



universität
wien

Magisterarbeit

Titel der Magisterarbeit

„Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Sitnikov-
Problems mittels Alexeev-Moser-Vrabec Mappings“

Verfasser

Bakk. rer. nat. Rupert Christian Lang

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat.)

Wien, im August 2011

Studienkennzahl lt. Studienblatt:

A 066 861

Studienrichtung lt. Studienblatt:

Astronomie

Betreuer:

Ao. Univ.-Prof. tit. Univ.-Prof. Dr. Rudolf Dvorak

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen und Methoden	1
1.1. Einleitung	1
1.2. Die Keplerschen Gesetze	3
1.2.1. Erstes Keplersches Gesetz	4
1.2.2. Zweites Keplersches Gesetz	6
1.2.3. Keplergleichung	10
1.2.4. Drittes Keplersches Gesetz	12
1.3. Das Sitnikov Problem	13
1.3.1. Definition	13
1.3.2. Bewegungsgleichung	14
1.3.3. Die Sitnikov-Sequenz	18
1.3.4. Die Vrabec-Sequenz als Mapping	20
1.3.5. Eigenschaften des Sitnikov-Problems	21
1.4. Verwendete Lösungsmethoden	23
1.4.1. Lösen der Keplergleichung	23
1.4.2. Runge-Kutta-Verfahren	24
2. Katalog	27
2.1. Überblicks-Mapping	27
2.1.1. Mapping für die Exzentrizität $e=0.1$	28
2.1.2. Mapping für die Exzentrizität $e=0.6$	33
2.1.3. Mapping für die Exzentrizität $e=0.99$	37
2.2. Ausgewählte Mappings	42
2.2.1. Vergrößerungs-Mappings	42
2.2.2. Ausgewählte Mappings	47
2.2.3. Escape-Mappings	59
2.3. Conclusio	63
A. Vollständiger Mapping Katalog	65
A.1. $e=0.1$	66

A.2. $e=0.2$	67
A.3. $e=0.3$	68
A.4. $e=0.4$	69
A.5. $e=0.5$	70
A.6. $e=0.6$	71
A.7. $e=0.7$	72
A.8. $e=0.8$	73
A.9. $e=0.9$	74
A.10. $e=0.99$	75
B. Programmcode	77
B.1. Das verwendete Programm	77
C. Danksagung	87
D. Lebenslauf	89
Abbildungsverzeichnis	91
Literaturverzeichnis	93

Die moderne Physik verwandelte das Bild vom Universum als einer Maschine in die Vision eines unteilbaren dynamischen Ganzen, dessen Teile grundsätzlich in Wechselbeziehungen zueinander stehen und nur als Muster eines kosmischen Prozesses verstanden werden können [...]. Es herrscht Bewegung, doch gibt es letztlich keine sich bewegenden Objekte; es gibt Aktivität, jedoch keine Handelnden; es gibt keine Tänzer, sondern nur den Tanz.

Fritjof Capra, *Wendezeit*

Kapitel 1.

Grundlagen und Methoden

1.1. Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist eine numerische Untersuchung des Sitnikov-Problems. Das Sitnikov-System ist ein einfaches dynamisches System, das einen Spezialfall des Dreikörperproblems darstellt: Zwei gleichgroße Massen, sogenannte Primärkörper, bewegen sich in einer gemeinsamen Bahnebene auf Keplerbahnen um ein gemeinsames Schwerezentrum. Normal zur Bahnebene, entlang der z-Achse der Primärkörper oszilliert ein masseloser Testkörper (Planet) durch das Schwerezentrum. Das Problem ist nun die Bewegung (Bahn) des Testkörpers bei gegebener Exzentrizität e in Abhängigkeit der Bewegung der Primärkörper im Gravitationsfeld zu ermitteln. Hierbei treten, abhängig von e , eine Vielzahl periodischer und chaotischer Bahnen des Testkörpers auf; aus diesem Grund wurde und wird das Sitnikov-Problem oft als Modell für ein dynamisches System verwendet.

Besonderes Augenmerk wird in dieser Arbeit auf ein von F. Vrabec [Dvorak, 1998b] entwickeltes Mapping gelegt. In diesem Mapping wird jedem Orbit eine Folge von ganzen Zahlen zugeordnet, die sogenannte Vrabec-Sequenz. Die Vrabec-Sequenz wurde aus der Idee der Sitnikov-Sequenz entwickelt. Diese Zuordnung von ganzen Zahlen wurde von Alexeev [Alexeev, 1968] und Moser [Moser, 1971] vorgeschlagen, um das Sitnikov-Problem mit Methoden der symbolischen Dynamik zu beschreiben. Mittels symbolischer Dynamik kann das Verhalten eines dynamischen Systems beschrieben werden, ohne den genauen Verlauf der Trajektorien zu kennen. Die Analyse des Systemverhaltens erfolgt mittels abstrakter Symbole; anstelle einer kontinuierlichen Verfolgung der Trajektorien wird das System mit Hilfe diskreter, ausgezeichneter Punkte entlang der Bahn dargestellt. Jeder dieser ausgezeichneten Positionen entlang der Teilchenbahn wird nun ein Symbol zugeordnet. Diese Symbole sind von den jeweils gewählten Anfangsbedingungen des Systems abhängig.

Bei der Analyse des Sitnikov-Problems als dynamisches System wird das Testteilchen

von einem Schnittpunkt zum darauf folgenden Schnittpunkt (Durchgänge bei $z = 0$) mit der Bahnebene der Primärkörper verfolgt. Diese Nulldurchgänge sind somit die ausgezeichneten Punkte, denen nun jeweils ein Symbol zugeordnet werden kann. Als Symbol wird die Periodenzahl der Primärkörper nach dem Start des Systems gewählt. Diese ganzen Zahlen ermöglichen nun eine Untersuchung des Verhaltens von Trajektorien, hier den jeweiligen Sitnikov-Orbits, bei einer Vielzahl von möglichen Anfangsbedingungen. Diese Untersuchung der Anfangsbedingungen bildet den Kern dieser Arbeit.

Im folgenden Abschnitt wird ein Überblick der Grundlagen der vorliegenden Arbeit gegeben, um ein besseres Verständnis für die Problemstellung zu vermitteln. Die den Berechnungen zugrunde liegenden Methoden werden zu Beginn der Arbeit im Kapitel 1 'Grundlagen und Methoden' erläutert. Im ersten Kapitel erfolgt zuerst eine Zusammenfassung der grundlegenden Gesetze zur Planetenbewegung (Abschnitt 1.2 'Keplersche Gesetze'), außerdem wird auch die Herleitung einer für das Sitnikov-Problem wichtigen Gleichung gegeben, der Keplergleichung (Unterabschnitt 1.2.3 'Keplergleichung'). In Abschnitt 1.3 wird das Sitnikov-Problem ausführlich beschrieben und in Abschnitt 1.4 erfolgt eine Beschreibung der zwei, für diese Arbeit wichtigsten numerischen Lösungsverfahren: ein Verfahren zur Nullstellensuche sowie einer Integrationsroutine. Um die Sitnikov-Sequenz (Abschnitt 1.3.3) für gegebene Anfangsbedingungen zu ermitteln, muss das Sitnikov-Problem mit eben diesen numerischen Methoden gelöst werden. Hierbei wird zuerst die Keplergleichung gelöst, um dann die Bewegungsgleichung des Sitnikov-Problems mit Hilfe eines Algorithmus integrieren zu können. Die Keplergleichung wird hierbei mit dem Halley-Verfahren gelöst, die Integration wird mit einem Runge-Kutta-Integrator aus den Numerical Recipes [Press, 1992] durchgeführt. Die Effizienz, d.h. die Geschwindigkeit der verwendeten Methoden war ein primäres Kriterium für die Berechnungen, ebenso eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse und vor allem die flexible Einstellbarkeit der Anfangsbedingungen. Resultierend aus den Betrachtungen von Alexeev und Moser ([Alexeev, 1968] & [Moser, 1971]) wird gezeigt, wie der Sitnikov-Algorithmus auf eine Schar von Anfangsbedingungen wirkt.

In Kapitel 2 ist ein Katalog von Mappings zusammengestellt, der den Kern dieser Arbeit bildet und das Verhalten des Sitnikov-Algorithmus bei einer großen Menge von möglichen Anfangsbedingungen (Exzentrizität, Wahre Anomalie und anfängliche Geschwindigkeit) graphisch darstellt. In Abschnitt 2.1 sind drei Mappings bei unterschiedlichen Exzentrizitäten dargestellt, gefolgt von Abschnitt 2.2, in dem ausgewählte Mappings vergrößert wurden, um besondere Merkmale zu untersuchen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse findet in Abschnitt 2.3 statt. In Anhang A ist ein vollständiger Katalog von Mappings der ersten sechs Nullstellen bei den Exzentrizitäten

$e = 0.1$ bis $e = 0.99$ mit $\Delta e = 0.1$ gegeben, in Anhang B der Programmcode des eigens erstellten Computerprogramms.

1.2. Die Keplerschen Gesetze

Für die Beschreibung der nicht relativistischen Bewegung eines Planeten um die Sonne oder um einen beliebigen anderen Himmelskörper werden die Keplerschen Gesetze verwendet. In Worten lauten die Gesetze folgendermaßen:

1. “Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne. Die Sonne befindet sich in einem gemeinsamen Brennpunkt dieser Ellipsen.”
2. “Der von der Sonne zum Planeten führende Leitstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fläche”
3. “Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnhalbachsen”

Die ersten beiden Gesetze erschienen im Jahr 1609 in Prag in der Schrift “*Astronomia nova seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G.V. Tychonis Brahe*” [Stumpff, 1959] und wurden von Johannes Kepler aus, wie der Titel schon sagt, Beobachtungen von Tycho Brahe -dem Vorgänger Keplers an der Sternwarte in Prag- abgeleitet. Das dritte Gesetz erschien 1619 in der Schrift “*Harmonices mundi libri V*” [Stumpff, 1959]. Mit den beiden ersten Gesetzen können die Bewegungen und Positionen von Körpern im eingeschränkten Zweikörperproblem (auch Keplerproblem genannt) berechnet werden. Die Einschränkung hierbei ist, dass die Masse des Planeten sehr klein sein muss, gegenüber der Masse des Zentralkörpers wie z.B. der Sonne. Diese Einschränkung stellt eine gute Näherung für die Verhältnisse in unserem Sonnensystem dar, da die Sonne mehr als 99% der Gesamtmasse des System ausmacht und die Planeten im Vergleich zur Sonne als punktförmig angesehen werden können. Die Keplerschen Gesetze berücksichtigen keine relativistischen Effekte und sind somit Teil der klassischen Newtonschen Mechanik.

1.2.1. Erstes Keplersches Gesetz

Das erste Keplersche Gesetz verwirft die bis zu seiner Entdeckung verbreitete Annahme, Planeten würden sich auf Kreisbahnen bewegen, und setzt an die Stelle von Kreisen die Ellipsen als Bahnkurven. Diese elliptische Bahnkurve kann in Polarkoordinaten durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\varphi)} \quad (1.1)$$

wobei r der Radiusvektor und φ die zeitabhängige Wahre Anomalie (vgl. Abb. 1.1) zum Zeitpunkt t ist. Hierbei ist e die Exzentrizität der Ellipse und p der Parameter. Die Größen e und p sind mit der großen und der kleinen Halbachse der Ellipse über folgende geometrische Beziehungen gegeben:

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad (1.2)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.3)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (1.4)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (1.5)$$

Für die große Halbachse a , die kleine Halbachse b und den Parameter p gilt $a, b, p > 0$, für die Exzentrizität e gilt $0 \leq e < 1$. Die beiden Grenzfälle bilden hierbei mit $e = 0$ der Kreis und mit $e = 1$ die Parabel. Das erste Keplersche Gesetz macht nur eine Aussage über die Form der Bahn, auf der sich ein Körper im Schwerfeld eines zweiten, massereicheren Körpers bewegt. Den zeitlichen Verlauf der Bewegung beschreibt das zweite Keplersche Gesetz im folgenden Abschnitt.

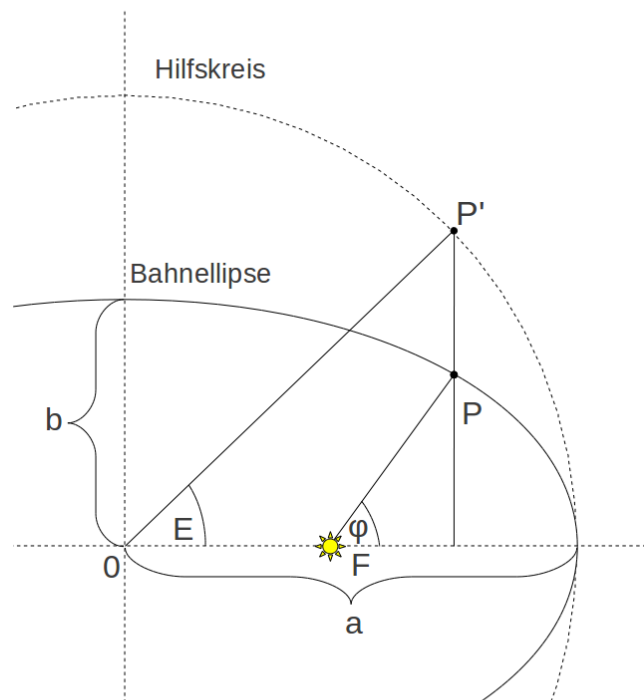


Abbildung 1.1.: Skizze der Bahnellipse eines Planeten P im Keplerproblem: Der Zentralkörper (Stern) befindet sich im Brennpunkt F der Ellipse. Der Winkel zwischen der Verbindungslinie FP , die der variable Radiusvektor ist, und der x-Achse wird als “Wahre Anomalie” φ bezeichnet. Zusätzlich zur Bahnellipse ist ein Hilfskreis gezeichnet, der die Ellipse in den Hauptscheiteln von außen berührt und den selben Mittelpunkt O wie die Ellipse hat. Verlängert man die Normale auf die x-Achse durch P zum Hilfskreis erhält man den Punkt P' . Der Winkel zwischen der Verbindungslinie OP' und der x-Achse wird als “Exzentrische Anomalie” E bezeichnet. Die Mittlere Anomalie kann graphisch nicht allgemein dargestellt werden.

1.2.2. Zweites Keplersches Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz beschreibt die Geschwindigkeit, mit der ein Planet einen Stern umkreist, während er sich auf unterschiedlichen Punkten seiner Bahn befindet. Das Gesetz ist auch als “Flächensatz” bekannt, da es besagt, dass der Radiusvektor vom Stern im Brennpunkt zum Planeten auf der Ellipse (Abb. 1.1) in gleicher Zeit, die gleiche Fläche überstreicht. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass sich ein Planet in der Nähe des Perihels, also näher am Kräftezentrum, schneller bewegt als in der Nähe des Aphels. Das zweite Keplersche Gesetz folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses, und kann als eine frühe Formulierung der Drehimpulserhaltung angesehen werden. Der Drehimpuls $\vec{L}$ eines Massenpunktes ist definiert als

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1.6)$$

wobei m die Masse, $\vec{r}$ der Ortsvektor und $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor des Massenpunktes relativ zum Kraftzentrum ist. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist mit

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = m \cdot (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) \quad (1.7)$$

gegeben, wobei $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, also die Zeitableitung des Ortsvektors, und $\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ die Beschleunigung ist. Die beiden Kreuzprodukte sind im Falle einer konservativen Kraft gleich Null, da die Vektoren parallel sind. Für den Fall $\vec{v} \times \vec{v}$ ist diese Feststellung trivial, für den Fall $\vec{r} \times \vec{a}$ ist zu beachten, dass die Kraftwirkung in Richtung des Kraftzentrums zeigt und somit antiparallel zum Ortsvektor des Teilchens orientiert und damit ebenfalls wieder Null ist. Deshalb gilt im konservativen Kraftfeld

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const.} \quad (1.8)$$

Dies zeigt auch, dass die Bewegung in einem Zentralkraftfeld als eine Bewegung in einer Ebene aufgefasst werden kann, welche von $\vec{r}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird. Der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf diese Ebene. Unter Verwendung von ebenen Polarkoordinaten kann man den Ortsvektor folgendermaßen darstellen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

woraus sich der Geschwindigkeitsvektor nach der Zeitableitung des Ortsvektors zu

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ r \cdot \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

ergibt. Der Drehimpuls mit $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$ folgt nach ausführen des Kreuzproduktes zu

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix} \rightarrow |L| = r^2 \dot{\varphi} \quad (1.11)$$

Da nun der Drehimpuls im Zentralkraftfeld konstant ist, folgt aus den Gleichungen (1.8 & 1.11)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c = \text{const.} \quad (1.12)$$

Dieser Ausdruck stellt die moderne mathematische Formulierung des zweiten Keplerschen Gesetzen oder “Flächensatzes”, mit der Flächenkonstanten c , dar. Die Integration des Flächensatzes liefert nun die Möglichkeit anzugeben, an welchem Ort sich der Planet zum Zeitpunkt t befindet. Das Integral lautet

$$c(t - t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi \quad (1.13)$$

wobei t_0 die sogenannte Perihelzeit angibt, d.h. jenen Zeitpunkt bei dem der Planet das Perihel ($\varphi = \varphi_0 = 0$) passiert. Nun ist es erforderlich, die Flächenkonstante c genauer zu bestimmen. Dies wird erreicht, indem man die Ellipse in N Teilflächen zerlegt (Abb. 1.2). Die so gewonnen kleinen Teilflächen der Ellipse haben, für genügend große N , die Fläche:

$$\Delta F = \frac{ab\pi}{N} \quad (1.14)$$

wobei $ab\pi$ die Fläche der Ellipse ist. Für einen Umlauf der gesamten Ellipse, also um den Winkel von 2π zu überstreichen, benötigt der Planet die Umlaufzeit t_U . Die Zeit, die ein Planet benötigt, um eines der infinitesimal kleinen Flächenstückchen ΔF der Ellipse zu durchwandern, ist die gesamte Umlaufszeit geteilt durch die Anzahl der

Stückchen ΔF :

$$\Delta t = \frac{t_U}{N} \quad (1.15)$$

Betrachtet man nun Abb. 1.2, so sieht man, dass die Fläche in dem Teilbereich gegeben ist durch

$$\Delta F = \frac{1}{2} r \cdot (r + \Delta r) \cdot \sin(\Delta \varphi) \quad (1.16)$$

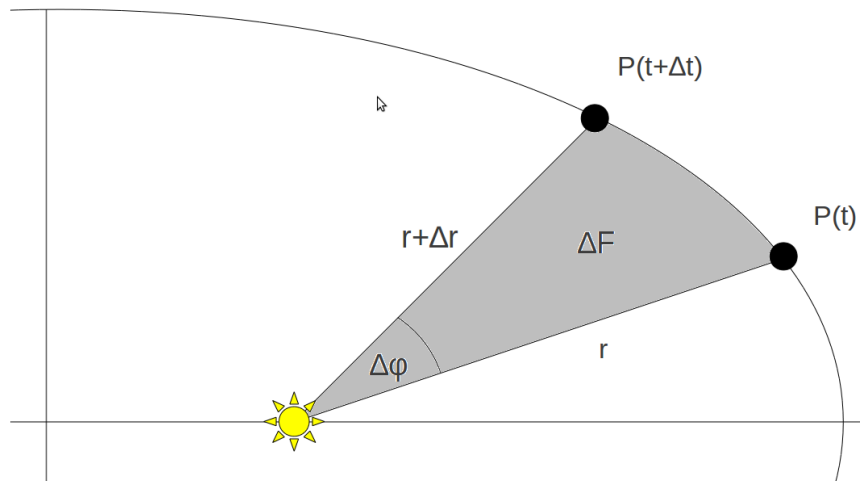


Abbildung 1.2.: Darstellung des infinitesimal kleinen Flächenstückchens der Ellipse. Der Planet bewegt sich in der Zeit Δt entlang des Kreisbogens weiter, der Radius ändert hierbei seine Länge um Δr . Der Fahrstrahl vom Brennpunkt zum Planeten überstreicht in der Zeit Δt den Winkel $\Delta \varphi$. Aufgrund dieser geometrischen Überlegungen fand Kepler sein zweites Gesetz, den Flächensatz.

Werden nun Δr und $\Delta \varphi$ genügend klein gewählt ($\Delta r, \Delta \varphi \ll 1$), kann man obigen Term umformulieren:

$$\Delta F = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi \quad (1.17)$$

Über diesen Weg fand Kepler, dass die Teilstückchen $r^2 \Delta \varphi$ für jedes gleich große Zeitintervall konstant bleiben, also

$$r^2 \Delta \varphi \sim c \Delta t \quad (1.18)$$

Nach dem Grenzübergang ergibt dies in differentieller Schreibweise wieder Gl.(1.12). Somit kann für die N Flächenstücke der Ellipse unter Verwendung der Gl. (1.15 & 1.18) auch

$$\frac{ab\pi}{N} = \frac{1}{2}c\Delta t = \frac{1}{2}c \cdot \frac{t_U}{N} \quad (1.19)$$

geschrieben werden. Für die weitere Betrachtung müssen zwei Hilfsgrößen eingeführt werden. Die Mittlere Anomalie M (vgl. Abb 1.1) und die mittlere Geschwindigkeit n . Die Mittlere Anomalie ist ein Winkel, der beim Umlauf des Planeten um den Stern gleichförmig zunimmt mit $0 \leq M \leq 2\pi$. Die Mittlere Geschwindigkeit n ist gegeben durch

$$n = \frac{2\pi}{t_U} \quad (1.20)$$

also die Geschwindigkeit mit der ein Objekt gleichförmig in der Zeit t_U einen Kreis umläuft. Diese beiden Größen sind über

$$M = nt \quad (1.21)$$

verknüpft. Setzt man nun Gl. (1.20) in Gl. (1.19) ein, so erhält man nach einfacher Umformung

$$c = \frac{2\pi ab}{t_U} = nab = \frac{nab}{\sqrt{1-e^2}} \quad (1.22)$$

Nach Einsetzen der gewonnen Flächenkonstante in Gl. (1.12) resultiert daraus

$$r^2 d\varphi = c dt = \frac{nab}{\sqrt{1-e^2}} dt \quad (1.23)$$

Für die Lösung des Keplerproblems, d.h. zu Bestimmung des Ortes r , in dem sich ein Planet zum Zeitpunkt t befindet, muss die Integration von Gl. (1.23) durchgeführt werden.

1.2.3. Keplergleichung

Eine andere Möglichkeit den Ort eines Körpers auf einer Keplerbahn zu berechnen stellt die Keplergleichung dar, welche von Kepler aus geometrischen Überlegungen gewonnen wurde, und im folgenden hergeleitet wird. Um diese Herleitung durchzuführen lohnt es ein Hilfsgröße E , die Exzentrische Anomalie, einzuführen (vgl. Abb. 1.1). Der Betrag des Radiusvektors vom Stern zum Planeten kann somit mittels

$$r = a(1 - e \cdot \cos(E)), \quad 0 \leq E \leq 2\pi, \quad 0 \leq e < 1 \quad (1.24)$$

dargestellt werden. Durch Umformungen mit Gl. (1.1) und unter Verwendung der Gl. (1.2) erhält man als Ausdruck für die Wahre Anomalie

$$\cos(\varphi) = \frac{\cos(E) - e}{1 - e \cdot \cos(E)} \quad (1.25)$$

bzw. unter Verwendung der trigonometrischen Gleichung $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$$\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin(E)}{1 - e \cdot \cos(E)} \quad (1.26)$$

Nun kann man mit Hilfe der Formel

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \quad (1.27)$$

und durch die -mittels Faktorisierung- gefundenen Darstellungen von

$$1 - \cos(\varphi) = \frac{(1 + e)(1 - \cos(E))}{1 - e \cdot \cos(E)} \quad (1.28)$$

$$1 + \cos(\varphi) = \frac{(1 - e)(1 + \cos(E))}{1 - e \cdot \cos(E)} \quad (1.29)$$

einen Zusammenhang zwischen φ und E finden

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (1.30)$$

Um nun eine Verbindung zwischen der Exzentrischen Anomalie E und der Mittleren Anomalie M zu schaffen muss die Änderung des Radius näher betrachtet werden. Aus Gl. (1.1) wird die Ableitung nach der Wahren Anomalie gebildet:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p e \sin(\varphi)}{(1 + e \cos(\varphi))^2} = \frac{r^2 e}{p} \sin(\varphi) \quad (1.31)$$

Der rechte Ausdruck wird durch quadrieren und einsetzen von Gl. (1.1) gewonnen. Die Änderung des Radius ist nun

$$dr = \frac{e}{p} \sin(\varphi) r^2 d\varphi \quad (1.32)$$

wobei nun $r^2 d\varphi$ mit der rechten Seite von Gl. (1.23) ersetzt werden kann was auf den Ausdruck

$$dr = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin(\varphi) dt \quad (1.33)$$

führt, also einem Ausdruck der die Radiusänderung mit der Zeit beschreibt. Mit Hilfe von Gl. (1.24) kann nun die Radiusänderung als eine Änderung der Exzentrischen Anomalie dargestellt werden als

$$dr = a \cdot e \sin(E) dE \quad (1.34)$$

Werden nun die Gl. (1.26), (1.33) & (1.34) vereint, erhält man

$$(1 - e \cos(E)) dE = n dt \quad (1.35)$$

was nun integriert werden kann zu

$$E - e \sin(E) = n(t - t_0) \quad (1.36)$$

Setzt man nun $t_0 = 0$ und verwendet die Gleichung $M = nt$ für die mittlere Anomalie erhält man die Keplergleichung

$$E - e \sin(E) = M \quad (1.37)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich das Keplerproblem lösen, d.h. man kann aus der Keplergleichung und der Gl. (1.30) die Wahre Anomalie in Abhängigkeit der Zeit berechnen und mittels Gl. (1.24) den Radius zu dem gegebenen Zeitpunkt bestimmen. Bei der Keplergleichung handelt es sich um eine transzendente Gleichung, deren Lösung nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden kann. Die Exzentrische Anomalie kann als Nullstelle der Keplergleichung bei gegebener Mittlerer Anomalie jedoch numerisch berechnet werden. Die in dieser Arbeit verwendete numerische Lösungsmethode der Keplergleichung wird in Abschnitt 1.4.1 näher vorgestellt.

1.2.4. Drittes Keplersches Gesetz

Das dritte Gesetz von Kepler besagt, dass es zwischen den Umlaufzeiten T zweier Körper um ein gemeinsames Kraftzentrum und der Länge der großen Halbachsen a eine Verbindung gibt. Es ist für die Lösung des Sitnikov-Problems nicht erforderlich, wird aber der Vollständigkeit halber angegeben. Das von Kepler gefundene und 1619 veröffentlichte Gesetz lautet

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (1.38)$$

oder in Worten: “Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnhalbachsen” [Stumpff, 1959]. Dieses Gesetz hat bei der Betrachtung der Bewegung eines Planeten um einen Stern keine große Bedeutung, findet diese allerdings bei der Berechnung der Massen in Doppelsternsystemen. Newton konnte zeigen, dass das dritte Gesetz von Kepler einen Spezialfall des Zweikörperproblems darstellte. Eine allgemeinere Darstellung des Gesetzes lautet

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \quad (1.39)$$

wobei T die Umlaufzeit in Sekunden ist, a die mittlere Entfernung des Planeten in Metern, m_1 und m_2 die Massen des Sternes bzw. des Planeten sind und G die Gravitationskonstante. Hierbei wird auch ersichtlich wieso das Keplersche Gesetz nur ein Spezialfall ist, denn die Masse des Planeten m_2 muss vernachlässigbar klein im Vergleich zur Masse m_1 sein, damit das dritte Keplersche Gesetz gilt.

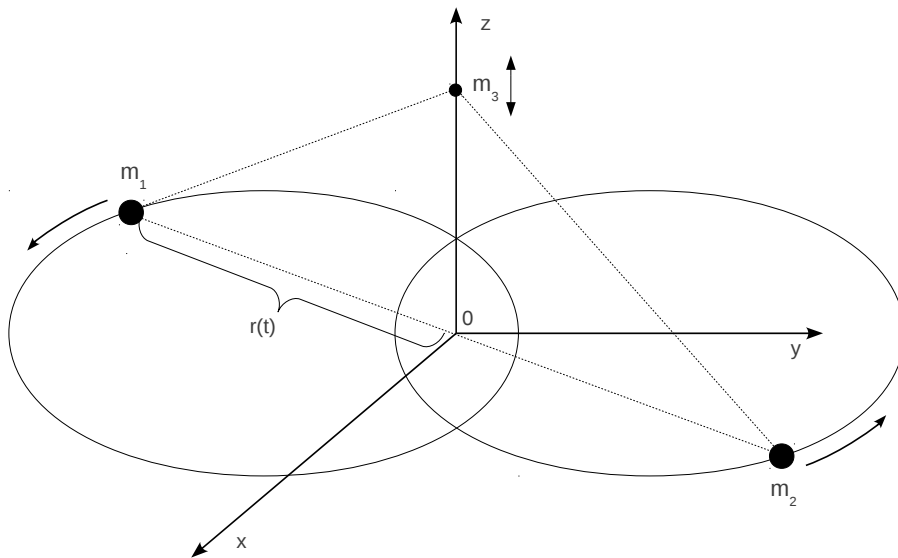


Abbildung 1.3.: Konfiguration des Sitnikov-Problems. Die beiden Primärkörper m_1 und m_2 mit $m_1 = m_2 = m$ umkreisen einander auf Keplerbahnen in der x - y -Ebene. Entlang der z -Achse oszilliert ein Körper m_3 durch das Baryzentrum des Primärkörpersystems.

1.3. Das Sitnikov Problem

1.3.1. Definition

Das Sitnikov-Problem ist nach dem russischen Mathematiker Kirill Aleksandrovich Sitnikov (*1926) benannt und stellt einen Spezialfall des Dreikörperproblems dar. Im Sitnikov-Problem bewegen sich zwei Primärkörper (z.B. Sterne) mit gleicher Masse $m_1 = m_2 = m$ auf Keplerbahnen mit gegebener Exzentrizität $0 \leq e < 1$ um ihr gemeinsames Schwerezentrum in der x - y -Ebene (vgl. Abb. 1.3). Ein dritter Körper, z.B. ein Planet, mit der Masse m_3 bewegt sich entlang der z -Achse des Systems durch das Schwerezentrum und wird von den Primärkörpern periodisch beschleunigt. Im Sitnikov-Problem ist die Bewegung der Masse m_3 allein auf die z -Achse beschränkt. Bereits Leonard Euler war diese spezielle Art des Dreikörperproblems bekannt [Dvorak, 2005] für den Fall von kreisförmigen Bahnen der Primärkörper ($e = 0$) und für einen masselosen dritten Körper ($m_3 = 0$). Heutzutage ist dieser Fall der kreisförmigen Bahn als MacMillan Problem [MacMillan, 1911] bekannt und stellt wiederum einen Spezialfall des Sitnikov-Problems dar. Abhängig von der Energie des Systems ist der Testkörper im MacMillan Problem entweder gebunden (periodische Lösung) oder ungebunden (davonlaufende Lösung). Im Fall des MacMillan Problems bleibt die Bewegung

des Testkörpers integrabel, trotz der Nichtlinearität des Problems. Anders sieht es im Fall einer nicht verschwindenden Exzentrizität aus ($e \neq 0$). In diesem Fall variiert der Abstand der Primärkörper periodisch mit der Zeit. Hierbei wird dem Testkörper Energie zu- bzw. abgeführt und das Problem ist nicht mehr analytisch lösbar. Das Sitnikov-Problem wird mit Hilfe der Newtonschen Mechanik beschrieben, d.h. die auftretenden Geschwindigkeiten sind nicht relativistisch ($v \ll c$) und alle Massen werden als Massenpunkte ohne Ausdehnung angesehen. In dem hier beschriebenen Fall des Sitnikov-Problems wird der dritte Körper immer als masseloser Testkörper angesehen ($m_3 = 0$), es handelt sich damit also um ein eingeschränktes Dreikörperproblem, aus diesem Grund lassen sich die Bewegungsgleichungen wesentlich vereinfachen. Der Fall $m_3 \neq 0$ wurde ausführlich von [Vökl, 2007] behandelt. Der Testkörper führt eine durch das Baryzentrum oszillierende Bewegung durch und ist ausschließlich auf die z-Achse beschränkt. Der Name "Sitnikov-Problem" rührt daher, dass Sitnikov als erster die Existenz solcher oszillierender Bewegungen für $e > 0$ bewiesen hat [Sitnikov, 1960].

