



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Erneuerungsprozesse -
Theorie und Anwendungen

angestrebter akademischer Grad

Magister der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat.)

Verfasser:	Pierre Frères
Matrikelnummer:	0226138
Studienkennzahl lt. Studienblatt:	A 405
Studienrichtung lt. Studienblatt:	Mathematik
Betreuer:	Ao. Univ.-Prof. Dr. Franz Hofbauer

Wien, im April 2010

Danksagung

Ich möchte folgenden Personen für ihre Unterstützung bei dieser Diplomarbeit danken:

Herrn Ao. Univ.-Prof. Dr. Franz Hofbauer für die Betreuung dieser Diplomarbeit und die Unterstützung bei den verschiedenen Problemstellungen.

Meiner Familie, die mich während meines gesamten Studiums nicht nur finanziell, sondern auch moralisch unterstützte.

Elisabeth Bourkel, die mir immer wieder neue Kraft gab und mir in allen Lebenslagen den Rücken stärkte.

David Hirschmann, der mir während meiner Diplomarbeit immer mit Rat und Tat zur Seite stand, unabhängig davon, wie viel er selbst zu tun hatte.

Laurence Bourkel, die mir mit ihrer fachlichen Kompetenz an vielen Stellen der Diplomarbeit eine große Hilfe war.

Magdalena Vass und Gudrun Weisz für ihre wertvolle moralische Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	
Einleitung	1
Teil 1. Theorie	3
Kapitel 1. Die Erneuerungsfunktion	5
Kapitel 2. Der Erneuerungssatz	17
2.1. Beweis des Erneuerungssatzes	20
2.1.1. Methode 1	20
2.1.2. Methode 2	31
2.2. Folgerungen aus dem Erneuerungssatz	39
2.3. Ein zentraler Grenzwertsatz	42
Kapitel 3. Verallgemeinerungen und Variationen des Erneuerungsprozesses	45
3.1. Zeitverzögerter Erneuerungsprozess	45
3.2. Stationärer Erneuerungsprozess	47
3.3. Zusammenhängender Prozess	48
3.4. Kumulierter Prozess	50
3.5. Endender Erneuerungsprozess	51
Teil 2. Anwendungen	55
Kapitel 4. Versicherungsmathematik	57
4.1. Das Modell	57
4.2. Kleine Forderungen	59
4.3. Integralgleichung	62
Kapitel 5. Der Geigerzähler	69
5.1. Geigerzähler vom Typ I	69
5.2. Geigerzähler vom Typ II	72
Kapitel 6. Wachstum	75
Kapitel 7. Genetisches Modell mit Mutation	79
Zusammenfassung	83
Literaturverzeichnis	85
Lebenslauf	87

Abbildungsverzeichnis

1.1 Zusammenhang zwischen S_n und $N(t)$	6
1.2 Alter, Restlebensdauer und Gesamtlebensdauer	7
2.1 Darstellung von $\Delta_t(x)$	32
3.1 Darstellung eines zusammenhängenden Erneuerungsprozesses	49
3.2 Darstellung eines endenden Erneuerungsprozesses	52
4.1 Darstellung des Gewinnprozesses X_t	58
4.2 Darstellungen von $m_G(t)$	61
5.1 Geigerzähler vom Typ I	70
5.2 Geigerzähler vom Typ II	73
7.1 Darstellung von u^k als Projektion von w^k auf dem Simplex Δ_N	81

Einleitung

Die Funktionsweise eines Geigerzählers, Mutation, Wachstum und Versicherungsmathematik enthalten Elemente, denen ein Prinzip zu Grunde liegt: die Erneuerung. Die vorliegende Diplomarbeit beschäftigt sich mit diesen Erneuerungsprozessen, einem Spezialgebiet der Stochastik. Die Erneuerungstheorie befasst sich mit stochastischen Systemen, deren Entwicklung über die Zeit Erneuerungen enthält, Zeiten bei denen, im statistischen Sinn, der Prozess von Neuem beginnt. Diese werden mit Hilfe von unabhängigen, identischverteilten, nichtnegativen Zufallsvariablen beschrieben, welche man sich als aufeinanderfolgende Lebensdauern vorstellen kann, die aber je nach Anwendung auch eine andere Bedeutung haben können.

Die Erneuerungstheorie wird in der vorliegenden Arbeit im ersten Teil unter einem theoretischen Aspekt und im zweiten Teil unter einem praktischen Gesichtspunkt mit verschiedenen konkreten Anwendungen behandelt.

Der erste Teil befasst sich mit der Theorie der Erneuerungsprozesse und dem Erneuerungssatz, welcher Aussagen über das asymptotische Verhalten der Lösungen sogenannter Erneuerungsgleichungen trifft. Aufgrund seiner Wichtigkeit in der Erneuerungstheorie, wird der Erneuerungssatz ausführlich dargestellt und anhand von zwei Methoden hergeleitet. Schließlich werden Verallgemeinerungen und Variationen des Erneuerungsprozesses behandelt.

Im zweiten Teil werden Anwendungen aus verschiedenen Bereichen der Natur- und Wirtschaftswissenschaften, in welchen Erneuerungsprozesse vorhanden sind, dargestellt.

Teil 1

Theorie

KAPITEL 1

Die Erneuerungsfunktion

Kapitel 1 widmet sich dem Begriff der Erneuerungsfunktion, welche unabdingbar in der Erneuerungstheorie ist. Die Darstellungen in dem vorliegenden Kapitel halten sich, in weiten Zügen, an [7], [3] und [5].

Ein *Erneuerungsprozess* wird durch eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen $(X_j)_{j \geq 1}$ bestimmt, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung F haben. Die Zufallsvariablen werden als Lebensdauern interpretiert und F heißt Lebensdauerverteilung. Sie hat folgende Eigenschaften:

DEFINITION 1.1. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung F nennt man Lebensdauerverteilung, wenn $F(t) = 0$ für $t < 0$ und $F(0) < 1$ gilt.

Folgende Definition dient dem besseren Verständnis:

DEFINITION 1.2. Eine Funktion $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man Verteilung, wenn sie monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist. Gilt zusätzlich $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = 1$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} K(t) = 0$, dann ist K eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Man definiert die Partialsummen

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_n &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

und nennt S_n den n -ten Erneuerungszeitpunkt. Der stochastische Prozess $(S_n)_{n \geq 0}$ heißt dann Erneuerungsprozess mit Lebensdauerverteilung F . Weiters definiert man

$$\begin{aligned} N_t &= \{\text{Anzahl der Indizes } n \text{ für die } 0 < S_n < t \text{ gilt}\} \\ &= \max\{n : S_n \leq t\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Da bei der Untersuchung eines Erneuerungsprozesses die Anzahl N_t der Erneuerungen im Zeitintervall $[0, t]$ eine wesentliche Rolle spielt, wird der Zusammenhang von N_t und S_n noch genauer betrachtet. Dabei lässt sich (1.2) wie folgt schreiben.

SATZ 1.3. Für $k \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$ gilt

$$N_t \geq k \Leftrightarrow S_k \leq t.$$

BEWEIS. Es gilt $N_t \geq k$ genau dann, wenn im Zeitintervall $[0, t]$ mindestens k Erneuerungen stattfinden. Das ist genau dann der Fall, wenn die k -te Erneuerung vor oder zum Zeitpunkt t stattfindet, also $S_k \leq t$ gilt. $\square$

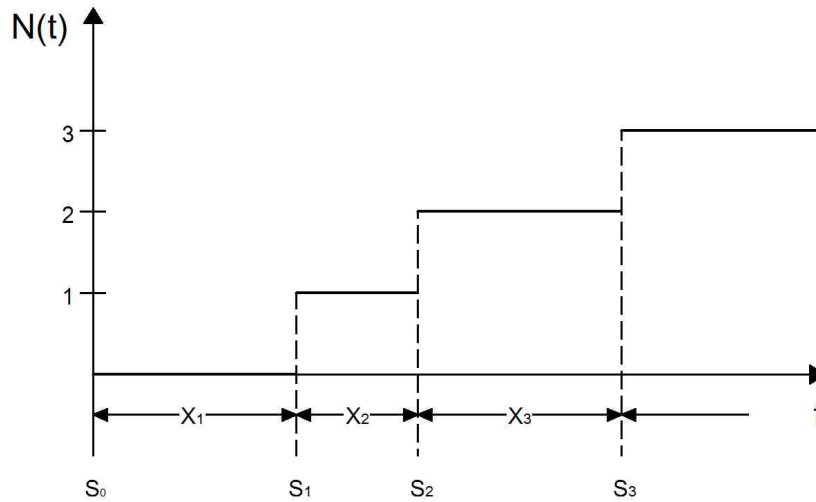


ABBILDUNG 1.1. Zusammenhang zwischen S_n und $N(t)$.

Für $n \geq 1$ sei $F_n(x) = P(S_n \leq x)$ die Verteilungsfunktion von S_n . Später wird F_n mit Hilfe der Faltungsformel berechnet werden. Aus Satz 1.3 folgt

$$\begin{aligned} P(N_t \geq k) &= P(S_k \leq t) \\ &= F_k(t), \quad \text{für } t \geq 0, k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

sowie

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(N_t \geq k) - P(N_t \geq k + 1) \\ &= F_k(t) - F_{k+1}(t), \quad \text{für } t \geq 0, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

BEISPIEL. Das wohl bekannteste Beispiel für einen Erneuerungsprozess ist der kontinuierliche Austausch von Glühbirnen. Eine Glühbirne wird, sobald sie durchbrennt, sofort durch eine neue Glühbirne ersetzt. Diesen Vorgang der fortlaufenden Erneuerungen beschreibt man durch einen Erneuerungsprozess. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Glühbirne eingesetzt, welche zum Zeitpunkt X_1 ausfällt und durch eine neue Glühbirne mit derselben Lebensdauerverteilung F ersetzt wird. Diese zweite Glühbirne fällt zum Zeitpunkt $X_1 + X_2$ aus und wird durch eine dritte Glühbirne ausgetauscht. Somit brennt die n -te Glühbirne zum Zeitpunkt $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ durch und wird unverzüglich ersetzt, usw. Es versteht sich von selbst, dass die nacheinanderfolgenden Lebenszeiten stochastisch unabhängig sind und alle dieselbe Lebensdauerverteilung F besitzen, sodass

$$P(X_k \leq x) = F(x)$$

gilt. Dabei erfasst N_t in diesem Erneuerungsprozess die Anzahl der Erneuerungen (Auswechslungen der Glühbirnen) bis zum Zeitpunkt t .

Damit Erneuerungsprozesse noch besser beschrieben werden können, werden noch zusätzlich die folgenden Zufallsvariablen eingeführt.

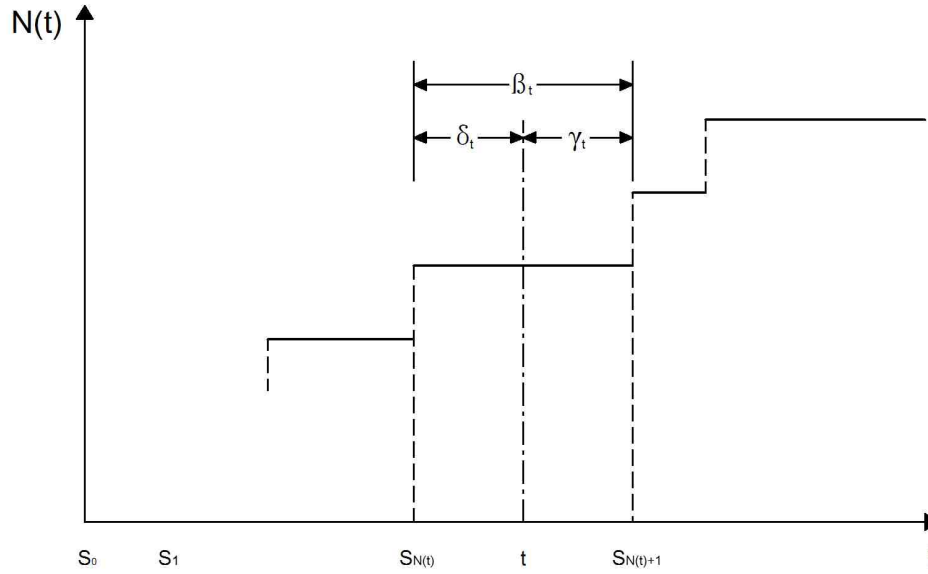


ABBILDUNG 1.2. Alter, Restlebensdauer und Gesamtlebensdauer.

DEFINITION 1.4. Sei $t > 0$. Dann bezeichnen δ_t das Alter, γ_t die Restlebensdauer und β_t die Gesamtlebensdauer der zum Zeitpunkt t in Betrieb stehenden Glühbirne, welche wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \delta_t &= t - S_{N_t} && (\text{Alter}) \\ \gamma_t &= S_{N_t+1} - t && (\text{Restlebensdauer}) \\ \beta_t &= \delta_t + \gamma_t && (\text{Gesamtlebensdauer}) \end{aligned}$$

BEISPIEL. Ein weiteres Beispiel für einen Erneuerungsprozess können die Abfahrtszeiten einer Straßenbahn an einer Haltestelle bilden. In dem Fall wäre γ_t die Wartezeit auf die nächste Straßenbahn, wenn man zum Zeitpunkt t zur Haltestelle kommt.

Da es bei der Erneuerungstheorie von erheblicher Wichtigkeit ist, die erwartete Anzahl von Erneuerungen auf einem Zeitintervall zu berechnen, wird der Begriff der *Erneuerungsfunktion* eingeführt.

DEFINITION 1.5. Sei $R(t) = E(N_t)$ die durchschnittliche Anzahl von Erneuerungen im Zeitintervall $[0, t]$. Die Funktion $R : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt Erneuerungsfunktion des Erneuerungsprozesses.

Mit Hilfe der Definition der Erneuerungsfunktion und den Erkenntnissen aus (1.3) und (1.4), erhält man schließlich

SATZ 1.6. Ist F_k die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_k , dann gilt

$$R(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$$

für alle $t \geq 0$.

BEWEIS. Die Zufallsvariable N_t nimmt Werte in $\mathbb{N}$ an. Es folgt

$$\begin{aligned} R(t) &= E(N_t) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_t = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_t \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t), \end{aligned}$$

wobei sich die dritte Gleichheit durch Umgruppieren herbeiführen lässt. $\square$

Um die Erneuerungsfunktion R weiter untersuchen zu können, muss ein Weg gefunden werden, um die Wahrscheinlichkeitsverteilungen F_n von S_n zu berechnen. Aus diesem Grund wird das *Riemann-Stieltjes-Integral* eingeführt.

Das Riemann-Stieltjes-Integral einer Funktion $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Verteilung K definiert man genauso wie das Riemann-Integral, jedoch mißt man in diesem Fall die Länge des Intervalls $(u, v]$ durch $K(v) - K(u)$. Sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung des Intervalls $(a, b]$. Dann definiert man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (K(t_j) - K(t_{j-1})) \sup_{(t_{j-1}, t_j]} f &\text{ als die Obersumme und} \\ \sum_{j=1}^m (K(t_j) - K(t_{j-1})) \inf_{(t_{j-1}, t_j]} f &\text{ als die Untersumme.} \end{aligned}$$

Sind das Infimum der Obersummen und das Supremum der Untersummen gleich, dann heißt die Funktion f integrierbar. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int_a^b f(x) dK(x)$. Integrale über unbeschränkte Intervalle kann man durch Grenzübergänge $a \rightarrow -\infty$ und $b \rightarrow \infty$ definieren. Gibt es für K eine Dichtefunktion k , mit $K(t) = \int_{-\infty}^t k(x) dx$, dann gilt $\int_a^b f(x) dK(x) = \int_a^b f(x)k(x) dx$. Es wird eine geeignete Menge von integrierbaren Funktionen gesucht. Für eine Linkstreppefunktion $h = \sum_{j=1}^r c_j 1_{(s_{j-1}, s_j]}$ auf $(a, b]$, wobei $a = s_0 < s_1 < \dots < s_r = b$ und $c_j \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man $\int_a^b h(x) dK(x) = \sum_{j=1}^r c_j (K(s_j) - K(s_{j-1}))$.

BEMERKUNG. Bei Rechtstreppefunktionen sind Schwierigkeiten vorhanden, wenn eine Sprungstelle von K mit einer Sprungstelle der Treppenfunktion zusammenfällt.

DEFINITION 1.7. Eine Funktion f heißt *regulär*, wenn $\lim_{x \downarrow y} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow y} f(x)$ für alle y existieren. Gilt zusätzlich $\lim_{x \uparrow y} f(x) = f(y)$ für alle y , so nennt man f linksregulär. Gilt zusätzlich $\lim_{x \downarrow y} f(x) = f(y)$ für alle y , so nennt man f rechtsregulär.

HILFSSATZ 1. Für eine Funktion $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

- (a) Die Funktion f ist linksregulär genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Linkstreppefunktion h auf $(a, b]$ existiert mit $\sup_{x \in (a, b]} |f(x) - h(x)| < \epsilon$.
- (b) Wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine linksreguläre Funktion $g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $\sup_{x \in (a, b]} |f(x) - g(x)| < \epsilon$ gilt, dann ist f ebenfalls linksregulär.

Analoge Aussagen gelten natürlich auch für rechtsreguläre Funktionen $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Für einen Beweis sei auf die Analysis verwiesen. Aus Hilfssatz 1(a) ergibt sich, dass $\int_a^b f(x) dK(x)$ für jede linksreguläre Funktion $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert. Durch Anwendung dieses Integral ergibt sich

DEFINITION 1.8. Sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ rechtsregulär. Sei $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Verteilung mit $K(x) = 0$ für $x < 0$. Die Funktion $g * K : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man als die *Faltung* von g mit K und wird definiert durch $g * K(t) = \int_{-\infty}^t g(t-x) dK(x)$. Aufgrund der Linksregularität von $x \mapsto g(t-x)$, existiert dieses Integral.

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich ebenfalls einige einfache Eigenschaften der Faltung.

SATZ 1.9. Seien g und h rechtsreguläre Funktionen auf $[0, \infty)$ und K und L Verteilungen, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich 0 sind. Dann gilt:

- (a) $g * K(t) = \int_{-a}^t g(t-x) dK(x)$ für jedes $a > 0$.
- (b) $(g + h) * K = g * K + h * K$ und $g * (K + L) = g * K + g * L$.
- (c) $|g * K(t)| \leq \sup_{s \in [0, t]} |g(s)| K(t)$.

BEWEIS. (a) Sei $b > a$. Da $K(x) = 0$ für $x < 0$ gilt, ist $\int_{-b}^{-a} g(t-x) dK(x) = 0$, da jede Riemannsumme für dieses Integral gleich 0 ist. Somit gilt

$$\int_{-b}^t g(t-x) dK(x) = \int_{-a}^t g(t-x) dK(x).$$

Lässt man b gegen ∞ gehen, so folgt (a).

(b) Es gilt

$$\int_{-a}^t u(x) + v(x) dK(x) = \int_{-a}^t u(x) dK(x) + \int_{-a}^t v(x) dK(x)$$

für linksreguläre Funktionen u und v . Setzt man nun $u(x) = g(t-x)$ und $v(x) = h(t-x)$, so folgt die erste Aussage von (b). Für $M = K + L$ gilt

$$\int_{-a}^t u(x) dM(x) = \int_{-a}^t u(x) dK(x) + \int_{-a}^t u(x) dL(x),$$

da diese Gleichung für die Ober- und Untersumme zu jeder Zerlegung erfüllt ist. Die zweite Aussage von (b) folgt, indem man $u(x) = g(t-x)$ setzt.

(c) Weiters gilt

$$\left| \int_{-a}^t u(x) dK(x) \right| \leq \sup_{s \in (-a, t]} |u(s)| (K(t) - K(-a))$$

für linksreguläre Funktionen $u : (-a, t] \rightarrow \mathbb{R}$, da diese Abschätzung für jede Ober- und Untersumme des Integrals gültig ist. Setzt man $u(x) = g(t-x)$, so folgt

$$|g * K(t)| \leq \sup_{s \in [0, t+a)} |g(s)| K(t),$$

da $K(-a) = 0$ gilt und $t-s$ das Intervall $[0, t+a)$ durchläuft, wenn s das Intervall $(-a, t]$ durchläuft. Da man $a > 0$ beliebig nahe bei 0 wählen kann und g rechtsregulär ist, folgt (c). □

Die Menge aller rechtsregulären Funktionen auf $[0, \infty)$ bildet einen Vektorraum V . Dieser enthält alle Verteilungen, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich 0 sind, wenn man sie auf $[0, \infty)$

einschränkt. Es wird gezeigt, dass die Faltung nicht aus V hinausführt, das heißt, wenn g rechtsregulär ist, dann auch $g * K$.

Um dies zu zeigen, wird $u > 0$ beliebig gewählt. Wegen Hilfssatz 1 existiert auf dem Intervall $[0, u)$ eine Rechtstreppefunktion

$$h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{[s_{j-1}, s_j)}$$

mit $\sup_{x \in [0, u)} |g(x) - h(x)| < \epsilon$. Dann ist

$$h(t - x) = \sum_{j=1}^n c_j 1_{(t-s_j, t-s_{j-1}]}(x),$$

sodass man

$$h * K(t) = \sum_{j=1}^n c_j (K(t - s_{j-1}) - K(t - s_j))$$

für $t \in [0, u)$ erhält. Aufgrund der Rechtsregularität von K , ist $h * K(t)$ als Linearkombination von rechtsregulären Funktionen ebenfalls rechtsregulär. Für $t \in [0, u)$ folgt wegen Satz 1.9(c)

$$|g * K(t) - h * K(t)| \leq \sup_{s \in [0, t]} |g(s) - h(s)| K(t) \leq \epsilon K(t) \leq \epsilon K(u).$$

Es wurde somit $\sup_{t \in [0, u)} |g * K(t) - h * K(t)| \leq \epsilon K(u)$ gezeigt. Wegen Hilfssatz 1 folgt, dass $g * K$ auf $[0, u)$ für alle $u > 0$ rechtsregulär ist und somit auch auf $[0, \infty)$.

SATZ 1.10. *Seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen H_1 und H_2 , die beide auf $\mathbb{R}^-$ gleich null sind. Sei H die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_2$. Dann gilt $H(t) = H_1(t) * H_2(t)$ für $t \geq 0$.*

BEWEIS. Sei $a > 0$ und $t > 0$ und sei $B = \{(x, y) : x > -a, y \geq 0, x + y \leq t\}$. Dann gilt

$$P(X_1 + X_2 \leq t) = P((X_2, X_1) \in B),$$

da X_1 und X_2 nur Werte ≥ 0 annehmen. Für eine Zerlegung $-a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ sei

$$B_n = \bigcup_{j=1}^n (t_{j-1}, t_j] \times [0, t - t_{j-1}].$$

Es wird eine Folge von immer feiner werdenden Zerlegungen, deren Maschenweite mit $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, gewählt, sodass die Obersummen $\sum_{j=1}^n H_1(t - t_{j-1})(H_2(t_{j-1}) - H_2(t_j))$ gegen das entsprechende Integral $\int_{-a}^t H_1(t - x) dH_2(x)$ gehen. Das ist möglich, da $x \mapsto H_1(t - x)$ eine linksreguläre Funktion und daher integrierbar ist. Da die Mengen B_n monoton fallend gegen die Menge B gehen, gehen auch die Ereignisse $(X_2, X_1) \in B_n$ monoton fallend gegen das Ereignis $(X_2, X_1) \in B$, sodass

$$P((X_2, X_1) \in B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P((X_2, X_1) \in B_n)$$

aus dem Stetigkeitssatz folgt. Wegen der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 erhält man

$$\begin{aligned} P((X_2, X_1) \in B_n) &= \sum_{j=1}^n P(X_1 \leq t - t_{j-1}, t_{j-1} \leq X_2 \leq t_j) \\ &= \sum_{j=1}^n H_1(t - t_{j-1})(H_2(t_{j-1}) - H_2(t_j)). \end{aligned}$$

Lässt man n gegen ∞ gehen, dann erhält man

$$P(X_1 + X_2 \leq t) = P((X_2, X_1) \in B) = \int_{-a}^t H_1(t - x) dH_2(x).$$

Wegen Satz 1.9(a) steht rechts die Faltung von H_1 mit H_2 . □

Seien X_1, X_2 und X_3 unabhängige Zufallsvariablen welche die Wahrscheinlichkeitsverteilungen H_1, H_2 und H_3 haben, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich null sind. Dann gilt

$$H_1 * H_2 = H_2 * H_1 \text{ wegen } X_1 + X_2 = X_2 + X_1 \text{ und}$$

$$H_1 * (H_2 * H_3) = (H_1 * H_2) * H_3 \text{ wegen } X_1 + (X_2 + X_3) = (X_1 + X_2) + X_3.$$

Für Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche auf $\mathbb{R}^-$ gleich null sind, ist die Faltung eine kommutative und assoziative Verknüpfung.

Sei F eine Lebensdauerverteilung. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen F_n von S_n können dann mit Hilfe der Faltung rekursiv berechnet werden. Wegen $S_n = S_{n-1} + X_n$, der Unabhängigkeit von S_{n-1} und X_n und der Tatsache, dass F die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_n ist, gilt die Rekursion

$$F_n = F_{n-1} * F = F * F_{n-1}$$

für $n \geq 2$.

DEFINITION 1.11. Man schreibt $F \leq G$, wenn $F(t) \leq G(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

SATZ 1.12. Seien F und G Lebensdauerverteilungen. Wenn $F \leq G$ gilt, dann auch $F_n \leq G_n$ für alle $n \geq 1$.

