



universität
wien

DIPLOMARBEIT

Rekurrente und transiente Markoff Ketten

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften

an der

Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Wien

Verfasserin:	Berger Carina
Matrikel-Nummer:	0200766
Studienrichtung:	A405 Mathematik
Betreuer:	Ao. Univ. Prof. Dr. Franz Hofbauer

Wien, September 2008

Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit wird in sechs Kapitel unterteilt.

Das erste Kapitel bietet eine Einführung in die Materie der stochastischen Prozesse. Grundbegriffe wie die Indexmenge und der Zustandsraum werden erläutert. Neben der Beschränkung auf Prozesse in diskreter Zeit (das sind jene Prozesse, bei denen die Indexmenge abzählbar ist) wird auch noch vorausgesetzt, dass der Zustandsraum (das ist jene Menge S , in der die Werte der betrachteten Zufallsvariablen liegen) abzählbar ist. Insbesondere werden die homogenen Markoff Ketten genauer betrachtet und deren Zustände klassifiziert.

Weiterführende Literatur und die in diesem Kapitel verwendeten Definitionen und Sätze findet man in folgenden Punkten des Literaturverzeichnisses: [3]; [7]; [9].

Im zweiten Kapitel wird dann auf die Rekurrenz und Transienz von homogenen Markoff Kette eingegangen. Um möglichst schnell zu einem Ergebnis zu kommen, welches Aussagen darüber macht ob die Markoff Kette rekurrent oder transient ist, kann man einige Kriterien, die in der Arbeit vorgestellt werden, verwenden. Das bekannteste Kriterium für die positive Rekurrenz einer Markoff Kette ist jenes von Foster (1953).

Die verwendete Literatur ist in [3]; [6]; [7]; und [9] zu finden.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit dem Konvergenzverhalten, sowie mit den Absorptionswahrscheinlichkeiten von Markoff Ketten, die in vielen Anwendungsbeispielen eine wichtige Rolle spielen.

Die wichtigen Sätze in diesem Kapitel befinden sich in der Literatur von [3]; [4] und [9].

Die Kapitel vier, fünf und sechs widmen sich den Anwendungen von Markoff Ketten in verschiedenen Bereichen.

Im vierten Kapitel wird das Irrfahrtsmodell herangezogen, um eine einfache Art zu präsentieren, wie mit Markoff Ketten gerechnet werden kann. Es gibt eine Vielzahl an Variationen bei den Irrfahrten. Einige von ihnen werden hier kurz behandelt. Zusätzlich wird noch die Unterscheidung von eindimensionalen und mehrdimensionalen Irrfahrten vorgenommen, wobei die Spezialisierung wieder auf der Rekurrenz bzw der Transienz einer Markoff Kette liegt.

Die dazu verwendete Literatur kann man im Literaturverzeichnis unter den Punkten [5]; [6]; [9]; [10]; [12]; [13] nachlesen.

Weiters wird dann im fünften Kapitel mit Warteschlangenmodellen hantiert, die einen großen Bereich hinsichtlich der Anwendungen von Markoff Ketten einnehmen. Es werden zwei unterschiedliche Warteschlangensysteme vorgestellt und dabei wird überprüft unter welchen Bedingungen diese Systeme eine stationäre Verteilung besitzen.

Die Beispiele und Sätze von diesem Kapitel sind aus den Literaturquellen [4]; [6]; [8]; [9]; [10] und [12].

In dieser Arbeit werden zusätzlich auch Modelle der Populationsgenetik vorgestellt.

Im sechsten Kapitel werden vorerst einige Grundlagen der Populationsgenetik gegeben. Danach wird das Wright-Fisher-Modell und das Moran-Modell eingeführt und näher behandelt.

Man findet die weiterführende Literatur zu diesem Thema in [1]; [2]; [11] und [14].

[1] – [14]: Die genauen Literaturverweise findet man im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

Zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Prof. Dr. Franz Hofbauer, der mich bei der Lösung von Problemen unterstützt und durch seine Korrekturen zum Gelingen dieser Arbeit viel beigetragen hat.

Ich möchte meinen Freunden und Studienkollegen herzlich danken, die mir immer zur Seite gestanden sind.

Großer Dank gebührt auch meinen Eltern, die es mir ermöglichten, dieses Studium zu absolvieren.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Definitionen von stochastischen Prozessen und Markoff Ketten	1
1.2	Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten	2
1.3	Die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten	3
1.4	Klassifizierung der Zustände	5
1.5	Periodische Zustände einer Markoff Kette	7
2	Rekurrente und transiente Markoff Ketten	9
2.1	Die erstmaligen Rückkehrwahrscheinlichkeiten	9
2.2	Die erstmaligen Übergangswahrscheinlichkeiten	16
2.3	Sätze über Rekurrenz und Transienz	19
2.4	Kriterien für die positive Rekurrenz	23
3	Konvergenzverhalten von Markoff Ketten	27
3.1	Transiente Zustände	27
3.2	Rekurrente Zustände	27
3.3	Absorbtionswahrscheinlichkeiten	32
4	Irrfahrten	39
4.1	Das eindimensionale Irrfahrtsmodell	39
4.1.1	Die beschränkte Irrfahrt mit absorbierenden Schranken	39
4.1.2	Die beschränkte Irrfahrt mit reflektierenden Schranken	41
4.1.3	Die unbeschränkte Irrfahrt	42
4.2	Das d-dimensionale Irrfahrtsmodell	45
4.2.1	Die zweidimensionale Irrfahrt	45
4.2.2	Die dreidimensionale Irrfahrt	46
4.3	Anwendungen der Sätze über Rekurrenz und Transienz auf Irrfahrten . . .	48
5	Warteschlangentheorie	55
5.1	Einführung über Warteschlangen in diskreter Zeit	55
5.2	Beispiele von Warteschlangensystemen	56

5.2.1	Das Warteschlangensystem $M GI 1 \infty $	56
5.2.2	Das Warteschlangensystem $GI M 1 \infty $	62
5.3	Anwendungen der Sätze über Rekurrenz und Transienz auf Warteschlangenmodelle	63
6	Markoff Ketten in der Biologie	69
6.1	Grundlagen der Populationsgenetik	69
6.2	Das Wright-Fisher-Modell	70
6.3	Das Moran-Modell	73
6.4	Ein Modell einer Markoff Kette in der Pflanzenzüchtung	75
	Literaturverzeichnis	77
	Lebenslauf	79

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung über stochastische Prozesse und Markoff Ketten gegeben.

1.1 Definitionen von stochastischen Prozessen und Markoff Ketten

Definition 1.1. Ein stochastischer Prozess P ist eine Menge von Zufallsvariablen X_t , sodass gilt: $P = \{X_t : t \in T\}$.

Die Menge T wird als Parameterraum (oder Indexmenge) des stochastischen Prozesses bezeichnet.

In vielen Anwendungsbeispielen wird der Parameter t als Zeit gedeutet. Ist $t \in \mathbb{N}_0$ (X_t ist eine Folge von Zufallsvariablen), dann heißt X_t ein stochastischer Prozess mit diskreter Zeit. Ist $t \in \mathbb{R}^+$ (X_t ist eine Familie von Zufallsvariablen), dann heißt X_t ein stochastischer Prozess mit kontinuierlicher Zeit.

Die Zufallsvariablen müssen alle denselben Wertebereich besitzen, diesen nennt man den Zustandsraum S . Im Weiteren werden in dieser Arbeit nur endliche oder abzählbar unendliche Zustandsräume vorkommen. Das heißt, hier wird meist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, bzw die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Zustandsraum betrachtet .

Definition 1.2. Eine Markoff Kette mit diskreter Zeit ist ein stochastischer Prozess $\{X_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ mit einem abzählbaren Zustandsraum S , welcher die Markoff-Eigenschaft **(M1)** erfüllt:

(M1) $\forall t \in \mathbb{N}_0$ und $\forall i_0, \dots, i_{t+1} \in S$ mit

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_t = i_t) > 0 \text{ ist}$$

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_0 = i_0, \dots, X_t = i_t) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t).$$

Das soll bedeuten, dass bei Markoff Ketten die Zukunft X_{t+1} nur von der Gegenwart X_t abhängt und nicht von der Vergangenheit $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$.

Definition 1.3. Sei wieder $\{X_t : t \in T\}$ eine Markoff Kette mit Zustandsraum S . Die Wahrscheinlichkeit $p_{ij}(t) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$ für beliebige Zustände $i, j \in S$ und beliebige $t \in T$ heißt einstufige Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j .

Die Übergangswahrscheinlichkeiten in den folgenden Beispielen werden meist unabhängig vom Zeit-Parameter t sein. Daher folgt eine wichtige Definition:

Definition 1.4. Man sagt, eine Markoff Kette ist homogen, bzw. sie besitzt stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn sie die Bedingung **(M2)** erfüllt:

$$\textbf{(M2)} \quad P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij} \quad \forall i, j \in S \text{ und } \forall t \in \mathbb{N}.$$

Das bedeutet, dass die einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig von der Zeit t sind.

In den folgenden Kapiteln werden also hauptsächlich homogene Markoff Ketten auftreten. Für genauere Resultate über inhomogene Markoff Ketten wird auf G. Seim verwiesen.

1.2 Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

Nun werden die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} zu einer $S \times S$ Übergangsmatrix zusammengefasst. Diese hat entweder die Form

$$\begin{pmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n0} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

falls der Zustandsraum $S = \{0, \dots, n\}$ endlich ist, $n \in \mathbb{N}_0$ oder die Form

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

falls $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ abzählbar unendlich ist.

Die beiden Eigenschaften (i) $p_{ij} > 0 \forall i, j \in S$ und (ii) $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \forall i \in S$ machen eine allgemeine Matrix zu einer stochastischen Matrix. Dies ist für die Übergangsmatrix einer homogenen Markoff Kette immer erfüllt.

Weiters führt man jetzt noch eine Startverteilung des Prozesses ein, die wie folgt definiert ist: $p_i = P(X_0 = i)$ für $i \in S$.

Dies besagt, dass zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ eine Verteilung p_i vorgegeben ist.

Der Multiplikationssatz wird hier verwendet. Dieser besagt, dass

$$\begin{aligned} P(X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\ = P(X_0 = i_0) \cdot P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdot \dots \cdot P(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) \text{ ergibt.} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (M1) und (M2) erhält man

$$P(X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = p_{i_0} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{t-1} i_t}.$$

Durch die Startverteilung und die Übergangswahrscheinlichkeiten ist der stochastische Prozess bestimmt.

1.3 Die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

Definition 1.5. Die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markoff Kette sind durch $p_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i) \forall m, n \in \mathbb{N}_0$ und $\forall i, j \in S$ gegeben. Es gilt: $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ und $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}.$

Dies besagt, dass die Markoff Kette, die im Zustand i startet, nach n Schritten den Zustand j erreicht. Da hier nur homogene Markoff Ketten behandelt werden, gilt wieder, dass die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} unabhängig vom Zeitparameter m sind.

Die Matrix der höheren Übergangswahrscheinlichkeiten ist durch

$$\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $n = 0$ ist $P^{(0)}$ die Einheitsmatrix $\mathbb{I}$.

Ein wichtiger Satz, der mit den Übergangswahrscheinlichkeiten arbeitet, ist der folgende:

Satz 1.1. Chapman-Kolmogorow-Gleichung

Die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markoff Kette erfüllen die Rekursionsbeziehung

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}, \text{ für alle } i, j \in S \text{ und } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Diese ist als Chapman-Kolmogorow-Gleichung bekannt.

$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]_{i,j \in S} \forall n \in \mathbb{N}_0$ ist die Matrix der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten. Sie ist ebenfalls eine stochastische Matrix. Somit kann man die Rekursionsformel auch in der Form $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$ schreiben.

Beweis: (1) Für $m = 1$ gilt folgendes:

$$p_{ij}^{(n+1)} = P(X_{n+1} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j | X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$$

wegen dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit und der Markoff-Eigenschaft.

In Matrizenschreibweise: $P^{(n+1)} = P^{(n)} P, \forall n \in \mathbb{N}$.

Da $P^{(0)} = \mathbb{I}$ (=Einheitsmatrix) und $P^{(1)} = P$ stochastische Matrizen sind, wie man im vorherigen Abschnitt 1.2 nachlesen kann, wird mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen, dass auch die Matrix der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten stochastisch ist.

Es sei für $n \geq 0$ die Behauptung erfüllt, so gilt für die nachfolgende Zahl $n+1$:

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{j \in S} (\sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} (\sum_{j \in S} p_{kj}) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} = 1.$$

(2) Es wurde in (1) $P^{(n+1)} = P^{(n)} P$ für $m = 1$ bewiesen. Nun führt man die Induktion nach m durch. Angenommen $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$ gilt $\forall m \geq 1$. Dann ergibt sich für die nachfolgende Zahl $m+1$:

$$\begin{aligned} P^{(n+m+1)} &= P^{(n+m)} P && \text{wegen (1)} \\ &= P^{(n)} P^{(m)} P && \text{nach Induktionsannahme} \\ &= P^{(n)} P^{(m+1)} && \text{wegen (1)} \end{aligned}$$

Definition 1.6. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Markoff Kette zur Zeit n im Zustand j befindet, wird mit $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ ($j \in S, n \in \mathbb{N}_0$) bezeichnet. Die $p_j^{(n)}$ werden als Zustandswahrscheinlichkeiten der Markoff Kette betitelt.

Für diese Zustandswahrscheinlichkeiten gelten wieder die folgenden beiden Eigenschaften:

- (i) $p_j^{(n)} \geq 0 \quad \forall j \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0$
- (ii) $\sum_{j \in S} p_j^{(n)} = 1.$

Diese soeben definierten Zustandswahrscheinlichkeiten kann man mit Hilfe des folgenden Satzes berechnen:

Satz 1.2. Es sei $p_i^{(0)} = p_i$ die Startverteilung von X_0 und $p_{ij}^{(n)}$ seien die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten. Dann gilt:

$$p_j^{(n)} = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} \cdot p_{ij}^{(n)}, \forall j \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Der Beweis des Satzes ist durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit trivial.

$$p_j^{(n)} = P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_n = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} \cdot p_{ij}^{(n)}.$$

Fasst man noch die Startverteilung p_i in Form eines Zeilenvektors $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, \dots)$ zusammen sowie die Zustandswahrscheinlichkeiten $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots)$, so erhält man wieder die selbe Aussage: $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p} \cdot P^{(n)}$.

Dieser Satz kann somit Aufschlüsse darüber geben mit welcher Wahrscheinlichkeit der Prozess zum Zeitpunkt n in einem gewissen Zustand j ist; und das gilt für jeden Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$.

1.4 Klassifizierung der Zustände

In diesem Abschnitt wird auf die Struktur einer Markoff Kette näher eingegangen.

Die Begriffe periodische und aperiodische Markoff Kette werden eingeführt und genauer erläutert.

Definition 1.7. Es sei eine homogene Markoff Kette mit Zuständen $i, j \in S$ gegeben.

- (i) Der Zustand j heißt von dem Zustand i aus erreichbar, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass $p_{ij}^{(n)} > 0$ gilt. Man schreibt dafür: $i \rightarrow j$.
- (ii) Die Zustände i, j heißen gegenseitig erreichbar, wenn $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$ gilt. Man schreibt dafür: $i \leftrightarrow j$.

Wenn nun zwei Zustände i und j nicht gegenseitig erreichbar sind, dann ist entweder $p_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0$,
oder $p_{ji}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0$,
oder es treffen beide Aussagen zu.

Das Konzept der gegenseitigen Erreichbarkeit ist eine Äquivalenzrelation auf dem Zustandsraum S :

- Die Reflexibilität: $i \leftrightarrow i$ ergibt sich durch die Definition von $p_{ii}^{(0)} = 1$.
- Die Symmetrie: wenn $i \leftrightarrow j$ gilt, dann gilt auch $j \leftrightarrow i$, nach der Definition der gegenseitigen Erreichbarkeit.
- Die Transitivität: wenn $i \leftrightarrow j$ und $j \leftrightarrow k$ gilt, dann folgt, dass auch $i \leftrightarrow k$ gilt. Dies kann mit Hilfe der Chapman-Kolmogorow-Gleichung leicht bewiesen werden.

Der Zustandsraum S kann daher bezüglich der Relation $i \leftrightarrow j$ in Äquivalenzklassen zerlegt werden.

Definition 1.8. Eine Markoff Kette heißt irreduzibel, wenn alle ihre Zustände gegenseitig erreichbar sind. Besteht der Zustandsraum S nur aus einer einzigen Äquivalenzklasse, dann nennt man die Markoff Kette irreduzibel. Anderenfalls nennt man die Markoff Kette reduzibel.

Wenn man den Fall betrachtet, bei dem S endlich ist, wird man feststellen, dass ein Zusammenhang zwischen den reduziblen/irreduziblen Markoff Ketten und der Theorie der reduziblen/irreduziblen Matrizen besteht; und zwar heißt eine Matrix $P = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ reduzibel, wenn man die Indexmenge $S = \{0, 1, 2, \dots, m\}$ in disjunkte Teilmengen $Q \neq \emptyset$ und

$R = S \setminus Q \neq \emptyset$ zerlegen kann, sodass $p_{ij} = 0 \forall i \in Q, \forall j \in R$ gilt.

Sei A die $Q \times Q$ -Matrix, die man erhält, wenn man die Übergangsmatrix P auf die Menge Q einschränkt. A ist dann wieder eine stochastische Matrix, da $\sum_{j \in Q} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ gilt. Durch Umordnen der Elemente der Zustandsmenge S , erhält P dann die Gestalt

$$\begin{matrix} & Q & R \\ \begin{matrix} Q \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \end{matrix}$$

wobei 0 eine $Q \times R$ -Matrix ist, für die ja $p_{ij} = 0, \forall i \in Q, \forall j \in R$ gilt.

Die Menge Q heißt dann abgeschlossene Menge. Das bedeutet: aus solch einer abgeschlossenen Menge Q gibt es keine Übergänge in die Komplementärmenge $R = S \setminus Q$.

Satz 1.3. Eine Markoff Kette mit Zustandsraum S ist genau dann irreduzibel, wenn es außer S selbst keine weitere abgeschlossene Menge $T \subsetneq S$ gibt.

Dieser Satz ist auch für Markoff Ketten mit abzählbar unendlichem Zustandsraum S gültig.

1.5 Periodische Zustände einer Markoff Kette

Durch den Begriff der Periode eines Zustandes der Markoff Kette wird festgelegt zu welchen Zeitpunkten die Markoff Kette mit positiver Wahrscheinlichkeit in einen vorgegebenen Ausgangszustand zurückkehren kann.

Definition 1.9. Sei $i \in S$. Der größte gemeinsame Teiler d_i der Menge

$H = \left\{ n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$ heißt Periode des Zustandes i . Wenn $H = \{0\}$ ist, dann setzt man $d_i = \infty$.

Ist $d_i = 1$, dann nennt man den Zustand i aperiodisch; anderenfalls nennt man ihn periodisch.

Bemerkung: Es seien $h_1, h_2, \dots, h_k$ nichtnegative ganze Zahlen, die nicht alle gleich null sind, mit $d = \text{ggT}\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$.

Dann existiert eine positive ganze Zahl M_i , sodass für alle ganzen Zahlen $m \geq M_i$ folgendes gilt

$md = \sum_{i=1}^k c_i h_i$, wobei c_i ($1 \leq i \leq k$) nichtnegative ganze Zahlen sind.

Satz 1.4. $p_{ii}^{(n)} > 0$ kann nur dann gelten, wenn n eine positive ganze Zahl der Form $n = m \cdot d_i$ ist. Zu jedem Zustand i mit der Periode $d_i < \infty$ existiert eine positive ganze Zahl M_i , sodass $p_{ii}^{(md_i)} > 0 \forall m \geq M_i$ gilt.

Dies besagt, dass nach einer gewissen Anlaufzeit M_i die Rückkehr in den Zustand i für alle Vielfachen der Periode d_i möglich ist.

Beweis: Man wählt zwei Elemente h_1, h_2 aus der Menge H aus, sodass $d_i = \text{ggT}\{h_1, h_2\}$ ist.

Dies ist stets durchführbar. Nach der obigen Bemerkung kann man ein $M_i \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle ganzen Zahlen $m \geq M_i$

$md_i = c_1 h_1 + c_2 h_2$ gilt, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{N}_0$ sind.

Die Gleichung von Chapman-Kolmogorow liefert dann die Behauptung dieses Satzes:

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(md_i)} &= p_{ii}^{(c_1 h_1 + c_2 h_2)} = \sum_{j \in S} p_{ij}^{(c_1 h_1)} p_{ji}^{(c_2 h_2)} = \\ &= p_{ii}^{(c_1 h_1)} p_{ii}^{(c_2 h_2)} = (p_{ii}^{(h_1)})^{c_1} (p_{ii}^{(h_2)})^{c_2} > 0. \end{aligned}$$

Satz 1.5. Ist $p_{ij}^{(q)} > 0$, dann existiert ein $M_i \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(md_i+q)} > 0 \forall m \geq M_i$, falls $d_i < \infty$.

Beweis: Wie schon im obigen Beweis gezeigt wurde, kann man diesen Satz durch die Gleichung von Chapman-Kolmogorow leicht beweisen:

$$p_{ij}^{(md_i+q)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(md_i)} \cdot p_{kj}^{(q)} \geq p_{ii}^{(md_i)} \cdot p_{ij}^{(q)} > 0.$$

Satz 1.6. Sei eine irreduzible Markoff Kette mit Zustandsraum S gegeben. Wenn alle Zustände der Markoff Kette die Periode d besitzen, dann existiert eine Zerlegung des Zustandsraumes S in Mengen $D_0, D_1, \dots, D_{d-1}$, die periodisch durchlaufen werden, das heißt folgendes:

Ist $i \in D_r$ und $p_{ij} > 0$ dann gilt $j \in D_{r+1}$, wobei D_d gleich D_0 zu setzen ist.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes wird auf die Literatur „Stochastische Systeme“ von W.-D. Heller, H. Lindenberg, M. Nuske und K.-H. Schriever, 1978 verwiesen.

Kapitel 2

Rekurrente und transiente Markoff Ketten

2.1 Die erstmaligen Rückkehrwahrscheinlichkeiten

In diesem Kapitel wird die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr in einen bestimmten Zustand der Markoff Kette näher betrachtet. Die Frage ist, ob man bei Start in einem Zustand i mit Wahrscheinlichkeit 1 wieder in den Zustand i zurückkehren kann, oder nicht.

Um diese Frage beantworten zu können, definiert man vorerst einmal die Wahrscheinlichkeiten $f_{ii}^{(n)}$ der ersten Rückkehr in den Ausgangszustand i nach genau n Schritten.

Definition 2.1. Es sei $f_{ii}^{(n)} = P(X_n = i, X_k \neq i \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots, n-1 | X_0 = i)$ ($n \in \mathbb{N}, i \in S$) die Wahrscheinlichkeit nach n Schritten zum ersten Mal nach i zurückzukehren. Weiters gilt: $f_{ii}^{(1)} = p_{ii}^{(1)} = p_{ii}$ und $f_{ii}^{(0)} = 0$.

Man kann $f_{ii}^{(n)}$ auch durch die Übergangswahrscheinlichkeiten ausdrücken:

$$\begin{aligned} f_{ii}^{(n)} &= P(X_n = i, X_k \neq i \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots, n-1 | X_0 = i) = \\ &= P(\bigcup_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus \{i\}} X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i | X_0 = i) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus \{i\}} p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i}. \end{aligned}$$

Jetzt wird die sogenannte erstmalige Rückkehrwahrscheinlichkeit definiert:

Definition 2.2. Es sei $f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ für $i \in S, n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit vom Ausgangspunkt i irgendwann erstmalig wieder nach i zurückzukehren. Dazu passend definiert man noch die mittlere erstmalige Rückkehrzeit der Markoff Kette in den Zustand i als $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$.

Satz 2.1. Eine Eigenschaft der erstmaligen Rückkehrwahrscheinlichkeit $f_{ii}^{(n)}$ in n Schritten wird durch die folgende Rekursionsformel dargestellt:

$$\forall i \in S \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)} \cdot f_{ii}^{(k)} \quad (2.1)$$

Beweis: Um diesen Beweis durchführen zu können, müssen vorerst die Zeitpunkte $S_0^{(i)} = 0$, $S_1^{(i)} = \min \{n > 0 : X_n = i\}$, $S_2^{(i)} = \min \{n > S_1^{(i)} : X_n = i\}, \dots$, $S_k^{(i)} = \min \{n > S_{k-1}^{(i)} : X_n = i\}$, in denen die Markoff Kette zum 0-te, 1., 2., ..., k -ten Male wieder den Zustand i erreicht, eingeführt werden. Man setzt $S_k^{(i)} = \infty$, wenn für dieses k ($k \geq 1$) kein solches n existiert. $S_0^{(i)}, S_1^{(i)}, \dots, S_k^{(i)}, \dots$ bilden eine Folge von Zufallsvariablen. Daher kann man die Pausen zwischen den aufeinanderfolgenden Besuchen der Markoff Kette im Zustand i wie folgt bezeichnen:

$$T_{ii}^{(k)} = S_k^{(i)} - S_{k-1}^{(i)} = \begin{cases} \min \{n \in \mathbb{N} : X_{S_{k-1}^{(i)}+n} = i\} & \text{wenn } n \text{ existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies gilt für alle $k \geq 1$.

