



DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Ausarbeitung von Unterrichtssequenzen zum Thema
Mechanik sowohl für den Mathematik- als auch für den
Physikunterricht“

Verfasserin

Nadine Pacher

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, 2015

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt UF Mathematik UF Physik

Betreuerin / Betreuer: Mag. Dr. Andreas Ulovec

Selbstständigkeitserklärung

„Ich erkläre hiermit, dass ich die Diplomarbeit eigenständig angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.“

Unterschrift

Korneuburg, im Mai 2015

Danksagung

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Mag. Dr. Andreas Ulovec sehr herzlich für die ständige Unterstützung, die raschen Antworten auf jegliche Fragen sowie die gute Betreuung und Zusammenarbeit bedanken.

Vielen Dank Mama, dass du mich während des Studiums ständig unterstütz hast. Aber auch in der Phase der Diplomarbeit konnte ich immer auf deine Hilfe zählen. Danke, dass du mich dauernd motiviert hast.

Ein Dankeschön auch an Katrin für das Korrekturlesen meiner Diplomarbeit, welches viel Zeit gekostet hat.

Korneuburg, Mai 2015

Abstract

Das Ziel meiner Diplomarbeit war, Unterrichtsmaterial zu erstellen, welches sowohl im Mathematik- als auch im Physikunterricht einsetzbar ist. Zuerst beschäftigte ich mich mit dem theoretischen Hintergrund. Dazu nahm ich verschiedene Quellen zur Hilfe Dissertationen, Diplomarbeiten, Zeitschriften, aber auch Bücher. Anschließend analysierte ich den Lehrplan, da ich wissen wollte, ob die Spaltung der beiden Gegenstände bereits im Lehrplan beginnt. Daraufhin verglich ich die zwei gängigsten Mathematikschulbücher für die fünfte Klasse und die mir bekanntesten Physikschulbücher. Zum Schluss versuchte ich, Arbeitsblätter für den Unterricht zu gestalten, die ein Stück weit die Vernetzung von Mathematik und Physik fördern. Das Material ist für das Thema Mechanik in der neunten Schulstufe einsetzbar.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretischer Hintergrund	2
3. Lehrplan	25
4. Analyse von Schulbuchaufgaben und Schulbuchvergleich	29
i. Physikalische Aufgaben in Mathematik-Schulbüchern.....	31
a) Mathematik verstehen 5	31
b) Mathematik 5.....	68
c) Vergleich	81
ii. Mathematische Aufgaben in Physik-Schulbüchern.....	82
a) Big Bang 5	82
b) Sexl Physik 5.....	110
c) Vergleich	128
5. Erstellung von Unterrichtsmaterial	129
6. Zusammenfassung.....	177
7. Literaturverzeichnis.....	179
8. Abbildungsverzeichnis	183
9. Lebenslauf	189

1. EINLEITUNG

Man hört und bemerkt sehr oft, dass Schülerinnen und Schüler ein bestimmtes „Kasterldenken“ aufweisen. In einer Mathematikstunde bedienen sich die Jugendlichen des Mathematik-Werkzeugkoffers. In einer Physikstunde öffnen die Heranwachsenden den Werkzeugkoffer der Physik. Diese Methode wird für jedes einzelne Fach so fortgeführt. Schade eigentlich. Ich denke, die Lehrerinnen und Lehrer sollten mehr daran arbeiten, dass die Jugendlichen versuchen, ihr Wissen effizient in fast allen Gegenständen einzusetzen. Wichtig ist, dass man als Lehrperson darauf hinarbeitet, dass die Schülerinnen und Schüler nicht mehr in bestimmten „Schubladen“ denken, sondern eher fächerübergreifend in jedem Gegenstand arbeiten. Ich versuche, zum Thema Mechanik, Unterrichtsmaterial auszuarbeiten, welches eine Lehrkraft sowohl im Mathematik- als auch im Physikunterricht einsetzen kann. Die ausgearbeiteten Unterlagen sind für die Oberstufe geeignet, das heißt 5. bzw. 6. Klasse, je nachdem wann das Kapitel Mechanik durchgenommen wird.

Meine Arbeit wird in vier Kapitel gegliedert. Zu Beginn wird eine theoretische Einführung in das Themengebiet gegeben. Daraufhin analysiere ich den Lehrplan, inwieweit sich die beiden Unterrichtsgegenstände darin berücksichtigen. Anschließend folgt ein Vergleich mehrerer Schulbücher von Mathematik und Physik für die 5. Klasse Oberstufe. Zum Schluss versuche ich eine adäquate Ausarbeitung von Unterrichtsmaterial zum Thema Mechanik für den Mathematik- und Physikunterricht zu geben.

2. THEORETISCHER HINTERGRUND

In diesem Kapitel werde ich einige Quellen anführen, die mit dem Thema vertraut machen.

Den Beitrag von **Gerhard Rath** in der Zeitschrift Plus Lucis finde ich sehr interessant. Der Titel lautet **„Auseinandergelebt? Probleme und Lösungsansätze zur Koordination von Physik und Mathematik an höheren Schulen“**, dieser verrät schon ein bisschen etwas über den Inhalt des Textes. Mathematik und Physik begannen als unzertrennliches Paar, sie waren sozusagen miteinander verschmolzen. An den Universitäten unterrichteten die Gelehrten z.B. Mechanik, sowie Astronomie als Teilgebiete der Mathematik. Im 18. Jahrhundert gebar die Mathematik das Unterrichtsfach Physik, welches zu Beginn noch sehr mathematisch gelehrt wurde. Erst im zweiten Abschnitt des 19. Jahrhunderts kritisierten immer mehr Menschen den mathematisch ausgerichteten Physikunterricht. Ein berühmtes Zitat von Ernst Mach ist:

„Die Physik ist im Unterricht nicht als mathematische Wissenschaft, sondern als Naturwissenschaft zu behandeln.“

Nun konzentrierte man sich auf Beobachtungen und Experimente. Die endgültige Trennung der beiden Fächer fand im 20. Jahrhundert statt, aufgrund der neuen Mathematik Mengenlehre, Logik und Axiomatik.

In der heutigen Zeit treten nun Probleme auf. In der Physik werden sehr viele Themen bearbeitet, bei denen jedoch den Schülerinnen und Schülern die mathematischen Fähigkeiten fehlen. Dadurch greifen Physiklehrerinnen und Physiklehrer zu ihrer eigenen Mathematik, was wiederum zu Problemen im Unterrichtsfach Mathematik führt. Trotz der Freiheiten, die der Lehrplan im Physikunterricht bietet, unterrichten die Lehrerinnen und Lehrer oft nach Lehrbuch und dabei treten kaum Verbindungen zwischen den beiden Fächern auf. Im Physikunterricht werden Größen verwendet, ohne jedoch dass die Schülerinnen und Schüler etwaige mathematische Vorkenntnisse besitzen und dadurch kann eine Verwirrung bei den jungen Leuten zustande kommen.

Beim Rechnen mit Größen werden Funktionen und Funktionszusammenhänge verwendet, sowie $U = R \cdot I$, was wiederum eine „Beschreibung physikalischer Vorgänge“ liefert. Die Operatoren zwischen Größen ergeben nicht „normale“ mathematische Rechnungen, sondern sie verknüpfen die Größen und dadurch entstehen wiederum neue. Eine Möglichkeit in der Physik zu rechnen ist mit Maßzahlen, hier können die Rechnungen „normal“ ausgeführt

werden. Dabei ist wichtig die Einheiten zu beachten, wenn diese verändert werden, ändern sich daraufhin auch die Zahlen. Zum Beispiel hat man einen Weg $s = 4\text{ m}$ und eine Zeit $t = 2\text{ s}$ gegeben, dividiert man nun Weg durch Zeit erhält man $v = 2 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Unser Ergebnis ergibt nicht die Geschwindigkeit, sondern nur die Anzahl der Meter pro Sekunde. Die zweite Möglichkeit ist das Arbeiten mit Funktionen und Funktionszusammenhängen, also das Rechnen mit Größen. Ein Beispiel hierfür ist, $U = I \cdot R$, dies beschreibt einen physikalischen Vorgang. Dabei beschreibt man spezielle Operationen, die Größen verknüpfen und dadurch neue Größen entstehen lassen.

In der Mathematik werden Aufgaben oft verwendet, um zu üben und zu festigen. In der Physik wird man kaum ein Beispiel finden, bei dem die Zeit und der Weg gegeben sind und man sich die Geschwindigkeit errechnen muss. Dies sind reine Einsetzübungen, die wenig gewinnbringend für Schülerinnen und Schüler sind. Die Aufgaben der Physik sind meist in Texten und Alltagszusammenhängen gegeben. Die Schwierigkeiten für die Jugendlichen liegen darin, das Wichtigste aus dem Text herauszufiltern und zu wissen, welche Lösungsstrategien anzuwenden sind.

In dem Text werden auch IMST-Projekte angeführt, bei denen wieder erwartend beobachtet wurde, dass es für Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung ist, das „Kasterldenken“ zu überwinden. Eine weitere Erkenntnis der fächerübergreifenden naturwissenschaftlichen Projekte war, dass die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrerinnen und Lehrer sehr zufrieden und begeistert waren, sie jedoch einen hohen Zeit- und Arbeitsaufwand beanspruchte.

Ein Projekt am BRG Kepler Graz ist ebenfalls beschrieben. Dabei versuchten die Lehrerinnen und Lehrer den Mathe- und Physikunterricht in der 5. und 6. Klasse aufeinander abzustimmen. Zu Beginn des Schuljahres sprachen sich die Lehrerinnen und Lehrer bezüglich der Lehrstoffverteilung ab, dabei wurden die koordinierenden Themen ungefähr zeitlich festgesetzt. Nachstehend wird erklärt, welche Vorteile der koordinierende Unterricht bringt. Der Physikunterricht wirkt unterstützend um zu zeigen, wofür mathematische Konzepte verwendet werden können. Das bedeutet die Mathematik benötigt Kontexte, die sie mit Hilfe der Physik erlangt. Umgekehrt verlangt die Physik mathematische Werkzeuge, die wiederum von der Mathematik verwendet werden können. Der zu bewältigende Stoffumfang im Fach Physik lässt keine Zeit, um sich ausführlich mit den Rechengvorgängen zu beschäftigen. Eine Möglichkeit wäre, dass man die Messdaten von einem Experiment aus dem Physikunterricht

im Mathematikunterricht quantitativ ausgewertet. Eine Tabelle „Die Koordinierungen in der 5. und 6. Klasse im Überblick“ ist ebenfalls angeführt:

Mathematik	Physik
Zehnerpotenzen, Exponentialschreibweise	Größenordnungen: Raum und Zeit, Fermi-Probleme
Funktionen	Bewegungsaufgaben, Diagramme
Winkelfunktionen, Trigonometrie	Entfernungsmessungen, Positionsbestimmung, Kraftkomponenten
Vektoren	Kraft, Impuls, Arbeit
Trigonometrische Funktionen	Schwingungen und Wellen
Geometrische Folgen und Reihen	Springender Ball, Gedämpfte Schwingung
Exponentialfunktion	Abkühlkurve, Entladung von Kondensatoren
Logarithmus	Weber-Fechner'sches Gesetz, Lautstärke, dB
Stochastik	Statistisches Mechanik- Gase; L. Boltzmann

Für die Schülerinnen und Schüler, sowie für die Lehrerinnen und Lehrer war dieses Projekt eine positive und motivierende Erfahrung. Die Unterschiede und Ähnlichkeiten, sowie die Sinnhaftigkeit unterschiedlicher Themen der beiden Fächer erkannten die Beteiligten von Tag zu Tag besser (Rath, 2006, S. 9-13)

Nun wende ich mich einem Auszug aus der Dissertation (1964) von **Fritz Bauer** zu, welche den Titel "**Zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht**" trägt. Der Unterrichtsstoff

erhält charakteristische Eigenschaften durch die mathematische Sprache. In der Dissertation werden drei angeführt.

„ Der Unterrichtsstoff bekommt einen streng quantitativen Charakter.*

** Das Wesen der betrachteten physikalischen Erscheinungen wird dabei tiefer und vollständiger widergespiegelt.*

** Das Unterrichtsergebnis wird in einer äußerst konzentrierten, kurzen Form (in Art einer Stenographie) ausgedrückt. “*

Möchte man nun eine physikalische Erscheinung mathematisch darstellen, so kann man das aufgrund einer Messung machen. In der Schule wird eine exakte Messung häufig durch eine „halbquantitative“ Aussage ausgetauscht. Ein Beispiel dafür ist „Je größer A wird, desto größer wird auch B“. Für das erste Verständnis und eine anschauliche Vorstellung ist diese Aussage wichtig, nur muss sie die Lehrperson anschließend eindeutig beschreiben, damit keine Fehlvorstellungen entstehen. Die Jugendlichen könnten zu der Auffassung kommen, dass „Wenn A wächst, wächst auch B“ gleichbedeutend mit B ist proportional zu A ($B \sim A$) ist. Mathematisch korrekt für „Mit A wird auch B größer“ ist

$$B = f(A) \quad \text{und} \quad f'(A) > 0 .$$

Wenn man physikalische Phänomene nur qualitativ beschreibt, geht dies nur bis zu einem bestimmten Punkt, aber nicht darüber hinaus. Ein Beispiel dazu ist, dass wir ohne zu messen feststellen können, dass eine elektrische Spannung einen elektrischen Strom verursacht und die Änderung der Spannung führt zu einer Änderung der Stromstärke. Einen genauen Einblick erhält man erst durch den mathematischen Ausdruck, der den exakten Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung liefert. Damit erreicht man eine quantitative Darstellung des physikalischen Phänomens.

Die Lehrerinnen und Lehrer müssen die Schülerinnen und Schüler zum komplexen selbstständigen Denken erziehen. Dadurch können sie lernen physikalische Phänomene mathematisch zu beschreiben. Die „Mathematisierung“ beeinflusst den Unterrichtsstoff und den Unterrichtsprozess. In dem Auszug der Dissertation sind drei Denkopoperationen angeführt, die man für die quantitative Beschreibung benötigt:

„ Formulierung des physikalischen Problems mit Hilfe der mathematischen Sprache, Übergang von der physikalischen Erscheinung zu den mathematischen Symbolen.*

** Ausführung von mathematischen Operationen, d.h. Ausführung logischer Operationen mit mathematischen Begriffen.*

** Interpretation der mathematisch gefassten Ergebnisse, Übergang von den mathematischen Symbolen zu den physikalischen Erscheinungen.“*

Damit die Schülerinnen und Schüler diese Denkopoperationen verwenden können, müssen diese im Unterricht entwickelt und geübt werden. Die Aufgabe des Mathematikunterrichts ist, logische Operationen mit mathematischen Symbolen zu beschreiben. Andererseits sind die Aufgaben des Physikunterrichts, physikalische Phänomene in mathematischer Sprache anzugeben, sowie der umgekehrte Vorgang. Es besteht nun die Gefahr, dass mathematische Hilfsmittel zum Selbstzweck verwendet werden. In das Zentrum des Unterrichts kann die mathematische Operation rücken und der wesentliche Punkt, die physikalische Überlegung, gerät aus den Augen.

Abschließen möchte ich dieses Kapitel mit einem prägenden Satz aus dieser Dissertation

„In den Physikstunden sollen die mathematischen Mitteln der Beschreibung, der Erklärung, dem Verständnis und der Erkenntnis physikalischer Erscheinungen dienen, sie dürfen aber keinesfalls zum Selbstzweck werden“

(Bauer, 1964, S 5-8).

Ich setze mit dem Vortrag **„Zur Rolle der Physik im Mathematikunterricht“** von **Hans-Joachim Brenner** fort. Im Mathematikunterricht sollen die Schülerinnen und Schüler Vorstellungen zu mathematischen Konzepten erarbeiten. Dabei ist wesentlich, dass sich die Heranwachsenden mit naturwissenschaftlichen Phänomenen beschäftigen. Eine zentrale Rolle spielt ein selbstentdeckender Unterricht, der den Jugendlichen eine Verknüpfung von Wissensinhalten ermöglicht.

Im Unterricht ist eine Balance zwischen theoretischem und empirischem Lernen herzustellen. Die Schülerinnen und Schüler sollen ermutigt werden, ihre Fähigkeit der physikalischen Vorahnung öfter einzusetzen. H. Poincare ist der Meinung, dass die Physik uns die Möglichkeit bietet die Resultate abzusehen und wir dadurch lernen Ideen zu vernetzen. Auch Polya (1962) beschreibt das Üben plausibler Argumentationen im Physikunterricht, welches

eine Verknüpfung von Inhalten ermöglicht. Brenner führt ein Zitat von Levi (2009) an, welches grob beinhaltet, dass Mathematik und Physik zwei Gegenstände sind, die sehr eng miteinander vertraut sind und wenn sie getrennt sind, beide leiden.

Brenner deutet die Sichtweise von H. Winter an, welcher der Entfaltung von Vorstellungen großen Wert zuschreibt. Zudem nennt Brenner den Standpunkt von vom Hofe (2005), der der Auffassung ist, dass man alte Vorstellungen stets erweitern sowie neue Vorstellungen dazugewinnen soll. Damit kann man ein System aufbauen, mit dem man Modelle der Mathematik entwickeln kann. Brenners Ansicht nach werden in den Schulen jene Inhalte gelehrt, die auf den Erfahrungen der früher lebenden Personen basieren. Wichtig ist aber, dass die Schülerinnen und Schüler aktiv lernen sollen. Lehrerinnen und Lehrer sollen ihnen die Möglichkeit bieten den Lehrstoff miteinander zu verknüpfen. Im Unterricht sollte man der Modellbildung sowie den Beweisen mehr Achtung entgegenbringen, damit die Heranwachsenden begründen lernen. Die Mathematik benötigt die Vorarbeit von naturwissenschaftlichen Fächern, damit für Schülerinnen und Schüler Realmodelle leichter zu bilden sind. Brenner führt E. Wittmann (2005) an, der der Meinung ist, dass in den höheren Schulstufen die „*anwendungsfähige Mathematik*“ immer mehr an Bedeutung gewinnt. Dann erwähnt er noch K.-H. Lotze, der darüber schreibt, dass die Fachdidaktik der Auffassung ist, dass die Physik „zerrechnet“ wird, eine Entmathematisierung stattfinden muss, sowie Formeln bis zur 10 Schulstufe nicht verwendet werden dürfen. Zum Abschluss dieses Textes möchte ich noch ein Zitat von Brenner angeben zum weiteren Nachdenken.

„Die Reduzierung des jeweils andern Faches auf das Notwendigste hat im Mathematik- und Physikunterricht unglaublichen Schaden angerichtet!“

(Brenner, 2011, S. 151-154).

Nun komme ich zur Dissertation von **K.-W. Hoffmann** (1977) mit dem Titel **„Untersuchung des Transfers mathematischer Inhalte auf physikalische Aufgaben als Funktion unterschiedlicher Behandlungen“**. Hoffmann nennt zwei Fragen, zum einen „Warum ist die Physik den „Umweg“ über die mathematische Darstellung gegangen?“ und zum anderen „In welcher Weise determinieren mathematische Kenntnisse das Niveau physikalischer Erkenntnis?“. Wenn für Schülerinnen und Schüler diese zwei Fragen klar sind, können sie typische physikalische Betrachtungsweisen und die Bedeutung der Mathematik verstehen.

Große Bedeutung hat, sich von der Alltagssprache zu entfernen und im Gegensatz dazu eine Theoriesprache zu entwickeln: dabei soll man mathematisieren und physikalische Begriffe verwenden. Der Physikunterricht ist daher stark auf den Mathematikunterricht angewiesen. Ebenfalls bedeutend sind die Vorkenntnisse der Heranwachsenden und als Lehrkraft sollte man ihnen einen schonenden Übergang vom Anschaulichen und Konkreten zum Abstrakten und Mathematik gewähren. Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, physikalische Phänomene mathematisch zu beschreiben. Der Physikunterricht hat auf die Ziele des Mathematikunterrichts einzugehen.

Hoffmann erwähnt verschiedene Möglichkeiten, die zu Anwendungsproblemen bei mathematischen Methoden, die für physikalische Aufgabenstellungen verwendet werden. Zum einen ist das Inhaltsproblem zentral, wobei viele Inhalte erst zu spät oder gar nicht im Mathematikunterricht gemacht werden. Das Notationsproblem kommt von Mathematikunterricht, der häufig darauf abzielt, dass Schülerinnen und Schüler ein bestimmtes Konzept einüben, aber auf physikalische Aufgaben nicht transformieren können. Eine dritte Schwierigkeit ist das Kontextproblem, bei dem die Heranwachsenden mit der Erklärung des physikalischen Phänomens sowie der Formel zu kämpfen haben. Als Letztes schildert Hoffmann das Verfügungsproblem, hier weisen die Jugendlichen einen Mangel an mathematischen Kenntnissen auf, obwohl diese gelehrt wurden.

Der Verfasser der Dissertation führt eine Untersuchung von Kolb (1967/68) an, welche folgende Fragestellung beinhaltet

„Welchen Einfluß hat die Berücksichtigung mathematischer Inhalte des Physikunterrichts im Mathematikunterricht auf das Lernen von Physik?“.

Hierfür testete man 11 Klassen im 5. Schuljahr zu Reibungsphänomenen. Die Gruppe A genoss einen physikorientierten Mathematikunterricht, jedoch ohne Physikbeispiele. In der Gruppe B unterrichteten die Lehrerinnen und Lehrer ganz „normal“ Mathematik. Anschließend führte man einen Physiktest und einen Mathematiktest durch. Die Gruppe A schnitt in Mathematik deutlich besser ab als Gruppe B und in Physik war der Unterschied gering. Eine Anmerkung verweist jedoch darauf, dass die Schülerinnen und Schüler aus Gruppe A den Inhalt aus dem physikorientierten Mathematikunterricht gewinnbringend einsetzen konnten.

Eine Untersuchung von Redfield und Atwood (1966) beschäftigte sich mit der Frage

„Kann Schülern durch forschenden Unterricht die quantitative Beschreibung und Interpretation von Experimenten so beigebracht werden, daß sie diese auf andere Situationen übertragen können?“.

Bei der Untersuchung beteiligten sich 262 Schülerinnen und Schüler der 7. bis 9. Klasse. Die Schülerinnen und Schüler der Gruppe A lernten Fragen physikalisch zu modellieren, Versuchspläne zu gestalten und durchzuführen sowie Wertetabellen darzustellen und lineare Gleichungen zu bestimmen. Gruppe B hingegen verwehrte man diese Inhalte. Anschließend führte man in Physik einen Faktentest und in Mathematik einen Methodentest durch. Sowohl beim Faktentest als auch beim Methodentest schnitten die Heranwachsenden der Gruppe A wesentlich besser ab als die der Gruppe B.

Was muss das Unterrichtsmaterial erfüllen, damit Schülerinnen und Schüler sinnvoll lernen können? Hoffmann nennt hierfür Bedingungen von Ausubel (1974, S. 39 – 42).

„1) Das Material muß logisch bedeutungsvoll sein, d.h. es darf keine logischen Widersprüche enthalten;

2) das Material muß potentiell bedeutungsvoll sein, d.h. dem Lerner muß aufgrund seiner Lerngeschichte die Einsicht in diese logischen Beziehungen möglich sein;

3) das Material muß psychologisch bedeutungsvoll sein, d.h. es muß während der Lernsituation die logischen Beziehungen beim Lerner aktualisieren können.“

Für Schülerinnen und Schüler ist das Material bedeutungsvoll, wenn sie Verknüpfungen zu ihren Vorkenntnissen herstellen können. Dadurch soll ein stures Auswendiglernen verhindert werden. Wenn die Jugendlichen sinnvoll, das heißt nicht mechanisch lernen, können sie die Inhalte eher speichern und sie können ihr Wissen eher transferieren.

Hoffmann führte dann eine Untersuchung durch, bei der 11 Klassen teilnahmen in einem Zeitraum von Mai 1974 bis Juni 1975. Er teilte die Klassen ebenfalls in Gruppe A und Gruppe B ein, da diese unterschiedlich unterrichtet wurden. Interessant fand ich den Einstellungsfragebogen zum Lehrtextunterricht im Vergleich zum Lehrerunterricht. Durch den Einsatz von Lehrtexten fanden die Schülerinnen und Schüler, dass sie im selbstständigen Lernen gefördert wurden. Zudem entwickelte sich eine Unabhängigkeit von der Lehrerin/vom Lehrer. Die Arbeitsbelastung zu Hause sowie den Schwierigkeitsgrad stuften die Jugendlichen beim Lehrtextunterricht höher ein als beim Lehrerunterricht. Die Heranwachsenden

empfanden die Lernleistung im Unterricht als schlechter, da sie nichts erklärt bzw. „vorgekaut“ bekamen. Meiner Meinung nach waren die Schülerinnen und Schüler damit überfordert, dass sie sich alles selbst erarbeiten mussten. Die jungen Leute fanden, dass sie im Lehrerunterricht eher Fragen stellen konnten sie nicht so ruhig sein mussten. Beim Lehrtextunterricht hatten die Jugendlichen bei Verständnisproblemen die Möglichkeit, sich den Lehrtext noch einmal anzusehen. Ablehnung des Lehrtextunterrichts trat bei guten Schülerinnen und Schülern auf, da diesen wahrscheinlich die Anerkennung ihrer Leistung von der Lehrerin/ vom Lehrer fehlte. Grundsätzlich stellte Hoffmann bei dieser Untersuchung fest, dass ein permanenter Lehrtextunterricht bei den Jugendlichen eine negative Einstellung auslöste, aufgrund der Einseitigkeit. Um die Effizienz des Lehrerunterrichts zu steigern, ist der Einsatz von schülergerechten Lehrbüchern mit anwendungsorientierten Beispielen nötig (Hoffmann, 1977, S. 1 – 164)

Nun möchte ich mit der Dissertation „**Mathematisches Denken im Physikunterricht**“ von **Olaf Uhden** (2012) anschließen. In seiner Arbeit versucht er ein theoretisch und empirisch fundiertes Konzept zum Umgang mit der Mathematik im Physikunterricht zu geben. Zu Beginn führt er ein Zitat von Feynman (1985, S. 117) an, welches ich sehr ansprechend finde

„[...] it is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature in a way that people can feel, without their having some deep understanding of mathematics.“

Mathematik und Physik sind sehr eng miteinander verbunden und die Mathematik ist ein sehr wesentlicher Teil der Physik, da sie hilft, das Fach zu verstehen. In der Physik sollte eine Balance zwischen Theorie und Experiment hergestellt werden. Ein häufiges Problem im Physikunterricht ist, dass Schülerinnen und Schüler die Rechenaufgaben lösen, indem sie die entsprechende Formel suchen, ohne eine Verbindung zum physikalischen Verhalten herzustellen. Deshalb wird oft versucht, die Mathematik aus dem Physikunterricht zu verbannen. Der rein qualitative Physikunterricht steht jedoch im Widerspruch zur Natur der Physik. Eine Verbesserung des Physikunterrichts ist nicht durch einen rein qualitativen Unterricht, aber auch nicht durch einen sehr mathematischen Physikunterricht zu erwarten. Die Elementarisierung der theoretischen Physik könnte helfen, die Mathematik und Physik in Einklang zu bringen; dadurch würde man das konzeptuelle physikalische Verständnis der Heranwachsenden fördern. Dies wies Prediger (2009) empirisch nach, er ermittelte, dass

Schülerinnen und Schüler mathematische Operationen inhaltlich lernen sollten statt sie auswendig zu lernen.

Damit der Unterricht überhaupt gut gelingen kann, ist die Kenntnis über die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler bedeutend. Damit die Heranwachsenden die Mathematik sinnvoll einsetzen können, müssen sie diese verstehen. Vor allem in der Physik ist das wichtig, da hier der Transfer der Mathematik auf Physikaufgaben stattfinden sollte. Die Sprache der Mathematik muss verstanden werden sowie warum und was man tut sollte klar sein. Zudem müssten die Lehrpersonen den Jugendlichen das Forschen zum Problemlösen lehren. Ein weiterer Schritt um die Mathematik im Physikunterricht aufzuwerten, ist das Modellieren. Uhden führt unter anderem von Pospiech (2008) einen Verbesserungsvorschlag der Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern im Verfassen und Auswerten von mathematischen Modellen an.

“Zum einen sei es wichtig, das induktive Aufstellen physikalischer Gesetze aus dem Experiment durch deduktive Herleitungen aus theoretischen Überlegungen zu ergänzen. Weiterhin sei ein besonders kritischer Punkt, der erhöhter Aufmerksamkeit bedarf, der Schritt der Idealisierung. Das Erkennen physikalischer Gesetze in spezifischen Kontexten und das Identifizieren relevanter Daten sei für die mathematische Modellierung realer Situationen essentiell. Eine Aufgabenkultur mit realitätsnahen Problemen, die verschiedene Aspekte mathematischer Modellierung ansprechen, bieten Gelegenheit zum Erlernen der nötigen Kompetenzen.“

Oftmals wird im Physikunterricht den Experimenten eine wesentliche Rolle zugeschrieben, wobei das Mathematische eher außer Acht gelassen wird. Das Problem kann gelöst werden, indem eine Balance zwischen Beobachtung und Modellierung, sowie von Aspekten experimenteller und theoretischer Physik hergestellt wird - dadurch wird eine adäquate Vorstellung begünstigt.

Bereits Einstein erkannte, dass die Mathematik ein wesentlicher Bestandteil ist, um Naturerscheinungen zu verstehen. Deutlich macht er das in folgender Beschreibung:

„Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir nämlich zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Überzeugung diejenigen Begriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den

Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern. Die brauchbaren mathematischen Begriffe können durch Erfahrung wohl nahegelegt, aber keinesfalls aus ihr abgeleitet werden. Erfahrung bleibt natürlich das einzige Kriterium der Brauchbarkeit einer mathematischen Konstruktion für die Physik. Das eigentlich schöpferische Prinzip liegt aber in der Mathematik“ (Einstein, 1934, S. 117).

Nun möchte ich mit der Aufgabenkultur der Fächer fortsetzen. Dies ist ein weiterer, sehr wesentlicher, Teil von Uhdens Dissertation. Er listet zwei Aufgaben aus zwei verschiedenen Schulbüchern auf. Die erste Aufgabe ist zum freien Fall aus dem Schulbuch von Duden-Paetec (2006, S. 100, Aufgabe 26).

Um die Tiefe eines Brunnens zu ermitteln, wird ein Stein vom Brunnenrand aus fallen gelassen. Nach drei Sekunden hört man, wie der Stein aufschlägt. Wie tief ist der Brunnen?

Die zweite Aufgabe ist zum Thema Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung aus dem Schulbuch von Schroedel (2006, S. 110, Aufgabe 2).

Eine 10 m breite Fahrbahn mit Mittelstreifen soll in normalem Schritttempo (4 km/h) von links nach rechts überquert werden. Als Höchstgeschwindigkeit für Fahrzeuge sind 80 km/h erlaubt.

- a) Wie weit müssen die ankommenden Fahrzeuge auf der linken Seite (vordere Fahrspur) und wie weit die auf der rechten Seite (Fahrspur jenseits des Mittelstreifens) mindestens entfernt sein, damit ein gefahrloses Überqueren der Fahrbahn für einen Fußgänger möglich ist?
- b) Berechne den Fall auch für einen älteren Menschen, der nur mit 2,5 km/h gehen kann.

Diese beiden Aufgaben sind Rechenaufgaben, bei denen explizit die Zahlenwerte einiger physikalischer Größen gegeben sind. Außerdem wird die gesuchte physikalische Größe genannt, sodass die Schülerinnen und Schüler nur mehr die geeignete Formel finden müssen. Uhdens versucht nun diese Aufgaben zu verbessern, damit er Abstand von dem mathematisierten Niveau bekommt, aufgrund von gegebenen Zahlenwerten. Er transformiert die Aufgabenstellungen so, dass diese eine natürliche Situation ohne Zahlenwerte beschreiben. Die Heranwachsenden sollen durch die neuen Aufgabenstellungen eine Idealisierung sowie das selbständige Überlegen sinnvoller Zahlenwerte vornehmen. Außerdem können sie auch noch einen weiteren Mathematisierungsschritt durchführen, der die Aufstellung einer Formel beinhaltet. Uhdens ist der Meinung, dass die Jugendlichen durch

diese Aufgabenstellungen eher interpretieren und validieren können. Die von Uhden modifizierten Schulbuchaufgaben, original von Duden-Paetec (2006, S. 100, Aufgabe 26) und Schroedel (2006, S. 110, Aufgabe 2), lauten:

Brunnentiefe

Wie kann man mit einem Stein und einer Uhr die Tiefe eines Brunnens ermitteln?
Führe auch eine Beispielrechnung mit realistischen Zahlenwerten durch.

Straßenüberquerung

Ihr wollt eine zweispurige Landstraße (eine Fahrspur in jede Richtung) in normalem Schrittempo überqueren. Wie weit müssen die fahrenden Autos, die von links kommen, und wie weit müssen die fahrenden Autos, die von rechts kommen, mindestens von euch entfernt sein, um ein gefahrloses Überqueren der Straße zu ermöglichen?

Der Verfasser der Dissertation möchte mit den Aufgaben erreichen, dass die Schülerinnen und Schüler ihre individuellen Erfahrungen anwenden können. Ebenfalls werden unterschiedliche Lösungswege erarbeitet. Uhden erwähnt jedoch, dass die strukturellen Fähigkeiten und die inhaltliche Übersetzung zwischen physikalischem Verhalten und mathematischen Schritt in die richtige Richtung ist.

Zum Thema „Formel aufstellen“ hat er folgende interessante Aufgabe entwickelt:

Luftwiderstand

Lässt man auf der Erde einen Körper fallen, muss man noch den Einfluss des Luftwiderstandes berücksichtigen. Dieser hat eine bremsende Wirkung, was man durch eine (negative) Beschleunigung a_{Luft} beschreibt. Ihr sollt die Gleichung für a_{Luft} aufstellen, wobei ihr auf folgendes Wissen zurückgreifen könnt: a_{Luft} ist proportional oder indirekt proportional zu...

- ρ („Rho“): Dichte der Luft
- A : Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung
- m : Masse des Körpers
- v^2 : Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers

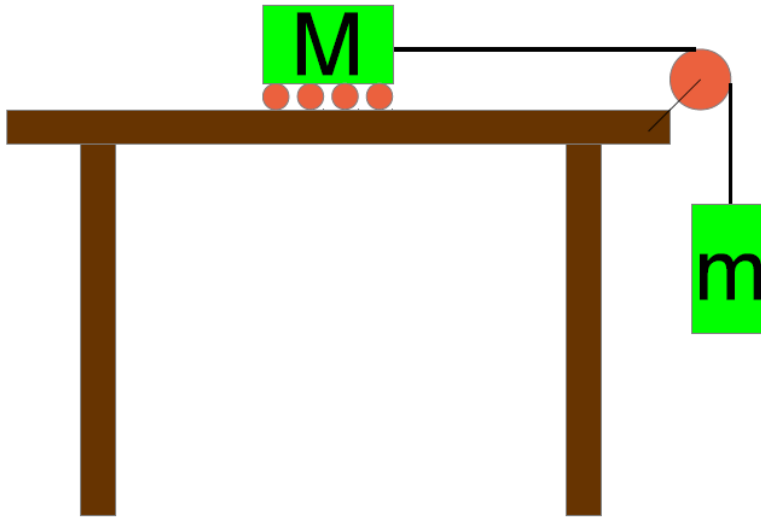
Wie muss demnach die Gleichung für a_{Luft} aussehen?

Diese Aufgabe schildert einen fallenden Körper, wobei man den Einfluss des Luftwiderstandes miteinbeziehen muss. Die Heranwachsenden sollen sich der Herausforderung stellen, die Gleichung für den Einfluss des Luftwiderstandes aufzustellen. In dem Text sind bereits einige Hilfestellungen gegeben. Der Einfluss des Luftwiderstandes kann durch eine negative Beschleunigung ausgedrückt werden. Außerdem sind die vom Luftwiderstand abhängigen physikalischen Größen und die zugehörigen Formelzeichen gegeben. Eine weitere Unterstützung liefert die Aufgabe, indem sie beschreibt, dass alle physikalischen Größen direkt oder indirekt proportional zum Luftwiderstand sind. Damit die Jugendlichen nun die Gleichung aufstellen können, müssen sie eine Analyse des physikalischen Verhaltens machen. Anschließend kann aus den physikalischen Größen eine Gleichung aufgestellt werden. Eine Problematik könnte die Proportionalitätskonstante auslösen, wobei ein Fehler diesbezüglich keinen Einfluss auf die Lösung hat. Außerdem können die Schülerinnen und Schüler die Einheiten in der Gleichung überprüfen und so feststellen, ob die Formel richtig aufgestellt ist. Zu Beginn soll ein qualitativer Zusammenhang der physikalischen Größe und dem Luftwiderstand hergestellt werden. Die Jugendlichen können danach bis zu drei Mathematisierungsschritte ausführen. Sie können eine „je-desto-Formulierung“ des Zusammenhangs machen, über die Proportionalität entscheiden und die Abhängigkeit mit Hilfe des Proportionalitätszeichens aufschreiben.

Uhden erwähnt, für die konzeptuell-mathematische Physik eignet es sich, Grenzfälle zu diskutieren. Um die strukturellen Fähigkeiten zu üben, ist das Interpretieren und Diskutieren von Grenz- und Spezialfällen möglich; das bedeutet, dass eine physikalische Größe null oder „unendlich“ ist. Er entnimmt dafür eine Aufgabe von Redish (2006), passt sie jedoch an das Niveau der Jugendlichen an.

Zwei Massen

Zwei Körper der Massen M bzw. m sind wie auf der Abbildung miteinander verbunden:



Der Körper der Masse M ist auf Rädern gelagert und mit einem Seil über eine Umlenkrolle mit dem Körper der Masse m verbunden, welcher frei in der Luft hängt. Die Räder und die Umlenkrolle sind so gut gelagert, dass die Reibung vernachlässigt werden kann. So lange der Körper M festgehalten wird, bewegen sich die Körper nicht. Wenn aber M losgelassen wird, beschleunigen beide Körper mit der Beschleunigung $a = \frac{m}{M+m} \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist.

- a) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse M des rollenden Körpers vernachlässigbar klein ist.
- b) Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

Sind eure Ergebnisse physikalisch sinnvoll?

Hier sollen die Schülerinnen und Schüler eine mathematische und physikalische Analyse vornehmen und anschließend beide Ergebnisse miteinander vergleichen. Die Heranwachsenden sollen eine Mathematisierung vornehmen, indem sie eine Masse null setzen. Anschließend können die Ergebnisse interpretiert werden. Mathematisch gesehen setzt man für Punkt a) $a = g$, welches einen freien Fall beschreibt, und für Punkt b) $a = 0$, was keiner Bewegung entspricht. Die physikalische Interpretation bei a) wäre, wenn man die rollende Masse weglässt, wird der hängende Körper nicht gebremst und fällt im freien Fall.

Bei b) lässt man die hängende Masse außer Acht, somit zieht keine Masse an dem Seil und der rollende Körper bleibt in Ruhe.

Physikalische Schlussfolgerungen aus einer Formel ziehen, ist ein weiterer Punkt der Aufgabenkultur, den Uhlen aufzählt, um eine Balance zwischen Physik und Mathematik herzustellen. Hierbei soll die Struktur einer Gleichung in physikalische Bedeutung übersetzt werden. Zum besseren Verständnis führt er folgendes Beispiel an:

„Beispielsweise kann aus der Gleichung zum zurückgelegten Weg beim freien Fall direkt die Auswirkung auf die Geschwindigkeit herausgelesen werden, wenn das Konzept der Geschwindigkeit als zeitliche Änderungsrate des Ortes verstanden wurde.“

Die Schülerinnen und Schüler dürfen sich bei den physikalischen Schlussfolgerungen nicht bereits gelernter physikalischer Gesetze bedienen, sondern sie sollen direkt die Gleichungsstrukturen deuten. Dafür eignet sich eine hypothetische Formel, die die Heranwachsenden erörtern sollen. Der Autor beschreibt eine Herleitung, die anschließend eine Aufgabe „Phantasie-Universum“ ergibt.

„Sei eine Größe Γ gegeben als

$$\Gamma := \frac{r_{\text{Erde}}^2}{GM_{\text{Erde}}},$$

wobei r_{Erde} der Erdradius, M_{Erde} die Masse der Erde und G die bekannte Gravitationskonstante ist. Diese Definition würde zu einem Wert von $\Gamma \approx 0.1 \frac{\text{s}^2}{\text{m}}$ führen. Aus den Einheiten lässt sich ersehen, dass Γ die Bedeutung einer inversen Beschleunigung hat (was immer das bedeuten mag). Mit der Definition von Γ lässt sich die Gravitationskraft, die auf einen Massenpunkt m auf der Oberfläche der Erde wirkt, folgendermaßen schreiben:

$$F_G = G \frac{mM_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2} = \frac{m}{\Gamma}$$

Die Herleitung der Bewegungsgleichung ergibt

$$ma = F_G$$

$$\Rightarrow ma = \frac{m}{\Gamma}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\Gamma} = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Gamma} \cdot t^2$$

unter der Annahme, dass Anfangsort und -geschwindigkeit Null sind.“

Diese Bewegungsgleichung lässt sich mit der Gleichung für den freien Fall vergleichen, wobei hier Γ im Nenner steht, anstatt der Erdbeschleunigung bzw. des Ortsfaktors g im Zähler. Damit die Heranwachsenden nicht auf die bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen, werden dem Phantasie-Universum andere und unbekannte physikalische Gesetze zugeschrieben. Nun zu der von Uhden entwickelten Aufgabe:

Phantasie-Universum

Stellt euch vor, ihr gelangt in ein Phantasie-Universum, in dem andere physikalische Gesetze gelten als bei uns. So wird in dieser Phantasie-Welt der freie Fall nicht durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ wie bei uns beschrieben, sondern durch $\mathcal{S} = \frac{1}{2 \cdot \mathcal{G}} \cdot \mathcal{T}^2$ (Die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass sie sich auf die entsprechenden physikalischen Größen in der Phantasie-Welt beziehen und daher auch unbekannte Einheiten haben. Ihre Bedeutung ist aber analog zu den bekannten Symbolen aus unserer Welt)! Welche der folgenden Aussagen über den freien Fall (die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind!) wären daher in dieser Phantasie-Welt nicht korrekt?

- a) Der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab.
- b) Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.
- c) Wäre der Ortsfaktor größer, würde man mehr Weg in der gleichen Zeit zurücklegen.
- d) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt.
- e) Wäre der Ortsfaktor kleiner, würde man langsamer fallen.

Begründet bitte eure Antwort!

Die Unterpunkte a) und b) sind nicht schwer, diese können auch ohne physikalisches Verständnis gelöst werden. Der Aufgabenteil c) ist schon etwas komplizierter, da hier drei physikalische Größen in Verbindung gebracht werden müssen. In d) soll der Zusammenhang von Fallgeschwindigkeit und mehr zurückgelegtem Weg in gleichen Zeitabständen verwendet werden. Bei der letzten Teilaufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler ein „langsames fallen“ als weniger Weg in gleichen Zeiten interpretieren. Die letzten beiden Aufgabenteile können nicht direkt mit der Formel in Verbindung gebracht werden, daher muss hier ein physikalisches Verständnis vorhanden sein und zwar, dass die Geschwindigkeit als zeitliche Änderungsrate des Ortes aufgefasst wird.

Als letzten wesentlichen Punkt erörtert Uhden die Bedeutung einer Formel erklären zu können. Hier wird wieder getestet ob die Jugendlichen den Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik verstehen. Wichtig ist, dass die Heranwachsenden nicht nur die Symbole der Mathematik in einer Formel erkennen, sondern auch die Bedeutung mit dem zugehörigen Verhalten und den physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Dazu hat er folgende Aufgabe zur gleichmäßig beschleunigten Bewegung entwickelt:

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Formel für den zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung lautet: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

- a) Erklärt, welche physikalische Bedeutung die einzelnen Summanden ($\frac{1}{2}at^2$ bzw. v_0t bzw. s_0) haben.
- b) Entscheidet, welcher der Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss auf die zurückgelegte Strecke hat.

Bei Punkt a) wird nach der physikalischen Bedeutung der einzelnen Terme verlangt. Die Schülerinnen und Schüler sollen die einzelnen Terme als Beiträge zur gesamten Strecke erkennen. Der erste Summand beschreibt den Beitrag hinsichtlich der beschleunigten Bewegung, der zweite den Anteil der gleichförmigen Bewegung und der dritte den Ort zu Beginn. Die zweite Teilaufgabe beinhaltet, wie sich die einzelnen Summanden auf die zurückgelegte Strecke zu verschiedenen Zeiten auswirken. Dazu muss man die Aussage zuerst in eine mathematische Frage transformieren, z.B.:

„Bei welchen Werten der Variablen t nimmt welcher der Funktionsterme den größten Wert an?“

Anschließend sollen die Jugendlichen diese Frage in eine mathematische Form bringen, dann im Bezug zur Gleichung setzen und zum Schluss physikalisch interpretieren. Möglicherweise ist diese Art und Weise der Lösungsstrategie für Schülerinnen und Schüler zu kompliziert. Angemessen wäre ebenfalls, dass die Heranwachsenden die Terme zueinander abschätzen. Bei $t = 0$ hat der konstante Term und bei großen Zeiten hat der quadratische Term den größten Einfluss. Bei Beachtung der Größe der Vorfaktoren liefert vorübergehend der lineare Term den größten Beitrag.

Mit diesen entwickelten Aufgaben führt Uhden anschließend eine empirische Untersuchung durch, mit dreißig Schülern aus der neunten und zehnten Klasse, die verschiedene Gymnasien in Dresden besuchen. Aus seiner Auswertung lässt sich schließen, dass die Verknüpfung zwischen Mathematik und Physik für die Heranwachsenden eine Unterstützung darstellt (Uhden, 2012, S. 7 – 256)

Alexandra Himmler (2003) verfasste eine Diplomarbeit zu „**Bereitet der Mathematikunterricht auf die Mathematik im Physikunterricht vor? – Eine empirische Untersuchung**“. Sie testete 1248 Schülerinnen und Schüler in verschiedenen Schultypen in der 6. Klasse bzw. dem zweiten Jahrgang zu den Lehrinhalten Bruchrechnung, Termumformung und Funktionen. Die Verfasserin versuchte durch die Testung herauszufinden, ob die mathematischen Voraussetzungen für den Physikunterricht gegeben sind. Die Ergebnisse sind weniger zufriedenstellend. Bei der Bruchrechnung kannten sich die Jugendlichen noch am ehesten aus, außer sie haben durch Zufall richtig gekürzt. Aufpassen muss man im Unterricht beim Umrechnen von Größen. Die Schülerinnen und Schüler sollen keine Regeln anwenden, ohne diese zu überprüfen und ob sie für das Beispiel sinnvoll sind. Bei der Termumformung wiesen die Heranwachsenden bei den Umkehroperationen Schwächen auf, vor allem bei der Quadratwurzel. Viele setzten $\frac{1}{x} = 1$ und eine weitere Schwierigkeit bot sich, wenn eine Gleichung andere Variablen als x und y enthielt. Auch das Einsetzen für eine Variable bedarf hoher Aufmerksamkeit von Lehrerinnen und Lehrer im Unterricht, da hier noch große Defizite bei den Schülern bestehen. Bei den Funktionen traten nun folgende Mängel auf: dürftige Beschreibung von Zusammenhängen, kein Erkennen von quadratischen Zusammenhängen sowie der negativen Steigung einer Geraden, wenig Durchblick bei Aufgaben wie „y ist das Doppelte von x“. Außerdem kristallisierten sich Schwierigkeiten bei der Zuordnung eines Funktionsterms zu einem Graphen heraus, wobei die Wertetabelle gegeben ist. Eine Differenz in den Ergebnissen der Testung ergab sich hauptsächlich durch den Schultyp. Das Fazit der Verfasserin ist, dass bei der Bruchrechnung gezielte Übungen angeboten werden sollten sowie eine Förderung der Entwicklung von Bruchzahlen. Mehr Achtung sollte man dem Anschreiben von Einheiten widmen. Bei der Termumformung ist essentiell, dass für Variablen unterschiedliche Buchstaben verwendet werden sowie Umkehraufgaben geübt werden und die Schülerinnen und Schüler Rechen- und Vorzeichen unterscheiden können. Von Nöten wäre bei den Funktionen, dass die

Heranwachsenden Aufgaben zu Geraden mit negativer Steigung wie auch mit verschiedenen nicht proportionalen Zusammenhängen lösen. Zum Beschreiben von Funktionen müssten sich die Schülerinnen und Schüler das geeignete Vokabular aneignen (Himmler, 2003, S. 87 – 88).

Der deutsche Herausgeber und Übersetzer **Dr. E. Baumann** (1967) des Buches „**Physikunterricht heute**“ führt in Kapitel 2 einen Beitrag von W. Knecht „Die Koordinierung des Physik- und Mathematikunterrichts“ an. W. Knecht, Professor, schreibt, dass eine Trennlinie zwischen der Mathematik und Physik kaum möglich ist, da diese sehr eng miteinander verbunden sind. Dies konnte man schon dazumal beobachten, da Mathematiker und Physiker oft ein und dieselbe Person waren. Früher wurden Astronomie und vor allem die Mechanik als Bestandteile der Mathematik angesehen. Eine Untermuerung dieser Ansicht bietet ein Satz von P. A. M. Dirac in seinem Werk „Grundlagen der Quantenmechanik“

„... ein Buch über die neue Physik, soll es nicht lediglich experimentelle Arbeiten beschreiben, muß notwendig mathematisch sein“ (Dirac, 1930).

Wenn Lehrerinnen und Lehrer experimentieren, können sie damit einen physikalischen Tatbestand aufzeigen, beschreiben, detaillierter untersuchen und die zutreffenden Gesetzmäßigkeiten erforschen. Nun wäre die nächste Aufgabe von Lehrpersonen, dass sie die mathematischen Zusammenhänge der einzelnen Tatbestände und die Verknüpfung zu den Gesetzen zeigen. Als bald die Jugendlichen ein weitläufiges Repertoire an mathematischen Fähigkeiten erlangen, ist die theoretische Erarbeitung sehr wesentlich. In der heutigen Zeit bestehen leider noch Probleme in der Koordination des Physik- und Mathematikunterrichts, die vor allem auch durch die Entwicklung der beiden Fächer geprägt ist. Schwierig wird das Zusammenspiel der beiden Fächer, da die Mathematiklehrkraft moderne Mathematik lehren möchte und dadurch die für die Physik notwendigen Begriffe erst später einführt. Wiederrum die Physiklehrkraft benötigt diverse mathematische Begriffe und führt diese daher früher ein als in der Mathematik. Hier liegt nun das Problem im Zusammenwirken der beiden Fächer.

Knecht fasst eine Liste mit mathematischen Themen zusammen, von denen er denkt, dass sie für den Physikunterricht am wichtigsten sind und oft gebraucht werden:

- „ - *Klassische Behandlung von Gleichungen und Trinomen zweiten Grades,*
- *Funktionsbegriff und Graph, graphische Lösungsverfahren,*
- *Exponentialfunktion und logarithmische Funktion,*
- *Grundbegriffe der Trigonometrie, Verwendung von Tafeln und Rechenstab,*

- *Näherungslösungen und Fehlerrechnung für aus Meßwerten abgeleitete Ergebnisse, Numerische Methoden,*
- *Umgang mit einfachen Vektoren in Ebene und Raum,*
- *Skalares und vektorielles Produkt,*
- *Begriff des Raumwinkels,*
- *Einfache Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik,*
- *und besonders der Grenzwertbegriff, Ableitung und Integral (ggf. auch über vektorielle Größen)“ (Baurmann, 1967, S. 26).*

Diese Themen sind sehr wichtig für die Physiklehrkräfte, da sie diese für die Mechanik und die Elektrizitätslehre nachdrücklich benötigen.

Wenn nun keine Koordination der beiden Fächer existiert, nehmen die Schülerinnen und Schüler eine Hastigkeit der Einführung diverser mathematischer Themen im Physikunterricht wahr und die Mathematiklehrkraft nimmt zur Kenntnis, dass „ihr“ Fach dadurch verdorben ist. Gleichzeitig verliert die Lehrperson des Physikunterrichts wertvolle Zeit. Die Heranwachsenden bemerken sehr wohl, dass ein Systemfehler vorliegt, den sie ausbaden müssen. Vor allem bei Grenzwerten und Ableitungen ist das Problem vorhanden, dass dieses Thema erst später im Mathematikunterricht gelehrt wird, obwohl es in der Physik schon früher benötigt wird. Dieses Gebiet wird erst später durchgenommen, da man auf die entsprechende geistige Reife der Jugendlichen wartet. Doch an einigen Schulen wird das Thema der Mathematik ein, zwei Jahre früher unterrichtet und die Heranwachsenden haben absolut keine Schwierigkeiten damit.

Die Lösung des Problems ist abhängig vom Lehrplan, insbesondere vom zeitlichen Ablauf, vom theoretischen Schwierigkeitsgrad und vom Alter der Jugendlichen. Wenn die Physiklehrkraft die Behandlung einer Frage immer weiter hinauszögert, so muss dann die Lehrperson in Mathematik auch entgegenkommen und das Thema vorziehen. Ein weiterer Lösungsweg ist, dass beide Fächer dieselbe Lehrperson unterrichten darf, wobei hier auch die Lehrpläne abgestimmt werden sollten.

Die Schlussfolgerung ist nun folgende, dass die entsprechenden Kapitel der Mathematik, die die Physik dringend benötigt, vorgezogen und im Mathematikunterricht behandelt werden. Dadurch können wir die Koordination zwischen der Mathematik und der Physik fördern (Baurmann, 1967, S. 23 – 29).

Nun widme ich mich der Diplomarbeit von **Martin Brantner „Transferprobleme zwischen Mathematik und Physik“**. Zu Beginn beschreibt er das Zusammenspiel von Mathematik und Physik im Laufe der Geschichte. Die Mathematik war und ist für die Naturwissenschaft sehr von Bedeutung. Sie dient Naturwissenschaften, Technik, Wirtschaftswissenschaften und anderen Wissenschaften Probleme zu lösen und zwar als „Hilfswissenschaft“. Archimedes, griechischer Mathematiker und Ingenieur, entwickelte das Archimedische Axiom in der Geometrie und das Archimedische Prinzip in der Physik. Hier können wir folgende Schlussfolgerung ziehen, Mathematik und Physik gehörten bereits im Altertum zusammen. Kopernikus, Kepler und Galilei waren ebenfalls Mathematiker und Naturwissenschaftler. Verschiedene physikalische Probleme, wie

- *„Wie kann man die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in einem Zeitpunkt finden, wenn man die Entfernung in Abhängigkeit von der Zeit kennt“* (Wussing, 1979, S. 162)
- die Tangentenkonstruktion (Kline, 1972, S. 342), die bei der Optik anzutreffen ist (Volkert, 1988, S. 74),
- die Bestimmung von Extremstellen einer Funktion, bei der maximalen Weite beim schiefen Wurf oder bei Planetenbewegungen (Klausberger, 1993)

sorgten dafür, dass im 17. Jahrhundert die Differentialrechnung entwickelt wurde. Auch einer der bekanntesten Physiker, Isaac Newton, war ebenfalls Mathematiker. Im 17. und 18. Jahrhundert war die Evolution der Mathematik und Physik sehr eng miteinander verbunden. Dies erkennt man an Gelehrte, die beide Wissenschaften prägten: Snellius, Pascal, Huygens, Bernoulli, Laplace, Ampere, Gauß, Poisson, Doppler und noch viele mehr. Erst im 19. Jahrhundert spalten sich die beiden Wissenschaften voneinander ab.

Ein großes Problem ist, sobald die Mathematikstunde beginnt, schalten Schülerinnen und Schüler die „Mathematikwelt“ ein und wenn die Stunde wieder zu Ende ist, schalten sie diese wieder aus. Genau das gleiche findet in Physik und in jedem anderen Gegenstand ebenfalls statt. Aber auch bei Teilgebieten innerhalb eines Gegenstandes ist damit zu rechnen, dass die Heranwachsenden bereits Gelerntes ausschalten. Die Lehrperson sollte darauf achten, dass die Jugendlichen lernen, Wissen aus den verschiedenen Unterrichtsgegenständen zu verbinden. Innerhalb eines Faches muss man ebenfalls bewusst handeln, indem zum Beispiel die Mathematiklehrkraft auch Hausübungen zum vorherigen Kapitel aufgibt. Immer wichtiger wird dabei auch der fächerübergreifende Unterricht.

Brantner erwähnt allgemeine Unterschiede in Bezug auf Mathematik im Physikunterricht und Mathematik im Mathematikunterricht:

„ 1. Bei Betrachtung von physikalischen Formeln oder Gleichungen fällt auf, daß im Physikunterricht vielfach Indizes verwendet werden und daß Groß- und Kleinbuchstaben als Variable bunt zusammengemischt sind. Schon dieser kleine Unterschied kann einen Schüler, der vom Mathematikunterricht hauptsächlich an x , y , z oder a , b , c , d gewöhnt ist, anfangs verwirren.

2. Im Physikunterricht sind bei Abbildungen oft ganz einfache mathematische Sachverhalte in recht komplexen Graphiken sozusagen „versteckt“. Die Schwierigkeit liegt also nicht so sehr im Kennen, sondern im Erkennen des mathematischen Hintergrunds, denn im Mathematikunterricht bekommt der Schüler diesen meist „nackt“ präsentiert.

3. Im Mathematikunterricht widmet man sich meist längere Zeit dem gleichen Inhalt und die Schüler sind zumindest in dieser Zeit dem Inhalt vertraut. Im Physikunterricht tauchend die verschiedensten mathematischen Inhalte zeitlich gemischt auf“ (Brantner, 1994, S. 35).

Brantner setzt in seiner Diplomarbeit mit einer Auswertung von Lehrer- und Schülerbefragung fort. Er schreibt einen Appell an Lehrerinnen und Lehrer des Mathematikunterrichts, dass sie die unzähligen physikalischen Aufgaben in den Mathematikbüchern auch nützen und anwenden sollen. Dadurch wird das mathematische Können und Wissen gefestigt und abstrakte mathematische Inhalte werden vereinfacht. Die mathematischen Kenntnisse sollten in physikalischen Anwendungsaufgaben geübt werden, da dies zur Festigung der Kenntnisse beiträgt. Bei den Interviews zeigt sich, dass die Schülerinnen und Schüler starke Schwierigkeiten aufweisen, wenn andere Buchstaben als x , y , z verwendet werden. Bei der Vektorrechnung und Trigonometrie können die Heranwachsenden die einfachsten Kenntnisse bei abgewandelten Aufgabenstellungen nicht mehr anwenden. Ein Vorteil ist durch das Lösen von komplexen Aufgaben nicht gegeben, denn dadurch können einfache Aufgaben auch nicht gelöst werden, im Gegenteil, es entstehen wiederum neue Probleme. Denn bei Anwendungsaufgaben sind meist nur sehr einfache mathematische Grundkenntnisse gefragt, die in komplexen Zusammenhängen gegeben sind (Brantner, 1994, S. 1 – 203).

Zum Abschluss des Kapitels möchte ich mich noch dem fächerübergreifenden Mathematikunterricht widmen. Hierzu beziehe ich mich auf einen Vortrag **„Fächerübergreifender Mathematikunterricht – Hintergrund, Argumente und mögliche Kooperationsformen“** von **Astrid Beckmann** (2007) in „Beiträge zum Mathematikunterricht 2007“. Zuerst die Definition von fächerübergreifendem Unterricht

„Fächerübergreifender/ fächerverbindender Unterricht bedeutet die (unterrichtliche) Beschäftigung mit einem (fachbezogenen oder außerfachlichen) Gebiet, indem die fachlichen Grenzen überschritten werden und andere Fächer einbezogen werden.“

Die deutsche Hochschulrektorin erwähnt nun einige positive Merkmale für einen fächerübergreifenden/ fächerverbindenden Unterricht. Dieser besondere Unterricht kann

- bei den Heranwachsenden ganzheitliches Lernen und neues, vernetztes Denken veranlassen,
- bei der Ordnung und Integration von Lernerfahrungen helfen,
- zur Reflexion über fachspezifische Methoden anregen,
- zur besonderen fachlichen Tiefe ermutigen und
- zum Erkennen der Bedeutung des eigenen Faches bewegen.

(Beckmann, 2007, S. 207).

3. LEHRPLAN

Hier möchte ich überprüfen, inwieweit die Physik im Mathematik-Lehrplan und die Mathematik im Physik-Lehrplan für die Oberstufe verankert ist. Dazu verwende ich den Lehrplan der österreichischen AHS.

Zuerst behandle ich den Lehrplan für Mathematik. Zu Beginn finden sich folgende Zeilen:

„Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schülern ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen [Hervorhebung der Verfasserin].

Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt [Hervorhebung der Verfasserin], die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts“. [Hervorhebung der Verfasserin]

[BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 1].

Der erste Absatz beschreibt, dass solche mathematische Kompetenzen vermittelt werden, die eine entscheidende Grundlage für verschiedene Lebensbereiche darstellen. Die unterschiedlichen Lebensbereiche kann man nun als physikalische Gebiete auslegen, zum Beispiel beim Sport, beim Autofahren oder in der Arbeit. Die Beiträge der Mathematik zu verschiedenen Bildungsbereichen, lässt uns ebenfalls die Physik als Bildungsbereich erkennen.

Im zweiten Absatz beschreiben die Prozesse der umgebenden Welt nichts anderes als die Naturphänomene. Diese soll man mathematisch beschreiben und Zusammenhänge erkennen. Explizit werden die Naturphänomene noch in dem folgenden Absatz erwähnt:

„Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen:

Sie äußern sich in der Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen [Hervorhebung der Verfasserin] erkennen“

[BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 1].

Unter „Beiträge zu den Bildungsbereichen“ findet man folgende Beschreibung, welche die Physik kurz erwähnt:

„Natur und Technik:

Viele Naturphänomene lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden“

[BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 2].

Die einzige Stelle, an der der Begriff „Physik“ erwähnt wird, ist in der 8. Klasse bei der Integralrechnung. Hier werden physikalische Deutungen von Integralen verlangt [BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 6].

Nun möchte ich mit dem Lehrplan für Physik anschließen. Die Ziele vom Physikunterricht sind unter anderem das Lösen von Problemen, Zusammenhänge darstellen können, genauso wie im Mathematik-Lehrplan [BMBF, AHS-Lehrplan Physik, S. 1]. Der einzige Absatz, der sich über die Mathematik im Physikunterricht finden lässt, ist folgender:

„Mathematisierung als spezifische physikalische Arbeitsweise bedeutet das Durchlaufen verschiedener Stufen zunehmender Abstraktion von der Gegenstandsebene über bildliche, sprachliche und symbolische Ebenen zur formal-mathematischen Ebene. Für das Verständnis sind die nichtformalen Ebenen wichtig, während der

mathematischen Ebene für die Anwendung (Vorhersage) besondere Bedeutung zukommt“ [BMBF, AHS-Lehrplan Physik, S. 3]

Leider wird in den beiden Lehrplänen zu selten auf die jeweils andere Wissenschaft eingegangen. Ich denke, dass Lehrerinnen und Lehrer sehr wenig zu einer Koordination von Mathematik und Physik beitragen, dies auch durch die Lehrpläne unterstützt wird.

Der Lehrstoff laut Lehrplan für die Mathematik in der 5. Klasse beinhaltet folgende Themengebiete:

- Zahlen und Rechengesetze,
- Gleichungen und Gleichungssysteme,
- Funktionen,
- Trigonometrie,
- Vektoren und analytische Geometrie in der Ebene [BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 3 – 4].

Ich erwähne außerdem noch den Lehrstoff der 6. Klasse, da an manchen Schulen der Physikunterricht erst wieder in dieser Klasse beginnt. Folgende Fachbereiche werden in der 10. Schulstufe bearbeitet:

- Potenzen, Wurzeln, Logarithmen,
- Folgen,
- Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme,
- Reelle Funktionen,
- analytische Geometrie des Raumes und
- Stochastik [BMBF, AHS-Lehrplan Mathematik, S. 4 – 5].