1.3.2. Bewegungsgleichung

Eine mathematische Formulierung des Sitnikov-Problems, welches einen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems darstellt, kann man einfach aus Betrachtung des Newtonschen Gravitationsgesetzes für die in Abb. 1.3 dargestellte Konfiguration der Massen ableiten. Die folgenden Gleichungen geben die Herleitung der Bewegungsgleichung nach [Lothka, 2004] wieder. Das Newtonsche Gravitationsgesetz lautet für ein Ensemble von n Massenpunkten für das i -te Teilchen

$$\vec{F}_i = m_i \vec{\ddot{r}}_i = -G \sum_{k \neq i, k=1}^n m_i m_k \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_k)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.40)$$

wobei G die Gravitationskonstante, m_i und m_k die Massen des i -ten und k -ten Teilchens und $\vec{r}_i$ bzw. $\vec{r}_k$ mit $r = r(x, y, z)$ der Abstand des i -ten bzw. k -ten Teilchens vom Ursprung darstellt. Aus Gl. 1.40 erhält man nun für ein System von drei Massenpunkten die Gleichungen:

$$\vec{\ddot{r}}_1 = -G \left(\frac{m_2 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + \frac{m_3 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \right) \quad (1.41)$$

$$\vec{\ddot{r}}_2 = -G \left(\frac{m_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} + \frac{m_3 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right) \quad (1.42)$$

$$\vec{\ddot{r}}_3 = -G \left(\frac{m_1 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} + \frac{m_2 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (1.43)$$

Die Gleichungen 1.41 bis 1.43 stellen insgesamt ein System von 9 Gleichungen dar. Es ist jedoch im eingeschränkten Dreikörperproblem nicht notwendig, alle 9 Gleichungen zu lösen. Der Ursprung des Systems liegt im Baryzentrum der beiden Primärkörper, woraus sich aufgrund der Symmetrie des Sitnikov-Problems (vgl. Abb. 1.3) ergibt, dass die Ortsvektoren der Primärkörper antiparallel sind, also $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ gilt. Aufgrund dieser Symmetriebetrachtung ist es ausreichend, nur eine der beiden Gleichungen für die Primärkörper zu lösen, also entweder Gl. 1.41 oder Gl. 1.42. Es verbleiben somit noch 6 Gleichungen, wobei sich aufgrund der Einschränkung der Bewegung des dritten Teilchens auf die z-Achse wiederum zwei Gleichungen eliminieren lassen, nämlich der x- bzw. y- Anteil in Gl. 1.43. Aufgrund der gleichen Überlegung und geeigneter Wahl des Koordinatensystems bewegen sich die Primärkörper nur in der x-y-Ebene, sie haben somit keine z-Komponente. Dies reduziert die Anzahl der zu lösenden Gleichungen auf drei. Nun kann noch aufgrund der Einschränkung $m_3 = 0$ der rechte Term in den Gleichungen 1.41 und 1.42 gestrichen werden. Aus praktischen Gründen wird die Gravitationskonstante nun $G = 1$ gesetzt. Die verbleibenden Gleichungen lauten nun

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2mx_1}{(4x_1^2 + 4y_1^2)^{3/2}} \quad (1.44)$$

$$\ddot{y}_1 = -\frac{2my_1}{(4x_1^2 + 4y_1^2)^{3/2}} \quad (1.45)$$

$$\ddot{z}_3 = -\frac{mz_3}{(x_1^2 + y_1^2 + z_3^2)^{3/2}} - \frac{mz_3}{(x_1^2 + y_1^2 + z_3^2)^{3/2}} \quad (1.46)$$

und bilden zusammen mit den Bedingungen für die restlichen Koordinaten ein System von Gleichungen, mit dem das Sitnikov-Problem gelöst werden kann. Für die übrigen Koordinaten gilt: $z_1 = z_2 = x_3 = y_3 = 0$, und der antiparallele Anteil der Primärkörper $x_1 = -x_2$ sowie $y_1 = -y_2$. Nun werden für das klassische Sitnikov-Problem einige Vereinfachungen vorgenommen, um eine sinnvolle numerische Betrachtung zu erhalten. Es wird, wie zuvor schon die Gravitationskonstante, nun auch die Masse normiert mit $m_1 = m_2 = m = 1/2$. Die Zeit wird ebenfalls normiert, und zwar so, dass eine Periode der Primärkörper 2π entspricht. Eine weitere Vereinfachung des Sitnikov-Problems ergibt sich aus der bereits eingeführten Einschränkung der dritten Masse $m_3 = 0$. Somit beschreibt die Bewegung der beiden Primärkörper das Keplerproblem und kann somit einfach mit Hilfe der bereits erwähnten Keplergleichung (Gl. 1.37) gelöst werden. Diese Vereinfachungen sind nur für das Sitnikov-Problem im vorliegenden eingeschränkten Fall gültig. Die Bewegungsgleichung des dritten Körpers ergibt sich nach ersetzen von $z_3 = z$ und von $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, wobei $r = r(t) = r(t + 2\pi) > 0$ ist, zu

$$\ddot{z} + \frac{z}{(r(t)^2 + z^2)^{3/2}} = 0 \quad (1.47)$$

Somit sind nun alle Gleichungen vorhanden, die Keplergleichung, welche die Bahn der Primärkörper beschreibt und die Bewegungsgleichung des dritten Körpers, der die Pendelbewegung in Abhängigkeit des sich ändernden Radius $r(t)$, bzw. des sich mit dem Radius ändernden Potentials beschreibt. Beide Gleichungen müssen mittels numerischer Verfahren gelöst werden. Die Keplergleichung als Nullstellenproblem und die Bewegungsgleichung des Testkörpers mittels numerischer Integration. Die Verbindung zwischen den beiden Gleichungen wird durch die Beziehung

$$r(t) = \frac{1}{2} \cdot (1 - e \cdot \cos E(t)) \quad (1.48)$$

gegeben [Dvorak, 2005]. Der Berechnungsweg für das Sitnikov-Problem lautet somit:

1. Lösen der Keplergleichung für einen bestimmten Zeitpunkt t_n
2. Berechnen des Radius $r(t_n)$ zu diesem Zeitpunkt
3. Integrieren der Bewegungsgleichung für den Radius $r(t_n)$

Somit erhält man für gegebene Anfangsbedingungen zu jedem Zeitpunkt t den Ort des Testkörpers $z(t)$. Einen einfacheren, weil integrablen Fall stellt das bereits genannte MacMillan-Problem dar, in dem der Radius sich nicht ändert $r \neq r(t)$, da die Primärkörper auf Kreisbahnen umlaufen. Die Bewegungsgleichung vereinfacht sich für den Einheitskreis mit $a = 1/2$ zu:

$$\ddot{z} + \frac{z}{\left(\frac{1}{4} + z^2\right)^{3/2}} = 0 \quad (1.49)$$

Die Lösung des MacMillan-Problems für kleine Auslenkungen lautet

$$z(t) = z_0 \cdot \cos(2 \cdot \sqrt{2}t) + \frac{\nu_0 \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{2}t)}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (1.50)$$

wobei z_0 die anfängliche Auslenkung ($z_0 \ll 1$), und ν_0 die anfängliche Geschwindigkeit des Testkörpers ist [Lothka, 2004]. Analytische Lösungen des MacMillan Problems sind mittels elliptischer Integrale gegeben. Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung um das Baryzentrum (Abb. 1.4).

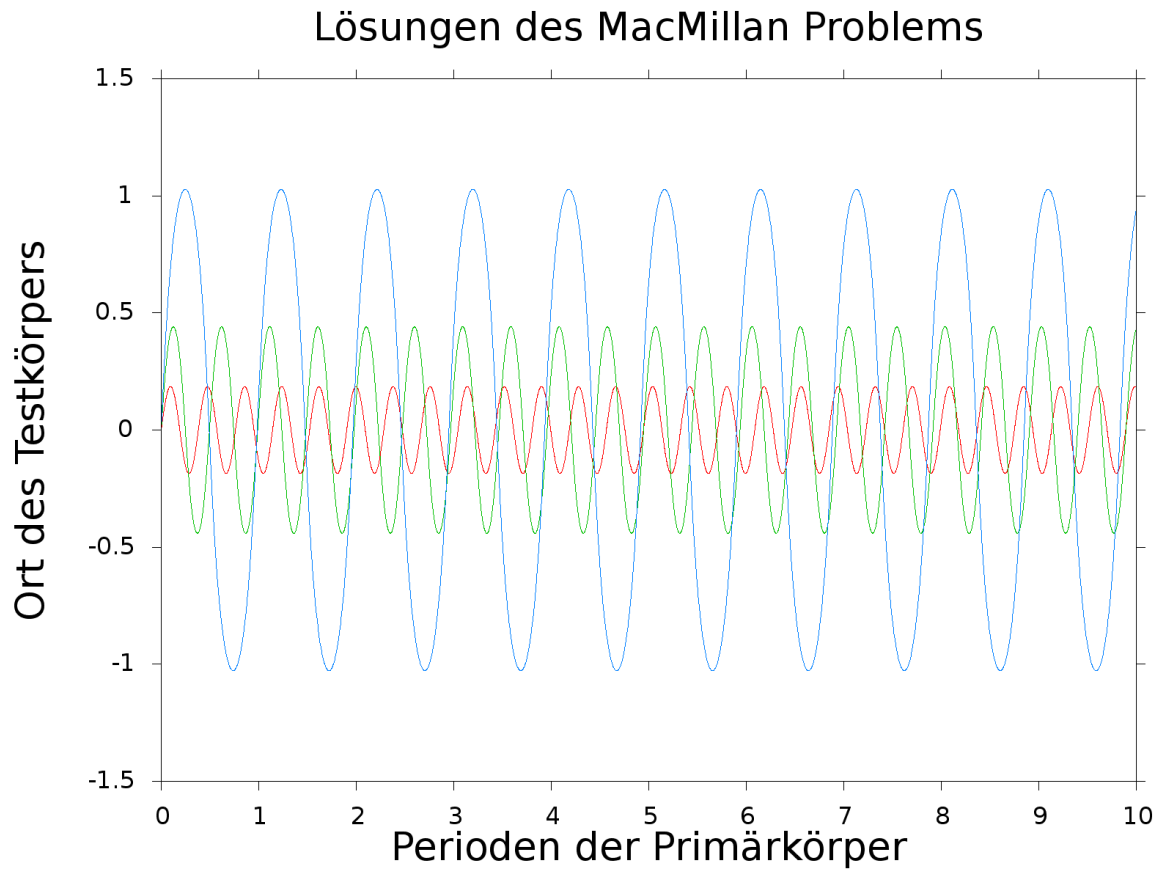


Abbildung 1.4.: Lösungen des MacMillan-Problems ($e = 0$). Der Testkörper führt harmonische Schwingungen um die Ruhelage aus. Amplitude und Frequenz sind zeitlich konstant. Anfangsbedingungen für die Kurven sind $z_0 = 0$ sowie $\dot{z}_0 = 0.5, 1.0, 1.5$ für 10 Umdrehungen der Primärkörper. Die hier gezeigten Lösungen wurden mittels Runge-Kutta-Integration gefunden.

1.3.3. Die Sitnikov-Sequenz

Die Sitnikov-Sequenz ist eine Folge von ganzen Zahlen, die sich ergibt, wenn man danach fragt, in welcher Periode der Primärkörper im Sitnikov-Problem, der Testkörper die x-y-Ebene durchstößt, also eine Nullstelle im Zeit-Ort-Diagramm besitzt. Die Anzahl der vollständigen Umrundungen der Primärkörper zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen gibt nun den Eintrag in der Sitnikov-Sequenz an. Liegt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen eine Umrundung, so notiert man eine “1”, liegen dazwischen zwei Perioden, so notiert man in der Sitnikov-Sequenz eine “2”.

Die Grundlage für diese Betrachtung wurde von Moser [Moser, 1971] mit folgendem Theorem gelegt:

“...we consider a solution $z(t)$ with infinitely many zeroes $t_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ which are ordered according to size, $t_k < t_{k+1}$, $z(t_k) = 0$. Then we introduce the integers

$$s_k = \left[\frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi} \right] \quad (1.51)$$

which measure the number of complete revolutions of the primaries between two zeroes of $z(t)$. This way we can associate to every such solution a double infinite sequence of integers. The main result can be expressed as the converse statement: . Der Körper fällt somit in

Theorem: Given a sufficiently small eccentricity $\epsilon > 0$ there exists an integer $m = m(\epsilon)$ such that any sequence s with $s_k \geq m$ corresponds to a solution of the above differential equation (die Bewegungsgleichung des Sitnikov Problems, Anm.). “

Diese Vorgehensweise generiert für jeden Sitnikov-Orbit eine Folge von ganzen Zahlen. Analog gilt der Umkehrschluss: für jede Folge von ganzen Zahlen lässt sich eine Lösung des Sitnikov-Problems finden. Das Besondere hieran ist, dass die Folge von ganzen Zahlen völlig beliebig gewählt werden kann und immer noch einem Sitnikov-Orbit zuordenbar ist. Die Einträge der Sitnikov-Sequenz hängen sensibel von den für das jeweilige Sitnikov-Problem gewählten Anfangsbedingungen ab, da eine kleine Variation der Anfangsbedingungen völlig unterschiedliche Orbits zur Folge hat. Diese Anfangsbedingungen sind der Startort z_0 , die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}_0$ sowie die Wahre Anomalie der Primärkörper φ_0 und die Exzentrizität e der Primärkörper. Für die Sitnikov-Sequenz liegt der Startort immer in der x-y-Ebene, also bei $z_0 = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit

kann aufgrund der Symmetrie des Problems immer positiv gewählt werden, es gilt immer $\dot{z}_0 \geq 0$. Die wahre Anomalie bewegt sich im Intervall $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, die Exzentrizität variiert im Intervall $0 \leq e < 1$. Die oben genannte Sequenz von ganzen Zahlen kann doppelt unendlich lang sein $\{a_{-\infty}, a_{+\infty}\}$, halb unendlich lang, $\{a_{-\infty}, a_0\}$ oder $\{a_0, a_{+\infty}\}$, oder auch nur endlich lang, mit $\{a_0, a_n\}$, wobei a einen Anfangs- bzw. Endwert der Sequenz angibt. Im ersten Fall ist die Lösung des Sitnikov-Problems gebunden und führt unendlich viele Oszillationen durch. Die beiden halb unendlich langen Fälle beschreiben jeweils ein Entschwinden des Testkörpers nach dem letzten Nulldurchgang bzw. ein Einfangen mit unendlich vielen folgenden Schwingungen. In dieser Arbeit wird konkret auf den Fall einer endlichen Sequenz $\{a_0, a_5\}$ eingegangen, d.h. die ersten 6 Nulldurchgänge werden berechnet und graphisch dargestellt. Für die Darstellung wird nicht die oben erwähnte Sitnikov-Sequenz verwendet, sondern eine von F. Vrabec vorgeschlagene Sequenz, die aus der Idee der Sitnikov-Sequenz entwickelt wurde. Diese sogenannte Vrabec-Sequenz ergibt sich folgendermaßen:

Hat der Testkörper seine erste Nullstelle während der ersten Periode der Primärkörper, so notiert man in der Vrabec-Sequenz eine “1”, liegt die erste Nullstelle jedoch bereits in der zweiten Periode, wie in Abb. 1.5, so beginnt die Sequenz mit “2” (analog verfährt man mit höheren Periodenzahlen). Anschließend fragt man nach der Periode, in der die zweite Nullstelle liegt und notiert nun als zweiten Eintrag in der Sequenz die zugehörige Ganzzahl. In Abb. 1.5 ist dargestellt, wie eine Vrabec-Sequenz einem bestimmten Orbit zugewiesen wird. Die erste Nullstelle nach dem Start wird mit dem Buchstaben “A” bezeichnet, die Zweite mit “B” bis zur sechsten, welche mit “F” gekennzeichnet wird. Zusätzlich wird anhand der berechneten Mappings ein Ausblick auf höhere Sequenzen ermöglicht.

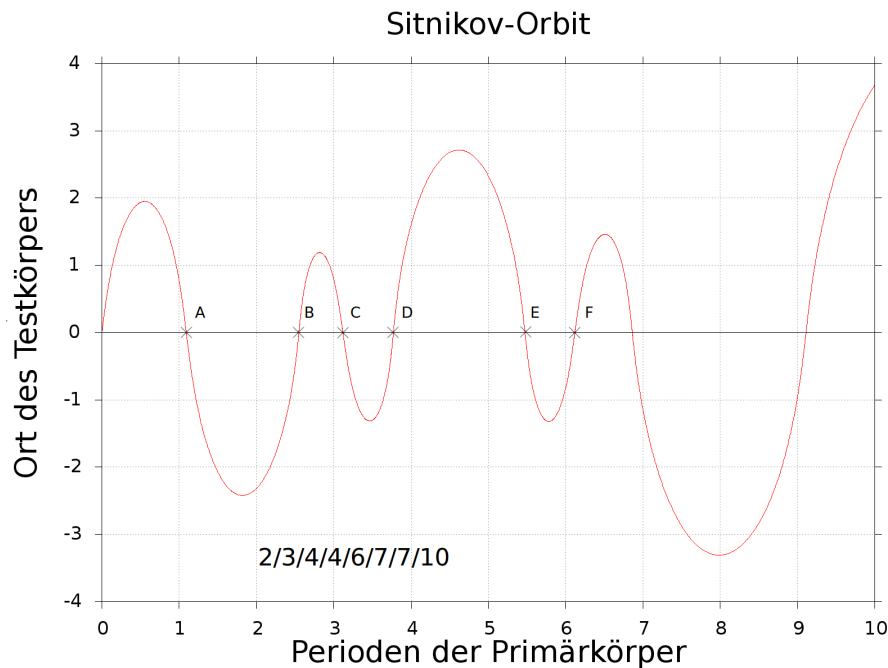


Abbildung 1.5.: Eine Vrabec-Sequenz wird einem bestimmten Orbit zugewiesen. Passiert der erste Nulldurchgang in der ersten Periode, also im Intervall $[0,1]$, so wird dem ersten Glied der Sequenz die Zahl “1” zugeordnet. Da sich die erste Nullstelle in der Abbildung erst in der zweiten Periode befindet, notieren wir eine “2” in der Vrabec-Sequenz an erster Stelle. Im folgenden nennen wir dies die Nullstelle “A”. Die Nullstelle “B” liegt im Intervall $[2,3]$, somit ist das zweite Glied die Zahl “3”. Auf die gleiche Art wird mit den folgenden Nullstellen verfahren. Unter dem Orbit ist die resultierende Sequenz notiert.

1.3.4. Die Vrabec-Sequenz als Mapping

Um das dynamische Verhalten des Sitnikov-Problems mit symbolischer Dynamik darzustellen wurden verschiedene Methoden vorgeschlagen. Die ursprünglich von Moser [Moser, 1971] entwickelte Methode verwendet die Sitnikov-Sequenz sowie die Geschwindigkeit $\dot{z}_0$ und die Zeit t_0 beim Nulldurchgang des Testkörpers $z(t_0) = 0$. Da das Problem symmetrisch ist gilt $v_0 = |\dot{z}_0|$, und $v_0 = 0$ ist die triviale Lösung des Problems mit einem im Ursprung ruhenden Testkörper. Verfolgt man die Eigenschaften (Geschwindigkeit und Phase der Primärkörper) von einer Nullstelle (v_0 & t_0) zur nächsten Nullstelle (v_1 & t_1) so wird deutlich, dass diese nun veränderten Parameter die Anfangsbedingungen eines “neuen” Sitnikov-Problems darstellen. Das Sitnikov-Problem wird somit als Abbildung von $(v_0, t_0) \rightarrow (v_1, t_1)$ gesehen. Von Moser wird nun die Zeit t_0 Modulo 2π (die Mittlere Anomalie) und die Geschwindigkeit v_0 als Polarkoordinaten in der Ebene verwendet, wobei v_0 als Radiale Koordinate und t_0 als Winkelkoordinate verwendet wird. Aufgetragen werden nun die jeweiligen veränderten Parameter bei den

Nullstellen. Eine andere Art des Mappings wurde von F. Vrabec vorgeschlagen und in [Dvorak, 1998b] kurz beschrieben. Es werden die anfängliche Wahre Anomalie und die anfängliche Geschwindigkeit des Testkörpers zum Zeitpunkt $t = 0$ notiert. Diese beiden Werte werden nun nicht als Polarkoordinaten sondern als x-y-Koordinaten in der Ebene betrachtet, wobei die Wahre Anomalie entlang der x-Achse von 0 bis 2π läuft und die Geschwindigkeit entlang der positiven y-Achse aufgetragen wird. Die Menge der Anfangsbedingungen bildet somit eine Mantelfläche eines unendlich hohen Zylinders -würde man negative Geschwindigkeiten berücksichtigen. Nun wird danach gefragt, in welcher Periode der Primärkörper diese erste Nullstelle nach dem Start der Berechnung liegt. Die Bildung der Vrabec-Sequenz erfolgt wie in Abb. 1.5 gezeigt. Dieser Vorgang wird nun für eine bestimmte Exzentrizität e , für diskrete Werte der anfänglichen Wahren Anomalie im Intervall $[0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi]$ sowie für diskrete Werte der anfänglichen Geschwindigkeit im Intervall $[0 < v_0 \leq c]$, wobei c eine beliebige positive Zahl ist, wiederholt. Man erhält somit eine List mit 3 Einträgen: Die anfängliche Wahre Anomalie bildet die x-Koordinate, die anfängliche Geschwindigkeit die y-Koordinate und die Periodenzahl der Nullstelle die ganzzahlige z-Koordinate. Diese ganzzahlige z-Koordinate wird nun auf die x-y-Ebene projiziert und farblich gekennzeichnet. Es kann natürlich vorkommen, dass das Testteilchen bei einer bestimmten anfänglichen Wahren Anomalie und Geschwindigkeit soviel Energie erhält, dass es das System sofort verlassen kann und nicht mehr zurückkommt in die x-y-Ebene. In diesem Fall brechen wir die Vrabec-Sequenz einfach ab. Im verwendeten Programmcode wird diesem Fall die Zahl 0 zugeordnet, um das Entschwinden des Teilchens darzustellen. Somit wird jedem Satz von Anfangsbedingungen bei einer bestimmten Nullstelle eine ganze Zahl zugeordnet. Eine Folge dieser ganzen Zahlen kennzeichnet das Verhalten des Sitnikov-Systems für einen bestimmten Satz von Anfangsbedingungen. Es entstehen damit Gebiete gleicher Periodenzahl, die das Verhalten, vor allem bezüglich stabiler Anfangsbedingungen, anschaulich darstellen.

1.3.5. Eigenschaften des Sitnikov-Problems

Das eingeschränkte Sitnikov-Problem ist ein einfaches Beispiel für ein chaotisches System. Es dient als Modell für ein nicht-lineares dynamisches System, da es sich um ein einfaches System geringer Dimension handelt, das eine Vielzahl von Bewegungsmöglichkeiten besitzt, periodische Bewegungen, quasi-periodische Bewegungen sowie chaotische Bewegungen. Die Hamiltongleichung des Sitnikov-Problems lautet

$$H(t, z, \dot{z}) = \frac{\dot{z}^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r(t)^2}} \quad (1.52)$$

wobei die Primärmassen als $m = \frac{1}{2}$ angenommen wurden. In Gl. 1.52 ist erkennbar, dass die Hamilton-Funktion zeitabhängig ist und die Energie somit nicht erhalten bleibt. Aus diesem Grund wurde das System bereits vielfach als einfaches dynamisches System untersucht, das reguläre und stochastische Bewegungen aufweist. 1960 konnte Sitnikov zeigen, dass das System oszillierende, wachsende Lösungen mit unendlich vielen Nullstellen besitzt bei $e > 0$. Diese Aussage bildet eine der Grundlagen dieser Arbeit, und wurde von [Wodnar, 1992] in zwei Lemmata zusammengefasst [Wodnar, 1992]:

- Lemma 1: Für jede anfängliche Wahre Anomalie φ_0 existiert eine minimale anfängliche Geschwindigkeit $\dot{z}_{0,\infty}$ des Testkörpers bei $z_0 = 0$, die zu einer monotonen Fluchtbewegung gegen $+\infty$ führt.
- Lemma 2: Für jede anfängliche Wahre Anomalie φ_0 und eine Zeit $t > 0$ existiert eine Geschwindigkeit $\dot{z}_0 < \dot{z}_{0,\infty}$ des Testkörpers bei $z_0 = 0$, sodass der Testkörper zu einer Zeit t wieder zu $z = 0$ zurückkehrt.

Diese Aussagen lassen sich folgendermaßen Beweisen:

Betrachtet man Gl. 1.52 so sieht man, dass Geschwindigkeiten existieren, die zu einem Verlassen des Systems, also zu einer Flucht des Teilchens führen. Andererseits existiert die triviale Lösung $z(t) \equiv 0$ mit $\dot{z}(t) = 0$. Wird nun die Geschwindigkeit kontinuierlich erhöht, um von 0 in den Fluchtbereich zu gelangen muss es eine minimale Fluchtgeschwindigkeit geben mit $\dot{z}_{0,\infty} > 0$ für alle Zeiten. Die selbe Argumentation kann nun auch für Lemma 2 herangezogen werden: Da die Geschwindigkeit nicht von der trivialen Lösung $\dot{z} = 0$ auf die Fluchtlösung umschlägt, existieren dazwischen Geschwindigkeiten, bei denen das Teilchen in endlicher Zeit wieder zurückkehrt [Wodnar, 1992].

Für eine gewählte Exzentrizität ist die Menge der möglichen Anfangsbedingungen die Wahre Anomalie zwischen $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, sowie die Geschwindigkeit zwischen $-\infty \leq \dot{z}_0 \leq +\infty$. Aufgrund der Symmetrie kann man die Geschwindigkeit auf $0 \leq \dot{z}_0 \leq +\infty$ reduzieren. Somit liegt die Menge der Anfangsbedingungen auf dem Mantel eines unendlich hohen Zylinders. 'Schneidet' man nun diesen Mantel beim Übergang von $\varphi = 2\pi = 0$ auseinander erhält man eine in $\dot{z}$ – *Richtung* offene rechteckige Fläche. Für jede mögliche Exzentrizität existiert nun eine derartige Fläche, jeder Punkt auf dieser Fläche stellt eine mögliche Anfangsbedingung des Sitnikov-Problems dar. Interessant sind besonders jene Anfangsbedingungen (vor allem die Anfangsgeschwindigkeiten), die nicht zu einem sofortigen Verlassen des Systems führen, also jene Anfangsgeschwindigkeiten, die genügend klein sind, um eine Rückkehr zu erlauben. Da bei

einer endlichen Geschwindigkeit abgeschnitten wird, kann die Fläche der Anfangsbedingungen graphisch dargestellt werden. Hierbei geht keinerlei Information verloren, da alle Geschwindigkeiten oberhalb von $\dot{z}_{esc}$ auf einen Fluchtorbit führen. Diese Art von Mapping erlaubt auf anschauliche Art die graphische Darstellung des Verhaltens der Menge aller verbleibenden Anfangsbedingungen.

1.4. Verwendete Lösungsmethoden

Der folgende Abschnitt beschreibt die verwendeten numerischen Lösungsverfahren in aller Kürze. Hierbei handelt es sich einerseits um ein Verfahren zur Nullstellenbestimmung einer Funktion, im vorliegenden Fall der Keplergleichung, sowie ein Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Für eine genauere Beschreibung und den Vergleich verschiedener numerischer Verfahren für die Lösung des Sitnikov-Problems wird auf [Bazsó, 2008] verwiesen.

1.4.1. Lösen der Keplergleichung

Die Keplergleichung wurde im Jahr 1609 von Johannes Kepler in seinem Werk “Astronomia Nova” veröffentlicht und dient zur Berechnung der Position eines Himmelskörpers (z.B. eines Planeten) zu einer bestimmten Zeit, d.h. mit ihrer Hilfe kann man das Keplerproblem lösen. In ihrer modernen Form lautet die Gleichung:

$$E - e \cdot \sin(E) = M \quad (1.53)$$

Bei der Keplergleichung handelt es sich um eine transzendente Gleichung, deren Lösungen nicht analytisch bestimmbar sind, sondern mittels numerischer oder graphischer Verfahren gefunden werden müssen. Das für diese Arbeit verwendete Verfahren zur Nullstellensuche ist das Halley-Verfahren, erfunden und benannt nach dem Astronomen E. Halley, dem Entdecker des Halleyschen Kometen. Das Halley-Verfahren ähnelt dem Newton-Verfahren, es ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer nichtlinearen Funktion $f(x) = 0$, welche zweimal stetig differenzierbar (C^2) sein muss. Die Iterationsanweisung lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot f(x_n) \cdot f'(x_n)}{2 \cdot [f'(x_n)]^2 - f(x_n) \cdot f''(x_n)} \quad (1.54)$$

Die Iteration beginnt mit einem geschätzten Anfangswert x_0 . Das Halley-Verfahren weist eine kubische Konvergenzrate auf. Als Anwendung auf die Keplergleichung wird

diese als

$$f(E) = E - e \cdot \sin(E) - M = 0 \quad (1.55)$$

angeschrieben. Als erste und zweite Ableitung erhält man somit

$$f'(E) = 1 - e \cdot \cos(E) \quad (1.56)$$

und

$$f''(E) = e \cdot \sin(E) \quad (1.57)$$

Die Funktion der Keplergleichung liegt somit in C^2 und aufgrund der Beschränkung auf $0 \leq e < 1$ ist in der ersten Ableitung auch garantiert, dass stets $f'(E) > 0$ ist. Diese Tatsache garantiert eine konvergierende Lösung der Keplergleichung. Als anfänglicher Wert E_0 , bei dem die Iteration gestartet wird kann mittels Gl. (1.58) ein nahe an der Nullstelle liegender Wert gefunden werden, um die Anzahl der Iterationen und somit den Rechenaufwand gering zu halten. Die Näherungsformel nach [Érdi, 1989] lautet:

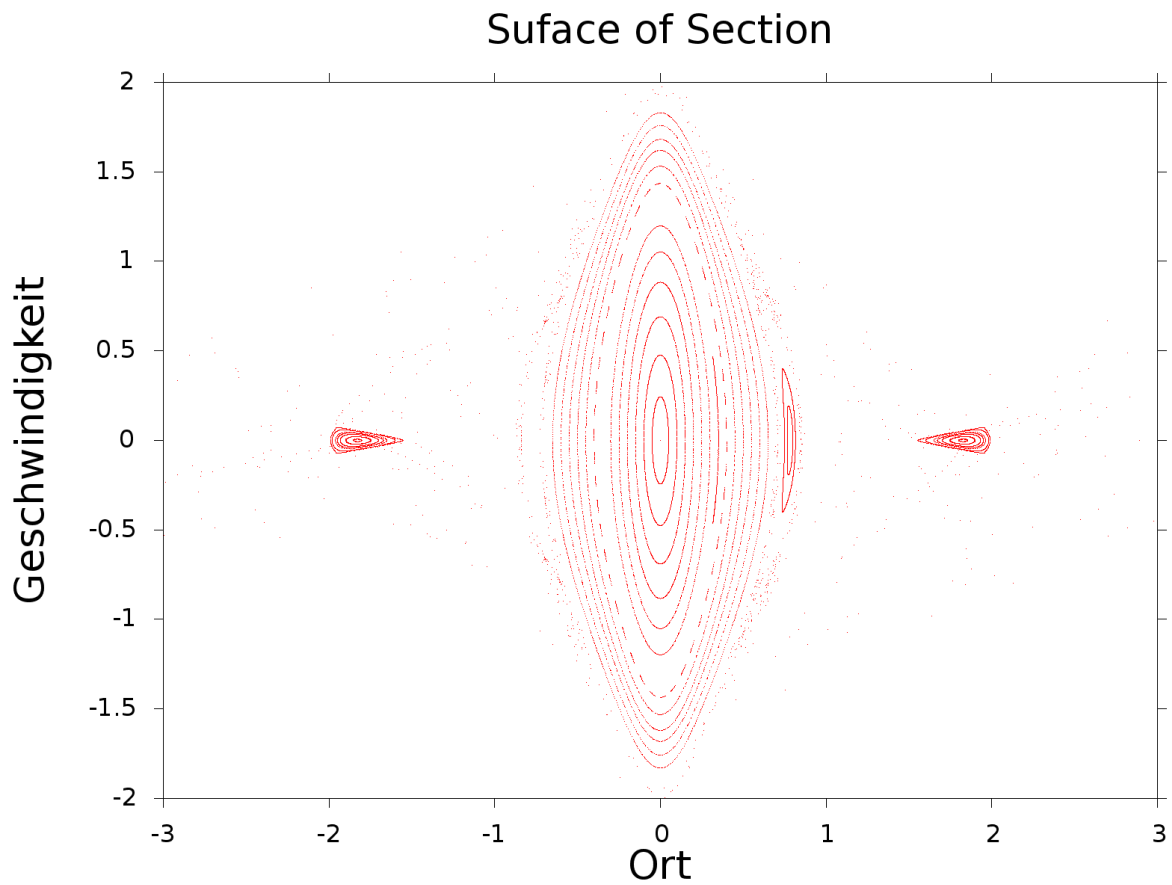
$$E_0(M) = M + e \cdot \frac{\sin(M)}{1 + \sin(M) - \sin(M + e)} \quad (1.58)$$

Eine genauere Betrachtung der Näherungsformel findet sich auch in [Bazsó, 2008]. Die mittlere Anomalie M übernimmt in diesem Fall die Funktion der Zeit, d.h. M läuft immer konstant von $0 \leq M \leq 2\pi$ um. Aus der mittels Halley-Verfahren gewonnenen Exzentrischen Anomalie kann unter Verwendung von Gl. (1.24) der aktuelle Bahnradius im Sitnikov-Problem berechnet werden. Dieser Bahnradius wird in die Bewegungsgleichung des Sitnikov-Problems eingesetzt, welche anschließend numerisch integriert werden kann.