BEWEIS. Wegen $F_1 = F$ und $G_1 = G$ ist dies für $n = 1$ klar. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Wenn $F_n \leq G_n$ gezeigt ist, dann folgt

$$F_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^t F_n(t - x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^t G_n(t - x) dF(x) = G_n * F(t)$$

und weiters wegen $G_n * F(t) = F * G_n(t)$

$$F_{n+1}(t) \leq F * G_n(t) = \int_{-\infty}^t F(t - x) dG_n(x) \leq \int_{-\infty}^t G(t - x) dG_n(x) = G_{n+1}(t)$$

womit der Satz bewiesen ist. □

SATZ 1.13. Sei R die Erneuerungsfunktion eines Erneuerungsprozesses mit Lebensdauerverteilung F . Dann gilt:

- (a) es existieren positive Konstanten c und d mit $R(t) \leq c + dt$ für alle $t \in \mathbb{R}^+$.
- (b) R ist monoton wachsend und rechtsregulär.
- (c) $R(t) = F(t) + \int_{-\infty}^t R(t - x) dF(x)$, das heißt $R = F + R * F$.

BEWEIS. (a) Da $F(0) < 1$ und F rechtsseitig stetig ist, gibt es ein $a > 0$ mit $F(a) < 1$. Sei

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ F(a), & \text{für } 0 \leq x < a, \\ 1, & \text{für } x \geq a. \end{cases}$$

Dann gilt $F \leq G$. Sei $\tilde{R}$ die Erneuerungsfunktion zur Lebensdauerverteilung G . Aus Satz 1.6 und Satz 1.12 folgt $R \leq \tilde{R}$. Durch Berechnen von $\tilde{R}(t)$ ergibt sich $\tilde{R}(t) = \frac{1}{1-F(a)}([\frac{t}{a}] + 1) - 1$ und man erhält durch Einsetzen

$$R(t) \leq \frac{1}{1-F(a)} \left(\left[\frac{t}{a} \right] + 1 \right) - 1 \leq t \frac{1}{a(1-F(a))} + \frac{1}{1-F(a)}$$

womit (a) gezeigt ist.

(b) Da jedes F_k monoton wachsend ist, ist auch $R = \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ monoton wachsend. Um zu zeigen, dass R rechtsregulär ist, sei $R_n = \sum_{k=1}^n F_k$. Dann gilt für $t > 0$

$$\sup_{s \in [0, t]} |R(s) - R_n(s)| = \sup_{s \in [0, t]} \sum_{k=n+1}^{\infty} F_k(s) = \sum_{k=n+1}^{\infty} F_k(t)$$

da jedes F_k positiv und monoton wachsend ist. Wegen (a) ist $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ konvergent und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} F_k(t) = 0.$$

Für jedes $t > 0$ konvergiert daher R_n gleichmäßig auf $[0, t)$ gegen R . Als endliche Summe von rechtsregulären Funktionen ist R_n ebenfalls rechtsregulär. Als gleichmäßiger Grenzwert der Funktionen R_n ist dann auch R rechtsregulär auf $[0, t)$ für jedes t und daher auf $\mathbb{R}$. Damit ist (b) gezeigt.

(c) Die Gleichung aus (c) wird zuerst für R_n mit Hilfe des Distributivgesetzes für die Faltung, das in Satz 1.9(b) gezeigt wurde, nachgerechnet

$$\begin{aligned} R_{n+1}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} F_k(t) = F_1(t) + \sum_{k=2}^{n+1} F_{k-1} * F(t) \\ &= F(t) + R_n * F(t). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 1.9(c) folgt

$$|R * F(t) - R_n * F(t)| \leq \sup_{s \in [0, t]} |R(s) - R_n(s)| F(t).$$

Im letzten Absatz wurde $\sup_{s \in [0, t]} |R(s) - R_n(s)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gezeigt. Mit $n \rightarrow \infty$ folgt daher $R(t) = F(t) + R * F(t)$ aus obiger Gleichung. □

Ab jetzt wird der Erwartungswert der zugrundeliegenden Lebensdauerverteilung F mit μ bezeichnet, sodass $\mu = E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) = \int_0^{\infty} 1 - F(x) \, dx$ gilt. Bevor die Restlebensdauer einer in Betrieb stehenden Glühbirne bestimmt werden kann, wird der folgende wichtige Hilfssatz bewiesen.

HILFSSATZ 2. Seien $X_1, X_2, \dots$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}^+$, die alle Erwartungswert μ haben. Weiters sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, sodass die Ereignisse $N \leq k-1$ und $X_k \leq s$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $s \geq 0$ unabhängig sind. Dann gilt $E\left(\sum_{j=1}^N X_j\right) = \mu E(N)$.

BEWEIS. Die Zufallsvariable U_j für $j \geq 1$ wird durch $U_j = 0$, wenn $N \leq j-1$, und $U_j = 1$, wenn $N \geq j$ definiert. Dann gilt $\sum_{j=1}^N X_j = \sum_{j=1}^{\infty} U_j X_j$. Sei $t \geq 0$. Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $N \leq j-1$ und $X_j > t$ folgt

$$\begin{aligned} P(U_j X_j > t) &= P(U_j = 1, X_j > t) \\ &= P(X_j > t) - P(U_j = 0, X_j > t) \\ &= P(X_j > t) - P(N \leq j-1, X_j > t) \\ &= P(X_j > t) - P(N \leq j-1)P(X_j > t) \\ &= P(X_j > t)P(N \geq j). \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$E(U_j X_j) = \int_0^{\infty} P(U_j X_j > t) dt = P(N \geq j) \int_0^{\infty} P(X_j > t) dt = P(N \geq j)\mu.$$

Aufgrund der Tatsache, dass für Zufallsvariablen X_j mit $j \geq 1$ und mit Werten in $\mathbb{R}^+$

$$E\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(X_j)$$

gilt, folgt nun

$$E\left(\sum_{j=1}^N X_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^{\infty} U_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(U_j X_j) = \mu \sum_{j=1}^{\infty} P(N \geq j) = \mu E(N).$$

□

Mit Hilfe von Hilfssatz 2 lässt sich nun die durchschnittliche Restlebensdauer einer zum Zeitpunkt t in Betrieb stehenden Glühbirne berechnen.

SATZ 1.14. Für $t > 0$ gilt $E(S_{N_t+1}) = \mu(R(t)+1)$ und daher $E(\gamma_t) = \mu(R(t)+1) - t$.

BEWEIS. Hilfssatz 2 wird auf $S_{N_t+1} = \sum_{j=1}^{N_t+1} X_j$ angewendet. Zuerst müssen die Voraussetzungen dieses Satzes, nämlich die Unabhängigkeit der Ereignisse $N_t + 1 \leq k$ und $X_{k+1} \leq s$ für alle $k \geq 1$ und $s \geq 0$ überprüft werden. Aus Satz 1.3 folgt

$$N_t + 1 \leq k \Leftrightarrow N_t < k \Leftrightarrow S_k > t.$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen S_k und X_{k+1} folgt dann

$$\begin{aligned} P(N_t + 1 \leq k, X_{k+1} \leq s) &= P(S_k > t, X_{k+1} \leq s) \\ &= P(S_k > t)P(X_{k+1} \leq s) \\ &= P(N_t + 1 \leq k)P(X_{k+1} \leq s). \end{aligned}$$

Hilfssatz 2 besagt jetzt, dass $E(S_{N_t+1}) = \mu E(N_t+1) = \mu(R(t)+1)$ gilt. Durch Einsetzen von $S_{N_t+1} = \gamma_t + t$ folgt sofort $E(\gamma_t) = \mu(R(t)+1) - t$. □

Mit Hilfe von Satz 1.14 kann jetzt das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion bestimmt werden. Satz 1.15 bezeichnet man auch noch als den *elementaren Erneuerungssatz*.

SATZ 1.15. Für einen Erneuerungsprozess mit $\mu = E(X_1) < \infty$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

BEWEIS. Aus der Definition von N_t folgt $S_{N_t+1} > t$ und daher $\mu(R(t) + 1) \geq t$ aus Satz 1.14. Man erhält

$$\frac{R(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

woraus

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

folgt. Um jetzt noch

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

zu zeigen, sei $c > 0$ beliebig und

$$G(t) = \begin{cases} F(t), & \text{für } t < c, \\ 1, & \text{für } t \geq c, \end{cases}$$

sodass $F \leq G$ gilt. Sei $\tilde{R}$ die Erneuerungsfunktion zur Lebensdauerverteilung G . Aus Satz 1.6 und Satz 1.12 folgt $R \leq \tilde{R}$. Sei $(\tilde{S}_k)_{k \geq 1}$ ein Erneuerungsprozess mit Lebensdauerverteilung G und $\tilde{N}_t$ die Anzahl der Erneuerungen im Zeitintervall $[0, t]$ für diesen Prozess. Die Zufallsvariablen $\tilde{X}_k = \tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}$ können keine Werte $> c$ annehmen, da $P(\tilde{X}_k \leq c) = G(c) = 1$ gilt. Insbesondere folgt

$$\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} - \tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leq c \quad \text{und} \quad \tilde{S}_{\tilde{N}_t+1} \leq t + c,$$

wegen $\tilde{S}_{\tilde{N}_t} \leq t$. Sei $\tilde{\mu}$ der Erwartungswert von G . Aus Satz 1.14 folgt

$$\tilde{\mu} \tilde{R}(t) \leq E(\tilde{S}_{\tilde{N}_t+1}),$$

sodass man

$$\frac{\tilde{R}(t)}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}} + \frac{c}{t\tilde{\mu}}$$

erhält. Es folgt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{R}(t)}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}}.$$

Wegen $R(t) \leq \tilde{R}(t)$ wurde

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

gezeigt. Schließlich gilt

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \tilde{\mu} = \mu,$$

aufgrund von

$$\mu = \int_0^\infty 1 - F(x) \, dx \quad \text{und} \\ \tilde{\mu} = \int_0^\infty 1 - G(x) \, dx = \int_0^c 1 - F(x) \, dx.$$

So erhält man

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu},$$

womit der Satz bewiesen ist.

□

KAPITEL 2

Der Erneuerungssatz

Als erstes wird in dem vorliegenden Kapitel der Begriff der Erneuerungsgleichung eingeführt, welche eine wichtige Rolle für den Erneuerungssatz spielt. Die folgenden Darstellungen wurden, in weiten Teilen, aus [5] und [7] entnommen.

Als *Erneuerungsgleichungen* werden Gleichungen der Form

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) \, dF(x)$$

bezeichnet, wobei F eine Lebensdauerverteilung ist und A, a auf $\mathbb{R}^+$ definiert sind. Es wurde bereits in Satz 1.13(c) gezeigt, dass R eine Erneuerungsgleichung mit $a = F$ erfüllt. Der Erneuerungssatz gibt das asymptotische Verhalten einer Lösung A einer Erneuerungsgleichung an. Für dessen Formulierung benötigt man noch folgende Definition.

DEFINITION 2.1. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung F heißt Gitterverteilung, wenn ein $d > 0$ und $c_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $F = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n 1_{[nd, \infty)}$ gilt. Man nennt d die Gitterweite und c_n die Sprunghöhe im Punkt nd .

SATZ 2.2 (Erneuerungssatz). Sei F eine Lebensdauerverteilung mit Erwartungswert $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) < \infty$. Sei $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine endliche Linearkombination von positiven monoton fallenden rechtsregulären Funktionen a_j mit $\int_0^{\infty} a_j(x) \, dx < \infty$. Sei $A : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Erneuerungsgleichung

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) \, dF(x), \tag{2.1}$$

die auf kompakten Intervallen beschränkt ist.

- Ist F keine Gitterverteilung, dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} a(x) \, dx, & \text{falls } \mu < \infty, \\ 0, & \text{falls } \mu = \infty. \end{cases} \tag{2.2}$$

- Ist F eine Gitterverteilung mit Gitterweite d , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(nd) = \begin{cases} \frac{d}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a(nd), & \text{falls } \mu < \infty, \\ 0, & \text{falls } \mu = \infty. \end{cases} \tag{2.3}$$

Bevor mit dem Beweis des Erneuerungssatzes begonnen wird, wird ein Zusammenhang zur Erneuerungsgleichung hergestellt.

Mit Hilfe der Erneuerungsfunktion R zur Lebensdauer-Verteilung F kann man eine Formel für die Lösung der Erneuerungsgleichung angeben. Sei $R(t) = 0$ für $t < 0$, sodass $R(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wegen Satz 1.13(b) ist R eine Verteilung.

SATZ 2.3. *Sei a eine beschränkte, rechtsreguläre Funktion auf $\mathbb{R}^+$. Die einzige Lösung der Erneuerungsgleichung*

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) \, dF(x), \quad (2.4)$$

die auf kompakten Intervallen beschränkt ist, ist dann durch

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t a(t-y) \, dR(y) \quad (2.5)$$

gegeben.

BEWEIS. Für diesen Beweis werden Satz 1.9 und das Assoziativgesetz $(g * G) * H = g * (G * H)$ aus Kapitel 1 verwendet. Man zeigt zuerst, dass $A = a + a * R$ eine auf kompakten Intervallen beschränkte Lösung ist. Wegen

$$\sup_{x \in [0, t]} |A(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |a(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |a(x)| R(t) < \infty$$

ist A auf $[0, t]$ beschränkt für jedes $t > 0$. Mit Satz 1.13(c) folgt

$$\begin{aligned} A &= a + a * R \\ &= a + a * (F + R * F) \\ &= a + a * F + a * (R * F) \\ &= a + a * F + (a * R) * F \\ &= a + (a + a * R) * F \\ &= a + A * F, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass A die Erneuerungsgleichung löst.

Sei jetzt A eine Lösung von $A = a + A * F$, die auf kompakten Intervallen beschränkt ist. Setzt man diese Gleichung in sich selbst ein, so folgt

$$\begin{aligned} A &= a + (a + A * F) * F \\ &= a + a * F + A * F_2. \end{aligned}$$

Wiederholt man dies immer wieder und setzt $R_n = \sum_{k=1}^n F_k$, so erhält man

$$A = a + a * R_n + A * F_{n+1}$$

für alle n . Man lässt n gegen ∞ gehen. Wegen Satz 1.13(a) gilt $\sum_{j=1}^{\infty} F_j(t) = R(t) < \infty$. Ist $G_n(t) = \sum_{j=n+1}^{\infty} F_j(t)$, dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}(t) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(t) = 0$ für $t \geq 0$. Wegen $|A * F_{n+1}(t)| \leq \sup_{x \in [0, t]} |A(x)| F_{n+1}(t)$ erhält man $\lim_{n \rightarrow \infty} A * F_{n+1}(t) = 0$ für $t \geq 0$. Wegen

$$|a * R(t) - a * R_n(t)| = |a * G_n(t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |a(x)| G_n(t)$$

folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a * R_n(t) = a * R(t)$ für $t \geq 0$. Für $n \rightarrow \infty$ folgt also $A = a + a * R$, womit gezeigt ist, dass das die einzige Lösung von $A = a + A * F$ ist, die auf kompakten Intervallen beschränkt ist. $\square$

BEISPIEL. Sei

$$a(y) = \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq y < h, \\ 0, & \text{für } h \leq y. \end{cases}$$

Die zugehörige Lösung der Erneuerungsgleichung ist

$$\begin{aligned} A(t) &= a(t) + \int_0^t a(t-x) \, dR(x) \\ &= R(t) - R(t-h), \end{aligned}$$

für $t > h$. Aus dem Erneuerungssatz folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (R(t) - R(t-h)) = \frac{h}{\mu},$$

wenn F keine Gitterverteilung ist.

SATZ 2.4. *Für jedes $y > 0$ existiert ein $\gamma(y)$, sodass $R(t+y) - R(t) \leq \gamma(y)$ für alle t gilt.*

BEWEIS. Für $a(t) = 1 - F(t)$ ist $A(t) = 1$ eine beschränkte Lösung der Erneuerungsgleichung. Nach Satz 2.3 folgt $1 = a(t) + \int_{-\infty}^t a(t-y) \, dR(y)$ für $t \geq 0$. Für $x \in (0, t]$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_{t-x}^x a(t-y) \, dR(y) \\ &\geq a(x)(R(t) - R(t-x)). \end{aligned}$$

Ist $\delta > 0$ so, dass $F(\delta) < 1$ gilt und $x \in (0, \delta]$, dann folgt $R(t) - R(t-x) \leq \frac{1}{1-F(\delta)}$ für alle $t \geq 0$. Sei $\gamma(y) = \frac{1}{1-F(\delta)} \left(\left[\frac{y}{\delta} \right] + 1 \right)$. Da sich jedes Intervall $(t, t+y]$ in $\left[\frac{y}{\delta} \right] + 1$ Intervalle der Länge $\leq \delta$ zerlegen lässt, folgt

$$R(t+y) - R(t) \leq \gamma(y)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y > 0$. □

2.1. Beweis des Erneuerungssatzes

In diesem Kapitel werden zwei Methoden für den Beweis des Erneuerungssatzes dargestellt.

2.1.1. Methode 1. Dieser Beweis hält sich, in weiten Zügen, an [5] und [2]. Der Beweis des Erneuerungssatzes wird zuerst für den leichteren Fall geführt, wo eine Gitterverteilung F mit Gitterweite d auftritt. Für den Beweis benötigt man folgenden Hilfssatz und Satz 2.5, welcher auch noch als *diskreter Erneuerungssatz* bezeichnet wird.

HILFSSATZ 3. Sei $a_n(t) \in \mathbb{R}$, sodass $a_n = \lim_{t \rightarrow c} a_n(t)$ für alle n existiert. Wenn es ein $d_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} d_n < \infty$ und $|a_n(t)| \leq d_n$ für alle t und alle $n \geq 0$ gibt, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \rightarrow c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t).$$

BEWEIS. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Man wähle n_0 so, dass $\sum_{n=n_0}^{\infty} d_n < \frac{\epsilon}{3}$ ist. Daraus folgt dann, dass $\sum_{n=n_0}^m |a_n(t)| \leq \sum_{n=n_0}^m d_n < \frac{\epsilon}{3}$ für alle t und alle $m \geq n_0$ gilt. Durch Grenzübergang $t \rightarrow c$ erhält man $\sum_{n=n_0}^m |a_n| \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $m \geq n_0$. Insbesondere sind die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann kann eine Umgebung U von c so gewählt werden, dass $|a_n(t) - a_n| < \frac{\epsilon}{3n_0}$ für $t \in U$ und $0 \leq n \leq n_0 - 1$ gilt. Für $t \in U$ und $m \geq n_0$ erhält man

$$\left| \sum_{n=0}^m a_n(t) - \sum_{n=0}^m a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n(t) - a_n| + \sum_{n=n_0}^m |a_n(t)| + \sum_{n=n_0}^m |a_n| < n_0 \frac{\epsilon}{3n_0} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Lässt man jetzt m gegen ∞ gehen, so folgt daraus $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n| < \epsilon$ für alle $t \in U$, womit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{t \rightarrow c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ gezeigt ist. $\square$

SATZ 2.5 (Diskreter Erneuerungssatz). Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ und $ggT\{n \geq 1 : a_n > 0\} = 1$. Sei $u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_n u_0$ für $n \geq 1$ und $u_0 = 1$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{\alpha}$ mit $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$, wobei α auch ∞ sein darf.

BEWEIS. Der Beweis wird in sechs Schritte unterteilt:

- (i) Es gilt $u_n \geq 0$ für $n \geq 0$ und $u_0 = 1$. Ist $u_n \leq 1$ für alle $n < m$ gezeigt, dann folgt $u_m \leq \sum_{n=1}^m a_n \leq 1$. Dieser Induktionsbeweis zeigt, dass $0 \leq u_n \leq 1$ für alle n gilt.
- (ii) Sei $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, sodass $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} r_n$. Wegen $a_n = r_{n-1} - r_n$ und $r_0 = 1$ folgt $\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} r_k u_{n-k-1}$ für alle n und daher $\sum_{k=0}^n r_k u_{n-k} = r_0 u_0 = 1$ für alle n .
- (iii) Sei $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \in [0, 1]$. Also gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \lambda$ für eine Teilfolge $(n_k)_{k \geq 1}$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_ϵ mit $u_n \leq \lambda + \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Es wird gezeigt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k-j} = \lambda$ für alle j mit $a_j > 0$ gilt. Angenommen, das gilt nicht. Dann existiert ein $\tilde{\lambda} < \lambda$, sodass für $\epsilon = \frac{1}{4} a_j (\lambda - \tilde{\lambda})$ und unendlich viele m sowohl $u_{m-j} < \tilde{\lambda}$ als auch $u_m > \lambda - \epsilon$ gilt. Sei $N > j$ so groß, dass

$r_N < \epsilon$. Ist m wie oben und zusätzlich noch $m \geq N + n_\epsilon$ dann erhält man unter Benutzung von $u_n \leq 1$

$$\begin{aligned}
u_m &\leq a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \dots + a_N u_{m-N} + \epsilon \\
&< (a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_N)(\lambda + \epsilon) + a_j \tilde{\lambda} + \epsilon \\
&\leq (1 - a_j)(\lambda + \epsilon) + a_j \tilde{\lambda} + \epsilon \\
&\leq \lambda + 2\epsilon - a_j(\lambda - \tilde{\lambda}) \\
&= \lambda - 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $u_m > \lambda - \epsilon$. Somit ist $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - j} = \lambda$ gezeigt.

- (iv) Wenn $a_j > 0$ gilt, kann der Beweis in (iii) auch auf die Teilfolge $(n_k - j)_{k \geq 1}$ angewendet werden und man erhält $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - 2j} = \lambda$. Wiederholt man das, so erhält man $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - lj} = \lambda$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und alle j mit $a_j > 0$. Ebenso folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - l_1 j_1 - l_2 j_2} = \lambda$, wenn $a_{j_1} > 0$ und $a_{j_2} > 0$ gelten. Nun gibt es $j_1, j_2, \dots, j_p$ mit $a_{j_i} > 0$, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Es gibt ein M , sodass für jedes $m \geq M$ natürliche Zahlen $l_1, l_2, \dots, l_p$ existieren mit $m = l_1 j_1 + l_2 j_2 + \dots + l_p j_p$. Deshalb folgt wie oben, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - m} = \lambda$, wenn $m \geq M$ gilt. Sei jetzt K beliebig. Wenn $n_k \geq K + M$, dann folgt aus (ii), dass $\sum_{i=0}^K r_i u_{n_k - M - i} \leq 1$ gilt. Für $k \rightarrow \infty$ folgt daraus, dass $\lambda \sum_{i=0}^K r_i \leq 1$. Da K beliebig war, erhält man $\lambda \alpha \leq 1$, also $\lambda \leq \frac{1}{\alpha}$. Das heißt $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \frac{1}{\alpha}$.
- (v) Sei jetzt $\lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \in [0, 1]$. Es wird wie in (iii) vorgegangen. Für eine Teilfolge $(n_k)_{k \geq 1}$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \lambda$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_ϵ mit $u_n \geq \lambda - \epsilon$ für alle $n \geq n_\epsilon$. Es wird $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - j} = \lambda$ für alle j mit $a_j > 0$ gezeigt. Angenommen, das gilt nicht. Dann existiert ein $\tilde{\lambda} > \lambda$, sodass für $\epsilon = \frac{a_j(\tilde{\lambda} - \lambda)}{3 + \lambda}$ und unendlich viele m sowohl $u_{m-j} > \tilde{\lambda}$ als auch $u_m < \lambda + \epsilon$ gilt. Sei $N > j$ so gewählt, dass $r_N < \epsilon$ gilt. Ist m wie oben und zusätzlich noch $m \geq N + n_\epsilon$ dann erhält man unter Benutzung von $u_n \geq 0$

$$\begin{aligned}
u_m &\geq a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \dots + a_N u_{m-N} \\
&> (a_1 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_N)(\lambda - \epsilon) + a_j \tilde{\lambda} \\
&> (1 - a_j - \epsilon)(\lambda - \epsilon) + a_j \tilde{\lambda} \\
&> \lambda - \epsilon - \lambda\epsilon + a_j(\tilde{\lambda} - \lambda) \\
&= \lambda + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $u_m < \lambda + \epsilon$. Also ist $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - j} = \lambda$ gezeigt.

- (vi) Genauso wie in (iv) mit Hilfe von (iii) wird jetzt mit Hilfe von (v) gezeigt, dass ein M existiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k - m} = \lambda$ für $m \geq M$. Sei jetzt K so groß, dass $r_K < \epsilon$ gilt. Wenn $n_k \geq K + M$, dann folgt aus (ii), dass $\sum_{i=0}^K r_i u_{n_k - M - i} + \epsilon \geq 1$ gilt. Für $k \rightarrow \infty$ folgt daraus, dass $\lambda \sum_{i=0}^K r_i + \epsilon \geq 1$, also $\lambda \alpha + \epsilon \geq 1$ gilt. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhält man $\lambda \leq \frac{1}{\alpha}$. Das heißt $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \frac{1}{\alpha}$.

□

Der Beweis des Erneuerungssatzes für eine Gitterverteilung F mit Gitterweite d lässt sich wie bereits erwähnt auf Satz 2.5 zurückführen. Für $n \geq 0$ sei $v_n = A(nd)$ und $c_n = a(nd)$. Nach Voraussetzung gilt $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. Weiters sei $b_n \geq 0$ die Sprunghöhe

von F im Punkt nd . Da F eine Lebensdauerverteilung ist, gilt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1$ und $b_0 < 1$. Aus der vorausgesetzten Erneuerungsgleichung folgt dann

$$v_n = c_n + \sum_{k=0}^n v_{n-k} b_k \quad (2.6)$$

für $n \geq 0$. Es kann $\text{ggT}\{n : b_n > 0\} = 1$ angenommen werden. Sonst wäre ein Vielfaches von d ebenfalls Gitterweite.

