



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

„Der Riemannsche Abbildungssatz“

Verfasser

Rahmi Özaltın

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im März 2013

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 313
Studienrichtung lt. Studienblatt: Unterrichtsfach Mathematik
Betreuer: Bernhard Lamel

Danksagung

Mit diesen Zeilen möchte ich mich bei all jenen bedanken, die nicht nur durch ihre fachliche, sondern auch ihre persönliche Unterstützung zur Erstellung dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Zu Beginn möchte ich Herrn Prof. Lamel, der mich mit wertvollen Denkanstößen und Anregungen stets motivierte, danken. Durch seine zielgerichtete Begleitung und Hilfestellung während aller Phasen der Ausarbeitung konnte eine intensive Beschäftigung mit dem Teilgebiet der Komplexen Analysis gewährleistet werden.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, allen voran meinen Eltern Dönüs und Ramazan, die mein Studium erst ermöglicht und mich über die Jahre hinweg tatkräftig unterstützt haben. Nur durch ihr selbstloses Engagements und stetige Motivation konnte ich meinen langersehnten Berufswunsch Lehrer zu werden, erfüllen.

Ebenso herzlich möchte ich mich bei meiner Verlobten bedanken. Durch ihre Engelsgeduld und einem Meer an Verständnis, gab sie mir den nötigen Raum mich intensiv meiner Diplomarbeit widmen zu können.

Während meiner gesamten Studienzeit habe ich den Wissensaustausch mit meinen StudienkollegInnen äußerst genossen und freue mich auf diesem Wege neue Freundschaften geknüpft zu haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Zahlen	1
1.1	Historische Einführung	1
1.2	Der Körper der komplexen Zahlen	3
1.3	Imaginäre Einheit und Darstellung komplexer Zahlen	5
1.4	Der Betrag und die komplex konjugierte Zahl	6
1.5	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	8
1.6	Komplexe Wurzeln und Potenzen	9
1.7	Gebiete und Topologische Grundbegriffe	11
2	Holomorphe Funktionen und Komplexe Differentiation	15
2.1	Grenzwerte	15
2.2	Differentiation im Komplexen	16
2.3	Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen	17
3	Potenzreihen und Elementare Funktionen	21
3.1	Potenzreihen	21
3.2	Elementare Funktionen	24
4	Möbiustransformationen	26
4.1	Riemannsche Sphäre	26
4.2	Gebrochen-lineare Abbildungen	30
4.3	Das Doppelverhältnis und die Kreis- bzw. Geradentreue	36
5	Integration in $\mathbb{C}$	39
5.1	Holomorphiekriterien	57
6	Konforme Abbildungen	59
6.1	Biholomorphe Abbildungen	61
6.2	Automorphismengruppen	65
6.2.1	Automorphismen von $\mathbb{E}$	65
6.2.2	Automorphismen von $\mathbb{H}$	66
7	Der Riemannsche Abbildungssatz	68
7.1	Normale Familien	68
7.2	Der Riemannsche Abbildungssatz	73
8	Literaturverzeichnis	82

1 Komplexe Zahlen

In diesem folgenden Kapitel möchte ich die elementarsten Begriffe der komplexen Analysis einführen. Bei der Erarbeitung der jeweiligen Themen habe ich mich meist an die Werke von Fischer, Lieb und Fritsche gehalten. Nach einer historischen Einleitung zum Thema Komplexe Zahlen und der Einführung der wichtigsten Definitionen und Sätze widme ich meine Aufmerksamkeit der Darstellung komplexer Zahlen. Hier werden wir erfahren, dass die reelle x -Achse mit dem Realteil einer komplexen Zahl identifiziert wird und die y -Achse dem Imaginärteil entspricht. Anschließend führe ich den Betrag – der eine mögliche Bewertung komplexer Zahlen zulässt – die Wurzel, das komplex konjugierte und die trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen ein. Es wird sich im Laufe der Zeit herausstellen, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen in der Polardarstellung vorteilhaft ist. Im darauffolgenden Unterkapitel gehen wir auf topologische Grundbegriffe ein und führen Gebiete, Kreisscheiben, konvexe Gebiete und Sterngebiete ein.

1.1 Historische Einführung

Seit der Antike fasziniert das Problem des Findens der Lösungen einer Gleichung zahlreiche Mathematiker und Mathematikerinnen.

Viele von ihnen versuchten Lösungsstrategien und Lösbarkeitskriterien für eben solche Gleichungen anzugeben. Um etwa 250 nach Christus gelang es Menschen, mit dem Gebrauch des Werkzeugs der antiken Mathematik, Lösbarkeitsansätze und Kriterien für ebensolche Gleichungen zu entwickeln. Es entstand die Theorie der linear diophantischen Gleichungen und man entwickelte sie weiter. Die Geschichte eines der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik, der Algebra, beginnt mit der Beschäftigung mit solchen Themen. Bereits die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 = 0$$

bereitete Mathematikern früher große Schwierigkeiten, da man bis dato die Zahl Null nicht kannte. Am Anfang des 13. Jahrhunderts und im Zuge der Kulturkontakte zwischen Europa und dem Orient gelang der Zahl 0 der Siegeszug nach Europa. Von diesem Zeitpunkt an war die oben angeführte Gleichung lösbar. Nach der Einführung negativer Zahlen und der damit verbundenen Zahlenbereichserweiterung waren auch Gleichungen der Form

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

lösbar. Nun kannte man die natürlichen Zahlen, welche durch Null und später auch durch negative ganze Zahlen zu der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert wurden. Doch auch nach diesen Zahlenbereichsexpansionen tauchten Probleme auf. Einerseits ist seit *Euklid* (ca. 360 v.Chr. - 280 v.Chr.), der in seinem Werk "Die Elemente" mit einem indirekten Beweis die Irrationalität der $\sqrt{2}$ zeigte und andererseits seit Hippasos von Metapont (ca. 6. Jhdt. v. Chr.), der die $\sqrt{2}$ als

Diagonallänge des Einheitsquadrates erkannte, bekannt, dass die Gleichung

$$x^2 = 2$$

in den rationalen Zahlen nicht lösbar ist. Daher griff man in der Mathematik schon früh auf die reellen Zahlen zurück, ohne einer näheren Definition des mathematischen Konstrukts. Erst *Richard Dedekind* (1831-1916) und *Georg Cantor* (1845-1918) führten dieses Zahlensystem axiomatisch ein. Doch schon vorher, genau genommen in der frühen Neuzeit, erkannte man, dass auch hier nicht alle Gleichungen lösbar sind. Denn die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

hat keine reelle Lösung, wohl aber komplexe, wie wir später feststellen werden. Die komplexen Zahlen wurden ohne Definition in der Mathematik eine Zeit lang verwendet. *Geronimo Cardano* (1501-1576) soll beim Versuch des Auffindens der Nullstellen eines Polynoms dritten Grades die komplexen Zahlen vor Augen gehabt haben. Um 1540 herum stieß man hier auf Formeln, welche nach dem Veröffentlichlicher (Cardano) und nicht nach dem Entdecker *Niccolo Tartaglia* (1500-1557) benannt wurden. *Raffaello Bombelli* (1526-1572) erweiterte die Lösungsmethode von Cardano und Tartaglia und führte in seinem Werk "Algebra" auch negative und imaginäre Zahlen, sowie die Klammerschreibweise (runde Klammern) ein. In den nächsten Jahren empfanden die Mathematiker die komplexen Zahlen noch als "eine feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein".

Auch *Leonhard Euler* (1707-1783) kannte bereits die Menge der komplexen Zahlen und führte 1748 die Zahl i in seiner berühmten Arbeit "Introductio in analysin infinitorum" ein. In dem gleichnamigen Werk taucht auch die faszinierende Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

auf. Der erste jedoch, der eine wissenschaftliche Arbeit in diesem Bereich verfasst hat, war *Caspar Wessel* (1745-1818). Er veröffentlichte 1799 an der Königlich Dänischen Akademie (obwohl er ebenda kein Mitglied war) eine Arbeit über die geometrische Deutung und Interpretation der komplexen Zahlen und erstellte mit diesen und mit Hilfe der trigonometrischen Vermessung eine exakte Landkarte Dänemarks. Da seine Erkenntnisse unter Mathematikern keine Beachtung fand, wurde sein komplettes Werk in den Schatten gestellt. Erst mit der geometrischen Interpretation von *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) im Jahre 1831 gelang der Durchbruch der komplexen Zahlen. Aus der heutigen wissenschaftlichen Perspektive sind die komplexen Zahlen keinesfalls wegdenkbar. Die vergleichsweise einfache Definition und das Arbeiten mit komplexen Zahlen begünstigen den Einsatz und ihre Anwendung in vielen Wissenschaftsgebieten, wie zum Beispiel der Physik und der Chemie.

1.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Um den Körper der komplexen Zahlen einführen zu können, bedarf es einiger Überlegungen. Wir gehen wie folgt vor: Zunächst wird $\mathbb{C}$ als ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum definiert. Eine komplexe Zahl z legt man als ein Tupel (a, b) von reellen Zahlen a, b fest. So lassen sich die Elemente (a, b) als Punkte der Ebene deuten. Im nächsten Schritt führen wir die kanonischen Basisvektoren $\mathbf{1} = (1, 0)$ und $\mathbf{i} = (0, 1)$ ein.

Die Menge aller geordneter Zahlenpaare (a, b) versehen mit den beiden Operationen

$$\begin{aligned} + : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \cdot : (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

bildet einen kommutativen Körper, genannt den Körper der komplexen Zahlen. Um diese Aussage überprüfen zu können, definieren wir zunächst abelsche Gruppen, führen folgenden Satz an und beweisen diesen in weiterer Folge.

Definition 1.

Sei M eine Menge und $\circ$ eine Verknüpfung. Dann heißt M Gruppe, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. **neutrales Element:** $\forall m \in M \exists e \in M : m \circ e = m$
2. **inverses Element:** $\forall m \in M \exists m^{-1} \in M : m \circ m^{-1} = e$
3. **Assoziativität:** $\forall m, n, p \in M : (m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$

Wenn zusätzlich die

$$\textbf{Kommutativität} : \forall m, n \in M : m \circ n = n \circ m$$

gegeben ist, so wird M abelsche oder kommutative Gruppe genannt.

Satz 2.

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bildet einen Körper.

Beweis.

Um zeigen zu können, dass eine Menge mit zwei Verknüpfungen einen Körper bildet, müssen wir drei Axiome nachweisen.

Zunächst muss $(\mathbb{C}, +)$ eine Gruppe sein, ebenfalls muss auch $(\mathbb{C}, \cdot)$ eine Gruppe bilden.

Zu guter Letzt muss nachgewiesen werden, dass die Distributivgesetze gelten.

Sei $z := (x, y)$. $(\mathbb{C}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, da

1. das neutrale Element $\mathbf{0} := (0, 0)$, denn $(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$
2. das inverse Element zu z ist
 $-z := (-x, -y)$, denn $(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$
3. seien nun $z_1 := (x_1, y_1)$, $z_2 := (x_2, y_2)$ und $z_3 := (x_3, y_3)$, dann gilt
 $(z_1 + z_2) + z_3 = [(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) =$
 $= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) =$
 $= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = z_1 + (z_2 + z_3)$

4. sei nun $z_1 := (x_1, y_1)$ und $z_2 := (x_2, y_2)$, dann gilt
 $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) =$
 $(x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1$

Somit haben wir den ersten Teil gezeigt und widmen uns dem nächsten Beweisschritt und zeigen, dass auch $(\mathbb{C}, \cdot)$ abelsch ist.

1. Das neutrale Element hier ist $\mathbf{1} := (1, 0)$, denn
 $(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y)$
2. Das inverse Element der Multiplikation ist $z^{-1} := (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$, denn
 $z \cdot z^{-1} = (x, y) \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) =$
 $= \left(x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}, x \cdot \frac{-y}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{x}{x^2+y^2} \right)$
 $= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+xy}{x^2+y^2} \right) = (1, 0)$
3. Sei $z_1 := (x_1, y_1)$ und $z_2 := (x_2, y_2)$, dann gilt
 $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) =$
 $(x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + y_1x_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = z_2 \cdot z_1$
4. Seien nun $z_1 := (x_1, y_1)$, $z_2 := (x_2, y_2)$ und $z_3 := (x_3, y_3)$, dann gilt
 $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)(x_3, y_3)$
 $= [(x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3]$
 $= [x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3]$
 $= [x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(y_2y_3 + x_2x_3)]$
 $= [(x_1, y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3)] = (x_1, y_1)((x_2, y_2)(x_3, y_3))$
 $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

Nun ist der zweite Teil des Beweises auch gezeigt und wir widmen uns den Distributivgesetzen, die die beiden Verknüpfungen miteinander verbinden und zeigen deren Gültigkeit. Seien z_1, z_2 und z_3 wie oben gegeben, dann gilt:

1. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (x_1, y_1)[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)] = (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3)$
 $= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)]$
 $= [x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3]$
 $= [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)]$
 $= [(x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3)] = z_1z_2 + z_1z_3$
2. Aus der Kommutativität folgt schließlich: $(z_2 + z_3) \cdot z_1 = z_1 \cdot (z_2 + z_3)$.

□

1.3 Imaginäre Einheit und Darstellung komplexer Zahlen

In der historischen Betrachtung gingen wir von der Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

aus und gaben an, dass diese nicht über dem Körper der reellen Zahlen lösbar ist, doch ist diese nun in $\mathbb{C}$ lösbar? Um eine Antwort auf diese Frage zu bekommen, müssen wir uns hier einige andere Gedanken machen und werden ferner die Darstellung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen.

Fakt 1.

Wenn wir $\mathbf{i} := (0, 1)$ setzen und sie imaginäre Einheit nennen, so gilt:

$z = (x, y) = x(1, 0) + (0, 1)y = x + iy$, wobei $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Daraus erhalten wir, dass $i = \sqrt{-1}$ die obige quadratische Gleichung löst. Wir haben somit eine Zahl gefunden, deren Quadrat -1 ergibt.

Definition 3.

Sei $z := (x, y)$ eine komplexe Zahl, dann können wir fortan z auch als $z = x + iy$ anschreiben und bezeichnen x als Realteil ($\Re(z)$) und y als Imaginärteil ($\Im(z)$) der komplexen Zahl z . Eine komplexe Zahl z heißt reell, wenn $\Im(z) = 0$ und rein imaginär wird sie genannt, wenn $\Re(z) = 0$.

Da wir nun eine neue Darstellung komplexer Zahlen haben, müssen wir unsere oben eingeführten Operatoren auf diese Schreibweise anpassen. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ und $w = a + ib$, dann erhalten wir:

$$z + w = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$$

$$z \cdot w = (x + iy)(a + ib) = xa + ixb + iay + \underbrace{i^2}_{=-1}yb = (xa - yb) + i(xb + ya)$$

Man erkennt, dass das Ausmultiplizieren auf das gleiche Ergebnis führt, wie das Rechnen nach der Multiplikationsvorschrift. Dies bedeutet in weiterer Folge, dass man mit der imaginären Einheit i genau so rechnen kann, wie man es bereits von den reellen Zahlen gewohnt ist.

Im Körper der reellen Zahlen existiert eine Ordnung innerhalb der Elemente, in $\mathbb{C}$ gibt es eine solche Eigenschaft nicht. Dies soll mittels eines Satzes näher erläutert werden.

Satz 4.

Der Körper der komplexen Zahlen kann nicht angeordnet werden.

Beweis.

Wir nehmen indirekt an, dass $\mathbb{C}$ angeordnet ist. Sei $M \subset \mathbb{C}$. Für jedes Element $a \in M$ mit $a \neq 0$ gilt entweder $a < 0$ oder $a > 0$. Die imaginäre Einheit i müsste entweder kleiner oder größer Null sein, da ja $i \neq 0$. Daraus würde folgen, dass $i^2 > 0$ und $0 = i^2 + 1 > 0$, was ein Widerspruch ist. $\square$

Bemerkung 1.

Komplexe Zahlen sind, wie oben bereits erläutert, reelle Zahlenpaare, somit kann nicht immer entschieden werden, welche von zwei komplexen Zahlen die größere (oder kleinere) ist.

Im nächsten Unterkapitel werden wir den Betrag einer komplexen Zahl definieren, der gewissermaßen eine Bewertung dieser zulässt.

Doch zunächst gehen wir auf die Darstellung von komplexen Zahlen ein und formulieren dies wie folgt.

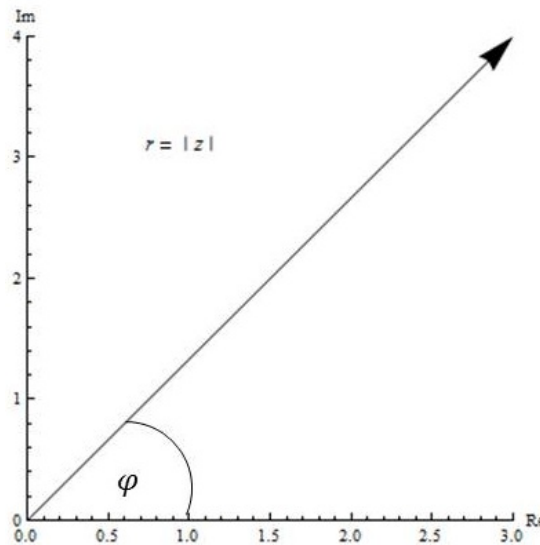


Abbildung 1: Komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene

Fakt 2.

Sei $z := x + iy$ eine komplexe Zahl. Man kann z in der Gaußschen Zahlenebene darstellen, indem man die x-Achse des Koordinatensystems mit dem Realteil der komplexen Zahl z und die y-Achse mit dem Imaginärteil der komplexen Zahl z identifiziert. Somit kann unsere komplexe Zahl $z = x + iy$ als Punkt im $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (x, y) aufgefasst werden. In dieser Darstellungsweise wird der Punkt (x, y) als Vektor angesehen.

1.4 Der Betrag und die komplex konjugierte Zahl

Die Länge dieser Verbindung wird durch den Betrag einer komplexen Zahl angegeben und ist wie folgt definiert:

Definition 5.

Sei z eine komplexe Zahl. Wir sehen in Abbildung 1, dass mit dem pythagoräischen Lehrsatz durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Pfeils gegeben ist.

Definition 6.

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Durch $\bar{z} = x - iy$ ist die komplex konjugierte Zahl zu z gegeben. Geometrisch ist die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ die Spiegelung des Punktes (x, y) an der x-Achse.

Bevor wir nun Eigenschaften des Betrags und der komplex konjugierten Zahl besprechen folgt eine Bemerkung zu der Definition 5, die in weiterer Folge eine wichtige Rolle spielen wird.

Bemerkung 2.

Definition 5 kann etwas anders angeschrieben werden.

Es gilt $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Satz 7.

Der Betrag erbt alle Eigenschaften des euklidischen Abstandes. Weitere Eigenschaften zeigen die Verträglichkeit mit dem Produkt in $\mathbb{C}$. Es gilt:

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|zw| = |z||w|$, insbesondere gilt: $|-z| = |iz| = |z|$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$
4. Auch die umgekehrte Dreiecksungleichung ist erfüllt, es gilt:
 $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Beweis.

Der Beweis für die 1. und 2. Eigenschaft ist trivial. Der Beweis der dritten Behauptung folgt aus:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + |z\bar{w}| + |z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Es ist $|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|$, also $|z| - |w| \leq |z - w|$. Weiters gilt $|w| = |(w - z) + z| \leq |w - z| + |z|$, also ist $|w - z| \leq |w| - |z|$. Somit haben wir auch $||w| - |z|| \leq |w - z|$ gezeigt und sind fertig. $\square$

Bei dem obigen Beweis haben wir einige Eigenschaften der komplex konjugierten Zahl $\bar{z}$ verwendet, diese formulieren wir als Satz.

Satz 8.

Sei $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ ihre komplex konjugierte Zahl. Dann gelten folgende Eigenschaften:

1. $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
2. $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$
3. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ für $z \neq 0$
4. Sei $w = a + ib$, dann gilt: $\frac{w}{z} = \frac{w\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{(a+ib)(x-iy)}{x^2+y^2} = \frac{ax+by}{x^2+y^2} + i\frac{bx-ay}{x^2+y^2}$ für $z \neq 0$.
5. $|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + 2\Re(\bar{z}w) + |w|^2$.
6. $z \rightarrow \bar{z}$ ist eine Involution.

1.5 Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen

Wir wissen nun, dass $z \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$ eine eindeutige Darstellung in der Gaußschen Ebene besitzt, denn $x = \Re(z)$ und $y = \Im(z)$. Auch $\bar{z}$ ist durch eine Spiegelung an der x -Achse darstellbar. Wir wollen nun diese Darstellung etwas genauer betrachten, denn $z = x + iy, z \neq 0$ besitzt auch die Darstellung $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, wobei $r := |z|$ und φ durch z eindeutig bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist. Um nun φ eindeutig bestimmen zu können, schränkt man die Werte von φ zwischen $-\pi < \varphi \leq \pi$ ein und nennt φ den Hauptzweig von z . Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $z \neq 0$ unterscheiden wir folgende Fälle des Argumentes:

$$\varphi = \arg(z) = a = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0, y \text{ beliebig} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Beispiel 1. 1. $z = 3 + 4i, r = |z| = 5, \arg z = 53, 135^\circ$

2. $z = 3 - 4i, r = |z| = 5, \arg z = -53, 135^\circ$

Da wir nun eine trigonometrische Darstellungsvariante komplexer Zahlen gefunden haben, untersuchen wir unsere anfänglich definierten Verknüpfungen und versuchen im folgenden Satz die Multiplikation zweier komplexer Zahlen graphisch zu veranschaulichen.

Satz 9.

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und gelte $z = a + ib = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $w = c + id = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Dann ergibt die Multiplikation beider komplexen Zahlen $z \cdot w = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Beweis.

Durch einfaches Nachrechnen und Anwenden trigonometrischer Additionstheoreme erhält man:

$$z \cdot w = r_1 r_2 \left[\underbrace{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \underbrace{(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)}_{=\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} \right] = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad \square$$

Bemerkung 3.

Wie wir nun berechnet haben, werden bei der komplexen Multiplikation die Winkel addiert und die Längen (Beträge) miteinander multipliziert.

Satz 10.

(Formel von de Moivre): Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

Beweis.

Wir führen einen Induktionsbeweis. Der Induktionsanfang besagt, dass die Formel für $(n = 1)$ richtig ist, da $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Nun machen wir eine Induktionsannahme und geben hierfür ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$ vor und nehmen an, dass $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)$ ist. Nun wollen wir zeigen, dass unsere Behauptung auch für $k + 1$ richtig ist:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k \\ &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)) = \\ &= \cos \varphi \cos(k\varphi) - \sin \varphi \sin(k\varphi) + i(\sin \varphi \cos(k\varphi) + \cos \varphi \sin(k\varphi)) \\ &= \cos((k+1)\varphi) + i \sin((k+1)\varphi). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.

Für die geometrische Konstruktion der komplexen Division gelten ähnliche Bedingungen wie bei der Multiplikation. Sind z und w aus $\mathbb{C}$, dann definieren wir den Winkel zwischen den beiden Zahlen durch $\arg(\frac{w}{z}) = \angle(z, w)$. Allgemein gilt für $z, w \in \mathbb{C} : \frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$. Wie wir erkennen können, werden die Beträge dividiert und die Winkel subtrahiert.

1.6 Komplexe Wurzeln und Potenzen

Sei z eine komplexe Zahl.

$z^2 = (x + iy)^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$. In Polardarstellung ist das Potenzieren einfacher, denn

$z^n = (|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} \Leftrightarrow z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. Auch die Umkehrung des Potenzierens, das Wurzelziehen, lässt sich in dieser Darstellung leicht bestimmen.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= z^{\frac{1}{n}} = (|z|e^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\varphi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \end{aligned}$$

Das Argument von z ist ja auf 2π genau bestimmt, also ist auch $\frac{\varphi+2\pi}{n}$ eine gültige Wahl und ebenso $\frac{\varphi+2k\pi}{n}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = n$ ergeben sich keine neuen Werte mehr, somit hat jedes $z \in \mathbb{C}$ eine von den n verschiedene Wurzeln mit

$\varphi_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Die Lösungen liegen daher in der komplexen Ebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden ein regelmäßiges n -Eck. Wir fassen zusammen:

Satz 11.

Ist $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$, so hat $z^n = a$ die n Lösungen $z_k = \sqrt[n]{r} (\cos \frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+2k\pi}{n})$ für $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Beweis.

Eine Herleitung der obigen Überlegungen kann etwa bei [6] auf der Seite 11 nachgelesen werden.

Beispiel 2.

Wir betrachten die Gleichung $z^4 = -16$. Aus Satz 11 folgt, dass

$$-16 = 16 \cdot (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$$

die Lösungen

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right)$$

für $k = 0, 1, 2, 3$ hat. Eingesetzt erhalten wir also:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2}(1 - i)$$

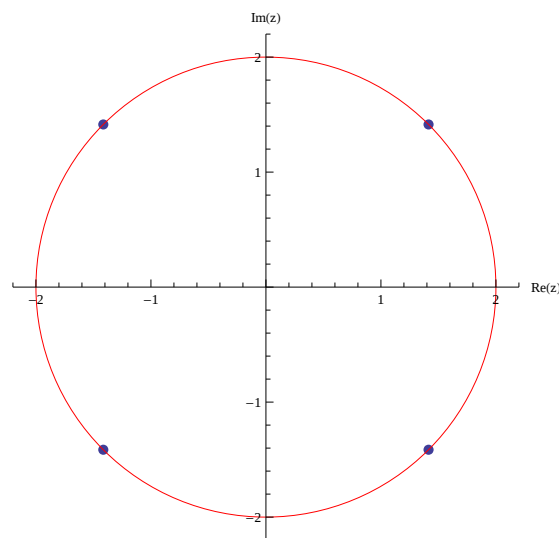


Abbildung 2: Die Lösungen von $z^4 = -16$.