Für Physik ist der Lehrstoff für die 5. Und 6. Klasse zusammengefasst:

*„Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische Bildungsziele erreichen:
-mittels einfacher Schülerexperimente insbesondere die Fähigkeit zum Beobachten,
Beschreiben und Berichten sowie Planen, Durchführen und Auswerten entwickeln*

- Größenordnungen im Mikro-und Makrokosmos kennen und unsere Stellung im Universum einschätzen können
- Grundlagen der Elektrizitätslehre (einfacher Stromkreis, Spannung, Strom, elektrischer Widerstand, elektrische Energie und Umgang mit elektrischen Messgeräten) anwenden
- im Rahmen der Wärmelehre Zustände und Zustandsänderungen der Materie mit Hilfe des Teilchenkonzepts erklären können, den nachhaltigen Umgang mit Energie beherrschen und bei angestrebter größerer Erklärungstiefe die Bedeutung der thermodynamischen Hauptsätze verstehen
- mit Hilfe der Bewegungslehre (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung: Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung) Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln
- an Hand von Grundeigenschaften mechanischer Wellen Verständnis für Vorgänge, beispielsweise aus Akustik oder Seismik, entwickeln und als Mittel für Energie- und Informationsübertragung verstehen“ [BMBF, AHS-Lehrplan Physik, S. 3].

In den meisten Schulbüchern, an die sich auch die Mehrzahl an Lehrerinnen und Lehrer hält, sind für die fünfte Klasse folgende Themengebiete vorgesehen: Mechanik und Elektrizitätslehre.

Der Lehrstoff laut Lehrplan für Mathematik sowie für Physik ist sehr gering aufeinander abgestimmt.

4. ANALYSE VON SCHULBUCHAUFGABEN UND SCHULBUCHVERGLEICH

Nun werde ich zwei Mathematikschulbücher und zwei Physikschulbücher analysieren. Dazu wähle ich folgende Schulbücher:

Mathematik	Physik
Mathematik verstehen 5 Malle, Woschitz, Koth, Salzger (Malle et al., 2010)	Big Bang Physik 5 RG Apolin (Apolin, 2007)
Mathematik 5 Götz, Reichel (Hrsg.), Müller, Hanisch (Götz, Reichel, Müller & Hanisch, 2010)	Sexl Physik 5 (Sexl et al., 2012)

Ich untersuche die Mathematikschulbücher auf physikalische Aufgabenstellungen und die Physikschulbücher auf mathematische Aufgaben bezüglich der Mechanik.

Zur Mechanik zählen Paul A. Tipler und Gene Mosca in „Physik für Wissenschaftler und Ingenieure“ folgende Themenbereiche:

- Eindimensionale Bewegungen – Geschwindigkeit, Beschleunigung, Gleichförmig beschleunigte Bewegung,
- Bewegung in zwei und drei Dimensionen – Schräger Wurf, Kreisbewegung,
- Newton'sche Axiome – Erstes Axiom, Kraft und Masse, Zweites Axiom, Gravitationskraft und Gewicht, Feder, Kräftediagramm, Drittes Axiom,
- Anwendung der Newton'schen Axiome – Reibung, Widerstand, Krummlinige Bewegungen, Trägheits- oder Scheinkräfte, Massenmittelpunkt,
- Arbeit und kinetische Energie,
- Energieerhaltung,
- Impuls,
- Drehbewegungen,
- Drehimpuls,

- Die spezielle Relativitätstheorie,
- Gravitation,
- Statisches Gleichgewicht und Elastizität und
- Fluide.

In „Sexl Physik 5“ ist die Mechanik folgendermaßen unterteilt:

- Die Bewegung – Grundgrößen Zeit und Länge, Geschwindigkeit und Beschleunigung
- Die Kraft – Die Newton'schen Gesetze, Drittes Newton'sches Gesetz: Das allgemeine Wechselwirkungsgesetz, Der Einfluss der Reibung, Spezielle Bewegungsformen, Druck in Flüssigkeiten und Gasen
- Die Erhaltungssätze – Energie, Impuls, Drehimpuls.

(Sexl, 2012, S. 3)

Martin Apolin nimmt in seinem Schulbuch „Big Bang 5“ nachfolgende Gliederung für die Mechanik vor:

- Gedachte Singularität – Körperschwerpunkt, Gleichgewicht, Stabilität, Auftrieb
- Geradlinige Bewegungen – Gleichförmige Bewegung, Geschwindigkeit, Gleichmäßig beschleunigte Bewegung, Ungleichmäßig beschleunigte Bewegung, Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit
- Zusammengesetzte Bewegungen – Schiefer Wurf, Horizontaler Wurf
- Newton mal drei – Masse, Trägheitsgesetz, Kräfte
- Arbeit und Energie
- Impuls
- Rotation

(Apolin, 2007, S. 2)

i. PHYSIKALISCHE AUFGABEN IN MATHEMATIK-SCHULBÜCHERN

a) MATHEMATIK VERSTEHEN 5

Zuerst widme ich mich dem Schulbuch „Mathematik verstehen 5“ von Malle G., Koth, Woschitz, Malle S., Salzger und Ulovec.

Den ersten Kontakt mit der Physik haben Schülerinnen und Schüler bei der im Anschluss stehenden Aufgabe 1.74, welche sich im ersten Kapitel „Einige Wiederholungen aus der Unterstufe“ zu „Umformen von Gleichungen und Termen“ befindet.

1.74 Die folgenden Formeln kommen alle in der Physik vor. Drücke die gesuchte Größe durch die anderen Größen aus!

a) $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	$R = ?$	e) $F = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$	$Q_1 = ?$	i) $\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$	$U_1 = ?$
b) $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	$m_1 = ?$	f) $\alpha = \frac{1}{G} \cdot \frac{F}{A}$	$F = ?$	j) $E = G \cdot h + \frac{mv^2}{2}$	$v = ?$
c) $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$	$t = ?$	g) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}}$	$D = ?$	k) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$L = ?$
d) $q = \frac{m-k}{m-1} \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)$	$T_1 = ?$	h) $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgL}{l}}$	$l = ?$	l) $c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}$	$\mu = ?$

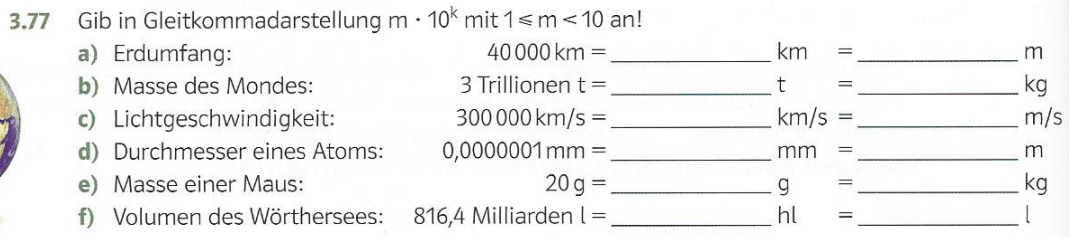
Abbildung 1: (Malle et al., 2010, S. 18)

Zur Mechanik passende Formeln finden sich in den Aufgaben

- b) welche das Newton'sche Gravitationsgesetz beschreibt,
- c) welche den Weg in Abhängigkeit von der Beschleunigung und der Zeit zum Quadrat angibt,
- j) diese Formel drückt eine Energie aus.

Alle anderen Formeln gehören zu anderen Teilgebieten der Physik wie Thermodynamik, Schwingungen und Wellen und Elektrodynamik. Bei dieser Aufgabe wird jedoch noch kein so intensiver Zusammenhang zwischen den beiden Fächern hergestellt. Die Heranwachsenden sollen lediglich Formeln umformen. Sehr gut an dieser Aufgabe ist, dass die Jugendlichen lernen, dass auch andere Buchstaben als x, y und z existieren, wie auch bei Himmeler und Brantner beschrieben.

Im Kapitel 3 „Zahlen“ mit dem Unterkapitel „Zehnerpotenzen und Gleitkommadarstellung“ findet man weitere Aufgaben mit physikalischem Inhalt.



In Aufgabe 3.77 ist nach der Gleitkommadarstellung gefragt, wobei die Unterpunkte a) bis d) eine physikalische Note haben; d) fällt nicht mehr unter das Thema Mechanik.

3.80 Die moderne Technik ist in der Lage, so kleine Bauteile zu erzeugen, dass deren Größenordnung bis in den Nanobereich reicht (Nanotechnologie). Im Folgenden sind einige Längen aus der Nanotechnologie angegeben. Schreibe diese in Meter an!

- a) Durchmesser von Kohlenstoffröhrchen (zum Einsatz in Computern, die ähnlich wie ein Gehirn aufgebaut sind): $5\text{ }\mu\text{m}$
- b) Durchmesser eines Durchflusssensors zur Messung kleinster Flüssigkeitsmengen: 1 mm
- c) Porengröße eines Mikrosiebs aus Keramik (zur Filterung bestimmter Substanzen aus dem Blutserum): $10\text{--}20\text{ nm}$
- d) Durchmesser von Öltröpfchen (in medizinischen Wirkstoffen, die über eine Kontaktlinse an die Hornhaut abgegeben werden): 50 nm
- e) Größe eines DNA-Moleküls (in einem im Test befindlichen DNA-Computer): 7 nm
- f) Abstand zweier Röhrchen in einem Nano-Oszillator: 340 pm
- g) Abstand zweier Drähte in einem magnetischen Sensor: 40 nm
Durchmesser dieser Drähte: $0,1\text{ mm}$
- h) Auflösung eines Mikro-Computertomographen: $25\text{ }\mu\text{m}$
- i) Dicke von Metallschichten (für die Beobachtung von Molekülschwingungen): $5\text{--}20\text{ nm}$

Bei 3.82 könnte man a) bis c) in Verbindung mit Mechanik bringen, zum Beispiel beim Gravitationsgesetz.

Abbildung 4: (Malle et al., 2010, S. 55)

Nun sind wir bei Kapitel 4 „Quadratische Gleichungen“ als Unterkapitel „Lösungsformeln für quadratische Gleichungen“ angelangt. Eine Aufgabe zum lotrechten Wurf wird zu den quadratischen Gleichungen gestellt, siehe Abbildung 5.

- 4.36** Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit 50 m/s lotrecht nach oben geschossen, so ist seine Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt t gegeben durch:

$$h(t) = 50t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad (h(t) \text{ in Meter, } t \text{ in Sekunden, } g \approx 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ ist die Erdbeschleunigung})$$

Zu welchen Zeitpunkten ist der Körper in einer Höhe von **a)** 10 m, **b)** 20 m, **c)** 25 m über dem Boden?
Wann schlägt er wieder auf dem Boden auf?

Abbildung 5: (Malle et al., 2010, S. 73)

In demselben Kapitel, aber unter „Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenz“ steht die nachstehende Aufgabe, welche das Gravitationsgesetz von Newton involviert.

- 4.110** Ein Raumfahrzeug der Masse m , das auf direktem Weg von der Erde (Masse M_E) zum Mond (Masse M_M) fliegt und dabei eine Strecke der Länge $d = 384\,000 \text{ km}$ zurücklegt, passiert auf seiner Reise einen so genannten Librationspunkt, in dem die Anziehungskraft der Erde und des Mondes gleich groß sind. Nach wie viel Kilometer Flug befindet sich das Raumfahrzeug im Librationspunkt, wenn man weiß, dass die Erde etwa die 81fache Mondmasse besitzt?
Hinweis: In der Entfernung r des Raumfahrzeugs von der Erde gilt:

$$\text{Anziehungskraft Erde-Raumfahrzeug} = F_E = G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r^2}$$

$$\text{Anziehungskraft Mond-Raumfahrzeug} = F_M = G \cdot \frac{m \cdot M_M}{(d-r)^2}$$



Abbildung 6: (Malle et al., 2010, S. 81)

Die Aufgaben 5.01, 5.09 und 5.10 der Abbildung 7 und 8 könnte man der Arbeit und Energie zuordnen, genauer der schiefen Ebene. Diese befinden sich unter dem Kapitel Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken, mit dem Unterkapitel Sinus, Cosinus und Tangens.

- 5.01** Ein Schrägaufzug steigt unter einem bestimmten Winkel α wie **a)** in Abb. 5.1, **b)** Abb. 5.2 an (Längenangaben in Meter). Gib Formeln an, mit denen man zu jeder vom Wagen zurückgelegten Hypotenusenlänge H die dazugehörige Gegenkathetenlänge G (Höhenunterschied) und Ankathetenlänge A (Horizontaldistanz) berechnen kann! Berechne mit diesen Formeln G und A für $H = 60$ m!

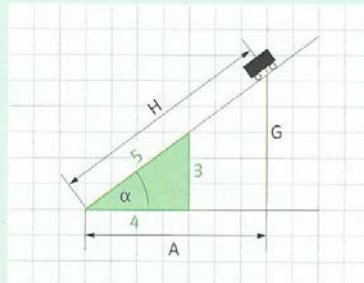


Abb. 5.1

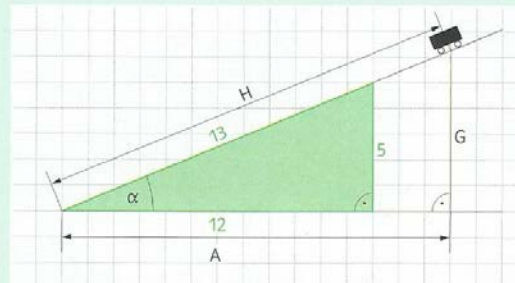


Abb. 5.2

Lösung: Aufgrund ähnlicher Dreiecke gilt:

a) $\frac{G}{H} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow G = 0,6 \cdot H$

$\frac{A}{H} = \frac{4}{5} = 0,8 \Rightarrow A = 0,8 \cdot H$

Für $H = 60$ ergibt sich:

$G = 36$ m, $A = 48$ m

b) $\frac{G}{H} = \frac{5}{13} \approx 0,38 \Rightarrow G \approx 0,38 \cdot H$

$\frac{A}{H} = \frac{12}{13} \approx 0,92 \Rightarrow A \approx 0,92 \cdot H$

Für $H = 60$ ergibt sich:

$G \approx 23$ m, $A \approx 55$ m

Abbildung 7 (Malle et al., 2010, S. 82)

- 5.09** Ein Wagen wird längs einer unter 23° ansteigenden Rampe nach oben geschoben. Welche horizontale bzw. vertikale Entfernung hat der Wagen zurückgelegt, nachdem er **a)** 2 m, **b)** 3 m, **c)** 4 m, **d)** 5 m geschoben worden ist?
- 5.10** Ein Ball rollt eine unter 7° abfallende Straße hinunter. Welche horizontale bzw. vertikale Entfernung hat der Ball zurückgelegt, wenn er **a)** 5 m, **b)** 10 m, **c)** 15 m, **d)** 20 m gerollt ist?

Abbildung 8: (Malle et al., 2010, S. 84)

Diese beiden Aufgaben lassen sich hervorragend zu einer Aufgabe erweitern, bei der man die Geschwindigkeit berechnen oder mit der schiefen Ebene arbeiten soll.

Nun sind wir bei dem Unterkapitel „Anwendungen von Sinus, Cosinus und Tangens“ angelangt. Die nachfolgende Übung 5.22 kann eingesetzt werden bei der Durchschnittsgeschwindigkeit bzw. bei der Geschwindigkeit und deren Umrechnungen. Punkt 5.23 kann ebenfalls bei Umrechnungen verwendet werden oder eine Erweiterung bezüglich der Geschwindigkeit findet statt.



- 5.22** Ein Passagierflugzeug erreicht nach einem Steigflug von 6 min mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 550 km/h seine Reiseflughöhe von 12 000 m.
- 1) Wie lang ist die Strecke, die das Flugzeug im Steigflug zurücklegt, und wie groß ist dabei der Steigungswinkel?
 - 2) Wann und in welcher Höhe überfliegt das Flugzeug eine Flugleitstelle, die 30 km vom Abflughafen entfernt ist?
- 5.23** 1) Beim Sinkflug eines Verkehrsflugzeuges beträgt der Sinkwinkel in der Regel 3° . Ein Flugzeug mit der Reishöhe 8 700 m soll am Flughafen Graz-Thalerhof landen. In welcher Horizontalentfernung zum Landeort muss der Sinkflug beginnen?
- 2) Piloten schätzen den Beginn eines 3° -Sinkfluges nach folgender Faustregel ab: Horizontalentfernung zum Landeort (in NM) = Reiseflughöhe (in ft) durch 1000 mal 3. Dabei bedeutet: 1 NM = 1 Nautische Meile = 1852 m; 1 ft = 1 foot = 30,48 cm.
- Berechne die Horizontalentfernung zum Landeort nach dieser Faustregel und gib an, um wie viel Prozent sich das Ergebnis von dem unter 1) erhaltenen Ergebnis unterscheidet!

Abbildung 9: (Malle et al., 2010, S. 86)

Noch im selben Unterkapitel lässt sich aus Abbildung 10 gezeigte Fragestellung entnehmen. Diese kann man wiederum der Umwandlung von Geschwindigkeiten zuordnen.

- 5.67** Ein geradlinig verlaufender Schlepplift befördert Schifahrer mit einer Geschwindigkeit von 2,8 m/s in 5 min aus 980 m Seehöhe auf 1230 m Seehöhe. Wie lang ist der Lift, wie groß sind die Steigung und der Steigungswinkel der Lifttrasse?

Abbildung 10: (Malle et al., 2010, S. 93)

Weitere Zusammenhänge mit der Mechanik und zwar mit der Umrechnung von Geschwindigkeiten finden sich in Aufgabe 5.74, 5.75, 5.76 und 5.77.

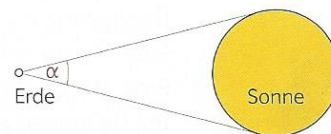
- 5.74** Ein mit 250 km/h fliegender Flugzeug steuert einen Landeplatz an. Seine Flugrichtung bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 9° . Um wie viele Meter sinkt es pro Sekunde?
- 5.75** Ein mit 450 km/h fliegender Flugzeug befindet sich im Landeanflug mit einem Tiefenwinkel $\alpha = 12^\circ$. Wie viel an Höhe verliert es pro Minute?
- 5.76** Von der Spitze eines Berges sieht man ein Dorf unter einem Tiefenwinkel von $10,23^\circ$ und nimmt das Aufblitzen des Mündungsfeuers eines Böllers, der im Dorf abgefeuert wird, um 12 s früher wahr als den Explosionsknall. Wie hoch liegt die Bergspitze über dem Dorf, wenn man die Schallgeschwindigkeit mit 333 m/s annimmt?
- 5.77** Man beobachtet das Aufleuchten eines Gewitterblitzes unter einem Höhenwinkel von 35° . Den gleichzeitig entstehenden Donner hört man 15 s später (Schallgeschwindigkeit 333 m/s). In welcher Höhe und in welcher Horizontalentfernung zum Beobachter ist der Blitz entstanden?

Abbildung 11: (Malle et al., 2010, S. 94)

Weiterhin im selben Unterkapitel „Anwendungen von Sinus, Cosinus und Tangens“ werden unter „Geographische und astronomische Anwendungen“ nachfolgende Aufgaben präsentiert:

- 5.85** Die geografische Breite Wiens beträgt $\varphi \approx 48,2^\circ$.
- 1) Welchen Abstand hat Wien von der Erdachse?
 - 2) Welchen Weg legt Wien bei einer Erdumdrehung zurück?
 - 3) Mit welcher Geschwindigkeit dreht sich Wien um die Erdachse?
(Erdradius $R \approx 6370 \text{ km}$; Dauer einer Erdumdrehung $\approx 23,93 \text{ h}$)

- 5.86** An einem bestimmten Tag des Jahres ist ein Beobachter auf der Erde $149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ vom Sonnenmittelpunkt entfernt und sieht die Sonne unter dem Sehwinkel $\alpha \approx 0,517^\circ$. Wie groß ist der Durchmesser der Sonne?



- 5.87** Einem Beobachter auf der Erdoberfläche erscheint der Mond unter einem Sehwinkel von $0,51^\circ$. Der Monddurchmesser beträgt 3476 km . Berechne die Entfernung des Beobachters vom Mondmittelpunkt!

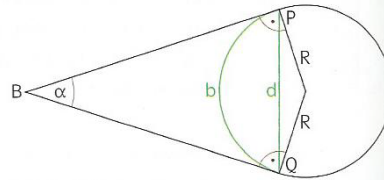
Abbildung 12: (Malle et al., 2010, S. 95)

5.85 bis 5.87 könnte man bei der Gravitationskraft einsetzen, da hier auch ein wenig Astronomie besprochen wird. Darüber hinaus kann man die erste Nummer ab 2) auch wieder bei Geschwindigkeiten verwenden.

Die anschließenden Übungen sind ebenfalls für die Astronomie, beziehungsweise beim Gravitationsgesetz, geeignet. Bei diesen Aufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, dass die Astronomie eng mit der Geometrie zusammenhängt.

- 5.88** Einem Beobachter B auf der Erde erscheint der Vollmond unter dem Sehwinkel $\alpha = 0,51^\circ$. Der Monddurchmesser beträgt 3 476 km. Wie groß ist die Entfernung zweier Punkte P und Q, die einander am Umriss des Vollmondes gegenüberliegen, wenn man **1**) direkt durch den Mondkörper, **2**) entlang der Mondoberfläche misst?

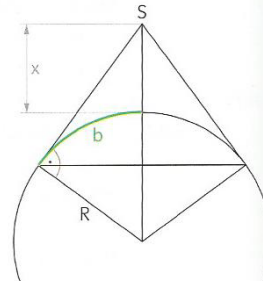
Hinweis: Länge eines Kreisbogens b mit dem Zentriwinkel φ : $b = \frac{r\pi\varphi}{180}$



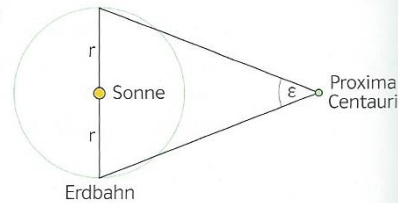
- 5.89** Die Spitze S eines Berges liegt x km über dem Meer. Wie groß ist theoretisch die maximale Fernsicht b von der Bergspitze S? Dabei nehmen wir die Erde als ideale Kugel mit dem Radius $R \approx 6370$ km an und messen b entlang der Erdoberfläche. Die atmosphärische Strahlenbrechung wird vernachlässigt. Berechne b für:

- a) $x = 3,798$ km (Großglockner)
- b) $x = 4,808$ km (Mont Blanc)
- c) $x = 8,848$ km (Mount Everest)

Hinweis: Länge eines Kreisbogens b mit dem Zentriwinkel φ : $b = \frac{r\pi\varphi}{180}$



- 5.90** Die Erde bewegt sich annähernd auf einer Kreisbahn mit dem mittleren Radius $r \approx 1,496 \cdot 10^{11}$ m um die Sonne. Astronomische Messungen ergeben, dass sich im Lauf eines halben Jahres die Blickrichtung zu dem uns nächstgelegenen Fixstern Proxima Centauri um den Winkel $\varepsilon \approx 0,0004289^\circ$ ändert. Wie viele Lichtjahre ist Proxima Centauri von der Sonne entfernt? (1 Lichtjahr = 1 Lj ist die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt; die Lichtgeschwindigkeit beträgt ungefähr $3 \cdot 10^8$ m/s).



- 5.91** Astronomen verwenden als Maßeinheit für große Entfernungen im Weltall auch die Parallaxensekunde (Parsec). 1 Parsec = 1 pc ist die Entfernung, aus der der mittlere Erdbahnradius $r \approx 1,496 \cdot 10^{11}$ m unter einem Winkel von 1 Winkelsekunde ($= 1'' = \frac{1}{3600}$ Grad) erscheint. Gib 1 pc **a**) in Kilometer, **b**) in Lichtjahren an! (1 Lichtjahr = 1 Lj ist die Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt; die Lichtgeschwindigkeit beträgt ungefähr $3 \cdot 10^8$ m/s).

- 5.92** Der antike Astronom Aristarch von Samos (3. Jh. v. Chr.) stellte folgende Überlegung an, um die Entfernung Erde–Sonne mit der Entfernung Erde–Mond vergleichen zu können: Bei Halbmond bilden Erde, Mond und Sonne ein rechtwinkeliges Dreieck (siehe Abbildung).

Aufgrund seiner Messungen schätzte Aristarch den Winkel ε auf mindestens 87° .

- 1) Wievielfach ist nach Aristarch die Erde weiter von der Sonne als vom Mond entfernt?
- 2) Tatsächlich ist die Erde etwa 400-mal so weit von der Sonne entfernt wie vom Mond. Wie lautet der korrekte Wert für den Winkel ε ?

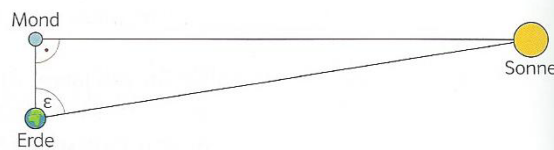


Abbildung 13: (Malle et al., 2010, S. 96)

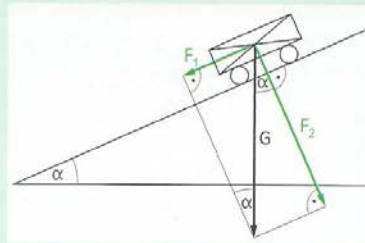
In diesem Buch fahren die Autoren mit „Kräfte und Geschwindigkeiten“ fort. Dazu bieten sie das anschließende Material an. 5.93 stellt eine Aufgabe mit Lösung dar, welche sich in das physikalische Kapitel Kräfte, genauer Gewichtskraft, einordnen lässt. 5.94 bis 5.98 inhärieren zu den Kräften. 5.99 und 5.100 sind Exempel für Geschwindigkeitsberechnungen. 5.101 ist bei der Bewegung auf der Kreisbahn, speziell bei der Zentripetalkraft, einsatzfähig.

- 5.93** Ein Schrägaufzug steigt unter $\alpha = 24^\circ$ an. Der Wagen hat das Gewicht $G = 500 \text{ N}$. Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Gleises hinuntergezogen und mit welcher Kraft wird er auf das Gleis gedrückt?

Lösung:

$$\sin \alpha = \frac{F_1}{G} \Rightarrow F_1 = G \cdot \sin \alpha = 500 \cdot \sin 24^\circ \approx 203 \text{ (N)}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_2}{G} \Rightarrow F_2 = G \cdot \cos \alpha = 500 \cdot \cos 24^\circ \approx 457 \text{ (N)}$$



Aufgaben

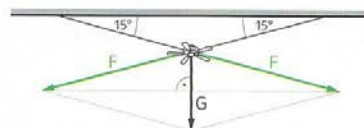
Grundkompetenzen

- 5.94** Eine Kugel der Masse m befindet sich auf einer Rampe, die unter dem Winkel α ansteigt. Mit welcher Kraft F_1 wird die Kugel längs der Rampe hinuntergezogen und mit welcher Kraft F_2 wird sie gegen die Rampe gedrückt?
- a)** $\alpha = 10^\circ$, $m = 2 \text{ kg}$ **b)** $\alpha = 30^\circ$, $m = 0,5 \text{ kg}$
- 5.95** Ein Auto mit der Masse 1750 kg parkt auf einer schrägen Straße, die um $7,6^\circ$ ansteigt. Mit welcher Kraft wird das Auto die Straße hinuntergezogen?
- 5.96** Ein Schrägaufzug steigt um $\alpha = 25^\circ$ an. Wievielfach stärker würde der Wagen längs des Gleises hinuntergezogen werden, wenn der Schrägaufzug um 5° steiler wäre?
- 5.97** Der Wagen eines um 27° ansteigenden Schrägaufzugs hängt an einem Seil, das eine maximale Zugkraft von 5000 N aushält. Wie schwer darf der Wagen samt Ladung höchstens sein?

Aufgaben

Vertiefung

- 5.98** Eine Deckenlampe mit dem Gewicht $G = 80 \text{ N}$ hängt an zwei Drähten, die jeweils einen Winkel von 15° mit der Decke bilden. Ermittle die Zugkraft F an jedem der beiden Drähte!
- Hinweis:** Die Zugkräfte spannen einen Rhombus auf.



- 5.99** Ein Flugzeug fliegt mit $u \text{ km/h}$ nach Norden. Es weht Westwind mit $v \text{ m/s}$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit über Grund bewegt sich das Flugzeug?
- a)** $u = 600 \text{ km/h}$, $v = 20 \text{ m/s}$ **b)** $u = 1000 \text{ km/h}$, $v = 17 \text{ m/s}$
- 5.100** Ein Pilot möchte sein Flugzeug mit $u \text{ km/h}$ nach Norden fliegen lassen. Es weht Ostwind mit einer Geschwindigkeit von $v \text{ m/s}$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit muss der Pilot das Flugzeug steuern?
- a)** $u = 650 \text{ km/h}$, $v = 10 \text{ m/s}$ **b)** $u = 910 \text{ km/h}$, $v = 19,3 \text{ m/s}$
- 5.101** Das Maß α des Neigungswinkels eines Motorradfahrers in einer Kurve ist durch das Gewicht $G = mg$ und die durch die Reibung verursachte Zentripetalkraft $F = \frac{mv^2}{r}$ bestimmt. Dabei ist m die Masse (in kg), g die Erdbeschleunigung ($\approx 9,81 \text{ m/s}^2$), v die Geschwindigkeit des Motorradfahrers (in m/s) und r der Kurvenradius (in m). Zeige, dass α unabhängig von der Masse m ist! Unter welchem Winkel α muss sich das Motorrad bei den folgenden Angaben neigen?
- a)** $v = 20 \text{ km/h}$, $r = 70 \text{ m}$ **b)** $v = 90 \text{ km/h}$, $r = 85 \text{ m}$

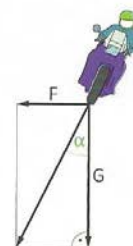


Abbildung 14: (Malle et al., 2010, S. 97)

Unter „5.4 Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“ findet man noch eine Umrechnung zu Geschwindigkeiten bei einer Gondelbahnfahrt, siehe Abbildung 15.

5.121 Die Fahrt mit einer Gondelbahn von der Tal- zur Bergstation dauert 15,5 min bei einer mittleren Geschwindigkeit von 5 m/s. Dabei bewegen sich die Gondeln annähernd längs einer Geraden, die um $22,5^\circ$ gegen die Horizontale geneigt ist. Berechne den Höhenunterschied, den man bei einer Fahrt von der Tal- zur Bergstation überwindet!

Abbildung 15: (Malle et al., 2010, S. 99)

Nun sind wir bei Kapitel „6 Berechnungen in beliebigen Dreiecken“ angelangt. Unter „Der Sinussatz“ ist bei 6.63 nach der Geschwindigkeit des Windes gefragt, das heißt dies fällt unter Geschwindigkeitsberechnung in der Physik. Hier wurde auch schon die passende Skizze des Passagierflugzeugs mit eingezeichneter Geschwindigkeit und Auslenkung in Grad, aufgrund des Ostwindes, dargestellt.

6.63 Auf der Reiseflughöhe angelangt gibt der Kapitän eines Passagierflugzeugs dem Autopiloten folgende Daten ein:
Kurs: S 2° O, Eigengeschwindigkeit: 850 km/h.
Aufgrund eines Ostwindes fliegt die Maschine tatsächlich in Richtung S 1° W. Welche Geschwindigkeit hat der Wind?

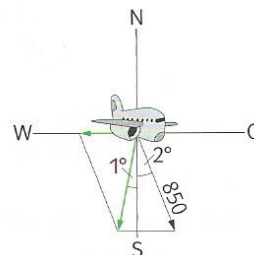


Abbildung 16: (Malle et al., 2010, S. 113)

Eine ähnliche darauffolgende Aufgabe ist 6.65. Hier ist wieder ein Flugzeug gegeben mit konstanter Geschwindigkeit. Die physikalische Zuordnung ist abermals Berechnungen mit der Geschwindigkeit.

6.65 Ein Flugzeug fliegt bei konstantem Kurs mit einer konstanten Geschwindigkeit von 900 km/h und peilt im Abstand von 1 min dasselbe Funkfeuer an. Der Winkel zwischen der Flugrichtung und dem Funkstrahl beträgt bei der ersten Peilung $12,4^\circ$ und bei der zweiten Peilung $27,9^\circ$.
1) Wie weit ist das Flugzeug bei der ersten Peilung vom Funkfeuer entfernt?
2) In welchem (kürzesten) Abstand passiert das Flugzeug das Funkfeuer?

Abbildung 17: (Malle et al., 2010, S. 114)

Im Anschluss folgt „Der Cosinussatz“, wo die Jugendlichen ihr Wissen an 6.91 und 6.92 überprüfen können, erneut mit dem physikalischen Gebiet der Geschwindigkeit und deren Berechnungen.

- 6.91** Ein Wanderer bewegt sich mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 3,2 km/h in Richtung N 31° O. Nach 3,5 h ändert er seine Richtung auf N 17° O und geht um 0,1 km/h langsamer. Zwei Stunden nach der Richtungsänderung erreicht er sein Ziel. Wie lang ist die direkte Verbindungsline (Luftlinie) zwischen Start- und Zielpunkt?
- 6.92** Zwei Flugzeuge starten gleichzeitig von demselben Flughafen. Das eine fliegt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 800 km/h in Richtung N 10° W, das andere mit einer mittleren Geschwindigkeit von 950 km/h in Richtung N 65° O. Wie groß ist die direkte Entfernung der beiden Flugzeuge nach 20-minütigem Flug?

Abbildung 18: (Malle et al., 2010, S. 118)

In dem Kapitel schließt das Schulbuch mit „Vertiefende Aufgaben, die den Sinussatz oder Cosinussatz erfordern“ ab. Hierzu können die Heranwachsenden an 6.107, 6.108 und 6.109 üben. Zu den physikalischen Themengebieten kann man 6.107 und 6.108 den Kräften zuordnen und 6.109 nochmals den Berechnungen zu der Geschwindigkeit.

- 6.107** Zwei Kräfte $F_1 = 190 \text{ N}$ und $F_2 = 250 \text{ N}$ schließen miteinander einen Winkel von 80,5° ein. Wie groß ist die Resultierende dieser beiden Kräfte und welche Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein?
- 6.108** Zwei Kräfte $F_1 = 110 \text{ N}$ und $F_2 = 80 \text{ N}$ schließen miteinander einen Winkel von 110,8° ein. Wie groß ist die Kraft, die den beiden Kräften das Gleichgewicht hält und welche Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein?

Abbildung 19: (Malle et al., 2010, S. 120)

- 6.109** Ein mit 600 km/h fliegender Flugzeug trifft um 8 Uhr auf eine Schlechtwetterfront, die es umfliegen muss. Es fliegt zuerst in Richtung S 72° O bis 8.30 Uhr, dann in Richtung N 21° O bis 9.15 Uhr und gelangt dann auf den vorgesehenen Kurs zurück. Berechne den Mehrweg und den Zeitverlust durch das Umfliegen der Schlechtwetterfront!

Abbildung 20: (Malle et al., 2010, S. 121)

Gegenwärtig sind wir bei dem Kapitel „Reelle Funktionen“ angelangt. In dem zugehörigen Unterkapitel sollen die Schülerinnen und Schüler lernen Funktionsgraphen zu zeichnen und zu interpretieren. Der physikalische Zusammenhang tritt in dem Abschnitt „Zeit-Ort-Funktionen und Zeit-Geschwindigkeit-Funktionen“ auf. Das bedeutet, dass ein Abschnitt nur physikalische Aufgaben behandelt, und sich dieser über drei Seiten zieht. Die Einführung erfolgt mittels eines durchgerechneten Beispiels, wobei die Angabe von einem Auto handelt, welches auf der Autobahn fährt. Dann soll man einen Funktionsgraphen zur angegebenen Tabelle zeichnen, welcher auf der rechten Seite vorgezeichnet ist. Beim zweiten Punkt muss man im gezeichneten Funktionsgraphen ablesen, an welchen Ort sich der Fahrer

nach $2,5\text{ h}$ befindet. Drittens wird nach dem Zeitpunkt gefragt, wann sich das Auto am Ort 300 befindet. Siehe Abbildung 21.

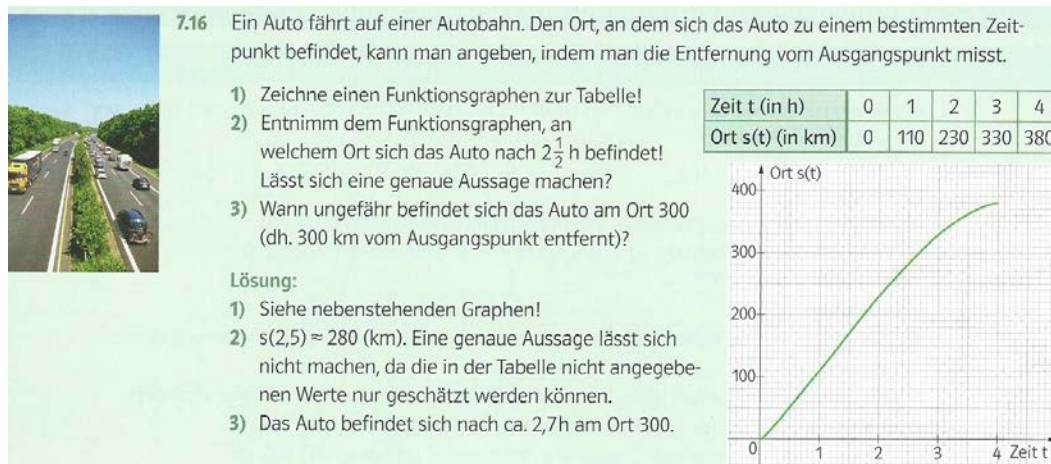


Abbildung 21: (Malle et al., 2010, S. 132)

Anschließend folgt eine Erklärung für die Zeit-Ort Funktion, bezogen auf 7.16.

In der letzten Aufgabe haben wir eine Funktion s betrachtet, die jedem Zeitpunkt t einen Ort $s(t)$ zuordnet. Eine solche Funktion bezeichnet man als **Zeit-Ort-Funktion**.

Abbildung 22: (Malle et al., 2010, S. 132)

Hinterher erläutern die Autoren den Unterschied zwischen Zeitpunkt und Zeitintervall wie auch den Unterschied zwischen Ort und zurückgelegtem Weg. Die Erklärung erfolgt mittels gezeichneten Funktionsgraphen.

Beachte den Unterschied zwischen **Zeitpunkt** und **Zeitintervall** sowie zwischen **Ort** und **zurückgelegtem Weg**! Zeitpunkte und Orte entsprechen Stellen auf den Achsen, Zeitintervalle und zurückgelegte Wege entsprechen Strecken auf den Achsen (Abbildung 7.6). In Abb. 7.6 stimmt der Ort mit dem zurückgelegten Weg zahlenmäßig überein, weil sich das Auto stets vom Ausgangspunkt entfernt. In Abb. 7.7 ist dies anders. Das Auto fährt zuerst vorwärts, dann zurück und dann wieder vorwärts. Zu den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 befindet es sich am selben Ort, hat jedoch verschiedene Wege zurückgelegt.

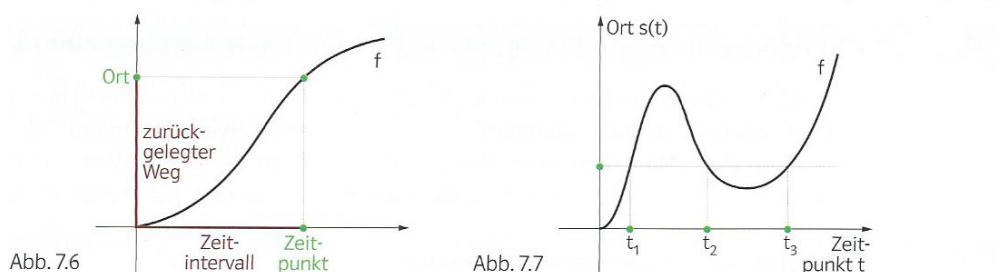
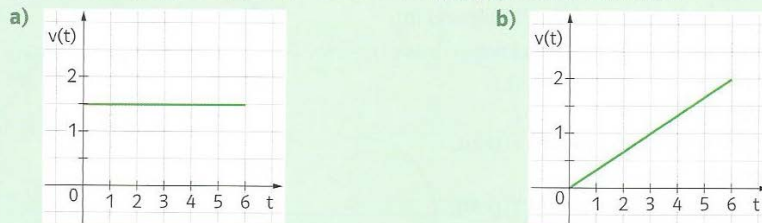


Abbildung 23: (Malle et al., 2010, S. 132)

Im Anschluss liegt die Aufgabe 7.17, mit der zugehörigen Lösung, vor. Dabei sind zwei Graphen angegeben, die die Geschwindigkeit eines Autos zum Zeitpunkt t darstellen. Gefragt wird nach der Bewegung des Autos, siehe Abbildung 24.

7.17 In folgendem Graphen ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Autos zum Zeitpunkt t dargestellt (t in Minuten, $v(t)$ in km/min). Welche Bewegung führt das Auto aus?



Lösung:

- a) Die Geschwindigkeit ist konstant. Das Auto bewegt sich gleichförmig.
b) Die Geschwindigkeit nimmt gleichmäßig zu. Das Auto beschleunigt gleichmäßig.

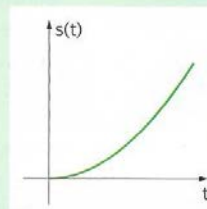
Abbildung 24: (Malle et al., 2010, S. 132)

Daraufhin listen die Autoren häufige Fehler beim Interpretieren von Funktionsgraphen auf. Dazu zeigen sie zwei Funktionsgraphen mit den Fragestellungen, ob das Auto eine Linkskurve fährt und beim zweiten Punkt ob dieses über eine Kuppe oder Mulde fährt. Die Lösungen sind ebenfalls angeführt. Im unten angefügten Text beschreiben sie, dass die Graphen oft als fotografische Abbilder angesehen werden und darin der Fehler liegt.

7.18 Nebenstehend ist die Zeit-Ort-Funktion eines Autos dargestellt. Führt das Auto eine Linkskurve?

Lösung:

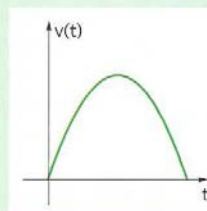
Mit zunehmender Zeit nimmt der zurückgelegte Weg zu und zwar immer stärker. Über den Verlauf der Straße wird aber nichts ausgesagt, auch wenn der Graph eine Ähnlichkeit mit einer Linkskurve hat.



7.19 Nebenstehend ist die Geschwindigkeit v eines Autos in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt. Führt das Auto eher über eine Kuppe oder durch eine Mulde?

Lösung:

Mit zunehmender Zeit nimmt die Geschwindigkeit des Autos zuerst zu und anschließend wieder ab. Das spricht dafür, dass das Auto eher durch eine Mulde fährt, obwohl der Graph eine Ähnlichkeit mit einer Kuppe hat.



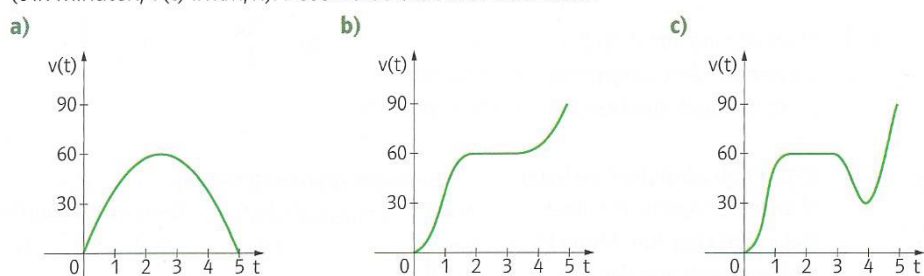
Ein häufiger Fehler beim Interpretieren von Funktionsgraphen besteht darin, dass Funktionsgraphen als fotografische Abbilder von bestimmten Situationen aufgefasst werden (zB der Graph in Aufgabe 7.18 als Linkskurve oder der Graph in Aufgabe 7.19 als Kuppe). Eine Situation wird aber durch einen Funktionsgraphen nicht direkt dargestellt, sondern über einen Zwischenschritt. Die Situation wird zuerst durch eine Menge von Zahlenpaaren beschrieben, diese wird dann in einen Graphen übersetzt:

Situation $\leftrightarrow$ Menge von Zahlenpaaren $\leftrightarrow$ Graph

Abbildung 25: (Malle et al., 2010, S. 133)

Daraufhin stehen den Heranwachsenden ein paar Übungen mit physikalischem Hintergrund zur Verfügung. Das Interpretieren von Funktionsgraphen bezüglich Zeit-Ort-Funktionen und Zeit-Geschwindigkeit-Funktionen, aber auch das Zeichnen solcher Funktionen ist gefragt. In der Mechanik ist das Analysieren und Skizzieren solcher Graphen ebenfalls sehr von Bedeutung.

7.20 In folgendem Graphen ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Autos zum Zeitpunkt t dargestellt (t in Minuten, $v(t)$ in km/h). Beschreibe die Fahrt des Autos!



7.21 Wie könnte die Zeit-Ort-Funktion eines Autos aussehen, die zur folgenden Zeit-Geschwindigkeit-Funktion gehört? Skizziere den Graphen!

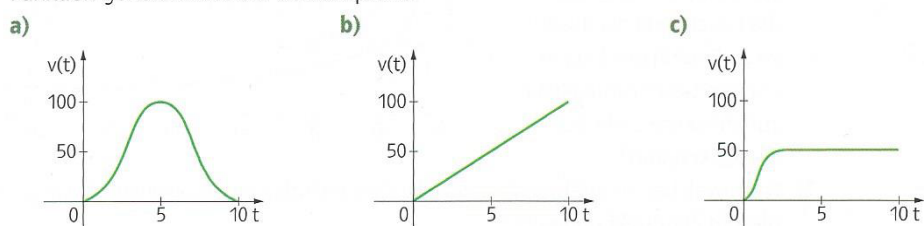


Abbildung 26: (Malle et al., 2010, S. 133)

Bei der Aufgabe 7.22 ist eine Zeit-Ort-Funktion gegeben, wobei die Jugendlichen aus dem Graphen herauslesen sollen wie weit eine Person insgesamt gefahren ist und wie lange diese dazu braucht. Ein weiterer Unterpunkt verlangt nach der Berechnung der durchschnittlichen Geschwindigkeit. Zudem wird gefragt, ob diese Person für die halbe Strecke auch die halbe Zeit braucht. Nach einer bestimmten Kilometerangabe verursacht der Mann fast einen Auffahrunfall, hier ist die Zeitdauer gesucht. Abschließend ist eine Zeitangabe gegeben und die Jugendlichen sollen dem Graphen entnehmen, wie weit und wie lange der Mann noch zu fahren hat.

Punkt 7.23 enthält eine Abbildung mit dem Funktionsgraphen eines Rennautos. Außerdem sind sechs Rundkurse angegeben, wobei die Schülerinnen und Schüler einen dieser Rundkurse der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion zuordnen sollen.

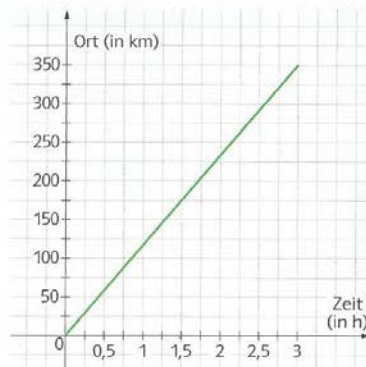
7.24 ist der umgekehrte Weg, hier soll ein Zeit-Geschwindigkeit-Graph gezeichnet werden aufgrund von gegebenen Rundkursen.

Die letzte Übung in dem Abschnitt ist 7.25, welche eine Zeit-Geschwindigkeit-Funktion einer Kapsel angibt, die zum Mond fliegt. Dazu sind Interpretationsaufgaben gegeben.

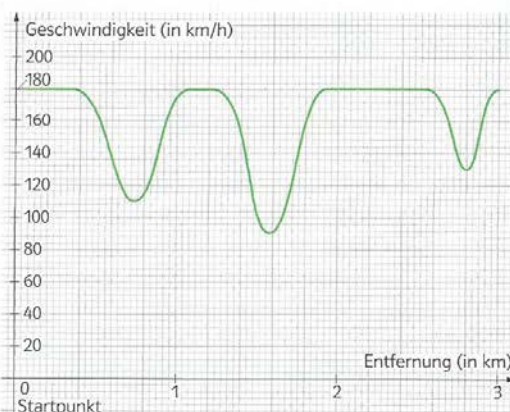
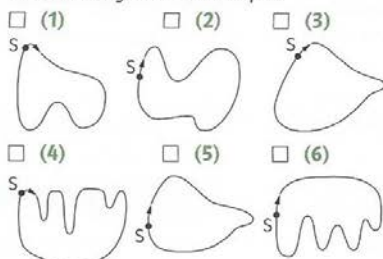
7.22 Herr Adam fährt nachts auf der Autobahn.

Beantworte anhand des Zeit-Ort-Diagramms:

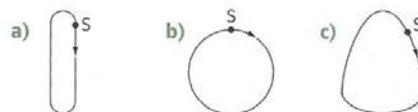
- 1) Wie weit fährt Herr Adam insgesamt und wie lange braucht er dazu?
- 2) Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fährt er?
- 3) Braucht er für die halbe Gesamtstrecke auch die halbe Gesamtzeit?
- 4) Nach 45 Minuten fällt ihm ein, dass er etwas vergessen hat. Er will aber nicht umkehren, wenn er schon weiter als 70 km gefahren ist. Kehrt er um?
- 5) Nach 200 km verursacht er beinahe einen Auffahrunfall. Wann war das?
- 6) Nach 2 h 15 min kommt ihm die Fahrt schon recht lange vor. Wie weit hat er noch zu fahren und wie lange braucht er dazu?



7.23 Nebstehend ist die Geschwindigkeit eines Rennautos in Abhängigkeit von der Entfernung auf einem 3 km langen Rundkurs mit dem Startpunkt S dargestellt. Zu welchem der folgenden Rundkurse gehört der Graph?



7.24 (Fortsetzung von 7.23) Zeichne einen passenden Zeit-Geschwindigkeit-Graphen zu folgendem Rundkurs mit dem Startpunkt S!



7.25 Der Graph zeigt die Geschwindigkeit der Apollo-11-Kapsel bei ihrem Flug zum Mond in Abhängigkeit von der Zeit.

- 1) Beschreibe den Verlauf der Geschwindigkeit in Worten! Wie lassen sich die Geschwindigkeitsspitze zu Beginn des Fluges und die Geschwindigkeitszunahme am Ende des Fluges erklären?
- 2) Nach welcher ungefähren Zeit war die Geschwindigkeit am kleinsten? Wie groß war sie zu diesem Zeitpunkt ungefähr?

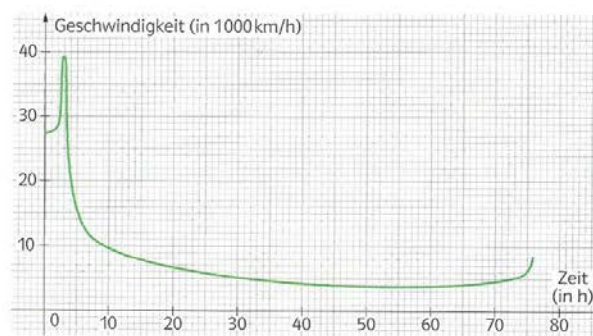


Abbildung 27: (Malle et al., 2010, S. 134)

Noch bei den reellen Funktionen, aber unter dem Abschnitt „Der Anhalteweg eines Autos“ können die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen der Mathematik mit dem der Physik kombinieren. Dieser physikalische Input erstreckt sich über eine Seite im Buch. Zuerst erhalten die Kinder eine Einführung, woraus sich der Anhalteweg zusammensetzt, also aus dem Reaktionsweg und dem Bremsvorgang. Anschließend wird die Formel angegeben mit zugehöriger Erklärung.

Der Anhalteweg eines Autos

Der **Anhalteweg** eines Autos setzt sich aus dem **Reaktionsweg** und dem **Bremsweg** zusammen. Der Reaktionsweg ist der Weg, den das Auto in der Reaktionszeit zurücklegt – das ist die Zeit vom Erkennen eines Hindernisses bis zum Beginn der Bremsung. Der Bremsweg ist der Weg, den das Auto vom Beginn der Bremsung bis zum Stillstand zurücklegt. Es gilt näherungsweise:

$$\text{Anhalteweg} = \underbrace{v_0 \cdot \tau}_{\text{Reaktionsweg}} + \underbrace{\frac{v_0^2}{2b}}_{\text{Bremsweg}}$$

Dabei ist v_0 die Ausgangsgeschwindigkeit in m/s, τ die Reaktionszeit in s und b die Bremsverzögerung des Autos in m/s^2 (eine Konstante, die vom Auto und den Straßenverhältnissen abhängt).

In der Fahrschule lernt man meist folgende Näherungsformel für den Anhalteweg kennen:

$$\text{Anhalteweg} = \underbrace{3 \cdot \frac{v_0}{10}}_{\text{Reaktionsweg}} + \underbrace{\left(\frac{v_0}{10}\right)^2}_{\text{Bremsweg}} \quad (v_0 \text{ in km/h, Anhalteweg in m})$$

Abbildung 28: (Malle et al., 2010, S. 140)

Daraufhin folgt eine Aufgabe, siehe Abbildung 29, wobei die Ausgangsgeschwindigkeit umzurechnen ist. Danach sollen die Jugendlichen aus der Grafik für die Ausgangsgeschwindigkeit den Reaktionsweg, Anhalteweg und Bremsweg ablesen. Mit der Fahrschulformel sollen die Heranwachsenden auch Berechnungen durchführen und anschließend Vergleiche ausführen.

- 7.49** In der untenstehenden Grafik sind der Reaktionsweg und der Anhalteweg für ein bestimmtes Auto in Abhängigkeit von der Ausgangsgeschwindigkeit dargestellt.
- 1) Rechne die Ausgangsgeschwindigkeit $v_0 = 90 \text{ km/h}$ in m/s um!
 - 2) Entnimm der Grafik für diese Ausgangsgeschwindigkeit den Reaktionsweg, Anhalteweg und Bremsweg!
 - 3) Welche Reaktionszeit τ wurde der Grafik zugrunde gelegt?
 - 4) Welche Bremsverzögerung b wurde der Grafik zugrunde gelegt?
 - 5) Berechne den Anhalteweg für $v_0 = 90 \text{ km/h}$ nach der Fahrschulformel und vergleiche mit der Grafik!

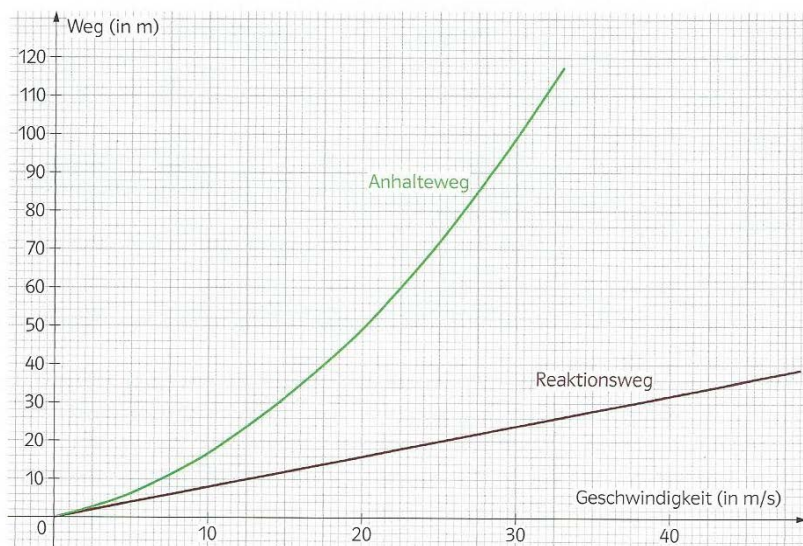
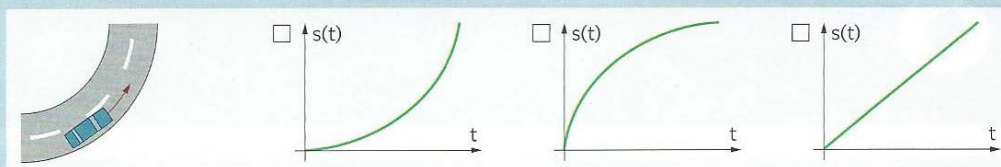


Abbildung 29: (Malle et al., 2010, S. 140)

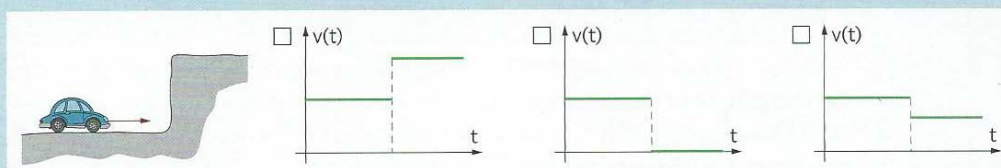
Das Kapitel „Reelle Funktionen“ schließt ebenso mit der „Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“ ab. Hier ist noch eine Nummer 7.69 dabei, die physikalischen Hintergrund besitzt. Die Jugendlichen sollen einer jeweiligen Situation einen Funktionsgraphen zuordnen. Bei 1) ist ein Auto gegeben, welches eine Linkskurve fährt und nun soll die zugehörige Zeit-Ort-Funktion angekreuzt werden. Dazu müssen die Heranwachsenden in der Lage sein Funktionsgraphen zu interpretieren. 2) zeigt ein Auto, welches fährt und vor einer Mauer anhalten muss, wieder soll der zugehörige Graph gefunden werden, dieses Mal eine Zeit-Geschwindigkeitsfunktion. Der Unterpunkt 3) stellt ein Bild mit einem Skifahrer dar, der einen Hang hinunter fährt. Die zugehörige Zeit-Geschwindigkeit-Funktion soll angekreuzt werden.

7.69 Im Folgenden ist jeweils eine Situation bildlich dargestellt. Welcher der danebenstehenden Funktionsgraphen beschreibt die Situation am besten?

- 1) Das Auto bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert $s(t)$ gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt t an.



- 2) Das Auto fährt in die angegebene Richtung. Der Funktionswert $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.



- 3) Der Skifahrer fährt den Hang hinunter. Der Funktionswert $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.

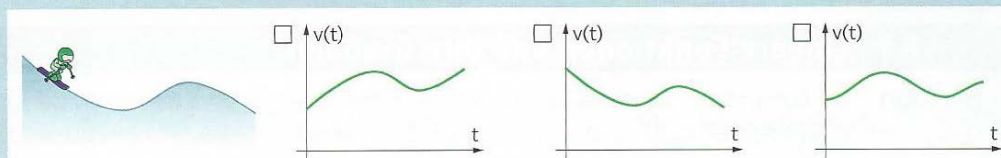


Abbildung 30: (Malle et al., 2010, S. 143)

Jetzt ist Kapitel 8 „Lineare Funktionen“ mit „Anwendungen linearer Funktionen; Interpretationen von k und d “ an der Reihe. An dieser Stelle findet man abermals einen Absatz zur Physik vor, nämlich „Lineare Zeit-Ort-Funktionen“. Begonnen wird mit einem Einführungsbeispiel, bei dem der Lösungsweg exakt vorgegeben ist. Ein Auto, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ vom Ort A 50 km entfernt ist, ist gegeben. Nach der Entfernung des Autos vom Punkt A ist nach $0, 1, 2, 3, 4, t$ Stunden gefragt, wenn sich dieses mit einer Geschwindigkeit von ca. 100 km/h fährt, dazu sollen die Jugendlichen eine Tabelle anfertigen. Danach wird die Termdarstellung der Funktion und zugehörige Zeichnung des Funktionsgraphen verlangt. Zum Schluss soll die Steigung k des Graphen und der Funktionswert $s(0)$ interpretiert werden. Dies kann man Abbildung 31 auf der nächsten Seite entnehmen.

Lineare Zeit-Ort-Funktionen

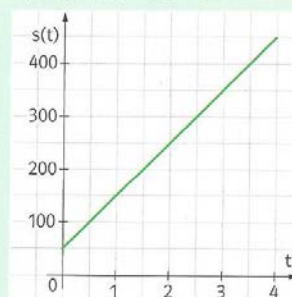
- 8.34 Ein Auto entfernt sich vom Ort A. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist es 50 km von A entfernt.
- 1) In welcher Entfernung von A (in Kilometer) befindet sich das Auto nach 0, 1, 2, 3, 4, t Stunden, wenn es mit ca. 100 km/h fährt? Lege eine Tabelle an!
 - 2) Es sei s die Funktion, die jedem Zeitpunkt t die Entfernung des Autos von A zuordnet (t in Stunden, $s(t)$ in Kilometer). Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen für $0 \leq t \leq 4$!
 - 3) Wie lässt sich die Steigung k des Graphen interpretieren, wie der Funktionswert $s(0)$?

Lösung:

1)

Zeit t	Entfernung von A
0	50
1	$50 + 100 \cdot 1 = 150$
2	$50 + 100 \cdot 2 = 250$
3	$50 + 100 \cdot 3 = 350$
4	$50 + 100 \cdot 4 = 450$
t	$50 + 100 \cdot t$

2) $s(t) = 50 + 100 \cdot t$



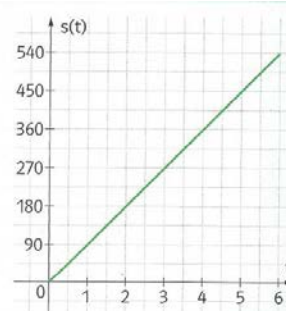
- 3) Die Steigung k gibt die **Wegzunahme pro Stunde** an, ist also gleich der **Geschwindigkeit** des Autos. Der Funktionswert $s(0)$ gibt den **Ort (Entfernung von A) zum Zeitpunkt 0** an.

Abbildung 31: (Malle et al., 2010, S. 152)

In den unten angeführten vier Aufgaben können diese linearen Zeit-Ort-Funktionen geübt werden, ebenfalls wieder passend zum physikalischen Thema „Geschwindigkeit“.

- 8.37 Nebenstehender Graph zeigt die Zeit-Ort-Funktion eines Autos (t in Stunden, $s(t)$ in Kilometer).

- a) Wie schnell fährt das Auto?
- b) Wie viele Kilometer hat das Auto in drei Stunden zurückgelegt?
- c) In welcher Zeit hat das Auto 450 km zurückgelegt?
- d) Wie viele Kilometer hat das Auto im Zeitintervall $[2; 6]$ zurückgelegt?
- e) In welchem Zeitintervall hat das Auto mindestens 90 km, aber höchstens 360 km zurückgelegt?



- 8.38 Gegeben ist die Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto 5t + 20$. Beantworte durch Zeichnung und Rechnung:
- 1) Wo befindet sich der Körper für $2,9 \leq t \leq 3,1$?
 - 2) Wann gilt $95 \leq s(t) \leq 105$?
- 8.39 Gegeben sei die Zeit-Ort-Funktion s eines Körpers mit $s(t) = 3t + 15$. Beantworte durch Rechnung:
- a) Wo befindet sich der Körper im Zeitintervall $[1; 3]$?
 - b) Wann befindet sich der Körper im Ortsintervall $[27; 48]$?
- 8.40 Ein Körper bewege sich gemäß der Zeit-Ort-Funktion s mit $s(t) = k \cdot t + d$ ($k, d \in \mathbb{R}^+$). Kreuze an!
- a) Während des Zeitintervalls $[t_1; t_2]$ befindet sich der Körper im Ortsintervall

☐ $[k \cdot t_1; k \cdot t_2]$	☐ $[k \cdot t_2 - d; k \cdot t_1 - d]$	☐ $[k \cdot t_2 + d; k \cdot t_1 + d]$	☐ $[k \cdot t_1 + d; k \cdot t_2 + d]$
---	---	---	---
 - b) Im Ortsintervall $[s_1; s_2]$ befindet sich der Körper während des Zeitintervalls

☐ $\left[\frac{s_2}{k}; \frac{s_1}{k}\right]$	☐ $\left[\frac{s_1 + k}{d}; \frac{s_2 + k}{d}\right]$	☐ $\left[\frac{s_1 - d}{k}; \frac{s_2 - d}{k}\right]$	☐ $\left[\frac{s_1 + d}{k}; \frac{s_2 + d}{k}\right]$
--	--	--	--

Abbildung 32: (Malle et al., 2010, S. 154)

Die Längenausdehnung der Feder drückt sich in der nachstehenden Aufgabe aus, welches sich im Mathematikbuch unter „Lineare Modelle“ wiederfindet.