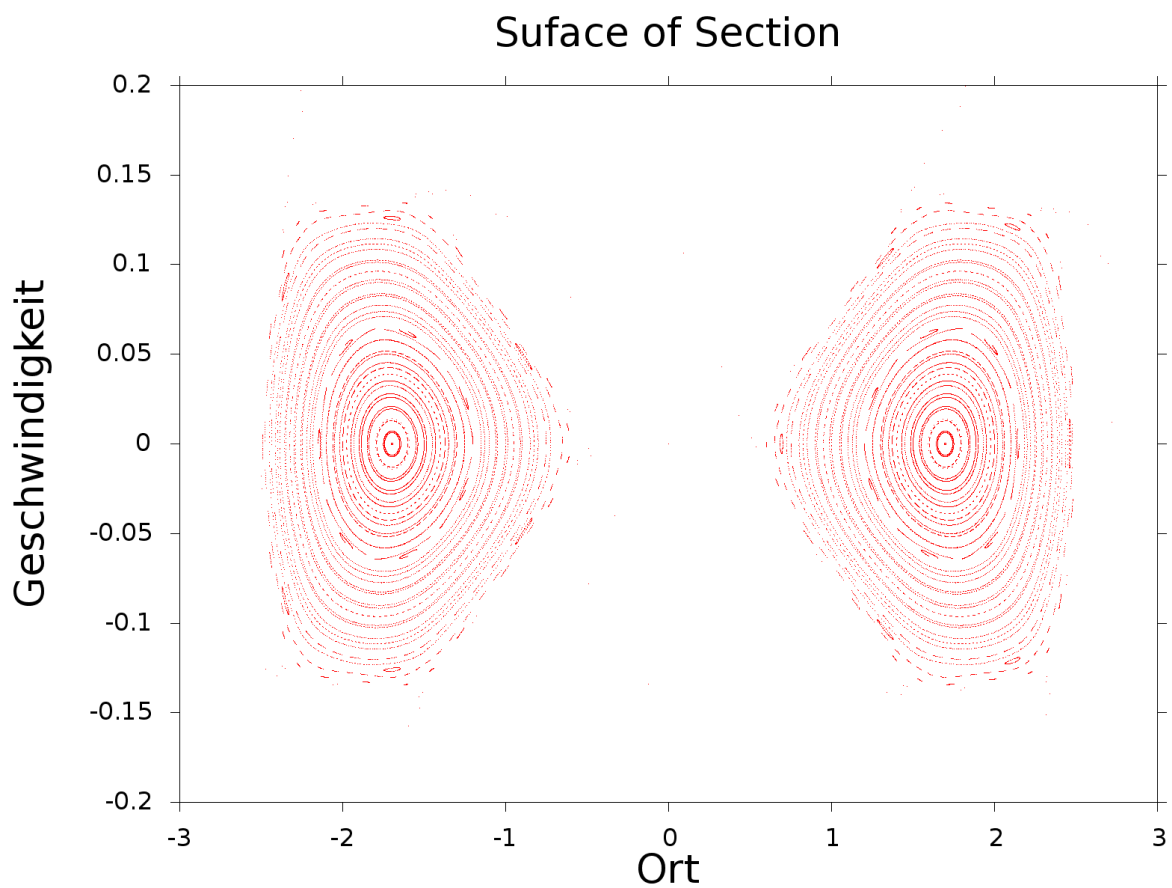
1.4.2. Runge-Kutta-Verfahren

Bei dem Runge-Kutta-Verfahren handelt es sich um ein numerisches Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen. Es ist ein sogenanntes Einschrittverfahren, das - im Gegensatz zu Mehrschrittverfahren - zur Berechnung der gesuchten numerischen Lösung nur Werte des aktuellen Zeitschrittes verwendet. Es verwendet keine Informationen aus vorher gegangenen Berechnungsschritten. In dieser Arbeit wurde zum

Lösen der Differentialgleichungen eine Runge-Kutta-Integrationsroutine aus den “Numerical Recipes” übernommen [Press, 1992], welche eine schrittweitengesteuerte, effiziente Berechnungsmethode zur Verfügung stellt. Die so gewonnenen Lösungen wurden mit Lösungen verglichen, die von einem Programmcode von [Bazsó, 2008] erzeugt wurden. Um die Verlässlichkeit des verwendeten Codes zu demonstrieren wurden noch Poincaré Surface-of-Section (SOS) berechnet und mit vorliegenden SOS in der Literatur [Dvorak, 2005] verglichen. Ein SOS ist eine Methode, um Trajektorien im Phasenraum darzustellen. Hierbei werden bestimmte Elemente des Phasenraumes konstant gehalten und der Verlauf der übrigen Elemente dargestellt. Im Fall des Sitnikov-Problems wird die Exzentrizität sowie die Phase der Primärkörper konstant gehalten ($e = konst.$ & $\varphi = konst.$). Typischerweise werden die Geschwindigkeit und der Ort des Teilchens in Periastron-Position ($\varphi = 0$) bestimmt und als Map dargestellt. Periodische stabile Orbits stellen Punkte in der Map dar, quasiperiodische Orbits folgen geschlossenen Kurven und chaotische Orbits produzieren Punktwolken. Zum Vergleich der Berechnungsgenauigkeit wurde der verwendete Programmcode mit einem Programm von [Bazsó, 2008] verglichen. Hierbei zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse. Diese Übereinstimmung ist auch bei hohen Periodenzahlen (> 1000) noch gegeben, womit der Programmcode und die “Numerical Recipes”-Routinen ein gutes Werkzeug darstellen, das Sitnikov-Problem zu integrieren. In Abb. 1.6 sind Surface of Section für zwei unterschiedliche Exzentrizitäten ($e = 0.1$ & $e = 0.99$) berechnet. In den Abbildungen ist deutlich erkennbar, wie der mittlere Bereich zwischen den 2:1 Resonanz-Inseln instabil wird für hohe Exzentrizitäten. Dies dient als Indiz dafür, dass der verwendete Code auch bei hohen Exzentrizitäten noch sinnvolle Ergebnisse liefert. Exzentrizitäten größer als $e = 0.99$ führen jedoch zu einem stark Anstieg der benötigten Rechenzeit, da die automatische Schrittweitensteuerung die gewählte Schrittweite im Bereich des Periastrons sehr klein werden lässt. Dies ist zurückzuführen auf eine hohe Kraftwirkung im Bereich des Periastrons. Die Berechnungen beziehen sich darum auf einen Bereich bis einschließlich $e = 0.99$.



(a) $e=0.1$



(b) $e=0.99$

Kapitel 2.

Katalog

2.1. Überblicks-Mapping

Im folgenden Kapitel ist ein Katalog von Alexeev-Moser-Vrabec Mappings dargestellt. Als Überblicks-Mapping werden alle Mappings bezeichnet, in denen die Wahre Anomalie von $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$ bzw. von 0° bis 360° dargestellt wird und die anfängliche Geschwindigkeit in einem Bereich von $0 < v_0 < 3.5$ liegt. Der Geschwindigkeitswert von $v_{0,max} = 3.5$ wurde willkürlich gewählt, um eine gute Darstellung zu gewährleisten. Diese Darstellungen sollen einen Überblick über den Verlauf der Periodenzahlen in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen in den Mappings ermöglichen. Die Darstellungen gliedern sich in verschiedene Abschnitte. Zuerst erfolgt ein Überblick verschiedener Mappings bei ausgewählten Exzentrizitäten ($e = 0.1, 0.6$ und 0.99). Es wurden Mappings bis zur sechsten Nullstelle mit Hilfe des Programmcodes aus Anhang B berechnet. Die Nullstellen sind mit Buchstaben gekennzeichnet, Nullstelle "A" ist die erste Nullstelle, gefolgt von "B" usw. bis hin zur Nullstelle "F". Die Wahl von sechs Nullstellen war ein Kompromiss aus geforderter Genauigkeit der Darstellungen von Eigenschaften der Mappings einerseits und der benötigten Rechenzeit sowie der Darstellungsmöglichkeit in dieser Arbeit andererseits. Eine Erweiterung um zusätzliche Nullstellen wurde im Programmcode berücksichtigt, simples Hinzufügen weiterer Ausgabedateien für beliebig viele Nullstellen ist prinzipiell jederzeit möglich.

Im Titel des Bildes findet sich jeweils die Kennung der Nullstelle ("A" bis "F"), sowie die Exzentrizität der verwendeten Sitnikov-Konfiguration. Entlang der x-Achse des Mappings ist die initiale Wahre Anomalie aufgetragen, entlang der y-Achse befindet sich die anfängliche Geschwindigkeit des Testteilchens. Eine Farbkodierung gibt die Ganzzahl in der Vrabec-Sequenz wieder. Der Verlauf der Farben in der Farbskala von niedrigen zu höheren Periodenzahlen ist kontinuierlich. In den Mappings sind jedoch lediglich die diskreten Ganzzahlwerte in die Ebene projiziert, die der Vrabec-Sequenz entsprechen. Liest man nun einen Wahren Anomalie Wert auf der Abszisse und einen

Geschwindigkeitswert auf der Ordinate ab, kann man mittels der Farbkodierung den jeweiligen Eintrag in der Vrabec-Sequenz rekonstruieren. Bildlich gesprochen könnte man beliebig viele Nullstellen derart berechnen und die Mappings wie “Blätter” übereinander legen. Stäche man nun mit einer Nadel oder ähnlichem durch die Blätter, würde die Nadel einer Vrabec-Sequenz folgen.

2.1.1. Mapping für die Exzentrizität $e=0.1$

In den folgenden Abbildungen (Abb. 2.1 bis 2.6) ist die Vrabec-Sequenz für die einzelnen Nullstellen bei einer Exzentrizität von $e = 0.1$ als Alexeev-Moser-Vrabec Mapping dargestellt. Es wurde hierfür ein Raster von 2000×2000 Anfangsbedingungen berechnet. Die gleichfarbigen Gebiete haben dieselbe Periodenzahl. Es wurden, wie bei allen Überblicks-Mappings, die ersten 10 Rotationen der Primärkörper (Perioden) berechnet und danach abgebrochen. Die schwarzen Bereiche stellen die Gebiete mit den Werten 0 dar. Dies sind die Bereiche, in denen die Energie des Testteilchens groß genug war ($H(t, z, \dot{z}) > 0$), um das System sofort zu verlassen. In dem gelben Streifen finden sich alle Orbits, die so weite Trajektorien haben, dass das Teilchen erst nach der zehnten Primärkörper Umrundung zurückkehrt. In diesem Bereich können Anfangsbedingungen gefunden Werden, bei denen das Teilchen erst nach tausenden Umrundungen wieder kehrt. Mehr als 10 Rotationen wurde in den Zoom-Mappings verwendet, da in diesen Fällen die Auflösung besser und darum eine Darstellung höherer Rotationszahlen sinnvoll ist. Dies stellt, gemeinsam mit der Erhöhung der Rotationszahl einen wesentlichen Unterschied zur ursprünglich von Vrabec gezeichneten Map dar.

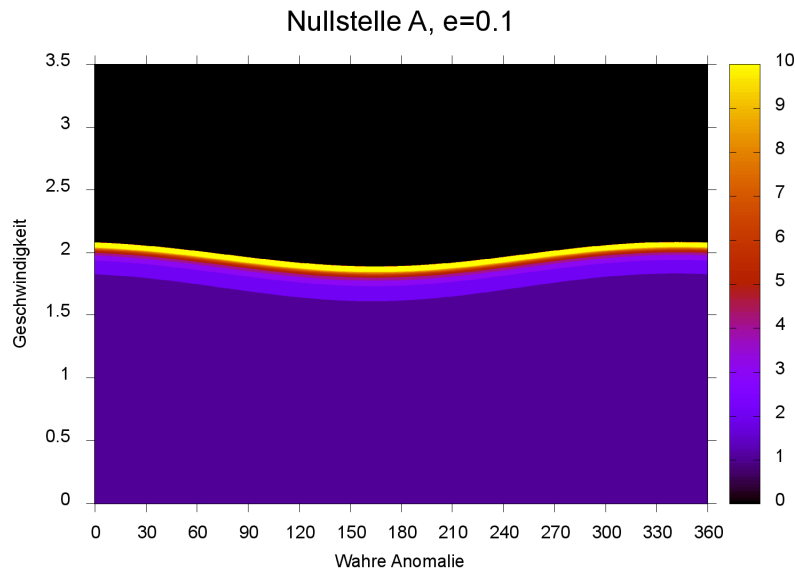


Abbildung 2.1.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping für $e=0.1$: Der gelb gekennzeichnete Bereich zeigt Periodenzahlen von 10 oder höher an. Der schwarze Bereich ist das Gebiet, in dem das Teilchen das System verlassen hat ohne auch nur einmal in die x-y-Ebene zurückgekehrt zu sein.

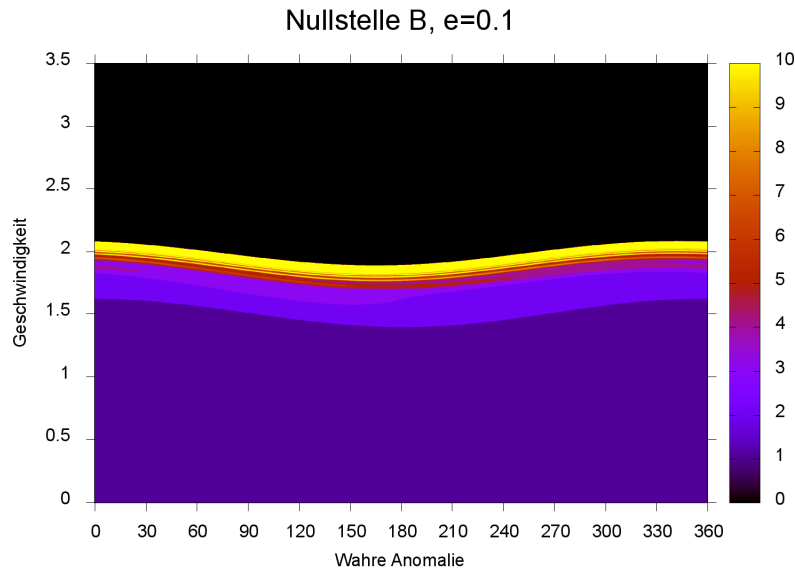


Abbildung 2.2.: Der Bereich minimaler Fluchtgeschwindigkeit liegt etwas vor dem Apastron, der Bereich maximaler Fluchtgeschwindigkeit liegt etwas vor dem Periastron. Deutlich erkennbar ist die asymmetrische Änderung beim Übergang von Periodenzahl 2 auf 3 sowie bei den Periodenübergängen 3-4 und 4-5. Höhere Periodenübergänge sind ebenfalls asymmetrisch.

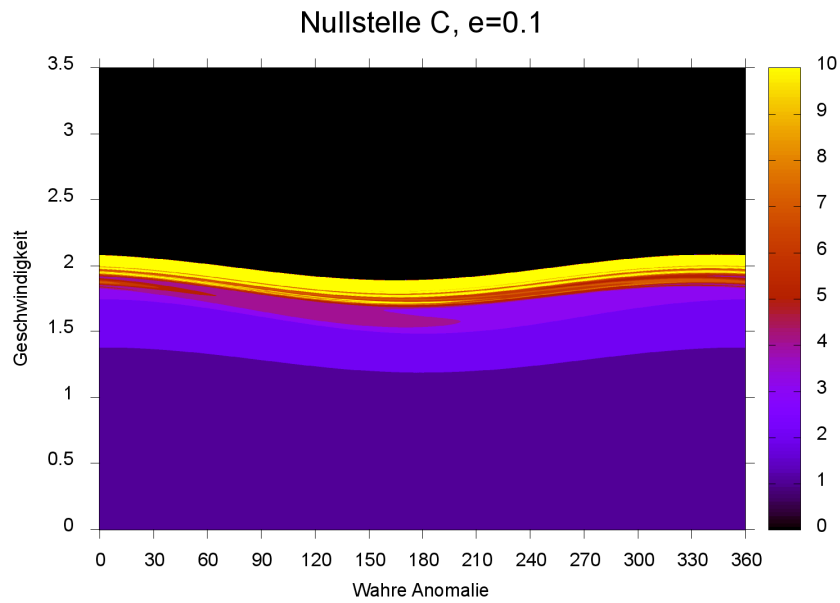


Abbildung 2.3.: Die deutlichen asymmetrischen Änderungen verschieben sich jeweils um eine Periodenzahl und werden ausgeprägter.

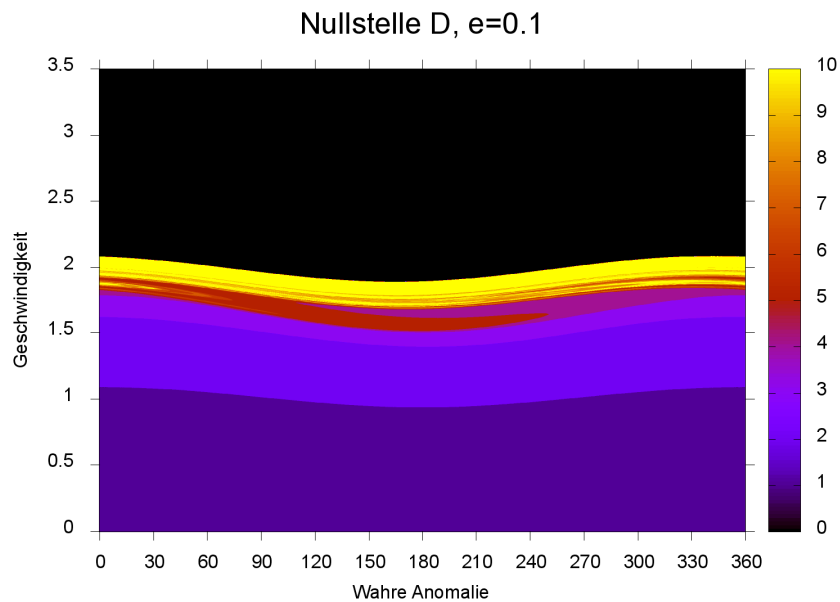


Abbildung 2.4.: Die Periodenzahlen beginnen sich zu schichten. Der Bereich von 10 oder mehr Perioden wird deutlich größer zu höheren Nullstellen hin.

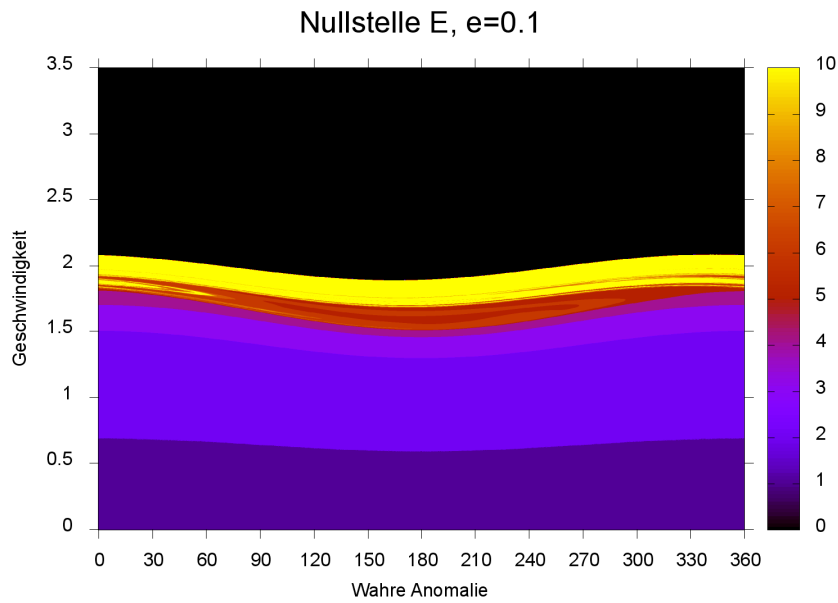


Abbildung 2.5.: Nur mehr geringe Anfangsgeschwindigkeiten führen noch in der ersten Periode zu einer Rückkehr des Teilchens.

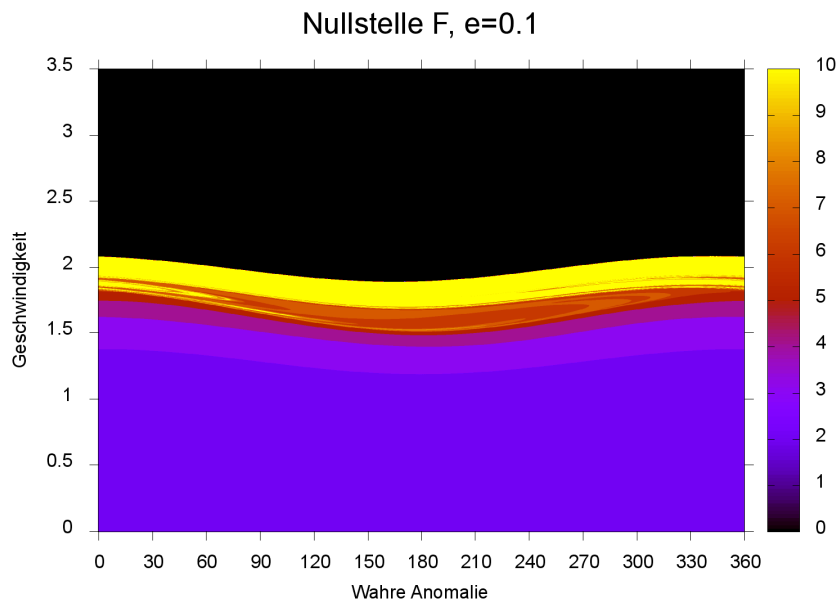


Abbildung 2.6.: Ab der sechsten Nullstelle gibt es bei $e = 0.1$ keine Geschwindigkeit mehr, die noch während der ersten Periode zu einer Rückkehr des Testteilchens führt.

Die Abbildung 2.1 zeigt die erste Nullstelle “A”. Bei dieser ersten Nullstelle werden fast alle Geschwindigkeiten unterhalb von $v_0 = 1.7$ noch in der ersten Periode wieder in die x-y-Ebene abgebildet (unterster violetter Bereich). Die anfängliche kinetische Energie des Teilchens ist also so gering, dass keine weiten Flugbahnen möglich sind. Der große schwarze Bereich ist -wie bereits erwähnt- jenes Gebiet, in dem das Teilchen direkt nach dem Start das System verlässt. Teilchen mit einer Anfangsgeschwindigkeit oberhalb von $v_0 = 2.1$ verlassen somit in jedem Fall das System mit $z(t) \rightarrow \infty$. Weiters ist um den Bereich $\varphi_0 = 180^\circ$ die Fluchtgeschwindigkeit merklich herabgesetzt. Dieser Bereich umfasst ein Gebiet von Anfangsbedingungen, in dem die anfängliche Wahre Anomalie der Primärkörper in der Nähe des Apastrons liegt. In dieser Konfiguration üben die Primärkörper somit die minimal mögliche Bremswirkung auf das Teilchen aus. Dies erlaubt dem Teilchen ein Verlassen des Systems bei geringeren Anfangsgeschwindigkeiten. Auch ist erkennbar, dass das Minimum nicht genau bei $\varphi_0 = 180^\circ$ liegt, sondern etwas davor bei ungefähr $\varphi_0 = 160^\circ$. Liegen die Primärkörper anfänglich im Apastron, so ist der Abstand in der x-y-Ebene $r(t)$ maximal, d.h. man würde die geringste Kraftwirkung und somit Bremswirkung erwarten. Der Bereich minimaler Fluchtgeschwindigkeit liegt jedoch etwas vor der Apastronposition, da sich in diesem Bereich die Primärkörper vom Testteilchen weg bewegen. Das Testteilchen bewegt sich in dieser Zeit aus der x-y-Ebene heraus, es besitzt eine Komponente in Richtung der z-Achse. Maximaler Abstand in der x-y-Ebene ($r(t) = \max$) bedeutet somit nicht automatisch eine minimale Kraftwirkung. In Abb. 1.3 ist durch einfache geometrische Betrachtung zu erkennen, dass der effektive Abstand $d(t)$ zwischen Testteilchen und Primärkörper die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist. Die beiden Katheten bilden $r(t)$ sowie $z(t)$. Aufgrund der Dreiecksungleichung ist somit der effektive Abstand immer $d(t) \geq r(t)$. Dadurch wird der maximale Abstand zwischen Testteilchen und Primärkörper schneller vergrößert, wenn sich $r(t)$ ebenfalls vergrößert, wodurch der Abstand $d(t)$ größer und die Kraftwirkung auf das Teilchen geringer werden. Dadurch wird das Testteilchen immer weniger abgebremst, dies führt zu einer niedrigeren Fluchtgeschwindigkeit und somit zu dem beobachteten leicht exzentrischen Minimum. Dieser Bereich der verminderten Fluchtgeschwindigkeit ist bei geringer Exzentrizität noch nicht sehr ausgeprägt, da sich die Bahn der Primärkörper noch als eher kreisförmig darstellt. Bei höheren Exzentrizitäten wird dieser Bereich zunehmend tiefer, d.h. die Fluchtgeschwindigkeit ist in der Nähe des Apastrons wesentlich herabgesetzt. Im Gegensatz dazu befindet sich der Bereich der höchsten Fluchtgeschwindigkeit ebenfalls etwas vor das Periastron gesetzt, im Bereich von $\varphi = 340^\circ$. Der gelb eingefärbte Bereich vor dem Übergang in den schwarzen Bereich stellt alle Lösungen dar, die erst in der zehnten oder einer höheren Periode der Primärkörper zurück in die x-y-Ebene gekom-

men sind oder zurück gekommen wären. In diesem Bereich läuft die Geschwindigkeit mit der das Teilchen gestartet werden kann, und mindestens einmal zurück kommt, gegen einen Grenzwert: die geringste Fluchtgeschwindigkeit. In Abb. 2.2 sieht man, wie sich die verschiedenen Bereiche verändern. Der Bereich der ersten Periode (unterster violetter Bereich) wird kleiner, Anfangsbedingungen im Bereich von $v_0 = 1.6$ lassen die zweite Nullstelle “B” bereits in die zweite Periode fallen. Deutlich erkennbar bei höheren Nullstellen ist auch, dass der Übergang von zweiter zu dritter Periode nicht mehr dem Trend einer glatten Kurve wie bei Nullstelle “A” folgt, sondern im Bereich des Apastrons eine asymmetrische Veränderung aufweist. Äquivalente Aussagen lassen sich für höhere Perioden machen. Diese Veränderung ist vermutlich eine Überlagerung des zuvor beschriebenen Phänomens, das zu einer Verschiebung der minimalen Fluchtgeschwindigkeit führt.

2.1.2. Mapping für die Exzentrizität $e=0.6$

Um den mittleren Bereich der Exzentrizitäten zwischen $0 \leq e < 1$ zu analysieren, wurde die Exzentrizität auf $e = 0.6$ gesetzt und Mappings berechnet. Die Art der Darstellung gleicht der in Abschnitt 2.1.1 gewählten. Erneut wurden die ersten 10 Perioden berechnet. Orbits mit höheren Periodenzahlen, wurden ebenfalls mit der Zahl 10 markiert, um diese Orbits mit zu berücksichtigen.

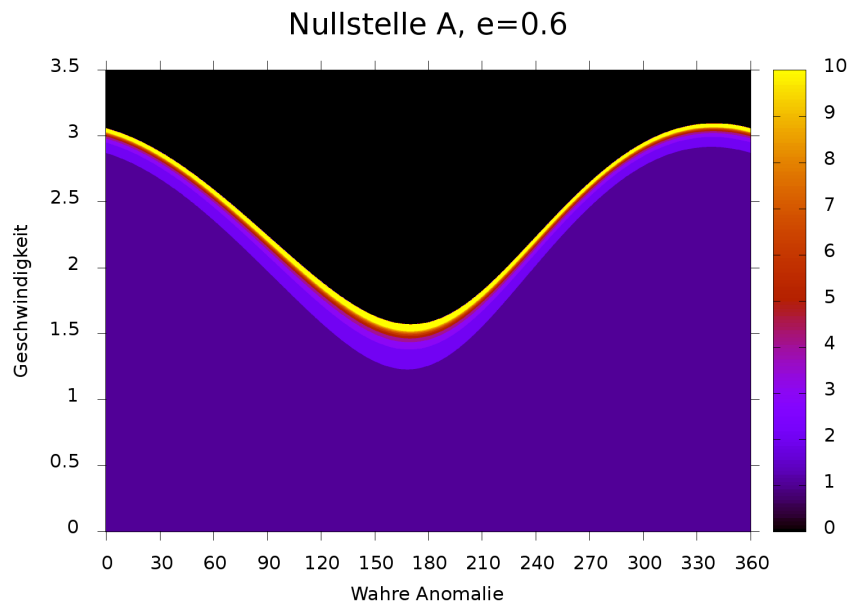


Abbildung 2.7.: Das Maximum der geringsten Fluchtgeschwindigkeit liegt deutlich höher als bei $e = 0.1$, das Minimum liegt etwas tiefer, hat sich jedoch wesentlich weniger verändert.

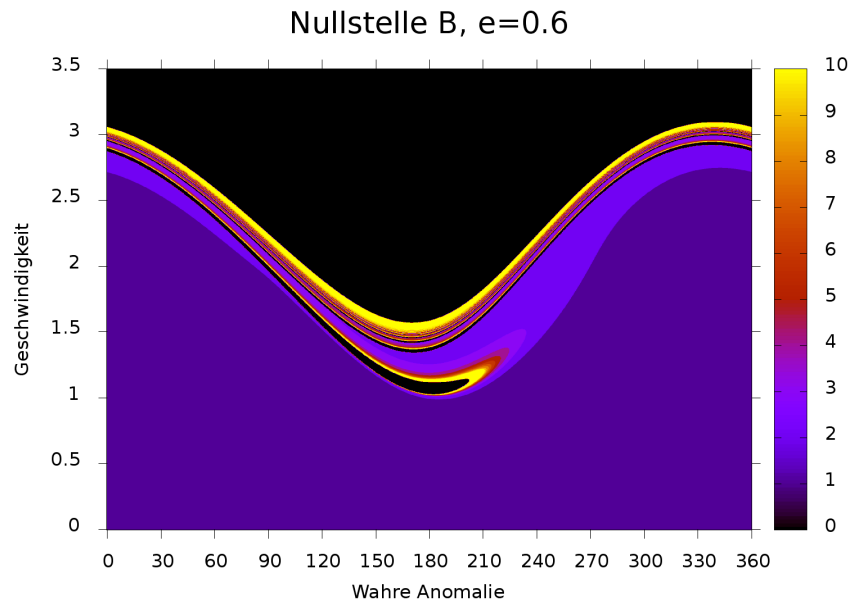


Abbildung 2.8.: Es bildet sich eine Fluchtinsel (schwarze Insel in der Mitte des Bildes) und Fluchtbereiche im Übergangsbereich zu höheren Periodenzahlen.

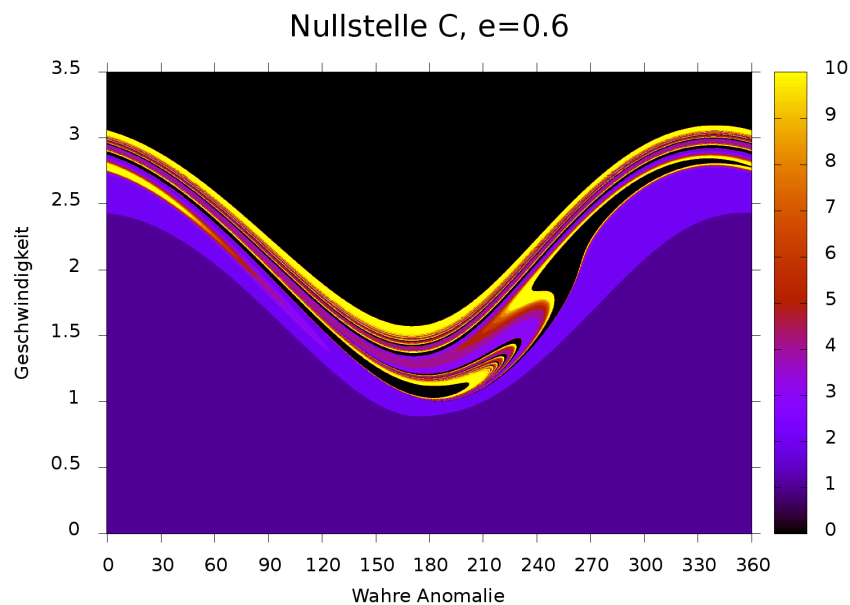


Abbildung 2.9.: Eine große Fluchtinsel öffnet sich zwischen $\varphi_0 = 240^\circ - 280^\circ$. Die erste Fluchtinsel wird von Fluchtbereichen umgeben. Der Übergangsbereich zeigt Feinstrukturen mit verschiedensten, abwechselnden Periodenzahlen. Der Übergang ist nicht mehr kontinuierlich.

