



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Schulbuch der Zukunft - interaktiv und hypermedial -
am Beispiel „Funktionen“ in der 9. Schulstufe

Verfasser

Alexander Hummelbrunner

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag. rer. nat)

Wien, im Juni 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt Mathematik und Physik

Betreuer: Prof. Dr. Hans Humenberger

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, auf deren uneingeschränkte Unterstützung ich mich immer verlassen konnte. Besonderer Dank gilt auch meinen lieben Freunden und Studienkollegen, mit denen ich einen Teil des Weges gemeinsam bestreiten durfte.

Meinem Betreuer, Prof. Dr. Hans Humenberger, danke ich für die umfassende und rasche Unterstützung bei im Zuge dieser Arbeit auftretenden Problemen und Fragen.

Hinweis

Zur leichteren Lesbarkeit wurde in dieser Diplomarbeit auf die Nennung beider Geschlechter verzichtet. Es wird darauf hingewiesen, dass die verwendeten männlichen Begriffe die weiblichen Formen ebenso mit einbeziehen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Persönliches Interesse	7
1.2	Aufbau der Diplomarbeit	8
2	Neue Medien in der Schule	9
2.1	Entwicklung in Österreich	9
2.2	Pro und Contra	11
2.3	eLearning	13
2.3.1	Begriffsdefinition	13
2.3.2	Lerntheorien	14
2.3.3	eContent Erlass	19
3	Neue Medien im Mathematikunterricht	21
3.1	Funktionsplotter	21
3.2	Computer Algebra Systeme	24
3.2.1	Darstellungsformen	25
3.2.2	Die Window-Shuttle-Technik	27
3.2.3	Black Box und White Box	28
3.2.4	Modularisierung	29
3.2.5	Kritik am Einsatz von CAS	30
3.3	Dynamische Geometrie Systeme	31
3.3.1	GeoGebra	33
3.4	Tabellenkalkulation	34
3.5	Das Internet	34
3.5.1	Hypertext + Multimedia = Hypermedia	34
3.5.2	Lernplattformen	36
3.5.3	WebQuests	37
3.5.4	Lernpfade	38
3.6	Projekt Medienvielfalt	39
4	Elektronische Lernumgebung	41
4.1	Technischer Hintergrund	42
4.2	Aufbau	43
4.3	Beschreibung	46
4.3.1	Diagramme	46

4.3.2	Funktionsbegriff	52
4.3.3	Eigenschaften von Funktionen	54
4.3.4	Lineare Funktionen	56
4.3.5	Lineare Interpolation	60
4.3.6	Direkte und Indirekte Proportionalität	61
4.4	Lernpfade auf Basis der Lernumgebung	65
4.4.1	Lernpfad (A)	65
4.4.2	Lernpfad (B)	67
5	Fazit	69
5.1	Zusammenfassung	69
5.2	Ausblick	70
A	Lernpfade	73
B	Aufgaben und Übungen	89
B.1	Diagramme	89
B.2	Funktionsbegriff	94
B.3	Eigenschaften von Funktionen	97
B.4	Lineare Funktionen	99
B.5	Lineare Interpolation	103
B.6	Direkte und indirekte Proportionalität	104
	Abbildungsverzeichnis	110
	Tabellenverzeichnis	111
	Literatur	113
	Lebenslauf	116

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist vorwiegend als Begleittext zur online erreichbaren, und hier in Form einer CD-ROM beiliegenden, elektronischen Lernumgebung gedacht. In dieser Lernumgebung, die plakativ als „Schulbuch der Zukunft“ den Titel der Diplomarbeit bestimmt, habe ich versucht den Ansprüchen, die ich in Zukunft an Schulbücher stellen werde, gerecht zu werden.

1.1 Persönliches Interesse

Als Sohn eines Betriebsinformatikers bin ich schon sehr früh in Kontakt mit PCs gekommen. Meine Jahre im Gymnasium fielen dann genau in jene Zeit, die die Schulen zur raschen technischen Aufrüstung nutzten (siehe „2.1 Entwicklung in Österreich“). Ich konnte somit in der 8. Schulstufe das Freifach Informatik besuchen und in der Oberstufe den Zweig Informatik wählen. Dieser Schulzweig hatte nicht nur einen naturwissenschaftlichen und mathematischen Schwerpunkt, sondern der Mathematikunterricht fand im Zuge eines Schulversuchs fast ausschließlich vor dem PC unter zu Hilfenahme des Programms Derive (siehe „3.2 CAS“) statt.

Das Schulbuch wurde nur sehr selten eingesetzt, da unser Mathematiklehrer und Klassenvorstand die Aufgaben und erklärende Texte online zur Verfügung stellte. Und auch heute noch arbeiten Schüler mit dieser Internetseite¹.

Der Wechsel zur Universität brachte bald Ernüchterung. Im Unterrichtsfach Mathematik hörte ich das erste und einzige Mal im 2. Studienabschnitt im Zuge des dreistündigen Computerpraktikums für LAK von Unterricht, der auch die Neuen Medien nutzt. Im Unterrichtsfach Physik gab es keine verpflichtende Lehrveranstaltung zu den Neuen Medien im Unterricht, ich konnte aber eines meiner freien Wahlfächer mit dem Seminar „Elektronische Lernumgebungen im Physikunterricht“ belegen. Auch in der pädagogischen Ausbildung konnte ich nur eines meiner vier im 2. Abschnitt vorgeschriebenen Seminare so wählen, dass es Anknüpfungspunkte an die Neuen Medien hatte. Nur meine Beschäftigung mit diesem Thema neben dem Studium ermöglichte mir die

¹<http://www.guenter-schoedl.at>

Erstellung der Lernumgebung.

Die Inspiration zu der Lernumgebung kam zum einen aus der Arbeit mit einer ähnlichen Online-Umgebung während meiner Schulzeit, zum anderen aus dem Plan Governor Schwarzeneggers in Zukunft nur noch digitale Schulbücher verwenden zu lassen [Schwarzenegger 09], und zu guter Letzt aus der Beschäftigung mit Lernpfaden zu Mathematik und Physik in den beiden oben genannten fachdidaktischen Lehrveranstaltungen.

Da die Online-Lernumgebung von Mag. Schödl fast ausschließlich für den eigenen Unterricht gedacht ist, war sie für meine Vorstellungen zu abgeschlossen, und auch zu wenig interaktiv. Sie ist noch sehr stark auf das CAS Derive ausgerichtet, das aber nicht mehr weiterentwickelt wird. Governor Schwarzenegger sprach von „digital textbooks“, also der reinen Digitalisierung der Schulbücher – dabei würden die eigentlichen Vorteile der Neuen Medien, wie Interaktivität und Hypertextualität nicht genutzt. Die in den Lehrveranstaltungen selbst erstellten und darin vorgestellten Lernpfade sind in sich geschlossen und lassen nur wenig Veränderung zu.

All diesen Kritikpunkten wollte ich mit einer eigenen Version eines elektronischen Schulbuches Herr werden.

1.2 Aufbau der Diplomarbeit

Der theoretische Teil der Arbeit findet sich in den Kapiteln 2 und 3. Dabei werden die Entwicklung der Neuen Medien in Österreich und der Begriff eLearning in Zusammenhang mit den drei gängigsten Lerntheorien in Kapitel 2 behandelt. Kapitel 3 geht dann näher auf den Einsatz von Neuen Medien im Mathematikunterricht ein. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die verschiedenen Programme und den Einsatz des Internet gelegt.

Kapitel 4 stellt die elektronische Lernumgebung vor. Es werden dabei genaue Beschreibungen der einzelnen Unterkapitel gegeben und danach zwei Lernpfade vorgestellt, die mit Hilfe der Lernumgebung erstellt wurden. Im Anhang finden sich die beiden Lernpfade mit Leistungsblättern und didaktischen Kommentar, sowie ein Verzeichnis aller Aufgaben der Lernumgebung. Im Anschluss daran finden sich die Verzeichnisse der Abbildungen, Tabellen und Literatur.

Kapitel 2

Neue Medien in der Schule

2.1 Entwicklung in Österreich

Ende der Neunziger Jahre und Anfang des letzten Jahrzehnts kam es zu einer rasanten Aufrüstung der Schulen mit Computern, Internetzugang und Beamern. Man folgte dabei dem Beispiel der USA, in der Clinton 1996 in Hinblick auf das Jahr 2000 vorgab: „Alle Lehrer werden das Training und die Unterstützung erhalten, die sie benötigen, um den Schülern dabei zu helfen, die Benutzung von Computern und des Internets zu erlernen.“ [Dichanz 99, S. 120]

Die rasche Entwicklung zeigt sich exemplarisch am BG Babenbergerring in Wiener Neustadt. Im Jahr 1985 wurde mit 8 Computern der erste Informatiksaal eröffnet. In den Jahren 1990 und 1995 kamen dann die Informatiksäle 2 und 3 dazu. Seit 2003 wird am Bundesgymnasium Babenbergerring der Schulversuch Notebookklassen durchgeführt.

Heute gibt es für die Schüler ca. 100 Computer, davon einen in jeder Klasse, und zusätzlich 3 Klassen, die mit Notebooks ausgestattet sind.¹

Dieser Wandel ist eine der Antworten auf einen der drei „Megatrends“, die im Weißbuch des BM:BWK festgehalten wurden:

„Die Informationalisierung unserer Gesellschaft zu einer Lern- und Wissensgesellschaft aufgrund der fortschreitenden Entwicklung und Dominanz von Kommunikationstechnologien. Durch neues Wissen konstituiert sich diese Gesellschaft ständig neu und erfordert zur Anteilnahme lebenslanges Lernen des Einzelnen.“ [BMBWK 03, S. 3]

Die rasche technologische Aufrüstung lässt sich auch anhand der Anzahl der Notebookklassen zeigen.

¹Zahlen aus Email-Kontakt mit G. Schödl, Lehrer am BG Babenbergerring, am 01. 06. 2010

Schuljahr	Anz.d.Schulen	Anz. d. Klassen	Anz. d. Schüler	Akzent
Vor 2000	5-10	10-15	200-250	Pioniere(HAK, AHS)
SJ 2000/01	33	60	1500	Projektbeginn (Technik)
SJ 2001/02	66	96	2750	Content-Fragen
SJ 2002/03	101	146	4100	e-Learning-Didaktik

Tabelle 2.1: Entwicklung der Notebookklassen von 2000 bis 2002/03 [Arbor 03, S. 3]

Nach einer Umfrage des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur zum Schuljahr 2008/09 nahm ein Viertel der Bundesschulen an dem Schulversuch Notebookklassen teil und führten mindestens eine Notebookklasse.

Die rückmeldenden Schulen – die Umfrage hatte eine Rücklaufquote von 50 % – führen in Summe 640 Notebookklassen. Von der Rücklaufquote ausgehend, ist dieser Wert eher eine untere Schranke für die tatsächliche Anzahl der Notebookklassen. Der Aufwärtstrend hat also klar angehalten.

Laut Rassinger wurde dieser schnelle Wandel der Unterrichtsmöglichkeiten aber nur ungenügend den Lehrpersonen vermittelt. „Ein Beweis dafür ist zum Beispiel, dass die pädagogischen Lehrveranstaltungen im Rahmen der Lehramtsausbildung noch immer nicht an die IT-Offensive angepasst wurden (am Institut für die schulpraktische Ausbildung der Universität Wien behandeln im Sommersemester 2004 nur vier von ca. 30 Lehrveranstaltungen das Thema „Neue Medien im Unterricht“).“ [Rassinger 04, S. 10]

Auch im Sommersemester 2010 – immerhin 6 Jahre später – stehen im 2. Abschnitt des Lehramtstudiums nur 5 von ca. 45 Lehrveranstaltungen in Bezug zu Neuen Medien. Womöglich wird es nicht als Aufgabe der Pädagogik gesehen, sondern an die Fachdidaktik weitergereicht? Es finden sich im Sommersemester 2010 im Fach Mathematik ca. 9 Lehrveranstaltungen im Bereich der Fachdidaktik. Die einzige Lehrveranstaltung, die explizit mit den Neuen Medien arbeitet, ist unter dem Fachbereich „Mathematik“ zu finden und ist das „Computerpraktikum für Lehramtskandidaten“. Im Fach Physik finden sich 10 Lehrveranstaltungen unter der Rubrik Fachdidaktik. Keine davon beschäftigt sich explizit mit den Neuen Medien im Unterricht.[UNIVIE 10]

Selbst heute ist es für Lehramtsstudenten notwendig sich das Wissen rund um die Neuen Medien entweder durch sehr gezielte Auswahl der Pflichtlehrveranstaltungen und Freifächer oder durch Selbststudium anzueignen.

Eine Möglichkeit zur Weiterbildung im Bereich der Neuen Medien bietet die e-LISA academy. Seit 1998 können Onlinekurse über die Sommermonate hinweg im Internet über die Seite <http://www.e-lisa-academy.at> besucht werden.

Rassinger beschreibt in [Rassinger 04, S. 18f] ihre eigenen Erfahrungen im Sommer 2003 mit der e-LISA academy, die ich hier kurz wiedergeben werde. Sie belegte sechs Kurse:

- Heikle Themen beim Interneteneinsatz im Unterricht

- Arbeitsblätter erstellen mit dem Computer
- Unterrichten mit dem Internet
- Unterrichten mit dem Internet für die Volksschule
- Das Notebook-Projekt an meiner Schule
- Unterrichten in einer Notebook-Klasse

Die Kurse konnten direkt über das Anmeldesystem auf der Homepage der e-LISA academy bestellt werden. Nach Erhalt eines Erlagscheins per Post und der Begleichung der Kursgebühr wurde per e-Mail ein Passwort zugesandt, mit dem in die Kurse eingeloggt werden konnte.

Den Beginn jedes Kurses markierte eine Darstellung der Inhalte und Ziele. Rassinger streicht vor allem die didaktisch sehr gute Aufbereitung und die zeitliche Flexibilität beim Lernen als positive Merkmale der Kurse heraus. Der Zeitaufwand gestaltet sich von Kurs zu Kurs verschieden und schwankte zwischen 10 Stunden und 3 Tagen. Das Ende jedes Kurses bildete eine freiwillige Abschlussübung, die als Bewertungsbasis für eine positive Belegung des Kurses diente.

Im September erhielt Rassinger per Post ein Zertifikat über die belegten Kurse.

Die Kurse sind aufgrund einer Vereinbarung mit den Pädagogischen Hochschule für den Tätigkeitsbereich C von Pflichtschul-Lehrkräften anrechenbar.

Zusammenfassend kann man sagen, dass sich die Umgebung in der Schule rasch der Lebenswelt der Schüler angepasst hat, die Lehrerausbildung an der Universität hier aber noch nachhinkt.

2.2 Pro und Contra

Die technologische Aufrüstung der Schulen und des Unterrichts ist nicht unumstritten. Wie bei Kino, Fernsehen und Video sind viele Skeptiker des PC-Einsatzes in Sorge um die Jugend. Dazu zitiert Rassinger in [Rassinger 04, S. 10f] aus einem Gespräch mit Breinbauer:

„Die Haltung, neu erscheinende Medien von Kindern fernzuhalten, ist Teil der so genannten „Normativ-kulturpessimistischen Medienpädagogik“, welche das Kind als passives, determinierbares und den Medien hilflos ausgesetztes Wesen sieht. Die Entziehung des Kindes aus dem Einflussbereich eines Mediums wird als Prävention angesehen.

Bereits im 17. Jahrhundert kamen mit dem Erscheinen der Presse Inhalte in Umlauf, welche die Vorstellungen der Menschen veränderten. Bald darauf wurde der Presse unterstellt, „Entsittlichung und Verrohung“ zu unterstützen. Das eigentliche Problem der Eltern und Erzieher war damals jedoch, dass sie das nun bestehende „Massenmedium“ nicht mehr kontrollieren konnten.

Ein weiterer Aspekt der Bewahrpädagogik spiegelte sich mit dem Aufkommen der ersten Kinos am Anfang des 19. Jahrhunderts wider. Erwachsene ließen ihre Kinder zu diesem Zeitpunkt aus „hygienischen Gründen“ nicht ins Kino gehen. Die eigentliche Angst bestand jedoch vor sinnlichen und sittlichen Attraktionen.

Bald darauf entstand der „legistische Jugendschutzgedanke“ (1913), der bestimmte Bereiche auch heute noch von der Jugend abgrenzt. Doch was heute gilt, galt damals auch schon: sobald ein Verbot ausgesprochen wird, ist die Sache für Jugendliche doppelt so interessant. Deshalb entwickelte sich der „pädagogische Jugendschutz“, der andere Möglichkeiten für den problemorientierten Umgang mit Medien suchte. Aus dieser Richtung entwickelte sich die aktuelle Haltung der „akzeptierenden Medienpädagogik“, die eine Konfrontation mit den Problemen sucht.“

Im Sinne dieser „akzeptierenden Medienpädagogik“ wäre es eine Aufgabe des österreichischen Schulsystems, den Schülern sowohl Gefahren, als auch Nutzen der Neuen Medien näher zu bringen. Denn zuhause werden die Kinder ohnehin mit PC und Internet konfrontiert. So ist nach Statistik Austria der Anteil an Haushalten mit PCs von 2002 mit 49,2 % bis 2009 auf 74,5 % gestiegen [StatistikAustria 09-1]. Der Anteil der österreichischen Haushalte mit Internetanschluss ist im gleichen Zeitraum von 33,5 % auf 69,8 % gestiegen [StatistikAustria 09-2].

Aber nicht nur zuhause, auch am späteren Arbeitsplatz wird von den Schülern die Bedienung von PCs und der richtige Umgang mit dem Internet verlangt. So setzen laut Statistik Austria im Jänner 2009 98,7 % der Unternehmen PCs ein, und 97,7 % der Unternehmen besitzen Zugang zum Internet [StatistikAustria 09-3].

Die heutige Lebenswelt der Schüler ist diesen Statistiken zufolge hoch technisiert. Doch ist der gesellschaftliche Wandel nicht der einzige Grund die Neuen Medien in der Schule zu nutzen. Sie besitzen auch Vorteile gegenüber den konventionellen Unterrichtsmedien wie Buch, Heft, Tafel und Overhead:

- Durch Interaktivität und direkte Rückmeldung am PC lassen sich schülerzentrierte und differenzierte Unterrichtsszenarien gestalten.
- Das Arbeiten mit Simulationsprogrammen kann sowohl für das Abstraktionsvermögen als auch für das Reflexionsvermögen des Schülers förderlich sein.
- Spezielle Software kann in Mathematik den Schülern das Operieren abnehmen und helfen den Schwerpunkt des Unterrichts auf das Argumentieren, Modellieren und Interpretieren zu lenken.

Es gilt bei allen Vorteilen auch stets im Blick zu halten, dass Neue Medien kein Allheilmittel darstellen. Es gilt sich vor den „Drei Medienfallen“ in Acht zu nehmen [Reinmann-Rothmeier/Mandl 98]:

- die **Spaß-Falle**: Lernen ist nach wie vor Arbeit, verbunden mit Mühe und Anstrengung. Auch Neue Medien werden daran nichts ändern.
- die **Schnelligkeits-Falle**: Lernen braucht Zeit, auch wenn man Informationen

in Sekundenschnelle aus dem Internet abrufen kann.

- die **Effektivitäts-Falle**: Lernen ist notwendigerweise mit Fehlermachen verbunden. Auch Neue Medien sind nicht fehlerfrei.

2.3 eLearning

2.3.1 Begriffsdefinition

Sowohl Rassinger, als auch Rey stimmen darin überein, dass es keine einheitliche Definition oder Schreibweise für eLearning gibt (e-Learning, E-Learning, eLearning, usw.). Ich verwende in dieser Arbeit die Schreibweise eLearning. Rey definiert eLearning als „Lehren und Lernen mittels verschiedener elektronischer Medien“ [Rey 10].

Bei Rassinger werden verschiedene Definitionen vorgestellt. So stellt sie eLearning unter anderem als einen „Sammelbegriff für IT-gestütztes Lernen bzw. alle Formen elektronisch unterstützten Lernens“ vor. Weiters wird bei Rassinger der eLearning-Begriff des BM:BWK erwähnt. Dieses versteht darunter einen „mittels elektronischer Hilfsmittel gesteuerten Prozess, um ein bestimmtes Wissen zu erwerben und Lernprozesse zu steuern“ [Rassinger 04, S. 15].

Der kleinste gemeinsame Nenner scheint hier im eLearning Verständnis von Rey zu liegen. Diese weit gefasste Definition bringt aber nicht unbedingt Klarheit.

Oft wird eLearning auch mit „Distance Learning“ gleichgesetzt. Das heißt, dass man von zuhause, vom Arbeitsplatz oder an jedem beliebigen Ort mit einem Computer lernen kann. Dabei unterscheidet man zwischen [Dorninger 02]:

- **Computer-Based-Training**: Darunter versteht man das Lernen, ohne dass der Computer über einen Internetanschluss verfügen muss. Die Lernunterlagen oder das Lernprogramm werden dann meist per CD oder DVD erhalten.
- **Web-based-Training**: Darunter versteht man eLearning-Kurse, in denen die Lernunterlagen online verfügbar sind.
- **Computer Supported Collaborative Learning**: Dabei stellen Lernplattformen das Lernmedium dar auf dem nicht nur die Lernunterlagen verfügbar sind, sondern es auch zu Austausch mit Lehrern und Mitlernern über Chat und Foren kommen kann.

In der Schule kann von „Distance Learning“ aber kaum gesprochen werden, da die Unterrichtsstunde noch immer unter Aufsicht des Lehrers stattfindet. Hier wird der Begriff „Blended Learning“ verwendet. Das Konzept von Blended Learning ist dabei, dass sich Phasen des eLearning – im Sinne von Distance Learning – mit Präsenzphasen abwechseln [Mandl/Kopp 05, S. 8]. Dabei werden die sozialen Aspekte des gemeinsamen Lernens mit der Flexibilität der elektronischen Lernformen verbunden. Aber auch dieser Begriff ist nicht sehr eindeutig. Im Deutschen bedeutet „blended“ soviel wie

„vermischt“, „integriert“ und „hybrid“, nur was genau verbunden wird, ist nicht näher definiert. Laut Mandl und Kopp lässt sich „blended“ besser mit „Variation“ in Verbindung bringen. Dabei steht die Variation der Zugangsweisen zum Lerngegenstand im Vordergrund, die den Lernprozess stimulieren soll [Mandl/Kopp 05, S. 8]. Diese verschiedenen Zugangsweisen können z. B. über Recherche im Internet, Betrachten eines Videos oder einer Exkursion erreicht werden. Wichtig ist für Mandl und Kopp hier den Lernenden in den Mittelpunkt zu rücken und sie plädieren dafür in Blended Learning Szenarien eine konstruktivistische (siehe „2.3.2 Lerntheorien“) Konzeption zu verwenden.

2.3.2 Lerntheorien

Bis heute gibt es keine einheitliche psychologische Lerntheorie. Eine heute gängige Einteilung ist die in behavioristische, kognitivistische und konstruktivistische Lerntheorien.

1. Behaviorismus: [Stangl 10-1]

Der amerikanische Psychologe John B. Watson gilt als Begründer des Behaviorismus. In seiner Arbeit stützt er sich unter anderem stark auf die Reiz-Reaktions-Studien von Pawlow.

Der Behaviorismus behandelt den Lerner als Black Box und untersucht lediglich auf welchen äußeren Reiz, welche sichtbare Reaktion hervorgerufen wird. Im Unterricht soll dann dieses Reiz-Reaktions-Verhalten so verändert werden, dass es dem Lernziel entspricht.

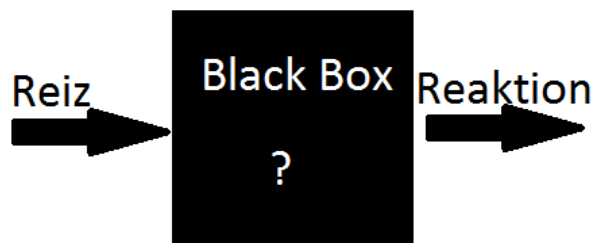


Abbildung 2.1: Black-Box-Modell der Psychologie

Im Mathematikunterricht soll auf die Frage „Wie viel ist $2+2$?“ (Reiz) immer die Antwort „4“ (Reaktion) gegeben werden. Man beschäftigt sich im Behaviorismus nicht damit, wie diese Antwort zu Stande kommt. Es reicht völlig aus, das Verhalten des Lernenden so verändert zu haben, dass zu einem Reiz die passende Reaktion erfolgt.

Im Bereich des eLearning gibt es viele einfache Lernprogramme, die nach der Lerntheorie des Behaviorismus gestaltet sind. In [Thissen 10] wird als Beispiel das Programm „Mega Mathe Blaster“ von Davidson and Associates (1996) genannt. Mit diesem Programm trainieren die Schüler das Kopfrechnen von der 1. bis zur 6. Schulstufe.

Die Übungen sind dabei in eine Science-Fiction Rahmenhandlung verpackt, die die Zielgruppe ansprechen und motivieren soll.



Abbildung 2.2: Screenshot aus Mega Mathe Blaster [Thissen 10]

Es gilt dabei für die Schüler durch Lösen von Rechenaufgaben das Universum zu retten. Die Rechenaufgaben gibt es in variablen Schwierigkeitsgraden und wie in Abbildung 2.2 zu sehen, werden sie grafisch an die Hintergrundgeschichte des Spiels angepasst.

Der Aufbau und die Präsentation dienen dabei lediglich dazu das Interesse des Schülers wachzuhalten. Durch das richtige Lösen von Aufgaben erhält der Schüler Punkte und erreicht neue Spielebenen.

Am Ende des Spiels wird die Leistung des Schülers bewertet und er erhält ein „Missionszeugnis“.

Wie aus der obigen Beschreibung gut ablesbar ist, ist Mega Mathe Blaster ein Programm, das zum Einüben eines fest umrissenen Stoffgebiets dient. Auf den passenden Reiz (die zu lösende Aufgabe) soll die passende Reaktion (die richtige Lösung) erfolgen. Stimmt die Reaktion zum Reiz, so wird das Verhalten durch positive Rückmeldung des Programms (Punkte und womöglich Levelaufstieg) verstärkt.

Lernprogramme im Sinne des Behaviorismus sind dem Mega Mathe Blaster alle sehr ähnlich. Es gibt ein klar umrissenes Stoffgebiet, das behandelt wird, die Lernziele sind festgelegt und meist präsentiert sich das Programm als Folge von Frage/Aufgabe und Antwortkombinationen. Das Lernergebnis wird direkt vom Programm gemessen.

2. **Kognitivismus:** [Stangl 10-2]

Im Kognitivismus wird das menschliche Verhalten nicht als Black Box gesehen, sondern es sollen die Denkprozesse des Lernens erkannt und erklärt werden. Entscheidende Merkmale für die kognitivistische Sichtweise sind:

- Erkenntnisse werden durch die direkte Auseinandersetzung mit der Umwelt gewonnen.

- Handeln wird von Denkvorgängen und nicht nur von äußeren Reizen bestimmt. Reize werden also nicht nur aufgenommen, sondern auch verarbeitet und bewertet.
- Lernen ist nicht nur eine Ansammlung von Fakten, sondern eine Anpassung des Individuums an die Umwelt, oder eine Anpassung der Umwelt an das Individuum.

Kognitives Lernen lässt sich laut Stangl durch drei Merkmale beschreiben.

„Einsicht ist abhängig von der Anordnung der **Problemsituation**, Lernerfolg stellt sich **plötzlich** ein („Aha-Erlebnis“), die gewonnene Lösung kann auf andere Situationen **angewendet** werden.“ [Stangl 10-2]

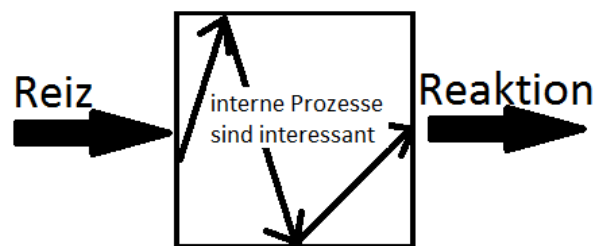


Abbildung 2.3: Modell des Kognitivismus

Im Mathematikunterricht könnte man die kognitivistische Lerntheorie beobachten, wenn für das Problem der Interpolation von Messwerten das Konzept lineare Interpolation vorgeführt wird und danach von den Schülern auf andere Probleme angewandt wird. Weiterführend könnten Schüler dann vom Konzept der linearen Interpolation ausgehen und Funktionen höheren Grades zur Interpolation verwenden.

Dabei geht es nicht um den Algorithmus, sondern um das Konzept der Anpassung von Funktionen an vorgegebene Werte. Dieses Konzept kann ebenfalls zur näherungsweisen Berechnung von Integralen, zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen eingesetzt werden und – aber eher selten in der Schule – es führt zur Näherung von Funktionen durch Taylorreihen. Im Gegensatz zum Behaviorismus geht es nicht um die richtige Antwort, sondern um eine passende Problemlösungsstrategie.

In [Thissen 10] wird als eines von drei Beispielen für eLearning mit kognitivistischen Ansätzen das Tutorial STEP 7 der Firma Siemens für das Programm STEP 7 zur Programmierung und Einstellung von Automatisierungsgeräten (SIMATIC S7) genannt.

Dabei führt ein Tutor durch das Programm und vermittelt die Möglichkeiten des Programms anhand eines konkreten Beispiels: einer Flaschenabfüllanlage in einer Brauerei.

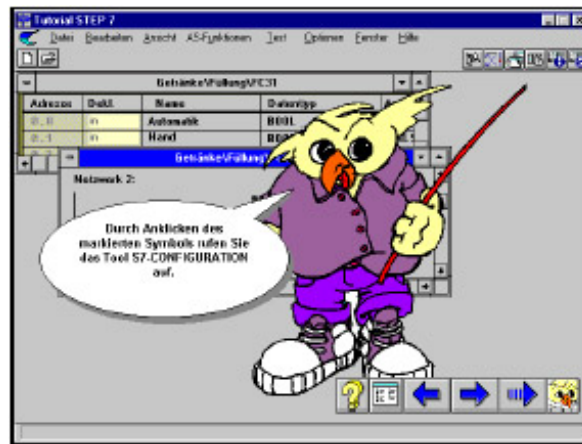


Abbildung 2.4: Screenshot aus STEP 7 [Thissen 10]

Die elf Lektionen bestehen aus einem einleitenden Teil, in dem mittels Animationen Zusammenhänge und Begriffe verdeutlicht werden sollen. Danach wird die Bedienung der Software in einer Simulation geübt, durch die der Tutor schrittweise führt. Im letzten Schritt wird dem Lerner eine Aufgabe gestellt, die er eigenständig zu lösen hat. Weiß er einmal nicht weiter, so kann er mit Knopfdruck den Tutor zu Hilfe holen und sich den nächsten Schritt anzeigen lassen. Am Ende jeder Lektion steht ein Multiple Choice Test zur Überprüfung des Lernerfolgs.

Im Gegensatz zu behavioristischen Programmen werden hier dem Lerner Vorgangsweisen und Zusammenhänge erst näher gebracht, dabei führt oft ein Tutor als Vorbild durch das Programm. Diese Programme sind aber meist sehr linear aufgebaut und laden kaum zum assoziativen Erschließen des Lernstoffes ein.

3. Konstruktivismus:[Stangl 10-3]

Im Konstruktivismus wird davon ausgegangen, dass Lernen ein konstruktiver Prozess ist und damit stark vom Lernenden selbst beeinflusst und abhängig. Dieses Lernen als Konstruktion steht damit im Kontrast zum Aneignungs- und Abbildungs-Lernen des Kognitivismus. Jeder Lernende konstruiert sein Wissen und damit verbundene Wirklichkeiten aus eigenen Erfahrungen selbst. Dafür ist es wichtig, dass der Lernende entsprechende Freiheit für das Konstruieren hat. Soziale Interaktionen sind dafür ausschlaggebend wie das Lernen weitergeführt und entwickelt wird. Das Wissen wird laut Konstruktivismus also nicht in den Lernenden eingebracht, sondern wird innerhalb des Lernenden erst konstruiert. Es gibt nach Stangl hauptsächlich vier theoretische Ansätze, die den Lernprozess als konstruktivistisch darstellen:

- **Jean Piaget** war wegweisend für den Konstruktivismus. Auf ihn geht zurück, dass der Lernende aus eigener Aktion heraus lernt, sich dabei eine Wirklichkeit konstruiert und schließlich versucht diese mit der Umwelt in Abgleich zu bringen. Dieser ständige Abgleich durch Assimilation und Akkomodation mit der Umwelt ist für den Ansatz des Konstruktivismus entscheidend.

- **Lew S. Wygotzky** betont im Vergleich zu Piaget stärker die kulturelle Lernumwelt. Soll also ein Lernprozess stattfinden, so muss die Lernumgebung so gestaltet sein, dass er als Entwicklungsmöglichkeit vom Lernenden gesehen wird. Es sollen also Lernangebote unterbreitet werden, die konstruktiv vorantreiben und nicht ausschließlich den bestehenden Wissensstand sichern.
- **John Dewey** verdeutlichte als Fazit der Reformpädagogik die Selbsttätigkeit und Selbstbestimmung der Lernenden. Lernen durch Tun soll sich dabei auf durch Interesse und Motive nachvollziehbares Lernen beschränken und darf die kulturellen Hintergründe des Lernens nicht außer Acht lassen. Lernen ist für Dewey in der konkreten Aktion und der Lebenswelt der Lernenden stark verankert.
- **Jerome S. Bruner** hat Piagets Konstruktivismus um soziale Interaktionen und historisch-kulturelle Dimensionen erweitert.

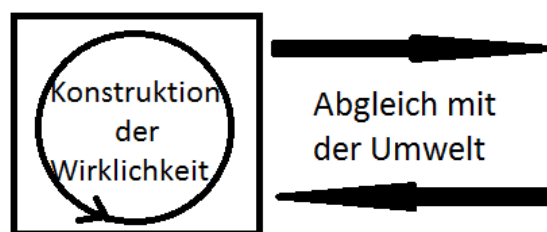


Abbildung 2.5: Modell des Konstruktivismus

Im Mathematikunterricht wäre eine konstruktivistische Lernumgebung geschaffen, wenn man die Schüler mit einem Applet zur linearen Funktion arbeiten lässt, in dem sich Steigung und Ordinatenabstand der Funktion frei verändern lassen. Es gilt hier für die Bearbeitung des Applets eine Aufgabenstellung zu finden, die nicht zu eng gefasst ist. Ein Beispiel dafür wäre: „Welche Bedeutung haben die Parameter Steigung k und Ordinatenabstand d für den Graphen der linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$?“ Die Schüler sollen also mit ihrem eigenen Tun, den Änderungen des Applets, selbst Wissen konstruieren. Es wird dabei vom Lehrer nichts vorgezeigt.