Beispiel 3.

$$\text{Sei } z^2 - (1+i)z + i = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1+i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1+i)^2}{4} - i} = \frac{1+i}{2} \pm \frac{\sqrt{-i}}{\sqrt{2}}.$$

$$\sqrt{-i} = \left(e^{\frac{-i\pi}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{-i\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{1+i}{2} \pm \frac{1-i}{2} \Leftrightarrow z_1 = 1, z_2 = i$$

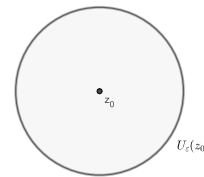
Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes Polynom über dem Körper der komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt. Somit nennt man $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen.

1.7 Gebiete und Topologische Grundbegriffe

Definition 12.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt und $r > 0$. Dann bezeichnet $U_r(z_0)$ die offene Kreisscheibe mit dem dazugehörigen Radius r um den Punkt z_0 . Diese ist definiert durch:

$$U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$



Wenn $\varepsilon > 0$ der Radius und $z_0 \in \mathbb{C}$ wieder ein Punkt ist, so sprechen wir von der Epsilon-Umgebung des Punktes z_0 .

Abbildung 3:
 $U_r(z_0)$

Definition 13.

Eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ heißt offen, wenn es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $U_\varepsilon(z)$ ganz in A liegt. Diese Menge A heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Weiters heißt A beschränkt, wenn es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|z| < R$, $\forall z \in A$ ist. Die Menge A heißt kompakt, wenn sie sowohl beschränkt, als auch abgeschlossen ist.

Bemerkung 5.

In dem Körper der Komplexen Zahlen lassen sich viele Teilmengen mit Begriffen wie dem Real- und Imaginärteil, sowie dem Betrag beschreiben. Betrachten wir die Menge $\{z \mid z = \bar{z}\}$, so erhalten wir die reelle Achse. Bei der Menge $\{z \mid \Re(z) > 0\}$ handelt es sich um die offene rechte Halbebene. Ausdrücke wie $|z - z_0| < r$ führen mit Definition 12 auf:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

Somit handelt es sich um eine offene Kreisscheibe mit Radius r und dem Mittelpunkt $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$.

Eine etwas andere und (graphisch) verständlichere Definition besagt, dass als (offene) Kreisscheibe um einen Punkt z_0 das Innere eines Kreises um z_0 in der Zahlenebene bezeichnet wird, der Kreisrand wird hierbei nicht zur Kreisscheibe gezählt. Als abgeschlossene Kreisscheibe bezeichnet man eine Kreisscheibe mit kompletten Rand.

Bemerkung 6.

Abgeschlossene und offene Mengen in $\mathbb{C}$ stimmen mit der üblichen Topologie mit jenen im $\mathbb{R}^2$ überein und haben darin die gleichen Eigenschaften. Die leere Menge und $\mathbb{C}$ sind zugleich offen und abgeschlossen. Endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind wieder offen. Bei endlichen Vereinigungen und beliebigen Durchschnitten von abgeschlossenen Mengen erhalten wir wieder abgeschlossene Mengen.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt. z_0 wird als Randpunkt einer Menge M bezeichnet, wenn in jeder Kreisscheibe um z_0 sowohl Punkte, die zur Menge M gehören, als auch Punkte, die nicht zu M gehören, liegen.

Die Gesamtheit der Randpunkte wird als Rand bezeichnet. Der Punkt z_0 wird als innerer Punkt einer Menge bezeichnet, wenn es eine Kreisscheibe $U_r(z_0)$ um z_0 gibt, sodass diese ausschließlich Punkte enthält, die zu der Menge gehören. Wir fassen kurz zusammen und halten einige Fakten fest:

- Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ ist offen, wenn sie keinen einzigen ihrer Randpunkte enthält.
- Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, wenn sie alle Randpunkte enthält, d.h.: wenn ihr Komplement in $\mathbb{C}$ offen ist.
- Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $X \subset M$. X heißt relativ offen bzgl. der Teilmenge M , wenn es eine offene Teilmenge Y von $\mathbb{C}$ gibt, sodass $X = Y \cap M$ gilt.
- Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $X \subset M$. X heißt relativ abgeschlossen bzgl. der Teilmenge M , wenn es eine abgeschlossene Teilmenge Y von $\mathbb{C}$ gibt, sodass $X = Y \cap M$ gilt.

Bemerkung 7.

In $\mathbb{C}$ existieren genau zwei Teilmengen, die keine Randpunkte haben und somit offen und gleichzeitig abgeschlossen sind. Diese sind $\mathbb{C}$ und $\{\}$.

Definition 14.

Sei $A \subset \mathbb{C}$. Die Menge A wird als wegzusammenhängend bezeichnet, wenn sich beliebige Punkte der Menge A durch einen Streckenzug, der komplett in der Menge verläuft, verbinden lässt. Dies sind genau jene Teilmengen, die nicht als disjunkte Vereinigung von mindestens zwei nicht leeren offenen Mengen dargestellt werden können.

Nun da wir bereits geklärt haben, was zusammenhängende Teilmengen sind, werden wir noch den Begriff der einfach zusammenhängenden Mengen definieren, die in späterer Folge eine wichtige Rolle für meine Arbeit spielen. Es sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Man erweitert $\mathbb{C}$ durch Hinzufügen eines weiteren Punktes, den man mit ∞ bezeichnet. Es gelten die gleichen Verknüpfungen, man definiert $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$ und $\frac{\infty}{0} = \infty$. Weiters gilt für $z \neq 0$, dass $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$. Einige Ausdrücke, wie $\infty - \infty$ und $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0$ sind nicht definiert.

Definition 15.

Eine zusammenhängende Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ wird als einfach zusammenhängend bezeichnet, wenn sich zwei beliebige Streckenzüge zwischen zwei beliebigen Punkten von A immer innerhalb von A stetig ineinander überführen lassen, das heißt, dass ein Streckenzug sich zum anderen so verformen lässt, sodass er komplett in A liegt. Die formale Definition dieses Begriffs folgt zu einem späteren Zeitpunkt.

Bemerkung 8.

Grob gesprochen nennt man eine Menge A zusammenhängend, wenn sie aus einem Stück besteht. Wenn A nun eine offene und zusammenhängende Menge ist, so nennt man A ein Gebiet. Wenn das Gebiet keine Löcher im Inneren besitzt, so nennt man es einfach zusammenhängend. Wenn aber der Rand aus $k + 1$ geschlossenen Kurven besteht, nennt man das Gebiet k -fach zusammenhängend.

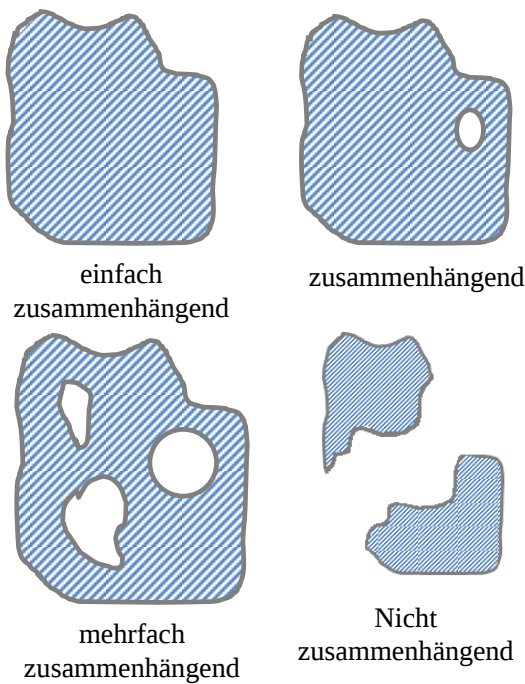


Abbildung 4: einfach, mehrfach und nicht zusammenhängende Gebiete

Definition 16.

Sei $A \subset \mathbb{C}$. A heißt konvex, wenn für alle $z_1, z_2 \in A$ die Verbindungsstrecke $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$, $t \in [0, 1]$ ganz in A liegt. Gibt es einen Punkt z^* , sodass die Verbindungsstrecken zwischen z^* und allen $z \in A$ ganz in der Menge A liegen, spricht man von einem Sterngebiet und nennt z^* den Sternmittelpunkt. Dadurch ist jedes konvexe Gebiet auch ein Sterngebiet, und jeder Punkt ist ein möglicher Sternmittelpunkt.

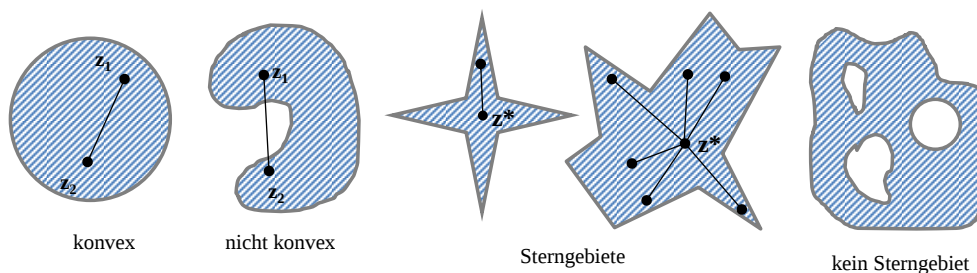


Abbildung 5: Konvexes Gebiet, Sterngebiet

Beispiel 4.

Wir charakterisieren nun unsere fünf offenen Mengen aus Abbildung 5. Der Einfachheit halber werde ich die Mengen mit A_i bezeichnen, wobei $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist.

Menge	Gebiet	einf. zshgd.	Sterngebiet	konvex
A_1	Ja	Ja	Ja	Ja
A_2	Ja	Ja	Nein	Nein
A_3	Ja	Ja	Ja	Nein
A_4	Ja	Ja	Ja	Nein
A_5	Ja	Nein	Nein	Nein

Wir haben bereits oben festgelegt, dass konvexe Gebiete auch Sterngebiete sind. Ferner sind alle Sterngebiete auch einfach zusammenhängend und diese sind wiederum ein Gebiet, somit muss in der Tabelle rechts von einem Nein ebenso ein Nein stehen. Links von einem Ja muss ebenso ein Ja stehen, somit genügt es den aussagekräftigsten Begriff anzugeben.

A_1 ist also ein konvexes Gebiet. Das Gebiet A_2 ist einfach zusammenhängend. A_3 und A_4 sind Sterngebiete. Zu guter Letzt ist A_5 also nur ein Gebiet.

2 Holomorphe Funktionen und Komplexe Differentiation

Dieses Kapitel beschäftigt sich zunächst mit der Thematik der Grenzwerte. Nach der Definition der Epsilon-Umgebung stürzen wir uns bereits auf einen Satz, wo Rechenregeln für Grenzwerte aus der reellen Analysis hergeleitet werden. Ebenfalls wird die Stetigkeit behandelt und den Grenzwert der Funktion $f(z)$ im Punkt a definiert. Anschließend führen wir die komplexe Differentiation ein. Auch hier formulieren wir einige Sätze und Beweise, die im Prinzip aus dem Reellen übernommen werden. Im letzten Unterkapitel besprechen wir die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen und geben einen (von vielen) möglichen Zugängen zu diesen an. Auch das Wirtinger-Kalkül bleibt nicht unbehandelt. Am Ende des Kapitels befinden sich Beispiele, die bei einer Einführung in die Funktionentheorie, wie in den Werken von Remmert, Fischer, Lieb und Fritzsche, nicht fehlen dürfen. [1][2][5]

2.1 Grenzwerte

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Wie in Definition 12 bereits erwähnt wurde, kann die Epsilonumgebung durch $U_\varepsilon(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < \varepsilon\}$ definiert werden.

Sei $X \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in X$ und $f : U_\varepsilon(\alpha) \cap X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt $F \in \mathbb{C}$ Grenzwert von f bei Annäherung an α , wenn es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $|f(z) - F| < \varepsilon'$, $\forall z \in U_\varepsilon(\alpha)$, $z \neq \alpha$ gilt. Man schreibt $F = \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$.

Satz 17.

Existieren die Grenzwerte $F = \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$ und $G = \lim_{z \rightarrow \alpha} g(z)$, so existieren auch:

1. $F + G = \lim_{z \rightarrow \alpha} (f(z) + g(z))$
2. $c \cdot F = \lim_{z \rightarrow \alpha} (c \cdot f(z))$, $\forall c \in \mathbb{C}$
3. $F \cdot G = \lim_{z \rightarrow \alpha} (f(z) \cdot g(z))$
4. $\frac{F}{G} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)$, falls $g(z) \neq 0$ gilt.

Beweis.

Die Beweise vom Satz 17 verlaufen analog zum reellen Fall. Ich möchte nur den Beweis für die dritte Behauptung anführen.

$|f(z)g(z) - FG| \leq |(f(z) - F)(g(z) - G) + F(g(z) - G) + G(f(z) - F)|$
 $\leq |f(z) - F||g(z) - G| + |F||g(z) - G| + |G||f(z) - F|$. Hier sieht man schon, dass die rechte Seite der Ungleichung beliebig klein wird, wenn $z \rightarrow a$. $\square$

Definition 18.

Eine Funktion f heißt stetig in a , wenn $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ gilt.

Satz 19.

Sind f und g Funktionen, die stetig im Punkt a sind, so sind auch $f \pm g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und auch $\frac{f}{g}$, falls $g(a) \neq 0$, stetig im Punkt a .

Beweis.

Die Beweise des Satzes folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte. $\square$

2.2 Differentiation im Komplexen

In diesem Kapitel wollen wir auf die komplexe Differentiation eingehen und diese als wichtige Basis für weitere Überlegungen ansehen. Bei der Ausarbeitung dieses Unterkapitels habe ich mich einerseits auf das Werk von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb ([1]) und andererseits auf das Werk von Klaus Fritzsche ([2]) gestützt.

Definition 20.

Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in X$ und $f : U_\varepsilon(a) \cap X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt komplex differenzierbar in a , wenn der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existiert. Man schreibt $f'(a) = \frac{df}{dz}(a) := \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$.

Wie im reellen Fall gilt auch hier der Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit und der Stetigkeit einer Funktion. Diese Eigenschaft wollen wir im nächsten Satz einführen und diesen anschließend beweisen.

Satz 21.

Sei $X \subset \mathbb{C}$ und $a \in X$ und $f : U_\varepsilon(a) \cap X \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar im Punkt a , so ist f auch stetig in diesem Punkt a .

Beweis.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) &= \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot (z - a) \right) = \\ \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \cdot \underbrace{\lim_{z \rightarrow a} (z - a)}_{=a-a=0} &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$, also die Stetigkeit

im Punkt a . $\square$

Satz 22.

Sind f und g zwei komplexe Funktionen, die in a differenzierbar sind, so sind auch $f \pm g, c \cdot f, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ mit $g(a) \neq 0$ differenzierbar in a und es gilt:

1. $(f + g)' = f' + g'$ (Summen- und Differenzenregel)
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ (Konstantenregel)
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (Produktregel)
4. $\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (Quotientenregel)

Beweis.

Da alle Beweise nach dem gleichen Prinzip verlaufen, möchte ich nicht alle anführen, sondern beweise die 3. Eigenschaft.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(a) &= \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{f(z)g(z) - f(a)g(a)}{z - a} \right) = \\ \lim_{z \rightarrow a} \left(\underbrace{\frac{f(z) - f(a)}{z - a}}_{:=f'(a)} g(z) + f(a) \underbrace{\frac{g(z) - g(a)}{z - a}}_{:=g'(a)} \right) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \end{aligned}$$

f und g sind nach der Voraussetzung differenzierbar und es gilt

$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a)$, somit sind alle Bedingungen erfüllt und die Gleichung darf wie oben angeschrieben werden. $\square$

Beispiel 5.

Wir betrachten im Folgenden einige Beispiele und machen uns vertraut mit den Regeln, die in Satz 22 aufgestellt wurden.

1. $f(z) = c$. Es ist $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{c-c}{z-a} = 0$. f ist für alle $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar und $f'(a) = 0$.
2. $f(z) = z$. Es ist $\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{z-a}{z-a} = 1$. f ist für alle $a \in \mathbb{C}$ differenzierbar und $f'(a) = 1$.
3. Sei $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $f'(z) = n \cdot z^{n-1}$. Diese Tatsache beweisen wir mittels Induktion. Die Aussage ist für $(n = 1)$ richtig, wie eben gezeigt wurde. Sei $f(z) = z^{n+1} = z^n \cdot z$. Nach der Produktregel gilt: $f'(a) = na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 = (n+1)a^n$.
4. Es sei nun $f(z) = \frac{1}{z^n} = z^{-n}$. Nach der Quotientenregel ist $f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = \frac{-n}{a^{n+1}} = -n \cdot a^{-n-1}$, wobei $a \neq 0$ gilt.

Zu guter Letzt werden wir noch die Kettenregel einführen, mit der nun alle Differentiationsregeln im Körper der komplexen Zahlen eingeführt und besprochen wurden.

Satz 23.

Seien $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(A) \subseteq B$ und f differenzierbar in z und g differenzierbar in $f(z)$. Dann ist $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{C}$ in z differenzierbar und es gilt: $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$.

Beweis.

$(g \circ f)'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(f(z)) - g(f(a))}{f(z) - f(a)} \cdot \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.
Wenn die Grenzwerte rechts existieren, existiert auch der Grenzwert der linken Seite und ist gleich dem Produkt. Die Grenzwerte existieren, da die Differenzierbarkeit vorausgesetzt wurde. $\square$

2.3 Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Jede komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt die Darstellung

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$, wobei $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Man nennt u den Real- und v den Imaginärteil von f . Es ist

$\lim f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y)$, d.h. existiert ein Grenzwert von f , so existieren auch Grenzwerte des Real- und Imaginärteils. Insbesondere gilt: f ist stetig genau dann, wenn u, v stetig sind.

Satz 24.

Ist $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ in $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar, so sind auch u, v partiell nach x und y ableitbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Für die Ableitung von $f(z)$ im Punkt z_0 erhalten wir:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$$

Beweis.

Sei f in z differenzierbar, dann gilt für $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \end{aligned}$$

Damit sehen wir, dass partielle Ableitungen von $f(z)$ nach x existieren. Nun wollen wir überprüfen, ob auch partielle Ableitungen von $f(z)$ nach y existieren und erhalten:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-i \cdot \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} \right) \end{aligned}$$

Weiters gilt: $f'(z) = -i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$. □

Beispiel 6.

Wie in Beispiel 5 betrachten wir hier:

1. $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar. Der Realteil der Funktion ist $u = x^2 - y^2$ und der Imaginärteil ist $v = 2xy$. Diese erfüllen die Bedingungen der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, da $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Daraus folgt also, dass $f'(z) = 2x + 2iy = 2z$
2. Sei $f(z) = (ax + by) + i(cx + dy)$. Die partiellen Ableitungen von $f(z)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= c, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = d \end{aligned}$$

Damit $f(z)$ differenzierbar für ein $z \in \mathbb{C}$ ist, muss $a = d$ und $b = -c$ sein, also $f(z) = a(x + iy) + b(y - ix) = (a - ib)(x + iy) = (a - ib)z$

Definition 25.

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion heißt holomorph oder regulär in a , wenn f in einer Umgebung von a differenzierbar ist.

Beispiel 7.

$f(z) = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ ist in $z = 0$ differenzierbar, aber nicht holomorph, da die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen nicht erfüllt sind. Dadurch ist $f(z)$ im Punkt 0 differenzierbar, aber nicht holomorph.

Wie bemerkt wurde, ist das Arbeiten mit komplexen Ableitungen nicht sehr einfach, da sehr schnell die Übersicht verloren werden kann. Um dem entgegen zu wirken, gibt es das Kalkül eines österreichischen Mathematikers, das nach ihm benannt ist. Die Rede ist vom Wirtinger-Kalkül, dieses erleichtert MathematikerInnen die Darstellung komplexer Ableitungen, da diese übersichtlicher gestaltet werden können. Was besagt dieses Kalkül? Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Veränderliche. Sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Dann existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$. Der Clou der Wirtinger-Ableitungen besteht darin, dass jetzt nicht nach Real- und Imaginärteil getrennt und abgeleitet wird, sondern die komplexe Variable $z := x + iy$ und deren konjugierte $\bar{z} := x - iy$ statt der herkömmlichen Variablen x und y verwendet wird. Wir leiten nun das Wirtinger-Kalkül her.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Ist die Zerlegung als totales Differential bezüglich der linearen Funktionen dx und dy . Aus Satz 8 und 1.) erhalten, wir dass

$$\Re(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \Im(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

Wenn wir nun diese Eigenschaften in die Differentiale einsetzen, erhalten wir:

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}), dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) = \frac{i}{2}(d\bar{z} - dz)$$

Eingesetzt in das totale Differential gilt:

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

Und nach einem letzten Umformungsschritt haben wir die Definition des Wirtinger-Kalküls.

Definition 26.

Setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

so spricht man vom Wirtinger Kalkül.

Satz 27.

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. f genügt den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in einem Punkt $z_0 \in M$ genau dann, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Beweis.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + i(u_y + iv_y)) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(u_x + v_y))$$

Somit gilt, dass $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow u_x = v_y, u_y = -v_x$

□

Bemerkung 9.

Der nächste Vorteil der Wirtinger-Ableitungen ist, dass aus einem System von Differentialgleichungen $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ und $-u_y(z_0) = v_x(z_0)$ eine Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ wird.

Beispiel 8.

Gegeben sei $f_1(z) = z^3$. Wir untersuchen diese Funktion auf komplexe Differenzierbarkeit.

Da bei z^3 kein $\bar{z}$ vorkommt, ist die Funktion überall komplex differenzierbar.

Es ist $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = 0$ und $f_1'(z) = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3z^2$

Beispiel 9.

Gegeben sei die Funktion $f_2(z) = x^2 - 2ix - y^2$. Wir untersuchen diese auf komplexe Differenzierbarkeit.

Da $x^2 - 2ix - y^2 = (x - iy)^2 = \bar{z}^2$, ist die Funktion nur für $z = 0$ komplex differenzierbar, da nur hier die Ableitung verschwindet.

Es ist $\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z}$.

Beispiel 10.

Gegeben sei $f_3(z) = |z|$. Wir untersuchen diese Funktion auf komplexe Differenzierbarkeit.

Da $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, ist $\frac{\partial f_3}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2\sqrt{z\bar{z}}} = \frac{1}{2} \frac{z}{|z|}$. Dieser Ausdruck ist für ein $z \neq 0$ nie Null. Somit ist die Funktion für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar.

3 Potenzreihen und Elementare Funktionen

In diesem kurzen, wenn auch interessanten Unterkapitel wiederholen wir den Begriff der Potenzreihen. In diversen Überlegungen führen wir den Konvergenzradius und Rechenregeln für das Rechnen mit Potenzreihen an. Satz 28 und Satz 29 stellen fundamentale Sätze dar, da Konvergenzkriterien formuliert und bewiesen werden. Die eingeführten Sachverhalte werden mit Beispielen gefestigt. Analog zur Kapitelbezeichnung bei Wolfgang Fischer und Ingo Lieb ([1]), beschäftigt sich das nächste Kapitel mit den elementaren Funktionen. Neben der komplexen Exponentialfunktion werden anhand der Eulerschen Formeln Darstellungen der trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente angegeben. Bei der Erarbeitung dieser Themen habe ich mich hauptsächlich an das Vorlesungsskript von Prof. Haslinger ([10]) und auf das Werk von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb gehalten.

3.1 Potenzreihen

Sei z eine Veränderliche und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt. Als formale Potenzreihe um den Entwicklungspunkt z_0 definiert man eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k, z_0 \in \mathbb{C}$$

Im Punkt, an dem die Reihe konvergiert, definiert man eine Eigenschaft, die bei näherer Betrachtung untersucht werde. Doch zunächst möchte ich noch kurz auf einige Rechenregeln für Potenzreihen eingehen. Seien nun

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ und } g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

zwei Potenzreihen. Man definiert dann:

$$f(z) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (z - z_0)^k, \quad a_k, b_k, z_0 \in \mathbb{C}$$

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad a_k, b_k, z_0 \in \mathbb{C}$$

wobei $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ ein Cauchyprodukt der beiden Koeffizienten ist. Damit sind Summen und Produkte formaler Potenzreihen wieder eine formale Potenzreihe.

Satz 28.

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ besitzt einen Konvergenzradius $r \geq 0$, sodass die Reihe für alle z mit $|z - z_0| < r$ absolut konvergiert und für $|z - z_0| > r$ divergiert.

Beweis.