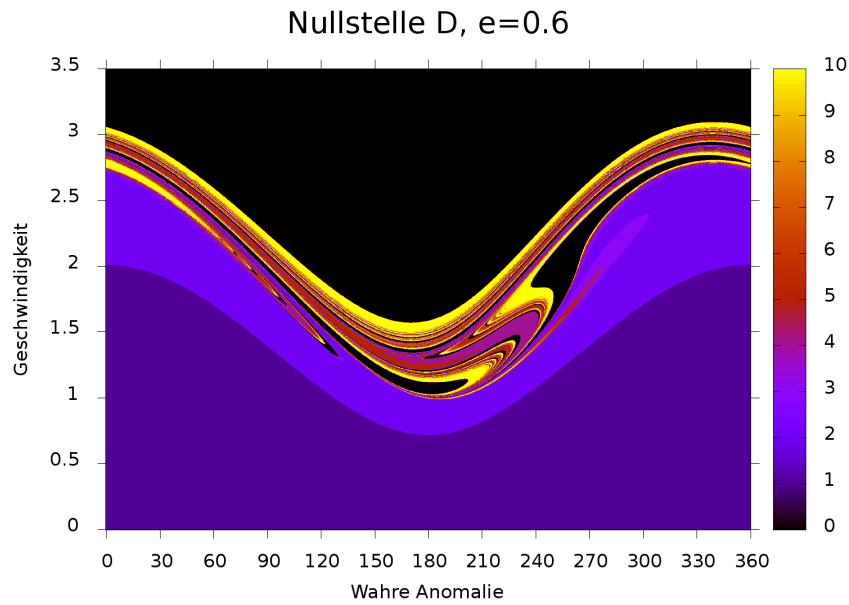


Abbildung 2.10.: Weitere Fluchtstreifen bilden sich, die Periodenzahl im Übergangsbereich steigt an, was an immer dickeren gelben Bereichen erkennbar ist. Links der Mitte hat sich eine neue kleine Fluchtinsel aufgetan.

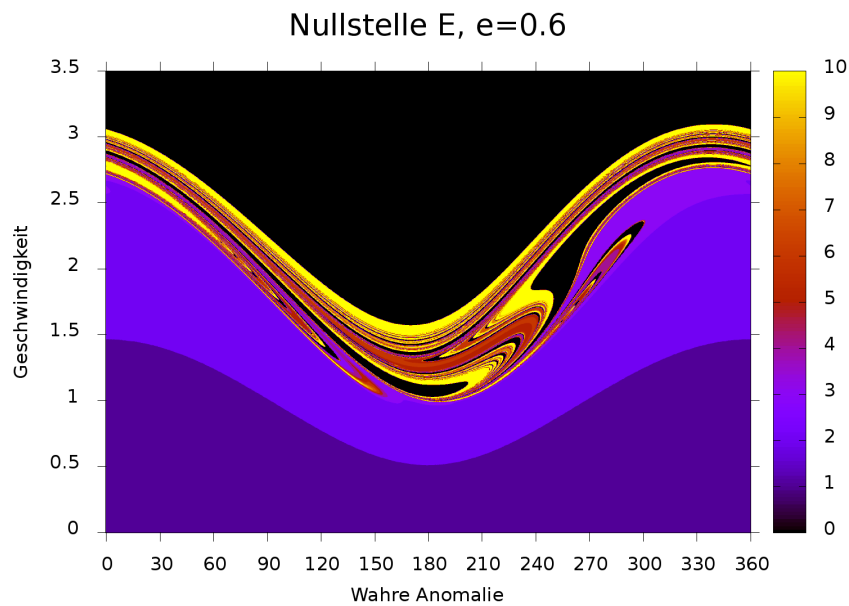


Abbildung 2.11.: Eine weitere Fluchtinsel bildet sich rechts der Mitte.

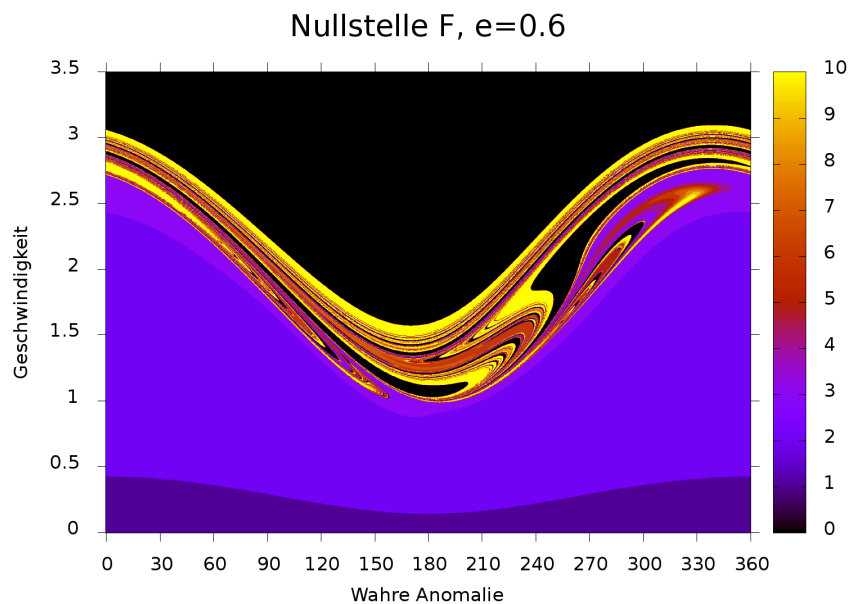


Abbildung 2.12.: Weitere Feinstrukturen entstehen. Es gibt Anfangsbedingungen, bei denen das Testteilchen seine sechste Nullstelle noch während der ersten Periode hat.

In den Abbildungen 2.7 bis 2.12 sind die Mappings bei einer Exzentrizität von $e = 0.6$ dargestellt. Der Verlauf der Gebiete gleicher Periodenzahl folgt ähnlich geschwungenen Kurven bei der Nullstelle “A”. In der Umgebung des Periastrons gibt es jedoch wesentlich höhere Fluchtgeschwindigkeiten als bei kleineren Exzentrizitäten. Die geringste Fluchtgeschwindigkeit hat zwar im Vergleich zu kleineren Exzentrizitäten abgenommen, liegt jedoch immer noch im Bereich von $v_{min} \sim 1.7$ und hat sich somit nur geringfügig verändert. Deutlicher werden die Unterschiede erst, wenn die zweite oder noch höhere Nullstellen betrachtet werden. Hier entstehen Bereiche relativ geringer Anfangsgeschwindigkeit, in denen das Testteilchen das System nach nur wenigen Durchläufen verlässt. Für die zweite Nullstelle “B” ist in Abb. 2.8 deutlich erkennbar, wie sich ein Fluchtbereich in der Umgebung des Apastrons bildet. Der in Nullstelle “A”, Abb. 2.7, noch kontinuierlich Übergang, zieht sich von niedrigeren zu höheren Periodenzahlen und schließlich zum Fluchtbereich. Dieser Übergangsbereich ist bei Nullstelle “B” bereits von dünnen Streifen durchzogen, in denen das Testteilchen das System verlässt. Es sind sehr feine Übergangsstrukturen erkennbar, welche in Abschnitt 2.2 noch in vergrößerter Form im Detail betrachtet werden.

Zu höheren Nullstellen hin wird das Bild immer komplexer und die Feinstrukturen nehmen weiter zu. Um die bei der Nullstelle “B” vorliegende Fluchtinsel bildet sich bei der Nullstelle “C” ebenfalls ein von feinen Fluchtbereichen durchzogenes Gebiet, zusätz-

zlich dazu öffnet sich eine große Fluchtinsel im Bereich von $\varphi_0 \sim 250^\circ$ und $v_0 \sim 2$. Bei Nullstelle “D” wird diese Insel wiederum von dünnen Fluchtstreifen umgeben und eine neue, kleinere Fluchtinsel öffnet sich links der Ersten. Diese Bildung von Inseln und Verfeinerung der gebildeten Strukturen setzt sich bei Nullstelle “E” und “F” fort. Nun gibt es bei Nullstelle “F”, im Gegensatz zu geringeren Exzentrizitäten, einen Bereich von Anfangsbedingungen, die noch während der ersten Periode wieder zurückkommen. Bei höheren Exzentrizitäten ist erkennbar, dass sich die Verschiebung der Geschwindigkeitssenke im Apastron mit dem Anstieg der Anfangsgeschwindigkeit des Testteilchens verändert. Bei geringeren Anfangsgeschwindigkeiten liegt der Bereich des Minimums noch zentral bei $\varphi_0 = 180^\circ$, bei den höheren Fluchtgeschwindigkeiten liegt der Tiefpunkt bereits deutlich vor der Apastronposition. Dies ist darauf zurück zu führen, dass sich bei höheren Exzentrizitäten die Radiusänderung deutlicher auswirkt als bei kreisförmigeren Bahnen geringer Exzentrizität. Die verstärkte Verschiebung bei höheren Geschwindigkeiten ist auch dadurch zu erklären, dass sich $z(t)$ schneller vergrößert. Dies lässt den Effektivabstand ebenfalls rascher ansteigen.

2.1.3. Mapping für die Exzentrizität $e=0.99$

In diesem Abschnitt sind Mappings für eine hohe Exzentrizität ($e = 0.99$) dargestellt. Für eine bessere Vergleichbarkeit sowie Darstellung wurde die Geschwindigkeitsskala gleich wie bei den vorhergehenden Mappings belassen, d.h. sie schließt mit $v_0 = 3.5$ ab. Dies schneidet einen Teil des Bildes ab, die vollständigen Abbildungen der ersten sechs Nullstellen sind in Anhang A.10 dargestellt.

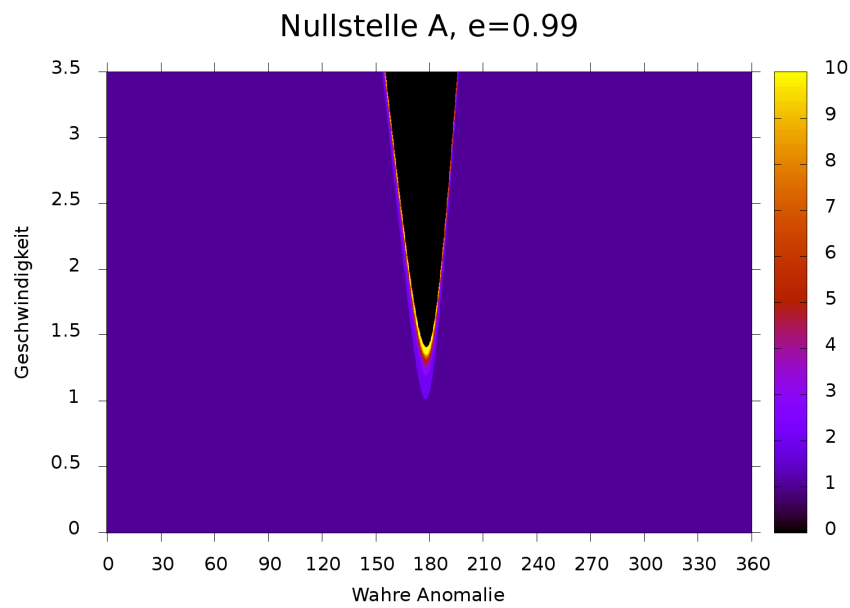


Abbildung 2.13.: Der Bereich, in dem das Teilchen noch in der ersten Periode zurückkehrt ist in der Umgebung des Periastrons sehr groß. Aufgrund der hohen Exzentrizität ist die Bremswirkung kurz nach dem Start sehr stark, es kommt zu großen Energieverlusten des Teilchens.

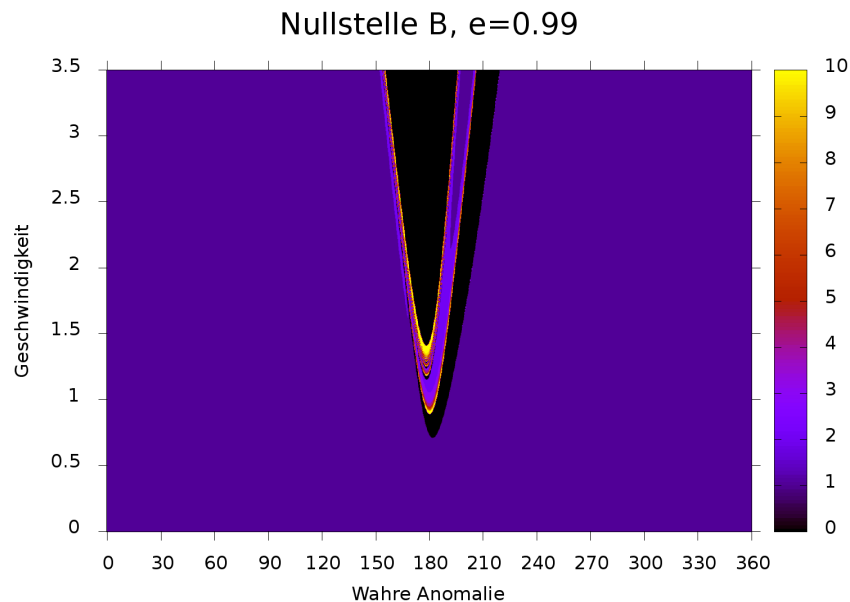


Abbildung 2.14.: Die Fluchtinseln sind bei hohen Exzentrizitäten stark gekrümmt, behalten aber ihre relative Position im Vergleich zu mittleren Exzentrizitäten.

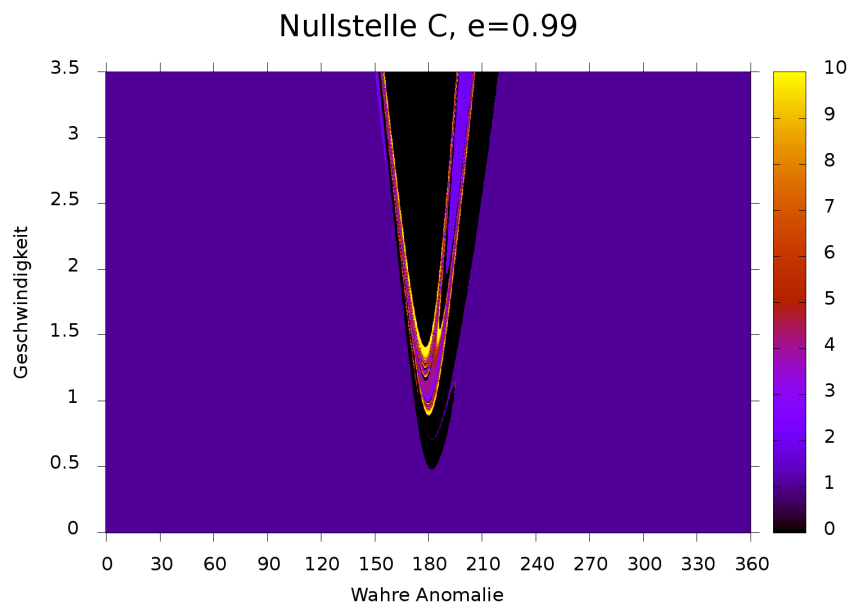


Abbildung 2.15.: Der Bereich erster Periode bleibt bei hoher Exzentrizität für eine Vielzahl von Anfangsbedingungen erhalten. Bei geringeren Exzentrizitäten ist der Bereich erster Periode bereits nach wenigen Nullstellen markant geschrumpft. (vgl. Abb. 2.3)

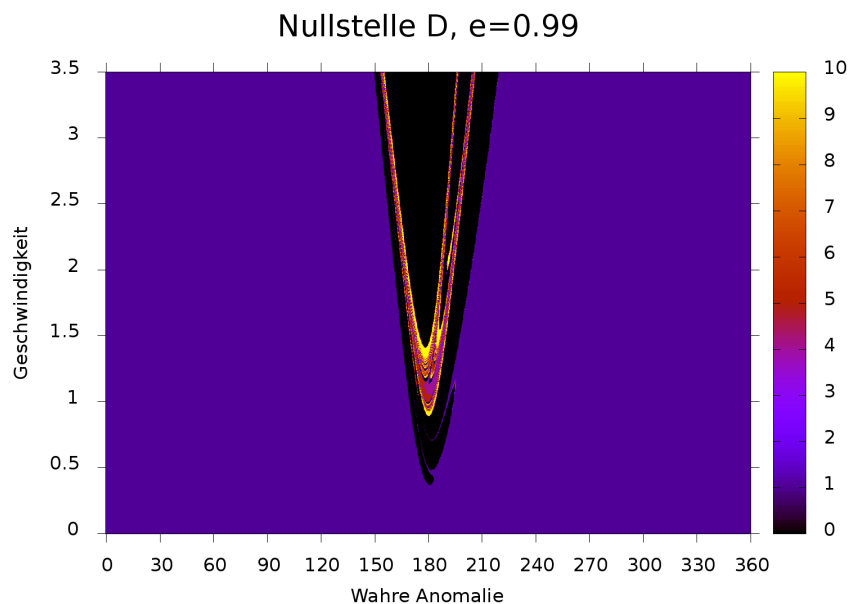


Abbildung 2.16.: Es bildet sich ein sichelförmiger, stabiler Bereich (gelb und roter Bereich in der Mitte des Bildes), der sich bei hohen Exzentrizitäten sehr schnell vom Übergangsbereich ablöst.

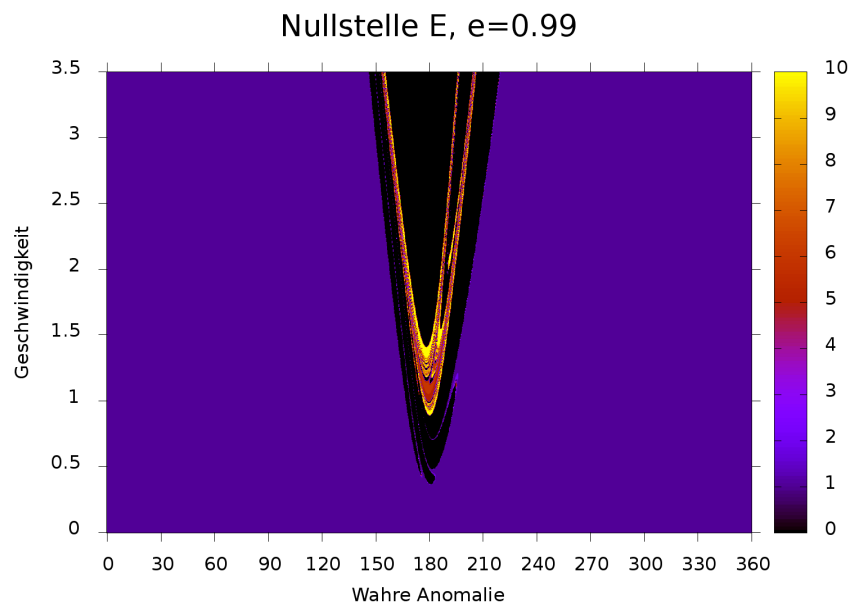


Abbildung 2.17.: Es bilden sich immer weitere Fluchtinseln, die den Bereich geringer Periodenzahl (violett) vom Bereich hoher Periodenzahl in der Mitte abgrenzen.

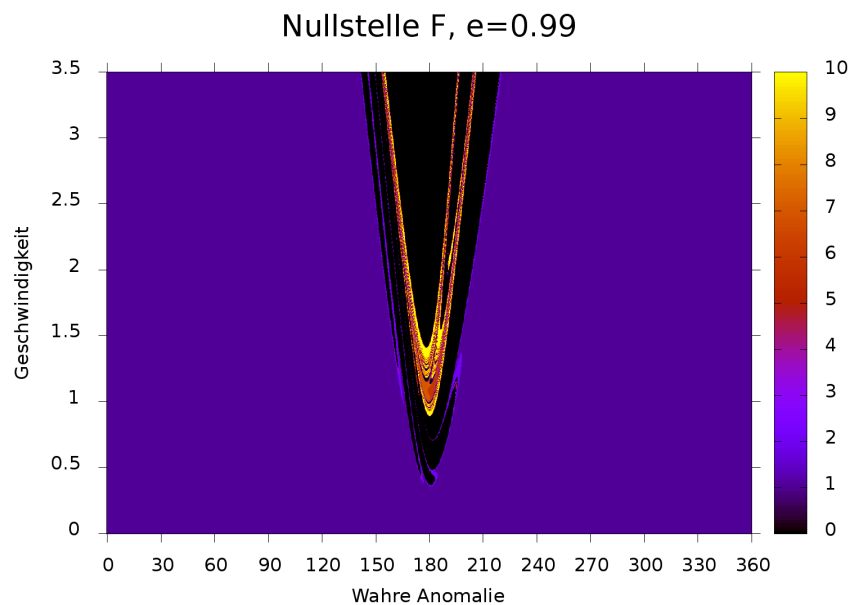


Abbildung 2.18.: Bei hohen Exzentrizitäten dauert es lange, bis Anfangsbedingungen nicht mehr in die erste Periode abgebildet werden. Eine großer Zahl von Anfangsbedingungen führt zu vielen Schwingungen und somit Nullstellen während der ersten Periode.

Die Abbildungen 2.13 bis 2.18 zeigen ein Mapping mit hoher Exzentrizität $e = 0.99$. Große Bereiche der gezeigten Anfangsbedingungen haben ihre ersten sechs Nullstellen noch während der ersten Periode der Primärkörper. Der Übergangsbereich, in dem höhere Periodenzahlen liegen ist im Vergleich zu niedrigeren Exzentrizitäten extrem schmal. Dies bedeutet, dass die Anfangsbedingungen sehr genau gewählt werden müssen, sofern die erste -oder eine der ersten- Nullstellen in einer höheren Periode liegen soll. Anfängliche Geschwindigkeiten können im Bereich des Periastrons sehr hoch gewählt werden, ohne dass das Teilchen das System verlässt. Dies liegt daran, dass der Abstand der Primärkörper vom Testteilchen bei derart hohen Exzentrizitäten sehr gering ist und somit schon beim Start eine starke Kraftwirkung auf das Teilchen vorliegt. Da die Energie im eingeschränkten Sitnikov-Problem nicht erhalten bleibt, verliert das Testteilchen einen großen Teil der kinetischen Energie und wird schnell in die x-y-Ebene zurückgezogen. Die Fluchtinseln sind deutlich elongiert und gekrümmt, folgen jedoch im Allgemeinen der schon bisher beobachteten Struktur. Bei hohen Exzentrizitäten dauert es lange, bis Anfangsbedingungen nicht mehr in die erste Periode abgebildet werden. Interessant zu beobachten ist ein gekrümmter Bereich hoher Periodenzahlen im Zentrum der Mappings. Dieser Bereich scheint zu hohen Nullstellen hin erhalten zu bleiben und wird nicht von großen Fluchtinseln oder Fluchtstreifen durchzogen(vgl. orange- gelber Bereich hoher Periodenzahl in Abb. 2.18).

2.2. Ausgewählte Mappings

2.2.1. Vergrößerungs-Mappings

In diesem Abschnitt befinden sich ausgewählte Vergrößerungen einiger, im vorherigen Kapitel gezeigten, Alexeev-Moser-Vrabec Mappings. In den Vergrößerungen sind die Feinstrukturen und die Sensibilität des Sitnikov-Systems auf minimale Änderungen der Anfangsbedingungen deutlicher erkennbar. Zusätzlich zu einer Vergrößerung wurde auch noch die Anzahl der berechneten Periodenzahlen erhöht, um einen besseren Einblick in den Übergang von niedrigen zu hohen Perioden zu ermöglichen. Die Farbskala in den Bildern ermöglicht eine Zuordnung der Periodenzahlen. Zuerst ist eine Vergrößerung des Übergangsbereichs bei $e = 0.6$ dargestellt.

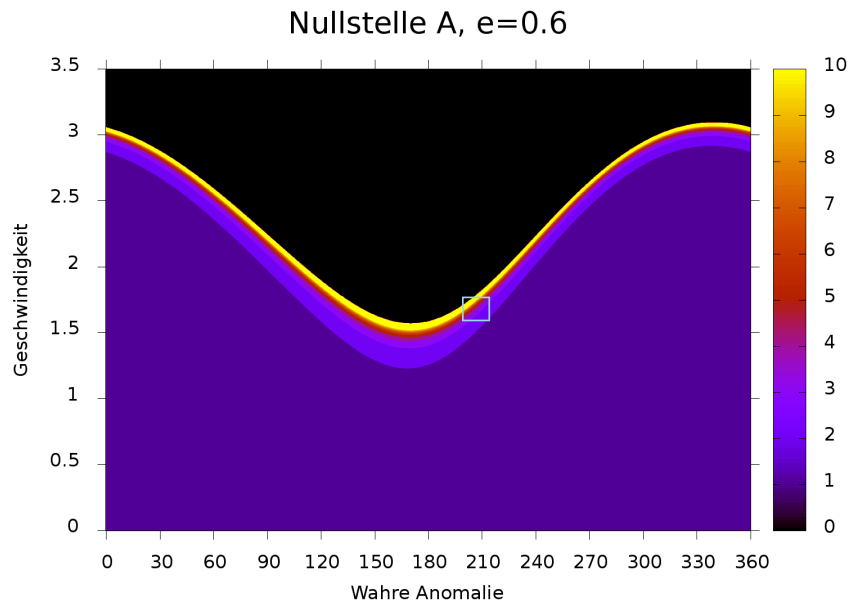


Abbildung 2.19.: Für $e = 0.6$ wurde ein Bereich vergrößert und mit einem feineren Raster von Anfangsbedingungen berechnet. Die Lage des vergrößerten Bereichs ist im Bild nicht exakt angegeben, da er zu klein ist um sinnvoll dargestellt zu werden, nur der Bereich in dem die Vergrößerung liegt ist mit dem Rechteck gekennzeichnet.

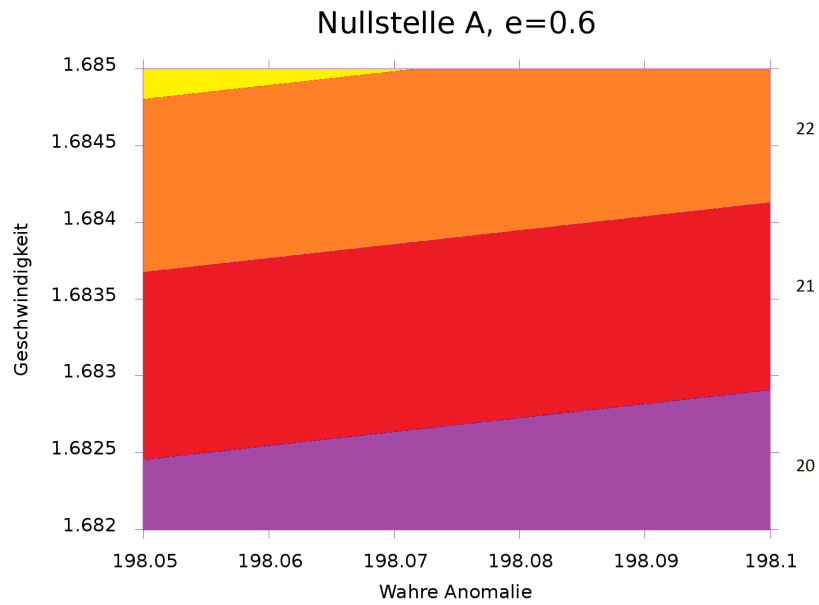


Abbildung 2.20.: Die erste Nullstelle zeigt den kontinuierlichen Übergang mit breiten Gebieten gleicher Periodenzahl. Die Vergrößerung zeigt einen Bereich von $198.05^\circ \leq \varphi_0 \leq 198.1^\circ$ und $1.682 \leq v_0 \leq 1.685$.

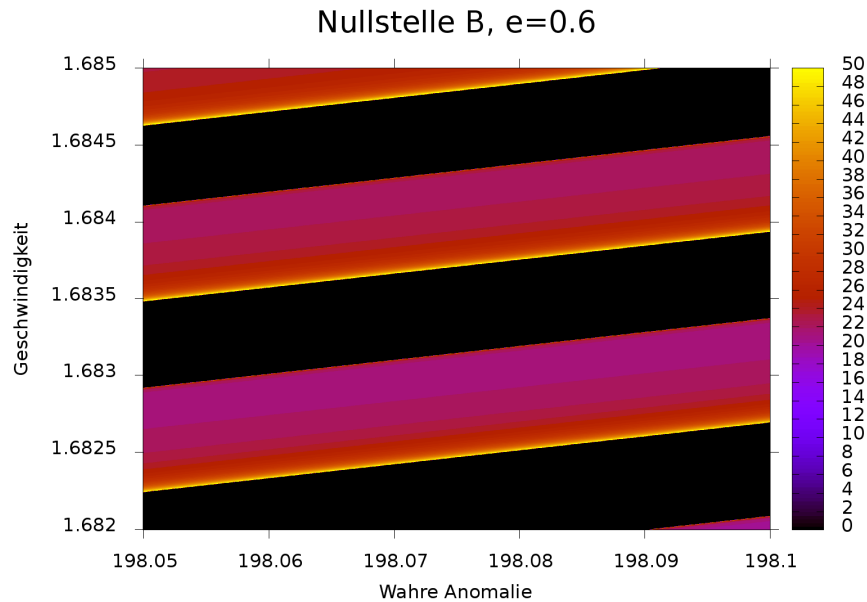


Abbildung 2.21.: Die zweite Nullstelle zeigt bereits Fluchtstreifen (schwarze Bereiche). Die Bereiche zwischen den Fluchtstreifen beinhalten die verschiedensten Periodenzahlen.

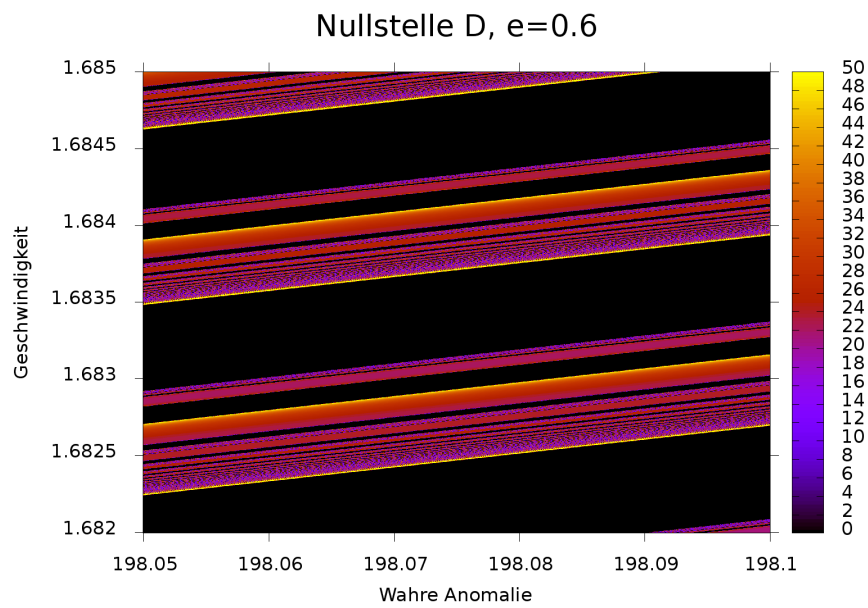


Abbildung 2.22.: Bei der vierten Nullstelle zeigt sich bereits deutlich die Feinstruktur. Eine Vielzahl von breiteren und schmälern Fluchtstreifen durchziehen das Gebiet.

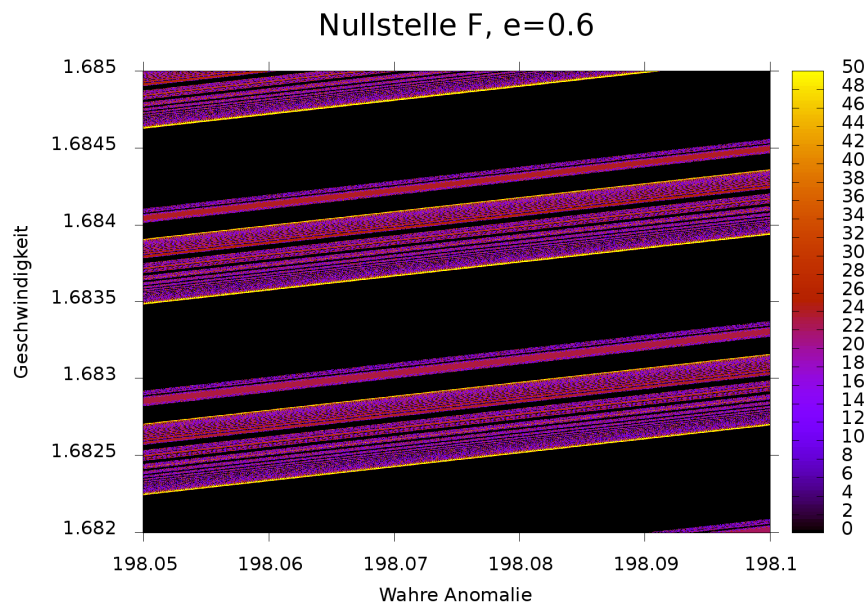


Abbildung 2.23.: Je höher die Nullstelle wird, desto feiner wird die Struktur. Es kommen keine breiten Fluchtstreifen hinzu, nur schmälere.

