

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Prozedurale Flexibilität und Einsatz metakognitiver Strategien
im Mathematikunterricht

verfasst von | submitted by
Victoria Zehetner BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 509 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Französisch Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger
Privatdoz.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen Menschen bedanken, die mich während der Entstehung dieser Arbeit sowie während meines gesamten Studiums begleitet und unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt zunächst meinem Betreuer, Assoz. Prof. Mag. Dr. Christoph Ableitinger, der mich erst auf das Thema dieser Arbeit aufmerksam gemacht und mich während des gesamten Forschungsprozesses fachlich begleitet hat. Durch seine seine regelmäßigen konstruktiven Rückmeldungen und seine wertvollen Anregungen hat er wesentlich zur Weiterentwicklung dieser Arbeit beigetragen.

Ebenso möchte ich HS-Prof. Mag. Dr. Christian Dorner von der Pädagogischen Hochschule Steiermark danken, der mich mit seiner fachlichen Expertise insbesondere bei Fragen zur Durchführung der Erhebung, zur Auswertung sowie zur Interpretation der Ergebnisse unterstützt hat.

Mein Dank gilt außerdem den Direktor:innen der zwölf teilnehmenden Schulen sowie den Mathematiklehrkräften, die die Durchführung dieser Studie ermöglicht und bereitwillig Unterrichtszeit für die Erhebung zur Verfügung gestellt haben. Ohne ihre Unterstützung wäre die Umsetzung dieser empirischen Untersuchung nicht möglich gewesen. Zusätzlich möchte ich mich bei allen Schüler:innen bedanken, die freiwillig an der Studie teilgenommen und damit einen wesentlichen Beitrag zum Erkenntnisgewinn dieser Arbeit geleistet haben.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freund:innen bedanken, die mich während meines Studiums und insbesondere während der Entstehung dieser Arbeit stets unterstützt und begleitet haben. Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir durch ihre Unterstützung ermöglicht haben, mich auf mein Studium und meine fachlichen Interessen zu konzentrieren und meinen eigenen Bildungsweg zu verfolgen. Ihre kontinuierliche Begleitung, ihr Vertrauen und ihr Rückhalt haben wesentlich dazu beigetragen, dass ich diese Ausbildung mit der notwendigen Zeit und den entsprechenden Möglichkeiten absolvieren konnte.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht die prozedurale Flexibilität österreichischer Schüler:innen beim Lösen linearer Gleichungen und betrachtet zusätzlich den Zusammenhang zwischen Flexibilität, Genauigkeit und metakognitiven Strategien. Ausgangspunkt sind internationale Studien, die wiederholt auf einen Mangel an prozeduraler Flexibilität bei Schüler:innen sowie eine Diskrepanz zwischen dem Wissen über verschiedene Lösungsverfahren und deren tatsächlicher flexibler Anwendung hingewiesen haben. Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine quantitative Untersuchung mit 235 österreichischen Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe durchgeführt. Als Erhebungsinstrument diente eine adaptierte Version des Tri-Phase-Flexibilitätstests nach Xu et al., 2017 und Star et al., 2022, ergänzt durch einen Fragebogen zur Erfassung metakognitiver Strategien. Die Ergebnisse zeigen insgesamt niedrige Ausprägungen mathematischer Flexibilität. Gleichzeitig weisen ältere Schüler:innen höhere Flexibilitätswerte auf als jüngere Lernende. Zudem zeigt sich, dass das Standardverfahren die dominierende und bevorzugte Lösungsstrategie der Schüler:innen darstellt, was sich mit Befunden früherer Studien deckt. Zwischen Flexibilität und Genauigkeit konnte ein moderater positiver Zusammenhang festgestellt werden. Dagegen ergaben sich keine eindeutigen Zusammenhänge zwischen den Flexibilitätsmaßen und den selbstberichteten metakognitiven Strategien. Die Ergebnisse bestätigen zentrale Befunde internationaler Forschung und verdeutlichen die Bedeutung einer gezielten Förderung flexibler Lösungsstrategien im Mathematikunterricht. Darüber hinaus werden Implikationen für Unterricht, Lehrkräftebildung und zukünftige Forschung diskutiert.

Abstract

This study investigates the procedural flexibility of Austrian students in solving linear equations and additionally examines the relationship between flexibility, accuracy, and metacognitive strategies. It builds on international research that has consistently identified low levels of procedural flexibility among students and highlighted a discrepancy between students' knowledge of multiple solution strategies and their ability to apply these strategies flexibly in problem-solving situations. To address the research questions, a quantitative study was conducted with 235 Austrian students in grades 8 and 11. The assessment instrument was an adapted version of the Tri-Phase Flexibility Test by Xu et al., 2017 and Star et al., 2022, supplemented by a questionnaire measuring metacognitive strategies. The results show overall low levels of mathematical flexibility. At the same time, older students exhibit higher flexibility scores than younger learners. Moreover, it is evident that the standard procedure represents students' dominant and preferred solution strategy, which is consistent with findings from previous studies. A moderate positive correlation was found between flexibility and accuracy. In contrast, no clear relationship emerged between flexibility measures and self-reported metacognitive strategies. The findings confirm central results of international research and highlight the importance of systematically fostering flexible problem-solving strategies in mathematics education. In addition, implications for teaching, teacher education, and future research are discussed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Wissenstypen in der Mathematik	4
2.1	Konzeptuelles und prozedurales Wissen	4
2.2	Flexibilität in der Mathematik	6
2.2.1	Prozedurale Flexibilität	7
2.2.2	Potenzielle und Praktische Flexibilität	9
2.3	Metakognition	11
2.3.1	Selbstreguliertes Lernen im schulischen Kontext	11
2.3.2	Metakognition im Mathematikunterricht	14
2.3.3	Instrumente zur Messung metakognitiver Strategien	16
3	Erhebung mathematischer Flexibilität	18
3.1	Überblick über verschiedene Forschungsergebnisse und Instrumente mathematischer Flexibilität	18
3.2	Der Tri-Phase-Flexibilitätstest von Xu et al. (2017)	22
3.3	Die länderübergreifende Studie von Star et al. (2022)	26
4	Methodik	30
4.1	Stichprobe	30
4.2	Erhebungsinstrumente	31
4.2.1	Erhebung Prozeduraler Flexibilität	31
4.2.2	Einsatz metakognitiver Strategien	33
4.3	Ablauf	33
4.4	Auswertung	35
5	Ergebnisse	38

5.1	Genauigkeit	38
5.2	Prozedurale Flexibilität	39
5.3	Potenzielle Flexibilität	40
5.4	Spontane Flexibilität	40
5.5	Analyse der individuellen Schüler:innenleistungen	41
5.6	Bearbeitete Aufgaben und verwendete Strategien	42
5.7	Zusammenhang zwischen Genauigkeit und prozeduraler Flexibilität	47
5.8	Metakognitive Strategien	48
6	Diskussion	52
6.1	Österreichische Mathematikleistungen im internationalen Vergleich	52
6.2	Interpretation der Ergebnisse	54
6.2.1	Prozedurale Flexibilität	54
6.2.2	Genauigkeit	58
6.2.3	Bearbeitete Aufgaben und verwendete Strategien	59
6.2.4	Zusammenhang zwischen Genauigkeit und prozeduraler Flexibilität	62
6.2.5	Metakognitive Strategien	64
6.3	Limitationen der Studie	66
6.4	Methodische Herausforderungen bei der Durchführung und Auswertung	68
6.5	Implikationen für zukünftige Forschung	70
7	Fazit und Ausblick	72
	Literaturverzeichnis	74
	Anhang: Testheft	78

1 Einleitung

Mathematische Bildung umfasst weit mehr als das routinemäßige Anwenden erlernter Verfahren. Erfolgreiches mathematisches Lernen setzt voraus, dass Lernende mathematische Probleme nach ihrer Struktur analysieren, unterschiedliche Lösungswege erkennen und situationsangemessen anwenden können. In diesem Zusammenhang gilt die prozedurale Flexibilität als eine zentrale Facette mathematischer Kompetenz. Sie beschreibt im Kontext dieser Arbeit die Fähigkeit, über mehrere Lösungsverfahren zu verfügen, deren Angemessenheit für eine konkrete Aufgabe einzuschätzen und ein geeignetes Verfahren situationsgerecht auszuwählen und anzuwenden (Star et al., 2022). Prozedurale Flexibilität wird dabei als wesentlicher Bestandteil mathematischer Expertise verstanden, da sie Lernenden ermöglicht, Aufgaben effizient zu bearbeiten, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Verfahren zu erkennen und flexibel auf neue Problemstellungen zu reagieren.

Die Bedeutung prozeduraler Flexibilität für mathematische Denk- und Problemlöseprozesse wurde in den vergangenen Jahren in zahlreichen mathematikdidaktischen Forschungsarbeiten hervorgehoben. Dabei konnte wiederholt gezeigt werden, dass Schüler:innen zwar häufig über Kenntnisse verschiedener Strategien und Lösungsverfahren verfügen, diese jedoch nicht immer situationsangemessen einsetzen (Star et al., 2008; Xu et al., 2017). Forschungsergebnisse weisen somit auf eine Diskrepanz zwischen dem Wissen über unterschiedliche Lösungsverfahren und deren tatsächlicher Anwendung bei mathematischen Problemlöseaufgaben hin. Insbesondere die Nutzung effizienter und situationsgerechter Strategien scheint Lernenden unterschiedlicher Schulstufen Schwierigkeiten zu bereiten.

Vor diesem Hintergrund entwickelten Xu et al., 2017 den sogenannten Tri-Phase-Flexibilitätstest, der eine differenzierte Erfassung verschiedener Komponenten mathematischer Flexibilität ermöglicht. Aufbauend auf diesem Instrument untersuchten Star et al., 2022 die prozedurale Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen von Schüler:innen unterschiedlicher Altersgruppen und Bildungsgänge in Finnland, Schweden und Spanien. Die Ergebnisse zeigten insgesamt niedrige Ausprägungen prozeduraler Flexibilität sowie deutliche Unterschiede zwischen Ländern, Altersgruppen und Bildungswegen. Gleichzeitig bestätigten sie frühere Befunde, wonach Lernende häufig auf standardisierte Lösungsverfahren zurückgreifen, selbst wenn ihnen alternative und effizientere Strategien bekannt sind. Die Autor:innen weisen daher auf die Notwendigkeit weiterer Untersuchungen in unterschiedlichen internationalen Bildungssystemen hin, um ein umfassenderes Verständnis der Entwicklung mathematischer Flexibilität zu gewinnen (Star et al., 2022).

Für den österreichischen Kontext erscheint die Untersuchung prozeduraler Flexibilität von besonderer Relevanz. Mit der Einführung eines verpflichtenden technologiefreien Teils der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik an den AHS ab dem Schuljahr 2030/31, bei dem elektronische Hilfsmittel wie Taschenrechner, CAS-Systeme oder GeoGebra nicht verwendet werden dürfen, rücken prozedurale Kompetenzen der Schüler:innen erneut stärker in den Fokus (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2026). Neben der korrekten Durchführung mathematischer Verfahren gewinnt dabei auch die Fähigkeit an Bedeutung, geeignete Lösungswege für unterschiedliche Problemlöseaufgaben effizient auszuwählen und flexibel einzusetzen. Eine Übertragung der internationalen Forschungsbefunde auf den österreichischen Bildungsraum kann daher wertvolle Erkenntnisse für die Weiterentwicklung mathematischer Lehr- und Lernprozesse liefern. Darüber hinaus weisen verschiedene Studien darauf hin, dass die Entwicklung mathematischer Flexibilität maßgeblich durch Unterrichtsprozesse und die Art der Instruktion beeinflusst wird (Star et al., 2008; Star et al., 2015). Die Auseinandersetzung mit prozeduraler Flexibilität besitzt somit nicht nur für die mathematikdidaktische Forschung, sondern auch für die Ausbildung von Lehrkräften und die Gestaltung eines kompetenzorientierten Mathematikunterrichts hohe Relevanz.

Einen ersten Beitrag zur Untersuchung prozeduraler Flexibilität im österreichischen Kontext stellt die Arbeit von Tuscher, 2025 dar, welcher im Rahmen seiner Bachelorarbeit die prozedurale Flexibilität von 179 Schüler:innen unterschiedlicher Schulstufen an österreichischen Schulen mithilfe des Tri-Phase-Flexibilitätstests untersuchte. Die Ergebnisse lieferten erste Hinweise darauf, wie österreichische Schüler:innen mit unterschiedlichen Lösungsstrategien beim Bearbeiten linearer Gleichungen umgehen. Da bislang jedoch nur eine begrenzte Datenbasis für den österreichischen Bildungsraum besteht, erscheint eine weitere Untersuchung mit einer zusätzlichen Stichprobe relevant, um bestehende Befunde zu erweitern und ein umfassenderes Bild der prozeduralen Flexibilität österreichischer Schüler:innen zu gewinnen. Die vorliegende Arbeit knüpft daher an diese ersten Erkenntnisse an und ergänzt die bisherigen Ergebnisse durch eine weitere empirische Erhebung.

Neben der prozeduralen Flexibilität berücksichtigt die vorliegende Arbeit auch metakognitive Strategien beim Lernen und Bearbeiten mathematischer Aufgaben. Metakognitive Prozesse wie Planung, Überwachung und Regulation des eigenen Lernens gelten als wichtige Voraussetzungen erfolgreichen Problemlösens und werden vielfach mit höheren mathematischen Leistungen in Verbindung gebracht (Richardson et al., 2012). Bislang liegen jedoch nur wenige Erkenntnisse darüber vor, in welchem Zusammenhang metakognitive Strategien und prozedurale Flexibilität

stehen, insbesondere im Bereich algebraischer Problemlöseprozesse. Aus diesem Grund wird im Rahmen der empirischen Untersuchung zusätzlich erhoben, wie die teilnehmenden Schüler:innen ihren Einsatz metakognitiver Strategien selbst einschätzen und inwiefern Zusammenhänge mit ihrer Flexibilität und Genauigkeit beim Lösen linearer Gleichungen bestehen.

Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Forschungsfragen für diese Arbeit:

1. Wie ausgeprägt ist die prozedurale Flexibilität österreichischer Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe beim Lösen linearer Gleichungen?
2. Inwiefern unterscheidet sich die prozedurale Flexibilität österreichischer Schüler:innen in Abhängigkeit von Schulstufe und Schulform (AHS-Unterstufe, Mittelschule und Oberstufe), und wie lassen sich die Ergebnisse im Vergleich zu internationalen Forschungsbefunden einordnen?
3. Wie schätzen Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe ihren Einsatz metakognitiver Strategien beim Lernen und Bearbeiten mathematischer Aufgaben ein, und welche Unterschiede zeigen sich zwischen den Gruppen?

Zur Beantwortung dieser Forschungsfragen wurde eine quantitative Untersuchung mit 235 österreichischen Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe aus zwölf Schulen durchgeführt. Die Erhebung basierte auf der von Star et al., 2022 adaptierten Version des Tri-Phase-Flexibilitätstests nach Xu et al., 2017 zur Erfassung prozeduraler Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen und wurde durch einen Fragebogen zum Einsatz metakognitiver Strategien ergänzt.

Die vorliegende Arbeit beginnt mit der Darstellung jener theoretischen Grundlagen, die für die Untersuchung zentral sind. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf prozeduralem Wissen, mathematischer Flexibilität und metakognitiven Strategien. Darauf aufbauend werden zentrale Forschungsbefunde zum Thema prozedurale Flexibilität aufgearbeitet, die als Grundlage für die Einordnung der Ergebnisse dienen. Anschließend werden das Forschungsdesign, die verwendeten Erhebungsinstrumente sowie die methodische Vorgehensweise erläutert. Danach werden die Ergebnisse der empirischen Untersuchung präsentiert und im Kontext bisheriger Forschung diskutiert. Abschließend werden Limitationen der Studie reflektiert sowie Implikationen für den Mathematikunterricht und zukünftige Forschungsarbeiten aufgezeigt.

2 Wissenstypen in der Mathematik

In der mathematikdidaktischen Forschung wird bei der Untersuchung mathematischer Lernprozesse zwischen verschiedenen Wissenstypen unterschieden. Nach Anderson, 2008 lassen sich im Rahmen einer Lernaktivität konkret vier Arten von Wissen differenzieren: faktisches Wissen (Terminologie und einzelne Fakten), konzeptuelles Wissen (Kategorien, Theorien, Prinzipien und Modelle), prozedurales Wissen (Kenntnisse über Techniken, Prozesse oder Methodiken) sowie metakognitives Wissen (einschließlich der Fähigkeit zur Selbstbewertung und der Kenntnis unterschiedlicher Lernfähigkeiten und -techniken).

2.1 Konzeptuelles und prozedurales Wissen

In der jüngeren mathematikdidaktischen Forschung liegt ein verstärkter Fokus auf dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen von Lerner:innen. Obwohl diese beiden Wissensarten nicht immer strikt voneinander getrennt werden können, erscheint eine analytische Unterscheidung dennoch sinnvoll. Konzeptuelles Wissen bezeichnet das Wissen über mathematische Begriffe, Begriffsdefinitionen, Prinzipien sowie deren Beziehungen zueinander. Es umfasst dabei nicht nur den Besitz isolierter Konzepte, sondern auch ein Verständnis der Struktur dieses Wissens sowie der Möglichkeit, tragfähige und vielfältige Verknüpfungen zwischen einzelnen Inhalten herzustellen (Rittle-Johnson et al., 2015).

Demgegenüber wird prozedurales Wissen als Wissen über Lösungsverfahren, Formeln und einzelne Lösungsschritte definiert. Ein Lösungsverfahren (*procedure*) beschreibt dabei eine Reihe von Schritten beziehungsweise Aktionen, die ausgeführt werden, um ein bestimmtes Ziel zu erreichen. Dabei kann es sich einerseits um Algorithmen handeln, also um festgelegte Schrittfolgen, die bei korrekter Ausführung zuverlässig zur richtigen Lösung führen. Andererseits können darunter auch mögliche Handlungsschritte verstanden werden, die situationsabhängig in geeigneter Reihenfolge kombiniert werden müssen, um ein Problem zu lösen, beispielsweise beim Lösen algebraischer Gleichungen. Prozedurales Wissen kann somit als Wissen darüber, *wie* etwas durchgeführt wird verstanden werden und umfasst Kenntnisse über jene Schritte, die zur Lösung eines Problems oder zur Erreichung eines Ziels erforderlich sind (Hiebert et al., 1992; Rittle-Johnson et al., 2015).

Prozedurales Wissen entwickelt sich bei Lernenden insbesondere durch Übung und wiederholte

Problembearbeitung und ist daher häufig eng an bestimmte Aufgabentypen gebunden. Charakteristisch für prozedurales Wissen ist vor allem seine sequenzielle Struktur, durch die es sich wesentlich von anderen Wissensformen unterscheidet (Rittle-Johnson et al., 2015).

Eine der zentralen und seit langem geführten Debatten innerhalb der Mathematikdidaktik betrifft die relative Bedeutung konzeptuellen Wissens gegenüber prozeduralem Wissen beziehungsweise von Verständnis gegenüber Fertigkeiten. Star, 2005 argumentiert, dass in der jüngeren empirischen mathematikdidaktischen Forschung der Fokus stärker auf konzeptuelles Wissen gelegt wurde, während vergleichsweise wenige Studien vorliegen, die sich explizit und detailliert mit der Entwicklung prozeduralen Wissens von Schüler:innen befassen. Viele Forscher:innen vertreten die Auffassung, dass prozedurales Wissen nicht im Zentrum von Forschung und Unterricht stehen sollte. Dies könnte darauf zurückzuführen sein, dass prozeduralen Fertigkeiten, insbesondere im Vergleich zu konzeptuellem Wissen, keine ausreichend hohe didaktische Bedeutung mehr zugeschrieben wird. Andere Forscher:innen argumentieren, dass die zunehmende Verfügbarkeit technologischer Hilfsmittel den Bedarf reduziert oder sogar überflüssig gemacht habe, sich mit pädagogischen und kognitiven Fragestellungen im Zusammenhang mit dem Erwerb prozeduraler Fertigkeiten auseinanderzusetzen (Star, 2005).

Wie bereits Hiebert et al., 1992 hervorheben, erscheint es jedoch wenig sinnvoll, die Frage nach der Vorrangigkeit einer dieser Wissensformen zu stellen, da beide für die Entwicklung mathematischer Expertise von grundlegender Bedeutung sind. Prozedurale Verfahren ermöglichen eine effiziente Bearbeitung mathematischer Aufgaben. Häufig geübte und verinnerlichte Lösungsverfahren können schnell und mit vergleichsweise geringem kognitivem Aufwand ausgeführt werden. Gut eingeübte Verfahren schaffen dabei eine besondere Form mathematischer Handlungssicherheit, da sie die Regelmäßigkeiten und Strukturen mathematischer Systeme nutzen und eine scheinbar mühelose Lösung routinemäßiger Aufgaben ermöglichen (Hiebert et al., 1992, S. 78). Für mathematische Expertise ist jedoch nicht ausschließlich prozedurales Wissen relevant: Ebenso bedeutsam ist das konzeptuelle Wissen. Neben den Vorteilen eines tieferen Verständnisses mathematischer Zusammenhänge trägt konzeptuelles Wissen insbesondere durch seine Verknüpfung mit prozeduralem Wissen zur Entwicklung mathematischer Kompetenz bei. Nach Hiebert et al., 1992 hängen die Beziehungen zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen wesentlich von den Verbindungen ab, die Lernende zwischen ihren mentalen Repräsentationen herstellen. Werden mathematische Lösungsverfahren somit mit vernetzten Wissensstrukturen verbunden und nicht lediglich als isolierte Handlungsschritte verstanden, kann dies eine tiefere mathematische Expertise fördern.

2.2 Flexibilität in der Mathematik

Ein wesentlicher Vorteil der Verknüpfung von prozeduralem Wissen mit konzeptuellem Wissen liegt in der damit verbundenen Flexibilität. In Wissensnetzwerke eingebettete Vorgehensweisen ermöglichen Lernenden den Zugriff auf zusammenhängende Informationen und unterstützen dadurch die Anpassung bekannter Verfahren an neue Problemstellungen. Bei Aufgaben, die sich von jenen unterscheiden, für die eine Vorgehensweise ursprünglich erlernt wurde, kann das zugrunde liegende konzeptuelle Wissen relevante Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Problemen identifizieren und so eine angemessene Modifikation des Vorgehens ermöglichen. Auf diese Weise erweitert konzeptuelles Wissen den Anwendungsbereich prozeduraler Verfahren und unterstützt flexibles und effizientes mathematisches Handeln (Hiebert et al., 1992).

Auch Star, 2005 weist darauf hin, dass prozedurales Wissen in vielen traditionellen Definitionen häufig zu oberflächlich verstanden wird und Aspekte der Flexibilität dabei nur unzureichend oder gar nicht berücksichtigt werden. Um dies zu verdeutlichen, nimmt Star, 2005 in diesem Zusammenhang eine Differenzierung zwischen *oberflächlichem* und *tiefem* prozeduralem Wissen vor. In traditionellen Definitionen prozeduralen Wissens liegt der Fokus primär auf der Kenntnis unterschiedlicher Algorithmen und einzelner Lösungsschritte, was er als oberflächliches prozedurales Wissen klassifiziert. Lernende, die lediglich über ein solches oberflächliches Verfahrenswissen verfügen, sind häufig auf die Anwendung standardisierter Techniken angewiesen. Dies kann in weiterer Folge dazu führen, dass sie ineffiziente Lösungswege anwenden oder neue, unbekannte Problemstellungen nicht erfolgreich bearbeiten können. Ein:e flexiblere:r Problemlöser:in verfügt hingegen über ein tieferes Verständnis verschiedener mathematischer Verfahren und ist dadurch in der Lage, sich innerhalb dieses Verfahrensraums flexibel zu bewegen. Dies ermöglicht die Auswahl und Anwendung von Strategien, die über standardisierte Vorgehensweisen hinausgehen und besser an die jeweiligen Problembedingungen oder Lösungsziele angepasst sind. Star, 2005 bezeichnet diese Form des Wissens als tiefes prozedurales Wissen (Star, 2005, S. 409).

Aus mathematikdidaktischer Perspektive folgt daraus, dass sich die Erforschung prozeduralen Wissens nicht ausschließlich darauf konzentrieren sollte, welche mathematischen Verfahren Schüler:innen beherrschen oder nicht beherrschen. Vielmehr sollte untersucht werden, welche Strategien Lernende einsetzen, um mathematische Probleme zu lösen und warum, und welche Faktoren dazu beitragen, dass Probleme flexibel und effizient bearbeitet werden können (Star, 2005). Vor dem Hintergrund der derzeitigen Überarbeitung der schriftlichen Reifeprüfung in Mathematik in Österreich, in deren Rahmen für die AHS ein technologiefreier Prüfungsteil vorgesehen ist,

scheint sich dieser Schwerpunkt künftig erneut zu verschieben (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2026). Dies verdeutlicht den Bedarf an weiterer Forschung, die das prozedurale Wissen österreichischer Schüler:innen systematisch untersucht, um mögliche Defizite in der aktuellen Unterrichtspraxis sichtbar zu machen und auf dieser Grundlage den Mathematikunterricht gezielt weiterzuentwickeln.

2.2.1 Prozedurale Flexibilität

Bereits seit längerer Zeit beschäftigen sich Forscher:innen der Mathematikdidaktik mit der Frage, wie den weit verbreiteten Beliefs von Schüler:innen entgegengewirkt werden kann, Mathematik als eine Sammlung starrer und auswendig zu lernender Regeln sowie Algorithmen zu betrachten. Dieses statische Verständnis von Mathematik erweist sich insofern als problematisch, als auswendig gelernte Verfahren häufig leicht vergessen werden, fehleranfällig sind und sich nur schwer auf neue Situationen übertragen lassen (Hiebert et al., 1992). Darüber hinaus wurde wie oben bereits diskutiert vielfach darauf hingewiesen, dass prozedurales Wissen in einem Zusammenhang mit konzeptuellem Wissen steht und dass ein tiefgehendes mathematisches Verständnis erst durch die Verknüpfung beider Formen gefördert werden kann (Rittle-Johnson et al., 2015). Diese Erkenntnisse führten innerhalb der Mathematikdidaktik zu einer stärkeren Fokussierung auf die Entwicklung und Förderung mathematischer Flexibilität bei Schüler:innen (Star, 2005).