Sei K ein Punkt, in dem die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(K - z_0)^k$ konvergiert. Dann bildet $a_k(K - z_0)^k$ eine Nullfolge. Es gilt weiters, dass $|a_k(K - z_0)^k| \leq 1$ für $K \geq K_0$. Mit $\sum_{k=K_0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k| = \sum_{k=K_0}^{\infty} |a_k(K - z_0)^k| \cdot \left|\frac{z - z_0}{K - z_0}\right|^k$ ist also für jedes z mit $|z - z_0| < |K - z_0|$ eine geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{K - z_0}\right|^k$ eine konvergente Majorante, d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut. Damit ist r die kleinste obere Schranke. Für jedes z mit $|z - z_0| > r$ muss somit die Reihe divergieren. $\square$

Prinzipiell besteht der Konvergenzbereich der Potenzreihe aus einer Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt z_0 . Der Radius kann allerdings auch 0 sein. Doch am Rand des Konvergenzkreises kann man keine Aussage über eine mögliche Konvergenz oder gar Divergenz treffen, denn hier sind

Einzeluntersuchungen notwendig. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ besitzt ein Kreis in $\mathbb{C}$ unendlich viele Punkte am Rand. Wir werden uns für den Fall $r > 0$ interessieren und geben im folgenden Satz an, wie dieser bestimmt werden kann.

Satz 29.

Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

wobei man verabredet, dass $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.

Beweis.

Sei $r = (\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$. Wir betrachten ein beliebiges z mit $|z - z_0| < r$. Wir definieren nun $c := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| < 1$. Für alle $k \geq N$, wobei das N beliebig groß gewählt werden kann, folgt, dass $\sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| \leq C < 1$ mit $C := \frac{1+c}{2} \in I = [\frac{1}{2}, 1)$ gilt. Nun können wir die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe abschätzen, da

$$|a_k \cdot (z - z_0)^k| = (\sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0|)^k \leq C^k \text{ für alle } k \geq N$$

Nun konvergiert $\sum_k |a_k| |z - z_0|^k$, da $\sum_k C^k$ für $C < 1$ eine Majorante ist. Somit haben wir die absolute Konvergenz zeigen können. Sei $|z - z_0| > r$. Diesmal gilt, dass $c := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0| > 1$, also $|a_k \cdot (z - z_0)^k| = (\sqrt[k]{|a_k|} |z - z_0|)^k > 1$. Da aber $\sum_k a_k(z - z_0)^k$ keine Nullfolge ist, ist die Reihe für $|z - z_0| > r$ nicht konvergent und divergiert somit. $\square$

Bemerkung 10.

In manchen Nachschlagewerken findet man auch folgende Formel für den Konvergenzradius r :

$$r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Hier setzt man jedoch voraus, dass der Limes existiert und ungleich Null ist, doch dies kann in manchen Fällen irreführend sein, somit ist es empfehlenswert gleich den Limes superior zu verwenden.

Beispiel 11.

Wir wenden Satz 28 und 29 auf folgende Beispiele an.

1. Wir betrachten $\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$. Man sieht, dass $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|k^k|} = k$. In die Formel eingesetzt erhält man $r = 0$. Dadurch konvergiert die Potenzreihe in $z = 0$, und sonst nirgends.
2. Wir betrachten $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Man sieht, dass $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|1|} = 1$. In die Formel eingesetzt erhält man $r = 1$. Dadurch konvergiert die Potenzreihe im Einheitskreis $D_1(0)$.
3. Ferner betrachten wir $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$. Man sieht, dass $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|\frac{1}{k^k}|} = \frac{1}{k}$. In die Formel eingesetzt erhält man $r = \infty$. Dadurch konvergiert die Potenzreihe in $\mathbb{C}$, das heißt, sie konvergiert überall.

Da es meist aufwändig ist mit dem Satz von Cauchy-Hadamard zu arbeiten, verwendet man, wenn es möglich ist den folgenden Satz:

Satz 30.

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r und $a_k \neq 0$ für alle n , dann gilt:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} \leq r \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

insbesondere gilt $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$, sofern der Limes existiert.

Beweis.

Den Beweis dieses Satzes kann man im Buch von Fischer und Lieb nachlesen. Doch eine Beweisskizze möchte ich noch anführen. Man geht wie folgt vor: Man definiert s als limes inferior und t als limes superior und zeigt mit Induktion, dass $|a_k|s^k$ beschränkt ist. Für $|a_k|t^k$ zeigt man, dass es keine Nullfolge ist und ist somit fertig. $\square$

Beispiel 12.

Wir betrachten $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Hier wäre die Berechnung mit dem Satz von Cauchy-Hadamard etwas umständlich, so verwendet man das Quotientenkriterium und erhält, dass $\frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1$. Somit ist der Konvergenzradius $r = \infty$ und daher konvergiert die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$.

Bevor wir uns auf das Kapitel "Elementare Funktionen" stürzen, formulieren wir einen Satz, den wir jedoch erst später mit Hilfe der Integration in $\mathbb{C}$ beweisen:

Satz 31.

Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt z_0 und z eine Veränderliche. Sei weiters R der Konvergenzradius der Potenzreihe und $U_R(z_0)$ der Konvergenzkreis. Dann ist die Potenzreihe im Konvergenzkreis holomorph und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}.$$

3.2 Elementare Funktionen

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ konvergiert bekanntlich für jeden Entwicklungspunkt $z \in \mathbb{R}$. Für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gilt selbiges und wir definieren $\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ und erhalten eine holomorphe Funktion. Wenn wir nun $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ gliedweise differenzieren, erhalten wir: $(e^z)' = e^z$.

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt $\exp$ mit der reellen Exponentialfunktion überein. Somit ist e^z holomorph in der gesamten Ebene und es gilt, dass $\frac{\partial}{\partial z} e^z = e^z$. Der Beweis hierfür ist leicht nachzurechnen, wenn man $u(x, y) = e^x \cos y$ und $v(x, y) = e^x \sin y$ setzt, da diese die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen erfüllen, sind sie holomorph. Weiters folgt für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ aus den bereits bewiesenen Sätzen, dass

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp^{x_1+x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$$

Wenn wir nun zeigen wollen, dass $\exp$ keine Nullstellen hat, geht man indirekt vor und führt die Aussage $\exp(z_0) = 0$ zu einem Widerspruch mit $z_0 \in \mathbb{C}$, da

$$1 = \exp(0) = \exp(z_0 + (-z_0)) = \exp(z_0) \cdot \exp(-z_0) \neq 0.$$

Weiters führen wir an, dass die Exponentialfunktion $\exp z = e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$ mit $z = x + iy$ periodisch ist mit der Periode $2\pi i$, denn für ein ganzzahliges $k \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$. Der Beweis hierfür lässt sich nachrechnen, denn es ist $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi) = 1$, also ist $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \cdot \exp(2\pi i) = \exp(z)$. Außerdem besitzt jede komplexe Zahl die Darstellung:

$$z = r \cdot (\cos y + i \sin y) = r \cdot e^{iy}.$$

Bemerkung 11.

Die obige Formel wird Eulersche Formel genannt. Wegen $r > 0$ gilt $r = e^x$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$, also kann unsere Funktion z durch $z = e^{x+iy}$ dargestellt werden. Dies bedeutet wiederum, dass jede komplexe Zahl, die von Null verschieden ist, als Wert der Exponentialfunktion auftritt.

Aus der oben eingeführten Eulerschen Formel erhalten wir eine Darstellung der trigonometrischen Funktionen für komplexe Argumente, denn

$$e^{iz} + e^{-iz} = (\cos z + i \sin z) + (\cos z - i \sin z) = 2 \cdot \cos z \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = (\cos z + i \sin z) - (\cos z - i \sin z) = 2i \cdot \sin z \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Somit gelingt es der Eulerschen Formel trigonometrische Funktionen als Linearkombination imaginärer Exponentialfunktionen darzustellen und sie ist somit ein Verschmelzungspunkt der Trigonometrie und der Exponentialfunktion. Die exponentielle Schreibweise des Sinus und des Cosinus ergründet sich an der Tatsache, dass eine Gleichung angegeben wird, in der man von einer komplexen Zahl z mit $|z| = 1$ und einem Winkel φ ausgeht und diese mit ihrer komplex konjugierten addiert bzw. subtrahiert.

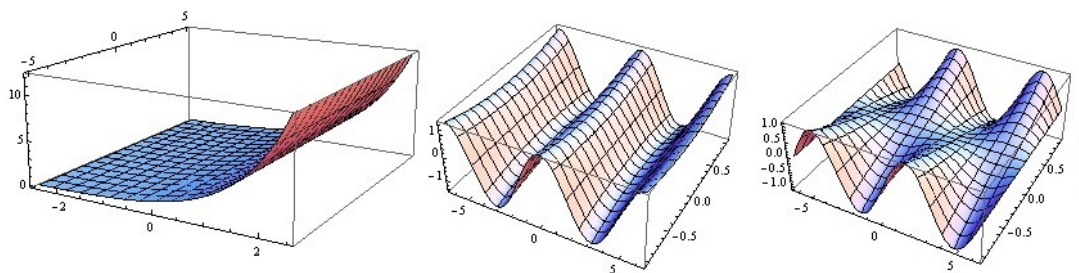


Abbildung 6: Graphische Darstellung von e^z und dem Real- bzw. Imaginärteil von $\cos(z)$

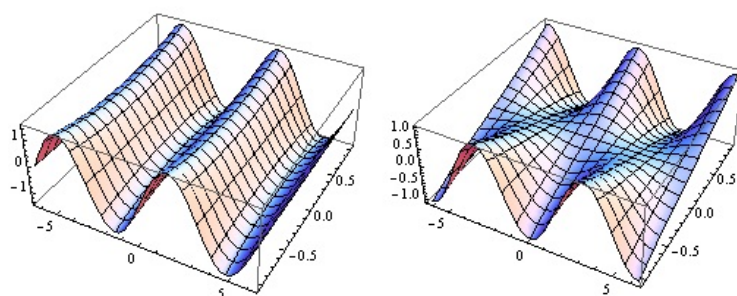


Abbildung 7: Graphische Darstellung von dem Real- und Imaginärteil von $\sin(z)$

Um sich die oben angeführten elementaren Funktionen besser vorstellen zu können, kann Abbildung 6 und 7 betrachtet werden. Diese verhelfen zu einer Grundvorstellung elementarer Funktionen in der komplexen Ebene.

4 Möbiustransformationen

Das Kapitel der gebrochen-linearen Abbildungen bedarf zunächst der Einführung der Riemannschen Sphäre. Wir bezeichnen mit

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Auf dieser Sphäre definieren wir die stereographische Projektion und deren Umkehrabbildung. Mit Satz 33 und 34 wird gezeigt, dass die stereographische Projektion kreis- bzw. geradentreu ist. Anschließend befassen wir uns mit Möbiustransformationen. In Satz 38 zeigen wir, dass die Möbiustransformationen eine Gruppe bilden, die sogar isomorph zur $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Daraufhin beschäftigen wir uns mit Fixpunkten gebrochen-linearer Abbildungen und geben hierfür Beispiele an. Mit Satz 44 bzw. der Sechs-Punkte-Formel gelingt es uns eine Möbiustransformation explizit anzugeben. Wir demonstrieren die Anwendbarkeit dieser Formel anhand einiger Beispiele. Im darauffolgenden Kapitel führen wir das Doppelverhältnis der Möbiustransformationen ein und zeigen in weiterer Folge, dass diese kreis- bzw. geradentreu sind. Bei der Vorbereitung dieses Kapitels habe ich [5] und [1], sowie auf [4] konzentriert. Wobei letzteres Werk als Quelle für graphische Darstellungen genutzt wurde.

4.1 Riemannsche Sphäre

Um einführen zu können, was man unter der Riemannschen Sphäre verstehen kann, benötigen wir zunächst die erweiterte komplexe Ebene. Durch das Hinzufügen des Punktes ∞ zur komplexen Ebene entsteht die erweiterte komplexe Ebene, welche mit $\hat{\mathbb{C}}$ bezeichnet wird. Wir legen fest, dass $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$ für $z \rightarrow \frac{1}{z}$ gilt. So können wir erkennen, dass $z \rightarrow \frac{1}{z}$ eine Abbildung von der erweiterten komplexen Ebene in sich selbst ist. Riemann sah einen Punkt ∞ nicht als Punkt, der eine Koordinate hat, sondern viel eher als ein Grenzwert, der erreicht werden kann. Um sich dies besser vorstellen zu können, empfahl er die Interpretation komplexer Zahlen als Punkte einer Sphäre. Topologisch stimmt die Zahlenkugel mit der Oberfläche einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ überein, was im Anschluss gezeigt wird.

Sei $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Einheitssphäre.

Satz 32.

Die Abbildung

$$\varphi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{cases} z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \infty & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

ist eine Bijektion. Man bezeichnet die Abbildung φ als stereographische Projektion.

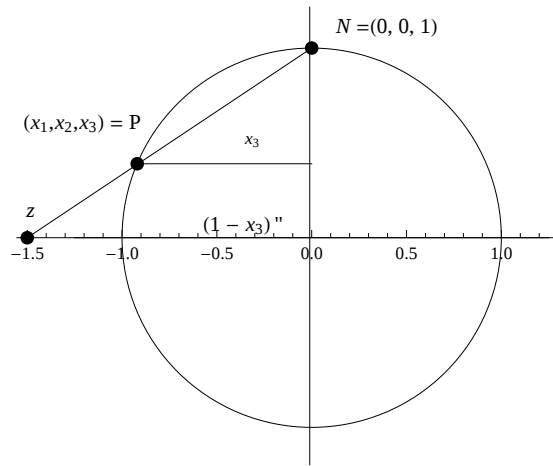


Abbildung 8: Die Riemannsche Sphäre in der komplexen Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Beweis.

Sei $\mathbf{N}$ definiert als der Nordpol mit den Koordinaten $N = (0, 0, 1)$ und $P = (x_1, x_2, x_3)$ ein Punkt ungleich $(0, 0, 1)$. Wir verbinden den Punkt $\mathbf{N}$ mit dem Punkt $\mathbf{P}$ von $\mathbf{S}$ mit einer Geraden. Diese besitzt die Parameterdarstellung:

$$g : x = (0, 0, 1) + t \cdot (x_1, x_2, x_3 - 1)$$

Setzt man eine, genauer gesagt die dritte, Komponente gleich Null, so erhält man aus:

$$1 + t(x_3 - 1) = 0, \text{ also } t = \frac{1}{1 - x_3}$$

den Schnittpunkt

$$z = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

der Geraden mit der (x_1, x_2) -Ebene, die man als komplexe Ebene deutet.

Umgekehrt ist durch z ein Punkt $P \in S$

als Schnittpunkt von S mit der Verbindungsgeraden von z und N bestimmt. $\square$

Da nun $z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ gilt für $\bar{z} := \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3}$. Wenn wir uns nun wieder ins Gedächtnis rufen, dass $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, so folgt daraus, dass

$$z\bar{z} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

bzw.

$$1 + z\bar{z} = \frac{2}{1 - x_3}$$

und damit folgt zu guter Letzt, dass $x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}$. Mit diesen Teilergebnissen erhält man leicht:

$$x_1 = 2x_1 \frac{1 - x_3}{2} = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} \text{ und analog: } x_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1}$$

Bemerkung 12.

Die Umkehrfunktion $\varphi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ ist für $z = x + iy \in \hat{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{für } z \neq \infty \\ (0, 0, 1) & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

Wenn wir nun Abbildungen untersuchen, die auf der Riemannschen Sphäre definiert sind, erhalten wir einige Eigenschaften, die im Folgenden bewiesen werden. Doch zuvor ist es wichtig, dass wir folgenden Satz, den man auch als Hilfssatz titulieren könnte, anführen und beweisen.

Satz 33.

Die Gleichung $\alpha z \bar{z} + cz + \bar{c} \bar{z} + \delta = 0$ mit $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ liefert mit $D := c\bar{c} - \alpha\delta > 0$ für

- $\alpha = 0$ eine Geradengleichung
- $\alpha \neq 0$ eine Kreisgleichung.

Beweis.

Sei $\alpha = 0$, dann gilt automatisch $c \neq 0$. Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl, dann gilt:

$$c(x + iy) + \bar{c}(x - iy) + \delta = 0 \Leftrightarrow x(c + \bar{c}) + y(ic - i\bar{c}) = -\delta$$

Nun sieht man, dass diese Gleichung eine Gerade beschreibt, denn ist $(c - \bar{c}) = 0$, so ist $(ic - i\bar{c}) = 2ic \neq 0$.

Wenn nun $\alpha \neq 0$, so kann durch α dividiert werden, wenn wir nun o.B.d.A. annehmen, dass $\alpha = 1$. Aus der Anfangsgleichung erhalten wir:

$$z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + c(x + ix) + \bar{c}(x - iy) + \delta = 0$$

$$x^2 - y^2 + x(c + \bar{c}) + iy(c - \bar{c}) + \delta = 0$$

Dadurch ist also eine Kreisgleichung um $u := -\bar{c}$ gegeben mit Radius $r := \sqrt{c\bar{c} - \delta} > 0$. □

Satz 34.

Die stereographische Projektion bildet Kreise auf S^2 in Kreise oder Geraden in $\mathbb{R}^2$ und somit auch in $\mathbb{C}$ ab.

Beweis.

Ein Kreis auf S^2 entsteht als Durchschnitt von S mit einer Ebene $E = ax_1 + bx_2 + cx_3 = p$. Hierbei können wir a, b, c so wählen, dass $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Der Durchschnitt mit der Sphäre ist genau dann nicht leer und von einem einzelnen Punkt verschieden, wenn der Abstand dieser Ebene E vom Ursprung kleiner als 1 ist, d.h. wenn $p^2 < 1 = a^2 + b^2 + c^2$. Wenn wir für x_1, x_2, x_3 die Resultate aus der Herleitung der stereographischen Projektion einsetzen, erhalten wir:

$$a \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} + b \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1} + c \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} = p$$

$$\begin{aligned}
a(z + \bar{z}) + b(i(\bar{z} - z)) + c(z\bar{z} - 1) &= p(z\bar{z} + 1) \\
cz\bar{z} - pz\bar{z} + ib\bar{z} + a\bar{z} - ibz + az - c - p &= 0 \\
z\bar{z}(c - p) + \overline{a + ib} - z(a + ib) - (c + p) &= 0
\end{aligned}$$

Aus Satz 33 folgt, dass für $c = p$ eine Geradengleichung gegeben ist, ansonsten eine Kreisgleichung. $\square$

Beispiel 13.

Wir wollen die Abbildungen von S^2 auf sich, die unter der stereographischen Projektion der Multiplikation mit e^{it} , $t \in \mathbb{R}$ entsprechen, bestimmen.

Wir nehmen $z = x + iy \in \hat{\mathbb{C}}$ und $f(z) = z \cdot e^{it}$ an. Daraus folgt, dass

$$f(z) = z \cdot e^{it} = (x + iy) \cdot (\cos(t) + i \sin(t)) = x \cos(t) - y \sin(t) + i(x \sin(t) + y \cos(t)).$$

Da $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ gilt, erhalten wir wiederum, dass

$$(i) \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + i \cdot \frac{x_2}{1-x_3}$$

$$(ii) \quad f\left(\frac{x_1}{1-x_3} + i \cdot \frac{x_2}{1-x_3}\right) = \frac{x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t)}{1-x_3} + i \frac{x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)}{1-x_3}$$

(iii) Für die Umkehrfunktion φ^{-1} erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}\left(\frac{x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t)}{1-x_3} + i \frac{x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)}{1-x_3}\right) = \\
&= \left(\frac{2 \cdot (x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t)) \cdot (1-x_3)}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \frac{2 \cdot (x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t)) \cdot (1-x_3)}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \frac{-1+2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}{1-2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right) \\
&= (x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t), x_1 \sin(t) + x_2 \cos(t), x_3) = \\
&\quad \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese Abbildungen einer Rotation entsprechen.

Als Beispiel einer Abbildung auf der Riemannschen Sphäre können die Möbiustransformationen besprochen werden. Diese sind konforme Abbildungen der riemannschen Zahlenkugel auf sich selbst und beruhen auf den Erkenntnissen des deutschen Mathematikers und Astronomen August Ferdinand Möbius (1790-1868).

4.2 Gebrochen-lineare Abbildungen

Definition 35.

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix. Die Funktion

$\varphi_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\det(A) = ad - bc \neq 0$ heißt Möbiustransformation oder gebrochen-lineare Abbildung, wobei $\varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}$ und $\varphi_A(-\frac{d}{c}) = \infty$ gesetzt wird.

Bemerkung 13.

Bereits an der Definition kann erkannt werden, dass für zwei Matrizen A und $\lambda \cdot A$ dieselbe Abbildung entsteht. Von dieser Tatsache kann man sich leicht überzeugen, wenn man eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und eine Matrix $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$ definiert und jeweils die Abbildung $\varphi_A(z)$ mit $\varphi_{\lambda A}(z)$ vergleicht.

Beispiel 14. 1. $\varphi_A(z) = z + b$ bewirkt eine Translation um den Vektor b (Parallelverschiebung)

2. $\varphi_A(z) = a \cdot z \rightarrow \varphi_A(z) = \underbrace{r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{=a} \cdot z$. Hier erhält man eine Drehstreckung um den Winkel φ und den Parameter r

3. $\varphi_A(z) = \frac{1}{z}$ bewirkt eine Inversion am Einheitskreis, das heißt Punkte außerhalb des Einheitskreises werden ins Innere abgebildet und umgekehrt.

Bemerkung 14.

Für eine allgemeine Möbiustransformation mit $c \neq 0$ gilt:

$\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$. Also ist $\varphi_A(z)$ aus den obigen elementaren Fällen zusammengesetzt. Ist nun $c = 0$, dann kann man $d = 1$ setzen, denn dann ist $\varphi_A(z)$ eine Drehstreckung mit nachfolgender Translation.

Satz 36.

Die Möbiustransformationen bilden eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung.

Beweis.

Wir zeigen, dass das Produkt zweier Möbiustransformationen wieder eine Möbiustransformation ist:

Seien $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $\varphi_B(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ mit $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$, dann ist:

$$\begin{aligned} (\varphi_B \circ \varphi_A)(z) &= \varphi_B\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} \\ &= \frac{a'(az+b) + b'(cz+d)}{c'(az+b) + d'(cz+d)} = \frac{\overbrace{(a'a + b'c)}^{\alpha} z + \overbrace{(a'b + b'd)}^{\beta}}{\underbrace{(c'a + d'c)}_{\gamma} z + \underbrace{(c'b + d'd)}_{\delta}} \end{aligned}$$

$$= \varphi_{BA}(z).$$

Es gilt noch zu zeigen, dass $(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$. Jede Möbiustransformation lässt sich als Matrix schreiben, wir erhalten:

$$M(\varphi_A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow M(\varphi_A \circ \varphi_B) = M(\varphi_A) \cdot M(\varphi_B).$$

Mit dem Determinantenkriterium ist:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = \det(M(\varphi_A \circ \varphi_B)) = \underbrace{\det M(\varphi_A)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det M(\varphi_B)}_{\neq 0} \neq 0$$

Das neutrale Element der Möbiustransformation ist die sogenannte Identiät, also $\varphi_A(z) = z$. Das Assoziativgesetz ist für lineare Abbildungen (Satz aus der linearen Algebra) stets erfüllt und es gilt:

$$(\varphi_A \circ \varphi_B) \circ \varphi_C(z) = \varphi_A \circ (\varphi_B \circ \varphi_C)(z).$$

Das inverse Element $\varphi_A^{-1}(z)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \varphi_A^{-1}(z) &= \frac{1}{ad - bc} \frac{dz - b}{-cz + a} \text{ da: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 15.

Im folgenden Satz zeigen wir, dass die Gruppe der Möbiustransformationen isomorph ist zur Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$. Dabei bezeichnet $SL(2, \mathbb{C})$ die Gruppe der komplexen 2×2 -Matrizen mit Determinante Eins.

Satz 37.

Die Gruppe der Möbiustransformationen ist isomorph zu $SL(2, \mathbb{C})$.

Beweis.

Um einen Gruppenisomorphismus zu verifizieren, müssen wir eine bijektive Abbildung f finden. Der Möbiustransformation

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ordnen wir die Matrix } A_{\varphi_A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$$

zu. In dem Satz 36 haben wir gezeigt, dass

$$\varphi_A(z)^{-1} = \frac{dz - b}{-cz + a} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Da $A_{\varphi_A}^{-1}$ in $SL(2, \mathbb{C})$ die Determinante $\det(\varphi_A) = 1$, folgt, dass $\frac{1}{ad - bc} = 1$. Die restlichen Bedingungen folgen nun aus dem Beweis von Satz 36. □

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde, gibt es auch abelsche Gruppen. Die Gruppe der Möbiustransformationen ist keine solche, da die Kommutativität nicht gegeben ist. Betrachten wir zum Beispiel $\varphi_A(z) = \frac{z}{z-i}$ und $\varphi_B(z) = \frac{z+1}{z+2}$. Dann ist

$$(\varphi_A \circ \varphi_B)(z) = \varphi_A(\varphi_B(z)) = \frac{\frac{z+1}{z+2}}{\left(\frac{z+1}{z+2}\right) - i} = \frac{(z+1)}{z+1-iz-2i} = \frac{z+1}{z(1-i) + (1-2i)}$$

Und aus

$$(\varphi_B \circ \varphi_A)(z) = \varphi_B(\varphi_A(z)) = \frac{\left(\frac{z}{z-i}\right) + 1}{\left(\frac{z}{z-i}\right) + 2} = \frac{2z-i}{3z-2i}$$

ist ersichtlich, dass für $z = 0$:

$$(\varphi_A \circ \varphi_B)(0) = \frac{1}{2-i} \neq \frac{1}{2} = (\varphi_B \circ \varphi_A)(0)$$

Definition 38.