Für die Exzentrizität $e = 0.6$ wurden 4 Nullstellen ausgewählt, um durch eine Vergrößerung die Feinstruktur noch besser darzustellen. Nullstelle "A" ist als Vergleich

gezeigt, hier ist der Übergangsbereich noch kontinuierlich mit nur 4 aufeinander folgenden Periodenzahlen und ohne Fluchtbereich. Ganz anders ist das Bild bei der Nullstelle “B”. Hier haben sich Fluchtbereiche (schwarze Bereiche) gebildet und alle bis zur Periodenzahl 50 berechneten Gebiete sind vorhanden. In Abbildung 2.22 der Nullstelle “D” sieht man bereits eine Vielzahl feinsten Fluchtlinien, die den Bereich der verbleibenden Anfangsbedingungen durchziehen. Es zeigt sich eine fraktal-ähnliche Struktur der Übergangsbereiche, die sich zu höheren Nullstellen hin immer feiner gestaltet. Nullstelle “F” bildet die letzte berechnete Nullstelle und lässt auf eine weitere Verfeinerung des Musters schließen. Zu bemerken bleibt, dass die Dicke der in Abb. 2.21 für die Nullstelle “B” gezeigten Streifen von im System verbleibenden Anfangsbedingungen erhalten bleiben. Die bei jeder Nullstelle neu hinzukommenden Fluchtbereiche scheinen sich immer im Inneren der ursprünglichen stabilen Streifen zu bilden, nie an deren Rändern. Würden sich Fluchtbereiche an den Rändern bilden, hätte dies eine Verjüngung der Streifen zur Folge. Bei der Betrachtung der Abb. 2.22 und 2.23 werfen sich zwei Fragen auf:

1. Wie sieht die Feinstruktur bei noch stärkeren Vergrößerungen aus?
2. Wie sieht die Feinstruktur bei höheren Nullstellen aus?

Um diese Fragen zu untersuchen werden erneut Rechnungen durchgeführt, zum einen mit einem kleineren Intervall von Anfangsbedingungen, mit Intervallschritten im Bereich von 10^{-7} jeweils bei der Wahren Anomalie sowie bei der Geschwindigkeit. Zum anderen wird der Programmcode an die neuen Erfordernisse angepasst, um noch höhere Nullstellen berechnen zu können. Dies wird nur für eine kleine Anzahl von Exzentrizitäten durchgeführt, da der numerische Rechenaufwand zu höheren Nullstellen immer größer wird, soll die Auflösung von 2000×2000 Anfangsbedingungen pro Bild beibehalten werden.

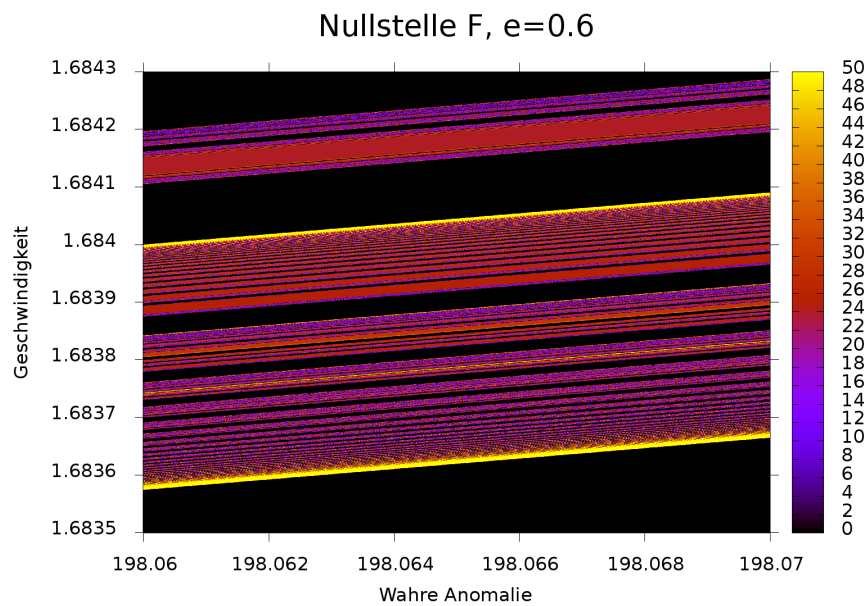


Abbildung 2.24.: Je höher die Nullstelle wird, desto feiner wird die Struktur von Fluchtstreifen. Die Abbildung stellt eine Vergrößerung eines der Streifen aus Abb. 2.23 dar.

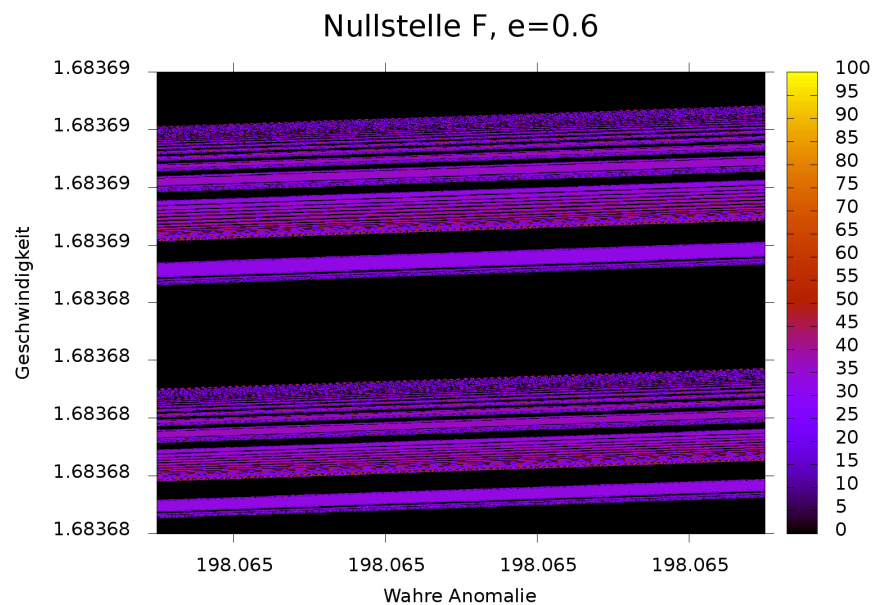


Abbildung 2.25.: Die selbstähnliche Struktur ist deutlich sichtbar. Der hier vergrößerte Bereich weist starke Ähnlichkeit mit den Strukturen aus Abb. 2.23 auf. Die Strukturen scheinen nur um 180° gedreht, auf dem Kopf stehend. Dies ist ein Beispiel für Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz, Eigenschaften von Fraktalen.

In den Abbildungen 2.24 und 2.25 sind starke Vergrößerungen der Übergangsstruktur bei der Exzentrizität $e = 0.6$ dargestellt. Deutlich erkennbar ist die Ähnlichkeit der vergrößerten Region in Abb. 2.25 zu den Strukturen in Abb. 2.23 bzw. auch in Abb. 2.24. Die unterschiedlichen Farben der verbliebenen Streifen sind auf eine unterschiedliche Periodenzahl in den jeweiligen gezeigten Bereichen zurück zu führen. Diese Bereiche stellen eine dem Cantor-Set [Cantor, 1883] vergleichbare Struktur in Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{z}_0$ dar. Beim Cantor-Set handelt es sich um eine Menge, aus deren Mitte ein Bereich entfernt wird. Aus den Verbleibenden Bereichen wird wiederum der Mittlere Bereich entfernt. So verfährt man nun bei jeder Iteration. Somit ergibt sich ein Set von nicht zusammenhängenden Punkten -im Fall des Sitnikov-Problems Streifen. Dieses Verhalten der Anfangsgeschwindigkeit wird auch in [Kovács, 2009] beschrieben, wobei nicht die Periodenzahlen, sondern die Fluchtzeiten von Sticky-Orbits untersucht wurden. Bei jeder Iteration, d.h. bei jeder neuen Nullstelle erhöht sich die Anzahl der Streifen.

2.2.2. Ausgewählte Mappings

In diesem Abschnitt werden ausgewählte Mappings vorgestellt, um einerseits Besonderheiten aufzuzeigen, die bei Berechnungen festgestellt wurden und andererseits, um die Frage zu klären, wie sich die Feinstruktur der Mappings bei hohen Nullstellen verhält. Betrachtet man die Abbildungen in den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3, so fällt auf, dass die Fluchtinseln sich immer unterhalb des Übergangsbereichs in der Nähe der Apastron-Position bilden, vor allem in den Abb. 2.17 und 2.18 ist dies deutlich erkennbar. Der Bereich von Anfangsbedingungen darüber wird höchstens von dünnen Fluchtstreifen durchzogen, führt jedoch während der ersten sechs Nullstellen in keine ausgedehntere Fluchtinsel. Um die Frage des Verhaltens bei höheren Nullstellen zu klären wurde der Programmcode leicht verändert, um nun die Nullstellen Nr.: 100, 150, 175 und 200 zu berechnen. Da der Rechenaufwand zu höheren Nullstellen immer größer wird wurde die Auflösung, also die Menge der berechneten Anfangsbedingungen leicht reduziert von zuvor 2000×2000 Anfangsbedingungen auf nun nunmehr 1500×1500 Anfangsbedingungen. Die Bilder werden dadurch grobkörniger, verlieren jedoch nichts an ihrer Aussagekraft. Diese Berechnungen wurden für Exzentrizitäten von $e = 0.1$, 0.575 und 0.99 durchgeführt.

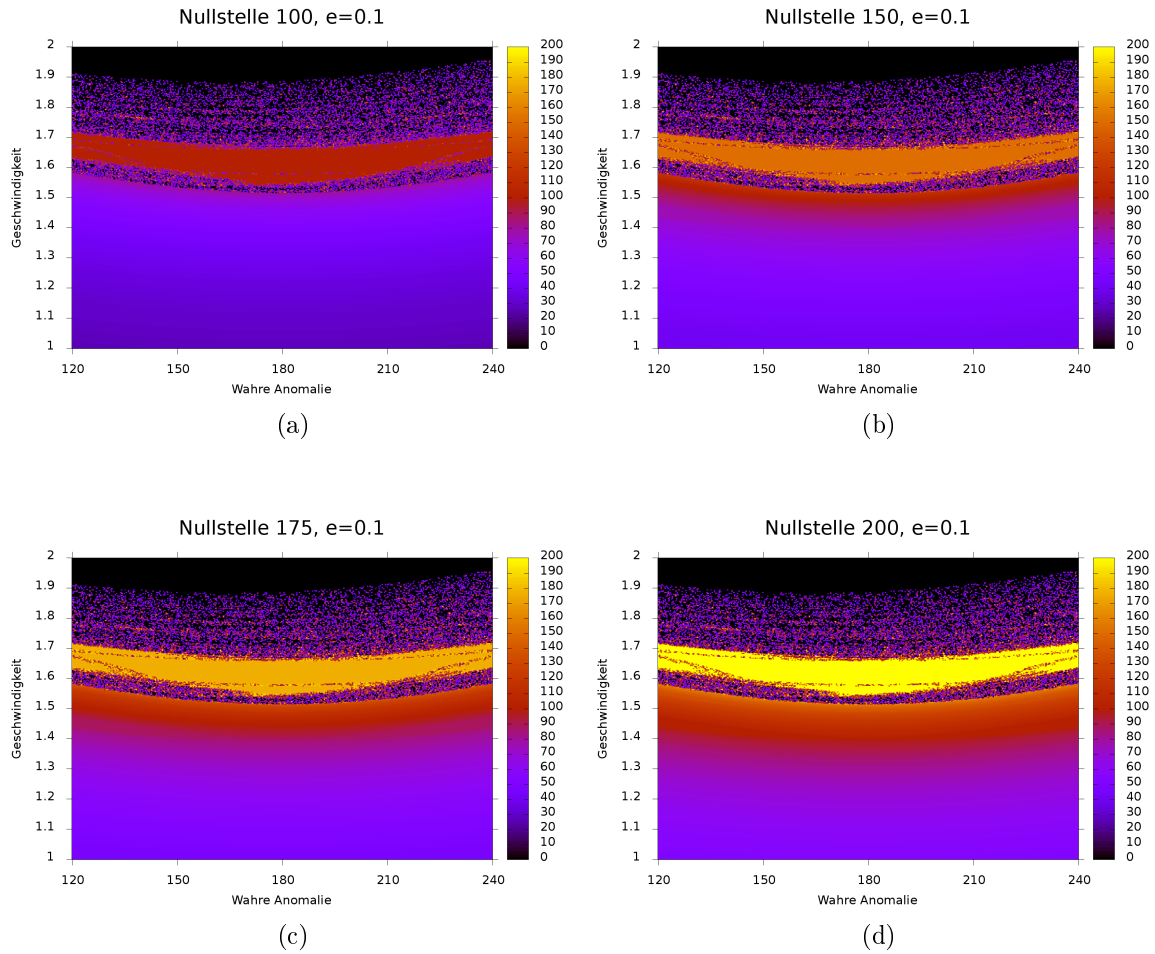


Abbildung 2.26.: Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings bei einer Exzentrizität von $e = 0.1$. In diesem Fall wurde der Programmcode geändert, um die Berechnung höherer Nullstellen zu ermöglichen. In den Bildern sieht man 4 Nullstellen zwischen der 50. Nullstelle und der 200. Nullstelle. Es bildet sich ein sichelförmiger Bereich heraus, innerhalb dessen kein Orbit auf eine Fluchtbahn gelangt. Um diesen zusammenhängenden Bereich herum führen viele Anfangsbedingungen auf einen Fluchtorbit. Der Bereich der Fluchtorbits vergrößert sich bei geringeren Exzentrizitäten nur sehr langsam. Die Farbänderung in den Bildern ist darauf zurück zu führen, dass zwar insgesamt bis 200 Rotationen der Primärkörper gerechnet wird, bei geringeren Nullstellen jedoch diese 200 Rotationen noch von kaum einer Anfangsbedingung erreicht werden, bzw. auf den Bildern nicht sichtbar sind.

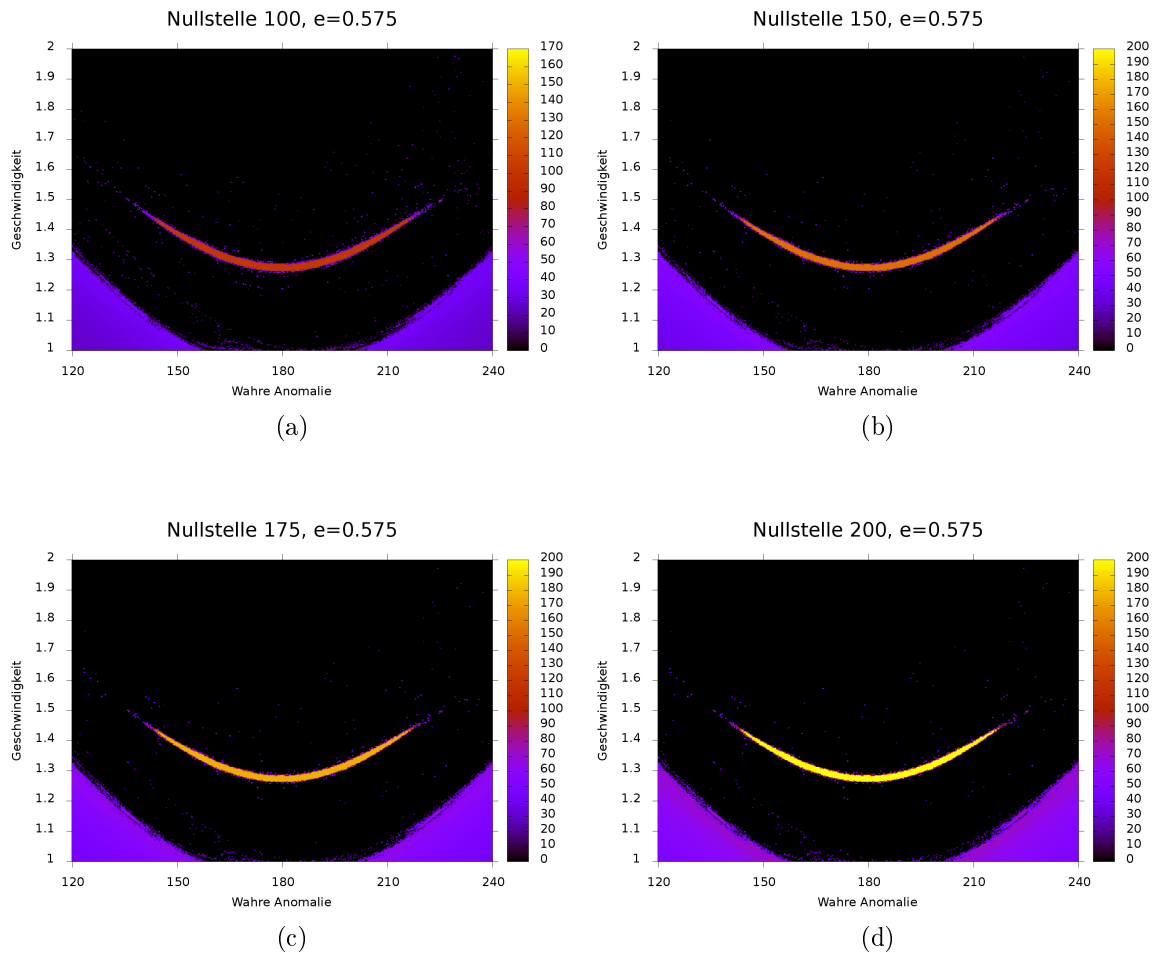


Abbildung 2.27.: Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings bei einer Exzentrizität von $e = 0.575$. Die Umgebung des sichelförmigen Bereichs ist bereits bei geringen Nullstellen freigeräumt. Nur mehr wenige winzige Inselchen befinden sich auf Orbits, die nicht auf eine Fluchtbahn führen. Zu höheren Nullstellen hin werden diese immer weniger. Der sichelförmige Bereich ist im Vergleich zu geringeren Exzentrizitäten schmaler und stärker gekrümmt. Deutlich erkennbar ist auch eine starke Ausfransung des Übergangsbereichs, hier lassen sich keinerlei Muster erkennen, nur, dass die Ausfransung mit höheren Nullstellen stärker wird.

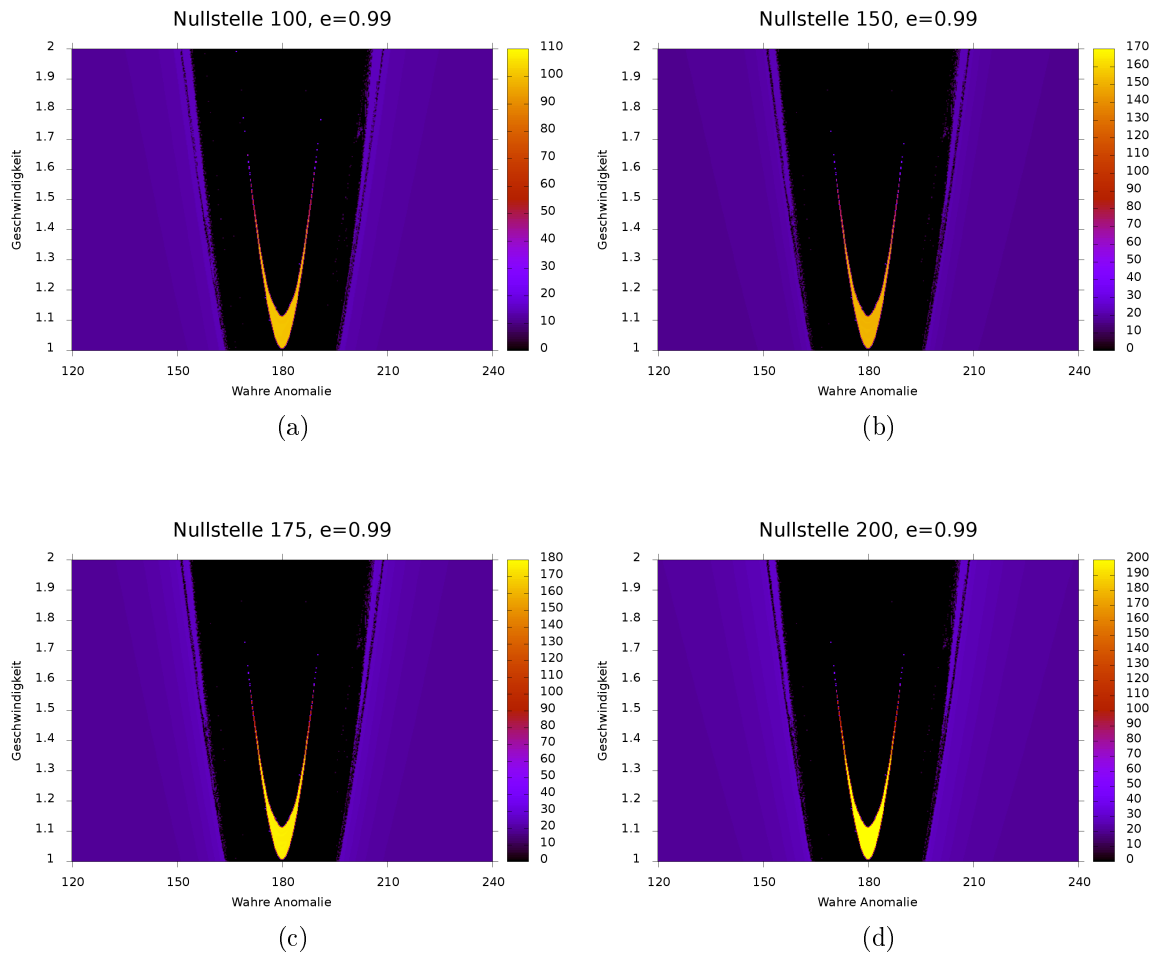


Abbildung 2.28.: Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings bei einer Exzentrizität von $e = 0.99$. Der sichelförmige Bereich ist stark gekrümmt und seine Spitzen laufen zu kleinen abgegrenzten Inselchen aus, die sich jedoch bei höheren Nullstellen langsam auflösen.

In den Abbildungen der hohen Nullstellen ist deutlich erkennbar, wie sich ein sichelförmiger geschlossener Bereich von Anfangsbedingungen bildet, der nicht von Fluchtstreifen durchzogen wird. Bei niedrigeren Exzentrizitäten dauert es länger, bis die Gebiete darüber und darunter von Anfangsbedingungen, die auf dauerhaftere Orbits führen, freigeräumt sind. Bei höheren Exzentrizitäten ist der sichelförmige Bereich bereits innerhalb der ersten 50 Nullstellen fast frei von verbliebenen Orbits. Gefunden wurde diese sichelförmige Insel zuerst für die Exzentrizität $e = 0.575$, wobei ein Überblicksmapping der 50. Nullstelle berechnet wurde (Abb. 2.29). Die verbleibenden Orbits im Übergangsbereich bilden immer schmalere Streifen, die nur noch bei starker Vergrößerung und feiner Schrittweite der Anfangsbedingungen sichtbar sind.

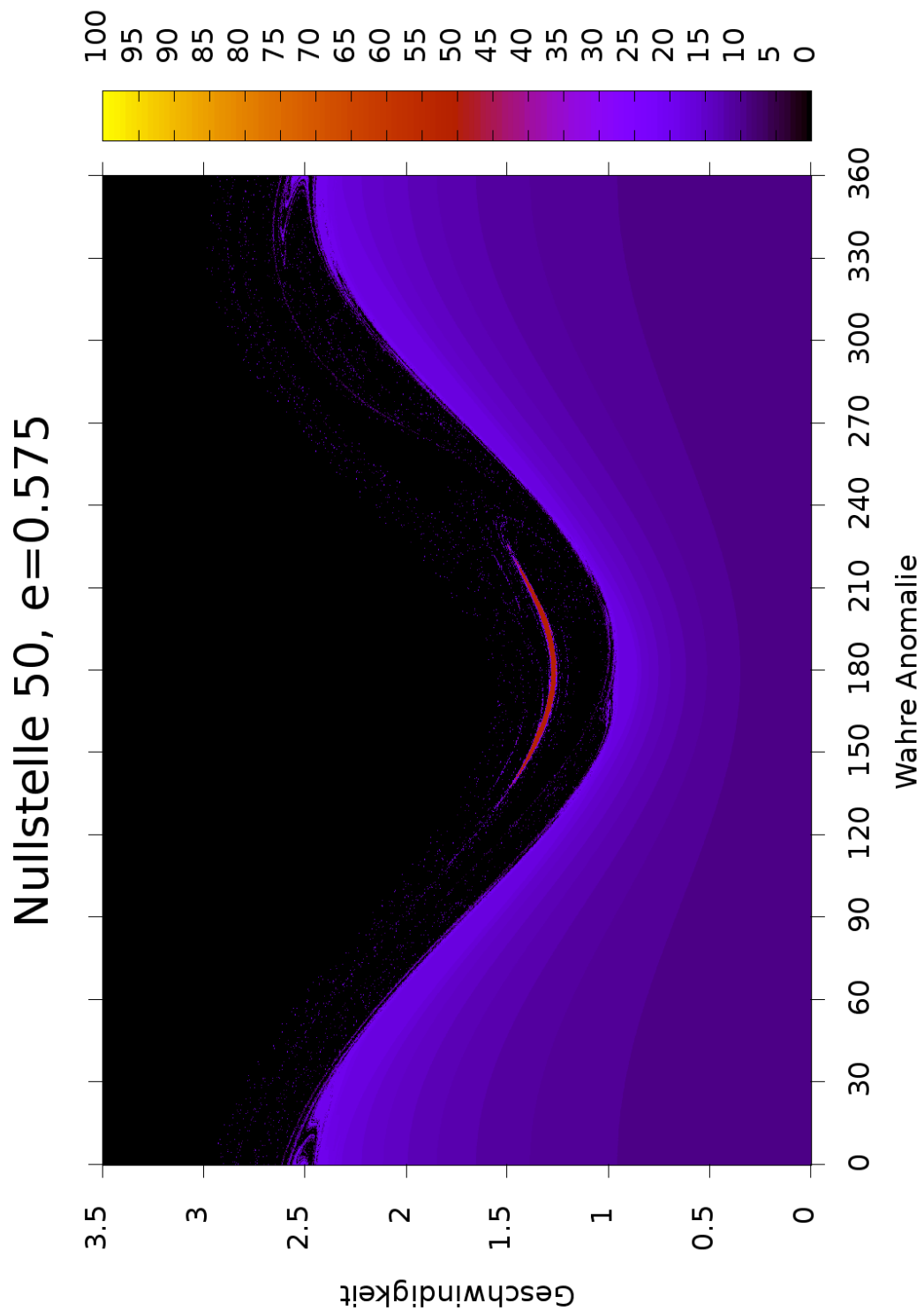


Abbildung 2.29.: Erstes Bild der sichelförmigen stabilen Insel bei $e = 0.575$ in einer Überblicks-Map. Deutlich erkennbar ist, wie sich die von Fluchtinseln und Streifen durchzogenen Bereiche auflösen und ausfransen. Es bleiben nur wenige Anfangsbedingungen übrig deren Orbits mehr als 50 Nullstellen besitzen.

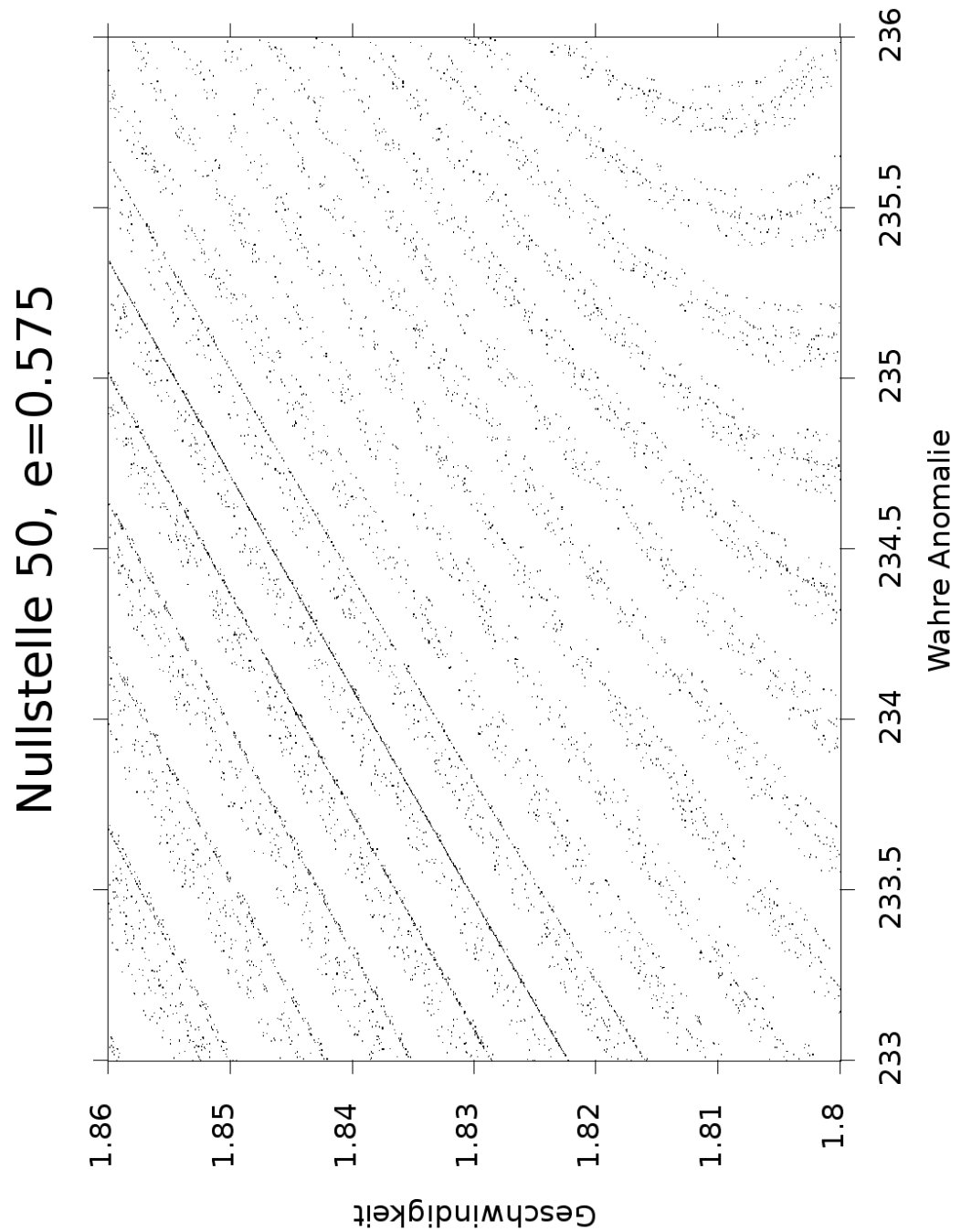


Abbildung 2.30.: Vereinzelte Orbits haben eine höherer Lebensdauer. Aufgrund der zu geringen Auflösung der Berechnung erscheinen sie punktförmig verteilt. Gerade noch ist erkennbar, dass sie auf Linien liegen.

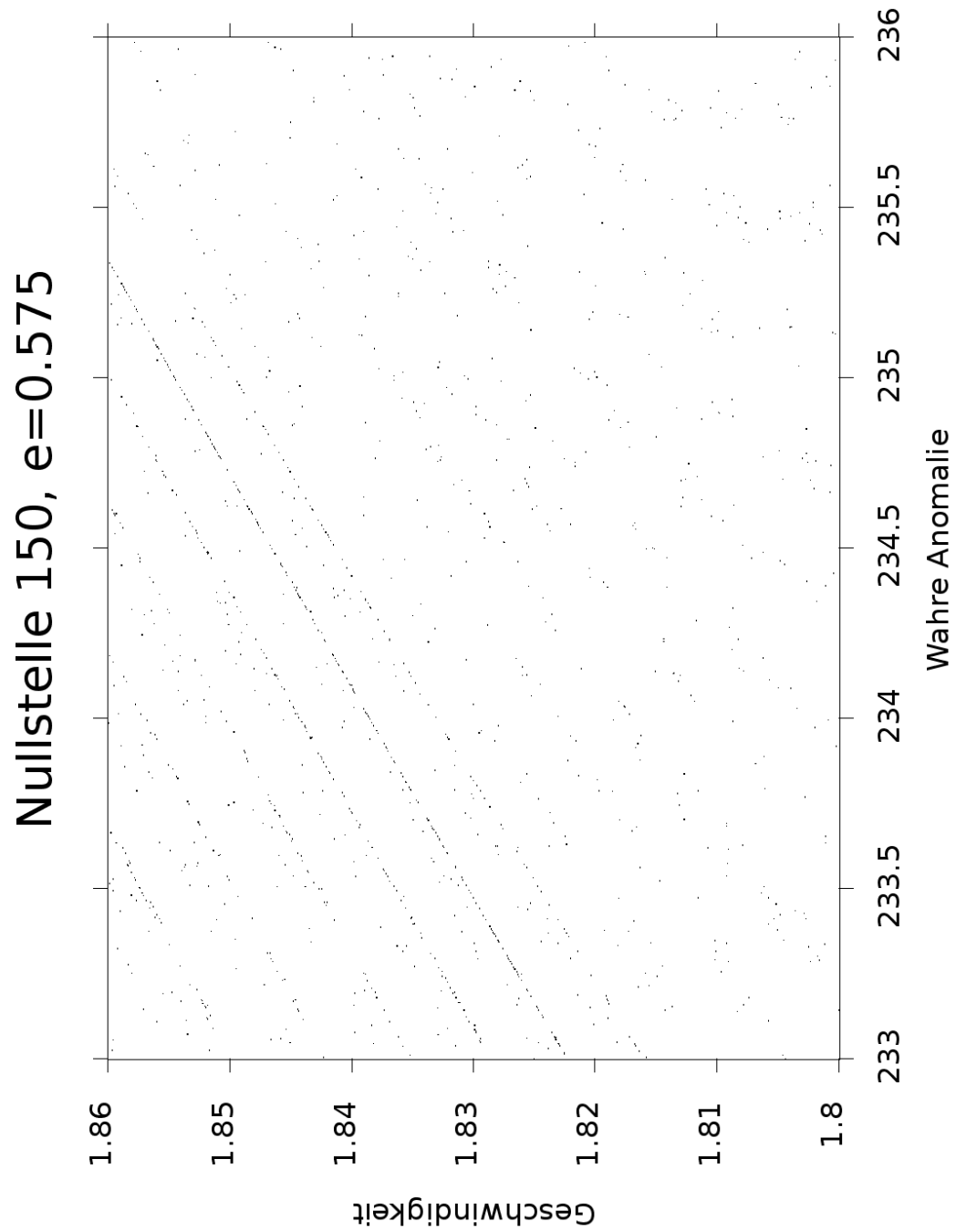


Abbildung 2.31.: Die Dichte der Punkte nimmt mit höheren Nullstellen stark ab, man erkennt immer noch die Linienstruktur.

