

# MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Der Satz von Abel-Ruffini als Übergang von der Schul- zur  
Fachmathematik

verfasst von | submitted by  
Miriam Haller BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree  
programme code as it appears on the  
student record sheet:

UA 199 511 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree  
programme as it appears on the student  
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach  
Geschichte und Politische Bildung Unterrichtsfach  
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Harald Grobner Privatdoz.

## Abstract

Der Abel–Ruffini-Satz markiert einen zentralen Wendepunkt in der Geschichte der Algebra, da er zeigt, dass allgemeine polynomiale Gleichungen fünften und höheren Grades nicht durch Radikale auflösbar sind. Im ersten Teil dieser Arbeit wird ein ausführlicher Beweis dieses Satzes skizziert, der die zugrunde liegenden algebraischen Konzepte systematisch aufarbeitet. Der zweite Teil stellt die mathematischen Lebenswege von Niels Henrik Abel, Paolo Ruffini und Évariste Galois dar und ordnet ihre Beiträge in den historischen Kontext ein.

Im dritten Teil wird der Fokus auf didaktische Aspekte gelegt: Es wird untersucht, wie der Abel–Ruffini-Satz im Wahlpflichtfach Mathematik genutzt werden kann, um zentrale Ideen der modernen Algebra bereits auf Schulniveau erfahrbar zu machen. Im Mittelpunkt stehen dabei ein systematisches Verständnis der Symmetrien von Gleichungslösungen, wie sie bereits bei quadratischen und allgemeinen polynomialen Gleichungen auftreten, sowie die damit verbundene klassische Frage nach der Existenz allgemeiner Lösungsformeln.

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                                                   | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Algebraische Vorbereitungen zum Abel-Ruffini-Satz</b>                            | <b>3</b>  |
| 2.1      | Gruppen, Körper, Ringe                                                              | 3         |
| 2.2      | Symmetrische Gruppen und Funktionen                                                 | 4         |
| 2.3      | Polynome, Einheitswurzeln, ...                                                      | 5         |
| 2.4      | Klassische Methoden und Resultate                                                   | 8         |
| 2.4.1    | Girard                                                                              | 8         |
| 2.4.2    | Lagrange                                                                            | 9         |
| 2.4.3    | Gauss                                                                               | 10        |
| <b>3</b> | <b>Beweis</b>                                                                       | <b>11</b> |
| 3.1      | Radikalerweiterung                                                                  | 11        |
| 3.2      | Abels Satz über natürliche Irrationalitäten                                         | 17        |
| 3.3      | Beweis der Unauflösbarkeit allgemeiner Gleichungen vom Grad größer als 4            | 23        |
| <b>4</b> | <b>Historischer Kontext und Bedeutung</b>                                           | <b>26</b> |
| 4.1      | Leben von Paolo Ruffini (1765-1822)                                                 | 26        |
| 4.1.1    | Ruffinis Biografie                                                                  | 26        |
| 4.1.2    | Ruffinis frühen Entdeckungen zur Permutationstheorie                                | 28        |
| 4.2      | Leben von Niels Henrik Abel (1802-1829)                                             | 30        |
| 4.2.1    | Abels Biografie                                                                     | 30        |
| 4.2.2    | Abels Beweis-Schema für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung            |           |
|          | 5. Grades                                                                           | 31        |
| 4.3      | Évariste Galois (1811-1832)                                                         | 34        |
| <b>5</b> | <b>Abel-Ruffini-Satz in der Schulmathematik</b>                                     | <b>36</b> |
| 5.1      | Von Abel zu Galois: Symmetrien erfahrbar machen                                     | 37        |
| 5.2      | Konzeptionelle Umsetzung im Wahlpflichtfach                                         | 38        |
| 5.3      | Einschub: Wie wird im Regelunterricht auf Lösungsformeln vorbereitet?               | 38        |
| 5.4      | Warum eignet sich der Abel-Ruffini-Satz als Schnittstelle zwischen Schul- und Fach- |           |
|          | mathematik?                                                                         | 39        |
| 5.4.1    | fachdidaktische Sichtweise                                                          | 39        |
| 5.4.2    | fachliche Sichtweise                                                                | 42        |
| 5.5      | Unterrichtsvorschlag zum Abel-Ruffini-Satz: vom algorithmischen zum strukturel-     |           |
|          | len Verständnis                                                                     | 44        |
| 5.5.1    | Einstieg – „Formeln funktionieren (fast) immer...?“                                 | 45        |
| 5.5.2    | Von der Schulalgebra zur modernen Algebra mithilfe von Übungsaufgaben               | 46        |
| 5.5.3    | Exkurs in die Galoistheorie                                                         | 54        |
| 5.5.4    | Historischer Rückblick                                                              | 59        |
| 5.5.5    | Die Grenze der Formeln - ein Beweis des Abel-Ruffini-Satzes auf Schüler*Innen-      |           |
|          | Niveau                                                                              | 60        |
| 5.5.6    | Vom exakten Rechnen zum Näherungsverfahren (Newton-Verfahren)                       | 63        |
| 5.5.7    | Abschluss und Reflexion                                                             | 66        |
| <b>6</b> | <b>Fazit und Ausblick</b>                                                           | <b>68</b> |
|          | <b>Literatur</b>                                                                    | <b>72</b> |
|          | <b>Abbildungen</b>                                                                  | <b>73</b> |

# 1 Einleitung

*Anstatt nach einer Relation zu fragen, von der man nicht weiß, ob sie existiert oder nicht, muss man sich fragen, ob eine solche Relation überhaupt möglich ist.*

- Niels Henrik Abel (1829)<sup>[1]</sup>

Diese methodische Kehrtwende Abels – weg von der Suche nach einer konkreten Rechenvorschrift, hin zur Frage nach deren prinzipieller Existenz – markiert den Wendepunkt einer jahrhundertealten mathematischen Debatte. Historisch betrachtet waren bei der Untersuchung algebraischer Gleichungen zuvor zwei Aspekte von besonderem Interesse: Zum einen, wie viele Lösungen eine solche Gleichung im Allgemeinen besitzt, und zum anderen, ob es eine allgemeingültige Methode gibt, mit der sich diese Lösungen berechnen lassen. Den ersten Punkt konnte Gauß durch seinen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra klären. Für kubische Gleichungen und Gleichungen vierten Grades entwickelten Gerolamo Cardano und sein Schüler Ludovico Ferrari allgemeine Lösungsformeln. Die weitergehende Vermutung von Gauß, dass es ab dem 5. Grad keine entsprechende allgemeine Formel mehr gibt, konnte er jedoch selbst nicht beweisen. Erst Paolo Ruffini und später unabhängig Niels Henrik Abel erbrachten 1824 den Nachweis, dass sich für allgemeine Gleichungen ab dem 5. Grad keine Lösungsformel finden lässt, die ausschließlich auf Grundrechenarten und Wurzelausdrücken basiert. (vgl. [10], V-XIII)

Die Suche nach einer Antwort auf genau diese Fragen führte im 19. Jahrhundert zu einem grundlegenden Perspektivwechsel. Während die klassische Algebra historisch primär die Lehre vom Rechnen mit Variablen und dem Lösen von Gleichungen war, bezeichnet der Begriff heute überwiegend die Theorie abstrakter algebraischer Strukturen wie Gruppen, Ringe und Körper. Der entscheidende Wendepunkt, an dem diese beiden Welten aufeinandertrafen, lässt sich um das Jahr 1832 verorten: Évariste Galois fasste in diesem Jahr seine Überlegungen zur Lösbarkeit von Gleichungen zusammen und legte damit den Grundstein für die moderne Strukturalgebra. (vgl. [42], 110) Vor diesem Hintergrund stellt sich für die Mathematikdidaktik die zentrale Frage: Wie lässt sich der historische und konzeptionelle Übergang von der klassischen Variablenalgebra zur modernen Strukturmathematik für Lernende nachvollziehbar gestalten?

Auch in der Schulmathematik spielen Gleichungen eine zentrale Rolle. Gleichungen und ihren Lösungsverfahren begegnen Schüler\*innen bereits früh im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, wo sie lernen, einfache Terme und Gleichungen aufzustellen, zu interpretieren und zu lösen (vgl. [36]). In der Sekundarstufe II wird dieses Wissen durch die Behandlung linearer und quadratischer Gleichungen und die Untersuchung ihrer Lösungsfälle vertieft (vgl. ebd.). Gleichzeitig gewinnen im schulischen Kontext neben klassischen rechnerischen Methoden zunehmend Computer-Algebra-Systeme (CAS) an Bedeutung, wodurch auch komplexere Gleichungen thematisiert werden können.

Trotz dieser curricularen Verankerung bleibt die Frage nach der allgemeinen Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades im Unterricht weitgehend unberührt. Im schulischen Mathematikunterricht haben sich Lernende wie Lehrende häufig so sehr an rezeptartig anwendbare Lösungsverfahren – wie etwa die Mitternachtsformel – gewöhnt, dass grundlegende Fragestellungen kaum noch thematisiert werden und charakteristische Phänomene unbeachtet bleiben. Dadurch entsteht nicht selten das trügerische Bild, Mathematik bestünde aus dem schematischen Anwenden standardisierter Lösungsverfahren, an deren Ende stets ein eindeutiges Ergebnis steht. Die jahrhundertelange historische Suche nach der Lösung für die Gleichung fünften Grades verdeutlicht jedoch

---

<sup>1</sup>Abel, N. H. (1881). *Sur la résolution algébrique des équations*, in: *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Bd. 2, 217, [1] (Freie Übersetzung aus dem französischen Original: *Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible.*).

exemplarisch das Gegenteil: Mathematik ist ein dynamischer, oft von intellektuellen Sackgassen geprägter Erkenntnisprozess. Lösungen sind nicht immer unmittelbar greifbar, und gerade die Erkenntnis, dass ein gewohnter Weg ins Leere führt, ist oft der entscheidende Auslöser für bahnbrechende neue Denkansätze.

Die Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen eignet sich aus fachlicher Sicht als geeigneter Ausgangspunkt für einen Brückenschlag zwischen Schul- und Hochschulmathematik. Der Abel-Ruffini-Satz gibt eine präzise Antwort auf die klassische Frage nach der Existenz allgemeiner Lösungsformeln durch Radikale und zeigt, dass ein solches Verfahren ab dem fünften Grad im Allgemeinen nicht existiert. Während dieses Resultat zunächst die Unmöglichkeit einer allgemeinen Formel beschreibt, eröffnet die Galoistheorie einen strukturellen Erklärungsrahmen für diese Tatsache. Sie macht sichtbar, dass die Lösbarkeit durch Radikale eng mit den Symmetrien der Nullstellen und der Struktur der zugehörigen algebraischen Erweiterungen verbunden ist. Für den schulischen Kontext bedeutet dies nicht, die Galoistheorie vollständig zu behandeln. Vielmehr können ausgewählte Grundideen – etwa Symmetrie, Vertauschung von Lösungen und die Grenzen allgemeiner Lösungsverfahren – didaktisch reduziert aufgegriffen werden. Auf diese Weise wird der Abel-Ruffini-Satz nicht als isoliertes Endresultat präsentiert, sondern als Anlass, um zentrale Denkweisen der höheren Algebra in elementarisierter Form zugänglich zu machen.

Genau an dieser Stelle setzt die vorliegende Arbeit an. Das Ziel im schulischen Kontext kann und darf es nicht sein, die Begriffe und formalen Resultate der Galoistheorie in ihrer universitären, abstrakten Strenge zu behandeln. Gleichwohl lassen sich die zentralen Fragestellungen auf einem elementaren Niveau erfahrbar machen. Der hier entwickelte Unterrichtsvorschlag verfolgt dieses Ziel nicht durch systematische Theorieentwicklung, sondern durch das Prinzip des produktiven Übens. Indem die Lernenden vertraute Inhalte wie quadratische und biquadratische Gleichungen aus einer neuen Perspektive betrachten, vertiefen sie nicht nur ihre bestehenden Kompetenzen im Rechnen mit Wurzeln, sondern erkennen eine grundlegende Leitperspektive: Lösungen algebraischer Gleichungen sind keine isolierten Zahlen. Sie sind in charakteristischer Weise durch Beziehungen und Symmetrien miteinander verknüpft. Die zentrale Einsicht der Galoistheorie, dass mit zunehmender Einschränkung dieser Symmetrien die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein expliziter Lösungsformeln steigt, lässt sich auf Schulniveau zwar nicht formal beweisen, wohl aber anschaulich erleben und intuitiv begreifen. Die in dieser Arbeit konzipierten Aufgaben eröffnen somit einen vertieften Zugang zu den zugrunde liegenden mathematischen Strukturen und ermöglichen den Lernenden einen ersten, greifbaren Zugang zur mathematischen Ideengeschichte.

Um dieses Vorhaben zu realisieren, gliedert sich die vorliegende Arbeit in vier inhaltliche Hauptteile. Im Anschluss an diese Einleitung werden zunächst im zweiten Kapitel die algebraischen Grundlagen bereitgestellt, die für das Verständnis der weiteren Ausführungen unerlässlich sind. Darauf aufbauend widmet sich das dritte Kapitel dem mathematischen Kern der Arbeit: Hier wird der Unmöglichkeitsbeweis der allgemeinen Gleichung fünften Grades nach Abel und Ruffini in der Fassung nach Tignol detailliert und strukturiert dargelegt. Um die abstrakte Mathematik in ihren zeitlichen und menschlichen Entstehungskontext einzuordnen, folgt im vierten Kapitel ein historischer Rückblick. Dieser beleuchtet die Lebensläufe der zentralen Akteure – insbesondere von Abel, Ruffini und Galois – und zeichnet die ideengeschichtliche Entwicklung der Galoistheorie nach. Das fünfte und abschließende Kapitel schlägt schließlich die Brücke zur Schulpraxis. Hier wird die konkrete didaktische Einbettung der Thematik für den Einsatz in einem Wahlpflichtfach Mathematik konzipiert, ergänzt durch praxisnahe Aufgaben und Übungen, welche die abstrakten Strukturen für Lernende erfahrbar machen.

## 2 Algebraische Vorbereitungen zum Abel-Ruffini-Satz

Der Beweis des Abel–Ruffini-Satzes beruht nicht auf einer expliziten Rechnung, sondern auf strukturellen Eigenschaften von Polynomen, ihren Nullstellen und den algebraischen Erweiterungen, in denen diese liegen. Insbesondere spielen Radikalerweiterungen sowie Symmetrieeigenschaften der Nullstellen unter Permutationen eine zentrale Rolle.

Ziel dieses Kapitels ist es, die für den späteren Beweis benötigten Begriffe, Resultate und Methoden zusammenzustellen und in einen gemeinsamen Zusammenhang zu stellen. Dabei wird bewusst auf eine vollständige Darstellung der Galoistheorie verzichtet (vgl. [38], 495); stattdessen konzentrieren wir uns auf jene Aspekte, die unmittelbar in den klassischen Beweis der Unauflösbarkeit allgemeiner Gleichungen höheren Grades durch Radikale eingehen.

Der Schwerpunkt liegt auf der Wechselwirkung zwischen der algebraischen Struktur von Radikalerweiterungen und der Wirkung der symmetrischen Gruppe auf die Nullstellen eines Polynoms. Klassische Resultate von Girard, Lagrange, Vandermonde und Gauss werden dabei in dem Umfang herangezogen, der zur Motivation und Durchführung des Beweises erforderlich ist.

Das Kapitel dient somit als in sich geschlossene Hinführung, auf deren Grundlage der Beweis des Abel–Ruffini-Satzes im anschließenden Kapitel vollständig und ohne weitere Voraussetzungen dargestellt werden kann.

### 2.1 Gruppen, Körper, Ringe

Die folgenden, kurzen Zusammenfassungen der Eigenschaften von Gruppen, Körpern und Ringen sind *Karpfinger* ([24], 487f.), *Beutelspacher* ([9], 193ff.) und *Ganster* ([21]) entnommen:

**Definition 2.1** (Gruppe). Es sei  $G$  eine nichtleere Menge mit einer inneren Verknüpfung  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ . Man nennt  $(G, \cdot)$  eine *Gruppe*, wenn für alle  $a, b, c \in G$  gilt:

1.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ,
2. es existiert ein Element  $e \in G$  mit  $e \cdot a = a = a \cdot e$ ,
3. zu jedem  $a \in G$  existiert ein Element  $a' \in G$  mit  $a' \cdot a = e = a \cdot a'$ .

Gilt zusätzlich für alle  $a, b \in G$

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

so heißt die Gruppe  $G$  *kommutativ* oder *abelsch*.

**Definition 2.2** (Symmetrische Gruppe). Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\sigma : X \rightarrow X$$

bildet mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe. Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe* von  $X$  und wird mit  $S_X$  bezeichnet. Ihre Elemente heißen *Permutationen* von  $X$ .

Im Fall  $X = \{1, \dots, n\}$  schreibt man statt  $S_X$  auch  $S_n$ . Dann gilt  $|S_n| = n!$ .

Ein wichtiges Beispiel ist die Gruppe  $S_3$ . Sie enthält alle Permutationen der Menge  $\{1, 2, 3\}$  und besitzt daher  $3! = 6$  Elemente. Die Gruppe  $S_3$  ist das kleinste Beispiel einer nichtabelschen Gruppe.

**Definition 2.3** (Ring). Es sei  $R$  eine Menge mit zwei inneren Verknüpfungen  $+: R \times R \rightarrow R$  (Addition) und  $\cdot: R \times R \rightarrow R$  (Multiplikation). Man nennt das Tripel  $(R, +, \cdot)$  einen *Ring*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1.  $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe (das heißt, die Addition ist assoziativ sowie kommutativ, es existiert ein Nullelement  $0 \in R$ , und zu jedem  $a \in R$  gibt es ein additiv inverses Element  $-a \in R$ ).
2. Die Multiplikation ist assoziativ: Für alle  $a, b, c \in R$  gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

3. Es gelten die Distributivgesetze: Für alle  $a, b, c \in R$  gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Ein Ring heißt *kommutativ*, wenn neben der Addition auch die Multiplikation kommutativ ist. Besitzt ein Ring ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation, so spricht man von einem *Ring mit Eins*. Ein *Körper* ist ein kommutativer Ring mit Eins, in dem jedes Element ungleich 0 ein multiplikatives Inverses besitzt.

Ein für die gesamten weiteren Ausführungen zentrales Beispiel eines Ringes ist der *Polynomring*  $F[X]$ . Er besteht aus allen Polynomen in einer Unbestimmten  $X$  mit Koeffizienten aus einem Körper  $F$ . Ausgestattet mit der üblichen Polynomaddition und -multiplikation bildet  $F[X]$  einen kommutativen Ring. Analog lässt sich der Polynomring in  $n$  unabhängigen Unbestimmten, notiert als  $F[X_1, \dots, X_n]$ , konstruieren.

**Definition 2.4** (Körper). Ein *Körper* ist eine Menge  $K$  mit den zwei Verknüpfungen  $+: K \times K \rightarrow K$  und  $\cdot: K \times K \rightarrow K$ , sodass  $(K, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring mit Eins  $1 \neq 0$  ist und zu jedem  $a \in K \setminus \{0\}$  ein Element  $a^{-1} \in K$  existiert mit

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

**Definition 2.5** (Körpererweiterungen). Seien  $F$  und  $R$  zwei Körper mit  $F \subseteq R$ . Dann heißt  $F$  ein *Teilkörper* bzw. *Unterkörper* von  $R$ , und  $R$  ein *Erweiterungskörper* von  $F$ . Wir schreiben dies auch als  $F \leq R$  oder  $R/F$  und sagen:  $R/F$  (gesprochen: „ $R$  über  $F$ “) ist eine Körpererweiterung. Gilt im Weiteren  $F \leq Z \leq R$ , so nennt man  $Z$  einen *Zwischenkörper* der Körpererweiterung  $R/F$ . (vgl. [22], 7)

## 2.2 Symmetrische Gruppen und Funktionen

Die Symmetrieeigenschaften der Nullstellen eines Polynoms werden durch die Wirkung der symmetrischen Gruppe beschrieben. Symmetrische Funktionen bilden dabei das natürliche Bindeglied zwischen den einzelnen Nullstellen und den Koeffizienten des Polynoms.

Um die Eigenschaften der allgemeinen Gleichung formal untersuchen zu können, wird zunächst der Begriff der symmetrischen Funktionen benötigt. Unter einer rationalen Funktion in  $n$  Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  versteht man den Quotienten zweier Polynome in diesen Variablen, wobei der Nenner nicht das Nullpolynom ist. Eine solche rationale Funktion heißt *symmetrisch*, wenn sie sich durch eine beliebige Vertauschung (Permutation) der Unbestimmten nicht ändert. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das Polynom  $P = X_1 X_2$ . Dieses ist eine symmetrische Funktion in den beiden Variablen  $X_1$  und  $X_2$ , da durch Vertauschen dieser beiden Variablen wieder  $X_2 X_1 = X_1 X_2$  entsteht. Betrachtet man  $P$  jedoch als Polynom in drei Variablen  $X_1, X_2, X_3$ , so ist es

nicht symmetrisch. Vertauscht man beispielsweise  $X_1$  und  $X_3$ , erhält man  $X_3X_2$ , was im Allgemeinen nicht mit  $X_1X_2$  übereinstimmt. (vgl. [24], 441f.)

Mit diesem Konzept definieren wir nun das allgemeine (oder generische) normierte Polynom vom Grad  $n$  über einem Grundkörper  $F$ :

**Definition 2.6** (Allgemeines (generisches) Polynom). Seien  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige Unbestimmte über einem Grundkörper  $F$ . Dann heißt das Polynom

$$X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} - \dots + (-1)^n s_n,$$

wobei  $s_1, \dots, s_n$  die elementarsymmetrischen Polynome in  $x_1, \dots, x_n$  sind, das *allgemeine (oder generische) normierte Polynom* vom Grad  $n$  über  $F$ . Es ist ein Polynom in der Unbestimmten  $X$  mit Koeffizienten in  $F[x_1, \dots, x_n]$  und kann daher als Element von  $F[x_1, \dots, x_n][X]$  aufgefasst werden.

**Satz 2.7** (Fundamentalsatz über symmetrische rationale Funktionen). *Eine rationale Funktion in  $n$  Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$  über einem Körper  $F$  kann genau dann als rationale Funktion in den elementarsymmetrischen Polynomen  $s_1, \dots, s_n$  geschrieben werden, wenn sie symmetrisch ist.*

Der Satz liefert die entscheidende Verbindung zwischen Wurzel­ausdrücken und Koeffizienten, indem es zeigt, dass genau die symmetrischen rationalen Funktionen der Wurzeln als rationale Funktionen der Koeffizienten darstellbar sind.

Die Darstellung der Koeffizienten als symmetrische Funktionen der Nullstellen erlaubt es, algebraische Eigenschaften von Polynomen invariant unter Permutationen zu formulieren. Diese Invarianz bildet die Grundlage der klassischen Auflösungsversuche algebraischer Gleichungen.

## 2.3 Polynome, Einheitswurzeln, ...

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass die Frage der Auflösbarkeit eines Polynoms eng mit der Struktur seines Nullstellenkörpers verknüpft ist. Um diese Struktur im Hinblick auf Ausdrücke durch Radikale präzise analysieren zu können, sind insbesondere Erweiterungen durch Wurzeln von Körperelementen von zentraler Bedeutung. Bevor wir die strukturellen Eigenschaften von Nullstellen weiter untersuchen, rufen wir zwei zentrale Konzepte für Polynome in Erinnerung:

**Definition 2.8** (Teilerfremdheit und Irreduzibilität). Sei  $F$  ein Körper und  $F[X]$  der zugehörige Polynomring.

1. Zwei Polynome  $P, Q \in F[X]$  heißen *teilerfremd*, wenn ihr größter gemeinsamer Teiler eine Konstante (also ein Element aus  $F \setminus \{0\}$ ) ist. Es gibt also kein nicht-konstantes Polynom, das sowohl  $P$  als auch  $Q$  teilt.
2. Ein nicht-konstantes Polynom  $P \in F[X]$  heißt *irreduzibel* über  $F$ , wenn es sich nicht als Produkt zweier Polynome aus  $F[X]$  schreiben lässt, die beide einen Grad strikt größer als 0 haben. Andernfalls nennt man das Polynom *reduzibel*.

Diese Eigenschaften erlauben es uns, Identitäten zu formulieren, die für die Konstruktion von Körpererweiterungen unerlässlich sind:

**Korollar 2.9.** Seien  $P_1, P_2 \in F[X]$  teilerfremde Polynome. Dann existieren Polynome  $U_1, U_2 \in F[X]$  mit

$$P_1 U_1 + P_2 U_2 = 1.$$

**Lemma 2.10.** Seien  $P$  und  $Q$  Polynome mit Koeffizienten in einem Körper  $F$ , und sei  $P$  irreduzibel in  $F[X]$ . Haben  $P$  und  $Q$  eine gemeinsame Nullstelle in einem Körper  $K$ , der  $F$  enthält, so teilt  $P$  das Polynom  $Q$ .

*Beweis.* Angenommen,  $P$  teilt  $Q$  nicht. Da  $P$  irreduzibel ist, sind  $P$  und  $Q$  dann teilerfremd. Nach dem vorigen Korollar 2.9 existieren somit Polynome  $U, V \in F[X]$  mit

$$P(X)U(X) + Q(X)V(X) = 1.$$

Setzt man in diese Gleichung die gemeinsame Nullstelle  $u$  von  $P$  und  $Q$  für die Unbestimmte  $X$  ein, so erhält man

$$P(u)U(u) + Q(u)V(u) = 1$$

in  $K$ . Da jedoch  $P(u) = Q(u) = 0$  gilt, folgt daraus die Gleichung  $0 = 1$  in  $K$ , ein Widerspruch. Dieser Widerspruch zeigt, dass  $P$  das Polynom  $Q$  teilt.  $\square$

**Proposition 2.11.** Sei  $u \in K$  eine Nullstelle eines irreduziblen Polynoms  $P \in F[X]$  vom Grad  $d$ . Dann lässt sich jedes Element aus  $F(u)$  eindeutig in der Form

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_{d-1} u^{d-1}$$

mit  $a_i \in F$  darstellen.

*Beweis.* Sei  $\frac{f(u)}{g(u)}$  ein beliebiges Element aus  $F(u)$  mit  $g(u) \neq 0$ . Dann ist  $g$  nicht durch  $P$  teilbar und daher zu  $P$  teilerfremd, da  $P$  irreduzibel ist. Wieder mithilfe des obigen Korollars 2.9 existieren Polynome  $h, U \in F[X]$  mit

$$g(X)h(X) + P(X)U(X) = 1.$$

Setzt man  $u$  für  $X$  ein und berücksichtigt, dass  $P(u) = 0$  gilt, erhält man

$$g(u)h(u) = 1$$

in  $K$ . Damit folgt

$$\frac{f(u)}{g(u)} = f(u)h(u),$$

also lässt sich jedes Element aus  $F(u)$  als Polynom in  $u$  darstellen.

Sei nun  $R$  der Rest der Polynomdivision von  $fh$  durch  $P$ , also

$$fh = PQ + R \quad \text{in } F[X],$$

wobei  $\deg R \leq d-1$  gilt. Da  $P(u) = 0$  ist, folgt

$$f(u)h(u) = R(u)$$

in  $K$ . Somit wurde jedes rationale Element aus  $F(u)$  in ein Polynom der Form

$$a_0 + a_1 u + \cdots + a_{d-1} u^{d-1}$$

überführt.

Zur Eindeutigkeit: Angenommen,

$$a_0 + a_1u + \cdots + a_{d-1}u^{d-1} = b_0 + b_1u + \cdots + b_{d-1}u^{d-1}$$

für Koeffizienten  $a_i, b_i \in F$ . Dann ist  $u$  eine Nullstelle des Polynoms

$$V(X) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)X + \cdots + (a_{d-1} - b_{d-1})X^{d-1}.$$

Nach dem vorigen Lemma [2.10](#) teilt  $P$  das Polynom  $V$ , was wegen  $\deg V \leq d-1$  nur möglich ist, wenn  $V = 0$  gilt. Daher folgt

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_{d-1} = b_{d-1}.$$

□

*Bemerkung:* Es gibt genau ein normiertes irreduzibles Polynom  $P \in F[X]$ , das  $u$  als Nullstelle besitzt. Ist  $Q \in F[X]$  ein weiteres Polynom mit denselben Eigenschaften, so folgt aus obigen Lemma, dass  $P \mid Q$  teilt und umgekehrt  $Q \mid P$  teilt. Da beide Polynome normiert sind, folgt  $P = Q$ .

Dieses eindeutig bestimmte normierte irreduzible Polynom kleinsten Grades, das  $u$  als Nullstelle besitzt, heißt das *Minimalpolynom von  $u$  über  $F$* . (vgl. [48](#))

**Definition 2.12** (Exponent und primitive Einheitswurzeln). Der *Exponent* einer Einheitswurzel  $\zeta$  ist die kleinste ganze Zahl  $e > 0$  mit

$$\zeta^e = 1.$$

Zum Beispiel ist der Exponent von 1 gleich 1 und der Exponent von  $-1$  gleich 2, obwohl 1 eine  $n$ -te Einheitswurzel für jedes  $n$  ist und  $-1$  eine  $n$ -te Einheitswurzel für jedes gerade  $n$ .