Sei $z \in \hat{\mathbb{C}}$ und $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. z wird Fixpunkt genannt, wenn $f(z) = z$.

Satz 39.

Sei $\varphi_A : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation. Dann besitzt $\varphi_A(z)$ einen oder zwei Fixpunkte.

Beweis.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Sei $c = 0$ und $\varphi_A(z) = az + b$. Dann ist $\varphi_A(\infty) = \infty$, also ∞ ein Fixpunkt der Möbiustransformation $\varphi_A(z)$. Wenn nun $a = 1$ ist, dann ist $b \neq 0$, da die Möbiustransformation nach Voraussetzung ungleich der Identität ist. Die Gleichung $\varphi_A(z) = z + b = z$ hat in $\mathbb{C}$ keine Lösungen, also existieren auch keine weiteren Fixpunkte.

Wenn nun aber $a \neq 1$ ist, dann erhalten wir aus der Gleichung $\varphi_A(z) = az + b = z$, dass $z = \frac{b}{1-a}$ der zweite Fixpunkt ist.

2. Sei $c \neq 0$, dann ist $\varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}$, also ist ∞ kein Fixpunkt und es gilt:
 $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Somit ist z genau dann ein Fixpunkt, wenn es diese quadratische Gleichung löst.

□

Beispiel 15.

Sei $\varphi_A(z) = \frac{z+3}{z-1}$. Wir suchen die Fixpunkte dieser Abbildung und erhalten:

$$\frac{z+3}{z-1} = z \Leftrightarrow z+3 = z^2 - z \Leftrightarrow 0 = z^2 - 2z - 3 = (z-3)(z+1)$$

Somit haben wir zwei Fixpunkte $z_1 = -1$ und $z_2 = 3$.

Als nächsten Punkt überlegen wir uns eine geometrische Darstellung der Möbiustransformationen. Wir haben bereits die geometrische Darstellung komplexer Zahlen eingeführt und wiederholen und wenden diese auf Möbiustransformationen an. Sei $z \in \hat{\mathbb{C}}$, dann hat z auch die Darstellung $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$. Wenn nun die Spiegelung am Einheitskreis, die sogenannte Inversion, betrachtet wird, kann diese auch durch $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \cdot e^{-i\varphi}$ angegeben werden.

Fakt 3.

Somit gibt es drei spezielle Typen von Möbiustransformationen. Diese wurden bereits bei Beispiel 8 eingeführt und werden nun als Fakt festgehalten.

1. $z \rightarrow z + a'$, wobei $(c = 0, a = d)$ ist. Diese Abbildung entspricht einer Translation.
2. $z \rightarrow a'z$, wobei $(b = 0 = c)$ ist. Diese Abbildung bewirkt eine Drehstreckung um den Winkel φ und dem Parameter $|z| = r$.
3. $z \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z}$, wobei $(a = 0 = d, b = c)$ ist. Diese Abbildung bewirkt eine Spiegelung am Einheitskreis, eine sogenannte Inversion.

Satz 40.

Möbiustransformationen sind winkeltreue Abbildungen.

Beweis.

Es genügt diesen Satz für den dritten Elementartyp, der Inversion, zu zeigen. Für die Translation und die Drehstreckung sind diese Aussagen trivial. Für die Inversion folgt dies aus einer geometrischen Deutung, die Abbildung $z \rightarrow \frac{1}{z}$ erhält den Betrag der Winkel, ändert lediglich die Orientierung. $\square$

Beispiel 16.

Im Bereich der rationalen Zahlen gibt es genau zwei Zahlen x , für die gilt $x^2 = x \cdot x = 1$, nämlich $x_{1,2} = \pm 1$. Analog können wir hier uns die Frage stellen, für welche Funktionen $\varphi_A(z)$ gilt $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = id$, also $\varphi(\varphi_A(z))(z) = z$?

Die Funktionen $\varphi_A(z) = \pm z$ und $\varphi_A(z) = \pm \frac{1}{z}$ fallen uns ein, doch es existieren noch mehrere, diese wollen wir ermitteln:

Es sei $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, dann ist

$$\varphi_A^2(z) = \frac{a\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + d} = \frac{z(a^2 + bc) + b(a + d)}{z(a + d)c + d^2 + bc}.$$

Wenn nun $\varphi_A^2(z) = z$ sein soll, so müssen die Koeffizienten (a, b, c, d) folgendes erfüllen:

1. $(a^2 + bc) = \pm 1$
2. $b(a + d) = 0$
3. $c(a + d) = 0$
4. $d^2 + bc = \pm 1$

So folgt daraus, dass

$$\varphi_A(z, a) = \frac{az \pm (1 \mp a^2)}{z - a}$$

sein muss, somit erhalten wir beispielsweise:

1. $\varphi_A(z, 1) = \frac{z}{z-1}$ und für $\varphi_A(z, -1) = -\frac{z}{z+1}$
2. $\varphi_A(z, 0) = \pm \frac{1}{z}$.

Satz 41.

Eine Möbiustransformation $\varphi_A(z)$ ist durch die Werte von $\varphi_A(0)$, $\varphi_A(1)$ und $\varphi_A(\infty)$ eindeutig bestimmt.

Beweis.

Ist $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, so ist

$$\varphi_A(0) = \frac{b}{d}, \varphi_A(1) = \frac{a+b}{c+d} \text{ und } \varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}$$

1. Fall: $c = 0$. Dann ist nach der Definition der Möbiustransformation $d \neq 0$, somit ist $\varphi_A(1) = \frac{a}{d} + \frac{b}{d}$ und

$$\varphi_A(z) = (\varphi_A(1) - \varphi_A(0))(z) + \varphi_A(0) = \left(\frac{a+b}{d} - \frac{b}{d} \right) (z) + \frac{b}{d} = \frac{az+b}{d}.$$

2. Fall: $d = 0, c \neq 0$. Somit ist $\varphi_A(1) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ und

$$\varphi_A(z) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \frac{1}{z} = \varphi_A(\infty) + (\varphi_A(1) - \varphi_A(\infty)) \frac{1}{z}$$

3. Fall: $c \neq 0 \neq d$. Somit ist

$$\varphi_A(z) = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\varphi_A(\infty)z + \varphi_A(0)\frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

und

$$\varphi_A(1) = \frac{\varphi_A(\infty) + \varphi_A(0)\frac{d}{c}}{1 + \frac{d}{c}}.$$

□

Wenn nun zwei Tripel paarweise disjunkter Punkte gegeben sind, kann nun eine Möbiustransformation $\varphi_A(z)$ mit $\varphi_A(z_k) = w_k$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ gefunden werden. Dies halten wir in einem Satz fest:

Satz 42.

Seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) Tripel paarweise disjunkter Punkte. Dann ergibt das Auflösen der Formel

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1)(w - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}$$

nach w genau eine Möbiustransformation $\varphi_A(z)$ mit $\varphi_A(z_k) = w_k$, wobei $k \in \{1, 2, 3\}$.

Beweis.

Sei R die rechte Seite der Gleichung. Wir können erkennen, dass $R(z)$ mit $R(z_1) = 0$, $R(z_2) = 1$ und $R(z_3) = \infty$ laut Satz 36 eine Möbiustransformation ist, da sie nicht konstant ist. Für die linke Seite der Gleichung, die wir mit L bezeichnen, gilt selbiges und daher ist $\varphi_A = L^{-1} \circ R$ eine Möbiustransformation mit $\varphi_A(z_k) = w_k$. $\square$

Beispiel 17.

Wir suchen für die Punkte $z_1 = 1$, $z_2 = 1 + i$ und $z_3 = -i$ eine Möbiustransformation auf $w_1 = i$, $w_2 = 0$ und $w_3 = -1$. Die dazugehörige gebrochen lineare Abbildung erhalten wir aus:

$$\begin{aligned} \frac{(w-i)}{w} \cdot \frac{-1}{(-1-i)} &= \frac{(z-1)}{(z-1-i)} \cdot \frac{(-1-2i)}{-1-i} \\ w-i &= w \cdot \frac{z-1}{z-1-i}(1+2i) \Leftrightarrow w \left(1 - \frac{z-1}{z-1-i}(1+2i) \right) = i \\ w \left(\frac{(z-1-i) - (z+2iz-1-2i)}{z-1-i} \right) &= i \Leftrightarrow w \left(\frac{-2iz+i}{z-1-i} \right) = i \\ w &= \frac{i(z-1-i)}{i(-2z+1)} = \frac{(z-1-i)}{-2z+1} \end{aligned}$$

Beispiel 18.

Wir wollen wissen, welche Möbiustransformationen die obere Halbebene ($H := \{z | \Im(z) > 0\}$) auf sich selbst abbilden. Eine Abbildung $\varphi_A(z)$, die die reelle Achse auf sich selbst abbildet ist eine solche Transformation. Zum Beispiel sind $\varphi_A(0)$ und $\varphi_A(1)$ reell, somit sind die aus der Formel bestimmten Koeffizienten von $\varphi_A(z)$ auch reell. Ist umgekehrt eine Möbiustransformation mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegeben, so geht die reelle Achse in sich über und es gilt:

$$\varphi_A(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{1}{c^2+d^2}(ai+b)(d-ic) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{ad-bc}{c^2+d^2}$$

Das heißt, die obere Halbebene geht genau dann in sich über, wenn $\Im(\varphi_A(i)) > 0$ ist. Dadurch muss der Zähler im Bruch, also $ad - bc > 0$ sein. Als Folgerung daraus erhalten wir, dass genau die Transformationen mit $ad - bc = 1$, diejenigen sind, die die Halbebene auf sich selbst abbilden, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 16.

Ein anderer Ansatz wäre dieser hier:

$\varphi_A(z)$ bildet genau dann H auf sich ab, wenn $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich und i nach H abgebildet wird. Nun ist $\Im(\varphi_A(i)) = \Im\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2}$. Also liegt $\varphi_A(i)$ genau dann in H , wenn $ad - bc > 0$ ist.

Beispiel 19.

Wir suchen die Möbiustransformation, die den Einheitskreis auf sich und den Kreis $|z-a| = r < 1-a$ mit $0 < a < 1$ auf einen Kreis mit Mittelpunkt $w_0 = 0$ abbildet. Hierfür machen wir die Überlegung:

Die x-Achse ist eine Gerade und wird daher auf eine Gerade oder einen Kreis in der w-Ebene abgebildet. Sie schneidet die beiden Kreise in der z-Ebene senkrecht, ihr Bild ist also zu den beiden Bildkreisen orthogonal. Damit kann das Bild nur eine Ursprungsgerade sein. Wir nehmen zunächst an, dass das Bild die y-Achse ist. Es gilt: $\varphi_A(-1) = -1$ und $\varphi_A(1) = 1$. Außerdem wird $z = a$ (als Mittelpunkt des kleinen Kreises auf den Nullpunkt $w_0 = 0$ abgebildet. Daraus erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{w+1}{w} \cdot \frac{1}{2} &= \frac{z+1}{z-a} \cdot \frac{1-a}{2} \\ \Leftrightarrow w+1 &= w \cdot (1-a) \cdot \frac{z+1}{z-a} \Leftrightarrow w \left(1 - \frac{(1-a)(z+1)}{z-a} \right) = -1 \\ w &= -\frac{1}{\left(1 - \frac{(1-a)(z+1)}{z-a} \right)} = -\frac{1}{\left(\frac{(z-a)-(z-az+1-a)}{z-a} \right)} \\ w &= -\frac{(z-a)}{(az-1)}. \end{aligned}$$

Als Resultat dieses Beispiels folgt:

$$w = -e^{i\phi} \frac{z-a}{az-1} = e^{i(\phi+\pi)} \frac{z-a}{az-1}$$

Wie man erkennen kann, eignen sich Möbiustransformationen zur Betrachtung von Figuren in der Ebene. Historische Bekanntheit erlangen die Möbiustransformationen durch ein fundamentales Problem. Man wollte wissen, ob vier vorgegebene paarweise verschiedene Punkte der Ebene z_1, z_2, z_3, z_4 auf einem Kreis liegen. Die gebrochen-linearen Abbildungen liefern hierfür eine Lösung.

4.3 Das Doppelverhältnis und die Kreis- bzw. Geradentreue

Definition 43.

Seien z_1, z_2, z_3 und z_4 paarweise verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$. Dann nennt man $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$ das Doppelverhältnis von den vier Punkten z_1, z_2, z_3 und z_4 . Für ein variables z ist $\varphi_A(z) = DV(z_1, z_2, z_3, z)$ eine Möbiustransformation, denn

$$\varphi_A(z_1) = 0, \varphi_A(z_2) = 1, \varphi_A(z_3) = \infty.$$

Somit können wir folgende Notation festhalten:

$$\varphi_A(z) = DV(z_1, z_2, z_3, z) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} (z).$$

Wir wissen bereits, dass Möbiustransformationen auch im Punkt ∞ definiert sein können, wenn dies der Fall ist, d.h. ist einer der Punkte unendlich, z.B.: $z_1 = \infty$, so betrachtet man $DV(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4-1}{z_4-z_3} : \frac{z_2-1}{z_2-z_3} = \frac{z_2-z_3}{z_4-z_3}$. Für variables z ist $\varphi_A(z) = DV(z_1, z_2, z_3, z)$ wieder eine Möbiustransformation mit

$\varphi_A(z_1) = 0, \varphi_A(z_2) = 1$ und $\varphi_A(z_3) = \infty$.

Somit gilt : $\varphi_A(z) = DV(z_1, z_2, z_3, z) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} (z)$.

Wenn also φ_A die Möbiustransformation ist, die z_1 nach 0, z_2 nach 1 und z_3 nach ∞ abbildet, so erhalten wir durch das Doppelverhältnis

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \varphi_A(z_4)$ das Bild des vierten Punktes.

Satz 44.

Sei $\varphi_A(z)$ eine Möbiustransformation. Seien $z_j, j = 1, 2, 3, 4$ vier verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ mit $w_j = \varphi_A(z_j)$, so gilt:

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Beweis.

$$DV(w_1, w_2, w_3, w_4) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} (w_4) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{=\varphi_A^{-1}(z_4)=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}} (w_4) \\ &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & \infty \end{pmatrix} (z_4) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

□

Satz 45.

Jede Möbiustransformation $\varphi_A(z)$ führt die Menge der Geraden und Kreise in sich über.

Um diesen Satz zu beweisen, muss man für die Elementartypen der Möbiustransformation, d.h. für die Translation, die Drehstreckung und die Inversion, dies nachrechnen. Für die ersten zwei Typen ist die Behauptung graphisch zu verdeutlichen. Die Inversion bildet Kreise in Kreise ab. In $\hat{\mathbb{C}}$ erfüllt ein Kreis vom Radius r und Mittelpunkt a erfüllt die Gleichung

$$r^2 = |z - a|^2 = (z - a)(\overline{z - a}) = z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}.$$

Für die Bildwerte $w_k = \varphi_A(z_k)$ gilt somit $r^2 = \frac{1}{w\bar{w}} - \frac{\bar{a}}{w} - \frac{a}{\bar{w}} + a\bar{a}$ oder:

$$r^2 - a\bar{a} = \frac{1 - \bar{a}\bar{w} - aw}{w\bar{w}}.$$

Und das ist wieder eine Kreisgleichung. Wenn unser w nun diese Gleichung erfüllt, dann erfüllt auch $z = \frac{1}{w}$ die Anfangsgleichung und somit ist das Bild des Kreises wieder ein ganzer Kreis.

Was passiert, wenn $r^2 = |a|^2 > 0$ ist, dann hätte man $1 - \bar{a}\bar{w} - aw = 0$. Seien nun $a = \alpha + i\beta$ und $w = x + iy$, so folgt:

$$\begin{aligned} 1 - (\alpha - i\beta)(x - iy) - (\alpha + i\beta)(x + iy) &= 0 \\ 1 - (\alpha x - i(\alpha y + \beta x) + i^2\beta y) - (\alpha x + i(\alpha y + \beta x) + i^2\beta y) &= 0 \\ -2\alpha x + 2\beta y &= -1 \Leftrightarrow 2\alpha x - 2\beta y = 1 \end{aligned}$$

Das ist eine Geradengleichung, wir können erkennen, dass die Gerade nicht durch den Ursprung geht. Man erhält solche Geraden aus dem Kreis um $a = \alpha + i\beta$ mit Radius $r = |a|$. Hingegen werden Geraden durch den Ursprung bei der Inversion an der reellen Achse gespiegelt und gehen somit in die Ursprungsgeraden über. Da die Inversion ihr eigenes Inverses ist, bildet sie alle Geraden in Geraden oder Kreise ab. Fortan werden Geraden als Kreise (durch ∞) deklariert, denn nur dann stimmt die Behauptung, dass Kreise in Kreise abgebildet werden.

Bemerkung 17.

Wir haben in den obigen Überlegungen Geraden als Kreise durch den Punkt unendlich aufgefasst.

Wir halten fest, dass Möbiustransformationen winkel-, geraden- und kreistreue Abbildungen sind. Als nächstes untersuchen wir, ob gebrochen-lineare Abbildung auch orientierungstreu bzw. eine Invarianz der Orientierung besitzen.

Definition 46.

Sei $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine Gerade oder ein Kreis. Die Orientierung von D wird durch ein Tripel (z_1, z_2, z_3) von Punkten von D gegeben. Wir unterscheiden bezüglich der Orientierung drei Fälle:

- Der Punkt z liegt auf D , wenn $\Im[DV(z_1, z_2, z_3, z)] = 0$, also $DV(z_1, z_2, z_3, z)$ reell ist.
- Der Punkt z liegt rechts von D , wenn $\Im[DV(z_1, z_2, z_3, z)] > 0$ ist.
- Der Punkt z liegt links von D , wenn $\Im[DV(z_1, z_2, z_3, z)] < 0$ ist.

Wegen der Invarianz des Doppelverhältnisses der Möbiustransformation $\varphi_A(z_k) = w_k$ liegt das Bild immer auf derselben Seite bezüglich der Orientierung. Diese Eigenschaft wird Invarianz der Orientierung genannt.

Bei der Betrachtung von Beispielen kann man sich auf zwei Orientierungen konzentrieren. Man untersucht die Orientierung der reellen Achse. Wenn deren Orientierung durch $(0, 1, \infty)$ festgelegt ist und z bezüglich eines beliebigen reellen Tripels (z_1, z_2, z_3) untersucht wird, so kann $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} = DV(z_1, z_2, z_3, z)$ angeschrieben werden. Erwähnenswert ist noch die Tatsache, dass die Unterscheidung von links und rechts nichts anderes als die Unterscheidung in obere und untere Halbebene bedeutet.

Als Entscheidungskriterium wird hier

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

gewählt, denn $\Im(DV(z_1, z_2, z_3, z)) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \cdot \Im(z)$.

Beispiel 20.

Die durch $(1, i, -1)$ gegebene Orientierung des Einheitskreises bezeichnet man als positiv. Wenn $z = 0$, so ist $DV(1, i, -1, 0) = i$, das heißt wiederum, dass der Ursprung bezüglich der positiven Orientierung links vom Einheitskreis liegt. Bei umgekehrter Orientierung (d.h.: im Uhrzeigersinn) wäre der Ursprung rechts.

5 Integration in $\mathbb{C}$

In Kapitel 2.2 haben wir die komplexe Differenzierbarkeit eingeführt. Hierfür haben wir den reellen Differentialquotienten ins Komplexe übertragen mit:

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Wir wollen beim Integral nach dem gleichen Muster vorgehen und aus der reellen Analysis das komplexe Integral

$$\int_u^v f(z) dz$$

eingeführen, doch wir stehen hier vor einigen Schwierigkeiten. In $\mathbb{R}$ muss der Integrand in allen Punkten zwischen Anfangs- und Endwert definiert und stetig sein. Im Komplexen existieren keine Intervalle. Wir helfen uns mit Polygonzügen (Streckenverbindungen) aus und betrachten fortan nur mehr Gebiete, auf denen eine Verbindungsstrecke existiert. Anschließend führen wir das Kurven- bzw. Wegintegral ein und werden daraus folgern, dass Funktionen entlang eines solchen Weges in einem Gebiet integrierbar sind. Zu Beginn definieren wir einige Begriffe, wie in etwa Wege und geschlossene Pfade. Anschließend zeigen wir, dass ein komplexes Integral jeweils in Real- und Imaginärteil aufgeteilt und getrennt betrachtet werden kann. Zu dieser Tatsache formulieren wir einen Satz und definieren im Anschluss daran das komplexe Kurvenintegral. In Satz 52 werden dessen elementare Eigenschaften formuliert und bewiesen. Nach einigen Beispielen zu diesen bereits eingeführten Beispielen gehe ich auf einige andere grundlegende Sätze ein, die im Werk von Fritzsche ([2]) vorkommen. Mit zahlreichen Beispielen zu den eingeführten Begriffen, versuche ich einen sinnvollen und verständlichen Aufbau der Thematik anzugeben.

Definition 47.

Sei G ein Gebiet. Unter einem Weg in $\mathbb{C}$ versteht man

$\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow G \subset \mathbb{C}$. Als Anfangspunkt des Weges bezeichnet man $\gamma(a)$ und als Endpunkt $\gamma(b)$. Als Parameterintervall bezeichnet man $[a, b]$.

Wenn γ stetig differenzierbar ist mit $|\gamma'(t)| \neq 0$, dann nennt man γ einen glatten Weg. Wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ nennt man den Weg geschlossen.

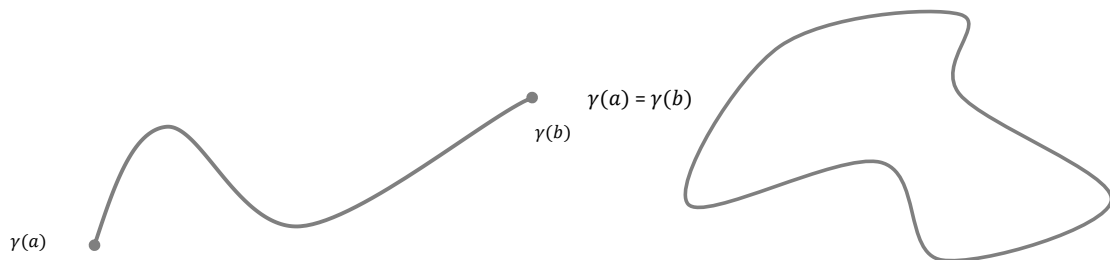


Abbildung 9: Integrationswege in $\mathbb{C}$

Wenn wir nun eine Zerlegung des reellen Intervalls $[a, b]$, somit auch unseres Weges, vorgeben und $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \subset \mathbb{R} \rightarrow G \subset \mathbb{C}$ für $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, dann nennt man γ einen stückweise glatten Weg. Hierfür findet man machmal in der Literatur auch die Bezeichnung Pfad.

Definition 48.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige komplexe Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg, dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$$

das komplexe Kurvenintegral einer Funktion f über dem Weg γ .

Bemerkung 18.

Wie es Remmert in seinem Werk erklärt, kann nun jeder Weg $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ mit jeweils stetig differenzierbaren Teilwegen γ_n und der Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, auch wie folgt als Summe der jeweiligen Integrale angeschrieben werden:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^k \int_{\gamma_n} f(z) dz,$$

wobei $|\gamma_n| \subset |\gamma|$ gilt.

Bemerkung 19.

Das oben definierte komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

kann umgeschrieben werden und man erhält nach Aufspalten in Real- und Imaginärteil:

$$\int_a^b f(z) dz = \int_a^b \Re(f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt + i \cdot \int_a^b \Im(f(\gamma(t))\gamma'(t)) dt$$

Bevor wir uns auf die Eigenschaften der Kurvenintegrale begeben, führen wir einige Beispiele zu den bereits eingeführten Sachverhalten an.

Beispiel 21.

Sei $f(z) = z^2$. Wir wollen das Integral entlang des Halbkreises $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ berechnen.

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_0^{\pi} (e^{it})^2 \cdot ie^{it} dt = i \cdot \int_0^{\pi} e^{3it} dt = i \cdot \frac{e^{3it}}{3i} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{3}$$

Beispiel 22.

Sei $f(z) = \bar{z}$ und $\gamma(t) = (1+i) \cdot t$ für $t \in [0, 1]$.

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{(t+it)}(1+i) dt = (1+i) \int_0^1 (t-it) dt = (1+i)(1-i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 1$$

Bei der Berechnung der Beispiele 21 und 22 haben wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Ist F eine Stammfunktion von f , also $\frac{dF}{dt} = f(t)$, so ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Der Beweis dafür folgt sofort aus der reellen Analysis, unter der Voraussetzung, dass man Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet. Daraus erhalten wir die Tatsache, dass man mit komplexen Integralen meist so rechnet, wie im Reellen. Man sucht Stammfunktionen und setzt im Anschluss daran die Integrationsgrenzen ein. Im Folgenden möchte ich der Vollständigkeit halber einen Satz formulieren, der die Gültigkeit weiterer Rechenregeln des reellen Integrals für das Integral in $\mathbb{C}$ angibt.

Satz 49.

Sei $U \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $a, b, x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann gilt:

1. $\Re \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re f(t) dt$ und $\Im \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Im f(t) dt$.
2. $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$
3. $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$ und $\int_a^b (\lambda \cdot f)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$
4. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt$

Beweis.

