



universität  
wien

# DIPLOMARBEIT / DIPLOMA THESIS

Titel der Diplomarbeit / Title of the Diploma Thesis

„Mathematik als Spiel, bei dem jeder/jede  
gewinnt“

verfasst von / submitted by

Marie Sophie Sánchez Baltanás

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2016 / Vienna, 2016

Studienkennzahl lt. Studienblatt /  
degree programme code as it appears on  
the student record sheet:

A 190 406 353

Studienrichtung lt. Studienblatt /  
degree programme as it appears on  
the student record sheet:

Lehramtsstudium UF Mathematik UF Spanisch

Betreut von / Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith



## ZUSAMMENFASSUNG

Diese Diplomarbeit zeigt die Verbindung von und Beziehung zwischen Spielen und Mathematik auf. Es werden die mathematischen Aspekte von verschiedenen Spielen behandelt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausgewählte Spiele des „Hauses der Mathematik“ in Wien bearbeitet. Dabei werden folgende Titel genauer untersucht: der *Turm von Hanoi*, das *Nim*-Spiel, der *Vier-Farben-Satz* und das *Hex*-Spiel. Neben der Spielanleitung werden die jeweiligen historischen Hintergründe dargestellt. Der Fokus liegt auf der mathematischen Ebene. Vorwiegend werden die jeweiligen bestmöglichen Strategien analysiert und ihre mathematische Herleitung diskutiert.

Im ersten Teil der Arbeit wird der *Turm von Hanoi* betrachtet. Im zweiten werden das *Nim*-Spiel behandelt und die dazugehörige Siegesstrategie untersucht. Der darauffolgende Teil analysiert das *Vier-Farben-Problem*, wobei hauptsächlich dessen mathematisch-historische Entstehung betrachtet wird. Der vierte Teil widmet sich der Untersuchung des durch John Nash bekannt geworden *Hex*-Spiels.

Im Anschluss finden sich Hinweise für eine didaktische Anwendung dieser Spiele in Bezug auf den Mathematikunterricht.



## ABSTRACT

In the course of the paper at hand, the relationship between mathematics and selected games is analysed and discussed. The following games and their mathematical backgrounds are investigated: the *Tower of Hanoi*, the *Nim* game, the *Four-Color-Theorem* and the *Hex* game.

These games are part of a collection at „Haus der Mathematik“ (house of mathematics) in Vienna.

Next to the games' instructions, the respective historical backgrounds are analysed. However, the focus mainly lies on the mathematical aspects. Therefore, the game winning strategies and the related mathematical theory make up an important part.

The first part of this thesis focuses on the analysis of the *Tower of Hanoi*. The second part deals with the game *Nim* and examines its strategy. The third part discusses the *Four-Color-Theorem* and highlights its origin. The fourth section is dedicated to the investigation of the game *Hex*, which is mainly known through John Nash.

The last part presents a variety of didactical applications of these games in relation to teaching methods of mathematics.



## EIDDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre hiermit an Eides Statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Diplomarbeit eingereicht.

---

Datum

---

Unterschrift



## AGRADECIMIENTO

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo. Estas palabras van por tanto dedicadas a mis seres queridos que tanto me han apoyado.

El agradecimiento más profundo va para mi familia. Le doy las gracias a mis padres, Elena, y en especial a mi padre, Ángel, que como su propio nombre indica, ha sido mi Ángel de la guarda, brindándome en todo momento ese apoyo y ayuda que un hijo necesita. Gracias a ellos he llegado a ser la persona que soy hoy en día. Ante todo han sido para mí un excelente ejemplo a seguir. Gracias por haberme transmitido esos valores y principios que han hecho de mi aprendizaje en esta vida un camino más fácil. Si tengo que destacar entre esos valores uno, sería el que impregna mi actitud ante los retos de la vida: Todos nuestros sueños pueden hacerse realidad si tenemos el suficiente coraje de perseguirlos. Me siento afortunada de ser vuestra hija y aún más, de teneros como padres. A mi hermano Santiago, que me ha ofrecido tantas veces una visión diferente y ha hecho que mi perspectiva tenga mucho más alcance. Como decimos en matemáticas, os quiero incalculablemente y os admiro infinitamente.

Quiero también darle las gracias a una persona muy especial. Una amiga que me ha acompañado a lo largo de todos los buenos momentos y que también ha estado a mi lado en los malos y que se ha convertido para mí en la hermana que se necesita. Beatrice es una parte importante de mi vida. Gracias por compartir conmigo risas y aventuras, por motivarme a seguir adelante en los momentos de abatimiento, y sobre todo por hacer que tu familia fuera también mi familia. Gracias también a todos ellos por confiar y creer en mí.

Considero también un deber, agradecer de manera especial a Martin Peichl, porque desde el principio su experiencia, conocimientos y consejos, han contribuido a que mi trabajo en esta tesis llegara a buen puerto. Su siempre acertada opinión, ha facilitado mi labor y contribuido a que mi satisfacción por el resultado sea completa. Agradezco su apoyo y esfuerzo, pero sobre todo, le doy las gracias por ofrecerme su amistad.

De manera especial me gustaría reconocer el interés y apoyo de todo el personal de la „Haus der Mathematik“. Todo el equipo ha contribuido con su interés y sugerencias a mi trabajo. Agradezco los consejos de Gerhard Lindbichler, que fue además la persona que me llevo a decidir el tema de mi tesis. En ese mismo sentido debo agradecerle Franz Vrabec y a todos mis compañeros de trabajo. Sin ninguna duda su participación está contemplada en este trabajo y lo han enriquecido de manera notable.

Mis más cumplidas gracias van dedicadas a mi profesor Peter Raith por aceptarme para realizar esta tesis bajo su supervisión. En él encontré la capacidad, eficacia, confianza, apoyo y dedicación que se requiere para realizar una tesis.

Por último, no me gustaría olvidar a mis amigos de estudios, por haber hecho de mi etapa universitaria un trayecto feliz, cargado de vivencias inolvidables, que seguro marcarán mi vida más de lo que imagino ahora. Gracias a todos ellos por llenar mi vida de grandes momentos y por aceptarme para compartirlos.



## INHALTSVERZEICHNIS

|                                                                  |               |
|------------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>1. Einleitung .....</b>                                       | <b>- 1 -</b>  |
| <b>2. Die Türme von Hanoi .....</b>                              | <b>- 4 -</b>  |
| <b>2.1 Spielanleitung.....</b>                                   | <b>- 4 -</b>  |
| <b>2.2 Historischer Hintergrund.....</b>                         | <b>- 5 -</b>  |
| <b>2.3 Mathematischer Hintergrund.....</b>                       | <b>- 6 -</b>  |
| 2.3.1 Positionen - Kombinatorik .....                            | - 7 -         |
| 2.3.2 Grafische Darstellung .....                                | - 12 -        |
| 2.3.3 Spielzüge .....                                            | - 15 -        |
| 2.3.4 Die Formel $2^n - 1$ .....                                 | - 26 -        |
| <b>2.4 Die Weizenkorlegende.....</b>                             | <b>- 31 -</b> |
| <b>3. Nim .....</b>                                              | <b>- 34 -</b> |
| <b>3.1 Spielanleitung.....</b>                                   | <b>- 34 -</b> |
| <b>3.2 Historischer Hintergrund.....</b>                         | <b>- 35 -</b> |
| <b>3.3 L'Année dernière à Marienbad.....</b>                     | <b>- 36 -</b> |
| <b>3.4 Mathematischer Hintergrund.....</b>                       | <b>- 39 -</b> |
| 3.4.1 Das Binärsystem .....                                      | - 39 -        |
| 3.4.2 Kombinatorik.....                                          | - 42 -        |
| 3.4.3 <i>Safe combinations</i> .....                             | - 43 -        |
| 3.4.4 Liste von <i>safe combinations</i> .....                   | - 47 -        |
| 3.4.5 Die Wahrscheinlichkeit einer <i>safe combination</i> ..... | - 50 -        |
| 3.4.6 Strategie – Wie gewinnt man Nim? .....                     | - 51 -        |
| <b>3.5 Variationen.....</b>                                      | <b>- 53 -</b> |
| 3.5.1 Misère .....                                               | - 54 -        |
| 3.5.2 Antonim.....                                               | - 55 -        |
| 3.5.3 Münzen .....                                               | - 58 -        |
| 3.5.3 „1, 2 oder 3“ .....                                        | - 59 -        |
| 3.5.4 Das Rätsel des Gänseblümchens.....                         | - 61 -        |
| 3.5.5 Wer zuerst auf 100 kommt, gewinnt .....                    | - 63 -        |
| 3.5.6 Nimbi .....                                                | - 64 -        |
| 3.5.7 Nim für den Taschenrechner.....                            | - 64 -        |
| <b>4. Das Vier-Farben-Problem .....</b>                          | <b>- 66 -</b> |
| <b>4.1 Darstellung des Problems .....</b>                        | <b>- 66 -</b> |
| <b>4.2 Historischer Hintergrund.....</b>                         | <b>- 68 -</b> |
| <b>4.3 Möbiusband .....</b>                                      | <b>- 75 -</b> |
| <b>4.4 Färbungen.....</b>                                        | <b>- 78 -</b> |
| 4.4.1 Zwei Farben .....                                          | - 78 -        |
| 4.4.2 Drei Farben .....                                          | - 81 -        |
| 4.4.3 Torus .....                                                | - 81 -        |
| <b>4.5 Graphentheorie .....</b>                                  | <b>- 84 -</b> |
| <b>4.6 Die Euler'sche Polyederformel .....</b>                   | <b>- 87 -</b> |
| <b>4.7 Kempe-Ketten .....</b>                                    | <b>- 88 -</b> |
| <b>4.8 Kleinste Verbrecher .....</b>                             | <b>- 90 -</b> |
| <b>4.9 Der entscheidende Durchbruch .....</b>                    | <b>- 93 -</b> |



|                                                                  |                |
|------------------------------------------------------------------|----------------|
| <b>5. Hex.....</b>                                               | <b>- 99 -</b>  |
| <b>5.1 Spielregeln.....</b>                                      | <b>- 99 -</b>  |
| <b>5.2 Historischer Hintergrund.....</b>                         | <b>- 102 -</b> |
| <b>5.3 Mathematischer Hintergrund.....</b>                       | <b>- 104 -</b> |
| <b>5.4 Spielfelder .....</b>                                     | <b>- 105 -</b> |
| 5.4.1 Spielfeld 1 x 1 .....                                      | - 106 -        |
| 5.4.2 Spielfeld 2 x 2.....                                       | - 107 -        |
| 5.4.3 Spielpositionen.....                                       | - 108 -        |
| 5.4.4 Spielfeld 3 x 3 .....                                      | - 112 -        |
| 5.4.5 Spielfeld 4 x 4.....                                       | - 113 -        |
| 5.4.6 Spielfeld 5 x 5.....                                       | - 113 -        |
| 5.4.7 Weitere Spielfelder.....                                   | - 114 -        |
| <b>5.5 Strategie .....</b>                                       | <b>- 115 -</b> |
| 5.5.1 Brücken .....                                              | - 118 -        |
| 5.5.2 Effektives Blockieren.....                                 | - 120 -        |
| 5.5.3 Wechselwirkung.....                                        | - 121 -        |
| 5.5.4 Der Vorteil des ersten Spielers .....                      | - 123 -        |
| 5.5.5 Unentschieden .....                                        | - 125 -        |
| <b>5.6 Das Shannon Switching Game .....</b>                      | <b>- 125 -</b> |
| <b>5.7 Variationen.....</b>                                      | <b>- 131 -</b> |
| <b>5.8 Das Y-Spiel .....</b>                                     | <b>- 135 -</b> |
| <b>6. Planung und Durchführung der Spiele im Unterricht.....</b> | <b>- 137 -</b> |
| 6.1 Der Hanoi Turm .....                                         | - 139 -        |
| 6.2 Das Nim-Spiel .....                                          | - 140 -        |
| 6.3 Der Vier-Farben-Satz .....                                   | - 141 -        |
| 6.4 Das Hex-Spiel .....                                          | - 143 -        |
| 6.5 Fazit .....                                                  | - 144 -        |
| <b>7. Bibliographie .....</b>                                    | <b>- 145 -</b> |
| <b>8. Abbildungsverzeichnis .....</b>                            | <b>- 154 -</b> |
| <b>9. Tabellenverzeichnis .....</b>                              | <b>- 156 -</b> |



# 1. Einleitung

Die Theorie des „homo ludens“ (zu Deutsch „der spielende Mensch“) besagt, dass wir viele unserer Fähigkeiten vor allem über das Spielen entdecken. Spielerisch erfahren wir, was wir können und finden mehr über unsere Persönlichkeit heraus. Außerdem wird eigenständiges Denken angeregt. Nicht umsonst heißt es bei Schiller: „Der Mensch ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.“

Schülerinnen und Schüler werden durch Spiele herausgefordert, sie interagieren und kommunizieren mit ihren Mitspielerinnen und Mitspielern und ihre Fantasie wird angeregt und stimuliert. Ferner können Spiele genutzt werden, um sich bestimmten Themen anzunähern oder Situationen zu simulieren. Was alle Spiele gemeinsam haben, ist das Lösen von Problemen. Auf dem Weg zur Lösung können verschiedene Strategien getestet werden.

Können dieser Annahme zufolge Spiele mit mathematischem Hintergrund herangezogen werden, um einen Vorteil für den schulischen Mathematikunterricht zu bieten? Wenn ja, in welcher Form? Und welche konkreten Lernziele können durch diese Spiele erreicht werden?

Spiele erscheinen uns oft als bloßer Zeitvertreib, doch sind sie bei genauerer Betrachtung viel mehr als das. Manche Spiele führen zu einer intensiveren Auseinandersetzung mit einer Thematik. Die Struktur von Spielen und die damit verbundenen Regeln ermöglichen es, Parallelen zum Fach Mathematik herzustellen. Ein passend ausgewähltes und unter gewissen Rahmenbedingungen eingesetztes Spiel kann als effektives Hilfswerkzeug auf positive Weise zum Unterrichtsverlauf beitragen und außerdem das gleichzeitige Verfolgen mehrerer didaktischer Ziele ermöglichen.

Der Soziologe Johan Huizinga beschreibt in seinem Werk „Homo ludens“ Spiele als „freies Handeln“ (Huizinga 2004: S. 16). Spiele haben eine gewisse Funktion für den Menschen und wirken sich sowohl auf unsere Kultur als auch auf unsere geistige und soziale Kompetenz aus. Außerdem besitzen Spiele die Eigenschaft, Bindungen zwischen Spielenden herzustellen. (vgl. Huizinga 2004: S. 22) Spiele können als „regelmäßig wiederkehrende Abwechslung“ (Huizinga 2004: S. 17) definiert werden. Sie finden außerhalb des Lebens statt – unabhängig von Zeit und Ort (vgl. Huizinga 2004: S. 18). Ein Blick auf die Mathematik zeigt uns, dass gewisse Eigenschaften des Spiels ebenso auf Bereiche der Mathematik zutreffen. Die Mathematik erscheint ebenso in Form eines Spiels, dem bestimmte Regeln zugrunde liegen.

Das Hauptaugenmerk beim Einsatz von Spielen sollte darauf liegen, den Verstand sowie die intellektuellen Fähigkeiten jedes Schülers und jeder Schülerin auszubilden und zu fördern. Dies sollte hauptsächlich durch Eigeninitiative erreicht werden. Die Ähnlichkeiten des Spiels und der Mathematik bilden hierbei eine essentielle Grundlage. So finden viele Menschen, die sich nicht von der Mathematik begeistern lassen, trotzdem einen Zugang zu der Thematik über Rätsel und Spiele.

Nicht alle mathematischen Spiele eignen sich für einen Einsatz im Unterricht. Wie vorliegende Arbeit aufzeigt, gibt es Spiele, welche auf natürliche Art für den traditionellen Mathematikunterricht brauchbar erscheinen und dadurch wertvolle Schlüsse zulassen und Zugänge ermöglichen. Diese Diplomarbeit geht den zuvor aufgeworfenen Fragen nach, indem folgende Spiele behandelt werden: der *Turm von Hanoi*, das *Nim*-Spiel, der *Vier-Farben-Satz* und das *Hex*-Spiel. Neben der Spielanleitung werden die jeweiligen historischen Hintergründe dargestellt. Der Fokus liegt auf den mathematischen Prozessen, die diesen Spielen zugrunde liegen.

Die vier oben genannten Spiele kommen allesamt im „Haus der Mathematik“ (<http://www.hausdermathematik.at/>) in Wien zum Einsatz. Das Haus der Mathematik hat das vorrangige Ziel, Schülerinnen und Schülern einen neuen Zugang zur Mathematik zu ermöglichen, und hat auch den ursprünglichen Anstoß für diese Arbeit geliefert bzw. hat dazu angeregt, sich ausführlicher mit dieser Thematik des mathematischen Spielens zu befassen. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist es, Möglichkeiten aufzuzeigen, wie die bearbeiteten Spiele auch in den Regelunterricht einbezogen werden können. Diesbezüglich werden im letzten Kapitel konkrete Vorschläge zur didaktischen Umsetzung präsentiert.

Der Wert von Spielen darf nicht unterschätzt werden, da sie oft dort Interesse wecken können, wo andere Methoden versagt haben. Wieso sollte diese Eigenschaft von Spielen nicht herangezogen werden, um den Schülerinnen und Schülern eine ansprechende Annäherung zur Mathematik zu eröffnen? Möglicherweise führt kein anderer Weg zu einem besseren Verständnis des mathematischen Denkens als jener durch ein gut gewähltes Spiel.

## 2. Die Türme von Hanoi

### 2.1 Spielanleitung

Bei dem Spiel, welches unter dem Namen „Turm von Hanoi“ bekannt ist, handelt es sich um eine Denkaufgabe. Deshalb ist es vor allem im mathematischen Gebiet des Problemlösens angesiedelt.

Das Spielmaterial besteht aus drei senkrechten Stäben, wobei sich auf einem dieser Stäbe, wie der Name des Spiels bereits preisgibt, ein Turm befindet.

Dieser besteht aus mehreren gelochten Scheiben unterschiedlichen Durchmessers, welche aufeinandergestapelt sind. Die größte Platte befindet sich dabei an unterster Stelle und somit die kleinste an oberster.

Anfangs befindet sich besagter Turm auf einem Stab, dem sogenannten Ausgangsstab. Dieser Turm soll nun auf einen der beiden anderen Stäbe, den Zielstab, verlegt werden, wobei der übrig gebliebene Stab (meist in der Mitte des Spielfeldes befindlich) als Hilfsstab verwendet werden kann. Ziel des Spiels ist somit, den kompletten Stapel an Scheiben vom Ausgangsstab zum Zielstab zu verschieben unter Berücksichtigung folgender Regeln:

Bei jedem Zug darf nur die oberste Kreisscheibe eines Turmes, auf einen beliebigen Stab, gelegt werden, unter der Bedingung, dass sich an dieser Wunschstelle keine kleinere Kreisplatte befindet. Das heißt, dass keinesfalls eine größere Kreisscheibe auf eine kleinere gelegt werden darf. Somit sind die Scheiben zu jedem Zeitpunkt des Spiels sowie auf jedem Stab der Größe nach angeordnet. (vgl. Stockmeyer 1984: S. 1f; Berlekamp / Conway / Guy 1982: S. 753)

## 2.2 Historischer Hintergrund

Das Spiel war anfangs unter dem Namen „Türme von Benares“ bekannt. Erst nach einiger Zeit setzte sich der Name „Turm von Hanoi“ durch, worunter man es heutzutage kennt. (vgl. Spektrum der Wissenschaft [2016])

Das Denkspiel geht zurück auf den französischen Mathematiker Édouard Lucas d'Amiens, welcher sich hinter dem Pseudonym Prof. *N. Claus de Siam* (Anagramm durch Buchstabenvertauschung von Lucas d'Amiens), Beamter der Universität *Li-Sou-Stian* (erneute Permutation der Buchstaben, welche dieses Mal der Universität von *Saint Luis* entspricht), verbirgt. Er entwickelte das Konzept und verbreitete dieses Problem im Jahre 1883. Als mathematisches Spiel stellte er seine Türme auf der Pariser Weltausstellung vor. Solch ein Turm ähnelt in gewisser Weise einer Pagode. (vgl. Gierhardt 2016) Somit verbreitete sich ein Spiel unter den Namen „Der Turm von Hanoi“. (vgl. Latasa Asso 2011)

Laut Berlekamp, Conway und Guy (1982: S. 754) hat der Wissenschaftler und Schriftsteller De Parville die Idee der Türme ebenso entdeckt, jedoch erst nach Lucas d'Amiens, im Jahre 1884.

In *Puzzles Old And New* von Angelo John Lewis Hoffmann aus dem Jahre 1893 findet das Spiel Erwähnung unter dem Titel „The Brahmin's Puzzle“:

Hoffmann zufolge liegt dem Spiel folgende Geschichte zugrunde:

„At the beginning of the world, Brahma set up in the great Temple of Benares three diamond pyramids. Round the first of them he hung sixty-four rings, made of purest gold, and arranged in regular order, the largest ring encircling the foot of the pyramid and the smallest its top. And Brahma said unto the priests, 'Transfer these sixty-four kings from the first pyramid to the third, transposing one ring at a time only, and putting it either on a vacant pyramid or on a larger ring. By the time you have executed this task the end of the world will be near.' As a few persons

would care to attempt a puzzle which professedly takes some thousands of years to solve, it has been found necessary to modify the conditions of the problem, the number of rings to be transposed being reduced from 64 to 8. Instead of gold, they are in this case disks of cardboard, colored alternately orange and black. The three diamond cones are represented by three little wooden slabs [...], each with a cylindrical peg standing up in its centre. The method of transposition is the same as laid down in the legend.“ (Hoffmann 1893: S. 333f)

Die Aufschichtung dieser Platten ist im Grunde genommen der Turm von Brahma. Das Ende der Legende bringt uns zu folgenden zwei ineinander verknüpften Problemen: Wie viele Züge benötigen die Mönche von Benares, um den Auftrag pflichtgetreu abzuschließen? Wann wird demnach das Ende der Welt eintreten?

Die Aufgabe des Verschiebens dieser 64 Steine mag auf Anhieb nicht besonders Aufwendig klingen. Jedoch kann man den tatsächlich viel höheren Aufwand an Zügen mathematisch auf einfache Weise berechnen. Ein Zug entspricht hierbei dem Verschieben einer Kreisscheibe von einem Stab auf einen anderen. Dies wird im nächsten Kapitel näher erläutert.

## 2.3 Mathematischer Hintergrund

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit den mathematischen Hintergründen zum Spiel von Hanoi. Es werden sowohl die Kombinatorik, die grafische Darstellung als auch die ideale Lösung bzw. die Anschauung einer geeigneten Lösungsstrategie beleuchtet.

### 2.3.1 Positionen - Kombinatorik

Jede mögliche und gültige Position an Spielsteinen, sprich der Bedingung folgend, dass keine Scheibe größeren Durchmessers auf einer kleineren steht, entspricht einer Kombination. Somit können in diesem Abschnitt die Positionen in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Platten analysiert werden.

Die Stäbe auf dem Spielbrett werden der Einfachheit und Übersicht halber von links nach rechts mit den Buchstaben A, B und C versehen. Jeder Spielstein wird mit den natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  in Verbindung gebracht, wobei der Radius der Scheibe 1 kleiner als jener der Kreisscheibe 2 ist. Wenn man zu den Buchstaben, stellvertretend für die Stäbe, jeweils einen Index angibt, erhalten wir eine Möglichkeit, die Darstellung der Scheiben in ihrer Position anzugeben.  $A_i$  und  $B_j$  bedeuten im Grunde genommen, dass sich der Spielstein  $i$  bzw.  $j \in \mathbb{N}$  auf dem Pfeiler A bzw. B befindet. Vereinfacht gesagt gibt der Buchstabe an, um welchen Stab es sich handelt. Die Zahl bezieht sich hingegen auf den Radius des Spielsteins. (vgl. Balbuena Castellano 2006)

Handelt es sich um lediglich einen Spielstein, so stehen einem drei Stäbe zur Verfügung, womit sich automatisch drei verschiedene Platzierungsmöglichkeiten ergeben. Ein einziger Spielstein kann nur die Plätze A, B und C einnehmen, somit entfallen mögliche Kombinationen.

Wenn man nur einen Spielstein zur Verfügung hat, kann seine Position folgendermaßen wiedergegeben werden:  $A_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$ . Der Index gibt an, um welchen Spielstein es sich handelt. In diesem Fall haben wir nur einen zur Verfügung. Dieser kann sich somit entweder am ersten Stab ( $A_1$ ), auf dem mittleren Stab ( $B_1$ ), oder am dritten Stab ( $C_1$ ) befinden.



Abbildung 1: grafische Positionsmöglichkeiten der Spielsteine eines einsteinigen Turms von Hanoi.

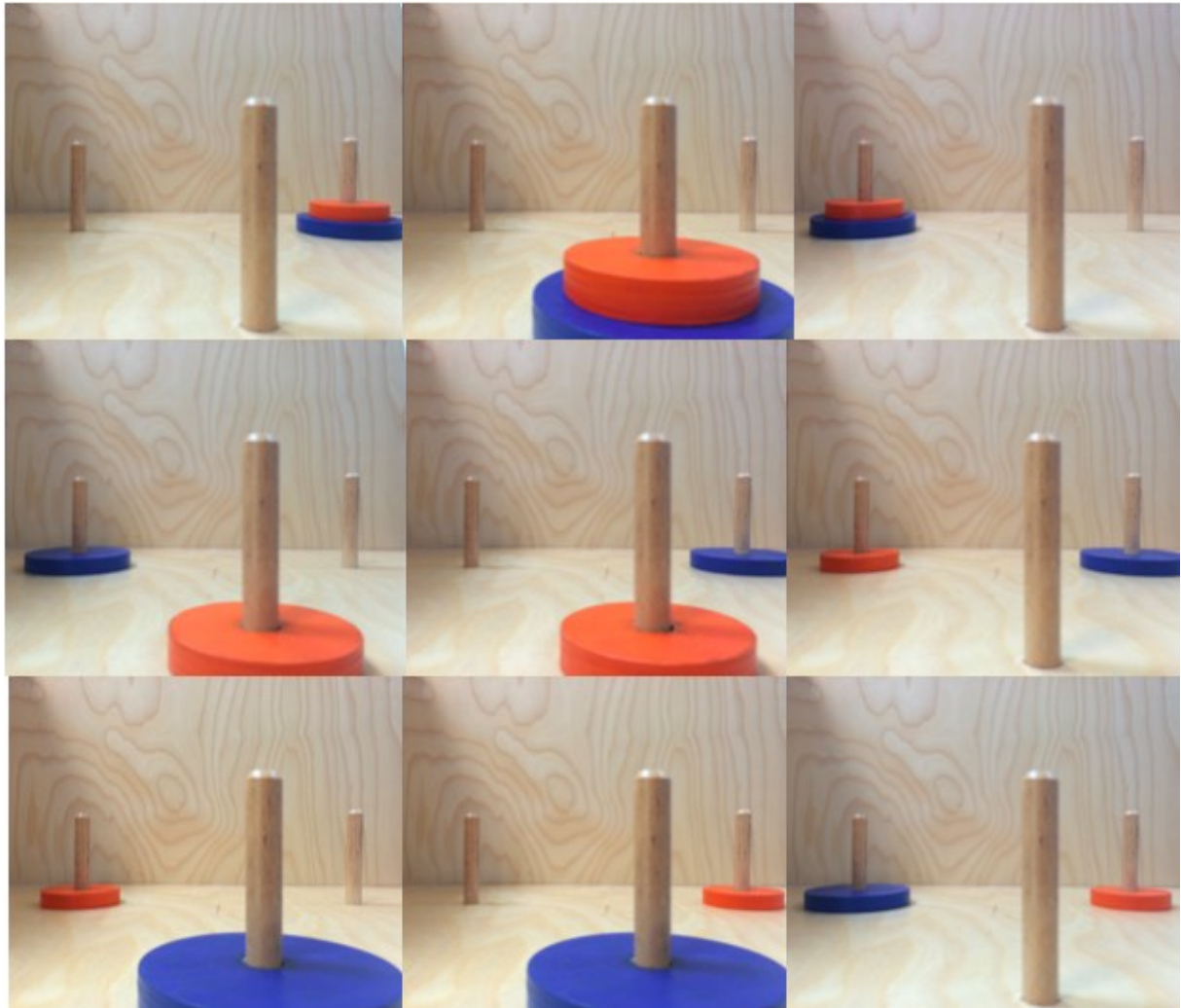
Falls man nun zwei Kreisscheiben vorliegen hat, ergeben sich die üblichen Positionen der einzelnen Spielsteine, jedoch werden neue Kombinationsmöglichkeiten eröffnet:

| Spielsteine | Positionen |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1           | A          | B | C | A | B | C | A | B | C |
| 2           | A          | A | A | B | B | B | C | C | C |

Tabelle 1: Neun unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten von zwei Spielsteinen eines Turms von Hanoi.

In dieser Tabelle werden die jeweiligen Positionen der Spielsteine zueinander in Verbindung gebracht. Betrachtet werden somit ihre Kombinationsmöglichkeiten. Die Buchstaben A, B und C beziehen sich auf die unterschiedlichen Stäbe. Die Zahlen 1 und 2 repräsentieren die beiden verwendeten Spielsteine, wobei die Zahl 1 der kleinsten und die Zahl 2 der größten Kreisscheibe entspricht. Die Positionen der Spielsteine werden jeweils in waagrechter Form angezeigt. Es können sich somit entweder beide am selben Stab befinden (A, A), (B, B) bzw. (C, C), oder an verschiedenen (B, A), (C, A), (A, B), (C, B), (A, C), (B, C). Man erkennt, dass es sich um neun verschiedene Kombinationsmöglichkeiten handelt.

Wir verfügen über zwei Spielsteine, welche wir an drei verschiedene Stellen ordnen können. Somit ergibt sich eine Anzahl an möglichen Positionen von  $3^2 = 9$ .



*Abbildung 2: grafische Positionsmöglichkeiten der Spielsteine eines zweistöckigen Turmes von Hanoi.*

In obiger Abbildung werden die Positionsmöglichkeiten eines Turms von Hanoi mit zwei Spielsteinen grafisch aufgezeigt. Die erste Zeile der Abbildung zeigt den gebauten Turm an jeweils unterschiedlichen Positionen (A, B, C). Dies sind die einzigen Möglichkeiten wie sich beide Spielsteine an ein und derselben Säule befinden können. Die restlichen sechs Abbildungen zeigen die weiteren Positionsmöglichkeiten auf. (vgl. Balbuena Castellano 2006)

Anhand von Abbildung 2 kann man die neun zuvor erwähnten Positionen grafisch erkennen. Mithilfe des Notationsschemas ergeben sich folgende Verteilungen:

|           |          |          |          |           |          |          |          |           |
|-----------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|
| $A_{1,2}$ | $A_2B_1$ | $A_2C_1$ | $A_1B_2$ | $B_{1,2}$ | $B_2C_1$ | $A_1C_2$ | $B_1C_2$ | $C_{1,2}$ |
|-----------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|-----------|

*Tabelle 2: Liste der neun Positionsmöglichkeiten eines zweistöckigen Hanoiturmes. A, B und C stehen erneut für die drei Stäbe. Dem Index kann entnommen werden, welcher Spielstein sich an welchem Stab befindet.*

Erhöht man bisherige Anzahl an Spielsteine um einen, so ist man nun mit drei unterschiedlich großen Kreisscheiben konfrontiert. In diesem Fall ergeben sich  $3^3 = 27$  verschiedene Positionen. In folgender Tabelle (Tabelle 3) kann man die Positionen der jeweiligen Spielsteine ablesen.

| Spielsteine | Positionen |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------------|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|             | 1          | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 1           | A          | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C | A | B | C |
| 2           | A          | A | A | B | B | B | C | C | C | A | A | A | B | B | B | C | C | C | A | A | A | B | B | B | C | C | C |
| 3           | A          | A | A | A | A | A | A | A | A | B | B | B | B | B | B | B | B | B | C | C | C | C | C | C | C | C | C |

*Tabelle 3: Positionsmöglichkeiten eines Turms von Hanoi unter Berücksichtigung drei verwendeter Spielsteine.*

In obiger Tabelle werden die jeweiligen Positionen im Fall von drei Spielsteinen zueinander in Verbindung gebracht. Betrachtet werden somit ihre Kombinationsmöglichkeiten. Die Buchstaben A, B und C beziehen sich erneut auf die unterschiedlichen Stäbe. Die Zahlen 1, 2 und 3 repräsentieren die drei verwendeten Spielsteine, wobei die Zahl 1 der kleinsten, die Zahl 2 der

mittleren und die Zahl 3 der größten Kreisscheibe entspricht. Die Positionen der Spielsteine werden jeweils in waagrechter Form angezeigt. Es können sich somit entweder alle Platten am selben Stab befinden (A, A, A), (B, B, B) bzw. (C, C, C), oder an verschiedenen (B, A, A), (C, A, A), (A, B, A), (C, B, A), (A, C, A), (B, C, A), (C, C, A), (A, A, B), (B, A, B), (C, A, B), (A, B, B), (C, B, B), (A, C, B), (B, C, B), (C, C, B), (A, A, C), (B, A, C), (C, A, C), (A, B, C), (B, B, C), (C, B, C), (A, C, C), (B, C, C).

Die entsprechenden Verteilungen und Kombinationsmöglichkeiten in Notationsschreibweise sind folgende:

|              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $A_{1,2,3}$  | $A_{2,3}B_1$ | $A_{2,3}C_1$ | $A_{1,3}B_2$ | $A_3B_{1,2}$ | $A_3B_2C_1$  | $A_{1,3}C_2$ | $A_3B_1C_2$  | $A_3C_{1,2}$ |
| $A_{1,2}B_3$ | $A_2B_{1,3}$ | $A_2B_3C_1$  | $A_1B_{2,3}$ | $B_{1,2,3}$  | $B_{2,3}C_1$ | $A_1B_3C_2$  | $B_{1,3}C_2$ | $B_3C_{1,2}$ |
| $A_{1,2}C_3$ | $A_2B_1C_3$  | $A_2C_{1,3}$ | $A_1B_2C_3$  | $B_{1,2}C_3$ | $B_2C_{1,3}$ | $A_1C_{2,3}$ | $B_1C_{2,3}$ | $C_{1,2,3}$  |

*Tabelle 4: Die 27 Positionsmöglichkeiten eines dreistöckigen Hanoiturmes.*

A, B und C stehen in dieser Tabelle, wie bereits gehabt, für die drei Stäbe. Dem Index kann entnommen werden, welcher Spielstein sich an genanntem Stab befindet.

Die Verdeutlichung durch die entsprechenden Tabellen liefert folgende Überlegung: Diese Aufzeichnungen können sukzessive fortgeführt werden, bis man schlussendlich bei  $n$  verfügbaren Spielsteinen angelangt ist. In diesem Fall liegt die Anzahl der Positionsmöglichkeiten dieser Steine bei  $3^n$ .

### 2.3.2 Grafische Darstellung

Mithilfe der Graphentheorie können die Züge des Spielverlaufs visualisiert und damit leichter analysiert werden. Betrachtet wird zunächst der Fall anhand eines einzigen Spielsteins. Für diesen gibt es, wie bereits zuvor erwähnt, drei mögliche Positionen. Diese können folgendermaßen definiert werden:

$(1, 0, 0)$ ;  $(0, 1, 0)$ ;  $(0, 0, 1)$

Die drei Ziffern, welche als Spalten betrachtet werden können, geben an, ob sich ein Spielstein an erster, zweiter oder dritter Position befindet, bzw. ob nicht. Entweder der Spielstein befindet sich am ersten  $(1, 0, 0)$ , zweiten  $(0, 1, 0)$  oder am dritten  $(0, 0, 1)$  Stab. Die Nuller geben an, dass sich an diesem Stab kein einziger Stein befindet. Mit dieser Darstellungsart kann ein Streckenzug konstruiert werden, indem diese Positionen miteinander in Verbindung gebracht werden und somit als Punkte eines Polygonzugs dienen. Die Position der Kreisscheibe kann gewechselt werden und somit zwischen den drei Positionen variieren, weshalb Äquivalenzpfeile zu verwenden sind.

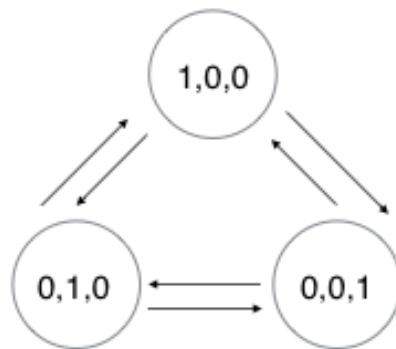


Abbildung 3: Polygonzug dargestellt durch die drei Positionen eines Turmes bestehend aus einem Spielstein.

Fokussiert man sich nun auf den Streckenzug eines zweistöckigen Turmes, so kann man annehmen, dass neun Punkte auftauchen werden, da es neun verschiedene Anordnungsmöglichkeiten der entsprechenden zwei Spielsteine gibt.

Der Punkt  $(2, 0, 1)$  mit der beinhalteten Matrix sagt aus, dass sich der größte Spielstein (2) auf dem ersten Pfeiler befindet (A), die kleinste Kreisscheibe (1) befindet sich hingegen am letzten Stab (C). Diese Position kann durch die vorherige Position  $(1 | 2, 0, 0)$ , das heißt, dass Stein 1 sich auf Stein 2 auf Stab A befindet, hervorgehen werden, da man lediglich den kleinsten Stein auf den dritten Stab umschichten muss. Allerdings ist es nicht möglich, von zuletzt genannter Position auf die Position  $(0, 2, 1)$  zu wechseln, da hierzu zwei Züge notwendig sind.

Aufgrund der Überlegungen ergibt sich für zwei Spielplatten folgender Polygonzug:

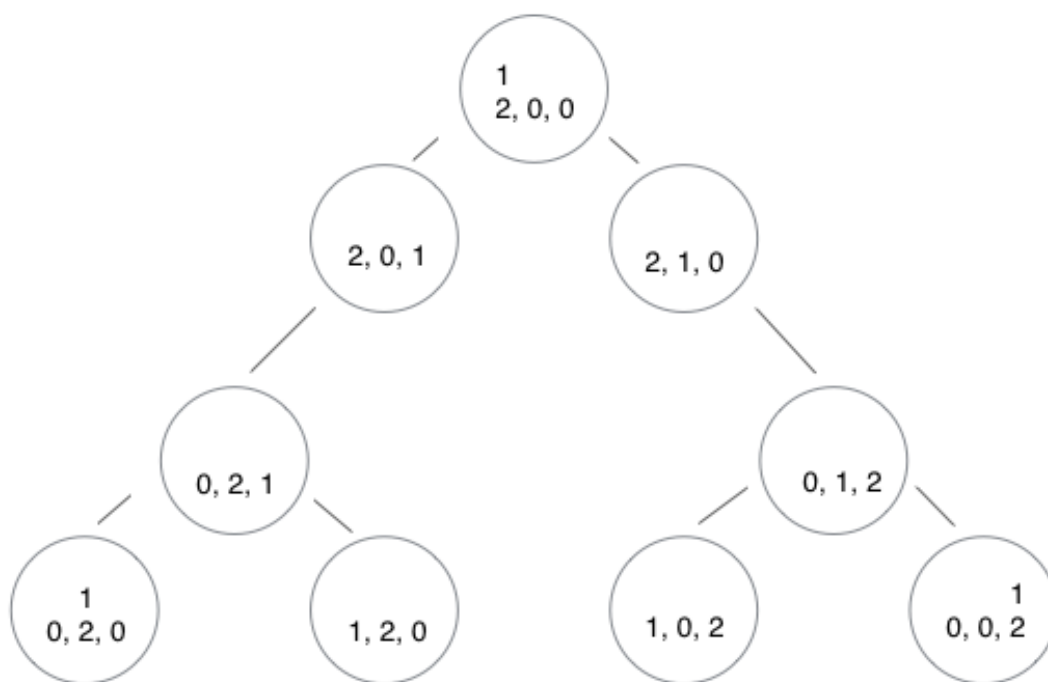


Abbildung 4: Polygonzug dargestellt durch die neun Positionen eines Turmes bestehend aus zwei Spielsteinen.

Analog kann man einen Polygonzug zu einem Turm von Hanoi bestehend aus drei Spielscheiben erstellen.

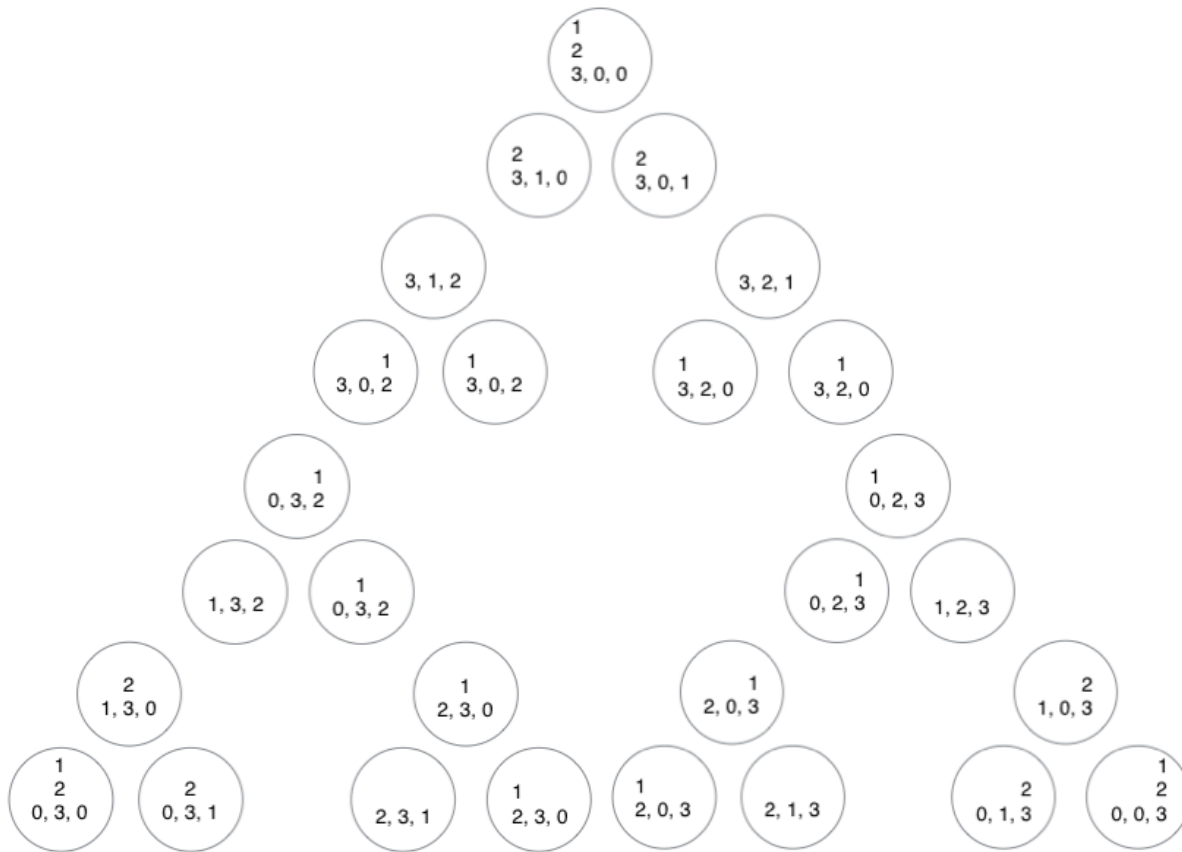


Abbildung 5: Polygonzug dargestellt durch 27 Positionen eines Turmes bestehend aus drei Spielsteinen.