- 8.49** In der Tabelle sind die gemessenen Längen $L(G)$ einer Spiralfeder bei Belastungen durch verschiedene Gewichte G angegeben.
- 1) Zeichne die dazugehörigen Punkte im Diagramm ein!
 - 2) Begründe, warum man von einer näherungsweisen linearen Zunahme der Federlänge sprechen kann! Überprüfe, ob diese Zunahme durch die Funktion $L: G \mapsto 0,038 \cdot G + 20$ recht gut beschrieben wird!
 - 3) Was bedeuten die Zahlen in dieser Termdarstellung?

G (in Newton)	L(G) (in cm)
0	20,0
100	22,9
200	27,6
300	32,1
500	39,0

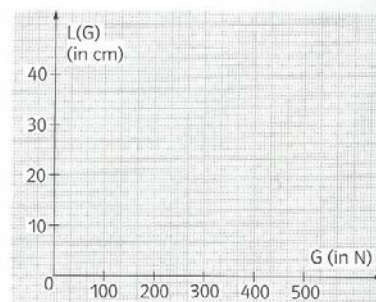


Abbildung 33: (Malle et al., 2010, S. 156)

Noch bei lineare Funktionen, aber im Unterkapitel „Direkte Proportionalitätsfunktionen“ liegen den Schülerinnen und Schüler unten stehendes Material mit physikalischem Hintergrund vor. Bei 8.63 erkennt man den Zusammenhang mit der Gewichtskraft und bei 8.64 jenen mit der Dichte von Festkörpern.

- 8.63** Ein Körper besitzt auf dem Mars nur das 0,38fache, auf dem Jupiter hingegen das 2,53fache seines Erdgewichts.
- 1) Die Funktion M ordne jedem Erdgewicht G das Marsgewicht $M(G)$ zu.
Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an!
 - 2) Die Funktion J ordne jedem Erdgewicht G das Jupitergewicht $J(G)$ zu.
Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an!
 - 3) In welchem Verhältnis steht das Marsgewicht zum Jupitergewicht?
 - 4) Zeichne die Graphen der Funktionen M und J (Gewichte in Newton)!
- 8.64** Die Masse m eines Körpers ist zu dessen Volumen V direkt proportional. Der Proportionalitätsfaktor ρ heißt die Dichte des Körpers (V in m^3 , m in kg , ρ in kg/m^3).
- 1) Gib eine Termdarstellung der Funktion $m: V \mapsto m(V)$ an!
 - 2) Welche Bedeutung hat $m(1)$?
 - 3) Für Eisen ist $\rho = 7870 \text{ kg}/\text{m}^3$, für Gold ist $\rho = 19300 \text{ kg}/\text{m}^3$. Zeichne die Graphen der Funktionen m_e und m_g für Eisen bzw. Gold in dasselbe Koordinatensystem!
 - 4) Ein Körper vom Volumen V habe aus Eisen die Masse $m_e(V)$, aus Gold die Masse $m_g(V)$. Welches Verhältnis besteht zwischen $m_e(V)$ und $m_g(V)$?

Abbildung 34: (Malle et al., 2010, S. 160)

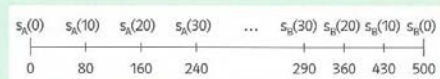
Jetzt sind wir bei dem „Vergleich von linearen Funktionen“ angelangt. Dazu existiert wieder ein extra Abschnitt mit Zeit-Ort-Funktionen. Zu Beginn befindet sich ein durchgerechnetes Beispiel. Daraufhin folgen einige physikalische Aufgaben zu Zeit-, Ort-, und Geschwindigkeitsberechnungen.

Zeit-Ort-Funktionen

- 8.73** Ein Fahrradtreffen: Anna fährt mit ca. 8 m/s eine Allee entlang. Gleichzeitig mit Anna startet ihre Freundin Bea in ca. 500 m Entfernung und fährt ihr mit ca. 7 m/s entgegen. Wann und wo treffen die beiden einander? Löse rechnerisch und grafisch! Entsprechen die Ergebnisse der Realität?

Lösung: Wir stellen die Bewegungen der beiden Mädchen auf einer Zahlengeraden dar und geben die Orte der beiden Mädchen in einer Tabelle an.

Der Tabelle entnehmen wir:



Zeit-Ort-Funktion s_A für Anna: $s_A(t) = 8 \cdot t$

Zeit-Ort-Funktion s_B für Bea: $s_B(t) = 500 - 7 \cdot t$

Wir suchen nun jenen Zeitpunkt t , zu dem sich beide Mädchen am selben Ort befinden, für den also gilt:

$$s_A(t) = s_B(t)$$

$$8 \cdot t = 500 - 7 \cdot t$$

$$15 \cdot t = 500$$

$$t = \frac{500}{15} \approx 33 \quad s_A\left(\frac{500}{15}\right) = s_B\left(\frac{500}{15}\right) = \frac{800}{3} \approx 267$$

Die beiden Mädchen treffen einander ungefähr nach 33 s am Ort 267 (dh. 267 m von Annas Startpunkt entfernt).

Zur grafischen Lösung zeichnen wir die Graphen der Funktionen s_A und s_B . Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Graphen liefern den Zeitpunkt und den Ort des Treffens.

Die Ergebnisse entsprechen nur annähernd der Realität. Denn in Wirklichkeit werden die beiden Mädchen zu Beginn kaum genau 500 m voneinander entfernt sein, kaum genau zur gleichen Zeit starten und die angegebenen Geschwindigkeiten genau einhalten können.

Zeit t	Annas Ort $s_A(t)$	Beas Ort $s_B(t)$
0	0	500
10	$8 \cdot 10 = 80$	$500 - 7 \cdot 10 = 430$
20	$8 \cdot 20 = 160$	$500 - 7 \cdot 20 = 360$
30	$8 \cdot 30 = 240$	$500 - 7 \cdot 30 = 290$
40	$8 \cdot 40 = 320$	$500 - 7 \cdot 40 = 220$
t	$8 \cdot t$	$500 - 7 \cdot t$

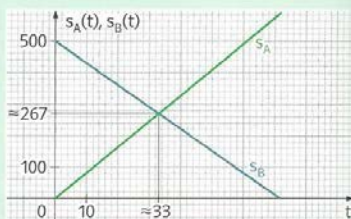


Abbildung 35: (Malle et al., 2010, S. 162)

- 8.74** Martin und Niki fahren einander mit ihren Fahrrädern entgegen. Sie starten in einem Abstand von 1350 m, Martin fährt mit 5 m/s, Niki mit 4 m/s. Ermittle rechnerisch und grafisch, wann und wo die beiden einander treffen!
- 8.75** Zwei Flugzeuge fliegen einander aus einer Entfernung von 3500 km entgegen. Das eine Flugzeug fliegt mit 700 km/h, das andere mit 800 km/h. Ermittle rechnerisch und grafisch, wann und wo die beiden Flugzeuge ungefähr aneinander vorbeifliegen!
- 8.76** Jana und David gehen einander entgegen. Sie starten gleichzeitig von ihren 3 km voneinander entfernt gelegenen Heimatorten aus. Jana geht mit 3,5 km/h, David mit 4 km/h.
- 1) Ermittle grafisch und rechnerisch, an welchem Ort und zu welchem Zeitpunkt die beiden einander ungefähr treffen!
 - 2) Wie müssten Jana und David ihre Gehgeschwindigkeiten ändern, damit sie sich in der unter 1) errechneten Zeit in der Mitte der Strecke treffen?

Abbildung 36: (Malle et al., 2010, S. 163)

- 8.78** Ein Auto A fährt auf einer wenig befahrenen Autobahn mit einer Geschwindigkeit von ca. 120 km/h. Ein Auto B hat einen Vorsprung von 50 km und fährt mit ca. 100 km/h. Beantworte durch Rechnung und Zeichnung:
- 1) Nach welcher ungefähren Zeit holt das Auto A das Auto B ein?
 - 2) Ab welchem ungefähren Zeitpunkt ist das Auto B mindestens 25 km hinter dem Auto A?

Abbildung 37: (Malle et al., 2010, S. 163)

Der darauffolgende Abschnitt lautet „Zeit-Ort-Funktionen mit unterschiedlichen Startzeitpunkten“. Einleitend findet man abermals eine Aufgabe, die den vollständigen Lösungsweg aufweist. Diese handelt von einem LKW und einem PKW, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten wegfahren. Rechnerisch und grafisch soll gelöst werden, wann und wo der PKW den LKW einholt. Anschließend stehen den Jugendlichen vier Aufgaben zum Üben dieses Abschnitts bereit. Die Verknüpfung zur Physik liegt nochmals in den Berechnungen zur Zeit, zum Ort und zur Geschwindigkeit. Siehe Abbildung 38.

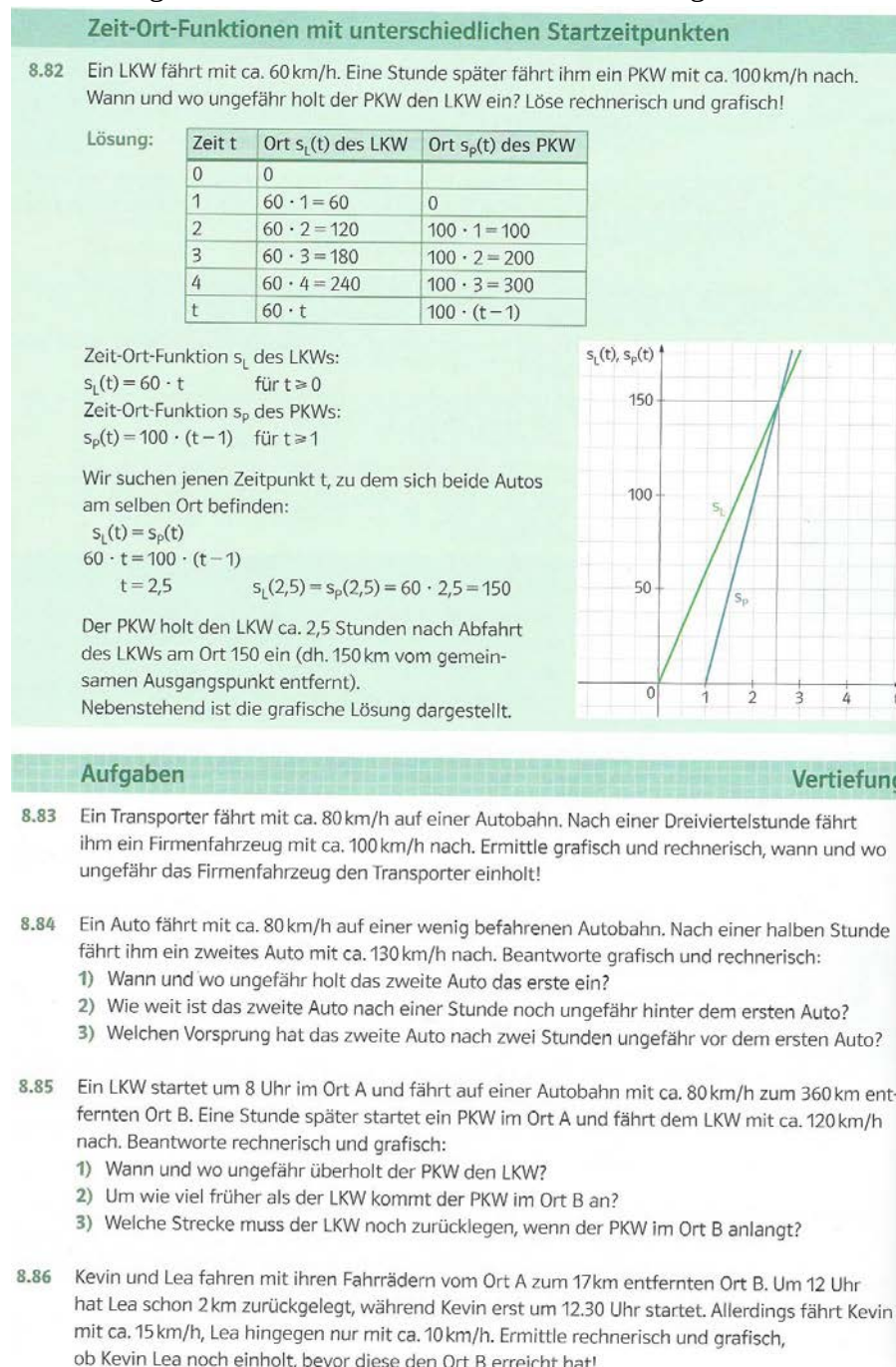


Abbildung 38: (Malle et al., 2010, S. 164)

Als Zusammenfassung des achten Kapitels „Lineare Funktionen“ lassen sich noch hinterher stehende Übungen mit physikalischem Hintergrund finden. 8.102 beinhaltet zwei Wanderer, die um einen See gehen, mit angefügter Grafik. Die Heranwachsenden sollen dann etwaige Fragen dazu beantworten. Die Beziehung zur Physik ist erneut über die Zeit, den Ort und die Geschwindigkeit gegeben. Selbiges gilt für die Aufgabe 8.104.

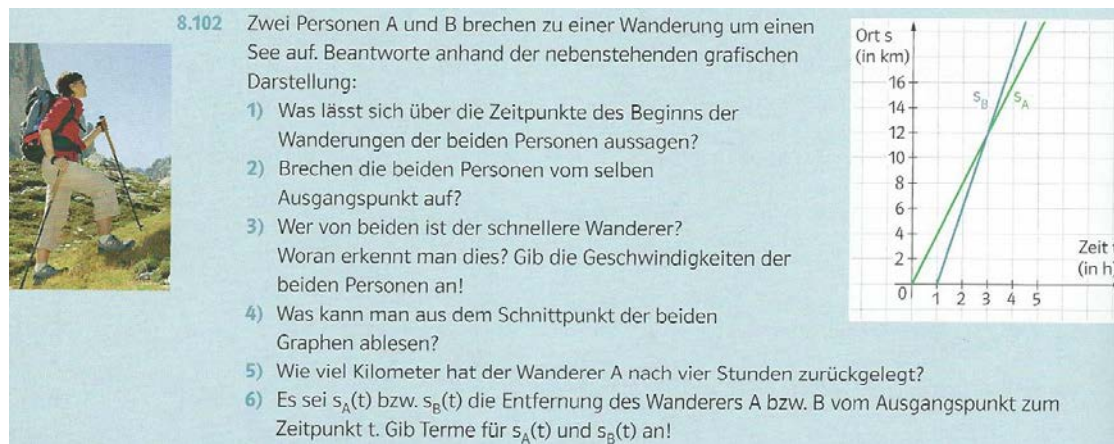


Abbildung 39: (Malle et al., 2010, S. 166)

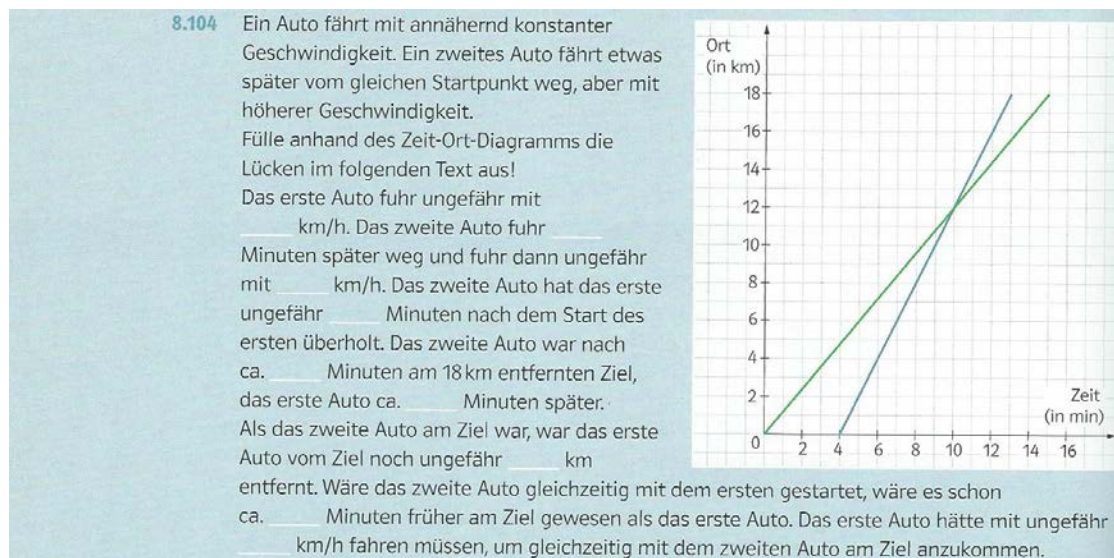
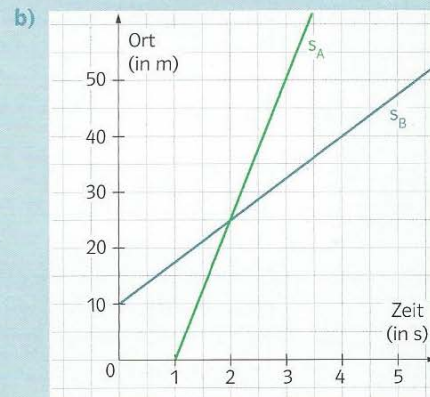
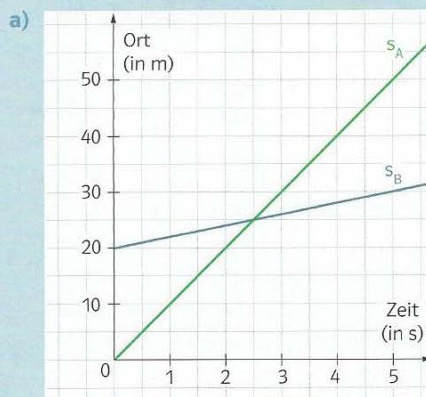


Abbildung 40: (Malle et al., 2010, S. 166)

Noch in demselben Unterkapitel zur Kontrolle ist eine Übung 8.105 vorhanden, welche sich der Gewichtskraft zuordnen lässt. 8.106 bis 8.109 sind Aufgaben, deren Verbindung zur Physik nochmals die Zeit, der Ort und die Geschwindigkeit sind. 8.106 handelt von der Bewegung zweier Körper, 8.107 von Personen auf Rollsteigen, 8.108 von zwei Schiffen und 8.109 von zwei Flugzeugen. Siehe die zwei nachfolgenden Seiten.

- 8.105** Das Gewicht G (in Newton) und die Masse m (in Kilogramm) eines Körpers hängen durch die Gleichung $G = g \cdot m$ zusammen, wobei $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist.
- 1) Gib eine Termdarstellung der Funktion an, die jeder Masse m eines Körpers dessen Gewicht $G(m)$ zuordnet und zeichne den Graphen dieser Funktion!
 - 2) Welche Bedeutung hat $G(1)$?
 - 3) Ist auch die Masse m zum Gewicht G direkt proportional? Wenn ja, gib den Proportionalitätsfaktor an!

- 8.106** In der folgenden Abbildung sind die Bewegungen zweier Körper A und B dargestellt. Beantworte folgende Fragen anhand der Abbildung:
- 1) Sind die Zeit-Ort-Funktionen linear? Warum?
 - 2) Wie groß sind die Geschwindigkeiten der beiden Körper?
 - 3) Starten die beiden Körper am selben Ort? Wenn nicht, wie weit sind sie zum Startzeitpunkt des Körpers A ungefähr voneinander entfernt?
 - 4) Starten die beiden Körper zur selben Zeit? Wenn nicht, um wie viel unterscheiden sich ihre Startzeiten?
 - 5) Was kann man aus dem Schnittpunkt der beiden Graphen ablesen?



- 8.107** Auf größeren Flughäfen findet man oft Rollsteige (Förderbänder), die ein schnelleres Fortbewegen der Passagiere ermöglichen. In den folgenden Abbildungen sind Zeit-Ort-Funktionen dargestellt, die Entfernungen vom Beginn des Rollsteigs in Abhängigkeit von der Zeit angeben. Dabei gilt:

- s_R = Zeit-Ort-Funktion einer Person, die auf dem Rollsteig steht
 - s_F = Zeit-Ort-Funktion eines Fußgängers, der neben dem Rollsteig geht
 - $s_{F,R}$ = Zeit-Ort-Funktion desselben Fußgängers, wenn dieser mit der gleichen Gehgeschwindigkeit wie neben dem Rollsteig auf dem Rollsteig geht
- Zeichne in jede Abbildung den fehlenden der drei Graphen ein!

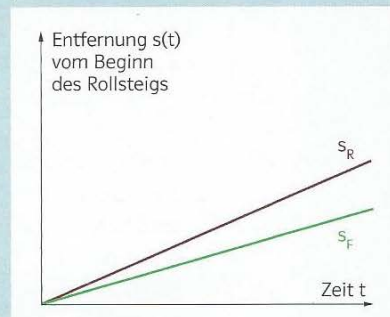
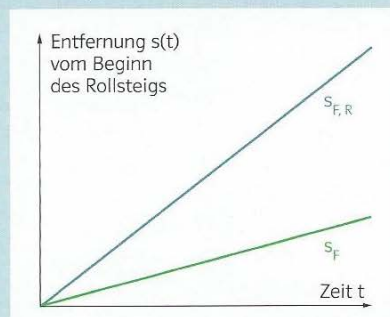
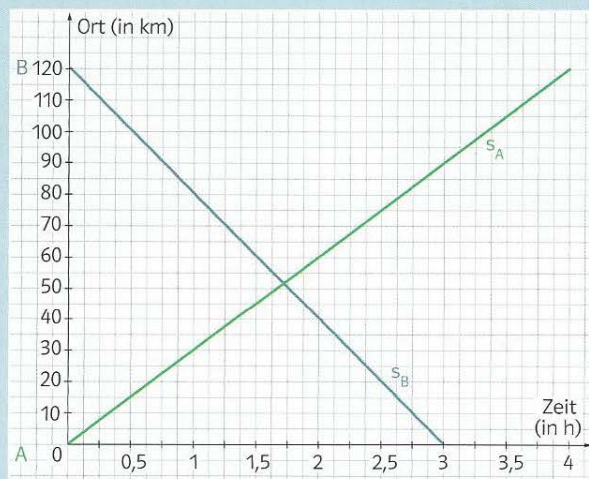


Abbildung 41: (Malle et al., 2010, S. 167)

8.108 Ein Schiff fährt vom Hafen A zum Hafen B. Gleichzeitig mit ihm startet ein etwas schnelleres Schiff in B und fährt nach A. Beantworte anhand des Zeit-Ort-Diagramms:

- 1) Wie lange brauchen die beiden Schiffe jeweils für ihre Fahrt?
- 2) Welche Geschwindigkeiten (in km/h) haben die beiden Schiffe?
- 3) Wann und wo ungefähr fahren die beiden Schiffe aneinander vorbei?
- 4) Wie weit ist das erste Schiff noch von B entfernt, wenn das zweite Schiff gerade in A ankommt?
- 5) Die Kapitäne der beiden Schiffe besitzen Ferngläser, mit denen sie ungefähr 20 km weit sehen können. In welchem Zeitintervall können die beiden Kapitäne das jeweils andere Schiff sehen? Wo befinden sich die beiden Schiffe während dieses Zeitraums?



8.109 Ein Flugzeug fliegt von Frankfurt nach Lissabon und braucht dazu 2,5 Stunden. Nach einiger Zeit fliegt ihm ein zweites Flugzeug mit annähernd gleicher Geschwindigkeit nach. Beantworte anhand des Zeit-Ort-Diagramms:

- 1) Wie viel später als das erste Flugzeug ist das zweite Flugzeug abgeflogen? Welchen Vorsprung hatte das erste Flugzeug zu diesem Zeitpunkt?
- 2) Eine Dreiviertelstunde nach dem Start des ersten Flugzeugs startet in Frankfurt ein schnelleres Militärflugzeug und landet in 1,5 Stunden in Lissabon. Zeichne auch für dieses Flugzeug die entsprechende Gerade ein! Wann und wo überholt dieses Flugzeug die anderen beiden Flugzeuge!

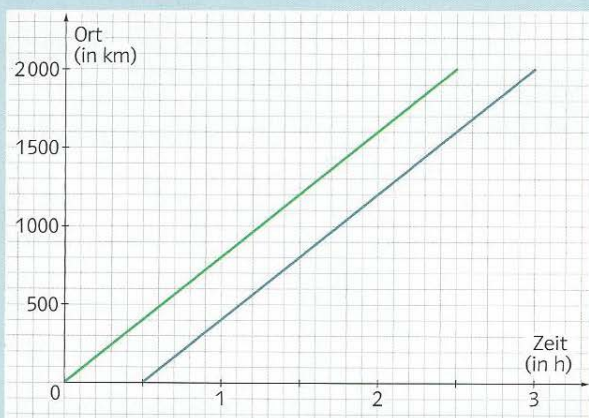


Abbildung 42: (Malle et al., 2010, S. 168)

Die Aufgaben 8.110 und 8.112 fallen immer noch unter das Unterkapitel „Kontrolle: Grundwissen und Grundkompetenzen“ von linearen Funktionen. Der Bezug zur Mechanik ist abermals durch das Interpretieren von Zeit-Ort-Diagrammen und diverse Berechnungen bzw. Umrechnungen zur Geschwindigkeit, zum Ort und zur Zeit gegeben.

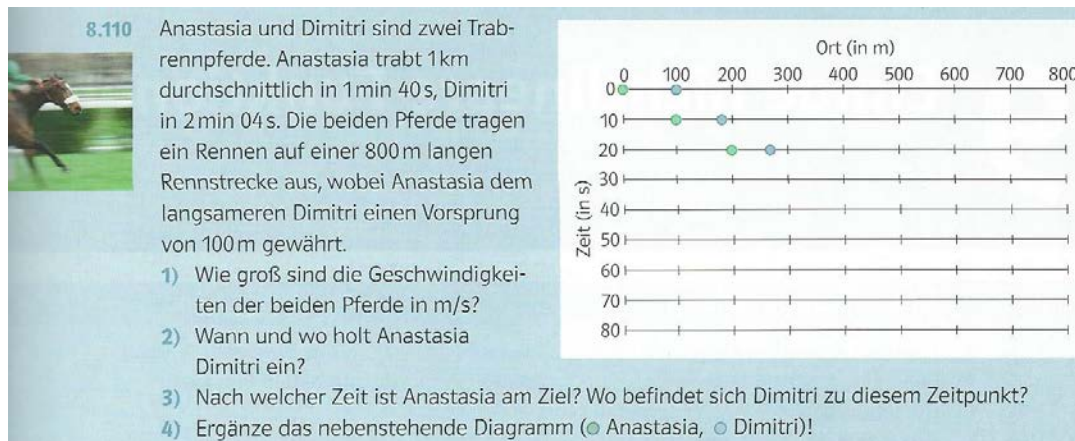


Abbildung 43: (Malle et al., 2010, S. 169)

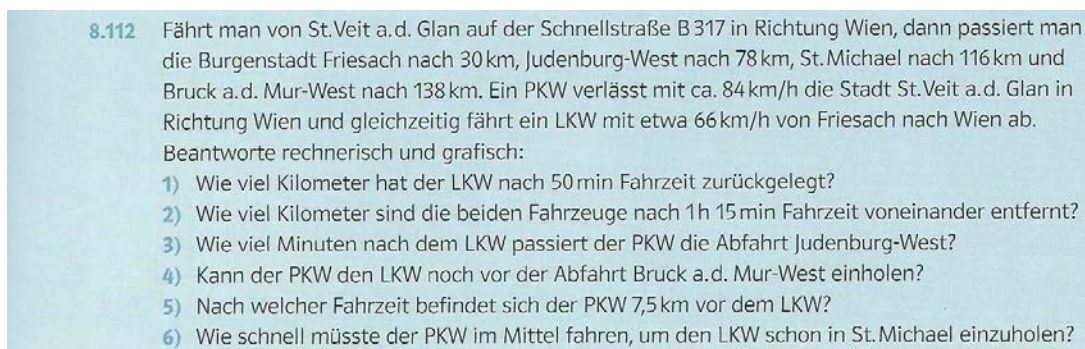


Abbildung 44: (Malle et al., 2010, S. 169)

Nun sind wir bei Kapitel „9 Einige nichtlineare Funktionen“ angelangt. Im Unterkapitel „Indirekte Proportionalitätsfunktionen“ können die Jugendlichen ihr „Schubladendenken“ an unten angeführten Aufgaben überwinden. 9.05 beinhaltet die indirekte Proportionalität in Verbindung mit der Geschwindigkeit. 9.09 handelt von einem Auto, welches mit einer Geschwindigkeit v eine Kurve durchfährt, hier kommt die Anwendung der Zentripetalkraft zu tragen. Bei 9.11 haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, den Druck mit der indirekten Proportionalität zu verbinden.

- 9.05** Es sei $t(v)$ die Zeit, die ein Läufer braucht, um eine 100m lange Strecke mit annähernd konstanter Geschwindigkeit v zu durchlaufen.
- 1) Besteht zwischen $t(v)$ und v eine Proportionalität?
 - 2) Stelle eine Tabelle auf, die für $v = 2, 4, 6, \dots, 12$ m/s die zugehörige Zeit $t(v)$ (in s) angibt! Zeichne den Graphen der Funktion t , die jeder Geschwindigkeit v die Zeit $t(v)$ zuordnet!

Abbildung 45: (Malle et al., 2010, S. 172)

- 9.09** Wenn ein Auto der Masse m mit der Geschwindigkeit v eine Kurve vom Radius r durchfährt, so gilt für die Fliehkraft: $F = \frac{mv^2}{r}$ (F in Newton, m in kg, v in m/s, r in m). Wir nehmen an, dass ein 1500 kg schweres Auto mit 72 km/h (≈ 20 m/s) in eine Kurve fährt.
- 1) Die Funktion $F: r \mapsto F(r)$ ordne jedem Kurvenradius r die Fliehkraft $F(r)$ zu. Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen für $50 \leq r \leq 200$!
 - 2) Zeige: Dem doppelten, dreifachen, halben, a -fachen Radius entspricht die Hälfte, ein Drittel, das Doppelte, der a -te Teil der Fliehkraft.

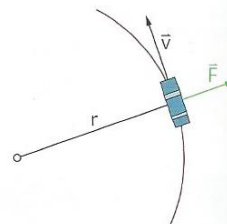


Abbildung 46: (Malle et al., 2010, S. 172)

- 9.11** Wird ein Gas in einem Kolben zusammengedrückt, so wird sein Volumen kleiner. Sofern die Temperatur konstant gehalten wird, besteht zwischen dem Druck p und dem Volumen $V(p)$ des Gases die Beziehung $p \cdot V(p) = c$, wobei c eine Konstante ist (p in Pascal, $V(p)$ in Kubikmeter).
- 1) Besteht eine Proportionalität zwischen p und $V(p)$?
 - 2) Wie ändert sich das Volumen des Gases, wenn der Druck vervierfacht wird?
 - 3) Auf welchen Teil muss der Druck gesenkt werden, damit sich das Volumen des Gases verfünffacht?
 - 4) Um wie viel Prozent nimmt das Volumen zu, wenn der Druck um 10 % abnimmt?

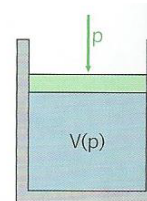


Abbildung 47: (Malle et al., 2010, S. 172)

Diese Aufgaben lassen sich hervorragend im Physikunterricht einsetzen. An diesen können Schülerinnen und Schüler gelerntes Wissen aus der Mathematik und der Physik anwenden.

Bei dem Unterkapitel „Quadratische Funktionen“ beginnt der Abschnitt „Quadratische Modelle“ mit einer durchgerechneten physikalischen Aufgabe. Für einen bestimmten Typ von Auto wurde der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gemessen. Die Messergebnisse werden in einer Tabelle dargestellt. Die Tabelle soll entsprechend in ein Koordinatensystem übertragen werden. Abschließend müssen die Schülerinnen und Schüler die Termdarstellung der Funktion finden, die den Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beschreibt. Die Lösung ist komplett darunter angeführt, dies kann man aus Abbildung 48 entnehmen.

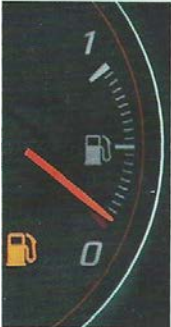
9.27 Für eine bestimmte Autotype wurde der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gemessen, wobei im 4. Gang gefahren wurde. Die Messergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten:

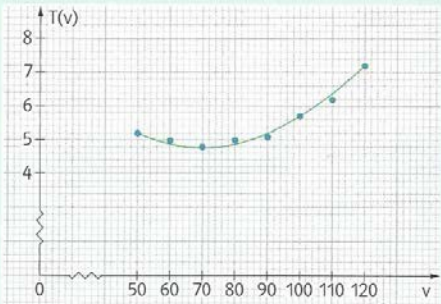
Geschwindigkeit (in km/h)	50	60	70	80	90	100	110	120
Treibstoffverbrauch (in l/100 km)	5,2	5,0	4,8	5,0	5,1	5,7	6,2	7,2

- 1) Zeichne die entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem ein!
- 2) Ermittle eine näherungsweise Termdarstellung der Funktion, die die Abhängigkeit des Treibstoffverbrauchs von der Geschwindigkeit beschreibt!

Lösung:

- 1) Wir bezeichnen den Treibstoffverbrauch bei der Geschwindigkeit v mit $T(v)$.
- 2) Da die Punkte annähernd auf einer Parabel zu liegen scheinen, ist ein quadratisches Modell angemessen. Während eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt ist, ist eine Parabel erst durch drei beliebige ihrer Punkte festgelegt. Wir wählen zB die Punkte $(50|5,2)$, $(70|4,8)$, $(120|7,2)$ und ermitteln die Gleichung der Parabel durch diese Punkte.





$$T(v) = av^2 + bv + c$$

$$\begin{cases} (50|5,2) \in \text{Parabel: } 5,2 = 2500a + 50b + c & \text{I} \\ (70|4,8) \in \text{Parabel: } 4,8 = 4900a + 70b + c & \text{II} \\ (120|7,2) \in \text{Parabel: } 7,2 = 14400a + 120b + c & \text{III} \end{cases}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem in drei Unbekannten mit der Eliminationsmethode:

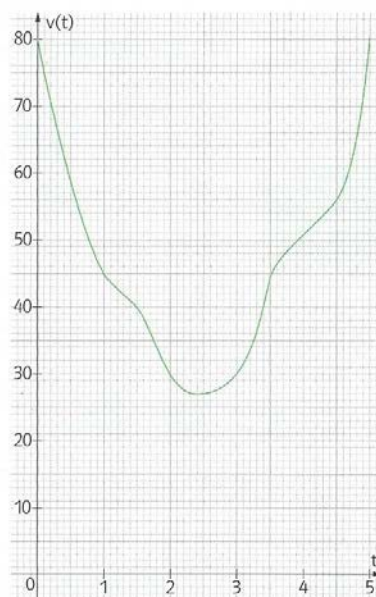
$$\begin{cases} \text{II} - \text{I: } -0,4 = 2400a + 20b \\ \text{III} - \text{I: } 2 = 11900a + 70b \end{cases}$$

Rechne selbst weiter! Es ergibt sich: $a \approx 0,000971429$, $b \approx -0,136571429$, $c = 9,6$
 Somit gilt: $T(v) \approx 0,000971429 \cdot v^2 - 0,136571429 \cdot v + 9,6$

Abbildung 48: (Malle et al., 2010, S. 176)

Daran schließen einige Übungsaufgaben an, die mit der Physik in Verbindung stehen. Zum Beispiel 9.29 hat zum Inhalt einen fahrenden LKW, der mit einem Fahrtenschreiber ausgestattet ist, welcher die Geschwindigkeit aufzeichnet. Angehängt ist eine Funktion, der die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t angibt. Bei 9.30 wurden die Bremswege bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten gemessen. Die Aufzeichnungen sind in einer Tabelle unten angeführt. Siehe Abbildung 49.

- 9.29** Viele Lastkraftwagen besitzen einen Fahrtenschreiber, der die gefahrenen Geschwindigkeiten automatisch aufzeichnet (siehe die Abbildung unten). Ein Lastkraftwagen überquert eine Kuppe. Der nebenstehende Graph gibt die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Minuten, v in km/h).
- 1) Lege eine Tabelle an, die $v(t)$ näherungsweise für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ min angibt!
 - 2) Entscheide, ob ein quadratisches Modell angemessen ist! Wenn ja, gib eine näherungsweise Term-darstellung der Funktion $t \mapsto v(t)$ an! Berechne $v(t)$ für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ min und vergleiche mit den Werten aus 1)!



- 9.30** Für ein Auto wurden die Bremswege bei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen, wobei die Bremsung mit blockierenden Rädern auf leicht feuchter Fahrbahn vorgenommen wurde. Die Ergebnisse sind in der untenstehenden Tabelle enthalten.
- 1) Trage die den gemessenen Werten entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem ein!
 - 2) Der Theorie nach nimmt der Bremsweg $s_B(v)$ quadratisch mit der Geschwindigkeit v zu (v in km/h, $s_B(v)$ in m), wobei $s_B(v)$ von der Form $s_B(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v$ (für $v > 20$ km/h) ist. Ermittle a und b näherungsweise, trage die entsprechenden Funktionswerte in die Tabelle ein und zeichne den Graphen dieser Funktion in das Koordinatensystem ein!
 - 3) Eine Faustregel besagt, dass der Bremsweg ungefähr gegeben ist durch $s_B(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ (wobei v in km/h und $s_B(v)$ in m gemessen wird). Trage auch die dieser Faustregel entsprechenden Werte in die Tabelle ein!

Geschwindigkeit (in km/h)	60	80	100	120
Gemessener Bremsweg (in m)	32	61	98	144
Bremsweg laut Theorie (in m)				
Bremsweg laut Faustregel (in m)				

Abbildung 49: (Malle et al., 2010, S. 177)

Eine weitere Übung, die eine Beziehung zur Mechanik besitzt, steht im Buch unter „Quadratische Modelle“. 9.33 behandelt den schiefen Wurf einer Kugel mit angegebener Wurfparabel.

9.33 Der schiefe Wurf einer Kugel wird durch den untenstehenden Graphen beschrieben.

- 1) In welcher Höhe wird die Kugel abgeworfen?
- 2) Gib zwei Horizontalentfernungen an, bei denen sich die Kugel in derselben Höhe befindet!
- 3) In welcher Horizontalentfernung wird die maximale Höhe erreicht? Wie groß ist diese?
- 4) Schätze anhand des Graphen, wie weit die Kugel fliegt!
- 5) Ermittle eine näherungsweise Termdarstellung der abgebildeten quadratischen Funktion! Welche Wurfweite ergibt sich mit dieser Funktion?

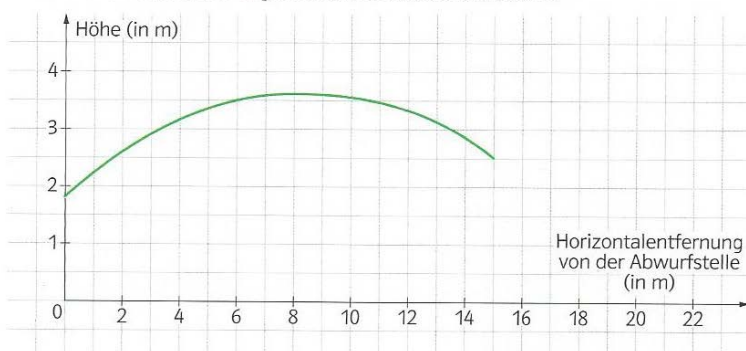


Abbildung 50: (Malle et al., 2010, S. 178)

Fortgesetzt wird mit dem Unterkapitel „Proportionalitäten höherer Ordnung“. Den Abschnitt „Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = c \cdot x^2$ “ führen die Autoren mit einer physikalischen Aufgabe ein. Ein Auto fährt mit einer gewissen Geschwindigkeit durch eine Kurve, die Verbindung zur Mechanik ist gegeben durch die Zentripetalkraft.

Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = c \cdot x^2$

9.34 Wenn ein Auto der Masse m mit der Geschwindigkeit v eine Kurve vom Radius r durchfährt, so gilt für die Fliehkraft: $F = \frac{mv^2}{r}$ (F in Newton, m in Kilogramm, v in m/s). Wir nehmen an, dass ein 1500 kg schweres Auto in eine Kurve mit dem Radius 50 m fährt.

- 1) Die Funktion $F: v \mapsto F(v)$ ordne jeder Geschwindigkeit v die Fliehkraft $F(v)$ zu. Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen!
- 2) Zeige: Der doppelten Geschwindigkeit entspricht die vierfache Fliehkraft.
- 3) Ist die Fliehkraft zur Geschwindigkeit direkt oder indirekt proportional? Ist sie zum Quadrat der Geschwindigkeit direkt oder indirekt proportional?

Lösung:

- 1) $F(v) = \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{1500 \cdot v^2}{50} = 30 \cdot v^2$
- 2) $F(2 \cdot v) = 30 \cdot (2 \cdot v)^2 = 30 \cdot (4 \cdot v^2) = 4 \cdot (30 \cdot v^2) = 4 \cdot F(v)$
- 3) Die Fliehkraft ist zur Geschwindigkeit weder direkt noch indirekt proportional, sie ist aber zum Quadrat der Geschwindigkeit direkt proportional (mit dem Proportionalitätsfaktor 30).

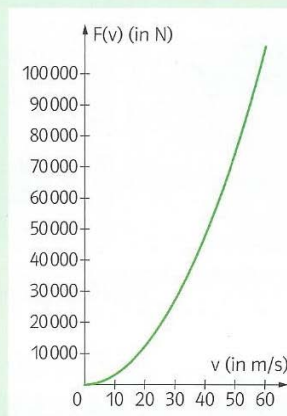


Abbildung 51: (Malle et al., 2010, S. 178)

Gleich unterhalb befindet sich der Abschnitt „Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = c \cdot x^3$ “, welcher ebenfalls mit einer durchgerechneten Übung beginnt. Der physikalische Hintergrund ist dieses Mal durch die Dichte fester Körper gegeben.

Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = c \cdot x^3$

9.35 Der Zusammenhang zwischen Masse m , Volumen V und Dichte ρ eines Körpers ist gegeben durch: $m = \rho \cdot V$ (m in Gramm, V in Kubikzentimeter, ρ in g/cm^3). Die Dichte von Eisen beträgt $7,875 \text{ g/cm}^3$.

- 1) Die Funktion m ordne jeder Kantenlänge x eines Eisenwürfels die Masse $m(x)$ zu. Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen!
- 2) Auf das Wievielfache wächst die Masse m , wenn die Seitenlänge x verdoppelt wird?

Lösung:

- 1) Aus $V = x^3$ folgt $m(x) = \rho \cdot x^3 = 7,875 \cdot x^3$
- 2) $m(2 \cdot x) = 7,875 \cdot (2 \cdot x)^3 = 7,875 \cdot 8 \cdot x^3 = 8 \cdot 7,875 \cdot x^3 = 8 \cdot m(x)$
Die Masse wächst auf das Achtfache.

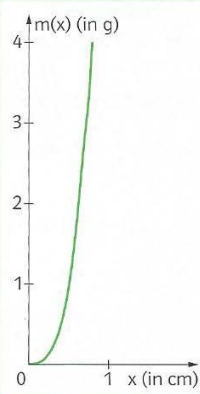


Abbildung 52: (Malle et al., 2010, S. 179)

Danach schließen „Reziproke Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = \frac{c}{x^2}$ “ an. Hier wird wieder eine Aufgabe komplett gelöst angegeben. 9.36 weist einen Zusammenhang mit Kräften, genauer mit Anziehungskräften, auf. Die Aufgabe handelt von einem Satelliten und dessen Entfernung vom Erdmittelpunkt. Die Formel für die näherungsweise Berechnung der Anziehungskraft ist gegeben.

Reziproke Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = \frac{c}{x^2}$

9.36 Hat ein Satellit der Masse m die Entfernung r vom Erdmittelpunkt, so lässt sich die Kraft, mit der er von der Erde angezogen wird, näherungsweise nach folgender Formel berechnen:
 $F(r) = 3,982 \cdot 10^{14} \cdot \frac{m}{r^2}$ (F in Newton, m in Kilogramm, r in Meter)

- 1) Ein Satellit habe die Masse 250 kg. Sei F die Funktion, die jedem Abstand r die Anziehungskraft $F(r)$ zuordnet. Gib eine Termdarstellung der Funktion F an und zeichne deren Graphen!
- 2) Zeige: Der doppelten Entfernung vom Erdmittelpunkt entspricht der vierte Teil der Anziehungskraft.
- 3) Ist die Anziehungskraft direkt oder indirekt proportional zur Entfernung vom Erdmittelpunkt? Ist sie direkt oder indirekt proportional zum Quadrat dieser Entfernung?

Lösung:

- 1) $F(r) = 3,982 \cdot 10^{14} \cdot \frac{m}{r^2} = 3,982 \cdot 10^{14} \cdot \frac{250}{r^2} = \frac{995,5 \cdot 10^{14}}{r^2}$
- 2) $F(2 \cdot r) = \frac{995,5 \cdot 10^{14}}{(2 \cdot r)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{995,5 \cdot 10^{14}}{r^2} = \frac{1}{4} \cdot F(r)$
- 3) Die Anziehungskraft ist zur Entfernung vom Erdmittelpunkt weder direkt noch indirekt proportional, sie ist aber zum Quadrat dieser Entfernung indirekt proportional.

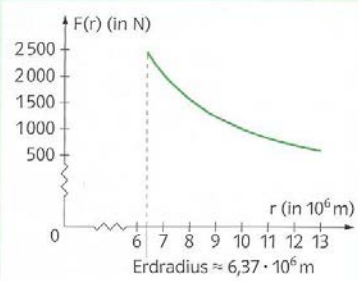


Abbildung 53: (Malle et al., 2010, S. 180)

Anschließend folgt eine Rechenaufgabe zum freien Fall. Zuerst sollen die Jugendlichen den zugehörigen Graphen zeichnen und danach eine Frage bezüglich der Auswirkung der Formel beantworten.

- 9.42** Beim freien Fall eines Körpers ist der in der Zeit t zurückgelegte Weg ungefähr gegeben durch $s(t) = 5 \cdot t^2$ (t in Sekunden, $s(t)$ in Meter).
- 1) Zeichne den Graphen der Funktion $t \mapsto s(t)$ für $0 \leq t \leq 5$!
 - 2) Auf das Wievielfache wächst der zurückgelegte Weg, wenn die Zeit verfünffacht wird? Begründe!

Abbildung 54: (Malle et al., 2010, S. 181)

Aus der Abbildung 55 entnimmt man ein weiteres Exempel zur Verbindung von Mathematik und Physik. Die Schülerinnen und Schüler sollen eine Formel für die Anziehungskraft des Jupiters auf einen Satelliten finden, wobei sie die Formel aus der Abbildung 53, 9.36, verwenden können.

- 9.43** Auf dem Jupiter ist die Anziehungskraft ca. 318 mal so groß wie auf der Erde. Gehe von der Formel in Aufgabe 9.36 aus und gib eine Formel für die Anziehungskraft $F(r)$ des Jupiter auf einen 150 kg schweren Satelliten an! Zeichne den Graphen der Funktion $F: r \mapsto F(r)$!

Abbildung 55: (Malle et al., 2010, S. 181)

Nun sind wir bei dem Unterkapitel „Abschnittsweise definierte Funktionen und Sprungfunktionen“ angekommen. Die Einleitung ist ebenfalls durch eine durchgerechnete Aufgabe mit physikalischem Hintergrund gegeben. Sie handelt von einem Zug der zuerst mit annähernd konstanter Geschwindigkeit fährt, dann eine Pause macht und anschließend wieder mit konstanter Geschwindigkeit weiterfährt.

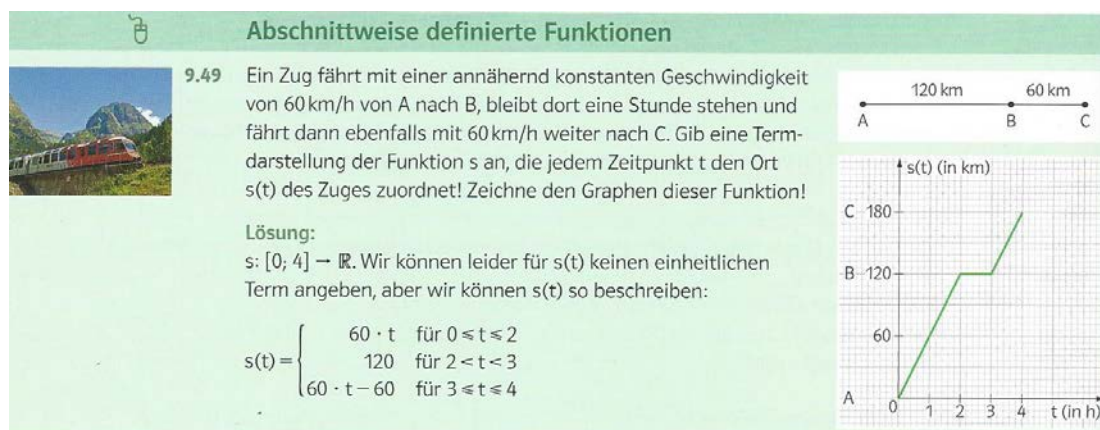


Abbildung 56: (Malle et al., 2010, S. 182)

Anschließend folgen dazu Übungen, bei denen die Jugendlichen ihre Kenntnisse Mathematik und Physik anwenden können. Aufgabe 9.54 wird wieder dem Weg, der Zeit und der Geschwindigkeit zugeordnet.

- 9.54** Eine Autofahrerin fährt auf der Autobahn zunächst zwei Stunden lang mit einer mittleren Geschwindigkeit von 110 km/h, macht dann eine Stunde Rast, und fährt anschließend weitere 1,5 Stunden mit 120 km/h. Sei $s(t)$ die Entfernung vom Ausgangsort zum Zeitpunkt t (t in Stunden, $s(t)$ in Kilometer). Gib eine abschnittsweise Termdarstellung der Funktion s im Bereich $0 \leq t \leq 4,5$ an und zeichne den Graphen dieser Funktion!

Abbildung 57: (Malle et al., 2010, S. 183)

9.56 bis 9.58 sind weiteres Material, welches den Schülerinnen und Schüler zur Verfügung steht um Gelerntes zu wiederholen. Sie sollen abschnittsweise definierte Funktionen aufstellen und zugehörige Graphen zeichnen. Bei 9.56 sind abermals die Geschwindigkeit, der Ort und die Zeit vordergründig. 9.57 ist eine Angabe zum freien Fall und 9.58 eine zum lotrechten Wurf.

- 9.56** LKW A fährt um 7:30 Uhr in Villach auf die Südautobahn Richtung Wien auf, LKW B um 8:00 Uhr. LKW A fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 60 km/h. LKW B fährt zunächst mit einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h, macht nach zwei Stunden Fahrt eine 30-minütige Rast und fährt dann mit 70 km/h weiter. Sei $s_A(t)$ bzw. $s_B(t)$ die Entfernung (in Kilometer) von LKW A bzw. LKW B von Villach t Stunden nach 7:30 Uhr. Erstelle Termdarstellungen dieser Funktionen, zeichne die zugehörigen Graphen und berechne, um wie viel Uhr und in welchen Entfernungen von Villach die beiden LKWs aneinander vorbeifahren!

- 9.57** Ein Körper fällt aus 180 m Höhe zu Boden. Seine Höhe zum Zeitpunkt t beträgt annähernd $h(t) = 180 - 5t^2$ (Höhe in Meter, Zeit in Sekunden). Nach dem Aufprall auf dem Boden bleibt er dort liegen. Zeichne den Graphen der Funktion h , die jedem Zeitpunkt t die Höhe $h(t)$ des Körpers zuordnet!

- 9.58** Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 25 m/s nach oben geschossen. Seine Höhe zum Zeitpunkt t beträgt annähernd $h(t) = 25t - 5t^2$ (Höhe in Meter, Zeit in Sekunden). Nach 4,5 s landet er auf einem Dach und bleibt dort liegen. Zeichne den Graphen der Funktion h , die jedem Zeitpunkt t die Höhe $h(t)$ des Körpers zuordnet!

Abbildung 58: (Malle et al., 2010, S. 183)

Das Unterkapitel „Formeln und Funktionen“ beginnt mit zwei Einführungsbeispielen, wobei das zweite mit der Zentripetalbeschleunigung durchgeführt ist. Hier ist die Formel für die Fliehkraft gegeben und die Schülerinnen und Schüler können die Funktion, den Typ und den Graph der entsprechenden Tabelle, siehe Abbildung 59, entnehmen. Bei der Formel hält man jeweils zwei Variablen von m , v , r konstant.

Beispiel 2: Fliehkraft eines Autos (Masse m , Geschwindigkeit v , Kurvenradius r):

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Hält man jeweils zwei der Variablen m , v , r konstant, kann man in dieser Formel folgende Funktionen sehen:

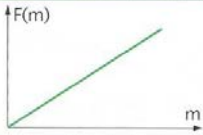
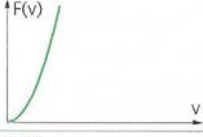
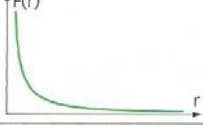
Funktion	Typ	Graph
$F(m) = \frac{v^2}{r} \cdot m$ (v und r konstant)	$f(x) = k \cdot x$ $[k \triangleq \frac{v^2}{r}, x \triangleq m]$	
$F(v) = \frac{m}{r} \cdot v^2$ (m und r konstant)	$f(x) = c \cdot x^2$ $[c \triangleq \frac{m}{r}, x \triangleq v]$	
$F(r) = \frac{mv^2}{r}$ (m und v konstant)	$f(x) = \frac{c}{x}$ $[c \triangleq mv^2, x \triangleq r]$	

Abbildung 59: (Malle et al., 2010, S. 185)

Daraufhin findet man drei Aufgaben, die mit der Mechanik verknüpft sind. Bei 9.67 sind die Schülerinnen und Schüler zum Arbeiten mit der Formel für die Zentripetalkraft angehalten. Die Mathematik vereint mit der Physik spiegelt sich auch in 9.69 wieder. Proportionalitäten, Funktionen und die Formel für die kinetische Energie sind bei dieser Aufgabe präsent. Zu guter Letzt noch eine Übung, die das Newton'sche Gravitationsgesetz integriert.

- 9.67** Sei $F = \frac{m \cdot v^2}{r}$. Zeichne den Graphen der folgenden Funktion! Wähle geeignete Einheiten auf den Achsen!
- a)** $m \mapsto F(m)$ für $v = 50$ und $r = 250$ **c)** $r \mapsto F(r)$ für $m = 1000$ und $v = 50$
- b)** $v \mapsto F(v)$ für $m = 1000$ und $r = 500$

Abbildung 60: (Malle et al., 2010, S. 186)

- 9.69** Ein Auto fährt gegen eine Wand. Die Stärke des Aufpralls hängt von der kinetischen Energie E des Autos ab. Diese kann nach der Formel $E = \frac{mv^2}{2}$ berechnet werden (m = Masse des Autos, v = Geschwindigkeit des Autos). Welche Funktionen kann man in dieser Formel sehen? Von welchem Typ sind sie jeweils? Drücken sie Proportionalitäten aus? Skizziere deren Graphen!
- 9.70** Die Kraft F , mit der ein Satellit von der Erde angezogen wird, kann nach der Formel $F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ berechnet werden (M = Erdmasse, m = Masse des Satelliten, r = Entfernung des Satelliten vom Erdmittelpunkt; G ist eine Konstante, die sog. Gravitationskonstante). Welche Funktionen kann man in dieser Formel sehen? Von welchem Typ sind sie jeweils? Drücken sie Proportionalitäten aus? Skizziere deren Graphen!

Abbildung 61: (Malle et al., 2010, S. 186)

Jetzt sind wir am Ende des Kapitels „Einige nichtlineare Funktionen angelangt“, welches Wiederholungen und Selbstkontrollen für die Heranwachsenden bietet. Die erste Übung mit physikalischem Hintergrund ist 9.91. Dabei soll die Bewegung eines Körpers in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Der Funktionstyp soll ebenfalls festgestellt werden. Somit ist der Zusammenhang mit Zeit, Ort und Geschwindigkeit gegeben.

9.91 Bei einer Bewegung eines Körpers wird zu verschiedenen Zeitpunkten t die Länge $s(t)$ des im Zeitintervall $[0; t]$ zurückgelegten Wegs gemessen. Stelle die Paare $(t | s(t))$ der Messwerte in einem kartesischen Koordinatensystem dar! Von welchem Funktionstyp könnte die Zuordnung $t \mapsto s(t)$ sein?

t	2	3	4	5	6	7
$s(t)$	1,2	2,7	4,8	7,5	10,8	14,7

Abbildung 62: (Malle et al., 2010, S. 191)

Zwei weitere Punkte, die die Physik vertreten, führen die Autoren zum Üben von nichtlinearen Funktionen an. Die Aufgabe 9.107 beschreibt einen elastischen Stoß, welche das Arbeiten mit dem Impuls beinhaltet. Bei 9.108 hat man wieder eine Verknüpfung zum Ort, zur Zeit und zur Geschwindigkeit.

9.107 Ein punktförmig kleiner elastischer Körper befindet sich in 10 m Entfernung von einer Wand und bewegt sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s auf einer geraden Bahn normal zur Wand. Nach dem Aufprall auf die Wand bewegt er sich mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit von -2 m/s zum Ausgangspunkt zurück.

- Zeichne den Graphen der Funktion $s: t \mapsto s(t)$, wobei $s(t)$ die Entfernung des Körpers von der Wand zum Zeitpunkt t ist! Gib eine Termdarstellung von s an!
- Zeichne den Graphen der Funktion $v: t \mapsto v(t)$, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t ist! Gib eine Termdarstellung von v an!

9.108 Der Regionalzug R413 fährt um 6:00 Uhr von Arndorf mit durchschnittlich 54 km/h ins 72 km entfernte Berndorf. Nach 10 Minuten Aufenthalt im Bahnhof Berndorf setzt der R413 seine Fahrt mit gleicher Durchschnittsgeschwindigkeit in Richtung Emsdorf fort und kommt dort um 9:30 Uhr an.

- Gib eine geeignete Zeit-Ort-Funktion für die Fahrt des Regionalzuges R413 an und zeichne den zugehörigen Graphen! Achte beim Zeichnen auf passende Skalierungen auf den beiden Achsen!
- Der Eilzug E1236 fährt von Arndorf um 6:30 Uhr in Richtung Emsdorf ab. Zwischen welchen Werten muss die mittlere Geschwindigkeit des E1236 liegen, damit der Eilzug E1236 den langsameren Regionalzug R413 im Bahnhof Berndorf überholen kann? Löse rechnerisch und grafisch!
- Angenommen der Eilzug E1236 fährt im Mittel zwischen Arndorf und Berndorf gleich schnell wie zwischen Berndorf und Emsdorf. Ermittle dann die früheste und die späteste Ankunftszeit des Eilzuges E1236 in Emsdorf rechnerisch und grafisch!

Abbildung 63: (Malle et al., 2010, S. 193)

Mittlerweile kommen wir zum Kapitel „10 Lineare Gleichungen und Gleichungssysteme in zwei Variablen“. Im zweiten Unterkapitel „Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen“

scheint nur eine Aufgabe mit physikalischem Background auf und zwar 10.40. Diese handelt von einem Schiff, welches für eine gewisse Strecke stromabwärts $1\frac{1}{2}h$ und stromaufwärts $6\frac{1}{2}h$ benötigt. Nun sollen die Heranwachsenden die Eigengeschwindigkeit des Schiffs und die Strömungsgeschwindigkeit berechnen.

- 10.40** Ein Schiff braucht für eine Strecke von 39 km stromabwärts $1\frac{1}{2}h$ und stromaufwärts $6\frac{1}{2}h$. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Schiffs und die Strömungsgeschwindigkeit!

Abbildung 64: (Malle et al., 2010, S. 202)

Erst im Kapitel „12 Geometrische Darstellung von Vektoren und deren Rechenoperationen“ befinden sich wieder zwei physikalische Mathematikaufgaben. In dem Unterkapitel „Geometrische Darstellung der Addition und Subtraktion von Vektoren“ sollen die Schülerinnen und Schüler die Geschwindigkeit des Bootes und die Zeit, die das Boot zum Überqueren des Flusses benötigt, bei gegebener Strömungsgeschwindigkeit, Breite des Flusses und Eigengeschwindigkeit des Bootes, ermitteln.

- 12.31** Die Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses mit der konstanten Breite 75 m sei $\vec{u}$ (in m/s). Hannah versucht mit ihrem Boot den Fluss zu überqueren. Hannahs Eigengeschwindigkeit sei $\vec{v}$ (das ist die Geschwindigkeit, mit der sie sich fortbewegen würde, wenn der Fluss keine Strömung hätte). Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Boot tatsächlich? Wie lange braucht Hannah, bis sie den Fluss überquert hat?

a) $\vec{u} = (0,8 | 0)$, $\vec{v} = (0 | 2)$

b) $\vec{u} = (1 | 0)$, $\vec{v} = (1,5 | 1,5)$

c) $\vec{u} = (0,5 | 0)$, $\vec{v} = (0,4 | 2)$

d) $\vec{u} = (0,2 | 0)$, $\vec{v} = (0,2 | 1,8)$

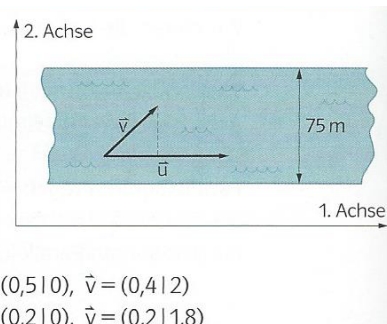


Abbildung 65: (Malle et al., 2010, S. 224)

Die zweite Übung kommt im Abschnitt „Schwerpunkt eines Dreiecks“ im Unterkapitel „Einfache Anwendungen der Vektorrechnung in der Geometrie“ vor. Die Zuordnung zur Mechanik ist „Schwerpunkt starrer Körper“ beziehungsweise „Körperschwerpunkt“. Dazu wird mit einem vorgerechneten Beispiel begonnen, bei dem der Schwerpunkt eines Dreiecks mittels Vektoren ermittelt wird. Anschließend folgen zwei weitere Punkte 12.49 und 12.50 zum Trainieren des Gelernten.

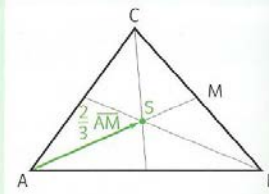
Schwerpunkt eines Dreiecks

12.48 Stelle eine Formel für den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC auf!

Lösung:

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2. Somit gilt:

$$\begin{aligned} S &= A + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} = A + \frac{2}{3}(M - A) = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}M = \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(B + C) \right] = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(B + C) = \frac{1}{3}(A + B + C) \end{aligned}$$



Wir halten das Ergebnis der letzten Aufgabe fest:

Satz Für den Schwerpunkt S eines Dreiecks ABC gilt: $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$

12.49 Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ABC!