Anhand des Applets haben die Schüler selbst die Möglichkeit ihre Theorien immer wieder zu prüfen und gegebenenfalls anzupassen.

Konstruktivistische Theorien im eLearning finden sich laut [Thissen 10] vor allem in Lernumgebungen, die zum freien Erkunden und Entdecken einladen, sowie Simulationen. Als eines von drei Beispielen präsentiert [Thissen 10] das Programm CABS.

CABS ist eine betriebswirtschaftliche Simulation, die den Lernenden in die Rolle versetzt die Entwicklung eines internationalen Automobilherstellers zu beeinflussen. In verschiedenen Fallstudien soll das Unternehmen möglichst gut geführt werden. Das Programm verwendet dabei nicht nur authentische

Markt- und Strukturdaten der Automobilbranche, sondern auch wissenschaftlich anerkannte betriebswirtschaftliche Modelle.

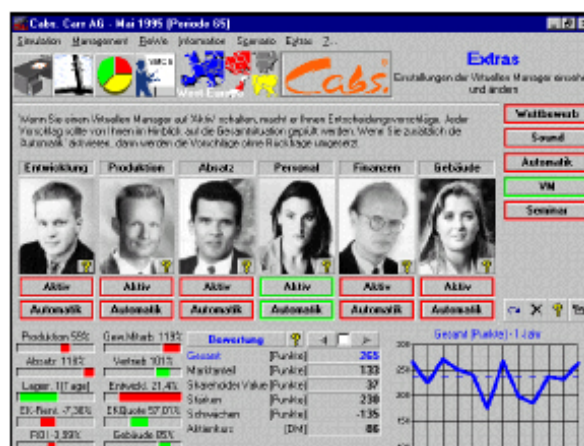


Abbildung 2.6: Screenshot aus CABS [Thissen 10]

Der Lernende hat in der Simulation Zugriff auf Produktentwicklung, Produktion, Marketing, Logistik, Personalwesen und Rechnungswesen, Steuern und Jahresabschluss. Dabei wird versucht die Unternehmensbereiche und Beeinflussungsmöglichkeiten möglichst authentisch darzustellen.

Durch Veränderungen am Unternehmen können die Auswirkungen direkt an den sich verändernden Strukturdaten beobachtet werden, und so ist es möglich Zusammenhänge selbst zu entdecken.

Es gibt zwar eine tutorielle Hilfe, die den Einstieg in das Programm erleichtert, diese führt aber den Lerner nicht so stark, wie das z. B. bei STEP 7 der Fall ist. Vielmehr wird durch Erfahrung, durch Ausprobieren gelernt. Als zusätzliche Hilfestellung gibt es kontextsensitive Hilfsinformationen, Leitfäden und Glossare.

In konstruktivistischen Lernprogrammen wird der Lernende nicht mehr geführt und angeleitet, sondern oftmals sich selbst überlassen. Das Programm ist durch Hilfen und Anregungen mehr Berater und Begleiter als Prüfungsinstrument wie bei behavioristischen Programmen oder Instruktionsprogramm wie bei kognitivistischen Programmen. Es wird versucht authentische Erfahrungen mit dem Themengebiet zu inszenieren und bietet dem Lerner ein hohes Maß an Freiheit und Eigenverantwortung.

2.3.3 eContent Erlass

Im Jahre 2003 startete das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur mit [eCONTENT 03] einen Versuch, das komplexe Feld der Contentgenerierung aufzubereiten und auch mit Hilfe von Serviceleistungen des Bildungsportals www.bildung.at gemeinsam nutzbar zu machen.

Für diese Arbeit sind vor allem die Begriffsbildungen durch den Erlass interessant:

- Als **Lernobjekt** wird die kleinste Einheit einer eContent-Entwicklung definiert. Dies könnte ein Java-Applet, ein Bild, eine interaktive Aufgabe oder ein Test sein. Auch ein komplexes Simulationsprogramm wie CABS (siehe 2.3.2) würde man als Lernobjekt bezeichnen.
- Ein **Lernmodul** besteht aus Lernobjekten und einer Darstellung der Lernmethodik. Das Lernmodul soll eine didaktisch sinnvolle Struktur und didaktische Funktionen wie Motivation, Darstellung der Inhalte, Überprüfungen und kleine Tests beinhalten.
- Eine **Lerneinheit** ist vom Zeitbedarf her für eine oder zwei Unterrichtseinheiten aufgebaut und besteht aus mehreren Lernmodulen. Zusätzlich zu den Lernmodulen soll ein didaktisches Konzept mit Hinweisen zur Unterrichtsgestaltung im Sinne des „Blended Learning“ vorliegen.
- **Kurse** oder **Unterrichtssequenzen** stellen schließlich eine Verbindung vieler Lerneinheiten dar, die 3-4 Wochen bis ein ganzes Semester an Zeit beanspruchen können.

Kapitel 3

Neue Medien im Mathematikunterricht

Im Gegensatz zu anderen Fächern wird in Mathematik der Computer seltener zur Recherche oder als Instrument zum Abfassen von Mitschriften verwendet, sondern es steht spezielle Software im Vordergrund [Arbor 03, S. 64]. Diese spezielle Software sowie der Einsatz des Internet im Mathematikunterricht werden in 3.1 bis 3.5 behandelt.

Anschließend wird das Projekt Medienvielfalt vorgestellt, mit dem sich die Dissertation Stepanciks [Stepancik 08] beschäftigt.

3.1 Funktionsplotter

Das englische Wort „Plotter“ bedeutet soviel wie Planzeichner. Ein Funktionsplotter zeichnet somit Funktionsgraphen. Funktionsplotter lassen sich heute mit verschiedensten Programmen erstellen, wie z. B. Tabellenkalkulationen, Derive¹, GeoGebra², Euklid Dynageo³.

Funktionsplotter, die auch wirklich nur diese Aufgabe erfüllen, sind DPGraph⁴ von David Parker und der Funktionsplotter von Mathe-Online⁵.

Hischer nennt zwei für Funktionsplotter „methodisch sehr interessante Aspekte“ [Hischer 02]:

1. Der **Trace-Modus** erlaubt es dem Anwender ein frei bewegliches Cursor-Fadenkreuz an den Funktionsgraphen anzubringen und diesen damit „abzufahren“. So lassen sich interaktiv näherungsweise Nullstellen und Schnittpunkte mit anderen Funktionen bestimmen.

¹Ein Computer Algebra System von Texas Instruments

²Ein Dynamisches Geometrie System (DGS) – siehe 3.3

³Ein weiteres DGS

⁴<http://www.dpgraph.com/index.html>

⁵www.mathe-online.at

2. Die quasi-kontinuierliche **Konstantenvariation** wird bei Funktionsplotter meist mit Schiebereglern realisiert. Dabei können Parameter der Funktion mausgesteuert und interaktiv verändert werden. Die Änderung der Parameter soll dabei sowohl am Funktionsgraphen, als auch am Funktionsterm sichtbar sein.

Unter diesen Gesichtspunkten sollen nun die oben genannten Funktionsplotter untersucht werden:

- Funktionsplotter auf **Mathe-Online**:

Der Funktionsplotter von Mathe-Online hat den geringsten Funktionsumfang, kann dafür aber direkt vom Internet aus gestartet werden. Man kann Funktionen beliebiger Terme zeichnen und mit den Koordinatenangaben beim Mauscursor Nullstellen und Schnittpunkte mit anderen Funktionen annähernd bestimmen. Es gibt aber nicht die Möglichkeit des Trace-Modus oder der Konstantenvariation. Er stellt somit das Grundgerüst eines Funktionsplotters dar.

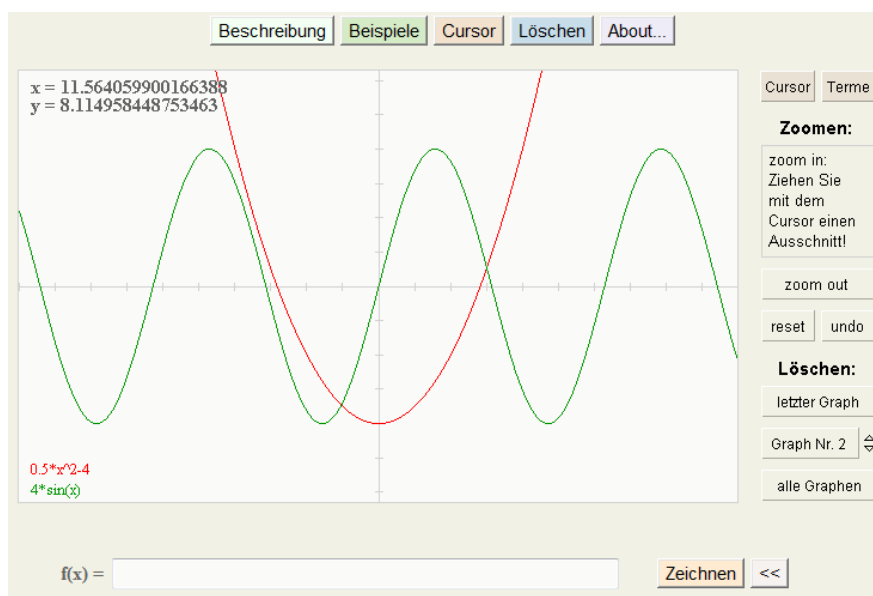


Abbildung 3.1: Screenshot des Mathe Online Funktionsplotters

- **DPGraph**:

Dieser Funktionsplotter ist vor allem für die Animation zeitabhängiger 3D-Darstellungen impliziter Funktionen gedacht. Er kann nur mit Erlernen der implementierten Programmiersprache bedient werden. Es gibt keinen Trace-Modus und die Konstantenvariation ist nicht interaktiv, sondern lässt sich nur mittels Animation darstellen. Hischer betont als Vorteile dieses Plotters den spielerischen Zugang, den man an den Tag legen kann, um „nutzlose“ schöne Flächen und Kurven zu erzeugen. [Hischer 02]

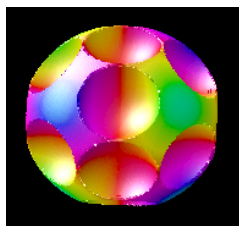


Abbildung 3.2: Screenshot aus DPGraph, Quelle: <http://www.dpgraph.com/index.html>

- Funktionsplotter erstellt mit **DynaGeo**, **Derive**, **GeoGebra** oder **Tabellenkalkulation**:

Mittels DynaGeo, Derive und GeoGebra lassen sich Funktionsplotter, die einen Trace-Modus und mausgesteuerte Konstantenvariation besitzen, sehr einfach erstellen und können nach kurzer Anleitung auch von Schülern selbst erstellt werden.

Bei Derive und DynaGeo ist jedoch zu beachten, dass die Änderungen, die durch Bedienung der Schieberegler an den Konstanten vorgenommen werden, nicht am Funktionsterm dargestellt werden. Wie in Abbildung 3.3 erkennbar wird nicht die Zahl in den Funktionsterm eingefügt, sondern lediglich die dafür stehende Variable a angeschrieben.

Aufwändiger ist es mit Tabellenkalkulationen einen Funktionsplotter zu erstellen, der über mausgesteuerte Konstantenvariation verfügt. Die Möglichkeit des Trace-Modus gibt es hier nicht. Einen solchen Funktionsplotter findet man auf [mathe online](http://mathe-online.at)⁶.

GeoGebra bietet als einziges Programm die Möglichkeit für Schüler einfach nachzubauende Funktionsplotter zu erstellen, der nicht nur einen Trace-Modus besitzt, sondern die mausgesteuerte Konstantenvariation direkt an Funktionsterm und -graph sichtbar macht.

Funktionsplotter ähnlich jenem von Mathe-Online bieten nur eine Abkürzung für Schüler – die Funktion muss nicht mehr händisch gezeichnet werden. Dem entgegen stehen Funktionsplotter, wie sie z. B. GeoGebra zur Verfügung stellt. Stepancik meint in [Stepancik 08, S. 89], dass mit solchen Funktionsplotttern, so sie in entsprechende Aufgabenstellungen eingebettet sind, der Verstehensprozess hinsichtlich des Einflusses von Formvariablen auf Form und Lage des Funktionsgraphen gefördert wird. Für Stepancik hat die Aufgabenstellung für den Verlauf des Verstehensprozesses zumindest die gleiche Bedeutung und Wichtigkeit wie der Funktionsplotter.

Diese interaktiven und dynamischen Funktionsplotter wären ohne Einsatz der Neuen Medien nicht zu verwirklichen.

⁶<http://www.mathe-online.at/galerie/fun1/ExcelPlotter/ExcelPlotter.xls>

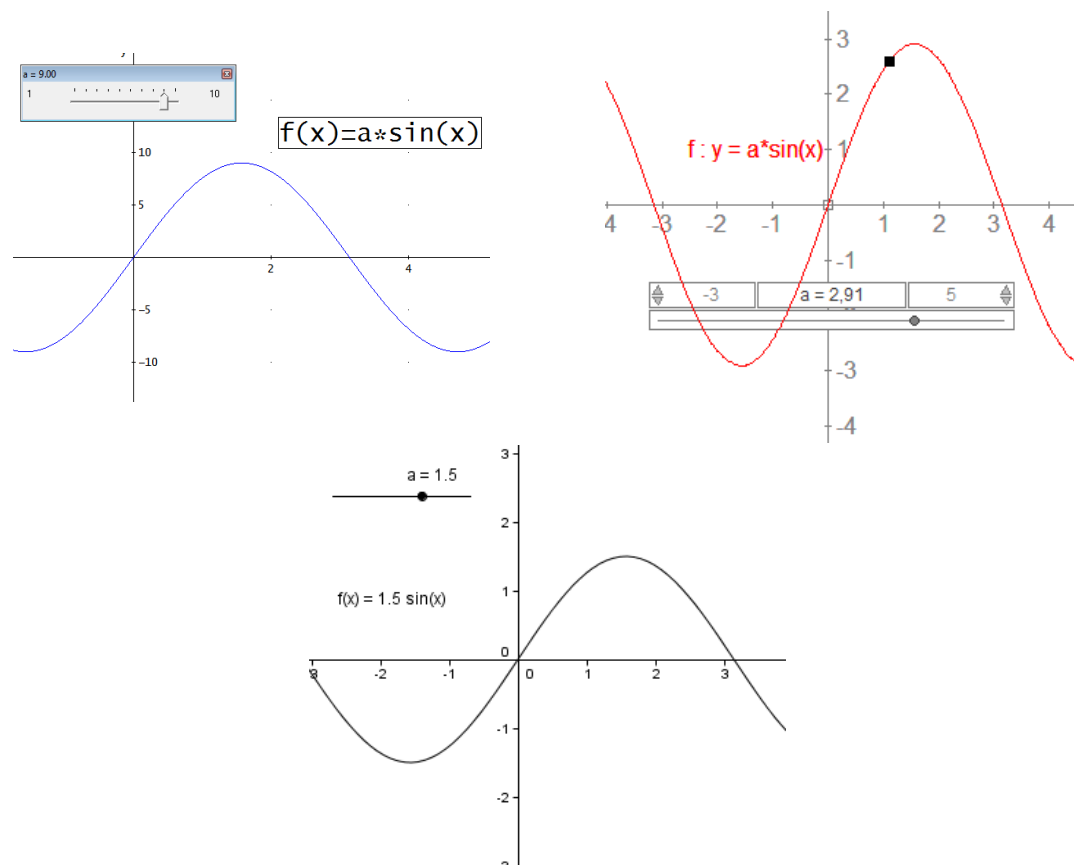


Abbildung 3.3: Screenshots der Funktionsplotter erstellt mit Derive, DynaGeo und GeoGebra

3.2 Computer Algebra Systeme

Computer Algebra Systeme (kurz: CAS) sind Programme, die Rechenaufgaben aus verschiedensten Bereichen der Mathematik lösen können. Ihr Funktionsumfang umfasst im Gegensatz zum herkömmlichen Taschenrechner nicht nur das Operieren mit Zahlen, sondern auch das Vereinfachen von Termen mit einer Vielzahl von Variablen, das Lösen von Gleichungen, die Integration und Ableitung von Funktionen, und das Operieren mit Matrizen. Zusätzlich ist es bei den meisten CAS auch möglich 2D- oder gar 3D-Graphen zeichnen zu lassen.

In österreichischen Schulen ist wohl Derive bis heute das am stärksten verbeitete CAS. Die Einstellung der Weiterentwicklung von Derive für den Computer durch Texas Instruments im Jahr 2007 wird in den nächsten Jahren dazu führen, dass GeoGebra mit der erweiterten CAS-Funktionalität (derzeit in Beta-Phase als Version 4.0) Derive den Rang als meistgenutztes CAS in Österreichs Schulen ablaufen wird⁷.

Edith Schneider stellt in [Schneider 02, S. 42ff] drei Grundorientierungen beim Arbeiten mit CAS vor:

⁷Anmerkung des Verfassers

1. Viele Arbeiten und Unterrichtsprojekte orientieren sich am traditionellen Mathematikunterricht. Das CAS wird dort eingesetzt, wo es die Erreichung von traditionellen Zielen erleichtert. Der Einsatz des CAS wird dabei folgendermaßen begründet:
 - Leichte Verfügbarkeit von grafischen Darstellungen und die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln.
 - Experimentelle Zugänge
 - Einsatz von Modulen
 - Entlastung von operativen Tätigkeiten
2. Dem entgegen steht die ebenso häufig anzutreffende Orientierung an den Möglichkeiten des CAS. Dabei werden die mathematischen Inhalte nach den technologischen Möglichkeiten ausgewählt. Stepancik merkt hier kritisch an, dass grundsätzlich nicht die technologischen Möglichkeiten die mathematischen Inhalte, sondern die Inhalte die Wahl und Nutzung der Technologie bestimmen müssen.
3. Eine Orientierung an didaktischen Konzepten sieht Schneider in Frankreich und den Niederlanden. Dabei wird vor allem die Forschungsarbeit am Freudenthal Institut zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht, deren Theorie auf der „Realistic Mathematics Education“ (RME), hervorgehoben. Hierbei sind möglichst realistische Problemstellungen Ausgangspunkt für das Lernen der Mathematik. Dabei sind die Mathematisierung, sowie Diskussion und Kooperation wichtige Bestandteile eines solchen Unterrichts. Schneider kritisiert an diesem Unterricht, dass CAS kein wesentlicher Teil des Unterrichts sind, sondern eher „additiv-unterstützend“ eingesetzt werden.

Stepancik streicht vier Stärken des CAS-Einsatzes hervor: Darstellungsformen, Window-Shuttle-Technik, Black Box und White Box sowie Modularisierung [Stepancik 08, S. 95 ff].

3.2.1 Darstellungsformen

Ebenso wie Stepancik werde ich die unterschiedlichen Darstellungsformen anhand des Beispiels aus Kronfellner/Peschek „angewandte mathematik“ (S. 100) verdeutlichen.

4.100 Ein Radrennfahrer fährt auf einer Rennbahn mit einer gleich bleibenden Geschwindigkeit von 36 km/h. Welchen Weg legt er in 1; 2; 2,5; 3; 3,5; 3,75; 4; 4,25; 4,5; 4,75; 5 Stunden zurück? Stelle die funktionale Abhängigkeit zwischen der Zeit und dem (zurückgelegten) Weg graphisch so dar, dass daraus der zwischen 0 und 5 Stunden zurückgelegte Weg zu jedem beliebigen Zeitpunkt abgelesen werden kann.

Lösung: In einer Stunde legt der Radrennfahrer 36 km zurück, in zwei Stunden $36 \cdot 2$ km .. usw.

$$s(1) = 36 \cdot 1 = 36$$

$$s(2) = 36 \cdot 2 = 72$$

$$s(2,5) = 36 \cdot 2,5 = 90$$

allgemein: $s(t) = 36 \cdot t$; Weg = Geschwindigkeit $\cdot$ Zeit

Wir erhalten somit folgende Tabelle:

t	1	2	2,5	3	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5
s(t)	36	72	90	108	126	135	144	153	162	171	180

Tabelle 3.1: Wertetabelle zum Beispiel

Trägt man diese Werte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf, so erhält man folgende Darstellung:



Abbildung 3.4: Funktionsgraph der Funktion $s(t) = 36 \cdot t$

Während Stepancik die Darstellungsformen des CAS TI-Nspire zeigt, werde ich mit der Beta-Version von GeoGebra 4.0 arbeiten.

Der Einsatz des CAS kann bei dieser Aufgabe nicht unmittelbar erfolgen. Meist werden, wie es das Schulbuch vorschlägt, erst einige Werte wie folgt notiert:

$$s(1) = 36 \cdot 1 = 36$$

$$s(2) = 36 \cdot 2 = 72$$

$$s(2,5) = 36 \cdot 2,5 = 90$$

Durch die Berechnung einiger Werte, oder schon früher, sollen Schüler auf den funktionalen Zusammenhang $s(t) = 36 \cdot t$ stoßen. Erst nach erfolgter Mathematisierung des Problems kann das CAS sinnvoll eingesetzt werden. Mit dem CAS kann ein Modell dann aber rasch auf seine Güte und Grenzen überprüft werden. Auch für die Weiterentwicklung, wie z. B. Vereinfachung der Terme, kann das CAS eine Hilfestellung bieten.

In GeoGebra starten wir mit Definition der Geschwindigkeit als Variable v und der Funktion $s(t)$. Dies erfolgt durch die Eingabe $v = 36$ und $s(t) = v \cdot t$. Die Funktion wird von GeoGebra dann sofort gezeichnet. Als nächstes werden in der Tabellenansicht in der Spalte A die gewünschten Werte von t eingetragen in die Spalte B wird in der ersten Zeile $s(A1)$ eingetragen. Die Zellen darunter können nun durch Ziehen automatisch mit $s(A2)$, $s(A3)$, usw. aufgefüllt werden. Somit ist die Tabelle erstellt.

Markiert man die beiden Spalten lässt sich der Menüpunkt *Liste von Punkten erzeugen* auswählen. Damit werden die Punkte der Tabelle auch gleich im Fenster gezeichnet. Die wahre Stärke des CAS zeichnet sich nicht dadurch aus, dass diese Darstellungsformen recht problemlos erzeugt werden können, sondern dass sie gleichzeitig verändert werden können. Dazu klickt man im Algebrafenster von GeoGebra rechts auf die Variable v und wählt den Menüpunkt *Objekt anzeigen* aus, um einen Schieberegler zu erstellen. Verändert man nun diesen Schieberegler, oder definiert v über die Eingabezeile neu, so ändert sich im Algebrafenster die symbolische Darstellung als Funktionsterm, die grafische Darstellung als Gerade und die Tabellendarstellung. In dieser Verknüpfung der Darstellungsformen, und nicht dem Nebeneinander, das auch im Schulbuch möglich ist, sieht Stepancik das Potenzial von CAS für die didaktische Nutzung und für das Erreichen von Unterrichtszielen, die Allgemeinbildungsrelevanz besitzen [Stepancik 08, S. 101].

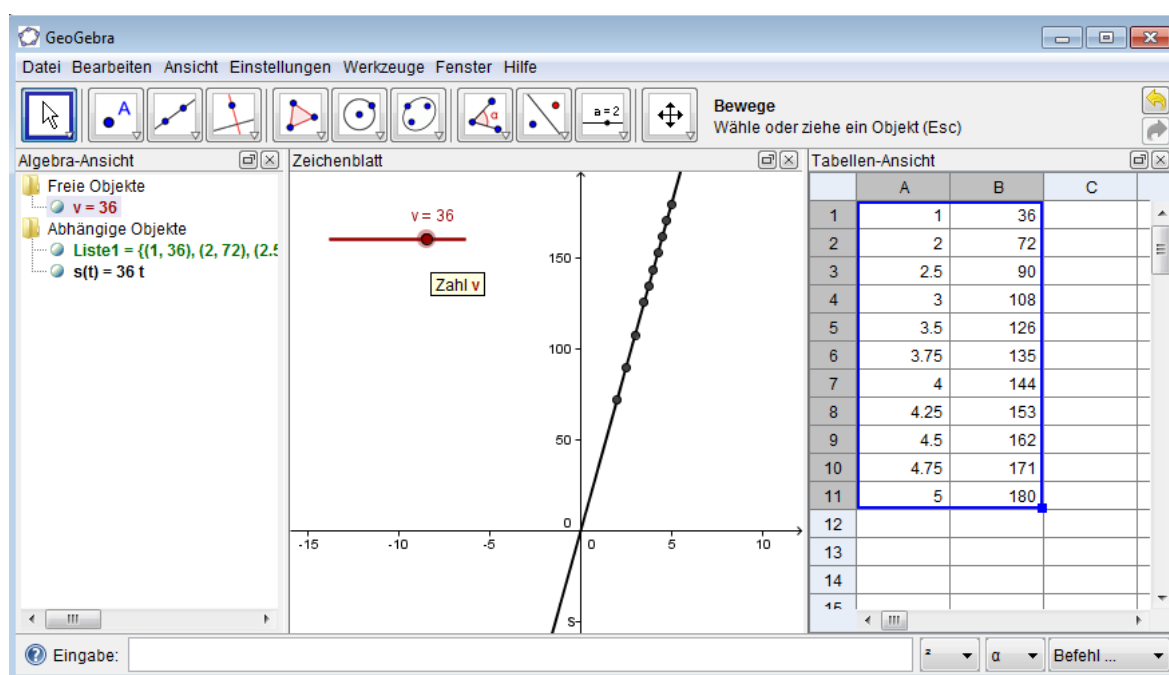


Abbildung 3.5: Screenshot der Lösung mittels GeoGebra 4.0

3.2.2 Die Window-Shuttle-Technik

Die Window-Shuttle-Technik beruht auf den verschiedenen Darstellungsformen des CAS. Bei Derive sind Algebra- und Graphikfenster nur getrennt betrachtbar, daher war ein Hin- und Herpendeln („Shutteln“) unumgänglich. Bei GeoGebra – Markus Hohenwarter sieht darin eine Weiterentwicklung der Window-Shuttle-Technik – geschieht das Pendeln nur mehr durch Fokussierung des Blickes, da Algebra-, Grafik-, CAS- und Tabellenansicht direkt nebeneinander stehen können. Hier wird auch die Form der modernen Bildschirme genutzt, bei denen sich das Verhältnis von Bildbreite zu Bildhöhe von 4:3 auf 16:9 vergrößert hat.

Heugl/Klinger/Lechner zeigen den Einsatz der Window-Shuttle-Technik am Beispiel des Funktionsbegriffs. Während sie eine abstrakte Definition nicht für einen passenden Zugang halten, soll über geeignete Prototypen die Aufmerksamkeit auf die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs gelenkt werden. Sie gliedern dabei den Lernprozess in folgende Schritte [Heugl 98, S. 199f]:

1. Die Lernenden aktivieren im Algebra- und Grafikfenster des CAS verschiedene Prototypen des jeweiligen Begriffs oder Problems.
2. Für die nun folgende Bearbeitung der einzelnen Prototypen werden die Vorzüge des CAS (Interaktivität, leichte Manipulierbarkeit, Wiederholbarkeit) genutzt.
3. Die Mehrfenstertechnik erlaubt das simultane Arbeiten mit verschiedenen Prototypen. Die Auswirkungen der algebraischen Operationen können sofort im Grafikfenster untersucht werden und Untersuchungen des Graphen liefern möglicherweise Ideen für neue Aktivitäten im Algebrafenster.

Stepancik fügt einen weiteren Schritt hinzu: [Stepancik 08, S. 105]

4. Die Beobachtungen sollen schriftlich festgehalten und in Partner- oder Gruppenarbeiten bzw. im Klassenverband diskutiert und reflektiert werden.

3.2.3 Black Box und White Box

Die Begriffe „Black Box“ und „White Box“ kommen sehr häufig in Verbindung mit CAS vor. White Box bedeutet in diesem Zusammenhang das verstehende Lernen von Operationen, in denen der Computer nicht zum Einsatz kommt. Black Box bedeutet hierbei das erkennende und begründende Anwenden von Operationen oder Operationsblöcken, wobei das Operieren selbst dem CAS überlassen wird [Heugl 98, S. 159].

Heugl/Klinger/Lechner stellen in [Heugl 98, S. 176] das „Black Box/White Box-Prinzip“ als vielversprechendes Unterrichtsprinzip vor. Dabei erforschen Schüler erst durch CAS unterstützt als Black Box unbekannte Bereiche der Mathematik. Die Schüler sollen durch Experimente mit dem CAS Vermutungen über mathematische Zusammenhänge festhalten, die dann in der White Box-Phase begründet werden. Eine Übungsphase soll die White Box stabilisieren. Danach werden später die Inhalte wieder als Black Box genutzt. Ein Beispiel für solch ein Unterrichtskonzept findet sich auf der Pädagogischen Hochschule Niederösterreich unter http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/GeoGebraCAS/Klasse3_Potenzrechenregeln_Unterrichtsmaterial.pdf⁸. Dabei werden die Potenzrechenregeln erst an verschiedenen Beispielen mittels CAS untersucht und anschließend von den Schülern formuliert.

⁸aktuell am: 02.06.2010

3.2.4 Modularisierung

Stepancik verweist auf W. Dörflers Arbeit „Der Computer als kognitives Werkzeug und Medium“, um aus dem Abschnitt „Modularität des Denkens“ die wichtigsten Voraussetzungen für die Modularisierung zusammenzufassen [Stepancik 08, S. 106ff]. Experten verfügen demnach über große Wissensseinheiten, so genannte „chunks“, die direkt abgerufen und operativ eingesetzt werden können. Dies lässt sich gut bei Schachmeistern zeigen, die in ganzen Stellungen denken und nicht in einzelnen Figuren, oder Programmierern, die große Programmteile als Prozeduren zur Verfügung haben. Nach Dörfler findet sich dieses Denken in Wissensblöcken und ganzen Algorithmusvorlagen auch bei Mathematikern. So meint ein Mathematiker, wenn er davon spricht die Nullstellen einer Funktion zu finden, eigentlich eine ganze Palette an Operationen. Zuerst muss der Funktionsterm gleich 0 gesetzt werden, und dann die daraus entstandene Gleichung Schritt für Schritt gelöst werden.

In Modulen wird also Wissen komprimiert und Operationen werden verkürzt. Bei CAS sind solche Module oft schon verfügbar, so kann GeoGebra mit der Eingabe *Nullstellen[f]* alle Nullstellen der Funktion f ausfindig machen, sie als Punkte definieren und einzeichnen.

Für den richtigen Einsatz von Modulen ist es jedoch nötig, dass man mit der Funktionsweise der Module genau vertraut ist, und wenn es nötig ist, auch auf den Einsatz des Moduls verzichten kann. Im Bereich der Schulmathematik verlangt Dörfler eine Reorganisation der mathematischen Tätigkeiten, aufgrund der Verfügbarkeit von Modulen am Computer.

Eine mögliche Reorganisation schlagen Heugl/Klinger/Lechner vor [Heugl 98, S. 181f]:

1. Verstehen, Strukturieren, Aufspüren von Wissensseinheiten

Ausgehend vom Verstehen eines mathematischen Teilgebiets werden Wissensseinheiten aufgespürt und zueinander in eine (hierarchische) Ordnung gebracht. Im Teilgebiet der linearen Funktionen findet sich z. B. als Wissensseinheit, hier als Kompetenz angeschrieben, „Ich kann aus zwei vorgegebenen Punkten die zugehörige lineare Funktion anschreiben“. Hierarchisch darunter würden die Kompetenzen (Wissenseinheiten) liegen: „Ich kann aus zwei beliebigen Punkten einer Geraden die zugehörige Steigung berechnen“ und „Ich kann aus vorgegebener Steigung und einem Punkt der Geraden den Ordinatenabstand berechnen“.

2. Implementieren, Testen und Dokumentieren

Mittels CAS ist es möglich diese Wissensseinheiten durch Implementierung interaktiv nutzbar zu machen. Der innere Aufbau der Module steht bei der Implementation im Vordergrund, beim Testen und Dokumentieren sind jedoch bereits das Wissen um die Funktionalität, die Anwendbarkeit sowie die Bedingungen der Anwendung bedeutend. Die Implementierung kann dabei durch die Schüler in Gruppenarbeiten, durch den Lehrer oder durch die Systementwickler erfolgen. Ein einfaches Modul wäre z. B. eines, das durch Eingabe zweier Punkte die zugehörige lineare Funktion ausgibt. Ein größeres Modul wäre die Kurvendiskussion beliebiger Polynomfunktionen. Es bieten sich dabei jeweils unterschiedliche

Herangehensweisen an, sowohl beim inneren Aufbau, als auch bei der Anwendbarkeit.

3. Problemlösen mit Hilfe von Modulen

Erst hier erfolgt für die Autoren die eigentliche Reorganisation der mathematischen Tätigkeit. Die Module können in den Problemlösungsprozess eingebaut werden und erleichtern das Arbeiten. Damit erlangen Tätigkeiten wie das Planen, Reflektieren und Anwenden von Strategien größere Bedeutung und verdrängen die Tätigkeit des Ausführens. Das Modul zur Berechnung der linearen Funktion aus zwei Punkten wird bei Aufgaben dann nur mehr als Black Box eingesetzt. Die Schüler kümmern sich also nicht mehr stark um den operativen Teil der Aufgabe, sondern es ist wichtiger die Ergebnisse, die das Modul ausgibt, richtig zu interpretieren.

Die Gefahr beim Einsatz von Modulen stellt die „blinde“ Verwendung von Modulen durch leistungsschwache Schüler dar, die deren Wirkungsweise nicht hinterfragen. So ist es dann für den Schüler noch schwerer zu verstehen, wie ein falsches Ergebnis zustande kam.

3.2.5 Kritik am Einsatz von CAS

Für Stepancik lassen sich kritische Anmerkungen zum Einsatz von CAS im Unterricht in folgende drei Bereiche gliedern: [Stepancik 08, S. 110ff]

1. Schwierigkeiten beim Umgang mit CAS

H.G. Weigand berichtet über die Untersuchung zum Einsatz von Taschencomputern in der 10. Jahrgangsstufe und stellte dabei fest, dass trotz einer wöchentlich stattfindenden zusätzlichen Stunde zur Handhabung der Voyage 200 Taschencomputer die Schüler weiterhin Probleme im Umgang mit diesen hatten [Weigand 06, S. 100].

Die Bedienung von CAS stützt sich bis heute mehrheitlich auf Befehle und Syntax und nicht auf intuitive Bedienung über Menüs und Icons. So gilt es nicht nur die Mathematik, sondern auch gleichzeitig die Bedienung der im Mathematikunterricht verwendeten Software zu erlernen.