### 2.3.3 Spielzüge

Die kürzest mögliche Anzahl an Spielzügen entspricht dem kürzesten und somit besten Lösungsweg. Dieser lässt sich im Vorhinein mathematisch berechnen, da er von der Anzahl der Kreisscheiben auf dem Spielfeld abhängig ist.

Man beginnt seine Überlegungen zur Findung von Regelmäßigkeiten mit dem kleinstmöglichen Turm, einem einstöckigen. Im Anschluss arbeitet man sich in ansteigender Anzahl an Turmelementen weiter.

Falls es sich um einen Turm bestehend aus nur einer Scheibe handelt, so ist die Rede von einer trivialen Lösung. Hier ist nur ein Zug notwendig, um eine Umplatzierung des Turmes zu erzielen.

Durch simples Ausprobieren erreicht man die Verschiebung eines zweiteiligen Turmes auf einen anderen Stab, den Zielstab.

Wir starten, indem wir die oberste Scheibe des Turmes des Ausgangstabes (A) nehmen. Nun ergeben sich zwei Möglichkeiten und Wege zum Fortfahren, da wir zwei freie Stäbe (B und C) zur Verfügung haben. Entweder wir legen den abgehobenen Stein auf die Hilfsposition (C) oder auf den Endstab (B). Jetzt haben wir zwei Zugmöglichkeiten: Wir können den bereits verwendeten Stein verschieben oder wir widmen uns dem Stein, welcher sich noch in der Ausgangsposition (A) befindet. Ersteres, sprich den kleineren Spielstein nochmals zu bewegen, wäre redundant, da wir diesen Spielstein bereits beim ersten Zug auf den übrigen Stab (B oder C) hätten legen können bzw. falls wir den anderen Stab (A) auswählen, so würden wir erneut zur Ausgangsposition gelangen. Deshalb betrachten wir zweitens Variante. Für diese Kreisscheibe (2) ergibt sich lediglich eine Möglichkeit der Verschiebung, da wir diese Platte nicht auf die kleinere (1) legen dürfen. Im nächsten Zug können wir die kleine Kreisscheibe auf die größere legen und erhalten somit denselben Turm an einer

anderen Stelle des Spielfeldes (B oder C). Wir haben somit 3 Spielzüge benötigt. Die optimale Lösung für einen Turm mit zwei Spielsteinen veranschaulicht folgende Abbildung:

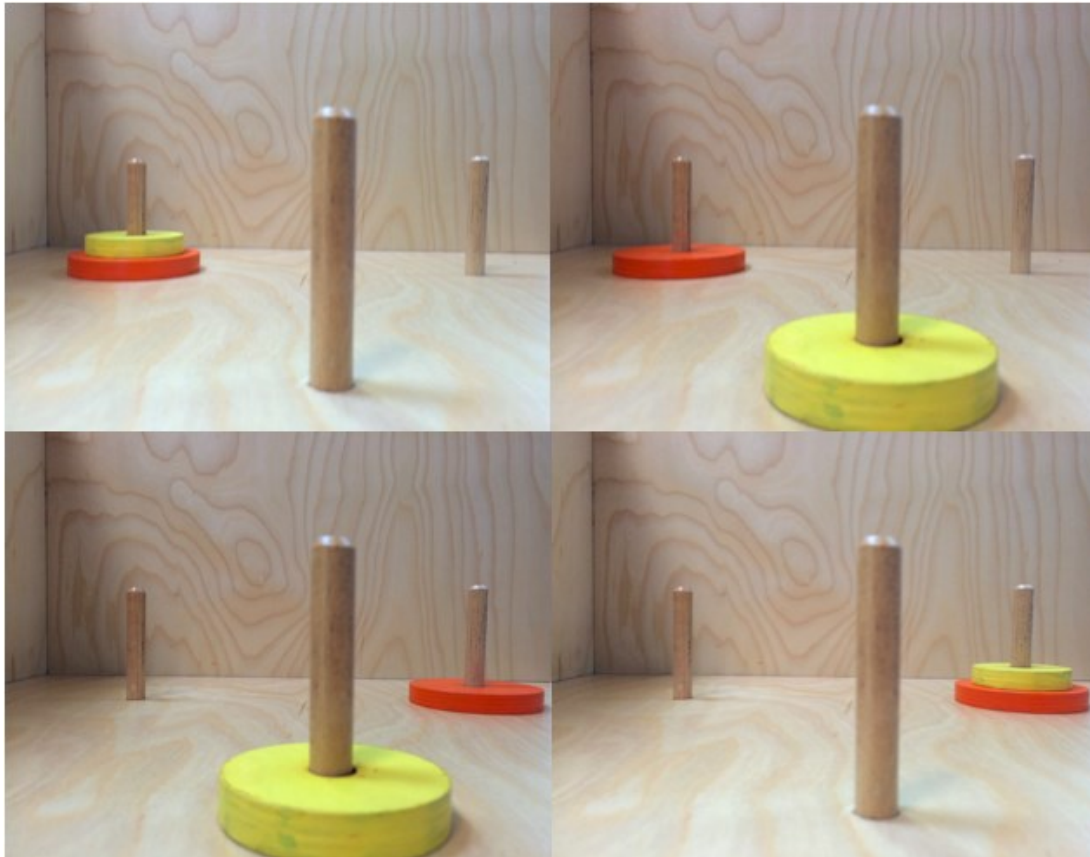


Abbildung 6: Grafische Darstellung der Lösungsschritte eines Turm von Hanoi bestehend aus zwei Spielsteinen.

Falls der Turm aus lediglich drei Kreisscheiben unterschiedlicher Radien besteht, so kann man ihn durch sieben Züge an einen anderen Platz setzen. Wir sehen, dass ein Turm aus drei Scheiben nichts weiter ist, als eine dritte Scheibe unter einem Zweierturm. Dies hört sich stark nach Rekursion an, da ein solches Problem der Schwierigkeitsstufe  $n$  auf ein Problem der Schwierigkeitsstufe  $n - 1$  zurückgeführt werden kann. Dieses Verfahren findet später erneut Erwähnung.

Im ersten Schritt wird die oberste Scheibe des Turmes (1) auf einen der beiden Stäbe gelegt, B oder C. Angenommen er wird auf C platziert, dann wird im

Anschluss die mittelgroße Kreisscheibe auf die freie Position (B) verschoben. Daraufhin kann die kleinste Scheibe (1) auf die mittelgroße Platte (2) platziert werden. Dies ermöglicht es, die Scheibe mit dem größten Durchmesser (3) auf den freigesetzten Stab (C) zu verschieben. Der auf B entstandene Zweierturm kann nun, durch Verschieben des kleinsten Steines (1) auf die freie Position (A), zerlegt werden. Nun kann die mittlere Kreisscheibe (2) auf die größte (3) gestapelt werden. Als letzten Zug setzt man die kleinste Scheibe auf die beiden anderen. Der dreistöckige Turm wurde somit erfolgreich von seinem Ausgangsplatz (A) auf seinen Endplatz am Zielstab (C) verschoben.

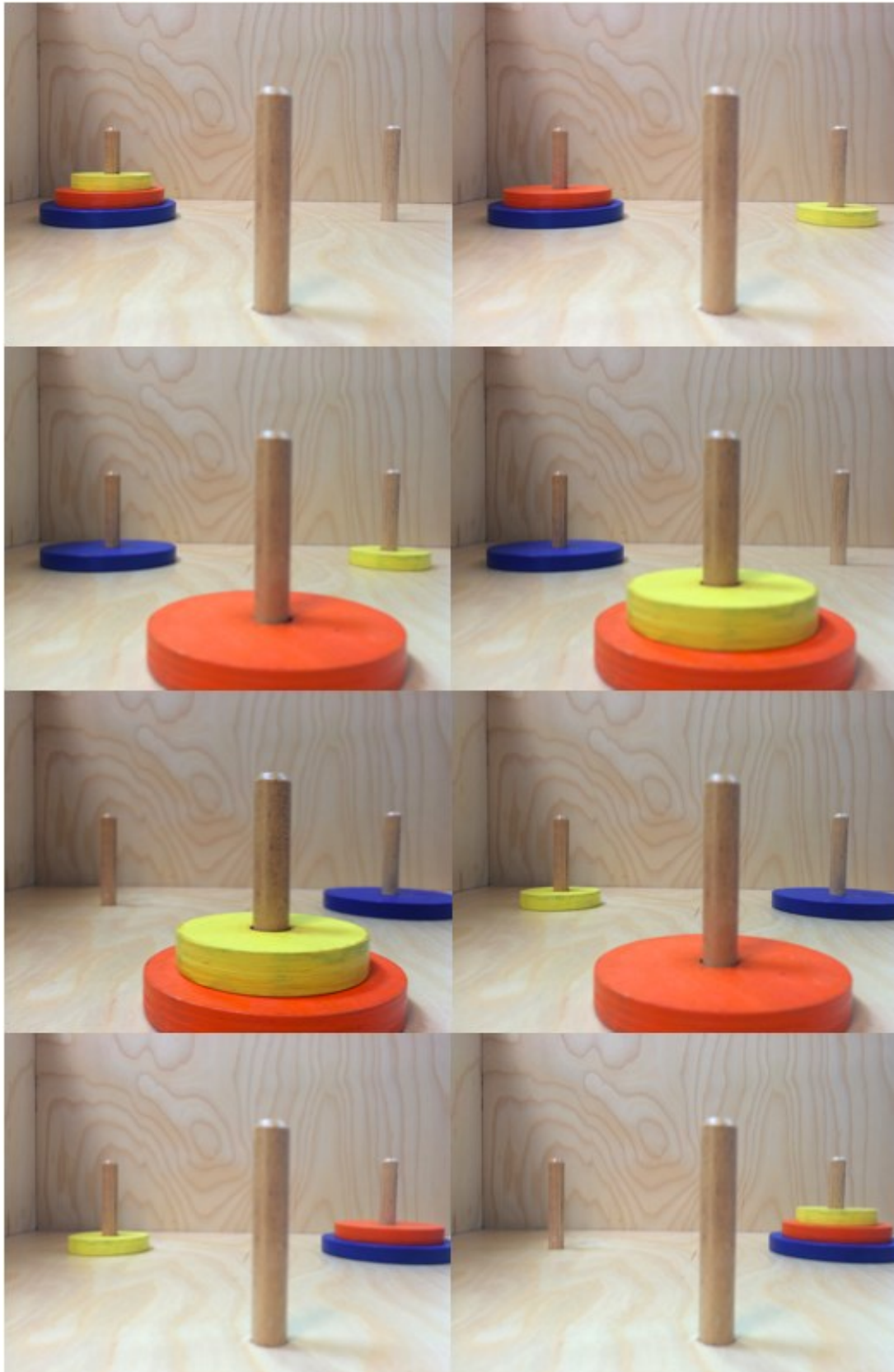


Abbildung 7: Grafische Darstellung der Lösungsschritte eines Turm von Hanoi bestehend aus drei Spielsteinen.

Wenn es sich nun um einen Turm bestehend aus vier Scheiben handelt, so erscheint die Aufgabe auf den ersten Blick etwas schwierig. Nach genauer Betrachtung und Überlegung kann man jedoch feststellen, dass die Rede eigentlich von einem dreistöckigen Turm ist, welcher auf einer Basisscheibe platziert ist. Ein Turm aus drei Teilen ist, wie das vorherige Beispiel gezeigt hat, leicht zu verschieben. Aus diesem Grund benötigt man, wie bereits gezeigt wurde, sieben Züge, um den Dreierturm auf einen anderen Stab zu bauen, einen zusätzlichen Zug, um die Basisscheibe auf einen anderen Platz zu platzieren und im Anschluss erneut sieben Spielzüge, um den Dreierturm wiederum auf seine Basis umzuschichten. Insgesamt bedarf es somit an 15 Spielzügen.

Kurz gesagt wechselt die größte Scheibe nur einmal ihren Platz (vom Ausgangsstab zum Endstab). Hingegen wird die zweitgrößte Kreisscheibe zweimal bewegt, die drittgrößte viermal, etc. Somit ergibt sich für die Anzahl der Kreisscheiben  $n$  folgende verallgemeinerte Summe:

$1 + 2 + 4 + \dots + 2^n - 1$ . Die Gesamtzahl  $2^n - 1$  an notwendigen Zügen ist demnach die Summe der Anzahl der Züge für die einzelnen Scheiben.

Die ausschlaggebende Komponente zur Lösung des Spiels ist möglicherweise genau diese Denkweise, nämlich die Zerlegung in Teilstücke. Für eine gute Planung bedarf es einer effizienten Formulierung von Unterzielen. (vgl. Münscher 2011: S. 3)

Um zur Lösung eines Problems zu gelangen, stellt Planung somit einen essentiellen Teil dar.

Für eine vereinfachte Darstellung der Zerlegung des Problems in mehrere kleinere Teilschritte müssen zuerst folgende Notationen geklärt werden. Die Zahlen 1 bis 4 entsprechen den Spielsteinen, wobei die Zahl 4 für den Stein mit dem größten Durchmesser entspricht und 1 wiederum der kleinsten Kreisscheibe. Turm (n) entspricht der Verschiebung des Turmes aus n Spielsteinen an eine andere Stelle. Die optimale Verschiebung eines Turmes bestehend aus 4 Spielsteinen würde somit wie folgt aussehen (vgl. Urban 2003):

| Spielzug |                                  | Verschiebung des Turmes (n) bestehend aus n Spielsteinen |          |          |          |
|----------|----------------------------------|----------------------------------------------------------|----------|----------|----------|
| 1        | 1 von Ausgangsstab auf Hilfsstab | Turm (1)                                                 | Turm (2) | Turm (3) | Turm (4) |
| 2        | 2 von Ausgangsstab auf Endstab   |                                                          |          |          |          |
| 3        | 1 von Hilfsstab auf Endstab      | Turm (1)                                                 |          |          |          |
| 4        | 3 von Ausgangsstab auf Hilfsstab |                                                          |          |          |          |
| 5        | 1 von Endstab auf Ausgangsstab   | Turm (1)                                                 | Turm (2) |          |          |
| 6        | 2 von Endstab auf Hilfsstab      |                                                          |          |          |          |
| 7        | 1 von Ausgangsstab auf Hilfsstab | Turm (1)                                                 |          |          |          |
| 8        | 4 von Ausgangsstab auf Endstab   |                                                          |          |          |          |
| 9        | 1 von Hilfsstab auf Endstab      | Turm (1)                                                 | Turm (2) | Turm (3) |          |
| 10       | 2 von Hilfsstab auf Ausgangsstab |                                                          |          |          |          |
| 11       | 1 von Endstab auf Ausgangsstab   | Turm (1)                                                 |          |          |          |
| 12       | 3 von Hilfsstab auf Endstab      |                                                          |          |          |          |
| 13       | 1 von Ausgangsstab auf Hilfsstab | Turm (1)                                                 | Turm (2) |          |          |
| 14       | 2 von Ausgangsstab auf Endstab   |                                                          |          |          |          |
| 15       | 1 von Hilfsstab auf Endstab      | Turm (1)                                                 |          |          |          |

Tabelle 5: Lösungszüge eines Hanoiturms bestehend aus vier Spielsteinen.

Die erste Spalte beschreibt den Vorgang des Spielzuges und gibt somit Antwort auf die Frage, welcher Spielstein von welcher Position auf welchen Stab verschoben werden muss. Die restlichen Spalten verdeutlichen, welcher Turm an einem anderen Platz gebaut wurde, wobei die Zahl in der Klammer die Anzahl der Spielsteine nennt. Ein Turm bestehend aus drei Spielplatten kann nur dann verschoben werden, wenn die beiden kleinsten Spielsteine an eine andere Position verschoben werden und dann erneut auf die größte Kreisscheibe aufgeschichtet werden.

Die rekursive Lösungserklärung könnte so verstanden werden, dass jeder der vier Spielsteine seinen Platz wechseln soll. Jedoch ist dies nicht möglich, wenn über ihm ein weiterer Spielstein ruht. Die größte Kreisscheibe soll bewegt werden; davor muss jedoch die zweitgrößte Platte verschoben werden. Um dies zu ermöglichen, müssen die beiden kleineren Steine ihre Ausgangssituation verlassen. Wie in der Anleitung zum Spiel erwähnt, kann ein Stein nur dann bewegt werden, wenn nicht nur alle darauf ruhenden entfernt sind, sondern auch die Zielposition frei ist. Für den ersten Zug bleibt somit lediglich die Verwendung der kleinsten Kreisscheibe übrig. Somit ist der Platz geebnet, damit man die zweitkleinste Platte auf eine andere Position bewegen kann. Die zweitgrößte Scheibe kann allerdings noch nicht bewegt werden, da alle Stäbe besetzt sind. Aus diesem Grund ist es notwendig, dass die kleinste Kreisscheibe auf die zweitkleinste Scheibe zurückwandert. Nun ist es möglich, die drittkleinste Scheibe, äquivalent zum zweitgrößten Stein, die Position wechseln zu lassen. Ist dies erledigt, so kann die größte Scheibe immer noch nicht auf einen anderen Spielstab gebracht werden, da beide mit kleineren Spielsteinen belegt sind. Das heißt, dass die übrigen drei Spielsteine einen gemeinsamen Turm formen müssen. Erst dann kann die größte Scheibe ihre Position wechseln und die übrigen Steine können erneut über ihre jeweiligen Positionen einnehmen. Dieser Denkvorgang wird ebenfalls durch obige Tabelle unterstützt.

Im Folgenden befindet sich eine Illustration, welche die Vorgehensweise der Versetzungen verbildlicht:

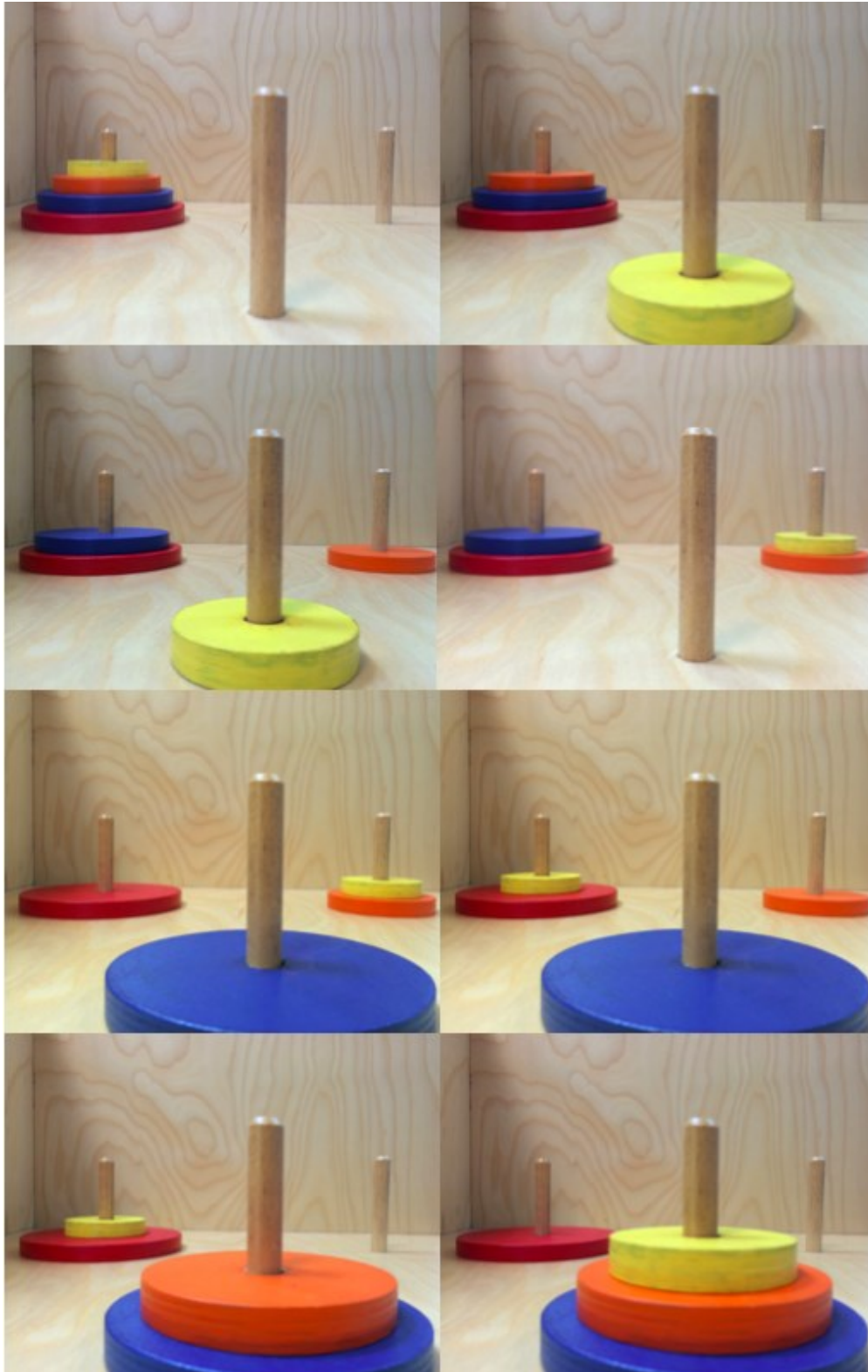




Abbildung 8: Grafische Darstellung der Lösungsschritte eines Turms von Hanoi bestehend aus vier Spielsteinen.

Steht man nun vor der Aufgabe, einen fünfstöckigen Hanoiturm auf einen anderen Stab zu versetzen, so lässt sich leicht vorstellen, dass sehr viele Versuchsansätze bis zur Lösungsfindung notwendig sein werden. Nachvollziehbar ist, dass der Schwierigkeitsgrad des Turmes von Hanoi von seiner Scheibenanzahl abhängig ist. Allerdings kann man den zuletzt verwendeten Trick heranziehen. Demzufolge kann man diesen in einen Viererturm und dessen Basis zerlegen. Entsprechend benötigt man zweimal 15 Züge plus einen weiteren Spielzug. Dies entspricht 31 Zügen. Auf dieselbe Art kann man schließen, dass man bei sechs Scheiben bereits 63 Spielzüge benötigt. Dies verdeutlicht, dass der optimale Algorithmus der zusammenhängenden Züge keinesfalls von der Scheibenanzahl  $n$  anhängig ist. Die Theorie besagt, falls man einen Turm bestehend aus  $n$  Scheiben von einer Säule auf eine andere schlichten kann, so gelingt dies auch mit einem Turm mit  $(n + 1)$  Scheiben, da hierzu die obersten  $n$  Scheiben (wie zuvor) bewegt werden können. Hierbei erhält man auf einem Stab einen  $n$ -stöckigen Turm und auf einem anderen die noch unberührte größte Scheibe  $(n + 1)$ . Da man eine leerstehende Säule vorliegen hat, kann man die größte Kreisscheibe auf genannten Platz verschieben und sogleich den  $n$  großen Turm darauf bauen.

Folglich verändert sich das Prinzip durch eine steigende Anzahl an Spielsteinen nicht. Allgemein geht es bei einem Turm mit  $n$  Scheiben um folgende Betrachtungsweise: Zuerst transportiert man  $(n - 1)$  Scheiben vom Anfangsplatz zum Hilfsplatz. Anschließend wird die unterste Scheibe des ursprünglichen Turms, welche sich noch auf dem Ausgangsplatz befindet, auf den Zielplatz verschoben. Danach wird der Turm bestehend aus  $(n - 1)$  Scheiben auf den Zielplatz aufgestapelt.

Bei näherer Betrachtung resultiert daraus Folgendes: Der zweite Schritt, sprich das Verschieben des Basiskreises, ist trivial. Die anderen beiden Schritte (der erste und der letzte) sind sehr ähnlich und von der gleichen Art wie das Ausgangsproblem, jedoch wurde die Anzahl der Scheiben um einen Spielstein minimiert und die Bedeutung der Plätze hat sich geändert.

Daraus kann man folgern, dass man für einen Turm aus  $n$  Spielsteinen genau  $2^n - 1$  Spielzüge benötigt, um den kompletten Turm von der Startposition auf seine Endposition zu platzieren, aber nicht weniger. Anhand dieser Formel kann man erkennen, dass die Anzahl der benötigten Versetzungsoperationen schnell ansteigt und rasant, nämlich exponentiell, wächst.

Laut dieser Formel würden die indischen Mönche für besagten Turm aus 64 Steinen daher  $2^{64} - 1$  Spielzüge benötigen. Dies entspricht einer genauen Anzahl von 18.446.744.073.709.551.615.

Wenn man theoretisch betrachtet für einen Spielzug eine Sekunde braucht, so könnte man diese Zahl auf Jahre umrechnen. Ausgegangen wird hierbei von der errechneten Anzahl der Spielzüge (18.446.744.073.709.551.615) als Sekunden. Dividiert man diese durch 3600 (=  $60 * 60$ ), so erhält man die Anzahl an Zügen pro Stunde. Umgerechnet auf einen Tag (multipliziert mit 24) erhält man  $2,135039823 * 10^{14}$ . Will man nun wissen, wievielen Jahren dies entspricht, so muss man nur noch die Tage eines Jahres berücksichtigen.

Die alten Ägypter rechneten bereits um das Jahr 4200 vor Christus mit 356 Tagen im Jahr. Dieser Kalender verschob sich allerdings alle vier Jahre um einen Tag, weshalb Julius Cäsar um das Jahr 46 vor Christus, das Schaltjahr einführte. Somit beträgt die Länge eines Kalenderjahres im julianischen Kalender 365,25 Tage. Jedoch blieb die Verschiebung, wenn auch nur um elf Minuten pro Jahr, weiterhin aufrecht. Aus diesem Grund beinhaltet der gregorianische Kalender alle vier Jahre ein Schaltjahr, mit der Ausnahme, dass

zum Ende eines Jahrhunderts kein Schaltjahr stattfindet, vorausgesetzt dieses ist nicht durch die Zahl 400 teilbar. Somit ergibt sich eine durchschnittliche Anzahl von 365,2425 Tagen pro Jahr. (vgl. Bennett / Donahue / Schneider / Volt 2008: S. 135)

Nimmt man darauf Rücksicht, so multipliziert man mit 365,2425 statt mit den angenommenen 365 Tagen.

Im Endeffekt erhält man das Ergebnis, dass man für besagte Aufgabe 584.554.049.200 Jahre benötigen würde, vorausgesetzt, die Mönche würden Tag und Nacht durcharbeiten. Spannend an dieser Stelle ist, dass unser Sonnensystem erst etwa 4.568,2 Millionen Jahren alt ist (vgl. Bouvier / Wadhwa 2010: S. 637f).

### 2.3.4 Die Formel $2^n - 1$

Die gewonnene Formel  $2^n - 1$  entspricht den Spielzügen unter Berücksichtigung der Anzahl an Spielsteinen ( $n$ ). Der erlangte Term wird im Folgenden durch Induktion bewiesen.

Die **Induktionsbehauptung** lässt sich folgendermaßen zusammenfassen: Für die Verschiebung eines Turmes mit ( $n$ ) Spielscheiben benötigt man mindestens  $2^n - 1$  Züge.

Die Aussage  $A(n)$  soll für alle natürlichen Zahlen mit  $n \geq n_0$  nachgewiesen werden. Der Induktionsanfang  $A(n)$  wird mit den bereits durchdachten Überlegungen durchgeführt, wobei  $n$  die Anzahl an Spielsteinen und  $A(i)$  die Anzahl der benötigten Spielzüge darstellt.

$$A(1) = 1$$

$$A(2) = 3$$

$$A(3) = 7$$

Offensichtlich bestätigt diese Zahlenfolge unseren zu beweisenden Ausdruck.  
Die Behauptung, dass es für einen Turm mit  $k$  Spielscheiben mindestens  $2^k - 1$  Umsetzungen gibt, sei also richtig für ein beliebiges  $n$  mit  $1 < k < n$ .

Wir haben eine rekursiv definierte Funktion  $f$  vor uns liegen, wobei  $f(n)$  die günstigste Anzahl an Zügen bei einem Turm bestehend aus  $n$  Kreisscheiben ist. Somit ist  $f(1) = 1$  und  $f(n + 1) = 2 * f(n) + 1, \forall n \geq 0$ .

Die Vorgangsweise bei einem Turm bestehend aus  $n$  Kreisscheiben wurde bereits erläutert. Zusammengefasst beinhaltet dies die Verschiebung von  $(n - 1)$  Scheiben auf die Hilfsposition bestehend aus  $(n - 1)$  Zügen, die Verschiebung der größten Spielscheibe (ein Zug), sowie die erneute Verschiebung des  $(n - 1)$  - großen Turmes auf den größten.

Aus diesem Grund kann man auch die günstigste Lösung für einen Turm bestehend aus  $(n + 1)$  Spielsteinen errechnen.

Solch eine, auf den natürlichen Zahlen definierte Funktion, ist aber definiert als  $f(n) = 2^n - 1$ . Folglich entspricht  $2^n - 1$ , wobei  $n$  die Scheibenanzahl ist, der Anzahl der benötigten Spielzüge.

### **Satz/Korrolar:**

Die günstigste Verschiebung eines Turmes bestehend aus  $n$  Kreisscheiben ist stets  $2^n - 1$ .

### **Beweis:**

$$f(n + 1) = 2 * f(n) + 1 = 2 * (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$
$$\text{bzw.: } 2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^n + 2^n + 1 - 1 - 1 = 2 * 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Somit wurde bewiesen, dass das Problem für alle  $n$  aus den natürlichen Zahlen lösbar ist. Das heißt, dass ein Turm mit einer beliebig großen Anzahl an Scheiben stets von einer Ausgangsposition an eine Endposition bewegt werden kann.

Angenommen die Formel ist für eine Anzahl an  $n$  Spielsteinen bewiesen, sprich  $A(n) = 2^n - 1$ , dann folgt daraus  $A(n + 1) = 2 * I(n) + 1 = 2 * (2^n - 1) + 1 = 2 * 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1 = A(n + 1)$ . q.e.d

Im Folgenden wird die Formel  $2^n - 1$  in Form einer Tabelle dargestellt:

| $n$ | $2^n - 1$ |
|-----|-----------|
| 0   | 0         |
| 1   | 1         |
| 2   | 3         |
| 3   | 7         |
| 4   | 15        |
| 5   | 31        |
| 6   | 63        |
| 7   | 127       |
| 8   | 255       |
| 9   | 511       |
| 10  | 1023      |
| 11  | 2047      |
| 12  | 4095      |
| 13  | 8191      |
| 14  | 16383     |
| 15  | 32767     |

*Tabelle 6:  $2^n - 1$  in Abhängigkeit von  $n$ .*

Obige Tabelle bringt die Variable  $n$  im Zusammenhang zur Funktion  $2^n - 1$ . In der ersten Spalte findet man die Werte von  $n$  von 0 bis 15. In der zweiten Spalte findet man ihren dazugehörigen Funktionswert. Man sieht, dass der Funktionswert mehr als verdoppelt wird, wenn man das Argument um eins erhöht.

Diese Tabelle zeigt, dass die Anzahl bereits nach wenigen Zügen rasant ansteigt. Somit braucht man bei 15 Steinen bereits 32767 Züge.

Abbildung 9 skizziert den dazugehörigen Graphen der Funktion  $f(n) = 2^n - 1$ . Der Graph dieser Funktion ist streng monoton steigend. Ebenso wird durch diese Darstellung sowie durch das vorhandene Koordinatensystem verdeutlicht, dass es sich um ein rasantes Wachstum handelt. Um eine geeignete Skizze zu erzielen, stehen die Koordinatenachsen im Verhältnis 1:10.

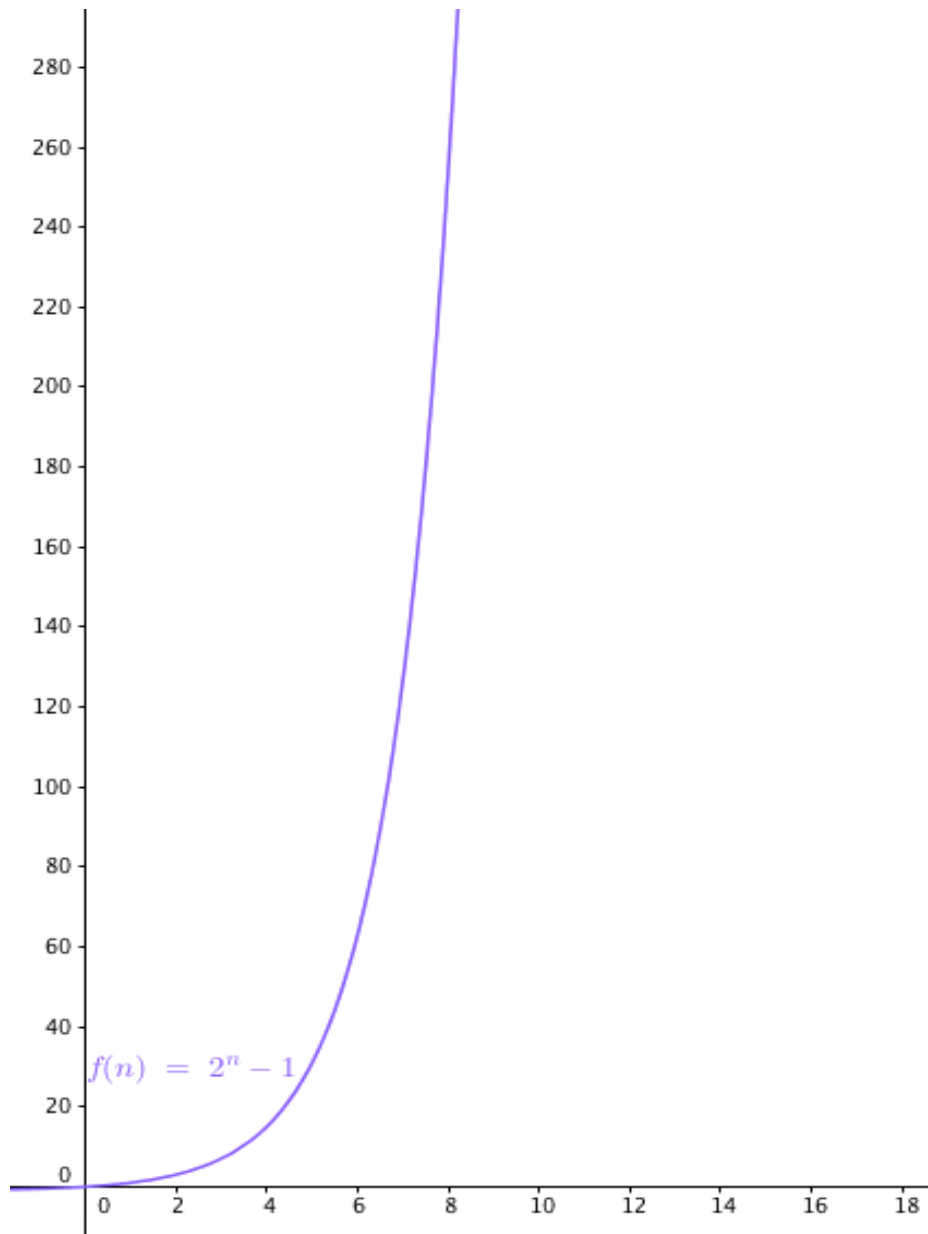


Abbildung 9: Graph der Funktion  $f(n) = 2^n - 1$ .

## 2.4 Die Weizenkornlegende

Die Zahlenfolge  $2^n - 1$  tritt in einem weiteren mathematischen Problem auf. In diesem Kapitel soll deshalb die Weizenkornlegende näher beleuchtet werden.

Die Weizenkornlegende behandelt die Entstehungsgeschichte des Schachspiels. Schach ist ein Brettspiel für zwei Spieler. Man benötigt dazu ein Schachbrett, auf welchem insgesamt 64 Felder vorhanden sind, sowie 32 Schachfiguren. Jeder Partei stehen 16 kleine Figuren zur Verfügung: einen König, eine Dame, jeweils zwei Läufer, Springer und Türme, und acht Bauern. Die wichtigste Figur des Spiels war der Schah, welcher heutzutage nur als König bekannt ist. Aus diesem Namen leitet sich die heutzutage gängige Bezeichnung Schach ab. (vgl. Bauchhammer 1990: S. 80f)

Das 8 x 8 matrixgroße Spielfeld enthält 32 helle sowie 32 dunkle Quadrate (meist in den Farben Schwarz und Weiß), welche abwechselnd angeordnet sind und dadurch ein kariertes Muster ergeben.

Die Anfänge des Schachspiels sind bis heute unklar und nicht mit absoluter Sicherheit belegbar. Im Zusammenhang mit einer Antwort tauchen unterschiedliche Kulturen auf, wie die Griechen, Ägypter, Hebräer, Babylonier, Skythen, Chinesen, Inder, Perser und Araber. Ebenso finden einzelne Personen Erwähnung, welche bis zur biblischen Figur Adam reichen (vgl. Schafroth 2002: S. 13).

Auch wird vermutet, dass sich das Schachspiel aus einem chinesischen Wahrsagespiel zur Herrschaftszeit von Wu Ti (560-578) entwickelt hat. Dies geht aus alten Schriftstücken aus China hervor. In einem im Jahre 984 überarbeiteten Text, „T'ai ping yu lan“, liest man, dass der Kaiser Hsiang ch'i (heute Xiang qi) ein Spiel entdeckt haben soll, welches unserem heutigen Schachspiel entspricht. Das chinesische Wahrsagespiel könnte somit ein Vorläufer der chinesischen sowie der westlichen Schachvarianten sein.

Viele unterschiedliche Faktoren machen es allerdings schwer, den exakten Ursprung des Spiels zu definieren. (vgl. Schafröth 2002: S. 14f)

Doch die wohl wahrscheinlichere Theorie ist, dass das Spiel Schach in Indien entstand. Die Erfindung wird auf das 5. oder 6. Jahrhundert datiert, wobei es möglicherweise noch früher aufkam. Sowohl indische als auch persisch-arabische Quellen bestätigen Indien als Entstehungsland des Schachspiels. (vgl. Schafröth 2002: S. 17)

Jedoch gilt es auch zu bedenken, dass historische Ereignisse in der damaligen Zeit lange mündlich überliefert wurden, bevor diese verschriftlicht wurden. Vieles wurde auf diese Weise nur mündlich weitergegeben und ging durch diese Tatsache verloren bzw. kam es erst Jahrhunderte später zu schriftlichen Aufzeichnungen. Unter Berücksichtigung dieser Umstände bleiben der Ort sowie der Zeitpunkt der Entdeckung und somit die Anfänge des Schachspiels ein Mysterium. (vgl. Schafröth 2002: S. 14)

Der arabische Historiker, Philosoph und Geograph Abu al-Hasan Ali ibn al-Husayn al-Mas'ūdi brachte um das Jahr 950 in „Die goldenen Wiesen und Edelsteingruben“ die wohl bekannteste Anekdote zur Entstehung des Schachspiels in Umlauf: die Weizenkornlegende. (vgl. Ehn / Kastner 2010: S. 13)

Die Legende findet ebenso 1796 Erwähnung durch den französischen Mathematiker Jean-Étienne Montucla in seiner „Histoire des mathématiques“. Berichtet wird allerdings nicht von Weizenkörnern, sondern von Reiskörnern. (vgl. Beutelsbacher 2015: S. 302)

Der Legende zufolge erfand der Brahmane Sissa ibn Dahir das Schachspiel. Er verfolgte das Ziel, seinen tyrannischen Herrscher zum Guten zu ändern. (vgl. Buchhammer 1990)

Er wollte seinem Herrscher klarmachen, dass er auf die Unterstützung seines Volkes angewiesen ist, um sich gegen Feinde zu verteidigen. Ein Herrscher

muss sein Volk zwar leiten, jedoch ist er ohne ihre Hilfe chancen- und machtlos. Der Weise namens Sissa ibn Dahir präsentierte das von ihm entwickelte Spiel seinem Machthaber namens Sherahm, welcher so großen Gefallen am Schachspiel hatte, dass dieser seinem Erfinder einen Wunsch seiner Wahl erfüllen wollte. Dieser wünschte sich weder Geld noch Gold, sondern lediglich Weizenkörner. Diese sollten folgendermaßen berechnet werden: Auf dem ersten Feld des Spielfeldes sollte ein Weizenkorn/Reiskorn platziert werden. Auf jedem weiteren Feld sollte die vorherige Anzahl verdoppelt werden. Somit liegen auf dem zweiten Feld zwei Stück, auf dem Dritten vier, etc. Diese Folge wird bis zum 64 Feld fortgeführt. (vgl. Ehn / Kastner 2010: S. 13)

„Die Legende berichtet, dass der Herrscher den Erfinder aufgrund dieses *kindischen* Wunsches anfangs für einen Dummkopf gehalten habe - bis die Gelehrten seines Hofes ihm ausrechneten, wie viele Reiskörner das wirklich wären.“ (Beutelsbacher 2015: S. 302)

Warum die Summe dieses bescheidenen Wunsches überraschend hoch ausfällt, kann mathematisch berechnet werden:

Wenn auf dem ersten Feld ein Korn liegt, auf dem zweiten zwei, auf dem dritten vier, so erkennt man, dass sich die Zahl stets verdoppelt. Dies entspricht den Zahlen  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}$ . Der Lohn des Spiele-Erfinders sind alle Körner, welche sich auf dem Schachbrett befinden, sprich die Summe der auf den 64 Feldern des Schachbrettes liegenden Körner,  $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{64}$ . Mathematisch betrachtet erhält man  $\sum_{i=0}^n 2^i$ . Nach der geometrischen Summenformel ergibt dies  $2^{n+1} - 1$ .

Nach 64 Feldern würde diese Summe  $2^{64} - 1$  entsprechen. Ausgerechnet ergibt dies 18.446.744.073.709.551.615, was wiederum

$1,8446744073709551615 \cdot 10^{19}$  ist.

Es ist praktisch unmöglich, so eine große Anzahl an Körnern aufzubringen.

### 3. Nim

Das folgende Kapitel widmet sich einem strategischen Spiel namens „Nim“. Es wird sowohl das Spiel selbst betrachtet, als auch sein mathematischer Hintergrund und dessen Varianten.