Sei u_n durch $u_0 = 1$ und $u_n = \frac{b_1}{1-b_0}u_{n-1} + \dots + \frac{b_n}{1-b_0}u_0$ für $n \geq 1$ definiert. Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{1-b_0} = 1$ folgt aus Satz 2.5, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1-b_0}{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k}$$

gilt. Daraus ist $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ zu bestimmen. Folgende erzeugende Funktionen werden eingeführt:

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, & C(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \\ U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n, & V(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n. \end{aligned}$$

Aus der Definition der u_n folgt

$$U(x) = B(x)U(x) + 1 - b_0.$$

Aus (2.6) erhält man

$$V(x) = B(x)V(x) + C(x).$$

Eliminiert man $B(x)$ aus diesen beiden Gleichungen, so erhält man

$$(1 - b_0)V(x) = C(x)U(x).$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$(1 - b_0)v_n = \sum_{j=0}^n c_j u_{n-j}$$

für $n \geq 0$. Mit Hilfe von Hilfssatz 3 folgt nun für $n \rightarrow \infty$, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k}{\sum_{k=1}^{\infty} k b_k}$$

gilt. Da $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k$ der Erwartungswert μ von F ist, ist das bereits die Behauptung des Erneuerungssatzes.

Wenn F keine Gitterverteilung ist, dann ist der Beweis wesentlich aufwändiger. Es wird mit einigen Sätzen aus der Analysis begonnen, die zum Beweis notwendig sind.

HILFSSATZ 4. *Sei K_n eine Folge von Verteilungen mit $K_n(0) = 0$, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein c_x existiert mit $|K_n(x)| \leq c_x$ für alle n . Dann existiert eine Teilfolge n_k und eine Verteilung K , sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} K_{n_k}(t) = K(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, in denen K stetig ist. Für diese Teilfolge gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK_{n_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK(x)$ für alle*

linksregulären Funktionen f mit kompaktem Träger, die in den Sprungstellen von K stetig sind.

BEWEIS. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar, das heißt $\mathbb{Q}$ kann durchnummeriert als $\{r_1, r_2, \dots\}$ geschrieben werden. Die Folge $K_n(r_1)$ für $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt und hat daher eine konvergente Teilfolge. Es gibt eine unendliche Teilmenge N_1 von $\mathbb{N}$, sodass $\lim_{n \in N_1} K_n(r_1)$ existiert. Nun ist $K_n(r_2)$ für $n \in N_1$ eine beschränkte Folge, sodass eine unendliche Teilmenge N_2 von N_1 existiert, für die $\lim_{n \in N_2} K_n(r_2)$ existiert. Da jetzt $K_n(r_3)$ für $n \in N_2$ eine beschränkte Folge ist, findet man eine unendliche Teilmenge N_3 von N_2 , sodass $\lim_{n \in N_3} K_n(r_3)$ existiert. Dies kann man immer weiter tun. Man findet $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset \dots$ sodass $\lim_{n \in N_j} K_n(r_j)$ für alle j existiert. Jetzt sei $n_1 = \min N_1$ und für $j \geq 2$ sei $n_j = \min\{n \in N_j : n > n_{j-1}\}$. Für jedes $k \geq 1$ gilt dann $\{n_k, n_{k+1}, n_{k+2}, \dots\} \subset N_k$, sodass $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{n_m}(r_k)$ für alle k existiert. Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ existiert also eine Zahl g_r mit $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{n_m}(r) = g_r$. Da jede der Funktionen K_{n_m} monoton wachsend ist, folgt $g_r \leq g_s$ für $r < s$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $K(x) = \inf\{g_r : r \in \mathbb{Q}, r > x\}$. Aus dieser Definition folgt, dass $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist. Es wird $\lim_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) = K(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen K stetig ist, gezeigt. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $r > x$. Dann gilt $K_{n_j}(x) \leq K_{n_j}(r)$ für alle j und daher $\limsup_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(r) = g_r$. Da das für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > x$ gilt, erhält man $\limsup_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \leq \inf\{g_r : r \in \mathbb{Q}, r > x\} = K(x)$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $r < x$. Dann gilt $K_{n_j}(x) \geq K_{n_j}(r)$ für alle j und daher $\liminf_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(r) = g_r$. Da das für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $r < x$ gilt, erhält man $\liminf_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \geq \sup\{g_r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}$. Ist $y \in \mathbb{R}$ und $y < x$, dann gilt $K(y) \leq \sup\{g_r : r \in \mathbb{Q}, r < x\}$, da $\mathbb{Q} \cap (y, x) \neq \emptyset$ ist. Daher folgt $\liminf_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \geq K(y) = \sup\{K(y) : y \in \mathbb{R}, y < x\}$. Somit ist $K(x-) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) \leq K(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ bewiesen. Ist K im Punkt x stetig, dann gilt $K(x-) = K(x)$ und daher $\lim_{j \rightarrow \infty} K_{n_j}(x) = K(x)$. Es bleibt noch die zweite Aussage des Satzes zu zeigen. Seien a und b in $\mathbb{R}$ so gewählt, dass f außerhalb von $(a, b]$ gleich Null ist, und a und b Stetigkeitspunkte von K sind. Dann gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK_n(x) = \int_a^b f(x) dK_n(x)$ für alle n und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK(x) = \int_a^b f(x) dK(x)$. Sei c so gewählt, dass $|K_n(a)| \leq c$ und $|K_n(b)| \leq c$ für alle n gilt, woraus auch $|K(a)| \leq c$ und $|K(b)| \leq c$ folgt.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da f linksregulär ist und in den Sprungstellen von K stetig ist, gibt es eine Zerlegung $a = u_0 < u_1 < \dots < u_m = b$ des Intervalls $(a, b]$ durch Punkte u_j , in denen K stetig ist, und eine Treppenfunktion $g = \sum_{j=1}^m v_j 1_{(u_{j-1}, u_j]}$ mit $\sup |f - g| < \frac{\epsilon}{4c+1}$. Es folgt für alle $n \geq 1$

$$\left| \int_a^b f(x) dK(x) - \int_a^b g(x) dK(x) \right| < \frac{2c\epsilon}{4c+1} \quad \text{und} \\ \left| \int_a^b f(x) dK_n(x) - \int_a^b g(x) dK_n(x) \right| < \frac{2c\epsilon}{4c+1}.$$

Die Integrale von g sind dann $\int_a^b g(x) dK_n(x) = \sum_{j=1}^m v_j (K_n(u_j) - K_n(u_{j-1}))$ und $\int_a^b g(x) dK(x) = \sum_{j=1}^m v_j (K(u_j) - K(u_{j-1}))$. Da K in den Punkten u_j stetig ist, wurde $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dK_{n_k}(x) = \int_a^b g(x) dK(x)$ im ersten Teil des Beweises gezeigt. Daher

existiert ein n_0 mit

$$\left| \int_a^b g(x) \, dK_{n_k}(x) - \int_a^b g(x) \, dK(x) \right| < \frac{\epsilon}{4c+1}$$

für alle $n \geq n_0$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wurde ein n_0 gefunden, sodass

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dK_{n_k}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dK(x) \right| < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ist alles gezeigt. $\square$

DEFINITION 2.6. Eine Folge von Funktionen $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $|g_n(x) - g_n(y)| < \epsilon$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$ und alle n gilt.

HILFSSATZ 5. Sei $g_n : \mathbb{R} \rightarrow [-c, c]$ eine Folge von gleichgradig stetigen Funktionen. Dann existiert eine Teilfolge n_k und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow [-c, c]$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Intervallen.

BEWEIS. Da die Folge $g_n(r)$ für jedes $r \in \mathbb{Q}$ beschränkt ist, findet man genauso wie zu Beginn des Beweises von Hilfssatz 4 eine Teilfolge n_k , sodass die Folge $g_{n_k}(r)$ für jedes $r \in \mathbb{Q}$ konvergiert. Insbesondere ist jede dieser Folgen eine Cauchyfolge. Es wird gezeigt, dass $g_{n_k}(x)$ eine Cauchyfolge für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist. Sei also $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da die Folge g_n gleichgradig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass $|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in (x - \delta, x + \delta)$ und für alle n gilt. Man wählt ein $r \in \mathbb{Q} \cap (x - \delta, x + \delta)$ und findet ein k_0 , sodass $|g_{n_k}(r) - g_{n_m}(r)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $k, m \geq k_0$ gilt. Für $k, m \geq k_0$ folgt dann $|g_{n_k}(x) - g_{n_m}(x)| < \epsilon$. Damit ist gezeigt, dass $g_{n_k}(x)$ eine Cauchyfolge ist. Es existiert ein $g(x) \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x) = g(x)$.

Es wird gezeigt, dass die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten Teilmengen ist. Sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung $U(x)$, sodass

$$|g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $y \in U(x)$ und alle n gilt und daher auch

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Es gibt endlich viele $x_1, x_2, \dots, x_m$ mit $M \subset \bigcup_{j=1}^m U(x_j)$. Es gibt ein k_0 , sodass

$$|g_{n_k}(x_j) - g(x_j)| < \frac{\epsilon}{3}$$

für $1 \leq j \leq m$ und für $k \geq k_0$ gilt. Sei jetzt $y \in M$ beliebig. Es gibt ein x_j mit $y \in U(x_j)$. Dann gilt

$$|g_{n_k}(y) - g(y)| \leq \underbrace{|g_{n_k}(y) - g_{n_k}(x_j)|}_{< \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|g_{n_k}(x_j) - g(x_j)|}_{< \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|g(x_j) - g(y)|}_{< \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon,$$

wenn $k \geq k_0$ ist. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz auf M gezeigt.

Als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen ist g stetig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$, also auf ganz $\mathbb{R}$. Da $g_n(x) \in [-c, c]$ für alle n gilt, folgt $g(x) \in [-c, c]$. $\square$

Die zwei folgenden Sätze stammen aus der Maßtheorie. Der erste folgt aus der Tatsache, dass die einzigen translationsinvarianten Maße auf $\mathbb{R}$ die Vielfachen des Lebesguemaßes sind. Beim zweiten handelt es sich um den Satz über die dominierte Konvergenz.

HILFSSATZ 6. *Sei K eine Verteilung, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) dK(x)$ für jedes stetige f mit kompaktem Träger unabhängig von t ist. Dann gilt $K(t) = \alpha t + \beta$ für ein $\alpha \geq 0$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$.*

HILFSSATZ 7. *Sei $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gegen eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, und sei F eine Verteilung. Wenn eine integrierbare Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ existiert mit $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF(x) < \infty$ und $|f_n| \leq h$ für alle n gilt, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n dF = \int_{-\infty}^{\infty} f dF$.*

Nun wird die Voraussetzung, dass F keine Gitterverteilung besitzt, ausgenutzt.

DEFINITION 2.7. Sei H eine Verteilung. Man nennt x einen *Dichtepunkt* der Verteilung H , wenn $H(x) - H(x - \epsilon) > 0$ für alle $\epsilon > 0$ gilt. Weiters sei D_H die Menge aller Dichtepunkte von H .

HILFSSATZ 8. *Für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen G, H gilt $D_{G*H} \supset D_G + D_H$. Insbesondere enthält die Menge $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$ mit zwei Punkten auch deren Summe.*

BEWEIS. Um die erste Aussage zu zeigen, sei $s \in D_G$, $t \in D_H$ und $\epsilon > 0$. Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen, sodass X die Verteilung G und Y die Verteilung H hat. Dann gilt

$$P(s - \frac{\epsilon}{2} < X \leq s) = G(s) - G(s - \frac{\epsilon}{2}) > 0$$

und

$$P(t - \frac{\epsilon}{2} < Y \leq t) = H(t) - H(t - \frac{\epsilon}{2}) > 0.$$

Daraus erhält man dann

$$\begin{aligned} G * H(s+t) - G * H(s+t-\epsilon) &= P(s+t-\epsilon < X+Y \leq s+t) \\ &\geq P(s - \frac{\epsilon}{2} < X \leq s, t - \frac{\epsilon}{2} < Y \leq t) \\ &= P(s - \frac{\epsilon}{2} < X \leq s) P(t - \frac{\epsilon}{2} < Y \leq t) \\ &> 0, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass $s+t \in D_{G*H}$ gilt.

Sind $s, t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$, dann muss $s \in D_{F_l}$ und $t \in D_{F_m}$ für ein l und ein m gelten. Aus dem ersten Teil des Satzes folgt dann

$$s+t \in D_{F_l * F_m} = D_{F_{l+m}} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}.$$

□

HILFSSATZ 9. *Wenn F keine Gitterverteilung ist, dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein t_0 , sodass $I \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k} \neq \emptyset$ für jedes Intervall I der Länge δ , das in $[t_0, \infty)$ enthalten ist, gilt.*

BEWEIS. Man findet Punkte a und b in $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$ mit $a < b < a + \delta$. Solche Punkte findet man bereits in D_F , außer $D_F = \{c_0, c_1, \dots\}$ mit $0 \leq c_0 < c_1 < \dots$ und $c_{j+1} \geq c_j + \delta$. Gibt es Punkte u und v in D_F mit $\frac{u}{v} \notin \mathbb{Q}$, dann findet man Zahlen l und m in $\mathbb{Z}$ mit $0 < lu + mv < \delta$. Wegen Hilfssatz 8 sind dann $a = |l|u + |m|v$ und $b = (|l| + l)u + (|m| + m)v$ in $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$ und es gilt $a < b < a + \delta$. Es kann angenommen werden, dass $\frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ für alle $u, v \in D_F$ gilt. Sei $d_1 = \text{ggT}(c_0, c_1) > 0$ und $d_j = \text{ggT}(d_{j-1}, c_j) > 0$ für $j \geq 2$. Wenn $D_F = \{c_0, c_1, \dots, c_\alpha\}$ gilt, dann ist F eine Gitterverteilung mit Gitterweite d_α . Also ist D_F unendlich. Ist $d = d_j$ für alle $j \geq j_0$, dann ist F eine Gitterverteilung mit Gitterweite d . Da jedes d_{j-1} ein Vielfaches von d_j ist, folgt $\lim_{j \rightarrow \infty} d_j = 0$. Man nehme ein j_0 mit $d_{j_0} < \delta$. Es existieren Zahlen $m_j \in \mathbb{Z}$ mit $\sum_{j=0}^{j_0} m_j c_j = d_{j_0} \in (0, \delta)$. Wegen Hilfssatz 8 sind dann $a = \sum_{j=0}^{j_0} |m_j| c_j$ und $b = \sum_{j=0}^{j_0} (|m_j| + m_j) c_j$ in $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$ und es gilt $a < b < a + \delta$.

Sei $w \in D_F$ beliebig mit $w > 0$. Sei $d = b - a \in (0, \delta)$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $nd > w$ gilt. Die Punkte $jw + (n - m)a + mb = jw + na + md$ mit $j \geq 1$ und $0 \leq m \leq n$ liegen in $[w + na, \infty)$, sodass zwei aufeinanderfolgende Punkte höchstens Abstand d haben. Wegen Hilfssatz 8 liegen alle diese Punkte in $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{F_k}$. Mit $t_0 = w + na$ erreicht man das gewünschte Resultat. $\square$

HILFSSATZ 10. Seien F und G Verteilungen, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich null sind. Für eine beschränkte linksreguläre Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(y+z) \, dF(y) dG(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \, dF * G(y),$$

wenn entweder h kompakten Träger hat oder F und G Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind. Für eine rechtsreguläre Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$g * (F * G) = (g * F) * G.$$

BEWEIS. Die erste Gleichung gilt für die Funktion $u = 1_{(a,b]}$ mit $a < b$. Man sieht das, weil

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(y+z) \, dF(y) dG(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(b-z) - F(a-z) \, dG(z) \\ &= F * G(b) - F * G(a) \end{aligned}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y) \, dF * G(y) = F * G(b) - F * G(a)$$

gilt. Da Integrale linear sind, gilt diese Gleichung auch für alle Linkstreppenfunktionen. Sei $h_n = h 1_{(-n,n]}$. Da h_n wegen Hilfssatz 1 gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Linkstreppenfunktionen ist und bei diesem Grenzübergang die in der Gleichung vorkommenden Integrale konvergieren, gilt die Gleichung auch für h_n . Wenn h kompakten Träger hat, dann gilt $h = h_n$ für ein n und man ist fertig. Ansonsten sei c eine obere Schranke für $|h|$. Dann gilt $|h_n| \leq c$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$. Die Gleichung für die Funktion h folgt nun aus Hilfssatz 7, da die Integrale der konstanten Funktion c den Wert c haben, wenn F und G Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind.

Die Funktion $f = g1_{[0,t+1)}$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist rechtsregulär mit kompaktem Träger. Es gilt

$$g * (F * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-y) \, dF * G(y).$$

Aus der soeben bewiesenen Gleichung erhält man

$$g * (F * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-z-y) \, dF(y) dG(z).$$

Das innere Integral ist $g * F(t-z)$ für $z \leq t$ und $= 0$ für $z > t$. Es folgt

$$g * (F * G)(t) = \int_{-\infty}^t g * F(t-z) \, dG(z) = (g * F) * G(t).$$

□

HILFSSATZ 11. *Sei F eine Lebensdauerverteilung, die keine Gitterverteilung ist. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und gleichmäßig stetig und $g(0) = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x)$. Wenn $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \, dF(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist g konstant.*

BEWEIS. Es wird mit Induktion gezeigt, dass $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \, dF_k(y)$ für alle $k \geq 1$ gilt. Für $k = 1$ ist diese Gleichung in den Voraussetzungen enthalten. Wenn sie für $k = m$ schon bewiesen ist, dann folgt $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y-z) \, dF(y) dF_m(z)$ unter nochmaliger Verwendung der Voraussetzung. Setzt man $h(t) = g(x-t)$ in Hilfssatz 10 ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \, dF * F_m(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \, dF_{m+1}(y), \end{aligned}$$

die Gleichung für $k = m + 1$.

Es wird gezeigt, dass $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = g(0)$ sein muss. Sonst gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge x_j mit $x_j \rightarrow \infty$ und $g(-x_j) \leq g(0) - 2\epsilon$. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ und offene Intervalle I_j mit Mittelpunkt x_j und Länge δ , sodass $g(-x) \leq g(0) - \epsilon$ für alle $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ gilt. Nach Hilfssatz 9 gibt es ein j und ein k , sodass $I_j \cap D_{F_k} \neq \emptyset$ ist. Es gibt also Punkte a und b mit $0 < a < b$, sodass $F_k(b) - F_k(a) > 0$ und $g(-x) \leq g(0) - \epsilon$ für alle $x \in (a, b]$ gilt. Jetzt folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(-y) \, dF_k(y) &\leq (g(0) - \epsilon)(F_k(b) - F_k(a)) + g(0)(1 - F_k(b) + F_k(a)) \\ &= g(0) - \epsilon(F_k(b) - F_k(a)) \\ &< g(0), \end{aligned}$$

ein Widerspruch zu $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(-y) \, dF_k(y)$. Somit gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = g(0)$.

Sei $c = \sup |g|$. Angenommen, es gibt ein u mit $g(u) < g(0)$. Man wählt $\epsilon = \frac{g(0) - g(u)}{2c+2}$ und findet ein t_0 , sodass $g(x) > g(0) - \epsilon$ für alle $x < u - t_0$. Wegen Satz 1.6 und Satz 1.13(a) gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(t) = 0$ für alle t . Daher gibt es ein k mit $F_k(t_0) < \epsilon$. Aus der

Gleichung $g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u-y) \, dF_k(y)$ folgt nun

$$\begin{aligned} g(u) &\geq -c \int_{-\infty}^{t_0} dF_k(y) + (g(0) - \epsilon) \int_{t_0}^{\infty} dF_k(y) \\ &\geq -cF_k(t_0) + (g(0) - \epsilon)(1 - F_k(t_0)) \\ &\geq g(0) - \epsilon(2c + 1). \end{aligned}$$

Das ergibt einen Widerspruch zur Wahl von ϵ . Somit ist $g(u) = g(0)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ gezeigt. $\square$

SATZ 2.8. *Sei $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, rechtsreguläre Funktion mit kompaktem Träger, der in $[m, m+l]$ enthalten ist. Sei F keine Gitterverteilung, R die Erneuerungsfunktion zur Lebensdauerverteilung F und $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t a(t-y) \, dR(y)$. Dann gilt:*

- (a) *A ist auf $\mathbb{R}^+$ durch $\sup |a|(1 + \gamma(l))$ beschränkt.*
- (b) *Wenn a stetig ist, dann ist A gleichmäßig stetig.*
- (c) *Wenn a stetig ist, dann ist $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t+u) - A(t) = 0$ für alle $u > 0$.*

BEWEIS. (a) Da der Träger von $y \mapsto a(t-y)$ im Intervall $(t-m-l, t-m]$ enthalten ist, folgt

$$\begin{aligned} |A(t)| &\leq \sup |a| + \sup |a|(R(t-m) - R(t-m-l)) \\ &\leq \sup |a|(1 + \gamma(l)) \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$, womit (a) bereits gezeigt ist.

- (b) Wenn a stetig ist mit kompaktem Träger, dann ist a gleichmäßig stetig. Sei $\epsilon > 0$ gegeben und $\delta < 1$ so, dass $|a(x) - a(y)| < \frac{\epsilon}{1+\gamma(l+1)}$ gilt, wenn $|x - y| < \delta$ ist. Für $s \in (0, \delta)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |A(t+s) - A(t)| &\leq |a(t+s) - a(t)| + \int_{-\infty}^t |a(t+s-y) - a(t-y)| \, dR(y) \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 + \gamma(l+1)} + \int_{-\infty}^t \frac{\epsilon}{1 + \gamma(l+1)} 1_{(t-m-l, t-m+1]}(y) \, dR(y) \\ &\leq \frac{\epsilon}{1 + \gamma(l+1)} + \frac{\epsilon}{1 + \gamma(l+1)} \gamma(l+1) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist (b) gezeigt.

- (c) Um (c) zu zeigen, wird zuerst angenommen, dass a stetig differenzierbar ist. Dann ist a' stetig, beschränkt und hat Träger in $[m, m+l]$. Sei $b_h(x) = \frac{a(x+h) - a(x)}{h}$. Wegen $b_h(x) = a'(\xi_x)$ für ein ξ_x zwischen x und $x+h$ ist b_h ebenfalls beschränkt und hat Träger in $I = [m-1, m+l+1]$, wenn $|h| < 1$ ist. Es existiert ein $c > 0$ mit $|b_h| \leq c1_I$. Aus $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t a(t-y) \, dR(y)$ folgt

$$\frac{A(t+h) - A(t)}{h} = b_h(t) + \int_{-\infty}^t b_h(t-y) \, dR(y).$$

Da aber $\lim_{h \rightarrow 0} b_h(t) = a'(t)$ gilt und $\int_{-\infty}^t c1_I(t-y) \, dR(y) < \infty$ ist, folgt die Gleichung $A'(t) = a'(t) + \int_{-\infty}^t a'(t-y) \, dR(y)$ mit Hilfe von Hilfssatz 7. Aus (a) und (b) erhält man, dass A' beschränkt und gleichmäßig stetig ist. Um (c)

zu zeigen, beweist man, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} A'(t) = 0$ gilt. Sei $\eta = \limsup_{t \rightarrow \infty} A'(t)$. Es existiert eine Folge t_n mit $t_n \rightarrow \infty$ und $A'(t_n) \rightarrow \eta$. Sei $g_n(t) = A'(t_n + t)$ für $t \geq -t_n$ und $= A'(0)$ für $t < -t_n$. Die Folge g_n ist gleichgradig stetig, da A' gleichmäßig stetig ist, und die Werte der Funktionen g_n liegen in $[-c, c]$ mit $c = \sup |A'|$. Aus Hilfssatz 5 folgt die Existenz einer Teilfolge n_k und einer stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow [-c, c]$ mit $g_{n_k}(t) \rightarrow g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen. Nach Satz 2.3 gilt $A'(t) = a'(t) + \int_{-\infty}^t A'(t-y) dF(y)$ für $t \geq 0$, das heißt

$$g_n(t) = a'(t_n + t) + \int_{-\infty}^{t_n+t} g_n(t-y) dF(y)$$

für $t \geq -t_n$. Setzt man n_k für n ein und lässt k gegen ∞ gehen, dann folgt $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-y) dF(y)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von Hilfssatz 7, da $|g_n| \leq c$ für alle n gilt. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} A'(t_{n_k}) = \eta$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} A'(t_{n_k} + t) \leq \eta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt $g(t) \leq g(0) = \eta$. Da A' gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass aus $|s - t| < \delta$ die Ungleichung $|A'(t_{n_k} + s) - A'(t_{n_k} + t)| < \epsilon$ folgt, woraus durch Grenzübergang auch $|g(s) - g(t)| < \epsilon$ erhalten wird. Damit ist die gleichmäßige Stetigkeit von g gezeigt. Jetzt folgt aus Hilfssatz 11, dass $g(t) = g(0) = \eta$ für alle t gilt. Für jedes $u > 0$ gilt

$$A(t_{n_k} + u) - A(t_{n_k}) = uA'(t_{n_k} + \xi_k) = u g_{n_k}(\xi_k)$$

für ein $\xi_k \in (0, u)$. Da g_{n_k} gleichmäßig auf kompakten Mengen konvergiert, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{n_k} + u) - A(t_{n_k}) = u\eta.$$

Da A beschränkt ist und dieser Grenzwert für alle $u > 0$ gilt, muss $\eta = 0$ sein. Somit ist $\limsup_{t \rightarrow \infty} A'(t) = 0$ gezeigt. Analog kann man $\liminf_{t \rightarrow \infty} A'(t) = 0$ zeigen. Somit gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A'(t) = 0.$$

Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t+u) - A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} uA'(t + \xi_t) = 0$$

für alle $u > 0$. Sei jetzt a stetig mit Träger in $[m, m+l]$. Sei $\epsilon > 0$. Es gibt ein stetig differenzierbares b mit Träger in $[m, m+l]$, für das $\sup |a - b| < \frac{\epsilon}{3+3\gamma(l)}$ gilt. Sei $B(t) = b(t) + \int_{-\infty}^t b(t-y) dR(y)$. Es wurde $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t+u) - B(t) = 0$ gezeigt. Es gibt also ein t_0 mit $|B(t+u) - B(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ für $t > t_0$. Wie im Beweis von (b) erhält man $|A(s) - B(s)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $s \geq 0$. Für $t \geq t_0$ folgt nun

$$\begin{aligned} |A(t+u) - A(t)| &\leq |A(t+u) - B(t+u)| + |B(t+u) - B(t)| + |B(t) - A(t)| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist auch $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t+u) - A(t) = 0$ gezeigt. □