2. Inadäquater Einsatz von CAS

Computeralgebrasysteme werden oftmals wie programmierbare Taschenrechner genutzt. Dabei werden Gleichungen mit konkreten numerischen Parametern numerisch gelöst oder Funktionsgraphen gezeichnet. Die eigentliche Bedeutung des CAS liegt aber in der Darstellung von Termen mittels Variablen und der Möglichkeit diese umzuformen und zu vereinfachen.

So kann ein CAS nicht nur die Gleichung $2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 10 = 0$ lösen, sondern auch die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ und damit tiefere Einsicht gewähren.

3. Fehler bzw. Fehlermeldungen im CAS

Zum Einen können unklare Fehlermeldungen des CAS zu Problemen führen,

wie Weigand ausführt [Weigand 06, S. 100]. Zum Anderen sollten Lehrende sich darüber im Klaren sein, dass es keine fehlerfreien Programme gibt, und diese Fehler auch kennen.

3.3 Dynamische Geometrie Systeme

Dynamische Geometrie Systeme (DGS) zeichnen sich durch relativ leichte und intuitive Handhabung aus, dies mag daher rühren, dass sie Ende der 1980er eigentlich zu rein didaktischen Zwecken geschaffen wurden. Mit DGS lassen sich die Grundformen (Punkt, Gerade, Kreis,..) der Geometrie nicht nur statisch Darstellen, sondern auch animieren und damit Zusammenhänge aufdecken.

Stepancik zitiert die drei Forderungen von Hölzl und Elschenbroich an DGS und ich werde sie im Folgenden mit Beispielen aus GeoGebra verdeutlichen [Stepancik 08, S. 117]:

1. **Zugmodus:** DGS müssen die klassischen Werkzeuge der Schule (Lineal und Zirkel) und die euklidisch geprägte Schulgeometrie „dynamisch“ modellieren.

Für das Beispiel habe ich mit GeoGebra den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC konstruiert. Der Zugmodus zeigt sich darin, dass man einen der Eckpunkte „anfassen“ (man hält mit der linken Maustaste darauf) und ziehen kann. Die Konstruktion ändert sich dann entsprechend mit. Die Schüler können so z. B. der Frage auf den Grund gehen „Welche Eigenschaft muss ein Dreieck erfüllen, damit der Höhenschnittpunkt auf einen Eckpunkt fällt?“.

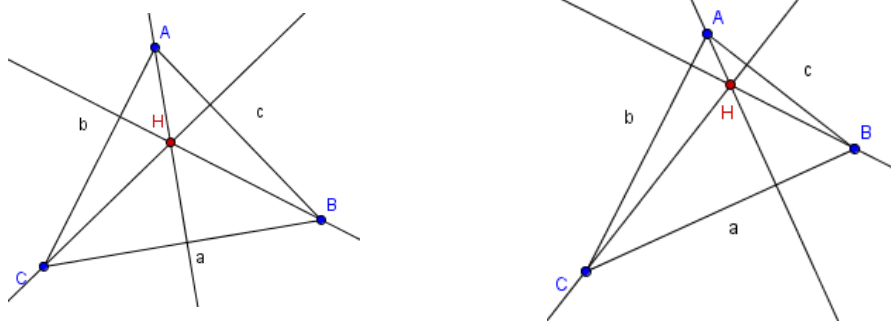


Abbildung 3.6: Anwendung des Zugmodus: Im linken Bild wurde der Punkt B verschoben.

2. **Ortslinie:** DGS müssen Bahnbewegungen von Punkten, die in Abhängigkeit zu anderen Punkten stehen, visualisieren.

Als Beispiel habe ich die Ortslinie des Punktes C gewählt, der sich auf der Funktion bewegt, die den orientierten Flächeninhalt unter der stückweise definierten Funktion g angibt.

Durch Bewegung des Punktes A auf der x-Achse in dem Intervall $[-5, 15]$ gibt die y-Koordinate von C den orientierten Flächeninhalt unter g wieder. Da der

Spurmodus für den Punkt C eingeschaltet ist, wird der Verlauf des Graphen der Flächeninhaltsfunktion durch die Bewegung des Punktes gezeichnet.

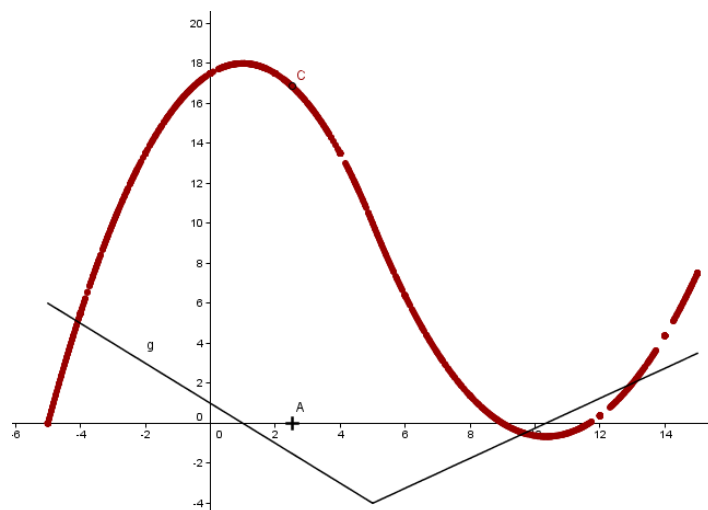


Abbildung 3.7: Beispiel für die Ortslinienfunktionalität von GeoGebra

3. **Makro:** DGS sollen eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen zu einem neuen Befehl (Makro) zusammenfassen können.

Als Beispiel dient hier die Euler'sche Gerade. Erst wurde sie „per Hand“ mit GeoGebra konstruiert. Anschließend konnte mit „Neues Werkzeug erstellen“ erreicht werden, dass nach Eingabe von drei Punkten A , B und C , der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und die Euler'sche Gerade des Dreiecks ABC ausgegeben werden. Das neue Werkzeug wurde dann in der Symbolleiste platziert.

Ähnlich zur Modularisierung unter CAS (siehe 3.2.4) lässt sich so erworbenes Wissen festhalten und jederzeit als Makro abrufen.

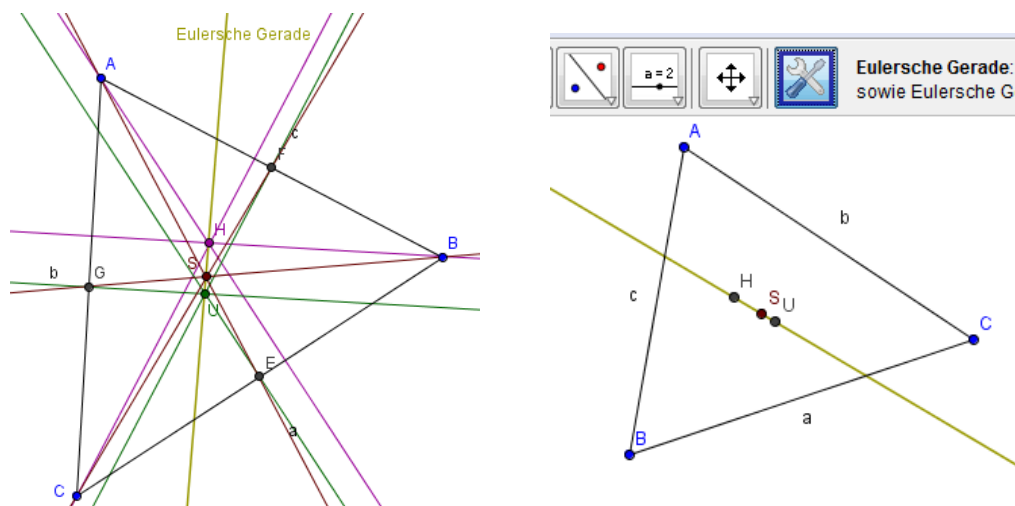


Abbildung 3.8: Anwendung eines Makros: Im linken Bild erstellt, im rechten angewandt.

3.3.1 GeoGebra

Da der überwiegende Teil der Applets in der Lernumgebung mittels GeoGebra erstellt wurden, will ich in diesem Abschnitt noch näher darauf eingehen.

GeoGebra wurde von Markus Hohenwarter im Zuge seiner Diplomarbeit begonnen und als Dissertationsprojekt fortgesetzt [Hohenwarter 06]. Auch heute noch wird GeoGebra ständig weiterentwickelt und inzwischen ist GeoGebra mit International GeoGebra Institutes in ungefähr 20 verschiedenen Staaten vertreten. Derzeit ist die aktuelle Version 3.2, sie wurde am 3. Juni 2009 herausgebracht.

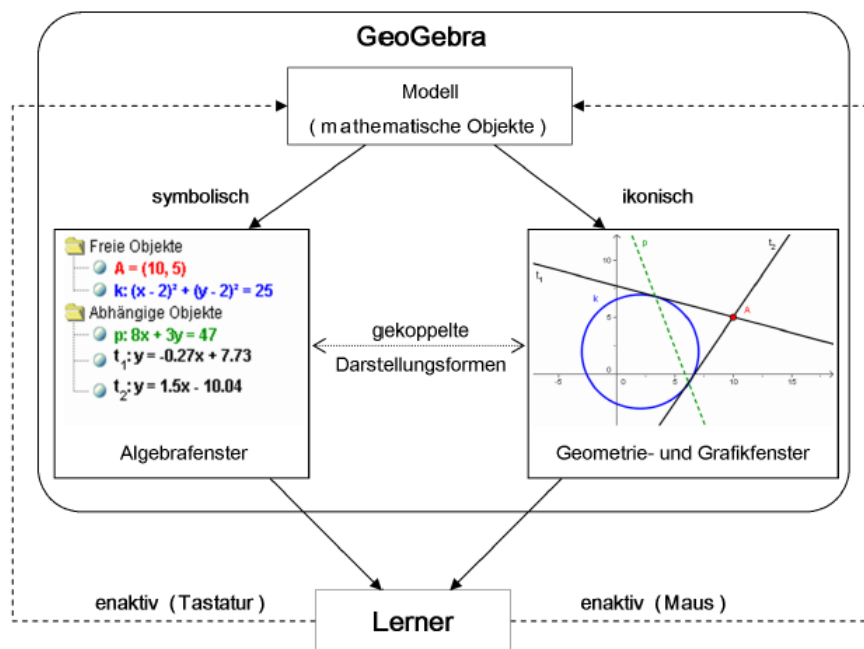


Abbildung 3.9: Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra [Hohenwarter 06, S. 24]

Kraft der Kopplung ikonischer und symbolischer Darstellungsformen fördert – laut Hohenwarter – GeoGebra aktives, handlungsorientiertes, experimentelles und entdeckendes Lernen [Hohenwarter 06, S. 24]. Wie in 3.2.2 schon kurz erwähnt, bietet GeoGebra das Nebeneinander von Algebra- und Grafikfenster an. Dazu kann in Version 3.2 auch noch ein Tabellenfenster angezeigt werden.

Das handelnde Lernen ermöglicht GeoGebra über die Eingabe per Maus oder Tastatur. Veränderungen in einem Fenster, z. B. das Ziehen eines Punktes im Grafikfenster, bewirkt eine Änderung im anderen Fenster, z. B. die Änderung der Koordinaten des Punktes im Algebrafenster. Diese Möglichkeit unterscheidet GeoGebra von anderen DGS sowie CAS. Diese bidirektionale Kopplung, wie Hohenwarter sie nennt, soll das Verstehen mathematischer Zusammenhänge erleichtern.

Mit GeoGebra ist es auch möglich eigene Arbeitsumgebungen für die Schüler zu schaf-

fen, die sie online aufrufen können. Es lassen sich die Schüler so auf das Ziehen eines einzelnen Punktes beschränken, oder auf die Veränderung einiger Schieberegler. Damit lässt sich durch den Lehrer von vornherein eine sinnvolle Auswahl an Werkzeugen treffen, die für die Problemstellung relevant sein könnte. Dafür brauchen die Schüler keine Syntax oder Befehle zu lernen, sondern können sich schon nach kurzer Anleitung dem Problem widmen.

3.4 Tabellenkalkulation

Die Tabellenkalkulation scheint den Mathematiklehrern kein so wichtiges Unterrichtsmittel wie CAS oder DGS zu sein. Die Tabellenkalkulation wird vor allem mit „rekursiv“, „Funktionsplotter“ (siehe 3.1), „Modellierung“ und „Stochastik“ in Verbindung gebracht [Stepancik 08, S. 122].

Die Begründung des Einsatzes von Tabellenkalkulationen erfolgt oftmals über den Hinweis auf den häufigen Einsatz dieser Programme im Berufsalltag. Auch Hischer betont dies und ist der Meinung, dass die wichtigen Prinzipien relativer und absoluter Adressierung einerseits und die der Datenpräsentation andererseits im Mathematikunterricht vorgestellt werden können [Hischer 02].

Mit dem Einsatz von Tabellenkalkulationen in der Oberstufe hat sich John in seiner Diplomarbeit intensiver beschäftigt [John 07].

3.5 Das Internet

Der Fokus liegt in diesem kurzen Abschnitt über Internet und Mathematikunterricht auf dem Aspekt des Hypertexts, bzw. auf dem Aspekt der Hypermedialität des Internet. Im Anschluss daran sollen das Werkzeug Lernplattform, und die beiden didaktischen Konzepte WebQuest und Lernpfad, die sich auf die Hypermedialität stützen, vorgestellt werden.

3.5.1 Hypertext + Multimedia = Hypermedia

Hypertext ist nach Gabi Reinmann „eine Form der Repräsentation von Information, die entgegen der traditionellen linearen Strukturen auch Verzweigungen aufweisen, die nur auf Aufforderung sichtbar werden“, wie Stepancik zusammenfasst. Als zweite Definition führt sie Peter Baumgartner an, der den Begriff Hypertext als „vernetztes Informationsangebot“ auffasst. Er weist auch darauf hin, dass ein Hypertext aus einer Struktur von Knoten (Dokumenten) und Verknüpfungen (Links) besteht.

Um den Begriff Multimedia zu erklären, lässt Stepancik Rolf Schulmeister, Gabi Reinmann und Michael Kerres zu Wort kommen [Stepancik 08, S. 124f].

„Multimedia ist eine interaktive Form des Umgangs mit symbolischem Wissen in einer computergestützten Interaktion“ (Schulmeister)

„Mit Multimedialität ist die Möglichkeit gemeint, Informationen und Wissen durch die Integration verschiedener Medien und verschiedener Symbolsysteme darzustellen.“ (Reinmann)

Und für Michael Kerres bezieht sich der Begriff Multimedia

„auf technische Systeme, die in der Lage sind, verschiedene Datentypen, wie Texte, Grafiken, Ton und Bewegtbild, zu verarbeiten und für den interaktiven Abruf vorzuhalten.“

Die Verbindung der beiden Begriffe ergibt den Begriff Hypermedia. Dabei werden Texte, Grafiken, Filme, Tonsequenzen (Multimedia), durch Verknüpfungen miteinander verbunden (in der Struktur des Hypertexts).

Die Begriffe Hypertext, Multimedia und Hypermedia werden in der Literatur aber auch oft nebeneinander verwendet, und vor allem zwischen Hypertext und Hypermedia verschwimmen oftmals die Definitionsgrenzen.

Die Struktur von Hypermedia-Systemen kann unstrukturiert, linear, hierarchisch oder netzartig aufgebaut sein. Unstrukturierte Systeme lassen dabei dem Anwender die größten Freiheiten zur Exploration. Lineare Strukturen werden häufig benutzt, um Nutzer in neue Inhalte einzuführen. In hierarchische Strukturen können Inhalte auf unterschiedlichen Ebenen von Abstraktheit dargestellt werden. Netzartige Strukturen ermöglichen Repräsentation und Realisation vielfältiger Beziehungen verschiedener Informationseinheiten [Stepancik 08, S. 126].

Mittlerweile hat sich gezeigt, dass [Stepancik 08, S. 128]:

1. Experten besonders gut von nicht-linearen Strukturen profitieren.
2. Novizen hingegen besser lernen, wenn sie Pfaden folgen
3. der Erfolg eines Hypermediums entscheidend von den Rahmenbedingungen des Einsatzes und von der Konzeption der Lernumgebung abhängt.

Zur Arbeit mit Hypermedia-Systemen stellt Schulmeister in [Schulmeister 00] drei Aspekte vor, die er für besonders relevant und pragmatisch realisierbar hält:

Die Adaption an die Lernvoraussetzungen der Lernenden: Guter Unterricht soll Schüler natürlich immer dort abholen, wo sie sind. Der Vorteil durch Hypermediale Systeme liegt darin, dass sich mehrere Anknüpfungspunkte anbieten lassen, sodass sich Schüler den entsprechenden Anknüpfungspunkt individuell wählen können.

Die Notwendigkeit der kognitiven Re-Interpretation von Stoffen:

Lernprozesse, so zeigt Schulmeister am Beispiel von Studierenden der Statistik, richten sich nicht immer nach sachlogischen Strukturen, sondern können ideosynkratische Züge annehmen. Erst durch die Kenntnis der naiven kognitiven

Konzepte und kognitiven Fehler der Schüler lässt sich eine passende Lernumgebung anbieten.

Im Beispiel Schulmeisters stellt er dar, dass das Summenzeichen $\sum$, z. B. in der Formel des arithmetischen Mittels, von den Studenten nur als Bild ohne konkreten Inhalt gesehen wird. Hier hilft laut Schulmeister keine „saubere“ Definition, sondern besser eine interaktive Umgebung, die konkret-anschauliche Manipulation ermöglicht.

Die Bedeutung der Interaktion für die Wirksamkeit des Lernsystems:

Interaktivität ist ein großer Vorteil der Neuen Medien. Schulmeister betont besonders, dass der Computer Fehler „verzeiht“. Die Interaktion mit dem Computer ist oftmals ohne soziale Konsequenzen und lädt dazu ein, sich auszuprobieren und das trotz der Gefahr Fehler machen zu können. Es scheint als würde diese Sanktionsfreiheit bei der Interaktion besonders zur Lernmotivation mit solchen Programmen und hypermedialen Inhalten beitragen.

3.5.2 Lernplattformen

Ich will, nach dem Vorbild Schulmeisters in [Schulmeister 03, S. 6ff] die Funktionsweise einer Lernplattform an einem Beispiel illustrieren.

Ein Mathematiklehrer will begleitend zu seinem Unterricht Arbeitsblätter, Hausübungsangaben und -abgaben über eine Lernplattform bereitstellen und verwalten. Falls es schon eine Schullernplattform gibt, so lässt er dort einen Kurs anlegen. Er kann nun auf der Lernplattform seinen Kurs editieren, Arbeitsblätter, Termine und Hausübungsangaben hochladen. Auch Videos, Animationen und Verknüpfungen zu Webseiten können auf einer Lernplattform erstellt werden. Die Lernobjekte lassen sich noch einzelnen Kapiteln zuordnen, den Hausübungen lassen sich Abgabetermine geben und online bewerten. Über Forum oder Chat kann es auch außerhalb der Stunde zur Absprache zwischen Schülern und Lehrer kommen.

Die Schüler sind im Kurs als Benutzer eingetragen, dabei benötigen sie Benutzernamen und Passwort, und können hier die bereitgestellten Materialien abrufen. Sie haben Einsicht in die Abgabetermine für Hausübungen und können selbst Hausübungen abgeben.

Lernplattformen unterscheiden zwischen zumindest zwei Gruppen, die in den verschiedenen Lernplattformen auch verschiedene Namen tragen. Für unsere Beschreibung reichen die Bezeichnungen „Lehrer“, der den Kurs erstellt, Materialien hoch laden und editieren und Termine festlegen kann, und „Schüler“, der Materialien abrufen, geforderte Übungen abgeben, und in Foren/Chat kommunizieren kann.

Schulmeister fordert von Lernplattformen [Schulmeister 03, S. 10]:

- Eine Benutzerverwaltung (Anmeldung mit Verschlüsselung)

- Eine Kursverwaltung (Kurse, Verwaltung der Inhalte, Dateiverwaltung)
- Eine Rollen- und Rechtevergabe mit differenzierten Rechten
- Kommunikationsmethoden (Chat, Foren) und Werkzeuge für das Lernen (Whiteboard, Notizbuch, Annotationen, Kalender, etc.)
- Die Darstellung der Kursinhalte, Lernobjekte und Medien in einem netzwerkfähigen Browser

Insgesamt führt Schulmeister 195 verschiedene Lernplattformen an. In Österreich ist, wohl auch Dank des Projekts edumoodle⁹ Moodle die vorherrschende Plattform in den österreichischen Schulen. Damit lässt sich Moodle für Schulen kostenlos einsetzen, ohne dass ein eigener Moodle-server betrieben werden müsste.

Lernplattformen sind im Gegensatz zu WebQuests und Lernpfaden keine didaktischen Konzepte, sondern lediglich ein Werkzeug für den Lehrer. Je nach Einsatz können sie allen drei Lerntheorien dienen.

3.5.3 WebQuests

WebQuests sind frei übersetzt eine „abenteuerliche Spurensuche im Internet“ [Gerber 07]. Sie werden meist direkt im Internet abgerufen, oder lokal von den Lernern als html-Datei gespeichert.

WebQuests sind einander von der Struktur her meist recht ähnlich [Gerber 07]:

1. **Einführung, Thema:** Am Anfang eines WebQuests steht eine für die Lerner möglichst authentische Fragestellung oder Problemsituation, die zur Beschäftigung mit der Thematik motivieren soll.
2. **Aufgaben:** Nach der Einführung werden die Lerner mit der Aufgabenstellung konfrontiert, die manchmal auch in Gruppen bearbeitet werden kann.
3. **Prozessbeschreibung:** Eine anschließende Prozessbeschreibung soll dem Lerner Unterstützung für die Lösung der Aufgabenstellung geben. Dabei werden Sozialform, grundsätzliche Regeln und die Verteilung einzelner Rollen geklärt.
4. **Materialien:** WebQuests beinhalten stets auch eine Sammlung an Materialien, die bei der Bewältigung der Aufgabenstellung helfen sollen. Meist handelt es sich dabei um Verknüpfungen zu informativen Internetseiten oder auch um Hinweise auf lokal vorhandene Literatur oder Software.
5. **Präsentation:** Die Ergebnisse der (Gruppen-) Arbeit sollen zum Abschluss der WebQuests in adäquater Form präsentiert werden.
6. **Evaluation:** Am Ende des Lernprozesses sollte den Lernern die Möglichkeit einer kritischen Reflexion der eigenen Ergebnisse gegeben werden. Auch soll hier ein Feedback durch den Lehrer erfolgen.

⁹<http://www.edumoodle.at/moodle/>

WebQuests basieren auf einem gemäßigt konstruktivistischen Ansatz des Lernens. Die instruktionalen Elemente des Kognitivismus finden sich hier vor allem in der Prozessbeschreibung und der Vorgabe der zu benutzenden Materialien. In welcher Weise die Aufgaben gelöst werden - hier ist natürlich eine passende Aufgabenstellung entscheidend - bleibt dem Lerner überlassen.

Auf Grundlage der WebQuests soll der Lerner selbst Wissen konstruieren.

3.5.4 Lernpfade

Ein Lernpfad ist eine Aneinanderreihung einzelner Lernschritte. Diese einzelnen Lernschritte werden aus Lernobjekten¹⁰ aufgebaut, dabei kann es sich um interaktive Materialien, Videos oder Texte handeln. Ebenso kann ein Lernschritt aber auch vom PC unabhängig mit Papier und Bleistift gelöst werden [Wendtner 10, S. 33].

Die Zusammenstellung der einzelnen Lernschritte ergeben schlussendlich den Lernpfad. Solch ein Lernpfad kann individuell von den Lehrenden zusammengestellt werden oder es kann aus dem großen Onlinepool an Lernpfaden von Mathe-Online¹¹ oder austromath¹² geschöpft werden. Ziel ist es dabei den Schülern die selbstständige Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten zu ermöglichen. Der Unterschied zu einer WebQuest besteht darin, dass der Einsatz des Internet nicht zwingend gefordert ist und die Sozialform während des Lernpfades öfter gewechselt werden kann.

In einem Lernpfad kann man durch die Gestaltung von „Umwegen“ (frei wählbare Zusatzaufgaben) auch auf die verschiedenen Arbeitstempi der Schüler eingehen.

Der Einsatz von Lernpfaden kann je nach Typ des Lernpfades erfolgen. Wendtner übernimmt dabei die Typen von Embacher [Wendtner 10, S. 38f]

1. Lernpfade zur Organisierung projektartiger Phasen im Unterricht
2. Lernpfade zur (durchaus auch längerfristigen) Bereitstellung von Ressourcen, Aufgaben, Begriffsdefinitionen,...
3. Lernpfade zur Wiederholung
4. Lernpfade als Selbstlernmodule („Crashkurse“)
5. Lernpfade als Unterstützung von Lehrveranstaltungen in Universitäten, Fachhochschulen, pädagogischen Akademien, im zweiten Bildungsweg,...

Die online verfügbaren Lernpfade sind, zumindest bei den oben genannten Seiten, stets mit einem didaktischen Kommentar ausgestattet. Dieser gibt z. B. an, welche Lernziele durch den Lernpfad erreicht werden sollen, in welchem Zusammenhang der Lernpfad mit dem Lehrplan steht, welche Voraussetzungen die Schüler erfüllen müssen, wie der Lernfortschritt dokumentiert werden soll und wie viel Unterrichtseinheiten für den Lernpfad benötigt werden. Oftmals gibt es zur Dokumentation auch einen

¹⁰siehe 2.3.3 eContent Erlass

¹¹<http://www.mathe-online.at/>

¹²<http://www.austromath.at/medienvielfalt/>

Übersichtsplan über die Lernschritte, mit einer Markierung für die verpflichtenden Schritte, so dass die Schüler selbst ihren Fortschritt eintragen können.

Lernpfade stützen sich also eher auf kognitivistische Lerntheorien, da die Pfade selbst oft sehr linear sind und selten Raum zur Erforschung geben.

3.6 Projekt Medienvielfalt

Das Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht - Konzepte für eine ideale Medien-Kombination im Mathematikunterricht“ wurde im Mai 2004 als gemeinsames Projekt der Initiativen ACDCA, Mathe-Online und GeoGebra geplant. Im November 2004 wurde das Projekt von MR Dr. Christian Dorninger [Stepancik 08, S. 145] genehmigt und mit einer finanziellen Unterstützung bedacht.

Eines der vorrangigen Projektziele war die Entwicklung, Erprobung und Evaluierung exemplarischer Lernpfade. Die Lernpfade sollten dabei hypertextbasierte Lernmaterialien mit CAS, DGS und Tabellenkalkulation kombinieren. Dies konnte aber kaum realisiert werden. Dafür gibt Stepancik zwei Gründe an [Stepancik 08, S. 145f]:

1. Nicht jeder mathematische Inhalt ist für jede Technologie geeignet, bei manchen Inhalten drängt sich nur eine bestimmte Technologie förmlich auf!
2. In den einzelnen Arbeitsgruppen zur Erstellung der Materialien wurde zwar versucht jede Technologie durch einen Experten zu vertreten, dies war jedoch nicht immer möglich. Vermutlich wurden deshalb einzelne eventuell mögliche Aspekte vernachlässigt.

Das Projekt umfasste 14 Lernpfade für verschiedene Schulstufen der Sekundarstufen I und II. Rund 1500 Schüler aus 88 österreichischen Klassen erprobten unter Aufsicht von 74 verschiedenen Lehrern die Lernpfade. Die Bandbreite der Themen war von „Pythagoras“ bis „RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung“ sehr groß. Jeder Lernpfad wurde von den Autoren mit einem didaktischen Kommentar versehen, der die wichtigsten Informationen (inhaltliche Voraussetzungen, Lernziele, technologische Voraussetzungen,..) zusammenfasst und für die Lehrer bereitstellt [Stepancik 08, S. 150f].

Die Evaluation des Projekts erfolgte über Online-Fragebögen, die mittels ILIAS-Mandant erstellt wurden.

Nun werde ich noch die – aus meiner Sicht – wichtigsten Ergebnisse der Evaluation zusammenfassen [Stepancik 08, S. 158ff]:

- Zu der Aussage „Die Software war (mithilfe der Erklärungen im Lernpfad) leicht zu handhaben“ gaben 59,5 % der Schüler an, dass dies bei Excel zutrifft, dahinter folgen GeoGebra mit 49 %, Voyage, TI 89 mit 37,3 % und Derive mit 31,8 %. Stepancik streicht hervor, dass die Anleitungen für Excel die einzigen waren, die als Videoanleitungen bereit gestellt wurden. Dieses Feature wurde von den Schülern oft lobend erwähnt.

Auch GeoGebra konnte hier gut abschneiden und verdankt dies dem Umstand, dass Hohenwarter das Programm von vornherein als Unterrichtsmittel konzipiert hat.

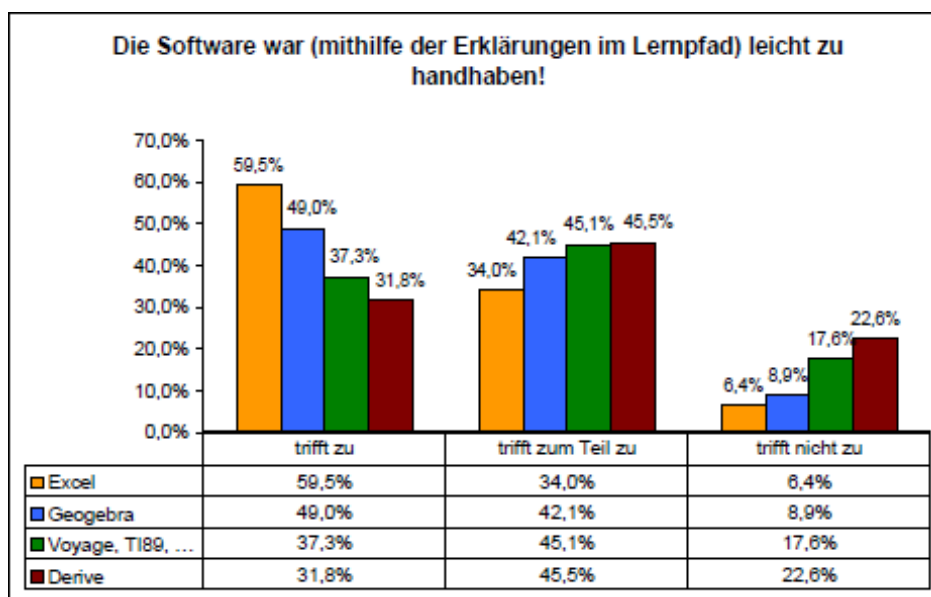


Abbildung 3.10: Auswertung zur Usability der Software [Stepancik 08, S. 172]

- Die Aussage „Die interaktiven Übungen (dynamischen Arbeitsblätter, Animationen,...) haben mir beim Verstehen geholfen“ fanden 22,5 % der Schüler als völlig zutreffend, 38,7 % als eher zutreffend, 25,8 % als zum Teil zutreffend, 8,4 % als eher nicht zutreffend und 4,6 % als gar nicht zutreffend. Damit ist eine überwiegende Mehrheit doch der Meinung, dass die interaktiven Übungen beim Verstehensprozess geholfen haben, und es sollte zumindest angedacht werden diese Hilfe im Mathematikunterricht zu nutzen.
- Für besonders bedeutend für meine Arbeit halte ich die Befragung der Lehrer zur Gestaltung der Lernpfade.
Dabei hätten 21 von 89 Lehrern die Zusammenstellung des Lernpfades gerne geändert und 36 von 89 hätten gerne einzelne Teile des Lernpfades geändert.
Aus den freien Antwortfeldern konnten sich drei Wünsche der Lehrer herauskristallisieren:
 1. Weniger Vorgaben hinsichtlich Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit.
 2. Mehr Anknüpfungspunkte zu Schulbüchern.
 3. Mehr Übungsaufgaben.

Eine Möglichkeit zur eigenen Gestaltung von Lernpfaden, ohne dass große Informatikkenntnisse benötigt werden, soll in der vorliegenden Arbeit präsentiert werden.

Kapitel 4

Elektronische Lernumgebung

„Starting this fall with high school math and science, we will be the first state in the nation – the first state in the nation – to provide schools with a state-approved list of digital textbooks.“

Arnold Schwarzenegger im Juni 2009

[Schwarzenegger 09]

Das obige Zitat hat mich zu der vorliegenden Arbeit inspiriert und sie soll im weiteren als erster Versuch verstanden werden, das klassische Schulbuch nicht nur zu ergänzen, wie es das Projekt SbX des BM:Ukk vorsieht¹, sondern zu ersetzen.

Um über eBooks² hinauszugehen, die einfache Digitalisierung eines Schulbuches allein empfinde ich nicht als erstrebenswert, wurde die Lernumgebung interaktiv und hypermedial gestaltet.

Es sollten dabei folgende Vorgaben erfüllt sein:

- Ersatz für das Schulbuch (dafür muss der Unterricht zu einem großen Teil mit PC erfolgen, z. B. Notebookklasse) und daher:
 - Aufgabenpool für Lehrer
 - Nachschlagewerk für Schüler
- Anknüpfungspunkt an spezielle Software der Mathematik, insbesondere GeoGebra
- Bereitstellung von Ressourcen zur Erstellung eigener Lernpfade für Lehrer

Es wäre vermessen gewesen ein komplettes Schulbuch im Zuge der Diplomarbeit zu erstellen, so habe ich mich vorerst auf das Kapitel „Funktionen“ beschränkt, wie es in der 9. Schulstufe sowohl in AHS, HTL und HAK laut Lehrplan unterrichtet wird. Formal wird das Kapitel dem Lehrplan der HTL zugeordnet, kann aber aufgrund sehr

¹<http://sbx.bildung.at/statisch/sbx/de/startseite.ihtml>

²elektronisch verfügbare Bücher

ähnlicher Lehrplangestaltung des Kapitels „Funktionen“ auch in den beiden anderen genannten Schultypen ohne Probleme genutzt werden. Die Wahl fiel auf den Schultyp HTL, da in BHMS die Dichte an Notebookklassen höher ist³, und der Mathematik in diesem Schultyp in der Stundentafel mehr Platz als in der HAK eingeräumt wird. In diesem Kapitel werden alle im Lehrplan der HTL unter „Funktionen“ genannten Punkte behandelt:

- Begriff
- Darstellung in Koordinatensystemen
- lineare Funktion
- Interpretieren von Tabellen
- Interpolation
- direkte und indirekte Proportionalität

4.1 Technischer Hintergrund

Das eigentliche Ziel Schwarzeneggers bei der Einführung der elektronischen Lehrbücher waren Einsparungen für den Staat [Schwarzenegger 09]. In diesem Sinne habe ich kostenpflichtige Programme und Technologien bei der Erstellung der Lernumgebung vermieden.