Die folgenden Behauptungen lassen sich durch einfaches Nachrechnen zeigen:

1. Die erste Behauptung ist durch die Definition unseres Integrals errechenbar und somit trivial.
2. Nach Behauptung 1 gilt:

$$\Re \int_a^b f(t) dt = \int_a^b \Re f(t) dt = - \int_b^a \Re f(t) dt = \Re \left(- \int_b^a f(t) dt \right).$$

Analoges lässt sich für $\Im \int_a^b f(t) dt = \Im \left(- \int_b^a f(t) dt \right)$ berechnen.

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Linearität der Integrale reellwertiger Funktionen, denn

$$\begin{aligned} \Re \int_a^b (f + g)(t) dt &= \int_a^b (\Re(f + g))(t) dt = \int_a^b (\Re(f))(t) dt + \int_a^b (\Re(g))(t) dt \\ &= \Re \int_a^b f(t) dt + \Re \int_a^b g(t) dt = \Re \left(\int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \right). \end{aligned}$$

Analoges gilt für den Imaginärteil. Die zweite Aussage der dritten Behauptung folgt aus ähnlichen Überlegungen.

4. Für die vierte Behauptung verwenden wir wiederum die erste und erhalten

$$\Re \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^b f(t) dt \right) = \int_a^x (\Re(f))(t) dt + \int_x^b (\Re(f))(t) dt$$

$$\int_a^b (\Re(f))(t) dt = \Re \int_a^b f(t) dt$$

Wieder erhalten wir die Behauptung für den Imaginärteil durch ähnliche Berechnungen.

□

Da wir nun einige Eigenschaften von komplexwertigen Integralen eingeführt haben, versuchen wir im folgenden Satz diese für komplexe Kurvenintegrale anzugeben. Für die Beweise dieses Satzes werden wir die Definition eines komplexen Kurvenintegrals brauchen.

Satz 50.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetige komplexe Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg. Dann hat das komplexe Kurvenintegral einer Funktion f über dem Weg γ

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

folgende Eigenschaften:

1. Ist $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare Parametertransformation, so ist

$$\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

2. Für stetige Funktionen f_1, f_2 und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist

$$\int_{\gamma} (\lambda f_1 + \mu f_2)(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f_1(z) dz + \mu \int_{\gamma} f_2(z) dz.$$

3. Sei $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ die Länge des Weges γ . Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

4. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, dann bezeichnet $-\gamma$ den umgekehrt orientierten oder inversen Weg. Es gilt:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$$

Beweis. 1. Sei φ eine Parametertransformation.

Mit der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt = \int_c^d f \circ \gamma(\varphi(s)) \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_c^d f \circ (\gamma \circ \varphi)(s) (\gamma \circ \varphi)'(s) ds = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz\end{aligned}$$

2. Die Linearität ist trivial, da

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (\lambda f_1 + \mu f_2)(z) dz &= \int_{\gamma} \lambda f_1(z) dz + \int_{\gamma} \mu f_2(z) dz \\ &= \lambda \int_{\gamma} f_1(z) dz + \mu \int_{\gamma} f_2(z) dz\end{aligned}$$

3. Wir erhalten, dass

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt.$$

Sei nun $M := \max_{z \in \gamma} |f(z)|$, so folgt

$$\begin{aligned}\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \cdot L(\gamma).\end{aligned}$$

4. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $-\gamma$ der inverse Weg. Sei o.B.d.A $-\gamma(t) := \gamma(a + b - t)$ mit $a \leq t \leq b$ und $\varphi(t) := a + b - t$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma \circ \varphi(t)) (\gamma \circ \varphi)'(t) dt = \\ &= \int_a^b f \circ \gamma(\varphi(t)) \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f \circ \gamma(s) \gamma'(s) ds \\ &= - \int_a^b f \circ \gamma(s) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f(z) dz\end{aligned}$$

□

Beispiel 23.

Sei $f(z) = (z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Also ist der Integrationsweg ein Kreis mit Radius R . Wir unterscheiden im folgenden Beispiel zwei Fälle. Sei $n \neq -1$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n \cdot i \cdot re^{it} dt = i \cdot r^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= i \cdot r^{n+1} \left(\frac{1}{i(n+1)} \cdot e^{i(n+1)t} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

da die Funktion e^z die Periode $2\pi i$ hat. Wenn nun das $n = -1$ ist, so gilt:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-it} \cdot ire^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Wir fassen zusammen:

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 51.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. f besitzt in G eine Stammfunktion, wenn eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $F' = f$. Man sagt: F ist eine Stammfunktion von f .

Manchmal empfiehlt es sich die folgende Regel anzuwenden, da die Integrale einfacher und meist auch zügiger zu berechnen sind.

Satz 52.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion. Sei f' stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein stetig differenzierbarer Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} f'(z) dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Beweis.

Die Verknüpfung zweier stetig differenzierbarer Funktion ist wiederum stetig differenzierbar. Dies besagt ein Satz aus der Analysis, d.h.

$f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar mit $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ und

$$\int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad \square$$

Bemerkung 20.

Wie im reellen Fall unterscheiden sich auch im komplexen zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Konstante, denn eine holomorphe Funktion mit Ableitung Null ist konstant. Das heißt, dass stetige Funktionen, die eine komplex differenzierbare Stammfunktion besitzen, wie in $\mathbb{R}$ integriert werden können.

Beispiel 24.

Sei $f(z) := z^n$ und $\gamma(t) = t \cdot z_0$ ein Integrationsweg, wobei $z_0 \neq 0$ und $0 \leq t \leq 1$ ist. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^1 f(t \cdot z_0)^n \cdot z_0 dt = (z_0)^{n+1} \cdot \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \cdot (z_0)^{n+1}$$

Analoges erhält man durch Anwenden von Satz 52, denn $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ist eine Stammfunktion von $f(z) = z^n$, daraus ergibt sich:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(z_0) - F(0) = \frac{(z_0)^{n+1}}{n+1}$$

Bis jetzt hatten wir einen Integrationsweg für unser Kurvenintegral vorgegeben. Seien nun $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Integrationswege, so bezeichnet $\gamma_1 + \gamma_2$ die Hintereinanderausführung der Wege und man setzt

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz := \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Beispiel 25.

Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ drei Wege mit $\gamma_1(t) = -1 + 2t$, $\gamma_2(t) = 1 + it$ und $\gamma_3(t) = (-1 + 2t) + it$. Sei $f(z) = \bar{z}$, dann folgt aus den obigen Überlegungen:

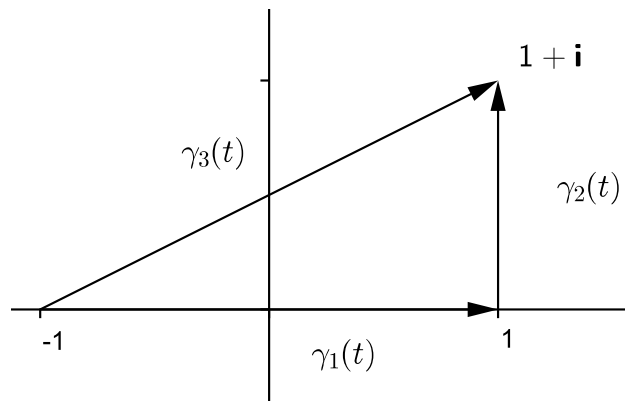


Abbildung 10: Die drei Wege $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ und $\gamma_3(t)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \bar{z} dz &= \int_{\gamma_1} \bar{z} dz + \int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_0^1 (-1 + 2t) \cdot 2 dt + \int_0^1 (1 - it) \cdot i dt \\ &= 2(-t + t^2) \Big|_0^1 + i \left(t - i \cdot \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = i + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wenn wir über dem dritten Weg das Integral bilden, erhalten wir:

$$\int_{\gamma_3} \bar{z} dz = \int_0^1 (-1 + 2t - it)(2 + i) dt = (2 + i) \cdot \left(-t + \frac{2-i}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = -i + \frac{1}{2}.$$

Man kann erkennen, dass das komplexe Kurvenintegral von $f(z) = \bar{z}$ von dem jeweiligen Integrationsweg abhängig ist. Der folgende Satz ermöglicht uns Aussagen zu treffen, welches Kurvenintegral wegababhängig ist und welches nicht. Wir werden erkennen, dass $f(z) = \bar{z}$ keine Stammfunktion besitzt und das komplexe Kurvenintegral für die Wege unterschiedlich ist.

Satz 53.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind die Aussagen

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion
2. Es ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg $\gamma \in G$.

äquivalent.

Beweis.

Wir zeigen zunächst, dass aus der ersten Behauptung die zweite folgt. Denn ist F eine Stammfunktion von f in G und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein Integrationsweg, so folgt aus dem Satz 52:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ist nun $\gamma(a) = \gamma(b)$, das heißt ist der Integrationsweg geschlossen, so verschwindet die rechte Seite und somit auch das gesamte Integral.

Um $(2) \Rightarrow (1)$ zu zeigen, wählen wir ein $a \in G$ und halten es fix. Zu $z \in G$ sei jeweils ein Integrationsweg $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow G$ gegeben, der a mit z verbindet. Wir setzen $F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$. Wir müssen jetzt zeigen, dass F in dem Gebiet G komplex differenzierbar ist.

Sei $z_0 \in G$ ein Punkt und D eine offene Kreisscheibe um den Punkt z_0 , die noch zur Gänze in dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist. Wenn wir nun für einen Punkt $z \in D$ die Verbindungsstrecke zwischen z_0 und z angeben, erhalten wir:

$$\omega_z(t) := z_0 + t \cdot (z - z_0).$$

Wenn auch nun $\gamma := \gamma_{z_0}$ gesetzt wird, ist $\gamma := \gamma + \omega_z - \gamma_z$ ein geschlossener Weg und wir erhalten:

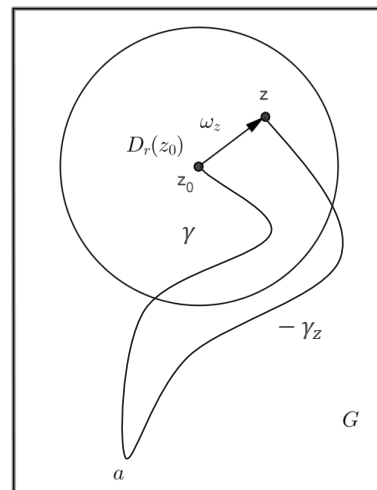


Abbildung 11: Skizze

$$0 = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta + \int_{\omega_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

$$= F(z_0) - F(z) + \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt = F(z_0) - F(z) + \Delta(z) \cdot (z - z_0),$$

wobei wir $\Delta(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) dt$ setzen. Wir sehen, dass $\Delta(z_0) = f(z_0)$, daher ist

$$\Delta(z) = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}.$$

Um $F'(z_0) = f(z_0)$ zu zeigen, müssen wir die Stetigkeit von Δ an der Stelle z_0 nachweisen, dazu schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |\Delta(z) - \Delta(z_0)| &= \left| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0) dt \right| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Stetigkeit von Δ an der Stelle z_0 aus der Stetigkeit von f in z_0 gezeigt. Somit ist F eine Stammfunktion von f in G und wir sind fertig. $\square$

Somit haben wir gezeigt, dass bei einer Wegunabhängigkeit jedes Integral über einem geschlossenen Weg verschwindet, auch die Umkehrung ist richtig, denn ist das Integral einer Funktion über einem geschlossenen Weg gleich Null, so haben wir wegunabhängige Kurvenintegrale. Einfacher kann gesagt werden, dass Wegunabhängigkeit vorliegt, wenn für eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ vorliegt. Also sind Wegunabhängigkeit und Existenz einer Stammfunktion äquivalente Aussagen.

In Definition 11 führten wir Sterngebiete ein und zeigten, dass jedes konvexe Gebiet sternförmig ist, doch die Umkehrung nicht richtig ist. Wenn wir nun zwei konvexe Gebiete G_1 und G_2 und $a \in G_1 \cap G_2$ betrachten, so ist die Vereinigung $G_1 \cup G_2$ bezüglich a sternförmig. Wenn wir nun als Gebiet uns ein Dreieck vorstellen, so wird das Innere eines Dreiecks als Dreiecksgebiet bezeichnet. Wenn man den Rand, welcher stückweise stetig differenzierbar ist, miteinbezieht, so erhält man ein abgeschlossenes Dreieck. Im folgenden Satz formulieren wir Satz 55 für Sterngebiete und erhalten als Resultat daraus den Satz von Goursat, der wiederum einen Grundstein für den Integralsatz von Cauchy darstellt.

Satz 54.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit dem Entwicklungspunkt $a \in G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion F .
2. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$, das a als Eckpunkt hat, ist $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

äquivalente Aussagen.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Siehe Beweis von Satz 53

(2) $\Rightarrow$ (1) erhalten wir ebenfalls aus dem Beweis von Satz 53, mit dem einzigen Unterschied, dass $F(z)$ als Integral über die jeweilige Verbindungsstrecke von a und z definiert ist. $\square$

Satz 55.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf G . Sei weiters $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreiecksgebiet, dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks Δ :

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beweis.

Bezeichne $L(\partial\Delta)$ den Umfang eines Dreiecks. Wir halbieren jeweils die Seiten des Ausgangsdreiecks Δ , verbinden die Mittelpunkte und erhalten somit 4 kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$.

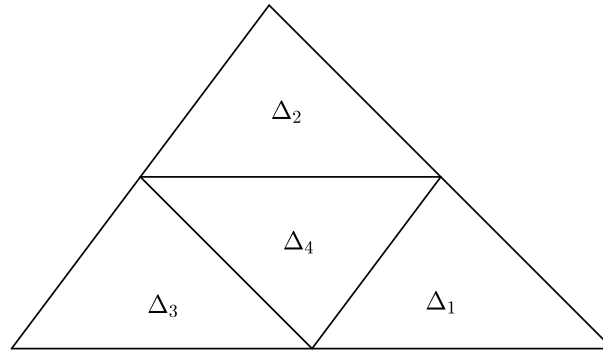


Abbildung 12: Graphische Darstellung von $\Delta_1, \dots, \Delta_4$

Sei weiters $\gamma = \partial\Delta_1 + \partial\Delta_2 + \partial\Delta_3 + \partial\Delta_4$.

Wegen Satz 52 (4) und $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ erhalten wir:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial\Delta_k} f(z) dz = \int_{\partial\Delta} f(z) dz.$$

Unter diesen vier Integralen wählt man sich nun jenes aus, das den größten Betrag vorweist und bezeichnet das dazugehörige Dreieck mit Δ^1 , also erhält man:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta^1} f(z) dz \right| \text{ und } L(\partial\Delta^1) = \frac{1}{2} \cdot L(\partial\Delta)$$

Wir wiederholen den Vorgang für Δ^1 und erhalten somit Δ^1 , d.h.:

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \cdot \left| \int_{\partial\Delta^2} f(z) dz \right| \text{ und } L(\partial\Delta^2) = \frac{1}{2^2} \cdot L(\partial\Delta)$$

Allgemein erhält man dann eine Folge von Dreiecken $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$ für die

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial\Delta^n} f(z) dz \right| \text{ und } L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2^n} \cdot L(\partial\Delta)$$

gilt. Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung besteht $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^n$ aus genau einem Punkt, nämlich z_0 . Laut Voraussetzung ist f in G holomorph und $z_0 \in \Delta$ ist auch in G .

Also existiert eine stetige Funktion $g(z)$ mit:

1. $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0) + (z - z_0) \cdot g(z)$
2. $g(z_0) = 0$

Wenn wir die Funktion $f(z)$ zerlegen und $\varphi(z) = f(z) - f(z_0) - (z - z_0) \cdot f'(z_0)$ betrachten, finden wir eine Stammfunktion

$$\Phi(z) = \int (f(z_0) + (z - z_0) \cdot f'(z_0)) dz = (f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0)) \cdot z + \frac{f'(z_0)}{2} \cdot z^2$$

Somit erhalten wir, dass $\int_{\partial \Delta^n} \varphi(z) dz = 0$. Daraus folgt wiederum, dass

$$\int_{\partial \Delta^n} f(z) dz = \int_{\partial \Delta^n} ((z - z_0) \cdot g(z)) dz.$$

Mit Satz 50 (3) erhalten wir in weiterer Folge:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\partial \Delta^n} ((z - z_0) \cdot g(z)) dz \right| \leq L(\partial \Delta^n) \cdot \max(|z - z_0| \cdot |g(z)|) \\ &\leq L(\partial \Delta^n)^2 \cdot \max(|g(z)|) \end{aligned}$$

Setzt man alle Teilergebnisse ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial \Delta} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\partial \Delta^n} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot L(\partial \Delta^n)^2 \max(|g(z)|) \\ &= L(\partial \Delta)^2 \cdot \max(|g(z)|). \end{aligned}$$

Da g in z_0 stetig ist und in diesem Punkt verschwindet, konvergiert die rechte Seite dieser obigen Gleichung mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0. $\square$

Bemerkung 21.

Wenn man sich diese Problemstellung genauer überlegt, so bemerkt man, dass wir im obigen Beweis nur einen von vier möglichen Fällen untersucht haben. Der Vollständigkeit halber werden wir die restlichen Fälle anführen.

Ist der Punkt z_0 ein Eckpunkt von Δ , dann zerlegen wir das Dreieck in drei Teildreiecke Δ_1, Δ_2 und Δ_3 . Wir erhalten, dass

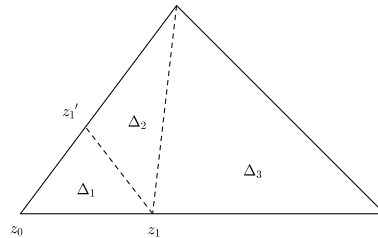


Abbildung 13: Fall 1

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz.$$

Da der Punkt z_0 nur in dem ersten Integral vorkommt, können wir die anderen Integrale unbehandelt lassen, d.h.:

$$\int_{\partial\Delta_2} f(z) dz = 0 = \int_{\partial\Delta_3} f(z) dz.$$

Es ist also

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz,$$

wobei die rechte Seite, wie oben gezeigt wurde, gegen 0 konvergiert, wenn man z_1 und z'_1 gegen z_0 wandern lässt.

Wenn nun z_0 im Inneren vom Dreiecksgebiet Δ liegt, kann man wiederum wie im obigen Fall vorgehen und ist fertig. Wenn aber der Punkt z_0 außerhalb vom Dreiecksgebiet Δ liegt, ist nichts zu zeigen und man ist fertig.

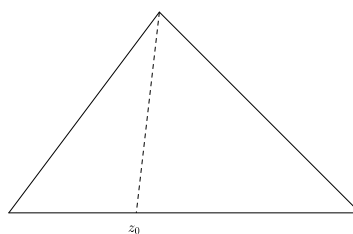


Abbildung 14: Fall 3, bei Fall 2 liegt z_0 im Inneren von Δ

Bemerkung 22.

Der oben angeführte Beweis geht auf *Alfred Pringsheim* (1850-1941) zurück. Dieser beschäftigte sich mit dem klassischen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes, welcher von *Edouard Goursat* (1858-1936) entwickelt wurde. Goursat verwendete bei seinem Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes Rechtecksgebiete und setzte die Stetigkeit der Ableitung der Funktion $f(z)$ voraus. Pringsheim schreibt in seiner Abhandlung:

“(…), insofern alle bisherigen Beweise, um vollständig und exakt zu sein, die Stetigkeit von $f'(z)$ oder was im wesentlichen auf dasselbe hinausführt, die gleichmässige Differenzierbarkeit von $f(z)$, entweder schlechthin oder zum mindesten in gewissem Umfange zur unentbehrlichen Voraussetzungen hatten.“

Ebenda verdeutlicht Pringsheim, dass die “Definition bzw. der Existenz-Beweis für das über eine Curve erstreckte Integral $\int f(z) dz$ “ die Stetigkeit dieser Funktion voraussetzt, die Differenzierbarkeit jedoch nicht zwingend notwendig sei. Weiters schreibt er:

“Diese Erkenntnis ist an sich wichtig und für zahlreiche analytische Untersuchungen geradezu unentbehrlich. Hat man sie nun aber einmal gewonnen, so liegt in der That gar kein vernünftiger Grund vor, den Beweis des eigentlichen Integralsatzes mit denjenigen Complicationen zu belasten, die sich aus der mehr oder minder zusammengesetzten Natur der Randcurve ergeben.“ [9]

So formuliert er den Cauchy'schen Integralsatz für Dreiecksgebiete und führt eben seinen Beweis an und ermöglicht, wie Remmert (S. 154) ebenfalls bemerkt, die Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes auf Sterngebiete.

Um Satz 54 auch für Sterngebiete zu zeigen, müssen wir zunächst die Existenz von Stammfunktionen zeigen.

Nun kann der Cauchysche Integralsatz ebenfalls für Sterngebiete formuliert werden und lautet wie folgt:

Satz 56.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit Zentrum $a \in G$. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf G holomorphe Funktion. Dann ist $F(z) := \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta$ eine Stammfunktion für f auf G . Für jeden stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Integrationsweg $\gamma \in G$ gilt außerdem:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Beweis.

Wir wählen das Intervall $[a, z] \subset G$ und möchten zeigen, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, d.h. wir wollen zeigen, dass in jedem Punkt $z_0 \in G$ $F'(z_0) = f(z_0)$ gilt. Hierfür wählen wir einen Punkt $z \in G$ beliebig nahe an z_0 , sodass die Verbindungsstrecke $[z_0, z]$ ganz in G liegt. Nach Satz 55 gilt

$$\int_{[a,z_0]+[z_0,z]+[z,a]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Aufgrund der Hintereinanderausführung von Kurvenintegralen erhalten wir

$$\int_{[a,z_0]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z,a]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Laut der Voraussetzungen gilt:

$$F(z) = F(z_0) + \int_{[z_0,z]} f(\zeta) d\zeta$$

Als nächsten Schritt definieren wir eine Stammfunktion $F_1(z)$ und zeigen seine Stetigkeit an einem Punkt $z_0 \in G$.

$$F_1(z) := \begin{cases} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f(z) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

Wegen obiger Überlegungen und $\int_{[z_0,z]} d\zeta = z - z_0$ erhalten wir für $z \neq z_0$:

$$F_1(z) - F_1(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta.$$

Wenn wir nun die Abschätzung aus Satz 52 verwenden, erhalten wir:

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \frac{1}{|z - z_0|} \cdot L([z_0, z]) \cdot \max_{\zeta \in [z_0, z]} |f(\zeta) - f(z_0)|$$

Wir haben nun die Stetigkeit von f in z_0 gezeigt, hieraus folgt nach einem Satz aus der reellen Analysis, dass auch F_1 in z_0 stetig ist. Womit nun alles gezeigt wurde. $\square$

Wir haben nun den Cauchyschen Integralsatz für Dreiecksgebiete und Sterngebiete angeführt und bewiesen. Wir werden einen weiteren Schritt machen und den Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete beweisen. Doch zuvor müssen wir einfach zusammenhängende Gebiete charakterisieren und versuchen anschauliche Folgerungen zu ziehen. Um einfach zusammenhängende Gebiete einführen zu können, müssen wir zunächst den Begriff der Homotopie klären.

Definition 57.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei geschlossene Wege in G . γ_1 heißt zu γ_2 homotop in G , wenn eine stetige Funktion $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ existiert, sodass

$$\Gamma(s, 0) = \gamma_1(s) \quad \text{und} \quad \Gamma(s, 1) = \gamma_2(s) \quad \text{für } s \in [0, 1]$$

und

$$\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Sind γ_1 und γ_2 zueinander homotop, so schreibt man $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Die Homotopie bildet eine Äquivalenzrelation, d.h.: $\sim$ ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation.

Definition 58.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma \in G$ ein geschlossener Weg. γ wird nullhomotop in G genannt, wenn er in G homotop zu einem konstanten Weg ist.

Definition 59.

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg $\gamma \in G$ nullhomotop ist.

Beispiel 26.

Wenn wir die zwei Wege $\gamma_1(t) = e^{\pi it}$ und $\gamma_2(t) = e^{-\pi it}$, $t \in [0, 1]$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten und diese auf Homotopie untersuchen, müssen wir ein $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ finden, sodass $(t, s) \rightarrow (1-s)e^{\pi it} + s \cdot e^{-\pi it}$ gilt. Unsere Funktion h liefert aber keine Homotopie in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, da beispielsweise $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0 \notin \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bemerkung 23.

Ich möchte noch einige Anmerkungen zu einfach zusammenhängenden Gebieten machen:

1. Anschaulich bedeutet einfach zusammenhängend, dass jeder geschlossene Weg im Gebiet G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann.
2. Ein einfach zusammenhängendes Gebiet hat keine Löcher.
3. Jedes Sterngebiet ist einfach zusammenhängend.

Ist $G \subset \mathbb{C}$ eine konvexe offene Teilmenge und $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow G$ zwei Wege mit $\gamma_1(a) = a = \gamma_2(t)$. So sind beide Wege homotop zueinander und eine explizite Form der Homotopie erhalten wir durch

$\gamma_k(t) := (1-k)\gamma_1(t) + k\gamma_2(t)$. Das heißt, dass beide Wege zusammenziehbar sind und ganz in G liegen, so folgt aus Definition 11, dass G konvex ist und daher auch ein Sterngebiet ist. $\square$

4. Sind $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete und ist $G_1 \cap G_2 \neq \{\}$, zusammenhängend, so ist die Vereinigung beider Gebiete wieder einfach zusammenhängend.