Die Folge der Pausenzeiten $\{T_{ii}^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ bildet einen arithmetischen Erneuerungsprozess.

Das bedeutet, dass die Zufallsgrößen $T_{ii}^{(k)} = S_k^{(i)} - S_{k-1}^{(i)}$ für alle $k \geq 1$ nichtnegativ, insgesamt unabhängig und identisch verteilt sind.

T_{ii} heißt die erstmalige Rückkehrzeit der Markoff Kette in den Zustand i und man setzt $f_{ii}^{(n)} = P(T_{ii} = n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Sichtlich ist $\mu_{ii} = E(T_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$. Weiters gilt $f_{ii}^{(0)} = 0$ und $f_{ii}^{(1)} = p_{ii}$.

$S_m^{(i)} = \sum_{k=1}^m T_{ii}^{(k)} = T_{ii}^{(m)} + S_{m-1}^{(i)}$, ($m \geq 1$) bezeichnet dann den Zeitpunkt der m -ten Rückkehr der Markoff Kette in den Zustand i . Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n)} &= P(\bigcup_{m=1}^n \{S_m^{(i)} = n\}) = \\ &= \sum_{m=1}^n P(S_m^{(i)} = n) = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^n P(T_{ii}^{(m)} + S_{m-1}^{(i)} = n | T_{ii}^{(m)} = k) P(T_{ii}^{(m)} = k) \end{aligned}$$

bzw.

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{m=1}^n \sum_{k=0}^n P(S_{m-1}^{(i)} = n - k | T_{ii}^{(m)} = k) f_{ii}^{(k)}.$$

Die Zufallsgrößen $S_{m-1}^{(i)}$ und $T_{ii}^{(m)}$ sind unabhängig und das führt zu folgender Bedingung

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=1}^n P(S_{m-1}^{(i)} = n - k) f_{ii}^{(k)} = \\ &= \sum_{k=0}^n P(\bigcup_{m=1}^n \{S_{m-1}^{(i)} = n - k\}) f_{ii}^{(k)} = \\ &= \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(n-k)} f_{ii}^{(k)}. \end{aligned}$$

Durch diese nun gemachten Definitionen und Annahmen, wird der Unterschied zwischen rekurrenten und transienten Zuständen deutlich, und zwar:

Definition 2.3. Ein Zustand i heißt rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ ist.

Diese Definition soll damit ausdrücken, dass der Prozess bei Start in i mit der Wahrscheinlichkeit 1 wieder zu i zurückkehrt.

Ein Zustand i heißt transient, falls $f_{ii}^* < 1$ ist.

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für die Rückkehr nach i bei Start in i nicht sicher, also kleiner als 1 ist.

Man macht noch weitere zwei Unterscheidungen über rekurrente Zustände:

- Der Zustand i heißt positiv-rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} < \infty$.
- Der Zustand i heißt null-rekurrent, falls $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii} = \infty$.

Ein rekurrenter Zustand ist demnach positiv-rekurrent, wenn seine mittlere erstmalige Rückkehrzeit endlich ist und null-rekurrent, wenn seine mittlere Rückkehrzeit unendlich groß wird, unter Voraussetzung, dass bei beiden Zuständen die Wahrscheinlichkeit einer Rückkehr sicher ist.

Eine weitere Möglichkeit zu überprüfen, ob ein Zustand rekurrent oder transient ist, zeigt der folgende Satz:

Satz 2.2. Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ ist. Er ist transient, falls $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ ist.

Um diesen Satz beweisen zu können, braucht man einen Hilfssatz:

Satz 2.3. Hilfssatz: Es sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k} = 0$.

Ist weiters $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine beliebige andere reelle Zahlenfolge, für die $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < \infty$ gilt, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k} = b$.

Bemerkung: Die Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k} = 0$ ist erfüllt, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ gilt oder wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ und $0 \leq a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis: Aufgrund der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b < \infty$ lässt sich zu einem beliebig vorgegebenen $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ finden, sodass

$$|b_n - b| < \epsilon \quad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Weiters gilt für ein $M < \infty$, dass

$$|b_n - b| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit erhält man dann für alle $n \geq N(\epsilon)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k} - b \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-N} a_k (b_{n-k} - b) + \sum_{k=n-N+1}^n a_k (b_{n-k} - b)}{\sum_{k=0}^n a_k} \right| < \\ &< \frac{\sum_{k=0}^{n-N} a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} + M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} \leq \epsilon + M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sum_{k=0}^n a_k} = 0$ ist andererseits

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n-N+1}^n a_k}{\sum_{k=0}^n a_k} = 0.$$

Somit erhält man schließlich

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k} - b \right| \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}}{\sum_{k=0}^n a_k} = b$.

Nun widmet man sich dem Beweis des vorigen Satzes 2.2.:

Beweis: Man summiert in der obigen Rekursionsformel (2.1) über $n = 1, 2, \dots, N$, sodass $\sum_{n=1}^N p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^n f_{ii}^{(n-k)} \cdot p_{ii}^{(k)} = \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N f_{ii}^{(n-k)} \cdot p_{ii}^{(k)} = \sum_{k=0}^N p_{ii}^{(k)} \sum_{n=0}^{N-k} f_{ii}^{(n)}$.

Da $0 \leq p_{ii}^{(n)} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_{ii}^{(k)} = f_{ii}^* \leq 1$ ist, sind für die Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n = p_{ii}^{(n)}$ und $b_n = \sum_{k=0}^n f_{ii}^{(k)} \quad \forall n \geq 0$ die Voraussetzungen vom Hilfssatz erfüllt, und es folgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N p_{ii}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^N p_{ii}^{(k)} \cdot \sum_{n=1}^{N-k} f_{ii}^{(n)}}{\sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)}} = f_{ii}^*$$

bzw.

$$1 - f_{ii}^* = \frac{1}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)}}.$$

Hier ist sehr schön ersichtlich, dass genau dann wenn $f_{ii}^* = 1$ (bzw. $f_{ii}^* < 1$) ist

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ (bzw. $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$) folgt.

Satz 2.4. Ist der Zustand i einer Markoff Kette transient, dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = (1 - f_{ii}^*)^{-1}.$$

Beweis: Durch Anwendung des letzten Satzes 2.2. erhält man folgende Relation:

$$1 - f_{ii}^* = \frac{1}{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)}}.$$

Ist i jetzt transient, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ und man erhält $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)} = (1 - f_{ii}^*)^{-1}$.

Satz 2.5. Seien $i, j \in S$ mit $i \leftrightarrow j$. Dann sind i und j entweder beide rekurrent oder beide transient. Außerdem besitzen beide die gleiche Periode.

Beweis: Angenommen es existieren r und s mit $p_{ij}^{(r)} > 0$ und $p_{ji}^{(s)} > 0$.

Wenn $p_{ii}^{(n)} > 0$ ist, dann folgt $p_{jj}^{(s+n+r)} \geq p_{ji}^{(s)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(r)} > 0$.

Wenn $p_{jj}^{(m)} > 0$ ist, dann folgt $p_{ii}^{(r+m+s)} \geq p_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(m)} p_{ji}^{(s)} > 0$.

Diese beiden Relationen bestätigen die erste Aussage des Satzes, denn angenommen der Zustand i sei nun rekurrent, dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Zusammen mit der ersten Ungleichung erhält man somit

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty,$$

woraus die Rekurrenz des Zustandes j folgt.

Umgekehrt, das heißt falls man j als rekurrenten Zustand voraussetzt, verläuft der Beweis analog.

Daher sind alle Zustände einer irreduziblen Markoff Kette entweder rekurrent oder transient, was man mit der Prüfung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ auf Konvergenz oder Divergenz, feststellen kann.

Die Aussage über die gleiche Periode der Zustände i und j lässt sich folgendermaßen beweisen:

Setzt man $D_i = \{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ und $D_j = \{n : p_{jj}^{(n)} > 0\}$, dann existieren $k, l \in D_i$ mit $d_i = l - k$.

Somit sieht man dann, dass $s + k + r$ und $s + l + r \in D_j$ sind. Also teilt d_j $l - k$ und daher auch d_i .

Umgekehrt gilt, dass d_i auch d_j teilt, also gilt schließlich $d_i = d_j$.

Um den nächsten Satz behandeln zu können, welcher Aussagen über die Art der Zerlegung des Zustandsraumes in rekurrente und transiente Zustandsmengen macht, benötigt man vorerst einen Hilfssatz:

Satz 2.6. Hilfssatz: Ist i ein rekurrenter Zustand und gilt $i \rightarrow j$, dann folgt $j \rightarrow i$.

Beweis: Da man annimmt, dass $i \rightarrow j$ gilt, existiert eine natürliche Zahl n mit $p_{ij}^{(n)} > 0$. Wäre $j \nrightarrow i$, dann gäbe es eine positive Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Markoff Kette nicht mehr in den Zustand i zurückkehrt. Dann würde $f_{ii}^* < 1$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass der Zustand i rekurrent ist. Darum ist $j \rightarrow i$ erfüllt.

Satz 2.7. Der Zustandsraum S einer Markoff Kette lässt sich folgendermaßen zerlegen: $S = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$, wobei die Mengen C_k ($k = 1, 2, \dots$) abgeschlossene rekurrente Zustandsmengen sind und T die Menge der transienten Zustände ist. Es kann vorkommen, dass einer dieser Mengen T bzw $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ leer ist. Wenn entweder $T = S$ oder $C = C_1 = S$ ist, so ist die Markoff Kette irreduzibel.

Beweis: Da T die Menge der transienten Zustände und C die der rekurrenten Zustände beschreibt gilt offensichtlich

$$S = T \cup C \text{ und } T \cap C = \emptyset.$$

Wenn $C = \emptyset$ gilt, dann ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Wenn $C \neq \emptyset$ gilt, dann wird durch die Relation $\leftrightarrow$ in C eine Äquivalenzrelation gegeben. Diese ist stets symmetrisch und transitiv (Abschnitt 1.4). Weiters ist diese Relation auch reflexiv in C , weil für ein beliebiges $i \in C$ immer ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_{ii}^{(n)} > 0$; daher gilt $i \leftrightarrow i$.

Somit sieht man, dass C in Äquivalenzklassen $C_1, C_2, \dots$, zerfällt, deren Anzahl wegen der Abzählbarkeit von $C \subset S$ höchstens abzählbar unendlich ist.

Folglich gilt: $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, $C_k \cap C_l = \emptyset$ ($k \neq l$).

Zwei Zustände $i, j \in S$ sind genau dann gegenseitig erreichbar, wenn sie zur selben Äquivalenzklasse gehören. Das bedeutet:

$$i \leftrightarrow j \quad \forall i, j \in C_k \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \text{ aber}$$

$$i \nleftrightarrow j \quad \forall i \in C_k, \quad \forall j \in C_l \quad (k \neq l).$$

Die Abgeschlossenheit von C_k folgt nun nach dem Hilfssatz 2.6.:

Wenn $i \in C_k$ und $i \rightarrow j$ gilt, dann ist auch $j \rightarrow i$ erfüllt, da i rekurrent ist. Daher gilt $i \leftrightarrow j$ und somit auch $j \in C_k$.

Zusammenfassung:

Durch Überprüfen von

1. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ (Die Summe divergiert) bzw $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ (Die Summe konvergiert)
oder

$$2. f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1 \text{ bzw } f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$$

wird die Rekurrenz bzw die Transienz eines Zustandes der Markoff Kette nachgewiesen.

Beispiel:

Es sei der endliche Zustandsraum $S = \{0, 1, 2\}$ und die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Nun wird überprüft, welche der Zustände rekurrent bzw. transient sind:

Zuerst beginnt man mit dem Zustand 0 und wählt die Anfangsverteilung $p_0^{(0)} = (1, 0, 0)$.

Dann erhält man $f_{00}^{(0)} = 0, f_{00}^{(1)} = p_{00} = 1/2$ und nach der Formel aus der Definition 2.1. vom Abschnitt 2.1 ist: $f_{00}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus \{0\}} p_{0i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} 0}$.

Wenn nun aber $i_1 = 2$ gewählt wird, ist ja $p_{0i_1} = 0$ und daher schreibt man:

$$f_{00}^{(n)} = p_{01} \cdot \sum_{i_2, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2\}} p_{1i_2} \cdot p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{n-1} 0}.$$

Analog dazu ist $p_{1i_2} = 0$, wenn $i_2 = 2$, und daher $f_{00}^{(n)} = p_{01} \cdot p_{11} \cdot \sum_{i_3, \dots, i_{n-1} \in \{1, 2\}} p_{1i_3} \cdots p_{i_{n-1} 0}$.

Lässt man dieses Verfahren fortlaufen erhält man schlußendlich

$$f_{00}^{(n)} = p_{01} \cdot p_{11}^{(n-2)} \cdot p_{10} = (1/2)^n, \forall n \geq 1 \text{ und damit } f_{00}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n = 1.$$

Daher ist laut Definition 2.3. der Zustand 0 rekurrent.

Für den Zustand 1 ergibt sich, bei analoger Durchführung der Rechnung wie für den Zustand 0, dasselbe Ergebnis. Er ist also auch rekurrent.

Es fehlt noch der Zustand 2:

Man wählt $p_0^{(2)} = (0, 0, 1)$ als Anfangsverteilung, dann ist

$$f_{22}^{(0)} = 0, f_{22}^{(1)} = p_{22} = 2/3 \text{ und } f_{22}^{(n)} = 0 \text{ für } n \geq 2,$$

und damit ist $f_{22}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 2/3 < 1$. Laut der Definition 2.3. ist der Zustand 2 also transient.

Jetzt stellt sich noch die Frage ob die Zustände 0 und 1 positiv-rekurrent, oder null-rekurrent sind.

Es genügt den Zustand 0 zu untersuchen, da aufgrund $0 \leftrightarrow 1$ der Zustand 1 das selbe Verhalten wie 0 aufweist.

Man berechnet die mittlere erstmalige Rückkehrzeit in den Zustand 0:

$$\mu_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{00}^{(n)}.$$

weil $f_{00}^{(n)} = (\frac{1}{2})^n \quad \forall n \geq 1$ war, gilt:

$$\mu_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Somit sieht man, dass die Rückkehrzeit endlich ist und daher sind die Zustände 0 und 1 positiv-rekurrent.

Eine weitere Möglichkeit zu bestimmen, ob ein Zustand i rekurrent oder transient ist, ist die Verwendung der Wahrscheinlichkeit q_{ii} , mit der ein Prozess bei Start im Zustand i unendlich oft in denselben Zustand i zurückkehrt.

Satz 2.8. Der Zustand i ist rekurrent bzw transient, wenn $q_{ii} = 1$ bzw $q_{ii} = 0$ ist.

Beweis: Es sei $q_{ii}^{(N)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prozess bei Start in i mindestens N mal in denselben Zustand i zurückkehrt. Dann entsteht der Zusammenhang:

$$q_{ii}^{(N)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} \cdot q_{ii}^{(N-1)} = q_{ii}^{(N-1)} \cdot f_{ii}^*.$$

Weiters kann man jetzt den Prozess $q_{ii}^{(N)}$ rekursiv darstellen und zwar: $q_{ii}^{(N)} = f_{ii}^* \cdot q_{ii}^{(N-1)} = (f_{ii}^*)^2 \cdot q_{ii}^{(N-2)} = \dots = (f_{ii}^*)^{N-1} \cdot q_{ii}^{(1)}$. Da aber $q_{ii}^{(1)} = f_{ii}^*$ laut der Definition der Rückkehrwahrscheinlichkeiten ist, folgt $q_{ii}^{(N)} = (f_{ii}^*)^N$. Daher lautet die Aussage des Satzes:

$$q_{ii} = \lim_{N \rightarrow \infty} q_{ii}^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} (f_{ii}^*)^N = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \text{ transient} \\ 1 & \text{falls } i \text{ rekurrent} \end{cases}$$

2.2 Die erstmaligen Übergangswahrscheinlichkeiten

Wie schon im vorherigen Abschnitt 2.1 für die erstmaligen Rückkehrwahrscheinlichkeiten f_{ii}^* , kann man nun auch die erstmaligen Übergangswahrscheinlichkeiten f_{ij}^* ($i \neq j$) definieren.

Definition 2.4. $f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_k \neq j \text{ für } 1 \leq k \leq n-1 | X_0 = i) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus \{j\}} p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} j}$.

Das ist die Wahrscheinlichkeit von i ausgehend nach n Schritten zum ersten Mal in j zu sein.

$$f_{ij}^{(0)} = 0 \text{ und } f_{ij}^{(1)} = p_{ij}.$$

Definition 2.5. Die erstmaligen Übergangswahrscheinlichkeiten werden folgendermaßen definiert:

$$f_{ij}^* = P(X_n = j \text{ erstmalig für irgendein } n \in \mathbb{N} | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1.$$

Satz 2.9. Eine Eigenschaft der erstmaligen Übergangswahrscheinlichkeiten nach n Schritten $f_{ij}^{(n)}$ wird durch folgende Rekursionsformel dargestellt:

$$\forall i, j \in S \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)} \quad (2.2)$$

Beweis: Nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit erhält man für beliebige Zustände $i, j \in S$ und für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = j | X_0 = i, T_{ij} = k) P(T_{ij} = k | X_0 = i) + \\ &+ P(X_n = j | X_0 = i, T_{ij} = \infty) P(T_{ij} = \infty | X_0 = i) = \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_n = j | X_0 = i, X_1 \neq j, \dots, X_{k-1} \neq j, X_k = j) \cdot f_{ij}^{(k)}. \end{aligned}$$

Wendet man jetzt noch die Markoff-Eigenschaft und die Homogenität an, so erhält man

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k=0}^n P(X_n = j | X_k = j) \cdot f_{ij}^{(k)} = \\ &= \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

Die Frage für welche Zustände i und j $f_{ij}^* = 1$ ergibt wird mit dem nächsten Satz beantwortet:

Satz 2.10. Seien $i, j \in S$ mit $i \rightarrow j$. Ist i rekurrent, dann gilt $f_{ji}^* = 1$ und j ist ebenfalls rekurrent.

Beweis: Man geht anfangs davon aus, dass $j \in S \setminus \{i\}$ ein Zustand ist, für den $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein n und $f_{ji}^* < 1$ gilt. Da $i \neq j$ ist muss $n \geq 1$ gelten.

Aufgrund der möglichen Zerlegung von $p_{ij}^{(n)}$ in folgende Gestalt

$p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1 \in S} \dots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$, gibt es $i_1, i_2, \dots, i_{n-1} \in S$, für die $p_{ii_1} > 0, p_{i_1 i_2} > 0, \dots, p_{i_{n-1} j} > 0$ gilt. Man kann annehmen, dass $i_m \neq i$ für $1 \leq m \leq n-1$ ist. Wenn dies nicht der Fall ist, kann man ein maximales $m \geq 1$ mit $i_m = i$ finden und nun $i_m, \dots, i_{n-1}$ statt $i_0, \dots, i_{n-1}$ wählen.

Es sei A das Ereignis $\{X_l = i \text{ für ein } l \geq 1\}$, sodass $P(A | X_0 = i) = f_{ii}^*$ gilt. Weiters sei B das Ereignis $\{X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j\}$, sodass $P(B | X_0 = i) = p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} j} > 0$ gilt. Schließlich bildet man die Menge $C_m = B \cap \{X_{n+1} \neq i, \dots, X_{n+m-1} \neq i, X_{n+m} = i\}$ für $m \geq 1$. Da $i_j \neq i$ für $1 \leq j \leq n-1$ gilt ist $B \cap A$ die disjunkte Vereinigung der Ereignisse C_m für $m \geq 1$. Wendet man den Additionssatz an, dann ergibt sich: $P(B \cap A | X_0 = i) = \sum_{m=1}^{\infty} P(C_m | X_0 = i)$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(C_m | X_0 = i)$ kann man folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}
P(C_m | X_0 = i) &= \sum_{k_1 \neq i} \cdots \sum_{k_{m-1} \neq i} p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1}j} p_{jk_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{m-1}i} = \\
&= p_{ii_1} \cdots p_{i_{n-1}j} \sum_{k_1 \neq i} \cdots \sum_{k_{m-1} \neq i} p_{jk_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{m-1}i} = \\
&= P(B | X_0 = i) f_{ji}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis ein, dann folgt

$$P(B \cap A | X_0 = i) = P(B | X_0 = i) \sum_{m=1}^{\infty} f_{ji}^{(m)} = P(B | X_0 = i) f_{ji}^*.$$

Daraus ergibt sich dann

$$P(B \setminus A | X_0 = i) = P(B | X_0 = i) - P(B \cap A | X_0 = i) = P(B | X_0 = i)(1 - f_{ji}^*) > 0.$$

Es gilt $1 \geq P(A \cup B | X_0 = i) = P(A | X_0 = i) + P(B \setminus A | X_0 = i) = f_{ii}^* + P(B \setminus A | X_0 = i)$, und daher folgt $f_{ii}^* < 1$.

Man hat für den anfänglich angenommenen Zustand $j \in S \setminus \{i\}$, für den $p_{ij}^{(n)} > 0$ für ein $n \geq 0$ und $f_{ji}^* < 1$ gilt gezeigt, dass $f_{ii}^* < 1$ gilt.

Daraus kann man dann sofort die Behauptung des Satzes folgern, da für ein rekurrentes i $f_{ii}^* = 1$ gelten muss.

Bemerkung: Ist $a \in S$ absorbierend, das heißt $p_{aa} = 1$, und $i \in S$ sodass $i \rightarrow a$ gilt, dann ist i transient. (Wäre i rekurrent, dann müsste $f_{ai}^* = 1$ gelten; es gilt aber $f_{ai}^* = 0$.)

Zur vollständigen Verständnis ist der nächste Satz noch wichtig:

Satz 2.11. Eine irreduzible Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ ist genau dann rekurrent, wenn $f_{ik}^* = 1 \quad \forall i \in S \setminus \{k\}$.

Beweis:

1. Es gelte $f_{ik}^* = 1 \quad \forall i \in S \setminus \{k\}$. Wie schon von früher bekannt (siehe Definition 2.1.), ist

$$f_{kk}^{(1)} = p_{kk}$$

$$f_{kk}^{(2)} = \sum_{i_1 \in S \setminus \{k\}} p_{ki_1} \cdot p_{i_1 k} = \sum_{i_1 \in S \setminus \{k\}} p_{ki_1} \cdot f_{i_1 k}^{(1)}$$

$$\forall n \geq 3: f_{kk}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus \{k\}} p_{ki_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} k} = \cdots = \sum_{i_1 \in S \setminus \{k\}} p_{ki_1} \cdot f_{i_1 k}^{(n-1)}$$

Nun summiert man über $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{kk}^* = p_{kk} + \sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{i \in S \setminus \{k\}} p_{ki} \cdot f_{ik}^{(n-1)}) = p_{kk} + \sum_{i \in S \setminus \{k\}} p_{ki} \cdot f_{ik}^* = \sum_{i \in S} p_{ki} = 1.$$

Daraus kann man erkennen, dass der Zustand k rekurrent ist und daher sind auch alle anderen Zustände der Markoff Kette rekurrent, da man die Irreduzibilität vorausgesetzt hat.

2. Umgekehrt: Es seien alle Zustände der Markoff Kette rekurrent. Dann gilt nach Satz 2.10.: $f_{ij}^* = 1 \quad \forall i, j \in S$. Insbesondere gilt also auch $f_{ik}^* = 1 \quad \forall i \in S \setminus \{k\}$.

Bemerkung: Ist $f_{ij}^* = 1$, so kann man den Erwartungswert $\mu_{ij} = E(T_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}^{(n)}$ bilden. Ist die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ij}^{(n)}$ divergent, so heißt das, dass die mittlere erstmalige Übergangszeit der Markoff Kette $\mu_{ij} = \infty$ ist. (Einen Satz, der weitere Aussagen über die mittlere erstmalige Übergangszeit macht, findet man im dritten Kapitel.)

