



DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Elementare Flächentheorie –
von den Grundlagen zur Krümmung“

Verfasser

Dipl.-Ing. (FH) Josua Gruber

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium UF Mathematik UF Physik

Betreuer: ao. Univ.-Prof. Dr. Roland Steinbauer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Reguläre Flächen	3
3	Glatte Abbildungen	16
3.1	Abriss der mehrdimensionalen Differenzialrechnung	16
3.2	Glatte Abbildungen auf regulären Flächen	17
3.2.1	Abbildungen mit Wertebereich in Flächen	18
3.2.2	Abbildungen definiert auf Flächen	24
3.2.3	Abbildungen zwischen Flächen	26
4	Die Tangentialebene an eine reguläre Fläche	30
4.1	Lineare Bestapproximation	30
4.2	Differenzial glatter Abbildungen zwischen Flächen	35
5	Geometrische Größen regulärer Flächen	41
5.1	Die erste Fundamentalform	41
5.2	Normalenfelder und Orientierbarkeit	50
5.3	Die zweite Fundamentalform	54
5.4	Krümmung	62
6	Klassen von Flächen	73
6.1	Regelflächen	73
6.2	Minimalflächen	76
	Literaturverzeichnis	82
	Zusammenfassung	83
	Lebenslauf	84

1 Einleitung

Diese Arbeit bietet eine Einführung in die Theorie der Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum. Ihr Ziel ist es Studierenden des Unterrichtsfaches Mathematik einen Einblick in dieses Teilgebiet der elementaren Differenzialgeometrie zu ermöglichen. Dabei wird an den Wissensstand, nach Absolvierung der Hauptvorlesungszyklen Analysis und lineare Algebra, angeknüpft. Insbesondere werden in diesem Teilgebiet der elementaren Differenzialgeometrie die Fächer Analysis, lineare Algebra, aber auch Geometrie, die oft nebeneinander und ohne wechselseitige Bezüge im Studium unterrichtet werden, zusammengeführt. Dahingehend will diese Arbeit motivationsstiftend wirken. In diesem Sinne wird auch der Inhalt mit vielen motivierenden Beispielen anschaulich illustriert und neben dem notwendigen streng mathematischen Zugang auch ein intuitives Verstehen der jeweiligen Konzepte vermittelt.

Der Hauptgegenstand dieser Arbeit sind zweidimensionale Flächen, die im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ liegen, genauer handelt es sich dabei um hinreichend „glatte“ Flächen, die sogenannten *regulären Flächen*. Derartige Flächen werden mit Hilfe der elementaren Analysis und Resultaten aus der linearen Algebra beschrieben, was zu Kenntnissen über die „Geometrie“ regulärer Flächen führt. Um Begriffe zu definieren, die eine derartige Beschreibung erlauben, legen wir zunächst ein Fundament, um Analysis auf solchen regulären Flächen betreiben zu können. Dabei werden die Begriffe der *Tangentialebene an reguläre Flächen* und des *Differenzials von Abbildungen zwischen regulären Flächen* eingeführt. Mit Hilfe dieser Begriffe gelingt es dann geometrische Größen wie Längen, Winkel und Krümmungen zu studieren.

In diesem Sinne ist Geometrie immer mit der Einführung eines Maßes bzw. einer Metrik verbunden. Die metrischen Verhältnisse werden im wesentlichen durch zwei Fundamentalgrößen, die *erste* und *zweite Fundamentalform*, beschrieben. Die erste Fundamentalform gibt Auskunft über die innere Geometrie der Fläche. Der inneren Geometrie entsprechen Größen, die sich allein durch Messungen (Längen- und Winkelmessungen) innerhalb der Fläche bestimmen lassen.

Oft wird, um eine bessere Vorstellung zu erhalten, das Bild von auf der Fläche lebenden zweidimensionalen Wesen verwendet. Diese sogenannten Flachländer können weder aus der Fläche heraustreten noch heraussehen. Zur Beschreibung ihrer Umgebung stehen Flachländern lediglich Größen, die sich mit Hilfe der ersten Fundamentalform ausdrücken lassen, zur Verfügung. Die äußere Geometrie hingegen berücksichtigt die Lage der Fläche im umgebenden Raum, was sich mathematisch darin niederschlägt, dass die sogenannte zweite Fundamentalform bzw. von ihr abgeleitete Größen verwendet werden.

Eine zentrale Größe in der klassischen Flächentheorie ist die *Krümmung*. Die Krümmung einer Fläche ist eng mit der Krümmung von Kurven, die in der Fläche verlaufen, verbunden. A priori ist nicht klar, wo der Krümmungsbegriff einzuordnen ist, das heißt,

es ist nicht von vornherein ersichtlich, ob ein Flachländer feststellen kann, dass er zum Beispiel auf einer Kugeloberfläche lebt bzw. ob er überhaupt in der Lage ist verschiedene Flächen voneinander zu unterscheiden. Diese und ähnliche Fragen werden im Laufe dieser Arbeit beantwortet.

Die Darstellung der Inhalte und die Notation erfolgte in Anlehnung an das Buch von Christian Bär: *Elementare Differentialgeometrie*, Walter De Gruyter, Berlin, zweite Auflage, 2010. Weitere wichtige Quellen, die beim Verfassen der Arbeit herangezogen wurden, sind: M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976 und A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer-Verlag, London, 2001.

2 Reguläre Flächen

Zu Beginn legen wir das Fundament für alles Weitere und definieren die Klasse von Flächen, die wir im Folgenden studieren wollen. Genauer werden wir den Begriff *reguläre Fläche* motivieren und einführen, das heißt, wir stellen klar, was wir im mathematischen Sinne vernünftigerweise unter einer Fläche verstehen.

Eine anschauliche Vorstellung einer regulären Fläche erhält man, indem man gedanklich kleine Flächenstücke einer Ebene hernimmt, diese deformiert (dehnt, verbiegt,...) und anschließend so zusammenfügt, dass keine Selbstschnitte, Kanten oder Spitzen entstehen.

Die Grundidee besteht darin, eine reguläre Fläche als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit zweidimensionalem Charakter zu beschreiben. Die Sinnhaftigkeit der folgenden Definition wird in den anschließenden Kapiteln deutlich.

Definition 2.1 (Reguläre Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmenge. Wir nennen S eine reguläre Fläche, falls es zu jedem Punkt $p \in S$ ein offene Umgebung V von p im $\mathbb{R}^3$ gibt, sowie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, derart dass gilt

- (i) $F(U) = S \cap V$ und $F : U \rightarrow S \cap V$ ist ein Homöomorphismus.
- (ii) Die Jacobi-Matrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ Rang 2.

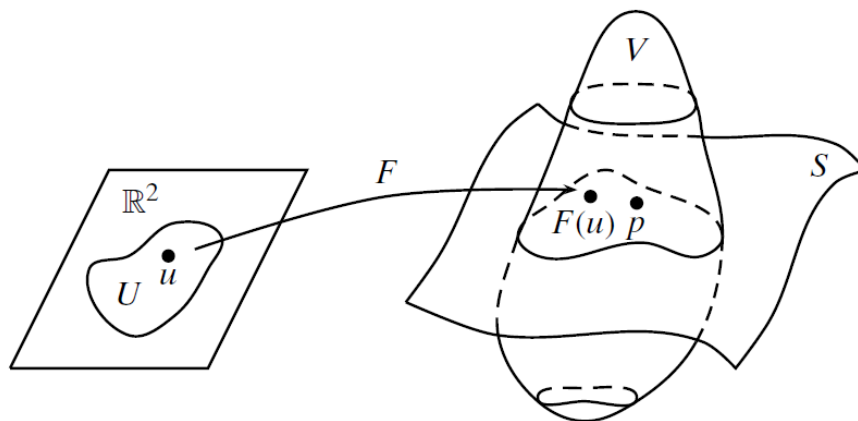


Abbildung 2.1: Abbildung reguläre Fläche [1, §3.1, S. 93]

Bemerkung 2.2 (Homöomorphismus). Homöomorphismen sind die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen. Formal ist ein Homöomorphismus eine stetige Bijektion, deren Umkehrfunktion auch stetig ist. Zwei topologische Räume heißen homöomorph, wenn zwischen ihnen ein Homöomorphismus existiert. Damit haben die beiden Räume dieselben topologischen Eigenschaften - sie sind vom Standpunkt der Topologie aus nicht unterscheidbar. Intuitiv bedeutet dies, dass die beiden Räume durch eine Deformation, allerdings ohne Reißen oder Kleben ineinander übergeführt werden können. Abbildung 2.2 veranschaulicht die Idee.

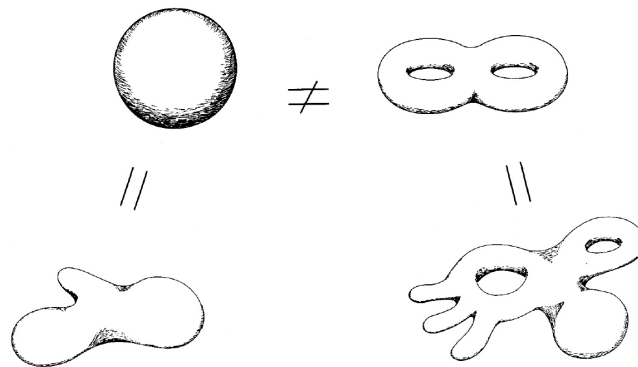


Abbildung 2.2: Topologisch (nicht) äquivalente Flächen [6, §6.3, S. 92]

Aufgrund der ersten Bedingung in Definition 2.1 bleibt somit die topologische Struktur unter der Abbildung F erhalten. Es wird sichergestellt, dass die Umgebung von p in S so “aussieht” wie die Umgebung von u in $\mathbb{R}^2$.

Die zweite Bedingung bewirkt, dass die Fläche nirgends zu einer Spitze oder einer Kurve zusammenläuft, also die Zweidimensionalität erhalten bleibt. Es wird somit garantiert, dass man an jeden Punkt der Fläche eine Tangentialebene anlegen kann, worauf wir im Kapitel 4 näher eingehen.

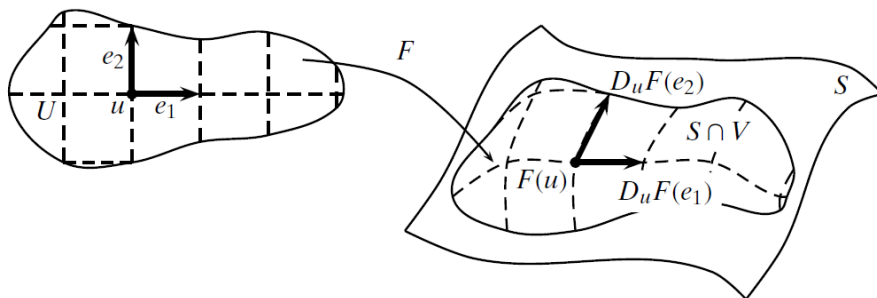


Abbildung 2.3: Unabhängigkeit der Parameter [1, §3.1, S. 93]

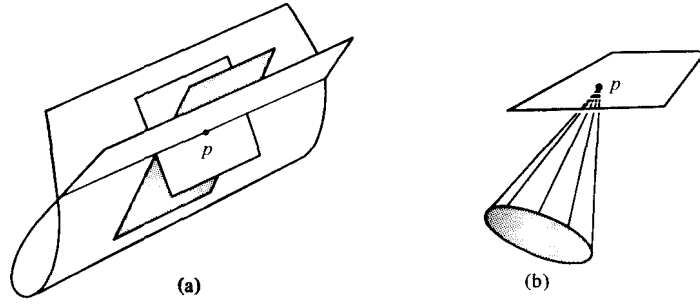


Abbildung 2.4: Fälle die durch Definition 2.1 vermieden werden [9, §2.1, S. 55]

Oft sind nicht alle Punkte in S durch die selbe Abbildung F beschreibbar, was zum Beispiel bei der Einheitssphäre der Fall ist (siehe Beispiel 2.6). Das heißt, die Existenz einer sogenannten globalen Parametrisierung ist keinesfalls die Regel. In solch einem Fall überdecken wir die Fläche S einfach durch mehrere lokale Parametrisierungen.

Definition 2.3 (Lokale Parametrisierung). Die Abbildung $F : U \rightarrow S \cap V$ aus Definition 2.1 heißt lokale Parametrisierung von S um p . Die Menge $S \cap V$ heißt Koordinatenumgebung von p . Die Komponenten u^1 und u^2 von $u = (u^1, u^2)$ heißen dann auch Koordinaten des Punktes $F(u) \in S$ (bzgl. der Parametrisierung F).

Bemerkung 2.4 (Karten). Oft wird in der Differentialgeometrie auch der Begriff der Karte verwendet. Wir nennen den Homöomorphismus bzw. das Tupel $(F^{-1}, S \cap V)$ eine Karte von S um p mit dem Kartengebiet $S \cap V$. Jedes Teilgebiet der Fläche kann mit Karten auf eine Ebene abgebildet werden. Diese Terminologie passt mit der Vorstellung zusammen, dass kleine Teile der Fläche aussehen wie eine Ebene.

Beispiel 2.5 (Affine Ebenen). Ein simples Beispiel für reguläre Flächen sind die affinen Ebenen, gegeben durch einen Punkt p und zwei linear unabhängige Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$,

$$S = \{p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}.$$

In diesem Fall reicht eine einzige Parametrisierung aus. Wir setzen $V := \mathbb{R}^3$, $U := \mathbb{R}^2$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y$. Offensichtlich sind die Bedingungen aus der Definition 2.1 alle erfüllt. Die Abbildung F ist glatt und homöomorph. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $X = (x^1, x^2, x^3)$, $Y = (y^1, y^2, y^3)$ hat auch die Jacobimatrix

$$D_u F = \begin{pmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{pmatrix}$$

vollen Rang und ist sogar unabhängig von u .

Beispiel 2.6 (Einheitssphäre). Betrachten wir als weiteres Beispiel die Einheitssphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Um nachzuweisen, dass es sich bei diesem Beispiel um eine reguläre Fläche handelt, brauchen wir mindestens zwei Parametrisierungen. Da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt und S^2 eine kompakte Menge ist, würde die Annahme, es gäbe nur eine Parametrisierung, zu einem Widerspruch führen, da ja U eine offene Menge ist.

Zuerst stellen wir klar, dass es sich bei der Abbildung $X_1 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$X_1(x, y) := (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

mit $(x, y) \in U$ und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, um eine lokale Parametrisierung der Einheitssphäre handelt. Mit $V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ gilt $X_1(U) = S^2 \cap V_1$. Das Bild $X_1(U)$ stellt den Teil der Einheitssphäre oberhalb der x,y-Ebene dar (ausgenommen der Punkte, für die $z = 0$ gilt).

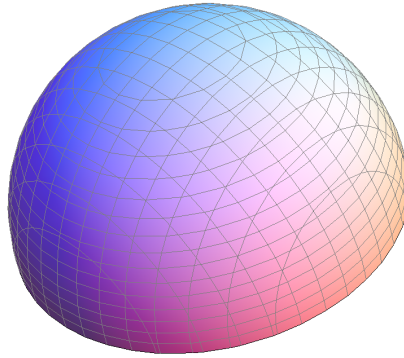


Abbildung 2.5: Lokale Parametrisierung der Einheitssphäre

Nun gilt es die Bedingungen der Definition 2.1 zu prüfen. Auf der offenen Menge U ist $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ glatt. Weiters besitzt die Jacobimatrix

$$D_{(x,y)}X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}$$

vollen Rang. Offensichtlich ist X_1 injektiv und die Umkehrabbildung $Y : X_1(U) \rightarrow U$ gegeben durch die Projektion $Y(x, y, z) := (x, y)$ ist stetig. Somit sind die Bedingungen aus der Definition 2.1 der regulären Flächen erfüllt.

Jetzt gilt es noch die ganze Einheitssphäre mit analogen lokalen Parametrisierungen zu überdecken. Dazu definieren wir weiter $X_2 : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$X_2(x, y) := (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}).$$

Durch diese Abbildung wird der untere Teil der Einheitssphäre dargestellt. Das bedeutet,

$X_1(U) \cup X_2(U)$ überdecken die Einheitssphäre ohne den Äquator

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}.$$

Somit gilt mit $V_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 0\}$, dass $X_2(U) = S^2 \cap V_2$. Die Nachprüfung der Bedingungen aus der Flächendefinition erfolgt analog wie für X_1 .

Analog verwenden wir nun die x,z-Ebene und die z,y-Ebene an Stelle der x,y-Ebene und definieren folgende lokale Parametrisierungen $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, ($i = 3, 4, 5, 6$):

$$\begin{aligned} X_3(x, z) &:= (x, \sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & V_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\}, \\ X_4(x, z) &:= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z), & V_4 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y < 0\}, \\ X_5(y, z) &:= (\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & V_5 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\}, \\ X_6(y, z) &:= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z), & V_6 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\}. \end{aligned}$$

Die Einheitssphäre wird durch die Parametrisierungen X_i und $X_i(U) = S^2 \cap V_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ vollständig überdeckt. Somit existiert für jeden Punkt $p \in S^2$ mindestens eine lokale Parametrisierung im Sinne obiger Definition 2.1. Es handelt sich also bei der Einheitssphäre um eine reguläre Fläche.

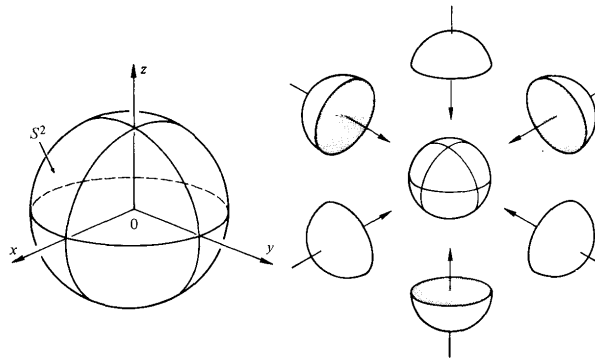


Abbildung 2.6: Überdeckung der Einheitssphäre [9, §2.1, S. 56]

Dieses Beispiel zeigt, dass es teilweise langwierig ist die Bedingungen zu prüfen, ob es sich um eine reguläre Fläche handelt, was die folgende Proposition 2.7 motiviert. Diese vereinfacht für eine ganze Klasse von Beispielen das Nachprüfen erheblich. Für den Beweis verwenden wir Ideen, welche wir bereits im obigen Beispiel angewandt haben.

Proposition 2.7 (Funktionsgraph als reguläre Fläche). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, dann ist der Graph von f ,*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

eine reguläre Fläche.

Beweis. Um zu zeigen, dass S eine reguläre Fläche ist, betrachten wir die Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch $F(x, y) := (x, y, f(x, y))$. Die Abbildung F ist glatt und mit $V := \mathbb{R}^3$ gilt offensichtlich $F(U) = S = S \cap V$. Weiters hat die Jacobimatrix

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

vollen Rang. Offensichtlich wird jedem $(x, y) \in U$ genau ein Punkt $p \in S$ zugeordnet und die Umkehrabbildung, gegeben durch die Projektion $G : S \rightarrow U$, $G(x, y, z) := (x, y)$, ist stetig. Also gilt $F : U \rightarrow S$ als Homöomorphismus und die Bedingungen der Definition 2.1 sind erfüllt. $\square$

Wir sehen, dass in diesem Fall die reguläre Fläche durch eine einzige Parametrisierung gegeben ist. Die Proposition 2.7 hätte uns im Fall der Einheitssphäre S^2 aber insofern geholfen, als dass wir sie (lokal) für jede Parametrisierung $X_1, X_2, \dots, X_6$ anwenden hätten können und uns so ein direktes Nachprüfen der Bedingungen aus Definition 2.1 erspart hätten.

Beispiel 2.8 (Stereographische Projektion). Wir werden nochmals die Einheitssphäre heranziehen und zeigen, dass man bei geschickter Wahl der Parametrisierungen mit nur zwei Koordinatenumgebungen auskommt. Das ist, nach der Bemerkung in Beispiel 2.6, das Minimum. Die Idee ist in der Abbildung 2.7 dargestellt. Wir positionieren die Sphäre auf der x,y-Ebene, sodass der Südpol mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt.

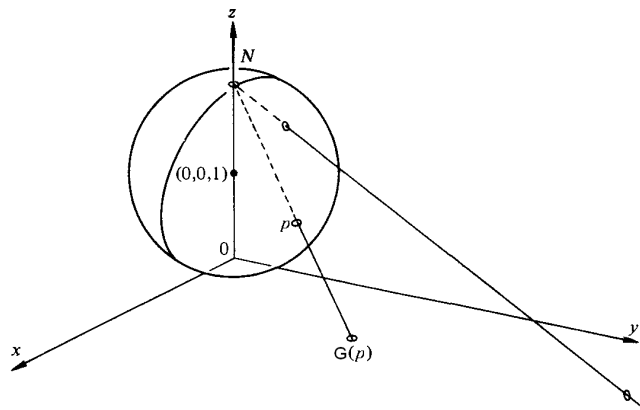


Abbildung 2.7: Stereographische Projektion [9, §2.1, S. 67]

Die Sphäre ist dann gegeben durch

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

und die stereographische Projektion durch $G : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Jedem Punkt $p = (x, y, z) \in S^2$ der Sphäre, ausgenommen dem Nordpol $N = (0, 0, 2)$, wird ein Punkt auf der x,y-Ebene zugewiesen. Dieser Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ist bestimmt als Schnittpunkt der x,y-Ebene mit der Geraden X , welche durch die Punkte N und $p = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ geht. Die Abbildung ist dann gegeben durch $G(x, y, z) := (u, v)$ mit $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ und $(u, v) \in$ x,y-Ebene. Wie wollen nun die Umkehrfunktion

$$F_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

finden. Dazu suchen wir nach den Schnittpunkten der Geraden

$$X : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} u \\ v \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit der Sphäre

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Durch Einsetzen erhält man die Gleichung $(t \cdot u)^2 + (t \cdot v)^2 + ((2 - 2t) - 1)^2 = 1$. Diese besitzt zwei Lösungen $t = 0$ und $t = \frac{4}{u^2 + v^2 + 4}$, wobei nur zweite von Interesse ist. Die Abbildung F_N lässt sich dann folgendermaßen angeben

$$F_N(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4} \\ \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4} \\ \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun die Sphäre mit Hilfe der stereographischen Projektion mit nur zwei Koordinatenumgebungen überdecken. Es fehlt uns letztendlich nur der Nordpol. Um eine geeignete Parametrisierung zu konstruieren, verwenden wir als Schnittebene $E : z = 2$ über der Sphäre und betrachten die Schnittpunkte der Geraden, welche durch den Südpol $S = (0, 0, 0)$ und $p = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{S\}$ geht, mit der Ebene E . Die Vorgehensweise erfolgt analog und man erhält folgende Abbildung

$$F_S(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4} \\ \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4} \\ \frac{8}{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $U := \mathbb{R}^2$ und $V_N := S^2 \setminus \{N\}$ bzw. $V_S := S^2 \setminus \{S\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F_N(U) &= S^2 \cap V_N \\ F_S(U) &= S^2 \cap V_S \end{aligned}$$

und die Sphäre kann durch diese beiden Umgebungen vollständig überdeckt werden. Dass F_N und F_S Homöomorphismen sind, ist anschaulich klar und dass die Jacobimatrizen $D_u F_N$ und $D_u F_S$ Rang 2 haben, kann leicht explizit nachgeprüft werden. Wir haben also

Parametrisierungen im Sinne der Definition 2.1 gefunden.

Eine weitere Proposition soll uns helfen eine in der Form $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = \text{const.}\}$ gegebene Menge als reguläre Fläche zu identifizieren. Wie bei Proposition 2.7, wird dadurch das Nachprüfen für eine ganze Klasse von Beispielen erleichtert.

Proposition 2.9 (Niveaumenge als reguläre Fläche). *Sei $V_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir setzen $S := \{(x, y, z) \in V_0 \mid f(x, y, z) = \text{const.}\}$. Falls für alle $p \in S$ gilt*

$$\text{grad } f(p) \neq (0, 0, 0),$$

dann ist S eine reguläre Fläche.

Beweis. Wir setzen $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Es gilt

$$\text{grad } f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(p)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(p)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(p)}{\partial z} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher können wir o.B.d.A. annehmen, dass

$$\frac{\partial f(p)}{\partial z} \neq 0.$$

Jetzt ist es möglich, nach dem Satz über implizite Funktionen [2, §8, S. 89], $f(p) = 0$ lokal nach z aufzulösen. Das heißt, es existiert eine offene Umgebung $V \subseteq V_0$ von p , eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0) und eine glatte Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y)) \mid (x, y) \in U\}.$$

Jetzt brauchen wir nur noch $F : U \rightarrow V$ mit $F(x, y) := (x, y, g(x, y))$ zu definieren um lokale Parametrisierungen zu erhalten, die ganz S überdecken. Die Bedingungen der Proposition 2.7 sind erfüllt, dadurch ist gezeigt, dass es sich um eine reguläre Fläche handelt. $\square$

Bemerkung 2.10. Wir haben eine reguläre Fläche über die Existenz von lokalen Parametrisierungen $F : U \rightarrow S \cap V$ von S um p definiert. Die Propositionen 2.7 und 2.9 sagen uns, dass unter gewissen Bedingungen gegebene Funktionsgraphen und Niveaumengen die Existenz regulärer Flächen bedeuten.

Tatsächlich gilt sogar die Umkehrung: Haben wir eine reguläre Fläche gegeben und sei $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S um p , dann existiert eine glatte Abbildung $f : U \rightarrow W$ mit $W \subseteq \mathbb{R}$ offen, sodass $p \in S \cap (U \times W) = \text{Graph}(f) := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$. Ebenso gibt es eine glatte Abbildung $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $W \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, sodass $p \in S \cap W = f^{-1}(0)$. Im lokalen Sinne (für eine Umgebung von p) sind also die Existenzen von Parametrisierung, Funktionsgraphen und Niveaufäche äquivalent. [3, §10.4, S. 41]

Proposition 2.9 liefert uns eine Fülle neuer Beispiele regulärer Flächen. Einige davon wollen wir uns explizit ansehen.

Beispiel 2.11 (Hyperbolisches Paraboloid). Das hyperbolische Paraboloid ist gegeben durch

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z = 0 \right\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Um Proposition 2.9 anwenden zu können, setzen wir $V_0 := \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - z$.