Bezeichnen wir mit G die Vereinigung beider Gebiete G_1 und G_2 . Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es Stammfunktionen F_k mit $k \in \{1, 2\}$ von f . Auf $G_1 \cap G_2$ ist dann $(F_1 - F_2)'(z) = 0$, also ist $(F_1 - F_2)$ konstant. Also ist $F(z) := F_1(z)$ auf G_1 und $F(z) := F_2(z) + c$ auf G_2 . Nun können wir sehen, dass F holomorph auf G ist und $F' = f$ gilt. $\square$

Beispiel 27.

Sei B eine offene Kreisscheibe. Wir behaupten, dass jede offene Kreisscheibe ein Sterngebiet ist. Jeder Punkt in B ist wieder ein Zentrum von B . Allgemein gilt, dass jede offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$ ein Sterngebiet ist.

Beispiel 28.

Wenn wir die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist ein Sterngebiet, aber nicht konvex. Wenn wir uns jede reelle Zahl $\lambda > 0$ ansehen, ist es ein Zentrum von $\mathbb{C}^-$. Wir haben oben bemerkt, dass jedes Sterngebiet einfach zusammenhängend ist, so sind auch all diese Teilmengen einfach zusammenhängend.

Mit diesen Resultaten können wir nun den Cauchyschen Integralsatz für einfach zusammenhängende Gebiete formulieren.

Satz 60.

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma \in G$ ein geschlossener Weg, so gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Nun gut, genug der Theorie, kommen wir zu einigen praktischen Beispielen.

Beispiel 29.

Betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ und γ_1 sei ein beliebiger geschlossener Weg. Wir gehen davon aus, dass unser geschlossener Weg im Inneren nicht den Nullpunkt enthält. Wir brauchen hier uns keine Überlegungen zur Parametrisierung des Weges γ_1 machen, da der Integrand $\frac{1}{z}$ überall außer bei $z = 0$ holomorph ist. Also ist jedes Integral über einen geschlossenen Weg Null, und wir können folgern, dass

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = 0$$

Verläuft der Integrationsweg γ_2 um den Nullpunkt herum, so lässt sich kein einfach zusammenhängendes Gebiet G finden, wobei $\gamma_2 \in G$ und f holomorph ist in G . Der Integrand ist außerhalb von $z = 0$ holomorph, also darf der Integrationsweg beliebig verformt werden. Ein Kreis wäre eine Möglichkeit und wir erhalten somit:

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

Wir kommen zu einem der fundamentalsten Sätze der Funktionentheorie und wollen zeigen, dass der Wert einer holomorphen Funktion f an einer Stelle z_0 durch das Integral über f und einem geschlossenen Weg γ um z_0 herum berechnet werden kann. Nach der sogenannten Cauchyschen Integralformel werden wir auf einige Beispiele und Aufgaben eingehen und deren Anwendbarkeit demonstrieren.

Satz 61.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $D := D_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe. Dann gilt für alle $z \in D$:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{w - z} dz \quad \text{mit } w \in D.$$

Beweis.

Sei $w \in D$ fix gewählt. Wir können $\varepsilon > 0$ beliebig klein wählen, sodass $D_\varepsilon(z_0) \subset G$ ist, wobei $z_0 \in G$ ein Punkt ist. Die Funktion $z \rightarrow \frac{f(z)}{w - z}$ ist auf $G \setminus \{w\}$ holomorph, daher gilt:

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{w - z} dz = \int_{\partial D_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{w - z} dz.$$

Diese obige Aussage hängt von der Wahl von ε ab, daher gilt

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{w - z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{w - z} dz.$$

Für hinreichend klein gewähltes $\varepsilon > 0$ und Beispiel 20 resultiert also:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{w - z} dz &= \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dz + \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w - z} dz \\ &= \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dz + 2\pi i f(w). \end{aligned}$$

Die Länge des Kreises $\partial D_\varepsilon(z)$ ist durch $2\pi\varepsilon$ gegeben, wenn wir nun abschätzen, steht

$$\left| \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon M.$$

Wegen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dz = 0$ erhalten wir, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{w - z} dz = 2\pi i f(w).$$

Oben eingesetzt, erhalten wir:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial D} \frac{f(z)}{w - z} dz$$

□

Beispiel 30.

Betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{4z}{z^2 + 9}.$$

f ist holomorph in einer Umgebung von $D_3(i)$. Wir zerlegen den Nenner in Linearfaktoren und erhalten:

$$f(z) = \frac{4z}{z^2 + 9} = \frac{4z}{(z + 3i)(z - 3i)}.$$

Bezeichne $\partial D_3(i)$ den Rand der Einheitskreisscheibe $D_3(i)$. Um nun

$$\int_{\partial D_3(i)} \frac{4}{(z + 3i)(z - 3i)} dz$$

bestimmen zu können, müssen wir das Integral umschreiben und erhalten

$$\int_{\partial D_3(i)} \frac{4}{(z + 3i)(z - 3i)} dz = \int_{\partial D_3(i)} \frac{f(z)}{(z - 3i)} dz,$$

wobei wir

$$f(z) = \frac{4z}{z + 3i}$$

setzen. Nun wird in die Cauchysche Integralformel eingesetzt und wir erhalten:

$$\int_{\partial D_3(i)} \frac{f(z)}{(z - 3i)} dz = 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \cdot f(3i) = 2\pi i \cdot \frac{12i}{6i} = 4\pi i$$

als Wert des Integrals.

Im folgenden Beispiel werden wir die Vorteile der Cauchyschen Integralformel kennenlernen.

Beispiel 31.

Zu berechnen sei

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz.$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch und erhalten:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

Wir bringen den Bruch auf den gleichen Nenner:

$$\begin{aligned} \frac{(z-1)^2 \cdot A + (z+1)(z-1) \cdot B + C \cdot (z+1)}{(z-1)^2(z+1)} &= \\ &= \frac{z^2(A+B) + z(-2A+C) + (A+C-B)}{(z-1)^2(z+1)} \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$(I) \quad A + B = 0 \quad \Leftrightarrow A = -B$$

$$(II) \quad -2A + C = 0 \quad \Leftrightarrow C = 2A$$

$$(III) \quad A + C - B = 1 \quad \text{aus (I) und (II) erhält man } -4B = 1$$

Also erhalten wir mit $B = -\frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{4}$ und $C = \frac{1}{2}$ insgesamt:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{5(z-1)} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

Für die Kurve $|z+1|=1$ erhält man die Parametrisierung $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := 1 + e^{it}$. Also gilt:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)} dz - \frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)} dz + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)^2} dz$$

Das erste Integral erfüllt die Bedingungen der Cauchyschen Integralformel. Wir haben ein offenes Gebiet G , wählen $f(z) = \frac{1}{4}$ und es folgt

$$\frac{1}{4} \int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)} dz = 2\pi i \cdot f(-1) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{2}$$

als Wert des ersten Integrals. Aus dem Cauchyschen Integralsatz erhalten wir als Wert des zweiten und dritten Integrals 0, da wir jeweils $f(z)$ über einem geschlossenen Weg γ integrieren. Schlussendlich können wir

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \frac{\pi i}{2}$$

festhalten.

Einfacher hätten wir das Beispiels direkt mit Satz 64 errechnen können, denn

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z+1)} dz = \frac{1}{(-2)^2} \cdot 2\pi i = \frac{\pi i}{2}.$$

Bevor wir nun Holomorphiekriterien formulieren, führen wir den Beweis von Satz 31 an. Bei dem Beweis werde ich mich an die Ausführungen von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb (vgl. [1] auf Seite 62f.). Doch bevor wir die eigentliche Aussage des Satzes beweisen können, müssen wir einen Hilfssatz formulieren, dessen Beweis ich hier nicht anführen werde, dieser kann in der oben angeführten Quelle auf Seite 63 nachgelesen werden.

Satz 62.

(Hilfssatz) Durch gliedweise Differentiation entsteht aus $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k$ eine Reihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}$, die in dem Konvergenzkreis $U_R(z_0)$ konvergiert.

Mit diesem Hilfssatz können wir Satz 31 nun mit einfachen Überlegungen zeigen.

Beweis.

Bezeichne $\tilde{R}$ den Konvergenzradius der durch gliedweise Differentiation entstandenen Reihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot (z - z_0)^{k-1}$ mit $\tilde{R} \geq R$. Wir betrachten in $U = U_{\tilde{R}}(z_0)$ einen geschlossenen Weg, so folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz, dass

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 0, \quad k \geq 0.$$

. Wenn wir nun $\int_{\gamma} g(z) dz$ betrachten, so gilt:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{k-1} dz = 0.$$

Nach Satz 53 hat g eine Stammfunktion auf U , diese ist gegeben durch:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{k-1} dz = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Somit ist $f(z) = a_0 + \int_{\gamma} g(z) dz$ und es gilt $f'(z) = g(z)$. Wir wissen bereits, dass $f(z)$ auf U konvergiert, somit gilt für die Konvergenzradien: $R = \tilde{R}$. $\square$

5.1 Holomorphiekriterien

Im folgenden Satz werden wir eine fundamentale Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel formulieren, den sogenannten "Entwicklungssatz", der besagt, dass jede holomorphe Abbildung lokal in eine Potenzreihe entwickelt werden kann und damit beliebig oft komplex differenzierbar ist.

Satz 63.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$ ein Punkt. Ist $r > 0$ der Radius der größten Kreisscheibe um z_0 , die noch in das Gebiet passt, so gibt es eine Potenzreihe

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k,$$

die für α mit $\alpha \in (0, r)$ auf $D_{\alpha}(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für jedes α ist somit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\alpha}(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw.$$

Hieraus kann gefolgert werden, dass die Funktion f auf G beliebig oft komplex differenzierbar ist.

Beweis.

Wir wählen $\alpha \in (0, 1)$ und $\gamma(t) := z_0 + r \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dann wissen wir bereits, dass f stetig auf dem Weg ist und somit existiert eine Potenzreihe $p(z)$, die im Inneren von $D_{\alpha}(z_0)$ absolut und gleichmäßig gegen

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

konvergiert. Die Koeffizienten a_k von $p(z)$ lassen sich durch die oben im Satz angeführte Formel bestimmen. Insgesamt kann aus der Cauchyschen Integralformel gefolgert werden, dass $F(z) = f(z)$, wobei die Koeffizienten a_k der Potenzreihe $p(z)$ nicht von α abhängen. $\square$

Definition 64.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in G$ ein Punkt. Man kann f als Potenzreihe entwickeln, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass $D := D_\alpha(z_0) \subset G$ ist und f in D mit einer konvergenten Potenzreihe übereinstimmt.

Wir nennen f analytisch, wenn f in jedem Punkt von G als Potenzreihe darstellbar ist.

Satz 65.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gilt, dass $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, so ist f holomorph auf dem Gebiet G .

Beweis.

Wir wissen, dass f lokal eine holomorphe Stammfunktion F besitzt. Außerdem haben wir gesehen, dass F beliebig oft komplex differenzierbar ist und somit $F' = f$ holomorph ist. $\square$

Fakt 4.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Für eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
2. f ist komplex differenzierbar auf G .
3. f ist holomorph auf G .
4. f ist beliebig oft komplex differenzierbar.
5. f ist analytisch.
6. f ist stetig und besitzt lokal immer eine Stammfunktion.
7. f ist stetig und es gilt für $\Delta \subset G$, dass $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$, dann ist f auch holomorph.

Im nächsten Kapitel wenden wir uns konformen Abbildungen zu, werden die Begriffe winkeltreu, lokal konform und biholomorphe Abbildungen näher ergründen.

6 Konforme Abbildungen

Stellen wir uns einen Atlas vor und schlagen in diesem eine beliebige Seite auf. Wir erblicken eine Landkarte, wo akribisch Länder, Gebirge, Städte, Grenzen und Flussverläufe eingezeichnet sind. Wir halten fest, dass die Landkarte eine Abbildung eines Teils der Erdkugeloberfläche ist. Im Gegenzug stellen wir uns einen Globus vor, dessen Oberfläche wir teilweise abschneiden und neben bzw. auf die Landkarte legen. (Hier gehen wir davon aus, dass die Maßstäbe der jeweiligen Darstellungen ident sind!). Wir erkennen, dass die Abbildung nicht längen-, aber winkeltreu ist. Anbei sei erwähnt, dass längentreue Atlanten oder Globen nicht existieren können. Wir werden im Zuge unserer Überlegungen feststellen, dass eine Äquivalenz zwischen holomorphen und winkeltreuen Funktionen gegeben ist. Remmert schreibt in seiner Einleitung des Kapitels 2:

"Die Deutung holomorpher Funktionen als winkeltreue (=konforme) Abbildungen wurde vor allem von Riemann propagiert; [...] Man verfolgt im einzelnen, wie sich Wege unter solchen Abbildungen verhalten; die Invarianz der Schnittwinkel zwischen Wegen ermöglicht häufig eine gute Beschreibung der Funktion." (Remmert, S.57)

Der Grundaufbau dieses Kapitels ähnelt dem von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb bzw. Reinhold Remmert. Angeleitet durch beide Werke, versuche ich eine Einführung in konforme und biholomorphe Abbildungen zu geben. Neben der Cayley-Abbildung mit ihrer Umkehrfunktion lernen wir im Unterkapitel 6.2.1 die Automorphismen des Einheitskreises und in Kapitel 6.2.2 die Automorphismen der oberen Halbebene kennen. Seien $z_1 := r_1 \cdot e^{it_1}$ und $z_2 := r_2 \cdot e^{it_2}$ zwei von Null verschiedene komplexe Zahlen. In Kapitel 1.5 haben wir definiert, wie der Winkel einer komplexen Zahl z bestimmt werden kann. Nun wollen wir den Winkel zwischen zwei komplexen Zahlen bestimmen. Wir erhalten

$$\angle(z_1, z_2) = \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = t_2 - t_1 \text{ für } t_2 > t_1$$

Wir fixieren einen Punkt z_0 in der komplexen Ebene. Wenn nun $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare Wege mit $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ sind, definiert man den orientierten Winkel zwischen den zwei Wegen als Winkel zwischen ihren Halbtangenten, also gilt

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) := \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right).$$

Aus den obigen Erkenntnissen können wir folgern, dass die Wahl des Arguments der komplexen Zahl bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt ist. In weiterer Folge wollen wir untersuchen, unter welchen Abbildungen diese Winkel erhalten bleiben. Um nach Ausführung unserer Abbildung überhaupt wieder Winkel definieren zu können, lassen wir nur Abbildungen zu, die glatte Kurven γ mit $\gamma'(0) \neq 0$ wieder auf glatte Kurven abbilden.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf einer Umgebung U von z_0 stetig differenzierbar ist. Sei γ ein glatter Weg in U , der von z_0 ausgeht mit $f'(z_0) \neq 0$. Wir erhalten als orientierten Winkel:

$$(f \circ \gamma)'(0) = \frac{1}{2} \cdot (u_x - iu_y) \cdot \gamma'(0) + \frac{1}{2} \cdot (u_x + iu_y) \cdot \overline{\gamma'(0)}$$

Wenn $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ in z_0 holomorph ist, muss nach Satz 15 $\frac{1}{2} \cdot (u_x + iu_y) = f_z(z_0) = 0$ sein. Außerdem muss $\frac{1}{2} \cdot (u_x - iu_y) = f_{\bar{z}}(z_0) \neq 0$ sein, da f sonst nicht umkehrbar stetig differenzierbar wäre. Somit haben wir dann $(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0)$. Für zwei Wege γ_1, γ_2 erhält man dann

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg \left(\frac{f'(z_0) \cdot \gamma_2'(0)}{f'(z_0) \cdot \gamma_1'(0)} \right) = \arg \left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \right) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$$

und sieht, dass der orientierte Winkel erhalten bleibt. Wenn wir nun eine Funktion f betrachten, die in z_0 winkeltreu ist, erhält f dann insbesondere die Winkel zwischen allen Wegen $\gamma_\zeta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow z_0 + e^{i\zeta}t$ mit $\zeta \in [0, 2\pi)$. Wenn wir nun in die obige Überlegung mit dem Wirtinger-Kalkül einsetzen erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \zeta &= \arg \left(\frac{e^{i\zeta}}{e^{i \cdot 0}} \right) = \arg \left(\frac{\gamma_\zeta'(0)}{\gamma_0'(0)} \right) = \angle(f \circ \gamma_0, f \circ \gamma_\zeta) = \\ &= \arg \left(\frac{f_z(z_0)e^{i\zeta} + f_{\bar{z}}(z_0)e^{-i\zeta}}{f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)} \right) = \arg(e^{i\zeta}). \end{aligned}$$

und also $\arg(f_z(z_0) + f_{\bar{z}}(z_0) \cdot e^{-2i\zeta})$ unabhängig von ζ sein muss. Dies ist nur der Fall, wenn $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$ und dies nur wiederum der Fall, wenn f in z_0 komplex differenzierbar ist, d.h.: die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen erfüllt.

Definition 66.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $f'(z_0) \neq 0$. Dann heißt die Funktion f winkeltreu in z_0 , wenn für zwei beliebige glatte Wege γ_1, γ_2 mit $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$ gilt, dass

$$\angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2).$$

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion. f wird lokal konform genannt, wenn sie in jedem Punkt von G winkel- und orientierungstreu ist. Ist f global gesehen injektiv, so nennt man f konform.

Satz 67.

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$, so ist f lokal konform.

Beweis.

Den Beweis dieses Satzes haben wir uns bereits in den obigen Darstellungen hergeleitet. $\square$

Beispiel 32.

Die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2$ ist holomorph und es gilt $f'(z) = 2z \neq 0$ in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$. Daher ist f in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lokal konform.

6.1 Biholomorphe Abbildungen

Definition 68.

Seien G_1 und G_2 zwei Gebiete mit $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$. Eine holomorphe Funktion $f : G_1 \rightarrow G_2$ heißt biholomorph, falls f und f^{-1} zusätzlich holomorph sind. Eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ lokal biholomorph, falls es Umgebungen $U = U(z_0) \subset G$ und $V = V(z_0) \subset \mathbb{C}$ gibt, sodass $f|_U : U \rightarrow V$ biholomorph ist.

Beispiel 33.

Wir betrachten eine beliebige offene Kreisscheibe $D_\alpha(z_0)$. Diese ist biholomorph zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := D_1(0)$, denn wir können die holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \rightarrow D_\alpha(z_0)$, $f(z) = z_0 + r \cdot z$ definieren, die die holomorphe Umkehrfunktion $g : D_\alpha(z_0) \rightarrow \mathbb{E}$ mit $g(z) = \frac{(z-z_0)}{r}$ besitzt.

Beispiel 34.

Bezeichne $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Die holomorphe Abbildung

$$\varphi_C(z) = \frac{z-i}{z+i} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

mit holomorpher Umkehrabbildung

$$\varphi_C^{-1}(z) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 1+z \\ 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ biholomorph auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und umgekehrt ab. Diese Abbildungen werden Cayleyabbildungen genannt und wurden nach dem britischen Mathematiker *Arthur Cayley* (1821–1895) benannt.

Bemerkung 24.

Wir können zeigen, dass beide Voraussetzungen, also zunächst einmal $\Im(z) > 0$ und $|z| < 1$ erfüllt sind, denn

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{(z-i)(\bar{z}+i)}{(z+i)(\bar{z}-i)} = \frac{|z|^2 - 2\Im(z) + 1}{|z|^2 + 2\Im(z) + 1} = 1 - \frac{4\Im(z)}{|z|^2 + 2\Im(z) + 1}$$

nimmt Werte am Einheitskreis an für $|z| < 1$ und

$$\Im\left(\mathbf{i} \frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+z)(1-\bar{z}) + (1+\bar{z})(1-z)}{(1-z)(1-\bar{z})} \right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

nimmt auch Werte in der oberen Halbebene an, wenn $\Im(z) > 0$ ist.

Um ein Kriterium für die lokale Biholomorphie einer Funktion auf einem Gebiet G angeben zu können, benötigen wir folgenden Satz, der uns einiges erleichtert:

Satz 69.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe, injektive und lokal biholomorphe Funktion. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow f(G)$ ist biholomorph.

Beweis.

Wir müssen drei Aussagen zeigen:

1. $f(G)$ ist offen.
 2. $f(G)$ ist ein Gebiet.
 3. f^{-1} ist holomorph und f ist biholomorph.
1. Nach der Definition 27 existieren offene Umgebungen $U = U(z_0) \subset G$ und $V = V(f(z_0)) \subset f(G)$, sodass $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Also ist $V = f(U) \subset f(G)$. Somit ist $f(G)$ offen.
 2. Seien $f(z_1)$ und $f(z_2)$ zwei Punkte von $f(G)$. Es existiert $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$. Aus Definition 26 folgt also, dass $(f \circ \gamma)$ die Punkte $f(z_1)$ und $f(z_2)$ in G verbindet. Nach 1 und 2 können wir folgern, dass $f(G)$ ein Gebiet ist.
 3. Sei $f : G \rightarrow f(G)$ holomorph und bijektiv. Ist $f(z_0) \in f(G)$, so existieren wieder nach Definition 27 Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$, sodass $f : U \rightarrow V$ biholomorph ist. Somit ist also $f^{-1}|_V = (f|_U)^{-1}$ holomorph und in weiterer Folge ist f biholomorph.

□

Satz 70.

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph, f' stetig und $z_0 \in G$. Wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, ist f genau dann in z_0 biholomorph, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Beweis.

Sei f in z_0 lokal biholomorph. Somit existieren offene Umgebungen $U = U(z_0)$ und $V = V(f(z_0))$, sowie eine holomorphe Abbildung $g : V \rightarrow U$, sodass $g \circ f|_U = id_U$. Nach der Kettenregel ist

$$1 = (g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0),$$

also ist $f'(z_0) \neq 0$.

Umgekehrt sei nun $f'(z_0) \neq 0$ gegeben. Weil f stetig differenzierbar ist, besitzt f lokal eine reell differenzierbare Umkehrung. Sei nun $U = U(z_0)$ offen und $f : U \rightarrow V$ reell differenzierbar. Wir wissen, dass $(f|_U)^{-1} \circ f = id_U$ holomorph ist, also erfüllt $(f|_U)^{-1}$ für beliebiges $z \in U$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist somit holomorph. □

Wir folgern daraus: Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv mit $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in G$, so ist $f(G)$ ein Gebiet und die Funktion $f : G \rightarrow f(G)$ biholomorph. In den folgenden Sätzen werden wir zeigen, dass die gleiche Schlussfolgerung auch durch unterschiedlichere (meist schwächere) Voraussetzungen gegeben ist.

Satz 71.

Für $\alpha \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi_\alpha(z) := z^\alpha$. Dann gelten folgende Aussagen:

1. φ_α ist im Punkt $z_0 := 1$ lokal biholomorph.
2. Für $r > 0$ bildet φ_α die Kreisscheibe $D_r(0)$ surjektiv auf die Kreisscheibe $D_{r^\alpha}(0)$ ab. Dabei kommt jeder Wert ungleich Null genau α -mal vor.

Beweis.

Die erste Aussage folgt aus der Definition der komplexen Differenzierbarkeit, denn

$$(\varphi_\alpha(z))' = \varphi_\alpha'(z) = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$$

ist ungleich Null für $(z_0) = 1$.

Der Punkt $z = \rho e^{it}$ wird durch φ_α auf $\omega = \rho^\alpha e^{i\alpha t}$ abgebildet. Wenn wir nun unser ρ alle Werte zwischen 0 und r durchlaufen lassen, erhält man die zweite Aussage. Denn im Kapitel 1.6 haben wir bewiesen, dass jede komplexe Zahl, die von Null unterschiedlich ist genau α -te Wurzeln besitzt. $\square$

Satz 72.

Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und f habe in z_0 eine Nullstelle der Ordnung α . Dann existiert in der Nähe von z_0 eine holomorphe Funktion h mit einer einfachen Nullstelle, sodass $f(z) = h(z)^\alpha$ ist.

Beweis.

Wir nehmen o.B.d.A an, dass $z_0 = 0$. Dann existiert in der Nähe des Nullpunktes eine holomorphe Funktion g , sodass $f(z) = z^\alpha \cdot g(z)$ mit $g(0) \neq 0$. Wenn wir nun $\lambda := g(0)$ setzen, kann

$$f(z) = \lambda \cdot z^\alpha \cdot (1 + q(z))$$

mit einer holomorphen Funktion q und $q(0) = 0$ geschrieben werden. Wenn wir unseren Punkt z nahe genug an 0 rücken, liegt $1 + q(z)$ in einer Umgebung $U = U(1)$, auf der unsere im Satz 41 eingeführte Abbildung φ_α^{-1} definiert ist. Somit ist $h^{-1}(z) := \sqrt[\alpha]{1 + q(z)} := \varphi_\alpha^{-1}(1 + q(z))$ holomorph und $h^{-1}(0) = 1$. $\square$

Als Folgerung aus diesem Satz erhalten wir:

Satz 73.

Eine nichtkonstante holomorphe Funktion bildet offene Mengen wieder auf offene ab.

Beweis.

Sei $X \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Die Funktion $g(z) := f(z) - f(z_0)$ hat bei $z_0 \in X$ eine Nullstelle endlicher Ordnung. Somit existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und eine holomorphe Funktion h , die in z_0 eine einfache Nullstelle besitzt, sodass nach Satz 72 $g(z) = h(z)^\alpha$ ist. Wir können erkennen, dass $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$ ist. Also bildet die Funktion h eine Umgebung von z_0 biholomorph auf eine Umgebung von Null ab und g bildet mit $h^\alpha = \varphi_\alpha \circ h$ surjektiv auf eine Umgebung von Null ab.