- **verwendete Programme:**

- Notepad++ ist ein Open-Source Code Editor und Notepad Ersatz⁴.
- GeoGebra ist ein Open-Source DGS, das in der neuesten Version auch Züge von Tabellenkalkulation und CAS integriert hat (siehe 3.3.1).
- jClick ist ein Freeware Projekt, das vom BM:UKK zur Erstellung von interaktiven Übungen bereitgestellt wird⁵.
- Paint.NET ist ein Freeware Bildbearbeitungsprogramm⁶.

- **verwendete Technologien:**

- HTML
- CSS
- JAVASCRIPT
- MySQL

³laut E-Mail Korrespondenz mit Mag.^a Paller vom BM:UKK

⁴<http://notepad-plus-plus.org/>

⁵<http://clic.eduhi.at/index.php?modul=jclicprojekt>

⁶<http://www.getpaint.net/>

- PHP
- JAVA

Optimiert wurde die Lernumgebung für die Browser Internet Explorer 8 von Microsoft und Firefox 3.6.3 von Mozilla. Dabei sollte die Auflösung zumindest 1024x768 sein, das heute wohl als Mindeststandard angesehen werden kann. Javascript und Java müssen im Browser aktiviert sein (dies ist die Standardeinstellung).

Insgesamt ist die Lernumgebung 4,29 MB groß und umfasst 95 Dateien.

Die zugehörige MySQL-Datenbank, die Aufgaben, Übungen, Glossareinträge und Beschreibungen zu den Applets, Grafiken und Unterkapitel enthält, hat 246 Einträge und ist 92 kB groß.

Insgesamt finden sich derzeit 80 Aufgaben, 5 Übungen, 17 Applets und 41 Grafiken als Ressourcen für die Lernumgebung, die für Lernpfade unabhängig voneinander genutzt werden können.

4.2 Aufbau

Die Übersicht begrüßt den Benutzer mit der Kapitelauswahl, die sich derzeit auf Funktionen in der 9. Schulstufe beschränkt. Um möglichst viel Platz für die Hauptansicht zu schaffen, wurde die Navigationsleiste, von der aus sich Glossar, Applets und Grafiken, Aufgaben und Übungen und die Hilfe aufrufen lassen, am unteren Rand des Fensters angebracht. Von der Navigationsleiste aus kann man auch schnell in das übergeordnete Kapitel oder die Übersicht zurückspringen.

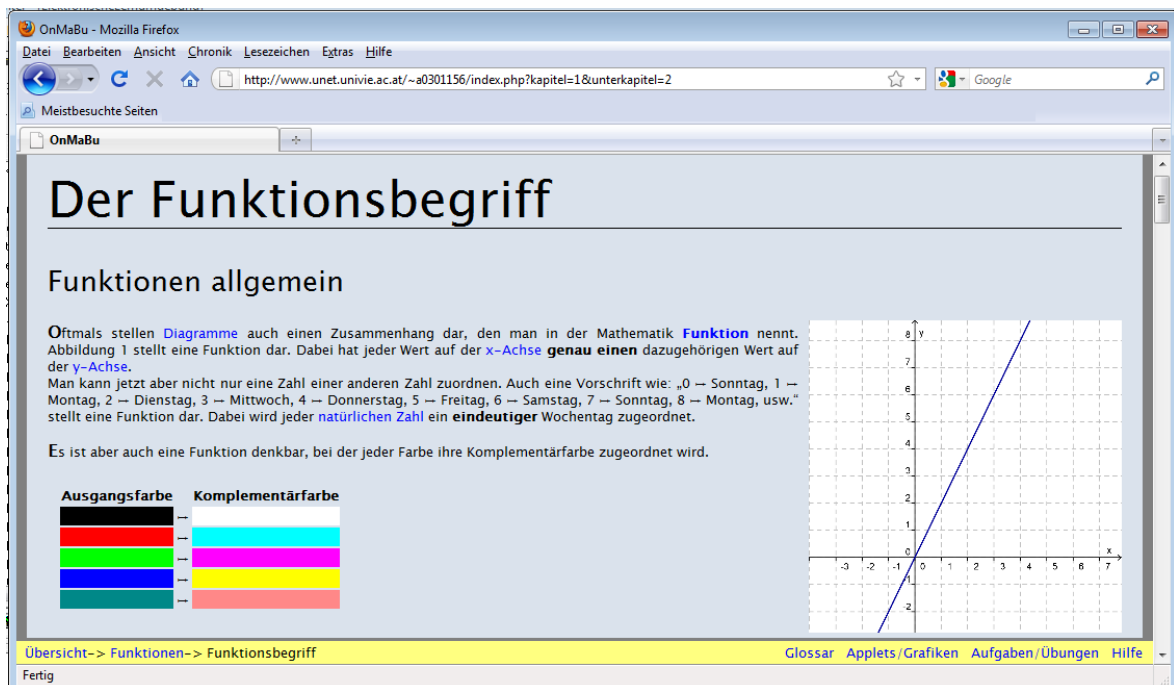


Abbildung 4.1: Screenshot eines Unterkapitels der Lernumgebung

Ein Klick auf das Kapitel bringt den Nutzer in die Unterkapitelauswahl. Im Fall der Funktionen finden sich dabei die Unterkapitel:

- Diagramme
- Funktionsbegriff
- Eigenschaften von Funktionen
- Lineare Funktionen
- Lineare Interpolation
- Direkte und indirekte Proportionalität

und die drei technischen Unterkapitel:

- Liniendiagramme mit technischen Hilfsmitteln
- Funktionen in Geogebra
- Häufige Problemstellungen bei linearen Funktionen

In den Unterkapiteln finden sich die eigentlichen „Schulbuchseiten“. Es finden sich also erklärende Texte, Verknüpfungen mit Glossareinträgen, Definitionen, Applets, Bilder, Aufgaben und Übungen darin. Näheres dazu findet sich im folgenden Abschnitt Beschreibung (4.3). Der Unterschied zwischen Aufgabe und Übung besteht darin, dass zu einer Übung, die zufällige Angaben enthält und somit beliebig oft wiederholbar ist, die Lösung direkt von der Lernumgebung zurückgegeben werden kann. Sie sind, wie der Name schon sagt, zum Üben einfacher Fertigkeiten, wie dem Ablesen von Diagrammen oder des Auffindens einer Gerade durch zwei vorgegebene Punkte, gedacht. Aufgaben sind meist noch mit zusätzlichen Icons markiert.



zeigt an, dass die Aufgabe als Einzelarbeit gedacht ist.



zeigt an, dass die Aufgabe als Paararbeit gedacht ist.



zeigt an, dass die Aufgabe als Gruppenarbeit gedacht ist.



zeigt an, dass die Aufgabe besonders herausfordernd ist.



zeigt an, dass keine technischen Hilfsmittel zur Lösung der Aufgabe verwendet werden sollen.

Die technischen Unterkapitel stellen den Gebrauch von technischen Hilfsmitteln in den Vordergrund und erklären instruktional, meist an Beispielen, deren Gebrauch für bestimmte Problemstellungen. Derzeit erfolgt dies nur mittels Bild und Text.

Der Glossar verfügt derzeit über 34 Einträge. Es lässt sich zur Suche von Einträgen entweder die Suchfunktion rechts oben nutzen, oder über die Wahl des Anfangsbuchstabens eine Liste der dazu passenden Einträge ausgeben. Die Einträge sind meist

Erläuterungen zu den Begriffen. Hin und wieder, wie z. B. im Falle der Monotonie der linearen Funktionen, finden sich auch Begründungen im Glossar, die nicht im Unterkapitel gegeben werden.



Abbildung 4.2: Screenshot des Glossars

Hinter „Applets/Grafiken“ verbirgt sich das Verzeichnis aller im Kapitel verwendeten Applets und Bilder. Dadurch soll es für Lehrer erleichtert werden jene Applets und Bilder aus der Lernumgebung herauszupicken, die sie für ihren Lernpfad geeignet halten. Ein Klick auf die Verknüpfung bringt das Bild bzw. das Applet in Originalgröße auf den Bildschirm und die im Browser angezeigte Adresse lässt sich dann einfach als Link in den eigenen Lernpfad integrieren.

Applets und Grafiken		
— Zurück		
Applets Grafiken		
Funktionen:	Verknüpfung	Beschreibung
	Applet 1	Konstruktionsanleitung; Anleitung zum Lesen eines Liniendiagramms. Beantwortet: Wie komme ich von einem Wert der x-Achse auf den entsprechenden Wert der y-Achse?
	Applet 2	Konstruktionsanleitung; Anleitung zum Lesen eines Liniendiagramms. Beantwortet: Wie komme ich von einem Wert auf der y-Achse auf den entsprechenden Wert der x-Achse?
	Applet 3	Ein Punkt auf der x-Achse kann verschoben werden, dazu wird dann immer der passenden y-Wert angezeigt. Die Funktion ist quadratisch.
	Applet 4	Ein Punkt auf der y-Achse kann verschoben werden, dazu wird dann immer der passenden x-Wert angezeigt. Die Funktion ist quadratisch.
	Applet 5	Hier wird gezeigt, wie aus einer gegebenen Tabelle ein Liniendiagramm erstellt werden kann. Tabelleneinträge sind (10,1), (30,6), (50,16), (80,38), (130,101)
	Applet 6	Eine zufällige, normierte Polynomfunktion 3. Grades lässt sich mit einem beweglichen Punkt "abfahren". Dabei lassen sich die Koordinaten und die Funktionsgleichung ablesen.
	Applet 7	Zwei Punkte sind frei verschiebbar. Durch diese Punkte ist eine Gerade gelegt.

Abbildung 4.3: Screenshot des Applets/Grafiken-Verzeichnisses

Ähnlich ist es auch bei dem Menüpunkt „Aufgaben/Übungen“. Hier lassen sich die

nach Unterkapitel geordneten und durchnummerierten Aufgaben und Übungen aus der Lernumgebung leicht finden.

4.3 Beschreibung

4.3.1 Diagramme

Dieses Unterkapitel behandelt die im Lehrplan genannten Punkte:

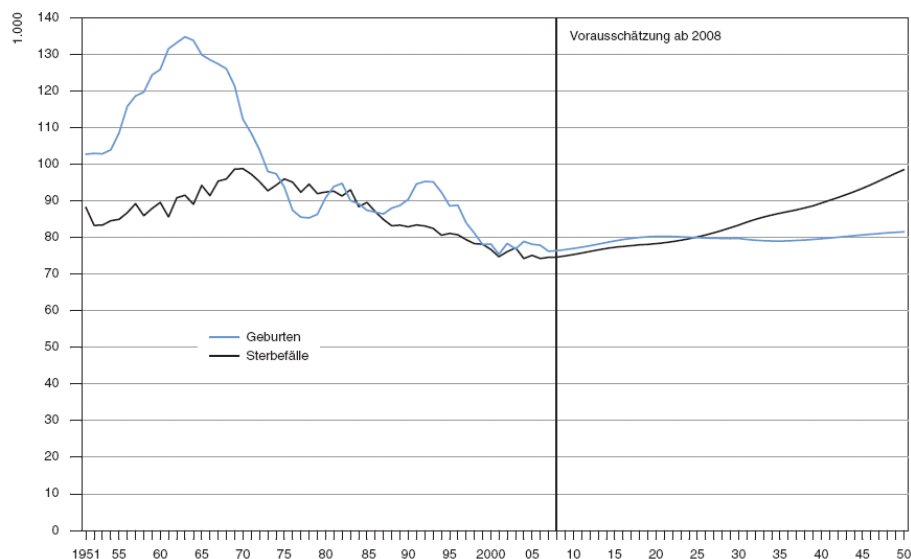
- Interpretieren von Tabellen
- Darstellung im Koordinatensystem

Lesen und Interpretieren von Diagrammen

Der Anblick von Diagrammen sollte Schülern in der 9. Schulstufe schon vertraut sein. Die Beschäftigung mit Diagrammen wird eingangs kurz damit motiviert, dass man im täglichen Leben in Zeitungen, Werbungen oder bei Internetrecherchen oft auf Diagramme trifft. Da sie zu den am häufigsten verwendeten Diagrammtypen zählen und vor allem da sie für Funktionsgraphen später entscheidend sind, beschränkt sich das Unterkapitel auf Liniendiagramme.

Anhand der ersten Aufgabe soll das Lesen von Diagrammen instruktional gezeigt und dann selbst durchgeführt werden.

2.09 Geburten und Sterbefälle 1951 bis 2050 (mittlere Variante)
Births and deaths 1951 to 2050



Q: STATISTIK AUSTRIA.

Abbildung 4.4: Geburten und Sterbefälle 1951 - 2050

Aufgabe 1: Beantworte nur mit dieser Grafik:

- Wie viele Geburten gab es in Österreich im Jahre 1965?
- Wie viele Sterbefälle gab es in Österreich in deinem Geburtsjahr?
- In welchen Jahren wurden 120 000 Geburten aufgezeichnet?
- In welchem Jahr zwischen 1951 und 2007 gab es die meisten Geburten?
- Wann wurden mehr Menschen in Österreich geboren als gestorben sind?
- Wird erwartet, dass die Anzahl der Österreicher ansteigt oder sinkt? Was vernachlässigst du, wenn du nur diese Grafik zur Beantwortung heranziehst?

Die Beantwortung der ersten zwei Fragen wird anschließend anhand zweier Applets vorgeführt. Neben diesen Applets findet sich die Anleitung zum Ablesen von x - bzw. y -Werten in Textform. Die Applets lassen den Prozess des Aufsuchens von Werten in einzelnen Schritten abspielen. Dabei können die Schüler ihre eigene Geschwindigkeit wählen.

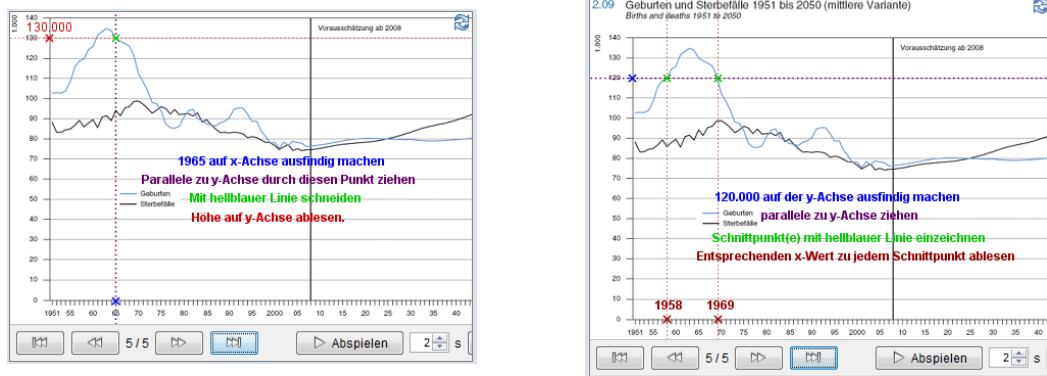


Abbildung 4.5: Hier sind Screenshots der fertig abgespielten Applets zu sehen

In Aufgabe 1 beschäftigen sich a, b, c, d und e mit dem Lesen von Diagrammen. In f wird das erste Mal eine Interpretation des Diagramms verlangt.

Zwei weitere Aufgaben beschäftigen sich noch mit diesem Diagramm. Die erste ist dabei als Partnerarbeit gedacht und soll dazu anregen nicht nur gestellte Fragen zu beantworten, sondern sich darüber Gedanken zu machen, welche Fragen überhaupt mit dem Diagramm beantwortet werden können. Aufgabe 3 benötigt eine Interpretation des Diagramms.

Aufgabe 2: Stelle deinem Partner zwei Fragen, die er aus diesem Diagramm herauslesen soll. Bearbeite dann selbst zwei Fragen, die dir dein Partner stellt.

Aufgabe 3: Kannst du aus diesem Diagramm herauslesen, wie viele Geburten es im ersten Halbjahr 1966 gegeben hat? Wenn ja: Wie viele waren es? Wenn nein: Begründe!

Das Ablesen von Diagrammen wird im Folgenden nochmals mit zwei interaktiven Applets präsentiert. Diesmal handelt sich um den Flug eines Steins, dabei wird die Höhe des Steins in Abhängigkeit der Zeit angezeigt. Das erste Applet erlaubt es auf der Zeitachse einen Punkt zu bewegen, und den zugehörigen Höhenwert abzulesen. Im zweiten Applet kann ein Punkt auf der y -Achse bewegt werden, und es werden die dazugehörigen Zeiten angezeigt.

In Aufgabe 4 sollen sich die Schüler anschließend mit diesen Applets beschäftigen.

Aufgabe 4: Finde mit Hilfe der Applets (Applet1, Applet2) zum Steinwurf:

- Nach wie vielen Sekunden ist der Stein in einer Höhe von 10 m?
- Wie hoch fliegt der Stein?
- Wann hat er den höchsten Punkt seiner Flugbahn erreicht?
- Warum gibt es die Möglichkeit für eine Höhe (wie z. B. 5 m) zwei verschiedene Zeiten zu erhalten, aber nicht für eine Zeit zwei verschiedene Höhen?

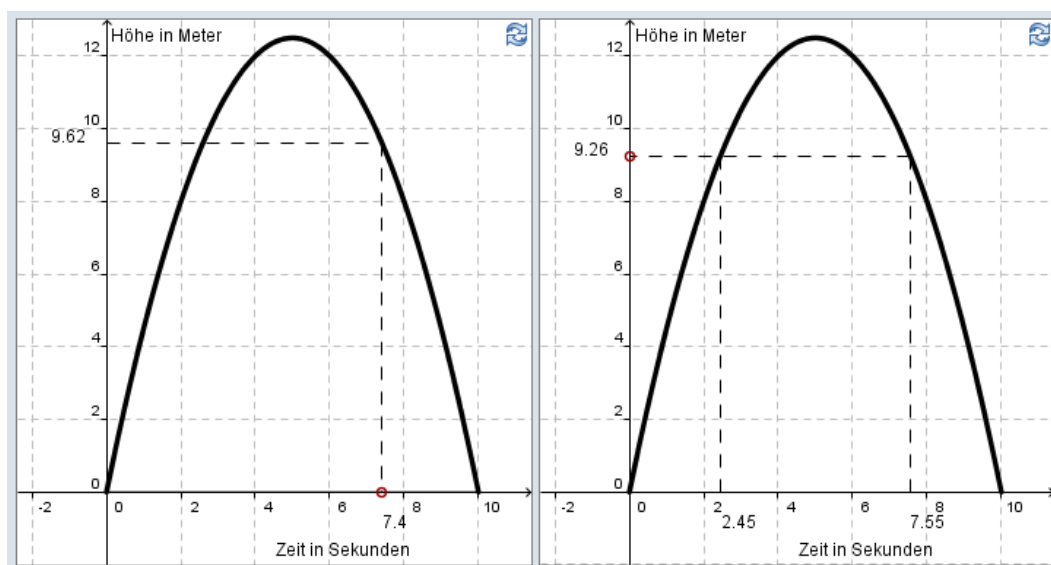
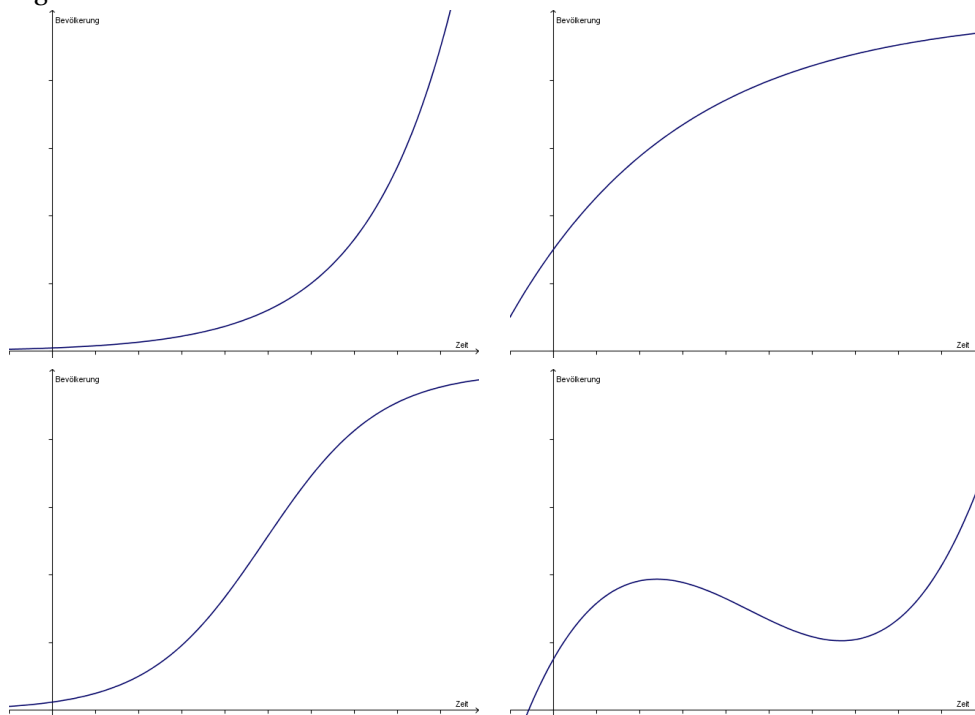


Abbildung 4.6: Applets zum interaktiven Lesen von Diagrammen

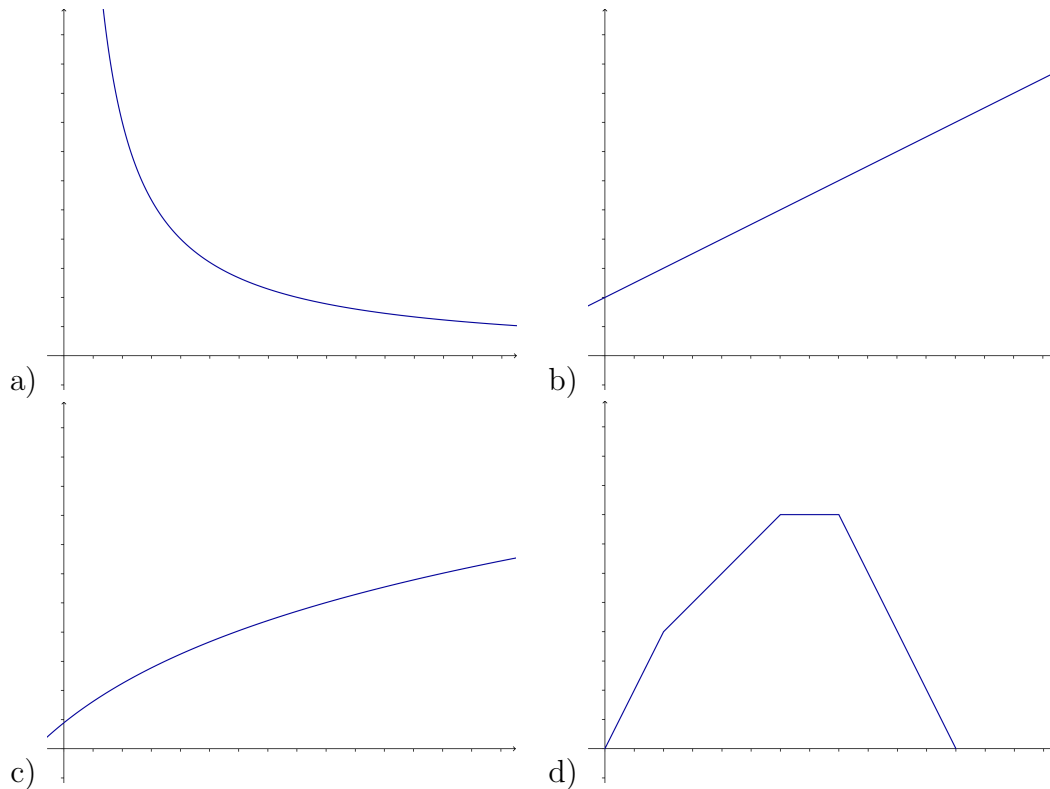
Die Aufgaben 5 bis 8 sind jeweils Einzelarbeiten zum Lesen bzw. Interpretieren von Diagrammen. Dabei werden Börsenkurse, Weg-Zeit-Diagramme, Handytarife und Lotto für die Problemstellung genutzt.

Im Folgenden sollen noch die beiden sehr offen gestalteten Aufgaben 9 und 10 vorgestellt werden. Beide Aufgaben sollen zur sollen zum kreativen Umgang mit Diagrammen anregen. Die Lösungen können im Plenum diskutiert werden.

Aufgabe 9: Welches der Diagramme könnte die Anzahl der Weltbevölkerung im Laufe der Zeit darstellen? Diskutiert und begründet eure Wahl. Welcher Zeitrahmen wird dabei auf der x -Achse dargestellt?



Aufgabe 10: Beschreibt eine Situation, in der ein Zusammenhang durch folgende Grafik beschrieben werden kann.



Tabellen und Diagramme

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen Tabellen und Diagrammen hergestellt.

Als Einstieg wurden die monatlichen Ausgaben eines Geschwisterpaares gewählt. Diese werden zuerst in einem Diagramm und anschließend in einer Tabelle dargestellt. Um den Vorteil der Tabelle zu verdeutlichen, folgt darauf Aufgabe 11:

Aufgabe 11: Anhand der konkreten Zahlenwerte aus der Tabelle lassen sich folgende Fragen leichter beantworten:

- Wer hatte die größere Gesamtsumme an Ausgaben?
- Wann hatte Michael im Jahr 2009 die geringsten Ausgaben? Wann hatte Maide im Jahr 2009 die geringsten Ausgaben?

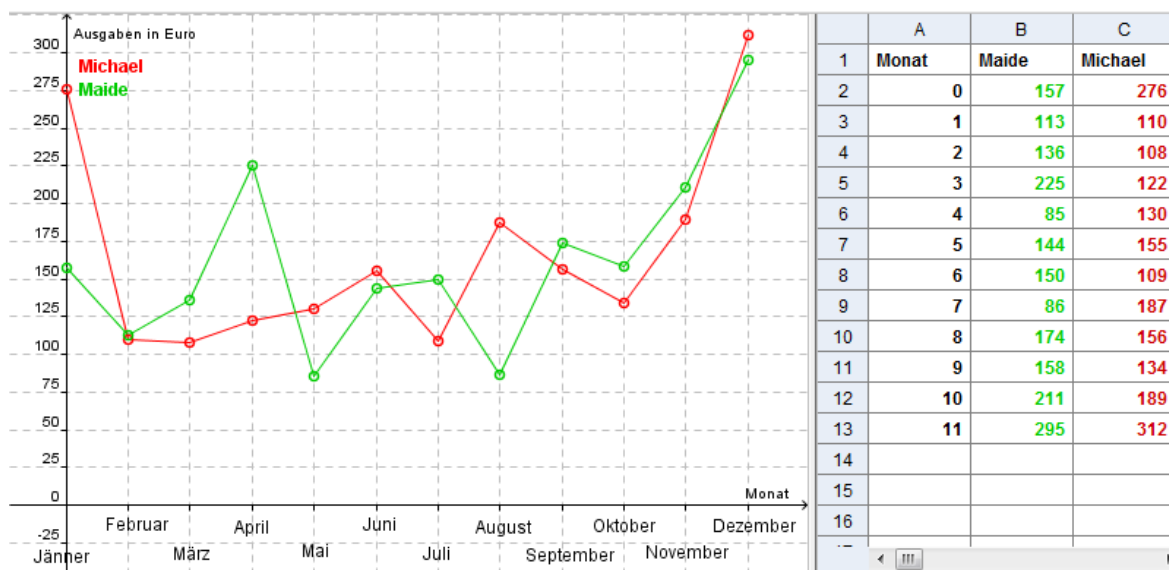


Abbildung 4.7: Screenshot des Applets zum Zusammenhang zwischen Diagrammen und Tabellen

In Aufgabe 12 sollen die Schüler dann selbst bewerten, bei welchen Fragestellungen sie lieber direkt am Diagramm und bei welchen sie lieber mit den Werten der Tabelle arbeiten:

Aufgabe 12: Arbeite mit folgenden Applets:

Applet 1: Hier kannst du die Einträge in der Tabelle ändern. Die Änderungen werden direkt am Diagramm sichtbar gemacht.

Applet 2: Hier kannst du die Punkte des Diagramms durch Ziehen verändern. Die Änderungen werden direkt an der Tabelle sichtbar gemacht.

Gib jeweils an, mit welchem Applet du die Aufgabe erledigt hast und begründe deine Wahl. Belege die Erledigung der Aufgabe durch Notiz der Tabelleneinträge oder einen Screenshot:

- Die Gesamtsumme an Ausgaben von Michael soll 1133 €, und jene von Maide 865 € betragen.
- Die Ausgaben von Maide sollen stets höher als jene von Michael sein.
- Die Ausgabendifferenz zwischen Michael und Maide soll stets 21 € betragen.
- Die Ausgaben von Michael sollen von Monat zu Monat sinken, jene von Maide steigen.

Der anschließende Teil beschäftigt sich mit dem händischen Zeichnen von Liniendiagrammen. Die Erstellung von Liniendiagrammen mit technischen Hilfsmittel wird in einem der technischen Unterkapitel erläutert. Als Hintergrund dient der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg eines Autos.

Es ist dabei die Tabelle vorgegeben und ein Applet dient dazu, die Konstruktion Schritt für Schritt zu verdeutlichen. Wie bei den Schritt für Schritt Anleitungen zum Ablesen von Diagrammen sind der Text und der dazugehörige grafische Schritt farblich aufeinander abgestimmt.

Geschwindigkeit(km/h)	Bremsweg(m)
10	1
30	6
50	16
80	38
130	101

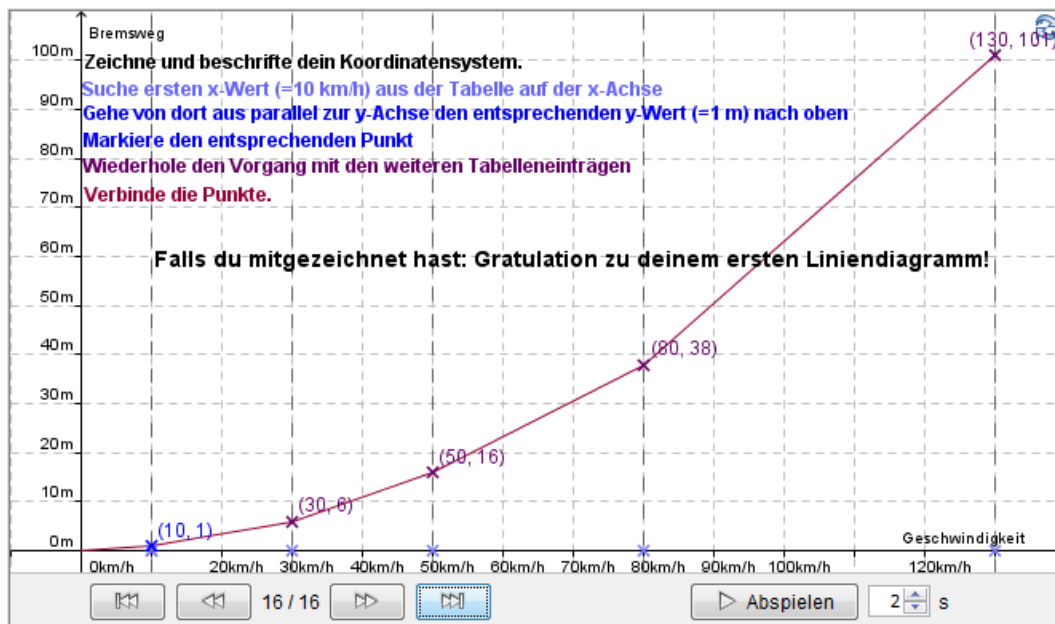


Abbildung 4.8: Screenshot der Konstruktionsanleitung für Liniendiagramme

Die Aufgaben 13, 14 und 15 beschäftigen sich anschließend noch mit dem Lesen, Interpretieren und Zeichnen von Liniendiagrammen. Erwähnenswert ist noch die Übung 1 in diesem Unterkapitel. Hierbei soll aus einem zufällig vorgegebenen Liniendiagramm die Tabelle vervollständigt werden. Mit einem Klick auf den Knopf „Prüfe Antworten!“ werden die richtig eingetragenen Werte grün und die falsch eingetragenen Werte rot markiert. Die Toleranz für die richtige Eingabe beträgt $\pm 0,25$. Über den Knopf „Neues Diagramm“ erhält man eine zufällig erstelltes neues Übungsdiagramm.

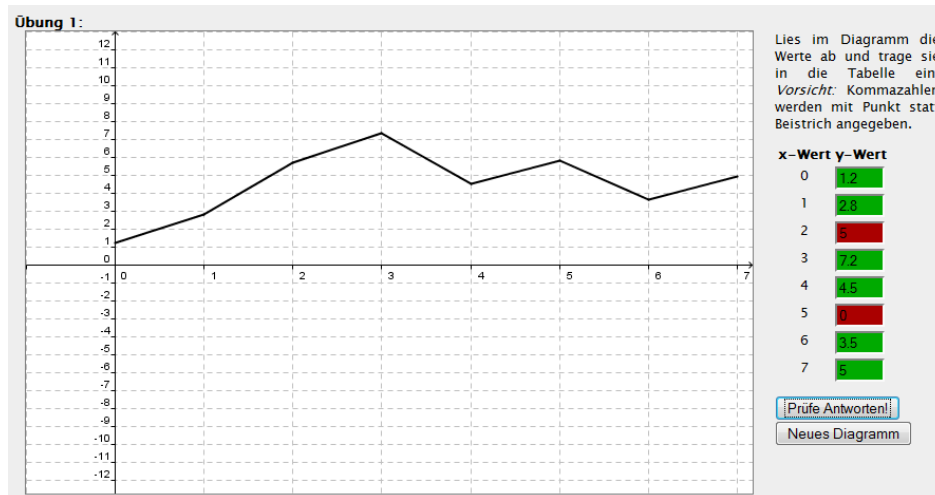


Abbildung 4.9: Screenshot der Übung 1 nach Auswertung

4.3.2 Funktionsbegriff

Dieses Unterkapitel behandelt den im Lehrplan genannten Punkt „Funktionsbegriff“.

Funktionen allgemein

Da im vorherigen Unterkapitel mit Diagrammen gearbeitet wurde, erfolgt der Einstieg in den Komplex der Funktionen hier mit einem Diagramm. Anhand des Diagramms soll der Begriff der Funktion verdeutlicht werden. Das Augenmerk wird darauf gelegt, dass es sich bei einer Funktion um eine Zuordnung handelt, die jedem Wert aus einer Menge genau einen Wert einer zweiten Menge zuordnet.