Die  $n$ -ten Einheitswurzeln vom Exponenten  $n$  heißen auch *primitive  $n$ -te Einheitswurzeln*.

**Satz 2.13** (Bézout). Seien  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  und sei  $d$  der (positive) größte gemeinsame Teiler von  $n_1$  und  $n_2$ . Dann existieren ganze Zahlen  $m_1, m_2$  mit

$$d = n_1m_1 + n_2m_2.$$

*Insbesondere gilt: Sind  $n_1$  und  $n_2$  teilerfremd, so existieren ganze Zahlen  $m_1, m_2$  mit*

$$n_1m_1 + n_2m_2 = 1.$$

Dieses Resultat zeigt, dass sich aus teilerfremden Zahlen durch geeignete Linearkombinationen die Eins darstellen lässt. Diese Idee bildet die Grundlage für zahlreiche Verallgemeinerungen, etwa auf Polynome und Körpererweiterungen, wie sie in der algebraischen Zahlentheorie und der Galoistheorie verwendet werden.

*Bemerkung:* Man betrachtet  $S_n$  als die Gruppe der Permutationen der Menge

$$\{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Im Folgenden werden bestimmte Permutationen, die im Zusammenhang mit den Resolventen von Lagrange interessante Eigenschaften besitzen, definiert.

Für jede ganze Zahl  $k$ , die teilerfremd zu  $n$  ist, bezeichnet man mit

$$\sigma_k: \{0, 1, \dots, n-1\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$$

die Abbildung, die wie folgt definiert ist: Für jedes  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  ist  $\sigma_k(i)$  die eindeutig bestimmte ganze Zahl  $j$  zwischen 0 und  $n-1$ , so dass

$$ik - j \text{ durch } n \text{ teilbar ist,}$$

d. h.

$$ik \equiv j \pmod{n}.$$

Mit anderen Worten ist  $j$  der Rest bei der Division von  $ik$  durch  $n$ .

**Proposition 2.14.** *Für jede ganze Zahl  $k$ , die zu  $n$  teilerfremd ist, ist die Abbildung  $\sigma_k$  eine Permutation von  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .*

*Beweis.* Nach dem Bézout-Satz existieren ganze Zahlen  $\ell, m$  mit

$$k\ell + mn = 1. \tag{1}$$

Für jedes  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  zeigt die Definition von  $\sigma_k(i)$ , dass  $ik - \sigma_k(i)$  durch  $n$  teilbar ist. Addiert man  $imn$ , was ebenfalls durch  $n$  teilbar ist, so folgt, dass

$$ik\ell + imn - \sigma_k(i)\ell$$

durch  $n$  teilbar ist. Mit Gleichung (1) ergibt sich daraus

$$i - \sigma_k(i)\ell \text{ ist durch } n \text{ teilbar.} \tag{2}$$

Diese letzte Beziehung bedeutet, dass

$$\sigma_\ell(\sigma_k(i)) = i,$$

also ist  $\sigma_\ell \circ \sigma_k$  die Identität auf  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . Vertauscht man in der obigen Argumentation die Rollen von  $k$  und  $\ell$ , so folgt analog, dass auch

$$\sigma_k \circ \sigma_\ell$$

die Identität ist. Daher sind  $\sigma_k$  und  $\sigma_\ell$  zueinander inverse Bijektionen der Menge  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  auf sich selbst.  $\square$

## 2.4 Klassische Methoden und Resultate

Bereits im 18. und frühen 19. Jahrhundert wurden verschiedene Methoden entwickelt, um die Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale zu untersuchen. Insbesondere die Arbeiten von Girard, Lagrange, Vandermonde und Gauss liefern zentrale Werkzeuge, die auch im modernen Beweis des Abel–Ruffini-Satzes eine konzeptionelle Rolle spielen.

### 2.4.1 Girard

Zur Vorbereitung des späteren Beweises benötigen wir ein Existenzresultat für Zerfällungskörper von Polynomen über einem gegebenen Grundkörper. Dieses Resultat geht in seiner modernen Form auf Girard zurück und lässt sich algebraisch mithilfe von Quotientenringen formulieren.

Konkret gilt: Zu jedem nicht konstanten Polynom  $P \in F[X]$  existiert ein Körper  $K \supset F$ , in dem  $P$  vollständig in lineare Faktoren zerfällt. Die Konstruktion eines solchen Körpers erfolgt abstrakt durch den Quotientenring  $F[X]/(P)$ , sofern  $P$  irreduzibel ist. In diesem Fall ist  $F[X]/(P)$  ein Körper, der  $F$  enthält und eine Nullstelle von  $P$  repräsentiert.

Diese Konstruktion erlaubt es, Nullstellen von Polynomen unabhängig von konkreten Darstellungen zu behandeln und bildet die algebraische Grundlage für die spätere Betrachtung von Körpererweiterungen, in denen die Lösungen allgemeiner Gleichungen liegen.

### 2.4.2 Lagrange

**Proposition 2.15.** *Sei  $f$  eine rationale Funktion in den  $n$  Unbestimmten  $x_1, \dots, x_n$ . Falls die durch Permutationen von  $x_1, \dots, x_n$  in  $f$  entstehenden Ausdrücke  $m$  verschiedene rationale Funktionen annehmen, dann ist  $f$  eine Nullstelle eines normierten Polynoms*

$$\Theta(Y) = 0$$

*vom Grad  $m$ , dessen Koeffizienten symmetrisch in  $x_1, \dots, x_n$  sind und daher als Funktionen der elementarsymmetrischen Polynome in  $x_1, \dots, x_n$  darstellbar sind.*

*Ist  $f$  außerdem Nullstelle eines weiteren Polynoms*

$$\Phi(Y) = 0$$

*mit symmetrischen Koeffizienten in  $x_1, \dots, x_n$ , so gilt notwendigerweise*

$$\deg \Phi \geq m.$$

Diese Proposition stellt den präzisen Zusammenhang zwischen dem Permutationsverhalten eines rationalen Ausdrucks in den Wurzeln eines Polynoms und dem Grad seines Minimalpolynoms über dem Körper der symmetrischen Funktionen her. Der Beweis beruht auf elementaren Eigenschaften symmetrischer Polynome und wird hier nicht wiederholt (vgl. Proposition 10.1 in [47]).

Die folgende Formel von Lagrange zeigt, dass sich die Wurzeln eines Polynoms als lineare Kombinationen der zugehörigen Lagrange-Resolventen darstellen lassen. Sie bildet den algebraischen Ausgangspunkt für die spätere Analyse der Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale.

**Definition 2.16** (Lagrange-Resolvente). Sei

$$t(\omega) = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \dots + \omega^{n-1} x_n$$

die *Lagrange-Resolvente*, wobei  $\omega$  eine  $n$ -te Einheitswurzel ist. Die Variablen  $x_i$  lassen sich für  $i = 1, \dots, n$  durch

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{\omega} \omega^{-(i-1)} t(\omega),$$

darstellen, wobei die Summe über alle  $n$ -ten Einheitswurzeln  $\omega$  läuft.

### 2.4.3 Gauss

Um die Struktur von Radikalerweiterungen im Kontext des Abel-Ruffini-Satzes tiefergehend zu analysieren, ist eine systematische Untersuchung der zugrundeliegenden Wurzelstrukturen unerlässlich. Das entscheidende Hilfsmittel hierfür sind die von Carl Friedrich Gauß eingeführten Perioden. Historisch orientiert sich dieses Konzept an der folgenden Herangehensweise: Da sich die  $p - 1$  von Null verschiedenen Exponenten der Einheitswurzeln als Potenzen einer Primitivwurzel darstellen lassen, können sie in gleich große Exponentenklassen aufgeteilt werden. Die Summen der Einheitswurzeln über genau diese Klassen bilden die Perioden. Sie erlauben es, Einheitswurzeln zu geschickten Teilsummen zusammenzufassen, die bestimmte algebraische Symmetrien aufweisen. Damit wird die nötige Vorarbeit geleistet, um die im nächsten Schritt folgende Lagrange-Resolvente zu konstruieren, welche die fundamentale Brücke zwischen diesen Symmetrien und der expliziten Darstellung durch Radikale schlägt.

**Definition 2.17** (Gaußsche Perioden). Sei  $p$  eine Primzahl und  $\zeta$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel. Ferner sei  $g$  eine Primitivwurzel modulo  $p$ , und die Zahl  $p - 1$  lasse sich in ein Produkt

$$p - 1 = e \cdot f$$

natürlicher Zahlen zerlegen. Unter einer *Gaußschen Periode* (oder kurz *Periode*) der Länge  $f$  versteht man eine Teilsumme von primitiven Einheitswurzeln der Form

$$\eta_k = \sum_{j=0}^{f-1} \zeta^{g^j \cdot e + k},$$

wobei  $k \in \{0, \dots, e - 1\}$  einen festen Verschiebungsparameter bezeichnet. (vgl. [15], 1; [23], 162)

Die folgende Proposition liefert ein zentrales technisches Hilfsmittel der Lagrange-Gauss-Methode.

**Proposition 2.18** (Lagrange-Resolvente). Sei  $\omega$  eine primitive  $e$ -te Einheitswurzel und

$$t(\omega) = \eta_0 + \omega \eta_1 + \omega^2 \eta_2 + \dots + \omega^{e-1} \eta_{e-1}$$

die zugehörige Lagrange-Resolvente, wobei  $\eta_0, \dots, \eta_{e-1}$  Perioden sind. Dann besitzt die  $e$ -te Potenz  $t(\omega)^e$  eine rationale Darstellung in Termen von  $\omega$  und den Perioden  $\eta_0, \dots, \eta_{e-1}$ .

Als unmittelbare Konsequenz erhält man:

**Korollar 2.19.** Für jede natürliche Zahl  $n$  besitzen die  $n$ -ten Einheitswurzeln Darstellungen durch Radikale.

(vgl. [47], 193ff.)

Dieses Resultat erlaubt es, ohne Beschränkung der Allgemeinheit Einheitswurzeln im Folgenden als durch Radikale dargestellt anzunehmen.

Die in diesem Kapitel eingeführten Begriffe und Resultate erlauben es nun, die Struktur von Radikalerweiterungen in Verbindung mit den Symmetrien der Nullstellen präzise zu analysieren. Damit sind alle algebraischen Voraussetzungen geschaffen, um den Beweis der Unauflösbarkeit allgemeiner Gleichungen höheren Grades durch Radikale zu führen.

### 3 Beweis

Im folgenden Abschnitt wird dem Aufbau von *Jean-Pierre Tignol* ([47], 212-227) gefolgt.

#### 3.1 Radikalerweiterung

Abels Rechnungen mit Ausdrücken durch Radikale, die in diesem Abschnitt sowie im folgenden als ersten Schritt im Beweis diskutiert werden, dass allgemeine Gleichungen vom Grad größer als 4 nicht auflösbar sind, lassen sich präzise mithilfe von Körpererweiterungen formulieren. Diese Sichtweise wird im Folgenden durchgehend verwendet werden.

Ein Ausdruck durch Radikale wird aus gewissen Größen gebildet, die als bekannt angesehen werden (in diesem Zusammenhang gewöhnlich die Koeffizienten einer Gleichung), mittels der vier üblichen Rechenoperationen der Arithmetik und durch das Ziehen von Wurzeln. Dies bedeutet, dass jeder solche Ausdruck in einem Körper liegt, der aus dem Körper der rationalen Ausdrücke in den bekannten Größen durch sukzessives Adjungieren von Wurzeln bestimmter Ordnungen entsteht. Tatsächlich genügt es, Wurzeln von Primzahlordnung zu betrachten, denn wenn

$$n = p_1 \cdots p_r$$

die Primfaktorzerlegung einer positiven ganzen Zahl  $n$  ist, dann gilt

$$a^{1/n} = \left( \cdots \left( \left( a^{1/p_1} \right)^{1/p_2} \right) \cdots \right)^{1/p_r}.$$

Dies zeigt, dass eine  $n$ -te Wurzel eines beliebigen Elements  $a$  durch Extraktion einer  $p_1$ -ten Wurzel von  $a$ , anschließend einer  $p_2$ -ten Wurzel von  $a^{1/p_1}$  und so weiter erhalten werden kann. Außerdem genügt es offensichtlich,  $p$ -te Wurzeln von Elementen zu extrahieren, die keine  $p$ -ten Potenzen sind, da sich andernfalls der Grundkörper nicht vergrößert. Damit gelangt man zum Begriff einer radikalen Körpererweiterung.

Bevor dieser Begriff in mathematischen Termen genau formuliert wird, sei angemerkt, dass zur Vermeidung einiger technischer Schwierigkeiten die Betrachtung im gesamten Kapitel auf Körper der Charakteristik Null beschränkt wird - mit anderen Worten, wird angenommen, dass

$$1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0$$

in jedem betrachteten Körper gilt, oder dass jeder betrachtete Körper eine (isomorphe Kopie des) Körpers der rationalen Zahlen enthält. Dies ist natürlich der klassische Fall, der der einzige war, den Ruffini und Abel betrachteten.

**Definition 3.1.** Ein Körper  $R$ , der einen Körper  $F$  enthält, heißt eine *Radikalerweiterung der Höhe 1* von  $F$ , wenn es eine Primzahl  $p$  und ein Element  $a \in F$  gibt, das keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist, sowie ein Element  $u \in R$  mit

$$R = F(u) \quad \text{und} \quad u^p = a.$$

Ein solches Element  $u$  wird manchmal mit  $a^{1/p}$  oder  $\sqrt[p]{a}$  bezeichnet, und entsprechend schreibt man

$$R = F(a^{1/p}) \quad \text{oder} \quad R = F(\sqrt[p]{a}).$$

Diese Notation ist jedoch nicht ohne Mehrdeutigkeit, da das Element  $u$  durch  $a$  und  $p$  nicht eindeutig festgelegt ist. Tatsächlich gibt es  $p$  verschiedene  $p$ -te Wurzeln von  $a$ . Darüber hinaus ist im Allgemeinen auch der Körper  $R$  selbst nicht eindeutig durch  $F$ ,  $a$  und  $p$  bestimmt. So gibt es beispielsweise drei Unterkörper von  $\mathbb{C}$ , die als  $\mathbb{Q}(2^{1/3})$  in Betracht kommen. Daher wird die obige Notation mit Vorsicht verwendet.

Radikalerweiterungen der Höhe  $h$  werden für jede positive ganze Zahl  $h$  induktiv als Radikalerweiterungen der Höhe 1 von Radikalerweiterungen der Höhe  $h - 1$  definiert. Genauer gesagt heißt ein Körper  $R$ , der einen Körper  $F$  enthält, eine *Radikalerweiterung der Höhe  $h$*  von  $F$ , wenn es einen Körper  $R_1$  zwischen  $R$  und  $F$  gibt, so dass  $R$  eine Radikalerweiterung der Höhe 1 von  $R_1$  ist und  $R_1$  eine Radikalerweiterung der Höhe  $h - 1$  von  $F$  ist. In diesem Fall existiert ein Turm von Erweiterungen zwischen  $R$  und  $F$ ,

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_{h-1} \supset F,$$

so dass bei der Setzung von  $R = R_0$  und  $F = R_h$  für  $i = 0, \dots, h - 1$  gilt

$$R_i = R_{i+1} \left( a_i^{1/p_i} \right),$$

wobei  $p_i$  eine Primzahl und  $a_i \in R_{i+1}$  ein Element, das keine  $p_i$ -te Potenz in  $R_{i+1}$  ist.

Jede Radikalerweiterung endlicher Höhe wird schlicht eine *Radikalerweiterung* genannt, und der Vollständigkeit halber wird außerdem vereinbart, dass jeder Körper eine *Radikalerweiterung der Höhe 0* von sich selbst ist.

Die obigen Definitionen sind sehr geeignet, um Fragen über Ausdrücke durch Radikale in mathematisch präzise Form zu bringen. So bedeutet zum Beispiel die Aussage, dass eine komplexe Zahl  $z$  einen Ausdruck durch Radikale besitzt, dass es eine Radikalerweiterung des Körpers  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen gibt, die  $z$  enthält. Allgemeiner sagt man, dass ein Element  $v$  eines Körpers  $L$  einen Ausdruck durch Radikale über einem Körper  $F \subset L$  besitzt, wenn es eine Radikalerweiterung von  $F$  gibt, die  $v$  enthält.

Ebenso sagt man, dass ein Polynom  $P(X) = 0$  über einem Körper  $F$  *durch Radikale über  $F$  lösbar* ist, wenn es eine Radikalerweiterung von  $F$  gibt, die eine Nullstelle von  $P$  enthält. Im Fall allgemeiner Gleichungen

$$P(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0,$$

wobei die Koeffizienten als algebraische Ausdrücke betrachtet werden, die nur die Koeffizienten  $s_1, \dots, s_n$  enthalten, kann der Grundkörper  $F$  als der Körper der rationalen Funktionen in den  $s_i$  aufgefasst werden, wobei diese als voneinander unabhängige Unbestimmte betrachtet werden<sup>2</sup>

Genauer gesagt muss man einen Grundkörper spezifizieren, aus dem die Koeffizienten der rationalen Funktionen stammen dürfen. Eine naheliegende Wahl ist natürlich der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen. Da wir jedoch ein negatives Resultat anstreben – also den Beweis der Unlösbarkeit –, kann dieser Grundkörper prinzipiell beliebig groß gewählt werden. Wir werden nämlich zeigen: Wenn eine Gleichung durch Radikale über einem Körper  $F$  lösbar ist, dann ist sie auch über jedem Oberkörper  $L \supset F$  durch Radikale lösbar. Wenn wir also nachweisen können, dass die allgemeine Gleichung für Grade  $n \geq 5$  über dem sehr großen Körper  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  nicht durch Radikale lösbar ist, folgt daraus per Kontraposition direkt, dass sie auch über dem ursprünglichen Grundkörper  $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_n)$  unlösbar sein muss.

Ruffinis ursprünglicher Beweis ist in diesem Punkt etwas vage, da er nicht zwischen verschiedenen Körpern unterscheidet. Dennoch wird seine Argumentation durch die

---

<sup>2</sup>Ausführlichere Begründung zu finden bei [\[47\]](#), Bemerkung 8.8(a), S. 105).

folgende Wahl von Hypothesen gestützt: Man nimmt an, dass der Grundkörper alle Einheitswurzeln enthält. Diese Annahme verschafft einen technischen Vorteil, da sie größere Flexibilität bei der Behandlung von Radikalerweiterungen erlaubt, wie das folgende Resultat zeigt.

**Proposition 3.2.** *Sei  $R$  ein Körper, der einen Körper  $F$  enthält. Hat  $R$  die Form*

$$R = F(u)$$

*für ein Element  $u$ , so dass*

$$u^n \in F$$

*für eine ganze Zahl  $n$  gilt, und enthält  $F$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel (damit auch alle  $n$ -ten Einheitswurzeln, da die übrigen Potenzen dieser sind), so ist  $R$  eine Radikalerweiterung von  $F$ .*

Mit anderen Worten: In der Definition von Radikalerweiterungen muss weder verlangt werden, dass der Exponent  $n$  eine Primzahl ist, noch dass  $u^n$  keine  $n$ -te Potenz eines Elements aus  $F$  ist, vorausgesetzt, dass  $F$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel enthält.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ . Ist  $n = 1$ , so gilt  $u \in F$ , folglich ist  $R = F$  und  $R$  ist damit eine Radikalerweiterung der Höhe 0 von  $F$ . Es wird angenommen, dass  $n \geq 2$  ist und dass die Proposition gilt, wenn der Exponent von  $u$  höchstens  $n - 1$  ist.

Ist  $n$  nicht prim, so sei  $n = rs$  für gewisse (positive) ganze Zahlen  $r, s < n$ . Nach der Induktionsannahme ist  $F(u)$  eine Radikalerweiterung von  $F(u^r)$  und  $F(u^r)$  eine Radikalerweiterung von  $F$ , da  $u^r$  die Bedingung

$$(u^r)^s \in F$$

erfüllt. Daher ist  $F(u)$  eine Radikalerweiterung von  $F$ , da aus der Definition klar ist, dass die Eigenschaft, eine Radikalerweiterung zu sein, transitiv ist, nämlich: In einem Turm von Erweiterungen

$$F \subset K \subset L$$

gilt, dass wenn  $L$  eine Radikalerweiterung von  $K$  ist und  $K$  eine Radikalerweiterung von  $F$  ist, dann  $L$  eine Radikalerweiterung von  $F$  ist.

Ist  $n$  prim, so betrachten wir zwei Fälle, je nachdem, ob  $u^n$  eine  $n$ -te Potenz eines Elements aus  $F$  ist oder nicht. Ist dies nicht der Fall, so ist  $R$  per Definition eine Radikalerweiterung von  $F$ . Ist dies der Fall, so sei

$$u^n = b^n$$

für ein Element  $b \in F$ . Ist  $b = 0$ , so ist  $u = 0$  und  $R = F$ , eine Radikalerweiterung der Höhe 0 von  $F$ . Ist  $b \neq 0$ , so liefert die obige Gleichung

$$\left(\frac{u}{b}\right)^n = 1,$$

also ist  $\frac{u}{b}$  eine  $n$ -te Einheitswurzel. Da alle  $n$ -ten Einheitswurzeln in  $F$  liegen, folgt daraus, dass

$$\frac{u}{b} \in F,$$

folglich  $u \in F$  und wiederum  $R = F$ , eine Radikalerweiterung der Höhe 0 von  $F$  ist.  $\square$

**Proposition 3.3.** *Seien  $R$  und  $L$  Unterkörper eines gemeinsamen Oberkörpers  $K$ , die beide einen Unterkörper  $F$  enthalten, wobei  $F$  die Gruppe aller Einheitswurzeln  $\mu_\infty$  enthält. Ist  $R$  eine Radikalerweiterung von  $F$ , so existiert eine Radikalerweiterung  $S$  von  $L$ , die  $R$  enthält und in  $K$  enthalten ist.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Höhe von  $R$ . Ist diese Höhe gleich 0, so gilt  $R = F$  und man kann  $S = L$  wählen. Man darf daher annehmen, dass die Höhe von  $R$  gleich  $h \geq 1$  ist und dass die Proposition für Radikalerweiterungen der Höhe höchstens  $h - 1$  gilt.

Nach der Definition von Radikalerweiterungen der Höhe  $h$  kann man in  $R$  eine Radikalerweiterung  $R_1$  von  $F$  der Höhe  $h - 1$  sowie ein Element  $u$  finden, so dass

$$R = R_1(u) \quad \text{und} \quad u^p \in R_1$$

für eine gewisse Primzahl  $p$  gilt.

Nach der Induktionsannahme existiert eine Radikalerweiterung  $S_1$  von  $L$  in  $K$ , die  $R_1$  enthält. Dann gilt  $u^p \in S_1$ , und Proposition 3.2 zeigt, dass

$$S_1(u)$$

eine Radikalerweiterung von  $L$  ist. Diese Erweiterung ist in  $K$  enthalten, da  $u \in K$  und  $S_1 \subset K$  gilt, und sie enthält  $R$ , da  $R = R_1(u)$  und  $R_1 \subset S_1$  ist. Damit sind die geforderten Bedingungen erfüllt.  $\square$

**Korollar 3.4.** *Seien  $v_1, \dots, v_n$  Elemente eines Körpers  $K$  mit Teilkörper  $F$ , wobei  $F$  alle Einheitswurzeln, also  $\mu_\infty$ , enthält. Wenn jedes der Elemente  $v_1, \dots, v_n$  in einer in  $K$  enthaltenen Radikalerweiterung von  $F$  liegt, dann existiert eine Radikalerweiterung von  $F$  in  $K$ , die alle Elemente  $v_1, \dots, v_n$  enthält.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  folgt die Aussage unmittelbar aus der Voraussetzung. Man darf daher annehmen, dass  $n \geq 2$  ist und dass das Korollar für  $n - 1$  Elemente gilt. Dann existiert eine Radikalerweiterung  $L$  von  $F$  in  $K$ , die  $v_1, \dots, v_{n-1}$  enthält. Sei  $R$  eine Radikalerweiterung von  $F$  in  $K$ , die  $v_n$  enthält. Da  $F$  nach Voraussetzung alle Einheitswurzeln enthält, lässt sich Proposition 3.3 anwenden. Diese liefert eine Radikalerweiterung  $S$  von  $L$  in  $K$ , die  $R$  enthält.

Da  $S$  sowohl  $L$  als auch  $R$  enthält, enthält  $S$  alle Elemente  $v_1, \dots, v_n$ . Da  $S$  außerdem eine Radikalerweiterung von  $L$  ist und  $L$  eine Radikalerweiterung von  $F$  ist, ist  $S$  wegen der Transitivität von Radikalerweiterungen eine Radikalerweiterung von  $F$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Bisher wurde ausschließlich der Fall betrachtet, in dem die Einheitswurzeln bereits im Grundkörper enthalten sind. Um allgemeinere Situationen auf diesen Fall zurückzuführen, wird ein Resultat von Gauß herangezogen, wonach sich jede Einheitswurzel durch einen Ausdruck mit Radikalen darstellen lässt.

**Proposition 3.5.** *Für jede ganze Zahl  $n$  und jeden Körper  $F$  liegen die  $n$ -ten Einheitswurzeln in einer Radikalerweiterung von  $F$ .*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  in einer Radikalerweiterung von  $F$  liegt, da die übrigen  $n$ -ten Einheitswurzeln Potenzen von  $\zeta$  sind und daher in derselben Radikalerweiterung wie  $\zeta$  liegen.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $n$ . Für  $n = 1$  hat man  $\zeta = 1$ , folglich liegt  $\zeta$  in  $F$ , welches eine Radikalerweiterung der Höhe 0 von sich selbst ist. Es darf angenommen werden, dass  $n \geq 2$  ist und dass die Proposition für Einheitswurzeln mit Exponenten kleiner als  $n$  gilt.

Ist  $n$  nicht prim, so sei  $n = rs$  für gewisse (positive) ganze Zahlen  $r, s < n$ . Dann ist  $\zeta^r$  eine  $s$ -te Einheitswurzel. Nach der Induktionsannahme kann man eine Radikalerweiterung  $R_1$  von  $F$  finden, die  $\zeta^r$  enthält. Nach der Induktionsannahme erneut kann man eine Radikalerweiterung  $R_2$  von  $R_1$  (und damit auch von  $F$ ) finden, die eine primitive  $r$ -te Einheitswurzel enthält. Da  $\zeta^r \in R_2$  gilt, folgt aus Proposition 3.2, dass  $R_2(\zeta)$  eine Radikalerweiterung von  $R_2$ , also von  $F$ , ist. Damit ist die Proposition in diesem Fall bewiesen.

Ist  $n$  prim, so müssen die Resultate von Gauß verwendet werden. Zunächst kann man nach der Induktionsannahme eine Radikalerweiterung  $R_1$  von  $F$  finden, die die  $(n-1)$ -ten Einheitswurzeln enthält. Dann betrachtet man die Lagrange-Resolventen  $t(\omega)$  wie im Beweis von 2.19. Nach Proposition 2.18 gilt

$$t(\omega)^{n-1} \in R_1$$

für jede  $(n-1)$ -te Einheitswurzel  $\omega$ . Daher zeigt Proposition 3.2, dass

$$R_1(t(\omega))$$

eine Radikalerweiterung von  $R_1$  ist. Durch sukzessives Adjungieren aller Lagrange-Resolventen  $t(\omega)$  erhält man eine Radikalerweiterung  $R_2$  von  $R_1$ , also von  $F$ , die  $t(\omega)$  für alle  $\omega \in \mu_{n-1}$  enthält. Aus der **Formel von Lagrange** (2.16) folgt, dass  $\zeta$  rational aus den Lagrange-Resolventen berechnet werden kann, also  $\zeta \in R_2$ , und der Beweis ist abgeschlossen.  $\square$

Nun soll die zuvor erwähnte Tatsache bewiesen werden, dass die Lösbarkeit einer Gleichung durch Radikale über einem Körper  $F$  die Lösbarkeit durch Radikale über jedem größeren Körper  $L$  impliziert. Diese Tatsache mag auf den ersten Blick offensichtlich erscheinen, da jeder Ausdruck durch Radikale, der Elemente aus  $F$  enthält, auch ein Ausdruck durch Radikale ist, der Elemente aus  $L$  enthält. Sie bedarf jedoch einer sorgfältigen Begründung. Der entscheidende Punkt ist, dass beim Aufbau von Radikalerweiterungen oder bei Ausdrücken durch Radikale nur  $p$ -te Wurzeln von Elementen zugelassen werden, die keine  $p$ -ten Potenzen in  $F$  sind - diese Elemente können jedoch im größeren Körper  $L$  zu  $p$ -ten Potenzen werden.

**Lemma 3.6.** *Sei  $L$  ein Körper, der einen Körper  $F$  enthält. Für jede Radikalerweiterung  $R$  von  $F$  existiert eine Radikalerweiterung  $S$  von  $L$ , so dass  $R$  mit einem Unterkörper von  $S$  identifiziert werden kann.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Höhe  $h$  von  $R$ . Ist  $h = 0$ , so gilt  $R = F$ , und man kann  $S = L$  wählen.

Ist  $h = 1$ , so sei  $R = F(u)$ , wobei  $u$  so beschaffen ist, dass

$$u^p = a$$

für ein Element  $a \in F$  gilt, das keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist. Sei ferner  $K$  ein Körper, der  $L$  enthält und über dem das Polynom

$$X^p - a$$

in ein Produkt linearer Faktoren zerfällt. (Die Existenz eines solchen Körpers  $K$  folgt aus dem Satz von Girard (vgl. [2.4.1](#))).