#### 3.1 Spielanleitung

Bei vorliegendem Spiel handelt es sich um einen Zeitvertreib für zwei Personen (A und B). Mithilfe von einer beliebigen Anzahl an Spielsteinen (Streichhölzer, Stäbchen, Steinchen, ...) werden mehrere Haufen (Reihen, Stapel, ...) auf eine Oberfläche gelegt. Sowohl die Anzahl der Spielreihen als auch die Anzahl an Spielsteinen pro Reihe ist beliebig. Jedoch scheint es sinnvoll, sich auszumachen, dass sich zu Beginn des Spiels in keiner Reihe gleich viele Objekte befinden. Eine ähnliche Anleitung findet sich im Werk des amerikanischen Mathematikers Bouton aus dem Jahre 1901.

Normalerweise befindet sich in jeder Reihe eine unterschiedliche Anzahl an Spielsteinen. In der ersten Reihe könnte man somit nur einen Stein vorfinden, in der zweiten drei, in einer weiteren fünf und in der vierten Zeile bereits sieben Spielsteine, und so weiter. Die Spieler können abwechselnd entweder einen oder mehrere Steinchen von einer Reihe des Spielfeldes nehmen, wobei mindestens einer genommen werden muss. Derjenige Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt. Somit verliert derjenige, dem es nicht mehr möglich ist, ein Objekt zu entfernen.

Es gibt drei Haufen, welche jeweils  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  Spielsteine beinhalten. Jeder Spielzug besteht darin, sich einen Haufen auszusuchen und aus diesem so viele Steine wie gewünscht zu entnehmen. Sobald sich auf keinem Haufen,  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ , mehr Spielsteine befinden, ist das Spiel beendet.

## 3.2 Historischer Hintergrund

Bestimmte Formen des Spiels wurden in mehreren amerikanischen Colleges sowie auf manchen „American fairs“ unter dem Namen Fan-Tan gespielt.

Dieser Name ist leicht zu verwechseln mit einem identisch genannten chinesischen Spiel, weshalb öfter die Rede vom Nim-Spiel ist. (vgl. Bouton 1901) Aus dem Altenglisch übersetzt bedeutet *nim* so viel wie (weg-)nehmen (vgl. Guzmán Ozámiz 2003).

Es ist schwer, geschichtliche Fakten hinter diesem Spiel aufzudecken und zu erforschen (vgl. Bouton 1901).

Es gibt Autoren, die den Ursprung des Spiels im Orient vermuten, während andere das Europa des 16. Jahrhunderts (Deutschland oder das Vereinigte Königreich) angeben. Ebenso wird manchmal auf das alte chinesische Reich als Entstehungsort zurückgegriffen. (vgl. Darling 2004: S. 220) Allem Anschein nach, soll es mit dem antiken Spiel „Tsyanshidzi“ im Zusammenhang stehen, welches „Steine nehmend“ bedeutet (vgl. Alegría / Fernández / Ibáñez / Lekuona 2011: S. 7).

Ein Professor für Mathematik an der Harvard Universität, Leonard Charles Bouton, beschrieb ein bekanntes Spiel und schlug vor, dieses „Nim“ zu benennen. Womöglich hat der Nordamerikaner diesen Namen von einem germanischen Verb (nimml) abgeleitet, welches wegnehmen oder stehlen bedeutet. (vgl. Gardner 1964: S. 62)

Er erstellte ebenso eine vollständige mathematische Analyse und somit eine dazu passende Theorie (vgl. Moore 1910). Im Jahre 1901 publizierte er eine vollständige Untersuchung bezüglich der gewinnbringenden Strategie (vgl. Darling 2004).

Nim ist ein sehr bekanntes Spiel, da es im Laufe der Geschichte mehrmals vorkommt. Das Spiel findet Erwähnung in einigen Büchern, wie zum Beispiel im Bestseller von Katherine Neville „The Eight“ (1988). Das Spiel erlebte einen

Aufschwung an Popularität durch den bekannten Film „L'Année dernière à Marienbad“ (1961).

### 3.3 L'Année dernière à Marienbad

In Filmen ist eines der meist diskutierten und angesprochenen Themen in Bezug auf die Mathematik die Spieltheorie. Sie widmet sich der Analyse der Strategie, die man verfolgen muss, um zu gewinnen. (vgl. Aula de Innovación Educativa 2012: S. 76)

Der Film „L'Année dernière à Marienbad“ von Alain Resnais aus dem Jahre 1961 beinhaltet mehrere Szenen, in denen sich die Protagonisten dem Nim-Spiel widmen. Der Protagonist des Films verwendet dieses Spiel als Zeitvertreib im Marienbad. Er gewinnt jede Partie, da er die Strategie des Spiels bereits durchschaut hat.

Das Spiel taucht erstmals nach etwa zehn Minuten auf. Zwei Spieler spielen eine kurze Nim-Partie mit Spielkarten. [TC: 00:15:20-00:16:30]. Kurze Zeit später wird erneut auf das Spiel hingewiesen. Dieses Mal jedoch wird es anhand von Streichhölzern praktiziert. [TC: 00:22.24-00:23.28]. Dieses Spiel zieht sich somit als roter Faden durch die komplette Handlung des Films. Gegen Ende wird beispielsweise auf Dominosteine zurückgegriffen. [TC: 1:15:31-1:16:32]. Der Szenenvergleich wurde anhand des Films durchgeführt. (*Letztes Jahr in Marienbad*. R.: Alain Resnais. Italien/Frankreich 1961)

Es wird deutlich, dass Alain Resnais das Spiel auf meisterhafte Form wiedergibt. Dadurch wurde das Spiel in derart großem Ausmaß bekannt, dass man es an vielen Orten unter dem Namen „Marienbad“ kennt. Die im genannten Film gespielte Version beinhaltet sechzehn Objekte, welche auf vier Zeilen wie folgt aufgeteilt werden: 1, 3, 5, 7.

„Der Beginn des Gespräches zwischen X und M (off) ist schon zu hören, während das Bild noch zu ihrer Gruppe gleitet.

Stimme von M: *Nein, jetzt nicht... Ich schlage Ihnen ein anderes Spiel vor: Ich kenne ein Spiel, bei dem ich immer gewinne...*

[...]

X: *Versuchen wir es.*

M (die Karten vor X ausbreitend): *Man spielt es zu zweit. Die Karten werden folgendermaßen angeordnet. Sieben. Fünf. Drei. Eine. Die Spieler heben abwechselnd Karten auf, gleich wie viele, unter der Bedingung, diese jeweils nur aus einer Reihe zu nehmen. Werde die letzte Karte aufhebt, hat verloren.* (Eine kurze Pause, dann auf die Kartenweisend): *Wollen Sie anfangen.*

[...]

Sie spielen schweigend, ohne Musik, in vollständiger Stille eine rasche Partie.

X nimmt nach einer Sekunde des Nachdenkens eine Karte aus der Reihe zu 7. M nimmt sehr rasch eine Karte aus der Reihe zu 5. X denkt drei Sekunden nach und nimmt den Rest der Reihe zu 7. M ergreift, ohne weiter nachzudenken, zwei Karten aus der Reihe zu 3. X denkt einige Augenblicke nach, lächelt, als ob er begriffen hätte, dass er verloren hat, nimmt eine der drei noch verbleibenden Karten (Reihe zu 5). M nimmt eine andere (aus der Reihe zu 3). Es bleibt die einzelne Karte übrig. Da alle Karten mit der Rückseite nach oben liegen, kann man auch diese nicht erkennen. Die Kamera hat sich im Verlaufe des Spiels dem Tisch genähert, und das Bild bleibt einen Augenblick auf diese letzte Karte gerichtet, als ob sie eine besondere Bedeutung hätte.“ (Robbe-Grillet 1961: S. 34)

Der einzige Unterschied zum beschriebenen Nim-Spiel besteht darin, dass nicht derjenige, der den letzten Zug macht, gewinnt, sondern dieser verliert. Dies entspricht somit einer komplementären Variante. In „L'Année dernière à Marienbad“ ergibt die Verteilung mittels vier Zeilen ein Dreieck, welches gleichzeitig eine deutliche Anspielung auf das amouröse Liebesspiel der Handlung darstellt. (vgl. Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas 2012: S. 108)

Sobald man eine gewisse Taktik entwickelt hat und diese auch im Spiel verfolgt, wird es mehr als wie ein Rätsel gehandhabt.

„Stimme von M: *Nein, jetzt nicht... Ich schlage Ihnen ein anderes Spiel vor: Ich kenne ein Spiel, bei dem ich immer gewinne...*

Stimme von X: *Wenn Sie nie verlieren können, ist es kein Spiel.*

Stimme von M: *Ich kann verlieren.*

[...]

M (fortfahrend): ... *Aber ich gewinne immer.*“ (Robbe-Grillet 1961: S. 34)

„Auf dem Tisch ist M's Lieblingsspiel aufgebaut, und zwar diesmal mit Dominosteinen, die mit der Rückseite nach oben in der vorgeschriebenen Ordnung liegen: 7, 5, 3, 1. M und X wollen gegeneinander spielen [...]

Ich finde dieses Spiel absurd.

Man muss den Trick kennen.

Es genügt, eine ungerade Zahl zu nehmen.

Sicher wird es Regeln geben.

Der, der anfängt, verliert.

[...]

Hauptsache, man achtet darauf, das Komplement zu sieben wegzunehmen.

In welcher Reihenfolge?

Nachdem X lange das Spiel betrachtet hat, macht er ein Zeichen, dass er bereit ist, und während die anderen alle schweigen, sagt er zu M:

X: *Ich bitte Sie, fangen Sie doch an.*

M: *Mit Vergnügen... Welchen soll ich nehmen?*

[...]

X: *Den.*

M: *Sehr gut.*

Die Partie ist schnell und in völliger Stille gespielt worden.

X: *Nun, ich habe verloren.*

Er beginnt langsam, offensichtlich darüber nachzudenken, wie er hätte spielen müssen, die Steine für eine neue Partie aufzubauen, während die Kamera sich ihm nähert.“ (Robbe-Grillet 1961: S. 120f.)

Letztere Szene taucht erst gegen Ende des Films auf. Anhand dieser kann man erkennen, dass die Theorie hinter diesem Spiel für viele Protagonisten und auch Zuschauer noch unentdeckt geblieben ist.

### 3.4 Mathematischer Hintergrund

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst ein Spielfeld mit nur zwei Spielreihen.

Das heißt, man hat zwei Spielreihen I und II zu  $x_1$  bzw.  $x_2$ , Spielsteinen, welche zu Beginn des Spiels folgende Struktur aufweisen:  $(x_1, x_2)$ . Man verwendet die Überlegung des Rückschlusses: Um zu gewinnen, muss man nämlich gegen Ende des Spiels das Spielfeld  $(1, 1)$  seinem Gegner überlassen. Dies entspricht der Tatsache, dass sich in beiden Zeilen je ein Spielstein befindet. Nur so kann man sichergehen, dass man mit seinem nächsten Zug gewinnt. Denn durch den gegnerischen Spielzug wird einer der beiden Steine entnommen. Somit bleibt entweder die Position  $(1, 0)$  oder  $(0, 1)$  übrig. Man kann getrost den letzten Spielstein wegnehmen und dadurch den Sieg erlangen.

Wie kann nun besagte Kombination  $(1, 1)$  hervorgerufen werden? Hierfür gibt es mehrere passende Antworten. Man müsste zum Beispiel die Kombination  $(2, 1)$  bzw.  $(1, 2)$  vorfinden und den eigenen Spielzug entsprechend genannter Taktik durchführen. Ebenso wäre es sinnvoll, die Kombination  $(2, 2)$  übrig zu lassen, da diese nach zwei kleinen Zügen zu  $(1, 1)$  umgewandelt werden könnte. Kurz gesagt muss man versuchen, in jeder Spielreihe mindestens einen Spielstein übrig zu lassen. Somit ist es dem Gegner unmöglich, den letzten Zug des Spiels zu tätigen, da stets zwei Zeilen vorhanden sind.

#### 3.4.1 Das Binärsystem

Die zielführende Strategie für Nim beruht auf dem Zahlensystem des Binärsystems. Der Beweis der Strategie bezieht sich somit auf die Arithmetik der Binärzahlen und die Logik.

Bevor auf das Binärsystem näher eingegangen wird, sollten noch wichtige Tatsachen unseres altbekannten Zehnersystems bzw. Dezimalsystems wiederholt werden. Die Bedeutung einer Ziffer innerhalb einer Zahl ist abhängig von ihrer Stellung. Befindet sie sich an erster Stelle, von rechts ausgehend, so vertritt sie die Funktion einer Einerstelle. Somit erhält man insgesamt Einer-, Zehner-, Hunderter-, Tausenderstellen, usw. Unser Zahlensystem wird demnach in Potenzen der Zahl 10 unterteilt. Aus diesem Grund kann die Zahl 1234 als

$1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0$  dargestellt werden. Was im Alltag oft untergeht ist, dass die Ziffern von 0 bis 9 einer Zahl als Abkürzungen für ein Produkt mit einer Zehnerpotenz gelten.

Abgesehen vom Dezimalsystem existieren noch weitere Zahlensysteme. Das wohl wichtigste Zahlensystem neben dem Dezimalsystem ist das Binärsystem. Das Numerationssystem zur Basis 2 verwendet ausschließlich die Ziffern 0 und 1. Von Bedeutung sind demnach die Zweierpotenzen. Verwendet werden die Potenzen der Zweierreihe,  $2^0 = 1$ ,  $2^1 = 2$ ,  $2^2 = 4$ ,  $2^3 = 8$ ,  $2^4 = 16$ , etc. Bei dieser Schreibweise wird jede Zahl als Summe von Potenzen der Zahl 2 dargestellt. Die untenstehende Tabelle verdeutlicht, wie das Zweiersystem aufgebaut ist:

| Zahlen im Dezimalsystem, Basis 10 | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | Zahlen im Binärsystem, Basis 2 |
|-----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------|
| 0                                 |       |       |       |       |       | 0                              |
| 1                                 |       |       |       |       | X     | 1                              |
| 2                                 |       |       |       | X     |       | 10                             |
| 3                                 |       |       |       | X     | X     | 11                             |
| 4                                 |       |       | X     |       |       | 100                            |
| 5                                 |       |       | X     |       | X     | 101                            |
| 6                                 |       |       | X     | X     |       | 110                            |
| 7                                 |       |       | X     | X     | X     | 111                            |

| Zahlen im<br>Dezimalsystem,<br>Basis 10 | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | Zahlen im<br>Binärsystem,<br>Basis 2 |
|-----------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------------------------|
| 8                                       |       | X     |       |       |       | 1000                                 |
| 9                                       |       | X     |       |       | X     | 1001                                 |
| 10                                      |       | X     |       | X     |       | 1010                                 |
| 11                                      |       | X     |       | X     | X     | 1011                                 |
| 12                                      |       | X     | X     |       |       | 1100                                 |
| 13                                      |       | X     | X     |       | X     | 1101                                 |
| 14                                      |       | X     | X     | X     |       | 1110                                 |
| 15                                      |       | X     | X     | X     | X     | 1111                                 |
| 16                                      | X     |       |       |       |       | 10000                                |

Tabelle 7: Die Zahlen 1-16 und ihre Darstellung im Binärsystem

Die abgebildete Tabelle gibt die binäre Schreibweise für die Zahlen von 1 bis 16 an. Anhand der Tabelle erkennt man, dass eine Aufspaltung in Zweierpotenzen erfolgt.

Um eine Zehnerzahl  $x$  in eine Binärzahl umzuwandeln, verwendet man das Teilungsverfahren. Das bedeutet, dass die Zahl  $x$  so lange durch die Zahl 2 geteilt wird, bis man einen Rest von 0 oder 1 erhält.

Sei  $x$  zum Beispiel die Zahl 123. Es ergeben sich folgende Rechenschritte:

$$\frac{123}{2} = 61, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

$$\frac{61}{2} = 30, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

$$\frac{30}{2} = 15, \text{ wobei man Rest 0 erhält}$$

$$\frac{15}{2} = 7, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

$$\frac{7}{2} = 3, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

$$\frac{3}{2} = 1, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

$$\frac{1}{2} = 0, \text{ wobei man Rest 1 erhält}$$

Die Restziffern von unten nach oben gelesen werden aneinandergereiht und ergeben die gesuchte Binärzahl. In unserem Fall erhält man die Zahl  $x$  (=123) im Binärsystem als 1111011.

Im Zweifelsfall kann eine Probe durchgeführt werden:

$$1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2 + 1 * 2^3 + 1 * 2^4 + 1 * 2^5 + 1 * 2^6 = \\ = 1 + 2 + 8 + 16 + 32 + 64 = 123.$$

Aus erhaltener Tabelle geht hervor, dass Binärzahlen stets länger sind, als ihre entsprechende Zahl im Dezimalsystem:

„Eine Binärzahl ist immer etwa dreimal so lang wie die entsprechende Zahl im Zehnersystem. Größere Zehnerzahlen werden, als Binärzahl geschrieben, unübersichtlich.“ (Becher 1969: S. 51)

### 3.4.2 Kombinatorik

Das Nim-Spiel ist von einer Ansammlung an Positionen determiniert, bis man eine Zielposition erreicht hat. Dabei gibt es eine Gesamtheit an möglichen Positionen im Spiel. Das Spiel endet nach einer endlichen Anzahl an Spielzügen, unabhängig davon, wie sie ausgeführt werden.

Es gibt nur eine Zielposition: (0,0,0). Das heißt, dass zum Schluss keine Spielsteine mehr auf dem Spielfeld übrigbleiben, da sie von den Spielern abwechselnd weggenommen wurden.

Im ganzen Spiel gibt es nur zwei mögliche Stellungen: Gewinn- oder Verluststellungen. Die Begriffe der „Gewinnstellung“ und „Verluststellung“ wurden 1901 von Bouton geprägt. Nach seiner Terminologie gibt es entweder eine Gewinnstellung, sprich *safe combination* oder eine Verluststellung, sprich *unsafe combination*. (vgl. Gardner 1964: S. 63)

„Wenn die Stellung, die einer der Spieler hergestellt hat, dessen Gewinn garantiert, so heißt sie eine ‚Gewinnstellung‘; im anderen Falle eine ‚Verluststellung‘.“ (Gardner 1964: S. 62)

Es wird in weiterer Folge bewiesen, dass es dem anderen Spieler nicht mehr möglich ist, zu gewinnen, wenn einer der Spieler eine bestimmte Kombination an Gruppierungen übriglässt, vorausgesetzt, dass besagter Spieler keinen Fehler macht. Solch eine Zusammensetzung wird eine *safe combination* genannt. (vgl. Bouton 1901)

Genauer gesagt muss bewiesen werden, dass der andere Spieler, B, bei seinem nächsten Zug, keine *safe combination* mehr herbeiführen kann, wenn der andere Spieler, A, eine *safe combination* am Spielfeld übriglässt. Was auch immer Spielerin B bei ihrem Zug nun ausführt, Spieler A ist es bei seinem nächsten Spielzug erneut möglich, eine *safe combination* zu erzeugen. Spieler A hinterlässt somit stets eine *safe combination*, Spielerin B hingegen nie. Dies wird sukzessive so oft ausgeführt, bis die Anzahl der Spielsteine schrumpft und Spieler A seinen Siegeszug ausführen kann, indem er den letzten Stein nimmt. (vgl. Bouton 1901)

### 3.4.3 *Safe combinations*

Dieses Kapitel stützt sich, wie bereits oben erwähnt, auf Boutons (1901) Überlegungen.

Eine *safe combination* erhält man wie folgt: Die Anzahl der Spielsteine jeder Zeile wird unter Verwendung des Binärsystems angegeben. Die genaue Vorgangsweise im Hinblick auf eine Darstellung im Zahlensystem zur Basis 2 wird im eigens erstellten Kapitel, „Binärsystem“ (Seite 40), behandelt. Die Zahl 9 zum Beispiel wird unter Berücksichtigung genannter Umstände als 1001 angegeben, da  $1001 = 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0$ .

Im Anschluss werden diese Binärzahlen untereinandergeschrieben, sodass sich jede Ziffer in einer Spalte befindet. Wenn nun die Summe jeder Spalte eine gerade Zahl liefert, sprich kongruent zu  $0 \bmod 2$  ist, so liegt eine *safe combination*

vor. *Mod 2* bezeichnet dabei den Rest einer Division zweier natürlicher Zahlen. Anhand der Untersuchung durch *mod 2* erhält man zugleich die sogenannte Nim-Summe. Falls die Nim-Summe gleich Null ist, so handelt es sich um eine *safe combination*. Falls diese Summe größer als Null ist, so kann keine *safe combination* vorliegen.

|                              |          |          |          |          |
|------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>5</b>                     | 0        | 1        | 0        | 1        |
| <b>9</b>                     | 1        | 0        | 0        | 1        |
| <b>12</b>                    | 1        | 1        | 0        | 0        |
| <b>Summe</b>                 | <b>2</b> | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>2</b> |
| <b>Nim-Summe<br/>(mod 2)</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>0</b> |

Tabelle 8: Binärschreibweise der Zahlen 5, 9 und 12 und die paarweise Summe ihrer Ziffern.

Wie man obiger Tabelle entnehmen kann, handelt es sich bei der Kombination 5, 9, 12 um eine *safe combination*. Ebenso sieht man auf einen Blick, dass die Summe der einzelnen Ziffern kongruent zu  $0 \bmod 2$  ist, da sie restlos durch 2 teilbar ist.

Die ersten drei Zeilen der Tabelle stellen die drei Zahlen 5, 9 und 12 als Binärzahlen dar. Im Anschluss wird die Summe der entsprechenden Spalten gebildet. Die letzte Zeile zeigt, dass diese Summe je ein Vielfaches von 2 ist (kongruent zu *mod 2*).

Aus dieser Gegebenheit kann man ableiten, dass es nur eine passende dritte Zeile geben kann, wenn zwei Zeilen gegeben sind. Das heißt, dass es sich um ein geschlosseneres System handelt.

Falls man eine gewinnbringende Position vorfindet, wird der darauffolgende Zug stets eine *unsafe combination* hervorrufen. Des Weiteren kann ein Spieler eine *unsafe combination* jederzeit zu einer *safe combination* abändern, indem er einen passenden Zug aus einer Menge von weniger hilfreichen Optionen wählt. Mit

anderen Worten: Solange dem Gegner keine *unsafe combination* hinterlassen wird, ist es diesem nicht möglich, den Spielverlauf zu seinen Gunsten zu wenden.

Beide Tatsachen werden in durch Theoreme zusammengefasst und bewiesen.

**Theorem I:** Falls Spieler A eine *safe combination* hinterlässt, so ist es Spielerin B nicht mehr möglich, dies in ihrem nächsten Zug zu tun.

**Beweis:** Angenommen Spieler A hinterlässt eine *safe combination*, so darf Spielerin B bei ihrem nächsten Zug nur eine Zeile verändern, ist aber dennoch verpflichtet sich für eine Zeile zu entscheiden und mindestens einen Spielstein zu entnehmen. Nachdem die Anzahl der Spielsteine von zwei Zeilen gegeben ist, kann die dritte Zeile passend zu einer *safe combination* geformt werden, was wiederum von Spieler A bereits durchgeführt wurde. Deshalb kann Spielerin B keine *safe combination* hinterlassen.

**Theorem II:** Falls Spieler A eine *safe combination* am Spielfeld hinterlässt, und Spielerin B im Anschluss die Spielsteinanzahl einer Zeile verringert, so kann Spieler A stets eine der anderen Zeilen dermaßen verringern, sodass sich erneut eine *safe combination* bildet.

**Beweis:** Der Beweis wird vorerst durch einen speziellen Fall betrachtet. Angenommen Spieler A hinterlässt folgende *safe combination*: 5, 9, 12. Nun entnimmt Spielerin B der zweiten Zeile zwei Spielsteine, sodass sie die Spielsteinanzahl 5, 7, 12 übriglässt.

Nachstehende Tabelle verdeutlicht die Darstellung dieser durch ihre Binärschreibweise:

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| 5  |   | 1 | 0 | 1 |
| 7  |   | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Tabelle 9: Darstellung der Zahlen 5, 7 und 12 zur Basis 2.

Nun ist Spieler A am Zug. Um seine Strategie der *safe combinations* fortzuführen, muss er sich für die letzte Zeile entscheiden, um deren Anzahl von 12 Steinen zu verringern. Die Zahl, welche eine *safe combination* zusammen mit den Zeilen 111 und 101 liefert, ist 10, was wiederum der Zahl 2 entspricht. Das heißt, dass Spieler A aus der letzten Zeile 10 Spielsteine entnehmen muss, damit 2 Spielsteine übrigbleiben, und eine *safe combination* entsteht.

Um das Ganze nun für den allgemeinen Fall zu beweisen, nehmen wir an, dass Spieler A nach seinem Spielzug eine *safe combination* erwischt hat. Spielerin B entscheidet sich nun für eine Zeile und verringert deren Anzahl an Spielsteinen. Wenn eine Zahl verringert wird, so wechselt die Ziffer, welche am weitesten links liegt, unabhängig von allen anderen, ihre Binärzahl von 1 zu 0. Im gegenteiligen Fall würde sie vergrößert werden.

Somit wird sich der Spieler A für jene Zeile entscheiden, in welcher 1 in der Spalte links außen steht. An dieser Stelle wird er die Anzahl verringern, sodass die 1 in der Spalte links außen durch eine 0 ersetzt wird und alle weiteren Plätze entweder mit 1 oder mit 0 aufgefüllt werden, sodass erneut eine *safe combination* entsteht. Die neue Zahl ist demnach geringer als zuvor. Was auch immer Spielerin B macht, Spieler A kann stets eine *safe combination* am Spielfeld hinterlassen, indem er die Objekte einer Zeile verringert. Somit kann Spieler A bei jeder Gelegenheit eine *safe combination* erzielen. Solange dieser dem beschriebenen Schema treu bleibt, gewinnt er.

Eine der Zeilen wird durch Spieler A oder B so lange verringert, bis keine Spielsteine mehr vorhanden sind. Falls dies durch Spielerin B durchgeführt wird, so sind die beiden übrigen Zeilen ungleich, da genannter Spieler zuvor keine *safe combination* hinterlassen hat und Spieler A bei seinem nächsten Zug diese Zeilen entsprechend gleichmäßig verteilen wird. Somit kann Spieler A beide Zeilen stets gleichwertig machen. Spielerin B muss demnach alle Steine der zweiten Zeile entfernen und Spieler A kann somit alles aus der dritten Zeile entnehmen, wodurch er das Spiel gewinnt. Falls andererseits Spieler A derjenige ist, der eine der Zeilen auf null bringt, lässt er die anderen beiden gleichwertig und gewinnt gleichermaßen.

Falls das Spiel dermaßen ausgelegt wird, dass zu Beginn eine *safe combination* vorliegt, so könnte theoretisch der zweite Spieler die Partie für sich entscheiden. Umgekehrt, falls dies nicht der Fall ist, so kann der erste Spieler seinen Vorteil daraus ziehen und sogleich die passende Anzahl an Spielsteinen entfernen, sodass eine *safe combination* erzielt wird. Daraus geht hervor, dass derjenige, der zuerst eine *safe combination* erzielt und beibehält, gewinnt.

Abschließend ist zu sagen, dass es wesentlich mehr *unsafe combinations* gibt als „Gewinnpositionen“. Aus diesem Grund hat, bei einem zufällig gewählten Spielbrett, der erste Spieler eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit als sein Gegner. (vgl. Gardner 1964: S. 64)

#### 3.4.4 Liste von *safe combinations*

Für das folgende Szenario wird angenommen, dass das Spielfeld erneut aus drei Zeilen besteht, wobei sich pro Zeile höchstens 16 Spielsteine befinden. Somit ist in diesem Fall  $n = 4$ , da  $2^n = 16$ , wobei  $n$  ein Element der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist.

In untenstehender Tabelle finden sich alle möglichen *safe combinations* aufgelistet:

| Zeile       | I | II | III |
|-------------|---|----|-----|
| Spielsteine | 0 | 1  | 1   |
|             | 0 | 2  | 2   |
|             | 0 | 3  | 3   |
|             | 0 | 4  | 4   |
|             | 0 | 5  | 5   |
|             | 0 | 6  | 6   |
|             | 0 | 7  | 7   |
|             | 0 | 8  | 8   |
|             | 0 | 9  | 9   |
|             | 0 | 10 | 10  |
|             | 0 | 11 | 11  |
|             | 0 | 12 | 12  |
|             | 0 | 13 | 13  |
|             | 0 | 14 | 14  |
|             | 0 | 15 | 15  |
|             | 1 | 2  | 3   |
|             | 1 | 4  | 5   |
|             | 1 | 6  | 7   |
|             | 1 | 8  | 9   |
|             | 1 | 10 | 11  |
|             | 1 | 12 | 13  |
|             | 1 | 14 | 15  |
|             | 2 | 4  | 6   |
|             | 2 | 5  | 7   |
|             | 2 | 8  | 10  |

| Zeile | I | II | III |
|-------|---|----|-----|
|       | 2 | 9  | 11  |
|       | 2 | 12 | 14  |
|       | 2 | 13 | 15  |
|       | 3 | 4  | 7   |
|       | 3 | 5  | 6   |
|       | 3 | 8  | 11  |
|       | 3 | 9  | 10  |
|       | 3 | 12 | 15  |
|       | 3 | 13 | 14  |
|       | 4 | 8  | 12  |
|       | 4 | 9  | 13  |
|       | 4 | 10 | 14  |
|       | 4 | 11 | 15  |
|       | 5 | 8  | 13  |
|       | 5 | 9  | 12  |
|       | 5 | 10 | 15  |
|       | 5 | 11 | 14  |
|       | 6 | 8  | 14  |
|       | 6 | 9  | 15  |
|       | 6 | 10 | 12  |
|       | 6 | 11 | 13  |
|       | 7 | 8  | 15  |
|       | 7 | 9  | 14  |
|       | 7 | 10 | 13  |
|       | 7 | 11 | 12  |
|       |   |    |     |

Tabelle 10: Auflistung aller safe combinations unter Berücksichtigung dreier Zeilen, I, II und III.

Die drei Spalten der Tabelle stehen für die drei verschiedenen Zeilen, I, II und III, des Spielfeldes. Pro Zeile werden die entsprechenden Möglichkeiten aufgelistet eine *safe combination* zu erzielen. Folgende Fragestellung wird dadurch behandelt: Wieviele Spielsteine auf den jeweiligen Spiellinien benötigt man, sodass es sich um eine *safe combination* handelt? Die ersten 15 Kombinationen haben die Form  $(0, n, n)$ . Alle weiteren ergeben sich durch Miteinbeziehen der dritten Spielreihe und Erhöhung der Anzahl an Spielsteinen. Sie haben die Form  $(x_1, x_2, x_3)$ , wobei alle ungleich Null sind.

### 3.4.5 Die Wahrscheinlichkeit einer *safe combination*

Das vorliegende Kapitel folgt der Darstellung in Boutons „Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory“ (1901).

Unter der Annahme, dass die Anzahl in jeder Zeile zufällig im Vorhinein bestimmt wurde, kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, eine *safe combination* durch einen Spielzug zu erzielen.

Falls jede Zeile weniger als  $2^n$  Spielsteine enthält, wobei keine davon leer ist, so ist die mögliche Anzahl an verschiedenen Zeilen  $2^{n-1} * \frac{2^{2n}-1}{3}$ .

Die Menge von möglichen *safe combinations* ist  $(2^{n-1} - 1) * \frac{2^n-1}{3}$ .

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, eine *safe combination* als erstes auf dem Spielbrett zu hinterlassen, bei  $\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}*(2^n+1)}$  liegt. Dies entspricht wiederum der Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Spieler gewinnt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler gewinnt wird festgelegt durch  $\frac{1}{2^n+2+\frac{3}{2^{n-1}-1}}$ , unter der Voraussetzung, dass dem Gegenspieler die Theorie

hinter dem Denkspiel bereits bekannt ist, sowie dass die Spielsteine per Zufall bestimmt wurden.

### 3.4.6 Strategie – Wie gewinnt man Nim?

Womöglich ist es nötig, einige Male konzentriert zu spielen, um eine passende Strategie hinter dem Spiel zu entdecken. Man fixiert sich auf die geometrischen Konfigurationen, die auftauchen, wenn man sich des Sieges sicher ist, sogenannte *safe combinations*. Im Grunde genommen gibt es nur zwei mögliche Konstellationen: *safe* und *unsafe combinations* (vgl. Moore 1910). Eine *unsafe combination* ist definiert als jene Kombination, welche nicht als *safe combination* gilt. Jede *unsafe combination* kann durch einen geeigneten Spielzug zu einer *safe combination* werden sowie jede *safe combination* durch einen beliebigen Spielzug zu einer *unsafe combination* wird. (vgl. Moore 1910)

Wenn man die Spielzüge von hinten aufrollt, so erkennt man, dass man zum Schluss drei Zeilen mit jeweils einem Spielstein benötigt, oder nur zwei Zeilen mit jeweils einem Spielstein, nachdem man auf diese Konstellation durch seinen Zug hingeführt hat. Das heißt, dass es auf eine gerade Anzahl an Spielsteinen ankommt. Dem Spieler, der den nächsten Zug machen muss, bleibt keine andere Möglichkeit, als einen der beiden Spielsteine zu entfernen. Somit bleibt einem selbst nach dem gegnerischen Zug nur ein Spielstein, welchen man gefahrlos entnehmen kann. (vgl. Rupérez Padrón / García Déniz 2009: S. 139f)

Die Endkonstellationen einer *safe combination* hat drei Darstellungsformen:  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ .

Eine Möglichkeit, das Spiel für sich zu gewinnen, stützt sich auf das Binärsystem. Hierfür schreibt man die Anzahl der Spielsteine bzw. Objekte jeder Reihe als Binärzahl auf. Diese Nummern werden untereinander geschrieben, mit der Intention, sie miteinander zu addieren. Die Summe wird jedoch im Dezimalsystem angegeben. Falls bereits alle Spalten eine aufsummierte gerade Zahl ergeben, so ist es unmöglich, diese Strategie anzuwenden. Somit lässt man den ersten Zug den Gegenspieler machen.

Ziel ist es nun, jede Spalte in einer geraden Anzahl an Spielsteinen zu überlassen. Auf diese Weise können durch die Umplatzierung bzw. das Wegnehmen von Spielsteinen, andere Felder ausgefüllt aber auch geleert werden, wenn nötig mit dem Ergebnis, dass nach dem eigenen Spielzug alle Gruppen erneut eine gerade Anzahl aufweisen.

Man kann immer nach dieser Strategie handeln, vorausgesetzt man hat eine ungerade Anzahl an Spielsteinen in einer Spalte vorliegen. Man sollte dabei bedenken, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, dieses Ergebnis eines Spielzuges herbeizuführen.

Der Spieler bzw. die Spielerin, welche diese Strategie verfolgt, konzentriert sich auf jene Spalte des Spielfeldes, welche eine ungerade Anzahl an Spielsteinen aufweist sowie am linken Rand liegt (siehe Abbildung 9). Diese Spalte muss nach dem Spielzug eine gerade Anzahl aufweisen, sodass man erneut eine *safe combination* vorliegen hat.

Es ist klar, dass sich die Spielstrategie nicht verändert, wenn wir mehr Spielreihen als gehabt betrachten bzw., dass die Reihenanzahl sowie die Steine pro Reihe keinen Einfluss auf die Strategie und ihre Ausführung haben. Bei dieser Strategie gewinnt man gegen jeden, der diese noch nicht durchblickt hat, und auch gegen jemanden, der sie kennt, vorausgesetzt, man setzt den ersten Zug und erzielt eine *safe combination*.

Falls alle Spalten der Tabelle eine gerade Steinanzahl aufweisen, so ist es trotzdem ratsam, nicht aufzugeben, denn der Gegenspieler kennt die Strategie voraussichtlich nicht und wird so leicht einen Fehler machen. Somit ebnet er unbewusst den Weg zum Sieg seines Gegenübers.

Im Laufe des Spiels stehen oftmals mehrere Möglichkeiten offen, die ein Verfolgen der Strategie ermöglichen. Das heißt, dass es stets mehrere Varianten gibt, eine *safe combination* zu spielen. Diese Entscheidungen sind jedoch jedem Spieler individuell überlassen.

### 3.5 Variationen

Es existieren mehrere Versionen des Nim-Spiels, welche in diesem Kapitel einerseits Erwähnung finden und andererseits detailliert behandelt werden. Neben diesen gäbe es natürlich noch etliche weitere Varianten. Diese werden in weiterer Folge jedoch nicht berücksichtigt und weiter behandelt.

Die bereits beschriebene Variante kann durch mehr Zeilen problemlos erweitert werden, ohne dass sich dabei die Spielregeln verändern. Die zum Sieg führende Strategie bleibt somit dieselbe. Es verändert sich lediglich die Anzahl der zu betrachtenden Zeilen. Es müssen nämlich, wie gehabt, die Anzahl aller Spielsteine jeder Zeile als Binärzahlen betrachtet und verglichen werden. Hierbei ist es am einfachsten, die Binärzahlen entsprechend ihrer Ziffern untereinander zu schreiben. Die Elemente werden summiert und sind entweder äquivalent zu  $0 \bmod 2$  oder  $1 \bmod 2$ . Anhand dieser Vorgaben kann man eine *safe combination* erzielen. Es gewinnt somit jener Spieler, dem es zuerst gelingt, eine *safe combination* herzustellen. Wie bereits gezeigt wurde, ist es diesem Spieler somit möglich, jeden weiteren seiner Spielzüge mit einer *safe combination* zu beenden. Unter der Voraussetzung, dass er diese Strategie im weiteren Spielverlauf konsequent durchzieht, gewinnt er. Die einzige Änderung, die sich bei solch einer Erweiterung ergibt, ist, dass eine ungerade Anzahl an Zeilen, jede gefüllt mit nur einem Spielstein, nun sicher ist. Gleichzeitig kann eine gerade Anzahl an Spielzeilen mit jeweils einem Spielstein als keine *safe combination* gehandhabt werden.

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die in  $n$  Spielreihen enthaltenen Spielsteine. Die binäre Schreibweise steht stellvertretend für die  $n$  Zahlen  $x_i$ , ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

$x_{ij}$ , ( $i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$ ) jeweils 0 oder 1, sodass

$$x_i = x_{i0} + x_{i1}2^1 + x_{i2}2^2 + \dots + x_{in}2^n + \dots$$

Diese ganzen Zahlen  $x_{ij}$  sind als einzige bestimmt. Die Kombination gilt als *safe* genau dann, wenn  $\sum_{i=1}^n x_{ij} \equiv 0 \pmod{2}$ , (mit  $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

Das heißt, dass für jeden Platz  $j$ , die Summe der  $n$  Spielsteine  $x_{ij}$  ohne Rest durch 2 dividiert werden kann. (vgl. Moore 1910)

### 3.5.1 Misère

Die Spieler können zur Übereinkunft kommen, dass derjenige, der den letzten Spielzug ausübt, anstatt zu gewinnen, verliert. Dieses modifizierte Spiel scheint bekannter zu sein, als das zuvor behandelte. Diese Tatsache wird dadurch gestützt, dass diese besondere Variante im Film „L'Année dernière à Marienbad“ vorkommt. Die Theorie dahinter unterscheidet sich jedoch etwas von der zuvor erklärten. In bisher behandelter Variante war die Spielsteinstellung  $(1, 1, n)$ , wobei  $n > 1$ , eine *safe combination*. Bei der Spielvariante Misère sind hingegen die Kombinationen  $(1, 1, 1)$  sowie  $(1, 0, 0)$  *safe combinations* und nicht wie gehabt  $(1, 1, n)$ . Somit muss Spieler A, um zu gewinnen, eine der beiden zuletzt genannten *safe combinations* am Spielfeld hinterlassen. Als keine *safe combination* zählen die Formen  $(1, 1, n)$  sowie  $(1, n, 0)$ , wobei  $n > 1$ . Dies ist eindeutig zu beweisen, da im ersten Fall so viele Spielsteine aus der dritten Zeile entnommen werden, dass nur mehr einer übrig bleibt, also der Form  $(1, 1, 1)$  entspricht. Falls man von dem Spielfeld  $(1, n, 0)$  ausgeht, so erhält man eine *safe combination*, indem man diese auf  $(1, 0, 0)$  reduziert. Die Fortsetzung von beiden erwähnten Situationen ist, dass einer der beiden Spieler eine Zeile auf 0 minimiert und dadurch automatisch verliert.

Falls Spieler A eine *safe combination* hinterlässt, so kann Spielerin B dem nicht gleichkommen. Aus diesem Grund gewinnt auch bei dieser Variante derjenige Spieler, dem es zuerst gelingt, eine *safe combination* zu erzielen. (vgl. Bouton 1901)

### 3.5.2 Antonim

*Antonim*, ebenso bekannt unter *Antipathetic Nim*, ist eine weitere Variation des bekannten Nim-Spiels. Es unterscheidet sich lediglich durch eine zusätzliche Spielregel: Es ist nicht erlaubt, dass zwei Zeilen dieselbe Menge an Spielsteinen vorweisen.

Somit bleibt die zum Sieg führende Strategie die gleiche: Erkennt man alle *safe combinations* eines (Anto)Nim-Spiels, so hat man eine gewinnbringende Strategie gefunden. (vgl. Berlekamp / Conway / Guy 1982: S. 459)

Spieler A legt seiner Gegenspielerin B stets eine *safe combination* vor. Wenn dies der Fall ist, so ist dieser bei seinem folgenden Zug gezwungen, die *safe combination* aufzulösen und spielt automatisch eine *unsafe combination*. Aus dieser Position kann erneut eine *safe combination* gespielt werden. Dieser Prozess kann so lange fortgeführt werden, bis der Gegenspieler keine Spielsteine mehr auf dem Spielfeld vorfindet. Daraus folgt, dass Spieler A das Spiel gewinnt.

**Theorem:** Sei  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$  sodass  $x_i = x_j$ , genau dann wenn  $i = j$ . Dann existiert  $z \in \mathbb{N} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ , sodass  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  eine *safe combination* ist.

