universität wien

# DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Innere Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – Anregungen zur praktischen Umsetzung“

Verfasserin

Elisabeth Schober

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, im April 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 313

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramtsstudium Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung

Betreuerin: Prof. Mag. Dr. Maria Koth

# DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, die mich während meines Studiums begleitet haben und mir immer mit Rat und Tat bzw. einem offenen Ohr zur Seite gestanden sind.

An erster Stelle möchte ich mich bei meiner Betreuerin Prof. Dr. Maria Koth für die großartige Unterstützung bedanken. Durch viele anregende Gespräche und große Wertschätzung meiner Ideen ermöglichte sie mir das erfolgreiche Gelingen meiner Arbeit.

Großer Dank gebührt auch meinem Freund Mario, der mich während meines Studiums in jeglicher Hinsicht unterstützt hat und sehr viel Geduld für mich aufbrachte. Durch seine aufbauenden Worte in schwierigen Situationen und seinen Rückhalt schenkte er mir immer wieder die nötige Kraft und Energie, um mein lang ersehntes Ziel zu erreichen. Dank gebührt ihm auch für die große Unterstützung beim Layout der Aufgabenbeispiele.

Mein besonderer Dank gilt jedoch auch meinen Eltern, Theresia und Richard, die mir immer unterstützend zur Seite gestanden sind, sowie meinen Geschwistern, Katrin und Richard, die mich alle mit viel Liebe und Geduld unterstützten und mir die wenige Zeit, die ich für sie hatte, nie nachgetragen haben.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Rainer Kurz, der sich bereit erklärt hat, die Korrektur meiner Diplomarbeit zu übernehmen.

Abschließend möchte ich mich noch bei allen meinen FreundInnen und Bekannten wie auch meinen StudienkollegInnen für die großartige Unterstützung in den letzten Jahren bedanken.

# INHALTSVERZEICHNIS


1. Einleitung ..... 5

2. Grundlagen der Differenzierung im Unterricht ..... 8

2.1. Ebenen der Differenzierung ..... 9

2.2. Differenzierungskriterien der inneren Differenzierung ..... 14

2.3. Rechtliche Grundlage der Differenzierung im österreichischen Schulwesen ..... 21

3. Innere Differenzierung als Antwort auf Heterogenität ..... 23

3.1. Innere Differenzierung im Unterricht ..... 24

3.2. Grundformen des Unterrichts ..... 25

3.2.1. Individualisierender Unterricht ..... 26

3.2.2. Kooperativer Unterricht ..... 33

3.2.3. Gemeinsamer Unterricht ..... 34

3.3. Rolle der Lehrkraft ..... 35

4. Mathematikunterricht – Aber wie? ..... 38

4.1. Die Anforderungen an den Mathematikunterricht ..... 38

4.2. Zentrale Funktionen des Mathematikunterrichts ..... 42

4.3. Bildungsstandards ..... 44

4.3.1. Rechtliche Grundlage ..... 45

4.3.2. Allgemeine Kompetenzen und der Beitrag des Mathematikunterrichts ..... 46

4.3.3. Kompetenzmodell Mathematik 8. Schulstufe ..... 49

4.3.4. Bildungsstandards – in Konkurrenz mit Binnendifferenzierung? ..... 50

4.4. Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht ..... 51

5. Umsetzungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I ..... 54

5.1. Didaktische Grundsätze ..... 54

5.2. Alltagstaugliche Konzepte zur Binnendifferenzierung ..... 55

5.2.1. Einstiege differenzierend gestalten ..... 56

5.2.2. Lernende abholen, wo sie stehen ..... 59

5.2.3. Erstes Üben auf eigenem Niveau – Aufgabensets ..... 63

5.2.4. Blütenaufgaben ..... 65

5.2.5. Lernprotokolle und Checklisten ..... 67
5.2.6. Mathematische Beurteilungsumgebungen ..... 71
5.2.7. Lernumgebungen ..... 74
5.2.8. Produktive Aufgaben ..... 78
5.2.9. Gruppenexploration ..... 82
6. Differenzierung und Modellierungsaufgaben ..... 84
6.1. Der Modellierungskreislauf bei Sachaufgaben ..... 84
6.2. Warum sind Modellierungsaufgaben selbstdifferenzierend? ..... 85
6.3. Fermi-Aufgaben ..... 88
6.4. Aufgaben aus der Zeitung ..... 95
7. Eigene Beispiele für den binnendifferenzierten Unterricht ..... 100
7.1. Differenzierte Arbeitsblätter ..... 100
7.2. Offene Aufgaben ..... 105
7.2.1. Abschätzen ..... 106
7.2.2. Eigenschaften erkennen ..... 107
7.2.3. Fragen stellen ..... 108
7.2.4. Stellung nehmen ..... 110
7.2.5. Aufgaben variieren ..... 111
7.2.6. Aufgaben erfinden ..... 112
7.3. Ich-Du-Wir-Aufgaben ..... 114
7.4. Wochenplan zum Thema Ähnlichkeit ..... 117
7.5. Stationenbetrieb zum Thema Pythagoräischer Lehrsatz ..... 121
7.6. Lernkartei ..... 123
8. Zusammenfassung ..... 126
9. Quellenverzeichnis ..... 129
10. Abbildungsverzeichnis ..... 139

# 1. EINLEITUNG

Seit Beginn meiner Unterrichtstätigkeit an einer Kooperativen Mittelschule in Wien beschäftigt mich das Thema innere Differenzierung im Unterricht. Für mich stellte sich immer die Frage, wie es gelingen kann, Schülerinnen und Schüler mit sehr unterschiedlichen Voraussetzungen in einer gemeinsamen Mathematikgruppe zu unterrichten.

Einige Schilderungen zu Unterrichtssituationen sollen über meine Ausgangssituation Auskunft geben:

Konrad ist polnischer Staatsbürger und wurde nach dem Umzug seiner Familie nach Wien aufgrund der vier absolvierten Jahre an einer polnischen Volksschule in die erste Klasse der KMS (5. Schulstufe) eingestuft. Aufgrund seiner Sprachdefizite bestand die Möglichkeit, den Schüler zwei Jahre lang als außerordentlichen Schüler zu beurteilen. Wie sich jedoch herausstellte, war dies für den Mathematikunterricht nicht notwendig. Nach einigen Wochen stellte sich nämlich heraus, dass Konrad eine besondere Begabung für Mathematik hatte. Mit vielen differenzierten Aufgabenstellungen (meist ohne viel Text) bzw. dem Einsatz von offenen Aufgaben (z.B. Fotos) gelang es, die Begeisterung an der Mathematik trotz Sprachbarriere hochzuhalten.

In derselben Klasse sitzt Melanie. Sie ist österreichische Staatsbürgerin. Im Laufe des ersten Halbjahres der 5. Schulstufe stellte sich heraus, dass Melanie in fast allen Gegenständen leistungsschwächer als ihre Mitschülerinnen und Mitschüler war. Mathematik ist ein Fach, für welches sie besonders wenig Freude und Motivation aufbringen konnte. Durch differenzierte Arbeitsaufträge, die lebensnah und in der Regel stark vereinfacht waren, konnte sie bis zur 8. Schulstufe hin zumindest ein geringes Interesse für das Fach Mathematik aufbringen. Besonderes Bemühen zeigte sie vor allem in Gruppenarbeitsphasen (z.B. Ich-Du-Wir-Prinzip) und in Phasen verstärkter LehrerInnenzuwendung.

Und dann gab es da noch Philipp, ebenfalls österreichischer Staatsbürger. Im Gegensatz zu seinem Zwillingsbruder Florian ist er überaus begabt im

Mathematikunterricht. Er fordert die Lehrenden mit seinem Verlangen nach komplizierteren und offenen Aufgabenstellungen. Philipp war ein besonderer Fan von Fermi-Aufgaben, denen er sich immer widmete, wenn sich die anderen KlassenkameradInnen noch in Übungsphasen zum aktuellen Unterrichtsstoff befanden.

Wie gelingt es jedoch auf Dauer Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen zu fördern und zu fordern?

MEYER definiert individuelles Fördern wie folgt:

> *„Individuelles Fördern heißt, jeder Schülerin und jedem Schüler*
>
> - *die Chance zu geben, ihr bzw. sein motorisches, intellektuelles, emotionales und soziales Potential umfassend zu entwickeln*
> - *und sie bzw. ihn dabei durch geeignete Maßnahmen zu unterstützen […].“* [1]

Um dies realisieren zu können, bedarf es eines Umdenkens der Lehrerinnen und Lehrer. Nach wie vor dominiert in vielen Mathematikstunden das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch, bei dem die Lehrperson in einem Art Frage-Antwort-Spiel die Schülerinnen und Schüler zum Unterrichtsziel hinführt. Diese Unterrichtsmethode schränkt die Eigenständigkeit und geistliche Beweglichkeit der Lernenden derart ein, dass ein effektiver individueller Aufbau von vernetztem Wissen nicht stattfinden kann. Begleitet wird dieser Unterrichtsstil durch eine starke Segmentierung der Inhalte. Es bilden sich einzelne Wissensinseln, die jedoch nicht zum nachhaltigen Lernen beitragen.[2]

Die auseinanderklaffenden Lernvoraussetzungen führen oft zu einer Überforderung der Lehrperson und bestätigen diese in ihrem eng geführten Unterrichtsstil. Um jedoch Lernen auf individuellem Niveau sowie auch kompetenzorientiertes Lernen gemäß den Anforderungen der Bildungsstandards zu ermöglichen, müssen alte Unterrichtstraditionen aufgebrochen werden und neue Unterrichtsformen und -materialien zum Einsatz kommen.

[1] Meyer, 2011, S. 97.
[2] vgl. Ulm, 2005, S. 11.

In den folgenden Kapiteln sollen nach einer kurzen Einführung zum Begriff „Innere Differenzierung“ Unterrichtsformen und -materialien, die einen schülerzentrierten individuellen Unterricht ermöglichen, vorgestellt und erläutert werden. Anhand konkreter Beispiele soll ein vielseitiger Einsatz im Unterricht aufgezeigt werden. Es soll auch vermittelt werden, wie der Unterricht durch diese Unterrichtsformen und -materialien bereichert werden kann.

# 2. GRUNDLAGEN DER DIFFERENZIERUNG IM UNTERRICHT

Der Begriff Differenzierung ist im Schulalltag in aller Munde. Doch wie viele Lehrerinnen und Lehrer haben tatsächlich die Möglichkeit genutzt, sich mit diesem Begriff näher auseinanderzusetzen? Aufgrund der Unterrichtstradition haben sich viele Unterrichtsformen im Schulalltag festgesetzt, neue Unterrichtsmethoden haben es oft schwer, sich durchzusetzen.

Da die Durchführung eines differenzierten Unterrichts die Möglichkeit bietet, die individuellen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bestmöglich zu fördern, möchte ich mit diesem Kapitel einen Beitrag dazu leisten, sich mit dieser Thematik vertraut zu machen.

BÖNSCH definiert den Begriff >>Differenzierung<< wie folgt:

> *„Unter Differenzierung wird einmal das variierende Vorgehen in der Darbietung und Bearbeitung von Lerninhalten verstanden, zum anderen die Einteilung bzw. Zugehörigkeit von Lernenden zu Lerngruppen nach bestimmten Kriterien. Es geht um die Einlösung des Anspruchs, jedem Lernenden (!) auf optimale Weise Lernchancen zu bieten, dabei die Ansprüche und Standards in fachlicher, institutioneller und gesellschaftlicher Hinsicht zu sichern und gleichzeitig lernorientiert aufzubereiten.“*[3]

Auch in der Mathematikdidaktik wird versucht, den Begriff >>Differenzierung<< zu definieren und klar von anderen Begriffen abzustecken. ZECH bezeichnet >>Differenzierung<< als den Versuch, unterschiedlichen Merkmalen von Schülerinnen und Schülern wie z.B. Alter, Geschlecht, Intelligenz, Vorwissen, Lerntempo im Unterricht gerecht zu werden. Er unterscheidet die Begriffe äußere und innere Differenzierung, womit er einerseits die klassen- bzw. gruppenweise Zuteilung von Schülerinnen und Schülern meint und andererseits

[3] Bönsch, 1995, S. 21.

die unterschiedliche Behandlung einzelner Schülerinnen und Schüler in gelegentlich aufgeteilten Kleingruppen.[4]

*Äußere Differenzierung* bedeutet ein Bilden von Lerngruppen nach den Kriterien Alter, Geschlecht, Interessen usw. Aufgrund eines dieser Kriterien wird die Lerngruppe als homogen betrachtet.[5]

Hingegen bezieht sich die *innere Differenzierung* auf die Unterscheidungsmaßnahmen, die innerhalb einer Lerngruppe getroffen werden können. Dadurch werden für alle Schülerinnen und Schüler Lernmöglichkeiten geschaffen, die ihren besonderen Lernvoraussetzungen entsprechen.[6]

## 2.1. EBENEN DER DIFFERENZIERUNG

Im Schuljahr 2010/11 besuchten insgesamt 1 166 525 Schülerinnen und Schüler die österreichischen Schulen, davon entfallen 339 270 Schülerinnen und Schüler auf die Sekundarstufe I.[7] Um den bestehenden Unterschieden zwischen den Kindern gerecht zu werden, erscheint eine Differenzierung nach Schulstufen und -arten sinnvoll.[8]

> *„In der Grundstruktur ist das System der obligatorischen Bildung in Deutschland, Österreich und der Schweiz auf die Schaffung von homogenen Gruppen ausgerichtet. Dies zeigt sich generell in der Tendenz nach Aussonderung von Kindern, die einer bestimmten Norm nicht entsprechen, und auf der Sekundarstufe I im Speziellen mit dem gegliederten Angebot verschiedener Schulformen.“* [9]

PARADIES und LINSER unterscheiden drei Ebenen der äußeren Differenzierung. Zum einen die Differenzierung nach der Schulform, d.h. die

[4] vgl. Zech, 1998, S. 46-47.
[5] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 33.
[6] vgl. Becker, 2004, S. 91.
[7] www1.
[8] vgl. Bönsch, 2000, S. 39.
[9] Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 9.

Lernenden werden aufgrund von Leistungsfähigkeit in verschiedenen Schulformen selektiert.[10]

Wie die nachstehende Grafik zeigt, sieht das österreichische Schulsystem nach der 4-jährigen Volksschule (mit dem da schon beginnenden Seitenstrang der Sonderschule) eine differenzierte Sekundarstufe vor. Die Sekundarstufe I unterteilt sich in die Unterstufe der allgemein bildenden höheren Schule (AHS), die Neue Mittelschule (NMS) und die Hauptschule (HS). Ab dem Schuljahr 2018/19 wird die Hauptschule komplett von der NMS abgelöst. Anschließend folgt auf der Sekundarstufe II ein breit gefächerter Schulartenkanon, der von der Oberstufe der allgemein bildenden höheren Schule bis hin zur Polytechnischen Schule reicht.

> *„Typisch für das gegliederte Schulwesen ist das Bemühen um eine möglichst ausgeprägte >>Homogenisierung<< der Schülerschaft. Die Verschiedenheit der Schüler/innen wird als Belastung gesehen, die es zu minimieren gilt.“* [11]

Die folgende Abbildung 1 soll über das differenzierte österreichische Schulsystem hinsichtlich der Fülle an Schularten einen Überblick geben.

[10] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 34.
[11] Klippert, 2010, S. 24.

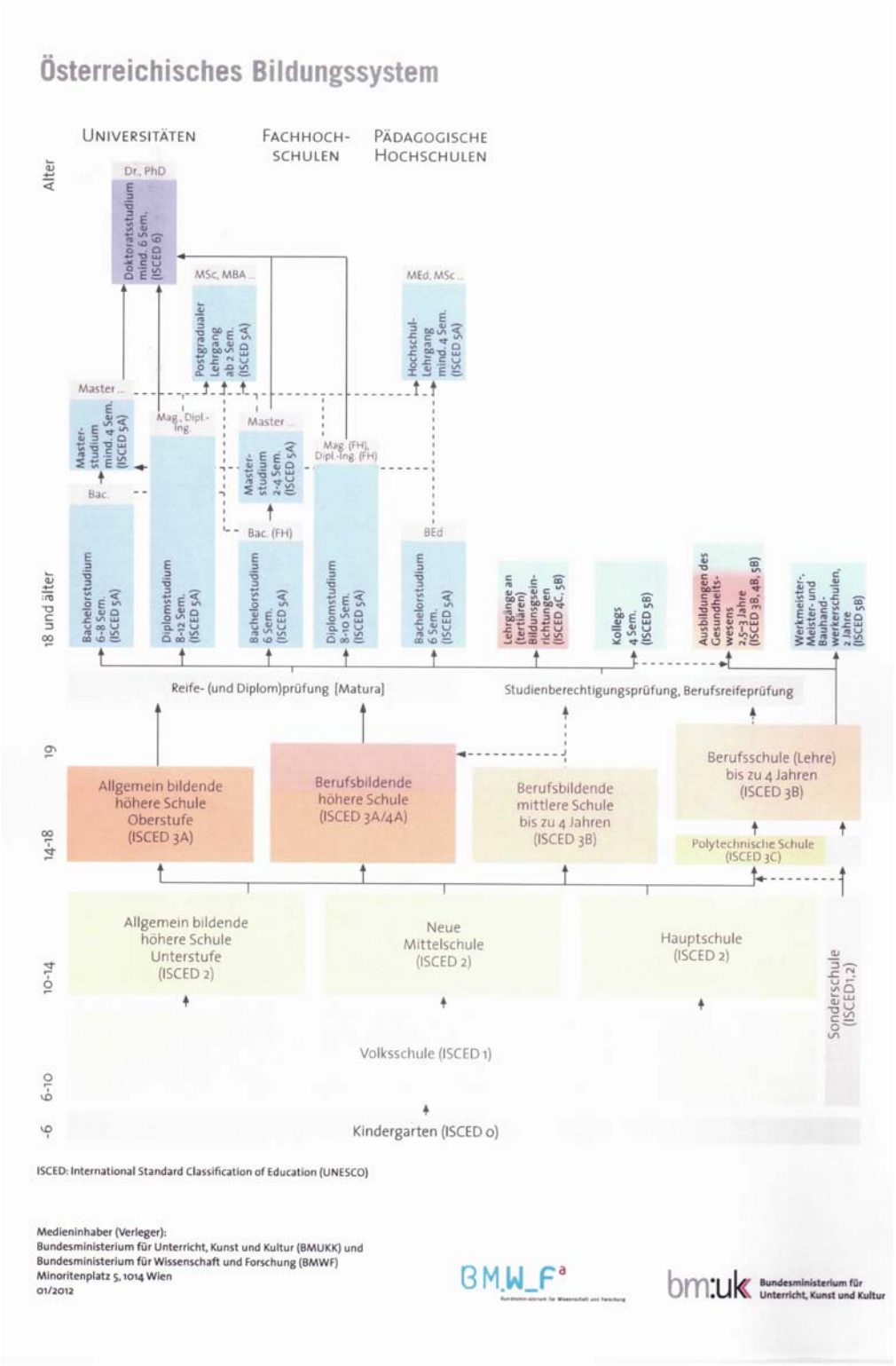



**ABBILDUNG 1: BMUKK/BMWF, Stand: Schul-/Studienjahr 2009/10 (www1).**

Die Frage ist vor allem, wonach die Schülerinnen und Schüler eingeteilt werden sollen, denn die Unterschiedlichkeit von Kindern ist so facettenreich, dass jede Einteilung nach Unterschieden eine Momentaufnahme ist.[12]

Als zweite Ebene der Differenzierung wird das Schulprofil bezeichnet. Schulprofile können verschiedene Bereiche abdecken (z.B. musisch-künstlerisch, mathematisch-naturwissenschaftlich, bilingual, etc.). Die Lernenden haben aufgrund dessen die Möglichkeit, nach ihren speziellen Interessen, Neigungen und Fähigkeiten zu entscheiden, welchen Schultyp sie wählen.

Als drittes Differenzierungskriterium wird ein seit dem 17. Jahrhundert bestehendes Merkmal genannt, die eingeführte Aufteilung der Schülerinnen und Schüler nach ihrem Alter in Jahrgangsklassen.[13]

Bei den drei oben genannten Kriterien handelt es sich ausschließlich um äußere Differenzierung.

Auch bei BÖNSCH kann eine dreigliedrige Definition von Differenzierung gefunden werden, die ersten beiden Ebenen beschreiben ähnlich wie oben die äußere Differenzierung, die dritte Ebene meint jedoch schon innere Differenzierung, der in der vorliegenden Arbeit große Aufmerksamkeit gewidmet werden soll. Er unterscheidet Schulsystemdifferenzierung (die Unterscheidung zwischen Sonderschule, Hauptschule, NMS, AHS), Schuldifferenzierung (Varianten von Schulformen, Schulprofile) und Unterrichtsdifferenzierung (Differenzierung in der Fachgruppe).[14]

Dieselbe Auffassung von Differenzierung teilt BECKER durch seine Unterscheidung in äußere und innere Differenzierung. Zur äußeren Differenzierung zählt für ihn die Schulsystemdifferenzierung (Volksschule, Hautschule, NMS, AHS, usw.) und Schuldifferenzierung (Jahrgangsklassen,

[12] vgl. Klippert, 2010, S. 24-25.
[13] vgl. Paradies, Linser, 2011, S.34.
[14] vgl. Bönsch, 1995, S. 24-25.

Kursunterricht, Arbeitsgemeinschaften). [15] Innere Differenzierung beschreibt er wie folgt:

> *„Der Begriff „differenzieren“, lat. „differentia“, bedeutet so viel wie unterscheiden bzw. Verschiedenartigkeit. Aus schulpädagogischer Sicht geht es um die Gruppierung von Schülern (!), um spezifische Unterrichtskonzeptionen, innerhalb derer versucht wird, der Verschiedenartigkeit Rechnung zu tragen, sowie um Sozialformen, welche den Schülern (!) ebenfalls Gelegenheit bieten, sich mit ihren individuellen Lernvoraussetzungen einzubringen.“*[16]

Auch SALNER-GRIDLING teilt Differenzierung in drei Bereiche: institutionelle Differenzierung, äußere Differenzierung und innere Differenzierung. Bei der institutionellen Differenzierung handelt es sich um die Einteilung der Lernenden nach Alter und Leistung, eine Zuteilung erfolgt aufgrund der Schulart (APS, AHS, BMHS). Vergleichbar ist diese mit der oben genannten Definition der Differenzierung nach Schulformen bzw. Schulsystemdifferenzierung. Eine Ebene darunter befindet sich die äußere Differenzierung, die innerhalb einer Schulart nach Alter, Leistung, Wahl der Freigegenstände, Wahlpflichtfächer und Förderstunden differenziert, vergleichbar mit BECKERs Schuldifferenzierung. Auf unterster Ebene stellt sich die innere Differenzierung als Grundidee der Heterogenität dar, bei der nach Lernziel, Lernzeit, Unterrichtsmethode, Lernumgebung, Schwierigkeitsgrad, Leistungsniveau, Inhalt, Lerntechnik und Umfang differenziert wird. [17]

Festzustellen bleibt, dass in der Fachliteratur immer wieder ähnliche und verwandte Begriffe zu finden sind. Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass äußere Differenzierung meist in Form von Schularten, Schulprofilen, Jahrgangsklassen und Leistungsgruppen zum Vorschein kommen, wogegen innere Differenzierung immer einzelne Unterrichtseinheiten in verschiedenen Gegenständen betrifft.

[15] vgl. Becker, 2004, S. 190.
[16] Becker, 2004, S. 180.
[17] vgl. Salner-Gridling, 2009, S. 18.

## 2.2. DIFFERENZIERUNGSKRITERIEN DER INNEREN DIFFERENZIERUNG

In der Literatur werden folgende Kriterien der Differenzierung genannt: Leistung, Interesse, Vorkenntnisse und Vorerfahrungen, Begabung, Alter, Schülerinnen und Schüler mit/ohne Behinderung und Sympathie und Antipathie.

Eine Differenzierung **nach Leistung** ergibt eine Einteilung in leistungshomogene Kleingruppen.[18] Die Einteilung in leistungshomogene Kleingruppen wurde in Österreich 1985 aufgrund der Ersetzung der zwei Klassenzüge der Hauptschule durch drei Leistungsgruppen fortgesetzt.[19] Die AHS-Unterstufe wurde als eigene Schulform beibehalten, schulrechtlich wurde die 1. Leistungsgruppe dieser gleichgestellt.[20] Die rechtliche Grundlage für die Leistungsgruppenbildung in der Hauptschule bildet § 16 (2) des SCHOG mit dem Ziel der Förderung der Schülerinnen und Schüler:

> *„Für den Unterricht in Deutsch, Mathematik und Lebender Fremdsprache sind drei Leistungsgruppen vorzusehen. Die Anforderungen der höchsten Leistungsgruppe haben jenen der Unterstufe der allgemeinbildenden höheren Schule zu entsprechen."*[21]

Aus den Beobachtungen des sozialen Verhaltens von Schülerinnen und Schülern entstand immer wieder die Kritik an der Führung von Leistungsgruppen. Eine Antwort auf die Frage, ob Schülerinnen und Schüler in Leistungsgruppen besser gefördert werden können, kann bis heute nicht gegeben werden.

Die Studie von EDER zum Förderungsanspruch von Leistungsgruppen im Lichte von PISA und TIMSS hat jedenfalls ergeben, dass die Leistungsgruppenorganisation der Hauptschule höchstens eine Förderwirkung auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler in der 1. Leistungsgruppe ausübt. Die Schülerinnen und Schüler der 2. und 3. Leistungsgruppe zeigen jedoch mit

[18] vgl. Becker, 2004, S. 182.
[19] vgl. BMBWK, 2002, S. 20.
[20] vgl. Eder, 2002, S. 979.
[21] www2.

hoher Wahrscheinlichkeit eine negative Beeinträchtigung in Bezug auf das fachliche Lernen.[22]

Die Aufnahme der Neuen Mittelschule ins Regelschulwesen ab dem Schuljahr 2012/13 wird bis zum Schuljahr 2018/19 eine Ablöse der Hauptschule sowie das Ende der Leistungsgruppen bewirken. Die NMS besteht dann neben der AHS-Unterstufe als Regelschule auf der Sekundarstufe I. Ab der 7. Schulstufe erfolgt im Kernbereich eine Unterscheidung nach grundlegender und vertiefter Allgemeinbildung, wobei die Anforderungen der vertieften Allgemeinbildung den Anforderungen der allgemein bildenden höheren Schule entsprechen. Der Unterricht hat in leistungsheterogenen Gruppen zu erfolgen.[23] Nach § 31a des SCHUG können nach wie vor SchülerInnengruppen zur Förderung temporär gebildet werden, beim vorgesehenen Einsatz von zwei Lehrpersonen (Teamteaching) ist auch eine temporäre räumliche Trennung möglich, wenn es aus Gründen der Förderung nötig erscheint.[24]

Ein Unterricht in heterogenen Lerngruppen soll den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit geben, voneinander zu lernen. Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler profitieren von leistungsstarken Schülerinnen und Schülern und leistungsstarke Schülerinnen und Schüler von leistungsschwachen Schülerinnen und Schülern, indem sie die Möglichkeit erhalten, den Mitschülerinnen und -schülern zu helfen. Dies wäre der Wunschgedanke einer breiten Lehrerschaft, da leistungsheterogene Gruppen die soziale Integration wie auch soziale Einstellungen (Hilfsbereitschaft, Solidarität usw.) fördern. Ist jedoch der Leistungsunterschied zwischen den einzelnen Lernenden zu groß, muss weiterhin nach Leistung differenziert werden.[25]
Die empirische Untersuchung des Mathematikunterrichts im Vergleich zwischen leistungsmäßig heterogen und homogen geführten Lerngruppen von WAGREICH ergab höhere Mittelwerte von Schülerinnen und Schülern der Hauptschule ohne Differenzierung in Leistungsgruppen bei den

[22] vgl. Eder, 2002, S. 995.
[23] vgl. BMUKK, 2012, S. 4.
[24] vgl. www3.
[25] vgl. Becker, 2004, S. 182.

Schulleistungstests, die am Ende eines Schuljahres sowohl in Lerngruppen mit bzw. ohne Differenzierung durchgeführt wurden. Die Studie ergab, dass Schülerinnen und Schüler einer Hauptschule mit leistungsmäßig heterogenen Lerngruppen bessere Leistungen am Ende des Schuljahres erbrachten als solche in homogenen Leistungsgruppen.[26]

Um optimal auf die Schülerinnen und Schüler eingehen zu können, ist eine Differenzierung **nach Interesse** von Vorteil. Abgesehen von der gesteigerten Lernmotivation und -aktivität vermittelt ein interessensdifferenzierter Unterricht das positive Gefühl, dass der Unterricht für sie da ist und die Lehrperson auf jede/n Einzelne/n eingeht. Ein weiterer positiver Nebeneffekt ist der meist konstruktive Umgang mit der Lehrperson, welcher sich wiederum auf ein positives Lern- und Gruppenklima auswirkt. Nicht sinnvoll erscheint dieser Unterricht, wenn es um die Vermittlung von grundlegenden Kenntnissen, Einsichten, Fähigkeiten und Fertigkeiten geht.[27]

> *„Unter Interessensdifferenzierung werden die Arrangements verstanden, die einem Lernenden (!) statt Vermittlung und Erarbeitungspflicht die Chance geben, in freier Entscheidung sich auf Inhalte, Handlungen einzulassen, um ein latentes oder manifestes Interesse zu identifizieren, zu entwickeln oder zu verstärken."*[28]

Situationsbezogene Einteilung in SchülerInnengruppen **nach Vorkenntnissen und Vorerfahrungen** kann ebenfalls von Vorteil sein.[29] Wenn Schülerinnen und Schüler in einem Bereich bereits Vorkenntnisse haben, wird es nicht viel Sinn machen, diesen Schülerinnen und Schülern nochmals grundlegende Kenntnisse, Einsichten und Fertigkeiten zu vermitteln, sondern gezielt an diese Vorkenntnisse anzuknüpfen. Oft sind diese Vorkenntnisse eine Bereicherung für die Mitschülerinnen und -schüler.

> *„Die Schule hat die wichtige Aufgabe, (Vor)Wissen zu vermitteln! Das neue Wissen muss aber auf das Vorwissen aufgebaut werden: Kinder und Jugendliche betreten Schulen nicht mit „leeren" Köpfen, die gefüllt*

[26] vgl. Wagreich, 2004, S. 145.
[27] vgl. Becker, 2004, S. 182-183.
[28] Bönsch, 1995, S. 23.
[29] vgl. Becker, 2004, S. 183.

*werden müssen. Lernen geschieht immer vor dem Hintergrund des bereits vorhandenen Vorwissens […].“*[30]

Im Schulbereich spielt der Begriff **Begabung** in den letzten Jahren ebenfalls vermehrt eine wichtige Rolle. Sichtbar wird dies durch die Durchführung der verschiedenen Modelle der Begabungs- und Hochbegabtenförderung. Zur Begabungs- und Begabtenförderung gibt es verschiedene Ansätze, zum einen das Akzeleration-Enrichment-Modell und zum anderen das Schulische Enrichment-Modell (SEM) oder das Autonome Lerner Modell (ALM). Die beiden letztgenannten Modelle haben ihren Ursprung in den USA und kommen zunehmend auch im deutschsprachigen Raum zum Einsatz. Sie sind somit Modelle im Hinblick auf die Umsetzung der schulischen Begabungs- und Begabtenförderung, die vor allem das selbstgesteuerte Lernen fördern.[31]
Akzeleration bedeutet in diesem Zusammenhang „beschleunigtes Lernen“, Enrichment heißt „vertiefendes Lernen“. Vorzeitige Einschulung, altersgemischte Klassen und flexible Eingangsstufe, Überspringen von Klassen und Teil-Unterricht in höheren Klassen kann eine Fördermethode im Sinne der Akzeleration bedeuten. Hingegen weisen Individualisierung, Arbeitsgemeinschaften, Wahl zusätzlicher (Leistungs-)Kurse, Teilnahme an Schülerwettbewerben, Kooperationen mit Universitäten und Wirtschaftsunternehmen sowie Schüleraustausch-Programme vermehrt auf Enrichment-Förderung hin. Auch Mischformen von Akzeleration und Enrichment können in Form von Intensivkursen, Spezialschulen und Schulen mit Hochbegabtenklassen auftreten.[32] Dieses eben beschriebene Modell ist Grundlage der Ausbildung in der Sir-Karl-Popper-Schule im 4. Wiener Gemeindebezirk.[33]
Neben anderen Schulen ist auch der Verein „Österreichisches Zentrum für Begabungsförderung und Begabungsforschung“ (ÖZBF), der von BMUKK und BMWF finanziert wird, Förderer von Begabungen und Talenten sowie Wegbereiter für eine ganzheitliche Entwicklung der Begabungs- und

[30] Salner-Gridling, 2009, S. 15.
[31] vgl. Fischer, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 58.
[32] vgl. Busch, Reinhart, 2006, S.121-126.
[33] vgl. www4.

Exzellenzförderung in Österreich.[34] Begabungsförderung spielt in Österreich eine immer größere Rolle, was eine Vernetzung zwischen Lehrerausbildung, -fortbildung und Kooperation mit Schulen, Universitäten und Fachhochschulen erfordert.

Auch das **Alter** kann selbst bei Binnendifferenzierung eine Rolle spielen. Trotz der meist geringen Altersunterschiede innerhalb einer Schulklasse gibt es immer wieder Schülerinnen und Schüler, die anderen in der Entwicklung oft weit voraus sind. Die Abschaffung der Jahrgangsklassen ist ebenfalls immer wieder ein Diskussionspunkt, da hier das Helfersystem – die „Großen" helfen den „Kleinen" – zum Tragen kommt. Zu bezweifeln ist jedoch, ob die älteren und begabteren Schülerinnen und Schüler hiervon profitieren können.[35] In Österreich sind Mehrstufenklassen, in denen jahrgangsübergreifendes Lernen stattfindet, um jedem Kind bzw. jedem Jugendlichen entsprechend seiner Verschiedenheit Lernangebote und Zeitvorgaben zukommen zu lassen, die Antwort auf den reformpädagogischen Anspruch zur Auflösung der Jahrgangsklassen.[36]

In Wien wurden mittlerweile fünf Standorte mit Mehrstufenklassen auf der Sekundarstufe I eingerichtet: Lerngemeinschaft Wien 15, Integrative Lernwerkstatt Brigittenau, Flexible Sekundarschule - Mehrstufenklasse mit Tutorensystem und Sprachinklusion am Max-Winter-Platz, Mehrstufenintegrationsklasse mit Schwerpunkt Informatik am Leipziger Platz, Schulgemeinschaft Mehrstufenklassen Pfeilgasse.[37] Im Grundschulbereich hat eine Vielzahl an Wiener Volksschulen Mehrstufenklassen errichtet.[38]

Seit der Einführung der Koedukation ist das **Geschlecht** als Differenzierungskriterium in den Hintergrund getreten[39], das heißt, dass formal alle Bereiche der öffentlichen Schule in Österreich sowohl Mädchen als auch Jungen in gleicher Weise offen stehen, wenn auch nach wie vor die

[34] vgl. www5.
[35] vgl. Becker, 2004, S. 183-184.
[36] vgl. Thurn, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 30.
[37] vgl. www6.
[38] vgl. www7.
[39] vgl. www8.

Ausbildungswege beider Geschlechter ausgeschlossen geschlechtertypisiert verlaufen.[40] Fern von alten Klischees sind heute Gleichberechtigung und Rollenwechsel tragende Schlagwörter. Trotzdem gibt es auch in der heutigen Zeit immer wieder Unterrichtssituationen, in denen es sich lohnt, die Mädchen und Jungen zu trennen, v.a. da unterschiedliche Lerninhalte immer wieder auf unterschiedliche Resonanz bei den Geschlechtern stoßen. Es ist nach wie vor generell gültig, dass sich Mädchen mehr für Mode und Jungen mehr für Sport interessieren. Ohne dies zu generalisieren, stellt sich jedoch die Frage, warum man diesen unterschiedlichen Interessen nicht nachkommen soll.[41]

> *„Alle bedeutsamen Lernziele können von Buben und Mädchen gleichermaßen erreicht werden. Trotzdem gibt es unterschiedliche Zugänge und Unterschiede im Kompetenzerwerb und Lernerfolg […]. Die PISA-Ergebnisse zeigen in allen drei bisherigen Erhebungsrunden eine höhere Lesekompetenz von Mädchen, wobei sich der Unterschied zwischen Buben und Mädchen während der Sekundarstufe I vergrößert. In Mathematik und den Naturwissenschaften schneiden die Mädchen signifikant schlechter ab als die Buben. Sie weisen eine geringere Motivation auf und zeigen ein geringes Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten.“*[42]

Schülerinnen und Schüler mit **Behinderung** werden über die Schulsystemdifferenzierung meist in Sonderschulen oder Spezialeinrichtungen eingewiesen. In Integrationsklassen wird ein kleiner Teil behinderter Kinder mit einer größeren Anzahl nicht behinderter Schülerinnen und Schüler von einer Lehrkraft und einer Sonderschullehrkraft unterrichtet.[43]

> *„Die Integration von Kindern mit besonderem Bildungsbedarf wird vorwiegend ethisch-normativ begründet. Die gemeinsame Schulung soll Kinder mit besonderem Bildungsbedarf schulisch und sozial integrieren sowie soziale Benachteiligungen reduzieren.“*[44]

Im Schuljahr 2011/12 gab es in Österreich 27 660 Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf in Volks-, Haupt-, Sonder- und

[40] vgl. Faulstich-Wieland, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 16.
[41] vgl. Becker, 2004, S. 184-185.
[42] Salner-Gridling, 2009, S. 14.
[43] vgl. Becker, 2004, S. 188.
[44] Sturny-Bossart, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 45.

Polytechnischen Schulen. 13 198 Schülerinnen und Schüler wurden in Sonderschulen unterrichtet, 14 462 Schülerinnen und Schüler nahmen an einem integrativen Unterricht teil.[45]

Eine selbstgesteuerte Kleingruppenfindung durch Schülerinnen und Schüler, bei der die Lehrperson nur die Anzahl der Gruppenmitglieder festlegt, erwirkt eine Differenzierung nach **Sympathie und Antipathie**. Ein Vorteil dieser Gruppenfindung kann vor allem die selbständige Zusammenstellung von Kleingruppen sein. Jedoch bringt diese Methode auch wesentliche Nachteile mit sich, unter anderem das Außenseiterproblem, die Cliquenbildung, die geringe Kooperation mit anderen als den sympathischen Mitschülerinnen und -schülern und die mitunter schlechte Vorbereitung aufs Berufsleben, in dem man gegebenenfalls mit Menschen zusammenarbeiten muss, die einem nicht sympathisch sind. [46]

Differenzierungsmaßnahmen sind in der Regel immer abhängig von den Rahmenbedingungen. Stehen bei der Kleingruppenbildung zu wenige Räume zu Verfügung, wird diese wahrscheinlich nicht möglich sein. Oft ist die Lehrperson auch abhängig von der Anzahl der Tische im Klassenraum, der Anzahl der Computer und der Größe der Lerngruppe. Je kleiner die Lerngruppe, desto individueller kann die Lehrperson die SchülerInnengruppe betreuen. Je größer die Lerngruppe, desto häufiger wird auf Differenzierungsmaßnamen verzichtet und höchstens durch individuelle Arbeitsaufträge dem Schüler/der Schülerin entgegengekommen. Ein weiteres Problem, das mit Differenzierung im Unterricht einhergeht, ist der erhöhte Arbeitseinsatz der Lehrperson, der bei der Planung des Unterrichts beginnt und mit der Reflexion und Vorbereitung des darauffolgenden Unterrichts beendet wird.[47]

> *„Gegen die Aufforderung, mithilfe von Differenzierungsmaßnahmen den Schülern (!) Lernangebote zu unterbreiten, die ihren individuellen Begabungen und Fähigkeiten entsprechen, ist kaum etwas einzuwenden.*

[45] vgl. www9.
[46] vgl. Becker, 2004, S. 188-189.
[47] vgl. Becker, 2004, S. 189-190.

*Doch es ist einfach, einen solchen Anspruch zu stellen, viel schwieriger ist es, ihm auch gerecht zu werden. Ein solcher Anspruch lässt sich nie ganz erfüllen. Auf dem Gebiet der Differenzierung kann eine Lehrerin (!) keine Perfektion anstreben, weil sie sich sonst maßlos überfordert. Und die Schüler (!) dürfen auch keine Perfektion erwarten, müssen sich hin und wieder mit Angeboten abfinden, die nicht auf ihre Lernvoraussetzungen abgestimmt sind."*[48]

## 2.3. RECHTLICHE GRUNDLAGE DER DIFFERENZIERUNG IM ÖSTERREICHISCHEN SCHULWESEN

Die rechtliche Grundlage der Differenzierung findet man in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen der österreichischen Lehrpläne:

***„4. Förderung durch Differenzierung und Individualisierung***
*Die Schülerinnen und Schüler haben vielfältige und unterschiedliche Fähigkeiten, die je nach deren Entwicklungsstand sowie nach Themenstellung und Herangehensweise im Unterricht in unterschiedlicher Weise zum Ausdruck kommen. Aufgabe der Schule ist es, die Schülerinnen und Schüler zur bestmöglichen Entfaltung ihrer individuellen Leistungspotenziale zu führen. Leistungsfähigkeit und besondere Begabungen sind dabei kontinuierlich zu fördern.*
*Für den Unterricht ergeben sich daraus folgende mögliche Aufgabenstellungen bzw. pädagogisch-didaktische Konsequenzen:*

- *Erstellung von differenzierten Lernangeboten, die individuelle Zugänge und auch immer wieder neue Einstiege und Anreize bieten,*
- *Eingehen auf die individuell notwendige Arbeitszeit, auf unterschiedliche Lerntypen, Vorkenntnisse, Vorerfahrungen und kulturelles Umfeld,*
- *Berücksichtigung des unterschiedlichen Betreuungsbedarfs,*
- *Bewusstmachen der Stärken und Schwächen im persönlichen Begabungsprofil der Schülerinnen und Schüler, wobei bevorzugt an die Stärken anzuknüpfen ist,*
- *Entwicklung von Rückmeldeverfahren, ob die Schülerinnen und Schüler tatsächlich ihr individuelles Leistungspotenzial optimal entfalten,*

[48] Becker, 2004, S. 189.