Die Exaktifizierung erfolgt anschließend über die Definition:

Definition: Seien D und W beliebige nicht leere Mengen. Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die jedem Element aus D eindeutig ein Element aus W zuordnet. Man nennt dann D den Definitionsbereich der Funktion und W den Wertebereich und schreibt kurz: $f : D \rightarrow W$

Zwei Beispiele sollen anschließend das Konzept der Funktion verdeutlichen und werden mit Grafiken unterstützt. Im ersten Beispiel wird die Zuordnung von Preisen an Waren

aufgegriffen. Dabei bekommt jede Ware genau einen Preis. Dargestellt wird dies mit einem Pfeildiagramm.

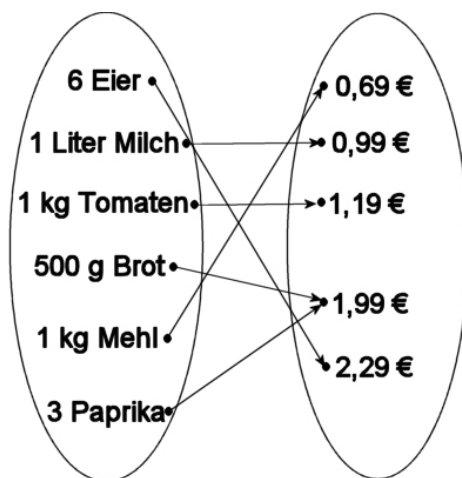


Abbildung 4.10: Pfeildiagramm zum ersten Beispiel für Funktionen

Das zweite Beispiel beschäftigt sich mit der Farbcodierung von elektrischen Widerständen. Die Besonderheit ist hier, dass sowohl die Zuordnung der Farben zu den Widerständen, als auch die Zuordnung der Widerstände zu den Farben eindeutig ist. Hier finden sich sogar zwei verschiedene Funktionen. Die Begriffe Umkehrfunktion und Bijektivität werden hier noch nicht erwähnt, denn an dieser Stelle soll der nackte Begriff der Funktion im Vordergrund stehen.

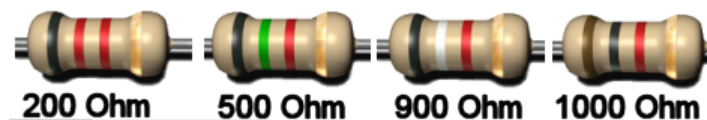


Abbildung 4.11: Beispiele für Farbkodierungen elektrischer Widerstände

In den sechs darauf folgenden Aufgaben steht die Beschäftigung mit der Frage im Vordergrund „Ist die vorgestellte Zuordnung eine Funktion?“ und regen auch zur Erfindung eigener Funktionen an. Die Darstellung von Funktionen erfolgt dabei in Textform, als Diagramm oder als Tabelle. Auch die Sprechweise „Elemente der Wertemenge werden eindeutig Elementen der Definitionsmenge zugeordnet“ soll hier verinnerlicht werden.

Funktionen auf Zahlmengen

In diesem Abschnitt werden Funktionen vorgestellt, bei denen Definitions- und Wertemenge aus Zahlen bestehen. Auch eine neue Darstellungsform von Funktionen, die Funktionsgleichung, wird hier erstmals erwähnt. Dazu wird erst die Funktion verbal beschrieben, anschließend dazu als Funktionsgleichung notiert und mit einem Pfeildiagramm grafisch unterstützt.

Die Aufgaben 7, 8, 9 und 10 beschäftigen sich mit der Übersetzung der Beschreibung

der Funktion in eine Funktionsgleichung, und die Berechnung einzelner Funktionswerte.

Aufgabe 11 ist offener gestaltet und soll in Partnerarbeit bewältigt werden. Dabei ist das Augenmerk der Schüler darauf zu lenken, dass identische Funktionsgleichungen unterschiedliche Funktionen beschreiben können. Zu jeder Funktionsgleichung (so die Definitionsmenge nicht aus der Angabe hervorgeht oder $\mathbb{R}$ ist) sollte daher stets die Definitionsmenge angegeben werden.

Aufgabe 11: Findet zu zweit Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionen $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, und $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{N}$.

Funktionsgraphen

Mit „Aus einer Funktion erhält man also Zahlenpaare, immer eine Zahl aus der Definitionsmenge und die dazugehörige Zahl aus der Wertemenge. Fasst man diese als Punkte im Koordinatensystem auf und zeichnet sie ein, so erhält man den Funktionsgraphen.“ soll eine kurze Beschreibung den Begriff Funktionsgraphen erläutern. Exakter erfolgt dies im Glossar.

Danach wird auf den Unterschied zwischen Funktionsgraphen von kontinuierlichen und diskreten (zur besseren Verständlichkeit wurde in der Lernumgebung auf die Begriffe kontinuierlich und diskret verzichtet) Funktionen eingegangen. Auch die Erstellung von Funktionsgraphen mit GeoGebra und per Hand wird hier erläutert.

Die Aufgaben 12, 13, 14, 15 und 16 sollen zur Beschäftigung mit Funktionsgleichungen und Funktionsgraphen anregen. Dabei sollen in 12 und 13 die Funktionsgraphen per Hand skizziert werden. Zur Lösung der Aufgaben 15 und 16 soll aus einem Funktionsgraphen die Funktionsgleichung ermittelt werden.

4.3.3 Eigenschaften von Funktionen

Dieses Unterkapitel vertieft den Begriff der Funktion.

Als zu behandelnde Eigenschaften von Funktionen habe ich Nullstelle und Monotonie gewählt. Der Begriff der Steigung wird erst im Laufe der Beschäftigung mit linearen Funktionen klar, da man sich dann bei allgemeinen Funktionen auf die Steigung von Sekanten bzw. Tangenten berufen kann.

Motiviert werden die Begriffe über das Beispiel einer Gewinnfunktion G , die vom Preis x des Produkts abhängt.

Die Frage nach dem gewinnbringenden Preisbereich soll die Suche nach Nullstellen motivieren. Dabei wird gleich erklärt, dass sich das Problem direkt an der Grafik, zumindest annähernd, lösen lässt. Für eine genauere Angabe wird GeoGebra oder ein CAS benötigt, da quadratische Gleichungen noch nicht gelöst werden können.

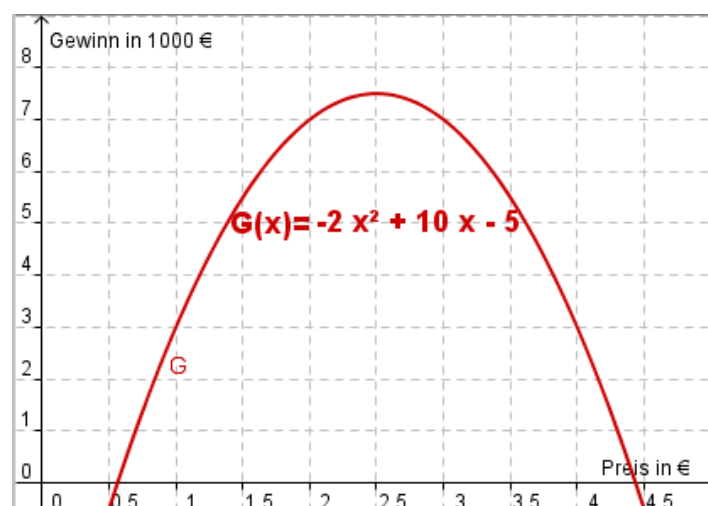


Abbildung 4.12: Funktionsbegriff der Gewinnfunktion G

Danach wird der Begriff der Nullstelle durch Definition gefestigt:

Definition: Sei D der Definitionsbereich der Funktion f , dann heißt $x \in D$ Nullstelle von f , wenn $f(x) = 0$ gilt.

Das zweite Problem ist die Frage nach dem maximalen Gewinn. Auch diese lässt sich mit einem Blick auf die Grafik annähernd beantworten. Dabei nützt man die Form des Funktionsgraphen aus, die aus zwei streng monotonen Bereichen besteht. Der maximale Gewinn lässt sich über folgende Anleitung finden: Solange die Funktion steigend ist, soll der Preis erhöht werden, sobald die Funktion fallend ist, soll der Preis verringert werden.

Definition: Sei f eine Funktion, und x_1, x_2 aus der Definitionsmenge von f liegen zwischen a und b ;

(i) folgt für alle $x_1 < x_2$, dass $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist f streng monoton steigend zwischen a und b .

(ii) folgt für alle $x_1 < x_2$, dass $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist f streng monoton fallend zwischen a und b .

Die folgenden fünf Aufgaben sollen sich die Schüler mit der Interpretation von Funktionsgraphen, Nullstellen und Monotonie beschäftigen. Nur in Aufgabe 1 ist die Funktionsgleichung vorgegeben, in den Aufgaben 2-5 besteht die Herausforderung schon darin die Angabe in Form einer Funktionsgleichung zu mathematisieren.

Mit der Übung in diesem Unterkapitel sollen Schüler üben, Nullstellen und Monotonie an einem Funktionsgraphen abzulesen. Vorgegeben ist der Funktionsgraph einer normierten Polynomfunktion 3. Grades, deren Koeffizienten zufällig aus ganzen Zahlen aus dem Intervall $[-5,5]$ bestimmt werden. Auf diesem Funktionsgraphen lässt sich ein Punkt entlang ziehen und dessen Koordinaten ablesen. Der Button „Antwort anzeigen“ löst die Übung.

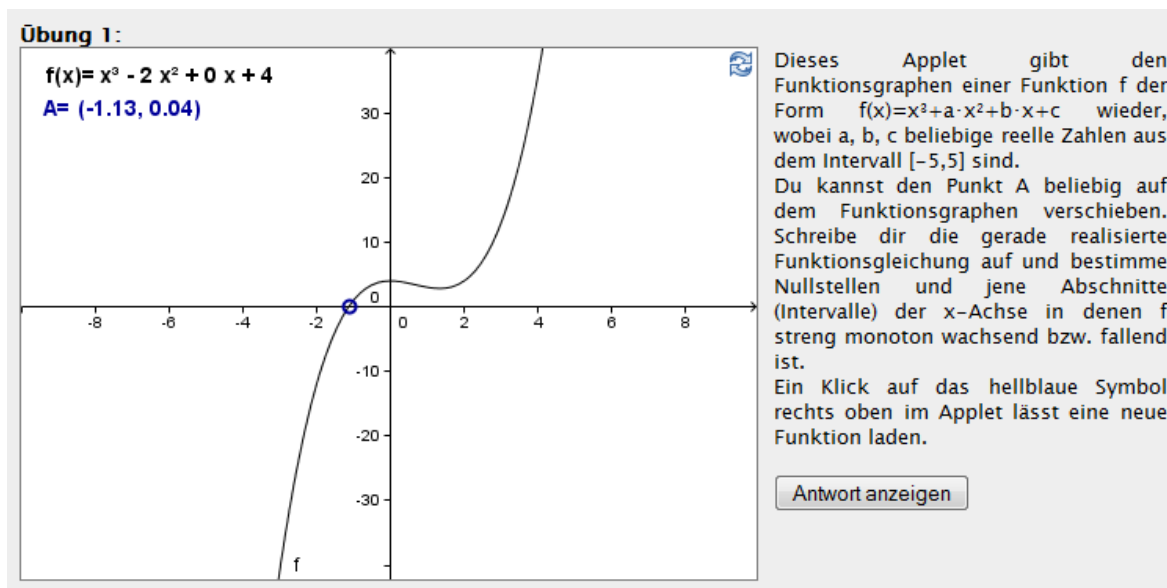


Abbildung 4.13: Übung zu Eigenschaften von Funktion

In den folgenden Aufgaben 6, 7 und 8 sollen die Kurvenscharen $f_d(x) = x^2 - d$, $f_a(x) = a \cdot x^2$ und $f_c(x) = \frac{c}{x}$ untersucht werden. Dies wird durch die Erstellung von Schiebereglern in GeoGebra erheblich erleichtert.

4.3.4 Lineare Funktionen

Im Lehrplan ist der Punkt „lineare Funktionen“ zu finden, und wird im gleichnamigen Unterkapitel auch behandelt.

Die Beschäftigung mit linearen Funktionen wird mittels Aufgabe 1 motiviert.

Aufgabe 1: Licht bewegt sich bekanntlich mit ca. 300 000 km/s.

- Gib die Zeit t , die das Licht zu einem bestimmten Ort benötigt, in Abhängigkeit von der Entfernung dieses Ortes x zur Sonne an.
- Berechne, wie lange das Licht von der Sonne zu Erde, Pluto und Alpha Centauri benötigt. (Informationen zu den Entfernungen finden sich zum Beispiel auf Wikipedia)
- Zeichne den Graphen dieser Funktion t .

Funktionen mit Geraden als Funktionsgraphen sollen im weiteren als lineare Funktionen bezeichnet werden. Um eine möglichst allgemeine Funktionsgleichung für lineare Funktionen zu finden, bedient man sich zweier Applets. Im ersten Applet ist eine Gerade durch zwei Punkte gelegt worden, im Applet wird die zugehörige Funktionsgleichung eingeblendet. Durch Ziehen der zwei Punkte lässt sich die Gerade verändern und die Änderung der Funktionsgleichung beobachten. Es sollen Geraden, die parallel zur y -Achse verlaufen, ignoriert werden, dies ist auch Anlass für Aufgabe 2.

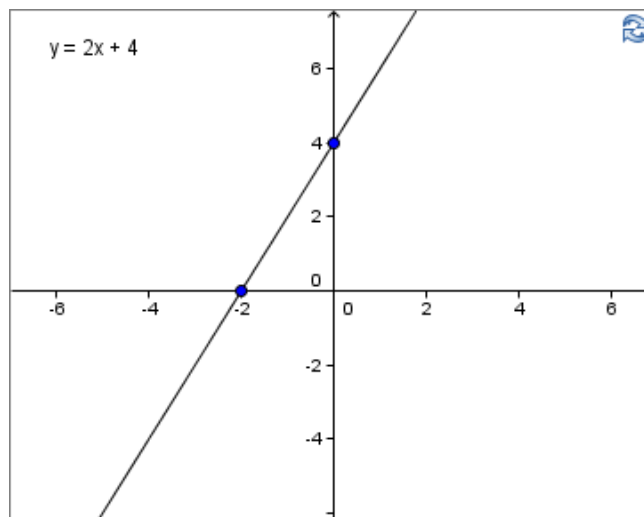


Abbildung 4.14: Applet 1 zu den linearen Funktionen

Aufgabe 2: Warum kann eine Gerade, die parallel zur y -Achse liegt, nicht der Funktionsgraph einer Funktion y in Abhängigkeit von x sein?

Das erste Applet soll einen Hinweis darauf geben, dass solche Funktionsgleichungen ausschließlich von der Form $f(x) = k \cdot x + d$ sind. Nun soll natürlich auch noch überprüft werden, ob solche Funktionsgleichungen auch nur Geraden als Funktionsgraphen besitzen. Erst einmal wird es grob durch GeoGebra überprüft, und danach noch algebraisch begründet.

Im Applet 2 kann man k und d mittels Schieberegler verändern. Dies ist meines Erachtens das wichtigste Applet zur Arbeit mit linearen Funktionen, da sich die Zusammenhänge zwischen den Parametern k , d und den Eigenschaften der Funktion untersuchen lassen.

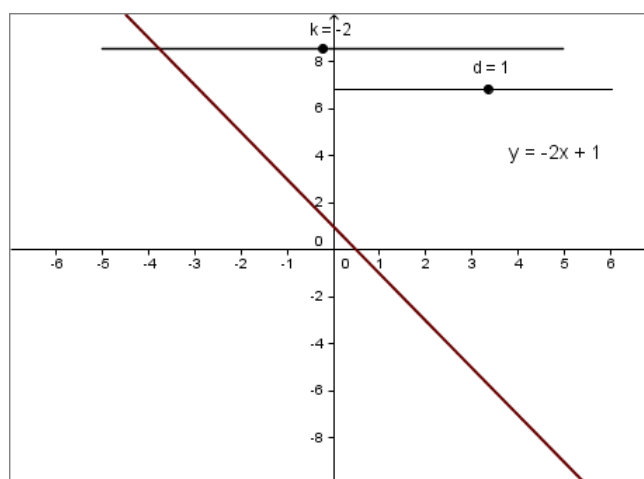
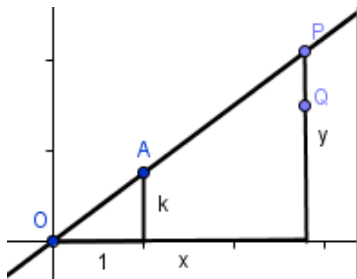


Abbildung 4.15: Applet 2 zu den linearen Funktionen

Algebraische Begründung:



Betrachte zuerst $y(x) = k \cdot x$.

Für $k = 0$ ist der Graph von $y(x) = k \cdot x$ die x -Achse, also eine Gerade.

Für $k \neq 0$ gilt, dass die Punkte $O = (0, 0)$ und $A = (1, k)$ auf der Geraden g liegen. Für alle Punkte $P = (x, y)$ die auf der Geraden g liegen gilt, nach dem Strahlensatz, $y : x = k : 1$ und damit $y = k \cdot x$.

Andere Punkte $Q \neq P$ mit derselben x -Koordinate können nicht die Gleichung $y = k \cdot x$ erfüllen, da die zu x gehörige y -Koordinate wegen $y = k \cdot x$ eindeutig feststeht.

Der Graph der Funktion $y(x) = k \cdot x + d$ ist bis auf Parallelverschiebung mit $y(x) = k \cdot x$ identisch und damit auch eine Gerade.

Definition: Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$, wobei $k, d \in \mathbb{R}$, heißen lineare Funktionen. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Aufgabe 3, direkt anschließend an die Definition, soll eben diese gleich sichern. Dabei wird bei fünf verschiedenen Zuordnungen, die entweder beschrieben werden oder als Funktionsgleichung gegeben sind, gefragt, ob es sich dabei um lineare Funktionen handelt. Hier steckt auch die Absicht dahinter den Schülern klar zu machen, dass nicht jede lineare Funktion $f(x)$ heißt, und wenn $d = 0$ oder $k = 0$ gilt, diese Parameter in der Funktionsgleichung gar nicht angeschrieben werden müssen.

Anschließend sollen die Parameter am Applet erkundet werden, damit soll die Definition von Steigung und Ordinatenabstand motiviert werden.

Aufgabe 4: Gehe nochmals zum obigen Applet und untersuche folgende Fragestellungen:

- Wie verändert sich die Gerade, wenn du k von 0 an immer größer werden lässt?
- Wie verändert sich die Gerade, wenn du k von 0 an immer kleiner werden lässt?
- Was passiert mit der Geraden, wenn du k unverändert lässt, aber d veränderst?
- Gib durch Veränderung von k, d eine Funktion an, die eine Nullstelle bei -2 besitzt.

Definition: Sei f eine lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$. Dann heißt k die Steigung und d der Ordinatenabstand oder y -Achsenabschnitt der Funktion.

Im Folgenden sollen die unter „Eigenschaften von Funktionen“ besprochenen Begriffe Nullstelle und Monotonie bei linearen Funktionen untersucht werden. Dazu dienen die beiden Aufgaben 5 und 6. Im Glossar findet sich die algebraische Bearbeitung dieser Eigenschaften.

Aufgabe 5: Zur Nullstellenbestimmung der allgemeinen linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$.

- Löse die Gleichung $k \cdot x + d = 0$ nach x auf.
- Was bedeutet die Lösung in Hinblick auf Nullstellen? Wieviele davon gibt es und was tritt ein, wenn $k = 0$ ist? Was ist wenn $d = 0$ ist? Was ist, wenn beide Parameter 0 sind: $k = 0 = d$?
- Überprüfe deine Aussagen mit dem obigen Applet zur freien Veränderung von k und d .

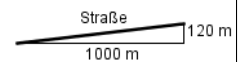
Aufgabe 6: Auch die Monotonie lässt sich am einfachsten mit dem obigen Applet untersuchen. Wie hängt die Monotonie von den Parametern k und d ab?

Danach wird das Steigungsdreieck thematisiert. Aufgabe 7 geht dabei auf das Verkehrszeichen für die Steigung einer Straße ein.

Aufgabe 7:



Auf der Straße werden Steigungen in Prozent angegeben. Wenn zum Beispiel 12 % Steigung angegeben ist, bedeutet dies, dass die Straße für jeden waagrechten Kilometer um $12 \% = 0,12$ dieses Kilometers höher als der Ausgangspunkt liegt (siehe Skizze rechts). Muss man, um die Steigung der Straße herauszufinden, immer den ganzen waagrechten Kilometer zurücklegen? Wie kann man auch bei kürzeren waagrechten Distanzen die Steigung einer Straße in Prozent ermitteln?



Die Aufgabe 8 regt dann zur freieren und interaktiven Beschäftigung mit Steigungsdreiecken an:

Aufgabe 8: Der Quotient von Abständen auf der y -Achse und Abständen auf der x -Achse ist ganz allgemein für lineare Funktionen von Bedeutung. Betrachte dazu das folgende Applet. Die Punkte A und B bestimmen im Applet die Gerade. Die Punkte P und Q liegen auf der Gerade und bestimmen das Steigungsdreieck.

Lege durch Wahl von A und B eine beliebige Gerade fest und notiere die Kathetenlängen des Steigungsdreiecks, sie sind hier *AbstandX* und *AbstandY* genannt. Berechne den Quotienten $AbstandY / AbstandX$. Ändere jetzt nur das Steigungsdreieck und notiere erneut *AbstandX*, *AbstandY* und den Quotienten.

Kannst du aus diesen Werten schon eine Vermutung für den Quotienten anstellen? Formuliere diese! Ändere ansonsten das Steigungsdreieck noch ein paar Mal und berechne die Quotienten.

Du kannst dies gern auch noch an anderen Geraden ausprobieren, um deine Vermutung zu bestärken, oder auszubauen. Findest du auch eine Begründung für deine Vermutung?

Es folgen unter der Überschrift „Häufige Problemstellungen“ einige Textaufgaben, bei denen unter anderem aus zwei gegebenen Punkten eine lineare Funktionsgleichung gefunden werden soll, untersucht werden soll, ob ein Punkt oberhalb, unterhalb oder auf einer Geraden liegt, oder Funktionswerte einer linearen Funktion gefunden werden sollen.

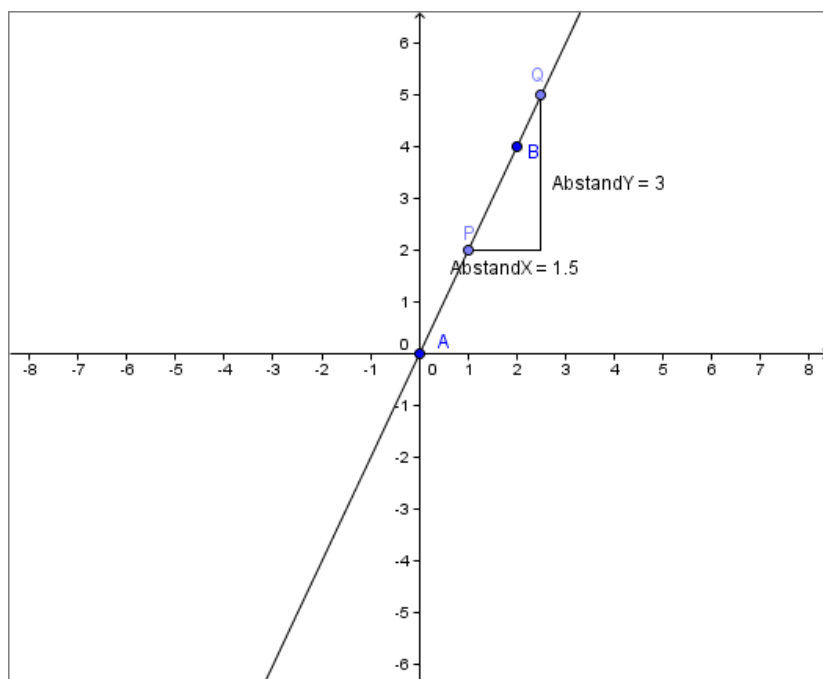


Abbildung 4.16: Screenshot des Applets zu Aufgabe 8 der linearen Funktionen

Danach finden sich die Übungen 1 und 2. Bei Übung 1 soll untersucht werden, ob ein zufällig erstellter Punkt P oberhalb, unterhalb oder auf dem Graphen einer linearen Funktion liegt. Die Antwort lässt sich anhaken, und mit dem Knopf „Prüfen!“ auf Richtigkeit überprüfen.

In Übung 2 soll die Gleichung jener linearen Funktion gefunden werden, deren Graph die zufällig erstellten Punkte P und Q beinhaltet. Die Lösung wird durch Klick auf den entsprechenden Button angezeigt.

4.3.5 Lineare Interpolation

Im Lehrplan findet sich der Punkt „Interpolation“. Das Konzept der Interpolation wird hier in Form der linearen Interpolation vorgestellt.

Lineare Interpolation wird hier anhand Aufgabe 1 als Problemlösungsstrategie vorgestellt. Dabei wird auf der linken Seite algebraisch gearbeitet, während auf der rechten Seite ein GeoGebra Applet denselben Vorgang grafisch illustriert.

Aufgabe 1:

Bei Michael wurde zuhause alle paar Jahre seine Größe an einer Wand gekennzeichnet, und das Datum dazu vermerkt. Diese Werte wurden in eine Tabelle übertragen.
Wie groß war Michael 2005?

Jahr	Größe [cm]
2000	102
2002	109
2004	122
2006	126
2007	130

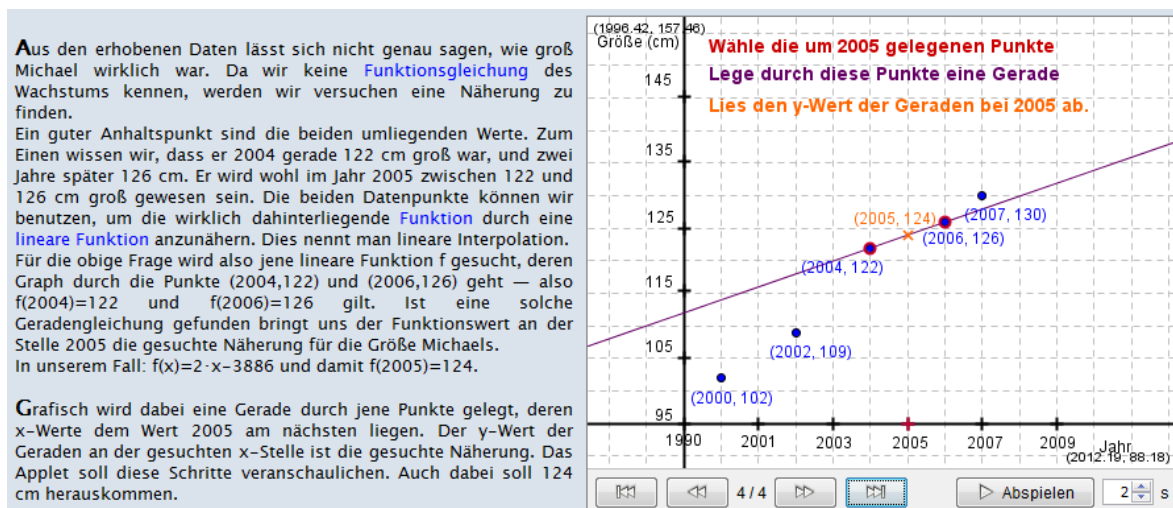


Abbildung 4.17: Instruktion zur Aufgabe 1 der linearen Interpolation

Die folgenden Aufgaben beschäftigen sich mit der Genauigkeit der linearen Interpolation, mit der Durchführung der linearen Interpolation und der Frage, inwiefern man damit auch Extrapolation betreiben könnte.

In diesem Unterkapitel gibt es ebenfalls eine Übung. Dabei ist eine Tabelle vorgegeben, in der ein y -Wert fehlt. Durch lineare Interpolation soll dieser fehlende y -Wert angenähert werden. Der Wert kann direkt in die Tabelle eingetragen werden und durch Klick auf den Button „Prüfe Antwort!“ wird er entweder grün, wenn er richtig ist, oder rot markiert.

4.3.6 Direkte und Indirekte Proportionalität

Laut Lehrplan ist der Punkt „direkte und indirekte Proportionalität“ zu behandeln, dies wird diesem Unterkapitel gemacht. Damit sind alle im Lehrplan genannten Punkte für den Bereich „Funktionen“ in der 9. Schulstufe abgehakt.

Proportionen

Viele Aufgaben in diesem und den folgenden beiden Abschnitten stützen sich auf ein Applet, das die Übersetzung bei Fahrrädern modelliert.

Mit den ersten beiden Schieberegler lässt sich die Anzahl der Zähne vorne n_1 bzw. hinten n_2 verändern. Die Grenzen für diese Einstellung entsprechen ungefähr dem heute üblichen Standard bei Fahrrädern.

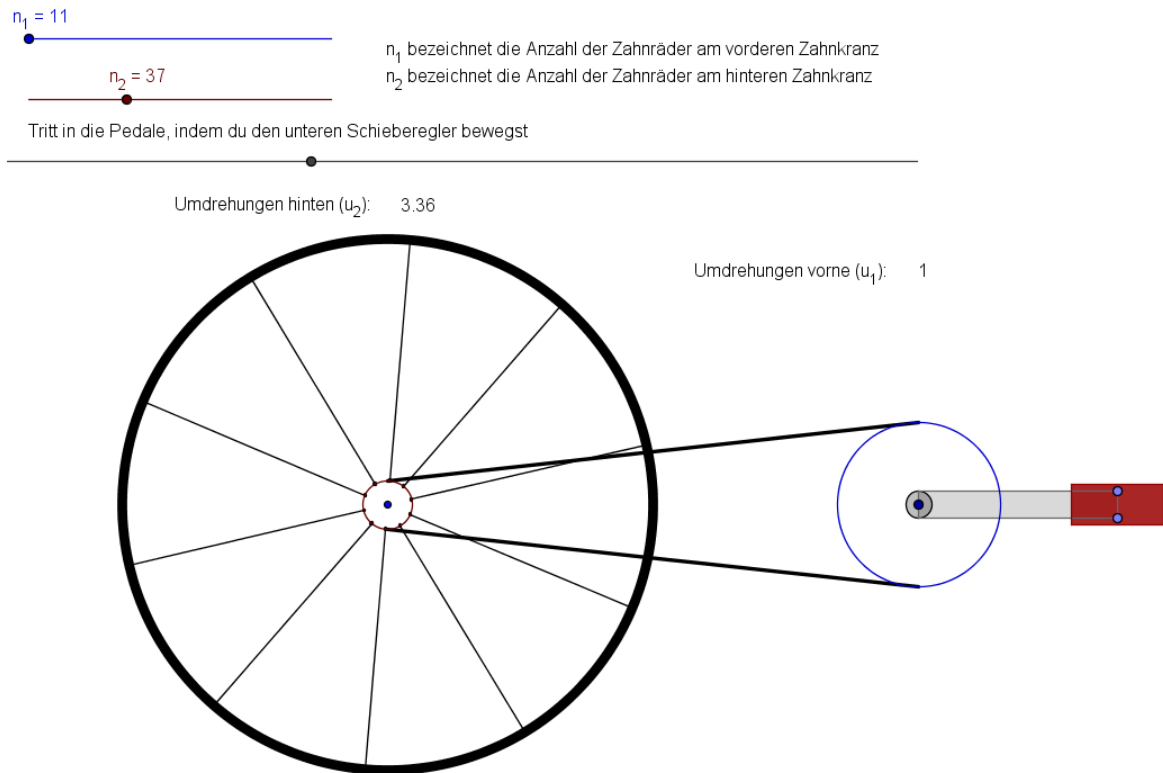


Abbildung 4.18: Applet zur Fahrradübersetzung

Mit dem unteren Schieberegler lässt sich anschließend in die Pedale treten, d. h. das vordere Zahnrad drehen. Damit beginnt sich auch das hintere Zahnrad zu drehen und über den Zahnradern wird jeweils angezeigt, wie viel Umdrehungen bisher gemacht wurden.

Aufgabe 1: Öffne das Applet zur Fahrradübersetzung.

Ermittle bei welchen Einstellungen von n_1 (Anzahl der Zähne am vorderen Zahnkranz) und n_2 (Anzahl Zähne am hinteren Zahnkranz) man eine Umdrehung des Pedals benötigt, um drei Umdrehungen des Hinterrades zu bewirken.

Was haben diese Einstellungen gemeinsam?

Der Begriff des Verhältnisses wird als anderer Name für Quotient eingeführt. Und der Umgang damit soll in den nächsten zwei Aufgaben geübt werden.

Aufgabe 2: Man kann am Fahrrad-Applet auch das Verhältnis der Umdrehungszahlen betrachten. So zum Beispiel das Verhältnis der Umdrehungszahlen der Pedale (des vorderen Zahnkranzes) zur Umdrehungszahl des Hinterrades (hinteren Zahnkranzes).

Untersuche dieses an verschiedenen n_1 und n_2 . Berechne dazu jeweils das Verhältnis der Umdrehungszahlen und das Verhältnis der Zähne auf den Zahnkränzen. Was fällt dabei auf?

Aufgabe 3: Die Bildformate 4:3 und 16:9 stellen das Verhältnis der Bildbreite zur Bildhöhe dar. Es gibt zwei Fernseher mit der Bilddiagonale von 24 Zoll im Handel. Einer ist im 4:3 Format gehalten, der andere im 16:9 Format. Welcher hat die größere Bildfläche?

Darauf folgt dann sogleich die Definition des Begriffs Proportion und sieben Aufgaben zu diesem Bereich. Diese Aufgaben beschäftigen sich mit geometrischen Proportionen (z. B. dem goldenen Schnitt), mit Maßstäben von Landkarten und Modellen, dem Verhältnis von Stromstärke zu Spannung bei festen Widerständen und Wettquoten.

Definition: Eine Gleichung der Form $a : b = c : d$ heißt Proportion. (b, d ungleich 0)

Direkte Proportionalität

Direkte Proportionalität wird am Beispiel Seitenlänge und Umfang eines Quadrats illustriert. Vervielfacht man die Seitenlänge des Quadrates um den Faktor k , so vervielfacht sich auch der Umfang um den Faktor k . In der folgenden Aufgabe soll das Konzept dann auf andere Beispiele übertragen werden.

Aufgabe 12: Beantworte folgende Fragen und begründe deine Antwort:

- a) Ist die Fläche eines Quadrats direkt proportional zur Seitenlänge?
- b) Ist der Umfang eines Kreises direkt proportional zum Durchmesser?
- c) Ist die Fläche eines Kreises direkt proportional zum Radius?
- d) Ist der Preis einer Ware direkt proportional zur Anzahl der gekauften Stücke (ohne Mengenrabatt)?

Erst jetzt wird das Kriterium des konstanten Quotienten eingeführt und in der Definition nochmals erwähnt.