**Beweis:** Indirekt angenommen, dass  $\exists x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$  und die Position  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  keine *safe combination*  $\forall z \in \mathbb{N}$ , wobei  $z \neq x_i$  für  $1 \leq i \leq n-1$  ist. Es gibt höchstens  $x_i$  Spielzüge, welche von der i-ten Position vorgenommen werden können, und somit gibt es maximal  $x_1 * x_2 * \dots * x_{n-1}$  Züge, welche

von den ersten  $(n - 1)$  Positionen des Spielfeldes  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  gemacht werden können. Sei  $z_0$  fix unter der Bedingung dass  $z_0 \neq x_i$ . Eine der möglichen Spielzüge des Spielfeldes  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0)$  muss zu einer *safe combination* führen, da die Situation  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0)$  keiner *safe combination* entspricht. OBdA (Ohne Betrachtung der Allgemeinheit) sei  $(x_1 - y_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0)$  eine *safe combination*, wobei  $x_1 - y_1 \in \mathbb{N}$  und  $x_1 - y_1 \neq x_i$ . Diese *safe combination* ist eindeutig zu  $z_0$ , da für alle anderen gültigen Spielpositionen  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0 + g)$ , wobei  $g \in \mathbb{N}$ , die Position des Spielfeldes  $(x_1 - y_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0 + g)$  keine *safe combination* ist. Ausgehend von der Position  $(x_1 - y_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0 + g)$ , kann man die *safe combination*  $(x_1 - y_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_0)$  herbeiführen, indem man die Anzahl  $g$  an Spielsteinen der  $n$ -ten Position entnimmt. Somit sind die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , welche die Position  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  zu einer *safe combination* machen, eindeutig zu  $z$ . Es gibt eine endliche Anzahl an Spielzügen ausgehend von  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$ , aber eine unendliche Anzahl an  $z$ , von denen jeder einen einzigen Zug von  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  zu einer *safe combination* hat. Dies ergibt einen Widerspruch, da  $z$  eindeutig zu  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  ist. Daher gibt es für jeden einzelnen Wert  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  ein  $z \in \mathbb{N}$ , sodass  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z)$  eine *safe combination* ist. (vgl. Silbernack / Campbell 2015: S. 2f)

In weiterer Folge werden *safe combinations* für Antonim mit drei Spielzeilen angezeigt:

| x <sub>1</sub><br>x <sub>2</sub> | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0                                | 0  | 2  | 1  | 4  | 3  | 6  | 5  | 8  | 7  | 10 | 9  | 12 | 11 | 14 | 13 |
| 1                                | 2  | —  | 0  | 5  | 6  | 3  | 4  | 9  | 10 | 7  | 8  | 13 | 14 | 11 | 12 |
| 2                                | 1  | 0  | —  | 6  | 5  | 4  | 3  | 10 | 9  | 8  | 7  | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 3                                | 4  | 5  | 6  | —  | 0  | 1  | 2  | 11 | 12 | 13 | 14 | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 4                                | 3  | 6  | 5  | 0  | —  | 2  | 1  | 12 | 11 | 14 | 13 | 8  | 7  | 10 | 9  |
| 5                                | 6  | 3  | 4  | 1  | 3  | —  | 0  | 13 | 14 | 11 | 12 | 9  | 10 | 7  | 8  |
| 6                                | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | —  | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  |
| 7                                | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | —  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 8                                | 7  | 10 | 9  | 12 | 11 | 14 | 13 | 0  | —  | 2  | 1  | 4  | 3  | 6  | 5  |
| 9                                | 10 | 7  | 8  | 13 | 14 | 11 | 12 | 1  | 2  | —  | 0  | 5  | 6  | 3  | 4  |
| 10                               | 9  | 8  | 7  | 14 | 13 | 12 | 11 | 2  | 1  | 0  | —  | 6  | 5  | 4  | 3  |
| 11                               | 12 | 13 | 14 | 7  | 8  | 9  | 10 | 3  | 4  | 5  | 6  | —  | 0  | 1  | 2  |
| 12                               | 11 | 14 | 13 | 8  | 7  | 10 | 9  | 4  | 3  | 6  | 5  | 0  | —  | 2  | 1  |
| 13                               | 14 | 11 | 12 | 9  | 10 | 7  | 8  | 5  | 6  | 3  | 4  | 1  | 2  | —  | 0  |
| 14                               | 13 | 12 | 11 | 10 | 9  | 8  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | —  |

Tabelle 11: *Safe combinations* der Form  $(x_1, x_2, z)$ ;  $x_1$  ist der ersten Spalte zu entnehmen,  $x_2$  ist in der ersten Zeile zu finden und der Wert von  $z$  lässt sich in der Tabelle ablesen.

Vorliegende Tabelle listet alle möglichen *safe combinations*  $(x_1, x_2, z)$  auf, welche mit drei Spielzeilen gebildet werden können, wobei  $x_1, z \leq 14$  und  $x_2 \leq 12$ .

Der Tabelle kann man nach vorgegebenen  $(x_1, x_2, z)$  das fehlende  $z$  entnehmen. Die entstandene Kombination  $(x_1, x_2, z)$ , welche sich auf dem Spielfeld widerspiegeln kann, entspricht einer *safe combination*.

Die Tabelle wurde anhand folgender Überlegung erarbeitet: Im Spiel Antonim ist die Position  $(x_1, x_2, z)$  genau dann eine *safe combination*, wenn  $(x_1 + 1, x_2 + 1, z + 1)$  eine *safe combination* im ursprünglichen Nim-Spiel ist. (vgl. Berlekamp / Conway / Guy 2003; Berlekamp / Conway / Guy 1982: S. 459)

Dieses Theorem ist jedoch nicht gültig für mehr als drei Spielreihen, da  $(1, 2, 5, 6)$  einer *safe combination* in Nim entspricht, jedoch die Position  $(0, 1, 4, 5)$  keiner in Antonim. Somit ist genannte Position auch nicht in obiger Tabelle aufgelistet. (vgl. Silbernick / Campbell 2015: S. 4)

### 3.5.3 Münzen

Für das Nim-Spiel können auch Münzen verwendet werden. Diese werden auf einem nichtnegativen Zahlenstrahl verteilt. Die Anzahl der Münzen entspricht, im Gegensatz zu der Vermutung, dass es sich um Spielsteine handeln würde, der Anzahl an Spielreihen. Daraus resultiert, dass nur wenige Münzen benötigt werden, da diese nicht den Spielsteinen entsprechen. (vgl. Berlekamp / Conway / Guy 1982: S. 457)

Die Münzen werden auf dem Zahlenstrahl platziert. Ihre Abstände zu Null entsprechen der Anzahl an Spielsteinen in der jeweiligen „Zeile“. Falls sich zum Beispiel eine Münze auf der Zahl 7 befindet, bedeutet dies, dass sich in dieser Zeile welche durch die Münze dargestellt wird, sieben Spielsteine befinden. Im Laufe des Nim-Spiels, bewegen die Spieler verschiedene Münzen nach links, bis sich schlussendlich alle auf der Zahl 0 platziert befinden. Derjenige Spieler, welcher es schafft, die letzte Münze dorthin zu verschieben, gewinnt das Spiel.

### 3.5.3 „1, 2 oder 3“

Eine Variation des bekannten Spiels läuft darauf hinaus, dass man bei jedem Zug höchstens drei Spielsteine wegnehmen kann. Man könnte demnach zum Beispiel 23 Stäbchen nebeneinander schlichten. Jeder Spieler darf entweder einen, zwei oder drei direkt nebeneinanderliegende Stäbe entnehmen. Derjenige der sich gezwungen sieht, den letzten Stab zu nehmen, hat das Spiel verloren bzw. gewonnen – je nach Variante. (vgl. Guzmán Ozámiz 2003)

Dieses Spiel hat eine einfache Strategie. Erneut geht es darum, eine Sequenz, sprich eine Zahlenfolge zu finden, welche zum Sieg führt. In dieser Arbeit wird für weitere Überlegungen nur der Fall behandelt, dass ein Spieler dann verliert, wenn er den letzten Zug ausübt.

Die einfachste Art, eine passende Strategie zu finden, ist es, die Sache „von hinten“ aufzurollen.

Angenommen man befindet sich vor dem letzten Zug, wobei Spielerin B an der Reihe ist. An dieser Stelle ist lediglich ein Stäbchen vorhanden und Spieler A wird gewinnen. An diesem Punkt stellt man sich die Frage: Wie viele Stäbe hat Spieler A vorfinden müssen, um seinem Opponenten nur mehr einen übrig zu lassen? Und wie hat sein vorheriger Spielzug ausgesehen?

Die Antwort auf die erste Frage lautet folgendermaßen: Zwischen zwei und vier. Nur so kann Spieler A sichergehen, dass er nur einen Stab übriglässt, da er stets nur einen, zwei oder drei Spielsteine entnehmen kann. Findet Spieler A mehr als vier Stäbchen vor, so kann dieser Spielerin B nicht mehr nur einen Stab übriglassen.

Aus diesem Grund muss sich Spieler A versichern, dass er im vorherigen Spielzug zumindest fünf Stäbchen zurücklässt. Somit ist es gleichgültig, welchen Spielzug seine Gegnerin ausführt, da sie es nicht schafft, nur einen Stab als Rest zu lassen. Sie hat keine andere Wahl, als zwischen zwei und vier Stäbe übrig zu

lassen, wodurch Spieler A erneut zuvor erwähnten Spielzug durchführen kann. Dieses Verfahren wird sukzessive fortgeführt, weshalb, um fünf Stäbchen übrigzulassen, davor neun übriggelassen werden müssen und im vorherigen Zug wiederum 13 Stäbe. Daraus lässt sich schließen, dass Spielerin B zuvor 17 bzw. 21 Stäbe vorfinden hat müssen.

Bei diesem Spiel gewinnt derjenige Spieler, dem es gelingt, exakt folgende Zahlenfolge zu spielen: 21, 17, 13, 9, 5, 1.

Da das Spiel mit 23 Stäbchen begonnen wurde, ist es gewinnorientiert, zuerst zwei Stäbe zu entnehmen. Für den Fall, dass der Gegenspieler den ersten Spielzug ausüben darf, muss man darauf vertrauen, dass dieser die Strategie nicht kennt und sollte sobald wie möglich die zuvor aufgezeigte Zahlenfolge aufnehmen. (vgl. Rupérez Padrón / García Déniz 2009: S. 139f)

Das Muster hinter genannter Zahlenfolge ist, dass jedes ihrer Elemente eines ist, zu dem ein Vielfaches von 4 addiert wird. Interessant ist, dass die Zahl, mit der multipliziert wird, keine zufällig gewählte ist. Man geht von der höchstmöglichen Anzahl an wegzunehmenden Stäbchen aus und addiert die Zahl eins. Die Zahlenfolge  $a_n$  lautet somit  $a_n = 1 + x * n$ . Die Variable  $x$  entspricht der maximalen Anzahl an wegzunehmenden Stäben und  $n$  ist ein beliebiges Element aus den natürlichen Zahlen ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Die erforderliche Anzahl an zu entnehmenden Stäbchen ist jene Differenz, die zwischen einem Element der Zahlenfolge  $a_n$  und der Gesamtheit an Stäbchen auf dem Spielfeld entspricht. Sprich, falls sich 23 Stäbchen auf der Ebene befinden, so ist die Zahl  $21 = 1 + 4 * 5$  zu dieser Zahl das nächstliegende Element der zuvor besprochenen Zahlenfolge. Aus diesem Grund muss Spieler A, um zu gewinnen,  $2 = 23 - 21$  Stäbe entwenden. (vgl. Rupérez Padrón / García Déniz 2009: S. 139f)

### 3.5.4 Das Rätsel des Gänseblümchens

Dies ist ein Spiel des bekannten Spieleerfinders Samuel Loyd. Ihm werden viele, hauptsächlich mathematische, Rätsel zugeschrieben und er war deshalb bis zu seinem Ableben der „unumstrittene König der Rätselerfinder des Landes“ (Gardner 1964: S. 40) Wie der Name des Rätsels bereits verrät, dreht es sich um ein Gänseblümchen. Dieses hat 13 Blütenblätter. Gespielt wird es von zwei Spielern, welche alternierend entweder ein Blütenblatt oder zwei nebeneinanderliegende Blütenblätter bedecken. Es gewinnt diejenige Person, welche das letzte verbleibende Blütenblatt verhüllt, sodass dem Gegner nur mehr der Stiel der ursprünglichen Blume bleibt.



Abbildung 10: Blume mit 13 Blütenblättern.

Loyd persönlich erklärt seine Beziehung zu diesem Spiel wie folgt:

„Im Sommer 1865 [...] begegneten wir einem kleinen Bauernmädchen, das Gänseblümchen pflückte. Um das Kind zu unterhalten, zeigte ich ihm, wie es etwas über seine Zukunft erfahren konnte, indem es die Blütenblätter einer Blume abrupfte [...]. Sie erzählte mir, dass dieses Spiel bei den Bauernmädchen wohlbekannt wäre, nur mit einem Unterschied:

Zwei Leute spielen mit, wobei jeder entweder ein einziges Blütenblatt oder zwei nebeneinanderliegende zupfen durfte. Das Spiel wurde, allein oder zu zweit, solange fortgeführt, bis der Sieger das letzte Blatt pflückte und nur noch der Stiel übrigblieb, „die alte Jungfer“, die dem Verlierer gehörte.

Zu unserer aller Erstaunen besiegte Klein-Gretchen, die bestimmt nicht älter als zehn war, jeden einzelnen von uns, und zwar jedesmal, egal, wer anfang.“ (Gardner 2015: S. 58)

Er war sichtlich fasziniert von diesem Spiel:

„I did not study out the trick until we were back in Luzerne, but I was so bantered by the party that I made quite a point of investigating it, but never had the satisfaction of beating the little mathematician at her own game.“ (Loyd 1914: S. 85)

Die hinter dem Spiel steckende Theorie wird folgendermaßen erläutert:

„The second player can always win the Daisy game by playing so as to divide the petals into two equal groups. For example, if the first player takes one petal, the second player takes two opposite petals to leave two groups of five each; and if the first player takes two petals, the second player takes one opposite petal to accomplish the same result. Thereafter, he simply imitates the plays of the first player. If the first player takes two petals to leave a 2-1 combination in one group, the second player takes the corresponding two petals to leave a 2-1 combination in the other group. In this way he is sure to get the last play.“ (Gardner 1960: S. 140)

Der erste Spieler hat nur zwei Möglichkeiten: Entweder er bedeckt ein Blütenblatt oder zwei. Dementsprechend kann der zweite Spieler handeln, denn deckt der erste Spieler, B, nur ein Blatt ab, so wird Spieler A zwei Blätter abdecken, sodass zwei äquivalente Teile zu je fünf Blütenblättern entstehen.

Entscheidet sich Spielerin B jedoch für zwei Blütenblätter, so wird Spieler A nur ein Blatt des Gänseblümchens bedenken, sodass das Gänseblümchen in zwei Teile mit fünf Blütenblättern aufgespalten ist. Nun wird weitergespielt, indem Spieler A stets die Züge von Spielerin B ausgleicht. Genauer gesagt wird er versuchen, die Züge von Spielerin B zu imitieren. Wenn Spielerin B zwei Blätter des rechten Teils bedeckt, so wird Spieler A die entsprechenden Blütenblätter der linken Seite abdecken. Falls sich Spielerin B dazu entscheidet, nur ein Blatt der Blume zu verbergen, so wird Spieler A entsprechend handeln und ebenfalls nur ein Blatt der Gegenseite wählen. Durch diese Taktik wird die Anzahl an Zügen gerade gehalten, wodurch das letzte Blütenblatt Spieler A gehört und Spielerin B somit automatisch den Stiel erhält.

### 3.5.5 Wer zuerst auf 100 kommt, gewinnt

Es handelt sich hierbei um eine kuriose Variante des Nim-Spiels. Es werden lediglich Zahlen verwendet, welche aufsummiert werden.

Das Spiel startet bei Null und die Teilnehmer addieren alternierend Mengen an Zahlen bis man zur Zahl 100 gelangt. Sprich  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 100$ .

Die zu addierenden Zahlen  $a_j$  dürfen die Zahl 10 nicht übersteigen, also ist  $a_j \leq 10$ . Spieler A gewinnt genau dann, wenn er es schafft die Summe als erster auf Hundert zu ergänzen.

Die Strategie hinter diesem Spiel ähnelt dem bereits behandelten „1, 2 oder 3“.

Benötigt wird nämlich erneut eine Zahlenfolge. Die Formel hierfür ist

$11 * n + 1$  und ihre Elemente sind demnach 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 und 89.

Der erste Spieler hat einen geringen Vorteil, da er sich für die Zahl 1 entscheiden kann und somit seinen Gegner daran hindert, der eben erwähnten Zahlenfolge nachzugehen.

### 3.5.6 Nimbi

Piet Hein erfand diese Nim-Variation, dessen Gewinnstrategie bis heute nicht bekannt ist.

Die Spielsteine werden in Form eines Rechtecks beliebiger Größe angelegt. Deshalb kann man beispielsweise das Spielfeld als 4 x 6 Matrix vorfinden. Jeder Spieler darf nun abwechselnd beliebig viele Spielsteine entweder aus einer Spalte oder aus einer Reihe entnehmen. Es gewinnt derjenige Spieler, welcher es schafft, den letzten Spielzug auszuüben. (vgl. Alegría / Fernández / Ibáñez / Lekuona 2011: S. 8)

### 3.5.7 Nim für den Taschenrechner

Für dieses Spiel kann man einen Taschenrechner heranziehen. Dies ist nicht zwingend notwendig, jedoch sehr von Vorteil. Gespielt wird von zwei Spielern, A und B.

Zu Beginn des Spiels wird eine beliebige Zahl in den Taschenrechner eingegeben, beispielsweise 78,256. Die Spieler wechseln sich ab und ziehen einer nach dem anderen eine individuelle Anzahl ab. Die einzige Bedingung dabei ist, dass lediglich eine Ziffer verändert werden kann.

Die Zahl 0,003 von der Ursprungszahl abzuziehen ist erlaubt, da  $78,256 - 0,003 = 78,226$ . Allerdings wäre 5,1 als Subtrahend nicht gestattet, da  $78,256 - 5,1 = 73,156$ . Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass die Differenz nicht in den Bereich der negativen Zahlen wandern darf.

Der Spieler der es schafft, als Ergebnis die Zahl Null zu erhalten, entscheidet das Spiel für sich. (Rupérez Padrón / García Déniz 2009: S. 139f)

In weiterer Folge kann betrachtet werden, wie die Spielzüge eines solchen Spiels ausschauen könnten. Ausgegangen wird erneut von der Zahl 78,256.

| Spieler | Eingabe   | Ausgabe       |
|---------|-----------|---------------|
|         |           | <b>78,256</b> |
| A       | - 8 =     | 70,256        |
| B       | - 70 =    | 0,256         |
| A       | - 0,05 =  | 0,206         |
| B       | - 0,1 =   | 0,106         |
| A       | - 0,005 = | 0,101         |
| B       | - 0,1 =   | 0,001         |
| A       | - 0,001 = | <b>0</b>      |

*Tabelle 12: Spielzüge zweier Spieler bis zur Erreichung des Spielziels.*

Tabelle 11 ist unterteilt in drei Spalten. Die erste spiegelt die Zugreihenfolge der Mitspieler wieder. Die zweite Reihe repräsentiert die Rechenoperation, die in den Taschenrechner durch einen Spieler eingegeben wird. Die Spalte auf der rechten Seite gibt die Änderungen im Vergleich zu der Ursprungszahl wieder.

Anhand obiger Tabelle erkennt man, dass Spieler A die Partie gewinnt. Für diese Partie waren insgesamt sieben Spielzüge notwendig, drei der Spielerin B und vier des Spielers A. Ebenso ist in der Spalte „Ausgabe“ ersichtlich, dass immer nur eine Stelle verändert wurde. Der erste Spielzug hat eine Veränderung der Einerstelle hervorgerufen. Der erste Zug des zweiten Spielers hat eine Modifikation der Zehnerstelle bewirkt. Da die Zahl nun niedriger als 1 ist, sind einzig und allein geringe Änderungen vorzunehmen, dargestellt durch 0,1; 0,05; 0,001 und 0,005.

## 4. Das Vier-Farben-Problem

Das zu behandelnde „Vier-Farben-Problem“ ist eines der berühmtesten Probleme der Mathematik und hat nicht nur Mathematiker in seinen Bann gezogen.

Es handelt sich um ein interessantes und lange Zeit ungelöstes Problem aus der kombinatorischen Topologie. Jedoch gilt es zu beachten, dass, um das Vier-Farben-Theorem zu beweisen, viele weitere Bereiche der Mathematik involviert waren, welche jedoch nicht alle in dieser Arbeit behandelt werden können.

### 4.1 Darstellung des Problems

Manche der berühmtesten mathematischen Probleme ergeben sich anhand einfacher Fragestellungen. Das Vier-Farben-Problem ist ein gutes Beispiel, da es sich an einer harmlos scheinende Ausgangsfrage orientiert.

Die Angabe der Problemstellung ist simpel, jedoch gespickt mit unzähligen versteckten Feinheiten. Das heißt, dass die Aufgabe an sich so gestellt ist, dass sie auch von Kindern erfasst werden kann. (vgl. Gardner 1973: S. 86) Die Aussage jedoch zu beweisen, ist für viele Mathematiker, wie sich geschichtlich nachvollziehen lässt, eine Herausforderung gewesen (siehe 4.2).

Wie viele Farben benötigt man, um eine Landkarte dermaßen auszumalen, dass benachbarte Länder mit einer gemeinsamen Grenze unterschiedliche Farben aufweisen? Gardner (1973: S. 86) formuliert die Frage wie folgt:

„[K]ann man behaupten, daß vier Farben für beliebige Karten *notwendig* und hinreichend sind? [Oder anders gesagt:] Lässt sich eine Karte konstruieren, bei der man nachweislich *nicht* mit weniger als fünf Farben auskommt?“

Voraussetzung ist, dass die einzelnen Länder nicht aufgeteilt sind, sondern ihre Fläche zusammenhängend ist. Die Existenz von abgetrennten Landesteilen, welche dem gleichen Land angehören, ist nicht erlaubt.

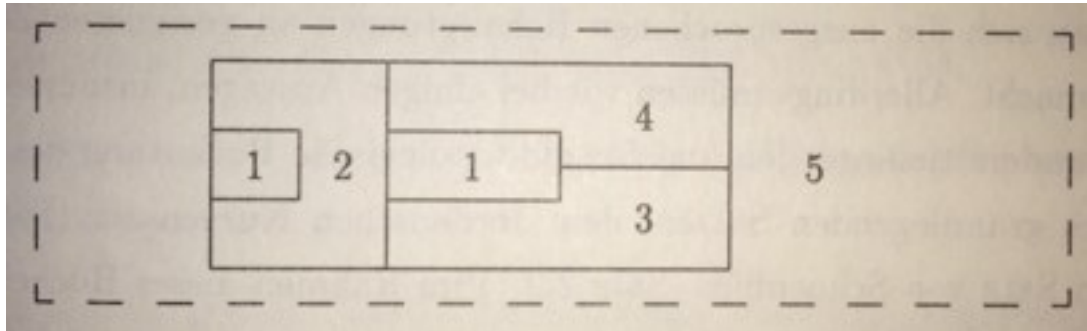


Abbildung 11: Unzusammenhängende Landesteile erlauben es nicht, die Karte mit vier Farben einzufärben.

Die Abbildung zeigt, dass das Land 1 zweigeteilt ist. Die Länder 1 bis 4 grenzen jeweils aneinander, weshalb sie je unterschiedliche Farben aufweisen müssen. Somit bleibt für das äußerste Land, 5, keine der verwendeten Farben übrig und es muss auf eine fünfte zurückgegriffen werden.

„Benachbarte Länder“ bezieht sich darauf, dass diese eine gemeinsame Grenze einer Länge ungleich Null aufweisen. Das impliziert, dass sich zwei Länder, welche sich in einem Punkt oder an mehreren isolierten (voneinander unabhängigen) Punkten berühren, falls notwendig, problemlos dieselbe Farbe teilen können (vgl. Appel / Haken 1977: S. 108). Somit müssen Länder, welche nur einen gemeinsamen Grenzstein besitzen, nicht unbedingt verschiedenfarbig sein.

Die folgende Abbildung zeigt, dass es ohne diese Bedingung unmöglich wäre, mit nur vier Farben auszukommen:



*Abbildung 12: Eine beliebige Anzahl an geometrischen Figuren kann sich in genau einem Punkt treffen.*

Da die Landkarte wie eine Torte aufgebaut ist, kann sie aus unendlich vielen Tortenstücken, was wiederum einer beliebigen Anzahl an Regionen entspricht, bestehen, die sich alle in einem Punkt treffen. In diesem Fall wären so viele Farben notwendig, wie Tortenstücke vorhanden sind. (vgl. Stewart 2015: S. 106f; Minette Busch 2004)

In diesem Kontext auch wichtig zu erwähnen, ist, dass die jeweilige Form der Regionen irrelevant ist, dafür aber ihre Anordnung in Verbindung mit den anderen Ländern eine wesentliche Rolle spielt.

## 4.2 Historischer Hintergrund

Die Entstehungsgeschichte des Vier-Farben-Theorems ist komplex und vielschichtig. Man könnte annehmen, dass Kartographen zuerst auf die Erkenntnis gekommen sind, dass vier Farben ausreichen, um eine Landkarte vollständig so einzufärben, dass dabei keine gleichfärbigen Flächen

aneinandergrenzen. Doch ist diese Vorstellung abwegig, denn „eine Beschränkung auf nur vier Farben war in der Kartographie nie eine Notwendigkeit“ (Fritsch 1994: S. 17).

Der US-amerikanische Mathematikhistoriker Kenneth O. May ging der Frage nach dem Ursprung des Problems nach und seine ausführlichen Untersuchungen widerlegten schlussendlich die Annahme, dass es sich um Kartographen gehandelt habe, und bestätigte eine andere Theorie. Allen Anschein nach ist das Vier-Farben-Problem erstmalig durch Francis Guthrie konkretisiert worden. (vgl. Gardner 1973: S. 87)

1852 schloss dieser sein Jurastudium erfolgreich ab (vgl. Fritsch 1994: S. 8). Im selben Jahre befasste er sich mit der Einfärbung der Grafschaften Englands (vgl. Erdmann 2009: S. 1). Um die Grenzen dabei deutlicher zu markieren, wollte er sicherstellen, dass je zwei benachbarte Grafschaften unterschiedliche Farben aufweisen. (vgl. Stewart 2015: S. 106) Dabei ging er davon aus, dass vier Farben ausreichen würden und konnte auch kein Gegenbeispiel für seine Theorie finden.

Die Erfindung des Problems geht somit auf Guthrie zurück. Er konfrontierte seinen noch studierenden jüngeren Bruder, Frederick Guthrie, damit und hoffte auf Bestätigung oder Widerlegung. Dieser wandte sich mit der Aussage am 23. Oktober 1852 an seinen Mathematikprofessor Augustus de Morgan. (vgl. Fritsch 1994: S. 10; Appel / Haken 1977: S. 108; Fritsch 1990: S. 80f)

De Morgan war dermaßen begeistert und fasziniert von der mathematischen Fragestellung, dass er sich noch am selben Tag mit einem Schreiben an Sir William Rowan Hamilton wandte, in welchem er den Sachverhalt erläuterte. Dieser Brief liefert die ersten Aufzeichnungen zur Problemstellung und ist heutzutage noch im *Trinity College* in Dublin vorzufinden. (vgl. Fritsch 1994: S. 11; Fritsch 1990: S. 80f; Aigner 1984: S. 7) Abbildung 13 zeigt einen Auszug aus dem Originalbrief von De Morgan an seinen Kollegen Hamilton:

My dear Hamilton

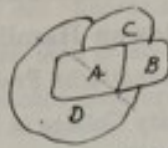
A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact - and do not yet. He says that, if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more - the following is his case in which four are wanted

A B C &c are names of colours

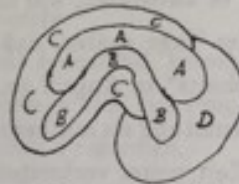


Query cannot a necessity for four or more be invented as far as I see at this moment, if four compartments have each boundary line in common with one of the others, three of them include the fourth, and prevent any fifth from connexion with it. If this be true, four colours will colour any possible map without any necessity for the colour meeting colour except at a point.

Now it does seem that drawing three compartments with common boundary A B C two and two - you cannot



make a fourth true boundary from all, caught by including me - But it is tricky work and I am not sure of all convolutions - What do you say? Had he it, if truly been noticed? My pupil says he guessed it in colouring a map of England,



B is included

The more I think of it the more evident it seems. If you retort with some very simple case which makes me out a stupid animal, I think I must do as the Pythons did. If this rule be true the following proposition of logic follows

If A B C D be four names of which any two might be confounded by breaking down some wall of definition, then some one of the names must be a species of some name which includes within external to the other three

Yours truly  
De Morgan

J E M  
Oct 23/52.

Abbildung 13: Auszug des Originalbrief von De Morgan an Hamilton.

„My dear Hamilton

A student of mine asked me today to give him a reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be anyhow divided and the compartments differently colored so that the figures with any portion of common boundary line are differently colored – four colors may be wanted but not more.

A B C D are names of colours.

[...] [B]ut it is tricky work and I am not sure of all convolutions – What do you say? And has it, if true been noticed? My pupil says he guessed it in coloring a map of England. The more I think of it, the more evident it seems. [...]

Yours truly

A De Morgan“ („Transkript des Briefes an Hamilton“: Fritsch 1994: S.

13)

Die Reaktion auf den Brief von Seiten des Mathematikers Hamilton fiel anders aus, als erwartet, denn er antwortete mit viertägiger Verspätung, dass er in nächster Zeit nicht dazu kommen würde, sich mit dem „Quaternion“ von Farben zu beschäftigen. Zur damaligen Zeit arbeitete dieser an einem algebraischen System, jenem der Quaternionen, und wie sich später herausstellte, gibt es eine Verbindung zwischen dieser und dem Vier-Farben-Satz, da eine Umformulierung des Satzes als Aussage über Quaternionen angesehen werden kann. (vgl. Stewart 2015: S. 108) Auf diese Weise drückte Hamilton sein Desinteresse am Thema aus, weshalb es in Vergessenheit geriet und vernachlässigt wurde (vgl. Fritsch 1994: S. 11). Enttäuscht von Hamilton gab De Morgen allerdings nicht auf und so setzte er sich mit anderen Mathematikern in Verbindung und verfasste im darauffolgenden Jahr zwei weitere Briefe an seinen Freund William Whewell und Robert Leslie Ellis. (Fritsch 1994: S. 16) Erst als 1878 der englische Mathematiker Arthur Cayley das Problem aufgriff

und am 13. Juli der mathematischen London Mathematical Society vorstellte (vgl. Bigalke 1988: S.150; Fritsch 1994: S. 18), kam das Problem erneut an die Öffentlichkeit. (Appel / Haken 1977: S. 108)

Er erkundigte sich, ob eine Lösung zu diesem Problem bereits vorhanden wäre. Wenig später erschien eine mathematische Analyse des Vier-Farben-Problems in den „Proceedings of the Royal Geographical Society“. Etwa ein Jahr darauf, 1879, wurde in der Zeitschrift „Nature“ der Artikel „How to Colour a Map with four Colours“ (Gardner 1973: S88) veröffentlicht, in welchem ein Beweis zum Vier-Farben-Problem, den der Mathematiker Alfred Bray Kempe gefunden hatte, vorgestellt wurde, und welcher im Anschluss im „American Journal of Mathematics“ präsentiert wurde. Sowohl William Edward Story als auch Charles Sanders Peirce ergänzten den von Kempe gelieferten Beweis durch Bemerkungen und Erweiterungen. Im Jahre 1879 glaubte man das Problem gelöst zu haben. Der Physiker Peter Guthrie Tait lieferte ziemlich genau ein Jahr später einen etwas anderen Beweis zum Problem, wobei sich herausstellte, dass es sich hierbei lediglich um interessante Umformungen des ursprünglichen Beweises handelte. (vgl. Minette Busch 2004; Fritsch 1994: S. 21)

In weiterer Folge überwiegte die Stille bezüglich des Vier-Farben-Problems, bis zu jenem Tag, als der Mathematiker Percy John Heawood einen entscheidenden Denkfehler in Kempes Beweis aufzeigte. Dieser, auf den ersten Blick richtig erscheinende Beweis, konnte somit erst elf Jahre später widerlegt werden. Heawood betonte allerdings, dass er bedauerte, keinen Beweis vorlegen zu können, sondern ausschließlich einen Fehler im bisher anerkannten enthüllte. (vgl. Fritsch 1994: S. 26) Obwohl Kempes Beweis eine Lücke enthielt, war seine Argumentation sehr clever und lieferte die Grundzüge des korrekten Beweises (vgl. Appel / Haken 1977: S. 108). Im Jahre 1891 wurde ebenso der Ansatz von Tait durch den dänischen Mathematiker Julius Petersen als fehlerhaft bewiesen. Durch die Widerlegung von Kempes Beweis gab Heawood zusätzlich einen Beweis für den Fünf-Farben-Satz an, womit eine obere Grenze

für die Färbung von planeren Graphen zum ersten Mal fehlerfrei bewiesen wurde. (vgl. Bigalke 1988: S. 151; Erdmann 2009: S. 1)

Der Mathematiker Georg David Birkhoff beschäftigt sich zusammen mit dem Mathematikprofessor Philip Franklin mit dem Problem vor allem im Bereich der Topologie. Er erreicht einen entscheidenden Fortschritt durch den Begriff des „reduziblen Ringes“. (vgl. Minette Busch 2004; Fritsch 1994: S. 29)

Der tatsächliche Durchbruch gelang erst gegen Ende der sechziger Jahre durch den deutschen Mathematiker Heinrich Heesch. Er entwickelte einen Algorithmus für den Nachweis, der von ihm gefundenen „D-Reduzibilität“ und ließ ihn von seinem Schüler Karl Dürre umsetzen. Eine genaue Beschreibung zur Reduktion findet sich ab Seite 79 in Heesch's „Untersuchungen zum Vierfarbenproblem“ (1969). Des Weiteren erfand er die sogenannten „Entladungsprozeduren“, mithilfe derer der Beweis des Vierfarbensatzes erleichtert wurde (vgl. Fritsch 1994: S. 31f). Er entwickelte somit ein Verfahren, das es erleichtern würde, einen Beweis mithilfe eines Computers zu finden (vgl. Erdmann 2009: S. 1).

Heesch kam durch seine Aufenthalte in Amerika in Kontakt mit dem deutsch-amerikanischen Mathematiker Wolfgang Haken, welcher ebenfalls Interesse am Vier-Farben-Problem zeigte. Haken schaffte es 1971, den Mathematiker Kenneth Appel für das Problem zu gewinnen. Während ihrer gemeinsamen Arbeit hofften sie auf eine rasante technische Entwicklung elektronischer Rechenanlagen. Ihr Schwerpunkt lag auf den gewonnenen Erkenntnissen der Entladungsprozesse. Im Jahre 1975 kam Haken zufällig auf die Idee der „transversalen“ Entladung. Zu diesem Zweierteam stieß der Akademiker John Koch. Darauf aufbauend gelang 1976 der endgültige Beweis des Vierfarbensatzes unter Zuhilfenahme einer Computeranlage „IBM 360“. (vgl. Appel / Haken 1977: S. 117) Der eigentliche Beweis enthielt viele Fehler, welche jedoch leicht durch die „error-correction routine“ (vgl. Minette Busch 2004) ausgebessert werden konnten. Diese bisher bekannten Fehler wurden allesamt bereinigt. (vgl. Fritsch 1994: S. 38f)

Appel und Haken nahmen 1989 Bezug auf Kempes Leistung:

„Kempes argument was extremely clever, and although his `proof` turned out not to be complete it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later.“ (Zit. nach Fritsch 1994: S. 44)

Kempe lieferte somit einen Ansatz, auf dem Birkhoff, Heesch, Appel und Haken aufbauen konnten, indem sie entscheidende Ideen ergänzten.

Der Informatiker Benjamin Werner und Mathematiker Georges Gonthier entwickelten 2004 einen formalen Beweis in dem Beweisassistenten „Coq“. Dies erlaubt es, sich „nur“ noch auf das Coq-System zu verlassen und nicht jedoch auf die Überprüfungen durch Computerprogramme. (vgl. Erdmann 2009: S. 1)

Der Beweis des Vierfarbensatzes ist keineswegs abgeschlossen, denn viele Mathematiker suchen heutzutage noch nach einer Version, welche ohne Unterstützung durch Computer auskommt. (vgl. Fritsch 1994: S. 44)

Der deutsche Mathematiker Felix Klein setzte eine Anekdote in die Welt, die bis heute nicht in Vergessenheit geraten ist. Ihm zufolge soll der Vier-Farben-Satz in abgeänderter Form bereits von August Ferdinand Möbius um 1840 in seinen Vorlesungen angesprochen worden sein:

„Es war einmal ein König in Indien, der hatte ein großes Reich und fünf Söhne. Der letzte Wille des Königs bestimmte, die Söhne nach dem Tode des Königs das Reich unter sich auf solche Weise theilen [sic!], daß das Gebiet eines jeden mit den vier übrigen Gebieten eine Grenzlinie (nicht bloß einen Punct [sic!]) gemein hätte. Wie war das Reich zu theilen [sic!]?“ (Baltzer 1885 zitiert nach Fritsch 1994: S. 25f)

Dieses Rätsel soll Möbius seinen Studenten weitergegeben haben, jedoch musste er sich in weiterer Folge entschuldigen, da er Unmögliches von seinen Studenten verlangt habe (vgl. Baltzer 1885 zitiert nach Fritsch 1994: S. 25f; Stewart 2015: S. 110).

## 4.3 Möbiusband

In der Mathematik, genauer gesagt im Bereich der Topologie, spielt das Möbiusbands eine wichtige Rolle, da es, neben Kreis und Sphäre, als Grundobjekt angesehen wird (vgl. Beutelsbacher 2015: S. 298). Die Topologie beschäftigt sich mit den Eigenschaften mathematischer Strukturen, welche sich trotz einer Formveränderung nicht verändern (vgl. Gardner 1988b: S. 124).

Das Möbiusbands wurde im Jahre 1858 von zwei Mathematikern unabhängig voneinander erfunden. Auf der einen Seite von August Ferdinand Möbius und auf der anderen Seite von Johann Benedict Listing. (vgl. Beutelsbacher 2015: S. 297)

Es ist vom Aufbau her sehr einfach, weshalb es ein jeder herstellen kann. Dennoch bringt es unsere Gedanken und Vorstellungen an ihre Grenzen. Jeder kann sich vorstellen, aus einem Papierstreifen einen Ring zu formen. Ein Möbiusband entsteht auf ähnliche Weise, beinhaltet jedoch eine minimale Änderung: Anstatt die beiden Enden des Papierstreifens gewöhnlich zu verbinden, dreht man ein Ende davon um  $180^\circ$ . (vgl. Stewart 2015: S. 109)



*Abbildung 14: Klassisches Möbiusband.*

Ein Ring ist einfach zu beschreiben, denn man kann ihm leicht eine Innen- und Außenseite sowie eine Innen- und Außenkante zuordnen. Beim entstandenen Möbiusband handelt es sich hingegen um eine Schlaufe mit einer einseitigen Oberfläche. Aufgrund der halben Drehung wird die Differenzierung zwischen Innen- und Außenkante aufgehoben, da es nur eine Kante gibt.

Die wohl seltsamste Eigenschaft eines Möbiusbands ist, dass man nicht zwei Bänder erhält, wenn man es entlang einer Linie in der Mitte teilt.

*„Ein Mathematiker vertraue auf den Fakt,  
Daß ein Möbius-Band nur eine Seite hat.  
Doch man wird lachen, bitte,  
Da auch die Teilung in der Mitte  
Aus einem Band nicht zweie macht.“ (Gardner 1988b: S. 126)*

Wie Abbildung 15 zeigt, erhält man stattdessen ein einzelnes längeres Band.



*Abbildung 15: Teilung des Möbiusbands aus Abbildung 13 in ein längeres Band.*

Die Eigenschaften des Möbiusbands kann man sich in einigen Bereichen zunutze machen. Man kann die Tatsache, dass es nur eine Fläche gibt, verwenden, um eine gleichmäßige Abnutzung von Verbindungsbändern zu erreichen.

Der Erfinder Lee De Forest reichte ein Patent für einen Möbius-Tonfilmstreifen ein, der es erlaubt, auf *beiden* Seiten aufzunehmen (vgl. Gardner 1988b: S. 130).

Auch im Bereich der Kunst findet das Möbiusband seine Anwendung, da sich viele Künstler, Bildhauer, etc. an dieser beindruckenden Gestalt orientieren.

## 4.4 Färbungen

Eine Landkarte  $L$  ist zulässig gefärbt, wenn jedem Land eine Farbe zugeordnet wird, sodass paarweise angrenzende Länder verschiedene Farben aufweisen.

Wenn dabei  $n$  Farben verwendet werden, wobei  $n$  eine natürliche Zahl ist, so spricht man von einer „zulässigen  $n$ -Färbung“ (Fritsch 1994: S. 45).

Die kleinste dafür benötigte Anzahl an Farben  $n$ , bezeichnet man als chromatische Zahl  $\chi(L)$  von  $L$ . Man kann ergänzen, dass  $L$   $n$ -chromatisch ist.

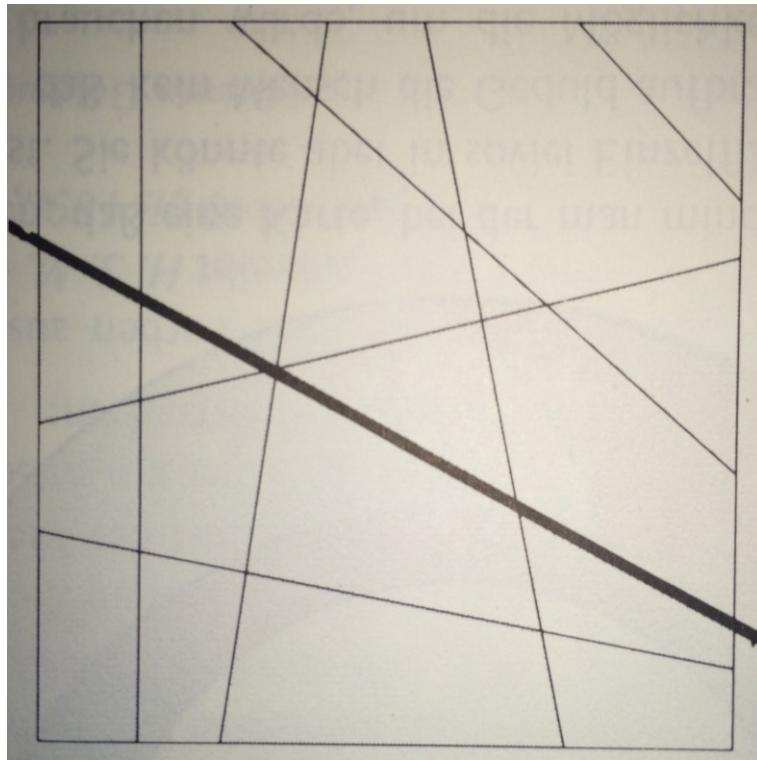
Die chromatische Zahl zu berechnen, fällt in das Schema der Optimierung.

Die Vier-Farben-Vermutung lässt sich somit so auffassen, dass jede Landkarte  $L$  die chromatische Zahl 4 nicht überschreitet, sprich  $\chi \leq 4$ . (vgl. Aigner 1984: S. 13)

### 4.4.1 Zwei Farben

Vorausgesetzt man will eine aufgeteilte Oberfläche mit lediglich zwei Farben einfärben, so müssen hierbei alle möglich konstruierbaren Karten betrachtet werden, bei welchen sich die Grenzen durch Geraden ergeben. Das klassische Schachbrett wäre ein einfaches Beispiel hierfür. In diesem speziellen Fall sind die Geraden parallel zueinander bzw. stehen normal aufeinander. Dass man mit zwei Farben auskommt, ist eine logische Schlussfolgerung und durch die schwarz-weißen Spielfelder gekennzeichnet.

