...)

Erst der sogenannte Beweis verbindet die Hypothese überhaupt mit den Primzahlen als solchen. Und das zeigt sich daran, daß — wie gesagt — bis dahin die Hypothese als eine rein physikalische aufgefaßt werden kann. — Ist andererseits der Beweis geliefert, so beweist er gar nicht, was vermutet worden

war, denn in die Unendlichkeit hinein kann ich nicht vermuten. Ich kann nur vermuten, was bestätigt werden kann, aber durch die Erfahrung kann nur eine endliche Zahl von Vermutungen bestätigt werden, und den Beweis kann man nicht vermuten, solange man ihn nicht hat, und dann auch nicht. (MS 209, 81)

Wittgenstein sieht also eine Kluft zwischen der „Vermutung“ oder „Hypothese“ und dem Beweis beziehungsweise dem Begriff in der Mathematik. Da der Beweis schließlich den Begriff verändert, ist in einer „Vermutung“ oder einer „Hypothese“ gar nicht von „den Primzahlen“ als mathematische Entität die Rede, sondern sie hat einfach eine heuristische Funktion:

Man könnte sagen, eine Hypothese in der Mathematik hat den Wert, daß sie die Gedanken an einen bestimmten Gegenstand — ich meine ein bestimmtes Gebiet — heftet und man könnte sagen „wir werden gewiß etwas Interessantes über diese Dinge herausfinden“. Das Unglück ist, daß unsere Sprache so grundverschiedene Dinge mit jedem der Worte "Frage", "Problem", "Untersuchung", "Entdeckung" bezeichnet. Ebenso mit den Worten "Schluß", "Satz", "Beweis". (MS 209, 80)

Wittgenstein sieht also beim Gebrauch von einem Begriff wie „Hypothese“ in der Mathematik das Problem, dass er einen empirischen Charakter der Mathematik impliziert, welchen Wittgenstein kategorisch ablehnt. Und in der Tat scheint Phillip das „Experimentieren“ in der Mathematik und im Mathematikunterricht wirklich in Analogie zu den empirischen Wissenschaften betrachten zu wollen:

Gegenstand des innermathematischen Experimentierens sind mathematische Objekte wie beispielsweise Zahlen oder Figuren und ihre Zusammenhänge. Sie entstehen zwar durchaus aus realen Anschauungen, sind aber abstrakter Natur. Der *Umgang* mit ihnen unterscheidet sich dennoch nicht wesentlich vom Umgang mit physischen Objekten der Naturwissenschaften. Wenn man also den unterschiedlichen „Charakter des Seins“ vernachlässigt, lässt sich die Sichtweise auf Mathematik als eine empirische Wissenschaft weiter verfolgen, was im Hinblick auf die Analyse von Erkenntnisprozessen gerechtfertigt erscheint. (Phillip 2013, S. 33)

Es zeigt sich also, dass das Verständnis von „Experimenten“ in der Mathematik und im Mathematikunterricht und ihre Rechtfertigung hier auf einer empirischen Sichtweise der Mathematik begründet ist, auch wenn versucht wird, dieser mit dem Begriff „quasi-empirisch“ aus dem Weg zu gehen.

Wie soll diese Sichtweise von Mathematik nun konkret im Unterricht umgesetzt werden? Phillip arbeitet auf Basis dieser Sichtweise ein Modell einer „experimentellen Kompetenz“ heraus, welche in ihrem Kern aus einer Wechselwirkung zwischen dem Aufstellen von Hypothesen und dem Generieren von Beispielen besteht. (Vgl.: Phillip 2013, S.90) Dabei sollen die aufgestellten Hypothesen an den generierten Beispielen überprüft werden und die Hypothesen auf Basis der Erfahrung mit den Beispielen aufgestellt werden. (Vgl.: ebenda) Im Unterricht würde diese Kompetenz gefördert, indem die Kinder schon von Beginn der mathematischen Bildung an dazu aufgefordert würden, einerseits Beispiele zu einer Aufgabenstellung selbst zu generieren und andererseits die Zusammenhänge zwischen Beispielen zu erkennen und auf dieser Basis selbst Vermutungen aufzustellen. (Vgl.: Phillip 2013, S.112) Letztendlich läuft dieses Unterrichtskonzept also darauf hinaus, dass auf Basis von eigenständigem Operieren mit Beispielen Hypothesen aufgestellt werden können, die schließlich anhand von mehrmaliger Überprüfung als wahre Sätze oder Gleichungen erkannt werden. Ein solcher Unterricht geht also davon aus, dass Kinder Rechnen durch ein „Experimentieren“ mit Beispielen oder Objekten lernen würden, indem sie sich beispielsweise durch Operieren mit Gegenständen vergewissern, dass $2+2$ wirklich 4 ergibt und aufgrund ihrer Erfahrung mit den Beispielen oder Gegenständen dann diesen Satz glauben und auch verstehen.