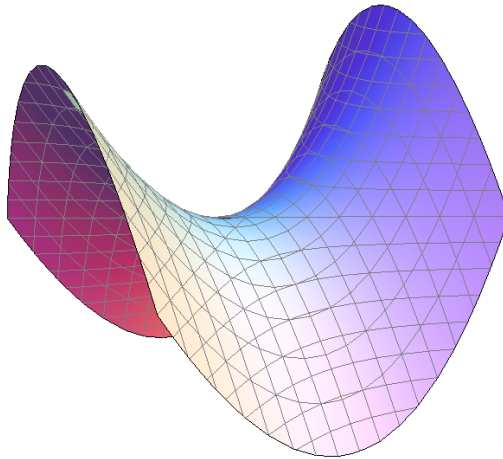


Abbildung 2.8: Hyperbolisches Paraboloid

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass der Gradient von f für alle $p \in S$ nicht verschwindet. Offensichtlich ist der Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{b}, -1 \right)$$

für alle $p \in S$ ungleich $(0, 0, 0)$. Es handelt sich also um eine reguläre Fläche.

Beispiel 2.12 (Elliptisches Paraboloid). Die Betrachtung erfolgt ganz analog wie bei Beispiel 2.11. Das elliptische Paraboloid ist gegeben durch

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - z = 0 \right\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir setzen wieder $V_0 := \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $f(x, y, z) := \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - z$.

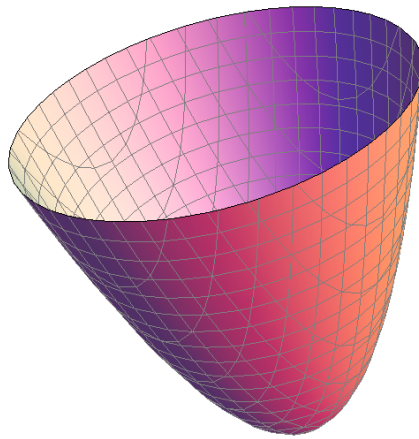


Abbildung 2.9: Elliptisches Paraboloid

Der Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a}, -\frac{2y}{b}, -1 \right)$$

ist für alle $p \in S$ ungleich $(0, 0, 0)$. Es handelt sich also wieder um eine reguläre Fläche.

Beispiel 2.13 (Torus). Die Betrachtung erfolgt wieder analog wie in den beiden vorherigen Beispielen 2.11 und 2.12. Geometrisch kann der Torus wie folgt definiert werden: Der Mittelpunkt einer Kreisscheibe vom Radius r ($0 < r < 1$) bewegt sich am Einheitskreis in der x, y -Ebene, sodass die Kreisscheibe stets senkrecht zum Einheitskreis steht.

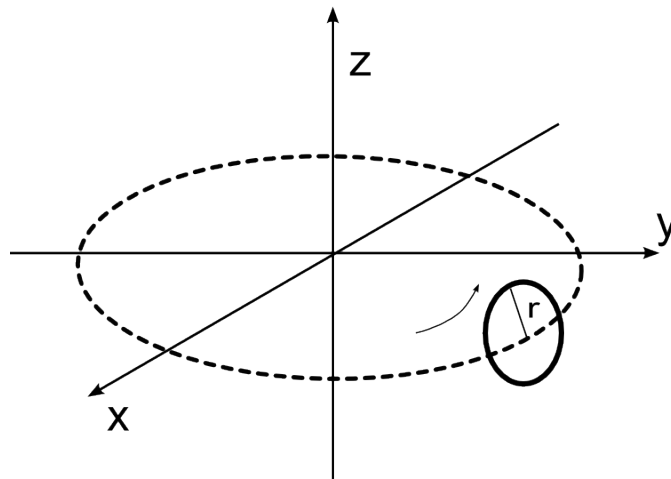


Abbildung 2.10: Konstruktion Torus

Parametrisiert man diese Konstruktion durch zwei Winkel λ und φ , so kann man die

entstehende Fläche beschreiben durch $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned}x &= (1 + r \cos \varphi) \cos \lambda \\y &= (1 + r \cos \varphi) \sin \lambda \\z &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Wir wollen den Torus durch ein Nullstellengebilde beschreiben. Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (1 + r \cos \varphi)^2 \text{ also } r \cos \varphi = \pm \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \text{ und daher} \\r^2 &= r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = (\pm \sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 1 \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{also } \pm 2\sqrt{x^2 + y^2} &= x^2 + y^2 + z^2 + 1 - r^2.\end{aligned}$$

Weil die rechte Seite ≥ 0 ist, erhalten wir den Torus als Nullstellenmenge der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 - r^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

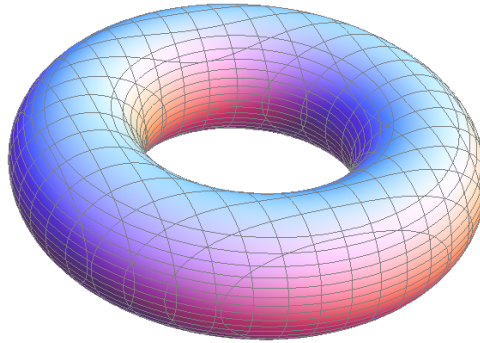


Abbildung 2.11: Torus

Es gilt

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(2x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), 2y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), 2z \right)$$

und daher für alle $z \neq 0$ $\text{grad } f(x, y, z) \neq 0$. Im Falle $z = 0$ gilt für die Nullstellenmenge $1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0$, also ebenfalls $\text{grad } f(x, y, z) \neq 0$. Wir haben somit eine weitere reguläre Fläche gefunden.

Bemerkung 2.14. Zu beachten ist, falls S als Nullstellengebilde gegeben ist, dass die Bedingung $\text{grad } f(p) \neq (0, 0, 0)$ in Proposition 2.9 hinreichend, aber nicht notwendig ist um S als reguläre Fläche zu identifizieren. Für eine explizite Darstellung der Sphäre als Nullstellenmenge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ mit $\text{grad } f(x, y, z) = 0 \ \forall p \in S^2$ siehe Bär Seite 97 [1, §3.1, S. 97].

Wir geben nun ein Beispiel für eine Fläche, welche nicht den Kriterien einer regulären Fläche entspricht.

Beispiel 2.15 (Doppelkegel). Der Doppelkegel ist gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Wir wollen nun überprüfen ob es sich hier um eine reguläre Fläche handelt. Wir versuchen es einmal mit Proposition 2.9. Dazu setzen wir $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$. Der Gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$$

verschwindet nur für $p_0 = (0, 0, 0)$. Allerdings ist p_0 in S enthalten. Was wir jedoch tun können ist, dass wir f auf $V_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \{p_0\}$ einschränken. Dann ist

$$S \cap V_0 = S \setminus \{p_0\}$$

eine reguläre Fläche im Sinne der Proposition 2.9

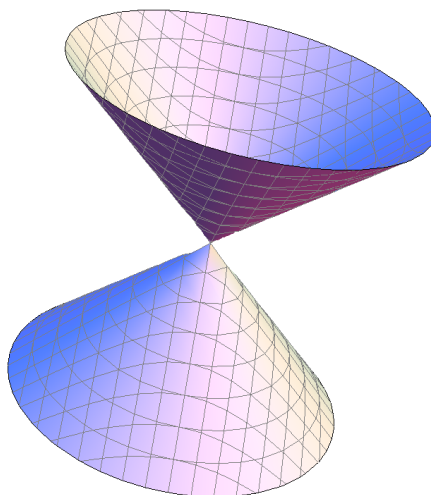


Abbildung 2.12: Doppelkegel

Wenn wir jetzt annehmen, S sei eine reguläre Fläche, dann existiert eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$, sodass p_0 in $S \cap V$ ist. Nach Definition 2.1 ist F ein Homöomorphismus. Wir setzen $a := F^{-1}(p_0)$, wobei sich a in der offenen Umgebung U befindet. Wir können annehmen, dass U eine offene Kreisscheibe mit a im Zentrum ist, nachdem jede offene Menge, die a enthält, so eine offene Kreisscheibe enthält. $S \cap V$ muss offensichtlich einen Punkt p im unteren Teil des Doppelkegels mit $z < 0$ enthalten und ebenso einen Punkt q im oberen Teil mit $z > 0$. Wir setzen $b := F^{-1}(p)$ und $c := F^{-1}(q)$.

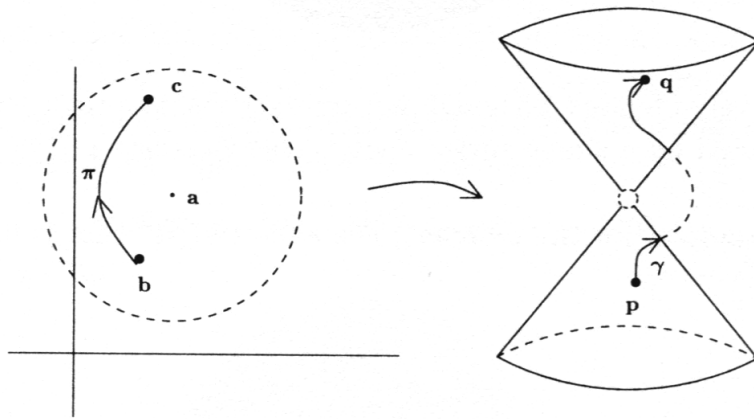


Abbildung 2.13: Doppelkegel - Singularität [7, §4.1, S. 64]

In der offenen Kreisscheibe U können wir nun b und c durch einen stetigen Weg π verbinden, welcher a nicht enthält. Das Bild des Weges π unter F , gegeben als die Verkettung $\gamma = F \circ \pi$, befindet sich zur Gänze in $S \cap V$. Dort geht γ durch p und q , ohne durch p_0 zu gehen. Dies ist aber offenbar nicht möglich. Der Doppelkegel ist also keine reguläre Fläche. S hat im Punkt p_0 eine sogenannte Singularität.

Im folgenden Kapitel setzen wir uns mit Differenzierbarkeitsfragen bezüglich Abbildungen auseinander, die ihren Definitionsbereich und/oder Wertebereich auf einer regulären Fläche haben.

3 Glatte Abbildungen

Differenzialgeometrie ist gekennzeichnet durch ein Zusammenspiel von Analysis und Geometrie. Um zu den wesentlichen geometrischen Begriffen, wie zum Beispiel der Krümmung, zu gelangen, benötigen wir Methoden der Analysis, vor allem die der Differenzialrechnung. Wir wollen nun die bekannten Methoden der Differenzialrechnung auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf „spezielle“ Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, unsere regulären Flächen, übertragen. Das erlaubt uns dann zum Beispiel Analysis auf einer Kugeloberfläche zu betreiben. Zuvor wollen wir kurz wiederholen, was Differenzierbarkeit bzw. Glattheit für Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, bedeutet.

3.1 Abriss der mehrdimensionalen Differenzialrechnung

Betrachten wir zunächst den leichter zugänglichen Begriff der partiellen Ableitung. Für eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bedeutet partielle Differenzierbarkeit in der i -ten Veränderlichen im Punkt $x \in U$ nichts anderes als die Existenz der gewöhnlichen Ableitung nach der i -ten Variable bei Festhaltung der übrigen $n - 1$ Veränderlichen:

$$D_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h}.$$

Dabei ist $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i -te Einheitsvektor und $h \in \mathbb{R}$. Man schreibt für den Grenzwert auch $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. Übertragen auf Abbildungen $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit den Komponentenfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_m$, bedeutet partielle Differenzierbarkeit die partielle Differenzierbarkeit aller $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2, \dots, m$.

Differenzierbarkeit ist spezieller und bezeichnet die Eigenschaft einer Abbildung sich lokal um einen Punkt in eindeutiger Weise linear approximieren zu lassen. Da die partielle Differenzierbarkeit (für alle Veränderlichen) nur die lokale Approximierbarkeit durch Gerade in allen Richtungen, nicht jedoch durch eine einzige lineare Abbildung (Ebene) fordert, ist Differenzierbarkeit „stärker“ als partielle Differenzierbarkeit. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher haben wir also zwei Ableitungsbegriffe. Die Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt bedeutet also, dass diese sich dort lokal durch eine lineare Abbildung approximieren lässt. Ist dies der Fall, sagt man, die Abbildung ist differenzierbar.

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in $x_0 \in U$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung

$$g(x) = A \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (A \cdot (x - x_0) + f(x_0))}{|x - x_0|} = 0.$$

Die Matrix A nennt man auch das Differenzial oder die Ableitung an der Stelle x_0 und man schreibt auch $Df(x_0)$.

Ist eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in U$ differenzierbar, dann ist sie dort auch partiell differenzierbar. Die Umkehrung gilt nicht. Wenn allerdings alle partiellen Ableitungen in $x_0 \in U$ existieren und diese stetig sind, ist die Abbildung dort auch differenzierbar. Die zugehörige Matrix der linearen Approximation ist identisch mit der Jacobi-Matrix :

$$Df(x) := J_f(x) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)(x)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}}.$$

Man schreibt für $Df(x)$ auch $D_x f$. Weiters ist zu erwähnen, dass Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert. Ist eine Abbildung differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in U$ und hängt $Df(x_0)$ stetig von x_0 ab, so heißt f in U stetig differenzierbar. Wir sagen, f ist von der Klasse C^1 . Ist die Abbildung k -mal stetig differenzierbar, bezeichnen wir f als C^k -Funktion. Wenn die Abbildung beliebig oft differenzierbar ist, schreiben wir C^∞ und nennen die Abbildung glatt.

Ein weiterer Begriff, den wir für die Betrachtung differenzierbarer Abbildungen benötigen, ist der des Diffeomorphismus: Eine glatte bijektive Abbildung $F : U \rightarrow V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, deren Umkehrabbildung ebenfalls glatt ist, nennt man Diffeomorphismus. Das ist eine „stärkere Version“ eines Homöomorphismuses. Zwei Mengen U und V heißen diffeomorph, falls es einen Diffeomorphismus von U nach V gibt. Als Beispiel: Die Fläche eines Quadrats ist homöomorph zu der Fläche einer Kreisscheibe, aber nicht diffeomorph, da an den Ecken Probleme hinsichtlich Differenzierbarkeit auftreten.

3.2 Glatte Abbildungen auf regulären Flächen

In der Differentialgeometrie spielen vielfach lokale Eigenschaften (von Flächen) eine Rolle. Darunter werden Eigenschaften verstanden, die lokal um jeden Punkt gelten.¹ Zum Beispiel verlangt Definition 2.1 (siehe Seite 3) eine typische lokale Eigenschaft: Jeder Punkt in der Fläche besitzt eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Menge des $\mathbb{R}^2$ ist. Diese Definition ist daher auch maßgeschneidert um lokale Eigenschaften vom $\mathbb{R}^2$ auf eine reguläre Fläche S zu „verpflanzen“. Eine solche typische lokale Eigenschaft ist die Differenzierbarkeit von Funktionen.

Genauer interessieren wir uns nun dafür, was es für Abbildungen, die ihren Definitionsbereich und/oder ihren Wertebereich auf regulären Flächen haben, bedeutet glatt zu

¹Genauer unterscheidet man zwei Arten lokaler Eigenschaften, nämlich solche die auf einer bzw. jeder Umgebung eines jeden Punktes gelten.

sein. Zuerst betrachten wir Abbildungen, die ihren Wertebereich in regulären Flächen haben.

3.2.1 Abbildungen mit Wertebereich in Flächen

Was es für eine Abbildung $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt glatt zu sein, ist klar (siehe Definition 3.1). Für solche Abbildungen „hinein“ (meint Abbildungen mit Wertebereich in regulären Flächen) lässt sich Glattheit auch mit Hilfe von Karten ausdrücken. Um die Idee zu konkretisieren, führen wir folgende Proposition 3.2 an.

Proposition 3.2 (Differenzierbarkeit von Abbildungen hinein). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S . Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und*

$$\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eine Abbildung mit $\varphi(W) \subseteq S \cap V$. Dann ist φ als Abbildung von W nach $\mathbb{R}^3$ glatt genau dann, wenn

$$F^{-1} \circ \varphi : W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$$

glatt ist.

Wir sehen also, dass es vom Standpunkt der Differenzierbarkeit egal ist, ob wir die Abbildung $\varphi : W \rightarrow S \cap V \subseteq \mathbb{R}^3$ „ganz normal“ (soll heißen wie in Kapitel 3.1) als Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^3$ betrachten oder via Anhängen der Karte F^{-1} (also die Abbildung $F^{-1} \circ \varphi$) als Abbildung mit Werten in $\mathbb{R}^2$ betrachten.

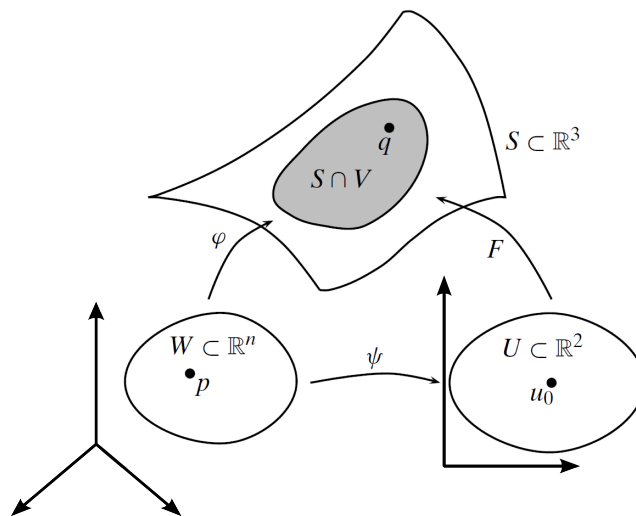


Abbildung 3.1: Abbildung mit Werten in S [1, §3.1, S. 100]

Beweis. Sei zuerst $\psi := F^{-1} \circ \varphi$ glatt. Um diese Richtung zu beweisen, wenden wir einen Trick an. Wir benutzen die allgemeine Kettenregel, die besagt, dass die Verkettung

glatter Abbildungen (im Sinne der Definition 3.1) glatt ist. Somit ist $\varphi = F \circ \psi$ als Verkettung glatter Abbildungen ebenfalls glatt.

Die andere Beweisrichtung gestaltet sich etwas aufwändiger. Das eben verwendete Argument funktioniert hier nicht, da F^{-1} auf $S \cap V$ definiert ist und wir noch nicht wissen, was in diesem Fall Differenzierbarkeit bedeutet. Sei also $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ glatt und $p \in W$. Wir setzen $q := \varphi(p) \in S \cap V$, $u_0 := F^{-1}(q) \in U$ und schreiben für $(u^1, u^2) \in U$

$$F(u^1, u^2) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung hat $D_{u_0}F$ maximalen Rang, somit ist die lineare Abbildung $D_{u_0}F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv und wir können o.B.d.A. annehmen, dass die 2×2 -Matrix $\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0) \right)$ invertierbar ist. Andernfalls wechseln wir die x-Koordinate oder die y-Koordinate durch die z-Koordinate aus.

Nun definieren wir die Abbildung $G : U \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$G(u^1, u^2, t) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) + t \end{pmatrix},$$

wobei $(u^1, u^2) \in U$ und $t \in (-1, 1)$. Geometrisch betrachtet, bildet G einen vertikalen Zylinder über U auf einen „vertikalen Zylinder“ über $F(U) = S \cap V$ ab. Anders ausgedrückt, S erhält lokal in $S \cap V$ eine räumliche Ausdehnung.

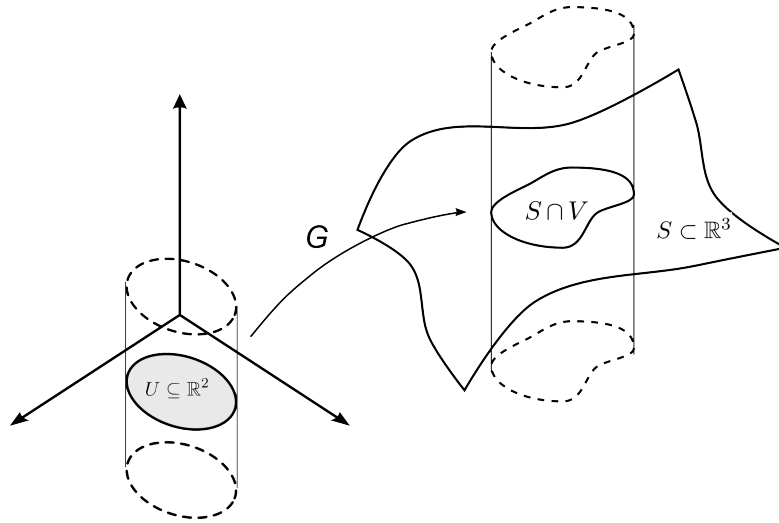


Abbildung 3.2: Veranschaulichung der neu definierten Funktion G

Nun berechnen wir das Differenzial von G an der Stelle $(u_0^1, u_0^2, 0)$:

$$D_{(u_0^1, u_0^2, 0)} G = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial x}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial y}{\partial u^2}(u_0) & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u^1}(u_0) & \frac{\partial z}{\partial u^2}(u_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes [4, §5.4, S. 114] können wir die Determinante nach der letzten Spalte entwickeln und erhalten:

$$\det D_{(u_0^1, u_0^2, 0)} G = \det \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)}(u_0) \right) \neq 0.$$

Daraus folgt, dass $D_{(u_0^1, u_0^2, 0)} G$ invertierbar ist und nach dem Umkehrsatz [2, §8, S. 96] existiert eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U \times \mathbb{R}$ von $(u_0^1, u_0^2, 0)$ und eine offene Umgebung $V_1 \subseteq V$ von q , sodass

$$G|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$$

bijektiv und die Umkehrabbildung glatt ist, also $G|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$ ein Diffeomorphismus ist.

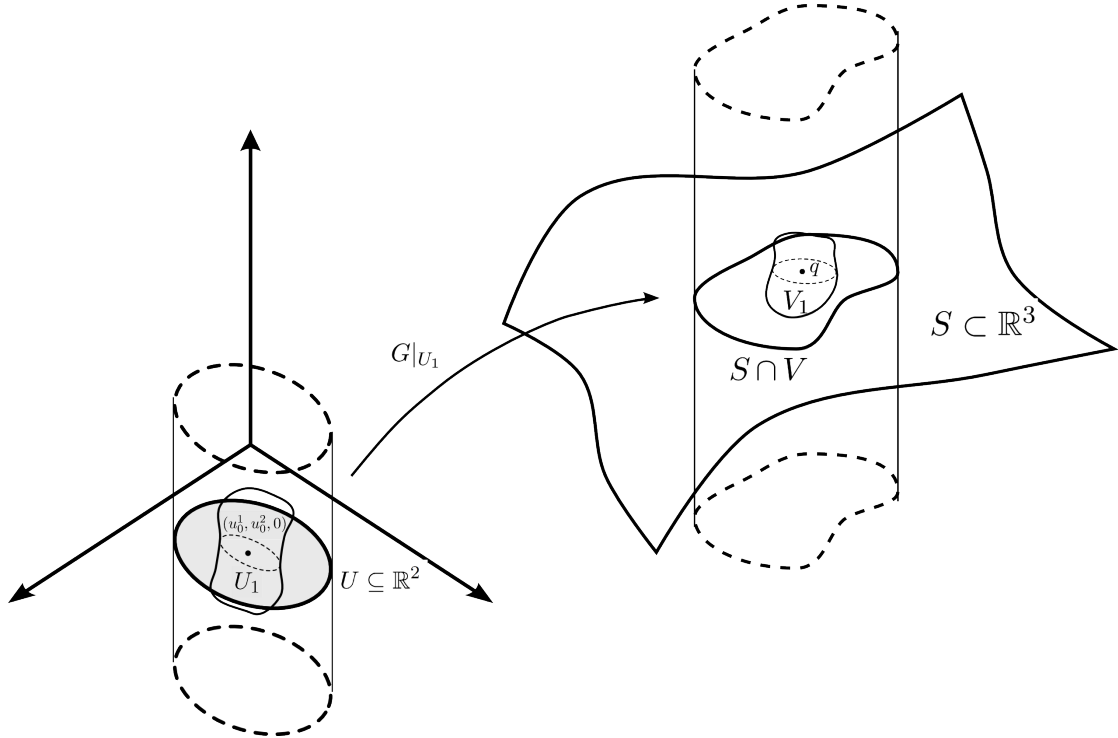


Abbildung 3.3: Einschränkung von G auf U_1

Da φ glatt ist, existiert eine offene Umgebung $W_1 \subseteq W$ von p , sodass $\varphi(W_1) \subseteq V_1 \cap S$.

Für $p' \in W_1$ gilt

$$G^{-1} \circ \varphi(p') = (F^{-1} \circ \varphi(p'), 0),$$

da $G|_{U \times \{0\}} = F$. Da $G^{-1} \circ \varphi$ als Verkettung zweier glatter Abbildungen wieder glatt ist (der selbe Trick wie zu Beginn des Beweises), gilt dies auch für $F^{-1} \circ \varphi$ für alle $p' \in W_1$, wobei W_1 eine offene Umgebung des beliebig vorgegebenen Punktes p ist. $\square$

Bemerkung 3.3. Der Beweis von Proposition 3.2 macht essentiell davon Gebrauch, dass die inverse Parametrisierung stetig ist und deren Jacobi-Matrix vollen Rang hat. Dies verdeutlicht noch einmal die Sinnhaftigkeit der Bedingungen in der Definition 2.1 regulärer Flächen.

Der Beweis ist zwar etwas technisch, allerdings erhalten wir dank Proposition 3.2 folgendes wichtige Resultat über Parametertransformationen (auch Kartenwechsel genannt) fast geschenkt. Der Kartenwechsel gibt an, was beim Übergang von einem Koordinatensystem U_1 zum anderen U_2 geschieht.