- *Herstellung eines individuell förderlichen Lernklimas und Vermeidung von Demotivation.*

*Die methodisch-didaktische Gestaltung soll die Berücksichtigung der jeweils aktuellen Bedürfnisse der Schülerinnen und Schüler gestatten. Unterrichtsformen, durch die sich Differenzierung und Individualisierung verwirklichen lassen, reichen von Einzelarbeit über Partnerarbeit bis zu den zahlreichen Möglichkeiten der Gruppenarbeit. Dazu gehören auch Phasen des offenen Lernens und Wahlmöglichkeiten für die Schülerinnen und Schüler."*[49]

Der Lehrstoffteil der Fachlehrpläne der einzelnen Unterrichtsgegenstände ist seit dem Schuljahr 1985/1986 für Hauptschule und AHS-Unterstufe wortident. Im Bereich der Hauptschule gibt es für die leistungsdifferenzierten Gegenstände Deutsch, Lebende Fremdsprache und Mathematik spezielle didaktische Hinweise zur Leistungsdifferenzierung.[50]

Auch für die NMS wurden durch eine Änderung des Schulunterrichtsgesetzes (§31a (2)) Bestimmungen zum Einsatz von Differenzierung und Individualisierung in den Pflichtgegenständen festgesetzt:

*„In der Neuen Mittelschule sind in den Pflichtgegenständen Deutsch, Mathematik und Lebende Fremdsprache auf allen vier Schulstufen aus den folgenden pädagogische Fördermaßnahmen von den Lehrern in koordiniertem Zusammenwirken mit dem Schulleiter auszuwählen:*

1. *Individualisierung des Unterrichts,*
2. *differenzierter Unterricht in der Klasse,*
3. *Begabungs- einschließlich Begabtenförderung,*
4. *Maßnahmen der inklusiven Pädagogik und Diversität,*
5. *Förderung in temporär gebildeten Schülergruppen,*
6. *Förderung in Förder- bzw. Leistungskursen und*
7. *Unterrichten im Lehrerteam (Teamteaching).*[51]

[49] www11.
[50] vgl. www10.
[51] www16.

# 3. INNERE DIFFERENZIERUNG ALS ANTWORT AUF HETEROGENITÄT

> *„Empirische Evidenzen zeigen weiterhin ein stark auf homogene Schülerschaften und einen imaginären „Durchschnittsschüler“ (!) ausgerichtetes Denken der Lehrerinnen und Lehrer auf. Mentale Modelle von Lehrkräften gehen häufig davon aus, dass optimales Lernen nur dann gelingen kann, wenn alle Schülerinnen und Schüler über ähnliche Lernvoraussetzungen verfügen und für das gleiche Lernziel lernen.“*[52]

Eine Untersuchung von HEYMANN im Jahre 1995 ergab, dass innere Differenzierung nur sehr spärlich durchgeführt wird, und beantwortet die Frage, ob sich bis zum heutigen Zeitpunkt etwas geändert hat, eindeutig mit Nein. Er findet Aussagen wie „Innere Differenzierung gibt es nicht, außer in den Köpfen von Hochschullehrern.“, „Für Differenzierung sehe ich keine Notwendigkeit. Ich will doch die Unterschiede zwischen den Kindern nicht noch vergrößern, die sollen am Gymnasium doch alle das Gleiche lernen!“ und „Die Angst des Lehrers, den großen Zügel zu verlieren, ist wahrscheinlich unendlich groß!“ vor. Einige positivere Rückmeldungen bekommt HEYMANN vornehmlich von LehrerInnen der Grundschule, bei denen Unterrichtsphasen mit Binnendifferenzierung als gängige Praxis aufscheinen. In Hauptschulen erhält er ein uneinheitliches Bild, da man meist nur unter äußerem Problemdruck (also wenn alle herkömmlichen Mittel der Motivierung und Disziplinierung nicht mehr greifen) vom gleichschrittigen Unterricht abweicht und sich binnendifferenziertem Unterricht zuwendet.[53]

Die folgenden Kapitel sollen dazu anregen, festgefahrene Ansichtsweisen zu überdenken und sich an „Neues“ heranzuwagen.

[52] Krainz-Dürr/Schratz, 2006, in: Buhozer, Kummer Wyss, 2010, S. 8.
[53] vgl. Heymann, 2010, S. 6.

## 3.1. INNERE DIFFERENZIERUNG IM UNTERRICHT

> *„In jeder Klasse finden wir – auch in einem gegliederten Schulsystem – höchst unterschiedliche Ausgangsvoraussetzungen bei den Schülerinnen und Schülern vor. Dies betrifft sowohl Einstellungen zum schulischen Lernen, die individuelle Erfahrungswelt, die allgemeinen und fachlichen Lernvoraussetzungen und die persönlich präferierten Zugangsweisen. Um möglichst vielen – im Idealfall allen – individuell passende Lernangebote machen zu können, muss die Lernsituation differenzierend angelegt sein."*[54]

Sobald sich die Lehrperson der Unterschiedlichkeit ihrer Lernenden bewusst ist, muss sich auch das Lehrerbild ändern. Traditioneller lehrerzentrierter Unterricht hat keinen Platz mehr bei heterogenen Lernformen, das Konzept der inneren Differenzierung muss daher in den Mittelpunkt gestellt werden.

KLAFKI formuliert bereits 1996 die Anforderungen an einen binnendifferenzierten Unterricht, der die optimale Förderung der Schülerinnen und Schüler bei der Aneignung von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten anstrebt, die Selbständigkeit jeder/jedes einzelnen Lernenden fördert, den bewussten Aufbau von Kooperations- und Kommunikationsfähigkeit der einzelnen Lernenden sowie die Entwicklung verschiedener Persönlichkeitsdimensionen vorsieht.[55]

Um dieses Konzept umzusetzen, muss der binnendifferenzierte Unterricht inhaltlich, organisatorisch und nach (LehrerInnen-)Unterstützung aufgebaut werden. Es soll dadurch ermöglicht werden, dass Lernende zur gleichen Zeit an unterschiedlichen Lerngegenständen und Lernzielen (inhaltliche Differenzierung) und mit unterschiedlichen Sozialformen, Lerntempi sowie Methoden und Medien (organisatorische Differenzierung) arbeiten. Wenn die Lehrperson ein Lernangebot bereitstellt, für das sich die Lernenden je nach Interesse, Lernvoraussetzung, Motivation und Lernstil entscheiden können, kommt es zu einer gebündelten LehrerInnenzuwendung. Bei selbständigen und motivierten Schülerinnen und Schülern wird die Lehrperson eher in den Hintergrund treten und in die Rolle der Beobachterin/des Beobachters

[54] Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 42.
[55] vgl. Klafki, 1996, S. 123.

schlüpfen, wogegen sie Schülerinnen und Schüler mit langsamen, gering motivierten oder gar falschen Ansätzen durch individuelle Unterstützung aktiv im Lernprozess begleitet. Dies setzt in der Regel ein breites Angebot an verschiedenartigen und unterschiedlich anspruchsvollen Lernangeboten voraus, um Unter-/Überforderung zu vermeiden. Aufgrund einer Differenzierung der Unterstützung steht es der Lehrperson frei, einzelne Schülerinnen und Schüler oder ganze SchülerInnengruppen zu betreuen. Durch situationsgerechte Erklärungen und Anregungen wird versucht, der individuellen Förderung nachzukommen. Aufgrund dessen muss es aber möglich sein, das Lernangebot so zu gestalten, dass alle Lernenden selbständig arbeiten können.[56]

## 3.2. GRUNDFORMEN DES UNTERRICHTS

Unterricht kann in individualisierender, kooperativer oder gemeinsamer Form stattfinden. Um den Unterricht als gut bezeichnen zu können, ist eine Vermischung dieser drei Grundformen optimal. Der gemeinsame Unterricht ist in der Regel unter dem Stichwort Frontalunterricht bekannt und ist gut geeignet, um Sach-, Sinn- und Problemzusammenhänge aus der Sicht der Lehrperson zu vermitteln, um dadurch die Sach- und Fachkompetenz der Schülerinnen und Schüler aufzubauen. Das Pendant zum gemeinsamen Unterricht ist demnach der individualisierende Unterricht, in welchem die Schülerinnen und Schüler ihr Lernen selbständig organisieren sollen. Hier geht es nicht vorrangig um die Wissensvermittlung, sondern um den Aufbau einer Methodenkompetenz, und diese ist hauptsächlich für Übungs- und Festigungsphasen bzw. für die Wiederholung und Kontrolle von Gelerntem geeignet. Hier wird vermehrt innere Differenzierung zum Tragen kommen, da der individualisierende Unterricht unmittelbar an die individuellen Erfahrungen und das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anknüpfen soll sowie eine weitestgehend selbständige Arbeitshaltung im Lernprozess zulässt. Als dritte und letzte Grundform sei der kooperative Unterricht genannt, welcher Phasen der Team- und Gruppenarbeit vorsieht. Primäres Ziel des kooperativen Unterrichts ist die

[56] vgl. Joller-Graf, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 126.

Vermittlung von Handlungskompetenz und Selbstwertgefühl, nicht jedoch die Wissensvermittlung. D.h. dass in kooperativen Lernphasen versucht wird, erlerntes Wissen anzuwenden. [57]

Im folgenden Abschnitt werden diverse Formen des individualisierenden, kooperativen und gemeinsamen Unterrichts genannt, die im Speziellen auch im Mathematikunterricht zum Tragen kommen. Die Aufzählung der verschiedenen Unterrichtsformen stellt jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit dar und kann sicherlich durch viele weitere Unterrichtsformen und -methoden ergänzt werden.

### 3.2.1. INDIVIDUALISIERENDER UNTERRICHT

Im individualisierenden Unterricht spielen Selbsttätigkeit, Strukturierung, Verantwortung für das eigene Lernen eine große Rolle. Schülerinnen und Schüler sollen ihre Arbeitsprozesse selbst planen, durchführen, kontrollieren und reflektieren, wobei ihnen eine freie Auswahl an Methoden, Medien, Materialien und Lernorten zur Verfügung steht.

> *„Überaus wichtig für das Gelingen des individualisierten Unterrichts ist die Gewöhnung der Schüler (!) an eine regelmäßig stattfindende und institutionalisierte Selbstkontrolle. Nur wenn der Schüler (!) diese selbst vorzunehmende individuelle Evaluierung des je eigenen Lernfortschritts als ebenso integralen wie notwendigen Bestandteil des Lernprozesses begreift und akzeptiert, ist diese Grundform des Unterrichts ein effizienter Arbeitsprozess, der sich von sonstigen individuellen Beschäftigungen unterscheidet.“*[58]

Die ersten sechs unten genannten Punkte Freiarbeit, Werkstattlernen, Stationenarbeit, Planarbeit, wahldifferenzierter Unterricht und Portfolio können auch als selbstgesteuertes Lernen bezeichnet werden. Selbstgesteuertes Lernen ist momentan ein sehr beliebtes Thema, da die Verbesserung des

[57] vgl. Paradies, Linser, 2011, S 31.
[58] Paradies, Linser, 2011, S. 52.

schulischen Lernens wesentlich davon abhängt, wie weit es gelingt, die Lernenden dazu zu bringen, ihr Lernen selbst in die Hand zu nehmen. Die Lernenden stehen vor den Herausforderungen Selbstorganisation, Selbststeuerung und Selbstverantwortung. Ist alles vorgegeben wie meist beim Frontalunterricht, kann der Lernende nicht lernen aktiv zu werden, sich zu organisieren und selbst für sich und die ihn betreffenden Dinge verantwortlich zu sein.[59]

> *„Selbststeuerung verlangt Selbstdisziplin, einen reflektierten Umgang mit sich selbst, Planungs- und Kooperationsfähigkeit.“*[60]

Die Entwicklung der Selbstkompetenz ist eine eigenständige Erziehungs- und Bildungsaufgabe, bei der selbstgesteuerte Lernprozesse Unterstützung leisten können.

| **Selbstkompetenz** | | |
|---|---|---|
| Selbstorganisation | Selbststeuerung | Selbstverantwortung |
| - den Tag organisieren<br>- sich selbst Ziele setzen<br>- Zeitmanagement praktizieren<br>- Aufgaben einschätzen<br>- Hilfsmittel – Systeme bereitstellen | - Selbstdisziplin entwickeln<br>- Umgang mit sich selbst lernen<br>- Planungsfähigkeit gewinnen<br>- Verabredungen mit anderen eingehen können | - Etappen überprüfen (Metaebene)<br>- Sinn haben bzw. entwickeln<br>- Bedürfnisse – Ziele – Übereinstimmung gewinnen<br>- statt Lage- Handlungsorientierung zur Grundlage machen<br>- sich gerecht werden |
| **Lernstrategien, Lern- und Arbeitstechniken** | | |
| Techniken der Informationsbeschaffung<br>Techniken der geistigen Auseinandersetzung<br>Darstellungstechniken<br>Experimentier- und Erkundungstechniken<br>Training von Fertigkeiten<br>Handwerklich – technische Fertigkeiten | Lernen durch Zuhören<br>Lernen durch Lesen<br>Lernen im Gespräch<br>Lernen in der Gruppenarbeit<br>Lernen durch Vermittlung an andere mit Hilfsgedächtnissen arbeiten<br>Lernen durch Schreiben<br>Projektlernen | |

**ABBILDUNG 2: Bönsch, 2011, S. 47.**

[59] vgl. Bönsch, 2011, S. 46.
[60] Bönsch, 2011, S. 46.

#### 3.2.1.1. FREIARBEIT

In der von der Lehrperson hergestellten didaktisch gestalteten Lernumgebung wählt der/die Schüler/in das Thema, die Methode, den zeitlichen Umfang seiner/ihrer Arbeit, die Sozialform, die Lernmaterialien und Medien und wird dabei von der Lehrperson begleitet und unterstützt. Ziel einer Freiarbeit sind meist der Aufbau von Selbstkompetenz, Methodenkompetenz, Ich-Stärke und Kreativität.[61] Übungen, Materialangebote, Lernspiele und kleine Projekte finden in Freiarbeit statt, in der die Schülerinnen und Schüler in einem gegebenen Zeitrahmen Anliegen, Inhalte und Anspruch selbst bestimmen.[62]

Im selbstgesteuerten Unterricht spielt Kompetenzorientierung eine wesentliche Rolle. Kompetenzraster geben die Anforderungen an das Lernen bekannt, wodurch selbstgesteuertes Lernen größerrahmig konzipiert werden kann.[63]

#### 3.2.1.2. WERKSTATTARBEIT

In eigens dafür bereitgestellten Räumen finden die Lernenden eine vom Lehrer/von der Lehrerin materialgestützte, erfahrungsorientierte Lernumgebung, bei der die Lehrperson in den Hintergrund tritt, sobald sie die Lernwerkstatt hergestellt hat. In der Regel dienen Werkstätten zur Erstellung von Produkten (für den Mathematikunterricht: z.B. Würfelmodell, Quadernetze, u.a.) und zur Durchführung von Lernexperimenten mit dem Ziel die Sach-, Fach- und Selbstkompetenz und das damit verbundene eigenverantwortliche, selbständige Lernen zu fördern.[64]

> *„Den Schüler/innen stehen in diesem Raum fachspezifische Lernangebote und Arbeitsimpulse zur Verfügung – auch Lernbüfett genannt. Aus diesem Lernbüfett (!) haben sie die Auswahl zu treffen, die den persönlichen Präferenzen und Begabungen entspricht.“*[65]

[61] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 52-53.
[62] vgl. Bönsch, 2011, S. 48.
[63] vgl. Bönsch, 2011, S. 51.
[64] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 54-55.
[65] Klippert, 2010, S. 108.

### 3.2.1.3. STATIONENARBEIT

Bei der Stationenarbeit, umgangssprachlich „Stationenbetrieb“, werden Lernarrangements mit Arbeitsanleitungen an festen Orten, entweder im Kreislauf oder aber auch in beliebiger Reihenfolge, für die Schülerinnen und Schüler zur Verfügung gestellt. Es besteht die Möglichkeit, die einzelnen Stationen, die nummeriert sein sollten, nach Interessen der Schülerinnen und Schüler, nach Themengebieten für Übungsphasen, aber auch aufbauend bzw. vernetzend zu einem bestimmten Themenkomplex zu differenzieren.[66]

> *„Das Besondere am Stationenlernen: Im Klassenraum werden mehrere aufgaben- und materialdifferenzierte Lernstationen aufgebaut, die die Schüler/innen unter Beachtung bestimmter Zeitvorgaben und Spielregeln durchlaufen müssen. An jeder Station gilt es, fachspezifische Lern- und Arbeitsaufgaben zu erledigen und zu diesem Zweck u.a. Unterlagen zu lesen, Arbeitsblätter auszufüllen, Fragen zu beantworten, Fehler zu finden, Experimente zu machen, Probleme zu lösen, Lernprodukte herzustellen, Lernspiele durchzuführen etc.“*[67]

### 3.2.1.4. PLANARBEIT

Bei der Planarbeit wird zu einem bestimmten Thema ein Arbeitspensum für die Schülerinnen und Schüler erstellt, welches sie innerhalb einer festgelegten Zeitspanne anhand eines Planes (z.B. tabellarisch) in beliebiger Reihenfolge und Sozialform absolvieren. Meist steht die Planarbeit in einem engen Zusammenhang mit dem davor geschehenen Fachunterricht, um eine Thematik zu festigen bzw. Lerndefizite abzubauen zum Zwecke der eigenständigen Aneignung von Sach- und Fachwissen, dem Aufbau einer stabilen Arbeitshaltung, der Vermittlung von Methodenkompetenz und der Förderung von Selbsteinschätzung und -kontrolle. Nach der Herstellung der Planarbeit und der zur Verfügung gestellten Selbstkontrolle kann der/die Lehrer/in in die Berater- und Beobachterrolle schlüpfen.[68]

Wochenpläne können offener oder geschlossener gestaltet sein, je nach Selbständigkeit der Schülerinnen und Schüler. Die Arbeitsaufträge sind in der

[66] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 56-57.
[67] Klippert, 2010, S. 109.
[68] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 57-58.

Regel kurz und prägnant formuliert und meist in Verbindung mit dem gängigen Arbeitsmaterial (Schulübungsheft, Schulbuch, Lernkarteien, Arbeitsblätter, usw.). Je offener ein Wochenplan gestaltet ist, desto mehr Entscheidungs- und Mitbestimmungsmöglichkeiten hat der Lernende, was auch bedeutet, dass Schülerinnen und Schüler selbst die Initiative ergreifen und Verantwortung übernehmen müssen. Bei offenen Plänen liegt die Gefahr oft darin, dass die Schülerinnen und Schüler anfänglich unsicher sind, keine Strukturierung für ihre Arbeit finden und schnell durch andere Mitschülerinnen und -schüler abgelenkt sind, was wiederum bedeutet, dass Planarbeit einer behutsamen Entwicklung und gezielten LehrerInnenlenkung bedarf.[69]

#### 3.2.1.5. WAHLDIFFERENZIERTER UNTERRICHT

Der wahldifferenzierte Unterricht ist in drei Phasen eingeteilt: Informations- und Strukturierungsphase, Differenzierungsphase und Vermittlungs- und Reflexionsphase. Nach der Einführung in ein Thema durch die Lehrperson, wobei die Schülerinnen und Schüler die Grundinformationen zu einem Thema erhalten, werden die einzelnen Teilthemen im Überblick dargestellt. Anschließend wählen die Lernenden aus diesem Arbeitsangebot frei aus, bearbeiten dieses einzeln oder in Kleingruppen und stellen anschließend ihre Ergebnisse der Klasse vor. Folglich kann es zur Diskussion, zu Ergänzungen durch die Lehrperson, zur Reflexion der Arbeit und gegebenenfalls zu einer Leistungskontrolle kommen.[70]

#### 3.2.1.6. PORTFOLIO

Bei der Portfolio-Arbeit wird ein Thema vorgestellt, vereinbart und ggf. eingegrenzt. Nachdem den Schülerinnen und Schülern die grundlegenden Kenntnisse vermittelt wurden, werden sie dazu aufgefordert, gemäß ihrem individuellen Interesse sich mit einem Aspekt näher zu befassen, sich in diesen einzulesen, nachzuforschen, ein Produkt zu erstellen und dabei stets den

[69] vgl. Klippert, 2010, S. 105-106.
[70] vgl. Bönsch, 2006, S. 203-204.

eigenen Lernweg zu dokumentieren. Die Ergebnisse der Portfolio-Arbeit können unterschiedlicher Natur sein, von einer Zeichnung, einer Reportage, einem ExpertInneninterview, einem Videofilm bis hin zu Tagebuchaufzeichnungen und eigenen Berichten. Die Produkte, die in einem Lernprozess entstehen, werden in einer Portfoliomappe gesammelt und sollen Aufschlüsse über die Lernfortschritte und Kompetenzen der Schülerin/des Schülers geben. Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler über den Arbeits- und Lernprozess reflektieren und bekommen individuelles Feedback von der Lehrperson.

Portfolios spielen in Zusammenhang mit der Individualisierung der Lernprozesse, aber auch im Hinblick auf die Stärkung des Selbstwertgefühls eine wichtige Rolle. Durch intensive Auseinandersetzung mit einer Problemstellung kann der Schüler/die Schülerin seine/ihre Talente entwickeln. Ein vorzeigbares Produkt wird erarbeitet und vor dem Klassenplenum präsentiert.[71]

#### 3.2.1.7. HAUSÜBUNGEN

Laut SCHOG §17 Abs. 2 dienen Hausübungen der Festigung von Wissen und Können und sind regelmäßige Arbeiten, die in der Regel selbständig zuhause oder in Lernbetreuungen (Nachmittagsbetreuung, Hort, etc.) erledigt werden. Sinnvoll erscheinen Hausübungen nur, wenn die Lehrperson die individuellen Lernvoraussetzungen berücksichtigt, auf die Stärken und Schwächen der/des einzelnen Schülerin/Schülers eingeht und Über- und Unterforderungen vermeidet.

> *„Bei Hausübungen gilt in besonderem Maße: Die Aufgaben sollen differenziert und an die Schüler/innen angepasst sein. Zu viele oder zu schwere Aufgaben entmutigen […].“*[72]

Das Ziel von Hausübungen sollte das Gewöhnen an die individuelle selbständige Arbeit ohne Beisein von KlassenkameradInnen und LehrerInnen

[71] vgl. Becker, 2008, S. 170-171.
[72] Salner-Gridling, 2009, S. 77.

sein. Differenzierte Hausübungen bieten den Lernenden die Möglichkeit, frei zwischen unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden gemäß ihren individuellen Leistungsvoraussetzungen zu entscheiden, und sollen Eigenständigkeit, Eigenverantwortung und Konzentration fördern.[73]

Hausübungen müssen so gestaltet werden, dass die Aufgaben einen hohen Anforderungscharakter für die Lernenden darstellen. Sonst werden diese meist in der Regel abgeschrieben oder nur vor Schularbeiten gemacht, in der Hoffnung, dass eines dieser Beispiele „drankommt". Hausaufgaben können zum Üben, Anwenden, Vertiefen, Sammeln persönlicher Problemlöseerfahrungen, Vorbereiten des weiteren Unterrichts oder zur Leistungsbewertung, zum Diagnostizieren von Lernleistungsniveaus und Lernen lernen genutzt werden.[74]

Die folgende abgebildete Beispielaufgabe soll dies verdeutlichen. Um bei der Hausübung nicht klassische Prozentrechenbeispiele abzuarbeiten, ist die Aufgabenstellung zum Thema Prozentrechnung offen gestellt.

**Beispielaufgabe: Prozenten auf der Spur**

- Finde zu Hause drei Textstellen, in denen eine Prozentangabe vorkommt. Was sagen die Prozentangaben jeweils aus? Notiere für alle drei Stellen, wo du sie gefunden hast und was die Prozentangaben bedeuten.
- Überlege dir eine sinnvolle Aufgabenstellung, in der eine der drei Prozentangaben das Ergebnis ist.
- Finde eine weitere Aufgabe mit einer der Prozentangaben als gegebenem Wert. Notiere und löse sie.

**Tipp:** Prozentangaben kannst du z.B. auf Lebensmittelverpackungen, auf den Materialetiketten von Kleidung oder auch in Zeitungen und Zeitschriften finden.

**ABBILDUNG 3: Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2012, S. 83.**

[73] vgl. Linser, Paradies, 2001, S. 59.
[74] vgl. Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2012, S. 82.

#### 3.2.1.8. COMPUTERARBEIT

Computerarbeit kann auch außerhalb des IT-Unterrichtes stattfinden. Bezogen auf den Mathematikunterricht erscheint es sinnvoll, den Computer als Medium kennenzulernen. Neben der Informationsbeschaffung über das Internet ist es sicherlich sinnvoll, Grundkenntnisse im Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm und einem dynamischen Geometrieprogramm zu erlangen. Mittels geeigneter Lernsoftware, die im Internet bzw. als Begleitmaterial zu Schulbüchern zur Verfügung steht, kann den individuellen Stärken und Schwächen der Kinder nachgekommen werden.

### 3.2.2. KOOPERATIVER UNTERRICHT

Wie das Wort Kooperation bereits verrät, geht es im kooperativen Unterricht meist um die Bildung von SchülerInnengruppen nach Lernvoraussetzungen, Interesse, Lerntypen oder Zufall, die in einer bestimmten Zeitspanne ohne die direkte Einwirkung der Lehrperson an einer Aufgabe arbeiten. Die Gruppenarbeit wird gemeinsam mit der Lehrperson geplant und anschließend in der Gruppe selbständig ausgeführt, der/die Lehrende begleitet die Gruppenphase durch Moderation und Beratung der einzelnen Gruppen. Nach der gruppeninternen Erarbeitungsphase, die neben der Sach- und Sozialkompetenz auch die Handlungskompetenz, Solidarität und Kooperationsfähigkeit schulen soll, folgt eine Präsentationssequenz, mit dem Ziel, die Methodenkompetenz zu fördern.[75]

#### 3.2.2.1. PROJEKTUNTERRICHT

> *„Projektarbeit hat zum Ziel, Leben, Lernen und Arbeiten so zu verknüpfen, dass ein wichtiges und den Interessen der Beteiligten entgegenkommendes Problem gemeinsam bearbeitet (Prozess) und zu einem Ergebnis (Produkt) geführt wird. Hierbei sollen die Schüler (!) lernen, Arbeits- und Lernprozesse zunehmend selbstständig zeitlich wie inhaltlich zu organisieren und strukturieren. Gegenstand des*

[75] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 65-66.

*Projektunterrichts können sowohl fachspezifische als auch fächerübergreifende oder schulprofilähnliche Inhalte sein.“*[76]

Im Projektunterricht kann der Fachunterricht sinnvoll mit fächerübergreifenden Inhalten, Handlungsorientierung und innerer Differenzierung verbunden werden. Um den unterschiedlichen Neigungen und Interessen der Schülerinnen und Schüler nachzukommen, wird meist nach Interesse differenziert. Ein weiterer positiver Aspekt des Projektunterrichts ist die Vorbereitung auf das Berufsleben.

### 3.2.3. GEMEINSAMER UNTERRICHT

Wie bereits oben erwähnt ist den meisten Lehrenden der Begriff „Frontalunterricht“ eher bekannt als gemeinsamer Unterricht. Gemeinsamer Unterricht wird vom Lehrer/von der Lehrerin für die gesamte Klasse geplant und vorbereitet, die Inhalte sind in der Regel neu und auf das Alter und den Lernstand der Klasse zugeschnitten. Die Phasen des gemeinsamen Unterrichts werden von der Lehrperson stark gelenkt, die meist durch das fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch oder den Lehrervortrag zum Ausdruck kommen. Auch im gemeinsamen Unterricht ergeben sich (wenn auch nur geringe) Differenzierungsmaßnahmen durch den Einsatz von visuellen und auditiven Materialien und Medien und während der phasenweisen Einzelarbeit durch didaktisch entsprechend aufbereitete differenzierte Arbeitsblätter und Aufgaben aus dem Schulbuch. Zu den Grundformen des gemeinsamen Unterrichts zählen Präsentation, Lehrgang, Kursarbeit und Klassenunterricht. Eine genauere Ausführung der einzelnen Grundformen soll hier nicht stattfinden, da der binnendifferenzierte Anteil in der Regel sehr gering ist.[77]

Die nachstehende Grafik soll zusammenfassend einen Überblick über die unterschiedlichen Unterrichtsformen und -methoden geben.

[76] Paradies, Linser, 2001, S. 66.
[77] vgl. Paradies, Linser, 2011, S. 77-78.

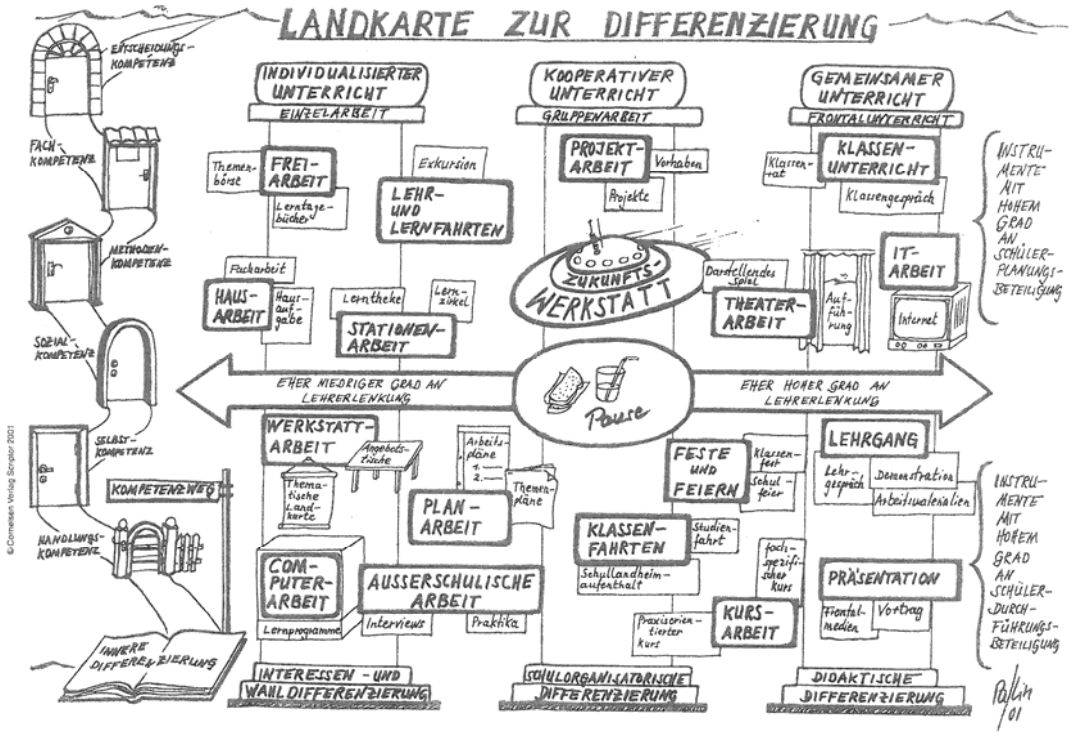



**ABBILDUNG 4: Paradies, Linser, 2001, S. 88-89.**

## 3.3. ROLLE DER LEHRKRAFT

Im binnendifferenzierten Unterricht wird ein von der Lehrkraft bewusst hergestelltes Lernangebot, wobei viel Zeit für die Planung und Herstellung des Materials benötigt wird, den Lernenden zur Verfügung gestellt.

Dabei sind heterogenem Lernen jedoch auch Grenzen gesetzt, denn das intensive und aufwendige Vorbereiten von unterschiedlichen Lern- und Arbeitsmaterialien übersteigt rasch die Möglichkeiten der Lehrkräfte. Außerdem je intensiver Binnendifferenzierung durchgeführt wird, desto stärker entwickeln sich die Lern- und Leistungsstände der Schülerinnen und Schüler auseinander, was wiederum neu zu erstellende, differenziert durchdachte Lernutensilien zur Folge hat.[78]

Nach dieser intensiven Vorbereitungsphase durch die Lehrkraft bzw. das LehrerInnenteam ist die Aufgabe der Lehrperson im Unterricht die

[78] vgl. Klippert, 2010, S. 80.

Überwachung der Lernenden bei ihren Arbeiten und die Hilfestellung bei einzelnen Lernangeboten. Nur wenn es notwendig ist, greift die Lehrperson in den Unterricht ein, ansonsten agiert sie als Beobachterin und Beraterin. In der Phase der Beobachtung kann die Lehrkraft wertvolle Informationen im diagnostischen Prozess gewinnen, die hilfreich für Gespräche mit Schülerinnen und Schülern, aber auch den Eltern sein können.

Nach wie vor spielt die Lehrer-SchülerInnen-Beziehung eine wesentliche Rolle:

> *„In Situationen, in denen ein Lernprozess ins Stocken geraten ist, muss sich die Schülerin oder der Schüler darauf verlassen können, dass sie sich an die Lehrkraft wenden kann und dort Hilfe bekommt.“*[79]

Um ein verbessertes Eingehen auf die unterschiedlichen Begabungen in heterogenen Klassen zu gewährleisten, kann Teamteaching eingesetzt werden. Zwei Lehrpersonen können gezielt Fördermaßnahmen bei Teilleistungsschwächen setzen und leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern verstärkte Herausforderungen im Unterricht anbieten. Neben diesen Vorteilen verstärkt Teamteaching die Reflexionskompetenz der Lehrenden auf personaler und unterrichtlicher Ebene zugunsten der Schülerinnen und Schüler.“[80]

Wesentliche Punkte für erfolgreiches Teamteaching sind unter anderem die gemeinsame Unterrichtsplanung, gegenüber der sich jede/r Teampartner/in verpflichtet und verantwortlich fühlt. Gegenseitige Sympathie, Toleranz und Solidarität fördern ebenfalls ein gutes Teamklima. Außerdem gibt es verstärkt im gemeinsamen Unterricht von Lehrpersonen die Möglichkeit, den Unterricht zu evaluieren, was jedoch Kritikfähigkeit der einzelnen TeampartnerInnen voraussetzt.[81]

Gerade in der aktuellen Bildungsdiskussion spielt Teamteaching vermehrt eine Rolle. Teamteaching ist in der neu ins Regelschulwesen aufgenommenen

[79] Joller-Graf, in: Buholzer, Kummer Wyss, 2010, S. 131.
[80] vgl. BMUKK, 2012, S. 2.
[81] vgl. Kaindl, 2007, S. 62-63.

Neuen Mittelschule ein Eckpfeiler vor allem im Zusammenhang mit Individualisierung und Differenzierung.

# 4. MATHEMATIKUNTERRICHT – ABER WIE?

## 4.1. DIE ANFORDERUNGEN AN DEN MATHEMATIKUNTERRICHT

Die Anforderungen an den Mathematikunterricht sind nur schwer zu beschreiben, abhängig davon, wer die Anforderungen an diesen Unterricht stellt. Auf der einen Seite stehen die Schülerinnen und Schüler, für die es wichtig ist, die dargebotenen Inhalte zu verstehen, ohne dabei hohen Arbeitsaufwand aufbringen zu müssen. Auf der zweiten Seite stehen die Eltern, deren Anforderungen meist an gute Noten im Mathematikunterricht gekettet sind. Auf der nächsten Seite befinden sich die Lehrerinnen und Lehrer, deren Maßstäbe durchaus sehr unterschiedlich sind, aber in Anbetracht der Qualitätssicherung einen dafür notwendigen Unterricht ableisten wollen. Und letztlich fordert die Öffentlichkeit bzw. der Staat, bei unterschiedlichen Leistungstests, wie z.B. PISA oder TIMSS, gut abzuschneiden. Die Frage ist jedoch, welcher dieser Anforderungen kann man gerecht werden? Eine Antwort darauf könnte das Allgemeinbildungskonzept sein, d.h. dass der Mathematikunterricht daran gemessen werden soll, was er zur Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beiträgt.[82]

> *„Zur Allgemeinbildung soll hier das an Wissen, Fertigkeiten und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist. Das ist natürlich keine Definition, es müssen hierzu noch Konzepte von den möglichen Bestimmungen des Menschen aufgezeigt werden.“*[83]

HEYMANN sieht Allgemeinbildung als die zentrale Aufgabe der Schule und hat in seinem Allgemeinbildungskonzept, welches er durch sieben Teilaufgaben (Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Weltorientierung, Anleitung

[82] vgl. Heymann, 1999, S. 1.
[83] Winter, 1995, S. 1.

zum kritischen Vernunftgebrauch, Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, Einübung in Verständigung und Kooperation, Stärkung des Schüler-Ichs) beschreibt[84], fünf Leitgedanken formuliert:

> *„Leitgedanke 1: Verbindungen stiften zwischen fachlichem, selbstgesteuertem und sozialem Lernen“*[85]

Um den Aufgaben Verantwortungsbereitschaft, Verständigung und Kooperation und Stärkung des Schüler-Ichs nachzukommen, fordert er einen Mathematikunterricht, in dem Raum für richtige und falsche Wege sowie für Umwege und subjektive Ideen, für Fehler, für eigenverantwortliches Handeln, für Kommunikation zwischen Schülerinnen und Schülern, für kooperatives Problemlösen sowie für einen spielerischen Umgang mit Mathematik ist.[86]

> *„Leitgedanke 2: Lebensnützliche Mathematik ernst nehmen“*[87]

Um unsere Gesellschaft aufrechtzuerhalten, ist Mathematik unabdingbar, sie durchdringt immer mehr Lebensbereiche, auch wenn sie nicht immer sichtbar ist. Trotz der meist geringen Sichtbarkeit für den einzelnen Menschen sind für die allgemeine Lebenspraxis Aktivitäten wie Schätzen, Überschlagen, Interpretieren und Darstellen sowie die Handhabung technischer Hilfsmittel notwendig. Viele der im Mathematikunterricht gelernten Inhalte werden für das spätere Leben wenig bis kaum gebraucht, jedoch gibt es wiederum vieles, das wirklich alle brauchen, das aber nur unbefriedigend vermittelt wird.[88]

> *„Leitgedanke 3: Mathematik als Teil unserer Kultur erfahren lassen“*[89]

Nicht nur aufgrund der vier Grundrechnungsarten, vor allem durch ihre Universalität und ihre Schnittstellen zur übrigen Kultur durch die Ideen „Zahl“, „Messen“, „funktionaler Zusammenhang“, „räumliches Strukturieren“,

---

[84] vgl. Heymann, 1997, S. 43.
[85] Heymann, 1999, S. 2.
[86] vgl. Heymann, 1999, S. 3.
[87] Heymann, 1999, S. 3.
[88] vgl. Heymann, 1999, S. 3-4.
[89] Heymann, 1999, S. 5.

„Algorithmus“ und „mathematisches Modellieren“ ist die Mathematik ein fester Bestandteil der Alltagskultur.[90]

> *„Leitgedanke 4: Mathematik mit der „übrigen“ Welt verbinden“*[91]

Durch die Gestaltung des Mathematikunterrichts mittels Anwendungs- und Problemaufgaben soll den Schülerinnen und Schülern der Weltbezug der Mathematik verdeutlicht werden. Um alltägliche Phänomene mit einer anderen Sichtweise behandeln zu können, sollte mathematisches Modellieren regelmäßig im Unterricht gepflegt werden. Dadurch bekommen die Schülerinnen und Schüler gleichzeitig die Möglichkeit, über Mathematik sowie über ein „Stück Welt“ zu lernen.[92]

> *„Leitgedanke 5: Brücken vom alltäglichen zum mathematischen Denken beschreiten lassen“*[93]

Schülerinnen und Schülern soll die Möglichkeit gegeben werden, sich mit einem mathematischen Sachverhalt, der nicht durch gängige Lösungswege gekennzeichnet ist, intensiv auseinanderzusetzen, diesen zu reflektieren, kritisch zu hinterfragen und gegebenenfalls mit der Lehrperson oder den Mitschülerinnen und -schülern zu diskutieren. Um dieses kritische Denken der Lernenden zu schulen, ist die Wahl des Unterrichtsinhaltes, der eine Verbindung von Mathematik und der übrigen Welt ermöglichen soll, von großer Bedeutung.[94]

LEUDERS führt in Anlehnung an HEYMANNS Diskussionsthema „*Sind sieben Jahre Mathematik genug?*“ eine weitere Definition für die Anforderungen an den Mathematikunterricht an. Er unterscheidet dabei mathematische Bildung als Vordergrundbildung, als Hintergrundbildung, als Expertenbildung und als personale Bildung.

---

[90] vgl. Heymann, 1996, S. 174.
[91] Heymann, 1999, S. 5.
[92] vgl. Heymann, 1999, S. 5-6.
[93] Heymann, 1999, S. 2.
[94] vgl. Heymann, 1999, S. 7-10.

Vordergrundbildung meint nicht eine banale mathematische Bildung, sondern die sichere und reflektierte Verwendung mathematischer Kulturtechniken und eine Mündigkeit im Umgang mit Zahlen. Dazu zählen triviale Rechen- und Zählvorgänge, um die gesellschaftliche Teilhabe zu ermöglichen, z.B. Preise und Mengen beim Einkauf vergleichen, Prozentsätze und -werte bei Geldgeschäften einschätzen, Karten und Diagramme lesen und verstehen, Kochrezepte umsetzen, sowie der kritische Blick auf den Umgang mit Zahlen, z.B. Wahrscheinlichkeits- und Risikoangaben verstehen, ökonomische und demographische Daten interpretieren, Wahlverfahren verstehen, grafische Darstellungen hinterfragen.

Hintergrundbildung ist das Verständnis für die Mathematikhaltigkeit unserer Kultur, ihrer Wissenschaften und Technologien, z.B. in Computeranwendungen und Informationstechnologie. Die Aufgabe des Mathematikunterrichts wird daher auch darin gesehen, an exemplarischen Beispielen eine Weltorientierung zu schaffen, um den „VerbraucherInnen von Mathematik“ die Zusammenhänge zwischen Mathematik und Technologie vor Augen zu führen. Oft ist diesen „VerbraucherInnen“ das Maß an Mathematik in alltäglichen Gegenständen wie Autos, DVDs, Internet usw. nicht bewusst, sodass vermehrt angewandte Mathematik betrieben werden sollte.

Unter Expertenbildung versteht LEUDERS den mathematikbezogenen fachlichen Qualifizierungsstand von Fachkräften. In der heutigen Zeit verlangen immer mehr Berufsfelder fundierte mathematische Kenntnisse, die wenigsten SchulabgängerInnen würden jedoch über diese verfügen, beklagen Hochschulen und Universitäten. Der Mathematikunterricht kann jedoch nicht für alle Schülerinnen und Schüler so konzipiert sein, da meist nur für einen geringen Teil an SchulabgängerInnen dieses mathematische Spezialwissen relevant ist. Daher sollte hier differenzierter Unterricht in Form von Wahl- und Wahlpflichtfächern zum Einsatz kommen.

Um zur Bildung der gesamten Persönlichkeit beizutragen, muss auch der Mathematikunterricht seinen Beitrag zu Kooperationsfähigkeit,

Verantwortungsbereitschaft, Selbstvertrauen und Mündigkeit leisten und nicht diese genannten Komponenten hinter die fachliche Bildung anstellen[95].

## 4.2. ZENTRALE FUNKTIONEN DES MATHEMATIKUNTERRICHTS

Nach LEUDERS können die folgenden vier Bereiche als zentrale Funktionen des Mathematikunterrichts betrachtet werden:

- Erkunden – Entdecken – Erfinden
- Systematisieren und Absichern
- Üben – Vertiefen – Wiederholen
- Diagnostizieren und Überprüfen

Anhand dieser Auflistung ist eine logische Abfolge der Unterrichtsfunktionen gegeben, die mitunter jedoch nicht immer eingehalten werden muss, d.h. die Funktionen können und sollen in verschiedenen Weisen aufeinandertreffen.




