



universität
wien

DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Die Einsatzmöglichkeiten von Spielen im
Mathematikunterricht“

unter besonderer Berücksichtigung der Auswirkung auf die
Motivation der Lernenden

verfasst von / submitted by

Ingrid Beck

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Mathematik, Physik

Betreut von / Supervisor:

Univ. Doz. Dr. Franz Embacher

Danksagung

Zunächst möchte ich all jenen Menschen danken, die mich während des Erstellens meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Prof. Dr. Franz Embacher, an den ich mich bei Fragen jederzeit wenden konnte. Auch für die konstruktive Kritik und für die Verbesserungsvorschläge möchte ich mich bedanken und vor allem für die Geduld die dabei aufgebracht wurde.

Mein Dank gilt auch meiner Familie, auf die ich mich während der gesamten Dauer meines Studiums verlassen konnte. Besonders in dieser herausfordernden letzten Phase konnte ich auf Unterstützung zählen. Auch für das Korrekturlesen und die zahlreichen Denkanstöße möchte ich mich bei ihnen bedanken.

Ich möchte mich auch von ganzem Herzen, bei meinem Freund bedanken, der mich sowohl emotional als auch fachlich beim Schreiben meiner Diplomarbeit unterstützt hat.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Studienkolleginnen und Studienkollegen bedanken, die mein Studium zu einer der schönsten Zeiten meines Lebens gemacht haben. Besonderer Dank gilt hier Nina Schuldner für die Korrektur meiner Arbeit und Mag. Stefanie Schallert für den organisatorischen und emotionalen Beistand.

Meiner Chefin Mag. Doris Stüber möchte ich dafür danken, dass sie mir nicht nur die Räumlichkeiten für meine Untersuchung zur Verfügung gestellt hat, sondern dass sie mir auch bei der Durchführung selbst mit Rat und Tat zur Seite stand.

Nicht zuletzt gilt mein Dank all den Lernenden, die an meiner Untersuchung teilgenommen haben. Ohne euch würde es diese Diplomarbeit nicht geben. Ich möchte deshalb Selina, Michael, Isabella, Marie, David, Ulrich, Sophie, Benedikt, Johanna, Rebecca, Lukas, Stefan und einer weiteren Schülerin, die namentlich nicht erwähnt werden möchte, danken.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Wien, Mai 2016

Ingrid Beck

(Ingrid Beck)

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	10
1. Motivation und Lernen.....	13
1.1 Der Einfluss von intrinsischer und extrinsischer Lernmotivation.....	13
1.2 Der Einfluss von Motivation auf langfristigen Leistungszuwachs	18
1.3 Erkenntnisse der PISA-Studie 2000 über den Einfluss von Motivation auf das Lernen.....	22
1.4 Bedeutung der Motivation für den Lernerfolg	24
2. Spiele	27
2.1 Generelles zu Spielen	27
2.2 Spiele in der Geschichte der Mathematik	28
2.3 Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres	28
2.4 Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung	40
3. Spiele im Unterricht	55
3.1 Warum sollten Spiele im Unterricht eingesetzt werden?	55
3.2 Charakteristika und Gestaltung von Lernspielen	56
3.3 Einsatzmöglichkeiten von Spielen	60
4. Untersuchung zum Einfluss von Mathematikspielen auf die intrinsische Motivation..	65
4.1 Zusammensetzung der Lernenden.....	65
4.2 Einschätzung der allgemeinen Motivation der Lernenden.....	65
4.3 Erstellung des Fragebogens.....	66
4.4 Erste Gruppe von Lernenden.....	70
4.5 Zweite Gruppe von Lernenden.....	71
4.6 Dritte Gruppe von Lernenden	74
4.7 Schwierigkeiten bei der Auswertung	79
4.8 Ergebnisse der Bestimmung der intrinsischen Motivation	80
4.9 Zusätzliche Bemerkungen der Lernenden-Auswertung der offenen Fragen	86
5. Entwicklung eines Spiels durch eine Schülerin	91

5.1	Ausgangssituation	91
5.2	Die Spielregeln	92
5.3	Das entwickelte Spiel: „MatheBombe“	93
5.4	Auswertung der Motivationstagebücher	96
5.5	Meine Gedanken zu dem Spiel.....	99
6.	Entwicklung eines Kreuzworträtsels durch einen Schüler	101
6.1	Ausgangssituation	101
6.2	Das entwickelte Kreuzworträtsel	102
6.3	Michaels Notizen zur Entwicklung	103
6.4	Andere Anmerkungen zum Kreuzworträtsel.....	103
7.	Spielesammlung	107
7.1	Zahlenmengenspiel.....	107
7.2	Tabu.....	111
7.3	Funktionen-Tabu	113
7.4	Nagelbrett-Zuordnungsspiel.....	113
7.5	Rechenscheibe	115
7.6	Memory: Addition und Subtraktion von Brüchen.....	116
7.7	Brettspiel	117
8.	Literaturverzeichnis.....	119
9.	Anhang	123
9.1	Motivationsbarometer mit Informationsblatt	123
9.2	Fragebogen	125
9.3	„MatheBombe“.....	127
9.4	Allgemeines Tabu	143
9.5	Funktionen-Tabu	147
9.6	Angaben für das Nagelbrett-Zuordnungsspiel	150
9.7	Rechenscheibe	152
9.8	Zusammenfassung.....	156

9.9	Abstract	157
-----	----------------	-----

0. Einleitung

„Im Spiel verraten wir, wes Geistes Kind wir sind“¹ (Ovid 43 v. - 17 n. Chr.). Dieses beispielhafte Zitat eines der bekanntesten Denker der Antike zeigt, welche Bedeutung dem Spiel bereits seit Jahrtausenden beigemessen wird. Umso erstaunlicher ist es für mich, dass Spiele zwar in der Freizeit als angenehme Abwechslung angesehen werden, sie aber im Unterricht kaum Einzug finden. Ich möchte mich deshalb im Rahmen meiner Diplomarbeit mit den Einsatzmöglichkeiten von Spielen im Unterricht beschäftigen. Aber nicht nur für die Schulmathematik sind Spiele von Bedeutung. Wie ich in dieser Arbeit näher erläutern werde, verdanken wir dem Spiel auch einen ganzen Teilbereich der Mathematik, nämlich die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Um die Berechtigung für Spiele im Mathematikunterricht genauer zu untersuchen, möchte ich mich außerdem mit der Forschungsfrage auseinandersetzen, wie sich Spiele auf die Motivation der Lernenden auswirken. Denn schon Friedrich Rückert wusste: „*Ein Weiser ist, wer Scherz und Ernst zu sondern weiß, und sich am heiteren Spiel neu stärkt zu strengem Fleiß.*“² (Friedrich Rückert 1788 - 1866). Hierbei möchte ich mich auf die intrinsische Motivation fokussieren, da diese vielen Studien nach einen positiven Einfluss auf die Leistung der Lernenden hat. Beispiele hierzu werden ebenfalls in meiner Arbeit behandelt.

Da ich in meiner Tätigkeit als Nachhilfelehrerin viel mit älteren Lernenden zu tun habe, ist es mir ein Anliegen, aufzuzeigen, dass sich auch Lernende der Oberstufe noch am Spielen erfreuen und so motiviert werden können. Denn „*Menschen hören nicht auf zu spielen, weil sie alt werden, sie werden alt, weil sie aufhören zu spielen!*“³ (Oliver Wendell Holmes 1809 - 1884)

Zusätzlich hat ein Schüler im Rahmen dieser Arbeit ein mathematisches Kreuzworträtsel erstellt und eine Schülerin hat sich der Aufgabe gestellt, ein mathematisches Spiel zu entwickeln. Beide Entstehungsprozesse und die jeweiligen Ergebnisse sind in der vorliegenden Diplomarbeit dargestellt.

Abschließend findet sich noch eine kleine Sammlung von Spielen für Interessierte.

¹ vgl. Schefter (Internetquelle)

² vgl. ebd.

³ vgl. ebd.

Also: „*Alea iacta est!*“ (Gaius Iulus Caesar am 10. Jänner 49 v. Chr.). Der Würfel ist geworfen worden. Meine Forschungsfrage ist gestellt: Lesen Sie auf den folgenden Seiten, was aus diesem Wurf geworden ist.

1. Motivation und Lernen

1.1 Der Einfluss von intrinsischer und extrinsischer Lernmotivation

Einführend möchte ich mich mit den Begriffen der intrinsischen Lernmotivation, im Folgenden mit ILM abgekürzt, und der extrinsischen Lernmotivation, im Folgenden mit ELM abgekürzt, auseinandersetzen. Während sich die ILM durch den „*Wunsch oder die Absicht, eine bestimmte Lernhandlung um ihrer selbst willen durchzuführen, weil diese z.B. als interessant, spannend, herausfordernd usw. erscheint*“⁴ definiert, wird die ELM durch den „*Wunsch bzw. Absicht, eine Lernhandlung durchzuführen, weil damit positive Folgen herbeigeführt oder negative Folgen vermieden werden können*“⁵ definiert.

Besonders die Untersuchung der ILM ist nun schon seit Jahrzehnten von großer Bedeutung. Diese Untersuchungen deuten auf positivere Folgen der ILM gegenüber der ELM hin. Die Folgen erfassen sowohl das emotionale Erleben der Lernenden, ihr Bewältigungsverhalten nach Misserfolgen sowie die Ergebnisse von Lernprozessen. Aus dieser Vielzahl an positiven Folgen ergibt sich die Wichtigkeit der ILM für das Lernen und somit auch für den Unterricht. Es gilt also, nach Methoden zu suchen, welche die ILM steigern und somit zu einer besseren Qualität von Lernergebnissen beitragen.⁶

Man kann auch die ILM selbst in verschiedene Formen unterteilen. So kann zwischen einem aktuellen Zustand der ILM und einem stabilen Persönlichkeitsmerkmal der ILM unterschieden werden. Des Weiteren kann die ILM auch eher durch die Handlung selbst oder durch den Gegenstand selbst hervorgerufen werden, weshalb auch die Unterscheidung zwischen tätigkeits- und gegenstandszentrierter ILM von Bedeutung ist. Besonders das Auftreten der tätigkeitszentrierten ILM ist in dieser Diplomarbeit von großer Bedeutung, da durch die Aktivität des Spielens möglicherweise ILM auftreten kann, obwohl die Lernenden wenig Interesse an dem Gegenstand selbst zeigen. Im Rahmen der Diplomarbeit wird diese Vermutung anhand von Befragungen von Lernenden noch näher untersucht (vgl. Kapitel 4). Auch die ELM kann in verschiedene Unterformen unterteilt werden. Besonders die Leistungsmotivation und die soziale Motivation nehmen im Leben von Lernenden eine zentrale Rolle ein. Diese Unterformen der ELM zeichnen sich dadurch aus, dass gelernt wird

⁴ Schiefele/Schreyer (1994): S.1f

⁵ ebd.: S.2

⁶ vgl. ebd.: S.1

um eigenen oder fremden Ansprüchen an die Leistung zu genügen, beziehungsweise um die Eltern oder die Lehrperson nicht zu enttäuschen. Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass ELM und ILM nicht unabhängig voneinander auftreten müssen.⁷

Nach der Selbstbestimmungstheorie von DECI und RYAN bieten die Grundbedürfnisse nach Selbstbestimmung und Kompetenz die Grundlage für das Auftreten von ILM. Kommt es zu einer externen Kontrolle, welche den Aspekt der Selbstbestimmung mindert oder wird durch negative Rückmeldung das Kompetenzgefühl reduziert, so hemmen diese Faktoren das Auftreten der ILM.⁸ RYAN und CONNELL berichten darüber, dass durch einen höheren Grad an Selbstbestimmtheit in Bezug auf Aktivitäten im schulischen Umfeld, Lernende die Schule mehr genießen und sich auch weniger dadurch verängstigt fühlen.⁹ Um aufzuzeigen, dass auch der Aspekt der Selbstbestimmtheit durch Spiele stark angesprochen werden kann, hat im Rahmen dieser Diplomarbeit eine Schülerin versucht, selbst ein Spiel zu entwickeln. Dieser Prozess und die damit zusammenhängenden Gedanken und Gefühle werden zu einem späteren Zeitpunkt der Arbeit näher analysiert (vgl. Kapitel 5).

Auch von anderen Autoren wurden Merkmale diskutiert, die auf ILM hinweisen. Viele dieser Autoren haben eigene Fragebögen zu diesem Thema entwickelt. HARTER nennt als Merkmale für ILM beispielsweise die Präferenz für anspruchsvolle Aufgaben, das Lernen aus Neugierde oder Interesse sowie die Selbstständigkeit bei der Bewältigung von Aufgaben. Als Merkmale von ELM werden die Präferenz für leichte Aufgaben, das Lernen, um die Anerkennung der Lehrperson beziehungsweise eine gute Note zu bekommen oder auch das Verlassen auf Hilfestellungen angegeben. GOTTFRIED nennt zusätzlich zu den bereits genannten Merkmalen von ILM noch die Freude am Lernen. Bei AMABILE sind auch noch Bewertung, das Bemühen um soziale Anerkennung, Wettbewerb, materielle Belohnungen und wahrgenommener Druck von anderen Personen als zusätzliche Merkmale der ELM zu finden. Besonders der Aspekt des Lernens aus Interesse und Neugierde ist hier für das Vorhandensein von ILM von Bedeutung. So kann Interesse zwar zu intrinsischer Motivation führen, da es allerdings nur eine von mehreren Bedingungen ist, zieht Interesse nicht notwendigerweise ILM nach sich.¹⁰

⁷ vgl. ebd.: S.2

⁸ vgl. ebd.

⁹ vgl. Deci (1992): S. 56

¹⁰ vgl. Schiefele/Schreyer (1994): S.3f

Nach DECI kann man aber beim gemeinsamen Auftreten der drei Faktoren Interesse, Begeisterung und Freude davon ausgehen, dass die durchgeführte Handlung intrinsisch motiviert ist. Bei extrinsischer Motivation hingegen ist der Aspekt der Wichtigkeit vordergründiger als jener des Interesses. Für das Auftreten von Interesse sind sowohl die optimale Herausforderung als auch die Neuheit des Themas von zentraler Bedeutung. Dass der Aspekt der Herausforderung für Interesse eine wichtige Rolle spielt, zeigt sich beispielsweise dadurch, dass Menschen beim Squash oft Gegner wählen, welche etwas besser sind als sie, um sich so einer Herausforderung stellen zu können. Die Wahl eines besseren Gegenübers tritt natürlich nur ein, wenn die Hauptmotivation nicht das Gewinnen ist.¹¹

Studien haben gezeigt, dass durch Anbieten extrinsischer Belohnungen die ILM abnimmt, sodass die gleiche Handlung nach einer extrinsischen Belohnung in der Freizeit weniger häufig ausgeführt wird. Spätere Studien haben allerdings aufgezeigt, dass extrinsische Faktoren situationsabhängig auch dazu führen können, dass die ILM aufrecht bleibt.¹² Es hat sich gezeigt, dass finanzielle Belohnung, eine Auszeichnung für den besten Spieler, das Ausbleiben von Bestrafungen, Deadlines, auferlegte Ziele und auch Wettbewerb dazu führen können, dass ILM abgeschwächt wird. Das Anbieten von Wahlmöglichkeiten oder das Anerkennen der Perspektiven und der Gefühle der teilnehmenden Person kann hingegen zu einer Steigerung der ILM führen.¹³

Da beim Spielen der Faktor Wettbewerb im Normalfall eine große Rolle einnimmt, ist hier ein Aspekt vertreten, welcher der ILM entgegenwirkt. Ich habe beim Spielen versucht, diesen Faktor abzuschwächen, indem ich zum Teil Gruppenspiele verwendet habe. Auch wenn die verschiedenen Gruppen in weiterer Folge gegeneinander spielen, so müssen die Lernenden die Sichtweisen der anderen Gruppenmitglieder anerkennen, wodurch ein fördernder Faktor der ILM vertreten ist.

Zusätzlich hat das hauptsächlich verwendete Spiel „Tabu“ den Vorteil, dass Lernende ihre Kreativität nutzen können und so beim Umschreiben ihres darzustellenden Begriffs Wahlmöglichkeiten haben. Diese Tatsache spricht sowohl den Aspekt der Selbstbestimmtheit sowie den des Anbietens von Wahlmöglichkeiten an und führt somit zu einer Steigerung der ILM.

¹¹ vgl. Deci (1992): S.49f & S.54f

¹² vgl. Deci (1993): S.226

¹³ vgl. Deci (1992): S.57

Auch beim Entwickeln eines Spiels können Wahlmöglichkeiten geboten werden. Mögliche Ansätze hierzu sind die freie Wahl des Themas oder auch der Art des Spieles. Beides habe ich bei meiner Untersuchung berücksichtigt (vgl. Kapitel 5.2).

Ob ein gewisser Faktor förderlich oder hemmend in Bezug auf ILM wirkt, ist auch von der Situation und dem Kontext abhängig. So kann eine Belohnung hemmend wirken, wenn sie als kontrollierend erlebt wird, oder sie kann förderlich wirken, wenn sie als Unterstützung der eigenen Autonomie erkannt wird. Trotzdem habe ich bei den Spielstunden darauf Wert gelegt, möglichst keine extrinsischen Belohnungen, wie einen Preis für das Gewinnerteam, einzubringen. Dadurch sollte ein klarerer Blick auf die ILM an sich möglich sein. Außerdem habe ich versucht, bei der Spielanleitung oder Ähnlichem auf Aussagen wie "ihr sollt" und dergleichen zu verzichten, da diese als kontrollierend empfunden werden können.¹⁴

SCHIEFELE und SCHREYER haben in ihrer Arbeit verschiedene Studien zur Auswirkung von ILM und ELM auf das Lernen zusammengefasst. Es wurden nur Studien nach 1970 ausgewählt, da erst ab dieser Zeit die Erforschung der ILM an Bedeutung gewonnen hat. Insgesamt wurden 30 Publikationen, darunter 4 Dissertationen, verwendet, welche in vier Gruppen unterteilt wurden. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wurden alle Ergebnisse, sofern das noch nicht der Fall war, in Korrelationskoeffizienten umgerechnet. In weitere Folge wurden diese, mit Hilfe der Fisher-Transformation, in die entsprechenden z-Werte umgerechnet. Durch das Gewichten dieser Werte, Aggregation und einer Rückrechnung ergaben sich dann die entsprechenden Korrelationen.¹⁵

Die erste Gruppe der Studien beschäftigte sich mit dem Einfluss der ILM auf Noten. Es hat sich ergeben, dass die Korrelationskoeffizienten zwischen 0,16 und 0,45 schwankten, wobei sich ein mittlerer Korrelationskoeffizient von 0,21 ergab. Dies bedeutet, dass es durchwegs einen positiven Einfluss der ILM auf den Faktor Noten gibt, auch wenn die Ausprägung gering ist.¹⁶

In der zweiten Gruppe wurde der Einfluss der ILM auf das Abschneiden bei Leistungstests untersucht. Die Ergebnisse ähneln jenen der ersten Gruppe. So ist auch hier ein positiver, jedoch geringer, Einfluss der ILM auf das Ergebnis der Leistungstests ersichtlich und es traten, wie bei der vorherigen Gruppe, kaum Schwankungen zwischen den einzelnen Studien

¹⁴ vgl. ebd.: S.58f

¹⁵ vgl. Schiefele/Schreyer (1994): S.4f

¹⁶ vgl. ebd.: S.5f

auf. Mit geringen Schwankungen ist hier gemeint, dass die meistens Studien Korrelationskoeffizienten liefern, die nahe am Mittelwert liegen, und dass durchwegs ein positiver Einfluss der ILM gegeben ist.¹⁷

Bei der dritten Gruppe von Studien wurde der Einfluss der ILM, und dieses Mal auch der ELM, auf oberflächliches beziehungsweise tiefergehendes Lernen getestet. Hierzu wurde in fast allen Studien die ILM mit der ELM verglichen. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass nur bei tiefergehendem Lernen ein Unterschied zwischen ELM und ILM auftritt. Hier wirkt die ILM förderlicher, was durch einen Korrelationskoeffizienten von 0,47 zwischen ILM und tiefergehendem Lernen und einem Korrelationskoeffizienten von 0,163 zwischen ELM und tiefergehendem Lernen, ersichtlich wird. Da in den meisten Studien eine intrinsisch motivierte Versuchsgruppe mit einer extrinsisch motivierten Versuchsgruppe verglichen wurde, kann man allerdings anhand dieser Studien nicht feststellen, ob ILM lernfördernd und/oder ELM lernbehindernd wirkt. Lediglich zwei der ausgewerteten Studien dieses Themenpools hatten Kontrollgruppen zum Vergleich. Diese Studien weisen darauf hin, dass die große Differenz der Korrelationskoeffizienten eher durch einen behindernden Einfluss der ELM begründet ist. Allerdings ist zu berücksichtigen, dass die Kontrollgruppen nicht notwendigerweise neutral motiviert waren, sondern dass eventuell durch nicht eindeutige Instruktionen die ILM stärker gefördert wurde. Des Weiteren legt die Studie von BERGIN offen, dass leistungsschwache Studenten und Studentinnen stärker von intrinsischen Instruktionen profitieren als leistungstärkere Studierende. Die Studie von BENWARE und DECI hatte die Besonderheit, dass die Beteiligten zwei Wochen Zeit hatten, sich einen Lerntext zu Gemüte zu führen. In dieser Studie wurde also das Lernen in natürlichen Situationen stärker berücksichtigt. Mit einem Korrelationskoeffizienten von 0,83, welcher der größte von allen betrachteten Studien war, weist sie darauf hin, dass in natürlichen Situationen der Einfluss von ILM noch größer sein könnte.¹⁸

Die letzte der vier Gruppen von Studien beschäftigte sich mit dem Einfluss der beiden Lernmotivationen auf bestimmte Lernstrategien, welche einen großen Einfluss auf die Qualität von Lernergebnissen haben. Bei der Analyse der Studien wurde der Zusammenhang von ILM und ELM mit neutralen, oberflächlichen und tiefergehenden Lernstrategien betrachtet. Es zeigt sich durch einen Korrelationskoeffizienten von 0,44 zwischen ILM und tiefergehenden

¹⁷ vgl. ebd.: S.6

¹⁸ vgl. ebd.: S.7f & S.10

Lernstrategien und einem Korrelationskoeffizienten von 0,30 zwischen ILM und neutralen Lernstrategien, dass ein deutlicher, positiver Effekt der ILM auf diese Faktoren zu verzeichnen ist. Bei ELM findet sich nur in Bezug auf oberflächliche Lernstrategien ein signifikanter Zusammenhang, welcher durch einen Korrelationskoeffizienten von 0,23 zwischen der ELM und den oberflächlichen Lernstrategien, beschrieben wird.¹⁹

1.2 Der Einfluss von Motivation auf langfristigen Leistungszuwachs

Um den Einfluss von Motivation auf die langfristige Leistungsentwicklung von Lernenden zu betrachten, beziehe ich mich auf eine Studie von MURAYAMA et al, welche sich genau mit diesem Thema auseinander setzt.

Es gibt zwar, wie im vorherigen Kapitel schon erwähnt, eine Vielzahl an Studien, die sich mit dem Einfluss von Motivation auf Leistung beschäftigen, da es allerdings weniger Studien zum Langzeiteinfluss gibt, wurde diese Studie gestartet. Des Weiteren wurde der Einfluss von Lernstrategien auf das langfristige Leistungswachstum betrachtet.²⁰

Um den Einfluss der Motivation zu ermitteln, wurden drei besonders wichtige Aspekte untersucht: die durch die Lernenden wahrgenommene Verhaltenskontrolle und die intrinsische beziehungsweise extrinsische Motivation. Da die intrinsische und extrinsische Motivation im vorherigem Kapitel schon näher erläutert wurden und die dort genannten Definitionen im Wesentlichen mit denen in dem Artikeln von MURAYAMA et al übereinstimmen, werde ich an dieser Stelle nur noch kurz auf diese zwei Faktoren eingehen. Da intrinsische Motivation unter anderem mit positiven emotionalen Lernerfahrungen, aktivem Engagement und Durchhaltevermögen, falls Fehler gemacht werden, einhergeht, sollte diese Art der Motivation sich besonders auf langfristige Leistungssteigerung auswirken. Die extrinsische Motivation hingegen sollte eher, da sie mit instrumentellem Lernen und der Erwartung eines kurzfristigen Vorteils verbunden ist, die aktuelle Leistung beeinflussen und die langfristige Steigerung der Leistung nicht fördern. Der dritte Faktor, die wahrgenommene Verhaltenskontrolle, kann als die subjektive Einschätzung der Lernenden des Zusammenhangs ihres Handelns mit dem resultierenden Ergebnis verstanden werden, also als die Erwartung, dass ein gewünschtes Ergebnis durch eine Handlung abgerufen werden kann. Da die wahrgenommene Verhaltenskontrolle mit aktiver und aufwändiger Lernhingabe,

¹⁹ vgl. ebd.: S.8ff

²⁰ vgl. Murayama et al. (2012): S.1475

intrinsischem Engagement und mit Durchhaltevermögen beim Lösen von schwierigen Aufgaben verbunden ist, sollte sie sich auf den Erwerb von neuem Wissen auswirken und so ein Anzeichen für Leistungszuwachs sein.²¹

Zusätzlich zur Motivation wird in der Studie die langfristige Wirkung von tiefgehenden und oberflächlichen Lernstrategien betrachtet. Während tiefgehende Lernstrategien mit dem Infragestellen von Informationen und dem Verknüpfen von neuen Inhalten mit Vorwissen einhergehen, zeichnen sich oberflächliche Lernstrategien durch andauerndes Wiederholen und Auswendiglernen aus. Bisherige Studien haben gezeigt, dass tiefgehende Lernstrategien keine oder eine positive Wirkung auf die schulische Leistung haben. Oberflächliche Lernstrategien haben keinen oder einen negativen Effekt auf die Leistung. Diese Studien haben sich allerdings eher mit einer Momentaufnahme der Leistung zufrieden gegeben, wohingegen sich die Studie von MURAYAMA et al mit den Langzeitwirkungen beschäftigt hat.²²

Die Studie wurde an bayrischen Schulen zwischen der 5. und der 10. Schulstufe in Rahmen eines Mathematikprojekts durchgeführt. Da es auch plausibel wäre, dass sich im Laufe der Jugend die Motivation und die verwendeten Lernstrategien verändern, wurde die Vorhersagekraft der durchgeführten Studie jeweils auf die 5. und die 7. Schulstufe bezogen und verglichen. Die Zeitpunkte wurden so gewählt, da sie im deutschen Schulsystem Punkte darstellen, an denen Lernende Entscheidungen über ihre zukünftige schulische Laufbahn treffen müssen. Es nahmen anfänglich 2070 Lernende aus 42 Schulen an der Studie teil, wobei das Verhältnis von Schülerinnen zu Schülern nahezu ausgeglichen war. Am Ende der Studie waren es schon 3530 Lernende, die an der Untersuchung teilnahmen. Die Schultypen umfassten sowohl Hauptschulen als auch Realschulen und Gymnasien. Die zu untersuchenden Hypothesen waren:

- Die wahrgenommene Verhaltenskontrolle ist ein Anzeichen für ein gutes Ausgangslevel sowie ein Wachstum von Schulleistungen.
- Extrinsische und intrinsische Motivation beziehungsweise oberflächliche und tiefgehende Lernstrategien sind Anzeichen für ein gutes Anfangslevel von Leistungen.
- Intrinsische Motivation und tiefgehende Lernstrategien sind Anzeichen für einen Leistungszuwachs.

²¹ vgl. ebd.: S.1475f

²² vgl. ebd.: S.1476f

- Intelligenz ist zwar ein Anzeichen für ein gutes Ausgangslevel von schulischer Leistung, jedoch hat sie keinen Einfluss auf den Leistungszuwachs.²³

Um die mathematischen Leistungen zu bestimmen, wurde ein Test bestehend aus Multiple-Choice und offenen Fragen verwendet. Um die Motivation und die Lernstrategien zu erheben, wurden verschiedene Selbstbeurteilungsskalen verwendet, welche sich für den Bereich der Mathematik eignen und deren Verlässlichkeit und Aussagekraft bereits in zwei größeren Pilotstudien festgestellt wurde. Für die wahrgenommene Verhaltenskontrolle, die intrinsische und die extrinsische Motivation wurden Skalen verwendet, welche von 1 bis 5 reichten, wobei hier 1 bedeuten soll, dass die teilnehmende Person gar nicht zustimmt und 5 bedeutet, dass die Person ganz und gar zustimmt. Für die Lernstrategien wurden jeweils Skalen von 1 bis 4 verwendet, wobei 1 wieder bedeutet, dass nicht zugestimmt wird und 4 bedeutet, dass voll und ganz zugestimmt wird. Die Intelligenz wurde mit Hilfe eines kognitiven Fähigkeitstest bestimmt, welcher an jenen Test von THORNDIKE angelehnt war.²⁴

Die Ergebnisse der Studie haben gezeigt, dass nicht nur Intelligenz ein Anzeichen für eine gute aktuelle Leistung ist, sondern dass auch Motivation und Lernstrategie eine wichtige Rolle spielen. Des Weiteren spielen Motivation und das Verwenden gewisser Lernstrategien auch für die langfristige Entwicklung der Leistung eine essenzielle Rolle. So ist ein hoher Grad an wahrgenommener Verhaltenskontrolle und intrinsischer Motivation, sowie das Verwenden von tiefgehenden Lernstrategien, ein Anzeichen für eine positive Leistungsentwicklung, wohingegen der Faktor Intelligenz keine Aussage über den zu erwartenden Anstieg der Leistung zulässt. Hier ist anzumerken, dass die wahrgenommene Verhaltenskontrolle nur in Bezug auf die Messung in der 5. Schulstufe und tiefgehende Lernstrategien nur in Bezug auf die Messung in der 7. Schulstufe eine überdurchschnittliche Leistungssteigerung voraussagen konnten. Im Gegensatz dazu ist die wahrgenommene Verhaltenskontrolle in der 7. Schulstufe ein wesentlich deutlicheres Anzeichen für eine gute aktuelle Leistung als in der 5. Schulstufe.²⁵

Extrinsische Motivation steigert lediglich die aktuelle Leistung und hat keinen Effekt auf die langfristige Leistungsentwicklung. Bei der Betrachtung der Lernstrategien fällt auf, dass tiefgehende Lernstrategien, wie bereits erwähnt, die langfristige Leistungsentwicklung positiv

²³ vgl. ebd.: S.1477f

²⁴ vgl. ebd.: S.1479f

²⁵ vgl. ebd.: S.1485f

beeinflussen können, wohingegen oberflächliche Lernstrategien einen negativen Effekt haben. Des Weiteren konnte auch ein negativer Einfluss von oberflächlichen Lernstrategien auf den aktuellen Leistungsstand festgestellt werden, welcher nicht erwartet wurde. Er könnte dadurch begründet sein, dass durch den Einsatz von oberflächlichen Lernstrategien weniger effiziente Lernstrategien eingesetzt wurden. Da die Effektivität von Lernstrategien allerdings stark von den Lernphasen und dem verwendeten Material abhängig ist, sollte aus diesem Ergebnis nicht gleich geschlossen werden, dass oberflächliche Lernstrategien in jeder Situation einen negativen Effekt aufweisen.²⁶

Die Ergebnisse der Studie weisen außerdem darauf hin, dass tiefgehende Lernstrategien keinen Einfluss auf den aktuellen Leistungsstand haben. Die Ergebnisse der 7. Schulstufe sagen hingegen aus, dass in dieser Altersklasse auch die intrinsische Motivation keinen Einfluss auf den aktuellen Leistungsstand hat. Betrachtet man die intrinsische Motivation allerdings ab der 5. Schulstufe so konnte sehr wohl ein positiver Zusammenhang mit der aktuellen Leistung ermittelt werden.²⁷

Bei Betrachtung der Intelligenz der Befragten hat sich gezeigt, dass Intelligenz zwar einen hohen aktuellen Leistungsstand begründet, allerdings keinen Effekt auf einen überdurchschnittlichen Leistungsanstieg hat. Hier ist zu berücksichtigen, dass die Studie nur mathematische Leistung untersucht hat und man diese Erkenntnis folglich nicht ohne weiteres auf andere Bereiche übertragen kann. Allerdings hat die Studie gezeigt, dass Motivation und Lernstrategie eine wichtige Rolle für die Entwicklung der Schulleistung spielen und deshalb Beachtung finden sollten.²⁸

Zuletzt möchte ich noch folgende Botschaft der Autoren der Studie wiedergeben:

“...the critical determinant of growth in achievement is not how smart you are, but how motivated you are and how you study.”²⁹

²⁶ vgl. ebd.

²⁷ vgl. ebd.: S.1483ff

²⁸ vgl. ebd.: S.1483 & S.1486

²⁹ ebd.: S.1486

1.3 Erkenntnisse der PISA-Studie 2000 über den Einfluss von Motivation auf das Lernen

Im Rahmen der von der OECD durchgeführten PISA-Studie 2000 wurden Aspekte wie Motivation, Lernstrategie und das Vertrauen in das eigenen Können und deren Zusammenhang mit Leistung betrachtet.³⁰ Obwohl sich die PISA-Studie 2000 mit den Lesekompetenzen von Lernenden beschäftigte, möchte ich die Ergebnisse an dieser Stelle trotzdem anführen. Dies ist darin begründet, dass die betrachteten Aspekte, wie etwa Motivation, auch im Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle spielen und die Ergebnisse so auch für den Mathematikunterricht von Relevanz sind. In PISA 2000, an der 32 Länder teilnahmen, wurden die Lernansätze von Lernenden im Alter von 15 bis 16 Jahren aus 26 Ländern untersucht. In diesen 26 Ländern wurde von den Lernenden ein zusätzlicher Fragebogen über selbstregulierendes Lernen ausgefüllt. Es hat sich in verschiedenen Untersuchungen bereits gezeigt, dass das selbstregulierende Lernen dazu beiträgt, dass bessere Schulleistungen erbracht werden, worin begründet ist, dass dieser Aspekt näher untersucht wird. Da Motivation und die Wahl von geeigneten Lernstrategien unter anderem Charakteristika von selbstregulierendem Lernen sind, werden diese Punkte genauer unter die Lupe genommen.³¹

Es hat sich gezeigt, dass jene Lernenden, welche die höchsten Werte bei der Befragung nach Motivation, verwendete Lernstrategie und selbstbezogenem Vertrauen hatten, auch bei den Leistungstests überdurchschnittlich gut abschnitten. Es konnte eine Differenz von durchschnittlich einer halben bis zu eineinhalb Kompetenzstufen zu den Lernenden, welche bei diesen motivationalen Aspekten im untersten Quartil lagen, festgestellt werden. Des Weiteren hat sich gezeigt, dass Lernende, welche Interesse am Lesen zeigen, ein höheres Lesekompetenzniveau haben, auch wenn sie sich nicht überdurchschnittlich viel mit dem Lernen auseinandersetzen und ihr Lernen wenig kontrollieren. Auf der anderen Seite hat sich jedoch gezeigt, dass jene Lernenden, welche durch externe Faktoren, wie Chancen auf eine gute Arbeitsstelle, motiviert waren, nur dann überdurchschnittliche Leistungen erbracht haben, wenn sie zusätzlich andere Merkmale, wie beispielsweise die Kontrolle ihres Lernens, aufwiesen.³²

³⁰ vgl. Artelt/Baumert/Julius McElvany/Peschar (2004): S.3

³¹ vgl. ebd.: S.8-11

³² vgl. ebd.: S.22

Für Österreich hat sich gezeigt, dass die Korrelation zwischen dem Leseinteresse und dem Einsatz von Kontrollstrategien nur bei 0,20 liegt und somit den niedrigsten Wert aller teilnehmenden Länder aufweist. Allerdings weist Österreich auch einen besonders niedrigen Korrelationskoeffizienten von Leseinteresse und Memorierstrategien auf, was bedeutet, dass interessierte Lernende kaum auf Techniken zurückgreifen, welche sich durch Wiederholen auszeichnen. Kontrollstrategien werden von Lernenden eingesetzt, um zu überprüfen, was bereits gelernt wurde und was noch gelernt werden muss. Durch diese Reflexion kann der Lernprozess angepasst werden. Es hat sich bereits in früheren Studien gezeigt, dass der Einsatz von Kontrollstrategien in engem Zusammenhang zur Leistung steht. Auch bei der PISA-Studie konnte dieser Einfluss festgestellt werden, wobei die Anwendung von Kontrollstrategien und die Lesekompetenz bei den österreichischen Daten sogar eine Korrelation aufweist, die etwas über dem OECD-Durchschnitt liegt.³³ Folglich ist durch den positiven Einfluss von Interesse auf Kontrollstrategien, auch wenn dieser im Vergleich zu anderen Ländern geringer ausfällt, auch ein positiver Einfluss auf die Leistung gegeben.

Betrachtet man die einzelnen Faktoren isoliert voneinander, so zeigt sich, dass Lerninteresse nur ein geringes Anzeichen dafür ist, dass das eigene Lernen kontrolliert wird, und folglich dürfte intrinsische Motivation alleine kein allzu deutliches Anzeichen dafür sein, dass Lernende anspruchsvollere Lernstrategien einsetzen. Dies deutet darauf hin, dass Interesse einen unmittelbaren Einfluss auf die Leistung der Lernenden hat, ohne dabei einen ausgeprägten Einfluss auf Lernstrategien oder ähnlichem aufzuweisen. In 15 Ländern, darunter auch Österreich, war das Interesse, unabhängig von der Einstellung zum oder dem Verhalten in Bezug auf Lernen, das größte einzelne Anzeichen für ein besonders hohes Leistungsniveau.³⁴

In Bezug auf Mathematik hat sich gezeigt, dass Lernende, welche angaben, sich gerne mit Mathematik zu beschäftigen, im Durchschnitt auch gute mathematische Leistungen erbrachten, auch wenn sie keine anderen starken Lernmerkmale zeigten. Andererseits haben Lernende, welche stärkere Lernansätze besitzen, zwar im Durchschnitt ein großes Interesse und auch mehr Selbstvertrauen im Bereich Lesen, allerdings nicht unbedingt im Bereich

³³ vgl. ebd.: S.13, S.23, S.25 & S.29ff

³⁴ vgl. ebd.: S.33f & S.117

Mathematik. Dies deutet darauf hin, dass besonderes Augenmerk auf die Einstellung zur Mathematik gelegt werden sollte.³⁵

Es hat sich gezeigt, dass in der Hälfte der teilnehmenden Länder Schülerinnen das kooperative Lernen öfters als angenehm empfinden als Schüler. Bei der anderen Hälfte der Länder, gibt es, bis auf Korea, keinen Unterschied bei dieser Form des Lernens. Andererseits haben Schüler in den meisten Ländern angegeben, dass sie sich in wettbewerbsorientierten Situationen wohler fühlen, als Schülerinnen das zu Protokoll gegeben haben.³⁶

Aus diesen Erkenntnissen heraus war es für mich in den Spielsituationen, bei denen eine Wettbewerbssituation herrscht, besonders wichtig, darauf zu achten, dass sich die Schülerinnen nicht unwohl fühlten.

In der OECD-Studie hat sich außerdem für Österreich gezeigt, dass der Einfluss des Leseinteresses auf die Lesekompetenz bei Schülerinnen deutlich stärker ist als bei Schülern. Hieraus sollte allerdings nicht der Schluss gezogen werden, dass sich das Interesse bei Schülerinnen in jedem Fach stärker auf die Leistung auswirkt, da sich der verstärkte Einfluss eines Merkmals auf die Leistung vor allem bei jenem Geschlecht gezeigt hat, bei dem das jeweilige Merkmal stärker ausgeprägt war. Es hat sich allerdings auch gezeigt, dass bei Schülern ein stärkeres mathematisches Interesse als bei Schülerinnen herrschte, welche wiederum mehr Interesse am Lesen zeigten.³⁷

1.4 Bedeutung der Motivation für den Lernerfolg

Ziel der Motivation ist es, die Neugierde, welche den Menschen schon von Geburt an inne wohnt, aufrecht zu erhalten, aufzubauen und wiederzugewinnen.³⁸ Wie die gerade beschriebenen Studien aufzeigen, hat die Motivation, mit besonderem Augenmerk auf die ILM, einen positiven Einfluss auf Leistung und auch auf den langfristigen Leistungszuwachs. Es hat sich gezeigt, dass vor allem jene Lernende, welche intrinsisch motiviert sind, durchwegs überdurchschnittliche Leistungen erbringen und dass sie auch langfristig einen höheren Anstieg ihrer Leistung aufweisen als jene Lernende, welche nicht intrinsisch motiviert sind. Aus diesem Grund möchte ich im Rahmen dieser Diplomarbeit versuchen herauszufinden, ob es Anzeichen dafür gibt, dass mit Hilfe von mathematischen Spielen die

³⁵ vgl. ebd.: S.57

³⁶ vgl. ebd.: S.60 & S.63

³⁷ vgl. ebd.: S.63 & S.65f

³⁸ vgl. Merkens (2010): S.121 & S.124

intrinsische Motivation von Lernenden gesteigert werden kann. Dies würde bedeuten, dass Spiele nicht nur eine Auflockerung des Unterrichts bedeuten können oder dazu führen, dass sich Lernende mit einem mathematischen Thema auseinandersetzen, sondern dass sie sogar eine besonders effektive Unterrichtsmethode darstellen.