Somit erhalten wir das gewünschte Resultat und $f(B)$ enthält eine ganze Umgebung von $f(z_0)$. $\square$

Bemerkung 25.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Diese Tatsache lässt sich in der Literatur unter “Satz über die Gebietstreue” finden.

Bemerkung 26.

Diese Eigenschaft ist für differenzierbare Funktionen in $\mathbb{R}^n$ nicht gültig. Wenn man beispielsweise die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2, y)$ betrachtet, so sieht man, dass Satz 73 im Reellen nicht stimmt, denn in unserem Fall ist das Bild der offenen Ellipse nicht offen.

Satz 74.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Hat $|f|$ auf G ein lokales Maximum, so ist f konstant.

Beweis.

Wenn wir indirekt annehmen, dass es doch ein $\omega \in G$ gibt, sodass $|f(z)| \leq |f(\omega)|$ erfüllt ist $\forall z \in G$. Dann ist $f(G)$ keine Umgebung von $f(\omega)$, da jede Umgebung von $f(\omega)$ ja Punkte mit Betrag größer $|f(\omega)|$ enthält. Daher ist $f(G)$ nicht offen. Mit diesen Überlegungen muss also f konstant sein, was einen Widerspruch darstellt. Also kann kein solches $\omega \in G$ existieren. $\square$

Satz 75.

Sei G eine offene Teilmenge von $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ und f eine holomorphe Funktion, die auf $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0\}$ nur reelle Werte annimmt. Sei weiters $\overline{G} := \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G\}$, dann ist die Funktion:

$$g : G \cup \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \rightarrow g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in G \\ \bar{f}(\bar{z}) & \text{für } z \in \overline{G} \end{cases} \text{ holomorph.}$$

Beweis.

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit der Funktion. Denn aus $z \in G \cap \overline{G}$ folgt, dass $\Im(z) = 0$, oder dass $\bar{z} = z$, also auch die Bilder $f(z) = \bar{f}(\bar{z})$ wären. Wir zeigen, dass unsere Funktion f die Bedingungen von Satz 73 erfüllt. Aus den Voraussetzungen wissen wir, dass f im Inneren von G holomorph ist, somit ist das Kurvenintegral längs aller Ränder von Dreiecken in G gleich Null. Wegen der Stetigkeit von f ist f auf einer kompakten Umgebung eines Dreiecks auch gleichmäßig stetig. Es ist

$$\int_{\Delta} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Delta_{\varepsilon}} f(z) dz = 0,$$

wobei dazu gesagt werden muss, dass eine Dreiecksseite auf der reellen Achse liegt und Δ_{ε} , die um $\varepsilon > 0$ verschobene Dreiecksseite bezeichnet. Also ist auch das Kurvenintegral längs aller Ränder des Dreiecks in G gleich Null. Wir wissen, dass $z \rightarrow \bar{f}(\bar{z})$ auch holomorph in $\overline{G}$ ist, somit gilt das Selbe auch für die Kurvenintegrale längs der Ränder von Dreiecken in $\overline{G}$. Wir können nun jedes Dreieck in $G \cup \overline{G}$ zerlegen in ein Viereck und in ein Dreieck. Das Kurvenintegral längs des Randes von beiden Figuren verschwindet und somit verschwindet auch das Kurvenintegral längs des Randes aller Dreiecke in $G \cup \overline{G}$. $\square$

6.2 Automorphismengruppen

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow G$ bezeichnen wir als Automorphismus und die Menge aller biholomorphen Abbildungen $G \rightarrow G$ bezeichnen wir als $\text{Aut}(G)$. Diese ist bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die als neutrales Element die identische Abbildung id vorweist. Im Folgenden werden wir die Automorphismen der oberen Halbebene und die der Einheitskreisscheibe einführen und näher untersuchen. Zum Abschluss dieses Kapitels wenden wir uns der (geschlitzten) Ebene zu.

6.2.1 Automorphismen von $\mathbb{E}$

Ein sehr aussagekräftiges und bedeutungsvolles Hilfsmittel, welches uns hilft Automorphismen zu analysieren ist das “Schwarzsche Lemma“, welches auf den deutschen Mathematiker *Karl Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921) zurückgeht.

Satz 76.

Für jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$ gilt:

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{E}, \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Wenn $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für $z_0 \neq 0$, so ist $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Wir definieren

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

Wir können feststellen, dass $g(z)$ holomorph ist auf $\mathbb{E}$. Sei nun $0 < \alpha < 1$, so folgt aus dem Maximumprinzip (Satz 76):

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=\alpha} \left(\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|} \right) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Wenn wir nun α gegen 1 gehen lassen, erhalten wir, dass

$$|g(z)| \leq 1$$

auf der Einheitskreisscheibe gilt. Somit folgt wiederum, dass

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1$$

auf ganz $\mathbb{E}$ ist. Ist nun $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für $z_0 \neq 0$, so folgt, dass

$$|g(z)| = 1 \quad \text{für } z \in \mathbb{E}.$$

Dann hat g in z ein lokales Maximum, also ist g nach dem Maximumprinzip auf $\mathbb{E}$ konstant und es folgt, dass $|g(0)| = 1$ bzw. $|g(z_0)| = 1$. $\square$

Satz 77.

Die Automorphismengruppe des Einheitskreises $\mathbb{E}$ besteht aus allen gebrochen linearen Transformationen der Form:

$$f(z) = e^{i\lambda} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad \text{mit } 0 \leq \lambda < 2\pi \text{ und } z_0 \in \mathbb{E}.$$

Beweis.

Sei $z_0 \in \mathbb{E}$, dann ist durch

$$\varphi_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

eine Möbiustransformation, die in $z = \frac{1}{\bar{z}_0}$ nicht definiert ist. Ist nun $|z| = 1$, so gilt

$$|\varphi_{z_0}(z)| = \left| \frac{1}{z} \cdot \frac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right| = 1.$$

Es ist $|\varphi_{z_0}(z)| \leq 1$ für ein $z \in \mathbb{E}$, also ist mit dem Satz über die Gebietstreue

$$\varphi_{z_0}(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}.$$

Aus

$$\varphi_{z_0}(-\varphi_{z_0}(-z)) = id = z$$

folgt, dass φ_{z_0} ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ ist.

Wenn wir nun ein $f \in Aut(\mathbb{E})$ beliebig mit $f(z_0) = 0$ wählen, ist

$g := f \circ \varphi_{z_0}^{-1} \in Aut(\mathbb{E})$ und es gilt, dass $g(0) = 0$. Aus dem Satz 51 folgt, dass $|g(z)| \leq |z|$ ist. Da der Satz auch auf g^{-1} angewandt werden kann, haben wir sogar Gleichheit gezeigt und daraus folgt wiederum, dass

$$g(z) = e^{i\lambda} z \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$f(z) = e^{i\lambda} \cdot \varphi_{z_0}(z)$$

ist. □

Fakt 5.

Betrachten wir die Abbildung $z \rightarrow \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$, dann können wir feststellen, dass der erste Quadrant biholomorph auf die Einheitskreisscheibe abgebildet wird. Von diesem Faktum kann man sich leicht vergewissern, denn $z \rightarrow z^2$ bildet den ersten Quadranten biholomorph auf die obere Halbebene ab. Diese Abbildung und die Cayleyabbildung ergeben die Automorphismengruppe des ersten Quadranten.

6.2.2 Automorphismen von $\mathbb{H}$

Im Kapitel 4.2 haben wir bereits gebrochen lineare Abbildungen eingeführt und im Satz 32 bewiesen, dass Möbiustransformationen eine Gruppe bilden. In Satz 33 haben wir festgehalten, dass die Gruppe der Möbiustransformationen isomorph zu $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Anstelle von $GL(2, \mathbb{C})$ und ihrer Untergruppe $SL(2, \mathbb{C})$ betrachten

wir die Gruppe der reell invertierbaren Matrizen, also $GL(2, \mathbb{R})$.

Sei nun $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2i \cdot \Im(\varphi_A(z)) &= \cdot(\varphi_A(z) - \overline{\varphi_A(z)}) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \\ &= \frac{(az+b) \cdot (c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} = \\ &= \frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd - acz\bar{z} - ad\bar{z} - bc\bar{z} - bd}{|cz+d|^2} = \\ &= \frac{(z-\bar{z})(ad-bc)}{|cz+d|^2} = \frac{\det(A)}{|cz+d|^2} \cdot (z-\bar{z}) = 2i \cdot \frac{\det(A)}{|cz+d|^2} \cdot \Im(z). \end{aligned}$$

Aus der Anfangsgleichung folgt nun:

$$\Im(\varphi_A(z)) = \frac{\det A}{|cz+d|^2} \cdot \Im(z).$$

Satz 78.

Sei $A \in GL(2, \mathbb{R})$ und $\varphi_A(z) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ jene Abbildung. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass $\varphi_A(z)$ ein Automorphismus der oberen Halbebene mit der Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}(z) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ist.

Beweis.

Sei $A \in GL(2, \mathbb{R})$, dann ist auch die inverse 2×2 -Matrix $A^{-1} \in GL(2, \mathbb{R})$. Somit können wir folgern, dass $\varphi_A(z)$ und ihre Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}(z)$ holomorph in $\mathbb{H}$ sind. Somit folgt mit Satz 22, dass

$$\varphi_A(z) \circ \varphi_{A^{-1}}(z) = \varphi_{A^{-1}}(z) \circ \varphi_A(z) = id = z$$

und in weiterer Folge, dass $\varphi_A(z) \in Aut(\mathbb{H})$. □

Satz 79.

Die gebrochen lineare Abbildung $\varphi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad-bc > 0$ bilden die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$. In anderen Worten:

$$Aut(\mathbb{H}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1 \right\}$$

ist die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$.

Beweis.

In Beispiel 32 führten wir die Cayleyabbildung mit ihrer Umkehrfunktion ein. Wir fassen nochmals zusammen:

$$\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \varphi_C(z) = \frac{z-i}{z+i} \text{ und } \varphi^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, \varphi_C^{-1}(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}.$$

Wir wissen, dass die Cayleyabbildung eine Möbiustransformation ist, daher gilt nach Satz 23:

$$\varphi = \varphi_C(z) \text{ und } \varphi^{-1} = \varphi_{C^{-1}}(z), \text{ wobei } C := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Aus einer direkten Rechnung mit $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ folgt:

$$\begin{aligned} CAC' &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= i \cdot \begin{pmatrix} a + d + i(b - c) & a - d - i(b + c) \\ a - d + i(b + c) & a + d - i(b - c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir setzen $\alpha := \frac{1}{2}[(a + d) + i(b - c)]$ und $\beta := [a - d - i(b + c)]$, dann erhalten wir als Ergebnis der Matrixmultiplikation:

$$B := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Wir sind mit dem Beweis fast fertig, denn die einzigen Matrizen $A \in SL(2, \mathbb{R})$ für die die Abbildung φ auf die identische zurückführt, sind $A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hiermit haben wir eine Isomorphie zwischen den Gruppen $Aut(\mathbb{E})$ und $Aut(\mathbb{H})$ und der Gruppe $SL(2, \mathbb{R}) \setminus \{\pm 1\}$ gefunden. $\square$

7 Der Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Kapitel werden wir die Vorarbeiten zum lang versprochenen Riemannschen Abbildungssatz beenden und diesen formulieren und beweisen. Zunächst beschäftigen wir uns mit Normalen Familien und formulieren den Konvergenzsatz von Bolzano-Weierstraß und im Anschluß daran den Satz von Arzela-Ascoli und den Satz von Montel. Im Anschluss daran werden einige Konsequenzen aus diesem Satz gefolgert und mit diesen in weiterer Folge mögliche Anwendungen demonstriert. Doch zunächst beschäftigen wir uns mit dem Kapitel über normale Familien, hier werden einige fundamentale Sätze und Definitionen angeführt. Gegen Ende dieses Kapitels führen wir $\mathcal{O}(G)$ als Menge der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G ein und machen uns über die Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n) \in \mathcal{O}(G)$ Gedanken. Im darauffolgenden Kapitel formulieren und beweisen wir einen zentralen Satz der klassischen Funktionalanalysis. In diesem Kapitel lehne ich den Aufbau an Fritzsche und an das Werk von Fischer, Lieb an.

7.1 Normale Familien

In der reellen Analysis besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass jede beschränkte unendliche Menge M einen Häufungspunkt besitzt. Klaus Fritzsche schreibt, dass für Folgen reeller Funktionen ein solcher Satz nicht gilt, doch für Folgen von holomorphen Funktionen liefert der Satz von Montel ein entsprechendes Resultat. Denn “Familien“ (Mengen) von Funktionen, in denen jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, werden normal genannt und für genau solche normale Familien werden wir einige Resultate erzielen.

Der Konvergenzsatz von *Weierstraß* (1815 – 1897) besagt, dass für eine Folge

(f_n) von holomorphen Funktionen auf einem Gebiet G , die lokal gleichmäßig gegen f (Grenzfunktion) konvergiert, f auch holomorph ist. Weiters konvergieren auch sämtliche Ableitungen lokal gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktionen. Wir nennen eine Folge von holomorphen Funktion (f_n) kompakt konvergent auf einem Gebiet G , falls (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f der Folge (f_n) konvergiert. Durch eine einfache Überlegung kann man sich vorstellen, dass die kompakte Konvergenz äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz ist, denn durch eine Überdeckung von endlich vielen ε -Umgebungen erhält man diese Tatsache.

Fakt 6.

Der weierstraßsche Konvergenzsatz ist im Reellen nicht anwendbar, denn die Grenzfunktion f einer gleichmäßig konvergenten Folge (f_n) differenzierbarer Funktionen, muss nicht notwendigerweise wieder differenzierbar sein. Falls die Grenzfunktion f doch differenzierbar ist, müssen die Ableitungen (f'_n) der Folgenglieder nicht punktweise gegen die Ableitung der Grenzfunktion f' konvergieren. Ein Beispiel hierfür wäre die Folge:

$$f_n(x) := \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$$

Denn $(f_n)(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Die Ableitungen $(f'_n)(x) = \frac{1}{n} \cdot \cos(nx) \cdot n = \cos(nx)$ konvergiert nirgends gegen die Ableitung der Nullfunktion.

Wir formulieren nun einige Sätze, die uns in weiterer Folge helfen werden, den Riemannschen Abbildungssatz zu beweisen. Hierbei ähnelt der Aufbau des Kapitels dem von Wolfgang Fischer und Ingo Lieb. ([1], Seite 294ff. §4.)

Satz 80.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge auf G holomorpher Funktionen, die kompakt gegeben eine holomorphe Funktion f , die Grenzfunktion genannt wird, konvergiert. Dann gilt:

1. Wenn nun die Funktionen f_n in G keine Nullstellen haben, so ist die Grenzfunktion f in G nullstellenfrei oder es gilt $f \cong 0$.
2. Sind die Funktionen f_n injektiv, so kann gefolgert werden, dass die Grenzfunktion ebenfalls injektiv oder konstant ist.

Beweis.

Wir zeigen die erste Behauptung und nehmen an, dass für die Grenzfunktion ein $z_0 \in G$ existiert, für die $f(z_0) = 0$. Dann gibt es ein $z_0 \in G$ und $r > 0$ mit $f(z_0) = 0$ und $f(z) \neq 0$, wobei $z \in U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Wir setzen $\varepsilon = \min_{z \in U_r(z_0)} |f(z)| \geq 0$ und halten fest, dass (f_n) auf der kompakten Menge $U_r(z_0)$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion konvergiert und erhalten für ein Folgenglied $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$|f_{n_0}(z) - f(z)| < \varepsilon \leq |f(z)| \quad \forall z \in U_r(z_0).$$

Wir können erkennen, dass die Funktion f_{n_0} wie unsere Grenzfunktion eine Nullstelle in der kompakten Kreisscheibe besitzt, dies bildet einen Widerspruch zu

unseren Annahmen.

Für die zweite Behauptung nehmen wir an, dass unsere Grenzfunktion f weder injektiv, noch konstant ist, somit existieren zwei voneinander verschiedene Punkte $z_1, z_2 \in G$, sodass $f(z_1) = f(z_2)$. Wir bilden neue Funktionen $g_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_1)$, die aufgrund der Injektivität der Folgenglieder auf unserem Gebiet $G \setminus \{z_1\}$ keine Nullstellen besitzen, somit konvergiert die Funktionenfolge (g_n) kompakt auf $G \setminus \{z_1\}$ gegen $g(z) = f(z) - f(z_1)$. Aufgrund der Annahme, dass unsere Grenzfunktion nicht konstant ist, ist g auf $G \setminus \{z_1\}$ nullstellenfrei, was einen Widerspruch zu $g(z_2) = 0$ bildet. $\square$

Bemerkung 27.

Mit diesem Satz, welcher in der Literatur als Satz von Hurwitz (1859-1919) angeführt wird, können wir Aussagen über die Grenzfunktion von Folgen nullstellenfreier holomorpher Funktionen angeben. Man betrachte hierfür beispielsweise die Funktionenfolge $f_n(z) = \frac{e^z}{n}$. Wir können zeigen, dass diese Grenzfunktion für großes n gegen die Nullfunktion konvergiert. Dies ist eine Eigenschaft, was für die Folgenglieder beispielsweise nicht gegeben ist.

Definition 81.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}(G)$ die Menge der holomorphen Funktionen auf dem Gebiet G . Diese Menge bildet einen Vektorraum.
2. Mit der Menge $\mathcal{C}(G)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen Funktionen auf dem Gebiet G .
3. Sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge der obigen Mengen, so wird $\mathcal{F}$ als Funktionenfamilie bzw. als Familie bezeichnet.

Wenn wir nun diesen Vektorraum mit einer Topologie versehen, so gilt für $f \in \mathcal{O}(G)$ und $K \in G$ eine kompakte Menge:

$$|f|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty.$$

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ bezeichnet $U_{K,\varepsilon} = \{g \in \mathcal{O}(G) : |f - g| < \varepsilon\}$ die Menge aller auf G holomorphen Funktionen, die sich auf K von f nur um $\varepsilon > 0$ unterscheiden.

Noch bevor wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für diese speziellen Mengen formulieren können, definieren wir im Folgenden Umgebungen und die Begriffe der Stetigkeit und Beschränktheit.

Definition 82.

Ein $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(G)$ wird Umgebung einer Funktion f genannt, wenn eine kompakte Menge K und ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $U_{K,\varepsilon}(f) \subset \mathcal{U}$ gilt. Offen wird die Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}(G)$ genannt, wenn $\mathcal{U}$ für jedes $f \in \mathcal{U}$ wieder eine Umgebung ist.

Definition 83.

Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ heißt

1. punktwiese gleichgradig stetig, wenn zu jedem $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{z_0, \varepsilon} > 0$ gibt, sodass $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $z \in G$ mit $|z - z_0| < \delta$,
2. punktwiese beschränkt, wenn für jedes $z_0 \in G$ eine Konstante $c = c(z_0) > 0$ gibt, sodass $|f(z_0)| \leq c$ für alle $f \in \mathcal{F}$ ist,
3. lokal beschränkt, wenn für $z_0 \in G$ eine Umgebung $\mathcal{U} = \mathcal{U}(z_0)$ und ein $c = c(z_0) > 0$ gibt, sodass $|f(z)| \leq c$ ist für alle $f \in \mathcal{F}$ und $z \in \mathcal{U}$.

Um nun die Existenz gewisser konvergenter Teilfolgen für Funktionenfamilien zu zeigen, müssen wir den Begriff normal definieren.

Definition 84.

Sei G ein Gebiet und $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Familie. Die Familie $\mathcal{F}$ heißt normal, wenn für jede Folge (f_n) eine kompakt konvergente Teilfolge existiert.

Satz 85.

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Funktionenfamilie. Sie ist normal, wenn sie punktwiese beschränkt und punktwiese gleichgradig stetig ist.

Bemerkung 28.

Es genügt eigentlich die Betrachtung aller $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(G)$, da die Menge der stetigen Funktionen hierfür ausreichend ist.

Beweis.

Der Beweis unterteilt sich in drei Schritte, wobei wir zunächst eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ definieren.

In dem ersten Schritt gehen wir von einer abzählbaren und dichten Menge $X = \{z_1, z_2, \dots\} \subset G$ aus. Auf dieser werden wir versuchen eine punktwiese konvergente Teilfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu definieren. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede konvergente Folge einen Häufungspunkt. Aufgrund der punktwweisen Beschränktheit konvergiert die Punktfolge $(f_n(z_1))_{n \in \mathbb{N}}$. Wir definieren $f_{1,k}(z) := f_{n_k}(z)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ und $z \in G$ ist und betrachten die Funktionenfolge $(f_{1,k})$. Wir gehen für z_2 wie für die Stelle z_1 vor und erhalten eine konvergente Teilfolge $(f_{1,k_l}(z_2))_{l \in \mathbb{N}}$. Hier setzen wir dann $f_{2,l}(z) = f_{1,k_l}(z)$ für ein $l \in \mathbb{N}$ und $z \in G$. Wir machen nun fortfahrend weiter und erhalten somit eine Folge von Funktionenfolgen, die für jedes $m \in \mathbb{N}$ in den Punkten $z_1, \dots, z_m$ konvergiert. Die Teilfolge $(f_{m+1,k})$ konvergiert zusätzlich im Punkt z_{m+1} . Somit konvergiert die Diagonalfolge $g_n(z) := (f_{n,n}(z))$ somit für $n \in \mathbb{N}$ in jedem Punkt $z_1, z_2, \dots$. Damit können wir folgern, dass wir für unsere Funktionenfolge (f_n) eine Teilfolge (g_n) gefunden haben, die in G punktwiese konvergiert.

Wir zeigen im zweiten Schritt, dass die Diagonalfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ punktwiese konvergiert. Im folgenden ist es unser Ziel, die Diagonalfolge als Cauchyfolge anzuschreiben. Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da unsere Diagonalfolge nach Voraussetzung gleichgradigstetig ist und unsere Funktionen $g_n \in \mathcal{F}$ sind, existiert auch ein $\delta > 0$, sodass

$$|g_n(z) - g_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in X \cap U_\delta(z_0)$, $z_0 \in G$ gilt. Nach dem Beweisschritt 1 existiert ein $\zeta \in X \cap \mathcal{U}_\delta(z_0)$, sodass die Punktfolge $(g_n(\zeta))$ konvergiert und für ein $N \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge ist, also gilt für alle $m, n \geq N$

$$|g_m(\zeta) - g_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Insgesamt kann gesagt werden, dass

$$\begin{aligned} |g_m(z_0) - g_n(z_0)| &\leq |g_m(z_0) - g_m(\zeta)| + |g_m(\zeta) - g_n(\zeta)| + |g_n(\zeta) - g_n(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, da sie im Punkt z_0 konvergiert.

Im dritten und letzten Beweisschritt wird die kompakte Konvergenz der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gezeigt. Sei nun $K \subset G$ kompakt. Angenommen die Folge (g_n) ist nicht gleichmäßig konvergent, also keine Cauchyfolge, dann gilt die oben verwendete Eigenschaft nicht. Das heißt, es gibt ein $\varepsilon > 0$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $z_k \in K$, sowie $m_k, n_k \geq k$ mit:

$$|g_{m_k}(z_k) - g_{n_k}(z_k)| \geq \varepsilon.$$

Laut Voraussetzung ist K kompakt, somit besitzt (z_k) einen Häufungspunkt $z' \in K$ (ohne Beweis, nachzulesen bei [2], S.201f). Somit gilt dann für ein $z \in \{(z_k)\}$ beliebig nahe bei z' :

$$|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

In Schritt zwei haben wir gezeigt, dass die konvergenten Teilfolgen $(g_{m_k}(z))$ und $(g_{n_k}(z))$ für ein $k \rightarrow \infty$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Dies ist ebenfalls für die Folgen $(g_{m_k}(z'))$ und $(g_{n_k}(z'))$ gegeben, somit gilt:

$$|g_{m_k}(z') - g_{n_k}(z')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nach näherer Betrachtung der Bedingungen erhalten wir für ein hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |g_{m_k}(z_k) - g_{n_k}(z_k)| \\ &\leq |g_{m_k}(z_k) - g_{m_k}(z')| + |g_{m_k}(z') - g_{n_k}(z')| + |g_{n_k}(z') - g_{n_k}(z_l)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit haben wir einen Widerspruch erhalten. □

Bemerkung 29.

Dieser Satz, der nach den beiden italienischen Mathematikern Cesare Arzela (1847-1912) und Giulio Ascoli (1843-1896) benannt ist, ermöglicht uns eine hinreichende Bedingung für die Normalität von Funktionenfamilien zu formulieren. Betrachtet man nun nicht Familien im Raum von stetigen Funktion, sondern im Raum der holomorphen Funktionen, so lässt sich die Aussage des Satzes weiter vereinfachen und wir erhalten die folgende Behauptung.

Satz 86.

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ eine Familie. Ist $\mathcal{F}$ beschränkt, so ist sie auch normal.

Bemerkung 30.

Wie bereits in der Bemerkung davor erwähnt, ist dieser Satz eine Vereinfachung der Bedingungen für die Normalität einer Funktionenfamilie $\mathcal{F}$ und geht auf den französischen Mathematiker Paul Antoine Aristide Montel (1876-1975) zurück.

Beweis.