**ABBILDUNG 5: Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 37.**

In der Phase des Erkundens, Entdeckens und Erfindens geht es in erster Linie um die eigenen Erfahrungen und Alltagsvorstellungen der Schülerinnen und Schüler. Nur so besteht die Möglichkeit, dass Kinder Begriffe bilden, Zusammenhänge entdecken und individuelle Ideen entfalten können. Negativ

[95] vgl. Leuders, 2011, S. 48-57.

würde sich die direkte Kontrolle bzw. Einflussnahme der Lehrperson auf diese Phase auswirken, die wiederum auch die Kommunikation zwischen den Lernenden behindert. Um in weiterer Folge die individuellen Ergebnisse des Erkundungsprozesses zusammenzuführen, ist eine anschließende Strukturierung durch die Lehrperson nötig, die mathematische Begriffe vereinbart oder neu einführt. Eine weitere individuelle Phase wird benötigt, um die neuen Begriffe und Zusammenhänge dauerhaft zu sichern. Durch das differenzierte Üben, Vertiefen und Wiederholen soll jede/r Schüler/in die Möglichkeit bekommen, sich mit den eigenen Stärken und Schwächen zum neuen Themengebiet auseinanderzusetzen. Die Lehrperson tritt in dieser Phase als Unterstützerin für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler auf, ist aber auch dazu angeleitet leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler zu fordern, indem sie sie ermutigt, über das Bekannte hinauszugehen und die Entdeckung weiterer Zusammenhänge zu erschließen. Auch das gegenseitige Unterstützen in Form von SchülerInnen-Tutoring soll ein wichtiger Punkt in differenzierten Lernphasen sein. Um der geforderten Lebensvorbereitung nachzukommen, ist es vonnöten, die erworbenen Kompetenzen zu überprüfen. Beim Diagnostizieren spielt Feedback eine wesentliche Rolle, um wiederum auf individuelle Defizite bzw. Stärken aufmerksam zu machen, um gegebenenfalls individuelles Üben, Vertiefen und Wiederholen wieder aufzunehmen.[96]

Wichtig dabei, vor allem in Übungs- und Festigungsphasen, ist das differenzierte Üben. Oft werden Aufgaben linear nach Schwierigkeitsgrad mit allen Schülerinnen und Schülern einer Klasse durchlaufen, wobei gelegentlich die schnelleren Schülerinnen und Schüler Zusatzaufgaben bekommen. Dies führt oft dazu, dass leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler dazu neigen, bei sie nicht herausfordernden Aufgaben länger zu verweilen, um Zusatzaufgaben zu vermeiden. Für lernschwache Schülerinnen und Schüler ist der Übergang zu anspruchsvolleren Übungsaufgaben meist verfrüht, da oft noch die Sicherheit beim Lösen von Grundaufgaben fehlt.[97]

> *„Durch geeignete Differenzierungsmaßnahmen, bei denen weiterführende Aufgaben und zusätzliche Verständnis fördernde*

[96] vgl. Barzel, Büchter, Leuder, 2011, S. 36-40.
[97] vgl. Krippner, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 242-243.

*Grundaufgaben von Teilgruppen der Klasse parallel bearbeitet werden, ergibt sich für die einzelnen SchülerInnen ein Gewinn an effektiver Lernzeit. Dabei werden sinnvollerweise annähernd homogene Teilgruppen der Klasse gebildet.“*[98]

Dabei geht es jedoch nicht um eine räumliche und andauernde Trennung von leistungsstärkeren und -schwächeren Schülerinnen und Schülern, sondern viel mehr soll diese temporäre Gruppenbildung als Ergänzung zur heterogenen Klassenarbeit dienen. Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können dann weiterführende Aufgaben lösen, die gegebenenfalls für die gesamte Klasse zu schwer sind, wogegen bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern Verständnisdefizite und Verunsicherungen abgebaut und Grundvorstellungen gefördert werden.[99]

## 4.3. BILDUNGSSTANDARDS

*„Bildungsstandards sind konkret formulierte Lernergebnisse, die sich aus den Lehrplänen ableiten lassen. Sie definieren Kompetenzen, die in der Regel von allen Schülerinnen und Schülern an den Schnittstellen des Schulsystems erreicht werden sollen.“*[100]

Bildungsstandards unterscheiden sich im Gegensatz zum Lehrplan dahingehend, dass sie an einer Outputorientierung, Kompetenzorientierung und Überprüfbarkeit interessiert sind. Lehrpläne beschreiben in der Regel den „Input“, den Schülerinnen und Schüler erhalten sollen, die Bildungsstandards zielen jedoch darauf ab, was als Ergebnis schulischen Lernens herauskommen soll. Die Kompetenzen, die ein Schüler/eine Schülerin im Laufe seiner/ihrer Schullaufbahn erwerben soll, werden durch Bildungsstandards festgelegt, die anschließend nach einem festgelegten Zeitraum überprüft werden.

[98] Krippner, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 243.
[99] vgl. Krippner, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 243.
[100] BIFIE, 2012, S. 5.

Standards, wenn sie gut formuliert und implementiert werden, können dazu beitragen, den Unterricht stärker als bisher auf Wesentliches zu konzentrieren, effizienter zu machen und „totes Wissen“ zu vermeiden. Sie können sinnvoll Rückmeldung geben darüber, was ein/eine Schüler/in gelernt bzw. möglicherweise noch nicht richtig gelernt hat und zusätzlich auch darüber, wie erfolgreich der Unterricht einer Lehrperson war. Problematisch werden Standards immer nur im Zusammenhang mit „teaching to the test“, wobei die Unterrichtszeit dazu verwendet wird, mit Drill das zu erlernen, was beim nächsten Test abgeprüft wird. Ein weiteres Problem kann dadurch entstehen, dass Lehrende „weichere“ Kompetenzen, die nicht so leicht messbar sind, wie z.B. das Argumentieren, Modellieren, Entwickeln von vielfältigen Lösungen bei offenen Aufgaben, unbeachtet lassen und sich eher darauf konzentrieren, was messbar ist. HEYMANN stellt die Frage auf, ob Standards einen besseren Mathematikunterricht garantieren, und negiert die Antwort, gibt jedoch den Anstoß, dass Standards die Transparenz des Unterrichts erhöhen, die Verständigung über die wirklich wichtigen Ziele erleichtern und vielleicht sogar Impulse zu einem sinnhafteren Mathematiklernen geben.[101]

### 4.3.1. RECHTLICHE GRUNDLAGE

Die rechtliche Grundlage für die Durchführung von Bildungsstandards-Testungen wurde mit der Novellierung des Schulunterrichtsgesetzes am 8. August 2008 gelegt. Diese Novelle räumt dem zuständigen Bundesministerium die Möglichkeit ein, Bildungsstandards zu verordnen, wenn dies für die Entwicklung und Evaluation des österreichischen Schulwesens notwendig ist. Der in § 17 eingefügte Absatz 1a definiert die Funktionen der Bildungsstandards und gibt die Vorgaben für die Umsetzung an die Lehrerinnen und Lehrer weiter.[102]

Folglich gab es am 2. Jänner 2009 eine Verordnung, die festlegte, dass die Bildungsstandards verpflichtend auf der 4. Schulstufe der Volksschule in den

[101] vgl. Heymann, 2005, S. 40.
[102] vgl. BMUKK, 2008, S. 1.

Fächern Deutsch/Lesen/Schreiben und Mathematik sowie auf der 8. Schulstufe der Volksschuloberstufe, der Hauptschule und der allgemeinbildenden höheren Schule in den Pflichtgegenständen Deutsch, Lebende Fremdsprache (Englisch) und Mathematik durchzuführen sind. Des Weiteren werden in dieser Verordnung die Begriffe „Bildungsstandards“, „Kompetenzen“, „grundlegende Kompetenzen“ und „Kompetenzbereiche“ definiert sowie die Funktionen der Bildungsstandards und die Durchführung der Standardüberprüfungen festgelegt. Im Rahmen dieser Diplomarbeit sei vor allem erwähnt, dass die Bildungsstandards durch konkrete Vergleichsmaßstäbe die bestmögliche Diagnostik als Grundlage für die individuelle Förderung sicherstellen soll.[103]

### 4.3.2. ALLGEMEINE KOMPETENZEN UND DER BEITRAG DES MATHEMATIKUNTERRICHTS

Nach der Definition von WEINERT sind Kompetenzen

> *„die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösung in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.“*[104]

Nach der allgemeinen Definition des Begriffes „Kompetenz“ werden im nächsten Abschnitt Kompetenzen beschrieben, die im Mathematikunterricht erworben werden sollen.

> *„Mathematikunterricht dient dem Erwerb fachlicher, personaler und sozialer Kompetenzen.“* [105]

[103] vgl. BMUKK, 2009, S. 1-2.
[104] Weinert, 2001, in: BIFIE, 2012, S. 6.
[105] Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 27.




**ABBILDUNG 6: BMUKK, 2009, S 8.**

Zu den einfachen Rechentätigkeiten werden neben der Beherrschung der vier Grundrechnungsarten mit natürlichen und rationalen Zahlen der Umgang mit verschiedenen Größen, Flächen-, Volums- und Massebestimmungen, Prozent- und Zinsenrechnung und Grundlagen in der Geometrie gezählt. Zum Bereich der Informationstechnologie zählt sowohl der Umgang mit dem Taschenrechner als auch der Umgang mit dem Computer, ohne den SchulabgängerInnen nicht in modernen Lebens- und Arbeitswelten auskommen können.[106]

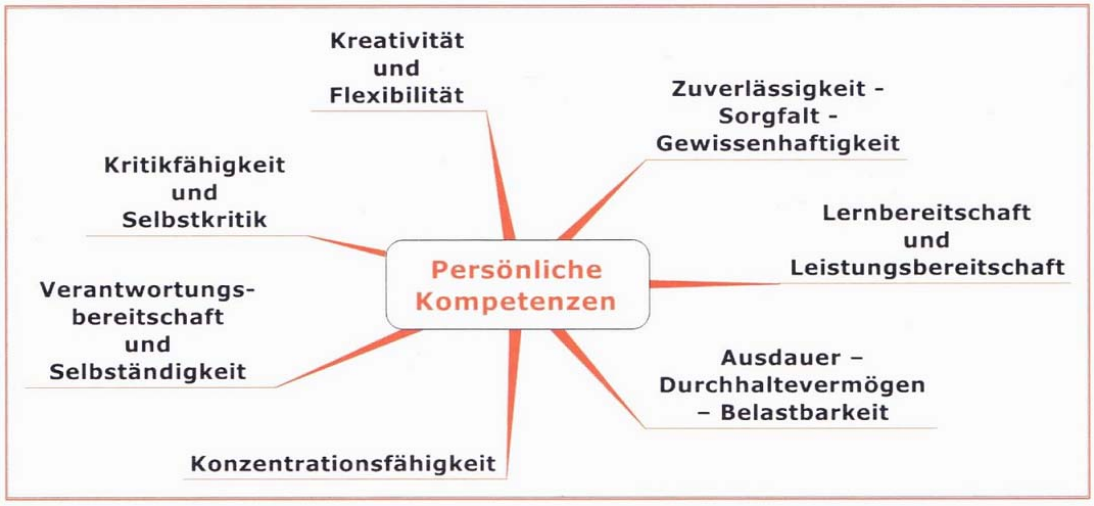



**ABBILDUNG 7: BMUKK, 2009, S. 9.**

Um in der modernen Arbeitswelt unterzukommen, sind neben fachlichen Kompetenzen auch persönliche Kompetenzen gefragt. Die obige Abbildung fasst die wesentlichen Kompetenzen zusammen, zu denen auch der Mathematikunterricht seinen Beitrag leisten soll. Unterricht kann nur erfolgreich

[106] vgl. BMUKK, 2009, S. 8.

stattfinden, wenn es den Schülerinnen und Schülern gelingt, sich im Laufe der ersten acht Unterrichtsjahre diese Kompetenzen anzueignen. Um in der Arbeitswelt bestehen zu können, sind Selbstdisziplin, Ordnungssinn und Pünktlichkeit unabdingbar. Auch eine „gesunde“ Einstellung, die sich am guten Ergebnis und Erfolg orientiert, wird den Jugendlichen neben einer gewissen Frustrationstoleranz sowie einer konstruktiven Feedbackkultur und Eigenständigkeit bei den Aufgaben abverlangt.[107]

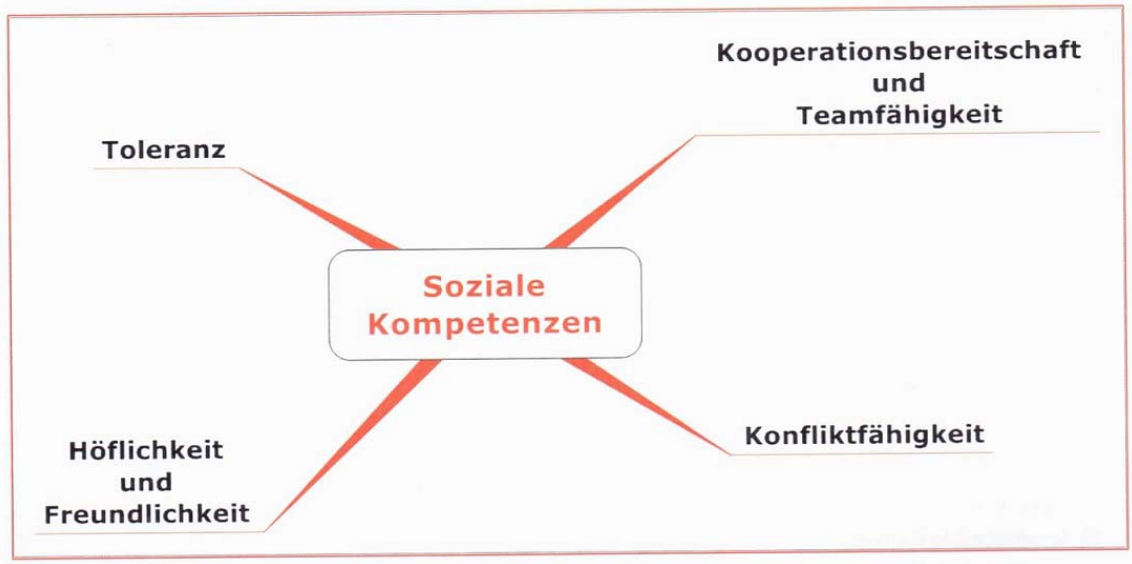



**ABBILDUNG 8: BMUKK, 2009, S. 10.**

Neben den bereits genannten Kompetenzen fordert die Wirtschaft als dritte und letzte Kompetenz die soziale Kompetenz. Nur teamfähigen Personen, die gemeinsam Informationen und Erfahrungen in höflicher und freundlicher Atmosphäre austauschen können, die bereit sind Konflikte friedlich und konstruktiv zu lösen, wird ein erfolgreicher Einstieg in das Berufsleben gelingen. Um den Lernenden diese breite Basis an sozialen Kompetenzen zu vermitteln, ist es notwendig, dass auch der Mathematikunterricht dazu seinen Beitrag leistet.[108]

Hinter den Bildungsstandards steht ein breiter Begriff von mathematischer Bildung, der bereits 1995 von WINTER formuliert wurde:

[107] vgl. BMUKK, 2009, S 9-10.
[108] vgl. BMUKK, 2009, S. 10-11.

*„Schülerinnen und Schüler sollen lernen, die Welt mit mathematischen Augen wahrzunehmen und zu verstehen, sie sollen mathematische Gegenstände als Welt eigener Art kennen lernen und begreifen, und sie sollen in der Auseinandersetzung mit Mathematik heuristische Fähigkeiten erwerben."*[109]

### 4.3.3. KOMPETENZMODELL MATHEMATIK 8. SCHULSTUFE

Das Kompetenzmodell für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I sieht vier Handlungs-, vier Inhalts- und drei Komplexitätsbereiche vor.

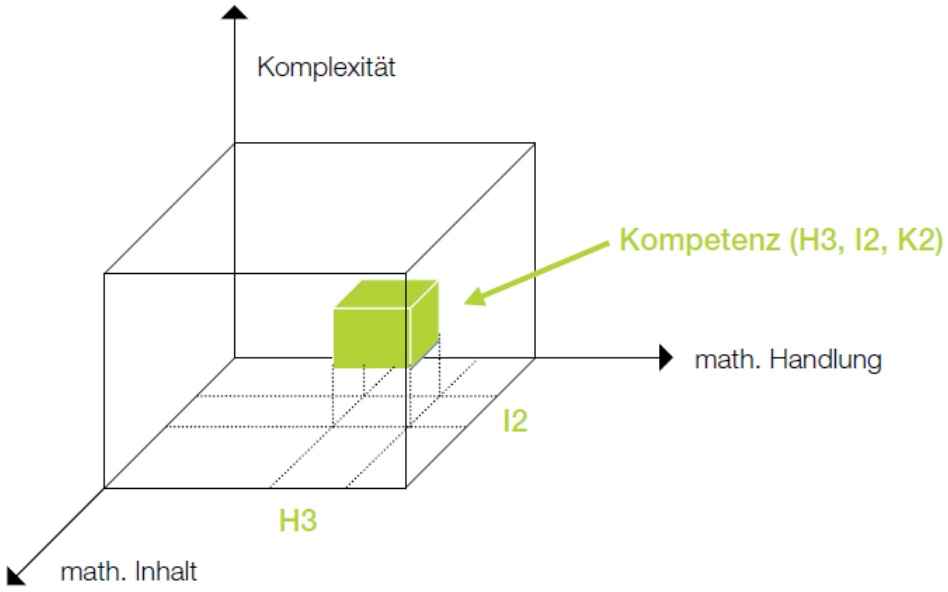



**ABBILDUNG 9: BIFIE, 2012, S. 11.**

Die vier *Inhaltsbereiche* sind identisch mit der Aufgliederung im Lehrplan (I1: Zahlen und Maße, I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten, I3: Geometrische Figuren und Körper, I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen), was auch bestätigt, dass die Formulierung der Bildungsstandards in keiner Konkurrenz zum Lehrplan steht. Des Weiteren wurden vier *Handlungsbereiche* (H1: Darstellen, Modellbilden, H2: Rechnen, Operieren, H3: Interpretieren, H4: Argumentieren, Begründen) und drei *Komplexitätsbereiche* (K1: Einsetzen von

[109] Winter, 1995, in: Blum, 2005, S. 40.

Grundkenntnissen und -fertigkeiten, K2: Herstellen von Verbindungen, K3: Einsetzen von Reflektionswissen, Reflektieren) formuliert.[110]

### 4.3.4. BILDUNGSSTANDARDS – IN KONKURRENZ MIT BINNENDIFFERENZIERUNG?

> *„Im österreichischen Bildungssystem wurde in den letzten Jahrzehnten viel Positives in Richtung Differenzierung (in Schultypen, Leistungsgruppen, schulspezifische Schwerpunktsetzungen, unterrichtliche Binnendifferenzierung) bis hin zu Individualisierung getan und erreicht. Standards sind das Bemühen, das Gemeinsame wieder stärker in den Blick zu nehmen, ihm explizit Bedeutung zuzuweisen, ohne dabei die Freiräume wesentlich einzuschränken, sie vielmehr als solche deutlicher wahrnehmbar und sichtbar zu machen. Was nicht zum verbindlich Gemeinsamen gehört, also nicht Standard ist, fällt in den Freiraum, der nur dadurch eingeschränkt werden soll, dass er im Sinne der fachbezogenen (Aus-)Bildung sinnvoll genützt werden muss.“*[111]

Viele DidaktikerInnen stellen sich die Frage, in welchem Verhältnis Bildungsstandards und Heterogenität stehen. Bildungsstandards sollen in spezifischer Weise auf die Heterogenität der Gesellschaft wirken, aber wie? SANDER macht darauf aufmerksam, wie der aktuelle Unterricht teils widersprüchlich stattfindet:[112]

> *„Der Unterricht soll kompetenzorientiert gestaltet und auf individuelle Förderung hin angelegt werden – aber gleichzeitig eingeführte zentrale Abschlussprüfungen sind vielfach nicht kompetenzorientiert konzipiert und stoffzentrierte Lehrpläne sind noch keineswegs verschwunden.“*[113]

Seiner Meinung nach soll die Standardisierung von Kompetenzanforderungen gerade einen angemessenen Umgang der Schulen mit Heterogenität bewirken, indem festgelegt wird, was alle können sollen, und sollen dadurch die Schulen dazu aufgefordert werden, Schülerinnen und Schüler je nach

[110] vgl.www12.
[111] vgl. Peschek, in: BIFIE, 2010, S. 5.
[112] vgl. Sander, in: Buschkühle, Duncker, Oswalt, 2009, S. 11-12.
[113] Sander, in: Buschkühle, Duncker, Oswalt, 2009, S. 12.

Lernvoraussetzung individuell zu fördern, sodass alle das definierte (Mindest-) Kompetenzniveau erreichen können. Weiters fordert er eine größere Angebotsvielfalt in den einzelnen Schulen, das heißt, dass Schulen gerade wegen der Standardisierung auf die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler eingehen sollen und somit bestimmte Mindestkompetenzen auf vielfältigen Wegen vermittelt werden können.[114]

Diese Angebotsvielfalt des Mathematikunterrichts muss mit den individuellen Bedürfnissen und Interessen der Schülerinnen und Schüler zusammengebracht werden. Wie dies genau geschehen soll, kann noch nicht genau beantwortet werden und ist Teil eines fortwährenden Prozesses in der mathematikdidaktischen Forschung.[115] Vielleicht kann das folgende Kapitel dazu einige Anregungen für den künftigen Mathematikunterricht leisten.

## 4.4. BINNENDIFFERENZIERUNG IM MATHEMATIKUNTERRICHT

Binnendifferenzierung wird im Gegensatz zu äußerer Differenzierung immer akzeptiert, da Differenzierung in jeder Lerngruppe als sinnvoll erscheint. SYLVESTER beschreibt binnendifferenzierten Unterricht wie folgt:

> *„Alle Schülerinnen und Schüler sollen bestmögliche, aber individuell durchaus unterschiedliche Entwicklungsfortschritte erzielen.“*[116]

[114] vgl. Sander, in: Buschkühle, Duncker, Oswalt, 2009, S. 16-17.
[115] vgl. Sträßler, in: Buschkühle, Duncker, Oswalt, 2009, S. 48.
[116] Sylvester, 1998, in: Bruder, Reibold, 2010, S. 3.

Die nachstehende Grafik soll diesen Ansatz noch stärker verdeutlichen:

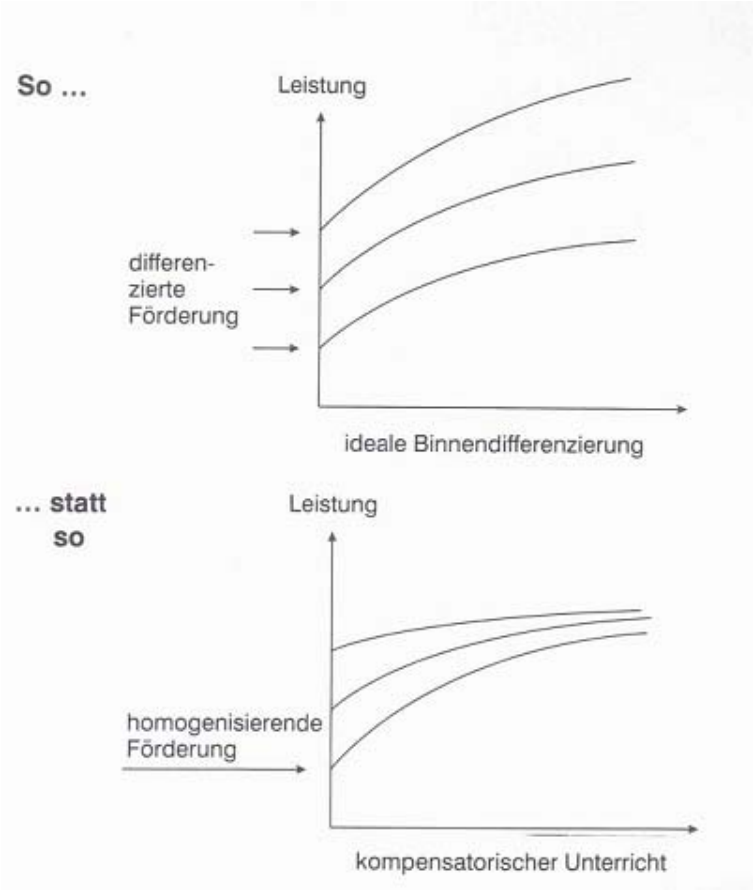



**ABBILDUNG 10: Sylvester, 1998, in: Bruder, Reibold, 2010, S. 3.**

Durch innere Differenzierung kann der Unterschied zwischen leistungsstärkeren und leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern noch vergrößert werden, doch gerade dieses parallele Vorgehen und das „Nicht-Einpendeln“ auf ein Mittelmaß ermöglichen eine bestmögliche Förderung für alle Lernenden. Im Folgenden werden verschiedene aus der Fachdidaktik Mathematik bekannte Methoden und Strategien vorgestellt:

- *Aufgaben mit unterschiedlichen Niveaus* haben den Nutzen, den Unterrichtsstoff zu festigen und bieten den Lernenden eine Auswahl entsprechend ihrem persönlichen Leistungsvermögen.
- Um das Bearbeiten auf unterschiedlichem Niveau, das Entwickeln von Lösungsstrategien und verschiedenen Zugängen und

Darstellungsweisen zu ermöglichen, sind *offene, selbstdifferenzierende Aufträge* hilfreich.

- Um wiederum diese verschiedenen Denkstile und Zugangsweisen berücksichtigen zu können, ist die *vielfältige Gestaltung der Lernmaterialien* unabkömmlich.
- Durch *Abwechslung von Organisations-* (Stationenlernen, Wochenplan, Projektarbeit, usw.) *und Sozialformen* (Einzel-, Partner-, Gruppenarbeit) entsteht Lernen auf eigenen Wegen, wobei Lerntempo, Interesse und Vorkenntnisse eine wichtige Rolle spielen.

Binnendifferenzierung beginnt bei der Planung und setzt eine regelmäßige Beobachtung der Lerngruppe voraus. Nur wenn die Unterschiede klar gemacht werden, kann auf diese durch Differenzierungsmaßnahmen eingegangen werden. Der geplante Unterricht sollte immer einem roten Faden folgen und von Beginn an den Lernenden, mittels Lernprotokoll, Checklisten u.a. transparent gemacht werden. Der Unterricht sollte verstärkt darauf abzielen, Basiswissen abzusichern. Um differenzierte Zugänge zu ermöglichen, sind verschiedene Wahlmöglichkeiten von Vorteil. Manche Schülerinnen und Schüler benötigen vorgefertigte Musterbeispiele, andere wiederum können besser durch Experimentieren an offenen Aufgaben profitieren. Die einen wünschen sich einen Austausch mit KlassenkameradInnen, die anderen wiederum folgen gerne alleine den klaren Anweisungen einer Aufgabenstellung.[117]

[117] vgl. Bruder, Reibold, 2010, S. 2-5.

# 5. UMSETZUNGSMÖGLICHKEITEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER SEKUNDARSTUFE I

*„Eine Aufgabe für alle Schüler (!), die nur eine Lösung zulässt, die auf nur einem Weg gefunden werden kann, muss in dieser Hinsicht unweigerlich unproduktiv sein. Richtet man die Anforderungen ausschließlich an einem fiktiven „mittleren Schüler" (!) aus, so ist eine dauerhafte Überforderung des einen und eine Unterforderung des anderen Teils der Lerngruppe die Folge."*[118]

## 5.1. DIDAKTISCHE GRUNDSÄTZE

Die didaktischen Grundsätze im Lehrplan für Mathematik legen einen Unterricht durch Individualisierung und Differenzierung fest. Wie bereits in Kapitel 2.3. erwähnt, sind Differenzierungsmaßnahmen bereits im allgemeinen Teil des Lehrplans festgeschrieben, werden aber im jeweiligen Fachlehrplan nochmals genauer definiert:

*„Durch Differenzierungsmaßnahmen sollen die Schülerinnen und Schüler entsprechend ihren individuellen Begabungen, Fähigkeiten, Neigungen, Bedürfnissen und Interessen bestmöglich gefördert werden. Zur Bewältigung von mathematischen Alltagsproblemen sollen thematische Schwerpunkte gesetzt werden. Zu solchen Schwerpunktthemen sollen vielfältige mathematische Zugänge und didaktische Einstiegsmöglichkeiten geboten werden. Die Differenzierung und Individualisierung erfolgt unter Berücksichtigung des Arbeitstempos der Schülerinnen und Schüler, durch den methodischen Zugang, nach Umfang und Komplexität der Aufgabenstellung sowie nach dem Anspruchsniveau, das mit der jeweiligen Aufgabenstellung verbunden ist."*[119]

[118] vgl. Bruder, Leuders, Büchter, 2008, S. 103.
[119] BMUKK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 8.

## 5.2. ALLTAGSTAUGLICHE KONZEPTE ZUR BINNENDIFFERENZIERUNG

Aufgrund der PISA- und TIMSS-Ergebnisse der vergangenen Jahre ist eine Bildungsdiskussion entflammt, die eine Veränderung des Schulsystems herbeiführen soll. BRUDER hält fest, dass die Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler im derzeitigen Mathematikunterricht leider zu wenig zum Tragen kommt. Die Schuld daran sieht sie in der Einstellung vieler Lehrerinnen und Lehrer, die nach wie vor als EinzelkämpferInnen agieren und das immerwiederkehrende Üben der Grundlagen betreiben. Nach BRUDER sind alltagstaugliche Aufgabenformate gefragt, die dem unterschiedlichen Festigungsbedarf und Ausgangsniveau der Schülerinnen und Schüler besser als bisher Rechnung tragen.

Lehrpersonen trauen ihren Schülerinnen und Schülern oft nur wenig zu, aufgrund dessen geben viele Lernende bereits nach dem Durchlesen einer Problemaufgabe entmutigt auf. In diesem Zusammenhang wird auch das traditionelle fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch an den Pranger gestellt, welches nur eine Engführung der Erarbeitung des neuen Lehrstoffs zulässt. Wissen wird für die Lernenden in „kleinen Portionen“ dargeboten, wodurch kaum vernetzte Wissensinseln entstehen können. Dieses gering portionierte Wissen wird in Klassenarbeiten, bei denen nur der erlernte Lösungsweg akzeptiert wird, abgeprüft und anschließend meist bald vergessen.[120]

> *„Benötigt werden Aufgabenstellungen, die es allen Lernenden ermöglichen, einen Einstieg zu finden, wenn sie ein notwendiges Maß an Lernbereitschaft mitbringen.“*[121]

[120] vgl. Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2012, S. 22-24.
[121] Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2012, S. 24.

### 5.2.1. EINSTIEGE DIFFERENZIEREND GESTALTEN

Die Grundidee für differenzierte Unterrichtseinstiege ist das sogenannte forschende Lernen. Hierbei wird ein unbekanntes Themenfeld durch eigenständige kognitive Aktivitäten (Ausprobieren, Behauptungen aufstellen, Beispiele betrachten, Bilder erkunden u.a.) erschlossen. Eine wesentliche Rolle bei der Auseinandersetzung mit der Aufgabe spielen einerseits der soziale Austausch und andererseits die Verschriftlichung von Lernergebnissen. Gerade beim forschenden Lernen kommen Kommunikation und Kooperation zwischen LernpartnerInnen zum Tragen, gemeinsames Forschen ermöglicht die Entwicklung und Umsetzung von eigenen Ideen. Auf der anderen Seite erlaubt das forschende Lernen eigene Überlegungen und Ergebnisse schriftlich festzuhalten. Dadurch wird die Thematik tiefer durchdrungen und gefestigt. Die gesammelten Beobachtungen, Vermutungen, Begründungen und Eindrücke könnten z.B. im Schulübungsheft zusammengetragen werden. Den Abschluss des mathematischen Explorierens sollte jedoch immer eine Präsentation bilden, um eine für die Lerngruppe gute Ausgangslage für zukünftige Diskussionen und die Ergebnissicherung zu bekommen.

Im Folgenden wird ein Beispiel eines differenzierten Unterrichtseinstieges anhand des Themas „Primzahlen“ für die 6. Schulstufe vorgestellt. Nach einem anfänglichen Einstieg für alle (Teil A), folgen die differenzierten Aufträge zur freien Auswahl (Teil B bis E). Die Kooperation und Kommunikation zwischen den LernpartnerInnen kommt nach erfolgter Ergebnissicherung im Schulübungsheft in Teil F zum Tragen.[122]

Im Folgenden sind zwei Beispiele für den Mathematikunterricht der 6. Schulstufe dargestellt. Abbildung 11 behandelt das Unterrichtsthema Primzahlen, Abbildung 12 den Satz von Thales.

[122] vgl. Ulm, 2010, S. 10-13.

## Besondere natürliche Zahlen

Mit den folgenden Aufträgen kannst du besondere natürliche Zahlen entdecken und erforschen. Beginne mit Teil A. Beschäftige dich anschließend in freier Wahl mit den Teilen B bis E. Dokumentiere jeweils deine Überlegungen und Ergebnisse in deinem Heft.
Schließe deine Arbeiten mit Teil F ab.

……..……..

**A Zahlen zerlegen**

1. Schreibe die folgenden Zahlen als Produkte mit möglichst vielen Faktoren.
   Beispiel: 24 = 2·2·2·3
   (Die Zahl 1 soll bei den Faktoren nicht vorkommen. Warum eigentlich?)

   | | | | |
   |---|---|---|---|
   | 10 = | 20 = | 12 = | 28 = |
   | 60 = | 37 = | 72 = | 13 = |
   | 143 = | 81 = | 82 = | 84 = |

2. Welche gemeinsame Eigenschaft haben alle entstandenen Faktoren?

3. Erfinde einen Namen für Zahlen mit dieser Eigenschaft
   und schreibe alle derartigen Zahlen zwischen 2 und 100 auf.

……..……..

**B Rechtecke bilden**

1. Schneide aus Papier oder Karton 16 gleich große Quadrate aus. Lege die 16 Quadrate so aneinander, dass sie eine rechteckige Fläche bilden. Skizziere alle möglichen Rechtecksformen in dein Heft. Wie viele findest du?

2. Bilde ebenso möglichst viele verschiedenartige Rechtecke
   aus 2, 3, 4, 5, 6, …, 20 Quadraten.
   halte in einer Tabelle fest, wie viele du jeweils findest.

3. Stelle einen Bezug zu deinen Überlegungen in Teil A her.

**C Teiler suchen**

1. Bestimme alle Teiler der Zahl 16. Wie viele findest du?

2. Suche ebenso alle Teiler der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, …, 20.
   Halte in einer Tabelle fest, wie viele du jeweils findest.

3. Stelle einen Bezug zu deinen Überlegungen in Teil A her.

**D Teilbarkeit prüfen ( * )**

Max behauptet: „Wenn eine Zahl n ein Produkt $a \cdot b$ teilt, dann teilt n einen der Faktoren a oder b.“
Laura entgegnet: „Das muss nicht immer so sein!“

1. Erforsche, für welche Zahlen n Max Recht hat

2. Stelle einen Bezug zu deinen Überlegungen in Teil A her.

**E In Büchern und im Internet recherchieren**

Du bist auf besondere natürliche Zahlen gestoßen. Sie werden in der Mathematik „Primzahlen“ genannt. Informiere dich z.B. mit Hilfe von Büchern oder des Internets über Primzahlen

……

**F Forschungsergebnisse präsentieren**

Erstelle mit deinem Partner oder in einer Gruppe eine Präsentation aller bisherigen Ergebnisse.

**ABBILDUNG 11: Ulm, 2010, S. 11.**

## Dreiecke im Kreis

Mit den folgenden Aufträgen kannst du eine besondere geometrische Konstellation erforschen. Beginne mit den Teilen A und B. Beschäftige dich danach in freier Wahl mit den Teilen C bis F. Dokumentiere jeweils deine Überlegungen und Ergebnisse in deinem Heft.
Schließe deine Arbeiten mit Teil G ab.

……

**A Im Großen erkunden**

1. Stellt euch mit allen Schülern (!) der Klasse im Kreis auf (etwa im Pausenhof). Jeweils drei Schüler (!) spannen mit einer Schnur ein Dreieck im Inneren des Kreises, wobei eine Dreiecksseite Kreisdurchmesser ist. Jeder Schüler (!) an einer Dreiecksecke schätzt den Winkel, der sich an seiner Ecke bildet, und sagt ihn laut.

2. Erzeugt verschiedene solche Dreiecke und untersucht diese.

**B Im Kleinen erkunden**

1. Zeichne in dein Heft einen Kreis. Zeichne dazu ein Dreieck, bei dem alle Eckpunkte auf der Kreislinie liegen und bei dem eine Seite Kreisdurchmesser ist. Untersuche dein Dreieck und schreibe deine Beobachtungen auf.

2. Zeichne weitere Kreise und zugehörige Dreiecke wie in Aufgabe 1. Untersuche alle diese Dreiecke und notiere deine Beobachtungen in deinem Heft.
   Formuliere eine möglichst allgemeine Aussage als Vermutung.

……

**C Vermutungen begründen**

1. Zerlege die von dir gezeichneten Dreiecke in zwei Teile, indem du den Kreismittelpunkt jeweils mit einem Eckpunkt verbindest. Untersuche die entstehenden Teildreiecke. Von welcher besonderen Art sind sie? Schreibe deine Ergebnisse auf und versuche, sie zu begründen.

2. Betrachte die Innenwinkel der gezeichneten Dreiecke. Kannst du damit deine Vermutungen aus Teil A und B begründen?

**D Mit dynamischer Geometrie arbeiten**

Erstelle mit einer Software für dynamische Geometrie Konstruktionen wie in den Teilen A und B. Miss mit den Software-Werkzeugen Winkel und überprüfe deine bisherigen Überlegungen.

**E In Büchern und Internet recherchieren**

Du bist bei deinen Forschungen auf den sogenannten „Satz des Thales“ gestoßen. Informiere dich z.B. mit Hilfe von Büchern oder des Internets über Thales von Milet und den Satz des Thales.

**F Die Aussage umkehren ( * )**

1. Formuliere eine Umkehrung deiner Ergebnisse aus den Teilen A und B, also eine Aussage der Form: „Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann…“

2. Untersuche an Beispielen, ob diese Umkehrung im Allgemeinen richtig ist.

3. Versuche, die Umkehrung ggf. zu begründen.

……..

**G Forschungsergebnisse präsentieren**

Erstelle mit deinem Partner (!) oder in einer Gruppe eine Präsentation aller bisherigen Ergebnisse.

**ABBILDUNG 12: vgl. Ulm, 2010, S. 12.**

## 5.2.2. LERNENDE ABHOLEN, WO SIE STEHEN

Um den individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler zu einem mathematischen Inhalt nachzukommen, ist es notwendig, die Vorstellungen gezielt zu thematisieren, auszudifferenzieren, zu ergänzen, zu verwerfen oder zu aktivieren, jedenfalls soll der mathematische Blick dadurch bereichert werden. Es ist allseits bekannt, dass sich Lernende einem unbekannten Problem nähern, indem sie versuchen, es zunächst mit den bisher erworbenen Mitteln zu lösen, d.h. neues Wissen wird in der Regel in bereits vorhandenes Wissen eingearbeitet und mit diesem in Beziehung gesetzt.

Um diesen vorstellungsorientierten Unterricht zu ermöglichen, ist es notwendig individuelle Vorstellungen zu aktivieren und festzuhalten, anschließend diese

Vorstellungen ressourcenorientiert zu analysieren und sie letztlich reflektierend zu nutzen und im Sinne der Mathematik weiterzuentwickeln.[123]

HEYMANN unterscheidet geschlossene Differenzierung, bei der die Lehrkraft die Alleinverantwortung für die Adaptivität des Lernangebots übernimmt und den Lernenden ihre individuellen Herausforderungen zuweist, und Selbstdifferenzierung (oder offene Differenzierung), bei der diese Verantwortung zwischen Lehrperson und Lernenden geteilt wird, indem ein gemeinsames Lernangebot für alle so gestaltet wird, dass die Lernenden es auf unterschiedlichen Niveaus und Wegen bearbeiten können. Es wird neben den beiden Idealtypen auch immer wieder zu Mischformen im Unterricht kommen.[124]

Auch PREDIGER trifft diese Unterscheidung:

> *„Man kann für jedes förderbedürftige Kind die Defizite genau feststellen und dann ein individuelles Förderprogramm entwerfen (das wäre geschlossene Differenzierung). Oder man bietet […] eher eine Bewegungsbaustelle an, die vielfältige Bewegungsmöglichkeiten eröffnet, und lässt die Kinder ihre Herausforderungen selbst definieren.“*[125]

Als besonders relevant hat sich Differenzierung nach der Struktur der Prozesse des Erkenntnisgewinns herausgestellt:

- Anknüpfen an Vorerfahrungen und Interessen,
- Erkunden neuer Zusammenhänge,
- Austauschen unterschiedlicher Wege,
- Ordnen als Systematisieren und Sichern,
- Vertiefen durch Üben und Wiederholen.[126]

Diese Unterscheidung erinnert stark an die in Kapitel 4.2. beschriebenen zentralen Funktionen des Mathematikunterrichts. LEUDERS und PREDIGER stellen fest, dass Differenzierung in allen Phasen des Unterrichts möglich ist.

[123] vgl. Lengnink, Prediger, Weber, 2011, S. 2-5.
[124] vgl. Heymann, 2010, S. 8-9..
[125] vgl. Prediger, 2004, S. 95.
[126] vgl. Leuders, Prediger, 2012, S. 39-40.

Im folgenden Abschnitt werden demnach verschiedene Differenzierungsmöglichkeiten auf den unterschiedlichen Ebenen der Erkenntnisgewinnung vorgestellt.

Zu Beginn dieser Lernsituation sollen die Schülerinnen und Schüler ausgehend von einem Problem individuelle Strukturierungen aktivieren und formulieren. Um, wie im Lehrplan der 6. Schulstufe gefordert, relative Häufigkeiten ermitteln zu können, wird in dieser Unterrichtssequenz mittels Beispiels eines Gruppenwettbewerbes aus dem Sportunterricht an den Begriffen absolute und relative Häufigkeit gearbeitet, ohne diese Fachbegriffe vorweg zu definieren.[127]

**Wer hat besser geworfen: Jungen oder Mädchen?**

Im Sportunterricht sind die Mädchen und die Jungen in Kleingruppen gegeneinander angetreten. Das sind die Ergebnisse der Gruppen von Pia und Ole.

| | Pias Team (4 Mädchen) | Oles Team (10 Jungen) |
|---|---|---|
| Papierkorbball | I I I | I I I I I |
| Ringe werfen | I I | I I I I |
| Schuh in Kreis werfen | I | I I I I I I |

a) Arbeite zunächst allein: Betrachte die Häufigkeiten in den Teams von Pia und Ole. Welches war die beste Station der Mädchen? Welches war die beste Station der Jungen?
An welcher Station waren die Mädchen besser als die Jungen?

b) Erklärt euch gegenseitig, wie ihr die Ergebnisse verglichen habt. Welche Vergleiche waren einfach? Was war an den anderen schwierig? Wie fair sind eure Vergleiche?