Korollar 3.4 (Parametertransformation). *Sei S eine reguläre Fläche, seien $F_1 : U_1 \rightarrow S \cap V_1$ und $F_2 : U_2 \rightarrow S \cap V_2$ lokale Parametrisierungen. Dann ist*

$$F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

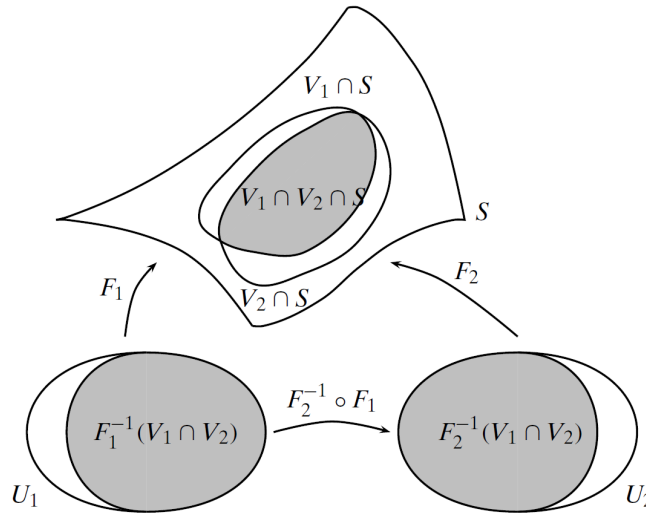


Abbildung 3.4: Parametertransformation [1, §3.1, S. 102]

Beweis. Wir können einfach Proposition 3.2 verwenden. Wir wissen, dass F_1 nach Voraussetzung glatt ist. F_1 soll nun unser φ aus Proposition 3.2 sein. Also setzen wir $W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ und $\varphi = F_1$. Nach Proposition 3.2 ist nun auch die Verkettung $F_2^{-1} \circ \varphi$ glatt. Wir erhalten, dass $F_2^{-1} \circ F_1 : F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ glatt ist. $\square$

Natürlich ist auch die Umkehrabbildung $F_1^{-1} \circ F_2 : F_2^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_1^{-1}(V_1 \cap V_2)$ glatt. Es folgt also unmittelbar aus Korollar 3.4, dass Parametertransformationen Diffeomorphismen sind. Dieses Resultat ist wesentlich um Differenzierbarkeit für Abbildungen „hinaus“ (meint Abbildungen mit Definitionsbereich in regulären Flächen und Wertebereich in $\mathbb{R}^n$) überhaupt definieren zu können.

Die nächste Proposition ist eine Art Umkehrung. Wenn wir eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$ gegeben haben und eine Teilmenge $\tilde{U}$ diffeomorph zu U ist, dann erhalten wir mit $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow S \cap V$ wieder eine lokale Parametrisierung. Das bedeutet, der Diffeomorphismus zwischen den beiden Teilmengen $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ sorgt dafür, dass die Regularitätseigenschaften (im Sinne der Definition 2.1) erhalten bleiben.

Proposition 3.5 (Erhaltung der Regularitätseigenschaften). *Seien U und $\tilde{U}$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^2$. Seien $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung und $\phi : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Dann ist $\tilde{F} = F \circ \phi : \tilde{U} \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung.*

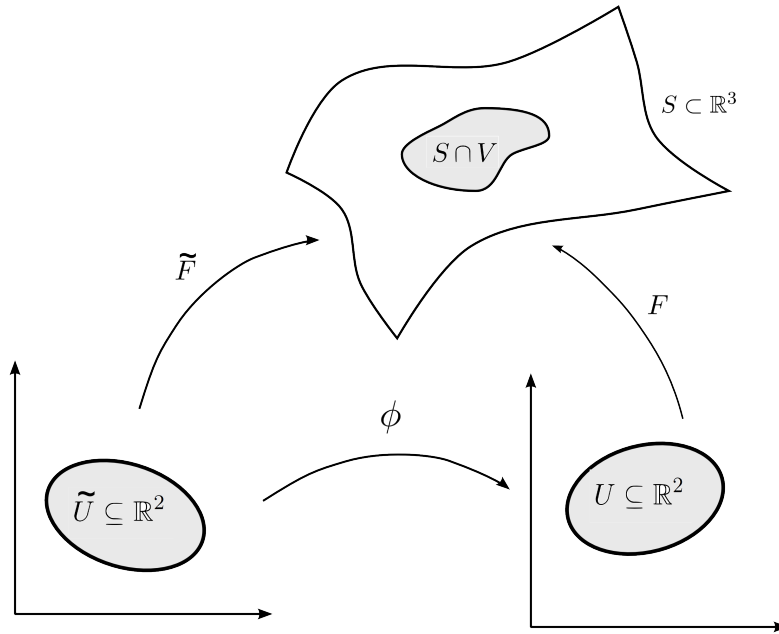


Abbildung 3.5: Erhaltung der Regularitätseigenschaften

Beweis. Wir rechnen die Bedingungen in Definition 2.1 nach. Zunächst ist $\tilde{F} = F \circ \phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ als Zusammensetzung glatter Abbildungen glatt. Weiters gilt

- (i) $\tilde{F}(\tilde{U}) = F \circ \phi(\tilde{U}) = F(U) = S \cap V$ und $\tilde{F} : \tilde{U} \rightarrow S \cap V$ ist als Zusammensetzung von Homöomorphismen wieder ein Homöomorphismus.
- (ii) Sei $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Nach der allgemeinen Kettenregel [2, §6, S. 66] gilt $D_{\tilde{u}}\tilde{F} = D_{\tilde{u}}(F \circ \phi) = D_{\phi(\tilde{u})}F \cdot D_{\tilde{u}}\phi$ und da F eine lokale Parametrisierung und ϕ ein Diffeomorphismus ist, haben beide Matrizen $D_{\phi(\tilde{u})}F$ und $D_{\tilde{u}}\phi$ vollen Rang. Mit Hilfe der Abschätzung

$\text{rang}(D_{\phi(\tilde{u})}F \cdot D_{\tilde{u}}\phi) \geq \text{rang}(D_{\phi(\tilde{u})}F) + \text{rang}(D_{\tilde{u}}\phi) - 2 \geq \text{rang}(D_{\tilde{u}}\phi)$ [5, Lemma 2.5.5, S. 149], gilt aus Dimensionsgründen $\text{rang}(D_{\phi(\tilde{u})}F \cdot D_{\tilde{u}}\phi) = \text{rang}(D_{\tilde{u}}\tilde{F}) = 2$. $\square$

Diese Proposition macht deutlich, dass bei Parametertransformationen die Eigenschaften regulärer Flächen unverändert bleiben. Zusammengefasst wissen wir jetzt, dass wenn wir zwei lokale Parametrisierungen gegeben haben, ein Diffeomorphismus existiert, mit dem wir problemlos zwischen den verschiedenen Koordinaten wechseln können. Im Folgenden ein Beispiel für einen Kartenwechsel.

Beispiel 3.6 (Parametertransformation). Wir berechnen explizit einen Kartenwechsel im Fall der Sphäre $S = S^2$. Wir verwenden die Parametrisierungen X_4 und X_5 aus Beispiel 2.6. Dann ist

$$V_4 \cap V_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ und } y < 0\}$$

und somit

$$X_5^{-1}(V_4 \cap V_5) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1 \text{ und } y < 0\},$$

$$X_4^{-1}(V_4 \cap V_5) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1 \text{ und } x > 0\}.$$

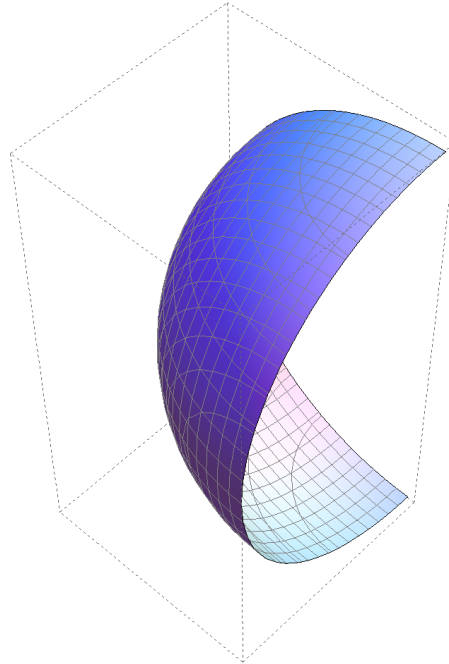


Abbildung 3.6: Schnittmenge $V_4 \cap V_5$ mit der Sphäre

Für $X_4^{-1} \circ X_5$ ergibt sich

$$\begin{aligned} X_4^{-1}(X_5(y, z)) &= X_4^{-1}\left(\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - (y^2 + z^2)} \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir sehen $X_4^{-1} \circ X_5$ ist eine glatte Abbildung auf $X_5^{-1}(V_4 \cap V_5)$.

3.2.2 Abbildungen definiert auf Flächen

Die Glattheit von Abbildungen hinein (definiert auf offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$) konnten wir mit Hilfe der mehrdimensionalen Analysis (siehe Kapitel 3) formulieren. Es ging ja nur um die Differenzierbarkeit von Funktionen auf offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$. Nun geht es um Abbildungen „hinaus“, also solche mit Definitionsbereich auf regulären Flächen. Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist jedoch nicht offen² in $\mathbb{R}^3$, denn die Kugel um $p \in S$ mit Radius ϵ

$$B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|p - q\| < \epsilon\}$$

liegt für jedes $p \in S$ und jedes $\epsilon > 0$ nicht vollständig in S .

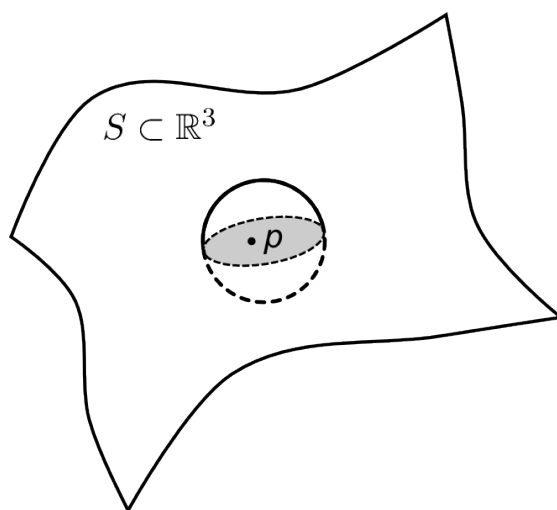


Abbildung 3.7: ϵ -Kugel in regulärer Fläche

Wir können also den bekannten Differenzierbarkeitsbegriff nicht so einfach auf Abbildungen $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ anwenden. Wir wollen diesen daher im Folgenden so „erweitern“, dass er auch für diese Abbildungen anwendbar ist. Das heißt, wir brauchen eine neue Idee. Die einzige sinnvolle Möglichkeit ist, ähnlich wie wir es bei Abbildungen „hinein“ taten (Proposition 3.2), die Verknüpfung mit Karten.

²Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nennt man offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist, das heißt, wenn zu jedem $p \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass für die Kugel $B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|p - q\| < \epsilon\}$ gilt $B_\epsilon(p) \subseteq U$.

Wir gehen, wie eben angedeutet, folgendermaßen vor: Wie wählen eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$ von S um $p \in S \cap V$ und sagen einfach $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar um p , wenn $f \circ F$ differenzierbar in $F^{-1}(p)$ ist. Somit können wir die Eigenschaft Differenzierbarkeit unter Zuhilfenahme von Karten definieren. Jetzt sind wir in der Lage eine explizite Definition anzugeben, was wir unter Differenzierbarkeit einer Abbildung meinen, die ihren Definitionsbereich auf einer regulären Fläche hat.

Doch müssen wir hier acht geben, da der selbe Punkt $p \in S$ verschiedenen Karten angehören kann, was wir speziell am Beispiel 2.6 der Einheitssphäre sehen konnten. Offenbar macht folgende Definition nur dann Sinn, wenn sie unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist, was wir später nachweisen werden.

Definition 3.7 (Differenzierbarkeit von Abbildungen definiert auf regulären Flächen). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung definiert auf S . Wir nennen f glatt nahe $p \in S$, wenn für eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$ mit $p \in S \cap V$ die Komposition $f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

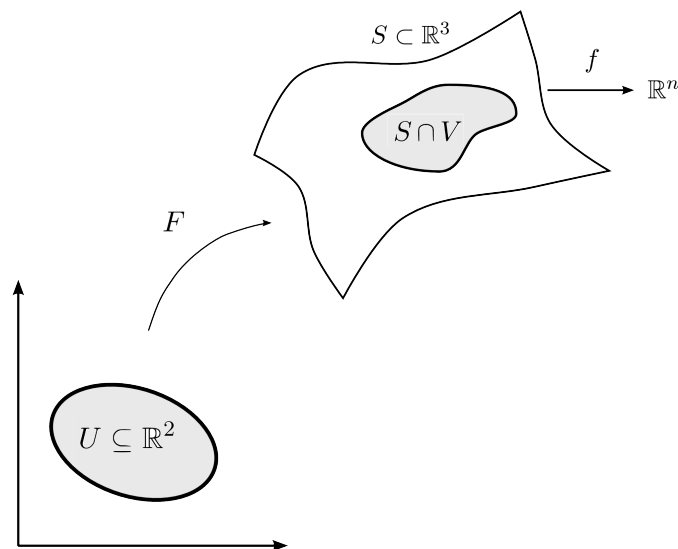


Abbildung 3.8: Abbildung hinaus

Dass diese Definition von der Wahl der Karten nicht abhängt, liegt gerade daran, dass die Kartenwechsel alle glatt sind (Korrolar 3.4). Sei $F_1 : U_1 \rightarrow S \cap V_1$ eine lokale Parametrisierung von S um p und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung „hinaus“. Wenn wir jetzt eine weitere Parametrisierung $F_2 : U_2 \rightarrow S \cap V_2$ um p haben, dann gilt $f \circ F_2 = f \circ F_1 \circ F_1^{-1} \circ F_2$. Nach Definition 3.7 ist $f \circ F_1$ glatt und nach Proposition 3.4 ist der Kartenwechsel $F_1^{-1} \circ F_2$ glatt. Als Zusammensetzung glatter Abbildungen ist nun auch $f \circ F_2$ glatt. So haben wir gezeigt, dass die Definition unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Wir können die Differenzierbarkeitsfrage auch auf die Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^3$ zurückführen (siehe Kapitel 3). Dazu sehen wir uns den umgebenden $\mathbb{R}^3$ an und fragen

uns, ob es eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f|_{S \cap V}$ auf V gibt.

Korollar 3.8 (Fortsetzung in den $\mathbb{R}^3$). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung definiert auf S . Dann gibt es eine offene Umgebung V von p in $\mathbb{R}^3$ und eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $f|_{S \cap V}$ die glatt auf V ist.*

Beweis. Wir verwenden den Diffeomorphismus aus dem Beweis von Proposition 3.2

$$G(u^1, u^2, t) := \begin{pmatrix} x(u^1, u^2) \\ y(u^1, u^2) \\ z(u^1, u^2) + t \end{pmatrix}$$

und setzen

$$g(u^1, u^2, t) := f \circ F(u^1, u^2) = f \circ G(u^1, u^2, 0).$$

Nun ist g glatt nahe $(F^{-1}(p), 0)$, und wir können als Fortsetzung

$$\tilde{f} := g \circ G^{-1}$$

nehmen. □

Bemerkung 3.9. Wir wollen die Situation nun auch umgekehrt betrachten. Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $V \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, sodass $S \subseteq V$. Sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung, dann ist die Einschränkung von f auf S eine glatte Abbildung auf S . Wenn $F : U \rightarrow S \cap V$ eine Parametrisierung ist, dann ist die Funktion $f|_S \circ F = f \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ als Verkettung glatter Funktionen glatt. $f|_S$ ist somit im Sinne der Definition 3.7 glatt.

Glattheit von Abbildungen „hinein“ konnten wir mit Hilfe des bekannten Differenzierbarkeitsbegriffs (mehrdimensionale Analysis: Kapitel 3) formulieren. Für Abbildungen „hinaus“ konnten wir Glattheit durch das Anhängen von Karten definieren. Nun wollen wir beides kombinieren und Glattheit für Abbildungen zwischen zwei regulären Flächen $f : S_1 \rightarrow S_2$ betrachten.

3.2.3 Abbildungen zwischen Flächen

Nun haben wir alle „Zutaten“, die wir brauchen um Abbildungen zwischen zwei regulären Flächen S_1 und S_2 hinsichtlich Differenzierbarkeit näher zu betrachten. Wir verwenden wieder dieselben Ideen wie zuvor, indem wir einfach die jeweiligen Karten zu Hilfe nehmen. Auf diese Weise lässt sich Definition 3.7 für glatte Abbildungen auf regulären Flächen auf natürliche Weise auf Abbildungen zwischen zwei regulären Flächen erweitern.

Definition 3.10 (Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen regulären Flächen). Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen und sei $f : S_1 \rightarrow S_2$. Wir nennen f glatt nahe p , falls es eine lokale Parametrisierung $F_1 : U_1 \rightarrow S \cap V_1$ von S_1 um p gibt und eine lokale Parametrisierung $F_2 : U_2 \rightarrow S \cap V_2$ von S_2 um $f(p)$ derart, dass $F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : F_1^{-1}(f^{-1}(V_2) \cap V_1) \rightarrow U_2$ nahe p glatt ist.

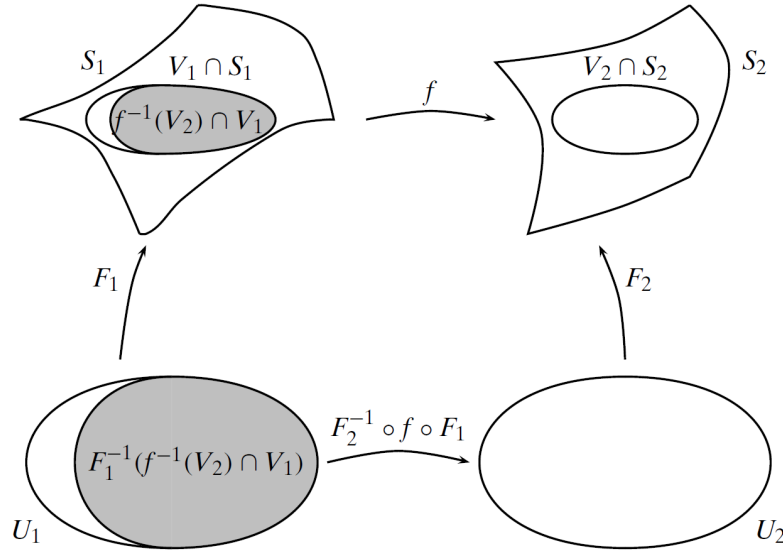


Abbildung 3.9: Abbildungen zwischen regulären Flächen [1, §3.1, S. 104]

Das bedeutet, die Abbildung „oben“ ($f : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen den zwei Flächen) ist glatt, wenn die Abbildung „unten“ ($\phi := F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ zwischen den Koordinatenmengen U_1 und U_2) glatt ist. Allerdings müssen wir hier achtgeben, da ϕ nicht auf ganz U_1 definiert ist.

Auch hier überprüfen wir, ob die Definition unabhängig von den gewählten Parametrisierungen ist. Dazu verwenden wir wieder Korollar 3.4, das besagt, dass Parametertransformationen stets glatt sind. Seien also $\tilde{F}_1$ und $\tilde{F}_2$ lokale Parametrisierungen um p bzw. $f(p)$, so ist

$$\tilde{F}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{F}_1 = \tilde{F}_2^{-1} \circ F_2 \circ \phi \circ F_1^{-1} \circ \tilde{F}_1$$

als Verkettung glatter Abbildungen selbst glatt. Wir haben also nun die „geeigneten“ Abbildungen zu regulären Flächen gefunden (vgl. lineare Abbildungen zu Vektorräumen).

Nun können wir auch den Begriff des Diffeomorphismus für Abbildungen zwischen Flächen definieren. Diffeomorphismen spielen die selbe Rolle bei der Untersuchung von regulären Flächen wie lineare Isomorphismen bezüglich Vektorräumen. In dem einen Fall bleibt die Vektorraumstruktur erhalten und im Fall der regulären Flächen bleibt die differenzierbare Struktur erhalten.

Definition 3.11 (Diffeomorphismus zwischen regulären Flächen). Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen. Eine Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ heißt Diffeomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind. Existiert ein solcher Diffeomorphismus $f : S_1 \rightarrow S_2$, dann heißen die Flächen S_1 und S_2 diffeomorph.

Sind also zwei Flächen zueinander diffeomorph, dann sind sie „im Wesentlichen“ gleich. Genauer, im Sinne der Differenzierbarkeit sind diffeomorphe reguläre Flächen ununterscheidbar. Damit man sich etwas unter dem Begriff vorstellen kann, führen wir zwei Beispiele für Diffeomorphismen zwischen regulären Flächen an.

Beispiel 3.12 (Diffeomorphismus: einschaliges Hyperboloid - Zylinder). Das einschalige Hyperboloid ist gegeben durch $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$ und der Zylinder durch $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Sei $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z)\}$ und

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}$$

die Abbildung, welche das Hyperboloid offensichtlich auf den Zylinder abbildet. Nachdem f auf ganz V glatt ist und $S_1 \subseteq V$, ist $f|_{S_1}$ glatt (siehe Bemerkung zu Korollar 3.8).

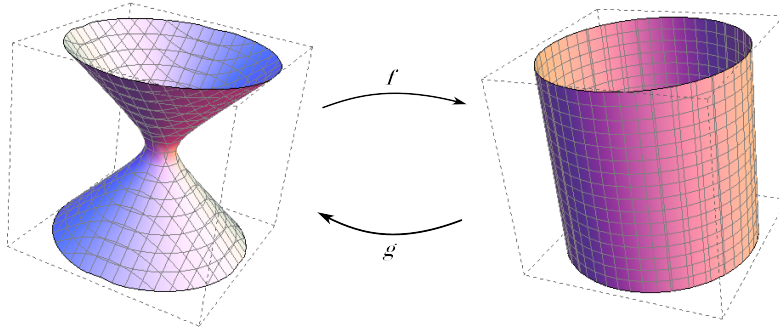


Abbildung 3.10: Diffeomorphismus: Einschaliges Hyperboloid - Zylinder

Weiters sei

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sqrt{z^2+1} x \\ \sqrt{z^2+1} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung bildet umgekehrt den Zylinder auf das Hyperboloid ab. Eingesetzt in die Gleichung des Hyperboloids folgt

$$(z^2 + 1)x^2 + (z^2 + 1)y^2 = (z^2 + 1)(x^2 + y^2) = z^2 + 1 = z^2 + 1,$$

denn für alle Punkte (x, y) auf dem Zylinder gilt $x^2 + y^2 = 1$. Somit werden die Punkte des Zylinders auf das Hyperboloid abgebildet. Wir zeigen noch, dass gilt $g \circ f|_{S_1} = \text{id}$, also $g|_{S_2} = (f|_{S_1})^{-1}$. Schließlich gilt

$$g \circ f(x, y, z) = g \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y\sqrt{z^2+1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

denn $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ auf S_1 . Offensichtlich ist g auf ganz $\mathbb{R}^3$ glatt und somit auch $g|_{S_2} = (f|_{S_1})^{-1}$. Die Abbildung $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ ist daher ein Diffeomorphismus.

Beispiel 3.13 (Diffeomorphismus: Sphäre - Ellipsoid). Die Sphäre ist gegeben durch

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und das Ellipsoid durch

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } f(x, y, z) = (ax, by, cz)$$

die Abbildung, welche die Sphäre auf das Ellipsoid abbildet. Nachdem f auf ganz $\mathbb{R}^3$ glatt ist, ist auch $f|_{S_1}$ glatt.

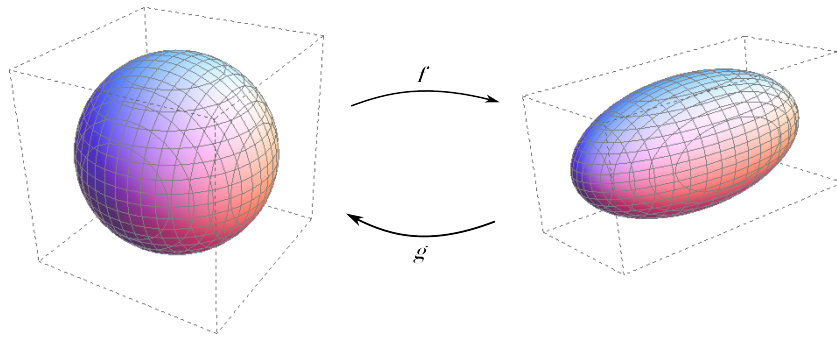


Abbildung 3.11: Diffeomorphismus: Sphäre - Ellipsoid

Weiters sei

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } g(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c} \right).$$

Diese Abbildung bildet offensichtlich das Ellipsoid auf die Sphäre ab und es gilt $g \circ f = \text{id}$. Ferner ist g auf ganz $\mathbb{R}^3$ glatt und somit auch $g|_{S_2} = (f|_{S_1})^{-1}$. Die Abbildung $f|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$ ist daher ein Diffeomorphismus.

4 Die Tangentialebene an eine reguläre Fläche

Wir haben im vorhergehenden Kapitel glatte Abbildungen zwischen regulären Flächen $f : S_1 \rightarrow S_2$ betrachtet. Nun stellt sich natürlich die Frage nach der Bestimmung der Ableitung. Dieser Frage wollen wir uns jetzt widmen und die Ableitung von $f : S_1 \rightarrow S_2$ in einem Punkt $p \in S_1$ finden.

4.1 Lineare Bestapproximation

Aus der mehrdimensionalen Analysis (Kapitel 3.1) kennen wir die Ableitung für Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: Die Ableitung an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ wird repräsentiert durch die Jacobi-Matrix $D_x f$, mit $Df : \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \mapsto D_x f$.

Zu berücksichtigen ist, dass $D_x f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ eine lineare Abbildung ist, welche es nur zwischen Vektorräumen gibt. Die Flächen S_1 und S_2 sind offensichtlich keine Vektorräume, daher können wir dieses Konzept für Abbildungen zwischen regulären Flächen nicht eins zu eins übernehmen. Genauer gesagt, können wir für $f : S_1 \rightarrow S_2$ die Ableitung nicht einfach als Abbildung $Df : S_1 \rightarrow L(S_1, S_2)$ definieren. Das heißt, wir brauchen einen „Ersatz“ für die Jacobi-Matrix und müssen uns überlegen, zwischen welchen Vektorräumen diese abbilden soll.

Eine Idee, wie wir vorgehen können, erhalten wir, wenn wir an die Analysis in einer Variable denken. Wenn wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ haben, dann wissen wir, dass die Tangente $t(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ in einem Punkt x_0 eine sehr gute Näherung der Funktion nahe dem Punkt x_0 ist, genauer ist die Tangente die lineare „Bestapproximation“ an f nahe dem Punkt x_0 .