2. Spiele

2.1 Generelles zu Spielen

Spiele können unterschiedliche Formen annehmen, wobei folgende drei Unterteilungen einen Großteil der Spielformen abdecken:

- *Interaktions- und Gesellschaftsspiele:* Diese Form der Spiele ist uns aus dem Alltag, beispielsweise durch Kartenspiele oder auch Monopoly, bereits gut bekannt. Hier spielen die Faktoren Spaß, Erholung, aber auch Interaktion mit anderen Personen eine wichtige Rolle. Diese Spielform kann natürlich weiter unterteilt werden, wie Gesellschaftsspiele, Denk- und Strategiespiele und vieles mehr. Durch diese Spielform können soziale Kompetenzen entwickelt werden, es können aber auch mathematische Inhalte geübt oder erarbeitet werden.
- *Simulationsspiele:* Hierzu gehören Rollenspiele und auch Planspiele, welche, wie der Name schon verrät, nach einem Plan verlaufen. Da für das glaubhafte Spielen seiner Rolle zuerst eine Phase notwendig ist, in der Informationen zu der eigenen Rolle gesammelt werden, besteht bei dieser Spielform die Gefahr, dass das Spielerische durch die Ähnlichkeit zum regulären Unterricht verloren geht oder stark abgeschwächt wird. Der Nutzen dieser Art von Spiel im Unterricht liegt in dem Entwickeln von sozialen Kompetenzen, dem Erwerb von Wissen, der Notwendigkeit, selbständig Entscheidungen zu treffen, dem Anerkennen, und auch in der Auseinandersetzung mit anderen Meinungen, der Beschäftigung mit eigenen Vorstellungen und Haltungen, sowie dem Perspektivenwechsel.
- *Szenisches Spiel:* In diese Kategorie fallen beispielsweise Pantomime, Tanzen und jegliche Form von Theaterspielen, wie Musicals, Kabaretts und vieles mehr. Ein besonderes Charakteristikum dieser Spielform ist die Interaktion zwischen dem Akteur und dem Publikum. Bei dieser Art von Spiel kann sowohl ein enges Anhalten an Spielvorlagen, als auch eine lockere Interpretation dieser auftreten. Diese Spielform eignet sich sowohl für den sprachlichen beziehungsweise musischen Bereich, sowie für soziales und dialogisches Lernen.³⁹

³⁹ vgl. Busse (2003)

2.2 Spiele in der Geschichte der Mathematik

Schon im Laufe der Geschichte haben sich die Wege von Spielen und der Mathematik immer wieder gekreuzt. So sind sogar einige Entdeckungen in der Mathematik durch Spiele initiiert worden. Um dies zu verdeutlichen, möchte ich später (vgl. Kapitel 2.4) noch auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehen.

Viele ursprünglich geometrischen Probleme basieren auf Brettspielen. So beruhen zum Beispiel das Rösselsprungproblem (auch Springerproblem genannt) oder auch das Acht-Damen-Problem auf Schach.⁴⁰

Schon 1550 finden sich bei CARDANO Spiele, in denen verflochtene Ringe und Ösen voneinander gelöst werden oder scheinbar gefesselte Gegenstände mit topologischen Tricks befreit werden sollen. Diese Spiele fanden schließlich Einzug in spätere Rätselhefte. Auch Tangram ist ein bereits älteres Spiel, durch welches sich jede Menge geometrische Fragestellungen ergeben.⁴¹

CARDANO hat später auch durch Spiele erste Schritte zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung unternommen, aber darauf werde ich - wie erwähnt - erst später genauer eingehen.

2.3 Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres

Bereits 1612 schrieb Bachet de MÉZIRIAC ein Buch über mathematische Rätsel. Es hieß „Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres“ was auf Deutsch soviel heißt wie „Amüsante und köstliche Rätsel, die sich aus Zahlen ergeben“.⁴² Da Rätsel auch als Spiele für eine Person aufgefasst werden können, möchte ich auf dieses Buch noch etwas genauer eingehen. Deshalb möchte ich an dieser Stelle ein paar Beispiele anführen, welche MÉZIRIAC in seinem Buch behandelt hat. Die Beispiele sind zum Teil der heute üblichen Sprache der Mathematik angepasst, damit die im Buch vorgeschlagenen Lösungen verständlich und nachvollziehbar sind.

⁴⁰ vgl. Scriba/Schreiber (2010): S.560

⁴¹ vgl. ebd.

⁴² vgl. Taschner (2015): S.41

Beispiel 1:

Bei einem Beispiel in dem Buch wird nach einer Zahl gesucht, welche bei einer Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 einen Rest von 1 ergibt. Wird die gleiche Zahl allerdings durch 7 dividiert, so bleibt kein Rest.⁴³

Um diese Aufgabe anschaulicher zu gestalten, wird sie in eine kleine Geschichte verpackt. Eine arme Frau trägt einen Korb voller Eier, um diese am Markt zu verkaufen. Sie stößt allerdings mit jemand zusammen und lässt die Eier fallen, die daraufhin zerbrechen.⁴⁴

Die Frau wird nach der Anzahl der Eier gefragt, woraufhin sie antwortet, dass sie die Zahl nicht mehr genau wüsste, allerdings ist sie sich ziemlich sicher, dass wenn man die Eier in Zweier-, Dreier, Vierer-, Fünfer- und Sechserreihen aufgelegt hat, immer ein Ei übrig blieb. Hat man die Eier allerdings in Siebenerreihen aufgelegt, so blieb kein Ei über. Nun ist die Frage, wie man mit dieser Angabe herausfinden kann, wie viele Eier im Korb waren.⁴⁵

In dem Buch wird weiters erklärt, dass man, um die Frage zu beantworten, eine Zahl finden muss, welche durch 7 teilbar ist und welche, wenn man sie um eins vermehrt, durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar ist. Da 60 das kleinste gemeinsame Vielfache der eben genannten Zahlen ist, folgt daraus, dass die gesuchte Zahl ein Vielfaches von 7 ist und dass sie sich durch vermehren von 60 oder dem Vermehren eines Vielfachen von 60 um 1 ergibt.⁴⁶ In heute üblichen Formel, würde also gelten:

$$x = 7 * y$$

und

$$x = 60 * z + 1,$$

wobei x, y und z natürliche Zahlen sind.

Danach ist in dem Buch noch erwähnt, dass man, um sicherzustellen, dass dieses Problem überhaupt eine Lösung hat, noch zeigen muss, dass 7 relativ prim zu den Zahlen 2, 3, 4, 5 und

⁴³ vgl. Méziriac (1612): S.127

⁴⁴ vgl. ebd.

⁴⁵ vgl. ebd.: S.127 f

⁴⁶ vgl. ebd.: S.128

6 ist.⁴⁷ Dies beschreibt MÉZIRIAC in seinem Buch dann auch, was ich allerdings hier nicht wiedergeben werde, da diese Tatsache trivial ist.

Hat man nun gezeigt, dass 7 relativ prim zu den anderen Zahlen ist, so kann man folgendes anwenden:

Sind zwei oder mehr Zahlen relativ prim zu einer anderen Zahl, in unserem Fall 7, so ist diese andere Zahl (7) auch relativ prim zu jedem Produkt der zu ihr relativ primen Zahlen. MÉZIRIAC verweist darauf, dass er diese Aussage bereits in seinem Buch „Elemente der Arithmetik“ gezeigt hat.⁴⁸

In der heute üblichen mathematischen Schreibweise könnte man diese Aussage wie folgt formulieren:

Für $a, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$ gilt:

Wenn $\text{ggT}(a, b_1) = \text{ggT}(a, b_2) = \dots = \text{ggT}(a, b_n) = 1$, dann ist $\text{ggT}(a, b_1 b_2 \dots b_n) = 1$

für $1 \leq k, l, m \leq n$

Daraus folgt also, dass 7 auch relativ prim zu 60 ist.

MÉZIRIAC erklärt in seinem Buch weiter, dass er an einer anderen Stelle schon Folgendes festgestellt hat: Sind zwei Zahlen relativ prim, so gibt es ein Vielfaches der einen Zahl, welches um 1 vermehrt die andere Zahl oder ein Vielfaches von ihr ergibt.⁴⁹

Es gilt also

$$x * n_1 + 1 = y * n_2$$

mit n_1 und n_2 relativ prim und x und y natürliche Zahlen.

MÉZIRIAC verweist in seinem Buch auf die Schwierigkeit und Langwierigkeit der Betrachtung dieser Behauptung. Aus diesen Gründen wird die Behauptung in dem Buch auch nicht bewiesen.⁵⁰

⁴⁷ vgl. ebd.

⁴⁸ vgl. ebd.: S.129

⁴⁹ vgl. ebd.

⁵⁰ vgl. ebd.

Mit dieser Aussage, dass es eben so ein Vielfaches von 60 gibt, welches vermehrt um eins durch 7 teilbar sein muss, da 7 und 60 relativ prim sind, kann man letztendlich auf die Lösbarkeit des Problems schließen. Nun schlägt MÉZIRIAC vor, die Zahl 60 der Reihe nach mit 2, 3, 4 und so weiter zu multiplizieren und jeweils 1 dazu zu addieren, bis man eine Zahl gefunden hat, die auch durch 7 teilbar ist. Diese Zahl wird bei einer Multiplikation mit 5 gefunden, nämlich die Zahl 301. Diese ist durch 7 teilbar, und bei einer Division durch 2,3,4,5 und 6 bleibt ein Rest von 1.⁵¹

Diese Lösung ist allerdings nicht die einzige, da zum Beispiel auch 721 die vorgegebenen Kriterien erfüllt.

Im Buch wird ebenfalls darauf verwiesen, dass CARDANO eine andere Methode angibt, um dieses Problem zu lösen, welche etwas kürzer ist, allerdings einen Zirkelschluss beinhaltet.⁵²

Die von CARDANO angegebene Lösung ist folgende: Man soll 7 von 60 so oft wie möglich abziehen, dann bleibt 4 übrig. Danach soll man ein Vielfaches von 7 suchen, welches um eins größer als ein Vielfaches von 4 ist. So eine Zahl ist beispielsweise 21. Nun muss von der Zahl wieder eins abgezogen werden, was 20 ergibt und das Ergebnis soll durch 4 geteilt werden, wodurch man die Zahl 5 erhält. Multipliziert man nun 60 mit 5 erhält man 300, ein Vielfaches von 60, und addiert man nun 1, so erhält man 301, ein Vielfaches von 7.⁵³

Hier ist aber, wie oben bereits erwähnt, zu beachten, dass an der Stelle, an der man die Zahl 21 sucht (also ein Vielfaches von 7, welches vermindert um 1 ein Vielfaches von 4 ist) ein Zirkelschluss vorhanden ist. Daraus ergibt sich nämlich wieder ein analoges Problem zu jenem vom Anfang. Anfänglich sucht man ein Vielfaches von 7, welches vermindert um 1 ein Vielfaches von 60 ist, nun sucht man ein Vielfaches von 7, welches vermindert um 1 ein Vielfaches von 4 ist.⁵⁴

Am Ende des Problems geht MÉZIRIAC noch darauf ein, dass 301 nicht die einzige Lösung ist und präsentiert eine Möglichkeit, unendlich viele andere Lösungen zu finden. Hat man erst einmal eine Lösung gefunden, in unserem Fall 301, dann muss man nur noch das kleinste gemeinsame Vielfache von 60 und 7 beliebig oft dazu addieren. Somit erhält man sicherlich eine Zahl, die wiederum durch 7 teilbar ist, weil ja 301 und 420 (kgV von 60 und 7) durch 7

⁵¹ vgl. ebd.

⁵² vgl. ebd.: S.129f

⁵³ vgl. ebd.: S.130

⁵⁴ vgl. ebd.

teilbar sind. Des Weiteren ist die Zahl vermindert um 1 ebenfalls durch 60 und somit durch 2, 3, 4, 5 und 6 teilbar, weil 300 (301 vermindert um 1) und 420 durch 60 teilbar sind. Folglich bleibt bei einer Division der sich ergebenden Zahl durch 2, 3, 4, 5 und 6 ein Rest bei einer Division durch 7 bleibt hingegen kein Rest.⁵⁵

Beispiel 2: Zahlen erraten

In MÉZIRIACs Buch sind auch viele Möglichkeiten aufgezeigt, wie man eine Zahl „erraten“ kann, an die eine andere Person gerade denkt. MÉZIRIAC gibt sogar eine Möglichkeit an, wie man die Zahl, an die eine Person denkt, erraten kann, ohne diese etwas zu fragen. Dieser Trick beruht im Wesentlichen darauf, dass sich das Gegenüber zwar anfänglich eine beliebige Zahl aussuchen darf, allerdings werden dann mit dieser Zahl bestimmte Rechenoperationen ausgeführt, sodass man immer auf dasselbe Ergebnis kommt, unabhängig von der Anfangszahl.⁵⁶ Man nutzt also hier die mathematischen Mittel nicht dazu, die Anfangszahl zu erraten, sondern man nutzt mathematisches Können, um das Gegenüber dazu zu bringen, an eine gewisse Zahl zu denken.

Solche Aufgaben findet man noch heute in Schulbüchern und als „Zaubertricks“. Im Internet gibt es hierzu jede Menge Seiten, die solche Tricks erklären, und auch Videos zu dem Thema, da diese Tricks noch heute eine gewisse Faszination ausüben.

Um das Prinzip dieses zuletzt genannten Tricks von MÉZIRIAC klar darzustellen, wird nun die Anleitung zu einem Beispiel gegeben und durch Formeln dargestellt.

Vorab möchte ich schon erwähnen, das im Folgenden die Variable „x“ für eine unbekannte Zahl steht und die Variablen „a“, „b“ und „c“ für beliebige, aber bekannte Zahlen, die man sich selbst im Vorhinein überlegen kann. Um allerdings zu zeigen, dass der „Zaubertrick“ nicht nur für eine gewisse Auswahl an Zahlen gilt, werde ich die Formeln mit den Konstanten a, b und c angeben.

Zuerst bittet man das Gegenüber, an eine beliebige Zahl (x) zu denken. Nun soll die Zahl mit einer gewissen Zahl (a) im Kopf multipliziert werden. Man erhält also:

$$x \cdot a$$

Zu diesem Ergebnis wird eine weitere bekannte Zahl (b) addiert, man erhält somit:

⁵⁵ vgl. ebd.: S.131

⁵⁶ vgl. ebd.: S.14-59

$$x \cdot a + b$$

Das gesamte Ergebnis wird weiters durch eine dritte bekannte Zahl (c) dividiert und man erhält:

$$(x \cdot a + b) : c$$

Nun wird die Zahl, mit welcher multipliziert wurde (a), durch die Zahl, durch die zuerst dividiert wurde (c), geteilt. Das Ergebnis ist:

$$\frac{a}{c}$$

Der sich so ergebende Quotient wird nun mit der unbekannten Zahl (x), an welche das Gegenüber anfänglich gedacht hat, multipliziert und das Ergebnis schließlich von obigem Term abgezogen.

$$(x \cdot a + b) : c - \frac{a}{c} \cdot x$$

Durch Vereinfachen des Terms kann schon an dieser Stelle sichtbar gemacht werden, dass die sich ergebende Zahl nicht mehr von der unbekannten Zahl x abhängt, sondern lediglich dem Quotienten von b und c entspricht:

$$(x \cdot a + b) : c - \frac{a}{c} \cdot x = \frac{x \cdot a}{c} + \frac{b}{c} - \frac{a}{c} \cdot x = \frac{b}{c}$$

MÉZIRIAC gibt in seinem Buch an, dass nun noch die Zahl, welche addiert wurde (b), durch das eben erhaltene Ergebnis dividiert werden soll. An dieser Stelle kann man die Zahl erraten, an welche die Person gerade denkt, da es sich um jene Zahl handelt, durch welche dividiert wurde (c):

$$\frac{b}{(x \cdot a + b) : c - \frac{a}{c} \cdot x} = \frac{b}{\frac{b}{c}} = c$$

Im Buch von MÉZIRIAC ist dieses Beispiel einerseits anhand von konkreten Zahlen und andererseits theoretisch dargestellt.⁵⁷

⁵⁷ vgl. Méziriac (1612): S.55ff

Wie bereits erwähnt, hängt schon der Term $\frac{b}{c}$ nicht mehr von der unbekannten Zahl x ab und der Zaubertrick könnte an dieser Stelle bereits vorbei sein. Durch den letzten Rechenschritt wirkt der Zaubertrick aber einerseits komplizierter, und andererseits ergibt sich dadurch eine der „Ursprungszahlen“, nämlich die Zahl c .

Beispiel 3: Der Zahlensack vom Méziriac

Ein sehr bekanntes Beispiel aus dem Buch von MÉZIRIAC ist der sogenannte „Zahlensack von Méziriac“.

Alexander MEHLMANN widmet MÉZIRIAC in seinem Buch „Strategische Spiele für Einsteiger“ sogar ein Gedicht:

*„Es hält der Sieur de Méziriac
Für Euch bereit den Zahlensack:
Greift mit Bedacht die erste Zahl;
Von 1 bis 10 habt Ihr die Wahl.
Danach fügt Méziriac im Nu
Zu Eurer seine Zahl hinzu.
Und, wechselweise, ernst und heiter
Klettert man hoch die Zahlenleiter.
Doch seid beim Kraxeln auf der Hut
Und wählet klug und wählet gut!
Gewinn sich fröhlich jedem zeigt,
Der erstmals auf die 100 steigt.“⁵⁸*

Im Buch von MÉZIRIAC findet sich auch folgende Aufgabe: Zwei Personen sagen abwechselnd beliebige Zahlen, welche eine im Vorhinein ausgemachte Zahl nicht übertreffen dürfen. Alle diese Zahlen werden zusammen addiert. Gewonnen hat jene Person, welche als erste eine im Vorhinein ausgemachte Zahl nennen kann.⁵⁹

Beim Betrachten dieses Spiels legt MÉZIRIAC in seinem Buch fest, dass keine Zahl größer als 10 genannt werden darf. Die Zahl die am Ende erreicht werden muss wird mit 100 angegeben.⁶⁰ Deshalb wird das Problem üblicherweise so beschrieben, dass nur natürliche Zahlen zwischen 1 und 10 genannt werden dürfen und dass die Zahl 100 erreicht werden muss. Immer wenn in diesem Abschnitt das Wort Zahl vorkommt, ist damit eine natürliche Zahl gemeint.

⁵⁸ Mehlmann (2007): S.3

⁵⁹ vgl. Méziriac (1612): S.99

⁶⁰ vgl. ebd.: S.100

MÉZIRIAC gibt dann ein Beispiel, wie die ersten Spielrunden ablaufen können. Die erste Person sagt die Zahl 7, woraufhin die zweite Person die Zahl 10 nennt. Die Summe ist also 17. Daraufhin nennt die erste Person beispielsweise die Zahl 5, und wenn man nun diese zu 17 addiert, ergibt sich 22 und so weiter. Gewonnen hat dann diejenige Person, welche die Zahl 100 nennen kann.⁶¹

Im Buch wird als Gewinnstrategie angegeben, dass man die höchste Zahl, die man nennen darf um eins vermehren soll. In unserem Beispiel ergibt sich so also 11. Zieht man diese Zahl nun immer wieder von 100 ab, so ergeben sich die Zahlen 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 und 1. Beginnt man nun, indem man die Zahl 1 nennt, so kann das Gegenüber nicht verhindern, dass man im nächsten Zug die Zahl 12 erreichen kann, danach die Zahl 23 und so weiter, bis man schlussendlich die Zahl 100 nennt.⁶² In dem Buch wird noch näher erläutert, warum man bei geschicktem Spielen nicht verlieren kann, sofern man diese Schlüsselzahlen nennt. Ich möchte dies an dieser Stelle allerdings nicht genauer ausführen, sondern nur erwähnen, dass man jede Zahl kleiner gleich 10 mit einer entsprechenden Zahl, ebenfalls kleiner gleich 10, auf 11 ergänzen kann. Somit ist es immer möglich die nächste Schlüsselzahl und folglich auch 100 zu erreichen.

MÉZIRIAC stellt weiter fest, dass, falls beide Spielenden diese Gewinnstrategie bei den Zahlen 10 und 100 kennen, immer jene Person gewinnt, die angefangen hat. Später betrachtet er allerdings noch weitere Beispiele und erkennt, dass es auch Zahlenkombinationen gibt, bei denen jene Person die anfängt, nicht zwingend gewinnen muss, auch wenn sie nach der für sie besten Strategie spielt.⁶³

Bei einem weiteren Beispiel wird die zu erreichende Zahl von 100 auf 120 geändert. Hier kann man so spielen, dass man gewinnt, wenn man anfängt. Die Schlüsselzahlen lauten 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21 und 10 und ergeben sich wieder durch kontinuierliches Abziehen der Zahl 11 von, in diesem Fall, 120.⁶⁴ Nennt diejenige Person, welche anfängt, als erste Zahl 10, so kann sie wieder die Zahl des Gegenübers auf 11 ergänzen und kann am Ende die Zahl 120 nennen.

⁶¹ vgl. ebd.

⁶² vgl. ebd.

⁶³ vgl. ebd.: S.100 & S.102

⁶⁴ vgl. ebd.: S.102

Als weiteres Beispiel wird Folgendes aufgeführt. Man möchte die Zahl 100 erreichen und die Zahl 8 darf nicht überschritten werden. Um hier die Schlüsselzahlen zu erreichen muss man also zur Zahl 8 eins hinzufügen, man erhält 9, und diese Zahl dann immer wieder von 100 abziehen. Die Zahlen, welche man nennen möchte, lauten folglich 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10 und 1. Man sieht, dass auch hier durch das Nennen der Zahl 1 und durch das Ergänzen auf die Schlüsselzahlen, ein Sieg der ersten Person herbeigeführt werden kann.⁶⁵

Darf man nun allerdings nur Zahlen kleiner 9 nennen, so sind die Schlüsselzahlen 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20 und 10, welche man wiederum durch kontinuierliches Abziehen der um eins größeren Zahl als 9, nämlich 10, von der zu erreichenden Zahl 100, erhält. Die erste Schlüsselzahl 10 kann allerdings in der ersten Runde nicht genannt werden, da sie größer als 9 ist. Folglich kann diejenige Person, welche anfängt, nicht mehr so spielen, dass sie gewinnt, falls die andere Person die Gewinnstrategie auch kennt und ebenfalls nach dieser spielt.⁶⁶

MÉZIRIAC geht am Ende auch noch darauf ein, dass unter der Voraussetzung, dass das Gegenüber die Gewinnstrategie nicht kennt, es von Vorteil ist anfänglich Zahlen zu nennen, die nicht den Schlüsselzahlen entsprechen. Sonst könnte die andere Person schnell merken, welche Zahlen zum Sieg führen, das Verhalten des Gegenübers imitieren und somit auch gewinnen.⁶⁷

Beispiel 4: Die drei eifersüchtigen Ehemänner

Als letztes Beispiel aus dem Buch von MÉZIRIAC möchte ich noch das Problem der drei eifersüchtigen Ehemänner genauer betrachten.

Drei eifersüchtige Männer und ihre Ehefrauen müssen in der Nacht einen Fluss überqueren. Hierfür haben sie nur ein kleines Boot ohne Fährmann, in welches nur 2 Personen hinein passen. Es wird danach gefragt, wie diese 6 Personen in Zweierpaaren den Fluss überqueren können, ohne dass eine Ehefrau in der Begleitung eines anderen Mannes ist, wenn ihr Ehemann nicht anwesend ist.⁶⁸

⁶⁵ vgl. ebd.

⁶⁶ vgl. ebd.

⁶⁷ vgl. ebd.

⁶⁸ vgl. ebd.: S.140

Als Lösung gibt MÉZIRIAC an, dass die Ehepaare den Fluss sechsmal überqueren müssen, wobei mit einer Überquerung lediglich die Überfahrt vom ursprünglichen Ufer zum anderen Ufer gemeint ist.⁶⁹

Beim ersten Mal überqueren zwei Frauen den Fluss. Eine Frau bleibt zurück, ist allerdings in Begleitung ihres Mannes. Eine der Frauen fährt zurück und holt nun die dritte Frau. Folglich sind nun alle Männer an einem Ufer, zwei Frauen im Boot und eine Frau alleine am anderen Ufer. Nun bringt eine der Frauen das Boot zurück und bleibt mit ihrem Mann am Ufer. Die beiden anderen Männer überqueren gemeinsam den Fluss. Aktuell sind an einem Ufer also eine Frau und ihr Mann, im Boot zwei Männer und am anderen Ufer sind zwei Frauen. Nun fährt eines der Ehepaare wieder zurück, die Frau bleibt am Ufer und der Mann fährt mit dem dritten Mann wieder ans andere Ufer. Es sind also an einem Ufer also nun zwei Frauen, im Boot zwei Männer und am anderen Ufer eine Frau mit ihrem Mann. Zuletzt steigen beide Männer aus, und die dritte Frau holt eine der Frauen aufs andere Ufer, um dann mit einer zweiten Überquerung auch die letzte Frau zu holen.⁷⁰

Um die Lösung anschaulicher zu gestalten, habe ich die vom MÉZIRIAC vorgeschlagene Lösung durch Bilder veranschaulicht (Abbildung 1). Die Frauen werden in der Darstellung als Kreise dargestellt, die Männer als Quadrate, und zusammengehörende Eheleute haben die gleiche Farbe.

MÉZIRIAC betrachtet das Problem in seinem Buch im Anschluss an die Lösung noch genauer. Er stellt fest, dass es nur folgende Möglichkeiten für die Pärchen in dem Boot gibt: zwei Frauen, zwei Männer oder zwei Eheleute.⁷¹

⁶⁹ vgl. ebd.

⁷⁰ vgl. ebd.

⁷¹ vgl. ebd.: S.141

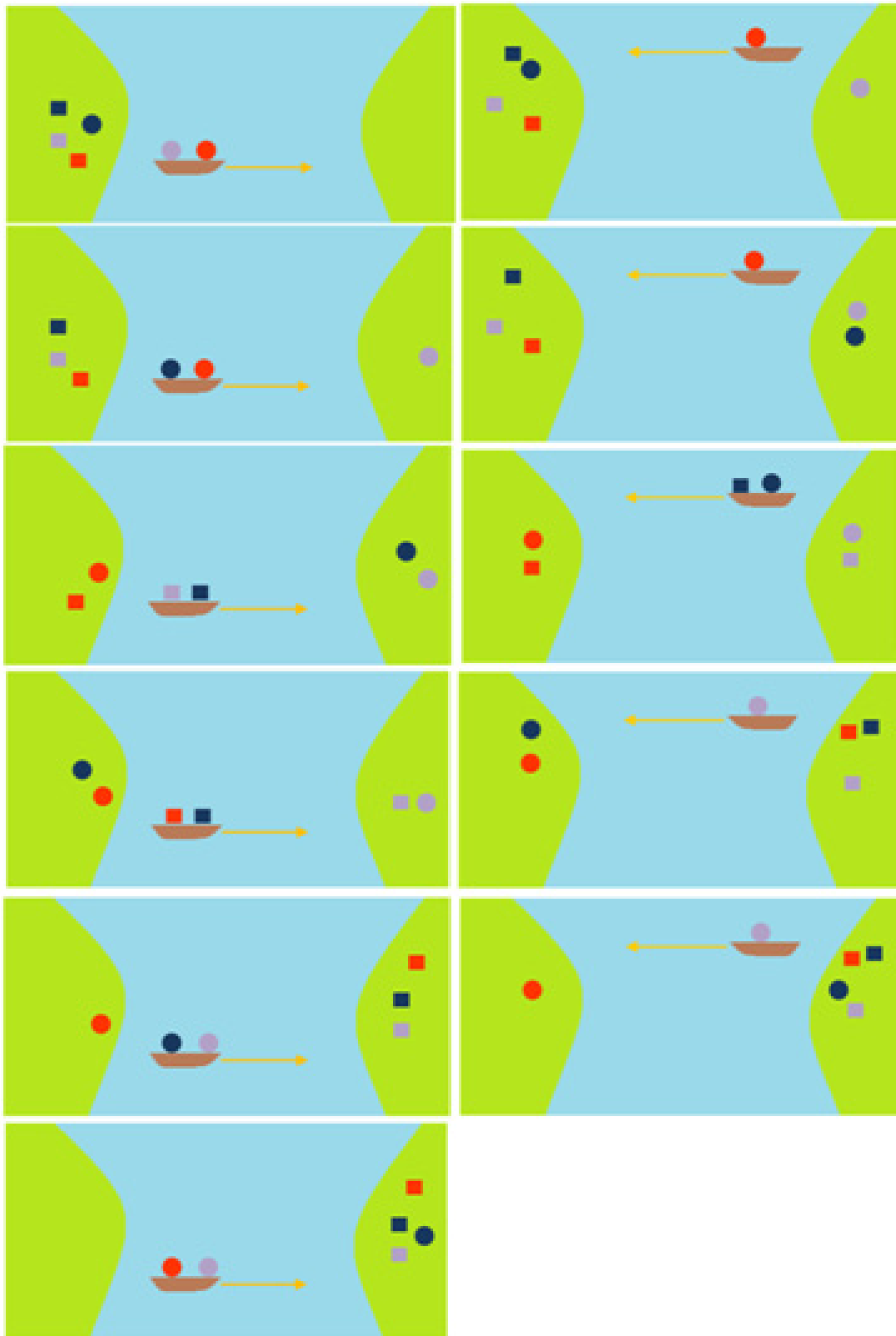


Abbildung 1: Graphische Darstellung der Überfahrten beim Problem der drei eifersüchtigen Ehemänner.

Bei der ersten Überfahrt können nicht zwei Männer im Boot sitzen, weil sonst ein Mann mit drei Frauen zurück bleibt und somit zwei Frauen ohne Begleitung ihrer Männer in der Nähe eines anderen Mannes wären. Betrachtet man die Möglichkeiten, dass ein Ehepaar den Fluss überquert oder zwei Frauen, so sieht man, dass sie eigentlich zu einer gemeinsamen Möglichkeit werden. Wenn zwei Frauen den Fluss gemeinsam überqueren, so muss eine von ihnen das Boot zurück bringen. Überquert ein Ehepaar den Fluss, dann muss der Mann das Boot zurück bringen, da sonst seine Frau beim Zurückbringen des Bootes ans andere Ufer mit 2 Männern und ohne ihren Ehemann anzutreffen wäre. Bringt nun aber der Mann das Boot zurück, so können weder zwei Männer den Fluss passieren, da sonst eine Frau mit einem anderen Mann alleine am ursprünglichen Ufer zurück bleibt, noch können zwei Eheleute gemeinsam den Fluss überqueren, weil sonst am anderen Ufer wieder eine Frau bei einem Mann wäre, ohne, dass ihr Ehemann anwesend ist. Folglich sind nach zwei Überquerungen alle Frauen am anderen Ufer, während alle Männer am Ursprungsufer sind. Lediglich die Möglichkeiten, die zu dieser Situation führen (durch die Überfahrt Frau mit Ehemann und dann Frau mit Frau oder durch die Überfahrt Frau mit Frau und erneut Frau mit Frau), unterscheiden sich, das Endergebnis allerdings nicht.⁷²

Da nun drei Frauen am anderen Ufer sind, muss folglich eine von ihnen das Boot zurück bringen. Nun können nicht zwei Frauen den Fluss gemeinsam überqueren, da es gar keine andere Frau mehr am Ursprungsufer gibt. Außerdem kann die Frau auch nicht gemeinsam mit ihrem Ehemann den Fluss überqueren, da dieser Mann sonst alleine mit drei Frauen ist und somit zwei Frauen in Begleitung eines Mannes wären, ohne dass ihr Ehemann anwesend ist. Somit können nur zwei Männer den Fluss überqueren, und zwar jene, deren Frauen am anderen Ufer warten, da sonst eine Frau am Ursprungsufer mit einem fremden Mann zurück bleibt.⁷³

Nun stellt sich die Frage, wer das Boot wieder zurück bringen kann. Ein Mann kann es nicht machen, da er sonst seine Frau unbeaufsichtigt bei einem anderen Mann zurück lässt, also muss eine der Frauen das Boot zurück bringen. Es kann aber auch keine der Frauen das Boot zurück bringen, da sie sonst auch am Ursprungsufer auf einen Mann trifft, ohne, dass ihr Ehemann anwesend ist. Folglich können auch nicht zwei Frauen das Boot zurück bringen, da für zwei Frauen das gleiche gilt, wie für eine. Zwei Männer können allerdings auch nicht das

⁷² vgl. ebd.

⁷³ vgl. ebd.

Boot zurück bringen, da sie sonst wieder zurück zu ihren Frauen müssten und diese eine Überquerung somit umsonst gewesen wäre. Dementsprechend kann nur ein Ehepaar gemeinsam das Boot zurück bringen.⁷⁴

Bei der vierten Überquerung ist klar, dass kein Ehepaar gemeinsam den Fluss überqueren kann, da man sonst wieder die gleiche Situation wie bereits nach drei Überquerungen bestehen würde und die letzte Überquerung unnötig gewesen wäre. Zwei Frauen können den Fluss allerdings auch nicht überqueren, da sonst am anderen Ufer ein Mann alleine mit drei Frauen zurückbleibt. Folglich müssen die beiden Männer gemeinsam den Fluss überqueren.⁷⁵

Nun können keine zwei Männer das Boot zurück bringen, da man sonst wieder die gleiche Ausgangssituation wie vor der vierten Überquerung hätte. Ein Mann alleine kann das Boot auch nicht zurück bringen, da er sonst in Begleitung einer fremden Frau ohne deren Ehemann den Fluss überqueren müsste. Folglich muss die einzige Frau, welche auf dem anderen Ufer ist, das Boot zurück bringen, eine der Frauen abholen und mit ihr den Fluss überqueren. Nun holt noch eine der beiden Frauen, welche am anderen Ufer wartet, die dritte Frau ab, und nach 6 Überquerungen sind alle Eheleute dort, wo sie sein wollen.⁷⁶

2.4 Die Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

An dieser Stelle könnte die Frage aufkommen, warum ich mich in einer Diplomarbeit über den Einsatz von Spielen im Mathematikunterricht mit der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftige. Die Antwort lautet, dass die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einem Großteil auf Glücksspielen basiert.

Den Anstoß zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gab der Philosoph und Spieler Chavalier de MÉRÉ, indem er seinen Freund Blaise PASCAL fragte, wie ein Spieleinsatz aufzuteilen ist, falls das Spiel verfrüht abgebrochen wird. PASCAL beriet sich in weiterer Folge, mittels Briefen, mit Pierre de FERMAT. Diese Briefe, welche zum Teil noch erhalten sind, gelten als die Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung.⁷⁷

PASCAL war sich 1654 schon bewusst, dass er ein neues Teilgebiet der Mathematik erkannt hatte und richtete in diesem Jahr einen Brief an die Pariser Akademie, in welchem er die

⁷⁴ vgl. ebd.: S.141f

⁷⁵ vgl. ebd.: S.142

⁷⁶ vgl. ebd.

⁷⁷ vgl. Wirths (1999a): S.1f

Wichtigkeit dieses Gebiets hervorhob. Für ihn ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Verschmelzung der Strenge der Mathematik mit der Ungewissheit des Zufalls.⁷⁸

Auch Christiaan HUYGENS beschäftigte sich, nachdem er 1656 von dem Briefwechsel zwischen FERMAT und PASCAL gehört hatte, mit dem neuen Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Da er allerdings nichts über die Methoden von PASCAL und FERMAT in Erfahrung bringen konnte, musste er sich das Thema selbst neu aneignen. Er entwickelte den Begriff Erwartungswert, mit dessen Hilfe er zufällige Ereignisse bearbeitete.⁷⁹

HUYGENS ist ebenfalls von einer bedeutenden Zukunft der Wahrscheinlichkeitsrechnung überzeugt, sieht diesen Bereich allerdings als einen Teilbereich der Algebra an, da er sich bei seinen Berechnungen lediglich auf den Erwartungswert und auf Begriffe aus der Algebra stützt.⁸⁰

Nun möchte ich näher auf den Briefwechsel von FERMAT und PASCAL eingehen. Die beiden Probleme, die in den bereits erwähnten Briefen von FERMAT und PASCAL diskutiert wurden, waren das "problème des dés" und das "problème des partis". Beide Probleme waren schon bekannt, bevor PASCAL und FERMAT sich mit ihnen beschäftigten.⁸¹

Problème des dés

Im ersten Problem geht es um de MÉRÉs Aussage, dass man gegen eine andere Person eher gewinnt, wenn man darauf wettet, mit 4 Würfeln einen Sechser zu würfeln, man allerdings eher verliert, wenn man auf eine Doppelsechs bei 24 Würfen mit jeweils 2 Würfeln wettet, obwohl auch hier, das Verhältnis 4 zu 6 ist.⁸²

Betrachtet man dieses Problem genauer, so muss man folgendes berücksichtigen. Eine Wette ist dann günstig, wenn eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit gegeben ist als die Wahrscheinlichkeit, zu verlieren. Deshalb kann man sich mit dem heutigen mathematischen Wissen leicht überlegen, wie viele Würfe man für eine Wette angeben sollte, um auf das Eintreten eines gewissen Ereignisses wetten zu können. Nennt man das Ereignis beispielsweise E, so ergibt sich daraus also:

⁷⁸ vgl. ebd.: S.2

⁷⁹ vgl. ebd.: S.3

⁸⁰ vgl. ebd.

⁸¹ vgl. ebd.: S.4 & S.6 & S.8

⁸² vgl. ebd.: S.4

$$P(E) > 0,5$$

beziehungsweise

$$P(\neg E) < 0,5$$

Betrachten wir nun das erste von de MÉRÉ erwähnte Ereignis genauer, ich nenne es in weitere Folge das Ereignis A. Dieses Ereignis tritt ein, wenn bei n Würfeln mit einem Würfel, mindestens ein Sechser gewürfelt wird. Das passende Gegenereignis ist, dass in den n Würfeln kein einziges Mal ein Sechser gewürfelt wird. Da es bei jedem Wurf 5 von 6 Zahlen gibt, die nicht der Zahl Sechs entsprechen, ergibt sich die Gegenwahrscheinlichkeit also folgendermaßen:

$$P(\neg A) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Damit die Wette für die wettende Person günstig ist, muss somit gelten:

$$P(\neg A) = \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,5$$

Wendet man nun den Logarithmus auf beiden Seiten an und formt entsprechend um, so erhält man die Anzahl an Würfeln, die erforderlich sind, um die Wette eher zu gewinnen als zu verlieren:

$$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0,5)$$

$$n > \frac{\ln(0,5)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$n > 3,80 \dots$$

Diese Berechnung zeigt also, dass ab 4 Würfeln die Wahrscheinlichkeit, die Wette zu gewinnen, größer ist als die Wahrscheinlichkeit, die Wette zu verlieren. Deshalb ist diese Wette eine Gute.

Beim zweiten von de MÉRÉ erwähnten Ereignis, ich nenne es Ereignis B, soll in n Würfeln mit je zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs gewürfelt werden. Das Gegenereignis hierzu ist, dass in den n Würfeln keine Doppelsechs gewürfelt wird. Da es 35 von 36

Möglichkeiten gibt, keine Doppelsechs zu würfeln, ist die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$P(\neg B) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Damit die Wette wieder günstig für die wettende Person ist, muss gelten:

$$P(\neg B) = \left(\frac{35}{36}\right)^n < 0,5$$

Nun kann man wiederum genau wie bei Ereignis A vorgehen, und es ergibt sich:

$$n \cdot \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln(0,5)$$

$$n > \frac{\ln(0,5)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)}$$

$$n > 24,60 \dots$$

Man sieht also, dass man bei dieser Wette wetten sollte, dass man in 25 Würfeln mindestens eine Doppelsechs würfelt. Bei 24 Würfeln ist die Wette noch ungünstig für die wettende Person.