Im allgemeinen Sprachgebrauch wird unter Flexibilität die Fähigkeit verstanden, sich an unterschiedliche Umstände angemessen anpassen zu können. Um zu verdeutlichen, wie Flexibilität in einem mathematischen Kontext konkretisiert werden kann und welche Vorteile ein flexibles Vorgehen bei mathematischen Aufgaben für Lerner:innen mit sich bringt, erscheint es sinnvoll, dies zunächst exemplarisch zu illustrieren (Star et al., 2006). Tabelle 1 (nach Star et al., 2006, S. 281) enthält zu diesem Zweck Beispielaufgaben mit Lösungswegen von zwei Schüler:innen, die als mehr bzw. weniger flexibel klassifiziert werden können.

Wie Tabelle 1 zeigt, führen beide Lösungswege in allen drei Fällen zu einer korrekten Lösung. Schüler:in 1 in der linken Spalte verwendet jedoch für jede Gleichung ein anderes Lösungsverfahren, während Schüler:in 2 in der rechten Spalte bei allen Aufgaben denselben Algorithmus anwendet. Das von Schüler:in 2 wiederholt verwendete Verfahren wird im Folgenden auch als Standardverfahren bezeichnet. Dabei handelt es sich um das Auflösen der Klammer mithilfe des Distributivgesetzes im ersten Schritt, das in der Regel als erste Methode zur Lösung linearer Gleichungen dieses Typs vermittelt wird.

Tabelle 1: Beispielaufgaben und typische Lösungswege von mehr bzw. weniger flexiblen Problemlöser:innen (Star et al., 2006, S. 281)

	Flexible Lösungen von Schüler:in 1	Weniger flexible Lösungen von Schüler:in 2
$4(x + 1) = 8$	$4(x + 1) = 8$ $x + 1 = 2$ $x = 1$	$4(x + 1) = 8$ $4x + 4 = 8$ $4x = 4$ $x = 1$
$4(x + 1) + 2(x + 1) = 12$	$4(x + 1) + 2(x + 1) = 12$ $6(x + 1) = 12$ $x + 1 = 2$ $x = 1$	$4(x + 1) + 2(x + 1) = 12$ $4x + 4 + 2x + 2 = 12$ $6x + 6 = 12$ $6x = 6$ $x = 1$
$4(x + 1) + 3x + 7 = 8 + 3x + 7$	$4(x + 1) + 3x + 7 = 8 + 3x + 7$ $4(x + 1) = 8$ $x + 1 = 2$ $x = 1$	$4(x + 1) + 3x + 7 = 8 + 3x + 7$ $4x + 4 + 3x + 7 = 3x + 15$ $7x + 11 = 3x + 15$ $4x = 4$ $x = 1$

Es kann davon ausgegangen werden, dass flexible Problemlöser:innen (in Tabelle 1 Schüler:in 1) ebenfalls über Kenntnisse des Standardverfahrens verfügen. Charakteristisch für mathematische Flexibilität ist jedoch die Fähigkeit, abhängig von der jeweiligen Problemstellung zwischen unterschiedlichen Lösungswegen abzuwägen und gegebenenfalls vom Standardverfahren abzuweichen, wenn sich ein effizienterer Lösungsweg anbietet. Aus Tabelle 1 wird deutlich, dass die Vorgehensweise von Schüler:in 1 bei allen drei Gleichungen weniger Rechenschritte erfordert und daher als effizienter bewertet werden kann (Star et al., 2006).

Personen mit lediglich oberflächlichem prozeduralem Wissen (in Tabelle 1 Schüler:in 2) sind häufig auf standardisierte Vorgehensweisen und Algorithmen angewiesen, was ineffiziente Lösungswege oder Schwierigkeiten beim Lösen neuartiger Problemstellungen zur Folge haben kann. Prozedurales Wissen ermöglicht demgegenüber ein flexibles Vorgehen sowie die gezielte Auswahl geeigneter Lösungsstrategien (Star, 2005). Darüber hinaus argumentiert Star, 2005, dass Flexibilität in bestehenden Definitionen prozeduralen Wissens häufig nicht oder nur unzureichend berücksichtigt wird. Zum tiefen prozeduralen Wissen zählt nach Star, 2005 zudem ein metakognitiver Aspekt, der sich in einem Bewusstsein für die jeweiligen Stärken und Schwächen unterschiedlicher Lösungsverfahren sowie in der Fähigkeit zeigt, diese Strategien situationsangemessen anzupassen und weiterzuentwickeln.

Ausgehend von dieser theoretischen Beschreibung tiefen prozeduralen Wissens hat sich in der mathematikdidaktischen Forschung das Konzept der prozeduralen Flexibilität herausgebildet, mit dessen Hilfe die Ausprägung dieser Wissensform konkretisiert und empirisch untersucht werden kann. Star et al., 2022 definieren demnach prozedurale Flexibilität als die Fähigkeit, mehrere anwendbare Verfahren zu einem mathematischen Problem zu kennen und das jeweils geeignete Verfahren zur Lösung eines bestimmten Problems auszuwählen (Star et al., 2022, S. 2). Als effizientestes Verfahren gilt dabei jenes, das im Hinblick auf die jeweilige Problemstellung die größten mathematischen Vorteile bietet, etwa durch eine geringere Anzahl an Lösungsschritten und eine möglichst geringe Fehleranfälligkeit (Star et al., 2022).

2.2.2 Potenzielle und Praktische Flexibilität

Die Erforschung prozeduraler Flexibilität von Schüler:innen stellt wie oben dargelegt einen zentralen Forschungsgegenstand in der jüngeren mathematischdidaktischen Forschung dar. Erkenntnisse aus bisherigen Studien zeigen jedoch wiederholt, dass Lernende häufig keine innovativen Strategien zur Lösung eines Problems anwenden, selbst wenn sie gleichzeitig Kenntnisse über solche Strategien nachweisen können. Es scheint somit eine Diskrepanz zwischen dem tatsächlich demonstrierten Können und dem potenziell vorhandenen Wissen der Schüler:innen zu bestehen. Selbst fortgeschrittene Lerner:innen greifen häufig auf Standardmethoden zurück, obwohl sie zugleich eine Präferenz für innovative Strategien äußern und Kenntnisse über diese zeigen (Xu et al., 2017). Zu ähnlichen Ergebnissen kamen auch Newton et al., 2010: Mehrere Schüler:innen begründeten in anschließenden Befragungen die Wahl des Standardverfahrens zur Bearbeitung eines Problems damit, dass sie an dieses Vorgehen „gewöhnt“ seien, selbst wenn sie gleichzeitig erkannten, dass es sich nicht um die effizienteste Methode für die Lösung dieser Aufgabe handelte. Dies deutet darauf hin, dass ein stark routinisiertes Einüben bestimmter Verfahren die flexible Anwendung alternativer Strategien beeinträchtigen kann. Als mögliche Erklärung führen Newton et al., 2010 den sogenannten „Einstellungseffekt“ an, welcher die Tendenz von Menschen beschreibt, Probleme bevorzugt mit vertrauten Lösungswegen zu bearbeiten, selbst dann, wenn effizientere oder geeignetere Verfahren zur Verfügung stehen (Newton et al., 2010, S. 300).

Wie Xu et al., 2017 anmerken, bildet diese grundlegende Diskrepanz zwischen der Kenntnis von Strategien (als Kompetenz bezeichnet) und der Fähigkeit, diese Strategien in geeigneten Situationen tatsächlich anzuwenden (als Leistung bezeichnet), bereits seit längerer Zeit einen zentralen

Forschungsgegenstand der psychologischen Forschung. Xu et al., 2017 weisen jedoch auch darauf hin, dass diese Diskrepanz in Studien zur Untersuchung mathematischer Flexibilität häufig nicht ausreichend berücksichtigt wird: In bisheriger Forschung zur mathematischen Flexibilität wurde etwa vereinzelt bereits über Defizite in der praktischen Flexibilität, also über eine mangelnde effiziente Anwendung innovativer Strategien durch die Lerner:innen, berichtet (z. B. Star et al., 2006, Star et al., 2008), aber der Zusammenhang zwischen praktischer und potenzieller Flexibilität wurde dabei kaum untersucht. Ebenso blieb weitgehend unbeachtet, weshalb Lernende unterschiedliche Ausprägungen potenzieller und praktischer Flexibilität aufweisen könnten. Der von Xu et al., 2017 entwickelte *Tri-Phase-Flexibilitätstest* soll diese Forschungslücke schließen (Xu et al., 2017).

Zu diesem Zweck unterscheiden Xu et al., 2017 in ihrer Studie zwei konkrete Ausprägungen von Flexibilität: „potenzielle Flexibilität“ (*potential flexibility*) und „praktische Flexibilität“ (*practical flexibility*). Potenzielle Flexibilität liegt demnach vor, wenn Lerner:innen Kenntnisse unterschiedlicher (sowohl standardmäßiger als auch innovativer) Strategien zur Lösung mathematischer Probleme demonstrieren können. Mit der praktischen Flexibilität beschreiben Xu et al., 2017 hingegen die Fähigkeit, innovative Strategien bei einem konkreten Problem tatsächlich anzuwenden (Xu et al., 2017, S. 2).

Die Unterscheidung dieser beiden Formen von Flexibilität hat sich in einschlägigen Forschungsarbeiten mehrfach als sinnvoll erwiesen und findet daher auch in der Studie von Xu et al., 2017 Berücksichtigung. Durch die Gestaltung des Tri-Phase-Flexibilitätstests mit Aufgaben in mehreren aufeinanderfolgenden Phasen, welche im Folgenden explizit dargestellt werden, sollen beide Ausprägungen mathematischer Flexibilität sichtbar gemacht werden: Während sich potenzielle Flexibilität auf die Fähigkeit der Lernenden bezieht, unterschiedliche standardisierte und innovative Strategien zu erkennen oder zu entwickeln, umfasst praktische Flexibilität deren konkrete Umsetzung im Lösungsprozess mathematischer Aufgaben (Xu et al., 2017).

2.3 Metakognition

Metakognitive Strategien haben sowohl in der Praxis als auch in der Forschung zum Lehren und Lernen von Mathematik in den vergangenen Jahren deutlich an Bedeutung gewonnen und werden häufig als zentraler Bestandteil selbstregulierten Lernens betrachtet. Selbstreguliertes Lernen beschreibt Lernprozesse, bei denen Lernende ihr Lernen eigenständig planen, überwachen und steuern, um gesetzte Ziele zu erreichen. Dabei übernehmen sie eine aktive Rolle im Lernprozess und tragen in hohem Maße Verantwortung für ihren eigenen Lernerfolg. Selbstregulierende Lernende setzen sich eigenständig Ziele, wählen geeignete Strategien zur Zielerreichung aus und passen diese fortlaufend anhand ihrer Lernerfahrungen und Ergebnisse an. Diese Entscheidungen der Planung, Gestaltung und Kontrolle des Lernprozesses basieren dabei stark auf motivationalen, kognitiven und metakognitiven Komponenten (Alonso et al., 2017, S. 9).

2.3.1 Selbstreguliertes Lernen im schulischen Kontext

Die Bedeutung selbstregulierter Lernprozesse für den schulischen Erfolg konnte in zahlreichen Studien nachgewiesen werden. Bellhäuser et al., 2014 verweisen etwa darauf, dass Selbstregulationskompetenzen mittlerweile als zentrale Schlüsselkompetenzen erfolgreichen Lernens angesehen wird. Eine Metaanalyse von Richardson et al., 2012 zeigte beispielsweise, dass verschiedene Facetten selbstregulierten Lernens, darunter Selbstwirksamkeit, Anstrengungsregulation und Zeitmanagement, stärkere Zusammenhänge mit akademischem Erfolg aufweisen als einige traditionelle Prädiktoren schulischer Leistung, etwa der sozioökonomische Hintergrund oder Intelligenzmaße. Gleichzeitig weisen zahlreiche Untersuchungen darauf hin, dass sowohl Schüler:innen als auch Studierende häufig Defizite im Bereich der Selbstregulation aufweisen, weshalb die gezielte Förderung entsprechender Kompetenzen als bedeutsam angesehen wird (Bellhäuser et al., 2014).

Metakognition nimmt innerhalb selbstregulierter Lernprozesse eine zentrale Funktion ein. Sie umfasst das Wissen über eigene Denk- und Lernprozesse sowie die Fähigkeit, diese bewusst zu planen, zu überwachen und zu regulieren. Lernende entwickeln im Laufe ihrer schulischen Laufbahn individuelle Strategien, um ihr Lernen zu organisieren, ihren Lernfortschritt einzuschätzen und ihr Vorgehen gegebenenfalls anzupassen. Diese Prozesse ermöglichen es ihnen, verschiedene Lernhandlungen aktiv und bewusst zu steuern und Schwierigkeiten im Lernprozess gezielt zu bewältigen. Anders gesagt, kann Metakognition auch folgendermaßen verstanden werden: „Denken über Denken, also die eigenen Denkprozesse zu reflektieren. Auf Lernprozesse übertragen

heißt das, metakognitiv Lernende nehmen bei der Bearbeitung einer konkreten Aufgabe die dabei ablaufenden kognitiven Prozesse in den Blick“ (Kaiser, 2018, S. 31). Als Einflussfaktor erfolgreichen Lernens weist sie eine der höchsten berichteten Effektstärken auf und findet daher im Kontext der Wirksamkeit von Schule und Unterricht seit längerer Zeit besondere Beachtung (Sjuts, 2022). Wie Kaiser, 2018 jedoch darlegt, werden metakognitive Strategien von Lernenden häufig spontan und wenig strategisch genutzt. Erst wenn Menschen ihre Denkvorgänge bewusst wahrnehmen, kann Metakognition eingesetzt werden, um sie zu steuern: „Gelingt es Menschen, sich ihrer Instrumente zur Informationsverarbeitung bewusst zu werden und sie zu verfeinern, wirkt Metakognition wie ein Denk-Coach. Es hilft dem Denken mit aktivierenden Fragen auf die Sprünge“ (Kaiser, 2018, S. 40).

Metakognition umfasst sowohl die Reflexion eigener kognitiver Prozesse als auch deren Steuerung und weist folglich eine deklarative sowie eine prozedurale bzw. exekutive Komponente auf. Die deklarative Metakognition bezeichnet das Wissen einer Person über die eigenen kognitiven Voraussetzungen und den Leistungsstand sowie über mögliche heuristische Strategien zur Lösung eines Problems. Der deklarative Aspekt enthält das sogenannte metakognitive Wissen, das nach Flavell, 1979 die drei Variablen *person*, *task* und *strategy* umfasst: „Dazu zählen einmal das Wissen um eigene Denk- und Lernzugriffe (Personwissen), des Weiteren das Wissen um Charakteristika von textlich, ikonisch oder numerisch präsentierten Informationen (Aufgabenwissen) und solches um Strategien, die bei der Informationsverarbeitung eingesetzt werden können (Strategiewissen)“ (Kaiser, 2018, S. 53).

Prozedurales Wissen bezieht sich auf das Wissen darüber, *wie* man Dinge tut. Ein Großteil dieses Wissens wird in Form von Heuristiken und Strategien dargestellt. Personen mit einem hohen Maß an prozeduralem Wissen führen demnach Aufgaben automatisierter aus, verfügen mit größerer Wahrscheinlichkeit über ein breiteres Repertoire an Strategien, und wenden unterschiedliche Strategien effektiv zur Problemlösung an (Schraw, 2001, S. 114).

Die prozedurale Metakognition, auf die sich der Fokus dieser Arbeit richtet, verbindet die vor, während und nach der Aufgabenbearbeitung angesiedelten Prozesse des Planens, Überwachens und Überprüfens des eigenen Lösungsweges mit dem Ziel, das Methodenrepertoire zu erweitern (Sjuts, 2022; Grundey, 2015). Zur Planung (*planning*) gehören die Auswahl geeigneter Strategien und die Zuweisung von Ressourcen, die sich auf die Leistung auswirken. Beispiele hierfür sind das Aufstellen von Prognosen vor der Ausführung einer Aufgabe, die Festlegung der Strategien sowie die gezielte Einteilung von Zeit und Aufmerksamkeit vor Beginn der Aufgabe (Schraw,

2001). Lernende müssen sich in dieser Phase zunächst einen Überblick über die Art und die Präsentation der Aufgabe verschaffen, um daraus die nötigen Arbeitsschritte anzuordnen (Kaiser, 2018). Der Prozess der Überwachung (*monitoring*) beschreibt die fortlaufende Bewertung des eigenen Denk- und Arbeitsfortschritts bei der Bearbeitung einer Aufgabe sowie die damit verbundene Regulation. Es beschreibt also das Bewusstsein über die Arbeitsweise und das eigene Verständnis und die Steuerung der einzelnen Arbeitsschritte. Ein Beispiel dafür ist, sich während des Lernens mit Selbsttests zu überprüfen (Schraw, 2001). In dieser Phase zeigt sich dann, wo man sich eventuell korrigieren und die Lösungsstrategie verändern muss als in der Planung ursprünglich vorgesehen (Kaiser, 2018). Mit der dritten metakognitiven Strategie, der Überprüfung oder Kontrolle (*control*), ist schließlich die Rekapitulation und Reflexion der Vorgehensweise, der erzielten Ergebnisse und der Lerneffizienz gemeint. Metakognition fordert am Ende des Arbeitsprozesses auf, das Ergebnis nicht vorschnell als richtig und den Lernprozess als abgeschlossen zu bewerten, sondern ihn nochmal einer Prüfung zu unterziehen (Kaiser, 2018). Typische Beispiele hierfür sind die Überprüfung der eigenen Ziele und Schlussfolgerungen nach dem Fertigstellen der Aufgabe (Schraw, 2001).

Im tatsächlichen Vollzug metakognitiver Prozesse hängen diese Komponenten miteinander zusammen und greifen in komplexer Weise ineinander (Sjuts, 2022). Wie aus Forschungen hervorgeht, laufen die drei Strategien in Lernprozessen auch nicht immer geordnet ab, sondern werden vielfach verkürzt oder auch übersprungen (Kaiser, 2018).

Empirische Forschungsergebnisse deuten darauf hin, dass Metakognition in engem Zusammenhang mit Problemlösung, Verständnis, Gedächtnis und Lernen, und daher auch für die Bildungsarbeit einen bedeutenden Faktor darstellt. Es wurde dabei mehrfach gezeigt, dass metakognitiv fundiertes Lehren und Lernen den Lernerfolg erheblich steigern kann (Kaiser, 2018). Der Zusammenhang zwischen Metakognition und Aufgabenleistung variiert jedoch je nach Art der ausgeführten kognitiven Aufgabe (Song et al., 2021). Dieser Zusammenhang ist bislang vergleichsweise wenig erforscht und wird insbesondere im mathematischen Kontext durch heterogene Operationalisierungen erschwert.

2.3.2 Metakognition im Mathematikunterricht

Auch für den Mathematikunterricht werden metakognitive und selbstregulative Kompetenzen als besonders relevant betrachtet. Mathematische Problemstellungen erfordern häufig die Planung geeigneter Lösungswege, die Überprüfung von Zwischenergebnissen sowie die Anpassung von Strategien bei Schwierigkeiten. Lernende müssen daher nicht nur über fachliches Wissen verfügen, sondern auch in der Lage sein, ihren Problemlöseprozess bewusst zu steuern. Forschungen zeigen, dass die Förderung selbstregulativer Strategien nicht nur zu einer Verbesserung des Lernverhaltens führt, sondern auch positive Auswirkungen auf mathematische Leistungen haben kann (Bellhäuser et al., 2014).

Für die Förderung metakognitiver Strategien im Mathematikunterricht werden unter anderem sogenannte Prompts empfohlen. Dabei handelt es sich um explizite Handlungsanweisungen in Form von Handlungsaufforderungen oder Leitfragen, die Lernende unterstützen, strategisch zu handeln und Probleme systematisch zu lösen. Konrad, 2014 unterscheidet dabei Prompts für die drei Phasen Planung, Überwachung und Evaluation. Solche Fragen können beispielsweise darauf abzielen, relevante Informationen einer Aufgabe zu identifizieren, den eigenen Lösungsweg kritisch zu hinterfragen oder die Angemessenheit eines Ergebnisses zu überprüfen (Konrad, 2014). Eine beispielhafte Auflistung solcher Prompts für den Prozess des Problemlösens liefert Tabelle 2 nach Konrad, 2014.

Tabelle 2: Beispielhafte Prompts für den Prozess des Problemlösens nach Konrad, 2014, S. 78

Phase	Prompts
Planen	1. Was ist besonders wichtig bei der Aufgabe? 2. Worin besteht mein Ziel? 3. Welche Informationen und Strategien benötige ich?
Überwachen	1. Habe ich ein klares Verständnis davon, was ich tue? 2. Ist mein Vorgehen sinnvoll? 3. Kann ich meine Ziele durch mein Vorgehen erreichen?
Evaluieren	1. Habe ich mein Ziel erreicht? 2. Was hat funktioniert? 3. Was hat nicht geklappt?

Mithilfe solcher Prompts können Lehrpersonen im Unterricht metakognitive Prozesse sichtbar machen und Lernende gezielt dabei unterstützen, Problemlöseaufgaben systematischer und reflektierter zu bearbeiten.

Im Bereich der Mathematik werden metakognitive Fähigkeiten von Lernenden als entscheidende Komponente zur Optimierung von Lehr- und Lernprozessen hervorgehoben (Grundey, 2015). Schoenfeld, 1987 hat dabei insbesondere die Bedeutung metakognitiver Fähigkeiten für mathematische Problemlöseaufgaben aufgezeigt, wodurch Metakognition in der mathematischdidaktischen Forschung weiter in den Fokus gerückt ist. Schoenfeld, 1987 führt innerhalb der Metakognition drei verschiedene Bereiche an, die jedoch in Beziehung zueinander stehen (Schoenfeld, 1987, S. 190):

- Bewusstheit über die eigenen Denkprozesse
- Kontrolle und Selbstregulation bzw. Monitoringfähigkeiten
- Beliefs und Affekte

Letztere Kategorie definiert er folgendermaßen näher: „What ideas about mathematics do you bring to your work and how does that shape the way that you do mathematics?“ (Schoenfeld, 1987, S. 190). Beliefs oder Grundüberzeugungen gelten als wichtiger Einflussfaktor im Bereich der Metakognition und umfassen stabile Überzeugungsstrukturen, in denen sowohl kognitive als auch affektive Komponenten wirksam werden und die sich auf verschiedene Aspekte beziehen können (Grundey, 2015).

Schoenfeld, 1987 zeigte auf, dass Selbstregulierungsfähigkeiten beim Problemlösen Lernende maßgeblich dabei unterstützen, verschiedene Lösungsstrategien gegeneinander abzuwägen und auszuwählen und damit effizienter zu der korrekten Lösung zu gelangen (Schoenfeld, 1987). Veenman, 2011 erforschte in seiner Studie den Zusammenhang zwischen metakognitiven Fähigkeiten, intellektuellen Fähigkeiten und der mathematischen Leistung von Lernenden, indem er mit systematischen Beobachtungen und Leistungstests arbeitete. Die Ergebnisse zeigten, dass beide Faktoren die mathematischen Leistungen beeinflussen, jedoch metakognitiven Fähigkeiten eine größere Rolle spielen (Grundey, 2015).

Der Nutzung von Strategien kommt also eine wesentliche Bedeutung zu, die als zentraler Mediator zwischen metakognitivem Wissen und mathematischer Leistung gilt, in mathematikdidaktischen Studien jedoch häufig nicht systematisch erfasst wird. Der Zusammenhang zwischen Metakognition und Leistung ist zudem dynamisch und anforderungsspezifisch: Metakognitives Wissen scheint seine Wirkung insbesondere bei komplexen, nicht automatisierten mathematischen Aufgaben zu entfalten, während es bei einfachen oder routinisierten Prozessen eine gerin-

gere Rolle spielt. Insgesamt zeigen sich trotz methodischer Einschränkungen deutliche Hinweise darauf, dass metakognitives Wissen über Strategien und deren gezielten Einsatz einen wesentlichen Beitrag zur mathematischen Leistungsentwicklung leistet, wobei insbesondere für den Mathematikunterricht weiterhin erheblicher Forschungsbedarf besteht (Lingel, 2016).

Die Konzepte der Metakognition und der prozeduralen Flexibilität weisen inhaltlich enge Bezüge auf. Prozedurale Flexibilität setzt nicht nur das Vorhandensein mehrerer Lösungsverfahren voraus, sondern erfordert zugleich die Fähigkeit, deren Angemessenheit situationsbezogen zu beurteilen und das jeweils effizienteste Verfahren gezielt auszuwählen. Diese Auswahl- und Entscheidungsprozesse lassen sich als metakognitive Tätigkeiten verstehen, da sie insbesondere Elemente der Planung, Überwachung und Überprüfung umfassen. Metakognitives Wissen über Strategien sowie deren bewusste Steuerung bildet somit eine zentrale Voraussetzung für die flexible Nutzung prozeduralen Wissens in mathematischen Problemlösesituationen. Prozedurale Flexibilität kann daher als Schnittstelle zwischen prozeduralem Wissen und metakognitiven Kompetenzen verstanden werden. Inwiefern ein Zusammenhang zwischen der Wahrnehmung metakognitiver Strategien und der prozeduralen Flexibilität von Schüler:innen besteht, wird daher im empirischen Teil der vorliegenden Arbeit untersucht.

2.3.3 Instrumente zur Messung metakognitiver Strategien

Grundsätzlich werden in der Forschung vor allem zwei unterschiedliche Ansätze zur Erfassung metakognitiver Strategien eingesetzt: sogenannte On-line- und Off-Line-Methoden.