Satz 2.12. Ist j ein transienter Zustand, so gilt $\forall i \in S$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}^*}{1 - f_{jj}^*}.$$

Beweis: Durch Anwendung der gerade gegebenen Rekursionsformel (2.2) und den drei Sätze (2.2., 2.3., 2.4.) vom Abschnitt 2.1 kann man diese Formel beweisen:

$$f_{ij}^* = \frac{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m p_{ij}^{(n)}}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m p_{jj}^{(n)}} \quad (\text{siehe Beweis von Satz 2.2.})$$

Ist j jetzt transient, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = (1 - f_{jj}^*)^{-1}$, laut dem Satz (2.2.).

Da weiters $f_{ij}^* \leq 1$ ist, existiert nun auch $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m p_{ij}^{(n)}$ und es folgt schlußendlich $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^* (1 - f_{jj}^*)^{-1}$.

2.3 Sätze über Rekurrenz und Transienz

In diesem Abschnitt wird auf Sätze, die Aussagen über die Rekurrenz oder die Transienz einer Markoff Kette machen, näher eingegangen.

Satz 2.13. Das Rekurrenzkriterium

Eine irreduzible Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ ist rekurrent, falls das Ungleichungssystem $x_i \geq \sum_{j \in S} p_{ij} \cdot x_j$, $\forall i \in S \setminus \{k\}$ ($k \in S$ fest) einen Lösungsvektor $u = (u_0, u_1, \dots)$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = \infty$ besitzt.

Beweis: Man nimmt bei diesem Beweis o.B.d.A an, dass $k = 0$ sei. Hier soll nun durch die Existenz einer Lösung $u = (u_0, u_1, \dots)$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = \infty$ von dem Ungleichungssystem im Satz, die Beziehung $f_{i0}^* = 1 \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$ abgeleitet werden. Nach Satz 2.11. folgt nämlich daher die Rekurrenz der Markoff Kette.

Um dieses zu erreichen ordnet man vorest der Markoff Kette mit der Übergangsmatrix $P = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ eine neue Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \forall i \in S \setminus \{0\} \text{ und } \forall j \in S \\ \delta_{0j} & \text{wenn } i = 0 \text{ und } \forall j \in S \end{cases}$$

zu. Das hat zur Folge, dass man mit einer Kette weiter arbeitet, die den Nullzustand als absorbierenden Zustand besitzt. Den Zustandsraum S der so entstandenen, neuen Kette kann man dann folgendermaßen zerlegen:

$S = T \cup C$, wobei $C = \{0\}$ und $T = S \setminus \{0\}$ ist.

Nach dem Satz 2.12. gilt für alle transienten Zustände $j \in S \setminus \{0\} = T$ und $\forall i \in S$, dass die Summe der neuen Übergangswahrscheinlichkeiten konvergiert, das heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} < \infty \text{ und damit folgt}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = 0.$$

Nach der Rekurrenzformel (2.2) aus Satz 2.9. gilt andererseits folgender Zusammenhang:

$$\tilde{p}_{i0}^{(n)} = \sum_{k=0}^n \tilde{f}_{i0}^{(k)} \tilde{p}_{00}^{(n-k)} \quad \forall n \geq 1.$$

Wegen $\tilde{p}_{00}^{(k)} = 1$ für $0 \leq k \leq n$ und $\forall i \in S \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{i0}^{(k)} &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in S \setminus \{0\}} \tilde{p}_{ii_1} \tilde{p}_{i_1 i_2} \cdots \tilde{p}_{i_{k-1} 0} = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1} \in S \setminus \{0\}} p_{ii_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-1} 0} = f_{i0}^{(k)}. \end{aligned}$$

Daraus lässt sich jetzt erkennen, dass die Gleichung $\tilde{p}_{i0}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{i0}^{(k)}$ erfüllt ist und das bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{i0}^{(n)} = f_{i0}^*$ ist.

Schließlich erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } j \in S \setminus \{0\} \\ f_{i0}^* & \text{falls } j = 0, i \in S \setminus \{0\} \end{cases}.$$

Betrachtet man das Ungleichungssystem des Satzes mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{ij}$, so folgt

$$x_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \cdot x_j, \quad \forall i \in S.$$

Sei $u = (u_0, u_1, \dots)$ eine Lösung der Ungleichung aus dem Satz mit den üblichen Übergangswahrscheinlichkeiten, dann ist sie auch eine Lösung für das Ungleichungssystem mit den modifizierten Übergangswahrscheinlichkeiten, und es gilt wieder $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = \infty$.

Wendet man die Gleichung von Chapman-Kolmogorow an, so folgt dann

$$u_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \cdot u_j \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} (\sum_{l=0}^{\infty} \tilde{p}_{jl} u_l) = \sum_{l=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij} \tilde{p}_{jl}) u_l = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{p}_{il}^{(2)} u_l.$$

Wenn man so fortfährt sieht man, dass die u_i auch das Ungleichungssystem

$$u_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \cdot u_j \quad \forall i \in S \text{ erfüllen.}$$

Da man weiß, dass die Folge der u_i für $j \rightarrow \infty$ gegen ∞ strebt, existiert zu einem beliebig vorgegebenen $\epsilon > 0$ stets eine natürliche Zahl $m = m(\epsilon)$, so dass

$$u_j > \frac{1}{\epsilon} \quad \forall j \geq m.$$

Somit erhält man für alle $i \in S \setminus \{0\}$:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{ij}^{(n)} u_j + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=m}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \leq \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{ij}^{(n)} u_j + \sum_{j=m}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} u_j = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} u_j \leq u_i.$$

Da aber $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}_{ij}^{(n)} = 1$ ist folgt also

$$\sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{ij}^{(n)} u_j + \frac{1}{\epsilon} [1 - \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{p}_{ij}^{(n)}] \leq u_i.$$

Nun führt man in dieser Ungleichung den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus.

Durch Einbeziehung der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{ij}^{(n)}$ ergibt sich

$$f_{i0}^* u_0 + \frac{1}{\epsilon} [1 - f_{i0}^*] \leq u_i,$$

bzw umgeformt

$$1 - f_{i0}^* \leq \epsilon [u_i - u_0 f_{i0}^*].$$

Da man $\epsilon > 0$ beliebig klein machen kann, folgt $f_{i0}^* \geq 1$. Anderenfalls ist aber $f_{i0}^* \leq 1$.

Daher führen diese zwei Aussagen zu $f_{i0}^* = 1 \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$, was zu beweisen war.

Satz 2.14. Das Transienzkriterium

Eine irreduzible Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ ist genau dann transient, wenn das Gleichungssystem $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j, \forall i \in S \setminus \{0\}$ eine beschränkte, nichttriviale Lösung besitzt. Das selbe Argument gilt auch, wenn das Gleichungssystem $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$ eine beschränkte, nichtkonstante Lösung besitzt.

Beweis: Zuerst setzt man voraus, dass die Markoff Kette transient ist und beweist, dass die Wahrscheinlichkeiten $y_i = P(X_n \neq 0 \mid X_0 = i) = 1 - f_{i0}^* \quad (i \in S \setminus \{0\})$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j, \forall i \in S \setminus \{0\}$ sind.

Vorerst ist $0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$ und wegen der Annahme der Transienz dieser Markoff Kette ist wegen des Satzes 2.11. sogar $y_i > 0$ für mindestens ein $i \in S \setminus \{0\}$ erfüllt.

Zu beweisen ist noch, dass die y_i auch das Gleichungssystem $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j$ aus dem Satz lösen.

Man erhält dann mit Hilfe des Satzes 2.12.

$$f_{j0}^* = (1 - f_{00}^*) \sum_{n=1}^{\infty} p_{j0}^{(n)},$$

und das heißt

$$y_j = 1 - (1 - f_{00}^*) \sum_{n=1}^{\infty} p_{j0}^{(n)}.$$

Eingesetzt in die folgende Beziehung ergibt sich $\forall i \in S \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} y_j &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} - (1 - f_{00}^*) \sum_{n=1}^{\infty} [\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} p_{j0}^{(n)} - p_{i0} p_{00}^{(n)}] = \\ &= (1 - p_{i0}) - (1 - f_{00}^*) [\sum_{n=1}^{\infty} p_{i0}^{(n+1)} - p_{i0} \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}] = \\ &= (1 - p_{i0}) - (1 - f_{00}^*) [\sum_{n=1}^{\infty} p_{i0}^{(n)} - p_{i0} \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}]. \end{aligned}$$

Schließlich setzt man nun die Ausdrücke aus den Sätzen 2.4. und 2.12. in die rechte Seite der Gleichung ein und erhält

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} y_j &= (1 - p_{i0}) - (1 - f_{00}^*) \left[\frac{f_{i0}^*}{1 - f_{00}^*} - \frac{p_{i0}}{1 - f_{00}^*} \right] = \\ 1 - p_{i0} - f_{i0}^* + p_{i0} &= 1 - f_{i0}^* = y_i, \end{aligned}$$

was die erste Behauptung beweist.

Nun beweist man die umgekehrte Richtung und setzt dafür voraus, dass $u = (u_1, u_2, \dots)$ eine beschränkte, nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j$ ist. Da der Vektor u beschränkt ist, kann man o.B.d.A voraussetzen, dass $|u_i| \leq 1 \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$

ist.

Durch Induktion zeigt man, dass $\forall i \in S \setminus \{0\}$

$$|u_i| \leq 1 - \sum_{k=1}^n f_{i0}^{(k)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt.}$$

Sei $n = 1$, dann ergibt sich zunächst für alle $i \in S \setminus \{0\}$ der Zusammenhang

$$|u_i| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} u_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} |u_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 - p_{i0} = 1 - f_{i0}^{(1)}.$$

Angenommen die Ungleichung $|u_i| \leq 1 - \sum_{k=1}^n f_{i0}^{(k)}$ gilt für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ und $\forall i \in S \setminus \{0\}$, dann folgt

$$\begin{aligned} |u_i| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} |u_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} (1 - \sum_{k=1}^n f_{j0}^{(k)}) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} f_{j0}^{(k)} = \\ &= 1 - p_{i0} - \sum_{k=1}^n f_{i0}^{(k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} f_{i0}^{(k)}. \end{aligned}$$

Somit hat man bewiesen, dass $\forall i \in S \setminus \{0\}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$ das Ungleichungssystem

$$|u_i| \leq 1 - \sum_{k=1}^n f_{i0}^{(k)} \text{ gültig ist. Durch den Grenzübergang } n \rightarrow \infty \text{ erhält man schließlich } |u_i| \leq 1 - f_{i0}^* \quad \forall i \in S \setminus \{0\}.$$

Da man vorausgesetzt hat, dass u ein nichttrivialer Lösungsvektor ist, gilt für mindestens ein $i \in S \setminus \{0\}$

$$0 < |u_i| \leq 1 - f_{i0}^*,$$

und das bedeutet, dass $f_{i0} < 1$ sein muss. Daraus folgt nach dem Satz 2.11. die Transienz der Markoff Kette .

Dieselbe Aussage des Satzes für eine beschränkte, nichtkonstante Lösung ist nun sehr einfach zu beweisen:

Ist nämlich $u = (u_0, u_1, \dots)$ eine beschränkte, nichtkonstante Lösung des Gleichungssystems $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$, dann ist $y = (u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots)$ eine beschränkte, nichttriviale Lösung vom Gleichungssystem $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j, \forall i \in S \setminus \{0\}$ aus dem Satz. Umgekehrt erhält man aus einer Lösung $u = (u_1, u_2, \dots)$ von diesem Gleichungssystem durch $y = (0, u_1, u_2, \dots)$ eine Lösung von der Gleichung $x_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \cdot x_j \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$.

Satz 2.15. Eine irreduzible Markoff Kette mit dem Zustandsraum $S = \{0, 1, \dots, m\}$ besitzt

1. möglicherweise transiente Zustände,
2. mindestens einen rekurrenten Zustand,
3. keinen null-rekurrenten Zustand.

Beweis:

- 1.) und 2.) Durch das anschauliche Beispiel aus dem ersten Abschnitt des 2. Kapitels, hat man gesehen, dass für eine Markoff Kette mit endlichem Zustandsraum

die Möglichkeit besteht, transiente Zustände zu besitzen.

Ist j ein transienter Zustand dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i \in S$. (Den dazu gehörigen Beweis findet man im dritten Kapitel, Satz 3.1.)

Da man weiters weiß, dass die Matrix $P^{(n)}$ stochastisch ist folgt: $\sum_{j=0}^m p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Nun führt man den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch und sieht, dass die Gleichung $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}, \forall i \in S$ erfüllt ist.

Wären alle Zustände transient, dann hätte man den Widerspruch $1 = 0$. Daher muss mindestens ein Zustand aus S existieren, der rekurrent ist.

- 3.) Angenommen es existiere ein null-rekurrenter Zustand j . Dann gibt es eine abgeschlossene null-rekurrente Zustandsmenge Z , die j enthält (Siehe Satz 2.7.). Für null-rekurrente Zustände gilt weiters, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall i, j \in Z$, was im dritten Kapitel bewiesen wird (Siehe Satz 3.3). Da Z eine abgeschlossene Menge ist, folgt wieder $\sum_{j \in Z} p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i \in Z, \forall n \in \mathbb{N}_0$, und der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ führt wieder zum selben Widerspruch $1 = 0$ wie in Punkt 2.). Daher kann kein null-rekurrenter Zustand existieren.

2.4 Kriterien für die positive Rekurrenz

Man möchte in diesem Abschnitt die Bedingungen für die positive Rekurrenz einer irreduziblen Markoff Kette erläutern. Die Bedingungen für eine aperiodische irreduzible Markoff Kette hat erstmals Foster (1953) aufgestellt. Später folgte die Aussage von Kanters (1965) über den Fall der periodischen Markoff Kette.

Der nächste Satz ist von großer Bedeutung, da die einzige Voraussetzung nur die Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeiten von einer Markoff Kette ist.

Das Fostersche Kriterium für positiv-rekurrente Markoff Ketten:

Satz 2.16. Es sei eine irreduzible Markoff Kette mit dem Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ gegeben. Dann folgt:

Die Markoff Kette ist positiv-rekurrent, wenn das Ungleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} x_j \leq x_i - 1, \forall i = N, N+1, \dots$$

eine nicht-negative Lösung $(u_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ mit $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j < \infty, \forall i = 0, 1, \dots, N-1$ besitzt.

N ist hierbei eine fest gewählte positive ganze Zahl.

Beweis: Dieser Beweis beschränkt sich auf den Fall der aperiodischen Markoff Kette.

Durch das im 3. Kapitel auftretende Konvergenzverhalten einer Markoff Kette weiß man, dass für alle i und $j \in S$ ein Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ existiert. Es gilt $p_j = 0$ oder $p_j > 0 \forall j \in S$. Wegen Kapitel 3 Abschnitt 3.2 weiß man, dass die Markoff Kette genau dann positiv-rekurrent ist, wenn $p_j > 0$ ist. Man zeigt also, dass es einen Zustand $j \in S$ gibt, für den $p_j > 0$ gilt. Da die positive Rekurrenz eine Klasseneigenschaft ist gilt dies dann auch für alle Zustände der irreduziblen Markoff Kette.

Eine nichtnegative Lösung $(u_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ soll die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j \leq u_i - 1, \forall i = N, N+1, \dots \text{ mit}$$

$$s_i = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j < \infty, \forall i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ erfüllen.}$$

Es wird nun $S = 1 + \max_{0 \leq i \leq N-1} s_i \geq 1$ gesetzt. Dann erhält man für alle $i = 0, 1, \dots, N-1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} u_j \leq S \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} - n. \quad (2.3)$$

Setzt man $n=1$ und lässt man i von 0 bis $N-1$ laufen, gilt

$$0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = s_i \leq S - 1.$$

Aufgrund der Gültigkeit der Gleichung (2.3) für ein $n \in \mathbb{N}$, folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n+1)} u_j = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}) u_j \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(n)} s_k + \sum_{k=N}^{\infty} p_{ik}^{(n)} (u_k - 1) \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} p_{ik}^{(n)} (s_k + 1) + \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} u_k - 1 \\ &\leq S \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^n p_{ik}^{(l)} - (n+1). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Gleichung (2.3) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i = 0, 1, \dots, N-1$ gültig ist. Daraus ergibt sich dann die Ungleichung $\frac{n}{n-1} \leq S \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}$.

Lässt man $n \rightarrow \infty$ laufen, erhält man schließlich die Beziehung $1 \leq S \sum_{j=0}^{N-1} p_j$, und daraus folgt die Behauptung $p_j > 0$ für mindestens ein $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Eine Folgerung von dem soeben gegebenen Satz von Foster, welche sich zur Untersuchung der Warteschlangentheorien gut eignet, ist folgende:

Satz 2.17. (Folgerung) Es sei eine irreduzible Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ gegeben. Wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} die Bedingungen:

- $\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_{ij} < \infty, \forall i \in S$ und
- $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} (\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_{ij} - i) < 0$ erfüllen,

dann ist die Markoff Kette positiv-rekurrent.

Beweis: Man setzt zuerst $b_i = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} - i \quad \forall i \in S$.

Aus der zweiten Annahme des Satzes und der Definition des Limes superior folgt, dass ein $a > 0$ und eine natürliche Zahl $N = N(a)$ existiert, so dass

$b_i \leq -a \quad \forall i \geq N(a)$ ist.

Definiert man weiters eine Folge nicht-negativer Zahlen $u_i = i \cdot \frac{1}{a} \quad \forall i \in S$, dann erfüllt diese Zahlenfolge die Bedingung

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} = \frac{1}{a}(i + b_i) \leq \frac{i}{a} - 1 = u_i - 1 \quad \forall i \geq N(a).$$

Andererseits gilt nach der ersten Annahme des Satzes, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} < \infty \quad \forall i \leq N(a) \text{ ist.}$$

Nach dem Satz 2.16. von Foster folgt daher die Behauptung dieser Folgerung.

Satz 2.18. Es sei eine irreduzible, aperiodische Markoff Kette mit dem Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ gegeben.

1. Wenn das Gleichungssystem $x_j = \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ eine Nicht-Nulllösung $(u_j)_{j \in S}$ mit $\sum_{j \in S} |u_j| < \infty$ besitzt, dann ist die Markoff Kette positiv-rekurrent.
2. Die Markoff Kette sei positiv-rekurrent. Dann gilt für jede nichtnegative Lösung $(u_j)_{j \in S}$ des Ungleichungssystems $x_j \geq \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ auch $\sum_{j \in S} u_j < \infty$.

Beweis: Durch die Resultate des 3. Kapitels über das Konvergenzverhalten einer Markoff Kette kann man diesen Satz beweisen.

1. Sei $(u_j)_{j \in S}$ eine von der Nulllösung verschiedene Lösung des Gleichungssystems $x_j = \sum_{i \in S} x_i p_{ij}$ mit $\sum_{j \in S} |u_j| < \infty$.
Aus der Gleichung $u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ folgt dann die Beziehung $u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{ij}^{(n)} \quad \forall j \in S, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Daher kommt man auf die folgende Ungleichung:

$$|u_j| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij}^{(n)} \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i| p_{ij}^{(n)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i| < \infty.$$

Man sieht nun, dass die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij}^{(n)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert in Bezug auf $n \in \mathbb{N}_0$ und $j \in S$.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann lässt sich ein $i_0 = i_0(\epsilon)$ finden, so dass

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} |u_i| p_{ij}^{(n)} \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall j \in S \text{ gilt.}$$

Es existiert außerdem mindestens ein Index j , für den $|u_j| > 0$ ist.

Damit erhält man dann folgende Aussage

$$0 < |u_j| \leq \sum_{i=0}^{i_0} |u_i| p_{ij}^{(n)} + \epsilon$$

bzw.

$$0 < |u_j| \leq \sum_{i=0}^{i_0} |u_i| \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} + \epsilon.$$

Wenn jetzt $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ wäre $\forall i = 0, 1, \dots, i_0$, dann würde mit $\epsilon = \frac{|u_j|}{2}$ folgendes gelten:

$$0 < |u_j| \leq \frac{|u_j|}{2} \text{ bzw. } 0 < 2|u_j| \leq |u_j|.$$

Dieser Widerspruch führt schließlich zur Erkenntnis, dass es mindestens ein Zahlenpaar $(i, j) \in S \times S$ geben muss, für welches $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ gelten muss. Daraus ergibt sich dann auch die positive Rekurrenz der Markoff Kette. (Siehe Satz 3.3.)

2. Für den Beweis der zweiten Aussage des Satzes nimmt man die positive Rekurrenz der Markoff Kette als gegeben an. $(u_j)_{j \in S}$ sei eine beliebige nicht-negative Lösung des Ungleichungssystems $x_j \geq \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$.

Es gilt dann wegen der Nichtnegativität der u_i 's:

$$u_j \geq \sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{ij}^{(n)} \geq \sum_{i=0}^m u_i p_{ij}^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall j \in S \text{ und } m \geq 0 \text{ (} m \text{ ist ganzzahlig)}.$$

Wegen der vorausgesetzten positiven Rekurrenz der Markoff Kette gilt aber andererseits, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} \quad \forall i, j \in S$ ist. (Siehe Satz 3.3.)

Daher folgt die Beziehung

$$u_j \geq \sum_{i=0}^m u_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} \sum_{i=0}^m u_i,$$

das bedeutet weiters

$$\sum_{i=0}^m u_i \leq \mu_{jj} u_j < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Somit sieht man nun, dass diese Reihe konvergiert, so dass man

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m u_i = \sum_{i=0}^{\infty} u_i < \infty$$

erhält. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

Kapitel 3

Konvergenzverhalten von Markoff Ketten

3.1 Transiente Zustände

In diesem Abschnitt wird das Konvergenzverhalten der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ für transiente Zustände j behandelt.

Man wird sehen, dass das Konvergenzverhalten nicht vom Ausgangspunkt i abhängig ist.

Satz 3.1. *Es sei j ein transienter und i ein beliebiger Zustand einer Markoff Kette. Dann konvergieren die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ gegen Null; man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.*

Beweis: *Die Behauptung dieses Satzes kann mit Hilfe des Satzes 2.12. bewiesen werden. Man erhält nach Aussage des Satzes 2.12. für jeden transienten Zustand j folgende Beziehung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}^*}{1-f_{jj}^*} < \infty \quad \forall i \in S.$$

Für die Konvergenz dieser Reihe ergibt sich dann als notwendige Bedingung, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \quad \forall i \in S$ gelten muss.

3.2 Rekurrente Zustände

Um Aussagen über die Konvergenz der Übergangswahrscheinlichkeiten von rekurrenten Zuständen machen zu können, werden die rekurrenten Klassen miteinbezogen. Es sei

$C \subseteq S$ eine Äquivalenzklasse von rekurrenten Zuständen, dann nennt man C eine rekurrente Klasse. Sei $i \in C$ und $j \in S \setminus C$, dann gilt: $p_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0$, da ja eine rekurrente Klasse von Zuständen nicht mehr verlassen werden kann. Die Übergangsmatrix P eingeschränkt auf die Klasse C ist wieder eine stochastische Matrix. Man schreibt P_C für die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markoff Kette mit Zustandsraum C .

Um die Konvergenz der Übergangswahrscheinlichkeiten für rekurrente Zustände zu betrachten, beschränkt man sich also auf irreduzible Markoff Ketten.

Vorerst wird angenommen, dass alle Zustände der irreduziblen Markoff Kette aperiodisch sind (siehe Abschnitt 1.5).

Sei $j \in S$ ein Zustand solch einer Kette mit Zustandsraum S . Man betrachtet zunächst die Rekursionsformel (2.1) aus Abschnitt 2.1:

$$p_{jj}^{(n)} - \sum_{k=0}^n p_{jj}^{(n-k)} \cdot f_{jj}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \geq 1 \\ 1 & \text{falls } n = 0 \end{cases}.$$

Der nächste Satz dient als Hilfssatz, der eine sehr große Bedeutung in der Theorie der Erneuerungsprozesse besitzt, weshalb man ihn als Erneuerungssatz betitelt hat.

Satz 3.2. Erneuerungssatz

Es seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei reelle Zahlenfolgen mit

$a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ sowie $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) aller Zahlen n , mit $a_n > 0$ sei Eins.

Wird die „Erneuerungsgleichung“ $x_n - \sum_{k=0}^n a_k \cdot x_{n-k} = b_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$ von einer beschränkten reellen Zahlenfolge $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ erfüllt, dann existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ und es gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k}{\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k}$ wenn $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k < \infty$, und

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ wenn $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k = \infty$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes wird auf die Literatur „Einführung in die Theorie der Markovschen Ketten und ihre Anwendungen“ von P. Langrock und W. Jahn, 1979 verwiesen.