Deshalb betrachtet man allgemeiner ein beliebiges durch Geraden erzeugtes, nicht regelmäßiges Muster. Anhand Abbildung 16 kann man erkennen, dass zwei Farben ausreichend sind.



*Abbildung 16: Karte dessen Grenzen aus Geraden bestehen.*

Würde man eine weitere Teilung durchführen – (dargestellt durch eine dickere Linie) – so ergeben sich zwei zulässig gefärbte Teilstücke. An der neuen Teilungslinie stoßen jeweils dieselben Farben aneinander, sodass man lediglich die Anordnung auf einer der beiden Seiten vertauschen muss, um zu einer neuerlichen Lösung für die Gesamtkarte zu gelangen. Dieses Verfahren kann sukzessive fortgeführt werden. Somit ist durch vollständige Induktion bewiesen worden, dass zwei Farben ausreichend sind, um eine Karte bestehend aus geradlinigen Grenzen zulässig zu färben.

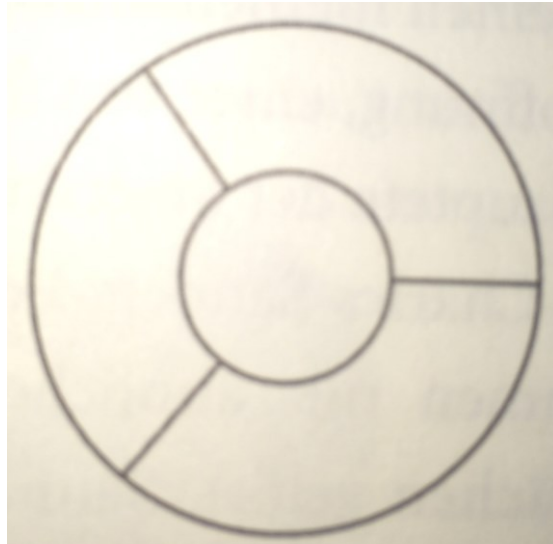
Neben Geraden können auch, wie Abbildung 17 zeigt, geschlossene Kurven vorkommen. Auf solch einer Karte lässt sich derselbe Beweis durchführen.



*Abbildung 17: Zweifarbige Karte, welche überquerende und geschlossene Kurven beinhaltet.*

#### 4.4.2 Drei Farben

Dass drei Farben nicht ausreichen eine Landkarte zulässig zu färben, veranschaulicht folgendes Beispiel:



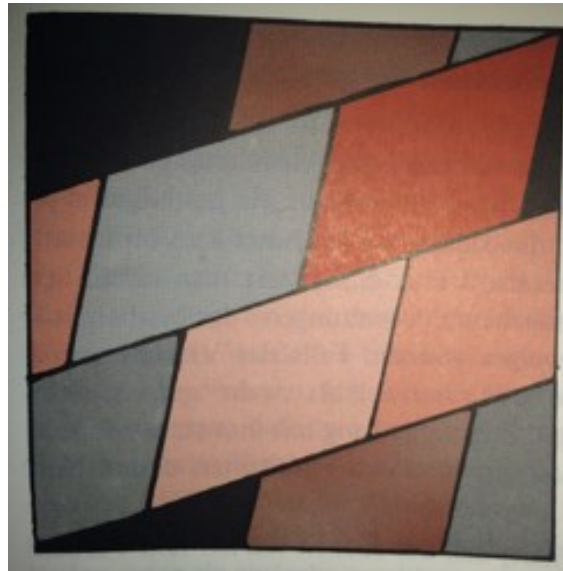
*Abbildung 18: Vier Regionen, welche alle aneinandergrenzen.*

In obiger Abbildung erkennt man, dass mindestens vier Farben notwendig sind, denn der kleine Kreis in der Mitte grenzt an alle drei Teile des Kreisringes. Die Teile des Kreisringes berühren einander jeweils, weshalb alle drei unterschiedlich eingefärbt werden müssen. Somit muss die Farbe des kleinen Kreises automatisch von den bisherigen verwendeten drei Farben abweichen. Diese Darstellung liefert somit ein Gegenbeispiel zur möglichen Vermutung, dass man mit weniger als vier unterschiedlichen Farben auskommen könnte.

#### 4.4.3 Torus

Ein Torus gleicht der Figur eines geschlossenen Schlauches. Für die zulässige Färbung einer Karte auf seiner Fläche benötigt man sieben Farben.

Heawood hat sich mit der Frage auseinandergesetzt, wie viele Farben man für die Färbung von Karten auf von der Kugelfläche verschiedenen geschlossenen Flächen mindestens benötigen würde. Er lieferte den Beweis, dass sieben Farben sowohl notwendig als auch hinreichend sind. (vgl. Fritsch 1994: S. 28; Stewart 2015: S. 123)



*Abbildung 19: Ausgebreitetes Blatt einer Toruskarte.*

Der Abbildung kann man entnehmen, dass jede Region des Quadrates an sechs weiteren Regionen angrenzt.



*Abbildung 20: Zylinder eines zusammengerollten Blattes.*

Diese Torus-Karte kann durch Zusammenrollen in einen Zylinder verwandelt werden welche an den kreisförmigen Enden zusammengeführt den weiter unten dargestellten Torus ergibt.



Abbildung 21: Torus mit sieben Ländern

Es existieren Flächen, welche einem Torus ähneln, jedoch mehr Löcher als dieser haben. Die Anzahl der Löcher  $g$  wird als Genus bzw. Geschlecht bezeichnet.

Heawood hatte die Vermutung, eine Formel gefunden zu haben, mit welcher man die Höchstzahl der für die Färbung einer Landkarte auf einer beliebigen Fläche benötigten Farben berechnen kann. Er erstellte somit eine Formel, um die notwendige Anzahl für eine gültige Färbung eines Torus mit  $g \geq 1$  Löchern

zu berechnen. Es handelt sich dabei um die Zahl  $\chi(L) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2} \right\rfloor$ . (vgl.

Stewart 2015: S. 124)

## 4.5 Graphentheorie

Sehr anschaulich kann das Problem beschrieben werden, wenn man es in die Sprache der Graphentheorie übersetzt. Man bedient sich dieser, um die Problemstellung weiter zu formalisieren, denn es ist schwierig, dieses Problem ausschließlich geometrisch zu betrachten.

Das Konzept eines Graphen ist sehr einfach: Er enthält eine Anzahl an (Knoten)Punkten, welche durch Kanten miteinander in Form von Linien verbunden sind. Das heißt, dass jeder Menge an Kanten  $k$  genau zwei Eckpunkte  $a$  und  $b$  zugeordnet werden. Dass  $a = b$  ist, ist dabei nicht ausgeschlossen und würde eine Schlinge ergeben, jedoch handelt es sich normalerweise um unterschiedliche Eckpunkte. (vgl. Kauffman 2005: S. 146; Stewart 2015: S. 110f; Aigner 1984: S. 9) Falls der zusammenhängende Graph keine Schlingen aufweist ( $a \neq b$ ), so sagt man, dass die Landkarte normal ist (vgl. Aigner 1984: S. 15).

Hat man eine Landkarte  $L$  gegeben, so kann man dieser einen Graphen  $G(L)$  zuordnen. In jeder Region einer Karte wählt man einen Punkt. (Man kann sich diesen als Hauptstadt vorstellen.) Diese Punkte ergeben die Knoten  $E$  von  $G(L)$ . Falls zwei Länder aneinandergrenzen, so werden ihre jeweiligen Hauptstädte miteinander durch eine Linie verbunden, diese ergeben die Kanten  $K$  von  $G(L)$ . Die dadurch entstehenden abstrakten Figuren werden als Graphen  $G(E,K)$  bezeichnet. Es handelt sich dabei um duale Graphen zum Graphen der ursprünglichen Landkarte. Aigner definiert eine Landkarte  $L(E,K,L)$  als ebenen Graphen  $G(E,K)$  mit den zu  $G$  gehörigen Ländern  $L$ . (vgl. Aigner 1984: S. 12)

**Vier-Farben-Satz:** Jede ebene Landkarte lässt sich mit vier Farben färben.

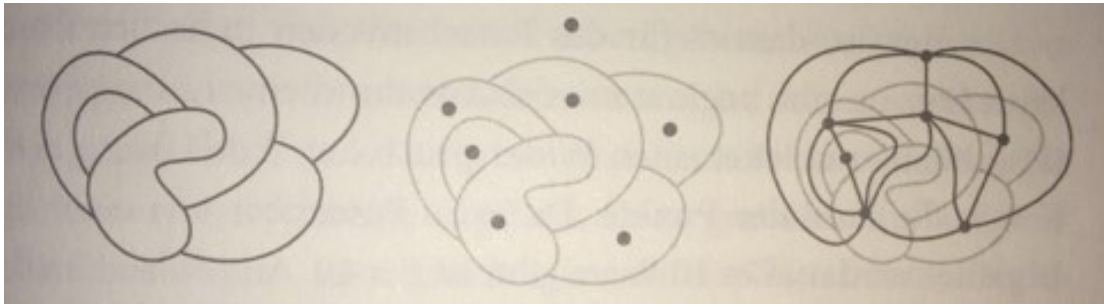


Abbildung 22: Aus einer Karte entsteht ein planarer Graph.

Die Ecken  $E$  eines Graphs repräsentieren demnach die Hauptstädte und sind teilweise durch Kanten  $K$  miteinander verknüpft. Wichtig dabei ist zu bedenken, dass die zwischen den Kanten entstandenen Flächen  $F$ , nicht mit jenen Flächen der Länder der ursprünglichen Karte übereinstimmen.

Jedem Punkt wird eine Farbe zugeordnet. Die Aufgabe besteht nun darin, diese Graphen zulässig zu färben und bedeutet, dass durch Kanten verbundene Ecken unterschiedlich gefärbt werden müssen.

Es ist zu betonen, dass sich keine Kanten je überschneiden werden. Dies ist nicht möglich, da die rechten und linken Nachbarn nicht mehr in Berührung kommen, falls zwei Länder eine gemeinsame Grenze aufweisen. In diesem Fall werden die Ecken als Punkte der Ebene und die Kanten als Jordanische Kurven, solche die stetig sind und sich selbst nicht kreuzen, gezeichnet. (vgl. Aigner 1984: S. 9)

Falls je zwei Ecken  $a$  und  $b$  verbunden sind, so nennt man den entsprechenden Graphen zusammenhängend. Ansonsten zerfällt dieser in seine Komponenten (vgl. Aigner 1984: S. 10).

Werden nun beliebige ebene Graphen betrachtet, an denen sich die Kanten jeweils nur in den zugehörigen End-Ecken schneiden, so erkennt man das Schema, dass sich immer mindestens eine Ecke ergibt, welche höchstens fünf Nachbarn besitzt. Diese Vermutung, dass vier Farben dennoch ausreichen, entspricht jener von Kempe und gilt es allerdings mit Zuhilfenahme der Euler'schen Formel zu beweisen.

Im Anschluss kann durch Induktion gezeigt werden, dass eine solche Region der Landkarte dennoch mit vier Farben gültig gefärbt werden kann. Dies wird in Aigners Graphentheorie (1984: S. 15) folgendermaßen beschrieben: Ein Land  $F$  grenzt an höchstens fünf andere Länder  $A_1, A_2, \dots, A_t$  wobei  $t \leq 5$ . In Abbildung 23 werden die Nachbarn des Landes  $F$  als  $A, B, C$  und  $D$  gekennzeichnet.

Um diesen Teil der Landkarte einzufärben, würde man theoretisch sechs unterschiedliche Farben benötigen – eine je stellvertretend für jedes Nachbarland sowie eine für das mittlere.

Dieses Land  $F$  wird entfernt und die Grenzen der anderen Länder fortgeführt, sodass man nun eine neue Landkarte erhält, die jedoch ein Land weniger beinhaltet. Die dadurch entstandene Landkarte entspricht weiterhin einem ebenen Graphen. Die Induktionsannahme, dass eine Länderfärbung aus vier Farben existiert, kann derart angeglichen werden, sodass die übrigen Länder mit höchstens drei verschiedenen Farben eingefärbt werden können.

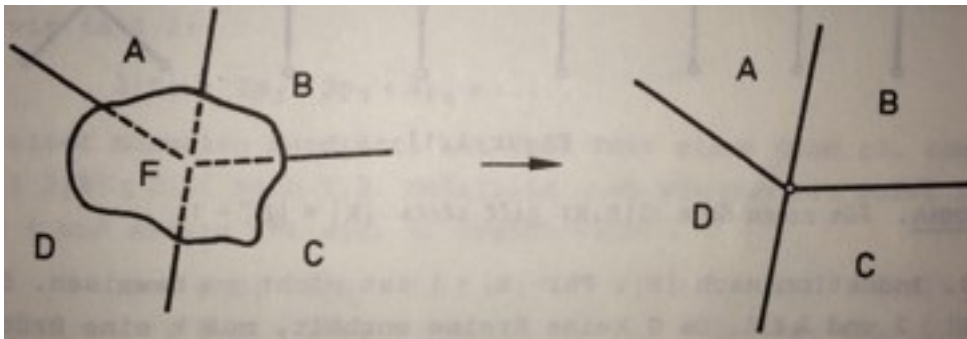


Abbildung 23:  $F$  wird aus einer Landkarte entfernt und die Grenzen der benachbarter Länder  $A, B, C, D$  erweitert.

Die übrige vierte Farbe kann in weiterer Folge verwendet werden, um dem ursprünglich entfernten Land zugewiesen zu werden. Dadurch konnte gezeigt werden, dass sich solch ein Teil der Landkarte mit vier Farben gültig ausmalen lässt.

Der oben beschriebene Prozess ist wie bereits erwähnt eine Folgerung der Euler'schen Polyederformel.

## 4.6 Die Euler'sche Polyederformel

Der Name Polyederformel kann in diesem Zusammenhang auf den ersten Blick irritierend sein, da Landkarten üblicherweise im zweidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^2$  angesiedelt sind, hingegen ein Polyeder ein räumliches Gebilde ist. Polyeder sind bekanntlich Körper, deren Rand aus Flächenstücken in Form von Polygonen besteht. Dieser Rand lässt sich allerdings durch stereographische Projektion auf eine ebene Landkarte abbilden.

Die sogenannte Euler'sche Polyederformel besagt, dass die Summer der Anzahl der Flächen und Ecken minus der Anzahl an Kanten stets die Summe 2 ergibt.

Die fünf platonischen Körper zählen zu den bekanntesten Beispielen:

| Typ        | Eckpunkte | Kanten | Flächen |
|------------|-----------|--------|---------|
| Tetraeder  | 4         | 6      | 4       |
| Hexaeder   | 8         | 12     | 6       |
| Oktaeder   | 6         | 12     | 8       |
| Dodekaeder | 20        | 30     | 12      |
| Ikosaeder  | 12        | 30     | 20      |

*Tabelle 13: Anzahl an Eckpunkten, Kanten und Flächen der fünf platonischen Körper.*

**Satz:** Falls  $G(E,K)$  ein ebener zusammenhängender Graph mit  $E$  Ecken und  $K$  Kanten bestehend aus  $L$  Ländern ist, so gilt  $|E| - |K| + |L| = 2$ .

**Beweis:** Induktionsanfang für  $|K| = 0$ . Der Graph  $G$  besteht im einfachsten Fall aus nur einer Ecke. Es gibt keine Kante und nur eine (Außen)Fläche, weshalb

$|E| = |L| = 1$ . Eingesetzt in die Formel von Euler erhält man

$$|E| - |K| + |L| = 1 - 0 + 1 = 2.$$

Sei deshalb  $|K| \geq 1$ . Die Entfernung eines Landes  $k$  wie in Abbildung 23 entspricht weiterhin einem zusammenhängenden Graphen, da diese Entfernung den Graphen nicht in zwei Komponenten teilt. Da  $G' = G - k$ , gilt  $|E'| = |E|$ ,  $|K'| = |K| - 1$ ,  $|L'| = |L| - 1$ , da ja die beiden angrenzenden Länder verschmelzen.

Nach Induktion gilt die Formel ebenfalls für  $G$ .

An einen Graphen kann entweder eine Ecke oder eine Kante hinzugefügt werden.

Das Hinzufügen einer Ecke, bringt eine neue Kante hervor, welche die Verbindung zum vorhandenen Graphen liefert. Die Ecken- und Kantenanzahl steigt jeweils um einen Grad, während die Anzahl an Flächen gleichbleibend ist. Somit verliert die Formel für den neuen Graphen ihre Gültigkeit nicht, da auf der linken Seite der Gleichung je 1 hinzugefügt als auch abgezogen wird.

Falls eine neue Kante zwei bereits bestehende Ecken miteinander verbindet, so erhöht sich die Flächenanzahl um 1. Allerdings bleibt die Summe erneut unverändert, da sowohl die Kanten- als auch die Flächenanzahl um eins steigt. Der Satz gilt für den einfachsten Graphen und so muss er auch für alle ihn ergänzenden Graphen erfüllt sein.

## 4.7 Kempe-Ketten

Existiert ein Land, welches an höchstens drei Nachbarn grenzt, so können wir sichergehen, dass vier Farben ausreichen, um die Problematik zu lösen. Ein solches Beispiel ist in Abbildung 24 ersichtlich.

Sind zwei Regionen der Landkarte durch eine alternierende Farbkette miteinander verbunden, so bezeichnet man diese als Kempe-Kette. Genauer handelt es sich dabei um eine  $(x, y)$ -Kette, wenn für die Kette ausschließlich die Farben  $x$  und  $y$  verwendet wurden, wobei  $x, y \in \{1, 2, 3, 4\}$ . (vgl. Fritsch 1994: S. 174)

Angenommen es gibt in einer Landkarte eine Region  $E$ , welche an vier weitere,  $A, B, C, D$ , anschließt. Womöglich gibt es eine Kempe-Kette von  $A$  nach  $C$  mit den Farben  $x, y$ . Falls solch eine Kette vorhanden ist, dann kann es keine  $(v, z)$  - Kette von  $B$  nach  $D$  geben. Diese beiden Ketten würden sich nämlich auf genau einem Feld treffen, was eine Regelverletzung darstellen würde. Das heißt, dass es entweder eine  $(x, y)$  - Kette von  $A$  nach  $C$  oder eine  $(v, z)$  - Kette von  $B$  nach  $D$  gibt.

Abbildung 24 zeigt eine solche Kempe-Kette von  $A$  nach  $C$  mit den Farben Schwarz und Rot.

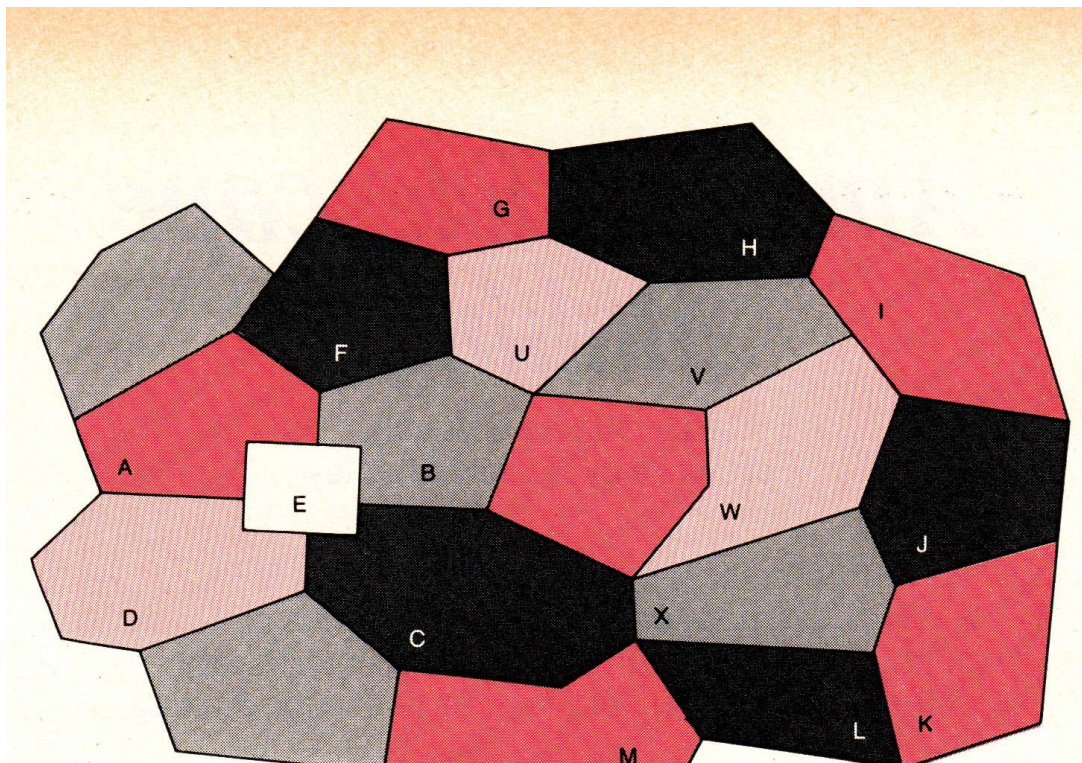


Abbildung 24: Schwarz-rote Kempe-Kette von  $A$  nach  $C$ .

Man spricht von einer endlichen Folge  $M = (M_0, \dots, M_n)$ , wobei  $M_0 = A$  und  $M_n = C$  ist. Somit haben alle Glieder mit geradem Index dieselbe Farbe wie  $A$ , was wiederum bedeutet, dass die restlichen, alle ungeraden Glieder dieselbe Farbe vorweisen. Falls die Kette eine ungerade Anzahl an Gliedern aufweist, so haben Start- und Endfeld dieselbe Farbe. (vgl. Fritsch 1990: S. 83)

Falls es sich dennoch nicht ausgeht, kann man diese Kette verkehrt reihen, sodass man anstatt mit  $x$  mit  $y$  zu färben beginnt. Auf genau dieser Schlussfolgerung beruhte der fehlgeschlagene Beweis von Kempe.

## 4.8 Kleinste Verbrecher

Offensichtlich ist die Anzahl an möglichen Länderzusammensetzungen und somit an Landkarten (bzw. planaren Graphen) unendlich. Aus diesem Grund musste man das Problem von einer etwas anderen Seite betrachten. Der Ansatz des Beweises zum Vierfarbensatz erfolgt über jenen des „kleinsten Verbrechers“. Hinter diesem Ausdruck steckt folgende Darstellung:

Angenommen, das Vier-Farben-Theorem ist falsch, sprich es existieren Landkarten (Graphen), die man nicht mit vier Farben gültig ausmalen kann (vgl. Bigalke 1988: S.150). Solche hypothetischen Landkarten werden als Verbrecher gekennzeichnet. Unter diesen, welche mindestens fünf Farben zur Ausmalung benötigen, gibt es eine mit einer geringsten Länderanzahl, den kleinsten Verbrecher. Diese Beispiele nennt man „kleinste Verbrecher“, das heißt, dass sich eine beliebige Karte mit einer geringeren Zahl an Ländern doch mit vier Farben kolorieren lässt. Ein kleinster Verbrecher kommt demnach nicht mit vier Farben aus, eine Landkarte (Graph) mit weniger Regionen (Eckpunkten) allerdings schon.

Um die Hypothese der vier Farben zu bestätigen, muss gezeigt werden, dass es keine kleinsten Verbrecher gibt, und dies erreicht man, indem man einschränkende Bedingungen bezüglich dieser Modelle findet:

„Diese Idee verlagert den Fokus des Problems von allen Karten auf die hypothetischen kleinsten Verbrecher und gibt ein Reduktionsverfahren vor – einen systematischen Weg, um die Vier-Farben-Kolorierung der ursprünglichen Karte umzuwandeln.“ (Stewart 2015: S. 116)

Der Beweis des Problems übernimmt die Einleitung von Kempe, sodass ein bestimmter Teil des Graphen (Menge an Regionen) eliminiert wird, anstatt einen Punkt oder eine Region zu entfernen.

In einem kleinsten Verbrecher kommt kein Land vor, dass weniger als vier Nachbarn besitzt, denn ein kleinster Verbrecher besteht aus mindestens fünf Ländern. Angenommen es gibt ein Land  $A$  mit höchstens drei Nachbarn, so kann man dieses durch Vernachlässigung der Grenze mit einem Nachbarland  $B$  verschmelzen. Die neu entstandene Landkarte kann man laut Voraussetzung mit vier Farben ausmalen. Demnach bleibt, sobald man das zuvor entfernte Land wieder hinzufügt, genau eine Farbe für das Kolorieren von  $A$  übrig. (vgl. Fritsch 1994: S. 89) Selbst wenn man anfangs nicht weiß, ob es Verbrecher gibt, kennt man dennoch gewisse Eigenschaften.

**Satz:** Jede Landkarte lässt sich mit fünf verschiedenen Farben kolorieren.

**Beweis:** Eine Fläche muss mindestens aus drei Seiten bestehen, also drei Kanten, welche wiederum an maximal zwei Flächen angrenzen. Die kleinste Fläche wird somit durch ein Dreieck erzeugt. Das heißt, dass jede Ecke einen Grad  $\geq 3$  besitzt. Somit gilt die Beziehung  $2 * K \geq 3 * E$ .

Die Gesamtanzahl der Ecken  $v_n$  wird mithilfe der Grade der Ecken angegeben,  $E = \sum_{n=2}^{\infty} v_n$ . Da jede Kante zwei Ecken als Randpunkte besitzt, gilt

$\sum_{n=2}^{\infty} (n * v_n) = 2 * K$ . Die erhaltenen Gleichungen erlauben es,  $E$ ,  $K$ ,  $F$  durch  $v_n$  auszudrücken. Eingesetzt in die Euler'sche Gleichung erhält man:

$\sum_{n=2}^{\infty} (6 - n) * v_n = 12$ . Da es sich um eine positive Summe handelt, die linke Seite der Gleichung jedoch negative Summanden liefern kann, müssen positive Summanden vorkommen. Solche treten aber nur bei den Indizes  $n = 2, 3, 4, 5$  auf. Das heißt, dass es in jedem Graphen mindestens eine Ecke von Grad 2, 3, 4 oder 5 gibt.

## 4.9 Anwendungen

Praktische Anwendungen findet der Vier-Farben-Satz beim Aufstellen von Mobilfunkmasten, um Funkfrequenz-Überschneidungen zu vermeiden. (vgl. Reite 2014: S. 77) Beim Bau der Sendemasten muss beachtet werden, dass diese nicht zu eng zueinanderstehen, um Frequenzstörungen zu vermeiden. Man kann die Frequenzen als Farben ansehen und sich an dem Vier-Farben-Theorem orientieren. „In der graphentheoretischen Welt modelliert man die Sendestationen mit Knoten eines Graphen, und nahe zusammenstehende Sendestationen symbolisiert man mit einer Kante zwischen den Knoten, für die sie stehen.“ (Reite 2014: S. 77) Des Weiteren kann man sich den Vier-Farben-Satz in der Landwirtschaft zunutze machen.

Eine spielerische Anwendung findet man in Form der App „ColorFill“ (<https://itunes.apple.com/us/app/color-fill-hd/id594422042?mt=8> [25.5.2016]). Sie behandelt das Vier-Farben-Theorem in Form eines Spiels. In jedem Level wird eine neue Karte angezeigt, welche man mithilfe von vier gegebenen Farben (Grün, Gelb, Orange, Rosa) füllen muss. Ist dies auf eine gültige Weise erfolgt, so erscheint eine komplexere Kartenvariante.

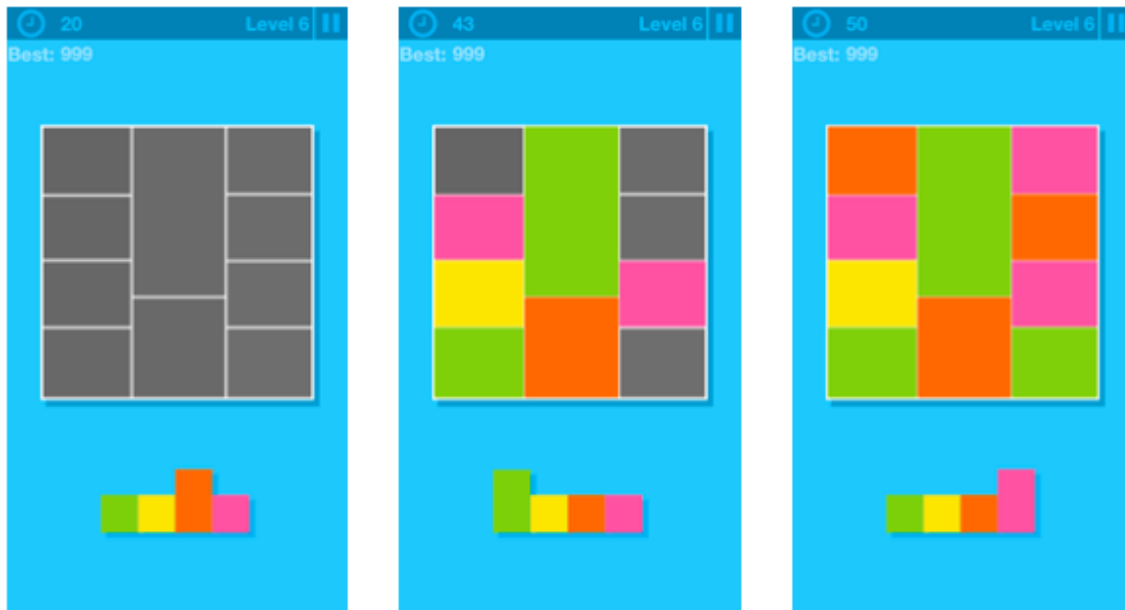


Abbildung 25: Level 6 des Spiels ColorFill in drei verschiedenen Stadien

## 4.9 Der entscheidende Durchbruch

Den schlussendlichen Beweis lieferten Appel und Haken im Jahre 1976. Sie griffen dafür Kempes fehlerhafte Überlegungen auf und verbesserten diese, indem sie 1500 Anordnungen an Ländern prüften, anstatt wie Kempe vier. Ihr Beweis beruht im Grunde auf den gültigen Teilen von Kempes Beweis. Kempe bewies, dass es in jeder Landkarte mindestens ein Land mit zwei, drei, vier oder fünf Nachbarn gibt. Das heißt, dass es keine grafische Darstellung gibt, in welcher jedes Land mehr als sechs Nachbarn besitzt. Eine solche Konfiguration – im Prinzip jeder mögliche Untergraph – ist also unvermeidbar, da jede Landkarte zumindest eine dieser vier Konfigurationen enthalten muss. Der Beweis stützt sich somit auf die Unvermeidlichkeit. (vgl. Appel / Haken 1977: S. 109f; Eigner 1984: S. 211) Des Weiteren wird der Begriff der Reduzibilität verlangt.

**Definition:** Ein irreduzibler Graph  $G$  ist laut Aigner (1984: S. 207) ein einfacher 5-chromatischer ebener Graph mit einer minimalen Anzahl an Ecken.

Eine Konfiguration ist somit reduzibel, wenn diese in keiner minimalen 5-chromatischen Karte auftauchen kann. An dieser Stelle hat Kempe versagt, da er nicht korrekt zeigen konnte, dass jene mit fünf Nachbarn eine reduzible Konfiguration darstellt. (vgl. Appel / Haken 1977: S. 111) Solch eine endliche Menge zu finden würde den Vierfarbensatz beweisen, indem man zusätzlich zeigt, dass jede Landkarte solch eine Konfiguration beinhaltet, welche nicht Teil einer minimalen 5-chromatischen Karte ist, sprich in einem kleinsten Verbrecher auftritt.

Es muss demnach gezeigt werden, dass gewisse Konfigurationsmengen unvermeidbar sind, sprich, dass jeder irreduzible Graph mindestens eine der folgenden Konfigurationen enthalten muss.

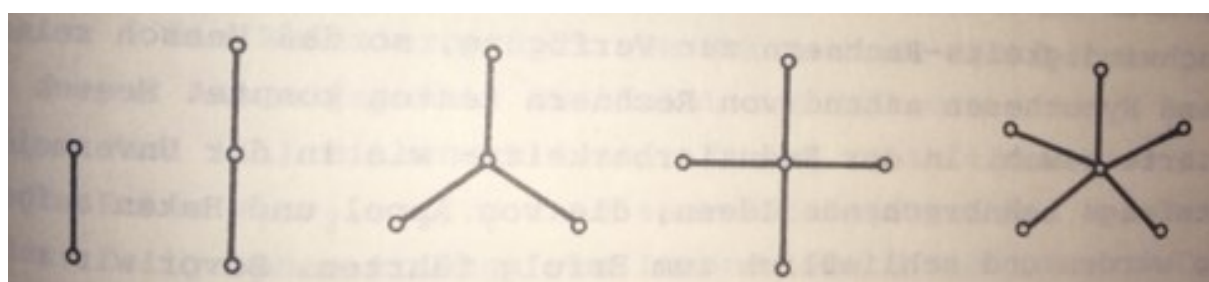


Abbildung 26: Menge an Graphen welche in jeder Landkarte vorkommen.

Der einfachste Graph ist jener auf der linken Seite der Abbildung. Er besteht aus zwei Punkten und enthält somit zwei Länder, welche eine gemeinsame Grenze aufweisen. Jeder weiteren Darstellung wird eine Ecke hinzugefügt. Die rechte Seite der Abbildung zeigt eine Ecke, welche an fünf weitere grenzt. Der Fehler ist Kempe beim Nachweis ihrer Irreduzibilität unterlaufen. (vgl. Appel / Haken 1977: S. 111)

Wie man sieht, verdeutlicht dies die Tatsache, dass jeder ebene Graph eine Ecke vom Grad  $\leq 5$  enthalten muss.

Legt man diese Anschauung auf eine Landkarte um, so ergeben sich folgende Konstellationen:

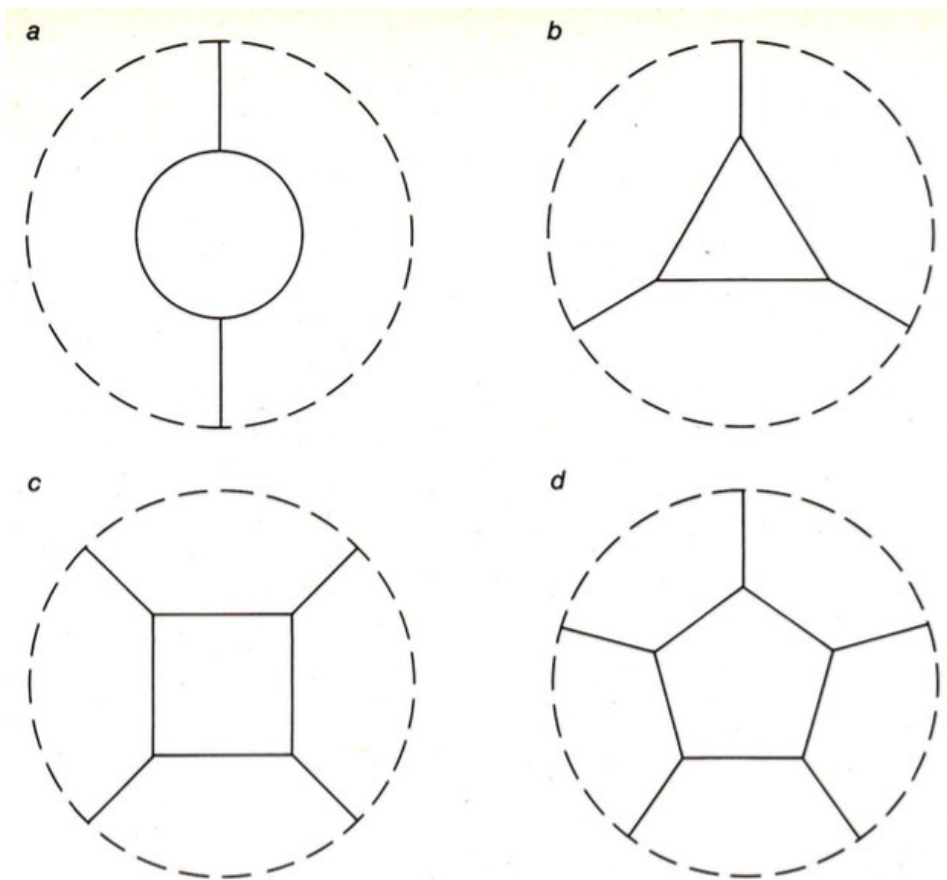


Abbildung 27: Menge an möglichen Konfigurationen einer Landkarte.

Die linke obere Abbildung (a) zeigt eine Landkarte bestehend aus drei jeweils aneinandergrenzenden Ländern. Die letzte Darstellung einer Landkarte (d) entspricht jener des rechten Graphen aus Abbildung 26 und zeigt ein Land mit fünf Nachbarn.

Heinrich Heesch begann seine Arbeit zur Vermutung im Jahre 1936 und machte dadurch den ersten Schritt in Richtung eines korrekten Beweises. Seine Arbeit wurde von Appel und Haken aufgegriffen. Um zu zeigen, dass große Konfigurationen reduzibel sind, gilt es eine große Anzahl an Details zu beachten. Diese Methode zur Prüfung erfordert somit den Einsatz eines

Computers. Durch die Entwicklung von Hochgeschwindigkeits-Rechnern konnte auf die aufwendige Prüfung durch Papier und Bleistift verzichtet werden. (vgl. Appel / Haken 1977: S. 112) Auf eine genauere Beschreibung des Beweisvorganges muss an dieser Stelle jedoch verzichtet werden, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde.

Schlussendlich wurde jedoch der Beweis gefunden:

„We had used 1,200 hours of time on three different computers. [...] Although the discharging procedure (without the reductions) can be checked by hand in a couple of months, it would be virtually impossible to verify the reduction computations in this way.“ (Appel / Haken 1977: S. 121)

#### 4.11 Der umstrittene Beweis

Der Beweis von Apple und Haken sorgte von Anfang an für Aufregung. Der nicht gut nachvollziehbare Beweis ist aus mehreren Gründen umstritten. Enttäuschung herrschte vor, da man auf den Gebrauch eines Computers angewiesen war. Dies war das erste große Theorem, das man zusätzlich mithilfe eines Computers beweisen musste und man begab sich somit auf Neuland. (vgl. Aigner 1984: S. 250) Die Unfehlbarkeit der Hardware wurde jedoch angezweifelt und rief viele Kontroversen zur Zeit der Publikation hervor. (vgl. Aigner 1984: S. 249)

Auf der anderen Seite entstand der Vorwurf, dass der manuell berechnete Teil (die Unvermeidbarkeit der Menge von Konfigurationen) zum Nachprüfen zu lang und kompliziert sei. Menschliche Rechnung könnte bei solch einer großen Anzahl an Einzelschritten an diesem Punkt versagen. (vgl. Aigner 1984: S. 248)

Die Frage ist, ob ein Beweis, beruhend auf solch einer Charakteristik, anerkannt werden kann. Niemand kann die Korrektheit des zur Berechnung verwendeten Programms verifizieren. Kann man darauf vertrauen, dass die Durchführung anhand eines Computer verlässlicher ist, als durch menschliche Hand? Computer können, gleich wie Menschen, irren und Fehler produzieren. Obwohl Fehler durch Maschinen schwerer zu identifizieren sind, irrt der Mensch häufiger. (vgl. Aigner 1984: S. 251) Verwendete Maschinen folgen einem zuvor determinierten Programm und sind nicht durch Gefühle wie Stress und anderen externen Faktoren beeinträchtigt:

„But even when hand-checking is possible, if proofs are long and highly computational, it is hard to believe that hand-checking will exhaust all the possibilities of error. [...] [I]t is probably more efficient to check machine programs than to check hand computations.“ (Appel / Haken 1977: S. 121)

Mit zunehmender Wichtigkeit der Computer ist es unter Umständen notwendig, unser traditionelles Konzept des mathematischen Beweises zu überdenken. (vgl. Fernández Gallardo 1976: S. 380) Die Konfrontation mit Rechnern ist wohl eher ein psychologisches als ein auf Mathematik basierendes Problem. (vgl. Aigner 1984: S. 250) Sich nicht auf Computer zu verlassen, erscheint der heutigen Generation des 21. Jahrhunderts eigenartig, da diese mittlerweile als Teil unseres Alltags anerkannt sind und wir ihnen vertrauen und sie ähnlich wie Bleistift und Papier zu einem nützlichen Werkzeug geworden sind.

Die Menschheit strebt nach Verbesserung in allen Aspekten des Lebens – so auch die Mathematiker, indem sie nach besseren, eleganteren, kürzeren und schöneren Beweisen suchen. Bis jetzt ist nicht geklärt, ob es einen exakten, allein mit Hilfe des menschlichen Verstandes, Papier und Schreibstift

nachvollziehbaren Beweis gibt. Womöglich wird dies auch nie in Erfahrung gebracht werden können. Fest steht, dass bis zum heutigen Tag kein Beweis gefunden wurde, der ohne Einsatz von Rechenmaschinen auskommt. (vgl. Robertson / Sanders / Seymour / Thomas 1997: S. 25)

## 5. Hex

Das vorliegende Kapitel widmet sich dem strategischen Brettspiel „Hex“. Es handelt sich hierbei um ein klassisches Spiel für zwei Spieler. Das Faszinierende daran ist, dass es trotz seiner einfachen Spielregeln eine hohe mathematische Komplexität aufweist.

### 5.1 Spielregeln

Die Spielregeln des Spiels sind sehr einfach. Zu Beginn einigen sich beide Spieler, Spieler A und Spielerin B, auf eine Farbe. Jedem Spieler wird somit eine Spielfarbe zugewiesen – meist weiß und schwarz – und er bzw. sie erhält einen Vorrat an entsprechenden Spielsteinen.

Das Spielfeld selbst ist ein  $n \times m$  Feld in Form eines Rhombus bestehend aus Hexagonen. Die Anzahl der Sechsecke kann variieren, jedoch ist die typische Variante jene mit 11 auf jeder Spielseite.

Das Spielfeld weist zwei verschiedenfarbige Seiten, entsprechend der Farben der Spielsteine, auf. Je zwei gegenüberliegende Seiten haben dieselbe Farbe. Somit sind zwei Kanten des Spielfeldes mit der Farbe „Schwarz“ gekennzeichnet und die anderen beiden Seiten mit „Weiß“. Die Hexagone an den vier Ecken gehören zu beiden Farben und können somit entweder als weiß oder schwarz angesehen werden.

Jedem Spieler „gehören“ eine Farbe und damit eingeschlossen auch zwei einander gegenüberliegende Ränder des Spielbrettes.

Es ist nicht vorgeschrieben, welche Farbe das Spiel eröffnet: Das bedeutet, dass sich die Spieler untereinander einig werden müssen, wer das Spiel eröffnen darf.