Es zeigt sich also, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussagt, dass es wahrscheinlicher ist, mit einem Würfel in 4 Würfeln mindestens eine Sechs zu würfeln, als mit 2 Würfeln in 24 Würfeln eine Doppelsechs. Der Denkfehler, dem de MÉRÉ hier unterliegt, ist allerdings, dass er in Proportionen denkt und es ihm deshalb wohl paradox erscheint, dass beide Wetten, unterschiedliche Gewinnwahrscheinlichkeiten haben. Nach de MÉRÉ ergibt sich für die erste Wette ein Verhältnis von 4:6, da man 4 Würfe hat und 6 mögliche Ausgänge, von denen nur einer günstig ist. Für die zweite Wette erhält man das Verhältnis 24:36, da man 24 Würfe hat und 36 mögliche Ausgänge pro Wurf. Vergleicht man, die beiden Proportionen, so sind sie gleich, woraus de MÉRÉ folgerte, dass auch die Gewinnwahrscheinlichkeiten gleich sein müssten. De MÉRÉ hielt sich bei diesen Überlegungen an die von SZÉKELY angeführte „Proportionalitätsregel“, welche den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und ihren „kritischen Zahlen“ angibt. Mit kritischen Zahlen ist hier die Anzahl an Würfeln gemeint, welche benötigt werden, damit ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit größer 0,5 eintritt. Der Proportionalitätsregel zu Folge, sollte die kritische Zahl auf das Sechsfache

ansteigen, wenn die zugehörige Wahrscheinlichkeit auf ein Sechstel abfällt. Diese Regel ist allerdings falsch, wie unter anderem die zwei oben genannten Beispiele aufzeigen.⁸³

Problème des partis

Das zweite Problem, das in dem Briefwechsel behandelt wird, das "problème des partis", beschäftigt sich mit folgender Ausgangssituation.

Zwei Personen spielen ein Spiel, bei dem es kein Unentschieden gibt. In jeder Runde haben beide Personen die gleiche Chance zu gewinnen. Gewonnen hat jene Person, welche zuerst eine bestimmte Anzahl von Runden gewonnen hat. Diese Person erhält schließlich den kompletten Einsatz beider Personen.⁸⁴

Nun kommt es zum verfrühten Abbruch des Spiels, bevor jemand die vereinbarte Anzahl an Siegen erreichen kann hat. Die Frage die sich nun stellt ist, wie der Einsatz in dieser Situation unter den beiden Personen aufgeteilt werden soll.⁸⁵

Werden zum Beispiel 6 Siege vereinbart, und kommt es nach 8 Runden bei einem Spielstand von 5:3 für die Person A zum Abbruch, so kommen PASCAL und FERMAT zu folgendem Schluss. Es können maximal nur mehr 3 Runden gespielt werden, bis eine Person gewonnen hat. Denn gewinnt die Person A noch eine Runde, so ist das Spiel zu Ende. Folglich geht das Spiel nur weiter, wenn die Person B gewinnt. Gewinnt die Person B allerdings die nächsten 3 Runden, so hat sie auch den Gesamtsieg erreicht.⁸⁶

Die möglichen weiteren Spielverläufe sind in Abbildung 2 durch ein Baumdiagramm dargestellt.

⁸³ vgl. ebd.: S.4f

⁸⁴ vgl. ebd.: S.6

⁸⁵ vgl. ebd.

⁸⁶ vgl. ebd.

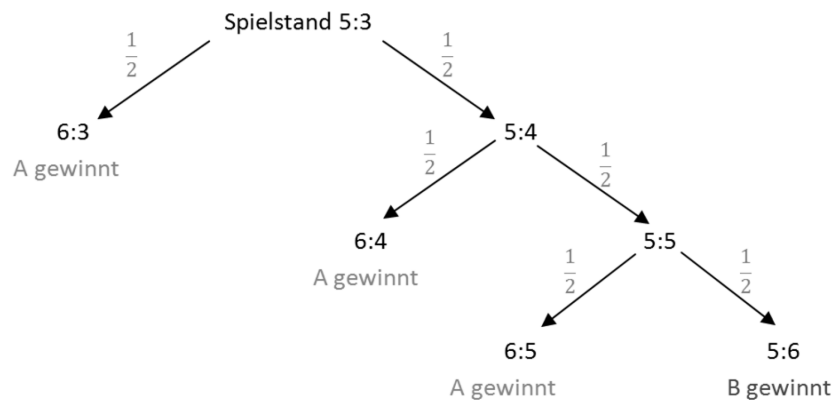


Abbildung 2: Baumdiagramm der möglichen Spielausgänge bei einem Spielstand von 5:3 und 6 nötigen Siegen

Mit Hilfe dieses Baumdiagrammes kann man leicht feststellen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler A und B folgende sind.

$$P(A \text{ gewinnt}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

$$P(B \text{ gewinnt}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Folglich sollte der Gewinn im Verhältnis 7:1 zwischen den Spielern A und B aufgeteilt werden.

Lösungen des "problème des dés" und des "problème des partis" in der Geschichte der Mathematik

In früheren Zeiten wurden die beiden genannten Probleme natürlich vollkommen anders gelöst. So wurden beispielsweise Tabellen angefertigt, welche die konkreten Ausgänge beim Würfeln mit 3 Würfeln beinhalteten. Man konnte daraus abzählen, dass es für das Würfeln mindestens eines Sechser in 3 Würfeln, 92 günstige und 125 ungünstige Fälle gibt.⁸⁷

1559 schrieb der Mönch Jean BUTEO schließlich ein Werk, indem alle möglichen Wurfausgänge bei 4 Würfeln mit einem Würfel aufgelistet waren. So konnte wieder abgezählt werden, dass es 671 günstige und 625 ungünstige Möglichkeiten für die Wette, dass mindestens ein Sechser in 4 Würfeln gewürfelt wird, gibt.⁸⁸

Einen weiteren Ansatz bietet die Betrachtung, dass es 6^n mögliche Ergebnisse bei n Würfeln mit einem "normalen" Würfel gibt. Da es genau 5 Zahlen gibt, die nicht der Sechs

⁸⁷ vgl. ebd.: S.7

⁸⁸ vgl. ebd.

entsprechen, gibt es in n Würfeln 5^n ungünstige Ausgänge. Folglich hat man $6^n - 5^n$ günstige Ausgänge, und man muss nun ermitteln, ab welcher natürlichen Zahl n die Ungleichung

$$6^n - 5^n > 5^n$$

erfüllt. 1614 gab es schon Tabellen, welche Logarithmen auf mehrere Nachkommastellen genau angegeben haben (Johan NAPIER und Henri BRIGGS). Mit diesen Tabellen konnte diese Ungleichung also schon im 17. Jahrhundert ohne Zuhilfenahme technischer Geräte gelöst werden.⁸⁹

Wird das Problem des Würfeln einer Doppelsechs in n Würfeln betrachtet, so sieht man, dass es hier 36^n verschiedene Ergebnisse gibt, von denen 35^n ungünstig und folglich $36^n - 35^n$ günstig sind. Hier müssen nun die natürlichen Zahlen gefunden werden, welche die Ungleichung

$$36^n - 35^n > 35^n$$

erfüllen, was wiederum mit Hilfe von Logarithmentabellen möglich ist.⁹⁰

Natürlich kann man bei dieser Betrachtung auch einfach die Zahlenwerte, die in dem "problème des dés" vorkommen, einsetzen, um so zu berechnen, ob es mehr günstige als ungünstige Ereignisse gibt. Betrachtet man die günstigen und ungünstigen Fälle beim Würfeln mindestens einer 6 in 4 Würfeln, so erhält man $5^4=625$ ungünstige und $6^4-5^4=671$ günstige Fälle, welche in der oben genannten Tabelle von BUTEO zu finden sind. Es gibt also mehr günstige Fälle und somit gewinnt man diese Wette eher, als dass man sie verliert.

Bei der Wette, dass in 24 Würfeln mit zwei Würfel mindestens eine Doppelsechs gewürfelt wird, erhält man somit $35^{24} \approx 1,141913 \cdot 10^{37}$ ungünstige und $36^{24} - 35^{24} = 1,103313 \cdot 10^{37}$ günstige Fälle. Es gibt hier also mehr ungünstige Fälle, weshalb man die Wette eher verlieren wird. Bei dieser Wette wird schon ersichtlich, dass es sehr viele mögliche Kombinationen der Wurfresultate gibt und somit die Zahlen schon sehr groß werden und die Berechnung viel Rechenarbeit erfordert.

Ein Spezialfall des "problème des partis" findet sich in einem Manuskript aus dem Jahr 1380. In den verschiedenen Teilen dieses Manuskriptes kommt es allerdings zur Verwechslung der

⁸⁹ vgl. ebd.: S.7f

⁹⁰ vgl. ebd.: S.8

spielenden Personen, und die Argumentationen lassen sich nicht immer gut miteinander vereinbaren.⁹¹

Ein weiterer Lösungsansatz vor FERMAT und PASCAL kommt von Fra Luca PACIOLO. Nach diesem sehr bekanntem Ansatz wird der Gewinn einfach nach dem Verhältnis der bis zum Abbruch erzielten Gewinne aufteilt. Nicht nur der bereits erwähnte CARDANO beschäftigte sich später mit diesem Ansatz und äußerte starke Kritik daran. Generell wurde er schon im 16. Jahrhundert, als dem Menschenverstand widersprechend, abgelehnt.⁹²

CARDANO merkt unter anderen Folgendes an. Wird angenommen, dass 19 Rundensiege für den Gesamtsieg vereinbart worden sind, so würde bei einem Spielstand von 18:9 nach PACIOLO die führende Person zwei Drittel und die andere Person ein Drittel des Einsatzes gewinnen. Betrug der Einsatz beispielsweise 12 Goldstücke für jede Person, so würde die führende Person 16 und die zweite Person 8 Goldstücke bekommen. Die führende Person hätte folglich nur 4 Goldstücke dazu gewonnen, obwohl ihr nur mehr ein Rundensieg fehlt, der anderen Person hingegen noch 10. CARDANO sagt an dieser Stelle, dass die führende Person sogar 20 zu 1 darauf setzen kann, dass sie, bei diesem Spielstand und bei 19 ausgemachten Siegen, gewinnt.⁹³

Betrachtet man dieses Beispiel mit dem heutigen mathematischen Wissen genauer, so hat die Person, welche erst 9 Rundensiege verbuchen konnte, nur noch die Chance, die nächsten 10 Runden zu gewinnen, da die führende Person (A) den Gesamtsieg davon trägt, sobald sie auch nur noch eine Runde gewinnt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zurückliegende Person (B) aufholen kann und gewinnt, beträgt bei einem fairen Spiel folglich

$$P(B \text{ gewinnt}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$$

Mit Hilfe der Gegenwahrscheinlichkeit kann nun die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die führende Person gewinnt.

$$P(A \text{ gewinnt}) = 1 - P(B \text{ gewinnt}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$$

⁹¹ vgl. ebd.

⁹² vgl. ebd.

⁹³ vgl. Wirths (1999b): S.3

Hier zeigt sich, dass selbst die Behauptung von CARDANO, die führende Person könnte 20 zu 1 darauf wetten zu gewinnen, untertrieben ist, die führende Person könnte sogar 1023 zu 1 wetten, dass sie gewinnt.

Eine weitere Kritik, die CARDANO äußert, ist jene, dass bei einem Spielstand von 2:0 die führende Person den ganzen Einsatz bekommen würde. Allerdings ist dieser Vorsprung nur sehr klein und die Differenz zu den 19 Rundensiegen noch so groß, dass die führende Person dem Menschenverstand nach natürlich nicht den gesamten Einsatz erhalten sollte. Selbst bei einem Spielstand von 18:0 kann die führende Person nicht den ganzen Einsatz für sich beanspruchen, da sonst die 19. Runde unnötig wäre. Auch wenn die Chance gering ist, dass jene Person, welche keinen einzigen Sieg verbuchen konnte, bei diesem Spielstand noch gewinnt, so besteht diese Möglichkeit trotzdem.⁹⁴

CARDANO war selbst leidenschaftlicher Spieler und schrieb schon 1563, also vor FERMAT und PASCAL, das wahrscheinlich älteste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Allerdings wurde es erst deutlich später, nämlich 1663, gedruckt.⁹⁵

Noch viele weitere Mathematiker beschäftigten sich mit diesem Teilungsproblem, allerdings verloren sie Mitte des 16. Jahrhunderts den Glauben daran, dass das Problem mathematisch zu lösen ist. Erst im 17. Jahrhundert kehrte der Glaube an eine mathematische Lösung, durch VIÈTE und DESCARTES, wieder zurück.⁹⁶

FERMAT und PASCAL kamen schließlich durch unterschiedliche Lösungswege auf das gleiche Verhältnis, in dem der Gewinn aufgeteilt werden sollte. Obwohl sowohl FERMAT, PASCAL und HUYGENS vermutlich die Lösungswege früherer italienischer Mathematiker kannten, haben sie wohl nicht auf diese zurück gegriffen und sahen sich als diejenigen an, die als erste die richtige Lösung vorlegten.⁹⁷

PASCAL schrieb am 24. August 1654 einen Brief an FERMAT, in dem er ihn darüber in Kenntnis setzte, dass er glaubt einen Mangel in FERMATs Berechnungsmethode, welche auf Kombinationen beruht, gefunden zu haben. Die Lösung sei zwar für den Fall, dass nur zwei Personen ein Spiel spielen, passend, bei drei Personen aber schon nicht mehr. Seine Methode,

⁹⁴ vgl. ebd.: S.3f

⁹⁵ vgl. Wirths (1999a): S.8

⁹⁶ vgl. ebd.: S.9

⁹⁷ vgl. ebd.

so schreibt PASCAL, soll allerdings für Teilungsprobleme mit verschiedensten Bedingungen gelten.⁹⁸

FERMAT hatte zur Lösung des Teilungsproblems Folgendes vorgeschlagen: Spielen zwei Personen, wobei einer noch zwei Rundensiege und der anderen noch drei Rundensiege fehlen, dann müssen noch höchstens 4 Runden gespielt werden. Nach diesen vier Runden, hat eine Person sicherlich gewonnen.⁹⁹

Nun wird bestimmt, wie viele mögliche Anordnungen von Spielausgängen es noch gibt, und wie viele der Anordnungen für welche Person günstig sind. Der Einsatz wird dann entsprechend diesem Verhältnis von günstigen Anordnungen aufgeteilt.¹⁰⁰

PASCAL schreibt in seinem Brief weiter, dass man, um diese Anordnungen zu finden, annehmen kann, man spiele mit vier Würfeln, welche jeweils zwei Seiten haben. Mit 4 Würfeln spielt man, weil noch 4 Partien offen sind. Es ergeben sich 16 Anordnungen für die vier Würfel, welche PASCAL auflistet.¹⁰¹

Im Folgenden sind die möglichen Würfelanordnungen von 4 Würfeln mit zwei Seiten angegeben. A bezeichnet hierbei einen Rundensieg für jene Person, welche noch 2 Siege braucht, B steht für einen Rundensieg der Person, die noch drei Siege braucht (Tabelle 1).

Würfel 1	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B	A	B	B	B	B
Würfel 2	A	A	A	B	A	A	B	B	B	A	A	B	A	B	B	B
Würfel 3	A	A	B	A	A	B	B	A	A	B	A	B	B	A	B	B
Würfel 4	A	B	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B	B	B	A	B
Gesamtsieg	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B

Tabelle 1: Mögliche Anordnungen beim Würfeln mit vier Würfeln mit je zwei Seiten

Nun soll nach FERMAT der Gewinn im Verhältnis 11:5 aufgeteilt werden, da es 11 günstige Anordnungen für Person A und nur 5 günstige Anordnungen für Person B gibt. Diese Methode gilt für zwei spielende Personen, und FERMAT behauptete, dass das Teilungsproblem auch für mehrere Personen nach diesem Schema lösbar sei. PASCAL schreibt in seinem Brief, dass diese Methode zwar für zwei Personen richtig und gut ist, sie aber bei mehreren Personen nicht immer passend ist. Sein Einwand ist jener, dass man nicht

⁹⁸ vgl. de Fermat/Pascal (1654): S.1

⁹⁹ vgl. ebd.

¹⁰⁰ vgl. ebd.

¹⁰¹ vgl. ebd.: S.1f

davon ausgehen kann, dass immer vier Partien gespielt werden. Gewinnt zum Beispiel Person A die ersten beiden Runden, so ist das Spiel schon vorbei.¹⁰²

Bei dem Spezialfall mit zwei Personen kommt die Methode mit den Kombinationen deshalb auf den richtigen Wert und hat auch ihre Berechtigung, da es nicht möglich ist, dass in 4 Partien beide Personen genug Rundensiege erreichen, um den Gesamtsieg davon zu tragen. Dies könnte frühestens bei 5 Partien passieren. Hat nun also eine Person schon mit weniger als 4 Partien gewonnen, so könnte sie trotzdem die anderen noch spielen und würde ihren Sieg nicht verlieren.¹⁰³

Bei drei Personen ist dies aber nicht unbedingt der Fall. Fehlen einer Person A noch ein Rundensieg, einer zweiten Person B noch zwei Rundensiege und einer dritten Person C ebenfalls noch zwei Siege, so ist das Spiel spätestens nach drei Partien zu Ende. Nun muss nach FERMATs Methode betrachtet werden, wie viele Anordnungen es gibt und welche günstig für welche der drei Personen ist. Es gibt 27 mögliche Anordnungen, was der dritten Potenz von Drei entspricht. Auch hier kann man sich wieder vorstellen, dass mit drei Würfeln gespielt wird, weil noch 3 Partien offen sind, welche jeweils drei Seiten haben, da es drei spielende Personen gibt.¹⁰⁴

Auf der nachfolgenden Seite sind nun wiederum alle Möglichkeiten aufgelistet, welche sich beim Würfeln mit drei Würfeln mit jeweils drei Seiten ergeben. A steht für einen Sieg der Person A, B für einen Sieg der Person B und C für einen Sieg der Person C (Tabelle 2).

Bei Betrachtung des Gesamtsiegs fällt auf, dass es Anordnungen gibt, bei denen mehrere Personen gewinnen, dies entspricht aber nicht dem natürlichen Spielverhalten. Sobald eine Personen gewonnen hat, wird normalerweise das Spiel beendet. So würde beispielsweise die Spielanordnung ABB gar nicht zustande kommen, da bereits nach der ersten Partie das Spiel zugunsten der Person A entschieden wird und somit die zwei weiteren Partien gar nicht ausgespielt würden.

¹⁰² vgl. ebd.: S.2

¹⁰³ vgl. ebd.: S.3

¹⁰⁴ vgl. ebd.

Würfel 1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
Würfel 2	A	A	A	B	B	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C	C
Würfel 3	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C
Gesamt= sieg	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A				A			A	A	A	A			A		
					B						B		B	B	B		B						B				
										C								C			C			C	C	C	C

Tabelle 2: Mögliche Anordnungen beim Würfeln mit drei Würfeln mit je drei Seiten; Gesamtsieg Zuordnung nach PASCAL

Genau dies bemängelt auch PASCAL in seinem Brief an FERMAT und schreibt, dass der Gewinn nicht im Verhältnis 19:7:7 aufzuteilen ist, obwohl dies den günstigen Anordnungen der verschiedenen Personen entspricht, wenn immer noch drei weitere Partien gespielt werden würden.¹⁰⁵

PASCAL schreibt weiter, dass nach der Methode der Kombinationen jene Anordnungen, bei denen nur eine Person gewinnt, voll gezählt werden müssten und jene Anordnungen, bei denen zwei Personen gewinnen, nur als halbe Gewinne.¹⁰⁶

Rechnet man nun dies alles zusammen, dann ergeben sich, für die drei Personen, folgende Gewinne, Halbgewinne, Verluste und zustehende Anteile am Gewinn (Tabelle 3).

	Person A	Person B	Person C
Gewinne	13	4	4
Halbgewinn	6	3	3
Verlust	8	20	20
Zustehender Anteil	$13 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 16$	$4 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$	$4 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$

Tabelle 3: Auflistung der Gewinne, Halbgewinne, Verluste und des zustehenden Gewinnanteils beim Teilungsproblem bei drei Personen

Nach dieser Methode muss der Gewinn also nun so aufgeteilt werden, dass Person A 16 Teile bekommt und die beiden anderen Personen jeweils $5\frac{1}{2}$ Teile.

PASCAL gibt nun an, dass wie bereits erwähnt, nicht unbedingt drei Partien gespielt werden und somit diese Methode nicht zu dem richtigen Ergebnis führt. Wird so gespielt, dass das Spiel zu Ende ist, sobald eine Person die notwendigen Siege hat, so müsste der Betrag im

¹⁰⁵ vgl. ebd.: S.4

¹⁰⁶ vgl. ebd.

Verhältnis 17:5:5 aufgeteilt werden. Diesen Wert hat PASCAL mit seiner eigenen allgemeinen Methode berechnet.¹⁰⁷

Am 25. September 1654 schreibt FERMAT einen Brief an PASCAL, in welchem er beschreibt, dass er in jenen genannten Anordnungen (Tabelle 2) nur 17 günstige Anordnungen für Person A und jeweils 5 günstige Anordnungen für die Personen B und C sieht. FERMAT berücksichtigt nämlich schon beim Auswerten der Kombinationen, dass nur jene Anordnungen für eine Person günstig sind, die zu einem Gesamtsieg führen, noch bevor eine andere Person den Gesamtsieg erzielt hat.¹⁰⁸

Nach FERMAT würden die in Tabelle 2 genannten Anordnungen also zu anderen Gesamtsiegen führen, welche in Tabelle 4 aufgelistet sind.

Es ergeben sich nach dieser Methode folglich 17 Siege für Person A und jeweils 5 Siege für Person B und C, was zu einer richtigen Aufteilung des Gewinns führt.

Würfel 1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B	B	B	C	C	C	C	C	C	C	C	
Würfel 2	A	A	A	B	B	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C	C	A	A	A	B	B	B	C	C
Würfel 3	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B
Gesamt=sieg	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	B	C	A	A	A	A	B	C	C	C	C

Tabelle 4: Mögliche Anordnungen beim Würfeln mit drei Würfeln mit je drei Seiten; Gesamtsieg Zuordnung nach FERMAT

FERMAT gibt weiter an, dass in dem vorliegenden Problem auch die Rundensiege von 4 Partien betrachtet werden könnten. Werden wieder nur jene Siege, bei denen ein Gesamtsieg vor den anderen Personen erzielt wird, als günstig gewertet, so kommt man auch hier im Endeffekt auf das gleiche Gewinnverhältnis, obwohl es nun natürlich mehr mögliche Anordnungen, nämlich 81, gibt. Dies lässt sich auch auf beliebig viele Spielpartien erweitern.¹⁰⁹

Des Weiteren gibt FERMAT in seinem Brief noch eine weitere kürzere Lösungsmethode an. Wird das Spiel von Person A betrachtet, so kann diese in einer, in zwei oder in drei Partien gewinnen. Nach den drei Partien hat entweder Person A gewonnen oder eine andere, also sind weitere Partien irrelevant. Person A siegt nach nur einer Partie, wenn sie in dieser Runde

¹⁰⁷ vgl. ebd.: S.5f

¹⁰⁸ vgl. ebd.: S.7

¹⁰⁹ vgl. ebd.

bereits gewinnt. Das entspricht einem Wurf mit einem Würfel, und die Wahrscheinlichkeit ist somit $\frac{1}{3}$. In zwei Partien gewinnt Person A, wenn entweder Person B oder Person C die erste Runde gewinnen und Person A die zweite. Da zwei Würfel allerdings 9 mögliche Anordnungen haben und zwei davon für Person A günstig sind, hat A hier $\frac{2}{9}$ der Gewinnmöglichkeit. Müssen nun noch 3 Partien gespielt werden, so gibt es wieder nur zwei Möglichkeiten, dass Person A gewinnt. Entweder Person B gewinnt die erste Runde und Person C die zweite Runde oder umgekehrt. Jedenfalls muss Person A dann auch die dritte Partie gewinnen. Folglich gibt es zwei günstige Anordnungen von 27, da nun mit drei Würfeln gespielt wird. Addiert man nun all diese Anteile, so ergibt sich:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{17}{27}$$

Auch diese Methode liefert also das richtige Ergebnis.¹¹⁰

Nach all diesen Ausführungen wird eines klar. Obwohl sich die Wahrscheinlichkeitstheorie heutzutage nicht mehr ausschließlich mit Spielausgängen oder Gewinnaufteilungen beschäftigt, haben wir die Wahrscheinlichkeitstheorie doch dem Glücksspiel zu verdanken. Diese Spiele haben den Anstoß dazu gegeben, dass dieser Bereich der Mathematik erschlossen wurde und sich in seiner Vielfalt so entwickelt hat, wie er uns heute dargelegt wird und wie er schon in der Schule und darüber hinaus auch auf der Universität gelehrt wird. Aber nicht nur die Wahrscheinlichkeitstheorie kann in der Schule gelehrt werden, sondern auch deren Geschichte kann im Unterricht behandelt werden.

¹¹⁰ vgl. ebd.: S.7f

3. Spiele im Unterricht

Im Kapitel 2.1 wurden bereits verschiedene Formen von Spielen und zum Teil auch ihre Einsatzmöglichkeiten und ihr Nutzen für den Unterricht erläutert. In diesem Kapitel möchte ich unter anderem näher darauf eingehen, was ein Lernspiel ausmacht und worauf beim Spielen im Unterricht geachtet werden muss.

3.1 Warum sollten Spiele im Unterricht eingesetzt werden?

Schon im Kindesalter spielen Menschen gerne. Es verbindet Menschen, macht Spaß und lenkt vom Ernst des Lebens ab, aber darüber hinaus kann Spielen noch viel mehr erreichen. Aus diesem Grund verdienen Spiele einen Platz im Unterricht.

Spiele holen ein Stück Freizeit in den Unterricht, bieten eine Möglichkeit, die Realität ohne negative Auswirkungen zu simulieren, stärken die Gemeinschaft und können Erfolgserlebnisse oder im Gegenteil dazu auch Streit und Misserfolge hervorrufen. Während in den jungen Jahren das Spielen als Lernmethode noch stark verbreitet ist, was etliche Spiele mit Lernhintergrund beweisen, und auch große Wertschätzung erfährt, verliert es mit zunehmenden Alter seine Rolle für das Lernen. So kommt es dazu, dass viele Lehrende das Spielen aus dem Unterricht verbannen, da sie den Lernerfolg als zu gering oder nicht messbar erachten oder auch weil ihnen das Aussuchen, Vorbereiten, Gestalten oder auch Entwickeln von Spielen zu aufwendig erscheint.¹¹¹

Das Spiel bietet allerdings auch jede Menge Vorteile. So kommt es durch den bleibenden Eindruck, den Spiele hinterlassen, sogar vor, dass die Lernenden sich noch ein Jahr später an ein Spiel und somit auch an die mathematischen Inhalte, welche bearbeitet wurden, erinnern. Nichtsdestotrotz ist aber auch hier, wie bei allen verwendeten Unterrichtsmethoden, zu berücksichtigen, dass natürlich auch Spiele didaktisch durchdacht werden müssen und nur dann eingesetzt werden sollten, wenn sie auch für den Unterricht sinnvoll sind. Des Weiteren sollte darauf Acht gegeben werden, dass die Spiele sowohl an die Altersklasse als auch an den Leistungsstand angepasst werden müssen und eine gewisse Herausforderung mit sich bringen sollten, damit sie einen wertvollen Beitrag für den Unterricht erbringen können.¹¹²

¹¹¹ vgl. Heckmann/Vernay (2013): S.4

¹¹² vgl. ebd.: S.5

Ob ein Lernfortschritt oder eine Festigung von Wissen durch Spiele zu erzielen ist, hängt natürlich auch von der Gruppe der Lernenden ab. So müssen diese genug Disziplin aufweisen, um die Regeln zu befolgen, und sie müssen natürlich auch Freunde am Spielen haben. Die gute Nachricht ist hier aber, dass ein sorgsamer und konzentrierter Umgang mit Spielen gelernt werden kann. Hierfür kann es sich lohnen, die Klasse vor dem Spielen um einen Tisch zu versammeln und das Spiel mit ein paar Lernenden vorab anzupspielen, um zu veranschaulichen, wie es gespielt wird. Dies bietet Gelegenheit, eventuelle Unklarheiten aufzuspüren und zu klären. Im Anschluss an diese Spielprobe werden dann die Spielregeln in schriftlicher Form, zum Nachlesen, ausgeteilt.¹¹³

Auch die Zeit, die ein Spiel in Anspruch nimmt, ist ein Kriterium, das berücksichtigt werden muss. Kurze Spiele eignen sich besonders dann, wenn nicht die ganze Unterrichtsstunde in Anspruch genommen werden soll. Außerdem sind sie auch für unerfahrene Lerngruppen gut geeignet. Bei kürzeren Spielen können darüberhinaus Gruppen von Lernenden, die schneller arbeiten als andere, eine weitere Runde spielen, bis die anderen Gruppen fertig sind. Längere Spiele sind für erfahrene Spielgruppen gut geeignet und bringen den Vorteil, dass sie durch die oftmals länger aufrecht erhaltene Spannung beliebter sind.¹¹⁴

Eine Unterrichtsmethode hat den Anspruch, zu erzielen, dass alle Lernenden einer Klasse an das angestrebte Unterrichtsziel gelangen, was durch aktive Beteiligung am Unterricht erreicht wird.¹¹⁵ Durch Spielen in Kleingruppen wird die Einbindung aller Lernenden gefördert, welche sich dadurch aktiv mit dem Unterrichtsinhalt beschäftigen. Außerdem können die Lerngruppen nach ihren Fähigkeiten zusammengestellt werden, und so kann das Spiel individuell auf die einzelnen Lernenden abgestimmt werden.

3.2 Charakteristika und Gestaltung von Lernspielen

Dass die Wörter Spiel und Unterricht nicht ohne Weiteres Hand in Hand gehen, wird dadurch deutlich, dass das Spielen an sich eng mit dem Wort Freiheit verknüpft ist. Unterricht bedeutet allerdings normalerweise eine gewisse Einschränkung der Freiheit von Lernenden.¹¹⁶ Es wird klar, dass somit Lernende und Lehrende nicht immer die gleichen Intentionen verfolgen, wenn sie sich mit Spielen beschäftigen. Lehrpersonen wollen mit Hilfe von Spielen

¹¹³ vgl. Vernay (2013): S.42

¹¹⁴ vgl. ebd.

¹¹⁵ vgl. Merkens (2010): S.53

¹¹⁶ vgl. Busse (2003)

im Unterricht dazu beitragen, dass ihr Fach verstanden und von den Lernenden durchdrungen wird. Lernende hingegen möchten durch Spiele Spaß und Freiheit empfinden.

Aus diesem Grund ist es wichtig, dass Mathematikspiele einerseits zielgerichtet sind und andererseits durch Spannung und Glückselemente Freude in den Spielenden wecken. Außerdem ist ein Augenmerk auf das Interesse der Lernenden zu legen, weshalb folgende Punkte für ein Mathematikspiel von besonderer Bedeutung sind. Die Spielidee muss spannend sein und das Interesse der Spielenden wecken, wobei hier natürlich zu berücksichtigen ist, dass jede Person anders ist und so nicht jedes Spiel für alle Lernenden gleich anregend wirkt. Außerdem gilt auch hier die Devise „das Auge isst mit“, was in diesem Zusammenhang bedeuten soll, dass ein aufregend und ansprechend gestaltetes Spiel deutlich bessere Chancen hat, Kinder anzusprechen und so die Motivation zu heben. Nicht zu vernachlässigen ist, wie bereits erwähnt, dass die Spielregeln möglichst einfach gehalten werden sollen. Dadurch kann Verwirrung, welche zu einem Verlust des Interesses auf Seiten der Spielenden führen könnte, entgegengewirkt werden. Außerdem sind bei einfachen Spielregeln eventuell keine zusätzlichen schriftlichen Spielanleitungen notwendig. Des Weiteren zu berücksichtigen ist natürlich auch der Zeitfaktor für das Erklären der Spielregeln. Nimmt das Erklären oder Durchlesen der Spielregeln viel Zeit in Anspruch, so bleibt weniger Zeit für das Spielen selbst. Wie bereits erwähnt, sollte ein gutes Spiel auch Glückselemente enthalten, da diese mit einem höheren Interesse auf Seiten der Spielenden einhergeht. Spielt der Faktor Glück eine Rolle, so gewinnen beispielsweise nicht immer nur jene, die am schnellsten rechnen können, sondern es kommt auch öfters dazu, dass andere Lernende gewinnen.¹¹⁷

Als Grundmerkmale von Spielen können folgende Punkte genannt werden, welche sowohl positive als auch negative Aspekte widerspiegeln:

- *Quasi-Realität*: Dieser Aspekt soll darauf aufmerksam machen, dass Spiele nicht die Realität abbilden. Das führt dazu, dass durch Spiele kaum die Wirklichkeit erschlossen werden kann. Die Scheinwelt, welche durch Idealisierungen im Spiel geschaffen wird, muss gegebenenfalls im Anschluss an das Spielen durch didaktische Anstrengungen korrigiert werden.
- *Ambivalenz*: Dieser Begriff bezeichnet den oft raschen Wechsel von Anspannung und Entspannung und das Pendeln zwischen verschiedenen Gefühlen bei den Lernenden.

¹¹⁷ vgl. Vernay (1990) nach MUED (2001): S.1f

Der Wechsel zwischen Spannung und Lösung wirkt auf Lernende allerdings so, dass diese zum Weiterspielen motiviert werden. Durch starke Schwankungen ist es beim Einsatz von Spielen allerdings auch schwer möglich, das Lernen zu planen.

- *Freiraum*: Hier geht es darum, dass beim Spielen eine angstfreie Umgebung, welche durch den Verzicht auf Bestrafungen geschaffen werden kann, von großer Bedeutung ist. Außerdem ist es wichtig, dass die Spielenden selbstbestimmt handeln können, um so auch ein gewisses Maß an Differenzierung zu erreichen. Es ist zu beachten, dass diese Freiheit auch bedeutet, dass die Lernenden Regeln ändern, soziale Konflikte provozieren oder auch selbst über das Mitspielen oder eben nicht Mitspielen entscheiden können. Das Spielen kann hier also auch ungewünschte soziale Effekte hervorrufen, welche berücksichtigt werden sollten.
- *Freude und Spaß*: Spiele sollen Freude bereiten und schaffen dadurch Erinnerungen, während Unterricht an sich der Vermittlung von Kenntnissen und Fertigkeiten dient.
- *Soziales Ereignis*: Dadurch, dass Spiele normalerweise in einer Gruppe, welche mindestens aus zwei Personen besteht, gespielt werden, findet beim Spielen auch ein soziales Lernen statt. Es können soziale Kompetenzen wie Integrationsfähigkeit und Einfühlungsvermögen geschult werden. Dieses soziale Lernen findet sich sogar bei Spielen, welche einen Wettbewerbscharakter besitzen, wieder.¹¹⁸

Im Unterricht können Spiele dazu dienen, dass durch Vorschlagen von Spielen die Gefühle, Erfahrungen und Vorkenntnisse von Lernenden aktiviert werden. Außerdem kann die Freude, welche durch ein Spiel bewirkt werden kann, einen wichtigen Beitrag zu selbstgesteuertem und entspanntem Lernen leisten. Durch das Spielen können auch eine bessere Vernetzung von Informationen sowie das Auseinandersetzen mit eigenen Gefühlen und mit den Gefühlen und Meinungen anderer Personen stattfinden. Auch das Erproben des eigenen Könnens, sowie das Vertrauen in das selbige, kann durch Spiele hervorgerufen werden.¹¹⁹

Für Lehrpersonen kann es hilfreich sein, sich mit dem Kollegium über das Thema Spiel im Mathematikunterricht zu unterhalten, um so zu überprüfen, ob auch andere Lehrende offen für das Thema sind. Ist Interesse vorhanden, so kann beispielsweise eine schulinterne Fortbildung der Lehrpersonen stattfinden, zu welcher auch ein Experte oder eine Expertin eingeladen werden kann, um hilfreiche Beiträge zu leisten. Es ist besonders wichtig, dass für dieses

¹¹⁸ vgl. Busse (2003)

¹¹⁹ vgl. ebd.

Thema eine große Zeitressource zur Verfügung steht, da alle Spiele getestet, also vor der Verwendung im Unterricht schon einmal gespielt werden sollten. Bei diesem Ausprobieren der Spiele ist auch eine Diskussion unter den Lehrenden ratsam, wobei hier auch ein Austausch über die Rolle, die das jeweilige Spiel im Unterricht einnehmen könnte, stattfinden sollte. Zuletzt muss noch geklärt werden, welche monetären Ressourcen zur Verfügung stehen, und welche Spiele damit angeschafft werden sollen. Auch auf das Gestalten von Spielen hat die Zusammenarbeit mit anderen Lehrpersonen einen positiven Effekt, da die Arbeit aufgeteilt werden kann und somit das Endergebnis im Normalfall ansprechender wird, was wie bereits erwähnt wiederum einen positiven Einfluss auf das Interesse der Lernenden hat.¹²⁰

Natürlich können Spiele auch gemeinsam mit den Lernenden entwickelt werden. Hierfür eignen sich Projektwochen oder auch eine Doppelstunde.¹²¹

Kauft man Spiele, so kann es anfänglich ratsam sein, nur ein bis zwei Spiele in geringer Anzahl zu erwerben. Diese kann man verwenden, um eine Differenzierung im Unterricht zu erreichen. Hat sich das entsprechende Spiel dann bewährt, so können mehrere Exemplare nachgekauft werden. Da Spiele im Allgemeinen nicht so teuer sind, sollte an jeder Schule etwas Geld für deren Anschaffung vorhanden sein.¹²²

Um günstig und einfach an Materialien und Spiele zu gelangen, lohnt sich oft ein Besuch von Flohmärkten. Um Chips herstellen zu können, mit denen die Lernenden ihre Anzahl an Siegen festhalten können, eignen sich Keramikfliesen, welche aus runden Einzelteilen bestehen, die auf ein Netz geklebt sind. Viele Spielläden geben Schulen außerdem Rabatt.¹²³

Für mich persönlich hat sich zur Beschaffung von Spielmaterialien auch das Versandhaus „Winkler-Schulbedarf“, welches meiner Erfahrung nach öfters von Werklehrern genutzt wird, sehr bewährt. Dort findet sich eine Vielzahl an nützlichen Utensilien, wie Spielsteinen, Würfeln, Karton, aber auch leere Spielkarten, Dominosteine und Memorykärtchen. Des Weiteren gibt es dort auch Bausätze von Lernspielen zu kaufen, welche die Lernenden zum Teil alleine zu Hause spielen können. Auf diese Bausätze werde ich in späterer Folge noch eingehen (vgl. Kapitel 7.4). Es sei aber an dieser Stelle schon erwähnt, dass durch das Bauen

¹²⁰ vgl. Vernay (1990) nach MUED (2001): S.4f

¹²¹ vgl. Vernay (2013): S.5

¹²² vgl. ebd.

¹²³ vgl. Vernay (1990) nach MUED (2001): S.4f

solcher Lernspiele ein fächerübergreifender Unterricht möglich ist, und dass durch das eigene Zusammenbauen auch eine mögliche zusätzliche Motivation für das Spielen von Lernspielen, eventuell auch in der Freizeit, gegeben sein kann. Ein weiterer Punkt, der für das angesprochene Versandhaus spricht, ist, dass die Materialien sehr preisgünstig sind und dass bei einem größeren Einkauf, welcher durch Zusammenlegung der Bestellung mit anderen Fächern wie Werken, Bildnerische Erziehung oder auch Physik (es findet sich beispielsweise auch eine Auswahl an Lötbausätzen), eine Preisreduktion erreicht werden kann.