Mit diesen Sätzen kann der Erneuerungssatz bewiesen werden. Für $y \geq 0$, definiere man die Verteilungen K_y durch $K_y(t) = R(t+y) - R(y)$. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dK_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) dR(y)$$

für linksreguläre Funktionen g mit kompaktem Träger, wie man mit Hilfe von Riemannsummen leicht sieht. Sei Q eine unbeschränkte Folge in $\mathbb{R}^+$. Wegen $|K_y(t)| \leq \gamma(t)$ für alle y folgt aus Hilfssatz 4 die Existenz einer Verteilung K und einer Teilfolge y_k in Q , sodass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dK_{y_k}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dK(x)$$

für alle linksregulären Funktionen f mit kompaktem Träger, die in den Sprungstellen von K stetig sind, gilt. Man beachte, dass K auf $\mathbb{R}^-$ nicht 0 sein muss. Sei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich 0 ist. Sei

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^{\infty} a(t-x) \, dR(x) = a(t) + \int_{-\infty}^t a(t-x) \, dR(x)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus den im letzten Absatz gezeigten Resultaten erhält man

$$A(y_k + t) = a(y_k + t) + \int_{-\infty}^{\infty} a(t-x) \, dK_{y_k}(x)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(y_k + t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-x) \, dK(x)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Wegen Satz 2.8(c) hängt dieser Grenzwert nicht von t ab. Aus Hilfssatz 6 folgt, dass $K(t) = \alpha t + \beta$ für ein $\alpha \geq 0$ und ein $\beta \in \mathbb{R}$ gilt. Sei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, rechtsreguläre Funktion mit kompaktem Träger, die auf $\mathbb{R}^-$ gleich 0 ist. Sei $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^{\infty} a(t-x) \, dR(x)$ für $t \in \mathbb{R}$. Da man jetzt weiß, dass K keine Sprungstellen hat, folgt wie im letzten Absatz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(y_k + t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-x) \, dK(x)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Wegen $a(y) = 0$ für $y < 0$ und $K(t) = \alpha t + \beta$ folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(y_k + t) = \alpha \int_0^{\infty} a(x) \, dx$$

für $t \in \mathbb{R}$, insbesondere $\lim_{k \rightarrow \infty} A(y_k) = \alpha \int_0^{\infty} a(x) \, dx$. Sei $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton fallend, rechtsregulär und $\int_0^{\infty} a(x) \, dx < \infty$. Sei $a_j = a \cdot 1_{[j, j+1)}$ für $j \geq 0$. Sei $A_j(t) = a_j(t) + \int_{-\infty}^t a_j(t-x) \, dR(x)$ für $t \geq 0$. Wegen Satz 2.3 erfüllt A_j die Erneuerungsgleichung zu a_j . Aus Satz 2.8(a) erhält man $\sup_{t \geq 0} |A_j(t)| \leq d_j$ mit $d_j = a(j)(1 + \gamma(1))$. Wegen $\int_0^{\infty} a(x) \, dx < \infty$ folgt $\sum_{j=1}^{\infty} d_j < \infty$. Mit Hilfe von Hilfssatz 7 folgt, dass $A(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)$ die Erneuerungsgleichung zu a erfüllt und daher die eindeutige auf kompakten Intervallen beschränkte Lösung nach Satz 2.3 ist. Im letzten Absatz wurde $\lim_{k \rightarrow \infty} A_j(y_k) = \alpha \int_0^{\infty} a_j(x) \, dx$ gezeigt. Wegen Hilfssatz 3 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_j(y_k) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} a_j(x) \, dx = \alpha \int_0^{\infty} a(x) \, dx.$$

Für $a = 1 - F$ ist $A = 1$ die auf kompakten Intervallen beschränkte Lösung der Erneuerungsgleichung. Aus dem soeben gezeigten Grenzübergang ergibt sich

$$1 = \alpha \int_0^{\infty} 1 - F(x) \, dx.$$

Da $\int_0^\infty 1 - F(x) \, dx$ der Erwartungswert μ von F ist, folgt $\alpha = \frac{1}{\mu}$.

Würde $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \alpha \int_0^\infty a(x) \, dx$ nicht gelten, dann fände man eine unbeschränkte Folge Q in $\mathbb{R}^+$ und ein $\epsilon > 0$ mit

$$\left| A(t) - \alpha \int_0^\infty a(x) \, dx \right| > \epsilon$$

für alle $t \in Q$. Beginnt man oben mit dieser Folge Q , dann sind alle y_k in Q und man hat einen Widerspruch. Damit ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty a(x) \, dx < \infty$$

gezeigt.

Sind jetzt $a_1, a_2, \dots, a_k$ solche Funktionen und $a = \sum_{j=1}^k c_j a_j$, dann ist $A = \sum_{j=1}^k c_j A_j$ die auf kompakten Intervallen beschränkte Lösung der Erneuerungsgleichung für a , wenn A_j diese Lösung der Erneuerungsgleichung für a_j ist. Da

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_j(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty a_j(x) \, dx$$

für alle j gezeigt wurde, folgt auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty a(x) \, dx,$$

womit der Erneuerungssatz vollständig bewiesen ist.

2.1.2. Methode 2. Die zweite Methode anhand welcher der Erneuerungssatz gezeigt wird, geschieht mit Hilfe von Fouriertransformierten. Dieser Beweis hält sich, in weiten Zügen, an [4] und [2].

DEFINITION 2.9. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann heißt

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \, dx$$

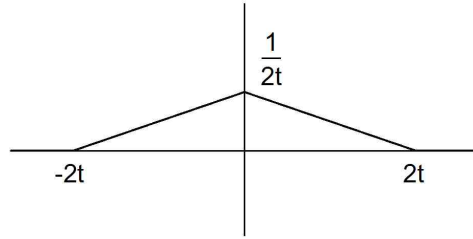
die *Fouriertransformierte* von f .

BEISPIEL. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} 1_{[-t,t]}(y) \, dy = \int_{-t}^t e^{ixy} \, dy = \frac{e^{ixy}}{ix} \Big|_{-t}^t = \frac{2 \sin(xt)}{x}.$$

Sei $\mathcal{X}_t = \frac{1}{2t} 1_{[-t,t]}$. Dann folgt $\hat{\mathcal{X}}_t(x) = \frac{\sin(tx)}{tx}$. Sei $\Delta_t = \mathcal{X}_t * \mathcal{X}_t$. Aus der Faltungsformel für die Fouriertransformation folgt $\hat{\Delta}_t(x) = \left(\frac{\sin(tx)}{tx} \right)^2$. Sei $\Psi_t(x) = \left(\frac{\sin(tx)}{tx} \right)^2$. Aus der Umkehrformel für die Fouriertransformation erhält man $\hat{\Psi}_t(x) = 2\pi \Delta_t(x)$. Man berechnet, dass gilt:

$$\Delta_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq -2t \\ \frac{1}{4t^2}x + \frac{1}{2t}, & \text{für } -2t \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{4t^2}x + \frac{1}{2t}, & \text{für } 0 \leq x \leq 2t \\ 0, & \text{für } x \geq 2t \end{cases}$$

ABBILDUNG 2.1. Darstellung von $\Delta_t(x)$.

Um den Beweis des Erneuerungssatzes führen zu können, werden zuerst noch einige Standardresultate über Verteilungsfunktionen und Fouriertransformierte ohne Beweis angegeben.

HILFSSATZ 12. Sei $F_t(x) = F(x+t)$ und $G(t) = \int_{-\infty}^t f(x) \, dF(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int g(x) \, dF_t(x) &= \int g(x-t) \, dF(x) \text{ und} \\ \int g(x) \, dG(x) &= \int g(x)f(x) \, dF(x). \end{aligned}$$

HILFSSATZ 13. Sei $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ und g beschränkt auf einem beschränkten Intervall I . Dann gilt

$$\int_I g(x) \, dF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I g(x) \, dF_n(x).$$

HILFSSATZ 14. (a) Sei f integrierbar, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(t) = 0$

(b) Sei $f : [-\pi c, \pi c] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\hat{f}(n) = \int_{-\pi c}^{\pi c} e^{in\frac{1}{c}x} f(x) \, dx$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$.

HILFSSATZ 15. Sei $h(x) = \int e^{ixy} \, dF(y)$ und F eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent, wobei $c := \frac{1}{d}$ gilt:

- (a) h hat Periode $2\pi c$.
- (b) $h(2\pi c) = 1$.
- (c) F ist auf $\mathbb{Z}_d$ verteilt.

HILFSSATZ 16. Seien F, F_n Verteilungen mit $\int_{\mathbb{R}} dF(x) < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}} dF_n(x) < \infty$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\int e^{itx} \, dF_n(x) \rightarrow \int e^{itx} \, dF(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\int \Psi(x) \, dF_n(x) \rightarrow \int \Psi(x) \, dF(x)$ für alle stetigen Ψ mit kompaktem Träger und $\int_{\mathbb{R}} dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dF(x)$.
- (c) $\int 1_{[a,b]}(x) \, dF_n(x) \rightarrow \int 1_{[a,b]}(x) \, dF(x)$ für alle a, b mit $a < b$ und F in a, b stetig, und $\int_{\mathbb{R}} dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dF(x)$.
- (d) $F_n(a) \rightarrow F(a)$ für alle a in denen F stetig ist, und $\int_{\mathbb{R}} dF_n(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} dF(x)$.

HILFSSATZ 17. Sei $h(x) = \int e^{ixy} dF(y)$ für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung F für die der Erwartungswert $\mu = \int x dF(x)$ existiert. Sei $h(x) \neq 1$ für $0 < |x| \leq b$. Dann gilt:

- (a) $\int_{-b}^b \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-h(x)} \right) dx < \infty$.
- (b) für alle Ψ mit Träger $\subset [-b, b]$ gilt

$$\lim_{r \uparrow 1} \int \Psi(x) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-rh(x)} \right) dx = \frac{\pi}{\mu} \Psi(0) + \int \Psi(x) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-h(x)} \right) dx.$$

Es wird nun mit dem eigentlichen Beweis des Erneuerungssatzes begonnen:

BEWEIS. Der Beweis lässt sich in sieben Schritte zerlegen:

- (i) Sei $\mathcal{H} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists c > 0 \text{ mit } |f(x)| \leq c \min(1, \frac{1}{x^2}) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Für eine Funktion $f \in \mathcal{H}$ gelten folgende Aussagen:

- (a) $f(x+t) \in \mathcal{H}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (b) $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dR(x) < \infty$.
- (c) $\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dR(x) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

BEWEIS. (a) Dies folgt aufgrund von $\frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{4}{x^2}$, falls $|x| \geq 2|t|$.

(b) Aufgrund der Voraussetzung, dass R auf $\mathbb{R}^-$ gleich 0 ist, und Satz 2.4 gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dR(x) &= \int_{[0, \infty)} |f(x)| dR(x) \\ &\leq c \int_{[0, \infty)} \min\left(1, \frac{1}{x^2}\right) dR(x) \\ &\leq c \sum_{n=-1}^{\infty} \int_{(n, n+1]} \min\left(1, \frac{1}{n^2}\right) dR(x) \\ &\leq c \sum_{n=-1}^{\infty} \min\left(1, \frac{1}{n^2}\right) \gamma(1) < \infty, \end{aligned}$$

wobei γ wie in Satz 2.4 ist. Somit wurde gezeigt dass sich jede Funktion $f \in \mathcal{H}$ mit R integrieren lässt.

(c) Wie bereits vorher in (b) gezeigt, folgt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dR(x) \leq c \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(t+n)^2} \gamma(1) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

□

- (ii) Sei $g_0(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sin(c_0 x)}{c_0 x}\right)^2$ mit $c_0 \notin \mathbb{Q}$. Dann gilt $g_0(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt $g_0 \in \mathcal{H}$ und g_0 ist stetig bei 0. Weiters ist $\hat{g}_0 = 2\pi\Delta_1 + 2\pi\Delta_{c_0}$ stetig und hat kompakten Träger (siehe Beispiel Seite 31).

Sei $\mathcal{G} = \{x \mapsto e^{isx} g_0(x) \mid s \in \mathbb{R}\}$. Für $g(x) = e^{isx} g_0(x)$ in $\mathcal{G}$ gilt $g \in \mathcal{H}$ und $\hat{g}(y) = \hat{g}_0(y + s)$ stetig mit kompaktem Träger. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \hat{g}(y) \, dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \hat{g}_0(y + s) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(z-s)} \hat{g}_0(z) \, dz \\ &= e^{ixs} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz} (\Delta_1(z) + \Delta_{c_0}(z)) \, dz \\ &= e^{ixs} \underbrace{g_0(-x)}_{=g_0(x)} = g(x). \end{aligned}$$

- (iii) Wegen Satz 2.3 gilt $A(t) = a(t) + \int_{\mathbb{R}} a(t-x) \, dR(x)$. Sei $a \in \mathcal{G}$. Wegen $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ folgt $a \in \mathcal{H}$ und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$. Außerdem gilt aufgrund von (i), dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t+x) \, dR(x) = 0$. Somit folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t-x) + a(t+x) \, dR(x).$$

Sei $g(x) = a(t-x) + a(t+x)$ für festes t und sei $R_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n F_n(x)$ für $r \in (0, 1]$. Es gilt klarerweise $R_1(x) = R(x)$. Da $a \in \mathcal{H}$, folgt aus (i), dass auch $g \in \mathcal{H}$ gilt. Wegen Hilfssatz 13 erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left| \int g(x) \, dF_n(x) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 1 \int |g(x)| \, dF_n(x) \\ &= \int |g(x)| \, dR(x) < \infty. \end{aligned}$$

Daraus und wieder aus Hilfssatz 13 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{r \uparrow 1} \int g(x) \, dR_r(X) &= \lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int g(x) \, dF_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int g(x) \, dF_n(x) \\ &= \int g(x) \, dR(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei für Gleichung (2.7) der Satz über dominierte Konvergenz angewendet wurde.

- (iv) Sei $h(x) = \int e^{ixy} \, dF(y)$. Dann folgt $h(x)^n = \int e^{ixy} \, dF_n(y)$ aus dem Faltungssatz für Fouriertransformierte. Sei $a \in \mathcal{G}$. Dann hat $\hat{a}$ wegen (ii) kompakten Träger.

Man setze $F_0(x) = 1_{[0,\infty)}$.

$$\begin{aligned}
2a(t) + \int a(t-x) + a(t+x) \, dR_r(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int a(t-x) + a(t+x) \, dF_n(x) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(t-x)y} \hat{a}(y) \, dy dF_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(t+x)y} \hat{a}(y) \, dy dF_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int \frac{1}{2\pi} e^{-ity} \hat{a}(y) \underbrace{\int e^{ixy} \, dF_n(x)}_{h(y)^n} dy + \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int \frac{1}{2\pi} e^{-ity} \hat{a}(y) \underbrace{\int e^{-ixy} \, dF_n(x)}_{\overline{h(y)^n}} dy
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{2\pi} e^{-ity} \hat{a}(y) \left(\frac{1}{1-rh(y)} \right) dy + \int \frac{1}{2\pi} e^{-ity} \hat{a}(y) \left(\frac{1}{1-r\overline{h(y)}} \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int e^{-ity} \hat{a}(y) 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-rh(y)} \right) dy.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Man beachte dass das Vertauschen der Integrale in (2.8) wegen des kompakten Trägers von $\hat{a}$ möglich ist. In (2.9) wurden Summe und Integral erneut vertauscht, was aufgrund des kompakten Trägers von $\hat{a}$ und wegen $|r| < 1$ und $|h(y)| \leq 1$ möglich ist. Somit folgt mit Schritt (iii)

$$2a(t) + \int a(t-x) + a(t+x) \, dR(x) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{\pi} \int e^{-ity} \hat{a}(y) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-rh(y)} \right) dy.$$

(v) Sei F zuerst keine Gitterverteilung. Aus Hilfssatz 15 folgt $h(x) \neq 1$ für alle $x \neq 0$. Sei $b > 0$ so, dass der Träger von $\hat{a}$ in $[-b, b]$ enthalten ist. Dann gilt $h(x) \neq 1$ für $0 < |x| \leq b$. Somit sind die Voraussetzungen für Hilfssatz 17 gegeben. Angewendet, ergibt dies

$$2a(t) + \int a(t-x) + a(t+x) \, dR(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{\mu} \hat{a}(0) + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int e^{-ity} \hat{a}(y) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-h(y)} \right) dy}_I. \tag{2.10}$$

Da $\hat{a}$ stetig ist und Träger in $[-b, b]$ besitzt, ist $y \mapsto \hat{a}(y) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-h(y)} \right)$ integrierbar wegen Hilfssatz 17(a). Aus Hilfssatz 14 folgt wiederum dass die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion im ∞ verschwindet, woraus $I \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ folgt. Außerdem gilt wegen $a \in \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ wie bereits in (iii) gezeigt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t+x) \, dR(x) = 0.$$

Führt man den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ in (2.10) durch, und berücksichtigt wie $\hat{a}(0)$ definiert ist, so erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t-x) \, dR(x) = \frac{1}{\mu} \hat{a}(0) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dx.$$

- (vi) Sei F nun eine Gitterverteilung mit Gitterweite d . Sei $c = \frac{1}{d}$ und $b = \pi c$. Dann folgt wegen Hilfssatz 15, $h(x) \neq 1$ für $0 < |x| \leq b$. Sei

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}(x + 2\pi kc).$$

Aufgrund des kompakten Trägers von $\hat{a}$ ist diese Summe endlich. Wegen (iv) folgt

$$2a(nd) + \int a(nd - x) + a(nd + x) \, dR(x) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi c}^{\pi c} e^{indy} f(y) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - rh(y)} \right) dy,$$

da $y \mapsto e^{-indy}$ und h Periode $2\pi c$ haben (Hilfssatz 15). Wie bereits in (v) gesehen, folgt hier ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int a(nd - x) \, dR(x) = \frac{1}{\mu} f(0). \quad (2.11)$$

Außerdem ergibt sich

$$a(nd) \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2\pi} \int e^{-indx} \hat{a}(x) \, dx = \frac{c}{2\pi c} \int_{-\pi c}^{\pi c} e^{-indx} f(x) \, dx,$$

wodurch sich die Fourierreihe

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi inct} \frac{1}{c} a(nd)$$

aufgrund der Stetigkeit von f ergibt. Durch Einsetzen von

$$f(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c} a(nd)$$

in (2.11), erhält man schlussendlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int a(nd - x) \, dR(x) = \frac{d}{\mu} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a(nd).$$

- (vii) Zusammengefasst, wurde in (v) und (vi) gezeigt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t - x) \, dR(x) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dV(x), \text{ wobei } a \in \mathcal{G} \text{ und}$$

$$V(x) = x, \quad \text{wenn } F \text{ keine Gitterverteilung ist}$$

$$V(x) = d \left\lceil \frac{x}{d} \right\rceil, \quad \text{wenn } F \text{ Gitterweite } d \text{ hat}$$

Im 2. Fall läuft t dann nur durch $\mathbb{Z}_d$. Sei $R_t(x) := R(x - t)$ und

$$\tilde{R}_t(y) = \int_{(-\infty, y]} g_0(-x) \, dR_t(x),$$

$$\tilde{V}(y) = \int_{(-\infty, y]} g_0(x) \, dV(x).$$

Es wurde bereits gezeigt dass für

$$a(y) = e^{isy} g_0(y) \in \mathcal{G},$$

aufgrund von Hilfssatz 12

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int e^{-isx} d\tilde{R}_t(x) = \frac{1}{\mu} \int e^{isx} d\tilde{V}(x)$$

gilt. Außerdem gilt wegen (i) und der Tatsache, dass $g_0 \in \mathcal{H}$

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{R}_t(x) = \int g_0(t-x) dR(x) < \infty$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} d\tilde{V}(x) = \int g_0(x) dV(x) < \infty.$$

Sei nun Ψ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt dies auch für $\frac{\Psi}{g_0}$ wegen der Stetigkeit von g_0 und $g_0 > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Aus Hilfssatz 16 folgt dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \frac{\Psi(-x)}{g_0(-x)} d\tilde{R}_t(x) = \frac{1}{\mu} \int \frac{\Psi(x)}{g_0(x)} d\tilde{V}(x).$$

Somit gilt für alle stetigen Ψ mit kompaktem Träger

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \Psi(-x) dR_t(x) = \frac{1}{\mu} \int \Psi(x) dV(x),$$

aufgrund von Hilfssatz 12. Wegen Hilfssatz 16 gilt diese Aussage auch für $\Psi_n = 1_{[n\delta, (n+1)\delta)}$, wobei d und δ rational unabhängig sind. Dann ist V in nd stetig für alle n . Sei $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \Psi_n$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$. Wegen

$$\left| \int \Psi_n(-x) dR_t(x) \right| = \left| \int \Psi_n(t-x) dR(x) \right| \leq \gamma(\delta)$$

und

$$\left| \int \Psi_n(x) dV(x) \right| \leq \delta$$

folgt

$$\begin{aligned} \int \sum_{|n| \leq N} c_n \Psi_n(-x) dR_t(x) - C(\delta) \sum_{|n| \geq N} |c_n| &\leq \int a(-x) dR_t(x) \\ &\leq \int \sum_{|n| \leq N} c_n \Psi_n(-x) dR_t(x) + C(\delta) \sum_{|n| \geq N} |c_n|. \end{aligned}$$

Lässt man $t \rightarrow \infty$ laufen, dann erhält man

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{1}{\mu} \int \sum_{|n| \leq N} c_n \Psi_n(x) dV(x)}_{\rightarrow \int a(x) dV(x)} - \underbrace{C(\delta) \sum_{|n| \geq N} |c_n|}_{\rightarrow 0} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int a(-x) dR_t(x) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\mu} \int \sum_{|n| \leq N} c_n \Psi_n(x) dV(x)}_{\rightarrow \int a(x) dV(x)} + \underbrace{C(\delta) \sum_{|n| \geq N} |c_n|}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(-x) \, dR_t(x) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dV(x)$$

für alle $a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \Psi_n$. Die positiven, monoton fallenden Riemann-integrierbaren Funktionen a sind genau die, die sich zwischen Funktionen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n$ beliebig genau einschließen lassen; also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(-x) \, dR_t(x) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dV(x),$$

für diese Funktionen a , das heißt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int a(t-x) \, dR(x) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dV(x).$$

Da

$$A(t) = a(t) + \int a(t-x) \, dR(x)$$

für die Lösung A der zu a gehörigen Erneuerungsgleichung nach Satz 2.3 gilt, und $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ ist, ist $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\mu} \int a(x) \, dV(x)$ gezeigt.

□

2.2. Folgerungen aus dem Erneuerungssatz

In diesem Abschnitt werden Anwendungen und Folgerungen aus dem Erneuerungssatz dargelegt. Die Sätze und deren Beweise halten sich, in weiten Zügen, an [7] und [5].

SATZ 2.10. *Sei F eine Lebensdauerverteilung, sodass $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$ und $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, dF(x)$ endlich sind. Dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(R(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\alpha}{2\mu^2} - 1,$$

falls F keine Gitterverteilung ist.

BEWEIS. Sei

$$A(t) = \mu R(t) - t$$

für $t \geq 0$. Wegen Satz 1.13(a) ist A auf kompakten Intervallen beschränkt. In Satz 1.13(c) wurde

$$R(t) = F(t) + \int_{-\infty}^t R(t-x) \, dF(x)$$

für $t \geq 0$ gezeigt. Daraus folgt

$$A(t) + t = \mu F(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) + t - x \, dF(x).$$

Man erhält die Erneuerungsgleichung

$$A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) \, dF(x)$$

mit

$$a(t) = \mu F(t) - t + \int_{-\infty}^t t - x \, dF(x).$$

Mit Hilfe von $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$ folgt

$$a(t) = -\mu(1 - F(t)) - \int_{-\infty}^{\infty} t - x \, dF(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, t - x) \, dF(x).$$

Wegen $\max(0, y) - y = \max(0, -y)$ folgt

$$a(t) = -\mu(1 - F(t)) + \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, x - t) \, dF(x).$$

Man sieht, dass a eine Linearkombination von zwei monoton fallenden Funktionen ist, von denen die eine rechtsregulär und die andere stetig ist. Die Integrale dieser Funktion sind

$$\int_0^{\infty} 1 - F(t) \, dt = \mu$$

und

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \max(0, x - t) \, dF(x) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^x x - t \, dt \, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2} \, dF(x) = \frac{\alpha}{2},$$

wobei der Satz von Fubini verwendet wurde. Es folgt

$$\int_0^\infty a(t) \, dt = \frac{\alpha}{2} - \mu^2.$$

Aus dem Erneuerungssatz 2.2 erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{\alpha}{2\mu} - \mu.$$

Damit ist gezeigt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) - \frac{t}{\mu} = \frac{\alpha}{2\mu^2} - 1$$

gilt. □

SATZ 2.11. *Sei $(S_k)_{k \geq 0}$ ein Erneuerungsprozess mit einer Lebensdauerverteilung F für die $\mu = \int_{-\infty}^\infty x \, dF(x) < \infty$ gilt. Sei $\gamma_t = S_{N_t+1} - t$ die Restlebensdauer und $G_t(s) = P(\gamma_t > s)$, sodass $1 - G_t$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von γ_t ist. Wenn F keine Gitterverteilung ist, dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_t(s) = \frac{1}{\mu} \int_s^\infty 1 - F(y) \, dy$$

für $s > 0$.