Im Gegensatz dazu skizziert Wittgenstein einen Unterricht, der zwar ebenfalls an der operationalen Praxis anhebt, aber diese nicht zur „Überprüfung“ von mathematischen Aussagen verwendet. Das Argument Wittgensteins war hier, dass die Wahrheit der mathematischen Aussage nicht zur Debatte steht und nie zur Debatte stand. Der große Unterschied zwischen naturwissenschaftlichen und mathematischen Aussagen ist ja, nach Wittgenstein, dass erstere prinzipiell widerlegt werden können, letztere allerdings, da sie normative Festlegungen sind, nicht. Somit könnte man sagen,

dass der „experimentelle“ Mathematikunterricht vorgaukle, dass wirklich eine Frage zu entscheiden sei und die Beispiele der Schüler/innen nur vermeintlich relevant sind. Denn, wenn ein/e Schüler/in wirklich behaupten würde, ein Gegenbeispiel zu einem mathematischen Theorem gefunden zu haben, so wäre die Reaktion der Lehrperson wohl die Ablehnung des Beispiels und nicht die des Theorems. Wittgenstein gelingt es dennoch die Relevanz der operationalen Praxis für das Lernen von Mathematik hervorzuheben, ohne dabei in eine empirische Philosophie der Mathematik zu verfallen. Denn die Schüler/innen werden sehr wohl durch „Demonstrationen“ und Operieren mit Gegenständen überzeugt, ihr Verhalten und ihre Begriffe auf gewisse Art und Weise zu verwenden. Die Abrichtung bei und Überzeugung durch die operationalistische Praxis stellt also gerade die Normativität der Mathematik sicher. Sie ist der Grund, warum mathematische Sätze keine empirischen Sätze sind, auch nicht „quasi-empirische“. Die Analogie mit den Naturwissenschaften verwirft Wittgenstein als irreführend. Insofern lässt sich Wittgensteins Philosophie der Mathematik in der Fachdidaktik möglicherweise als Grundlage eines operationalistischen Unterrichts, der keine empiristische Philosophie der Mathematik benötigt, verwenden. Darauf möchte ich nun abschließend genauer eingehen.

4.3.2 Wittgenstein und das „operative Prinzip“

Es könnte nun natürlich auch die Position vertreten werden, dass „experimenteller“ Mathematikunterricht in keiner Weise den Anspruch erhebt, empirische Experimente, nach dem Vorbild der Naturwissenschaften, also zur Überprüfung einer empirischen Hypothese, durchzuführen, sondern diese Bezeichnung einfach einen Unterricht kennzeichnet, der auf Handlungen mit konkreten Objekten aufbaut. Ein didaktisches Prinzip, welches im Rahmen solcher Theorien immer wieder genannt wird, ist das „operative Prinzip“, welches auf Jean Piaget zurückgeht. Piaget teilt das Lernen des Kindes in verschiedene Phasen ein. In der konkret-operativen Phase bis zum 11. Lebensjahr ist das Kind beim Wissens- und Fähigkeitenerwerb auf konkrete Operationen an Objekten angewiesen. Nur, wenn diese Phase durchlaufen wurde, kann das Kind darauf aufbauend in der formal-operativen Phase auch

abstrakte mathematische Begriffe bilden. Daraus ergibt sich das operative Prinzip des Lehrens von Mathematik, welches Wittmann folgendermaßen zusammenfasst:

Gerade den fundamentalen mathematischen Begriffen der Mathematik liegen Handlungen zugrunde. Solche Begriffe werden nicht wie empirische Begriffe (z.B.: blau, schwer, Blume) durch Abstraktion von den Objekten aus, sondern durch *Abstraktion von den Handlungen aus* (<< abstraction réfléchissante >>) gebildet. (...) Operative Begriffe müssen daher im Unterricht auf die sie begründenden Operationen abgestützt werden (*operative Begriffsdefinitionen*). Dabei ist durch breite Variation der Objekte, auf die sich die Operationen beziehen können, dafür zu sorgen, daß die Operationen (und nicht die speziellen Objekte) als wesentlich erkannt werden. (Wittmann 1974, S.62)