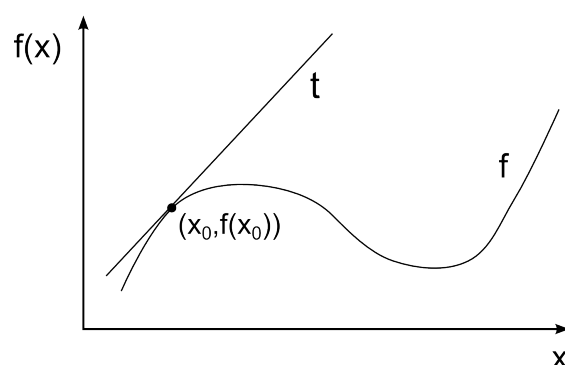


Abbildung 4.1: Tangente an Funktion

Das Prinzip der linearen „Bestapproximation“ wollen wir weiter verfolgen. Die einfachsten Kurven sind Geraden, analog sind die einfachsten Flächen die Ebenen. Wir wollen also versuchen unsere regulären Flächen S_1 und S_2 in $p \in S_1$ und $f(p) \in S_2$ durch Ebenen, die sogenannten Tangentialebenen $T_p S_1$ und $T_{f(p)} S_2$ anzunähern. Auf diese Weise erhalten wir jeweils einen zweidimensionalen Vektorraum, der S_1 nahe p bzw. S_2 nahe $f(p)$ annähert,

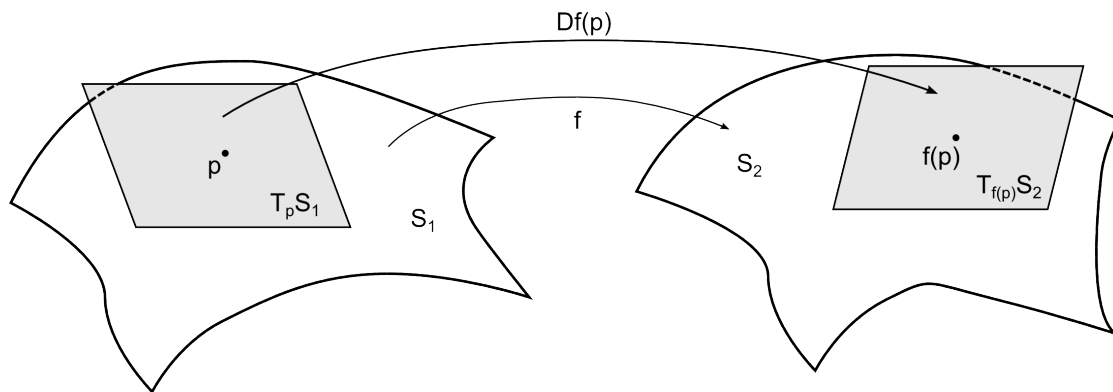


Abbildung 4.2: Tangentialebenen auf regulären Flächen

das heißt, wir haben nun einen Vektorraum $T_p S_1$ der nahe p „so gut wie“ S_1 ist und einen Vektorraum $T_{f(p)} S_2$, der nahe $f(p)$ „so gut wie“ S_2 ist. Nun können wir die Ableitung $D_p f$ im Punkt p als linearen „Ersatz“ für f nahe p auffassen und die Antwort auf die Frage, mit welchen Vektoren wir $D_p f$ „füttern“ sollen und welche Vektoren $D_p f$ wieder „ausspucken“ soll, lautet aufgrund der Vorüberlegungen offensichtlich: $D_p f$ soll Vektoren aus $T_p S_1$ auf Vektoren aus $T_{f(p)} S_2$ abbilden.

Es werden also solche Vektoren, welche in p tangential an S_1 angehängt sind, auf solche, die in $f(p)$ tangential an S_2 angeheftet sind, abgebildet. Um die Aussagen zu konkretisieren geben wir folgende Definition.

Definition 4.1 (Tangentialebene an eine reguläre Fläche). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Dann heißt

$$T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve } c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = X\}$$

die Tangentialebene von S in p . Die Elemente der Tangentialebene heißen Tangentialvektoren.

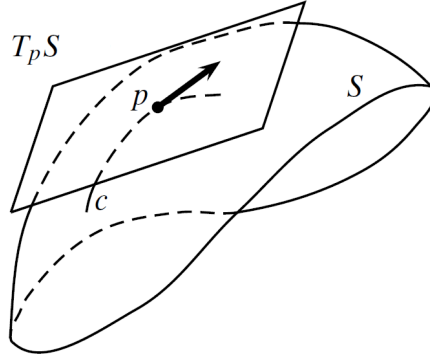


Abbildung 4.3: Tangentialebene an S in p [1, §3.2, S. 106]

Definition 4.1 verwendet also Kurven, welche durch den Punkt $p \in S$ gehen, um mit Hilfe von deren Geschwindigkeitsvektoren in p die Tangentialebene zu konstruieren. Tangentialvektoren sind also im Punkt p an S angeheftete Vektoren, die tangential zu S stehen; sie sind ja Geschwindigkeitsvektoren von Kurven in S . Allerdings wissen wir noch nicht, ob $T_p S$ tatsächlich ein Vektorraum ist. Dabei hilft uns folgende Proposition, wobei wir wieder eine lokale Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$ zu Hilfe nehmen.

Proposition 4.2 (Tangentialebene als Vektorraum). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, sei $p \in S$. Sei ferner $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S um p . Wir setzen $u_0 := F^{-1}(p) \in U$. Dann gilt*

$$T_p S = \text{Bild}(D_{u_0} F) = D_{u_0} F(\mathbb{R}^2)$$

ist ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Wir wollen zuerst die Inklusion $T_p S \supset D_{u_0} F(\mathbb{R}^2)$ zeigen. Sei

$$X \in \text{Bild}(D_{u_0} F) \Rightarrow \exists Y \in \mathbb{R}^2 : X = D_{u_0} F(Y).$$

Jetzt brauchen wir eine Kurve $c(t)$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ um zu sehen, dass $X \in T_p S$. Wir wollen so eine Kurve konstruieren, indem wir $c(t) := F(u_0 + tY)$ setzen. Wir finden ein $\epsilon > 0$, sodass alle $u_0 + tY \in U$, wenn $|t| < \epsilon$. Somit ist c auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert und es folgt

$$c(0) = F(u_0) = p$$

und

$$\dot{c}(0) = \frac{d}{dt} F(u_0 + tY)|_{t=0} = D_{u_0} F(Y) = X.$$

Somit haben wir $X \in T_p S$ gezeigt.

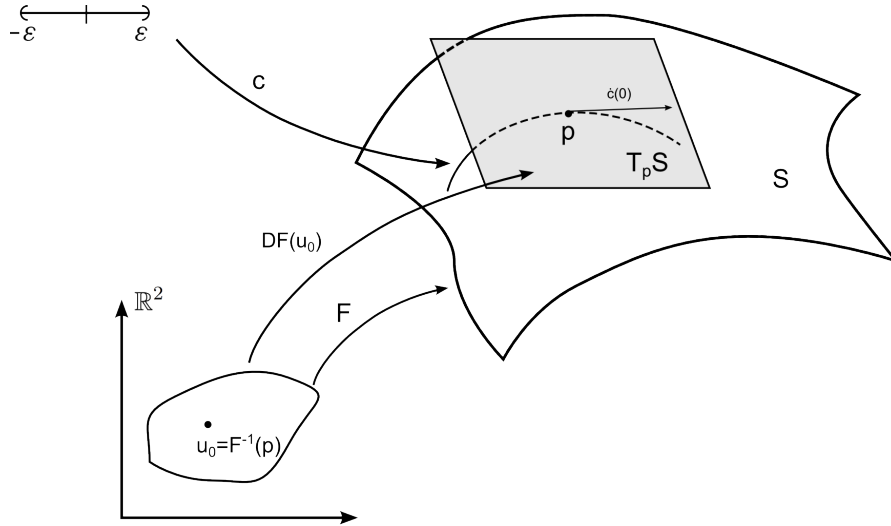


Abbildung 4.4: Tangentialebene als Vektorraum

Nun zeigen wir noch die Inklusion $T_p S \subseteq D_{u_0} F(\mathbb{R}^2)$. Sei

$$X \in T_p S \Rightarrow \exists c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = X.$$

Jetzt müssen wir ein $Y \in \mathbb{R}^2$ suchen, sodass $D_{u_0} F(Y) = X$. Zunächst verkleinern wir ϵ so, dass c ganz in V verläuft. Proposition 3.2 sagt uns, dass

$$F^{-1} \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$$

eine glatte Abbildung ist, genauer eine ebene Kurve, die in U verläuft. Nun setzen wir $Y := (F^{-1} \circ c)'(0) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$D_{u_0} F(Y) = \frac{d}{dt}(F \circ F^{-1} \circ c)|_{t=0} = \frac{d}{dt}c|_{t=0} = X.$$

Daraus folgt $X \in \text{Bild}(D_{u_0} F)$.

Aus der mehrdimensionalen Analysis (Kapitel 3.1) wissen wir, dass $D_{u_0} F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, also ist $D_{u_0} F$ linear. Außerdem wissen wir, dass $\mathbb{R}^2$ ein Vektorraum ist, also folgt mit $D_{u_0} F(\mathbb{R}^2) = T_p S$, dass $T_p S$ ebenfalls ein Vektorraum ist. Gemäß Definition 2.1 hat $D_{u_0} F$ maximalen Rang 2, das bedeutet, $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$ bildet einen zweidimensionalen Vektorraum. $\square$

Bemerkung 4.3. Proposition 4.2 macht noch einmal deutlich, wie wichtig in Definition 2.1 die Bedingung (ii) ist. Sie garantiert, dass in jedem Punkt einer regulären Fläche eine Tangentialebene existiert.

Wie wir in Proposition 2.9 (Seite 10) erfahren haben, können reguläre Flächen auch als Nullstellengebilde gegeben sein. Folgende Proposition gibt uns an, wie wir auf einfache Weise in solch einem Fall die Tangentialebene bestimmen können.

Proposition 4.4 (Gradient auf Tangentialebene). Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, sei $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sei $S = f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Es gelte $\text{grad } f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Dann steht für $p \in S$ der Gradient von f senkrecht auf der Tangentialebene,

$$T_p S = \text{grad } f(p)^\perp.$$

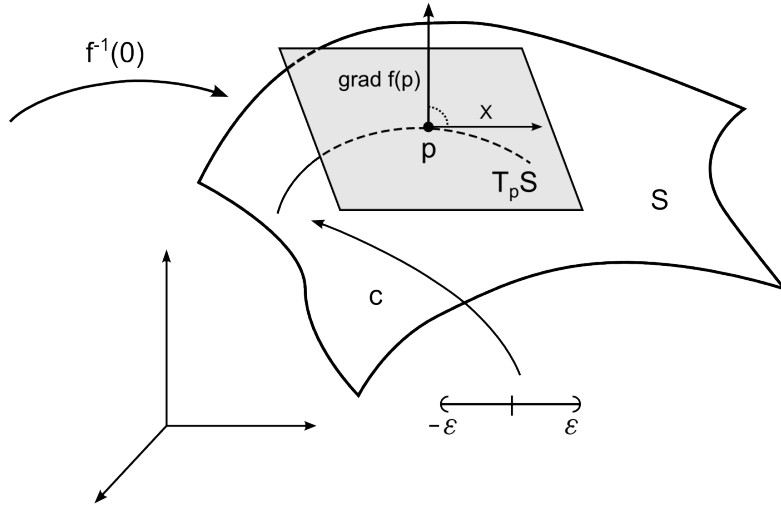


Abbildung 4.5: Gradient auf Tangentialebene

Beweis. Sei $X \in T_p S$. Wir wählen eine glatte parametrisierte Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Da c in S verläuft, gilt $(f \circ c)(t) = 0$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel folgt

$$0 = \frac{d}{dt} f \circ c|_{t=0} = \langle \text{grad } f(c(0)), \dot{c}(0) \rangle = \langle \text{grad } f(p), X \rangle.$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass nun $X \in T_p S$ senkrecht auf $\text{grad } f(p)$ steht. Daraus folgt $T_p S \subseteq \text{grad } f(p)^\perp$ und nachdem die beiden Vektorräume $T_p S \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\text{grad } f(p)^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ Dimension 2 haben, kann nur $T_p S = \text{grad } f(p)^\perp$ gelten. $\square$

Dazu wollen wir uns ein bereits bekanntes Beispiel ansehen.

Beispiel 4.5 (Tangentialebene der Kugel). Die Kugel als Nullstellenmenge wird beschrieben durch

$$S^2 = f^{-1}(0) \text{ mit } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Um die Tangentialebene zu berechnen wollen wir nun den Gradienten berechnen

$$\text{grad } f(x, y, z) = 2(x, y, z).$$

Wie wir in Abbildung 4.6 sehen, ist die Tangentialebene $T_p S^2$ tatsächlich gerade das orthogonale Komplement des Fußpunktvektors $p = (x, y, z)$.

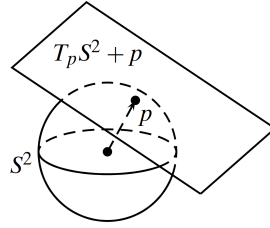


Abbildung 4.6: Tangentialebene der Sphäre [1, §3.2, S. 108]

Nun haben wir das wegweisende Konzept der Tangentialebenen, die eine lineare Approximation regulärer Flächen liefern, kennengelernt. Außerdem kennen wir bereits das Differenzial $D_x F$ für Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, das uns eine lineare Approximation differenzierbarer Abbildungen im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ liefert. Beides kombiniert, ermöglicht es uns nun das Differenzial einer glatten Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen zwei regulären Flächen zu definieren.

4.2 Differenzial glatter Abbildungen zwischen Flächen

Gegeben haben wir zwei reguläre Flächen S_1, S_2 und eine glatte Abbildung $f : S_1 \rightarrow S_2$. Wir wissen, dass jeder Vektor $X \in T_p S_1$ einem Geschwindigkeitsvektor $\dot{c}(0)$ einer Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p \in S_1$ entspricht. Wir betrachten nun die Kurve $\tilde{c} := f \circ c$ in S_2 . Sie verläuft gerade so in S_2 , dass $\tilde{c}(0) = f(p) \in S_2$ gilt und daher der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\tilde{c}}(0)$ einem Vektor in $T_{f(p)} S_2$ entspricht.

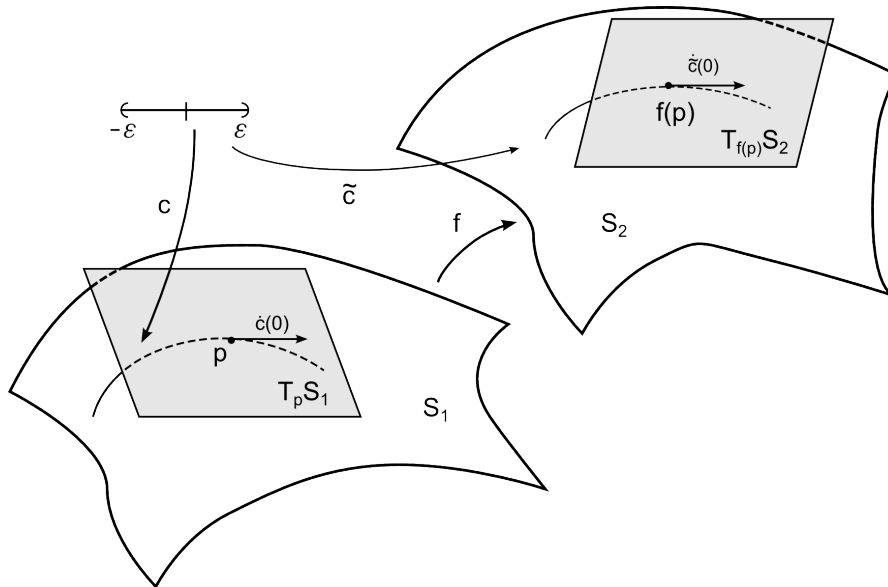


Abbildung 4.7: Vorüberlegung zum Differenzial für Abbildungen zwischen S_1 und S_2

Diese Überlegungen motivieren dazu das Differential $D_p f$ von $f : S_1 \rightarrow S_2$ in einem Punkt $p \in S_1$ als Abbildung $\dot{c}(0) \mapsto (f \circ c)'(0)$ zu definieren. Dadurch erhalten wir eine wohldefinierte (bedeutet unabhängig von der Wahl der Kurve c) lineare Abbildung $T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$, was wir allerdings erst noch nachweisen müssen.

Definition 4.6 (Differential einer Abbildung zwischen regulären Flächen). Seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen, sei $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine glatte Abbildung und sei $p \in S_1$. Das Differential von f in p ist jene Abbildung

$$D_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2,$$

die gegeben ist durch folgende Vorschrift: Zu $X \in T_p S_1$ wähle eine glatte parametrisierte Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ und setze

$$D_p f(X) := \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2.$$

Definition 4.6 sagt uns, was $D_p f$ eigentlich macht. Wir wissen, dass f die Kurve c zu einer Kurve $\tilde{c} = f \circ c$ macht, die in S_2 verläuft. Das Differential $D_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$ hingegen dreht die Tangentialvektoren genau so, wie f die dazugehörigen Kurven „verdreh“ ($\dot{c}(0) = X \mapsto \dot{\tilde{c}}(0) = Y$).

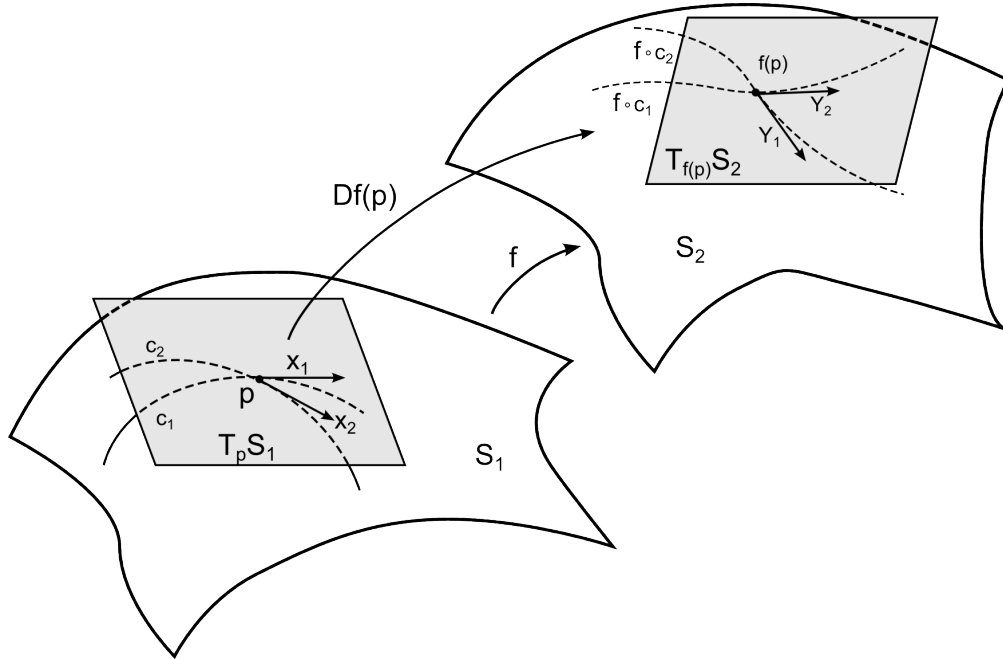


Abbildung 4.8: Eigenschaft des Differenzials: „Drehung“ der Tangentialvektoren

Wir müssen noch überprüfen, ob das Differential $D_p f$ überhaupt wohldefiniert ist, das heißt, wir müssen untersuchen, ob $D_p f(X)$ nur von X und nicht von der Wahl der Kurve

c abhängt. Die folgende Proposition liefert sogar mehr als das.

Proposition 4.7 (Wohldefiniertheit und Linearität von $D_p f$). *Durch Definition 4.6 ist $D_p f$ wohldefiniert, d.h. $D_p f(X)$ hängt nur von X ab, nicht aber von der speziellen Wahl der Kurve c . Ferner ist $D_p f$ linear.*

Für den Beweis nehmen wir wieder die Hilfe von Karten in Anspruch. Wir werden also $D_p f$ anhand von lokalen Parametrisierungen ausdrücken.

Beweis. Sei $F_1 : U_1 \rightarrow S_1 \cap V_1$ eine lokale Parametrisierung von S_1 um p und $F_2 : U_2 \rightarrow S_2 \cap V_2$ eine lokale Parametrisierung von S_2 um $f(p)$. Wir wählen U_1 und V_1 so, dass $f(S_1 \cap V_1) \subseteq V_2$. Wir setzen

$$\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \rightarrow U_2$$

und $u_0 := F_1^{-1}(p) \in U_1$. Zur Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ setzen wir

$$u := F_1^{-1} \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U_1.$$

Dabei wählen wir ϵ so klein, dass c ganz in V_1 verläuft. Wir setzen $Y := \dot{u}(0)$ wie im Beweis von Proposition 4.2 und es gilt wieder $D_{u_0} F(Y) = X$. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} D_p f(X) &= \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ F_1 \circ u)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(F_2 \circ \tilde{f} \circ u)|_{t=0} \\ &= D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f})(Y) \\ &= D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f}) \cdot D_{u_0} F_1^{-1}(X). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile tritt die Kurve c nicht mehr auf, sondern nur noch X . Das bedeutet, dass die Definition unabhängig von der speziellen Wahl von c ist. Weiters haben wir herausgefunden, dass sich das Differenzial $D_p f$ aus linearen Abbildungen $D_{u_0}(F_2 \circ \tilde{f})$ und $D_{u_0} F_1^{-1}$ zusammensetzt und somit selbst linear ist. $\square$

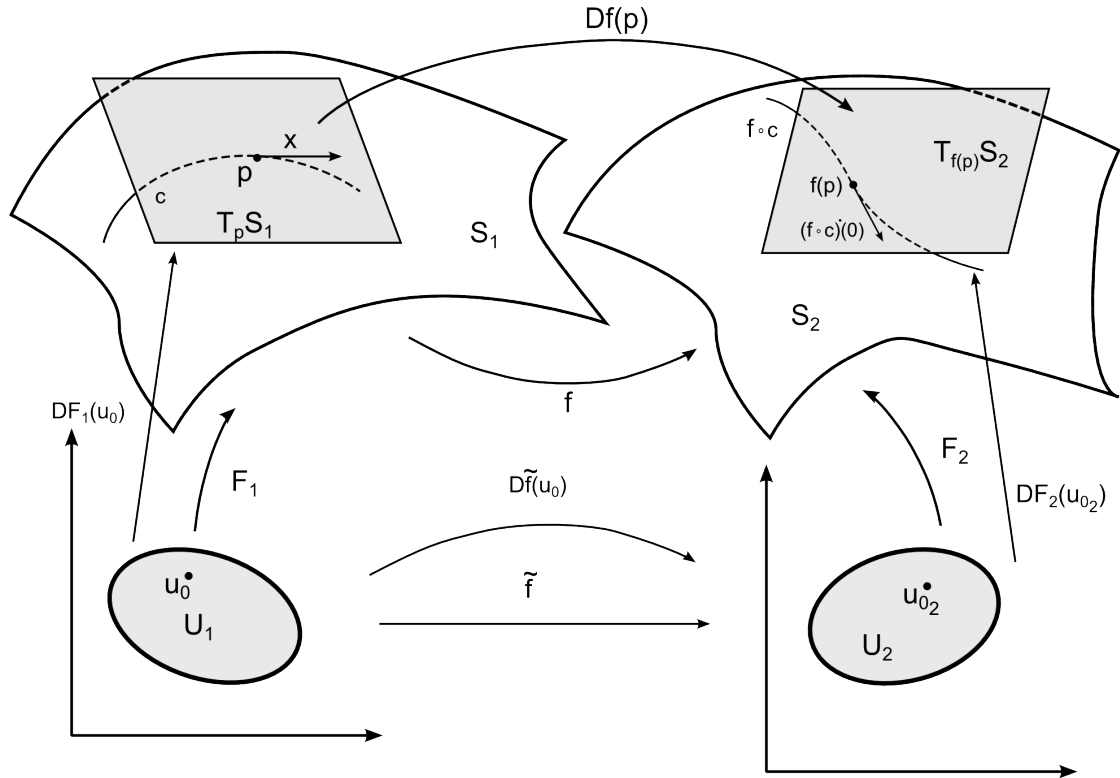


Abbildung 4.9: Berechnung von $D_p f$ aus drei Jacobi-Matrizen

Der Beweis der Proposition 4.7 zeigt explizit, dass das Differential $D_p f$ von f in p in den Parametrisierungen $F_1 : U_1 \rightarrow S_1 \cap V_1$ von S_1 um p und $F_2 : U_2 \rightarrow S_2 \cap V_2$ von S_2 um $f(p)$ durch die Jacobi-Matrix der Abbildung „unten“ $\tilde{f} = F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ gegeben ist, genauer es kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T_p S_1 & \xrightarrow{D_p f} & T_{f(p)} S_2 \\ D_{u_0} F_1 \uparrow & & \uparrow D_{u_{02}} F_2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D_{u_0} \tilde{f}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Wir wollen als Beispiel das Differential der Abbildung aus Beispiel 3.13 auf Seite 28, in dem es um einen Diffeomorphismus zwischen Sphäre und Ellipsoid ging, berechnen.

Beispiel 4.8 (Differential: Sphäre - Ellipse). Die Sphäre ist gegeben durch (vgl. Beispiel 3.13)

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und das Ellipsoid (vgl. Beispiel 3.13) durch

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$ eine lineare Abbildung. Wir setzen

$$f : S_1 \rightarrow S_2, f := F|_{S_1},$$

das heißt, das Ellipsoid S_2 ist das Bild von S_1 unter f . Wir berechnen das Differenzial von f für einen beliebigen Punkt p auf der oberen Hemisphäre S_1^+ . Als lokale Parametrisierung von S_1 um p wählen wir (vgl. Beispiel 2.6)

$$\begin{aligned} F_1 : U_1 &= \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + y_1^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^+, \\ (x_1, y_1) &\mapsto \left(x_1, y_1, \sqrt{1 - (x_1^2 + y_1^2)} \right). \end{aligned}$$

Als lokale Parametrisierung von S_2 um $f(p)$ wählen wir

$$\begin{aligned} F_2 : U_2 &= \{(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2^2 b^2 + y_2^2 a^2 < b^2 a^2\} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2, \\ (x_2, y_2) &\mapsto \left(x_2, y_2, c \sqrt{1 - \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \right)} \right). \end{aligned}$$

Wir setzen $\tilde{f} := F_2^{-1} \circ f \circ F_1 : U_1 \rightarrow U_2$. Für $\tilde{f}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, y_1) &= F_2^{-1} \circ f \left(x_1, y_1, \sqrt{1 - (x_1^2 + y_1^2)} \right) \\ &= F_2^{-1} \left(ax_1, by_1, c \sqrt{1 - (x_1^2 + y_1^2)} \right) \\ &= (ax_1, by_1). \end{aligned}$$

Ferner setzen wir $F_1^{-1}(p) = u_{0_1}$ und $F_2^{-1}(f(p)) = u_{0_2}$. Es gilt offensichtlich $\tilde{f}(u_{0_1}) = u_{0_2}$.