On-line-Methoden erfassen kognitive Prozesse zeitgleich zur Aufgabenbearbeitung. Beispiele sind Lautes Denken („Think-Aloud-Protokolle“), Beobachtung, Blickbewegungsmessung oder Logfile-Analysen am Computer. Diese Verfahren ermöglichen es, tatsächliches Verhalten anhand objektiv definierter Kriterien zu kodieren und reduzieren dadurch Verzerrungen durch subjektive Selbsteinschätzungen. Gleichzeitig weisen sie jedoch mehrere Einschränkungen auf: Think-Aloud-Protokolle können unvollständig sein, wenn nicht alle Gedanken verbalisiert werden, außerdem kann diese Art der Erhebung die Teilnehmer:innen kognitiv zusätzlich belasten. Beobachtungen und Logfiles erfassen zudem nur sichtbares Verhalten, nicht jedoch zugrunde liegende Gedanken oder Motive der Lernenden. Darüber hinaus sind On-line-Methoden häufig sehr zeit- und arbeitsintensiv, da sie individuell durchgeführt und aufwendig ausgewertet werden müssen (Veenman, 2011, S. 206).

Off-line-Methoden hingegen erfolgen vor oder nach der Aufgabenbearbeitung und basieren meist auf Fragebögen (z.B. MSLQ (Pintrich et al., 1991)) oder Interviews. Sie erfassen die Strategieanwendung damit indirekt über Selbsteinschätzungen der Lernenden, die sich auf vergangene Erfahrungen stützen. Typische Instrumente sind Fragebögen oder auch indirekte Befragungsmomente, bei denen Fragen erst nach der Bearbeitung einzelner Aufgabenbestandteile gestellt werden. Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, dass diese Verfahren ökonomisch einsetzbar sind, da sie sich problemlos in großen Stichproben durchführen und auswerten lassen. Demgegenüber zeigt die Forschung jedoch deutlich, dass die subjektiven Einschätzungen von Lernenden häufig nicht mit ihrem tatsächlichen Verhalten übereinstimmen. Ein zentrales Problem liegt in der retrospektiven Natur dieser Verfahren: Lernende müssen beim Beantworten der Fragen auf ihr Gedächtnis zurückgreifen, um frühere kognitive Prozesse zu rekonstruieren. Zusätzlich kann die Art der Fragestellung die Antworten der Lernenden beeinflussen („Prompting-Effekt“) (Veenman, 2011, S. 207).

3 Erhebung mathematischer Flexibilität

Flexibilität im mathematischen Kontext wurde bereits in zahlreichen Studien untersucht, wobei insbesondere Defizite in der praktischen Flexibilität von Lernenden aufgezeigt wurden (u. a. Star et al., 2006; Star et al., 2008). Die bisherigen Forschungsarbeiten setzten jedoch unterschiedliche Schwerpunkte und entwickelten dementsprechend verschiedene Instrumente zur Erfassung mathematischer Flexibilität. Wie Xu et al., 2017 hervorheben, wurde der Zusammenhang zwischen praktischer und potenzieller Flexibilität, entsprechend der oben dargestellten Definitionen, bislang nur unzureichend untersucht. Ebenso blieb weitgehend offen, weshalb Lernende unterschiedliche Ausprägungen potenzieller und praktischer Flexibilität aufweisen können. Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über zentrale Forschungsergebnisse, ausgewählte Erhebungsinstrumente sowie unterschiedliche konzeptionelle Zugänge zur Untersuchung mathematischer Flexibilität.

3.1 Überblick über verschiedene Forschungsergebnisse und Instrumente mathematischer Flexibilität

In zahlreichen Studien wird Flexibilität aus der Fähigkeit der Lernenden abgeleitet, unterschiedliche und innovative Strategien zur Problemlösung zu erkennen und zu bewerten. Zu diesem Zweck werden Schüler:innen beispielsweise typische Lösungswege vorgelegt, die anschließend hinsichtlich ihrer Korrektheit und/oder Innovationskraft beurteilt werden sollen, häufig mithilfe von Multiple-Choice-Aufgaben. Rittle-Johnson et al., 2007 zeigten etwa, dass das Vergleichen und Gegenüberstellen alternativer Lösungsmethoden für dieselbe Aufgabe zu einem größeren Zuwachs an prozeduralem Wissen und Flexibilität sowie zu einem vergleichbaren Zuwachs an konzeptuellem Wissen führt, als wenn die Schüler:innen verschiedene Strategien nacheinander an unterschiedlichen Aufgaben vorgelegt bekommen. Verschiedene Verfahren gegeneinander abzuwägen, schien dabei den Schüler:innen zu helfen, wesentliche Charakteristika einer Aufgabe und daraus die Effizienz einer bestimmten Methode zu erkennen. Zusätzlich unterstützte diese Intervention die Schüler:innen dabei, generell mehrere unterschiedliche Lösungswege in Betracht zu ziehen (Rittle-Johnson et al., 2007).

Andere Studien fokussieren sich stärker auf die selbstständige Entwicklung von Strategien durch die Lernenden. Dabei werden Schüler:innen aufgefordert, mathematische Aufgaben (teilweise mehrfach) zu lösen. Aus der Analyse der entwickelten Lösungswege der Schüler:innen wird an-

schließend auf ihre Flexibilität geschlossen, etwa darauf, ob sie in der Lage sind, mehrere oder innovative Strategien zu produzieren. Diesen Ansatz wandte, wie von Xu et al., 2017 zitiert, beispielsweise schon Kruteckij, 1976 an, indem er die Schüler:innen mehrfach direkt aufforderte, Aufgaben unter Verwendung unterschiedlicher Strategien zu lösen.

In diesem Zusammenhang verwendeten Blöte et al., 2001 die sogenannte „Flexibility-on-Demand“-Aufgabe, bei der Schüler:innen zuvor gelöste Aufgaben erneut bearbeiten sollten, allerdings unter Verwendung eines anderen Lösungsverfahrens. Wurden für eine Aufgabe zwei unterschiedliche Lösungswege angewandt, erhielten die Schüler:innen einen Flexibilitätspunkt; wurde hingegen derselbe Lösungsweg zweimal verwendet oder die Aufgabe nur einmal bearbeitet, wurde kein Punkt vergeben. Ein zentrales Ergebnis der Studie bestand darin, dass die Art der Instruktion, insbesondere die Frage, welches Verfahren im Unterricht zuerst eingeführt wurde, einen wesentlichen Einfluss auf die gemessene prozedurale Flexibilität der Schüler:innen hatte. Dieser Einfluss zeigte sich nicht nur hinsichtlich der tatsächlichen Anwendung unterschiedlicher Verfahren, sondern auch in Bezug auf die Präferenz für bestimmte Lösungswege. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich bestehendes konzeptuelles Wissen, auch nicht einfach ohne Weiteres verändern lässt. Daher erscheint es wichtig, den Schüler:innen im Unterricht von Anfang an einen flexiblen Umgang mit verschiedenen Lösungsverfahren beizubringen. Darüber hinaus zeigte diese Untersuchung, dass die Bevorzugung eines bestimmten Verfahrens kein verlässlicher Indikator dafür ist, ob dieses tatsächlich angewandt wird. Ähnlich wie bereits in der Studie von Blöte et al., 2000 erwiesen sich die Schüler:innen in ihren Präferenzen als flexibler als in ihrer tatsächlichen Verwendung unterschiedlicher Lösungsverfahren (Blöte et al., 2001).

Ähnlich zu der „Flexibility-on-Demand“-Aufgabe verwendeten Star et al., 2006 eine Aufgabenform, die sie als „Alternative-Ordering-Task“ bezeichnen. Dabei wurden die Teilnehmer:innen aufgefordert, zuvor bereits bearbeitete Aufgaben erneut zu lösen, jedoch unter Verwendung einer anderen Reihenfolge der Lösungs- beziehungsweise Umformungsschritte. Die Schüler:innen sollten dadurch angeregt werden, verschiedene Lösungswege zu entwickeln, zu vergleichen und hinsichtlich ihrer Effektivität und Effizienz zu bewerten. Star et al., 2006 führt mehrere Gründe dafür an, weshalb eine solche Aufgabenform zur Förderung prozeduraler Flexibilität beitragen kann. Zunächst reduziert das erneute Bearbeiten bereits gelöster Aufgaben die Spezifität des ursprünglichen Problemlöseziels. Anstatt lediglich eine konkrete Lösung für ein Problem zu finden, besteht die Aufgabe nun darin, unterschiedliche mögliche Lösungsstrategien zu entwickeln und anzuwenden. Dadurch wird die Aufmerksamkeit stärker auf alternative Vorgehensweisen gelenkt. Darüber hinaus können Schüler:innen beim erneuten Lösen derselben Aufgabe ein bes-

seres Verständnis dafür entwickeln, welche Ziele und Funktionen bestimmte Umformungsschritte in unterschiedlichen Situationen erfüllen. Auf diese Weise können bestehende Wissenslücken erkannt und gegebenenfalls korrigiert werden, was wiederum die Entwicklung größerer Flexibilität begünstigen kann (Star et al., 2006).

Die Ergebnisse der Studie deuten insgesamt darauf hin, dass die „Alternative-Ordering-Tasks“ wirksam dazu beitrugen, flexibleres Problemlösen zu fördern. Die Aufforderung, Aufgaben mit einer anderen Reihenfolge von Umformungen erneut zu bearbeiten, führte bei vielen Schüler:innen dazu, ungewöhnliche oder alternative Lösungswege zu entdecken und teilweise entwickelten sie dabei sogar eigenständig neue Verfahren. Gleichzeitig zeigte sich, dass die Förderung der Flexibilität nicht zulasten der Lösungseffizienz ging. Obwohl die Schüler:innen der Experimentalgruppe während der Übungsphasen insgesamt weniger Aufgaben bearbeiteten, waren sie nicht weniger erfolgreich darin, das Standardverfahren zu erkennen und anzuwenden (Star et al., 2006).

Weitere Studien kombinieren Aufgaben zur Erkennung und Bewertung von Strategien mit Aufgaben zur eigenständigen Entwicklung von Lösungsverfahren, um sowohl das Wissen über verschiedene Strategien als auch die Fähigkeit zu deren Anwendung differenzierter erfassen zu können. Während sich viele frühere Erhebungen ausschließlich auf die tatsächliche Entwicklung unterschiedlicher Strategien konzentrierten, führten Star et al., 2008 zudem unabhängige Messungen zum Strategiewissen der Schüler:innen durch, insbesondere zum Wissen über verschiedene Lösungsstrategien und über die Effizienz unterschiedlicher Strategien. Sie unterscheiden in diesem Zusammenhang also explizit zwischen dem Wissen über Flexibilität und der Anwendung von Flexibilität bei Schüler:innen. Im Bereich des *flexibility knowledge* kommen unterschiedliche Aufgabenformate zum Einsatz, die das Wissen über verschiedene, insbesondere innovative Strategien erfassen sollen. Zur Untersuchung der tatsächlichen Anwendung analysierten Star et al., 2008 die von den Schüler:innen verwendeten Strategien, um festzustellen, ob unterschiedliche beziehungsweise innovative Lösungswege eingesetzt wurden.

Ihre Ergebnisse zeigten insgesamt, dass unterschiedliche Instruktionsmethoden, die in der Erhebung eingesetzt wurden, verschiedene Aspekte des Flexibilitätverhaltens der Schüler:innen förderten. Sowohl die Aufforderung, mehrere Lösungswege zu entdecken, als auch die direkte Vermittlung innovativer Strategien verbesserten das Strategiewissen der Lernenden. Die Schüler:innen entwickelten ein besseres Verständnis für den Nutzen und die Effizienz unterschiedlicher Lösungsstrategien. Allerdings wirkten sich die beiden Ansätze unterschiedlich auf die tatsächliche Strategienutzung aus: Während Aufforderungen zur Entwicklung mehrerer Lösungswege

dazu führten, dass Lernende häufiger verschiedene Strategien anwendeten, erhöhte sich dadurch nicht die Nutzung besonders effizienter Verfahren. Die direkte Instruktion innovativer Strategien bewirkte hingegen, dass diese Strategien häufiger eingesetzt wurden, ohne jedoch die Vielfalt der verwendeten Lösungswege zu steigern. Die Ergebnisse verdeutlichen somit wiederum, dass zwischen dem Wissen über Strategien und deren tatsächlicher Anwendung unterschieden werden muss, da das bloße Wissen über effiziente Lösungswege nicht zwangsläufig dazu führt, dass die Lernende diese auch selbstständig im Problemlöseprozess flexibel nutzen (Star et al., 2008).

Eine weitere Methode zur Erfassung sowohl des Strategiewissens als auch der tatsächlichen Strategienutzung stellt die erstmals von Siegler et al., 1997 eingeführte „Choice/No-Choice“-Methode dar. Dabei bearbeiten Schüler:innen Aufgaben unter zwei unterschiedlichen Bedingungen: In der „Choice“-Bedingung dürfen sie selbst entscheiden, welche Strategie sie zur Lösung einer Aufgabe verwenden, während ihnen in der „No-Choice“-Bedingung eine bestimmte Strategie vorgegeben wird. Durch die Analyse von Bearbeitungsgeschwindigkeit, Genauigkeit sowie der Strategiewahl in der „Choice“-Bedingung können sowohl Kenntnisse über verschiedene Strategien als auch die Fähigkeit zur Anwendung innovativer Strategien erfasst werden (Siegler et al., 1997).

Eine weitere wesentliche Komponente bei der Untersuchung mathematischer Flexibilität betrifft die Wahl des mathematischen Teilgebiets, auf das sich die jeweilige Forschung konzentriert. Da Flexibilität in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik von Bedeutung ist, fokussieren verschiedene Forschungsarbeiten unterschiedliche mathematische Domänen. So untersuchten beispielsweise Siegler et al., 1997, Dowker et al., 1996 sowie Blöte et al., 2001 vor allem arithmetische Aufgaben, etwa zweistellige Multiplikationen oder Additionen.

Einen anderen Schwerpunkt setzten Rittle-Johnson et al., 2007, die sich einem bis dahin vergleichsweise wenig erforschten Bereich widmeten, nämlich dem Vergleich unterschiedlicher Lösungsverfahren beim Lösen algebraischer Gleichungen. Dieser Bereich eignet sich besonders zur Untersuchung mathematischer Flexibilität, da für viele Problemstellungen mehrere Lösungswege existieren, die sich hinsichtlich ihrer Effizienz unterscheiden können. Lernende, die in diesem Kontext über mathematische Flexibilität verfügen, sind in der Lage, situationsabhängig ein geeignetes und möglichst effizientes Lösungsverfahren auszuwählen. Dadurch können sie zeitsparende sowie potenziell weniger fehleranfällige Strategien anwenden (Rittle-Johnson et al., 2007). Darüber hinaus stellt das Lösen linearer Gleichungen einen zentralen, zugleich jedoch für viele Schüler:innen anspruchsvollen Bestandteil des Mathematikunterrichts dar. Flexibilität im Umgang mit unterschiedlichen Lösungsstrategien zu untersuchen, erscheint daher gerade in diesem

Bereich von besonderer Bedeutung (Xu et al., 2017).

3.2 Der Tri-Phase-Flexibilitätstest von Xu et al. (2017)

Die Entwicklung des Testinstruments in der Studie von Xu et al., 2017 zur Erfassung potenzieller und praktischer Flexibilität orientierte sich an früheren Erhebungen, insbesondere an bisherigen Ansätzen zur Unterscheidung zwischen der Kenntnis unterschiedlicher Strategien und der Fähigkeit, innovative Strategien tatsächlich anzuwenden. Wie bereits zuvor dargestellt wurde, besteht in der Forschung zur mathematischen Flexibilität kein eindeutiger Konsens darüber, auf welche Weise dieses komplexe Konstrukt am sinnvollsten erfasst werden sollte. Uneinigkeit besteht insbesondere darin, ob Flexibilität primär über Prozesse des Erkennens und Bewertens innovativer Strategien, über die selbstständige Entwicklung beziehungsweise Anwendung solcher Strategien oder über eine Kombination beider Aspekte gemessen werden sollte (Xu et al., 2017).

Dabei stellen Methoden, in denen die Erkennung und Bewertung verschiedener Lösungsverfahren im Fokus steht, eine vergleichsweise effiziente Möglichkeit zur Messung von Flexibilität dar, während die eigenständige Entwicklung unterschiedlicher Lösungsstrategien für mehrere Aufgaben sehr zeitaufwendig sein kann. Gleichzeitig ist es für Lernende häufig einfacher, effiziente Lösungsverfahren zu erkennen, als diese selbstständig anzuwenden. Jedoch könnte eine reine Fokussierung auf Wiedererkennungsaufgaben die tatsächliche Flexibilität der Schüler:innen in der Erhebung überbewerten. Ebenso ist es nicht sinnvoll, sich ausschließlich auf die eigenständige Produktion von innovativen Strategien zu konzentrieren, da die Fähigkeit zur Anwendung bekannter Strategien häufig hinter dem Wissen über diese Strategien zurückbleibt. Aus diesem Grund werden in dem von Xu et al., 2017 entwickelten Testinstrument Aufgaben zur eigenständigen Entwicklung von Strategien mit Aufgaben zur Bewertung und Wiedererkennung von Lösungsverfahren kombiniert.

Im Tri-Phase-Flexibilitätstest nach Xu et al., 2017 bearbeiten die Schüler:innen dieselben 12 linearen Gleichungen in drei aufeinanderfolgenden Phasen. In Phase 1 werden die Schüler:innen angewiesen, jede Aufgabe möglichst schnell und korrekt zu lösen. In der anschließenden Phase 2 bearbeiten sie die 12 Aufgaben erneut und sollen zusätzlich zu dem in Phase 1 verwendeten Lösungsverfahren weitere mögliche Lösungswege für jede Aufgabe entwickeln. In Phase 3 werden die Schüler:innen schließlich aufgefordert, ihre in den beiden vorangegangenen Phasen entwickelten Strategien zu bewerten und für jede Aufgabe jene Strategie auszuwählen, die sie

als am innovativsten einschätzten.

Auf Grundlage der Antworten in den drei Phasen werden potenzielle und praktische Flexibilität entsprechend der zuvor dargestellten Definitionen erfasst. Praktische Flexibilität wird Lernen zugeschrieben, wenn die in Phase 1 verwendeten Lösungsstrategien als innovativ eingestuft werden konnten. Dies war der Fall, wenn für eine Aufgabe jenes Verfahren gewählt wurde, das für den jeweiligen Problemtyp die geringste Anzahl an Rechenschritten beziehungsweise die einfachsten Berechnungen erforderte. Potenzielle Flexibilität wird hingegen daran gemessen, ob Schüler:innen mehrere, sowohl standardmäßige als auch innovative, Lösungsverfahren für ein Problem entwickeln konnten und anschließend die innovative Strategie unter diesen identifizierten.

Der Tri-Phase-Flexibilitätstest umfasst insgesamt 12 lineare Gleichungen, die so konzipiert wurden, dass jede Aufgabe sowohl mithilfe eines Standardalgorithmus als auch durch eine innovativere Lösungsstrategie bearbeitet werden konnte. Die Aufgaben wurden in vier Aufgabentypen unterteilt, wobei jeder Typ dreimal vorkam. Die jeweils innovative Strategie variierte dabei abhängig vom Aufgabentyp. Tabelle 3 gibt einen Überblick über die vier Aufgabentypen anhand exemplarischer Gleichungen sowie der dazugehörigen standardmäßigen und innovativen Lösungsverfahren (Xu et al., 2017).

Ergänzend zu den drei Phasen des Tri-Phase-Flexibilitätstests werden die Lernenden in einer vierten Phase aufgefordert, unterschiedliche Lösungsverfahren zu bewerten. Zu diesem Zweck werden für jede Gleichung mehrere korrekte Lösungswege vorgegeben, darunter das Standardverfahren, eine innovative Strategie sowie weitere Verfahren, die weder standardmäßig noch innovativ waren. Die Schüler:innen sollen aus diesen jene Strategien identifizieren, die sie als innovativ einschätzen. Die in der vierten Phase erhobenen Daten dienen als zusätzlicher Indikator zur Erfassung potenzieller Flexibilität.

Die Stichprobe der Erhebung von Xu et al., 2017 umfasste insgesamt 158 Schüler:innen im Alter zwischen 11 und 14 Jahren. Diese wurden aus sechs Klassen derselben Region und desselben Schulsystems einer Stadt im Norden Chinas rekrutiert.

Zur Messung der potenziellen und praktischen Flexibilität der Teilnehmer:innen wurden die Ergebnisse aus allen vier Phasen des Tests entsprechend codiert und ausgewertet. Dabei wurden potenzielle und praktische Flexibilität auf Grundlage spezifischer Kriterien operationalisiert. Wählten Lernende bereits bei ihrem ersten Lösungsversuch ein innovatives Verfahren zur Be-

Tabelle 3: Beispielaufgaben mit verschiedenen Lösungsverfahren (Xu et al., 2017, S. 5)

Innovativer Schritt	Beispielaufgabe	Lösung mit Standardalgorithmus	Lösung mit innovativer Strategie
Teilen	$3(x - 1) = 27$	$3x - 3 = 27$ $3x = 30$ $x = 10$	$x - 1 = 9$ $x = 10$
Zusammenfassen	$2(x+3)+3(x+3) = 20$	$2x + 6 + 3x + 9 = 20$ $5x + 15 = 20$ $5x = 5$ $x = 1$	$5(x + 3) = 20$ $x + 3 = 4$ $x = 1$
Von beiden Seiten subtrahieren	$5(x - \frac{2}{3}) - 10 = 2(x - \frac{2}{3})$	$5x - \frac{10}{3} - 10 = 2x - \frac{4}{3}$ $5x - 2x = \frac{10}{3} + 10 - \frac{4}{3}$ $3x = 12$ $x = 4$	$3(x - \frac{2}{3}) = 10$ $x - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ $x = 4$
Bruch vereinfachen	$\frac{(3x+3)}{3} + \frac{(4x+4)}{4} = 4$	$12 \cdot (\frac{(3x+3)}{3} + \frac{(4x+4)}{4}) = 48$ $12x + 12 + 12x + 12 = 48$ $24x + 24 = 48$ $24x = 24$ $x = 1$	$x + 1 + x + 1 = 4$ $2x + 2 = 4$ $x + 1 = 2$ $x = 1$

arbeitung einer Aufgabe, wurde dies als Hinweis auf ein hohes Maß praktischer Flexibilität interpretiert. Zu diesem Zweck analysierten die Auswerter:innen den jeweils ersten Lösungsansatz der Schüler:innen aus Phase 1 und überprüften, ob die verwendete Strategie als innovativ eingestuft werden konnte. Wurde eine innovative Strategie verwendet, erhielten die Schüler:innen für die jeweilige Aufgabe einen Punkt im Bereich der praktischen Flexibilität, andernfalls 0 Punkte. Daraus ergab sich ein maximal erreichbarer Gesamtwert von 12 Punkten für praktische Flexibilität.

Potenzielle Flexibilität wurde von Xu et al., 2017 als zusammengesetzter Wert definiert, der erfasst, ob Schüler:innen sowohl Kenntnisse standardmäßiger als auch innovativer Lösungsverfahren für ein bestimmtes Problem nachweisen können und zusätzlich in der Lage sind, unter den bekannten Strategien die innovativste zu identifizieren. Waren beide Bedingungen erfüllt, erhielten die Lernenden für die jeweilige Aufgabe einen Punkt im Bereich der potenziellen Flexibilität. Auch hier konnte somit ein Gesamtscore zwischen 0 und 12 Punkten erreicht werden.

Der Genauigkeitsscore erfasste, ob die Schüler:innen die vorgegebenen Gleichungen bereits beim

ersten Versuch korrekt lösen können. Für jede korrekt gelöste Aufgabe wurde ein Punkt vergeben, während fehlerhafte Lösungen mit 0 Punkten bewertet wurden. Daraus ergab sich ebenfalls ein möglicher Gesamtwert zwischen 0 und 12 Punkten pro Teilnehmer:in.

Xu et al., 2017 stellten in ihrer Untersuchung fest, dass die teilnehmenden Schüler:innen vergleichsweise hohe Genauigkeitswerte („accuracy“) erzielten, was bedeutet, dass sie einen Großteil der Gleichungen korrekt lösen konnten. Im Durchschnitt lösten sie in Phase 1 zehn der zwölf Gleichungen korrekt, was einer Erfolgsquote von 88,83% entspricht. Die Ergebnisse deuten somit darauf hin, dass die Mehrheit der Lernenden die Aufgaben grundsätzlich korrekt bearbeiten konnte. Im Gegensatz dazu zeigten sich jedoch sehr niedrige Werte im Bereich der praktischen Flexibilität ($M = 1,44$) sowie lediglich mittlere Werte hinsichtlich der potenziellen Flexibilität ($M = 5,85$). Insgesamt lagen die Genauigkeitswerte der Schüler:innen in der Studie von Xu et al., 2017 damit deutlich über den Werten sowohl der potenziellen als auch der praktischen Flexibilität.

Nach Xu et al., 2017 könnte die geringe gemessene praktische Flexibilität der Schüler:innen trotz hoher Genauigkeitswerte auf zwei unterschiedliche Szenarien zurückzuführen sein. Erstens verfügten viele Schüler:innen bei bestimmten Aufgaben nicht über Kenntnisse verschiedener, insbesondere innovativer Lösungsstrategien. Diese Konstellation, bei der weder potenzielle noch praktische Flexibilität vorhanden war, die Aufgaben jedoch dennoch korrekt gelöst werden konnten, machte etwa 40% aller Fälle aus. Zweitens zeigte sich, dass rund 38% der Schüler:innen zwar Kenntnisse sowohl standardmäßiger als auch innovativer Strategien besaßen, jedoch nicht in der Lage waren, innovative Verfahren spontan als ersten Lösungsansatz einzusetzen.

Die Ergebnisse der Studie von Xu et al., 2017 bestätigen damit erneut das bereits beschriebene Phänomen, dass Lernende bei mathematischen Problemlöseaufgaben häufig keine Flexibilität zeigen, obwohl sie Kenntnisse über standardmäßige und innovative Verfahren nachweisen können. Xu et al., 2017 leiten daraus die Bedeutung einer klaren Unterscheidung zwischen potenzieller und praktischer Flexibilität sowie die Notwendigkeit geeigneter Messinstrumente ab, die diese beiden Konstrukte differenziert erfassen können und dadurch weitere Forschung auf diesem Gebiet ermöglichen.