Definition: Zwei veränderliche Größen heißen zueinander direkt proportional, wenn dem k -fachen der einen Größe das k -fache der anderen Größe entspricht, also ihr Quotient konstant ist.

Aufgabe 13 schlägt dann den Brückenschlag zu den vorherigen Kapiteln, indem sie $b = k \cdot a$ als Funktion auffasst.

Aufgabe 13: Wodurch unterscheidet sich die Funktion b in Abhängigkeit von a , ausgedrückt durch die Funktionsgleichung $b(a) = k \cdot a$, von einer allgemeinen linearen Funktion?

Aufgabe 18 greift schließlich wieder das Fahrradapplet auf.

Aufgabe 18: Welche der folgenden Größen am Fahrradapplet sind zueinander direkt proportional?

- (1) n_1 und n_2 bei festem Umdrehungsverhältnis
- (2) n_1 und u_2 bei festem n_2 und u_1
- (3) n_2 und u_2 bei festem n_1 und u_1
- (4) n_2 und u_1 bei festem n_1 und u_2
- (5) n_1 und u_1 bei festem n_2 und u_2
- (6) n_1 und n_2 bei festem u_1

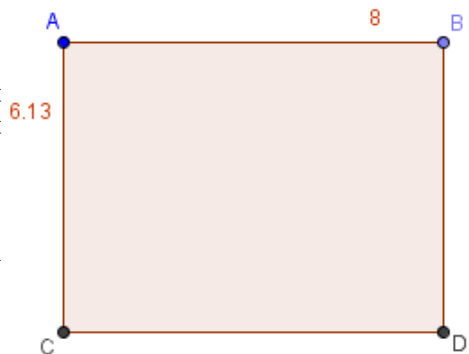
Indirekte Proportionalität

Ohne den Begriff „indirekte Proportionalität“ zu erwähnen sollen die Schüler an der ersten Aufgabe diesen gleich einmal erfahren. Dazu dient ein Applet, das den Flächeninhalt eines Rechteckes konstant hält, während man die Breite verändern kann.

Aufgabe 19:

Ein Architekt soll Wohnungen mit einer Fläche von 49 m^2 planen und experimentiert mit verschiedenen rechteckigen Grundrissen. Wir bezeichnen die Länge des rechteckigen Grundrisses mit a und die Breite mit b . Arbeite mit dem rechten Applet, indem du den Punkt B verschiebst und damit die Breite des Grundrisses änderst.

- a) Wie groß ist die Breite, wenn er als Länge 7 m annimmt?
- b) Wie groß ist die Breite, wenn er die Länge von 7 m auf 14 m verdoppelt?
- c) Wie groß ist, wenn die 7 m Länge halbiert werden?
- d) Stelle eine Funktionsgleichung auf, die b als Funktion von a ausdrückt.



Über das Beispiel des Zusammenhangs zwischen Geschwindigkeit eines Autos und Fahrzeit für eine festgelegte Strecke soll dann der Begriff der indirekten Proportionalität erläutert werden. Dabei steht im Vordergrund, dass dem c -fachen einer Größe der c -te Teil der zweiten Größe entspricht. Dadurch ergibt sich dann das Kriterium von der Konstanz des Produkts.

Definition: Zwei veränderliche Größen heißen zueinander indirekt proportional, wenn dem k -fachen der einen Größe der k -te Teil der anderen Größe entspricht, also ihr Produkt konstant ist.

Auch hier wird dann auf den Funktionscharakter der indirekten Proportionalität eingegangen:

Aufgabe 20:

- a) Ist der Zusammenhang zwischen a und b , durch die Gleichung $a(b) = \frac{k}{b}$ beschrieben, eine Funktion? Begründe deine Antwort und notiere gegebenenfalls den Definitionsbereich.
- b) Zeichne den Graphen von a in Abhängigkeit von b für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$!
- c) Untersuche a in Abhängigkeit von b auf Nullstellen und Monotonie für verschiedene positive Konstanten k .
- d) Untersuche Nullstellen und Monotonie für negative Werte von k der Funktionsgleichung $a(b) = \frac{k}{b}$.

Darauf folgen noch drei weitere Aufgaben, die zur Beschäftigung mit indirekter Proportionalität einladen sollen.

4.4 Lernpfade auf Basis der Lernumgebung

Um aufzuzeigen, mit welchen einfachen Mitteln sich Lernpfade, unterstützt von der Lernumgebung, erstellen lassen, werde ich im folgenden zwei Beispiele dafür angeben. Beide Lernpfade beschäftigen sich dabei mit dem Einstieg in den Bereich der linearen Funktionen, setzen aber unterschiedliche Schwerpunkte und unterschiedliches Vorwissen voraus. Die beiden Lernpfade sind nicht zusammengehörig, sondern stellen zwei alternative Einstiege in den Bereich der linearen Funktion dar. Beide Lernpfade sind mit Hilfe von Open Office Writer geschrieben und sollen von den Schülern ebenso mit einem Textverarbeitungsprogramm bearbeitet werden. In den folgenden zwei Abschnitten werden Aufbau der Lernpfade und möglicher Unterrichtsverlauf kurz umrissen. Im Anhang finden sich dann die Lernpfade, samt Leistungsblatt und didaktischem Kommentar. Digital sind sie natürlich auch auf der beiliegenden CD-ROM zu finden. Beide Lernpfade sollen ungefähr je 2-3 Unterrichtseinheiten in Anspruch nehmen.

4.4.1 Lernpfad (A)

Lernziele (minimal):

- Ich kann die allgemeine Form der linearen Funktionsgleichung notieren und den Einfluss der Parameter k und d auf Nullstellen und Monotonie der linearen Funktion beschreiben.
- Ich kann aufgrund der Funktionsgleichung Aussagen über das Aussehen des Graph der Funktion treffen.
- Ich kann Anwendungen der linearen Funktion im Alltag und im Bereich der Technik nennen und mit solchen Anwendungen verständlich umgehen.

Der Lernpfad beginnt mit dem Punkt „Arbeiten mit Funktionen“. Die erste Aufgabe besteht darin, eine über Verknüpfung zur Lernumgebung bereitgestellte Aufgabe zu

lösen. Die Aufgabe ist aus dem Bereich „Eigenschaften von Funktionen“ und behandelt lineare Funktionen, ohne diese explizit zu erwähnen.

Ein Hotel besitzt 1000 Handtücher. Im Mittel werden 8 Handtücher pro Woche gestohlen. Nimm für dieses Beispiel an, dass keine Handtücher nachgekauft werden.

- a) Stelle die Anzahl H der Handtücher in Abhängigkeit von der Anzahl w der vergangenen Wochen dar.
- b) Welche Definitionsmenge ist für H sinnvoll?
- c) Wann gibt es weniger als 500 Handtücher? Wieviele Handtücher gibt es nach 10 Wochen?
- d) Zeichne den Funktionsgraphen von H .
- e) Gibt es eine Nullstelle? Wie ist diese zu deuten?

In der Bonusaufgabe soll ein Parameter aus der vorherigen Aufgabe durch einen Schieberegler variabel gemacht, und beschrieben werden, wie sich die Veränderung des Parameters auf Funktionsgleichung und -graphen auswirkt.

Auch die zweite Aufgabe in Punkt 1 beschäftigt sich mit einer linearen Funktion. Hier wurde das Einstiegsbeispiel aus dem Unterkapitel „Lineare Funktionen“ gewählt. Auch hier soll in der Bonusaufgabe ein Parameter durch einen Schieberegler verändert und die Beobachtungen niedergeschrieben werden.

In Aufgabe 3 aus Punkt 1 sollen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionsgleichungen und -graphen aus den vorhergehenden beiden Aufgaben zusammengefasst werden.

Im Leistungsblatt ist vermerkt, dass nach Beantwortung der Aufgaben aus Punkt 1 der Lehrer die Erledigung dieser abzuzeichnen hat, bevor die Bearbeitung von Punkt 2 beginnt. Man kann, soweit sich alle schon mit Aufgabe 3 beschäftigt haben, den Arbeitsprozess kurz niederlegen lassen, um über die gefundenen Gemeinsamkeiten der Funktion zu diskutieren. Womöglich kommt man so im Plenum schon auf die allgemeine Form der linearen Funktion.

Der zweite Punkt ist mit „Lineare Funktionen“ betitelt. In der ersten Aufgabe soll der Glossareintrag zur linearen Funktion gelesen werden. Die Schüler sollen anschließend vermerken, was diese neue Definition mit ihren vorherigen Aufgaben zu tun hatte.

In Aufgabe 2 soll mittels GeoGebra ein Applet aus der Lernumgebung nachgebaut werden. Dabei ist die Gerade und die zugehörige Funktionsgleichung erkennbar, und über Schieberegler lassen sich die Parameter k und d verändern. Mit diesem selbstgebastelten Hilfsmittel, sollen die Schüler dann den Einfluss von k und d auf Monotonie und Nullstellen der Funktion untersuchen.

In Bonusaufgabe 3 sollen dann an der allgemeinen linearen Funktion Nullstellen algebraisch gesucht werden.

Aufgabe 3 schlägt dann die Brücke zum Alltag. Hier sollen Schüler ihren eigenen Handytarif, oder falls sie diesen nicht kennen, einen Handytarif aus dem Internet beschreiben und begründen, warum die Funktion der Kosten in Abhängigkeit der Gesprächsminuten eine lineare Funktion ist oder nicht ist.

In Bonusaufgabe 4 sollen die Schüler selbstständig einen Zusammenhang aus dem Alltag angeben, der sich als lineare Funktion auffassen lässt.

Aufgabe 4 beschäftigt sich mit linearen Funktionen in der Technik. Dazu wird das Ohm'sche Gesetz bemüht.

In Bonusaufgabe 5 sollen die Schüler selbst einen Zusammenhang in der Technik nennen, der sich als lineare Funktion auffassen lässt.

4.4.2 Lernpfad (B)

Lernziele (minimal):

- Ich kann die allgemeine Form der lineare Funktionsgleichung notieren.
- Ich kann aufgrund der Funktionsgleichung Aussagen über das Aussehen des Graph der Funktion treffen.
- Ich kann von einer Geraden auf die zugehörige Funktionsgleichung schließen.

Der erste Teil des Lernpfades heißt „Geraden als Funktionsgraphen“. Es soll erst an einem Applet aus dem Unterkapitel „Lineare Funktionen“ erkundet werden, wie Funktionsgleichungen aussehen, deren Graphen Geraden sind.

Als Bonusaufgabe dient die Frage, welche Geraden denn keine Funktion y in Abhängigkeit von x darstellen.

In Aufgabe 2 wird die Gerade als Funktionsgraph anhand eines Beispiels thematisiert. Dies wurde von der Lernumgebung inspiriert, aber die Fragestellung leicht verändert.

Die dritte Aufgabe lädt zum Experimentieren ein. Dabei soll der Schüler mittels GeoGebra Überlegungen anstellen, welche Form eine Funktionsgleichung haben muss, damit sie eine Gerade als Graphen besitzt. Es sollen dabei alle Überlegungen, Versuche und Fehlschläge festgehalten werden.

Nach Abschluss des ersten Punktes sollte es im Plenum eine Diskussion über die Experimente geben, bevor dann im zweiten Teil des Lernpfades die Definition der linearen Funktion vorgestellt wird.

Der zweite Teil heißt schlicht „Lineare Funktionen“. In der ersten Aufgabe soll eine Funktionstabelle ausgefüllt werden.

Für besonders schwierig halte ich dann die Bonusaufgabe 2, in der Schüler eine Begründung für den Umstand finden sollen, dass der Graph jeder linearen Funktion eine Gerade ist. Hier sollte explizit darauf hingewiesen werden, dass die Bonusaufgabe erst nach Erledigung der anderen Punkte angefangen werden soll. Die Schülerlösungen lassen sich womöglich in der nächsten Stunde zur Diskussion stellen, ebenso wie die in der Lernumgebung gebrachte Begründung.

In Aufgabe 2 und 3 sollen die Parameter k bzw. d untersucht werden. Dazu dient das Applet zur freien Veränderung der Parameter mittels Schieberegler.

Bonusaufgabe 3 fragt, wie sich k direkt am Funktionsgraphen bestimmen lässt.

In der letzten Aufgabe soll vom Graph auf die Funktionsgleichung geschlossen werden. Wichtig ist hier vor allem welcher Weg zur Funktionsgleichung genommen wird. In Bonusaufgabe 4 sollen die Schüler anschließend ein Verfahren beschreiben, wie sie mit der Kenntnis zweier Punkte einer Geraden die passende Funktionsgleichung aufstellen können.

Kapitel 5

Fazit

5.1 Zusammenfassung

Der rasante Siegeszug des Computers in den Schulen wurde in Kapitel 1 behandelt. Auch wurde dort festgestellt, dass die entsprechende universitäre Ausbildung der Lehrer und die Formulierung einer Didaktik mit starkem Bezug zu den Neuen Medien noch nicht sehr weit fortgeschritten ist. Es konnten auch viele Heilsversprechen aus der Zeit des Aufbruchs, in der Mitte der 90er Jahre, nicht eingehalten werden. Der Einsatz des Computers allein macht noch keinen guten Unterricht, genau so wenig wie die Ablehnung des Computers zu gutem Unterricht führt.

In „2.2 Pro und Contra“ plädiere ich zum einen wegen der Omnipräsenz des Computers in Haushalten und auf Arbeitsplätzen und zum anderen wegen den Vorteilen gegenüber den derzeit vorherrschenden Unterrichtsmitteln für einen überlegten Einsatz des Computers im Unterricht. Gerade die oft geforderten schülerzentrierten und differenzierten Lernszenarien lassen sich mittels Computereinsatz leichter verwirklichen.

Das Schlagwort eLearning begann ebenfalls Mitte der Neunziger des letzten Jahrhunderts nicht nur in der Didaktik Fuß zu fassen, sondern schaffte es auch in die Politik, z. B. als die „eLearning-Offensive“ des BM:BWK, und in die Medien. Der Begriff selbst war dabei gar nicht klar definiert. Deshalb habe ich insbesondere für die Schule den Begriff des „Blended Learning“ vorgestellt, wie ihn Mandl und Kopp in [Mandl/Kopp 05, S. 8] definieren. Dabei steht nicht die elektronische Komponente des Lernens im Vordergrund, sondern der Wechsel zwischen verschiedenen Medien und Unterrichtsformen, so wie eine schülerzentrierte, konstruktivistische Konzeption des Unterrichts. Dass eLearning keine neue Form des Lernens ist, sondern sich in schon vorhandene Lerntheorien anpassen lässt, wird in Abschnitt „2.3.2 Lerntheorien“ anhand von Behaviourismus, Kognitivismus und Konstruktivismus gezeigt.

Im dritten Kapitel habe ich versucht die wichtigsten Softwarearten für den Mathematikunterricht vorzustellen. Darunter fallen Funktionsplotter, Computer Algebra Systeme, Dynamische Geometrie Systeme und Tabellenkalkulationen. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf dem DGS GeoGebra von Markus Hohenwarter. Danach wurde auf

die Bedeutung des Internet bei Lernplattformen, WebQuests und Lernpfaden eingegangen. Das Projekt Medienvielfalt beschäftigt sich mit der Erstellung und Evaluation von Lernpfaden. Zur Rechtfertigung meiner Arbeit an der Lernumgebung bringe ich zum einen die Ergebnisse, die auf besseres Verständnis der Mathematik durch Interaktivität schließen lassen, und zum anderen die Kritikpunkte der Lehrer vor, die mehr Aufgaben, Anknüpfungspunkte ans Schulbuch und Möglichkeiten zur individuellen Anpassung der Lernpfade wünschten.

In Kapitel 4 habe ich meine Vorgaben für die Lernumgebung formuliert:

- Ersatz für das Schulbuch (dafür muss der Unterricht zu einem großen Teil mit PC erfolgen, z. B. Notebookklasse) und daher:
 - Aufgabenpool für Lehrer
 - Nachschlagewerk für Schüler
- Anknüpfungspunkt an spezielle Software der Mathematik, insbesondere GeoGebra
- Bereitstellung von Ressourcen zur Erstellung eigener Lernpfade für Lehrer

Für das Kapitel „Funktionen“ finden sich 80 Aufgaben und 5 Übungen in der Lernumgebung, ein Wert der auch für Schulbücher zu vertreten wäre. Durch erklärende Texte in den Unterkapiteln und dem Glossar bietet sich die Lernumgebung auch als Nachschlagewerk für Schüler an und mit den Übungen lässt sich auch alleine arbeiten, da die eigenen Lösungen überprüft werden können.

Die Anknüpfung an GeoGebra findet sich in jedem Unterkapitel. In den technischen Unterkapitel findet sich auch der Anknüpfungspunkt an Tabellenkalkulationsprogrammen.

Da sich Grafiken, Applets, Aufgaben und Übungen auch außerhalb der Unterkapiteln aufrufen lassen, ist hier ein Ressourcenpool, nicht nur zur Erstellung von Lernpfaden, verwirklicht worden.

Somit sind meine eigenen Vorgaben an die Lernumgebung erfüllt worden.

5.2 Ausblick

Ziel der Diplomarbeit war es zu zeigen, wie ein Schulbuch im 21. Jahrhundert aussehen könnte. Dabei ist es wichtig den Anschluss an die neuesten Entwicklungen nicht zu verpassen. In Zukunft wäre somit GeoGebra mit der neuen CAS-Fähigkeit einzubinden. Dies bietet sich vor allem für das Kapitel „Algebra“ in der 9. Schulstufe an.

Mit den Neuerungen in HTML5, damit meine ich insbesondere die bessere Einbindung von Videos, drängen sich Videoanleitungen in den technischen Unterkapiteln geradezu auf. So hat man nicht Bild und Text nebeneinander – dabei wird man jeweils visuell gefordert –, sondern kann den Blick auf das Programm gerichtet lassen, während die Erklärung zu den einzelnen Schritten gesprochen wird. So wurde in der Dissertation

Stepancik auch erwähnt, dass die Videoanleitungen von den Schülern am ehesten verstanden wurden [Stepancik 08].

Eine weitere Entwicklung, die Potential hat in der Schule zum Einsatz zu kommen, ist jene hin zum Tablet PC mit Touchscreen, wie das Phänomen iPad derzeit vorführt. An der Entwicklung von GeoGebra zur „Touch“-Kompatibilität wird noch gearbeitet. Die Vorstellung die GeoGebra Applets mit den Fingern, anstatt der Maus zu bedienen, gefällt mir sehr gut und bringt eine haptische Komponente in den Mathematikunterricht, die nur sehr selten vorhanden ist.

Nachdem mit den Lernpfaden zumindest eine Möglichkeit für den Einsatz der Lernumgebung vorgestellt wurde, bleibt die Frage dennoch bestehen, in welchen Unterrichtsszenarien kann die Lernumgebung noch eingesetzt werden? Darauf folgen direkt die Fragen:

- Welchen Lernerfolg zeigen diese Unterrichtsszenarien?
- Hilft die Lernumgebung dabei die Vorbereitungszeit bei Lernpfaden zu verkürzen?
- Wie gut finden sich Schüler in der Lernumgebung zurecht?
- Ist die Layout-Gestaltung für Schüler ansprechend? Ist sie funktional genug?

Der nächste Schritt wäre also der Einsatz in der Praxis und eine umfassende Evaluation desselben.

Anhang A

Lernpfade

Auf den folgenden Seiten befinden sich:

- der didaktische Kommentar zu den beiden Lernpfade (S. 76ff),
- der Lernpfad „lineare Funktionen (A)“ (S. 79ff),
- das Leistungsblatt zum Lernpfad „lineare Funktionen (A)“ (S. 84),
- der Lernpfad „lineare Funktionen (B)“ (S. 85ff) und
- das Leistungsblatt zum Lernpfad „lineare Funktionen (B)“ (S. 89).

Didaktischer Kommentar

Einleitung

Die Lernpfade „lineare Funktionen“ sollen zum Einstieg in den Bereich der linearen Funktionen in der 9. Schulstufe dienen. Sie sind voneinander unabhängig, und sollten als Alternativen zueinander gesehen werden. Um die Beschreibung im didaktischen Kommentar zu vereinfachen, wurden die Lernpfade mit (A) bzw. (B) gekennzeichnet. Gibt es keine explizite Kennzeichnung mit (A) oder (B) so sind beide Lernpfade gemeint.

(A) Der Lernpfad motiviert erst über zwei Aufgaben zur Beschäftigung mit linearen Funktionen. Die Untersuchung der linearen Funktion beschränkt sich auf Nullstellen und Monotonie. Im Folgenden soll auf das Vorkommen linearer Funktionen (bzw. der Modellierung durch lineare Funktion) eingegangen werden.

(B) In Punkt 1 sollen sich die Schüler mit Funktionen beschäftigen, deren Graph eine Gerade ist. Die Ergebnisse davon sollen darauf folgend im Plenum besprochen werden. Danach wird in Punkt 2 die lineare Funktion definiert und der Einfluss der Parameter k und d auf die Form des Funktionsgraphen näher beleuchtet.

Für die Dauer eines Lernpfades sind 2-3 Unterrichtseinheiten veranschlagt.

Beschreibung der Lerneinheit

Unterstützung der Lerneinheit durch den Lehrplan (HTL, ähnlich auch bei AHS und HAK):

Innerhalb der Bildungs- und Lehraufgabe sehe ich die Ziele bei folgenden Punkten angesiedelt – dies gilt sowohl für (A) als auch für (B):

- die für die Berufspraxis und für weiterführende Studien notwendigen mathematischen Begriffe, Denkweisen und Methoden kennen und anwenden können
- moderne Hilfsmittel zielführend einsetzen können
- einfache Sachverhalte [...] mit mathematischen Modellen beschreiben und analysieren [...] können

Lehrstoff:

- Funktionen: lineare Funktion

Lernziele (minimal)

- Ich kann aufgrund der Funktionsgleichung Aussagen über das Aussehen des Graph der Funktion treffen.

(A):

- Ich kann die allgemeine lineare Funktionsgleichung notieren und den Einfluss der Parameter k und d auf Nullstellen und Monotonie der linearen Funktion beschreiben.
- Ich kann Anwendungen der linearen Funktion im Alltag und im Bereich der Technik nennen und mit solchen Anwendungen verständlich umgehen.

(B):

- Ich kann die allgemeine lineare Funktionsgleichung notieren.
- Ich kann von einer Geraden auf die zugehörige Funktionsgleichung schließen.

Technische Rahmenbedingungen:

Internetanbindung muss vorhanden sein. Word oder OpenOffice Writer (oder Ähnliches) muss installiert sein. Es muss möglich sein GeoGebra auszuführen.

Vorwissen:

Der Begriff „Funktion“ sollte bekannt sein. Auch soll aus einem Text die passende Funktion aufgestellt werden können. Mittels GeoGebra sollten Schieberegler erstellt und Funktionen definiert werden können.

(A): Die Begriffe „Nullstelle“ und „Monotonie“ sollten bekannt sein.

Sozialform:

Der Lernpfad soll allein oder höchstens zu zweit bearbeitet werden.

Aufbau:

(A): Anhand zweier Beispiele, eines mit negativer Steigung, eines mit positiver Steigung, soll an den Begriff der linearen Funktion herangeführt werden. Der Vergleich dieser beider prototypischen Repräsentanten soll die ersten Hinweise auf die Form der allgemeinen Funktionsgleichung und des Funktionsgraphen geben. In den Bonusaufgaben soll bei beiden Beispielen die Steigung durch einen Schieberegler veränderbar gemacht werden. Dadurch soll ein tieferes Verständnis für den Zusammenhang der Funktionsgleichung mit dem Funktionsgraphen erreicht werden.

Im zweiten Teil soll erst der Glossareintrag zum Punkt „lineare Funktionen“ gelesen werden. Darunter wird die Definition der linearen Funktion festgehalten. Die Aufgabe der Schüler ist es anschließend, den Zusammenhang zwischen den ersten beiden Beispielen und diesem allgemeinen Begriff zu formulieren.

In der folgenden Aufgabe soll ein Applet aus der Lernumgebung nachgebaut werden, um damit den Einfluss der Steigung und des Ordinatenabstands der linearen Funktion auf Nullstellen und Monotonie untersuchen zu können. In der zugehörigen Bonusaufgabe sollen die Ergebnisse aus der Beobachtung algebraisch begründet werden. Dabei kann in der Besprechung des Lernpfades im Plenum explizit auf den Unterschied zwischen der Erkenntnis aus der Beobachtung und der exakten Begründung eingegangen werden.

In den beiden Aufgaben 2.3 und 2.4 wird der Begriff der linearen Funktion in Alltag und Technik eingebracht. In den zugehörigen Bonusaufgaben sollen eigene Beispiele aus Alltag und Technik gebracht werden, bei denen lineare Funktionen als Modell dienen können.

(B): Im Gegensatz zu (A) nähert sich dieser Lernpfad der linearen Funktion über die Gerade. Anhand eines Applets soll beobachtet werden, wie die Funktionsgleichungen verschiedener Geraden lauten. Dabei sollen Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Funktionsgleichungen ausgeforscht werden. Danach wird ein Beispiel gebracht, bei dem eine Funktion auftritt, deren Funktionsgraph eine Gerade ist. In der letzten Aufgabe des Punktes 1 soll in GeoGebra experimentell herausgefunden werden, wie eine möglichst allgemeine Funktionsgleichung aussieht, deren Funktionsgraph eine Gerade ist. Dabei wird explizit verlangt, dass alle Versuche und Fehlschläge festgehalten werden sollen.

Die Ergebnisse der Experimente sollen dann vor der Bearbeitung von Punkt 2 im Plenum besprochen werden.

In 2.1 ist die Definition der linearen Funktion an den Anfang gestellt worden. Darunter soll eine Wertetabelle für die allgemeine lineare Funktion ausgefüllt werden. Dabei sollen die Schüler die Änderung um k bei $f(x)$ bemerken, wenn stets der x -Wert um 1 erhöht wird. Diese gleich bleibende Änderung kann für die Bonusaufgabe schon einen Hinweis geben, in der verlangt wird, dass der Satz „Der Graph jeder linearen Funktion ist eine Gerade“ begründet wird. Dies ist die herausforderndste aller Bonusaufgaben in den beiden Lernpfaden.

Im Anschluss soll in einem Applet der Einfluss der Parameter k und d auf den Funktionsgraphen mittels Schiebereglern untersucht werden.

In der letzten Aufgabe soll dann von einer Gerade auf die entsprechende Funktionsgleichung geschlossen werden. Dabei steht vor allem der eingeschlagene Lösungsweg im Vordergrund. Wurden Erkenntnisse aus den vorherigen Aufgaben benutzt, also z. B. d als Ordinatenabstand abgelesen?

In der abschließenden Bonusaufgabe soll ein allgemeiner Lösungsweg angegeben werden, wie aus zwei gegebenen Punkten eine passende lineare Funktionsgleichung gefunden werden kann.

Möglicher Ablauf des Unterrichts

Jeder der Lernpfade sollte in 2-3 Unterrichtseinheiten zu schaffen sein.

(A): Der aktive Eingriff des Lehrers ist nur zwischen Punkt 1 und Punkt 2 möglich, um die Erledigung der Aufgaben aus Punkt 1 zu überprüfen. Es bietet sich auch an, die erste Stunde für Punkt 1 zu nutzen, und am Anfang der zweiten Stunde die Ergebnisse von 1.3 im Plenum zu thematisieren, bevor man mit Punkt 2 startet.

(B): Der aktive Eingriff des Lehrers ist nur zwischen Punkt 1 und Punkt 2 wichtig, um die Ergebnisse der experimentellen Phase aus Punkt 1 abzusichern. Es bietet sich auch an, die erste Stunde für Punkt 1 zu nutzen, und am Anfang der zweiten Stunde die Ergebnisse von 1.3 im Plenum zu thematisieren, bevor man mit Punkt 2 startet.

Leistungsbeurteilungskonzept

Die Leistungsbeurteilung erfolgt mittels beigelegtem Leistungsblatt.

1. Arbeiten mit Funktionen

1.1 Die verschwundenen Handtücher

Bearbeite [diese Aufgabe](#).

Trage hier die verwendete Funktionsgleichung ein: _____

Hier hast du Platz für die Antworten auf b), c) und e). Antworte in ganzen Sätzen.

Löse d) mit GeoGebra und füge ein Bild des Funktionsgraphen hier ein.

Bonusaufgabe 1: Erstelle in GeoGebra einen Schieberegler, der dir die Möglichkeit gibt die Anzahl der pro Woche verschwundenen Handtücher zu verändern. Was ändert sich in der Funktionsgleichung und am Funktionsgraphen bei der Änderung dieses Schiebereglers?

1.2 Mit Lichtgeschwindigkeit

Bearbeite [diese Aufgabe](#).

Gib eine Funktionsgleichung für die Funktion t an: _____

Welche Entfernungen hast du für deine Berechnungen für b) verwendet und wo hast du sie gefunden? Gib auch gleich die Ergebnisse deiner Berechnungen an.

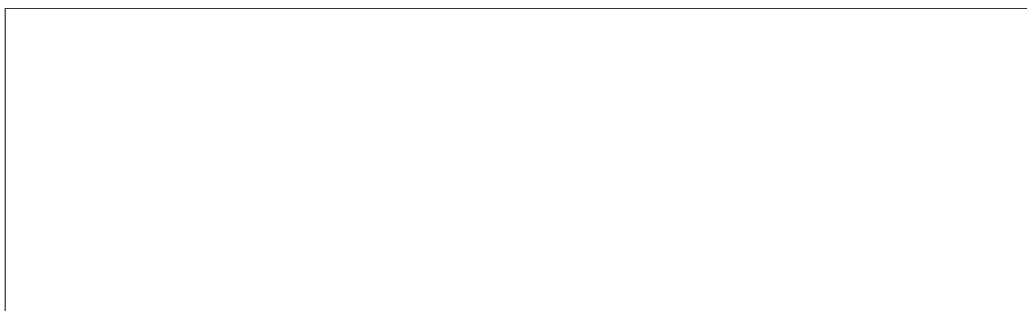
Füge hier ein Bild des Funktionsgraphen von t ein. Nutze dazu GeoGebra.

Bonusaufgabe 2: Erstelle in GeoGebra einen Schieberegler, der dir die Möglichkeit gibt die Lichtgeschwindigkeit zu verändern. Was ändert sich in der Funktionsgleichung und am Funktionsgraphen bei der Änderung dieses Schiebereglers?



1.3 Untersuchung der Funktionen

Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede erkennst du an den Funktionsgraphen bzw. Funktionsgleichungen der beiden obigen Funktionen H und t ?



2. Lineare Funktionen

2.1 Definition der linearen Funktion

Lies dir [diesen Glossareintrag](#) durch.

Definition: Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$, wobei $k, d \in \mathbb{R}$, heißen **lineare Funktionen**. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Was hat diese Definition mit den Aufgaben aus „1. Arbeiten mit Funktionen“ zu tun?

2.2 Untersuchung der linearen Funktion

Baue mit GeoGebra [dieses Applet](#) nach.

Erkunde dann mit diesem Nachbau:

Was haben die Parameter k und d mit Monotonie und Nullstellen der linearen Funktion zu tun? Unterstreiche deine Erkenntnisse durch Bilder aus deinem Applet.

Hinweis: Untersuche die Parameter einzeln. Lasse erst k positiv, dann gleich 0 und negativ werden. Kümmere dich dann in ähnlicher Weise um d .

Bonusaufgabe 3: Löse die Gleichung $k \cdot x + d = 0$ nach x auf. Untersuche mit dieser Lösung den Einfluss von k und d auf die Nullstellen von linearen Funktionen, beantworte dazu:

Wann gibt es mehr als eine Nullstelle? Wie viele sind es dann?

Wann gibt es keine Nullstelle?

Notiere hier deine Erkenntnisse in ganzen Sätzen.

2.3 Lineare Funktionen im Alltag

Beschreibe deinen Handytarif. Falls du deinen Handytarif nicht kennst, wähle einen aus (du findest auf den Webseiten der österreichischen Anbieter, wie [Orange](#), [T-Mobile](#) oder [3](#) die Tarife) und beschreibe diesen.

Wenn man die Kosten pro Monat als Funktion der Gesprächsminuten auffasst, ist diese Funktion dann eine lineare Funktion? Stelle die Funktionsgleichung dazu auf.

Bonusaufgabe 4: Kennst du einen Zusammenhang aus deinem Alltag, der sich als lineare Funktion auffassen lässt? Beschreibe ihn hier und gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

2.4 Lineare Funktionen in der Technik

Einer der bekanntesten Zusammenhänge in der Technik ist jener zwischen elektrischer Spannung (U), Stromstärke (I) und Widerstand (R) (das Ohm'sche Gesetz).

Dabei gilt: $U = I \cdot R$.

Ist bei festem Widerstand R die Funktion U in Abhängigkeit von I eine lineare Funktion? Begründe deine Antwort.

Ist bei fester Spannung U die Funktion I in Abhängigkeit von U eine lineare Funktion? Begründe deine Antwort.

Bonusaufgabe 5: Kennst du einen Zusammenhang aus der Technik, der sich als lineare Funktion auffassen lässt? Beschreibe ihn hier und gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

Name: _____

Leistungsnachweis – Lernpfad lineare Funktionen (A)

Aufgabe	Erledigt?	Kommentar
1.1		
1.2		
1.3		
Lasse erst alle Punkte von Punkt 1 abhaken, bevor du mit 2 beginnst.		
2.1		
2.2		
2.3		
2.4		
Bonusaufgabe 1		
Bonusaufgabe 2		
Bonusaufgabe 3		
Bonusaufgabe 4		
Bonusaufgabe 5		

Gesamteindruck:

Beurteilung: Wurde jeder Punkt (mit Ausnahme der Bonusfragen) von mir als erledigt gekennzeichnet, ist der Lernpfad zufriedenstellend ausgefüllt worden (entspricht Notengrad 3 oder 4). Je nach Qualität der Antworten bei den Bonusfragen ist eine bessere Bewertung (Notengrade 1 oder 2) möglich.

1. Geraden als Funktionsgraphen

1.1 Beobachtung

In [diesem Applet](#) kannst du die zwei blauen Punkte, durch die die Gerade geht, verschieben. Konzentriere dich dabei auf jene Geraden, die der Graph einer Funktion y in Abhängigkeit von x sein können.

Notiere Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionsgleichungen:

Bonusaufgabe 1: Welche Geraden können nicht der Graph einer Funktion y in Abhängigkeit von x sein?

1.2 Beispiel

Das Rote Kreuz verwendet zur Sauerstoffgabe am Einsatzort oft kleine Sauerstoffflaschen mit einem Fassungsvermögen von 5 Litern. Am Verschluss lässt sich einstellen, wie viele Liter pro Minute (die Auslassgeschwindigkeit) an Sauerstoff dem Patienten verabreicht werden. Da der Sauerstoff aber mit hohem Druck (ungefähr 200 bar) in die Flasche gepresst wurde, entspricht der Sauerstoff in der Flasche ungefähr 1000 Liter bei normalem Luftdruck.