Nun berechnen wir die Differenziale $D_{u_{0_1}} \tilde{f}$ und $D_p f$. Die Jacobi-Matrix $D\tilde{f}$ lässt sich leicht mit Hilfe der Formel auf Seite 17 ermitteln. Wir erhalten

$$D_{u_{0_1}} \tilde{f} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

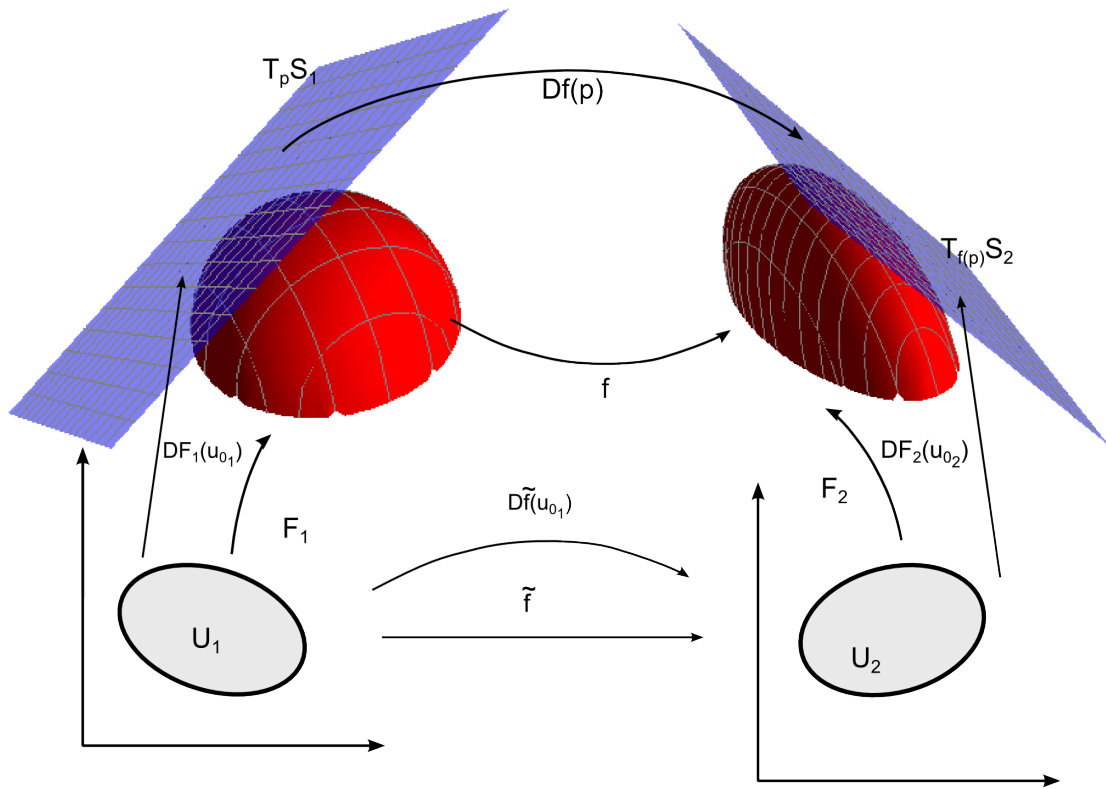


Abbildung 4.10: Differenzial: Sphäre-Ellipsoid

Um $D_p f$ zu berechnen, sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ eine glatte parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X \in T_p S_1$. Wegen der Linearität von F gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ c)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(F \circ c)|_{t=0} \\ &= F \circ \frac{d}{dt}c|_{t=0} \\ &= F(X). \end{aligned}$$

Somit ist $D_p f = F|_{T_p S_1} : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$.

5 Geometrische Größen regulärer Flächen

Wir haben in den letzten Kapiteln die Grundlage der Analysis auf regulären Flächen geschaffen. Nun wollen wir Geometrie betreiben, das heißt Größen wie Längen, Winkel und Krümmungen studieren. Dazu führen wir zwei wesentliche Konzepte ein, die uns bei der Bestimmung der gesuchten Größen behilflich sind. Das erste Konzept, die *erste Fundamentalform*, gibt Auskunft über die innere Geometrie¹ der Fläche. Das zweite Konzept, die *zweite Fundamentalform*, führt uns aus der Fläche heraus und gibt zusätzlich Auskunft über die Lage der Fläche im umgebenden $\mathbb{R}^3$ (äußere Geometrie). Ferner werden wir uns mit dem *Krümmungsbegriff* auseinandersetzen, dem zentralen Begriff der Differenzialgeometrie. A priori ist nicht klar, wo der Krümmungsbegriff einzuordnen ist. Ist er Teil der inneren Geometrie oder benötigen wir den umgebenden Raum? Wir werden verschiedene Krümmungskonzepte erarbeiten und dementsprechend unterschiedliche Antworten auf die Frage bekommen.

5.1 Die erste Fundamentalform

Zuerst wollen wir uns mit der Längen- und Winkelmessung auf regulären Flächen beschäftigen. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass Vektorräume durch eine Struktur zur Maßbestimmung ausgezeichnet werden können. Diese zusätzliche Struktur ermöglicht eine Längen- und Winkelmessung und wird durch ein Skalarprodukt² bestimmt. Da wir, durch die zu Beginn der Arbeit gegebene Definition 2.1, reguläre Flächen in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet hatten, interessieren wir uns besonders für das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$. Allerdings ist S im Allgemeinen kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Nehmen wir also zwei Punkte p und p' auf S , dann haben der Winkel $\angle(p, p')$ und die Länge des Abstandes $\|p - p'\|_{\mathbb{R}^3}$ keine relevante geometrische Bedeutung für die Fläche selbst. Vor allem wollen wir uns ausschließlich in der Fläche S bewegen und nicht aus ihr heraustreten.

¹Diese umfasst Größen, die sich allein durch Messungen (Längen- und Winkelmessungen) innerhalb der Fläche bestimmen lassen, d.h. der umgebende $\mathbb{R}^3$ wird dabei „ausgeblendet“.

²Eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

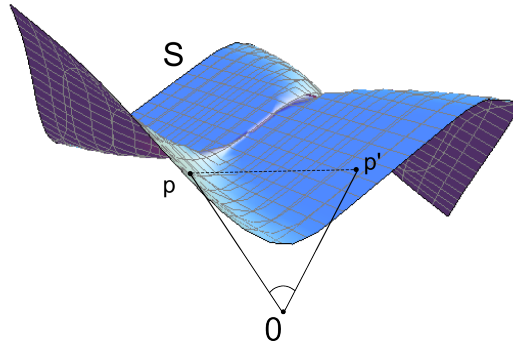


Abbildung 5.1: Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ angewendet auf Punkte in S

Wir interessieren uns also vielmehr für die Längen der Kurven, die in S verlaufen und durch die Punkte p und p' gehen, bzw. den Winkel, unter dem sich zwei Kurven auf S schneiden. Sei $c : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte parametrisierte Kurve, die ganz in S verläuft mit $c(t_1) = p$ und $c(t_2) = p'$. Die Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten p und p' ist gegeben durch

$$L[c] = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{c}(t)\|_{\mathbb{R}^3} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3}} dt.$$

Wir sehen schon, dass wir für die Berechnung der Länge von Kurven, die in S verlaufen, lediglich die Skalarprodukte der Tangentialvektoren benötigen. Analog folgt die Betrachtung für die Berechnung des Winkels, unter dem sich zwei Kurven auf S schneiden.

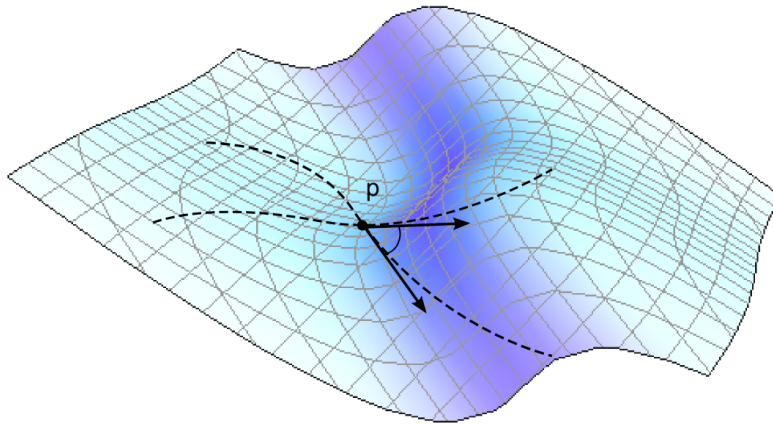


Abbildung 5.2: Schnittwinkel zweier Kurven auf S

Die Tangentialvektoren in einem Punkt $p \in S$ sind Elemente aus $T_p S$ und wir wissen aus vorigem Kapitel, dass $T_p S$ ein zweidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist. Nachdem wir für die Berechnung der Längen und Winkel nur das Skalarprodukt der

Tangentialvektoren kennen müssen, liegt es nahe einfach das Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ auf $T_p S$ einzuschränken. Wir erhalten dadurch ein euklidisches Skalarprodukt auf $T_p S$.

Definition 5.1 (Erste Fundamentalform). Die Abbildung, die jedem Punkt $p \in S$ die Einschränkung des $\mathbb{R}^3$ -Skalarproduktes auf $T_p S$ zuordnet

$$p \mapsto g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S \times T_p S},$$

nennen wir die erste Fundamentalform von S . Bezeichnet wird sie auch durch $I_p(X, Y) = g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, wobei $X, Y \in T_p S$. Jede geometrische Größe von S , die nur durch die erste Fundamentalform bestimmt ist, nennen wir eine Größe der inneren Geometrie von S .

Wir wollen uns nun um die konkrete Gestalt von I_p kümmern. Die lineare Algebra sagt uns, dass für endlich-dimensionale Vektorräume Bilinearformen durch Matrizen beschrieben werden können [5, §5.4, S. 288]. Das heißt, es gibt eine symmetrische, positiv-definite Matrix $(g_{ij}(p)) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, durch welche I_p vollständig festgelegt ist. Wollen wir die Einträge der Matrix berechnen, brauchen wir eine Basis des jeweiligen Vektorraumes, in unserem Fall also für die Tangentialebene $T_p S$. Die gesuchte Basis für $T_p S$ können wir uns einfach mittels einer lokalen Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$ um p verschaffen. Wir „transportieren“ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (z.B. die Standardbasis $\{e_1, e_2\}$) mit Hilfe des Differenzials $D_u F$ nach $T_p S$, wobei $F^{-1}(p) = u$ gilt.

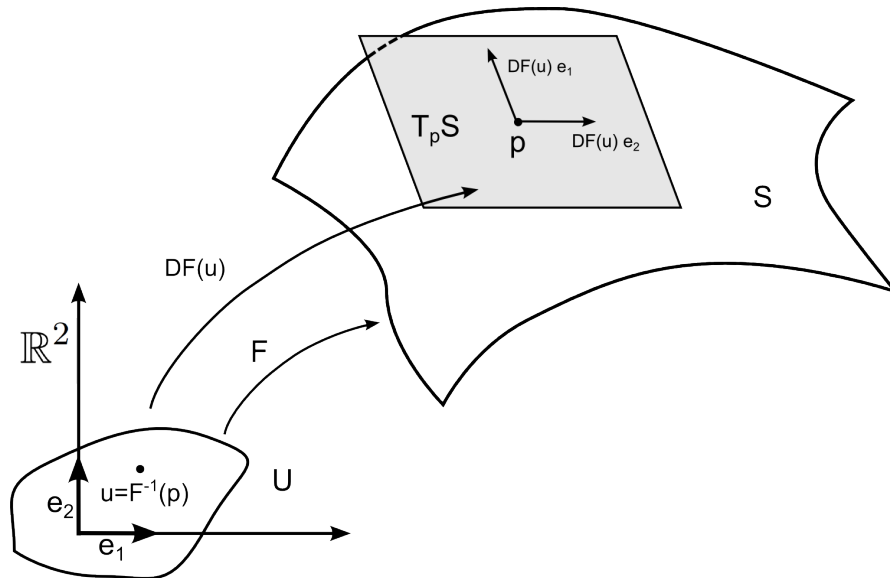


Abbildung 5.3: Basis von $T_p S$

Die Jacobi-Matrix $D_u F$ ist gegeben durch (Formel Seite 17)

$$D_u F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^1}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^2}{\partial u_2}(u) \\ \frac{\partial F^3}{\partial u_1}(u) & \frac{\partial F^3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix},$$

wobei F^i mit $i = 1, 2, 3$ die Komponentenfunktionen von F sind. Bilden wir also $D_u F e_1$ und $D_u F e_2$, erhalten wir als Basis für $T_p S$: $\left\{ \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\}$.

Nun sind wir in der Lage die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung F anzugeben. Die Einträge der gesuchten Matrix werden, bezüglich der eben gefundenen Basis, folgendermaßen bestimmt [5, §5.4, S. 289]:

$$g_{ij}(u) := g_p(D_u F e_i, D_u F e_j) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), \frac{\partial F}{\partial u_j}(u) \right\rangle.$$

Wir haben also die gesuchte Matrix $(g_{ij}(u))$ mit $i, j = 1, 2$ gefunden. Da die Parametrisierung F glatt ist, folgt, dass $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ in glatter Weise von $u \in U$ abhängt. Wir wollen nun die erste Fundamentalform für einige bereits bekannte reguläre Flächen berechnen.

Beispiel 5.2 (Die erste Fundamentalform der Ebene). Wir betrachten eine Ebene S , die durch den Punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$ geht und durch die Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird (vgl. Beispiel 2.5, Seite 5), beschrieben durch die Parameterdarstellung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$F(u_1, u_2) = p_0 + u_1 X + u_2 Y.$$

Berechnen wir also die Einträge der Matrix wie oben angeführt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} g_{11}(u_1, u_2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_1}(u) \right\rangle = \langle X, X \rangle \\ g_{12}(u_1, u_2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\rangle = \langle X, Y \rangle \\ g_{21}(u_1, u_2) &= g_{12}(u_1, u_2) = \langle Y, X \rangle \quad (\text{Symmetrie}) \\ g_{22}(u_1, u_2) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_2}(u), \frac{\partial F}{\partial u_2}(u) \right\rangle = \langle Y, Y \rangle. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, S sei die x,y-Ebene, also $p_0 = 0$, $X = e_1$ und $Y = e_2$, dann ist die erste Fundamentalform in Matrixgestalt gegeben durch

$$(g_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie wir erkennen, hängt g_{ij} nicht von u ab, ist also konstant. Allgemein ist dies jedoch nicht der Fall und ist auch schon in unserem Beispiel nur der einfachen Parametrisierung

geschuldet. In einer anderen Parametrisierung können die g_{ij} sehr wohl von u abhängen. Verwenden wir etwa statt kartesischen Koordinaten nun Polarkoordinaten $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (r, \varphi)$, d.h.

$$\begin{aligned}\tilde{F} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) &=: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \tilde{F}(r, \varphi) &= (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0).\end{aligned}$$

Für die Matrixeinträge g_{ij} ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{11}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial r} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \\ \tilde{g}_{12}(r, \varphi) &= \tilde{g}_{21}(r, \varphi) = \left\langle \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \tilde{g}_{22}(r, \varphi) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{\partial \tilde{F}(r, \varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = r^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$(\tilde{g}_{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $(\tilde{g}_{ij}(r, \varphi))$ tatsächlich nicht mehr konstant.

Offensichtlich hängt die Gestalt der ersten Fundamentalform wesentlich von der gewählten Parameterdarstellung (bzw. den Koordinaten) ab. Wir wollen uns kurz darüber Gedanken machen, was dies zu bedeuten hat. Dazu betrachten wir beliebige Karten $(F_i^{-1}, S \cap V_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ und eine glatte parametrisierte Kurve $c : [t_1, t_2] \rightarrow S \cap V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$. Nun untersuchen wir, in welcher Beziehung die Bogenlänge der „Flächenkurve“ c zu den Bogenlängen der verschiedenen „Kartenkurven“ $\gamma_i := F_i^{-1} \circ c$ steht. Dazu berechnen wir die Bogenlänge von c . Diese ist, mit Hilfe der Kettenregel, gegeben durch

$$\begin{aligned}L[c] &= \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{c}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \|(F_i \circ \gamma_i)(t)\| dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle D_{\gamma_i(t)} F_i \dot{\gamma}_i(t), D_{\gamma_i(t)} F_i \dot{\gamma}_i(t) \rangle} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma_i(t)}(\dot{\gamma}_i(t), \dot{\gamma}_i(t))} dt.\end{aligned}$$

Wir können somit die Länge der Flächenkurve c bestimmen, indem wir sozusagen im Parameterbereich integrieren; das funktioniert, da die „Längenverzerrung“ der Fläche gegenüber U durch die erste Fundamentalform berücksichtigt wird.

Wir hatten im obigen Beispiel 5.2 zwei unterschiedliche Gestalten der ersten Funda-

mentalform für die x,y-Ebene, abhängig von der Wahl der Karten:

$$(g_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } (\tilde{g}_{ij}(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Seien $\gamma := F^{-1} \circ c$ und $\tilde{\gamma} := \tilde{F}^{-1} \circ c$ die „Kartenkurven“ in kartesischen bzw. in Polarkoordinaten. Für den ersten Fall folgt dann sogleich $L[c] = L[\gamma]$, das heißt, die Länge bleibt erhalten. Fassen wir den Parameter t als Zeit auf, dann können wir sagen, dass wenn wir die Zeit stoppen, innerhalb dieser der gleiche Weg auf der Fläche S sowie in U zurückgelegt wird. Im zweiten Fall (Parametrisierung mit Polarkoordinaten) gilt dagegen $L[c] \neq L[\tilde{\gamma}]$. Die Kurven werden somit unterschiedlich schnell durchlaufen, wenn wir die Zeit stoppen. Das heißt, es ist aufgrund der im zweiten Fall gewählten Parameterdarstellung zu einer „Längenverzerrung“ gekommen. Folglich gibt es längenerhaltende und längenverzerrende Karten der selben Fläche. Die Information darüber steckt in der Gestalt der ersten Fundamentalform.

Beispiel 5.3 (Die erste Fundamentalform des Zylinders). Sei

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

die Zylinderfläche (vgl. Beispiel 3.12, Seite 28). Für die Berechnung der ersten Fundamentalform verwenden wir folgende zweckmäßige Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} F : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &=: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ F(\varphi, h) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, h). \end{aligned}$$

Berechnen wir wieder die Einträge der Matrix $(g_{ij}(\varphi, h))$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} g_{11}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial \varphi}, \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial \varphi} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \\ g_{12}(\varphi, h) &= g_{21}(\varphi, h) = \left\langle \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial \varphi}, \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial h} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ g_{22}(\varphi, h) &= \left\langle \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial h}, \frac{\partial F(\varphi, h)}{\partial h} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \end{aligned}$$

und somit

$$(g_{ij}(\varphi, h)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Matrixgestalt der ersten Fundamentalform des Zylinders. g_{ij} hängt weder von φ noch von h ab, ist also wie im Fall der Ebene in kartesischen Koordinaten konstant. Die erste Fundamentalform der Ebene in kartesischen Koordinaten und die des Zylinders in diesen Koordinaten stimmen sogar überein.

Besteht diese Übereinstimmung rein zufällig oder ist sie als Hinweis auf gewisse Gemeinsamkeiten zu deuten? Geometrische Gründe dafür liegen auf der Hand. Ein ebenes Blatt Papier kann, ohne dass es zerknittert bzw. irgendwie deformiert werden muss, um eine Zylinderfläche gewickelt werden. Wenn wir jetzt gedanklich eine Kurve auf das ebene Blatt Papier zeichnen, ist sie, nachdem wir das Blatt um den Zylinder gewickelt haben, dieselbe Kurve.

Sie wurde weder gestaucht noch verzerrt, sie behält exakt ihre Länge. Nachdem sich die Länge einer Kurve auf einer Fläche, wie wir oben sehen konnten, durch Integration über die erste Fundamentalform berechnet, ist es nicht verwunderlich, dass die Ebene und der Zylinder in geeigneten Koordinaten dieselbe erste Fundamentalform besitzen.³

Oft wird auch das Bild von auf der Fläche lebenden zweidimensionalen Wesen verwendet, die nicht aus der Fläche heraustreten bzw. heraussehen können, sogenannten Flachländern. Für diese wäre es, allein durch Längen- und Winkelmessung, nicht möglich zu entscheiden ob sie auf einem Stück Zylinder oder einem Stück der Ebene leben.

Den obigen Überlegungen folgend, müssten die Sphäre und die Ebene jedenfalls unterschiedliche erste Fundamentalformen besitzen, da man das Papier zerknittern müsste um es um eine Kugel zu wickeln (egal, welche Parametrisierungen gewählt würden). Das führt uns zum nächsten Beispiel.

Beispiel 5.4 (Die erste Fundamentalform der Sphäre). Sei

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Sphäre (vgl. Beispiel 2.6, Seite 5). Für die Berechnung der ersten Fundamentalform verwenden wir folgende zweckmäßige Parameterdarstellung

$$F : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) =: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ F(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta).$$

Es gilt

$$\frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit berechnen sich die Einträge der Matrix als

$$g_{11}(\theta, \varphi) = \left\langle \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right\rangle = 1 \\ g_{12}(\theta, \varphi) = g_{21}(\theta, \varphi) = \left\langle \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \theta}, \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle = 0 \\ g_{22}(\theta, \varphi) = \left\langle \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \frac{\partial F(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \right\rangle = \cos^2 \theta.$$

³Man sagt, die Ebene und der Zylinder sind lokal isometrisch.

Wir erhalten somit

$$(g_{ij}(\theta, \varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

als Matrixgestalt der ersten Fundamentalform der Sphäre bezüglich oben gewählter Parametrisierung.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir noch untersuchen, wie sich die erste Fundamentalform einer Fläche S ändert, wenn wir die Parametrisierung verändern.

Proposition 5.5 (Transformationsverhalten der ersten Fundamentalform). *Seien $(F^{-1}, S \cap V)$ und $(\tilde{F}^{-1}, S \cap \tilde{V})$ zwei Karten für die reguläre Fläche S . Sei $p \in S \cap V \cap \tilde{V}$ und $F^{-1}(p) = u$. Wir bezeichnen die Parametertransformation mit $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ und erhalten*

$$(g_{ij}(u)) = (D_u \varphi)^t \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u))) \cdot D_u \varphi$$

als Beziehung zwischen den ersten Fundamentalformen in Matrixgestalt.

Beweis. Unter Benutzung der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial F(u)}{\partial u_i}, \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial (\tilde{F} \circ \varphi)(u)}{\partial u_i}, \frac{\partial (\tilde{F} \circ \varphi)(u)}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_k \frac{\partial \tilde{F}(\varphi(u))}{\partial \tilde{u}_k} \cdot \frac{\partial \varphi^k(u)}{\partial u_i}, \sum_l \frac{\partial \tilde{F}(\varphi(u))}{\partial \tilde{u}_l} \cdot \frac{\partial \varphi^l(u)}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial \varphi^k(u)}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi^l(u)}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial \tilde{F}(\varphi(u))}{\partial \tilde{u}_k}, \frac{\partial \tilde{F}(\varphi(u))}{\partial \tilde{u}_l} \right\rangle \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial \varphi^k(u)}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi^l(u)}{\partial u_j} \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)). \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.6 (Transformation der ersten Fundamentalform: Ebene). Für die x,y-Ebene verwenden wir die selben Parametrisierungen wie in Beispiel 5.2 (Seite 44), d.h.

$$F : \mathbb{R}^2 =: U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } F(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 0) \text{ bzw.}$$

$$\tilde{F} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) =: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \tilde{F}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0).$$

Wir berechnen unter Verwendung von Proposition 5.5 die Matrixgestalt $(g_{ij}(u))$ der ersten Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung in kartesischen Koordinaten mit Hilfe der Transformation

$$(g_{ij}(u)) = (D_u \varphi)^t \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u))) \cdot D_u \varphi.$$

Die erste Fundamentalform bezüglich der Parametrisierung in Polarkoordinaten haben wir in Beispiel 5.2 berechnet zu

$$(\tilde{g}_{kl}(r, \theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Nun benötigen wir noch die Jacobi-Matrix $D_u\varphi$ des Kartenwechsels $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ und ihre Transponierte $(D_u\varphi)^t$. Die Abbildung $\tilde{F}^{-1}$ wird durch

$$\tilde{F}^{-1} : \tilde{F}(\tilde{U}) \rightarrow \tilde{U} \text{ mit } \tilde{F}^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)$$

beschrieben, also gilt

$$\varphi(u_1, u_2) = \tilde{F}^{-1} \circ F(u_1, u_2) = \tilde{F}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \arctan \frac{u_2}{u_1} \right)$$

Nun können wir das gesuchte Differenzial $D_u\varphi$ bilden

$$D_{(u_1, u_2)}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} & \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ -\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \end{pmatrix}$$

und die gesuchte erste Fundamentalform der Ebene in kartesischen Koordinaten berechnen

$$\begin{aligned} (g_{ij}(u)) &= (D_u\varphi)^t \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u))) \cdot D_u\varphi \\ &= \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} & -\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} \\ \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} & \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u_1^2 + u_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} & \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \\ -\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} & \frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wie zu erwarten, stimmt unser Ergebnis mit der in Beispiel 5.2 (Seite 44) berechneten Fundamentalform der Ebene in kartesischen Koordinaten überein.

5.2 Normalenfelder und Orientierbarkeit

Um etwas später die zweite Fundamentalform einführen zu können, brauchen wir noch die Begriffe *Orientierbarkeit* und *Normalenfeld* für eine reguläre Fläche S . Grob kann man sich unter einer orientierbaren Fläche eine Fläche vorstellen, die ein global definiertes „unten“ und „oben“ hat. Um diesen Gedanken zu konkretisieren führen wir folgenden Begriff ein.