3.3 Die länderübergreifende Studie von Star et al. (2022)

Eine Weiterentwicklung des Tri-Phase-Flexibilitätstests nach Xu et al., 2017 erfolgte durch Star et al., 2022. In dieser länderübergreifenden Studie untersuchten Star et al., 2022 die prozedurale Flexibilität von Schüler:innen aus Finnland, Spanien und Schweden. Im Mittelpunkt der Untersuchung stand dabei die Frage, ob sich hinsichtlich des Alters, des besuchten Leistungskurses (*basic track* bzw. *advanced track*) sowie des jeweiligen Landes Unterschiede in der Genauigkeit und Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen zeigen.

Die Stichprobe der Studie von Star et al., 2022 umfasste insgesamt 791 Schüler:innen der 8. und 9. Schulstufe (Unterstufe) sowie der 11. Schulstufe (Oberstufe) aus Finnland, Schweden und Spanien. Die Auswahl dieser Länder erfolgte einerseits aus praktischen Gründen aber andererseits auch aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausprägungen bei zentralen Bildungsindikatoren, wodurch länderübergreifende Vergleiche besonders aufschlussreich erschienen. Unterschiede zeigten sich beispielsweise in den PISA-Ergebnissen des Jahres 2015 (Finnland: 511 Punkte, Schweden: 494 Punkte, Spanien: 486 Punkte) sowie im Anteil der 15-jährigen Schüler:innen mit unterdurchschnittlichen Leistungen in Mathematik (Finnland: 13,6%, Schweden: 20,8%, Spanien: 22,2%).

Darüber hinaus kann zwar davon ausgegangen werden, dass Schüler:innen dieser Länder in vergleichbaren westeuropäischen Bildungskontexten unterrichtet werden, die Forschungsliteratur weist jedoch zugleich auf Unterschiede in der Gestaltung des Mathematikunterrichts hin. Während der Mathematikunterricht in Spanien traditionell stärker lehrerzentriert ausgerichtet ist und der Schwerpunkt vermehrt auf der routinemäßigen Anwendung von Regeln sowie auf Genauigkeit und Geschwindigkeit liegt, wird in Finnland und Schweden tendenziell weniger Wert auf diese Aspekte gelegt.

Zur Erhebung der prozeduralen Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen bearbeiteten die teilnehmenden Schüler:innen eine übersetzte Version des Tri-Phase-Flexibilitätstests nach Xu et al., 2017. Analog zur Studie von Xu et al., 2017 bestand der Test aus zwölf linearen Gleichungen, die in drei Phasen bearbeitet wurden. In Phase 1 (15 Minuten) sollen die Schüler:innen die Aufgaben möglichst schnell und korrekt lösen. In Phase 2 (20 Minuten) bearbeiten sie dieselben Aufgaben erneut und werden dabei aufgefordert, für jede Aufgabe möglichst viele unterschiedliche Lösungsverfahren zu entwickeln. In Phase 3 (5 Minuten) sollen die Schüler:innen schließlich für jede Gleichung jenes Verfahren markieren, das sie als das „beste“ betrachten.

Star et al., 2022 adaptierten das Testinstrument von Xu et al., 2017 indem sie sowohl Änderungen

am Bewertungssystem als auch an den Bezeichnungen und Definitionen der unterschiedlichen Flexibilitätskonstrukte vornahmen. Zusätzlich veränderten sie die in den Gleichungen verwendeten Koeffizientenwerte, während die grundlegende Struktur der Gleichungen jedoch unverändert blieb. Die bei Xu et al., 2017 als „praktische Flexibilität“ bezeichnete Fähigkeit, bereits beim ersten Lösungsversuch ein situationsgerechtes Verfahren anzuwenden, wird bei Star et al., 2022 als „spontane Flexibilität“ bezeichnet. Die Autor:innen betonen dabei, dass spontane Flexibilität nicht zwangsläufig als erstrebenswertes Ziel für alle Schüler:innen und Aufgaben verstanden werden sollte, sondern vielmehr als besondere Form flexiblen Handelns.

Darüber hinaus verwenden Star et al., 2022 für das von Xu et al., 2017 als „potenzielle Flexibilität“ bezeichnete Konstrukt den Begriff „prozedurale Flexibilität“. Diese liegt vor, wenn drei spezifische Kriterien erfüllt werden, die den Kriterien von Xu et al., 2017 für potenzielle Flexibilität entsprechen. Prozedurale Flexibilität wird von Star et al., 2022 als zentrales Ziel mathematischer Flexibilität verstanden. Zusätzlich führen sie einen differenzierteren Begriff der „potenziellen Flexibilität“ ein, um Hinweise darauf zu erfassen, dass sich Flexibilität bei Lernen entwickelt. In diesem Fall müssen zwei der drei Kriterien vollständiger Flexibilität erfüllt sein. Zusätzlich bezeichnen Star et al., 2022 Lösungsverfahren, die effizienter als das Standardverfahren sind, im Unterschied zu Xu et al., 2017 nicht mehr als „innovative Verfahren“, sondern als „situationsgerechte Verfahren“. Diese Begriffswahl soll verdeutlichen, dass die Bewertung einer Strategie als „besser“ stets von den jeweiligen Zielen, Annahmen und der konkreten Aufgabenstellung abhängt.

Da in der vorliegenden Arbeit die Vorgehensweise sowie die Begriffsdefinitionen von Star et al., 2022 übernommen werden, werden die einzelnen Flexibilitätskonstrukte, die zugrunde liegenden Kriterien, der Ablauf der Erhebung sowie die Auswertungsmethodik im Methodik-Kapitel (4) ausführlicher dargestellt.

Die Ergebnisse von Star et al., 2022 zeigen insgesamt vergleichsweise geringe Werte hinsichtlich der prozeduralen Flexibilität der teilnehmenden Schüler:innen. Über alle untersuchten Gruppen hinweg lag die durchschnittlich nachgewiesene prozedurale Flexibilität bei lediglich 1,8 von 12 Aufgaben, was etwa 15% der Gleichungen entspricht. Dabei zeigten schwedische Schüler:innen im Durchschnitt etwas höhere Werte, während die niedrigsten Werte bei den spanischen Schüler:innen festgestellt wurden (Finnland: 1,7; Schweden: 2,3; Spanien: 1,4). Zudem erwiesen sich Schüler:innen der Oberstufe insgesamt als flexibler als jene der Unterstufe, wobei insbesondere Lernende des Mathematik-Leistungskurses (*advanced track*) in der Oberstufe die höchsten

Flexibilitätswerte erreichten.

Ein ähnliches Muster zeigte sich bei der potenziellen Flexibilität. Insgesamt konnten die Schüler:innen durchschnittlich nur bei 0,6 der zwölf Aufgaben potenzielle Flexibilität nachweisen (Finnland: 0,5; Schweden: 0,7; Spanien: 0,7). Auch hier erzielten Oberstufenschüler:innen höhere Werte als Schüler:innen der Unterstufe. Die spontane Flexibilität fiel insgesamt ebenfalls sehr gering aus. Im Durchschnitt zeigten die Schüler:innen spontane Flexibilität lediglich bei 0,5 der 12 Aufgaben. Besonders niedrige Werte wurden dabei bei den spanischen Schüler:innen festgestellt (Finnland: 0,6; Schweden: 0,8; Spanien: 0,2).

Hinsichtlich der Genauigkeit ergaben sich ebenfalls deutliche Unterschiede: Über alle Gruppen hinweg wurde durchschnittlich etwa die Hälfte der Gleichungen korrekt gelöst (Finnland: 4,5; Schweden: 5,1; Spanien: 6,7). Erwartungsgemäß erzielten Oberstufenschüler:innen höhere Genauigkeitswerte als Schüler:innen der Unterstufe. Darüber hinaus zeigten sich Unterschiede hinsichtlich der Anzahl bearbeiteter Aufgaben innerhalb der vorgegebenen Bearbeitungszeit. Spanische Schüler:innen bearbeiteten im Durchschnitt mehr Aufgaben als die schwedischen und finnischen Teilnehmer:innen.

In der Studie von Star et al., 2022 zeigten sich außerdem interessante Unterschiede zwischen den Ländern. Spanische Schüler:innen erreichten insgesamt die höchsten Genauigkeitswerte, nutzten dabei jedoch überwiegend den Standardalgorithmus. Gleichzeitig wiesen sie die geringsten Werte hinsichtlich prozeduraler und spontaner Flexibilität auf, was darauf hindeutet, dass situationsgerechte Lösungsverfahren nur selten eingesetzt wurden. Zudem war der Zusammenhang zwischen Flexibilität und Genauigkeit bei den spanischen Schüler:innen am schwächsten ausgeprägt und statistisch nicht signifikant. Finnische und schwedische Schüler:innen zeigten hingegen insgesamt ähnliche Profile mit moderater Flexibilität, teilweise vorhandener spontaner Flexibilität und vergleichsweise soliden Genauigkeitswerten.

Zusammenfassend kommen Star et al., 2022 zu mehreren zentralen Ergebnissen. Erstens zeigte sich ein erwartbarer Zusammenhang zwischen Alter beziehungsweise Schulstufe und mathematischer Flexibilität: Oberstufenschüler:innen erwiesen sich insgesamt als flexiblere und genauere Problemlöser:innen als Schüler:innen der Unterstufe. Zweitens bestätigten die Ergebnisse frühere Forschungsbefunde, wonach mathematische Flexibilität insgesamt nur schwach ausgeprägt ist und spontane Flexibilität besonders selten auftritt. Drittens zeigte sich, dass der Standardalgorithmus zum Lösen linearer Gleichungen in allen drei Ländern weiterhin das dominierende Verfahren darstellt. Situationsgerechte Lösungsverfahren wurden zwar ebenfalls verwendet, je-

doch deutlich seltener als das Standardverfahren. Viertens konnte ein positiver Zusammenhang zwischen prozeduraler Flexibilität und Genauigkeit festgestellt werden: Lernende mit höherer Flexibilität erzielten tendenziell auch höhere Genauigkeitswerte.

4 Methodik

4.1 Stichprobe

Im Rahmen der vorliegenden empirischen Erhebung wurde eine Stichprobe von insgesamt 235 Schüler:innen untersucht (124 weiblich, 106 männlich, 2 divers, 3 ohne Angabe). Die Stichprobengewinnung erfolgte über eine nicht-probabilistische Auswahl österreichischer Schulen. Aufgrund organisatorischer Rahmenbedingungen und der notwendigen Durchführung der Erhebungen vor Ort wurde die Auswahl auf Schulen in den Bundesländern Oberösterreich, Niederösterreich und Wien beschränkt. Für die Rekrutierung der teilnehmenden Schulen wurden zunächst verschiedene Allgemeinbildende Höhere Schulen (AHS) und Mittelschulen in den genannten Bundesländern recherchiert und kontaktiert. Da die Rückmeldungen auf die Anfragen teilweise begrenzt waren, wurde die Gewinnung der Stichprobe zusätzlich durch persönliche Kontakte zu Lehrkräften und Schulleitungen unterstützt. Die endgültige Stichprobe ergab sich somit aus jenen Schulen, die einer Teilnahme zustimmten und die organisatorischen Voraussetzungen für die Durchführung der Untersuchung erfüllten.

An der Erhebung nahmen zwölf Schulen teil, darunter vier Mittelschulen und acht Allgemeinbildende Höhere Schulen. Aus jeder dieser Schulen wurde jeweils eine Klasse in die Untersuchung miteinbezogen. Die Auswahl beschränkte sich auf die 8. und 11. Schulstufe, da diese Altersgruppen einen Vergleich zwischen Unter- und Oberstufe ermöglichen und zugleich eine Orientierung an der Untersuchung von Star et al., 2022 erlauben. Die Stichprobe umfasste sechs Unterstufen- und sechs Oberstufenklassen, wobei die Unterstufenstichprobe sich aus zwei AHS-Unterstufenklassen und vier Mittelschulklassen zusammensetzte. Insgesamt nahmen 123 Schüler:innen der Unterstufe und 112 Schüler:innen der Oberstufe an der Untersuchung teil. Andere Schulformen, insbesondere berufsbildende höhere Schulen (BHS), wurden nicht in die Erhebung einbezogen, da deren mathematische Ausbildung aufgrund der stärkeren beruflichen Spezialisierung möglicherweise andere Voraussetzungen schafft und dadurch die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen vorangegangener Studien eingeschränkt sein könnte. Die annähernd ausgewogene Verteilung zwischen Ober- und Unterstufenschüler:innen orientiert sich an der Stichprobensammensetzung der Studie von Star et al., 2022 und ermöglicht eine bessere Einordnung der vorliegenden Ergebnisse im Vergleich zu bestehenden internationalen Forschungsbefunden. Aufgrund der Art der Stichprobengewinnung kann jedoch nicht von einer repräsentativen Abbildung aller österreichischen Schüler:innen ausgegangen werden. Die Ergebnisse sind daher im Kontext

der untersuchten Stichprobe zu interpretieren.

4.2 Erhebungsinstrumente

Die Datenerhebung der vorliegenden Arbeit basiert auf dem von Xu et al., 2017 entwickelten und von Star et al., 2022 adaptierten Tri-Phase-Flexibilitätstest, der im vorangegangenen Kapitel bereits vorgestellt wurde. Als Erhebungsinstrument diente ein ins Deutsche übersetztes Testheft, das aus mehreren Komponenten bestand und von den Schüler:innen innerhalb einer Unterrichtseinheit bearbeitet wurde. Zu Beginn enthielt das Testheft ein Deckblatt, das sowohl die Vorgehensweise und Aufgabenstellung erläuterte als auch über die Anonymität und Freiwilligkeit der Teilnahme sowie den Zweck der Untersuchung informierte. Im anschließenden Hauptteil folgten zwölf Gleichungen, die in drei aufeinanderfolgenden Phasen von den Schüler:innen bearbeitet wurden. Den Abschluss der Erhebung bildete ein einseitiger Fragebogen, der drei Bereiche umfasste:

- die Erfassung ausgewählter soziodemografischer Merkmale (Geschlecht, Mathematiknote des Vorjahres sowie für Schüler:innen der Mittelschule das Leistungsniveau (Standard bzw. Standard AHS),
- Fragen zur Nutzung technologischer Hilfsmittel (z. B. grafikfähige Taschenrechner, GeoGebra und Anwendungen künstlicher Intelligenz) bei mathematischen Aufgabenstellungen,
- sowie sechs Items auf einer fünfstufigen Likert-Skala zur Selbsteinschätzung des Einsatzes metakognitiver Strategien beim Mathematiklernen.

Die Erfassung des Einsatzes technologischer Hilfsmittel war für die vorliegende Arbeit nicht weiter relevant und bleibt daher in der Auswertung unberücksichtigt.

4.2.1 Erhebung Prozeduraler Flexibilität

Den Kern des Testhefts bilden zwölf lineare Gleichungen in einer Variablen, die von den Schüler:innen in drei aufeinanderfolgenden Phasen bearbeitet wurden. Die Aufgabenstellungen wurden so konzipiert, dass sie unterschiedliche Lösungswege ermöglichen: Neben einer Standardmethode kann jeweils auch ein innovatives, situationsgerechtes Verfahren angewendet werden, das in der Regel mit weniger Rechenschritten zur Lösung führt und daher als effizienter gilt.

Tabelle 4: Aufgabenstellungen der Erhebung (Star et al., 2022, S. 6)

#	Gleichung	Standardverfahren	Situationsgerechtes Verfahren
1	$4(x - 2) = 24$	Auflösen der Klammern	$4x - 4 \cdot 2 = 24$
2	$3(x + 0.69) = 15$		$3x + 3 \cdot 0.69 = 15$
3	$4(x + \frac{3}{5}) = 12$		$4x + 4 \cdot \frac{3}{5} = 12$
4	$4(x + 6) + 3(x + 6) = 21$	Auflösen der Klammern	$4x + 4 \cdot 6 + 3x + 3 \cdot 6 = 21$
5	$5(x + \frac{3}{7}) + 3(x + \frac{3}{7}) = 16$		$5x + 5 \cdot \frac{3}{7} + 3x + 3 \cdot \frac{3}{7} = 16$
6	$2(x - 0.31) + 3(x - 0.31) = 15$		$2x - 2 \cdot 0.31 + 3x - 3 \cdot 0.31 = 15$
7	$8(x - 5) = 3(x - 5) + 20$	Auflösen der Klammern	$8x - 8 \cdot 5 = 3x - 3 \cdot 5 + 20$
8	$8(x - \frac{2}{3}) - 11 = 6(x - \frac{2}{3})$		$8x - \frac{16}{3} - 11 = 6x - \frac{12}{3}$
9	$5(x + 0.6) + 3x = 5(x + 0.6) + 7$		$5x + 3 + 3x = 5x + 3 + 7$
10	$\frac{2x-6}{2} + \frac{6x-18}{3} = 5$	Finden eines gemeinsamen Nenners	$\frac{3(2x-6)}{2 \cdot 3} + \frac{2(6x-18)}{2 \cdot 3} = 5$
11	$\frac{x+3}{3} + \frac{3x+9}{9} = 1$		$\frac{3 \cdot (x+3)}{3 \cdot 3} + \frac{3x+9}{9} = 1$
12	$\frac{5x+5}{5} + \frac{6x+6}{6} = 6$		$\frac{6(5x+5)}{6 \cdot 5} + \frac{5(6x+6)}{5 \cdot 6} = 6$

Die zwölf Gleichungen variieren hinsichtlich ihrer arithmetischen Komplexität und lassen sich in vier Aufgabentypen unterteilen, wobei jeder Typ genau dreimal vertreten ist. Die ersten drei Aufgaben (Typ „Dividieren“) folgen der Struktur $a(x - b) = c$, wobei c ohne Rest durch a teilbar ist. Das situationsgerechte Verfahren besteht hier darin, beide Seiten der Gleichung zunächst durch die Konstante a zu dividieren. Die Aufgaben 4 bis 6 (Typ „Zusammenfassen“) haben die Form $a(x + c) + b(x + c) = d$. Als innovative Strategie bietet sich an, im ersten Schritt die gleichartigen Terme $(x + c)$ zusammenzufassen. Die Aufgaben 7 bis 9 (Typ „Subtraktion auf beiden Seiten“) entsprechen der Struktur $a(x + c) = b(x + c) + d$, wobei das situationsgerechte Verfahren darin besteht, einen der beiden Terme $x + c$ zunächst auf beiden Seiten zu subtrahieren. Die Gleichungen 10 bis 12 (Typ „Brüche kürzen“) enthalten Bruchterme, bei denen das situationsgerechte Vorgehen entweder darin besteht, zunächst beide Seiten mit einem geeigneten Faktor zu multiplizieren, um die Brüche zu eliminieren, oder diese vorab zu kürzen.

Als Standardverfahren wird bei den Aufgaben 1 bis 9 die Anwendung des Distributivgesetzes zur Auflösung vorhandener Klammern definiert. Bei den Aufgaben 10 bis 12 besteht das Standardverfahren hingegen in der Bildung eines gemeinsamen Nenners als ersten Lösungsschritt. Die Wahl des Verfahrens (Standard oder situationsgerecht) ist bereits im ersten Bearbeitungsschritt erkennbar und im weiteren Verlauf führen beide Vorgehensweisen auf Gleichungen der Form $a \cdot x = b$, die anschließend identisch gelöst werden. Der Test umfasst neben Aufgaben mit ganzzahligen Koeffizienten (Aufgaben 1, 4, 7), auch Koeffizienten in Form von Brüchen (Aufgaben

3, 5, 8) und Dezimalzahlen (Aufgaben 2, 6, 9). Diese Variation erhöht einerseits die rechnerische Komplexität und den Schwierigkeitsgrad, reduziert andererseits die Gefahr routinisierter Lösungsprozesse (Xu et al., 2017, S. 4).

4.2.2 Einsatz metakognitiver Strategien

Der Abschnitt im Fragebogen zu metakognitiven Strategien zielt darauf ab, Einblicke in die Häufigkeit und Bewusstheit ihres Einsatzes bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben zu gewinnen. Dabei ist zu beachten, dass es sich um Selbsteinschätzungen der Schüler:innen handelt, die von der tatsächlichen Nutzung metakognitiver Strategien abweichen können (Veenman, 2011). Prozedurale Metakognition wird, wie bereits ausgeführt, als ein komplexes Zusammenspiel von Planungs-, Überwachungs- und Evaluationsprozessen vor, während und nach der Aufgabebearbeitung verstanden (Sjuts, 2022). Um diese Teilbereiche ausgewogen abzubilden, wurden jeweils zwei Items für jede dieser Dimensionen formuliert, sodass insgesamt sechs Items einen differenzierten Einblick in die subjektive Einschätzung der Schüler:innen ermöglichen. Aufgrund zeitlicher Restriktionen musste die Anzahl der Items auf sechs begrenzt werden, wenngleich eine größere Itemanzahl potenziell eine höhere inhaltliche Tiefe erlaubt hätte.

Die Formulierung der Items orientierte sich maßgeblich an Berger et al., 2011, die für die Kategorien „Planning“ fünf sowie für „Monitoring“ und „Regulation“ jeweils vier Items entwickelten. Aus diesen wurden für diese Arbeit jeweils zwei geeignete Items ausgewählt und ins Deutsche übertragen. Berger et al., 2011 stützten sich ihrerseits auf Items des Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ) und passten diese gezielt an den mathematischen Kontext der Sekundarstufe an (Pintrich et al., 1991). Darüber hinaus nahmen sie Modifikationen vor, um bekannten Einschränkungen von Selbstberichtsverfahren zu begegnen und die Validität der erfassten Lernstrategien zu erhöhen. Analog zu Berger et al., 2011, bewerteten die teilnehmenden Schüler:innen dieser Erhebung die Aussagen auf einer fünfstufigen Skala, wobei 1 „trifft überhaupt nicht zu“ und 5 „trifft vollkommen zu“ entspricht.

4.3 Ablauf

Nach Einholung der schriftlichen Genehmigungen durch die Schulleitungen der teilnehmenden Schulen sowie die zuständigen Bildungsdirektionen wurden im Vorfeld Einverständniserklärungen der Erziehungsberechtigten eingeholt. Dieses Informationsschreiben klärte sowohl die Schü-

ler:innen als auch deren Erziehungsberechtigte über Ablauf und Zielsetzung der Erhebung sowie über die Anonymität und Freiwilligkeit der Teilnahme auf.

Die Durchführung der Erhebung erfolgte im Rahmen einer regulären Mathematikunterrichtseinheit (50 Minuten), in der die Schüler:innen das Testheft einschließlich des integrierten Fragebogens bearbeiteten. Die Vorgehensweise orientierte sich an den Studien von Xu et al., 2017 und Star et al., 2022, mit der Modifikation, dass Unterstufenschüler:innen die Verwendung eines einfachen Taschenrechners gestattet war, während Oberstufenschüler:innen keinerlei technologische Hilfsmittel nutzen durften. Vor dem Hintergrund des ab dem Schuljahr 2030/31 vorgesehenen technologiefreien Teils der Mathematik-Zentralmatura erscheint es von besonderem Interesse zu untersuchen, inwieweit Schüler:innen kurz vor Abschluss der Sekundarstufe in der Lage sind, lineare Gleichungen sowie grundlegende Berechnungen ohne Hilfsmittel zu bewältigen (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2026). Die Nutzung eines Taschenrechners wurde in der Unterstufe zugelassen, da die Aufgaben auf diesem Niveau bereits eine erhöhte kognitive Anforderung darstellen und zusätzliche Belastungen und Erzeugung von Frustration vermieden werden sollten.

Tabelle 5: Übersicht über den Ablauf der Erhebung

Phase	Dauer	Aktivität
1	15 min	Die 12 Gleichungen so genau und schnell wie möglich lösen
2	20 min	Alternative Lösungswege für die 12 Gleichungen finden
3	5 min	Für jede Aufgabe die subjektiv beste Lösungsstrategie auswählen
4	5 min	Beantworten des Fragebogens

Zu Beginn der Einheit erhielten alle Schüler:innen ein Testheft, und der Ablauf der Erhebung wurde erläutert. Die zuständige Mathematiklehrkraft war während der Durchführung anwesend, nahm jedoch eine beobachtende Rolle ein. Weder seitens der Lehrperson noch durch die Versuchsleitung durften während der Erhebung inhaltliche Fragen beantwortet oder Hilfestellungen gegeben werden.

Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte in drei aufeinanderfolgenden, zeitlich begrenzten Phasen (siehe Tabelle 5). In der ersten Phase standen den Schüler:innen 15 Minuten zur Verfügung, um die Gleichungen möglichst korrekt und schnell zu lösen. Dabei wurden sie aufgefordert, ihre Lösungswege gut lesbar in dem dafür vorgesehenen und mit „P1“ gekennzeichneten Bereich festzuhalten. Nach Ablauf der Zeit war die Bearbeitung dieses Abschnitts zu beenden, und

bereits notierte Lösungen durften nicht mehr verändert werden. Phase 1 verfolgte das Ziel zu erfassen, inwieweit die Schüler:innen die Gleichungen korrekt lösen konnten und ob sie dabei unmittelbar ein situationsgerechtes Verfahren anwendeten (z. B. *spontane Flexibilität*).

In der zweiten Phase wurden die Schüler:innen angewiesen, alle zwölf Gleichungen erneut zu bearbeiten, diesmal jedoch unter Verwendung alternativer Lösungswege. Dabei war es ihnen nicht gestattet, ihre Antworten aus Phase 1 zu verändern oder zu ergänzen. Die Bearbeitung erfolgte ausschließlich im mit „P2“ gekennzeichneten Bereich. Ziel war es, möglichst viele unterschiedliche Lösungsansätze für jede Gleichung zu generieren, ohne dass Vorgaben hinsichtlich deren Qualität oder Effizienz gemacht wurden. Für diese Phase standen den Teilnehmenden 20 Minuten zur Verfügung. Die zweite Phase diente also dazu zu überprüfen, ob die Schüler:innen über Kenntnisse mehrerer Lösungsstrategien für die jeweiligen Aufgaben verfügten.

In der dritten Phase wurden die Schüler:innen gebeten, zu den bearbeiteten Gleichungen erneut zurückzukehren und für jede Aufgabe denjenigen Lösungsweg auszuwählen, den sie persönlich als „am besten“ erachteten. Dieser sollte entsprechend farblich markiert werden. Analog zur Vorgehensweise von Star et al., 2022 wurde bewusst darauf verzichtet, den Begriff „bester Lösungsweg“ näher zu definieren, um individuelle Interpretationen und Bewertungskriterien der Teilnehmenden zu erfassen. So bestand das Ziel der dritten Phase darin zu untersuchen, ob die Schüler:innen das situationsgerechte Verfahren nicht nur anwenden, sondern auch als effizienteste Strategie erkennen konnten.