Stelle die Funktionsgleichung der Funktion S in Abhängigkeit der Zeit t auf, die angibt wie viele Liter Sauerstoff bei einer Auslassgeschwindigkeit von 7 Litern pro Minute nach t Minuten sich noch in der Flasche befinden.

Füge hier ein Bild des Funktionsgraphen von S ein.

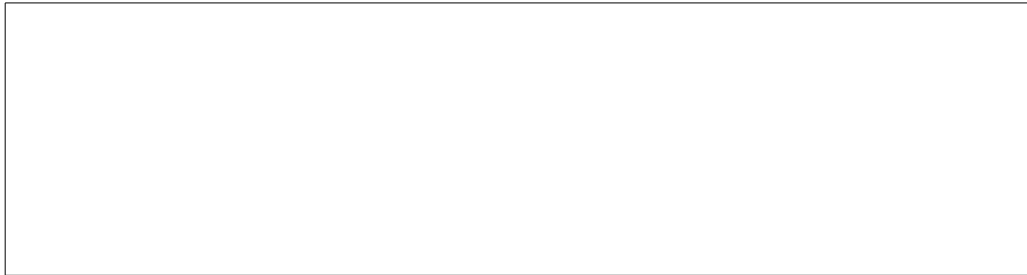
Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten stellst du zwischen der Funktion dieses Beispiels und jener aus 1.1 fest?

1.3 Experimentiere

Öffne GeoGebra und versuche durch Experimentieren herauszufinden:

Wie muss die Funktionsgleichung (möglichst allgemein) aussehen, damit ihr Funktionsgraph eine Gerade ist?

Halte hier auch deine Überlegungen, Versuche und Fehlschläge fest. Unterstütze diese mit Bildern aus GeoGebra.



2. Lineare Funktionen

2.1 Definition und Begründung

Definition: Funktionen mit der Funktionsgleichung $f(x)=k \cdot x+d$, wobei $k, d \in \mathbb{R}$, heißen **lineare Funktionen**. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Vervollständige die folgende Tabelle. Die Funktion f ist dabei definiert als $f(x)=k \cdot x+d$.

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	

Bonusaufgabe 2: Der zweite Satz ist nicht Teil der Definition, sondern sollte noch begründet werden. Welche Gemeinsamkeiten haben Geraden und lineare Funktionen? Versuche zu begründen, warum der Graph jeder linearen Funktion eine Gerade ist.

2.2 Der Parameter k

Arbeite mit [diesem Applet](#). Lasse d unverändert und arbeite nur mit dem Schieberegler für k . Welchen Einfluss hat k auf den Graphen der Funktion?

Bonusaufgabe 3: Wie lässt sich k direkt am Funktionsgraphen bestimmen?

2.3 Der Parameter d

Arbeite mit [dem Applet](#) von vorhin. Lasse diesmal k unverändert und arbeite nur mit dem Schieberegler für d . Welchen Einfluss hat d auf den Graphen der Funktion?

Warum heißt der Parameter d auch „Ordinatenabstand“? Was ist die Ordinate? Nutze dazu [das Glossar](#).

2.4 Von der Geraden zur Funktionsgleichung

Bestimme die Funktionsgleichung, deren Graph [diese Gerade](#) ist. Beschreibe auch, wie du auf diese Funktionsgleichung gekommen bist und ob du den verschiebbaren Punkt auf der Gerade genutzt hast.

Bonusaufgabe 4: Beschreibe ein Verfahren wie du von zwei gegebenen Punkten $P=(p_1, p_2)$ und $Q=(q_1, q_2)$ einer Gerade die Funktionsgleichung findest, deren Graph die Gerade durch P und Q ist.

Name: _____

Leistungsnachweis – Lernpfad lineare Funktionen (B)

Aufgabe	Erledigt?	Kommentar
1.1		
1.2		
1.3		
Bonusaufgabe 1		
Erst nach Fertigstellung von Punkt 1 wird Lernpfad mit dem Punkt 2 ausgegeben.		
2.1		
2.2		
2.3		
2.4		
Bonusaufgabe 2		
Bonusaufgabe 3		
Bonusaufgabe 4		

Gesamteindruck:

Beurteilung: Wurde jeder Punkt (mit Ausnahme der Bonusfragen) von mir als erledigt gekennzeichnet, ist der Lernpfad zufriedenstellend ausgefüllt worden (entspricht Notengrad 3 oder 4). Je nach Qualität der Antworten bei den Bonusfragen ist eine bessere Bewertung (Notengrade 1 oder 2) möglich.

Anhang B

Aufgaben und Übungen

B.1 Diagramme

Aufgabe 1: Beantworte nur mit dieser Grafik:

- a) Wie viele Geburten gab es in Österreich im Jahre 1965?
- b) Wie viele Sterbefälle gab es in Österreich in deinem Geburtsjahr?
- c) In welchen Jahren wurden 120 000 Geburten aufgezeichnet?
- d) In welchem Jahr zwischen 1951 und 2007 gab es die meisten Geburten?
- e) Wann wurden mehr Menschen in Österreich geboren als gestorben sind?
- f) Wird erwartet, dass die Anzahl der Österreicher ansteigt oder sinkt? Was vernachlässigst du, wenn du nur diese Grafik zur Beantwortung heranziehst?

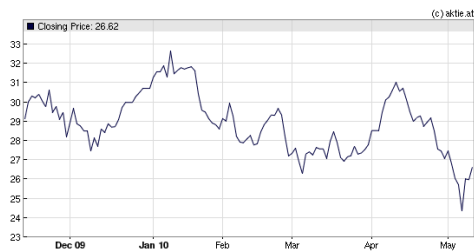
Aufgabe 2: Stelle deinem Partner zwei Fragen, die er aus diesem Diagramm herauslesen soll. Bearbeite dann selbst zwei Fragen, die dir dein Partner stellt.

Aufgabe 3: Kannst du aus diesem Diagramm herauslesen, wie viele Geburten es im ersten Halbjahr 1966 gegeben hat? Wenn ja: Wie viele waren es? Wenn nein: Begründe!

Aufgabe 4: Finde mit Hilfe der Applets (Applet1, Applet2) zum Steinwurf:

- a) Nach wie vielen Sekunden ist der Stein in einer Höhe von 10 m?
- b) Wie hoch fliegt der Stein?
- c) Wann hat er den höchsten Punkt seiner Flugbahn erreicht?
- d) Warum gibt es die Möglichkeit für eine Höhe (wie z. B. 5 m) zwei verschiedene Zeiten zu erhalten, aber nicht für eine Zeit zwei verschiedene Höhen?

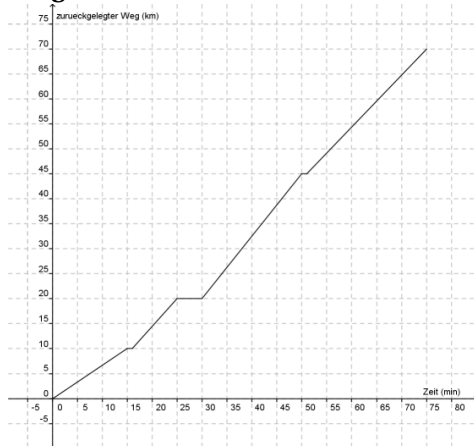
Aufgabe 5:



Dieses Diagramm gibt die Schlusskurse der OMV Aktie im halben Jahr von November 2009 bis Mai 2010 an. Die senkrechten Markierungen geben dabei jeweils den Monatsbeginn an.

- Wann war der Schlusskurs ungefähr bei 31 €?
- Was war der höchste Schlusskurs im Februar und wie hoch war dieser?
- Wäre es günstiger gewesen im Februar oder im März zu kaufen?
- Zu welchen Zeitpunkten hätte man kaufen bzw. verkaufen müssen um den höchsten Gewinn zu erreichen, und wie hoch wäre dieser je Aktie?

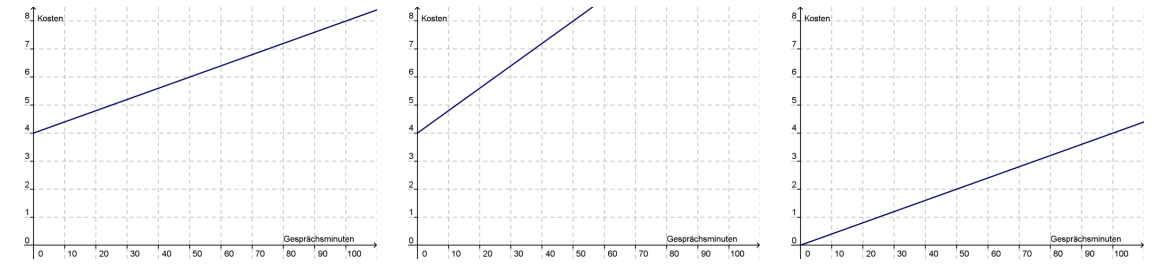
Aufgabe 6:



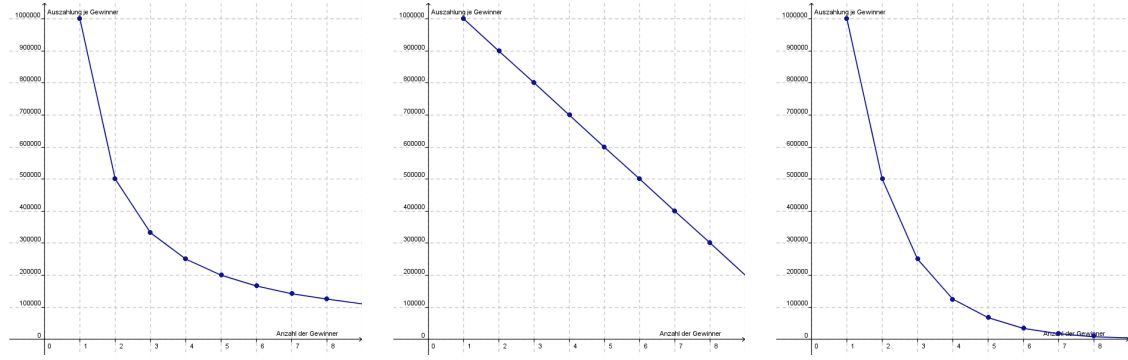
Dieses Diagramm stellt den zurückgelegten Weg eines Zuges in Abhängigkeit der Zeit dar.

- Wie lange braucht der Zug um den Zugendbahnhof zu erreichen?
- Was macht der Zug zwischen den Minuten 15 und 20, 25 und 30 und 50 und 51?
- Welche Strecke legt der Zug zwischen den Minuten 20 und 40 ungefähr zurück?
- Gib die Fahrt des Zuges in eigenen Worten wieder.

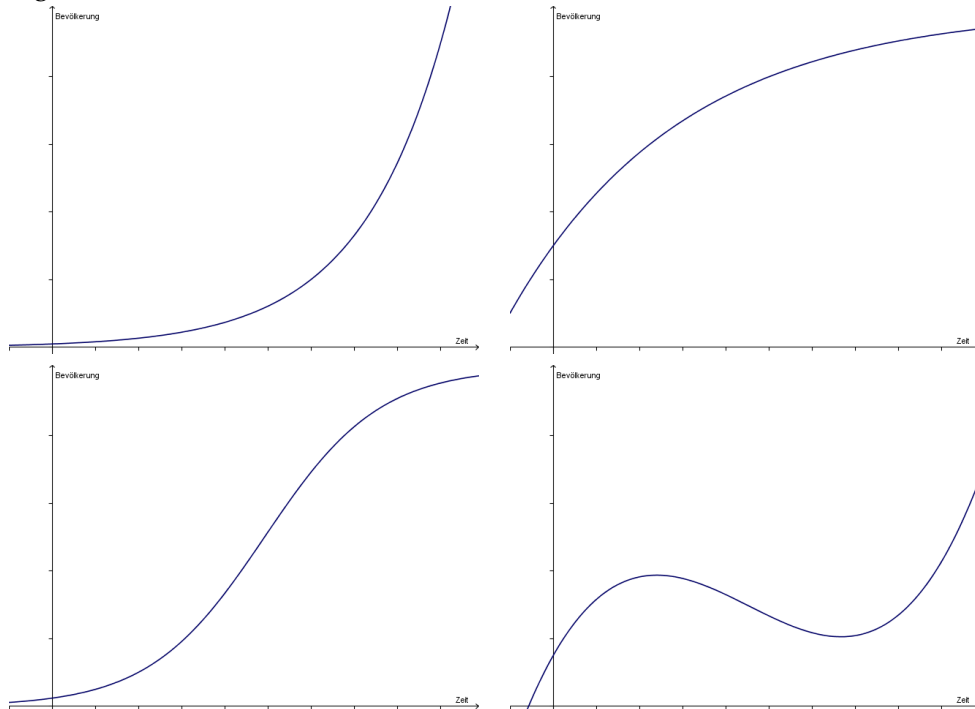
Aufgabe 7: Christoph zahlt für seinen Handytarif eine monatliche Grundgebühr von 4 Euro und 4 Cent für jede Gesprächsminute in ein beliebiges Netz. Welches der folgenden Diagramme stellt die Gesamtkosten im Monat in Abhängigkeit von der Gesprächszeit dar? Begründe deine Wahl.



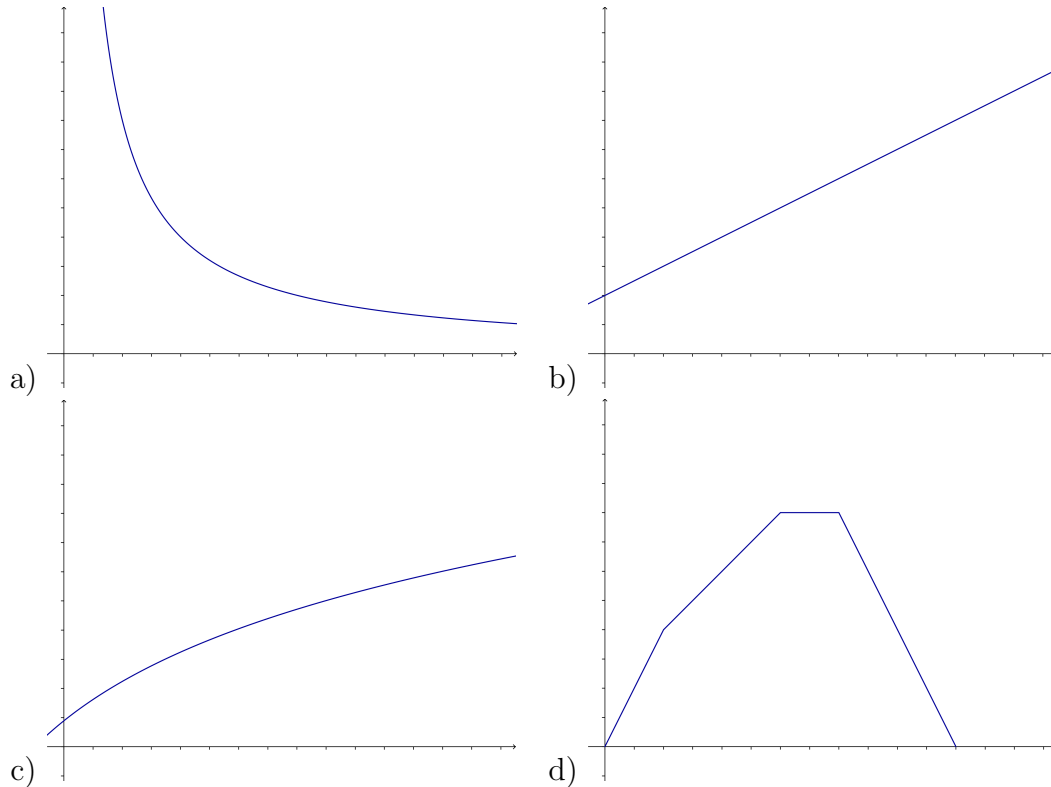
Aufgabe 8: Beim Lotto ist ein Jackpot von 1 000 000 Euro zu gewinnen. Welches der folgenden Diagramme gibt an, wieviel Euro ein Gewinner bekommt in Abhängigkeit von der Anzahl der Gewinner? Begründe deine Wahl!



Aufgabe 9: Welches der Diagramme könnte die Anzahl der Weltbevölkerung im Laufe der Zeit darstellen? Diskutiert und begründet eure Wahl. Welcher Zeitrahmen wird dabei auf der x -Achse dargestellt?



Aufgabe 10: Beschreibt eine Situation, in der ein Zusammenhang durch folgende Grafik beschrieben werden kann.



Aufgabe 11: Anhand der konkreten Zahlenwerte aus der Tabelle lassen sich folgende Fragen leichter beantworten:

- Wer hatte die größere Gesamtsumme an Ausgaben?
- Wann hatte Michael im Jahr 2009 die geringsten Ausgaben? Wann hatte Maide im Jahr 2009 die geringsten Ausgaben?

Aufgabe 12: Arbeite mit folgenden Applets:

Applet 1: Hier kannst du die Einträge in der Tabelle ändern. Die Änderungen werden direkt am Diagramm sichtbar gemacht.

Applet 2: Hier kannst du die Punkte des Diagramms durch Ziehen verändern. Die Änderungen werden direkt an der Tabelle sichtbar gemacht.

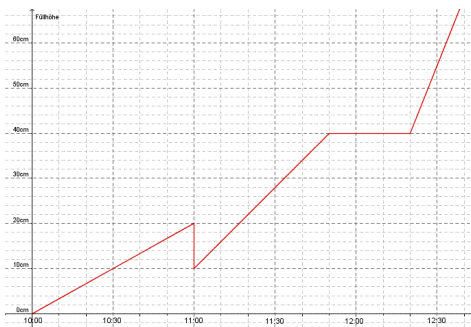
Gib jeweils an, mit welchem Applet du die Aufgabe erledigt hast und begründe deine Wahl. Belege die Erledigung der Aufgabe durch Notiz der Tabelleneinträge oder einen Screenshot:

- Die Gesamtsumme an Ausgaben von Michael soll 1133 €, und jene von Maide 865 € betragen.
- Die Ausgaben von Maide sollen stets höher als jene von Michael sein.
- Die Ausgabendifferenz zwischen Michael und Maide soll stets 21 € betragen.
- Die Ausgaben von Michael sollen von Monat zu Monat sinken, jene von Maide steigen.

Aufgabe 13:

Größe [m ²]	Miete [€]
41	475
53	750
64	569
74	1191
80	1100

Du findest hier eine Aufstellung über Mietwohnungen, jeweils mit Quadratmeter und monatlicher Bruttomiete. Welche der Wohnungen hat den niedrigsten bzw. höchsten Mietpreis je Quadratmeter?

Aufgabe 14:

Das neue Aquarium einer HTL-Klasse wird gefüllt. Im Diagramm ist verzeichnet, wie sich die Füllhöhe mit der Zeit ändert. Beantworte mittels des Diagramms folgende Fragen:

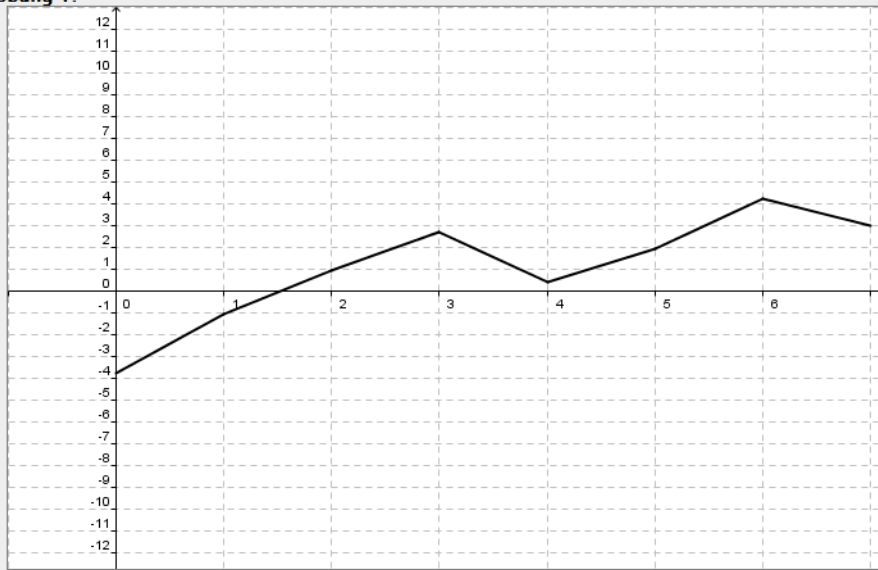
- Wie hoch ist das Aquarium, wenn es bis 10 cm unter den Rand gefüllt wurde?
- Was ist um 11:00 passiert? Was zwischen 11:50 und 12:20?
- Ist das Wasser immer gleich schnell eingeflossen?
- Wann war der Zufluss am schnellsten, wann am langsamsten?
- Wenn die Grundfläche des Aquariums 2 m² beträgt, wieviel l Wasser fasst das Aquarium?
- Wenn die Zuflussgeschwindigkeit, die zwischen 10:00 und 11:00 vorherrschte, beibehalten worden wäre, wie lange hätte die Füllung dann gedauert?
- Zeichne ein Diagramm, das die Füllmenge in Abhängigkeit der Zeit darstellt - auch hier nehmen wir eine Grundfläche von 2 m² an.

Aufgabe 15:

α [°]	w [m]
15	4,8
30	8,7
45	10,2
60	8,5
75	5,1

Fertige aus folgender Tabelle nur mit Papier und Stift ein Liniendiagramm an. Hier wurde gemessen welche Wurfweiten w sich bei verschiedenen Abwurfwinkeln α ergeben.

Übung 1:



Lies im Diagramm die Werte ab und trage sie in die Tabelle ein. *Vorsicht:* Kommazahlen werden mit Punkt statt Beistrich angegeben.

x-Wert y-Wert

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Prüfe Antworten!

Neues Diagramm

B.2 Funktionsbegriff

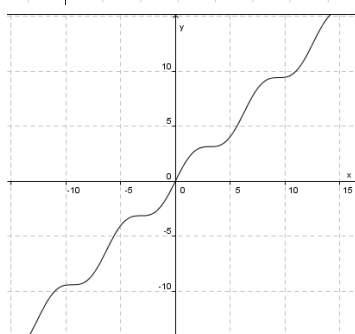
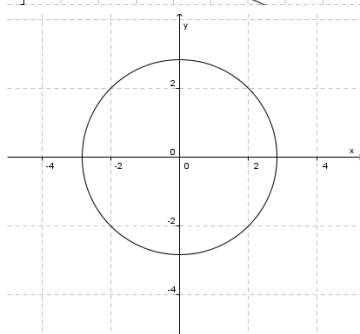
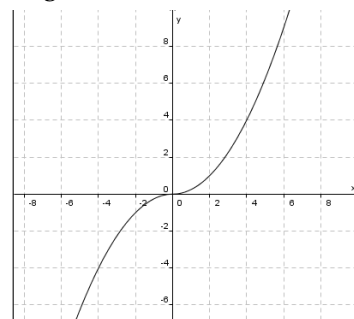
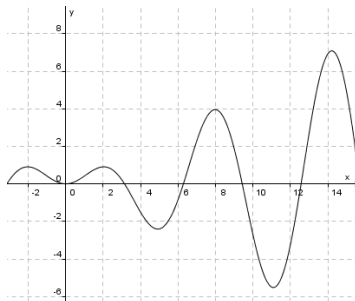
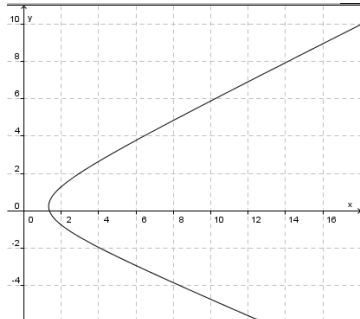
Aufgabe 1: Stelle fünf verschiedene Mengen auf, wobei zumindest eine dieser Mengen keine Zahlen enthalten soll, so dass du folgendes machen kannst: (Er)Finde zumindest drei Funktionen zwischen diesen Mengen. Dazu suchst du eine sinnvolle Vorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer zweiten Menge zuordnet.

Aufgabe 2: Es soll jedem Prisma seine Grundfläche zugeordnet werden. Ist diese Vorschrift eine Funktion? Begründe! Welche Menge ist hier Definitions-, und welche Wertemenge?

Aufgabe 3: Untersuche folgende Vorschrift: Es wird jeder Grundfläche das entsprechende gerade Prisma der Höhe h zugeordnet.

- Klicke hier um Aufgabe a) zu bearbeiten.
- Ist dies eine Funktion? Begründe!
- Welche Menge ist hier die Definitionsmenge, und welche die Wertemenge?
- Welche Bedeutung hat die vorgegebene Höhe h für die vorherigen beiden Aufgaben b) und c)?

Aufgabe 4: Ist die auf dem Diagramm dargestellte Zuordnung von y zu x eine Funktion? (Wird jedem x genau ein y -Wert zugeordnet?) Die Zuordnung erkennst du dabei an der gezeichneten Linie: die Punkte aus denen die Linie besteht geben die Zuordnung an, dabei wird die y -Koordinate eines Punktes der x -Koordinate desselben Punktes zugeordnet. Begründe deine Antwort.



Aufgabe 5: In diesen Tabellen wird jedem x ein y zugeordnet. Ist diese Zuordnung eine Funktion?

x	y
1	2
3	3
7	2
9	4
10	5

x	y
1	2
3	3
2	2
3	4
5	5

x	y
101	58
398	321
232	-23
354	44
512	58

Aufgabe 6: Die Stifte der Schüler liegen quer durch die Klasse verteilt. Nun soll jedem Stift der Besitzer zugeordnet werden. Ist diese Zuordnung eine Funktion?

Ist die Zuordnung jedem Besitzer werden seine Stifte zugeordnet eine Funktion?

Begründe jeweils deine Antwort.

Fertige zu beiden Zuordnungen ein Pfeildiagramm für die drei Schüler Rosa, Klaus und Doris an. Rosa gehören zwei Stifte, Klaus gehören drei Stifte und Doris gehört nur ein Stift.

Aufgabe 7: $f(x) = 3 \cdot x, x \in \mathbb{R}$.

- Formuliere diese Zuordnung in eigenen Worten.
- Welche Zahl wird 6 zugeordnet?
- Welcher Zahl wird 9 zugeordnet?

Aufgabe 8: Übersetze „Jeder nicht negativen reellen Zahl wird ihre Wurzel zugeordnet“ in eine Funktionsgleichung.

- a) Welche Zahl wird 16 zugeordnet?
- b) Welcher Zahl wird 3 zugeordnet?

Aufgabe 9: Am Ende der Einzahlung seiner privaten Pensionsvorsorge hat Fritz 50 000 € Guthaben auf der Bank. Diese zahlt ihm nun 250 € jeden Monat als Pensionszuschuss aus. Wie lange muss Fritz noch leben, um sein Guthaben vollständig zurück zu erhalten?

Stelle die Funktionsgleichung der Funktion f auf, die jedem Monat x die Höhe des noch verbliebenden Guthabens $f(x)$ zuordnet. Wie viel Geld ist nach 4 Jahren noch verblieben?

Welchen Vorteil hat es hier eine Funktionsgleichung zu kennen?

Aufgabe 10: Bakterien vermehren sich durch Zellteilung. Dabei entstehen aus einer Bakterie zwei.

Stelle die Funktionsgleichung Funktion B auf, die die Anzahl der Bakterien nach n Teilungen angibt. Gehe davon aus, dass sich bei einer Teilung alle gerade vorhandenen Bakterien teilen. Dabei soll $B(0) = 1$ sein - wir starten also mit einer Bakterie.

Wie viele Bakterien sind nach 10 Teilungen vorhanden?

Was ist die Definitionsmenge von B ? Begründe deine Wahl.

Aufgabe 11: Findet zu zweit Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Funktionen $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, und $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12: $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

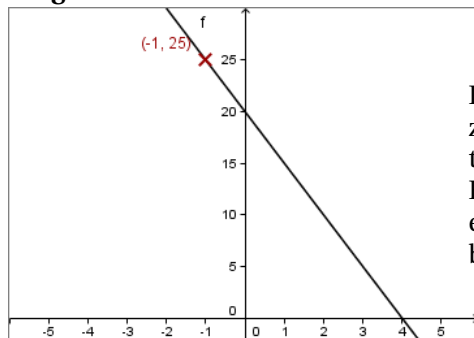
- a) Vervollständige die Tabelle.
- b) Skizziere mithilfe der Tabelle die Funktion.

x	f(x)
-2	
-1	
0	
1	
2	

Aufgabe 14: $f(x) = 1/x$.

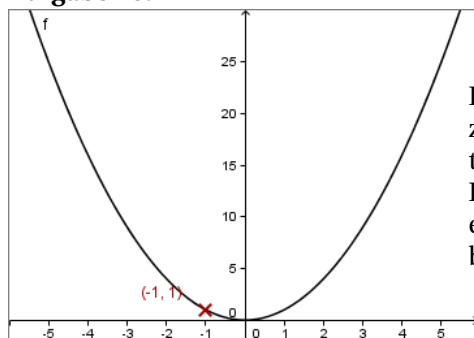
- a) Welche Definitionsmengen sind hier zulässig?
- b) Formuliere diese Zuordnung in eigenen Worten.
- c) Skizziere den Graphen der Funktion auf Papier.

Aufgabe 14: Zeichne in Geogebra den Graphen jener Funktion, die jeder reellen Zahl die Hälfte ihres Quadrats zuordnet.

Aufgabe 15:

Der Graph welcher Funktion f könnte hier gezeichnet worden sein? Stelle eine passende Funktionsgleichung auf.

Es hilft dir vielleicht erst mit dem ziehbaren Punkt einige Punkte des Funktionsgraphen in einer Tabelle zu notieren.

Aufgabe 16:

Der Graph welcher Funktion f könnte hier gezeichnet worden sein? Stelle eine passende Funktionsgleichung auf.

Es hilft dir vielleicht erst mit dem ziehbaren Punkt einige Punkte des Funktionsgraphen in einer Tabelle zu notieren.

B.3 Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 1: Ein Ball fällt aus einem in 54 m Höhe befindlichen Fenster im 18. Stock eines Wohnhauses. Die Höhe des Balls in Abhängigkeit der Zeit wird mit der Funktionsgleichung $h(t) = 54 - 5 \cdot t^2$ (Zeit t in Sekunden) beschrieben.

- Zeichne den Funktionsgraphen von h in Geogebra.
- Welche Definitionsmenge ist für h sinnvoll?
- Zu welcher Zeit ist der Ball am Boden angekommen?
- Ist die Funktion in bestimmten Bereichen streng monoton fallend oder steigend?

Aufgabe 2: Stellt man heißen Kaokao mit ungefähr 80°C in einen Raum mit 20°C Temperatur, so halbiert sich jede Minute der Temperaturunterschied.

- Stelle eine Funktion des Temperaturunterschiedes U in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten t auf.
- Zeichne den Funktionsgraphen von U in Geogebra.
- Untersuche Monotonie dieser Funktion. Was würden streng monoton steigend, bzw. fallend bei dieser Funktion bedeuten?
- Kann der Kaokao kälter als die Umgebung werden? Woran würde man dies am Funktionsgraph erkennen?

Aufgabe 3: Das Rote Kreuz verwendet zur Sauerstoffgabe am Einsatzort oft kleine Sauerstoffflaschen mit einem Fassungsvermögen von 5 Litern. Da der Sauerstoff aber mit hohem Druck (ungefähr 200 bar) in die Flasche gepresst wurde, entspricht der Sauerstoff in der Flasche ungefähr 1000 Liter bei normalen Luftdruck. Am Verschluss lässt sich einstellen, wie viele Liter pro Minute (die Auslassgeschwindigkeit) an Sauerstoff dem Patienten verabreicht werden.

- Stelle eine Funktion t auf, die angibt wie lange die Sauerstoffflasche vor Ort hält, wenn man eine bestimmte Auslassgeschwindigkeit a in Liter pro Minute einstellt. Meist werden ungefähr 7 Liter pro Minute oder 11 Liter pro Minute verabreicht. Bestimme für diese beiden Auslassgeschwindigkeiten die Funktionswerte von t .
- Zeichne den Funktionsgraphen von t in Geogebra.
- Was würde eine Nullstelle bedeuten und warum gibt es eine solche bei dieser Funktion nicht?

Aufgabe 4: Ein Lastwagen kann auf der Autobahn ungefähr 90 km/h fahren.

- Stelle die Funktion des vom Lastwagen zurückgelegten Weges s in Kilometer in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden auf.
- Zeichne den Funktionsgraphen von s .
- Welche Bedeutung haben hier Nullstelle und Monotonie?

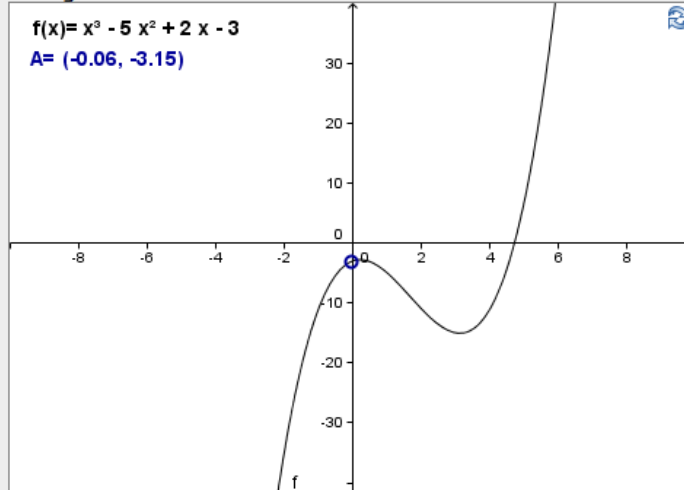
Aufgabe 5: Ein Hotel besitzt 1000 Handtücher. Im Mittel werden 8 Handtücher pro Woche gestohlen. Nimm für dieses Beispiel an, dass keine Handtücher nachgekauft werden.

- Stelle die Anzahl der Handtücher H in Abhängigkeit von der Anzahl der vergangenen Wochen w dar.
- Welche Definitionsmenge ist für H sinnvoll?
- Wann gibt es weniger als 500 Handtücher? Wieviele Handtücher gibt es nach 10 Wochen?
- Zeichne den Funktionsgraphen von H .
- Gibt es eine Nullstelle? Wie ist diese zu deuten?

Aufgabe 6: Die Gleichung $f_d(x) = x^2 - d$ gibt für jedes $d \in \mathbb{R}$ eine eigene Funktion an. Ein Schieberegler für d in GeoGebra könnte dir hier helfen.