**ABBILDUNG 13: vgl. Prediger, 2011, S. 9.**

Diese offen gestaltete Aufgabe soll nun den Lernenden die Möglichkeit bieten, auf individuellen Wegen zu einem (mehr oder weniger) richtigen fairen

[127] vgl. Prediger, 2011, S. 9.

Vergleich zu kommen. Im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojekts „*Kosima*“ (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen) für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, welches vielfältige Aspekte von mathematischen Lernprozessen in sinnstiftenden Kontexten im Mathematikunterricht untersucht[128], wurden in den Klassen zahlreiche unterschiedliche Vergleichswege ermittelt. Aus den diversen (teils richtigen, teils falschen) Antworten wurde eine Antwort für den weiteren Unterrichtsverlauf verbindlich eingeführt, weil es die Idee der Berücksichtigung der Gesamtzahl fachlich treffend und kindgerecht operationalisiert.[129]

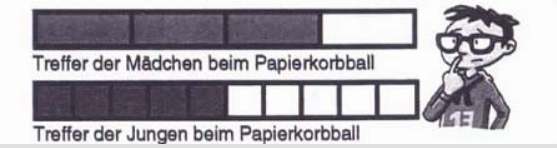
| **Wie kann man fairer vergleichen?** | |
|---|---|
| a) Ole vergleicht mit diesem Streifen rechts. Zu welchem Ergebnis kommt er wohl, wer beim Papierkorbball besser ist?<br>b) Warum zeichnet er die beiden Streifen gleich lang? |  |

**ABBILDUNG 14: Prediger, 2011, S. 9.**

Andere unterschiedliche SchülerInnenantworten sollen nicht sofort als falsch bzw. fehl am Platz bezeichnet werden, sondern vielmehr weiterhin eine Rolle im Unterricht spielen. Wichtig dabei ist, nicht zu schnell auf die richtige Lösung einzugehen und die Schülerinnen und Schüler mit ihren Antworten zu konfrontieren, um ihnen die Gelegenheit zu geben, ihre individuellen Vorstellungen selbst zu thematisieren, zu ergänzen, auszudifferenzieren, gegenüberzustellen oder notwendigerweise zu verwerfen. Denn ohne eine explizite Thematisierung abweichender Vorstellungen gelingt es oft nicht lebensweltliche Situationen adäquat zu mathematisieren.[130]

[128] www14.
[129] vgl. Prediger, 2011, S. 9-11.
[130] vgl. Prediger, 2011, S. 11-12.

### 5.2.3. ERSTES ÜBEN AUF EIGENEM NIVEAU – AUFGABENSETS

Für differenzierten Unterricht in Übungs- und Festigungsphasen eignen sich sogenannte Aufgabensets, die von basalen Aufgaben bis hin zur offenen Aufgabe reichen. Ein Aufgabenset ist eine Sammlung von zehn Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad. Jede Schülerin/jeder Schüler soll dadurch ihren/seinen individuellen Anschluss an das jeweilige Thema finden. Zu beachten ist dabei, dass auf keinen Fall alle Lernenden alle Aufgaben lösen und vor allem nicht in derselben Zeit. Das Aufgabenset beginnt in der Regel mit vier grundlegenden Aufgaben mit steigender Komplexität, wobei das Festigen der elementaren Grundlagen im Vordergrund steht. Fortgesetzt wird mit vier Aufgaben, die ein vertiefendes Verständnis herbeiführen sollen. Abschließend enthält das Aufgabenset zwei Aufgaben mit offenem bzw. anwendungsorientiertem Charakter, die vor allem dazu dienen, leistungsstarke Schülerinnen und Schüler zu fordern (Verknüpfung von Bekanntem und Neuem).

Die Bearbeitungszeit eines solchen Aufgabensets sollte 20 Minuten nicht übersteigen. In dieser Zeit sollte es allen Schülerinnen und Schülern der Lerngruppe möglich sein, die geforderten fünf Aufgaben zu lösen. Als Alternative bietet sich an, die einzelnen Aufgaben je nach Schwierigkeitsgrad mit Sternchen zu versehen. Jedes Kind soll in einer gewissen vorgegebenen Zeit eine bestimmte Anzahl an Sternchen erarbeiten. Die geforderte Anzahl an Sternen muss dabei aber auch durch leichte bis mittlere Aufgaben erreichbar sein.

Gefahr besteht meist darin, dass die Lernenden dazu tendieren, Aufgaben chronologisch abzuarbeiten. Es wird einige Zeit dauern, bis die Schülerinnen und Schüler lernen ihren Übungsbedarf selbst einzuschätzen. Diese Förderung der Selbstdiagnosekompetenz sollte im Laufe der Schuljahre nach und nach

weiter ausgebildet werden. Unterhalb findet man ein Beispiel eines Aufgabensets zum Thema Terme auf der 7. Schulstufe.[131]

**Aufgabenset Terme**

Wähle mindestens fünf der folgenden Aufgaben aus und löse sie.
Es sind dafür 15 Minuten vorgesehen.

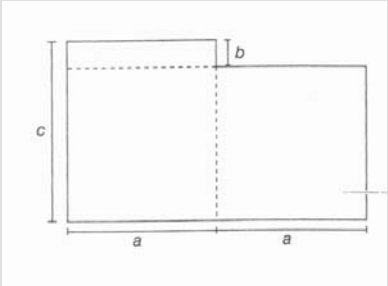
……..……..

Fasse zusammen:

1. $3x + 4y – 5x + 8 + 2y =$
2. $3x \cdot 12 =$
3. $2 \cdot 5x + 12y – 3 \cdot 4x =$
4. $2x \cdot 3x + (2x)^2 =$

……

5. Notiere zwei Terme für den Umfang der Figur:




6. Notiere zwei Terme für den Flächeninhalt der Figur:

……..……..

7. Zeichne eine Figur mit dem Umfang $u = 2x + 4y$.

8. Zeichne eine Figur mit dem Flächeninhalt $A = x \cdot y – a \cdot b$.

……..

[131] vgl. Bergmann, Eilers, 2010, S. 15-17.

9. Notiere als Term: Denke dir eine Zahl. Addiere 3 und verdopple das Ergebnis. Subtrahiere 4. Halbiere das Ergebnis. Subtrahiere schließlich die von dir gedachte Zahl. Das Ergebnis ist immer 1. Erkläre.

10. Die folgende Termumformung ist die Begründung dafür, dass die Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen stets durch 3 teilbar ist.

    $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$

    Beide Summanden sind durch 3 teilbar

    Begründe ebenso:
    Die Summe fünf aufeinander folgender (!) natürlicher (!) Zahlen ist stets durch 5 teilbar.

**ABBILDUNG 15: Bergmann, Eilers, 2010, S. 16.**

## 5.2.4. BLÜTENAUFGABEN

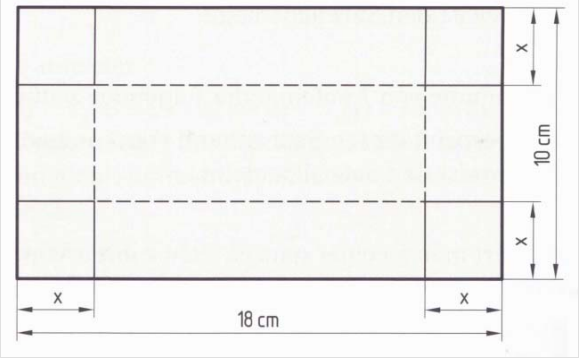
Als Blütenaufgaben werden Aufgabensequenzen bezeichnet, die selbst differenzierend bzw. in sich binnendifferenzierend sind. Die erste Teilaufgabe ist eine Grundaufgabe, die von allen Lernenden bewältigbar ist. In den weiteren Teilaufgaben steigt das Anforderungsniveau stufenweise. Diese Aufgaben werden gerade deshalb Blütenaufgaben genannt, weil sie mit dem Wachsen einer blühenden Pflanze verglichen werden, die sich schrittweise in alle Richtungen entwickelt.[132]

Untern zwei Beispielaufgaben aus dem Schulbuch „Das ist Mathematik“ für die 7. und 8. Schulstufe.

[132] vgl. Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2008, S. 42.

Aufgabe 1 (7. Schulstufe, Aufstellen von Formeln und Gleichungen):

Konrad möchte aus einem rechteckigen Stück Papier, das 18cm lang und 10cm breit ist, eine oben offene Schachtel falten. Dazu macht er an den Ecken jeweils gleich lange Einschnitte, um dann die Seitenflächen nach oben klappen zu können (→ siehe Figur).
Sein Freund Christian behauptet nun: „Je tiefer du den Einschnitt an den Ecken machst, desto großer wird das Volumen der offenen Schachtel."




a) Stelle eine Formel auf, mit der das Volumen der offenen Schachtel berechnet werden kann! Verwende dabei die Angaben aus der Zeichnung!
b) Zeige durch Einsetzen von Zahlen, dass Christians Behauptung nicht stimmen kann!
c) Welche Zahlen können sinnvoll für x eingesetzt werden?
d) Stelle eine Formel auf, mit der du die Oberfläche der offenen Schachtel berechnen kannst!

**ABBILDUNG 16: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2009, S. 67.**

Aufgabe 2 (8. Schulstufe, Vermischte Aufgaben: Zylinder – Kegel – Kugel):

Ein Behälter für Flüssigbeton hat die Form eines speziellen Zylinders ($h = 5 \cdot r$) mit einem an der Grundfläche angesetzten, durchmessergleichen gleichseitigen Kegel ($s = 2 \cdot r$).

a) Fertige eine Skizze an und berechne das Fassungsvermögen des Behälters, wenn der Durchmesser der Kreisfläche d = 3,60 m beträgt!
b) Wie viel Quadratmeter Material werden für einen solchen Behälter (oben geschlossen) mindestens benötigt?
c) Gib 1) für das Volumen und 2) für die Oberfläche des Behälters eine (möglichst vereinfachte) Formel an, in der nur der Radius r als Variable auftritt!

**ABBILDUNG 17: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2010, S. 226.**

### 5.2.5. LERNPROTOKOLLE UND CHECKLISTEN

Bei der Planung von differenzierenden Maßnahmen spielen Diagnose und Feedback eine wesentliche Rolle. Jedoch nicht nur die Lehrperson sollte stets über Fähigkeiten und Schwierigkeiten ihrer Schülerinnen und Schüler Bescheid wissen, sondern die Schülerinnen und Schüler sollten selbst ihr Lernen einschätzen können. Der Fähigkeit zur Selbsteinschätzung kommt im Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle zu.

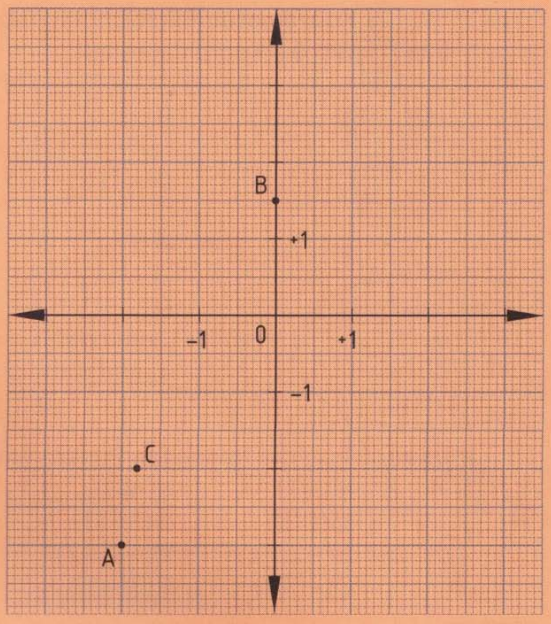
Durch entsprechendes Feedback soll den Schülerinnen und Schülern ermöglicht werden, die Potentiale für die Förderung von Eigenverantwortlichkeit und Selbstorganisation zu erkennen. Rückmeldung erhalten die Lernenden vor allem beim Vergleich ihrer gefundenen Lösungswege mit vorgegebenen Musterlösungen. Um ein frühes und systematisches Feedback geben zu können, sind sogenannte Lernprotokolle von Vorteil. Es handelt sich hierbei um einen unbenoteten Kurztest, der Grundverständnis und zentrale Fragen abprüft. Komplexität und Aufwand spielen dabei keine Rolle. Neben Fragen zum Einführungsbeispiel findet man auch Umkehraufgaben, typische Fehlerquellen und eine Anwendungsaufgabe. Nach dem durchgeführten und ausgewerteten Lernprotokoll folgen ausdifferenzierte Übungsphasen und thematische Erweiterungen mit Komplexitätsgradsteigerungen. Auswertung bedeutet in keinem Sinne Benotung und zusätzlichen Arbeitsaufwand für die Lehrperson, denn hierbei geht es vielmehr um das selbständige Kontrollieren durch Vergleichen mit dem Schulbuch, mit Musterbeispielen, mit Mitschülerinnen und Mitschülern sowie mit Schritt-für-Schritt-Anleitungen. Das Lernprotokoll strebt jedoch, bei (teilweisem) Unverständnis, nicht eine gänzliche Wiederholung des Unterrichts an, sondern soll vielmehr dem/der Schüler/in Auskunft darüber geben, ob und wie weit er/sie sich im Stoffgebiet zurechtfindet.[133]

[133] vgl. Wehrse, Kossak, 2010, S. 22-43.

## KONTROLLIERE DEIN WISSEN

**Welche Koordinaten haben die eingezeichneten Punkte A, B und C?**

**Trag in das Koordinatensystem ein!**
a) D(1,5|2,6)
b) E(2|−2,4)
c) F(−3|0)




**Zeichne ein rechtwinkliges Koordinatensystem!**
Trag die gegebenen Punkte ein! Verbinde sie zu einem geschlossenen Streckenzug!
A(0|0), B(0|1), C(−2|1), D(−2|3), E(1|3), F(1|4), G(−3|4), H(−3|−3), I(1|−3), J(1|−2), K(−2|−2), L(−2|0), M = A

**Trag die gegebene Figur in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein!**
Gib die Koordinaten des vierten Eckpunkts an!
Berechne den Flächeninhalt! Entnimm jene Längen, die dir zur Berechnung fehlen, aus dem Koordinatensystem!
a) ▭ ABCD: A(−3|−2), B(2|−2), C(2|2), D
b) □ DEFG: D(−2|0), E(1|0), F(1|3), G



**Zeichne die Figur in ein rechtwinkliges Koordinatensystem!**
Spiegle sie an der y-Achse!
Gib die Koordinaten der Eckpunkte der gespiegelten Figur an!
a) △ DEF: D(−3|−2), E(−1|0), F(−3|3)  b) ▭ EFGH: E(0|−1), F(2|−2), G(4|2), H

**ABBILDUNG 18: Floderer, Fischer, Floderer, Gross, 2007, S. 47.**

Das oberhalb abgebildete Lernprotokoll stammt aus dem Mathematikbuch „Mach mit“. Das Lernprotokoll („Kontrolliere dein Wissen“) ist für die 7. Schulstufe konzipiert und soll einen Überblick über das bereits vorhandene Wissen zum Thema Rechtwinkliges Koordinatensystem geben. Zu den jeweiligen Kontrollaufgaben finden die Schülerinnen und Schüler im Anhang des Schulbuchs die jeweiligen Lösungen.

Als hilfreich in der Unterrichtsarbeit haben sich auch Checklisten (auch Kompetenzraster genannt) erwiesen. Eine Checkliste sollte in der Regel vor einer bevorstehenden Überprüfung (Schularbeit) durchgeführt werden, um sich über den persönlichen Lernstand klar zu werden. Mittels dieser Selbsteinschätzung gelangen die Schülerinnen und Schüler zu ihrem persönlichen Arbeitsprogramm, damit ein optimales Vorbereiten für die nächste Schularbeit gelingt. Meist findet man bereits vorgefertigte Lernprotokolle und Checklisten in Schulbüchern.[134]

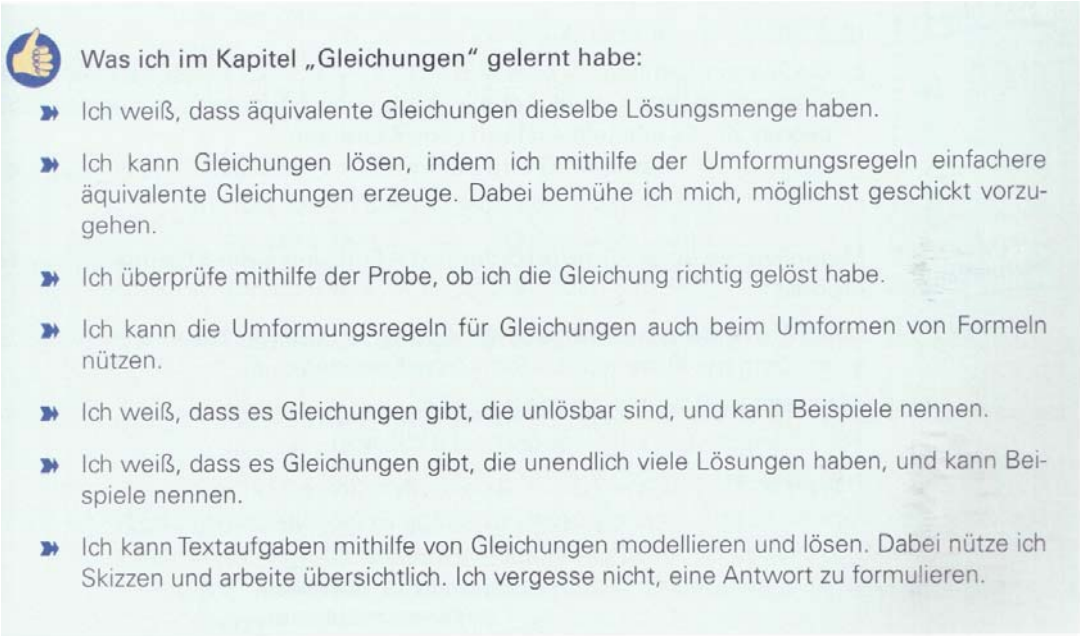
Beispiel 1: Rechnen mit Bruchzahlen (6. Schulstufe) zum Abhaken

| **Fähigkeiten und Aufgaben zum Erinnern** |  |  |  |  | **Weitere Aufgaben zum Üben** |
|---|---|---|---|---|---|
| Ich kann Brüche mit gleichem Nenner addieren und subtrahieren. | | | | | |
| Ich kann Brüche mit ungleichem Nenner addieren und subtrahieren. | | | | | |
| Ich kann das Vielfache von Brüchen bestimmen. | | | | | |
| Ich kann Brüche durch eine ganze Zahl dividieren. | | | | | |
| Ich kann zwei Brüche miteinander multiplizieren. | | | | | |
| Ich kann einen Bruch durch einen anderen Bruch dividieren. | | | | | |
| Ich kann Bruchterme berechnen. | | | | | |
| Ich kann Textaufgaben, in denen Bruchrechnung vorkommt, lösen. | | | | | |

**ABBILDUNG 19: Wehrse, Kossak, 2010, S. 43.**

[134] vgl. Wehrse, Kossak, 2010, S. 22-43.

Beispiel 2: Gleichungen (7. Schulstufe)

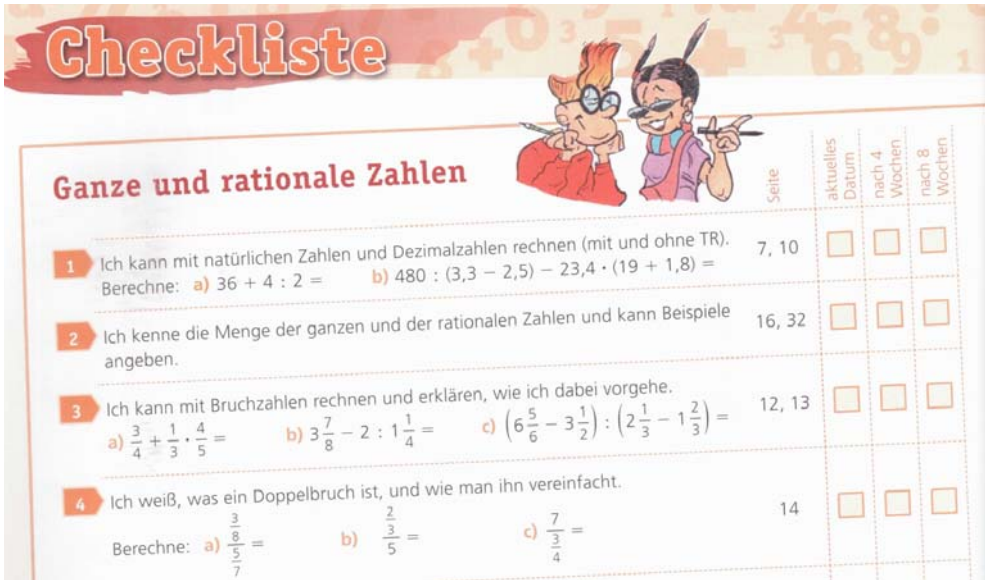


Was ich im Kapitel „Gleichungen" gelernt habe:

- Ich weiß, dass äquivalente Gleichungen dieselbe Lösungsmenge haben.
- Ich kann Gleichungen lösen, indem ich mithilfe der Umformungsregeln einfachere äquivalente Gleichungen erzeuge. Dabei bemühe ich mich, möglichst geschickt vorzugehen.
- Ich überprüfe mithilfe der Probe, ob ich die Gleichung richtig gelöst habe.
- Ich kann die Umformungsregeln für Gleichungen auch beim Umformen von Formeln nützen.
- Ich weiß, dass es Gleichungen gibt, die unlösbar sind, und kann Beispiele nennen.
- Ich weiß, dass es Gleichungen gibt, die unendlich viele Lösungen haben, und kann Beispiele nennen.
- Ich kann Textaufgaben mithilfe von Gleichungen modellieren und lösen. Dabei nütze ich Skizzen und arbeite übersichtlich. Ich vergesse nicht, eine Antwort zu formulieren.

**ABBILDUNG 20: Kraker, Plattner, Preis, 2009, S. 123.**

Beispiel 3: Rationale Zahlen (7. Schulstufe) zum Rechnen und Abhaken



Checkliste

Ganze und rationale Zahlen

| | | Seite | aktuelles Datum | nach 4 Wochen | nach 8 Wochen |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ich kann mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen rechnen (mit und ohne TR). Berechne: a) $36 + 4 : 2 =$ b) $480 : (3{,}3 - 2{,}5) - 23{,}4 \cdot (19 + 1{,}8) =$ | 7, 10 | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2 | Ich kenne die Menge der ganzen und der rationalen Zahlen und kann Beispiele angeben. | 16, 32 | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 | Ich kann mit Bruchzahlen rechnen und erklären, wie ich dabei vorgehe. a) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} =$ b) $3\frac{7}{8} - 2 : 1\frac{1}{4} =$ c) $\left(6\frac{5}{6} - 3\frac{1}{2}\right) : \left(2\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}\right) =$ | 12, 13 | ☐ | ☐ | ☐ |
| 4 | Ich weiß, was ein Doppelbruch ist, und wie man ihn vereinfacht. Berechne: a) $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{7}} =$ b) $\frac{\frac{2}{3}}{5} =$ c) $\frac{7}{\frac{3}{4}} =$ | 14 | ☐ | ☐ | ☐ |

**ABBILDUNG 21: Lewisch, Zwicker, Breunig, Riehs, 2012, S. 60. (GEKÜRZT)**

Die Abbildung stellt einen Ausschnitt der Checkliste zu den ganzen und rationalen Zahlen dar. Die Beispiele sollen insgesamt dreimal berechnet werden (aktuelles Datum, nach 4 Wochen, nach 8 Wochen) und sollen anschließend über die Kenntnisse zu diesem Themengebiet Aufschluss geben.

Auf eines sei jedoch hingewiesen: Schülerinnen und Schüler müssen sorgfältig auf den Umgang mit Checklisten herangeführt werden. Verfügen die Schülerinnen und Schüler nur über mangelnde Fähigkeit zur Selbsteinschätzung, ist der Einsatz von Checklisten nicht sinnvoll. Gefahr besteht v.a. bei solchen Checklisten (Abb. 19 und 20), bei denen keine unmittelbare Kontrolle über Aufgaben vorgesehen ist. Hingegen bietet die zuletzt abgebildete Checkliste (Abb. 21) Aufgaben zum Stoffkapitel mit anschließender Selbstkontrolle und daraus resultierender Selbsteinschätzung.

### 5.2.6. MATHEMATISCHE BEURTEILUNGSUMGEBUNGEN

JUNDT und WÄLTI entwickelten in der Schweiz sogenannte mathematische Beurteilungsumgebungen (MBU), in denen es im Gegensatz zu herkömmlichen Tests um die Beurteilung bestimmter Kompetenzen geht. Auf einer Doppelseite finden die Lernenden Aufgaben und dazugehörige Beurteilungskriterien. Diese mathematischen Beurteilungsumgebungen dienen dazu, mathematische Leistungen mehrdimensional darzustellen und vor allem transparent zu machen.

Am Beginn der Beurteilungsumgebung steht eine gemeinsame Einführung im Plenum, danach arbeiten die Lernenden in Einzel- oder Partnerarbeit. Schulbücher und Nachschlagewerke dürfen beim Arbeiten zu Rate gezogen werden. Die Lehrperson schlüpft in die Rolle des Lernbegleiters. Beurteilungsumgebungen liefern wesentliche Förderhinweise, eignen sich aber nicht dazu eine umfassende Beurteilung abzugeben. Beurteilt wird nach fünf Kriterien, wobei Aufgaben vom Typ A die elementaren Grundlagen, also die Minimalanforderungen, betreffen. Aufgaben vom Typ B (1 und 2) sollten in der

Regel alle Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I bewältigen können, hingegen werden Aufgaben vom Typ C (1 und 2) meist nur von den leistungsstarken Schülerinnen und Schülern erfüllt.

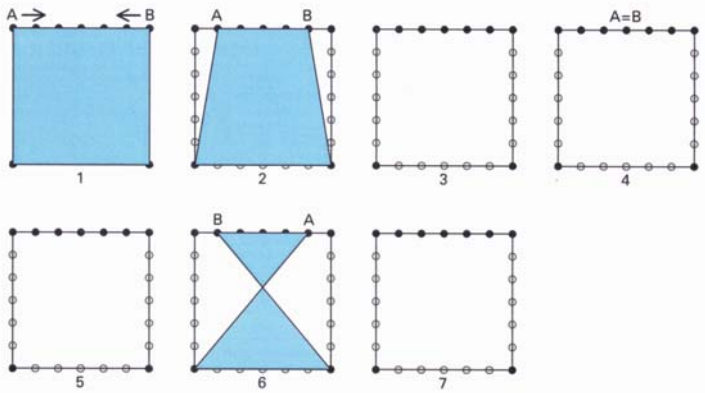
Jeder Lernende erhält am Beginn jedes Semesters ein Sammelraster, in dem die Ergebnisse der einzelnen Beurteilungsumgebungen festgehalten werden, sodass am Ende eines Semesters eine Gesamtbeurteilung abgelesen werden kann. Hierbei wird bewusst von einer quantifizierenden Beurteilung über Noten Abstand gehalten.[135]

> *„Im Gegensatz zu konventionellen Lernkontrollen ermöglichen die MBU eine offenere und breitere Leistungsbeurteilung, die in den Lernprozess integriert ist. Lernende sollen in diesem Rahmen Beurteilung als Teil des Lernens erfahren, nicht als eine dem Lernen nachgeschaltete Veranstaltung.“*[136]

[135] vgl. Jundt, Wälti, 2010, S. 56-60.
[136] Jundt, Wälti, 2010, S. 60.

ABBILDUNG 22: MBU Dreieck und Vieleck, www13.

**Ausgehend von einem Quadrat, wandert Punkt A schrittweise nach rechts, Punkt B nach links.**

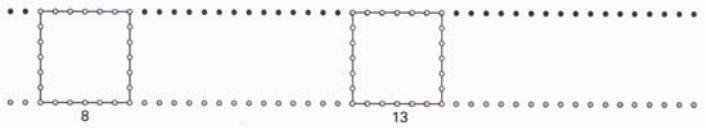



Z U1 Stelle die Figurenfolge von 1 bis 7 vollständig dar.

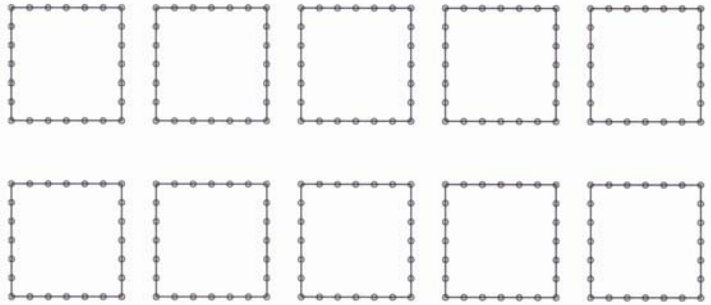
U1 Beurteile die folgenden Behauptungen mit richtig [r] /falsch [f] /nicht zu entscheiden [n].

- Die blaue Fläche ist bei allen Figuren achsensymmetrisch. ☐
- Die blaue Fläche ist bei allen Figuren gleich gross. ☐
- Die blaue Fläche ist bei keiner Figur grösser als das Quadrat. ☐
- Die blaue Fläche ist bei allen Figuren grösser als das halbe Quadrat. ☐
- Die blaue Fläche ist bei allen Figuren verschieden gross. ☐
- Die blaue Fläche wird von Figur 1 bis Figur 7 immer kleiner. ☐
- Die blaue Fläche bei Figur 7 ist halb so gross wie die bei Figur 1. ☐
- Die blaue Fläche bei Figur 6 ist halb so gross wie die bei Figur 2. ☐
- Die blaue Fläche bei Figur 5 ist halb so gross wie die bei Figur 3. ☐

O1 Zeichne die 8. und die 13. Figur der obigen Folge und mache je eine Aussage zur Grösse der blauen Fläche in Bezug auf das Einheitsquadrat. (Zwei verschiedene Aussagen!)




U2 O2 Zeichne zu den Figuren 1, 3, 5 und 7 je ein spitzwinkliges Dreieck mit dem gleichen Flächeninhalt wie die blaue Fläche. (Die Figuren 1 und 7 sind leichter als die Figuren 3 und 5.)



| | Beurteilte Tätigkeiten | Kriterien zum Erfüllen der Aufgabe |
|---|---|---|
| Z | Figuren nach einer vorgegebenen Gesetzmässigkeit zeichnen. | Du ergänzt die fehlenden Figuren zu einer vollständigen Figurenfolge. Mindestens 3 von 4 Figuren sind richtig gezeichnet. |
| U1 | Form und Grösse von Vielecken vergleichen. | Alle 4 Figuren sind richtig gezeichnet. Du beurteilst Aussagen zu Form und Grösse der Figuren 1–7. Mindestens 7 von 9 Aussagen sind richtig bewertet. |
| U2 | Dreiecke nach bestimmten Vorschriften zeichnen. | Du zeichnest mindestens 2 spitzwinklige Dreiecke mit dem gleichen Flächeninhalt wie eine vorgegebene Figur. |
| O1 | Eine Figurenfolge weiterführen und interpretieren. | Du zeichnest zwei weitere Figuren der Folge und machst korrekte Aussagen dazu. |
| O2 | Dreiecke nach bestimmten Vorschriften zeichnen. | Du zeichnest mindestens 3 spitzwinklige Dreiecke mit dem gleichen Flächeninhalt wie eine vorgegebene Figur. |

## 5.2.7. LERNUMGEBUNGEN

Um guten Unterricht zu gestalten, ist es wichtig, dass sich die Schülerinnen und Schüler aktiv am Unterricht beteiligen können. Hierfür eignet sich handlungsorientierter Unterricht, in dem Schülerinnen und Schüler zu einem vorgegebenen Thema selbständig auf entdeckende Weise Lernzuwachs erlangen sollen. Dies führt letztendlich zu einem hohen Maß an Eigenständigkeit der Lernenden und zu einer geringen Steuerung der Lehrperson.[137]

> *„Die Schule tut sich oft schwer mit Begabungsunterschieden der Kinder, gerade auch im Mathematikunterricht. […] Eine Planung mit denselben Aufgaben für alle Kinder widerspricht – besonders bei kleinschrittigem Vorgehen – ihrem Lernen. Die Orientierung an einem fiktiven Durchschnitt führt zu Problemen mit zwei Extremgruppen von Kindern, nämlich den besonders langsam und den sehr schnell Lernenden.“*[138]

Lernumgebungen stellen sich diesem Problem und versuchen dieses aufzufangen, indem sie vorsehen,

- dass Schülerinnen und Schüler eigenständig denken, anstatt Aufgaben nach vorgegebenen Strategien zu lösen,
- dass Schülerinnen und Schüler in Sinnzusammenhängen anstatt in kleinen Schritten lernen,
- dass Schülerinnen und Schüler sich mit anderen Sicht- und Vorgehensweisen auseinandersetzen, statt mit Musterlösungen zu vergleichen.[139]

Lernumgebungen im Mathematikunterricht beinhalten eine flexible große Aufgabe, die in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen besteht.[140]

---

[137] vgl. Heintz, in: Leuders, 2011, S. 247-248.
[138] Hengartner, in: Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 9.
[139] vgl. Wälti, Hirt, in: Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 17.
[140] vgl. Hirt, Wälti, 2008, S. 13.

*„Wo Lernende in diesem Sinn Mathematik betreiben, werden sie zu Entscheidungsträgern, zu aktiven Mitgestaltern ihres Lernprozesses.“*[141]

Die Aufgabenstellungen von Lernumgebungen basieren auf einer innermathematischen und sachbezogenen Struktur. Der Mathematikunterricht wird von den Lernenden aus gestaltet und ermöglicht somit eine natürliche Differenzierung. Sie soll dadurch ermöglichen, dass langsam Lernende einen Zugang finden und besonders Begabte durch vertiefende Fragestellungen entsprechend ihren Möglichkeiten gefördert werden sollen. Im Hinblick auf die Bildungsstandards ist der Einsatz von Lernumgebungen sinnvoll, da diese nicht nur auf inhaltliche Kompetenzen abzielen, sondern vermehrt auf Handlungskompetenzen vom Operieren bis hin zum Interpretieren, zum Darstellen sowie zum Argumentieren und Begründen (H1-H4). In der Regel spielt Kommunikationsfähigkeit eine große Rolle. Viele Lernumgebungen können in Partner- und Gruppenarbeit erfolgen.

Mit einer Einstiegsaufgabe wird allen Lernenden ein Zugang ermöglicht (Inszenierung der Lernumgebung). Oft wird anfänglich durch praktisches Arbeiten und erforschendes Handeln an diese Aufgaben herangegangen, bevor die Kinder sich mit den offensichtlich werdenden Strukturen beschäftigen. In jeder Lernumgebung stehen einfache (teilweise gleichartige) Aufgaben zum Üben zur Verfügung, jedoch auch weiterführende und anspruchsvollere Aufgaben, die Kinder auf höherem Niveau fordern. Diese müssen individuell an die Kinder gestellt werden (Eigentätigkeit und individuelle fachliche Beratung). Während der Eigentätigkeit oder auch im Anschluss an diese Phase tauschen sich die Lernenden aus.[142]

*„Die einen bearbeiten vertiefend ihre Kenntnisse und trainieren die grundlegenden Fertigkeiten. Die anderen bearbeiten anspruchsvolle mathematische Probleme, explorieren, tauschen sich aus, formulieren und begründen ihre Entdeckungen. Alle arbeiten an derselben Lernumgebung*

[141] Wälti, Hirt, in: Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 17.
[142] vgl. Hirt, Wälti, 2008, S. 14-16.

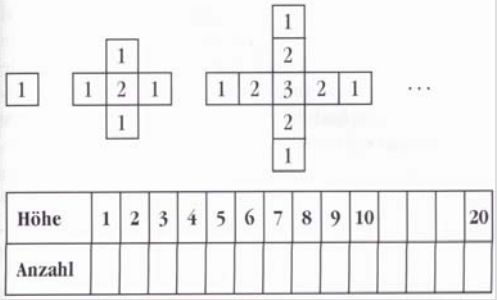
*mit ihrer spezifischen fachlichen Struktur, jedoch auf unterschiedlichen Anspruchsniveaus.“*[143]

Beispiel 1: Mit Würfeln bauen und Zahlenfolgen beschreiben

Setze die folgenden Bauten(oder eigene Folge von Bauten) fort. Halte in der Tabelle fest, wie viele Würfel du bei wachsender Höhe brauchst. Beschreibe die Folgen der Anzahlen.

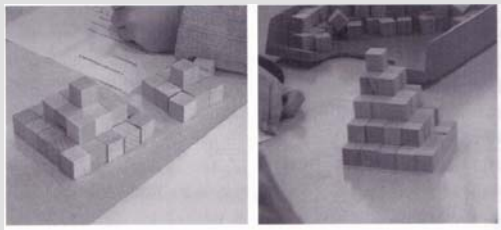
a) Zwei sich kreuzende Doppeltreppen

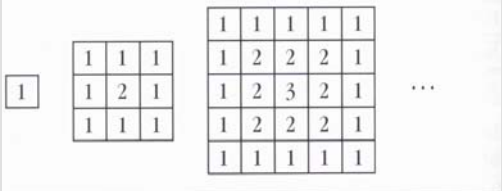




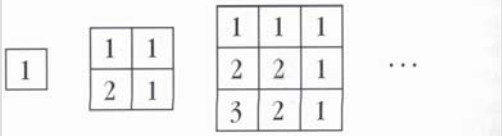
| Höhe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | | | | | | | | | | | | | | |

b) Pyramiden





| Höhe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | | | | | | | | | | | | | | |



| Höhe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | | | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | | | | | | | | | | | | | | |

**ABBILDUNG 23: Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 127.**

Die abgebildete Lernumgebung *Mit Würfeln bauen und Zahlenfolgen beschreiben* ist für Schülerinnen und Schüler der 5. bzw. 6. Schulstufe gedacht. Sie ermöglicht Kindern durch beliebiges Fortsetzen von Holzwürfeln Folgen von Körpern zu entwickeln, wobei die Folgen in Wertetabellen ausgewertet werden sollen. Die durch Würfelbauwerke illustrierten Zahlenfolgen sind nicht immer

[143] Hirt, Wälti, 2008, S. 16.

einfach zu durchschauen. Die Lernenden haben die Möglichkeit, gemäß ihrer Leistungsfähigkeit kreuzende Doppeltreppen, Pyramiden oder Würfelbauten zu erstellen. Wichtig dabei ist das selbständige Legen der Schülerinnen und Schüler, das Zählen der verwendeten Würfel, das Protokollieren ihres Vorgehens und die anschließend daraus gezogenen Schlüsse. Die Lernenden verwenden nur zu Beginn der Aufgabe ein Würfelset, im fortschreitenden Denkprozess sollen Strukturen ohne Material überlegt und erarbeitet werden. Je leistungsstärker die Schülerinnen und Schüler, desto vielfältiger werden die gewählten eigenen Darstellungen.[144]

In der Regel geht es beim Arbeiten mit Würfelbauwerken stets um das konkrete Hantieren und Bauen mit Holzbauwürfeln. Das Bestimmen von Anzahlen der Würfel eines Bauwerkes aus der reinen Vorstellung ist für viele Schülerinnen und Schüler meist eine große Herausforderung.[145]

> *„Im Unterricht sollte es nicht nur darauf ankommen, ob die Kinder solche Aufgaben lösen können. Wichtig ist daneben auch das Thematisieren unterschiedlicher möglicher Lösungsstrategien. Ziel sollte sein, die Kinder zu strukturierten Vorgehensweisen zu führen.“*[146]

Bereits im Grundschulbereich spielt der Aufbau von Raumvorstellung eine wichtige Rolle. Mittels Aufgaben zur Anzahlbestimmung, Bauplänen und verschiedenen Ansichten von Würfelbauwerken und Würfelnetzen soll ein Aufbau gelingen.[147]

[144] vgl. Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 127-131.
[145] vgl. Koth, in: BIFIE, 2013 (Vorabdruck).
[146] Koth, in BIFIE, 2013 (Vorabdruck).
[147] vgl. Koth, in: BIFIE, 2013 (Vorabdruck).

Exemplarisch seien dafür zwei Aufgaben abgebildet:

**3** *Wie sieht ein Würfelbauwerk mit diesem Bauplan von vorne, von rechts und von oben aus? Zeichne die drei Ansichten auf Karopapier. Aus wie vielen Würfeln besteht das Bauwerk?*

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

_____ Würfel

**b)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 3 |
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | | | |

_____ Würfel

**c)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |

_____ Würfel

**d)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

_____ Würfel

**e)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | |
| 3 | 1 | 1 | |
| 3 | | | |

_____ Würfel

**f)**

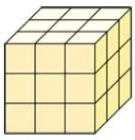
| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | | |
| 3 | | | |
| 1 | | | |

_____ Würfel

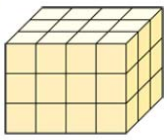



**ABBILDUNG 24: Grosser, Koth, 2013, S. 26.**

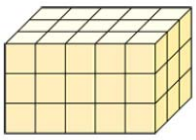
**1** *Aus wie vielen Würfeln ist dieser Quader zusammengesetzt?*

**a)** 

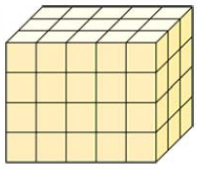
_____

**b)** 

_____

**c)** 

_____

**d)** 

_____

**2** *Angenommen die gesamte Außenfläche des Quaders wird rundherum (auch unten) rot bemalt.*

*Wie viele der kleinen Würfel haben dann 3, 2, 1 oder 0 rote Flächen?*

| Anzahl der Würfel mit | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| - drei roten Flächen | | | | |
| - zwei roten Flächen | | | | |
| - einer roten Fläche | | | | |
| - null roten Flächen | | | | |

**ABBILDUNG 25: Grosser, Koth, 2013, S. 27.**

## 5.2.8. PRODUKTIVE AUFGABEN

Produktive Aufgaben sind dazu gedacht, den Unterricht zu bereichern und zu unterstützen. Sie stellen intelligente Übungsmöglichkeiten bereit und sind in der Regel komplexer als die üblichen Schulbuchbeispiele. Außerdem sind sie

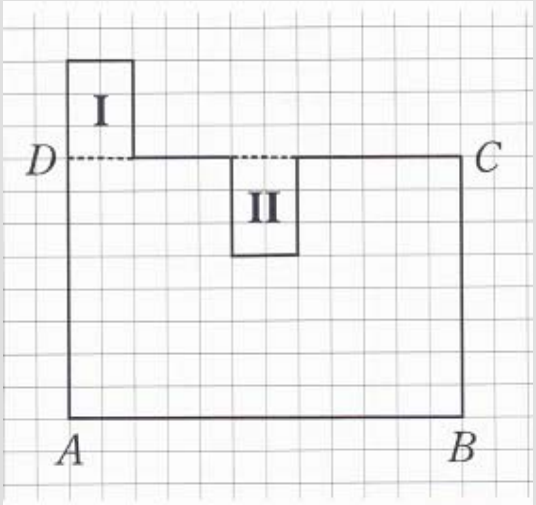
darauf ausgelegt, die Reflexion und Diskussion über Lösungswege anzuregen, und trauen den Lernenden selbständige Leistungen zu. Dazu werden verschiedene Handlungsweisen eingesetzt: Probieren, Experimentieren, Messen, Produzieren, Skizzieren, Zeichnen, Argumentieren, Belegen, Begründen, begriffliches Deduzieren, Analysieren usw.[148]

> *„Produktive Aufgaben können die Gestaltung des Unterrichts beeinflussen und verändern, indem sie*
> - *Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler hervorrufen und ihnen mehr Raum und Bedeutung geben,*
> - *durch ihre Lösungsvielfalt und weiterführende Fragen eine Binnendifferenzierung ermöglichen,*
> - *die Fixierung auf Routineverfahren und -lösungen aufweichen,*
> - *dem Üben von Verfahren zunächst das eigene Suchen und Testen von Verfahren voranstellen,*
> - *ein lebendiges Bild von Mathematik entstehen lassen.“*[149]

Aufgabe 1: Umfang und Flächeninhalt von Figuren (ab der 5. Schulstufe)

Ein Grundstück hat die Form eines Rechtecks ABCD, dem eine Fläche ( I ) an einer Stelle hinzugefügt und eine gleich große Fläche ( II ) an einer andern Stelle weggenommen worden ist. Dadurch ändert sich sein Flächeninhalt nicht, wohl aber sein Umfang.