Mit Hilfe des Erneuerungssatzes kann man nun den nächsten Satz begründen und beweisen:

Satz 3.3. Die rekurrente Markoff Kette mit Zustandsraum S sei irreduzibel und aperiodisch. $\mu_{jj} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f_{jj}^{(n)}$ bezeichne die mittlere erstmalige Rückkehrzeit in den Zustand j , dann gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$, falls $\mu_{jj} < \infty$ und
 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ falls $\mu_{jj} = \infty$ für alle Zustände $i, j \in S$.

Beweis: Durch Anwendung des Erneuerungssatzes 3.2. sieht man, dass die Größen $u_n = p_{jj}^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ die obige „Erneuerungsgleichung“ mit $a_n = f_{jj}^{(n)}$ und $b_n = \delta_{n0}$ erfüllen.

Weiters gilt

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1, \forall j \in S$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n0} = 1$
und der ggT der Menge $\{n \in \mathbb{N} : f_{jj}^{(n)} > 0\}$ ist Eins.

Daher sind alle Voraussetzungen des Erneuerungssatzes erfüllt und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot f_{jj}^{(k)}} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{jj}} & \text{wenn } \mu_{jj} < \infty \\ 0 & \text{wenn } \mu_{jj} = \infty \end{cases}$$

Um nachzuweisen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)}$ für beliebige $i \in S \setminus \{j\}$ ist, verwendet man wieder die Rekursionsformel $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}$, $\forall i, j \in S, \forall n \in \mathbb{N}$ und wendet den Hilfssatz 2.3. aus Abschnitt 2.1 darauf an.

Man setzt $a_n = f_{ij}^{(n)}$ und $b_n = p_{jj}^{(n)}$. Aufgrund der Rekurrenz der Markoff Kette gilt vorerst $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$.

Dies führt dann zu der Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{ij}^{(n)}}{\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)}} = 0, \quad \forall i, j \in S.$$

Es existiert ferner der Limes von $b_n = p_{jj}^{(n)}$, wie oben gezeigt wurde.

Also sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2.3. erfüllt und es folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{ij}^{(n)}}{\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} \cdot p_{jj}^{(n-k)}}{\sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)},$$

und daraus ergibt sich schließlich wegen $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)}, \quad \forall i, j \in S.$$

Der vorige Satz zeigt auch noch einmal den Unterschied zwischen positiv-rekurrenten und null-rekurrenten Zuständen, und zwar nennt man einen rekurrenten Zustand j mit endlichem Erwartungswert μ_{jj} positiv-rekurrent, und dabei gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0$, während man einen rekurrenten Zustand mit unendlichem Erwartungswert μ_{jj} null-rekurrent nennt, und hierbei ist $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ für ein beliebiges $i \in S$.

Der nächste Satz behandelt jetzt auch irreduzible, rekurrente Markoff Ketten mit einer Periode $d > 1$.

Satz 3.4. *Es sei eine irreduzible, rekurrente Markoff Kette mit der Periode $d > 1$ gegeben. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = \frac{d}{\mu_{jj}}$, $\forall i \in S, j \in D_r(i)$, wobei r als eine ganze Zahl mit $0 \leq r \leq d-1$ aufzufassen ist. r drückt somit den Periodenabstand von i nach j aus.*

Wenn $m \notin \{nd + r : n \geq 0\}$ dann ist $p_{ij}^{(m)} = 0$.

Beweis: Zuerst wird wieder die Behauptung für den Fall $i = j$ bewiesen.

Dann gilt $p_{jj}^{(m)} = 0 \quad \forall m \neq nd$ und somit ist $i \in D_0(j)$. Daher ist die Behauptung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}} \quad \forall j \in S$$

zu zeigen.

Anstelle der ursprünglichen Markoff Kette mit der Übergangsmatrix P und der Periode $d > 1$, betrachtet man nun die Markoff Kette mit der Übergangsmatrix $\tilde{P} = P^d$.

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen den beiden Ketten:

$$\tilde{p}_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(nd)} \quad \text{und} \quad \tilde{f}_{jj}^{(n)} = f_{jj}^{(nd)} \quad \forall j \in S \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wenn n hinreichend groß ist, erhält man

$$\tilde{p}_{jj}^{(n)} = p_{jj}^{(nd)} > 0 \quad \forall j \in S. \quad (\text{siehe Abschnitt 1.5})$$

Zusätzlich gilt noch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)} = 1.$$

Daher weiß man, dass die Markoff Kette mit Übergangsmatrix $\tilde{P}$ irreduzibel, aperiodisch und rekurrent ist.

Es sei $\tilde{\mu}_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{f}_{jj}^{(n)}$ die mittlere erstmalige Rückkehrzeit dieser Kette in den Zustand j . Dann besagt der Satz 3.3., dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{jj}^{(n)} = \tilde{\mu}_{jj}^{-1} \quad \text{ist.}$$

$$\text{Wegen } \tilde{\mu}_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{f}_{jj}^{(n)} = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} n d f_{jj}^{(nd)} = \frac{1}{d} \sum_{l=1}^{\infty} l f_{jj}^{(l)} = \frac{1}{d} \mu_{jj}$$

folgt schließlich die Behauptung des Satzes für den Fall $i = j$.

Nun behandelt man den Fall für $i \neq j$.

Seien $i, j \in S$ mit $p_{ij}^{(m)} = 0 \quad \forall m \neq nd + r$ und $0 \leq r \leq d-1$. Dann gilt für hinreichend große n $p_{ij}^{(nd+r)} > 0$. (siehe Abschnitt 1.5)

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(kd+r)} p_{jj}^{((n-k)d)} \quad \forall j \in D_r(i).$$

$$\text{Da } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^* = 1$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_{jj}} \quad \forall i, j \in S$ gilt, ist durch die Anwendung des Beweises vom Satz 3.3. die Aussage des Satzes für beliebige $i, j \in S$ bewiesen.

Definition 3.1. *Es sei C eine aperiodische positiv-rekurrente Klasse von Zuständen. Ein Vektor $\nu = (\nu_i)_{i \in C}$ mit $\nu_i \geq 0 \quad \forall i \in C$ und $\sum_{i \in C} \nu_i = 1$ heißt stationärer Vektor von C , wenn $\sum_{i \in C} \nu_i p_{ij} = \nu_j$.*

Beispiel: Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_n durch einen stationären Vektor ν auf C gegeben, dann ist $P(X_n = i) = \nu_i, \forall i \in C$ und $P(X_n = i) = 0, \forall i \in S \setminus \{C\}$. Es folgt, dass auch $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = j | X_n = i) \cdot P(X_n = i) = \sum_{i \in S} p_{ij} \nu_i = \nu_j, \forall j \in C$ und $P(X_{n+1} = j) = 0, \forall j \in S \setminus \{C\}$ ist. Damit ist der Begriff stationär besser zu verstehen: Man sagt, dass sich etwas nicht mit der Zeit ändert, also X_n dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung hat wie X_{n+1} , usw. . .

Der folgende Satz verknüpft nun die Definition mit den Aussagen der letzten Sätze.

Satz 3.5. Es sei eine positiv-rekurrente, aperiodische, irreduzible Markoff Kette gegeben. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \nu_j = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i \cdot p_{ij} \quad \forall i \in S, \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i = 1.$$

Für eine positiv-rekurrente Markoff Kette mit Periode d und Periodenabstand r von i nach j , ($i, j \in S$) gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d \cdot \nu_j.$$

Das heißt, dass eine positiv-rekurrente, irreduzible Markoff Kette genau einen eindeutigen stationären Vektor $(\nu_j)_{j \in S}$ besitzt.

Beweis: Für $j \in S$ sei $\nu_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$. Wegen Den Sätzen 3.3 und 3.4. folgt $\nu_j > 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = d\nu_j$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ν_j der einzige stationäre Vektor ist:

Sei $\nu_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} > 0$. Dieser Limes existiert für alle $i, j \in S$ nach Satz 3.3.

Es gilt $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$.

Führt man den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durch, dann folgt $\nu_j = \sum_{k \in S} \nu_k p_{kj}$.

Ist $(\pi_j)_{j \in S}$ ein stationärer Vektor, dann gilt

$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}$. Für $n \rightarrow \infty$ gilt dann schließlich $\sum_{i \in S} \pi_i \nu_j = \nu_j$, und damit auch $\pi_j = \nu_j$.

Daher ist $(\nu_j)_{j \in S}$ der einzige stationäre Vektor.

All diese Sätze sind insbesondere dann gültig, wenn man statt der irreduziblen, rekurrenten Markoff Kette eine rekurrente Klasse C annimmt.

Sei P die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten einer irreduziblen rekurrenten Markoff Kette und ν die stationäre Verteilung. Dann ist die Beziehung $\nu = \nu \cdot P$ stets erfüllt.

Der folgende Satz macht noch eine Aussage über die mittleren erstmaligen Übergangszeiten bei positiv-rekurrenten Zuständen:

Satz 3.6. Sind i, j zwei gegenseitig erreichbare positiv-rekurrente Zustände, dann ist die mittlere erstmalige Übergangszeit μ_{ij} endlich.

Beweis: Wenn $i = j$ gilt, dann ergibt sich die Behauptung des Satzes aus der Definition des positiv-rekurrenten Zustandes. Es sei daher $i \neq j$.

Nach Voraussetzung ist $i \leftrightarrow j$. Somit lässt sich ein kleinstes $m \in \mathbb{N}$ finden, welches folgende Eigenschaft besitzt: $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Der Satz über die totale mathematische Erwartung (siehe folgende Bemerkung) liefert $E(T_{jj}|X_0 = j) = E(T_{jj}|X_0 = j, X_m = i)p_{ji}^{(m)} + E(T_{jj}|X_0 = j, X_m \neq i)(1 - p_{ji}^{(m)}) \geq E(T_{jj}|X_0 = j, X_m = i)p_{ji}^{(m)}$.

Durch die Markoff-Eigenschaft der Zufallsgrößen $X_0, X_1, X_2, \dots$ und der Minimaleigenschaft von m gelangt man zu der folgenden Beziehung

$$E(T_{jj}|X_0 = j, X_m = i) = m + E(T_{jj}|X_0 = i).$$

Schließlich erhält man

$$\mu_{jj} = m + \mu_{ij}p_{ji}^{(m)}$$

bzw da $\mu_{jj} < \infty$ und $p_{ji}^{(m)} > 0$ ist folgt

$$\mu_{ij} \leq \frac{\mu_{jj}}{p_{ji}^{(m)}} - m < \infty.$$

Bemerkung: Es sei X eine (diskrete) Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathbb{U}, P]$ und $\{A_n\}_{n \in I}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Folge paarweise disjunkter Ereignisse aus $\mathbb{U}$ mit $\bigcup_{n \in I} A_n = \Omega$ und $P(A_n) > 0 \quad \forall n \in I$.

Ist weiters $C \in \mathbb{U}$ mit $P(A_n \cap C) > 0 \quad \forall n \in I$, dann gilt

$$E(X|C) = \sum_{n \in I} E(X|A_n \cap C)P(A_n|C).$$

3.3 Absorptionswahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt möchte man die Größen f_{ij}^* , für transiente Zustände i und rekurrente Zustände j näher betrachten. Dazu führt man eine Definition ein, die die Größen f_{ij}^* etwas verallgemeinert:

Definition 3.2. Es sei C eine beliebige Menge von Zuständen, $i \notin C$. Man definiert

$$1. p_{iC} = \sum_{j \in C} p_{ij}$$

$$2. f_{iC}^{(0)} = 0 \quad f_{iC}^{(1)} = p_{iC}$$

$$f_{iC}^{(n)} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \in S \setminus C} p_{ii_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} C} \text{ oder}$$

$$f_{iC}^{(n)} = P(X_n \in C, X_s \notin C \text{ für } 1 \leq s \leq n-1 | X_0 = i), \forall n \geq 2$$

$$3. f_{iC}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{iC}^{(n)}$$

$f_{iC}^{(n)}$ ist die Wahrscheinlichkeit nach n Schritten, von i ausgehend, zum ersten Mal in die Menge C zu gelangen.

Man nimmt nun an, dass C eine rekurrente Klasse von Zuständen sei. Dann ist f_{iC}^* die Wahrscheinlichkeit von i ausgehend, endgültig in der Klasse C zu landen. Durch die Abgeschlossenheit jeder rekurrenten Klasse kann die Markoff Kette, welche im Zustand i gestartet ist, nach Eintreffen in die Menge C , diese nicht mehr verlassen. Die Markoff Kette wird durch die rekurrente Klasse C absorbiert. Deshalb nennt man die Größen f_{iC}^* auch Absorptionswahrscheinlichkeiten.

Satz 3.7. Sei $C \subset S$. Man setzt $R = \{i \in S : i \nrightarrow C\}$ und $T = S \setminus (C \cup R)$. Dann erfüllt $(f_{iC}^*)_{i \in S}$ folgendes Gleichungssystem

$$x_i = 1 \quad \text{falls } i \in C$$

$$x_i = 0 \quad \text{falls } i \in R$$

$$x_i = \sum_{k \in S} p_{ik} x_k \quad \text{falls } i \in T$$

Bemerkung: Die letzte Gleichung kann man auch in dieser Form schreiben:

$$x_i = p_{iC} + \sum_{k \in T} p_{ik} x_k.$$

Beweis: Wenn i ein rekurrenter Zustand ist, dann ist das Ergebnis trivial:

$$f_{iC}^* = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \in C \\ 0 & \text{wenn } i \notin C \end{cases}$$

Nun widmet man sich den transienten Ausgangszuständen. Man kann den Zustandsraum S der Markoff Kette folgendermaßen zerlegen: $S = C \cup R \cup T$, wobei C und T als nichtleere Mengen vorausgesetzt werden.

Nach der gerade gegebenen Definition kann man $f_{iC}^{(n)}$ für $i \in T$ folgendermaßen schreiben:

$$\forall n \geq 2 : f_{iC}^{(n)} = \sum_{k, i_2, \dots, i_{n-1} \in S \setminus C} p_{ik} \cdot p_{ki_2} \cdots p_{i_{n-1} C} = \sum_{k \in S \setminus C} p_{ik} \sum_{i_2, \dots, i_{n-1} \in S \setminus C} p_{ki_2} \cdots p_{i_{n-1} C} = \sum_{k \in S \setminus C} p_{ik} \cdot f_{kC}^{(n-1)}.$$

Nun verwendet man die Zerlegung $S \setminus C = R \cup T$:

$$f_{iC}^{(n)} = \sum_{k \in R} p_{ik} \cdot f_{kC}^{(n-1)} + \sum_{k \in T} p_{ik} \cdot f_{kC}^{(n-1)} \text{ und erhält schließlich, da der Weg von } R \text{ nach}$$

C unmöglich ist (laut der Definition von R),

dh. $f_{kC}^{(n-1)} = 0$ für alle $k \in R$,

dass $f_{iC}^{(n)} = \sum_{k \in T} p_{ik} \cdot f_{kC}^{(n-1)}$, $\forall n \geq 2$ ist.

Für $n = 1$ verwendet man Punkt (1) der Definition: $f_{iC}^{(1)} = p_{iC}$.

Zusammengefasst ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{aligned} f_{iC}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{iC}^{(n)} = p_{iC} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \in T} p_{ik} \cdot f_{kC}^{(n-1)} = p_{iC} + \sum_{k \in T} p_{ik} \sum_{n=2}^{\infty} f_{kC}^{(n-1)} = \\ &= p_{iC} + \sum_{k \in T} p_{ik} \cdot f_{kC}^*. \end{aligned}$$

Somit hat man gezeigt, dass die Absorptionswahrscheinlichkeiten f_{iC}^* dem linearen inhomogenen Gleichungssystem

$$x_i = p_{iC} + \sum_{k \in T} p_{ik} x_k \quad \forall i \in T \text{ genügen.}$$

Bemerkung: In den Anwendungen besteht C meist aus einem einzigen absorbierenden Zustand a , das heißt es gilt $p_{aa} = 1$. Die Zustände in T sind dann transient, da man von ihnen ausgehend den absorbierenden Zustand mit Wahrscheinlichkeit > 0 erreichen kann, von a aber nicht mehr zurückkehren kann, weshalb die Rückkehrwahrscheinlichkeit < 1 ist.

Um die Frage nach der Konvergenz der n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ für transiente Ausgangszustände i und rekurrente Zustände j beantworten zu können, wird vorerst ein Hilfssatz eingeführt, mit dessen Hilfe man den nachfolgenden wichtigen Satz beweisen kann.

Dieser Hilfssatz wird Vertauschungslemma genannt und ist ein Spezialfall des Lebesgueschen Konvergenztheorems.

Satz 3.8. Hilfssatz: Gegeben sei eine Doppelfolge $\{a_{nk}\}_{n,k \in \mathbb{N}_0}$.

Wenn die Glieder a_{nk} dieser Folge die Voraussetzungen

- $|a_{nk}| \leq b_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0$,
- $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} b_k < \infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ existiert,

erfüllen, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}.$$

Beweis: Man betrachtet für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Differenz

$$c_n = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|$$

und zeigt, dass

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = |\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k| = 0$ gilt.

Nach Punkt 2. gibt es zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein von n unabhängiges $m = m(\epsilon)$ mit $\sum_{k=m+1}^{\infty} b_k < \frac{\epsilon}{2}$.

Wegen Punkt 1. und $|a_k| = |\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk}| \leq b_k$ erhält man

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k < \frac{\epsilon}{2},$$

sowie

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} c_n &= |\sum_{k=0}^m a_{nk} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k| \leq \\ &\leq |\sum_{k=0}^m a_{nk} - \sum_{k=0}^m a_k| + |\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k| \leq \\ &\leq |\sum_{k=0}^m a_{nk} - \sum_{k=0}^m a_k| + \epsilon. \end{aligned}$$

bzw da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sum_{k=0}^m a_{nk} - \sum_{k=0}^m a_k| = |\sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^m a_k| = 0 \text{ ist,}$$

folgt auch

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt schließlich die Behauptung.

Satz 3.9. Es sei $i \in T$ ein transienter Zustand und j ein Element der aperiodischen rekurrenten Klasse C , so gilt:

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = f_{iC}^* \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = f_{iC}^* \cdot \nu_j$, wobei f_{iC}^* die Wahrscheinlichkeit der Absorption in die rekurrente Klasse C bei Start im Zustand i und $\nu_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)}$ der im Abschnitt 3.2 behandelte Grenzwert ist.

Im Gegensatz zum rekurrenten Fall (siehe Satz 3.3.) hängt also für $i \in T$ und $j \in C$ der Grenzwert von $p_{ij}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ sowohl vom Ausgangszustand i als auch vom Endzustand j ab.

Beweis: Für diesen Beweis führt man eine neue Bezeichnung $f_{ik,C}^{(n)}$ ein:

$$f_{ik,C}^{(n)} = P(X_n = k \in C, X_r \notin C \text{ für } 1 \leq r \leq n-1 | X_0 = i) \text{ und } i \in T, n \in \mathbb{N}.$$

Dies gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die von $i \in T$ ausgehende Markoff Kette nach n Schritten durch die Klasse C absorbiert wird, und zwar über den Zustand $k \in C$.

Es gilt dann

$$f_{ik,C}^* = \sum_{l=1}^{\infty} f_{ik,C}^{(l)} = P(X_{n_0} = k \in C \text{ erstmalig für irgendein } n_0 \in \mathbb{N}, X_n \notin C \text{ für } 1 \leq n \leq n_0 - 1 | X_0 = i) \leq 1.$$

Der Zusammenhang zwischen den Absorptionswahrscheinlichkeiten aus der Definition 3.2. und den $f_{ik,C}^{(n)}$ ist folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} f_{iC}^{(n)} &= \sum_{k \in C} f_{ik,C}^{(n)}, \\ f_{iC}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{iC}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in C} f_{ik,C}^{(n)} = \sum_{k \in C} f_{ik,C}^*. \end{aligned}$$

Weiters erhält man für die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten der Markoff Kette von i nach j

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j | X_0 = i) = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k \in C} P(X_n = j | X_0 = i, X_l = k \in C, X_r \notin C \text{ für } 1 \leq r \leq l-1) \\ &\times P(X_l = k \in C, X_r \notin C \text{ für } 1 \leq r \leq l-1 | X_0 = i), \end{aligned}$$

bzw

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{l=1}^n \sum_{k \in C} P(X_n = j | X_l = k) f_{ik,C}^{(l)} = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k \in C} f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in C} \left(\sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \right).$$

Man zeigt, dass für feste $i, j \in S$ die Doppelfolge

$$a_{nk} = \sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \forall k \in C$$

die Voraussetzungen vom Hilfssatz 3.8. erfüllt.

Es gilt

$$a_{nk} = \sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \leq \sum_{l=1}^{\infty} f_{ik,C}^{(l)} = f_{ik,C}^* = b_k \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in C,$$

sowie

$$\sum_{k \in C} b_k = \sum_{k \in C} f_{ik,C}^* \leq 1.$$

Mit Hilfe des Hilfssatzes 2.3. wird die Existenz der Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \quad \forall k \in C$ gezeigt.

Vorerst ist $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ik,C}^{(l)} \leq 1$.

$$\text{Dies führt zu } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{ik,C}^{(n)}}{\sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)}} = 0.$$

Andererseits ist wegen $j, k \in C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}^{(n)} = \nu_j.$$

Die Voraussetzungen vom Hilfssatz 2.3. sind damit erfüllt. Mit diesem Hilfssatz und der nachfolgenden Bemerkung erhält man dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = f_{ik,C}^* \nu_j \quad \forall k \in C.$$

Nun kann man den obigen Hilfssatz 3.8. anwenden und bei der Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in C} \left(\sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \right)$$

Grenzwert und Summe vertauschen.

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n f_{ik,C}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} = \\ &= \nu_j \sum_{k \in C} f_{ik,C}^* = f_{iC}^* \cdot \nu_j. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = b \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Dieser Satz besagt, dass es beim Start in einem transienten Zustand i zu zwei verschiedenen Möglichkeiten kommen kann. Entweder nimmt der Prozess für alle Zeiten nur transiente Zustände an ($\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$), oder er erreicht nach einer gewissen Zeit mit der Absorbtionswahrscheinlichkeit f_{iC}^ einen rekurrenten Zustand j und bleibt für immer in der rekurrenten Klasse C ($j \in C$), wo sich dann eine stationäre Verteilung einstellt.*

Kapitel 4

Irrfahrten

4.1 Das eindimensionale Irrfahrtsmodell

Hier kann man sich eine Gerade mit den Werten in der Menge $\mathbb{Z}$ vorstellen, auf der sich ein Teilchen mit der Schrittlänge 1 vorwärts oder rückwärts bewegt. Mit der Wahrscheinlichkeit p bewegt sich das Teilchen einen Schritt vorwärts (rechts), mit der Wahrscheinlichkeit q rückwärts (links). Es gilt: $p + q = 1$.

Man unterscheidet zwischen beschränkten und unbeschränkten Irrfahrten. Bei der beschränkten Irrfahrt gibt es zusätzlich noch die Unterscheidung zwischen absorbierenden und reflektierenden Schranken.

4.1.1 Die beschränkte Irrfahrt mit absorbierenden Schranken

Eine absorbierende Schranke ist ein Punkt, den man nicht mehr verlassen kann, sobald man ihn einmal erreicht hat. Es gilt: $p_{ii} = P(X_{n+1} = i | X_n = i) = 1$ und

$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = 0$ für $i \neq j$.

Ein Beispiel für ein Irrfahrtproblem mit absorbierenden Schranken ist das Problem des Ruins eines Spielers.

Beispiel: Der Ruin eines Spielers

Es handelt sich hierbei um eine beidseitig beschränkte Irrfahrt mit zwei absorbierenden Schranken auf einem endlichen Zustandsraum:

Zwei Spieler S_1 und S_2 spielen gegeneinander. S_1 hat das Starkapital a , S_2 hat b zur Verfügung. S_1 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit p und S_2 mit Wahrscheinlichkeit q , und r ist die Wahrscheinlichkeit für ein Spiel, das unentschieden endet. Es ist $r = 1 - p - q$. Der Verlierer jedes Spieles zahlt dem Sieger eine Geldeinheit aus. Bei einem Unentschieden

wird nichts ausbezahlt. Es wird solange gespielt, bis einer der beiden Spieler kein Geld mehr besitzt.

Man betrachtet nun das Kapital des Spielers S_1 im Laufe der Spieldauer. Diese Entwicklung lässt sich durch die Irrfahrt eines Teilchens auf der x -Achse, in den Punkten $0, 1, \dots, m-1, m$ gut darstellen, wobei $m = a + b$ ist. Der Zustandsraum S , also die Menge aller möglichen Zustände, ist hier endlich. $S = \{0, 1, \dots, m\}$.