- Für welche Bereiche ist f streng monoton wachsend bzw. fallend? Hängen diese Bereiche von d ab? Wenn ja, inwiefern, wenn nein, warum nicht?
- Variiere d so, dass f eine Nullstelle bei $x = -2$ hat.

Übung 1:



Dieses Applet gibt den Funktionsgraphen einer Funktion f der Form $f(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ wieder, wobei a, b, c beliebige reelle Zahlen aus dem Intervall $[-5, 5]$ sind.

Du kannst den Punkt A beliebig auf dem Funktionsgraphen verschieben. Schreibe dir die gerade realisierte Funktionsgleichung auf und bestimme Nullstellen und jene Abschnitte (Intervalle) der x -Achse in denen f streng monoton wachsend bzw. fallend ist.

Ein Klick auf das hellblaue Symbol rechts oben im Applet lässt eine neue Funktion laden.

Antwort anzeigen

Aufgabe 7: Die Gleichung $f_a(x) = a \cdot x^2$ gibt für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine eigene Funktion an. Ein Schieberegler für a in GeoGebra könnte dir hier helfen. Variiere den Definitionsbereich und a so, dass:

- f streng monoton wachsend ist.
- f streng monoton fallend ist.
- f eine Nullstelle bei -2 hat.

Aufgabe 8: Die Gleichung $f_c(x) = \frac{c}{x}$ gibt für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine eigene Funktion an. Ein Schieberegler für c in GeoGebra könnte dir hier helfen. Variiere den Definitionsbereich und c so, dass:

- f streng monoton wachsend ist.
- f streng monoton fallend ist.
- f eine Nullstelle bei $x = -2$ hat.

B.4 Lineare Funktionen

Aufgabe 1: Licht bewegt sich bekanntlich mit ca. 300 000 km/s.

- Gib die Zeit t , die das Licht zu einem bestimmten Ort benötigt, in Abhängigkeit von der Entfernung dieses Ortes x zur Sonne an.
- Berechne, wie lange das Licht von der Sonne zu Erde, Pluto und Alpha Centauri benötigt. (Informationen zu den Entfernungen finden sich zum Beispiel auf Wikipedia)
- Zeichne den Graphen dieser Funktion t .

Aufgabe 2: Warum kann eine Gerade, die parallel zur y -Achse liegt, nicht der Funktionsgraph einer Funktion y in Abhängigkeit von x sein?

Aufgabe 3: Sind folgende Zuordnungen lineare Funktionen? Begründe deine Antwort.

- a) Die Funktion R ist gegeben durch die Funktionsgleichung $R(z) = 7 \cdot z$ mit $z \in \mathbb{R}$.
- b) Die Funktion A gibt bei fester Breite von 5 cm eines Rechtecks in Abhängigkeit der Länge l des Rechtecks die Fläche desselben an.
- c) Die Funktion der Fallgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t ist durch die Funktionsgleichung $v(t) = 5 \cdot t^2$ gegeben.
- d) Die konstante Funktion k ist durch die Funktionsgleichung $k(x) = 5$ gegeben.
- e) Die Funktion Q ordnet jeder reellen Zahl ihre Wurzel zuordnet.

Aufgabe 4: Gehe nochmals zum obigen Applet und untersuche folgende Fragestellungen:

- a) Wie verändert sich die Gerade, wenn du k von 0 an immer größer werden lässt?
- b) Wie verändert sich die Gerade, wenn du k von 0 an immer kleiner werden lässt?
- c) Was passiert mit der Geraden, wenn du k unverändert lässt, aber d veränderst?
- d) Gib durch Veränderung von k , d eine Funktion an, die eine Nullstelle bei -2 besitzt.

Aufgabe 5: Zur Nullstellenbestimmung der allgemeinen linearen Funktion $f(x) = k \cdot x + d$.

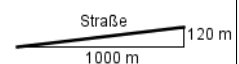
- a) Löse die Gleichung $k \cdot x + d = 0$ nach x auf.
- b) Was bedeutet die Lösung in Hinblick auf Nullstellen? Wieviele davon gibt es und was tritt ein, wenn $k = 0$ ist? Was ist wenn $d = 0$ ist? Was ist, wenn beide Parameter 0 sind: $k = 0 = d$?
- c) Überprüfe deine Aussagen mit dem obigen Applet zur freien Veränderung von k und d .

Aufgabe 6: Auch die Monotonie lässt sich am einfachsten mit dem obigen Applet untersuchen. Wie hängt die Monotonie von den Parametern k und d ab?

Aufgabe 7:



Auf der Straße werden Steigungen in Prozent angegeben. Wenn zum Beispiel 12 % Steigung angegeben ist, bedeutet dies, dass die Straße für jeden waagrechten Kilometer um 12 % = 0,12 dieses Kilometers höher als der Ausgangspunkt liegt (siehe Skizze rechts). Muss man, um die Steigung der Straße herauszufinden, immer den ganzen waagrechten Kilometer zurücklegen? Wie kann man auch bei kürzeren waagrechten Distanzen die Steigung einer Straße in Prozent ermitteln?

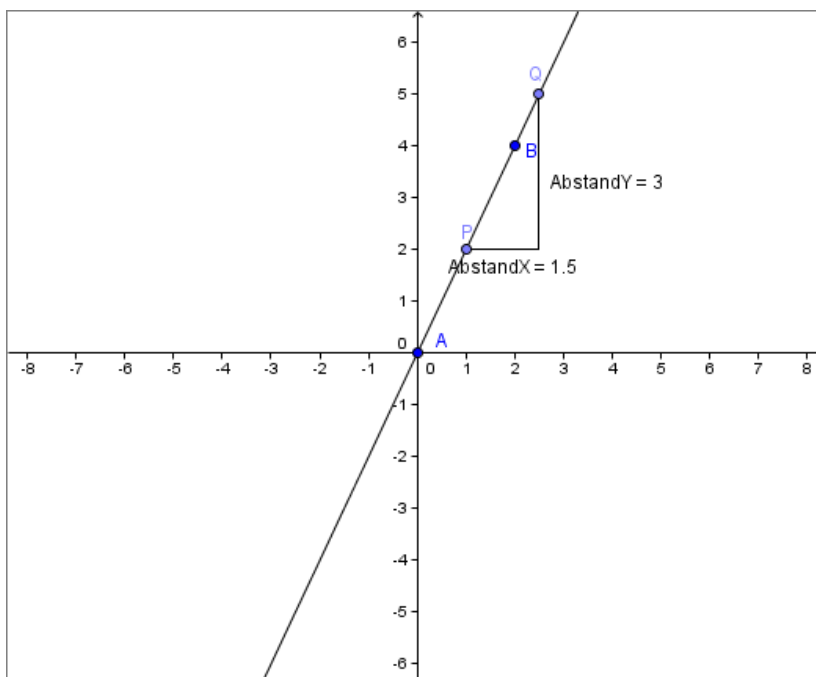


Aufgabe 8: Der Quotient von Abständen auf der y -Achse und Abständen auf der x -Achse ist ganz allgemein für lineare Funktionen von Bedeutung. Betrachte dazu das folgende Applet. Die Punkte A und B bestimmen im Applet die Gerade. Die Punkte P und Q liegen auf der Gerade und bestimmen das Steigungsdreieck.

Lege durch Wahl von A und B eine beliebige Gerade fest und notiere die Kathetenlängen des Steigungsdreiecks, sie sind hier $AbstandX$ und $AbstandY$ genannt. Berechne den Quotienten $AbstandY / AbstandX$. Ändere jetzt nur das Steigungsdreieck und notiere erneut $AbstandX$, $AbstandY$ und den Quotienten.

Kannst du aus diesen Werten schon eine Vermutung für den Quotienten anstellen? Formuliere diese! Ändere ansonsten das Steigungsdreieck noch ein paar Mal und berechne die Quotienten.

Du kannst dies gern auch noch an anderen Geraden ausprobieren, um deine Vermutung zu bestärken, oder auszubauen. Findest du auch eine Begründung für deine Vermutung?



Aufgabe 9: Eine Getränkefirma hat eine neue Abfüllmaschine erhalten. Sie testen die Maschine und erhalten so, dass in ungefähr 10 Sekunden ein 2 Liter Gefäß befüllt wird. Um Förderbänder und die Abfüllmaschine richtig einzustellen benötigt die Firma nun eine Funktion, die für ein beliebiges Fassungsvermögen der Flasche angibt, wie lange die Abfüllmaschine benötigt um die Flasche voll zu bekommen.

Aufgabe 10: Nach einem Mord gibt der Verdächtige an sich zwei Stunden vor dem Fund der Leiche vom Opfer verabschiedet zu haben, und danach in eine Bar gegangen zu sein. Zeugen in der Bar bestätigen, dass er ungefähr um die angegebene Zeit in der Bar eingetroffen sei. Die Gerichtsmedizin stützt sich in diesem Fall auf eine sehr vereinfachte Funktion der Körpertemperaturabnahme nach dem Eintreten des Todes, nämlich: $T(m) = 37 - 0,02 \cdot m$ (T .. Temperatur, m .. Zeit in Minuten nach dem Eintreten des Todes). Die Temperatur zur Zeit des Fundes betrug 34°C . Bestätigt oder widerlegt dies die Geschichte des Verdächtigen?

Aufgabe 11: Bei einer Produktion und Verpackung von 40 Tonnen Käse im Monat verzeichnet eine Fabrik Kosten von 25 424 €.

Wird die Produktion heruntergefahren auf 30 Tonnen Käse pro Monat – wenn zum Beispiel die Nachfrage sinkt – werden Kosten von 23 231 € im Monat verzeichnet. Nimmt man an, dass die Produktionskosten pro Kilogramm immer gleich sind (unabhängig von der Produktionsmenge), wie würde dieser aussehen? Wieviel Kosten entstehen pro Kilogramm Käse und wie hoch sind die Fixkosten, also die Kosten ohne Produktion?

Wird das Kilogramm Käse an den Handel mit einem Preis von 1 € pro Kilogramm weiterverkauft, ab welcher produzierten Menge würde die Fabrik Gewinn abwerfen? Wieviel Gewinn wirft sie bei der Produktion von 40 Tonnen Käse ab?

Aufgabe 12: Wird ein Gegenstand senkrecht in die Luft geworfen, so verliert er je Sekunde ungefähr 10 m/s an Geschwindigkeit.

Peter hat einen Tennisball annähernd senkrecht in die Luft geworfen. Nach ungefähr 2 s hat dieser seinen höchsten Punkt erreicht.

Stelle eine lineare Funktion auf, die die Geschwindigkeit des Balls in Abhängigkeit der Zeit angibt. Mit welcher Geschwindigkeit hat Peter den Tennisball abgeworfen?

Übung 1:

Liegt der Punkt $P(13.3, 3.4)$ auf, über oder unter dem Graphen der Funktion $f(x) = 6 \cdot x + 3.1$?

☐ darüber

☐ auf

Prüfen!

☐ darunter

Neue Angabe

Übung 2:

Stelle die Gleichung der Geraden auf, die durch die Punkte $A = (-16, 6.9)$ und $B = (0, -19.4)$ auf.

Die Zahlenwerte in der Lösung sind auf 2 Nachkommastellen gerundet.

Lösung

Neue Angabe

B.5 Lineare Interpolation

Aufgabe 1:

Bei Michael wurde zuhause alle paar Jahre seine Größe an einer Wand gekennzeichnet, und das Datum dazu vermerkt. Diese Werte wurden in eine Tabelle übertragen.
Wie groß war Michael 2005?

Jahr	Größe [cm]
2000	102
2002	109
2004	122
2006	126
2007	130

Aufgabe 2: Verwende für die gleiche Fragestellung wie in Aufgabe 1 die Datenpunkte (2000,102) und (2007,122), um eine lineare Funktion g aufzustellen und berechne $g(2005)$. Vergleiche den Wert mit dem Ergebnis von oben. Welchen hältst du für wahrscheinlicher? Begründe!

Aufgabe 3: Es sind folgende Punkte gegeben:

x	y
-3	18
-1	2
1	2
3	18

Interpoliere zwischen $x = -1$ und $x = 1$ den zu $x = 0$ gehörigen y -Wert. Interpoliere zwischen $x = 1$ und $x = 3$ den zu $x = 2$ gehörigen y -Wert. Stünde hinter dieser Tabelle die Funktion $f(x) = 2x^2$, wo hat man den größeren Fehler gemacht, wenn man anstatt des Funktionswerts den Interpolationswert genommen hat? Veranschauliche dies auch als Grafik in Geogebra.

Aufgabe 4: Lassen sich mit dieser Methode (zwischen zwei bekannten Punkten eines Graphen einer unbekannten Funktion eine Gerade legen) auch Abschätzungen für Bereiche außerhalb dieser zwei Punkte treffen? Unter welchen Bedingungen wären solche Abschätzungen sinnvoll?

Aufgabe 5: Von Michael wurden ebenfalls Gewichtswerte aufgezeichnet.

Alter [Jahre]	Gewicht [kg]
4	18
6	21
9	29
11	35
13	45

- Wieviel wog Michael mit 5 Jahren ungefähr? Mit welchen Werten hast du gerechnet? Begründe deine Wahl.
- Wieviel wog Michael mit 10 Jahren ungefähr? Mit welchen Werten hast du gerechnet? Begründe deine Wahl.
- Interpoliere den Wert für 9 Jahre mittels den beiden direkt daneben liegenden Punkten. Wieso gibt es eine Abweichung vom tatsächlichen Wert und wie groß ist diese?

Übung 1:

x-Werte	y-Werte
1	-16.9
4	-14.9
5	
6	-6.2
7	-3.1

Es sind vier Punkte vorgegeben. Der fehlende Punkt soll durch lineare Interpolation ermittelt werden. Trage das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen gerundet ein und drücke auf "Prüfe Antwort!". Stimmt der Wert, wird er grün markiert.

Prüfe Antwort!

Neue Tabelle

B.6 Direkte und indirekte Proportionalität

Aufgabe 1: Öffne das Applet zur Fahrradübersetzung.

Ermittle bei welchen Einstellungen von n_1 (Anzahl der Zähne am vorderen Zahnkranz) und n_2 (Anzahl Zähne am hinteren Zahnkranz) man eine Umdrehung des Pedals benötigt, um drei Umdrehungen des Hinterrades zu bewirken.

Was haben diese Einstellungen gemeinsam?

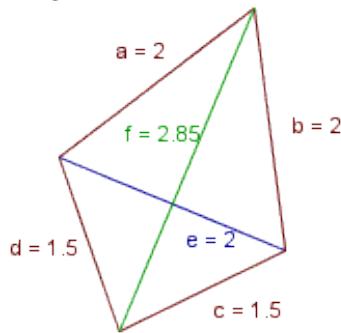
Aufgabe 2: Man kann am Fahrrad-Applet auch das Verhältnis der Umdrehungszahlen betrachten. So zum Beispiel das Verhältnis der Umdrehungszahlen der Pedale (des vorderen Zahnkranzes) zur Umdrehungszahl des Hinterrades (hinteren Zahnkranzes).

Untersuche dieses an verschiedenen n_1 und n_2 . Berechne dazu jeweils das Verhältnis der Umdrehungszahlen und das Verhältnis der Zähne auf den Zahnkränzen. Was fällt dabei auf?

Aufgabe 3: Die Bildformate 4:3 und 16:9 stellen das Verhältnis der Bildbreite zur Bildhöhe dar. Es gibt zwei Fernseher mit der Bilddiagonale von 24 Zoll im Handel. Einer ist im 4:3 Format gehalten, der andere im 16:9 Format. Welcher hat die größere Bildfläche?

Aufgabe 4: Das Verhältnis von Stromstärke zu Spannung in einem vorgegebenen Stromkreis ist 7:3. Wie groß ist die Stromstärke bei einer Spannung von 20 V in diesem Stromkreis?

Aufgabe 5: Finde an der folgenden geometrischen Figur Verhältnisse und formuliere sie schriftlich. Wenn die Figur auf $a=5$ cm vergrößert wird und die Verhältnisse beibehalten werden sollen, wie groß sind dann die restlichen Längen?

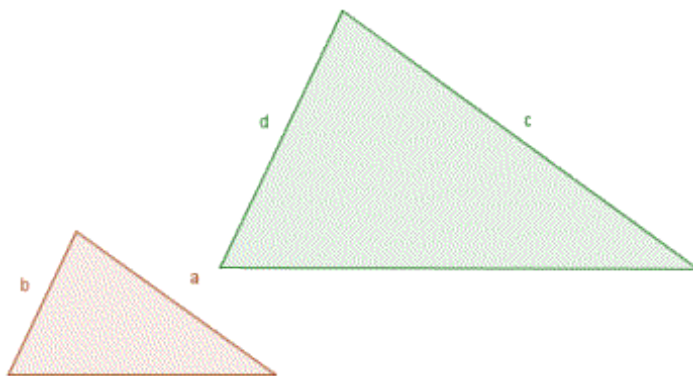


Aufgabe 6: Die Quote bei einer Wette wird durch das Verhältnis von Bruttogewinn zu Einsatz ausgedrückt. Die Quote für den Sieg von Rapid Wien über SC Magna Wiener Neustadt (am 19. 2. 2010) betrug bei bwin.com 37:20. Wieviel Geld hätte man gewonnen, wenn man 100 € auf den Sieg von Rapid gesetzt und Rapid gewonnen hätte?

Aufgabe 7: Bei einer Modelleisenbahn ist die Lokomotive 10 cm lang. Das Bahnhofsgebäude ist ungefähr 4 cm hoch. Sind diese beiden Stücke nach dem gleichen Maßstab gefertigt?

Aufgabe 8: Bei ähnlichen Dreiecken finden sich Proportionen. Die Seite a verhält sich zur Seite b genauso, wie die Seite c zur Seite d .

- Schreibe die Proportion in mathematischer Schreibweise auf.
- Wenn nun $a=4$ cm, $b=5$ cm, $c=8$ cm, wie groß ist dann d ?



Aufgabe 9: Der goldene Schnitt wird oft als ideales Verhältnis in der Kunst und Architektur angesehen. Dabei gilt: „Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes, wenn sich die größere zur kleineren Strecke verhält wie die Summe aus beiden zur größeren.“

So wäre $x > 1$ zu 1 im Goldenen Schnitt, wenn $x : 1 = (x + 1) : x$.

Versucht einen passenden Wert für x , und somit den goldenen Schnitt, zu finden. (Hinweis: Es reicht die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - x - 1$ ausfindig zu machen. Warum?)

Aufgabe 10: Eine Landkarte ist im Maßstab 1:10 000 gezeichnet.

- a) Wie lang ist eine Strecke von 8 cm auf der Landkarte in Wirklichkeit?
- b) Wie lang wäre eine Strecke von 2,1 km auf der Landkarte?
- c) Welchen Maßstab würdet ihr wählen, wenn ihr ein Gebiet von 10 km x 10 km auf eine Karte von 50 cm x 50 cm bringen müsstet?

Aufgabe 11: Das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser hat früher viele Mathematiker beschäftigt.

- a) Berechne dieses Verhältnis für einen Kreisdurchmesser von 5 cm.
- b) Berechne dieses Verhältnis allgemein!

Aufgabe 12: Beantworte folgende Fragen und begründe deine Antwort:

- a) Ist die Fläche eines Quadrats direkt proportional zur Seitenlänge?
- b) Ist der Umfang eines Kreises direkt proportional zum Durchmesser?
- c) Ist die Fläche eines Kreises direkt proportional zum Radius?
- d) Ist der Preis einer Ware direkt proportional zur Anzahl der gekauften Stücke (ohne Mengenrabatt)?

Aufgabe 13: Wodurch unterscheidet sich die Funktion b in Abhängigkeit von a , ausgedrückt durch die Funktionsgleichung $b(a) = k \cdot a$, von einer allgemeinen linearen Funktion?

Aufgabe 14: Das Ohm'sche Gesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung (U) und Stromstärke (I) in einem Stromkreis durch $U/I = R$. Ist der Widerstand (R) konstant, so sind Spannung und Stromstärke zueinander direkt proportional.

- a) Berechne bei einer Spannung von 220 Volt und einem Widerstand von 100 Ohm die zugehörige Stromstärke!
- b) Wird bei einem Widerstand von 100 Ohm die Spannung von 220 Volt auf 440 Volt verdoppelt, was passiert dann mit der Stromstärke?
- c) Wieviel Spannung muss an einen 50 Ohm Widerstand angelegt werden, um eine Stromstärke von 0,5 Ampere zu erhalten?

Aufgabe 15: Finde drei direkt proportionale Zusammenhänge in der Technik.

Aufgabe 16: Ein Foto wurde im 3:4 Format geschossen und soll nun vergrößert werden. Die Variable a gibt die Länge der vergrößerten Seitenkante an, während b die Länge der vergrößerten horizontalen Kante angibt. Es gilt also $a : b = 3 : 4$.

- Um zu erfahren, wie groß die Seitenkanten werden, bei vorgegebener horizontaler Kantenlänge, drücke a in Abhängigkeit von b aus. Wie groß wird die Seitenkante, wenn man für ein Poster mit 40 cm horizontaler Kantenlänge Platz hat?
- Was passiert bei Verdopplung von b mit a ?
- Man kann a als Funktion in Abhängigkeit von b betrachten. Zeichne den Funktionsgraphen. Wo spiegelt sich das Verhältnis 3:4 in dieser Zeichnung wider?

Aufgabe 17: Finde drei direkt proportionale Zusammenhänge in deinem täglichen Leben.

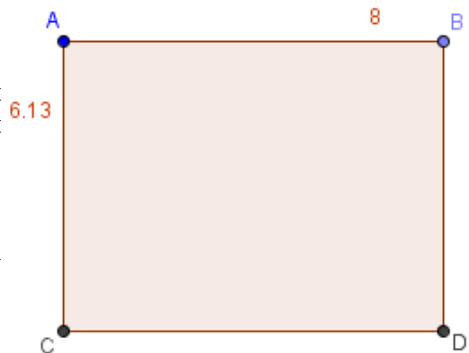
Aufgabe 18: Welche der folgenden Größen am Fahrradapplet sind zueinander direkt proportional?

- (1) n_1 und n_2 bei festem Umdrehungsverhältnis
- (2) n_1 und u_2 bei festem n_2 und u_1
- (3) n_2 und u_2 bei festem n_1 und u_1
- (4) n_2 und u_1 bei festem n_1 und u_2
- (5) n_1 und u_1 bei festem n_2 und u_2
- (6) n_1 und n_2 bei festem u_1

Aufgabe 19:

Ein Architekt soll Wohnungen mit einer Fläche von 49 m^2 planen und experimentiert mit verschiedenen rechteckigen Grundrissen. Wir bezeichnen die Länge des rechteckigen Grundrisses mit a und die Breite mit b . Arbeite mit dem rechten Applet, indem du den Punkt B verschiebst und damit die Breite des Grundrisses änderst.

- Wie groß ist die Breite, wenn er als Länge 7 m annimmt?
- Wie groß ist die Breite, wenn er die Länge von 7 m auf 14 m verdoppelt?
- Wie groß ist, wenn die 7 m Länge halbiert werden?
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, die b als Funktion von a ausdrückt.



Aufgabe 20:

- Ist der Zusammenhang zwischen a und b , durch die Gleichung $a(b) = \frac{k}{b}$ beschrieben, eine Funktion? Begründe deine Antwort und notiere gegebenenfalls den Definitionsbereich.
- Zeichne den Graphen von a in Abhängigkeit von b für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$!
- Untersuche a in Abhängigkeit von b auf Nullstellen und Monotonie für verschiedene positive Konstanten k .
- Untersuche Nullstellen und Monotonie für negative Werte von k der Funktionsgleichung $a(b) = \frac{k}{b}$.

Aufgabe 21: Welche der folgenden Größen am Fahrradapplet sind zueinander indirekt proportional?

- (1) n_1 und n_2 bei festem Umdrehungsverhältnis
- (2) n_1 und u_2 bei festem n_2 und u_1
- (3) n_2 und u_2 bei festem n_1 und u_1
- (4) n_2 und u_1 bei festem n_1 und u_2
- (5) n_1 und u_1 bei festem n_2 und u_2
- (6) n_1 und n_2 bei festem u_1

Aufgabe 22: Es gilt eine Mauer zu streichen. Alleine benötigt man 24 Stunden. Angenommen die Zahl der Arbeit ist indirekt proportional zur Arbeitszeit..

- a) ..wie lange benötigen dann zwei, vier beziehungsweise acht Arbeiter?
- b) Ist die Annahme der indirekten Proportionalität für eine beliebige Anzahl an Arbeitern gültig?

Aufgabe 23:

Druck (bar)	Volumen (dm ³)
1	2
0,75	2,66
0,6	3,33
0,25	8
0,1	20

Wird ein Luftballon unter eine luftdicht verschlossene Kuppel gelegt und mit einer Vakuumpumpe der Druck in der Kuppel verringert, so wächst der Luftballon an. Es wurden der Druck unter der Kuppel und die Größe des Luftballons regelmäßig gemessen und eine Tabelle erstellt. Ist dieser Zusammenhang indirekt proportional? Begründe deine Antwort.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Black-Box-Modell der Psychologie	14
2.2	Screenshot aus Mega Mathe Blaster [Thissen 10]	15
2.3	Modell des Kognitivismus	16
2.4	Screenshot aus STEP 7 [Thissen 10]	17
2.5	Modell des Konstruktivismus	18
2.6	Screenshot aus CABS [Thissen 10]	19
3.1	Screenshot des Mathe Online Funktionsplotters	22
3.2	Screenshot aus DPGraph, Quelle: http://www.dpgraph.com/index.html	23
3.3	Screenshots der Funktionsplotter erstellt mit Derive, DynaGeo und GeoGebra	24
3.4	Funktionsgraph der Funktion $s(t) = 36 \cdot t$	26
3.5	Screenshot der Lösung mittels GeoGebra 4.0	27
3.6	Anwendung des Zugmodus: Im linken Bild wurde der Punkt B verschoben.	31
3.7	Beispiel für die Ortslinienfunktionalität von GeoGebra	32
3.8	Anwendung eines Makros: Im linken Bild erstellt, im rechten angewandt.	32
3.9	Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra [Hohenwarter 06, S. 24]	33
3.10	Auswertung zur Usability der Software [Stepancik 08, S. 172]	40
4.1	Screenshot eines Unterkapitels der Lernumgebung	43
4.2	Screenshot des Glossars	45
4.3	Screenshot des Applets/Grafiken-Verzeichnisses	45
4.4	Geburten und Sterbefälle 1951 - 2050	46
4.5	Hier sind Screenshots der fertig abgespielten Applets zu sehen	47
4.6	Applets zum interaktiven Lesen von Diagrammen	48
4.7	Screenshot des Applets zum Zusammenhang zwischen Diagrammen und Tabellen	50
4.8	Screenshot der Konstruktionsanleitung für Liniendiagramme	51
4.9	Screenshot der Übung 1 nach Auswertung	52
4.10	Pfeildiagramm zum ersten Beispiel für Funktionen	53
4.11	Beispiele für Farbkodierungen elektrischer Widerstände	53
4.12	Funktionsbegriff der Gewinnfunktion G	55
4.13	Übung zu Eigenschaften von Funktion	56
4.14	Applet 1 zu den linearen Funktionen	57
4.15	Applet 2 zu den linearen Funktionen	57

4.16	Screenhot des Applets zu Aufgabe 8 der linearen Funktionen	60
4.17	Instruktion zur Aufgabe 1 der linearen Interpolation	61
4.18	Applet zur Fahrradübersetzung	62

Tabellenverzeichnis

2.1	Entwicklung der Notebookklassen von 2000 bis 2002/03 [Arbor 03, S. 3]	10
3.1	Wertetabelle zum Beispiel	26

Literaturverzeichnis

- [Arbor 03] ARBOR Management Consulting GmbH(Hrsg.) (2003): „Evaluierung des österreichweiten Modellversuchs „e-Learning und e-Teaching mit SchülerInnen-Notebooks““, Wien
- [Arnold 05] Arnold, P. (2005): „Einsatz digitaler Medien in der Hochschullehre aus lerntheoretischer Sicht“, online: <http://www.e-teaching.org/didaktik/theorie/lerntheorie/arnold.pdf> (03.06.2010)
- [BMBWK 03] BM:BWK(Hrsg.) (2003): „Weißbuch Qualitätsentwicklung und Qualitätssicherung im österreichischen Schulsystem“, Wien
- [Dichanz 99] Dichanz, H. (1999), „Schule und Multimedia - Entwicklung im internationalen Vergleich“, in: Meister, D., Sander, U. (Hrsg.): Multimedia. Chancen für die Schule, Berlin, S. 120
- [Dorninger 02] Dorninger, C.: „e-Learning: Versuch einer Begriffsbestimmung“, in: ÖZB 2/2002
- [eCONTENT 03] BM:BWK: „Elektronischer Content für Österreichs Schulen“, online: http://www.bmukk.gv.at/medien/10108_eContent_Schulen.pdf (04.06.2010)
- [Gerber 07] Gerber, S. (2007): „WebQuests - E-Learning nicht nur für Anfänger“, online unter: <http://www.e-teaching.org/didaktik/konzeption/methoden/lernspiele/webquest/WebQuest.pdf> (09.06.2010)
- [Heugl 98] Heugl, H., Klinger, W., Lecher, J. (1998): „Mathematikunterricht mit Computeralgebra- Systemen“, Addison Wesley Verlag
- [Hischer 02] Hischer, H. (2002): „Mathematikunterricht und Neue Medien - oder: Bildung ist das Paradies!“, online unter: <http://hischer.de/uds/forsch/preprints/hischer/Preprint67.pdf> (06.06.2010)
- [Hohenwarter 06] Hohenwarter, M. (2006): „GeoGebra - didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht“, Dissertation, Paris-Lodron-Universität Salzburg
- [John 07] Philipp, J. (2007): „Das Tabellenkalkulationsprogramm MS-EXCEL im Mathematikunterricht der Oberstufe: Anwendungsorientierte Beispiele, Möglichkeiten, Grenzen und Analysen“, Diplomarbeit, Universität Wien

- [Mandl/Kopp 05] Mandl, H., Kopp, B. (2005): „Blended Learning: Forschungsfragen und Perspektiven“, in: „Forschung zu Blended Learning und österreichische F&E Projekte und EU-Beteiligungen“, Tagungsband, Verlag Forum Neue Medien, 2005
- [Rassinger 04] Rassinger, B. (2004): „e-Learning in Notebook-Klassen: Wie Neue Informations- und Kommunikationstechnologien den konventionellen Unterricht verändern.“, Diplomarbeit, Wirtschaftsuniversität Wien
- [Reinmann-Rothmeier/Mandl 98] Reinmann-Rothmeier, G., Mandl, H. (1998): „Lernen mit Multimedia in der Schule“, in: H. Kubicek: Lernort Multimedia. Jahrbuch Telekommunikation und Gesellschaft, Heidelberg
- [Rey 10] Rey, G. D.: „E-Learning: Theorien, Gestaltungsempfehlungen und Forschung“, online unter: <http://www.elearning-psychologie.de/> (02.06.2010)
- [Schneider 02] Schneider, E. (2002): „Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht“, Profil, München
- [Schulmeister 00] Schulmeister, R. (2000): „Didaktische Aspekte hypermedialer Lernsysteme“, in: Kammerl (Hrsg.): Computerunterstütztes Lernen, Oldenbourg
- [Schulmeister 03] Schulmeister, R. (2003): „Lernplattformen für das virtuelle Lernen. Evaluation und Didaktik“, Oldenbourg
- [Schwarzenegger 09] <http://gov.ca.gov/speech/12462/> (02.06.2010)
- [Stangl 10-1] Stangl, W.: „Der Behaviorismus“, online: <http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/LERNEN/Behaviorismus.shtml> (03.06.2010)
- [Stangl 10-2] Stangl, W.: „Die kognitiven Lerntheorien“, online: <http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/LERNEN/LerntheorienKognitive.shtml> (03.06.2010)
- [Stangl 10-3] Stangl, W.: „Die konstruktivistischen Lerntheorien“, online: <http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/LERNEN/LerntheorienKonstruktive.shtml> (03.06.2010)
- [StatistikAustria 09-1] Statistik Austria: „Haushalte mit Computer 2002-2009“, Online einsehbar unter: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/informationengesellschaft/ikt-einsatz_in_haushalten/022207.html (02.06.2010).
- [StatistikAustria 09-2] Statistik Austria: „Haushalte mit Internetzugang 2002-2009“, Online einsehbar unter: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/informationengesellschaft/ikt-einsatz_in_haushalten/022208.html (02.06.2010).
- [StatistikAustria 09-3] Statistik Austria: „Unternehmen mit Computereinsatz und Internetzugang im Jänner 2009“, Online einsehbar unter: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/informationengesellschaft/ikt-einsatz_in_unternehmen_e-commerce/022196.html (02.06.2010).

- [Stepancik 08] Stepancik, E. (2008): „Die Unterstützung des Verstehensprozesses und neue Aspekte der Allgemeinbildung im Mathematikunterricht durch den Einsatz neuer Medien“, Dissertation, Universität Wien
- [Thissen 10] Thissen F.: „Lerntheorien und ihre Umsetzung in multimedialen Lernprogrammen Analyse und Bewertung“, online: http://www.pzm-luzern.ch/FDMA/Downloads/doc_Dateien/lerntheorien_und_ihre_umsetzung.htm (03.06.2010)
- [UNIVIE 10] Vorlesungsverzeichnis der Universität Wien für das Sommersemester 2010, <http://online.univie.ac.at/vlvz?extended=Y> (01.06.2010)
- [Weigand 06] Weigand, H. G. (2006): „Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe. Evaluation eines einjährigen Schulversuchs.“, in: Journal für Mathematikdidaktik 27, Heft 3, S. 89-112
- [Wendtner 10] Wendtner, T. (2010): „Selbstgesteuertes Lernen im Mathematikunterricht am Beispiel Termrechnung. Entwicklung eines Lernpfades mit Einsatz neuer Medien“, Diplomarbeit, Universität Wien

Lebenslauf – Alexander Hummelbrunner

PERSÖNLICHE DATEN

NAME	Alexander Hummelbrunner
GEBURTSDATEN	22. 02. 1985
STAATSBÜRGERSCHAFT	Österreich

AUSBILDUNG

1992 – 1996	Volksschule Rudolf Wehrl, 2700 Wiener Neustadt
1996 – 2003	Bundesgymnasium Babenbergerring, 2700 Wiener Neustadt Matura: 02. 06. 2003
WS 2003	Beginn des Studiums an der Universität Wien – Lehramt mit der Fächerkombination Mathematik / Physik

UNTERRICHTSPRAXIS

2008/2009	AHS Rahlgasse 4, 1060 Wien
-----------	----------------------------