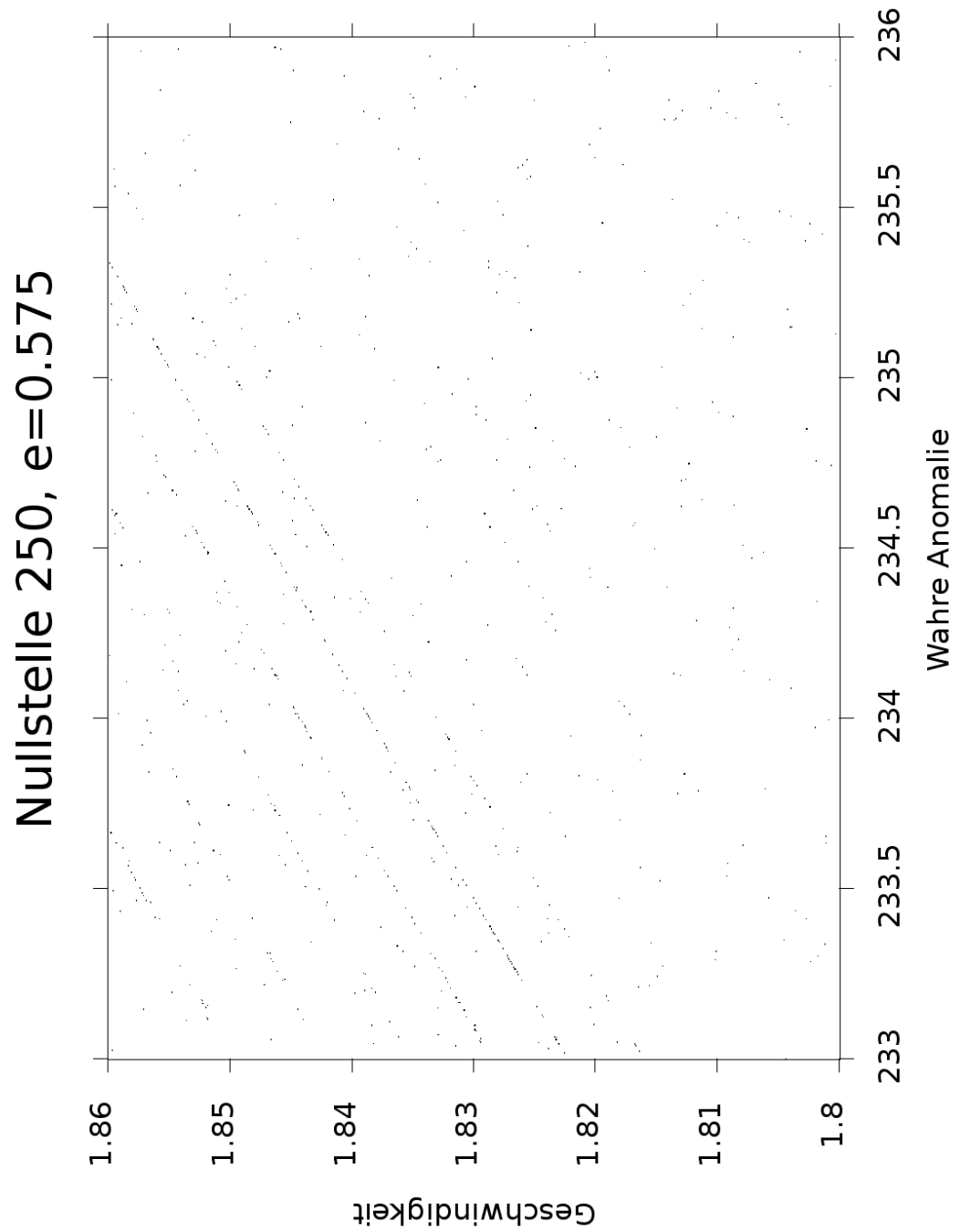


Abbildung 2.32.: Nach 250 Nullstellen sind nur mehr wenige Orbits verblieben, die Linienstruktur ist kaum noch wahr zu nehmen.

In den Abb. 2.30 bis 2.32 ist erkennbar, wie sich die Linien- bzw. Streifenstruktur bei hohen Nullstellen verändert. Die Streifen werden immer schmaler und sind in den Abbildungen nur noch als vereinzelte Punkte fest zu stellen. Dies liegt an der zu geringen Auflösung der Berechnung, da nur diskrete Anfangsbedingungen berechnet werden. Deswegen kann auch keine kontinuierliche Struktur mit diesen Berechnungen entstehen. Da aber die Fluchtstreifen immer in Richtung der Wahren Anomalie entstehen, und nicht in Richtung der Geschwindigkeit, sollten eigentlich kontinuierliche sehr dünne Streifen verbleiben, in denen sich stabile Orbits aufhalten können. Die Abbildung 2.29 zeigt unregelmäßige Ausfransungen im verbliebenen Übergangsbereich, die bei genauerer Betrachtung entlang von Streifen liegen (Abb. 2.30 bis 2.32). Da diese Streifen Anfangsbedingungen darstellen, die auf einen Fluchtorbit führen, kann man danach fragen, welche die geringste Anfangsgeschwindigkeit ist, bei der das Teilchen sicher noch stabil bleibt für $t \rightarrow \infty$. Dieser Frage wird in Abschnitt 2.2.3 nachgegangen, wobei eine leicht veränderte Version der gezeigten Mappings verwendet wird.

Um die Orbits in den sichelförmigen Bereich zu untersuchen, wurden für die Exzentrizitäten $e = 0.1, 0.575$ und 0.99 Anfangsbedingungen ausgewählt, die innerhalb dieses Bereichs liegen. Es wurden jeweils drei Anfangsbedingungen ausgewählt und integriert: eine in der linken Spitze, eine im mittleren Bereich und eine in der rechten Spitze des sichelförmigen Bereichs. Diese Auswahl ist willkürlich getroffen und stellt nur eine kleine Menge der möglichen Startbedingungen für Sitnikov-Orbits dar. Die ausgewählten Anfangsbedingungen sind in Tab. 2.1 angeführt.

φ_0	$\dot{z}_0$	φ_0	$\dot{z}_0$	φ_0	$\dot{z}_0$
121.5°	1.65	150°	1.3877	173.7°	1.33
180°	4.56	180°	1.275	180°	1.1
236°	1.64	211°	1.4	186.7°	1.36

Tabelle 2.1.: Anfangsbedingungen der Orbits bei $e=0.1$ (links) $e=0.575$ (mittig) und $e=0.99$ (rechts). Der Startpunkt ist in allen Fällen $z_0 = 0$.

Für diese Anfangsbedingungen sind in den Abb. 2.33 und Abb. 2.34 Zeit-Ort-Diagramme gezeigt, um einen Überblick der vorgefundenen stabilen Orbits zu geben.

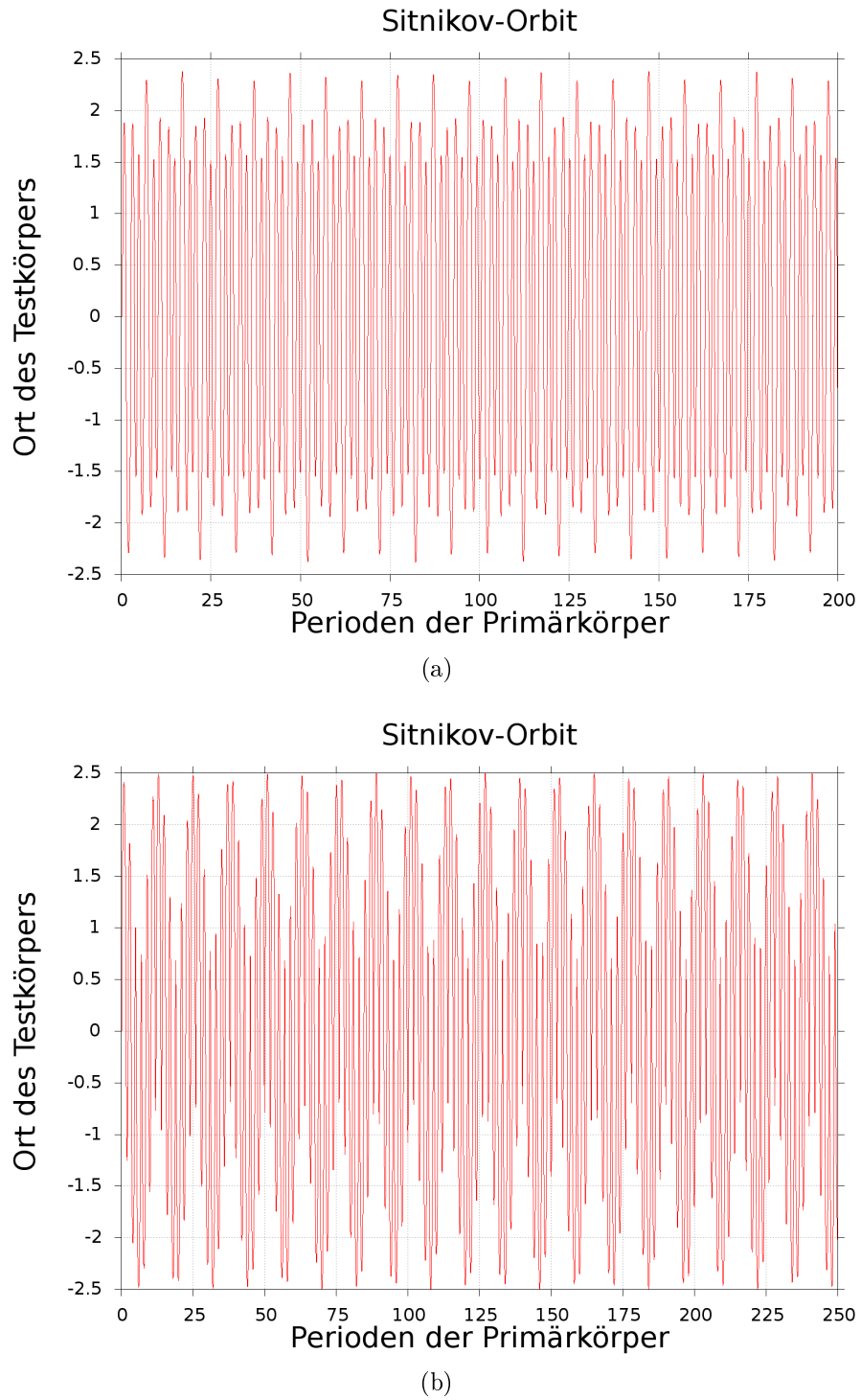
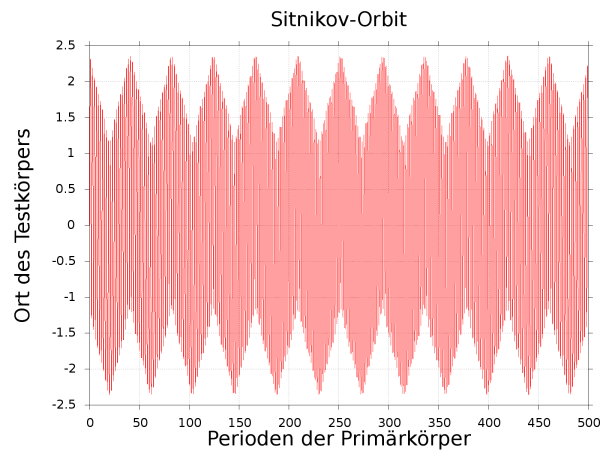
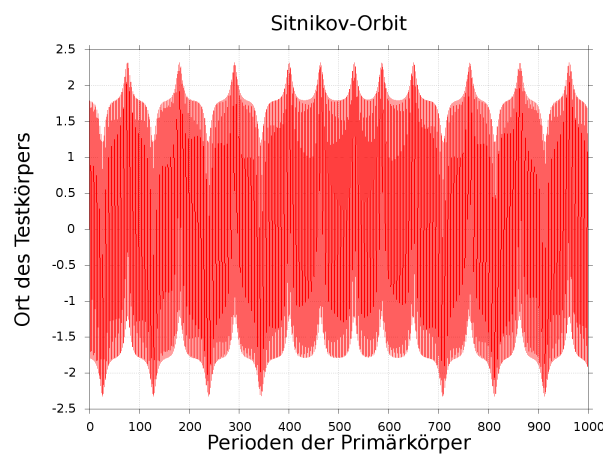


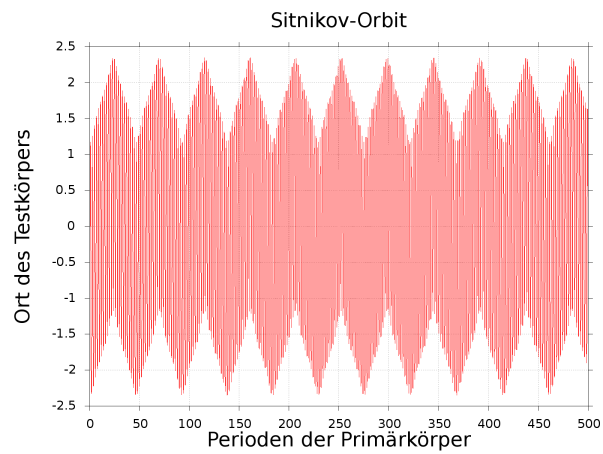
Abbildung 2.33.: Orbits innerhalb des sichelförmigen Bereichs. Die gefundenen Orbits sind regelmäßig.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 2.34.: Orbits bei der Exzentrizität $e = 0.575$. Die Schwingungen des Testkörpers zeigen Regelmäßigkeiten, es kommen jedoch plötzliche Änderungen im Schwingungsverhalten vor.

Bei den in den stabilen Bereichen berechneten Orbits zeigte sich bei der mittleren untersuchten Exzentrizität $e = 0.575$ das interessanteste Verhalten. Die Einhüllende der Amplitudenmaxima bzw. -minima weist in allen Fällen reguläre Züge auf. Es handelt sich um Resonanzphänomene, die aber auch einen merkbar irregulären Anteil haben, so ist in Abb. 2.34b ein Orbit berechnet, der ein teils regelmäßig Muster zeigt, dass plötzlich unregelmäßig wird (alle Spitzen zeigen nach oben). Diese Unregelmäßigkeit verschwindet danach wieder, tritt jedoch später (in dem Bild nicht gezeigt) in ähnlicher Form wieder auf. Bei den gezeigten Orbits bei $e = 0.575$ handelt es sich um mit einer Schwebung überlagerten 2:1 Resonanzen. Bei den beiden anderen Exzentrizitäten $e = 0.1$ und 0.99 konnte keine einfache Resonanz gefunden werden. Um das Verhalten der Anfangsbedingungen in diesen Bereichen zu studieren, wurden Surfaces of Section in ausgewählten Teilen der jeweiligen stabilen Bereiche berechnet. In diesen SOS ist erkennbar, dass sich die Anfangsbedingungen in den stabilen Sicheln im Bereich der 2:1 Resonanzinseln befinden. Zusätzlich sind weitere Resonanzen höherer Ordnung vorhanden. Es wurden keine Orbits in der Hauptinsel gefunden, nur die Orbits um die stabilen 2:1 Resonanzpunkte. Die Anfangsbedingungen der gezeigten Orbits sind in Tab. 2.1 angegeben.

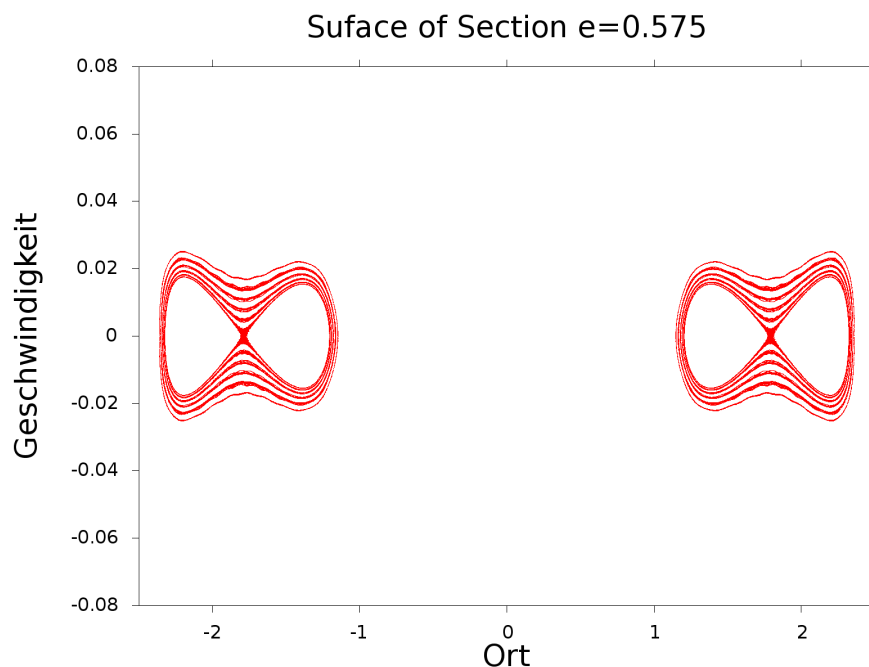


Abbildung 2.35.: Surface of Section bei $e=0.575$ im stabilen, sichelförmigen Bereich der Anfangsbedingungen.

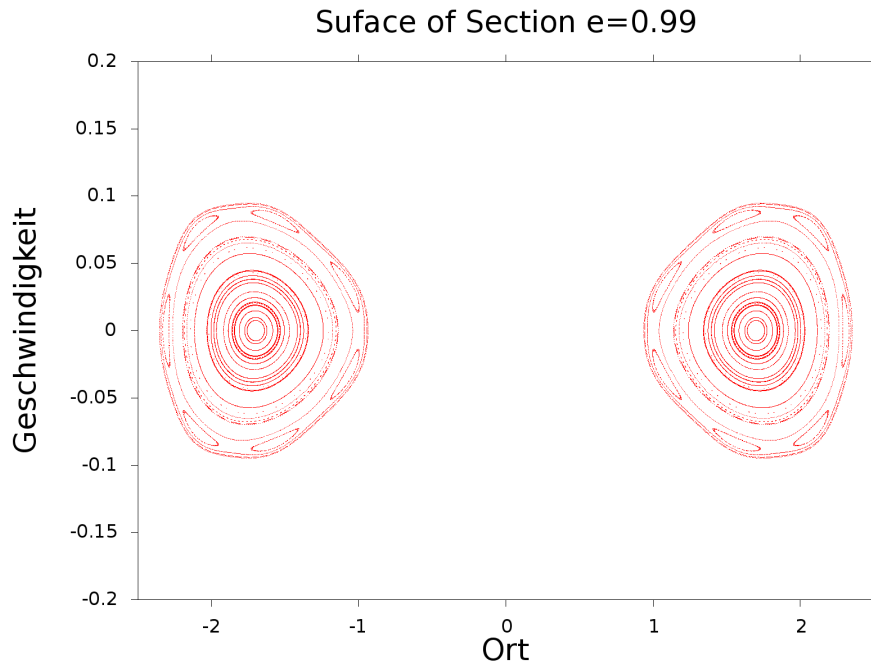


Abbildung 2.36.: Surface of Section bei $e=0.99$ im stabilen, sichelförmigen Bereich der Anfangsbedingungen.

2.2.3. Escape-Mappings

Betrachtet man den zeitlichen Verlauf eines einzelnen Sitnikov-Orbits, so sind, je nach Anfangsbedingung, drei verschiedenen Wege für das Testteilchen offen:

Die erste Möglichkeit ist, dass es für immer stabil bleibt und um das Massenzentrum der Primärkörper schwingt. Die beiden anderen Möglichkeiten sind jeweils eine Flucht des Teilchens und zwar mit $z(t) \rightarrow +\infty$ oder $z(t) \rightarrow -\infty$. Die stabilen Bereiche lassen sich aus den Mappings der vorhergehenden Kapitel gut ablesen, jedoch ist bei der bisherigen Berechnung jegliche Information, ob das Teilchen gegen $\pm\infty$ entweicht nicht vorhanden. Um diese Fragestellung zu klären wurde der Programmcode erneut modifiziert. Die Symbole für das Mapping wurden -anstatt die Sitnikov-Sequenz zu verwenden- auf die Menge $\{-1, 0, 1\}$ gesetzt. Führt eine bestimmte Anfangsbedingung zu einer Wiederkehr des Teilchens bei der betrachteten Nullstelle, so wird der Wert an dieser Stelle auf 0 gesetzt. Führt die Anfangsbedingung jedoch zu einer Flucht mit $z(t) \rightarrow +\infty$ so wird der Wert bei dieser Nullstelle auf +1 gesetzt, analog gilt für $z(t) \rightarrow -\infty$ der Wert -1. Derartige Escape-Mappings wurden für ausgewählte Exzentrizitäten berechnet und sind in den Abb. 2.37 bis 2.41 dargestellt. Die erste Nullstelle "A" wurde nicht abgebildet, da hierbei nur eine Flucht $z(t) \rightarrow +\infty$ möglich ist oder eine Rückkehr des Testteilchens, da das Teilchen immer mit einer positiven Geschwindigkeit gestartet wird. Erneut wurden die verschiedenen Bereiche farblich gekennzeichnet. Schwarz stellt

alle Orbits mit $z(t) \rightarrow -\infty$ dar, gelb jene mit $z(t) \rightarrow +\infty$ und rot eingefärbt sind die verbleibenden Orbits.

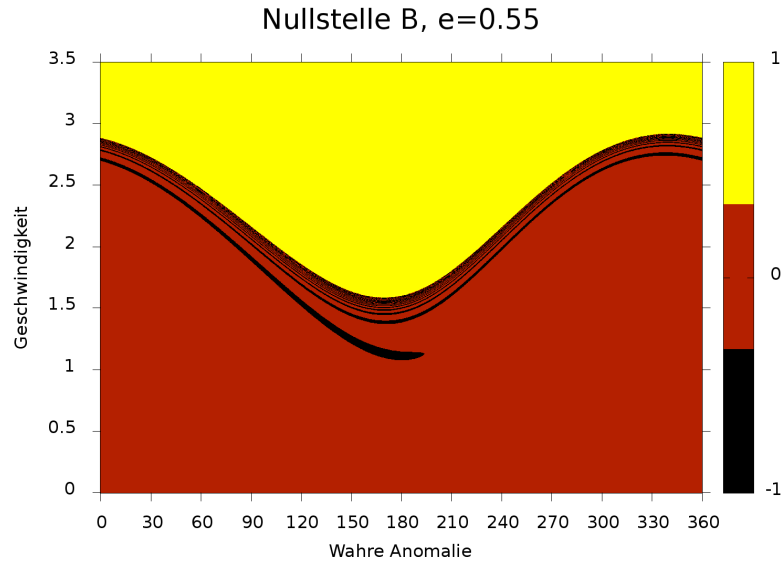


Abbildung 2.37.: Unterschiedliches Fluchtverhalten der Anfangsbedingungen. Es bildet sich eine Fluchtinsel sowie Fluchtstreifen mit negativem Vorzeichen ($z(t) \rightarrow -\infty$). Diese Anfangsbedingungen haben das System zwischen der ersten- und der zweiten Nullstelle (“A” bzw. “B”) verlassen.

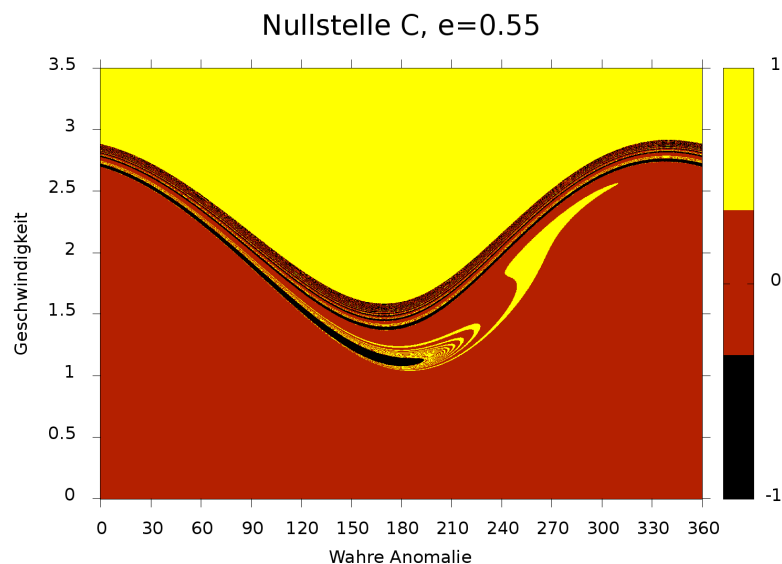


Abbildung 2.38.: Zwischen der zweiten und dritten Nullstelle kommt eine Fluchtinsel mit positivem Vorzeichen ($z(t) \rightarrow +\infty$) hinzu. Um die erste, negative Fluchtinsel bilden sich positive Streifen.

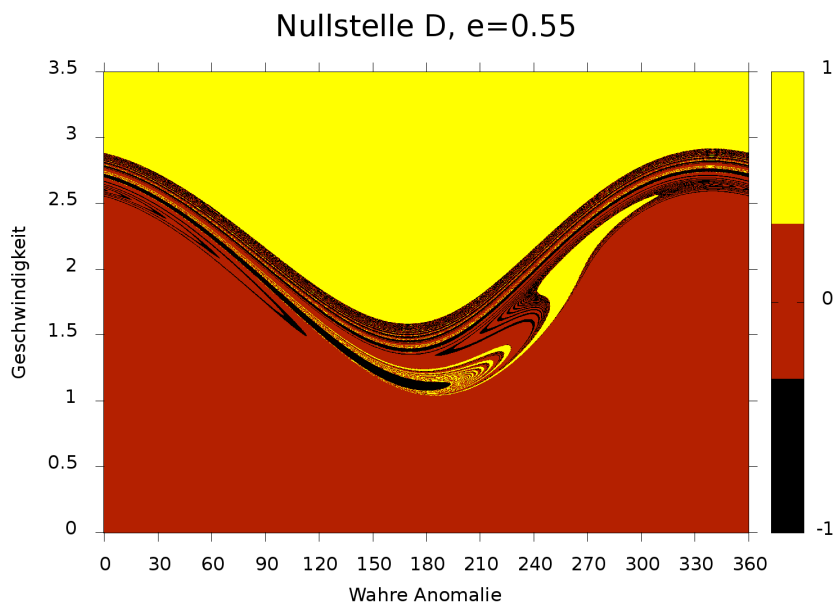


Abbildung 2.39.: Abwechselnd bilden sich nun Fluchtbereiche mit positivem und negativem Vorzeichen. Die Gebiete unterschiedlicher Vorzeichen umranden einander.

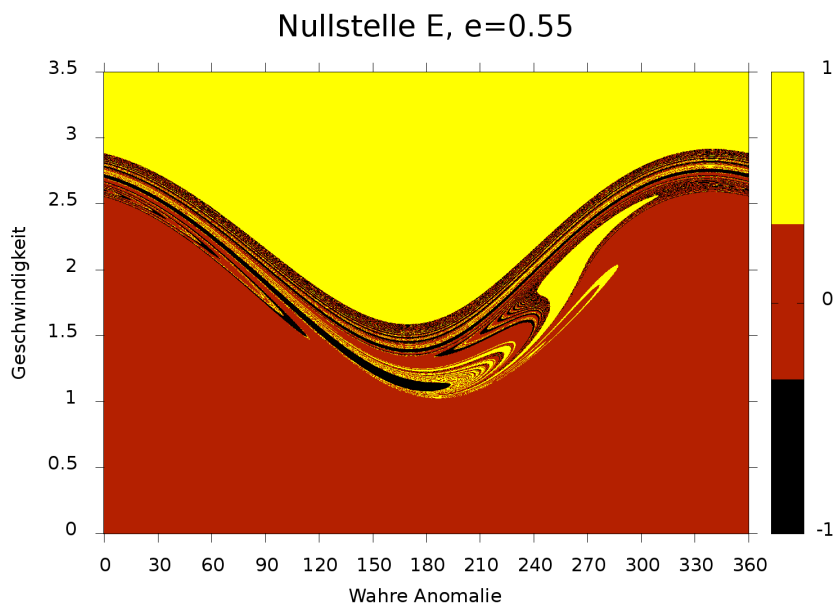


Abbildung 2.40.: Die sich umrandenden Bereiche unterschiedlicher Fluchtrichtung bilden die beobachtbaren, immer feiner werdenden Strukturen.

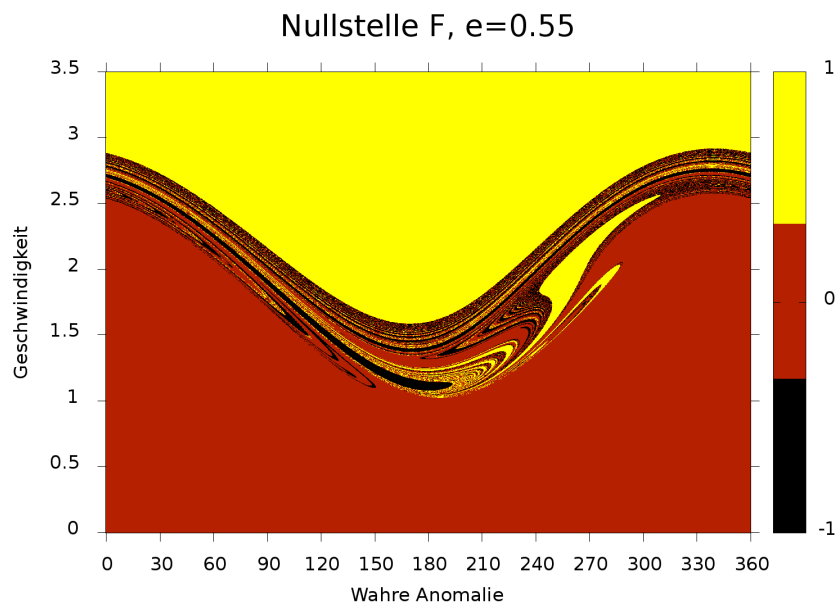


Abbildung 2.41.: Zwischen den Gebieten unterschiedlicher Fluchtrichtung liegen immer schmale Bereiche verbleibender Orbits. Die unterschiedlichen Fluchtrichtungen berühren oder schneiden sich nie.

Bedingt durch die positive Startgeschwindigkeit führen alle Anfangsgeschwindigkeiten oberhalb des Übergangsbereichs auf ein Entweichen des Teilchens mit $z(t) \rightarrow +\infty$. Bei der zweiten Nullstelle in Abb. 2.37 gibt es bereits Anfangsbedingungen, die eine Flucht mit $z(t) \rightarrow -\infty$ aufweisen. Dieser Bereich bildet die bereits in vorhergehenden Mappings beobachtete erste Fluchtinsel, sowie die Fluchtstreifen im Übergangsbereich. Es handelt sich um jene Anfangsbedingungen, die zwischen der ersten und der zweiten Nullstelle “A” und “B” das System verlassen. Bei der Nullstelle “C” kommt eine Fluchtinsel hinzu, die wiederum mit $z(t) \rightarrow +\infty$ Anfangsbedingungen gefüllt ist, dies ist die zweite große bereits beobachtete Fluchtinsel. Zusätzlich bilden sich um die erste Insel Fluchtstreifen mit positivem Vorzeichen ($z(t) \rightarrow +\infty$), ebenso im Übergangsbereich, der nun abwechselnd von positiven und negativen ($z(t) \rightarrow -\infty$) Fluchtstreifen vorzeichen durchzogen ist. Diese Schichtung von Fluchtstreifen führt bei höheren Nullstellen zum Auflösen des Übergangsbereichs. Aufgrund des Schichtungsverhaltens ist es auch schwer, eine globale minimale Geschwindigkeit anzugeben, bei der ein Teilchen mit beliebiger Wahrer Anomalie auf jeden Fall im System verbleibt. Es entstehen bei jeder Nullstelle zusätzliche Fluchtstreifen, die teilweise reguläre, teils aber auch irreguläre Strukturen und Abstände bilden. In Abb. 2.42 ist ein Fluchtstreifenbereich unterhalb des Hauptbereichs sichtbar. Dieser Fluchtstreifen bildet sich erst später, in diesem Fall wurde er erst bei Nullstelle 80 zum ersten Mal beobachtet. Es ist nicht auszuschließen,

dass sich bei höheren Nullstellen wieder Fluchtstreifen bei geringeren Geschwindigkeiten bilden.