3.3 Einsatzmöglichkeiten von Spielen

Die Einsatzmöglichkeiten von Spielen sind breit gestreut, wobei man hier bedenken sollte, dass Spiele so oft wie möglich in den Unterricht eingebaut und dadurch so selbstverständlich wie andere Unterrichtsformen, wie das Arbeiten mit Arbeitsblättern oder das Klassengespräch, werden sollten. Allerdings sollten Spiele auch immer etwas Besonderes bleiben. Folgend sind die Einsatzmöglichkeiten von Spielen in verschiedenen Unterrichtsphasen oder in verschiedenen Unterrichtsformen aufgezeigt:

- *Als Einführung in ein neues Thema:* Hier sind der Spaß, die Spannung und die Motivation ein besonders wichtiger Aspekt, da Freude am Erarbeiten des neuen Themas geschaffen werden soll. Zu berücksichtigen ist hier, dass die Spiele auch mit einem geringen Maß an Vorwissen bearbeitbar sein sollten, und dass den Lernenden eine eher offene Spielsituation geboten wird. Als bewährt erwiesen haben sich hier Spiele, welche genauso gut in anderen Situationen, wie in der Freizeit oder in der Pause, gerne von Lernenden gespielt werden oder welche auch in einer anderen Unterrichtsphase verwendet werden könnten. Es ist darauf zu achten, dass besonders diese Spiele nicht aufgesetzt wirken, da dies das Spielerlebnis negativ beeinträchtigen und somit bereits der Einstieg in das Thema negativ ausfallen würde.¹²⁴ Beim Einsatz von Spielen zur Themeneinführung zeigt sich, dass zum Teil auch schwächere Lernende in dem neuen Thema aufgehen, plötzlich ein besseres Verständnis als sonst aufbringen und Spaß an den mathematischen Inhalten haben.¹²⁵
- *Zur Festigung und Übung von Gelerntem:* Auch hier ist der Faktor Spaß ein wichtiger Baustein, da so vielleicht sogar ein Üben stattfinden kann, ohne dass es als solches empfunden wird. Durch das Vorhandensein von Glückselementen kann eine Spannung

¹²⁴ vgl. Vernay (1990) nach MUED (2001): S.2

¹²⁵ vgl. Heckmann/Vernay: S.5

geschaffen werden, welche in den Lernenden die Hoffnung auslöst, dieses Spiel gewinnen zu können, ohne große mathematische Bemühungen angestellt zu haben. So können auch schwächere Lernende einen Erfolg verbuchen, weshalb gerade diese in solch einer Spielsituation oft aufblühen. Durch diese Elemente kann eine Auflockerung des Unterrichts erreicht werden. Als Spielmaterial eignen sich Karten- und Würfelspiele, welche entweder dazu dienen, durch Zufall eine gewisse Aufgabe auszuwählen, die dann zu bearbeiten ist, oder die Karten und Würfel dienen selbst als Spielutensilien, beispielsweise wenn mit zwei Würfeln gewürfelt wird und dann aus den Augenzahlen ein möglichst großer Bruch gebildet werden soll.¹²⁶

- *Zur Wiederholung von Unterrichtsinhalten:* Hier gilt im Wesentlichen das gleiche wie für den Einsatz von Spielen als Übung von Gelerntem. Außerdem eignen sich hierfür auch genau jene Spiele, welche sich beim Üben als bewährt erwiesen haben, da diese auf Seiten der Lernenden mit positiven Gefühlen verknüpft sind und die Spielregeln auch noch zum Großteil bekannt sind. So geht keine Zeit für größere Erklärungen verloren. Eine Änderung oder Erweiterung der Spielregeln in dieser Phase kann sich positiv auf den Lernerfolg auswirken und sollte auch in Betracht gezogen werden.¹²⁷
- *Als Differenzierungsmaterial:* Durch Auswahlmöglichkeiten und durch das Anpassen der Spielgeschwindigkeit in den unterschiedlichen Gruppen, bieten Spiele eine gute Möglichkeit, nach Interessen und Leistungsniveau zu differenzieren um so die Lernenden individuell besser unterstützen zu können.¹²⁸
- *Als Auflockerung oder in Supplierstunden:* Durch das Spielen kann ein Bruch im Unterrichtsalltag erzielt und so die Situation etwas aufgelockert werden. In Supplierstunden eignen sich Spiele deshalb besonders gut, weil diese, wenn sie in der Schule zur Verfügung stehen, schnell verfügbar sind und so auch verwendet werden können, wenn man erst kurzfristig von einer Supplierung erfährt. Da nicht immer der genaue Leistungsstand oder das aktuell zu bearbeitende Thema der entsprechenden Klasse bekannt ist, eignen sich hier allgemeine Strategie- und Knobelspiele, welche nicht an ein gewisses Thema gebunden sind, trotzdem aber Interesse wecken und logisches Denken unterstützen.¹²⁹

¹²⁶ vgl. Vernay (1990) nach MUED (2001): S.2f

¹²⁷ vgl. ebd.: S.3

¹²⁸ vgl. ebd.

¹²⁹ vgl. ebd.

- *Im Wahlpflichtfach:* Da hier keine Einschränkung durch den Lehrplan gegeben ist, kann viel Zeit in das Spielen investiert werden und so eventuell sogar selbst Spiele erfunden, gestaltet oder erweitert werden. Es wird besonders die Kreativität der Lernenden angesprochen, und es kann etwas Eigenes geschaffen werden. So kann entweder ein neues Spiel entworfen, oder gängige Gesellschaftsspiele so abgeändert werden, dass sie einen Nutzen für den Mathematikunterricht bringen. Auch durch Regeländerungen oder durch das Übernehmen von Spielideen bekannter Spiele und ein Entwickeln eines ganz neuen Spiels mit Hilfe dieser Spielidee kann ein interessanter Anstoß gegeben werden.¹³⁰

Wie bereits erwähnt, wird eine Schülerin in Rahmen dieser Diplomarbeit selbst versuchen, ein Spiel zu entwickeln (vgl. Kapitel 5). Diese Einsatzmöglichkeit entspricht genau jener zuletzt erwähnten, im Wahlpflichtfach.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Auswertung von Spielen im Unterricht. Da Spiele unter anderem durch die Spannung, die sie mit sich bringen, motivieren, sollte dieser Fluss nicht all zu sehr gestört werden. Deshalb bietet sich bei vielen Spielen eine Auswertung im Nachhinein an, welche dann als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen dienen kann.¹³¹ Im Anschluss an das Spielen können so Reflexionsphasen eingebracht werden, welche auch die Möglichkeit bieten, Gewinnchancen und Strategien näher zu betrachten oder zu berechnen.¹³²

Bei Spielen, welche der Übung von Gelerntem dienen, findet das Auswerten der Ergebnisse durch die Kontrolle der anderen Mitspieler und Mitspielerinnen statt. Im Regelfall wollen die Lernenden selbst gewinnen und nehmen deshalb die Aussagen der anderen Lernenden genau unter die Lupe. Bei schwächeren Gruppen von Lernenden oder bei Gruppen, bei denen keine gegenseitige Kontrolle stattfindet, kann es hilfreich sein, wenn die Lehrperson sich dazu setzt und auf eventuelle Fehler reagiert. Dies ist aber meist nur für einen kurzen Zeitraum nötig.¹³³ Um die Motivation der Lernenden hier nicht unnötigerweise zu mindern, ist aber natürlich auf einen sensiblen Umgang mit ihren Fehlern zu achten.

¹³⁰ vgl. ebd.: S.3f

¹³¹ vgl. Vernay (2013): S.4

¹³² vgl. Heckmann/Vernay (2013): S.5

¹³³ vgl. Vernay (2013): S.4f

Wenn man sich zu einer Gruppe dazu gesetzt hat, dann bietet dies auch die Chance, Erkenntnisse über einzelne Lernende zu erhalten oder verschiedene Spielstrategien zu beobachten, welche dann im Nachhinein in der Klasse besprochen werden können.¹³⁴

¹³⁴ vgl. ebd.: S.5

4. Untersuchung zum Einfluss von Mathematikspielen auf die intrinsische Motivation

Dieses Kapitel wird sich damit beschäftigen, wie sich Mathematikspiele auf die intrinsische Motivation von Lernenden auswirken.

4.1 Zusammensetzung der Lernenden

Um untersuchen zu können, ob Spielen einen Einfluss auf die intrinsische Motivation von Lernenden hat, benötigte ich natürlich Freiwillige, welche spielen und mir danach ein paar Fragen zu ihrer Motivation beantworten. Hierfür konnte ich viele meine Nachhilfeschüler und Nachhilfeschülerinnen gewinnen. Die jeweils besuchte Schulstufe und Schulform reicht von einer 4.Klasse AHS (8.Schulstufe) bis zu einer 5.Klasse HLW (13.Schulstufe). Zusätzlich nahmen noch zwei weitere Schüle, einer 7.Klasse AHS (11.Schulstufe) und einer 5.Klasse HTL (13.Schulstufe) an der Untersuchung teil, welche gute Leistungen im Mathematikunterricht erbringen. Zusätzlich konnte ich eine ehemalige Nachhilfeschülerin und deren Freundin für dieses Projekt gewinnen. Beide haben bereits im letzten Jahr die Mathematikmatura positiv absolviert. Anfänglich war auch geplant, eine Spielgruppe aus zwei Schülerinnen einer 2.Klasse AHS zusammen zu stellen. Allerdings war es sehr schwierig, einen passenden Termin zu finden, weshalb diese Spielstunde nicht stattfand.

Eine genauere Beschreibung der teilnehmenden Lernenden findet sich später in diesem Kapitel, bei der Beschreibung der Gruppen von Spielenden. Alle Lernenden besuchen oder besuchten Schulen in Wien oder Niederösterreich.

4.2 Einschätzung der allgemeinen Motivation der Lernenden

Um im Vorhinein abschätzen zu können, wie motiviert die einzelnen teilnehmenden Lernenden sind, sollten diese über acht Tage jeden Tag an einem Motivationsbarometer ankreuzen, wie motiviert sie an diesem Tag waren. Das Informationsblatt und die zwei Motivationsbarometer, welche jeweils in achtfacher Ausführung an die Lernenden ausgegeben wurden, sind im Anhang (vgl. 9.1) zu finden.

Beim ersten der Motivationsbarometer sollten die Lernenden auf einer Skala von -5 bis 5 angeben, wie gerne sie sich mit Mathematik beschäftigen möchten, wenn diese Beschäftigung ihr Note verbessern kann. Diese Frage sollte eine ungefähre Einschätzung der extrinsischen Motivation widerspiegeln. Da in der Schule der Faktor Noten einer der wichtigsten

extrinsischen Anreize ist, habe ich diesen gewählt. Am Informationsblatt ist im Vorhinein allerdings noch genauer erklärt, was die Frage umfassen soll. Hier sind noch andere extrinsische Anreize angegeben.

Das zweite Motivationsbarometer soll die intrinsische Motivation widerspiegeln. Hier wird abgefragt, wie gerne sich die Lernenden mit Mathematik beschäftigen möchten, wenn es die Note nicht beeinflusst. Bei der weiteren Erklärung ist dann angegeben, dass sie hier jene Handlungen berücksichtigen sollen, welche sie aus Spaß und Interesse an der Mathematik machen. Ich habe unter diesem Punkt auch Handlungen, die das logische Denken fördern können, miteinbezogen.

Mit den jüngeren Teilnehmerinnen, welche erst in der zweiten Klasse waren, habe ich die Skala von -5 bis 5 genauer durchbesprochen, um zu vermeiden, dass es aufgrund der negativen Zahlen zu Verwirrungen oder Ähnlichem kommt. Da die Skala allerdings einem Thermometer ähnelt und somit den Lernenden aus dem Alltag schon bekannt sein sollte, habe ich damit gerechnet, dass die Skala auch für die zwei jüngsten Teilnehmerinnen verständlich ist, was auch der Fall war. Hätte ich hier mit Problemen gerechnet, hätte ich natürlich auch auf eine Skala von 0 bis 10 zurückgreifen können. Da ich aber deutlicher machen wollte, dass die ersten 5 Zahlenwerte dafür sprechen, dass man nicht motiviert ist, also, dass man negative Gefühle damit verbindet, habe ich mich für die Variante entschieden, welche positive und negative Zahlen umfasst. Wie bereits erwähnt, kam allerdings leider keine Spielstunde mit den beiden jüngsten Schülerinnen zustande.

Direkt vor dem Spielen und nach dem Spielen sollen die Lernenden die beiden Motivationsbarometer erneut ausfüllen, um so sehen zu können, ob sich dieser Wert vor und nach dem Spielen unterscheidet. Außerdem könnte der Fall eintreten, dass die Lernenden alleine durch das Wissen, dass sie im Anschluss spielen werden, motivational beeinflusst werden, was sich dadurch äußern könnte, dass der angekreuzte Wert vor dem Spielen deutlich außerhalb der Werte liegt, welche im Vorhinein über 8 Tage erhoben wurde.

4.3 Erstellung des Fragebogens

Um die intrinsische Motivation der Lernenden zu ermitteln, habe ich mich dafür entschieden, das von DECI und RYAN entwickelte "Intrinsic Motivation Inventory", kurz IMI, zu verwenden, um einen Fragebogen zu erstellen. Der Einsatz eines Fragebogens in Bezug auf

intrinsische Motivation ist deshalb vonnöten, weil Motivation sich nicht direkt beobachten lässt, sondern nur durch Handlungen oder durch Aussagen äußert.

Die Ursprungsform des IMI umfasst 6 Subskalen zu den Bereichen Interesse und Vergnügen, wahrgenommene Kompetenz, Aufwand, Wert und Nützlichkeit, Druck sowie Anspannung und wahrgenommene Wahlfreiheit.¹³⁵ Während die Langversion des IMI 45 Items enthält, wird auch eine gekürzte Version mit 22 Items als Standardfragebogen zur Feststellung von intrinsischer Motivation verwendet. Es gibt aber auch verschiedene Versionen, welche dem jeweiligen Aufgabenbereich angepasst sind. Zusätzlich hat sich gezeigt, dass durch eigenständige Auswahl einzelner Items ein individueller Fragebogen erstellt werden kann, welcher auch in der Kurzform die entsprechenden Parameter verlässlich überprüft.¹³⁶

Das IMI hat sich bereits vielfach zur Messung von intrinsischer Motivation und anderen erfassten Bereichen bewährt. WILDE et al. haben außerdem getestet, ob auch eine Kurzsкала des IMI zuverlässige Ergebnisse liefert.¹³⁷ Die verwendete IMI Kurzsкала unterteilt sich in 4 Teilbereiche: Interesse und Vergnügen, wahrgenommene Kompetenz, wahrgenommene Wahlfreiheit sowie Druck und Anspannung. Während Interesse und Vergnügen die intrinsische Motivation an sich widerspiegeln, verdienen wahrgenommene Kompetenz und wahrgenommene Wahlfreiheit als positiver Faktor für das Auftreten von intrinsischer Motivation ihren Platz in der Skala. Druck und Anspannung sind deshalb vertreten, da sie intrinsische Motivation mindern können. Sie sind ein Anzeichen dafür, dass die Selbstbestimmtheit einer Person abgeschwächt wird. Diese Subskala wird dementsprechend negativ gewertet und liefert so auch einen Beitrag zur Messung der intrinsischen Motivation.¹³⁸

In der Studie von WILDE et al. wurde für die Anwendung der Kurzfassung des IMI, welche 12 Items umfasst, getestet, ob sie für die intrinsische Motivation von Lernenden bei einem Besuch eines außerschulischen Lernortes, in diesem Fall einem Museum, zuverlässige Ergebnisse liefert. Getestet wurde der Fragebogen an 174 Gymnasiasten, 95 Mädchen und 79 Burschen, welche die fünfte Schulstufe besuchten und somit ein Durchschnittsalter von rund 10 Jahren auswiesen. Es gab drei Messungen, welche eine Woche vor, im Anschluss an den Besuch und vier Wochen nach dem Besuch durchgeführt wurden, um den Wissenstand der

¹³⁵ vgl. Deci/Ryan (2003): S.1

¹³⁶ vgl. Wilde et al (2009): S.32

¹³⁷ vgl. ebd.

¹³⁸ vgl. ebd.: S.35

Lernenden festzustellen. Die intrinsische Motivation wurde direkt nach dem Museumsbesuch und vier Wochen später erneut gemessen.¹³⁹

Die Studie hat gezeigt, dass die Kurzsкала des IMI vier voneinander trennbare Faktoren testet. Die Faktoren Vergnügen, Wahlfreiheit und Kompetenz weisen auch in der verkürzten Form eine hohe interne Konsistenz auf, nur die Skala Druck schneidet etwas schlechter ab.¹⁴⁰

Beim Vergleich der Ergebnisse direkt nach dem Museumsbesuch mit den Ergebnissen 4 Wochen später zeigt sich, dass zum späteren Zeitpunkt Interesse und wahrgenommene Wahlfreiheit niedrigere Mittelwerte aufweisen. Bei wahrgenommener Kompetenz und Druck sind die Ergebnisse aber bei beiden Messungen fast gleich. Im Vergleich zwischen den Geschlechtern fällt auf, dass Schüler bei der Subskala wahrgenommene Kompetenz einen höheren Mittelwert haben als Schülerinnen. Der Rest der Ergebnisse stimmt aber im Wesentlichen bei beiden Geschlechtern überein.¹⁴¹

Es hat sich in der Studie herausgestellt, dass die Kurzsкала des IMI trotz ihrer Knappheit ein verlässliches Instrument zur Messung der intrinsischen Motivation ist.¹⁴² Aus diesem Grund habe ich mich dazu entschieden, selbst eine verkürzte Form des IMI, erweitert um zusätzliche Fragen, zu erstellen und für meine Untersuchung zu nutzen.

Um einen individuellen Fragebogen zu erstellen, müssen nur die für den jeweiligen Zweck als relevant erachteten Items ausgewählt und diese dann zufällig angeordnet werden. Als Antwortskala wird eine Skala mit Werten von 1 bis 7 vorgeschlagen, wobei 1 bedeutet, dass der entsprechenden Aussage überhaupt nicht zugestimmt wird und 7 bedeutet, dass der Aussage voll und ganz zugestimmt wird. Beim Auswerten des Fragebogens ist zu berücksichtigen, dass bei manchen Fragen ein negativer Effekt auf die intrinsische Motivation abgefragt wird. Diese Fragen sind im IMI mit einem R gekennzeichnet und müssen dann noch umgekehrt werden. Hierfür wird die von den Lernenden gegebene Punktezahl, bei der Verwendung einer Skala von 1 bis 7, von 8 abgezogen und man erhält somit das einzubeziehende Ergebnis. Wird eine andere Antwortskala verwendet, so muss man das Ergebnis dementsprechend von einer anderen Punktezahl abziehen.¹⁴³

¹³⁹ vgl. ebd.: S.1 & S.36f

¹⁴⁰ vgl. ebd.: S.37 & S.39

¹⁴¹ vgl. ebd.: S.39

¹⁴² vgl. ebd.: S.41

¹⁴³ vgl. Deci/Ryan (2003): S.3ff

Neben 17 Fragen des IMI sind noch offene Fragen vertreten. Der von mir verwendete Fragebogen ist im Anhang (vgl. 9.2) zu finden.

Die zuvor erwähnten Motivationsbarometer dienen dazu, vergleichen zu können, ob die Lernenden nun eher bereit wären, sich mit Mathematik zu beschäftigen, obwohl ihre Note dadurch nicht beeinflusst wird, was ein Anzeichen intrinsischer Motivation ist. Danach folgen die Fragen des IMI, von denen 7 dem Teilgebiet Interesse und Freude zuzuordnen sind. Diese sollen die intrinsische Motivation in ihrer Reinform sichtbar machen, um dadurch erkennen zu können, ob die Lernenden durch das Spielen intrinsisch motiviert wurden.

Des Weiteren sind zwei Fragen aus dem Bereich wahrgenommene Kompetenz, drei aus dem Bereich Aufwand und weitere 5 aus dem Bereich Druck und Anspannung enthalten. Diese drei Bereiche wurden deshalb gewählt, weil sie, wie bereits erwähnt, Faktoren zur Begünstigung oder, im Falle des Bereichs Druck und Anspannung, zur Hemmung der intrinsischen Motivation sind. Aus dem Bereich Druck und Anspannung habe ich deshalb so viele Items gewählt, da ich besonders bei diesem Bereich erwartet habe, dass er interessante Ergebnisse liefert. Das liegt einerseits daran, dass durch die Freiheit, die Spiele mit sich bringen, kein starker Druck empfunden werden sollte, allerdings kann es durch Wettbewerbssituationen, beziehungsweise durch die Spannung, die das Spiel mit sich bringt, auch wieder zu einem wahrgenommenen Druck oder einer Anspannung kommen.

Die offenen Fragen habe ich deshalb in die Befragung aufgenommen, um genauere Gründe erfahren zu können, warum den Lernenden das Spielen gefallen oder eben nicht gefallen hat. Die kleine Gruppe an Teilnehmenden lässt diese genauere Analyse der positiven und negativen Aspekte, die Lernenden in den Spielen sehen, zu.

Außerdem wird noch abgefragt, ob die Lernenden im Unterricht gerne öfters spielen würden und die Begründung, warum sie sich so entschieden haben. Diese Frage soll Aufschluss darüber bringen, ob sie auch im Unterricht Potenzial für Spiele sehen und was sie sich persönlich von Spielen im Unterricht erwarten. Zuletzt soll noch angegeben werden, was durch das Spiel gelernt wurde beziehungsweise was die Lernenden aus dem Spielen für sich persönlich mitnehmen konnten. Diese Frage ist mir deshalb wichtig, weil ich nicht nur erfahren möchte, ob die Lernenden etwas gelernt haben, sondern auch, was sie gelernt haben. Außerdem lässt die offene Fragestellung auch Antworten zu, welche sich nicht auf die Mathematik beziehen, und so könnten hier eventuell soziale Kompetenzen genannt werden, deren Erwerb für die Lernenden ebenfalls wichtig ist.

4.4 Erste Gruppe von Lernenden

Die erste Gruppe setzte sich aus zwei Schülerinnen, Isabella und Selina, zusammen. Beide sind meine Nachhilfeschülerinnen. Sie besuchen beide dieselbe Klasse, nämlich eine 4.Klasse AHS (8. Schulstufe) im sprachlichen Zweig. Die zwei Mädchen sind befreundet und haben schon im Vorfeld gezeigt, dass sie sich sehr auf das Spielen freuen. Selina hat im Rahmen der Diplomarbeit auch selbst versucht, ein mathematisches Spiel zu entwickeln (vgl. Kapitel 5).

Da die beiden Mädchen in der gleichen Klasse sind, haben sie in diesem Jahr natürlich auch den gleichen Stoff behandelt. Beide sind auch leistungsmäßig auf einem ähnlichen soliden Level. Ich habe mich deshalb dafür entschieden, sie das Spiel „Zahlenmengen“ (vgl. Kapitel 7.1), welches bereits im Vorfeld von mir entwickelt wurde, spielen zu lassen. Da es bei diesem Spiel darum geht, verschiedene Zahlen den Zahlenmengen der natürlichen, ganzen, rationalen oder reellen Zahlen zuzuordnen, ist dieses Spiel für die 4.Klasse meiner Meinung nach sehr gut geeignet. Wichtig bei dem Spiel ist allerdings, dass die Lernenden gegenseitig kontrollieren, ob die entsprechende Zahl auch wirklich zu der Zahlenmenge gehört, der sie zugeordnet wurde.

Die Spielstunde fand am Donnerstag, 18.2.2016 ab 16 Uhr statt. Zuerst wurde den Schülerinnen das Spiel und seine Spielregeln von mir erklärt, und dann haben sie die erste Runde gespielt. Ich habe mit den Lernenden vor dem Spiel bewusst nicht die Zahlenmengen wiederholt, da ich einerseits sehen wollte, welches Wissen zu Zahlenmengen noch vorhanden ist, und andererseits wollte ich, dass sie zuerst Interesse an den Zahlenmengen entwickeln, bevor der Stoff wiederholt wird. Die Schülerinnen haben das Spiel insgesamt viermal gespielt. Ich habe ihnen hierbei nicht vorgegeben, wie lange sie spielen sollen, sondern sie haben selbst entschieden, wie viele Runden sie spielen möchten.

In der ersten Spielrunde, welche 11 Minuten gedauert hat, haben die Schülerinnen noch einige Fehler bei den rationalen und ganzen Zahlen gemacht, sie haben sich gegenseitig allerdings nicht ausgebessert. Auch der Joker, bei dem eine der vier Zahlenmengen erklärt werden muss, wurde falsch erklärt (vgl. Kapitel 7.1). Die ganzen Zahlen wurden so beschrieben, dass sie die Menge aller Zahlen sind, welche sowohl positive als auch negative Zahlen beinhaltet, was natürlich zu ungenau ist, da zum Beispiel 4,2 eine positive Zahl, aber keine ganze Zahl ist.

Nach dieser Runde habe ich mit den Lernenden besprochen, welche Karten bei der falschen Zahlenmenge liegen und warum. Außerdem wurden die Zahlenmengen selbst besprochen, wobei sich gezeigt hat, dass die Schülerinnen zwar grobe Vorstellungen von den einzelnen

Zahlenmengen hatten, diese Vorstellungen allerdings sehr ungenau und zum Teil auch falsch waren.

Die zweite Runde hat 10 Minuten gedauert, und nun habe ich die Lernenden darauf aufmerksam gemacht, wenn eine Karte falsch gelegt oder ein Joker falsch erklärt wurde. Ich habe die Schülerinnen vorher gefragt, ob sie das so wollen, was sie bejaht haben. In dieser Runde kam es schon zu weniger Fehlern.

In der dritten Runde, welche 9 Minuten gedauert hat, habe ich dann mitgespielt, und beim Wegräumen der Karten nach dieser Runde ist Selina aufgefallen, dass bei den natürlichen Zahlen nur sehr wenig Karten liegen. Nachdem ich die Schülerinnen gefragt habe, warum das so sein könnte, haben sie gemeint, dass es von diesen Zahlen wahrscheinlich am wenigsten gibt, was auch stimmt, da unter den 31 Zahlkarten nur 4 natürliche Zahlen sind. Allerdings ist ein weiterer Grund, dass man bei den anderen Zahlenmengen auch Karten aus mindestens einer anderen Zahlenmenge anlegen kann, da beispielsweise in den ganzen Zahlen auch die natürlichen Zahlen enthalten sind. Diesen Aspekt haben wir dann auch besprochen.

Die 4. Runde haben die Schülerinnen wieder alleine gespielt, und nach 6 Minuten und keinem einzigem Fehler war diese Runde auch schon wieder vorbei.

Die Siege waren mit 2:1 bei den Schülerinnen relativ ausgeglichen (nach 2 Runden stand es 1:1). Da das Spiel auch zu einem wesentlichen Teil vom Glück abhängt, kann hier auch gewährleistet werden, dass zumindest bei nicht allzu großen Leistungsunterschieden vermutlich verschiedene Spieler und Spielerinnen gewinnen werden und nicht immer nur die gleiche Person.

4.5 Zweite Gruppe von Lernenden

Für die zweite Spielrunde habe ich das Spiel Tabu ausgewählt (vgl. Kapitel 7.2 & Kapitel 7.3). Es spielten zwei Schülerinnen, Marie und eine andere Schülerin, gegen zwei Schüler, David und Ulrich. Alle Lernenden waren zwischen 15 und 16 Jahren alt und haben in der Unterstufe die gleiche Klasse beziehungsweise Parallelklassen besucht. Da sie sich also schon aus der Vergangenheit kannten, habe ich sie derselben Gruppe zugeteilt, auch wenn ihre Bildungswege inzwischen unterschiedlich sind. Die beiden Burschen besuchen jeweils die 2. Klasse einer HTL (10.Schulstufe) mit dem Themenbereich Holztechnik beziehungsweise Mechatronik. Marie geht in den mathematischen Zweig einer 6. Klasse AHS und die andere Schülerin besucht die 2. Klasse einer BAKIP. Da ich alle vier Lernenden als

Nachhilfelehrerin begleite, weiß ich, dass Mathematik nicht zu ihren Lieblingsfächern beziehungsweise zu ihren besten Fächern zählt.

Da hier also von Haus aus kein übermäßiges Interesse für Mathematik besteht, wird es hier besonders interessant sein, zu sehen, ob die Lernenden durch das Spielen intrinsisch motiviert werden.

Da Tabu als Gruppenspiel gespielt wird, traten die Lernenden in zwei Zweierteams gegeneinander an. Ich habe mich dafür entschieden, dass es ein Mädchenteam und ein Burschenteam gibt, da es sich bei Gesprächen mit einigen der Lernenden im Vorhinein herausgestellt hat, dass sie mit dieser Gruppeneinteilung zufrieden wären und dass andere Konstellationen unbeliebter gewesen wären.

Da die Lernenden unterschiedliche Schulformen besuchen und somit nicht den gleichen Lernstoff haben, habe ich mich dazu entschieden, für das Tabu eine Vorlage zu verwenden, welche allgemeine Begriffe der Mathematik umfasst, die allen Teilnehmenden bereits bekannt sein sollten. Zusätzlich wird noch eine Vorlage eines Funktionen-Tabus verwendet, da das Thema Funktionen von allen Lernenden innerhalb des letzten oder aktuellen Schuljahrs behandelt wurde, und da das Thema für sie in Zukunft auch noch relevant sein wird und somit eine Wiederholung von Vorteil ist. Beide Vorlagen sind im Anhang (vgl. Kapitel 9.4 & Kapitel 9.5) zu finden, wobei nicht alle Begriffe verwendet wurden, sondern nur 31 Kärtchen, welche alle Lernenden beherrschen sollten. Die verwendeten Begriffe waren folgende:

Funktionen-Tabu:

- Parabel
- Steigung
- Graph
- Funktionswert
- Wertetabelle
- Schnittpunkt
- monoton fallend
- Wertebereich
- Monotonie
- Nullstelle
- Definitionsbereich
- Symmetrie

Tabu:

- Produkt
- Brüche
- Kommutativgesetz
- Betrag
- Satz des Pythagoras
- Prozent
- negative Zahlen
- Proportionalität
- Zehnerpotenz
- Kehrwert
- Null
- Doppelbruch
- Koordinatensystem
- Gleichung
- Lineares Gleichungssystem
- parallele Geraden
- Primzahl
- Mantelfläche
- Volumen

Die Spielstunde fand am Donnerstag, dem 18.2.2016 ab 18 Uhr statt. Den Lernenden wurde das Spiel erklärt, und auf Wunsch der Mädchengruppe durfte die Burschengruppe beginnen. Im Vorhinein wurden zusätzlich zu den allgemein gültigen Spielregeln für Tabu folgende Regeln vereinbart:

- Jede Gruppe bekommt in den einzelnen Runden eine Minute Zeit, um die Begriffe zu erraten. Die Zeit habe ich gestoppt.
- Das Spiel wird so lange gespielt, bis alle Karten weg sind, allerdings maximal eine Stunde.
- Es dürfen keine Gesten gemacht werden, welche das Wort erklären.
- Man darf keine Wortteile verwenden. Ist also beispielsweise der Begriff „natürliche Zahlen“ gesucht, so darf weder das Wort Zahl, noch das Wort Zahlenmengen verwendet werden.

Im Rahmen des Spiels haben sich dann noch folgende Regeln ergeben:

- Wenn ein Teil des Wortes schon erraten wurde, dann darf derjenige oder diejenige, welcher oder welche den Begriff erklärt, dieses Wort auch verwenden. Ist also zum

Beispiel bei dem Wort Wertebereich schon der Begriff Wert erraten worden, so darf dieser verwendet werden.

- Man darf auch ein verwandtes Wort verwenden, um den Begriff zu beschreiben, wenn es kein Tabuwort oder das Wort selber ist. Zum Beispiel darf das Wort symmetrisch verwendet werden, um das Wort Symmetrie zu beschreiben.

Obwohl die Lernenden öfters irritiert waren, wenn sie einen neuen Begriff bekamen und im ersten Moment gemeint haben, sie wissen nicht genau, was das ist, so haben sie dann doch immer einen Ansatz gefunden, den Begriff zu erklären. Meistens auch im mathematischen Sinne. Ein Beispiel für ein Wort, welches die Lernenden im ersten Moment nicht kannten und welches dann auch nicht mathematisch erklärt wurde, war der Begriff Wertebereich. Die Schülerin, die den Begriff erklären musste, wusste nicht, was er bedeutet. Sie hat den Begriff dann in das Wort Wert und Bereich aufgeteilt, und der Begriff wurde erraten.

Das Spiel hat etwa 30 Minuten gedauert, und die Burschen haben deutlich gewonnen. Danach haben die Lernenden von mir den Fragebogen bekommen und ausgefüllt. Allerdings saßen sie dabei so nahe zusammen, dass sie die Antworten der anderen lesen konnten, und sie haben sich auch laut darüber unterhalten. Deshalb muss man hier auch bedenken, dass es sein könnte, dass nicht die ehrliche Meinung wiedergegeben wurde. Da der Fragebogen aber sowieso nicht anonym war, weil es bei dieser kleinen Menge an Personen gar nicht möglich gewesen wäre, zu gewährleisten, dass der Fragebogen nicht der entsprechenden Person zugeordnet werden kann, ist es sowieso fraglich, ob die Lernenden den Fragebogen komplett wahrheitsgemäß ausgefüllt haben. Durch die persönliche Beziehung zu mir als ihre Nachhilfelehrerin könnte es sein, dass sie beeinflusst wurden, auch wenn das eventuell nur unbewusst passiert ist.

4.6 Dritte Gruppe von Lernenden

Auch diese Gruppe hat, wie die vorherige Gruppe, ein Tabu gespielt. Zusätzlich zu den Vorlagen der ersten Gruppe bekam diese allerdings noch die Vorlage für das Funktionentabu für die Oberstufe dazu. Ich habe mich hier wieder für das Spiel Tabu entschieden, um die Meinung mehrerer Lernenden vergleichen zu können. Deshalb habe ich mich dafür entschieden, dass die beiden Gruppen im Wesentlichen das gleiche Spiel bekommen. Der einzige Unterschied ist, dass diese Gruppe aus älteren Lernenden besteht und somit zusätzlich noch andere Begriffe dazu kamen. Hier bestand die Gesamtgruppe aus 3 Mädchen, Johanna, Rebecca und Sophie, und 3 Burschen, Benedikt, Lukas und Stefan. Obwohl es in dieser

Gruppe – wie bei der zweiten Gruppe - gleich viele Mädchen wie Burschen gibt, habe ich mich dazu entschieden, hier die Gruppen nicht nach dem Geschlecht zu trennen, da es in dieser Gruppe doch deutlichere Leistungsunterschiede gibt. Stefan und Lukas gehören nicht zu meinen Nachhilfeschülern und erbringen im Mathematikunterricht auch gute Leistungen.

Johanna und Rebecca haben beide bereits die Mathematikmatura im letzten Schuljahr positiv absolviert und haben zuvor eine AHS besucht. Stefan und Benedikt besuchen beide eine 5.Klasse beziehungsweise 3.Klasse HTL (13. und 11.Schulstufe) mit den Themenbereichen Technische Chemie - Umwelttechnik beziehungsweise Gebäudetechnik. Sophie besucht die 5.Klasse einer HLW, und Lukas geht in die 7.Klasse des sprachlichen Zweigs einer AHS.

Auch hier spielten zwei Teams gegeneinander, dieses Mal allerdings bestand jedes Team aus 3 Personen, und die Mitglieder eines Teams kannten sich untereinander nicht näher. Es spielten Johanna, Sophie und Stefan gegen Rebecca, Benedikt und Lukas. Diese Aufteilung habe ich vorgenommen, um annähernd gleich starke Teams zu erhalten. Ich habe mich dazu entschieden, Stefan und Lukas in unterschiedliche Gruppen zu geben, da sie beide gut in Mathematik sind. Rebecca und Johanna sind deshalb in unterschiedlichen Gruppen, da sie auch ein ähnliches Leistungsniveau haben und da sie befreundet sind und so einen Vorteil gegenüber den anderen gehabt hätten. So hätten sie sich beispielsweise darauf beziehen können, dass das bei einem ihrer Maturabeispielen gefragt war oder ähnliches. Sophie habe ich deshalb der Gruppe von Johanna und Stefan zugeteilt, da Sophie wenig Vertrauen in ihre mathematischen Fähigkeiten hat. Da ich ja bereits am Anfang der Diplomarbeit erwähnt habe, dass sich Mädchen in Wettbewerbssituationen unwohler fühlen als Burschen und meiner Vermutung nach sie eine Person ist, auf die das besonders zutrifft, wollte ich besonders Rücksicht darauf nehmen, dass sie sich wohl fühlt. Da ich Johanna und Stefan gut kenne, wusste ich, dass sie keinen zusätzlichen Druck auf Sophie ausüben würden, da sie beide eher gelassene Persönlichkeiten besitzen. Benedikt wurde folglich der anderen Gruppe zugeteilt.

In der Gruppe zwei wurde als Verbesserungsvorschlag (vgl. Kapitel 4.9) genannt, dass es mehr Spieler und mehr Karten geben sollte. In der dritten Gruppe hat es sich durch Zufall ergeben, dass die Gruppe von Lernenden größer war, und ich habe mich aufgrund der Rückmeldung der zweiten Gruppe dafür entschieden, dass es mehr Kärtchen gibt. Diese Gruppe hätte zwar sowieso noch das Oberstufentabu zu Funktionen dazu bekommen, da dies aber nur 9 Begriffe waren, habe ich mich dazu entschieden auch allgemeine Begriffe hinzu zu fügen. Es wurden folgende 57 Begriffe verwendet:

Tabu:

- Betrag
- Null
- Kommutativgesetz
- parallele Geraden
- negative Zahlen
- Mantelfläche
- Primzahl
- Lineares Gleichungssystem
- Volumen
- Brüche
- Kehrwert
- Gleichung
- Proportionalität
- Doppelbruch
- Koordinatensystem
- Zehnerpotenz
- Satz des Pythagoras
- Prozent
- Produkt
- Viereck
- Kongruenz
- Winkel
- Hektar
- Polstelle
- Würfel
- Pyramidenstumpf
- Umkreis
- arithmetisches Mittel
- Median
- Schrägriss
- Parabel
- Scheitelpunkt

Funktionen Tabu Unterstufe:

- Symmetrie
- Monotonie
- Wertebereich
- Steigung
- Graph
- Schnittpunkt

- Definitionsbereich
- monoton fallend
- Wertetabelle
- Nullstelle
- Funktionswert
- Exponentialfunktion
- gerade Funktion
- lokales Minimum
- globales Maximum
- Extremum

Funktionen-Tabu Oberstufe:

- Wendestelle
- Differenzialrechnung
- Eulersche Zahl
- Asymptote
- Tangente
- Ableitung
- Sekante
- unendlich
- 2.Ableitung

Die Begriffe wurden einem Buch entnommen, das für das deutsche Schulsystem entwickelt wurde, dementsprechend ist es in Österreich nicht notwendigerweise erforderlich, dass alle Begriffe in der entsprechend genannten Schulstufe behandelt wurden. Vergleicht man die Begriffe der zweiten und dritten Gruppe, so bemerkt man beispielsweise, dass unter anderem die Begriffe Exponentialfunktion und globales Maximum für die zweite Gruppe nicht verwendet wurden, obwohl die Begriffe eigentlich der Unterstufe zugeordnet wurden.

Ich habe mich im Vorhinein eigentlich mithilfe der Lehrpläne der einzelnen Schulformen und auch Schulrichtungen darüber informiert, ob alle Begriffe bekannt sein sollten, allerdings hatte Benedikt die Begriffe lokales Minimum und globales Maximum noch nicht gelernt, und so mussten die Begriffe während des Spiels entfernt werden, da er sie leider beide gezogen hatte.

Nach seinem Lehrplan sollten die Begriffe Konvexität, Extremwerte und Wendepunkte im 3. Jahrgang, welchen er gerade besucht, als Unterpunkte der Differentialrechnung behandelt

werden.¹⁴⁴ Da er die Differentialrechnung dieses Semester schon behandelt hat und bereits das Thema Integralrechnung bearbeitete, habe ich erwartet, dass er die Begriffe lokales Minimum und globales Maximum bereits kennt.

In der Fassung des Lehrplans für Höhere technische und gewerbliche Lehranstalten vom 17. September 2015, welcher allerdings für den Jahrgang von Benedikt noch nicht gilt, werden die Themen Konvexität, Extremwerte und Wendepunkte schon für das 5. Semester, welches Benedikt gerade absolviert hat, vorgeschrieben.¹⁴⁵

Als ich Benedikt das nächste Mal gesehen habe, haben wir noch einmal über diese Begriffe gesprochen, und es hat sich herausgestellt, dass er Extremwerte schon behandelt hatte, sie aber nur als Hoch- beziehungsweise Tiefpunkt kennengelernt hat und nicht als Maximum und Minimum. Die Begriffe lokal und global waren ihm in diesem Zusammenhang allerdings nicht bekannt.