- | | |
|---|--|
| a) $A = (-4 1)$, $B = (5 -1)$, $C = (2 8)$ | c) $A = (-3 2)$, $B = (7 -5)$, $C = (5 9)$ |
| b) $A = (-6 -5)$, $B = (4 3)$, $C = (-1 5)$ | d) $A = (-1 -4)$, $B = (6 -1)$, $C = (-7 4)$ |

12.50 Von einem Dreieck ABC kennt man zwei Eckpunkte und den Schwerpunkt S. Berechne den dritten Eckpunkt!

- | | |
|--|--|
| a) $B = (4 -3)$, $C = (3 3)$, $S = (2 1)$ | d) $B = (4 5)$, $C = (-6 6)$, $S = (-1 1)$ |
| b) $A = (5 1)$, $C = (-7 5)$, $S = (-1 2)$ | e) $A = (-4 -2)$, $C = (0 6)$, $S = (1 0)$ |
| c) $A = (1 -1)$, $B = (5 2)$, $S = (2 2)$ | f) $A = (-7 0)$, $B = (2 -5)$, $S = (0 0)$ |

Abbildung 66: (Malle et al., 2010, S. 228)

Innerhalb des Kapitels „14 Geraden in $\mathbb{R}^2$ “, Unterkapitel „Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ “, Abschnitt „Deutung des Parameters als Zeit“, stellen die Autoren die Bewegung eines Körpers pro Sekunde als Vektor dar. Daraufhin führen sie eine Aufgabe an, die einen Körper, welcher sich gleichförmig auf einer geraden Bahn bewegt, beschreibt. Die Verbindung zur Mechanik ist hier gegeben, durch die Darstellung der Bewegung als Vektor, das durch die Geschwindigkeit.

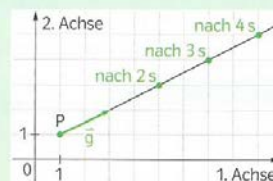
Deutung des Parameters als Zeit

14.15 Ein punktförmiger Körper bewegt sich längs der Geraden $g: X = P + t \cdot \vec{g}$ mit $P = (1|1)$ und $\vec{g} = (2|1)$. Er befindet sich zu Beginn im Punkt P und bewegt sich pro Sekunde um $\vec{g}$ weiter. In welchem Punkt X befindet sich der Körper nach 2, 3, 4 bzw. t Sekunden?

Lösung:

Der Körper befindet sich

- nach 2 s im Punkt $X = (1|1) + 2 \cdot (2|1) = (5|3)$,
- nach 3 s im Punkt $X = (1|1) + 3 \cdot (2|1) = (7|4)$,
- nach 4 s im Punkt $X = (1|1) + 4 \cdot (2|1) = (9|5)$,
- nach t s im Punkt $X = (1|1) + t \cdot (2|1) = (1 + 2t|1 + t)$.



Aufgaben

Grundkompetenzen

- 14.16 Ein punktförmiger Körper bewegt sich gleichförmig auf einer geraden Bahn. Er befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $A = (100|100)$ und zum Zeitpunkt $t = 1$ im Punkt $B = (250|300)$ (Zeit in Sekunden).
- Ermittle rechnerisch, wo sich der Körper nach 0,1 s, nach 0,5 s, nach 2 s bzw. t Sekunden befindet!
 - Ermittle rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt sich der Körper im Punkt $P = (400|p_2)$ bzw. im Punkt $Q = (550|q_2)$ befindet!
 - Zeige rechnerisch, dass sich der Körper nicht durch den Punkt $R = (325|450)$ bewegt!

Abbildung 67: (Malle et al., 2010, S. 249)

Im Unterkapitel „Normalprojektion; Abstand eines Punktes von einer Geraden“ wird die Normalprojektion mit einem physikalischen Beispiel eingeführt, dessen Lösung angefügt ist. Dieses handelt von einem Schlitten, der unter einem gewissen Winkel mit einer nach oben gerichteten Kraft gezogen wird. Danach soll man die Kraft ermitteln, mit der der Schlitten in Richtung des Wegvektors gezogen wird. Unterhalb findet sich eine Erklärung, was man unter einer Normalprojektion versteht.

Normalprojektion

14.97 Ein Schlitten wird mit einer unter dem Winkel φ schräg nach oben gerichteten Kraft $\vec{F}$ gezogen. Stelle eine Formel für den Betrag der Kraft $\vec{F}_s$ auf, mit der der Schlitten in Richtung des Wegvektors $\vec{s}$ gezogen wird!

Lösung: $|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$



Die Kraft $\vec{F}_s$ in der letzten Aufgabe bezeichnet man auch als **Normalprojektion von $\vec{F}$ auf $\vec{s}$** .

Abbildung 68: (Malle et al., 2010, S. 264)

Eine Aufgabe zur gleichförmigen Bewegung findet man auf derselben Seite, wie das Einführungsbeispiel aus Abbildung 68.

14.100 Ein annähernd punktförmiger Körper bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (4 | 3)$. Berechne den Betrag der Geschwindigkeit, mit der er sich einer Geraden g mit dem Richtungsvektor $\vec{g} = (2 | 3)$ nähert!

Abbildung 69: (Malle et al., 2010, S. 264)

Schlussendlich kommen wir zum Ende des vierzehnten Kapitels, das bedeutet zur Kontrolle von Grundwissen und Grundkompetenzen. Hier entdeckt man noch eine abschließende physikalische Mathematikaufgabe. Die Parameterdarstellung und die Bewegung von Körpern mit einer gewissen Geschwindigkeit, als Vektor dargestellt, werden bei dieser Übung verknüpft.

14.145 Zwei punktförmige Körper bewegen sich längs der Geraden $g: X = P + t \cdot \vec{g}$ mit $P = (30 | 100)$ und $\vec{g} = (2 | 1)$. Der erste Körper befindet sich zu Beginn im Punkt P und bewegt sich pro Sekunde um $\vec{g}$ weiter. Der zweite Körper befindet sich zu Beginn im Punkt $Q = (750 | q_2)$ und bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit auf den ersten Körper zu.

- 1) Wo befinden sich die beiden Körper nach 60 bzw. t Sekunden?
- 2) In welchem Punkt und nach wie vielen Sekunden stoßen die beiden Körper aufeinander?

Abbildung 70: (Malle et al., 2010, S. 271)

Dieses Buch ist sehr gut für den fächerübergreifenden Unterricht geeignet. Hierin befindet sich eine Vielzahl von Aufgaben, die Mathematik und Physik verbinden.

b) MATHEMATIK 5

Nun möchte ich mit der Analyse des Schulbuches „Mathematik 5“ von Götz, Reichel, Müller und Hanisch fortsetzen.

Der erste Kontakt mit der Mechanik tritt auf Seite 41, Kapitel „2 Rechnen mit „konkreten“ und „allgemeinen“ Zahlen“, Unterkapitel „Gleitkomma Darstellung und Einheitensystem (SI)“, auf. Aufgabe 81 und 82 lassen sich unter dem Thema Geschwindigkeit einordnen. Bei 81 ist die Geschwindigkeit in Gleitkomma Darstellung mit der Einheit m/s gefragt. In der darauffolgenden Übung sollen Schülerinnen und Schüler die Geschwindigkeiten von vorher bezüglich der Größenordnung miteinander vergleichen.

81	Stelle die Geschwindigkeiten im Gleitkommaformat mit der Einheit m/s dar!			
	a	Amöbe: $1 \mu m/s$	b	Wachstum eines Bambussprosses: $0,1 mm/s$
	c	Weinbergschnecke: $1 mm/s$	d	Strauß: $72 km/h$
	e	Schwertfisch: $90 km/h$	f	Mauersegler: $180 km/h$
	g	Nervenimpuls Mensch ($A\alpha$ -Faser): $360 km/h$	h	Lichtgeschwindigkeit: $30 Milliarden cm/s$
82	Vergleiche folgende Geschwindigkeiten in Aufg. 81 größenordnungsmäßig miteinander!			
	a	a und b	b	a und c
	c	b und c	d	a und h
	e	d und g	f	e und f
	g	a und g	h	b und g

Abbildung 71: (Götz et al., 2010, S. 41)

Anschließend können die Jugendlichen ihr Wissen über Einheitenrechnung, der Größenordnung und der Masse an 83 und 84 anwenden.

83	Stelle die Masse der Körper im Gleitkommaformat mit der Einheit kg dar!			
	a	DNA-Menge im Kern einer menschlichen Zelle: 6 Pikogramm	b	Pantoffeltierchen: 1 Mikrogramm
	c	Menschliche Eizelle: 100 Mikrogramm	d	Straußenei: 150 Dekagramm
	e	Afrikanischer Elefant: 6 Tonnen	f	Blauwal: 120 Tonnen
	g	Erde: $6000 \text{ Trillionen Tonnen}$	h	Jupiter: $1900 \text{ Trilliarden Tonnen}$
84	Gib für die in Aufg. 83 genannten Zahlen den Größenordnungsunterschied an!			
	a	a und b	b	b und c
	c	a und d	d	a und f
	e	e und f	f	f und h
	g	c und f	h	g und h



Abbildung 72: (Götz et al., 2010, S. 41)

Die letzte Aufgabe auf dieser Seite, handelt vom Apollo-Mondflug. Die Heranwachsenden sollen die Größenordnungen der Abstände herausfinden und danach die Ergebnisse bezüglich der Reisezeit interpretieren. Diese Nummer kann man in Verbindung mit dem Weg und der Gravitationskraft bringen.

85 Um wie viel Größenordnungen unterscheiden sich die Abstände? Interpretiere die Ergebnisse hinsichtlich der Reisezeiten! (Wir legen den Apollo-Mondflug zugrunde: Flugzeit Erde – Mond – Erde ... 1 Woche)

- a Erde – Mond/Erde – Sonne
- b Erde – Mond/Erde – Proxima Centauri¹
- c Erde – Pluto/Erde – Sonne
- d Erde – Pluto/Erde – Proxima Centauri

Entfernungen:

Erde – Mond: 400 000 km

Erde – Sonne: 150 Millionen km

Erde – Pluto: 6 Milliarden km

Erde – Proxima Centauri: 4,28 Lichtjahre

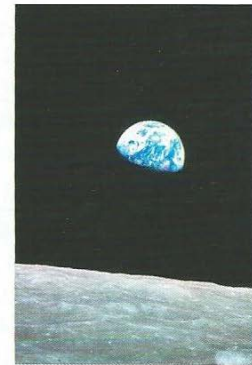


Abbildung 73: (Götz et al., 2010, S. 41)

Das Unterkapitel „Zum „sinnvollen“ und „korrekten“ Gebrauch von Näherungswerten“ liefert in Abbildung 74 und 75 stehende Übungen, die mit der Physik verknüpft sind. Die Nummer 100 steht in Verbindung mit der Dichte und Nummer 104 mit der Geschwindigkeit.

100 Eine Kugel aus Glas ($\rho^* = 2,50 \pm 0,15 \text{ g/cm}^3$) hat den Durchmesser d. Berechne das Zuverlässigkeitsintervall für ihre Masse!

- a $d^* = 10,0 \pm 0,2 \text{ cm}$ b $d^* = 12,5 \pm 0,1 \text{ cm}$ c $d^* = 3,45 \pm 0,05 \text{ dm}$ d $d^* = 2,35 \pm 0,05 \text{ dm}$

Abbildung 74: (Götz et al., 2010, S. 46)

104 Karls Laufzeit für 60 m wurde per Hand von Peter und Petra mit 8,2 s bzw. 7,9 s gestoppt. 1 Gib unter Annahme einer absoluten Fehlerschranke von jeweils 0,3 s die beiden Zuverlässigkeitsintervall an! 2 Ermittle daraus mittels Durchschnittsbildung ein „gemeinsames“, kleineres Zuverlässigkeitsintervall für die „wahre“ Laufzeit!

Abbildung 75: (Götz et al., 2010, S. 46)

Unter dem letzten Unterkapitel „Rückblick und Ausblick“ lassen sich noch unten stehende Aufgaben 209, 211 und 212 finden. In 209 vereint sich die Gleitkommadarstellung mit der Masse. Bei 211 ist die Verbindung von Mathematik mit der Physik gegeben durch die Gleitkommadarstellung, die Berechnung des Volumens und der Dichteberechnung. Die Nummer 212 liefert die gleiche „mathematische-physikalische“ Beziehung wie 209. Siehe Abbildung 76 und 77.

209 ► Ein Elektron hat die Masse $m = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$. Berechne, wie viele Elektronen zusammen eine Masse von 1 kg haben!

Abbildung 76: (Götz et al., 2010, S. 71)

211 Berechne die Dichte eines (als Kugel gedachten) Protons (Masse = $1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, $r = 1,3 \text{ fm}$)!

212 32 kg Sauerstoff enthalten bei Normalbedingungen etwa $6,022 \cdot 10^{26}$ Moleküle. Berechne die Masse eines Sauerstoffmoleküls!

Abbildung 77: (Götz et al., 2010, S. 71)

Mittlerweile befinden wir uns im Kapitel „3 Algebraisches Lösen von Gleichungen mit einer Variablen“, Unterkapitel „Textaufgaben – Gleichungen mit Formvariablen“. Dort werden zu Beginn einige Aufgaben durchgerechnet und die letzte davon weist eine Verkettung zur Geschwindigkeitsberechnung auf. Beispiel N hat einen Autofahrer, welcher zwei Abschnitte fährt, die unterschiedliche Zeiten und Geschwindigkeiten aufweisen, zum Inhalt.

Beispiel N	Ein Autofahrer fuhr die erste, 20 km lange Autobahnetappe um 60 km/h schneller als die zweite, 15 km lange Etappe auf der Landstraße. Für die erste Etappe brauchte er um 5 min weniger als für die zweite. Wie schnell fuhr er auf der Autobahn?
Lösung:	$x \dots$ Geschwindigkeit in km/min
Grundmenge:	$G = \mathbb{R}^+$
Ansatz:	Wegen „Weg = Geschwindigkeit $\cdot$ Zeit“ erhält man durch „Vergleichen“ der Zeiten $\frac{20}{x} = \frac{15}{x-1} - 5$.
Definitionsmenge:	Die Ausdrücke sind für $x = 0$ bzw. $x = 1$ nicht definiert; daher gilt: $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
Lösen der Gleichung:	Wir multiplizieren mit $x \cdot (x-1)$ und erhalten $20 \cdot (x-1) = 15 \cdot x - 5 \cdot x \cdot (x-1)$ $20x - 20 = 15x - 5x^2 + 5x$ $5x^2 = 20$ $x^2 = 4$ mit den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
Lösungsmenge:	$L = \{2\}$ (Wegen $-2 \notin D$ ist -2 keine Lösung der Gleichung.)
Kontrolle:	10 min = 15 min – 5 min
Antwort:	Der Autofahrer fuhr die erste Etappe mit 2 km/min $\triangleq$ 120 km/h.

Abbildung 78: (Götz et al., 2010, S. 92)

Daraufhin folgen Übungen für die Schülerinnen und Schüler, bei denen sie ihre Kenntnisse der Mathematik und Physik anwenden können. Nummer 301 bis 307 sind alles Aufgaben zur Berechnung der Geschwindigkeit, der Zeit und des Ortes.

301	Jemand muss auf einer Strecke von 150 km die mittlere Geschwindigkeit infolge von Behinderung durch Baustellen um 15 km/h senken. Er kommt dadurch um 30 min später am Ziel an. Wie groß war seine ursprüngliche mittlere Geschwindigkeit?
302	Nach Durchführung von Wartungsarbeiten auf einer 180 km langen Eisenbahnstrecke erreichen die Züge eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit. Für Regionalzüge beträgt die Zeitersparnis gegenüber vorher eine Stunde. Wie lang brauchen diese Züge jetzt für diese Strecke?
303	►► Ein Flugzeug fliegt von Frankfurt nach Wien (660 km) und kommt bei Rückenwind mit 60 km/h in Wien um 6 min früher an als bei Windstille. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges?
304	Ein Verkehrsflugzeug verspätet sich infolge von Gegenwind mit 40 km/h auf einer Strecke von 420 km um 3 min. Berechne die Geschwindigkeit des Flugzeuges! Berechne die Flugdauer bei Windstille!
305	Ein Flugzeug braucht für eine 72 km lange Probestrecke hin und zurück 27 min. Es hat beim Hinflug Rückenwind und beim Rückflug Gegenwind von 10 m/s Windstärke. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges! Berechne die Flugdauer bei Windstille für die Gesamtstrecke!
306	Für eine 60 Seemeilen lange Strecke braucht ein Schiff bei Gegenströmung von 3 Seemeilen/h um 5/3 h länger als in strömungsfreiem Wasser. Berechne die Geschwindigkeit des Schiffes!
307	Ein Auto legt eine Strecke von 300 km zurück. Würde es mit einer um 5 km/h höheren Durchschnittsgeschwindigkeit diese Strecke zurücklegen, so würde es um 6 min früher ans Ziel gelangen. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos sowie die benötigte Fahrzeit!

Abbildung 79: (Götz et al., 2010, S. 94)

Jetzt folgt das Unterkapitel „Gleichungen mit Formvariablen – Fallunterscheidung“. Danach führen die Autoren Textaufgaben mit Formvariablen an, bei denen die Schülerinnen und Schüler Fallunterscheidungen vornehmen müssen. Dazu existieren drei Übungen, bei denen die Mechanik wieder in Form der Geschwindigkeit auftritt.

340	Jemand fährt erfahrungsgemäß ein Autobahnteilstück von 180 km mit einer mittleren Geschwindigkeit von 120 km/h. Aufgrund einer Baustelle muss er die Geschwindigkeit auf einem Teil dieser Strecke um 40 km/h senken und braucht daher um 1 eine viertel Stunde, 2 a Stunden länger. Berechne die Länge der Baustelle! Für welche a ist die Aufgabe sinnvoll lösbar?	
341	Ein Autofahrer fährt mit einer bestimmten (mittleren) Geschwindigkeit zunächst 20 km auf der Bundesstraße, dann mit einer (im Mittel) um 30 km/h größeren Geschwindigkeit 1 44 km, 2 a km auf der Autobahn und dann wiederum mit der ursprünglichen Geschwindigkeit 13 km auf der Bundesstraße. Wie schnell fuhr er auf der Bundesstraße, wenn er auf den Bundesstraßen insgesamt gleich lang unterwegs war wie auf der Autobahn? Für welche a ist die Aufgabe lösbar?	
342	Bernhard fährt seine 20 km entfernt wohnende Freundin Claudia besuchen. Er fährt um 17 Uhr ab und will pünktlich um 21 Uhr wieder zu Hause sein. Den Hinweg legt er am Rad mit (durchschnittlich) 18 km/h zurück. 1 Berechne in Abhängigkeit von der Zeit a, die er bei Claudia verbringen will, mit welcher Geschwindigkeit er den Rückweg schaffen muss! 2 Wie lang kann er höchstens bleiben, wenn er den Rückweg im besten Fall mit einer mittleren Geschwindigkeit von 40 km/h zurücklegen kann?	

Abbildung 80: (Götz et al., 2010, S. 99)

Unter „Rückblick und Ausblick“ stößt man auf zwei weitere Übungen zur Geschwindigkeits-, Orts- und Zeitberechnung. Siehe Abbildung 81.

352	Jemand fährt eine Strecke von 1 100 km, 2 a km mit einer mittleren Geschwindigkeit von 80 km/h. Berechne die Zeitersparnis (in Abhängigkeit von a), wenn er dieselbe Strecke mit einer um 20 km/h größeren Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegt!
353	Jemand fährt eine Strecke von 100 km mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h. Berechne die Zeitersparnis (in Abhängigkeit von a), wenn er die Strecke mit einer 1 um 15 km/h, 2 um a km/h größeren Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegt!

Abbildung 81: (Götz et al., 2010, S. 103)

Am Ende jedes Kapitels befindet sich ein Kompetenzcheck. Hier sind ebenfalls noch zwei Exempel zur Berechnung der Zeit, des Ortes und der Geschwindigkeit angeführt. Dort verlangen die Autoren eine interessante Aufgabenbearbeitung. Man findet einen Text zu einem bestimmten Thema, in unserem Fall „Bewegungsaufgaben“, vor. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich anschließend überlegen, welcher Wert gefragt sein könnte, danach die entsprechende Frage aufschreiben und die zugehörigen Lösungen berechnen.

365 Frau A fährt heute wegen starken Verkehrs um a km/h langsamer und kommt um 30 min später an ihrem 90 km entfernten Ziel an.

Nun sind wir bei Kapitel „4 Funktionen – Bedeutung, Darstellung und Eigenschaften“
angelangt. Erst beim Kompetenzcheck taucht ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm auf,
welches von den Heranwachsenden interpretiert werden soll.

- 1 Wie oft bleibt der Autobus stehen?
 - 2 Wie oft bremsst er auf Geschwindigkeiten unter 10 km/h ab?
 - 3 Gibt es Notbremsungen?
 - 4 Wie lange ist die größte Stehzeit?
 - 5 Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht er?

Jetzt ist Kapitel „5 Spezielle Funktionen – Klassifikation und Anwendungen“ an der Reihe. Unter homogene Funktionen ist eine Aufgabe vorzufinden, bei der die Geschwindigkeit, der Ort und die Zeit wieder im Vordergrund stehen. Die Jugendlichen sollen eine Wertetabelle und die Funktionsgleichung aufstellen, ein Weg-Zeit-Diagramm zeichnen und diverse Fragen, anhand des Graphen, beantworten.

- 422 Ein Radfahrer fährt mit der angegebenen gleich bleibenden Geschwindigkeit. Beschreibe die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges y (in km) von der Zeit x (in h) **1** durch eine Funktionswertetabelle, **2** durch die Funktionsgleichung! **3** Welche Bedeutung hat die Formvariable k ? **4** Zeichne den Graphen! **5** Lies ab, wie viel Kilometer der Radfahrer nach 2 h zurückgelegt hat! **6** Lies ab, wie viel Stunden er für eine Strecke von 45 km benötigt!
- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a 10 km/h | b 15 km/h | c 18 km/h | d 24 km/h |
| e 30 km/h | f 36 km/h | g 40 km/h | h 45 km/h |

72

Noch in demselben Kapitel, aber unter „Direkte Proportionalität und linearer Zusammenhang“ trifft man auf ein Einführungsbeispiel, wo die direkte Proportionalität zwischen zwei Größen zu erkennen und anzuwenden ist. Dies wird anhand einer Weg- und einer Geschwindigkeitsberechnung gezeigt. Zuvor findet sich noch eine Definition, was unter einem direkten proportionalen Verhältnis zu verstehen ist.

Definition Stehen zwei Größen x und y in einem Zusammenhang, der sich durch die homogene lineare Funktion $y = k \cdot x$ beschreiben lässt, so sagt man: Die Größen x und y stehen in einem **direkt proportionalen Verhältnis** mit dem **Proportionalitätsfaktor** (der Proportionalitätskonstanten) k .

Der Grund für diese Sprechweise wird aus den folgenden (durch eine einfache Umformung gewonnenen) Darstellungen ersichtlich (wobei allerdings zu beachten ist, dass die „Verhältnis“-Darstellung für $x = 0$ nicht definiert ist).

Darstellung als „homogene lineare Funktion“	Darstellung als „direktes Verhältnis“
$y = k \cdot x$	$\frac{y}{x} = k$, dh. für beliebige x_1, x_2 gilt $\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k$

Zusammenhänge dieser Art begegnen uns im Alltag täglich – überall dort, wo man einen so genannten „direkten Schluss“ wie folgt anwendet:

In einer Stunde legt man mit dem Auto (durchschnittlich) 70 km zurück. Wie weit kommt man in drei Stunden?

$$y = 70 \cdot 3 \Rightarrow y = 210 \text{ km}$$

Weg Geschwindigkeit = k Zeit = x

„Der dreifachen (v-fachen) Zeit entspricht der dreifache (v-fache) Weg, der in *einer* Zeiteinheit zurückgelegt wird.“

In drei Stunden legt man mit dem Auto 210 km zurück. Wie weit ist man (durchschnittlich) in einer Stunde gefahren?

$$\text{Weg} = y = \frac{210}{3} = k \Rightarrow k = 70 \text{ km/h}$$

Zeit = x Geschwindigkeit

„Dem dritten (v-ten) Teil der Zeit entspricht der dritte (v-te) Teil des Weges, der in *einer* Zeiteinheit zurückgelegt wird.“

Abbildung 85: (Götz et al., 2010, S. 134)

Anschließend folgen die indirekten Proportionalitäten. Hier entdeckt man eine Aufgabe, die mit der Mechanik in Beziehung steht. 474 kann man dem physikalischen Thema „Druck“ zuordnen.

474 Auf eine Gasmenge vom Volumen V wirkt ein Druck p . Wird der Druck auf das 2-fache, 3-fache, ..., n -fache vergrößert, so wird bei gleich bleibender Temperatur das Volumen des Gases auf die Hälfte, ein Drittel, ..., ein n -tel verkleinert.

a Beschreibe unter der Voraussetzung konstanter Temperatur die Abhängigkeit des Volumens vom Druck durch eine Wertetabelle, die Funktionsgleichung und den Graphen, wenn einem Druck von 600 mbar ein Volumen von 200 cm³ zugeordnet ist!

b Beschreibe unter der Voraussetzung konstanter Temperatur die Abhängigkeit des Druckes vom Volumen durch eine Wertetabelle, die Funktionsgleichung und den Graphen, wenn einem Volumen von 300 cm³ ein Druck von 900 mbar zugeordnet ist!

Abbildung 86: (Götz et al., 2010, S. 144)

Zu „Proportionalitäten höherer Ordnung“ trifft man gleich auf zwei Exempel mit Lösung, die mit der Dichte fester Körper in Verbindung treten. Beispiel J steht unter „Funktionen vom Typ $y = a \cdot x^3$ kennen und anwenden“ und Beispiel K unter „Funktionen vom Typ $y = \frac{c}{x^3}$ kennen und anwenden“. Siehe Abbildung 87 und 88.

J Ein Würfel besteht aus Holz mit der Dichte
1 $\rho = 0,8 \text{ kg/dm}^3$, **2** $\rho = a \text{ kg/dm}^3$. Beschreibe die Abhängigkeit seiner Masse y (kg) von der Seitenlänge x (dm) durch eine Funktionsgleichung! Zeichne den Funktionsgraphen für $x \in [0; 2]$!

Lösung:

Seitenlänge x (m)	0	0,5	1	1,5	2
Masse y (kg)	0	0,1	0,8	2,7	6,4

1 $y = 0,8 \cdot x^3$ **2** $y = a \cdot x^3$

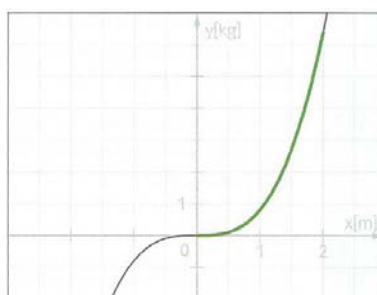


Abbildung 87: (Götz et al., 2010, S. 147)

K Ein Würfel hat eine Masse von **1** 2 kg, **1** c kg. Beschreibe die Dichte y (kg/dm³) des Materials in Abhängigkeit von der Seitenlänge x (dm) durch die Funktionsgleichung! Zeichne den Graphen für $x \in [0; 2]$!

Lösung:

Seitenlänge x (dm)	0	0,5	1	1,5	2
Dichte y (kg/dm ³)	—	16,0	2,0	0,6	0,3

Bemerkung: Der Graph lässt sich in $[0; 2]$ nicht zur Gänze zeichnen, weil er „ins Unendliche“ reicht.

1 $y = 2/x^3$ **2** $y = c/x^3$

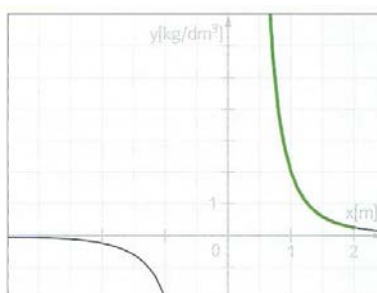


Abbildung 88: (Götz et al., 2010, S. 147)

Anschließend befinden sich Übungen, an denen die Schülerinnen und Schüler ihr gelerntes Wissen der Mathematik und der Physik anwenden können. 494 sowie 495 sind Aufgaben zur Beschleunigung und 497 beinhaltet das physikalische Thema „Die Dichte“.

494 Ein stets der gleichen Beschleunigung a ausgesetzter Körper hat (unter Vernachlässigung von Reibung etc.) nach t Sekunden insgesamt einen Weg von $s = a/2 \cdot t^2$ zurückgelegt. **1** Zeichne ein Zeit-Weg-Diagramm! **2** Berechne, wie weit der Körper nach 5 s gekommen ist! **3** Berechne, wie viel Sekunden er für die ersten 100 m benötigt!

a Auto: $a \approx 2 \text{ m/s}^2$

c Motorrad: $a \approx 8 \text{ m/s}^2$

b Rennauto: $a \approx 7 \text{ m/s}^2$

d Freier Fall: $a \approx 10 \text{ m/s}^2$

495 ► Beschreibe unter Verwendung der Formel $s = a/2 \cdot t^2$ die Beschleunigung a als Funktion der Zeit t ; die Wegstrecke s ist dabei konstant! Erstelle eine Wertetabelle, gib die Funktionsgleichung an und zeichne den Graphen für den angegebenen Weg!

a $s = 100 \text{ m}$

b $s = 200 \text{ m}$

c $s = 500 \text{ m}$

d $s = 1000 \text{ m}$



Maximale „Fallgeschwindigkeit“ $\approx 200 \text{ km/h}$

Abbildung 89: (Götz et al., 2010, S. 148)

497 Eine Kugel hat den Radius r , das Volumen V , die Masse m und die Dichte ρ . Beschreibe mit **1** der Funktionsgleichung, **2** Worten, **3** einem Graphen (Skizze!) die Abhängigkeit

a des Volumens vom Radius,

b der Masse vom Radius unter der Voraussetzung konstanter Dichte,

c der Masse von der Dichte unter der Voraussetzung konstanten Volumens,

d des Volumens von der Masse unter der Voraussetzung konstanter Dichte,

e der Dichte vom Radius unter der Voraussetzung konstanter Masse,

f der Dichte vom Volumen unter der Voraussetzung konstanter Masse!

Abbildung 90: (Götz et al., 2010, S. 148)

Im letzten Unterkapitel „Rückblick und Ausblick“ begegnet man noch weiteren drei Übungen mit physikalischem Hintergrund. Bei 513 stehen acht physikalische Formeln, wobei die Jugendlichen diese in Form von expliziten Funktionsdarstellungen ausdrücken sollen und die Art der Proportionalität bestimmen sollen. Danach sind die Schülerinnen und Schüler dazu angehalten, den Zusammenhang auch mit Worten auszudrücken. Folgende Formeln, mit Bezug zur Mechanik, sind bei dieser Aufgabe angeführt:

- a) Zentripetalbeschleunigung
- b) Kinetische Energie
- c) Fallweg beim freien Fall
- d) Fallweg beim freien Fall, jedoch nicht von der Zeit abhängig
- f) Newton'sche Gravitationsgesetz
- g) Leistung

513

Drücke in Form einer expliziten Funktionsdarstellung aus, in welchem Zusammenhang je zwei Größen in den angegebenen physikalischen Formeln stehen! Welche Arten von Proportionalität (höherer Ordnung) treten auf? Formuliere den Zusammenhang auch mit Worten!

a $a = \omega^2 r$ c $s = g/2 \cdot t^2$ e $F = 4\pi^2 m r / T^2$ g $P = F \cdot s / t$	b $E = m v^2 / 2$ d $H = v_0^2 / (2g)$ f $F = G m M / r^2$ h $p_2 = p_1 \cdot T_2 / T_1$
---	--

Abbildung 91: (Götz et al., 2010, S. 154)

Nummer 514 handelt von dem mittleren Luftdruck, welcher mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel abnimmt.

514

Der mittlere Luftdruck p nimmt gemäß der nebenstehenden Tabelle mit zunehmender Höhe h über dem Meeresspiegel ab. Überprüfe, ob es sich annähernd um einen direkt proportionalen oder einen indirekt proportionalen Zusammenhang (höherer Ordnung) handelt!

Seehöhe (m)	Luftdruck (hPa)
0	1013
1000	894
2000	789
3000	696
4000	614

Abbildung 92: (Götz et al., 2010, S. 154)

Die dritte Aufgabe enthält den waagrechten Wurf, mit der entsprechenden Abbildung einer Wurfparabel. Die Heranwachsenden sollen die Abhängigkeit von der horizontalen Wurfdistanz und der Wurfhöhe angeben und unter welchen Voraussetzungen die Aufgabe zu lösen ist für d , h und k .

516 ► Schräg geworfene Körper beschreiben (unter gewissen *idealisierten* Bedingungen) eine so genannte **Wurfparabel**.

- 1 Ermittle in Abhängigkeit von der *horizontalen* Wurfdistanz d und der Wurfhöhe h (bezogen auf den Abschusspunkt) die Koordinaten des Aufschlagpunktes auf dem vom Abschussort mit der Steigung k ansteigenden bzw. abfallenden ebenen Gelände ►►!
- 2 Gib an, unter welchen Voraussetzungen für d , h und k die Aufgabe lösbar ist! Wie lässt sich dieses Ergebnis (geometrisch) deuten?

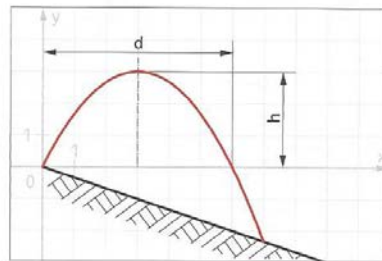


Fig. 5.19

Abbildung 93: (Götz et al., 2010, S. 155)

Mittlerweile kommen wir zu Kapitel „6 Lineare Gleichungssysteme mit wie Variablen“, bei dem die Schülerinnen und Schüler unter anderem auch Textaufgaben zu linearen Gleichungssystemen lösen sollen. Hinsichtlich dieses Themas stößt man auf nachfolgende Übung, die man unter der Dichte fester Körper einordnen kann. Beim Wort „Prozent“ findet sich ein Hinweis, dass Volums-Prozent gemeint sind.

- 578 Berechne, wie viel Prozent^{v1} Kupfer von der Dichte $8,91 \text{ kg/dm}^3$ und wie viel Prozent Zink von der Dichte $7,11 \text{ kg/dm}^3$ in Messing von der Dichte $8,55 \text{ kg/dm}^3$ enthalten sind!

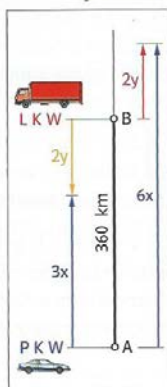
Abbildung 94: (Götz et al., 2010, S. 172)

Danach schließen die Autoren mit einem eigenen Abschnitt zu „Bewegungsaufgaben bearbeiten“ an. Das Einführungsbeispiel J, mit Lösung, handelt von zwei Lastkraftwagen und einem PKW, die von verschiedenen Orten wegfahren. Die Jugendlichen können diverse Berechnungen zur mittleren Geschwindigkeit und zur Entfernungen aus der Lösung entnehmen. Siehe Abbildung 95.

Danach folgen neun Bewegungsaufgaben, von 595 bis 603, an denen die Heranwachsenden üben können. Diese handeln von Personenkraftwagen, Lastkraftwagen, Güterzug, Regionalzug, Schnellzug, Schiff, Flugzeug, Motorrad und Eisenbahnzug. Mittlere Geschwindigkeiten, Entfernungen, Ankunftszeiten, Eigengeschwindigkeit, Fließgeschwindigkeit, Windgeschwindigkeit sind von den Schülerinnen und Schüler zu berechnen (Abbildung 96 und 97).

- J Zwei Orte A und B sind 360 km voneinander entfernt. Startet ein PKW von A nach B und 1 h später ein LKW von B nach A, so begegnen sie einander nach 2 h Fahrt des LKW. Führt der PKW von A in Richtung nach B und fährt der LKW 4 h später von B aus in dieselbe Richtung wie der PKW, so überholt der PKW den LKW nach 6 h Fahrt. Berechne,
- die mittlere Geschwindigkeit des PKW in km/h,
 - die mittlere Geschwindigkeit des LKW in km/h,
 - in welcher Entfernung vom Ort A PKW und LKW einander begegnen,
 - in welcher Entfernung vom Ort B der LKW vom PKW überholt wird!
- e Illustriere den Sachverhalt mittels eines Zeit-Weg-Diagramms!

Lösung: x ... mittlere Geschwindigkeit des PKW in km/h, $x \in \mathbb{R}^+$
 y ... mittlere Geschwindigkeit des LKW in km/h, $y \in \mathbb{R}^+$



Gemäß der Formel $s = v \cdot t$ für den Weg einer gleichförmigen Bewegung ►► ergibt sich aus der linken

Figur: $3x + 2y = 360$

$$6x = 360 + 2y$$

$$L = \{(80|60)\}$$

- Die mittlere Geschwindigkeit des PKW beträgt 80 km/h.
- Die mittlere Geschwindigkeit des LKW beträgt 60 km/h.
- PKW und LKW begegnen einander in 240 km Entfernung von A.
- Der PKW überholt den LKW in 120 km Entfernung von B.

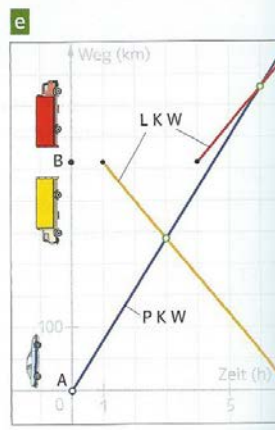


Abbildung 95: (Götz et al., 2010, S. 174)

- 595 Die Orte A und B sind 375 km voneinander entfernt. Führt ein PKW von A nach B und gleichzeitig ein LKW von B nach A, so begegnen sie einander nach einer Fahrt von 2,5 h. Starten PKW und LKW zu gleicher Zeit und fährt der LKW in dieselbe Richtung wie der von A in Richtung B fahrende PKW, so wird er vom PKW nach 12,5 h Fahrt eingeholt. Berechne a die mittlere Geschwindigkeit des PKW in km/h, b die mittlere Geschwindigkeit des LKW in km/h, c in welcher Entfernung vom Ort A sie einander begegnen, d in welcher Entfernung vom Ort B der PKW den LKW einholt!
- 596 Vom Ort A geht um 6.00 ein Güterzug und 1 h später ein Regionalzug nach dem Ort B ab. Der Regionalzug holt den Güterzug um 8.30 ein und kommt um 11.30 im Ort B an; zu dieser Zeit ist der Güterzug noch 40 km von B entfernt. Berechne a die Entfernung von A nach B, b die mittlere Geschwindigkeit des Güterzuges in km/h, c die mittlere Geschwindigkeit des Regionalzuges in km/h, d die Ankunftszeit des Güterzuges im Ort B!
- 597 Vom Ort C geht um 7.00 ein Regionalzug und zwei Stunden später ein Schnellzug nach dem 270 km entfernten Ort D ab. Um 11.00 ist der Regionalzug um 20 km voraus, um 12.00 ist der Schnellzug um 20 km voraus. Berechne die mittlere Geschwindigkeit a des Regionalzuges in km/h, b des Schnellzuges in km/h, c um wie viel Uhr der Schnellzug den Personenzug einholt, d wie viel Kilometer vom Ort C entfernt der Schnellzug den Regionalzug einholt, e um wie viel Uhr der Schnellzug im Ort D ankommt, f um wie viel Minuten später der Regionalzug in D ankommt als der Schnellzug!

Abbildung 96: (Götz et al., 2010, S. 174)

598	Ein Regionalzug fährt um 13.30, ein Schnellzug um 13.50 von Innsbruck nach dem 256 km entfernten Salzburg ab. Um 14.00 ist der Regionalzug noch 6 km vor dem Schnellzug, um 15.00 ist der Regionalzug 22 km hinter dem Schnellzug. Berechne die mittleren Geschwindigkeiten der beiden Züge und ihre Ankunftszeiten in Salzburg!
599	In Wien Westbhf. geht um 8.00 ein Regional-Express, um 8.20 ein Schnellzug ab. Der Schnellzug überholt den Regional-Express um 9.20 und kommt um 11.20 nach Wels. Zu dieser Zeit ist der Regional-Express noch 36 km von Wels entfernt. Berechne die mittleren Geschwindigkeiten der beiden Züge, die Entfernung Wien-Wels und die Ankunftszeit des Regional-Express in Wels!
600	Ein Schiff fährt stromabwärts mit 23 km/h, stromaufwärts mit 9 km/h. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Schiffes und die Fließgeschwindigkeit des Wassers! <i>Bemerkung:</i> Es wird angenommen, dass das Schiff stromaufwärts und stromabwärts die gleiche Eigengeschwindigkeit hat und die Fließgeschwindigkeit des Wassers konstant ist.
601	Ein Flugzeug fliegt mit 820 km/h mit dem Wind und mit 740 km/h gegen den Wind. Berechne die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges bzw. die Windgeschwindigkeit! <i>Bemerkung:</i> Es werden gleich bleibende Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges und gleich bleibende Windrichtung und Windgeschwindigkeit vorausgesetzt.
602	Ein Motorradfahrer wohnt in Linz, ein Radfahrer in Lambach, das auf der Strecke Linz-Salzburg 40 km von Linz entfernt liegt. Fahren beide gleichzeitig von ihren Wohnorten ab und einander entgegen, so treffen sie einander nach 30 min; fahren aber beide in der Richtung nach Salzburg, so holt der Motorradfahrer den Radfahrer in 48 min ein. Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Radfahrers und die des Motorradfahrers sowie die Entfernungen der Treffpunkte von Lambach!
603	Wenn ein Eisenbahnzug auf der Fahrt von A nach B seine fahrplanmäßige Geschwindigkeit um 5 km/h erhöht, so kommt er 7 min zu früh in B an; verringert er aber seine fahrplanmäßige Geschwindigkeit um 5 km/h, so verspätet er sich um 8 min. Berechne seine fahrplanmäßige Geschwindigkeit und die Entfernung von A nach B!

Abbildung 97: (Götz et al., 2010, S. 175)

Im Unterkapitel „Lineare Gleichungssysteme mit Formvariablen“ taucht eine Textaufgabe auf, die man zur Geschwindigkeit zuordnen kann. Hier ist die Geschwindigkeitsangabe in Knoten, wobei ein Schiff stromabwärts a Knoten und stromaufwärts mit der angegebenen Geschwindigkeit in Knoten fährt.

636	Ein Schiff fährt stromabwärts mit a Knoten, stromaufwärts mit der angegebenen Geschwindigkeit. Berechne in Abhängigkeit von a die Eigengeschwindigkeit des Schiffes und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers! Für welche a ist die Aufgabe (eindeutig) lösbar?
	☐ a) a/2 Knoten ☐ b) a/3 Knoten ☐ c) 2a/3 Knoten ☐ d) 3a/4 Knoten

Abbildung 98: (Götz et al., 2010, S. 179)

Angekommen am Ende des sechsten Kapitels, zum Kompetenzcheck, existiert noch eine weitere Bewegungsaufgabe, wobei die Schülerinnen und Schüler wieder eine dazu passende Frage formulieren sollen bezüglich des gesuchten Wertes und die dementsprechende Lösung bestimmen sollen. Auf der rechten Seite stehen Fragen in Bezug auf die Bewegungsaufgaben.

Bewegungsaufgabe: A und B sind 300 km voneinander entfernt. Ein PKW fährt von A in Richtung B. Gleichzeitig startet in B ein LKW. Führt der LKW dem PKW entgegen, so begegnen sie einander nach 2,5 h. Führt der LKW hingegen in der Fahrtrichtung des PKW, so holt ihn der PKW nach 12,5 h ein.	655	1 Welche Formel wird bei Bewegungsaufgaben verwendet? 2 Welche Modellvoraussetzungen macht man dabei (stillschweigend)? 3 Erkläre, wie man beim Lösen geschickt vorgeht! 4 Welche beiden graphischen Darstellungen kennst du in diesem Zusammenhang?
--	-----	---

Abbildung 99: (Götz et al., 2010, S. 183)

Soeben starten wir bei Kapitel „7 Trigonometrie“, Unterkapitel „Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks“. Das Beispiel G steht am Beginn mit durchgerechnetem Lösungsweg zur Einführung von Aufgaben, die mit rechtwinkligen Dreiecken zu lösen sind.

G Herr Eilig-Rücksichtslos biegt 50 m vor der Wegkreuzung unter 40° ab (Figur) und geht eine „Abkürzung“ durch den Acker. Wie viel Meter Weg erspart er sich? Erspart er sich Zeit, wenn er im Acker mit $2/3$ jener Geschwindigkeit vorankommt, die er auf den Wegen hätte?

Lösung:

$$\tan 40^\circ = \frac{b}{50} \Rightarrow b = 50 \cdot \tan 40^\circ \Rightarrow b = 42 \text{ m}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{50}{c} \Rightarrow c = \frac{50}{\cos 40^\circ} \Rightarrow c = 65 \text{ m}$$

Herr Eilig-Rücksichtslos erspart sich 27 m Weg. Dennoch verliert er Zeit. In der Zeit, die er für den korrekten $50 \text{ m} + 42 \text{ m} = 92 \text{ m}$ langen Weg bräuchte, hat er erst $92 \cdot 2/3 \approx 61 \text{ m}$ der 65 m langen „Abkürzung“ zurückgelegt.

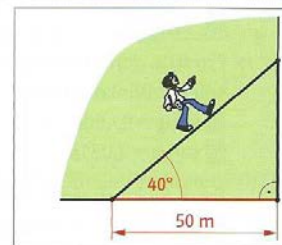


Abbildung 100: (Götz et al., 2010, S. 194)

Ab jetzt befinden wir uns im Kapitel „8 Ebene Koordinatengeometrie“. Im Unterkapitel „Punkte und Pfeile“ findet sich ein kurzer Absatz über die Beschreibung von Kräften durch Pfeile.

4. Kräfte durch Pfeile beschreiben

Einzelkräfte haben einen Betrag und eine orientierte Wirkungsrichtung. Sie durch Pfeile zu beschreiben ist dennoch problematisch, weil laut Definition ein Pfeil ja einen ganz *bestimmten* Anfangspunkt besitzt, wohingegen die Kraft in jedem *beliebigen* Punkt der *Wirkungslinie* ansetzen kann, ohne an der physikalischen Wirkung etwas zu ändern. (Auch) deswegen werden wir in Kap. 8.2 den Begriff *Pfeil* zum Begriff *Vektor* erweitern.



Abbildung 101: (Götz et al., 2010, S. 228)

Drei Seiten weiter hinten ist wieder ein kurzer Absatz verfasst, dieses Mal zur Beschreibung von Einzelkräften durch Vektoren und deren Komponenten.

3. Einzelkräfte durch Vektoren und deren Komponenten beschreiben

Auch wenn Einzelkräfte genau genommen unserer Definition eines Vektors nicht entsprechen, so können wir die obigen Ergebnisse dennoch nutzen: etwa zur Angabe der „Größe“ der Kraft über den Betrag oder über den Winkel, den die Wirkungslinie mit den **Kraftkomponenten**, dh. den in x-Richtung bzw. y-Richtung wirkenden Teilkräften, einschließt.

Erläutere anhand von Fig. 8.9, wie man hier vorgehen kann ►!

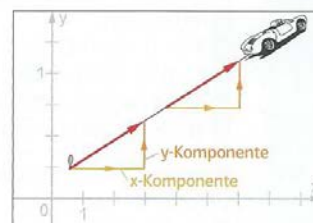


Fig. 8.9

Abbildung 102: (Götz et al., 2010, S. 231)

Anschließend folgt eine Übung zur Berechnung des Kraftvektors und des Winkels, den er mit seinen Komponenten einschließt. Die Verbindung von Mathematik und Physik ist hier gegeben durch die Vektoren und Kräfte.

- 857 Berechne **1** den Betrag des „Kraftvektors“ und **2** den Winkel, den er mit seinen Komponenten in x- bzw. y-Richtung einschließt!
- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a $\vec{a} = (3 4)$ | b $\vec{a} = (-5 12)$ |
| c $\vec{a} = (-2 -4)$ | d $\vec{a} = (5 -2)$ |

Abbildung 103: (Götz et al., 2010, S. 232)

Nun sind wir beim Unterkapitel „Das skalare Produkt“ angekommen. Nummer 902 verlangt von den Schülerinnen und Schülern drei Skizzen von Kräfteparallelogrammen und daran erklärt, verschieden starke Einflüsse einer Teilkraft auf die resultierende Kraft. 903 fällt unter das physikalische Teilgebiet „Arbeit“. 904 und 905 ordnet man den Kräften zu.

- 902 Erläutere an drei geeigneten Skizzen von Kräfteparallelogrammen, wie eine Teilkraft $\vec{a}$ auf die resultierende Kraft $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ **1** einen verstärkenden, **2** hemmenden, **3** gar keinen Einfluss haben kann!
- 903 Von zentraler Bedeutung in der Physik und Technik ist der Begriff „Arbeit“ (W):
Arbeit = Kraftkomponente in Wegrichtung mal Weg
 $W = \vec{F}_s \cdot \vec{s}$
 Dabei wird sowohl die Kraftkomponente $\vec{F}_s$ als auch der (hier als geradlinig vorausgesetzte) Weg durch einen Pfeil (Vektor) $\vec{s}$ dargestellt.
 Begründe diese Definition von „Arbeit“ anhand von Fig. 8.17a! Gib an, ob „Arbeit“ eine *skalare* Größe oder eine *vektorielle* Größe ist!
- 904 Längs des Weges $\vec{s} = (10|0)$ wirken zwei *betrags-gleiche* Kräfte $\vec{a} = (3|4)$ und $\vec{b} = (4|3)$. Welche Arbeit
 ► wird längs $\vec{s}$ **1** von $\vec{a}$, **2** von $\vec{b}$ geleistet?
 Interpretiere das Ergebnis anhand von Fig. 8.17b!
- 905 Längs des Weges $\vec{s} = (10|0)$ wirken zwei *betrags-ungleiche* Kräfte $\vec{a} = (3|4)$ und $\vec{b} = (3|2)$. Welche Arbeit
 ► wird längs $\vec{s}$ **1** von $\vec{a}$, **2** von $\vec{b}$ geleistet?
 Interpretiere das Ergebnis anhand von Fig. 8.17c!

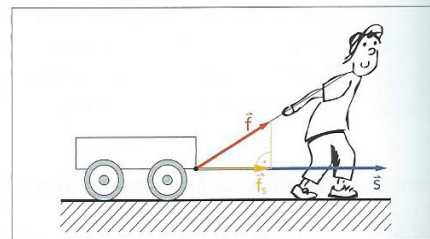


Fig. 8.17a

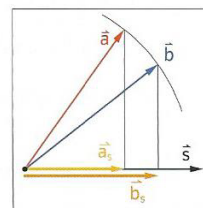


Fig. 8.17b

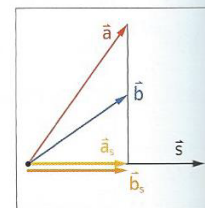


Fig. 8.17c

Abbildung 104: (Götz et al., 2010, S. 244)

In diesem Lehrbuch findet man weniger physikalische Aufgaben, vor allem zu den Funktionen sind wenige Übungen vorhanden.

a) VERGLEICH

Zusammenfassend stellt man fest, dass im Buch „Mathematik verstehen 5“ deutlich mehr Verbindung zur Physik aufgebaut wird als im Lehrbuch „Mathematik 5“. Malle et al. (2010) führen sechs Abschnitte zur Physik an, „Anwendungen der Astronomie“, „Kräfte und Geschwindigkeiten“, „Anhalteweg eines Autos“, „Lineare Zeit-Ort-Funktionen“, „Zeit-Ort-Funktionen“ und „Zeit-Ort-Funktionen mit unterschiedlicher Startzeit“. Wohingegen Götz et. al. (2010) einen Abschnitt zu den Bewegungsaufgaben und einen kurzen zu Kräfte als Vektoren.

i. MATHEMATISCHE AUFGABEN IN PHYSIK-SCHULBÜCHERN

a) BIG BANG 5

Jetzt möchte ich mich dem Physikschulbuch „Big Bang 5“ von Martin Apolin (2007) widmen und analysieren inwieweit die Mathematik in diesem Buch vertreten ist.

M. Apolin beginnt zum Aufwärmen auf die Mechanik mit dem Kapitel „Tooltime“. Er führt hier Werkzeuge ein, die zum Lösen von physikalischen Problemen verwendet werden. Im Unterkapitel „Was misst ein Tacho?“ werden Vektoren und Skalare erklärt und das Hauptaugenmerk liegt auf dem Geschwindigkeitsvektor. Meist zu Beginn eines Abschnittes befindet sich ein Kästchen mit Fragen, die nachfolgend im Text erklärt werden. Folgende Fragen, die mit der Mathematik in Verbindung stehen, findet man zu Beginn:

| Vektoren |

In der Physik kommen meistens 2- oder 3-dimensionale **Vektoren** vor. In diesem Buch sind Vektoren fett gedruckt. Die Kraft ist also zum Beispiel so dargestellt: $\mathbf{F}$. Es gibt Spalten- und Zeilenform – Geschmackssache. Die Kraft $\mathbf{F}$ in drei Dimensionen kann man so darstellen

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \text{ oder } \mathbf{F} = (F_x \mid F_y \mid F_z)$$

Eine solche Darstellungsform nennt man übrigens **Matrix** (bitte deutsch aussprechen). Damit meint man allgemein tabellenartig angeschriebene Zahlen. Die Vektoren oben nennt man 3x1- und 1x3-Matrizen. Die Matrix im gleichnamigen Film ist seeeehr kompliziert und noch dazu in 3D (siehe Abb. 4.1).



Für unsere Abschätzungen und Berechnungen ist meist die Länge der Vektoren wichtig, also der **Betrag**. Man berechnet ihn mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Wichtig: Der **Betrag** eines Vektors ist ein Skalar und hat dann natürlich keine Richtung mehr! Man kann es auch so schreiben:

$$|\mathbf{F}| = F$$

Abbildung 105: (Apolin, 2007, S. 34)

„F2 Welche physikalische Größe zeigt eigentlich ein Tachometer?“

„F3 Wie nennt man eine Geschwindigkeitsänderung in der Physik ganz allgemein?“

„F4 Du fährst mit konstant 80 km/h durch eine Kurve. Ändert sich dabei die Geschwindigkeit?“

Anschließend erklärt Apolin, was man unter Skalaren, nur mit Zahlen beschreibbar, und Vektoren, Größen mit Richtung, versteht. Danach folgt eine Infobox zu Vektoren, siehe Abbildung 105. Hier wird der Vektor und der Betrag des Vektors, also ein Skalar, sehr deutlich erklärt. Die Verknüpfung zur Mathematik ist hier durch die Vektoren gegeben.

Auf der nächsten Seite befindet sich ebenfalls eine Infobox, wo die Frage F3, wie man die Geschwindigkeitsänderung in der Physik ganz allgemein nennt, beantwortet wird.

| Fachchinesisch |

In der Physik kommen viele Fachwörter vor, die du aus dem Alltag nicht kennst. **Skalar** ist so eines. Es kommen aber auch Wörter aus dem Alltag vor, die in der Physik eine andere Bedeutung haben. Das ist schwierig, weil es dann zu Missverständnissen kommen kann.

In diesem Abschnitt kommt das Wort **Beschleunigung** vor. Im Alltag meint man damit, dass etwas schneller wird. In der Physik meint man damit aber **jede Änderung der Geschwindigkeit (F3)**, also auch Kurvenfahren oder Abbremsen (das wäre eine negative Beschleunigung). Denn denk daran: Die Geschwindigkeit ist ein Vektor. Die Kurvenfahrt ist daher eine Beschleunigung, bei der man doch nicht schneller wird (F6)!

Abbildung 106: (Apolin, 2007, S. 35)

Danach wird erklärt, wann zwei Vektoren gleich sind und ein Bild zum Pfeilvergleich als grafische Variante beigelegt, Abbildung 107. Dazu findet man eine Infobox zum Pfeilvergleich, Abbildung 108.

»» i | Pfeilvergleich |

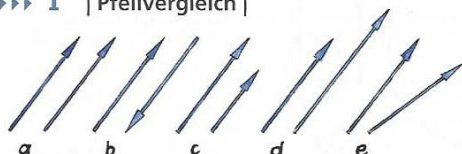


Abb. 4.4: Nur bei a sind die Vektoren gleich! Fall a nennt man parallel, Fall b antiparallel.

Abbildung 107: (Apolin, 2007, S. 35)

| Pfeilvergleich |

Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar. In der Abbildung 4.5 siehst du 4 Vektoren mit gleichem Betrag, nämlich 5 (weil

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



ist). Alle Vektoren haben zwar die gleiche Länge, aber nur die Vektoren a und b sind gleich. Sie haben die Koordinaten (3,4). c hat die Koordinaten (0,5) und d (-3,4). Zwei Vektoren sind nur dann gleich, wenn sie in **allen Merkmalen** übereinstimmen. Dann kannst du sie durch reines Verschieben zur Deckung bringen.

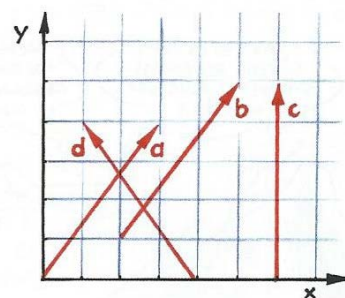


Abb. 4.5:
Vier gleich lange
Vektoren!

Abbildung 108: (Apolin, 2007, S. 35)

Dann beantwortet der Autor Frage F2, was ein Tachometer anzeigt. Diese Frage eignet sich auch hervorragend für den Mathematikunterricht, da den Schülerinnen und Schüler ein besseres Verständnis der Vektoren gewährleistet werden kann. Denn der Tachometer zeigt

nicht an, in welche Richtung ein Auto fährt, sondern er zeigt den Betrag der Geschwindigkeit an, also einen Skalar.

Auf der Seite 36 findet man die Antwort auf Frage F4. Die Geschwindigkeit ändert sich genau dann, wenn man langsamer, schneller wird oder die Richtung ändert. Fährt man mit konstanter Geschwindigkeit von 80 km/h durch eine Kurve, ändert sich die Richtung des Geschwindigkeitsvektors und daher auch die Geschwindigkeit. Dazu ist noch nachstehende Abbildung hinzugefügt. Bei dieser Frage können die Heranwachsenden ihr gelerntes Wissen aus der Mathematik mit den Vektoren und aus der Physik vereinen und anwenden.

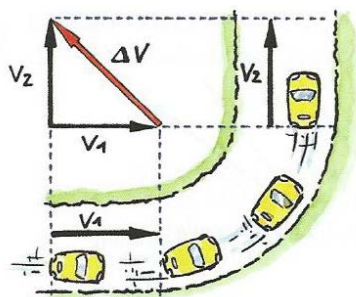


Abb. 4.6: Der Fahrer fährt durch die Kurve, ohne vom Gas zu gehen. Trotzdem ändert sich die Geschwindigkeit, weil sich der Geschwindigkeitsvektor **dreht**! Diese Beschleunigung kann der Fahrer spüren.

Abbildung 109: (Apolin, 2007, S. 36)

Jetzt gelangen wir zu dem Unterkapitel „Wolkenbruch und Fahrradboten – Einfache Vektoroperationen“. Zu Beginn stößt man wieder auf die Box mit Fragen. F7 bis F10, wobei dieses Mal alle eine Beziehung zur Mathematik aufbauen.

„F7 Du fährst mit dem Bus mit 1 m/s gemächlich von der Schule nach Hause und gehst mit $0,5 \text{ m/s}$ nach hinten. Du schiebst dir das Mittags-Baguette mit $0,05 \text{ m/s}$ (5 cm/s) in den Mund (du bist sehr hungrig). Auf dem Baguette läuft eine Ameise mit $0,1 \text{ m/s}$ (10 cm/s) um ihr Leben. Wie schnell ist die Ameise relativ zur Straße?“

„F8 Welchen Weg legt ein Stück Zucker zurück, das du im Flugzeug aus 10 cm Höhe in die Tasse fallen lässt?“

„F9 Ein Zeitungsbote fährt mit seinem Rad mit 10 m/s und wirft die Zeitung mit ebenfalls 10 m/s quer zur Fahrtrichtung. Wie schnell fliegt die Zeitung relativ zum Boden, und wo muss er sie wegwerfen, damit er genau die Tür trifft?“

„F10 Wolkenbruch! Die Tropfen fallen senkrecht mit 8 m/s zu Boden und du beginnst mit 6 m/s zu laufen. Wie fällt dann aus deiner Sicht der Regen zu Boden? Wie musst du den Schirm halten?“

Anschließend stellt der Verfasser des Schulbuches die Vektoraddition mit parallelen und antiparallelen Vektoren dar. Siehe Abbildung 110.

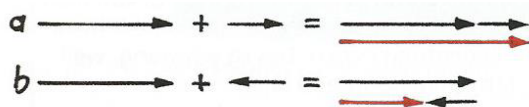


Abb. 4.8: Grafische Addition von parallelen und antiparallelen Vektoren. Der Summenvektor ist rot dargestellt.

Abbildung 110: (Apolin, 2007, S. 36)

Danach wird die Frage von F7 grafisch gelöst. Hierbei üben die Jugendlichen die Addition und Subtraktion von Vektoren. Als Lösung steht dabei, dass sich die Ameise mit $0,45 \text{ m/s}$ relativ zum Boden bewegt.

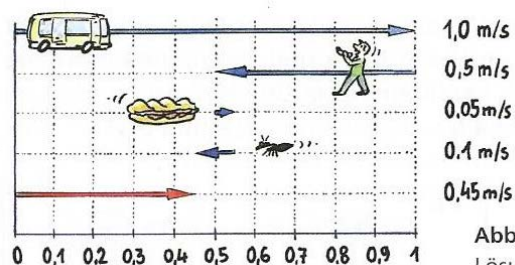


Abb. 4.9: Grafische Lösung zu F7.

Abbildung 111: (Apolin, 2007, S. 37)

Daraufhin begegnet man einer Erklärung bezüglich Kraftvektoren: wenn sich alle aufheben, dann treten keine Beschleunigungen auf. Hierbei verschiebt man die Vektoren und gelangt wieder zum Ausgangspunkt, was bedeutet, dass die Gesamtkraft gleich null ist und keiner der drei Personen ist in der Lage, jemand anderen wegzuziehen. Das wird grafisch in Abbildung 112 dargestellt.

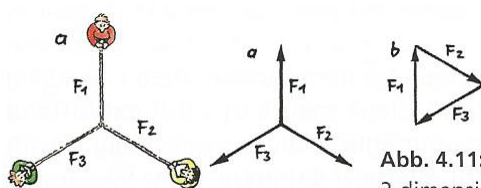


Abb. 4.11: Addition von drei 2-dimensionalen Vektoren.

Abbildung 112: (Apolin, 2007, S. 37)

Die Frage zum Zeitungsboten (F9) ist im Buch ebenfalls grafisch gelöst. Dazu entdeckt man nachfolgende Abbildung. Die Vektoren wurden mit Hilfslinien zu einem Quadrat ergänzt. Die Geschwindigkeit der Zeitung ist ungefähr $14,1 \text{ m/s}$, da diese die Diagonale des Quadrates beschreibt. Vom Boden aus gesehen wirft er die Zeitung unter 45° weg, also 90° vom Quadrat

durch zwei dividieren. Die Diagonale berechnet man mit Hilfe des Pythagoras. Wegen der Zuordnung zur Mathematik wäre dies die geometrische Darstellung von Vektoren.



Abb. 4.12:

Diese Art der Darstellung nennt man **Vektorparallelogramm**. Die Diagonale eines Quadrats ist Seitenlänge mal $\sqrt{2}$ ($\sim 1,414$).

Abbildung 113: (Apolin, 2007, S. 37)

Hinterher nimmt man eine Infobox wahr, welche jedoch nur die Lösung auf die Frage enthält, welchen Weg ein Zuckerstück aus 10 cm Höhe in einem Flugzeug zurücklegt. Als Beobachter auf der Erde sind dies 35 m in horizontaler Richtung. Meiner Meinung nach wäre diese Aufgabe erst sinnvoll, wenn die Schülerinnen und Schüler mit der Formel für die Falltiefe beim freien Fall vertraut sind. Dann können die Jugendlichen die Fallzeit des Zuckers stoppen und die Geschwindigkeit eines Flugzeuges im Internet recherchieren. Für die mathematische Zuordnung könnte man die Formel für den Fallweg als explizite Funktionsdarstellung ausdrücken und diverse Proportionalitäten bestimmen lassen.

Im Anschluss daran behandelt Apolin F10, das heißt, wie die Regentropfen aus meiner Sicht fallen, wenn ich laufe. Hierzu findet man abermals eine grafische Lösung, siehe Abbildung 114. Bei dieser Aufgabe ist eine Addition von Vektoren, genauer Geschwindigkeitsvektoren, gefragt. Der Bezug zur Mathematik ist gegeben durch Rechenoperationen mit Vektoren



durchzuführen und den Pythagoreischen Lehrsatz anwenden.