Wir verwenden die Aussagen vom Satz von Arzela-Ascoli und müssen nur mehr die gleichgradige Stetigkeit unserer Funktionenfamilie $\mathcal{F}$ zeigen. Hierfür sei $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $R > 0$ mit $\overline{\mathcal{U}_R(z_0)} \subset G$. Nach Voraussetzung existiert also ein $c > 0$ mit:

$$|f(z)| \leq c \quad \forall f \in \mathcal{F} \text{ und } z \in \overline{\mathcal{U}_R(z_0)}.$$

Wir wählen $\delta := \min \left\{ \frac{R}{2}, \frac{R\varepsilon}{2c} \right\}$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ und $z \in \mathcal{U}_\delta(z_0)$ mit der Cauchyschen Integralformel:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{U}_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \\ &= \frac{|z - z_0|}{2\pi} \left| \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \cdot \frac{2c}{R^2} \cdot 2R\pi \\ &= |z - z_0| \cdot \frac{2c}{R} < \frac{R\varepsilon}{2c} \cdot \frac{2c}{R} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit haben wir die in Definition 83 eingeführte gleichgradige Stetigkeit gezeigt. Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig. $\square$

7.2 Der Riemannsche Abbildungssatz

Bevor wir den Abbildungssatz beweisen, rufen wir uns einige Tatsachen ins Gedächtnis zurück:

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ wird einfach zusammenhängend genannt, falls jede holomorphe Funktion f auf G eine Stammfunktion besitzt. Ebenfalls wissen wir schon, dass

1. jedes sternförmige Gebiet einfach zusammenhängend ist.
2. für ein Gebiet G und einer holomorphen und injektiven Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ auch das Bild $F(G)$ einfach zusammenhängend ist.
3. ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, wenn sein Komplement $\mathbb{C}^\infty \setminus G$ zusammenhängend ist, also keine Löcher vorweist.
4. für ein einfach zusammenhängendes Gebiet und eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) \neq 0$, eine holomorphe Funktion h auf G existiert, sodass $\exp(h(z)) = f(z)$, für alle $z \in G$ gilt.

Satz 87.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann existiert eine holomorphe Funktion g auf G mit $g^2 = f$.

Beweis.

Wir setzen $f := e^h$ und $g := e^{\frac{h}{2}}$. Somit erhalten wir, dass

$$g^2 = e^h = f.$$

□

Satz 88.

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, wobei $G \neq \mathbb{C}$. Dann existiert für jeden Punkt $z_0 \in G$ eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ auf die Einheitskreisscheibe, sodass

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) > 0$$

ist. Dadurch wird die biholomorphe Abbildung f eindeutig bestimmt.

Beweis.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit der biholomorphen Abbildung mit Hilfe von Satz 79:

Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorphe Abbildungen mit $f(z_0) = 0 = g(z_0)$ und $f'(z_0), g'(z_0) > 0$. Wir definieren die Verknüpfung $f \circ g^{-1} =: h$ und wissen, dass h eine biholomorphe Abbildung von der Einheitskreisscheibe auf sich selbst ist, mit $h(0) = 0$. Geometrisch interpretiert ergibt dies eine Drehung, also gilt: $h(z) = e^{i\varphi}z$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Für die Ableitung der Funktion h im Punkt 0 folgt, dass $h'(0) = e^{i\varphi}$ ist, also:

$$\begin{aligned} h'(0) &= (f \circ g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) = \\ &= f'(z_0) \cdot \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{f'(z_0)}{\underbrace{g'(z_0)}_{>0}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, dass $e^{i\varphi} = 1$, das bedeutet, dass $h(z) = z$ und somit ist $f = g$.

Der restliche Beweis wird in folgende drei Schritte unterteilt:

1. Wir konstruieren zunächst eine injektive und holomorphe Abbildung $f_1 : G \rightarrow \mathbb{D}$, mit $f_1(z_0) = 0$, $f_1'(z_0) > 0$ und zeigen, dass $f_1(G) =: G_1$ ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.
2. Im nächsten Schritt betrachten wir die Familie

$$\mathcal{F} := \{f : G_1 \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}$$

und suchen mit Hilfe des Satzes von Montel eine Funktion $f_0 \in \mathcal{F}$, mit maximaler Ableitung im Nullpunkt.

3. Wir zeigen in weiterer Folge, dass die oben bestimmte Funktion f_0 tatsächlich das Gebiet G_1 surjektiv auf $\mathbb{D}$ abbildet. Somit ist $f = f_0 \circ f_1$ die gesuchte biholomorphe Abbildung mit $f : G \rightarrow \mathbb{D}$.

Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$.

Ad 1.:

Sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. Wir wissen, dass $z \rightarrow z$ holomorph ist. Außerdem ist die Funktion nullstellenfrei auf G . Laut der Voraussetzung ist G einfach zusammenhängend, somit existiert nach Satz 88 eine holomorphe Quadratwurzel $q(z) = \sqrt{z}$ auf G . Aus der reellen Analysis wissen wir bereits, dass $q(z)$ eine injektive Abbildung darstellt, somit ist das Gebiet $G^* := q(G) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ biholomorph äquivalent zu G .

Ist ω_0 irgendein Punkt in G^* , so gibt es eine offene Kreisscheibe $D_r(\omega_0)$, so dass $\overline{D_r(\omega_0)}$ ganz in G^* liegt. Aus diesen Überlegungen folgt aber auch, dass $\overline{D_r(\omega_0)} \cap G^* = \{\}$ ist. Denn für $\omega \in G^*$ kann nämlich nicht gleichzeitig, $-\omega \in G^*$ und $\omega \in G^*$ folgen, da sonst die Wurzel auf G^* nicht umkehrbar wäre. Nehmen wir nun $\omega_0 \in G^*$, dann gibt es ein $r > 0$, sodass $\overline{D_r(\omega_0)} \in G^*$ ist. Folglich muss der Kreis mit gleichem Radius um den Punkt $-\omega_0$ ganz im Komplement G^* liegen.

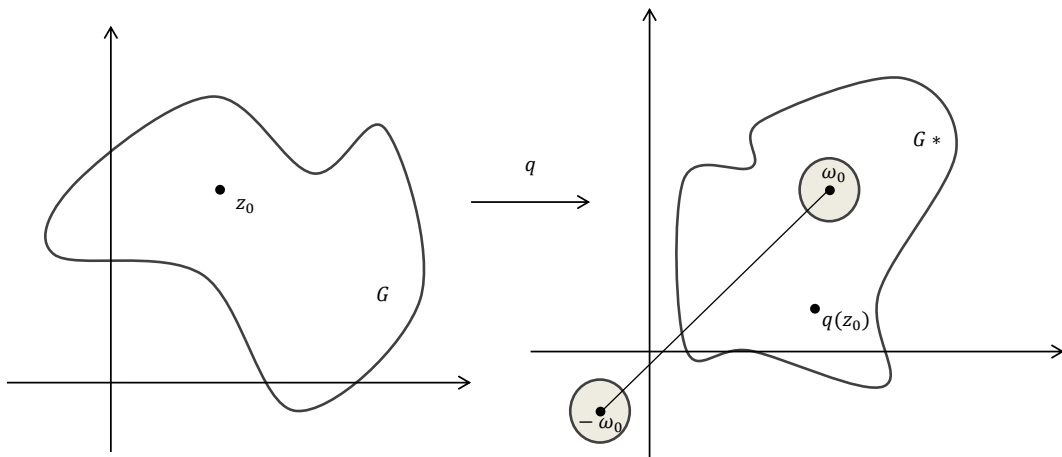


Abbildung 15: Veranschaulichung des Beweisschrittes 1

Wir wählen eine biholomorphe Abbildung $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$g(z) = \frac{r}{z + \omega_0},$$

die die Menge $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_r(-\omega_0)}$ nach $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ abbildet, da $g(\infty) = 0$ und $|g(z)| < 1$ für $|z + \omega_0| > r$. Dies bedeutet wiederum, dass es ein Gebiet G^{**} im Inneren von der Einheitskreisscheibe gibt, sodass $g \circ q$ eine biholomorphe Abbildung vom Gebiet G auf G^{**} ist.

Wir definieren $a := g(q(z_0))$ als Bild unseres ausgewählten Punktes z_0 . Die Transformation

$$\varphi_a(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad z \rightarrow \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

ist eine biholomorphe Abbildung, die die Einheitskreisscheibe auf sich und den Punkt a in 0 abbildet. Ist jetzt $(\varphi_a \circ g \circ q)'(z_0) = r \cdot e^{it}$ mit $r > 0$ und $0 \leq t \leq 2\pi$ und $R_t(z) := e^{-it} \cdot z$ eine Drehung, dann ist $f_1 := R_t \circ \varphi_a \circ g \circ q$ eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe. Zusätzlich gilt, dass $f_1'(z_0) = 0$, sowie $f'(z_0) = f_1'(0) = r > 0$ laut Voraussetzung.

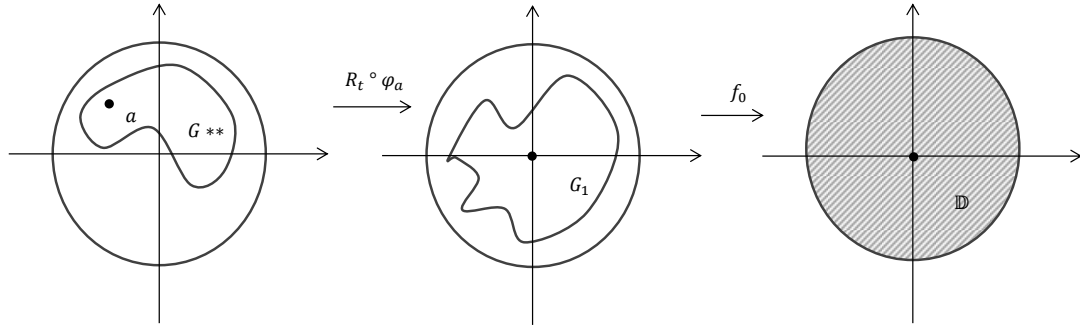


Abbildung 16: Veranschaulichung der Beweisschritte

Ad 2.:

Sei jetzt $G_1 := f_1(G)$, dann ist G_1 auch einfach zusammenhängend. Die Familie

$$\mathcal{F} := \{f : G_1 \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ holomorph und injektiv, } f(0) = 0, f'(0) > 0\}$$

ist nicht leer, da in ihr die identische Abbildung $z \rightarrow z$ enthalten ist, somit gilt für alle $f \in \mathcal{F} : \sup |f(z)| \leq 1$. Aus dem Satz von Montel kann gefolgert werden, dass $\mathcal{F}$ eine normale Familie ist. Sei $\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(0)$, da die Funktion $z \rightarrow z$ in der normalen Familie $\mathcal{F}$ enthalten ist, gilt, dass $\alpha \geq 1$. Wir wollen zeigen, dass $\alpha < \infty$ ist und wählen mit (f_n) eine Folge aus der Familie $\mathcal{F}$, deren Ableitungen im Nullpunkt gegen unser α konvergieren. Wiederum folgt aus dem Satz von Montel, dass die Folge (f_n) eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, die kompakt gegen eine Funktion $f_0 \in \mathcal{O}(G_1)$ konvergiert. o.E.d.A. bezeichnen wir die Teilfolge mit (f_n) . Aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz folgt, dass die Ableitungen (f_n') gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergieren, also ist $(f_0'(0)) = \alpha \neq 0$. Insbesondere ist die Grenzfunktion f_0 nicht konstant. Da all unsere f_n injektiv sind, muss die Grenzfunktion f_0 auch injektiv sein. Da aber $|f_n| < 1$ für alle n ist, folgt, dass $|f_0| \leq 1$. Nach dem Maximumprinzip ist dann sogar $|f_0| < 1$ auf G_1 und $f_0(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$. Damit haben wir die Behauptung gezeigt, dass die Grenzfunktion f_0 ein Element der Familie $\mathcal{F}$ ist.

Ad 3.:

Ist unsere Grenzfunktion f_0 surjektiv, so ist nichts zu zeigen, da die Verkettung $f_0 \circ f_1 := f : G_1 \rightarrow \mathbb{D}$ eine biholomorphe Funktion ist. Angenommen f_0 sei nicht surjektiv auf $\mathbb{D}$, dann sei $G_2 := f_0(G_1)$ das Bild des Gebiets G_1 unter der Abbildung f_0 und $c \in \mathbb{D} \setminus \{G_2\}$. Der Automorphismus

$$\varphi_c(z) := \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

bildet mit $z = 0$ den Nullpunkt nach $-c$ und den Punkt $z = c$ nach Null ab. Wenn wir das Gebiet $G_3 := \varphi_c(G_2)$ betrachten, so können wir feststellen, dass dieses wieder einfach zusammenhängend ist. Der Nullpunkt liegt nicht in G_3 , deshalb existiert eine holomorphe Quadratwurzel auf dem Gebiet G_3 , die wir mit $p(z) = \sqrt{z}$ bezeichnen, die injektiv ist, was eine Folgerung aus Satz 88 ist. Wenn wir uns das Bild der injektiven Quadratwurzel ansehen, so ist $p(G_3)$ vollständig im Einheitskreis enthalten. Wir verknüpfen unsere obige Transformation mit einer Drehung und erhalten:

$$\varphi_{\lambda,d}(z) := e^{i\lambda} \cdot \frac{z-d}{1-\bar{d}z} \text{ mit } d := p(-c).$$

Die Wahl des Parameters λ werden wir später erklären. Wir verketteten nun unsere Funktionen

$$S := \varphi_{\lambda,d} \circ p \circ \varphi_c : G_2 \rightarrow \mathbb{D}$$

und sehen, dass die Funktion S das Gebiet G_2 auf den Einheitskreis abbildet und zumindest injektiv ist. Wir wählen unseren Parameter λ nun so, dass $S'(0) \in \mathbb{R}$ und größer als Null ist. Unser Vorhaben ist möglich, da die Ableitung der Funktion S ungleich Null sein muss, da Injektivität gegeben ist. Wir betrachten

$$p^*(z) := z^2 \text{ und } S^* := \varphi_c^{-1} \circ p^* \circ \varphi_{\lambda,d}^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

und können erkennen, dass $S^* \circ S|_{G_2} = id_{G_2}$ ist. $S^*(0) = 0$, somit kann das Schwarzsche Lemma (Satz 78) auf unsere Funktion S^* angewandt werden und wir erhalten:

$$|(S^*)'(0)| \leq 1.$$

Denn wäre der Betrag der Ableitung in Null gleich Eins, also S^* eine Drehung, so wäre

$$p^*(z) = \varphi_c \circ S^* \circ \varphi_{\lambda,d}$$

eine biholomorphe Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst. Es ist zwar $p^*(0) = 0$, aber p^* ist keine Drehung. Also folgt aus Satz 78, dass

$$|(S^*)'(0)| < 1$$

ist. Dann muss aber $|S'(0)| > 1$ sein, da ja $S'(0)$ reell ist und daraus folgt, dass

$$S'(0) = \frac{1}{(S^*)'(0)} > 1$$

ist. Wir fassen zusammen, dass die Funktion $S \circ f_0 =: h : G_1 \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph und injektiv ist, sowie den Nullpunkt fix lässt und außerdem

$$h'(0) = S'(0) \cdot f_0'(0) > f_0'(0)$$

ist. Diese Überlegungen führen zu einem Widerspruch und somit ist f_0 surjektiv und wir sind fertig. $\square$

Bemerkung 31.

Ich möchte den theoretischen Teil nun mit einigen Überlegungen abschließen und begründen, warum der Riemannsche Abbildungssatz so bedeutend ist.

1. Die biholomorphe Abbildung f lässt sich meist nicht explizit angeben.
2. Der Satz von Riemann hat seine Gültigkeit in jedem Gebiet, welches ungleich $\mathbb{C}$ ist, hierbei spielt der Rand ∂G keine Rolle.
3. Mittels des konstruktiven Beweises des Abbildungssatzes ist es nahezu unmöglich genaue Bijektionen anzugeben. Oftmals muss man sich mit Approximationen begnügen.
4. Durch Näherungsmethoden können biholomorphe Abbildungen einfach zusammenhängender Gebiete auf den Einheitskreis angegeben werden.
5. In höheren Dimensionen wird es komplizierter, denn bereits die Aussage über winkeltreue Abbildungen kann nicht stimmen. Nur wenige Gebiete sind biholomorph äquivalent zueinander.

Nun möchte ich einige Beispiele zu dem Riemannschen Abbildungssatz anführen. Die ersten zwei Beispiele werden sich auf Beweise und Erklärungen beschränken, die restlichen werden Konstruktionen konformer Abbildungen sein.

Beispiel 35.

(vgl. [3], S.30)

1. Was sagt Riemanns Abbildungssatz?
2. Kann die Menge $U := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : |t| > 1\}$ das Bild einer Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sein?

Ad 1.:

Wenn wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ betrachten, so gibt es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$. Wenn nun zusätzlich ein Punkt $z_0 \in G$ vorgegeben ist, so gibt es genau eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$.

Ad 2.:

Wir zeigen den Satz indirekt und behaupten, dass die Menge U nicht das Bild einer Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sein kann.

Denn angenommen es gibt eine solche Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f(\mathbb{C}) = U$, so existiert, weil $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine biholomorphe Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{D}$. Wenn wir nun uns die Verkettung beider Funktionen anschauen, so sehen wir, dass $\varphi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ beschränkt ist und somit konstant sein muss. Wir können nun daraus schließen, dass die Funktion φ injektiv ist und somit f auch konstant sein muss, was ein Widerspruch zu $f(\mathbb{C}) = U$ darstellt.

Beispiel 36.
(vgl. [3], S.31)

1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $H_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > \alpha\}$. Zeige, dass jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow H_\alpha$ konstant ist.

Ad 1.:

H_α ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, wobei $H_\alpha \neq \mathbb{C}$ ist. Somit existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung $\varphi : H_\alpha \rightarrow \mathbb{D}$.

Wiederum ist die Verkettung $\varphi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ eine beschränkte Funktion und genau mit den gleichen Argumenten aus dem Beispiel 35, folgt daraus die Aussage.

Nun wenden wir uns an etwas praktischere Beispiele:

Beispiel 37.

Der Riemannsche Abbildungssatz besagt, dass der Sektor

$$G := \left\{ z = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

konform auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildbar ist. Wir versuchen nun eine Abbildung hierfür anzugeben.

1. Wir quadrieren unsere Funktion und erhalten eine Abbildung, die G auf G_1 konform abbildet.

$$G_1 := \left\{ z = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \pi \right\} = \mathbb{H} \cap \mathbb{E}.$$

Wir können erkennen, dass die Punkte ± 1 den Rand des Gebietes G_1 bilden.

2. Wenn wir nun konform um 1 nach G_2 verschieben, verändern sich die Randpunkte, das heißt, statt ± 1 haben wir als Randpunkte bei G_2 die Punkte 0 und 2. Es ist

$$G_2 := \left\{ z = 1 + r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

3. Wir wenden eine Inversion φ_A auf G_2 an, wobei φ_A die Möbiustransformation ist. Wir wissen bereits, dass ein $\varphi_A \in SL^+(2, \mathbb{R})$ die obere Halbebene $\mathbb{H}$ auf sich selbst abbildet. Insbesondere erhalten wir

$$G_3 := \varphi_A \cdot G_2 \subset \varphi_A \cdot \mathbb{H} = \mathbb{H}.$$

Wir sehen, dass die Kreisteile von G_2 auf die Kreisteile von R_3 abgebildet werden. Die Randstrecke $r_1 := (0, 2)$ wird eben auf die Halbgerade $(\frac{1}{2}, \infty)$ abgebildet. Die Randstrecke r_2 um 1 von 0 nach 2 wird auf einen Kreis von ∞ nach $\frac{1}{2}$ abgebildet, wobei der rechte Winkel erhalten bleibt, da ja die Inversion eine lokal konforme, also winkeltreue Abbildung ist. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Randkreis r_2 auf die Gerade von $\frac{1}{2}$

nach $\frac{1}{2} + i \cdot \infty$ abgebildet wird.

Also wird G_2 auf den um $\frac{1}{2}$ verschobenen ersten Quadranten G_3 abgebildet mit:

$$G_3 = \left\{ \frac{1}{2} + x + iy, x, y > 0 \right\}.$$

4. Die Translation um $-\frac{1}{2}$ bildet G_3 auf den ersten Quadranten G_4 ab, es gilt:

$$G_4 = \{x + iy, x, y > 0\}.$$

5. $z \rightarrow z^2$ bildet G_4 konform auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ ab, das heißt $G_5 := \mathbb{H}$.

6. Wie wir bereits wissen bildet die Cayley-Abbildung $D_5 := \mathbb{H}$ konform auf die Einheitskreisscheibe ab.

Dieses erste Beispiel demonstriert sehr schön, dass der Riemannsche Abbildungssatz praktische Anwendungen besitzt, doch diese explizit anzugeben, meist eine sehr mühsame Angelegenheit darstellt. In dem nächsten Beispiel führe ich nur einige Beispiele biholomorpher Abbildungen an:

Beispiel 38. 1. Die Funktion $z \rightarrow z^3$ bildet

$$G_1 := \{x + iy : x, y > 0\} \text{ auf } \{x + iy : x < 0 \text{ oder } y > 0\} \text{ ab.}$$

2. Die Funktion $z \rightarrow \tan z$ bildet

$$\left\{x + iy : |x| < \frac{\pi}{4}\right\} \text{ auf } G_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ ab.}$$

Zum Abschluss des Kapitels möchte ich noch einige Beispiele, die genauer bei [6] auf Seite 135ff. nachzulesen sind, anführen.

Beispiel 39.

Wir suchen für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \{\}$ und $G \neq \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ auf die Einheitskreisscheibe für die mit $z_0 \in G$ gilt, dass

$$f(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'(z_0) > 0$$

ist. Sei jetzt $G = \mathbb{D}$ und $z_0 \in \mathbb{D}$, dann ist die gesuchte bijektive Abbildung (vgl. Beweis vom Abbildungssatz) gegeben durch:

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Die Bedingung ist ebenfalls erfüllt, denn

$$f'(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2}.$$

Drei weitere Beispiele möchte ich noch anführen, vergleiche hierfür die Beispiele 5.3, 5.4 und 5.5 bei [6] auf der Seite 136.

Beispiel 40. 1. Sei nun $G \subset \mathbb{C}$ die rechte Halbebene und $z_0 = 1$ ein Punkt. Dann ist ein Biholomorphismus durch die Funktion

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

gegeben, wobei hier für die Ableitung

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

gilt.

2. Betrachten wir als Gebiet den ersten Quadranten, also

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z), \Im(z) > 0\}$$

mit dem Punkt $z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ so erhalten wir die gesuchte Abbildung durch Einsetzen:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{z^2 - i}{z^2 + i} \quad \text{wobei} \quad f'(z_0) = 1.$$

Wir wissen bereits, dass die Abbildung $z \rightarrow z^2$ unser Gebiet G biholomorph auf die obere Halbebene und den Punkt $z_0 \in G$ auf i abbildet. Dieses Beispiel wird klarer, wenn wir folgendes betrachten.

3. Sei $G \subset \mathbb{C}$ die obere Halbebene und $z_0 = i$. Wir erhalten die gesuchte Abbildung durch

$$f(z) = \frac{z-i}{z+1} \cdot i \quad \text{wobei} \quad f'(i) = \frac{1}{2}.$$

Wir können erkennen, dass $f(z)$ durch Multiplikation der Abbildung $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ mit dem Faktor $-i$, welcher die obere auf die rechte Halbebene transformiert, und einer weiteren Multiplikation mit i entsteht.

8 Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] Fischer, Wolfgang und Ingo Lieb: Funktionentheorie. Komplexe Analysis in einer Veränderlichen. Vieweg, 2003
- [2] Fritsche, Klaus: Grundkurs Funktionentheorie. Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen. Spektrum, 2009
- [3] Herz Andreas und Schalk Martin: Repetitorium der Funktionentheorie. DUV, 1994
- [4] Needham, Tristan: Visual Complex Analysis. Oxford, 1997
- [5] Remmert, Reinhold: Funktionentheorie I. Springer, 1989
- [6] Salomon, Dietmar A.: Funktionentheorie. Birkhäuser, 2012
- [7] Taschner, Rudolf J.: Funktionentheorie. Manzsche, 1983
- [8] Tutschke, Wolfgang: Grundlagen der Funktionentheorie. VEB, 1967
- [9] Pringsheim, Alfred: Ueber den Goursat'schen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes, in: Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 2, No.4 (S.413-421), 1901
- [10] Haslinger, Friedrich: Vorlesungsscript: Funktionentheorie I und II.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name: Rahmi Özaltın
Adresse: Thürlnhofstraße 14/1/6.2
E-Mail: rahmi.oezaltin@gmail.com
Geboren am: 12. Juli 1989
Geburtsort: Ortaköy / Türkei
Nationalität: Österreich

Schule & Studium

1995 – 1999: Volksschule Märzstraße
1999 – 2000: BG Kandlgasse
2000 – 2007: Matura mit gutem Erfolg an dem BRG Geringergasse 2, 1110 Wien
ab 10/2008: Studium der Unterrichtsfächer Mathematik und Geschichte, Sozialkunde und Politische Bildung

Präsenzdienst

02/2008 – 10/2008: Rettungssanitäter bei der Berufsrettung Wien

Fremdsprachen

Gute Englisch-Kenntnisse in Wort und Schrift.

Gute Türkisch-Kenntnisse in Wort und Schrift.

Wien, 18. März 2013