Auf den ersten Blick scheint dies sehr nahe an Wittgensteins Sichtweise des Lehrens und Lernens von Mathematik heranzuführen. Auch Wittgenstein betont immer wieder, dass die „Grundlagen“ der Mathematik in konkreten Operationen mit Zeichen oder Objekten bestehen und dass wir an diesen Handlungen „Begriffe bilden“. So könnte beispielsweise durch Zeichnen oder Verschieben von Stäbchen eine Figur entstehen, die zur Grundlage der Gleichung $2+3=5$ dienen könnte. Wittgenstein schreibt in Bezug auf ein solches Beispiel:

"Du siehst doch — es kann doch keinem Zweifel unterliegen, daß eine Gruppe wie A wesentlich aus einer wie



B und einer wie C besteht!" — Auch ich sage — d.h. auch ich drücke mich so aus — daß die Gruppe, die Du hingezeichnet hast, aus den beiden kleineren besteht; aber ich weiß nicht, ob jede Gruppe, die ich eine von der Art (oder Gestalt) der ersten nennen würde, unbedingt aus zwei Gruppen von der Art jener kleineren zusammengesetzt sein wird. — Ich glaube aber, es wird wohl immer so sein (meine Erfahrung hat mich dies vielleicht gelehrt) und darum will ich als Regel annehmen: Ich will eine Gruppe dann, und nur dann, eine von der Gestalt A nennen, wenn sie in zwei Gruppen wie B und C zerlegt werden kann. (BGM I, §67)

Das Operieren mit den Strichen oder Stäbchen überzeugt mich also so sehr, dass ich meinen Begriff der Gestalt A verändern werde, ich habe ein neues Paradigma für die Begriffsanwendung angenommen. Aber die Begriffsbildung ist nach Wittgenstein keine „Abstraktion aus den Handlungen“, sondern theoretisch kann jede neue Operation, jeder neue Beweis, jede neue Rechnung den mathematischen Begriff verändern, indem eine neue Verwendungsweise dieses Begriffes eingeführt wird. Insofern haben wir es bei Wittgenstein mit einer dynamischen Beziehung von mathematischen Begriffen und den ihnen zu Grunde liegenden Handlungen zu tun. Wir finden in Wittgensteins Sprechweise also nicht „experimentell“ neue Beispiele für denselben Begriff, sondern die konkreten Beispiele bringen uns dazu, die Anwendungsmöglichkeit des Begriffs zu erweitern. Die Rolle des konkreten Operierens ist dabei umso wichtiger, denn wir werden nicht durch die Eigenschaften mathematischer Gegenstände, sondern durch die konkreten Handlungen überzeugt, also dazu gebracht, unsere Begriffe zu verändern, neue Paradigmen anzunehmen. Es ist also das Operieren, das die Normativität unserer Rechenpraxis herstellt, aber nicht, weil wir empirisch ihre „Wahrheit“ überprüfen, sondern, weil wir auf die Operation hinaus sagen werden: „Das muss so sein“.

Wittgensteins Sichtweise auf die Rolle des Operierens mit Objekten oder Beispielen im Mathematikunterricht lässt sich also folgendermaßen zusammenfassen: Kinder lernen tatsächlich so rechnen, allerdings ist das Operieren mit Objekten kein „Experiment“, es dient vielmehr dazu, die normative Autorität des *So-Rechnens* herzustellen. Es geht also nicht darum, diese Art des Unterrichts in irgendeiner Form anzutasten, sondern darum, die Beschreibung, die diesem Unterricht gegeben wird, zu hinterfragen. Das Kind wird nicht von der „Realität“ überzeugt, dass „ $2+2=4$ “ ein wahrer Satz sein muss, sondern die Demonstration mit den Äpfeln bringt es dazu, eine neue Rechenpraxis anzunehmen. Es hat, um Wittgensteins Formulierung zu übernehmen, „einen neuen Begriff gebildet“. Dass wir so rechnen, hat natürlich Gründe, die mit dem Verhalten unserer Äpfel zu tun haben, aber quasi in einem anthropologischen und nicht in einem psychologischen Sinne: Das Verhalten der Äpfel beim Zusammenfügen überzeugt den/die Schüler/in nicht von dem Resultat der Rechnung, sondern, dass wir Äpfel so zusammenfügen, bringt

ihn/sie dazu, genau *dieses* Ergebnis als einzig mögliches Resultat der Rechnung anzuerkennen.