Da  $u$  eine der Nullstellen von  $X^p - a$  ist, kann es mit einem Element in  $K$  identifiziert werden, und jeder rationale Bruch in  $u$  mit Koeffizienten in  $F$ , d. h. jedes Element von  $R$ , kann dann mit einem Element von  $K$  identifiziert werden. Man darf daher fortan annehmen, dass  $R$  in  $K$  enthalten ist.

Ist  $a$  keine  $p$ -te Potenz in  $L$ , so ist  $L(u)$  eine Radikalerweiterung der Höhe 1 von  $L$ , und diese Erweiterung enthält  $R$ , da sie  $F$  und  $u$  enthält. Damit sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

Ist  $a$  eine  $p$ -te Potenz in  $L$ , so sei  $b \in L$  eine  $p$ -te Wurzel von  $a$ ,

$$b^p = a.$$

Da die  $p$ -ten Potenzen von  $u$  und  $b$  gleich sind, folgt daraus, dass

$$\left(\frac{u}{b}\right)^p = 1.$$

Folglich ist  $\frac{u}{b}$  eine  $p$ -te Einheitswurzel, und Proposition [3.5](#) zeigt, dass es eine Radikalerweiterung  $S$  von  $L$  gibt, die  $\frac{u}{b}$  enthält. Da  $b \in L$  ist, folgt daraus, dass  $u \in S$ , also  $R \subset S$ , und der Beweis ist im Fall  $h = 1$  abgeschlossen.

Ist  $h \geq 2$ , so folgt das Lemma unmittelbar aus dem vorhergehenden Fall und der Induktionsannahme. Tatsächlich kann man in  $R$  einen Unterkörper  $R_1$  finden, der eine Radikalerweiterung der Höhe  $h - 1$  von  $F$  ist und so beschaffen ist, dass  $R$  eine Radikalerweiterung der Höhe 1 von  $R_1$  ist. Nach der Induktionsannahme darf man annehmen, dass  $R_1$  in einer Radikalerweiterung  $S_1$  von  $L$  enthalten ist, und nach dem bereits betrachteten Fall  $h = 1$  kann  $R$  mit einem Unterkörper einer Radikalerweiterung  $S$  von  $S_1$  identifiziert werden. Der Körper  $S$  ist dann eine Radikalerweiterung von  $L$  und erfüllt die Bedingung des Lemmas.  $\square$

**Satz 3.7.** *Sei  $P$  ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper  $F$ . Ist die Gleichung*

$$P(X) = 0$$

*durch Radikale über  $F$  lösbar, so ist sie durch Radikale über jedem Körper  $L$  lösbar, der  $F$  enthält.*

*Beweis.* Sei  $R$  eine Radikalerweiterung von  $F$ , die eine Nullstelle  $r$  von  $P$  enthält. Das vorhergehende Lemma zeigt, dass angenommen werden darf, dass  $R$  in einer Radikalerweiterung  $S$  von  $L$  enthalten ist. Die Radikalerweiterung  $S$  enthält dann die Nullstelle  $r$ , folglich ist

$$P(X) = 0$$

durch Radikale über  $L$  lösbar.  $\square$

Der folgende Spezialfall des Satzes ist besonders relevant:

**Korollar 3.8.** *Ist die allgemeine Gleichung vom Grad  $n$*

$$P(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0$$

*nicht durch Radikale über  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  lösbar, so ist sie auch nicht durch Radikale über  $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_n)$  lösbar.*

Es darf daher fortan angenommen werden, dass der Grundkörper alle Einheitswurzeln enthält.

### 3.2 Abels Satz über natürliche Irrationalitäten

Wir führen den Beweis, dass die allgemeine Gleichung eines bestimmten Grades nicht durch Radikale lösbar ist per Widerspruch. Daher wird im Folgenden angenommen, dass es eine radikale Erweiterung  $R$  von

$$\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$$

gibt, die eine Nullstelle  $x_i$  der allgemeinen Gleichung

$$(X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^n s_n = 0$$

enthält.

Der erste Schritt in Abels Beweis (der in Ruffinis Beweisen fehlte) besteht darin zu zeigen, dass  $R$  als in

$$\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$$

enthalten angenommen werden kann. Dies bedeutet, dass die Irrationalitäten, die in einem Ausdruck durch Radikale für eine Nullstelle der allgemeinen Gleichung vom Grad  $n$  auftreten, als *natürlich* gewählt werden können, im Gegensatz zu *akzessorischen* Irrationalitäten<sup>3</sup>, welche die Elemente von Erweiterungen von  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  außerhalb von  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  bezeichnen (vgl. [6], 268).

Ziel dieses Abschnitts ist es, dieses Resultat nach Abels Vorgehensweise in ([1], Kapitel 7, §2) zu beweisen.

**Lemma 3.9.** *Sei  $p$  eine Primzahl und sei  $a$  ein Element eines Körpers  $F$ , das keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist.*

- (a) *Für  $k = 1, \dots, p-1$  ist auch die  $k$ -te Potenz  $a^k$  keine  $p$ -te Potenz in  $F$ .*
- (b) *Das Polynom  $X^p - a$  ist über  $F$  irreduzibel.*

*Beweis.* (a) Ist  $k$  eine ganze Zahl zwischen 1 und  $p-1$ , so ist  $k$  teilerfremd zu  $p$ . Nach Satz 2.13 existieren daher ganze Zahlen  $\ell$  und  $q$  mit

$$pq + k\ell = 1.$$

Dann gilt

$$a = (a^q)^p (a^k)^\ell.$$

Ist nun  $a^k = b^p$  für ein Element  $b \in F$ , so folgt

$$a = (a^q b^\ell)^p,$$

im Widerspruch zur Annahme, dass  $a$  keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist. Dieser Widerspruch beweist (a).

- (b) Seien  $P$  und  $Q$  Polynome in  $F[X]$  mit

$$X^p - a = PQ.$$

Man darf annehmen, dass  $P$  und  $Q$  normiert sind, und muss zeigen, dass  $P$  oder  $Q$  das konstante Polynom 1 ist. Sei  $K$  eine Erweiterung von  $F$ , über der  $X^p - a$  in ein Produkt linearer Faktoren zerfällt. Die Existenz eines solchen Körpers  $K$

---

<sup>3</sup>Die Begriffe „natürliche“ und „akzessorische“ Irrationalitäten wurden von Kronecker geprägt.

folgt aus dem Satz von Girard (2.4.1). Da die Nullstellen von  $X^p - a$  gerade die  $p$ -ten Wurzeln von  $a$  sind, die man aus jeder von ihnen durch Multiplikation mit den verschiedenen  $p$ -ten Einheitswurzeln erhält (s. [47], §7.3), hat man in  $K[X]$

$$\prod_{\omega \in \mu_p} (X - \omega u) = PQ,$$

wobei  $u \in K$  eine der  $p$ -ten Wurzeln von  $a$  in  $K$  ist. Diese Gleichung zeigt, dass  $P$  und  $Q$  in  $K[X]$  in Produkte von Faktoren  $X - \omega u$  zerfallen. Genauer zerfällt  $\mu_p$  in eine Vereinigung disjunkter Teilmengen  $I$  und  $J$  derart, dass

$$P = \prod_{\omega \in I} (X - \omega u) \quad \text{und} \quad Q = \prod_{\omega \in J} (X - \omega u).$$

Nun betrachtet man den konstanten Term von  $P$ , den man mit  $b$  bezeichnen kann. Die obige Faktorisierung von  $P$  zeigt, dass

$$b = \left( \prod_{\omega \in I} \omega \right) (-u)^k,$$

wobei  $k$  die Anzahl der Elemente von  $I$  bezeichnet. Da  $\omega^p = 1$  für jedes  $\omega \in I$  gilt, erhält man durch Erheben beider Seiten der vorhergehenden Gleichung zur  $p$ -ten Potenz

$$((-1)^k b)^p = a^k.$$

Teil (a) des Lemmas zeigt dann, dass  $k = 0$  oder  $k = p$  gilt. Im ersten Fall ist  $P = 1$ , und im zweiten Fall ist  $P = X^p - a$ , woraus  $Q = 1$  folgt.

□

Sei nun  $R$  eine Radikalerweiterung der Höhe 1 eines Körpers  $F$ . Per Definition bedeutet dies, dass es ein Element  $u \in R$  gibt mit

$$R = F(u) \quad \text{und} \quad u^p = a$$

für ein Element  $a \in F$ , das keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist. Unter Verwendung des vorhergehenden Lemmas kann man den Elementen von  $R$  eine Normalform geben.

**Korollar 3.10.** *Jedes Element  $v \in R$  lässt sich eindeutig schreiben als*

$$v = v_0 + v_1 u + v_2 u^2 + \cdots + v_{p-1} u^{p-1},$$

wobei  $v_0, v_1, \dots, v_{p-1} \in F$  sind.

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus 2.11 mithilfe des vorhergehenden Lemmas. □

Tatsächlich kann, wenn  $v \in R$  von vornherein nicht in  $F$  liegt, das Element  $u$  so gewählt werden, dass  $v_1 = 1$  in der obigen Darstellung gilt, wie wir nun zeigen:

**Lemma 3.11.** *Sei  $R$  eine Radikalerweiterung der Höhe 1 eines Körpers  $F$ , und sei  $v \in R$  mit  $v \notin F$  gegeben. Dann gibt es ein Element  $u \in R$ , so dass  $R = F(u)$ ,  $u^p \in F$  und*

$$v = v_0 + u + v_2 u^2 + \cdots + v_{p-1} u^{p-1}$$

für gewisse  $v_0, v_2, \dots, v_{p-1} \in F$ .

*Beweis.* Sei  $u'$  ein Element von  $R$  mit  $R = F(u')$  und  $u'^p = a'$  für ein Element  $a' \in F$ , das keine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist. Nach Korollar 3.10 können wir schreiben

$$v = v'_0 + v'_1 u' + v'_2 u'^2 + \cdots + v'_{p-1} u'^{p-1}$$

für gewisse  $v'_0, \dots, v'_{p-1} \in F$ . Diese Koeffizienten sind nicht alle null, da  $v \notin F$  ist. Sei  $k$  ein Index zwischen 1 und  $p-1$  mit  $v'_k \neq 0$ , und setze

$$u = v'_k u'^k. \quad (3.1)$$

Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung zur  $p$ -ten Potenz, so erhält man

$$u^p = v_k'^p a'^k.$$

Dies zeigt, dass  $u$  die Gleichung  $u^p = a$  mit

$$a = v_k'^p a'^k \in F$$

erfüllt. Ist  $a$  eine  $p$ -te Potenz eines Elements aus  $F$ , so zeigt die letzte Gleichung, dass auch  $a'^k$  eine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist. Dann folgt jedoch aus Lemma 3.9(1), dass  $a'$  selbst eine  $p$ -te Potenz in  $F$  ist, im Widerspruch zur Annahme über  $u'$ . Also ist  $a$  keine  $p$ -te Potenz in  $F$ .

Da  $u \in R$  ist, gilt offensichtlich  $F(u) \subset R$ . Um zu zeigen, dass  $R = F(u)$  ist, genügt es daher zu zeigen, dass jedes Element von  $R$  einen rationalen Ausdruck in  $u$  mit Koeffizienten in  $F$  besitzt. Es wird zunächst gezeigt, dass die Potenzen von  $u'$  solche Ausdrücke besitzen. Für jedes  $i = 0, \dots, p-1$  erhält man durch Erheben beider Seiten von Gleichung (3.1) zur  $i$ -ten Potenz

$$u^i = v_k'^i u'^{ki}. \quad (3.2)$$

Erinnert man nun an die Permutation  $\sigma_k$  von  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ , die jede ganze Zahl  $i$  zwischen 0 und  $p-1$  auf die eindeutig bestimmte ganze Zahl  $\sigma_k(i)$  zwischen 0 und  $p-1$  abbildet, so dass

$$\sigma_k(i) \equiv ik \pmod{p}$$

gilt 2.14. Nach der Definition von  $\sigma_k(i)$  gibt es eine ganze Zahl  $m$  mit

$$ik - \sigma_k(i) = pm.$$

also

$$u'^{ik} = (u'^p)^m u'^{\sigma_k(i)}.$$

Daher erhält man unter Erinnerung an  $u'^p = a'$  und mit der Definition

$$b_i = (v_k'^i a'^m)^{-1} \quad \text{für } i = 0, \dots, p-1$$

aus Gleichung (3.2)

$$b_i u^i = u'^{\sigma_k(i)}$$

für  $i = 0, \dots, p-1$ . Nun besitzt jedes  $x \in R$  eine Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i u^i,$$

wobei  $x_i \in F$  für  $i = 0, \dots, p-1$  gilt. Diese kann alternativ geschrieben werden als

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} x_{\sigma_k(i)} u'^{\sigma_k(i)},$$

da  $\sigma_k$  eine Permutation von  $\{0, \dots, p-1\}$  ist. Setzt man  $b_i u^i$  für  $u'^{\sigma_k(i)}$  ein, so erhält man

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} x_{\sigma_k(i)} b_i u^i.$$

Dies zeigt, dass jedes Element von  $R$  einen rationalen Ausdruck in  $u$  mit Koeffizienten in  $F$  besitzt, also  $R = F(u)$  gilt. Für das gegebene  $v \in R$  ist der Koeffizient von  $u$  in dieser Darstellung gleich 1, denn für  $i = 1$  findet man in den obigen Rechnungen  $\sigma_k(1) = k$  und  $m = 0$ , woraus

$$b_1 = v_k'^{-1}$$

folgt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

**Lemma 3.12.** *Es wird die Notation von Lemma 3.11 beibehalten und außerdem angenommen, dass  $F$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel  $\zeta$  enthält (damit auch alle  $p$ -ten Einheitswurzeln, da die übrigen Potenzen von  $\zeta$  sind). Ist  $v$  eine Nullstelle einer Gleichung mit Koeffizienten in  $F$ , so enthält  $R$   $p$  Nullstellen dieser Gleichung, und  $u, v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  sind rationale Ausdrücke dieser Nullstellen mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}(\zeta)$ .*

*Beweis.* Sei  $P \in F[X]$  ein Polynom mit  $P(v) = 0$ . Unter Verwendung der Darstellung von  $v$  aus Lemma 3.11 gewinnt man aus  $P$  ein weiteres Polynom  $Q$  mit Koeffizienten in  $F$ ,

$$Q(Y) = P(v_0 + Y + v_2 Y^2 + \dots + v_{p-1} Y^{p-1}) \in F[Y].$$

Diese Definition ist so gewählt, dass aus der Gleichung  $P(v) = 0$  die Gleichung  $Q(u) = 0$  folgt. Andererseits ist  $u$  auch eine Nullstelle des Polynoms  $Y^p - a$ , welches nach Lemma 3.9(2) irreduzibel ist. Daher zeigt 2.10, dass  $Y^p - a$  ein Teiler von  $Q(Y)$  ist und es folgt, dass jede Nullstelle von  $Y^p - a$  eine Nullstelle von  $Q(Y)$  ist. Da die Nullstellen von  $Y^p - a$  die  $p$ -ten Wurzeln von  $a$  sind, die von der Form  $\zeta^i u$  für  $i = 0, \dots, p-1$  sind, erhält man

$$Q(\zeta^i u) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p-1. \quad (3.3)$$

Sei nun

$$z_i = v_0 + \zeta^i u + v_2 \zeta^{2i} u^2 + \dots + v_{p-1} \zeta^{(p-1)i} u^{p-1}$$

für  $i = 0, \dots, p-1$ . Aus Gleichung (3.3) folgt

$$P(z_i) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, p-1,$$

was zeigt, dass  $R$   $p$  Nullstellen von  $P$  enthält.

Um den Beweis zu vervollständigen, wird nun gezeigt, dass  $u, v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  rationale Ausdrücke in  $z_0, \dots, z_{p-1}$  sind, durch Rechnungen, die an **Lagranges Formel** erinnern. Fasst man die Terme zusammen, die in der Summe

$$\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{-ik} z_i$$

einen gegebenen Faktor  $v_j u^j$  enthalten, so erhält man

$$\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{-ik} z_i = \sum_{j=0}^{p-1} \left( \sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{(j-k)i} \right) v_j u^j \quad \text{für } k = 0, \dots, p-1, \quad (3.4)$$

wobei man  $v_1 = 1$  gesetzt hat.

Ist  $j \neq k$ , so ist  $\zeta^{j-k}$  eine  $p$ -te Einheitswurzel ungleich 1, also eine Nullstelle von

$$\Phi_p(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^i.$$

Daher gilt

$$\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{(j-k)i} = 0.$$

Folglich verschwinden alle Terme mit Index  $j \neq k$  auf der rechten Seite von (3.4), und es bleibt

$$\sum_{i=0}^{p-1} \zeta^{-ik} z_i = p v_k u^k \quad \text{für } k = 0, \dots, p-1.$$

Dies zeigt, dass  $v_k u^k$  ein rationaler Ausdruck (tatsächlich ein linearer Ausdruck) in  $z_0, \dots, z_{p-1}$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  ist. Insbesondere sieht man für  $k = 1$ , dass  $u$  ein solcher Ausdruck ist, und da

$$v_k = (v_k u^k) u^{-k},$$

folgt, dass auch  $v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  rationale Ausdrücke in  $z_0, \dots, z_{p-1}$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  sind.  $\square$

Nun setzt man

$$K = \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $x_1, \dots, x_n$  unabhängige Unbestimmte über  $\mathbb{C}$  sind, und man bezeichnet mit  $F$  den Unterkörper der symmetrischen Brüche. Nach Satz 2.7 gilt

$$F = \mathbb{C}(s_1, \dots, s_n),$$

wobei  $s_1, \dots, s_n$  die elementarsymmetrischen Polynome in  $x_1, \dots, x_n$  sind.

**Satz 3.13.** *Liegt ein Element  $v \in K$  in einer Radikalerweiterung von  $F$ , so gibt es innerhalb von  $K$  eine Radikalerweiterung von  $F$ , die  $v$  enthält.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Höhe der Radikalerweiterung  $R$  von  $F$ , die  $v$  enthält, deren Existenz vorausgesetzt wird. Ist die Höhe von  $R$  gleich 0 (d. h.  $R = F$ ), so gibt es nichts zu zeigen, da in diesem Fall  $R \subset K$  gilt.

Somit wird angenommen, dass die Höhe von  $R$  gleich  $h \geq 1$  ist, und man betrachtet  $R$  als eine Radikalerweiterung der Höhe 1 eines Unterkörpers  $R_1$ , der selbst eine Radikalerweiterung von  $F$  der Höhe  $h - 1$  ist.

Liegt  $v \in R_1$ , so ist man durch die Induktionsvoraussetzung fertig. Für den Rest des Beweises darf angenommen werden, dass  $v$  nicht in  $R_1$  liegt. Lemma 3.11 zeigt dann, dass

$$R = R_1(u)$$

für ein Element  $u$  mit  $u^p \in R_1$  (für eine Primzahl  $p$ ) gilt und dass

$$v = v_0 + u + v_2 u^2 + \cdots + v_{p-1} u^{p-1} \quad (3.5)$$

für gewisse Elemente  $v_0, v_2, \dots, v_{p-1} \in R_1$ .

Nun zeigt Proposition 2.15 und ihr Beweis, dass jedes Element von  $K$  eine Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten in  $F$  ist, welches in  $K$  in ein Produkt linearer Faktoren zerfällt (seine Nullstellen sind die verschiedenen „Werte“ des Elements unter den Permutationen von  $x_1, \dots, x_n$ ). Insbesondere ist  $v$  eine Nullstelle einer Gleichung mit Koeffizienten in  $F$  (also in  $R_1$ ), deren sämtliche Nullstellen in  $K$  liegen. Daher kann man Lemma 3.12 anwenden und folgern, dass

$$u, v_0, v_2, \dots, v_{p-1} \in K.$$

Andererseits liegen  $u^p, v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  auch in  $R_1$ , welches eine Radikalerweiterung von  $F$  der Höhe  $h - 1$  ist. Nach der Induktionsvoraussetzung liegen  $u^p, v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  in Radikalerweiterungen von  $F$  innerhalb von  $K$ , und nach Korollar 3.4 kann man eine einzige Radikalerweiterung  $R'$  von  $F$  innerhalb von  $K$  finden, die  $u^p, v_0, v_2, \dots, v_{p-1}$  enthält.

Da  $u^p \in R'$  ist, ist der Körper  $R'(u)$  eine Radikalerweiterung von  $R'$ , also eine Radikalerweiterung von  $F$ . Da bereits beobachtet wurde, dass  $u \in K$  gilt, folgt  $R'(u) \subset K$ , und Gleichung (3.5) zeigt, dass  $v \in R'(u)$  liegt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

### 3.3 Beweis der Unauflösbarkeit allgemeiner Gleichungen vom Grad größer als 4

Um zu beweisen, dass allgemeine Gleichungen vom Grad  $n \geq 5$  nicht durch Radikale lösbar sind, muss gemäß Definition [3.1](#) gezeigt werden, dass keine Radikalerweiterung des Grundkörpers  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  existiert, welche eine Nullstelle  $x_i$  der allgemeinen Gleichung

$$(X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0.$$

enthält.

Die nachfolgende Argumentation geht im Kern auf den letzten Unmöglichkeitbeweis von Paolo Ruffini aus dem Jahr 1813 zurück, der in seinen *Opere Matematiche* (vgl. [41](#), 162 - 170) dargelegt ist. In der Literatur wird dieser Beweis teilweise als Wantzel<sup>[4](#)</sup>-Modifikation des Beweises von Abel bezeichnet, wie folgendes Zitat aus ([6](#), 270) zeigt:

This proof is essentially what was later to be called the P.L. WANTZEL (1814-1848) modification of ABEL's proof and was published in 1845. It is no surprise that it should resemble RUFFINI'S proof, since WANTZEL says in his paper ... 'using works of Abel and Ruffini .... '.

**Lemma 3.14.** *Seien  $u$  und  $a$  Elemente von  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  mit*

$$u^p = a$$

*für eine Primzahl  $p$ , und es sei  $n \geq 5$ . Ist  $a$  invariant unter den Permutationen*

$$\sigma : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1, \quad x_i \mapsto x_i \quad \text{für } i > 3$$

*und*

$$\tau : x_3 \mapsto x_4 \mapsto x_5 \mapsto x_3, \quad x_i \mapsto x_i \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und } i > 5,$$

*so gilt dies auch für  $u$ .*

*Beweis.* Wendet man  $\sigma$  auf beide Seiten der Gleichung  $u^p = a$  an, so erhält man

$$\sigma(u)^p = a,$$

also

$$\sigma(u)^p = u^p.$$

Da das Lemma trivial ist, falls  $u = 0$ , darf man  $u \neq 0$  annehmen und beide Seiten der vorhergehenden Gleichung durch  $u^p$  dividieren. Man erhält somit

$$\left( \frac{\sigma(u)}{u} \right)^p = 1.$$

, woraus folgt

$$\sigma(u) = \omega_\sigma u$$

für eine gewisse  $p$ -te Einheitswurzel  $\omega_\sigma$ . Wendet man  $\sigma$  auf beide Seiten dieser letzten Gleichung an, so erhält man

$$\sigma^2(u) = \omega_\sigma^2 u,$$

---

<sup>4</sup>Der französische Mathematiker Pierre-Laurent Wantzel erlangte Bedeutung durch seine Unmöglichkeitsbeweise zur allgemeinen Winkeldreiteilung und zur Würfelverdopplung, zwei jahrhundertlang ungelöste Probleme der antiken Mathematik. (vgl. [45](#))

und weiter

$$\sigma^3(u) = \omega_\sigma^3 u.$$

Da  $\sigma^3$  die Identität ist, gilt  $\sigma^3(u) = u$ , also

$$\omega_\sigma^3 = 1. \quad (3.6)$$

Argumentiert man in gleicher Weise mit  $\tau$  anstelle von  $\sigma$ , so erhält man

$$\tau(u) = \omega_\tau u$$

mit

$$\omega_\tau^3 = 1. \quad (3.7)$$

Aus diesen Gleichungen wird außerdem gefolgert, dass

$$\sigma \circ \tau(u) = \omega_\sigma \omega_\tau u \quad \text{und} \quad \sigma^2 \circ \tau(u) = \omega_\sigma^2 \omega_\tau u.$$

gilt.

Da jedoch

$$\sigma \circ \tau : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto x_5 \mapsto x_1, \quad x_i \mapsto x_i \text{ für } i > 5$$

und

$$\sigma^2 \circ \tau : x_1 \mapsto x_3 \mapsto x_4 \mapsto x_5 \mapsto x_2 \mapsto x_1, \quad x_i \mapsto x_i \text{ für } i > 5,$$

gilt, hat man

$$(\sigma \circ \tau)^5 = (\sigma^2 \circ \tau)^5 = \text{Id}$$

(die Identität), woraus die obigen Argumente liefern

$$(\omega_\sigma \omega_\tau)^5 = (\omega_\sigma^2 \omega_\tau)^5 = 1. \quad (3.8)$$

Da

$$\omega_\sigma = \omega_\sigma^6 (\omega_\sigma \omega_\tau)^5 (\omega_\sigma^2 \omega_\tau)^{-5},$$

folgern die Gleichungen (3.6) und (3.8), dass

$$\omega_\sigma = 1.$$

Aus (3.8) schließt man dann  $\omega_\tau^5 = 1$ , und da  $\omega_\tau = \omega_\tau^6 \omega_\tau^{-5}$ , folgt aus Gleichung (3.7), dass  $\omega_\tau = 1$ . Dies zeigt, dass  $u$  invariant unter  $\sigma$  und  $\tau$  ist.  $\square$   $\square$

**Korollar 3.15.** *Sei  $R$  eine Radikalerweiterung von  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$ , enthalten in  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ . Ist  $n \geq 5$ , so ist jedes Element von  $R$  invariant unter den Permutationen  $\sigma$  und  $\tau$  aus Lemma [3.14](#).*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Höhe von  $R$ , die mit  $h$  bezeichnet wird. Ist  $h = 0$ , so ist

$$R = \mathbb{C}(s_1, \dots, s_n),$$

und das Korollar ist offensichtlich. Ist  $h \geq 1$ , so gibt es ein Element  $u \in R$  und eine Radikalerweiterung  $R_1$  der Höhe  $h - 1$  von  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  mit

$$R = R_1(u) \quad \text{und} \quad u^p \in R_1$$

für eine Primzahl  $p$ . Nach Induktionsannahme ist jedes Element von  $R_1$  invariant unter  $\sigma$  und  $\tau$ . Das Lemma zeigt dann, dass auch  $u$  invariant unter  $\sigma$  und  $\tau$  ist, und da die Elemente von  $R$  rationale Ausdrücke in  $u$  sind, folgt unmittelbar, dass jedes Element von  $R$  invariant unter  $\sigma$  und  $\tau$  ist.  $\square$

**Satz 3.16.** *Ist  $n \geq 5$ , so ist die allgemeine Gleichung vom Grad  $n$*

$$P(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0$$

*weder über  $\mathbb{Q}(s_1, \dots, s_n)$  noch über  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  durch Radikale lösbar.*

*Beweis.* Nach Korollar 3.8 genügt es zu zeigen, dass

$$P(X) = 0$$

nicht durch Radikale über  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  lösbar ist. Angenommen, es gebe eine Radikalerweiterung  $R$  von  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$ , die eine Nullstelle  $x_i$  von  $P$  enthält. Durch Umm Nummerieren von  $x_1, \dots, x_n$  kann - falls nötig - angenommen werden, dass  $i = 1$  ist. Ferner darf nach dem Satz über natürliche Irrationalitäten (Satz 3.13) angenommen werden, dass diese Radikalerweiterung  $R$  in  $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$  enthalten ist. Dann zeigt Korollar 3.15, dass jedes Element von  $R$  invariant unter  $\sigma$  und  $\tau$  ist. Doch  $x_1 \in R$  und  $x_1$  ist nicht invariant unter  $\sigma$ , weil  $\sigma(x_1) = x_2$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

## 4 Historischer Kontext und Bedeutung

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die theoretischen Grundlagen des Abel-Ruffini-Satzes und der Zusammenhang zwischen Körpererweiterungen und der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen dargestellt wurden, soll im Folgenden der historische Kontext näher beleuchtet werden. Die Entwicklung der Theorie ist eng mit den Arbeiten dreier bedeutender Mathematiker verbunden: Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel und Évariste Galois. Ihre Beiträge markieren entscheidende Etappen auf dem Weg von den ersten Versuchen eines Beweises der Unlösbarkeit bis hin zur Entstehung der modernen Gruppentheorie. (vgl. [13], 114; [50], 107ff.) Ein kurzer Blick auf ihre Lebensläufe und wissenschaftlichen Leistungen soll verdeutlichen, unter welchen Bedingungen diese zentralen Ideen entstanden und wie sie die heutige Algebra nachhaltig geprägt haben.

### 4.1 Leben von Paolo Ruffini (1765-1822)

Den Anfang dieser Entwicklung bildet der italienische Mathematiker Paolo Ruffini (1765–1822), der als einer der Ersten den Versuch unternahm, die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades streng zu beweisen. Obwohl sein Beweis noch Unvollständigkeiten aufwies, legte Ruffini damit den Grundstein für die späteren Arbeiten von Abel und Galois und gilt als Wegbereiter der modernen Auffassung von algebraischer Struktur und Lösbarkeit. (vgl. [50], 119f., [34], 81ff.)