Den Abschluss der Erhebung bildete die Bearbeitung des Fragebogens. Dieser wurde bewusst an das Ende der Testung gestellt, um eine mögliche Beeinflussung der Bearbeitung durch Hinweise auf metakognitive Strategien oder unterschiedliche Lösungswege zu vermeiden. Nachdem die Bearbeitung des Fragebogens beendet war, gaben die Schüler:innen ihre Testhefte bei der Versuchsleiterin ab.

4.4 Auswertung

Die Bewertung und Auswertung der erhobenen Daten erfolgte durch die Verfasserin dieser Arbeit in Anlehnung an die Studien von Xu et al., 2017 und Star et al., 2022. Zur Sicherstellung einer möglichst hohen Vergleichbarkeit wurden die Ergebnisse der Testung analog zur Vorgehensweise von Star et al., 2022 bewertet und codiert. Die Codierung und Auswertung der Datensätze erfolgte überwiegend mithilfe des Programms Excel unter Einsatz deskriptivstatistischer Ver-

fahren.

Im Zentrum der Auswertung standen vor allem vier zentrale Kenngrößen: Genauigkeit, prozedurale Flexibilität, potenzielle Flexibilität sowie spontane Flexibilität. In einem ersten Analyseschritt wurden die von den Schüler:innen in Phase 1 produzierten Lösungen, also die im mit „P1“ gekennzeichneten Bereich dokumentierten Lösungswege, für jede Gleichung überprüft. Dabei wurde zunächst die Genauigkeit (*accuracy*) bestimmt: Für jede Gleichung erhielten die Schüler:innen einen Punkt, sofern sie mithilfe eines korrekten Lösungswegs zur richtigen Lösung gelangten; andernfalls wurde kein Punkt vergeben. Da einige Aufgaben auch periodische oder irrationale Ergebnisse aufwiesen, wurde bei der Bewertung keine spezifische Darstellungsform oder Rundung berücksichtigt.¹ Da keine Teilpunkte vergeben wurden, konnten Schüler:innen bei der Genauigkeit schließlich eine Gesamtpunktzahl zwischen 0 und 12 Punkten erreichen.

Anschließend wurden alle in Phase 1 und Phase 2 produzierten Lösungswege analysiert und für jede Gleichung hinsichtlich der verwendeten Verfahren codiert. Die Zuordnung erfolgte zu drei Kategorien: Standardverfahren (S), situationsgerechtes Verfahren (I) sowie unbestimmtes Verfahren (N). Die Definitionen von Standardverfahren und situationsgerechtem Verfahren für jeden Aufgabentyp wurden bereits zuvor dargelegt. Aufgrund der Aufgabenkonstruktion ließ sich in der Regel schon anhand des ersten Bearbeitungsschrittes erkennen, welchem Verfahren ein Lösungsweg zuzuordnen ist. Alle davon abweichenden Lösungsansätze wurden der Kategorie „unbestimmtes Verfahren“ zugeordnet und mit „N“ codiert, dazu gehören der Einsatz unkonventioneller Strategien, Strategien, die gegen mathematische Grundsätze verstießen, sowie unvollständige Strategien, die keine eindeutige Zuordnung zum Standard- oder situationsgerechten Verfahren zuließen. Sämtliche von den Schüler:innen produzierten Lösungswege wurden entsprechend dieses Schemas codiert, unabhängig davon, ob sie zu einer korrekten Lösung führten oder mathematische Fehler enthielten. Wurde eine Gleichung nicht bearbeitet, erfolgte die Zuordnung zur Kategorie „Kein Verfahren“ (K).

Nachdem die Genauigkeit bewertet und alle Verfahren codiert worden waren, wurden die weiteren für die Erhebung relevanten Kenngrößen *prozedurale Flexibilität*, *potenzielle Flexibilität* und *spontane Flexibilität* bestimmt. Analog zur Genauigkeit wurde für jede dieser Größen pro Aufgabe jeweils 0 oder 1 Punkt vergeben, sodass sich ein Gesamtpunktescore von 0 bis 12 pro Kenngröße ergab. Die Bewertung dieser Größen erfolgte in Abhängigkeit von der Erfüllung fol-

¹In Einzelfällen gaben Schüler:innen zwar ein korrektes Ergebnis an, ohne jedoch einen nachvollziehbaren Lösungsweg zu dokumentieren. In diesen Fällen wurde nach Rücksprache mit dem betreuenden Dozenten dennoch ein Punkt für die Genauigkeit vergeben.

gender Kriterien:

- A. Kenntnis des Standardverfahrens für diese Gleichung wurde gezeigt,
- B. Kenntnis des situationsgerechten Verfahrens für diese Gleichung wurde gezeigt und
- C. das situationsgerechte Verfahren wurde als bestgeeigneter Lösungsweg für diese Gleichung ausgewählt.

Um bei einer Gleichung einen Punkt für die prozedurale Flexibilität, welche im Folgenden nur noch als Flexibilität (F) bezeichnet wird, zu erhalten, mussten Schüler:innen alle drei Kriterien erfüllen. Dabei wurde nicht differenziert, ob das situationsgerechte Verfahren in Phase 1 oder Phase 2 angewendet wurde. Wurden nicht alle drei Kriterien erfüllt, wurde für diese Gleichung kein Flexibilitätspunkt vergeben.

Einen Punkt für potenzielle Flexibilität (PF) erhielten die Schüler:innen, wenn bei einer Gleichung genau zwei der drei Kriterien erfüllt waren. Dabei ist zu beachten, dass Schüler:innen bei einer Aufgabe entweder als flexibel (F) oder als potenziell flexibel (PF) gelten konnten, jedoch nicht für beide Kenngrößen gleichzeitig einen Punkt erhielten. Wurden Schüler:innen bei einer Gleichung als potenziell flexibel eingeordnet, erfolgte zusätzlich eine Differenzierung in zwei Kategorien, abhängig davon, welches der Kriterien (A, B oder C) nicht erfüllt war.

Ein Punkt für PF-AB wurde vergeben, wenn sowohl das Standardverfahren (A) als auch das situationsgerechte Verfahren (B) angewendet wurden, das situationsgerechte Verfahren jedoch nicht als bestes der verwendeten Verfahren identifiziert wurde (C). Hingegen erhielten Schüler:innen einen Punkt für PF-BC, wenn sie das situationsgerechte Verfahren (B) verwendet und dieses auch als bestes Verfahren ausgewählt haben (C), jedoch nicht das Standardverfahren eingesetzt haben (A). Eine dritte Form potenzieller Flexibilität (PF-AC) konnte ausgeschlossen werden, da Kriterium C das Vorliegen von Kriterium B voraussetzt. Für die Typen PF-AB als auch PF-BC konnte jeweils ein Gesamtscore von 0 bis 12 erreicht werden; ihre Summe ergibt den Gesamtscore der potenziellen Flexibilität.

Abschließend wurde untersucht, ob Schüler:innen bereits in Phase 1, also beim ersten produzierten Lösungsweg, das situationsgerechte Verfahren bei einer Gleichung eingesetzt haben. In diesem Fall erhielten sie einen Punkt für spontane Flexibilität (SF), sodass sich auch hier ein Gesamtscore von 0 bis 12 ergab.

5 Ergebnisse

Wie in der Studie von Star et al., 2022 wurde bei der Darstellung der Ergebnisse neben einem Gesamtüberblick eine Differenzierung nach Klassenstufen (8. und 11. Schulstufe) vorgenommen. Analog zu Star et al., 2022 ist auch für diese Erhebung zu beachten, dass aufgrund der begrenzten Anzahl an Teilnehmer:innen keine aussagekräftigen und repräsentativen Schlussfolgerungen von der Stichprobe auf die Gesamtpopulation gezogen werden können.

Tabelle 6: Übersicht über die wichtigsten Testgrößen (Mittelwert und Standardabweichung) im Zusammenhang mit Flexibilität

	n	G	F	SF	PF	PF-AB	PF-BC
Gesamt	235	5,9 (2,9)	1,8 (3,0)	0,9 (2,2)	0,8 (1,5)	0,5 (1,1)	0,3 (1,2)
8. Schulstufe	123	5,7 (2,9)	0,3 (0,9)	0,1 (0,5)	0,6 (1,2)	0,5 (1,1)	0,1 (0,5)
11. Schulstufe	112	6,3 (2,9)	3,4 (3,6)	1,9 (2,9)	1,1 (1,8)	0,5 (1,0)	0,6 (1,6)

G = Genauigkeit; F = Flexibilität; SF = spontane Flexibilität; PF = potenzielle Flexibilität.

Tabelle 6 bietet einen ersten Überblick über die aus den Ergebnissen ermittelten Mittelwerte und Standardabweichungen der oben diskutierten relevanten Kenngrößen Genauigkeit (G), Flexibilität (F), spontane Flexibilität (SF) sowie potenzielle Flexibilität (PF) mit ihren beiden Ausprägungen PF-AB und PF-BC. Die Ergebnisse werden sowohl für die gesamte Stichprobe als auch differenziert nach Schulstufe dargestellt.

5.1 Genauigkeit

Die Ergebnisse der Erhebung zeigen, dass die teilnehmenden Schüler:innen in der ersten Phase, die insgesamt 15 Minuten umfasste, im Durchschnitt etwa die Hälfte der 12 Aufgaben ($M = 5,9$) korrekt lösen konnten. Die vergleichsweise hohe Standardabweichung von 2,9 weist jedoch darauf hin, dass die Ergebnisse deutlich um diesen Mittelwert streuen. Die durchschnittliche Anzahl korrekt gelöster Aufgaben liegt dabei bei den Schüler:innen der Ober- und Unterstufe mit einer Differenz von 0,6 nah beieinander. Wie erwartet, erzielten jedoch die Schüler:innen der Oberstufe mit durchschnittlich 6,3 korrekt gelösten Aufgaben leicht bessere Ergebnisse als die Schüler:innen der Unterstufe ($M = 5,7$).

Eine differenziertere Betrachtung der Unterstufe nach Schulform zeigt jedoch ein leicht abweichendes Bild (vgl. Tabelle 7). Während Schüler:innen aus der Mittelschule im Durchschnitt

Tabelle 7: Übersicht über Flexibilitätsgrößen differenziert nach Schulform

	n	G	F	SF	PF	PF-AB	PF-BC
Unterstufe gesamt	123	5,7 (2,9)	0,3 (0,9)	0,1 (0,5)	0,6 (1,2)	0,5 (1,1)	0,1 (0,5)
AHS Unterstufe	48	7,2 (2,5)	0,6 (1,3)	0,2 (0,8)	0,7 (1,2)	0,6 (1,1)	0,1 (0,6)
Mittelschule	75	4,7 (2,7)	0,1 (0,5)	0,0 (0,3)	0,5 (1,1)	0,4 (1,1)	0,0 (0,3)

G = Genauigkeit; F = Flexibilität; SF = spontane Flexibilität; PF = potenzielle Flexibilität.

lediglich 4,7 Aufgaben korrekt lösen konnten, erreichten Schüler:innen einer AHS-Unterstufe (ebenfalls 8. Schulstufe) einen Mittelwert von 7,2 korrekt gelösten Aufgaben. Damit liegt diese Gruppe sogar über dem durchschnittlichen Wert der Oberstufenschüler:innen (6,3 von 12 Aufgaben).

5.2 Prozedurale Flexibilität

Im Bereich der prozeduralen Flexibilität zeigt sich, dass die teilnehmenden Schüler:innen insgesamt nur geringe Flexibilität aufweisen konnten. Im Durchschnitt wurden 1,8 von insgesamt 12 Gleichungen flexibel gelöst, was einem Anteil von etwa 15% entspricht.

Wie aus Tabelle 6 zu entnehmen ist, zeigt sich dabei jedoch ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden Klassenstufen: Während die Schüler:innen der 11. Schulstufe im Mittel 3,4 Aufgaben flexibel lösen konnten (entsprechend 28,3%), lag dieser Wert bei den Schüler:innen der 8. Schulstufe deutlich niedriger. Diese zeigten im Durchschnitt lediglich bei 0,3 Gleichungen prozedurale Flexibilität.

Auffällig ist zudem die Streuung innerhalb der Gruppen: Für die Oberstufe ergibt sich eine vergleichsweise hohe Standardabweichung ($SD = 3,6$), was auf eine starke Variabilität der Ergebnisse innerhalb dieser Gruppe hinweist. Demgegenüber fällt die Standardabweichung in der Unterstufe deutlich geringer aus ($SD = 0,9$), was auf relativ homogene und insgesamt niedrige Werte im Bereich der prozeduralen Flexibilität schließen lässt. Die Ergebnisse deuten somit darauf hin, dass Schüler:innen der Unterstufe in dieser Erhebung nur vereinzelt prozedurale Flexibilität demonstrieren konnten, während die Leistungen in der Oberstufe nicht nur höher, sondern auch deutlich heterogener ausfallen.

Eine nach Schulform differenzierte Betrachtung der Unterstufe (vgl. Tabelle 7) zeigt, dass Schüler:innen aus der Mittelschule kaum prozedurale Flexibilität demonstrieren konnten. Im Durch-

schnitt wurden von ihnen lediglich 0,1 von 12 Aufgaben flexibel gelöst. Schüler:innen der AHS-Unterstufe zeigten prozedurale Flexibilität nur geringfügig häufiger; hier lag der Mittelwert bei 0,6 flexibel gelösten Aufgaben.

5.3 Potenzielle Flexibilität

Potenzielle Flexibilität wurde von den teilnehmenden Schüler:innen der Unter- und Oberstufe im Durchschnitt bei 0,8 von 12 Aufgaben gezeigt (vgl. Tabelle 6). Dabei waren Schüler:innen der Oberstufe etwas häufiger potenziell flexibel ($M = 1,1$) als jene der Unterstufe ($M = 0,6$). Zwischen den Schüler:innen der Mittelschule ($M = 0,5$) und der AHS-Unterstufe ($M = 0,7$) zeigen sich hingegen nur geringe Unterschiede in Bezug auf die potenzielle Flexibilität.

Der Typ PF-AB, also Fälle potenzieller Flexibilität, in denen sowohl das Standardverfahren als auch das situationsgerechte Verfahren angewendet wurden, das situationsgerechte Verfahren jedoch nicht als bestgeeigneter Lösungsweg ausgewählt wurde, trat in der Gesamtstichprobe am häufigsten auf ($M = 0,5$ von 12 Aufgaben). Wie Tabelle 3 zu entnehmen ist, zeigen sich hierbei keine Unterschiede zwischen Ober- und Unterstufe; in beiden Gruppen lag der Mittelwert bei 0,5 Aufgaben.

Seltener zeigte sich potenzielle Flexibilität vom Typ PF-BC, bei dem das situationsgerechte Verfahren zwar angewendet und als bestgeeigneter Lösungsweg identifiziert wurde, das Standardverfahren jedoch nicht zum Einsatz kam. Hier ergab sich ein Gesamtmittelwert von 0,3 Aufgaben. In der Unterstufe trat dieser Typ nahezu nicht auf ($M = 0,1$), während sich für die Oberstufe ein etwas höherer Wert von $M = 0,6$ ergab.

5.4 Spontane Flexibilität

Die teilnehmenden Schüler:innen verwendeten in dieser Erhebung im Durchschnitt bei 0,9 von 12 Aufgaben ein situationsgerechtes Verfahren als ersten Lösungsweg. Spontane Flexibilität war in der Gesamtstichprobe somit nur gering ausgeprägt und mit einem Mittelwert von 0,1 Aufgaben bei den Schüler:innen der 8. Schulstufe nahezu nicht vorhanden (vgl. Tabelle 6).

Für die Oberstufenschüler:innen zeigt sich eine vergleichsweise hohe Standardabweichung ($SD = 2,9$) bei einem Mittelwert von 1,9, was auf eine deutliche Streuung der Werte um den Mittelwert hinweist. Dies deutet darauf hin, dass spontane Flexibilität innerhalb dieser Gruppe sehr

unterschiedlich ausgeprägt ist.

Auffällig ist zudem, dass lediglich acht Schüler:innen (3,4% der Gesamtstichprobe) für einen überproportional großen Anteil der Fälle spontaner Flexibilität verantwortlich sind: Diese acht Schüler:innen, die sämtlich der 11. Schulstufe angehören, beantworteten jeweils acht oder mehr der zwölf Aufgaben spontan flexibel und vereinen damit 36,5% aller beobachteten Fälle spontaner Flexibilität auf sich.

Über die gesamte Stichprobe hinweg zeigten 57 Schüler:innen bei mindestens einer Aufgabe spontane Flexibilität (vgl. Tabelle 8). Von diesen Schüler:innen wiesen 70,2% drei oder mehr spontan flexible Lösungen auf. Dies deutet darauf hin, dass spontane Flexibilität, sofern sie auftritt, häufig nicht nur vereinzelt, sondern gleich in mehreren Aufgaben gezeigt wird. Zusätzlich zeigt sich eine große Diskrepanz zwischen den beiden Schulstufen: Insgesamt gaben 44,6% der Oberstufenschüler:innen mindestens eine spontan flexible Antwort, während dies nur auf 5,7% der Unterstufenschüler:innen zutrifft.

5.5 Analyse der individuellen Schüler:innenleistungen

Wie bereits in der Studie von Star et al., 2022 erfolgt im Folgenden eine differenziertere Analyse der interessierenden Kenngrößen im Hinblick auf die individuellen Leistungen der Schüler:innen in der Erhebung. Konkret wird untersucht, ob die Schüler:innen bei der Bearbeitung der zwölf Gleichungen an irgendeiner Stelle Kenntnisse des Standardverfahrens und/oder des situationsgerechten Verfahrens gezeigt haben und ob sie bei mindestens einer Gleichung Flexibilität und/oder spontane Flexibilität demonstrierten. Tabelle 8 bietet einen Überblick über die Ergebnisse dieser Analyse.

Tabelle 8: Anteil der Schüler:innen, die mindestens eine standardisierte, situationsgerechte, flexible oder spontan flexible Lösung gefunden haben

	n	Standard	Situationsgerecht	Flexibel	Spontan flexibel
Gesamt	235	94,0 %	53,2 %	38,3 %	24,3 %
8. Schulstufe	123	93,5 %	28,5 %	13,0 %	5,7 %
11. Schulstufe	112	94,6 %	80,4 %	66,0 %	44,6 %

Bezüglich der Strategien, die die Schüler:innen beim Lösen der Gleichungen in der Erhebung anwendeten, zeigt sich deutlich, dass nahezu alle Teilnehmenden das Standardverfahren beherrschten. Wie Tabelle 8 verdeutlicht, wandten 94% der Schüler:innen dieses Verfahren bei

mindestens einer der zwölf Gleichungen an. Dabei konnten keine wesentlichen Unterschiede zwischen Oberstufen- und Unterstufenschüler:innen festgestellt werden.

Ein differenzierteres Bild ergibt sich bei der Analyse der Häufigkeit des Einsatzes situationsgerechter Verfahren. Bezogen auf die Gesamtstichprobe zeigt sich, dass etwas mehr als die Hälfte der teilnehmenden Schüler:innen (53,2%) Kenntnisse situationsgerechter Verfahren aufwiesen. Die Differenzierung nach Schulstufe legt nahe, dass innovative Strategien erwartungsgemäß den Oberstufenschüler:innen stärker vertraut sind als den Unterstufenschüler:innen. So setzten 80,4% der Schüler:innen der 11. Schulstufe bei mindestens einer Gleichung ein situationsgerechtes Verfahren ein, während dies nur etwa 28,5% der Schüler:innen der 8. Schulstufe taten.

Ähnliche Ergebnisse zeigen sich im Bereich der prozeduralen Flexibilität: Insgesamt konnten 38,3% der Teilnehmer:innen zumindest bei einer Aufgabe flexibel agieren, indem sie sowohl das Standard- als auch das situationsgerechte Verfahren verwendeten und letzteres als den geeigneteren Lösungsweg auswählten. Rund zwei Drittel der Schüler:innen der 11. Schulstufe zeigten prozedurale Flexibilität bei mindestens einer Aufgabe; dieser Anteil sank bei den Unterstufenschüler:innen jedoch auf etwa 13%.

Die geringsten Werte zeigen sich im Bereich der spontanen Flexibilität: Lediglich ein Viertel der teilnehmenden Schüler:innen erwies sich in der Erhebung als spontan flexibel. Dabei werden deutliche Unterschiede zwischen den Schulstufen sichtbar. Nur 5,7% der Unterstufenschüler:innen zeigten spontane Flexibilität (d. h. sie wählten im ersten Lösungsversuch ein situationsgerechtes Verfahren), während dies bei 44,6% der Schüler:innen der 11. Schulstufe mindestens bei einer Gleichung der Fall war.

5.6 Bearbeitete Aufgaben und verwendete Strategien

Es wurde zudem ausgewertet, wie viele Aufgaben die Schüler:innen in Phase 1 (15 Minuten Bearbeitungszeit) bearbeiten konnten. Hierfür wurden sämtliche Aufgaben berücksichtigt, bei denen ein erkennbarer Lösungsansatz vorlag, auch wenn dieser zu einem falschen Ergebnis führte oder gegen mathematische Prinzipien verstieß. Die Auswertung zeigt, dass die Schüler:innen im Durchschnitt 9 von 12 Gleichungen in Phase 1 zu bearbeiten versuchten. Schüler:innen der Oberstufe erreichten hierbei einen leicht höheren Durchschnittswert (9,4 von 12 Gleichungen) als Schüler:innen der Unterstufe (8,7 von 12 Gleichungen). Sie waren demnach tendenziell geringfügig schneller bei der Bearbeitung des Testhefts.

Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Unterstufenschüler:innen in dieser Erhebung einen einfachen Taschenrechner verwenden durften, während dies den Oberstufenschüler:innen nicht gestattet war. Manuelle Berechnungen sind daher im Regelfall zeitaufwendiger als solche unter Nutzung technologischer Hilfsmittel.

Auffällig ist der hohe Anteil an Schüler:innen, die die Gleichungen 10 bis 12 nicht mehr bearbeiteten, d. h. keinen Lösungsansatz für mindestens eine dieser letzten drei Aufgaben angaben. Insgesamt ließen 47,7% der Schüler:innen diese Aufgaben unbearbeitet. Nur etwas mehr als die Hälfte der Teilnehmenden bearbeitete somit mindestens eine der letzten drei Gleichungen, unabhängig davon, ob diese korrekt gelöst wurde oder nicht. Dieser Befund zeigt sich sowohl bei Schüler:innen der 11. Schulstufe als auch bei jenen der 7. Schulstufe in ähnlicher Ausprägung: 45,5% der Oberstufenschüler:innen bearbeiteten die Aufgaben 10 bis 12 nicht mehr, bei den Unterstufenschüler:innen lag dieser Anteil bei 49,6%.

Als mögliche Ursache hierfür kann angenommen werden, dass ein Teil der Schüler:innen nicht über ausreichende Strategien zur Lösung dieses Aufgabentyps (Bruchgleichungen, bei denen zur Lösung effizient gekürzt oder auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden muss) verfügte. Da hierfür im Vergleich zu den vorherigen Aufgaben eine neue Vorgehensweise erforderlich war, könnten einige Schüler:innen bereits frühzeitig von der Bearbeitung abgehalten worden sein. Darüber hinaus ist anzunehmen, dass sowohl die mangelnde Zeit als auch die abnehmende Motivation gegen Ende der Bearbeitungsphase eine Rolle spielten. Diese Beobachtung wird durch das während der Erhebung festgestellte Verhalten und die Äußerungen der Schüler:innen zusätzlich gestützt.

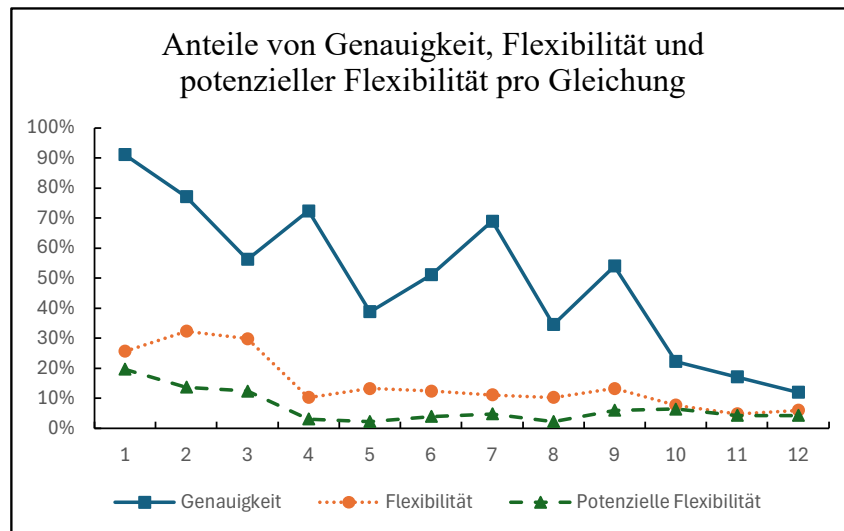


Abbildung 1: Verteilung des prozentualen Anteils erreichter Punkte für Genauigkeit, prozedurale Flexibilität und potenzielle Flexibilität pro Aufgabe (N = 235)

Im Folgenden wird detaillierter analysiert, wie die Schüler:innen bei den einzelnen Aufgabentypen vorgehen und welche Muster sowie Tendenzen sich daraus ableiten lassen. In Abbildung 1 wird zunächst der Anteil der erreichten Punkte für Genauigkeit, potenzielle Flexibilität und praktische Flexibilität über die einzelnen Aufgaben hinweg dargestellt.

Auffällig ist die deutliche Diskrepanz zwischen den Werten der Genauigkeit und jenen der Flexibilität über die einzelnen Aufgaben hinweg. Während ein vergleichsweise hoher Anteil der Schüler:innen die Gleichungen korrekt lösen konnte, zeigt sich deutlich seltener die Nutzung situationsgerechter Lösungsverfahren. Dies deutet darauf hin, dass viele Schüler:innen zwar über hinreichende prozedurale Kenntnisse zur Lösung der Aufgaben verfügen, jedoch nicht in der Lage sind, diese flexibel anzuwenden oder zwischen verschiedenen Lösungswegen bewusst zu wählen.