Definition 5.7 (Normalenfeld auf S). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Ein Normalenfeld auf S ist eine Abbildung

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

so dass $N(p) \perp T_p S$ für alle $p \in S$. Ein Normalenfeld auf S heißt Einheitsnormalenfeld, falls zusätzlich $\|N(p)\| = 1$ für alle $p \in S$ gilt.

Wir erkennen sogleich, dass mit N auch $-N$ ein Normalenfeld auf S ist. Wir wollen uns Beispiele von Normalenfeldern auf den uns bereits bekannten regulären Flächen ansehen.

Beispiel 5.8 (Normalenfeld x,y-Ebene). Sei $S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die x,y-Ebene. Dann ist $N(x, y, 0) = (0, 0, 1)$ offensichtlich ein konstantes Einheitsnormalenfeld auf S .

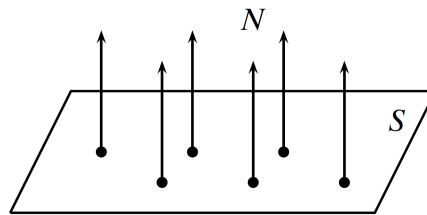


Abbildung 5.4: Normalenfeld x,y-Ebene [1, §3.4, S. 115]

Beispiel 5.9 (Normalenfeld Kugel). Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Kugel. Dann ist ein Einheitsnormalenfeld durch $N(p) = p$ gegeben.

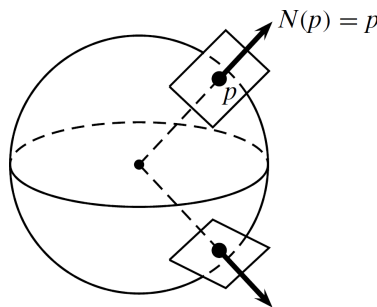


Abbildung 5.5: Normalenfeld Kugel [1, §3.4, S. 116]

Beispiel 5.10 (Normalenfeld Zylinderfläche). Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ die Zylinderfläche. Dann ist $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ ein Einheitsnormalenfeld auf S .

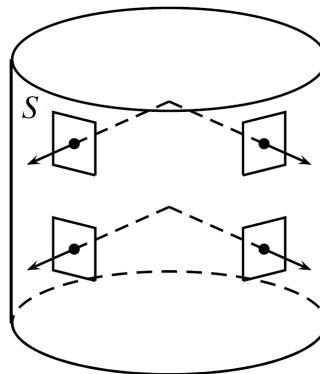


Abbildung 5.6: Normalenfeld Zylinderfläche [1, §3.4, S. 116]

Bei allen bisher angeführten Beispielen war das gefundene (Einheits-)Normalenfeld stetig. Wie uns folgendes spannendes Beispiel zeigen wird, muss dies nicht zwingend der Fall sein.

Beispiel 5.11 (Normalenfeld Möbiusband). Ein Möbiusband erhalten wir, indem wir zum Beispiel die Enden eines länglichen Stück Papiers um 180° verdrehen und diese dann zusammenheften.

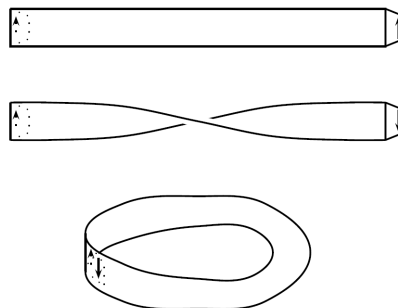


Abbildung 5.7: Konstruktion Möbiusband [1, §3.4, S. 117]

Wenn wir gedanklich versuchen nur eine Seite des Bandes zu bemalen, wird uns dies unter keinen Umständen gelingen, egal, wie sehr wir es versuchen. Es mag sich auf den ersten Blick vielleicht nicht erschließen, aber das Möbiusband hat nur eine Kante und eine „Flächenseite“. Es gibt kein „Innen“ und „Außen“ bzw. kein „Unten“ und „Oben“. Dieser Besonderheit verdankt das Möbiusband, dass es kein stetiges Einheitsnormalenfeld besitzt, wie Abbildung 5.8 zeigt.

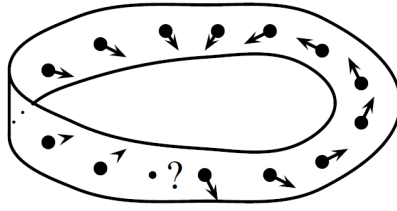


Abbildung 5.8: Normalenfeld Möbiusband [1, §3.4, S. 117]

Diese Tatsachen motivieren die folgende Begriffsbildung.

Definition 5.12 (Orientierbarkeit einer regulären Fläche). Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt orientierbar, falls es ein glattes Einheitsnormalenfeld auf S gibt.

Demzufolge sind die Ebene, die Kugel und die Zylinderfläche orientierbar, das Möbiusband hingegen nicht.

Für eine reguläre Fläche S können wir immer ein Einheitsnormalenfeld N finden, indem wir jedem Punkt der Fläche den normierten Normalvektor der Tangentialebene $T_p S$ zuweisen. Dabei ist N allerdings im Allgemeinen nicht glatt, ja nicht einmal stetig, wie Beispiel 5.11 zeigt. Betrachten wir hingegen nur ein kleines Stück $S \cap V$ der Fläche S , so finden wir, dass S lokal durchaus orientierbar ist, also ein glattes Einheitsnormalenfeld $N : S \cap V \rightarrow \mathbb{R}^3$ besitzt.

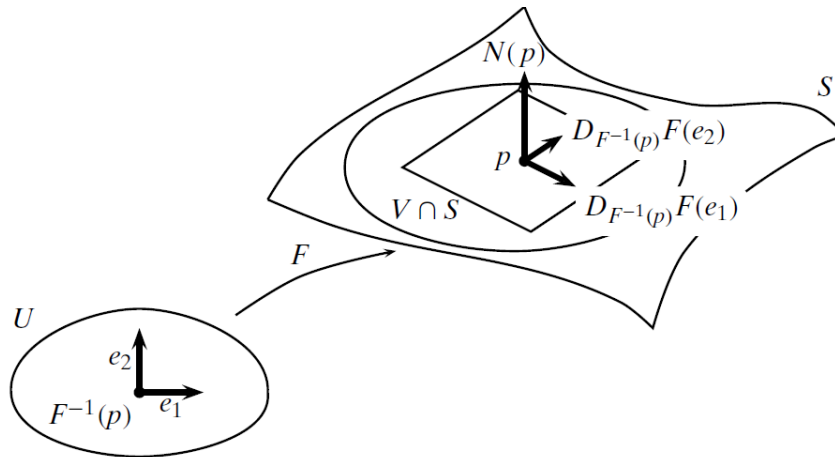


Abbildung 5.9: Konstruktion des lokalen Einheitsnormalenfeldes [1, §3.4, S. 118]

Wir konstruieren das lokale Einheitsnormalenfeld unter Zuhilfenahme einer lokalen Parametrisierung $F : U \rightarrow S \cap V$. Ein Normalenfeld erhalten wir dann durch

$$\tilde{N}(p) = D_{F^{-1}(p)}F e_1 \times D_{F^{-1}(p)}F e_2,$$

wobei $F^{-1}(p) = u$. Es gilt, dass die Jacobi-Matrix $D_u F$ maximalen Rang 2 hat und somit ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Daraus folgt unmittelbar $\tilde{N} \neq (0, 0, 0)$. Das heißt, wir erhalten ein glattes Einheitsnormalenfeld auf $S \cap V$ durch

$$N(p) := \frac{\tilde{N}(p)}{\|\tilde{N}(p)\|}.$$

Die Frage ist nun, ob sich das eben konstruierte Einheitsnormalenfeld auf ganz S ausdehnen lässt, indem wir die lokalen Einheitsnormalenfelder auf einer Überdeckung von S durch Karten „verkleben“. Der folgende Satz gibt darüber Auskunft und liefert auch ein Kriterium, das Aufschluss über die Orientierbarkeit einer regulären Fläche gibt.

Satz 5.13 (Orientierbarkeit - Parametertransformation). *Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist genau dann orientierbar, wenn S derart durch lokale Parametrisierungen überdeckt werden kann, dass für alle Parametertransformationen φ gilt*

$$\det(D\varphi) > 0.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass S derart durch lokale Parametrisierungen $F_i : U_i \rightarrow S \cap V_i$ überdeckt werden kann, dass für alle Parametertransformationen $\varphi_{ij} = F_i^{-1} \circ F_j$ gilt $\det(D\varphi_{ij}) > 0$.

Wir zeigen nun, dass sich die lokalen Einheitsnormalenfelder N_i (siehe Seite 53) zu einem glatten Einheitsnormalenfeld N auf S „verkleben“ lassen. Sei dazu $p \in (S \cap V_1) \cap (S \cap V_2)$ und $F_i(u_{i0}) = p$, $i = 1, 2$. Laut Konstruktion sind dann $\{D_{u_{i0}} F_i e_1, D_{u_{i0}} F_i e_2, N_i(p)\}$ positiv orientierte Basen des $\mathbb{R}^3$. Daher gilt $N_1(p) = N_2(p)$ genau dann, falls $\{D_{u_{10}} F_1 e_1, D_{u_{10}} F_1 e_2\}$ und $\{D_{u_{20}} F_2 e_1, D_{u_{20}} F_2 e_2\}$ gleichorientierte Basen von $T_p S$ sind. Das ist wiederum laut linearer Algebra [5, §3.4.3 S 213] genau dann der Fall, falls die Matrix des Basiswechsels positive Determinante hat. Diese Matrix ist aber genau $D_{u_{10}} \varphi_{21}$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass S orientierbar ist, so müssen wir aus der Existenz des Einheitsnormalenfeldes N eine Überdeckung konstruieren, sodass alle Parametertransformationen $\det(D\varphi) > 0$ erfüllen. Für die lokalen Einheitsnormalenfelder einer beliebigen Überdeckung von S mit lokalen Parametrisierungen $F_i : U_i \rightarrow S \cap V_i$ gilt natürlich

$$N(p) = \pm N_i(p),$$

falls $p \in S \cap V_i$. Gilt $N(p) = N_i(p)$, so ist nichts mehr zu tun. Im Falle $N(p) = -N_i(p)$ vertauschen wir einfach die Koordinaten der jeweiligen Parametrisierung F_i . Liegt nun ein Punkt p in $(V_1 \cap S) \cap (V_2 \cap S)$, so gilt (eventuell erst nach der obigen Vertauschung) $N_1(p) = N_2(p)$, daher sind $\{D_{u_{10}} F_1 e_1, D_{u_{10}} F_1 e_2\}$ und $\{D_{u_{20}} F_2 e_1, D_{u_{20}} F_2 e_2\}$ gleichorientierte Basen in $T_p S$ und wieder gilt $\det(D_{u_{10}} \varphi_{21}) > 0$. $\square$

Wir haben nun die Begriffe Orientierbarkeit und Einheitsnormalenfeld für eine reguläre Fläche S kennengelernt. Damit haben wir das nötige Rüstzeug, um die zweite Fundamentalform einführen zu können.

5.3 Die zweite Fundamentalform

Wir kommen dem zentralen Begriff der Krümmung immer näher. Die Basis des Krümmungskonzeptes stellt die zweite Fundamentalform dar, welche im Wesentlichen angibt, wie die Fläche S im $\mathbb{R}^3$ liegt. Der Grundgedanke besteht darin zu messen, wie „schnell“ sich die Fläche S von der Tangentialebene $T_p S$ in der Umgebung von $p \in S$ entfernt. Diese Messung ist äquivalent zu der Bestimmung der Änderungsrate des Einheitsnormalenfeldes in der Umgebung von p . Wir können daher direkt an dem im vorhergehenden Kapitel 5.2 entwickelten Konzept der Normalenfelder anknüpfen.

Der Weg zur zweiten Fundamentalform gestaltet sich verhältnismäßig technisch. Zuerst lernen wir das Einheitsnormalenfeld in einem neuen Licht, als Gauß-Abbildung, kennen. Ihr Differenzial, die Weingarten-Abbildung, werden wir als erstes untersuchen.

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre und orientierbare Fläche, das heißt wir haben ein glattes Einheitsnormalenfeld $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p \mapsto N(p) \in \mathbb{R}^3$, $N(p) \perp T_p S$ und $\|N(p)\| = 1$. Offensichtlich gilt $N(p) \in S^2$ für alle $p \in S$.

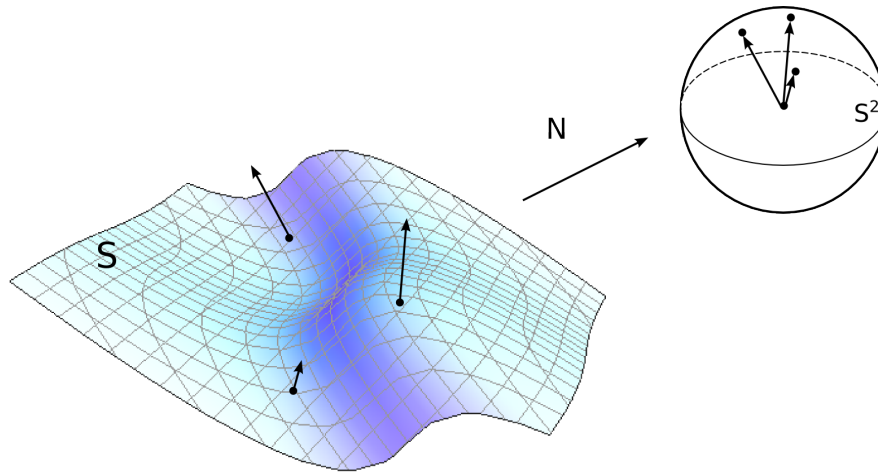


Abbildung 5.10: Gauß-Abbildung

Definition 5.14 (Gauß-Abbildung). Die Gauß-Abbildung ist nichts anderes als N aufgefasst als Abbildung

$$N : S \rightarrow S^2,$$

also als Abbildung zwischen zwei regulären Flächen.

Die Gauß-Abbildung kann global natürlich nur auf orientierbaren regulären Flächen definiert werden, lokal allerdings auf allen regulären Flächen.

Betrachten wir nun das Differenzial der Gauß-Abbildung in einem Punkt $p \in S$. Die Grundlage für das Ableiten von Abbildungen $f : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen regulären Flächen haben wir in Kapitel 3.2.3 auf Seite 26 entwickelt. Das Differenzial der Gauß-Abbildung ist also die Abbildung

$$D_p N : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2.$$

Wir erkennen, dass $T_p S$ und $T_{N(p)} S^2$ parallele Ebenen sind. Das heißt, wir können wegen $T_{N(p)} S^2 = N(p)^\perp = T_p S$, $D_p N$ auch als lineare Abbildung von $T_p S$ auf sich selbst auffassen. $D_p N$ ist also ein Endomorphismus von $T_p S$.

Um besser zu verstehen, was $D_p N : T_p S \rightarrow T_p S$ macht, betrachten wir glatte parametrisierte Kurven c in S mit $c(0) = p$. Sei $N(t) := (N \circ c)(t)$, also eine glatte parametrisierte Kurve in S^2 , was der Einschränkung von N auf die Kurve c entspricht. Der Tangentialvektor $\dot{N}(0) = D_p N \dot{c}(0) \in T_p S$ misst die Änderungsrate von N , eingeschränkt auf $c(t)$, zum Zeitpunkt $t = 0$. Das heißt, dass $D_p N$ misst, wie „stark“ sich N von $N(p)$ in einer Umgebung von p wegdreht. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass $D_p N$ die Änderung der Tangentialebene an S in einer Umgebung von p beschreibt. Während dieses Maß im Fall von Kurven durch eine Zahl respektive durch die Krümmung κ gegeben ist, wird es im Fall von regulären Flächen durch eine lineare Abbildung beschrieben.

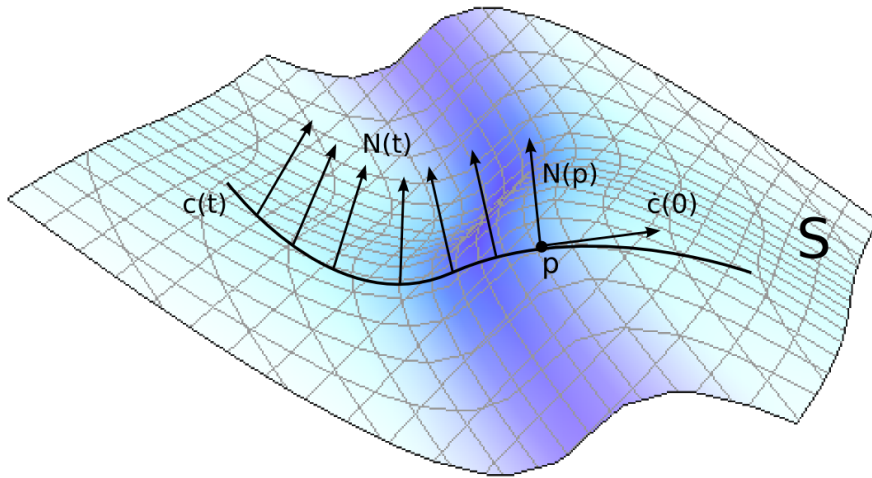


Abbildung 5.11: Weingarten-Abbildung

Diese lineare Abbildung, die Ableitung der Gauß-Abbildung, wird auch Weingarten-Abbildung genannt.

Definition 5.15 (Weingarten-Abbildung). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit Orientierung gegeben durch ein Einheitsnormalenfeld N . Für jedes $p \in S$ ist die Weingarten-Abbildung W_p definiert durch

$$W_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

$$W_p(X) := -D_p N X$$

Das negative Vorzeichen hat historische Gründe und keine wesentliche Bedeutung. Bevor wir die Weingarten-Abbildung eingehender studieren, betrachten wir dazu einige Beispiele.

Beispiel 5.16 (Weingarten-Abbildung - Kugel). Die Kugel ist gegeben durch

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Aus Beispiel 5.9 auf Seite 50 wissen wir, dass $N(p) = p$ ein Einheitsnormalenfeld von S^2 ist. Daraus folgt unmittelbar $D_p N = \text{id}$, also $D_p N(X) = X \in T_p S^2$ für alle $p \in S$ und

$$W_p = -\text{id} : T_p S^2 \rightarrow T_p S^2.$$

Beispiel 5.17 (Weingarten-Abbildung - Ebene). Sei $S = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ die x,y-Ebene. Aus Beispiel 5.8 auf Seite 50 wissen wir, dass $N(x, y, z) = (0, 0, 1)$ ein Einheitsnormalenfeld der x,y-Ebene ist. Da N konstant ist, gilt

$$W_p = 0$$

für alle $p \in S$.

Beispiel 5.18 (Weingarten-Abbildung - Zylinder). Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder und $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ das Einheitsnormalenfeld (vgl. Beispiel 5.10, Seite 51). Die Tangentialebene $T_p S$ wird aufgespannt durch die Basisvektoren $\{(-y, x, 0), (0, 0, 1)\}$.

Wir wollen die Matrixdarstellung von W_p finden. Dazu betrachten wir die Bilder der Basisvektoren unter W_p . Sei $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$, $t \mapsto (x, y, z + t)$ eine glatte parametrisierte Kurve in S , wobei $(x, y, z) = p \in S$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -D_p N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -DN(c(t))\dot{c}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(N \circ c)(0) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da sich die Tangentialebene in z-Richtung nicht ändert. Um nun das Bild von $(-y, x, 0)$ unter W_p zu bestimmen, konstruieren wir wieder eine passende Kurve. Sei $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$, $t \mapsto (\cos(t + t_0), \sin(t + t_0), z)$ eine glatte parametrisierte Kurve in S , wobei t_0 so gewählt ist, dass $(\cos t_0, \sin t_0) = (x, y)$, also $c(0) = (x, y, z) = p \in S$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} W_p \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} &= -D_p N \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{d}{dt} N \begin{pmatrix} \cos(t + t_0) \\ \sin(t + t_0) \\ z \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t + t_0) \\ \sin(t + t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \sin t_0 \\ -\cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit, zu der oben gewählten Basis, folgende Matrixdarstellung von W_p

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Eigenschaft von W_p beschreibt folgende Proposition.

Proposition 5.19 (Selbstadjungiertheit der Weingarten-Abbildung). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche und $p \in S$. Die Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ ist selbstadjungiert bzgl. der ersten Fundamentalform.*

Beweis. Sei $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von S um p und $u := F^{-1}(p)$. Wir setzen $X_1 := \frac{\partial F(u)}{\partial u_1}$ und $X_2 := \frac{\partial F(u)}{\partial u_2}$. Offensichtlich ist $\{X_1, X_2\}$ eine Basis von $T_p S$. Sei N das zur Weingarten-Abbildung gehörende Einheitsnormalenfeld, dann gilt

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \equiv 0, \text{ weil } N(p) \perp T_p S.$$

Ableiten nach t ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j), N(F(u + te_j)) \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial u_i}(u + te_j) \Big|_{t=0}, N(p) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(u), D_p N D_u F e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle + \langle X_i, -W_p(X_j) \rangle. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$I_p(X_i, W_p(X_j)) = \langle X_i, W_p(X_j) \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle.$$

Nachdem es bei stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf die Reihenfolge der Differenziation nicht ankommt [2, §5, S. 55], folgt

$$\begin{aligned} I_p(X_i, W_p(X_j)) &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \right\rangle = I_p(X_j, W_p(X_i)). \end{aligned}$$

Da sich alle Vektoren $X, Y \in T_p S$ als Linearkombination der Basisvektoren X_1, X_2 schreiben lassen, W_p eine lineare Abbildung und I_p eine symmetrische Bilinearform ist, folgt mit einer einfachen Rechnung das gewünschte Resultat

$$I_p(X, W_p(Y)) = I_p(W_p(X), Y).$$

□

Nun haben wir alles, was wir brauchen, um die zweite Fundamentalform einzuführen. Wir wissen aus der linearen Algebra, dass einem selbstadjungierten Endomorphismus φ auf einem euklidischen Vektorraum in eindeutiger Weise eine symmetrische Bilinearform

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \mapsto \langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle.$$

zugeordnet werden kann [5, §5.4.2, S. 289].

Definition 5.20 (Zweite Fundamentalform). Die zur Weingarten-Abbildung W_p gehörige Bilinearform

$$II_p(X, Y) = I_p(W_p(X), Y), \quad X, Y \in T_p S,$$

wird zweite Fundamentalform der Fläche S im Punkt p genannt.

Im nächsten Kapitel 5.4 werden wir sehen, wie wir mittels II_p zum Begriff der Krümmung gelangen. Zunächst aber wollen wir noch zeigen, wie sich die zweite Fundamentalform mit Hilfe von lokalen Koordinaten ausdrücken lässt. Sei $F : U \rightarrow S \cap V$ eine lokale Parametrisierung von $S \subseteq \mathbb{R}^3$ um $p \in S$. Wir setzen $u := F^{-1}(p)$. In der Basis $\{D_u F e_1 = \frac{\partial F(u)}{\partial u_1}, D_u F e_2 = \frac{\partial F(u)}{\partial u_2}\}$ gilt für die Matrixeinträge der ersten Fundamentalform (siehe Seite 44)

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F(u)}{\partial u_i}, \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} \right\rangle = I_p(D_u F e_i, D_u F e_j).$$

In Analogie zur ersten Fundamentalform definieren wir die Matrixeinträge $h_{ij}(u)_{i,j=1,2}$ der zweiten Fundamentalform bezüglich der oben genannten Basis als

$$h_{ij}(u) := II_p(D_u F e_i, D_u F e_j) \\ = I_p(W_p(D_u F e_i), D_u F e_j) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle.$$

Der letzte Rechenschritt wurde aus dem Beweis der Proposition 5.19 übernommen.

Um später Berechnungen einfacher durchführen zu können, zeigen wir noch, wie die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung aus den Matrizen der ersten und zweiten Fundamentalform hervorgeht. Dazu verwenden wir wieder Hilfsmittel aus der linearen Algebra. Sei $(w_{ij}(u))$ mit $i, j = 1, 2$ die Abbildungsmatrix von W_p bezüglich der Basis $\{D_u F e_1, D_u F e_2\}$, dann gilt

$$W_p(D_u F e_j) = \sum_{i=1}^2 D_u F e_i w_{ij}(u).$$

Für die Matrixeinträge der zweiten Fundamentalform gilt

$$\begin{aligned} h_{ij}(u) &= II_p(D_u F e_i, D_u F e_j) = I_p(D_u F e_i, W_p(D_u F e_j)) \\ &= I_p\left(D_u F e_i, \sum_{k=1}^2 DF(u) e_k w_{kj}(u)\right) = \sum_{k=1}^2 I_p(D_u F e_i, D_u F e_k) w_{kj}(u) \\ &= \sum_{k=1}^2 g_{ik}(u) w_{kj}(u). \end{aligned}$$

Das heißt, wir erhalten die Abbildungsmatrix der zweiten Fundamentalform durch Multiplikation der Matrix der ersten Fundamentalform mit der Matrix der Weingarten-Abbildung

$$(h_{ij}(u)) = (g_{ik}(u))(w_{kj}(u)).$$

Da $(g_{ik}(u))$ positiv definit ist, können wir die Matrix invertieren.⁴ Sei $(g^{ik}(u))$ die zu $(g_{ik}(u))$ inverse Matrix, dann folgt

$$w_{ij} = \sum_{k=1}^2 g^{ik} h_{kj}.$$

Wir wollen nun die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung des Rotationstorus berechnen.

Beispiel 5.21 (Weingarten-Abbildung - Torus). Wir verwenden die Parameterdarstellung des Torus aus Beispiel 2.13 auf Seite 12. Dort haben wir den Torus als eine um die z-Achse rotierende Kreisscheibe beschrieben. Den Abstand vom Ursprung zum Mittelpunkt der Kreisscheibe bezeichnen wir in diesem Beispiel mit a und den Radius der Kreisscheibe mit b , dann gilt

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 \supseteq U &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ F(u_1, u_2) &= \begin{pmatrix} (a + b \cos(u_1)) \cos(u_2) \\ (a + b \cos(u_1)) \sin(u_2) \\ b \sin(u_1) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $a > b > 0$. Ferner setzen wir $u := F^{-1}(p)$.

⁴Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ positiv definit, dann gilt $x^t A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ [5, §5.4.6, S. 292]. Daraus folgt unmittelbar, dass $\text{rang}(A) = n$.