Abbildung 1: Zeitgenössisches Porträt von Paolo Ruffini (1765–1822), anonymes Ölgemälde.

Quelle: Bridgeman Images, Archiv-ID: 2581525. Biblioteca Estense, Modena (aufgerufen am 27. Mai 2026).

#### 4.1.1 Ruffinis Biografie

Paolo Ruffini wird im italienischen Städtchen Valentano, welches sich in der Nähe von Rom und Siena befindet, geboren. Als Sohn eines Arztes wächst er in einer gebildeten

Umgebung auf. So zieht die Familie später nach Modena in der Emilia-Romagna, wo Ruffini bereits mit 18 Jahren an der Universität ein breit gefächertes Studium der Mathematik, Medizin, Philosophie und Literatur aufnimmt. Nachdem sein Professor für Analysis eine administrative Position am Hof des Herzogs von Modena übernimmt, wird der junge Ruffini beauftragt, dessen Vorlesungen zu übernehmen bzw. fortzuführen. 1788 schließt er sein Studium mit hervorragenden Ergebnissen in Philosophie, Medizin und Mathematik ab und wird zum Professor für die Grundlagen der Analysis ernannt. Drei Jahre später folgt die Berufung auf den Lehrstuhl für Grundlagen der Mathematik als auch die Zulassung zur ärztlichen Praxis für Ruffini. (vgl. [44]; [46], 98)

Mit dem Beginn der französischen Revolutionskriege im Jahr 1795 und der Gründung der Cisalpinischen Republik (1797) wird Ruffini gegen seinen Willen in eines der politischen Ämter der neuen Staatsordnung berufen. Nach kurzer Zeit gelingt es ihm, dieses Amt niederzulegen, um an die Universität zurückzukehren. Seine Weigerung, den Eid auf die republikanische Verfassung zu leisten, führt jedoch zu seiner Entlassung aus dem Hochschuldienst. Diese Zeit nutzt Ruffini, um sich intensiver der Medizin zu widmen und zugleich an einem mathematischen Problem zu arbeiten, das ihn seit Jahren beschäftigt: der Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen fünften Grades durch Radikale. (vgl. [46], 98)

Bereits seit der Antike waren Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen bekannt, die durch Al-Khwarizmi im 9. Jahrhundert systematisiert wurden. Im 16. Jahrhundert entwickelten Mathematiker wie Scipione del Ferro, Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia, Lodovico Ferrari und François Viète Methoden, um auch Gleichungen dritten und vierten Grades zu lösen. Cardano zeigte, dass die Unterscheidung von Fällen anhand der Diskriminante

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

ausreicht, um die reduzierte kubische Gleichung  $z^3 + pz + q = 0$  vollständig zu behandeln. Durch die Einführung komplexer Zahlen durch Rafael Bombelli wurde schließlich klar, dass Gleichungen bis zum vierten Grad durch Radikale lösbar sind.

Ruffini versuchte, diese Beobachtungen auf Gleichungen fünften Grades zu übertragen und zeigte in einer umfangreichen Arbeit, dass eine allgemeine Lösungsformel in diesem Fall nicht existiert. Sein Beweis war zwar nicht in allen Details lückenlos, doch wurde er von einzelnen Zeitgenossen – insbesondere von Augustin-Louis Cauchy – als überzeugend angesehen. Vermutlich regten Ruffinis Überlegungen Cauchy in den Jahren 1813 und 1815 zu seinen Arbeiten über Permutationsgruppen an.

Nach der Niederlage Napoleons kehrt Ruffini an die Universität Modena zurück, wo er sowohl Mathematik als auch Medizin lehrt und zeitweise das Amt des Rektors innehat. Während einer Typhus-Epidemie im Jahr 1817 widmet er sich aufopferungsvoll der Behandlung seiner Patienten und erkrankt selbst an der Krankheit. Obwohl er sich zunächst erholt, verschlechtert sich sein Gesundheitszustand in den folgenden Jahren. 1820 veröffentlicht er noch eine medizinische Abhandlung über den Typhus, bevor er 1822 an einer erneuten Infektion stirbt.

Ruffinis mathematische Arbeiten fanden zu seinen Lebzeiten wenig Beachtung. Dies lag zum einen daran, dass er seine Schriften auf Italienisch veröffentlichte, zum anderen daran, dass seine Beweisidee ihrer Zeit weit voraus war. Er erkannte, dass die Untersuchung der Struktur von Permutationen eine zentrale Rolle bei der Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen spielt. Erst Jahrzehnte später wurde diese

Idee durch die Arbeiten von Abel und Galois vollends verstanden und als Fundament der modernen Algebra gewürdigt. (vgl. [44]; [46], 99 u. 103; [20] 93)

#### 4.1.2 Ruffinis frühen Entdeckungen zur Permutationstheorie

In einer Reihe von ab 1799 publizierten Arbeiten entwickelte Ruffini erstmals systematisch den gruppentheoretischen Zugang zum Problem der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen. Als erster äußerte er die Vermutung, dass sich Gleichungen fünften und höheren Grades im Allgemeinen nicht durch Radikale lösen lassen – ein Ergebnis, das er in Teilen auch beweisen konnte. Bereits in seinem zweibändigen Werk *Theoria generale delle equazioni* nutzte er die Permutationstheorie als zentrales Beweismittel. (vgl. [5], 347-349)

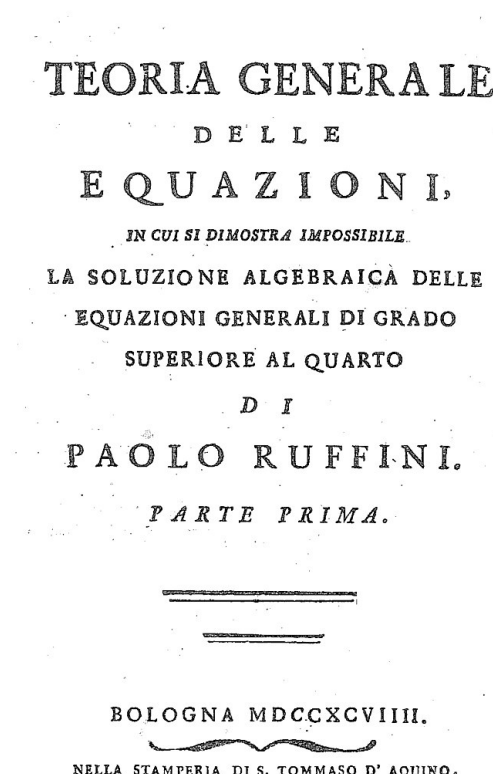


Abbildung 2: Titelseite von Paolo Ruffinis Werk *Teoria generale delle equazioni* (1799).

Quelle: Ruffini [40].

Ausgehend von Überlegungen Lagranges erkannte Ruffini einen engen Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen und der Struktur der Permutationen, die rationale Funktionen der Variablen invariant lassen oder verändern.

Ein zentrales Element in Ruffinis Überlegungen war also die Betrachtung der Permutationen, also der Umordnungen von Elementen – insbesondere der Wurzeln einer Gleichung – in verschiedenen Reihenfolgen. Wird eine eindeutige Zuordnung zwischen diesen Elementen und natürlichen Zahlen hergestellt, lässt sich jede Permutation als Umstellung der zugehörigen Zahlenreihen darstellen. So bedeutet zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

dass die Elemente  $a_1, a_2, a_3$  in der Reihenfolge  $a_1, a_3, a_2$  angeordnet werden. (vgl. [5], 347f.)

Ruffinis wesentlicher Beitrag zur Theorie algebraischer Gleichungen bestand darin, nicht nur einzelne Permutationen zu betrachten, sondern die gesamte Menge aller möglichen Permutationen und deren strukturelle Eigenschaften systematisch zu untersuchen. Auf diese Weise entwickelte er – wenn auch nicht in moderner Terminologie – den Begriff der Permutationsgruppe. Entscheidend war für ihn insbesondere die Eigenschaft, dass die Hintereinanderausführung zweier Permutationen stets wieder eine Permutation derselben Menge ergibt. Diese Abgeschlossenheit gegenüber der Verknüpfung bildete für Ruffini den zentralen Aspekt der Gruppeneigenschaft.

Zwar formulierte er noch keine vollständige Gruppendefinition im heutigen Sinne, dennoch legte er durch die Hervorhebung solcher Mengen von Permutationen, die unter dieser Verknüpfung abgeschlossen sind, die Grundlage für spätere Definitionen. Trotz des Fehlens weiterer Gruppenaxiome war die Abgeschlossenheit in seinen konkreten Fällen stets erfüllt.

Darüber hinaus unternahm Ruffini eine erste systematische Klassifikation solcher Permutationsmengen. Er unterschied zwischen „*permutazioni semplici*“, d.h. Mengen, die sich vollständig durch wiederholte Anwendung einer einzigen Permutation erzeugen lassen – diese entsprechen den heutigen zyklischen Gruppen –, und „*permutazioni composte*“, also solchen, die von mehreren Permutationen erzeugt werden. Diese zusammengesetzten Permutationsgruppen gliederte er wiederum in drei Kategorien, die aus heutiger Sicht als *intransitiv*, *transitiv imprimitiv* und *transitiv primitiv* bezeichnet werden. (Anmerkung: Seine Begriffe entsprechen nicht exakt den modernen Definitionen, jedoch war sein Ansatz richtungsweisend für die spätere Gruppentheorie.) Die Transitivität einer Permutationsgruppe beschreibt dabei die Eigenschaft, dass sich jedes Element der zugrunde liegenden Menge durch geeignete Permutationen in jedes andere überführen lässt. Ist dies möglich, ohne dass dabei zwei disjunkte, aber durch die Permutationen ineinander überführbare Teilmengen erhalten bleiben, so spricht man von einer *primitiven* Permutationsgruppe; andernfalls liegt eine *imprimitive* Gruppe vor. (vgl. [5], 348; [31], 365)

Ruffinis früheste Arbeiten enthielten bereits grundlegende neue Erkenntnisse über die Struktur von Permutationsgruppen. Besonders hervorzuheben ist seine nahezu vollständige Analyse der Untergruppen der symmetrischen Gruppe  $S_5$ , aus der er auf die generelle Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades schließen konnte. In den Folgejahren, insbesondere 1802 und 1803, überarbeitete und ergänzte Ruffini seinen ursprünglichen Beweis. Die letzte Fassung dieser Verbesserungen entstand unter Rückgriff auf Vereinfachungen, die Pietro Abbati (1768–1842) in die Argumentation eingeführt hatte. Im Jahr 1804 kritisierte Malfatti den Beweis mit verschiedenen Einwänden, die sich jedoch im Nachhinein als unbegründet erwiesen. Ruffini reagierte mit einer überarbeiteten Version seines Beweises und kehrte auch in späteren Arbeiten mehrfach auf das Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen höheren Grades zurück.

Mit diesen Arbeiten leistete Ruffini einen entscheidenden Beitrag zur Etablierung gruppentheoretischer Methoden im Kontext des Auflösungsproblems algebraischer Gleichungen. Sein Werk markiert zugleich einen Wendepunkt im mathematischen Denken der Zeit – weg von rein algebraischen Verfahren, hin zu strukturellen, abstrakten Konzepten. (vgl. [5], 347–349)

## 4.2 Leben von Niels Henrik Abel (1802-1829)

### 4.2.1 Abels Biografie

Niels Henrik Abel zeigte bereits in jungen Jahren ein außergewöhnliches mathematisches Talent, das von seinem Lehrer Bernt Michael Holmboe früh erkannt und gefördert wurde. Trotz großer Begabung war sein Leben von finanziellen Schwierigkeiten geprägt, denn nach dem frühen Tod seines Vaters wuchs Abel unter prekären wirtschaftlichen Verhältnissen auf und war lebenslang auf Stipendien, private Unterstützung und Nebentätigkeiten angewiesen. Mit nur 21 Jahren gelang ihm der entscheidende Beweis, dass allgemeine Gleichungen fünften Grades nicht durch Radikale lösbar sind – ein Problem, das Generationen von Mathematikern beschäftigt hatte. In den folgenden Jahren wandte er sich verstärkt der Analysis zu und hinterließ auch dort grundlegende Beiträge. Aufgrund fehlender akademischer Perspektiven in Norwegen suchte Abel Anerkennung im Ausland und hielt sich mehrere Jahre in Deutschland und Frankreich auf. Besonders bedeutsam war seine Zusammenarbeit mit August Leopold Crelle, der ihm als Förderer und Herausgeber eine wichtige Publikationsmöglichkeit bot. Abels gesundheitlicher Zustand verschlechterte sich jedoch infolge einer Tuberkuloseerkrankung zunehmend. Zwar wurde ihm kurz vor seinem Tod eine Professur in Berlin in Aussicht gestellt, doch erreichte ihn diese Nachricht erst nach seinem frühen Tod im Alter von 26 Jahren. Trotz seines kurzen Lebens hinterließ Abel ein Werk von nachhaltiger Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. (vgl. [51], 57; [43])

Die nachhaltige Bedeutung seines Wirkens zeigt sich nicht zuletzt darin, dass sein Porträt auf norwegischen Briefmarken erschien und seit 2003 der international renommierte Abel-Preis zu seinen Ehren vergeben wird.



Abbildung 3: Norwegische Briefmarke zu Ehren von Niels Henrik Abel.

Quelle: Strick [46], 116].

Beim Abel-Preis handelt es sich um einen hoch angesehenen Mathematikpreis, der nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel benannt ist und jährlich von der Norwegischen Akademie der Wissenschaften für außergewöhnliche mathematische Leistungen verliehen wird. (vgl. [2])

Im Jahr 2002 hat die Regierung von Norwegen anlässlich des 200. Geburtstages von Niels Henrik Abel den Preis initiiert und schreibt ein Preisgeld von 6 Millionen Norwegischen Kronen damit aus. Umgerechnet sind das nach aktuellem Wechselkurs ca. 500.000 Euro.

Im Jahr 2023 hat Luis Caffarelli (geb. 1948) diesen Preis für seine Untersuchungen alltäglicher Naturphänomene, wie etwa das Schmelzverhalten von Eiswürfeln, überreicht bekommen. Im darauffolgenden Jahr hat die Auszeichnung der Franzose Michel Talagrand (geb. 1952) erhalten. Der Mathematiker forscht am Verständnis von Zufallsphänomenen.

Im Jahr 2025 hat der japanische Mathematiker Masaki Kashiwara (geb. 1947) den Preis für seine maßgeblichen Forschungsergebnisse zur algebraischen Analysis und Darstellungstheorie erhalten. (vgl. [11])

#### 4.2.2 Abels Beweis-Schema für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades

Dem Norweger gelang es die Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen, die einen höheren Grad als vier haben, zu beantworten. Während seiner Schul- bzw. Studienzeit hat sich Niels Henrik Abel schon mit solchen niveaureichen, mathematischen Fragen und Rätseln auseinandergesetzt. Er studierte hierfür auch unter anderem die Werke von Mathematikern Lagrange, Gauß und Cauchy. Mit Ruffinis Resultaten kam er erst später in Kontakt.

Abel war überzeugt, dass er eine Methode für die Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades in Radikalen entdeckt hat. Jedoch registrierte er noch kurz vor der Veröffentlichung einen Fehler und begann sofort mit der Suche nach einem vollständig stimmigen Beweis, der die Auflösbarkeit als Unmöglichkeit nachwies. Im Jahr 1824 brachte er die Erstfassung jenes Beweises im heutigen Oslo heraus und circa zwei Jahre später publizierte dann das Crelles Journal [5] eine überarbeitete Fassung seines Beweises. (vgl. [33], 108)

Angelehnt an die Darstellung bei [5] wird im Folgenden die Beweisidee hier schrittweise rekonstruiert.

Abel betrachtet die allgemeine Gleichung 5. Grades

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

und nahm an, dass diese algebraisch auflösbar sei. Daraus leitete er ab, dass man  $y$  in der Gestalt

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{q}} + p_2 R^{\frac{2}{q}} + \dots + p_{q-1} R^{\frac{q-1}{q}} \quad (4.2.2)$$

darstellen könnte - mit der Notiz, dass es sich bei  $q$  um eine Primzahl und bei  $R, p, p_1, \dots, p_{q-1}$  um Funktionen von derselben Art wie  $y$  handelt. Jene kann man schlussendlich auf rationale Funktionen der Größen  $a, b, c, d, e$  zurückführen.

In einer überarbeiteten Version seines Beweises leitete der Norweger den betrachteten Ausdruck ausführlich her. Er legte fest, was er unter einer algebraischen Funktion im Sinne eines Radikalausdrucks verstand. So formuliert er, dass für eine endliche Menge beliebiger Größen  $x', x'', x''', \dots$  eine Größe  $v$  als *algebraische Funktion* dieser Größen bezeichnet werde, wenn sie sich aus  $x', x'', x''', \dots$  durch eine endliche Folge bestimmter Operationen darstellen lasse. Dazu zählt er erstens die Addition, zweitens die Multiplikation – sowohl zwischen Größen, die von  $x', x'', x''', \dots$  abhängen, als auch zwischen solchen, die davon unabhängig sind –, drittens die Division sowie viertens das Ziehen von Wurzeln mit Primzahlexponenten.

In anderen Worten zusammengefasst, definierte Abel den Begriff der algebraischen Funktion, indem er festlegte, welche Operationen zur Konstruktion jener Funktionen erlaubt sind. Weiters differenzierte er dann: Entsteht die Funktion nur durch Addition

---

<sup>5</sup>Hierbei handelt es sich um eine der angesehensten mathematischen Fachzeitschriften namens *Das Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Aus der Besprechung der Website lässt sich entnehmen, dass es die älteste noch bestehende mathematische Fachzeitschrift ist und auch weltweit zu jenen mit den größten Auflagen unter den Mathematikzeitschriften zählt. Sie wurde 1826 von August Leopold Crelle gegründet und bis zu seinem Tod im Jahr 1855 von ihm herausgegeben. Relativ bald wurde sie unter dem Namen *Crelles Journal* weithin bekannt. (vgl. [53], [14])

und Multiplikation, heißt die Funktion *ganz rational*; wenn man ergänzend auch die Division verwendet, wird sie als *rational* bezeichnet. Von dieser Grundlage leitet er ab, dass alle rationalen Funktionen die Form

$$\sum_{i_1, \dots, i_k} A_{i_1, \dots, i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$$

besitzen und die rationalen Funktionen Quotienten jener Funktionen sind. An diese Stelle ist erwähnenswert, dass Abel hierfür ein Prinzip, das heute als *intensionalen Definition* bekannt ist, verwendete. Ganz grob zusammengefasst, wird hierbei eine Funktion nicht durch eine bestimmte Form definiert, sondern man charakterisiert sie über ihre Eigenschaften wie beispielsweise über ihre Bildung durch genannte Operationen. Durch diesen Charakterisierungsprozess hat er quasi die Menge der rationalen Funktionen als Körper nachgewiesen.

Für die weitere Konstruktion der algebraischen Funktionen bildete Abel dann die sogenannten *algebraischen Funktionen erster Ordnung*, die die Form

$$p_1 = f(x', x'', \dots, \sqrt[r']{p'}, \sqrt[r'']{p''), \dots})$$

hatten. Hierfür muss zum einen gelten, dass die  $p', p'', \dots$  rationale Funktionen der  $x', x'', \dots$  sind als auch, dass  $f$  eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. So entstehen die algebraischen Funktionen erster Ordnung durch Adjunktion der Radikale  $\sqrt[r']{p'}, \sqrt[r'']{p''), \dots}$  zum Grundkörper der rationalen Funktionen.

Als nächstes erweiterte Abel den Grundkörper der rationalen Funktionen, indem er sukzessive neue algebraische Funktionen hinzufügte. Er bildete Funktionen zweiter Ordnung der Form

$$p_2 = f(x', x'', \dots, \sqrt[r']{p'}, \sqrt[r'']{p''), \dots, \sqrt[r']{p_1}, \sqrt[r'']{p'_1}, \dots)$$

, wobei  $f$  selbst wieder eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Die in ihr vorkommenden Ausdrücke wie  $p_1, p'_1, \dots$  sind algebraische Funktionen erster Ordnung. Abel fügte somit schrittweise Radikale zum Körper der rationalen Funktionen hinzu.

Das wiederholte er solange bis er schließlich .... Er setzte diesen Prozess weiter fort und gelangte schließlich zu den algebraischen Funktionen  $\mu$ -ter Ordnung. Wurden im letzten Schritt  $q$  unabhängige Radikale adjungiert, so bezeichnete er die entsprechende Funktion  $p$  als Funktion  $\mu$ -ter Ordnung und  $q$ -ten Grades.

Nach dem Beweis, dass die Adjunktion von  $q$  Radikalen auch sukzessive in Einzelschritten erfolgen kann, formulierte er den Satz, der ihm die eingangs erwähnte Darstellung [4.2.2](#) von  $y$  lieferte:

Abel fügte den Ausdruck für  $y$  in die Ausgangsgleichung ein und bekam schließlich

$$m + m_1 R^{\frac{1}{q}} + \dots + m_{q-1} R^{\frac{q-1}{q}} = 0$$

Dabei waren  $m, m_1, m_2, \dots$  ganze rationale Funktionen von  $a, b, c, d, e, p, p_1, p_2, \dots, R$ . Ein zentraler Schritt in Abels Beweis bestand darin, zu zeigen, dass diese Beziehung nur dann erfüllt ist, wenn:

$$m = m_1 = \dots = m_{q-1} = 0$$

Daraus folgerte er, dass  $z = R^{\frac{1}{q}}$  nur die reine Gleichung

$$s^q = R$$

erfüllt, weil keine andere Gleichung der Form

$$m + m_1s + \dots + m_{q-1}s^{q-1} = 0$$

mit rationalen Koeffizienten in  $a, b, c, d, p, p_1, p_2, \dots, R$  gültig ist.

So zeigte Abel, dass  $R^{\frac{1}{q}}$  in dem abgeleiteten Ausdruck [4.2.2](#) für  $y$  durch  $\alpha^i R^{\frac{1}{q}}$  ersetzt werden kann, wobei mit  $\alpha$  eine  $q$ -te Einheitswurzel und  $i = 1, \dots, q-1$  ist. Damit erhielt der Mathematiker den verallgemeinerten Ausdruck

$$y_i = p + p_1 \alpha^i R^{\frac{1}{q}} + \dots + p_{q-1} \alpha^{i(q-1)} R^{\frac{q-1}{q}}.$$

Abel zeigte, dass jede dieser Größen  $y_i$  eine Lösung der Ausgangsgleichung darstellt. Indem er die entstehenden Gleichungen als ein System auffasste und die Unbekannten  $p, p_1 R^{\frac{1}{q}}, \dots, p_{q-1} R^{\frac{q-1}{q}}$  eliminierte, gelang es ihm, alle  $p, p_1, \dots, p_q, R$  sowie  $R^{\frac{1}{q}}$  als rationale Funktionen der Nullstellen  $y_i$  auszudrücken.

Abel betonte in seinen Abschlussworten, dass jede irrationale Funktion, die in einem wie [4.2.2](#) auftritt, letztlich eine rationale Funktion der Wurzeln der gegebenen Gleichung ist. Er formulierte damals die folgenden (französischen)<sup>6</sup> Worte - hier ins Deutsche übersetzt:

„Wenn man diese Überlegung weiterführt, gelangt man zu dem Schluss, dass alle irrationalen Funktionen, die in dem Ausdruck für  $y$  enthalten sind, rationale Funktionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.“ ([\[1\]](#), 30f.)

Damit erreichte Abel exakt den Punkt, den bereits Ruffini in seinen Untersuchungen angestrebt hatte. Durch die Kombination seiner eigenen Überlegungen mit den Ergebnissen von Lagrange und Cauchy konnte er den Beweis vervollständigen. Die von Cauchy eingeführte Betrachtung der Anzahl der möglichen Permutationen der Variablen führte Abel zu dem Schluss, dass  $q$  nur den Wert 2 oder 5 annehmen kann. Da sich in beiden Fällen ein Widerspruch ergab, bewies er, dass die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht durch Radikale lösbar ist.

Mithilfe dieses Beweises löste Abel eines der zentralen Probleme der Algebra. Während Ruffini, Cauchy und andere bereits die gruppentheoretische Seite des Problems beleuchtet hatten, eröffnete Abel durch seine Arbeit körpertheoretische Perspektive. Er zeigte die prinzipielle Unmöglichkeit einer allgemeinen Formel und klärte damit einen entscheidenden Aspekt, auch wenn die konkrete Bestimmung der Lösungen weiterhin offenblieb. Abels Arbeit markierte den Beginn einer neuen Phase in der Algebra. Die Frage nach der Lösbarkeit führte zu einer tiefen Untersuchung der zugrunde liegenden Strukturen und bereitete den Weg für die spätere Entwicklung der Galois-Theorie. (vgl. [\[5\]](#), 352-354)

---

<sup>6</sup>Original: „En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de  $y$  sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.“

### 4.3 Évariste Galois (1811-1832)

Über das Leben des jungen Mathematikers Évariste Galois gibt es viele Mythen, vor allem über die Umstände seines frühen Todes – er verstarb noch vor seinem 21. Geburtstag. Eine Briefmarke aus Frankreich aus dem Jahr 1984 würdigte ihn mit der Bezeichnung Revolutionär und Gelehrter der Geometrie, wobei der Begriff „Geometer“ sinnbildlich für die gesamte Mathematik verwendet wurde. Fest steht: Politik und Mathematik bestimmten gleichermaßen sein kurzes Leben. Mit seinen Arbeiten zur Lösbarkeit von Gleichungen legte er den Grundstein für eine neue Theorie, die heute als Galois-Theorie bekannt ist und in der modernen Algebra einen zentralen Platz einnimmt. Sie wird unter anderem in der Teilchenphysik und Kryptologie verwendet. (vgl. [33], 98)

Galois wurde am 25. Oktober 1811 in Bourg-la-Reine nahe Paris geboren. Sein Vater war Bürgermeister, seine Mutter unterrichtete die drei gemeinsamen Kinder selbst in klassischen Sprachen wie Latein und Griechisch. Schon mit zwölf Jahren besuchte er das *Collège Louis-le-Grand* in Paris, jedoch zeigte sich seine außergewöhnliche Begabung für Mathematik erst im Alter von 15 Jahren. Statt dem regulären Schulstoff zu folgen, widmete er sich dann lieber den Werken von Adrien-Marie Legendre und Joseph-Louis Lagrange. (vgl. [46], 133)

Mit 17 Jahren bewarb er sich ohne Vorbereitungskurs an der *École Polytechnique*, einer der angesehensten Hochschulen Frankreichs, scheiterte jedoch an der Aufnahmeprüfung. Dennoch veröffentlichte er im Alter von 18 Jahren seinen ersten Aufsatz über Kettenbrüche in der Fachzeitschrift *Annales de mathématique*. Wenig später reichte er auch bei der *Académie des Sciences* zwei Arbeiten zur Lösbarkeit von Gleichungen ein.

Ein tragisches Ereignis prägte das Jahr 1829: sein Vater, ein überzeugter Liberaler, nahm sich nach einer politischen Intrige das Leben. Trotzdem versuchte Galois erneut, an die elitäre *École Polytechnique* aufgenommen zu werden, bestand aber wieder nicht.<sup>7</sup>

Gegen Ende des Jahres 1829 bestand Galois mit einiger Mühe das *Baccalauréat*, die reguläre Abschlussprüfung, und erhielt anschließend die Zulassung zur *École Normale Supérieure*. (vgl. [10], 101f., [46], 133f., [51], 72)

Kurz darauf reichte er bei Augustin-Louis Cauchy eine neue Abhandlung zur Lösbarkeit von Gleichungen ein. Cauchy machte ihn jedoch darauf aufmerksam, dass Teile seiner Arbeit mit Ergebnissen des bereits verstorbenen Niels Henrik Abel übereinstimmten. Daraufhin verfasste Galois im Februar 1830 einen überarbeiteten Beitrag, dessen Begutachtung Joseph Fourier übernehmen sollte. Fourier starb jedoch überraschend im April desselben Jahres, und das Manuskript von Galois ging in seinen Unterlagen verloren. Galois erhielt die Nachricht erst im Juni, dass der Akademiepreis posthum an Abel vergeben worden war und, dass seine eigene Arbeit überhaupt nicht zur Begutachtung gelangt war. (vgl. [46], 134)

Parallel zu dem Einreichen bzw. Ablehnen von seinen Schriften, verschärfte sich die politische Lage in Frankreich. Galois engagierte sich in der republikanischen Bewegung, was mehrfach zu Verhaftungen und Schulverweisungen führte. Im Mai 1832 forderte

---

<sup>7</sup>Galois fiel es schwer nachzuvollziehen, weshalb er Dinge beweisen sollte, die ihm selbst völlig klar und als selbstverständlich erschienen. Zwei Jahrzehnte später kommentierten die *Nouvelles Annales Mathématiques* diesen Vorfall mit den Worten, ein Prüfling von herausragender Intelligenz sei an der geringeren Intelligenz seines Prüfers gescheitert. (vgl. [46], 133f.)