Das Startkapital des S_1 -Spielers ist a , also ist das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit 1 zu Beginn des Spieles im Punkt $x = a$. Nun bewegt es sich entweder nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p oder nach links mit Wahrscheinlichkeit q (um 1 Einheit), oder es bleibt auf seinem Platz stehen; dies tut es mit der Wahrscheinlichkeit r . Da das Spiel endet, wenn einer der Spieler kein Geld mehr besitzt, nimmt man die Punkte $x = 0$ (das ist der Ruin des Spielers S_1) und $x = m$ (das ist der Ruin des Spielers S_2) als absorbierende Zustände an.

Weiters sei X_n das Kapital des Spielers S_1 nach dem n -ten Spiel ($n = 0, 1, 2, \dots$) und

$$X_0 = a \text{ sein Anfangskapital. Durch } Y_n = \begin{cases} 1 & \dots & S_1 \text{ gewinnt} \\ 0 & \dots & \text{unentschieden} \\ -1 & \dots & S_1 \text{ verliert} \end{cases}$$

wird eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(Y_n = j) = \begin{cases} p & \dots & j=1 \\ q & \dots & j=-1 \\ r & \dots & j=0 \end{cases}$$

definiert.

Hier sieht man nun, dass durch $X_n = X_{n-1} + Y_n$ eine Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \{0, 1, \dots, m\}$ erzeugt wird. Die Markoff Kette ist homogen, da die Verteilung der Zufallsvariablen Y_n nicht von n abhängt. Wegen der Unabhängigkeit von Y_n und X_{n-1} erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(Y_n = j - i) =$

$$\begin{cases} p & \dots & j=i+1 \\ q & \dots & j=i-1 \\ r & \dots & j=i \end{cases}$$

sowie $p_{00} = p_{mm} = 1$, $p_{0j} = 0$ für $1 \leq j \leq m$, $p_{mj} = 0$ für $0 \leq j \leq m-1$.

Daraus kann man nun die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bilden:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ q & r & p & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & q & r & p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Die beschränkte Irrfahrt mit reflektierenden Schranken

Eine reflektierende Schranke ist ein Punkt, den man auch wieder verlassen kann, wenn man ihn einmal erreicht hat.

Der Punkt i ist genau dann eine von unten reflektierende Schranke, wenn

$P(X_{n+1} = i | X_n = i + 1) = p_{i+1,i} = q$, $P(X_{n+1} = i | X_n = i) = p_{ii} = s$ und

$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p_{i,i+1} = 1 - s$ ist.

Der Punkt i ist eine von oben reflektierende Schranke, wenn $P(X_{n+1} = i | X_n = i - 1) = p_{i-1,i} = p$, $P(X_{n+1} = i | X_n = i) = p_{ii} = s$ und $P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = p_{i,i-1} = 1 - s$ ist.

Der Wert s liegt im Intervall $0 \leq s \leq 1$, da er eine Wahrscheinlichkeit angibt.

Beispiel:

Hierbei handelt es sich um eine Irrfahrt, die beidseitig beschränkt ist und zwei reflektierende Schranken besitzt. Der Zustandsraum S sei endlich, $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Die Irrfahrt mit reflektierenden Rändern kann man als Diffusion in einem begrenzten Gebiet interpretieren. Spieltheoretisch ist dieser Fall nicht sehr interessant, da immer wenn ein Spieler verlieren würde, dieser wieder ins Spiel gebracht wird.

Ein Teilchen auf der Geraden bewegt sich mit der Wahrscheinlichkeit p einen Schritt nach rechts, und mit der Wahrscheinlichkeit q nach links. Es gilt: $p + q = 1$. Nun wird der Fall betrachtet, bei dem $s = q$ ist. Wenn das Teilchen in den Zustand 0 gelangt, bleibt es mit der Wahrscheinlichkeit q dort und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q = p$ verlässt es den Zustand 0 wieder. Ähnliches gilt für den Zustand 4. In diesem bleibt das Teilchen mit Wahrscheinlichkeit p stehen und mit der Wahrscheinlichkeit q verlässt es ihn wieder. Die Übergangsmatrix hat dann folgende Gestalt:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

Es gibt eine Vielzahl an Variationen bei den Irrfahrten. Man kann also Irrfahrten mit einer absorbierenden und einer reflektierenden Schranke finden, sowie einseitig beschränkte Irrfahrten mit einer reflektierenden oder absorbierenden Schranke, und vieles mehr.

4.1.3 Die unbeschränkte Irrfahrt

Beispiel:

Sei X_t die Position des Teilchens nach t Schritten. Dann sieht man, dass die Menge $\{X_t : t = 0, 1, 2, \dots\}$ eine homogene Markoff Kette bildet. Der Zustandsraum $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist unendlich und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$p_{i,i+1} = P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p$$

$$p_{i,i-1} = P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = q$$

$$p_{ij} = 0 \text{ sonst.}$$

Daraus kann man nun wiederum eine Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bilden, die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ kann man mit Hilfe der Binomialverteilung berechnen.

Die Überlegung ist also in n Schritten von i nach j zu gelangen. Die Wahrscheinlichkeit von n Schritten genau x Schritte nach rechts und y Schritte nach links zu machen beträgt $\binom{n}{x} p^x q^y$.

Da man ja bei diesen n Schritten von i nach j gelangen möchte gilt:

$$x + y = n \text{ und } x - y = j - i.$$

Daraus ergibt sich für x und y folgendes: $x = \frac{1}{2}(n + j - i)$ und $y = \frac{1}{2}(n - j + i)$.

Außerdem muss $n \equiv j - i(2)$ erfüllt sein, da die Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ Periode 2 hat.

Somit erhält man dann für die n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+j-i)} p^{\frac{1}{2}(n+j-i)} q^{\frac{1}{2}(n-j+i)} \text{ für } n \equiv j - i(2),$$

$$p_{ij}^{(n)} = 0 \text{ sonst.}$$

Insbesondere kann man daraus erkennen, dass das Teilchen nur nach einer geraden Anzahl von Schritten in den Ausgangspunkt zurückkehren kann. Es gilt also:

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Zur Bestimmung von $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)}$ kann man die folgende Reihendarstellung verwenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = (1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$$

die für alle reellen x mit $-1 < 4x < 1$ erfüllt ist. Wie man sieht ist für dieses Beispiel $x = p \cdot q = p(1 - p) > 0$.

Für $0 < 4p(1 - p) < 1$ ($p \neq \frac{1}{2}$) erhält man dann folgende Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = [1 - 4p + 4p^2]^{-\frac{1}{2}} = |1 - 2p|^{-1} < \infty.$$

Für den Fall, dass $4p(1 - p) = 1$ ist, das bedeutet, dass $p = \frac{1}{2}$ ist, folgt durch Anwendung der Induktion, dass $\binom{2n}{n} \geq 4^n \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Somit ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1 - p)^n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \infty.$$

Nach den Sätzen 2.2. und 2.5. sind daher für $p = \frac{1}{2}$ alle Zustände der Markoff Kette rekurrent. Die Zustände sind dagegen alle transient, wenn $p \neq \frac{1}{2}$ ist.

Diese Erkenntnisse sind offensichtlich, da für $p \neq \frac{1}{2}$ entweder $p < q$ oder $p > q$ gelten muss. Anschaulich bewegt sich das Teilchen auf der Geraden im ersten Fall in Richtung $-\infty$, während es im zweiten Fall nach $+\infty$ strebt. Daher hat die Rückkehr zu einem Ausgangspunkt i in beiden Fällen Wahrscheinlichkeit < 1 .

Eine zweite Methode um zu bestimmen, ob die eindimensionale unbeschränkte Irrfahrt rekurrent oder transient ist, ist die Verwendung der Stirling Formel:

Es gilt:

$$p_{ii}^{(2n+1)} = 0, \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Die Stirling Formel lautet folgendermaßen: $n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$.

Eingesetzt in die Wahrscheinlichkeiten $p_{ii}^{(2n)}$ ergibt das $p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$. Da man weiß, dass p und q beide ≤ 1 sind, gilt die Ungleichung $pq \leq \frac{1}{4}$. Gleichheit herrscht genau dann, wenn $p = q = \frac{1}{2}$ ist.

Daher folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$ ist, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Somit hat man nun die Aussage erhalten, die besagt, dass die eindimensionale unbeschränkte Irrfahrt für $p = q = \frac{1}{2}$ rekurrent ist.

Andererseits ist $4pq = r < 1$ wenn $p \neq q$ ist und für ein $N > 0$ gilt:

$$\sum_{n=N}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=N}^{\infty} r^n < \infty.$$

Dies zeigt also, dass die Irrfahrt für $p \neq q$ transient ist.

Positiv-rekurrent oder null-rekurrent?

Nun möchte man noch wissen, ob im Falle $p = \frac{1}{2}$ die Markoff Kette positiv-rekurrent oder null-rekurrent ist.

Durch das Einsetzen von $p = \frac{1}{2}$ erhält man $p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad \forall n \geq 0$.

Man untersucht jetzt die mittlere erstmalige Rückkehrzeit $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$. Wenn diese endlich ist, dann ist die Markoff Kette positiv-rekurrent, wenn nicht, dann ist sie null-rekurrent. (Definition 2.3.)

Man definiert die erzeugenden Funktionen

$$F_{ii}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \omega^n \text{ und } P_{ii}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \omega^n$$

mit $F_{ii}(1) = f_{ii}^*$ und $P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$.

Dann verwendet man die Rekursionsformel 2.1. und multipliziert beide Seiten mit ω^n :

$$p_{ii}^{(n)} \omega^n = \sum_{k=0}^n f_{ii}^{(k)} \cdot p_{ii}^{(n-k)} \cdot \omega^n \quad \forall n \geq 1.$$

Durch Summation über n erhält man folgende Relation:

$$P_{ii}(\omega) - 1 = F_{ii}(\omega) P_{ii}(\omega).$$

Differenziert man die Funktion $F_{ii}(\omega)$ im Punkt 1, so sieht man, dass

$$F'_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} \cdot 1 = \mu_{ii} \text{ ist.}$$

In diesem Beispiel ist die erzeugende Funktion

$$P_{ii}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} \omega^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \omega^{2n}.$$

Da $\binom{2n}{n} = 2^{2n} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$ ist folgt, dass $P_{ii}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-\omega^2)^n = (1 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist.

Dieses Ergebnis setzt man jetzt in die erzeugende Funktion $F_{ii}(\omega)$ ein:

$$F_{ii}(\omega) = 1 - \frac{1}{P_{ii}(\omega)} = 1 - (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Schließlich erhält man dann für die mittlere Rückkehrzeit μ_{ii} folgendes Resultat:

$$\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} = \lim_{\omega \rightarrow 1} F'_{ii}(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\omega}{\sqrt{1-\omega^2}} = \infty.$$

Deshalb kann man aus dieser Rechnung erkennen, dass die unbeschränkte Irrfahrt eines Teilchens auf der Geraden für $p = q = \frac{1}{2}$ null-rekurrent ist. Man nennt sie auch die symmetrische unbeschränkte Irrfahrt.

Es gibt also noch die Unterscheidung zwischen symmetrischen und asymmetrischen Irrfahrten.

Man nennt eine Irrfahrt symmetrisch, wenn alle Ausgänge gleichwahrscheinlich sind, dh. $p = q = \frac{1}{2}$ ist. Das bedeutet, bei Start im Zustand i springt man in jeden der beiden Nachbarzustände $i + 1$ und $i - 1$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Bei einer asymmetrischen Irrfahrt sind die Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge alle unterschiedlich. Die einzige Voraussetzung an die Wahrscheinlichkeiten ist, dass deren Summe 1 ergeben muss.

4.2 Das d-dimensionale Irrfahrtsmodell

Der Zustandsraum der Markoff Kette besteht hier aus d -dimensionalen Vektoren $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ mit ganzzahligen Koordinaten x_l ($l = 1, 2, \dots, d$). Man spricht daher von Irrfahrten in der Ebene, im Raum, etc...

Allgemein spricht man von einer symmetrischen Irrfahrt in d Dimensionen, wenn von einem Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ aus nur die $2d$ Übergänge zu den Nachbarpunkten $(x_1 \pm 1, x_2, \dots, x_d), (x_1, x_2 \pm 1, \dots, x_d), \dots, (x_1, x_2, \dots, x_d \pm 1)$ möglich sind und alle Übergangswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2d}$ sind.

Auch im d -dimensionalen Fall gibt es die Unterscheidung von beschränkten und unbeschränkten Irrfahrten.

4.2.1 Die zweidimensionale Irrfahrt

Ein einfaches Beispiel einer mehrdimensionalen Markoff Kette ist die zweidimensionale Irrfahrt. Man kann sich hier einen Zufallswanderer in den Straßen einer sehr symmetrischen Stadt vorstellen, der an jeder Kreuzung vier verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl hat. Jede dieser Möglichkeiten wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p_k gewählt. Sollte der Wanderer keine Pausen machen dürfen, muß folgende Gleichung gelten: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Die beiden Dimensionen werden nun formal so unterschieden, dass die zweite Dimension durch gestrichene Größen dargestellt wird. Daher geht der Zufallswanderer in jedem Zeitschritt vom Zustand i, i' in den Zustand j, j' über. Dem Zufallswanderer ist es möglich immer nur in eine Richtung pro Zeitschritt zu wandern. Daraus ergibt sich für die zweidimensionalen Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{(i,i')(j,j')} = \begin{cases} p_1 & \text{für } j = i + 1 \quad j' = i' \\ p_2 & \text{für } j = i - 1 \quad j' = i' \\ p_3 & \text{für } j = i \quad j' = i' + 1 \\ p_4 & \text{für } j = i \quad j' = i' - 1 \end{cases}$$

Bei einer zweidimensionalen symmetrischen Irrfahrt ist die Wahrscheinlichkeit der Ausgänge gleich $\frac{1}{4}$. Also erhält man folgende Übergangswahrscheinlichkeiten wenn $\mathbf{i} = (i, i')$ und $\mathbf{j} = (j, j')$ ist:

$$p_{\mathbf{i}\mathbf{j}} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{wenn } |\mathbf{i} - \mathbf{j}| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um die Möglichkeit zu haben in einen Startpunkt zurück zu kehren, müssen auch wieder jeweils die gleiche Anzahl von Links- und Rechtsbewegungen sowie Bewegungen nach oben und unten stattfinden. Weiters muss die Schrittzahl gerade sein. Um den Startwert also wieder erreichen zu können, müssen insgesamt $2n$ Schritte gemacht werden. Angenommen man geht i Schritte nach rechts, i Schritte nach links, j Schritte nach oben und j Schritte nach unten, dann ergibt sich die Formel $2n = 2i + 2j$.

Somit kann man sich i Schritte in die eine Dimensionsrichtung und $n - i$ Schritte in die andere bewegen. Bei der zweidimensionalen Irrfahrt gibt es daher $\sum_{i=0}^n \frac{2n!}{i!^2(n-i)!^2}$ Möglichkeiten für den Weg der Länge $2n$.

Man erhält also folgendes:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{ii}}^{(2n)} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{i=0}^n \frac{2n!}{i!^2(n-i)!^2} = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2 \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{n-i}}{\binom{2n}{n}} = \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \binom{2n}{n}^2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \binom{2n}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

Der erste Schritt dieser Rechnung ist durch die Beziehung $\frac{(2n)!}{i!^2(n-i)!^2} = \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$ leicht nachzuvollziehen.

Da $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$ gilt, ist auch der dritte Schritt einsichtig und die gesamte Summe fällt zum Faktor Eins zusammen.

Nun wendet man wieder die Stirling Formel an und erhält:

$$p_{\mathbf{ii}}^{(2n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!^4} \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{2n^{4n+1} \cdot e^{-4n} \cdot 2\pi}{n^{4n+2} \cdot e^{-4n} \cdot 4\pi^2} \approx \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot \frac{2 \cdot 2^{4n}}{2 \cdot \pi \cdot n} \approx \frac{1}{\pi n}.$$

Daher folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\mathbf{ii}}^{(n)} \approx \frac{1}{\pi} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots) = \infty$, wenn jeder gemachte Schritt gleichwahrscheinlich (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$) ist. Deshalb ist die symmetrische zweidimensionale Irrfahrt rekurrent.

Sie ist null-rekurrent, da die mittlere erstmalige Rückkehrzeit μ_{ii} unendlich ist. Dies kann man durch das Anwenden des Verfahrens für den eindimensionalen Fall leicht nachrechnen.

4.2.2 Die dreidimensionale Irrfahrt

Im dreidimensionalen Straßennetz hat jeder Kreuzungspunkt 6 Nachbarpunkte (Nord, Süd, Ost, West, Oben, Unten).

Man erhält für die Übergangswahrscheinlichkeiten ähnlich wie für den zweidimensionalen Fall wenn man $\mathbf{i}=(i, i', i'')$ setzt:

$$p_{\mathbf{ii}}^{(2n+1)} = 0 \text{ für } n = 0, 1, 2 \dots \text{ und } p_{\mathbf{ii}}^{(2n)} = \sum_{i,j,0 \leq i+j \leq n} \frac{(2n)!}{i!j!j!(n-i-j)!(n-i-j)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2n}.$$

Indem man jetzt mit $\frac{(n!)^2}{(n!)^2}$ multipliziert und den Term $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ heraushebt kommt man auf

die folgende Form:

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{i,j, 0 \leq i+j \leq n} \left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right]^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{2n}.$$

Weiters kann man eine Abschätzung vornehmen, und zwar:

$$p_{ii}^{(2n)} \leq c_n \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^n}, \text{ wobei } c_n = \max_{i,j, 0 \leq i+j \leq n} \left[\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right].$$

Dabei hat man verwendet, dass $\sum_{i,j, 0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 1$ ist.

Nun zeigt man noch, dass der Wert von c_n für große n annähernd so aussieht: $\frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!}$, das heißt, dass sich für i und j der Wert $\approx \frac{n}{3}$ einstellt:

Es seien i_0 und j_0 die Werte von i und j , die den Term $\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$ maximieren, wobei $0 \leq i+j \leq n$ gelten muss.

Dann ergeben sich die vier Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{j_0!(i_0-1)!(n-j_0-i_0+1)!} &\leq \frac{n!}{j_0!i_0!(n-j_0-i_0)!}, \\ \frac{n!}{j_0!(i_0+1)!(n-j_0-i_0-1)!} &\leq \frac{n!}{j_0!i_0!(n-j_0-i_0)!}, \\ \frac{n!}{(j_0-1)!i_0!(n-j_0-i_0+1)!} &\leq \frac{n!}{j_0!i_0!(n-j_0-i_0)!}, \\ \frac{n!}{(j_0+1)!i_0!(n-j_0-i_0-1)!} &\leq \frac{n!}{j_0!i_0!(n-j_0-i_0)!}. \end{aligned}$$

Diese vier Ungleichungen kann man auf folgende zwei Ungleichungen reduzieren:

$$n - i_0 - 1 \leq 2i_0 \leq n - i_0 + 1,$$

$$n - j_0 - 1 \leq 2j_0 \leq n - j_0 + 1.$$

Daher kann man erkennen, dass für große Werte von n , $i_0 \approx \frac{n}{3}$ und $j_0 \approx \frac{n}{3}$ sind.

Damit hat man gezeigt, dass c_n wirklich den Wert $\frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!}$ für große n annimmt.

Setzt man diesen erhaltenen Wert c_n nun in die Ungleichung ein, dann erhält man:

$$p_{ii}^{(2n)} \leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})! \cdot 3^n} \binom{2n}{n}.$$

Darauf wendet man wieder die Stirling Formel an und bekommt folgende Abschätzung

$$\frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{n!}{(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})!(\frac{n}{3})! \cdot 3^n} \binom{2n}{n} \approx \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}.$$

Summiert man über $n = 0, 1, \dots, \infty$ dann folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}} < \infty$.

Daher hat man schließlich die Aussage erhalten, dass $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ ist. Somit sieht man nun, dass der Zustand i transient ist. Die symmetrische dreidimensionale Irrfahrt ist daher transient.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die ein- und zwei-dimensionale symmetrische Irrfahrt irgendwann wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehren wird (auch wenn es in unendlich langer Zeit passiert). Jedoch bereits bei der dreidimensionalen symmetrischen Irrfahrt kehrt man niemals wieder an den Ausgangspunkt zurück. Sie läuft so zu sagen ins Unendliche davon.

4.3 Anwendungen der Sätze über Rekurrenz und Transienz auf Irrfahrten

1. **Beispiel:** Die einseitig unbeschränkte Irrfahrt mit einer reflektierenden Schranke

Als Beispiel zur Anwendung des Transienzsatzes 2.14. vom Abschnitt 2.3 kann man die einseitig unbeschränkte Irrfahrt mit einer reflektierenden Schranke heranziehen. Es handelt sich hier um eine irreduzible Markoff Kette mit Periode 2.

Die Zustandsmenge ist $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind durch

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & i = 0, j = 1 \\ p & i \geq 1, j = i + 1 \\ q & i \geq 1, j = i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{gegeben.}$$

Die Übergangsmatrix hat die folgende Gestalt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Der Zustand 0 ist hier eine reflektierende Schranke, da bei Eintreffen in den Zustand 0 die Fahrt mit Wahrscheinlichkeit 1 in den Zustand 1 führt.

Für $0 < p < 1$ ist die Markoff Kette irreduzibel.

Man sucht nun eine Lösung $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ für die Gleichung $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} x_j$:

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}, \quad \forall i \geq 1.$$

$$\forall i \geq 1 \text{ gilt: } u_{i+1} - u_i = \frac{q}{p}(u_i - u_{i-1}) = \left(\frac{q}{p}\right)^2(u_{i-1} - u_{i-2}) = \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}(u_2 - u_1).$$

Setzt man $u_0 = 0$, dann ist $u_1 = pu_2$ und daraus folgt $\forall i \geq 1: u_{i+1} - u_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i u_1$.

Jetzt summiert man diese Gleichung über $j = 1, 2, \dots, i$ und erhält:

$$\sum_{j=1}^i (u_{j+1} - u_j) = u_1 \sum_{j=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^j, \quad \forall i \geq 1, \text{ das heißt } u_{i+1} = u_1 \left(1 + \sum_{j=1}^i \left(\frac{q}{p}\right)^j\right).$$

Wählt man $u_1 > 0$, dann ist $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ genau dann eine beschränkte, nicht-konstante Lösung des Gleichungssystems, wenn $p > q$ gilt. Für $u_1 = 0$ erhält man eine konstante Lösung.

Daher folgt die Aussage des Satzes, die besagt, dass alle Zustände der Markoff Kette für $p > q$ transient sind.

Für $p \leq q$ sind alle Zustände dagegen rekurrent.

2. Beispiel:

Das 1. Beispiel soll den Satz von Foster und dessen Folgerung vom Abschnitt 2.4 nun in der Anwendung zeigen:

Anhand der Übergangswahrscheinlichkeiten kann man erkennen, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ i + p - q & \text{für } i \geq 1 \end{cases}$$

und $b_i = \sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i = p - q \quad \forall i \geq 1$, woraus dann auch $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = p - q$ folgt.

Man sieht, dass die Voraussetzungen aus der Folgerung 2.17. genau dann erfüllt sind, wenn $p < q$ gilt.

Das heißt, dass dann alle Zustände der einseitig unbeschränkten Irrfahrt mit einer reflektierenden Schranke positiv-rekurrent sind.

Daher kann man unter der Voraussetzung $p < q$ für diese Irrfahrt einen stationären Vektor finden.

Laut der Definition 3.1. ist eine stationäre Verteilung ν_j bezüglich der Übergangsmatrix P gegeben, wenn $\nu_j = \sum_{i \in S} \nu_i p_{ij}$ für alle $j \in S$ gilt. Wenn man diese Gleichung in Matrixschreibweise anschreiben möchte setzt man $\nu = (\nu_j)_{j \in S}$ und erhält $\nu = \nu \cdot P$.

Für die unbeschränkte Irrfahrt mit einer reflektierenden Schranke gilt dann

$$\nu_0 = q \nu_1$$

$$\nu_1 = \nu_0 + q \nu_2$$

$$\nu_j = p \nu_{j-1} + q \nu_{j+1} \quad \forall j \geq 2.$$

Dieses Gleichungssystem kann man nun in Abhängigkeit von ν_0 rekursiv lösen.

Man erhält $\nu_j = \frac{1}{p} \left(\frac{p}{q}\right)^j \nu_0 \quad \forall j \geq 1$.

Dann sieht man, dass die Reihe $\sum_{j \in S} \nu_j$ für $p < q$ konvergiert.

Da man als Lösung eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten möchte, muss man ν_0 so wählen, dass die Reihensumme 1 ergibt. Also formt man die Gleichung

$$1 = \sum_{j \in S} \nu_j = \frac{\nu_0}{p} \sum_{j \in S} \left(\frac{p}{q}\right)^j \text{ so um, dass } \nu_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^j} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p}{q}\right) > 0 \text{ ergibt.}$$

Damit ist nun $\nu_j > 0 \quad \forall j \in S$ und

$$\nu_j = \frac{1}{2p} \left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q}\right)^j \quad \forall j \geq 1.$$

$(\nu_j)_{j \in S}$ ist eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung zur Übergangsmatrix P .