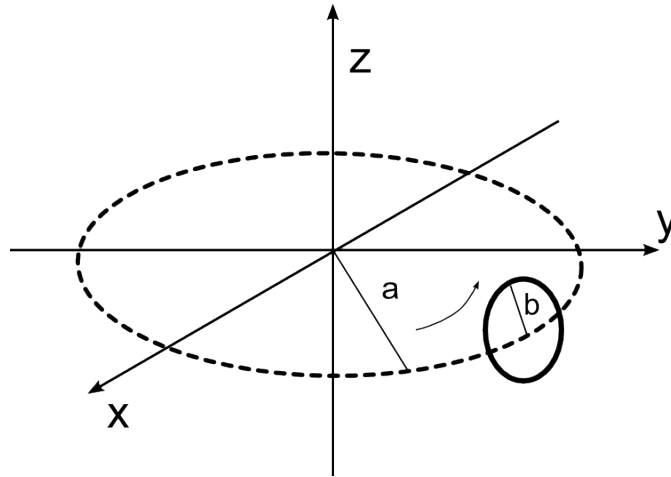


Abbildung 5.12: Konstruktion Torus

Wir berechnen die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform. Mit

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F(u)}{\partial u_i}, \frac{\partial F(u)}{\partial u_j} \right\rangle$$

folgt

$$(g_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b \cos(u_1))^2 \end{pmatrix}.$$

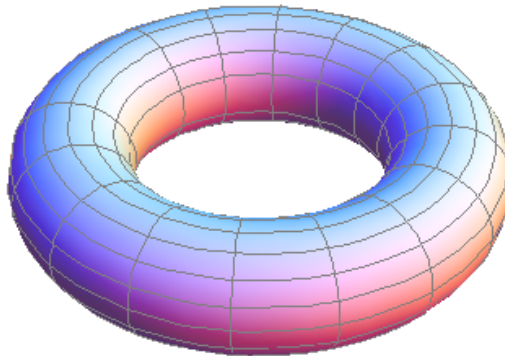


Abbildung 5.13: Torus

Um die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform zu berechnen, brauchen wir

noch den Einheitsnormalenvektor. Dieser ist gegeben durch

$$N(p) = \frac{D_{F^{-1}(p)}F e_1 \times D_{F^{-1}(p)}F e_2}{\|D_{F^{-1}(p)}F e_1 \times D_{F^{-1}(p)}F e_2\|} = - \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \cos(u_1) \sin(u_2) \\ \sin(u_1) \end{pmatrix}.$$

Nun sind wir in der Lage die Matrixdarstellung der zweiten Fundamentalform zu berechnen. Mit

$$h_{ij}(u) = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}(u), N(p) \right\rangle$$

folgt

$$(h_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos(u_1)(a + b \cos(u_1)) \end{pmatrix}.$$

Somit folgt für die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung:

$$\begin{aligned} (w_{ij}(u)) &= (g^{ik}(u))(h_{kj}(u)) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b \cos(u_1))^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos(u_1)(a + b \cos(u_1)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos(u_1)}{a+b \cos(u_1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.4 Krümmung

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Begriffe der klassischen Flächentheorie, dem der Krümmung. Das zentrale Anliegen in diesem Kapitel ist es, ein Maß zu finden, mit dem man die Krümmung einer regulären Fläche im Raum quantitativ beurteilen kann. Die Suche führt zu verschiedenen Konzepten der Krümmung.

Die Krümmung einer Fläche S in einem Punkt p hängt eng mit der Krümmung von Kurven zusammen, die in in der Fläche S durch den Punkt p verlaufen. Die Krümmung einer Kurve wird durch einen einfachen Zahlenwert wiedergegeben. Nun ist es so, dass eine beliebige Anzahl von Kurven mit unterschiedlicher Richtung des Tangentialvektors in p durch den Punkt $p \in S$ gehen. Das heißt, die Krümmung einer Fläche in einem Punkt p wird auch von einer Richtung $X \in T_p S$ abhängen.

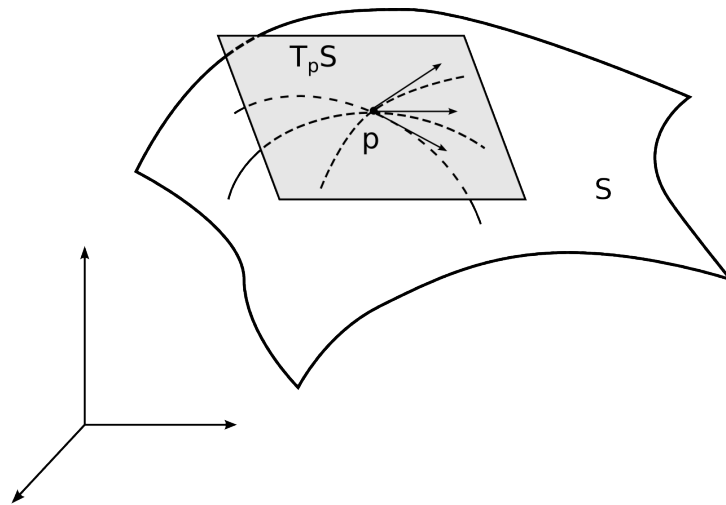


Abbildung 5.14: Krümmung in p in verschiedenen Richtungen

Wir wollen den Zusammenhang zwischen Kurven, die in der Fläche verlaufen, und der Fläche selbst in Bezug auf die Krümmung genauer untersuchen. Hier kommt die zweite Fundamentalform ins Spiel. Wir versuchen $II_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ geometrisch zu interpretieren, indem wir einfach den Tangentialvektor einer Kurve, die in der Fläche verläuft, in II_p einsetzen.

Sei S eine reguläre und orientierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N . Sei weiters $c : I \rightarrow S, t \mapsto c(t)$ eine glatte nach Bogenlänge parametrisierte Kurve⁵ mit $c(0) = p \in S$ und daher $\dot{c}(0) \in T_p S$. Offensichtlich gilt $\langle N(c(t)), \dot{c}(t) \rangle = 0$ somit $\left\langle \frac{d}{dt} N(c(t)), \dot{c}(t) \right\rangle =$

⁵d.h. es gilt $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ [1, §2.1, S. 31].

– $\langle N(c(t)), \ddot{c}(t) \rangle$ für alle $t \in I$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) &= I_p(W_p(\dot{c}(0)), \dot{c}(0)) \\
&= -\langle D_p N \dot{c}(0), \dot{c}(0) \rangle \quad (*) \\
&= -\left\langle \frac{d}{dt} N(c(t)) \Big|_{t=0}, \dot{c}(0) \right\rangle \\
&= \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle.
\end{aligned}$$

Für nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt die Funktion $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \|\ddot{c}(t)\|$ Krümmung von c [1, §2.3, S. 66]. Wir setzen $\theta := \angle(\ddot{c}(0), N(p))$, dann gilt weiter

$$\langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle = \|\ddot{c}(0)\| \cos \theta = \kappa(0) \cos \theta.$$

Dieses Ergebnis entspricht der Länge der orthogonalen Projektion des Krümmungsvektors $\ddot{c}(0)$ auf den Normalvektor $N(p)$ der Fläche im Punkt p . Dies kann anschaulich als der Anteil der Krümmung von c im Punkt p verstanden werden, welcher dadurch entsteht, dass sich die Fläche S im umgebenden $\mathbb{R}^3$ krümmt. Den Anteil der Krümmung von c , welcher andererseits tangential zu S entsteht und der dadurch zustande kommt, dass sich c „innerhalb“ von S krümmt, nennt man geodätische Krümmung.

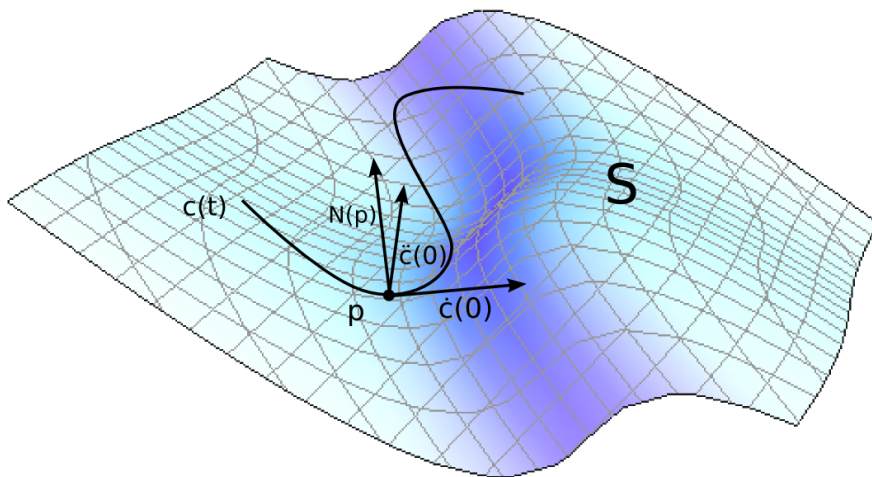


Abbildung 5.15: Krümmung einer Kurve in S

Diese Feststellungen motivieren die folgende Definition.

Definition 5.22 (Normalkrümmung). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und $p \in S$. Sei weiters $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$, dann heißt

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) := \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle$$

die Normalkrümmung von S im Punkt p in Richtung $\dot{c}(0)$.

Insbesondere gilt

$$|\kappa_{nor}| \leq \kappa(0).$$

Aus obiger Rechnung (*) folgt unmittelbar der Satz von Meusnier.

Satz 5.23 (Meusnier). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche mit Einheitsnormalenfeld N und zweiter Fundamentalform II . Sei $p \in S$ und $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Dann gilt für die Normalkrümmung von S im Punkt p in Richtung $\dot{c}(0)$*

$$\kappa_{nor}(p, \dot{c}(0)) = II_p(\dot{c}(0), \dot{c}(0)).$$

□

Wir sehen, dass κ_{nor} nicht von der speziellen Wahl der Kurve c abhängt, also eine Eigenschaft der Fläche S ist. Das heißt, $\kappa_{nor}(p, X) \equiv \kappa_{nor}(X)$ für $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$ wohldefiniert, d.h. nicht vom X definierenden Kurvenstück abhängig. Um eine bessere Vorstellung von der Normalkrümmung zu bekommen, betrachten wir folgende Konstruktion. Sei S eine reguläre und durch das Einheitsnormalenfeld N orientierte Fläche, $p \in S$ und $X \in T_p S$. Ferner sei E die Ebene durch p , aufgespannt durch die Vektoren $N(p)$ und X . Wir schneiden die Fläche S mit der Ebene E (Normalschnitt).

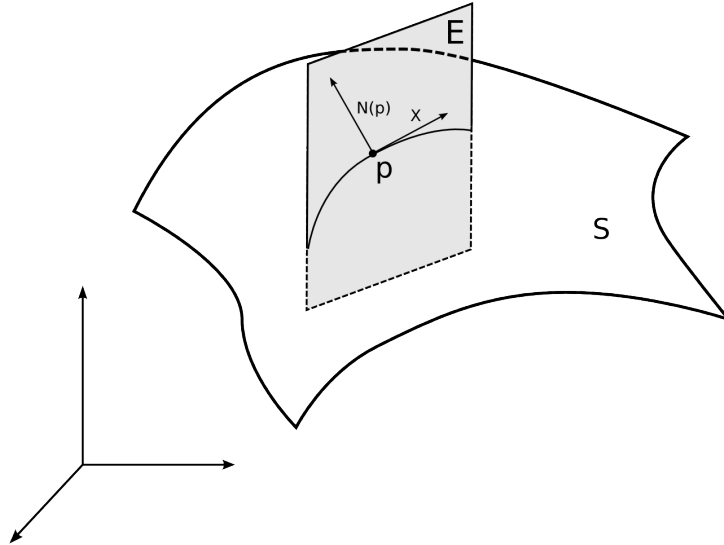


Abbildung 5.16: Normalschnitt der Fläche S im Punkt p in Richtung X

In einer Umgebung von p kann die Schnittmenge durch eine reguläre Kurve $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$ nach Bogenlänge parametrisiert werden mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ (Satz über implizite Funktionen [2, §8, S. 89]). Die Krümmung κ von c im Punkt p entspricht,

abgesehen vom Vorzeichen, der Normalkrümmung der Fläche S im Punkt p in Richtung X , denn es gilt

$$\kappa_{nor}(p, X) = II_p(X, X) = \kappa(0) \cos \theta,$$

wobei θ der Winkel zwischen $N(p)$ und $\ddot{c}(0)$ ist. Da aufgrund der Konstruktion die beiden Vektoren parallel sind, ist $\cos \theta = \pm 1$ und es folgt

$$\kappa_{nor}(p, X) = \pm \kappa(0).$$

Wir wollen nun unsere drei Standardbeispiele hinsichtlich der Normalkrümmung untersuchen.

Beispiel 5.24 (Normalkrümmung - Ebene). Sei S die x,y-Ebene (vgl. Beispiel 5.17, Seite 56). Alle Normalschnitte ergeben Geraden, d.h. die Normalkrümmung in allen Punkten $p \in S$ und in alle Richtungen $X \in T_p S$ ist null. Daher gilt $II_p \equiv 0$, für alle $p \in S$. Dies stimmt mit dem Resultat, dass $W_p \equiv 0$ aus Beispiel 5.17, Seite 56 überein.

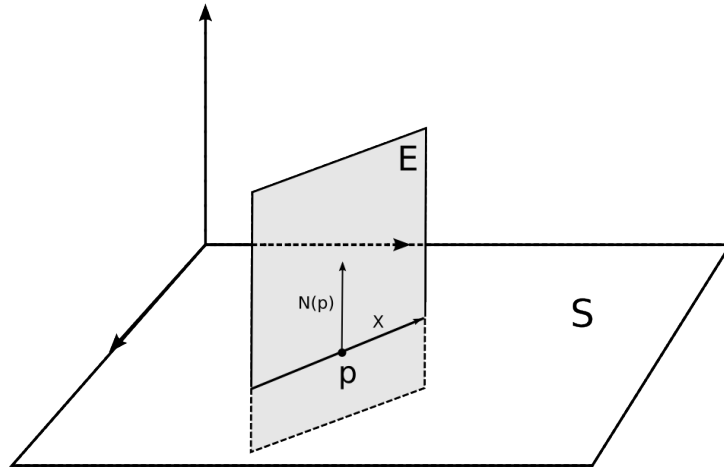


Abbildung 5.17: Normalschnitt x,y-Ebene

Beispiel 5.25 (Normalkrümmung - Kugel). Die Normalschnitte durch einen Punkt p in der Kugel S^2 aus Beispiel 5.16, Seite 55 sind Kreise mit Radius 1. Das bedeutet, dass die Normalkrümmung in allen Punkten $p \in S^2$ und in alle Richtungen $X \in T_p S$ gleich 1 ist und für die zweite Fundamentalfarm gilt $II_p(X, X) = 1$ für alle $p \in S^2$ und alle $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$.

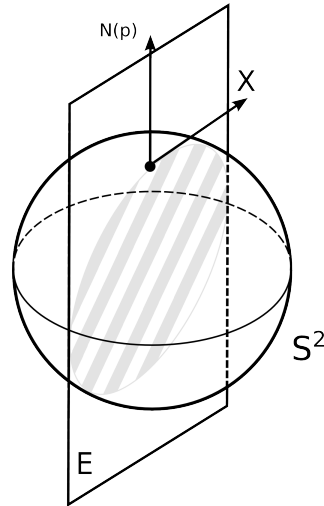


Abbildung 5.18: Normalschnitt Sphäre

Beispiel 5.26 (Normalkrümmung - Zylinder). Sei $S = S^1 \times \mathbb{R}$ der Zylinder (vgl. Beispiel 5.18, Seite 56). Die Normalschnitte durch einen Punkt $p \in S$ sind entweder Kreise, Ellipsen oder Geraden. Es ist leicht zu erkennen, dass das Maximum der Normalkrümmung den Wert 1 annimmt und das Minimum den Wert 0.

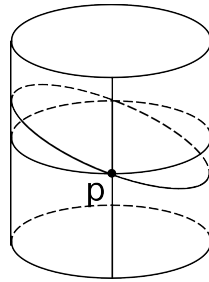


Abbildung 5.19: Normalschnitt Zylinder

Bemerkung 5.27. Sei S eine reguläre orientierbare Fläche und sei N das Einheitsnormalenfeld, dann wissen wir bereits, dass auch $-N$ ein Einheitsnormalenfeld von S ist. Im Fall eines Wechsels des Vorzeichens von N wechselt auch die Normalkrümmung κ_{nor} ihr Vorzeichen, denn es gilt

$$\langle \ddot{c}(0), -N(p) \rangle = -\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle.$$

Wenn wir das Einheitsnormalenfeld für den Zylinder aus Beispiel 5.18 auf Seite 56 „umdrehen“, erhalten wir die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

der Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ bezüglich der Basis $\{(-y, x, 0), (0, 0, 1)\}$. Wie in Beispiel 5.18 gezeigt, sind die beiden Basisvektoren Eigenvektoren von W_p mit den Eigenwerten 1 und 0 und offensichtlich zeigen sie jeweils in die Richtung, in der die Normalkrümmung ihr Maximum bzw. ihr Minimum annimmt. Zu erkennen ist auch, dass die Extremwerte der Normalkrümmung in $p \in S$ mit den Eigenwerten des jeweiligen Eigenvektors korrelieren.

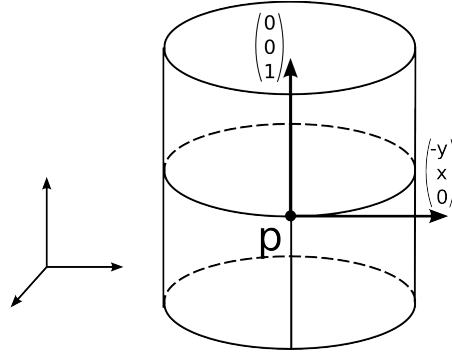


Abbildung 5.20: Zylinder - Hauptkrümmungsrichtungen

Wir wollen die gemachten Beobachtungen am Zylinder nun verallgemeinern. Nach Proposition 5.19 auf Seite 57 ist die Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ ein selbst-adjungierter Endomorphismus, daher existiert eine Orthonormalbasis $\{X_1, X_2\}$ von $T_p S$ aus Eigenvektoren von W_p [4, §7.6, S. 183],

$$W_p(X_i) = \kappa_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Was die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung mit der Normalkrümmung zu tun haben, sagt uns folgende Proposition.

Proposition 5.28 (Eigenwerte von W_p als Extremwerte der Normalkrümmung). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche und $p \in S$. Die Eigenwerte κ_1 und κ_2 der Weingarten-Abbildung $W_p : T_p S \rightarrow T_p S$ sind die Extremwerte der Normalkrümmung $\kappa_{nor}(X, p)$ in $p \in S$, wenn $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$ alle Richtungen durchläuft.*

Beweis. Sei $X \in T_p S$ mit $\|X\| = 1$, dann kann X geschrieben werden als Linearkombination aus Eigenvektoren von W_p , also als $X = \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2$ für ein $\varphi \in (0, 2\pi]$. Es folgt

$$\begin{aligned} \kappa_{nor}(X, p) &= II_p(X, X) = II_p(\cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2, \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) X_2) \\ &= \kappa_1 \cos^2(\varphi) \langle X_1, X_1 \rangle + \kappa_2 \sin^2(\varphi) \langle X_2, X_2 \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2(\varphi) + \kappa_2 \sin^2(\varphi) =: f(\varphi) \end{aligned}$$

Die Funktion $f : (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt also in $\varphi = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ ihre Extremwerte an. Daraus folgt das gewünschte Resultat. $\square$

Offensichtlich nimmt daher die Normalkrümmung ihre Extremwerte κ_i in Richtung der Eigenvektoren X_i von W_p an, da

$$II_p(X_i, X_i) = I_p(X_i, W_p(X_i)) = \kappa_i, \quad i = 1, 2.$$

Nun ist folgende Definition angebracht.

Definition 5.29 (Hauptkrümmung). Die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung κ_1 und κ_2 heißen Hauptkrümmungen von S im Punkt p . Die zugehörigen Eigenvektoren $\pm X_1$ und $\pm X_2$ heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

Wir verwenden die Konvention $\kappa_1 \leq \kappa_2$. Die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen des Zylinders hatten wir bereits oben untersucht. Wir wollen diese Größen noch für die Ebene und die Sphäre bestimmen.

Beispiel 5.30 (Hauptkrümmungen - Ebene). Aus Beispiel 5.24 auf Seite 65 wissen wir, dass für die x,y-Ebene $W_p \equiv 0$ für alle Punkte gilt. Daher sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Beispiel 5.31 (Hauptkrümmungen - Sphäre). Wenn wir das Einheitsnormalenfeld der Sphäre aus Beispiel 5.25 (Seite 65) gemäß Bemerkung 5.27 „umdrehen“, erhalten wir für die Weingarten-Abbildung $W_p = id$. Daher sind $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ (vgl. Beispiel 5.25) und jede Richtung ist Hauptkrümmungsrichtung.

Ausgehend vom Konzept der Hauptkrümmung lassen sich zwei weitere Krümmungsbegriffe definieren, die beide eine Mittelung der Hauptkrümmungen darstellen.

Definition 5.32 (Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte reguläre Fläche, sei $p \in S$ ein Punkt. Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen von S in p . Dann heißt

$$K(p) := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(W_p)$$

die Gauß-Krümmung von S in p . Ferner heißt

$$H(p) := \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur}(W_p)$$

mittlere Krümmung von S in p .

Bei Umkehrung der Orientierung von S bleibt die Determinante von W_p unverändert, also auch die Gauß-Krümmung. Die mittlere Krümmung ändert allerdings dabei ihr Vorzeichen. Um nun eine Variante der mittleren Krümmung zu bekommen, bei der sich das Vorzeichen nicht ändert, wenn sich die Orientierung ändert, führen wir den Begriff des mittleren Hauptkrümmungsfeldes ein, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\mathcal{H} := H \cdot N.$$

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir nachstehende Charakterisierungen für Punkte einer Fläche einführen.

Definition 5.33 (Flächenpunkte - Klassifizierung). Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierbare reguläre Fläche, sei $p \in S$. Man nennt p

- (i) elliptisch, falls $K(p) > 0$,
- (ii) hyperbolisch, falls $K(p) < 0$,
- (iii) parabolisch, falls $K(p) = 0$, aber $W_p \neq 0$, d.h. falls eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet, die andere aber nicht,
- (iv) Flachpunkt, falls $W_p = 0$, d.h. $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Offenbar ist die Klassifikation unabhängig von der Wahl der Orientierung.

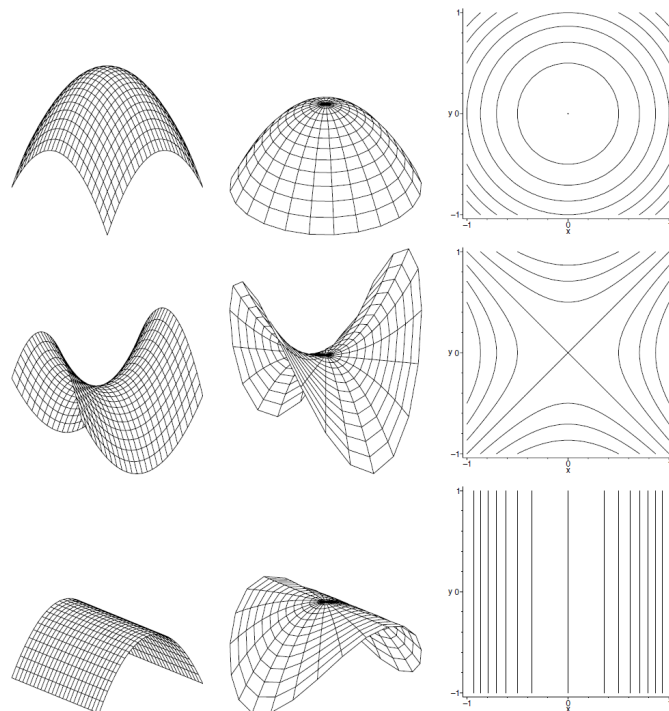


Abbildung 5.21: Elliptisch, hyperbolisch und parabolische Punkte mit Höhenlinien [10, §3, S. 50]

Die eingeführten Charakterisierungen wollen wir anhand einiger Beispiele veranschaulichen.

Beispiel 5.34 (Krümmung - Ebene). Aus Beispiel 5.30 wissen wir, dass für die x,y -Ebene $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ gilt $W_p \equiv 0$ für alle Punkte $p \in S$. Daher gilt $K \equiv 0$ und $H \equiv 0$ und somit sind alle Punkte Flachpunkte.

Beispiel 5.35 (Krümmung - Kugel). Aus Beispiel 5.31 wissen wir, dass für die Weingarten-Abbildung der Kugel $S = S^2$ gilt $W_p = id$ für alle Punkte $p \in S$ und $\kappa_1 = 1 = \kappa_2$. Daher gilt $K \equiv 1$ und somit sind alle Punkte elliptisch. Für die mittlere Krümmung gilt $H \equiv 1$ und für das mittlere Krümmungsfeld $\mathcal{H}(p) = -p$.

Beispiel 5.36 (Krümmung - Zylinder). In Beispiel 5.26 stellten wir fest, dass für die Hauptkrümmungen des Zylinders $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = 1$ gilt. Daher folgt für die Gauß-Krümmung $K \equiv 0$ und $H \equiv \frac{1}{2}$. Da nur eine der beiden Hauptkrümmungen verschwindet, sind alle Punkte parabolisch.

Bemerkung 5.37 (Lokale Isometrie). Wie wir sehen, stimmt die mittlere Krümmung der Ebene mit der des Zylinders überein. Dies ist eine weitere Gemeinsamkeit der beiden regulären Flächen. Wie wir auf Seite 46 feststellten, besitzen beide Flächen (in geeigneten Koordinaten) dieselbe erste Fundamentalform. Diese Gemeinsamkeiten sind natürlich keine Zufälle. Die Ebene und der Zylinder sind lokal isometrisch. Man nennt zwei reguläre Flächen S_1, S_2 lokal isometrisch, wenn es einen lokalen Diffeomorphismus zwischen den beiden Flächen gibt, welcher die Metrik erhält, also Kurven in S_1 auf Kurven gleicher Länge in S_2 abbildet. Es gilt die Aussage, dass wenn zwei reguläre Flächen die selbe konstante Gauß-Krümmung besitzen, diese lokal isometrisch sind [1, §4, S. 206].

Wir untersuchen die verschiedenen Krümmungen des Rotationstorus.