Ziel des Spiels ist es, eine Verbindung zwischen den beiden Enden der jeweiligen Spielfarbe zu legen. Schafft dies jemand, so gewinnt er die Partie. Sowohl Spieler A als auch Spielerin B werden versuchen, eine zusammenhängende und durchgehende Kette eigener Spielsteine von irgendeinem Randfeld ihrer Farbe zu einem anderen beliebigen Randfeld auf der gegenüberliegenden Seite zu legen.

Das ursprüngliche Spielfeld ist leer und enthält keine Spielsteine. Die Spieler „Schwarz“ und „Weiß“ machen abwechselnd einen Zug, indem sie einen ihrer Spielsteine auf ein nicht belegtes und somit freies Feld des Spielfeldes legen. Ein auf diese Art gespielter Spielstein bewegt sich während der gesamten Partie nicht mehr. Spieler „Schwarz“ versucht dabei, eine ununterbrochene Kette an schwarzen Spielsteinen zwischen seinen beiden Endfeldern zu erzeugen. Spielerin „Weiß“ versucht ihrerseits eine ähnliche Verbindungsstrecke herzustellen, jedoch unter Berücksichtigung der entsprechenden weißen Kanten des Spielfeldes. Solch eine Strecke kann, wie Abbildung 28 zeigt, beliebig viele Windungen aufweisen. Es kommt lediglich darauf an, dass sie einen zusammenhängenden Weg von einem Rand zum gegenüberliegenden darstellt.



*Abbildung 28: gewinnbringende Verbindungsstrecke, dargestellt durch dunkle Spielsteine des Spielers A*

Derjenige Spieler, dem diese Verbindung als erstes gelingt, hat gewonnen und die Partie ist damit beendet. Für seinen Opponenten wäre es im weiteren Spielverlauf überhaupt nicht mehr möglich, eine derartige Verbindung mit der entgegengesetzten Farbe zu legen, da sich Ketten verschiedener Farben niemals überschneiden können. Dies wird in Kapitel 5.5.5 näher besprochen.

Es ist wichtig, an dieser Stelle festzuhalten, dass die Verbindungen nicht sukzessive aufgebaut werden müssen. Wenn Spieler A am Zug ist, kann er seinen Stein auf ein beliebig leerstehendes Feld platzieren, unabhängig davon, ob er dadurch an einen seiner Spielsteine anknüpft. Dies beinhaltet gleichzeitig die Tatsache, dass es erlaubt ist, an einer begonnenen Kette anzuschließen und weiterzubauen.

Die Partie zwischen Spieler A und Spielerin B ist spätestens dann beendet, wenn alle Felder des Spielbrettes besetzt sind, wird jedoch oftmals bereits davor entschieden, indem einer der beiden Kontrahenten eine Verbindung zwischen seinen Grenzleisten schafft.

## 5.2 Historischer Hintergrund

Dieses Kapitel orientiert sich hauptsächlich an Martin Gardners „Hexaflexagons and other mathematical diversions“ (Gardner 1988a).

Das Spiel wurde erstmals im Jahre 1942 vom dänischen Dichter und Mathematiker Piet Hein in Kopenhagen erfunden. Unabhängig davon hatte 1947 der spätere Nobelpreisträger John Forbes Nash eine ähnliche Idee (vgl. Stewart 2008: S. 64).

In den späten 1950er Jahren wurde das Spiel durch einen Artikel des amerikanischen Autors Martin Gardner im *Scientific American* verbreitet, wie auch Stewart (2008: S. 64) beschreibt: „Martin Gardner beschrieb das Spiel 1957 in seiner Kolumne in *Scientific American*, und über Nacht verfielen ganze mathematische Institute in aller Welt dem Hex-Fieber“.

Die Tatsache, dass ihre Entwickler zu den meistgefeierten Mathematikern der damaligen Zeit gehören, spiegelt die außerordentliche Entwicklung des Spiels wider. (vgl. Browne 2000: S. 3)

Piet Hein begann seine Karriere als Student des Instituts für theoretische Physik. Seine industriellen Erfindungen ebneten ihm den Weg zur Technik. In diesem Bereich arbeitete er, bis die Deutschen im Jahre 1940 Dänemark einnahmen. Hein war zur damaligen Zeit der Anführer einer Anti-Nazi-Gruppe und war somit gezwungen, abzutauchen. Nach Beendigung des Krieges erlangte er Ansehen als Schriftsteller für die Zeitschrift „*Politiken*“. Hein ist ebenso unter

seinen Pseudonym „Kumpel“, unter welchem er mehrere Gedichtbände schrieb, bekannt.

Der Impuls für die Erfindung des Hex-Spiels kam Hein bei der Auseinandersetzung mit dem Vier-Farben-Theorem. (vgl. Gardner 1964: S. 34; Browne 2000: S. 13) Das Theorem, welches 1976 bewiesen wurde, besagt, dass vier Farben ausreichen, um eine beliebige Landkarte so auszumalen, dass keine zwei Länder derselben Farbe aneinandergrenzen. Diese angesprochene Problematik wurde bereits in Kapitel 4 ausführlich dargestellt.

Hein stellte das Hex Spiel 1942 im Rahmen eines Vortrags am Niels-Bohr-Institut für theoretische Physik in Kopenhagen vor. Erst als ein Bericht darüber am 26. Dezember desselben Jahres im *Politiken* erschien, wurde das Spiel unter dem Namen „Polygon“ populär.

Im Jahre 1968 verkaufte Hein sein Spiel unter den Namen „Con-Tac-Tix“ auf einem hölzernen 12 x 12 Spielbrett mit Lücken zur Vervollständigung durch entsprechende Spielsteine.

Im Jahre 1948 erfand John Forbes Nash unabhängig von Hein das Hex-Spiel. Nash ist 2001 durch den Film „A Beautiful Mind“ einer breiteren Öffentlichkeit bekannt geworden.

Zur damaligen Zeit (1948) war er noch Student der Mathematik an der Princeton Universität. Erst im Nachhinein nahm er eine Stelle als Professor am Technologieinstitut von Massachusetts, dem bekannten *MIT* an. (Browne 2000: S. 3; Gardner 1964: S. 34)

Nash prägte den Begriff des Nash-Gleichgewichts und wurde 1994 aufgrund seiner Erkenntnisse im Bereich der Spieltheorie mit dem Preis der Schwedischen Reichsbank in Wirtschaftswissenschaften zur Erinnerung an Alfred Nobel ausgezeichnet. Bereits in den 1950er-Jahren war Nash Anwärter für die höchste mathematische Auszeichnung, die Fields-Medaille.

Das Hex-Spiel war bei vielen Mathematik-Studenten beliebt und wurde üblicherweise seinem Erfinder zu Ehren entweder Nash oder John genannt.

Letzteres bezieht sich auf die Tatsache, dass es hauptsächlich auf hexagonalen Fliesen eines Badezimmers (auf Englisch umgangssprachlich auch „John“ genannt) gespielt wurde. (vgl. Gardner 1988a: S. 75; Browne 2000: S. 3)

Im Allgemeinen wurde das Spiel erst im Jahre 1952 „Hex“ genannt. Ausschlaggebender Grund dafür war die Veröffentlichung einer Version des Spiels durch die Firma Parker Brothers unter ebendiesen Namen. (vgl. Gardner 1964: S. 34)

Dieses Ereignis in Verbindung mit der Erwähnung durch Martin Gardner führte dazu, dass sich das Spiel unter dem Namen Hex verbreitete.

Im Lauf der Jahre wurde das Spiel von unterschiedlichen Firmen produziert. Anfangs wurden Papierblöcke verkauft, auf denen man das Spiel mit Bleistift austragen konnte. So konnten sich etwa Interessierte eine Kopie des Spielbrettes anfertigen lassen, um das Hex-Spiel ausprobieren zu können. Eine Partie konnte somit leicht ausgetragen werden, indem Spieler A seine Hexagone mit Kreisen markiert und Spielerin B ihre Felder mit einem Kreuz kennzeichnet.

## 5.3 Mathematischer Hintergrund

Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei Hex um ein Spiel mit simplen Spielregeln, welches jedoch gleichzeitig einen hohen Grad an Komplexität aufweist. Vorliegendes Kapitel beschäftigt sich vorwiegend mit den zugrundeliegenden mathematischen Aspekten.

Der Reiz des Spiels aus der Sicht eines Mathematikers ergibt sich daraus, dass es äußerst schwierig ist, eine gut durchdachte Partie zu spielen:

„Hex has constantly drawn the attention of serious mathematical researchers and has yielded some interesting results but has withstood attempts to solve it or to devise a winning strategy for boards greater than 7x7, beyond the fact that providing a winning strategy does exist for the first player.“ (Browne 2000: S. 3)

Hex kann laut Melvin Drescher als „two-person zero-sum finite deterministic game of strategy“ klassifiziert werden (Browne 2000: S. 4). Das bedeutet, dass die Rahmenbedingungen des Zwei-Spieler-Spiels bekannt sind, es stets einen Gewinner sowie einen Verlierer gibt, die alternierenden Spielzüge dabei begrenzt sind und das eine Strategie möglich ist. Die Spielzüge werden offen durchgeführt, ohne versteckte Information.

## 5.4 Spielfelder

Ein allgemeines Hex-Spielfeld besteht aus sechseckigen Kacheln mit  $n$  Reihen und  $m$  Spalten, welche in Form eines Rhombus angeordnet sind. Die Anzahl der Felder des Spielfelds liegt somit bei  $n \times m$ , wobei hauptsächlich  $n=m$  vorkommt.

Üblich ist es, das Hex-Spiel auf einem 11 x 11 Spielfeld auszutragen. (vgl. Browne 2000: S. 1) Dieses angesprochene Spielbrett hat sich weitläufig durchgesetzt und ist in nachstehender Abbildung angegeben. In diesem Fall sind, zur besseren Unterscheidung und genauen Feldangabe, die Reihen (1-11) sowie Spalten (A-K) mit Buchstaben bzw. Zahlen bezeichnet. Die Bezeichnung  $F6$  bezieht sich somit auf das mittlere Feld.

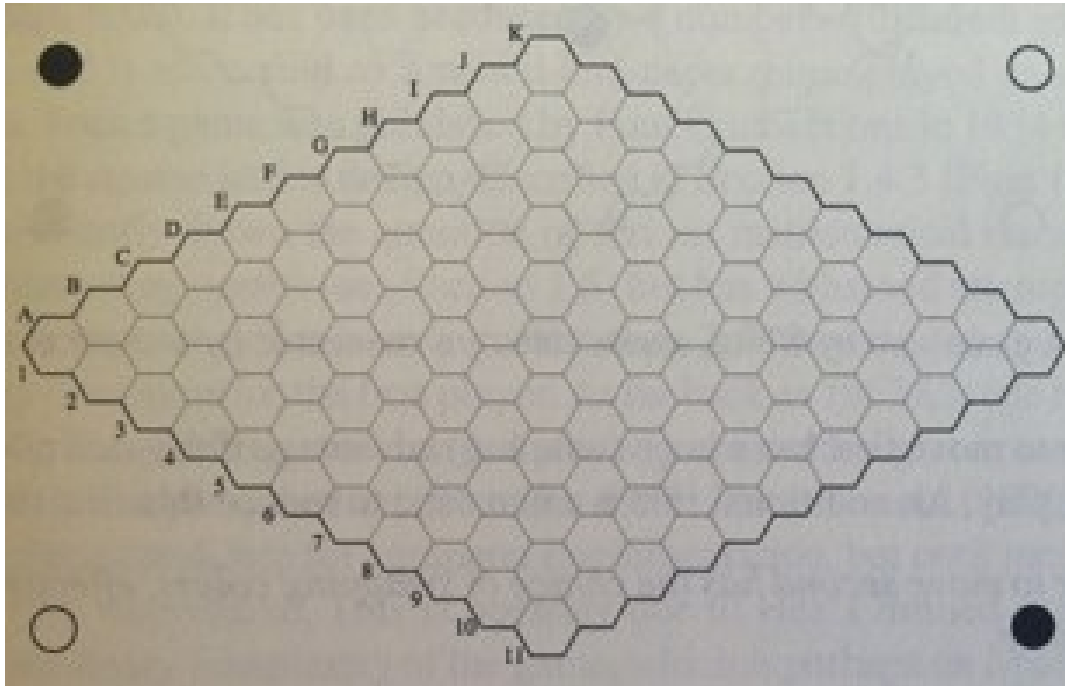


Abbildung 29: Hex-Spielbrett im Format 11 x 11

Der beste Weg, die Strategie hinter diesem Spiel zu erkennen, ist von einem kleinen Spielfeld auf ein größeres umzusteigen. Aus diesem Grund betrachtet man zunächst ein 1 x 1 Spielfeld. In weiterer Folge werden größere Spielfelder betrachtet.

#### 5.4.1 Spielfeld 1 x 1

Bei einem Spielfeld bestehend aus einem Hexagon gewinnt offensichtlich der Spieler, welcher den ersten Zug setzt. Auf solch einem Spielfeld existiert die Verbindungskette aus nur einem Spielstein. Derjenige Spieler der das einzig vorhandene Feld belegt, gewinnt dadurch.

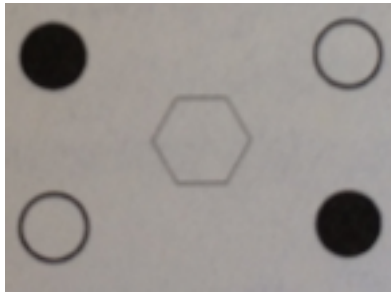


Abbildung 30: 1 x 1 Hex Spielbrett bestehend aus nur einem Spielfeld.

Das Sechseck repräsentiert das Spielfeld und die vier Kreise, je zwei gleichfarbige, spiegeln die entsprechenden Randseiten der Spieler wider, Schwarz und Weiß.

#### 5.4.2 Spielfeld 2 x 2

Handelt es sich nun um ein 2 x 2 Spielfeld, so beinhaltet dieses, wie nachstehende Abbildung zeigt, vier Hexagone.

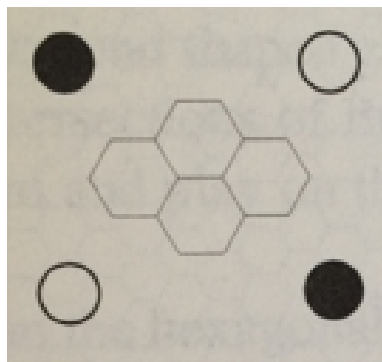


Abbildung 31: 2 x 2 Spielbrett des Hex-Spiels.

Da es sich bei allen Hexagonen um Eckfelder handelt, gehören diese beiden Farben (Schwarz und Weiß) an. Sprich, je zwei dieser Sechsecke stoßen an eine der beiden schwarzen bzw. weißen Seiten und die anderen beiden grenzen an die zweite gleichfarbige Seite.

Die Felder a und c stoßen an eine der beiden schwarzen Seiten, während die

übrigen Felder, b und d, an der zweiten schwarzen Grenze liegen.

Angenommen Spieler A setzt seinen schwarzen Spielstein auf ein beliebiges der vier Felder, dann ist dieser in jedem Fall mit einer seiner dunklen Seite verbunden. Spielerin B hat nun die Möglichkeit auf eines der drei übrigen Sechsecke zu setzen. Sie hat jedoch keinesfalls die Chance den Sieg ihres Gegenspielers zu verhindern. Der Spielstein von Spieler A grenzt bekanntlich an jene beiden Hexagone, welche an die jeweilige andere schwarze Seite anbinden. Spielerin B kann somit versuchen, Spieler A zu blockieren, jedoch besitzt dieser dem Anschein nach eine Alternative. Spieler A schafft es nach zwei Spielzügen eine gültige Verbindung zwischen seinen dunklen Randseiten zu bauen.

### 5.4.3 Spielpositionen

Im Laufe des Spiels wird man mehrere Spielpositionen vorfinden. Unter einer Spielposition versteht man eine Kombination aus schwarzen und weißen Spielsteinen, welche im Laufe einer Partie entstehen kann. Innerhalb aller auftretenden Positionen muss zwischen gültigen und ungültigen Spielpositionen unterschieden werden. Eine Position des Spielfeldes ist als gültig zu verstehen, wenn die Differenz der Spielsteinanzahl der beiden Parteien (A weniger B) kleiner oder gleich 1 ist. (vgl. Browne 2000: S. 5) Sie ist genau dann 0, wenn sowohl Spieler A als auch Spielerin B gleich viele Spielzüge gemacht haben. Der messbare Unterschied an Spielsteinen zwischen beiden Spielern ist genau dann 1, wenn Spieler A bereits auf den Zug von Spielerin B reagiert hat und sich somit zwei seiner Spielsteine am Spielbrett befinden.

Eine gültige Position ist einzigartig, wenn sie durch Rotieren keiner anderen gleicht. Das ursprüngliche Spielfeld entspricht somit ebenfalls einer gültigen Spielposition.

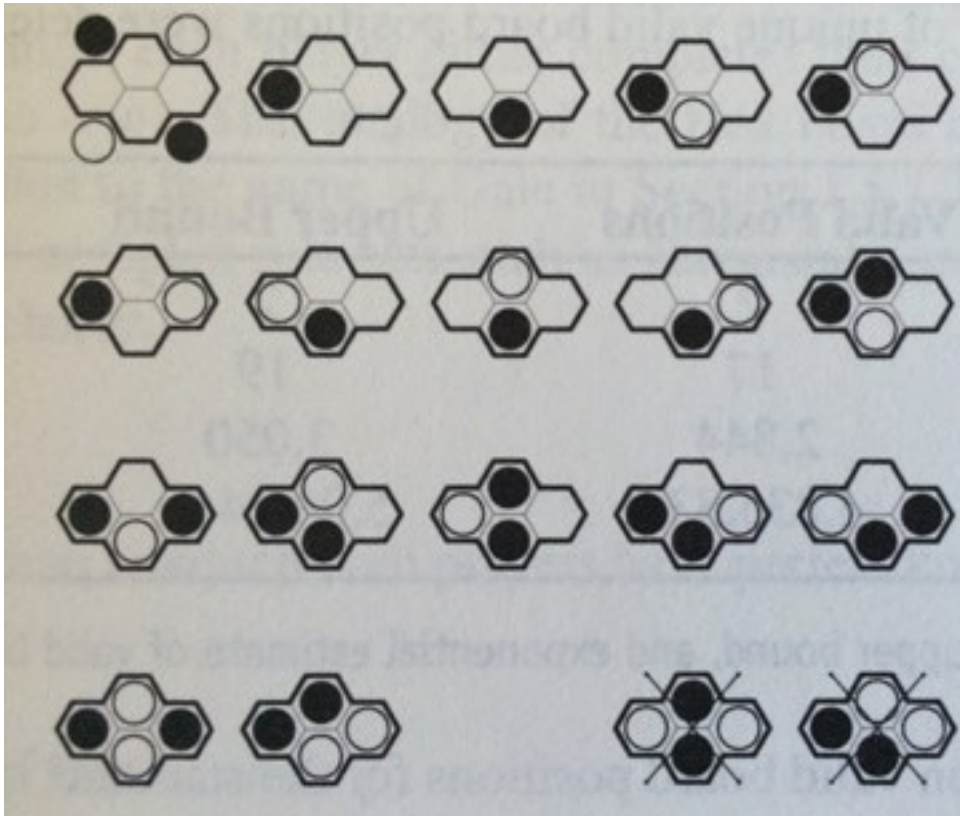


Abbildung 32: Alle einmalig gültigen sowie zwei ungültigen Spielpositionen eines 2 x 2 Hex Brettes.

Wie man obiger Abbildung entnehmen kann, gibt es bei einem 2 x 2 Spielfeld 17 gültige Spielpositionen, welche durchaus in einer Partie auftreten können. Die zwei einzigen ungültigen Spielpositionen befinden sich in der Abbildung rechts unten. Diese können während einer normalen Partie unter keinen Umständen auftreten, da sie bereits zugunsten von Spieler A entschieden wäre und es deshalb sinnlos ist, dass Spielerin B einen weiteren Zug macht. Aus diesem Grund sind diese Positionen ungültig und zu verwerfen.

Der Computerexperte John Tromp gibt eine Formel für weitere Berechnungen bezüglich der Anzahl an Spielpositionen im Hinblick auf größere,  $n \times n$  Spielfelder an, welche in der Publikation „Hex Strategy: Making the Right Connections“ zu finden ist. (Browne 2000: S. 5f).

Nach dem  $i$ -ten Spielzug befinden sich  $a$  Spielsteine des Spielers A und  $b$  Spielsteine der Spielerin B auf dem Spielfeld, welche folgendermaßen berechnet werden können:

$$a = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor, b = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$$

Die Menge an individuellen Positionen  $C$  eines  $n \times n$  Spielfeldes wird folgendermaßen errechnet:

$$C = \frac{X+S}{2}, X = \sum_{i=0}^{n^2} \left[ \binom{n^2}{a} * \binom{n^2-a}{b} \right]$$

Die beiden fehlenden Werte, X und S, können auf folgende Art berechnet:

Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  ist unter  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  definiert.

Falls  $n$  nun gerade ist, so ist folgende Formel heranzuziehen:

$$S = \sum_{i=0}^{\frac{n^2}{4}} \left[ \binom{\frac{n^2}{2}}{i} * \binom{\frac{n^2}{2}-i}{i} \right]$$

Für den Fall, dass  $n$  ungerade ist, nimmt man

$$S = 2 * \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor} \left[ \binom{\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor}{i} * \binom{\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - i}{i} \right] + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor - 1} \left[ \binom{\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor}{i} * \binom{\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - i}{i+1} \right]$$

Man beachte, dass die Gaußklammer ihre Wirkung verliert, falls es sich um eine gerade Anzahl an Spielfeldern handelt und somit für die Formel von keiner Bedeutung ist. Falls jedoch eine ungerade Zahl für  $n$  vorliegt, so muss die Gaußklammer in Betracht gezogen werden, da man ansonsten keine ganzzahligen Werte erhält. Man setzt hierzu in die Formel  $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$  ein.

| n x n Spielfeld | Gesamtheit an Positionen | gültige Spielpositionen |
|-----------------|--------------------------|-------------------------|
| 1 x 1           | 2                        | 2                       |
| 2 x 2           | 19                       | 17                      |
| 3 x 3           | 3.050                    | 2.844                   |
| 4 x 4           | 5.083.443                | 4.835.833               |

*Tabelle 14: Anzahl an (gültigen) Spielpositionen auf Hex-Spielbrettern einer Größe von 1 x 1 bis hin zu 4 x 4.*

Obige Tabelle reflektiert die Anzahl an möglichen Spielpositionen sowie deren Gültigkeit. Auf einem 1 x 1 Spielbrett gibt es lediglich zwei Spielpositionen, welche beide möglich sind, da es nur aus einem Sechseck besteht. Entweder Schwarz beginnt und legt seinen Spielstein oder Weiß tut dies.

Zu erkennen ist, dass die Anzahl gültiger Spielpositionen dabei innerhalb kurzer Zeit rasant ansteigt. Bei einem traditionellen 11 x 11 Spielbrett findet man somit bereits  $2,38 \cdot 10^{56}$  gültige Positionen vor.

Daraus ergibt sich, dass eine vollständige Berechnung an Spielpositionen mit steigender Spielbrettgröße nahezu unmöglich ist. (vgl. Browne 2000: S. 6)

#### 5.4.4 Spielfeld 3 x 3

Die Spieler A und B haben nun vor, ihre Partie auf einem 3 x 3 Spielfeld auszutragen. Dieses besteht folglich aus neun kleinen Spielfeldern.

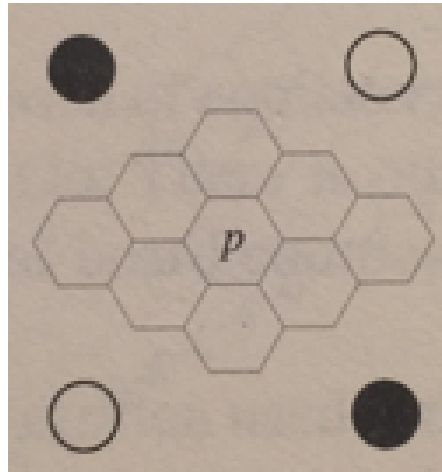


Abbildung 33: Hex-Spielfeld der Größe 3 x 3.

Bei genauerer Betrachtung des Spielfeldes wird deutlich, dass sich ein Hexagon, welches mit *p* bezeichnet ist, in der Mitte des Spielbrettes befindet und somit an keine Seite grenzt. Des Weiteren gibt es je zwei Hexagone, welche an nur eine Seite angrenzen, Schwarz oder Weiß. Erneut befinden sich vier Hexagone an Ecken und gehören somit zu beiden Farben, Schwarz und Weiß.

Falls Spieler A beginnt, so gewinnt er, indem er seinen ersten Spielstein in die Mitte des Spielfeldes setzt. Dies ermöglicht es ihm, je eine doppelte Verbindung von seinem gesetzten Spielstein zu seinen beiden schwarzen Seiten zu schaffen. Falls Spielerin B versucht, ihn zu blockieren, so hat er immer noch ein Hexagon, das frei bleibt, um seinen Spielstein richtig zu setzen. Auf diese Weise gewinnt er jede Partie, vorausgesetzt er bleibt dieser Strategie treu.

### 5.4.5 Spielfeld 4 x 4

Ab dieser Spielbrettgröße beginnt die Theorie kompliziert zu werden. Sollte Spieler A den ersten Zug der Partie ausüben dürfen, so gewinnt er, falls er seinen ersten Spielstein auf eines der markierten Hexagone (1 - 4) setzt. Falls er seinen Eröffnungszug an eine andere Stelle setzt, so wird er womöglich von Spielerin B geschlagen. Falls Spieler A seinen Spielstein in eine der beiden mittleren Möglichkeiten (2 oder 3) legt, so garantiert ihm dies einen Sieg nach fünf Spielzügen. Sollte er sich für die beiden Felder an den Ecken (1 oder 4) entscheiden, so geschieht dies erst nach seinem sechsten Zug. Abbildung 34 soll dies veranschaulichen:

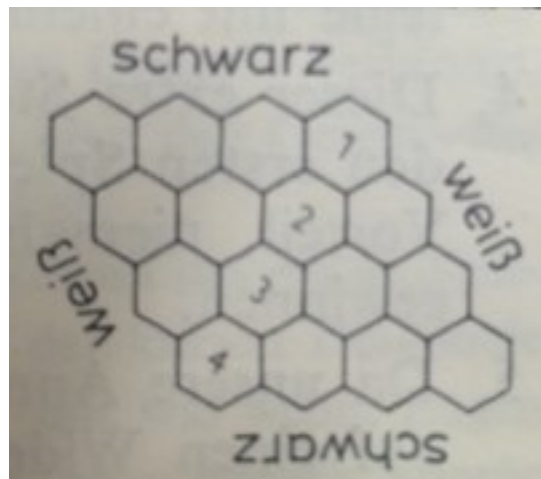


Abbildung 34: Hex-Spielfeld eines 4 x 4 Spielbrettes, auf dem die kurze Diagonale mit den Ziffern 1-4 angegeben ist.

### 5.4.6 Spielfeld 5 x 5

Bei einem 5 x 5 Spielfeld, sprich bei einem Spielfeld bestehend aus 25 kleinen Spielfeldern, ist es erneut möglich zu beweisen, dass der erste Spieler (Spieler A) nach sieben gespielten Zügen siegreich ist, falls er seinen ersten Zug in die Mitte setzt.

### 5.4.7 Weitere Spielfelder

Falls größere als 5 x 5 Spielfelder betrachtet werden, so ist solch eine Untersuchung nicht mehr möglich, da dies vom Umfang her den Rahmen der Arbeit sprengen würde.

Beim Standard-Spiel handelt es sich allerdings um ein 11 x 11 Spielfeld. Die Analyse solch eines Spielfeldes geht weit über das menschliche Können hinaus, denn unter bestimmten Umständen sind Züge von anderen Spielzügen definiert bzw. manche Spielfeldlücken können ausgefüllt werden, ohne den Spielgang zu verändern.

Hex kann problemlos auf verschiedenförmigen Spielfeldern gespielt werden, welche gleichzeitig topologisch äquivalent zum natürlichen Spielbrett sind und aus Hexagonen bestehen. Somit könnte man auf einem Spielbrett bestehend aus Dreiecken spielen, indem man die Spielsteine auf die Ecken eines jeden Dreiecks legt. Zwei Ecken eines Spielfeldes werden durch eine Diagonale von Zellen des Spielfeldes verbunden, nicht jedoch die übrigen Ecken. In anderen Worten: von Nord nach Süd aber nicht von Ost nach West.

Da ein Schachbrett isomorph zu einem Hex-Spielbrett ist, kann dieses ebenso herangezogen werden. Man muss jedoch die Quadrate in ihrer Diagonale, sprich an ihren Kreuzungspunkten, als verbunden ansehen. (vgl. Gardner 1964: S. 37)

Verschiedene Formen des Spielbrettes, abweichend von der traditionellen Diamantenform, wurden innerhalb der Mathematik-Community vorgestellt. Unter anderem wurde ein Spielbrett in Form eines gleichseitigen Dreiecks durch den Mathematiker Claude Shannon am Technologischem Institut von Massachusetts vorgebracht. Der Sieger ist Spieler A, falls es ihm gelingt, alle drei Seiten der Dreiecksfigur durch seine Spielsteine miteinander zu verbinden.

Dabei zählen die Ecken wie gehabt zu beiden angrenzenden Seiten. (vgl. Gardner 1964: S. 37)

## 5.5 Strategie

Das folgende Kapitel wird anschaulich in Martin Gardners „Hexaflexagons and other mathematical diversions“ (1988: 73-83) beschrieben.

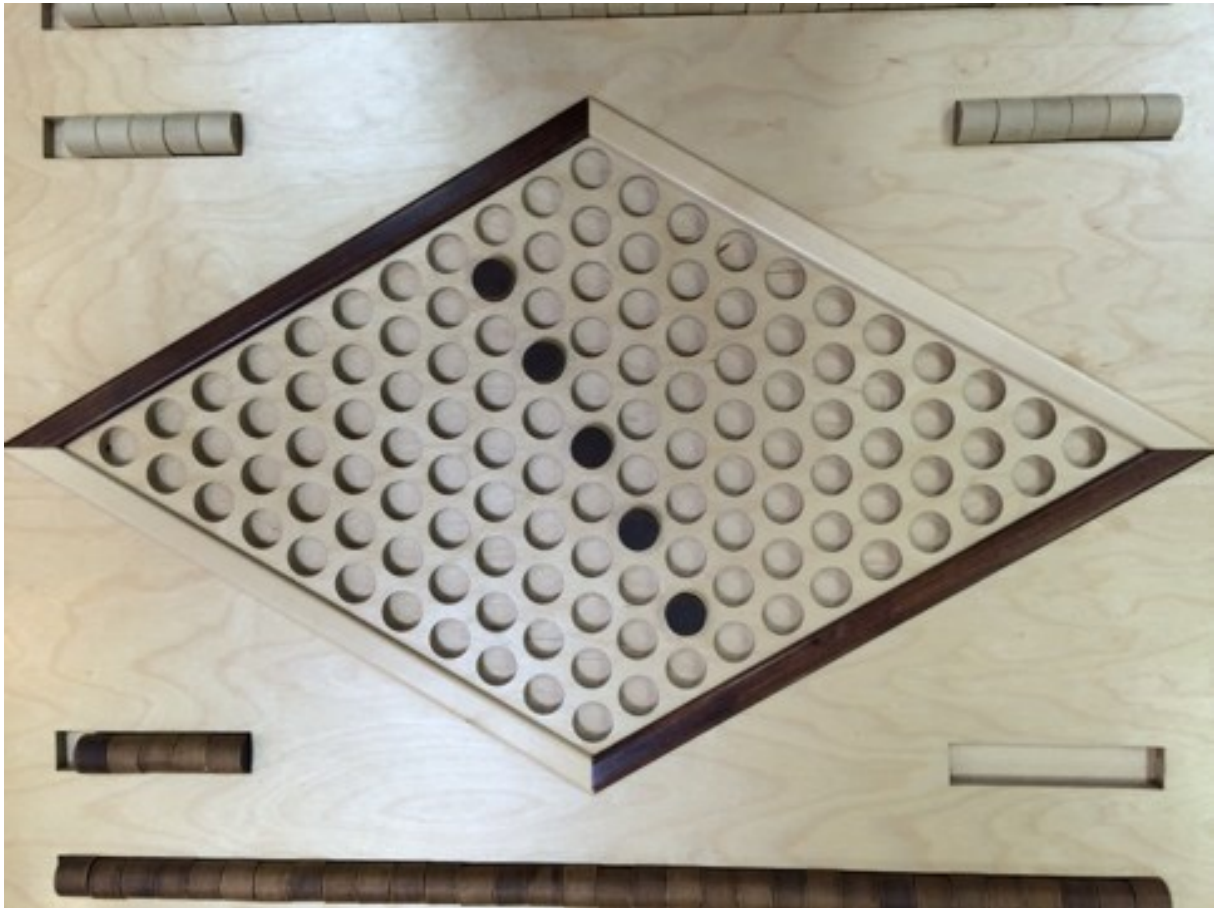
„A solution (winning strategy) for Hex has eluded researchers for over half a century. This is largely due to the combinatorial complexity of the game.“ (Browne 2000: S. 5)

Der erste Spieler, Spieler A, hat einen Vorteil gegenüber Spielerin B, indem er die Zelle in der Mitte mit einem seiner Spielsteine zu Beginn besetzt. Von dort ausgehend, kann er eine Verbindungslinie zu beiden Seiten legen, indem er seinen nächsten Spielstein an einen Spielstein derselben Farbe angrenzt und in Richtung der entsprechenden Seite lenkt. Man argumentierte damit, dass es für Spielerin B unmöglich ist, Spieler A zu blockieren, da er stets zwei angrenzende Felder und zwei Möglichkeiten hat, sich der schwarzen Seite zu nähern. Diese Betrachtungsweise ist insofern ungültig, da Spieler A durchaus blockiert werden kann, wenn sich Spielerin B auf Hexagone beschränkt, welche nicht an einen gegnerischen Stein angrenzen.

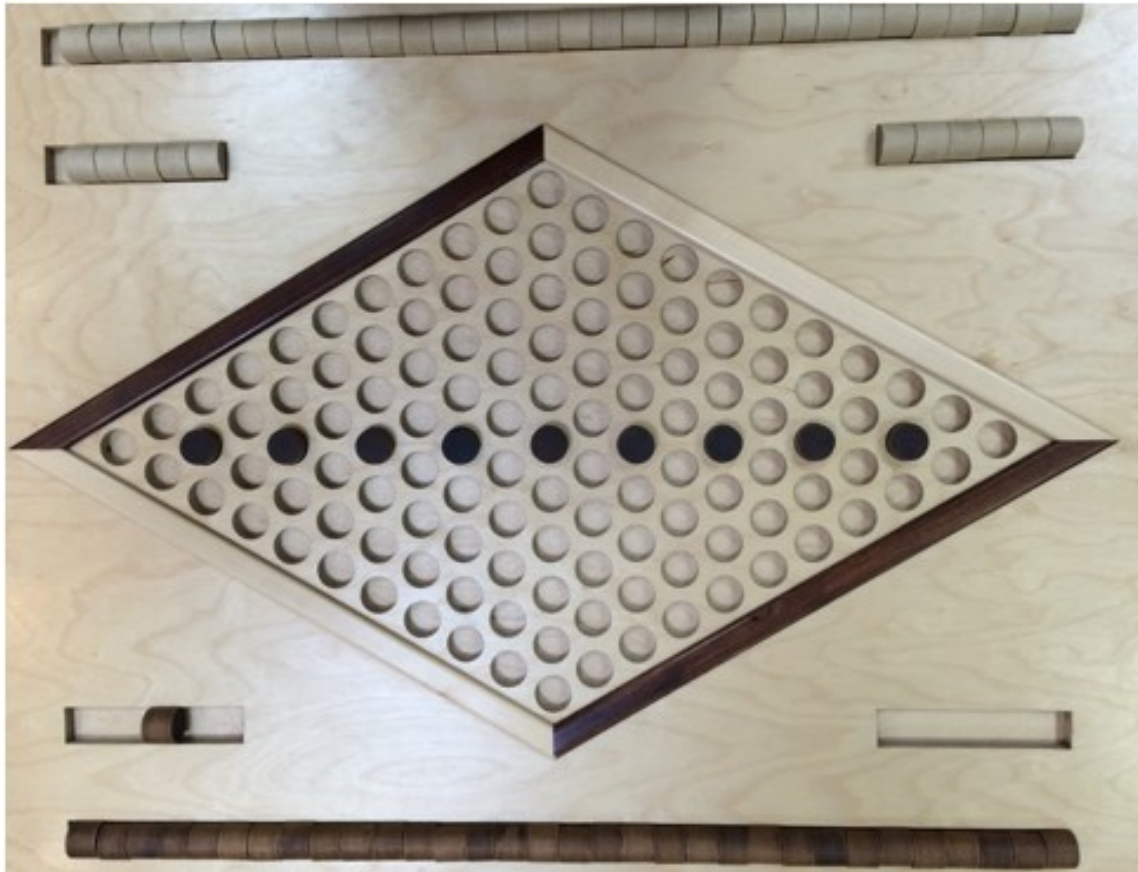
Effektives Blockieren bedingt somit oft Züge, welche auf den ersten Blick unnütz und abwegig erscheinen. Solche Spielzüge scheinen für Laien keinerlei Verbindung zu der zu blockierenden Kette zu haben.

Eine Alternative zu beschriebener Strategie stellt folgende Vorgehensweise dar: Zu Beginn wird in der Mitte gespielt. Alle weiteren Spielsteine des Spielers werden dermaßen platziert, dass diese, vertikal oder diagonal gesehen, eine

zusammenhängende, jedoch durch zwei Hexagone getrennte Linie ergeben. Es handelt sich somit in beiden Fällen um eine unterbrochene Kette zwischen zwei Seiten.



*Abbildung 35: Mit dunkeln Spielsteinen diagonal gelegte „Brücke“*



*Abbildung 36: Mit dunklen Spielsteinen waagrecht gelegte „Brücke“*

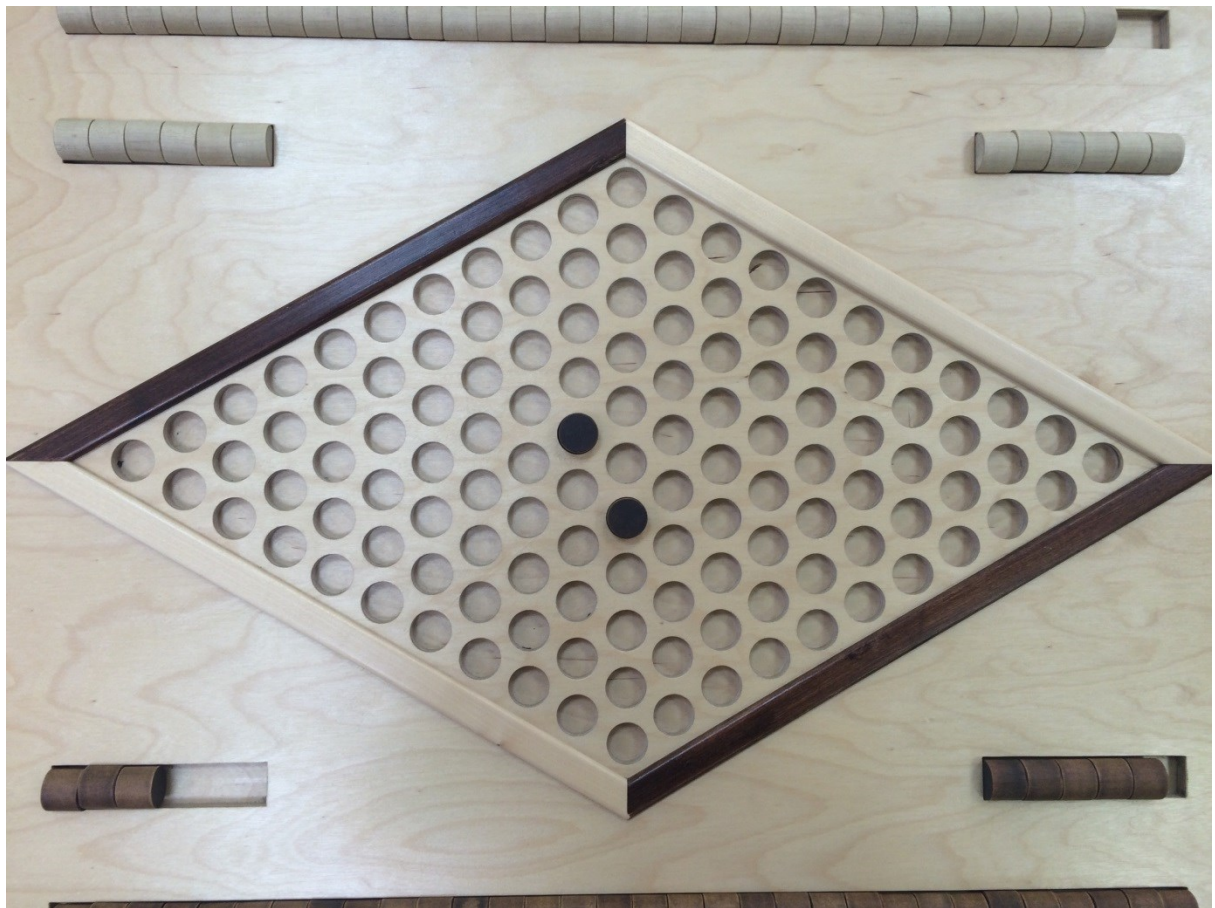
Auf obiger Abbildung lässt sich leicht erkennen, dass von jedem Spielstein je zwei Verbindungswege zu einem anderen Spielstein aufgebaut werden können. Somit wird deutlich, dass es für den Gegenspieler unmöglich ist, diese zukünftige Verbindung zu verhindern. Für jedes fehlende Verbindungsstück existieren zwei Möglichkeiten der Ergänzung.

Diese vorgestellte Strategie ist eine sichere Variante, wenn man gegen Spieler spielt, welche diese noch nicht beherrschen. Der Gegenspieler kann nämlich mittels eigener defensiver Spielzüge kontern.

### 5.5.1 Brücken

Sichere Verbindungen aufzubauen, ist ein wichtiger Teil einer gewinnorientierten Strategie. Beim Aufbau einer eigenen zusammenhängenden Kette ist eine spezielle Konfiguration, die sogenannte „Brücke“, besonders erfolgreich.

Unter einer Brücke versteht man eine bestimmte Anordnung zweier Spielsteine derselben Farbe, wie es die nachstehende Abbildung zeigt:



*Abbildung 37: Einzelne Brücke auf einem 11 x 11 Spielfeld gesteckt von „Schwarz“.*

Es handelt sich um zwei von derselben Farbe besetzte Felder, sodass dazwischen „zwei freie, gemeinsame Nachbarfelder“ (Stewart 2008: S. 65) liegen.