Dabei zeigt sich, dass die Genauigkeitswerte bei jenen Gleichungen, in denen ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten vorkamen (Aufgaben 1, 4 und 7), deutlich höher ausfallen als bei den Gleichungen 2, 6 und 9, bei denen mit Dezimalzahlen gearbeitet werden musste. Insbesondere bei händischer Berechnung stellt dies eine erhöhte Fehlerquelle dar. Die niedrigsten Genauigkeitswerte zeigen sich, neben den Aufgaben 10 bis 12, die wie oben dargestellt von etwa der Hälfte der Schüler:innen nicht mehr bearbeitet wurden, bei den Aufgaben 3, 5 und 8. Diese haben gemeinsam, dass es sich um Gleichungen mit Bruchkoeffizienten handelt, die für Schüler:innen erfahrungsgemäß eine besondere Herausforderung darstellen. Diese Schwierigkeit war sowohl bei den Oberstufen- als auch bei den Unterstufenschüler:innen erkennbar.

Aus Abbildung 1 geht zudem hervor, dass bei den ersten drei Gleichungen häufiger prozedurale bzw. potenzielle Flexibilität gezeigt wurde als bei den nachfolgenden Aufgaben. Zur Einordnung: Die ersten drei Gleichungen hatten die Form $a(x - b) = c$, wobei c ohne Rest durch a teilbar ist. Das situationsgerechte Verfahren besteht hierbei darin, beide Seiten der Gleichung durch die Konstante zu dividieren. Diese Strategie war vielen Schüler:innen offenbar vertrauter als die Bearbeitung der nachfolgenden, komplexeren Aufgabentypen, bei denen die Terme zunächst geschickt zusammengefasst werden müssen.

Zudem ist über den Verlauf der Aufgaben hinweg eine tendenzielle Abnahme der Werte für Genauigkeit sowie für prozedurale und potenzielle Flexibilität erkennbar, insbesondere bei den späteren Aufgaben. Dieser Befund lässt sich nicht ausschließlich durch die steigende inhaltliche Komplexität der Aufgaben erklären, sondern dürfte auch auf testbezogene Faktoren wie Zeitdruck, kognitive Ermüdung und nachlassende Motivation zurückzuführen sein.

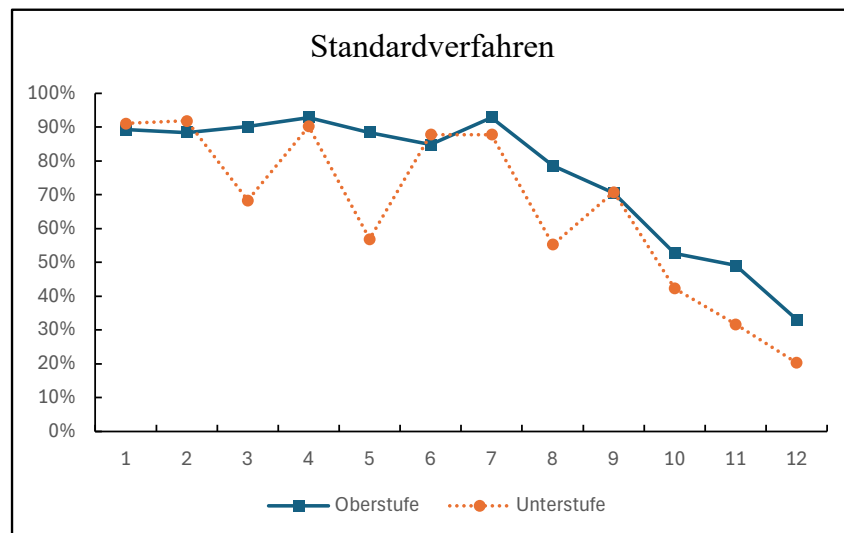


Abbildung 2: Durchschnittliche Häufigkeit der Nutzung des Standardverfahrens pro Aufgabe in Prozent nach Schulstufe

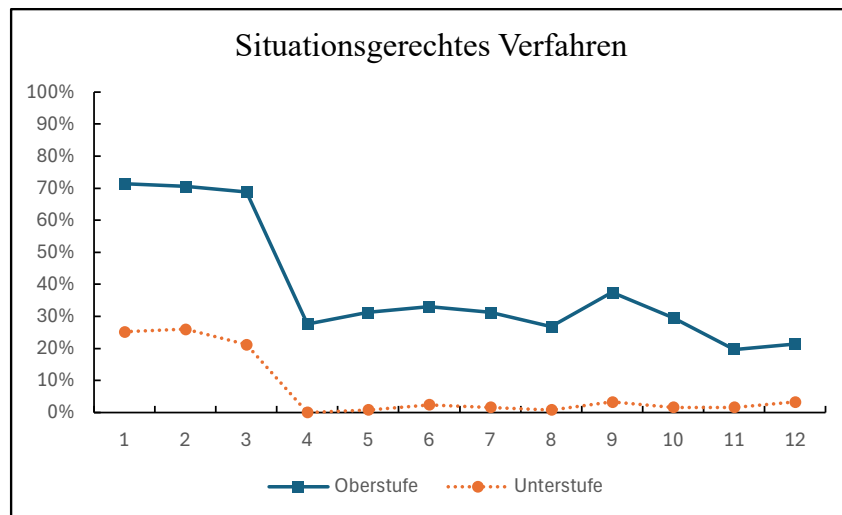


Abbildung 3: Durchschnittliche Häufigkeit der Nutzung des situationsgerechten Verfahrens pro Aufgabe in Prozent nach Schulstufe

Die nachstehenden Abbildungen 2 und 3 liefern ergänzende Informationen zu den von den Schüler:innen bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben verwendeten Strategien. Abbildung 2 stellt den prozentualen Anteil der Schüler:innen nach Schulstufe dar, die bei den jeweiligen Gleichungen das Standardverfahren angewandt haben, während Abbildung 3 den entsprechenden Anteil für die Nutzung situationsgerechter Verfahren zeigt.

Aus Abbildung 2 lässt sich entnehmen, dass bis einschließlich Gleichung 8 mindestens 80% der Schüler:innen der 11. Schulstufe das Standardverfahren einsetzten. Dabei wird nicht berücksichtigt, ob dieses zu einer korrekten Lösung führte. Ab Gleichung 7 ist ein kontinuierlicher Rückgang des Anteils der Schüler:innen zu beobachten, die das Standardverfahren anwenden. Dieser Befund lässt sich einerseits durch die zunehmende Komplexität der Aufgaben und andererseits durch situative Faktoren wie Zeitdruck, nachlassende Motivation und sinkende Konzentration erklären.

Während der Anteil der Oberstufenschüler:innen bei den ersten acht Gleichungen relativ konstant bleibt, zeigt sich bei den Schüler:innen der 8. Schulstufe ein deutlich variableres Muster. Insbesondere bei den Aufgaben 3, 5 und 8 sind markante Einbrüche in der Nutzung des Standardverfahrens erkennbar. Diese Aufgaben zeichnen sich durch das Auftreten von Bruchkoeffizienten aus, die offenbar eine besondere Herausforderung darstellen. Daraus lässt sich schließen, dass Schüler:innen der 8. Schulstufe Schwierigkeiten haben, das Standardverfahren sicher anzuwenden, sobald Brüche in den Gleichungen auftreten. Der Unterschied zwischen den Schulstufen wird exemplarisch an Aufgabe 5 deutlich: Während 88% der Oberstufenschüler:innen das Stan-

dardverfahren nutzten, lag dieser Anteil bei den Unterstufenschüler:innen lediglich bei 57%.

Abbildung 3 verdeutlicht den markanten Unterschied zwischen den Schulstufen: Schüler:innen der 11. Schulstufe sind wesentlich häufiger in der Lage, situationsgerechte Strategien anzuwenden als jene der 8. Schulstufe. Bei den ersten drei Gleichungen nutzten etwa 70% der Oberstufenschüler:innen ein situationsgerechtes Verfahren; im weiteren Verlauf ist jedoch ein deutlicher Rückgang zu beobachten, der sich anschließend auf einem Niveau von etwa 30% stabilisiert. Ein leichter Anstieg zeigt sich bei Gleichung 9, bei der rund 38% der Oberstufenschüler:innen ein situationsgerechtes Verfahren einsetzten. Demgegenüber liegt der Anteil der Unterstufenschüler:innen, die bei den ersten drei Gleichungen situationsgerechte Verfahren verwenden, im Durchschnitt bei etwa 45%, sinkt jedoch anschließend deutlich ab und verbleibt für die restlichen Aufgaben auf einem sehr niedrigen Niveau von etwa 2-3%.

Insgesamt ist also festzustellen, dass der Anteil der Schüler:innen, die das Standardverfahren anwenden, bei allen Aufgaben deutlich höher ist als jener, die situationsgerechte Verfahren einsetzen. Besonders auffällig ist, dass das Standardverfahren über nahezu alle Aufgaben hinweg als dominante und vergleichsweise stabile Strategie fungiert, während die Nutzung situationsgerechter Verfahren mit zunehmender Aufgabenschwierigkeit deutlich abnimmt.

5.7 Zusammenhang zwischen Genauigkeit und prozeduraler Flexibilität

Darüber hinaus soll mithilfe der Erhebung untersucht werden, ob ein Zusammenhang zwischen der Fähigkeit der Schüler:innen, Gleichungen korrekt zu lösen, und dem Auftreten von Flexibilität besteht. Zu diesem Zweck wurden Korrelationsanalysen zwischen den Genauigkeitswerten und den relevanten Flexibilitätsgrößen (prozedurale und spontane Flexibilität) durchgeführt. Korrelationskoeffizienten mit einem Betrag von über 0,5 werden dabei nach Cohen, 2013 allgemein als stark interpretiert. Ergänzend wird eine weitere Flexibilitätsgröße berücksichtigt, die sich aus der Summe des prozeduralen und des potenziellen Flexibilitätsscores ($F+PF$) ergibt. Dies erfolgt vor dem Hintergrund, dass prozedurale und potenzielle Flexibilität nicht unabhängig voneinander sind und auf diese Weise das gesamte Flexibilitätspotenzial der Schüler:innen umfassender abgebildet werden kann. Tabelle 9 bietet eine Übersicht über die Pearson-Korrelationen zwischen den Genauigkeitswerten und den verschiedenen Flexibilitätsmaßen der Erhebung einschließlich der entsprechenden 95%-Konfidenzintervalle.

Insgesamt ergab sich in der Analyse der Gesamtstichprobe zwischen der Genauigkeit der Schü-

Tabelle 9: Pearson-Korrelation zwischen Genauigkeit und Flexibilitätsgrößen inklusive der jeweiligen Konfidenzintervalle

	n	F	SF	F + PF	F	SF	F + PF
Gesamt	235	0,42	0,37	0,48	[0,31;0,52]	[0,25;0,47]	[0,37;0,57]
8. Schulstufe	123	0,26	0,20	0,39	[0,17;0,42]	[0,03;0,36]	[0,23;0,53]
11. Schulstufe	112	0,57	0,48	0,61	[0,42;0,68]	[0,33;0,61]	[0,49;0,72]

F = Flexibilität; SF = spontane Flexibilität; PF = potenzielle Flexibilität.

ler:innen und der prozeduralen Flexibilität ein Korrelationskoeffizient von $r = 0,42$, was nach Cohen, 2013 als moderater positiver Zusammenhang interpretiert werden kann. Der Zusammenhang zwischen der Genauigkeit und der Flexibilitätsgröße F+PF fällt mit $r = 0,48$ etwas stärker aus. Auffällig ist, dass dieser Zusammenhang in der Teilgruppe der Schüler:innen der 11. Schulstufe deutlich ausgeprägter ist als in der 8. Schulstufe: In der Oberstufe zeigt sich zwischen der Genauigkeit und der Flexibilitätsgröße F+PF eine starke positive Korrelation ($r = 0,61$), während der Zusammenhang in der Unterstufe mit $r = 0,39$ deutlich moderater ausfällt.

Ein ähnliches, wenn auch insgesamt schwächeres Muster zeigt sich für die spontane Flexibilität. In der Gesamtstichprobe ergibt sich hier ein moderater Zusammenhang ($r = 0,37$), der in der 11. Schulstufe mit $r = 0,48$ etwas stärker ausgeprägt ist. Für die Schüler:innen der 8. Schulstufe konnte hingegen kein signifikanter Zusammenhang zwischen Genauigkeit und spontaner Flexibilität festgestellt werden ($r = 0,20$).

Aus diesen Ergebnissen folgt demnach, dass Flexibilität und Genauigkeit im Allgemeinen positiv korrelieren. Daraus können aufgrund des Aufbaus der Studie jedoch keine kausalen Schlussfolgerungen getroffen werden.

5.8 Metakognitive Strategien

Abschließend wurde untersucht, wie Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe ihren Einsatz metakognitiver Strategien bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben wahrnehmen und ob sich Zusammenhänge mit ihren Genauigkeits- und Flexibilitätsscores feststellen lassen.

Tabelle 10 zeigt die Mittelwerte und zugehörigen Standardabweichungen der einzelnen Fragebogenitems differenziert nach Schulstufe. Zur Erinnerung: Die Antworten wurden auf einer fünfstufigen Likertskala erhoben (0 = trifft gar nicht zu bis 4 = trifft sehr zu). Die Mittel-

Tabelle 10: Mittelwerte und Standardabweichungen der Fragebogenitems zum Einsatz metakognitiver Strategien nach Schulstufe

	n	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Gesamt	235	2,4 (1,3)	1,9 (1,4)	2,5 (1,3)	2,8 (1,2)	2,7 (1,2)	2,0 (1,3)
8. Schulstufe	123	2,2 (1,4)	1,8 (1,4)	2,5 (1,3)	2,7 (1,2)	2,4 (1,3)	1,7 (1,3)
11. Schulstufe	112	2,7 (1,2)	2,0 (1,4)	2,5 (1,4)	2,9 (1,1)	3,0 (1,0)	2,4 (1,3)

werte deuten darauf hin, dass die teilnehmenden Schüler:innen ihren Einsatz metakognitiver Strategien eher unsicher einschätzen und häufig die mittlere Kategorie („teils/teils“) wählten. Entsprechend lassen sich aus diesen Angaben keine klaren Tendenzen ableiten. Diese Häufung könnte jedoch auf eine eingeschränkte metakognitive Bewusstheit oder auf Unsicherheiten in der Selbsteinschätzung hindeuten, wodurch sich keine klaren Tendenzen ableiten lassen. Zudem ist zu berücksichtigen, dass es sich um Selbsteinschätzungen handelt, die nicht zwangsläufig dem tatsächlichen Einsatz metakognitiver Strategien entsprechen.

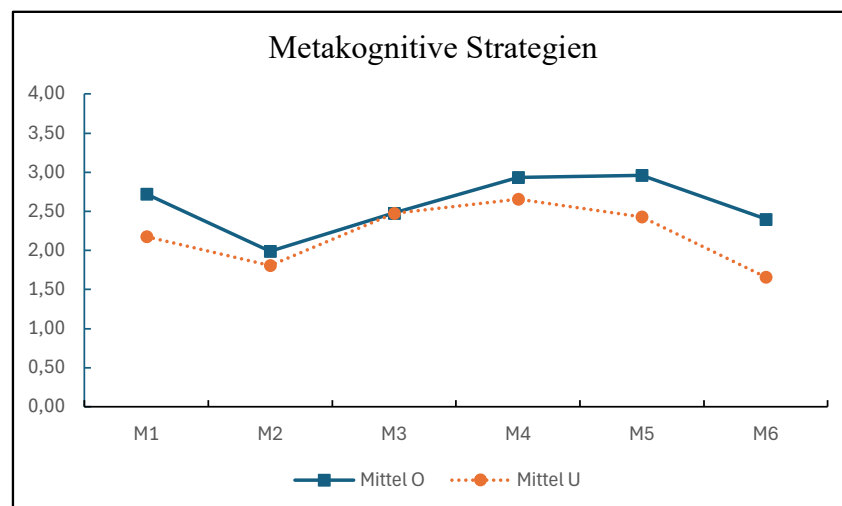


Abbildung 4: Mittelwerte der Fragebogenitems zum Einsatz metakognitiver Strategien nach Schulstufe

Wie in Abbildung 4 dargestellt, liegen die durchschnittlichen Itemwerte der Schüler:innen der 11. Schulstufe insgesamt leicht über jenen der 8. Schulstufe. Demnach geben Oberstufenschüler:innen tendenziell häufiger an, bewusst metakognitive Strategien einzusetzen, als dies bei Unterstufenschüler:innen der Fall ist. Bei einzelnen Items sind die Unterschiede jedoch gering oder nahezu nicht vorhanden. So zeigen sich beispielsweise beim Item M3 („Während ich für Mathematik lerne, teste ich mich selbst (z. B. durch Fragen), um zu überprüfen, ob ich den Stoff verstanden habe“) nahezu identische Mittelwerte (Oberstufe: $M = 2,48$; Unterstufe: $M = 2,47$).

Die höchsten Mittelwerte finden sich bei den Items M4 („Wenn ich eine Mathematikaufgabe bearbeite, achte ich darauf, ob mein Rechenweg sinnvoll ist.“) und M5 („Wenn mir eine Mathematikaufgabe schwerfällt, nehme ich mir Zeit, die Aufgabe zu verstehen.“). Für die Oberstufe ergibt sich hier jeweils ein Mittelwert von 2,96, was der Kategorie „trifft eher zu“ entspricht. Beim Item M6 („Wenn ich beim Lösen einer Mathematikaufgabe Schwierigkeiten habe, versuche ich einen anderen Lösungsweg“) zeigt sich insbesondere bei den Schüler:innen der 8. Schulstufe ein vergleichsweise niedriger Mittelwert von 1,66. Dies deutet darauf hin, dass alternative Lösungswege seltener berichtet werden, was auf eine geringere strategische Variabilität oder ein noch nicht vollständig entwickeltes Strategierepertoire hinweisen könnte.

Insgesamt deuten die Ergebnisse darauf hin, dass metakognitive Strategien insbesondere von Schüler:innen der Oberstufe etwas häufiger wahrgenommen werden. Gleichzeitig weisen die überwiegend im mittleren Bereich liegenden Mittelwerte darauf hin, dass die Schüler:innen insgesamt ein eher unsicheres Verhältnis zu metakognitiven Strategien haben, da diese weder klar bejaht noch deutlich verneint werden.

Zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den metakognitiven Selbsteinschätzungen und den Leistungsmaßen wurde die Spearman-Rangkorrelation verwendet. Diese eignet sich insbesondere für ordinalskalierte Daten sowie für die Analyse monotoner Zusammenhänge zwischen Variablen. Der Korrelationskoeffizient ρ basiert dabei auf den Rangplätzen der Werte und nimmt Werte zwischen -1 und +1 an, wobei Werte nahe 0 auf keinen bzw. nur einen sehr schwachen Zusammenhang hinweisen (Xiao et al., 2016).

Tabelle 11: Spearman-Korrelation zwischen der metakognitiven Selbsteinschätzung und Genauigkeit bzw. Flexibilität inklusive der jeweiligen Konfidenzintervalle

	n	G	F + PF	G	F + PF
Gesamt	235	0,15	0,18	[0,02;0,27]	[0,05;0,30]
8. Schulstufe	123	0,07	-0,01	[-0,11;0,24]	[-0,19;0,17]
11. Schulstufe	112	0,19	0,11	[0,00;0,36]	[-0,08;0,29]

G = Genauigkeit; F + PF = prozedurale und potenzielle Flexibilität.

Für die Gesamtstichprobe zeigen sich zwischen dem Mittelwert der metakognitiven Strategien und der Genauigkeit ($\rho = 0,15$) sowie der Flexibilität ($\rho = 0,18$) insgesamt sehr schwache positive Zusammenhänge.

Differenziert nach Schulstufe ergeben sich ähnliche Muster: In der Oberstufe liegt die Korrelation zwischen Metakognition und Genauigkeit bei $\rho = 0,19$ und zwischen Metakognition und Flexibilität bei $\rho = 0,11$. Damit zeigen sich zwar durchgehend positive Zusammenhänge, diese sind jedoch ebenfalls sehr schwach ausgeprägt und deuten auf keinen substantiellen Zusammenhang hin.

In der Unterstufe fällt der Zusammenhang nochmals geringer aus. Hier beträgt die Korrelation zwischen Metakognition und Genauigkeit lediglich $\rho = 0,07$, während für die Flexibilität mit $\rho = -0,01$ praktisch kein Zusammenhang feststellbar ist. Letzteres weist darauf hin, dass zwischen diesen Variablen in der Unterstufe keinerlei systematischer Zusammenhang besteht. Die Konfidenzintervalle zeigen insgesamt, dass die meisten Zusammenhänge den Wert 0 einschließen und somit statistisch nicht eindeutig von keinem Zusammenhang abgrenzbar sind. Lediglich in der Oberstufe deutet das Intervall für die Genauigkeit auf einen grenzwertig positiven Zusammenhang hin.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse über beide Schulstufen hinweg, dass die selbstberichtete Nutzung metakognitiver Strategien nur in sehr geringem Ausmaß mit den erhobenen Leistungsmaßen in Beziehung steht.

6 Diskussion

6.1 Österreichische Mathematikleistungen im internationalen Vergleich

Die vorliegende empirische Untersuchung knüpft an bisherige Forschungsarbeiten zur mathematischen prozeduralen Flexibilität an, die wiederholt auf eine Diskrepanz zwischen dem Wissen über verschiedene Lösungsverfahren und deren tatsächlicher flexibler Anwendung hingewiesen haben. Darüber hinaus zeigen zahlreiche Studien, dass Schüler:innen beim Bearbeiten mathematischer Aufgaben häufig nur in geringem Ausmaß situationsgerechte Lösungsstrategien nutzen, selbst wenn sie über Kenntnisse alternativer Verfahren verfügen (vgl. u.a. Star et al., 2008; Xu et al., 2017; Star et al., 2022). Ziel der vorliegenden Studie war es, zu untersuchen, inwieweit sich diese Befunde auch in einer Stichprobe österreichischer Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe nachweisen lassen. Dabei wurde insbesondere der Frage nachgegangen, welche Zusammenhänge zwischen Genauigkeit, Flexibilität und dem Einsatz metakognitiver Strategien bestehen und inwiefern sich Unterschiede hinsichtlich der Schulstufe sowie der besuchten Schulform zeigen. Außerdem ermöglicht das an Star et al., 2022 angelehnte Studiendesign einen Vergleich der Ergebnisse mit den Befunden dieser länderübergreifenden Untersuchung, in der die Flexibilität von Schüler:innen aus Finnland, Schweden und Spanien analysiert wurde.

Da die aktuelle mathematikdidaktische Forschung darauf hinweist, dass sowohl die Genauigkeit als auch die prozedurale Flexibilität von Schüler:innen deutlichen interkulturellen Unterschieden unterliegen können, erscheint ein internationaler Vergleich besonders relevant (Star et al., 2022). Wie bereits Star et al., 2022 hervorheben, stellen die europäischen Länder Finnland, Schweden und Spanien eine interessante Kombination aus Gemeinsamkeiten und Unterschieden hinsichtlich verschiedener Bildungsindikatoren dar, wodurch länderübergreifende Vergleiche wertvolle Erkenntnisse liefern können. Auch Österreich lässt sich sinnvoll in einen solchen Vergleich einordnen.

Hinweise auf Unterschiede in mathematischen Kompetenzen zwischen verschiedenen Ländern liefern unter anderem internationale Vergleichsstudien wie PISA (*Programme for International Student Assessment*) der OECD oder TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) der unabhängigen Forschungsorganisation IEA. Während bei PISA die Kompetenzen 15- bis 16-jähriger Schüler:innen in den Bereichen Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften erhoben werden, untersucht TIMSS die Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzen von Schüler:innen der 4. und 8. Schulstufe im internationalen Vergleich (Institut des Bundes für

Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS), 2026).

Die Ergebnisse von PISA 2022, bei dem Mathematik den Schwerpunkt bildete, zeigen Unterschiede zwischen den beteiligten Ländern, gleichzeitig aber auch gewisse Gemeinsamkeiten. Österreichische Schüler:innen erreichten im Bereich Mathematik durchschnittlich 487 Punkte und lagen damit sowohl über dem OECD-Durchschnitt (472 Punkte) als auch über dem EU-Durchschnitt (474 Punkte). Die Leistungen österreichischer Schüler:innen waren dabei mit jenen aus Finnland (484 Punkte) und Schweden (482 Punkte) vergleichbar, während Spanien mit 473 Punkten etwas niedrigere Werte erzielte. Auffällig ist jedoch, dass sich die Mathematikleistungen im Vergleich zu PISA 2015 in einem Großteil der OECD- und EU-Länder verschlechtert haben, was auch auf die genannten Länder zutrifft (Toferer et al., 2023). Auch die Ergebnisse der TIMSS-Studie 2023 zeigen Österreich im oberen Mittelfeld der teilnehmenden Länder. Österreichische Schüler:innen der 8. Schulstufe erreichten im Bereich Mathematik durchschnittlich 512 Punkte und lagen damit über dem internationalen Durchschnitt von 478 Punkten sowie leicht über dem EU-Durchschnitt von 503 Punkten. Schweden erzielte mit durchschnittlich 517 Punkten etwas höhere Werte als Österreich, während Finnland mit 504 Punkten geringfügig darunter lag. Spanien nahm an TIMSS 2023 nicht teil (Wiesinger et al., 2024).