Beispiel 5.38 (Krümmung - Torus). Wir knüpfen an Beispiel 5.21 (Seite 59) an. Dort haben wir für den Torus die Parameterdarstellung

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} (a + b \cos(u_1)) \cos(u_2) \\ (a + b \cos(u_1)) \sin(u_2) \\ b \sin(u_1) \end{pmatrix}$$

verwendet, wobei $a > b > 0$. Wir setzen $u := F^{-1}(p)$. Für die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung berechneten wir

$$(w_{ij}(u)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos(u_1)}{a + b \cos(u_1)} \end{pmatrix}.$$

Durch Ablesen der Eigenwerte von W_p erhalten wir für die Hauptkrümmungen

$$\kappa_1 = \frac{1}{b} \text{ und } \kappa_2 = \frac{\cos(u_1)}{a + b \cos(u_1)}.$$

Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen sind

$$X_1 = D_u F e_1 = \begin{pmatrix} -b \sin(u_1) \cos(u_2) \\ -b \sin(u_1) \sin(u_2) \\ b \cos(u_1) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$X_2 = D_u F e_2 = \begin{pmatrix} -(a + b \cos(u_1)) \sin(u_2) \\ (a + b \cos(u_1)) \cos(u_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Gauß-Krümmung erhalten wir

$$K(u) = \frac{\cos(u_1)}{b(a + b \cos(u_1))}.$$

Wir sehen, dass die Gauß-Krümmung lediglich von u_1 abhängt, also davon, ob wir uns im „inneren“ oder „äußeren“ Bereich des Torus befinden. Für den „inneren“ Bereich gilt $K < 0$, alle Punkte in diesem Bereich sind also hyperbolisch. Für den „äußeren“ Bereich gilt $K > 0$, alle Punkte in diesem Bereich sind somit elliptisch. Für die Punkte am oberen und unteren Grad des Torus gilt $K = 0$, es handelt sich dabei also um parabolische Punkte.

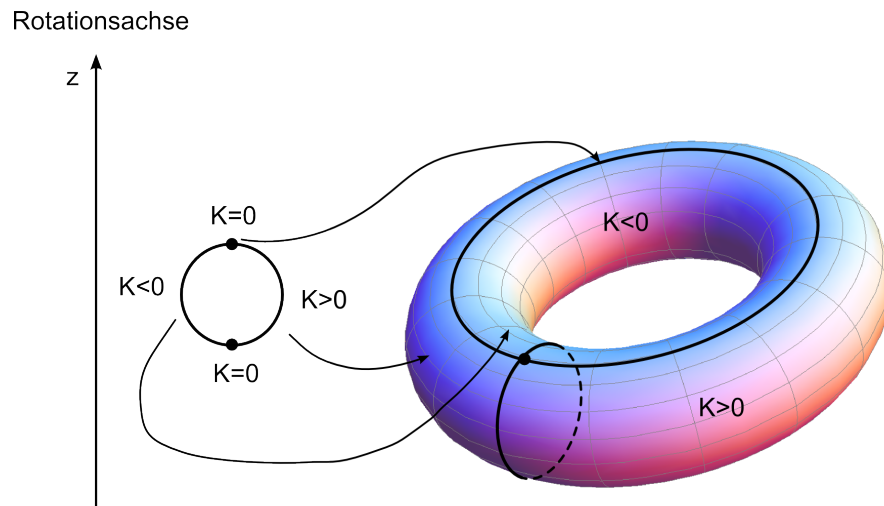


Abbildung 5.22: Gauß-Krümmung

Für die mittlere Krümmung des Torus gilt

$$H(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{\cos(u_1)}{a + b \cos(u_1)} \right).$$

Wir sehen, dass auch die mittlere Krümmung nur von u_1 abhängt, das heißt, sie ändert sich ebenfalls nur, wenn wir uns vom „inneren“ in den „äußeren“ Bereich bewegen bzw.

umgekehrt.

Wir wollen noch eine abschließende Bemerkung bezüglich der Zuordnung der Krümmungsbegriffe zur inneren bzw. äußeren Geometrie von regulären Flächen machen.

Bemerkung 5.39 (Zuordnung der Krümmungsbegriffe). Der inneren Geometrie entsprechen Größen, die sich allein durch Messungen innerhalb der Fläche bestimmen lassen, das sind Größen, die sich nur mit Hilfe der ersten Fundamentalform ausdrücken lassen. Die äußere Geometrie hingegen berücksichtigt die Lage der Fläche im $\mathbb{R}^3$, das heißt, es werden Größen berücksichtigt, die von der zweiten Fundamentalform abhängen. Auf den ersten Blick scheint es, als wäre die mittlere Krümmung wie auch die Gauß-Krümmung der äußeren Geometrie zugehörig, da wir für die Berechnung auch die zweite Fundamentalformen verwenden. Es gilt allerdings ein Satz⁶, der besagt, dass die Gauß-Krümmung eine Größe der inneren Geometrie ist, sich also allein mit Hilfe der ersten Fundamentalform berechnen lässt [1, §4.3, S. 181]. Die mittlere Krümmung und die Hauptkrümmungen sind hingegen der äußeren Geometrie zuzuordnen.

Wir erwähnten auf Seite 47 die sogenannten Flachländer, Wesen, die in einer zweidimensionalen Welt leben. Aufgrund der gemachten Resultate stellen wir fest, dass diese Flachländer nicht in der Lage sind verschiedene Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung zu unterscheiden (z.B.: Ebene und Zylinder). Eine genaue Analyse dieser Begriffe und Sachverhalte geht über den Anspruch dieser Arbeit hinaus und wir verweisen interessierte Leser an Bär, Kapitel 4.

⁶Theorema Egregium

6 Klassen von Flächen

Klarerweise gibt es eine Vielzahl regulärer Flächen. Im letzten Kapitel wollen wir einen kleinen Einblick in spezielle Klassen von regulären Flächen geben. Insbesondere werden wir die sogenannten *Regelflächen* und *Minimalflächen* kennenlernen. Neben diesen Klassen gibt es etwa auch Drehflächen und Röhrenflächen (vgl. Bär Kapitel 3.8).

6.1 Regelflächen

Diese Klasse von Flächen wird durch die besondere Art ihrer Konstruktion charakterisiert. Regelflächen sind aufgebaut aus kontinuierlich aneinanderliegende Geraden längs einer festen Kurve. Es entsteht dadurch eine Art „geradlinige Fläche“.

Definition 6.1 (Regelflächen). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve und $v : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung mit $v(t) \neq (0, 0, 0)$ für alle $t \in I$. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres offenes Intervall. Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch Parametrisierungen der Form

$$F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, s) = c(t) + s v(t)$$

überdeckt werden kann, heißt Regelfläche.

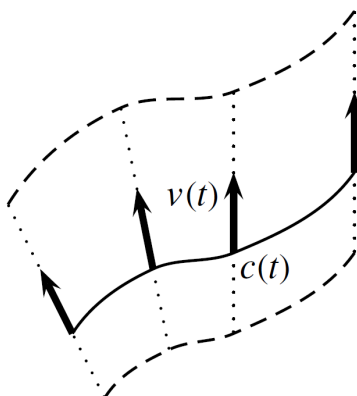


Abbildung 6.1: Konstruktion einer Regelfläche [1, §3.8, S. 148]

Man kann sich dabei eine Gerade $s v(t)$ vorstellen, die sich entlang einer Leitkurve $c(t)$ durch den Raum bewegt, und die Spur, die dabei entsteht, ist dann eine Regelfläche.

Beispiel 6.2 (Der verallgemeinerte Zylinder). Als Leitkurve wählen wir eine ebene parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ohne Selbstdurchschnitte mit $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$. Für die erzeugende Gerade wählen wir $v(t) = (0, 0, 1)$. Als Regelfläche erhalten wir dann

$$F : I \times \mathbb{R} =: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, s) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ s \end{pmatrix}.$$

Wählen wir als Leitkurve einen Kreis, erhalten wir den gewohnten Zylinder (vgl. Beispiel 5.3 auf Seite 46).

Beispiel 6.3 (Rotationshyperboloid). Das Rotationshyperboloid als Nullstellengebilde ist gegeben durch

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Um zu zeigen, dass es sich hier um eine Regelfläche handelt, müssen wir eine der Definition 6.1 entsprechende Parametrisierung finden. Für die Leitkurve und die erzeugende Gerade wählen wir

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(t) = \dot{c}(t) + e_3 = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Rotationshyperboloid als Regelfläche erhalten wir dann die Parametrisierung

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(t, s) = \begin{pmatrix} \cos(t) - s \sin(t) \\ s \cos(t) + \sin(t) \\ s \end{pmatrix},$$

und offensichtlich gilt $(\cos(t) - s \sin(t))^2 + (s \cos(t) + \sin(t))^2 - s^2 = 1$.

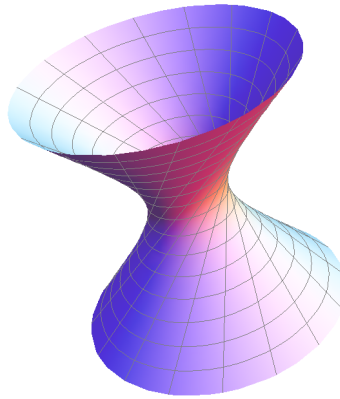


Abbildung 6.2: Rotationshyperboloid als Regelfläche

Ein Kriterium um eine gegebene reguläre Flächen als mögliche Regelfläche auszuschließen liefert folgender Satz.

Satz 6.4 (Regelflächen). *Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Regelfläche, dann gilt für die Gauß-Krümmung*

$$K \leq 0.$$

Beweis. Die Gauß-Krümmung ist definiert als die Determinante der Weingarten-Abbildung (vgl. Definition 5.32 auf Seite 68):

$$K = \det((w_{ij})),$$

und wir wissen, dass die Matrixdarstellung von W_p aus der ersten und zweiten Fundamentalfarm hervorgeht: $(w_{ij}) = (g^{ik})(h_{kj})$. Mit Hilfe eines Satzes aus der linearen Algebra [4, §5.4, S. 110] folgt somit

$$K = \det((w_{ij})) = \frac{\det((h_{kj}))}{\det((g_{ik}))}.$$

Nachdem (g_{ik}) positiv definit ist, gilt insbesondere $\det((g_{ik})) > 0$. Wir müssen also nur noch $\det((h_{kj})) \leq 0$ zeigen. Dazu betrachten wir die Matrixeinträge der zweiten Fundamentalfarm unter Verwendung der Parametrisierung

$$F(t, s) = c(t) + s v(t).$$

Für die Komponente h_{22} der zweiten Fundamentalfarm gilt dann

$$h_{22} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, N \right\rangle = 0,$$

wobei N der Einheitsnormalenvektor ist. Unter Benutzung der Symmetrie von (h_{kj}) folgt dann

$$\det((h_{kj})) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = h_{11} \cdot 0 - h_{12}^2 \leq 0.$$

□

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Wendelfläche (auch Helikoid), die außerdem, wie sich im nächsten Kapitel herausstellen wird, eine Minimalfläche ist.

Beispiel 6.5 (Helikoid). Eine der Definition 6.1 einer Regelfläche entsprechenden Parametrisierung der Wendelfläche ist

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

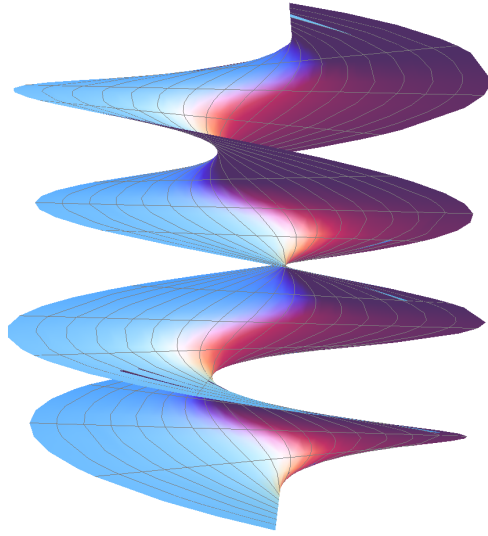


Abbildung 6.3: Wendelfläche als Regelfläche

Wir wollen noch explizit nachweisen, dass für die Gauß-Krümmung der Wendelfläche $K \leq 0$ gilt. Dazu genügt es die Determinante der zweiten Fundamentalform zu berechnen (vgl. Beweis von Satz 6.4). Es gilt

$$h_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_i}, N \right\rangle,$$

wobei wir N wie auf Seite 53 konstruieren. Es folgt

$$\det((h_{ij})) = \det \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (s + \sin(2t))^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \cos(2t) \end{pmatrix} \right) = \frac{-1}{1 + (s + \sin(2t))^2} \leq 0$$

Wie wir bereits erwähnten, handelt es sich beim Helikoid nicht nur um eine Regelfläche, sondern auch um eine Minimalfläche. Was wir unter einer Minimalfläche genau verstehen, behandeln wir im folgenden Kapitel.

6.2 Minimalflächen

Wie die Bezeichnung bereits vermuten lässt, hat diese Art von Flächen etwas mit minimalem Flächeninhalt zu tun. Aufgrund des Strebens nach minimaler Energie bilden Seifenhäute, wenn man zum Beispiel einen Draht in eine Seifenlösung taucht, Flächen mit minimalem Flächeninhalt. Man kann zeigen, dass wenn man einer vorgegebenen geschlossenen Raumkurve eine Fläche mit minimalem Flächeninhalt einschreiben möchte, diese notwendigerweise ein mittleres Krümmungsfeld $\mathcal{H}$ identisch null besitzt [1, §3.8, S.

153]. Daher wollen wir folgende Definition geben.

Definition 6.6 (Minimalfläche). Eine reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Minimalfläche, falls für das mittlere Krümmungsfeld von S gilt

$$\mathcal{H} \equiv (0, 0, 0).$$

Für orientierbare Flächen genügt die Definition der Bedingung, dass die mittlere Krümmung in jedem Flächenpunkt verschwindet: $H \equiv 0$.

Der Fall

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{Spur}(W_p) \equiv 0$$

kann offensichtlich nur dann gelten, wenn die beiden Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 unterschiedliches Vorzeichen haben oder wenn $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ ist. Nach der Klassifizierung von Flächenpunkten (vgl. Definition 5.33 auf Seite 69) kann eine Minimalfläche also nur aus hyperbolischen Punkten oder Flachpunkten bestehen. Daraus ergibt sich folgender Satz.

Satz 6.7 (Minimalflächen). *Für die Gauß-Krümmung von Minimalflächen gilt*

$$K \leq 0.$$

□

Beispiel 6.8 (Ebene als Minimalfläche). Flächen, die nur aus Flachpunkten bestehen, sind zum Beispiel affine Ebenen (vgl. Beispiel 5.34 auf Seite 69). Für diese gilt

$$K \equiv H \equiv 0.$$

Ein interessanteres Beispiel ist die sogenannte Kettenfläche (auch Katenoid).

Beispiel 6.9 (Katenoid). Die Kettenfläche ist gegeben durch die Parametrisierung

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \cosh(u_1) \cos(u_2) \\ \cosh(u_1) \sin(u_2) \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

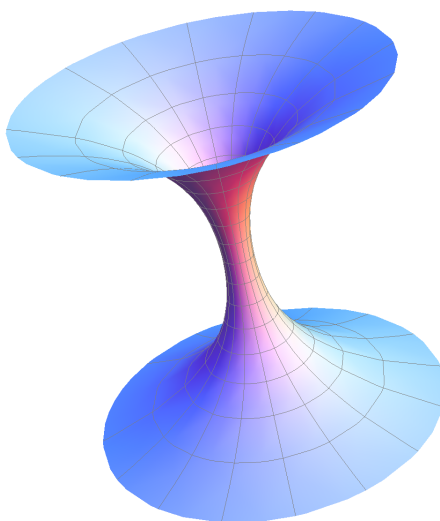


Abbildung 6.4: Kettenfläche als Minimalfläche

Zuerst wollen wir die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung $(w_{ij}(u))$ berechnen. Dazu ist es notwendig die inverse Matrix der ersten Fundamentalform, anschließend das Einheitsnormalenfeld und danach die Matrix der zweiten Fundamentalform zu ermitteln. Wir geben hier nur mehr die bereits berechneten Matrizen an. Ein auf diese Weise detailliert durchgerechnetes Beispiel ist Beispiel 5.21 auf Seite 59. Es gilt

$$\begin{aligned}(w_{ij}(u)) &= (g^{ik}(u))(h_{kj}(u)) \\ &= \operatorname{sech}^2(u_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-\cosh^2(u_1) \operatorname{sech}^2(u_1)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \cosh^2(u_1) \operatorname{sech}^4(u_1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit für die Hauptkrümmungen in allen Punkten der Kettenfläche die Beziehung

$$\kappa_1 = -\kappa_2.$$

Alle Punkte sind somit hyperbolisch und für die mittlere Krümmung folgt

$$H \equiv 0.$$

Es stellt sich heraus, dass die Wendelfläche, welche wir bereits als Regelfläche charakterisiert haben (vgl. Beispiel 6.5 auf Seite 75), ebenfalls eine Minimalfläche ist.

Beispiel 6.10 (Helikoid als Minimalfläche). Wir verwenden für die Wendelfläche die

Parametrisierung aus Beispiel 6.5 und vereinfachen sie zu

$$F : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 \sin(u_2) \\ u_1 \cos(u_2) \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen wie gewohnt die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung. Wir verzichten hier auf eine detaillierte Berechnung und geben die bereits berechneten Matrizen an. Ein detailliert durchgerechnetes Beispiel ist Beispiel 5.21 auf Seite 59. Es gilt

$$\begin{aligned} (w_{ij}(u)) &= (g^{ik}(u))(h_{kj}(u)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+u_1^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}} \\ -\frac{1}{(1+u_1^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für die Hauptkrümmungen der Wendelfläche

$$\kappa_1 = -\frac{1}{1+u_1^2} \text{ und } \kappa_2 = \frac{1}{1+u_1^2}.$$

Alle Punkte sind somit hyperbolisch und für die mittlere Krümmung folgt

$$H \equiv 0.$$

Als Abschluss wollen wir noch zeigen, wie man die Wendelfläche in eine Kettenfläche deformieren kann. Bemerkenswert ist, dass alle Flächen auf dem Weg dorthin ebenfalls Minimalflächen sind.

Beispiel 6.11 (Deformation der Wendelfläche in die Kettenfläche). Die Fläche S_α sei durch die Parametrisierung $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F_\alpha(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \cosh(u_1) \cos(u_2) + \cos(\alpha) \sinh(u_1) \sin(u_2) \\ \sin(\alpha) \cosh(u_1) \sin(u_2) - \cos(\alpha) \sinh(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(\alpha) u_1 + \cos(\alpha) u_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man kann leicht nachrechnen, dass $S_{\pi/2}$ das Katenoid und S_0 das Helikoid ist (vgl. Beispiel 6.9 und 6.10). Wir zeigen noch, analog zu den Beispielen oben, dass S_α für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Minimalfläche ist.

Wir berechnen wie gewohnt die Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung. Wir verzichten hier wieder auf eine detaillierte Berechnung und geben die bereits berechneten Matrizen an. Ein detailliert durchgerechnetes Beispiel ist Beispiel 5.21 auf Seite 59. Es

gilt

$$\begin{aligned}
 (w_{ij}(u)) &= (g^{ik}(u))(h_{kj}(u)) \\
 &= \operatorname{sech}^2(u_1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\
 &= \operatorname{sech}^2(u_1) \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Berechnen wir die Eigenwerte von $(w_{ij}(u))$ so erhalten wir für die Hauptkrümmungen der Wendelfläche

$$\kappa_1 = -\operatorname{sech}^2(u_1) \text{ und } \kappa_2 = \operatorname{sech}^2(u_1).$$

Alle Punkte sind somit hyperbolisch und für die mittlere Krümmung folgt

$$H \equiv 0.$$

Läuft α im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, geht die Wendelfläche stetig in die Kettenfläche über.

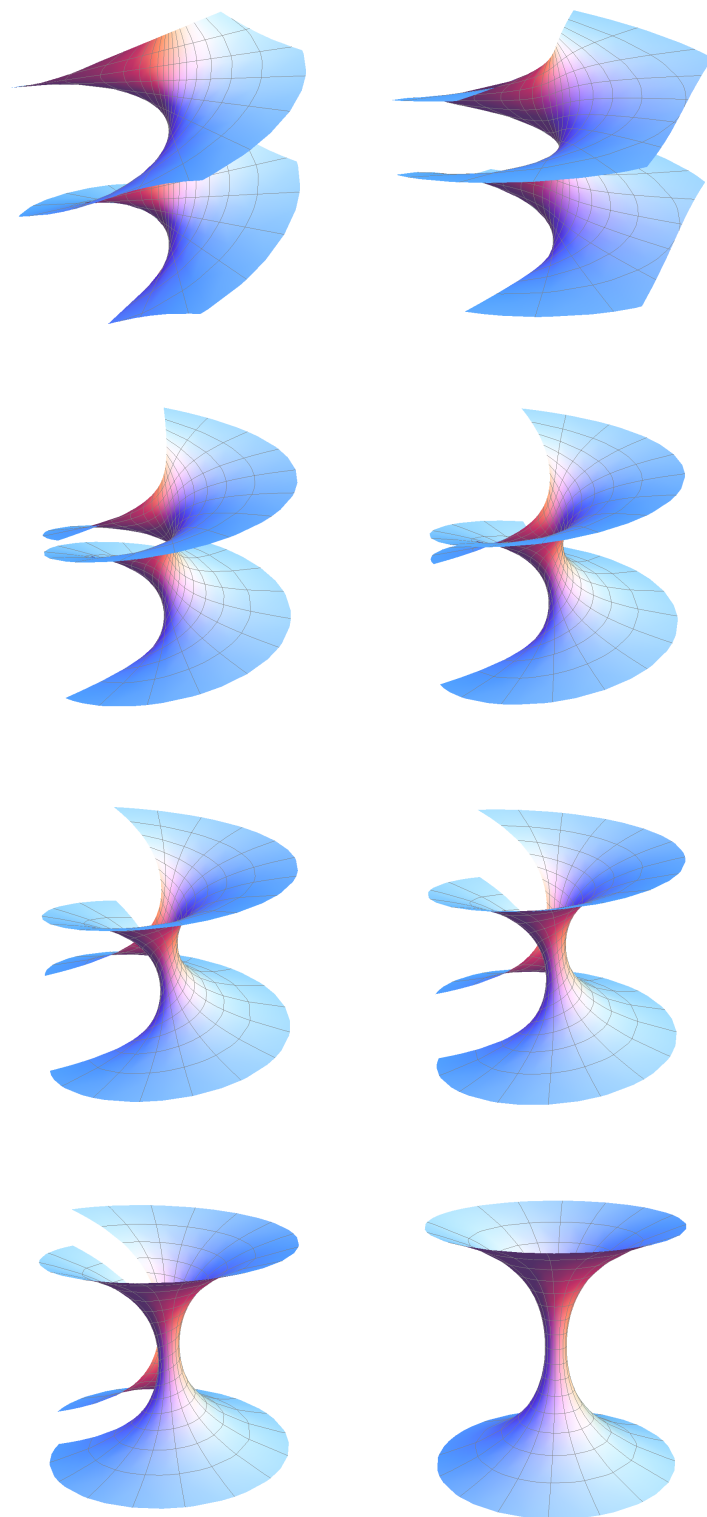


Abbildung 6.5: Deformation der Wendelfläche in die Kettenfläche

Literaturverzeichnis

- [1] C. Bär. Elementare Differentialgeometrie. Walter De Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 2010.
- [2] O. Forster. Analysis 2. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 8. Auflage, 2008.
- [3] A. Kriegel. Differentialgeometrie. Skriptum, Fakultät für Mathematik der Universität Wien, 2005.
- [4] H.-J. Kowalsky, G. O. Michler. Lineare Algebra. Walter De Gruyter, Berlin, 12. Auflage, 2003.
- [5] G. Fischer. Lineare Algebra. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 17. Auflage, 2010.
- [6] M. Husty. Mathematisches Denken. Skriptum, Fakultät für Geometrie der Universität Innsbruck, 2006.
- [7] A. Pressley. Elementary Differential Geometry. Springer-Verlag, London, 2001.
- [8] B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. Academic Press Inc., New York, 1966.
- [9] M. P. do Carmo. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976.
- [10] W. Kühnel. Differentialgeometrie, Kurven-Flächen-Mannigfaltigkeiten. Vieweg, Wiesbaden, 4. Auflage, 2008.

Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen zweidimensionale Flächen, die im Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ liegen, genauer handelt es sich dabei um hinreichend „glatte“ Flächen, die sogenannten *regulären Flächen*. Mit Hilfe der Analysis und einigen Resultaten aus der linearen Algebra werden reguläre Flächen untersucht und so ihre „Geometrie“ beschrieben.

Nach einer kurzen Einleitung, wird im zweiten Kapitel der Begriff *reguläre Fläche* eingeführt und anhand zahlreicher Beispiele ausgiebig motiviert. Im dritten Kapitel werden die bekannten Methoden der Differenzialrechnung auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ auf reguläre Flächen übertragen. Im darauf folgenden Kapitel wird das Konzept der *Tangentialebenen*, die eine lineare Approximation regulärer Flächen liefern, entwickelt, was die Einführung des *Differenzials von Abbildungen zwischen regulären Flächen* ermöglicht.

Das fünfte Kapitel widmet sich den „geometrischen Größen“ regulärer Flächen. Durch die Einführung der *ersten* und *zweiten Fundamentalform* ist es möglich eine der wichtigsten Größen, die *Krümmung* regulärer Flächen, zu untersuchen. Dabei werden verschiedene Krümmungsbegriffe, wie zum Beispiel die *Normalkrümmung*, die *Gauß-Krümmung* und die *mittlere Krümmung*, diskutiert.

Im letzten Kapitel wird ein kleiner Einblick in spezielle Klassen von regulären Flächen gegeben. Insbesondere werden *Regelflächen* und *Minimalflächen* beschrieben.

Lebenslauf

Name: Josua Gruber
Geburtsdatum: 30.05.1983
Geburtsort: Oberndorf bei Salzburg

1989-1993	Mohr-Gruber Volksschule Oberndorf
1993-1997	Hauptschule Bergheim bei Salzburg
1997-2002	Bundeshandelsakademie Oberndorf (Informatikzweig)
2002-2003	Zivildienst
2003-2007	Studium der Energietechnik an der Fachhochschule Wels
2007-2008	Projektmanager im Bereich Ener- gietechnik (Axima Gebäudetechnik GmbH)
2008-2013	Lehramtsstudium Physik und Mathe- matik an der Universität Wien