Die Spielstunde fand am Samstag, den 20.2.2016 ab 14:45 statt, da sich eine Schülerin allerdings verspätete, konnten wir erst um 14:55 starten.

Es galten die gleichen Spielregeln wie für die zweite Gruppe. Außerdem hatten die Tabu-Kärtchen der verschiedenen Bereiche unterschiedliche Farben. Ich habe den Lernenden im Vorhinein mitgeteilt, dass gelbe Karten Begriffe enthalten, die in der Oberstufe im Zusammenhang mit Funktionen auftreten, orange Begriffe lernt man in der Unterstufe zum Thema Funktionen kennen und beige Begriffe sind allgemeine mathematische Begriffe, die allerdings auch mit Funktionen zu tun haben können, aber nicht müssen.

Auch hier haben wir so lange gespielt, bis alle Karten weg waren, was etwa 45 Minuten gedauert hat. Es ging sich genau aus, dass die Gruppe Benedikt, Lukas und Rebecca begonnen und die Gruppe Sophie, Stefan und Johanna aufgehört haben. Da vereinzelt Begriffe nicht bekannt waren, musste ich den Lernenden den Tipp geben, dass sie, durch Nennen des Wortes selber oder eines Tabuwortes, eine Karte aus dem Spiel nehmen können. Ich habe ihnen allerdings auch dazu gesagt, dass ich Strafpunkte für das Nennen des Wortes oder eines Tabuwortes einführen werde, wenn dies zu oft gemacht wird. Es wurden in dem Spiel allerdings nur 2 bis 3 Karten offensichtlich so aus dem Spiel genommen, was sich in Grenzen hält. Natürlich wurden auch sonst öfters Tabuworte genannt, da aber die Lernenden die Karte

¹⁴⁴ vgl. Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (2011): S.22

¹⁴⁵ vgl. Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (2015): S.34

dann nicht sofort von selbst weggegeben und eine neue genommen haben, gehe ich davon aus, dass dieses Verwenden von verbotenen Begriffen unabsichtlich war.

Einmal kam es vor, dass Stefan bei dem Begriff 2. Ableitung gesagt hat „f zwei Strich“. Lukas hat dann angemerkt, dass er ja zwei gesagt hat, was allerdings meiner Meinung nach ein Streitfall ist, da das Wort „zwei“ zwar nicht das Wort „zweite“ ist, allerdings sehr ähnlich, und somit ist es an dieser Stelle nicht ganz klar, ob ein Tabuwort genannt wurde oder nicht. Ich habe die Karte trotzdem gelten lassen. Im Gegenzug dazu hat Lukas beim Wort „Doppelbruch“ das Tabuwort „zwei“ verwendet, was der gegnerischen Gruppe nicht aufgefallen ist. Da sie es nicht angemerkt haben, habe ich es während des Erklärens selber auch nicht gemacht, da ich eigentlich nur die Rolle des Beobachters hatte, der die Zeit nimmt und eventuell bei Streitfällen eingreift. Die eigentliche Kontrolle muss allerdings von den Lernenden selbst erfolgen. Nach der Runde habe ich Lukas darauf aufmerksam gemacht, dass er auch das Wort zwei verwendet hat und dass es sich dadurch ausgeglichen hat. Auf dieses Vorgehen werde ich später noch einmal eingehen (vgl. Kapitel 4.9).

Obwohl sich die Lernenden untereinander nicht kannten, außer Lukas und Stefan, die Brüder sind, und Rebecca und Johanna, die befreundet sind, haben sie viel gelacht und waren sehr fair zueinander.

4.7 Schwierigkeiten bei der Auswertung

Nun möchte ich noch etwa auf die Auswertung der Fragebögen eingehen.

Bereits vor der Untersuchung habe ich festgestellt, dass nicht alle Lernenden über 8 Tage hinweg die Motivationsbarometer ausgefüllt haben und dass es teilweise zu starken Schwankungen bei den Antworten kam. Bei der Untersuchung selber habe ich festgestellt, dass die Antworten des Motivationsbarometers teilweise stark von jenen des IMI abwiechen. Aus diesem Grund habe ich mich entschieden, die Motivationsbarometer nicht auszuwerten, sondern mich auf die wissenschaftlich erprobte Methode des IMI zu stützen. Viele Studien haben, wie bereits erwähnt, gezeigt, dass das IMI die intrinsische Motivation von Lernenden gut wiedergibt und deshalb erachte ich diese Methode als deutlich verlässlicher als die von mir erstellten und sonst nicht erprobten Motivationsbarometer.

Ein Problem der Motivationsbarometer könnte sein, dass die Fragen zu kurz gehalten sind, beziehungsweise, dass lediglich zwei Skalen verwendet wurden. Die Charakteristika der intrinsischen und extrinsischen Motivation sind so vielfältig, dass die von mir erstellen

Barometer lediglich einen geringen Teil abdecken und somit nicht repräsentativ für die ILM und ELM an sich sind. Außerdem waren die Fragen des Motivationsbarometers im Vergleich zu den Aussagen des IMIs sehr kompliziert formuliert, was die Ergebnisse auch verfälscht haben könnte.

Der IMI hat bei den Lernenden deutlich konsistentere Ergebnisse geliefert, weshalb dieser Teil des Fragebogens eine Auswertung zulässt.

Auch die offenen Fragen haben einige interessante Einblicke in die Motivation der Lernenden eröffnet. Darüberhinaus haben sie interessante und wichtige Ideen geliefert, wie die verwendeten Spiele verbessert oder besser angewendet werden können.

4.8 Ergebnisse der Bestimmung der intrinsischen Motivation

Nun möchte ich mich mit den erreichten Punkten des IMI beschäftigen. Nachfolgend ist angegeben wie viele Punkte pro Kategorie minimal und maximal erreicht werden konnten:

- Interesse/Freude: 7 - 49 Punkte
- Wahrgenommene Kompetenz: 2 - 14 Punkte
- Aufwand: 3 - 21 Punkte
- Druck/Anspannung: 5 - 35 Punkte
- Umkehrung Druck/Anspannung: 5 - 35 Punkte
- Gesamt: 17 - 119 Punkte

Die Kategorie „Umkehrung Druck/Anspannung“ ist deshalb angegeben, weil Druck und Anspannung einen negativen Effekt auf die intrinsische Motivation haben. Um diese Kategorie also mit den anderen Kategorien zusammen auswerten zu können, muss das Ergebnis umgekehrt werden. Je weniger Punkte also in der Kategorie „Druck/Anspannung“ erreicht wurden, desto größer ist die Punktezahl der Kategorie „Umkehrung Druck/Anspannung“ und somit auch die intrinsische Motivation. In die Berechnung der Gesamtergebnisse werden letztendlich also die 4 Kategorien Interesse/Freude, wahrgenommene Kompetenz, Aufwand und Umkehrung Druck/Anspannung miteinbezogen.

Man sieht sofort, dass in allen Kategorien die Mindestpunktezahl nicht bei 0 liegt, da die Lernenden nur Punkte zwischen 1 und 7 vergeben durften. Da diese Mindestpunktezahl eine Auswertung weniger übersichtlich machen habe ich mich dazu entschieden die

Mindestpunktezahl jeweils vom Ergebnis abzuziehen. Dadurch können in den verschiedenen Kategorien nun also folgende Punkte erreicht werden:

- Interesse/Freude: 0 - 42 Punkte
- Wahrgenommene Kompetenz: 0 - 12 Punkte
- Aufwand: 0 - 18 Punkte
- Druck/Anspannung: 0 - 30 Punkte
- Umkehrung Druck/Anspannung: 0 - 30 Punkte
- Gesamt: 0 - 102 Punkte

Diese Umrechnung entspricht einer Verschiebung der Punkteskala für die Antworten von 1 bis 7 hin zu einer Punkteskala von 0 bis 6.

Erste Gruppe

Die gegebenen Punktezahlen beim IMI der ersten Gruppe sind in Tabelle 5 zu sehen. Es wurden die erreichten Punkte absolut angegeben und die Ergebnisse wurden ebenfalls in Prozent umgerechnet.

	Freude/ Interesse	Wahrgenommene Kompetenz	Aufwand	Umkehrung Druck/ Anspannung	Gesamt
Selina	36 Punkte 86%	11 Punkte 92%	15 Punkte 83%	30 Punkte 100%	92 Punkte 90%
Isabella	40 Punkte 95%	1 Punkte 83%	16 Punkte 89%	21 Punkte 70%	87 Punkte 85%

Tabelle 5: Ergebnisse des IMI der ersten Gruppe

Es wird ersichtlich, dass in dieser Gruppe eine starke intrinsische Motivation durch das Spielen erreicht wurde. Alle Werte über 50% sprechen für das Vorhandensein von intrinsischer Motivation bei den Lernenden. Je größer der Wert ist, desto stärker ist auch die intrinsische Motivation. Beiden Schülerinnen wurde also durch das Spielen stark intrinsisch motiviert.

Betrachtet man die einzelnen Teilbereiche genauer, so sieht man, dass das Spielen bei den beiden Schülerinnen unterschiedliche Aspekte der intrinsischen Motivation gefördert hat. Während Selina beim Spielen überhaupt keinen Druck und auch keine Anspannung empfand, war dies bei Isabella die Kategorie, in der sie am wenigstens Punkte (70%) vergeben hat. Dies

kann beispielsweise auf die unterschiedlichen Persönlichkeiten der Schülerinnen zurückgeführt werden oder dieser Unterschied kann eventuell auch durch den Spielverlauf entstanden sein. Isabella hat im Endeffekt mit 1:2 verloren.

Isabella gab in der Kategorie Freude/Interesse eine hohe Punktezahl (95%). Diese Kategorie gehörte bei Selina wiederum zu einer der Kategorien, bei der sie weniger Punkte vergeben hat.

Beim Betrachten der Ergebnisse aller Unterkategorien sieht man, dass jeder einzelne Aspekt der intrinsischen Motivation bei den beiden Schülerinnen gefördert wurde. Die niedrigste Punktezahl entsprach 70% was in Anbetracht der Tatsache, dass Werte über 50% für das Vorhandensein intrinsischer Motivation sprechen, auch schon ein guter Wert ist.

Über die hohen Prozentsätze bei den Gesamtpunktezahlen (90% und 85%) der beiden Schülerinnen war selbst ich etwas überrascht. Diese hohen Werte sprechen dafür, dass sich das Spielen, zumindest bei diesen beiden Schülerinnen, gut dafür eignet die intrinsische Motivation zu steigern. Durch den positiven Effekt der ILM auf die Leistung der Lernenden ist somit auch ein positiver Einfluss des Spielens auf die Leistung der beiden Schülerinnen zu erwarten. Dies spricht für die aufgestellte Hypothese (vgl. Kapitel 1), dass Spielen eine sehr effiziente Unterrichtsmethode ist. Außerdem hat sich in dieser Gruppe gezeigt, dass, abhängig von den Lernenden, verschiedene Bereiche der intrinsischen Motivation unterschiedlich stark gefördert wurden.

Obwohl Selinas Prozentsatz bei der Gesamtpunktezahl mit 90% bereits sehr hoch ist, wird sich in weiterer Folge zeigen, dass sie damit sogar nur den dritten Platz belegt.

Zweite Gruppe

Die Punktezahlen beim IMI der zweiten Gruppe sind in Tabelle 6 zu sehen. Auch hier sind wieder die absolute Punktezahl und der entsprechende Prozentsatz an den zu vergebenden Punkten, aufgelistet.

Ein Blick auf die Gesamtpunkte zeigt, dass auch hier durchwegs ein positiver Einfluss des Spielens auf die ILM gegeben ist. In dieser Gruppe sind die beiden Lernenden mit der höchsten Gesamtpunktezahl. Den höchsten Prozentsatz der Gesamtpunkte hat eine Schülerin mit 95% erreicht. David hat den zweithöchsten Prozentsatz mit 91% erreicht.

Marie hat in dieser Gruppe die wenigsten Gesamtpunkte (77%), allerdings ist dieser Wert auch noch ein hoher, weshalb man auch hier von einem starken positiven Einfluss des Spielens auf die intrinsische Motivation ausgehen kann.

	Freude/ Interesse	Wahrgenommene Kompetenz	Aufwand	Umkehrung Druck/ Anspannung	Gesamt
Ulrich	38 Punkte 90%	8 Punkte 67%	12 Punkte 67%	29 Punkte 97%	87 Punkte 85%
Marie	37 Punkte 88%	8 Punkte 67%	10 Punkte 56%	24 Punkte 80%	79 Punkte 77%
2. Schülerin	40 Punkte 95%	11 Punkte 92%	16 Punkte 89%	30 Punkte 100%	97 Punkte 95%
David	37 Punkte 88%	12 Punkte 100%	14 Punkte 78%	30 Punkte 100%	93 Punkte 91%

Tabelle 6: Ergebnisse des IMI der zweiten Gruppe

Auch hier sieht man, dass die Ergebnisse der verschiedenen Kategorien wieder sehr unterschiedlich ausgefallen sind. Allerdings haben alle Lernenden dieser Gruppe bei der Kategorie Aufwand am wenigsten Punkte vergeben. Interessant ist die Tatsache, dass David sich beim Spielen sehr kompetent gefühlt hat. Er ist der einzige (sogar von allen Gruppen), der bei dieser Kategorie 100% der Punkte vergeben hat. Bei den anderen Lernenden dieser Gruppe hat diese Kategorie im Vergleich zu den anderen Teilbereichen eher wenig Punkte erhalten. Auch bei Ulrich, welcher im selben Team wie David war und somit ebenfalls das Spiel gewonnen hat.

Auch in dieser Gruppe wurden in der Kategorie Umkehrung Druck/Anspannung die Höchstpunktezahl vergeben. Dies spricht dafür, dass diese Lernenden beim Spielen keinen Druck verspürt haben.

Mich persönlich hat es sehr überrascht, dass David so viele Punkte vergeben hat. Er hat, wie bereits erwähnt, die zweitgrößte Punktezahl überhaupt erreicht. Ich und auch Mitglieder seiner Gruppe, waren sogar überrascht, dass er überhaupt bei diesem Projekt mitmachen wollte. David hat auf mich in der Nachhilfe eher so gewirkt, als wolle er sich nicht mit Mathematik beschäftigen, wenn er es nicht muss. Die freiwillige Teilnahme und das hohe Ergebnis des IMI deuten aber darauf hin, dass dies doch der Fall ist und dass David durch geeignete Unterrichtsmethoden stark intrinsisch motivierbar ist. Ich habe auch bereits im

Vorhinein gemerkt, dass David Lernspielen nicht abgeneigt ist, als ich ihm in einer Nahhilfestunde angeboten habe ein Nagelbrett-Zuordnungsspiel (vgl. Kapitel 7.4) zum Thema lineare Funktionen zu spielen und er sofort zugestimmt hat. Durch die hohe Punktezahl von David habe ich selbst entdeckt, dass man nicht unbedingt voraussagen kann, ob einzelne Lernenden durch Spielen stark, kaum oder gar nicht intrinsisch motiviert werden. Deshalb sollte man das Spielen als Unterrichtsmethode einfach ausprobieren, um so zu sehen, ob die Lernenden die Methode annehmen, auch wenn man vielleicht Widerstand erwartet.

Denn: „Beim Spiel kann man einen Menschen in einer Stunde besser kennenlernen, als im Gespräch in einem Jahr.“ ¹⁴⁶ (Platon 427v. Chr.-348 v. Chr.)

Dritte Gruppe

Die Punktezahlen beim IMI der dritten Gruppe sind in Tabelle 7 zu sehen. Auch hier sind wieder die absolute Punktezahl und der entsprechende Prozentsatz an den zu vergebenden Punkten, aufgelistet.

	Freude/ Interesse	Wahrgenommene Kompetenz	Aufwand	Umkehrung Druck/ Anspannung	Gesamt
Stefan	37 Punkte 88%	11 Punkte 92%	16 Punkte 89%	27 Punkte 90%	91 Punkte 89%
Lukas	35 Punkte 83%	10 Punkte 83%	12 Punkte 67%	27 Punkte 90%	84 Punkte 82%
Sophie	33 Punkte 79%	2 Punkte 17%	15 Punkte 83%	20 Punkte 67%	70 Punkte 69%
Benedikt	29 Punkte 69%	5 Punkte 42%	12 Punkte 67%	13 Punkte 43%	59 Punkte 58%
Rebecca	32 Punkte 76%	5 Punkte 42%	16 Punkte 89%	25 Punkte 83%	78 Punkte 76%
Johanna	38 Punkte 90%	10 Punkte 83%	16 Punkte 89%	16 Punkte 53%	80 Punkte 78%

Tabelle 7: Ergebnisse des IMI der dritten Gruppe

In dieser Gruppe haben ebenfalls alle Lernenden insgesamt mehr als die Hälfte der Punkte vergeben. Dies spricht dafür, dass auch in dieser Gruppe eine intrinsische Motivation durch

¹⁴⁶ vgl. Schefter (Internetquelle)

das Spielen stattgefunden hat. Lediglich bei Benedikt liegt der Prozentsatz der Gesamtpunkte mit 58% nur knapp über der Hälfte. Allerdings spricht auch dieser Wert für eine intrinsische Motivation, jedoch in einer etwas geringeren Ausprägung.

In dieser Gruppe hat Stefan den höchsten Prozentsatz der Gesamtpunkte erreicht (89%). Auch hier variieren die Ergebnisse der einzelnen Kategorien wieder stark. Besonders interessant ist, dass in dieser Gruppe erstmals der Fall aufgetreten ist, dass in einer Kategorie weniger als die Hälfte der Punkte vergeben wurden. Dies kam sogar mehrfach vor. Sogar die Hälfte der Lernenden hat sich beim Spielen nicht kompetent gefühlt. Die betreffenden Lernenden sind Rebecca (42%), Benedikt (42%) und Sophie (17%). Rebecca und Benedikt waren beide in der Gruppe, die knapp verloren hat. Sophie, die mit Abstand die wenigsten Punkte in dieser Kategorie vergeben hat, war allerdings im Siegerteam. Dass Sophie sich nicht als kompetent wahrgenommen hat kommt für mich nicht allzu überraschend, da sie, wie bereits erwähnt, kaum Vertrauen in ihr eigenes mathematische Können hat (vgl. Kapitel 4.6). Insgesamt hat Sophie allerdings nicht so wenig Punkte vergeben. Sie hat mit 69% der Gesamtpunkte zwar die zweitniedrigste Anzahl an Punkten vergeben, allerdings liegt dieser Wert noch immer deutlich über der Hälfte und spricht somit auch für eine stark intrinsisch motivierende Wirkung des Spielens.

Benedikt hat zusätzlich in der Kategorie Umkehrung Druck/Anspannung weniger als die Hälfte der Punkte vergeben (43%). Dies spricht dafür, dass er beim Spielen Anspannung verspürt hat und sich unter Druck gesetzt fühlte.

Resümee

Da in dieser Untersuchung zum Einfluss von Spielen auf die intrinsische Motivation lediglich 12 Lernende befragt wurden, kann nicht ohne weiteres darauf geschlossen werden, dass die vorliegenden Ergebnisse allgemein für Lernende gelten. Allerdings lässt der durchgehend positive Einfluss des Spielens auf die ILM bei allen teilnehmenden Personen doch den Schluss zu, dass Spielen eine sehr effektive Unterrichtsmethode darstellen kann.

Bei vielen Lernenden wurde sogar ein sehr starker positiver Einfluss des Spielens auf die ILM gemessen. So gab es drei Lernende die 90% oder mehr der Gesamtpunkte vergeben haben und zusätzlich noch 4 Lernende, die zwischen 80% und 90% der Gesamtpunkte erreichten.

Lediglich Benedikt hat mit 58% der Gesamtpunkte einen Wert angegeben, der nur knapp über der Hälfte liegt. Allerdings spricht auch dieser Wert für einen positiven Einfluss des Spielens

auf die intrinsische Motivation. Der niedrigere Prozentsatz spricht lediglich für eine geringere Ausprägung des Einflusses. Der zweitkleinste Wert liegt bereits bei 69%, welcher von Sophie vergeben wurde. Dieser Wert liegt bereits deutlich über der Hälfte und deutet somit schon auf einen stärkeren Einfluss des Spielens auf die ILM hin.

Der höchste erreichte Prozentsatz wurde von einer Schülerin angegeben und liegt bei 95%. Dieser Wert kann kaum noch gesteigert werden und spricht dafür, dass diese Schülerin besonders gut von der Unterrichtsmethode des Spielens profitieren könnte.

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Geschlechter, so sieht man, dass hier kein signifikanter Unterschied besteht. Sowohl die höchste und zweithöchste als auch die niedrigste und zweitschleueste Gesamtpunktzahl wurden jeweils von einer Schülerin und einem Schüler erreicht. Auch das Alter der Lernenden dürfte keine allzu große Rolle spielen. So nimmt zwar das arithmetische Mittel der erreichten Gesamtpunkte in den Gruppen mit steigendem Alter ab, allerdings waren die beiden Lernenden mit der höchsten Gesamtpunktzahl in der mittleren Gruppe. Um diesen Aspekt noch genauer unter die Lupe zu nehmen müssten wohl noch mehrere Untersuchungen mit mehr Lernenden der verschiedenen Altersklassen durchgeführt werden.

Insgesamt gesehen hat sich also die in Kapitel 1 aufgestellte Hypothese, dass Spielen einen positiven Einfluss auf die ILM und somit auch auf die Leistung der Lernenden hat zumindest für die teilnehmenden Lernenden bewahrheitet.

Spielen sollte also als Unterrichtsmethode auch bei älteren Lernenden ausprobiert werden, da sie auch in der Oberstufe noch sehr effektiv sein kann.

4.9 Zusätzliche Bemerkungen der Lernenden-Auswertung der offenen Fragen

Nun werde ich noch näher darauf eingehen, welche Antworten die Lernenden auf die offenen Fragen gegeben haben.

Anmerkungen zum Spiel Zahlenmengen

Bei der ersten Gruppe hat sich bei den offenen Fragen herausgestellt, dass das Spiel „Zahlenmengen“ gut bei den Schülerinnen ankam. Sie fanden das Spiel gut und würden nichts verändern. Isabella gab lediglich an, dass sie die Zahleninseln anders anordnen würde. Diese Bemerkung liegt allerdings daran, dass Isabella während dem Spiel wiederholt zur falschen

Zahlenmenge gesprungen ist. Diese Anmerkung ist also nicht allzu ernst zu nehmen, obwohl bei Bedarf die Zahlenmengen-Inseln natürlich beliebig aufgelegt werden können.

Isabella gab an, dass es ihr besonders gut gefallen hat, dass sie nicht unter Druck stand und dass sie Spaß hatte, obwohl es ein Lernspiel war. Selina gab an, dass sie das Spiel unterhaltsam fand und dass es ihr gefallen hat mit einer guten Freundin zu spielen. Außerdem konnte sie etwas für ihre mathematischen Kenntnisse tun.

Beide würden gerne öfters im Unterricht spielen, da sie es als lustig und als gute Gestaltungsmöglichkeit für den Unterricht empfinden. Außerdem geben beide Schülerinnen an, dass sie durch das Spiel etwas über Zahlenmengen gelernt haben beziehungsweise diese wiederholt haben.

Anmerkungen zum Spiel Tabu

In der zweiten Gruppe gefiel den beiden Schülern besonders, dass sie gewonnen haben. David gab zusätzlich an, dass er das Spiel sehr amüsant fand. Die Schülerinnen fanden vor allem an ihrem „*tollen Team*“ Gefallen.

Alle Lernenden haben angegeben, dass zu wenig Karten im Spiel waren. Ulrich wollte zudem mehr Mitspieler oder Mitspielerinnen haben, wohingegen eine der Schülerinnen angegeben hat, dass die Anzahl der spielenden Personen reduziert werden sollte, wenn die Anzahl der Karten nicht erhöht wird. Marie wollte auch Karten zu mehreren Themen und David wollte schwere Begriffe aussortieren und dafür leichtere Begriffe hinzufügen.

Auch die Frage, ob sie im Unterricht gerne öfters spielen würden, haben alle Lernenden einheitlich bejaht. Gründe für diese Antwort waren, die Steigerung der Aufmerksamkeit durch Spiele oder dass Spiele lustig beziehungsweise nicht langweilig sind.

Ulrich hat angegeben, dass er bei dem Spiel unter anderem gelernt hat, was ein Wertebereich ist. David und eine der Schülerinnen gaben an, dass sie „*Mathe Begriffe*“ gelernt haben „*ohne Mathe Begriffe zu erklären*“. Dies spiegelt das Phänomen wieder, dass beim Tabuspiel die Begriffe nicht immer mithilfe von Mathematik erklärt werden. Wie man diesem Effekt entgegenwirken kann wird später erwähnt (vgl. Kapitel 7.2). Marie hat angegeben, dass sie gelernt hat Begriffe und Dinge zu erklären.

Da die Lernenden der zweiten Gruppe angegeben haben, dass sie mehr Karten einsetzen würden, habe ich der dritten Gruppe mehr Karten gegeben. Allerdings haben auch hier zwei

Personen angegeben, dass sie sich mehr Karten gewünscht hätten. Dies könnte als Indiz dafür gesehen werden, dass die entsprechenden Personen gerne noch weitergespielt hätten. Da das Spiel in dieser Gruppe allerdings schon 45 Minuten gedauert hat, spielt hier auch der Zeitfaktor eine Rolle, da irgendwann jede Schulstunde zu Ende geht, auch wenn sie Spaß gemacht hat. Mit 45 Minuten ist also schon das Zeitlimit für eine einzelne Schulstunde erreicht. Außerdem sollte darauf geachtet werden, dass es nicht im Spiel läutet, da es so zu einer Benachteiligung einer Gruppe kommen könnte. Als weitere Kritikpunkte beziehungsweise Verbesserungsvorschläger wurde genannt:

- Dass die Begriffe zum Teil kompliziert zu erklären waren.
- Dass in unterschiedlichen Gruppenkonstellationen gespielt werden sollte.
- Dass der Raum größer sein sollte.
- Dass die Begriffe unter den Teams besser aufgeteilt werden sollten.
- Kontrolle der Tabu-Begriffe sollte strenger oder anders gelöst werden damit keine Fehler unterlaufen.

Zum letzten Punkt möchte ich noch anmerken, dass die Lernenden jeweils die andere Gruppe überprüfen sollten. Deshalb hätte die strengere Kontrolle auch durch die Lernenden selbst stattfinden können. Mir ist deshalb nicht ganz klar, warum die Lernenden manchmal nichts gesagt haben, wenn ein Tabuwort genannt wurde.

In dieser Gruppe wurden viele Dinge genannte, welche den Lernenden an dem Spiel gefallen hat. So wurde Folgendes angemerkt:

- Es gab immer etwas zu lachen gab, auch wenn nicht immer alles korrekt war.
- Es war interessant zu sehen, wie andere Menschen die Begriffe erklärt haben (auch nicht mathematisch)
- Der Unterhaltungsfaktor
- Die Herausforderung
- Die Auffrischung von in Vergessenheit geratenen Begriffen
- Die Anzahl der Teilnehmer wurde gut gewählt, so gab es keine langen Wartepausen
- Es war lustig/unterhaltsam
- Das Spiel war nett
- Man hat an alles, was irgendwie mit dem Begriff zu tun hatte, gedacht
- Man musste sein Wissen beweisen und Dinge beschreiben

- Man hat neue Erklärungen für mathematische Begriffe kennengelernt
- Keine große Anspannung

Auch in dieser Gruppe haben alle Lernenden angegeben, dass sie gerne öfters spielen würden. Gründe hierfür sind folgende:

- Spiele sind gut für das Wiederholen mathematischer Begriffe.
- Spiele machen mehr Spaß als immer nur trockenen Stoff zu machen, allerdings benötigen Spiele auch viel Zeit und motivierte Personen.
- Spiele machen Spaß.
- Abwechslung zum regulären Stoff (kann nicht schaden).
- Lernenden kann auch spielerisch einiges beigebracht werden.
- Es ist eine nette Abwechslung zum meist stressigem Schulalltag.
- Es werden auch „*nicht-fachliche-Kompetenzen*“ gesteigert, wie zum Beispiel die Kommunikation.
- Das Gelernte kann gefestigt werden.

Lukas hat zusätzlich angemerkt, dass er nur hin und wieder im Unterricht mehr spielen möchte und Johanna meint, dass nicht zu viel wertvolle Lernzeit in Anspruch genommen werden sollte.

Die Lernenden gaben an, dass sie bei diesem Spiel ihr Wissen auffrischen konnten und dass sie gelernt haben mit anderen „fremden“ Menschen zusammenzuarbeiten. Außerdem wurde angemerkt, dass durch häufigeres Spielen des Tabus „*alle einzelnen Begriffe aus der Unterstufe und Oberstufe im Kopf*“ bleiben und dass das Erklären von mathematischen Begriffen geübt wurde. Zuletzt wurde noch angemerkt, dass neue Begriffe gelernt wurden und Sophie gab an, dass sie gelernt hat wie Spiele in der Mathematik eingesetzt werden können, da sie nie wusste, wie man solche Spiele gestaltet. Johanna gab an, dass sie entdeckt hat, dass sie „*gar nicht so schlecht im Erklären*“ ist.

Resümee

Alle Lernenden haben angegeben, dass sie im Unterricht öfters Spielen möchten. Außerdem haben sie hilfreiche Tipps zur Verbesserung der Spiele gegeben und sie haben alle etwas beim Spielen gelernt. Am meisten hat den Lernenden der Spaß am Spiel oder Ähnliches gefallen.

5. Entwicklung eines Spiels durch eine Schülerin

Um die Vielfältigkeit der Einsatzmöglichkeiten von Spielen im Mathematikunterricht aufzuzeigen, möchte ich in diesem Kapitel auf die Möglichkeit eingehen, dass Lernende selbst ein Spiel entwickeln. Dies kann in Rahmen eines Wahlpflichtfachs erfolgen oder auch als Projekt im Regelunterricht. Ich persönlich denke, dass dies vielleicht auch als freiwillige Hausübung aufgegeben werden kann, da es sicherlich Lernende gibt, die ihre Freizeit dafür verwenden würden, ein Spiel zu entwickeln. Sollten die Lernenden auf Schwierigkeiten treffen oder sollten Fragen entstehen, so ist eine Unterstützung durch die Lehrperson sinnvoll.

5.1 Ausgangssituation

Das Spiel wird von Selina, welche die 4.Klasse des sprachlichen Zweigs einer AHS besucht, entwickelt. Ich kenne Selina schon seit mehreren Jahren und habe sie deshalb ausgewählt, weil sie einerseits, wenn sie nicht unter Druck steht, gute Leistungen erbringt und weil sie andererseits sehr kreativ ist und diese Kreativität durch das Entwickeln eines Spiels mit Mathematik verknüpfen kann. Außerdem kann Selina in Prüfungssituationen meistens nicht ihre volle Leistung erbringen. Durch das Entwickeln eines eigenen Spiels erhoffe ich mir, dass sie in Bezug auf Mathematik ihr Selbstvertrauen stärken kann. Ich möchte ihr zeigen, dass sie es schaffen kann, sich selbstständig mit mathematischen Themen auseinander zu setzen um sich so ihren eigenen Zugang zu diesen Themen zu schaffen.

Als ich Selina gefragt habe, ob sie für meine Diplomarbeit ein Mathematikspiel entwickeln möchte, hat sie sich sehr gefreut und war sehr aufgeregt. Sofort kamen ihr schon die ersten Ideen. Durch eine Mitschülerin, mit der sie darüber gesprochen hat, weiß ich, dass sich Selina auch sehr darüber freut, dass ich sie ausgewählt habe, das Spiel zu machen. Ich finde, diese Reaktion zeigt schon, dass manche Lernenden auch bereit sind, sich in ihrer Freizeit mit Mathematik zu beschäftigen. Dies ist bereits ein erster positiver Effekt von Spielen, da Lernende sich mit Mathematik beschäftigen, obwohl sie das sonst in dieser Zeit wohl nicht gemacht hätten. Ich habe hier bewusst den Ausdruck „Zeit opfern“ vermieden, da die große Freude von Selina zeigt, dass sie keineswegs ein Opfer bringt, sondern dass sie Spaß hat und das Entwickeln des Spiels somit sogar eine Bereicherung der Freizeit darstellt.

Natürlich ist auch zu erwarten, dass es durch Rückschritte beim Entwickeln des Spiels eventuell zu einer zu einem Rückgang der Motivation kommen kann. Um diese Prozesse

festhalten zu können, habe ich Selina gebeten, eine Art Tagebuch während der Entwicklung des Spiels zu schreiben.

5.2 Die Spielregeln

Im Vorhinein habe ich mit Selina besprochen, wovon das Spiel handeln soll, wobei hier die einzige Vorgabe war, dass es ein Spiel zum Thema Mathematik sein soll. Das Thema konnte sie frei wählen, wodurch die intrinsische Motivation gesteigert werden sollte (vgl. Kapitel 1).

Während sie das Spiel entwickelt, sollte Selina in regelmäßigen Abständen ihre Fortschritte, ihre Ideen, eventuelle Schwierigkeiten und Stolpersteine sowie ihre Gefühle, während sie an dem Spiel arbeitet, notieren. Außerdem sollte sie jedes Mal, wenn sie an dem Spiel arbeitet, auf einer Skala von -5 bis +5 angeben, wie viel Spaß sie bei der Arbeit hatte. Damit sie diese Punkte nicht vergisst, habe ich ihr ein Informationsblatt dazu gegeben, auf dem die Regeln des Projekts zusammengefasst waren.

Da ich Selina im Normalfall jede Woche sehe, konnte ich mit ihr laufend über ihre Fortschritte oder eventuellen Probleme reden. Für den Fall, dass zwischendurch Probleme auftreten, habe ich ihr gesagt, dass sie sich jederzeit bei mir melden kann, falls sie Hilfe benötigt.

Um den Druck von ihr zu nehmen, habe ich ihr auch mitgeteilt, dass es kein Problem ist, wenn sie es nicht schafft, ein Spiel zu entwickeln, sondern dass auch schon die Gedanken, die sie sich macht, interessant sind. Es ist zwar schön, dass im Endeffekt ein Spiel entstanden ist, allerdings wäre es auch schon ein Erfolg gewesen, wenn sich Selina selbstständig mit mathematischen Themen auseinandergesetzt hätte. So hätte sie den aktuellen Schulstoff oder auch den der letzten Jahre wiederholen können.

Es war Selina sowohl erlaubt, mit anderen Personen gemeinsam das Spiel zu entwickeln oder sich Ideen zu holen, als auch jegliche Informationsquelle zu nutzen. Des Weiteren habe ich Selina auch erlaubt, dass sie eine bereits vorhandene Spielidee verwenden und diese so abwandeln darf, dass es in den Mathematikunterricht passen würde. Die Schülerin hatte hier also sehr viele Freiheiten, weshalb es umso interessanter ist, zu sehen, welche der Freiheiten sie bei der Entwicklung des Spiels genutzt hat und was am Ende herausgekommen ist.

Um das Spiel zu entwickeln, habe ich der Schülerin einen Zeitrahmen von bis zu eineinhalb Monaten bis zur ersten Rohfassung gegeben. Das heißt, seit Mitte Februar 2016 hatte sie die

konkreten Anweisungen, was sie beim Gestalten des Spiels zu berücksichtigen hat und im Anschluss an die Osterferien (Anfang April 2016) sollte die erste Rohfassung von ihr entwickelt worden sein. Endgültig fertiggestellt wurde das Spiel letztendlich am 1. Mai 2016.

5.3 Das entwickelte Spiel: „MatheBombe“

In diesem Kapitel möchte ich erst einmal das entwickelte Spiel vorstellen. Selina hat das Spiel „MatheBombe“ genannt. Abbildung 3 zeigt die nötigen Spielmaterialien und Abbildung 4 zeigt den von Selina erstellten Spielplan von „MatheBombe“.

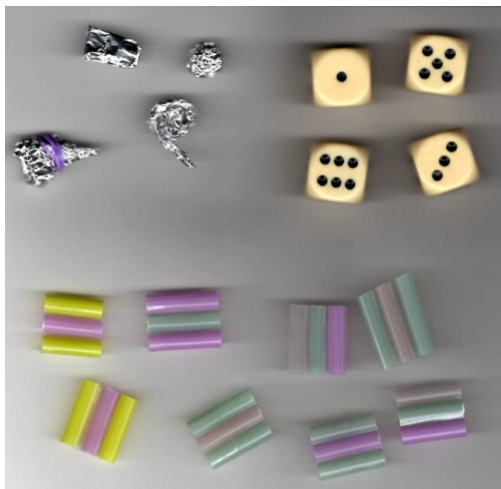


Abbildung 3: Spielmaterialien für „MatheBombe“



Abbildung 4: Spielplan zu „Mathebombe“

Wie man in Abbildung 3 sieht, benötigt man nicht allzu viele Materialien um dieses Spiel zu spielen. Jede Person bekommt einen Würfel und eine Figur. Selina hat für dieses Spiel eigens Spielfiguren aus Alufolie hergestellt. Es könnten allerdings auch Figuren aus einem anderen Spiel entnommen werden, falls hier weniger Aufwand erwünscht ist. Aus Strohhalmen hat sie Spielsteine gebastelt. Diese Steine können gewonnen werden. Wie das Spiel genau funktioniert möchte ich an dieser Stelle Selina erklären lassen. Sie hat hierzu eine Spielanleitung angefertigt, welche in Abbildung 5 und Abbildung 6 zu sehen ist. In dieser Anleitung ist auch das zugehörige „MatheBombe“ Logo zu finden. Ich möchte zu Selinas Anleitung noch ergänzen, dass diese leider nicht in geschlechtsneutraler Sprache geschrieben wurde. Deshalb möchte ich explizit darauf hinweisen, dass mit Spieler natürlich auch Spielerinnen angesprochen werden sollen. Auch an anderen Stellen, an denen nur männliche Formen verwendet wurden, sollen von den Lesenden bitte die weiblichen Formen im Geiste hinzugefügt werden.

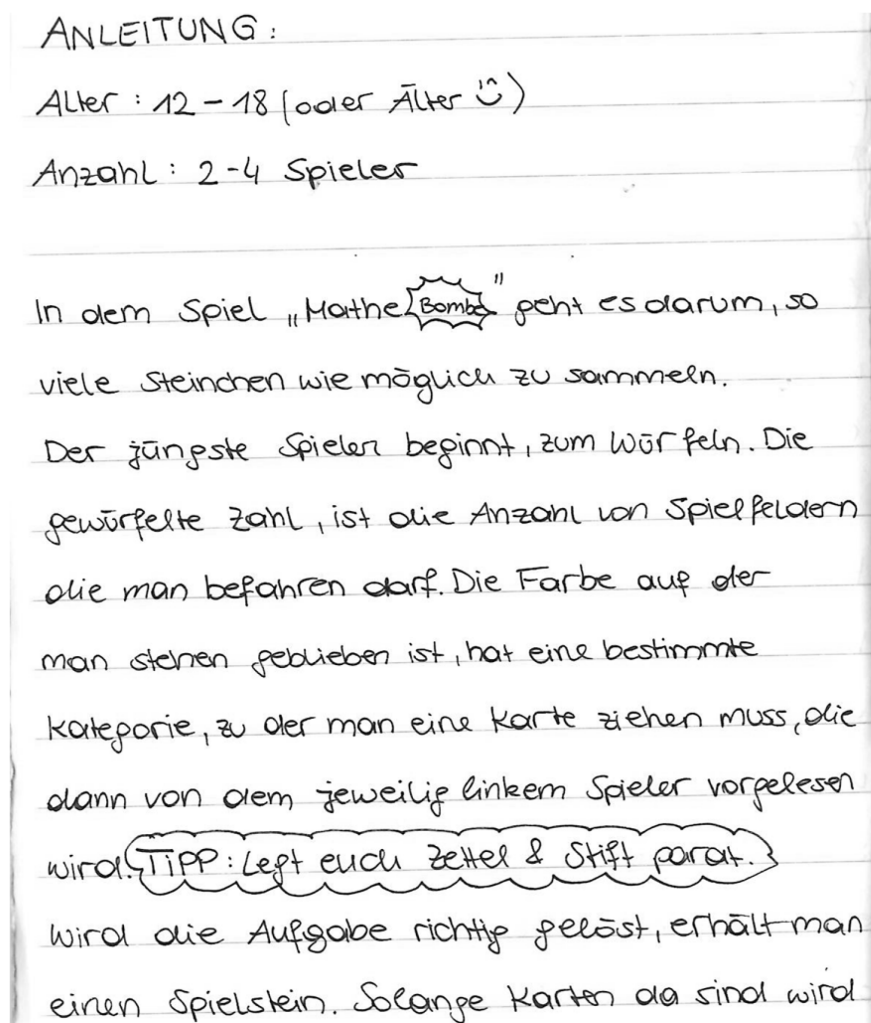


Abbildung 5: Spielanleitung zu "MatheBombe"

gespielt. Der, der am Ende ~~am~~^{die} meisten
Steine hat, gewinnt.