- Zeichne ein quadratisches Grundstück und verändere es nach dieser Methode so, dass der **Umfang doppelt so groß wie zuvor** wird. Das Grundstück darf dabei aber nicht in unzusammenhängende Teilstücke zerfallen.

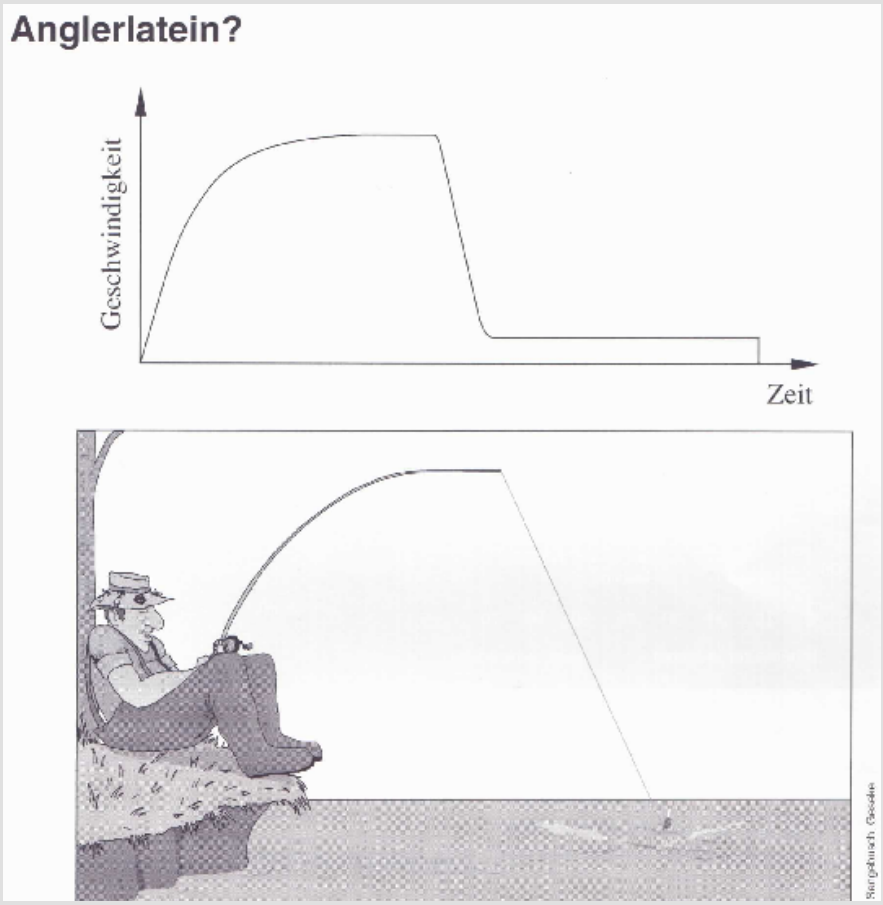



- Löse dieselbe Aufgabe, wenn der Umfang um eine vorgeschriebene Länge größer werden soll. Die Länge kannst du selber wählen, prüfe aber, ob sie beliebig groß sein darf.
- Untersuche, ob man durch Anfügen und Wegnehmen von Dreiecken dieselben Aufgaben lösen kann. Geht dies (auch) mit anderen Figuren?

**ABBILDUNG 26: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 16.**

[148] vgl. Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 3.
[149] Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 3.

Aufgabe 2: Funktionen und Graphen (ab der 8. Schulstufe)




**Welche Sportart passt zu dem obigen Graphen?**

Wähle diejenige Antwort aus der folgenden Liste, die am besten passt:

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100-m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Drag Racing (Auto-Beschleunigungsrennen)
- Wasserski

**ABBILDUNG 27: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 93.**

Aufgabe 3: Subtraktion, Stellenwertsystem (ab der 5./6. Schulstufe)

**Max minus Min**

- Wähle eine dreistellige Zahl, z.B. 303.
  Ordne ihre Ziffern so um, dass die Zahl möglichst groß wird. Du erhältst in diesem Falle 330. Ordne dann ihre Ziffern so um, dass die Zahl möglichst klein wird (0 darf dann vorne stehen). Du erhältst in diesem Falle 033. **Subtrahiere nun die kleinere von der größeren Zahl**, das Ergebnis 297. Fahre jetzt mit dem Ergebnis in derselben Weise fort und wiederhole das Verfahren so lange, bis du merkst, dass sich nichts Neues mehr ergibt.

  Überprüfe nun, was passiert, wenn du mit einer anderen dreistelligen Zahl beginnst. Wähle auch besonders einfache Ausgangszahlen. Vergleiche mit deinem Nachbarn. Könnt ihr an den Subtraktionsergebnissen etwas Auffälliges bemerken?

- Um festzustellen, ob bei allen 900 dreistelligen Zahlen die gleichen Gesetzmäßigkeiten auftreten, muss man keineswegs mit allen die obige Rechnung durchführen. Versuche herauszubekommen, auf welche es ankommt. (Es sind sehr viel weniger, als man denkt!)

Führe dieselbe Untersuchung wie oben mit zweistelligen Zahlen aus.

**ABBILDUNG 28: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 39.**

Bei Aufgabe 1 müssen die Schülerinnen und Schüler messen, schätzen und rechnen. Mit Hilfe der „Rein- und Rausklapp"-Methode kann der Umfang des Quadrats verdoppelt werden, ohne dass sich der Flächeninhalt ändert. [150] Aufgabe 2 zu Funktionen und Graphen soll den Lernenden die Möglichkeit geben, die Lösungsmöglichkeiten zu argumentieren, das Kommunizieren mit dem Partner/der Partnerin oder in der Gruppe steht hier an oberster Stelle.[151] Aufgabe 3 ist eine Denkaufgabe. Hier soll durch mehrmaliges Subtrahieren versucht werden, Gesetzmäßigkeiten und Strukturen des Dezimalsystems zu erforschen und zu dokumentieren.[152]

[150] vgl. Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 132-133.
[151] ebd., 2005, S. S. 185.
[152] ebd., 2005, S. 147.

## 5.2.9. GRUPPENEXPLORATION

> *„Für die Entdeckung mathematischer Zusammenhänge oder die Entwicklung mathematischer Begriffe (z.B. Teilbarkeitsregeln oder „Primzahl“) ist es oft nützlich, wenn Schülerinnen und Schüler zunächst eine Vielzahl konkreter Beispiele (z.B. Zahlen von 1 bis 200) untersuchen. Bei einer Gruppenexploration geschieht diese Untersuchung arbeitsteilig und die Schülerinnen und Schüler können selbst festlegen, wer welchen Teil der Arbeit erledigt.“*[153]

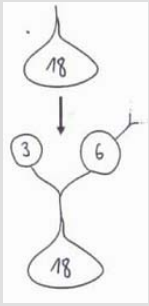
Bei einer Gruppenexploration ist es wichtig, dass vier Phasen durchlaufen werden:

1. Phase: Die Aufgabenstellung wird von der Lehrperson präsentiert und muss hinreichend für alle Schülerinnen und Schüler zugänglich und von allen verstanden worden sein. Gegebenenfalls kann dies durch ein gemeinsames Beispiel erreicht werden.
2. Phase: In der Regel wählen die Lernenden selbständig die einzelnen Aufgaben aus. Alternativ dazu kann auch die Lehrperson einzelne Aufgaben zuteilen oder beim Aussuchen der Aufgaben gezielt den Arbeitsprozess steuern.
3. Phase: In diesem Arbeitsabschnitt geht es an die eigentliche Arbeit, das Untersuchen der einzelnen Beispiele in Einzel- bzw. Partnerarbeit.
4. Phase: In der abschließenden Sequenz werden die einzelnen Beispiele zusammengetragen. Hierbei ist es wichtig, dass alle Schülerinnen und Schüler aktiv an der Suche nach Begriffen und Zusammenhängen beteiligt sind.[154]

[153] Barzel, Leuders, Büchter, 2010, S. 14.
[154] vgl. Barzel, Leuders, Büchter, 2010, S. 14-15.

Ein Beispiel dafür sind sogenannte Teilerbäume (6. Schulstufe):

1. Aus Zahlenzwiebeln wachsen Zahlenbäume. Wenn sich ein Ast verzweigt, dann muss das Produkt der Teiläste immer die vorherige Zahl ergeben. Zeichnet möglichst viele Zahlenbäume.




2. Auf dem Pult liegen DIN-A4-Blätter mit Zahlenzwiebeln von 1 bis 50 (auch mehrfach!). Nehmt immer ein Blatt mit an den Platz und hängt den fertigen Baum im Klassenzimmer auf.

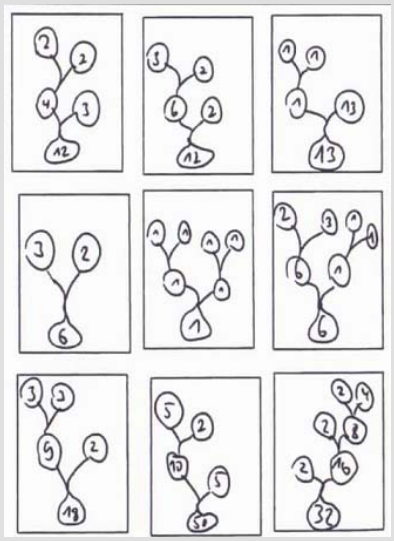


**ABBILDUNG 29: Barzel, Leuders, Büchter, 2010, S. 16.**

Ein weiteres Beispiel entstand während meiner Unterrichtstätigkeit zum Thema Dezimalzahlen (6. Schulstufe):

1. Brüche können durch Division in Dezimalzahlen überführt werden.

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0{,}25$$

Ein Viertel und 0,25 stellen dieselbe rationale Zahl dar.

2. Auf dem Lehrertisch liegen DIN-A4-Blätter mit Brüchen:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{99},\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{9},\frac{2}{99},\ldots,\frac{4}{10},\frac{2}{11},\frac{8}{11},\frac{2}{15},\frac{3}{20},\frac{7}{25},\ldots\right).$$

Nehmt immer ein Blatt mit an den Platz und hängt die fertige Division an der Tafel auf!

# 6. DIFFERENZIERUNG UND MODELLIERUNGSAUFGABEN

Modellierungsaufgaben scheinen auf den ersten Blick immer recht komplex zu sein. Jedoch machen gerade solche Aufgaben den Mathematikunterricht für viele Schülerinnen und Schüler interessant. Aufgrund des Realitätsbezuges der gestellten Aufgaben ist die Auseinandersetzung damit besonders motiviert. Leistungsschwächere Kinder können an einem konkret vorstellbaren Problem arbeiten, leistungsstärkere Kinder werden herausgefordert, sich auf höherem Niveau mit einem realistischen Problem zu beschäftigen. Daher sind solche Aufgaben meist selbstdifferenzierend und ermöglichen, den eigenen Kompetenzen entsprechend, angemessene Lösungswege zu finden.[155]

## 6.1. DER MODELLIERUNGSKREISLAUF BEI SACHAUFGABEN

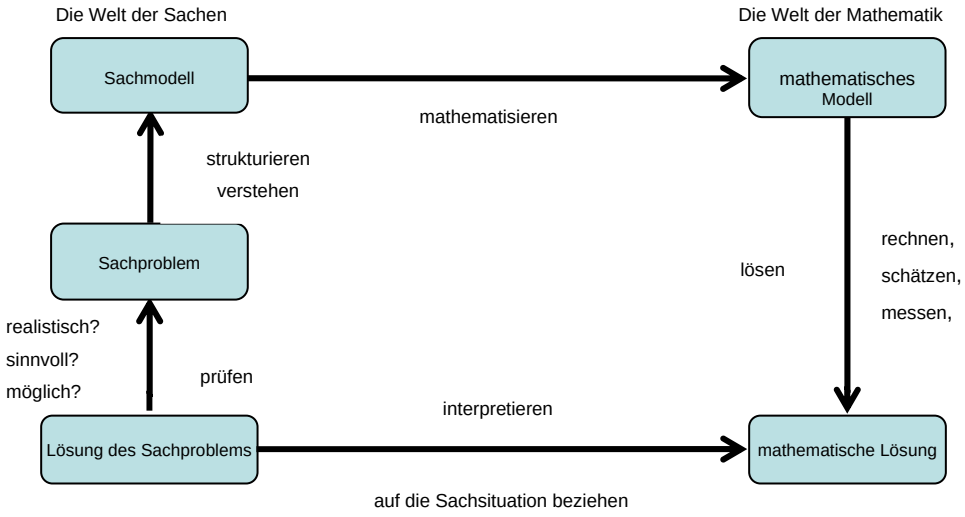



**ABBILDUNG 30: Schipper, 2009, S. 240.**

[155] vgl. Maaß, 2005, S. 19.

Bei diesen Aufgaben ist es von großer Bedeutung, einem gewissen Kreislauf zu folgen. Zuerst muss versucht werden, dass das gestellte Problem verstanden wird, wobei es auch sein kann, dass noch zusätzliche Informationen eingeholt werden müssen. Das Problem muss anschließend vereinfacht werden, um mit mathematischen Methoden gelöst werden zu können. Der Realitätsbezug soll dabei jedoch nicht verloren gehen. Sobald die Lernenden eine (mathematische) Lösung gefunden haben, muss diese dahingehend geprüft werden, was die Lösung für die Realität bedeutet. Erscheint diese in keinem Fall sinnvoll, müssen die Lernenden möglicherweise andere Vereinfachungen vornehmen.[156]

In der Regel sind Schülerinnen und Schüler daran gewöhnt, Mathematikaufgaben abzuarbeiten, um auf diese Weise eine gute Note zu bekommen. Sie neigen daher häufig dazu, Modellierungsaufgaben abzulehnen, da es viel anstrengender ist, sich selbst Lösungswege zu überlegen. Modellierungsaufgaben können nicht nach einem Schema abgearbeitet werden und in der Regel kommen dabei keine eindeutigen Ergebnisse heraus. Beispiele müssen demnach ansprechend für viele Schülerinnen und Schüler sein.[157]

## 6.2. Warum sind Modellierungsaufgaben selbstdifferenzierend?

Durch die Anbindung an die Realität werden Modellierungsaufgaben für viele Schülerinnen und Schüler interessant, da diese die Bedeutung von Mathematik für das Leben und die Gesellschaft deutlich machen. Dadurch soll ein affektiver Zugang zur Mathematik aufgebaut werden und die Bereitschaft, sich mit mathematischen Inhalten auseinanderzusetzen, soll steigen. Durch konkret vorstellbare, realistische Probleme soll die Mathematik an Schrecken vor allem für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler verlieren. Leistungsstärkere

[156] vgl. Maaß, 2005, S. 22.
[157] vgl. Maaß, 2011, S. 16.

Schülerinnen und Schüler werden hingegen aufgefordert, sich auf hohem Niveau mit einem realistischen Problem zu beschäftigen. Als zweiter Punkt sei die offene Aufgabenstellung genannt, die es den Lernenden ermöglicht, entsprechend ihren Kompetenzen Lösungswege zu entwickeln.[158]

Aufgabe 1: Parkettboden (ab der 5. Schulstufe)

**Parkett**
Herr Schulze möchte seine neue Wohnung mit Parkett auslegen lassen, kann sich aber nicht zwischen Ahorn-select und Buche entscheiden. Ahorn-select gefällt ihm besser, ist aber teurer. Berechne den ungefähren Preisunterschied zwischen dem Auslegen der Wohnung mit Ahorn-select und Buche.
(Die unten genannten Preise konnte Hr. Schulze erfragen.)

*Parkett-Preise*

| | |
|---|---|
| *Ahorn* | *139,90 €/qm* |
| *Ahorn-select* | *159,90 €/qm* |
| *Buche* | *109,90 €/qm* |
| *Buche rustikal* | *87,50 €/qm* |
| *Eiche* | *120,90 €/qm* |

*Arbeitslohn: 40-60 €/qm*
*Fußleisten: 15-30 €/m + Montage*

Hinzu kommen die Kosten für die Übergangsleisten zwischen den Zimmern, mehr Arbeitslohn für schwierige Stellen, Anfahrt.

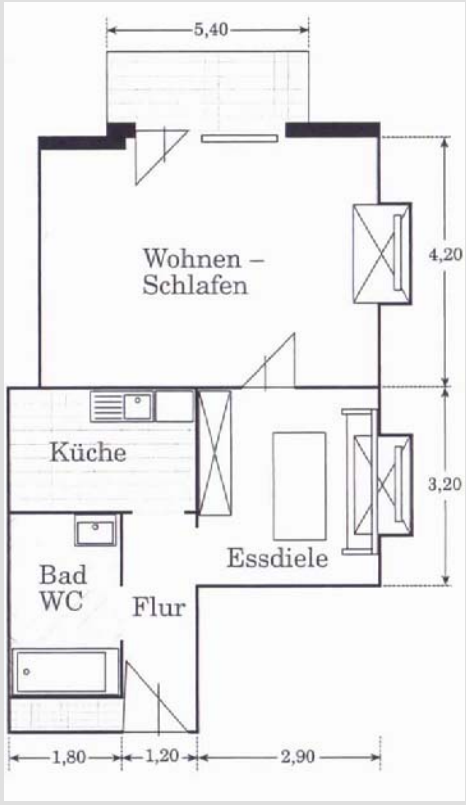



**ABBILDUNG 31: Maaß, 2005, S. 47.**

Aufgabentyp 1 gehört zu den sogenannten überbestimmten Aufgaben. Dies sind Aufgaben zum Einstieg, um mit dem Modellieren vertraut zu machen. Der Sinn einer solchen Aufgabe ist es, den Sachkontext ernst zu nehmen und zu lernen, mit der Offenheit der Aufgabenstellung umzugehen.

[158] vgl. Maaß, 2011, S. 19.

Aufgabe 2: Zimmerrenovierung (ab der 5. Schulstufe)

Stell dir vor, du willst dein Zimmer neu streichen. In welcher Farbe würdest du es streichen? Wie viel Farbe brauchst du, wenn 1 Liter Farbe für 6-8 $m^2$ Wand reicht?



**ABBILDUNG 32: Maaß, 2011, S. 63.**

Aufgabentyp 2 zählt zu den sogenannten unterbestimmten Aufgaben. Die Aufgabenstellung ist ebenfalls aus dem Bereich der Geometrie (Flächeninhalt, Rechteck, ggf. Oberfläche/Mantel eines Quaders). Auch diese Aufgabe zählt zu sogenannten Einstiegsaufgaben. Wichtig dabei ist es, den Lernenden klar zu machen, dass zuerst Informationen eingeholt werden müssen, um die Aufgabe lösen zu können. Hier geht es nicht um das Abarbeiten eines „klassischen" Schulbuchbeispiels, sondern vielmehr um den realitätsbezogenen und authentischen Sachverhalt.

Beim letzten angeführten Aufgabentyp ist es notwendig, den gesamten Modellierungskreislauf zu durchlaufen. Hierbei handelt es sich um eine Aufgabe für die 8. Schulstufe (Arbeiten mit Funktionen). Der Sachkontext ist einfach gehalten, jedoch ist der mathematische Gehalt recht anspruchsvoll. Die authentische Fragestellung soll den Lernenden darüber Aufschluss geben, wie viel Euro ein Erwachsener für sein Konto bezahlen muss. Es gibt viele verschiedene Lösungsmöglichkeiten auf unterschiedlichen Niveaus. Für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler besteht die Möglichkeit, diese Aufgabe grafisch mittels Koordinatensystem zu lösen. Andere wiederum lösen die Aufgabe mit einem Realmodell (Annahme eines bestimmten Nutzungsverhaltens). Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler lösen diese

Aufgabe unter Zuhilfenahme von Funktionen in ein oder mehreren Variablen. Bei der Verwendung von Funktionen ist der Einsatz einer Wertetabelle sinnvoll.

Aufgabe 3: Bankgebühren (ab der 8. Schulstufe)

Die Führung eines Girokontos kostet für Erwachsene leider ziemlich viel Geld. Die verschiedenen Banken berechnen die Kosten nach unterschiedlichen Modellen.

*Otto-Leon-Bank*

- Grundgebühr pro Monat: 4 €,
- jede Buchung (Abheben und Einzahlen von Geld, Überweisungen, Abbuchungen): 0,30 €,
- jeder Kontoauszug: 0,60 €,
- das Einrichten von Daueraufträgen: 2,50 €,
- EC-Karte: 10 € pro Jahr.



*Germanische*

- Pauschalpaket: 11 € Gebühren pro Monat, darin sind alle Leistungen enthalten.

*Dorfbank*

- Grundgebühr pro Monat: 2 €,
- jede Buchung, jeder Kontoauszug: 0,50 €,
- das Einrichten von Daueraufträgen: 2 €,
- EC-Karte: 10 € pro Jahr.

Welcher Kunde (!) sollte welche Bank auswählen? Gesucht ist eine übersichtliche Darstellung der monatlichen Gebühren in Abhängigkeit von den Nutzungsgewohnheiten. Entwickle mehrere Lösungsideen. Beschreibe deine Lösungsideen anhand des ganzen Modellierungsprozesses und vergleiche sie kurz miteinander. Stelle eine Lösungsidee ausführlich dar.

**ABBILDUNG 33: Maaß, 2011, S. 112.**

## 6.3. FERMI-AUFGABEN

Fermi-Aufgaben sind Aufgaben, die nicht an klassische Schulbuchaufgaben erinnern. Mathematikunterricht soll neben dem Rechnen, Lösen eng gefasster Aufgabentypen auch mathematisches Modellieren vermitteln, das Übersetzen in

die leistungsfähige Sprache der Mathematik und das Finden verschiedener, angemessener Lösungswege. Gerade mit Fermi-Aufgaben gelingt dieser Unterricht.[159]

> *„Bei den sogenannten Fermi-Fragen (auch Fermi-Aufgaben) geht es um kreative Lösungsansätze bei zunächst fehlenden oder nur vagen Informationen mit dann entsprechend unscharfen Ergebnissen.“*[160]

Der Ursprung der Fermi-Fragen liegt bei Enrico Fermi, Physik-Nobelpreisträger 1938[161], mit der wohl bekanntesten Fermi-Fragen: „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“. Der in Rom geborene Kernphysiker hat viele theoretische Arbeiten zur Festkörper- und Quantenphysik verfasst. Aufgrund seiner spontan guten Abschätzungen bei verschiedenen Ereignissen und Beobachtungen, die er trotz mangelnder Informationen sehr gut berechnen konnte, wurden die unten beschriebenen Mathematikaufgaben nach ihm benannt.[162] Um eine Fermi-Frage lösen zu können, ist es notwendig, die Frage in Unterprobleme aufzuspalten, um zu einer guten Näherungslösung zu gelangen. Wichtig dabei ist, dass stets eine reale Situation im Mittelpunkt steht, die nach mathematischen Gesichtspunkten analysiert wird. Verabschieden muss man sich dabei jedoch von genauen Ergebnissen, was anfänglich zur Irritation von Schülerinnen und Schülern führen kann. Gut gelingen können Fermi-Aufgaben meist, wenn sie in Partner- bzw. Gruppenarbeit eingeführt werden und ein für die Kinder interessantes Foto gewählt wird.[163]

Das unten abgebildete Foto stellt einen Fallschirmspringer dar, der über dem Salzkammergut auf einem Heißluftballon gelandet ist. Die passende Frage dazu lautet, wie viel Liter Luft in diesem Heißluftballon sind. Diese Aufgabe ist für die 8. Schulstufe gedacht. Der obere Teil des Heißluftballons könnte mit einer Halbkugel modelliert werden, der untere Teil mittels Drehkegel.

[159] vgl. Herget, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 258.
[160] Herget, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 263.
[161] vgl. Herget, Klika, 2003, S. 18.
[162] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 3.
[163] vgl. Herget, in: Fritz, Schmidt, 2009, S. 263-265.




**ABBILDUNG 34: Herget, Klinka, 2003, S. 15.**

Erfahrungsberichte aus der Praxis zeigen, dass sich die Schülerinnen und Schüler aktiv am Unterricht (meist in Gruppenarbeit) beteiligen. Sie versuchen Alltagerfahrungen und Größenvorstellungen zu nutzen und zerlegen die beantwortbaren Fragen in kleine Teilprobleme, die sie bearbeiten und anschließend durch Plausibilitätsbetrachtungen kontrollieren. Unterrichtsinhalte, die noch nicht eingeführt wurden, stellen in der Regel kein Problem dar, sondern werden auf entdeckende Weise erarbeitet und angewandt. Die SchülerInnengruppen nehmen die Arbeit selbst in die Hand und entwickeln eigene Lösungswege. Die anfängliche Irritation aufgrund der Tatsache, dass es keine konkreten Ergebnisse zum Kontrollieren der Aufgabe gibt, lässt mit der

Zeit nach und alle Gruppen entwickeln handfeste Ergebnisse, bei denen sie die Mathematik zu Umwelterschließung genutzt haben.[164]

In den Fermi-Aufgaben steckt großes Potential und sie eignen sich gut für den zeitgemäßen Mathematikunterricht. Fermi-Aufgaben tragen in vielerlei Hinsicht zur Verbesserung des Mathematikunterrichts bei, indem sie

- den Unterricht öffnen,
- selbständiges und kooperatives Lernen fördern,
- das **Argumentieren** und **Kommunizieren** zum Ziel haben,
- den Umgang mit Unsicherheiten thematisieren,
- strategisches Arbeiten voraussetzen, um **Probleme lösen** zu können,
- die Realität ernst nehmen und diese mit Mathematik erfassen (**Modellieren**),
- zum Umgang mit Größen und Einheiten einen Beitrag leisten,
- Inhaltsbereiche verschiedener Schuljahre verbinden und
- den Blick für die Mathematik in der Welt öffnen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass Fermi-Aufgaben die Schülerinnen und Schüler herausfordern und zum Aufbau von Kompetenzen beitragen.[165] Gerade dieser Kompetenzaufbau liefert einen wesentlichen Beitrag im Hinblick auf die eingeführten Bildungsstandards. In der Regel sind (wie oben beschrieben) alle Handlungsbereiche eng miteinander verbunden. Gerade hier besteht in hohem Maße die Möglichkeit, die Schülerinnen und Schüler zum Argumentieren und Begründen anzuleiten, einem Handlungsbereich, der im herkömmlichen Unterricht leider nur selten zum Tragen kommt. MÜHLENFELD und HOLTMANN stellen fest, dass Fermi-Aufgaben ein Zusammenspiel von inhaltlichen (Ausführen von Grundrechnungsarten, Überschlagen, Ordnen, Vergleichen, Runden, Erfassen räumlicher Strukturen usw.) und prozessorientierten (Arbeiten im Team, Sprechen über Lösungswege, Fehler finden, Ideen präsentieren, Informationsbeschaffung) Kompetenzen darstellen.

[164] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 4.
[165] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 5-7.

Fermi-Aufgaben liefern in der Regel viele unterschiedliche Lösungen. In Gruppenphasen fällt es oft auf, dass sich Schülerinnen und Schüler nur selten von ihren eigenen Überlegungen lösen können, um sich auf Alternativlösungen der anderen Gruppenmitglieder einzulassen. Jedoch gerade die unterschiedlichen Überlegungen bieten einen guten Ansatzpunkt für einen mathematischen Diskurs, bei dem das Argumentieren und Interpretieren (H4) eine entscheidende Rolle spielt.[166]

GROTTENTHALER und VOGEL formulieren Kriterien für eine Diskurs anregende Fermi-Aufgabe:

> *„So eine Fermi-Aufgabe…*
>
> - *berührt inhaltlich den Erfahrungsraum der Schülerinnen und Schüler,*
> - *ist vielfältig bearbeitbar, ohne völlige Beliebigkeit zu erlauben,*
> - *schränkt trotzdem individuelle Modellannahmen nicht ein,*
> - *ist einfach formuliert und leicht zu verstehen und*
> - *lässt Abschätzungen durch konkretes Material veranschaulichen.“*[167]

Es gibt verschiedene Arten von Fermi-Aufgaben. Meist geht es darum, Anzahlen oder Größen durch Schätzen und Überschlagen zu ermitteln (z.B. Wie viele Nadeln hat ein Weihnachtsbaum?) bzw. Anzahlen und Größen in bestimmter Weise zu veranschaulichen (z.B. Wie lange bräuchte Bill Gates, um sein gesamtes Geld [40 Mrd. Dollar] aus dem Fenster zu werfen?). Bei vielen Aufgaben geht es darum, fehlende Daten aus plausiblen Annahmen und Alltagswissen zu gewinnen (z.B. Wie viele Personen stecken in einem 6 km langen Stau?) oder, wie bereits oben erwähnt, Daten aus Abbildungen (z.B. Fotos) zu bestimmen. Einzelne Aufgaben lassen sich auch durch Experimentieren (z.B. Wie lang ist die Linie, die du in deinem Leben schreiben

[166] vgl. Grottenthaler, Vogel, 2010, S. 9.
[167] Grottenthaler, Vogel, 2010, S. 10.

wirst?) bzw. experimentelles Überprüfen (z.B. Wie lang ist eigentlich ein Streifen Zahnpasta, der in einer Zahnpastatube steckt?) lösen.[168]

Viele Lehrpersonen und auch Eltern stellen die Frage, ob Fermi-Aufgaben „richtige Mathematik“ sind. Darauf antworten BÜCHTER, HERGET, LEUDERS und MÜLLER wie folgt:

> *„Fermi-Aufgaben sind tatsächlich eine ausgesprochen mathematische Art zu fragen, und zwar in folgendem Sinne: Hier sind es eben nicht unbedingt die Problemstellungen, die realistisch sein müssen; vielmehr geht es um die mathematischen Tätigkeiten: Diese sollen authentisch, ehrlich, echt sein – dazu gehören insbesondere die Strategie des Überschlagens, die Strategie des Zerlegens, das Modellieren insgesamt und der Umgang mit Größen.“*[169]

Fermi Aufgaben können flexibel im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Sie dienen zum problemorientieren Einstieg in ein Thema als auch in Übungs- und Wiederholungsphasen. Auch im offenen Unterricht lassen sich diese Aufgaben gut einsetzen, z.B. Portfolio-Arbeit (wachsender Fermi-Ordner), Stationenbetrieb und Wochenplanarbeit.[170]

Welchen Beitrag leisten Fermi-Aufgaben zur Differenzierung?

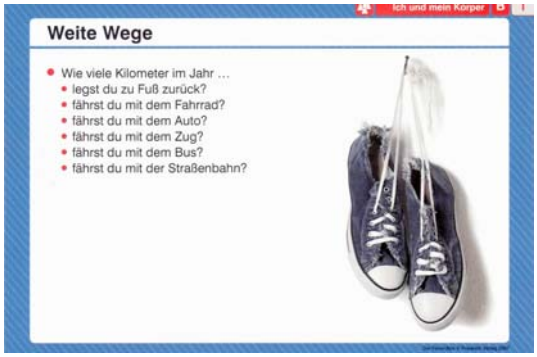
> *„In der Regel gibt es viele Wege, um eine Fermi-Aufgabe zu lösen. Jeder Schüler, jede Schülerin kann, ausgehend vom eigenen Kenntnisstand, zu einem Ergebnis kommen. Durch die vielen möglichen Bearbeitungswege kommen unterschiedliche Herangehensweisen, aber auch unterschiedliche Anspruchsniveaus zum Zuge. So wird der Mathematikunterricht auf natürliche Weise binnendifferenzierend.“*[171]

Fermi-Aufgaben zu finden ist nicht immer einfach. Nur wenn man „mit der mathematischen Brille“ durch die Welt läuft, kann man solche Aufgaben finden. Mittlerweile wurden von diversen Autoren viele dieser Aufgaben veröffentlicht. Die Abbildung unten soll dazu einige Anregungen geben.[172]

---

[168] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 8.
[169] Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 9.
[170] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 9, 19, 24.
[171] Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 10.
[172] vgl. Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007, S. 10.









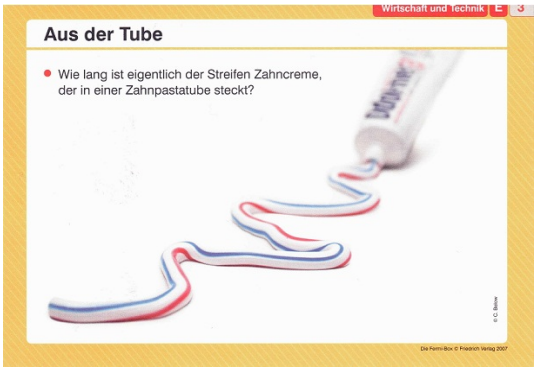













**ABBILDUNG 35: Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007.**

Diese Fermi-Aufgaben entstammen der Fermi-Box von Andreas BÜCHTER, Wilfried HERGET, Timo LEUDERS und Jan MÜLLER. Die Fermi-Box enthält 80 Aufgaben aus den Bereichen „Unsere Schule“, „Ich und mein Körper“, „Natur und Umwelt“, „Stadt, Land, Fluss,…“, „Wirtschaft und Technik“, „Berufswelt“, „Sport und Freizeit“ und „Ah! Oh! – Kurioses“. Jede Karte beinhaltet auf der Rückseite Tipps und Anleitungen zum Weiterdenken sowie hilfreiche Internetlinks.

Fermi-Aufgaben sind meist so konzipiert, dass sie für den Einsatz in der Unterstufe meist besser geeignet sind als in der Oberstufe. Großteils setzen sich die Inhalte mit Zahlen und Größen auseinander, die in den Schulstufen 5 bis 8 durchgenommen werden. Mittlerweile wurde aber auch eine Fermibox für höhere Klassenstufen entwickelt, um den Einsatz dieser Aufgaben auch in höheren Schulstufen zu gewährleisten (Die Fermibox. 8.-10. Klasse).[173]

## 6.4. AUFGABEN AUS DER ZEITUNG

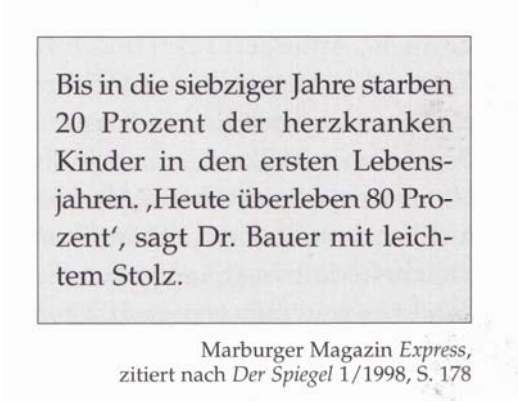
Viele Zeitungsartikel tragen Mathematik in sich. Man muss sich nur auf die Suche begeben, um jene mathematikhaltigen Zeitungsartikel für den Unterricht verwenden zu können. Sie dienen als Brücken zwischen der Mathematik und dem „Rest der Welt“. Oft wird mit Zahlen und Daten leichtfertig umgegangen, manchmal werden diese auch absichtlich manipuliert. Mit Zeitungsartikeln soll der Mathematikunterricht abwechslungsreicher gestaltet und der trockene oft abstrakte Mathematikunterricht aufgelockert werden.

Zeitungsartikel im Mathematikunterricht können durchwegs verschiedene Funktionen haben. Die Lernenden müssen Daten aus einem Text herausfiltern und mathematisch aufbereiten, fehlende Informationen beschaffen und mathematische Routinetätigkeiten in Problemstellungen mit realem Kontext anwenden. Sie müssen lernen, dass anstatt einer endgültigen Lösung eine Fülle an Lösungsmöglichkeiten auftreten kann. Dadurch soll vor allem das

[173] vgl. Ebersdorfer, 2011, S. 19.

passive SchülerInnenverhalten abgebaut werden. Bei den Lernenden sollen Neugierde und Interesse geweckt sowie Raum und Mut zur eigenen Lösung geschaffen werden. Sie sollen erkennen, dass reale Probleme stets sehr vielschichtig sind und Mathematik nur einen kleinen Ausschnitt darstellen kann. Wichtig dabei ist auch die Feststellung, dass Mathematik zwar nützlich sein kann, jedoch auch falsch verwendet oder sogar zur Manipulation missbraucht werden kann.[174]

> *„Besonders interessant erweisen sich Zeitungsausschnitte, wenn sie direkt zum (Nach-)Rechnen herausfordern und damit Anstoß zu intensiver Bearbeitung im Unterrichtsgespräch oder in Einzel- oder Partnerarbeit geben:*
> - *Stimmt die Behauptung des Zeitungsartikels wirklich?*
> - *Wo steckt der Fehler?*
> - *Wie ist es wohl zu diesem Fehler gekommen?*
> - *Und warum hat es keiner gemerkt?"*[175]


Bis in die siebziger Jahre starben 20 Prozent der herzkranken Kinder in den ersten Lebensjahren. ‚Heute überleben 80 Prozent', sagt Dr. Bauer mit leichtem Stolz.

Marburger Magazin *Express*, zitiert nach *Der Spiegel* 1/1998, S. 178

**ABBILDUNG 36: Herget, Scholz, 2006, S. 17.**

Abgesehen davon, dass Schülerinnen und Schüler in Zukunft kritischer die Zeitung lesen sollen, ist es wichtig, dass sie lernen mathematische Kritik zu begründen und zu formulieren. Gerade im Hinblick auf die Bildungsstandards können solche Aufgaben von Vorteil sein (H3, H4). Hilfreich dabei ist oft die Aufgabenstellung „Schreibe einen Leserbrief!".

[174] vgl. Herget, Scholz, 2006, S. 14-15.
[175] Herget, Scholz, 2006, S. 17.

Es ist nicht einfach Zeitungsartikel zu finden, die einen Bezug zur Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler darstellen. Über fehlerhafte Zeitungsartikel kann es aber gelingen, die Lernenden für gewisse Fragen und Probleme zu interessieren. Neben Zeitungsartikeln eignen sich außerdem Grafiken und Schaubilder. Meist stellen graphische Darstellungen alles auf einen Blick dar. Dieser sollte jedoch hinsichtlich Manipulationen geschult werden. Manipulationen sind durchwegs erlaubt oder sogar notwendig – gerade deshalb ist ein feinfühliger Umgang mit diesen erstrebenswert.[176]

Beispiel 1 und 2: Prozentrechnung (ab der 6. Schulstufe)



## Offenbar reich genug

**Zu dem Artikel „Landtagspräsident Milde empfiehlt Diätenerhöhung“ in der Ausgabe vom 8. Dezember:**

Die Landtagsabgeordneten in Niedersachsen werden 1995 zwei Prozent mehr an Diäten und Aufwandsentschädigungen bekommen, nachdem zum 1. Januar 1993 eine Erhöhung um 16,3 Prozent stattgefunden hatte. Dies sind in zwei Jahren 18,3 Prozent. Als Bürger kann man davon ausgehen, daß die Abgeordneten sehr verantwortlich mit den Landesfinanzen umgehen. Also ist das Land reich genug, um diese opulente Erhöhung, die sonst kein Arbeitnehmer bekommen hat, zu finanzieren. Dann ist aber wohl das dramatische Gerede von den Sparnotwendigkeiten nicht so ganz ernstzunehmen. Oder sollte die Devise gelten, wir sparen nur bei den anderen (z. B. Schulen, Hochschulen, Verwaltung), aber nicht bei uns?

Prof. Dr. Manfred Bönsch, Hannover

*Hannoversche Allgemeine Zeitung (GR)*

**ABBILDUNG 37: Herget, Scholz, 2006, S. 29.**

Aufgabenstellung: Zeige, dass sich Professor Bönsch irrt!

[176] vgl. Herget, Scholz, 2006, S. 18-19.




**ABBILDUNG 38: Herget, Scholz, 2006, S. 33.**

Aufgabenstellung: Was meinst du dazu? Schreibe einen Leserbrief!

Beispiel 3: Rationale Zahlen (ab der 6. Schulstufe)



# Bruchrechnung
## im Namen des Volkes

Ein Anwalt traute seinen Augen nicht: Am 19. Juni verkündete das Landgericht Köln im Verfahren 19S 485/84 ein Urteil mit dieser Kostenentscheidung: „Die Kosten des Rechtsstreits erster Instanz tragen die Klägerin zu 5/7. Die Beklagten als Gesamtschuldner zu 3/7." Die also zu acht Siebteln verpflichteten Prozeßparteien wiesen das Gericht auf die mathematische Bedenklichkeit seines Urteils hin und baten um Berichtigung. Der neue Bescheid erging am 15. August. An diesem Tag wurde beschlossen: „Wird der Tenor des am 19. Juni verkündeten Urteils wegen einer offenbaren Unrichtigkeit dahin berichtigt, daß von den Kosten des Rechtsstreits erster Instanz die Klägerin 5/7, die Beklagten als Gesamtschuldner 2/5 tragen § 319 ZPO."
Nun, ließ der Anwalt wissen, fragen die durchaus zahlungswilligen Prozeßparteien sich, was geschieht, falls sie es noch einmal wagen, das Gericht auf die Problematik seiner Bruchrechnung hinzuweisen.

*Kölner Zeitung* vom 4.10.1985 (WJ+AK)

**ABBILDUNG 39: Herget, Scholz, 2006, S. 127.**

Aufgabenstellung: Warum sind die Entscheidungen des Gerichts für „mathematisch bedenklich" zu halten?

Beispiel 4: Funktionen (ab der 8. Schulstufe)



**Bailey krönt sein Gold mit Weltrekord**

**Atlanta.** Er läßt keine Vergleiche gelten. „Ich bin Donovan Bailey", sagte der 28jährige nach seinem Sieg im 100-m-Lauf. „Ich bin Donovan Bailey, ich habe die Goldmedaille, ich bin Weltrekord gelaufen." 9,84 Sekunden lief der dunkelhäutige, auf Jamaika geborene und für Kanada laufende Sprinter im olympischen Finale. Er steigerte damit die bisherige Bestmarke von Leroy Burrell aus den USA um eine Hundertstelsekunde.