5 Abschluss

Das Ziel dieser Arbeit war es, aufzuzeigen, in welcher Weise Wittgensteins Philosophie der Mathematik für die Mathematikdidaktik fruchtbar gemacht werden könnte. Dazu wurde zunächst argumentiert, dass Philosophie und Fachdidaktik der Mathematik keine komplett unabhängigen Disziplinen sind. Dabei wurde gezeigt, dass einerseits in den klassischen Theorien der Philosophie der Mathematik eine jeweils eigene Sichtweise des Lehrens und Lernens von Mathematik angelegt ist, und andererseits verschiedene philosophische Sichtweisen der Mathematik auch einen Einfluss auf den Mathematikunterricht haben können.

Anschließend wurde Wittgensteins Philosophie der Mathematik, ausgehend von seiner Sprachphilosophie, in ihren Grundzügen geschildert und dabei seine Beschreibung des Lehrens und Lernens von Mathematik herausgearbeitet. Wir haben gesehen, dass Wittgenstein das Lernen in der Mathematik auf zwei Weisen schildert: Einerseits als Einüben in eine kontingente Rechenpraxis (durch Abrichtung) und andererseits als Überzeugung durch einen übersichtlichen Beweis. Eine besondere Eigenschaft der Wittgenstein'schen Sichtweise des Mathematikunterrichts ist dabei seine These, dass der „Zwang“ oder die Normativität mathematischer Praxis und mathematischer Ergebnisse gerade eine Folge ihrer prinzipiellen Relativität und sozialen Bedingtheit ist. Daraus, so wurde argumentiert, folgt die Möglichkeit eines neuen Umgangs mit der Rolle des Rechenfehlers beim Lernen von Mathematik.

Schließlich wurde diese Sichtweise Wittgensteins auf das Lehren und Lernen von Mathematik mit fachdidaktischer Literatur und klassischen Lerntheorien in Verbindung gebracht. Im Vergleich mit Strömungen, die dem „entdeckenden Lernen“ zugeordnet werden können, zeigte sich, dass Wittgensteins Beschreibung des Mathematikunterrichts mit sehr wenigen Begrifflichkeiten auskommen kann und beispielsweise fast gänzlich auf, in der fachdidaktischen Literatur sehr häufig verwendete, Begriffe wie „Einsicht“,

„Verstehen“, „mathematische Tatsache“ auskommt. Die Möglichkeit des Weglassens dieser Begriffe ist jedenfalls eine interessante Alternative für die didaktische Literatur sowie für den konkreten Mathematikunterricht selbst. Schließlich wurde skizziert, wie mit Wittgenstein ein Bild eines Mathematikunterrichts, der zwar operationalistisch ausgerichtet ist, aber nicht auf eine empiristische Philosophie der Mathematik zurückgreifen muss, entwickelt werden kann. Wenn auch die konkrete Entwicklung eines ausführlichen fachdidaktischen Modells in diesem Rahmen nicht geleistet werden konnte, so denke ich zumindest gezeigt zu haben, dass Wittgenstein ein interessantes und einzigartiges Bild des Lehrens und Lernens von Mathematik zeichnet.

Siglenverzeichnis

- BGM Wittgenstein, Ludwig: *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Hg. v. G.E.M Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 6. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984
- BrB Wittgenstein, Ludwig: *Eine philosophische Betrachtung (das braune Buch)*. Hg. v. G.E.M Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 5. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984
- MS Wittgenstein, Ludwig: *Wittgensteins Nachlaß. The Bergen Electronic Edition*. Charlottesville, Va, USA: InteLex Corporation 2002. Online-ressource: <http://library.nlx.com/>
- PB Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Bemerkungen*. Hg. v. G.E.M Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 2. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984
- PG Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Grammatik*. Hg. v. G.E.M Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 4. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984