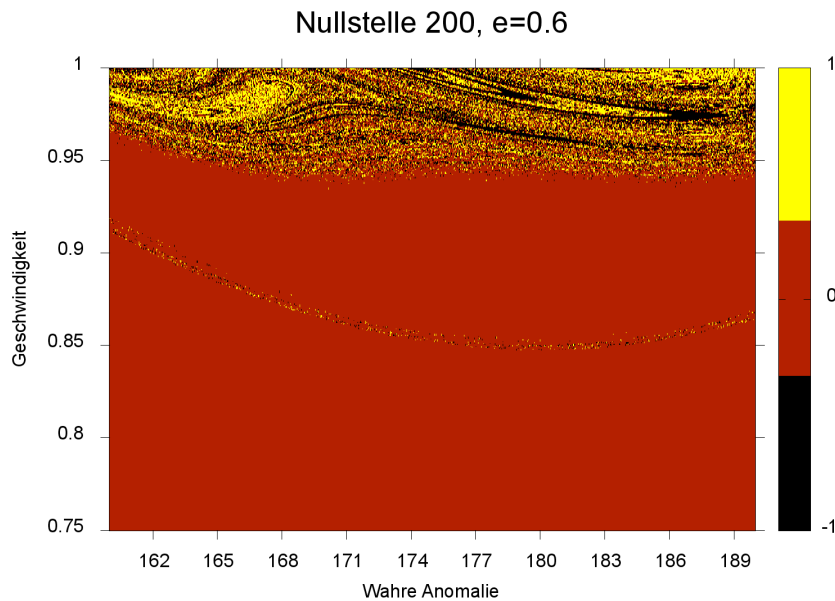


Abbildung 2.42.: Fluchtstreifen bilden sich unterhalb des Hauptbereichs spontan. Globale minimale Geschwindigkeiten sind aufgrund der Ausfransung und der plötzlichen Bildung von Fluchtstreifen schwer zu ermitteln.

2.3. Conclusio

In dieser Arbeit wurden die von Alexeev und Moser beschriebenen Methoden der symbolischen Beschreibung dynamischer Systeme, insbesondere des Sitnikov-Problems, auf ein symbolisches Mapping übertragen, welches von F. Vrabec vorgeschlagen wurde. Hierbei wird die sogenannte Vrabec-Sequenz, eine Folge von ganzen Zahlen, für eine Vielzahl von Anfangsbedingungen bei ihrer jeweiligen Nullstelle graphisch dargestellt. Dieses Mapping wurde für ausgewählte Exzentrizitäten realisiert, von denen wiederum einige in dieser Arbeit genauer beschrieben und dargestellt wurden. Durch eine Verfeinerung des Rasters der Anfangsbedingungen und eine Erhöhung der Periodenzahl, im Vergleich zu den von Vrabec ursprünglich durchgeführten Berechnungen, konnte mit beeindruckenden Bildern die Sensibilität des Sitnikov-Systems bezüglich der Anfangsbedingungen gezeigt werden. Die vorliegende Art der Darstellung ist zusätzlich sehr anschaulich, um das Verhalten bestimmter Bereiche von Anfangsbedingungen graphisch zu illustrieren. Durch Betrachtung der Mappings lässt sich vorhersagen, welche Anfangsbedingungen stabile Orbits -wenigstens für eine Zeit lang- erlauben, und welche bereits nach kürzester Zeit auf eine Fluchtbahn führen. Die Abhängigkeit

der minimalen Fluchtgeschwindigkeit von der Position der Primärkörper und der Anfangsgeschwindigkeit des Testkörpers konnte anhand einer Verschiebung des Minimums beobachtet werden.

Durch eine Erhöhung der Ordnung der abgebildeten Nullstellen ist ein noch tieferer Einblick in das Verhalten der Anfangsbedingungen im eingeschränkten Sitnikov-Problem gelungen. Zusätzlich zur bereits erwähnten Anschaulichkeit ermöglicht die Darstellung der Menge der Anfangsbedingungen bei einer hohen Nullstelle auch eine gute Lokalisierung stabiler Bereiche. Bei diesen stabilen, im Raum der Anfangsbedingungen sichelförmigen Bereichen handelt es sich um resonante Orbits.

Weiters konnte durch eine Vergrößerung bestimmter Bereiche der Mappings eine fraktalartige Strukturierung der Menge der berechneten Sequenzen beobachtet werden. Einen Hinweis auf die fraktale Struktur bietet die Vergrößerung ausgewählter Bereiche, in denen wiederum eine ähnliche Struktur auftritt. Diese Selbstähnlichkeit bzw. Skaleninvarianz kann durch eine numerische Berechnung nur angedeutet werden und ein strenger Beweis, dass sich diese Strukturen unendlich Komplex fortsetzen, was die Voraussetzung für ein Fraktal ist, bleibt aus. Einen Hinweis auf ein Fraktal liefert jedoch die Beobachtung, dass diese Strukturen, die mit höheren Nullstellen immer mehr Anfangsbedingungen auf einen Fluchtorbit abbilden, geschichtet auftreten und eine Cantor-Setartige Struktur bilden. Bei hohen Nullstellen löst sich dieses Gebiet in immer dünnere Streifen auf, konnte jedoch bis an die Grenze der numerischen Berechenbarkeit beobachtet werden.

Durch eine Veränderung der Symbole für das Mapping auf $\{-1, 0, 1\}$ konnte das Fluchtverhalten ($z(t) \rightarrow \pm\infty$) der Anfangsbedingungen deutlich dargestellt werden. In diesen Fluchtmappings wird deutlich, dass sich Bereiche unterschiedlicher Fluchtrichtung zwar umranden, sich aber nicht berühren oder schneiden. Daraus lässt sich schließen, dass zwischen einem positiven und einem negativen Fluchtstreifen immer ein Gebiet ist, in dem Orbits verbleiben, die das System nicht verlassen. Mit der hier gezeigten Art von Mappings könnten als Ausblick für zukünftige Arbeiten die unterschiedlichen Grenzgeschwindigkeiten genauer abgeschätzt werden. Auch ist eine Vermessung der fraktalen Dimension, der sogenannten Hausdorff-Dimension [Hausdorff, 1919] denkbar.,

Anhang A.

Vollständiger Mapping Katalog

Im folgenden Anhang sind alle Mappings angeführt, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurden. Die Exzentrizitätsintervalle sind $\Delta e = 0.1$. Der vorliegende Katalog soll einen Überblick über das Verhalten von Anfangsbedingungen mit steigender Exzentrizität im Sitnikov-Problem geben und dem Leser ein Gefühl für die Sensibilität eben dieses dynamischen Systems auf kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen vermitteln. Zusätzlich gibt es einen guten Überblick über stabile Zonen des Sitnikov-Problems. In Abschnitt A.10 ist ein Mapping bei $e = 0.99$ vollständig, über den gesamten Bereich der möglichen Geschwindigkeiten dargestellt.

A.1. $e=0.1$

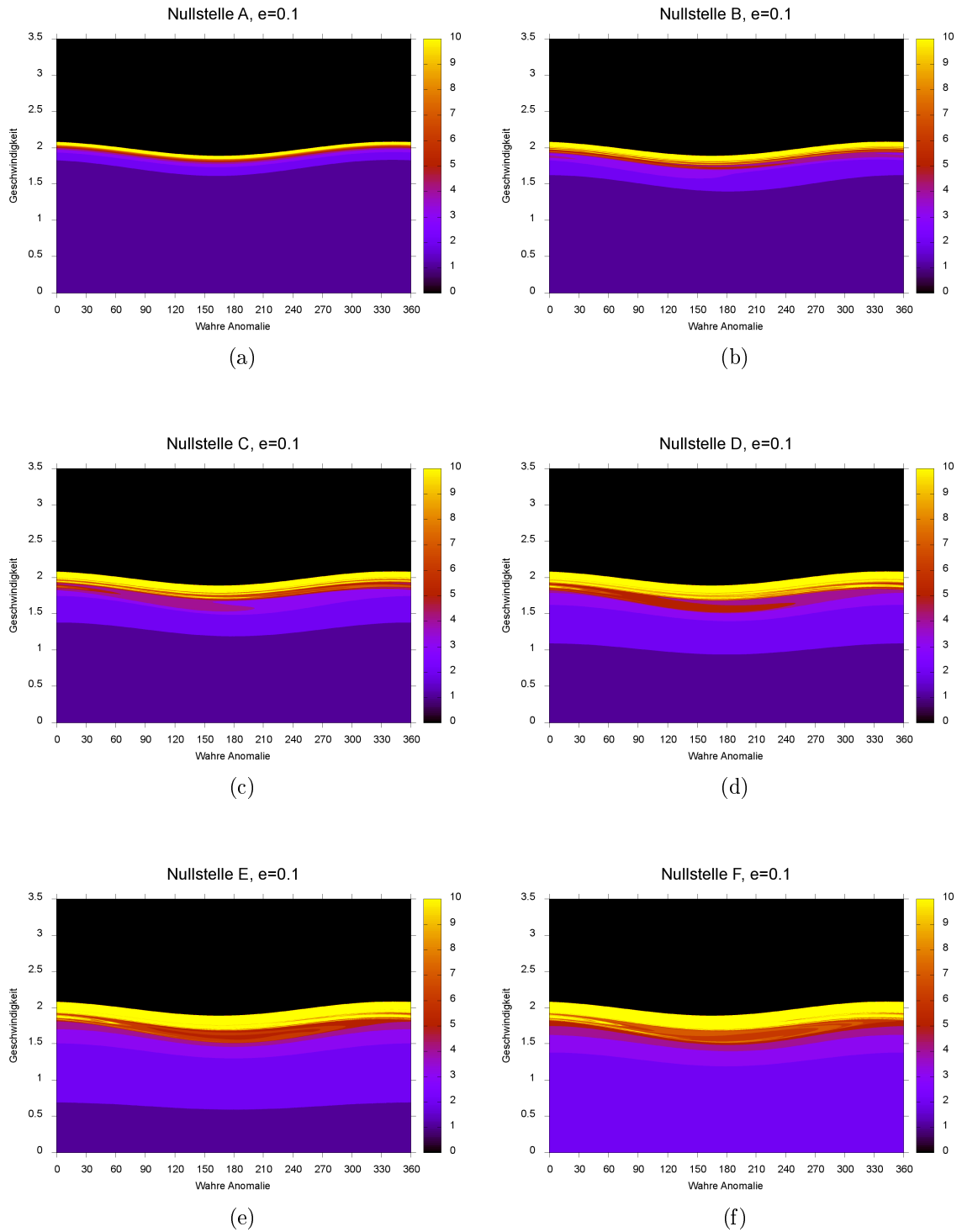
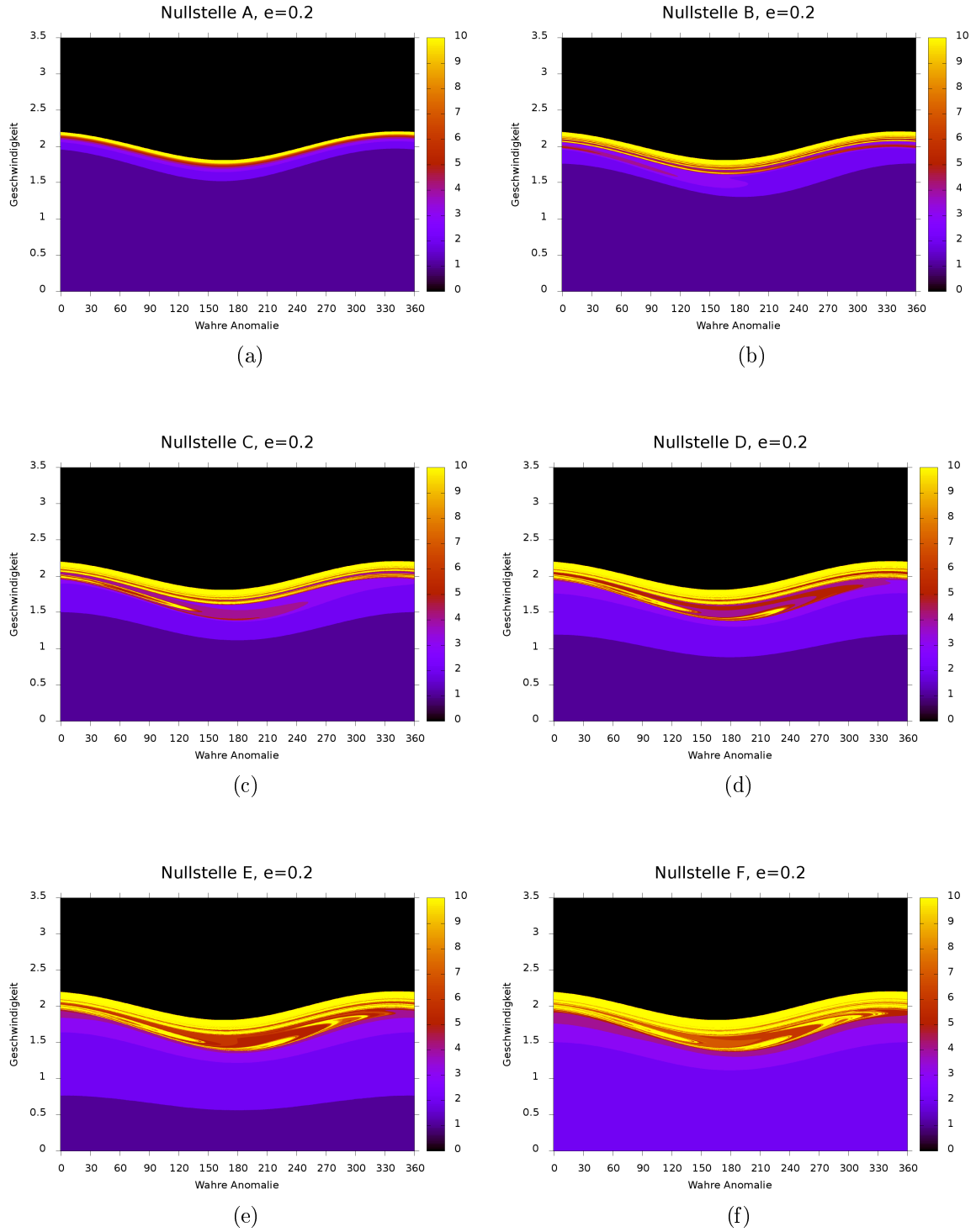


Abbildung A.1.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.1$

A.2. $e=0.2$ Abbildung A.2.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.2$

A.3. $e=0.3$

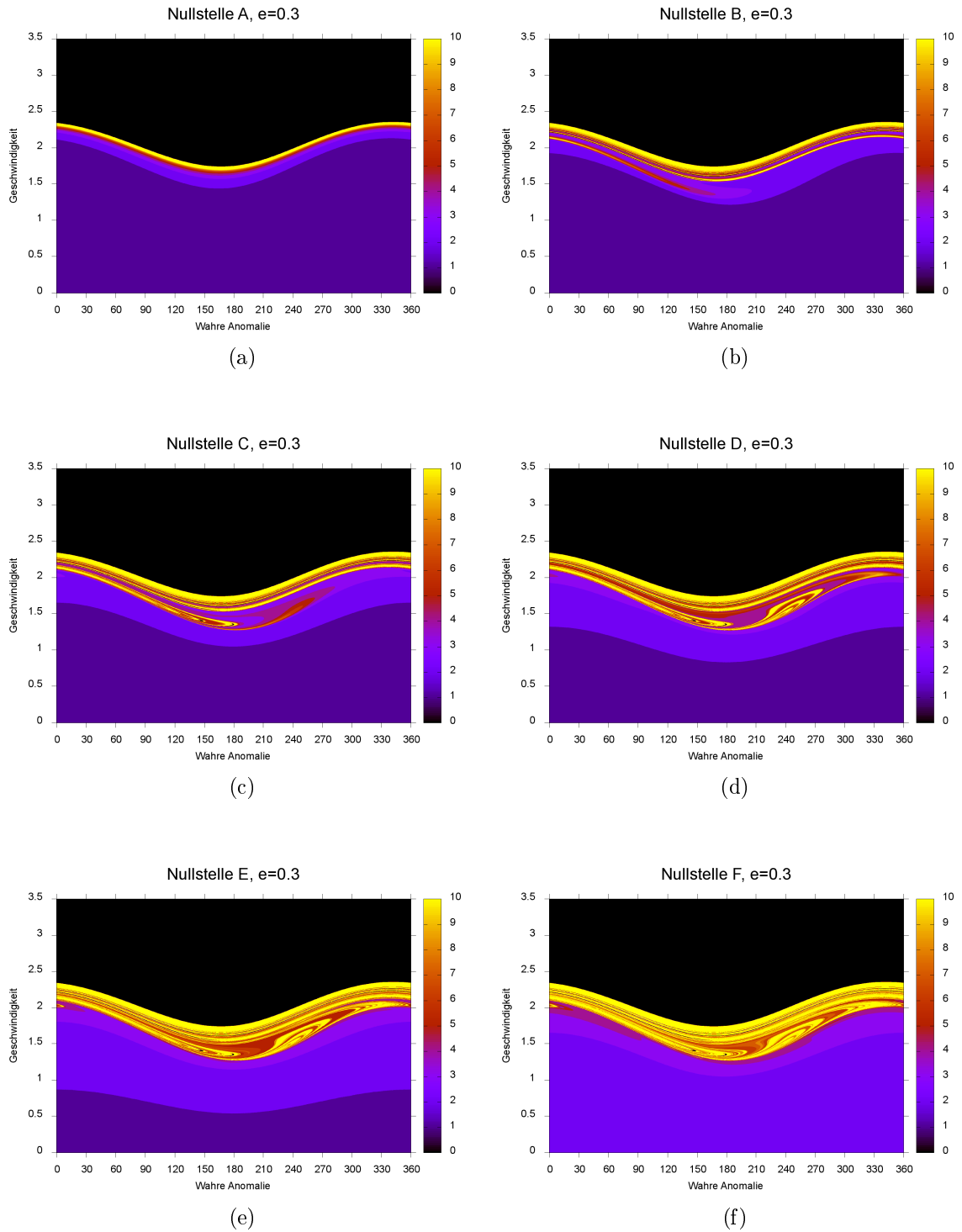
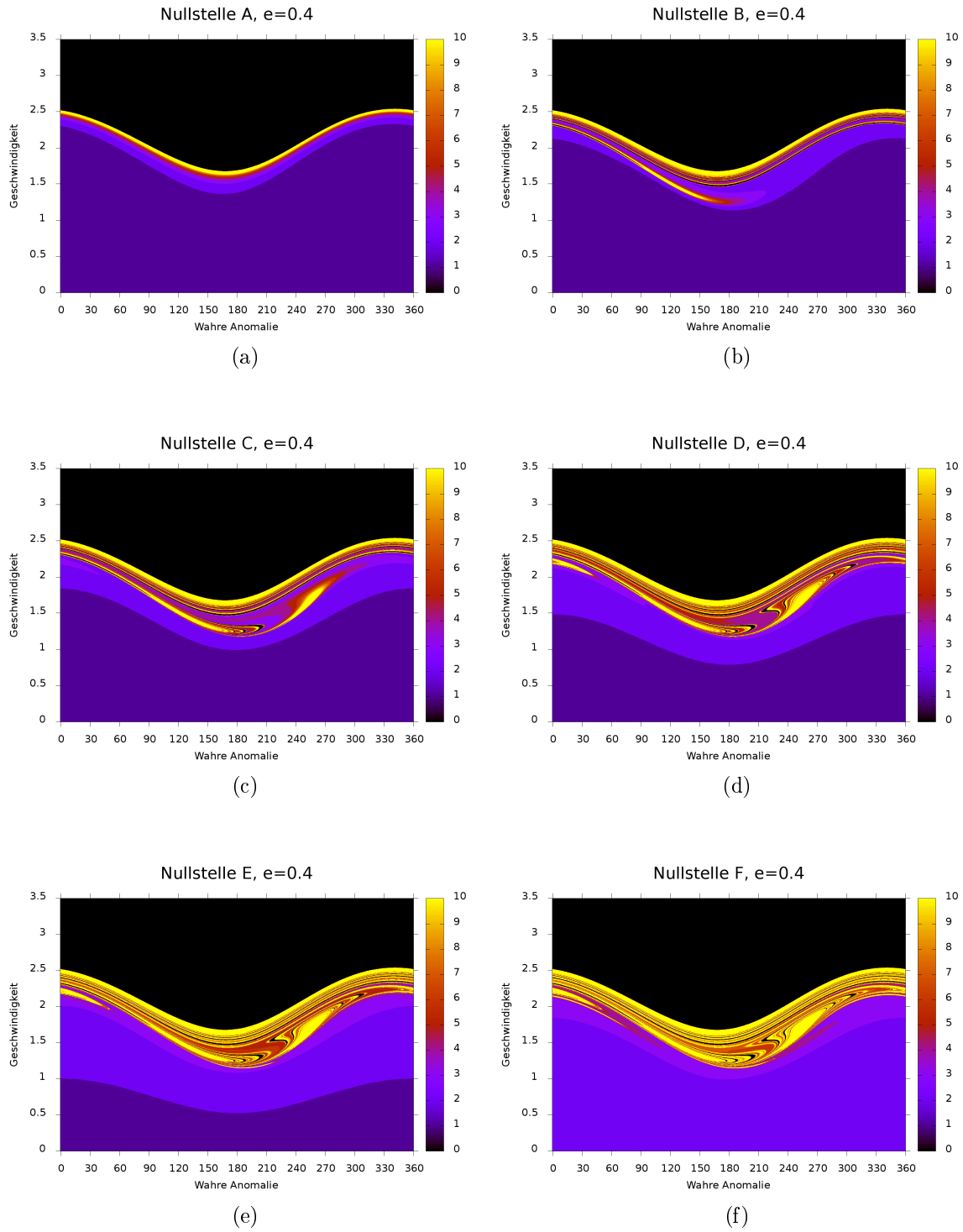


Abbildung A.3.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.3$

A.4. $e=0.4$ Abbildung A.4.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.4$

A.5. $e=0.5$

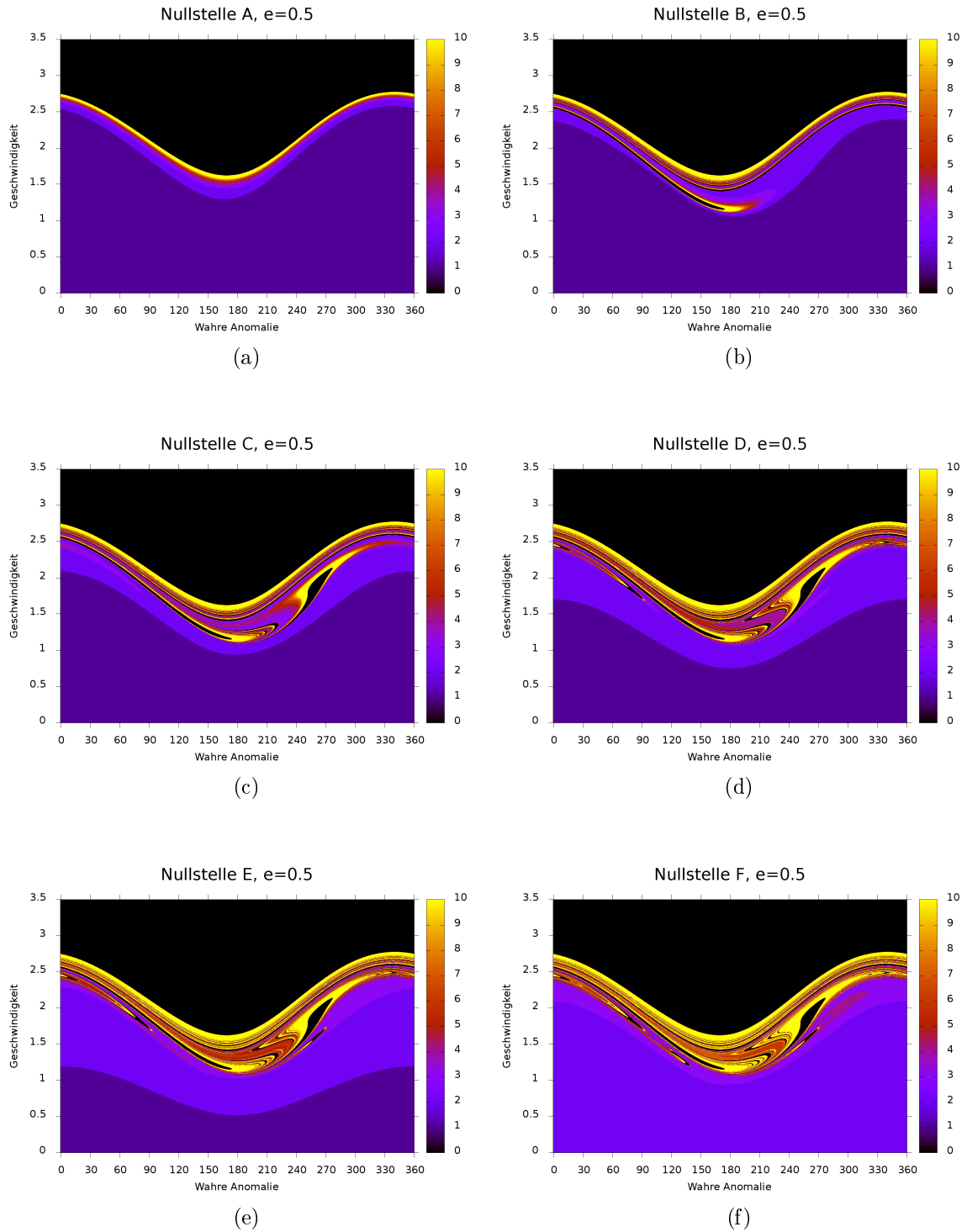
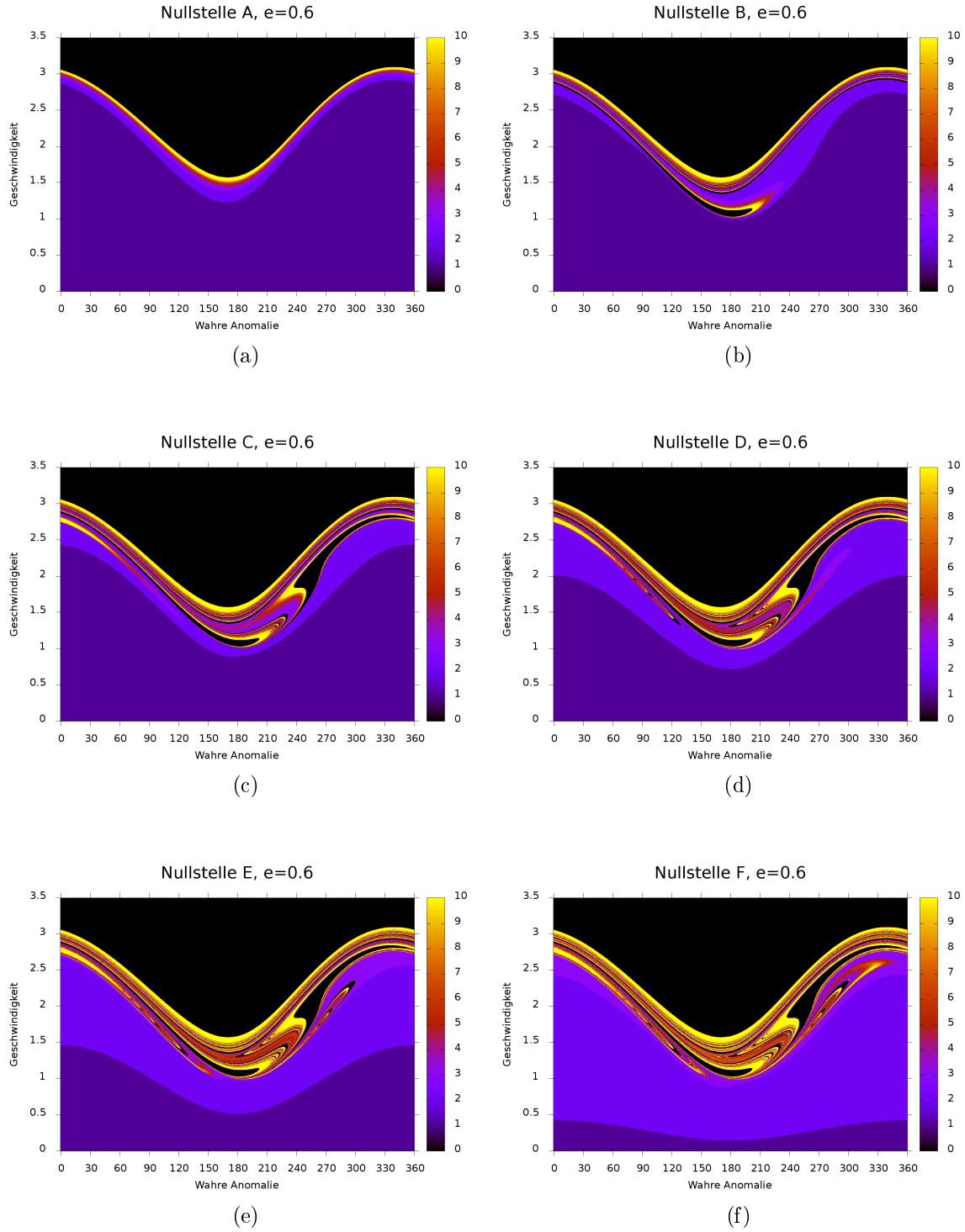


Abbildung A.5.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.5$

A.6. $e=0.6$ Abbildung A.6.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.6$

A.7. $e=0.7$

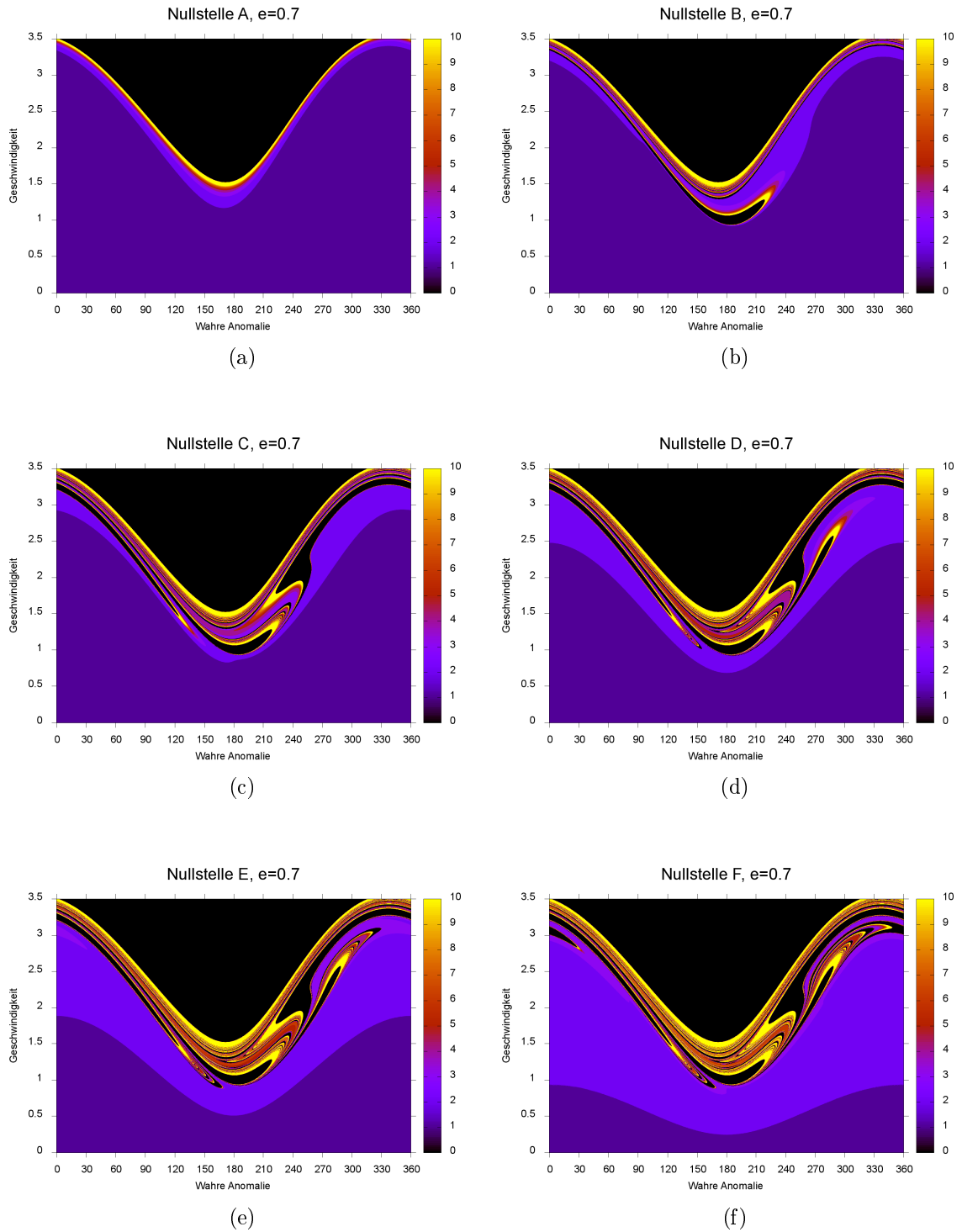
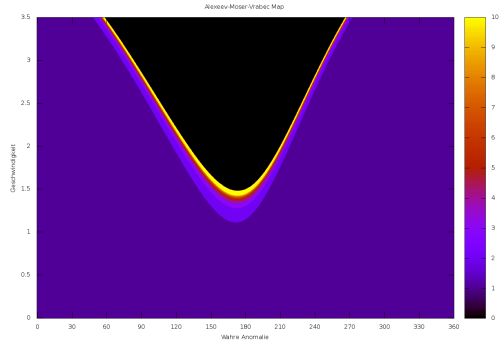
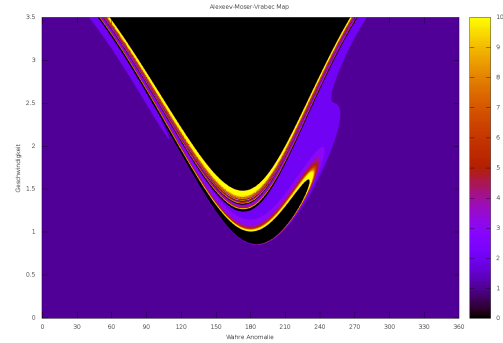