*Hildesheimer Allgemeine Zeitung* vom 29.7.1996

**ABBILDUNG 40: Herget, Scholz, 2006, S. 114.**

Neben den Vorteilen gibt es natürlich auch Nachteile und Grenzen im Zusammenhang mit diesen Aufgabenstellungen. Der Zeitbedarf im Unterricht ist enorm hoch. Außerdem ist der Einsatz auch mit großem Aufwand außerhalb der Unterrichtsstunde verbunden. Artikel müssen gesammelt, geordnet, zusammengestellt, mit Aufgabenstellungen versehen und kopiert werden.[177]

[177] vgl. Herget, Scholz, 2006, S. 24-25.

# 7. EIGENE BEISPIELE FÜR DEN BINNENDIFFERENZIERTEN UNTERRICHT

*„Differenzierte Aufgabenstellungen und Lernwege sind nicht nur ein Hebel zur Effektivierung des Lehrens und Lernens im Unterricht; sie bieten auch und zugleich die Gewähr dafür, dass der Umgang mit heterogenen Schülergruppen für die Lehrerseite leichter und produktiver wird.“*[178]

## 7.1. DIFFERENZIERTE ARBEITSBLÄTTER

*„Viele Lehrkräfte setzen auf Arbeitsblätter, um die Schüler/innen differenziert zu beschäftigen. Arbeitsblätter sollen unterschiedliche Zugänge zum Lernen eröffnen und den Schüler/innen sowohl Wahlmöglichkeiten als auch begabungsgerechte Arbeitsanlässe bieten. So weit die Theorie.“*[179]

In der Schulpraxis sieht dies leider oft anders aus. Arbeitsblätter werden oft eingesetzt, um die Schülerinnen und Schüler zu beschäftigen, um eben Gelerntes zu memorieren und zu rezipieren (z.B. Lückentexte). Schlecht gestaltete Arbeitsblätter, die nicht zum selbständigen Denken und produktiven Arbeiten anregen, neigen auch oft dazu, Stationslernen und Planarbeit zu zerstören, da sie mit verbindlicher Informationsgewinnung, -verarbeitung und -anwendung wenig zu tun haben. Verstärkt wird die negative Haltung der Kinder zu Arbeitsblättern meist durch die große Flut an Arbeitsblättern. Der Einsatz von Arbeitsblättern soll jedoch nicht untersagt werden, sondern darauf abzielen, Arbeitsblätter so einzusetzen, dass die Schülerinnen und Schüler möglichst vielschichtig zum Denken, Arbeiten, Recherchieren, Kommunizieren, Kooperieren, Experimentieren und Problemlösen angeregt werden. Neben

[178] vgl. Klippert, 2010, S. 53.
[179] Klippert, 2010, S. 84.

einem übersichtlichen Layout eines Arbeitsblattes sollte außerdem gewährleistet sein, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, sich selbst zu kontrollieren und die Dokumentation des gesamten Arbeitsprozesses festzuhalten.[180]

Im binnendifferenzierten Unterricht und speziell in der Verwendung von Arbeitsblättern ist eine Differenzierung nach Schwierigkeitsgraden wünschenswert. Dabei erhalten die Lernenden Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad, in der Regel zwei bis drei verschiedene Anforderungsstufen, die in „leicht", „mittel" und „schwer" eingeteilt werden, wobei die Auswahl vom Schüler/von der Schülerin selbst erfolgen kann.[181]

Zum Differenzieren über Arbeitsblätter wurden drei für meinen Unterricht brauchbare unterschiedliche Typen entwickelt:

a) Differenzierung nach zwei Schwierigkeitsgraden (meist in tabellarischer Form)

Beispiel 1: Rechnen mit ganzen Zahlen (7. Schulstufe)

| SCHWIERIGKEITSGRAD 1 | SCHWIERIGKEITSGRAD 2 |
|---|---|
| Verbindung der 4 Grundrechnungsarten in Z | |
| 1.) $(+36):(-12)-(+25)+(+28):(-7)=$<br><br>2.) $(-24):(+6)+(+3)\cdot(-5)-(+15):(-3)=$<br><br>3.) Addiere -15 zum Produkt der Zahlen - 4 und + 3!<br><br>4.) Frau Reimer hat auf ihrem Konto 734,30 €. Folgende Abbuchungen werden vorgenommen: 18,90€; 284,75€; 447,23€. Berechne den neuen Kontostand! | 1.) $(-14)-[(-8)+(+12):(-3)-(+16):(-8)]-(-27):(+9)=$<br><br>2.) $(-121):\lvert-11\rvert-\lvert-96\rvert:(-12)-156:\lvert-13\rvert+64\cdot\lvert-8\rvert=$<br><br>3.) Dividiere die Summe der Zahlen - 24 und - 12 durch das Produkt der Zahlen - 2 und - 9!<br><br>4.) Der römische Kaiser Augustus starb 14 n. Chr. Er wurde 77 Jahre alt. Berechne sein Geburtsjahr. Wie viele Jahre sind seit seiner Geburt vergangen (2013)? |

[180] vgl. Klippert, 2010, S. 84-85.
[181] vgl. Sylvester, 1998, S. 6.

Beispiel 2: Konstruktion von Dreiecken – Kongruenzsätze (6. Schulstufe)

| SCHWIERIGKEITSGRAD 1 | SCHWIERIGKEITSGRAD 2 |
|---|---|
| Konstruktion von Dreiecken | |
| 1.) a = 34 mm; b = 57 mm; c = 62 mm<br>2.) c = 4 cm; b = 3,8 cm; α = 30°<br>3.) c = 10 cm; α = 75°; β = 60°<br>4.) a = 3,8 cm; β = 65°; γ = 30° | 1.) a = 40 mm; c = 73 mm; β = 75° (ohne Winkelmesser)<br>2.) c = 53mm; α = 45°; γ = 60°<br>3.) a = 60 mm; b = 40 mm; α = 52°<br>4.) a = 6,9 m, c = 9,3 m, γ = 82° (Maßstab 1:100) |

Die Differenzierung nach zwei Schwierigkeitsgraden bietet die Möglichkeit, dass die Lernenden jederzeit zwischen den einzelnen Schwierigkeitsgraden wechseln können. Ist also ein/e Schüler/in mit einer Aufgabe unter- bzw. überfordert, kann er/sie zum parallel angebotenen Schwierigkeitsgrad wechseln.

b) Differenzierung nach drei Schwierigkeitsgraden

Beispiel: Verbindung der 4 Grundrechnungsarten (5. Schulstufe)

| SCHWIERIGKEITSGRAD 1 |
|---|
| Verbindung der 4 Grundrechnungsarten in $\mathbb{N}$ |
| 1. $3 \cdot 7 + 8 \cdot 6 - 18 : 2 =$<br>2. $3 \cdot (13 + 7 - 1) + 5 \cdot 6 =$<br>3. Setze Klammern so ein, dass das Ergebnis stimmt:<br>$5 + 4 \cdot 2 = 18$<br>4. Subtrahiere die Zahl 225 von der Summe der Zahlen 193 und 407!<br>5. Addiere die Zahlen 231 und 765 und multipliziere die Summe mit 29! |

| Schwierigkeitsgrad 2 |
| --- |
| Verbindung der 4 Grundrechnungsarten in $\mathbb{N}$ |
| 1. $3 \cdot (13 + 7 - 1) + 5 \cdot 6 =$<br>2. $(96 : 4 + 12) : 9 + 48 : 4 - 14 =$<br>3. Setze Klammern so ein, dass das Ergebnis stimmt:<br>$6 \cdot 5 + 4 : 2 - 3 = 24$<br><br>4. Subtrahiere von der größten dreistelligen Zahl die Summe der kleinsten zweistelligen Zahl und kleinsten einstelligen Zahl.<br>5. Das Produkt der Zahlen 731 und 281 ist um die Differenz dieser Zahlen zu vergrößern! |

| Schwierigkeitsgrad 3 |
| --- |
| Verbindung der 4 Grundrechnungsarten in $\mathbb{N}$ |
| 1. $(96 : 4 + 12) : 9 + 48 : 4 - 14 =$<br>2. $47 \cdot (54 - 16 \cdot 2) + 54 - 132 : 11 =$<br>3. Das um 24 vermehrte Produkt der Zahlen 23 und 12 ist durch 15 zu dividieren!<br>4. Setze die Klammern so ein, dass die Gleichung stimmt:<br>$47 - 5 \cdot 3 + 18 - 6 : 3 = 8 \cdot 2 + 5 - 4 \cdot 5$<br><br>5. Richtig oder falsch? Gib ein passendes Beispiel an!<br>„Der Quotient bleibt gleich, wenn man den Dividenden mit einer Zahl multipliziert und den Divisor durch die gleiche Zahl dividiert." |

Die Differenzierung nach drei Schwierigkeitsgraden erfolgt durch drei einzelne, meist farblich unterschiedliche Arbeitsblätter. Der Kernstoff jedes einzelnen Unterrichtsthemas spiegelt sich im Schwierigkeitsgrad 1 wider. Auch hier besteht die Möglichkeit, bei Unter- bzw. Überforderung den Schwierigkeitsgrad zu wechseln. Die besondere Stärke liegt darin, dass in

den höheren Schwierigkeitsgraden jeweils Aufgaben aus den niedrigeren Schwierigkeitsgraden stecken, um die Motivation zu steigern bzw. sinnloses Abarbeiten von weiteren Übungsaufgaben zu vermeiden.

c) Differenzierung nach Symbolen am Beispiel Bruchgleichungen

## Bruchgleichungen

Beginne mit den ☺ Aufgaben!
Kannst du diese Aufgaben lösen, dann rechne die ☼ Beispiele.
Kannst du die ☺ Aufgaben nicht lösen, dann rechne die ♫ Aufgaben. Hast du die ☺ und ♫ Aufgaben gelöst, darfst du die ☼ Aufgaben weglassen. Vergiss die **Definitionsmenge** nicht!

1. Kreuzweises Multiplizieren

☺ $\frac{x-3}{x-5} = \frac{x+7}{x+6}$

♫ $\frac{6x+2}{3x} = \frac{8x+5}{4x+1}$

☼ $\frac{4}{x-4} = \frac{5}{2\cdot(4-x)}$

2. Bruchgleichungen mit Klammerausdrücken

☺ $\frac{2}{x+5} + \frac{2}{x-5} = \frac{20}{(x-5)\cdot(x+5)}$

♫ $\frac{2x}{x+4} + \frac{x+5}{2\cdot(x+4)} = \frac{15}{x+4}$

☼ $\frac{x+2}{2\cdot(x+1)} = 1 - \frac{x+8}{3\cdot(x+1)}$

3. Bruchgleichungen für Spezialisten

☺ $\frac{a+5}{(a-5)^2} = \frac{2}{a+5} - \frac{a}{(a-5)\cdot(a+5)}$

♫ $\frac{s+5}{s-5} - \frac{s-5}{s+5} = \frac{40}{s^2-25}$

☼ $\frac{2}{2x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{28}{(x-1)\cdot(x+2)}$

Die Differenzierung nach Symbolen ermöglicht den Schülerinnen und Schülern ein gezieltes Üben auf ihrem persönlichen Leistungsniveau. Alle Schülerinnen und Schüler beginnen mit den ☺ Aufgaben. Wenn diese richtig gelöst sind bzw. die Schülerinnen und Schüler feststellen, dass diese gut zu meistern waren, gehen sie zu den ☼ Aufgaben weiter. Die ☼ Aufgaben überschreiten in der Regel den Kernstoff und dienen zur Forderung der Schülerinnen und Schüler. Ist das erste Ergebnis jedoch falsch bzw. wird zusätzliche Übung benötigt, gehen sie zu den ✌ Aufgaben. Das Anforderungsniveau der ✌ Aufgaben ist ebenfalls im Bereich des Kernstoffs angesiedelt.

## 7.2. OFFENE AUFGABEN

> *„Aufgaben, die das Gehen eigener Lernwege in besonderem Maße fördern, sind Aufgaben, die in ihrer Struktur eine gewisse Offenheit besitzen, Aufgaben, bei denen die Schüler (!) während der Bearbeitung eine gewisse Autonomie erfahren.“*[182]

Die Erstellung der folgenden offenen Aufgaben wurde durch Volker ULMs „Mathematikunterricht in der Sekundarstufe für individuelle Lernwege öffnen“ inspiriert. Alle abgebildeten Aufgaben wurden bereits in der Sekundarstufe I eingesetzt und erfolgreich erprobt.

[182] Ulm, 2005, S. 25.

## 7.2.1. ABSCHÄTZEN

**Hundertwasser**

Du siehst das Gebäude der Fernwärme Wien in Spittelau.

- Wie groß ist ungefähr der Rauminhalt der goldenen Kugel?
- Handelt es sich eindeutig um eine Kugel?
- In welcher Höhe befindet sich die Kugel?

Erkläre deine Überlegungen.



Diese Aufgabe wird auf der 8. Schulstufe eingesetzt, Voraussetzung dafür ist die Volumsberechnung der Kugel (Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können[183]), die in der 4. Klasse erarbeitet wird. Bei dieser Aufgabe geht es darum, bereits erworbenes Wissen an einer Anwendungsaufgabe anzuwenden. Es kommt zu einem Modellbildungsprozess, in dem Schülerinnen und Schüler den geometrischen Sachverhalt analysieren, vereinfachen und in die Sprache der Mathematik übersetzen müssen. Dieses mathematische Problem müssen sie mit dem ihnen zur Verfügung stehenden Wissen bearbeiten und anschließend interpretieren. Dabei spielen sowohl der Handlungsbereich „Darstellen, Modellbilden“, indem die Schülerinnen und Schüler geometrische Sachverhalte in eine mathematische Darstellung übertragen und mit anderen mathematischen Inhalten in Verbindung setzen sollen (I2 H1 K2), wie auch die Handlungsbereiche „Interpretieren“ und „Argumentieren, Begründen“, indem die Schülerinnen und Schüler Aussagen zur Angemessenheit und Aussagekraft kontextbezogener Interpretationen von

[183] BMUKK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 9.

geometrischen Körpern machen und bewerten wie auch unzutreffende mathematische Argumente bezüglich geometrischer Eigenschaften begründen, warum eine geometrische Argumentation bzw. Begründung unzutreffend ist (I2 H3 K3, I2 H4 K3), eine wesentliche Rolle.

Für die Erstellung der Aufgabe war es von besonderer Bedeutung, Informationen wegzulassen, um nicht die klassischen Schulbuchbeispiele nachzuahmen, sondern den Aufforderungscharakter der Aufgabe zu erhöhen. Für leistungsschwächere bzw. gering motivierte Schülerinnen und Schüler kann diese Aufgabe durch zusätzliche Informationsbeschaffung mittels Internet erleichtert werden.

Probleme können bei solchen Aufgaben nur entstehen, wenn die Lernenden nicht daran gewöhnt sind, mit fehlenden Informationen in mathematischen Aufgaben umzugehen, da die Schülerinnen und Schüler dann oft dazu neigen, diese als unlösbar einzustufen.

### 7.2.2. EIGENSCHAFTEN ERKENNEN

**Schützenhaus (Otto Wagner)**

- Entdecke möglichst viele geometrischen Eigenschaften der Fassade!
- Überlege dir interessante Fragen zu dem Muster und lasse sie von deiner/deinem NachbarIn beantworten!
- Präsentiere mit deiner/deinem NachbarIn die schönsten Ergebnisse der gesamten Klasse!



Diese Aufgabe wird ab der 5. Schulstufe eingesetzt, Voraussetzung dafür sind die Begriffe Rechteck, Quadrat, Symmetrie und Orthogonalität (ausgehend von Objekten der Umwelt, durch Idealisierung und Abstraktion geometrische Figuren und Körper sowie ihre Eigenschaften erkennen und beschreiben können, aufbauend auf der Grundschule Kenntnisse über grundlegende geometrische Begriffe gewinnen, einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können[184]), die ab der 1. Klasse erarbeitet werden. Bei dieser Aufgabe geht es darum, Objekte zu untersuchen und mathematische Eigenschaften zu entdecken und zu erforschen. Dabei kommen der Handlungsbereich „Interpretieren", indem die Schülerinnen und Schüler und Schüler geometrische Eigenschaften und Beziehungen beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten, wobei auch Verbindungen zu anderen mathematischen Inhalten hergestellt werden müssen (I2 H3 K2), sowie der Handlungsbereich „Argumentieren, Begründen", indem die Schülerinnen und Schüler mathematische Argumente nennen, die für eine bestimmte geometrische Darstellung und Eigenschaft sprechen, zum Tragen (I2 H4 K1).

### 7.2.3. FRAGEN STELLEN

Familie Schober möchte in die Therme Wien fahren und informiert sich über die Preise.

| Tarife | Kästchen | Kabine | Mitbenützer | |
|---|---|---|---|---|
| | Erwachsener | Erwachsener | Erwachsener | Kind |
| bis zu 3 Stunden | € 15,50 | € 17,50 | € 14,50 | € 9,50 |
| jede weitere Minute bis zu 6 Stunden - Erwachsener 4 Cent, Kinder 2 Cent | | | | |
| Tageskarte ab 6 Stunden | € 22,70 | € 24,70 | € 21,70 | € 13,10 |
| Aufpreis Sauna | € 7,50 | € 7,50 | € 7,50 | |
| Aufpreis Solewelt | € 8,00 | € 8,00 | € 8,00 | |

Überlege dir hierzu Fragen und beantworte sie!

[184] BMBWK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 6.

Diese Aufgabe wird ab der 5. Schulstufe eingesetzt, Voraussetzung dafür sind die vier Grundrechnungsarten (mit den positiven rationalen Zahlen Rechnungen mit leicht abschätzbaren Ergebnissen durchführen und zur Lösung von Problemen in Sachsituationen vielfältig anwenden können[185]), die ab der 1. Klasse erarbeitet werden. Bei der oben dargestellten Aufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler eine alltägliche Situation bearbeiten, indem sie lernen, Informationen aus Tabellen herauszulesen und sinnvolle Rechnungen damit anzustellen.

> *„Die Schüler (!) müssen zuerst die Situation durchdringen und verstehen, bevor sie Fragen formulieren und rechnen können.“*[186]

Das Hauptaugenmerk dieser Aufgabe liegt im Handlungsbereich „Interpretieren“ und „Rechnen, Operieren“, da die Schülerinnen und Schüler Zahlenwerte aus Tabellen ablesen und diese anschließend mit Rechenoperationen verbinden und im jeweiligen Kontext deuten sollen (I1 H3 K2, I1 H2 K1). Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler werden auch im Bereich „Argumentieren, Begründen“ gefordert, indem sie mathematische Argumente nennen bzw. Begründungen angeben, die für einen arithmetischen Lösungsweg oder eine bestimmte Lösung sprechen. Die Offenheit der Aufgabe ist vor allem auch dadurch gekennzeichnet, dass keine Familiengröße wie in herkömmlichen Sachaufgaben angegeben wird und dies somit sämtliche gängige Familienkonstellationen zulässt. Weiters wird vermieden, dass die Schülerinnen und Schüler von vornherein Fragen abarbeiten, deren Lösung meist aus der vorangegangenen Unterrichtssequenz durch „Nachahmung“ zu ermitteln ist. Die Differenzierung kommt hier sehr stark zum Tragen, da leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, sich an komplexere Probleme heranzuwagen, im Gegensatz dazu bieten diese Aufgaben auch leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, einfache, alltagstaugliche Fragestellungen zu erfinden und zu lösen.

[185] BMUKK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 5.
[186] Ulm, 2005, S. 26.

## 7.2.4. STELLUNG NEHMEN

Die wohl bekannteste und sich am hartnäckigsten haltende Geschichte über die deutsche Fußballlegende **Horst Szymaniak** ist diejenige über seine Vertragsverhandlungen. Dabei soll ihm sein Vereinspräsident angeboten haben, seine Bezüge deutlich zu erhöhen, worauf der Spieler angeblich antwortete: ***„Ich will ein Viertel, nicht nur ein Drittel mehr“***.[187]

Nimm Stellung zum mathematischen Gehalt dieser Meldung.

Diese Aufgabe beinhaltet eine Verständnisfrage zum Thema Bruchrechnung und ist ab der 6. Schulstufe einsetzbar (Festigen und Vertiefen der Fähigkeiten beim Arbeiten mit positiven rationalen Zahlen, um vielfältige und komplexere Probleme in Sachsituationen bearbeiten zu können[188]). Solche Aufgaben kommen nur selten im Unterricht vor und sind auch nur vereinzelt in Schulbüchern zu finden. Gerade der Bereich „Argumentieren, Begründen“ gelangt nur spärlich in den Mathematikunterricht, Schülerinnen und Schüler werden nur selten aufgefordert komplexere Aussagen in Worte zu fassen. Dieser Aufgabentyp muss vermehrt in den Unterricht einfließen, um Schülerinnen und Schüler zu ermutigen, zum mathematischen Gehalt von Aussagen Stellung zu nehmen und zutreffende bzw. unzutreffende Argumente zu begründen (I1 H4 K3).

Aufgaben dieses Formats müssen allmählich an die Schülerinnen und Schüler herangebracht werden und werden in der Regel nicht sofort von allen Lernenden beherrscht, da sie nicht unter den klassischen Typ „Schulbuchbeispiel“ fallen. Wenn Schülerinnen und Schüler jedoch gezielt auf solche Aufgaben aufmerksam gemacht werden, kann in weiterer Folge die

[187] www15.
[188] BMUKK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 6.

Aufgabe gestellt werden, selbst Texte, Aussagen und Artikel zu suchen, deren mathematischer Gehalt untersucht werden kann.

### 7.2.5. AUFGABEN VARIIEREN

$$3\frac{1}{4}-4\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}-5\frac{1}{3}=$$

a) Ändert sich das Ergebnis, wenn man Klammern setzt?
b) Wie viele verschiedene Klammersetzungen sind möglich, wie viele verschiedene Ergebnisse werden dadurch erreicht?
c) Was ändert sich, wenn man zwei Zahlen vertauscht?
d) Was ändert sich, wenn man das mittlere Pluszeichen durch ein Minus-, Mal- bzw. Geteilt-Zeichen ersetzt?
e) Erfinde eine Geschichte zur Aufgabe!

Die vorgestellte Aufgabe ist ab der 7. Schulstufe einsetzbar. Im Wesentlichen geht es darum, die Grundrechnungsarten mit ihren Vorrangregeln zu beherrschen (die Regeln für das Rechnen mit rationalen Zahlen wissen und bei Rechenbeispielen [mit einfachen Zahlen] mit Sicherheit anwenden können[189]). Mit dieser Aufgabe wird verfolgt, eine gewisse Veränderung in den herkömmlichen Unterricht zu bringen, indem die Schülerinnen und Schüler nicht dazu aufgefordert werden, Schulbuchbeispiele abzuarbeiten, sondern vielmehr die Möglichkeit haben, ihre Aufgaben nach individuellen Leistungsständen selbständig zusammenzustellen.

[189] BMUKK, Lehrplan für Mathematik, 2000, S. 7.

ULM empfiehlt herkömmliche Schulbuchbeispiele mit zusätzlichen Variationen der Aufgabenstellungen zu erweitern und dadurch eine Verbindung von herkömmlichen Buchbeispielen und offenen Aufgaben zu erstellen.[190]

Diese Aufgabe verbindet mehrere Handlungsebenen (Darstellen, Modellbilden, Rechnen, Operieren, Interpretieren). Die Lernenden müssen sowohl gegebene arithmetische Sachverhalte in eine mathematische Darstellung bringen wie auch Aussagen über die Stärken und Schwächen mathematischer Darstellungen machen (I1 H1 K1, I1 H1 K3). Wenn dieses mathematische Modell erstellt ist, müssen die Schülerinnen und Schüler elementare Rechenoperationen mit konkreten Zahlen durchführen und mit anderen mathematischen Inhalten in Verbindung bringen können. Es müssen Aussagen zur Abfolge und Wirkung arithmetischer Operationen gemacht und bewertet sowie Rechenwege dokumentiert werden (I1 H2 K2, I1 H2 K3).

Durch das Erfinden einer Geschichte sollen die Lernenden Zahlen aus der arithmetischen Darstellung ablesen und Rechenoperationen im jeweiligen Kontext deuten (I1 H3 K1). Mathematischen Phantasien sind hier keine Grenzen gesetzt, jedoch müssen die Schülerinnen und Schüler nach der Ideensammlung versuchen diese gegebenenfalls zu ordnen, zu bewerten und auf ihre Durchführbarkeit zu untersuchen. Schülerinnen und Schüler müssen dabei auch lernen, dass es Variationen von Aufgaben gibt, die nicht sinnvoll oder schlichtweg falsch sind.

### 7.2.6. AUFGABEN ERFINDEN

In der Regel finden Schülerinnen und Schüler nach Einstieg in ein Unterrichtsthema diverse Festigungsaufgaben in Schulbüchern. Diese sind sicherlich sinnvoll und sollen keinesfalls nur durch offene Aufgaben ersetzt werden. Jedoch erlauben sie eine Auflockerung des Unterrichts bzw. eine veränderte Sichtweise:

[190] vgl. Ulm, 2005, S. 44.

*„Die offenen Formulierungen erfordern einen Wechsel des Standpunkts, stellen sich in gewisser Weise über die konvergenten Aufgaben, indem sie deren Struktur durchleuchten, und fördern mathematische Kreativität und Phantasie. Sie geben Anlass zur Überlegung: „Wie hat denn der Schulbuchautor (!) die Aufgaben im Buch eigentlich gemacht?“*[191]

Erfinde eigene Beispiele zum Thema Gleichungen:

a) Stelle eine Gleichung mit der Lösung x = 6 auf!

b) Erfinde eine Textaufgabe, die auf eine Gleichung mit der Lösung x = 6 führt!

c) Schreibe Gleichungen auf, die 1) genau eine Lösung, 2) beliebig viele Lösungen, 3) keine Lösung haben!

Diese Aufgabe zum Arbeiten mit Variablen ist ab der 7. Schulstufe einsetzbar. Nach Aufstellung einer passenden Gleichung muss diese durch eine Rechnung kontrolliert werden, wobei elementare Rechenoperationen mit Variablen zum Einsatz kommen und gegebenenfalls Aussagen zur Abfolge, Zulässigkeit und Korrektheit algebraischer Operationen und Lösungswege gemacht sowie Rechenabläufe kontrolliert werden müssen (I2 H2 K1, I2 H2 K3).

Offene Aufgaben müssen nicht immer wieder selbst konzipiert werden. Es ist nicht gerade einfach, innovative und ungewöhnliche Aufgaben zu finden. Natürlich besteht auch die Möglichkeit vorhandene Schulbuchaufgaben zu verwenden. Diese fertig vorgegebenen Problemstellungen können durch eine Reihe von Veränderungen geöffnet werden, wie z.B. das Weglassen von Informationen, das Verwenden von Skizzen statt Texten oder durch Umformulieren und Variieren der Aufgabe.[192]

[191] Ulm, 2005, S. 42.
[192] vgl. Leuders, 2001, S. 118.

Um dies an einem Beispiel zu verdeutlichen, findet man unterhalb zuerst eine Darstellung eines geöffneten Beispiels und anschließend die dazu gehörende „klassische Schulbuchaufgabe“.

Um beim Anstreichen eines Zimmers den richtigen Farbton „Zitrus“ zu treffen, soll man laut Hersteller zur weißen Farbe etwa 2-3 % gelber Tönung hinzugeben. Für 10 $m^2$ braucht man laut Angaben auf dem Farbeimer etwa 4 Liter Farbe. Wie würdest du vorgehen, wenn du dein Zimmer vollständig im Farbton Zitrus streichen wolltest?

**ABBILDUNG 41: Leuders, 2001, S.122.**

Peters Zimmer ist 3,2 m lang, 2,3 m breit und 2,2 m hoch, hat eine Tür (2 m hoch, 1 m breit) und ein Fenster (1,2 m hoch, 1 m breit). Wie viel Farbe braucht man, wenn 4 l für 10 $m^2$ reichen?

**ABBILDUNG 42: Leuders, 2001, S.123.**

## 7.3. ICH-DU-WIR-AUFGABEN

Beim Großteil der oben genannten Aufgaben kann das „Ich, du, wir“ – Arbeitsprinzip angewandt werden, das die Grundlage im japanischen Mathematikunterricht bildet. Japan sei an dieser Stelle deshalb erwähnt, da es durch das sehr gute Abschneiden bei PISA und TIMSS immer wieder Beachtung findet. Bei diesem Grundschema geht es darum, neben dem Verständnis der Fragestellung eines gestellten Problems dieses in weiterer Folge durch Einzel- oder Kleingruppenarbeit zu lösen und sich mit den Mitschülerinnen und -schülern bzw. der gesamten Klasse auszutauschen. Es entsteht dabei ein Wechselspiel an Sozialformen, von der beginnenden Phase der Einzelarbeit (Individuelles Arbeiten - „Ich“) bis hin zum Austausch mit PartnerInnen (Kooperieren, Kommunizieren, Lernen mit einer/einem Partner/in -

„Du“) und der Präsentation vor den KlassenkameradInnen (Kommunikation im Klassenteam - „Wir“).[193]

Das Ich-Du-Wir-Prinzip ist auch unter dem Namen „Think-Pair-Share“ bekannt. Der Grundgedanke dieser Methode geht auf das dialogische Lernen von GALLIN und RUF zurück.

Der Ablauf dieser Unterrichtsmethode sieht wie folgt aus:

- Phase 0: Problem stellen: Die Lehrperson stellt ein Problem vor, welches hinreichend offen und zugänglich ist.
- Phase 1: ICH-Phase: Jede/Jeder Lernende entwickelt für sich mögliche Ideen zur Lösung. Wichtig dabei ist, dass man in dieser Phase keineswegs durch die Ideen anderer beeinflusst oder gar gestört wird. Klare Regeln sind in dieser Phase von besonderer Bedeutung – diese Phase sollte in Stillarbeit mit klarer Zeitvorgabe ablaufen.
- Phase 2: DU-Phase: Die Ideen werden mit dem Lernpartner/der Lernpartnerin (z.B. SitznachbarIn) ausgetauscht und besprochen. Dabei können die Ansätze verglichen werden. Der Austausch sieht auch vor, dass offene Frage festgehalten bzw. mögliche Fehlerquellen besprochen werden. Es heißt jedoch nicht, dass in dieser Phase die LernpartnerInnen bereits fertige Ergebnisse haben müssen. Das Zweiergespräch findet im „geschützten Raum“ statt und bietet die Möglichkeit, die eigene Antwort auszuprobieren.
- Phase 3: WIR-Phase: Die LernpartnerInnen präsentieren ihre Ergebnisse vor der Klasse (ggf. vor einer Gruppe). Verschiedene Wege können dadurch besprochen und verglichen werden. Die Lehrperson tritt hier den Lernenden als Moderatorin/Moderator zur Seite.[194]

[193] vgl. Verschraegen, Matschke, Gieseke, 2006, S. 14-25.
[194] vgl. Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 118-121.

**Der rote Stuhl**




Wie groß müsste ein Mensch sein, um auf diesem Stuhl Platz nehmen zu können?

a) Was meinst du dazu? Stelle eigene Überlegungen und Berechnungen an!

b) Erkläre deine Überlegungen deinem Nachbarn/deiner Nachbarin!

c) Präsentiert eure Ergebnisse der gesamten Klasse!

Die Stärke dieses Unterrichtsprinzips liegt vor allem in der Weiterentwicklung der Gruppenarbeit. Da alle Lernenden Ideen und Lösungsmöglichkeiten aufstellen müssen, ist die Gefahr gebannt, dass sich nur einige wenige Mitglieder einer Gruppe Gedanken zu einer gegebenen Aufgabenstellung machen.

Neben Fermi-Aufgaben gibt es auch immer wieder Aufgaben in Schulbüchern, die sich für die Gruppenarbeit oder hier im Speziellen für das Ich-Du-Wir-Arbeitsprinzip eignen. Die folgende Aufgabe ist für die 7. Schulstufe zum Thema Rechnen mit Termen konzipiert.

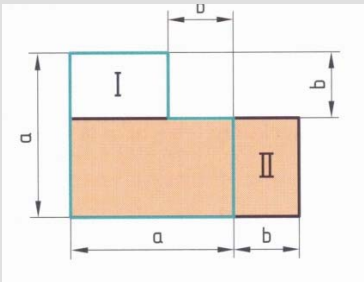
| | |
|---|---|
| Gebt eine Formel für den Flächeninhalt an!<br><br>1) orangefarbene Fläche<br>2) blau umrandete Fläche<br>3) Fläche I + II<br>4) Vergleicht einerseits die beiden Flächeninhalte von I und II miteinander und andererseits die Flächeninhalte von Aufgabe 1) und 2)! Was fällt auf? |  |

**ABBILDUNG 43: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2009, S. 92.**

Durch einfache Umformulierungen kann die Aufgabe im Ich-Du-Wir-Arbeitsprinzip erfolgen:

a) Bearbeite zuerst Punkt 1 bis 3 und stelle eigene Überlegungen und Berechnungen an!

b) Vergleiche deine Überlegungen mit deinem Partner/deiner Partnerin.

c) Präsentiert eure Ergebnisse der gesamten Klasse!

## 7.4. WOCHENPLAN ZUM THEMA ÄHNLICHKEIT

Wochenplanarbeit ist eine Form des offenen Lernens, welche Aufgabenstellungen vorsieht, die die Schülerinnen und Schüler im Zeitraum einer Woche absolvieren. Der Wochenplan beinhaltet in der Regel Pflicht-, Alternativ- und Zusatzaufgaben, wobei die Alternativaufgaben den Pflichtaufgaben inhaltlich nahe stehen und Zusatzaufgaben die individuellen Interessen der Lernenden ansprechen sollen.[195]

[195] vgl. Dostal, 2007, S. 51.

> *„Die Schüler/innen können bei dieser Unterrichtsmethode über Reihenfolge, Zeiteinteilung und mitunter über Sozialform und Bearbeitungsweise entscheiden.“*[196]

Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Wochenbeginn ein Informationsblatt und einen Übersichtsplan, der Aufschluss über die zu erledigenden Aufgaben geben soll. Im Informationsplan finden die Lernenden das Thema und ein Wiederholungsthema, die von ihnen verlangten Voraussetzungen und eine Legende zum Lesen des tabellarischen Übersichtplans. Der Wochenplan wird oft dazu verwendet, ein Thema zu wiederholen und zu festigen, er kann jedoch auch als Erarbeitungsmethode eingesetzt werden. Das Informationsblatt dient als Vereinbarung zwischen Schüler/in und Lehrperson. Verbindlich ist dadurch auch die Kette der Inanspruchnahme von Hilfen. Um die Selbständigkeit der Schülerinnen und Schüler zu fördern, soll bei Fragen zuerst im Schulbuch bzw. Schulübungsheft nachgeschlagen werden. Falls dies noch zu keiner Lösung des Problems führt, ist der/die Experte/in (TutorIn) zu Rate zu ziehen, bevor die Lehrperson zum Einsatz kommt. Der Einsatz von TutorInnen wir unten genauer beschrieben.

[196] Fürweger, 2005, In: Dostal, 2007, S. 51.

**Name**: **Klasse: III B**

**Wochenplan**: Montag, 19.4.2010 bis Donnerstag 22.4. 2010

**Thema**:

# Ähnlichkeit

**Voraussetzungen**:

- Verhältnisse und Proportionen
- Eigenschaften ähnlicher Figuren
- Ähnliche und kongruente Figuren
- Teilen von Strecken

**Wiederholung**: Die Längenmaße

**Pausen**: Nachdem du eine Aufgabe gelöst hast, hast du die Möglichkeit eine Knobelaufgabe aus der Box zu lösen.

**Legende**:

| | |
|---|---|
| ☺ | Einzelarbeit |
| ☺☺ | Partnerarbeit |
| SK | Selbstkontrolle (Lösungsblatt) |
| LK | Lehrerkontrolle |
| E | ExpertInnenbeispiele |
| P | Pflichtaufgaben |
| W | Wahlaufgaben |
| SG: 1,2,3 | Schwierigkeitsgrad |

Beispiele mit dem Schwierigkeitsgrad 3 sind ExpertInnen-beispiele und somit Wahlaufgaben

**Hilfen**: Schulbuch, Schulübungsheft, Experte/Expertin, Lehrerin

Im tabellarischen Übersichtsplan finden die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Aufgabenstellungen aufgelistet. Pro Aufgabe sind das Thema, die benötigten Materialien, der Hinweis auf Pflicht- bzw. Wahlaufgabe, die Sozialform und die Art der Kontrolle angegeben. In der letzten Spalte sollen die Lernenden eintragen, wann sie die Aufgabe erledigt haben. Zur besseren Übersicht für die Lehrperson, wird dieses Datum ebenfalls in einer Klassenlistenübersicht eingetragen.

Das Maß an Selbständigkeit soll auch dadurch gefördert werden, dass Schülerinnen und Schüler ihre Aufgaben selbst kontrollieren (Selbstkontrolle).

Mit Hilfe von vorbereiteten Lösungsblättern und -folien gelingt ein einfaches Kontrollieren, was nebenbei auch die Lehrperson entlastet.

Name:

| | Lernziele | Materialien | Pflicht oder Wahl | Sozial form | Kontrolle | Tag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ähnliche Figuren – Verhältnisgleichungen | Toto Spiel | W | ☺ ☺ ☺ / ☺ ☺ / ☺ | LK | |
| 2. | Verhältnisgleichungen | Angabekarte SG1, SG2, SG3 | P | ☺ / ☺ ☺ | SK | |
| 3. | Teilen einer Strecke | Arbeitsblatt differenziert | P | ☺ | SK | |
| 4. | Zentrische Streckung | SG:1 Buch 440, 446<br>SG:2 Buch 448ab<br>SG:3 Arbeitsblatt: Elefant | P | ☺ | SK | |
| 5. | Zentrische Streckung mit Geo Gebra | Computer | W | ☺ / ☺ ☺ | SK | |
| 6. | Grundbegriffe: zentrische Streckung | Quiz | W | ☺ / ☺ ☺ | LK | |
| 7. | Längenmaße | a) LUK – Kasten (SG 1 oder SG 2) oder<br>b) Klammerkarte (SG 1 oder SG 2) | P | ☺ / ☺ ☺ | SK | |

In Form von ExpertInnenaufgaben wird versucht, dem TutorInnenprinzip Folge zu leisten. Für Schülerinnen und Schüler ist es wichtig zu wissen, nicht alleingelassen zu werden, indem sie Unterstützung nicht nur von der Lehrperson, sondern auch von Mitschülerinnen und -schülern erhalten können. Schülerinnen und Schüler, die ihren KlassenkameradInnen Unterstützung geben, profitieren in doppelter Weise, einerseits stärkt die ehrenvolle Aufgabe einer/eines Tutorin/Tutors das Selbstwertgefühl, andererseits wird die Kommunikationsfähigkeit durch Erklären eines mathematischen Sachverhalts gefördert. Dabei kommt es verstärkt zu einem Einsatz verschiedener Kompetenzbereiche der Bildungsstandards.

> *„Wenn die Schüler/innen anspruchsvolle Lernaufgaben angehen und differenzierte Lernwege nutzen sollen, dann müssen sie zwingend eine Mut machende Arbeitsperspektive haben – eine Perspektive, die sicherstellt, dass bei auftretenden Problemen und Unsicherheiten Mitschüler/innen mit Rat und Tat zu Seite stehen werden. Die einzelne*

*Lehrkraft für sich allein ist nur zu schnell überfordert, wenn sie alle möglichen Schüler/innen zeitgleich unterstützen und erziehen soll.“*[197]

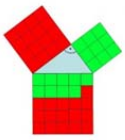
Die Buchaufgaben stammen aus dem Schulbuch von Ingrid LEWISCH (Mathematik 3 – Verstehen, Üben, Anwenden). Das angegebene Material ist im Anhang abgebildet. GeoGebra ist eine dynamische Geometriesoftware und steht allen Lehrpersonen sowie allen Schülerinnen und Schülern als Open Source Programm kostenlos unter www.geogebra.org zur Verfügung.

## 7.5. STATIONENBETRIEB ZUM THEMA PYTHAGORÄISCHER LEHRSATZ

Der Stationenbetrieb dient zum Vertiefen, Festigen und individuellen Üben. Die vorgegebenen Stationen müssen von allen Schülerinnen und Schülern durchlaufen werden, Verweildauer, Sozialform und Reihenfolge der Bearbeitung liegen in der Entscheidung der Lernenden. Doppelstunden eignen sich besonders gut für das Lernen an Stationen.

Unten ist ein Beispiel für die 7. bzw. 8. Schulstufe angeführt. In der 7. Schulstufe kann dieser Stationenbetrieb als Festigung des neu erarbeiteten Lehrstoffs dienen. In der 8. Schulstufe ist dieser für die Wiederholung des Themas „Pythagoräischer Lehrsatz“ geeignet. Das zugehörige Material ist im Anhang abgedruckt.

[197] Klippert, 2010, S. 174.

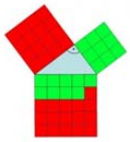


# 1. Station:

## Beweise zum Pythagoräischen Lehrsatz

Wähle einen der beiden Beweise: * leicht **schwer

| VORLAGE |  * ALTINDISCHER ERGÄNZUNGSBEWEIS |  ** „STUHL DER BRAUT" - BEWEIS |
|---|---|---|
| MATERIAL | 1 Arbeitsblatt, 1 Bleistift, 1 Lineal<br>JE 4 blaue/ JE 4 rote rechtwinklige Dreiecke, | 1 Arbeitsblatt, 1 Bleistift, 1 Geodreieck,<br>Schere, 2 rote Quadrate |
| HILFE | Du kannst die Vorlage zu Hilfe nehmen.<br>Arbeitet in der Gruppe! | Du kannst das Tafelmaterial zu Hilfe nehmen.<br>Arbeitet in der Gruppe! |



# 2. Station:

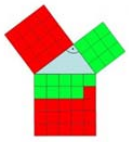
## Rechnen mit Quadratzahlen und Quadratwurzeln (LÜK)

Wähle eine der beiden LÜK-Karten aus:

gelb: Quadratzahlen

rot: Quadratwurzeln

| MATERIAL | 1 LÜK-Karte<br>1 LÜK-Kasten |
|---|---|
| HILFE | Arbeite mit deinem Partner/deiner Partnerin! |
| KONTROLLE | LÜK-Kasten-Bild durch Umdrehen |



## 3. Station:
## Berechnungen zum Pythagoräischen Lehrsatz

Wähle mindestens 2 Arbeitsblätter aus:

*: leicht

**: mittel

***: schwer

| | |
|---|---|
| MATERIAL | verschiedene Arbeitsblätter, Taschenrechner, Stifte, Klebstoff |
| HILFE | Arbeite alleine! |
| KONTROLLE | Lösungsblätter an der Tafel |

Tipp: Mache jeweils eine Skizze!

# 7.6. LERNKARTEI

Karteikarten werden gesammelt und in Übungs- und Freiarbeitsphasen den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt. In der Regel befinden sich darauf Wiederholungsaufgaben auf gesteigertem Niveau, es besteht aber auch die Möglichkeit, sich an neue Inhalte heranzuwagen.