In den anderen beiden Fällen, bei denen entweder $p > q$ (alle Zustände transient) oder $p = q = \frac{1}{2}$ (alle Zustände null-rekurrent) gilt, ist die Reihe $\sum_{j \in S} \nu_j$ divergent und daher kann es keinen stationären Vektor geben.

Die bisher betrachteten Beispiele haben sich alle mit homogenen Markoff Ketten beschäftigt.

Das bedeutet, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht explizit von i oder j , sondern nur von der Differenz $j - i$ abhängen. Allgemein gilt für homogene Markoff Ketten $p_{ij} = a_{j-i}$.

Die Übergangswahrscheinlichkeit ist somit für jeden Abstand eine Konstante.

Mit $a_{-1} = q$, $a_0 = r$, $a_1 = p$ erhält man die Irrfahrt mit Pausen. Das ist jene Irrfahrt, die nicht in jedem Zeitschritt um eine Einheit wandert, sondern mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit r in dem Zustand bleibt, in dem sie gerade ist. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{falls } i = j + 1 \\ q & \text{falls } i = j - 1 \\ r & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3. Beispiel: Zustandsabhängige Markoff Ketten

Zustandsabhängige Markoff Ketten sind räumlich nicht homogene Markoff Ketten. Das soll heißen, dass bei diesen Markoff Ketten die Übergangswahrscheinlichkeiten explizit vom Zustand des Systems abhängen. Für die zustandsabhängige Irrfahrt mit Pausen gilt dann:

$P(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = p_i$, $P(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i) = q_i$, und

$P(X_{n+1} = i | X_n = i) = r_i$. Klarerweise sind die Wahrscheinlichkeiten positiv; $p_i > 0$,

$q_i > 0$, $r_i \geq 0$ und $p_i + r_i + q_i = 1$ für $i = 1, 2, \dots$. Es gilt weiters, dass $p_0 \geq 0$, $r_0 \geq 0$ und $p_0 + r_0 = 1$ ist. Die Übergangsmatrix hat dann die folgende Gestalt:

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Den stationären Vektor $(\nu_j)_{j \in S}$ erhält man indem man das Gleichungssystem $\nu \cdot P = \nu$ löst.

Für den Fall, dass $r_i = 0 \forall i$ ist kann man leicht zeigen, dass die Irrfahrt genau dann eine stationäre Verteilung besitzt, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \nu_i < \infty$ ist:

Durch die Berechnung des Gleichungssystems $\nu \cdot P = \nu$ erhält man die Lösung:

$$\nu_i = \frac{p_1 p_2 \dots p_{i-1}}{q_1 q_2 \dots q_i} \nu_0 = \nu_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}} \text{ für } i \geq 1.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \nu_i = 1$ ist, folgt:

$1 = \nu_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}$ und daraus ergibt sich dann für ν_0 die folgende Gleichung:

$$\nu_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}}.$$

Daraus kann man nun gut erkennen, dass $\nu_0 > 0$ nur dann gilt, wenn $\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}} < \infty$ ist.

Es sei jetzt $\nu_0 = 1$ dann folgt, dass $\nu_i = \frac{p_1 p_2 \dots p_{i-1}}{q_1 q_2 \dots q_i}$ ist. Die Summe von ν_i muss also konvergieren, damit ein stationärer Vektor existiert.

Man betrachtet weiters das Gleichungssystem $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} \cdot y_j = y_i$, $i \neq 0$ aus dem Transienzatz 2.14. Dann erhält man:

$$q_1 y_0 + r_1 y_1 + p_1 y_2 = y_1,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$q_n y_{n-1} + r_n y_n + p_n y_{n+1} = y_n.$$

Hierbei ist $y_i = 1$, $\forall i$ die triviale Lösung des Gleichungssystems. Nun will man zeigen, dass auch $y_0 = 0$, $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i}$, $n \geq 1$ eine Lösung ist:

$$q_1 y_0 + r_1 y_1 + p_1 y_2 = r_1 \left(\frac{1}{p_0}\right) + p_1 \left(\frac{1}{p_0} + \frac{q_1}{p_0 p_1}\right) = \frac{1}{p_0} = y_1.$$

Für die n -te Gleichung muss man zeigen, dass:

$$q_n \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{p_i \nu_i}\right) + r_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i}\right) + p_n \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{p_i \nu_i}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i} \text{ ist.}$$

Da $p_n + q_n + r_n = 1$ ist, kann man die obige Gleichung folgendermaßen umschreiben:

$$q_n \left(\sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{p_i \nu_i}\right) + p_n \left(\sum_{i=0}^n \frac{1}{p_i \nu_i}\right) = (p_n + q_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird nach weiteren Umformungen zu

$$(p_n + q_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i} - q_n \frac{1}{p_{n-1} \nu_{n-1}} + p_n \frac{1}{p_n \nu_n}, \text{ wobei } -q_n \frac{1}{p_{n-1} \nu_{n-1}} = \frac{-1}{\frac{p_{n-1}}{q_n} \nu_{n-1}} = \frac{-1}{\nu_n} \text{ ist.}$$

Damit hat man die Gleichheit bewiesen und gezeigt, dass $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i}$ eine weitere Lösung ist.

Wenn die zwei Lösungen $y_i = 1 \quad \forall i$ und $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{p_i \nu_i}$ ($n \geq 1$) unabhängig voneinander sind, dann wird die allgemeine Lösung so lauten: $z_n = \alpha + \beta y_n$. Eine nichtkonstante beschränkte Lösung von $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} z_j = z_i$, $i \neq 0$ existiert genau dann, wenn die y_n beschränkt sind, das heißt wenn $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \nu_i} < \infty$ ist.

Zusammengefasst kommt man auf folgende Resultate:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \nu_i} = \infty \Rightarrow \text{rekurrent}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \nu_i} = \infty \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i = \infty \Rightarrow \text{null-rekurrent}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \nu_i} = \infty \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i < \infty \Rightarrow \text{positiv-rekurrent}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \nu_i} < \infty \Rightarrow \text{transient.}$$

4. Beispiel: Das Ehrenfest-Modell

Das Ehrenfest-Modell ist ein Spezialfall der zustandsabhängigen Markoff Ketten. Die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen hier vom Ort, in dem man sich befindet, ab.

Dieses Modell wird meistens als Modell von Molekülen in zwei abgetrennten Kammern vorgestellt, welche durch die durchlässige Trennwand diffundieren. In den zwei Kammern A und B befinden sich insgesamt m Moleküle und als Zustand X_n nimmt man die Anzahl der Moleküle in der Kammer A zum Zeitpunkt n an. Daher hat das Modell als Wertebereich die Zustandsmenge $S = \{0, 1, \dots, m\}$.

Wenn $X_n = 0$ ist, dann sind alle Moleküle in der Kammer B und zum Zeitpunkt $n + 1$ wird ein Molekül von der Kammer B in die Kammer A wandern, sodass $X_{n+1} = 1$ folgt. Somit sieht man, dass $p_{01} = 1$ und $p_{0j} = 0$ für $j \neq 1$ ergibt.

Ist andererseits das Verhältnis in den Kammern so, dass $X_n = m$ ist, so sind alle Moleküle in der Kammer A und zum Zeitpunkt $n + 1$ wandert ein Molekül von A nach B. Also folgt, dass $X_{n+1} = m - 1$ ergibt. Daher erhält man die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{m,m-1} = 1$ und $p_{mj} = 0$ für $j \neq m - 1$.

Sei nun $X_n = i$ mit $i \notin \{0, m\}$ dann wandert zum Zeitpunkt $n + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{m}$ ein Molekül von der Kammer A in die Kammer B, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{m-i}{m}$ ein Molekül von B in A. Daher sieht man, dass X_{n+1} nur die Werte $i - 1$ und $i + 1$ annehmen kann. Die Übergangswahrscheinlichkeiten lauten dann folgendermaßen:

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{m}, \quad p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{m} \quad \text{und für } j \notin \{i - 1, i + 1\} \text{ gilt } p_{ij} = 0.$$

Das Ehrenfest-Modell kann auch als Irrfahrt mit zwei reflektierenden Schranken 0 und m interpretiert werden.

Man wird sehen, dass sich die Markoff Kette, welche die Irrfahrt beschreibt, eher von den Rändern entfernt, als diesen nahe zu kommen.

Wählt man für $i = \frac{m}{2}$ dann befindet man sich in der Mitte des Wertebereiches. Die Übergangswahrscheinlichkeiten für beide Richtungen sind dann gleich groß.

Jetzt wird man zeigen, dass das allgemeine Ehrenfest-Modell positiv-rekurrent ist, da die Zustandsmenge dieser Markoff Kette endlich ist und ein stationärer Vektor existiert.

Berechnet man für das allgemeine Ehrenfest-Modell den stationären Vektor, so gilt:

$$\nu \cdot P = \nu, \text{ wobei}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 1 - \frac{1}{m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & 1 - \frac{2}{m} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine $m + 1 \times m + 1$ -Matrix ist.

Die Gleichungssysteme lauten dann wie folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\nu_1 &= \nu_0 \\ \nu_0 + \frac{2}{m}\nu_2 &= \nu_1 \\ (1 - \frac{1}{m})\nu_1 + \frac{3}{m}\nu_3 &= \nu_2 \\ \vdots & \\ \frac{1}{m}\nu_{m-1} &= \nu_m\end{aligned}$$

Drückt man die Gleichungen nun durch die Variable ν_0 aus, so kann man folgende Struktur erkennen:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= m\nu_0 = \binom{m}{1}\nu_0 \\ \nu_2 &= \frac{m(m-1)}{2}\nu_0 = \binom{m}{2}\nu_0 \\ \nu_3 &= \frac{(m-2)(m-1)m}{6}\nu_0 = \binom{m}{3}\nu_0 \\ \vdots & \\ \nu_j &= \binom{m}{j}\nu_0\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition eines stationären Vektors gilt ja $\sum_{j \in S} \nu_j = 1$.

Dies führt dann zu

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^m \nu_j &= 1 = \nu_0 \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}, \text{ und daraus kann man } \nu_0 \text{ nun berechnen:} \\ \nu_0 &= \frac{1}{\sum_{j=0}^m \binom{m}{j}} = \frac{1}{2^m}\end{aligned}$$

Somit ist der stationäre Vektor durch

$$\nu_j = \binom{m}{j} \frac{1}{2^m} \text{ gegeben.}$$

Für ein spezielles Ehrenfest-Modell mit den 5 Zuständen 0 bis 4 ist die Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, und der stationäre Vektor lautet dann

$$\nu_j = \binom{4}{j} \frac{1}{2^4} \Rightarrow \nu = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{6}{16}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right).$$

Daran kann man nun gut erkennen, dass sich die Markoff Kette eher von den Rändern wegbewegt, als denen nahe zu kommen.

Kapitel 5

Warteschlangentheorie

5.1 Einführung über Warteschlangen in diskreter Zeit

Personen, die beispielsweise vor den Kassen von Supermärkten, an den Schaltern von Banken, in der Praxis eines Arztes, etc. warten, bis sie bedient werden, bilden eine Warteschlange. Aber auch Programme, die auf die Bearbeitung durch einen Computer warten, Maschinen, die auf ihre Reparatur warten, uvm. stellen ein Warteschlangensystem dar. Man spricht von Forderungen, die an einem Schalter (Bedienungssystem) eintreffen und dort entweder sofort bedient werden, oder warten müssen, bis sie bedient werden.

Die Zeit zwischen dem Eintreffen von zwei Forderungen nennt man die Zwischenankunftszeiten. Diese Zeiten sind unabhängige Zufallsvariablen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$, die alle dieselbe Verteilung besitzen. Zusätzlich gibt es noch die Bedienzeiten $B_1, B_2, B_3, \dots$, die auch als unabhängige Zufallsvariablen aufgefasst werden und identisch verteilt sind. Sie sind auch unabhängig von den Zwischenankunftszeiten.

Die Verteilungsfunktion der Ankunftszeiten sei: $U(t) = P(Z_n \leq t)$ und der Erwartungswert wird durch $a := E(Z_n) = \int_0^\infty t dU(t) < \infty$ gegeben.

Die Verteilungsfunktion der Bedienzeiten sei: $V(t) = P(B_n \leq t)$ mit dem Erwartungswert $b := E(B_n) = \int_0^\infty t dV(t) < \infty$.

Zwei weitere wichtige Kriterien zur vollständigen Bestimmung einer Warteschlange sind die folgenden:

- 1. die Anzahl der Schalter/Programme*
- 2. die Dimension des Warteraumes (dieser kann endlich oder unendlich groß sein).*

Man kann also ein Warteschlangenmodell mit unterschiedlichen Bezeichnungen festlegen, in dem man die Notation von Kendall (1953) benutzt. Dann wird eine Warteschlange durch 4 Symbole $U|V|s|w|$ beschrieben, die folgende Bedeutungen haben:

U: *ist die Verteilungsfunktion der Zwischenankunftszeiten. Diese kann die Exponentialverteilung (M), die deterministische Verteilung (D), die Erlangverteilung der Ordnung k*

(E_k) , oder die allgemeine Verteilung (GI) haben.

V: ist die Verteilungsfunktion der Bedienzeiten. Diese kann wieder die Verteilungen E , D , E_k oder GI annehmen (wie U).

s: gibt die Anzahl der parallelen Schalter an. Es kann 1, 2, 3, ... bis ∞ -viele Schalter geben.

w: gibt die Anzahl der Warteplätze im System an; wieder läuft die Anzahl von 1, 2, 3, ..., bis ∞ .

Das Grundmodell hat die Gestalt: $GI|GI|1|\infty|$. Das heißt, dass beide Verteilungen allgemein zu wählen sind, es einen Schalter und unendlich viele Warteplätze gibt.

Bei einer Vielzahl an Warteschlangenmodellen gilt die Annahme eines poissonverteilten Forderungseinganges als statistisch gesichert.

Sei $N(t)$ die Anzahl der Ankünfte bis zum Zeitpunkt t , $t \geq 0$. Dann besitzt hier $N(t)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Die Verteilungsfunktion $U(t)$ der Zufallsvariablen Z_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$ erhält man aus

$$\begin{aligned} P(Z_n \geq t) &= P(\{\text{keine Ankunft im Intervall } Z_{n-1}^*, Z_{n-1}^* + t\}) = \\ &= P(N(Z_{n-1}^* + t - Z_{n-1}^*) = 0) = \\ &= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \text{ wobei } Z_n^* = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n, Z_0^* = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

$$\text{Daher gilt: } U(t) = P(Z_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dieses Modell wird nun im nächsten Abschnitt näher betrachtet:

5.2 Beispiele von Warteschlangensystemen

5.2.1 Das Warteschlangensystem $M|GI|1|\infty|$

Die Familie $\{X(t) : t \in I = [0, \infty]\}$ bildet einen Warteschlangenprozess in stetiger Zeit. Um den Prozess in diskreter Zeit zu beschreiben wird er sozusagen eingebettet. Diese Einbettung kann man durch $X_0 = X(0+)$ und $X_n = X(\tau_n + 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ vornehmen. X_n gibt anschaulich die Länge der Warteschlange unmittelbar nach dem Abgang der n -ten Forderung an. Der Zustand X_n gibt also die Anzahl der Personen an, die in der Warteschlange unmittelbar nach der n -ten Abfertigung stehen. Die Familie $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ ist also ein Warteschlangenprozess in diskreter Zeit.

Sei Q_n die Anzahl der Forderungen, die während der Bedienzeit des n -ten Kunden neu in das System eintreffen. Die Q_n sind unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_j = P(Q_n = j) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} dV(t)$. Dies erhält man, wenn man den Satz über die totale Wahrscheinlichkeit anwendet.

(siehe P. Langrock/W. Jahn)

Der Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ besteht aus den möglichen Warteschlangenlängen. Ist $X_{n-1} > 0$, dann folgt $X_n = X_{n-1} + Q_n - 1$. Ist $X_{n-1} = 0$, dann folgt $X_n = X_{n-1} + Q_n = Q_n$, da ja in diesem Fall keine Person bedient wird. Daraus kann man erkennen, dass es sich hier wieder um eine Markoff Kette handeln muss, da X_n von X_{n-1} nicht aber von X_k , $k < n-1$ abhängt.

Es gilt auch: $P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(Q_n = j - i + 1) = q_{j-i+1}$ für $i \geq 1, j \geq 0$, und $P(X_n = j | X_{n-1} = 0) = P(Q_n = j) = q_j$ für alle $j \geq 0$, $i = 0$.

Daraus kann man die p_{ij} für $j \geq i-1$ ablesen. Für $j < i-1$ gilt $p_{ij} = 0$.

Die $S \times S$ -Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten sieht dann folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots & \dots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \dots & \dots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q_0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Man kommt jetzt zu der Frage, ob dieses Warteschlangenmodell rekurrent oder transient ist.

Dafür muss man vorerst eine erzeugende Funktion der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(n)}$ einführen:

Diese n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten stellen in diesem Warteschlangensystem die Wahrscheinlichkeiten dafür dar, dass nach der n -ten Forderung die Länge der Warteschlange j ist, unter der Voraussetzung, dass am Anfang i Forderungen im System waren.

Es gilt nach der Chapman-Kolmogorow-Gleichung 1.1., dass

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = p_{i0}^{(n)} q_j + \sum_{k=1}^{j+1} p_{ik}^{(n)} q_{j-k+1}.$$

Diese Gleichung multipliziert man mit z^j ($|z| \leq 1$) und summiert sie über alle j von 0 bis ∞ .

Setzt man jetzt noch $P_{i,n}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^j$ und $S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$, dann folgt:

$$\begin{aligned} P_{i,n+1}(z) &= p_{i0}^{(n)} S(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j+1} p_{ik}^{(n)} q_{j-k+1} \right) z^j = \\ &= p_{i0}^{(n)} S(z) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}^{(n)} z^k \sum_{j=k-1}^{\infty} q_{j-k+1} z^{j-k} = \\ &= p_{i0}^{(n)} S(z) + z^{-1} S(z) [P_{i,n}(z) - p_{i0}^{(n)}] = \\ &= z^{-1} S(z) P_{i,n}(z) - z^{-1} S(z) (1 - z) p_{i0}^{(n)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird noch mit ω^{n+1} ($|\omega| \leq 1$) multipliziert und über n von 0 bis ∞ summiert.

Setzt man $P_i(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,n}(z) \omega^n$, so erhält man

$$P_i(\omega, z) - P_{i,0}(z) = \omega z^{-1} S(z) P_i(\omega, z) - z^{-1} S(z) (1 - z) \sum_{n=0}^{\infty} p_{i0}^{(n)} \omega^n.$$

Es ist $P_{i,0}(z) = z^i$ und eingesetzt ergibt das die Funktion:

$$P_i(\omega, z) = \frac{z^{i+1} - \omega S(z)(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} p_{i0}^{(n)} \omega^n}{z - \omega S(z)} \quad |\omega| \leq 1 \quad |z| \leq 1 \quad (5.1)$$

In dieser Darstellung ist dann nur noch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_{i0}^{(n)} \omega^n$ unbekannt. Diese versucht man also zu berechnen, indem man zuerst die Nullstellen der Funktion

$f_\omega(z) = z - \omega S(z)$ bestimmt.

Da $f_\omega''(z) = -\omega S''(z) < 0$, das bedeutet, dass f_ω konkav ist, $f_\omega(0) = -\omega q_0 < 0$ und $f_\omega(1) = 1 - \omega > 0$ gilt,

besitzt die Funktion $f_\omega(z) = z - \omega S(z)$ für $0 < \omega < 1$ in $z \in (0, 1)$ genau eine Nullstelle $z = \delta(\omega)$.

$\omega \mapsto \delta(\omega)$ ist differenzierbar nach dem Satz über implizite Funktionen.

Somit ist $z = \delta(\omega)$ also eine Nullstelle des Nenners von der rechten Seite der Gleichung (5.1).

$P_i(\omega, z)$ ist für jedes ω mit $0 < \omega < 1$, $z \in (0, 1)$ definiert, so dass

$[\delta(\omega)]^{i+1} - \omega S[\delta(\omega)][1 - \delta(\omega)] \sum_{n=0}^{\infty} p_{i0}^{(n)} \omega^n = 0$ gilt.

Da $\omega S[\delta(\omega)] = \delta(\omega)$ ist folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{i0}^{(n)} \omega^n = \frac{[\delta(\omega)]^i}{1 - \delta(\omega)} \quad \forall i \in S \quad (5.2)$$

ist.

Eingesetzt in die Funktion $P_i(\omega, z)$ erhält man:

$P_i(\omega, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \omega^n z^j = \frac{z^{i+1} [1 - \delta(\omega)] - \omega (1-z) S(z) [\delta(\omega)]^i}{[1 - \delta(\omega)] [z - \omega S(z)]}$ für $z \in (0, 1)$ und $0 < \omega < 1$.

Diese Überlegungen bzw Berechnungen benötigt man um das Verhalten des Nullzustandes näher begutachten zu können. Nach dem Satz von Abel über erzeugende Funktionen erhält man aus der Gleichung (5.2), indem man $i = 0$ setzt und $\omega \rightarrow 1$ laufen lässt folgendes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \frac{1}{1 - \lim_{\omega \rightarrow 1} \delta(\omega)} \quad (5.3)$$

wobei $\lim_{\omega \rightarrow 1} \delta(\omega) = \delta$ und $z = \delta$ die kleinste positive reelle Nullstelle der Gleichung $z - S(z) = 0$ ist.

Der nächste Hilfssatz lässt es zu, dass man die Lage dieser Nullstelle genauer erfassen kann.

Satz 5.1. (Hilfssatz) Die Gleichung $z - S(z) = 0$ besitzt neben $z = 1$ genau dann noch eine weitere Nullstelle z_0 mit $0 < z_0 < 1$, wenn $E(Q_n) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot q_j > 1$ ist. Wenn hingegen nur eine einzige Nullstelle $z = 1$ existiert, dann ist $E(Q_n) \leq 1$.

Beweis: Zunächst wird einmal die Funktion $S'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot q_j \cdot z^{j-1}$ behandelt:

Wegen $S''(z) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) \cdot q_j \cdot z^{j-2} > 0$ ist $S'(z)$ für $z \in [0, 1]$ streng monoton wachsend. Die Funktion $\Delta(z) = z - S(z)$ ist in $[0, 1]$ stetig differenzierbar.

Da $S(1) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j = 1$ ist, gilt $\Delta(1) = 0$.

Wenn nun noch eine weitere Nullstelle $z_0 \in (0, 1)$ von $\Delta(z)$ existiert, so gibt es nach dem Satz von Rolle ein $\xi \in (z_0, 1)$ mit $\Delta'(\xi) = 0$.

Da $S'(z)$ streng monoton wachsend ist, gilt dann:

$$E(Q_n) = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot q_j = S'(1) > S'(\xi) = 1 - \Delta'(\xi) = 1.$$

Ist andererseits $E(Q_n) > 1$, das heißt $S'(1) > 1$, dann folgt, dass $\Delta'(1) = 1 - S'(1) < 0$ gilt. Daher existiert ein $\epsilon > 0$ mit $\Delta(1 - \epsilon) > 0$. Wegen $\Delta(0) = -q_0 < 0$ existiert also im Intervall $(0, 1 - \epsilon)$ eine Nullstelle z_0 der Funktion $\Delta(z)$.

Schlußendlich wendet man die Aussage des Hilfssatzes 5.1. auf (5.3) an.

Es gilt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty \text{ genau dann wenn } E(Q_n) \leq 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty \text{ genau dann wenn } E(Q_n) > 1.$$

Das bedeutet, dass die Markoff Kette, die das Warteschlangenmodell $M|GI|1|_{\infty}$ beschreibt, genau dann nur rekurrente Zustände besitzt, wenn $E(Q_n) = \lambda b \leq 1$ ist. Anderenfalls sind alle Zustände transient und $E(Q_n) > 1$.

Anschaulich sind diese Aussagen für die Warteschlange so zu deuten: Wenn $E(Q_n) > 1$ ist, dann treffen durchschnittlich während einer Bedienphase mehrere Forderungen ein. Daher wächst die Länge der Warteschlange ständig an und man sagt dazu, dass sie ins Unendliche läuft. (Transienz)

Hingegen wenn $E(Q_n) \leq 1$ ist, dann kommt während jeder Bedienphase durchschnittlich höchstens 1 neuer Kunde dazu. Daher ist die Rückkehr der Warteschlange in eine beliebige Anfangslänge sicher. (Rekurrenz)

Positiv-rekurrent oder null-rekurrent?