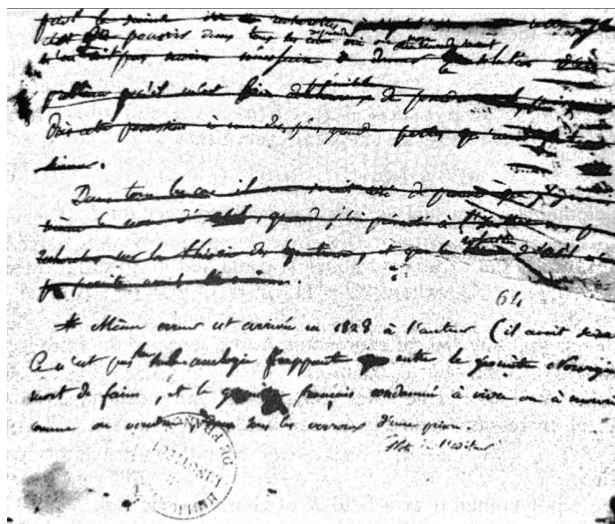


Abbildung 4: Galois glaubte zunächst, das Gleichungsproblem fünften Grades gelöst zu haben, revidierte seine Ansicht jedoch später.

Quelle: Stewart [42, 127].

ihn ein politischer Gegner zu einem Duell heraus. In der Nacht vor dem Duell verfasste er in dem Bewusstsein seines möglichen Todes eine Zusammenfassung seiner zentralen mathematischen Ideen und übergab seine Manuskripte einem Freund mit der Bitte um Weiterleitung an bedeutende Mathematiker. Am 30. Mai wurde er schwer verwundet und starb am folgenden Tag im Alter von nur 20 Jahren. (vgl. [4, 88f.; [10, 101f., [39, 108)

Ein Bekannter ging Galois Bitte nach, schrieb seine Werke ab und schickte sie an bekannte Mathematiker, unter anderem Carl Friedrich Gauß. Eine Antwort blieb jedoch aus. Es dauerte elf Jahre, bis Joseph Liouville den Wert von Galois' Manuskripten erkannte und sie 1846 in der von ihm selbst herausgegebenen Fachzeitschrift publizierte. (vgl. [46, 132-135; [51, 72)

Mit seinen Manuskripten hinterließ Galois nicht nur einen entscheidenden Beitrag zur (modernen) Algebra, sondern auch Methoden, die bis heute das Fundament des Fachs bilden. So fasst Edmund Weitz, ein Professor der Hochschule für Angewandte Wissenschaften in Hamburg, zusammen:

Die meisten Menschen, die heutzutage an einer Universität Mathematik studieren, lernen diese Methoden im Laufe ihres Studiums in Vorlesungen zur sogenannten Galoistheorie kennen. Häufig sind sie dann schon älter, als es der Namensgeber dieser Theorie am Tag seines tödlichen Duells war. ([51, 72)

Die Lebenswege Ruffinis, Abels und Galois zeigen eindrücklich, dass mathematische Erkenntnis nicht losgelöst von historischen Entwicklungen entsteht, sondern oft unter schwierigen persönlichen und wissenschaftlichen Bedingungen erkämpft werden muss. Ihre Arbeiten markieren gemeinsam den Übergang von der klassischen Lösungsformel hin zu einer strukturellen Betrachtung von Gleichungen. (vgl. [5, v). Im folgenden Kapitel soll daher gezeigt werden, wie diese grundlegenden Ideen – insbesondere der Gedanke der Symmetrie – auch im schulischen Kontext zugänglich und erfahrbar gemacht werden können.

## 5 Abel-Ruffini-Satz in der Schulmathematik

Die Mitternachtsformel ist eines der bekanntesten Werkzeuge der Schulalgebra und symbolisiert die Erwartung, algebraische Gleichungen durch explizite Rechenformeln lösen zu können. Die hier abgebildete Karikatur eines nächtlich abgefragten Schülers bringt diese Erwartung pointiert zum Ausdruck.



Abbildung 5: KI-generierte Karikatur: Lehrer weckt Schüler um Mitternacht und fragt nach der Mitternachtsformel.

Quelle: Eigene Darstellung mit ChatGPT (OpenAI, 2026).

Die Selbstverständlichkeit, mit der hier eine allgemeine Lösungsformel erwartet wird, wirft jedoch eine grundlegende mathematische Frage auf: Kann eine solche Erwartung auch für Gleichungen höheren Grades erfüllt werden? Und wenn nicht – warum eigentlich nicht?

Genau diese Fragestellung bildet den didaktischen Ausgangspunkt für das nachfolgende Kapitel. Im Mittelpunkt steht nun nicht mehr der formale Beweis des Abel-Ruffini-Satzes, sondern die Frage, wie sich dessen zentrale Ideen greifbar für ein schulisches Wahlpflichtfach aufbereiten lassen.

Im schulischen Mathematikunterricht hat sich das algorithmische Arbeiten mit Formeln derart etabliert, dass die grundlegende Erwartungshaltung, jede Gleichung müsse sich berechnen lassen, kaum noch kritisch hinterfragt wird. Enden diese vertrauten Pfade bei Gleichungen höheren Grades, zieht die gängige Fach- und Schulliteratur oft eine abrupte Grenze. Exemplarisch hierfür steht folgende Formulierung aus einem aktuellen Lehrwerk für Studierende und Lehramtsanwärter:

„Ähnliche, aber kompliziertere Formeln mit Wurzelausdrücken gibt es auch für Polynome vom Grad 3 und 4; ab Grad 5 sind solche Formeln unmöglich. Das ist ein klassisches Ergebnis der ‚höheren‘ Algebra.“ ([17], 166)

Aus fachdidaktischer Perspektive greift ein solches dogmatisches Schließen des Themas zu kurz. Es vermittelt den Eindruck, als sei es Lernenden nicht zumutbar, mathematische Ideen nachzuvollziehen, die über das bloße Anwenden bekannter Lösungsformeln hinausgehen. Eine solche Reduktion auf reine Rechenwege bestätigt Dantzig's Kritik, dass Schullehrpläne die Mathematik ihres kulturellen Gehalts beraubten und lediglich ein 'dürres Gerüst technischer Verfahren' zurückließen (vgl. [13], xvii). Dabei birgt gerade die Thematisierung dieser scheinbaren 'Unmöglichkeit' ein enormes didaktisches Potenzial. Dass Schülerinnen und Schüler durchaus in der Lage sind, komplexe

strukturelle Zusammenhänge zu durchdringen, demonstrierte der Mathematiker V. I. Arnold bereits in den 1960er Jahren eindrucksvoll. Er resümierte über seine Arbeit mit High-School-Klassen:

“I had given to Moscow High School children in 1963–1964 a (half year long) course of lectures, containing the topological proof of the Abel theorem.” ([3], ix)

Zwar sprengt Arnolds tiefgreifender topologischer Zugang den Rahmen eines regulären Schulunterrichts, doch seine Erfahrungen belegen: Lernende können an anspruchsvollen abstrakten Konzepten wachsen, selbst wenn sie die finale formale Beweisführung noch nicht im universitären Detailgrad beherrschen. Im didaktischen Fokus steht hierbei nicht die lückenlose Abhandlung der abstrakten Algebra, sondern das Erleben mathematischer Tiefe und methodischer Vielfalt.

Um dieses Ziel zu erreichen, leitet das nachfolgende Kapitel zunächst fachlich und didaktisch her, weshalb das Abel-Ruffini-Theorem ein hervorragendes Thema für ein mathematisches Wahlpflichtfach darstellt, bevor der detaillierte Unterrichtsvorschlag präsentiert wird. Zur direkten Erleichterung der Unterrichtspraxis sind dabei alle grau markierten Boxen bereits so aufbereitet, dass sie unverändert als Lehrmaterial an die Klasse ausgeteilt werden können.

## 5.1 Von Abel zu Galois: Symmetrien erfahrbar machen

Die Entscheidung, im Anschluss an Abels Unmöglichkeitbeweis gezielt Übungen auf Basis der Ideen von Évariste Galois zu behandeln, folgt einer klaren inhaltlichen Logik. Während das Theorem von Abel und Ruffini ein fundamentales negatives Resultat liefert – den Nachweis, dass die allgemeine Polynomgleichung vom Grad  $n \geq 5$  nicht durch Radikale auflösbar ist –, bietet erst die Galoistheorie den strukturellen Erklärungsrahmen für dieses Phänomen. Abels Beweis beantwortet die Frage nach dem *Dass*, lässt die tieferliegenden Symmetrieeigenschaften der Gleichungen jedoch weitgehend unberührt.

Die anschließenden Aufgaben dienen daher dem Zweck, den historischen und konzeptionellen Übergang von der klassischen Gleichungslehre zur modernen Strukturmathematik didaktisch nachzuvollziehen. Dabei wird bewusst eine Brücke über jene Kluft geschlagen, die in der universitären Mathematik oft herrscht, wie das folgende Zitat verdeutlicht:

„Professionelle Mathematiker interessieren sich nicht sonderlich für das, was außerhalb der Mathematik üblich oder nützlich ist. Algebraiker untersuchen Strukturen, die sie interessant oder elegant finden, unabhängig davon, ob diese in unserer Welt vorkommen oder nicht.“ ([7], 116)

Im schulischen Kontext muss diese abstrakte Herangehensweise aufgebrochen werden. Der in den nächsten Unterkapiteln vorgestellte Unterrichtsvorschlag verfolgt dieses Ziel durch das Prinzip des produktiven Übens. Die Lernenden erkunden elementare Situationen aus der ihnen vertrauten Variablenalgebra. Sie lösen quadratische sowie biquadratische Gleichungen und betrachten diese vertrauten Inhalte aus einer neuen Perspektive. Sie erkennen schrittweise, dass Lösungen keine isolierten Zahlen sind, sondern durch Beziehungen und Symmetrien verknüpft sind. Die zentrale Einsicht – dass mit zunehmender Einschränkung dieser Symmetrien die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein expliziter Lösungsformeln steigt – lässt sich auf Schulniveau zwar nicht formal beweisen, wohl aber anschaulich erleben. (vgl. [30])

## 5.2 Konzeptionelle Umsetzung im Wahlpflichtfach

Für eine konkrete Umsetzung im Unterricht müssen selbstverständlich verschiedene Faktoren beachtet werden: Die Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler, der zur Verfügung stehende Zeitrahmen sowie die ideale Sozialform für die jeweilige Wahlpflichtfachgruppe spielen eine entscheidende Rolle. Die nachfolgend vorgestellten Arbeitsblätter und Aufgaben verstehen sich daher als konzeptionelle Vorlage. Sie bieten Raum für individuelle Anpassungen und maßgeschneiderte Unterrichtsformen, um Lehrkräften die Möglichkeit zu geben, die abstrakten Ideen der höheren Algebra lebendig und begreifbar in den Schulalltag zu integrieren.

## 5.3 Einschub: Wie wird im Regelunterricht auf Lösungsformeln vorbereitet?

Um die didaktische Einordnung der folgenden Unterrichtseinheit zu begründen, ist es zunächst sinnvoll, den üblichen schulischen Zugang zu algebraischen Gleichungen zu betrachten. Insbesondere soll untersucht werden, wie Lernende im Regelunterricht an Lösungsformeln herangeführt werden und welche Rolle dabei algorithmische Verfahren spielen.

Ein Blick in das Lehrwerk „Lösungswege 5“ des öbv-Verlags zeigt einen klar strukturierten und progressiven Aufbau zur Einführung quadratischer Gleichungen (vgl. [19]). Dieser Aufbau folgt dem sogenannten *Spiralprinzip*, nach dem zentrale Inhalte wiederholt aufgegriffen und schrittweise auf einem höheren Abstraktionsniveau vertieft werden (vgl. [49], 21). Ziel dieses Vorgehens ist es, durch wiederholte Begegnungen mit einem Thema ein zunehmend tieferes Verständnis zu ermöglichen.

Zunächst erfolgt eine Definition quadratischer Gleichungen. Anschließend werden verschiedene Spezialfälle systematisch behandelt. Dabei beginnt die Darstellung mit Gleichungen der Form  $a \cdot x^2 + c = 0$ , wobei grundlegende Begriffe wie die Quadratwurzel wiederholt und die Anzahl möglicher Lösungen thematisiert werden. Darauf aufbauend werden Gleichungen der Form  $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$  behandelt, wobei insbesondere der Produkt-Null-Satz zur Anwendung kommt.

Im nächsten Schritt wird die normierte Form  $x^2 + p \cdot x + q = 0$  eingeführt. In diesem Zusammenhang werden die kleine Lösungsformel sowie die Diskriminante definiert und zur Unterscheidung verschiedener Lösungsfälle verwendet. Abschließend wird die allgemeine Form  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  betrachtet und die große Lösungsformel eingeführt.

Die im Lehrwerk formulierten Lernziele verdeutlichen eine klare Ausrichtung auf das sichere Anwenden dieser Verfahren. So sollen Lernende quadratische Gleichungen lösen, die entsprechenden Lösungsformeln anwenden sowie mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Lösungen bestimmen können (vgl. [19], 87).

Auch die für die schriftliche Reifeprüfung formulierten Grundkompetenzen unterstreichen diesen Fokus auf prozedurales Wissen und algorithmische Verfahren:

- AG-R 1.2<sup>8</sup> Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können:[...] Gleichungen, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit
- AG-R 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, [...]

Diese Vorgaben machen deutlich, dass insbesondere das Umformen, Anwenden und Klassifizieren von Lösungsverfahren im Vordergrund steht.

---

<sup>8</sup>Diese Abkürzung (AG) steht für Inhalt des Grundkompetenzkatalogs in Bezug auf Algebra und Geometrie für die schriftliche Reifeprüfung. (vgl. [12], 2)

Ein ähnliches Bild zeigt sich auch in anderen Schulbüchern, etwa in „Mathematik verstehen 7“. Dort wird die folgende zentrale Einschränkung explizit formuliert:

„Für algebraische Gleichungen vom Grad 2 kennen wir Lösungsformeln, für algebraische Gleichungen mit höherem Grad jedoch nicht. Im Folgenden besprechen wir einige Methoden, die zum Lösen solcher Gleichungen ohne Technologieeinsatz nützlich sein können ([32], 7).“

Statt allgemeiner Lösungsformeln werden anschließend alternative Verfahren wie das Anwenden binomischer Formeln, Substitution, das Herausheben von Faktoren oder die Polynomdivision behandelt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der schulische Zugang stark auf algorithmische Verfahren und konkrete Lösungsstrategien fokussiert ist. Gleichungen werden primär als Objekte betrachtet, die durch geeignete Umformungen und bekannte Verfahren gelöst werden können. Die Frage nach den strukturellen Hintergründen dieser Verfahren sowie nach deren Grenzen bleibt hingegen weitgehend unbehandelt.

Gerade an dieser Stelle setzt die vorliegende Unterrichtseinheit an. Aufbauend auf den bekannten Lösungsverfahren wird der Blick gezielt auf deren Grenzen gelenkt. Insbesondere wird die Frage thematisiert, warum sich Gleichungen höheren Grades im Allgemeinen nicht durch Radikale lösen lassen. Damit wird ein Perspektivwechsel eingeleitet, der von einem rein algorithmischen Verständnis hin zu einem strukturellen Zugang führt und im weiteren Verlauf über den Abel-Ruffini-Satz vertieft wird.

## 5.4 Warum eignet sich der Abel-Ruffini-Satz als Schnittstelle zwischen Schul- und Fachmathematik?

### 5.4.1 fachdidaktische Sichtweise

Wie kann man die Behandlung des Abel-Ruffini-Satzes im Wahlpflichtfach begründen? Die didaktische Legitimation für die Behandlung des Abel-Ruffini-Satzes im schulischen Wahlpflichtfach lässt sich fundiert durch die in der Mathematikdidaktik etablierten normativen Ziele begründen. Einen zentralen Orientierungsrahmen bilden hierbei die drei von Heinrich Winter formulierten Grunderfahrungen. Winter postuliert, dass ein bildender Mathematikunterricht anstreben sollte, den Lernenden folgende (vielfältig miteinander verknüpfte) Erfahrungen zu ermöglichen:

- (G1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
  - (G2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
  - (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten (heuristische Fähigkeiten) die über die Mathematik hinaus gehen, zu erwerben.
- ([54], 35)

Der Begriff *Erfahrung* verdeutlicht, dass Mathematiklernen weit über das bloße Auswendiglernen und Speichern von Informationen - z. B. eben die „kleine/große Lösungsformel“ im Regelunterricht - hinausgeht. Es geht darum, Mathematik unmittelbar zu erleben (oder erleiden) beziehungsweise sich einfach aktiv mit ihr auseinanderzusetzen. (vgl. [54], 36) In seiner Einleitung formuliert Winter hierzu pointiert:

Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller [...], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckenden Unternehmungen beruht. ([55], 1)

Dieser Anspruch deckt sich mit dem berühmten Diktum des Philosophen Alfred North Whitehead: „Ideen halten sich nicht. Es muss etwas mit ihnen getan werden.“ ([52], 100) Genau an diesem Punkt der aktiven Auseinandersetzung entfaltet der Abel-Ruffini-Satz – die Erkenntnis, dass es keine allgemeine Lösungsformel mit Radikalen für Gleichungen ab dem 5. Grad gibt – sein volles didaktisches Potenzial. Die Übertragung von Winters Grunderfahrungen auf diese Thematik lässt sich wie folgt konkretisieren:

### **G1. Mathematik als Mittel zur Erfassung der Welt:**

Im Mathematikunterricht lernen Schüler\*innen zunächst, wie sich viele Probleme der Welt durch Gleichungen beschreiben und mithilfe von Lösungsformeln bearbeiten lassen – etwa beim Berechnen von Wurfparabeln, Wachstumsprozessen oder geometrischen Zusammenhängen. Quadratische, kubische und quartische Gleichungen zeigen eindrücklich, dass die Mathematik Werkzeuge bereitstellt, mit denen sich Phänomene der Wirklichkeit erfassen und berechnen lassen.

Beim Übergang zu Gleichungen 5. Grades wird jedoch sichtbar, dass dieses Werkzeug Grenzen hat: Der Abel-Ruffini-Satz zeigt, dass es keine allgemeine Lösungsformel in Radikalen mehr gibt. Für die Schüler\*innen wird dadurch erfahrbar, dass Mathematik nicht einfach ein „Allzweckrezept“ für die Welt ist, sondern ein System, das auch die Grenzen seiner eigenen Mittel offenlegt. Gerade darin liegt eine wichtige Einsicht: Die Welt lässt sich zwar mit mathematischen Modellen strukturieren, doch diese Modelle haben selbst wieder Bedingungen und Einschränkungen.

So wird Mathematik im Sinne Winters als Mittel zur Erfassung der Welt deutlich – nicht nur, indem sie Antworten liefert, sondern auch, indem sie die Reichweite und die Begrenztheit dieser Antworten sichtbar macht.

### **G2. Schüler\*Innen erleben den Aufbau mathematischer Strukturen:**

Die Beschäftigung mit der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen macht deutlich, dass allgemeine Lösungsverfahren nicht allein von geschickten Umformungen abhängen, sondern von der Struktur der jeweiligen Gleichung. Im Umfeld des Abel-Ruffini-Satzes treten dabei grundlegende Konzepte wie *Gruppen*, *Körpererweiterungen* und schließlich die *Galois-Theorie* in den Vordergrund. Schüler\*innen können auf diese Weise erfahren, dass Formeln und Rechenverfahren nicht immer ausreichen, sondern dass *Beziehungen* und *Strukturen* eine zentrale Rolle spielen.

Auch ohne den vollständigen Beweis des Abel-Ruffini-Satzes zu behandeln, lässt sich die Idee vermitteln, dass Mathematik nicht nur Verfahren bereitstellt, sondern auch deren Grenzen präzise begründen kann. So wird Mathematik als ein kohärentes System aus *Begriffen*, *Beziehungen* und *Strukturen* erfahrbar, in dem Einsichten nicht nur ausprobiert, sondern argumentativ abgesichert werden.

### **G3. Schüler\*Innen sind geistig aktiv**

Da die Existenz einer allgemeinen Lösungsformel für Gleichungen ab dem 5. Grad mathematisch ausgeschlossen ist, fordert dieses Problem alternative Herangehensweisen. Der Unmöglichkeitsbeweis liefert keine universellen Rezepte, sondern regt die Lernenden dazu an, ihr eigenes Handlungsrepertoire zu erweitern. Dies eröffnet Räume für heuristisches Problemlösen: Wenn keine Formel existiert, wie lassen sich Nullstellen dennoch finden? Hier bietet sich der gezielte Einsatz von

Technologie und dynamischer Geometrie-Software (wie GeoGebra) an. Durch numerische Verfahren, Näherungslösungen oder graphische Methoden untersuchen die Lernenden Beispiele, erkennen Muster und bilden eigene Hypothesen. Mathematik wird so nicht als fertiges Wissen, sondern als aktiver Forschungsprozess erlebt.

Die Auseinandersetzung mit dem Abel-Ruffini-Satz ist ein ideales Beispiel für die Umsetzung der drei zentralen Grunderfahrungen im Mathematikunterricht: Mathematik ist nicht nur Rechnen. Es geht viel mehr um das Verstehen von Strukturen, das Entwickeln von Strategien und das Begründen von Zusammenhängen.

**Rahmenbedingungen im Wahlpflichtfach** Neben den allgemeinbildenden Zielen nach Winter lässt sich die Behandlung zentraler Ideen im Umfeld des Abel-Ruffini-Satzes im Wahlpflichtfach Mathematik auch durch die curricularen Vorgaben der gymnasialen Oberstufe begründen. Ein zentraler Bildungsauftrag in dieser Schulstufe – und ganz besonders in den vertiefenden Wahlpflichtfächern – ist die sogenannte Wissenschaftspropädeutik (vgl. [37], 267). Darunter versteht man die gezielte Vorbereitung der Lernenden auf wissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen an den Universitäten.

Der reguläre Mathematikunterricht ist oft stark anwendungsorientiert und algorithmisch geprägt. Studierende der Mathematik (und MINT-Fächer) erleben an der Hochschule jedoch häufig einen sogenannten „Praxisschock“ – ein Phänomen, das in der Fachdidaktik oft als „doppelte Diskontinuität“ bezeichnet wird (vgl. [26]) –, da dort abstrakte Strukturen, formale Strenge und das Führen von Beweisen im Zentrum stehen. Genau hier fungiert der Abel-Ruffini-Satz als ideale didaktische Brücke: Er ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern, hochschulmathematische Denkweisen (wie das Untersuchen von Gruppen und Symmetrien oder das Führen von Unmöglichkeitsbeweisen) in einem geschützten schulischen Rahmen kennenzulernen.

Damit dieser propädeutische Brückenschlag gelingt, ohne die Lernenden kognitiv zu überfordern, bedient sich der hier vorgestellte Unterrichtsvorschlag des Prinzips der didaktischen Reduktion bzw. Elementarisierung (vgl. [27], 11-27). Das bedeutet, dass der mathematische Sachverhalt zwar auf ein schulgerechtes Niveau elementarisiert wird, dabei aber sachlich absolut korrekt bleibt. Es wird bewusst darauf verzichtet, den Unmöglichkeitsbeweis in seiner vollen algebraischen Strenge (mit abstrakter Körpertheorie und Normalteilern) zu führen. Stattdessen wird die Kernidee des Beweises – die Beobachtung und Einschränkung von Symmetrien bei Vertauschungen der Nullstellen – in den Mittelpunkt gerückt und an elementaren, vertrauten Beispielen erfahrbar gemacht.

Die Lernenden üben sich dadurch im wissenschaftlichen Argumentieren und Abstrahieren, erwerben vertiefte Problemlösekompetenzen und erfüllen somit passgenau das Anforderungsprofil eines anspruchsvollen, propädeutischen Wahlpflichtfachs.

### 5.4.2 fachliche Sichtweise

Nachdem die didaktische und propädeutische Eignung des Abel-Ruffini-Satzes dargelegt wurde, stellt sich die Frage nach seiner rein fachlichen Legitimation als Brückenthema. Warum eignet sich genau dieses Theorem aus mathematischer Sicht so hervorragend, um den Übergang zwischen Sekundarstufe II und Universität zu erleichtern? Einen prägnanten Erklärungsansatz liefert eine direkte Gegenüberstellung der jeweiligen mathematischen Paradigmen (siehe nachfolgende Tabelle).

| Merkmale               | Schulmathematik (Sek. II)                                  | Fachmathematik                                                                                                 |
|------------------------|------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| zentrales Werkzeug     | Diskriminante $D$ (z. B. $b^2 - 4ac$ )                     | Körpererweiterungen, Symmetrien der Nullstellen, Resolventen                                                   |
| Gleichungstyp          | meistens quadratisch ( $n = 2$ )                           | allgemeine Polynomgleichung vom Grad $n$                                                                       |
| mathematische Form     | Ausdruck in den Koeffizienten (z. B. $a, b, c$ )           | Nullstellen im Zerfällungskörper und ihre Symmetrien                                                           |
| Leitfrage/Fokus        | Rechnen: "Was kommt unter die Wurzel?"                     | Struktur: "Wie hängen die Nullstellen und Symmetrie zusammen?"; Frage der Irreduzibilität                      |
| Form der Lösung        | feste Lösungsformel (z. B. Mitternachtsformel)             | strukturelle Konstruktion über Erweiterungen, da keine allgemeine (universelle) Formel ab $n \geq 5$ existiert |
| Radikal-Schritt        | ziehen der $\sqrt{D}$ zur Bestimmung der Lösungen          | ziehen geeigneter $n$ -ter Wurzeln zur Konstruktion von Körpererweiterungen                                    |
| Abstraktionsgrad       | konkret, zahlenbasiert                                     | abstrakt, strukturbasiert                                                                                      |
| begrifflicher Rahmen   | rechnerisch, elementare Algebra                            | Körpertheorie, Galoistheorie                                                                                   |
| Umgang mit Nullstellen | Nullstellen als Endziel                                    | Nullstellen als Objekte mit Symmetriebeziehungen                                                               |
| Interpretation         | Entscheidungshilfe: "Gibt es 0, 1 oder 2 reelle Lösungen?" | Strukturanalyse: „Ist die Galois-Gruppe auflösbar?"                                                            |

Tabelle 1: Vergleich: Schulmathe vs. Fachmathe

Quelle: Eigene Darstellung.

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik stellt für viele Studierende eine zentrale Herausforderung dar, die weit über eine bloße Steigerung der inhaltlichen Komplexität hinausgeht. Wie in der fachdidaktischen Forschung immer wieder betont wird, reicht ein rein inhaltlicher Fokus – etwa der Versuch, vermeintliche Wissenslücken zu schließen – nicht aus, um diese Phase erfolgreich zu meistern. Vielmehr spielen metakognitive Kompetenzen und Selbstregulation eine entscheidende Rolle (vgl. [8], 689). Dieser Übergang wird in der Literatur oft als vielschichtiges Phänomen und regelrechtes „Übergangsritual“ beschrieben, das mit einem radikalen Bruch bisheriger Denk- und Arbeitsweisen einhergeht. Die Studierenden erleben einen tiefgreifenden Wechsel: von einer instrumentellen, auf Rechenverfahren und Algorithmen ausgerichteten Schulmathematik hin zu einer relationalen, strukturorientierten Hochschulmathematik. Damit verbunden sind enorme Veränderungen im geforderten Abstraktionsniveau, in der Bedeutung mathematischer Begrifflichkeiten sowie in der Art und Weise, wie Erkenntnisse verstanden und streng bewiesen werden (vgl. ebd.).

Ein zentrales Problem in dieser Phase besteht darin, dass Strategien, die in der Schule stets zum Erfolg führten – wie etwa das schematische Anwenden bekannter Lösungsformeln –, an der Universität plötzlich ins Leere laufen. An ihre Stelle tritt die zwingende Notwendigkeit, mathematische Strukturen zu durchdringen sowie Zusammenhänge eigenständig zu analysieren und zu begründen. Diese drastische Umstellung betrifft nicht nur kognitive Anforderungen, sondern löst häufig auch emotionale und soziale Anpassungsprozesse aus.

Vor diesem Hintergrund bietet die Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale eine geeignete fachliche Schnittstelle. Während die Schulmathematik algebraische Gleichungen fast ausschließlich über explizite, berechenbare Lösungsformeln (etwa die Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen) definiert und abarbeitet, zeigt der Abel-Ruffini-Satz erstmals eine fundamentale, unüberwindbare Grenze dieses algorithmischen Vorgehens auf. Er zwingt die Lernenden förmlich dazu, die gewohnte Leitfrage „Was kommt unter die Wurzel?“ aufzugeben und stattdessen die universitäre Leitperspektive einzunehmen: „Wie hängen die Nullstellen und ihre Symmetrien strukturell zusammen?“ Damit eröffnet das Theorem einen natürlichen, inhaltlich zwingenden Zugang zu den zentralen Ideen der höheren Algebra und macht die Notwendigkeit abstrakter Strukturuntersuchungen für die Lernenden unmittelbar einsichtig.

Dieser fachliche Paradigmenwechsel zeigt sich besonders deutlich an zwei zentralen Aspekten: Erstens erleben die Lernenden mit dem Abel-Ruffini-Theorem oft zum ersten Mal einen echten Unmöglichkeitbeweis. Während die Schulmathematik primär konstruktiv vorgeht (etwa durch das Berechnen eines konkreten Wertes), erfordert der logische Nachweis, dass eine allgemeine Formel nicht existiert, ein völlig neues, abstraktes Denken. Dies markiert einen entscheidenden epistemologischen Bruch.