Nebenrechnungen nur im schlimmsten
Notfall! ⚠

Die Richtung in die man fährt, darf man
sich aussuchen.

Viel Spaß beim Spielen, wünscht Selina! 😊

54 Spielsteine

4 Würfel

4 Figuren

G = Gesetz ; F = Formeln

Abbildung 6: Spielanleitung zu "MatheBombe"

Wie man der Anleitung entnehmen kann, werden für das Spiel ebenfalls Spielkarten mit Aufgaben benötigt. Es gibt hier vier verschiedene Kategorien, welche in Abbildung 7 dargestellt sind. Die von Selina erstellten Aufgabenkarten sind im Anhang zu finden (vgl. Kapitel 9.3).



Abbildung 7: Kartenstapel für "MatheBombe"

5.4 Auswertung der Motivationstagebücher

Wie erwähnt, sollte Selina während dem Entwickeln ein Motivationstagebuch führen. Alle Einträge in voller Länge, sind im Anhang zu finden (Vgl. Kapitel 9.3). Das Lesen des gesamten Tagebuchs lohnt sich definitiv, da die Höhen und Tiefen von Selina sehr schön zu erkennen sind. Außerdem hat die Schülerin sehr offen und frei geschrieben. Sie schrieb auch Ideen auf, die ihr im Nachhinein nicht mehr so gut erschienen und sie hat im Detail erklärt, was ihre Motivation und Laune beeinflusst hat.

Auch wenn das Lesen wie gesagt sehr interessant und aufschlussreich ist, möchte ich an dieser Stelle nur die wichtigsten Details in einer Zusammenfassung wiedergeben und teilweise genauer analysieren.

Der erste Eintrag in das Tagebuch stammt vom 15.02.2016. In diesem stellt sich Selina vor. Am 20.02.2016 schrieb sie über eine Spielidee, die sie hatte, welche ihr allerdings zu „langweilig“ war. Sie dachte an ein Spiel, bei dem man Kärtchen mit Dreiecken darauf bekommt, und man angeben muss, ob „*man sie mit dem Satz des Pythagoras berechnen kann*“. Diese Formulierung ist etwas ungenau und ich weiß nicht genau, was Selina gemeint hat, allerdings denke ich, dass man auch daraus eine Spielidee hätte machen können. Ich muss bei dieser Idee an eines meiner Lieblingskartenspiele denken, welches zu dieser Idee passen könnte. Das Spiel kommt aus Kärnten und hat den vielsagenden Namen „Schimmel unterm Bauch greifen“. Man benötigt nur ein Kartendeck mit 32 Karten und vier Farben (also jeweils 8 Karten von einer Farbe). Diese Karten werden dann auf 4 Personen aufgeteilt, wobei jeder oder jede nur die eigenen Karten sieht. Nun beginnt eine Person eine Karte mit dem linken Nachbarn oder der linken Nachbarin auszutauschen. So verfährt man im Uhrzeigersinn fort. Ziel des Spieles ist es, dass man selbst nur Karten einer Farbe auf der Hand hat, also alle 8 Karten einer Farbe. Wer dies erreicht hat, ruft „Schimmel“ und wirft seine oder ihre Karten ab, woraufhin auch die anderen ihre Karten abwerfen. Wer dies als Letzer oder Letzte tut, hat verloren. Die Person, die Schimmel rufen konnte, hat gewonnen.

Man könnte nun Karten erstellen auf denen entweder rechtwinkelige Dreiecke, oder eben nicht rechtwinkelige Dreiecke abgebildet sind. Diese 2 Kategorien könnten dann als 2 unterschiedliche Farben angesehen werden. Das Ziel des Spieles wäre somit, entweder nur noch rechtwinkelige Dreiecke auf der Hand zu haben oder nicht rechtwinkelige. Eventuell müsste man hier die Spielregeln etwas anpassen. Dies könnte man durch Ausprobieren allerdings schnell feststellen.

Die Dreiecke könnten zum Beispiel durch 3 Seiten oder 2 Winkel beschrieben werden, so könnte man mithilfe der Umkehrung des Satzes von Pythagoras oder durch die Winkelsumme im Dreieck bestimmen, ob das Dreieck einen 90° Winkel aufweist.

Möchte man noch mehrere Kategorien hinzufügen, könnte eventuell noch die Unterscheidung nach spitz- oder stumpfwinkelig stattfinden. Ob das hier passend wäre, müsste man aber auch zuerst ausprobieren. Eventuell eignet sich auch die Verwendung von anderen ebenen Figuren.

Bei dem Eintrag vom 20.02.2016 gab Selina auf der „Spaßskala“ +2 an.

Am 25.02.2016 fiel Selina völlig unerwartet auf, dass *„ziemlich viele Spiele eine Strategie haben, die möglicherweise auf mathematischem Wissen basiert“*. Ein passendes Thema für ihr Spiel hatte sie noch nicht, allerdings hat sie überlegt, sich an den Spielen UNO oder Monopoly zu orientieren. Der Spaß, den sie an diesem Tag bei der Entwicklung hat, lag bei +3.

Eine gute Woche später, am 04.03.2016 hat sich Selina an das Spiel „Trivial Pursuit“ erinnert und beschlossen, dass ihr Spiel so ähnlich aussehen soll. Ganz sicher war sie sich zu diesem Zeitpunkt zwar noch nicht, allerdings stieg die Spaßskala mit diesem Durchbruch auf +5 und hatte somit den Maximalwert erreicht.

Zwei Wochen später, am 18.03.2016, schreibt die Schülerin, dass sie die Idee hatte, die Würfel eventuell anders zu gestalten. Beispielsweise könnte anstelle der Zahl 6 die „Rechnung“ $\sqrt[3]{36}$ auf dem Würfel angegeben sein. Diese Idee hat sie allerdings im Endeffekt nicht umgesetzt. Den Spaßfaktor hat sie mit +2 eingeschätzt.

Am 27.03.2016 hat sich das Mädchen mit dem Spielbrett auseinandergesetzt und nach mehreren Skizzen entstand schließlich das Layout für das endgültige Spielbrett zu „MatheBombe“ (vgl. Abbildung 4). Anfänglich hatte sie Probleme mit der Aufteilung der Felder, da das Spielfeld kreisförmig ist. Sie hat versucht mit Formeln zur Berechnung am Kreis passende Einteilungen zu finden. Die Spaßskala zeigt einen Wert von +4.

Eine Woche später, am 03.04.2016, hat sich Selina um die Themen ihres Spiels gekümmert. Sie hat sich für die Kategorien „Formeln aller Art“ und „verschiedene Gesetze“ entschieden. Für die zwei weiteren Kategorien hatte die Schülerin allerdings keine Ideen mehr, weshalb sie am 05.04.2016 mit mir darüber gesprochen hat. Selina gab an, dass ihr das Gespräch sehr geholfen hat und es kamen die Kategorien „falsche Aufgaben“ und „Rechenbeispiele“ hinzu.

Das Mädchen gab an, dass sie schon etwas am Verzweifeln war und dass sie Angst hatte, ihre Idee könnte daran scheitern. Sie hatte sich auch mit Freundinnen über das Spiel unterhalten, allerdings hatten diese auch keine Idee bezüglich neuer Kategorien. Die Spaßskala zeigte 0 an.

Am 11.04.2016 bekam die Schülerin von mir die Materialien und hat sofort 5 Karten beschriftet. Sie gibt an, dass dies sehr anstrengend war. An diesem Tag bewertete Selina den Spaß mit +2. Sie gab als Randnotiz an, dass sie alle Punkte auf eine Mathe-Lernzielkontrolle hatte; ob das ihre Motivation beeinflusst hat ist allerdings nicht vermerkt.

Der nächste Eintrag stammt vom 15.04.2016 und bezieht sich auf das Punktesystem. An diesem Tag bekam das Mädchen ihre Englischschularbeit zurück. Sie war mit ihrer Note nicht sehr zufrieden, was sich auf ihre Laune niederschlug und so kam auf der Spaßskala die Bewertung -1 zustande.

Bereits zwei Tage später, am 17.04.2016, folgte der nächste Eintrag. Die Schülerin gab an, dass sie das Gefühl hatte, nie fertig zu werden. Ihr ist erst jetzt eingefallen, dass sie noch eine Anleitung schreiben muss. Außerdem hatte sie in der Schule zu diesem Zeitpunkt viel Stress. Allerdings freute sie sich schon sehr auf das fertige Ergebnis und auf die Ferien. Den Spaßfaktor hat sie an diesem Tag mit -3 bewertet.

Eine Woche später hatte Selina das Spielbrett gestaltet und war damit zufrieden. Es hat ihr *„ziemlich viel Spaß gemacht“* und sie konnte *„einige Mathematische-Formeln verwenden“*. Diese Formeln hat sie, wie bereits erwähnt, für die Feldeinteilung des kreisförmigen Spielbretts benötigt. Sie hielt fest, dass sie diese Formeln jetzt schon einmal außerhalb der Schule anwenden konnte und dass sie *„vielleicht doch nicht soooo... unnötig“* sind, wie sie dachte. Durch dieses Erfolgserlebnis, lässt sich die „Spaßwertung“ von +5 erklären.

Am 01.05.2016 hat die Schülerin die restlichen Karten fertig gestellt, eine Spielanleitung verfasst und Spielsteine gebastelt. Hierfür vergab sie eine Wertung von +1.

Im Gesamtresümee gibt Selina an, dass sie am Anfang sehr überzeugt von allem war, sich aber zwischendurch doch Zweifel eingeschlichen haben. Außerdem ist sie nun überglücklich, dass sie alles geschafft hat. Das Gestalten hat ihr besonders gut gefallen, das Kartenschreiben empfand sie als anstrengend. Bei einigen Karten wurde der Schülerin von Klassenkameradinnen geholfen. Selina hofft, dass ihr das Spiel gut gelungen ist und sie

„würde das sofort wieder machen.“. Im Endeffekt würde das Mädchen den Spaß, den sie beim Entwickeln hatte mit +3 bewerten.

In Tabelle 8, sind die von Selina vergebenen Punkte noch einmal, nach Datum aufgelistet. Berechnet man das arithmetische Mittel aus den angegebenen Zahlen, so ergibt sich eigentlich ein Wert von rund +2, Selina, hat allerdings ihren Gesamtspañ mit +3 eingeschätzt.

Datum	20.2	25.2	4.3	18.3	27.3	3.4	11.4	15.4	17.4	24.4	1.5	Gesamt
Spañ	+2	+3	+5	+2	+4	0	+2	-1	-3	+5	+1	+3

Tabelle 8: Von Selina vergebene Werte auf der "Spañskala"

Außerdem erkennt man, dass Selina an manchen Tagen stark motiviert war, an anderen Tagen war sie allerdings stark demotiviert. Diese Schwankungen lassen sich durch die verschiedenen Entwicklungsphasen des Spiels erklären oder auch durch äußere Faktoren wie Stress in der Schule.

Insgesamt fiel die Bewertung allerdings positiv aus.

5.5 Meine Gedanken zu dem Spiel

Bei der Auswertung des Motivationstagebuches habe ich bereits einige Anmerkungen angebracht. An dieser Stelle möchte ich aber noch erwähnen, dass ich das Spiel „MatheBombe“ sehr gelungen finde.

Man merkt, dass Selina sich mit verschiedenen mathematischen Themen auseinandergesetzt hat und das Endergebnis kann sich wirklich sehen lassen. Das Spielbrett ist sehr gut durchdacht und liebevoll gestaltet. Bei den Spielkarten gibt es noch kleine Mängel und vor dem Einsatz im Unterricht sollten diese eventuell besprochen und ausgebessert werden. Beispiele hierfür sind folgende Aufgaben:

Wie viel % sind $\frac{435}{1316}$

- a) $\approx 32\%$
- b) $\approx 33\%$
- c) $\approx 30\%$

Hier müsste man beispielweise die Frage ergänzen zu „Wie viel % sind $\frac{435}{1316}$ von 100“

Wie viel dm hat der Durchmesser $r=0,0009$

- a) $d=0.0018$
- b) $d=0,0000018$
- c) $d=0,0018$

Bei dieser Aufgabe ist es essenziell, dass alle Werte mit Einheiten versehen werden.

Im Großen und Ganzen bin ich allerdings beeindruckt von dem Ergebnis, dass Selina abgeliefert hat. Obwohl die Schülerin erst 13 Jahre alt ist und noch die Unterstufe besucht, hat sie es geschafft selbstständig ein eigenes mathematisches Spiel zu entwickeln. Ich musste sie dabei nur minimal unterstützen.

Ich kann mir gut vorstellen, dass ich das Spiel „MatheBombe“ früher oder später im Unterricht einsetzen werde und ich hoffe, dass Selina noch viel Spaß mit dem Spiel haben wird.

Die Gesamtbewertung vom +3 auf einer Skala von -5 bis +5 zeigt, dass Selina Spaß bei der Entwicklung des Spiels hatte und somit konnte durch diese Tätigkeit auch die intrinsische Motivation bei der Schülerin gefördert werden.

6. Entwicklung eines Kreuzworträtsels durch einen Schüler

Da die Entwicklung eines eigenen Spieles mitunter einen großen beziehungsweise in manchen Fällen sogar einen zu großen Zeitaufwand darstellt, möchte ich in diesem Kapitel eine Möglichkeit aufzeigen, wie auch mit geringerem Zeitaufwand ein von den Lernenden selbst entwickeltes spielerisches Element in den Mathematikunterricht integriert werden kann. Deshalb habe ich mich entschlossen, einen Schüler zu bitten, selbst ein Kreuzworträtsel zum Thema Mathematik zu entwickeln. Es wäre auch möglich andere Formen von Rätseln in den Mathematikunterricht einzubinden. Da es eine Vielzahl von Rätselarten gibt, würde das genauere Betrachten all dieser Arten den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen. Deshalb habe ich mich entschlossen nur auf das Kreuzworträtsel näher einzugehen.

Durch den geringen Zeitaufwand, den das Entwickeln eines Kreuzworträtsels mit sich bringt, ist es möglich, in nur einer Schulstunde ein solches zu erstellen, oder das Erstellen auch als Hausaufgabe aufzugeben. Die entstandenen Rätsel kann man wiederum sammeln und an die anderen Lernenden austeilen, sodass diese damit üben können. Darüber hinaus kann die Lehrperson anhand der Fragen, die in dem Rätsel gestellt werden, auch gut erkennen, was bei den Lernenden als besonders wichtig hängen geblieben ist. Des Weiteren werden eventuelle mathematische Ungenauigkeiten in den Aussagen beziehungsweise den Fragen der Lernenden gut sichtbar. Dies kann als Ansatzpunkt genutzt werden, um mathematische Begriffe zu präzisieren.

Im folgenden Kapitel werden der Entwicklungsprozess und das Endergebnis näher betrachtet.

6.1 Ausgangssituation

Das Kreuzworträtsel wurde von Michael, einem 17-jährigen Schüler einer 2. Klasse HAK (10. Schulstufe), entwickelt. Auch er ist Nachhilfeschüler in dem Institut, in dem ich arbeite, allerdings wird er normalerweise von einer anderen Lehrkraft betreut.

Die Anweisungen, die ich Michael gegeben habe, sind im Wesentlichen mit jenen, die ich Selina gegeben habe, ident (vgl. Kapitel 5.2). Auch er durfte sich die Themen seines Kreuzworträtsels frei aussuchen, solange sie etwas mit Mathematik zu tun haben. Da das Entwickeln eines Rätsels im Normalfall kein so langwieriger Prozess wie das Entwickeln eines Spieles ist, sollte Michael nur einmalig aufschreiben, welche Ideen er hatte, ob es Schwierigkeiten gab und wie er sich gefühlt hat. Er musste also kein fortlaufendes „Motivationstagebuch“ führen. Auch er sollte auf einer Skala von -5 bis +5 angeben, wie viel

Spaß er beim Entwickeln hatte. Diese Anforderungen habe ich ihm auch, wie bei Selina, auf einem Zettel zusammengefasst, damit er sie jederzeit nachlesen kann. Michael durfte das Rätsel ebenfalls gemeinsam mit anderen Personen erstellen und Informationsquellen wie sein Schulbuch oder das Internet nutzen.

6.2 Das entwickelte Kreuzworträtsel

In Abbildung 8 ist das von Michael erstellte Kreuzworträtsel zu sehen, wobei die Fragen von mir vergrößert dargestellt wurden, um eine bessere Lesbarkeit zu erreichen.

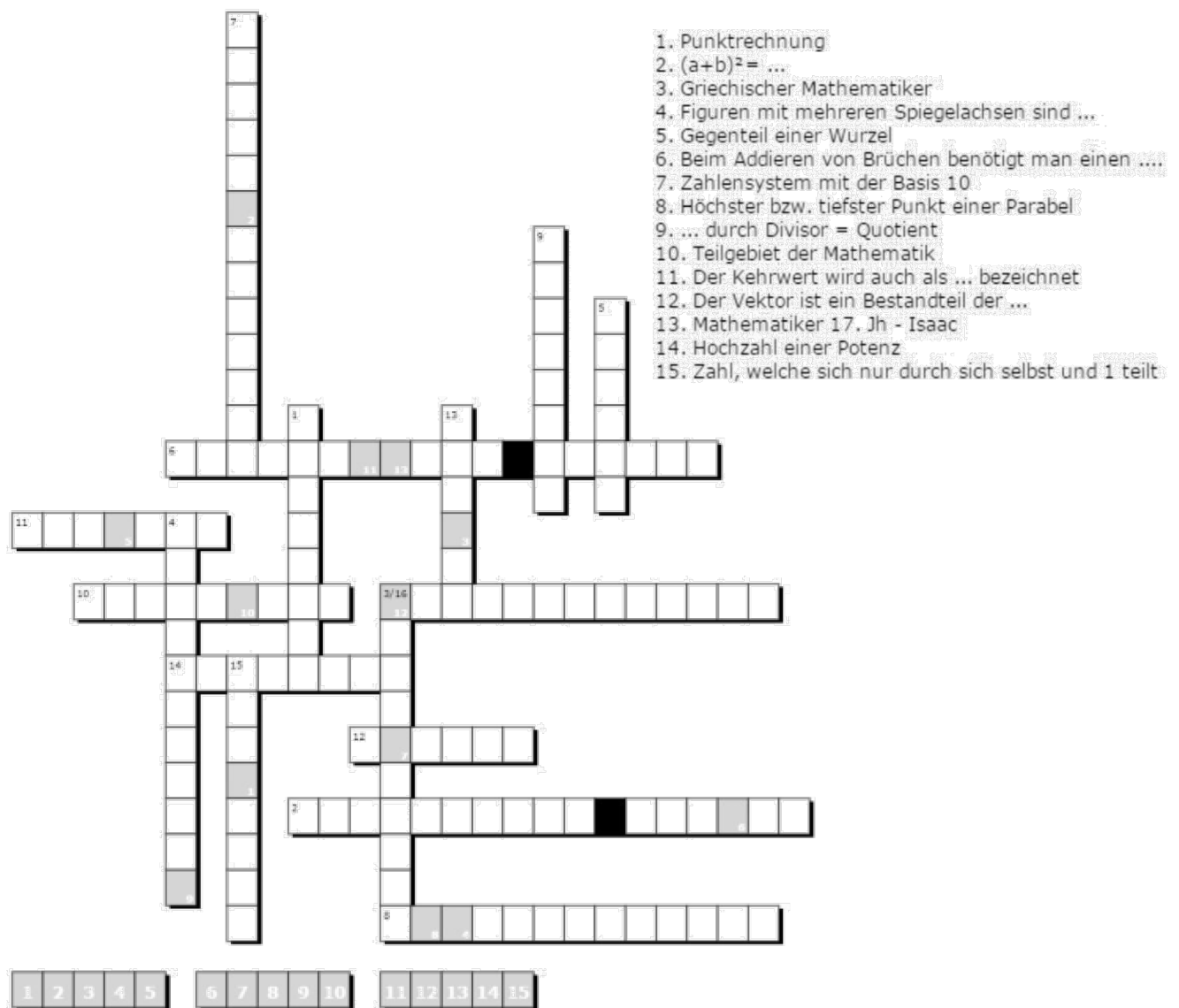


Abbildung 8 Das von Michael entwickelte Rätsel. Generiert mit XWords

Eine Analyse des Kreuzworträtsels werde ich erst an späterer Stelle vornehmen, zuerst möchte ich noch darauf eingehen, welche Bemerkungen Michael zum Entwickeln des Rätsels hatte und wie es ihm dabei erging.

6.3 Michaels Notizen zur Entwicklung

Michael hat das Kreuzworträtsel am 31.3.2016 mit dem Programm XWords erstellt. Er hat dabei alleine gearbeitet und das Internet als Informationsquelle genutzt. Im Vorhinein hat er sich ein paar Fragen ausgedacht, und danach hat er im Internet noch weiter recherchiert.

Michael gibt an, dass es ihm Spaß gemacht hat, das Rätsel zu erstellen, weil er dabei ein bisschen Stoff wiederholen konnte. Große Schwierigkeiten hat ihm das Entwickeln nicht bereitet, allerdings hat er einmal aus Versehen das ganze Kreuzworträtsel gelöscht und musste wieder von vorne beginnen.

Insgesamt gibt Michael an, dass ihm das Erstellen „*eigentlich ganz gut gefallen*“ hat, und er schätzt den Spaß, den er dabei hatte, mit +4 auf einer Skala von -5 bis +5 ein.

Diese Wertung ist eine sehr positive, weshalb man auch hier davon ausgehen kann, dass das Entwickeln des Rätsels einen positiven Einfluss auf die intrinsische Motivation des Schülers hatte.

6.4 Andere Anmerkungen zum Kreuzworträtsel

Wie man in Michaels Notizen erkennt, hatte er Spaß an der Sache, und es traten auch kaum Probleme auf, obwohl er das Rätsel selbstständig erstellt hat. An dieser Stelle sieht man, dass es auch „älteren“ Lernenden Spaß machen kann, sich mit Mathematik spielerisch zu beschäftigen.

Nun möchte ich Layout und Inhalt des Rätsels noch etwas genauer betrachten.

Zuerst möchte ich noch etwas zum Inhalt des Rätsels anmerken. Da ich keiner Person die Freude daran nehmen möchte, das Rätsel eventuell selbst zu lösen, möchte ich vorwegnehmen, dass im folgendem Absatz auch Teile der Lösung des Rätsels vorkommen werden und das Rätsel deshalb vor dem Lesen dieses Absatzes bearbeitet werden sollte.

Die 2. Frage lautet „ $(a+b)^2=...$ “. Hier erkennt man natürlich schnell, dass Michael als Antwort „Binomische Formel“ verwendet hat, allerdings ist die gestellte Frage selbst eigentlich noch nicht die Binomische Formel, sondern nur das Quadrat eines Binoms. Eine Studienkollegin hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass sie anfänglich überlegt hat, wie sie $a^2+2ab+b^2$ in das Rätsel eintragen kann.

Bei der 5. Frage wird nach dem Gegenteil einer Wurzel gefragt. Der Begriff Gegenteil in diesem Zusammenhang ist allerdings, meinem Empfinden nach, ein umgangssprachlicher Begriff, welcher hier nicht verwendet werden sollte. Die Lösung zu der Frage ist Potenz. Man könnte hier eventuell nach dem Inversen zur Wurzel fragen, allerdings kann eine Wurzel selbst auch als Potenz, nämlich mit einem rationalen Exponenten, angeschrieben werden. Deshalb empfinde ich die Bezeichnung „Gegenteil“ als nicht passend.

Die 6. Frage lautet „Beim Addieren von Brüchen benötigt man einen...“. Auch hier erkennt man schnell, dass die Antwort „gemeinsamer Nenner“ sein soll, allerdings ist auch hier die Formulierung nicht ganz passend. Um Brüche zu addieren, benötigt man nicht immer einen gemeinsamen Nenner. Beispielsweise ist es auch möglich, die Brüche zuerst in Dezimalzahlen umzuformen und diese dann zu addieren, oder man kann die Brüche auch grafisch darstellen und dann deren Summe ablesen, ohne dabei einen gemeinsamen Nenner zu erkennen.

In dem Kreuzworträtsel gibt es auch Antwortfelder für eine 16. Frage. Die Frage gibt es allerdings nicht. Durch ein Gespräch mit Michael hat sich herausgestellt, dass er auch keine 16. Frage vorgesehen hat. Diese Antwortfelder dürften also fälschlicherweise vom Programm erstellt worden sein.

Auch wenn manche Fragen des Kreuzworträtsels unpräzise formuliert worden sind, so finde ich die Fragen sehr gelungen. Sie bieten eine große Vielfalt und greifen mehrere Teilgebiete der Mathematik auf. Besonders interessant empfinde ich die Tatsache, dass Michael in 2 der 15 Fragen nach Mathematikern fragt. Diese Fragen zeigen das bei vielen Lernenden vorhandene Interesse an der Geschichte der Mathematik.¹⁴⁷

Nun möchte ich auf das Layout eingehen. Die Anmerkungen bezüglich des Layouts richten sich vor allem an jene, die den Einsatz des Programms XWords in Betracht ziehen. Durch die Tipps ist es möglich eine bessere Lesbarkeit zu erreichen um das Rätsel ansprechender und somit auch motivierender zu gestalten. Sollte der Einsatz des Programms nicht in Frage kommen, so können diese Anmerkungen übersprungen und das Lesen erst ab dem Kapitel 7 weitergeführt werden.

¹⁴⁷ vgl. Wirths (1999a): S.1

In Abbildung 8 ist zu erkennen, dass leider die Zahlen in den Kästchen und auch die Fragen nicht so gut zu erkennen sind. In der ausgedruckten Version des Rätsels sind allerdings die Fragen besser zu lesen, sie sind nur etwas klein geraten. Dies kann man allerdings mit dem Programm XWords ändern. Unter Eigenschaften kann man unter anderem die Schriftgröße ändern, was ich für empfehlenswert erachte, da die voreingestellte Schriftgröße sehr klein und somit schwer lesbar ist. Die Nummern sind auch auf der ausgedruckten Version nicht gut zu sehen und vor allem bei den Lösungsfeldern (graue Kästchen) konnte ich selbst nach dem Ausfüllen des Rätsels nicht mehr erkennen, welche Ziffer im ausgefüllten Kästchen stand. Auch die Ziffernfarbe in den Lösungsfeldern und die Farbe der Lösungsfelder selbst können mit dem Programm verändert werden und so kann auch dieses Problem behoben werden.

Ein weiterer Grund, warum die Ziffern so schlecht zu lesen sind, dürfte sein, dass das Rätsel mehrfach abgespeichert wurde. Als ich selbst ein Rätsel mit dem Programm XWords erstellt habe, ist mir aufgefallen, dass online die Ziffern deutlich besser zu lesen sind. Es kann zu jedem Kreuzworträtsel auch ein Online-Link erstellt werden. Mithilfe des Links kann das Rätsel sehr leicht auch direkt online gelöst werden.

Erstellt man selbst ein Rätsel, so zeigt das Programm an, wie viele Wörter nicht platziert wurden, wie viele Kreuzungen es gibt und auch ob ein Buchstabe des Lösungswortes (graue Kästchen) noch nicht vorkommt. So kann man schnell ein passendes Wort finden, welches dem Rätsel noch hinzugefügt werden sollte um das komplette Lösungswort zu erhalten. Man muss beim Generieren des Kreuzworträtsels auch kein Lösungswort eingeben, oder es können auch mehrere Worte eingegeben werden, wie das bei Michaels Rätsel der Fall ist.

Nach dem Erstellen eines Rätsels kann sowohl das Rätsel selbst als auch dessen Lösung einfach als Bilddatei heruntergeladen werden und somit auch ohne Einsatz von Computern von Lernenden gelöst werden.

Zuletzt möchte ich noch erwähnen, dass es natürlich jeder und jedem freisteht, Michaels Rätsel selbst zu lösen. Es ist nicht nur spannend zu sehen, welche Fragen sich der Schüler einfallen hat lassen, sondern seine Lösungsworte (graue Felder mit Nummer 1 bis 15) treffen direkt ins Herz von Mathematikerinnen und Mathematikern. Als Randbemerkung möchte ich hier noch ausdrücklich darauf hinweisen, dass auch die Lösungsworte nicht von mir vorgegeben wurden.

7. Spielesammlung

Abschließend möchte ich eine Reihe von Spielen vorstellen, die im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

7.1 Zahlenmengenspiel

Dieses Spiel habe ich selbst vor ein paar Jahren entwickelt. Das Thema des Spiels sind die Zahlenmengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Das Spiel ist für mindestens zwei Personen gedacht. Da es nur eine begrenzte Zahl an Spielkarten gibt, können auch nicht beliebig viele Personen am Spiel teilnehmen. Erfahrungsgemäß sind allerdings genug Karten für ein Spiel mit 4 Personen vorhanden.

Im Folgenden sind die nötigen Spielmaterialien, eine Anleitung und didaktische Überlegungen zu diesem Spiel zu finden.

Spielmaterial:

- 31 Spielkarten mit Zahlen
- 4 Jokerkarten
- 4 Zahlenmengen-Inseln ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

Kartenzusammenstellung:

- 4 natürliche Zahlen (z.B.: $\frac{77}{11}$; $\sqrt{9}$; 1; $\sqrt{49}$)
- 7 ganze Zahlen (z.B.: -500; $-\frac{9}{3}$; $-\frac{16}{8}$; -3; $-\frac{2}{2}$; -5; -8)
- 10 rationale Zahlen (z.B.: 5,2; -0,125; $-\frac{21}{6}$; $7,\overline{52}$; $-\frac{4}{3}$; 99,9; 0,1; $\frac{6}{8}$; $\frac{28}{10}$; 5,3)
- 10 reelle Zahlen¹⁴⁸ (z.B.: $\sqrt{99}$; $\sqrt{2}$; 13,193...; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{5}$; -1,378....; $\sqrt{1000}$; π ; -5π ; $\sqrt{7}$)
- 4 Joker (Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{R}$; Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{Q}$; Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{Z}$; Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{N}$)

Zu beachten ist, dass, um eine bessere Übersicht zu schaffen, in dieser Auflistung die Zahlen immer nur der „kleinsten“ Zahlenmenge zugeordnet wurden, also würden zum Beispiel die vier natürlichen Zahlen nicht mehr zur Anzahl der ganzen Zahlen dazugerechnet, sondern es

¹⁴⁸ Durch das Anhängen von „...“ an eine Dezimalzahl, soll eine unendliche, nicht periodische Dezimalzahl, also eine irrationale Zahl gekennzeichnet werden.

gibt 7 ganze Zahlen, die nicht natürliche Zahlen sind. Im Spiel selber können die vier natürlichen Zahlen aber selbstverständlich auch den ganzen Zahlen zugeordnet werden.

Ein Möglichkeit für die Gestaltung der Karten ist in Abbildung 9 zu sehen. Abbildung 10 zeigt die vorkommenden Zahlenmengen-Inseln.

Joker Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{Z}$	Joker Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{Q}$	$-\frac{77}{11}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{3}$	$0,1\overline{75}$
Joker Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{N}$	-71	11π	$-0,125$	$\sqrt{99}$	$4,496\dots$
$\sqrt{1000}$	π	Joker Erkläre die Zahlenmenge $\mathbb{R}$	$-\frac{17}{8}$	$0,137$	$\sqrt{7}$
$-17,173\dots$	$-\frac{36}{4}$	2	$\frac{6}{3}$	$-\frac{9}{3}$	$-\frac{13}{5}$
$-\frac{2\pi}{3}$	-5	$\sqrt{49}$	$\xi'0$	$4,5$	$-10,6$

Abbildung 9: Mögliche Spielkarten für das Spiel Zahlenmengen

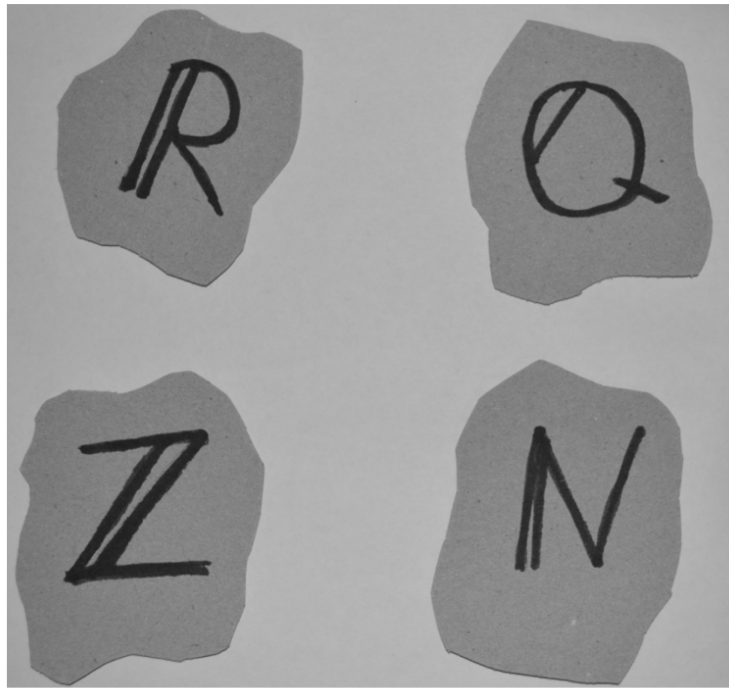


Abbildung 10: Zahlenmengen-Inseln zum Spiel Zahlenmengen

Anleitung:

Zuerst werden die vier Zahlenmengen-Inseln auf dem Tisch verteilt. Dann werden die Spielkarten gemischt, und jede Person erhält 8 Karten, wenn zwei Personen spielen, beziehungsweise 6 Karten, wenn mehr als zwei Personen spielen. Der Rest der Karten wird als Stapel zur Seite gelegt.

Die jüngste Person beginnt. Sie soll bei der „ $\mathbb{R}$ “ Zahlenmengen-Insel eine passende Karte ablegen, wobei darauf zu achten ist, dass man dort nur reelle Zahlen ablegen darf (Anmerkung für Lehrende: Bei dieser Zahlenmengen-Insel kann jede Karte abgelegt werden, weil natürliche Zahlen und so weiter auch reelle Zahlen sind. Dies ist eine der Erkenntnisse, welche die Lernenden in diesem Spiel erwerben beziehungsweise festigen sollen).

Nun sind im Uhrzeigersinn die restlichen Lernenden an der Reihe. Diese müssen ebenfalls an der „ $\mathbb{R}$ “ Zahlenmengen-Insel eine Karte ablegen. Haben alle Personen eine Karte an der „ $\mathbb{R}$ “ Zahlenmengen-Insel abgelegt, so wird nun zur „ $\mathbb{Q}$ “ Zahlenmengen-Insel gewechselt, und es wird wieder der Reihe nach eine passende Karte von jeder Person abgelegt. Als nächstes kommt die „ $\mathbb{Z}$ “ Zahlenmengen-Insel und dann die „ $\mathbb{N}$ “ Zahlenmengen-Insel an die Reihe. Wurden nun an allen vier Inseln Karten abgelegt, so beginnt man wieder mit dem Ablegen von Karten an der „ $\mathbb{R}$ “ Zahlenmengen-Insel und so weiter.

Ziel des Spiels ist es, als erster all seine Karten los zu werden.

Kann eine Person einmal keine Karte ablegen, so muss sie eine Karte vom Stapel ziehen. Legt eine Person eine falsche Karte zu der Zahlenmengen-Insel, die an der Reihe ist, so muss sie die falsch gelegte Karte wieder auf die Hand nehmen und zusätzlich zwei Karten vom Stapel ziehen (sie darf in dieser Runde keine Karte mehr spielen).

Jokerkarten können anstelle einer Zahlenkarte gelegt werden. Legt man allerdings eine Jokerkarte, so muss man die entsprechende Zahlenmenge, die auf dem Joker vermerkt ist, erklären. Hierbei ist es nicht wichtig, ob man den Joker mit den natürlichen Zahlen auch bei den natürlichen Zahlen ablegt oder nicht. Erklärt man die Zahlenmenge richtig, so müssen alle anderen Lernenden eine Karte ziehen, erklärt man sie jedoch falsch, so muss man selbst zwei Karten vom Stapel ziehen (der Joker bleibt jedoch abgelegt). Egal, ob der Joker richtig oder falsch vorgetragen wurde, man springt nun zu der Zahlenmenge, die auf dem entsprechenden Joker steht, weiter. Hierbei kann es passieren, dass nun eine andere Person als zuvor als erstes zu einer Zahlenmenge eine Karte ablegen darf. Zum Beispiel ist dies der Fall, wenn die Person, welche beginnen durfte (Person 1), den Joker mit den natürlichen Zahlen ablegt. Dann muss die nächste Person bei den natürlichen Zahlen eine Karte ablegen, und erst als letzter muss dann Person 1 bei den natürlichen Zahlen eine Karte ablegen.

Sollte es keine Karten mehr auf dem Stapel geben, so werden die abgelegten Karten neu gemischt und als Stapel bereitgestellt.

Wichtige Hinweise für Lehrende:

- $\frac{77}{11}$ ist eine natürliche Zahl.
- „...“ als Anhang an eine Dezimalzahl, steht dafür, dass diese Zahl eine Dezimalzahl mit unendlich vielen, nicht periodischen Nachkommastellen ist. Diese Notation muss mit den Lernenden im Vorhinein abgeklärt werden.
- $0, \dot{3}$ steht für 0,3-periodisch.
- $0, \overline{57}$ steht für eine sich wiederholende Periode von 57 (0,5757575757...).
- $\sqrt{1000}$ ist irrational.

Anmerkung: Den ersten Hinweis habe ich angeführt, da es Lehrende gibt, welche Brüche nicht den natürlichen Zahlen zuordnen, auch wenn der gegebene Bruch eine natürliche Zahl darstellt.

Der letzte Hinweis ist deshalb erwähnt, da ich dieses Spiel für das Nachhilfeinstitut, in dem ich arbeite, entwickelt habe und in diesem Institut auch Personen Mathematik-Nachhilfe geben, welche nicht Mathematik auf Lehramt studieren. Da ich bemerkt habe, dass die Wurzel aus 1000 manchmal fälschlicherweise als rationale (oder auch natürliche) Zahl angenommen wird, habe ich diesen Hinweis in die Anleitung aufgenommen.

Was sollen Lernende in diesem Spiel üben?

Einerseits sollen die Lernenden erkennen, welche Zahlen welchen Zahlenmengen zugeordnet werden können. Andererseits sollen sie im Laufe des Spiels auch erkennen, dass die natürlichen Zahlen eine Art „Joker“ sind, da sie allen Zahlenmengen zugeordnet werden können. Die irrationalen Zahlen hingegen können nur bei „ $\mathbb{R}$ “ angelegt werden, sie sollten also so schnell wie möglich abgelegt werden, wenn man gewinnen möchte. Dies soll darauf vorbereiten, dass die Lernenden beispielsweise 2 sowohl $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R}$ zuordnen.

Des Weiteren müssen die Lernenden auch erkennen, dass z.B. $\sqrt{9}=3$ eine natürliche Zahl ist. Dabei wird auch das Kopfrechnen geübt.

Die Joker haben den Sinn, dass Lernende die Zahlenmengen in eigenen Worten erklären können und sie machen das Spiel weniger vorausschaubar. Dadurch wird ein weiteres Glückselement in das Spiel eingebracht, welches das Spiel spannender macht und die Motivation schwächerer Lernender zusätzlich steigern kann.