BEWEIS. Für $t \geq 0$ und $s \geq 0$ gilt unter Verwendung der Definition von N_t

$$\begin{aligned} G_t(s) &= P(S_{N_t+1} > s + t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_{N_t+1} > s + t, N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_{k+1} > s + t, S_k \leq t < S_{k+1}) \\ &= P(X_1 > s + t) + \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t, S_{k+1} > s + t). \end{aligned}$$

Sei $U = X_2 + \dots + X_k$. Die Verteilung von U ist F_{k-1} , während X_1 und X_{k+1} Verteilung F haben. Die Zufallsvariablen X_1 , U und X_{k+1} sind unabhängig. Für $k \geq 2$ gilt $S_k = X_1 + U$ und $S_{k+1} = X_1 + U + X_{k+1}$. Weiters ist $\{S_k \leq t, S_{k+1} > s + t\}$ äquivalent zu $\{(X_1, U, X_{k+1}) \in C\}$ mit $C = \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq t, 0 \leq u \leq t - x, v > s + t - u - x\}$. Damit erhält man

$$P(S_k \leq t, S_{k+1} > s + t) = \int_0^t \int_0^{t-x} 1 - F(s + t - u - x) \, dF_{k-1}(u) \, dF(x).$$

Für $k = 1$ ist $U = 0$, sodass $P(S_1 \leq t, S_2 > s + t) = \int_0^t 1 - F(s + t - x) \, dF(x)$ durch ähnliche Überlegungen folgt. Weiters ist für $k \geq 2$ das Ereignis $\{S_{k-1} \leq t - x, S_k > s + t - x\}$ äquivalent zu $\{(S_{k-1}, X_k) \in D\}$ mit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq t - x, v > s + t - u - x\}$. Da F_{k-1} auch die Verteilung von S_{k-1} ist und F die von X_k , und da

S_{k-1} von X_k unabhängig ist, folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{t-x} 1 - F(s+t-u-x) \, dF_{k-1}(u) &= P(S_{k-1} \leq t-x, S_k > s+t-x) \\ &= P(S_{N_{t-x}+1} > s+t-x, N_{t-x} = k-1). \end{aligned}$$

Für $k=1$ gilt $1 - F(s+t-x) = P(S_1 > s+t-x) = P(S_{N_{t-x}+1} > s+t-x, N_{t-x} = 0)$. Setzt man das oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned} G_t(s) &= 1 - F(s+t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} P(S_{N_{t-x}+1} > s+t-x, N_{t-x} = k-1) \, dF(x) \\ &= 1 - F(s+t) + \int_0^t P(S_{N_{t-x}+1} > s+t-x) \, dF(x) \\ &= 1 - F(s+t) + \int_0^t P(\gamma_{t-x} > s) \, dF(x) \\ &= 1 - F(s+t) + \int_0^t G_{t-x}(s) \, dF(x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Setzt man $A(t) = G_t(s)$ und $a(t) = 1 - F(s+t)$, dann ist die Erneuerungsgleichung $A(t) = a(t) + \int_{-\infty}^t A(t-x) \, dF(x)$ gezeigt. Die Funktion a ist monoton fallend, rechtsregulär und es gilt

$$\int_0^{\infty} a(t) \, dt = \int_0^{\infty} 1 - F(s+t) \, dt = \int_s^{\infty} 1 - F(y) \, dy \leq \mu < \infty.$$

Die Funktion A ist durch 1 beschränkt. Aus dem Erneuerungssatz erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_t(s) = \frac{1}{\mu} \int_s^{\infty} 1 - F(y) \, dy.$$

□

SATZ 2.12. *Sei $(S_k)_{k \geq 0}$ ein Erneuerungsprozess mit einer Lebensdauerverteilung F für die $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) < \infty$ gilt. Sei $\delta_t = t - S_{N_t}$ das Alter der zum Zeitpunkt t in Betrieb stehenden Glühbirne. Dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\delta_t \geq s) = \frac{1}{\mu} \int_s^{\infty} 1 - F(y) \, dy$$

für $s > 0$, wenn F keine Gitterverteilung ist.

BEWEIS. Seien s und r in $\mathbb{R}^+$ und $t > s$. In den folgenden Äquivalenzumformungen wird außer Satz 1.3 vor allem die Tatsache verwendet, dass N_t ganzzahlig und monoton

in t ist.

$$\begin{aligned}
\delta_t \geq s, \gamma_t > r &\Leftrightarrow S_{N_t} \leq t - s, S_{N_t+1} > r + t \\
&\Leftrightarrow N_t \leq N_{t-s}, N_t + 1 > N_{r+t} \\
&\Leftrightarrow N_t = N_{t-s}, N_t = N_{r+t} \\
&\Leftrightarrow N_{t-s} = N_{r+t} \\
&\Leftrightarrow N_{t-s} + 1 > N_{r+t} \\
&\Leftrightarrow S_{N_{t-s}+1} > r + t \\
&\Leftrightarrow S_{N_{t-s}+1} - t + s > r + s \\
&\Leftrightarrow \gamma_{t-s} > r + s
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\delta_t \geq s, \gamma_t > r) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_{t-s} > r + s) = \frac{1}{\mu} \int_{r+s}^{\infty} 1 - F(y) \, dy$$

wegen Satz 2.11. Da $\gamma_t > 0$ immer gilt, folgt das gewünschte Resultat, indem man $r = 0$ setzt. $\square$

2.3. Ein zentraler Grenzwertsatz

Bisher wurde nur der Erwartungswert $R(t)$ der Anzahl der Erneuerungen N_t im Zeitintervall $[0, t]$ untersucht. Nun beschäftigt man sich mit der asymptotischen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen N_t , wenn t gegen ∞ geht.

Ist $(S_n)_{n \geq 1}$ ein Erneuerungsprozess mit Lebensdauerverteilung F , dann ist S_n eine Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen, die alle die Wahrscheinlichkeitsverteilung F haben. Seien μ und σ Erwartungswert und Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung F , also $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x)$ und $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \, dF(x)$. Es gilt $\mu > 0$, da F eine Lebensdauerverteilung ist. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq y\right) = \Phi(y)$$

gilt, wobei $\sigma > 0$ vorausgesetzt wird und Φ die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Standardnormalverteilung ist. Mit Hilfe dieses Grenzwertsatzes für die Zufallsvariablen S_n wird ein Grenzwertsatz für die Anzahl der Erneuerungen N_t im Zeitintervall $[0, t]$ bewiesen.

SATZ 2.13. *Sei $\mu < \infty$ und $0 < \sigma < \infty$. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{t\mu^{-3}}} \leq y\right) = \Phi(y)$ für $y \in \mathbb{R}$.*

BEWEIS. Sei $z \in \mathbb{R}$ fest. Für $t > 0$ sei $k(t) = \left\lceil \frac{t}{\mu} + z\sqrt{t} \right\rceil$ und $z(t) = \frac{k(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} \geq z(t)\right) &= P\left(N_t \geq z(t)\sqrt{t} + \frac{t}{\mu}\right) = P(N_t \geq k(t)) = P(S_{k(t)} \leq t) \\
&= P\left(\frac{S_{k(t)} - k(t)\mu}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq \frac{t - k(t)\mu}{\sigma\sqrt{k(t)}}\right).
\end{aligned}$$

Genauso berechnet man

$$P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} \geq z(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = P\left(\frac{S_{k(t)+1} - (k(t) + 1)\mu}{\sigma\sqrt{k(t) + 1}} \leq \frac{t - (k(t) + 1)\mu}{\sigma\sqrt{k(t) + 1}}\right).$$

Aus $k(t) \geq \frac{t}{\mu} + z\sqrt{t} - 1$ erhält man

$$\frac{t - k(t)\mu}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq \frac{\mu(1 - z\sqrt{t})}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + z\sqrt{t} - 1}}$$

und aus $k(t) \leq \frac{t}{\mu} + z\sqrt{t}$ ergibt sich

$$\frac{t - (k(t) + 1)\mu}{\sigma\sqrt{k(t) + 1}} \geq \frac{\mu(-1 - z\sqrt{t})}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu} + z\sqrt{t} + 1}}.$$

Berechnet man den Grenzwert dieser Brüche für $t \rightarrow \infty$, so sieht man, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein t_0 existiert mit

$$\frac{t - k(t)\mu}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq -\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} + \epsilon$$

und

$$\frac{t - (k(t) + 1)\mu}{\sigma\sqrt{k(t) + 1}} \geq -\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} - \epsilon$$

für alle $t \geq t_0$. Wegen $z(t) \leq z$ erhält man für $t \geq t_0$ aus obigen Abschätzungen

$$P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} > z\right) \leq P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} \geq z(t)\right) \leq P\left(\frac{S_{k(t)} - k(t)\mu}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq -\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} + \epsilon\right).$$

Wegen des zentralen Grenzwertsatzes konvergiert der letzte Ausdruck für $t \rightarrow \infty$ gegen $\Phi(-\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} + \epsilon)$. Weiters folgt wegen $z(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} > z$ aus obigen Abschätzungen, wenn $t \geq t_0$ ist

$$P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} > z\right) \geq P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} \geq z(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \geq P\left(\frac{S_{k(t)+1} - (k(t) + 1)\mu}{\sigma\sqrt{k(t) + 1}} \leq -\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} - \epsilon\right).$$

Der zuletzt erhaltene Ausdruck konvergiert für $t \rightarrow \infty$ wegen des zentralen Grenzwertsatzes gegen $\Phi(-\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} - \epsilon)$. Damit erhält man

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} > z\right) \leq \Phi\left(-\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} + \epsilon\right)$$

und

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} > z\right) \geq \Phi\left(-\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma} - \epsilon\right).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, existiert der Grenzwert und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{t}} > z\right) = \Phi\left(-\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{z\sqrt{\mu^3}}{\sigma}\right).$$

Setzt man $z = \frac{\sigma y}{\sqrt{\mu^3}}$, so folgt die Behauptung.

□

KAPITEL 3

Verallgemeinerungen und Variationen des Erneuerungsprozesses

In diesem Kapitel werden Verallgemeinerungen und Variationen von Erneuerungsprozessen präsentiert. Die Darstellung hält sich, in weiten Zügen, an [7] und [3].

3.1. Zeitverzögerter Erneuerungsprozess

Es seien X_k für $k > 0$ unabhängige, positive Zufallsvariablen. Jedoch haben in diesem Fall nur $X_2, X_3, \dots$ dieselbe Verteilung mit Verteilungsfunktion F , während X_1 eine andere Verteilungsfunktion F^D besitzt. Sei $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ und $N^D(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$. In dem Fall spricht man von einem *zeitverzögerten Erneuerungsprozess*.

Dieser besitzt alle Voraussetzungen eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses bis auf die Tatsache, dass die Wartezeit vom Start bis zur ersten Erneuerung eine andere Verteilung besitzt als alle anderen Wartezeiten. Eine Möglichkeit für einen zeitverzögerten Erneuerungsprozess wäre der Fall, wenn eine Erneuerung vor dem Zeitpunkt $t = 0$ stattgefunden hätte, und deswegen die Komponente zu Anfang des Prozesses nicht neu wäre. Somit wäre die Lebensdauer geringer und die Verteilung nicht dieselbe wie die Verteilung der folgenden Erneuerungen. Angenommen, die Zeitmessung würde erst γ Zeiteinheiten nach dem Start eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses beginnen, dann hätte die Wartezeit bis zur ersten Erneuerung nach dem Nullpunkt die Verteilung der Restlebenszeit zum Zeitpunkt γ eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses.

BEMERKUNG. Ein weiteres Beispiel für einen zeitverzögerten Erneuerungsprozess ist der Geigerzähler in Kapitel 5. Dieser benötigt beim Einschalten eine Anlaufzeit weswegen seine erste Registrierung verzögert wird.

Unterschieden wird zwischen

$$R^D(t) = E(N^D(t)),$$

dem Erwartungswert der Anzahl der Erneuerungen im zeitverzögerten Prozess und

$$R(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t),$$

der der Verteilung F zugeteilten Erneuerungsfunktion. Da unbekannt ist, ob die erste Erneuerung zum Zeitpunkt t bereits stattfand, wird dieses Problem wie folgt gelöst:

$$E(N^D(t)|X_1 = x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x > t, \\ 1 + R(t - x), & \text{für } x \leq t. \end{cases}$$

Durch das Anwenden des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich somit

$$\begin{aligned} R^D(t) &= \int_0^\infty E(N^D(t)|X_1 = x) \, dF^D(x) \\ &= \int_0^t 1 + R(t-x) \, dF^D(x) \\ &= F^D(t) + \int_0^t R(t-x) \, dF^D(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$= F^D(t) + \int_0^t F^D(t-x) \, dR(x). \quad (3.2)$$

Aufgrund von Satz 2.3 folgt aus (3.2), dass $R^D(t)$ die eindeutige Lösung der Erneuerungsgleichung

$$R^D(t) = F^D(t) + \int_0^t R^D(t-x) \, dF(x) \quad (3.3)$$

ist. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass für $R^D(t)$ der Erneuerungssatz angewendet werden kann unter der Annahme, dass F keine Gitterverteilung ist. Mit Gitterverteilung verläuft der Beweis analog. Man bedient sich, für beliebige t , der Gleichung (3.1)

$$R^D(t) = F^D(t) + \int_0^t R(t-x) \, dF^D(x).$$

Für $t > h$ gilt dann

$$R^D(t-h) = F^D(t-h) + \int_0^{t-h} R(t-h-x) \, dF^D(x).$$

Da $R(x) = 0$ gilt für $x < 0$, ergibt die Differenz dieser Gleichungen

$$R^D(t) - R^D(t-h) = F^D(t) - F^D(t-h) + \int_0^t R(t-x) - R(t-h-x) \, dF^D(x).$$

Aus dem Beispiel von Seite 19 folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (R(t-x) - R(t-h-x)) = \frac{h}{\mu}$$

für alle $x \geq 0$ und es gilt

$$0 \leq R(t-x) - R(t-h-x) \leq \gamma(h).$$

Aus dem Satz über dominierte Konvergenz folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (R(t-x) - R(t-h-x)) \, dF^D(x) = \int_0^\infty \frac{h}{\mu} \, dF^D(x) = \frac{h}{\mu}.$$

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F^D(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F^D(t-h)$$

folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (R^D(t-x) - R^D(t-h-x)) = \frac{h}{\mu}.$$

Zusammengefasst ergibt das

SATZ 3.1. Sei $R^D(t)$ ein zeitverzögerter Erneuerungsprozess mit $\mu = E(X_2)$. Besitzt F keine Gitterverteilung, dann gilt für beliebige h

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (R^D(t) - R^D(t-h)) = \frac{h}{\mu}. \quad (3.4)$$

BEMERKUNG. Besitzt F eine Gitterverteilung mit Gitterweite λ so gilt (3.4) falls h ein Mehrfaches von λ ist.

3.2. Stationärer Erneuerungsprozess

Einen zeitverzögerten Erneuerungsprozess, welcher die Verteilungsfunktion

$$F^D(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) \, dy$$

für X_1 besitzt, nennt man *stationären Erneuerungsprozess*. Es wird versucht einen Erneuerungsprozess zu entwickeln, welcher unendlich weit in der Vergangenheit begonnen hat, sodass die Restlebensdauer des in Betrieb stehenden Items zum Zeitpunkt $t = 0$ die Grenzverteilung der Restlebenszeit eines gewöhnlichen Erneuerungsprozesses besitzt. F^D wird als diese Grenzverteilung angenommen und es wird gezeigt, dass

$$R^D(t) = E(N^D(t)) \equiv \frac{t}{\mu}$$

und

$$P(\gamma_t^D \leq x) = F^D(x)$$

für alle t gelten. Wie bereits in (3.3) gezeigt, erfüllt $R^D(t)$ die Erneuerungsgleichung

$$R^D(t) = F^D(t) + \int_0^t R^D(t-x) \, dF(x). \quad (3.5)$$

Aufgrund der Eindeutigkeit dieser Lösung, muss nur noch überprüft werden, dass (3.5) für $R^D(t) \equiv \frac{t}{\mu}$ erfüllt ist. Man erhält

$$\begin{aligned} F^D(t) + \int_0^t R^D(t-x) \, dF(x) &= \mu^{-1} \int_0^t (1 - F(x)) \, dx + \mu^{-1} \int_0^t (t-x) \, dF(x) \\ &= \mu^{-1}t + \mu^{-1} \left(\int_0^t (t-x) \, dF(x) - \int_0^t F(y) \, dy \right) \\ &= \mu^{-1}t. \end{aligned}$$

Dass der Klammerausdruck null ist, kann anhand einer partiellen Integration gezeigt werden. Somit ist die Gleichung $R^D(t) \equiv \frac{t}{\mu}$ bewiesen. Dieselbe Vorgehensweise wird jetzt angewendet, um

$$P(\gamma_t^D \leq x) = F^D(x)$$

für alle x zu zeigen, wobei γ_t^D die Restlebensdauer des zeitverzögerten, stationären Erneuerungsprozesses ist. Sei

$$G_t^D(x) = P(\gamma_t^D > x) \quad \text{und} \quad G_t(x) = P(\gamma_t > x),$$

wobei γ_t die Restlebensdauer des Erneuerungsprozesses ist. Wie im Beweis von Satz 2.11 zeigt man

$$G_t^D(x) = 1 - F^D(t+x) + \int_0^t G_{t-y}(x) \, dF^D(y)$$

beziehungsweise

$$G_t^D(x) = 1 - F^D(t+x) + F^D * G_t(x). \quad (3.6)$$

Die Erneuerungsgleichung

$$G_t(x) = 1 - F(t+x) + F * G_t(x)$$

wurde bereits in (2.12) gezeigt. Aufgrund von Satz 2.3 hat die Lösung dieser Erneuerungsgleichung die Form

$$G_t(x) = g_t(x) + R * g_t(x), \quad (3.7)$$

mit

$$g_t(x) = 1 - F(t+x).$$

Setzt man nun (3.7) in (3.6) ein und beherrzt, dass laut (3.2)

$$R^D(t) = F^D(t) + F^D * R(t)$$

gilt, erhält man

$$\begin{aligned} G_t^D(x) &= 1 - F^D(t+x) + F^D * g_t(x) + F^D * R * g_t(x) \\ &= 1 - F^D(t+x) + R^D(t) * g_t(x) \\ &= 1 - F^D(t+x) + \int_0^t g_{t-y}(x) \, dR^D(y). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Wegen $g_{t-y}(x) = 1 - F(t+x-y)$ und $R^D(y) \equiv \frac{y}{\mu}$ gilt $dR^D(y) = \mu^{-1}dy$. Durch Einsetzen in (3.8) folgt daher

$$\begin{aligned} G_t^D(x) &= 1 - F^D(t+x) + \mu^{-1} \int_0^t (1 - F(t+x-y)) \, dy \\ &= 1 - F^D(t+x) + \mu^{-1} \int_x^{t+x} (1 - F(u)) \, du \\ &= 1 - F^D(t+x) + F^D(t+x) - F^D(x) \\ &= 1 - F^D(x) \end{aligned}$$

womit alles gezeigt ist.

3.3. Zusammenhängender Prozess

Man nehme an, zur i -ten Einheit oder i -ten Lebenszeit gehöre zusätzlich zu X_i eine zweite Zufallsvariable Y_i welche identisch verteilt ist. Eine Abhängigkeit zwischen X_i und Y_i ist erlaubt, jedoch nimmt man an, dass die Paare $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$ unabhängig sind. Außerdem gelte noch:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X_i \leq x) & \mu &= E(X_i) \\ G(y) &= P(Y_i \leq y) & \nu &= E(Y_i) \end{aligned}$$

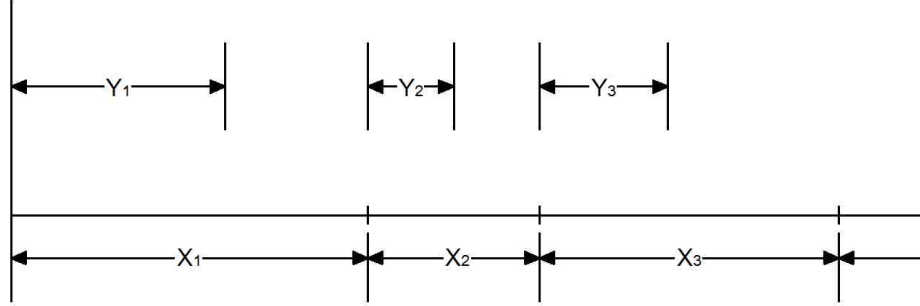


ABBILDUNG 3.1. Erneuerungsprozess in welchem die Zufallsvariable Y_i einen Teil des i -ten Erneuerungsintervalls repräsentiert.

Für diese Voraussetzungen existieren einige interessante Fragestellungen, welche in diesem und in Abschnitt 3.4 behandelt werden. Man nimmt an, dass Y_i ein Teilintervall von X_i repräsentiert, was in Abbildung 3.1 veranschaulicht wird.

BEMERKUNG. In Abbildung 3.1 wurde das Teilintervall Y_i am Anfang eines jeden X_i -Intervall gewählt. Dies ist für die folgenden Berechnungen jedoch nicht erforderlich.

Sei $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeitpunkt t in einem Y -Intervall liegt. Dann lässt sich anhand folgender Methode eine Erneuerungsgleichung für $p(t)$ finden.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= P(t \text{ liegt in } Y_i \text{ für ein } i \geq 1) \\
 &= P(t \text{ liegt in } Y_1) + P(t \text{ liegt in } Y_i \text{ für ein } i \geq 2) \\
 &= P(t \text{ liegt in } Y_1) + P(X_1 \leq t, t \text{ liegt in } Y_i \text{ für ein } i \geq 2) \\
 &= P(t \text{ liegt in } Y_1) + \int_0^t P(t \text{ liegt in } Y_i \text{ für ein } i \geq 2 | X_1 = x) dF(x). \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Somit erhält man nach der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

$$p(t) = P(t \text{ liegt in } Y_1) + \int_0^t p(t-x) dF(x).$$

Sei

$$I_{Y_1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \text{ in } Y_1 \text{ liegt,} \\ 0, & \text{wenn } t \text{ nicht in } Y_1 \text{ liegt.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$P(t \text{ liegt in } Y_1) = E(I_{Y_1}(t))$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty P(t \text{ liegt in } Y_1) \, dt &= \int_0^\infty E(I_{Y_1}(t)) \, dt \\
 &= E\left(\int_0^\infty I_{Y_1}(t) \, dt\right) \\
 &= E(Y_1) \\
 &= \nu,
 \end{aligned}$$

da die Gesamtheit aller Punkte, welche in Y_1 liegen, gleich Y_1 ist. Durch die Annahme, dass F keine Gitterverteilung besitzt, erhält man durch Anwendung des Erneuerungssatzes

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) &= \mu^{-1} \int_0^\infty P(t \text{ liegt in } Y_1) \, dt \\
 &= \frac{\nu}{\mu}.
 \end{aligned}$$

BEISPIEL (verzögerte Auswechslungen). Man erwäge ein Modell in dem eine Erneuerung nicht unmittelbar erfolgt. Sei Y_i die Betriebszeit und Z_i die Verzögerung welche der $(i+1)$ -ten Einheit vorangeht. Man nehme an, dass die Zwischenzeiten $X_k = Y_k + Z_k$, für $k = 1, 2, \dots$ zwischen zwei Erneuerungen, einen Erneuerungsprozess bilden. Dann konvergiert $p(t)$, die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt t in Betrieb ist, gegen

$$\frac{E(Y_1)}{E(X_1)},$$

sofern X_k keine Gitterverteilung besitzt.

BEISPIEL (Geiger-Zähler). Für das bessere Verständnis sei zuerst auf Kapitel 5 verwiesen. Sei X_k , $k = 1, 2, \dots$ die Zwischenzeiten zwischen zwei registrierten Teilchen und Y_k die Sperrzeit während X_k . Dann konvergiert $p(t)$, die Wahrscheinlichkeit, dass der Geigerzähler zum Zeitpunkt t gesperrt ist, gegen

$$\frac{E(Y_1)}{E(X_1)}.$$

3.4. Kumulierter Prozess

In diesem Kapitel wird Y_i als Ausgabe oder Wert, welcher dem i -ten Intervall zugeordnet wird, interpretiert. Es werden eine Reihe von Aufgabenstellungen des Paares (X_i, Y_i) behandelt, wobei X_i ein Erneuerungsprozess ist. Das Hauptaugenmerk liegt diesmal auf dem sogenannten *kumulierten Prozess*

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k,$$

welchen man als Gesamtsumme der Kosten oder sonstigem bis zum Zeitpunkt t interpretiert.

Mit einer ähnlichen Vorgangsweise wie in Kapitel 3.3, erhält man für $A(t) = E(W(t))$ die Erneuerungsgleichung

$$A(t) = E(Y_1) + \int_0^t A(t-x) dF(x).$$

Aufgrund des Satzes 2.3 erhält man

$$\begin{aligned} A(t) &= E(Y_1) + \int_0^t E(Y_1) dR(x) \\ &= E(Y_1)(1 + R(t)). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, sofern F keine Gitterverteilung besitzt und $h > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (A(t) - A(t-h)) = E(Y_1) \frac{h}{\mu},$$

und damit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{E(Y_1)}{\mu}.$$

BEISPIEL (Risiko Theorie, s. Kap 4). Angenommen, bei einer Versicherung treffen Schadensmeldungen ein, welche einen Erneuerungsprozess bilden. Seien $X_1, X_2, \dots$ die Zwischenankunftszeiten und Y_k die Höhe der k -ten Forderung und

$$W(t) = \sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k$$

die Gesamtsumme der Forderungen bis zum Zeitpunkt t . Langfristig ergibt sich dann eine Durchschnitts-Forderungsrate von

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(W(t))}{t} = \frac{E(Y_1)}{E(X_1)}.$$

BEISPIEL (Geiger-Zähler, s. Kap 5). Sei Y_k die Anzahl der nichtregistrierten Teilchen während der Sperrzeit X_k welche nach Registrierung des $(k-1)$ -ten Teilchen startet. Auf lange Sicht beläuft sich der Erwartungswert der unregistrierten Teilchen pro Zeiteinheit auf $E(Y_1)/E(X_1)$.