Zweitens wandelt sich der Begriff der Wurzel fundamental: In der Sekundarstufe ist eine Wurzel primär eine reelle Zahl oder ein rein operativer Rechenbefehl. Im fachmathematischen Kontext des Abel-Ruffini-Beweises – wie bereits bei der Betrachtung der Radikalerweiterung  $\mathbb{C}(s_1, \dots, s_n)$  am Anfang dieser Arbeit dargelegt – wird die Wurzel hingegen als strukturgebendes Element einer abstrakten Körpererweiterung verstanden. Genau dieser Perspektivenwechsel vom bloßen Rechnen zum algebraischen Strukturieren macht den Satz zu einem so wertvollen didaktischen Werkzeug für den Übergang an die Hochschule.

Um diesen abstrakten Perspektivenwechsel nicht nur theoretisch zu fordern, sondern für die Lernenden aktiv erfahrbar zu machen, bedarf es einer gezielten unterrichtspraktischen Umsetzung. Das nachfolgende Kapitel widmet sich genau dieser Aufgabe: Es präsentiert ein konkretes Unterrichtskonzept nebst zugehörigen Übungen, das aufzeigt, wie sich die fundamentalen Ideen der Galoistheorie im Rahmen des produktiven Übens elementarisieren und gewinnbringend in die Schulpraxis integrieren lassen.

## 5.5 Unterrichtsvorschlag zum Abel–Ruffini-Satz: vom algorithmischen zum strukturellen Verständnis

Die nachfolgende Unterrichtseinheit stellt einen möglichen Zugang dar, um den Abel–Ruffini-Satz im Wahlpflichtfach Mathematik (7./8. Klasse) aufzugreifen. Sie versteht sich nicht als verbindliches Konzept, sondern als exemplarischer Impuls, wie fachmathematische Inhalte in den schulischen Kontext überführt werden können. Je nach Zusammensetzung der Lerngruppe, deren Vorkenntnissen und Interessen kann bzw. muss das Thema durch zusätzliche Materialien, Visualisierungen oder alternative Methoden angepasst und vertieft werden.

- Thema: Gleichungen 5. Grades – Formeln funktionieren (fast) immer ...
- Dauer: 4 - 6 Unterrichtseinheiten à 50 Minuten
- Lernziele: Nach Abschluss der Einheiten sollen die Schüler\*innen des Wahlpflichtfaches:
  - den Begriff der Unlösbarkeit durch Radikale definieren können und wissen, dass es für algebraische Gleichungen ab dem 5. Grad keine allgemeine Lösungsformel gibt. (*fachlich*)
  - den Übergang von rein rechnerisch-algorithmischen Lösungsstrategien hin zu strukturellem Denken nachvollziehen. (*methodisch*)
  - den Satz in die Geschichte der Mathematik einordnen und dabei begreifen, dass mathematische Erkenntnis ein langer Prozess ist, der stark davon geprägt ist, alte Rechenwege zu hinterfragen, logische Grenzen zu akzeptieren und abstrakte Zusammenhänge zu beweisen. (*historisch und prozessbezogen*)

Der Unterrichtsverlauf beginnt mit einer Wiederholung zentraler Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen, wobei anhand ausgewählter Aufgaben sowohl die Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen als auch die Cardano-Formel für kubische Gleichungen reaktiviert werden. Darauf aufbauend werden die Lernenden durch Übungen zur Strukturalgebra schrittweise an ein vertieftes Verständnis von Zusammenhängen zwischen Nullstellen und Koeffizienten herangeführt. Wie bereits in der Einleitung dieses Unterkapitels erwähnt, sind alle grau markierten Boxen bereits didaktisch so aufbereitet, dass sie den Schülerinnen und Schülern unverändert vorgelegt werden können. Im Anschluss erfolgt eine inhaltlich reduzierte und didaktisch aufbereitete Darstellung des Abel–Ruffini-Satzes, die insbesondere die Grenzen der Lösbarkeit von Gleichungen durch Radikale thematisiert. Ein historischer Rückblick dient dazu, die mathematische Entwicklung und die Bedeutung des Satzes einzuordnen. Ergänzend werden numerische Näherungsverfahren, insbesondere das Newton-Verfahren, eingeführt, um alternative Zugänge zur Bestimmung von Lösungen aufzuzeigen. Die Einheit schließt mit einer Reflexionsphase ab, in der zentrale Inhalte aufgegriffen, miteinander verknüpft und übergeordnet eingeordnet werden. Gleichzeitig dient diese Phase der Überprüfung, inwieweit die angestrebten Lernziele erreicht wurden.

*Methodischer Exkurs: Historische Kontextualisierung durch digitale Medien*

Ein zentrales methodisches Element zur Unterstützung des historisch-genetischen Lernens bildet die Integration einer interaktiven digitalen Zeitleiste (z. B. Mathigon (<https://de.mathigon.org/timeline>)). Der Einsatz dieses Tools – sei es als Einstiegsimpuls, als weiterführendes Material oder zur Binnendifferenzierung für schneller arbeitende Lernende – visualisiert eindrücklich den Prozesscharakter der Mathematik.

Die chronologische Darstellung ermöglicht es den Lernenden, die Verbindungen zwischen verschiedenen Epochen und theoretischen Fortschritten (wie der Entwicklung der

Analysis, Zahlentheorie oder Topologie) anschaulich nachzuvollziehen. Dadurch wird das Verständnis gefördert, dass bahnbrechende Erkenntnisse wie der Abel-Ruffini-Satz keine isolierten „Entdeckungen“ sind, sondern das Resultat eines langen, iterativen Forschungsprozesses. Gleichzeitig wird den Lernenden vermittelt, dass Irrtümer, ungelöste Fragestellungen und jahrelanges Rätseln selbst bei herausragenden Mathematikerinnen und Mathematikern ein natürlicher Teil des intellektuellen Fortschritts sind.

### 5.5.1 Einstieg – „Formeln funktionieren (fast) immer...?“

#### Einstiegsübung 1

Wie würden wir aktuell diese Gleichung 5. Grades lösen? Welche Methoden kennen wir zur Lösung von Gleichungen bzw. welche können wir hier anwenden?

$$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$$

Hier bietet es sich an, die Methode des Faktorisierens bzw. Herauszuhebens mit den Lernenden zu wiederholen:

$$\begin{aligned} x^5 - 5x^3 + 4x &= x(x^4 - 5x^2 + 4) \\ &= x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \end{aligned}$$

Dann kann man direkt die Nullstellen, also die Lösungen der Gleichung ablesen:  $x = 0, \pm 1, \pm 2$ . Bei Bedarf kann man auch noch diese zweite Einstiegsübung mit der Klasse machen, um altes Wissen zu rekonstruieren.

#### Einstiegsübung 2

Überlege zunächst ganz intuitiv, wie „einfach“ oder „schwierig“ die folgenden Gleichungen vermutlich zu lösen sind. Schätze ein, ob du die Gleichung als *sehr einfach*, *eher einfach*, *anspruchsvoll* oder *sehr schwierig* einstufen würdest. Male bzw. kreuze dazu die passenden Smileys an.

Prüfe anschließend deine Einschätzung, indem du die Gleichungen tatsächlich zu lösen versuchst – zum Beispiel durch *Erraten von Nullstellen*, *Abspalten eines Linearfaktors* oder durch eine *geeignete Substitution* (z. B.  $y = x^2$ ).

|                           |       |                           |       |
|---------------------------|-------|---------------------------|-------|
| (1) $x^2 + 2x + 3 = 0$    | ☹☹☹☹☹ | (4) $x^3 - 1 = 0$         | ☹☹☹☹☹ |
| (2) $x^2 + 2x - 3 = 0$    | ☹☹☹☹☹ | (5) $x^3 - 3x + 2 = 0$    | ☹☹☹☹☹ |
| (3) $x^2 + 2x - 4 = 0$    | ☹☹☹☹☹ | (6) $x^3 - 3x - 1 = 0$    | ☹☹☹☹☹ |
| (7) $x^4 - 4x^3 + 27 = 0$ | ☹☹☹☹☹ | (12) $x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ | ☹☹☹☹☹ |
| (8) $x^4 - 4x^2 + 27 = 0$ | ☹☹☹☹☹ | (13) $x^5 - 2x^3 - 3 = 0$ | ☹☹☹☹☹ |
| (9) $x^4 - 4x^3 + 2 = 0$  | ☹☹☹☹☹ | (14) $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$ | ☹☹☹☹☹ |
| (10) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ | ☹☹☹☹☹ |                           |       |
| (11) $x^4 - 4x + 2 = 0$   | ☹☹☹☹☹ |                           |       |

Abbildung 6: Übung zur Einschätzung von Lösungsstrategien mithilfe von Symbolen und Reflexionsaufgaben.

Quelle: Leuders [28, 223].

Ziel der zweiten Einstiegsübung ist es, ein erstes (unbewusstes) Strukturverständnis für polynomiale Gleichungen zu entwickeln. Die Lernenden sollen ihre intuitive Einschätzung von Lösbarkeit reflektieren und durch eigenes Bearbeiten überprüfen. Dabei wird deutlich, dass die Schwierigkeit einer Gleichung nicht allein vom Grad, sondern wesentlich von ihrer algebraischen Struktur abhängt.

### 5.5.2 Von der Schulalgebra zur modernen Algebra mithilfe von Übungsaufgaben

Die folgenden zwei Aufgaben machen zentrale Ideen der Galoistheorie bereits anschaulich erfahrbar. Im Fokus stehen dabei die strukturellen Zusammenhänge und Symmetrien von Gleichungslösungen, die sich in den rechnerischen Beziehungen zwischen den einzelnen Lösungen widerspiegeln.

#### Übung 1

**1.** Die Lösungsmengen quadratischer Gleichungen sind aus dem Unterricht gut bekannt. Die folgenden Aufgaben laden dazu ein, diese vertrauten Ergebnisse noch einmal genauer zu betrachten und über ihre Struktur nachzudenken. Bei Bedarf helfen die angegebenen *Tipps* weiter.

**a)** Gib eine quadratische Gleichung der Form  $x^2 + px + q = 0$ , die folgende Lösungsmengen hat:

(1)  $L = \{2; 3\}$

(2)  $L = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$

(3)  $L = \{1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{3}\}$

(4)  $L = \{1 + \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}$

(5)  $L = \{1; \sqrt{5}\}$

(6)  $L = \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$

**b)** Erkläre deinem Sitznachbarn: Wie kommt man allgemein von den Lösungsmengen zur Gleichung?

**c)** Wodurch zeichnen sich die Lösungsmengen (3), (4) und (5) aus? Weshalb spielen derartige Lösungsmengen im Unterricht kaum eine Rolle?

**Tipp 1:** Die Gleichung

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

lässt sich unmittelbar lösen und besitzt die Lösungen 5 und  $-2$ . Sie ist zwar eine quadratische Gleichung, steht jedoch nicht in der bekannten Normalform. Wie erhält man die Normalform  $x^2 + px + q = 0$ ?

**Tipp 2:** Um eine Gleichung zu finden, die zunächst einmal **eine** bestimmte Zahl  $x$  als Lösung besitzt, kann man schrittweise die Wurzelterme durch Umstellen und Quadrieren eliminieren.

Zum Beispiel für  $x = 1 + \sqrt{5}$  kann man rechnen:

$$x - 1 = \sqrt{5},$$

$$(x - 1)^2 = 5,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 5,$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0.$$

(vgl. [32], 6, 11; [18], 11; [30])

Was sollten die Lernenden in Übung 1 merken? Die Lösungen der quadratischen Gleichungen folgen einer festen Symmetriestruktur. Typischerweise treten dabei Wurzelausdrücke mit zwei entgegengesetzten Vorzeichen auf. Diese Symmetrie zeigt sich jedoch nur dann, wenn die zugrunde liegende Gleichung ganzzahlige oder zumindest rationale Koeffizienten besitzt, also ursprünglich ohne Wurzeln formuliert ist – ein Fall, der den überwiegenden Teil schulischer Aufgaben ausmacht. In solchen Situationen erscheinen in den Lösungen stets dieselben Wurzelausdrücke, und die beiden Lösungen stehen in der bekannten symmetrischen Beziehung zueinander, die auch als Konjugation bezeichnet wird. (vgl. [30])

Im Rahmen der Aufgabenbearbeitung vertiefen die Schülerinnen und Schüler zudem ihre Fertigkeiten im Multiplizieren und Vereinfachen von Wurzeltermen und rufen zugleich zentrale algebraische Konzepte wie die Produktdarstellung quadratischer Gleichungen sowie den Satz von Vieta wieder in Erinnerung. (vgl. [30])

## Übung 2

2. Bearbeite diese Aufgabe ausgehend von folgenden zwei Zahlen

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

a) Bilde möglichst viele Terme, in denen diese beiden Zahlen mithilfe der Grundrechnungsarten

$$+, -, \cdot, :$$

miteinander verknüpft werden, zum Beispiel  $x_1^2 + 2x_2^2$ . Ordne die entsprechenden Terme anschließend in zwei Gruppen ein:

- Gruppe „rational“: Terme, deren Wert rational ist, das heißt keine Wurzelterme mehr enthält,
- Gruppe „irrational“: Terme, deren Wert Wurzeln enthält, die sich nicht weiter vereinfachen lassen.

Achte dabei besonders auf die Gruppe „rational“ und versuche, möglichst viele unterschiedliche Beispiele zu finden, da sich hier interessante Zusammenhänge zeigen.

b) Vertausche in den Termen der Gruppe „rational“ die beiden Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  und berechne die Werte erneut. Welche Beobachtung kannst du dabei machen?

**Tipp 1:** Bei Unsicherheit: Beginne zunächst mit einfachen Beispielen, wie beispielsweise:

$$x_1^2, \quad x_1 + x_2, \quad x_1 - x_2, \quad x_1^3 + 2x_2, \quad \dots$$

**Tipp 2:** Ausdrücke, die Wurzeln enthalten, lassen sich häufig so umformen, dass weniger oder keine Wurzelterme mehr auftreten. Zum Beispiel gilt:

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5.$$

Dies ist auch bei Wurzeln im Nenner möglich:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Oder mittels binomischer Formel:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2}.$$

(vgl. [30])

In Aufgabe 2 steht zunächst ein offenes, exploratives Arbeiten mit Wurzeltermen im Vordergrund. Dabei wird erfahrbar, dass sich Ausdrücke mit Wurzeln bei der Verknüpfung mit den Grundrechenarten häufig vereinfachen lassen – selbst bei Divisionen, wobei hier regelmäßig an das Rationalisieren mithilfe binomischer Formeln erinnert werden muss. Bildet man beliebige Terme aus den gegebenen Ausdrücken, so enthalten diese in der Regel erneut Wurzeln. Durch gezieltes Rechnen und geschickte Kombinationen lassen sich jedoch vielfach Terme erzeugen, deren Werte keine Wurzeln mehr enthalten. Dies kann etwa durch Quadrieren oder durch ein bewusstes Ausnutzen der

Vorzeichenstruktur erreicht werden.

Die von den Schülerinnen und Schülern gefundenen rationalen Ausdrücke lassen sich dabei weiter differenzieren: Einige haben nur eine der beiden Variablen, andere haben sowohl  $x_1$  als auch  $x_2$  auf symmetrische Weise. Das zentrale, zunächst überraschende Phänomen besteht darin, dass Terme mit rationalem Wert beim Vertauschen der beiden Lösungen gleich bleiben.

Dieses Ergebnis ist keineswegs offensichtlich und fordert eine vertiefte Auseinandersetzung heraus. Die mathematische Erklärung liegt darin, dass die beiden Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  (oder auch  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$  durch keine rationale Gleichung voneinander unterschieden werden können. Zwar lassen sie sich beispielsweise durch Ordnungsrelationen auf den reellen Zahlen (z.B. eine Lösung erfüllt die Bedingung  $x > 0$ , die andere nicht) unterscheiden, doch existiert keine rationale Gleichungseigenschaft, die nur auf eine der beiden Lösungen zutrifft.

Dieser Sachverhalt erklärt rückblickend auch das Ergebnis aus Aufgabe 1: Wird eine quadratische Gleichung durch Umformungen auf eine rationale Gleichung ohne Wurzeln zurückgeführt, so erscheint zwangsläufig stets auch die zweite Lösung. In der Theorie der algebraischen Zahlen werden solche Paare als konjugierte Zahlen bezeichnet.

Die Aufgaben 1 und 2 sind somit typische Beispiele für produktive Übungsaufgaben. Einerseits ermöglichen sie ein intensives Einüben und Festigen technischer Fertigkeiten im Umgang mit Termen und Gleichungen. Andererseits sind diese technischen Übungen in inhaltlich mathematische Fragestellungen eingebettet, etwa in das Umkehrproblem (von der Lösung zur Gleichung), das Erkennen von Mustern und Strukturen sowie das schrittweise Verallgemeinern beobachteter Zusammenhänge. (vgl. [30])

Entsprechendes gilt für die nächsten Aufgaben: Neben dem Üben des Rechnens mit biquadratischen Gleichungen rückt hier insbesondere das systematische Untersuchen von Beziehungen zwischen Lösungen in den Fokus. Auf diese Weise werden strukturelle Zusammenhänge sichtbar gemacht und vertieft verstanden.

### Übung 3

**3.** Wähle eine oder mehrere der folgenden Gleichungen aus und untersuche sie mithilfe der folgenden Fragen:

(1)  $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$ ,

(2)  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

(3)  $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ ,

(4)  $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$

- a) Bestimme jeweils alle vier Lösungen  $x_1, \dots, x_4$ . (Optional: Suche die allgemeine Lösungsformel der *biquadratischen Gleichungen*:

$$x^4 + px^2 + q = 0.$$

- b) Vergleiche eure Lösungen in Partnerarbeit. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede fallen euch auf? Nummeriert die Lösungen als  $x_1, \dots, x_4$  (als Erleichterung für die folgenden Aufgaben).

- c) Konstruiere mithilfe der Lösungen möglichst viele verschiedene Terme, die einen rationalen Wert ergeben. Terme mit irrationalem Ergebnis bleiben dabei unberücksichtigt.
- d) Betrachtet die Terme, die ihr bei den Gleichungen (1)–(4) erhalten habt, im Vergleich. Welche davon funktionieren bei allen Gleichungen, welche nur bei bestimmten? Versucht zu begründen, worauf diese Unterschiede zurückzuführen sind.

**Tipp 1:** Probiere zum Beispiel die folgenden Arten von Termen aus:

- sehr einfache Terme, die zwei Variablen miteinander verknüpfen, wie  $x_1 + x_2$  oder  $x_1x_2$ ,
- Terme, die unterschiedliche Paare miteinander verbinden, zum Beispiel:  $x_1x_2 + x_3x_4$ ,
- kombinierte Terme, wie:  $x_1^2 + x_1x_2$ .

**Tipp 2:** Beim Rechnen mit Wurzeln kann man sich zunächst mit Näherungswerten behelfen und die Ergebnisse runden. Auf diese Weise erhält man jedoch keine Informationen über die exakten Lösungen und die Struktur der Lösungsmenge. Möchte man exakt arbeiten, ist es hilfreich, verschiedene Möglichkeiten zur Vereinfachung von Wurzelausdrücken zu kennen.

Einige hilfreiche Beobachtungen sind zum Beispiel:

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

oder

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}}\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{4 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{4 - 3} = \sqrt{1} = 1.$$

In manchen Fällen lässt sich die Wurzel eines Terms, der selbst Wurzeln enthält, wieder als einfacher Wurzelausdruck darstellen:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Das kann man überprüfen, indem man den rechten Term quadriert:

$$(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Nimmt man allgemein an, dass eine solche Vereinfachung möglich ist, so kann man schreiben:

$$\sqrt{a + b\sqrt{2}} = c + d\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a + b\sqrt{2} = c^2 + 2d^2 + 2cd\sqrt{2}.$$

(vgl. [\[30\]](#))

Die Aufgabe dient dazu, die Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit Wurzeln zu vertiefen und ihre Fähigkeit zu fördern, Wurzelausdrücke gezielt und effizient zu vereinfachen. Aufgrund der offenen Aufgabenstellung ergeben sich unterschiedliche Bearbeitungswege, wodurch Möglichkeiten zur Differenzierung entstehen. Gleichzeitig gestaltet sich somit aber auch die Überprüfung der Ergebnisse anspruchs-

voller. Zur Kontrolle bieten sich deshalb beispielsweise Partnerüberprüfungen oder Einsatz von CAS an.

Die Betrachtung der Gleichungen in Aufgabe 3 führt unter anderem zu folgenden Erkenntnissen:

(1) Bei der Gleichung  $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$  erhält man als Lösungen:  $x_1 = -\sqrt{3 - \sqrt{7}}$ ,  $x_2 = \sqrt{3 - \sqrt{7}}$ ,  $x_3 = -\sqrt{3 + \sqrt{7}}$  und  $x_4 = \sqrt{3 + \sqrt{7}}$ .

Direkt ins Auge fällt folgender Zusammenhang:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0.$$

Multipliziert man Lösungen miteinander, so erhält man beispielsweise:

$$x_1 \cdot x_3 = \sqrt{3 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}} = \sqrt{9 - 7} = \sqrt{2},$$

oder

$$x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{3 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{7}} = -(3 + \sqrt{7}).$$

Die Schüler\*Innen können auch weitere Beziehungen finden, wie etwa  $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$  oder  $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ .

(2) Bei der zweiten Gleichung  $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$  findet man ebenfalls den Zusammenhang, dass  $x_1 + x_2 = 0$  und  $x_3 + x_4 = 0$  sind. Diese Paarstruktur tritt bei allen biquadratischen Gleichungen aus (1) bis (4) auf. Ebenso gelten wieder  $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$  und  $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ .

Im Vergleich zu (1) ist die Symmetrie hier jedoch stärker eingeschränkt. Die beiden Nullstellenpaare lassen sich nämlich durch zusätzliche rationale Beziehungen voneinander unterscheiden: Für das Paar  $x_1, x_2$  gilt jeweils  $x^2 - 3 = 0$ , während für das Paar  $x_3, x_4$  jeweils  $x^2 - 2 = 0$  gilt. Die beiden Paare können daher nicht beliebig miteinander vertauscht werden, ohne diese Beziehungen zu verletzen. Zulässig bleiben nur die unabhängigen Vorzeichenwechsel innerhalb der beiden Paare. Diese Vertauschungen bilden die Klein'sche Vierergruppe  $V_4 = \{\text{Identität}, (12), (34), (12)(34)\}$ . (vgl. [29], 180)

(3) Zusätzlich zu den in (1) bereits beobachteten Zusammenhängen ergibt sich bei der dritten Gleichung,  $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ , eine besonders günstige Vereinfachung (analog auch für andere Paare von Lösungen):

$$x_1x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1.$$

Diese Vereinfachung ist darauf zurückzuführen, dass sich beim Multiplizieren der Wurzeln der Ausdruck unter der Wurzel zu einem Quadrat vereinfacht.

(4) Bei der vierten Gleichung  $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$  zeigt sich über die in (1) betrachteten Terme hinaus eine weitere bemerkenswerte Vereinfachung, bei der der Wurzelausdruck auf besondere Weise verschwindet:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1x_3 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ &= (2 + \sqrt{2}) - \sqrt{4 - 2} = 2. \end{aligned}$$

Solche Identitäten ergeben sich nicht unmittelbar und treten nur bei speziellen Gleichungen sowie bestimmten Kombinationen von Lösungen auf. Entsprechende Zusammenhänge lassen sich jedoch auch bei anderen Lösungspaaren beobachten, beispielsweise:  $x_2^2 - x_2x_4 = 2$  oder  $x_4^2 - x_4x_1 = 2$ . (vgl. [30])

#### Übung 4

4. Für alle Gleichungen (1)–(4) aus Übung 3 gelten die folgenden Beziehungen:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_1x_3 - x_2x_4 = 0, \quad x_1x_4 - x_2x_3 = 0,$$

$$x_1x_2x_3x_4 = 1 \text{ (oder ein anderer Wert)}, \quad x_1x_2 + x_3x_4 = 6 \text{ (oder ein anderer Wert)}.$$

Bei der quadratischen Gleichung konnten die beiden Lösungen beliebig vertauscht werden, ohne den Wert der Terme zu verändern. Die vier Lösungen der biquadratischen Gleichung besitzen diese Eigenschaft jedoch nicht vollständig; sie sind also nicht alle gleichwertig austauschbar. Untersuche, bei welchen der folgenden Permutationen der Wert sämtlicher Terme auf der linken Seite unverändert bleibt:

- (i) Vertausche  $x_1$  und  $x_2$  (Kurzschreibweise: (12))
- (ii) Vertausche  $x_3$  und  $x_4$  (Kurzschreibweise: (34))
- (iii) Vertausche  $x_1$  und  $x_4$  (Kurzschreibweise: (14))
- (iv) Führe gleichzeitig (i) und (ii) aus (Kurzschreibweise: (12)(34))
- (v) Tausche  $x_1$  mit  $x_3$  sowie gleichzeitig  $x_2$  mit  $x_4$  (Kurzschreibweise: (13)(24))
- (vi) Zyklische Permutation:  $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1$  (Kurzschreibweise: (1324))
- (vii) Welche weiteren Vertauschungen kannst du identifizieren? Wie viele gibt es insgesamt? Bei welchen bleibt der Wert aller Terme ebenfalls unverändert?

(vgl. [30])

Aufgabe 4 trägt im Vergleich zu den vorherigen Aufgaben weniger zum Einüben neuer Rechentechniken im Umgang mit Gleichungen und Wurzeln bei. Vielmehr wird hier ein neuer Fokus gesetzt: die Betrachtung der *Symmetrien von Lösungsmengen* durch das systematische *Permutieren der Lösungen*. Diese Art der Untersuchung ist den Schülerinnen und Schülern in der Regel ungewohnt und markiert zugleich den Übergang von der klassischen, variablenorientierten Algebra hin zur modernen, strukturell geprägten Algebra. Entsprechend ist die Aufgabe anspruchsvoll konzipiert und richtet sich primär eher an leistungsstärkere Lernende.

Im Zentrum steht die Erkenntnis, dass nur bestimmte Vertauschungen der Lösungen alle betrachteten Terme invariant lassen, das heißt ihren Wert unverändert erhalten. Konkret handelt es sich um folgende Vertauschungen: {Identität,  $(1 \leftrightarrow 2)$ ,  $(3 \leftrightarrow 4)$ ,  $(1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4)$ ,  $(1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4)$ ,  $(1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3)$ ,  $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$ ,  $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ }.

In der üblichen Kurzschreibweise werden dabei die Symbole “ $\leftrightarrow$ ” und “ $\rightarrow$ ” weggelassen, sodass etwa  $(1 \leftrightarrow 2)$  als (12),  $(1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3)$  als (14)(23) und  $(1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1)$

als (1324) notiert werden.

Die restlichen der insgesamt  $4! = 24$  möglichen Permutationen der vier Lösungen lassen zwar bei einzelnen Termen den Wert unverändert, jedoch nicht bei allen. Diese Beobachtung kann im Anschluss an die Aufgabe gemeinsam im Unterricht reflektiert und diskutiert werden.

Die vorherigen Aufgaben bilden dafür ein essenzielles Fundament: Die Schülerinnen und Schüler konnten bereits umfangreiche Praxis im Handhaben von Gleichungen, Wurzeltermen und Vertauschungen erwerben sowie fundamentale Gesetzmäßigkeiten entdecken.

Auf dieser Basis lässt sich ein zentrales Strukturprinzip verdeutlichen, das auch Galois in seinen Untersuchungen nutzte: Je einfacher und weniger zahlreich die auftretenden Wurzelausdrücke sind, desto mehr Beziehungen lassen sich zwischen den Lösungen herstellen. Dadurch bleiben nur wenige Vertauschungen übrig, die alle relevanten Terme invariant lassen. Eine solche *eingeschränkte Symmetrie* korrespondiert mit der Existenz einfacher Lösungsformeln. So erlaubt etwa die quadratische Gleichung nur sehr wenige Vertauschungen der Lösungen und besitzt dementsprechend eine explizite Lösungsformel.

Évariste Galois stellte in seinen tiefergehenden Forschungen fest, dass die Gesamtheit aller erlaubten Lösungspermutationen – die später den Namen *Galoisgruppe* erhielt – maßgeblich bestimmt, wie vielschichtig die Lösungsstruktur einer Polynomgleichung ausfällt und ob eine Darstellung der Lösungen durch Radikale überhaupt möglich ist. Um diese Relation explizit im Unterricht zu thematisieren, bietet sich die Einführung der Bezeichnungen „Galoisgruppe“ beziehungsweise „Symmetriegruppe“ mithilfe des folgenden Unterkapitels an. (vgl. [30])

### 5.5.3 Exkurs in die Galoistheorie

Die folgende Übung führt die Galoistheorie nicht abstrakt ein, sondern versucht einen anschaulichen Ansatz mithilfe von Symmetrien (z. B. Quadrat drehen/spiegeln). Das Ziel der Übung ist es, dass die Lernenden erkennen, dass sich Lösungen wie geometrische Objekte mit Symmetrien verhalten. Das soll mithilfe des Vergleiches, dass die Ecken eines Quadrats quasi den Lösungen einer Gleichung und die Drehungen bzw. Spiegelungen erlaubten Vertauschungen entsprechen, passieren.