Eine Methode, um zu überprüfen, ob die Markoff Kette positiv-rekurrent, oder null-rekurrent ist, ist die Verwendung der mittleren erstmaligen Rückkehrzeit $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}$.

Betrachtet man weiterhin den Nullzustand, so verwendet man zur Berechnung von

$\mu_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{00}^{(n)}$ die Rekursionsformel (2.1): $p_{00}^{(n)} = \sum_{k=0}^n p_{00}^{(n-k)} \cdot f_{00}^{(k)} \quad \forall n \geq 1$.

Es wird wieder auf beiden Seiten mit ω^n multipliziert und über $n \in \mathbb{N}$ summiert. Dann gilt:

$F_{00}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{00}^{(n)} \omega^n = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} \omega^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} \omega^n} = \frac{P_{00}(\omega)-1}{P_{00}(\omega)}$ und weil $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} \omega^n = \frac{1}{1-\delta(\omega)}$ ist, folgt $F_{00}(\omega) = \delta(\omega)$.

Die Gleichung $z - \omega S(z) = 0$ wird durch $z = \delta(\omega) = F_{00}(\omega)$ gelöst, womit sich

$F'_{00}(1) = 1 + S'(1)F'_{00}(1)$ bzw

$$\mu_{00} = \begin{cases} [1 - E(Q_n)]^{-1} & \text{für } E(Q_n) < 1 \\ \infty & \text{für } E(Q_n) = 1 \end{cases} \quad \text{ergibt.}$$

Daher ist nun ersichtlich, dass alle Zustände des Warteschlangenprozesses positiv-rekurrent sind, wenn $E(Q_n) < 1$ ist. Andererseits ist die Warteschlange für $E(Q_n) = 1$ null-rekurrent.

Eine andere Methode um zu bestimmen, ob die Warteschlange der Form $M|GI|1|\infty|$ positiv-rekurrent oder null-rekurrent ist, ist folgende:

Man nimmt vorest eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, X_3, \dots$ an, die unabhängig und identisch verteilt sind und die Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Es sei $P(X_i = k) = b_k$, $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ $b_{-1} > 0$ und $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$. Jetzt wählt man Z als den Wert von n , für den S_n das erste Mal negativ ist und setzt $P(Z = k) = \gamma_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Weiters sei $U(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k s^k$. ($\gamma_0 = 0$)

Angenommen $T_n^{(r)} = r + S_n$, wobei r eine positive ganze Zahl ist und $Z^{(r)}$ die Zufallsvariable, die den ersten Wert von n angibt, für den $T_n^{(r)} < 0$ ist.

Da $X_i \geq -1$ ist sieht man, dass $Z^{(r)} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{r+1}$ ist, wobei die Z_i unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit der obigen Verteilung γ_k .

Die erzeugende Funktion von $Z^{(r)}$ ist dann sichtlich $[U(s)]^{r+1}$. $\gamma_m^{(r+1)}$ soll dabei den Koeffizienten von s^m in $U(s)^{r+1}$ darstellen.

Schließlich führt man noch eine letzte Funktion ein:

$$G(s) = \frac{b_{-1}}{s} + b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots$$

Das Ziel ist $U(s)$ in Termen von $G(s)$ zu schreiben. Zu diesem Zweck bildet man die folgenden Relationen:

$$\gamma_1 = b_{-1}, \quad \gamma_k = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \cdot \gamma_{k-1}^{(j+1)} \quad k \geq 2.$$

Die erste Relation folgt wegen $P(X_1 = -1) = b_{-1}$. Für die zweite Relation gilt:

$\{S_n \geq 0 : n = 1, 2, \dots, k-1; S_k = -1\}$ ist die Vereinigung von den disjunkten Ereignissen $\{X_1 = j; X_2 + \dots + X_n + j \geq 0, n = 2, 3, \dots, k-1; X_2 + \dots + X_k + j = -1\}$,

$j = 0, 1, 2, \dots$, wobei ihre Wahrscheinlichkeiten $b_j \gamma_{k-1}^{(j+1)}$ sind, unter der Voraussetzung, dass die X_i unabhängig und identisch verteilt sind. Durch den Additionssatz folgt dann auch das zweite Resultat.

Nun kann man die Funktion $U(s)$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} U(s) &= b_{-1}s + \sum_{n=2}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} b_j \gamma_{n-1}^{(j+1)}) s^n = \\ &= b_{-1}s + s \sum_{j=0}^{\infty} b_j (\sum_{n=2}^{\infty} \gamma_{n-1}^{(j+1)} s^{n-1}) = \\ &= b_{-1}s + s \sum_{j=0}^{\infty} b_j [U(s)]^{j+1} = \\ &= b_{-1}s + sU(s)[G(U(s)) - \frac{b_{-1}}{U(s)}] = \\ &= sU(s)G(U(s)) \text{ für } 0 < s \leq 1. \end{aligned}$$

$U(s)$ ist stetig und streng monoton wachsend wenn $s \in [0, 1]$ und $U(0) = 0$.

Daher gilt für $0 < s \leq 1$, dass $\frac{1}{s} = G(U(s))$ ist.

$$G''(s) = \frac{2b_{-1}}{s^3} + 2b_2 + 6b_3s + 12b_4s^2 + \dots > 0 \text{ für } s > 0.$$

Das heißt, dass $G(s)$ eine konvexe Funktion ist und nach der Definition gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = +\infty \text{ und } G(1) = 1.$$

$G(x) = \frac{1}{s}$ kann höchstens zwei positive Lösungen für $s \in [0, 1]$ haben. Da $\lim_{s \rightarrow 0} U(s) = 0$ und $U(s)$ streng monoton steigend im Intervall $[0, 1]$ ist, sieht man, dass $U(s)$ die kleinere Lösung der beiden sein muss, unter der Voraussetzung, dass zwei Lösungen existieren.

Nun wendet man sich zu den Bedingungen, unter denen $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = 1$ oder < 1 ist. Es entstehen die folgenden zwei Fälle:

1. Fall: Wenn $G'(1) > 0$ ist, dann ist $b_{-1} < \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n$ und man kann erkennen, dass $U(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k < 1$ ist.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{S_n \geq 0 \ \forall n\}$ ist dann strikt positiv.

2. Fall: Wenn $G'(1) \leq 0$ ist, dann ist $b_{-1} \geq \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n$ und daher ist $U(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = 1$. Für $0 < s \leq 1$ ist $G'(U(s))U'(s) = \frac{-1}{s^2}$, sodass $U(s) \rightarrow 1$, wenn $s \rightarrow 1$.

Daraus folgt, wenn $G'(1) < 0$ ist ($b_{-1} > \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n$), dass

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \gamma_n = U'(1) = \frac{-1}{G'(1)} < \infty$$

und wenn $G'(1) = 0$ ist ($b_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n$), dass

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \gamma_n = U'(1) = \frac{-1}{G'(1)} = \infty.$$

Zurück zum Warteschlangenprozess interpretiert man die q 's als $q_k = b_{k-1}$ und die Z_{ij} als die Länge der Zeit, die vom Zustand i ausgehend bis zum ersten Eintritt in den Zustand j verstreicht.

Da $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$ ist, gilt:

$$b_{-1} > \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n \leftrightarrow q_0 > \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_{n+1} \leftrightarrow 1 > \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_n \text{ und gleichermaßen:}$$

$$b_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot b_n \leftrightarrow q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_{n+1} \leftrightarrow 1 = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_n.$$

Deshalb ist

$$E(Z_{i,i-1}) = \theta < \infty \text{ wenn } \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_n < 1 \text{ und}$$

$$E(Z_{i,i-1}) = \theta = \infty \text{ wenn } \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q_n = 1.$$

$Z_{ij} = Z_{i,i-1} + Z_{i-1,i-2} + \dots + Z_{j+1,j}$, $j < i$ gilt, da man immer höchstens um 1 nach links springen kann.

$E(Z_{ij}) = (i - j)\theta$ und $E(Z_{i,0}) = i\theta$.

Jetzt sieht man sich noch die mittlere erstmalige Rückkehrzeit vom Zustand 0 an: Man weiß, dass $f_{00}^{(1)} = p_{00} = q_0$ ist und damit ergibt sich folgende Darstellung für die durchschnittliche Rückkehrzeit:

$$\begin{aligned}\mu_{00} &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f_{00}^{(n)} = \\ &= q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i [E(Z_{i,0}) + 1] = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i E(Z_{i,0}) = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} i\theta q_i = \\ &= 1 + \theta \sum_{i=1}^{\infty} i q_i.\end{aligned}$$

Daher kann man folgern, dass $\mu_{00} < \infty$ ist, wenn $\theta < \infty$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} i q_i < 1$ ist, und $\mu_{00} = \infty$ ist, wenn $\theta = \infty$ bzw. $\sum_{i=0}^{\infty} i q_i = 1$ ist.

Zusammengefasst erhält man also diese Resultate:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n q_n < 1 &\Rightarrow \text{positiv-rekurrent} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n q_n = 1 &\Rightarrow \text{null-rekurrent} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n q_n > 1 &\Rightarrow \text{transient}\end{aligned}$$

Man erhält somit auch mit dieser Methode die einleuchtenden Resultate: Da ja $\sum_{n=0}^{\infty} n q_n$ die mittlere Anzahl der Personen angibt, die während einer Bedienzeit ankommen, ist es in dem Fall wo $\sum_{n=0}^{\infty} n q_n > 1$ ist so, dass im Durchschnitt mehr Personen ankommen, als man bedienen kann. Die Warteschlange wächst dann ins Unendliche. Wenn aber $\sum_{n=0}^{\infty} n q_n < 1$ ist, dann stellt sich nach einem gewissen Zeitraum eine stationäre Verteilung ein.

Das nächste Modell hat eine ähnliche Gestalt:

5.2.2 Das Warteschlangensystem $GI|M|1|\infty|$

Die Zwischenankunftszeiten sind hier allgemein verteilt, die Verteilungsfunktion der Bedienzeiten ist eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\mu > 0$:

$$V(t) = P(B_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}.$$

Bei diesem Beispiel macht man eine etwas andere Einbettung, und zwar:

$X_0 = X(0-)$ und $X_n = X(t_n - 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. X_n bezeichnet jetzt die Länge der Warteschlange unmittelbar vor dem Eintreffen des $n+1$ -ten Kunden. Q_n bezeichnet die Anzahl der Forderungen, die während des Intervalles $[Z_n, Z_{n+1}]$ das System verlassen. Diese Zufallsvariablen $Q_1, Q_2, \dots$ haben wieder, wie im Beispiel zuvor, eine identische Verteilung und sind alle unabhängig voneinander. Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung ist:

$$q_j = P(Q_n = j) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^j}{j!} dU(t), \forall j = 1, 2, \dots$$

Es gilt: $X_n = X_{n-1} + 1 - Q_n$, falls $X_{n-1} + 1 > Q_n$, und $X_n = 0$, falls $X_{n-1} + 1 \leq Q_n$.

Zusammengefasst kann man das so darstellen: $X_n = [X_{n-1} + 1 - Q_n]^+$,

wobei $[g]^+ = \max(g, 0)$, $\forall g \in \mathbb{R}$.

Das selbe Verfahren wie für das Modell $M|GI|1|\infty|$ wendet man hier an, um die Übergangswahrscheinlichkeiten berechnen zu können.

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P([X_{n-1} + 1 - Q_n]^+ = j | X_{n-1} = i) = \\ &= \begin{cases} P(Q_n \geq i + 1) & \text{wenn } j = 0, i \geq 0 \\ P(Q_n = i + 1 - j) & \text{wenn } j \geq 1, i \geq 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^i q_k & \text{wenn } j = 0, i \geq 0 \\ q_{i+1-j} & \text{wenn } j \geq 1, i \geq j - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Für $i < j - 1$ ist $p_{ij} = 0$.

Daraus kann man sich nun wieder die $S \times S$ -Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 - q_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - q_0 - q_1 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 - q_0 - q_1 - q_2 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Um herauszufinden, ob dieses Warteschlangenmodell rekurrent oder transient ist, werden im nächsten Abschnitt die Sätze über Rekurrenz und Transienz vom 2. Kapitel herangezogen.

5.3 Anwendungen der Sätze über Rekurrenz und Transienz auf Warteschlangenmodelle

Satz 5.2. In dem Warteschlangenmodell der Form $GI|M|1|\infty|$ sind alle Zustände transient, wenn $E(Q_n) = a\mu < 1$ ist.

Beweis: Um diese Aussage beweisen zu können, verwendet man das Transienzkriterium 2.14.

Es sei $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ eine Lösung des Gleichungssystems, dann gilt

$$u_i = \sum_{j=1}^{i+1} q_{i+1-j} u_j \quad \forall i \in S \setminus \{0\} \quad (5.4)$$

Man erhält also diese Gleichungssysteme:

$$u_1 = q_1 u_1 + q_0 u_2,$$

$$u_2 = q_2 u_1 + q_1 u_2 + q_0 u_3,$$

$$u_3 = q_3 u_1 + q_2 u_2 + q_1 u_3 + q_0 u_4,$$

$\vdots$

Ausgehend von der ersten Gleichung, kann man dann dieses System rekursiv lösen, wobei u_1 als Parameter aufgefasst werden muss.

Wenn $u_1 = 0$ ist, dann erhält man die triviale Lösung, die aber uninteressant ist. Daher setzt man $u_1 > 0$, woraus dann auch $u_i > 0 \quad \forall i \in S \setminus \{0\}$ folgt.

($\Rightarrow$) Vorausgesetzt die Markoff Kette sei transient, dann folgt, dass $E(Q_n) < 1$ ist.

Nach dem Transienzkriterium existiert eine beschränkte Lösung u von (5.4), sodass man folgende erzeugende Funktion $U(z) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j z^j$ einführen kann, die für $|z| < 1$ holomorph ist.

Sei $S(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$ ($|z| \leq 1$), so gilt:

$$zU(z) = U(z)S(z) - q_0 u_1 z \text{ bzw}$$

$$U(z)[S(z) - z] = q_0 u_1 z \quad (|z| < 1).$$

Wenn $E(Q_n) \geq 1$ wäre, so hätte $S(z) - z$ eine Nullstelle $z = z_0$ mit $0 < z_0 < 1$. (siehe Hilfssatz 5.1.)

Dann wäre aber wegen $|U(z_0)| < \infty$ $0 = U(z_0)[S(z_0) - z_0] = q_0 u_1 z_0 > 0$. Dies ergibt einen Widerspruch und daher kann man folgern, dass $E(Q_n) < 1$ sein muss.

($\Leftarrow$) Vorausgesetzt $E(Q_n) < 1$, dann sind die Zustände der Markoff Kette alle transient.

Der Hilfssatz 5.1. gibt unter dieser Voraussetzung an, dass $S(z) - z \neq 0$ für $|z| < 1$ ist.

Daher ist die Funktion $B(z) = \frac{1-z}{S(z)-z}$ im Einheitskreis holomorph. Sie lässt sich deshalb in eine Potenzreihe entwickeln: $B(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $|z| < 1$.

Die Regel von l'Hopital führt zu der folgenden Gleichung:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z}{S(z)-z} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{S'(z)-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1-S'(z)}$$

Da alle Koeffizienten nicht negativ sind ergibt sich schließlich nach dem Stetigkeitssatz für Potenzreihen die folgende Aussage: $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \frac{1}{1-E(Q_n)} < \infty$.

Nun wählt man $u_1 > 0$ und setzt $u_j = q_0 u_1 \sum_{k=0}^{j-1} b_k \quad \forall j \geq 2$. Dann ist der Vektor $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ wegen $u_1 > 0$ nicht trivial und weil $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$ gilt, ist er auch beschränkt.

Es fehlt noch der Beweis, dass u auch eine Lösung von (5.4) ist:

Verwendet man wieder die Reihe $U(z) = q_0 u_1 \sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j-1} b_k) z^j = q_0 u_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} b_k z^j = q_0 u_1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{q_0 u_1 z B(z)}{1-z}$.

Setzt man noch $B(z) = \frac{1-z}{S(z)-z}$ ein, dann erhält man $U(z) = \frac{q_0 u_1 z}{S(z)-z}$.

Führt man jetzt den Koeffizientenvergleich durch, so sieht man, dass $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$ eine nicht triviale und beschränkte Lösung des Gleichungssystems (5.4) ist. Somit sind daher nach dem Transienzkriterium alle Zustände der Markoff Kette, die einen Warteschlangenprozess der Gestalt $GI|M|1|_{\infty}$ angeben, transient.

Satz 5.3. In dem Warteschlangenmodell der Form $GI|M|1|_{\infty}$ sind alle Zustände positiv-rekurrent, wenn $E(Q_n) = a\mu > 1$ ist.

Beweis: Man geht hier vom Gleichungssystem $x_j = \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ aus, welches man aus dem ersten Punkt vom Satz 2.18. entnommen hat.

Setzt man die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Warteschlangenprozess ein, dann ergibt sich die folgende Gleichung:

$$u_0 = \sum_{i=0}^{\infty} u_i [1 - \sum_{k=0}^i q_k] \text{ bzw}$$

$$u_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} u_i q_{i+1-j} \quad \forall j \geq 1.$$

Weiters wählt man als gesuchte Lösung $u_j = c \cdot z^j$ mit $0 < z < 1$ und $c \neq 0$ als Konstante.

Setzt man diese Lösung nun in die Gleichung ein, dann gilt

$$u_j = c \cdot z^j = c \sum_{i=j-1}^{\infty} z^i q_{i+1-j} = c z^{j-1} \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \text{ und dies führt zu } z = S(z).$$

Also gibt es für die Annahme $u_j = c \cdot z^j$ genau dann eine Lösung ($\neq 0$) von

$$u_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} u_i q_{i+1-j}, \text{ wenn } S(z) = z \text{ in } 0 < z < 1 \text{ eine Lösung besitzt.}$$

Man weiß, nach dem Hilfssatz 5.1., dass diese Gleichung genau dann eine Nullstelle $z_0 \in (0, 1)$ hat, wenn $S'(1) = E(Q_n) = a\mu > 1$ ist.

Daher erfüllt $(u_j)_{j \in S}$ mit $u_j = c \cdot z_0^j \quad \forall j \geq 0$ dann auch die Gleichung $u_j = \sum_{i=0}^{\infty} u_i [1 - \sum_{k=0}^i q_k]$, wie man folgendermaßen zeigt:

$$u_j = \sum_{i=0}^{\infty} u_i [1 - \sum_{k=0}^i q_k] = c \sum_{i=0}^{\infty} [1 - \sum_{k=0}^i q_k] z_0^i = c [\sum_{i=0}^{\infty} z_0^i - \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^i q_k) z_0^i] = c [\frac{1}{1-z_0} - \frac{S(z_0)}{1-z_0}] = c = u_0.$$

Nun sieht man, dass für $E(Q_n) = a\mu > 1$ $u_j = c \cdot z_0^j \quad \forall j \in S$ eine von der Nulllösung verschiedene Lösung des Gleichungssystems $u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ ist, wobei $u = \sum_{j=0}^{\infty} |u_j| = c \sum_{j=0}^{\infty} z_0^j = \frac{c}{1-z_0}$ ist.

Schließlich ist also die irreduzible Markoff Kette, die das Warteschlangensystem $GI|M|1|_{\infty}$ angibt, positiv-rekurrent, wenn $E(Q_n) = a\mu > 1$ gilt.

Setzt man jetzt $E(Q_n) = a\mu \leq 1$ voraus, dann ist $u_j \equiv 1 \quad \forall j \in S$ eine nicht negative Lösung des Ungleichungssystems $x_j \geq \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S$ aus Punkt zwei von Satz 2.18.

Sei $j = 0$, dann folgt

$\sum_{i=0}^{\infty} u_i p_{i0} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i0} = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - \sum_{k=0}^i q_k] = \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k) = E(Q_n) \leq 1 = u_0$,
während für $j \geq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_i p_{ij} = \sum_{i=j-1}^{\infty} q_{i-j+1} = \sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1 = u_j.$$

Da aber $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = \sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty$ ist, ist somit die Markoff Kette nicht positiv-rekurrent, da nach dem Satz 2.18. im Falle der positiven Rekurrenz für alle nicht negativen Lösungen $(u_j)_{j \in S}$ des Ungleichungssystems $x_j \geq \sum_{i \in S} x_i p_{ij} \quad \forall j \in S \quad \sum_{j \in S} u_j < \infty$ gelten muss. $E(Q_n) = a\mu > 1$ ist daher auch eine notwendige Bedingung für die positive Rekurrenz des Warteschlangenmodells.

Um noch schneller eine Antwort auf die Frage zu bekommen, ob der Warteschlangenprozess $GI|M|1|_{\infty}$ positiv-rekurrent oder null-rekurrent ist, kann man die Folgerung 2.17. aus dem Satz von Foster verwenden. Man kommt dann zu folgenden Erkenntnissen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} = \sum_{j=1}^{i+1} j q_{i+1-j} < \infty, \quad \forall i \in S.$$

$$\text{Weiters gilt } b_i = \sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} - i = i(\sum_{j=0}^i q_j - 1) + \sum_{j=0}^i q_j - \sum_{j=1}^i j q_j.$$

Dadurch, dass $0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} i(1 - \sum_{j=0}^i q_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} i \sum_{j=i+1}^{\infty} q_j \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} j q_j = 0$ ist, folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 1 - E(Q_n).$$

Die zweite Voraussetzung der Folgerung ist genau dann erfüllt, wenn $E(Q_n) = a\mu > 1$ ist. Das heißt, dass der Warteschlangenprozess unter der Bedingung $E(Q_n) > 1$ positiv-rekurrent ist.

Auch für den Warteschlangenprozess mit Bedienungsmodell $M|GI|1|_{\infty}|$ kann man die Berechnungen mit Hilfe der Sätze vom 2. Kapitel rascher durchführen:

Satz 5.4. In dem Warteschlangenmodell der Form $M|GI|1|_{\infty}|$ sind alle Zustände positiv-rekurrent, wenn $E(Q_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q_k = \lambda b < 1$ ist.

Beweis: Durch das im Abschnitt 2.3 gemachte Rekurrenz Kriterium 2.13., kann man leicht nachweisen, dass unter der Voraussetzung $E(Q_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q_k = \lambda b \leq 1$, für ein Wartesystem der Form $M|GI|1|_{\infty}|$ alle Zustände rekurrent sind.

Man zeigt, dass $u = (0, 1, 2, \dots)$ eine Lösung des Ungleichungssystems $x_i \geq \sum_{j \in S} p_{ij} \cdot x_j$ ist. $\forall i \in S \setminus \{0\}$ folgt $\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = \sum_{j=i-1}^{\infty} j \cdot q_{j-i+1} = \sum_{j=i-1}^{\infty} q_{j-i+1} (j - i + 1) + i - 1 = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot q_j + i - 1 = E(Q_n) + i - 1 \leq i = u_i$;

was die Rekurrenzaussage bestätigt.

Verwendet man jetzt wieder die Folgerung 2.17. aus dem Satz von Foster, dann folgt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} = \begin{cases} E(Q_n) & \text{für } i = 0 \\ E(Q_n) + i - 1 & \text{für } i \geq 1 \end{cases}.$$

$E(Q_n) = \lambda b < \infty$ und daher gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} < \infty, \forall i \in S.$$

Weiters ergibt sich für alle $i \geq 1$: $b_i = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} - i = E(Q_n) - 1$, woraus dann folgt, dass $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = E(Q_n) - 1$ ist.

Man sieht, dass die rechtsstehende Differenz genau dann negativ wird, wenn $E(Q_n) = \lambda b < 1$ gilt. Daher ist unter dieser Bedingung die Markoff Kette positiv-rekurrent.

Die Bedingung $E(Q_n) < 1$ ist für die positive Rekurrenz der Markoff Kette auch notwendig, was man durch den zweiten Punkt der Folgerung nachweisen kann.

Kapitel 6

Markoff Ketten in der Biologie

In diesem Kapitel werden stochastische Modelle (im Speziellen Markoff Ketten) der mathematischen Populationsgenetik behandelt. Ein bekanntes Modell ist das Wright-Fisher-Modell. Das Wissen über die Theorie der Markoff Ketten reicht aus, um dieses Modell genauer behandeln zu können. Die Biomathematik beschäftigt sich mit mathematischen Anwendungen und Methoden in der Biologie. Die mathematische Populationsgenetik ist ein Teilgebiet der Biomathematik und beschäftigt sich hauptsächlich mit der zeitlichen Änderung der relativen Häufigkeit von erblichen Merkmalen innerhalb einer Art. Um dies zu präzisieren benötigt man die mathematischen Modelle, welche im folgenden Abschnitt vorgestellt werden. Für alle folgenden Modelle nimmt man an, dass sich die betrachtete Population zu diskreten Zeitpunkten reproduziert und dass sich die Generationen nicht überlappen.