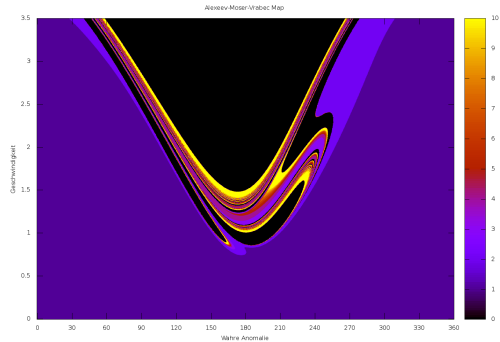
Abbildung A.7.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.7$

A.8. $e=0.8$ 

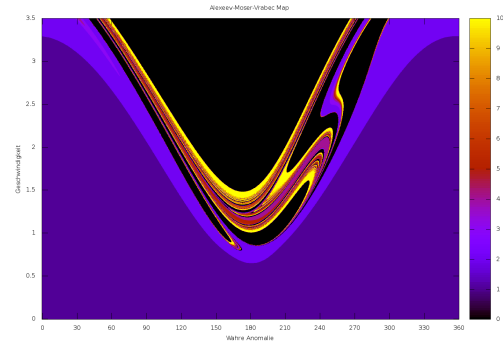
(a)



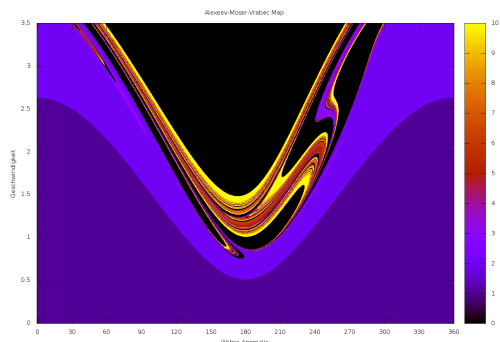
(b)



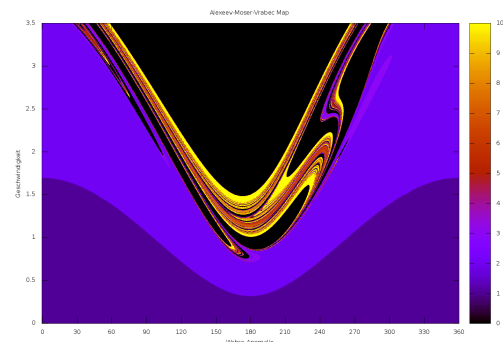
(c)



(d)



(e)



(f)

Abbildung A.8.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.8$

A.9. $e=0.9$

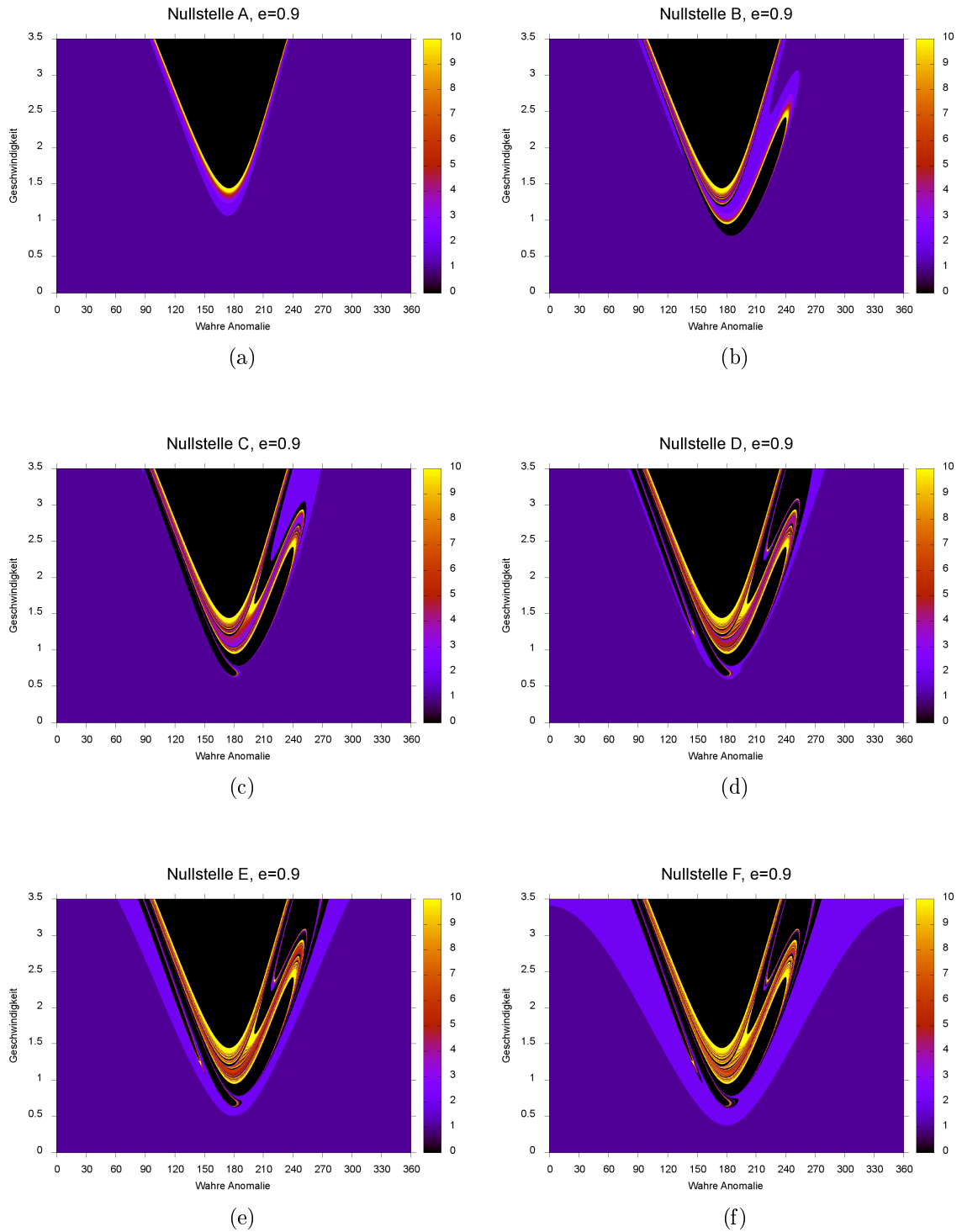


Abbildung A.9.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.9$

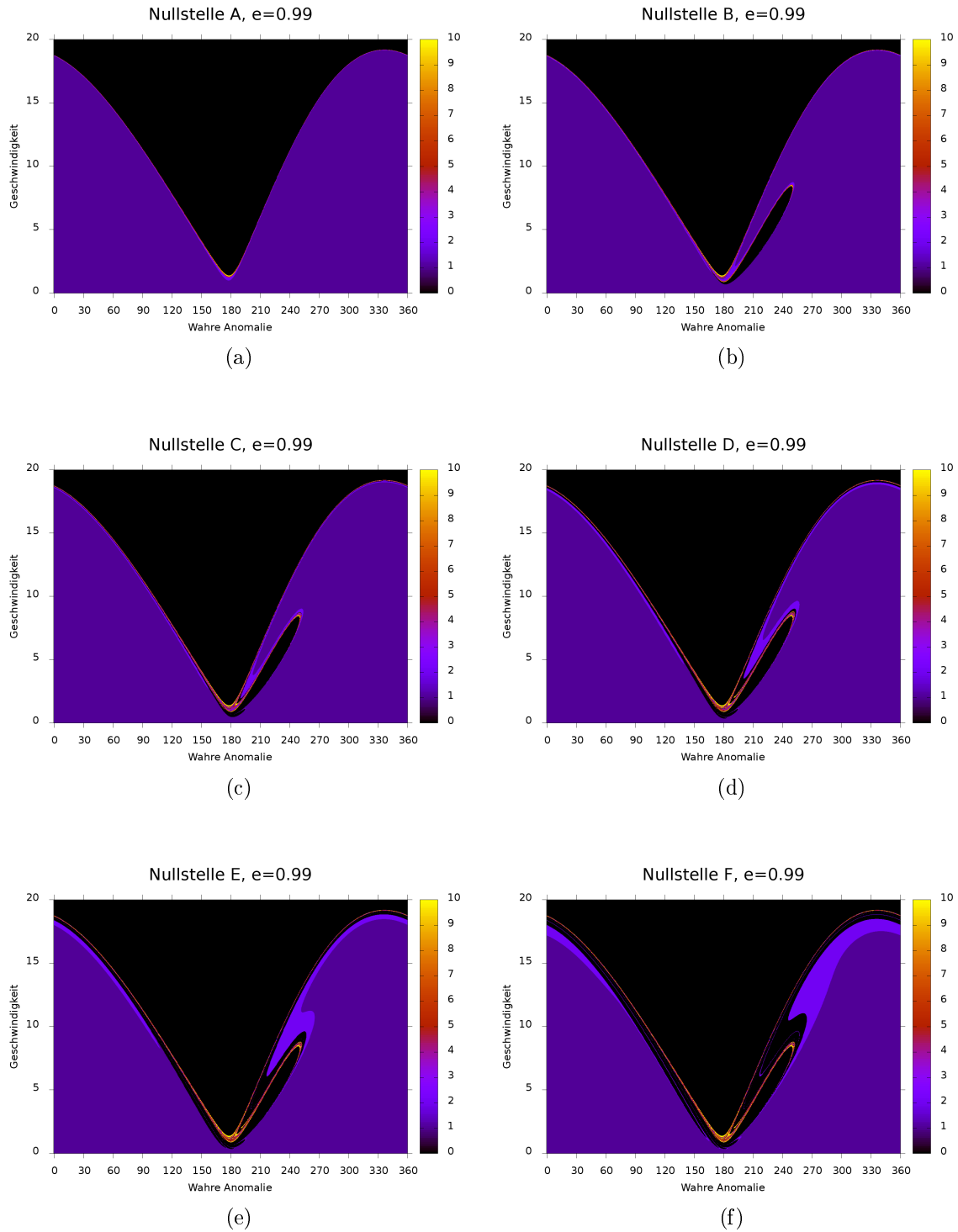
A.10. $e=0.99$ 

Abbildung A.10.: Alexeev-Moser-Vrabec Mapping der ersten sechs Nullstellen bei $e=0.99$

Anhang B.

Programmcode

B.1. Das verwendete Programm

Das folgende Programm wurde zur Lösung des Sitnikov-Problems geschrieben und verwendet. Das Programm ist in der Sprache FORTRAN 90 geschrieben und verwendet Auszüge aus [Press, 1992], vor allem die Routinen *odeint* und *rtsafe*, welche zur Integration des Differentialgleichungssystems herangezogen wurden. Diese beiden Routinen werden in dieser Arbeit nicht angegeben, sie sind in [Press, 1992] genauer beschrieben und sind dort ebenfalls in voller Länge nach zu lesen. Die Genauigkeit der Variablen ist durchgehend mit Double Precision angegeben um die geforderte Rechengenauigkeit zu erreichen. Das angegebene Programm ist das Grundprogramm, mit dem die Mappings der ersten sechs Nullstellen berechnet wurde. Zu Berechnung der Surfaces of Section sowie der Orbits und der Flucht mappings wurde das vorliegende Programm geringfügig geändert, um den Anforderungen gerecht zu werden.

```
MODULE global_variables
  USE nrutil
  IMPLICIT NONE
  REAL(DP)::MEAN_ANOMALY,M_ANOM_TIME,EXCENT,SEMIMAJOR,M_ANO_INI
  REAL(DP)::hnext
END MODULE global_variables
!#####
! SITNIKOV SOLVER
!#####
PROGRAM sitnikov
  USE nrtype
  USE nrutil
  USE nr
```

```
USE global_variables
REAL(DP) :: xlow,xhig,xacc
!ROOTFIND VARIABLEN
REAL(DP) :: eps,hmin,x1,x2
!INTEGRATION VARIABLEN
REAL(DP) :: phi0,phi1,phi2,dphi
!ANFANGSBEDINGUNGEN WINKEL
REAL(DP) :: v0,v1,v2,dv,v
!ANFANGSBEDINGUNGEN GESCHWINDIGKEIT
REAL(DP) :: E_ANOMALY,ZOLD
REAL(DP), DIMENSION(2) :: ystart
INTEGER :: ioerr,zeroa,zerob,zeroc,zeroe,zerof,zerod,rot
INTEGER :: rotcount,ncount,an,bn,cn,dn,en,fn,ns
CHARACTER(20) :: inputfile
CHARACTER(20) :: outputfilea
CHARACTER(20) :: outputfileb
CHARACTER(20) :: outputfilec
CHARACTER(20) :: outputfiled
CHARACTER(20) :: outputfilee
CHARACTER(20) :: outputfilef
EXTERNAL func1 ! for rtsafe
EXTERNAL derivs ! for odeint
!_____
! integration of the Sitnikov equation with odeint
!_____
inputfile = "sitnikov.cfg"
outputfilea = "an.dat"
outputfileb = "bn.dat"
outputfilec = "cn.dat"
outputfiled = "dn.dat"
outputfilee = "en.dat"
outputfilef = "fn.dat"
WRITE(*,'(A,/)' ) "*** Sitnikov-Problem ***"
IF (ioerr == 0) THEN
OPEN(20,FILE=inputfile, STATUS='OLD', ACTION='READ')
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) EXCENT ! Exzentrizitaet
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) phi1 ! Anfangswert der wahren Anomalie
```

```
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) phi2 ! Endwert der wahren Anomalie
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) dphi ! Schrittweite der Wahren anomalie
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) v1 ! Anfangswert der Geschwindigkeit
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) v2 ! Endwert der Geschwindigkeit
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) dv ! Schrittweite der Geschwindigkeit
READ(20,*,IOSTAT=ioerr) eps !Integrationsgenauigkeit (eps)
READ(20,*) rot !Anzahl der Rotationen
END IF
CLOSE(20)
phi1=phi1*PI/180.D0 !Umrechnen in Bogenmaß
phi2=phi2*PI/180.D0 !Umrechnen in Bogenmaß
dphi=dphi*PI/180.D0 !Umrechnen in Bogenmaß
v1=v1+1.D-14 !v1 plus TINY
!ANFANGSWERTE SETZEN
ystart(1) =0.D0 !Z0 ist IMMER 0
ystart(2) =v1
OPEN(30,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfilea)))
WRITE(30,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2," , rot= ",rot ! File-Header
WRITE(30,*) "TRUE ANOMALY ", " VELOCITY ", " ROOT"
OPEN(31,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfileb)))
WRITE(31,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2," , rot= ",rot ! File-Header
WRITE(31,*) "TRUE ANOMALY ", " VELOCITY ", " ROOT"
OPEN(32,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfilec)))
WRITE(32,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2," , rot= ",rot ! File-Header
WRITE(32,*) "TRUE ANOMALY ", " VELOCITY", " ROOT"
OPEN(33,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfiled)))
WRITE(33,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2," , rot= ",rot ! File-Header
WRITE(33,*) "TRUE ANOMALY ", " VELOCITY ", " ROOT"
OPEN(34,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfilee)))
WRITE(34,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2," , rot= ",rot ! File-Header
WRITE(34,*) "TRUE ANOMALY ", " VELOCITY ", " ROOT"
OPEN(35,FILE=TRIM(ADJUSTL(outputfilef)))
```

```
WRITE(35,60) "Simulationsdaten: e = ",EXCENT," , Phi1 = ",phi1," , Phi2 = ",phi2," ,
v1= ",v1," , v2 = ",v2 ,", , rot= ",rot! File-Header
WRITE(35,*) "TRUE ANOMALY","VELOCITY","ROOT"
60 FORMAT(A,F4.2,A,F4.2,A,F4.2,A,F4.2,A,F4.2,A,i4 )
x2=MEAN_ANOMALY
WRITE(*,*) "Starte mit: Ex=",EXCENT," V=",v1
DO !WINKELSCHLEIFE
E_ANOMALY=2.0*ATAN(SQRT((1.D0-EXCENT)/(1.D0+EXCENT))*TAN(phi1/2.D0))
!Berechnung der Exzent Anomalie aus der Wahren Anomalie
MEAN_ANOMALY=E_ANOMALY-EXCENT*SIN(E_ANOMALY)
!Berechnung der mittleren Anomalie aus der Exzentrischen Anomalie
M_ANO_INI=MEAN_ANOMALY !zwischen speichern der Anfangs-Anomalie
ystart(1)=0
ystart(2)=v1
v0=v1
DO !GESCHWINDIGKEITSSCHLEIFE
ystart(1)=0.D0
ncount=0
rotcount=1
ns=0
an=0
bn=0
cn=0
dn=0
en=0
fn=0
M_ANOM_TIME=0.D0
x2=M_ANO_INI !MITTLERE ANOM AUF AKTUELLEN SCHLEIFENWERT
SETZEN
hnext = 1.D-11
hmin = 0.D0
DO !INTEGRATIONSSCHLEIFE
ZOLD=ystart(1)
x1=x2
x2=x2+hnext !INTEGRATIONSGRENZEN WERDEN ERWEITERT
IF(x2 .GT. 2.D0*PI) THEN
x1=x1-2.D0*PI
```

```
x2=0
END IF
M_ANOM_TIME=M_ANOM_TIME+hnext
CALL odeint(ystart,x1,x2,eps,hnext,hmin,derivs,rkqs)
rotcount=CEILING(M_ANOM_TIME/(2.D0*PI)) !Umrundungszähler
IF((ZOLD .GT. 0 .AND. ystart(1).LT.0) .OR. (ZOLD .LT. 0 .AND. ystart(1) .GT.
0)) THEN
  ! Nullstellenzähler
  ncount=ncount+1
  ns=1
ELSE
  ns=0
CONTINUE
END IF
IF(ns .eq.1 .AND. ncount .eq. 1) THEN
  an=rotcount
  zeroa=an
END IF
IF(ns .eq. 1 .AND. ncount .eq. 2) THEN
  bn=rotcount
  zerob=bn
END IF
IF(ns .eq. 1 .AND. ncount .eq. 3) THEN
  cn=rotcount
  zeroc=cn
END IF
IF(ns .eq. 1 .AND. ncount .eq. 4) THEN
  dn=rotcount
  zerod=dn
END IF
IF(ns .eq. 1 .AND. ncount .eq. 5) THEN
  en=rotcount
  zeroe=en
END IF
IF(ns .eq. 1 .AND. ncount .eq. 6) THEN
  fn=rotcount
  zerof=fn
```

```
EXIT
!ABBRUCH WENN fn geschrieben wurde
END IF
IF (rotcount .EQ. rot) THEN ! ABBRECHEN NACH DEM Xten NULLDURCH-
GANG
IF (an .eq. 0 .OR. an .GT. rot) THEN
an=rot
zeroa=an
END IF
IF (bn .EQ. 0 .OR. bn .GT. rot) THEN
bn=rot
zerob=bn
END IF
IF (cn .EQ. 0 .OR. cn .GT. rot) THEN
cn=rot
zeroc=cn
END IF
IF (dn .EQ. 0 .OR. dn .GT. rot) THEN
dn=rot
zerod=dn
END IF
IF(en .EQ. 0 .OR. en .GT. rot) THEN
en=rot
zeroe=en
END IF
IF (fn .EQ. 0 .OR. fn .GT. rot) THEN
fn=rot
zerof=fn
END IF
EXIT
END IF
IF(ABS(ystart(1)) .GT. 20) THEN
IF(an .EQ. 0) THEN
an=rot
zeroa=0
END IF
IF(bn .EQ. 0) THEN
```

```
bn=rot
zerob=0
END IF
IF(cn .EQ. 0) THEN
cn=rot
zeroc=0
END IF
IF(dn .EQ. 0) THEN
dn=rot
zerod=0
END IF
IF(en .EQ. 0) THEN
en=rot
zeroe=0
END IF
IF(fn .EQ. 0) THEN
fn=rot
zerof=0
END IF
EXIT
END IF
END DO !ENDE INTEGRATIONSSCHLEIFE
!*****
WRITE(30,61) phi1*180.D0/PI,v0,an,zeroa
WRITE(31,61) phi1*180.D0/PI,v0,bn,zerob
WRITE(32,61) phi1*180.D0/PI,v0,cn,zeroc
WRITE(33,61) phi1*180.D0/PI,v0,dn,zerod
WRITE(34,61) phi1*180.D0/PI,v0,en,zeroe
WRITE(35,61) phi1*180.D0/PI,v0,fn,zerof
!*****
61 FORMAT(2f14.8,2i5,2f14.8) v0=v0+dv ystart(2)=v0
IF (ystart(2) .gt. v2) THEN
EXIT
END IF
END DO !ENDE GESCHWINDIGKEITSSCHLEIFE
WRITE(*,*) phi1*180.D0/PI phi1=phi1+dphi
WRITE(30,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
```

```

WRITE(31,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
WRITE(32,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
WRITE(33,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
WRITE(34,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
WRITE(35,*)" " !Blankline für Gnuplotformat
IF (phi1 .gt. phi2) THEN
EXIT
ENDIF
END DO !ENDE WINKELSCHLEIFE
CLOSE(30)
CLOSE(31)
CLOSE(32)
CLOSE(33)
CLOSE(34)
CLOSE(35)
END PROGRAM sitnikov
!*****
SUBROUTINE func1(x,fval,fderiv)
!
! function used in root finding
!
USE nrtype
USE global_variables
IMPLICIT NONE
REAL(SP), INTENT(IN) :: x
REAL(SP), INTENT(OUT) :: fval, fderiv
fval = x-EXCENT*SIN(x)-MEAN_ANOMALY
fderiv = 1-EXCENT*COS(x) END SUBROUTINE func1
!*****
SUBROUTINE derivs(x,y,dydx)
!
! differential equation
!
USE nrtype
USE nrutil
USE nr
USE global_variables

```

```
IMPLICIT NONE
REAL(SP), INTENT(IN) :: x
REAL(SP), DIMENSION(:), INTENT(IN) :: y
REAL(SP), DIMENSION(:), INTENT(OUT) :: dydx
REAL(DP)::temp,E_ANOMALY
REAL(DP) :: xlow,xhig,xacc
EXTERNAL func1
xlow=-7.D0
xhig=7.D0
xacc=1.D-8
MEAN_ANOMALY=x
E_ANOMALY=rtsafe(func1, xlow, xhig, xacc)
SEMIMAJOR=0.5D0*(1.D0 - EXCENT*COS(E_ANOMALY))
dydx(1) = y(2)
dydx(2) = -y(1)/(y(1)**2.D0+SEMIMAJOR**2.D0)**1.5D0
END SUBROUTINE derivs
```


Anhang C.

Danksagung

Ich möchte mich bei all jenen bedanken, die dazu beigetragen haben, dass ich diese Arbeit fertig stellen konnte. Insbesondere möchte ich mich bei Herrn Prof. Dvorak dafür bedanken, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, diese Diplomarbeit zu verfassen sowie für seine laufende Unterstützung und seinen Rat während der Entstehung dieser Arbeit. Ich danke auch Herrn Vrabec für die zugrundeliegende Idee sowie Anmerkungen und Korrekturen zu dieser Arbeit. Zusätzlich dazu möchte ich noch beim gesamten Team der Astrodynamik Gruppe in Wien bedanken, speziell bei Ákos Bazsó, der mir oft mit Rat und Tat bei Problemen zur Seite gestanden ist.

Spezieller Dank geht auch an meine Eltern, dass sie mir die Freiheit und vor allem ihre Geduld und Unterstützung gegeben haben, meinen Weg zu gehen, auch wenn manche Irrwege darunter waren.

Ein besonderer Dank geht auch an Hannah Prokesch. Danke, dass du auch in den schwierigen Zeiten für mich da warst.

Anhang D.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Bakk. rer. nat Rupert Christian Lang
Geburtsdatum:	22.05.1983
Geburtsort:	Salzburg Stadt, Österreich
Eltern:	Mag. Martina Lang, geb. Schindler Mag. Bernd Lang
Anschrift:	Aighhofstr. 31 5020 Salzburg
E-Mail	rupert-lang@gmx.at

Schulbildung:

1989-1993	Volksschule Maxglan II, Salzburg
1993-2001	Christian Doppler Gymnasium, Salzburg
12.06.2001	Matura

Studium:

Oktober 2002:	Beginn des Studiums der Materialwissenschaften an der Universität Leoben
Oktober 2004:	Beginn des Bakkalaureat-Studiums der Astronomie an der Universität Wien
November 2008:	Abschluss des Bakkalaureats Beginn des Master-Studiums

Abbildungsverzeichnis

1.1. Skizze der Bahnellipse eines Planeten P im Keplerproblem	5
1.2. Darstellung des infinitesimal kleinen Flächenstückchens der Ellipse . . .	8
1.3. Konfiguration des Sitnikov-Problems	13
1.4. Lösungen des MacMillan-Problems ($e = 0$)	17
1.5. Eine Sitnikov-Sequenz	20
1.6. Surface of Section	26
2.1. $e=0.1$, Nullstelle A	29
2.2. $e=0.1$, Nullstelle B	29
2.3. $e=0.1$, Nullstelle C	30
2.4. $e=0.1$, Nullstelle D	30
2.5. $e=0.1$, Nullstelle E	31
2.6. $e=0.1$, Nullstelle F	31
2.7. $e=0.6$, Nullstelle A	33
2.8. $e=0.6$, Nullstelle B	34
2.9. $e=0.6$, Nullstelle C	34
2.10. $e=0.6$, Nullstelle D	35
2.11. $e=0.6$, Nullstelle E	35
2.12. $e=0.6$, Nullstelle F	36
2.13. $e=0.99$, Nullstelle A	38
2.14. $e=0.99$, Nullstelle B	38
2.15. $e=0.99$, Nullstelle C	39
2.16. $e=0.99$, Nullstelle D	39
2.17. $e=0.99$, Nullstelle E	40
2.18. $e=0.99$, Nullstelle F	40
2.19. $e=0.6$, Vergrößerungsbereich	42
2.20. $e=0.6$, Nullstelle A - Vergrößerung	43
2.21. $e=0.6$, Nullstelle B - Vergrößerung	43
2.22. $e=0.6$, Nullstelle D - Vergrößerung	44
2.23. $e=0.6$, Nullstelle F - Vergrößerung	44

2.24. $e=0.6$, Nullstelle F - starke Vergrößerung	46
2.25. $e=0.6$, Nullstelle A - stärkste Vergrößerung	46
2.26. Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings $e = 0.1$.	48
2.27. Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings $e = 0.575$	49
2.28. Vergrößerte Ausschnitte des Alexeev-Moser-Vrabec Mappings $e = 0.99$.	50
2.29. Sichelförmigen Insel bei $e = 0.575$	51
2.30. Vergrößerung der Übergangsstruktur $e = 0.575$	52
2.31. Vergrößerung der Übergangsstruktur $e = 0.575$	53
2.32. Vergrößerung der Übergangsstruktur $e = 0.575$	54
2.33. Orbit innerhalb des sichelförmigen Bereichs.	56
2.34. Orbits innerhalb des sichelförmigen Bereichs.	57
2.35. Surface of Section $e=0.575$	58
2.36. Surface of Section $e=0.99$	59
2.37. Fluchtorbits, $e=0.55$, Nullstelle B	60
2.38. Fluchtorbits, $e=0.55$, Nullstelle C	60
2.39. Fluchtorbits, $e=0.55$, Nullstelle D	61
2.40. Fluchtorbits, $e=0.55$, Nullstelle E	61
2.41. Fluchtorbits, $e=0.55$, Nullstelle F	62
2.42. Fluchtorbits, $e=0.6$, Nullstelle 200	63
A.1. Katalog $e=0.1$	66
A.2. Katalog $e=0.2$	67
A.3. Katalog $e=0.3$	68
A.4. Katalog $e=0.4$	69
A.5. Katalog $e=0.5$	70
A.6. Katalog $e=0.6$	71
A.7. Katalog $e=0.7$	72
A.8. Katalog $e=0.8$	73
A.9. Katalog $e=0.9$	74
A.10.Katalog $e=0.99$	75

Literaturverzeichnis

- [Alexeev, 1968] Alexeev, V.M.: Quasirandom dynamical systems I, II, III, Math. USSR Sbornik 5, 73-128, 1968a; 6, 505-560, 1968b; 7, 1-43, 1969a
- [Alexeev, 1981] Alexeev, V.M.: Final motions in the three-body problem and symbolic dynamics. Uspekhi Mat. Nauk 36:4, 161-176, 1981
- [Bazsó, 2008] Bazsó, A.: Störungsrechnung mit Lie-Reihen, Diplomarbeit, Wien, 2008
- [Cantor, 1883] Cantor G.: Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V, Mathematische Annalen, vol. 21, pages 545–591., 1883
- [Demtröder, 2006] Demtröder W.: Experimentalphysik I: Mechanik und Wärme., Springer Lehrbuch, 4. Auflage, 2006
- [Dvorak, 2005] Dvorak R., Freistetter F., Kurths J.: Chaos and Stability in Planetary Systems, Lecture Notes in Physics Vol. 683. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005
- [Dvorak, 1998a] Dvorak R., Contopoulos G., Efthymiopoulos G., Voglis N.: “Stickiness” in mappings and dynamical systems. Planet. Space Sci. 46., 1998
- [Dvorak, 1998b] Dvorak R., Vrabec F., Wodnar K.: The Sitnikov Problem: A Short Review. In Sistema solare e sistemi stellari, Teorie perturbative, Dinamica del volo spaziale ed by A. Celletti and E. Perozzi, 16, 1998
- [Érdi, 1989] Érdi B.: Eötvös Loránd Tudománygyetem Természettudományi Kar. Tankönyvkiadó, Égi Mechanika, Budapest, 1989
- [Hausdorff, 1919] Hausdorff F.: Dimension und äußeres Maß, Mathematische Annalen 79, 157–179. 1919
- [Kovács, 2007] Kovács T. & Érdi B.: The structure of the extended phase space of the sitnikov problem, Astron. Nachr. / AN 328, No. 8, 801 – 804, 2007

- [Kovács, 2009] Kovács T. & Érdi B.: Transient chaos in the Sitnikov problem, *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 105:289–304, 2009
- [Lothka, 2004] Lothka C.: Störungsanalyse des Sitnikov Problems für hohe Ordnungen unter Verwendung automatisierter Herleitungsmethoden in *Mathematica*, Diplomarbeit, Wien 2004
- [MacMillan, 1911] MacMillan W.D.: An integrable case in the restricted problem of three bodies. *The Astronomical Journal*, 27:11-13, 1911
- [Moser, 1971] Moser J.: *Stable and Random Motions in Dynamical Systems with Special Emphasis on Celestial Mechanics*. *Annals of Mathematical Studies* Number 77, Princeton University Press, New Jersey, 1971
- [Moser, 1974] Moser J.: *Stability Theory in Celestial Mechanics*. In *The Stability of the Solar System* 1-9 ed Y. Kozai, 1974
- [Sitnikov, 1960] K.A. Sitnikov. The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problem. *Soviet Physics Doklady*, 5:647, 1961
- [Stumpff, 1959] Stumpff K.: *Himmelsmechanik I*, *Hochschulbücher für Physik* Band 32. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959
- [Press, 1992] Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T.: *Numerical Recipes in FORTRAN //: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992
- [Völkl, 2007] Völkl B.: *Numerische und analytische Untersuchungen zum erweiterten Sitnikov-Problem*, Diplomarbeit, Wien, 2007
- [Wodnar, 1992] Wodnar K.: *The Original Sitnikov Article -New Insights*, Diplomarbeit, Wien, 1992