Neben den Kompetenzwerten liefern die internationalen Studien auch Hinweise auf Unterschiede in der Unterrichtsgestaltung und der Wahrnehmung des Mathematikunterrichts. Im PISA-Bericht 2022 schätzten österreichische Schüler:innen die Qualität des Mathematikunterrichts sowie die Unterstützung durch ihre Mathematiklehrpersonen signifikant niedriger ein als Schüler:innen im OECD-Durchschnitt. Gleichzeitig berichteten österreichische Schüler:innen häufiger vom Einsatz klassischer schulmathematischer Aufgabenstellungen der formalen und angewandten Mathematik, während kognitiv aktivierende Aufgaben nur etwa im OECD-Durchschnitt liegen (Toferer et al., 2023). Für Spanien beschreiben Star et al., 2022 den Mathematikunterricht als eher traditionell lehrerzentriert mit einer starken Fokussierung auf einer routinierten Ausrichtung auf Regeln, Genauigkeit und Geschwindigkeit. Im Gegensatz dazu weisen Studien für Finnland und Schweden auf einen Unterricht hin, in dem zeitlich getaktete Drill-Übungen eine geringere Rolle spielen und mathematisches Verständnis stärker betont wird. Ebenso nennenswert im internationalen Vergleich ist das Ergebnis der PISA-2022-Studie, dass österreichische Schüler:innen das disziplinäre Klima im Mathematikunterricht (z. B. hinsichtlich Lautstärke im Klassenzimmer, Aufmerksamkeit und aktiver Mitarbeit der Schüler:innen) signifikant positiver einschätzten als Schüler:innen in Finnland, Schweden und Spanien, sowie auch positiver als im OECD-Durchschnitt insgesamt. Dies deutet darauf hin, dass österreichische Mathematikklassen

aus Sicht der Schüler:innen vergleichsweise geordnet und störungsarm wahrgenommen werden (Toferer et al., 2023).

Diese Unterschiede in Unterrichtskultur und Aufgabenpraxis könnten möglicherweise auch Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Flexibilität haben und stellen damit einen relevanten Ansatzpunkt für weitere Forschung dar.

6.2 Interpretation der Ergebnisse

6.2.1 Prozedurale Flexibilität

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zeigen, dass die prozedurale Flexibilität der 235 teilnehmenden österreichischen Schüler:innen insgesamt nur schwach ausgeprägt war. Prozedurale Flexibilität konnte lediglich vereinzelt in höherem Ausmaß beobachtet werden und variierte zudem in Abhängigkeit von Schulstufe, Schulform und Aufgabentyp. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den Befunden früherer Studien, die ebenfalls auf eine insgesamt geringe Ausprägung mathematischer Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen hinweisen (vgl. u.a. Star et al., 2008; Xu et al., 2017; Star et al., 2022).

Besonders bemerkenswert ist die hohe Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Star et al., 2022. Sowohl in deren Studie mit 791 Schüler:innen aus Finnland, Schweden und Spanien, als auch in der vorliegenden Untersuchung erreichten die Lernenden im Durchschnitt einen Wert von 1,8 flexibel gelösten Aufgaben von insgesamt zwölf Aufgaben. Trotz unterschiedlicher Stichproben und nationaler Kontexte deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass prozedurale Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen in verschiedenen europäischen Bildungssystemen insgesamt nur in begrenztem Ausmaß ausgeprägt ist.

Im Vergleich dazu berichteten Xu et al., 2017 bei chinesischen Schüler:innen ($n=158$) deutlich höhere Flexibilitätswerte ($M = 5,85$). Da sowohl Xu et al., 2017, die Studie von Star et al., 2022 als auch die vorliegende Studie auf dem Tri-Phase-Flexibilitätstest (Xu et al., 2017) basieren, erscheint dieser Unterschied besonders interessant. Mögliche Erklärungen könnten in Unterschieden der Bildungssysteme, curricularen Schwerpunkte oder Unterrichtskulturen liegen. Eine abschließende Erklärung dieser Unterschiede ist auf Grundlage der vorliegenden Daten jedoch nicht möglich und bedarf weiterer Forschung.

Darüber hinaus bestätigen die Ergebnisse die Annahme, dass prozedurale Flexibilität mit zu-

nehmendem Alter beziehungsweise mit einer höheren Schulstufe zunimmt. Analog zu den Befunden von Star et al., 2022 erzielten auch in der vorliegenden Studie Schüler:innen der 11. Schulstufe deutlich höhere Flexibilitätswerte als Schüler:innen der 8. Schulstufe. Während die Oberstufenschüler:innen durchschnittlich 3,4 von 12 Aufgaben flexibel lösen konnten, zeigten die Schüler:innen der 8. Schulstufe lediglich bei durchschnittlich 0,3 Aufgaben prozedurale Flexibilität. Die Ergebnisse der österreichischen Oberstufenschüler:innen liegen damit im Bereich der von Star et al., 2022 berichteten Werte für Schüler:innen der Oberstufe, die je nach Land und Leistungsniveau zwischen 1,4 und 4,3 flexibel gelösten Aufgaben lagen. Bei der Interpretation dieser Ergebnisse ist zu berücksichtigen, dass die Studie von Star et al., 2022 zusätzlich zwischen verschiedenen mathematischen Leistungszweigen (*basic track* und *advanced track*) differenzierte, während eine solche Unterteilung in der vorliegenden Untersuchung nicht vorgenommen wurde. Dennoch zeigt sich, dass die österreichischen Oberstufenschüler:innen hinsichtlich ihrer Flexibilitätswerte im internationalen Vergleich im mittleren Bereich liegen.

Auch innerhalb der österreichischen Unterstufe konnten Unterschiede zwischen den Schulformen festgestellt werden. Während Schüler:innen der AHS-Unterstufe durchschnittlich 0,6 Aufgaben flexibel lösten und damit Werte erreichten, die mit jenen der schwedischen und finnischen Schüler:innen bei Star et al., 2022 vergleichbar sind (Finnland: 0,5; Schweden: 0,7; Spanien: 0,3), zeigten Schüler:innen der Mittelschule mit durchschnittlich lediglich 0,1 flexibel gelösten Aufgaben deutlich geringere Flexibilitätswerte. Dies deutet darauf hin, dass neben dem Alter auch schulformspezifische Faktoren einen Einfluss auf die Entwicklung prozeduraler Flexibilität haben könnten.

Insgesamt legen die Ergebnisse nahe, dass österreichische Schüler:innen in ähnlichem Ausmaß wie die von Star et al., 2022 untersuchten Schüler:innen aus Finnland, Schweden und Spanien nur in begrenztem Maße prozedurale Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen zeigen. Insbesondere Schüler:innen der Unterstufe greifen nahezu ausschließlich auf das Standardverfahren zurück. Zwar nimmt die Flexibilität mit zunehmendem Alter und mathematischer Erfahrung zu, dennoch bleibt das Standardverfahren auch in der Oberstufe die dominierende Lösungsstrategie. Selbst wenn Kenntnisse über alternative und effizientere Verfahren vorhanden sind, werden diese vergleichsweise selten spontan eingesetzt. Dieses Ergebnis stützt die in der Literatur häufig beschriebene Diskrepanz zwischen dem Wissen über verschiedene Lösungsverfahren und deren tatsächlicher flexibler Anwendung im Problemlöseprozess.

Auch hinsichtlich der weiteren Flexibilitätskonstrukte zeigen sich deutliche Parallelen zu den

Ergebnissen von Star et al., 2022. Die Befunde bestätigen dabei erneut, dass insbesondere spontane Flexibilität nur in geringem Ausmaß auftritt. Diese beschreibt die Fähigkeit, bereits beim ersten Lösungsversuch ein situationsgerechtes Verfahren auszuwählen und anzuwenden. Über die gesamte Stichprobe hinweg konnten die österreichischen Schüler:innen durchschnittlich lediglich 0,9 von 12 Aufgaben spontan flexibel lösen. Obwohl dieser Wert leicht über dem von Star et al., 2022 berichteten Durchschnitt von 0,5 Aufgaben liegt, verdeutlichen beide Ergebnisse, dass spontane Flexibilität insgesamt nur selten auftritt.

Wie bereits bei der prozeduralen Flexibilität zeigte sich auch hier ein deutlicher Unterschied zwischen den Schulstufen. Während die Schüler:innen der 11. Schulstufe durchschnittlich bei 1,9 Aufgaben spontane Flexibilität demonstrierten, lag der entsprechende Wert bei den Schüler:innen der Unterstufe bei lediglich 0,1 Aufgaben. Damit trat spontane Flexibilität in der Unterstufe praktisch nicht auf. Ein ähnliches Muster zeigte sich auch bei Star et al., 2022, wo Unterstufenschüler:innen ebenfalls durchschnittlich nur 0,1 Aufgaben spontan flexibel bearbeiteten, während die Werte für Oberstufenschüler:innen je nach Leistungskurs zwischen 0,2 (*basic track*) und 1,3 (*advanced track*) lagen. Die von Xu et al., 2017 untersuchten chinesischen Schüler:innen erreichten hingegen mit durchschnittlich 1,44 Aufgaben höhere Werte und zeigten somit häufiger die spontane Anwendung situationsgerechter Lösungsverfahren.

Auch die Ergebnisse zur potenziellen Flexibilität weisen insgesamt Ähnlichkeiten zu den Befunden von Star et al., 2022 auf, fallen in der vorliegenden Untersuchung jedoch etwas höher aus. Die österreichischen Oberstufenschüler:innen erreichten durchschnittlich einen Wert von 1,1 potenziell flexibel gelösten Aufgaben, während die Schüler:innen der Unterstufe einen Mittelwert von 0,6 erzielten. Im Vergleich dazu berichteten Star et al., 2022 für Oberstufenschüler:innen durchschnittliche Werte von 0,6 (*basic track*) beziehungsweise 0,9 (*advanced track*) sowie lediglich 0,3 potenziell flexibel gelöste Aufgaben für Schüler:innen der Unterstufe. Insgesamt deutet dies darauf hin, dass die österreichischen Schüler:innen etwas häufiger Anzeichen potenzieller Flexibilität zeigten als die in Finnland, Schweden und Spanien untersuchten Lernenden.

Ein besonders interessantes Ergebnis betrifft die Ausprägung des Typs PF-BC, bei dem Schüler:innen kein Standardverfahren demonstrieren. Während dieser Typ in der Studie von *basic track* nahezu nicht vorkam, konnte er in der österreichischen Stichprobe zumindest vereinzelt beobachtet werden. Über die gesamte Stichprobe hinweg lag der entsprechende Mittelwert bei 0,3 Aufgaben, wobei Oberstufenschüler:innen durchschnittlich 0,6 und Unterstufenschüler:innen 0,1 Aufgaben diesem Typ zugeordnet werden konnten. Der Typ PF-BC war unter den Schüler:innen

der 11. Schulstufe sogar der etwas häufigere Fall von potenzieller Flexibilität. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass es innerhalb der österreichischen Stichprobe einen kleinen Anteil von Schüler:innen gibt, die das Standardverfahren nicht sicher beherrschen oder nicht anwenden, gleichzeitig jedoch über Kenntnisse alternativer Lösungsstrategien verfügen. Aufgrund der insgesamt geringen Häufigkeit dieses Musters sollten entsprechende Schlussfolgerungen jedoch mit Vorsicht interpretiert werden.

Unter den Schüler:innen der 8. Schulstufe zeigte sich vergleichsweise häufig der Typ PF-AB. Diese Schüler:innen konnten sowohl das Standardverfahren als auch ein situationsgerechtes Verfahren für eine Aufgabe demonstrieren, identifizierten jedoch das situationsgerechte Verfahren nicht als die beste Lösungsstrategie. Stattdessen bewerteten viele von ihnen das Standardverfahren als „besser“, selbst dann, wenn sie das situationsgerechte Verfahren korrekt ausgeführt hatten oder dieses offensichtlich weniger Rechenschritte erforderte.

Eine mögliche Erklärung hierfür liegt darin, dass die flexible Anwendung unterschiedlicher Lösungsstrategien in der Unterstufe bislang nur begrenzt thematisiert oder gefördert wurde. Ebenso ist denkbar, dass Schüler:innen das Standardverfahren als „bessere“ Methode wahrnehmen, weil dieses in der Regel zuerst eingeführt und über einen längeren Zeitraum eingeübt wird. Die Schüler:innen könnten so den Eindruck gehabt haben, dass die Lehrkraft die Anwendung des Standardverfahrens erwartet und bevorzugt, insbesondere wenn das Standardverfahren im Unterricht den Schwerpunkt der Vermittlung bildete (Newton et al., 2010). Auch Newton et al., 2010 berichten, dass viele Schüler:innen Standardverfahren aufgrund ihrer Vertrautheit sowie ihres größeren Verständnisses für diese Verfahren bevorzugen, auch wenn sie ein anderes Verfahren als effizienter beurteilen. Eine solche Präferenz für das Standardverfahren, obwohl sowohl Standard- als auch situationsgerechte Verfahren bekannt waren, trat in den Studien von Star et al., 2022 bei Schüler:innen aus Schweden und Finnland sowie in der Studie von Xu et al., 2017 bei chinesischen Schüler:innen vergleichsweise selten auf. Häufiger wurde dieses Muster hingegen bei spanischen Schüler:innen beobachtet. Dies könnte darauf hindeuten, dass auch der soziokulturelle Kontext sowie die schulischen Lernerfahrungen einen Einfluss auf die Bewertung unterschiedlicher Lösungsstrategien haben (Star et al., 2022).

Gleichzeitig weisen Star et al., 2022 darauf hin, dass es durchaus nachvollziehbare Gründe gibt, das Standardverfahren als die bessere Methode zu betrachten. Während situationsgerechte Strategien häufig nur bei bestimmten Aufgabenstrukturen Vorteile bieten, ist das Standardverfahren auf eine große Bandbreite unterschiedlicher Gleichungstypen anwendbar. Lernende können da-

her bei einer Aufgabe unmittelbar mit der Bearbeitung beginnen, ohne zunächst analysieren zu müssen, ob die Struktur der Gleichung den Einsatz einer alternativen Strategie begünstigt. Wurde ein Standardverfahren ausreichend automatisiert, kann es zudem schnell, sicher und mit geringem kognitivem Aufwand ausgeführt werden. In solchen Fällen kann die Anwendung des Standardverfahrens tatsächlich die effizienteste Vorgehensweise darstellen, selbst wenn alternative Strategien theoretisch weniger Rechenschritte erfordern würden. Die Bewertung einer Strategie als „beste“ Methode hängt somit nicht ausschließlich von der Anzahl der notwendigen Lösungsschritte ab, sondern auch von Faktoren wie Vertrautheit, Fehlerrisiko, kognitiver Belastung und individueller Erfahrung der Lernenden (Star et al., 2022).

Zusammenfassend bestätigen die Ergebnisse der spontanen und potenziellen Flexibilität die bereits bei der prozeduralen Flexibilität erkennbaren Trends. Flexibilität tritt insgesamt nur selten auf, nimmt jedoch mit zunehmender Schulstufe deutlich zu. Gleichzeitig verdeutlichen die Befunde, dass zwischen dem Wissen über alternative Lösungsverfahren und deren spontaner Anwendung weiterhin eine erhebliche Diskrepanz besteht. Viele Schüler:innen verfügen zwar über Anzeichen potenzieller Flexibilität, setzen situationsgerechte Verfahren jedoch nur selten unmittelbar bei ihrem ersten Lösungsversuch ein. Dies stützt die Annahme, dass die Entwicklung mathematischer Flexibilität nicht allein vom Wissen über verschiedene Strategien abhängt, sondern auch von der Fähigkeit, dieses Wissen in konkreten Problemsituationen gezielt und spontan zu nutzen.

6.2.2 Genauigkeit

Die Genauigkeit beim Lösen der zwölf linearen Gleichungen variierte in der Studie von Star et al., 2022 deutlich in Abhängigkeit von Land und Schulstufe der Schüler:innen. Über alle untersuchten Gruppen hinweg wurden in Phase 1 durchschnittlich 5,4 von 12 Gleichungen korrekt gelöst. Die österreichischen Schüler:innen der vorliegenden Untersuchung erreichten mit durchschnittlich 5,9 korrekt gelösten Aufgaben einen ähnlichen, leicht höheren Wert. Deutlich höhere Genauigkeitswerte berichteten hingegen Xu et al., 2017 für ihre Stichprobe chinesischer Schüler:innen. Diese lösten durchschnittlich 10,66 der 12 Aufgaben korrekt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass den Schüler:innen in dieser Studie mit 20 Minuten etwas mehr Bearbeitungszeit zur Verfügung stand als in den europäischen Untersuchungen, in denen Phase 1 jeweils auf 15 Minuten begrenzt war.

Wie bereits bei den Flexibilitätswerten schnitten auch hinsichtlich der Genauigkeit die Ober-

stufenschüler:innen insgesamt besser ab als die Schüler:innen der Unterstufe. Besonders hohe Werte erreichten in der Studie von Star et al., 2022 die spanischen Oberstufenschüler:innen im *advanced mathematics track* mit durchschnittlich 8,7 korrekt gelösten Gleichungen, gefolgt von den finnischen (7,9) und schwedischen Oberstufenschüler:innen (7,5). Auch unter den jüngeren Schüler:innen erzielten die spanischen Teilnehmer:innen die höchsten Genauigkeitswerte (4,8), während die schwedischen und finnischen Unterstufenschüler:innen deutlich niedrigere Werte erreichten (Finnland: 1,6; Schweden: 3,0).

Im Vergleich dazu fiel der Unterschied zwischen österreichischen Ober- und Unterstufenschüler:innen weniger stark aus. Die Oberstufenschüler:innen lösten durchschnittlich 6,3 Aufgaben korrekt, die Unterstufenschüler:innen 5,7 Aufgaben. Dieses vergleichsweise geringe Gefälle könnte teilweise durch Unterschiede im Studiendesign erklärt werden. Während den Unterstufenschüler:innen der vorliegenden Untersuchung ein einfacher Taschenrechner zur Verfügung gestellt wurde, war dessen Verwendung für die Oberstufenschüler:innen nicht erlaubt. Dadurch könnten die Genauigkeitswerte der jüngeren Schüler:innen positiv beeinflusst worden sein.

Eine differenziertere Betrachtung der Unterstufe nach Schulform zeigt zudem deutliche Unterschiede innerhalb der österreichischen Stichprobe. Schüler:innen aus Mittelschulen konnten durchschnittlich 4,7 Aufgaben korrekt lösen, während Schüler:innen der AHS-Unterstufe einen Mittelwert von 7,2 korrekt gelösten Aufgaben erreichten. Damit lagen die Schüler:innen aus der AHS-Unterstufe sogar über dem durchschnittlichen Genauigkeitswert der Oberstufenschüler:innen. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass neben dem Alter und der Schulstufe insbesondere auch die Schulform beziehungsweise das Leistungsniveau der Schüler:innen einen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit beim Lösen linearer Gleichungen haben könnte.

6.2.3 Bearbeitete Aufgaben und verwendete Strategien

Die Schüler:innen der vorliegenden Studie bearbeiteten in Phase 1 des Tests (15 Minuten) durchschnittlich neun der zwölf Aufgaben. Damit zeigen sich ähnliche Werte wie in der Studie von Star et al., 2022, wobei die spanischen Schüler:innen mit durchschnittlich 10,2 bearbeiteten Aufgaben etwas schneller arbeiteten als die Schüler:innen aus Schweden (9,0) und Finnland (8,5). Die österreichischen Oberstufenschüler:innen bearbeiteten durchschnittlich 9,4 Aufgaben und waren damit nur geringfügig schneller als die Schüler:innen der Unterstufe, die im Mittel 8,7 Aufgaben bearbeiteten. Bei der Interpretation dieses Ergebnisses ist jedoch zu berücksichtigen, dass den Unterstufenschüler:innen für die Bearbeitung ein einfacher Taschenrechner zur Verfügung

gestellt wurde.

Auffällig ist zudem der hohe Anteil unbeantworteter Aufgaben am Ende des Tests. Während in der Studie von Star et al., 2022 zwischen 26% und 35% der Schüler:innen die letzten drei Aufgaben unbeantwortet ließen (Finnland: 35%; Schweden: 33%;, Spanien: 26%), lag dieser Anteil in der vorliegenden österreichischen Stichprobe mit 47,7% deutlich höher. Somit bearbeitete beinahe die Hälfte der Schüler:innen die Aufgaben 10 bis 12 nicht mehr. Star et al., 2022 führen hierfür zwei mögliche Ursachen an: Einerseits könnte vielen Schüler:innen die verfügbare Bearbeitungszeit nicht ausgereicht haben. Andererseits ist anzunehmen, dass ein Teil der Lernenden Schwierigkeiten mit diesem spezifischen Aufgabentyp hatte, da die letzten drei Aufgaben Bruchterme beinhalteten und damit höhere Anforderungen an algebraische Umformungen stellten.

Der Umgang mit Brüchen stellte für viele Schüler:innen eine erhebliche Herausforderung dar. Dies zeigte sich insbesondere bei den Gleichungen 3, 5 und 8, in denen Brüche addiert, subtrahiert oder mit ganzen Zahlen multipliziert werden mussten. Abbildung 5, die den prozentualen Anteil korrekt gelöster Gleichungen nach Schulstufe darstellt, verdeutlicht, dass diese Aufgaben von deutlich weniger Schüler:innen erfolgreich bearbeitet wurden als andere Gleichungen des Tests. Die Schwierigkeiten im Umgang mit Brüchen führten häufig dazu, dass selbst das Standardverfahren nicht korrekt ausgeführt werden konnte.

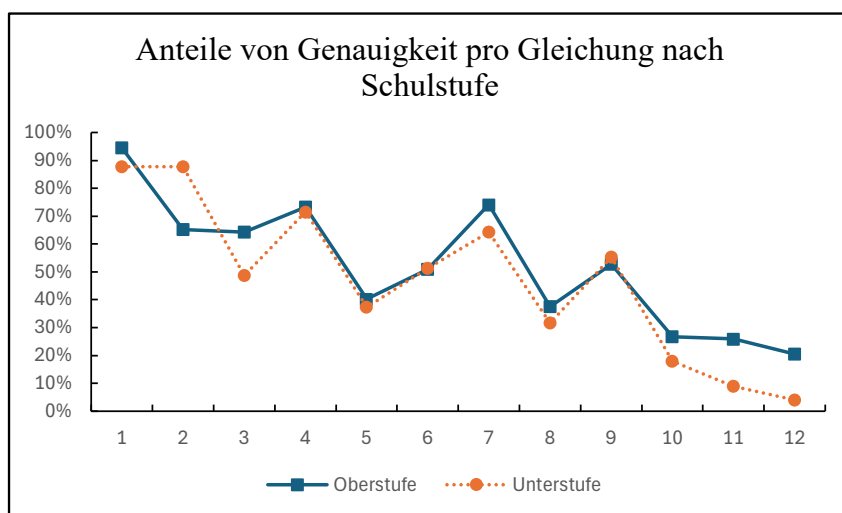


Abbildung 5: Verteilung des prozentualen Anteils erreichter Punkte für Genauigkeit nach Schulstufe

Auch Abbildung 2, welche die prozentuale Nutzung des Standardverfahrens pro Gleichung zeigt, weist insbesondere bei den Unterstufenschüler:innen deutliche Einbrüche bei den Aufgaben 3, 5 und 8 auf. Daraus lässt sich schließen, dass Bruchrechnungen selbst trotz der Möglichkeit,

einen Taschenrechner zu verwenden, eine große Hürde für viele Schüler:innen der 8. Schulstufe darstellten. Besonders häufig traten typische Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes in Verbindung mit Brüchen auf. So wurde beispielsweise die Gleichung $4\left(x + \frac{3}{5}\right) = 12$ teilweise zu $4x + 4\frac{3}{5} = 12$ oder $4x + \frac{12}{20} = 12$ umgeformt.

Vergleichbare Fehlermuster zeigten sich auch bei den Aufgaben 5 und 8. Dies deutet darauf hin, dass sowohl in der Unter- als auch in der Oberstufe grundlegende Kompetenzen im Bereich der Bruchrechnung stärker gefestigt und wiederholt werden sollten. Bei den Oberstufenschüler:innen zeigten sich zusätzlich verstärkt Schwierigkeiten bei Berechnungen mit Dezimalzahlen, insbesondere bei negativen Dezimalzahlen, was oftmals zu Vorzeichenfehlern führte. Da die Unterstufenschüler:innen einen Taschenrechner verwenden durften, wurden diese Schwierigkeiten in dieser Gruppe teilweise kompensiert. Dies wird beispielsweise an Gleichung 2 deutlich, die von mehr Unterstufenschüler:innen korrekt gelöst wurde als von Oberstufenschüler:innen (vgl. Abbildung 5). Viele Oberstufenschüler:innen hatten demnach Schwierigkeiten, die Berechnung $3 \cdot 0,69 = 2,07$ ohne technische Hilfsmittel korrekt auszuführen und erhielten falsche Ergebnisse.

Xu et al., 2017 entschieden sich bewusst dafür, Brüche und Dezimalzahlen in die Aufgaben des Tests zu integrieren, um den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zu erhöhen. Dadurch sollte verhindert werden, dass die Schüler:innen die Aufgaben rein routinemäßig bearbeiten; zugleich sollte eine differenziertere Erfassung ihrer Kenntnisse im Umgang mit linearen Gleichungen ermöglicht werden.

Auch Newton et al., 2010 stellten fest, dass Schüler:innen bei schwierigeren oder als verwirrend empfundenen Aufgaben mit höherer Wahrscheinlichkeit alternative Lösungsverfahren verwendeten. Besonders deutlich zeigte sich dies bei Aufgaben mit Brüchen: Mehrere Schüler:innen gaben an, „nicht so gut mit Brüchen“ zu sein, weshalb sie bewusst auf andere Lösungswege auswichen. Allgemein führte unsicheres Wissen häufig dazu, dass alternative Strategien eingesetzt wurden, wobei insbesondere das Bedürfnis nach größerer Genauigkeit oder besserer Verständlichkeit die Wahl des jeweiligen Verfahrens beeinflusste.

Eine vergleichbare Tendenz ließ sich in der vorliegenden Studie jedoch nur eingeschränkt beobachten. Zwar zeigten einzelne Schüler:innen bei Aufgaben mit Brüchen situationsgerechte Verfahren, insgesamt konnte jedoch kein deutlicher Anstieg flexibler Lösungsstrategien bei diesen Aufgabentypen festgestellt werden. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass sich die Aufgaben mit Brüchen am Ende der Testung befanden, sodass Zeitmangel sowie nachlassende Konzentration oder Motivation ebenfalls einen Einfluss auf die Bearbeitung gehabt haben

könnten.