Die Galoisgruppe einer Gleichung beschreibt alle Vertauschungen der Lösungen, die sich durch Rechnen mit rationalen Ausdrücken nicht unterscheiden lassen. Sie macht damit sichtbar, welche verborgenen Beziehungen zwischen den Nullstellen bestehen, ohne dass diese durch explizite Rechnungen ermittelt werden müssen.

Aus dieser Sichtweise wird intuitiv verständlich, warum es für manche Gleichungen keine allgemeine Lösungsformel geben kann: Sind die Symmetrien der Lösungsmenge zu reichhaltig und komplex, lassen sie sich nicht durch einfache Rechenoperationen „entwirren“ und auflösen. Genau dieser strukturelle Gedanke liegt dem Satz von Abel-Ruffini zugrunde und wird in der Galoistheorie konsequent weitergeführt.

Um die Schülerinnen und Schüler an diese neue Denkweise heranzuführen, dient die folgende Aufgabe als Einstieg. Sie verlagert das Problem zunächst vollständig in die bekannte Welt der Geometrie.

#### Übung 5 - Exkurs in Galoistheorie

Das unten dargestellte Quadrat kann gedreht, gespiegelt sowie insgesamt umgeklappt werden. Untersuche alle möglichen Abbildungen und notiere jeweils, welche Ecken auf welche anderen Ecken abgebildet werden.

**Beispiel:** Bei einer Spiegelung an einer Diagonalen werden die Ecken 1 und 2 vertauscht, kurz: (12).

Welche Gemeinsamkeiten bestehen zwischen diesen Abbildungen und den möglichen Vertauschungen von Lösungen einer Gleichung?

*Tip:* Überlege dir zunächst, welche Bewegungen das Quadrat insgesamt unverändert lassen (z. B. Drehungen oder Spiegelungen). Verfolge dabei genau, wohin jede Ecke abgebildet wird. Notiere die Abbildungen systematisch und achte darauf, ob sich bestimmte Vertauschungen wiederholen oder kombinieren lassen. (vgl. [30])

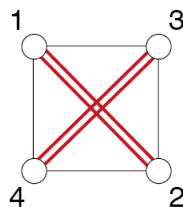


Abbildung 7: Quadrat für Übung 5.

Quelle: Leuders [29, 179].

Obwohl die nachstehenden Ergebnisse in einer stark verdichteten, finalen Form präsentiert werden, erfordert die schulische Umsetzung meist ein schrittweises Vorgehen. Um

den Schülerinnen und Schülern die zugrunde liegenden Strukturen zugänglich zu machen, sollten Zwischenerkenntnisse immer wieder im Klassenverband gesammelt und diskutiert werden. Eine bewährte Möglichkeit, die Lernenden an diese Herangehensweise heranzuführen, besteht darin, das Beispiel zum Dreieck (siehe Anhang) zunächst als gemeinsamen Einstieg durchzuarbeiten.

Haben die Lernenden die Vertauschungen des Quadrats systematisch erfasst, lässt sich der formale Rahmen der Galoistheorie einführen:

**Definition: (Galois-)Gruppe**

Die möglichen Vertauschungen der Lösungen, bei denen alle aus diesen Lösungen gebildeten Ausdrücke unverändert bleiben, bilden eine sogenannte *Gruppe*:

$$G = \{(1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}.$$

Das bedeutet, dass sich diese Vertauschungen auch hintereinander ausführen lassen und dabei wieder eine zulässige Vertauschung entsteht. So ergibt zum Beispiel die Ausführung von (12) gefolgt von (34) die Vertauschung (12)(34). Ebenso führt die Hintereinanderausführung von (12) und (13)(24) zu (1423). Die Gruppe  $G$  enthält damit alle Informationen über die Symmetrien der Lösungen der biquadratischen Gleichung. Sie wird daher als *Galoisgruppe der Gleichung* bezeichnet.

Der entscheidende didaktische Schritt besteht nun darin, diese geometrische Gruppe mit einer konkreten algebraischen Gleichung zu verknüpfen. Die Galoisgruppe der Gleichung  $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$  ist dieselbe Gruppe wie die Symmetriegruppe der Abbildungen eines Quadrates auf sich selbst. Die Gleichung besitzt somit die Symmetrie eines Quadrates. (Die Gleichung hat somit im übertragenen Sinne die "Form eines Quadrats".)

Die nächsten Beispielsgleichungen weisen zusätzliche Beziehungen zwischen den Lösungen auf und erlauben daher weniger Vertauschungsmöglichkeiten. Entsprechend besitzen sie kleinere Galoisgruppen. Die Abbildungen zeigen jeweils Figuren mit derselben Symmetriegruppe.

Folgender Tabelle kann man weitere Beispiele<sup>9</sup> entnehmen:

<sup>9</sup>Ergänzung für Lehrperson: Eine Diedergruppe  $D_n$  ist die Gruppe aller Kongruenzabbildungen eines regelmäßigen  $n$ -Ecks auf sich selbst, bestehend aus Drehungen und Spiegelungen. Die Klein'sche Vierergruppe  $V_4$  ist eine Gruppe mit vier Elementen, in der jedes Element (außer dem neutralen Element) die Eigenschaft besitzt, dass seine Verknüpfung mit sich selbst das neutrale Element ergibt; sie ist insbesondere abelsch. Die zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}_n$  ist eine Gruppe mit  $n$  Elementen, die durch wiederholte Anwendung eines einzigen Elements erzeugt wird, wobei die Verknüpfung modulo  $n$  erfolgt.

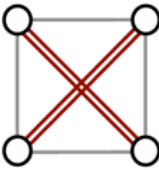
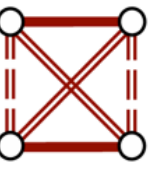
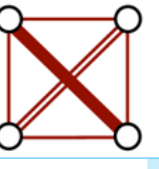
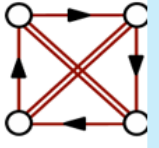
| Gleichung                                    | Lösung                                                 | entsprechendes Quadrat                                                             | Galois-Gruppe                                                                 |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| (1) $x^4 - 6x^2 + 2 = 0$                     | $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$              |   | $\{(1), (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\} \cong D_4$ |
| (2) $x^4 - 4x^2 + 3 = (x-1)(x+1)(x^2-3) = 0$ | $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2 \pm 1}$                     |   | $\{(1), (12)\} \cong \mathbb{Z}_2$                                            |
| (3) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$                     | $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$              |   | $\{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong V_4$                             |
| (4) $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2-2)(x^2-3) = 0$    | $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}}$ |   | $\{(1), (12), (34), (12)(34)\} \cong V_4$                                     |
| (5) $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$                     | $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$              |  | $\{(1), (12)(34), (1324), (1423)\}$                                           |

Abbildung 8: Übersicht über ausgewählte biquadratische Gleichungen, ihre Lösungsstrukturen und die zugehörigen Galois-Gruppen sowie deren Darstellung durch Symmetriegruppen eines Quadrats.

Quelle: Eigene Darstellung nach Leuders [28, 180].

Mit diesem erarbeiteten Verständnis für die strukturelle Lösbarkeit bis zum vierten Grad lässt sich nun die Brücke zur zentralen Thematik der Unterrichtseinheit schlagen: dem Zusammenbruch der Formeln ab dem fünften Grad. Dazu kann man beispielsweise die folgende quintische Gleichung betrachten:

$$x^5 + x + 5 = 0$$

Gibt man diese Gleichung in ein Computer-Algebra-System (CAS) ein, wird keine exakte Lösungsformel ausgegeben, da schlichtweg keine existiert. Die Begründung hierfür liefert die Galois-theorie: Eine Darstellung der Lösungen durch Radikale ist nur dann möglich, wenn die sogenannte Galoisgruppe der Gleichung eine ganz bestimmte innere Struktur aufweist. Bei der obigen Gleichung umfasst diese Gruppe jedoch die vollen 120 möglichen Permutationen und besitzt exakt diese geforderte Eigenschaft nicht. Dennoch gibt es Gleichungen fünften Grades, die sich lösen lassen. Bei diesen existieren spezielle algebraische Beziehungen zwischen den Nullstellen, welche die Galoisgruppe verkleinern und so den Weg für eine Lösungsformel freimachen. Die historische und mathematische Lebensleistung von Évariste Galois bestand genau darin, ein scharfes Kriterium für diese Lösbarkeit zu entwickeln.

Zusammenfassend lässt sich der didaktische Mehrwert dieses Exkurses wie folgt einordnen: Übung 5 fungiert als entscheidendes Bindeglied zum Satz von Abel-Ruffini. Der abstrakteste Teil des Beweises – die Anwendung der Galoistheorie und der Begriff der Symmetriegruppe – wird hierbei auf eine greifbare, geometrische Ebene transferiert. Während der Begriff der Permutation im regulären Mathematikunterricht primär quantitativ in der Stochastik behandelt wird, fordert diese Aufgabe ein qualitatives, strukturelles Verständnis. Die Lernenden erfahren, dass eine Permutation wie (12) einer konkreten physischen Abbildung entspricht.

Indem die abschließende Leitfrage der Übung dazu anregt, eine geometrische Figur mit der Lösungsstruktur einer Gleichung in Verbindung zu bringen, vollzieht sich der intendierte Perspektivenwechsel: Weg von der klassischen, rein rechnerischen Leitfrage „Wie lauten die exakten Lösungen dieser Gleichung?“ hin zur modernen, strukturmathematischen Perspektive „Wie lässt sich die Struktur bzw. Symmetrie mithilfe von Vertauschungen und Gruppen beschreiben?“. (vgl. [30]; vgl. [28], 174f.)

Während der Begriff der Permutation im regulären Mathematikunterricht der Oberstufe primär quantitativ im Rahmen der Stochastik (als Zählgröße  $n!$ ) behandelt wird, fordert diese Aufgabe ein qualitatives, strukturelles Verständnis. Die Lernenden erfahren, dass eine Permutation wie (12) keine rein formale Ziffernfolge darstellt, sondern einer konkreten physischen Abbildung entspricht – in diesem Fall der Spiegelung an einer Diagonalen. Der abstrakte Begriff der Gruppentheorie wird somit visuell begreifbar. Darüber hinaus illustriert die Übung die Isomorphie zwischen Geometrie und Algebra. Die vier Ecken des Quadrats repräsentieren modellhaft die vier Nullstellen einer Polynomgleichung vierten Grades. Die Drehungen und Spiegelungen, die das Quadrat deckungsgleich auf sich selbst abbilden, entsprechen exakt jenen zulässigen Permutationen der Nullstellen, die die zugehörigen Wurzelterme der Gleichung invariant lassen. Die Lernenden erkennen: Ebenso wie die geometrische Figur nur eine bestimmte Teilmenge der  $4! = 24$  möglichen Vertauschungen zulässt, um ihre Struktur zu erhalten, erlauben auch die algebraischen Ausdrücke nur spezifische, strukturtreue Vertauschungen. Diese Erkenntnis bereitet das inhaltliche Fundament für das Verständnis des Unmöglichkeitbeweises für Gleichungen ab dem fünften Grad ( $n \geq 5$ ). Solange die Symmetriegruppe einer Gleichung eine überschaubare, algebraisch „auflösbare“ innere Struktur aufweist – wie es bei Symmetrien eines Quadrats und bei quartischen Gleichungen der Fall ist – existieren Lösungsformeln, die auf Radikalen basieren. Beim Übergang zu einer allgemeinen Gleichung fünften Grades bilden die Permutationen der Nullstellen jedoch die symmetrische Gruppe  $S_5$ . Da diese die einfache alternierende Gruppe  $A_5$  als Untergruppe enthält, ist sie nicht länger auflösbar und lässt sich nicht in einfachere, durch Radikale darstellbare Bausteine zerlegen. Indem die abschließende Leitfrage der Übung die Lernenden dazu anregt, eine geometrische Figur mit der Lösungsstruktur einer algebraischen Gleichung in Verbindung zu bringen, vollzieht sich der intendierte didaktische Perspektivenwechsel: Die Mathematik wird hier nicht länger als das bloße Ausrechnen von Ergebnissen ( $x = \dots$ ) erfahren, sondern als die tiefgreifende Analyse von zugrundeliegenden Strukturen und Symmetrien.

*Bemerkung:* Warum kein regelmäßiges Fünfeck als geometrische Hilfe?

Nachdem die algebraische Struktur einer Gleichung vierten Grades didaktisch durch die Symmetrien eines Quadrats veranschaulicht wurde, drängt sich vielleicht in den Köpfen der Lernenden die Frage auf, welches geometrische Äquivalent für die allgemeine Gleichung fünften Grades ( $n = 5$ ) existiert. Dieser Gedankengang illustriert auf eindrucksvolle Weise die Grenzen der Vorstellbarkeit und der elementaren Algebra.

Betrachtet man ein regelmäßiges Fünfeck, so offenbart sich schnell eine strukturelle Diskrepanz: Die Symmetriegruppe des Fünfecks umfasst durch Drehungen und Spiegelungen lediglich 10 Elemente. Die allgemeine Gleichung fünften Grades erfordert zur Abbildung aller denkbaren Lösungsvertauschungen jedoch die symmetrische Gruppe  $S_5$ , welche  $5! = 120$  Permutationen umfasst. Eine vollständige geometrische Repräsentation dieser 120 Vertauschungen von fünf Punkten ist im dreidimensionalen Raum nicht mehr realisierbar; sie erfordert einen vierdimensionalen regulären Simplex (Pentatop). Diese geometrische Unzugänglichkeit dient als starke didaktische Metapher für das Scheitern der klassischen, radikalbasierten Lösungsformeln.

Dennoch existiert eine faszinierende Verbindung zur dreidimensionalen Geometrie, die historisch von zentraler Bedeutung ist. Das Ikosaeder ist der platonische Körper, der aus 20 gleichseitigen Dreiecken gebildet wird, wobei jeweils 5 Dreiecke um einen Eckpunkt herum angeordnet sind. Er besitzt 20 dreieckige Flächen, 30 Kanten und 12 Eckpunkte. Wie der Mathematiker Felix Klein in seinem 1884 erschienenen Werk „Vorlesungen über das Ikosaeder“ darlegte, entspricht die Struktur der 60 räumlichen Rotationen eines Ikosaeders exakt der alternierenden Gruppe  $A_5$ . Genau diese Gruppe  $A_5$  bildet als einfacher, nicht weiter auflösbarer Kern der  $S_5$  den eigentlichen algebraischen Grund für die Unlösbarkeit der quintischen Gleichung durch Radikale. Somit verlagert sich die Suche nach Lösungen ab dem fünften Grad von der reinen Termumformung hin zur Betrachtung hochkomplexer geometrischer Symmetriekörper. ([16], 4; vgl. [25], 33-35)

#### 5.5.4 Historischer Rückblick

Wie im vorangegangenen Kapitel ausführlich dargelegt, dient die Betrachtung der Lebenswege von Paolo *Ruffini*, Niels Henrik *Abel* und Évariste *Galois* nicht als rein illustratives Beiwerk, sondern erfüllt eine gezielte fachdidaktische Funktion im Sinne des historisch-genetischen Prinzips. Die historischen Widerstände, mit denen diese Mathematiker bei der Etablierung ihrer revolutionären Ideen konfrontiert waren, spiegeln exakt jene kognitiven Hürden wider, die Lernende beim Übergang zur Hochschulmathematik überwinden müssen.

Zudem verdeutlichen die teils tragischen Schicksale – Abels früher Tod in Armut oder Galois' gewaltsames Ende –, dass mathematische Erkenntnis nicht im luftleeren Raum entsteht. Diese historische Kontextualisierung „humanisiert“ die Mathematik: Sie zeigt den Lernenden (und angehenden Lehrkräften), dass Abstraktion das Resultat eines intensiven menschlichen Ringens ist. Die Unlösbarkeit der Quintik wird somit nicht als bloßes Defizit wahrgenommen, sondern als triumphaler Beginn eines neuen algebraischen Denkens.

Um diesen historischen Kontext im Unterricht produktiv zu nutzen, bieten sich für die Lernenden handlungsorientierte und kreative Erarbeitungsformen an. Aufbauend auf einer eigenen Recherche können die Schülerinnen und Schüler die ausgewählten Biografien auf unterschiedliche Weise aufbereiten:

- **Erstellung eines Podcasts:** Die Lernenden fassen das Leben und Wirken der Mathematiker in einem Audiobeitrag zusammen. Diese Übertragung in ein neues, modernes Darstellungsformat fordert den aktiven Wissenstransfer und schult die Kommunikationskompetenz.
- **Gestaltung eines Museumsrundgangs:** Alternativ erstellen die Gruppen optisch ansprechende Informationsplakate (händisch oder digital, z.,B. mittels Canva). Diese werden in der Klasse oder im Schulgebäude ausgestellt, woraufhin sich die Lernenden im Rahmen gegenseitiger Kurzführungen die historischen Hintergründe präsentieren.

Beide Formate ermöglichen eine flexible Schwerpunktsetzung durch die Lehrperson und betten die Mathematikgeschichte in eine schülerzentrierte, aktive Anwendung ein.

### 5.5.5 Die Grenze der Formeln - ein Beweis des Abel-Ruffini-Satzes auf Schüler\*Innen-Niveau

In dieser Phase der Einheit wird ein abgespeckter Beweis des Satzes von Ruffini vorgestellt. Dieser kurze Teaser ist jedoch repräsentativ für die Struktur des vollständigen Beweises, der sich ausführlich in [25, 41–46] findet und – abhängig von der jeweiligen Schüler\*innengruppe – gemeinsam erarbeitet oder exemplarisch besprochen werden kann.

Grob gesprochen zeigt Ruffini, dass Wurzeln bestimmter Polynome Symmetrien ihrer Radikanden „erben“, sofern diese und die zugrunde liegenden Polynome in fünf Variablen betrachtet werden. Daraus ergibt sich eine strukturelle Obstruktion für die Konstruktion eines Ruffini-Lösungsalgorithmus für Gleichungen fünften Grades. Für die quintische Gleichung bedeutet dies, dass ein grundsätzliches Hindernis besteht, welches jede Hoffnung auf die Existenz eines allgemeinen Ruffini-Lösungsverfahrens – also eines expliziten Lösungsalgorithmus mittels Radikalen – endgültig zunichtemacht.

#### Ruffinis Satz zur Vererbung von Symmetrien bei Wurzelziehungen

Für fünf Variablen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  existieren insgesamt  $5! = 120$  mögliche Vertauschungen dieser Variablen. Unter diesen nehmen jedoch zwei spezielle Permutationen eine zentrale Rolle ein, die im Folgenden mit  $v$  beziehungsweise  $u$  bezeichnet werden. Sie sind definiert durch

$$\begin{aligned} v : x_1 &\mapsto x_2, x_2 \mapsto x_3, x_3 \mapsto x_1, x_4 \mapsto x_4, x_5 \mapsto x_5, \\ u : x_1 &\mapsto x_1, x_2 \mapsto x_2, x_3 \mapsto x_4, x_4 \mapsto x_5, x_5 \mapsto x_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Um ein fundiertes Verständnis der anschließenden Beweisschritte zu gewährleisten, werden im Folgenden zunächst noch einmal zentrale Begriffe und Bezeichnungen wiederholt:

Vertauschungen von Variablen dienen dazu, Symmetrien von Formeln – insbesondere von Polynomen – systematisch zu erfassen. Von zentraler Bedeutung ist hierbei der Begriff der *Invarianz*<sup>10</sup> eines Polynoms gegenüber solchen Vertauschungen.

Eine Vertauschung, etwa die Permutation  $v$  aus (1), wirkt auf ein Polynom  $h$  in fünf Variablen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , indem im Ausdruck  $h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  die Variablen entsprechend der Definition von  $v$  ersetzt werden. Konkret bedeutet dies, dass  $x_1$  durch  $x_2$ ,  $x_2$  durch  $x_3$  und  $x_3$  durch  $x_1$  ersetzt werden, während  $x_4$  und  $x_5$  unverändert bleiben. Das so entstehende Polynom wird mit  $v(h)$  oder ausführlicher mit

$$v(h)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (2)$$

bezeichnet.

Es gilt somit

$$v(h)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) := h(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5). \quad (3)$$

In Übereinstimmung mit dem bisherigen Sprachgebrauch wird ein Polynom  $h$  als *invariant* bezüglich der Vertauschung  $v$  bezeichnet, wenn

$$v(h) = h \quad (4)$$

<sup>10</sup>Der Begriff „Invarianz“ (Unveränderlichkeit) beschreibt in diesem algebraischen Kontext die Eigenschaft eines Polynoms, seinen Wert und seine Struktur unter bestimmten Variablenvertauschungen beizubehalten (so ist etwa  $x_1 + x_2$  invariant unter Vertauschung der beiden Variablen,  $x_1 - x_2$  jedoch nicht). Solche Invarianzen spiegeln die „inneren Symmetrien“ einer Gleichung wider. Für den Beweis des Abel-Ruffini-Satzes ist dieses Konzept zentral: Eine hypothetische Lösungsformel müsste die Symmetrieeigenschaften der Ausgangsgleichung zwingend „erben“. Bei Gleichungen ab dem fünften Grad ist die Struktur der Vertauschungsgruppen jedoch so komplex, dass diese Symmetrie-Vererbung zwangsläufig zu logischen Widersprüchen führt (wie im Beweis auf der nächsten Seite bei dem Schritt  $f = -f$ ).

gilt. Alternativ kann diese Invarianz auch explizit durch

$$v(h)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (5)$$

ausgedrückt werden, was mithilfe der obigen Gleichung äquivalent zu

$$v(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) = h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (6)$$

ist.

Dabei ist zu beachten, dass die Gleichheitszeichen in den Gleichungen (4)–(6) die Gleichheit von Polynomen bzw. Polynomfunktionen bezeichnen. Das heißt, für jede beliebige Belegung der Variablen  $x_1, \dots, x_5$  mit Zahlen liefern linker und rechter Ausdruck denselben Wert.

Die für die Vertauschung  $v$  aus (1) formulierten Aussagen lassen sich analog auf die Vertauschung  $u$  sowie auf beliebige weitere Permutationen der Variablen  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  übertragen. (vgl. [25], 24-26)

Im Folgenden wenden wir uns nun den Beweisen von Ruffinis zentralen Aussagen zu.

**Beweis einer „Kleinen Version“ des Satzes von Ruffini<sup>11</sup>** (vgl. [25], 28f.)

Grundversion bzw. elementare Version des Satzes von Ruffini

**Voraussetzungen:**

- i)  $f$  und  $g$  sind Polynome in  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ .
- ii) Es gilt  $f^2 = g$ .
- iii)  $g$  ist invariant bezüglich der Vertauschung  $v$  (siehe (1), (4)–(6)).

**Behauptung:**  $f$  ist (auch) invariant bezüglich der Vertauschung  $v$ .

*Beweis.* Die Behauptung ist trivial, falls  $f = 0$  (und demzufolge  $g = 0$ ) gilt. Also sei  $f \neq 0$ .

Aus Voraussetzung b):  $f^2 = g$  folgt

$$v(f^2) = v(g) \quad (7)$$

(Für die Definition von  $v(f^2)$  und  $v(g)$ , vergleiche (3).)

Da nach Voraussetzung  $g$  invariant ist bezüglich der Vertauschung  $v$ , gilt, vergleiche (4),

$$v(g) = g = f^2, \quad (8)$$

wobei im zweiten Schritt wieder die Voraussetzung ii) verwendet wurde.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen  $v(f^2)$  und  $v(f)$ ? Denken wir uns einen Moment, dass  $f \cdot f$  die Aufgabe bezeichnet, das Polynom  $f$  mit sich selbst zu multiplizieren, und  $f^2$  die Lösung dieser Aufgabe, also das Produktpolynom. Da die Polynommultiplikation so „eingrichtet“ ist, dass die beiden Polynome als Funktionen von  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

<sup>11</sup>Es wird hier lediglich die Invarianz bezüglich  $v$  untersucht und der stark einschränkende Fall, dass  $f^l = g$  mit  $l = 2$  gegeben ist.

gleich sind, spielt es keine Rolle, ob wir die Vertauschung  $v$  in den beiden Faktoren  $f$  vornehmen oder im Resultat.<sup>12</sup> Das heißt, es gilt:

$$v(f^2) = v(f) \cdot v(f) = (v(f))^2 \quad (9)$$

Kombiniert man (7), (8), (9), folgt:

$$(v(f))^2 = f^2 \quad (10)$$

Aus (10) folgt, dass es für  $s(f)$  nur zwei Möglichkeiten gibt. Entweder gilt:

$$v(f) = f \quad (11)$$

oder aber:

$$v(f) = -f \quad (12)$$

Wenn (11) gilt, sind wir fertig, denn  $v(f) = f$  bedeutet gerade, dass  $f$  bezüglich  $v$  invariant ist, wie behauptet.

Es ist zu zeigen, dass die Alternative (12) nicht möglich ist. Nehmen wir versuchsweise an, (12) würde gelten. Mit der Definition der Vertauschung  $v$ , siehe (1), folgt (vergleiche (3)):

$$\begin{aligned} v(f)(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= v(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) \\ v(v(f))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= v(f)(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5) = v(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5) \\ v(v(v(f)))(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= v(f(x_3, x_1, x_2, x_4, x_5)) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \end{aligned} \quad (13)$$

und somit:

$$v(v(v(f))) = f \quad (14)$$

Aus (12) folgt andererseits:

$$v(v(f)) = v(-f) = -v(f) = -(-f) = f, \quad \text{also} \quad v(v(v(f))) = v(f) = -f \quad (15)$$

Aus der Gleichung (14) und der letzten Gleichung (15) erhält man:

$$f = -f$$

woraus  $2 \cdot f = 0$  und somit  $f = 0$  folgt. Es wurde aber vorausgesetzt, dass  $f \neq 0$  gilt. Folglich kann die Alternative (12) nicht zutreffen.  $\square$

Damit ist gezeigt, dass die vereinfachte Version des Ruffini-Satzes funktioniert. Die einzelnen Schritte geben dabei einen guten, exemplarischen Eindruck, wie der ausführlichere Beweis im Anhang aufgebaut ist. Wie könnte man die Vorstellung des Beweises im Unterricht noch didaktisch aufwerten?

Um diesen formalen Beweis für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen, bietet sich methodisch der Einsatz eines sogenannten *Beweispuzzles* an. Anstatt den Text lediglich frontal zu präsentieren, werden die einzelnen Beweisschritte und Gleichungen auf Kärtchen gedruckt und zerschnitten. Die Aufgabe der Lernenden besteht darin, die logische Abfolge der Argumente eigenständig (oder in Partnerarbeit) zu rekonstruieren. Diese Herangehensweise reduziert den kognitiven Aufwand für die Entschlüsselung algebraischer Notation und lenkt den Fokus der Lernenden gezielt auf die Strukturlogik und die Kunst des deduktiven Schließens.

<sup>12</sup>Zur Veranschaulichung empfiehlt es sich, ein konkretes Beispiel wie  $(2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1^2 \cdot a_2) \cdot (a_2 \cdot a_3)$  zu rechnen bzw. im Plenum Schritt für Schritt durchzusprechen.

### 5.5.6 Vom exakten Rechnen zum Näherungsverfahren (Newton-Verfahren)

Anstelle einer allgemeinen Lösungsformel wird in dieser Phase ein Verfahren eingesetzt, das die gesuchte Lösung schrittweise annähert. Dazu wird das Newton-Verfahren kurz eingeführt bzw. – je nach Vorwissen der Lerngruppe – wiederholt. Da es derzeit nicht Teil des Maturastoffs ist, wird es im Regelunterricht häufig ausgelassen und eher als ergänzender oder vertiefender Stoff behandelt. Im Anschluss daran wird ein Beispiel durchgerechnet, um die Funktionsweise des Verfahrens anschaulich zu demonstrieren.

#### Das Näherungsverfahren von Newton

Im Folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich die Lösung einer Gleichung näherungsweise bestimmen lässt. (vgl. [18], 190f.; [35], 153f.) Während Taschenrechner und Computer im Wesentlichen nur Grundrechnungsarten ausführen können, ermöglichen erst numerische Algorithmen wie dieses schrittweise präzisere Berechnungen. Dadurch eröffnet sich gleichzeitig ein Einblick in die Funktionsweise moderner Rechenhilfsmittel und algebraischer Software.

Während lineare und quadratische Gleichungen durch Umformungen oder bekannte Lösungsformeln exakt bestimmt werden können, sind viele Gleichungen, die in der mathematischen Praxis auftreten, deutlich komplexer und lassen sich meist nicht geschlossen lösen.

Das Newton-Verfahren liefert – unter geeigneten Voraussetzungen – beliebig genaue Näherungen an eine gesuchte Gleichungslösung. Obwohl eine exakte Bestimmung nicht immer möglich ist, kann der Wert mithilfe dieses Verfahrens auf eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen berechnet werden.

Grundlage des Verfahrens ist die Beobachtung, dass die Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$  einer Nullstelle der Funktion  $f$  entspricht.