- PU Wittgenstein, Ludwig: *Philosophische Untersuchungen*. Hg. v. G.E.M. Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 1. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984
- TLP Wittgenstein, Ludwig: *Tractatus logico-philosophicus*. Hg. v. G.E.M. Anscombe, Rush Rhees, G.H. Von Wright. Werkausgabe Band 1. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main 1984
- WWK Waismann, Friedrich: *Wittgenstein und der Wiener Kreis*. Hg. v. Brian McGuinness. Basil Blackwell Verlag, Oxford 1967

Literaturverzeichnis

- Ausubel, D.P.; Novak, J.D.; Hanesian, H. (Ausubel/Novak/Hanesian 1978): „Psychologische und pädagogische Grenzen des entdeckenden Lernens“. In: Neber, Heinz (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. 3. Auflage, Beltz Verlag, Basel 1981; S. 30-44.
- Baker, G.P.; Hacker, P.M.S. (Baker/Hacker 2005): *Wittgenstein: Understanding and Meaning, Part I: Essays*. Blackwell Publishing, Malden 2005
- Benacerraf, Paul (Benacerraff 1973). "Mathematical Truth". In: Benacerraf, Paul und Putnam, Hillary: *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, Cambridge University Press, 2nd edition. Cambridge 1983; S. 403–420.
- Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (Hrsg.) (BIFIE 2011): *Kompetenzorientierter Unterricht in Theorie und Praxis*. Wien 2011. URL: <https://www.bifie.at/node/351>
- Blanchette, Patricia (Blanchette 2016): „Realism in the philosophy of mathematics“. In: *Routledge Encyclopedia of philosophy*. URL: <https://www.rep.routledge.com/articles/realism-in-the-philosophy-of-mathematics> (Stand: Juli 2016)
- Brown, James Robert (Brown 2008): *Philosophy of mathematics*. 2. Ausgabe, Routledge, New York 2008

- Brouwer, L.E.J. (Brouwer 1929): "Mathematik, Wissenschaft und Sprache". In: *Monatshefte für Mathematik* 36, S.153-164. Entnommen aus: Heyting, A. (Hrsg.): *L.E.J. Brouwer Collected Works I*. North Holland Verlag, Amsterdam 1975
- Bruner, Jerome S. (Bruner 1961): "Der Akt der Entdeckung". In: Neber, Heinz (Hrsg.): *Entdeckendes Lernen*. 3. Auflage, Beltz Verlag, Basel 1981; S. 15-29.
- Detlefsen, Michael (Detlefsen 2005): "Formalism". In: Shapiro, Stewart (Hrsg.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York 2005; S. 236-317
- Dörfler, Willibald (Dörfler 2013): "Was würden Peirce oder Wittgenstein zu Kompetenzmodellen sagen?". In: Rathgeb, Martin et. al. (Hrsg.): *Mathematik im Prozess*. Springer-Spektrum Verlag, Wiesbaden 2013; S.73-88
- Ernest, Paul (Ernest 1998): *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. State University of New York Press, New York 1998
- Fischer, Roland; Malle, Günther: *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. BI-Wissenschaftsverlag Mannheim/Wien/Zürich 1985
- Frascolla, Pasquale (Frascolla 1994): *Wittgenstein's philosophy of mathematics*. Routledge, London 1994
- Giesinger, Johannes: „Abrichten und Erziehen. Zur pädagogischen Bedeutung der Spätphilosophie Ludwig Wittgensteins" In: *Pädagogische Rundschau*. Vol. 62 (2008), Nr. 3, S.285-298; URL: http://www.pedocs.de/volltexte/2009/758/pdf/Abrichten_und_Erziehen_OA.pdf (Stand: März 2016)
- Griesel, Heinz (Griedel 1971): *Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Band 1*. Schroedel Verlag, Hannover 1971
- Handal, B.: „Teachers' mathematical beliefs: A review“, In: *The Mathematics Educator*, Vol. 13(2), S. 47-57.