3.5. Endender Erneuerungsprozess

Man nehme an, es gäbe unendliche Zwischenankunftszeiten in einem Erneuerungsprozess. Ein solcher Prozess wird als *endender Erneuerungsprozess* bezeichnet, da bei der ersten unendlichen Zwischenankunftszeit keine Erneuerungen mehr möglich sind. Die Situation wird in Abbildung 3.2 dargestellt.

Sei

$$L = F(\infty) = P(X_k < \infty) < 1, \quad (3.10)$$

woraus sich

$$1 - L = P(X_k = \infty) > 0$$

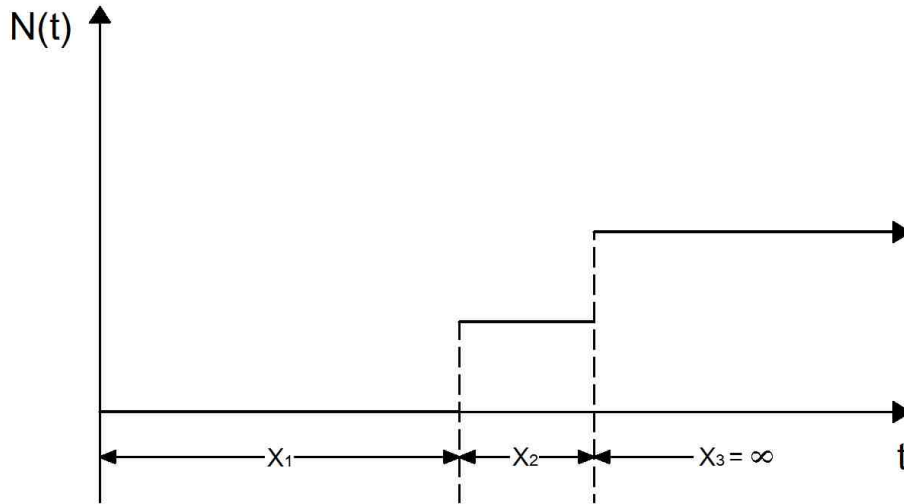


ABBILDUNG 3.2. Darstellung eines endenden Erneuerungsprozesses.

ergibt. In diesem Fall ist $N(\infty)$, die Gesamtanzahl aller Erneuerungen die jemals eintreten werden, eine endliche Zufallsvariable und es gilt

$$P(N(\infty) \geq k) = L^k, \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

mit

$$\begin{aligned} E(N(\infty)) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(\infty) \geq k) \\ &= \frac{L}{1-L}. \end{aligned}$$

Für den endenden Erneuerungsprozess gilt weiterhin Satz 1.3, sodass

$$P(N(t) \geq k) = P(S_k \leq t) = F_k(t)$$

gilt und somit

$$R(t) = E(N(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) < \sum_{k=1}^{\infty} L^k = \frac{L}{1-L}$$

folgt. Außerdem gilt nach wie vor bei Erneuerungsprozessen

$$R(t) = F(t) + \int_0^t R(t-x) \, dF(x).$$

Jedoch ist in diesem Fall der Erneuerungssatz nicht direkt anwendbar, da F die Voraussetzungen einer echten Wahrscheinlichkeitsverteilung wegen (3.10) nicht erfüllt. Es existiert eine Möglichkeit um dieses Problem zu umgehen. Sei dazu

$$g(s) = \int_0^{\infty} e^{sx} \, dF(x).$$

Es gilt $g(0) = L < 1$. Wir nehmen an, dass ein λ existiert mit

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) = 1.$$

Sei

$$\hat{F}(t) = \int_0^t e^{\lambda x} dF(x).$$

Somit ist $\hat{F}(t)$ nichtfallend und es gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{F}(t) = 1$, weswegen $\hat{F}$ eine echte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Um eine Erneuerungsgleichung für $\hat{F}$ zu finden, erinnere man sich, dass

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x) dF(x)$$

die Form einer solchen Erneuerungsgleichung ist. Sei

$$\hat{A}(t) = e^{\lambda t} A(t)$$

$$\hat{a}(t) = e^{\lambda t} a(t)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= e^{\lambda t} A(t) \\ &= e^{\lambda t} a(t) + \int_0^t e^{\lambda(t-x)} A(t-x) e^{\lambda x} dF(x) \\ &= \hat{a}(t) + \int_0^t \hat{A}(t-x) d\hat{F}(x) \end{aligned}$$

und somit erfüllt $\hat{A}$ die Erneuerungsgleichung, mit der passenden Verteilungsfunktion $\hat{F}$. Als spezifisches Beispiel, ziehe man

$$A(t) = R(\infty) - R(t) = \frac{L}{1-L} - R(t)$$

in Betracht. Gleichbedeutend ist $A(t) = E(N(\infty) - N(t))$ der Erwartungswert der Indizes n für die $t < S_n < \infty$ gilt. Als Nächstes wird eine Erneuerungsgleichung, welche von $A(t)$ erfüllt wird, entwickelt. Tatsächlich gilt

$$E(N(\infty) - N(t) | X_1 = x) = \begin{cases} 1 + \frac{L}{1-L}, & \text{für } x > t, \\ A(t-x), & \text{für } 0 < x \leq t. \end{cases}$$

Aus dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^\infty E(N(\infty) - N(t) | X_1 = x) dF(x) \\ &= \frac{L - F(t)}{1-L} + \int_0^t A(t-x) dF(x). \end{aligned}$$

Weiters ergibt sich

$$\hat{a}(t) = e^{\lambda t} \frac{L - F(t)}{1-L}.$$

Durch Berechnen des Integrals

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \hat{a}(t) \, dt &= \frac{1}{1-L} \int_0^\infty e^{\lambda t} (L - F(t)) \, dt \\
 &= \frac{1}{1-L} \int_0^\infty e^{\lambda t} \int_t^\infty dF(x) \, dt \\
 &= \frac{1}{1-L} \int_0^\infty \int_0^x e^{\lambda t} \, dt \, dF(x) \\
 &= \frac{1}{1-L} \int_0^\infty \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \, dF(x) \\
 &= \frac{1}{1-L} \frac{1-L}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

gilt demzufolge

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{A}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} (R(\infty) - R(t)) \\
 &= \left(\lambda \int_0^\infty x e^{\lambda x} \, dF(x) \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $R(t)$ mit exponentieller Wachstumsrate λ gegen $R(\infty) = \frac{L}{1-L}$ konvergiert.

Teil 2

Anwendungen

KAPITEL 4

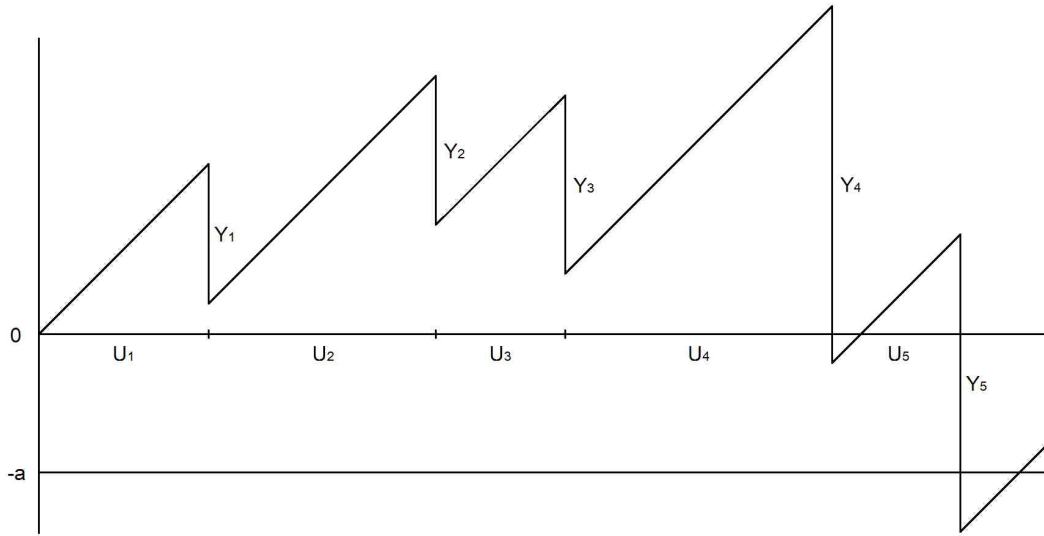
Versicherungsmathematik

Ein Gebiet auf dem der Erneuerungssatz angewandt wird, ist die Versicherungsmathematik. Hier wird der Erneuerungssatz benutzt, um das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit von Forderungen zu bestimmen. Diese Darstellung hält sich vor allem an [6], [8] und [7].

Eine Versicherung erhält von ihren Kunden regelmäßige Zahlungen und bietet dafür an, im Falle eines Schadens dem betroffenen Kunden eine gewisse Entschädigung auszus zahlen. Diese Ausgaben durch eingetretene Schadensfälle, ab jetzt als *Forderungen* bezeichnet, treten zu zufälligen Zeitpunkten auf und haben eine zufällige Höhe. Damit die Versicherung nicht durch diese auftretenden Forderungen in den Ruin getrieben wird, gilt es, Rücklagen zu besitzen, welche die möglichen Verluste wieder ausgleichen. Somit muss abgeschätzt werden, wie hoch die Rücklagen sein sollen. Es wird sich herausstellen, dass es auf die Verteilung der Höhe der Forderungen ankommt. Deswegen werden sogenannte *kleine* und *große* Forderungen unterschieden. Bei kleinen Forderungen kann der Erneuerungssatz angewandt werden.

4.1. Das Modell

Wie oben beschrieben, hat eine Versicherung Einnahmen und Ausgaben. Auf der Seite der Einnahmen stehen die regelmäßigen Prämien c welche von den Kunden pro Zeiteinheit gezahlt werden. Auf der anderen Seite stehen die Ausgaben der Versicherung. Dies sind die, bereits oben erwähnten Forderungen, welche zufällig bei der Versicherung eintreffen. Man nimmt an, dass die Zeitpunkte, zu denen sie eintreffen, einen homogenen Poissonprozess N_t mit Parameter λ bilden. Somit beschreibt N_t , für $t > 0$, die Anzahl der Forderungen, welche im Zeitintervall $(0, t]$ eintreffen. Für $j \geq 1$ bezeichnet man mit Y_j die Höhe der j -ten Forderung. Die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ werden als unabhängig angenommen und haben alle Verteilung F . Außerdem sind die Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig vom Poissonprozess und es gilt $F(0) = 0$ aufgrund der Tatsache, dass eine Forderung nichtnegativ sein kann. Zum Schluss werden die Zwischenankunftszeiten U_j für $j \geq 1$ betrachtet, wobei U_1 die Zeit vom Zeitpunkt 0 bis zum Eintreffen der ersten Forderung ist und U_j für $j \geq 2$, die Zeit vom Eintreffen der $(j - 1)$ -ten Forderung, bis zum Eintreffen der j -ten Forderung ist. Diese Zufallsvariablen haben die $E(\lambda)$ -Verteilung, da es sich um die Zwischenankunftszeiten eines homogenen Poissonprozesses mit Parameter λ handelt. Fasst man alles zusammen, erhält man als Differenz der

ABBILDUNG 4.1. Darstellung des Gewinnprozesses X_t .

Einnahmen und Ausgaben, den Gewinn der Versicherung im Zeitintervall $(0, t]$

$$X_t = ct - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j.$$

Wie schon Abbildung 4.1 andeutet, kann der Gewinn X_t auch negativ werden und sich in einen Verlust verwandeln. Obwohl eine Versicherung sogenannte Rücklagen a besitzt, besteht immer noch das Risiko, dass ein enormer Verlust selbst die Rücklagen übersteigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt, definiert man wie folgt

$$\Psi(a) = P(X_t < -a \text{ für ein } t > 0).$$

Um $\Psi(a)$ genauer analysieren zu können, wird zuerst eine Formel für den durchschnittlichen Gewinn $E(X_t)$ im Zeitintervall $(0, t]$ gesucht. Sei μ die durchschnittliche Höhe der Forderungen, das ist der Erwartungswert der Verteilung F .

SATZ 4.1. Für $t > 0$ gilt $E(X_t) = (c - \lambda\mu)t$.

BEWEIS. Für $t > 0$ sei $Z_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$. Mit Hilfe der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit folgt

$$\begin{aligned} P(Z_t > x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_t > x | N_t = k) P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k > x | N_t = k) P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k > x) P(N_t = k) \end{aligned}$$

wobei letztere Gleichung aufgrund der Unabhängigkeit von $Y_1, Y_2, \dots$ und N_t gilt. Da der Wertebereich der Zufallsvariablen in $\mathbb{R}^+$ enthalten ist, ist $E(Z_t) = \int_0^\infty P(Z_t > x) dx$ und $E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) = \int_0^\infty P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k > x) dx$. Aufgrund der Tatsache, dass alle Summanden in der obigen unendlichen Summe nichtnegativ sind, kann man obige Gleichung von 0 bis ∞ integrieren und dabei Summe und Integral vertauschen. Man erhält

$$E(Z_t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) P(N_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \mu P(N_t = k) = \mu E(N_t) = \mu \lambda t,$$

da N_t die $P(\lambda t)$ -Verteilung besitzt und somit Erwartungswert λt hat. Aufgrund von $X_t = ct - Z_t$ ergibt sich somit $E(X_t) = ct - \mu \lambda t$. $\square$

Es ist selbstredend, dass der durchschnittliche Gewinn $E(X_t)$ größer sein muss als 0, damit die Versicherung überhaupt überleben kann. Somit kann man $c - \mu \lambda > 0$ annehmen. Durch Einführen des Parameters $\varrho = \frac{c}{\mu \lambda} - 1$ ist diese Annahme äquivalent zu $\varrho > 0$.

Zur besseren Analyse von $\Psi(a)$ definiert man die Zufallsvariablen $V_j = Y_j - cU_j$ für $j \geq 1$ und $S_k = \sum_{j=1}^k V_j$ für $k \geq 1$. Als Funktion der unabhängigen Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots$ und der unabhängigen Zufallsvariablen $U_1, U_2, \dots$ sind die Zufallsvariablen $V_1, V_2, \dots$ ebenfalls unabhängig. Die Verteilung der Zufallsvariablen V_j wird mit G bezeichnet. Da der Prozess X_t seine Minima genau dann annimmt, wenn eine Forderung eintrifft, werden diese Zeitpunkte ab jetzt mit $T_1, T_2, T_3, \dots$ bezeichnet, wobei $T_k = U_1 + U_2 + \dots + U_k$ der Zeitpunkt der k -ten Forderung ist. Somit gilt für $k \geq 1$

$$X_{T_k} = cT_k - \sum_{j=1}^k Y_j = - \sum_{j=1}^k V_j = -S_k.$$

Es genügt somit, in der Definition von $\Psi(a)$ die Zeitpunkte T_k mit $k \geq 1$ zu betrachten

$$\Psi(a) = P(X_{T_k} < -a \text{ für ein } k \geq 1) = P(S_k > a \text{ für ein } k \geq 1) = P(\sup_{k \geq 1} S_k > a).$$

Sei $K(a) = 1 - \Psi(a)$ die Gegenwahrscheinlichkeit. Dann gilt

$$K(a) = P(\sup_{k \geq 1} S_k \leq a). \quad (4.1)$$

4.2. Kleine Forderungen

Sei f die Wahrscheinlichkeitsdichte zur Verteilungsfunktion F der Forderungen. Es wird der Einfachheit angenommen, dass eine solche Wahrscheinlichkeitsdichte existiert. Da Forderungen immer positiv sind, gilt $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^-$. Es ist von *kleinen Forderungen* die Rede, wenn ein $v > 0$ und ein $d > 0$ existieren, sodass $f(x) \leq e^{-vx}$ für alle $x \geq d$ gilt.

Dies bedeutet dass ein Auftreten *großer Forderungen* sehr unwahrscheinlich ist. Um mehr über $\Psi(a)$ herauszufinden, betrachtet man die momenterzeugenden Funktionen

der Zufallsvariablen Y_j, U_j, V_j für $j \geq 1$. Sei

$$m_F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = E(e^{-tY_j})$$

die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen Y_j für $j \geq 1$. Wenn v wie oben ist, dann existiert $m_F(t)$ für alle $t > -v$. Der Definitionsbereich von m_F ist somit gleich einem Intervall $(-u, \infty)$, mit $0 < u \leq \infty$. Die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen $U_1, U_2, \dots$ welche alle $E(\lambda)$ -verteilt sind, ist

$$m_E(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + t} = E(e^{-tU_j})$$

und somit für $t \in (-\lambda, \infty)$ definiert. Die momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen $V_1, V_2, \dots$ ist

$$m_G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} dG(x) = E(e^{-tV_j}).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} m_G(t) &= E(e^{-tV_j}) = E(e^{-tY_j + ctU_j}) \\ &= E(e^{-tY_j}) E(e^{ctU_j}) = m_F(t) m_E(-ct) \\ &= m_F(t) \frac{\lambda}{\lambda - ct} \end{aligned} \quad (4.2)$$

für $t \in (-u, \frac{\lambda}{c})$, wobei die Unabhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen Y_j und U_j verwendet wurde.

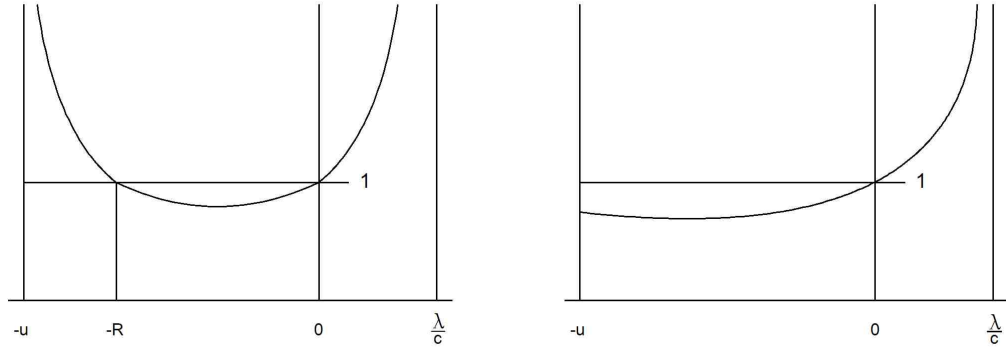
Aufgrund dieser Informationen lässt sich nun die Funktion m_G genauer bestimmen. Wegen $0 \in (-u, \frac{\lambda}{c})$ gelten somit folgende Rechnungen:

$$\begin{aligned} m_G(0) &= m_F(0) \frac{\lambda}{\lambda} = E(e^0) = 1 \\ m'_G(0) &= E(-V_j e^0) = -E(V_j) = -E(Y_j) + cE(U_j) = -\mu + \frac{c}{\lambda} = \varrho\mu > 0 \\ m''_G(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^2 e^{-tx} dG(x) > 0 \end{aligned}$$

Daraus kann man schliessen, dass $m_G(t)$ für $t \in (-u, \frac{\lambda}{c})$ eine konvexe Funktion ist, durch den Punkt $(0, 1)$ geht und in diesem Punkt einen positiven Anstieg hat. Somit existieren zwei Möglichkeiten, wie die Funktion m_G auf dem Intervall $(-u, \frac{\lambda}{c})$ aussehen könnte. Beide Möglichkeiten sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

Aufgrund der Konvexität von m_G , existiert der Grenzwert $\lim_{t \downarrow -u} m_G(t)$, jedoch besteht die Möglichkeit dass dieser ∞ ist. Dieser Fall ist links in Abbildung 4.2 dargestellt. Nimmt man an, dass diese Situation gegeben sei und dass somit $\lim_{t \downarrow -u} m_G(t) > 1$ gilt, dann existiert ein $R > 0$ mit $m_G(-R) = 1$. Wegen (4.2) folgt daraus $m_F(-R) = \frac{\lambda + cR}{\lambda}$. Man sieht also, dass dieses R durch die Verteilung F der Forderungen bestimmt wird.

Dieses R existiert vor allem, wenn $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schneller als exponentiell gegen 0 geht, wenn also für alle $v > 0$ ein $d > 0$ existiert mit $f(x) \leq e^{-vx}$ für $x \geq d$. Da dann $\int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx$ für alle $t \in \mathbb{R}$ endlich ist, erhält man $u = \infty$. Außerdem gilt

ABBILDUNG 4.2. Darstellungen von $m_G(t)$.

$\lim_{t \rightarrow -\infty} m_G(t) = \infty$, wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-tx} = \infty$ für $x \in (0, \infty)$ und wegen $1 - G(0) > 0$. Um Letzteres zu zeigen, sei ein $\alpha > 0$ mit $F(\alpha) < 1$ gegeben. Dann folgt

$$1 - G(0) = P(V_j > 0) \geq P(Y_j > \alpha)P(U_j \leq \frac{\alpha}{c}) = (1 - F(\alpha))(1 - e^{-\frac{\lambda\alpha}{c}}) > 0.$$

Es wird ab jetzt angenommen, dass ein solches R existiert. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass dieses R eine wichtige Rolle bei der Abschätzung der Wahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ spielt.

SATZ 4.2. Für $a > 0$ gilt $\Psi(a) \leq e^{-Ra}$.

BEWEIS. Sei $\Psi_n(a) = P(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a)$ für $n \geq 1$. Aufgrund der Tatsache, dass die Ereignisse $\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a\}$ für $n \rightarrow \infty$ monoton aufsteigend gegen das Ereignis $\{\sup_{k \geq 1} S_k > a\}$ streben, folgt aus dem Stetigkeitssatz $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(a) = \Psi(a)$. Deswegen genügt es, $\Psi_n(a)$ abzuschätzen. Mit Hilfe der Markovungleichung erhält man wegen $m_G(-R) = 1$ für alle $a > 0$

$$\Psi_1(a) = P(S_1 > a) = P(V_1 > a) \leq \frac{1}{e^{Ra}} E(e^{RV_1}) = e^{-Ra} m_G(-R) = e^{-Ra}.$$

Dass die Abschätzung $\Psi_n(a) \leq e^{-Ra}$ für $a > 0$ und für alle $n \geq 1$ gilt, wird nun anhand eines Induktionsbeweises gezeigt. Angenommen $\Psi_n(a) \leq e^{-Ra}$ für alle $a > 0$ sei bereits gezeigt. Außerdem gilt

$$\Psi_{n+1}(a) = P(S_1 > a) + P\left(S_1 \leq a, \max_{2 \leq k \leq n+1} S_k > a\right). \quad (4.3)$$

Um nun $\Psi_{n+1}(a) \leq e^{-Ra}$ für alle $a > 0$ zu zeigen, schätzt man die beiden rechten Summanden ab.

$$P(S_1 > a) = P(V_1 > a) = \int_a^\infty dG(x) \leq \int_a^\infty e^{-R(a-x)} dG(x) \quad (4.4)$$

Letzere Ungleichung gilt, da $e^{-R(a-x)} \geq 1$ ist, für $x \in [a, \infty)$. Um den anderen Summanden abzuschätzen setzt man $\tilde{S}_k = \sum_{j=2}^k V_j$ für $k \geq 2$. Sei H die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $\max_{1 \leq k \leq n} S_k$. Indem man dieses Maximum nicht aus den Zufallsvariablen $V_1, V_2, V_3, \dots$, sondern aus den Zufallsvariablen $V_2, V_3, V_4, \dots$ bildet, erhält man

$\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$. Da $V_2, V_3, V_4, \dots$ genauso wie $V_1, V_2, V_3, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung G sind, hat $\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$ ebenfalls die Verteilung H . Aufgrund der Unabhängigkeit von Zufallsvariable V_1 und $\max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k$ ist $(x, y) \mapsto G(x)H(y)$ die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(V_1, \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k)$. Somit erhält man mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y > a - x\}$

$$\begin{aligned}
P(S_1 \leq a, \max_{2 \leq k \leq n+1} S_k > a) &= P(V_1 \leq a, V_1 + \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k > a) \\
&= P((V_1, \max_{2 \leq k \leq n+1} \tilde{S}_k) \in B) \\
&= \int_{-\infty}^a \int_{a-x}^{\infty} dH(y) dG(x) \\
&= \int_{-\infty}^a P(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a - x) dG(x) \\
&= \int_{-\infty}^a \Psi_n(a - x) dG(x) \\
&\leq \int_{-\infty}^a e^{-R(a-x)} dG(x)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Induktionsannahme folgt. Durch Einsetzen der beiden Abschätzungen (4.4), (4.5) in (4.3), ergibt sich

$$\Psi_{n+1}(a) \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-R(a-x)} dG(x) = e^{-Ra} \int_{-\infty}^{\infty} e^{Rx} dG(x) = e^{-Ra} m_G(-R) = e^{-Ra}$$

wegen $m_G(-R) = 1$. Somit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen und es wurde gezeigt, dass die Abschätzung $\Psi_n(a) \leq e^{-Ra}$ für $a > 0$ und alle $n \geq 1$ gilt. Ebenfalls folgt nun $\Psi(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(a) \leq e^{-Ra}$. $\square$

Satz 4.2 besagt somit, dass durch Erhöhen der Rücklagen a , die Risikowahrscheinlichkeit $\Psi(a)$ exponentiell abnimmt. Die Geschwindigkeit dieser exponentiellen Abnahme wird durch $R > 0$ bestimmt, wobei R seinerseits durch die Verteilung F der Forderungen bestimmt wird.

4.3. Integralgleichung

Um $\Psi(a)$ besser untersuchen zu können, konzentriert man sich im weiteren Verlauf auf $K(a)$. Sei $K(a)$ wie bereits in (4.1) erwähnt, die Gegenwahrscheinlichkeit von $\Psi(a)$. Man setze $M = \sup_{k \geq 1} S_k$. Somit gilt dann $K(a) = P(M \leq a)$. Damit K die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung erfüllt, muss gezeigt werden, dass M eine echte Zufallsvariable ist. Es bleibt zu zeigen, dass M als Supremum unendlich vieler Zufallsvariablen, nicht den Wert ∞ annimmt, also $P(M < \infty) = 1$. Aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen V_j für $j \geq 1$ und der Tatsache, dass alle V_j die gleiche Verteilung mit Erwartungswert $\mu - \frac{c}{\lambda} = -\varrho\mu < 0$ haben, folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k}{k} = -\varrho\mu\right) = 1.$$

Daraus folgt jedoch

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = -\infty\right) = 1 \quad \text{und} \quad P(\sup S_k < \infty) = 1,$$

womit $P(M < \infty) = 1$ gezeigt ist. Für die Verteilungsfunktion K wird nun eine Integralgleichung bewiesen.