**Definition:** Ist  $x_0$  ein Näherungswert für die Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$ , so erhält man (unter bestimmten Voraussetzungen) durch folgende Iterationsformel immer bessere Näherungswerte für die Lösung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

*Bemerkung:* Die Funktion  $f(x)$  muss für alle benötigten Stellen  $x_n$  differenzierbar sein, und es muss gelten:

$$f'(x_n) \neq 0.$$

**Beispiel:** Newton-Verfahren zur Lösung von  $x^5 - x - 1 = 0$

Gesucht ist eine reelle Nullstelle der Gleichung  $f(x) = x^5 - x - 1 = 0$ . Als erstes wird die 1. Ableitung der Funktion, also  $f'(x) = 5x^4 - 1$ , gebildet. Dann muss man nur noch einen Startwert wählen, zum Beispiel  $x_0 = 1,2$  und in die Iterationsformel des Newton-Verfahrens einsetzen:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die ersten paar Iterationen sind in dieser Tabelle abgebildet:

| Schritt | $x_n$    | $f(x_n)$    | $f'(x_n)$ |
|---------|----------|-------------|-----------|
| 0       | 1,200000 | 0,288320    | 9,368000  |
| 1       | 1,169233 | 0,089177    | 8,717882  |
| 2       | 1,158983 | 0,008936    | 8,412041  |
| 3       | 1,167925 | 0,000062    | 8,671586  |
| 4       | 1,167303 | $\approx 0$ | –         |

Man kann aus dieser Tabelle ablesen, dass die Nullstelle der Gleichung  $x^5 - x - 1 = 0$  näherungsweise bei  $x \approx \boxed{1,167303978}$  liegt. Das bestätigt auch die graphische Lösung von der Funktion  $f(x)$ , wie die folgende Abbildung zeigt:

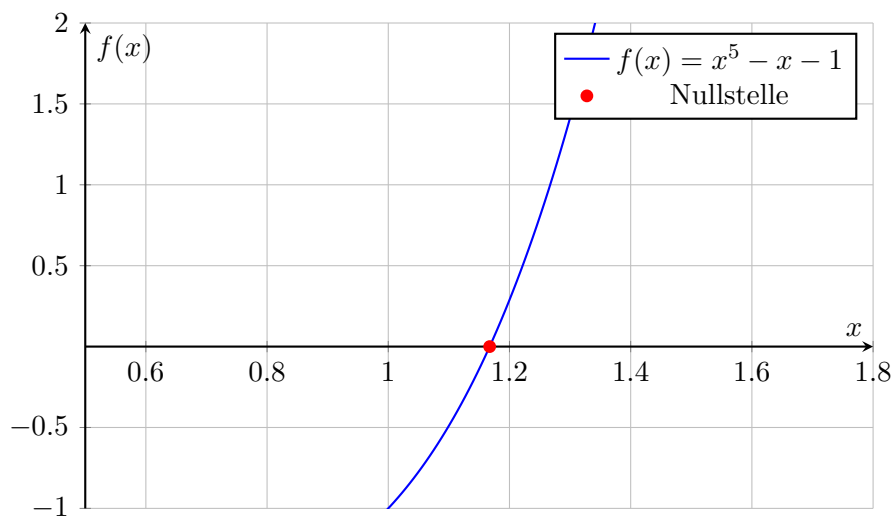


Abbildung 9: Graph der Funktion  $f(x) = x^5 - x - 1$ . Die Nullstelle bei  $x \approx 1,1673$  ist rot markiert.

Quelle: Eigene Darstellung.

Um die Funktionsweise des Newton-Verfahrens für Lernende transparent zu machen, wird auf der nächsten Seite in Abbildung 10 ein Screenshot aus Wolfram Alpha verwendet. Dieser zeigt sowohl die Funktionsgraphen als auch die berechneten Iterationsschritte:

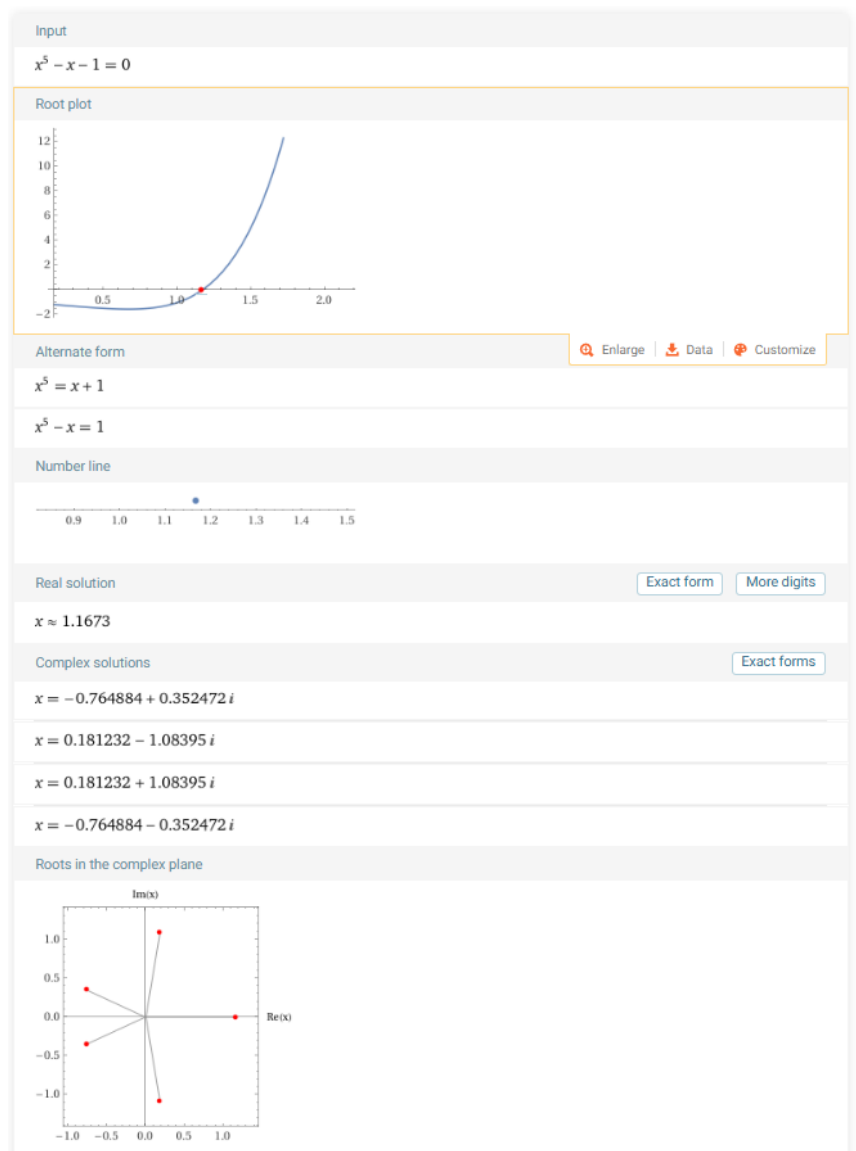


Abbildung 10: Darstellung der Lösungen der Gleichung  $x^5 - x - 1 = 0$ .

Quelle: Screenshot aus Wolfram|Alpha, erstellt am 28. November 2025.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die betrachtete Gleichung nicht durch Radikale lösbar ist, da ihre Galoisgruppe nicht auflösbar ist. Damit wird an diesem Beispiel sichtbar, was der Abel-Ruffini-Satz für allgemeine Gleichungen fünften oder höheren Grades grundsätzlich beschreibt: Es gibt keine universelle Lösungsformel durch Radikale, die ihre Lösungen allgemein angibt. Im Wahlpflichtfach Mathematik bietet es sich daher an, ein alternatives Lösungsverfahren einzuführen, das die Idee der Annäherung vermittelt: das Newton-Verfahren.

Durch den Einsatz des Newton-Verfahrens im Unterricht wird den Lernenden ein Werkzeug an die Hand gegeben, das die Grenze zwischen algebraischer Lösbarkeit und numerischer Annäherung erfahrbar macht. Auf diese Weise wird die zugrunde liegende Theorie indirekt zugänglich: Zwar lässt sich nicht jede Polynomgleichung exakt durch Radikale lösen, ihre Nullstellen können jedoch mit geeigneten numerischen Verfahren angenähert werden. Während die theoretische Mathematik – begründet durch die Galoistheorie – hier eine Grenze aufzeigt, ermöglicht das Newton-Verfahren einen praktischen Zugang zu Problemen, die algebraisch nicht allgemein lösbar sind. Solche Aufgaben fördern das Verständnis dafür, dass mathematische Probleme auch ohne exakte algebraische

Lösungsformeln sinnvoll bearbeitet werden können. Dieser Gedanke ist auf höherer Ebene eng mit der Struktur von Galoisgruppen verbunden. Auf diese Weise wird eine Brücke zwischen universitärer Mathematik und anwendungsorientierter Schulmathematik geschlagen.

### 5.5.7 Abschluss und Reflexion

Im Rahmen der abschließenden Reflexion kann festgehalten werden, dass die Nicht-Existenz einer allgemeinen Lösungsformel für Gleichungen höheren Grades jedoch nicht bedeutet, dass es keine einzelnen Gleichungen dieses Grades gibt, die durch Radikale lösbar sind. Abels Resultat bezieht sich vielmehr auf den allgemeinen Fall und lässt spezielle Gleichungen mit besonderer Struktur unberührt.

So existieren auch für Gleichungen fünften Grades Beispiele, deren Lösungen sich durch Wurzelausdrücke darstellen lassen. Etwa Gleichungen mit abspaltbaren Faktoren wie

$$x^5 + 2x^4 - 3x^3 = 0, \quad (1)$$

während andere Gleichungen wie

$$x^5 - 4x + 2 = 0 \quad (2)$$

nicht durch Radikale lösbar sind.

Die Galois-Theorie präzisiert diesen Unterschied grundlegend: Sie ordnet jeder Gleichung eine Gruppe von Symmetrien ihrer Nullstellen zu und zeigt, dass die Struktur dieser *Galoisgruppe* darüber entscheidet, ob eine Lösung durch Radikale möglich ist. Der Satz von Abel–Ruffini erscheint damit als Spezialfall innerhalb einer umfassenderen Theorie. (vgl. [25], 33f.)

In der abschließenden Reflexion wird deutlich, dass die behandelte Nichtlösbarkeit keine absolute Grenze darstellt, sondern eine Einschränkung auf bestimmte Rechenoperationen. Bereits im 19. Jahrhundert wurde gezeigt, dass Gleichungen fünften Grades unter Verwendung erweiterter Funktionen lösbar sind. Insbesondere verdeutlicht die spätere Arbeit von Felix Klein, dass ein tiefer Zusammenhang zwischen den Symmetrien solcher Gleichungen und geometrischen Strukturen – etwa dem Ikosaeder – besteht. Dabei treten neue „Rechenarten“ in Form spezieller Funktionen auf, die als Umkehrungen rationaler Funktionen verstanden werden können und damit das klassische Wurzelziehen wesentlich erweitern. (vgl. [16], 4)

Für den schulischen Kontext eröffnet dies eine motivierende Perspektive: Die Frage nach der Lösbarkeit wird nicht einfach verneint, sondern in einen größeren mathematischen Zusammenhang eingebettet.

Wie kann man nun nach der gemeinsamen Reflexion die anfangs formulierten Lernziele für diese Wahlpflichtfach-Einheit überprüfen?

Zur Überprüfung ist ein mehrperspektivisches Vorgehen erforderlich. Da der Abel–Ruffini-Satz weniger auf algorithmische Fertigkeiten als auf ein strukturelles Verständnis abzielt, gehen die Evaluationsformen über reine Reproduktionsaufgaben hinaus.

Das Verständnis für den Übergang vom rechnerischen zum strukturellen Denken kann durch kurze Reflexionsaufgaben überprüft werden. Fachliche Grundlagen, wie z.B. der Begriff der Lösbarkeit durch Radikale, können mithilfe formativer Aufgaben gesichert werden. Ergänzend dienen Diskussions- oder Schreibanlässe der Einordnung historischer und wissenschaftstheoretischer Aspekte.

Ein zentrales Kriterium für den Lernerfolg ist die Fähigkeit, die Koexistenz von numerischen Verfahren und algebraischer Unlösbarkeit zu erklären zu können und diese als Ausgangspunkt für weiterführende mathematische Entwicklungen zu verstehen. Darüber hinaus sollen die Lernenden die Bedeutung von Unmöglichkeitbeweisen als grundlegende Erkenntnisform der Mathematik reflektieren.

Die folgende Tabelle fasst die zentralen Lernziele, geeigneten Evaluationsmethoden sowie Indikatoren für deren Erreichung zusammen:

Tabelle 2: Übersicht der Evaluationsmethoden und Indikatoren zur Zielerreichung

| Lernziel                            |  | Evaluationsmethode              | Indikator für Zielerreichung                                                          |
|-------------------------------------|--|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Strukturelles Denken</b>         |  | Reflexionsaufgabe (schriftlich) | Unterscheidung zwischen algorithmischem Rechnen und Strukturanalyse.                  |
| <b>Fachbegriffe (Radikale/Grad)</b> |  | Kurz-Test / Concept-Map         | Korrekte Definition und Anwendung der mathematischen Termini.                         |
| <b>Grenzen der Mathematik</b>       |  | Transferfrage zur Numerik       | Argumentatives Verständnis, warum Näherungsverfahren notwendig sind.                  |
| <b>Historische Perspektive</b>      |  | Einordnung im Zeitstrahl        | Benennung der Akteure und des historischen Bruchs bei Polynomen vom Grad $n \geq 5$ . |

Quelle: Eigene Darstellung.

## 6 Fazit und Ausblick

So führt die Arbeit am Ende zu jener Frage zurück, mit der sie begonnen hat: Nicht jede mathematische Herausforderung besteht darin, ein Verfahren zu finden; manchmal liegt die entscheidende Erkenntnis darin zu zeigen, dass ein solches Verfahren grundsätzlich nicht existieren kann. Gerade diese Einsicht macht die besondere Bedeutung des Abel-Ruffini-Satzes aus.

Die vorliegende Arbeit hat dieses Thema sowohl aus fachmathematischer als auch aus historischer und didaktischer Perspektive betrachtet. Dabei wurde deutlich, dass die Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Radikale nicht auf fehlende Rechenverfahren zurückzuführen ist, sondern auf strukturelle Eigenschaften algebraischer Gleichungen, wie beispielsweise Symmetrien ihrer Nullstellen und den damit verbundenen Körper- und Radikalerweiterungen. Der damit verbundene Perspektivenwechsel von der Suche nach expliziten Formeln hin zur Untersuchung zugrunde liegender Strukturen markiert einen historischen Wendepunkt in der Mathematik.

Die historische Einordnung zeigt zudem, dass mathematische Erkenntnisse nicht losgelöst von ihrer Entstehungsgeschichte betrachtet werden sollten. Die Arbeiten von Ruffini, Abel und später Galois markieren einen entscheidenden Übergang von der klassischen Gleichungstheorie zur modernen Algebra. Der Abel-Ruffini-Satz ist damit nicht nur ein negatives Resultat, sondern verweist zugleich auf neue mathematische Begriffe und Methoden, die aus der Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen hervorgegangen sind.

Auch aus didaktischer Sicht besitzt dieses Thema besonderes Potenzial. Der im letzten Teil der Arbeit entwickelte Unterrichtsentwurf zeigt eine Möglichkeit auf, zentrale Ideen wie Symmetrie, Lösbarkeit und die Grenzen allgemeiner Verfahren für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen. Gerade im Wahlpflichtfach kann ein solches Thema dazu beitragen, einen Übergang zwischen schulischer Mathematik und abstrakteren Denkweisen der Hochschulmathematik vorzubereiten.

Ein möglicher nächster Schritt wäre die praktische Erprobung des entwickelten Unterrichtsentwurfs im schulischen Kontext. Dabei könnte untersucht werden, an welchen Stellen Lernende besonders gut an die zentralen Ideen anschließen können und wo noch zusätzliche didaktische Unterstützung notwendig ist. Besonders aufschlussreich wäre hierbei eine begleitende Evaluation durch gezieltes Schülerfeedback – etwa zur Verständlichkeit der verwendeten Begriffe, zur Motivation durch das Thema und zur Nachvollziehbarkeit des Zusammenhangs zwischen bekannten Lösungsformeln und der Unlösbarkeit ab dem fünften Grad. Auf diese Weise ließe sich genauer beurteilen, wie tragfähig der vorgeschlagene Zugang für den Unterricht ist und wie die Verbindung zwischen anschaulicher Schulmathematik und formaler Algebra künftig noch weiter geschärft werden kann.

Darüber hinaus eröffnet das Thema weitere fachliche und didaktische Anschlussmöglichkeiten. Aus fachmathematischer Perspektive führt der Abel-Ruffini-Satz unmittelbar zur Galoisstheorie, welche die Frage nach der Lösbarkeit durch Radikale systematisch über Symmetriegruppen beantwortet. Aus didaktischer Sicht ist zudem von großem Interesse, welchen Beitrag Resultate über die Grenzen mathematischer Verfahren im Mathematikunterricht leisten können. Der Abel-Ruffini-Satz zeigt exemplarisch, dass auch der Nachweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Verfahrens mathematisch bedeutsam und für Lernende erkenntnisreich sein kann.

## Literatur

- [1] Abel, N.-H. *Oeuvres complètes* 2.Aufl. Christiania: Grondahl and Son, 1881. [https://archive.org/details/OeuvresCompletesDeNielsHenrikAbel1881\\_12/page/n35/mode/2up](https://archive.org/details/OeuvresCompletesDeNielsHenrikAbel1881_12/page/n35/mode/2up)
- [2] Abel Prize, *Abel Prize — The Story*, YouTube video, 4:32, veröffentlicht am 1. Januar 2024. Zugriff am 18.1.2026, <https://www.youtube.com/watch?v=ycXeTYR5SFg>.
- [3] Alekseev, V. B. *Abel's Theorem in Problems and Solutions: Based on the Lectures of Professor V. I. Arnold*. Dordrecht [u.a.]: Kluwer Academic Publ., 2004.
- [4] Alexander, Amir. *Duel at Dawn: Heroes, Martyrs, and the Rise of Modern Mathematics*. 1st ed. Cambridge, Mass: Harvard University Press, 2010. <https://doi.org/10.2307/j.ctv1p6hnsf>.
- [5] Alten, Djafari Naini, Eick, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wesemüller-Kock, u. a. *4000 Jahre Algebra: Geschichte – Kulturen – Menschen*. 2., Aktual. u. erg. Aufl. 2014. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [6] Ayoub, R.G. *Paolo Ruffini's contributions to the quintic* Archive for History of Exact Sciences 23, 253–277 (1980). <https://doi.org/10.1007/BF00357046>
- [7] Beckman, Milo, Peter Peschke. *Mathe ohne Zahlen: was Lehrer für sich behalten - so erklärt, dass es jeder versteht*. 1. Auflage. München: riva, 2022.
- [8] Bernardi, G.; Brunetto, D.; Turconi, G. 2024. *The secondary-tertiary transition in mathematics: insight through personal journals in a math class*. In: 10th International Conference on Higher Education Advances (HEAd'24). Valencia, 18-21 June 2024. <https://doi.org/10.4995/HEAd24.2024.17200>
- [9] Beutelspacher, Albrecht. *Zahlen, Formeln, Gleichungen: Algebra für Studium und Unterricht*. Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum, 2018. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-16106-4>
- [10] Bewersdorff, Jörg. *Algebra für Einsteiger: Von der Gleichungsauflösung zur Galois-Theorie*. 6. Aufl. 2019, Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum, 2019.
- [11] Brockhaus Enzyklopädie Online, Abel-Preis. Zugriff am 10.7.2025, <https://brockhaus-de.uaccess.univie.ac.at/ecs/enzy/article/abel-preis>
- [12] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMB-WF). (o.D.). Matura: Materialien und Publikationen – standardisierte Reifeprüfung AHS: Angewandte Mathematik. Zugriff am 23.Juli 2025, <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=6750&token=588f384e3490186b5f990a0c5023bb238b0bc081>
- [13] Dantzig, Tobias. *Number: The Language of Science. A Critical Survey Written for the Cultured Non-Mathematician*. 4.ed., rev. and augm. New York: Macmillan, 1954.
- [14] De Gruyter Brill. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. <https://www.degruyterbrill.com/journal/key/crll/html>
- [15] Duke, William, Stephan Ramon Garcia, and Bob Lutz. *The Graphic Nature of Gaussian Periods*. arXiv preprint, July 27, 2013. <https://www.math.ucla.edu/~wdduke/preprints/graphic.pdf>
- [16] Eschenburg, J.-H., und L. Hefendehl-Hebeker. 2000. Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar? *Mathematische Semesterberichte* 47: 193–220. <https://doi.org/10.1007/s005910070003>

- [17] Fischer, Gerd. Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium. 4th ed. 2019. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum, 2019.
- [18] Freiler, P.; Marsik, J.; Olf, M.; Wittberger, M. (2024). *Lösungswege 7: Schulbuch mit E-Book*. Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co. KG. ISBN 978-3-209-11495-2.
- [19] Freiler, P., Marsik, J., Olf, M., Wittberger, M. (2025). *Lösungswege Mathematik Oberstufe 5: Schülerbuch + E-Book* Wien: Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co. KG. ISBN 978-3-209-11493-8.
- [20] Fuchs, Dmitry, und Tabachnikov, Serge. *Ein Schaubild der Mathematik: 30 Vorlesungen über klassische Mathematik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [21] Ganster, Michael. *Lineare Algebra: 01. Gruppen, Ringe, Körper*. Technische Universität Graz, Wintersemester 2014/15. Zugriff am 5. Juni 2026, [https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv\\_lineare\\_algebra\\_ws\\_2014/01\\_gruppen\\_ringe\\_koerper.pdf](https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_lineare_algebra_ws_2014/01_gruppen_ringe_koerper.pdf).
- [22] Gathmann, Martin. *Algebra I – Lecture Notes*. 2010. AGAG Gathmann Website, <https://agag-gathmann.math.rptu.de/class/algebra-2010/algebra-2010-c1.pdf>
- [23] Jantzen, Jens Carsten, und Joachim Schwermer. *Algebra*. 2., korr. U. erw. Aufl. 2014. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [24] Karpfinger, Christian, und Kurt Meyberg. *Algebra: Gruppen - Ringe - Körper*. 5th ed. 2021. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2021.
- [25] Kirchgrabner, U. *1-2-3-4 finito: Ein mathematischer Streifzug durch die Geschichte der Gleichungen. Schriftliche Ausarbeitung des Vortrags vom 1. Dezember 2016 im Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht an der ETH Zürich* (Zürich: ETH Zürich, 2016), <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/1-2-3-4-finito/1234finito.pdf>.
- [26] Klein, Felix. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: B. G. Teubner, 1908.
- [27] Lehner, Martin. *Didaktische Reduktion*. 3., Unveränderte Auflage. Bern: Haupt Verlag, 2024.
- [28] Leuders, Timo. *Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. 1. Aufl. 2016. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2016.
- [29] Leuders, Timo. *Subject Matter Analysis with a Perspective on Teacher Education – The Case of Galois Theory as a Theory of Symmetry*. Journal für Mathematik-Didaktik 37, Suppl. 1 (2016): 163–191. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0099-z>.
- [30] Leuders, Timo. 2017. *Symmetrien von Gleichungen*. In *Mathematik lehren* Nr. 202: *Algebra – Strukturen erkennen und nutzen*, 38–43. Velber: Friedrich Verlag.
- [31] Lüneburg, Heinz. *Von Zahlen und Größen: Dritthalbtausend Jahre Theorie und Praxis*. Basel: Birkhäuser Verlag, 2008.
- [32] Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH Co. KG. (2025). *Mathematik verstehen 7– Schulbuch mit E-Book\* [Digitales und gedrucktes Schulbuch]*. öbv. Zugriff am 23. Juli 2025, <https://www.oebv.at/produkte/mathematik-verstehen-7-schulbuch-mit-e-book-plus-2/>

- [33] Parsons, Paul, und Gail Dixon. *Auf einen Blick: Mathematik. Die wichtigsten Themen auf einer Seite erklärt*. München: Librero, 2020.
- [34] Pesic, Peter. *Abels Beweis*. Springer, 2005.
- [35] Rannacher, Rolf. *Numerik 0: Einführung in die Numerische Mathematik* Heidelberg: Heidelberg University Publishing, 2017 (Lecture Notes). <https://doi.org/10.17885/heiup.206.281>
- [36] Republik Österreich. *Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Anlage A: Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule*. Rechtsinformationssystem des Bundes, tagesaktuelle Fassung. Zugriff am 6. Juni 2026, <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>.
- [37] Republik Österreich. *LEHRPLAN DER ALLGEMEINBILDENDEN HÖHEREN SCHULERIS* – Rechtsinformationssystem des Bundes, Zugriff am 11. April 2026, [https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Begut/BEGUT\\_29087208\\_1955\\_485A\\_9CB3\\_25E1CF5935D3/Anlagen\\_0012\\_DA0D4B5C\\_AFE2\\_4177\\_9C0F\\_901A00DA7242.pdf](https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Begut/BEGUT_29087208_1955_485A_9CB3_25E1CF5935D3/Anlagen_0012_DA0D4B5C_AFE2_4177_9C0F_901A00DA7242.pdf)
- [38] Rosen, M. I. (1995). Niels Hendrik Abel and Equations of the Fifth Degree. The American Mathematical Monthly, 102(6), 495–505. <https://doi.org/10.1080/00029890.1995.12004609>
- [39] Rotman, Joseph J. *Galois Theory*. 2. ed., corr 2. print. New York [u.a.]: Springer, 2001.
- [40] Ruffini, Paolo. *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. Bologna: Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, 1799.
- [41] Ruffini, Paolo. *Opere Matematiche*. Edited by E. Bortolotti, 3 vols, Roma: Ed. Cremonese della Casa Editrice Perella, 1953/54.
- [42] Stewart, Ian. *Galois Theory*. 2. ed. London [u.a.]: Chapman Hall, 1989.
- [43] Strick, Heinz Klaus. *Niels Henrik Abel (1802–1829)*. Spektrum der Wissenschaft, 1. Mai 2009. Zugriff am 7.11.2025, <https://www.spektrum.de/wissen/niels-henrik-abel-1802-1829/993437>.
- [44] Strick, Heinz Klaus. *Paolo Ruffini (1765–1822) – italienischer Pionier der Gruppentheorie*. Spektrum der Wissenschaft, 16. Juni 2017. Zugriff am 7.11.2025, <https://www.spektrum.de/wissen/paolo-ruffini-1765-1822-italienischer-pionier-der-gruppentheorie/1366790>.
- [45] Strick, Hein Klaus. *Pierre Wantzel und die Unmöglichkeit-Beweise*, Spektrum.de, 1. Oktober 2025. Zugriff am 18.1.2026, <https://www.spektrum.de/wissen/pierre-wantzel-und-die-unmoeglichkeits-beweise/2288021>.
- [46] Strick, Heinz Klaus. *Verkannt, verfemt, vergessen: Geschichten aus der europäischen Mathematik der Neuzeit*. Springer, 2024.
- [47] Tignol, Jean-Pierre. *Galois' Theory of Algebraic Equations*. World Scientific, 2001.
- [48] Walz, Guido. *Minimalpolynom eines Elementes über einem Körper*. Spektrum Lexikon der Mathematik. Spektrum der Wissenschaft. Zugriff am 29. Juli 2025, <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/minimalpolynom-eines-elementes-ueber-einem-koerper/6400>.
- [49] Weigand, Hans-Georg, Alexander Schüler-Meyer, und Guido Pinkernell. *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. 4th ed. 2022. Berlin Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2022.

- [50] Weitz, Edmund. *Fünf unlösbare Rätsel der Mathematik: Wie sich eine Wissenschaft selbst die Grenzen aufzeigt*. Hamburg: Rowohlt Taschenbuch, 2025.
- [51] Weitz, Edmund, und Heike Stephan. *Gesichter der Mathematik: 111 Porträts und Biographische Miniaturen*. 1st ed. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin / Heidelberg, 2023.
- [52] Whitehead, Alfred North. *Dialogues of Alfred North Whitehead*. Herausgegeben von Lucien Price. Boston: Little, Brown and Company, 1954.
- [53] Wikipedia. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Zugriff am 1.6.2026, unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Journal\\_f%C3%BCr\\_die\\_reine\\_und\\_angewandte\\_Mathematik](https://de.wikipedia.org/wiki/Journal_f%C3%BCr_die_reine_und_angewandte_Mathematik)
- [54] Winter, Heinrich. “Mathematikunterricht Und Allgemeinbildung.” *Mitteilungen Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 4, no. 2 (1996): 35–41. <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>.
- [55] Winter, Heinrich Winand. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. 3., Aktualisierte Aufl. 2016. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden Imprint: Springer Spektrum, 2016.

## Abbildungsverzeichnis

|    |                                                                      |    |
|----|----------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Porträt von Paolo Ruffini                                            | 26 |
| 2  | Titelseite von Paolo Ruffinis <i>Teoria generale delle equazioni</i> | 28 |
| 3  | Norwegische Briefmarke zu Ehren von Niels Henrik Abel                | 30 |
| 4  | Galois' frühe Notizen zum Gleichungsproblem fünften Grades           | 35 |
| 5  | KI-generierte Karikatur zur Mitternachtsformel                       | 36 |
| 6  | Übung zur Einschätzung von Lösungsstrategien                         | 45 |
| 7  | Quadrat für Übung 5                                                  | 54 |
| 8  | Übersicht biquadratischer Gleichungen und zugehöriger Galois-Gruppen | 56 |
| 9  | Graph der Funktion $f(x) = x^5 - x - 1$                              | 64 |
| 10 | Darstellung der Lösungen von $x^5 - x - 1 = 0$                       | 65 |