- Hallett, Michael; Majer, Ulrich (Hallett/Majer 2004): *David Hilberts Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg 2004
- Heintz, Bettina (Heintz 2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer Verlag, Wien 2000
- Hersh, Reuben (Hersh 1997): *What Is Mathematics Really*. Oxford University Press, Oxford 1997
- Hersh, Reuben (Hersh 1998): "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics". In: Tymoczko, Thomas (Hrsg.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Princeton University Press, Princeton 1998; S.9-28
- Hilbert, David (Hilbert 1941): „Unbekannte Briefe Freges über die Grundlagen der Geometrie und Antwortbrief Hilbert's an Frege“. In: Steck, Max (Hrsg.): *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaft, 2. Abhandlung*, Heidelberg 1941
- Horsten, Leon (Horsten 2012): "Philosophy of Mathematics". In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University 2013. URL: <http://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/> (Stand: Juli 2016)
- Kautschitsch, Hermann: "Experimentelle Mathematik". In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*, Heft 9, 1982; S.89-117.
- URL:<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1982%20Band%209/Kautschitsch1982.pdf>
- Kirsch, Arnold: *Mathematik wirklich verstehen: Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen*. Aulis-Verlag Deubner, Köln 1987
- Küspert, Petra (Küspert 2010): *Wie Kinder besser Rechnen lernen*. Oberstebrink Verlag, Düsseldorf 2010
- Linnebo, Oystein (Linnebo 2013): "Platonism in the Philosophy of Mathematics". In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University 2013. URL:

<http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/#TruValRea>

(Stand: Mai 2016)

Marion, Mathieu: *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Clarendon Press, Oxford 1998

Marion, Mathieu (Marion 2003): "Wittgenstein and Brouwer". In: *Synthese*. Vol. 134 (1), 2003; S.103-127

Medina, José (Medina 2002): *The Unity of Wittgenstein's Philosophy*. State University of New York Press, Albany 2002

Mühlhölzer, Felix (Mühlhölzer 2010): *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main 2010

Mundle, C.W.K. (Mundle 1966): "Private Language" and Wittgenstein's Kind of Behaviourism". In: *The Philosophical Quarterly*. Vol. 16, No. 62 (Jan., 1966); S. 35-46

Otte, Michael (Hrsg.) (Otte 1974): *Mathematiker über die Mathematik*. Springer Verlag, Berlin 1974

Phillip, Kathleen (Phillip 2013): *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Springer Spektrum, Wiesbaden 2013

Platon (Menon): "Menon". In: *Platons Werke*. Herausgegeben und übersetzt von Friedrich Schleiermacher, Akademie Verlag, Berlin 1985. URL: <http://gutenberg.spiegel.de/buch/platons-werke-2430/56>

Posy, Carl (Posy 2005): "Intuitionism and Philosophy". In: Shapiro, Stewart (Hrsg.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York 2005; S.318-355

Ramharter, Esther (Ramharter 2002): "Wie alt ist der Kapitän wirklich? – Über die Bewährung der Mathematik an der Realität oder Wittgenstein, Regeln und der Mathematikunterricht". In: *mathematica didactica – Zeitschrift für*

- Didaktik der Mathematik*. Ausgabe 25, Band 1; URL: <http://mathdid.ph-freiburg.de/index.php/beitraege/2002/35-wie-alt-ist-der-kapitaen-wirklich>
- Ramharter, Esther; Weiberg, Anja (Ramharter/Weiberg 2006): »Die Härte des logischen Muß«. *Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Parega Verlag GmbH, Berlin 2006
- Redecker, Christine: *Wittgensteins Philosophie der Mathematik*. Ontos Verlag, Heusenstamm 2006
- Schneeberger, Martin (Schneeberger 2009): *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog*. Waxmann Verlag, Münster 2009
- Schulte, Joachim: *Wittgenstein. Eine Einführung*. Reclam Verlag, Stuttgart 1989
- Scholz, Oliver (Scholz 2011): "Verstehen verstehen". In: Helmerich, Lengnink, Nickel, Rathgeb (Hrsg.): *Mathematik verstehen*. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden 2011
- Simon, Hendrik (Simon 2008): *Dyskalkulie*. Kindern mit Rechenschwäche wirksam helfen. Stuttgart: Klett-Cotta 2008, S. 20-21.
- Shanker, S.G.: *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*. Croom Helm, London 1987
- Shapiro, Stewart (Shapiro 2005): "Philosophy of Mathematics and its Logic: Introduction". In: Shapiro, Stewart (Hrsg.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford University Press, New York 2005; S.3-27
- Staub, F., Stern, E. (2002): "The nature of teachers' pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: Quasi-experimental evidence from elementary mathematics." *Journal of Educational Psychology*. Vol. 94(2), 2002; S. 344 – 355
- Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M. & MacGyvers, V. L. (2001). "Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction". *Teaching and Teacher Education*, 17, 2001; S. 213 – 226.