Sind zwei Spielsteine auf solch eine Weise verknüpft, so gelten sie als bereits verbunden, obwohl sie nicht aneinander angrenzen. Sie sind aus folgendem Grund als verbunden anzusehen: Angenommen Spieler A hat seine Spielsteine in Anlehnung an Abbildung 37 gesetzt. Spielerin B versucht, die drohende Verbindung zu stoppen und hat dabei die Möglichkeit, in zwei Felder zu setzen. Legt sie ihren Stein in eines der beiden Felder, so kann Spieler A seinen Spielstein in das jeweils andere Feld setzen und dadurch seine beiden Spielsteine miteinander verknüpfen. Es würde dabei keinen Unterschied machen, in welches freie Feld Spielerin B setzt.

Nach diesem Prinzip wird weiter vorgegangen und somit entsteht eine Ansammlung von Brücken, wie wir sie bereits aus den Abbildungen 35 und 36 kennen. Dadurch wird oftmals unbesetzten Feldern eine strategisch wichtige Bedeutung zugeschrieben. Brücken ermöglichen es, schnelle Verbindungen auf das Spielbrett herzustellen.

Ian Steward (2008) zufolge hält eine Brücke den Spielzügen des Gegenspielers nicht immer stand. Das bedeutet, dass es Spielerin B gelingen kann, eine Brücke des Spielers A zu zerstören. Dazu genügt es, einerseits eines der beiden Zwischenfelder zu besetzen und andererseits durch denselben Zug mit einem Gewinnzug zu drohen. Somit wird Spieler A gezwungen, den Sieg seines Gegenübers zu verhindern und er verpasst dadurch die Gelegenheit, seine beiden als Brücke angelegten Spielsteine miteinander zu verbinden. Steward (2008: S. 65) meint aber, dass dies „meist ein schwieriges Unterfangen“ sei. Besser sei es „den Gegner möglichst wirksam am Brückenbau zu hindern“.

## 5.5.2 Effektives Blockieren

Will man seinen Gegner daran hindern, eine durchgehende Verbindung zu stecken, ist es oft notwendig, dessen Strategie effektiv zu blockieren. Um gezielt zu blockieren, wird fälschlicherweise angenommen, dass man seinen Spielstein in Reichweite der gegnerischen Spielkette legen muss. Die topologische Gegebenheit des hexagonalen Spielfelds und die Ausbreitung an Brücken erleichtert es jedoch derartige Blockaden zu umgehen. (vgl. Browne 2000: S. 45)

Die folgende Abbildung soll die Wichtigkeit eines Blockierens auf Abstand illustrieren:

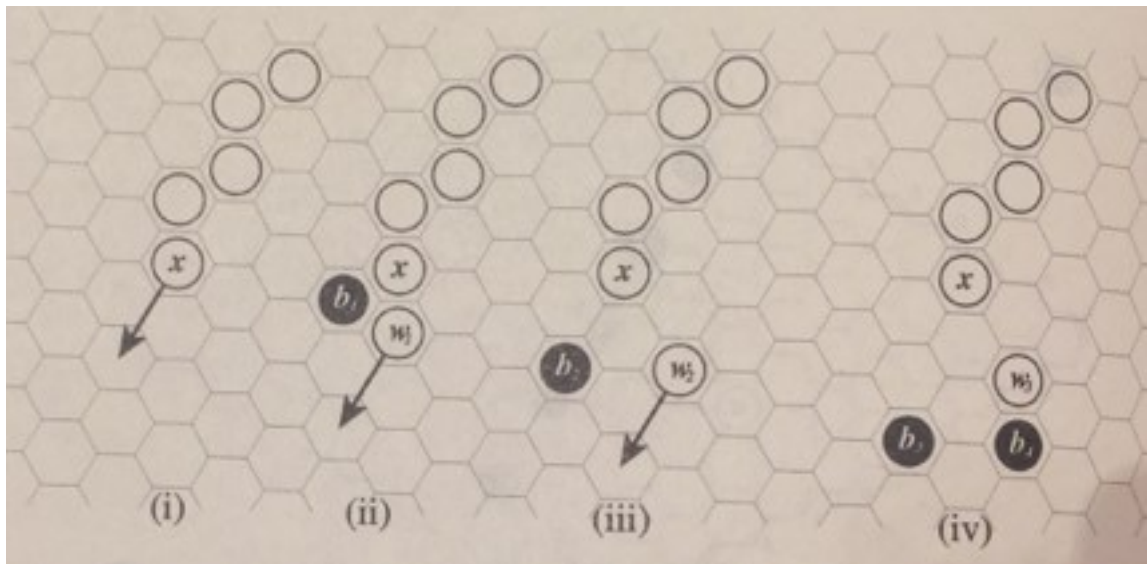


Abbildung 38: Weiße Verbindung aus 5 Steinen und 3 Anläufe von „Schwarz“, Spielerin B zu blockieren.

Angenommen Spielerin B ist dabei, ihre „Schlange“ auf ihr zweites Randfeld zu expandieren. Sie hat eine Seite bereits erfolgreich durch ihre Spielsteine verbunden und orientiert sich bei ihren kommenden Zügen in südlicher Richtung. Spieler A wird dies möglicherweise rechtzeitig erkannt haben und versuchen es zu verhindern.

Die Figur auf der linken Seite (i) verdeutlicht die Absicht der Spielerin B. In nebenstehender Abbildung (ii) hat Spieler A versucht zu blockieren, indem er

einen Spielstein auf das Feld  $b_1$  gelegt hat. Wie man erkennen kann, hat Spielerin B im Anschluss auf  $w_1$  gelegt und somit den schwarzen Spielstein umgangen.

Im dritten Beispiel (iii) blockiert Spieler A, indem er an keinen weißen Spielstein angrenzt ( $b_2$ ). In diesem Fall kann jedoch Weiß auf  $w_2$  spielen, bildet somit zu ihrer bereits vorhandenen Kette eine Brücke und kann dem schwarzen Spielstein ebenfalls ausweichen.

In rechtem Beispiel (iv) platziert Spieler A seinen Spielstein dermaßen, dass er sich von der generischen Kette weiter entfernt ( $b_3$ ). Um den Anschluss an die Kette nicht zu verlieren, ist Spielerin B gezwungen, auf  $w_3$  zu legen. In weiterer Folge kann Spieler A jedoch auf  $b_4$  setzen, hat sich somit eine Brücke erspielt und seine Gegnerin in ihrem Vorhaben erfolgreich blockiert.

Die Beispiele zeigen, welche Rolle Abstand für ein erfolgreiches Blockieren spielt.

### 5.5.3 Wechselwirkung

Um den Verlust der Partie abzuwenden, ist es manchmal notwendig, in genau ein bestimmtes Feld zu setzen. Gleichzeitig wird man, wenn man sich dem Hex-Spiel öfters widmet, feststellen, dass sich die Führungsposition nach jedem Spielzug ändern kann. Eine Führungsposition ist dadurch definiert, dass man den Ausbau einer Kette gezielt anstrebt, der Gegner jedoch dies zu verhindern versucht. Wenn man in der Führungsposition einen überflüssigen Zug tätigt, so kann der Gegenspieler diesen Fauxpas ausnutzen und die Führung an sich reißen.

Die Stärke eines Spielers ist äquivalent zur Verbindung seiner Spielsteine. Aus diesem Grund ist es wichtig, das schwächste Glied der Kette zu verstärken.:

„[...] a player's position is only as good as the weakest link in their best connection across the board.“ (Browne 2000: S. 44)

Unter einer Wechselwirkung versteht man des Üblicherweise, die gegenseitige Beeinflussung von Individuen oder bestimmten Dingen. Während des Hex-Spiels ist eine Wechselwirkung folgendermaßen zu deuten: Spieler A beginnt das Spiel, indem er den ersten Spielstein setzt. Spielerin B reagiert darauf durch das Setzen eines weißen Spielsteines. Sie verfolgt dabei die Absicht, eine verbundene Stecke von einer weißen Seite des Spielbrettes zur gegenüberliegenden gleichfarbigen Grenzleiste zu legen bzw. ihren Gegner daran zu hindern, es ihr gleichzutun. Abhängig von ihrem Zug muss Spieler A seinen Zug bedacht setzen. Diese Abfolge wird bis zum Ende der Partie fortgesetzt. Nach jedem Spielzug einer Partei muss die gegnerische entsprechend reagieren. Folglich bewirkt jeder Spielzug des Spielers A eine Beeinflussung der Spielstrategie der Spielerin B und umgekehrt. Bis zum Spielende finden somit mehrere Wechselwirkungen statt.

Aus anderen Kapiteln lässt sich schließen, dass es aus taktischen Gründen immer gut ist, einen gewissen Abstand zu bereits gelegten Steinen zu halten. Es ist aus vielerlei Gründen ratsam, auf gegnerische Züge zu antworten. Zum einen ist es dadurch unter Umständen möglich, in die Strategie des Gegners in einem spezifischen Gebiet einzugreifen. Andererseits vermeidet man dadurch, dass der Gegner ungehindert Gebiete besetzen kann. Ebenso kann man die Chance des Gegners verringern, sich einen Vorteil zu verschaffen. Ein Spielstein kann womöglich eine zukünftige Hilfestellung bieten. (vgl. Browne 2000: S. 49)

Es besteht die Gefahr, sich zu sehr auf seine eigenen Spielzüge zu konzentrieren und den Gegner außer Acht zu lassen. Man sollte jedoch bedenken, dass ein jeder Gegner eine Strategie verfolgt. Dessen letzten Spielzug zu vernachlässigen wäre somit suboptimal. In der Nähe des vom Gegenüber zuletzt gespielten Steines zu legen, bewirkt z.B. Misstrauen und übt Druck auf seinen Angriff aus. (vgl. Browne 2000: S. 49)

Man sollte jedoch aufpassen, dass man durch seinen Gegner nicht manipuliert und auf eine falsche Fährte gelockt wird.

Als Resümee lässt sich ziehen, dass durch jeden Spielzug in die Strategie des Gegners eingegriffen werden kann und dies als Chance genutzt werden sollte.

#### 5.5.4 Der Vorteil des ersten Spielers

John Nash konnte beweisen, dass alle Hex-Spiele, unabhängig von der Größe des Spielbrettes, von den ersten Spieler gewonnen werden können. Der Beweis bestätigt, dass bei optimalem Spiel dem zweiten Spieler der Verlust der Partie nicht zu entziehen ist. Es ist bewiesen, dass es eine gewinnbringende Strategie bezüglich Hex gibt, jedoch wird kein eindeutiger Lösungsweg geliefert.

Der Beweis ist also nicht konstruktiv, das heißt, dass er dabei nicht aufzeigt, wie der beginnende Spieler konkret vorzugehen hat. Somit bietet dieser Beweis keine Darstellung des Lösungsweges, sondern beweist lediglich dessen Existenz. (vgl. Berlekamp / Conway / Guy 1982: S. 680)

Der indirekte Beweis (reductio ad absurdum) beruht auf dem Prinzip des Strategiediebstahls. (vgl. Gardner 1964: S. 35)

**Satz:** Es existiert eine gewinnbringende Strategie für den ersten Spieler.

Der **Beweis** wird unter anderem von Neto/Silva (2013), Stewart (2008) und Gardner (1964) beschrieben:

Angenommen es würde eine Gewinnstrategie geben. Spieler A darf seinen schwarzen Spielstein zuerst auf das Spielfeld legen, Spielerin B verfolgt hingegen ihre Gewinnstrategie, um „Schwarz“ zu schlagen. Falls dies so ist, so wäre es Spieler A möglich, sich diese Strategie abzuschauen, um sie selbst anzuwenden. Dazu muss sich Spieler A lediglich in die Position versetzen, dass er das Spiel nicht eröffnet hat, sondern Spielerin B, und seinen eigentlichen

zuerst gesetzten Zug vergessen. Er hat sich somit in die Lage versetzt, dass Spielerin B die Partie eröffnet hat und er selbst muss nun auf ihre Spielzüge auf geeignete Weise reagieren. Nachdem Spieler A nun dieselbe „angeblich existierende“ Gewinnstrategie wie Spielerin B verfolgt, setzt er seinen nächsten Spielstein stets nach diesem Muster. Was passiert, wenn es sich um genau jenes Feld handelt, auf dem sich bereits der „vergessene“ Spielstein befindet? „Das macht nichts; dann liegt ja schon ein [...] Stein auf dem zu besetzenden Feld.“ (Stewart 2008: S. 64) Spieler A setzt seinen Spielstein deshalb auf ein anderes freiliegendes Feld, und dieser Stein gerät somit als neuer in Vergessenheit. Die Strategie wird durch einen zusätzlichen Spielstein nicht beeinträchtigt, vor allem da „ein extra Stein [...] stets ein Vorteil, niemals ein Nachteil“ ist (Gardner 1964: S. 36). Dieses Verfahren wird weiter fortgeführt, bis Spieler A seinen Sieg erzwungen hat. Spieler A hat das Spiel begonnen und dadurch gewonnen, dass er seinem Gegner die Strategie abgeschaut hat, unabhängig davon, welche Spielzüge Spielerin B im Laufe der Partie gemacht hat. Um dies zu widerlegen genügt es, aufzuzeigen, dass keine Gewinnstrategie für den nachziehenden Spieler existiert. Dies ist jedoch unmöglich, da das Spiel spätestens nach  $n \times n$  Spielzügen endet und es niemals zu einem Unentschieden kommen kann. Dies wird aber erst im folgenden Kapitel bewiesen. Daraus folgt, dass eine Gewinnstrategie vorhanden sein muss. (vgl. Stewart 2008: S. 64f; Neto/Silva 2013: 78)

Es gibt einen etwas anders aufgebauten Beweis vom amerikanischen Mathematiker Anatole Beck, welcher im Werk „Excursions Into Mathematics“ zu finden ist (vgl. Browne 2000: S. 14). Die Entwicklung von expliziten Spielstrategien ist seither ein Forschungsgebiet. Größere Spielbretter können allerdings nur durch massive Computerunterstützung komplett analysiert werden. Laut Ian Stewart sind solche nur bis zu einem Spielbrettformat von  $7 \times 7$  durchgerechnet worden. (vgl. Stewart 2008: S. 65)

### 5.5.5 Unentschieden

**Satz:** Hex kann niemals in einem Unentschieden enden.

Dies lässt sich durch leichte mathematische Überlegungen beweisen. (vgl. Gardner 1964: S. 34)

**Beweis:** Ein Spiel wäre als Unentschieden zu werten, wenn alle Felder des Spielbrettes belegt sind, jedoch weder Spieler A noch Spielerin B eine durchgehende, zusammenhängende Kette hat. Dies ist nicht möglich, da Spieler A seiner Gegnerin B nur daran hindern kann, eine Verbindung zu bauen, wenn er dies selbst durchsetzt. Somit folgt daraus, dass es genau einen Gewinner geben muss.

Im Jahre 1979 war der Mathematiker David Gale der erste, der es schaffte, dies zu beweisen, indem er den Fixpunktsatz von Brouwer einbezog. (vgl. Grima 2015)

Aus der Tatsache, dass es kein Unentschieden geben kann, sondern immer ein Gewinner hervorgeht, kann man eine einfache Strategie ableiten: Man versucht nicht, eine eigene Kette aufzubauen, sondern hindert seinen Kontrahenten mit allen Kräften daran, eine durchgehende, zusammenhängende Kette aufzubauen. Falls dies Spieler A gelingt, so wird er wiederum selbst gewinnen.

## 5.6 Das Shannon Switching Game

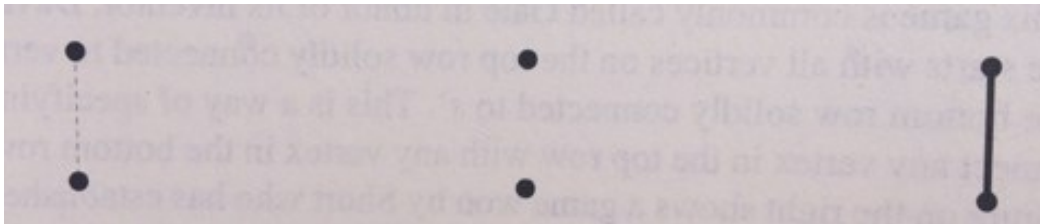
Das Hex-Spiel ist verwandt mit einem Spiel namens *Shannon Switching Game*.

Wie der Name des Spiels bereits andeutet, wurde das Spiel in den 1950ern von Claude Shannon erfunden.

Das Spielfeld enthält indirekt verbundene Graphen zwischen den Punkten S

und  $S'$ . Das Spielfeld gleicht einem elektrischen Stromkreis und kann auf einen solchen zurückgeführt werden.

Eine Verbindung kann in drei Stadien auftreten: In der ursprünglichen Form sind diese weder verbunden noch durchtrennt. Das heißt sogleich, dass diese durch Spieler A bzw. durch Spielerin B, im Laufe des Spiels endgültig verbunden bzw. vollständig durchtrennt werden können. (vgl. Browne 2000: S. 9) Nachstehende Abbildung veranschaulicht diese Zustände:



*Abbildung 39: Drei verschiedene Zustände der Kanten des Graphens.*

Die Abbildung zeigt auf der linken Seite die allgemeine, sprich unberührte Ausgangsform. Im Lauf des Spiels wählen die Spieler jeweils abwechselnd eine Kante, welche je nach Spieler entweder durchtrennt oder verbunden wird. In der Mitte erkennt man, dass die Verbindung durchtrennt wurde. Rechts in der Abbildung sieht man, dass die Verbindung zwischen beiden Punkten bestätigt ist.

Das Spiel tritt in zwei verschiedenen Varianten auf. Zum einen kann das Augenmerk auf den Verbindungen zwischen zwei Punkten liegen, zum anderen aber kann man sich auf die zu verbindenden Punkte konzentrieren. Die Spieler verfolgen jeweils unterschiedliche Ziele: Spieler A, „Short“, versucht Verbindungen herzustellen und das Ziel der Spielerin B, „Cut“, ist es, Verbindungen zu kappen.

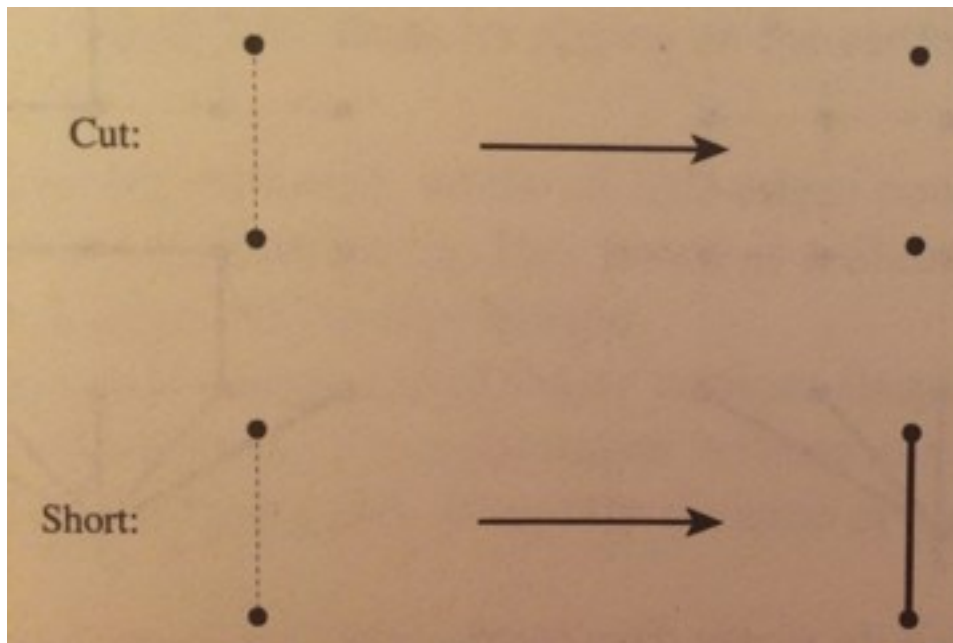


Abbildung 40: Cuts und Shorts Spielzüge.

Oben wird ein gültiger Spielzug von Spielerin B angezeigt. In der Zeile unterhalb findet man einen Spielzug des Spielers A.

Führt man dies in abwechselnder Reihenfolge fort, so ergibt sich entweder eine Gewinnsituation für Spieler A oder für Spielerin B. Nachstehende Abbildung verdeutlicht solch eine vollständige Partie auf einem kleinen Spielbrett:

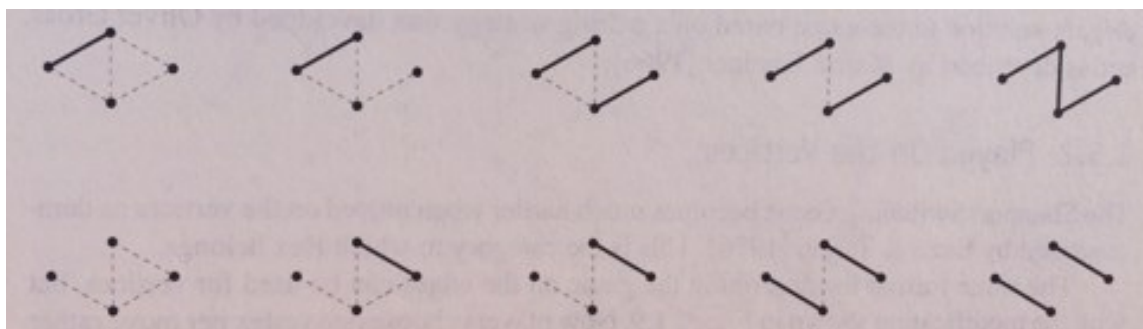


Abbildung 41: Zwei Partien des „Shannon Switching Game“, wobei jeweils ein anderer Spieler zuerst zieht.

Diese kurzen Spielpartien können schrittweise nachvollzogen werden, indem man jede Spalte als die Umwandlung durch einen Spielzug ansieht.

In der ersten Zeile beginnt Spieler A, indem er die nordwestliche Kante

verstärkt, und gewinnt schlussendlich, da er eine Verbindung von Ost nach West geschaffen hat.

In der unteren Zeile ist Spielerin B als erste am Zug und löst die nordwestliche Verbindung. Sie gewinnt, da es Spieler A nicht geschafft hat, eine durchgehende Verbindung zu legen.

Eine schwierigere Variante des Spiels ist jene, bei der der Fokus auf den Eckpunkten liegt. Sowohl die Spielzüge von A als auch von B werden in folgender Abbildung zur Veranschaulichung dargestellt:

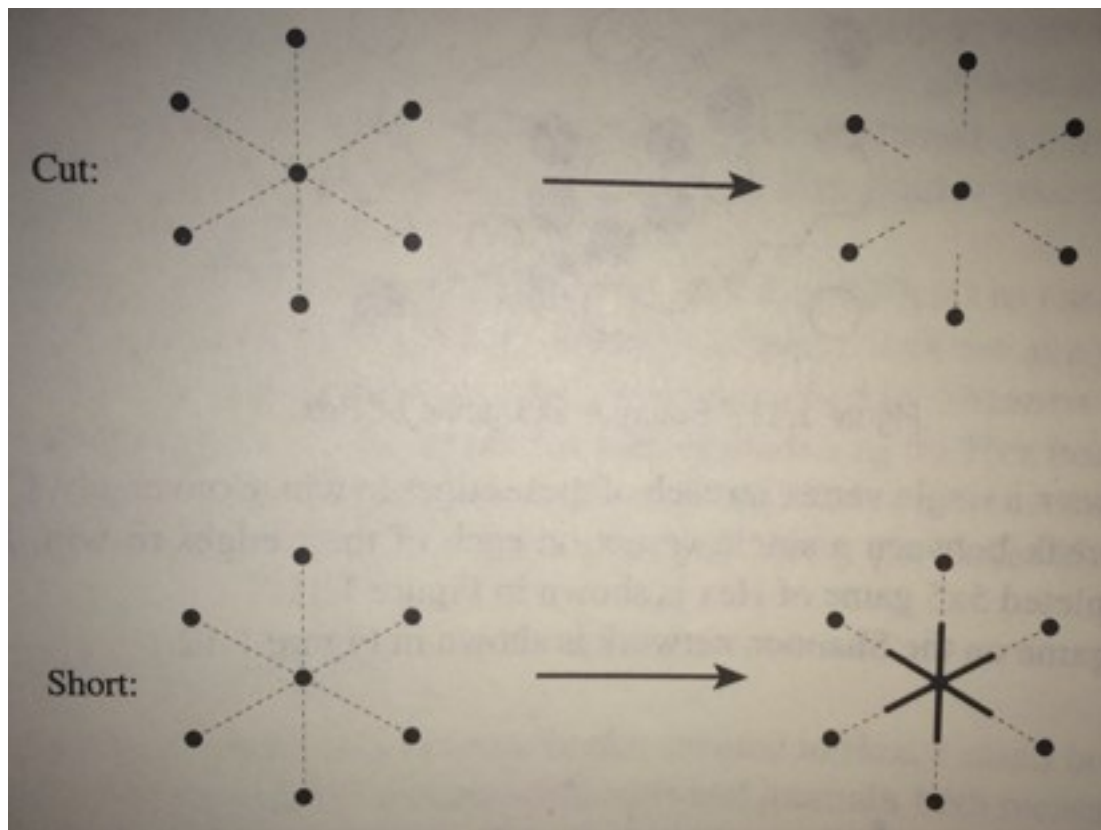


Abbildung 42: Cuts und Shorts Spielzüge.

Auf diese Weise kann ein Spielbrett unter anderem folgendermaßen aussehen:

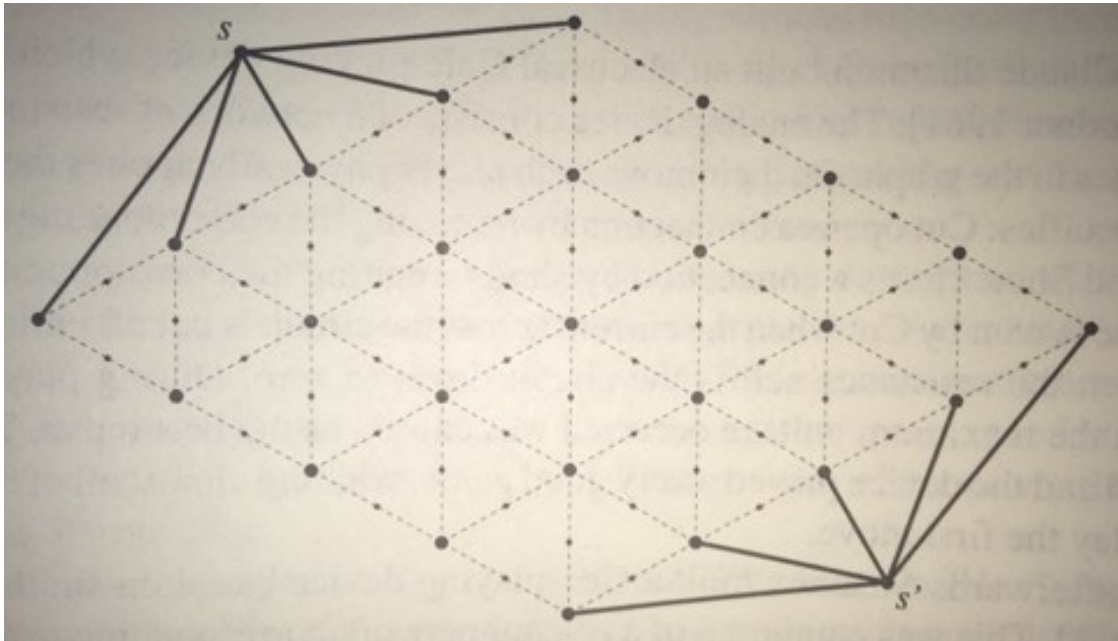


Abbildung 43: 5 x 5 Hex-Spielfeld in Form eines Shannon-Netzwerks.

Auf diesem Spielbrett wird jede Kante so behandelt, als würde sie aus zwei Hälften bestehen. Ein Spielzug bezieht sich auf alle halben Seiten, die mit einem Punkt verknüpft sind. Diese Tatsache erlaubt es, das Hex-Spielbrett als Netzwerk eines solchen Shannon-Spiels aufzufassen. Die Abbildung 43 entspricht einem 5 x 5 Spielbrett. Die dicken Punkte der Abbildung repräsentieren die erlaubten Spielzüge (Hexagone).

Spieler A, „Schwarz“ und gleichzeitig „Short“, muss wie gehabt S und S' miteinander verbinden, um zu gewinnen. Aus demselben Grund muss Spielerin B diese durchbrechen.

Im Anschluss wird eine für Spieler A entschiedene Partie sowohl auf einem bekannten Hex-Brett dargestellt, als auch in Form eines Shannon-Netzwerks:

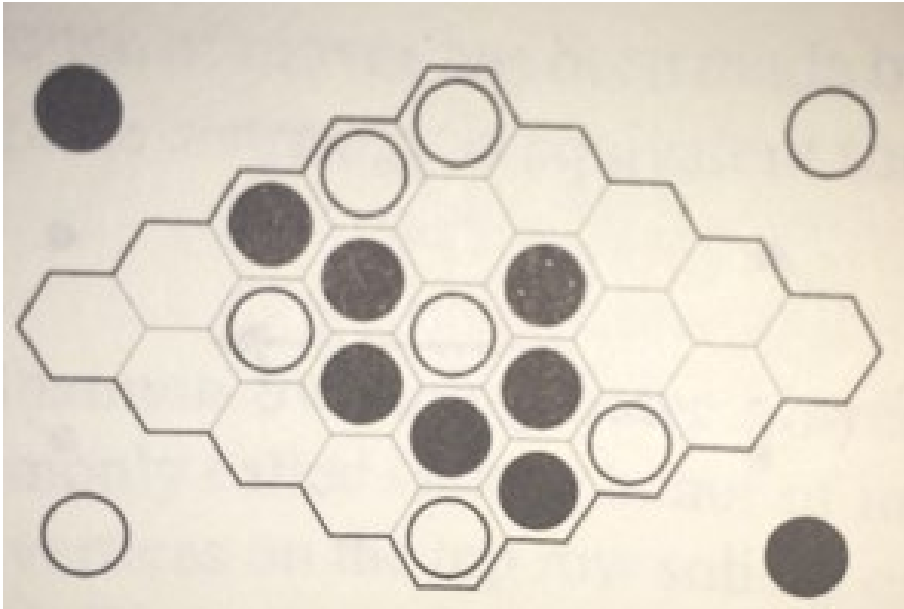


Abbildung 44: 5 x 5 Hex-Spielbrett gewonnen durch Schwarz.

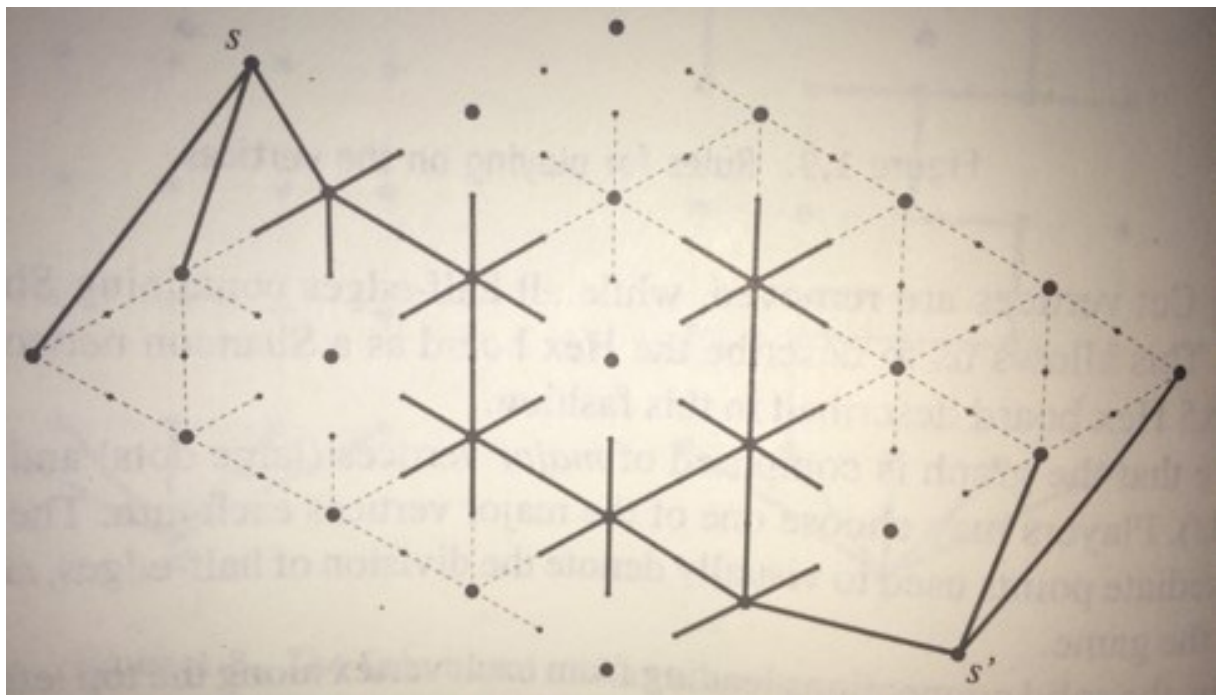


Abbildung 45: Dieselbe durch Schwarz gewonnene Hex-Partie angezeigt in Form eines Shannon-Netzwerkes.

## 5.7 Variationen

Wie bei den bisher behandelten Spielen existieren auch bei Hex etliche Variationen des Grundspiels.

Dadurch, dass der erste Zug von dermaßen großer Bedeutung ist, wurden verschiedene Vorschläge unterbreitet, um dem entgegenzuwirken.

Beispielsweise ist es Spieler A untersagt, seinen ersten Spielstein auf ein Feld der kurzen Diagonale zu legen (vgl. Gardner 1964: S. 37). Angelehnt an Abbildung 34 würde dies bedeuten, dass es ihm verboten ist, auf eines der mit 1-4 beschrifteten Felder zu setzen.

Um den großen Vorteil des ersten Zuges auszugleichen, wurde ein anderer Vorschlag nahegelegt, dem entgegengusteuern: Man man die Züge bis zum Sieg zählen und notieren, damit man im Anschluss an einige gespielte Runden die Summe vergleichen kann. Auch wurde angedacht, dass der erste Spieler die Partie eröffnet und im Anschluss stets zwei Spielsteine pro Spieler gelegt werden.

Man ist eventuell verleitet anzunehmen, dass auf einem Spielfeld der Größe  $n$  und  $(n + 1)$ , die Gewinnchancen gleichmäßiger verteilt sind, unter der Bedingung, dass Spieler A vor der Eröffnung des Spiels die Spielfarbe wählt, deren Seiten sich weiter auseinander befinden. Es hat sich herausgestellt, dass hierbei der Vorteil zugunsten des zweiten Spielers, Spielerin B, ausfällt. Diese Strategie stützt sich, wie die folgende Abbildung zeigt, auf eine symmetrische Abbildung der zentralen Achse, NW nach SO. (vgl. Gardner 1964: S. 37)

Es handelt sich somit um eine Spiegelung auf der Mittelachse, welche der kurzen Diagonale entspricht. Der Gewinn fällt auf jenen Spieler, der auf der verkürzten Seite spielt; in diesem Fall Spielerin B:

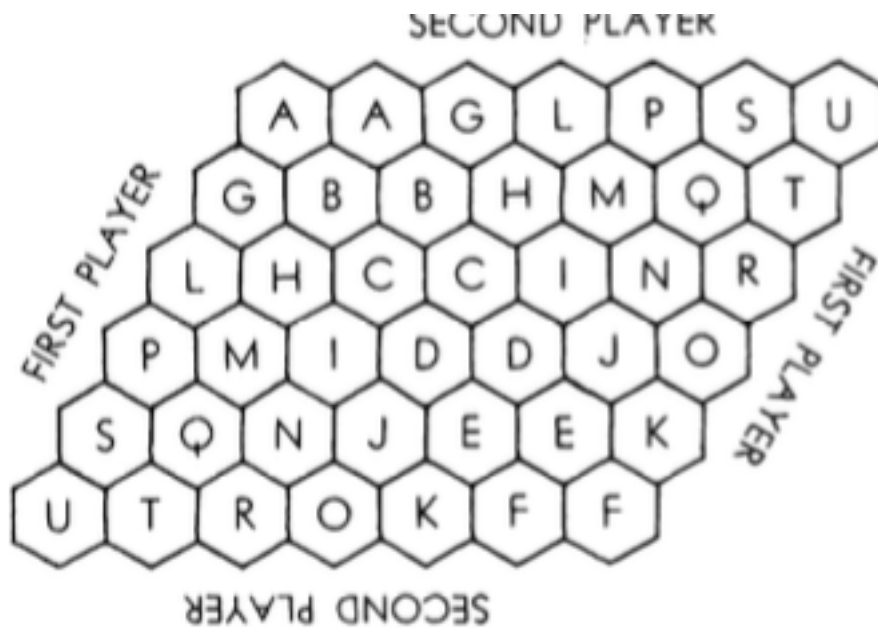


Abbildung 46: Verbildlichung der Spielzüge von Spielerin B, um auf einem  $n \times (n+1)$  Spielfeld zu gewinnen.

Spielerin B stellt sich vor, dass das Spielfeld aus paarweisen Hexagonen besteht. Jedes Mal, wenn Spieler A einen Spielstein legt, verfolgt Spielerin B ihre Strategie nach obigem Schema. Nachdem es sich um kein gleichseitiges Spielfeld handelt und der kürzere Abstand der Seiten Spielerin B entspricht, ist es unmöglich für sie, zu verlieren.

Des Weiteren gibt es eine Variante, bei der man bei Bedarf Spielsteine wechseln kann. Das heißt, dass der erste Spieler (A) seinen Zug ausführt. Im Anschluss ist es dem zweiten Spieler (Spielerin B) erlaubt, den bereits gelegten Spielstein gegen einen Spielstein der eigenen Farbe einzutauschen, anstatt diesen auf ein freies Feld zu legen. Spieler A ist demnach damit einverstanden, nach seinem ersten Zug seine erspielte Position aufzugeben und seine Rolle mit Spielerin B zu tauschen. Dies zwingt ihn in gewisser Weise, seinen ersten Spielstein so zu platzieren, dass er ihm weder einen Vorteil noch einen Nachteil verschafft, denn ansonsten könnte Spielerin B diese Führungsposition an sich reißen.

Die Zusatzregel wird von Browne wie folgt dargestellt:

„The player to move second has the choice of swapping colors, effectively stealing the first player’s move.

This is called the *swap option*, and it’s recommended that all games be played with this additional rule.“ (Browne 2000: S. 2f)

Eine andere Varianten des klassischen Hex-Spiels, besteht darin, seinen Gegenspieler dazu zu zwingen, eine Verbindung zu bauen. Das Ziel dieses Spiels ist somit genau das Gegenteil des eigentlichen Hex-Spiels.

Robert Wiser, einem Mathematikstudenten aus Princeton, zufolge, kann bewiesen werden, dass Spieler A gegenüber Spielerin B auf einem Spielfeld mit einer geraden Anzahl an Zellen auf jeder Seite gewinnen kann, falls dieser den ersten Zug ausführt. Damit hat er sogleich bewiesen, dass die Spielerin B wiederum auf einem Spielfeld mit einer ungeraden Zellenanzahl durch den ersten Zug nicht verlieren kann. (vgl. Gardner 1964: S. 36)

Das bekannte Hex-Spielbrett kann ebenso verändert werden und auf eine amerikanische Landkarte übertragen werden. Hierbei müssen die Staaten der USA als Felder angesehen werden. Spielerin B versucht ihre Spielsteine auf den Staaten dermaßen zu verteilen, dass sie beide Ozeane, Nordatlantik und Nordpazifik, miteinander verbindet. Spieler A soll daher die Nord- und die Südgrenze des Landes vereinen.

Wenn Spieler A startet, kann er, durch Besetzen des Staates Kalifornien gewinnen. (vgl. Stewart 2008: S. 65)

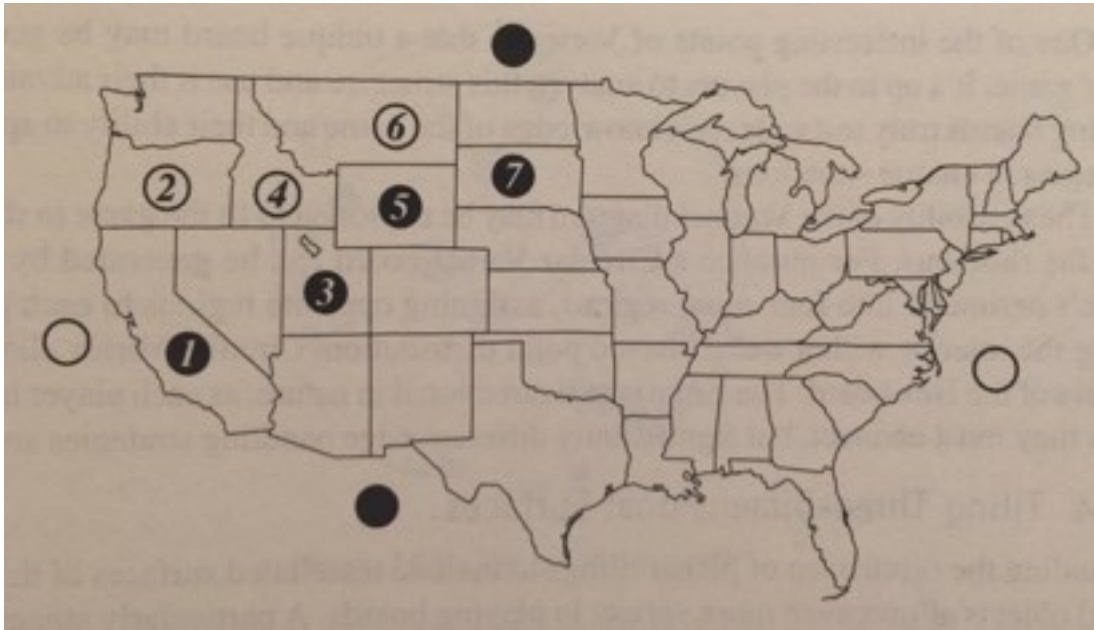


Abbildung 47: Hex auf einem Spielfeld in Form einer Landkarte der Vereinigten Staaten von Amerika.