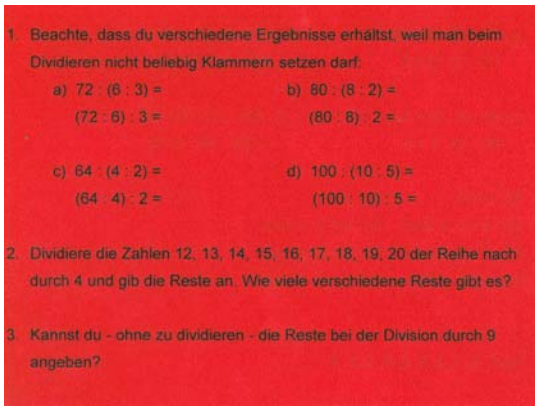
SYLVESTER betont, dass sich Lernende durch die Inszenierung der Lernumgebung häufiger eigengesteuert mit den Lerngegenständen auseinandersetzen. Dazu eignen sich neben dem Stationslernen, dem Lernen an Tages- und Wochenplänen sowie dem Buffet-Modell auch das Lernen mit Wendekarten und Spiele-Sammlungen.[198]

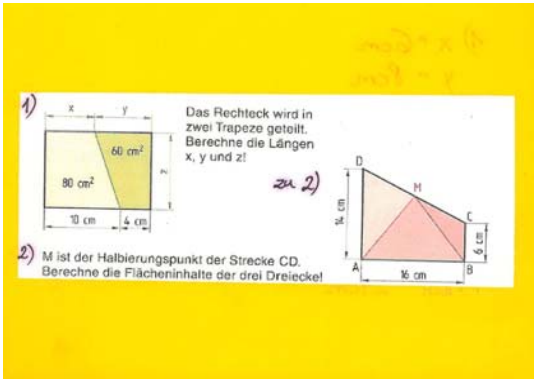
[198] vgl. Sylvester, 1998, S. 8.

Die Karteikarten werden von der Lehrperson erstellt und den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt. Dabei wird darauf geachtet, dass es sich vor allem um Aufgaben mit gesteigertem Anforderungscharakter handelt. Die Karteikarten sind farblich gekennzeichnet, in einzelne Kapitel unterteilt und schulstufenweise sortiert. Der Karteikasten mit den unterschiedlichen Aufgaben steht im Klassenraum all jenen Schülerinnen und Schülern zur Verfügung, die mit dem aktuellen Thema bereits unterfordert sind bzw. genügend geübt haben, obwohl andere Schülerinnen und Schüler noch mehr Zeit brauchen.

Die Schülerinnen und Schüler wählen eine Karte aus, die das aktuelle Unterrichtsthema oder auch ein völlig anderes Thema behandeln kann, und lösen die Aufgabe selbstständig. Zur Selbstkontrolle findet der/die Lernende die Lösung auf der Rückseite der Karteikarte.






Lernkarteien können auch von den Schülerinnen und Schülern selbst hergestellt werden:

> *„Statt fertiger Übungsaufgaben aus dem Schulbuch oder von Arbeitsblättern sollen die Schülerinnen und Schüler selbst Aufgaben mit Lösungen zu einem bestimmten Thema produzieren und austauschen. […] Durch Arbeitsteilung entsteht so mit geringem Aufwand ein individuelles Übungsmaterial von der Klasse für die Klasse.“*[199]

Dieses Aufgabenformat enthält eine natürliche Differenzierung, da die Lernenden Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad ihrer Aufgaben haben. In der Regel erweckt die Arbeit mit solchen Aufgabenkarteien eine höhere Arbeitsmotivation. Meist kann dadurch ein vertiefendes Verständnis für gewisse Aufgaben bewirkt werden. Gut zum Einsatz kommen Aufgabenkarteien in der Regel in Übungs- und Wiederholungsphasen. Die Aufgabenstellungen sollen in sich geschlossen sein und eine konkrete Lösung haben, um die eigenen Ergebnisse selbst später kontrollieren zu können. Somit können die Lernenden sich mit verschiedenen Aufgaben beschäftigen und gleichzeitig auch immer wieder an der Lernkartei arbeiten.[200]

[199] Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 60.
[200] vgl. Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 60-62.

# 8. ZUSAMMENFASSUNG

> *„PädagogInnen sehen ihre Aufgabe darin, Lernende in den Mittelpunkt zu stellen und auf deren Stärken und Bedarfe einzugehen.“*[201]

Lehrende nehmen die unterschiedliche Zusammensetzung der SchülerInnenschaft wahr und gehen damit konstruktiv um. Sie sind sich bewusst, dass Heterogenität im Unterricht zur Normalität gehört. Aufgrund des Bewusstwerdens dieser Vielfalt setzen sie gezielt unterschiedliche Medien, Materialien und Methoden im Unterricht ein, um den Lernenden möglichst viele unterschiedliche Zugänge und Methoden zu eröffnen. Lehrerinnen und Lehrer verfügen über eine diagnostische Kompetenz, d.h. sie können die Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kompetenzen der einzelnen Schülerinnen und Schüler einschätzen und auf Grundlage dessen ihren Unterricht gestalten. Sie sehen in der Heterogenität der Lernenden nicht nur eine Schwierigkeit, die es zu bewältigen gilt, sondern auch ein Chance, von der man profitieren kann. Neben der gesetzlichen Verankerung in den allgemeinen didaktischen Grundsätzen der österreichischen Lehrpläne sprechen auch noch andere Gründe für einen Einsatz von Individualisierung und Differenzierung im Unterricht.

Dem differenzierten Mathematikunterricht kommt in der vorliegenden Arbeit eine wesentliche Rolle zu. Es wird eine Vielzahl an Unterrichtsmethoden zum individualisierenden, kooperativen und gemeinsamen Mathematikunterricht auf der Sekundarstufe I dargestellt. Diese binnendifferenzierenden Maßnahmen sollen einen Beitrag dazu leisten, die Individuen entsprechend ihren jeweiligen Möglichkeiten angemessen zu fördern.

Bereits der Einstieg in ein Unterrichtsthema kann binnendifferenzierend gestaltet werden. Eine besondere Rolle jedoch kommt der Binnendifferenzierung in Übungs- und Festigungsphasen zu. Sogenannte Aufgabensets ermöglichen den Lernenden, auf eigenem Niveau zu üben. Auch

[201] Schnider et al., 2012, S. 8.

der Einsatz von Blütenaufgaben erscheint sinnvoll. Diese sind selbstdifferenzierend und ermöglichen den Schülerinnen und Schülern ihrem Leistungsniveau entsprechend die Bearbeitung von Teilaufgaben mit ansteigendem Anforderungscharakter. Um den Lernenden mehr Verantwortung für ihr eigenes Handeln abzuverlangen, ist die Verwendung von Lernprotokollen und Checklisten sehr hilfreich. Dabei kommt der Fähigkeit zur Selbsteinschätzung im Mathematikunterricht eine wesentliche Rolle zu. Beim Einsatz von Lernumgebungen arbeiten die Schülerinnen und Schüler in Einzel- oder Partnerarbeit an einer Aufgabenstellung und werden somit zu aktiven Mitgestaltern des Lernprozesses.

Um diesen Lernprozess aktiv mitgestalten zu können, ist auch eine Veränderung der Aufgabenkultur notwendig. Schülerinnen und Schüler sollen Aufgaben nicht rezeptartig lösen, sondern selbst Lösungswege erarbeiten. Hierfür eignen sich sogenannte Modellierungsaufgaben, da diese nicht nach einem Schema bearbeitet werden können. Interessant werden solche Aufgaben meist durch die Anbindung an die reale Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler sowie den oft rätselhaften Charakter dieser Aufgaben. Ein gutes Beispiel hierfür sind die nach dem italienischen Physiker Enrico Fermi benannten Fermi-Aufgaben.

In meiner mehrjährigen Unterrichtstätigkeit konnte ich bereits viele Aufgabenstellungen zum differenzierenden Mathematikunterricht erproben. Der sinnvolle Einsatz von differenzierten Arbeitsblättern wurde in Kapitel 7 genauer erläutert. Offene Aufgabenstellungen ermöglichen ähnliche Einsatzmöglichkeiten wie Fermi-Aufgaben. Viele dieser Aufgaben können im Ich-Du-Wir-Prinzip durchgeführt werden, sodass die Kommunikation zwischen den einzelnen LernpartnerInnen gefördert wird und damit die soziale Komponente im Unterricht zum Tragen kommt. Neben offenen Lernsituationen (z.B. Wochenplan, Stationenbetrieb) werden auch immer wieder Lernkarteien in Übungs- und Festigungsphasen im binnendifferenzierten Mathematikunterricht verwendet.

Der Einsatz von innerer Differenzierung im Mathematikunterricht soll die individuelle Auseinandersetzung mit Unterrichtsinhalten ermöglichen. Durch unterschiedliche Unterrichtsmethoden und -materialien sowie individuell angepasste Arbeitszeit sollen die Lernenden eine bestmögliche Förderung und auch Forderung erhalten. Die besondere Stärke der inneren Differenzierung liegt darin, dass durch abwechslungsreiche Unterrichtsgestaltung sowohl leistungsstarke wie auch leistungsschwache Schülerinnen und Schüler unterrichtet werden können.

Binnendifferenzierung stellt eine große Herausforderung für alle Beteiligten dar. Sie trägt auch zu einem Rollenwechsel der Lehrperson innerhalb der Klasse bei – der Lehrer/die Lehrerin wird meist zum Lernbegleiter/zur Lernbegleiterin und gibt viel mehr seinen/ihren Weg als treibende Kraft im Unterricht auf. Neben allen Vorteilen sind dem Einsatz von Binnendifferenzierung auch Grenzen gesetzt. Diese verlangt von der Lehrperson in der Regel hohes Engagement aufgrund von großem Zeit- und Planungsaufwand.

Binnendifferenzierter Unterricht bietet mit seinen Vorstellungen und Konzepten die Möglichkeit, Mathematikunterricht für die Lernenden zugänglich zu machen. Es liegt also bei den Lehrenden, die Chance zu nutzen und beizutragen, den Mathematikunterricht für alle Lernenden ansprechend und interessant gemäß ihren individuellen Voraussetzungen zu gestalten.

# 9. QUELLENVERZEICHNIS

**AREND**, Beate, Handlungsorientierter Mathematikunterricht rund um die Waage, In: Bosse, Dorit (Hrsg.), Unterricht, der Schülerinnen und Schüler herausfordert (Rieden, 2004).

**BARZEL**, Bärbel, Ich-Du-Wir… Sich mit einem Thema wirklich auseinandersetzen, In: mathematik lehren, 2006, Heft 39, S. 18-21.

**BARZEL**, Bärbel; **BÜCHTER**, Andreas; **LEUDERS**, Timo, Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. 6. Auflage (Berlin, 2011).

**BARZEL**, Bärbel; **LEUDERS**, Timo und **BÜCHTER**, Andreas, Gruppenexploration. Arbeitsteilige Gruppenarbeit mit der ganzen Klasse, In: Praxis der Mathematik in der Schule, 2010, Heft 35, S. 14-16.

**BECKER**, Georg E., Unterricht durchführen. Handlungsorientierte Didaktik. Teil II. 9. Auflage (Weinheim, Basel, Berlin, 2008).

**BECKER**, Georg E., Unterricht planen. Handlungsorientierte Didaktik. Teil I. 9. Auflage (Weinheim, Basel, Berlin, 2004).

**BERGMANN**, Lars und **EILERS**, Katrin, Erstes Üben auf eigenem Niveau. Mit Aufgabensets die Selbsteinschätzung fördern, In: mathematik lehren, 2010, Heft 162, S. 14-17.

**BLUM**, Werner, Bildungsstandards – Fluch oder Segen? In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 6, 2005, S. 39-41.

**BÖNSCH**, Manfred, Differenzierung in Schule und Unterricht. Ansprüche, Formen, Strategien (München, 1995).

**BÖNSCH**, Manfred, Gesamtschule. Die Schule der Zukunft mit historischem Hintergrund, in: KAISER, Astrid und WINKEL, Rainer (Hrsg.), Grundlagen der Schulpädagogik, Band 54 (Hohengehren, 2006).

**BÖNSCH**, Manfred, Heterogenität und Differenzierung, in: KAISER, Astrid und WINKEL, Rainer (Hrsg.), Grundlagen der Schulpädagogik, Band 67 (Hohengehren, 2011).

**BÖNSCH**, Manfred, Intelligente Unterrichtsstrukturen. Eine Einführung in die Differenzierung in: BENNACK, Jürgen; KAISER, Astrid; MEYER, Ernst und WINKEL Rainer (Hrsg.), Grundlagen der Schulpädagogik, Band 31 (Hohengehren, 2000).

**BRUDER**, Regina und **REIBOLD**, Julia, Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung, In: mathematik lehren, 2010, Heft 162, S. 2-9.

**BRUDER**, Regina; **LEUDERS**, Timo und **BÜCHTER**, Andreas, Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten. 5. Auflage (Berlin, 2012).

**BÜCHTER**, Andreas; **HERGET**, Wilfried; **LEUDERS**, Timo und **MÜLLER**, Jan, Die Fermi-Box 5.-7. Klasse (Seelze-Velber, 2007).

**BÜCHTER**, Andreas und **LEUDERS**, Timo, Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen. 5. Auflage (Berlin, 2009).

**BUHOLZER**, Alois und **KUMMER WYSS**, Annemarie (Hrsg.), Alle gleich – alle unterschiedlich! Zum Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht (Seelze-Velber, 2010).

**BUNDESINSTITUT BIFIE** (Hrsg.), Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe (Graz, 2010).

**BUNDESINSTITUT BIFIE** (Hrsg.), Bildungsstandards in Österreich. Überprüfung und Rückmeldung. 3. Auflage (Salzburg, 2012). Verfügbar unter: https://www.bifie.at/node/560 [Zeitpunkt des Zugriffs: 27.1.2013, 12:21].

**BUNDESINSTITUT BIFIE** (Hrsg.), Themenheft Mathematik „Problem lösen“. Volksschule Grundstufe I + II. (Graz, 2013) [Vorabdruck].

**BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT UND KULTUR** (Hrsg.). ZSE-Report. Bilanzierung aller Schulversuche der Sekundarstufe I. Metaanalyse vorliegender Evaluations- und Erfahrungsberichte. Nummer 60 (Graz, 2002).

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.). Lehrplan für Mathematik. (Wien, 2000). Verfügbar unter: www.bmukk.gv.at/medienpool/881/hs17.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs: 15.11.2012, 16:01].

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 117. Bundesgesetz, mit dem das Schulunterrichtsgesetz geändert wird (Wien, 2008). Verfügbar unter: www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2008_I_117/BGBLA_2008_I_117.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs: 10.11.2012, 17:28].

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur über Bildungsstandards im Schulwesen. 1. Verordnung (Wien, 2009). Verfügbar unter: http://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2009_II_1/BGBLA_2009_II_1.pdf bzw. www.bmukk.gv.at/medienpool/17533/bgbl_ii_nr_1_2009.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs: 10.11.2012, 17:39].

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.), Beiträge zur Unterrichtsentwicklung mit dem Blick auf die Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe: Basis Mathematik, Heft 1, (Wien, 2009).

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.). Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 185. Verordnung, NMS Umsetzungspaket (Wien, 2012). Verfügbar unter: http://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2012_II_185/BGBLA_2012_II_185.html [Zeitpunkt des Zugriffs: 11.11.2012, 20:01].

**BUNDESMINISTERIUM FÜR UNTERRICHT, KUNST UND KULTUR** (Hrsg.), Die neue Mittelschule. Gesetzesentwurf und Lehrplanverordnung. Presseinformation zum Hintergrundgespräch mit Bildungsministerin Dr. Claudia Schmied (Wien, 2012).

**BUSCH**, Karin und **REINHART**, Ulrike, Begabungsförderung in jahrgangsgemischten Lerngruppen. Opas Pädagogik oder zukunftsorientierter Reformansatz in der Grundschule? Teil 1. Die Aufgabe der Begabungsförderung im Bildungsanspruch, In: Fragner, Schriften der Pädagogischen Akademie des Bundes in Oberösterreich (Linz, 2006).

**BUSCHKÜHLE**, Carl-Peter, **DUNCKER**, Ludwig und **OSWALT** Vadim (Hrsg.), Bildung zwischen Standardisierung und Heterogenität – ein interdisziplinärer Diskurs. 1. Auflage (Wiesbaden, 2009).

**DOSTAL**, Dina, Offenes Lernen aus Sicht der Schülerinnen und Schüler. Eine empirische Studie zur Praxis von Offenem Lernen im Mathematikunterricht einer 1. Klasse AHS. Diplomarbeit (Universität Wien, 2007).

**EBERSDORFER**, Anna Elisabeth, Mehr denken als rechnen – Fermi-Aufgaben im Mathematikunterricht. Diplomarbeit (Universität Wien, 2011).

**EDER**, Ferdinand, Fördern Leistungsgruppen das Lernen? Der Förderanspruch von Leistungsgruppen im Lichte von PISA und TIMSS, In: Erziehung und Unterricht 152, 2002, S. 979-1000.

**FRITZ**, Annemarie und **SCHMIDT**, Siegbert (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (Weinheim und Basel, 2009).

**FLODERER**, Manfred; **FISCHER**, Christine; **FLODERER**, Sylvia und **GROSS**, Petra, Mach mit 3. Mathematik für die 3. Klasse der Hauptschulen und der allgemein bildenden höheren Schulen. 1. Auflage (Wien, 2007).

**GROSSER**, Notburga und **KOTH**, Maria, Alles klar! 3 / 4. Knobelaufgaben (Linz, 2013).

**GROTTENTHALER**, Kai und **VOGEL**, Markus, Fermi-Aufgaben: Anlass zum „Mathe-Schreiben“, in: Praxis der Mathematik in der Schule. 2010, Heft 36, S. 9-13.

**HENGARTNER**, Elmar; **HIRT**, Ueli; **WÄLTI**, Beat und Primarschulteam Lupsingen, Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht (Zug, 2006).

**HERGET**, Wilfried und **KLIKA**, Manfred, Fotos und Fragen. Messen, Schätzen, Überlegen – viele Wege, viele Ideen, viele Antworten, in: mathematik lehren, Heft 119, 2003, S. 14-19.

**HERGET**, Wilfried; **JAHNKE**, Thomas und **KROLL**, Wolfgang. Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I (Wien, 2005).

**HERGET**, Wilfried und **SCHOLZ**, Dietmar, Die etwas andere Aufgabe – aus der Zeitung. Mathematik-Aufgaben Sek I. 4. Auflage (Seelze, 2006).

**HERGET**, Wilfried, Foto-Fermi-Fragen – fast ohne Worte, in: FRITZ, Annemarie und SCHMIDT, Siegbert (Hrsg.), Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden (Weinheim und Basel, 2009).

**HEYMANN**, Hans-Werner, Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik. Band 13 (Weinheim und Basel, 1996).

**HEYMANN**, Hans Werner, Allgemeinbildung als Aufgabe der Schule und als Maßstab für Fachunterricht, In: Pädagogik 49 (1997), Heft 1, S. 42-45.

**HEYMANN**, Hans Werner, Was ist guter Mathematikunterricht? Statement auf der Fachtagung „Unterrichtsqualität – Erfolgreiche Lehr- und Lernformen aus fachdidaktischer Sicht“, 1999. Verfügbar auf: http://www.riemer-koeln.de/mathematik/fachseminar/reader/07-erziehen-ziele/heymann.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs: 10.11.2012, 17:48].

**HEYMANN**, Hans Werner, Garantieren „Standards“ einen besseren Mathematikunterricht? In: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 1, 2005, S. 40-41.

**HEYMANN**, Hans Werner, Binnendifferenzierung – eine Utopie? Pädagogischer Anspruch, didaktisches Handwerk, Realisierungschancen, in: Pädagogik, Heft 11, 2010, S. 6-11.

**HIRT**, Ueli und **WÄLTI**, Beat, Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte (Seelze-Velber, 2008).

**HOFFELNER**, Renate, Teamteaching. Entwicklungen, in: Europäische Hochschulschriften, Reihe XI (Frankfurt am Main, 1995).

**JUNDT**, Werner und **WÄLTI**, Beat, Erwartungen transparent machen. Arbeiten mit mathematischen Beurteilungsumgebungen, In: mathematik lehren, Heft 162, 2010, S. 56-60.

**KAINDL**, Linda, „Von der EinzelkämpferIn zur TeamspielerIn“. Veränderungen der LehrerInnenängste bei Teamarbeit. Diplomarbeit (Universität Wien, 2007).

**KLAFKI**, Wolfgang, Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik (Weinheim und Basel, 1996).

**KLIPPERT**, Heinz, Heterogenität im Klassenzimmer (Weinheim und Basel, 2010).

**KRAKER**, Michaela; **PLATTNER**, Gerhard und **PREIS**, Christa, Expedition Mathematik 3. 1. Auflage (Wien, 2009).

**LENGNINK**, Katja; **PREDIGER**, Susanne und **WEBER**, Christof, Lernende abholen, wo sie stehen. Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen, in: Praxis der Mathematik, Heft 40, 2011, S. 2-7.

**LEUDERS**, Timo, Qualität im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I und II (Berlin, 2001).

**LEUDERS**, Timo (Hrsg), Mathematik Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. 6. Auflage (Berlin, 2011).

**LEUDERS**, Timo und **PREDIGER**, Susanne, „Differenziert Differenzieren“ – Mit Heterogenität in verschiedenen Phasen des Mathematikunterrichts umgehen, in: ITTEL, Angela und LAZARIDES, Rebecca (Hrsg.), Differenzierung im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht – Implikationen für Theorie und Praxis (Bad Heilbrunn, 2012).

**LEWISCH**, Ingrid; **ZWICKER**, Thomas; **BREUNIG**, Eva und **RIEHS**, Barbara, Mathematik 3. Verstehen + Üben + Anwenden. 1. Auflage (Wien, 2012).

**MAASS,** Katja, Modellieren – Aufgaben für alle? in: mathematik lehren, Heft 131, 2005, S. 19-47.

**MAASS,** Katja, Mathematisches Modellieren. Aufgaben für die Sekundarstufe I. 5. Auflage (Berlin, 2011).

**MEYER**, Hilbert, Was ist guter Unterricht? 8. Auflage (Berlin, 2011).

**MÜHLENFELD**, Udo und **HOLTMANN**, Manuel, Wie viele Reiskörner isst ein Chinese in seinem Leben? Fermi-Aufgaben als Mittel zur Binnendifferenzierung, In: Praxis der Mathematik in der Schule, 2009, Heft 28, S. 7-13.

**PARADIES**, Liane und **LINSER**; Hans Jürgen, Differenzieren im Unterricht. 6. Auflage (Berlin, 2011).

**PREDIGER**, Susanne, Heterogenität macht Schule – Herausforderungen und Chancen in: SAILER, W. (Hrsg.), Schulbegleitforschung Bremen Jahrbuch 2004, S. 90-97.

**PREDIGER**, Susanne und **HUSSMANN**, Stefan, Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren, in: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 17, 2007, S. 1-8.

**PREDIGER**, Susanne, Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Strategien zur Weiterarbeit mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten, in: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 40, 2011, S. 8-13.

**REICHEL**, Hans-Christian und **HUMENBERGER**, Hans (Hrsg.). Das ist Mathematik 3. 1. Auflage (Wien, 2009).

**REICHEL**, Hans-Christian und **HUMENBERGER**, Hans (Hrsg.). Das ist Mathematik 4. 1. Auflage (Wien, 2010).

**SALNER-GRIDLING**, Ingrid, Querfeldein: individuell lernen – differenziert lehren (Wien, 2009)

**SCHIPPER**, Wilhelm, Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen (Braunschweig, 2009).

**SCHNIDER**, Andreas, PädagogInnenbildung NEU-Architektur im Blick auf die neue Curricula-Entwicklung am Beispiel der Neuen Mittelschule (Wien, 2012).

**SYLVESTER**, Thomas, Vorschläge und Modelle zur inneren Differenzierung, in: mathematik lehren, Heft 89, 1998, S. 4-9.

**ULM**, Volker, Das ist neu, das erforsche ich! Einstiege differenzierend gestalten, In: mathematik lehren, 2010, Heft 162, S. 10-13.

**ULM**, Volker, Mathematikunterricht in der Sekundarstufe für individuelle Lernwege öffnen. 2. Auflage (Seelzer-Velber. 2005).

**VERSCHRAEGEN**, Jan; **MATSCHKE**, Wolfgang und **GIESEKE**, Carolin, Mit dem „Ich-Du-Wir“-Prinzip auf dem Weg zum Dialogischen Lernen, in: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 7, 2006, S. 14-19.,

**WAGREICH**, Ulrike, Homogenität versus Heterogenität. Eine empirische Untersuchung im Vergleich zwischen leistungsmäßig heterogen und homogen geführten Lerngruppen. Dissertation (Universität Wien, 2004).

**WEHRSE**, Tanja und **KOSSAK**, Wolfram von, Selbstständigkeit fördern. Lernen begleiten mit Lernprotokollen und Checklisten, In: mathematik lehren, Heft 162, 2010, S. 22-43.

**WINTER**, Heinrich, Mathematikunterricht und Allgemeinbildung, 1995. Verfügbar unter: http://www-math.uni-paderborn.de/~martine/Veranstaltungen/WS0607/muundallgemeinbildung.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs: 10.11.2012, 17:53].

**ZECH**, Friedrich, Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. 9. Auflage (Weinheim und Basel, 1998).

Weitere Internetquellen:

www1: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/schulen_schulbesuch/index.html [Zeitpunkt des Zugriffs: 16.07.2012, 19:09].

www2: http://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009265 [Zeitpunkt des Zugriffs: 19.07.2012, 10:39].

www3: http://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10009600 [Zeitpunkt des Zugriffs: 11.11.2012, 20:08].

www4: http://www.popperschule.at/ [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 09:40].

www5: www.begabtenzentrum.at/wcms/index.php?oezbf [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 09:45].

www6: www.stadtschulrat.at/aktuell/detid160/off0 [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 13:23].

www7: www.mehrstufenklassen.info/ [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 13:32].

www8: www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/ba/gender_lehrplaene.xml [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 09:58].

www9: www.statistik.at/web_de/statistiken/bildung_und_kultur/formales_bildungswesen/schulen_schulbesuch/index.html [Zeitpunkt des Zugriffs: 24.07.2012, 13:53].

www10: http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_unterstufe.xml [Zeitpunkt des Zugriffs: 17.07.2012, 10:30].

www11: http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/Hauptschulen_HS_Lehrplan1590.xml [Zeitpunkt des Zugriffs: 17.07.2012, 10:35].

www12: https://www.bifie.at/node/560 [Zeitpunkt des Zugriffs: 02.08.2012, 10:55].

www13: www.zahlenbu.ch/cms/index.php?page=104 [Zeitpunkt des Zugriffs: 30.08.2012, 10:54].

www14: www.ko-si-ma.de [Zeitpunkt des Zugriffs: 15.08.2012, 11:52].

www15: http://de.wikipedia.org/wiki/Horst_Szymaniak [Zeitpunkt des Zugriffs: 11.09.2012, 22:31].

www16: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22375/bgbla_2012_i_36.pdf [Zeitpunkt des Zugriffs, 25.02.2013, 12:41]

# 10. ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1: BMUKK/BMWF, Stand: Schul-/Studienjahr 2009/10 (www1). ..... 11
Abbildung 2: Bönsch, 2011, S. 47. ..... 27
Abbildung 3: Bruder, in: Bruder, Leuders, Büchter, 2012, S. 83. ..... 32
Abbildung 4: Paradies, Linser, 2001, S. 88-89. ..... 35
Abbildung 5: Barzel, Büchter, Leuders, 2011, S. 37. ..... 42
Abbildung 6: BMUKK, 2009, S 8. ..... 47
Abbildung 7: BMUKK, 2009, S. 9. ..... 47
Abbildung 8: BMUKK, 2009, S. 10. ..... 48
Abbildung 9: BIFIE, 2012, S. 11. ..... 49
Abbildung 10: Sylvester, 1998, in: Bruder, Reibold, 2010, S. 3. ..... 52
Abbildung 11: Ulm, 2010, S. 11. ..... 58
Abbildung 12: vgl. Ulm, 2010, S. 12. ..... 59
Abbildung 13: vgl. Prediger, 2011, S. 9. ..... 61
Abbildung 14: Prediger, 2011, S. 9. ..... 62
Abbildung 15: Bergmann, Eilers, 2010, S. 16. ..... 65
Abbildung 16: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2009, S. 67. ..... 66
Abbildung 17: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2010, S. 226. ..... 66
Abbildung 18: Floderer, Fischer, Floderer, Gross, 2007, S. 47. ..... 68
Abbildung 19: Wehrse, Kossak, 2010, S. 43. ..... 69
Abbildung 20: Kraker, Plattner, Preis, 2009, S. 123. ..... 70
Abbildung 21: Lewisch, Zwicker, Breunig, Riehs, 2012, S. 60. (gekürzt) ..... 70
Abbildung 22: MBU Dreieck und Vieleck, www13. ..... 73
Abbildung 23: Hengartner, Hirt, Wälti, 2006, S. 127. ..... 76
Abbildung 24: Grosser, Koth, 2013, S. 26. ..... 78
Abbildung 25: Grosser, Koth, 2013, S. 27. ..... 78
Abbildung 26: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 16. ..... 79
Abbildung 27: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 93. ..... 80
Abbildung 28: Herget, Jahnke, Kroll, 2005, S. 39. ..... 81
Abbildung 29: Barzel, Leuders, Büchter, 2010, S. 16. ..... 83

Abbildung 30: Schipper, 2009, S. 240. ..... 84
Abbildung 31: Maaß, 2005, S. 47. ..... 86
Abbildung 32: Maaß, 2011, S. 63. ..... 87
Abbildung 33: Maaß, 2011, S. 112. ..... 88
Abbildung 34: Herget, Klinka, 2003, S. 15. ..... 90
Abbildung 35: Büchter, Herget, Leuders, Müller, 2007. ..... 94
Abbildung 36: Herget, Scholz, 2006, S. 17. ..... 96
Abbildung 37: Herget, Scholz, 2006, S. 29. ..... 97
Abbildung 38: Herget, Scholz, 2006, S. 33. ..... 98
Abbildung 39: Herget, Scholz, 2006, S. 127. ..... 98
Abbildung 40: Herget, Scholz, 2006, S. 114. ..... 99
Abbildung 41: Leuders, 2001, S.122. ..... 114
Abbildung 42: Leuders, 2001, S.123. ..... 114
Abbildung 43: Reichel, Humenberger (Hrsg.), 2009, S. 92. ..... 117

# KURZFASSUNG

Die vorliegende Diplomarbeit widmet sich dem Thema „Innere Differenzierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I“. Der Schwerpunkt dieser Arbeit wurde auf alltagstaugliche Unterrichtsmethoden und -materialien gelegt.

Zunächst geht es darum, die Begriffe innere und äußere Differenzierung deutlich voneinander abzustecken. Das österreichische Schulsystem wird hinsichtlich dieser Differenzierungen beleuchtet. Anschließend werden verschiedene Unterrichtsmethoden des individualisierenden, kooperativen und gemeinsamen Unterrichts vorgestellt und kurz erläutert. In weiterer Folge werden die Anforderungen an den heutigen Mathematikunterricht und der Einsatz von innerer Differenzierung hinsichtlich der Bildungsstandards besprochen.

Im Zuge der Recherchen konnte schließlich ein großes Repertoire an Unterrichtsmethoden und -beispielen zusammengetragen und aufgearbeitet werden. Alle Aufgaben eigenen sich zum differenzierten Einsatz im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Neben diesen Methoden und Beispielen finden sich in Kapitel 7 bereits erprobte Unterrichtsmaterialien, welche auch im Anhang abgebildet sind.

# EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

„Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig verfasst und in der Bearbeitung und Abfassung keine anderen als die angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe. Die vorliegende Diplomarbeit wurde noch nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt.“

…… ……

Ort, Datum Unterschrift

# LEBENSLAUF

**Persönliche Daten:**

| | |
|---|---|
| Name: | Elisabeth Schober |
| Geburtsdatum, -ort: | 03.03.1985, Mistelbach |
| Staatsbürgerschaft: | Österreich |
| Wohnort: | Gaweinstal, Niederösterreich |
| Familienstand: | ledig |
| Eltern: | Richard Schober, Bürgermeister der Marktgemeinde Gaweinstal |
| | Theresia Schober, Landwirtin |

**Schulbildung:**

| | |
|---|---|
| 09/1991 – 06/1995 | Volksschule Gaweinstal |
| 09/1995 – 07/1999 | Hauptschule Gaweinstal |
| 09/1999 – 06/2003 | Bundesoberstufenrealgymnasium Mistelbach |

**Studium:**

| | |
|---|---|
| 09/2003 – 6/2006 | Diplomstudium für das Lehramt an Hauptschulen für die Unterrichtsfächer Mathematik und Musikerziehung an der Pädagogischen Akademie der Erzdiözese Wien |
| 10/2007 – 2/2013 | Lehramtsstudium für die Unterrichtsfächer Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung an der Universität Wien |

**Berufstätigkeit:**

| | |
|---|---|
| 09/2006 – 02/2011 | Lehrerin an der KMS Lacknergasse, 1180 Wien |
| 03/2011 – lfd. | Lehrerin an der NMS der KPH Wien/Krems, 1210 Wien |
| 02/2009 – lfd. | Lehrende an der Kirchlichen Pädagogischen Hochschule Wien/Krems, 1210 Wien |

# ANHANG

**Wochenplan zum Thema „Ähnlichkeit“**

Informationsblatt Ähnlichkeit

Übersichtsplan (tabellarisch)

Toto-Spiel „Ähnliche Figuren“

Angabekarten für Verhältnisgleichungen

Arbeitsblatt „Teilen einer Strecke“

Arbeitsblatt „Elefant“ (aus: Spettnagel, Alfred, Geometrische Grundbegriffe und Konstruktionen für die Klassen 5 - 8. [Köln, 2000])

Anleitung „Geo Gebra“

Quiz

LÜK-Karten

Wendekarten

**Stationenbetrieb zum Thema „Pythagoräischer Lehrsatz“**

Stationskarte 1: Beweise zum Pythagoräischen Lehrsatz

Arbeitsblatt „Altindischer Ergänzungsbeweis“ + Lösung

Arbeitsblatt „Stuhl der Braut – Beweis“ + Lösung (Grafik aus: Koth, Maria, Skriptum zur Vorlesung Schulmathematik 2. Elementargeometrie [Fakultät für Mathematik der Universität Wien, Sommersemester 2011])

Stationskarte 2: Rechnen mit Quadratzahlen und Quadratwurzeln

LÜK-Karten

Stationskarte 3: Berechnungen zum Pythagoräischen Lehrsatz

Arbeitsblätter

*„Ich habe mich bemüht, sämtliche Inhaber der Bildrechte ausfindig zu machen und ihre Zustimmung zur Verwendung der Bilder in dieser Arbeit eingeholt. Sollte dennoch eine Urheberrechtsverletzung bekannt werden, ersuche ich um Meldung bei mir.“*

**Name**: **Klasse: III B**

**Wochenplan**: Montag, 19.4.2010 bis Donnerstag 22.4. 2010

**Thema**:

# Ähnlichkeit

**Voraussetzungen**:

- Verhältnisse und Proportionen
- Eigenschaften ähnlicher Figuren
- Ähnliche und kongruente Figuren
- Teilen von Strecken

**Wiederholung**: Die Längenmaße

**Pausen**: Nachdem du eine Aufgabe gelöst hast, hast du die Möglichkeit eine Knobelaufgabe aus der Box zu lösen.

**Legende**:

| | |
|---|---|
| ☺ | Einzelarbeit |
| ☺ ☺ | Partnerarbeit |
| SK | Selbstkontrolle (Lösungsblatt) |
| LK | Lehrerkontrolle |
| E | ExpertInnenbeispiele |
| P | Pflichtaufgaben |
| W | Wahlaufgaben |
| SG: 1,2,3 | Schwierigkeitsgrad |

Beispiele mit dem Schwierigkeitsgrad 3 sind ExpertInnenbeispiele und somit Wahlaufgaben

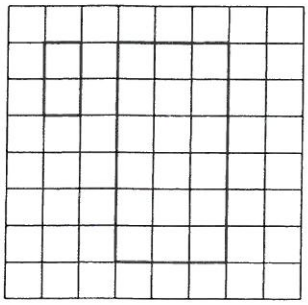
**Hilfen**: Schulbuch, Schulübungsheft, Experte/Expertin, Lehrerin

**Name:**

| | Lernziele | Materialien | Pflicht oder Wahl | Sozial form | Kontrolle | Tag |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Ähnliche Figuren – Verhältnisgleichungen | Toto Spiel | W | ☺ ☺ ☺ / ☺ ☺ / ☺ | LK | |
| 2. | Verhältnisgleichungen | Angabekarte SG1, SG2, SG3 | P | ☺ / ☺ ☺ | SK | |
| 3. | Teilen einer Strecke | Arbeitsblatt differenziert | P | ☺ | SK | |
| 4. | Zentrische Streckung | SG:1 Buch 440, 446<br>SG:2 Buch 448ab<br>SG:3 Arbeitsblatt: Elefant | P | ☺ | SK | |
| 5. | Zentrische Streckung mit Geo Gebra | Computer | W | ☺ / ☺ ☺ | SK | |
| 6. | Grundbegriffe: zentrische Streckung | Quiz | W | ☺ / ☺ ☺ | LK | |
| 7. | Längenmaße | a) LÜK – Kasten (SG 1 oder SG 2) oder<br>b) Klammerkarte (SG 1 oder SG 2) | P | ☺ / ☺ ☺ | SK | |

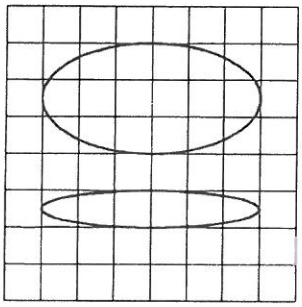
Nimm dir einen Totoschein. Hier kannst du Tipps mit 1, 2 oder X abgeben.
Auf den Kärtchen 1 – 12 findest du verschiedene ähnliche, nicht ähnliche und kongruente Figuren.
Auf den Kärtchen 13 – 16 findest du Verhältnisgleichungen. Mache die Nebenrechnungen in deinem Ü-Heft und kreuze anschließend den richtigen Tipp an.
Wenn du alle 16 Tipps fertig hast, bringe sie zum Lehrertisch und ich werte sie aus!

## Nr.1



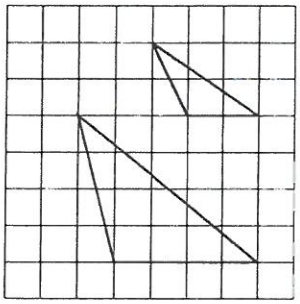
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.2



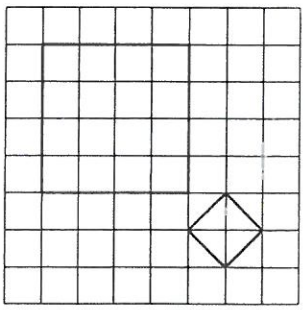
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.3



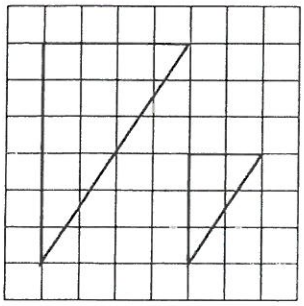
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.4



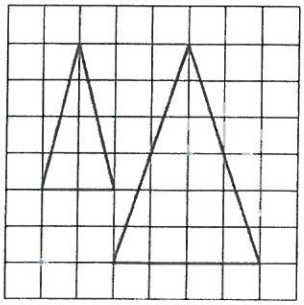
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.5



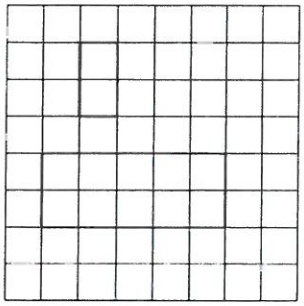
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.6



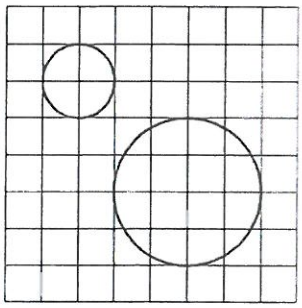
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.7



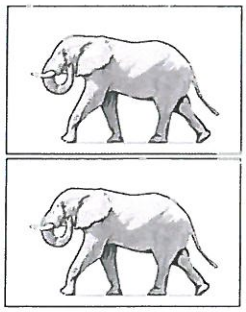
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.8



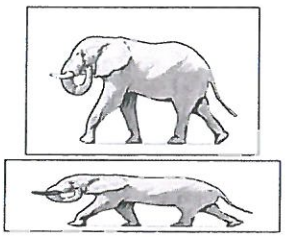
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.9



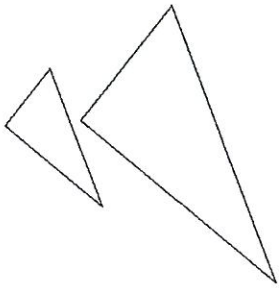
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.10



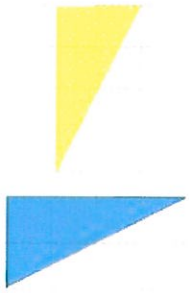
1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.11



1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.12



1 ähnlich
2 nicht ähnlich
X kongruent

## Nr.13

$3 : 6 = 15 : x$

1 3
2 30
X 13

## Nr.14

$27 : 21 = x : 7$

1 9
2 19
X 29

## Nr.15

$5 : x = 15 : 24$

1 24
2 18
X 8

## Nr.16

$x : 4 = 36 : 24$

1 16
2 6
X 12

| | |
|---|---|
| SG1 | 32 : x = 54 : 27 |
| SG2 | Ein Foto (l = 15 cm, b = 9cm) soll auf ein Poster vergrößert werden. Die Breite des Posters beträgt 1,2 m. Berechne die Länge! |
| SG3 | Von einem Dreieck ABC kennt man die Längen der drei Seiten a = 8cm, b = 5cm, c = 9cm. Wie lang sind die Seitenlängen eines ähnlichen Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit $a_1$ = 7,2 cm? |


| | |
|---|---|
| SG1 | 32 : x = 54 : 27 |
| SG2 | Ein Foto (l = 15 cm, b = 9cm) soll auf ein Poster vergrößert werden. Die Breite des Posters beträgt 1,2 m. Berechne die Länge! |
| SG3 | Von einem Dreieck ABC kennt man die Längen der drei Seiten a = 8cm, b = 5cm, c = 9cm. Wie lang sind die Seitenlängen eines ähnlichen Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit $a_1$ = 7,2 cm? |

| | |
|---|---|
| SG1 | 32 : x = 54 : 27 |
| SG2 | Ein Foto (l = 15 cm, b = 9cm) soll auf ein Poster vergrößert werden. Die Breite des Posters beträgt 1,2 m. Berechne die Länge! |
| SG3 | Von einem Dreieck ABC kennt man die Längen der drei Seiten a = 8cm, b = 5cm, c = 9cm. Wie lang sind die Seitenlängen eines ähnlichen Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit $a_1$ = 7,2 cm? |

| | |
|---|---|
| SG1 | 32 : x = 54 : 27 |
| SG2 | Ein Foto (l = 15 cm, b = 9cm) soll auf ein Poster vergrößert werden. Die Breite des Posters beträgt 1,2 m. Berechne die Länge! |
| SG3 | Von einem Dreieck ABC kennt man die Längen der drei Seiten a = 8cm, b = 5cm, c = 9cm. Wie lang sind die Seitenlängen eines ähnlichen Dreiecks $A_1B_1C_1$ mit $a_1$ = 7,2 cm? |

# Teilen einer Strecke

Beginne mit den ☺ Aufgaben.
Kannst du diese Aufgaben lösen, dann rechne die ☼ Beispiele. Schaffst du die ☺ Aufgaben nicht, dann rechne die ✌ Aufgaben.
Hast du die Aufgaben ☺ und ✌ gelöst, dann darfst du ☼ weglassen.