SATZ 4.3. *Sei*

$$h = \begin{cases} \frac{1}{\mu}(1 - F(x)), & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Dann ist h eine Wahrscheinlichkeitsdichte und es gilt

$$K(a) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a-y)h(y) \, dy$$

für alle $a > 0$.

BEWEIS. Man beachte zuerst dass h die Voraussetzungen einer Wahrscheinlichkeitsdichte erfüllt. Aufgrund von $F(x) \leq 1$ folgt, dass h größer oder gleich 0 ist und wegen $\mu = \int_0^\infty 1 - F(x) \, dx$ erhält man $\int_{-\infty}^\infty h(x) \, dx = \int_0^\infty h(x) \, dx = 1$ womit gezeigt wäre, dass h eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Sei wie schon im Beweis von Satz 4.2 gesehen, $\tilde{S}_k = \sum_{j=2}^k V_j$ für $k \geq 2$ und $\tilde{M} = \sup_{k \geq 2} \tilde{S}_k$. Erneut kann man aufgrund der Tatsache, dass sowohl $V_1, V_2, V_3, \dots$ als auch $V_2, V_3, V_4, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen sind, welche alle Verteilung G haben, $\tilde{M}$ dieselbe Verteilungsfunktion K wie $M = \sup_{k \geq 1} S_k$ zuordnen. Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\tilde{M}$, Y_1 und U_1 untereinander, ist $(x, y, z) \mapsto K(x)F(y)L(z)$ die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors $(\tilde{M}, Y_1, U_1)$, wobei L die Verteilungsfunktion der $E(\lambda)$ -Verteilung ist. Weiters sei $u > 0$ und $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq u + cz, x \leq u - y + cz\}$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} K(u) &= P(M \leq u) = P(S_1 \leq u, \sup_{k \geq 2} S_k \leq u) = P(V_1 \leq u, V_1 + \tilde{M} \leq u) \\ &= P(Y_1 - cU_1 \leq u, Y_1 - cU_1 + \tilde{M} \leq u) = P((\tilde{M}, Y_1, U_1) \in B) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^{u+cz} \int_{-\infty}^{u-y+cz} dK(x) \, dF(y) \, dL(z) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{u+cz} K(u-y+cz) \, dF(y) \lambda e^{-\lambda z} \, dz. \end{aligned}$$

Durch Einführen einer neuen Integrationsvariablen $t = u + cz$, erhält man

$$K(u) = \int_u^\infty \int_0^t K(t-y) \, dF(y) \lambda e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u)} \frac{1}{c} \, dt.$$

Sei $g(u, t) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}(t-u)} \int_0^t K(t-y) dF(y)$, sodass $K(u) = \int_u^\infty g(u, t) dt$ für $u \geq 0$ und $t \geq 0$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{K(u+s) - K(u)}{s} &= \frac{1}{s} \left(\int_{u+s}^\infty g(u+s, t) dt - \int_u^\infty g(u, t) dt \right) \\ &= \frac{1}{s} \left(- \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt + \int_u^\infty g(u+s, t) dt - \int_u^\infty g(u, t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt + \int_u^\infty \frac{g(u+s, t) - g(u, t)}{s} dt. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aufgrund der Stetigkeit von g , erhält man $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_u^{u+s} g(u+s, t) dt = g(u, u)$. Wegen $\frac{g(u+s, t) - g(u, t)}{s} = \frac{1}{s} (e^{\frac{\lambda}{c}s} - 1) g(u, t)$ folgt $\lim_{s \rightarrow 0} \int_u^\infty \frac{g(u+s, t) - g(u, t)}{s} dt = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty g(u, t) dt$. Durch Einsetzen in Gleichung (4.6) erhält man somit

$$K'(u) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(u+s) - K(u)}{s} = -g(u, u) + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty g(u, t) dt = -g(u, u) + \frac{\lambda}{c} K(u). \quad (4.7)$$

Im nächsten Schritt wird $g(u, u)$ partiell integriert. Der Einfachheit halber, wird angenommen, dass die Verteilungsfunktion F eine Wahrscheinlichkeitsdichte f besitzt. Jedoch würden folgende Schritte auch ohne diese Annahme gelten.

$$\begin{aligned} g(u, u) &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u K(u-y) f(y) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} K(u-y)(F(y) - 1) \Big|_0^u + \frac{\lambda}{c} \int_0^u K'(u-y)(F(y) - 1) dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \left(K(0)(F(u) - 1) + K(u) + \int_0^u K'(u-y)(F(y) - 1) dy \right) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (4.7) und gleichzeitiges Ersetzen von $(F(y) - 1)$ durch $-\mu h(y)$, ergibt sich

$$K'(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0)h(u) + \int_0^u K'(u-y)h(y) dy \right).$$

Integriert man nun auf beiden Seiten von 0 bis a und vertauscht zudem noch im zweiten Summanden die Integrale, so erhält man

$$\begin{aligned} K(a) - K(0) &= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a \int_0^u K'(u-y)h(y) dy du \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a \int_y^a K'(u-y) du h(y) dy \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \left(K(0) \int_0^a h(u) du + \int_0^a (K(a-y) - K(0))h(y) dy \right) \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a K(a-y)h(y) dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei handelt es sich bereits um die gesuchte Formel. Es gilt nur noch $K(0)$ zu bestimmen. Da h , wie ganz am Anfang des Beweises gezeigt wurde, eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und es sich bei K um eine Verteilungsfunktion handelt, gilt

$$\int_0^a K(a-y)h(y) dy \leq \int_0^\infty h(y) dy = 1 \text{ und } \int_0^a K(a-y)h(y) dy \geq \int_0^{\frac{a}{2}} K\left(\frac{a}{2}\right)h(y) dy.$$

Außerdem gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} K(x) = 1$ und $\int_0^\infty h(y) dy = 1$. Daraus ergibt sich

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a K(a-y)h(y) dy = 1.$$

Lässt man in Gleichung (4.8) a gegen ∞ laufen, dann erhält man

$$1 - K(0) = \frac{\lambda\mu}{c},$$

womit die gesuchte Gleichung bewiesen ist. $\square$

Mit Hilfe von Satz 4.3 läßt sich eine Reihendarstellung für $K(a)$ finden.

SATZ 4.4. *Sei h wie in Satz 4.3 und $H(t) = \int_{-\infty}^t h(x) dx$ für $t \in \mathbb{R}$. Weiters sei $H_1 = H$ und $H_k = H_{k-1} * H$ für $k \geq 2$. Dann gilt $K(a) = \frac{\varrho}{1+\varrho} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\varrho)^k} H_k(a)\right)$ für $a > 0$.*

BEWEIS. Sei $q = \frac{1}{1+\varrho} = \frac{\lambda\mu}{c}$. Wegen $\varrho > 0$ gilt $q < 1$. Für $k \geq 1$ sei h_k die Wahrscheinlichkeitsdichte von H_k . Es gilt $h_{k+1}(x) = \int_0^x h_k(x-y)h(y) dy = \int_0^x h_k(y)h(x-y) dy$, da diese Dichten auf $\mathbb{R}^-$ gleich null sind. Für $a > 0$ wird nun mit Hilfe von Induktion gezeigt, dass Folgendes gilt

$$K(a) = (1-q)(1+qH_1(a)+q^2H_2(a)+\cdots+q^{k-1}H_{k-1}(a))+q^k \int_0^a K(a-y)h_k(y) dy. \quad (4.9)$$

Für $k = 1$ entspricht dies der Gleichung aus Satz 4.3 und ist somit bereits gezeigt. Um aus dieser Formel die Formel für $k + 1$ zu erhalten, zeigt man

$$\int_0^a K(a-y)h_k(y) dy = (1-q)H_k(a) + q \int_0^a K(a-x)h_{k+1}(x) dx.$$

Dies erfolgt in folgender Rechnung, indem man zuerst, die in Satz 4.3 gezeigte Gleichung, $K(a-y) = 1 - q + q \int_0^{a-y} K(a-y-z)h(z) dz$, einsetzt und anschliessend die neue Integrationsvariable $x = z + y$ einführt und die Integrale vertauscht. Somit gilt für alle $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^a K(a-y)h_k(y) dy &= \int_0^a (1-q)h_k(y) dy + \int_0^a q \int_0^{a-y} K(a-y-z)h(z) dz h_k(y) dy \\ &= (1-q)H_k(a) + q \int_0^a \int_y^a K(a-x)h(x-y)h_k(y) dx dy \\ &= (1-q)H_k(a) + q \int_0^a K(a-x) \int_0^x h(x-y)h_k(y) dy dx \\ &= (1-q)H_k(a) + q \int_0^a K(a-x)h_{k+1}(x) dx. \end{aligned}$$

Nun gilt $0 \leq q^k \int_0^a K(a-y)h_k(y) dy \leq q^k \int_0^a h_k(y) dy \leq q^k$, weil K eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und h_k eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Lässt man nun in Gleichung (4.9) k gegen ∞ laufen, so erhält man $K(a) = (1-q)(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k H_k(a))$ wegen $q < 1$ und ist somit bei der gesuchten Gleichung angelangt. $\square$

BEMERKUNG. Aus Satz 4.3 folgt

$$\begin{aligned}\Psi(a) &= 1 - K(a) \\ &= 1 - 1 + \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a (1 - \Psi(a-y))h(y) dy \\ &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a h(y) dy + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a \Psi(a-y)h(y) dy.\end{aligned}$$

Da h eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist und somit $\int_0^{\infty} h(y) dy = 1$ gilt, erhält man

$$\Psi(a) = \frac{\lambda\mu}{c} \int_a^{\infty} h(y) dy + \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^a \Psi(a-y)h(y) dy. \quad (4.10)$$

Wie oben bereits gezeigt, existiert im Fall der kleinen Forderungen ein $R > 0$ mit $\int_0^{\infty} e^{Ry} dF(y) = \frac{\lambda+cR}{\lambda}$. Mit Hilfe partieller Integration ergibt sich

$$\int_0^{\infty} Re^{Ry}(1-F(y)) dy = -1 + \int_0^{\infty} e^{Ry} dF(y) = \frac{cR}{\lambda},$$

da $\lim_{u \rightarrow \infty} e^{Ru}(1-F(u)) = 0$ wegen $e^{Ru}(1-F(u)) \leq \int_u^{\infty} e^{Ry} dF(y)$ gilt. Man definiert $g(y) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{Ry} h(y)$ für $y \geq 0$ und $g(y) = 0$ für $y < 0$. Dann erfüllt $\int_0^{\infty} g(y) dy = 1$, und ist somit wie h eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Für $t \geq 0$ sei außerdem $A(t) = e^{Rt}\Psi(t)$. Aus Gleichung (4.10) ergibt sich dann

$$A(t) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{Rt} \int_t^{\infty} h(y) dy + \int_0^t A(t-y)g(y) dy,$$

eine Erneuerungsgleichung für $A(t)$. Aus dem Erneuerungssatz folgt somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} a(x) dx,$$

mit $a(x) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{Rx} \int_x^{\infty} h(y) dy$ und $\nu = \int_0^{\infty} yg(y) dy$. Es gilt jetzt noch die Integrale $\int_0^{\infty} a(x) dx$ und $\int_0^{\infty} yg(x) dy$ genauer zu berechnen. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge und Berechnen des inneren Integrals erhält man

$$\int_0^{\infty} a(x) dx = \frac{\lambda\mu}{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) h(y) dy.$$

Aufgrund der Tatsache, dass h und g Wahrscheinlichkeitsdichten sind, erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} a(x) dx &= \frac{1}{R} \int_0^{\infty} g(y) dy - \frac{\lambda\mu}{cR} \int_0^{\infty} h(y) dy \\ &= \frac{1}{R} (1 - \frac{\lambda\mu}{c}).\end{aligned}$$

Um $\int_0^{\infty} yg(x) dy$ zu bestimmen, bedient man sich der momenterzeugenden Funktion der Verteilung F

$$m_F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xy} dF(y).$$

In dem vorliegenden Kapitel wurde bereits gezeigt, dass

$$m_F(-R) = \frac{\lambda + cR}{\lambda}$$

gilt. Außerdem wurde angenommen, dass die Ableitung von $m_F(-R)$ existiert und endlich ist. Dann gilt

$$m'_F(-R) = \int_0^\infty y e^{Ry} dF(y).$$

Durch partielle Integration ergibt sich somit

$$m'_F(-R) = \int_0^\infty e^{Ry} (1 + Ry) (1 - F(y)) dy,$$

da $ue^{Ru}(1 - F(u)) \rightarrow 0$ für $u \rightarrow \infty$ wegen $ue^{Ru}(1 - F(u)) \leq \int_u^\infty ye^{Ry} dF(y)$ gilt. Mit Hilfe der Definition von g erhält man

$$\frac{\lambda}{c} m'_F(-R) = \int_0^\infty g(y) dy + R \int_0^\infty yg(y) dy$$

und hat somit

$$\int_0^\infty yg(y) dy = \frac{\lambda}{Rc} m'_F(-R) - \frac{1}{R}$$

gezeigt. Somit wurde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Rt} \Psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda m'_F(R) - c}$$

gefunden, welches das asymptotische Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit für Verteilungen F , für die der Parameter R existiert, angibt.

KAPITEL 5

Der Geigerzähler

Der Geigerzähler ist ein technisches Gerät, welches radioaktive Teilchen aufzeichnet. Nach dem Einschalten und der Registrierung eines Teilchen benötigt der Geigerzähler eine gewisse Anlaufzeit bis er wieder betriebsbereit ist. Während einer solchen Anlaufzeit ist der Geigerzähler gesperrt und eintreffende Teilchen werden nicht registriert. Allgemein unterscheidet man zwischen zwei Arten von Zählmechanismen:

Typ I: Jedes registrierte Teilchen sperrt den Geigerzähler für ein Zeitintervall von eventuell zufälliger Länge. Während dieser Anlaufzeit eintreffende Teilchen werden nicht aufgezeichnet (s. [7], [3], [2] und [5]).

Typ II: Jedes eintreffende Teilchen sperrt den Geigerzähler für ein Zeitintervall von eventuell zufälliger Länge, unabhängig davon, ob der Geigerzähler zu dem Zeitpunkt gesperrt oder betriebsbereit ist. Eintreffende Teilchen werden jedoch nur aufgezeichnet, wenn sich der Geigerzähler in Betriebsbereitschaft befindet (s. [7]).

5.1. Geigerzähler vom Typ I

Angenommen, der Geigerzähler registriert zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Teilchen und wird somit für eine gewisse Zeit gesperrt. Diese Anlaufzeit wird mit Y_1 bezeichnet. Mit X_1 bezeichnet man die Zeit zwischen dem Eintreffen des ersten Teilchen und dem Eintreffen des nächsten Teilchen. Das nächste Teilchen, welches aufgezeichnet wird, ist das erste Teilchen, welches nach Ablauf der Anlaufzeit Y_1 eintrifft. Mit der Registrierung dieses Teilchen beginnt die nächste Anlaufzeit Y_2 . Dies wiederholt sich immerfort.

Man nimmt an, dass die Anlaufzeiten $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängig sind und Verteilung H besitzen. Außerdem sind die Anlaufzeiten unabhängig von den Zeiten des Ankunftsprozesses $X_1, X_2, \dots$. Weiterhin wird angenommen, dass diese Zwischenzeiten unabhängig sind und alle Verteilung F haben. Somit liegt ein Erneuerungsprozess vor. Die Zeiten $Z_1, Z_2, \dots$ zwischen den registrierten Teilchen sind unabhängig und haben alle dieselbe Verteilung aufgrund der Tatsache, dass mit jedem aufgezeichneten Teilchen sowohl eine Anlaufzeit des Geigerzählers, als auch eine Wartezeit auf das nächste Teilchen zu laufen beginnt. In Abbildung 5.1 ist das Verhalten eines Zählers vom Typ I zusammengefasst.

Es wird eine Verteilung von Z_j gesucht, wofür die Bestimmung der Verteilung von Z_1 ausreicht. Zur Herleitung der Verteilung von Z_1 wird der folgende Hilfssatz benötigt.

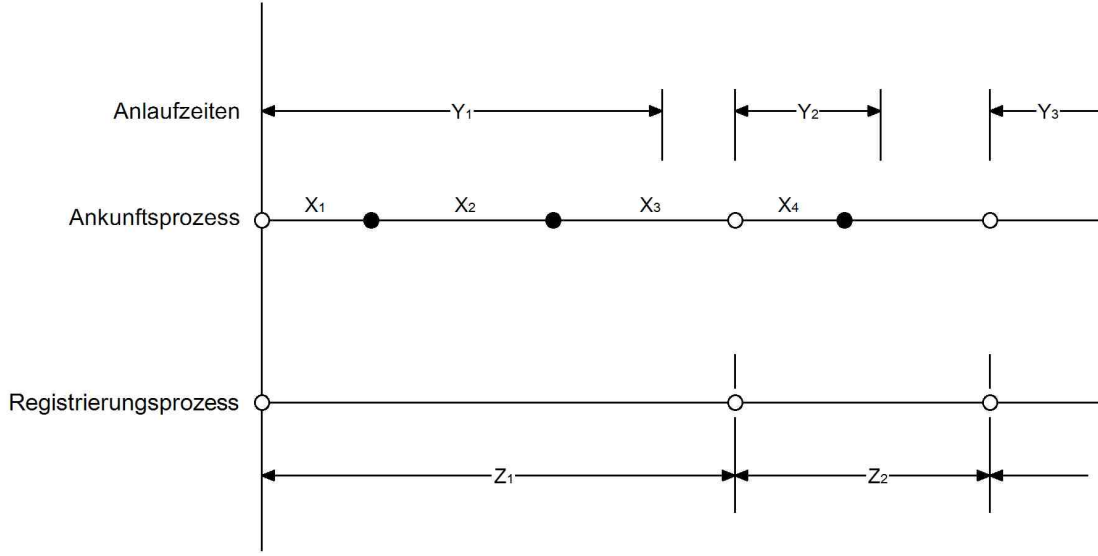


ABBILDUNG 5.1. Geigerzähler vom Typ I, wobei $\bullet$ ein verlorenes Signal und $\circ$ ein registriertes Signal bezeichnet.

HILFSSATZ 18. Für $s > 0$ sei X_s eine Zufallsvariable mit Lebensdauerverteilung G_s , sodass $s \mapsto G_s(t)$ für alle $t \geq 0$ linksseitig stetig ist. Sei L eine Zufallsvariable mit Verteilung H , wobei $H(0) = 0$ gilt. Weiter sei L von den Zufallsvariablen X_s unabhängig. Dann gilt

$$P(X_L \leq t) = \int_0^\infty P(X_s \leq t) dH(s)$$

für alle $t \geq 0$.

BEWEIS. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Sei $T > 0$ so gewählt, dass $1 - H(T) < \epsilon$ gilt. Weiters findet man eine Zerlegung $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = T$, sodass $M_j - m_j < \epsilon$ für $1 \leq j \leq k$ gilt, wobei $M_j = \sup_{s_{j-1} < s \leq s_j} G_s(t)$ und $m_j = \inf_{s_{j-1} < s \leq s_j} G_s(t)$ gesetzt wird. Nun ist das Ereignis $\{X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j\}$ eines der Ereignisse $\{X_s \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j\}$ mit $s_{j-1} < s \leq s_j$. Es folgt

$$P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) \leq \sup_{s_{j-1} < s \leq s_j} P(X_s \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j).$$

Man erhält

$$P(X_s \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) = P(X_s \leq t)P(s_{j-1} < L \leq s_j) = G_s(t)(H(s_j) - H(s_{j-1}))$$

aus der Unabhängigkeit von X_s und L . Setzt man oben ein und beachtet $M_j - m_j < \epsilon$, dann folgt

$$P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) \leq M_j(H(s_j) - H(s_{j-1})) \leq (m_j + \epsilon)(H(s_j) - H(s_{j-1})).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
P(X_L \leq t) &= \sum_{j=1}^k P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) + P(X_L \leq t, L > T) \\
&\leq \sum_{j=1}^k m_j(H(s_j) - H(s_{j-1})) + \sum_{j=1}^k \epsilon(H(s_j) - H(s_{j-1})) + P(L > T) \\
&\leq \int_0^T G_s(t) \, dH(s) + \epsilon + \epsilon \\
&\leq \int_0^\infty G_s(t) \, dH(s) + 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist $P(X_L \leq t) \leq \int_0^\infty P(X_s \leq t) \, dH(s)$ gezeigt. Ebenso folgt

$$P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) \geq \inf_{s_{j-1} < s \leq s_j} P(X_s \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j).$$

aus demselben Grund wie oben. Verwendet man wieder die Unabhängigkeit von X_s und L , so folgt

$$P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) \geq m_j(H(s_j) - H(s_{j-1})) \geq (M_j - \epsilon)(H(s_j) - H(s_{j-1})).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
P(X_L \leq t) &= \sum_{j=1}^k P(X_L \leq t, s_{j-1} < L \leq s_j) + P(X_L \leq t, L > T) \\
&\geq \sum_{j=1}^k M_j(H(s_j) - H(s_{j-1})) - \sum_{j=1}^k \epsilon(H(s_j) - H(s_{j-1})) \\
&\geq \int_0^T G_s(t) \, dH(s) - \epsilon + \int_T^\infty G_s(t) \, dH(s) - \epsilon \\
&\geq \int_0^\infty G_s(t) \, dH(s) - 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist auch $P(X_L \leq t) \geq \int_0^\infty P(X_s \leq t) \, dH(s)$ gezeigt. $\square$

Sei wie bereits erwähnt Y_1 die Anlaufzeit nach dem ersten registrierten Teilchen. Sei γ_t die Restlebensdauer, also die Wartezeit vom Zeitpunkt t auf das Eintreffen des nächsten Teilchen. Dann gilt

$$Z_1 = Y_1 + \gamma_{Y_1}.$$

Für $G_t(s) = P(\gamma_t > s)$ wurde

$$G_t(s) = 1 - F(s+t) + \int_{-\infty}^t G_{t-x}(s) \, dF(x)$$

im Beweis von Satz 2.11 gezeigt. Wegen $G_t(s) \leq 1$ sind alle Voraussetzungen von Satz 2.3 erfüllt und somit folgt

$$G_t(s) = 1 - F(s+t) + \int_{-\infty}^t 1 - F(s+t-x) \, dR(x).$$

Wird die Stetigkeit von F angenommen, dann ist $t \mapsto G_t(s)$ ebenfalls stetig und es folgt aus Hilfssatz 18

$$\begin{aligned} P(Z_1 \leq t) &= \int_0^\infty P(y + \gamma_y \leq t) \, dH(y) \\ &= \int_0^\infty 1 - G_y(t - y) \, dH(y) \\ &= \int_0^t 1 - G_y(t - y) \, dH(y). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Durch Einsetzen von $G_y(t - y)$ folgt somit

$$P(Z_1 \leq t) = F(t)H(t) - \int_0^t \int_0^y 1 - F(t - x) \, dR(x) \, dH(y),$$

die gesuchte Formel für die Verteilung von Z_1 .

BEISPIEL. Angenommen, die eintreffenden Teilchen bilden einen Poissonprozess. Dann wäre $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ und $R(t) = \lambda t$ für $t \geq 0$. Durch Einsetzen in (5.1) erhält man die Verteilung

$$P(Z_1 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})H(t) - e^{-\lambda t} \int_0^t 1 - e^{-\lambda y} \, dH(y).$$

5.2. Geigerzähler vom Typ II

Der Ablauf bei Zählern vom Typ II ist erheblich komplizierter als bei Zählern vom Typ I. Wie zuvor, werden eintreffende Teilchen nur registriert wenn diese zu einem Zeitpunkt eintreffen, wo der Zähler frei ist. Im Gegensatz zu Typ I, wo nur registrierte Teilchen eine Anlaufzeit verursacht haben, können beim Zähler vom Typ II selbst eintreffende Teilchen während einer Anlaufzeit diese immer wieder verlängern. Angenommen, das erste Teilchen sperrt den Zähler für eine Dauer σ_1 und das zweite Teilchen trifft zum Zeitpunkt $\tau < \sigma_1$ ein und verursacht zufällig eine Sperrzeit von Dauer σ_2 . Somit ist der Zähler als nächstes zum Zeitpunkt σ_1 oder $\tau + \sigma_2$ wieder betriebsbereit, je nachdem welcher zuletzt eintritt, unter der Voraussetzung, dass kein weiteres Teilchen zuvor eintrifft. Wie bereits beim Zähler vom Typ I, ist Z_n die Zeit zwischen dem $(n - 1)$ -ten und dem n -ten registrierten Teilchen. Erneut handelt es sich bei $(Z_k)_{k \geq 1}$ um einen Erneuerungsprozess. Eine typische Ausführung eines Zählers vom Typ II ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Wie bereits angedeutet, sind Zähler vom Typ II sehr komplex und somit schwer zu behandeln. Aufgrund dessen, wird, unter der Annahme dass es sich bei den eintreffenden Teilchen um einen Poissonprozess handelt, nur kurz auf diesen Zähler vom Typ II eingegangen.