6.1 Grundlagen der Populationsgenetik

Die Chromosomen, die sich in den Zellkernen befinden, übernehmen eine wichtige Rolle in der Biologie. In ihnen ist das gesamte Erbgut eines Lebewesens gespeichert. Die Anzahl der Chromosomen ist von Art zu Art verschieden. Man unterscheidet die Fälle, bei denen Chromosomen entweder einzeln (haploider Fall - z.B. Bakterien), paarweise (diploider Fall - z.B. Menschen) oder mehrfach (polyploider Fall - z.B. einige Pflanzenarten) auftreten. Im diploiden Fall wird ein bestimmtes Erbmerkmal eines Individuums durch ein Paar von Genen bestimmt, welches an einem Ort des Chromosomenpaares lokalisiert ist. So einen Ort nennt man Genort oder Locus des Erbmerkmals. Es gibt verschiedene Typen von Genen, die an einem gewissen Genort auftreten können, diese heißen Allele. Treten z.B. zwei Allele A_1 und A_2 auf, so gibt es die folgenden möglichen Kombinationen: A_1A_1 , A_1A_2 , A_2A_2 . Diese Kombinationen nennt man dann die Genotypen. (A_1A_2 und A_2A_1 kann man nicht voneinander unterscheiden und daher werden sie als äquivalent aufgefasst). A_1A_1 und A_2A_2 sind die homozygoten Genotypen, A_1A_2 (A_2A_1) sind die he-

terozygoten Genotypen.

Der Begriff Phänotyp wird auch oft verwendet und beschreibt das äußere Erscheinungsbild eines Individuums. Wenn man sich die zwei Genotypen A_1A_1 und A_1A_2 ansieht und diese dasselbe äußere Erscheinungsbild haben, dann nennt man das Allel A_1 dominant und das Allel A_2 rezessiv. Auf diese Art können verschiedene Genotypen ein und denselben Phänotypen bestimmen.

Die Mitose ist die ungeschlechtliche Zellteilung. Dabei entsteht eine Verdoppelung der Chromosomen einer diploiden Mutterzelle. Das Endprodukt sind zwei diploide Tochterzellen, die hinsichtlich ihrer Erbinformation vollkommen ident zur Mutterzelle sind. Die Mitose tritt bei einfachen Organismen auf und dient der Vervielfältigung der Zellen eines Individuums. Bei dieser Art der Zellteilung kommt es aber zu keiner Änderung des Erbgutes (von Mutation abgesehen).

Anders ist das bei der geschlechtlichen Fortpflanzung, der Meiose. Es kommt hier vorerst auch zu einer Verdoppelung der Chromosomen, die dann aber aufgeteilt werden auf vier haploide Keimzellen, auch Gameten genannt. Bei der Befruchtung kommt es dann zur Verschmelzung einer männlichen und einer weiblichen Keimzelle. Dieses Endprodukt wird befruchtete Eizelle, bzw. auch Zygote, genannt. Sie ist wieder diploid und trägt Teile des Erbgutes vom „Vater“ und Teile von der „Mutter“.

6.2 Das Wright-Fisher-Modell

Hier wird nur das neutrale Wright-Fisher-Modell behandelt. Das bedeutet es tritt weder Mutation noch Selektion auf.

Man betrachtet eine Population von diploiden Individuen der Größe N (konstant), in der Zufallspaarung herrscht. Modelliert wird ein einziger Genort, an dem die Allele A_1 und A_2 vorkommen. Die Gesamtzahl der Gene am betrachteten Genort beträgt $2N$, da die Population diploid ist. Die Generationen sind getrennt und überlappen sich nicht. Es soll ferner keine Unterscheidung der Geschlechter geben und es sollten auch keinerlei selektive Unterschiede bestehen, das heißt die Genotypen sollen hinsichtlich der Fortpflanzungs- und Überlebensfähigkeit gleichwertig sein. Auch Mutation wird ausgeschlossen.

Widmet man sich nun der Häufigkeiten des Allels A_1 , so bezeichnet man diese zum Zeitpunkt n mit der Zufallsvariable X_n , welche die Werte $0, 1, 2, \dots, 2N$ annehmen kann.

Die Gene in der $n + 1$ -ten Generation werden in diesem Modell durch „Ziehen mit Zurücklegen“ aus jener der Generation n gezogen. Daher erhält man für X_{n+1} eine $2N$ - p_n -binomialverteilte Zufallsvariable, wobei p_n die relative Häufigkeit von A_1 zur Zeit n ist. Somit ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij} = \binom{2N}{j} \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}, \quad i, j = 0, 1, \dots, 2N.$$

Das Wright-Fisher-Modell führt also auf eine homogene Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \{0, 1, \dots, 2N\}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$. Diese Markoff Kette wird durch die Übergangsmatrix P und die Anfangsbedingung X_0 eindeutig festgelegt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in der $n + 1$ -ten Generation genau j Allele des Typs A_1 anzutreffen sind ergibt sich folgendermaßen: $P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) \cdot p_{ij}$. Dies ist die Summe der Möglichkeiten nach j zu gelangen.

Durch diese Rekurrenzrelation kann man jetzt bei bekannter Anzahl des Allels A_1 in der 0-ten Generation, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $X_1, X_2, \dots$ schrittweise berechnen.

Aufgrund der Beziehungen $p_{00} = p_{2N,2N} = 1$ und $p_{ij} > 0$ für $i \in S \setminus \{0, 2N\}$, $j \in S$ zerfällt der Zustandsraum S in drei Äquivalenzklassen $C_1 = \{0\}$, $T = \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$ und $C_2 = \{2N\}$. Da $p_{00} = 1$ ist, kann der 0-Zustand, sobald er einmal angenommen worden ist, nie wieder verlassen werden. Man nennt die Zustände 0 und $2N$, wie schon bekannt, absorbierende Zustände. Nun betrachtet man den Zustand 1 aus der Klasse T . Man weiß, dass $p_{10} > 0$ und $p_{00} = 1$ ist, deshalb kann der Prozess bei Start im Zustand 1 nur mit der Wahrscheinlichkeit $f_{11}^* < 1$ in den Zustand 1 zurückkehren. Somit ist der Zustand 1 transient, wodurch auch die gesamte Klasse T transient ist.

Da hier sichtlich eine homogene Markoff Kette mit endlichem Zustandsraum S vorliegt, kommt es zur Absorption in eine der beiden rekurrenten Klassen C_1 oder C_2 . Anschaulich bedeutet das, dass eines der beiden Allele A_1 oder A_2 letztendlich ausstirbt, unabhängig vom Anfangszustand. Das heißt schließlich, dass nach einer gewissen Anlaufzeit entweder alle Individuen den Genotypen A_1A_1 oder den Genotypen A_2A_2 besitzen. Die homozygoten Genotypen setzen sich also durch. Dies wird in den nachfolgenden Berechnungen auch noch bewiesen werden.

Der Erwartungswert von X_n :

Durch die Berechnung des Erwartungswertes möchte man feststellen wie sich die Zusammensetzung des Genortes zeitlich verhält.

$$E(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{2N} j P(X_{n+1} = j) = \sum_{j=0}^{2N} j \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) p_{ij} = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) \sum_{j=0}^{2N} j p_{ij} = \sum_{i=0}^{2N} i P(X_n = i), \text{ da}$$

X_{n+1} einer Binomialverteilung mit den Parametern $2N$ und $\frac{i}{2N}$ folgt und deshalb

$$\sum_{j=0}^{2N} j \cdot p_{ij} = 2N \frac{i}{2N} = i \text{ ist.}$$

Somit ist daher $E(X_{n+1}) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) \cdot i = E(X_n)$, $\forall n \geq 0$.

Das bedeutet, dass die Anzahl der Allele im Mittel gleich bleibt.

Die Varianz von X_n :

Analog zur obigen Rechnung ergibt sich

$$E(X_{n+1}^2) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) \sum_{j=0}^{2N} j^2 \cdot p_{ij}.$$

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable Z mit Parametern n und p gilt:

$$E(Z^2) = \sigma^2(Z) + (E(Z))^2 = np + p^2(n^2 - n) \text{ und deshalb folgt:}$$

$$E(X_{n+1}^2) = \sum_{i=0}^{2N} P(X_n = i) [i + i^2(1 - \frac{1}{2N})].$$

Schließlich ergibt sich

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_0) + (1 - \frac{1}{2N})E(X_n^2).$$

Sei $u_n = E(X_n^2)$, dann folgt die Gleichung $u_{n+1} = b + au_n$, wobei $b = E(X_0)$ und $a = 1 - \frac{1}{2N}$ ist.

$$u_n = b(1 + a + \dots + a^{n-1}) + a^n u_0 = b \frac{1-a^n}{1-a} + a^n u_0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{b}{1-a}, \text{ da } 0 < a < 1 \text{ ist.}$$

Somit erhält man $E(X_n^2) \rightarrow 2N \cdot E(X_0)$ wenn $n \rightarrow \infty$ strebt.

$$\text{Also ist } \sigma^2(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [2N - E(X_0)]E(X_0).$$

Die Varianz strebt gegen einen Grenzwert. Dieser ist maximal, wenn der Erwartungswert $E(X_0) = N$ ist und er verschwindet, wenn $E(X_0) = 0$ bzw $E(X_0) = 2N$ ist.

Man sieht nun noch einmal, dass diese betrachtete Markoff Kette absorbierende Ränder besitzt, deshalb ist auch im Falle des Startwertes $X_0 = 0$ und $X_0 = 2N$ die Varianz $\sigma^2(X_n) = 0$. Das Maximum der Varianz für $X_0 = N$ kann man so deuten, dass für diesen Anfangswert schließlich die eine Hälfte der Wege am „oberen“ und die andere Hälfte am „unteren“ Rand absorbiert wurde.

Die Absorptionswahrscheinlichkeiten:

Man beschäftigt sich hierbei mit dem Aussterben eines der Allele A_1 oder A_2 . Dazu berechnet man die Wahrscheinlichkeit ϑ_n , die angibt ob ein zufällig aus der n -ten Generation ausgewähltes Individuum heterozygot ist. Die Wahrscheinlichkeit durch zweimaliges Ziehen ein heterozygoten Genpaar (A_1A_2 bzw A_2A_1) zu ziehen, unter der Voraussetzung, dass im Genort Allele des Types A_1 sind, ist

$$\frac{i}{2N}(1 - \frac{i-1}{2N-1}) + (1 - \frac{i}{2N})(\frac{i}{2N-1}) = \frac{i(2N-i)}{N(2N-1)}.$$

Summiert man nun über alle möglichen Zustände des Systems zur Zeit n , dann erhält

$$\begin{aligned} \vartheta_n &= \sum_{i=0}^{2N} \frac{i(2N-i)}{N(2N-1)} P(X_n = i) = \\ &= \frac{2}{2N-1} \sum_{i=0}^{2N} i \cdot P(X_n = i) - \frac{1}{N(2N-1)} \sum_{i=0}^{2N} i^2 P(X_n = i) = \\ &= \frac{2}{2N-1} E(X_n) - \frac{1}{N(2N-1)} E(X_n^2). \end{aligned}$$

Wenn man den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ betrachtet, dann erhält man schlußendlich, durch obige Überlegungen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \frac{2E(X_0)}{(2N-1)} - \frac{2NE(X_0)}{N(2N-1)} = 0 \text{ ist.}$$

Die heterozygoten Individuen sterben letztendlich alle aus, was durch die absorbierenden

Ränder der Markoff Kette bewirkt wird. Sobald sich das System in einem der beiden Randpunkte $X_n = 0$ oder $X_n = 2N$ befindet, ist keine genetische Variabilität mehr vorhanden und daher auch keine Evolution mehr möglich. Das System bleibt also im Zustand 0 bzw $2N$, sobald es diesen einmal besucht hat.

Die Frage nach den Fixierungswahrscheinlichkeiten wird nun so beantwortet:

Man möchte die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Markoff Kette für hinreichend große n im Zustand $2N$ befindet, berechnen.

Dazu verwendet man die Absorbtionswahrscheinlichkeiten $f_{i,C}^*$ vom Abschnitt 3.3.

Es gilt: $f_{0,C_2}^* = 0$ und $f_{2N,C_2}^* = 1$, da ja $C_2 = \{2N\}$ ist.

Sei $f_{i,C_2}^* = \frac{i}{2N}$ eine Lösung der Gleichung $f_{i,C_2}^* = \sum_{k \in S} p_{ik} \cdot f_{k,C_2}^*$. Dies überprüft man folgenderweise:

$$f_{i,C_2}^* = \sum_{k=0}^{2N} p_{ik} \frac{k}{2N} = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N} p_{ik} \cdot k = \frac{1}{2N} 2N \frac{i}{2N} = \frac{i}{2N}.$$

Da auch die Randbedingungen erfüllt sind, erhält man als Wahrscheinlichkeit für die Fixierung von A_1 , wenn der Anfangszustand des Systems i ist, $\frac{i}{2N}$.

6.3 Das Moran-Modell

Hier betrachtet man das neutrale Moran-Modell. Das bedeutet es wird ohne Mutation und Selektion gerechnet.

Dieses Modell ist dem Wright-Fisher-Modell sehr ähnlich, mit dem einen Unterschied, dass das Moran-Modell nur auf haploide Populationen anwendbar ist.

Man nimmt wieder eine Population mit konstanter Größe $2N$ an, die diesmal haploid sein soll. Der betrachtete Genort besitzt 2 verschiedene Allele A_1 und A_2 . Da die Population jetzt haploid ist, treten nur die beiden Genotypen A_1 und A_2 auf.

Die Reproduktion in diesem Modell läuft folgendermaßen ab:

Ein Individuum vermehrt sich immer zu diskreten Zeitpunkten $n \in \mathbb{N}$. Dabei entsteht ein mit dem Individuum identischer Nachkomme. Daraufhin stirbt ein zufällig ausgewähltes Individuum (außer das soeben entstandene Individuum).

Angenommen man habe zu einem gewissen Zeitpunkt i Allele vom Typ A_1 in der Population, dann wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{2N}$ ein Individuum vom Typ A_1 bzw mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{i}{2N}$ ein Individuum vom Typ A_2 für die Reproduktion erwählt. Das sterbende Individuum ist, unabhängig von der vorangegangenen Wahl des sich vermehrenden

Individuums, entweder vom Typ A_1 oder A_2 mit denselben Wahrscheinlichkeiten .

Wenn sich ein Individuum vom Typ A_1 vermehrt und ein anderes Individuum vom Typ A_2 stirbt (die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{i}{2N}(1 - \frac{i}{2N})$), dann nimmt die Anzahl der Allele vom Typ A_1 um Eins zu. Beim Vertauschen der Rollen der beiden Allele sinkt die Anzahl der Allele vom Typ A_1 um Eins. Wenn die beiden Individuen vom selben Typ sind (die Wahrscheinlichkeit beträgt $(\frac{i}{2N})^2 + (1 - \frac{i}{2N})^2$), dann bleibt die Anzahl der Allele unverändert.

Um nun wieder auf eine homogene Markoff Kette schließen zu können beschreibt man die Anzahl der Allele vom Typ A_1 zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ durch Zufallsvariablen X_n . Die so entstehende homogene Markoff Kette $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ hat dann den Zustandsraum $S = \{0, 1, \dots, 2N\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten :

$$p_{i,i-1} = \alpha_i = i(2N - i)/(2N)^2,$$

$$p_{i,i+1} = \beta_i = i(2N - i)/(2N)^2,$$

$$p_{ii} = 1 - \alpha_i - \beta_i = \frac{i^2 + (2N-i)^2}{(2N)^2}.$$

Man sieht also, dass diese Markoff Kette nur Übergänge in die benachbarten Zustände zulässt. So eine Markoff Kette wird auch Geburts- und Todesprozess genannt. Um die Markoff Kette vollständig beschreiben zu können muss noch die Startverteilung, das heißt die Verteilung der Zufallsvariablen X_0 angegeben werden.

Wie beim Wright-Fisher-Modell kann man wieder leicht die verschiedenen Klasseneinteilungen vornehmen. Da $p_{00} = p_{2N,2N} = 1$, und $p_{i,i-1}, p_{i,i+1} > 0$ für $i = 1, 2, \dots, 2N - 1$ gilt, zerfällt der Zustandsraum in die beiden rekurrenten Klassen $C_1 = \{0\}$ und $C_2 = \{2N\}$, sowie in die transiente Klasse $T = \{1, 2, \dots, 2N - 1\}$. Es kommt also auch beim Moran-Modell zur Absorption in eine der beiden rekurrenten Klassen und deshalb zur Fixierung des Allels vom Typ A_1 bzw A_2 .

Die Absorptionswahrscheinlichkeiten:

Seien f_{i,C_2}^* die Wahrscheinlichkeiten der Absorption in den Zustand $2N$ bei Start im Zustand i ($i \in S$). Die Absorptionswahrscheinlichkeiten sind dann durch das Gleichungssystem

$$f_{i,C_2}^* = \sum_{j=0}^{2N} p_{ij} f_{j,C_2}^* \quad (i = 0, 1, \dots, 2N) \text{ und die Randbedingungen}$$

$$f_{0,C_2}^* = 0, f_{2N,C_2}^* = 1 \text{ eindeutig bestimmt.}$$

Da es sich hierbei um einen Geburts- und Todesprozess handelt, dessen Übergangsmatrix eine spezielle Form annimmt, kann man die Lösungen f_{i,C_2}^* des Gleichungssystems Schritt für Schritt berechnen.

Für $i = 1$ ergibt sich die Gleichung $f_{1,C_2}^* = p_{10}f_{0,C_2}^* + p_{11}f_{1,C_2}^* + p_{12}f_{2,C_2}^*$ und weiters ergibt sich $f_{2,C_2}^* = f_{1,C_2}^*(1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1})$. Mittels Induktion zeigt man, dass der Zusammenhang

$f_{k,C_2}^* = (1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}{\beta_1\beta_2\dots\beta_k})f_{1,C_2}^*$ für alle $k = 2, 3, \dots, 2N$ erfüllt ist. Schließlich ist $f_{2N,C_2}^* = 1$ noch zu berücksichtigen und dann erhält man den Zusammenhang $f_{i,C_2}^* = \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \rho_k}{\sum_{k=0}^{2N-1} \rho_k}$ für alle $i = 1, 2, \dots, 2N$, wobei $\rho_0 = 1$ und $\rho_k = \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}{\beta_1\beta_2\dots\beta_k}$ für $k = 1, 2, \dots, 2N - 1$ ist.

In diesem Modell gilt nun aber stets $\alpha_k = \beta_k \quad \forall k = 1, 2, \dots, 2N - 1$, daher folgt der Zusammenhang $f_{i,C_2}^* = \frac{i}{2N}$ für alle $i = 0, 1, \dots, 2N$.

Man erhält nun wieder folgende Resultate:

Wenn in der Ausgangspopulation genau i Individuen des Genotyps A_1 sind, dann kommt es mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{i}{2N}$ zur Fixierung des Allels A_1 und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{i}{2N}$ zur Fixierung des Allels A_2 .

Darum stimmt auch die Absorbtionswahrscheinlichkeit des Moran-Modells mit der Absorbtionswahrscheinlichkeit des Wright-Fisher-Modells überein.

6.4 Ein Modell einer Markoff Kette in der Pflanzenzüchtung

Eine Anwendung von Markoff Ketten gibt es auch in der Pflanzenzüchtung. Es sei ein Pflanzengemenge gegeben, das die Allele A_1 und A_2 besitzt. Durch Zuchttechnik möchte man möglichst reinrassige (homozygote) Ergebnisse erzeugen. Es hat sich in der Botanik eine Methode bewährt, die dieses Ziel erreicht, nämlich die Methode der Selbstbefruchtung. Das ist die Kreuzung der Pflanzen mit sich selbst. Mit Hilfe der Eigenschaften einer Markoff Kette kann man zeigen, warum diese Methode gut funktioniert. Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markoff Kette mit Zustandsraum $S = \{A_1A_1, A_1A_2, A_2A_2\}$ und der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix ist so zu interpretieren:

Eine homozygote Pflanze bleibt homozygot, denn die Zustände A_1A_1 und A_2A_2 sind absorbierende Zustände.

Dagegen sind die Chancen der heterozygoten Genotypen heterozygot zu bleiben $\frac{1}{2}$, und für einen Wechsel zu einem der beiden homozygoten Fälle A_1A_1 oder A_2A_2 beträgt sie je $\frac{1}{4}$. Mit Hilfe der Induktion kann man nun die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass wenn man am Anfang eine heterozygote Pflanze nimmt und mit ihr mehrmals hintereinander die Methode der Selbstkreuzung durchführt, wieder ein heterozygoter Genotyp entsteht:

$$P(X_n = A_1A_2 | X_0 = A_1A_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (P^n)_{A_1A_2}.$$

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt

$$P(X_n = A_1A_2 | X_0 = A_1A_2) = \frac{1}{2^n}.$$

Der Zustand A_1A_2 ist rekurrent, jedoch die mittlere Rückkehrzeit ist unendlich. Es handelt sich hierbei also um einen null-rekurrenten Zustand.

Man sieht nun, dass die Wahrscheinlichkeit bei einem Start mit einer Pflanze des Genotyps A_1A_2 nach sukzessiver Selbstkreuzung wieder einen heterozygoten Genotyp zu erhalten, für $n \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null geht. Die Methode der Selbstbefruchtung ist daher bereits nach wenigen Iterationen eine gute Züchtungsart für reinrassige Pflanzenarten, selbst wenn man mit gemischten Allelen startet.

Literaturverzeichnis:

1. Bürger R.: *The mathematical theory of selection, recombination and mutation.*
In: Mathematical and computational biology. Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto. John Wiley and Sons, 2000
2. Ewens W.J: *Mathematical population genetics. Berlin. Springer, 1979*
3. Ferschl F.: *Markovketten. In: Lecture notes in operations research and mathematical systems, 35. Economics, computer science, information and control. Edited by M. Beckmann, Providence and H.P. Künzi. Berlin, Heidelberg, New York. Springer, 1970*
4. Heller W.D., Lindenberg H., Nuske M., Schriever K.: *Stochastische Systeme. Markoffketten, Stochastische Prozesse, Warteschlangen. Berlin, New York. Walter de Gruyter, 1978*
5. Henze E.: *Räumlich homogene Irrfahrten im Gitter.*
In: Mathematische Annalen 147. Ulm, 1962
6. Karlin S.: *A first course in stochastic processes.*
New York and London. Academic press, 1966
7. Kemeny J.G., Snell J.L.: *Finite markov chains. New York, Heidelberg, Berlin. Springer, 1976*
8. Kleinrock L.: *Queueing systems. Volume 1: Theory. New York, Chichester, Brisbane, Toronto. A Wiley-Interscience publication, 1975*

9. *Langrock P. und Jahn W.: Einführung in die Theorie der Markovschen Ketten und ihre Anwendungen. Mathematische-Naturwissenschaftliche Bibliothek, Band 49. Leipzig. B.G.Teubner, 1979*
10. *<http://www.ci.tuwien.ac.at/~weingessel/FStat2005/markoff.pdf>*
11. *<http://www2.informatik.hu-berlin.de/~hschwarz/studium/MarkowscheKetten.pdf>
Hermann Schwarz: Stochastische Modelle in Naturwissenschaft und Technik.
Thema: Markowsche Ketten. Humboldt-Universität zu Berlin.*
12. *<http://ismi.math.uni-frankfurt.de/kersting/lecturenotes/Stochastik.pdf>
Kersting G.: Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeiten. Eine elementare Einführung in die Stochastik. Frankfurt, 2006*
13. *<http://www.juergen-grieser.de/germanoldcentury/symbmarkov/node21.html>*
14. *<http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Diplome/Trost.pdf>
Sunhild Trost W.J.: Aspekte der mathematischen Modellierung in der Biologie.
Fachbereich 17, Mathematik. Kassel, 2005*

(letzter Zugriff auf die angegebenen Internetadressen: 27.8.2008)

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: *Berger Carina*

Geburtsdatum: *19.08.1983*

Geburtsort: *Wien /Österreich*

Eltern: *Berger Franz, Berger Erika*

Geschwister: *Schwester Berger Kerstin*

Familienstand: *ledig*

Schulbildung:

September 1989 - Juni 1990 Besuch der Vorschule Ettenreichgasse 45

September 1990 - Juni 1994 Besuch der Volksschule Ettenreichgasse 45

September 1994 - Juni 2002 Besuch des Bundesrealgymnasiums Ettenreichgasse 41-43

10. Juni 2002 Reifeprüfung

Studium:

*Oktober 2002 - Oktober 2008 Diplomstudium Mathematik
an der Universität Wien*