- Tanney, Julia (Tanney 2015): "Gilbert Ryle". In: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. URL: <http://plato.stanford.edu/entries/ryle/#Beh> (Stand: September 2016)
- Vollrath, H.-J.: *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Springer Spektrum Verlag, Berlin 2001
- Vom Hofe, Rudolf: *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg 1995
- Weinert, Franz (Weinert 2001): "Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit". In: Weinert, Franz E. (Hrsg.): *Leistungsmessungen in Schulen*. Beltz Verlag, Weinheim/Basel 2001
- Wieländer, Maximilian (Wieländer 2011): *Beweise bilden Begriffe*. Bachelorarbeit am Institut für Philosophie; Universität Wien, Sommersemester 2011
- Winter, Heinrich Winand (Winter 2016): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. 3. Auflage. Springer Fachmedien, Wiesbaden 2016
- Wittmann, Erich: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg Verlag, Braunschweig 1974
- Wright Crispin (Wright 1980): *Wittgenstein on the foundations of mathematics*. Harvard University Press. Cambridge Mass. 1980

Anhang

Erklärung zum Inhalt

Hiermit erkläre ich, die vorgelegte Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Alle wörtlich oder dem Sinn nach aus anderen Werken entnommenen Textpassagen und Gedankengänge sind durch genaue Angabe der Quelle in Form von Anmerkungen bzw. In-Text-Zitationen ausgewiesen. Dies gilt auch für Quellen aus dem Internet, bei denen zusätzlich URL und Zugriffsdatum angeführt sind.

Mir ist bekannt, dass jeder Fall von Plagiat zur Nicht-Bewertung der gesamten Arbeit führt und der Studienprogrammleitung gemeldet werden muss. Ferner versichere ich, diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form nicht bereits andernorts zur Beurteilung vorgelegt zu haben.

Abstract (Deutsch)

In Ludwig Wittgensteins Philosophie der Mathematik finden sich zahlreiche Bezugnahmen auf das Lehren und Lernen von Mathematik. Wittgenstein entwickelt seine Sichtweise auf Mathematik mittels der Beschreibung von Lernsituationen und wendet sich dabei gegen klassische Positionen in der Philosophie der Mathematik, wie den Platonismus. Es liegt also nahe Wittgensteins Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik genauer zu untersuchen und mit klassischen Theorien der mathematischen Fachdidaktik zu vergleichen. Dabei kann gezeigt werden, dass Wittgenstein zwei Arten des Lernens in der Mathematik schildert: Lernen als „Einüben in eine kontingente Rechenpraxis“ und Lernen als „Überzeugung durch einen übersichtlichen Beweis“. Die wesentliche Eigenschaft der Wittgenstein'schen Sichtweise des Mathematikunterrichts ist dabei allerdings die These, dass gerade die Relativität und soziale Bedingtheit mathematischer Praxis den „Zwang“ und die „Unerbittlichkeit“ des Mathematikunterrichts hervorruft.

Im Vergleich mit klassischen Theorien aus der Fachdidaktik und Lerntheorie zeigt sich, dass Wittgensteins Beschreibung des Mathematikunterrichts eine interessante Alternative darstellt: Einerseits beschreibt Wittgenstein das Lernen von Mathematik, ohne Verwendung von Begriffen wie „Einsicht“ oder „Verstehen“ und andererseits betont er die Bedeutung des Operierens mit konkreten Objekten, ohne dabei eine empiristische Philosophie der Mathematik zu vertreten.

Abstract (English)

Wittgenstein's philosophy of mathematics is filled with various references to teaching and learning of mathematics. He develops his view on mathematics and his rejection of platonism, by describing learning situations. Therefore it seems to be justified to investigate Wittgenstein's view on teaching and learning of mathematics and to compare it with classical theories of didactics of mathematics. It can be shown that Wittgenstein describes two types of learning in mathematics: Learning as "training of a contingent practice" and learning as "conviction by overseeable proofs". The essential feature of Wittgenstein's view is the thesis, that the relativity and social nature of mathematical practice causes the "compulsion" and the "inexorability" of teaching mathematics. Compared to classical theories of didactics, this view of Wittgenstein proves to be an interesting alternative. Especially since Wittgenstein combines a non-empirical view of mathematics with an emphasis on the importance of operative practice for learning mathematics.