Sei $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler zum Zeitpunkt t betriebsbereit ist. Behauptung:

$$p(t) = \exp \left(-\lambda \int_0^t 1 - H(y) \, dy \right), \quad (5.2)$$

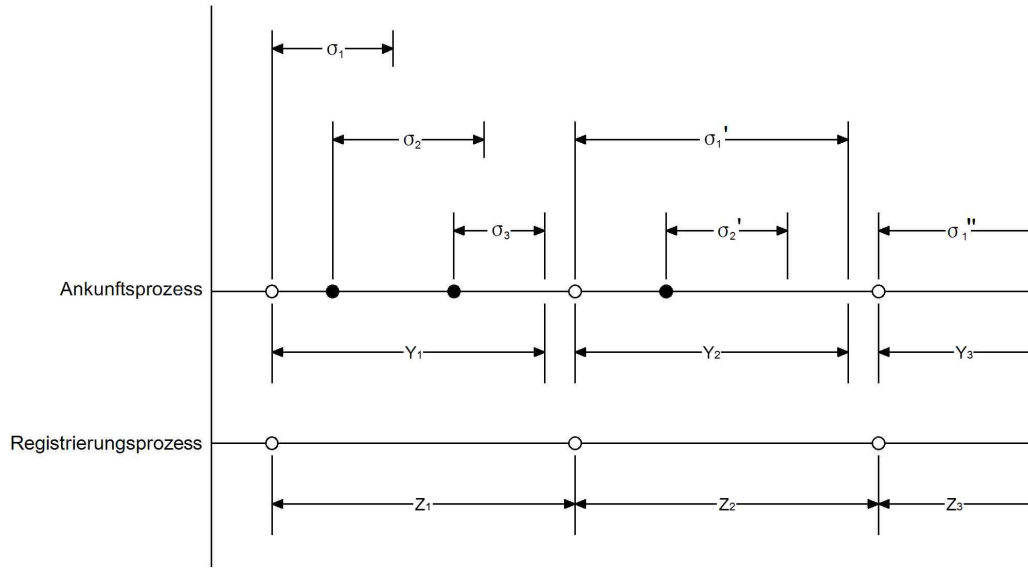


ABBILDUNG 5.2. Geigerzähler vom Typ II, wobei $\bullet$ ein verlorenes Signal und $\circ$ ein registriertes Signal bezeichnet.

wobei $H(y) = P(\sigma_k \leq y)$ die Verteilung der Sperrzeiten σ_k ist. Die Herleitung folgt aufgrund der Tatsache, dass bei einem Poissonprozess die Verteilung der Eintrittszeiten von n Ereignissen auf einen Zeitintervall $(0, t]$ gleich der Verteilung von n unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen auf $(0, t]$ ist.

Der Zähler ist zum Zeitpunkt t genau dann frei wenn alle Sperrzeiten, welche von den n eintreffenden Teilchen erzeugt werden, vor dem Zeitpunkt t abgelaufen sind. Sei $H(t - y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sperrzeit, beginnend zum Zeitpunkt y , vor dem Zeitpunkt t beendet ist. Unter der Bedingung, dass ein Teilchen im Zeitintervall $(0, t]$ eintrifft, hat dessen eigentliche Ankunftszeit eine gleichmäßige Verteilung. Deswegen hat die Voraussetzung, dass sich die komplette Sperrzeit vor dem Zeitpunkt t abspielt, die Wahrscheinlichkeit $\int_0^t H(t - y) \frac{1}{t} dy$. Wegen der Tatsache, dass die Sperrzeiten untereinander unabhängig vorausgesetzt sind und wegen der Unabhängigkeit zum Ankunftsprozess erhält man

$$P(\text{Zähler ist frei zum Zeitpunkt } t \mid n \text{ Teilchen auf } (0, t]) = \left(\int_0^t H(t - y) \frac{1}{t} dy \right)^n.$$

Jedoch ist die Anzahl der eintreffenden Teilchen auf dem Zeitintervall $(0, t]$ Poissonverteilt mit Mittelwert λt . Durch Anwenden des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit, erhält man folglich

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_0^t H(t-y) \frac{1}{t} dy \right)^j \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!} \\ &= \exp \left(-\lambda t \left(1 - \int_0^t H(t-y) \frac{1}{t} dy \right) \right) \\ &= \exp \left(-\lambda \int_0^t 1 - H(y) dy \right) \end{aligned}$$

womit Behauptung (5.2) gezeigt ist.

Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass die eintreffenden Teilchen einen Poissonprozess bilden. Um eine Formel für $R_R(t)$, die durchschnittliche Anzahl registrierter Teilchen im Zeitintervall $(0, t]$, zu bestimmen, muss ein Zusammenhang zwischen $p(t)$ und $R_R(t)$ gefunden werden. Folgende Behauptung wird aufgestellt:

$$\frac{dR_R(t)}{dt} = \lambda p(t). \quad (5.3)$$

Um diese Aussage zu beweisen, stellt man folgende Überlegungen an. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen im Zeitintervall $(t, t+h]$ eintrifft, ist $\lambda h + o(h)$. Dabei verkörpert o Ausdrücke, welche für $h \rightarrow 0$ sehr klein gegenüber dem restlichen Ausdruck werden und deswegen vernachlässigt werden können. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Geigerzähler während dieser Zeit betriebsbereit ist, ist $p(t) + o(h)$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit eines registrierten Teilchen im Zeitintervall $(t, t+h]$ gleich $\lambda h p(t) + o(h)$. Aufgrund der Tatsache, dass für $h \downarrow 0$ die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als ein Teilchen im Intervall $(t, t+h]$ registriert wird, gegen 0 geht ergibt sich

$$R_R(t+h) = R_R(t) + \lambda h p(t) + o(h).$$

Daraus folgt

$$\frac{dR_R(t)}{dt} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{R_R(t+h) - R_R(t)}{h} = \lambda p(t),$$

womit (5.3) gezeigt ist. Unter Berücksichtigung, dass $R_R(0) = 0$ gilt, erhält man durch die Kombination von (5.2) und (5.3)

$$R_R(t) = \int_0^t \lambda \exp \left(-\lambda \int_0^s 1 - H(y) dy \right) ds.$$

KAPITEL 6

Wachstum

Eine Bevölkerung besteht aus Individuen, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Zum Zeitpunkt $t = 0$ existiert genau ein Individuum welches eine Lebensdauer mit Verteilung F hat. Danach zerfällt es mit Wahrscheinlichkeit p_k in k Individuen, wobei $p_k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ gelten. Ist X_t die Bevölkerungsgröße zum Zeitpunkt t , dann bezeichnet man $(X_t)_{t \geq 0}$ als *Verzweigungsprozess*. Sei $R(t) = E(X_t)$ die durchschnittliche Bevölkerungsgröße zum Zeitpunkt t . Es wird angenommen, dass $m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k < \infty$ ist und $F(0) = 0$ gilt. Aufgrund dieser Annahmen ist $R(t)$ auf kompakten Intervallen beschränkt, sodass im Folgenden die Anwendung des Erneuerungssatzes gestattet ist (s. [7], [3], [1] als auch [5]).

Diese Anwendung wird nur für den vereinfachten Fall gezeigt, wo es ein $\alpha > 0$ gibt mit $F(\alpha) = 0$ und ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $p_k = 0$ für alle $k > c$ gilt. Dies bedeutet dass in dieser Bevölkerung, die Lebensdauer aller Individuen $> \alpha$ ist und dass die Anzahl der Nachkommen $\leq c$ ist. Das größtmögliche Wachstum erhält man somit, wenn alle Individuen eine Lebensdauer gleich α haben und in genau c Nachkommen zerfallen. Somit würde die Bevölkerungsgröße zu den Zeitpunkten $\alpha, 2\alpha, 3\alpha \dots$ mit c multipliziert werden, sodass sie zum Zeitpunkt t gleich $c^{\lfloor t/\alpha \rfloor}$ ist. Es gilt also $X_t \leq c^{\lfloor t/\alpha \rfloor}$ und somit $R(t) \leq c^{\lfloor t/\alpha \rfloor}$. Ebenfalls wird der Einfachheit halber angenommen, dass die Abbildung $t \mapsto P(X_t \leq x)$ für jedes x rechtsstetig ist. Dies wird erreicht, indem die Existenz jedes Individuums zu seinem Geburtszeitpunkt angenommen wird.

Um das Ziel, die Anwendung des Erneuerungssatzes, zu erreichen, muss eine Erneuerungsgleichung gefunden werden. Dazu sei L_1 die Lebensdauer des ersten Individuums und N_1 die Anzahl seiner Nachkommen, sodass $E(N_1) = m$ gilt. Außerdem wird mit X_s^j die Größe der mit dem j -ten Nachkommen startende Bevölkerung und zwar s Zeiteinheiten nach dessen Geburt bezeichnet. Man setzt $X_s^j = 0$ für $s < 0$. Zudem ist für ein Ereignis A , folgende Zufallsvariable definiert:

$$1_A = \begin{cases} 1, & \text{wenn } A \text{ eintritt,} \\ 0, & \text{wenn } A \text{ nicht eintritt.} \end{cases}$$

Mit Hilfssatz 2 folgt dann

$$\begin{aligned} R(t) &= E(X_t 1_{\{L_1 > t\}}) + E(X_t 1_{\{L_1 \leq t\}}) \\ &= P(L_1 > t) + E\left(\sum_{j=1}^{N_1} X_{t-L_1}^j\right) \\ &= 1 - F(t) + mE(X_{t-L_1}^1). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Man beachte dass aus $L_1 > t$, auch $X_t = 1$ folgt. Außerdem gilt, dass für $L_1 > t$ sowohl $1_{\{L_1 \leq t\}} = 0$ als auch $X_{t-L_1}^j = 0$ gilt. Aus Hilfssatz 18 erhält man

$$P(X_{t-L_1}^1 \leq x) = \int_0^\infty P(X_{t-s}^1 \leq x) \, dF(s).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P(X_{t-L_1}^1 > x) &= 1 - P(X_{t-L_1}^1 \leq x) \\ &= \int_0^\infty 1 - P(X_{t-s}^1 \leq x) \, dF(s) \\ &= \int_0^\infty P(X_{t-s}^1 > x) \, dF(s). \end{aligned}$$

Für $s > t$ ist X_{t-s}^1 , wie bereits oben erwähnt, gleich 0. Für $s \leq t$ besitzt X_{t-s}^1 dieselbe Verteilung wie X_{t-s} . Somit folgt

$$P(X_{t-L_1}^1 > x) = \int_0^t P(X_{t-s} > x) \, dF(s).$$

Durch Integrieren über x von 0 bis ∞ , ergibt sich somit

$$E(X_{t-L_1}^1) = \int_0^t E(X_{t-s}) \, dF(s) = \int_0^t R(t-s) \, dF(s).$$

Durch Einsetzen in (6.1), erhält man

$$R(t) = 1 - F(t) + m \int_{-\infty}^t R(t-y) \, dF(y). \quad (6.2)$$

Mit Ausnahme vom Faktor m , besitzt (6.2) die Form einer Erneuerungsgleichung. Aus diesem Grund, lässt sich der Erneuerungssatz, außer im Fall $m = 1$ nicht direkt anwenden. Es wird angenommen, dass $m \geq 1$ gilt. Es wird gezeigt, dass sich (6.2) dann in eine Erneuerungsgleichung umformen lässt. Dazu wird ein $\gamma \geq 0$ gewählt, sodass

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\gamma y} \, dF(y) = \frac{1}{m}$$

gilt. Dieses γ existiert eindeutig, da $\lambda \mapsto \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x} \, dF(x)$ eine streng monoton fallende und stetige Funktion ist, welche den Wert 1 für $\lambda = 0$ annimmt und für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Für $t \geq 0$, sei:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t) &= m \int_{-\infty}^t e^{-\gamma y} \, dF(y) \\ \tilde{R}(t) &= e^{-\gamma t} R(t) \end{aligned}$$

Man beachte, dass für eine Verteilung G , welche durch $G(t) = \int_{-\infty}^t h(y) \, dF(y)$ definiert ist, $\int_a^b f(y) \, dG(y) = \int_a^b f(y)h(y) \, dF(y)$ gilt. Durch Einsetzen dieser Resultate in (6.2)

erhält man somit die Erneuerungsgleichung

$$\begin{aligned}\tilde{R}(t) &= e^{-\gamma t} R(t) \\ &= e^{-\gamma t} (1 - F(t)) + \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-y)} R(t-y) m e^{-\gamma y} dF(y) \\ &= e^{-\gamma t} (1 - F(t)) + \int_{-\infty}^t \tilde{R}(t-y) d\tilde{F}(y).\end{aligned}$$

Aus dem Erneuerungssatz erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R}(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\gamma x} (1 - F(x)) dx,$$

wenn F keine Gitterverteilung ist, wobei

$$\mu = \int_{-\infty}^\infty x d\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^\infty m x e^{-\gamma x} dF(x)$$

ist, wodurch gezeigt wird, dass $R(t)$ exponentiell mit Wachstumsrate γ wächst.

KAPITEL 7

Genetisches Modell mit Mutation

Die Darstellung in diesem Kapitel hält sich, in weiten Zügen, an [7]. Man betrachte eine endliche Bevölkerung der Größe N und bezeichne die einzelnen Individuen mit $j = 1, \dots, N$, das die erste Generation eines evolutionären Prozesses, welcher sich durch natürliche Selektion und Mutationsraten weiterentwickelt, bezeichnet. Jedem Individuum der Bevölkerung wird ein Wert zugeordnet, welchen man als *Fitness* bezeichnet. Dieser Fitnesswert beeinflusst inwiefern sich das Individuum in den folgenden Generationen gegen andere Nachkommen durchsetzen wird. Sei w_k^1 die Fitness des k -ten Individuums der ersten Generation. Man bestimme

$$u_k = \frac{w_k^1}{\sum_{j=1}^N w_j^1}, \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, N, \quad (7.1)$$

welches man als die *relative Fitness* des k -ten Individuums bezeichnet.

Die nachfolgende Generation wird erzeugt, indem N unabhängige Individuen anhand einer Multinomialverteilung mit Wahrscheinlichkeitsvektor (7.1) ausgewählt werden. Somit wird ein Nachkomme den Fitnesswert w_k^1 seines Vorfahren besitzen und wird mit Wahrscheinlichkeit u_k gewählt. Deswegen besitzen Individuen, welche über einen höheren Fitnesswert als andere verfügen, auch eine höhere relative Fitness und werden sich somit mit größerer Wahrscheinlichkeit durchsetzen als Individuen mit kleinerem Fitnesswert. Diese Vorgehensweise bringt eine neue Bevölkerung hervor mit den Fitnesswerten

$$\tilde{w}^2 = (\tilde{w}_1^2, \tilde{w}_2^2, \dots, \tilde{w}_N^2).$$

Jeder der Werte $\tilde{w}_i^2$ entspricht einem der Werte aus w_k^1 . Jedes Individuum wird durch seine Fitness gekennzeichnet. Der Vektor $\tilde{w}^2$ verkörpert jedoch noch nicht die Bevölkerung der zweiten Generation. Es besteht noch die Möglichkeit der Mutation, welche dafür sorgt, dass sich der Fitnesswert eines Individuums ändert. Der Einfluss der Mutation wird anhand von Mutationsmultiplikatoren veranschaulicht. Dazu wird angenommen, dass $\{V_i^j; i = 1, \dots, N, j = 2, 3, \dots\}$ unabhängige, identisch verteilte, positive Zufallsvariablen sind und, dass

$$\begin{aligned} w_1^2 &= \tilde{w}_1^2 V_1^2, \\ w_2^2 &= \tilde{w}_2^2 V_2^2, \\ &\vdots \\ w_N^2 &= \tilde{w}_N^2 V_N^2. \end{aligned}$$

gelten. Der Vektor $w^2 = (w_1^2, w_2^2, \dots, w_N^2)$ repräsentiert die Fitness der Individuen der zweiten Generation. Obige Prozedur wird ständig wiederholt, wodurch neue N -dimensionale Vektoren entstehen, welche die Evolution der Bevölkerung und deren Fitness $w^k = (w_1^k, \dots, w_N^k)$ und relative Fitness $u^k = (u_1^k, \dots, u_N^k)$ darstellen. Das Wahrscheinlichkeitsgesetz welches die Ermittlung von w^{k+1} aus w^k und u^k möglich macht und w^2 aus w^1 bestimmt lautet wie folgt:

Bestimme eine Stichprobe vom Umfang N aus $w_1^k, w_2^k, \dots, w_N^k$, sodass w_i^k mit Wahrscheinlichkeit u_i^k , für $i = 1, 2, \dots, N$, gewählt wird. Den daraus resultierenden Vektor bezeichne man mit $\tilde{w}^{k+1} = (\tilde{w}_1^{k+1}, \tilde{w}_2^{k+1}, \dots, \tilde{w}_N^{k+1})$. Mutation verwandelt $\tilde{w}^{k+1}$ in w^{k+1} durch Multiplikation mit der positiven Zufallsvariable V_i^{k+1} . Dieses Vorgehen sieht im Detail wie folgt aus:

$$w_i^{k+1} = \tilde{w}_i^{k+1} V_i^{k+1}, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N.$$

Schließlich wird noch der Vektor u^{k+1} , welcher die relativen Fitnesswerte beinhaltet, anhand von

$$u_i^{k+1} = \frac{w_i^{k+1}}{\sum_{j=1}^N w_j^{k+1}}, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, N$$

bestimmt. Die Entwicklung dieses Prozesses kann man anhand des Pfades des Punktes w^k , für $k = 1, 2, \dots$, im N -dimensionalen Raum realisieren. Die relative Fitness u^k ist die Projektion der Zufallsvariablen w^k auf den N -dimensionalen Simplex

$$\Delta_N = \{x = (x_1, \dots, x_N) : x_i \geq 0 \text{ und } x_1 + \dots + x_N = 1\}.$$

Abbildung 7.1 zeigt diese Projektion für den Fall $N = 3$. Fernerhin wird $T(0)$ als die Anzahl verstrichener Generationen bis zur Generation, in der alle Komponenten von $\tilde{w}^k$ übereinstimmen, definiert. Eine solche Generation bezeichnet man auch als *Generation mit gleichen Komponenten*.

SATZ 7.1. *Es gelten $P(T(0) < \infty) = 1$ und $E(T(0)) \leq N^N$.*

BEWEIS. Sei $w^1 = (w_1^1, \dots, w_N^1)$ die Fitness der ersten Generation. Der Fall $T(0) = 1$ tritt ein, wenn die nachfolgende Bevölkerung die Werte

$$\tilde{w}_k^2 = w_\nu^1, \quad \text{für alle } k, \text{ mit } w_\nu^1 = \max\{w_1^1, \dots, w_N^1\}$$

besitzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt, beläuft sich mindestens auf den Wert $\alpha = (1/N)^N$. Daraus folgt

$$P(T(0) = 1) \geq \alpha \text{ und } P(T(0) > 1) = 1 - \alpha.$$

Dieselbe Abschätzung gilt für den Übergang der zweiten zur dritten Generation. Es folgt

$$P(T(0) > 2 | T(0) > 1) \leq 1 - \alpha$$

und somit

$$P(T(0) > 2) \leq (1 - \alpha)^2.$$

Durch Induktion erhält man schließlich $P(T(0) > k) \leq (1 - \alpha)^k$, sodass

$$E(T(0)) \leq \frac{1}{\alpha} = N^N$$

gilt. □

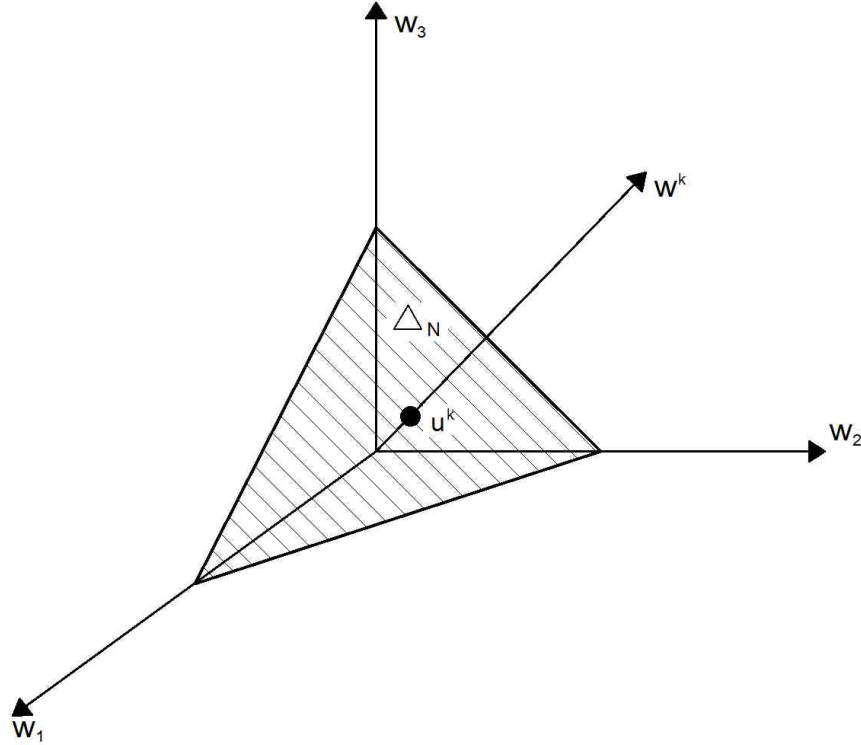


ABBILDUNG 7.1. Darstellung von u^k als Projektion von w^k auf dem Simplex Δ_N .

Sei $T(0) + T(1)$ die erste Generation, welche nach $T(0)$ erneut eine Generation mit gleichen Komponenten ist. Man definiert $T(0) + \dots + T(k)$ als die erste Generation mit gleichen Komponenten nach $T(0) + \dots + T(k-1)$. Da bei den Generationen mit gleichen Komponenten der Prozess der u^k immer wieder neu startet, formt diese Folge von positiven ganzen Zufallsvariablen einen Erneuerungsprozess. Um dies zu verdeutlichen, sei $\tilde{w}$ die gemeinsame Fitness der Generation $T(k)$. Man beachte, dass dadurch alle Komponenten von $\tilde{w}^{T(k)+1}$ den Wert $\tilde{w}$ haben und die j -te Komponente von $w^{T(k)+1}$ gleich $\tilde{w} V_j^{T(k)+1}$ ist. Der Einfluss von $\tilde{w}$ verschwindet nach dem folgenden Schritt, weil die relative Häufigkeit, wie in (7.1) gesehen,

$$u_j = \frac{\tilde{w} V_j^{T(k)+1}}{\sum_{i=1}^N \tilde{w} V_i^{T(k)+1}} = \frac{V_j^{T(k)+1}}{\sum_{i=1}^N V_i^{T(k)+1}}, \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N,$$

unabhängig von $\tilde{w}$ ist. Somit wird der Prozess nach jeder Generation mit gleichen Komponenten allein von der unabhängigen, identisch verteilten Menge der Mutationsmultiplikatoren der Zufallsvariablen bestimmt. Daraus ergibt sich, dass die Folge $T(0), T(1), \dots$, einen verzögerten Erneuerungsprozess beschreibt.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den Erneuerungsprozessen, einem Gebiet der Erneuerungstheorie. Die Erneuerungsprozesse werden sowohl in einem ersten Teil von einer theoretischen, als auch in einem zweiten Teil von einer praktischen Seite beleuchtet.

Die Schwerpunkte im ersten Teil sind der Begriff der Erneuerungsfunktion und der Erneuerungssatz. Zwei unterschiedliche Methoden für den Beweis des Erneuerungssatzes werden dargelegt und Folgerungen aus diesem Satz präsentiert. Schließlich werden Spezialfälle von Erneuerungsprozessen diskutiert. Bei den dargestellten Spezialfällen handelt es sich um den zeitverzögerten Erneuerungsprozess, den stationären Erneuerungsprozess, den endenden Erneuerungsprozess, sowie zusammenhängende und kumulierte Prozesse.

Im zweiten Teil werden praktische Anwendungsgebiete, in denen Erneuerungsprozesse vorkommen, thematisiert. Es wird gezeigt, dass der Erneuerungssatz im Gebiet der Versicherungsmathematik eine wesentliche Rolle bei der Bestimmung des asymptotischen Verhalten der Risikowahrscheinlichkeit spielt. Desweiteren werden zwei verschiedene Arten von Geigerzählern behandelt, wobei das Registrieren eintreffender radioaktiver Teilchen einen Erneuerungsprozess bildet. In einem dritten Anwendungsbeispiel wird ein Verzweigungsprozess, der die Entwicklung einer Bevölkerung beschreibt, behandelt. Mit Hilfe des Erneuerungssatzes kann das asymptotische Verhalten der durchschnittlichen Bevölkerungsgröße ermittelt werden. Zum Schluss wird ein genetisches Modell mit Mutationmöglichkeiten behandelt und gezeigt, dass das Auftreten von Generationen mit gleichen Komponenten jeweils eine Erneuerung in einem zeitverzögerten Erneuerungsprozess darstellt.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2 edition, 1957.
- [2] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume II. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [3] G. R. Grimmet and D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford: Oxford University Press, 2 edition, 1992.
- [4] F. Hofbauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie 2*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, WS 1986/87.
- [5] F. Hofbauer. *Stochastische Prozesse. Markovketten und Erneuerungsprozesse*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, WS 2002/03.
- [6] F. Hofbauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie 2*. Unveröffentlichtes Vorlesungsskriptum, Universität Wien, WS 2006/07.
- [7] S. Karlin and H. M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*. San Diego: Academic Press, Inc., 2 edition, 1975.
- [8] T. Mikosch. *Non-Life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Pierre FRERES
Geburtsdatum: 07.06.1983
Geburtsort: Luxemburg (Stadt)
Staatsbürgerschaft: luxemburgisch
Adresse: Bourgheed, 7
L-5312 Contern
Luxemburg
Telefon: +352 621 738580
+43 650 7580566
E-mail-Adresse: pitfreres@email.lu

Ausbildung

Mai 2010: Abschluss des Diplomstudiums Mathematik (Schwerpunkt: Stochastik)

Oktober 2003: Inskription des Diplomstudiums Mathematik an der Universität Wien, Österreich

2002 – 2003: Diplomstudium Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau an der Technischen Universität Wien, Österreich

1995 – 2002: Gymnasium Athénée de Luxembourg in Luxemburg (Stadt) (mathematischer Zweig)

Sprachen

Fließend gesprochen : Luxemburgisch, Deutsch, Englisch und Französisch