Abb. 4.13: Wenn du läufst, addieren sich die Geschwindigkeiten. Weil es sich um ein rechtwinkeliges Dreieck handelt, kannst du mit **Pythagoras** rechnen: $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$. Eine solche Konstruktion nennt man **Vektordreieck**.

Abbildung 114: (Apolin, 2007, S. 37)

Angekommen beim Unterkapitel „Gespannter Zwirn – Zerlegung von Vektoren“, startet dieses mit nachfolgenden Fragen:

„F11 Wieso beschleunigt eine Kugel an einem steilen Abhang schneller als an einem flachen (probier das an einem geneigten Tisch aus)? Das Gewicht ist doch in beiden Fällen gleich groß? Und warum erzeugt eine schiefe Ebene eine Fallbewegung in Zeitlupe?“

„F12 Du hältst ein Gewicht von 10 N (das entspricht einer Masse von 1 kg) an einer Schnur. Mit wie viel Newton musst du an den Enden ziehen, damit sie wirklich völlig gespannt ist?“

Bei F12 ist Abbildung 115 unterhalb angeführt.

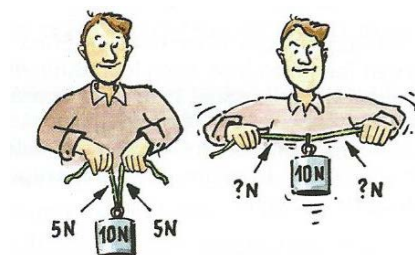


Abb. 4.14: Wie viel Kraft ist nötig, um das Seil völlig zu spannen?

Abbildung 115: (Apolin, 2007, S. 38)

F11 kann mathematisch gelöst werden, indem man Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken durchführt, jedoch findet sich im Physiklehrbuch eine grafische Lösung, bei der die Gewichtskraft in zwei Komponenten zerlegt wird, parallel zum Hang, die Hangabtriebskraft, und normal zum Hang, die Normalkraft. Meiner Ansicht nach, sollte die Lösung dieser Aufgabe erst beim Kapitel Arbeit und Energie erfolgen, da dann bereits die Kräfte durchgenommen sind.

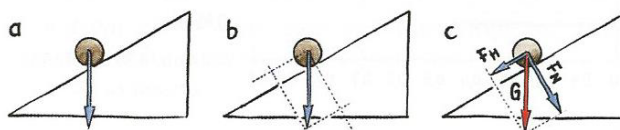


Abb. 4.16: Zerlegung des Gewichtsvektors in die Hangabtriebskraft F_H und in die Normalkraft F_N . F_H ist immer kleiner als G und daher auch die Beschleunigung der Kugel nicht so groß wie im freien Fall.

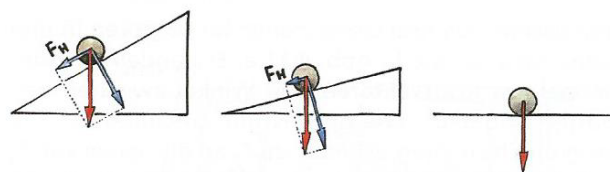


Abb. 4.17: Die Hangabtriebskraft F_H wird kleiner, je weniger stark die Ebene geneigt ist.

Abbildung 116: (Apolin, 2007, S. 37)

Zu F12 wird angeführt, dass man die Schnur nicht vollständig waagrecht spannen kann, da sich alle Kräfte aufheben, aufgrund des Kräfteparallelogramms. Dies erklärt der Autor anhand von zwei Abbildungen. Wenn man nun das Seil komplett waagrecht spannen möchte, dann müsste die Kraft unendlich groß sein, dann wäre auch das Kräfteparallelogramm unendlich breit, siehe Abbildung 118.

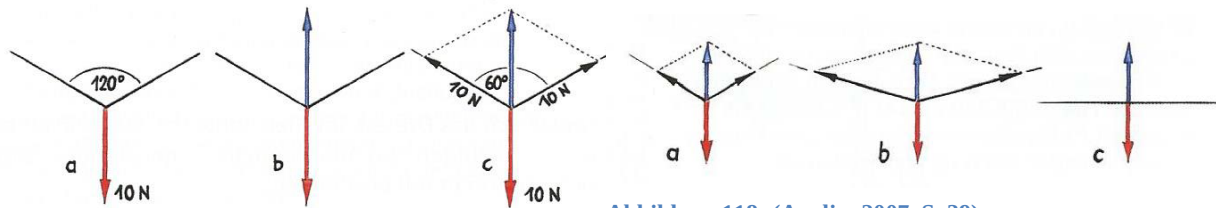


Abbildung 118: (Apolin, 2007, S. 39)

Abb. 4.18: Da das Gewicht in Ruhe ist, muss die Gewichtskraft (rot) von einer anderen Kraft (blau) kompensiert werden. Du musst diesen Vektor in die Komponenten zerlegen, die in Seilrichtung zeigen. Drei gleich große Kräfte unter 120° , die einander aufheben, hattest du schon bei Abb. 4.11!

Abbildung 117: (Apolin, 2007, S. 39)

Am Ende des Unterkapitels befindet sich eine Arbeitsbox, wobei nachkommende Aufgabenstellungen angeführt sind, die die Mathematik und Physik vereinen.

„F13 Fasse noch einmal den Unterschied zwischen Vektor und Skalar zusammen und gib einige Beispiele dazu.“

„F15 Erkläre den Unterschied zwischen Masse und Gewicht mit Hilfe der Begriffe Vektor und Skalar!“

„F16 Beweise mit dem Satz von Pythagoras, dass alle Vektoren in Abb. 4.5 gleich lang sind. Du musst sie dazu in ihre x- und y-Komponenten zerlegen.“ Siehe Abbildung 119.

„F17 Nimm an, dass in Abb. 4.11 eine der Kräfte doppelt so groß ist wie die anderen. Wie sieht die Summenkraft dann aus?“ Siehe Abbildung 112.

„F20 Nimm an, Regentropfen fallen mit 8 m/s unter 45° von rechts nach links auf den Boden. Wie schnell musst du nach links laufen, dass aus deiner Sicht der Regen senkrecht fällt? Löse grafisch!“

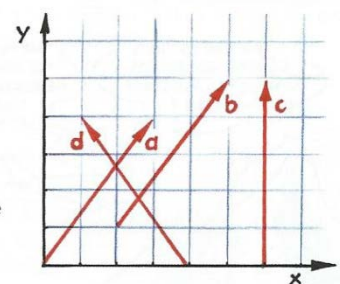


Abb. 4.5:
Vier gleich lange
Vektoren!

Abbildung 119: (Apolin, 2007, S. 35)

Das Kapitel „Gedachte Singularität“, mit Unterkapitel „Ein Stapelproblem – Der Körperschwerpunkt“, liefert in der Arbeitsbox einen Arbeitsauftrag, bei dem die Schülerinnen und Schüler lernen, den Körperschwerpunkt eines unregelmäßigen 2d-Objektes zu bestimmen. Siehe Abbildung 120.



Abbildung 120: (Apolin, 2007, S. 40)

Im Unterkapitel „Warum der Flop kein Flop wurde – Drei Beispiele aus dem Sport“ befindet sich in der Fragenbox eine Übung mit mathematischem Hintergrund und zwar:

„F7 Nimm an, ein Hochspringer springt auf der Erde 2 m hoch. Am Mond beträgt die Anziehungskraft nur $1/6$. Wie hoch könnte der Sportler dort springen?“

Hinterher erklärt der Autor, dass dies mit dem Körperschwerpunkt (KSP) zu tun hat. Der KSP liegt beim Menschen ungefähr auf der Höhe des Nabels, also circa bei 1 m. Wenn der Sportler nun 2 m hoch springt, dann hebt er seinen KSP 1 m. Die Hebung des KSP ist jedoch am Mond 6-mal so groß. Die Summe ergibt 7 m.

Die zwei Aufgaben, Abbildung 120 und F7, unter Singularität, kann man der Anwendung der Vektorrechnung in der Geometrie, genauer dem Schwerpunkt, zuordnen.

Jetzt finden wir uns in Kapitel „6 Geradlinige Bewegungen“, Unterkapitel „Zum Rande der Galaxie – Beschreibung der Geschwindigkeit“, ein. Zu Beginn erblickt man die Fragenbox, bei der F6, F8 und F9 mit der Mathematik in Verbindung stehen.

„F6 Zwei Radfahrer fahren mit 10 km/h aufeinander zu. Als sie genau 10 km voneinander entfernt sind, startet eine Fliege mit 30 km/h vom Vorderrad des rechten Fahrers, fliegt zum Vorderrad des linken Fahrers, wieder zurück und so weiter. Welche Strecke legt sie zurück, bis sich die Fahrer in der Mitte treffen?“

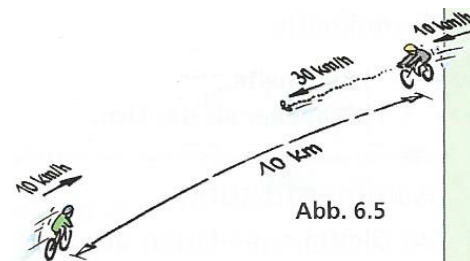


Abb. 6.5

Abbildung 121: (Apolin, 2007, S. 51)

„F8 Wenn du die Sekunden zwischen Blitz und Donner zählst und dann durch 3 dividierst, weißt du, wie viele km der Blitz weg war! Wie groß ist daher die Schallgeschwindigkeit etwa?“

„F9 Du fährst mit einem Cabrio mit 5 m/s und wirfst eine Ball mit 10 m/s nach vorne (Abb. 6.7 a). Wie schnell ist der Ball aus der Sicht eines am Boden stehenden Beobachters? Du fliegst mit einem Raumschiff mit halber Lichtgeschwindigkeit ($c/2$) und sendest einen Lichtstrahl nach vorne aus (b). Wie schnell ist der Lichtstrahl aus Sicht eines Beobachters auf der Erde?“

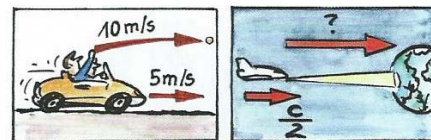


Abb. 6.7

Abbildung 122: (Apolin, 2007, S. 51)

F6 kann man zu den linearen Funktionen zuordnen, wenn die Schülerinnen und Schüler anschließend eine grafische Lösung erstellen sowie die Zeit-Ort-Funktionen der beiden Fahrer aufstellen sollen. Man kann F6 auch beim Umformen von Gleichungen und Termen eingliedern. Nach der Fragenbox kann man die Lösung zu F6 nachlesen. Die Radfahrer benötigen eine halbe Stunde, bis sie einander treffen. Die Fliege fliegt mit 30 km/h und das eine halbe Stunde lang. Den Weg kann man sich ausrechnen mit $30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{2} \text{ h} = 15 \text{ km}$.

Nachfolgend existiert eine Infobox zur Umrechnung von m/s in km/h bzw. von km/h in m/s.

| km/h |

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Einheiten m/s und km/h? Eine Stunde hat 60 Minuten zu je 60 Sekunden, also 3600 Sekunden. Wenn du dich mit 1 m/s bewegst, dann legst du also 3600 m in einer Stunde zurück, und das sind 3,6 km. Die Umrechnung lautet daher:

$1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$

$1 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s} : 3,6 \approx 0,28 \text{ m/s}$

Abbildung 123: (Apolin, 2007, S. 51)

Daraufhin führt Apolin eine Tabelle mit einigen Beispielen zur Geschwindigkeit an, z.B. zum

Beispiel	m/s	Kommentar
Haarwuchs	$4 \cdot 10^{-9}$	umgerechnet 1 mm in drei Tagen
Weinberg-schnecke	$3,5 \cdot 10^{-5}$	entspricht etwa 3 m pro Stunde
Mensch, Gehen	1	Bummeltempo »»» i Schlendertempo
Mensch, Marathon	5,19/ 5,63	errechnete Durchschnittsgeschwindigkeit beim Marathonweltrekord Frauen/Männer
Mensch, Sprint	12,5	maximale gemessene Geschwindigkeit beim 100-m-Sprint der Männer; entspricht über 44 km/h
Gepard	28 bis 33	etwa 100 bis 120 km/h; schnellstes Säugetier
Schall in Luft, 20°C	342	Schall benötigt in der Luft etwa 3 Sekunden pro km (F8). v ist von der Temperatur abhängig.
Satellit	$7,9 \cdot 10^3$	Geschwindigkeit für Kreisbahn um die Erde
Satellit	$1,12 \cdot 10^4$	Geschwindigkeit, um Erde zu verlassen; ist um den Faktor 10^4 kleiner als c
Lichtgeschwindigkeit (c)	$3 \cdot 10^8$	höchstmögliche Geschwindigkeit im gesamten Universum

Haarwuchs, Weinbergschnecke und viele mehr. Siehe Abbildung 124. Dies kann man eventuell bei Zehnerpotenzen und Gleitkommadarstellung einfügen.

Abbildung 124: (Apolin, 2007, S. 51)

Soeben beginnen wir mit dem Unterkapitel „Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte – Geschwindigkeitsdiagramme“. Am Anfang ist eine Abbildung (125), bei der ein Weg-Weg-

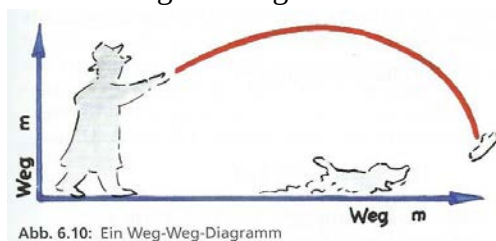


Abbildung 125: (Apolin, 2007, S. 53)

Diagramm zu sehen ist, bei dem ein Mann ein Stöckchen für seinen Hund wirft. Das heißt, man erkennt den Flug des Stöckchens durch den Raum. Die Interpretation dieses Diagramms kann man bei den reellen Funktionen einbauen.

Zu den linearen Funktionen lässt sich das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eingliedern, wobei auch ein Stück weit die Geometrie miteingebaut ist, durch die Berechnung

der Fläche unter dem Graphen. Denn diese kann mit dem Flächeninhalt eines Rechteckes berechnet werden.

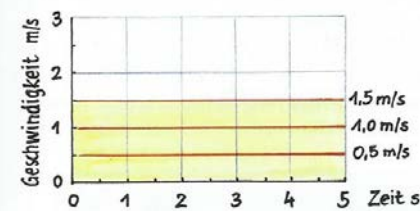


Abb. 6.11: Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Welchen Weg legt ein Objekt in 5 Sekunden zurück, wenn es sich mit 1,5 m/s bewegt? $1,5 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 7,5 \text{ m}$. Die zurückgelegte Strecke (= Geschwindigkeit mal Zeit) entspricht der (gelben) Fläche unter der Kurve.

Abbildung 126: (Apolin, 2007, S. 53)

Die Arbeitsbox mit dem Rennkäfer, ist eine Aufgabe für abschnittsweise definierte Funktionen.

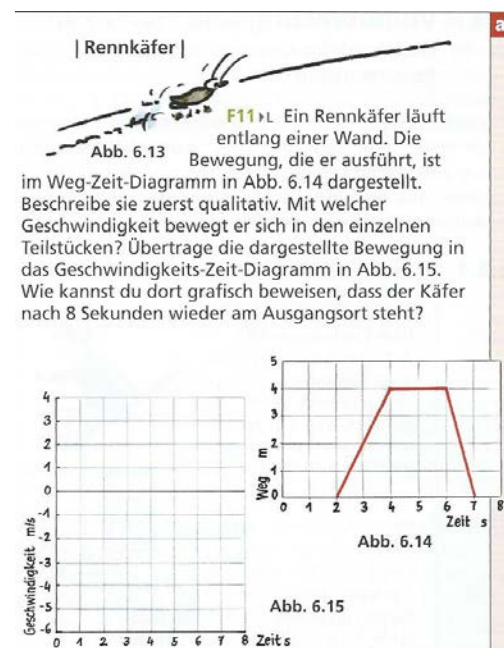


Abbildung 127: (Apolin, 2007, S. 53)

Unterhalb befindet sich noch ein Diagramm (Abbildung 128), welches zu den linearen Funktionen beziehungsweise zu dem Vergleich von linearen Funktionen passt.

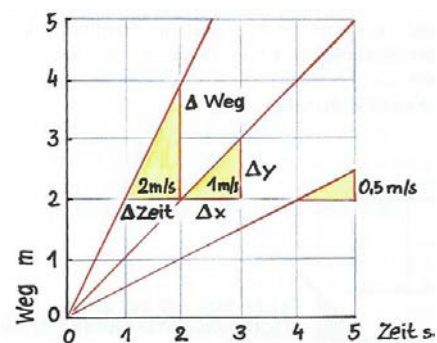


Abb. 6.12: Weg-Zeit-Diagramm von drei Bewegungen. Anstieg: $\Delta \text{Weg} / \Delta \text{Zeit} = \text{Geschwindigkeit}$

Abbildung 128: (Apolin, 2007, S. 53)

Mittlerweile kommen wir zum Unterkapitel „Vollbremsung und freier Fall – Gleichmäßig beschleunigte Bewegung“. Zuerst behandelt Apolin den freien Fall. Dazu findet man untenstehende Fragen, die zur Mathematik in Verbindung stehen.

„F12 Dem Dachdecker fällt der Hammer runter. Nach einer Sekunde ist dieser ein Stockwerk tief gefallen. Wie tief ist er nach zwei und nach drei Sekunden?“

„F13 Ein Stein, den du vom Balkon im ersten Stock fallen lässt (aber Achtung bitte!), prallt mit einer bestimmten Geschwindigkeit am Boden auf. Aus dem wievielten Stock muss er fallen, damit die Geschwindigkeit am Boden doppelt so groß ist? Und wie wäre das am Mond (wenn es dort Häuser gäbe)?“

Im Anschluss an die Fragenbox folgt ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, bei dem der Luftwiderstand außer Acht gelassen wird. Dieses Diagramm kann man zu den linearen Funktionen einordnen. Der Anstieg der Geraden ist ein Maß für die

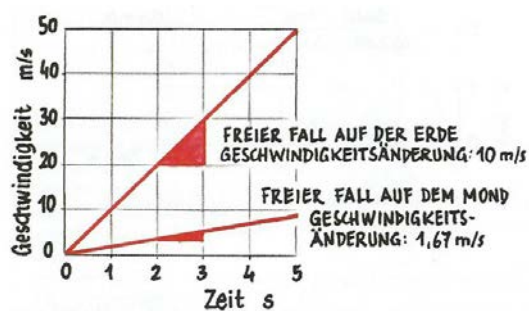


Abb. 6.17: v-t-Diagramm für frei fallende Gegenstände auf Erde und Mond. Vergleich mit Abb. 6.11. Verwechsle den Anstieg in diesem Diagramm nicht mit Abb. 6.12. Jenes sieht zwar ähnlich aus, ist aber ein s-t-Diagramm!

Abbildung 129: (Apolin, 2007, S. 54)

Geschwindigkeitsänderung, das heißt für die Beschleunigung. Die erste Gerade zeigt den freien Fall auf der Erde. Hier hat ein Gegenstand nach 1 s eine Geschwindigkeit von 10 m/s, nach 2 s eine Geschwindigkeit von 20 m/s und so weiter. Das heißt die Geschwindigkeit nimmt um 10 m/s pro Sekunde zu. Daher kommt man auch zu 10 m/s^2 bei der Erdbeschleunigung g.

Vorher wurde schon besprochen, dass die Fläche unter der Kurve in einem v-t-Diagramm gleich die zurückgelegte Wegstrecke ergibt, siehe Abbildung 126. In Abbildung 130 sind die

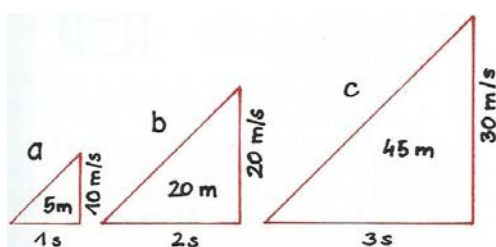


Abb. 6.19: Die Fläche unter der v-t-Kurve ergibt die Fallstrecke in Metern, also $(1 \text{ s} \cdot 10 \text{ m/s}) : 2 = 5 \text{ m}$ usw.

Abbildung 130: (Apolin, 2007, S. 55)

Dreiecke für den freien Fall (Erde) gezeichnet und zwar für die ersten drei Sekunden. Die Fläche unter der Kurve, das heißt die Fläche des Dreiecks, ergibt die Fallstrecke.

Man erkennt, dass sich die Fallstrecke nach zwei Sekunden vervierfacht und nach drei Sekunden verneunfacht. Das geht immer so weiter. Somit wird Frage F12 beantwortet. Wenn der Hammer in einer Sekunde ein Stockwerk schafft, hierbei sind 5 m angenommen, dann ist der Hammer nach zwei Sekunden vier Stockwerke tief gefallen (20 m), nach drei Sekunden ist der Hammer neun Stockwerke (45m) tief gefallen. Dazu ist ein Weg-Zeit-Diagramm (Abbildung 131) angeführt. Diese Aufgabe kann man in die Geometrie und bei den Potenzfunktionen eingliedern.

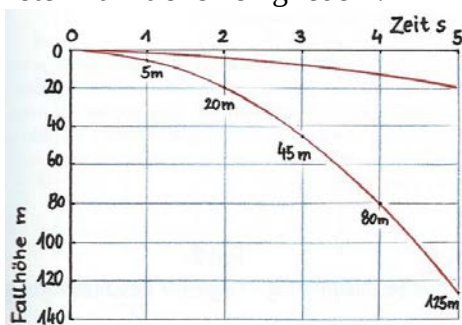


Abb. 6.20: s-t-Diagramm eines freien Falls auf Erde (untere Kurve) und Mond. Die y-Achse ist umgedreht, um die Falltiefe besser zu verdeutlichen.

Abbildung 131: (Apolin, 2007, S. 55)

Infolgedessen führt der Autor eine geometrische Herleitung des Fallweges ein, mit Formelzeichen. Die Verbindungen zur Mathematik sind nochmals durch die Geometrie und die Potenzfunktionen gegeben.

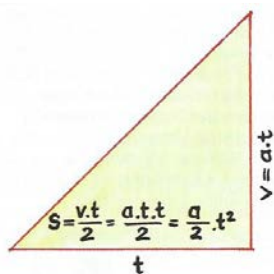


Abbildung 132: (Apolin, 2007, S. 55)

Daraufhin stößt man auf die Beantwortung der Frage F13. Dazu nimmt Apolin auf die Abbildung 130 Bezug, auf die Dreiecke und deren Flächen. Die Geschwindigkeit verdoppelt sich, wenn sich die Zeit verdoppelt, jedoch vervierfacht sich die Fläche.

Jetzt behandelt Apolin den Bremsweg. Unten angeführte Fragen, F15 bis F17, weisen mathematischen Hintergrund auf.

„F15 Bei einer Sprengung fliegt ein Stein genau senkrecht nach oben und schlägt nach 6 Sekunden wieder auf. Wie hoch ist der Stein geflogen? Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Stein am höchsten Punkt stillsteht? Null?“

„F16 Du machst bei 50 km/h eine Vollbremsung und misst den Bremsweg. Wie sehr wächst er an, wenn du bei 100 km/h oder bei 150 km/h voll bremsst?“

„F17 Um wie viel ist der Bremsweg bei 50 km/h länger als bei 30 km/h? Gib einen Tipp ab!“

Im Laufe des Textes erläutert Apolin die erste Frage F15. Insgesamt benötigt der Stein 6 Sekunden, daher benötigt er für den absteigenden Teil 3 Sekunden. Somit kann man wieder die Dreiecke vom freien Fall zur Rate ziehen (Abbildung 130). Daher fällt der Stein mit 30 km/h und legt eine Wegstrecke von 45 m zurück. Der höchste Punkt der Bahn liegt bei 45 m. Am höchsten Punkt ist die Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Bevor die Schülerinnen und Schüler F16 und F17 lösen, sollten sie sich die Infobox durchlesen. In dieser wird der Bremsweg hergeleitet. Dazu findet man folgende Formeln:

$$a = \frac{\Delta v}{t} \Leftrightarrow t = \frac{v}{a} \text{ und } s = \frac{a}{2} t^2$$

Für die Zeit t, beim Weg, setzt man die Geschwindigkeit durch die Beschleunigung ein.

$$s = \frac{a}{2} \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

An dieser Formel erkennt man, dass der Bremsweg mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst. Beim Bremsen ist gesetzlich vorgeschrieben, dass $a = 4,5 \text{ m/s}^2$ ist. Wenn man die Bremsverzögerung berechnet, formt man die Gleichung um.

$$s = \frac{v^2}{2a} \Leftrightarrow a = \frac{v^2}{2s}$$

Bei F16 und F17 üben die Schülerinnen und Schüler Proportionalitäten, aber auch reelle Funktionen. Im Mathematiklehrbuch „Mathematik verstehen 5“ ist ein extra Abschnitt „Der Anhalteweg eines Autos“ angeführt, hierzu könnte man die Aufgaben auch einbauen. Bei den beiden Übungen ist wichtig, dass die Jugendlichen wissen, dass der Bremsweg mit dem

Quadrat der Geschwindigkeit wächst. Folglich müssen sie nur die Gleichung für den Bremsweg verwenden und können diesen berechnen. Daraufhin ist ein Diagramm mit dem Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit abgebildet. Dieses kann man ebenfalls den reellen Funktionen und dem Anhalteweg eines Autos zuordnen, entweder zur Interpretation oder zum selber zeichnen, mit gegebener Wertetabelle.

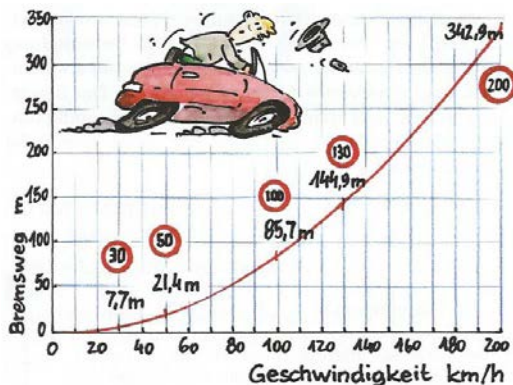


Abb. 6.26: Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit in km/h bei der gesetzlich vorgeschriebenen Mindestbremsverzögerung von $4,5 \text{ m/s}^2$. Bei einigen Geschwindigkeiten ist der Zahlenwert zusätzlich eingetragen.

Abbildung 133: (Apolin, 2007, S. 58)

Danach stößt man auf eine Infobox, in der die Bremsverzögerung eines Formel 1 Autos

| Formel 1 |

Wenn von Beschleunigungen bei bemannten Raketen, Flugzeugen oder in der Formel 1 die Rede ist, dann liest man oft von *so und soviel g*. Die Bremsverzögerung (also die negative Beschleunigung) in der Formel 1 beträgt zum Beispiel bis $4,5 g$. Da $g = 10 \text{ m/s}^2$ sind, sind $4,5 g$ dementsprechend 45 m/s^2 ! Ein Formel-1-Auto kann also im Extremfall in einer Sekunde um 45 m/s oder 162 km/h langsamer werden! Das ist sehr beeindruckend!

Wenn du in einem normalen Auto genauso bremsen könntest (was aus verschiedensten Gründen aber nicht geht), könntest du auf der Autobahn von 130 km/h auf null in nur $0,8$ Sekunden bremsen und würdest nach knapp 15 m stehen bleiben! Rechne nach!

gegeben ist. Dann erörtert Apolin, um wie viel km/h das Auto in einer Sekunde langsamer werden kann. Dieses Beispiel könnte man jedoch zu einer Fragestellung transformieren, zu deren Lösung die Heranwachsenden selbst kommen sollen. In der Box befindet sich noch eine Übung, bei der die Schülerinnen und Schüler eine Aussage zum Bremsweg überprüfen sollen.

Abbildung 134: (Apolin, 2007, S. 58)

Anschließend erblickt man eine Arbeitsbox. Die Jugendlichen sollen den Bremsweg beim Radfahren mit Hilfe eines Versuches messen. In der Box steht alles genau erklärt, sogar mit Auswertung. Meiner Meinung nach wäre es besser keine Auswertung anzugeben, sondern die Schülerinnen und Schüler selbst ein Diagramm erstellen müssen und somit den Bremsweg in Abhängigkeit der Radgeschwindigkeit selber auswerten. Danach könnten sie noch die

Bremsverzögerung berechnen. Dies lässt sich sowohl im Physik- als auch im Mathematikunterricht durchführen. Reelle Funktionen vereinen sich mit dem Bremsweg beim Radfahren.



Mit einfachen Mitteln kann man am Sportplatz oder im Schulhof den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg qualitativ überprüfen.

Was man braucht: 1 Fahrrad und 1 Fahrer, 1 Signalgeber (steht bei A), einige Stoppuhren und Zeitnehmer (stehen bei B), 1 Kreide, 1 Maßband, 2 Weitenmesser, 1 Protokollführer.

Ein Schüler fährt mit dem Fahrrad und nimmt auf einer **Beschleunigungsstrecke** Schwung. Er fährt die letzten 10 m ohne zu treten (A nach B), damit die Geschwindigkeit **konstant** bleibt. Auf dieser Strecke wird die Zeit gemessen. Der Signalgeber gibt ein Zeichen, wenn das Vorderrad gerade bei Linie A ist, und die Zeitnehmer stoppen ein. Sie stoppen ab, wenn das Vorderrad genau bei B ist, also nach 10 m. Dort beginnt der Fahrer voll zu bremsen, und der **Bremsweg** wird gemessen. Der Schüler macht möglichst viele Fahrten mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Wichtig:

- 1) Es muss immer die **gleiche Stelle** des Rads gemessen werden, etwa die Mitte des Vorderrades.
- 2) Um die Stoppungen genauer zu machen, sollten **mehrere Personen** stoppen und der Mittelwert genommen werden.
- 3) Die **Bremse** muss immer **voll** sein. Achte darauf, dass die Vorderbremse nicht zu stark eingestellt ist, damit du keinen Salto schlägst.

Abbildung 135: (Apolin, 2007, S. 59)

Im Protokoll steht dann: Nummer des Versuchs, Zeiten für 10 m, Bremsweg. Zuerst wird der Schnitt der Zeit berechnet und dann die Geschwindigkeit ($v = s/t$). Alle Versuche können dann in einem Diagramm dargestellt werden (Abb. 6.30).

In der Abbildung siehst du die Auswertung von 19 Versuchen. Die **Glättung** wurde mit einem Polynom 2. Grades vorgenommen (das machen Programme wie Excel mit wenigen Einstellungen automatisch). Damit die Funktion durch den Nullpunkt geht, kannst du mehrmals den Wert 0/0 zusätzlich in die Tabelle eingeben.

Die grafische Auswertung ergibt bei 5 m/s einen Bremsweg von etwa 2,5 m und bei 10 m/s einen Bremsweg von etwa 9,4 m/s. Der Bremsweg ist also um den Faktor 3,75 größer. Der Theorie nach sollte er um den Faktor 4 größer sein, unser Ergebnis weicht also um etwa 7 % vom erwarteten Wert ab. Für eine dermaßen einfache Versuchsanordnung ist das aber sehr ok! Würde der Bremsweg linear anwachsen, dann dürfte er bei 10 m/s erst 5 m lang sein!

Außerdem lässt sich die **Bremsverzögerung** gut berechnen. Wenn wir für g 10 m/s einsetzen ($s = 9,4$ m), ergibt sich für $a = v^2/2g = 5,3$ m/s². Das Fahrrad in diesem Versuch hatte also eine bessere Bremsverzögerung als die, die für Autos gesetzlich vorgeschrieben ist.

»» i | Bremsweg | Seite 57

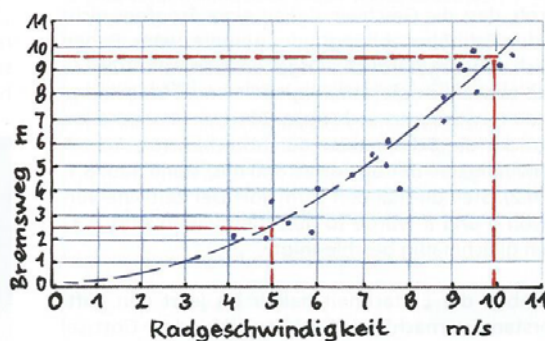


Abb. 6.30: Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg, gemessen im Rahmen einer Schulstunde.

Gegen Ende des Kapitels „Überschalltropfen – Ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen“ findet man in der Arbeitsbox ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Fallschirmspringers, welches die Schülerinnen und Schüler interpretieren sollen. Einige Fragen befinden sich

dabei, die die Jugendlichen beantworten sollen. Diese Übung kann man bei den reellen Funktionen, unter Zeit-Geschwindigkeit-Funktionen, involvieren. Siehe Abbildung 136.

Unten siehst du ein v-t-Diagramm eines Fallschirmspringers. Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht der Springer? Wie viele Sekunden vergehen in etwa bis zum Erreichen der Maximalgeschwindigkeit? Wie groß ist die Geschwindigkeit nach dem Öffnen des Fallschirms? Wie viel km/h entspricht das?

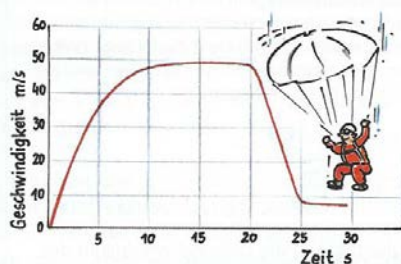


Abbildung 136: (Apolin, 2007, S. 62)

Angekommen bei Unterkapitel „Der schnellste Mann der Welt – Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit“ vernimmt man zu Beginn die Fragenbox, wobei man zwei der Fragen auch für die Mathematik verwenden kann.

„F22 Du fährst mit dem Rad eine Stunde lang einen Berg hinauf (von A nach B). Dein Schnitt beträgt dabei 10 km/h. Wie schnell musst du von B nach A zurückfahren, damit der Gesamtschnitt 20 km/h beträgt?“

„F25 Wenn du mit 5 m/s läufst, wie schnell bewegen sich dann deine Füße?“

Bei F22 ist die komplett durchgerechnete Lösung gegen Ende des Lehrbuches angehängt. Man findet nachstehende Gleichung vor, wobei v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten hinauf und hinunter sind.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s/2}{v_1} + \frac{s/2}{v_2}}$$

Anschließend muss man nur in die Gleichung einsetzen und man kommt zu der Lösung, dass die Geschwindigkeit zurück unendlich groß sein muss, damit sich im Schnitt 20 km/h ergeben. Die Zuweisung zur Mathematik ist gegeben durch die Berechnungen mit Gleichungen, genauso wie bei F25. Hier muss man den Weg für einen Schritt abschätzen oder messen, danach dividiert man die 5 m/s durch die Schrittlänge und erhält somit das Ergebnis.

In der Arbeitsbox auf Seite 26 können die Schülerinnen und Schüler selbst, durch Messungen, bei einem 60-m-Lauf am Sportplatz ein Weg-Geschwindigkeit-Diagramm erstellen. Diese Aktivität lässt sich auch im Mathematikunterricht bei den reellen Funktionen unterbringen.

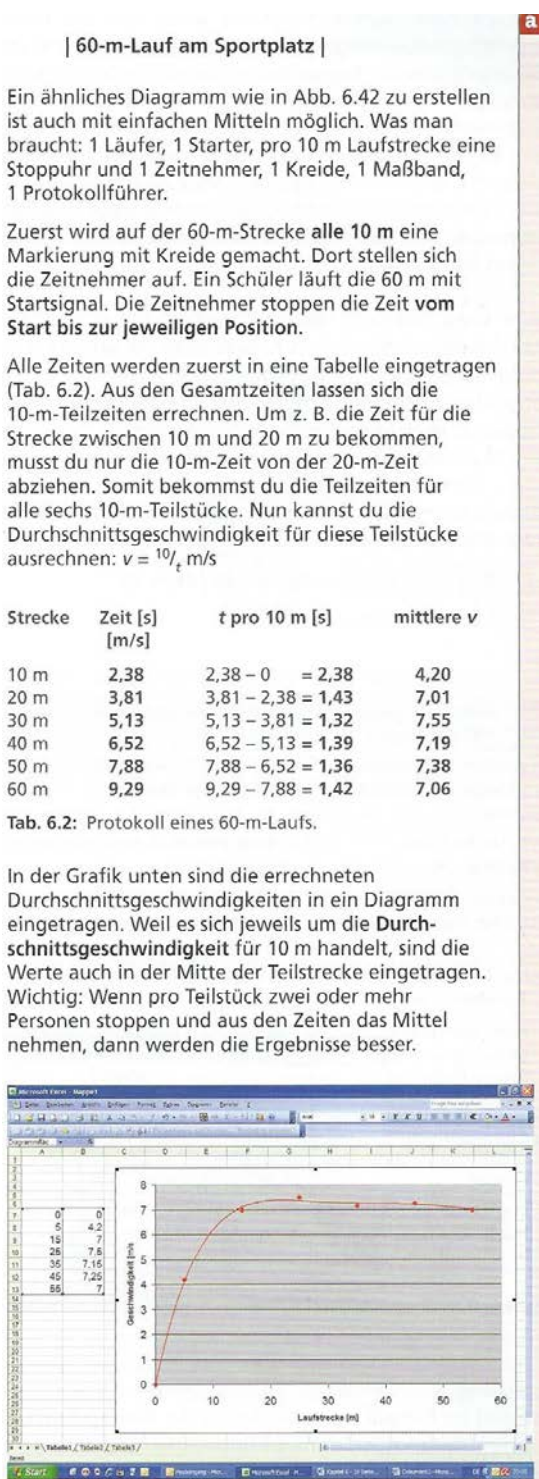


Abbildung 137: (Apolin, 2007, S. 63)

Am Ende dieses Unterkapitels befindet sich wieder eine Arbeitsbox. Unten angeführte Fragen haben mathematischen Hintergrund.

„F28 Wie oft könnte ein Lichtstrahl pro Sekunde um die Erde zischen (zum Erdumfang siehe Kapitel 2.3)?“

„F30 Die Fallbeschleunigung am Mars ist $3,72 \text{ m/s}^2$. Berechne die Falltiefe für einen Gegenstand für die ersten 6 Sekunden.“

„F31 Zeichne in einem Diagramm den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg für die Bremsverzögerungen 5 m/s^2 , 7 m/s^2 , und 9 m/s^2 (siehe Abb. 6.26).“

„F32 Bei einem Unfall auf der Autobahn zieht ein Ferrari eine 280 m lange Bremsspur. Der Fahrer sagt, er war mit etwa 150 km/h unterwegs. Kann man diese Behauptung widerlegen?“

„F33 Erstelle für folgende Bewegungen ein s-t- und ein v-t-Diagramm: 2 Sekunden mit 1 m/s , 2 Sekunden mit 2 m/s , 2 Sekunden mit 3 m/s , 2 Sekunden mit $-5,5 \text{ m/s}$.“

F28 ist eine sehr gute Textaufgabe zu den Zehnerpotenzen und Gleitkommadarstellung. F30 ist eine Aufgabe, die bei den Potenzfunktionen ihren Platz findet. F30 kann man auch durch das Zeichnen eines Weg-Zeit-Diagramms ergänzen. Das Diagramm erstellen für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg, kann man unter reelle Funktionen, bei dem Anhalteweg eines Autos, einordnen. Ebenfalls kann man F32 bei den reellen Funktionen, unter dem Anhalteweg eines Autos, eingliedern. Zeit-Ort-Funktionen und Zeit-Geschwindigkeit-Funktionen, bei den reellen Funktionen.

Jetzt kommen wir zu Kapitel „7 Zusammengesetzte Bewegungen“. Zu Beginn des Unterkapitels „Astronaut im freien Fall – Das Unabhängigkeitsprinzip“ stehen zwei Fragen, die Mathematik und Physik vereinen.

„F1 Du stehst im Regen und die Tropfen fallen senkrecht mit 4 m/s zu Boden. Du beginnst mit 3 m/s zu laufen. Wie fällt dann aus deiner Sicht der Regen zu Boden?“

„F2 Indiana Jones ist mit einem Boot auf der Flucht. Wie muss er den Fluss überqueren, damit er am schnellsten drüben ankommt? Und wie muss er fahren, um am

kürzesten Weg ans andere Ufer zu kommen? Quer, schräg in oder gegen die Strömungsrichtung?

Diese zwei Übungen kann man bei der Berechnung von Vektoren einsetzen. Eine ähnliche Fragestellung wie bei F1, wurde schon weiter oben bei den Vektoroperationen erwähnt. Zu F1 findet man Abbildung 138 zur Erklärung und Abbildung 139 zur Unterstützung von F2.

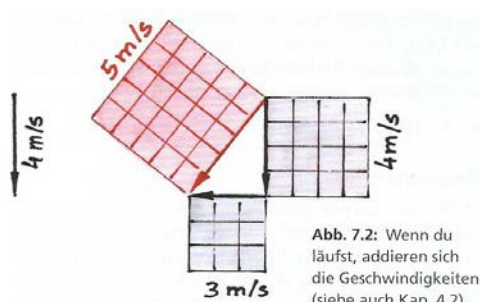


Abbildung 138: (Apolin, 2007, S. 65)

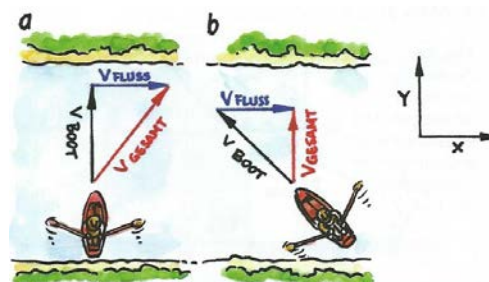


Abb. 7.3: a ist der schnellste Weg, weil v_{boot} genau quer zum Fluss zeigt. b ist der kürzeste Weg, und man kommt genau am gegenüberliegenden Ufer an. v_{gesamt} ist aber kleiner und man braucht länger.

Abbildung 139: (Apolin, 2007, S. 65)

Soeben gelangen wir zu dem Unterkapitel „Von Eiben- und Elbenbögen – Horizontale Würfe“. Eine Aufgabe ist sowohl für die Mathematik als auch für die Physik geeignet.

„F4 Du wirfst einen Stein waagrecht von einem Hügel. Er fliegt 20 m tief und 40 m weit. Wie schnell hast du geworfen?“

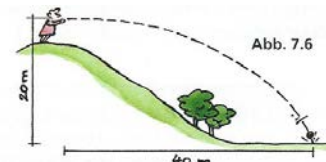


Abbildung 140: (Apolin, 2007, S. 66)

Die Einordnung erfolgt bei den reellen Funktionen. Alle Gegenstände fallen pro Sekunde 10 m. Deshalb dauert der Wurf zwei Sekunden, weil der Stein 20 m tief fällt. Er fliegt mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s, bei einem Weg von 40 m.

Auf der nächsten Seite im Schulbuch findet man ein Diagramm, welches die Flugbahn von Pfeilen angibt, die mit 60 m/s 60 m weit fliegen. Die rote Bahn berücksichtigt die Höhenkorrektur, die schwarze nicht.

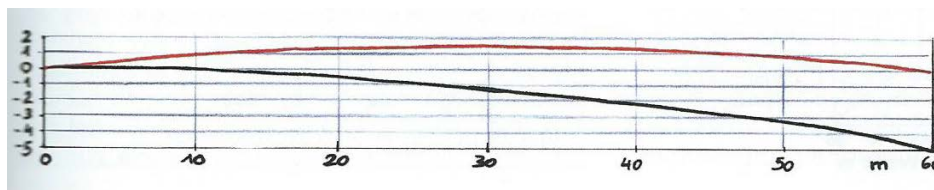


Abbildung 141: (Apolin, 2007, S. 67)

Soeben kommen wir zu dem Unterkapitel „Weltrekord im Eierwurf – Schiefe Würfe“. Nachfolgende Frage steht zu Beginn in der Fragenbox.

„F9 Der Weltrekord im Eierwurf liegt laut Guinness Buch bei 98,5 m (und das Ei wurde angeblich gefangen, ohne zu zerbrechen). Wie schnell muss man dazu abwerfen? Und welches ist der günstigste Abwurfwinkel?“

Für F9 nehmen wir an, dass jemand ein Ei mit einer Geschwindigkeit von 28,28 m/s (über 100 km/h) mit einem Winkel von 45° abwirft. Der Geschwindigkeitsvektor wird in seine x- und y-Komponente zerlegt mit jeweils 20 m/s. Die Schülerinnen und Schüler sollen denken, dass keine Schwerkraft wirkt. Der Körper würde linear schräg nach oben fliegen, davon wird der freie Fall abgezogen und somit erhält man die Wurfparabel. Dazu findet man Abbildung 142.

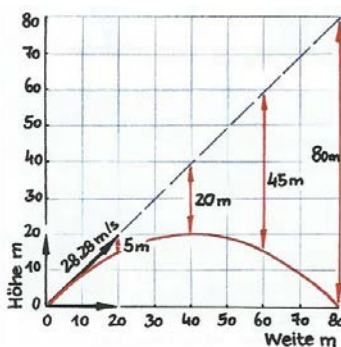


Abbildung 142: (Apolin, 2007, S. 68)

Das Ei erreicht eine Höhe von 20 m und eine Weite von 80 m. Für einen Wurf mit ungefähr 100 m benötigt man somit eine höhere Geschwindigkeit. Bei einem Winkel von 45° erreicht man die größte Flugweite. Die

Teilkomponenten können die Jugendlichen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras oder mit Sinus und Cosinus berechnen. Dafür ist auf derselben Seite eine Infobox hinzugefügt, der die genauen Berechnungen zu entnehmen sind. Siehe Abbildung 143.

| Mathematik des schiefen Wurfs |

Die Wurfweite bei einem schiefen Wurf lässt sich mit folgender Gleichung berechnen:

$$w = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Der Sinus hat bei 90° seinen größten Wert, nämlich 1. Bei $2\alpha = 90^\circ$ wird daher die höchste Weite erzielt. Deshalb ist der günstigste Winkel $90^\circ/2 = 45^\circ$ (siehe Abb. 7.12). Die Weite ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit: **doppelte Abwurfgeschwindigkeit, vierfache Weite!**

Die Geschwindigkeit, die du für eine bestimmte Wurfweite benötigst, bekommst du durch Umformen der oberen Gleichung:

$$v = \sqrt{\frac{wg}{\sin 2\alpha}}$$

Für den **Weltrekord im Eierwurf** ist daher eine Abwurfgeschwindigkeit von 31,4 m/s oder 113 km/h notwendig. Und dabei ist der Luftwiderstand noch gar nicht berücksichtigt. Sehr beachtlich!

Wie sieht es mit **Flugzeit** und **Steighöhe** aus? Um das zu berechnen, muss man den Vektor der Abwurfgeschwindigkeit in seine x- und y-Komponenten zerlegen. Dabei gilt allgemein: $x = \cos \alpha$ und $y = \sin \alpha$ (siehe Abb. 7.13).

Abb. 7.13: Zerlegung von v in seine beiden Komponenten mit Hilfe der Winkelfunktionen sin und cos. v_y in Abb. 7.11 wäre also $28,28 \text{ m/s} \cdot \sin(45^\circ) = 20 \text{ m/s}$. Stimmt! Für rechtwinklige Dreiecke gilt allgemein: $\sin \alpha$ ist Gegenkathete durch Hypotenuse und $\cos \alpha$ ist Ankathete durch Hypotenuse.“

Wenn du weißt, wie weit der Wurf geht und wie groß die Horizontalgeschwindigkeit v_x ist, dann kannst du sofort die Wurfdauer ausrechnen. v_x bleibt ja während des gesamten Fluges gleich groß. Daher gilt $v_x = s/t$ und somit $t = s/v_x$. Der Wurf in Abbildung 7.10 würde daher $(80 \text{ m})/(20 \text{ m/s}) = 4 \text{ s}$ dauern.

Die Gleichung für die **Flughöhe** kennst du schon (»» **1 | Bremsweg | Kap. 6.4.2**). Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Daher gilt

$$h = \frac{v_y^2}{2g}$$

Nehmen wir als Probe wieder Abb. 7.11. Für die Höhe ergibt sich dann $(20 \text{ m/s})^2/(20 \text{ m/s}^2) = 20 \text{ m}$. Voilà!

Bei 45° geht der Wurf übrigens **4x so weit wie hoch**. Warum? Die Weite w ist dann v^2/g . Und v ist zu v_y wie die Diagonale in einem Quadrat. Deshalb gilt:

$$h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2}{2g} = \frac{v^2/2}{2g} = \frac{v^2}{4g}$$

Und das ist eben genau $\frac{1}{4}$ der Wurfweite!

Abbildung 143: (Apolin, 2007, S. 68)

Danach starten wir schon im Unterkapitel „Wenn Hochspringer gefährlich leben – Schiefe Würfe im Sport“, wobei erst am Ende die Arbeitsbox interessant für die Mathematik wird.

„F14 Du wirfst mit 5 m/s einen Stein waagrecht von einem Turm, und er fliegt 20 m weit. Wie hoch ist der Turm? Du wirfst mit 7 m/s einen Stein waagrecht von einem 125 m hohen Turm. Wie weit fliegt der Stein?“

„F15 Ein Scharfschütze hat ein Gewehr mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 1000 m/s. Um wie viel höher muss er anlegen, wenn er auf ein Ziel in 100 m, 200 m oder 300 m schießt?“

Diese beiden Aufgaben ordnet man der Geometrie und den Gleichungen zu. Wenn man sie erweitert, könnte man sie auch noch zum Zeichnen von Funktionsgraphen einordnen.

Jetzt beginnen wir mit einem neuen Kapitel „8 Newton mal drei“, im Unterkapitel „Mehr als nur heiße Luft – Die Bewegungsgleichung“. Die Frage F8 zu Beginn des Kapitels kann man auch im Mathematikunterricht einsetzen.

„F8 In Abb. 8.12 siehst du ein v-t-Diagramm eines starken PKWs. Der Fahrer gibt zweimal Vollgas. Bei welcher der beiden Kurven war der PKW stärker beladen? Und wie viel Gänge hat das Auto?“ Siehe Abbildung 144.

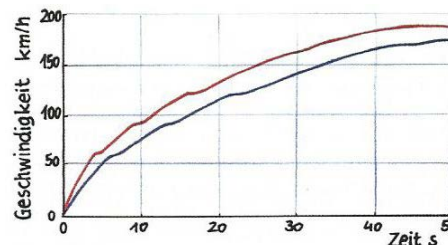


Abbildung 144: (Apolin, 2007, S. 74)

Apolin erklärt, dass die Beschleunigung eines Gegenstandes bei gleicher einwirkender Kraft von der Masse abhängt, weil $a = F/m$. Daraus folgt, wenn das Auto stärker beladen ist, dann ist es nicht mehr so schnell (blaue Kurve). Während der Fahrer schaltet, ändert sich die Geschwindigkeit nicht und daher ist das Auto in der Zwischenzeit unbeschleunigt. Man erkennt aus der Abbildung 144, dass das Auto fünf Gänge hat. Diese Übung könnte man zu den reellen Funktionen hinzufügen, jedoch müssen Vektoren bereits bekannt sein.

Unterkapitel „Gewichts-, Reibung, und Federkraft – Beispiele für Käfte“. Darunter existiert ein Abschnitt zur Gravitationskraft. Man findet eine Infobox zum Gravitationsgesetz vor. Darin beschreibt der Autor ein Experiment, welches die Schülerinnen und Schüler zum

Gravitationsgesetz durchführen können. Dieses lässt sich bei den Proportionalitäten in der Mathematik einsetzen. Abbildung 145.



Abbildung 145: (Apolin, 2007, S. 77)

Am Ende des Kapitels „Newton mal drei“ stößt man auf eine Arbeitsbox. In dieser stehen nachfolgende Fragen, die mathematischen Hintergrund besitzen.

„F25 Nach wie vielen Metern hat ein F1-Auto 100 km/h erreicht, wenn es mit 10 m/s^2 beschleunigt?“

„F27 Die Gleichung $F = ma$ besagt, dass ein Kugelstoßer mit mehr Masse auch mehr Kraft entwickeln kann! Oder doch nicht? Begründe!“

„F30 Der Bremsweg eines Autos ist indirekt proportional zur Reibungszahl der Reifen. Kannst du das formelmäßig belegen? Du brauchst dazu die Gleichung für den Bremsweg (Kap. 6.4.2).“

F25 kann man den Potenzfunktionen zuordnen, F27 und F30 wären gute Übungen für die Proportionalitäten.

Das neunte Kapitel „Arbeit und Energie“, mit dem Unterkapitel „Eine gute und eine schlechte Nachricht – Arbeit und Energie“, liefert die Abbildung 146, welche einen Zusammenhang der Kräfte zeigt, die mit Hilfe der Geometrie und Vektoren berechnet werden kann.

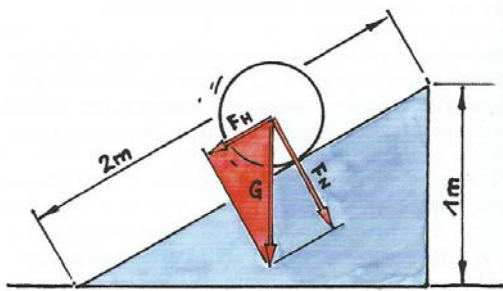


Abb. 9.3: Wenn du die Fässer hebst bzw. rollst, dann verhalten sich die Wege wie 1:2. Die zu überwindende Kraft beim Heben ist das Gewicht G , beim Rollen die Komponente F_H (siehe Kapitel 4.3, Abb. 4.16). Das rote und das blaue Dreieck sind ähnlich (haben also gleiche Winkel), daher ist $F_H = G/2$: Also halbe Kraft, dafür doppelter Weg.

Abbildung 146: (Apolin, 2007, S. 77)

Im Unterkapitel „Hammer im freien Fall – Beschleunigungsarbeit und Bewegungsenergie“ begegnet man abermals zwei Eingangsfragen mit mathematischem Hintergrund.

„F5 Dem Dachdecker fällt der Hammer runter. Nach einer Sekunde ist er 5 m tief gefallen. Wie tief ist er nach zwei Sekunden? Welche Geschwindigkeit hat er nach ein und zwei Sekunden? Welche Energie wurde in der ersten und in der zweiten Sekunde frei?“

„F6 Ein Auto braucht, um auf 50 km/h zu beschleunigen, eine bestimmte Menge an Benzin. Wie viel Energie braucht das Auto, um von 50 auf 100 km/h zu beschleunigen? a) gleich viel, b) weniger, c) mehr. Vernachlässige die Reibung!“

Für die Beantwortung der Frage F5 skizziert der Autor auf der nächsten Seite im Lehrbuch Abbildung 147. Der Verfasser beschreibt, dass die potenzielle Energie mit der Formel $m \cdot g \cdot h = 2 \cdot 10 \cdot 5 \text{ J}$ berechnet wird. Nach zwei Sekunden hat sich die potenzielle Energie um 400 J vermindert, obwohl sich die Geschwindigkeit nur verdoppelt hat. Die kinetische Energie ist proportional zu v^2 . Somit erkennt man, die kinetische Energie vervierfacht sich bei doppelter Geschwindigkeit. Den Schülerinnen und Schülern könnte man zum Üben für die Proportionalitäten diese Abbildung zeigen. Daraus sollen sie selbst den Zusammenhang ergründen.

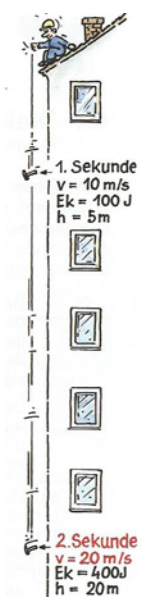


Abbildung 147: (Apolin, 2007, S. 87)

Daraufhin lässt sich auch F6 beantworten. Ein Auto hat bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h die vierfache kinetische Energie als mit 50 km/h . Bei einer Beschleunigung von 50 km/h auf 100 km/h verbraucht ein Auto dreimal so viel Benzin wie von 0 km/h auf 50 km/h . Hier ist von den Jugendlichen ebenfalls das Erkennen von Proportionalitäten gefragt.

Wir beginnen nun mit dem Unterkapitel „Bremsweg und Salami taktik – Beispiele zum Energiesatz“. Dazu trifft man auf eine Infobox (Abbildung 148), die eine mathematische Erklärung zur Eingangsfrage enthält. Diese kann man zur Geometrie und zur Vektorrechnung hinzufügen.

„F18 Unter welchem Winkel fliegen zwei Billardkugeln auseinander, wenn man nicht zentral trifft? Verwende den Energiesatz!“

| Klick |

Die weiße Kugel gibt kinetische Energie an die rote ab. Die Energiebilanz lautet daher (E' ist nach dem Stoß):

$$E_{k \text{ weiß}} = E'_{k \text{ weiß}} + E'_{k \text{ rot}} \quad \frac{mv_{\text{weiß}}^2}{2} = \frac{mv_{\text{weiß}}'^2}{2} + \frac{mv_{\text{rot}}'^2}{2}$$

Weil die Massen der Kugeln gleich groß sind, fallen diese raus und es bleibt folgendes über:

$$v_{\text{weiß}}^2 = v_{\text{weiß}}'^2 + v_{\text{rot}}'^2$$

Wenn du die Variablen umbenennst, dann kannst du auch schreiben $a^2 = b^2 + c^2$. Das ist der bekannte **Satz des Pythagoras**. Er gilt nur für **rechtwinkelige Dreiecke**. Die Kugeln müssen daher unter 90° abprallen (siehe Abb. 9.35).

Abb. 9.35: Geschwindigkeit vor und nach dem Aufprall. a entspricht $v_{\text{weiß}}$, b $v'_{\text{weiß}}$ und c v'_{rot} .

Abbildung 148: (Apolin, 2007, S. 95)

Wir treffen nun im Kapitel 10 „Impuls“, mit dem Unterkapitel „Bomben aus dem All – Plastische Stöße“, ein, wobei die Fragen F5 und F7 für die Mathematik interessant sind.

„F5 Ein Auto rollt mit 10 m/s gegen ein gleich schweres stehendes. Welche Geschwindigkeit haben beide Autos nach dem Crash? Wie viel Prozent der kinetischen Energie wandeln sich dabei in Wärme um?“

„F7 Sollten Leitschienen neben den Straßen eher plastisch oder elastisch sein? Kannst du das begründen?“

Zu F5 ist Abbildung 149 und zu F7 Abbildung 150 gedruckt.

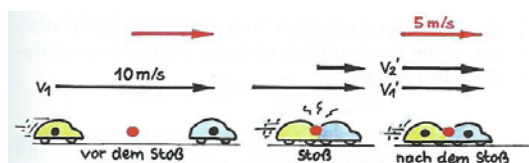


Abb. 10.9: Während des Stoßes verliert das linke Auto Geschwindigkeit und das rechte gewinnt dazu. Der Stoß ist abgeschlossen, wenn beide Autos dieselbe Geschwindigkeit haben.

Abbildung 149: (Apolin, 2007, S. 101)

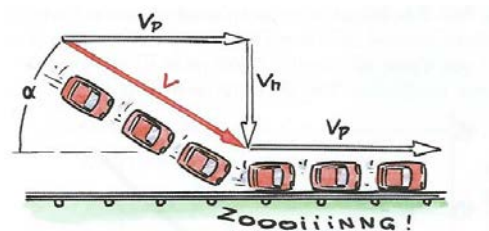


Abb. 10.11:

Wenn man die Reibung vernachlässigt, dann bleibt v_p konstant.

Abbildung 150: (Apolin, 2007, S. 101)

Bei Abbildung 149 nähert sich das linke Auto mit 10 m/s, wobei der Gesamtschwerpunkt der beiden Autos in der Mitte der beiden einzelnen Schwerpunkte liegt. Bis zum Aufprall legt der Gesamtschwerpunkt die Hälfte des Weges zurück und bewegt sich danach mit der halben Geschwindigkeit des linken Autos, das heißt mit 5 m/s. Die zugehörige Berechnung steht in der Infobox.

| Autocrash |

Die Summe der Impulse vor und nach dem Crash ist gleich groß. Mathematisch sieht das so aus (' ist nach dem Crash):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = \text{konstant}$$

Die Masse der beiden Autos ist gleich groß, man kann m_1 und m_2 durch m ersetzen. Außerdem steht ein Auto vor dem Crash, v_2 ist also null. Und nach dem Crash kleben die Autos aneinander, man kann also v_1' und v_2' durch v' ersetzen. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung:

$$m v_1 = 2 m v'$$

$$v_1 / 2 = v'$$

Abbildung 151: (Apolin, 2007, S. 101)

Die Abbildung 150 zeigt, dass Leitschienen zu plastischen Stößen führen, da der Aufprall sanfter ist und das Auto nicht wieder auf die Fahrbahn zurückgeworfen wird. Die Stärke des Aufpralls hängt von der normal zur Leitschiene liegenden Geschwindigkeitskomponente (v_n) ab. Die parallele Geschwindigkeitskomponente (v_p) bleibt auch nach dem Stoß erhalten.

Im Unterkapitel „Billard- und Fußballstoß – Elastische Stöße“ entdeckt man eine Infobox, in

[4-mal Wumm]

Mit Hilfe des Impuls- und Energiesatzes kann man allgemeine Gleichungen aufstellen, wie sich Gegenstände nach elastischen Stößen verhalten. Wir nehmen an, dass das zweite Objekt zu Beginn immer in Ruhe ist ($v_2 = 0$). Für die kinetische Energie gilt (' ist nach dem Stoß):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \text{ bzw. } m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

Für den Impuls gilt: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

Wir haben nun zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, nämlich den Geschwindigkeiten nach dem Stoß (v_1' und v_2'). Mit der Substitutionsmethode kann man die Gleichungen auflösen und erhält:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ und } v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Mit diesen Gleichungen kann man alle elastischen Stöße mit zwei Objekten berechnen. Nehmen wir 4 Spezialfälle (rechne nach).

- 1) $m_1 \ll m_2$: In diesem Fall kannst du m_1 vernachlässigen und bekommst $v_1' = -v_1$ und $v_2' = 0$. Das zweite Objekt rührt sich nicht vom Fleck, und die Geschwindigkeit des ersten wird umgekehrt. Das ist etwa der Fall, wenn du einen Flummi auf die Erde wirfst (siehe Abb. 9.19).
- 2) $m_1 = m_2/2$: In diesem Fall erhältst du $v_1' = -v_1/3$ und $v_2' = 2v_1/3$. Das erste Objekt prallt also ab und fliegt mit verminderter Geschwindigkeit zurück, während das zweite Objekt etwas langsamer fliegt, als das erste vor dem Stoß.
- 3) $m_1 = m_2$: Bei gleichen Massen bekommst du $v_1' = 0$ und $v_2' = v_1$. Das erste Objekt kommt zur Ruhe und das zweite fliegt mit der Geschwindigkeit des ersten weg (siehe Abb. 10.15 b). Das ist beim Billardstoß der Fall.
- 4) $m_1 = 2m_2$: In diesem Fall erhältst du $v_1' = v_1/3$ und $v_2' = 4v_1/3$. Das erste Objekt kommt also nicht zum Stillstand, sondern fliegt mit 1/3 der ursprünglichen Geschwindigkeit weiter. Das zweite, leichtere Objekt hat sogar eine höhere Geschwindigkeit, als das erste zuvor. Das ist zum Beispiel beim Fußballstoß der Fall (F11).

Abbildung 152: (Apolin, 2007, S. 103)

der eine allgemeine Gleichung zum Verhalten von Gegenständen nach elastischen Stößen hergeleitet wird. Anschließend sind vier Spezialfälle aufgelistet. Dies könnte man eventuell bei der Wiederholung von Gleichungen einbauen. Siehe Abbildung 152. Danach steht eine Tabelle, wo deren Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß mit Pfeilen eingetragen sind, Abbildung 153. Sie liefert eine qualitative Zusammenfassung der Möglichkeiten beim elastischen Stoß. Dies wäre dann eher bei den Vektoren einzuordnen.