7.2 Tabu

Dieses Spiel ist manchen Lernenden eventuell bereits aus ihrer Freizeit bekannt. In dem Buch „Spiele zur Unterrichtsgestaltung. Mathematik“ von Heiko ETZOLD und Ines PETZSCHER findet sich eine mathematische Variation des Spieles. Dieses Buch hat sich für mich generell als sehr hilfreich erwiesen. Ich habe mir verschiedene Bücher zum Thema Spiele im Mathematikunterricht angesehen, allerdings muss ich sagen, dass mir dieses Buch am besten gefallen hat. Das Buch steckt voller interessanter Spiel für den Mathematikunterricht und es werden zahlreiche Kopiervorlagen zur Verfügung gestellt. Mit der Genehmigung des Verlages an der Ruhr darf ich dieser Diplomarbeit sogar die Kopiervorlagen für das Tabu anfügen (vgl. Kapitel 9.4).

Das Spiel besteht aus mehreren Kärtchen auf denen jeweils ein Begriff steht, welcher erraten werden muss. Hierfür erklärt eine Person den Begriff, ohne dabei gewisse Worte zu verwenden. Diese „Tabuwörter“ sind ebenfalls auf den Kärtchen vermerkt. Wurde ein Begriff richtig erraten, so darf die Gruppe dieses Kärtchen an sich nehmen. Ziel des Spiels ist es, am Ende möglichst viele Kärtchen zu haben.¹⁴⁹

Vor dem Spielen werden die Lernenden in zwei Gruppen aufgeteilt, die gegeneinander antreten und es wird ein Zeitlimit für die einzelnen Runden festgelegt. Ich habe bei meiner Untersuchung ein Zeitlimit von einer Minute verwendet, welches sich als passend herausgestellt hat. Jeweils eine Person einer Gruppe muss dann den gezogenen Begriff erklären und der Rest der Gruppe rät. Wird der Begriff erraten, so bekommt diese Gruppe das Kärtchen und es wird von der gleichen Person ein weiterer Begriff erklärt, bis das Zeitlimit erreicht ist. Wird ein Tabuwort genannt, so wird die Karte aus dem Spiel genommen. Um dies zu kontrollieren wird ein „Aufpasser“ aus der anderen Gruppe gewählt. Danach ist die andere Gruppe an der Reihe. Die Person, die erklärt, wird von Runde zu Runde ausgetauscht, sodass jedes Gruppenmitglied mindestens einmal Begriffe erklären muss. Im Vorhinein kann festgelegt werden, wie viele Runden gespielt werden oder man spielt so lange bis keine Karten mehr da sind.¹⁵⁰

Als Variation dieses Spiels sind beispielweise folgende Änderungen beziehungsweise Ergänzungen möglich:

- Nach jeder Spielrunde müssen die erratenen Begriffe von einer Person der Gruppe erneut erklärt werden. Ist diese Erklärung richtig, so darf die Gruppe die Karte behalten, sonst nicht.
- Lernende können selbst Karten anfertigen.
- Es muss kein Begriff erraten werden sondern eine Abbildung. Hier könnte zum Beispiel ein Graph beschrieben werden und die zugehörige Funktion muss erraten werden.¹⁵¹

Ich habe dieses Spiel deshalb für meine Untersuchung ausgewählt, da es in größeren Gruppen gespielt werden kann und da es sich meiner Meinung nach gut für Lernende der Oberstufe eignet, da die Begriffe der Altersklasse angepasst werden können.

¹⁴⁹ vgl. Etzold/Petzschler (2011): S.6

¹⁵⁰ vgl. ebd.

¹⁵¹ vgl. ebd.: S.7

7.3 Funktionen-Tabu

Dieses Spiel ist eigentlich nur eine Erweiterung beziehungsweise eine spezielle Variante des eben genannten Tabus. Die Regeln sind die gleichen, es werden nur andere Begriffe angegeben. Auch hier sind im Anhang die Kopiervorlagen zu finden (vgl. Kapitel 9.5), wobei hier eine Unterteilung in Unterstufe (markiert mit einem Punkt) und Oberstufe (markiert mit 2 Punkten) stattfindet.¹⁵²

Der didaktische Nutzen dieses Spiels liegt in der Festigung von Begriffen, da das Beschreiben der Wörter ein besonders gutes Verständnis des Stoffs erfordert. Das Spiel kann ab der 4. Klasse Unterstufe eingesetzt werden (8.Schulstufe) und eignet sich auch für die Oberstufe.¹⁵³

7.4 Nagelbrett-Zuordnungsspiel

Dieses Spiel kann als Baukasten beispielsweise bei „Winkler-Schulbedarf“ erworben werden. Das Set besteht aus einem etwa A5 großem Holzbrett und drei Holzleisten, die angeleimt werden müssen. Ist alles gut getrocknet werden noch auf der linken und rechten Seite Nägel, welche ebenfalls mitgeliefert werden, in die Leisten eingeschlagen. Nun kann mit Hilfe von Gummibändern eine Aufgabe oder Frage der rechten Seite mit der passenden Antwort der linken Seite verbunden werden. Auch die Gummibänder sind, sogar mit ein paar Ersatzbändern, im Lieferumfang enthalten. Zuletzt müssen natürlich noch passende Fragen beziehungsweise Aufgaben und deren Lösungen entwickelt werden. Diese werden in zwei Spalten aufgeschrieben (vgl. Anhang Kapitel 9.6). Im Lieferumfang sind auch bereits eine leere Kopiervorlage und eine vorgefertigte Vorlage zum Thema „Einmaleins“ enthalten. Da das Spiel allerdings für die Volksschule beworben wird, ist diese Vorlage viel zu einfach. Ich selbst habe aber schon verschiedene Vorlagen gestaltet, welche von linearen Funktionen über Kurvendiskussion bis zu Integralrechnung reichen (vgl. Anhang Kapitel 9.6). Wie man sieht kann dieses Spiel also sogar noch zur Maturavorbereitung genutzt werden. Ich habe das Spiel schon selbst öfters eingesetzt und weiß deshalb aus eigener Erfahrung, dass es auch von Lernenden der Oberstufe noch gerne gespielt wird, auch wenn man eventuell meinen könnte, es wäre ihnen zu „kindisch“. Auch wenn die gestellten Aufgaben zum Teil komplex sind, so wird durch das einfache Verbinden mittels Gummibändern ein spielerisches Element mit eingebracht, weshalb - meiner Erfahrung nach - die Lernenden lieber diese Übung gemacht

¹⁵² vgl. ebd.: S.85-88

¹⁵³ vgl. ebd.: S.85

haben, als die gleichen Aufgaben auf Papier zu lösen. Außerdem kann die Lösung auf der Rückseite durch Striche markiert werden, wodurch die Lernenden durch Umdrehen der Angabe kontrollieren können, ob ihre Gummibänder entlang der Lösungslinien verlaufen. Dies hat den Vorteil, dass die Lernenden selbstständig arbeiten können und sich selbst kontrollieren können.

Zum Erstellen dieses Spiels ist auch kein sonderlich großes Geschick gefordert. Ich selbst habe ein eigenes Modell zusammengebaut. Obwohl ich selbst leider keine übermäßige handwerkliche Begabung aufweise ist es mir gelungen, das Spiel zusammenzubauen ohne dabei Verletzungen oder Ähnliches davon zu tragen. Das Ergebnis ist in Abbildung 11 zu sehen.

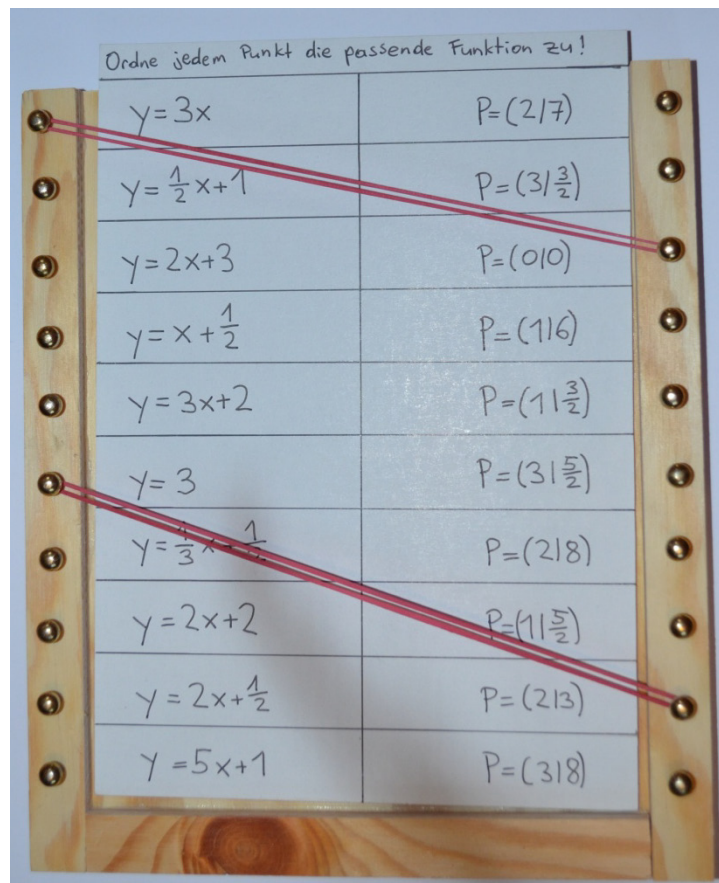


Abbildung 11: Nagelbrett-Zuordnungsspiel

Die ersetzbaren Angabebögen haben den Vorteil, dass dieses Spiel immer wieder um neue Themen erweitert werden kann. So kann man ein ganzes Repertoire an Angabebögen zusammenstellen und immer wieder benutzen. Das Erstellen solcher Bögen kostet hier weder viel Zeit, noch viel Geld. Der Zeitaufwand ist in etwa mit dem Erstellen eines normalen Arbeitsblattes zu vergleichen.

7.5 Rechenscheibe

Bei diesem Spiel kann das Kopfrechnen geübt werden. Es wird entweder alleine oder mit zwei Personen gespielt, welche sich gegenüber sitzen. Auf der Scheibe befindet sich auf einer Seite eine Rechnung und auf der Rückseite die passende Lösung. Wenn also eine Person eine Rechnung sieht, dann muss sie die Lösung sagen und die andere Person kontrolliert ob diese Lösung mit der Zahl auf ihrer Seite der Scheibe übereinstimmt. Nun wird die Scheibe weitergedreht, wobei nun eine Aufgabe auf der anderen Seite der Scheibe erscheint. Spielt man das Spiel alleine, so muss man die Scheibe zum Kontrollieren immer umdrehen und dann die Scheibe weiterdrehen um die nächste Aufgabe zu sehen.

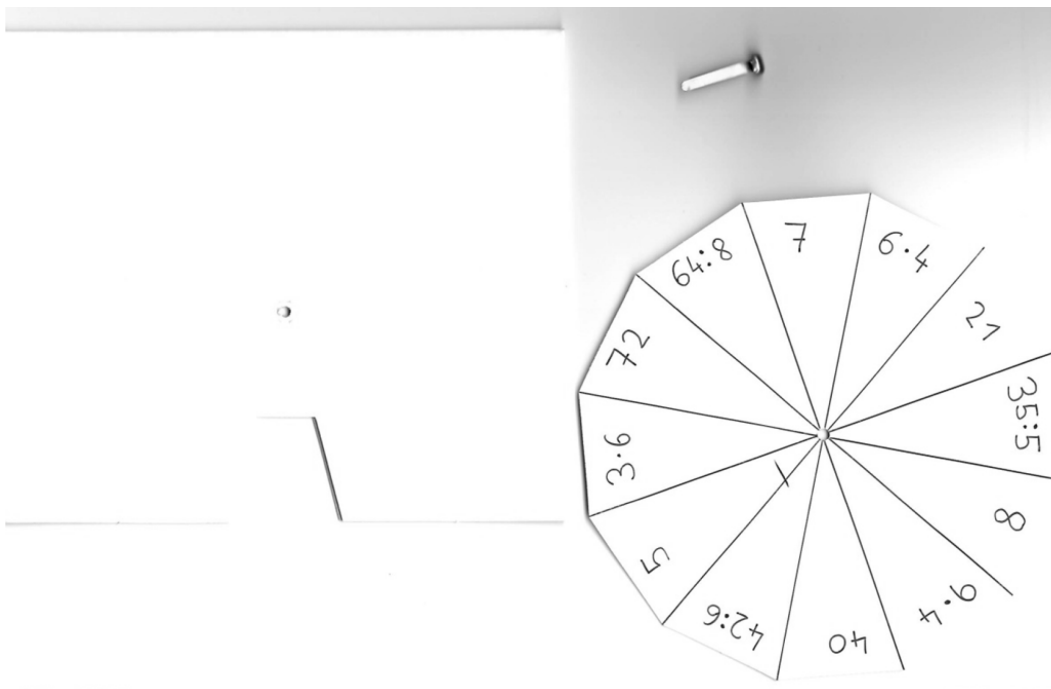


Abbildung 12: Rechenscheibe zum Thema Multiplikation und Division

Dieses Spiel ist eher für jüngere Kinder gedacht. Mögliche Gestaltungen der Rechenscheibe sind im Anhang zu finden (vgl. Kapitel 9.7).

7.6 Memory: Addition und Subtraktion von Brüchen

Dieses Spiel funktioniert wie das altbekannte Memory, nur dass die verschiedenen Kärtchen mit Additionen und Subtraktionen von Brüchen beschriftet sind, beziehungsweise mit deren Lösungen. Es werden also alle Karten mit der beschrifteten Seite nach unter auf einen Tisch gelegt und nun darf eine Person zwei Karten aufdecken. Passen die Rechnung und das Ergebnis zusammen, so darf die Person die Karte behalten, sonst werden die Karten wieder umgedreht und die andere Person ist an der Reihe. Es können Zusatzregeln ausgemacht werden, wie beispielweise folgende:

- Hat man ein Kartenpärchen gewonnen so darf man selbst noch ein weiteres Mal aufdecken (aber maximal bis zu 3 Kartenpärchen)
- Es dürfen keine Nebenrechnungen gemacht werden
- Es dürfen Nebenrechnungen gemacht werden (aber ohne Hinweise in Bezug auf die Lage der Kärtchen)

Eine mögliche Gestaltungsvorlage ist in Abbildung 13 zu sehen.

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$	2	$3\frac{2}{3} + \frac{4}{9}$	$4\frac{1}{9}$
$3\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
$1\frac{2}{5} + 2\frac{3}{5}$	4	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{5}{7} - \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{6}{7} + \frac{1}{3}$	$1\frac{4}{21}$	$5\frac{2}{3} - 4\frac{2}{7}$	$1\frac{8}{21}$
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$1\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

Abbildung 13: Mögliche Kärtchen für ein Bruch-Memory

7.7 Brettspiel

Dieses Spiel kann zu vielen verschiedenen Themen eingesetzt werden. In Wesentlichen handelt es sich einfach um ein Brettspiel. Landet man auf speziell markierten Feldern so müssen Aufgaben gelöst werden. Diese Aufgaben können je nach Bedarf aus verschiedenen Teilbereichen der Mathematik sein.

Das von mir gestaltete Spielbrett ist in Abbildung 14 dargestellt.

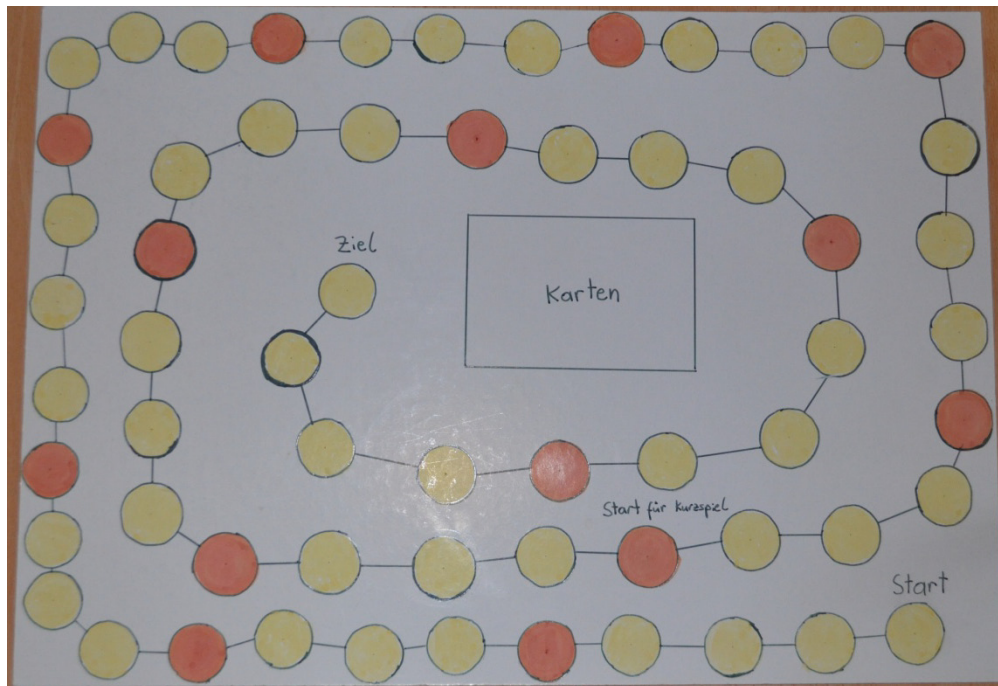


Abbildung 14: Spielbrett

Kommt man auf ein rotes Feld so müssen Aufgaben gelöst werden. Diese Aufgaben befinden sich auf Karten, welche in der Mitte des Spielbrettes bereitgestellt werden. Es gibt sowohl einen „normalen“ Start, sowie einen Start für ein Kurzspiel, welches sich besonders dann eignet, wenn die Aufgaben komplexer sind und mehr Zeit in Anspruch nehmen. Das Spiel kann durch eigene Regeln ergänzt werden. So kann zum Beispiel im Vorhinein ausgemacht werden, dass bei einem Sechser noch einmal gewürfelt wird oder nicht.

Außerdem muss festgelegt werden was passiert, wenn eine Aufgabe gelöst wird oder nicht. Man kann zum Beispiel bestimmen, dass man erst weiterfahren darf, wenn eine Aufgabe richtig gelöst wurde. Man würde in jeder Runde eine neue Karte bekommen, bis man eine Aufgabe lösen konnte. Diese Variante gefällt mir nicht so gut, da dadurch das Lösen der Aufgabe mit etwas Negativem verbunden wird, nämlich: Schafft man es nicht, steckt man fest.

Ich habe mich dafür entschieden für jede Karte Punkte zu vergeben, je nach Schwierigkeit der Aufgabe. Löst man die Aufgabe richtig, so darf man zusätzlich zu den bereits gefahrenen Feldern noch so viele Felder vorrücken, wie Punkte auf der Karte vermerkt sind. Das Spielfeld ist so aufgebaut, dass die Spezialfelder immer einen Abstand von 4 Feldern haben. Deshalb habe ich den Aufgaben nie 4 Punkte zugeordnet, sondern mehr oder weniger. Dadurch kann es nicht passieren, dass eine Person in einer Runde mehrere Aufgaben lösen muss und dadurch eventuell einen enormen Vorsprung herausarbeiten kann.

Zusätzlich zu dem Spielbrett und Aufgabenkarten benötigt man noch einen Würfel und Spielfiguren (vgl. Abbildung 15).



Abbildung 15: Spielmaterialien für das Brettspiel

8. Literaturverzeichnis

Artelt, Cordula, **Baumert**, Jürgen, **Julius-McElvany**, Nele, **Peschar**, Jules (2004): Das Lernen lernen. Voraussetzungen für lebensbegleitendes Lernen. Ergebnisse von PISA 2000. Abrufbar unter:

<http://www.oecd.org/edu/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33690500.pdf> (abgerufen am 04.02.2016, 12:29)

Busse, Gerd (2003): Spielen im Unterricht-Ein Dilemma. In: Dialogische Erziehung 3/2003. Oldenburg: Paulo Freire Verlag. Abrufbar unter: <http://www.freire.de/node/69> (abgerufen am 05.02.2016, 23:51)

Deci, Edward L. (1992): The Relation of Interest to the Motivation of Behavior: A Self-Determination Theory Perspective. In: **Renninger**, K. Ann (Hrsg.) (1992): The Role of Interest in Learning and Development, S.43-70. Hillsdale: Erlbaum

Deci, Edward L., **Ryan**, Richard M. (1993): Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. In: Zeitschrift für Pädagogik, 39.Jg. 1993, Nr.2, S.223-238. Landsberg: Beltz Verlag

Deci, Edward L., **Ryan**, Richard M. (2003): Intrinsic Motivation Inventory (IMI). Abrufbar unter: <http://www.selfdeterminationtheory.org/download/intrinsic-motivation-inventory-complete-packet/> (abgerufen am 07.02.2016, 19:16)

de Fermat, Pierre, **Pascal**, Blaise (1654): Briefwechsel zum Teilungsproblem. Abrufbar unter: https://www.uni-due.de/imperia/md/content/didmath/ag_jahnke/briefe_fp.pdf (zuletzt abgerufen am 29.02.2016, 12:11)

Etzold Heiko, **Petzschler** Ines (2011): Spiele zur Unterrichtsgestaltung. Mathematik. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr

Heckmann, Lars, **Vernay**, Rüdiger (2013): Spiele-spannend, entspannend und lehrreich. In: **Vernay**, Rüdiger (Hrsg.) (2013): Mathematik 5-10, 25, 2013: Und was Spielen wir heute? Spiele für den Mathematikunterricht, S.4f. Seelze: Friedrich Verlag

Mehlmann, Alexander (2007): Strategische Spiele für Einsteiger. Eine verspielt-formale Einführung in Methoden, Modelle und Anwendungen der Spieltheorie. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag

Merkens, Hans (2010): Unterricht. Eine Einführung. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften

Méziriac, Claude-Gaspard (1612): Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres.

Murayama, Kou, **Pekrun**, Reinhard, **Liechtenfeld**, Stephanie, **vom Hofe**, Rudolf (2013): Predict Long-Term Growth in Students' Mathematics Achievement: The Unique Contributions of Motivation and Cognitive Strategies. In: Child Development, July/August 2013, Volume 84, Number 4, Seiten 1475-1490

Schiefele, Ulrich, **Schreyer**, Inge (1994): Intrinsische Lernmotivation und Lernen: ein Überblick zu Ergebnissen der Forschung. In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 8, S. 1-13. Göttingen: Hogrefe Verlag

Taschner, Rudolf (2015): Die Mathematik des Daseins. Eine kurze Geschichte der Spieltheorie. München: Carl Hanser Verlag

Schefter, Thomas: Aphorismen, Zitate, Sprüche und Gedichte. Abrufbar unter www.aphorismen.de/suche?f_thema=Spiel%2C+Spielen (zuletzt abgerufen am 28.05.2016 um 18:15)

Scriba, Christoph J., **Schreiber**, Peter (2010): 5000 Jahre Geometrie. Geschichte Kulturen. Menschen. Berlin Heidelberg: Springer Verlag

Vernay, Rüdiger (1990): nach MUED (2001): Themengebundener Auszug aus den MUED-Materialien.“Spielen wir heute?“. Abrufbar unter: <http://www.mued.de/docs/k5/spiele.pdf> (zuletzt abgerufen am 07.02.2016, 19:22)

Vernay, Rüdiger (2013): Spiele im Unterricht-Tipps und Tricks. In: **Vernay**, Rüdiger (Hrsg.) (2013): Mathematik 5-10, 25, 2013: Und was Spielen wir heute? Spiele für den Mathematikunterricht, S.42f. Seelze: Friedrich Verlag

Wilde, Matthias, **Bätz**, Katrin, **Kovaleva**, Anastassiya, **Urhahne**, Detlef(2009): Überprüfung einer Kurzsкала intrinsischer Motivation (KIM). In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften, Jg. 15, 2009, S.31-45. Kiel: IPN

Wirths, Helmut (1999a): Die Geburt der Stochastik. In: **Strauß**, Ingeborg (Hrsg.) (1993): Stochastik in der Schule, Band 19 (1999), Heft 3, S.1-30. Dortmund: Verein zur Förderung des

schulischen Stochastikunterrichts e. V. Abrufbar unter: http://wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/1991-00_abstracts/Beitraege/1999-3_wirths.pdf (zuletzt abgerufen am 26.02.2016, 14:45)

Wirths, Helmut (1999b): Die Geburt der Stochastik-Historische Dokumente. Anhang zum Artikel. In: **Strauß**, Ingeborg (Hrsg.) (1999): Stochastik in der Schule, Band 19 (1993), Heft 3. Dortmund: Verein zur Förderung des schulischen Stochastikunterrichts e. V. Abrufbar unter: http://wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/1991-00_abstracts/Beitraege/1999-3_wirths_ahg.PDF (zuletzt abgerufen am 28.02.2016, 15:18)

Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (2011): Abrufbar unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2011_II_300/COO_2026_100_2_7_01382.pdf (zuletzt abgerufen am 22.02.2016, 11:25)

Lehrplan der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten (2015): Abrufbar unter https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2015_II_262/COO_2026_100_2_1_135479.pdf (zuletzt abgerufen am 22.02.2016, 11:25)

Internetressourcen:

Programm XWords: Abrufbar unter <https://www.xwords-generator.de/de> (zuletzt abgerufen am 14.04.2016 um 18:33)

Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte mir dennoch eine Urheberrechtsverletzung passiert sein, ersuche ich um Kontaktaufnahme.

9. Anhang

9.1 Motivationsbarometer mit Informationsblatt

Liebe Lernende,

Ich bitte euch in den nächsten Tagen auf den Motivationsbarometern auf den nächsten Seiten anzukreuzen, wie viel Spaß ihr an der Mathematik habt, beziehungsweise wie motiviert ihr seid, euch mit Mathematik zu beschäftigen. Für jeden Tag sind zwei Barometer anzukreuzen. Bitte schreibt auch jeweils das Datum in das dafür vorgesehene Feld.

Über jedem Barometer steht eine kurze Frage. Ich werde euch im nächsten Absatz die Fragen noch ausführlicher erklären, damit ihr eine genauere Vorstellung bekommt, was mit der Frage gemeint ist. Auf dem jeweiligen Barometer ist eine Skala von -5 bis 5, wobei -5 dafür steht, dass ihr überhaupt keinen Spaß dabei habt und 5 dafür steht, dass ihr sehr viel Spaß habt. Kreuzt ihr die Zahl 0 an, so bedeutet das, dass ihr neutral dazu eingestellt seid.

Nun komme ich zu der Bedeutung der Fragen:

Wie gerne möchtest du dich heute mit Mathematik beschäftigen, wenn du dadurch deine Note verbessern kannst?

Gemeint sind hier Handlungen, die als Mittel zum Zweck gemacht werden. Die Beschäftigung mit der Sache erfolgt hierbei also um positive Folgen, zum Beispiel gute Noten, herbeizuführen oder negative Folgen, zum Beispiel enttäuschte Eltern, zu vermeiden. Solche Handlungen wären zum Beispiel das Machen von Pflichtaufgaben, für eine Lernzielkontrolle oder für eine Schularbeit lernen und so weiter.

Wie gerne möchtest du dich heute mit Mathematik beschäftigen, ohne dass dies deine Note beeinflusst

Gemeint sind hier Handlungen, welche aus Interesse und Spaß an der Sache gemacht werden und nicht um die Anforderungen einer anderen Person, zum Beispiel der Lehrperson, zu erfüllen.

Solche Handlungen wären zum Beispiel aus Interesse, eine Dokumentation über mathematische Inhalte anschauen, an einem Quiz teilnehmen oder ein Quiz im Fernsehen anschauen, bei dem eventuell mathematische Fragen gestellt werden oder ein Spiel zu einem Thema der Mathematik spielen, ein Rätsel, welches sich mit mathematischen Inhalten beschäftigt oder logisches Denken fördert (z.B. Sudoku,...)

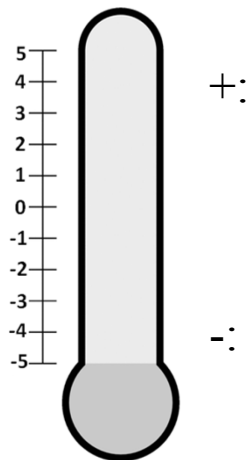
Außerdem ist neben dem Barometer ein + und ein – Zeichen. Hier können Gründe hingeschrieben werden, welche motivierend gewirkt haben (+) oder welche demotivierend gewirkt haben (-).

Ich danke euch vielmals für die Teilnahme und wünsche euch viel Vergnügen

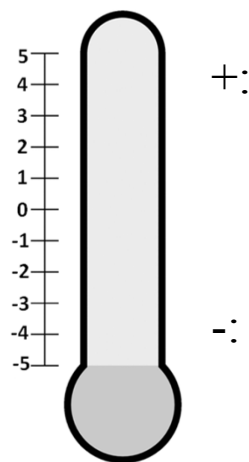
Ingrid

Datum:

Wie gerne möchtest du dich heute mit Mathematik beschäftigen, wenn du dadurch deine Note verbessern kannst?

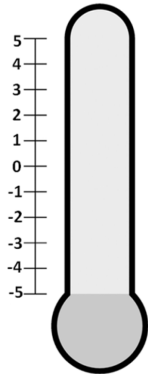


Wie gerne möchtest du dich heute mit Mathematik beschäftigen, ohne dass dies deine Note beeinflusst?

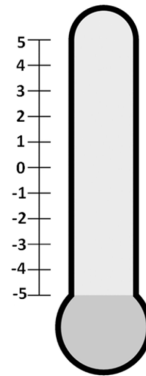


9.2 Fragebogen

Wie gerne möchtest du dich jetzt mit Mathematik beschäftigen, wenn du dadurch deine Note verbessern kannst?



Wie gerne möchtest du dich jetzt mit Mathematik beschäftigen, ohne dass dies deine Note beeinflusst?



Bitte gib bei jeder der nachfolgenden Aussagen an, wie sehr die Aussage auf dich zutrifft. Verwende dafür folgende Skala

1	2	3	4	5	6	7
trifft nicht			trifft etwas			trifft voll und
zu			zu			ganz zu

1. Ich habe mich beim Spielen sehr bemüht.
2. Ich würde das Spielen als eine sehr interessante Beschäftigung beschreiben.
3. Ich war beim Spielen sehr entspannt.
4. Im Laufe des Spiels fühlte ich mich kompetent.
5. Ich fand das Spielen langweilig.
6. Ich war während des Spielens sehr angespannt.
7. Das Spielen hat mir Spaß gemacht.
8. Es war mir wichtig, beim Spielen gut zu sein.
9. Während ich gespielt habe, habe ich daran gedacht wie sehr es mich erfreut.
10. Ich habe mich beim Spielen unter Druck gesetzt gefühlt.
11. Ich war während dem Spielen überhaupt nicht nervös.
12. Ich verlor während dem Spielen leicht die Aufmerksamkeit.
13. Ich habe nicht viel Energie in das Spielen gesteckt.
14. Ich denke, dass das Spielen unterhaltsam war.
15. Ich bin zufrieden mit meiner Leistung beim Spielen.
16. Ich hatte während des Spielens Angst.
17. Ich habe es sehr genossen zu spielen.

Nachfolgend findest du noch offene Fragen. Bitte beantworte diese in Stichworten beziehungsweise in Sätzen.

18. Was hat dir an der Spielstunde gut gefallen?

--

19. Was hat dir nicht so gut gefallen/was würdest du ändern?

--

20. Würdest du im Unterricht gerne öfters spielen? Warum/Warum nicht?

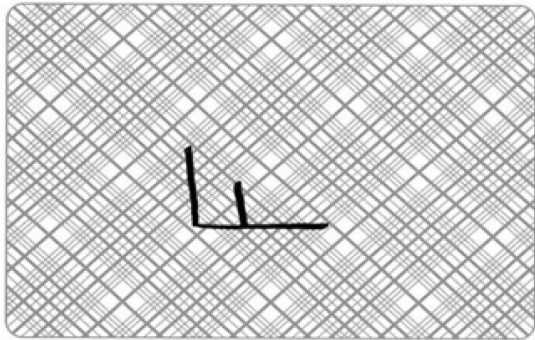
--

21. Was hast du aus diesem Spiel gelernt /was konntest du mitnehmen? (Hier kannst du auch nichtmathematische Sachen angeben, solange sie für dich von Bedeutung sind)

--

9.3 „MatheBombe“

Spielkarten zu „MatheBombe“



Formel der Oberfläche
eines Drehzylinders?

$$O = 2r^2\pi + 2\pi rh$$

Formel des Umfangs
eines Kreisrings?

$$u = 2(r_1 + r_2)\pi$$

Formel des Flächen-
inhalt eines Deltoids?

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

Formel der
Raumdiagonale eines
Würfels?

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$



Formel des
Flächeninhalts eines
Kreissektors?

$$A = \frac{r^2\pi}{360} \cdot \alpha$$

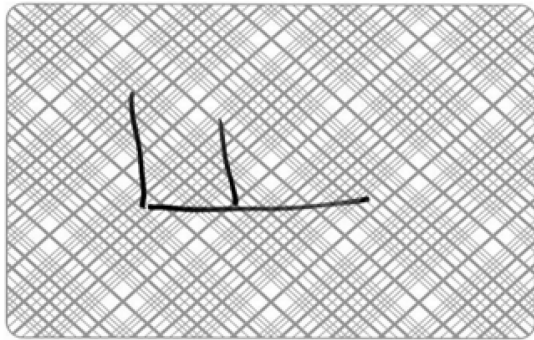
$$A = \frac{r \cdot b}{2}$$

Formel des Volumens
einer Kugel?

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

Formel der Oberfläche
einer quadratischen
Pyramide?

$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_a$$



FORMEL vom Umfang
eines Dreiecks?

$$U = a + b + c$$

Formel des Umfangs
eines Trapezes?

$$u = a + b + c + d$$

Formel des Umfangs
eines Kreises?

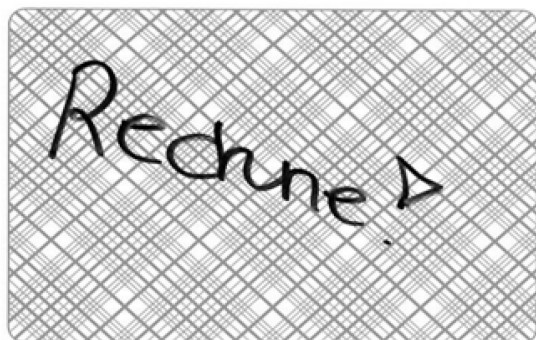
$$u = d\pi = 2r\pi$$

Standardabweichung "s"
bei "n" Werten $x_1, x_2, x_3 \dots$
 x_n mit Mittelwert $\bar{x}$:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Formel des Flächeninhalts
einer Raute?

$$A = a \cdot h = \frac{e \cdot f}{2}$$



$$\frac{5a}{4y} - \frac{2b}{8x} =$$

$$a) = \frac{5a - by}{4xy}$$

$$b) = \frac{5ax - by}{4xy}$$

$$c) \frac{5ax - by}{xy}$$

(9)

Was ist die Definitionsmenge

$$\frac{5x}{8y} \cdot \frac{16y^2}{25x^2}$$

$$a) y \neq 0$$

$$b) x \neq 0$$

$$c) y, x \neq 0$$

(7)

$$26489 \cdot 322154 =$$

$$a) 8533537306$$

$$b) 8534538316$$

$$c) 9533536206$$

(6)

Welches dieser Beispiele ist die Definitionsmenge dieses Bruches

$$\frac{4x^2}{5a} \cdot \frac{7y^2}{3a^2}$$

$$a) y \neq 0$$

$$b) a \neq a^2$$

$$c) a \neq 0$$

(7)

Volumen einer Kugel

$$\frac{4}{3} 16,9^3 \pi =$$

$$a) V \approx 20000$$

$$b) V \approx 20218,4$$

$$c) V \approx 20218,5$$

(7)

Dividiere.

$$\frac{u^2 v^2}{3r} : \frac{u \cdot v}{r^2}$$

$$a) \frac{ruv}{3}$$

$$b) \frac{ruv}{r}$$

$$c) \frac{rv}{3}$$

(6)

Wieviel dm hat der Durchmesser

$$r = 0,0009$$

$$a) d = 0,00018$$

$$b) d = 0,000018$$

$$c) d = 0,0018$$

(7)



Wieviele % sind $\frac{435}{1316}$

- a) $\sim 32\%$
- b) $\sim 33\%$
- c) $\sim 30\%$

(9)

$$\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2} =$$

- a) $= a+b$
- b) $= 1$
- c) $= a-b$

(9)

Verständnis:

Was ist schwerer 1kg Steine oder 1kg Federn

- a) Federn
- b) beides
- c) Steine

(9)

Wieviele % sind 0,1387455

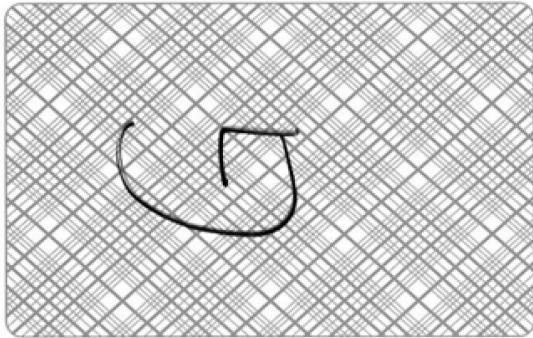
- a) 14%
- b) 0,13%
- c) 15%

(10)

Wieviele % sind $\frac{25}{40}$

- a) 60%
- b) 61%
- c) 63%

(10)



Wie nennt man das Gesetz, wo man bei einer Addition Klammern setzen darf, aber beim Subtrahieren nicht?

Assoziativgesetz

Worauf muss man bei einer Subtraktion achten, aber beim Addieren nicht?

Zahlen tauschen (kommutativgesetz); umspricht nicht

Welche Regel wurde missachtet?

$$a + 2b = c + 35 \quad | -a$$

$$a + 2b = c + 35 - a$$

Wähle eine Aussage! was muss hier beachtet werden

$$-250 \cdot 28 =$$

a) -7000

b) 7000

c) -700 „-“ = „+“ · „-“

Wichtig ist hier...?

$$(a+b) - (a^2+c)$$

Minus vor der Klammer!

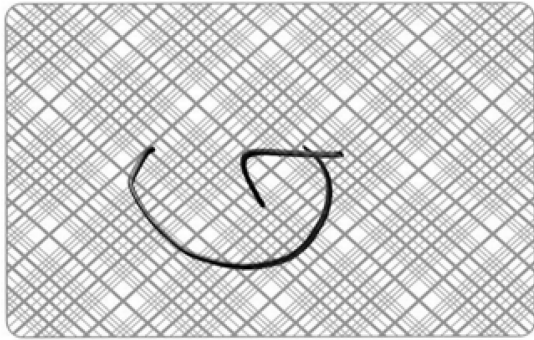
Was muss man hier beachten?

$$xyz^2 \cdot 2xyz^2$$

Hochzahlen!

Was wurde hier falsch gemacht?

$$1716 : 0 =$$



Welches Gesetz musst du hier anwenden?

$$5 + 4 \cdot 8 = 37$$

Punkt vor Strich

Welches Gesetz wurde angewendet?

$$7(5+3+2) =$$

$$= 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 2$$

Distributivgesetz

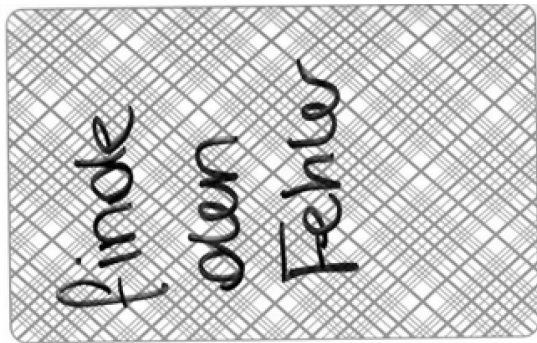
Welches Gesetz wurde hier nicht beachtet?

$$\frac{54}{0}$$

Welches Gesetz musst du hier anwenden?

$$(10 + 365) \cdot 3$$

Klammer!



3. binomische Formel:
 $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2$

$$\frac{2x}{3} : \frac{7}{y} = \frac{2}{2x} \cdot \frac{7}{y} = \frac{21}{2xy}$$

! Kehrwert

$$(7+4) \cdot 8 - 4 = 11 \cdot 4 = 44$$

8 zuerst mit der Klammer multiplizieren!