Das Spielbrett lässt sich auch in eine Kugel, deren Oberfläche in Fünf- oder Sechsecke eingeteilt ist, verwandeln (siehe hierzu Abbildung 48). Da in diesem Fall keine Randfelder zur Verfügung stehen, ist das Ziel hierbei, ein leeres oder vom Kontrahenten besetztes Gebiet einzukreisen. (vgl. Stewart 2008: S. 65; Browne 2000: S. 38)

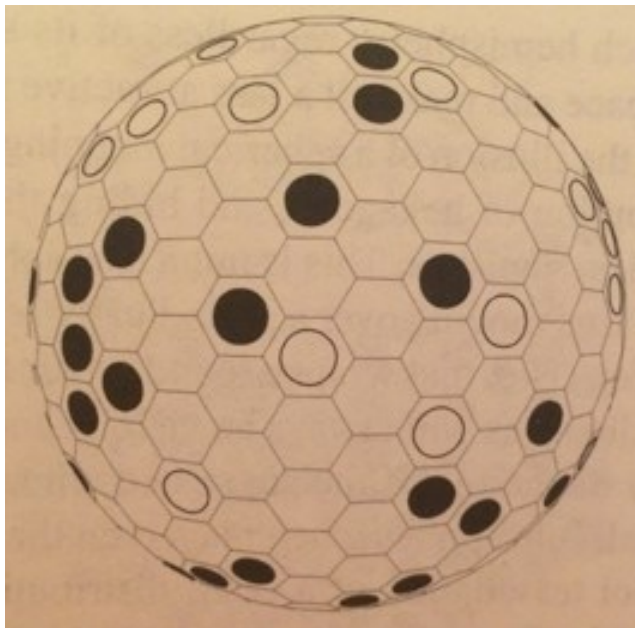


Abbildung 48: Hex Spielfeld im Dreidimensionalen.

## 5.8 Das Y-Spiel

Eine bekannte Variante des Hex-Spiels ist ein Spiel namens Y.

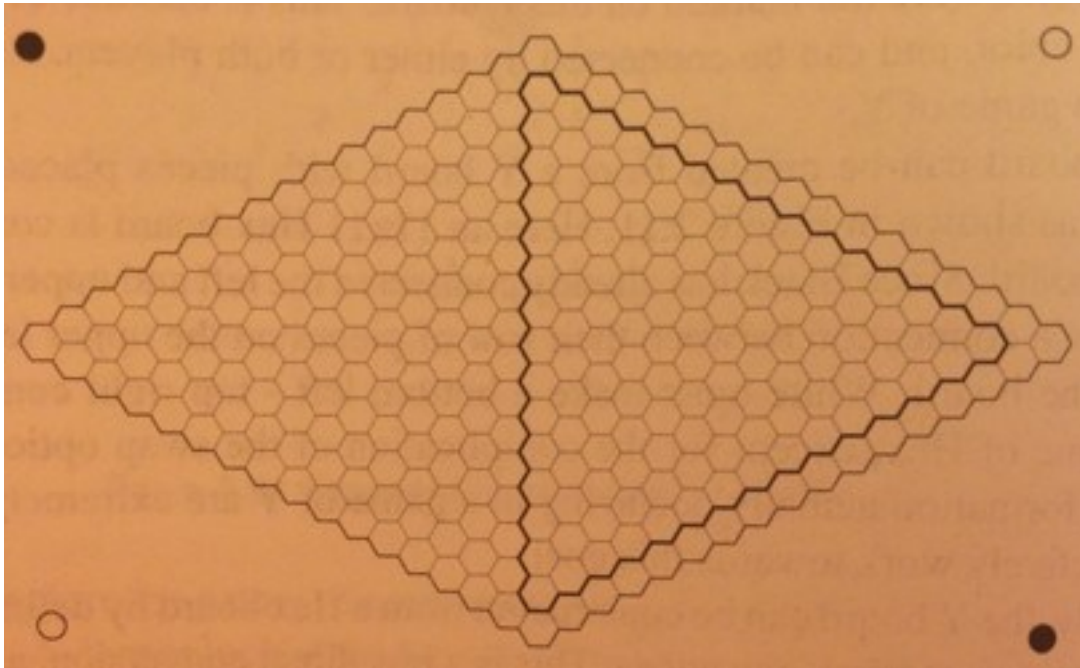
Wie Ian Steward (2008: S. 65) beschreibt, wird es auf einem dreieckigen Spielbrett bestehend aus Sechsecken gespielt. Diesmal geht es nicht nur darum, zwei Seiten miteinander zu verbinden, sondern alle drei.

Die beiden Spiele stehen in enger Verbindung zueinander. Y wurde von Craige Schensted und Charles Titus entwickelt, nachdem sie sich 1953 mit dem Hex-Spiel beschäftigt hatten (vgl. Neto / Silva 2013 S.124)

Da es sich um ein Dreieck handelt, ist jenes Spielbrett mit 15 Sechsecken pro Seite dem typischen 11 x 11 Hex-Spielbrett am ähnlichsten. Es ergibt sich lediglich ein Unterschied von einem Hexagon (120 zu 121).

Ebenso wie bei Hex, ist es nicht möglich, das Spiel unentschieden zu beenden. (vgl. Browne 2000: S. 31)

Nicht verwunderlich ist, dass, wie Abbildung 49 zeigt, zwei Y-Spielfelder ein Hex-Spielfeld ergeben. Ein Y-Spielfeld ist somit ein Ausschnitt eines Hex-Spielbrettes.



*Abbildung 49: Die dunkle Umrandung zeigt ein Y-Spielfeld in einem Hex-Spielfeld.*

Ein offensichtlicher Unterschied zwischen den Spielfeldern ist ebenfalls  
Abbildung 49 zu entnehmen. Ein Hex-Spielbrett enthält je zwei spitze sowie  
stumpfe Ecken. Ein Y-Spielbrett besteht hingegen aus drei spitzen Ecken. (vgl.  
Browne 2000: S. 33)

## 6. Planung und Durchführung der Spiele im Unterricht

„Eine der wichtigsten Aufgaben des Lehrers ist es, seinen Schülern zu helfen.“  
(Polya 1980: S. 14) Als Lehrperson wird man dadurch vor keine leichte Aufgabe gestellt, denn es gibt viele Möglichkeiten, diese Form der Lernunterstützung umzusetzen und dabei gilt es viele Faktoren zu berücksichtigen. Polya beschreibt in seinem Werk „Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme“ (1980) vier Phasen bis hin zur Lösung eines Problems. Die Aufgabe muss an erster Stelle überhaupt verstanden werden. Im zweiten Schritt wird nach einem Zusammenhang zwischen den gegebenen Informationen und der Unbekannten gesucht. Dies ermöglicht es, zu einem Plan zu gelangen, der zu einer Lösung führt. Der dritte Schritt ist Aus- und Durchführung des zuvor gefassten Plans. Zuletzt muss die erhaltene Lösung überprüft werden. (vgl. Polya 1980: S. 19)

Für Polya (1980: S. 234) ist das Lösen von Aufgaben eine uns ständig begleitende Aktivität:

„Das Lösen von Aufgaben ist eine grundlegende menschliche Tätigkeit. In der Tat befasst sich der größere Teil unseres bewussten Denkens mit Aufgaben. Wenn wir uns nicht bloßem Nachsinnen oder Träumen hingeben, sind unsere Gedanken auf irgendein Ziel gerichtet; wir suchen Mittel, wir suchen eine Aufgabe zu lösen.“

Ein wichtiges schulisches Ziel ist es, die Selbstständigkeit der Lernenden zu fördern. Piaget (1972) äußert sich dazu folgendermaßen:

„Es ist wichtig: a) den Schüler anzuleiten, selbst die Begriffe zu bilden und die mathematischen Beziehungen und Eigenschaften herauszufinden, statt ihm das fix und fertige Gedankengut der Erwachsenen zu oktroyieren.“  
(Piaget 1972: S. 56f)

Eine hervorragende Möglichkeit, dies zu erreichen, wird durch spielerische Zugänge ermöglicht. Spiele können, wie bereits im Eingangskapitel dieser Arbeit erwähnt, als ein zentrales Werkzeug für Lernen bzw. mathematisches Lernen eingesetzt werden.

Die Planung sowie Einbettung der in dieser Arbeit behandelten Spiele in den Unterricht stellt zweifelsohne eine didaktische Herausforderung dar. Ein Anreiz für Lehrerinnen und Lehrer, Spiele in den Mathematikunterricht zu integrieren, kann sein, ihre Schülerinnen und Schüler auf diesem Weg zusätzlich zu motivieren. Auch kann so über einen anderen, sich vom Regelunterricht abhebenden Zugang sichergestellt werden, dass die Lernergebnisse gefestigt werden. Für eine Umsetzung sollten die Lernbedingungen, sprich sowohl die Rahmenbedingungen als auch die Lernvoraussetzungen der einzelnen Schülerinnen und Schüler, berücksichtigt werden. Lernziele und Problemstellungen müssen im Vorfeld abgeklärt werden.

Anhand dieser Bedingungen kann ein passendes Spiel gewählt werden. Die nachfolgenden Zeilen beschreiben die vier Spiele dieser Arbeit in einem schulischen Kontext und ihre Einsatzmöglichkeiten im Unterricht.

Neben einem Besuch im „Haus der Mathematik“ mit der jeweiligen Schulklasse, wo die Schülerinnen und Schüler individuell nach Belieben experimentieren können, gibt es auch Möglichkeiten, die Spiele in den regulären Unterricht einzubeziehen. Im Folgenden sollen einige Anregungen für Lehrpersonen präsentiert werden.

## 6.1 Der Hanoi Turm

Die Schülerinnen und Schüler bekommen zu Beginn einen kurzen theoretischen Einblick. Die Spielregeln werden durch allgemeine Anweisungen geklärt. Das Spiel lässt sich im Unterricht gut einbauen, da keine aufwendige Bastellei erforderlich ist – hierzu können zum Beispiel Bücher unterschiedlichen Formats verwendet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten zu Beginn gebeten werden, durch einfaches Ausprobieren kleine „Türme“ zu verschieben. Falls größere Spieltürme behandelt werden, welche mehr „Spielsteine“ aufweisen, so ist es ratsam die Schülerinnen und Schülern Folgendes beachten zu lassen: Die Aufgabe wird besonders einfach, wenn man den Scheiben des Turmes der Größe nach in abwechselnder Reihenfolge die Farben Weiß und Schwarz zuordnet. Nun besteht die simple Aufgabe darin, keine gleichfärbigen Spielsteine aufeinander zu legen. Die Aufgabe führt automatisch zum Ziel, vorausgesetzt man weiß, auf welchen „Stab“ (End- oder Hilfsstab) die kleinste Scheibe gelegt werden muss. Dies ist abhängig von der Anzahl der vorhandenen Scheiben (gerade oder ungerade).

Man könnte durch diesen Prozess die Schülerinnen und Schüler auf die Formel  $2^n - 1$  schließen lassen. Wählt man den Zugang über die Weizenkornlegende, so kann die Einführung der Formel erleichtert werden. Es ist verhältnismäßig einfach zu erkennen, dass es sich bei dieser Zahlenfolge (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) um Zweierpotenzen handelt. Newton (1707) vergleicht das Aufstellen von Gleichungen mit dem Übersetzen von einer Sprache in die andere. (vgl. Newton 1707 zitiert nach Polya 1972: S. 61)

Polya (1972: S. 76) setzt diesen Gedanken fort:

„Auf jeden Fall ist der Gebrauch von mathematischen Symbolen ähnlich dem Gebrauch von Worten. Die mathematische Bezeichnung erscheint als eine Art Sprache, *une langue bien faite*, einem ihrem Zweck wohlangepasste Sprache, kurz und präzise, mit Regeln, die im Unterscheid

zu den Regeln der gewöhnlichen Grammatik keine Ausnahme zulassen. Wenn wir diesen Standpunkt einnehmen, erscheint das AUFSTELLEN VON GLEICHUNGEN als eine Art Übersetzung, eine Übersetzung aus der üblichen Sprache in die Sprache mathematischer Symbole.“

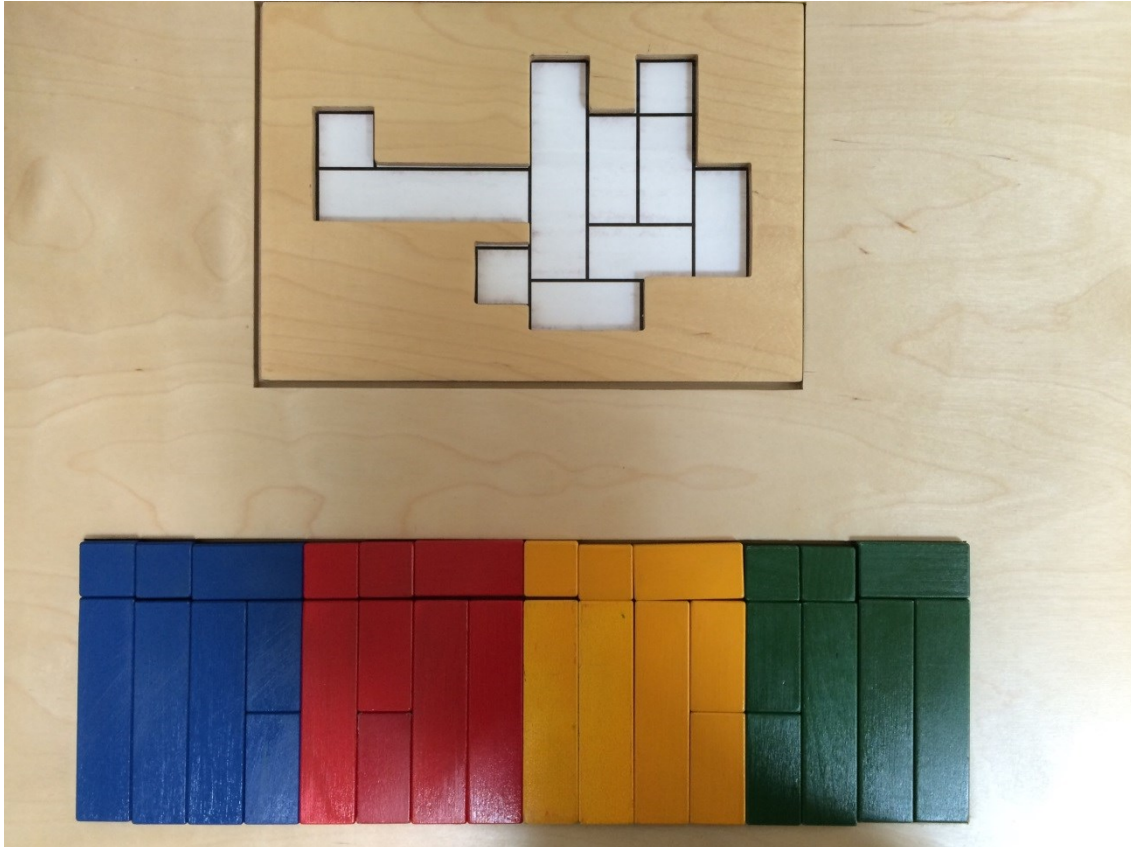
Zuletzt sollte noch erwähnt werden, dass die Leistung laut Head, Raz, Gunning-Dixon, Williamson und Acker (2002: S. 72) im Hanoi-Spiel nicht vom Alter abhängig ist. Es lassen sich lediglich bei wiederholtem Spielen Unterschiede feststellen.

## 6.2 Das Nim-Spiel

Für die Umsetzung des Nim-Spiels genügt es, ein Blatt Papier zur Hand zu haben. Auf diesem werden eine gewisse Anzahl an Strichen in drei verschiedene Zeilen eingezeichnet. Die Spielregeln bleiben dieselben. Die Schülerinnen und Schüler bilden Paare, wobei ihnen freigestellt ist mit wem sie spielen. Die zu Beginn gezogenen Striche müssen abwechselnd von Schüler A und Schülerin B durchgestrichen werden. Man lässt die Schülerinnen und Schüler eine zeitlang raten und beobachtet, ob sie auf eine Gewinnstrategie stoßen. Falls nicht, kann diese anhand des Binärsystems an der Tafel (oder per Bildschirmpräsentation) vorgerechnet werden. Somit gewinnen die Schülerinnen und Schüler einen spielerischen Zugang zu einem anderen Zahlensystem. An dieser Stelle können Zahlensysteme, die auf einer anderen Basis als 10 aufgebaut sind, behandelt werden. Des Weiteren kann die Anwendung ihrer aufgezeigt werden, um zu verdeutlichen, wie z.B. Computer arbeiten und Informationen und Daten abspeichern.

## 6.3 Der Vier-Farben-Satz

Der Spieltisch zum Vier-Farben-Satz im „Haus der Mathematik“ schafft einen klaren Eindruck von der Idee dieser mathematischen Hypothese:



*Abbildung 50: Vier-Farben-Spieltisch in Anlehnung an die Österreich-Karte im Haus der Mathematik.*

Abbildung 50 zeigt den Spieltisch zum Vier-Farben-Problem im Haus der Mathematik. Als Landkarte wurde hier Österreich gewählt, welches in seine neun Bundesländer geteilt ist, wobei Osttirol als zusätzliche Region angesehen wird. Unterhalb der Karte erkennt man die Spielblöcke, unterteilt in vier verschiedenen Farben (Blau, Rot, Gelb, Grün). Die einzelnen Teile der Landkarte müssen nun mithilfe der gegebenen Spielsteine ausgelegt werden. Dieses Thema kann man fächerübergreifend behandeln. Man könnte z.B. die Bundesländer bzw. Regionen der Lieblingsländer der Lernenden getreu dem

Vier-Farben-Schema ausmalen. Auch kann eine Darstellung der 23 Wiener Gemeindebezirke herangezogen werden. Diese können als Ausgangskarte verwendet werden, um davon ausgehend die Schülerinnen und Schüler einen Graphen erstellen zu lassen. Somit kann auf einfache Weise auf die Graphentheorie eingegangen werden.

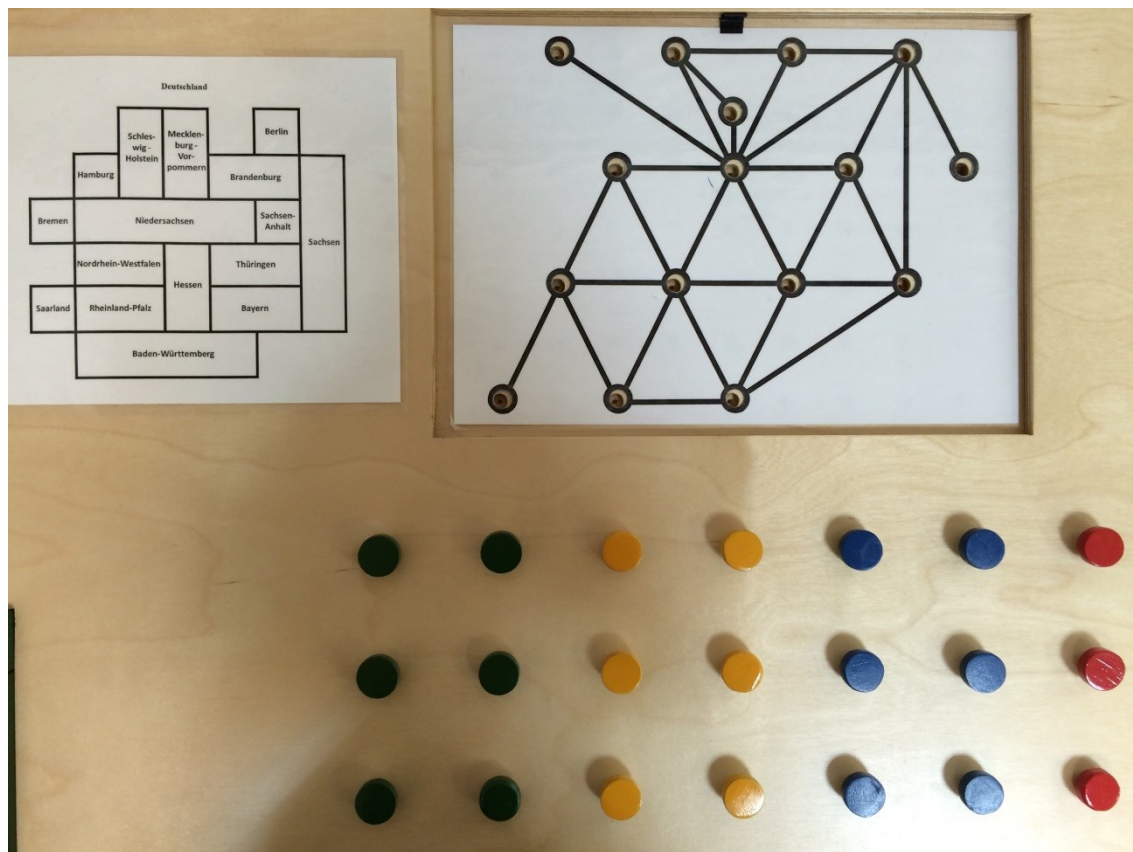


Abbildung 51: Spieltisch des Haus der Mathematik zum Vier-Farben-Problem und Umsetzung in einen Graphen.

## 6.4 Das Hex-Spiel

Dieses Spiel ist von den vier vorgestellten womöglich das am schwersten in das Unterrichtsgeschehen einzubauende Spiel. Die Umsetzung des Spiels in der Unterrichtszeit stellt sich als kompliziert und teilweise problematisch heraus, jedoch besteht die Möglichkeit, Kopien des Spielfeldes anzufertigen und die Schülerinnen und Schüler in erster Linie gegeneinander spielen zu lassen.

Anstatt zwei unterschiedlicher Figuren wie Kreis und Kreuz, wie in Kapitel 5.2 beschrieben, können auch verschiedene Farben verwendet werden, um die Sechsecke des Spielfeldes als zu A oder B gehörig zu kennzeichnen.

In diesem Zusammenhang können sogenannte „Brücken“ angesprochen werden, wobei die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, selbstständig zu begründen, warum solch eine Konstellation an Spielsteinen als bereits verbunden gilt (vergleiche Abbildung 37). Es gilt, diese Ergebnisse zu deuten und zu beurteilen, denn eine der Bildungs- und Lehraufgaben des

Unterrichtsfachs Mathematik ist es „Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durch[zuführen“ (BMBF:

[https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14\\_789.pdf?4dzgm2](https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2)) Die Kreativität soll anhand verschiedener Lösungswege zu mathematischen Fragestellungen gefördert werden. (vgl. BMBF:

[https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14\\_789.pdf?4dzgm2](https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/ahs14_789.pdf?4dzgm2))

Somit kann das Hex-Spiel durchaus im Unterricht abgehandelt werden, da es einen Einstieg in die Spieltheorie bietet. Durch das Hex-Spiel kann zusätzlich das Potenzial der Mathematik als Gegenstand, welcher spannende Geschichten hervorbringt, dargelegt werden.

## 6.5 Fazit

Spiele in den Mathematikunterricht einzubauen, ist das Bemühen um eine physisch aktive Didaktik. (vgl. Piaget S. 63) Es handelt sich bei allen vorgestellten Spielen um alternative Wege, den Schülerinnen und Schülern bestimmte Gebiete der Mathematik näherzubringen bzw. ihre Begeisterung für diese zu wecken. Die intensive Auseinandersetzung mit solchen Spielen kann als Grundlage für weitere konstruktive Lernprozesse herangezogen werden.

Diese Arbeit hat gezeigt, dass der Einbau von Spielen im Unterricht durchaus sinnvoll und erstrebenswert ist, um die Lernenden spielerisch in die Welt der Mathematik einzuführen. Vor allem im Hinblick auf einen kompetenzorientierten Unterricht stellen Spiele ein zugängliches Medium dar, verknüpfendes und selbstständiges Denken zu fördern. Vielen Spielen liegen mathematische Prinzipien zugrunde. Der gemeinsame Nenner von Spielen und Mathematik ist ihr Rätselcharakter. So werden die Schülerinnen und Schüler angeregt, Probleme zu lösen, um spielerisch Erfolge zu erzielen. Mathematik kann somit als ein Spiel verstanden werden, bei dem jeder/jede gewinnt.

## 7. Bibliographie

- **Aigner**, Martin: Graphentheorie. Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem. – Stuttgart: Teubner, 1984
- **Alegría**, Pedro/ **Fernández**, Santiago/ **Ibáñez**, Raúl/ **Lekuona**, Goyo: Juegos Didácticos para el programa BBK-MATIKA. - Bilbao: Ikeder, S.L., 2011, Seite 7. URL:  
[http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache/6aVUf62xbUJ/divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php%3Foption%3Dcomdocman%26task%3Ddoc\\_download%26gid%3D1008+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=at&client=safari](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache/6aVUf62xbUJ/divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php%3Foption%3Dcomdocman%26task%3Ddoc_download%26gid%3D1008+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=at&client=safari) [25.5.2016]
- **Appel**, Kenneth/ **Haken**, Wolfgang: The Solution Of The Four-Color-Map Problem. - In: Scientific American Vol. 237, No. 4 (Okt. 1977)
- Aula de Innovación Educativa: número 210, marzo 2012, Seite 76. URL:  
<https://www.google.at/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj24v3jtczLAhXHQJoKHWgmDLAQFghIMAc&url=http%3A%2F%2Faula.grao.com%2Fmmd%2FODEyODIyODAtZGVIYTliMGU2YmU5OTI3ZGQ5YmE1YzMzN2UzOWJmMDk%3D&usg=AFQjCNFXxDm1F9auT77PqODPNbEsCP1T5w&bvm=bv.117218890,d.bGs> [25.5.2016]
- **Balbuena Castellano**, Luis: Las torres de Hanoi y el mandato de Brahma. - Sigma número 28, 2006. URL:  
[www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6\\_sigma/es\\_sigma/adjuntos/sigma\\_28/9\\_torres\\_hanoi.pdf](http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_28/9_torres_hanoi.pdf) [25.5.2016]

- **Baltzer**, Richard: Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske.  
– Leipzig: 1885
  
- **Bauchhammer**, Erich: Die beliebtesten Brettspiele: Domino, Mühle, Dame, Alquerque, Halma, China-Dame, Wuchs und Gänse, Asalto, Go, Backgammon, Puff, Schach. - Wien: Verlag Perlen-Reihe, 1990
  
- **Becher**, K. E.: Einführung in das Rechnen mit binären Zahlen.  
Braunschweig: Georg Westermann Verlag, 1969
  
- **Bennett**, Jeffrey / **Donahue**, Megan / **Schneider**, Nicholas / **Volt**, Mark: Astronomie. Die kosmische Perspektive. Herausgegeben von Professor Harald Lesch, Aus dem Amerikanischen von Dr. Gunnar Randons, 2008 Pearson Education. [24.04.2016]
  
- **Berlekamp**, Elwyn R./ **Conway**, John H./ **Guy**, Richard K.: Winning ways for your mathematical plays. Volume 2: Games in particular. - London: Academic Press Inc., 1982
  
- **Berlekamp** Elwyn R., **Conway** John H., and **Guy** Richard K.: Winning ways for your mathematical plays. Vol. 3. A K Peters Ltd., 2003
  
- **Beutelsbacher**, Albrecht: Wie man in eine Seifenblase schlüpft. Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten. - München: Verlag C.H. Beck, 2015
  
- **Bigalke**, Hans-Günther: Heinrich Heesch. Kristallgeometrie Parkettierung Vierfarbenforschung. – Basel u.a.: Birkhäuser, 1988

- **Bouton**, Charles L.: Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory. 1901. URL:  
<http://www.paradise.caltech.edu/ist4/lectures/Bouton1901.pdf>  
[25.5.2016]
- **Bouvier**, Andrey / **Wadhwa**, Meenakshi: The age of the Solar System redefined by the oldest Pb-Pb age of meteoritic inclusion. - In: nature geoscience, 2010. URL:  
<http://www.nature.com/ngeo/journal/v3/n9/full/ngeo941.html>  
[25.5.2016]
- **Browne**, Cameron: Hex Strategy: Making the Right Connections - Natick: A K Peters, 2000
- **Darling**, David J.: The Universal Book of Mathematics. From Abracadabra to Zeno's Paradoxes. - New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004. URL:  
[https://books.google.at/books?id=nnpChqstvg0C&pg=PA220&lpg=PA220&dq=nim+origin+in+china+book&source=bl&ots=lhIFizGy\\_t&sig=-5aw8UcX7qath\\_acZV7mZjRi6gI&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjplLfDzZjMAhUFkywKHYYTOBxYQ6AEIKTAB#v=onepage&q=nim%20origin%20in%20china%20book&f=false](https://books.google.at/books?id=nnpChqstvg0C&pg=PA220&lpg=PA220&dq=nim+origin+in+china+book&source=bl&ots=lhIFizGy_t&sig=-5aw8UcX7qath_acZV7mZjRi6gI&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwjplLfDzZjMAhUFkywKHYYTOBxYQ6AEIKTAB#v=onepage&q=nim%20origin%20in%20china%20book&f=false) [25.5.2016]
- **Ehn**, Michael / **Kastner**, Hugo: Alles über Schach. Mythen. Kuriositäten. Superlative. - Hannover: Humboldt Verlag, 2010
- **Erdmann**, Carsten: Der Vierfarbensatz, 6.4.2009. [http://www.carsten-erdmann.de/files/vortraege/four\\_color\\_theorem](http://www.carsten-erdmann.de/files/vortraege/four_color_theorem) [25.5.2016]

- **Fernández Gallardo, Pablo:** El teorema de los cuatro colores. Appel y Haken (1976). - Las matemáticas del siglo XX. URL:  
<http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo76.pdf>  
[25.5.2016]
  
- **Fritsch, Rudolf:** Der Vierfarbensatz. Geschichte, typologische Grundlagen und Beweisidee. - Mannheim u.a.: BI-Wissenschaftsverlag, 1994
  
- **Fritsch, Rudolf:** „Wie wird der Vierfarbensatz bewiesen?“ In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 43/2, 1990, S. 80-87. URL: <https://epub.ub.uni-muenchen.de/4523/1/4523> [25.5.2016]
  
- **Gardner, Martin:** More mathematical puzzles of Sam Loyd. - Dover Publications, Inc.: New York, 1960
  
- **Gardner, Martin:** Mathematische Rätseln und Probleme. - Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1964
  
- **Gardner, Martin:** Mathematische Knobeleien. Aus dem Amerikanischen von Eberhard Bubser - Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1973
  
- **Gardner, Martin/** Hexaflexagons and other mathematical diversions. – London: The university of Chicaco press, 1988a. URL:  
<http://geofhagopian.net/papers/GARDNER01.pdf> [25.5.2016]
  
- **Gardner, Martin:** Mathematische Hexereien. Aus dem Amerikanischem von Brigitte Michel und Gerd Bartmann. - Augsburg: Weltbild Verlag, 1988b

- **Gardner**, Martin: Vom Küken zum Ei. Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele. - Köln: DuMont Buchverlag, 2015
- **Gierhardt**, Horst: Informatik mit Java. Rekursion: Türme von Hanoi. [24.03.2016]. URL: [www.oberstufeninformatik.de/info12/wdhlg/Hanoi.pdf](http://www.oberstufeninformatik.de/info12/wdhlg/Hanoi.pdf) [25.5.2016]
- **Grima**, Clara: Hex, el juego matemático perfecto (según John Nash). – Sevilla: 2015. URL: [http://www.cienciayexplora.com/divulgacion/hex-juego-matematico-perfecto-segun-john-nash\\_2015060200148.html](http://www.cienciayexplora.com/divulgacion/hex-juego-matematico-perfecto-segun-john-nash_2015060200148.html) [25.5.2016]
- **Guzmán Ozámiz**, Miguel de: Cuentos con cuentas. Nivola, 2003 URL: <http://blog.divermates.es/wp-content/uploads/2015/06/nim-extraido-de-cuentos-con-cuentas.pdf> [25.5.2016]
- **Head**, Denise / **Acker**, James / **Gunning-Dixon**, Faith / **Raz**, Naftali / **Williamson**, Adrienne: Age-related differences in the course of cognitive skill acquisition: The role of regional cortical shrinkage and cognitive resources. In: Psychology and Aging, Vol 17(1), Mar 2002, S. 72-84.
- **Heesch**, Heinrich: Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. – Mannheim: Bibliographisches Institut AG, 1969
- **Hoffmann**, Louis: Puzzles. Old and New. - London: Frederick Warne and Co., 1893. URL: <https://archive.org/stream/puzzlesoldnew00hoff#page/n415/mode/2up> [25.5.2016]

- **Huizinga**, Johan: Homo Ludens. Vom Ursprung der Kultur im Spiel. – Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2004
  
- **Latasa Asso**, Ma Milagros: Juegos Matemáticos. La Torre de Hanoi y los  $Q_n$  Grafos. - Revista de Investigación, Número 1, 2011. URL: [www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista\\_impresa/numero\\_1/la\\_torre\\_de\\_hanoi.pdf](http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/revistapm/revista_impresa/numero_1/la_torre_de_hanoi.pdf) [25.5.2016]
  
- *Letztes Jahr in Marienbad*. R.: Alain Resnais. Italien/Frankreich 1961
  
- **Loyd**, Sam: Cyclopedia of puzzles by Sam Loyd. New York: Lamb publishing company, 1914
  
- **Kauffman**, Louis H.: Reformulating the map color theorem. - In: Discrete Mathematics: 302, 2005, S. 145-172. URL: <http://homepages.math.uic.edu/~kauffman/MapReform.pdf> [25.5.2016]
  
- **Minette Busch**, Cornelia: Das Vierfarbenproblem und Verwandte Fragestellungen. Februar 2004. [https://people.math.ethz.ch/~cbusch/pspdf/Mathetag\\_busch.pdf](https://people.math.ethz.ch/~cbusch/pspdf/Mathetag_busch.pdf) [25.5.2016]
  
- **Moore**, E. H.: A Generalization of the Game Called Nim. 1910. URL: <https://archive.org/details/jstor-1967321> [25.5.2015]

- **Münscher**, Johann-Christoph: Der Turm von Hanoi. Untersuchung zu Problemlösungsmethoden. - Wien: Diplomarbeit, 2011. URL: [www.unet.univie.ac.at/~a0706648/Turm\\_von\\_Hanoi\\_J-C-Muenscher.pdf](http://www.unet.univie.ac.at/~a0706648/Turm_von_Hanoi_J-C-Muenscher.pdf) [25.5.2016]
- **Neto**, João Pedro / **Silva**, Jorge Nuno: Mathematical games, abstract games. – New York: Dover Publications, 2013
- **Newton**, Isaac: Arithmetica Universalis. - London: Whiston, 1707
- **Piaget**, Jean: Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Aus dem Französischen von Wolfgang Teuschl. - Paris u.a: Verlag Fritz Molden, 1972
- **Polya**, George: Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. - Bern u.a.: A. Francke AG Verlag, 1980
- **Reith**, Steffen: Algorithmen und Datenstrukturen. - RheinMain: 2014. URL: <http://www.cs.hs-rm.de/~reith/resources/Lehre/Algo14/AlgoSkript.pdf> [25.5.2016]
- **Robbe-Grillet**, Alain: Letztes Jahr in Marienbad. Drehbuch. - München: Carl Hanser Verlag, 1961
- **Robertson**, Neil / **Sanders**, Daniel / **Seymour**, Paul / **Thomas**, Robin: The Four-Colour Theorem, journal of combinatorial theory, Series B 70, 2 44 (1997) article no. TB971750 Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society 2 (1996). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895697917500> [25.5.2016]

- **Rupérez Padrón, J. A.;** García Déniz, M.: Estrategias simples (y no tan simples) para los juegos de NIM. - In: Números. Revista de Didctica de las Mattemticas, 2009, Volumen 71, S. 139-147. URL: [http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Juegos\\_01.pdf](http://www.sinewton.org/numeros/numeros/71/Juegos_01.pdf) [25.5.2016]
- **Schafroth, Colleen:** Schach. Eine Kulturgeschichte. - München: Knesebeck, 2002
- **Silbernick, Zachary/** Campbell, Robert: A Winning Strategy for the Game of Antonim. - 2015. URL: <http://arxiv.org/abs/1506.01042> [25.5.2016]
- Spektrum der Wissenschaft. [2016. ]URL: <http://www.spektrum.de/quiz/der-legende-nach-geht-die-welt-unter-wenn-ein-64-stoeckiger-turm-von-hanoi-umgebaut-wird-wie-lange-d/611532> [25.5.2015]
- **Stewart, Ian:** Hex. Der Kampf um die Sechsecke. - In: Spektrum der Wissenschaft, Dossier 2/2008
- **Stewart, Ian:** Die letzten Rätsel der Mathematik. Aus dem Englischen von Monika Niehaus und Bernd Schuh. - Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 2015
- **Stockmeyer, Paul K:** Exchanging Disks in the Tower of Hanoi. 1984. URL: [www.cs.wm.edu/~pkstoc/gov.pdf](http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/gov.pdf) [25.5.2016]

- Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, número 59, 2012, Seite 108.  
URL:  
[http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:SUupJnrb\\_4MJ:uno.grao.com/mmd/ODEyODc1MDItNWQ5OTk1NTYxNDJiMmYwZDYyZTc5NDY3ODU5YTU5MWY%3D+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=at&client=safari](http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:SUupJnrb_4MJ:uno.grao.com/mmd/ODEyODc1MDItNWQ5OTk1NTYxNDJiMmYwZDYyZTc5NDY3ODU5YTU5MWY%3D+&cd=1&hl=es&ct=clnk&gl=at&client=safari) [25.5.2016]
- **Urban**, Wolfgang: Die Türme von Hanoi. - 2003. URL: [www.hib-wien.at/leute/wurban/informatik/Hanoi.pdf](http://www.hib-wien.at/leute/wurban/informatik/Hanoi.pdf) [25.5.2016]

## 8. Abbildungsverzeichnis

|                                                                                   |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------|
| ABBILDUNG 1: FOTO DER VERFASSERIN.....                                            | - 8 -   |
| ABBILDUNG 2: FOTO DER VERFASSERIN.....                                            | - 9 -   |
| ABBILDUNG 3: ABBILDUNG DER VERFASSERIN (VGL. BALBUENA CASTELLANO<br>2006).....    | - 12 -  |
| ABBILDUNG 4: ABBILDUNG DER VERFASSERIN (VGL. BALBUENA CASTELLANO<br>2006).....    | - 13 -  |
| ABBILDUNG 5: ABBILDUNG DER VERFASSERIN (VGL. BALBUENA CASTELLANO<br>2006).....    | - 14 -  |
| ABBILDUNG 6: FOTO DER VERFASSERIN.....                                            | - 16 -  |
| ABBILDUNG 7: FOTO DER VERFASSERIN.....                                            | - 18 -  |
| ABBILDUNG 8: FOTO DER VERFASSERIN.....                                            | - 23 -  |
| ABBILDUNG 9: ABBILDUNG DER VERFASSERIN GEZEICHNET MIT HILFE VON<br>GEOGEBRA.....  | - 30 -  |
| ABBILDUNG 10: GARDNER 2015: S. 59.....                                            | - 61 -  |
| ABBILDUNG 11: FRITSCH 1994: S. 47.....                                            | - 67 -  |
| ABBILDUNG 12: STEWART 2015: S. 107.....                                           | - 68 -  |
| ABBILDUNG 13: FRITSCH 1994: SEITE 12.....                                         | - 70 -  |
| ABBILDUNG 14: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 76 -  |
| ABBILDUNG 15: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 77 -  |
| ABBILDUNG 16: GARDNER 1973: S. 90.....                                            | - 79 -  |
| ABBILDUNG 17: GARDNER 1973: S.91.....                                             | - 80 -  |
| ABBILDUNG 18: STEWART 2015: S. 107.....                                           | - 81 -  |
| ABBILDUNG 19: GARDNER 1973: S. 89.....                                            | - 82 -  |
| ABBILDUNG 20: GARDNER 1973: S. 89.....                                            | - 82 -  |
| ABBILDUNG 21: FOTO DER VERFASSERIN (TORUS ERSTELLT VON MAG. FRANZ<br>VRABEC)..... | - 83 -  |
| ABBILDUNG 22: STEWART 2015: S. 111.....                                           | - 85 -  |
| ABBILDUNG 23: AIGNER 1984: S. 15.....                                             | - 86 -  |
| ABBILDUNG 24: APPEL / HAKEN 1977: S. 116.....                                     | - 89 -  |
| ABBILDUNG 25: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 93 -  |
| ABBILDUNG 26: AIGNER 1984: S. 207.....                                            | - 94 -  |
| ABBILDUNG 27: APPEL / HAKEN 1977: S. 114.....                                     | - 95 -  |
| ABBILDUNG 28: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 101 - |
| ABBILDUNG 29: BROWNE 2000: S. 1.....                                              | - 106 - |
| ABBILDUNG 30: BROWNE 2000: S. 17.....                                             | - 107 - |
| ABBILDUNG 31: BROWNE 2000: S. 17.....                                             | - 107 - |
| ABBILDUNG 32: BROWNE 2000: S. 5.....                                              | - 109 - |
| ABBILDUNG 33: BROWNE 2000: S. 17.....                                             | - 112 - |
| ABBILDUNG 34: GARDNER 1964: S. 35.....                                            | - 113 - |
| ABBILDUNG 35: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 116 - |
| ABBILDUNG 36: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 117 - |
| ABBILDUNG 37: FOTO DER VERFASSERIN.....                                           | - 118 - |

|                                          |         |
|------------------------------------------|---------|
| ABBILDUNG 38: BROWNE 2000: S. 46 .....   | - 120 - |
| ABBILDUNG 39: BROWNE 2000: S. 9 .....    | - 126 - |
| ABBILDUNG 40: BROWNE 2000: S. 9 .....    | - 127 - |
| ABBILDUNG 41: BROWNE 2000: S. 9 .....    | - 127 - |
| ABBILDUNG 42: BROWNE 2000: S. 11 .....   | - 128 - |
| ABBILDUNG 43: BROWNE 2000: S. 11 .....   | - 129 - |
| ABBILDUNG 44: BROWNE 2000: S. 12 .....   | - 130 - |
| ABBILDUNG 45: BROWNE 2000: S. 12 .....   | - 130 - |
| ABBILDUNG 46: GARDNER 1988: S. 79 .....  | - 132 - |
| ABBILDUNG 47: BROWNE 2000: S. 37 .....   | - 134 - |
| ABBILDUNG 48: BROWNE 2000: S. 39 .....   | - 134 - |
| ABBILDUNG 49: BROWNE 2000: S. 32 .....   | - 135 - |
| ABBILDUNG 50: FOTO DER VERFASSERIN ..... | - 141 - |
| ABBILDUNG 51: FOTO DER VERFASSERIN ..... | - 142 - |

## 9. Tabellenverzeichnis

|                                                                                                                             |         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| TABELLE 1: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 8 -   |
| TABELLE 2: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 10 -  |
| TABELLE 3: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 10 -  |
| TABELLE 4: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 11 -  |
| TABELLE 5: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. URBAN 2003: S.21).....                                                             | - 20 -  |
| TABELLE 6: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 28 -  |
| TABELLE 7: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 41 -  |
| TABELLE 8: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 44 -  |
| TABELLE 9: TABELLE DER VERFASSERIN .....                                                                                    | - 46 -  |
| TABELLE 10: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. BOUTON 1901).....                                                                 | - 49 -  |
| TABELLE 11: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. BERLEKAMP / CONWAY /<br>GUY 2003 BZW. BERLEKAMP / CONWAY / GUY 1982: S. 459)..... | - 57 -  |
| TABELLE 12: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. RUPÉREZ PADRÓN / GARCÍA<br>DÉNIZ 2009: S. 139) .....                              | - 65 -  |
| TABELLE 13: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. FRITSCH 1994: S. 119).....                                                        | - 87 -  |
| TABELLE 14: TABELLE DER VERFASSERIN (VGL. BROWNE 2000: S. 6).....                                                           | - 111 - |