Massenverhältnis	Geschwindigkeiten: schwarz vor dem Stoß, rot danach	Beispiel
1) $m_1 \ll m_2$		Flummi wird auf die Erde geworfen
2) $m_1 < m_2$		
3) $m_1 = m_2$		Billardstoß
4) $m_1 > m_2$		Fußball, Tennis, Hammer auf Meißel

Abbildung 153: (Apolin, 2007, S. 103)

Eine Arbeitsbox trifft man am Ende des Kapitels „Impuls“, in der nur F19 mit der Mathematik in Verbindung gebracht werden kann.

„F19 In der Abbildung nähert sich ein PKW mit 1 t und 72 km/h und ein LKW mit 3 t und 24 km/h einer Kreuzung. In welche Richtung werden sie sich nach dem Aufprall weiterbewegen?“

Hierbei können die Schülerinnen und Schüler den Impuls mit der Vektorrechnung und der Geometrie vereinen. Die beiden Impulse werden mit der Formel $p = m \cdot v$ ausgerechnet

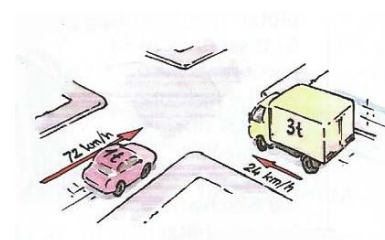


Abbildung 154: (Apolin, 2007, S. 105)

Daraufhin erkennen die Jugendlichen, dass der Impuls der des PKWs und der des LKWs gleich groß sind. Die beiden Impulsvektoren stehen normal aufeinander, das heißt sie schließen einen rechten Winkel ein. Daraus schließt man, dass der Gesamtschwerpunkt sich unter 45° der Kreuzung nähert und der Gesamtimpulsvektor ergibt sich aus der Vektoraddition. Die zwei Fahrzeuge bewegen sich nach dem Zusammenstoß in die Richtung des Gesamtimpulsvektors.

Damit kommen wir zu Kapitel 11 „Rotationen“, Unterkapitel „Brote auf der Butterseite – Das Drehmoment“. Darin sieht man Abbildung 155, welche das Hebelgesetz mit Kraft mal Kraftarm gleich Last mal Lastarm beschreibt. Diese Skizze könnte man bei der Vektorrechnung verwenden, genauer beim Betrag von Vektoren.

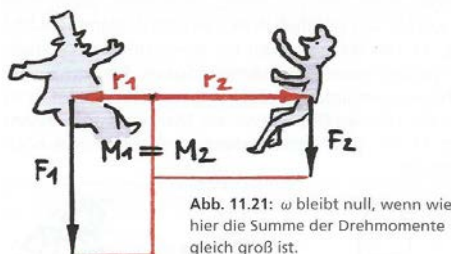


Abb. 11.21: ω bleibt null, wenn hier die Summe der Drehmomente gleich groß ist.

Abbildung 155: (Apolin, 2007, S. 110)

Das Unterkapitel „Der Schein trügt – Kräfte in rotierenden Systemen“ liefert eine Infobox

| Zentripetalkraft |

Wie groß ist die Zentripetalkraft? Bestimmen wir zuerst geometrisch die Zentripetalbeschleunigung. Erwinnere dich an Folgendes:

1) Die Tangentialgeschwindigkeit steht immer normal auf den Kurvenradius (Abb. 11.46).

Abb. 11.46

2) $v = \Delta s / \Delta t$ und daher ist $\Delta s = v \Delta t$

3) Für die Beschleunigung gilt immer: $a = \Delta v / \Delta t$.

In der Zeit Δt legt das Auto den Weg Δs zurück und ändert dabei die Geschwindigkeit um Δv (Abb. 11.46). Das gelbe Dreieck $r, r, \Delta s$ und das gelbe Dreieck $v_1, v_2, \Delta v$ sind ähnlich (für das zweite Dreieck wurden die Vektoren parallel verschoben). Daher gilt

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r} = \frac{v \Delta t}{r} \Leftrightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} = a$$

Die Zentripetalbeschleunigung ist also $a_{zp} = v^2 / r$. Da für jede Kraft $F = ma$ gilt, ist die Zentripetalkraft daher $F_{zp} = mv^2 / r$.

Abbildung 156: (Apolin, 2007, S. 116)

(Abbildung 156), in der die geometrische Herleitung der Zentripetalkraft steht. Diese Aufgabe kann man wieder den Vektoren und der Geometrie zuordnen. Die Herleitung basiert auf der Rechnung mit Vektoren und ähnlichen Dreiecken. Dadurch kommt man zum Schluss auf die Beziehung $a = \frac{v^2}{r}$, welche die Zentripetalbeschleunigung ergibt. Dann fällt der letzte Schritt nicht mehr schwer, dass man die Zentripetalkraft erhält, da eine Kraft immer aus Masse mal Beschleunigung besteht.

b) SEXL PHYSIK 5

Nun möchte ich das Physiklehrbuch „Sextl Physik 5“ von Roman U. Sextl, Helmut Kühnelt, Helga Stadler, Peter Jakesch und Eva Sattlberger (2012) hinlänglich ihrer mathematischen Inhalte analysieren.

Beginnen wir mit dem ersten Kapitel „Die Bewegung“ und dem Unterkapitel „Die Grundgrößen Zeit und Länge“. Bei der Zeitmessung erklären die Autoren die Verwendung von Zehnerpotenzen und danach befindet sich eine Frage, die man auch in der Mathematik bei den Zehnerpotenzen und der Gleitkommadarstellung verwenden kann.

„11.1 Berechne die Dauer eines Jahres von 365 Tagen in Sekunden. Benutze die Potenzschreibweise und runde auf eine Nachkommastelle.“

Zu der Längenmessung existiert ebenfalls eine Frage zur Messung im Mikrobereich, wobei diese nochmals mit den Zehnerpotenzen in Verbindung gebracht wird.

„12.1 Wie viele der genannten Teilchen haben nebeneinander auf einem Meter Platz: Staubkörnchen, Feinstaub, Bakterien, Viren, Atome? Da diese Teilchen unterschiedlich groß sind, kannst du nur ungefähre Werte angeben. Verwende die Potenzschreibweise!“

Bei den Astronomischen Distanzen in der Milchstraße stößt man noch einmal auf den Zusammenhang zu den Zehnerpotenzen.

„13.1 Überlege, welchen Maßstab du benützen müsstest, um im Schulhof ein maßstabgetreues Modell des Sonnensystems zu bauen. Die Entfernung der Planeten von der Sonne findest du im Internet.“

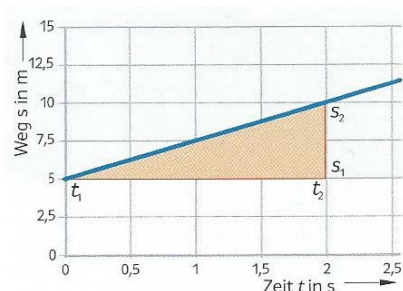
Weitere Fragen, die am Ende des ersten Kapitels stehen, können noch zu den oben angeführten mathematischen Themen eingeordnet werden.

„15.9 Gib an, was die folgenden Vorsilben bedeuten: Mega, Nano, Giga, Mikro, Piko?“

„15.12 Gib ungefähre Größen in Zehnerpotenzen an: Durchmesser eines Atoms, eines Moleküls, eines Bakteriums, eines Staubkorns.“

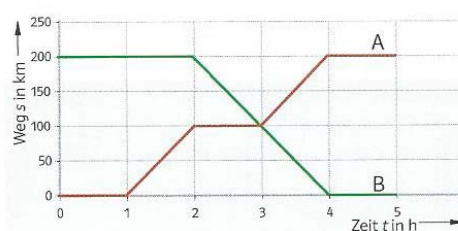
„15.13 Wie weit ist die Sonne von der Erde entfernt?“

Im Unterkapitel zwei „Geschwindigkeit und Beschleunigung“ bei den Geschwindigkeiten tauchen zwei Diagramme auf, die auch für die Mathematik interessant sind.



17.3 Darstellung einer gleichförmigen Bewegung in einem Weg-Zeit-Diagramm. Die Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg der Geraden:
 $v = (s_2 - s_1) / (t_2 - t_1) = (10 - 5) / (2 - 0) = 2,5 \text{ m/s}$.

Abbildung 157: (Sextl et al., 2012, S. 17)



17.4 Weg-Zeit-Diagramm verschiedener gleichförmiger Bewegungen. Was kannst du über diese Bewegungen aussagen?

Abbildung 158: (Sextl et al., 2012, S. 17)

Das Weg-Zeit-Diagramm von Abbildung 157 kann man bei den linearen Funktionen eingliedern. Das Weg-Zeit-Diagramm (Abbildung 158), welches verschiedene gleichförmige Bewegungen beinhaltet, kann man den Funktionen, die abschnittsweise definiert sind, zuweisen.

Auf derselben Seite können Schülerinnen und Schüler ein Experiment zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Fahrzeugen durchführen. Anschließend sollen die Jugendlichen ein Weg-Zeit-Diagramm in Excel erstellen. Die Verbindung zur Mathematik ist ebenfalls die Funktion.

„17.1 Du brauchst: Ein Längenmessgerät, Stoppuhr oder (falls vorhanden) Videokamera (optimal mit hoher Zeitauflösung) und Rechner.

Was ist zu tun? Miss die Geschwindigkeit eines Radfahrers, eines Autos, evtl. einer U-Bahn. Die Längen kannst du aus den Schrittlängen oder mit einem Lasermessgerät ermitteln, die Zeit mittels Stoppuhr. Du kannst die Fahrzeuge auch filmen und aus einzelnen Bildern und den dazugehörigen Zeitangaben die Geschwindigkeit der Fahrzeuge bestimmen. Erstelle mittels Excel Tabelle eine Weg-Zeit-Diagramm.“

Eine weitere tolle Aufgabe, welche die Mathematik und Physik verbindet, ist nachstehende 18.1 mit den Fahrplänen von zwei verschiedenen Zügen.

„18.1 Grafische Fahrpläne sind Zeit-Weg-Diagramme von Bewegungen und bei den Zügen durchaus üblich. Daraus lässt sich ablesen, welche Geschwindigkeiten die Züge haben, wann sie einander auf der Strecke begegnen usw. Erstelle einen grafischen Fahrplan für den Railjet und den REX auf der Strecke Wien – St. Pölten (18.1). Wo wird der Railjet den Rex überholen? (Verwende ein Tabellenkalkulationsprogramm).“

REX:		
Wien Westbahnhof (0 km)		12:14
Wien Hütteldorf (6 km)	12:20	12:22
Tullnerbach-Pressbaum (20 km)	12:32	12:38
Pressbaum (21 km)	12:40	12:40
Eichgraben-Altlangbach (29 km)	12:47	12:48
Neulengbach Stadt (37 km)	12:54	12:55
Böheimkirchen (49 km)	13:03	13:04
St. Pölten Hbf (60 km)	13:12	13:14
Railjet:		
Wien Westbahnhof	12:20	
St. Pölten Hbf	13:00	

Neben der Übung 18.1 findet man Abbildung 159, welche eine Tabelle zeigt, die einen Fahrplanauszug von der ÖBB liefert.

Abbildung 159: (Sextl et al., 2012, S. 18)

Bei den gleichförmigen und ungleichförmigen Bewegungen stoßen die Schülerinnen und Schüler auf eine Frage zur Relativgeschwindigkeit, die in der Mathematik bei der Vektoraddition und Subtraktion verwendet werden kann.

„18.6 Du fährst mit dem Zug und gehst in einen vorderen Waggon. Deine mittlere Gehgeschwindigkeit ist 4 km/h. Der Zug hat eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Mit welcher Geschwindigkeit bewegst du dich relativ zum Zug bzw. relativ zu den Bahngleisen?“

Bei der Fallbeschleunigung begegnen die Heranwachsenden einem Einführungsexperiment, welches genauso gut in der Mathematik durchführbar ist.

„20.1 Du brauchst: Eine Metallkugel (oder einen anderen Körper mit geringem Luftwiderstand), ein Maßband. Die Zeitmessung kann mittels Stoppuhr, Videokamera oder Lichtschranke erfolgen.

Was ist zu tun? Lass die Metallkugel aus möglichst großer Höhe h fallen und miss die Fallzeit t bis zum Aufschlag der Kugel. Achte dabei darauf, dass die Kugel niemanden verletzt! Wenn du die Fallhöhe h durch die Fallzeit dividierst, erhältst du die mittlere Geschwindigkeit v_m , mit der die Kugel gefallen ist. Arbeitet in Gruppen und vergleicht eure Werte. Wie du schon weißt, ist es günstig, den Versuch mehrfach durchzuführen und den Mittelwert der Messwerte zu bilden. Eine genauere Zeitmessung, etwa mittels

Lichtschränke, verbessert dein Ergebnis und ermöglicht auch die Messungen an kürzeren Wegstrecken. Die Zeitmessung kannst du auch mittels Video machen. In diesen Fällen kannst du die von Bild zu Bild durchfallenen Strecken ablesen und mittels Excel Tabelle ein Zeit-Weg-Diagramm erstellen.“

Bei diesem Experiment können die Jugendlichen erkennen, dass die Beschleunigung indirekt proportional zu t^2 ist. Sie kommen auf die Fallbeschleunigung g mit ungefähr 10 m/s^2 . Die Potenzfunktionen sind bei dieser Aufgabe ebenfalls sehr aktuell.

Zur Bewegung auf der schiefen Ebene entdeckt man viele mathematische Inhalte, nämlich zu den Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck. Die Schülerinnen und Schüler sehen am Rand ein rechtwinkliges Dreieck, welches die Bezeichnungen Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse und den Winkel Alpha enthält. Für die Jugendlichen folgt eine Erklärung zu den Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens. Daraufhin beschreiben die Autoren, was man unter einer Steigung bei der schiefen Ebene versteht. Danach wird das Bild mit dem Skispringer bearbeitet, wobei man auf das Ergebnis kommt, dass die Endgeschwindigkeit nicht vom Gefälle abhängt. Dann erblicken die Heranwachsenden noch ein Bild eines Rangierbahnhofs, bei dem die Waggons mithilfe schiefer Ebenen beschleunigt werden, sodass sie zu ihrer Position auf die Gleisharfe gelangen. Siehe Abbildung 160.

Anschließend besprechen die Verfasser, den Bremsweg eines Autos, dazu findet man im Mathematiklehrbuch unter „7 Reelle Funktionen“ den Abschnitt „Der Anhalteweg eines Autos“. Ein Beispiel ist ebenfalls angegeben, bei dem eine Person mit 130 km/h auf der Autobahn fährt. Dazu sollen die Jugendlichen den Vorbremsweg sowie den Bremsweg berechnen und daraus ergibt sich dann der Anhalteweg. Mit diesem Abschnitt existiert abermals eine Verbindung zwischen der Mathematik und der Physik. Dies kann man der Abbildung 161 entnehmen.



Vertiefung Mathematik:

Rechtwinkeliges Dreieck und Winkelfunktionen

23.1 Abb. 23.3 zeigt eine schiefe Ebene (z. B. eine Rampe) im Längsschnitt, die Seiten l (Länge der Rampe), h (Höhe), b (Basis) bilden ein rechtwinkeliges Dreieck. Oft ist die Einführung des Steigungswinkels α zweckmäßig, wodurch die Winkelfunktionen Sinus (sin), Cosinus (cos) und Tangens (tan) ins Spiel kommen. Es gilt:
 $\sin \alpha = \text{Gegenkathete} : \text{Hypotenuse} = h / l$
 $\cos \alpha = \text{Ankathete} : \text{Hypotenuse} = b / l$
 $\tan \alpha = \text{Gegenkathete} : \text{Ankathete} = h / b$

Unter der Steigung einer schiefen Ebene versteht man das Verhältnis von Höhe zu Basis, also den Tangens des Steigungswinkels. Bei Straßen wird die Steigung oft nicht als Dezimalbruch, sondern in Prozent angegeben. Eine Steigung von 15 % bedeutet daher, dass $h / b = 0,15$ ist bzw. $\tan \alpha = 0,15$, entsprechend einem Steigungswinkel von $8,53^\circ$.

In der Anlaufspur (Länge l) wird der Schispringer – wie die Kugel in Galileis Experiment – nicht mit $\vec{g}$, sondern nur einem Bruchteil von $\vec{g}$ beschleunigt. Um die Beschleunigung entlang der Anlaufspur zu erhalten, betrachten wir $\vec{g}$ als Summe (oder anders ausgedrückt als Resultierende zweier Komponenten): die eine Komponente $\vec{g}_{\text{parallel}}$ soll parallel zur Anlaufspur (bzw. zur Länge der schiefen Ebene) liegen, die andere Komponente $\vec{g}_{\text{normal}}$ normal dazu (23.3). Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt: $\sin \alpha = h / l = g_{\text{parallel}} : g$. Längs der schiefen Ebene wirkt die Beschleunigung $g_{\text{parallel}} = a$:

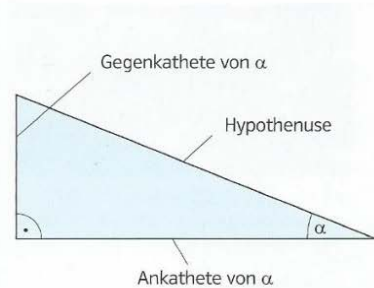
$$a = \frac{g \cdot h}{l} = g \cdot \sin \alpha$$

Wie beim freien Fall erfolgt die Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Es gilt daher $v = v_{\text{end}} = a \cdot t$ und für die Bahnlänge $s = l = \frac{1}{2} a \cdot t^2$. Durch Umformen erhält man

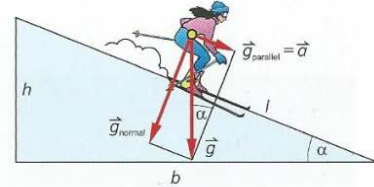
$$v_{\text{end}} = \sqrt{2al} = \sqrt{2 \frac{gh}{l} \cdot l} = \sqrt{2gh}$$

Wir haben ein interessantes Ergebnis erhalten: Beim Gleiten auf einer schiefen Ebene hängt die Endgeschwindigkeit nicht vom Gefälle ab, wenn Reibung und Luftwiderstand nicht berücksichtigt werden.

Bei einer Höhendifferenz von $h = 60 \text{ m}$ in der Anlaufspur ergibt sich $v = 34,3 \text{ m/s} = 123,5 \text{ km/h}$. Die Reibung der Schier in der Spur und der Luftwiderstand verringern die Endgeschwindigkeit. Aus Sicherheitsgründen soll die Absprunggeschwindigkeit nicht wesentlich mehr als 90 km/h betragen, weshalb der Anlauf meist verkürzt wird. $\triangleleft$



23.2 Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks



23.3 Beschleunigung auf der schiefen Ebene



23.4 Am Rangierbahnhof werden die Waggons mithilfe schiefer Ebenen (Abrollhügel) auf eine ausreichend große Geschwindigkeit beschleunigt. Sie rollen dann „antriebslos“ bis zu ihrer Position auf der Gleisharfe.

Abbildung 160: (Sextl et al., 2012, S. 23)



Der Bremsweg eines Autos

Die Gleichungen für den freien Fall kann man auch zur Berechnung des Bremswegs eines Autos benutzen. Die Zeit vom Erkennen einer Gefahr bis zum Anhalten des Fahrzeugs wird folgendermaßen unterteilt:

- Vorbremszeit t_1 :** Nach dem Erkennen der Gefahr verstreicht zunächst die Reaktionszeit, bis die Bremse betätigt wird. Doch auch die Bremse braucht einige Zehntelsekunden, bis sie anspricht. Insgesamt vergeht etwa 1 Sekunde. Das Fahrzeug behält in dieser Zeit seine ursprüngliche Geschwindigkeit, der **Vorbremsweg** $s_1 = v t_1$
- Bremszeit t_2 :** In dieser Zeit verringert sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs. Die Beschleunigung ist negativ. Aus $t = v / a$ ergibt sich der **Bremsweg** $s_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 = v^2 / (2a)$

Der **Anhalteweg** besteht aus dem Vorbremsweg s_1 und dem eigentlichen Bremsweg s_2 .

Beispiel:

Für 130 km/h (der auf österreichischen Autobahnen erlaubten Höchstgeschwindigkeit) ergeben sich folgende Werte:

Vorbremsweg: $s_1 = 130/3,6 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 36,1 \text{ m}$

Bremsweg: $s_2 = v^2 / (2a)$. Für eine durchschnittliche Bremsverzögerung von $a = 4 \text{ m/s}^2$ beträgt der Bremsweg 162,9 m.

Der Anhalteweg ergibt sich daher mit 199 m.

In der Fahrschule lernt man Regeln, die bei der Abschätzung von Vorbremsweg und Bremsweg unter der Annahme von $a = 4 \text{ m/s}^2$ helfen sollen.



24.1 Mangelnder Sicherheitsabstand kann zu Massen-Auffahrunfällen führen, in denen der einzelne Autofahrer praktisch chancenlos ist.

Regel I: Der Vorbremsweg ergibt sich in Meter, indem man die Geschwindigkeit in km/h durch 10 teilt und mit 3 multipliziert.

Also: $v = 130 \text{ km/h}$, Vorbremsweg $s_1 = 13 \text{ mal } 3 = 39 \text{ m}$

Regel II: Der Bremsweg ergibt sich in Meter, indem man die Geschwindigkeit in km/h durch 10 teilt und anschließend quadriert.

Also $v = 130 \text{ km/h}$, Bremsweg $s_2 = 13 \text{ mal } 13 = 169 \text{ m}$.

Der Anhalteweg ist demnach 208 m.

Eine häufige Unfallursache ist der zu geringe Abstand zwischen den Fahrzeugen auf Autobahnen und Landstraßen. Als üblicher Sicherheitsabstand gilt bei kleinen Geschwindigkeiten zumindest der Vorbremsweg (Ein-Sekundenregel). Bei großen Geschwindigkeiten sollte wenigstens der doppelte Vorbremsweg als Sicherheitsabstand eingehalten werden. Diese Regeln setzen voraus, dass man beim Autofahren konzentriert und aufmerksam ist.

Abbildung 161: (Sextl et al., 2012, S. 24)

Am Ende des zweiten Unterkapitels begegnen die Schülerinnen und Schüler bei den weiterführenden Fragestellungen einer Teilaufgabe, bei der ein Weg-Zeit-Diagramm eines LKWs gefragt ist. Die reellen Funktionen verknüpfen sich mit den Bewegungen.

„THEMA BEWEGUNG

1 Autofahren

- Ein LKW fährt von Wien nach Salzburg. Wie könnte das entsprechende Weg-Zeit-Diagramm aussehen?“*

Angelangt bei Kapitel „Die Kraft“, Unterkapitel „Die Newton’schen Gesetze“, stehen den Jugendlichen nachstehende Fragen zur Verfügung, an denen sie ihr gelerntes Wissen der Mathematik und der Physik anwenden können. Die Heranwachsenden können die Formel für

den Fallweg als explizite Funktionsdarstellung ausdrücken und diverse Proportionalitäten bestimmen.

„30.1 Du lässt in einem fahrenden Zug einen Gegenstand fallen. Beschreibe den Fallweg des Körpers aus der Sicht eines am Bahnsteig stehender[sic] Beobachters (Nimm an, dass der Zug gleichförmig mit 50 km/h fährt). Überlege dir eine ähnliche Versuchsanordnung und verwende zur Aufzeichnung eine Kamera.“

Beim zweiten Newton'schen Gesetz führen die Autoren ein Experiment an, bei dem die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über Proportionalitäten anwenden können. Sie sollen den Zusammenhang erkennen, wenn ein Wagen mit Massestückchen beladen wird, so verringert sich seine Beschleunigung auf die Hälfte beziehungsweise ein Drittel und so weiter. Die Jugendlichen sollen feststellen, dass die Masse indirekt proportional zur Beschleunigung ist.

*„32.1 Du brauchst: einen (kleinen) Wagen, kleine Massestücke, eine Rolle.
Was ist zu tun? Befestige an dem Wagen eine Schnur, führe diese über die Rolle und hänge an die herabhängende Schnur ein Massestück. Das Gewicht des Massestücks beschleunigt den Wagen. Vergrößert man die Masse durch Beladen mit weiteren Massestückchen, so verringert sich die Beschleunigung. Mit Hilfe einer Luftkissenbahn lässt sich zeigen, dass die Beschleunigung bei reibungsfreier Bewegung auf die Hälfte bzw. ein Drittel sinkt.“*

Die Messung von Kräften mittels Federn liefert ein weiteres Experiment, bei dem die Jugendlichen ihr Wissen über die Proportionalitäten üben können. Sie stellen dann fest, dass bei doppelter beziehungsweise dreifacher Belastung die Feder doppelt beziehungsweise dreifach so groß ist. Die Schraubenfeder kann daher als Kraftmesser verwendet werden.

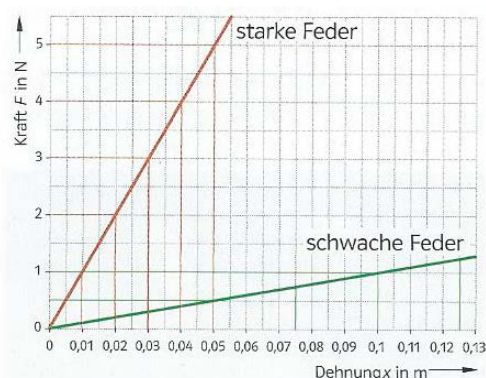
*„33.1 Du brauchst: eine Schraubenfeder, ein Gummiband, passende Massestücke (z.B. 10 g, 20 g, 30 g), Schreibstift
Was ist zu tun? Hänge die Massestücke der Reihe nach an die Schraubenfeder. Befestige ein Blatt Papier so, dass du die Dehnung der Feder markieren kannst. Markiere den Nullpunkt und die jeweiligen Dehnung[sic]. Stelle eine Tabelle auf:*

Dehnung – Gewicht (des anhängenden Massestücks). Wiederhole dasselbe Experiment mit einem Gummiband.“

Das darauffolgende Experiment über die Eigenschaften der Schraubenfeder kann man ebenfalls bei den Proportionalitäten sowie bei den linearen Funktionen einsetzen.

„34.1 Du brauchst: Zwei verschiedene Schraubenfedern und verschiedenen Massenstücke.

Was ist zu tun? Hänge die Massestücke an die Feder und miss die Dehnung. Bestimme die Messergebnisse für mehrere Massestücke und für mindestens zwei verschieden starke Federn in einem passenden Arbeitsblatt. Trage die Werte für die Gewichtskraft und die Dehnung x in ein Diagramm ein.“



34.2 Wenn die Feder nicht zu stark belastet wird, ist die Dehnung der Feder proportional zur wirkenden Kraft (z. B. Gewicht).

Abbildung 162: (Sextl et al., 2012, S. 34)

Der Graph, den die Jugendlichen im Anschluss an das Experiment zeichnen sollen, zeigt die Abhängigkeit der Dehnung x von der Federkraft F . Der Betrag der Federkraft entspricht dabei dem Betrag des angehängten Gewichts. Das bedeutet die Vektorrechnung fließt auch mit ein.

Danach folgt das Experiment „Überdehnen eines Gummibands“, welches die Heranwachsenden wieder zu den Proportionalitäten üben können. Dabei erforschen sie, dass die Federkraft proportional zur Dehnung der Feder ist. Damit erkunden die Jugendlichen das Hooke'sche Gesetz.

„34.2 Du brauchst: Ein Gummiband (Gummiringerl), verschiedene Massestücke

Was ist zu tun? Führe einen analogen Versuch mit einem Gummiband durch. Belaste das Gummiband immer stärker, bis es schließlich reißt. (Sei bei diesem Experiment vorsichtig, damit du niemanden verletzt! Zeichne wie oben ein Diagramm zu deinen Messwerten.“

Ein Abschnitt zur Addition von Kräften folgt daraufhin. Zuerst sehen die Schülerinnen und Schüler einen orange hinterlegten „Merksatz“, dass Kräfte vektoriell addiert werden.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots \vec{F}_n$$

Kräfte werden vektoriell addiert.

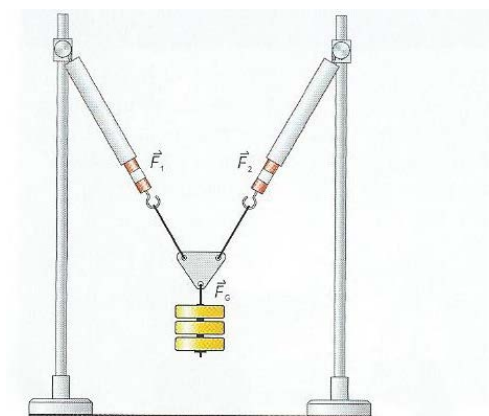
Abbildung 163: (Sextl et al., 2012, S. 34)

Danach sollen die Heranwachsenden ein Experiment durchführen, bei dem die Zerlegung von Kräften im Vordergrund steht. Die Verbindung zur Mathematik ist durch die Vektorrechnung gegeben. Wenn die Jugendlichen die Kraftvektoren maßstabsgetreu auftragen, so entdecken sie, dass die Diagonale im Parallelogramm aus den beiden Kräften an den Federwaagen dem Betrag nach dem Gewicht der Masse entspricht. Die Kräfte lassen sich auch in Teilkräfte zerlegen.

„34.3 Du brauchst: Zwei Federwaagen, ein Massestück, eine Schnur

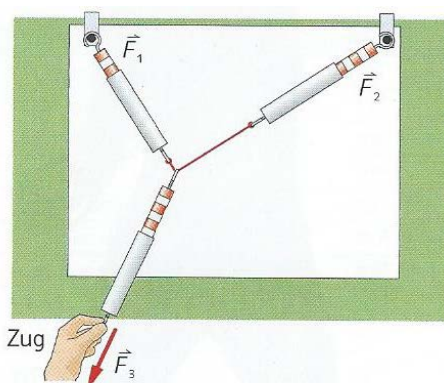
Was ist zu tun? Hänge ein Massestück an eine Federwaage und bestimme das Gewicht. Hänge nun das Massestück über eine Schnur so auf, dass es von zwei Federwaagen geschaltet wird (34.3). Probiere unterschiedliche Winkel. Halte ein A4 Blatt dahinter und zeichne die dazugehörigen Kräfteparallelogramme (Addition von Vektoren S. 35).“

Dazu finden die Schülerinnen und Schüler zwei Abbildungen (164 und 165), wie sie sich die Versuchsanordnung vorstellen können.



34.3 Kräfte sind Vektoren und werden nach der Parallelogramm-Regel zusammengesetzt bzw. zerlegt. Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ wird durch die Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ kompensiert

Abbildung 164: (Sextl et al., 2012, S. 34)



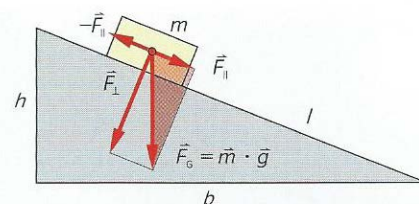
34.4 $\vec{F}_1$ kompensiert die Kräfte $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$. Es herrscht Gleichgewicht: $\vec{F}_1 = -(\vec{F}_2 + \vec{F}_3)$.

Abbildung 165: (Sextl et al., 2012, S. 34)

Für die Addition von Kräften stehen den Jugendlichen zwei Aufgaben zur Verfügung.

„35.1 Ein Bergbauer hat Heu geladen und bringt es auf einem Schlitten talwärts. Schlitten und Heu haben zusammen eine Masse von 150 kg, die Steigung beträgt an manchen Stellen 25 Grad. Welche Kraft muss er aufwenden, um den Schlitten festzuhalten?“

„35.2 Überlege am Beispiel der Dachsteinbahn, wie groß die Kraft sein muss, mit der eine Kabine gezogen wird: Die Teilstrecke I der Seilbahn Dachstein-Krippenstein überwindet auf einer Länge von 1734 m einen Höhenunterschied von 742 m. Nimm an, dass die Masse der vollbeladenen Kabine 15 t beträgt.“



35.1 $\vec{F}_G = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$. Die Normalkomponente der Gewichtskraft wird durch die Gegenkraft der festen Rampe kompensiert. Die Kraft $-\vec{F}_{\parallel}$, mit der die Masse hochgezogen wird, ist geringer als das Gewicht $\vec{F}_G$.

Abbildung 166: (Sextl et al., 2012, S. 35)

Zur Unterstützung der Aufgaben führen die Autoren daneben eine Abbildung (166) zur schiefen Ebene, mit der Zerlegung von Kräften, an.

Einen Exkurs in die Vektorrechnung geben die Verfasser in nachstehender Abbildung (167), wo Vektoren, deren Addition und Multiplikation, das Kräfteparallelogramm und das Kreuzprodukt erklärt wird. Wobei das Kreuzprodukt für dreidimensionale Vektoren gilt und dieses in der 5. Klasse noch nicht von Bedeutung ist.



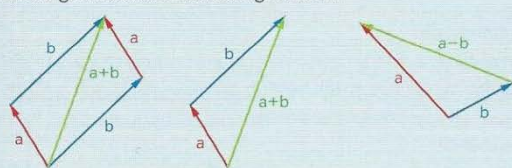
Addition und Multiplikation von Vektoren

Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte sind **vektorielle Größen**. Sie sind durch Betrag und Richtung gegeben und werden durch Pfeile dargestellt, deren Länge dem Betrag des Vektors entspricht. Pfeile, die gleich lang, parallel und gleichorientiert sind, beschreiben denselben Vektor. In der Physik müssen häufig auch Angriffspunkt und Wirkungslinie, das ist die Gerade, die durch den Vektor gebildet wird, gegeben sein. Kräfte können entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.

Addition von Vektoren

Grafisch erfolgt die Addition, indem man an die Spitze des ersten Vektors den Anfang des zweiten Vektors setzt. Den Summenvektor erhält man, in dem man den Anfangspunkt des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors verbindet. Wird ein dritter Vektor addiert, so wird dieser in der gleichen Weise zum Summenvektor der beiden ersten Vektoren addiert.

Die Addition zweier (nicht paralleler) Kräfte wird häufig als **Kräfteparallelogramm** dargestellt: der resultierende Vektor entspricht der Diagonale des aus den beiden Einzelkräften gebildeten Parallelogramms.



Multiplikation von Vektoren

Man unterscheidet zwischen Vektor- und Skalarprodukt.

Das **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich aus dem Produkt der Beträge der beiden Vektoren und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels α :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Das **Kreuzprodukt** (auch **Vektorprodukt**) $\vec{a} \times \vec{b}$ (gesprochen als „a Kreuz b“) zweier Vektoren ist ein Vektor, der normal auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene steht. Sein Betrag ist das Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels. Dies entspricht der Fläche des aus a und b gebildeten Parallelogramms.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

Abbildung 167: (Sextl et al., 2012, S. 35)

Unterhalb der mathematischen Abschweifung können die Jugendlichen ihr Wissen an weiteren Fragen testen. Bei 35.7 benötigen die Jugendlichen Kenntnisse aus der Geometrie und über Proportionalitäten. Aufgabe 35.9 verlangt von den Heranwachsenden das Handwerkzeug für die Vektorrechnung.

„35.7 Wie ändern sich die Kräfte auf der schiefen Ebene, wenn man die Ebene stärker neigt?

- | | |
|---|---|
| <i>a) F_G wird kleiner</i> | <i>b) $F_{\parallel}$ wird kleiner</i> |
| <i>c) $F_{\perp}$ wird kleiner</i> | <i>d) $F_{\parallel}$ wird größer“</i> |

„35.9 Kräfte werden vektoriell addiert. Zeichne die Addition für

- a) Kräfte, die parallel und gleichgerichtet sind.*
- b) Kräfte, die parallel und entgegen gesetzt gerichtet sind.*
- c) Kräfte, die einen beliebigen Winkel einschließen.“*

Nun kommen wir zu dem Unterkapitel „Drittes Newton'sches Gesetz: Das allgemeine Wechselwirkungsgesetz“. Bei der Gravitation stoßen die Schülerinnen und Schüler auf eine Frage, die die Gravitation und das Rechnen mit Zehnerpotenzen verbindet.

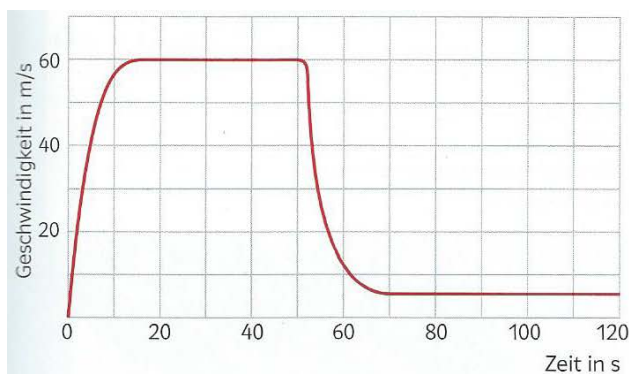
„38.2 Du kannst die Größenordnung der Gravitationskonstanten G abschätzen: Denk dir auf der Erde liegend einen Körper mit der Masse 1 kg. Die Erde hat eine Masse von $6 \cdot 10^{24}$ kg und einen Radius von 6370 km. Die Kraft $\vec{F}$ ist gleich der auf den Körper wirkenden Gewichtskraft. Denk die Masse der Erde im Erdmittelpunkt vereinigt.“

Am Ende dieses Unterkapitels, wo die Jugendlichen ihr Wissen testen können, ist ebenfalls eine Aufgabe, die physikalische und mathematische Inhalte verknüpft. Die Kenntnisse über die Kräfte, Geometrie und die Vektorrechnung sollen die Heranwachsenden bei dieser Übung anwenden.

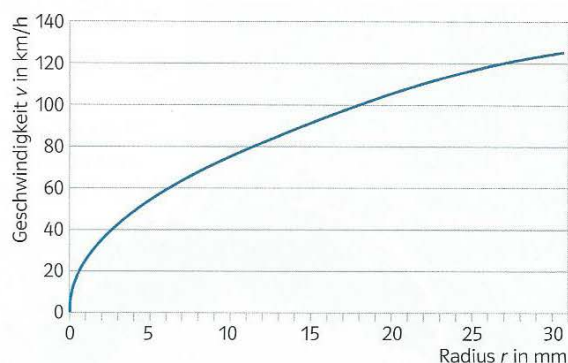
„38.3 Auf einen Körper wirken gleichzeitig eine Kraft von 3 N und eine von 4 N ein. Die Kräfte schließen miteinander einen Winkel von 90° ein. Wie groß ist die gesamte wirkende Kraft?

- | | |
|---------------|----------------|
| <i>a) 3 N</i> | <i>b) 5 N</i> |
| <i>c) 4 N</i> | <i>d) 7 N“</i> |

Am Ende des Unterkapitels „Der Einfluss der Reibung“ sehen die Schülerinnen und Schüler zwei Grafiken abgebildet, die sie interpretieren sollen. Abbildung 168 links, zeigt ein Diagramm, bei dem die Grenzggeschwindigkeit beim Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Fallzeit aufgetragen ist. In derselben Abbildung, aber rechts, wird die Grenzggeschwindigkeit von Regentropfen beziehungsweise Hagelkörnern in Abhängigkeit vom Radius dargestellt. Diese beiden Funktionsgraphen kann man den reellen Funktionen zuordnen.



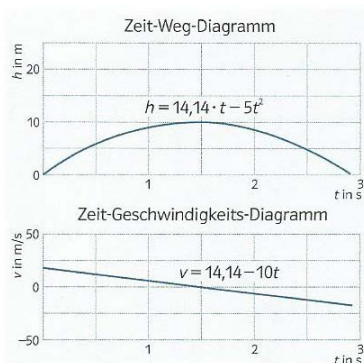
43.1 Grenzggeschwindigkeit beim Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Fallzeit. Interpretiere die Grafik!



43.2 Grenzggeschwindigkeit von Regentropfen bzw. Hagelkörnern in Abhängigkeit vom Radius. Interpretiere die Grafik!

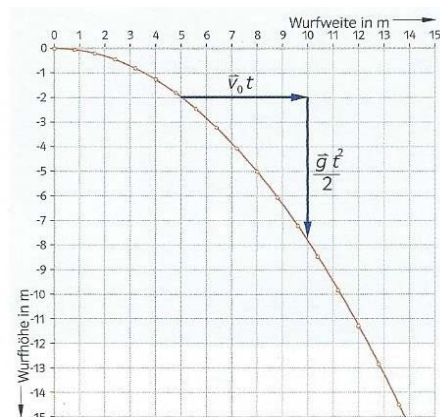
Abbildung 168: (Sextl et al., 2012, S. 43)

Das Unterkapitel „Spezielle Bewegungsformen“ behandelt unter anderem die Wurfbewegungen. Die zwei Diagramme in Abbildung 169 zeigen ein Zeit-Weg-Diagramm und ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm eines lotrechten Wurfs. Diese kann man in der Mathematik zu den reellen Funktionen zuordnen. Das Diagramm in Abbildung 170 zeigt einen waagrechten Wurf, wobei der Ball zwei Bewegungen gleichzeitig ausführt. Eine beschleunigte waagrechte Bewegung in Wurfrichtung und eine gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung lotrecht nach unten. Die Zusammensetzung der beiden Bewegungen, durch die Addition der Vektoren, ergibt sich als Bahn eine krumme Kurve.



45.1 Lotrechter Wurf nach oben: Interpretiere die Diagramme

Abbildung 169: (Sextl et al., 2012, S. 45)



45.2 Die waagrechte Wurfbewegung kann man sich zusammengesetzt denken aus einer unbeschleunigten Bewegung in waagrechtter Richtung und einer gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung in lotrechtter Richtung.

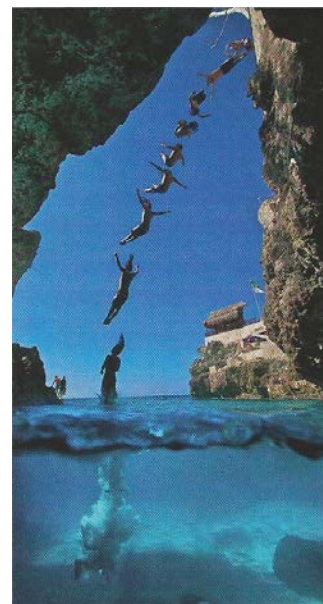
Abbildung 170: (Sextl et al., 2012, S. 45)

Beim waagrechten Wurf sollen die Schülerinnen und Schüler das Klippenspringen in Mexiko untersuchen. Diese Aufgabe kann man unter 46.1 nachlesen. Anschließend wird noch ein x-y-Diagramm verlangt. Die Zuordnung zur Mathematik erfolgt über die Potenzfunktionen.

„46.1 Bekannt wurde der Sport durch die in Acapulco, Mexiko gelegenen Felsen La Quebrada. Junge Männer zeigen Sprünge in den Pazifik als Touristenattraktion. Gesprungen wird aus einer Höhe von ca. 26 m. Um nicht an den darunter liegenden Felsen aufzuschlagen, müssen die Springer ca. 8 m nach vorne springen (64.1). Berechne die Anfangsgeschwindigkeit des Klippenspringers und erstelle ein x-y-Diagramm.

Anleitung: Aus $x = v_0 t$ und $y = -\frac{g}{2} t^2$ erhältst du die

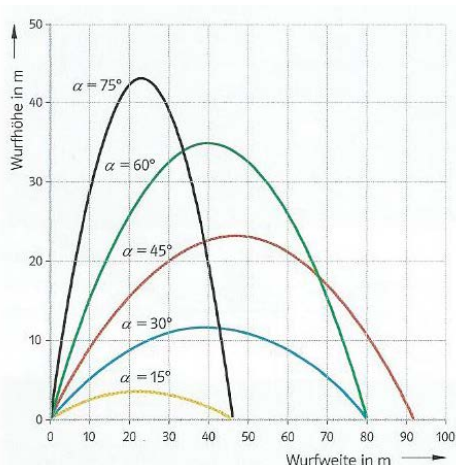
Parabelgleichung: $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$



46.1 Der Klippenspringer Orlando Duque in Jamaica

Abbildung 171: (Sextl et al., 2012, S. 46)

Anschließend folgt der schiefe Wurf, den man zu den quadratischen Modellen der



46.2 Der schiefe Wurf.

Für die Abwurfhöhe y_0 , die Abwurfgeschwindigkeit v_0 und den Winkel α gelten folgende Beziehungen:

Wurfweite: $x(t) = (v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t$

Wurfhöhe: $y(t) = y_0 + (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

Geschwindigkeit in x-Richtung: $v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha$

Geschwindigkeit in y-Richtung:

$v_y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$

Abbildung 172: (Sextl et al., 2012, S. 46)

Mathematik einordnen kann. Dazu bilden die Autoren links stehendes Diagramm, mit den zugehörigen Gleichungen, ab. Ein Experiment können die Jugendlichen auch dazu ausprobieren, nämlich die Überprüfung der Wurfbahnen mit dem Gartenschlauch.

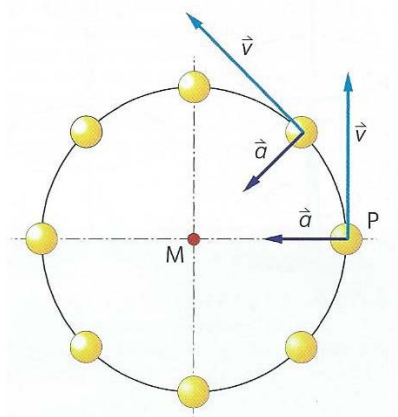
Daraufhin schließen die Verfasser dieses Buches mit den Wurfbewegungen im Sport an. Man stößt auf zwei Aufgaben, die die Mathematik und die Physik verbinden. Eine Übung handelt vom Tischtennis und die zweite vom Tennis, beide beschreiben einen waagrechten Wurf.

Die Beziehung zur Mathematik ist durch die Potenzfunktion gegeben.

„46.2 Wie hoch ist die typische Geschwindigkeit von Bällen beim Tischtennis? Der Tisch ist 2,7 m lang und 1,5 m breit, das Netz 15 m hoch. Nimm einen waagrechten Wurf an. Der Ball soll knapp das Netz passieren und gerade noch am Tisch auftreffen. Welche Geschwindigkeit hat der Ball? Welche Reaktionszeit bräuchte ein Topspieler bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h?“

„46.3 Im Tennis wird ein Ball knapp über das Netz (91,5 cm) geschossen. Wie hoch muss die Geschwindigkeit sein, damit der Ball noch im Feld (12 m lang) landet?“

Nach den Wurfbewegungen schließen die Bewegungen auf der Kreisbahn an. Als nächstes bilden die Autoren eine Grafik zur Kreisbewegung ab. Diese könnte man als Verständnisübung bei der Vektorrechnung anwenden. Der Geschwindigkeitsvektor ändert ständig seine Richtung, daher beschreibt die Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung. Jedoch bleibt der Betrag des Geschwindigkeitsvektors gleich. Der Beschleunigungsvektor ist stets zum Kreismittelpunkt gerichtet. Deshalb heißt diese Beschleunigung auch Zentripetalbeschleunigung. Die Kraft, die den Körper auf der Kreisbahn hält, nennt man Zentripetalkraft.



47.2 Die Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung, da der Geschwindigkeitsvektor laufend seine Richtung ändert.

Abbildung 173: (Sexl et al., 2012, S. 47)

Die Zentripetalbeschleunigung liefert ein Experiment (49.1), bei dem die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über Proportionalitäten vertiefen können. Bei dem Versuch stellen die

Jugendlichen fest, dass die Zentripetalkraft proportional zur Masse, zur Winkelgeschwindigkeit und zum Radius ist.

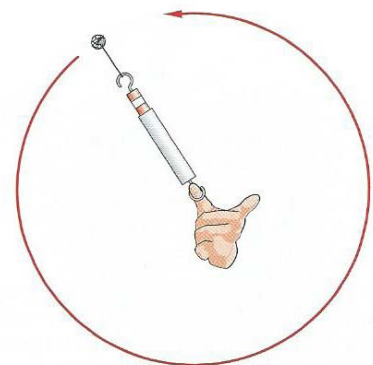
„49.1 Du brauchst: Eine Kugel aus Papier, eine Schnur, einen Kraftmesser.

Was ist zu tun? Befestige die Papierkugel mittels Schnur am Kraftmesser und drehe die Kugel waagrecht im Kreis. Finde nun heraus, wovon die Zentripetalkraft abhängt

(49.1) Wie ändert sich die Anzeige am Kraftmesser, wenn du

- die Masse der Kugel vergrößerst,*
- den Radius des Kreises vergrößerst,*
- die Frequenz bzw. die Winkelgeschwindigkeit vergrößerst?“*

Bei dem Experiment 49.1 zur Zentripetalbeschleunigung ist nebenstehende Versuchsanordnung angehängt.



49.1 Experiment zur Zentripetalbeschleunigung

Abbildung 174: (Sextl et al., 2012, S. 49)

Am Ende des Kapitels „Spezielle Bewegungsformen“ befindet sich abermals ein gelber Abschnitt, wo die Heranwachsenden ihr Wissen über das Kapitel testen können. Die Aufgaben 53.2, 53.3 und 53.5 passen zu den Proportionalitäten. Übung 53.4 verlangt von den Jugendlichen Verständnis über die Geometrie und über die quadratischen Modelle.

„53.2 Ein Ball wird horizontal geworfen. Wenn man die Abwurfhöhe 4-mal so groß macht, was gilt dann für die Wurfweite?

- a) Die Wurfweite halbiert sich.*
- b) Die Wurfweite wird verdoppelt.*
- c) Die Wurfweite bleibt gleich.“*

„53.3 Ein Ball wird von einem hohen Turm lotrecht nach unten geworfen. Eine halbe Sekunde später wird ein zweiter Ball fallen gelassen. Wenn die Luftreibung vernachlässigt wird, was gilt dann?

- a) Der Abstand zwischen den Bällen nimmt zu.*
- b) Der Abstand zwischen den Bällen nimmt ab.*

c) Der Abstand zwischen den Bällen bleibt konstant.“

„53.4 Zeichne die Bahnkurve eines Balls, der schräg nach oben unter einem Winkel von etwa 45° geworfen wird. Zeichne alle Kräfte ein, die auf den Ball wirken.“

„53.5 Du fährst mit gleicher Geschwindigkeit durch eine Kurve mit kleinem Kurvenradius und durch eine Kurve mit großem Kurvenradius. Die Zentripetalbeschleunigung a_z

a) ist in beiden Kurven gleich

b) ist in der Kurve mit großem Kurvenradius größer als in der Kurve mit kleinem Kurvenradius

c) ist in der Kurve mit großem Kurvenradius kleiner als in der Kurve mit kleinem Kurvenradius“

Wir kommen jetzt zu einem neuen Kapitel „Die Erhaltungssätze“, wobei das erste Unterkapitel die Energie behandelt. Mittels einer Abbildung und unter der Zuhilfenahme der Geometrie leiten die Verfasser die Formel für die Arbeit her. Die Proportionalitäten kommen hier abermals nicht zu kurz.

Aus **63.2** kannst du die Stärke der Kraft $F_{||}$ ablesen, die dich und das Fahrrad talwärts zieht. Das graue und das schraffierte Dreieck in **63.2** sind ähnlich. Daher ergibt sich die Proportion für die **Kraftbeträge**:

$$F_{||} : F_G = h : s, \text{ daher } F_{||} = F_G \cdot \frac{h}{s}.$$

$F_{||}$ ist proportional zur Gewichtskraft F_G und zum Quotienten h/s , wobei h die Höhe ist, die du auf der Wegstrecke s gewinnst. Diese dich talwärts ziehende Kraft musst du mit einer entgegengesetzten Kraft F_A kompensieren. Es gilt für die **Kraftbeträge**:

$$F_A = F_{||} = F_G \cdot \frac{h}{s}$$

Bei gleicher Höhe h werden $F_{||}$ und F_A umso kleiner, je größer der Weg s ist, je geringer also die Steigung ist.

Eine Umformung führt auf die Beziehung

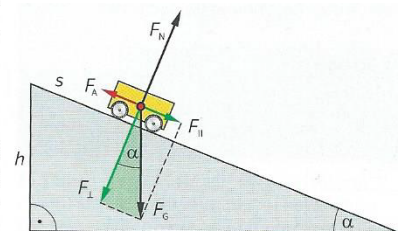
$$F_A \cdot s = F_G \cdot h = W.$$

Das Produkt W aus der aufzuwendenden Kraft F_A und dem Weg s ist von der Steigung unabhängig und hängt nur von der Höhendifferenz h ab.

Man erspart sich also keine Arbeit, wenn man längere, flachere Wege benutzt. Hingegen kommt man auf längeren Wegen mit weniger Kraftaufwand aus. Dies gilt allgemein und wird als **Goldene Regel der Mechanik** folgendermaßen ausgedrückt:

Was man an Kraft spart, muss man durch einen längeren Weg ausgleichen.

Abbildung 175: (Sextl et al., 2012, S. 63)

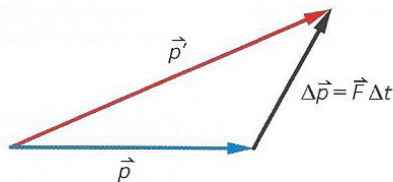


63.2 Kräftezerlegung für einen reibungsfreien Wagen auf der schiefen Ebene. Die Gewichtskraft F_G wird in zwei Komponenten zerlegt.

$F_{\perp}$ steht normal zur Fahrbahn, mit ihr drückt der Wagen auf die Fahrbahn. Diese verformt sich elastisch, bis mit einer gleich großen entgegengesetzten Kraft F_N das Kräftegleichgewicht hergestellt ist. $F_{||}$ wirkt hangabwärts. Um den Körper (Masse m) mit konstanter Geschwindigkeit hinaufzuziehen, braucht man eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft F_A . Beim Hochziehen wird die Arbeit $F_A \cdot s = mgh$ verrichtet.

Abbildung 176: (Sextl et al., 2012, S. 63)

Mittlerweile befinden wir uns im Unterkapitel „Impuls“. Hier vernehmen die Jugendlichen, dass der Impuls, wie die Geschwindigkeit, eine vektorielle Größe ist. Wenn nun mehrere Kraftstöße auf einen Körper wirken, so müssen die Impulsänderungen, also die Vektoren, addiert werden, um den gesamten Impulsvektor zu berechnen. Somit arbeiten die Heranwachsenden mit Vektoren. Dazu nimmt man Abbildung 177 wahr.



74.4 Vektoraddition von Impulsen: $\vec{p}' = \vec{p} + \Delta\vec{p}$

Abbildung 177: (Sextl et al., 2012, S. 74)

Hinterher besprechen die Verfasser die Impulserhaltung im abgeschlossenen System. Der Gesamtimpuls ist die vektorielle Summe der Impulse der beiden Körper. Der Erhaltungssatz wird durch die Betrachtung eines Stoßes zweier Körper begründet. Siehe Abbildung 178.

Um diesen Erhaltungssatz zu begründen, betrachten wir den Stoß zweier Körper (Massen m_1 und m_2), auf die keine äußeren Kräfte einwirken. Die Körper bewegen sich anfangs mit den Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ und nach dem Stoß mit $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$, die entsprechenden Impulse sind $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ bzw. $\vec{p}_1' = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_1, \vec{p}_2' = \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_2$.

Beim Stoß üben die zwei Körper wechselseitig Kräfte $\vec{F}_{21}$ und $\vec{F}_{12} (= -\vec{F}_{21})$ aus (3. Newton'sches Gesetz). In der Zeit Δt erfolgen Impulsänderungen (75.3):

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{F}_{21} \Delta t$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \vec{F}_{12} \Delta t = -\vec{F}_{21} \Delta t.$$

Addition der Gleichungen ergibt:

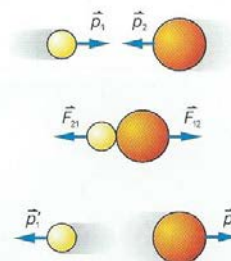
$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2') - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{p}'_{ges} - \vec{p}_{ges} = 0.$$

Der Gesamtimpuls $\vec{p}_{ges}$ ist die **vektorielle Summe** der Impulse der beiden Körper. Er ändert sich beim Stoß nicht, er ist konstant. Dies gilt, wenn während des Stoßes keine äußeren Kräfte auf die Körper wirken und die Körper daher ein abgeschlossenes System bilden. (Es gilt auch für Systeme aus mehreren Körpern.)

Impulserhaltungssatz

In abgeschlossenen Systemen bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

$$\vec{p}_{ges} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \dots = \vec{p}'_{ges}$$



75.3 Die Impulserhaltung im abgeschlossenen System ist eine Folge des 3. Newton'schen Gesetzes.

Abbildung 178: (Sextl et al., 2012, S. 75)

Beim elastischen und unelastischen Stoß lernen die Schülerinnen und Schüler das Interpretieren von Vektoren. Abbildung 179 zeigt einen elastischen Stoß zwischen zwei Körpern mit unterschiedlicher Masse, wobei nur der erste Körper eine Geschwindigkeit aufweist. Abbildung 180 vermittelt ebenfalls einen elastischen Stoß von einem Körper, der gegen eine Wand prallt. Abbildung 181 repräsentiert einen unelastischen Stoß, wobei der

erste Körper sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf den zweiten Körper zubewegt. Beide Körper besitzen unterschiedliche Masse und nach dem Stoß bewegen sich beide Körper gemeinsam weiter.

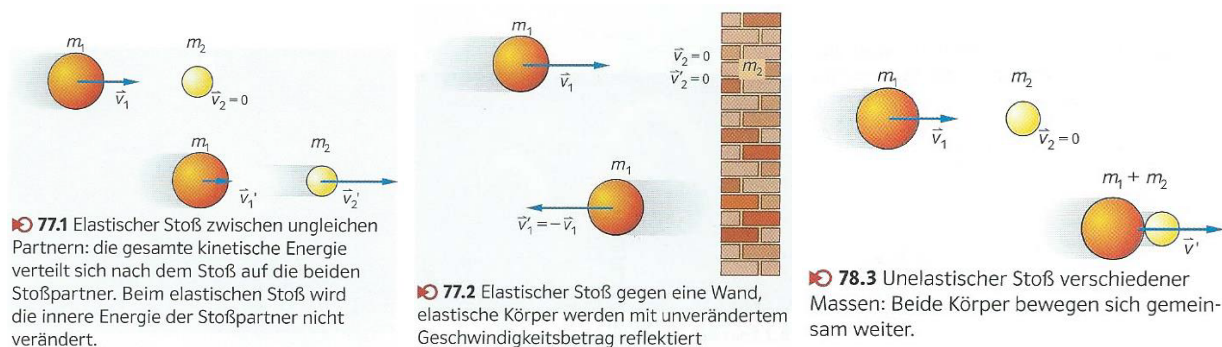


Abbildung 179: (Sextl et al., 2012, S. 77) Abbildung 180: (Sextl et al., 2012, S. 77) Abbildung 181: (Sextl et al., 2012, S. 78)

Im Unterkapitel „Drehimpuls“ lassen sich zwei Aufgaben zum Schwerpunkt finden. Den Schwerpunkt kann man in Verbindung mit der Geometrie und mit den einfachen Anwendungen der Vektorrechnung in der Geometrie (Mathematik verstehen 5) bringen.

„86.1 Schneide aus einem Stück Karton ein Viereck – es kann auch der Umriss eines Geo-Dreiecks sein. Hänge das Kartonstück an einem Faden an verschiedenen Stellen auf (86.1)

Wenn der Karton ruhig hängt, markiere die Lotrechte durch den jeweiligen Aufhängungspunkt. Die Linien sollten sich in einem Punkt schneiden. Vergleiche dein Vorgehen mit der Bestimmung des Schwerpunkts in einem Dreieck, wie es in der Mathematik üblich ist.“

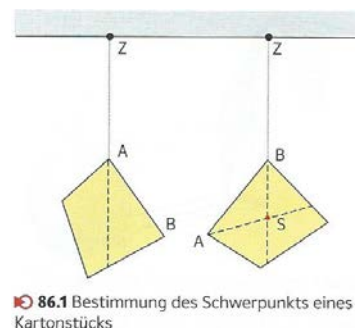


Abbildung 182: (Sextl et al., 2012, S. 86)

„86.2 In der Akrobatik, aber auch in der Natur gibt es zahlreiche erstaunliche Phänomene zum Thema Gleichgewicht. Finde dazu Erklärungen. (Links dazu auf der Website des Schulbuchs).

Die Lage des Schwerpunkts entscheidet über die Standfestigkeit eines Gegenstandes (z.B. einer Vase). Finde heraus, wie du die Standfestigkeit einer Vase oder eines anderen Gegenstandes (z.B. eines Posterständers bei einer Schulpräsentation) erhöhen kannst.“

b) VERGLEICH

Das Schulbuch von M. Apolin „Big Bang 5“ enthält ein wenig mehr Aufgaben mit Bezug zur Mathematik als das „Sextl Physik 5“. Die schiefe Ebene und die verschiedenen Würfe sind in beiden Lehrbüchern ungefähr in gleichem Umfang. Meiner Meinung nach erklären Sextl und die anderen Autoren das Kräfteparallelogramm besser und sie führen mehr Experimente an, die auch im Mathematikunterricht hervorragend zu bewältigen sind. Mehr Diagramme sind jedoch in „Big Bang“ abgebildet und besprochen.

5. ERSTELLUNG VON UNTERRICHTSMATERIAL

Ich möchte nun versuchen Arbeitsblätter zusammenzustellen, die man sowohl für den Mathematik- als auch für den Physikunterricht verwenden kann.

Die Arbeitsblätter tragen alle eigene Überschriften. Dazu teile ich die physikalischen Gebiete wie folgt den mathematischen Themen zu:

- Grundgröße Zeit und Länge – Gleitkommadarstellung und Zehnerpotenzen
- Geschwindigkeit – Lineare Funktionen
- Geschwindigkeit und Beschleunigung – Nicht lineare Funktionen
- Geschwindigkeit und Beschleunigung – Reelle Funktionen
- Geschwindigkeit und Beschleunigung – Vektoren
- Geschwindigkeit – Geometrie
- Der freie Fall – Funktionen
- Der freie Fall – Proportionalitäten
- Der freie Fall – Geometrie
- Die Wurfbewegungen – Funktionen
- Die Wurfbewegungen – Geometrie
- Der Bremsweg – Funktionen
- Die Kräfte – Vektoren und Geometrie
- Arbeit – Vektoren und Geometrie
- Impuls – Vektoren
- Schwerpunkt – Vektoren

Für die Wahl der physikalischen Überschriften half mir das Schulbuch „Sexl Physik 5“ (Sexl et al., 2012) und für die mathematischen Themengebiete nahm ich das Lehrbuch „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2010) zur Unterstützung.

Die Übungszettel können eingesetzt werden, sobald die Schülerinnen und Schüler mit den jeweiligen Themen vertraut sind.

Gleitkommadarstellung und Zehnerpotenzen

- | | | | |
|------------------------|-------------|---|-------|
| Dicke von Papier: | $80\ \mu m$ | = | <hr/> |
| Größe eines Menschen: | $1,8\ m$ | = | <hr/> |
| Wellenlänge UVB Licht: | $300\ nm$ | = | <hr/> |
| Abstand Merkur-Sonne: | $0,39\ AE$ | = | <hr/> |

9. Wie weit ist die Sonne von der Erde entfernt (Sextl et al., 2012, S. 15)?
10. Der Fixstern Sirius ist 8,6 Lichtjahre ($1 \text{ Lichtjahr} \approx 9,461 \text{ Billionen km}$) von der Erde entfernt. Gib die Entfernung in *km* an und schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung und in gerundeter Form (Größenordnung) an (Geretschlager, Griesel & Postel, o. J., S. 12)!
11. Der Durchmesser der Sonne beträgt 1 392 530 *km*, der Durchmesser des Mondes 3 476 *km*. Um wie viele Größenordnungen unterscheiden sich die beiden Größen? Gib beide Größen in Gleitkommadarstellung an (Geretschlager et al., o. J., S. 15)!
12. Die folgende Tabelle zeigt die mittleren Abstände in unserem Planetensystem in Vielfachen des Abstandes Sonne-Erde ("Astronomische Einheit", $1 \text{ AE} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$), weiters den Abstand zu einem der nächsten Sterne.