☺ Zeichne a) die Strecke $\overline{AB} = 7$ cm und

b) die Strecke $\overline{CD} = 5$ cm und teile diese jeweils in **sechs gleiche Teile**.
Überprüfe deine Konstruktionen durch Rechnen und Messen.

✌ Zeichne a) die Strecke $\overline{AB} = 85$ mm und

b) die Strecke $\overline{CD} = 92$ mm und teile diese jeweils in **vier gleiche Teile**.
Überprüfe deine Konstruktionen durch Rechnen und Messen.

☼ Teile a) die Strecke $\overline{AB} = 6$ cm **im Verhältnis 2 : 3** und

b) die Strecke $\overline{CD} = 75$ mm **im Verhältnis 4 : 1**.
Berechne zur Kontrolle die Längen der Teilstrecken und prüfe das Ergebnis anhand deiner Konstruktion durch Messen.


# Teilen einer Strecke

Beginne mit den ☺ Aufgaben.
Kannst du diese Aufgaben lösen, dann rechne die ☼ Beispiele. Schaffst du die ☺ Aufgaben nicht, dann rechne die ✌ Aufgaben.
Hast du die Aufgaben ☺ und ✌ gelöst, dann darfst du ☼ weglassen.

☺ Zeichne a) die Strecke $\overline{AB} = 7$ cm und

b) die Strecke $\overline{CD} = 5$ cm und teile diese jeweils in **sechs gleiche Teile**.
Überprüfe deine Konstruktionen durch Rechnen und Messen.

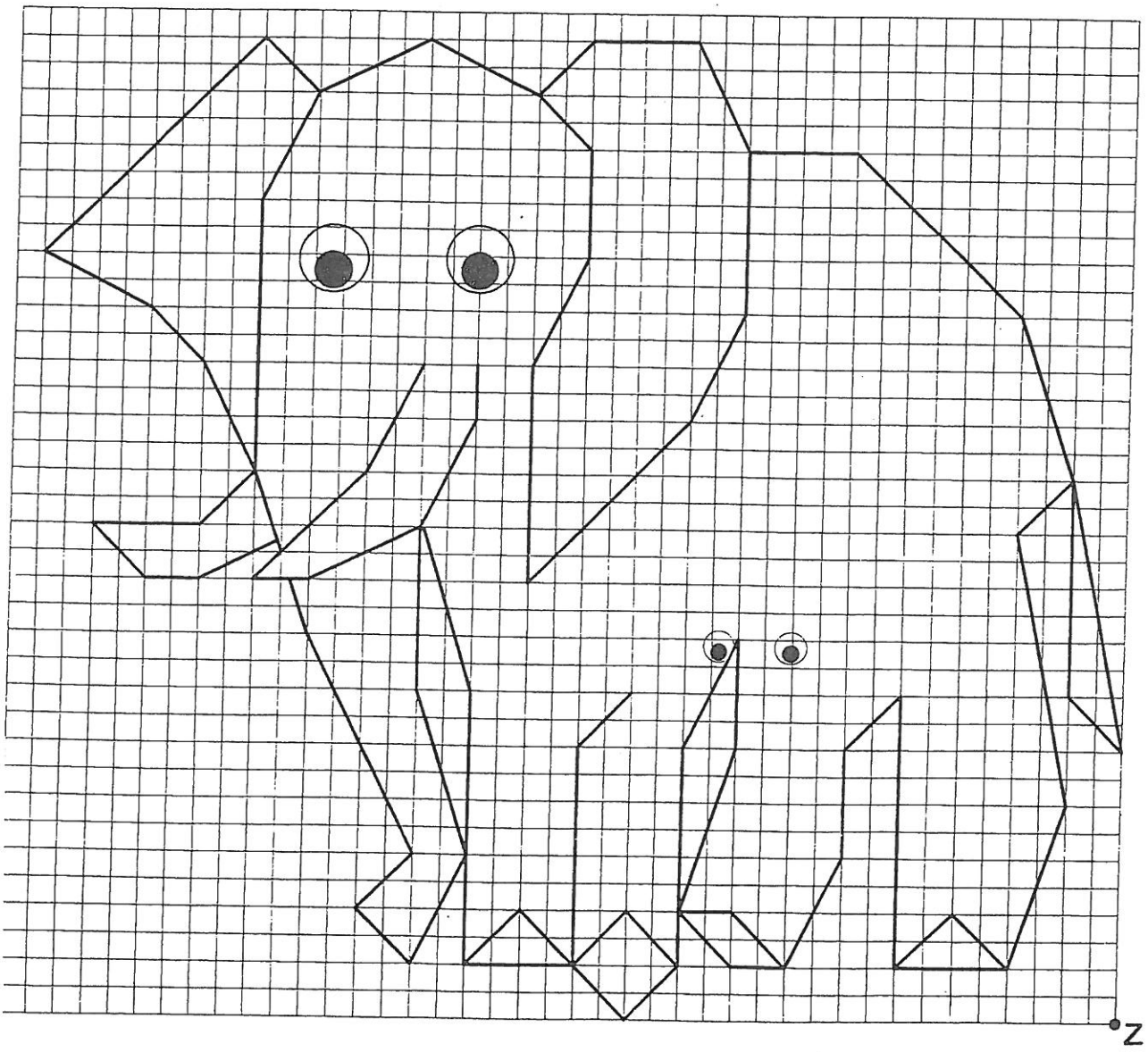
✌ Zeichne a) die Strecke $\overline{AB} = 85$ mm und

b) die Strecke $\overline{CD} = 92$ mm und teile diese jeweils in **vier gleiche Teile**.
Überprüfe deine Konstruktionen durch Rechnen und Messen.

☼ Teile a) die Strecke $\overline{AB} = 6$ cm **im Verhältnis 2 : 3** und

b) die Strecke $\overline{CD} = 75$ mm **im Verhältnis 4 : 1**.
Berechne zur Kontrolle die Längen der Teilstrecken und prüfe das Ergebnis anhand deiner Konstruktion durch Messen.

**Aufgabe** Verkleinere den Elefanten mit dem Streckfaktor k = 0,5
durch das Streckzentrum Z. Male den kleinen Elefanten farbig aus.



GeoGebra

**3. Klasse**

1. Vergrößere die Figur im angegebenen Verhältnis. Verwende dazu eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z:
   Dreieck: ABC: A (0/0), B (3/0), C (2/3), Z (-2/-1), k = 5/3.

2. Verkleinere die Figur im angegebenen Verhältnis. Verwende dazu eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z:
   Trapez ABCD: A (-4/0), B (4/0), C (2/5), D (-3/5), Z (0/-5), k = 5/7.

## Anleitung:

1) Ändere die Ansicht: Ansicht – Koordinatengitter

2) Zeichne das Dreieck ABC und den Punkt Z ein. ( und )

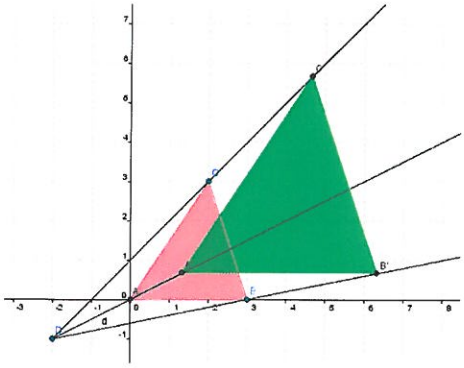
3) Zeichne durch jeden Eckpunkt ABC einen Strahl von Z aus. ()

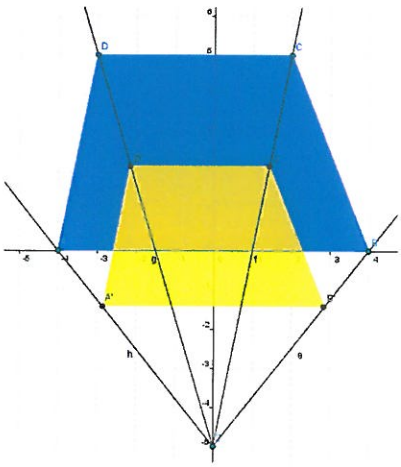
4) Strecke das Objekt vom Punkt Z aus und gib den Streckungsfaktor k ein. ()

   Klicke zuerst das Objekt an, dann das Streckungszentrum Z und gib anschließend den Streckungsfaktor k ein.

5) Gestalte die Urfigur und die Bildfigur nach deinen Vorstellungen und beschrifte sie richtig.

## Lösung:





# QUIZ

Schneide jedes Kärtchen aus und lege anschließend zu jeder Frage die passende Antwort. Nachdem die Lehrerin die Antworten kontrolliert hat, klebe die Teile nebeneinander auf ein leeres Blatt Papier.

| | |
|---|---|
| Wie kann man eine Strecke in 3 gleiche Teile teilen? Beschreibe diesen Vorgang! | Man zeichnet einen Hilfsstrahl und trägt insgesamt 5 gleich lange Einheiten auf. Man verbindet den 5.Punkt mit dem Punkt B und verschiebt diese Strecke parallel zu Punkt 3. |
| Wie kann man eine Strecke in einem Verhältnis teilen, z.B. 3 : 2? Beschreibe diesen Vorgang! | Zentrum Z = Streckungszentrum<br>$\frac{\overline{ZA_1}}{\overline{ZA}} = k(Streckungsfaktor)$ |
| Wie nennt man den Punkt von dem die „Lichtstrahlen" ausgehen? Wie lautet die Formel für den Streckungsfaktor? | <u>*Ähnliche Figuren*</u>: Ähnliche Figuren haben gleiche Gestalt, aber verschiedene Größe.<br><u>Eigenschaften</u>: Einander entsprechende *Winkel* sind gleich groß. Einander entsprechende *Seiten* haben das gleiche Verhältnis, d.h. sie sind proportional zueinander. |
| Welche Eigenschaften haben ähnliche Figuren? | Mit Hilfe der zentrischen Streckung kann man Figuren vergrößern und verkleinern, wesentlich ist der Streckungsfaktor k:<br>○ k > 1 Alle Strecken werden auf das k – fache vergrößert.<br>○ 0 < k < 1 Alle Strecken werden auf das k – fache verkleinert.<br>○ Für k = 1 bleiben alle Strecken gleich groß (kongruente Figuren). |
| Was bedeutet k > 1, 0 < k < 1 und k = 1? | Man zeichnet einen Hilfsstrahl und trägt 3 gleich lange Einheiten auf. Man verbindet den 3. Punkt mit dem Punkt B und verschiebt diese Strecke parallel zu den Punkten 1 und 2. |
| Was gilt bei der zentrischen Streckung? | Mit Hilfe der Streckensymmetrale kann man eine Strecke in 2 gleiche Teile teilen.<br>Man nimmt mehr als die Hälfte der Strecke in den Zirkel, sticht einmal im Punkt A und einmal im Punkt B ein und schlägt ab. Man erhält 2 Kreuze und diese verbindet man miteinander. |
| Wie kann man eine Strecke in 2 gleiche Teile teilen? Beschreibe, wie du diesen Vorgang durchführst! | Bei einer zentrischen Streckung gilt:<br>○ Urpunkt A und Bildpunkt $A_1$ liegen auf einem gemeinsamen Strahl durch Z.<br>○ Jeder Bildpunkt ist k – mal so weit vom Zentrum entfernt wie sein Urpunkt.<br>○ Das Zentrum bleibt bei der Streckung fest.<br>○ Entsprechende Strecken (Geraden) sind zueinander parallel. |

Längenmaße – LÜK 1

| | | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 m | ⇩ | 133 cm | 5 |
| 2 | 5 dm | ⇩ | 10 mm | 4 |
| 3 | 136 dm | ⇩ | 12 cm | 13 |
| 4 | 4 km | ⇩ | 40000 m | 8 |
| 5 | 150 m | ⇩ | 258 cm | 6 |
| 6 | 146 cm | ⇩ | 50 cm | 15 |
| 7 | 5000 m | ⇧ | 4000 m | 20 |
| 8 | 120 cm | ⇧ | 3250 cm | 23 |
| 9 | 325 dm | ⇩ | 800 cm | 11 |
| 10 | 2580 mm | ⇧ | 5 km | 3 |
| 11 | 15 km | ⇩ | 75 cm | 21 |
| 12 | 1 cm | ⇩ | 10 km | 18 |
| 13 | 4050 dm | ⇧ | 80 cm | 22 |
| 14 | 750 mm | ⇧ | 15000 m | 14 |
| 15 | 80 dm | ⇩ | 1460 mm | 16 |
| 16 | 40 km | ⇩ | 7040 mm | 10 |
| 17 | 1330 dm | ⇧ | 12 dm | 1 |
| 18 | 573 cm | ⇩ | 330 dm | 2 |
| 19 | 704 cm | ⇩ | 1500 dm | 17 |
| 20 | 120 mm | ⇧ | 80 dm | 7 |
| 21 | 1330 mm | ⇧ | 5730 mm | 24 |
| 22 | 8 dm | ⇩ | 133 m | 9 |
| 23 | 33 m | ⇩ | 1360 cm | 12 |
| 24 | 10000 m | ⇧ | 405 m | 19 |

Längenmaße – LÜK 1


| | | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 m | ⇩ | 133 cm | 5 |
| 2 | 5 dm | ⇩ | 10 mm | 4 |
| 3 | 136 dm | ⇩ | 12 cm | 13 |
| 4 | 4 km | ⇩ | 40000 m | 8 |
| 5 | 150 m | ⇩ | 258 cm | 6 |
| 6 | 146 cm | ⇩ | 50 cm | 15 |
| 7 | 5000 m | ⇧ | 4000 m | 20 |
| 8 | 120 cm | ⇧ | 3250 cm | 23 |
| 9 | 325 dm | ⇩ | 800 cm | 11 |
| 10 | 2580 mm | ⇧ | 5 km | 3 |
| 11 | 15 km | ⇩ | 75 cm | 21 |
| 12 | 1 cm | ⇩ | 10 km | 18 |
| 13 | 4050 dm | ⇧ | 80 cm | 22 |
| 14 | 750 mm | ⇧ | 15000 m | 14 |
| 15 | 80 dm | ⇩ | 1460 mm | 16 |
| 16 | 40 km | ⇩ | 7040 mm | 10 |
| 17 | 1330 dm | ⇧ | 12 dm | 1 |
| 18 | 573 cm | ⇩ | 330 dm | 2 |
| 19 | 704 cm | ⇩ | 1500 dm | 17 |
| 20 | 120 mm | ⇧ | 80 dm | 7 |
| 21 | 1330 mm | ⇧ | 5730 mm | 24 |
| 22 | 8 dm | ⇩ | 133 m | 9 |
| 23 | 33 m | ⇩ | 1360 cm | 12 |
| 24 | 10000 m | ⇧ | 405 m | 19 |

Längenmaße – LÜK 2

| | | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 m 6 dm | dm | 4 m | 5 |
| 2 | 52 m | mm | 5 km | 4 |
| 3 | 45 dm | mm | 15 m | 13 |
| 4 | 3 m 4 mm | mm | 165 km | 8 |
| 5 | 15 m 3 dm | dm | 400000 cm | 6 |
| 6 | 251 dm | mm | 52000 mm | 15 |
| 7 | 600 mm | dm | 3004 mm | 20 |
| 8 | 55000 mm | m | 679 mm | 23 |
| 9 | 67 cm 9 mm | mm | 3205 cm | 11 |
| 10 | 4 km | cm | 6 dm | 3 |
| 11 | 12 dm 9 cm | cm | 87 dm | 21 |
| 12 | 500000 cm | km | 136000 mm | 18 |
| 13 | 22 m 1 dm 2 cm | cm | 42 cm | 22 |
| 14 | 870 cm | dm | 129 cm | 14 |
| 15 | 32 m 5 cm | cm | 25100 mm | 16 |
| 16 | 1650000 dm | km | 1900 mm | 10 |
| 17 | 8 km 45 m | m | 55 m | 1 |
| 18 | 28 dm 4 cm | cm | 4505 mm | 2 |
| 19 | 19 dm | mm | 153 dm | 17 |
| 20 | 150 dm | m | 26 dm | 7 |
| 21 | 4000 mm | m | 284 cm | 24 |
| 22 | 4 dm 2 cm | cm | 8045 m | 9 |
| 23 | 45 dm 5 mm | mm | 4500 mm | 12 |
| 24 | 1360 dm | mm | 2212 cm | 19 |

Längenmaße – LÜK 2


| | | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 m 6 dm | dm | 4 m | 5 |
| 2 | 52 m | mm | 5 km | 4 |
| 3 | 45 dm | mm | 15 m | 13 |
| 4 | 3 m 4 mm | mm | 165 km | 8 |
| 5 | 15 m 3 dm | dm | 400000 cm | 6 |
| 6 | 251 dm | mm | 52000 mm | 15 |
| 7 | 600 mm | dm | 3004 mm | 20 |
| 8 | 55000 mm | m | 679 mm | 23 |
| 9 | 67 cm 9 mm | mm | 3205 cm | 11 |
| 10 | 4 km | cm | 6 dm | 3 |
| 11 | 12 dm 9 cm | cm | 87 dm | 21 |
| 12 | 500000 cm | km | 136000 mm | 18 |
| 13 | 22 m 1 dm 2 cm | cm | 42 cm | 22 |
| 14 | 870 cm | dm | 129 cm | 14 |
| 15 | 32 m 5 cm | cm | 25100 mm | 16 |
| 16 | 1650000 dm | km | 1900 mm | 10 |
| 17 | 8 km 45 m | m | 55 m | 1 |
| 18 | 28 dm 4 cm | cm | 4505 mm | 2 |
| 19 | 19 dm | mm | 153 dm | 17 |
| 20 | 150 dm | m | 26 dm | 7 |
| 21 | 4000 mm | m | 284 cm | 24 |
| 22 | 4 dm 2 cm | cm | 8045 m | 9 |
| 23 | 45 dm 5 mm | mm | 4500 mm | 12 |
| 24 | 1360 dm | mm | 2212 cm | 19 |

# LÄNGENMASSE

km, m, dm, cm, mm

| | |
|---|---|
| 500 cm = 50 dm | |
| 40 dm = 400 cm | |
| 3 km = 3000 m | |
| 60 cm = 6 dm | |
| 700 cm = 7 dm | |
| 100 cm = 10 m | |
| 400 cm = 4 dm | |
| 5 km = 500 m | |
| 30 dm = 30 m | |
| 6 m = 60 cm | |
| 200 cm = 2 m | |

Arbeitsauftrag:

Überlege ob diese Angaben richtig sind. Wenn ja, stecke eine Wäscheklammer an den Rand.

Ist die Angabe falsch, stecke keine Wäscheklammer an.

Wenn du fertig bist, dreh die Tafel um und vergleiche deine Klammern

mit den hinten aufgeklebten Punkten.

# LÄNGENMASSE

km, m, dm, cm, mm

| | |
|---|---|
| 587 cm = 5 m 8 dm 7 cm | |
| 746 dm = 7 km 4 m 6 dm | |
| 3 km = 3000 m | |
| 1 260 cm = 1 m 2 dm 6 cm | |
| 700 cm = 7 dm | |
| 1909 m = 1 km 909 m | |
| 46 cm = 4 dm 6 cm | |
| 5 km = 500 m | |
| 430 dm = 43 m | |
| 6 m = 60 cm | |
| 2001 m = 2 km 1m | |

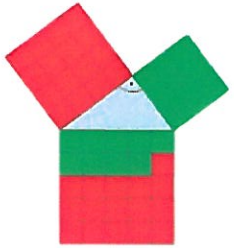
Arbeitsauftrag:

Überlege ob diese Angaben richtig sind. Wenn ja, stecke eine Wäscheklammer an den Rand.

Ist die Angabe falsch, stecke keine Wäscheklammer an.

Wenn du fertig bist, dreh die Tafel um und vergleiche deine Klammern

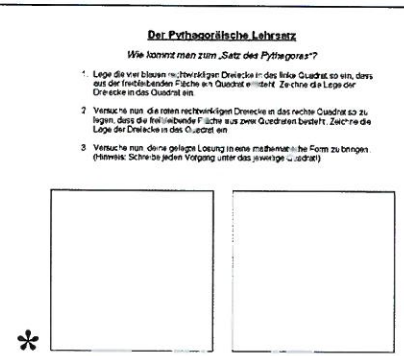
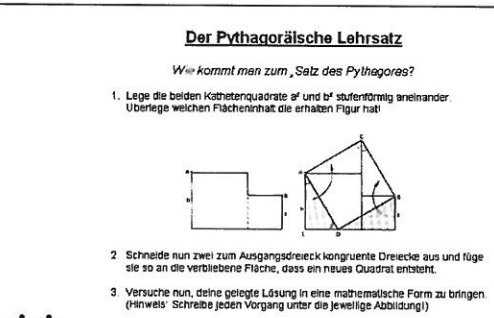
mit den hinten aufgeklebten Punkten.



# 1. Station:

## Beweise zum Pythagoräischen Lehrsatz

Wähle einen der beiden Beweise: * leicht **schwer

| VORLAGE |  * ALTINDISCHER ERGÄNZUNGSBEWEIS |  ** „STUHL DER BRAUT" - BEWEIS |
|---|---|---|
| MATERIAL | 1 Arbeitsblatt, 1 Bleistift, 1 Lineal<br>JE 4 blaue/ JE 4 rote rechtwinklige Dreiecke, | 1 Arbeitsblatt, 1 Bleistift, 1 Geodreieck,<br>Schere, 2 rote Quadrate |
| HILFE | Du kannst die Vorlage zu Hilfe nehmen.<br>Arbeitet in der Gruppe! | Du kannst das Tafelmaterial zu Hilfe nehmen.<br>Arbeitet in der Gruppe! |

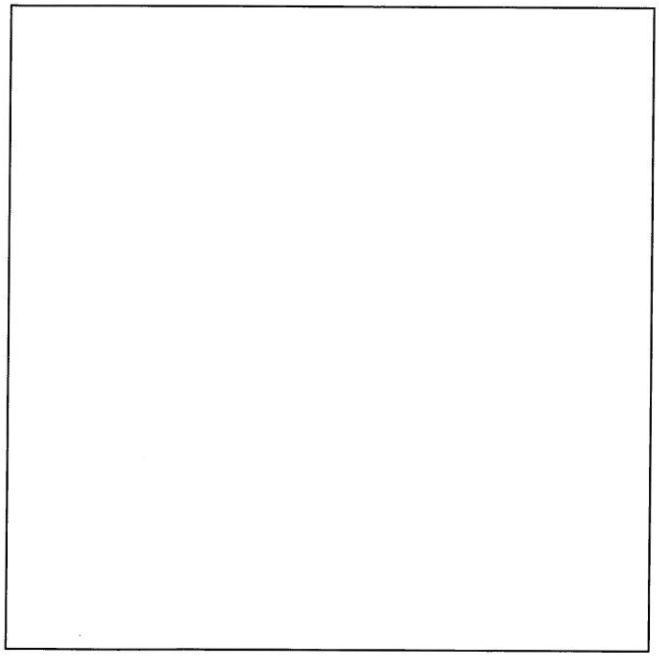
# Der Pythagoräische Lehrsatz

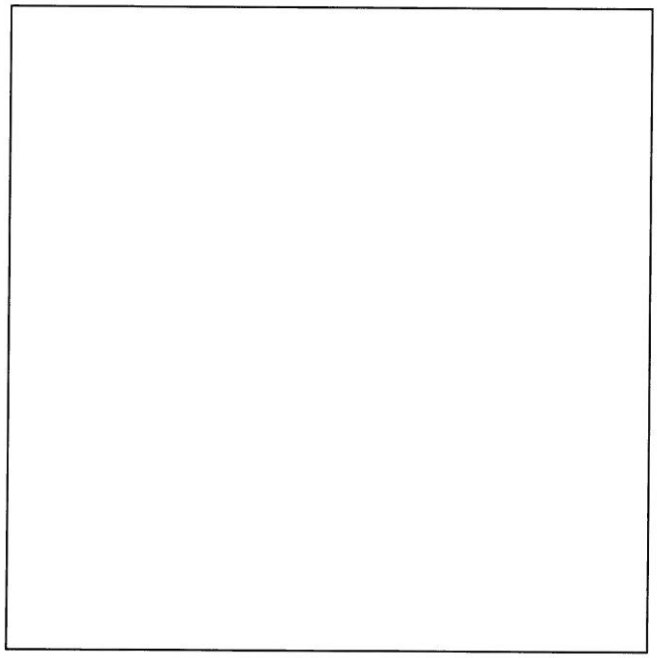
*Wie kommt man zum „Satz des Pythagoras“?*

1. Lege die vier blauen rechtwinkligen Dreiecke in das linke Quadrat so ein, dass aus der freibleibenden Fläche ein Quadrat entsteht. Zeichne die Lage der Dreiecke in das Quadrat ein.

2. Versuche nun, die roten rechtwinkligen Dreiecke in das rechte Quadrat so zu legen, dass die freibleibende Fläche aus zwei Quadraten besteht. Zeichne die Lage der Dreiecke in das Quadrat ein.

3. Versuche nun, deine gelegte Lösung in eine mathematische Form zu bringen. (Hinweis: Schreibe jeden Vorgang unter das jeweilige Quadrat!)





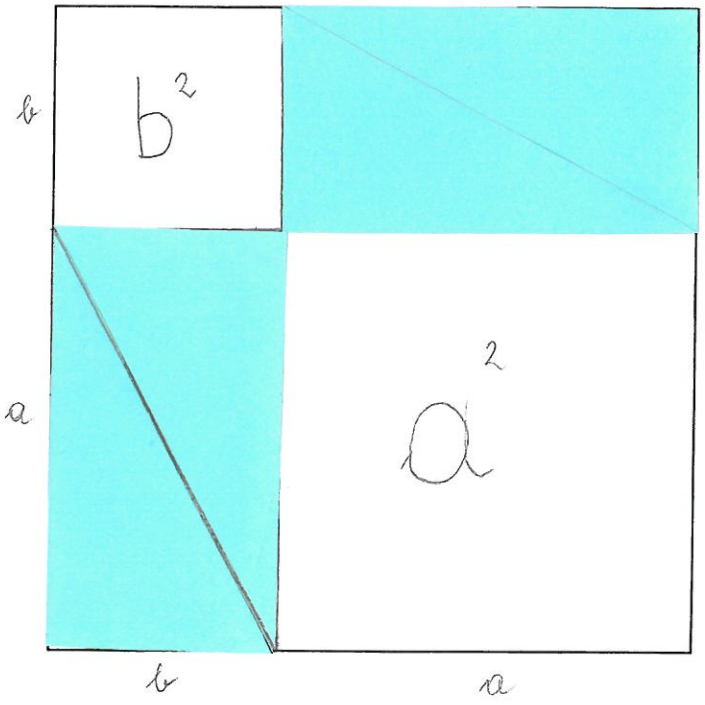
# Der Pythagoräische Lehrsatz

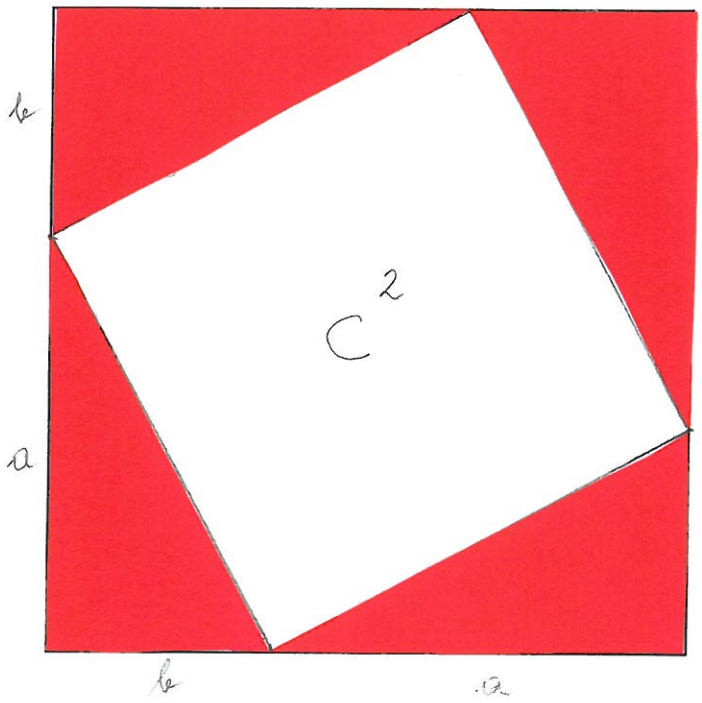
*Wie kommt man zum „Satz des Pythagoras“?*

1. Lege die vier blauen rechtwinkligen Dreiecke in das linke Quadrat so ein, dass aus der freibleibenden Fläche ein Quadrat entsteht. Zeichne die Lage der Dreiecke in das Quadrat ein.

2. Versuche nun, die roten rechtwinkligen Dreiecke in das rechte Quadrat so zu legen, dass die freibleibende Fläche aus zwei Quadraten besteht. Zeichne die Lage der Dreiecke in das Quadrat ein.

3. Versuche nun, deine gelegte Lösung in eine mathematische Form zu bringen. (Hinweis: Schreibe jeden Vorgang unter das jeweilige Quadrat!)




$a^2 + b^2 + 4\frac{a \cdot b}{2} =$

$= a^2 + b^2 + 2ab =$

$= (a + b)^2$

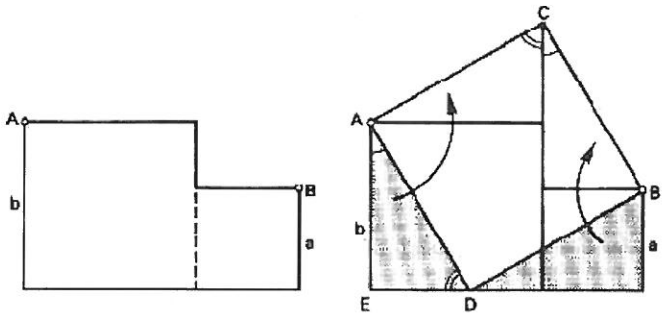
$c^2 + \frac{4a \cdot b}{2}$

$= c^2 + 2ab$

# Der Pythagoräische Lehrsatz

*Wie kommt man zum „Satz des Pythagoras?*

1. Lege die beiden Kathetenquadrate $a^2$ und $b^2$ stufenförmig aneinander. Überlege welchen Flächeninhalt die erhalten Figur hat!



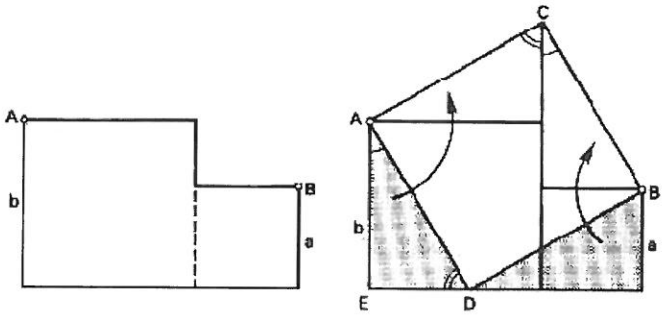

2. Schneide nun zwei zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke aus und füge sie so an die verbliebene Fläche, dass ein neues Quadrat entsteht.

3. Versuche nun, deine gelegte Lösung in eine mathematische Form zu bringen. (Hinweis: Schreibe jeden Vorgang unter die jeweilige Abbildung!)

# Der Pythagoräische Lehrsatz

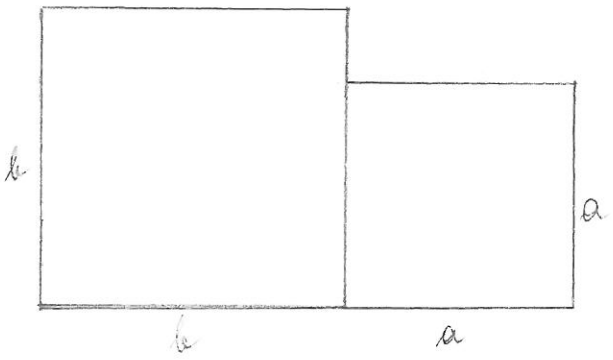
*Wie kommt man zum „Satz des Pythagoras?*

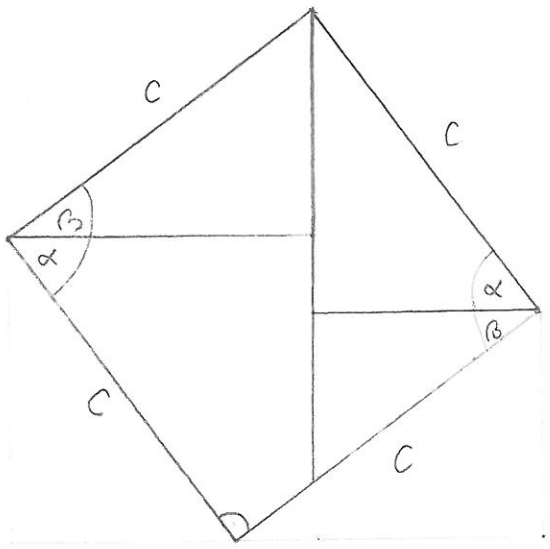
1. Lege die beiden Kathetenquadrate $a^2$ und $b^2$ stufenförmig aneinander. Überlege welchen Flächeninhalt die erhalten Figur hat!




2. Schneide nun zwei zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke aus und füge sie so an die verbliebene Fläche, dass ein neues Quadrat entsteht.

3. Versuche nun, deine gelegte Lösung in eine mathematische Form zu bringen. (Hinweis: Schreibe jeden Vorgang unter die jeweilige Abbildung!)



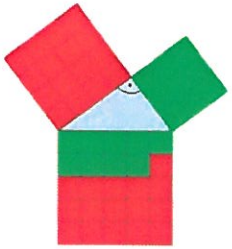

$a^2 + b^2$

$\alpha + \beta = 90°$

$\Downarrow$

Quadrat $A = c^2$

$\Rightarrow$ Zerlegungsgleichheit: $a^2 + b^2 = c^2$



# 2. Station:
## Rechnen mit Quadratzahlen
## und
## Quadratwurzeln (LÜK)

Wähle eine der beiden LÜK-Karten aus:

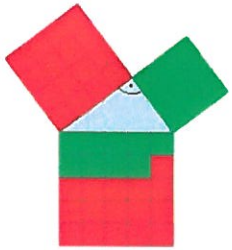
gelb: Quadratzahlen

rot: Quadratwurzeln

| | |
|---|---|
| MATERIAL | 1 LÜK-Karte<br>1 LÜK-Kasten |
| HILFE | Arbeite mit deinem Partner/deiner Partnerin! |
| KONTROLLE | LÜK-Kasten-Bild durch Umdrehen |

| | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|
| 1 | $12^2$ | 0,16 | 18 |
| 2 | $14^2$ | 0,36 | 8 |
| 3 | $9^2$ | 0,81 | 21 |
| 4 | $3^2$ | 0,9 | 5 |
| 5 | $2,5^2$ | 1,21 | 10 |
| 6 | $11^2$ | 1,44 | 2 |
| 7 | $4^2$ | 2,25 | 11 |
| 8 | $13^2$ | 4 | 14 |
| 9 | $15^2$ | 6,25 | 17 |
| 10 | $10^2$ | 9 | 20 |
| 11 | $2^2$ | 16 | 3 |
| 12 | $5^2$ | 25 | 4 |
| 13 | $20^2$ | 36 | 13 |
| 14 | $0,9^2$ | 49 | 9 |
| 15 | $1,5^2$ | 64 | 24 |
| 16 | $0,6^2$ | 81 | 12 |
| 17 | $7^2$ | 100 | 6 |
| 18 | $8^2$ | 121 | 16 |
| 19 | $1,1^2$ | 144 | 7 |
| 20 | $6^2$ | 169 | 1 |
| 21 | $0,3^2$ | 196 | 15 |
| 22 | $25^2$ | 225 | 23 |
| 23 | $1,2^2$ | 400 | 19 |
| 24 | $0,4^2$ | 625 | 22 |

| | | Lösung | Feld |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{625}$ | 0,6 | 5 |
| 2 | $\sqrt{400}$ | 4 | 4 |
| 3 | $\sqrt{6,25}$ | 15 | 13 |
| 4 | $\sqrt{196}$ | 13 | 8 |
| 5 | $\sqrt{81}$ | 2 | 6 |
| 6 | $\sqrt{36}$ | 20 | 15 |
| 7 | $\sqrt{1,44}$ | 14 | 20 |
| 8 | $\sqrt{0,16}$ | 12 | 23 |
| 9 | $\sqrt{144}$ | 10 | 11 |
| 10 | $\sqrt{4}$ | 1,2 | 3 |
| 11 | $\sqrt{49}$ | 3 | 21 |
| 12 | $\sqrt{16}$ | 8 | 18 |
| 13 | $\sqrt{0,81}$ | 5 | 22 |
| 14 | $\sqrt{9}$ | 7 | 14 |
| 15 | $\sqrt{100}$ | 6 | 16 |
| 16 | $\sqrt{169}$ | 1,1 | 10 |
| 17 | $\sqrt{2,25}$ | 0,4 | 1 |
| 18 | $\sqrt{0,9}$ | 11 | 2 |
| 19 | $\sqrt{1,21}$ | 9 | 17 |
| 20 | $\sqrt{225}$ | 25 | 7 |
| 21 | $\sqrt{0,36}$ | 0,3 | 24 |
| 22 | $\sqrt{25}$ | 1,5 | 9 |
| 23 | $\sqrt{121}$ | 2,5 | 12 |
| 24 | $\sqrt{64}$ | 0,9 | 19 |



# 3. Station:
## Berechnungen zum Pythagoräischen Lehrsatz

Wähle mindestens 2 Arbeitsblätter aus:

*: leicht

**: mittel

***: schwer

| | |
|---|---|
| MATERIAL | verschiedene Arbeitsblätter, Taschenrechner, Stifte, Klebstoff |
| HILFE | Arbeite alleine! |
| KONTROLLE | Lösungsblätter an der Tafel |

Tipp: Mache jeweils eine Skizze!

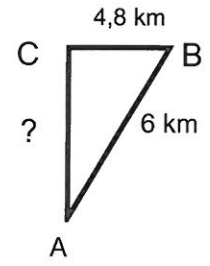
1. Ein Hobbygärtner lehnt eine 5 m lange Leiter an einen Baum.
Sie steht dabei 1,9 m vom Baum ab.

* a) Wie hoch reicht die Leiter?

b) Wie lange müsste sie sein, wenn der Gärtner einen Ast in 7,25 m Höhe abschneiden wollte?

2. In einem Flugzeug ist der Höhenmesser ausgefallen. Der Pilot sieht senkrecht unter sich einen Ort, von dem er weiß, dass er 12 km vom Flughafen entfernt ist. Das Flugzeug selbst ist noch 13,2 km Luftlinie vom Flughafen entfernt.
Wie hoch fliegt das Flugzeug? (Skizze)

**

3. 

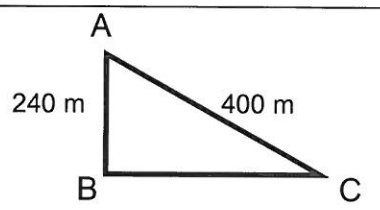

**

Herr Musak fährt täglich mit dem Fahrrad vom Ort A nach B zur Arbeit. Einmal in der Woche fährt er aber über C nach B, um dort Einkäufe zu tätigen.
Welchen Umweg nimmt er dafür auf sich?

4. Frau Marek durchquert bei einem Spaziergang eine Parkanlage von A nach C.

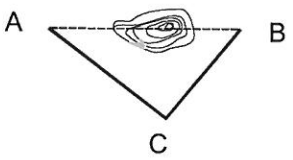
Um wie viele Meter verlängert sich der Weg, wenn der Park gesperrt ist und Frau Marek über B nach C gehen muss?

**




5. In einem ebenen Gelände soll die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermittelt werden. Eine direkte Messung ist wegen eines Hindernisses nicht möglich. Deshalb wurde ein rechtwinkeliges Dreieck so abgesteckt, dass man die Katheten AC und BC messen kann.
Berechne die Länge der Strecke AB!
$\overline{AC}$ = 2,13 km; $\overline{BC}$ = 4,85 km

*




6. Die Rückwand einer modernen Kapelle hat die Form eines gleichschenkligen Dreiecks mit 14,48 m Basislänge und 8,82 m Höhe. Skizze!

*** a) Berechne die Länge der schrägen Seitenkante und den Flächeninhalt der Wand!

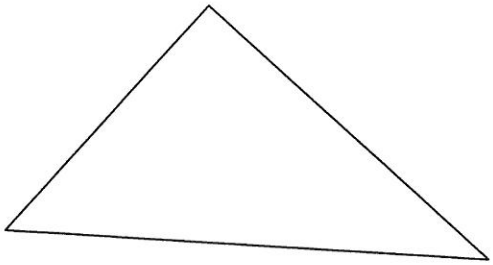
b) Quadratische Mosaikplatten mit einer Kantenlänge von 30 cm sollen die Rückwand abdecken. Wie viele solche Platten werden benötigt?

7. Die Spitze einer Stehleiter ist 1,9 m über dem Boden, ihre Fußenden sind 1,7 m weit voneinander entfernt. Mach eine Skizze!

*** Wie lang ist die zusammengeklappte Leiter? (Runde auf cm!)

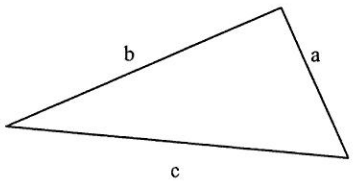
8. *

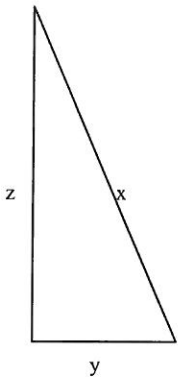
Beschrifte das Dreieck, zeichne den rechten Winkel ein und gib die Formel für den Pythagoräischen Lehrsatz an! Markiere die Hypotenuse blau und die beiden Katheten rot!



9. *

Schreibe jeweils den pythagoräischen Lehrsatz an!




_____

_____