Volumen Kugel:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi^2$$

$\frac{4}{3} \pi r^3$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$\left(\frac{2}{xy} - \frac{25}{2} \right) : 36 =$$

$$= \frac{4 - 25xy}{2xy} \cdot \frac{36}{1}$$

! Kehrwert: $\frac{1}{36}$

$$\frac{5x}{6} + \frac{6xy}{2z} =$$

$$= \frac{10xz + 36x^2y}{12z}$$

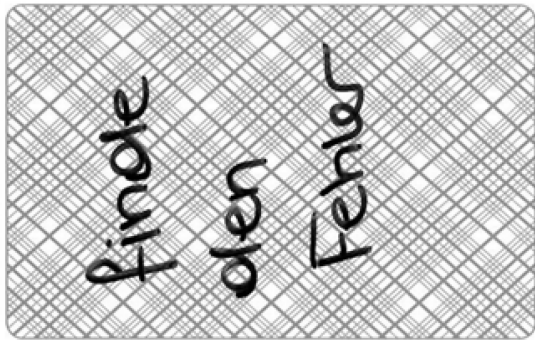
Richtig: $\frac{10xz + 36xy}{12z}$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2) =$$

$$= (a^2+b^2)(a^2+b^2) =$$

$$= a^2 + a^2b^2 + b^2a^2 + b^4$$

$$2. \text{ Teil: } (a^2+b^2)(a^2+b^2) : (a^2+b^2) = \dots$$



$$\frac{a^2-b^2}{a} : \frac{a-b}{b} = \frac{a^2-b^2}{a} \cdot \frac{b}{a-b} =$$

$$\frac{a-b \cdot b}{a} \quad \text{Richtig o. Falsch}$$

Falsch $\frac{a}{ab+b^2}$

$$5 + 75 \cdot 80 \cdot 10 \cdot 216 - 35 =$$

$$= 13\,823\,965$$

12 959 970

$$7 \cdot (a+b+c-3) =$$

$$= 7abc - 3 =$$

$$= 4abc$$

Richtig: $7a + 7b + 7c - 21$

$$\frac{5x^2 - a}{36x^2 - 16r} =$$

$$\frac{5-a}{36-16r}$$

Kürzung

$$\frac{6}{a} : \frac{b}{a^2} =$$

$$= \frac{6}{a} \cdot \frac{a^2}{b} =$$

$$= 6 \cdot \frac{a}{b}$$

Richtig: $\frac{6}{a} \cdot \frac{a^2}{b} = 6 \cdot \frac{a}{b}$

Hallo, 15.02.2016
ich heiße Selina, ich bin 13 Jahre alt,
und gehe derzeit in die 4. Klasse.

Hallo! 20.02.2016
Heute habe ich darüber nachgedacht, was
das Thema für mein Spiel sein soll.
Ich habe an den Satz des Pythagoras
gedacht, da wir den letztes im Unterricht
durch genommen haben, aber irgendwie fand
ich das dann doch nicht so toll. Meine
Idee war, dass man Kärtchen bekommt
mit Δ darauf, und man muss dann bestimmen
Ob man sie mit dem Satz des Pythagoras
berechnen kann, aber das war mir zu

langweilig und einfach. {+2}

Hallo!

25. Februar 2016

Heute ist mir aufgefallen (obwohl ich nicht so
gespielt habe), dass ziemlich viele Spiele
eine Strategie haben, die möglicherweise
auf mathematischem Wissen basiert. Ich weiß nicht
warum, aber es kam mir einfach in den Sinn. ☺
Vielleicht wird mein Spiel so ähnlich wie
Monopoly oder Uno... Ich weiß es noch nicht.
Für ein Thema habe ich mich auch noch nicht
entschieden. Entweder kann ich mich nicht
entscheiden oder ich warte bis wir im
Unterricht etwas total interessantes machen.

{+3}

Hallo! 01. März 2016

Ich hatte heute eine, glaube ich, tolle
Idee. Ich hab an ein Spiel namens
„Trivial Pursuit“. Es gibt Felder mit
verschiedenen Farben, jede Farbe hat
ein eigenes Thema, zu dem man Fragen
gestellt bekommt. So in etwa werde
auch ich mein Spiel aufbauen, aber noch
nicht fix. {+5!}

Hallo!

18. März 2016

Gestern, bevor ich schlafen gegangen
bin, musste ich irgendwie ^{an das Spiel} denken, und da
ist mir eingefallen, dass ich vor ca.
1 Woche eine Idee hatte die Bürfel
anders zu gestalten. Nämlich:

Dass man statt Zahlen ganz einfach
Wurzeln oder so schreibt. Zum Beispiel:

$$\sqrt{36} = 6 \text{ - Felder nach vorne.}$$

Ich bin mir aber noch nicht sicher
ob ich diese Idee auch umsetze.

$\{+2\}$

Hallo! 27.03.2016

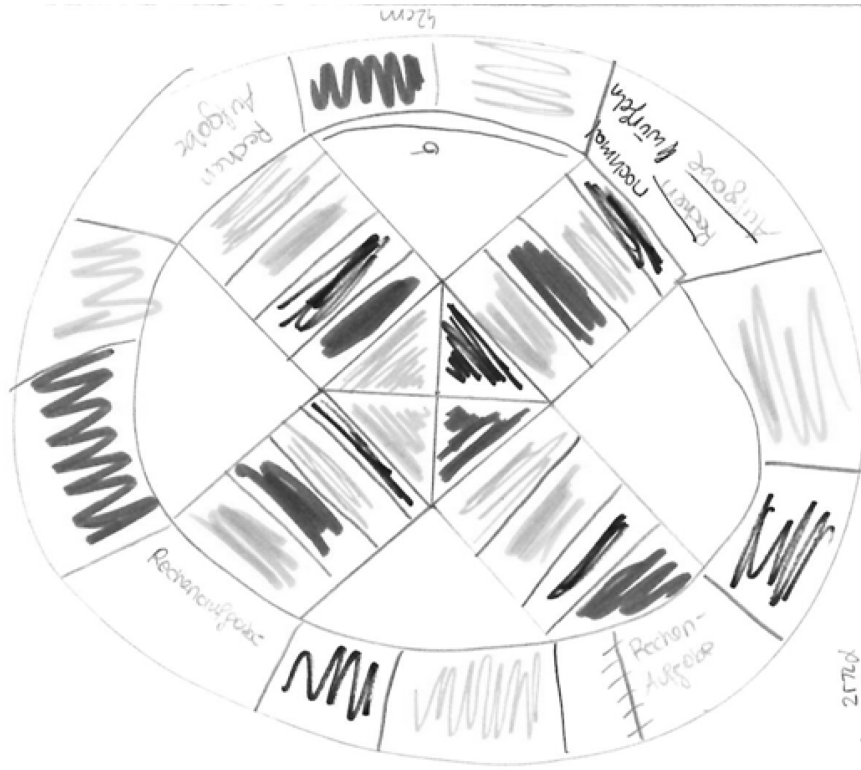
Heute werde ich mich um das
Spielbrett kümmern. Ich habe ein
paar Skizzen angefertigt:

Ich denke, dass ich die
nehmen werde. $\{+4\}$

Am Anfang war ich unsicher, ob dann habe ich
mehreres ausprobiert, so bin ich dann dazu gekommen

30cm

$r = 86cm$



$$b = \frac{2770}{360} \cdot 90$$

$$b = \frac{86 \cdot \pi \cdot 90}{180}$$

Hallo >

03. April 2016

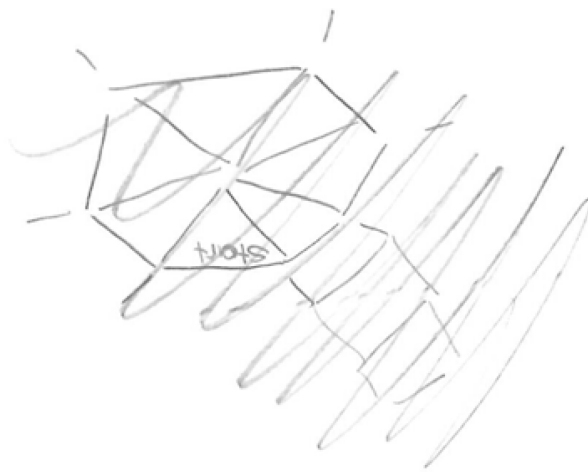
Heute habe ich mich um die Themen, meines Spieles gekümmert.

~~Meine~~ Farben:

1. Farbe = Formeln aller Art
2. Farbe = verschiedene Gesetze
3. Farbe = falsche Aufgaben
4. Farbe = Rechenbeispiele

„da mir irgendwie nicht mehr wirklich Themen eingefallen sind, habe ich dann mal dich gefragt. Hat mir sehr geholfen“

Ich war schon etwas am verzweifeln, ich wollte nicht, dass es daran scheitert. Dann habe ich auch Freundinnen gefragt, die zwar auch keine guten Ideen hatten. ☹



Hallo!

11

11. April 2016

4 Heute habe ich die Karteikarten für das Spiel bekommen. Auf ein paar Karten habe ich schon Aufgaben geschrieben. Das habe ich auf jedenfall unterschätzt. Es war sehr anstrengend und ich habe gerade mal 5 Karten gemacht. Vielleicht lag es auch daran, dass ich schon mega müde war. Abgesehen davon dass ich müde war, ging es mir eigentlich ziemlich gut.

(Habe auf eine halbe - 1,5 Punkte, Yay!)

E3

Hallo!

15. April 2016

Heute habe ich überlegt wie ich das System mit den Punkten mache. Wahrscheinlich einfach mit kleinen Steinchen oder so, weil wir heute

die E-SA zurück bekommen haben, und ich eine 3 habe, war ich nicht übertrieben gut drauf. Außerdem kam dann auch noch mein Referat dazu.

E-1

Hallo!

17. April 2016

Im Moment habe ich das Gefühl ich werde nie fertig. Ich bin drauf gekommen, dass

ich noch eine Anleitung schreiben muss. Daraan

habe ich gar nicht gedacht. Jetzt ist es etwas

stressig, auch in der Schule. Das nervt voll,

immer irgendwo ein Test und so. Freue mich

aber schon voll auf das Ergebnis (und die

Ferien) E-3

Hallo!

24. April 2016

Heute habe ich ~~blitz~~ das Spielbrett gemacht.

Ich denke es ist ganz gut geworden, da es mir auch

zwei sehr gute Mitschülerinnen bestätigt haben.

Es hat mir ziemlich viel Spaß gemacht. Außerdem

konnte ich einige mathematische Formeln verwenden.

Jetzt habe ich diese schon einmal außerhalb

der Schule angewendet, vielleicht doch nicht

soooo... unnötig wie ich dachte. 

Karten:

↓

Formeln:

Frage mit Antwortmöglichkeiten. Eine Antwort

möglich

Gesetze: (→ Dabei hat mir eine Freundin geholfen)

Punkt vor Strich, Klammern beachten, nicht

durch 0 dividieren, im Nenner darf keine

0 stehen, Hochzahlen dürfen nicht multipliziert

werden, Vorzeichen: $- \cdot - = +$ $+ \cdot + = +$ $- \cdot + = -$,

Gleichung links u. rechts dasselbe,

Hallo!

1. Mai 2016

Ich habe heute die restlichen Karten fertig

gemacht, und werde gleich die Spielanleitung

und die Spielsteine machen. Dann noch

schnell die Meinung zu allem, und dann ist

es vollbracht. ENDLICH! Ich mach mich

auch schon an die Arbeit. 

ANLEITUNG:

Alter: 12-18 (oder älter :))

Anzahl: 2-4 Spieler

In dem Spiel "Mathe^{Bomb}" geht es darum, so viele Steindrehen wie möglich zu sammeln. Der jüngste Spieler beginnt, zum Würfeln. Die gewürfelte Zahl, ist die Anzahl von Spielfeldern die man befahren darf. Die Farbe auf der man stehen geblieben ist, hat eine bestimmte Kategorie, zu der man eine Karte ziehen muss, die dann von dem jeweilig linkem Spieler vorgelesen wird. **TIPP: Lege euch Zettel & Stift parat.**

Wird die Aufgabe richtig gelöst, erhält man einen Spielstein. Solange Karten da sind wird

gespielt. Der, der am Ende ~~der~~ ^{die} meisten

Steine hat, gewinnt.

Nebenrechnungen nur im schlimmsten Notfall! :)

Die Richtung in die man fährt, darf man sich aussuchen.

Viel Spaß beim Spielen, wünscht Selina! :)

54 Spielsteine

4 Würfel

4 Figuren

G = Gesetz ; F = Formeln

Entföllig fertig 1 Nov

Während des Spiels habe ich mich relativ gut geföhlt. Am Anfang war ich so überzeugt von allem, aber kurze Zeit habe ich daran gezweifelt. wobei ich jetzt Überglücklich bin, dass ich alles geschafft habe. Bei einigen Karten wurde mir von sehr lieben Klassenkameradinnen geholfen. Das Gestalten hat mir besonders gut gefallen, das Karten Schreiben war etwas anstrengend. Ich hoffe es ist mir gut gelungen. Ich würde das sofort wieder machen. ☺

Insgesamt: +3

9.4 Allgemeines Tabu



Tabu

Allgemeine Anleitungen

Kopiervorlage 1/4

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Tabu Gleichung Gleichheitszeichen Variable Lösung	Tabu Kongruenz deckungsgleich Kongruenzsatz Dreiecke	Tabu Hektar Fläche Ar Quadrat
Tabu parallele Geraden Linien senkrecht Abstand	Tabu Doppelbruch Zähler zwei Nenner	Tabu Koordinaten-system Achsen x y
Tabu Viereck drei Seiten Strecken	Tabu Symmetrie Spiegelung Drehung Verschiebung	Tabu Winkel Schenkel Scheitel Strahl

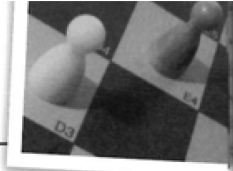
© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-8346-0804-8 | www.verlagruhr.de



8 Spiele zur Unterrichtsgestaltung

Abbildung 16: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.8

Tabu



Kopiervorlage 2/4

Allgemeine Anleitungen

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

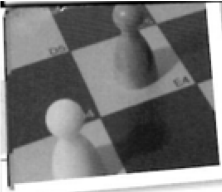
Tabu Null Division nichts minus	Tabu Produkt Faktor mal multiplizieren	Tabu Volumen Rauminhalt Kubik Liter
Tabu Prozent Hunderterbruch Hundertstel Promille	Tabu negative Zahlen Minuszahlen kleiner Null positiv	Tabu Proportionalität direkt indirekt Zuordnung
Tabu Brüche gemein Zähler Nenner	Tabu Primzahl sich selbst Eins dividieren	Tabu Kehrwert reziprok Bruch Nenner

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-5346-0804-8 | www.verlaganruhr.de

Mathematik



Abbildung 17: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.9



Tabu

Allgemeine Anleitungen

Kopiervorlage 3/4

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Tabu Betrag Abstand negativ positiv	Tabu Satz des Pythagoras rechtwinkliges Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ Kathete	Tabu Kommutativgesetz vertauschen Addition Multiplikation
Tabu Würfel Spiel Augen Sechs	Tabu Umkreis Dreieck Mittelpunkt schneiden	Tabu Lineares Gleichungssystem 2 Gleichungen Additionsverfahren Schnittpunkt
Tabu Polstelle Definitionsbereich Null unstetig	Tabu Pyramidenstumpf abgeschnitten Spitze waagrecht	Tabu Grenzwert unendlich Funktion x-Achse

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-8346-0804-8 | www.verlaganr.de

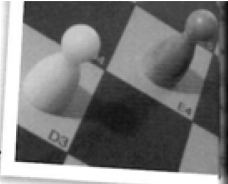


10

Spiele zur Unterrichtsgestaltung

Abbildung 18: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.10

Tabu



Kopiervorlage 4/4

Allgemeine Anleitungen

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Tabu Abszisse Koordinatensystem x-Achse Ordinate	Tabu Zehnerpotenz hoch Basis Exponent	Tabu Mantelfläche rund Körper abrollen
Tabu arithmetisches Mittel Durchschnitt Statistik Mittelwert	Tabu Baum-diagramm Stochastik Pfad Wahrscheinlichkeit	Tabu Schrägbild Zeichnung Körper 45°-Winkel
Tabu Scheitelpunkt Parabel Maximum Minimum	Tabu Median Statistik Mitte zentral	Tabu Parabel Graph quadratische Funktion Scheitelpunkt

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-9346-0804-8 | www.verlagan-der-ruhr.de

Mathematik

11

Abbildung 19: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.11

9.5 Funktionen-Tabu



Funktionen-Tabu

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Kopiervorlage 1/3

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Funktionen-Tabu • Graph Abbildung Kurve darstellen Koordinatensystem	Funktionen-Tabu • Funktionswert Argument y Punkt x	Funktionen-Tabu • Wertetabelle Funktion Graph Zahlen darstellen
Funktionen-Tabu • Definitionsbereich x Werte erlaubt einsetzen	Funktionen-Tabu • Wertebereich y Funktion einsetzen x	Funktionen-Tabu • Schnittpunkt Funktion Stelle Achse gleich
Funktionen-Tabu • Nullstelle Achse Graph schneiden Funktionswert	Funktionen-Tabu • Monotonie wachsen fallen steil Anstieg	Funktionen-Tabu • monoton fallend wachsen runter Wert abnehmen

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-8346-0804-8 | www.verlagruhr.de



86 Spiele zur Unterrichtsgestaltung

Abbildung 20: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.86

Funktionen-Tabu



Kopiervorlage 2/3

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Funktionen-Tabu • Koordinaten-system Graph Punkte zeichnen Funktion	Funktionen-Tabu • Extremum Maximum Minimum groß klein	Funktionen-Tabu • Steigung Änderung Differenzenquotient m Abstand
Funktionen-Tabu • globales Maximum Minimum lokal Funktion groß	Funktionen-Tabu • lokales Minimum Maximum global Wert klein	Funktionen-Tabu • Exponential-funktion Wachstum steil Potenz Kurve
Funktionen-Tabu • Parabel Quadrat Graph sprachliches Bild Bogen	Funktionen-Tabu • gerade Funktion symmetrisch spiegeln minus Achse	Funktionen-Tabu • Symmetrie Punkt spiegeln Achse Funktion

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-8346-0804-8 | www.verlagruhr.de

Mathematik

87

Abbildung 21: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.87



Funktionen-Tabu

Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Kopiervorlage 3/3

1-mal entlang der durchgezogenen Linien ausschneiden und laminieren.

Funktionen-Tabu •• Tangente Sekante berühren Anstieg Kreis	Funktionen-Tabu •• Ableitung differenzieren Tangente 1. 2.	Funktionen-Tabu •• Sekante Tangente schneiden Funktion Kreis
Funktionen-Tabu •• Asymptote annähern Polstelle Grenzwert Gerade	Funktionen-Tabu •• Wendestelle Funktion Ableitung links Krümmung	Funktionen-Tabu •• Differenzial- rechnung Ableitung Tangente Kurvendiskussion Funktion
Funktionen-Tabu •• unendlich fallen Grenzwert groß klein	Funktionen-Tabu •• 2. Ableitung differenzieren Extremstellen Wendestelle Maximum	Funktionen-Tabu •• Eulersche Zahl zwei Exponent e unendlich

© Verlag an der Ruhr | Autoren: Heiko Etzold, Ines Petzschler | ISBN 978-3-8346-0804-8 | www.verlagruhr.de



88

Spiele zur Unterrichtsgestaltung

Abbildung 22: Kopiervorlage für ein allgemeines Tabu. Copyright: „Spiele zur Unterrichtsgestaltung – Mathematik“ von Heiko Etzold und Ines Petzschler © Verlag an der Ruhr 2011. S.88

9.6 Angaben für das Nagelbrett-Zuordnungsspiel

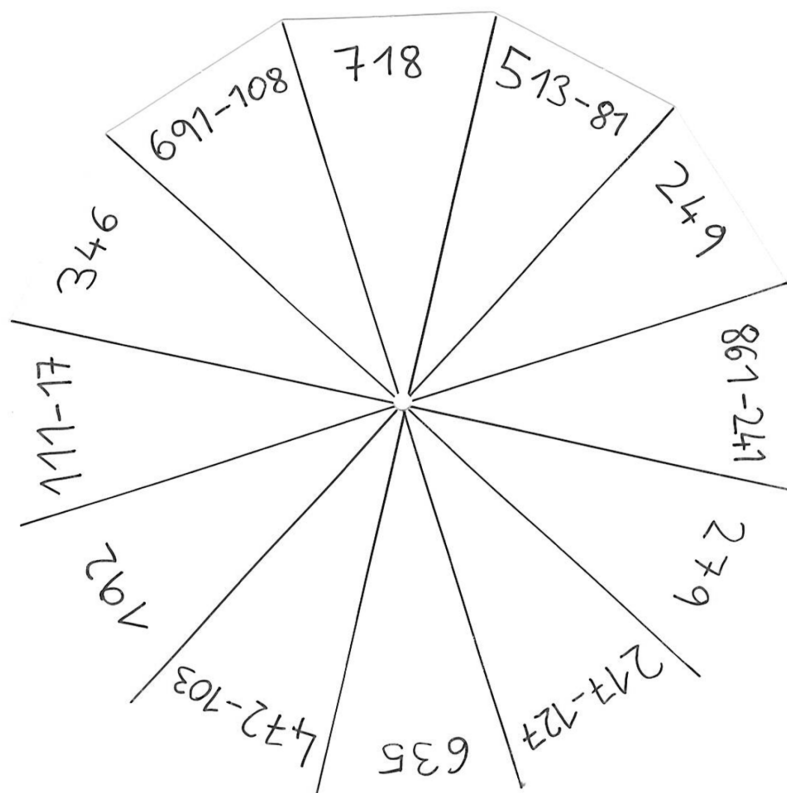
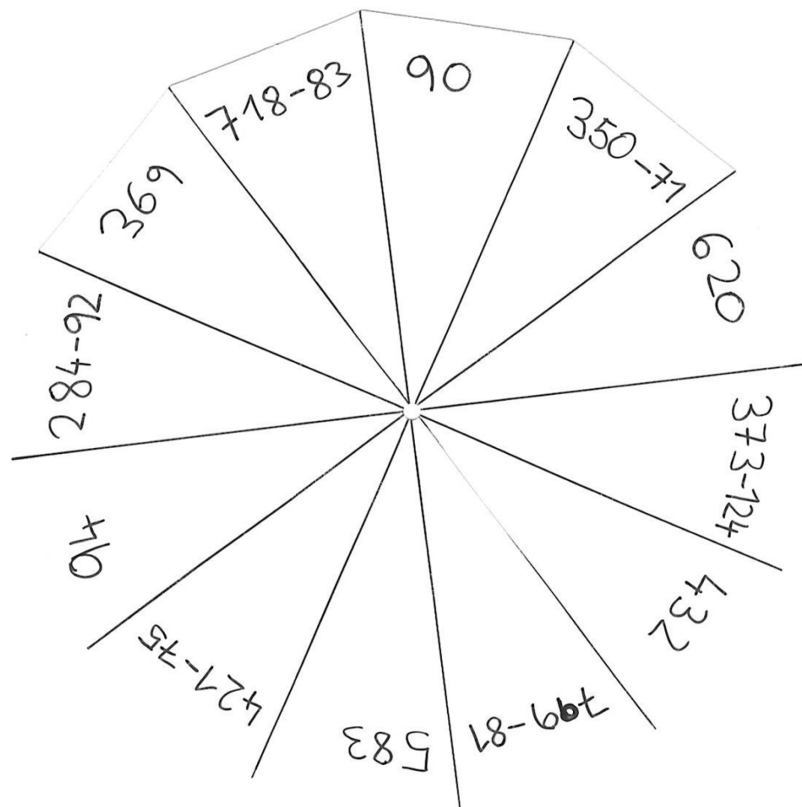
Welche Funktion hat welche Eigenschaft?

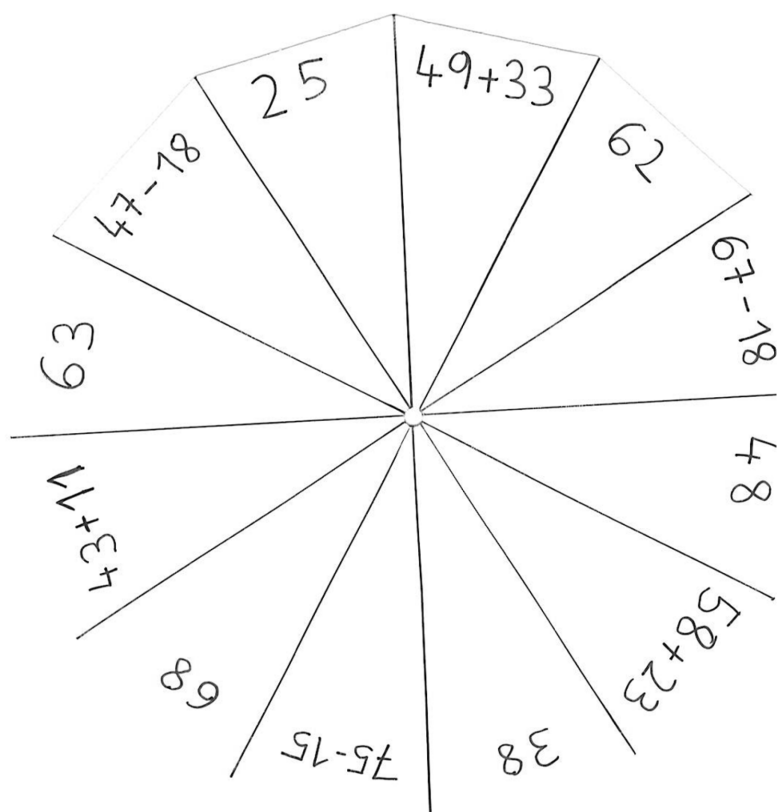
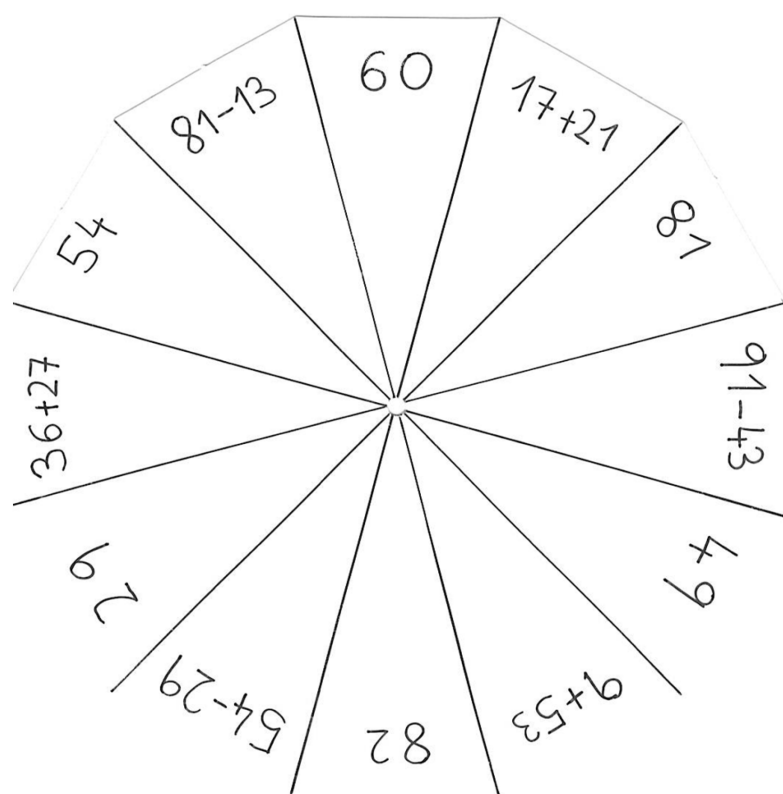
$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$	Wendetangente: W: $y = x - 1$
$y = \frac{1}{32}x^6 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2$	Extrempunkt: E = (0 0) Leitung! Hier mehrere Zuordnungen möglich
$y = \frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{8}x + \frac{19}{8}$	Nullstelle: N = (-4 0)
$y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 + 3x^2$	Nullstelle: N = (1 0)
$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{9}{4}$	Wendetangente: W: $y = 2$
$y = -\frac{1}{27}x^5 + \frac{5}{9}x^3$	Extrempunkt: E = (3 6)
$y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x - 5$	Nullstelle: N = (3 0)
$y = -\frac{1}{24}x^4 + x^2$	Wendepunkt: W = $(2 \frac{10}{3})$
$y = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 5$	Nullstelle: N = (-1 0)
$y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$	Wendepunkt: W = (2 2,5)

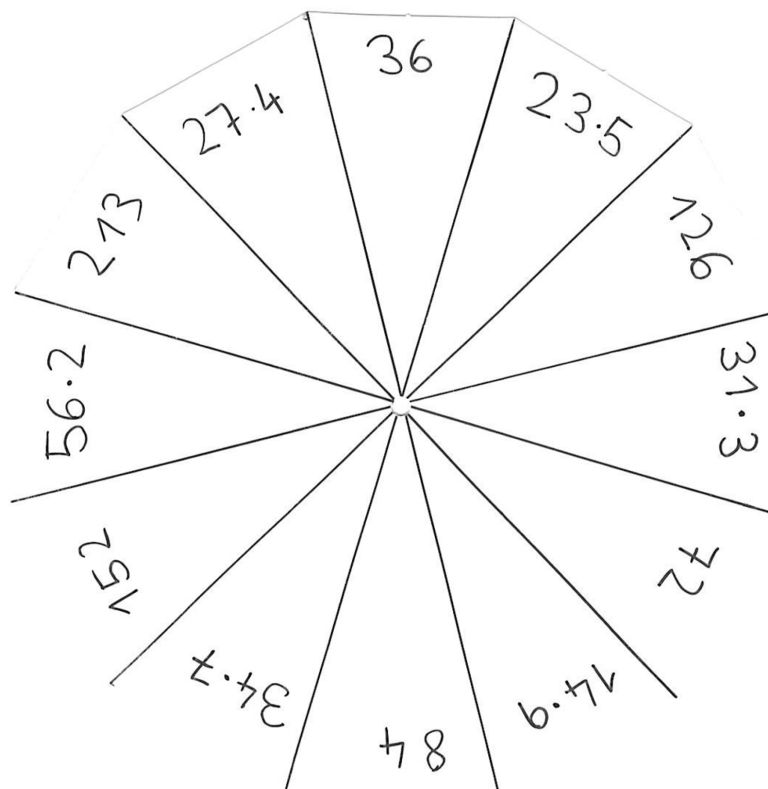
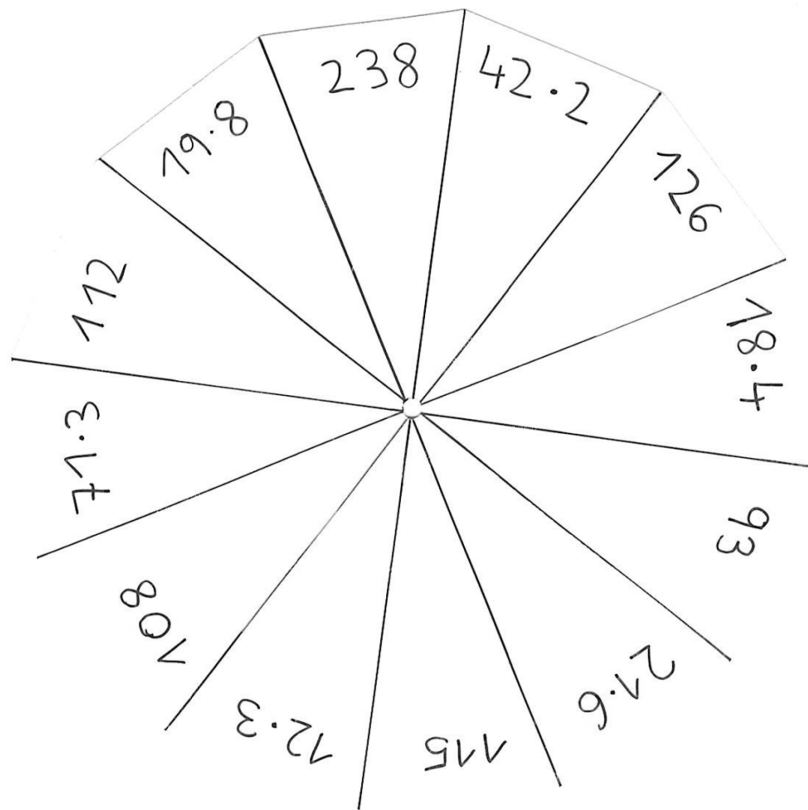
Ordne jedem Punkt die passende Funktion zu!

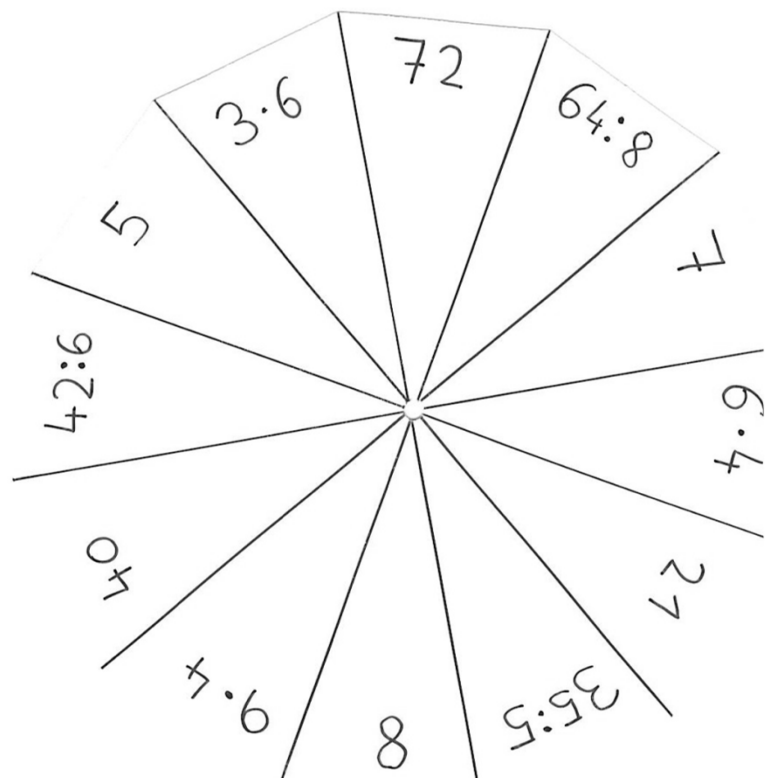
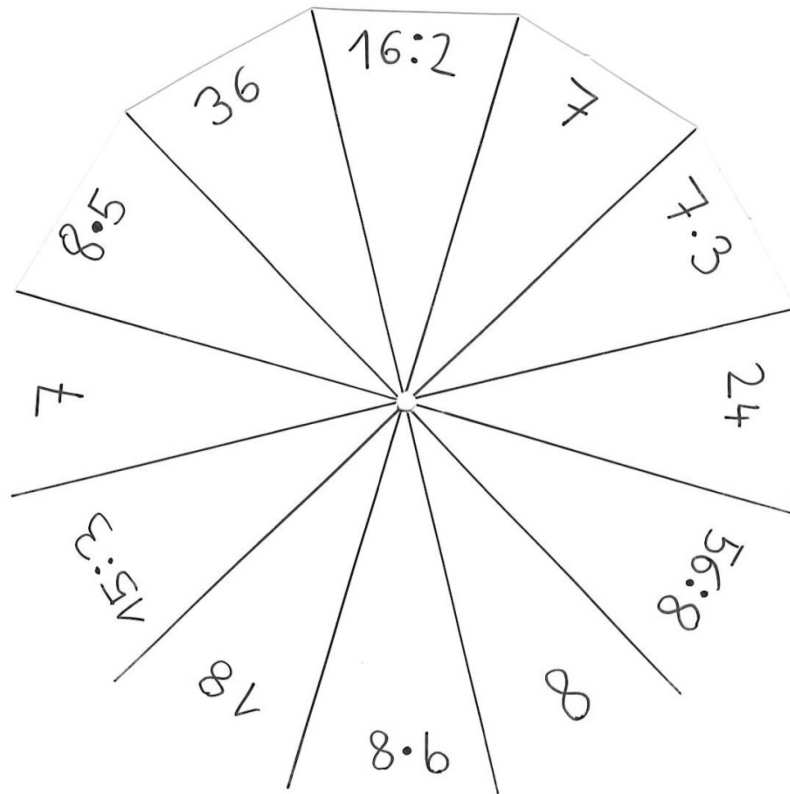
$y = 3x$	$P = (2 7)$
$y = \frac{1}{2}x + 1$	$P = (3 \frac{3}{2})$
$y = 2x + 3$	$P = (0 0)$
$y = x + \frac{1}{2}$	$P = (1 6)$
$y = 3x + 2$	$P = (1 \frac{3}{2})$
$y = 3$	$P = (3 \frac{5}{2})$
$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$	$P = (2 8)$
$y = 2x + 2$	$P = (1 \frac{5}{2})$
$y = 2x + \frac{1}{2}$	$P = (2 3)$
$y = 5x + 1$	$P = (3 8)$

9.7 Rechenscheibe









9.8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in einen theoretischen und einen praktischen Teil.

Im theoretischen Teil wird der Einfluss von intrinsischer Motivation auf die Leistung von Lernenden beschrieben. Hierfür werden unterschiedliche Studien herangezogen, welche sich unter anderem mit dem langfristigen Einfluss der intrinsischen Lernmotivation beschäftigen.

Im Anschluss wird erläutert, welche Rolle das Spiel im Unterricht einnehmen kann und welche Einsatzmöglichkeiten bestehen. Außerdem wird die Bedeutung von Spielen in der Geschichte der Mathematik angeschnitten.

Im Rahmen des praktischen Teils dieser Diplomarbeit wird eine Untersuchung durchgeführt, welche den Einfluss von Mathematikspielen auf die intrinsische Motivation von Lernenden untersucht. Hierfür spielten 12 Lernende in 3 Gruppen mathematische Spiele und beantworteten im Anschluss daran einen Fragebogen. Die Auswertung der Fragebögen wird auf das von DECI und RYAN entwickelte "Intrinsic Motivation Inventory" gestützt. Durch diese Methode können die für intrinsische Motivation wichtigen Faktoren Interesse/Freude, Wahrgenommene Kompetenz, Aufwand und Druck/Anspannung „gemessen“ werden. Darüberhinaus wird den Lernenden durch offene Fragen die Möglichkeit geboten, Verbesserungsvorschläge anzugeben beziehungsweise die Stärken der Spiele hervorzuheben. Alle Ergebnisse werden in der Arbeit detailliert dargelegt und diskutiert.

Des Weiteren wird ein Spiel beschrieben, welches von einer Schülerin entwickelt wurde und auch ein Kreuzworträtsel eines Schülers wird analysiert. Beide Tätigkeiten sollen die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Spielen im Unterricht demonstrieren. Die „Endprodukte“ sind in der Arbeit dargestellt und werden analysiert. Außerdem hat die Schülerin während der Entwicklung des Spiels ein „Motivationstagebuch“ geführt. Dies wird in der Arbeit ebenfalls diskutiert und liefert interessante Einblicke in den Entwicklungsprozess.

Zuletzt wird noch eine kleine Sammlung an mathematischen Spielen angeführt. Diese Sammlung umfasst Spiele aus der fachdidaktischen Literatur sowie eigens von mir erfundene Spiele.

9.9 Abstract

This work is separated into a theoretical and a practical part.

The theoretical part is concerned with the influence of intrinsic motivation on the performance of learners. For this, multiple studies are used that, among other things, deal with the influence of intrinsic motivation on long-term growth in students' achievement.

The following sections analyze the role games can occupy in the classroom. In addition, the importance of games in the history of mathematics is described.

In the practical part there is a study on the influence of mathematical games on the intrinsic motivation of learners. More specifically, 12 learners in 3 groups played mathematical games and then answered a questionnaire. The analysis of the questionnaire was developed according to the method laid out by DECI and RYAN, "Intrinsic Motivation Inventory". Using this method, it is possible to measure important factors for intrinsic motivation, such as interest/enjoyment, perceived competence, effort/importance and pressure/tension. Furthermore, the learners were offered the possibility to report on potential improvements as well as the strengths of the games. All results are presented and discussed in detail in the thesis.

Furthermore, a game and a crossword puzzle, which were created by students, are presented. The results are presented and analyzed in this thesis. Additionally, a student wrote a "motivation-diary" during the development of the game. This diary is discussed as well and it offers interesting insights in the development process.

The last section gives an overview of different mathematical games that can be found in the literature or were invented for this thesis.