Planeten/Sterne	AE	min bei $c/2$	Meter
<i>Merkur</i>	0,4		
<i>Venus</i>	0,7		
<i>Erde</i>	1,0		
<i>Mars</i>	1,5		
<i>Jupiter</i>	5,2		
<i>Saturn</i>	9,5		
<i>Uranus</i>	19,2		
<i>Neptun</i>	30,1		
<i>α Centauri</i>	270 000		

- a) Das Licht benötigt von der Sonne zur Erde ca. 8 Minuten. Stelle Dir vor, Du könntest mit halber Lichtgeschwindigkeit reisen – wie lange würdest Du jeweils brauchen? Trage dies in der Spalte „min bei $c/2$ “ ein.
- b) Rechne in der vierten Spalte größenordnungsmäßig in Meter um!
(Knechtel, Preis & Rath, 2005, S. 3)

13. Überlege, welchen Maßstab du benützen müsstest, um im Schulhof ein maßstabgetreues Modell des Sonnensystems zu bauen. Die Entfernung der Planeten von der Sonne findest du im Internet (Sextl et al., 2012, S. 13).

a) Wo ist dann der nächste Stern?

b) Wie groß wären in diesem Modell die Sonne (ca. 0,01 AE) und die Erde (ca. 0,0001 AE)?

(Knechtel et al., 2005, S. 3)

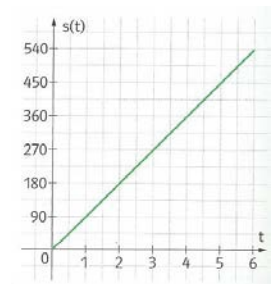
14. Suche typische Beispiele für die jeweiligen Größenordnungen! Nimm dazu Webseiten zur Hilfe. Was sind die größten (bzw. kleinsten) Exponenten, die in der Physik noch sinnvoll sind? Gibt es „absolute“ Zahlen, die nicht vom Einheitensystem abhängen?

10^{HOCH}	Vorsilbe	Beispiel: Länge (m)	Beispiel: Zeit (s)
10^{15}			
10^{12}			
10^9			
10^6			
10^3			
10^0			
10^{-3}			
10^{-6}			
10^{-9}			
10^{-12}			
10^{-15}			

(Knechtel et al., 2005, S. 4)

Geschwindigkeit – Lineare Funktionen

1. Ein Auto entfernt sich vom Ort A. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist es 50 km von A entfernt.
 - a) In welcher Entfernung von A (in km) befindet sich das Auto nach $0, 1, 2, 3, 4, t$ Stunden, wenn es mit ca. 100 km/h fährt? Lege eine Tabelle an!
 - b) Es sei s die Funktion, die jedem Zeitpunkt t die Entfernung des Autos von A zuordnet (t in Stunden, $s(t)$ in Kilometer). Gib eine Termdarstellung dieser Funktion an und zeichne deren Graphen für $0 \leq t \leq 4$!
 - c) Wie lässt sich die Steigung k des Graphen interpretieren, wie der Funktionswert $s(0)$ (Malle et al., 2010, S. 152)?
2. Nebestehender Graph zeigt die Zeit-Ort-Funktion eines Autos (t in Stunden, $s(t)$ in km).
 - a) Wie schnell fährt das Auto?
 - b) Wie viele Kilometer hat das Auto in drei Stunden zurückgelegt?
 - c) In welcher Zeit hat das Auto 450 km zurückgelegt?
 - d) In welchem Zeitintervall hat das Auto mindestens 90 km , aber höchstens 360 km zurückgelegt (Malle et al., 2010, S. 154)?
3. Gegeben ist die Zeit-Ort-Funktion $s: t \mapsto 5t + 20$. Beantworte durch Zeichnung und Rechnung:
 - a) Wo befindet sich der Körper für $2,9 \leq t \leq 3,1$?
 - b) Wann gilt $95 \leq s(t) \leq 105$ (Malle et al., 2010, S. 154)?
4. Ein Fahrradtreffen: Anna fährt mit ca. 8 m/s eine Allee entlang. Gleichzeitig mit Anna startet ihre Freundin Bea in ca. 500 m Entfernung und fährt ihr mit ca. 7 m/s entgegen. Wann und wo treffen die beiden einander? Löse rechnerisch und grafisch! Entsprechen die Ergebnisse der Realität (Malle et al., 2010, S. 162)?
5. Zwei Radfahrer fahren mit 10 km/h aufeinander zu.
 - a) Zeichne ein Weg-Zeit-Diagramm, welches angibt, wann und wo sich die beiden Radfahrer treffen, wenn sie nun 10 km voneinander entfernt sind.
 - b) Genau bei 10 km startet eine Fliege mit 30 km/h vom Vorderrad des rechten Fahrers, fliegt zum Vorderrad des linken Fahrers, wieder zurück und so weiter. Welche Strecke legt sie zurück, bis sich die Fahrer in der Mitte treffen (Apolin, 2007, S. 51)?

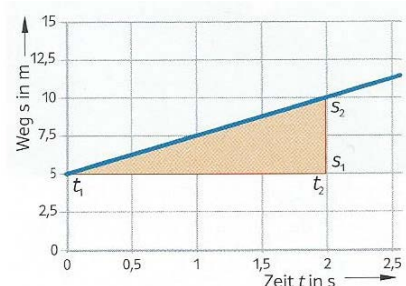


6. Zwei Orte A und B sind 360 km voneinander entfernt. Startet ein PKW von A nach B und 1 h später ein LKW von B nach A, so begegnen sie einander nach 2 h Fahrt des LKW. Fährt der PKW von A in Richtung nach B und fährt der LKW 4 h später von B aus in dieselbe Richtung wie der PKW, so überholt der PKW den LKW nach 6 h Fahrt. Berechne:
- die mittlere Geschwindigkeit des PKW in km/h ,
 - die mittlere Geschwindigkeit des LKW in km/h ,
 - in welcher Entfernung vom Ort A PKW und LKW einander begegnen,
 - in welcher Entfernung vom Ort B der LKW vom PKW überholt wird!
 - Illustriere den Sachverhalt mittels eines Zeit-Weg-Diagramms (Götz et al., 2010, S. 174)!

7. **Experiment:** Du brauchst: Maßband, Stoppuhr und Rechner.

Was ist zu tun? Miss die Geschwindigkeit eines Radfahrers, eines Autos, evtl. einer U-Bahn. Die Längen kannst du aus den Schrittlängen oder mit einem Maßband ermitteln, die Zeit mittels Stoppuhr. Erstelle mittels Excel Tabelle eine Weg-Zeit-Diagramm.

8. Du hast nebenstehendes Weg-Zeit-Diagramm gegeben. Bestimme die Geschwindigkeit des Fahrzeuges! Um welche Bewegung handelt es sich? (Sexl et al., 2012, S. 17)

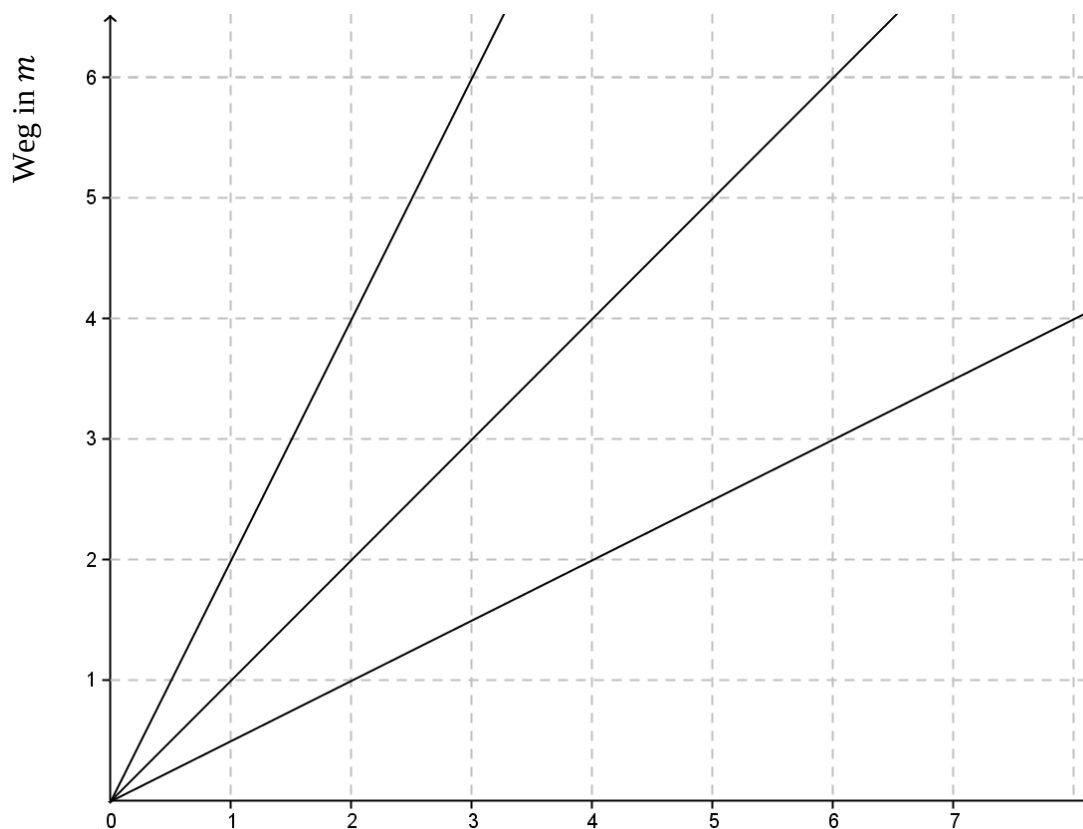


9. Der Sprintbewerb der nordischen Kombination besteht aus einem Springen und einem anschließenden $7,5\text{ km}$ Langlauf. Dabei startet der Sieger des Springens zuerst, die weiteren Läufer mit Rückstand: Je 15 Punkte beim Springen gibt es eine Minute Vorsprung beim Langlauf.

Der Österreicher Felix Gottwald hatte beim Sprintbewerb der Olympischen Winterspiele in Turin 2006 nach dem Springen als 12. einen Rückstand von $13,6$ Punkten auf G. Hettich (Ger), was 54 Sekunden Zeitvorgabe entsprach. Trotzdem gewann Gottwald das Rennen in der Gesamtzeit von $18\text{ min } 29\text{ s}$, Hettich wurde mit $9,6\text{ s}$ Rückstand Dritter.

Ermittle graphisch und rechnerisch, wann Gottwald Hettich überholte (wir nehmen gleichförmige Bewegungen an). Welche durchschnittliche Geschwindigkeit erzielte jeder der beiden Athleten (Knechtel et al., 2005, S. 12)?

10. Lies aus dem nachfolgenden Diagramm die Geschwindigkeiten der drei Objekte ab.



(Apolin, 2007, S. 53)

Zeit in s

Geschwindigkeit und Beschleunigung – Nicht lineare Funktionen

1. Gehe auf den unten stehenden Link und auf die „Übung 1 zum s- / t- Diagramm“ und mache die Aufgabe zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Bewegungsart aus dem Weg-Zeit-Diagramm.

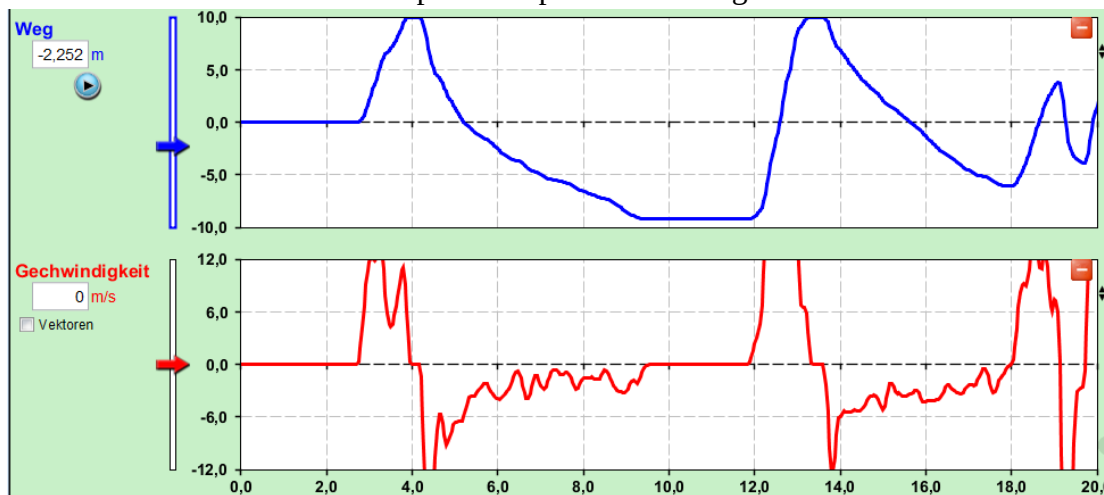
<http://www.zum.de/dwu/umapmb.htm> [31.05.15] (Ulm)

2. Anschließend gehe auf die „Übung 2 zum v- / t- Diagramm“ und mache die Aufgabe zur Bestimmung der Beschleunigung und der Bewegungsart aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. (Ulm)

3. Öffne die Simulation „Der bewegte Mann“ von der Universität Colorado Phet Interactive Simulations.

<https://phet.colorado.edu/de/simulation/legacy/moving-man> [26.05.15]

- a) Versuche unten stehendes Weg und Geschwindigkeits-Diagramm nachzumachen, indem du den Mann den Graphen entsprechend bewegst.

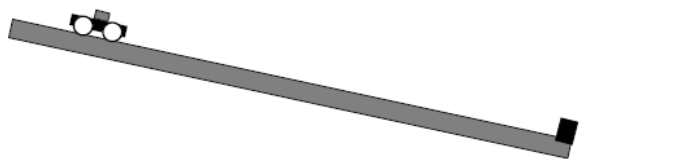


- b) Zeichne ein Diagramm und dein/e Nachbar/in soll dieses nachzeichnen.
- c) Zeichne nun ein Diagramm zur nachfolgender Geschichte:
Ein Mann startet am Ausgangspunkt. Er geht langsam und linear zurück für 4 Sekunden. Er bleibt für 7 Sekunden am Platz stehen und schaut sich die Gegend an. Anschließend geht er schnell in das Haus.
 - Wie lange ist der Weg vom Stillstand bis zum Haus?

- Wann kommt er im Haus an und wie lange braucht er vom Stillstand bis zum Haus?
4. Zeit-Weg-Diagramme: Skizziere jeweils ein passendes Diagramm für die folgenden Aussagen:
 - a) Maria nimmt an einem Rennen teil. Sie schafft einen tollen Start, wird dann aber langsamer und kann erst kurz vor dem Ziel mit einem Sprint aufholen.
 - b) Deine Mama fährt in die Stadt und wieder zurück.
 - c) Ein Bus fährt an, muss dann aber an der nächsten Kreuzung stark abbremsen (Hack & Mairleitner, 2008, S. 66).
 5. Zeichne ein s-t- und ein v-t- Diagramm von folgender Bewegung:
 Paul fährt mit dem Fahrrad mit durchschnittlich 20 km/h los. Nach 30 *min* macht er 10 *min* Pause und läuft dann mit durchschnittlich 15 *km/h* zurück zum Ausgangspunkt.
 - a) Wie weit war Paul höchstens vom Ausgangspunkt entfernt?
 - b) Wie kann man in den beiden Diagrammen die größte Entfernung grafisch ermitteln (Hack & Mairleitner, 2008, S. 67)?
 6. Ein stets der gleichen Beschleunigung a ausgesetzter Körper hat (unter Vernachlässigung von Reibung etc.) nach t Sekunden insgesamt einen Weg von $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ zurückgelegt. Zeichne ein Zeit-Weg-Diagramm! Berechne, wie weit der Körper nach 5 s gekommen ist! Berechne, wie viele Sekunden er für die ersten 100 m benötigt! a) Auto: $a \approx 2 \text{ m/s}^2$, b) Rennauto: $a \approx 7 \text{ m/s}^2$, c) Motorrad: $a \approx 8 \text{ m/s}^2$ (Götz et al. 2010, S. 148)

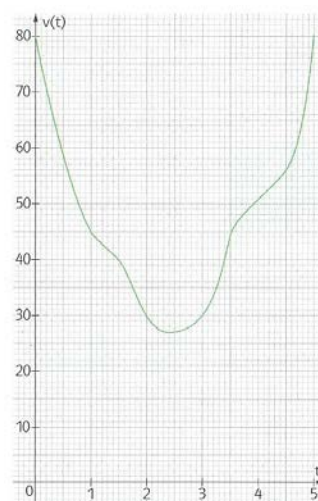
7. **E:** Du brauchst: Ein Modellauto, eine schiefe Ebene, einen Maßstab, eine Stoppuhr und ein Stück Kreide/Tixo

Was ist zu tun? Versuchsanordnung siehe Abbildung. Unterteile den Weg bei der schiefen Ebene in 0 m 0,1 m 0,4 m und 0,9 m. Miss dann jeweils die zugehörige Zeit, wie lange das Auto für die vorgegebenen Strecken benötigt. Für genauere Werte, miss öfters die Zeit für eine Wegstrecke und nimm dann den Mittelwert.

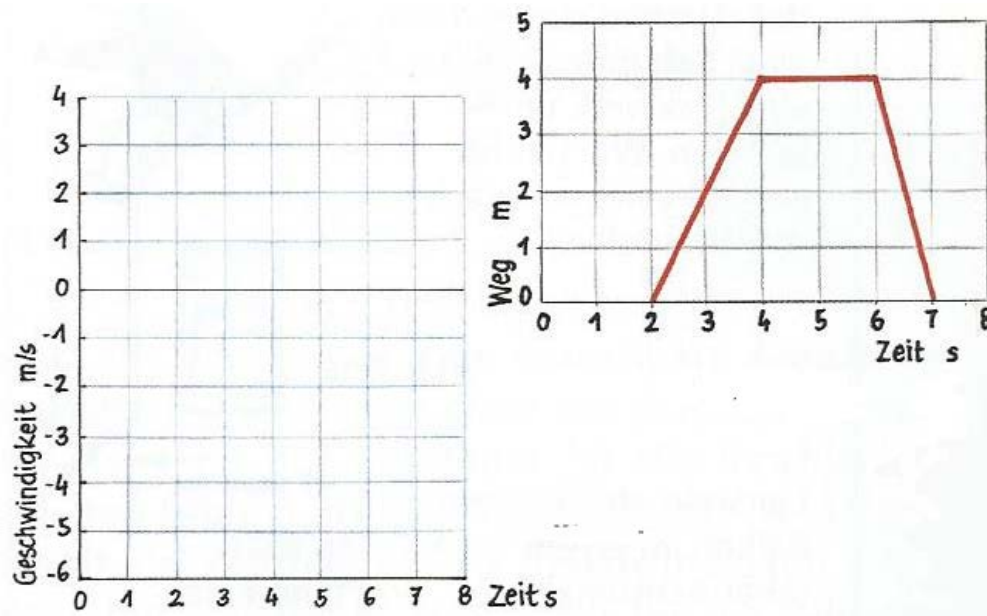


Strecke s [m]	Zeit t [s]
0	
0,1	
0,4	
0,9	

- a) Trage deine ausgewerteten Daten in einen Graphen ein. In der Bewegungslehre wird die Zeit als unabhängige Variable (x-Achse) angenommen (s/t-Diagramm). Durch welche Funktion könnte man die Messpunkte modellhaft annähern?
- b) Zeichne einen Graphen für Geschwindigkeit und Zeit (v/t-Diagramm). Welche Funktion passt jetzt am besten?
- c) Die Physik spricht bei Fallen und Rollen von „gleichmäßig beschleunigten Bewegungen“. Die Geschwindigkeit steigt linear mit der Zeit. Nähere die Punkte im v-t-Graphen durch eine Gerade an und bestimme den Anstieg! Ermittle so die Beschleunigung a (Knechtel et al., 2005, S. 7).
8. Viele Lastkraftwagen besitzen einen Fahrtenschreiber, der die gefahrenen Geschwindigkeiten automatisch aufzeichnet. Ein Lastkraftwagen überquert eine Kuppe. Der nebenstehende Graph gibt die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Minuten, v in km/h).
- a) Lege eine Tabelle an, die $v(t)$ näherungsweise für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ min}$ angibt!



- b) Entscheide, ob ein quadratisches Modell angemessen ist! Wenn ja, gib eine näherungsweise Termdarstellung der Funktion $t \mapsto v(t)$ an! Berechne $v(t)$ für $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ min}$ und vergleiche mit den Werten aus a) (Malle et al., 2010, S. 177) !
9. Ein Zug fährt mit einer annähernd konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h von A nach B, bleibt dort eine Stunde stehen und fährt dann ebenfalls mit 60 km/h weiter nach C. Gib eine Termdarstellung der Funktion s an, die jedem Zeitpunkt t den Ort $s(t)$ zuordnet! Zeichne den Graphen dieser Funktion (Malle et al., 2010, S. 182)!
10. Ein Rennkäfer läuft entlang einer Wand. Die Bewegung, die er ausführt, ist im Weg-Zeit-Diagramm dargestellt. Beschreibe sie zuerst qualitativ. Mit welcher



Geschwindigkeit bewegt er sich in den einzelnen Teilstücken? Übertrage die dargestellte Bewegung in das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Wie kannst du dort grafisch beweisen, dass der Käfer nach 8 Sekunden wieder am Ausgangsort steht (Apolin, 2007, S. 53)? Abbildung auf der nächsten Seite.

11. Die Formel für den zurückgelegten Weg bei einer gleichmäßig beschleunigten

Bewegung lautet: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

a) Erkläre, welche physikalische Bedeutung die einzelnen Summanden ($\frac{1}{2}at^2$ bzw. v_0t bzw. s_0) haben.

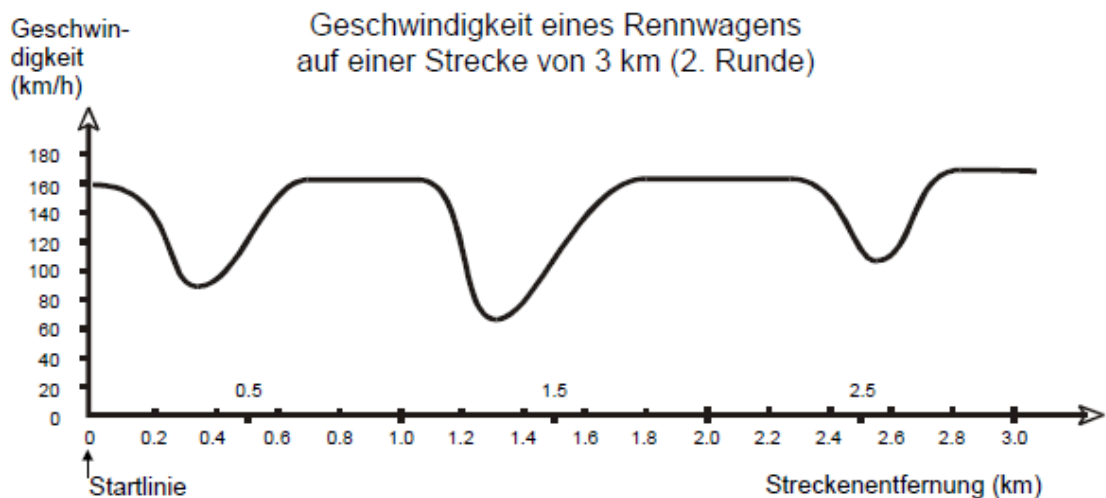
b) Entscheide, welcher der Summanden zu welchen Zeiten den größten Einfluss auf die zurückgelegte Strecke hat (Uhden, 2012, S. 97).

12. Grafische Fahrpläne sind Zeit-Weg-Diagramme von Bewegungen und bei Zügen durchaus üblich. Daraus lässt sich ablesen, welche Geschwindigkeiten die Züge haben, wann sie einander auf der Strecke begegnen usw. Erstelle einen grafischen Fahrplan für den Railjet und den REX auf der Strecke Wien – St. Pölten (18.1). Wo wird der Railjet den Rex überholen? (Verwende ein Tabellenkalkulationsprogramm) (Sexl et al., 2012, S. 18).

REX:		
Wien Westbahnhof (0 km)		12:14
Wien Hütteldorf (6 km)	12:20	12:22
Tullnerbach-Pressbaum (20 km)	12:32	12:38
Pressbaum (21 km)	12:40	12:40
Eichgraben-Altlengbach (29 km)	12:47	12:48
Neulengbach Stadt (37 km)	12:54	12:55
Böheimkirchen (49 km)	13:03	13:04
St. Pölten Hbf (60 km)	13:12	13:14
Railjet:		
Wien Westbahnhof	12:20	
St. Pölten Hbf	13:00	

Geschwindigkeit und Beschleunigung – Reelle Funktionen

1. Der unten zu sehende Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



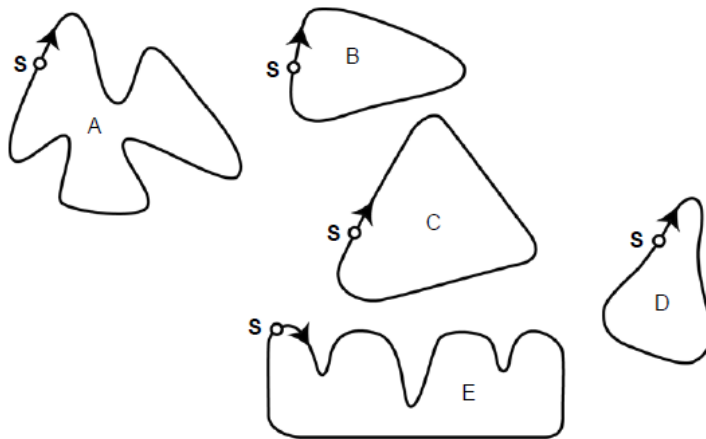
(bifie, Pisa Aufgabensammlung Mathematik, S. 23)

- a) Kreuze die Aussagen an, die du für richtig hältst!
- ☐ Die niedrigste Geschwindigkeit tritt ungefähr bei Kilometer 0,25 auf.
 - ☐ Auf sechs Streckenabschnitten ist die Beschleunigung des Wagens gleich null.
 - ☐ Wenn ja: zeichne sie ein. Wenn nein: zeichne die zutreffenden Bereiche die du meinst ein.
 - ☐ Zeige direkt im Graph den Bereich, der die maximal erreichte Beschleunigung aufweist.
 - ☐ Die maximale Bremskraft wird zur Verringerung der Geschwindigkeit vor Kurve zwei genutzt.
 - ☐ In den vier Kurven der Strecke muss der Wagen bremsen und beschleunigt danach wieder.
 - ☐ Die Geschwindigkeit in Kurve zwei beträgt ungefähr 60 km/h
 - ☐ Die durchschnittliche Rundenzeit liegt bei 4 Minuten.

- o Die maximal gefahrene Geschwindigkeit auf nicht geraden Streckenteilen liegt immer noch bei 100 km/h .

(Knechtel et al., 2005, S. 9)

- b) Betrachte die unten gezeigten möglichen Strecken und wähle jene aus die zum gezeigten Diagramm passen könnte.

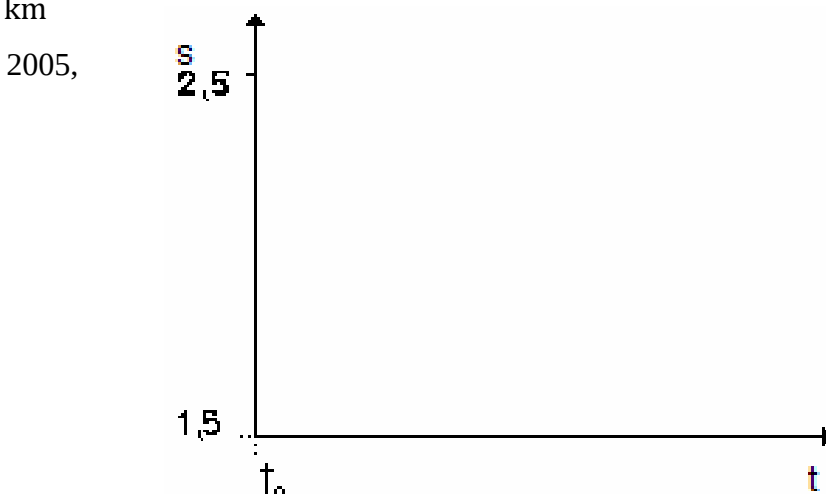


(bifie, Pisa Aufgabensammlung Mathematik, S. 25)

Begründe:

- c) Zeichne freihändig einen Graphen in das Koordinatensystem ein. Diesmal soll nicht die Geschwindigkeit mit dem Weg in Bezug gesetzt werden, sondern der zurückgelegte Weg (s) mit dem zeitlichen Verlauf (t) für die Teilstrecke von 1.5 km bis 2.5 km

(Knechtel et al., 2005, S. 10)



2. Ein Auto fährt auf einer Autobahn. Den Ort, an dem sich das Auto zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet, kann man angeben, indem man die Entfernung vom Ausgangspunkt misst.

a) Zeichne einen Funktionsgraphen zur Tabelle!

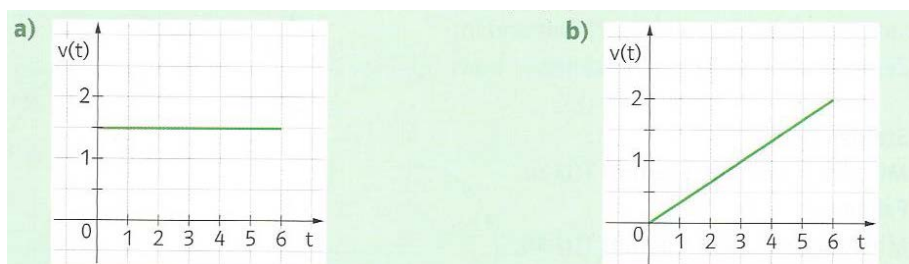
b) Entnimm dem Funktionsgraphen, an welchem Ort sich das Auto nach $2\frac{1}{2}h$ befindet! Lässt sich eine genaue Aussage machen?

c) Wann ungefähr befindet sich das Auto bei 300 km?

Zeit t [h]	0	1	2	3	4
Ort $s(t)$ [km]	0	110	230	330	380

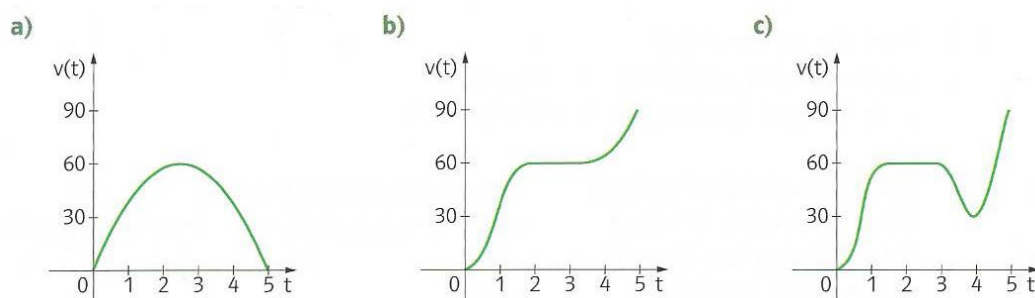
(Malle et al., 2010, S. 132)

3. In folgendem Graphen ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Autos zum Zeitpunkt t dargestellt (t in min, $v(t)$ in km/min). Welche Bewegung führt das Auto aus?



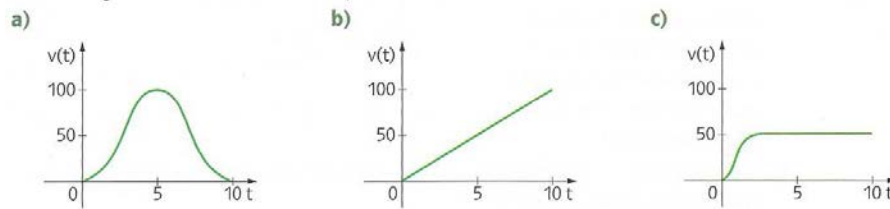
(Malle et al., 2010, S. 132)

4. In folgendem Graphen ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Autos zum Zeitpunkt t in min, $v(t)$ in km/h angegeben. Beschreibe die Fahrt des Autos!



(Malle et al., 2010, S. 133)

5. Wie könnte die Zeit-Ort-Funktion eines Autos aussehen, die zur folgenden Zeit-Geschwindigkeit-Funktion gehört? Skizziere den Graphen!



(Malle et al., 2010, S. 133)

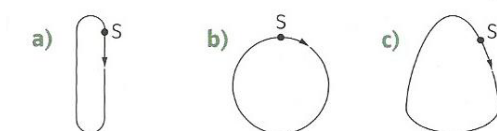
6. Herr Adam fährt nachts auf der Autobahn. Beantworte anhand des Zeit-Ort-Diagramms:

- Wie weit fährt Herr Adam insgesamt und wie lange braucht er dazu?
- Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fährt er?
- Braucht er für die halbe Gesamtstrecke auch die halbe Gesamtzeit?
- Nach 45 Minuten fällt ihm ein, dass er etwas vergessen hat. Er will aber nicht umkehren, wenn er schon weiter als 70 km gefahren ist. Kehrt er um?
- Nach 200 km verursacht er beinahe einen Auffahrunfall. Wann war das?
- Nach $2\text{ h } 15\text{ min}$ kommt ihm die Fahr schon recht lange vor. Wie weit hat er noch zu fahren und wie lange braucht er dazu?



(Malle et al., 2010, S. 134)

7. Zeichne jeweils einen passenden Zeit-Geschwindigkeit-Graphen zu folgenden Rundkurven mit dem Startpunkt S!



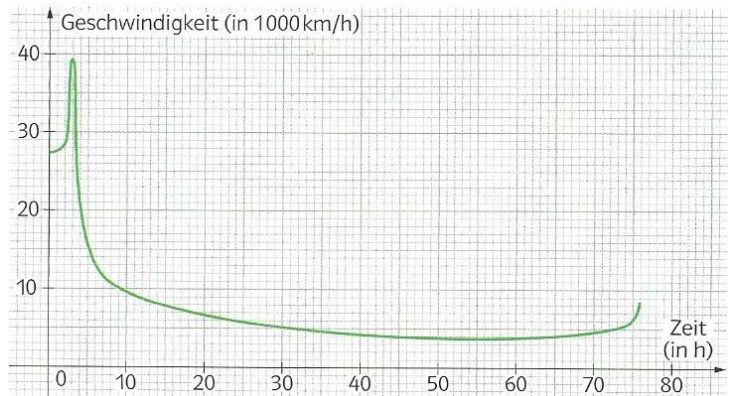
(Malle et al., 2010, S. 134)

8. Der Graph zeigt die Geschwindigkeit der Apollo-11-Kapsel bei ihrem Flug zum Mond in Abhängigkeit von der Zeit.

a) Beschreibe den Verlauf der Geschwindigkeit in Worten! Wie lassen sich die Geschwindigkeitsspitze zu Beginn des Fluges und die Geschwindigkeitszunahme am Ende des Fluges erklären?

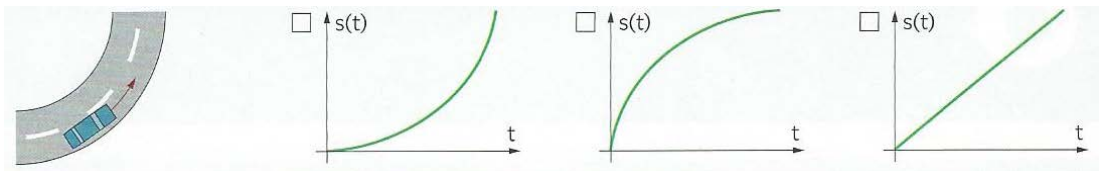
b) Nach welcher ungefähren Zeit war die Geschwindigkeit am kleinsten? Wie groß war sie zu diesem Zeitpunkt ungefähr?

(Malle et al., 2010, S. 134)

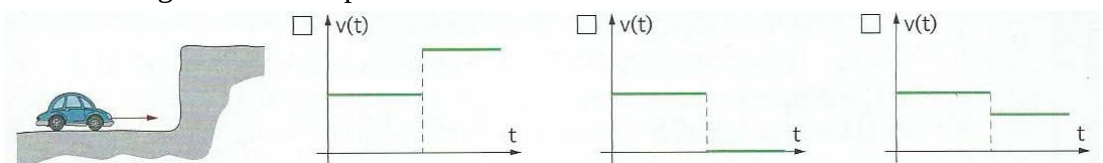


9. Im Folgenden ist jeweils eine Situation bildlich dargestellt. Welcher der danebenstehenden Funktionsgraphen beschreibt die Situation am besten?

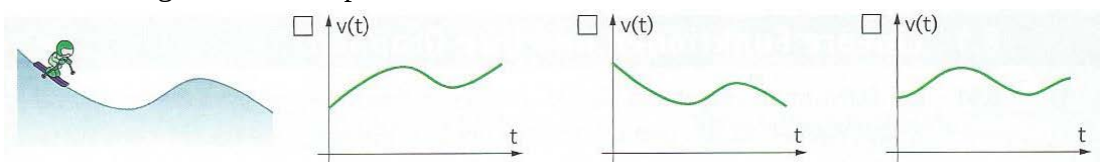
a) Das Auto bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert $s(t)$ gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt t an.



b) Das Auto fährt in die angegebene Richtung. Der Funktionswert $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.



c) Der Skifahrer fährt den Hang hinunter. Der Funktionswert $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an.



(Malle et al., 2010, S. 143)

Geschwindigkeit und Beschleunigung – Vektoren

1. Welche physikalische Größe zeigt eigentlich ein Tachometer (Apolin, 2007, S. 34)?
2. Wie nennt man eine Geschwindigkeitsänderung in der Physik ganz allgemein (Apolin, 2007, S. 34)?
3. Du fährst mit konstant 80 km/h durch eine Kurve. Ändert sich dabei die Geschwindigkeit (Apolin, 2007, S. 34)?
4. Du fährst mit dem Bus mit 1 m/s gemächlich von der Schule nach Hause und gehst mit 0,5 m/s nach hinten. Du schiebst dir das Mittags-Baguette mit 0,05 m/s (5 cm/s) in den Mund (du bist sehr hungrig). Auf dem Baguette läuft eine Ameise mit 0,1 m/s (10 cm/s) um ihr Leben. Wie schnell ist die Ameise relativ zur Straße (Apolin, 2007, S. 36)?
5. Welchen Weg legt ein Stück Zucker zurück, das du im Flugzeug aus 10 cm Höhe in die Tasse fallen lässt (Apolin, 2007, S. 36)?
6. Ein Zeitungsbote fährt mit seinem Rad mit 10 m/s und wirft die Zeitung mit ebenfalls 10 m/s quer zur Fahrtrichtung. Wie schnell fliegt die Zeitung relativ zum Boden, und wo muss er sie wegwerfen, damit er genau die Türe trifft (Apolin, 2007, S. 36)?
7. Wolkenbruch! Die Tropfen fallen senkrecht mit 8 m/s zu Boden und du beginnst mit 6 m/s zu laufen. Wie fällt dann aus deiner Sicht der Regen zu Boden? Wie musst du den Schirm halten (Apolin, 2007, S. 36)?
8. Nimm an, Regentropfen fallen mit 8 m/s unter 45° von rechts nach links auf den Boden. Wie schnell musst du nach links laufen, dass aus deiner Sicht der Regen senkrecht fällt? Löse grafisch (Apolin, 2007, S. 39)!
9. Du stehst im Regen und die Tropfen fallen senkrecht mit 4 m/s zu Boden. Du beginnst mit 3 m/s zu laufen. Wie fällt dann aus deiner Sicht der Regen zu Boden (Apolin, 2007, S. 65)?
10. Indiana Jones ist mit einem Boot auf der Flucht. Wie muss er den Fluss überqueren, damit er am schnellsten drüben ankommt? Und wie muss er fahren, um am kürzesten

Weg ans andere Ufer zu kommen? Quer, schräg in oder schräg gegen die Strömungsrichtung (Apolin, 2007, S. 65)?

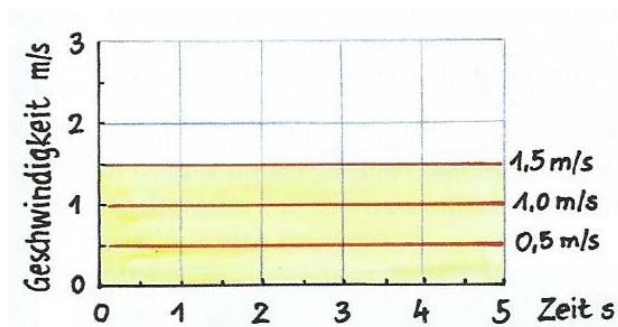
11. Du fährst mit dem Zug und gehst in einen vorderen Waggon. Deine mittlere Gehgeschwindigkeit ist 4 km/h. Der Zug hat eine Geschwindigkeit von 100 km/h. Mit welcher Geschwindigkeit bewegst du dich relativ zum Zug bzw. relativ zu den Bahngleisen (Sexl et al., 2012, S. 18)?
12. Ein Boot quert mit 20 km/h einen 300 m breiten Fluss (Fließgeschwindigkeit 5 km/h). Wieweit wird es abgetrieben, wenn es im rechten Winkel zum Ufer startet? Unter welchem Winkel (zum Ufer) muss es ablegen, damit es das andere Ufer genau gegenüber dem Startplatz erreicht? Überlege, ob du die Lösung mittels Rechnung oder Konstruktion findest (Jaros, Nussbaumer, Nussbaumer & Kunze, 2011, S. 40)!
13. Kevin möchte einen Fluss überqueren. Für diese Strecke würde er in ruhigem Wasser normalerweise 20 s brauchen. Der Fluss hat aber eine Fließgeschwindigkeit von 2 m/s. Braucht er nun länger, kürzer oder gleich lang, bis er das andere Ufer erreicht hat (Hack & Mairleitner, 2008, S. 67)?
14. Ein annähernd punktförmiger Körper bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (4|3)$. Berechne den Betrag der Geschwindigkeit, mit der er sich einer Geraden g mit dem Richtungsvektor $\vec{g} = (2|3)$ nähert (Malle et al., 2010, S. 264) !

Geschwindigkeit– Geometrie

1. Ein Passagierflugzeug erreicht nach einem Steigflug von 6 *min* mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 550 *km/h* seine Reiseflughöhe von 12 000 *m*.
 - a) Wie lang ist die Strecke, die das Flugzeug im Steigflug zurücklegt, und wie groß ist dabei der Steigungswinkel?
 - b) Wann und in welcher Höhe überfliegt das Flugzeug eine Flugleitstelle, die 30 *km* vom Abflughafen entfernt ist (Malle et al., 2010, S. 86)
2. Ein geradlinig verlaufender Schlepplift befördert Schifahrer mit einer Geschwindigkeit von 2,8 *m/s* im 5 *min* aus 980 *m* Seehöhe auf 1 230 *m* Seehöhe. Wie lang ist der Lift, wie groß sind die Steigung und der Steigungswinkel der Lifttrasse (Malle et al., 2010, S. 93)?
3. Ein mit 250 *km/h* fliegender Flugzeug steuert einen Landeplatz an. Seine Flugrichtung bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 9°. Um wie viel Meter sinkt es pro Sekunde (Malle et al., 2010, S. 94)?
4. Ein mit 450 *km/h* fliegender Flugzeug befindet sich im Landeanflug mit einem Tiefenwinkel $\alpha = 12^\circ$. Wie viel an Höhe verliert es pro Minute (Malle et al., 2010, S. 94)?
5. Von der Spitze eines Berges sieht man ein Dorf unter einem Tiefenwinkel von 10,23° und nimmt das Aufblitzen des Mündungsfeuers eines Böllers, der im Dorf abgefeuert wird, 12 *s* früher wahr als den Explosionsknall. Wie hoch liegt die Bergspitze über dem Dorf, wenn man die Schallgeschwindigkeit mit 333 *m/s* annimmt (Malle et al., 2010, S. 94)?
6. Man beobachtet das Aufleuchten eines Gewitterblitzes unter einem Höhenwinkel von 35°. Den gleichzeitig entstehenden Donner hört man 15 *s* später (Schallgeschwindigkeit 333 *m/s*). In welcher Höhe und in welcher Horizontalentfernung zum Beobachter ist der Blitz entstanden (Malle et al., 2010, S. 94)?

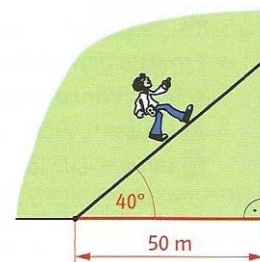
7. Ein Flugzeug fliegt mit $u \text{ km/h}$ nach Norden. Es weht Westwind mit $v \text{ m/s}$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit über Grund bewegt sich das Flugzeug (Malle et al., 2010, S. 97)?
 - a) $u = 600 \text{ km/h}$, $v = 20 \text{ m/s}$
 - b) $u = 1\,000 \text{ km/h}$, $v = 17 \text{ m/s}$
8. Ein Pilot möchte sein Flugzeug mit $u \text{ km/h}$ nach Norden fliegen. Es weht Ostwind mit einer Geschwindigkeit $v \text{ m/s}$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit muss der das Flugzeug (Malle et al., 2010, S. 97)?
9. Die Fahrt mit einer Gondelbahn von der Tal- zur Bergstation dauert $15,5 \text{ min}$ bei einer mittleren Geschwindigkeit von 5 m/s . Dabei bewegen sich die Gondeln annähernd einer Geraden, die um $22,5^\circ$ gegen die Horizontale geneigt ist. Berechne den Höhenunterschied, den man bei einer Fahrt von der Tal- zur Bergstation überwindet (Malle et al., 2010, S. 99)!
10. Auf der Reiseflughöhe angelangt gibt der Kapitän eines Passagierflugzeugs dem Autopiloten folgende Daten ein: Kurs: $S\,2^\circ\,O$, Eigengeschwindigkeit: 850 km/h . Aufgrund eines Ostwindes fliegt die Maschine tatsächlich in Richtung $S\,1^\circ\,W$. Welche Geschwindigkeit hat der Wind (Malle et al., 2010, S. 113)?
11. Ein Flugzeug fliegt bei konstantem Kurs mit einer konstanten Geschwindigkeit von 990 km/h und peilt im Abstand von 1 min dasselbe Funkfeuer an. Der Winkel zwischen der Flugrichtung und dem Funkstrahl beträgt bei der ersten Peilung $12,4^\circ$ und bei der zweiten Peilung $27,9^\circ$.
 - a) Wie weit ist das Flugzeug bei der ersten Peilung vom Funkfeuer entfernt?
 - b) In welchem (kürzesten) Abstand passiert das Flugzeug das Funkfeuer (Malle et al., 2010, S. 114)?
12. Ein Wanderer bewegt sich mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $3,2 \text{ km/h}$ in Richtung $N\,31^\circ\,O$. Nach $3,5 \text{ h}$ ändert er seine Richtung auf $N\,17^\circ\,O$ und geht um $0,1 \text{ km/h}$ langsamer. Zwei Stunden nach der Richtungsänderung erreicht er sein Ziel. Wie lang ist die direkte Verbindungslinie (Luftlinie) zwischen Start- und Zielpunkt (Malle et al., 2010, S. 118)?
13. Ein Zeitungsbote fährt mit seinem Rad mit 10 m/s und wirft die Zeitung mit ebenfalls 10 m/s quer zur Fahrtrichtung. Wie schnell fliegt die Zeitung relativ zum Boden, und wo muss er sie wegwerfen, damit er genau die Tür trifft (Apolin, 2007, S. 36)?

14. Zwei Flugzeuge starten gleichzeitig von demselben Flughafen. Das eine fliegt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 880 km/h in Richtung, das andere mit einer mittleren Geschwindigkeit von 950 km/h in Richtung $N 65^\circ O$. Wie groß ist die direkte Entfernung der beiden Flugzeuge nach 20-minütigem Flug (Malle et al., 2010, S. 118)?
15. Ein mit 600 km/h fliegender Flugzeug trifft um 8 Uhr auf eine Schlechtwetterfront, die es umfliegen muss. Es fliegt zuerst in Richtung $S 72^\circ O$ bis 8.30 Uhr, dann in Richtung $N 21^\circ O$ bis 9.15 Uhr und gelangt dann auf den vorgesehenen Kurs zurück. Berechne den Mehrweg und den Zeitverlust durch das Umfliegen der Schlechtwetterfront (Malle et al., 2010, S. 121)!
16. Du hast nachfolgendes Diagramm gegeben.
- Welchen Weg legt ein Objekt in 5 Sekunden zurück, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von $1,5 \text{ m/s}$ bewegt?
 - Welchen Weg legt ein Objekt in 4 Sekunden zurück, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s bewegt?
 - Welchen Weg legt ein Objekt in 3 Sekunden zurück, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von $0,5 \text{ m/s}$ bewegt?



(Apolin, 2007, S. 53)

17. Herr Eilig-Rücksichtslos biegt 50 m vor der Wegkreuzung unter 40° ab (Figur) und geht eine „Abkürzung“ durch den Acker. Wie viel Meter Weg erspart er sich? Erspart er sich Zeit, wenn er im Acker mit $2/3$ jener Geschwindigkeit vorankommt, die er auf den Wegen hätte (Götz et al., 2010, S. 194)?



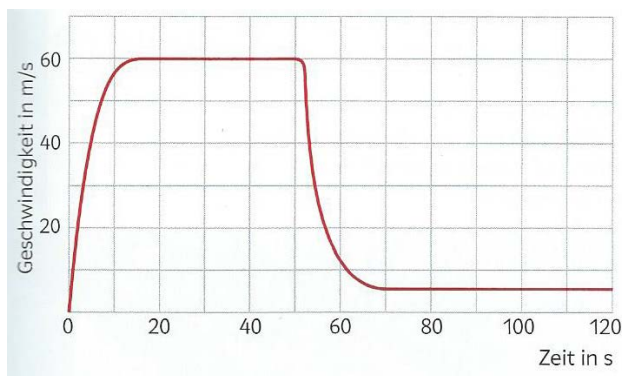
Der freie Fall – Funktionen

1. Gehe auf unten stehenden Link. Danach wähle die App „Abgefahren“, löse die Aufgabe und mache einen Screenshot. Füge diesen in Word ein und drucke deine Lösung aus.

<http://learningapps.org/index.php?category=7&subcategory=21&s=> [27.05.15]

(Hielscher, Hartmann, Rothlauf, Wagenknecht & Steinbach)

2. Dem Dachdecker fällt der Hammer runter. Nach einer Sekunde ist dieser ein Stockwerk tief gefallen. Wie tief ist er nach zwei und nach drei Sekunden gefallen? Zeichne ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (Apolin, 2007, S. 54).
3. Ein Stein, den du vom Balkon im ersten Stock fallen lässt (aber Achtung bitte!), prallt mit einer bestimmten Geschwindigkeit am Boden auf. Aus dem wievielten Stock muss er fallen, damit die Geschwindigkeit am Boden doppelt so groß ist? Und wie wäre das am Mond (wenn es dort Häuser gäbe)? Zeichne ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, in das beide Graphen eingetragen werden (Apolin, 2007, S. 54).
4. Wie kann man mit einem Stein und einer Uhr die Tiefe eines Brunnens ermitteln? Führe auch eine Beispielrechnung mit realistischen Zahlenwerten durch (Uhden, 2012, S. 84).
5. Nachfolgende Grafik zeigt die Grenzggeschwindigkeit beim Fallschirmspringen in Abhängigkeit von der Fallzeit. Interpretiere die Grafik (Sexl et al, 2012, S43)!



6. Eine Kugel fällt von einem hohen Gebäude. Angenähert (ohne Luftwiderstand) nimmt die zurückgelegte Strecke quadratisch zu: $s: t \mapsto 5 \cdot t^2$.
 - a) Welchen Weg legt die Kugel in einer Sekunde zurück, welchen in 3 s?
 - b) Woher kommt der Wert „5“ im Funktionsterm?

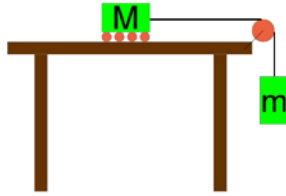
- c) Wie lange dauert der Fall vom Eiffelturm ($s = 300m$) (Knechtel et al., 2005, S. 8)?
7. Ein Körper fällt aus 180 m Höhe zu Boden. Seine Höhe zum Zeitpunkt t beträgt annähernd $h(t) = 180 - 5t^2$ (Höhe in Meter, Zeit in Sekunden). Nach dem Aufprall auf dem Boden bleibt er dort liegen. Zeichne den Graphen der Funktion h , die jedem Zeitpunkt t die Höhe $h(t)$ zuordnet (Malle et al., 2010, S. 183)!
8. Gib eine Formel für die durchfallene Höhe h bei Fallhöhe H als Funktion von t an (Jaros et al., 2010, S. 37)!
9. Ein Junge mit 50 kg springt vom 10 Meter-Turm . Dabei sollen die Reibungseffekte vernachlässigt werden.
- a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Auftreffen auf die Wasseroberfläche?
- b) Wie groß ist die Beschleunigung beim Absprung? Wie groß beim Eintauchen (Hack & Mairleitner, 2008, S. 66)?
- c) Zeichne ein Weg-Zeit-Diagramm und ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm!

Der freie Fall – Proportionalitäten

1. Stellt euch vor, ihr gelangt in ein Phantasie-Universum, in dem andere physikalische Gesetze gelten als bei uns. So wird in dieser Phantasie-Welt der freie Fall nicht durch die Gleichung $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ wie bei uns beschrieben, sondern durch $\mathcal{S} = \frac{1}{2 \cdot \mathcal{g}} \cdot \mathcal{T}^2$ (Die etwas anderen Symbole sollen nur daran erinnern, dass sie sich auf die entsprechenden physikalischen Größen in der Phantasie-Welt beziehen und daher auch unbekannte Einheiten haben. Ihre Bedeutung ist aber analog zu den bekannten Symbolen aus unserer Welt)! Welche der folgenden Aussagen über den freien Fall (die in unserer wirklichen Welt alle korrekt sind!) wären daher in dieser Phantasie-Welt nicht korrekt?
 - a) Der gefallene Weg hängt von der Fallzeit und dem Ortsfaktor ab.
 - b) Wenn man länger fällt, legt man mehr Weg zurück.
 - c) Wäre der Ortsfaktor größer, würde man mehr Weg in der gleichen Zeit zurücklegen.
 - d) Die Fallgeschwindigkeit nimmt zu, je länger man fällt.
 - e) Wäre der Ortsfaktor kleiner, würde man langsamer fallen.Begründet bitte eure Antwort! (Uhden, 2012, S. 94)
2. Lässt man auf der Erde einen Körper fallen, muss man noch den Einfluss des Luftwiderstandes berücksichtigen. Dieser hat eine bremsende Wirkung, was man durch eine (negative) Beschleunigung a_{Luft} beschreibt. Ihr sollt die Gleichung für a_{Luft} aufstellen, wobei ihr auf folgendes Wissen zurückgreifen könnt: a_{Luft} ist proportional oder indirekt proportional zu...
 - ρ („Rho“): Dichte der Luft
 - A : Querschnittsfläche des Körpers in Bewegungsrichtung
 - m : Masse des Körpers
 - v^2 : Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers

Wie muss demnach die Gleichung für a_{Luft} aussehen? (Uhden, 2012, S. 87)

3. Zwei Körper der Massen M bzw. m sind wie auf der Abbildung miteinander verbunden:



Der Körper der Masse M ist auf Rädern gelagert und mit einem Seil über eine Umlenkrolle mit dem Körper der Masse m verbunden, welcher frei in der Luft hängt. Die Räder und die Umlenkrolle sind so gut gelagert, dass die Reibung vernachlässigt werden kann. So lange der Körper M festgehalten wird, bewegen sich die Körper nicht. Wenn aber M losgelassen wird, beschleunigen beide Körper mit der Beschleunigung $a = \frac{m}{M+m} \cdot g$, wobei g die Fallbeschleunigung ist.

- Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse M des rollenden Körpers vernachlässigbar klein ist.
- Betrachtet anhand der Formel, wie groß die Beschleunigung beider Körper ist, wenn die Masse m des hängenden Körpers vernachlässigbar klein ist.

Sind eure Ergebnisse physikalisch sinnvoll? (Uhden, 2012, S. 90)

4. **E:** Du brauchst: Eine Metallkugel (oder einen anderen Körper mit geringem Luftwiderstand), ein Maßband. Die Zeitmessung kann mittels Stoppuhr erfolgen. Was ist zu tun? Lass die Metallkugel aus möglichst großer Höhe h fallen und miss die Fallzeit t bis zum Aufschlag der Kugel. Achte dabei darauf, dass die Kugel niemanden verletzt! Wenn du die Fallhöhe h durch die Fallzeit dividierst, erhältst du die mittlere Geschwindigkeit v_m , mit der die Kugel gefallen ist. Arbeitet in Gruppen und vergleicht eure Werte. Wie du schon weißt, ist es günstig, den Versuch mehrfach durchzuführen und den Mittelwert der Messwerte zu bilden. Erstelle mittels Excel Tabelle ein Zeit-Weg-Diagramm (Sexl et al., 2012, S. 20).

Der freie Fall – Geometrie

1. Dem Dachdecker fällt der Hammer runter. Nach einer Sekunde ist dieser ein Stockwerk tief gefallen. Wie tief ist er nach zwei und nach drei Sekunden (Apolin, 2007, S. 54)? Löse mit Hilfe der Geometrie.
2. Ein Stein, den du vom Balkon im ersten Stock fallen lässt (aber Achtung bitte!), prallt mit einer bestimmten Geschwindigkeit am Boden auf. Aus dem wievielten Stock muss er fallen, damit die Geschwindigkeit am Boden doppelt so groß ist? Und wie wäre das am Mond (wenn es dort Häuser gäbe) (Apolin, 2007, S. 54)? Löse mit Hilfe der Geometrie!
3. Leite die Formel für den Fallweg geometrisch her (Apolin, 2007, S. 55)!
4. Bei einer Sprengung fliegt ein Stein genau senkrecht nach oben und schlägt nach 6 Sekunden wieder auf. Wie hoch ist der Stein geflogen? Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Stein am höchsten Punkt stillsteht? Null (Apolin, 2007, S. 56)
5. Die Fallbeschleunigung am Mars ist $3,72 \text{ m/s}^2$. Berechne die Falltiefe für einen Gegenstand für die ersten 6 Sekunden (Apolin, 2007, S. 64).
6. Berechne, wie schnell ein Regentropfen, der ungebremst durch Luftreibung aus einer Wolke (1 *km*) fällt, auf der Erdoberfläche ankommt (Jaros et al., 2010, S. 42)!
7. Ein Startschuss mit 100 % Gefälle, 150 Meter lang – der freie Fall?
Überlegt, wie man ausrechnen könnte, wie nahe die Läufer dem freien Fall (Erdbeschleunigung $\approx 10 \text{ m/s}^2$) kommen! Könnt ihr auf die Reibungsverluste schließen?
Beantworte anschließend noch die Fragen a bis c bei der Abbildung.
Lies dir dazu nachfolgenden Artikel aus der kleinen Zeitung (5. Februar 2003) durch.

187 Stufen rauf, im freien Fall hinunter

KLEINE ZEITUNG
5. Feb. 2003

Die Herren-Abfahrt lebt von ihrem 150 Meter langen Startschuss. Wo Bagger, Pistenraupen & Helfer nur angeseilt arbeiten können. Doch gestern gab es kein Training. Und heute gibt es keine ÖSV-Qualifikation.

AUGUST KUHN, ST. MORITZ

Willy Bassin ist Kanadier mit Schweizer Wurzeln. In seiner neuen Heimat baut er Golfplätze, bei der Herren-WM-Abfahrt auf der „Corviglia“ ist Willy der Mann, der mit seinem „Go“ die Abfahrer im freien Fall in die Tiefe schickt. 150 Meter mit einem Gefälle von 100 Prozent, in sechs Sekunden von 0 auf 140 km/h – bis hin zu Willys Gate, dem ersten Tor der WM-Abfahrt. „Eine Mutprobe“, sagt Robert Trenkwalder, Trainer der ÖSV-Abfahrer.

(Knecht et al., 2005, S. 17)

- a) Wie groß ist der „durchfallene“ Höhenunterschied?
- b) Wie groß ist die Beschleunigung?
- c) Wie schnell wäre der Läufer, wenn er die bewältigte Höhe frei fallen würde?

Die Wurfbewegungen – Funktionen

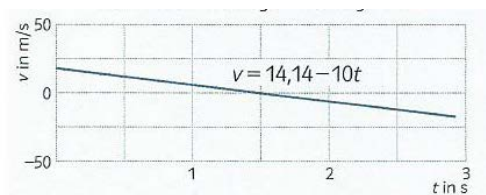
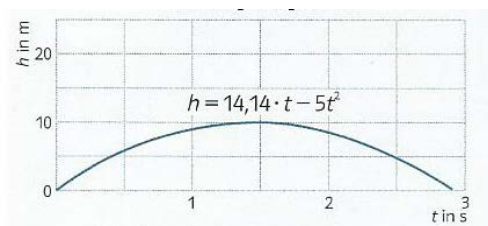
1. Gehe auf den unten stehenden Link von LearningApps. Wähle „Zusammengesetzte Bewegungen“ und spiele gegen den Computer
<http://learningapps.org/index.php?category=7&subcategory=21&s=> [28.05.15]
 (Hielscher et al.)

Lotrechter Wurf

2. Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit 50 m/s lotrecht nach oben geschossen, so ist seine Höhe $h(t)$ zum Zeitpunkt t gegeben durch:

$$h(t) = 50t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad (h(t) \text{ in Meter, } t \text{ in Sekunden})$$

Zu welchen Zeitpunkten ist der Körper in einer Höhe von a) 10 m, b) 20 m, c) 25 m über dem Boden? Wann schlägt er wieder auf dem Boden auf (Malle et al., 2010, S. 73)?
 Zeichne ein h - t -Diagramm und eine v - t -Diagramm.
3. Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit 25 m/s nach oben geschossen. Seine Höhe zum Zeitpunkt t beträgt annähernd $h(t) = 25t - 5 \cdot t^2$ (Höhe in Meter, Zeit in Sekunden). Nach 4,5 s landet er auf einem Dach und bleibt dort liegen. Zeichne den Graphen der Funktion h , die jedem Zeitpunkt t die Höhe $h(t)$ des Körpers zuordnet (Malle et al., 2010, S. 183)!
4. Interpretiere nachfolgende Diagramme!



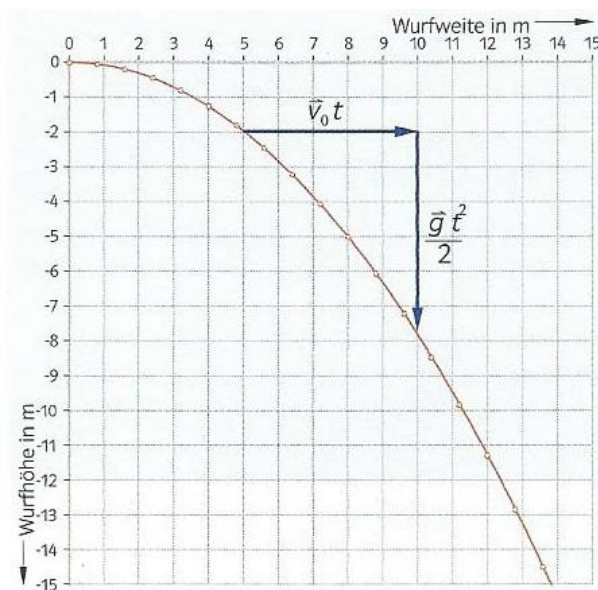
(Sextl et al., 2012, S. 45)

5. Susi schießt einen Ball 4 Meter vertikal in die Höhe.
 - a) Wie lange dauert es, bis der Ball wieder unten ankommt?
 - b) Mit welcher Geschwindigkeit hat Susi den Ball in die Höhe geworfen?
 - c) Zeichne für die ganze Bewegung des Balles ein a - t -Diagramm (Hack & Mairleitner, 2008, S. 67).

6. Ein Körper wird mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30 \text{ m/s}$ lotrecht in die Höhe geworfen. Berechne die Steigzeit und die Scheithöhe (Kraker & Paill, 1998, S. 24). Fertige eine Wertetabelle, ein Weg-Zeit- und ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm an.

Waagrechter Wurf

1. Du wirfst einen Stein waagrecht von einem Hügel. Er fliegt 20 m tief und 40 m weit. Wie schnell hast du geworfen (Apolin, 2007, S.66)? Zeichne ein Weg-Weg-Diagramm.
2. Du wirfst mit 5 m/s einen Stein waagrecht von einem Turm, und er fliegt 20 m weit. Wie hoch ist der Turm? Du wirfst mit 7 m/s einen Stein waagrecht von einem 125 m hohen Turm. Wie weit fliegt der Stein (Apolin, 2007, S. 70)? Zeichne ein Weg-Weg-Diagramm.
3. Interpretiere nachfolgendes Diagramm! Aus welchen zwei Bewegungen setzt sich der waagrechte Wurf zusammen?

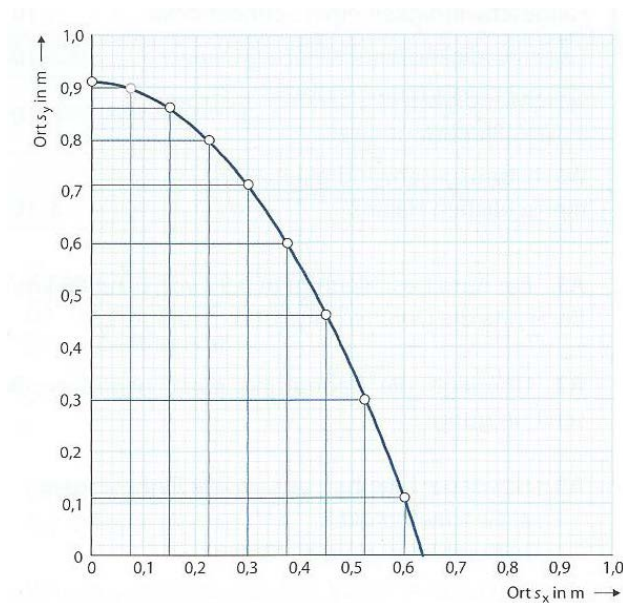


(Sextl et al., 2012, S. 45)

Bekannt wurde der Sport durch die in Acapulco, Mexiko gelegenen Felsen La Quebrada. Junge Männer zeigen Sprünge in den Pazifik als Touristenattraktion. Gesprungen wird aus einer Höhe von ca. 26 m. Um nicht an den darunter liegenden Felsen aufzuschlagen, müssen die Springer ca. 8 m nach vorne springen. Berechne die Anfangsgeschwindigkeit des Klippenspringers und erstelle ein x-y-Diagramm (Sextl et al., 2012, S. 46)

Anleitung: Aus $x = v_0 t$ und $y = -\frac{g}{2} t^2$ erhältst du die Parabelgleichung: $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$

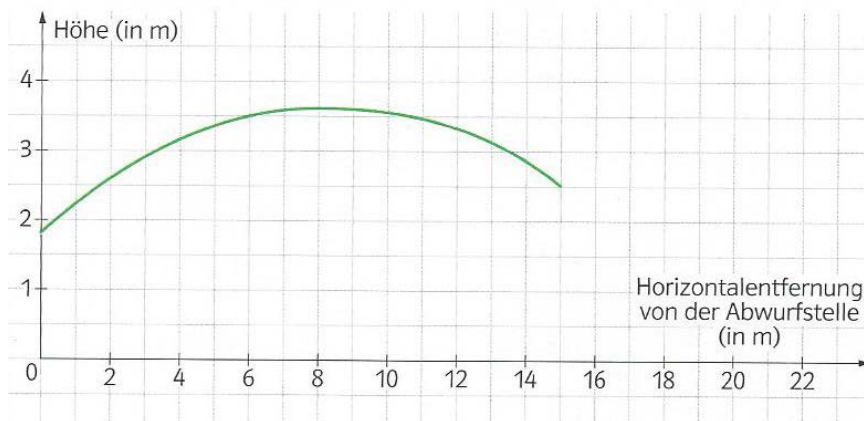
4. Wie lange dauert es, bis der Acapulco-Springer der von einem 36 m hohen Felsen ins Meer springt, auf die Wasseroberfläche trifft? Wie groß ist seine Geschwindigkeit im Moment des Eintauchens (Jaros, 2011, S. 42)?
5. Das unten stehende Diagramm beschreibt eine Kugel, die mit $1,5 \text{ ms}^{-1}$ über die Kante eines Experimentiertisches (Höhe 91 cm) rollt. In welcher Entfernung von der Tischkante schlägt die Kugel am Boden auf? Lies aus dem Diagramm die Fallweite ab und bestimmen anschließend rechnerisch die Lösung.



(Jaros et al., 2011, S. 40)

Schiefer Wurf

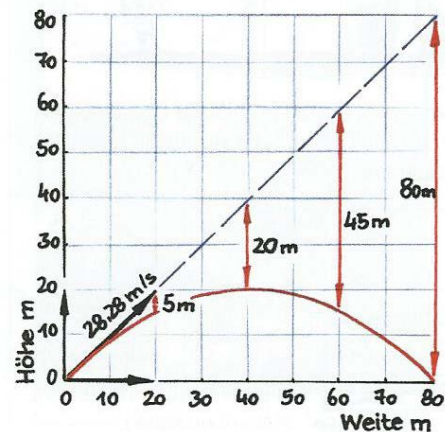
1. Der schiefe Wurf einer Kugel wird durch den untenstehenden Graphen beschrieben.
 - a) In welcher Höhe wird die Kugel abgeworfen?
 - b) Gib zwei Horizontalentfernungen an, bei denen sich die Kugel in derselben Höhe befindet!
 - c) In welcher Horizontalentfernung wird die maximale Höhe erreicht? Wie groß ist diese?
 - d) Schätze anhand des Graphen, wie weit die Kugel fliegt!
 - e) Ermittle eine näherungsweise Termdarstellung der abgebildeten quadratischen Funktion! Welche Wurfweite ergibt sich mit dieser Funktion (Malle et al., 2010, S. 178)?



2. Du hast nachfolgendes Diagramm gegeben, welches einen Eierwurf beschreibt.

- Wie hoch ist die Abwurfgeschwindigkeit?
- Wie weit fliegt das Ei?
- Was bedeutet der lineare Funktionsgraph in dem Diagramm?
- Bei wie viel Meter erreicht das Ei seinen höchsten Punkt?

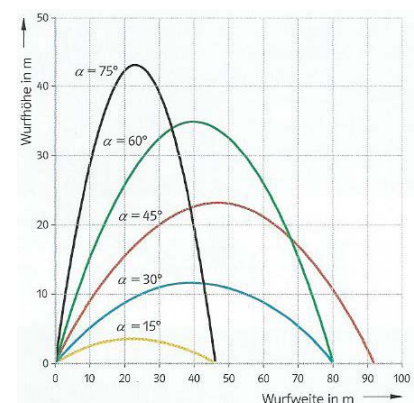
(Apolin, 2007, S. 68)



3. Ein Scharfschütze hat ein Gewehr mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 1000 m/s. Um wie viel höher muss er anlegen, wenn er auf ein Ziel in 100 m, 200 m oder 300 m schießt (Apolin, 2007, S. 70)? Zeichne ein passendes Diagramm.

4. Interpretiere nebenstehendes Diagramm.

- Unter welchem Winkel fliegt der Ball am kürzesten?
Wie weit und wie hoch fliegt er?
 - Unter welchem Winkel fliegt der Ball am weitesten?
Wie weit und wie hoch fliegt er?
 - Unter welchem Winkel fliegt der Ball am höchsten? Wie weit und wie hoch fliegt er (Sextl et al., 2012, S. 46)?
5. Zeichne die Bahnkurve eines Balls, der schräg nach oben unter einem Winkel von etwa 45° geworfen wird. (Sextl et al., 2012, S. 53)



6. Gehe auf unten stehenden Link und mache die Übung 2 zum schiefen Wurf.
http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/Wurfbewegungen/index.htm [30.05.15]
(Lindner, 2005)

Allgemein:

7. Öffne unten stehenden Link, eine Phet Interactive Simulation, von der University of Colorado. Drücke das Play-Zeichen der Simulation „Projektilbewegung“ um diese zu starten.

<https://phet.colorado.edu/de/simulation/legacy/projectile-motion> [28.05.15]

(University of Colorado Boulder)

Feuer die Kanone mit einem Golfball, Baseball oder einer Bowlingkugel ab.

- a) Ein Schuss soll einen lotrechten Wurf darstellen. Unter wie viel Grad stellst du die Kanone ein? Zeichne das passende Weg-Zeit-Diagramm sowie ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Den Weg kannst du mit der beweglichen gelben Strecke (rechts unten) messen.
- b) Anschließend feuere die Kanone so ab, dass ein waagrechter Wurf entsteht. Unter wie viel Grad stellst du die Kanone ein? Zeichne ein Diagramm, bei dem die Wurfhöhe und die Wurfweite enthalten sind.
- c) Jetzt fehlt nur mehr der schiefe Wurf. Feuere wieder die Kanone ab. Unter wie viel Grad fliegt der Ball am weitesten? Unter wie viel Grad fliegt der Ball am kürzesten? Zeichne ein Diagramm, bei dem die Wurfhöhe und die Wurfweite eingetragen sind.

Die Wurfbewegungen – Geometrie

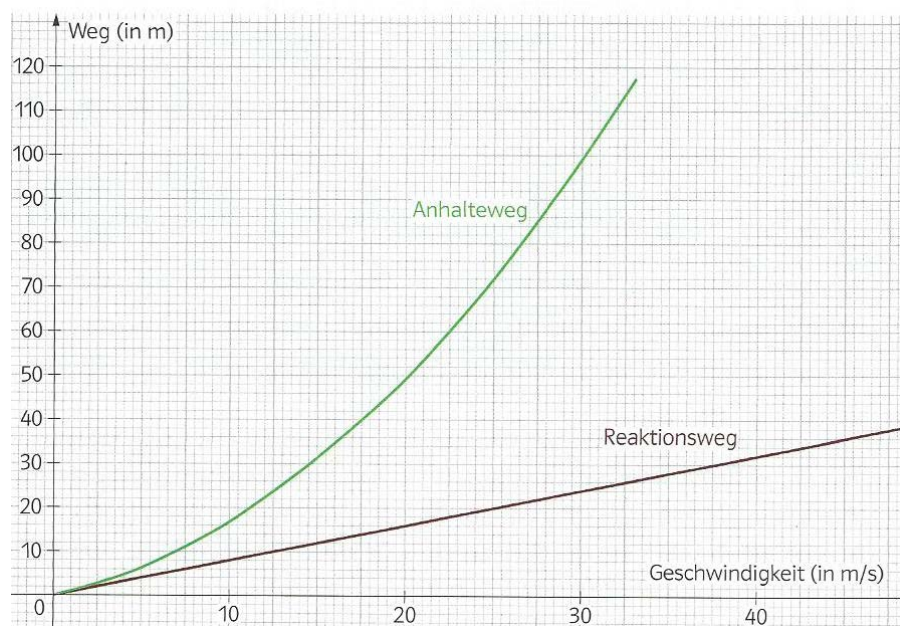
1. Gehe auf unten stehenden Link und mache die Übung 1 zum schiefen Wurf.
http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/Wurfbewegungen/index.htm
(Lindner, 2005)
2. Gehe auf unten stehenden Link und mache die Übung 3 zum schiefen Wurf.
http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/Wurfbewegungen/index.htm
(Lindner, 2005)
3. Öffne den unten angeführten Link von LearningApps und wähle die App „Schiefe Wurf im Sport“. Drucke deine Lösung anschließend aus und schreibe deine Begründungen dazu.
<http://learningapps.org/index.php?page=2&s=&category=7> [30.05.15]
(Hielscher, Hartmann, Rothlauf, Wagenknecht & Steinbach)
4. Du wirfst mit 5 m/s einen Stein waagrecht von einem Turm, und er fliegt 20 m weit. Wie hoch ist der Turm? Du wirfst mit 7 m/s einen Stein waagrecht von einem 125 m hohen Turm. Wie weit fliegt der Stein (Apolin, 2007, S. 70)?
5. Ein Scharfschütze hat ein Gewehr mit einer Mündungsgeschwindigkeit von 1000 m/s. Um wie viel höher muss er anlegen, wenn er auf ein Ziel in 100 m, 200 m oder 300 m schießt (Apolin, 2007, S. 70)?
6. Die Wurfweite beim schiefen Wurf ist gegeben durch $w = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$! Berechne bei welchen Winkel man die größte Weite erzielt? Wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt, wie ändert sich die Weite (Apolin, 2007, S. 68)?

Der Bremsweg – Funktionen

1. Ein Auto kracht mit 50 km/h in eine massive Hausmauer. Es kommt zum Stillstand, nachdem seine Karosserie um 40 cm gestaucht wurde. Wie groß ist die durchschnittliche Bremsverzögerung und wie lange dauert es, bis das Auto zum Stillstand kommt, wenn eine konstante Bremsbeschleunigung angenommen wird (Jaros et al., 2011, S. 42)?
2. Bei einem Unfall auf der Südautobahn verursachte ein Sportwagen eine 276 m lange Bremsspur. Berechne für den Verzögerungswert $a = 8 \text{ ms}^{-2}$ (Maximum für Gummireifen auf Asphalt) die ursprüngliche Geschwindigkeit des Sportwagens (Jaros et al., 2011, S. 42).
3. Ein Mann überlebte den Sturz von einer Autobahnbrücke wie durch ein Wunder fast unverletzt. Seine Fallzeit betrug $\approx 5,8 \text{ s}$, er wurde im Schnee in $\approx 0,4 \text{ s}$ abgebremst. Berechne die Höhe der Brücke, seine Aufprallgeschwindigkeit und seine Verzögerung (Jaros et al., 2011, S. 42)!
4. Für ein Auto wurden die Bremswege bei verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen, wobei die Bremsung mit blockierenden Rädern auf leicht feuchter Fahrbahn vorgenommen wurde. Die Ergebnisse sind in der untenstehenden Tabelle enthalten.
 - a) Trage die den gemessenen Werten entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem ein!
 - b) Der Theorie nach nimmt der Bremsweg $s_B(v)$ quadratisch mit der Geschwindigkeit v zu (v in km/h, $s_B(v)$ in m), wobei $s_B(v)$ von der Form $s_B(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v$ (für $v > 20 \text{ km/h}$) ist.
Ermittle a und b näherungsweise, trage die entsprechenden Funktionswerte in die Tabelle ein und zeichne den Graphen dieser Funktion in das Koordinatensystem ein!
 - c) Eine Faustregel besagt, dass der Bremsweg ungefähr gegeben ist durch $s_B(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ (wobei v in km/h, $s_B(v)$ in m gemessen wird). Trage auch die dieser Faustregel entsprechenden Werte in die Tabelle ein (Malle et al., 2010, S. 177)!

Geschwindigkeit (in km/h)	60	80	100	120
Gemessener Bremsweg (in m)	32	61	98	144
Bremsweg laut Theorie (in m)				
Bremsweg laut Faustregel (in m)				

5. In der untenstehenden Grafik sind der Reaktionsweg und der Anhalteweg für ein bestimmtes Auto in Abhängigkeit von der Ausgangsgeschwindigkeit dargestellt.
- Rechne die Ausgangsgeschwindigkeit $v_0 = 90 \text{ km/h}$ in m/s um!
 - Entnimm der Grafik für diese Ausgangsgeschwindigkeit den Reaktionsweg, Anhalteweg und Bremsweg!
 - Welche Reaktionszeit τ wurde der Grafik zugrunde gelegt?
 - Welche Bremsverzögerung b wurde der Grafik zugrunde gelegt?
 - Berechne den Anhalteweg für $v_0 = 90 \text{ km/h}$ nach der Fahrschulformel und vergleiche mit der Grafik!



(Malle et al., 2010, S. 140)

6. Du machst bei 50 km/h eine Vollbremsung und misst den Bremsweg. Wie sehr wächst er an, wenn du bei 100 km/h oder bei 150 km/h voll bremsst (Apolin, 2007, S. 56)? Zeichne den Bremsweg in Abhängigkeit der Geschwindigkeit.

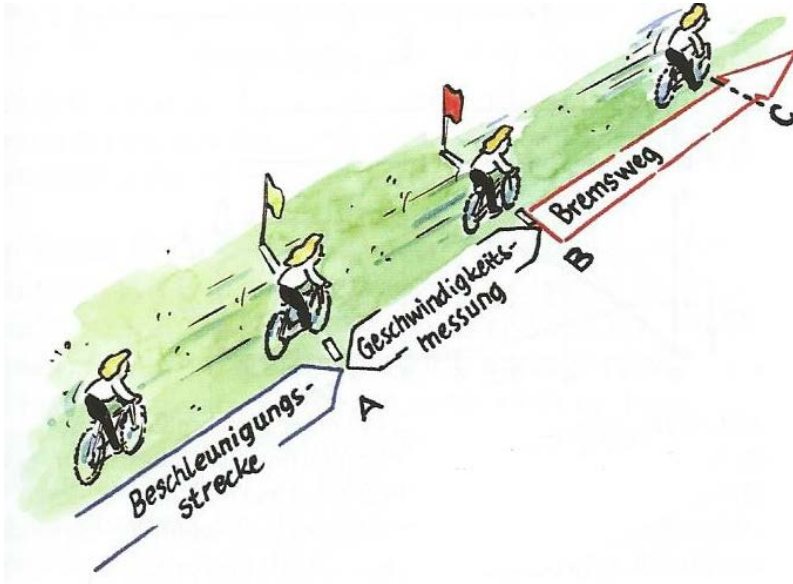
7. Um wie viel ist der Bremsweg bei 50 km/h länger als bei 30 km/h? Gib einen Tipp ab (Apolin, 2007, S. 56)! Zeichne anschließend ein Koordinatensystem bei dem der Bremsweg in Abhängigkeit der Geschwindigkeit aufgetragen wird.
8. Die Bremsverzögerung in der Formel 1 beträgt $\approx 4,5 g$. Um wie viel m/s bzw. km/h kann ein Auto der Formel 1 in einer Sekunde langsamer werden (Apolin, 2007, S. 58)?
9. Zeichne in einem Diagramm den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg für die Bremsverzögerungen $5 m/s^2$, $7 m/s^2$, und $9 m/s^2$ (Apolin, 2007, S. 64).
10. Bei einem Unfall auf der Autobahn zieht ein Ferrari eine 280 m lange Bremsspur. Der Fahrer sagt, er war mit etwa 150 km/h unterwegs. Kann man diese Behauptung widerlegen (Apolin, 2007, S. 64)?
11. Erstelle für folgende Bewegungen ein s-t- und ein v-t-Diagramm: 2 Sekunden mit 1 m/s, 2 Sekunden mit 2 m/s, 2 Sekunden mit 3 m/s, 2 Sekunden mit $-5,5 m/s$ (Apolin, 2007, S. 64).
12. Für eine durchschnittliche Bremsverzögerung von $a = 4 m/s^2$ beträgt der Bremsweg 162,9 m (Sextl et al., 2012, S. 24). Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Auto auf der Autobahn?
13. **E:** Du brauchst? 1 Fahrrad und 1 Fahrer, 1 SignalgeberIn (steht bei A), einige Stoppuhren und Zeitnehmer (stehen bei B), 1 Kreide, 1 Maßband, 2 WeitenmesserInnen, 1 ProtokollführerIn.

Was ist zu tun? Ein/e SchülerIn fährt mit dem Fahrrad und nimmt auf einer Beschleunigungsstrecke Schwung. Er/Sie fährt die letzten 10 m ohne zu treten (A nach B), damit die Geschwindigkeit konstant bleibt. Auf dieser Strecke wird die Zeit gemessen. Der/Die SignalgeberIn gibt ein Zeichen, wenn das Vorderrad gerade bei Linie A ist, und die ZeitnehmerInnen stoppen ein. Sie stoppen ab, wenn das Vorderrad genau bei B ist, also nach 10 m. Dort beginnt der Fahrer voll zu bremsen, und der Bremsweg wird gemessen. Der/Die SchülerIn macht möglichst viele Fahrten mit verschiedenen Geschwindigkeiten.

Wichtig:

- Es muss immer die gleiche Stelle des Rads gemessen werden, etwa die Mitte des Vorderrades.

- Um die Stopnungen genauer zu machen, sollten mehrere Personen stoppen und der Mittelwert genommen werden.
- Die Bremsung muss immer voll sein. Achte darauf, dass die Vorderbremse nicht zu stark eingestellt ist, damit du keinen Salto schlägst

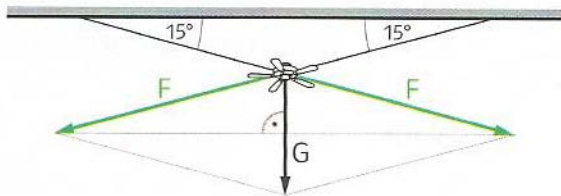


(Apolin, 2007, S. 59)

14. Wie lange ist der Anhalteweg, wenn man mit dem Auto mit 100 km/h fahren und mit $\vec{a} = -6 \text{ m/s}^2$ abbremsen kann? Die Reaktionszeit beträgt 1 s (Hack & Mairleitner, 2008, S. 107).

Die Kräfte – Vektoren und Geometrie

1. Eine Deckenlampe mit dem Gewicht $G = 80\text{ N}$ hängt an zwei Drähten, die jeweils einen Winkel von 15° mit der Decke bilden. Ermittle die Zugkraft F an jedem der beiden Drähte!



(Malle et al., S. 97)

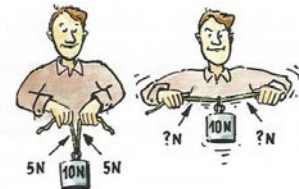
2. Zwei Kräfte $F_1 = 190\text{ N}$ und $F_2 = 250\text{ N}$ schließen miteinander einen Winkel von $80,5^\circ$ ein. Wie groß ist die Resultierende dieser beiden Kräfte und welchen Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein (Malle et al., 2010, S. 120)?
3. Zwei Kräfte $F_1 = 110\text{ N}$ und $F_2 = 80\text{ N}$ schließen miteinander einen Winkel von $110,8^\circ$ ein. Wie groß ist die Kraft, die den beiden Kräften das Gleichgewicht hält und welchen Winkel schließt sie mit den beiden Kräften ein (Malle et al., 2010, S. 120)?
4. Ein Schlitten wird mit einer unter dem Winkel φ schräg nach oben gerichteten Kraft $\vec{F}$ gezogen. Stelle eine Formel für den Betrag der Kraft $\vec{F}_S$ auf, mit der der Schlitten in Richtung des Wegvektors $\vec{s}$ gezogen wird (Malle et al., 2010, S. 264)!
5. Berechne den Betrag des „Kraftvektors“ und den Winkel, den seine Komponenten in x- bzw. y-Richtung einschließt!

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $\vec{a} = (3 4)$ | b) $\vec{a} = (-5 12)$ |
| c) $\vec{a} = (-2 -4)$ | d) $\vec{a} = (5 -2)$ |

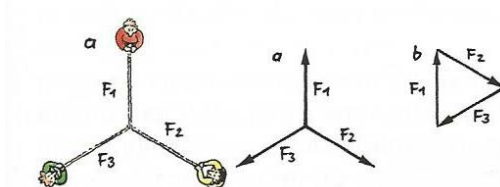
(Götz et al., 2010, S. 232)

6. Erläutere an drei geeigneten Skizzen von Kräfteparallelogrammen, wie eine Teilkraft $\vec{a}$ auf die resultierende Kraft $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ einen a) verstärkenden, b) hemmenden, c) gar keinen Einfluss haben kann (Götz et al., 2010, S. 244)!

7. Du hältst ein Gewicht von 10 N (das entspricht einer Masse von 1 kg) an einer Schnur. Mit wie viel Newton musst du an den Enden ziehen, damit sie wirklich völlig gespannt ist (Apolin, 2007, S. 38)?



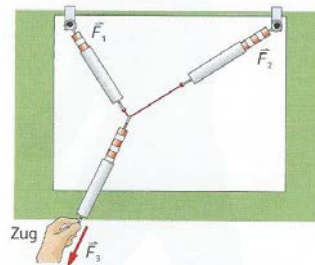
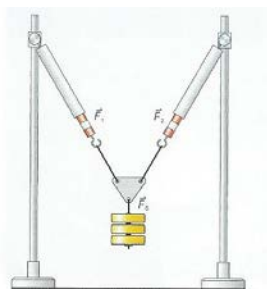
8. Nimm an, dass in der Abbildung eine der Kräfte doppelt so groß ist wie die anderen. Wie sieht die Summenkraft dann aus (Apolin, 2007, S. 39)?



(Apolin, 2007, S. 37)

9. **E:** Du brauchst: Zwei Federwaagen, ein Massestück, eine Schnur

Was ist zu tun? Hänge ein Massestück an eine Federwaage und bestimme das Gewicht. Hänge nun das Massestück über eine Schnur so auf, dass es von zwei Federwaagen gehalten wird. Probiere unterschiedliche Winkel. Halte ein A4 Blatt dahinter und zeichne die dazugehörigen Kräfteparallelogramme. Die Versuchsanordnungen können aus nachstehenden Abbildungen entnommen werden.



(Sextl et al., 2012, S. 34)

10. Kräfte werden vektoriell addiert. Zeichne die Addition für

- a) Kräfte, die parallel und gleichgerichtet sind.
- b) Kräfte, die parallel und entgegen gesetzt gerichtet sind.
- c) Kräfte, die einen beliebigen Winkel einschließen.

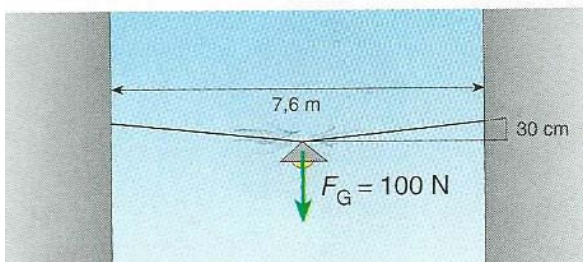
(Sexl et al., 2012, S. 35)

11. Auf einen Körper wirken gleichzeitig eine Kraft von 3 N und eine von 4 N ein. Die Kräfte schließen miteinander einen Winkel von 90° ein. Wie groß ist die gesamte wirkende Kraft?

- a) 3 N
- b) 5 N
- c) 4 N
- d) 7 N

(Sexl et al., 2012, S. 38)

12. Ermittle die Seilkräfte durch Komponentenzerlegung der Gewichtskraft der Straßenlaterne. Welche Kraft wirkt auf einen Mauerhaken?



(Kraker & Paill, 1998, S. 35)

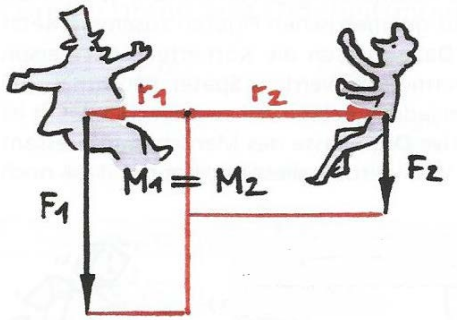
13. Gehe auf unten stehenden Link und wähle die App „Kräfte“, dort sind zwei Autos zu sehen.

<http://learningapps.org/index.php?category=7&subcategory=2369&s=> [31.05.15]

(Hielscher et al.)

14. Was drückt die nebenstehende Abbildung aus? Welches Gesetz wird beschrieben?

Interpretiere mit Hilfe von Vektoren und der Geometrie.



(Apolin, 2007, S. 110)

15. Gehe auf den nachstehenden Link und wähle „Hebelgesetz Bildschirm-Übung zum Hebelgesetz“ und mache diese Übung.

<http://www.zum.de/dwu/umapme.htm> [31.05.15]

(Ulm)

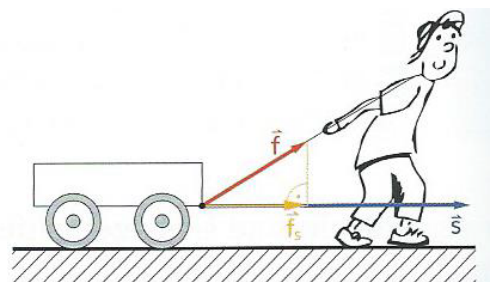
16. Beweise mit der Phet Simulation „Balanceakt“ von der University of Colorado das Hebelgesetz. Wie ändert sich der Weg bei gleicher, doppelter, dreifacher und vierfacher Masse. Dies kannst du im „Gleichgewichtslabor“ überprüfen. Danach kannst du das Spiel spielen.

<https://phet.colorado.edu/de/simulation/legacy/balancing-act> [31.05.15]

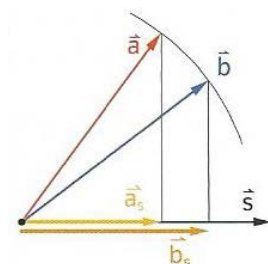
(University of Colorado Boulder)

Arbeit – Vektoren und Geometrie

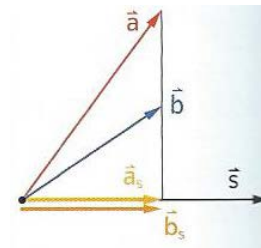
1. Ein Schrägaufzug steigt unter $\alpha = 24^\circ$ an. Der Wagen hat das Gewicht $G = 500\text{ N}$. Mit welcher Kraft F_1 wird er längs des Gleises hinuntergezogen und mit welcher Kraft wird er auf das Gleis gedrückt (Malle et al., S. 97)?
2. Eine Kugel der Masse m befindet sich auf einer Rampe, die unter dem Winkel α ansteigt. Mit welcher Kraft F_1 wird die Kugel längs der Rampe hinuntergezogen und mit welcher Kraft F_2 wird sie gegen die Rampe gedrückt?
 - a) $\alpha = 10^\circ$, $m = 2\text{ kg}$
 - b) $\alpha = 30^\circ$, $m = 0,5\text{ kg}$
 (Malle et al., S. 97)
3. Ein Auto mit der Masse $1\,750\text{ kg}$ parkt auf einer schrägen Straße, die um $7,6^\circ$ ansteigt. Mit welcher Kraft wird das Auto die Straße hinuntergezogen (Malle et al., S. 97)?
4. Ein Schrägaufzug steigt um $\alpha = 25^\circ$ an. Wievielfach stärker würde der Wagen längs des Gleises hinuntergezogen werden, wenn der Schrägaufzug um 5° steiler wäre (Malle et al., S. 97).
5. Der Wagen eines um 27° ansteigenden Schrägaufzugs hängt an einem Seil, das eine maximale Zugkraft von $5\,000\text{ N}$ aushält. Wie schwer darf der Wagen samt Ladung höchstens sein (Malle et al., S. 97)?
6. Von zentraler Bedeutung in der Physik und Technik ist der Begriff „Arbeit“. Dabei wird sowohl die Kraftkomponente $\vec{f}_s$ als auch der (hier geradlinig vorausgesetzte) Weg durch einen Pfeil (Vektor) $\vec{s}$ dargestellt. Begründe die Definition der Arbeit anhand der nebenstehenden Skizze! Gib an, ob „Arbeit“ eine skalare Größe oder eine vektorielle Größe ist (Götz et al., 2010, S. 244)!



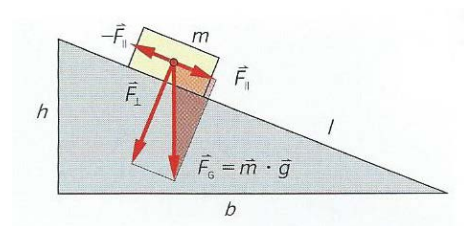
7. Längs des Weges $\vec{s} = (10|0)$ wirken zwei betragsgleiche Kräfte $\vec{a} = (3|4)$ und $\vec{b} = (4|3)$. Welche Arbeit wird längs $\vec{s}$ a) von $\vec{a}$, b) von $\vec{b}$ geleistet? Interpretiere das Ergebnis anhand der angeführten Abbildung (Götz et al., 2010, S. 244)!



8. Längs des Weges $\vec{s} = (10|0)$ wirken zwei betragsgleiche Kräfte $\vec{a} = (3|4)$ und $\vec{b} = (3|2)$. Welche Arbeit wird längs $\vec{s}$ a) von $\vec{a}$, b) von $\vec{b}$ geleistet? Interpretiere das Ergebnis anhand der angeführten Abbildung (Götz et al., 2010, S. 244)!



9. Wieso beschleunigt eine Kugel an einem steilen Abhang schneller als an einem flachen (probier das an einem geneigten Tisch aus)? Das Gewicht ist doch in beiden Fällen gleich groß? Und warum erzeugt eine schiefe Ebene eine Fallbewegung in Zeitlupe (Apolin, 2007, S. 38)?
10. Ein Bergbauer hat Heu geladen und bringt es auf einem Schlitten talwärts. Schlitten und Heu haben zusammen eine Masse von 150 kg, die Steigung beträgt an manchen Stellen 25 Grad. Welche Kraft muss er aufwenden, um den Schlitten festzuhalten (Sexl et al., 2012, S. 35)?
11. Überlege am Beispiel der Dachsteinbahn, wie groß die Kraft sein muss, mit der eine Kabine gezogen wird: Die Teilstrecke I der Seilbahn Dachstein-Krippenstein überwindet auf einer Länge von 1734 m einen Höhenunterschied von 742 m. Nimm an, dass die Masse der vollbeladenen Kabine 15 t beträgt (Sexl et al., 2012, S. 35).



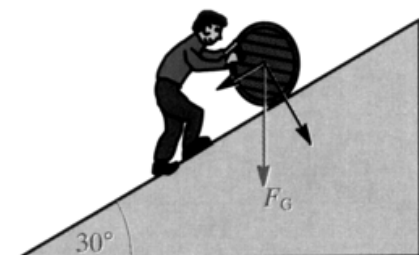
12. Wie ändern sich die Kräfte auf der schiefen Ebene, wenn man die Ebene stärker neigt?
- a) F_G wird kleiner b) $F_{\parallel}$ wird kleiner
c) $F_{\perp}$ wird kleiner d) $F_{\parallel}$ wird größer
- (Sexl et al., 2012, S. 35)

13. Leite die Formel für die Arbeit her!

14. Auf eine schiefen Ebene, die unter $\alpha = 30^\circ$ ansteigt, soll ein Fass mit der Gewichtskraft

11.

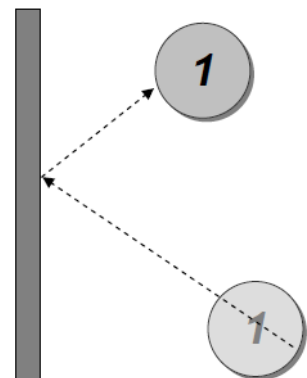
Auf einer schiefen Ebene, die unter $\alpha = 30^\circ$ ansteigt, soll ein Fass mit der Gewichtskraft $F_G = 1\,200\text{ N}$ hinaufgerollt werden. Wie groß sind die Kraftkomponenten, die parallel und senkrecht zur schiefen Ebene wirken?



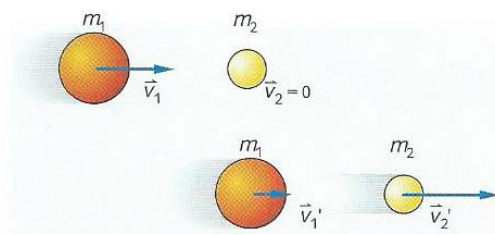
15. Im freien Fall erreicht man eine Beschleunigung von einem g . Ein Radfahrer rollt ein Gefälle von 10% gerade hinunter. Welchen Teil von g erreicht er maximal (ohne Reibungsverluste) (Knechtel et al., 2005, S. 16)? Zeichne eine Skizze.
16. Auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ liegt ein Körper mit einer Gewichtskraft von 80 N .
- a) Ermittle grafisch die Hangabtriebskraft und die Normalkraft.
 - b) Versuche, die beiden Kräfte rechnerisch zu ermitteln.
- (Kraker & Paill, 1998, S. 35)

Impuls – Vektoren

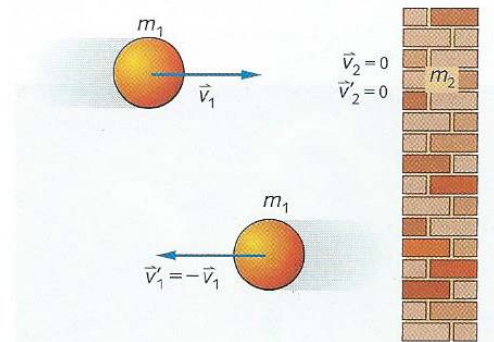
1. Zentraler Stoß: Schießt Münze 1 gerade und zentral auf Münze 2 – Was passiert? Markiert die Positionen der Münzen vor und nach dem Stoß auf dem Papier, indem ihr sie mit Bleistift nachzeichnet (Knechtel et al., 2005, S. 18)!
2. Wie schnell war die Münze vor dem Stoß? Der Impuls ist eine vektorielle Größe, bei der Bewegung kommt es auch auf die Richtung an. Da die Masse beider Münzen gleich ist, können wir die Geschwindigkeit als Maß für den Impuls nehmen. Wie schnell ist eine Münze vor dem Stoß? Welchen Betrag muss ihr Vektor haben (wie lang ist der Pfeil) (Knechtel et al., 2005, S. 19)?
3. Stoß an der Bande: Wir lassen eine Münze an einer festen Bande (z.B. gehaltenes Lineal) abprallen und beschreiben diesen Vorgang mit Vektoren.
 - a) Die Positionen der Münze vor und nach dem Stoß müssen auf das Papier gezeichnet werden, genauso Wand und Stoßpunkt. (Annahme: s nach dem Stoß: 4 cm)
 - b) Wie legen wir am besten das Koordinatensystem?
 - c) Wie schreibt sich der Impuls nach dem Stoß als Vektor?
 - d) Wie groß war der Impuls vor dem Stoß?(Knechtel et al., 2005, S. 20)
4. Beliebiger Stoß: Wir schießen Münze 1 schief auf Münze 2 und markieren die Positionen vorher und nachher. Beschreibt den Vorgang vektoriell! Wie groß war der Impuls von Münze 1 vor dem Stoß (Knechtel et al., 2005, S. 21)?
5. Ein Auto rollt mit 10 m/s gegen ein gleich schweres stehendes. Welche Geschwindigkeit haben beide Autos nach dem Crash (Apolin, 2007, S. 101)?
6. Sollten Leitschienen neben den Straßen eher plastisch oder elastisch sein? Kannst du das begründen (Apolin, 2007, S. 101)?
7. In der Abbildung nähert sich ein PKW mit 1 t und 72 km/h und ein LKW mit 3 t und 24 km/h einer Kreuzung. In welche Richtung werden sie sich nach dem Aufprall weiterbewegen (Apolin, 2007, S. 105)?
8. Beweise den Impulserhaltungssatz!



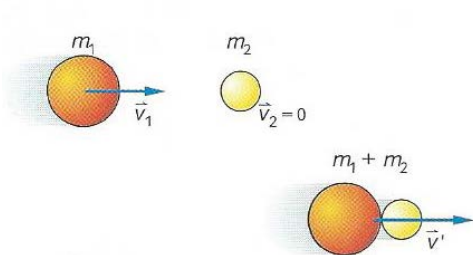
9. Interpretiere nachfolgende Abbildungen.



(Sexl et al., 2012, S. 77)



(Sexl et al., 2012, S. 77)



(Sexl et al., 2012, S. 78)

10. Ein Autodromwagen stößt mit 5 m/s elastisch auf einen zweiten ruhenden Wagen, wobei der erste doppelt so schwer ist wie der zweite. Berechne die Geschwindigkeit der beiden Wagen nach dem Stoß. Der erste Wagen hat eine Masse von 180 kg (Hack & Mairleitner, 2008, S. 134). Löse grafisch!
11. Gehe auf unten stehenden Link und drücke das Play-Zeichen bei der Simulation Kollisionslabor. Spiele alle möglichen Stöße durch. Beschreibe, wie sich die Vektoren bei den einzelnen Stößen verhalten.

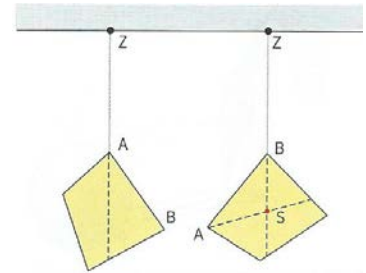
<https://phet.colorado.edu/de/simulation/legacy/collision-lab> [31.05.15]

(University of Colorado Boulder)

Schwerpunkt – Vektoren

1. Schneide aus einem Stück Karton ein Viereck – es kann auch der Umriss eines Geo-Dreiecks sein. Hänge das Kartonstück an einem Faden an verschiedenen Stellen auf.

Wenn der Karton ruhig hängt, markiere die Lotrechte durch den jeweiligen Aufhängungspunkt. Die Linien sollten sich in einem Punkt schneiden. Vergleiche dein Vorgehen mit der Bestimmung des Schwerpunkts in einem Dreieck, wie es in der Mathematik üblich ist (Sextl et al., 2012, S. 86).



2. In der Akrobatik, aber auch in der Natur gibt es zahlreiche erstaunliche Phänomene zum Thema Gleichgewicht. Finde dazu Erklärungen. (Links dazu auf der Website des Schulbuchs).

Die Lage des Schwerpunkts entscheidet über die Standfestigkeit eines Gegenstandes (z.B. einer Vase). Finde heraus, wie du die Standfestigkeit einer Vase oder eines anderen Gegenstandes (z.B. eines Posterständers bei einer Schulpräsentation) erhöhen kannst (Sextl et al., 2012, S. 86).

3. Stelle eine Formel für den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC auf (Malle et al., 2010, S. 228)! Hinweis: Vektorrechnung!
4. Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks ABC !
 - a) $A = (-4|-1), B = (5|-1), C = (2|8)$
 - b) $A = (-6|-5), B = (4|3), C = (-1|5)$
 (Malle et al., 2010, S. 228)
5. Von einem Dreieck ABC kennt man zwei Eckpunkte und den Schwerpunkt S . Berechne den dritten Eckpunkt!
 - a) $B = (4|-3), C = (3|3), S = (2|1)$
 - b) $A = (5|1), C = (-7|5), S = (-1|2)$
 (Malle et al., 2010, S. 228)

5. ZUSAMMENFASSUNG

Abschließend möchte ich festhalten, dass Lehrerinnen und Lehrer daran arbeiten sollten, den Schülerinnen und Schülern vernetzendes Denken zu lernen. Die Jugendlichen müssen das Schubladendenken überwinden, sodass sie die Mathematik und Physik gemeinsam nutzen können. Heutzutage wird immer wichtiger, gelerntes Wissen zu verbinden.

Der Schulbuchvergleich brachte mir eine Übersicht über die Vielzahl an Aufgaben, die sowohl die Physik als auch die Mathematik beinhalten. Das Mathematiklehrbuch „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2010) ist der Vorreiter, was die Aufgaben mit physikalischen Hintergrund betrifft. Aus diesem Buch verwendete ich auch viele Übungen für das Unterrichtsmaterial.

Die Arbeitsblätter stellen gewissermaßen auch eine Sammlung von Aufgaben dar, die für beide Unterrichtsgegenstände einsetzbar sind. Interessant ist, dass die Geschwindigkeit bei mehreren mathematischen Themen ihren Platz findet. Die Verbindungen zur Mathematik sind die linearen Funktionen, die nicht linearen Funktionen, die reellen Funktionen, die Vektoren und die Geometrie. Kein anderes physikalisches Gebiet lässt sich so oft zur Mathematik zuordnen. Die Funktionen, die Geometrie und die Vektoren sind die häufigsten Gebiete der Mathematik, welche auch in der Physik vorkommen.

Meiner Meinung nach würde eine Änderung des Mathematiklehrplans dem Physikunterricht helfen, wie auch Baurmann (1976, S. 23-29) in seinem Buch „Physikunterricht heute“ beschreibt. Wenn man von dem Lehrbuch „Mathematik verstehen 5“ (Malle et al., 2010) ausgeht, können Lehrerinnen und Lehrer zuerst die Gleitkommadarstellung und Zehnerpotenzen unterrichten und danach mit der einfachen Vektorrechnung anschließen. Danach kann der Mathematikunterricht mit den Funktionen fortgesetzt werden. Dies wäre eine Möglichkeit die Beziehung zwischen der Mathematik und Physik zu stärken.

Zum Schluss möchte ich noch einmal zwei wesentliche Zitate von berühmten Physikern anführen, die bereits dazumal erkannten, dass Physik nicht ohne Mathematik funktioniert und umgekehrt. Das erste Zitat ist von Einstein und das zweite von Dirac.

„Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir nämlich zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. Durch rein mathematische Konstruktion vermögen wir nach meiner Überzeugung diejenigen Begriffe und diejenige gesetzliche Verknüpfung zwischen ihnen zu finden, die den Schlüssel für das Verstehen der Naturerscheinungen liefern. Die brauchbaren mathematischen Begriffe können durch Erfahrung wohl nahegelegt, aber keinesfalls aus ihr abgeleitet werden. Erfahrung bleibt natürlich das einzige Kriterium der Brauchbarkeit einer mathematischen Konstruktion für die Physik. Das eigentlich schöpferische Prinzip liegt aber in der Mathematik“ (Einstein, 1934, S. 117).

„... ein Buch über die neue Physik, soll es nicht lediglich experimentelle Arbeiten beschreiben, muß notwendig mathematisch sein“ (Dirac, 1930).

7. LITERATURVERZEICHNIS

Apolin, M. (2007). *Big Bang 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Ausubel, D. P. (1974). *Psychologie des Unterrichts* (Band 1 und 2). Weinheim. S. 39 – 42.

Bauer, F. (1964, Jänner). *Zur Rolle der Mathematik im Physikunterricht*. Dissertation, Leningrader Pädagogisches Institut.

Baurmann, E. (1967). *Physikunterricht heute*. Hrsg. Von der OECD., Frankfurt a. Main: Moritz Diesterweg. S. 23 – 29.

Beckmann, A. (2007). Fächerübergreifender Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. S. 207.

Brantner, M. (1994). *Transferprobleme zwischen Mathematik und Physik*. Diplomarbeit, Universität Wien.

Brenner, H. J. (2011). *Zur Rolle der Physik im Mathematikunterricht*. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011*. Band 1, S. 151-154.

Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. Freigegebene Aufgaben aus den PISA-Tests. *PISA Aufgabensammlung Mathematik*. Verfügbar unter:

https://www.bifie.at/system/files/dl/PISA_Aufgabensammlung_Mathematik.pdf [26.05.15]

Bundesministerium für Bildung und Frauen. Lehrpläne der AHS-Oberstufe. Verfügbar unter https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.html [02.05.15]

Mathematik verfügbar

unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf?4dzgm2 [02.05.15]

Physik verfügbar

unter: https://www.bmbf.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_10_11862.pdf?4dzgm2

[02.05.15]

Dirac, P. A. M. (1930). *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford.

Einstein, A. (1934). *Mein Weltbild*. Amsterdam: Querido Verlag.

Feynman, R. P. (1985). *The Character of Physical Law*. The MIT Press, Cambridge Mass.

Geretschläger, R., Griesel, H. & Postel H. (o. J.). *Elemente der Mathematik* (Band 5).
o.O.: Dorner Verlag

Götz, S. (Hrsg.), Reichel, H.-C. (Hrsg.), Müller, R. & Hanisch, G. (2010). *Mathematik 5*.
Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Hack, M. & Mairleitner, A. (2008) *Physik 5. Und sie bewegt sich doch!*. Wien: E. Dorner

Himmler, A. (2003). *Bereitet der Mathematikunterricht auf die Mathematik im Physikunterricht vor? - Eine empirische Untersuchung*. Diplomarbeit, Universität Wien.
S. 87 – 88.

Hoffmann, K.-W. (1977, Mai). *Untersuchung des Transfers mathematischer Inhalte auf physikalische Aufgaben als Funktion unterschiedlicher Behandlungen*. Inaugural-Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main. S. 3 – 164.

Jaros, A., Nussbaumer, A., Nussbaumer, P. & Kunze, H. (2011). *Physik compact Basiswissen 5 RG*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG

Klausberger, S. (1993). *Didaktische Probleme der Differentialrechnung*. Diplomarbeit, Universität Wien.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York.

Knechtl, W., Preis, C. & Rath, G. (2005). *Beispiele für die Koordination Mathematik – Physik*. BRG Kepler. Institut für Physik der Universität Graz. Verfügbar unter:

http://www.brgkepler.at/~rath/imst/koordination_M_Ph_Beispiele.pdf [25.5.15]

Kolb, J.R. (1967-1968). *Effects of relating mathematics to science instruction on the acquisition of quantitative science behavior*. In J. of Res. in Science Teaching, 5, S. 174 – 182.

Kraker, N. & Paill, F. (1998). *Physik 1*. Wien: E. Dorner GmbH.

Hielscher, M., Hartmann, W., Rothlauf, F., Wagenknecht, C. & Steinbach, N. (o.J.). *LearningApps-interaktive Lernbausteine*. Verfügbar unter: <http://learningapps.org/> [27.05.15]

Levi, M. (2009). *The Mathematical Mechanic*. Princeton University Press.

Lindner, A. Wurfbewegungen. Verfügbar

unter: http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/Wurfbewegungen/index.htm [30.05.15]

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B. & Ulovec, A. (2010). *Mathematik verstehen 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Poincaré, H. (o.J.). *La valeur de la science*. o.O: ohne Verlag. S. 152.

Polya, G. (1962). *Mathematik und plausible Schliessen – Induktion und Analogie in der Mathematik*. Birkhäuser. Band 1, ohne Seitenangabe.

Pospiech, G. (2008). Mathematical constructs in the physical reality. In: Sriraman, B., Michelsen, C., Beckmann, A., und Freiman, V. (Hrsg.), *Interdisciplinary Educational Research in Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences*, S. 233–240. Information Age Publishing Inc.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: Fritz, A. und Schmidt, S. (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*, Weinheim: Beltz-Verlag. S. 213–234.

Rath, G. (2006). Auseinandergelebt?. *Probleme und Lösungsansätze zur Koordination von Physik und Mathematik an höheren Schulen. plus lucis*, Heft 1-2, S. 9 – 13.

Redfield, D.D. & Atwood R.R. (1966). *An investigation of an experimental model in the physical sciences for the Junior High Student*. In: J. of Res. in Science Teaching, 4, S. 217 – 226.

Sexl, R. U., Kühnelt, H., Stadler, H., Jakesch, P. & Sattlberger E. (2012). *Sexl Physik 5*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.

Uhden, O. (2012). *Mathematisches Denken im Physikunterricht: Theorieentwicklung und Problemanalyse* (Vol. 133). Dissertation, o.O: Logos Verlag Berlin GmbH. S. 7 – 256.

Ulm, D. W. (1997 ...2015). *dwu – Unterrichtsmaterialiensammlung*. Verfügbar unter:
<http://www.zum.de/dwu/> [26.05.15]

University of Colorado Boulder. Phet Interactive Simulations. Verfügbar unter:
<https://phet.colorado.edu/de/simulations/category/physics/motion> [26.05.15]

Volkert, K. (1988). *Geschichte der Analysis*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Zürich.

Wussing, H. (1979). *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

8. ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1: (Malle et al., 2010, S. 18).....	31
Abbildung 2: (Malle et al., 2010, S. 54).....	32
Abbildung 3: (Malle et al., 2010, S. 55).....	32
Abbildung 4: (Malle et al., 2010, S. 55).....	32
Abbildung 5: (Malle et al., 2010, S. 81).....	33
Abbildung 6: (Malle et al., 2010, S. 73).....	33
Abbildung 7 (Malle et al., 2010, S. 82).....	34
Abbildung 8: (Malle et al., 2010, S. 84).....	34
Abbildung 9: (Malle et al., 2010, S. 86).....	35
Abbildung 10: (Malle et al., 2010, S. 93).....	35
Abbildung 11: (Malle et al., 2010, S. 94).....	35
Abbildung 12: (Malle et al., 2010, S. 95).....	36
Abbildung 13: (Malle et al., 2010, S. 96).....	37
Abbildung 14: (Malle et al., 2010, S. 97).....	38
Abbildung 15: (Malle et al., 2010, S. 99).....	39
Abbildung 16: (Malle et al., 2010, S. 113).....	39
Abbildung 17: (Malle et al., 2010, S. 114).....	39
Abbildung 18: (Malle et al., 2010, S. 118).....	40
Abbildung 19: (Malle et al., 2010, S. 120).....	40
Abbildung 20: (Malle et al., 2010, S. 121).....	40
Abbildung 21: (Malle et al., 2010, S. 132).....	41
Abbildung 22: (Malle et al., 2010, S. 132).....	41
Abbildung 23: (Malle et al., 2010, S. 132).....	41
Abbildung 24: (Malle et al., 2010, S. 132).....	42
Abbildung 25: (Malle et al., 2010, S. 133).....	42
Abbildung 26: (Malle et al., 2010, S. 133).....	43
Abbildung 27: (Malle et al., 2010, S. 134).....	44
Abbildung 28: (Malle et al., 2010, S. 140).....	45
Abbildung 29: (Malle et al., 2010, S. 140).....	46

Abbildung 30: (Malle et al., 2010, S. 143)	47
Abbildung 31: (Malle et al., 2010, S. 152)	48
Abbildung 32: (Malle et al., 2010, S. 154)	48
Abbildung 33: (Malle et al., 2010, S. 156)	49
Abbildung 34: (Malle et al., 2010, S. 160)	49
Abbildung 35: (Malle et al., 2010, S. 162)	50
Abbildung 36: (Malle et al., 2010, S. 163)	50
Abbildung 37: (Malle et al., 2010, S. 163)	50
Abbildung 38: (Malle et al., 2010, S. 164)	51
Abbildung 39: (Malle et al., 2010, S. 166)	52
Abbildung 40: (Malle et al., 2010, S. 166)	52
Abbildung 41: (Malle et al., 2010, S. 167)	53
Abbildung 42: (Malle et al., 2010, S. 168)	54
Abbildung 43: (Malle et al., 2010, S. 169)	55
Abbildung 44: (Malle et al., 2010, S. 169)	55
Abbildung 45: (Malle et al., 2010, S. 172)	56
Abbildung 46: (Malle et al., 2010, S. 172)	56
Abbildung 47: (Malle et al., 2010, S. 172)	56
Abbildung 48: (Malle et al., 2010, S. 176)	57
Abbildung 49: (Malle et al., 2010, S. 177)	58
Abbildung 50: (Malle et al., 2010, S. 178)	59
Abbildung 51: (Malle et al., 2010, S. 178)	59
Abbildung 52: (Malle et al., 2010, S. 179)	60
Abbildung 53: (Malle et al., 2010, S. 180)	60
Abbildung 54: (Malle et al., 2010, S. 181)	61
Abbildung 55: (Malle et al., 2010, S. 181)	61
Abbildung 56: (Malle et al., 2010, S. 182)	61
Abbildung 57: (Malle et al., 2010, S. 183)	62
Abbildung 58: (Malle et al., 2010, S. 183)	62
Abbildung 59: (Malle et al., 2010, S. 185)	63
Abbildung 60: (Malle et al., 2010, S. 186)	63
Abbildung 61: (Malle et al., 2010, S. 186)	63

Abbildung 62: (Malle et al., 2010, S. 191)	64
Abbildung 63: (Malle et al., 2010, S. 193)	64
Abbildung 64: (Malle et al., 2010, S. 202)	65
Abbildung 65: (Malle et al., 2010, S. 224)	65
Abbildung 66: (Malle et al., 2010, S. 228)	66
Abbildung 67: (Malle et al., 2010, S. 249)	66
Abbildung 68: (Malle et al., 2010, S. 264)	67
Abbildung 69: (Malle et al., 2010, S. 264)	67
Abbildung 70: (Malle et al., 2010, S. 271)	67
Abbildung 71: (Götz et al., 2010, S. 41)	68
Abbildung 72: (Götz et al., 2010, S. 41)	68
Abbildung 73: (Götz et al., 2010, S. 41)	69
Abbildung 74: (Götz et al., 2010, S. 46)	69
Abbildung 75: (Götz et al., 2010, S. 46)	69
Abbildung 76: (Götz et al., 2010, S. 71)	69
Abbildung 77: (Götz et al., 2010, S. 71)	69
Abbildung 78: (Götz et al., 2010, S. 92)	70
Abbildung 79: (Götz et al., 2010, S. 94)	70
Abbildung 80: (Götz et al., 2010, S. 99)	71
Abbildung 81: (Götz et al., 2010, S. 103)	71
Abbildung 82: (Götz et al., 2010, S. 105)	72
Abbildung 83: (Götz et al., 2010, S. 124)	72
Abbildung 84: (Götz et al., 2010, S. 130)	72
Abbildung 85: (Götz et al., 2010, S. 134)	73
Abbildung 86: (Götz et al., 2010, S. 144)	73
Abbildung 87: (Götz et al., 2010, S. 147)	74
Abbildung 88: (Götz et al., 2010, S. 147)	74
Abbildung 89: (Götz et al., 2010, S. 148)	74
Abbildung 90: (Götz et al., 2010, S. 148)	74
Abbildung 91: (Götz et al., 2010, S. 154)	75
Abbildung 92: (Götz et al., 2010, S. 154)	75
Abbildung 93: (Götz et al., 2010, S. 155)	76

Abbildung 94: (Götz et al., 2010, S. 172).....	76
Abbildung 95: (Götz et al., 2010, S. 174).....	77
Abbildung 96: (Götz et al., 2010, S. 174).....	77
Abbildung 97: (Götz et al., 2010, S. 175).....	78
Abbildung 98: (Götz et al., 2010, S. 179).....	78
Abbildung 99: (Götz et al., 2010, S. 183).....	78
Abbildung 100: (Götz et al., 2010, S. 194).....	79
Abbildung 101: (Götz et al., 2010, S. 228).....	79
Abbildung 102: (Götz et al., 2010, S. 231).....	79
Abbildung 103: (Götz et al., 2010, S. 232).....	80
Abbildung 104: (Götz et al., 2010, S. 244).....	80
Abbildung 105: (Apolin, 2007, S. 34)	82
Abbildung 106: (Apolin, 2007, S. 35)	83
Abbildung 107: (Apolin, 2007, S. 35)	83
Abbildung 108: (Apolin, 2007, S. 35)	83
Abbildung 109: (Apolin, 2007, S. 36)	84
Abbildung 110: (Apolin, 2007, S. 36)	85
Abbildung 111: (Apolin, 2007, S. 37)	85
Abbildung 112: (Apolin, 2007, S. 37)	85
Abbildung 113: (Apolin, 2007, S. 37)	86
Abbildung 114: (Apolin, 2007, S. 37)	86
Abbildung 115: (Apolin, 2007, S. 38)	87
Abbildung 116: (Apolin, 2007, S. 37)	87
Abbildung 117: (Apolin, 2007, S. 39)	88
Abbildung 118: (Apolin, 2007, S. 39)	88
Abbildung 119: (Apolin, 2007, S. 35)	88
Abbildung 120: (Apolin, 2007, S. 40)	89
Abbildung 121: (Apolin, 2007, S. 51)	90
Abbildung 122: (Apolin, 2007, S. 51)	90
Abbildung 123: (Apolin, 2007, S. 51)	91
Abbildung 124: (Apolin, 2007, S. 51)	91
Abbildung 125: (Apolin, 2007, S. 53)	91

Abbildung 126: (Apolin, 2007, S. 53).....	92
Abbildung 127: (Apolin, 2007, S. 53).....	92
Abbildung 128: (Apolin, 2007, S. 53).....	92
Abbildung 129: (Apolin, 2007, S. 54).....	93
Abbildung 130: (Apolin, 2007, S. 55).....	93
Abbildung 131: (Apolin, 2007, S. 55).....	94
Abbildung 132: (Apolin, 2007, S. 55).....	94
Abbildung 133: (Apolin, 2007, S. 58).....	96
Abbildung 134: (Apolin, 2007, S. 58).....	96
Abbildung 135: (Apolin, 2007, S. 59).....	97
Abbildung 136: (Apolin, 2007, S. 62).....	98
Abbildung 137: (Apolin, 2007, S. 63).....	99
Abbildung 139: (Apolin, 2007, S. 65).....	101
Abbildung 138: (Apolin, 2007, S. 65).....	101
Abbildung 140: (Apolin, 2007, S. 66).....	101
Abbildung 141: (Apolin, 2007, S. 67).....	101
Abbildung 142: (Apolin, 2007, S. 68).....	102
Abbildung 143: (Apolin, 2007, S. 68).....	102
Abbildung 144: (Apolin, 2007, S. 74).....	103
Abbildung 145: (Apolin, 2007, S. 77).....	104
Abbildung 146: (Apolin, 2007, S. 77).....	105
Abbildung 147: (Apolin, 2007, S. 87).....	105
Abbildung 148: (Apolin, 2007, S. 95).....	106
Abbildung 149: (Apolin, 2007, S. 101).....	107
Abbildung 150: (Apolin, 2007, S. 101).....	107
Abbildung 151: (Apolin, 2007, S. 101).....	107
Abbildung 152: (Apolin, 2007, S. 103).....	108
Abbildung 153: (Apolin, 2007, S. 103).....	108
Abbildung 154: (Apolin, 2007, S. 105).....	108
Abbildung 155: (Apolin, 2007, S. 110).....	109
Abbildung 156: (Apolin, 2007, S. 116).....	109
Abbildung 157: (Sexl et al., 2012, S. 17)	111

Abbildung 158: (Sexl et al., 2012, S. 17).....	111
Abbildung 159: (Sexl et al., 2012, S. 18).....	112
Abbildung 160: (Sexl et al., 2012, S. 23).....	114
Abbildung 161: (Sexl et al., 2012, S. 24).....	115
Abbildung 162: (Sexl et al., 2012, S. 34).....	117
Abbildung 163: (Sexl et al., 2012, S. 34).....	118
Abbildung 164: (Sexl et al., 2012, S. 34).....	118
Abbildung 165: (Sexl et al., 2012, S. 34).....	118
Abbildung 166: (Sexl et al., 2012, S. 35).....	119
Abbildung 167: (Sexl et al., 2012, S. 35).....	119
Abbildung 168: (Sexl et al., 2012, S. 43).....	121
Abbildung 169: (Sexl et al., 2012, S. 45).....	121
Abbildung 170: (Sexl et al., 2012, S. 45).....	121
Abbildung 171: (Sexl et al., 2012, S. 46).....	122
Abbildung 172: (Sexl et al., 2012, S. 46).....	122
Abbildung 173: (Sexl et al., 2012, S. 47).....	123
Abbildung 174: (Sexl et al., 2012, S. 49).....	124
Abbildung 175: (Sexl et al., 2012, S. 63).....	125
Abbildung 176: (Sexl et al., 2012, S. 63).....	125
Abbildung 177: (Sexl et al., 2012, S. 74).....	126
Abbildung 178: (Sexl et al., 2012, S. 75).....	126
Abbildung 179: (Sexl et al., 2012, S. 77).....	127
Abbildung 180: (Sexl et al., 2012, S. 77).....	127
Abbildung 181: (Sexl et al., 2012, S. 78).....	127
Abbildung 182: (Sexl et al., 2012, S. 86).....	127

9. LEBENSLAUF

Persönliche Daten:

Vor- und Zuname	Nadine Pacher
-----------------	---------------

Studium und Ausbildung:

10/2008 – heute	Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik, Universität Wien
09/2003 – 05/2008	Bundeshandelsakademie Korneuburg
09/1999 – 06/2003	Musikhauptschule Korneuburg
09/1995 – 06/1999	Volksschule Leobendorf

Berufserfahrung:

09/2014 – heute	Lehrerin Gymnasium Korneuburg
07/2008 – 08/2014	Office Coordinator oder Buchhaltung Mondi Korneuburg GmbH
07/2007	Qualitätsmanagement Haas Franz Waffel- und Keksanlagen Industrie GmbH
07/2006	Qualitätsmanagement Haas Franz Waffel- und Keksanlagen Industrie GmbH
07/2005	Büro und Schalter BAWAG Floridsdorf
07/2004	Verkauf Spar AG, 2100 Korneuburg