Hinsichtlich der verwendeten Lösungsverfahren zeigte sich, ähnlich wie bei Star et al., 2022, eine starke Dominanz des Standardverfahrens. In der internationalen Studie konnte festgestellt werden, dass nahezu alle teilnehmenden Schüler:innen in den drei untersuchten Ländern das Standardverfahren beherrschten. Auch in der vorliegenden Untersuchung scheint dieses Verfahren den meisten österreichischen Schüler:innen vertraut zu sein: Insgesamt wandten 94% der Teilnehmer:innen mindestens einmal das Standardverfahren an.

Bezüglich der Anwendung situationsgerechter Verfahren zeigten sich erwartungsgemäß Unterschiede zwischen den Schulstufen. Oberstufenschüler:innen schienen sich alternativer und effizienterer Lösungswege deutlich stärker bewusst zu sein als Schüler:innen der Unterstufe. Während 80% der Oberstufenschüler:innen bei zumindest einer Gleichung ein situationsgerechtes Verfahren verwendeten, traf dies lediglich auf 28,5% der Unterstufenschüler:innen zu. Im Vergleich dazu berichteten Star et al., 2022 insbesondere für Schweden und Finnland höhere Werte bei Unterstufenschüler:innen (Schweden: 50,6%, Finnland: 40,9%), während die Ergebnisse der spanischen Schüler:innen mit 22,6% näher an den österreichischen Befunden lagen. Die Ergebnisse legen somit nahe, dass situationsgerechte Verfahren zwar vielen Schüler:innen zumindest teilweise bekannt sind, jedoch deutlich seltener eingesetzt werden als das Standardverfahren. Besonders in der Unterstufe scheint die Bearbeitung linearer Gleichungen stark von routinisierten Standardalgorithmen geprägt zu sein, während alternative und effizientere Lösungswege nur sehr vereinzelt spontan genutzt werden.

6.2.4 Zusammenhang zwischen Genauigkeit und prozeduraler Flexibilität

Wie Star et al., 2022 hervorheben, wird in der mathematikdidaktischen Forschung häufig davon ausgegangen, dass zwischen Flexibilität und Genauigkeit ein positiver Zusammenhang besteht. Demnach sollte eine höhere Flexibilität auch mit einer höheren Genauigkeit beim Bearbeiten mathematischer Problemlöseaufgaben einhergehen (Star et al., 2022). Gleichzeitig zeigten jedoch bereits Xu et al., 2017, dass prozedurale Flexibilität nicht zwangsläufig stark mit den Genauigkeitswerten der Schüler:innen korreliert. Schüler:innen, die viele Gleichungen korrekt lösen konnten, verfügten nicht automatisch auch über hohe Flexibilitätswerte (Xu et al., 2017). Dieses Muster zeigte sich ebenfalls in der vorliegenden Untersuchung: Hohe Genauigkeitswerte gingen nicht zwingend mit einer hohen prozeduralen Flexibilität einher. So lösten etwa von jenen Schüler:innen, die mindestens sieben der zwölf Gleichungen korrekt bearbeiteten, lediglich

47,96% auch zwei oder mehr Aufgaben flexibel.

In der Studie von Star et al., 2022 zeigte sich insgesamt eine starke positive Korrelation zwischen prozeduraler Flexibilität und Genauigkeit ($r = 0,60$). Auf Länderebene fiel dieser Zusammenhang in Finnland ($r = 0,696$) und Schweden ($r = 0,704$) deutlich stärker aus als in Spanien, wo zwar ebenfalls ein signifikanter, jedoch schwächerer Zusammenhang festgestellt wurde ($r = 0,38$). Unter den Unterstufenschüler:innen konnte eine starke Korrelation zwischen Genauigkeit und Flexibilität nur in Finnland beobachtet werden ($r = 0,63$). Star et al., 2022 schlussfolgern daraus, dass eine höhere Genauigkeit im Allgemeinen zwar mit größerer prozeduraler Flexibilität verbunden ist, die Stärke dieses Zusammenhangs jedoch sowohl zwischen Ländern als auch zwischen Altersgruppen und Schulformen erheblich variieren kann.

Auch in der vorliegenden Untersuchung mit österreichischen Schüler:innen konnte ein signifikanter moderater positiver Zusammenhang zwischen Genauigkeit und Flexibilität festgestellt werden. Für die prozedurale Flexibilität ergab sich ein Korrelationskoeffizient von $r = 0,42$. Wurden prozedurale und potenzielle Flexibilität als gemeinsame Größe betrachtet, erhöhte sich der Zusammenhang auf $r = 0,48$. Die Korrelation fiel damit zwar schwächer aus als in der internationalen Studie von Star et al., 2022, weist jedoch dennoch darauf hin, dass Schüler:innen mit höherer Flexibilität tendenziell auch eine höhere Genauigkeit beim Lösen linearer Gleichungen erreichten.

Darüber hinaus zeigte sich, ähnlich wie bei Star et al., 2022, ein Unterschied zwischen den beiden Schulstufen. Unter den Oberstufenschüler:innen war der Zusammenhang zwischen Genauigkeit und Flexibilität mit $r = 0,57$ deutlich stärker ausgeprägt als unter den Unterstufenschüler:innen ($r = 0,26$). Dennoch blieb die Korrelation in beiden Gruppen positiv. Dies könnte darauf hindeuten, dass Flexibilität insbesondere mit zunehmender mathematischer Erfahrung und fortgeschrittenen algebraischen Kenntnissen stärker mit erfolgreichem Problemlösen zusammenhängt. Dabei muss einschränkend erneut darauf hingewiesen werden, dass Unterstufenschüler:innen einen Taschenrechner zur Hilfe hatten, was diese Werte ebenfalls beeinflussen könnte. Gleichzeitig verdeutlichen die Ergebnisse jedoch, dass hohe Genauigkeit allein kein ausreichender Indikator für mathematische Flexibilität ist. Viele Schüler:innen scheinen lineare Gleichungen zwar korrekt lösen zu können, greifen dabei jedoch überwiegend auf routinisierte Standardverfahren zurück, ohne alternative oder situationsgerechte Strategien flexibel einzusetzen.

6.2.5 Metakognitive Strategien

Zusätzlich zu den Ergebnissen des Tri-Phase-Flexibilitätstests wurde mittels eines anschließenden Fragebogens erhoben, wie Schüler:innen der 8. und 11. Schulstufe den bewussten Einsatz metakognitiver Strategien beim Lernen von Mathematik bzw. bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben einschätzen. Metakognitive Fähigkeiten gelten als wesentliche Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Problemlösen. Daher erschien es von besonderem Interesse zu untersuchen, ob Zusammenhänge zwischen den Leistungen der Schüler:innen und dem wahrgenommenen Einsatz metakognitiver Strategien bestehen.

Die Auswertung des Fragebogens zeigte insgesamt, dass die Schüler:innen ihre Nutzung metakognitiver Strategien eher zurückhaltend einschätzen. Die meisten Antworten lagen im mittleren Bereich der Skala, wobei sich die Mittelwerte der sechs Items überwiegend zwischen den Antwortkategorien „teils/teils“ (2) und „trifft eher zu“ (3) bewegten. Die sechs Items erfassten jeweils zwei Aspekte der drei zentralen Dimensionen metakognitiver Strategien: Planung (*planning*), Überwachung (*monitoring*) und Kontrolle (*regulation*).

Die höchsten Mittelwerte wurden im Bereich der Überwachung des eigenen Lern- und Lösungsprozesses erzielt. Insbesondere die Items M3 („Während ich für Mathematik lerne, teste ich mich selbst, um zu überprüfen, ob ich den Stoff verstanden habe.“) und M4 („Wenn ich eine Mathematikaufgabe bearbeite, achte ich darauf, ob mein Rechenweg sinnvoll ist.“) wurden vergleichsweise hoch bewertet. Diese Ergebnisse lassen vermuten, dass Schüler:innen während der Bearbeitung mathematischer Aufgaben bewusst auf die Kontrolle ihres Vorgehens achten. Ebenfalls relativ hohe Zustimmungswerte erzielte Item M5 („Wenn mir eine Mathematikaufgabe schwerfällt, nehme ich mir Zeit, die Aufgabe zu verstehen.“), wobei dies vor allem bei den Schüler:innen der 11. Schulstufe deutlich wurde. Dies könnte darauf hindeuten, dass ältere Schüler:innen eher bereit sind, sich länger und intensiver mit anspruchsvollen Aufgaben auseinanderzusetzen.

Über alle Items hinweg lagen die Mittelwerte der Oberstufenschüler:innen durchgehend etwas höher als jene der Unterstufenschüler:innen. Dies lässt darauf schließen, dass mit zunehmendem Alter bzw. wachsender schulischer Erfahrung das Bewusstsein für den Einsatz metakognitiver Strategien zunimmt. Jüngere Schüler:innen schätzten ihre Nutzung solcher Strategien insgesamt vorsichtiger ein und gaben häufiger an, diese nur selten oder eingeschränkt einzusetzen.

Besonders auffällig war Item M6 („Wenn ich beim Lösen einer Mathematikaufgabe Schwierigkeiten habe, versuche ich einen anderen Lösungsweg.“). Dieses wurde von den Schüler:innen der 8.

Schulstufe vergleichsweise niedrig bewertet; viele von ihnen stimmten der Aussage eher nicht zu. Dieses Ergebnis steht in Einklang mit den im Tri-Phase-Flexibilitätstest festgestellten niedrigen Werten prozeduraler Flexibilität unter den Unterstufenschüler:innen. Es könnte darauf hindeuten, dass das Bearbeiten mathematischer Aufgaben mit unterschiedlichen Lösungswegen in der Unterstufe, insbesondere an Mittelschulen, bislang eine geringere Rolle spielt oder dass viele Schüler:innen noch nicht über ein ausreichend breites Repertoire an Lösungsstrategien verfügen.

Ebenfalls relativ niedrige Zustimmungswerte von den Schüler:innen beider Schulstufen erhielt Item M2 („Bevor ich mit dem Lernen für Mathematik beginne, überlege ich mir, wie viel Zeit ich für ein Thema einplanen sollte.“). Dies legt nahe, dass die bewusste zeitliche Planung des Lernprozesses von den Schüler:innen insgesamt als weniger bedeutsam wahrgenommen wird als Strategien, die direkt während der Aufgabenbearbeitung eingesetzt werden.

Hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen den erbrachten Leistungen im Tri-Phase-Flexibilitätstest und den selbst eingeschätzten metakognitiven Strategien konnten in der vorliegenden Untersuchung keine ausgeprägten Zusammenhänge festgestellt werden. Weder für die Genauigkeit beim Lösen der Gleichungen noch für die verschiedenen Flexibilitätsmaße zeigten sich starke Korrelationen mit den Mittelwerten des Fragebogens zu metakognitiven Strategien.

Dieses Ergebnis ist jedoch vorsichtig zu interpretieren. Zum einen bewegten sich die Antworten der Schüler:innen überwiegend im mittleren Bereich der Skala, wodurch nur eine begrenzte Streuung der Werte vorlag. Die relativ homogenen Selbsteinschätzungen erschweren die Identifikation statistischer Zusammenhänge. Zum anderen erfasst der verwendete Fragebogen die subjektive Wahrnehmung metakognitiver Strategien und nicht deren tatsächlichen Einsatz während der Bearbeitung mathematischer Aufgaben. Es ist daher möglich, dass Schüler:innen ihre eigenen Lern- und Problemlöseprozesse nur eingeschränkt einschätzen können oder sozial erwünschte Antworten geben.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse jedoch, dass metakognitive Strategien den Schüler:innen keineswegs fremd sind. Da sich die Mittelwerte überwiegend im mittleren bis oberen Mittelfeld der Skala bewegen, kann davon ausgegangen werden, dass viele Lernende bereits über ein gewisses Bewusstsein für metakognitive Prozesse verfügen und entsprechende Strategien zumindest gelegentlich anwenden. Insbesondere während der Bearbeitung komplexerer mathematischer Aufgaben scheinen Überwachungs- und Regulationsprozesse bewusst eingesetzt zu werden. Gleichzeitig verdeutlichen die Ergebnisse, dass weiterhin Entwicklungspotenzial besteht. Besonders in der Unterstufe, aber auch darüber hinaus, erscheint es sinnvoll, den gezielten Aufbau metakogniti-

ver Kompetenzen sowie das Wissen über deren Bedeutung für erfolgreiches Mathematiklernen stärker zu fördern und konkrete Strategien systematisch im Unterricht zu thematisieren.

6.3 Limitationen der Studie

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung sind vor dem Hintergrund mehrerer methodischer Einschränkungen zu interpretieren. Eine erste Einschränkung betrifft die Zusammensetzung der Stichprobe. Zwar umfasst die Untersuchung mit insgesamt 235 Schüler:innen aus zwei Schulstufen eine vergleichsweise umfangreiche Anzahl an Teilnehmenden, die Auswahl der Schulen erfolgte jedoch nicht auf Basis einer Zufallsstichprobe. Aufgrund organisatorischer Rahmenbedingungen und der freiwilligen Teilnahmebereitschaft der Schulen wurden insbesondere jene Schulen einbezogen, die für die Durchführung erreichbar waren oder über bestehende Kontakte gewonnen werden konnten. Die Stichprobe kann daher nicht als repräsentativ für alle österreichischen Schüler:innen der entsprechenden Schulstufen betrachtet werden. Zudem ergeben sich bei differenzierten Analysen nach Schulstufe, Schulform oder einzelnen Flexibilitätsausprägungen teilweise relativ kleine Teilstichproben, wodurch die Übertragbarkeit einzelner Ergebnisse eingeschränkt ist. Zukünftige Studien sollten daher größere und möglichst zufallsbasierte beziehungsweise repräsentativere Stichproben einbeziehen, um die gewonnenen Erkenntnisse weiter abzusichern und ein umfassenderes Bild der prozeduralen Flexibilität österreichischer Schüler:innen zu erhalten. Dadurch könnten zudem fundiertere Vergleiche mit internationalen Forschungsarbeiten ermöglicht werden.

Eine weitere Einschränkung betrifft den inhaltlichen Fokus der Untersuchung. Wie bereits bei Star et al., 2022 konzentrierte sich die vorliegende Studie ausschließlich auf die prozedurale Flexibilität beim Lösen linearer Gleichungen. Folglich können aus den Ergebnissen keine direkten Rückschlüsse auf die Flexibilität von Schüler in anderen mathematischen Inhaltsbereichen gezogen werden. Da Flexibilität als domänenspezifisches Konstrukt betrachtet werden kann, erscheint es sinnvoll, zukünftige Untersuchungen auf weitere mathematische Themengebiete auszuweiten. Star et al., 2022 weisen ebenfalls darauf hin, dass länderübergreifende Studien in unterschiedlichen mathematischen Domänen wichtige Erkenntnisse über die Entwicklung prozeduraler Flexibilität liefern könnten.

Darüber hinaus stellt der zeitliche Rahmen der Erhebung eine potenzielle Einschränkung dar. Die vorgegebenen Bearbeitungszeiten orientierten sich zwar am Design früherer Studien, könn-

ten jedoch dazu geführt haben, dass nicht alle Schüler:innen sämtliche Aufgaben bearbeiten oder in Phase 2 mehrere alternative Lösungswege entwickeln konnten. Insbesondere die zeitliche Begrenzung könnte zusätzlichen Leistungsdruck erzeugt und dadurch die Ergebnisse beeinflusst haben. Dies zeigt sich unter anderem daran, dass ein beträchtlicher Anteil der Schüler:innen die letzten Aufgaben des Tests unbeantwortet ließ. Daher bleibt offen, ob bei einer längeren Bearbeitungszeit höhere Werte hinsichtlich der prozeduralen oder potenziellen Flexibilität erzielt worden wären.

Eng damit verbunden sind mögliche Einflüsse von Motivation und Konzentration. Beobachtungen während der Durchführung deuteten darauf hin, dass insbesondere gegen Ende der einzelnen Testphasen Ermüdungserscheinungen auftraten. Dies könnte sowohl die Qualität der Bearbeitung der letzten Aufgaben als auch die Genauigkeit der Antworten beeinflusst haben. Besonders relevant erscheint dieser Aspekt auch für den im Anschluss durchgeführten Fragebogen zu metakognitiven Strategien. Da dieser erst nach Abschluss des umfangreichen Testheftes bearbeitet wurde, standen vielen Schüler:innen nur noch begrenzte zeitliche und kognitive Ressourcen zur Verfügung. Die teilweise zurückhaltenden und wenig differenzierten Selbsteinschätzungen könnten daher zumindest teilweise auf Ermüdung oder nachlassende Motivation zurückzuführen sein.

Eine weitere Limitation betrifft die Erfassung metakognitiver Strategien. Diese erfolgte ausschließlich über Selbstauskünfte der Schüler:innen. Der Fragebogen misst somit die subjektive Wahrnehmung des eigenen strategischen Handelns und erlaubt keine direkten Aussagen darüber, in welchem Ausmaß metakognitive Strategien tatsächlich während der Bearbeitung mathematischer Aufgaben eingesetzt wurden. Zukünftige Studien könnten hier durch zusätzliche Methoden wie Interviews, Beobachtungen oder „Lautes Denken“ ein differenzierteres Bild gewinnen.

Schließlich ist auch das Fehlen qualitativer Daten als Einschränkung zu nennen. Wie bereits Xu et al., 2017 anmerken, ermöglicht der Tri-Phase-Flexibilitätstest zwar die Erfassung verschiedener Flexibilitätsdimensionen, liefert jedoch nur begrenzte Informationen über die Gründe für die Strategiewahl der Schüler:innen. Interviews oder schriftliche Reflexionen hätten zusätzliche Einblicke in die Überlegungen der Lernenden geben können, etwa weshalb sie das Standardverfahren bevorzugten oder aus welchen Gründen sie bestimmte situationsgerechte Verfahren nicht auswählten. Solche qualitativen Daten könnten dazu beitragen, die zugrunde liegenden Prozesse potenzieller, prozeduraler und spontaner Flexibilität besser zu verstehen und die Interpretation quantitativer Ergebnisse zu ergänzen.

6.4 Methodische Herausforderungen bei der Durchführung und Auswertung

Neben den bereits dargestellten allgemeinen Limitationen der Studie traten während der Durchführung und Auswertung der Untersuchung weitere methodische Herausforderungen auf, die bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden sollten.

Ein erstes Problem ergab sich aus dem Layout des Testinstruments, das insbesondere bei einigen Schüler:innen der 8. Schulstufe zu Verständnisschwierigkeiten führte. Die Aufgaben wurden beispielsweise in der Form „Gleichung 3: $4(x + \frac{3}{5}) = 12$)“ präsentiert. Einzelne Schüler:innen interpretierten den Doppelpunkt fälschlicherweise als Divisionszeichen und verstanden die Aufgabenstellung daher als mathematischen Ausdruck. Im Verlauf der Datenerhebung wurde bei den nachfolgenden Klassen explizit auf dieses mögliche Missverständnis hingewiesen. Dennoch traten vereinzelt weiterhin entsprechende Fehlinterpretationen auf. Dieses Problem verdeutlicht die Bedeutung einer sorgfältigen Gestaltung des Testlayouts sowie einer umfassenden Pilotierung mit einer größeren Testgruppe vor der eigentlichen Datenerhebung.

Darüber hinaus ist anzunehmen, dass das Design des Tri-Phase-Flexibilitätstests in gewissem Maße routinisierte Bearbeitungsstrategien begünstigt. Die zwölf Aufgaben sind nach vier Aufgabentypen strukturiert, wobei jeder Typ dreimal vorkommt. Entwickeln Schüler:innen beispielsweise bei der ersten Aufgabe eines Typs ein situationsgerechtes Lösungsverfahren, können sie dieses Prinzip häufig unmittelbar auf die beiden weiteren Aufgaben desselben Typs übertragen. Umgekehrt ist zu erwarten, dass Lernende, die das situationsgerechte Verfahren bei der ersten Aufgabe nicht erkennen, auch die nachfolgenden Aufgaben desselben Typs überwiegend mit dem Standardverfahren bearbeiten. Eine größere Variation der Aufgabenformate könnte daher zu differenzierteren Ergebnissen führen und die Flexibilität der Schüler:innen noch präziser erfassen.

Eine weitere Herausforderung ergab sich aus den offenen Instruktionen in Phase 2 des Tests. In Anlehnung an Star et al., 2022 wurde bewusst darauf verzichtet, näher zu spezifizieren, was unter einem „anderen Lösungsverfahren“ zu verstehen ist. Die Interpretation dieser Anweisung blieb somit den Schüler:innen überlassen. In der Folge kam es häufig vor, dass Lernende das Standardverfahren erneut anwendeten, dabei jedoch lediglich die Reihenfolge einzelner Rechenschritte veränderten oder Terme auf den beiden Seiten der Gleichung vertauschten. Obwohl diese Vorgehensweisen von den Schüler:innen teilweise als alternative Strategien betrachtet wurden, stellten sie aus mathematischer Sicht keine eigenständigen Lösungsverfahren dar. Ebenso wurden

Lösungen, bei denen lediglich zwischen Bruch- und Dezimaldarstellung gewechselt wurde, ohne dass sich die grundlegende Lösungsstruktur änderte, weiterhin dem Standardverfahren zugeordnet. Diese Interpretationsspielräume erschweren die eindeutige Erfassung alternativer Strategien und stellen eine methodische Herausforderung des Instruments dar.

Auch die Ergebnisse des Fragebogens zu metakognitiven Strategien sind mit Vorsicht zu interpretieren. Die Erhebung basierte ausschließlich auf Selbsteinschätzungen der Schüler:innen. Wie Veenman, 2011 hervorhebt, können retrospektive Selbstberichte zu metakognitiven Prozessen verschiedene Verzerrungen aufweisen. Die Antworten hängen unter anderem von der Fähigkeit der Befragten ab, ihr eigenes Verhalten realistisch einzuschätzen, vergangene Lernprozesse korrekt zu erinnern und die Bedeutung der einzelnen Fragen angemessen zu interpretieren. Darüber hinaus können individuelle Unterschiede im Selbstkonzept oder Selbstbewusstsein die Selbsteinschätzungen beeinflussen (Veenman, 2011). Hinzu kommt, dass der Fragebogen aufgrund der begrenzten verfügbaren Unterrichtszeit lediglich sechs Items umfasste. Dadurch konnten die verschiedenen Facetten metakognitiver Strategien nur in begrenztem Umfang erfasst werden. Eine umfassendere Erhebung mit einer größeren Anzahl an Items oder zusätzlichen qualitativen Methoden hätte möglicherweise differenziertere Ergebnisse geliefert.

Zudem kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Bearbeitung des Tri-Phase-Flexibilitätstests die Antworten im anschließenden Fragebogen beeinflusst hat. Wie Lingel, 2016 betont, entfalten metakognitive Strategien ihre besondere Bedeutung vor allem bei komplexen, nicht automatisierten Problemlöseprozessen. Bei routinisierten Aufgaben hingegen treten sie häufig in den Hintergrund. Da ein großer Teil der Schüler:innen die linearen Gleichungen überwiegend mit dem vertrauten Standardverfahren bearbeitete, ist anzunehmen, dass metakognitive Kontroll-, Überwachungs- und Regulationsprozesse während der Bearbeitung teilweise eine geringere Rolle spielten. Dies könnte dazu beigetragen haben, dass die Zusammenhänge zwischen den im Fragebogen erhobenen metakognitiven Strategien und den Flexibilitäts- bzw. Genauigkeitswerten vergleichsweise schwach ausfielen.

Die vorliegenden Ergebnisse erlauben daher keine eindeutigen Aussagen darüber, ob ein verstärkter Einsatz metakognitiver Strategien zu einer höheren Genauigkeit oder größeren prozeduralen Flexibilität führt. Sie stehen jedoch nicht notwendigerweise im Widerspruch zu früheren Forschungsarbeiten, die positive Zusammenhänge zwischen metakognitiven Fähigkeiten und mathematischen Leistungen nachweisen konnten. Vielmehr deuten die Ergebnisse darauf hin, dass dieser Zusammenhang komplex ist und zusätzlich von Faktoren wie Vorwissen, mathematischer

Kompetenz, Motivation oder Unterrichtserfahrungen beeinflusst wird.

Für zukünftige Untersuchungen erscheint es daher sinnvoll, metakognitive Strategien nicht ausschließlich über Selbsteinschätzungen zu erfassen, sondern diese durch weitere Erhebungsmethoden wie Beobachtungen, Denkprotokolle oder Interviews zu ergänzen. Dadurch könnte ein differenzierteres Verständnis darüber gewonnen werden, in welchem Ausmaß metakognitive Prozesse tatsächlich zur Entwicklung mathematischer Flexibilität und erfolgreicher mathematischer Problemlöseleistungen beitragen.

Trotz dieser genannten Einschränkungen liefert die vorliegende Erhebung wertvolle Einblicke in die Ausprägung prozeduraler Flexibilität österreichischer Schüler:innen und stellt einen Beitrag zur Erforschung dieses Konstrukts im deutschsprachigen Raum dar.

6.5 Implikationen für zukünftige Forschung

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung verdeutlichen, dass prozedurale Flexibilität auch bei österreichischen Schüler:innen insgesamt nur in geringem Ausmaß ausgeprägt ist. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit weiterer Forschung zur Entwicklung und Förderung mathematischer Flexibilität. Insbesondere wären längsschnittliche Untersuchungen von Interesse, um nachzuverfolgen, wie sich prozedurale Flexibilität über mehrere Schuljahre hinweg entwickelt und welche Faktoren diese Entwicklung begünstigen oder hemmen. Darüber hinaus erscheint es sinnvoll, den Einfluss verschiedener Unterrichtsformen und didaktischer Interventionen auf die Entwicklung mathematischer Flexibilität genauer zu untersuchen. Frühere Studien deuten darauf hin, dass die Art der Instruktion einen wesentlichen Einfluss auf die flexible Nutzung unterschiedlicher Lösungsstrategien haben kann. Zukünftige Forschungsarbeiten könnten daher gezielt Unterrichtskonzepte erproben, die den Vergleich, die Bewertung und die bewusste Auswahl unterschiedlicher Lösungsverfahren fördern. Da sich die vorliegende Untersuchung auf lineare Gleichungen beschränkt, wäre zudem zu prüfen, inwieweit die beobachteten Ergebnisse auf andere mathematische Inhaltsbereiche übertragbar sind.

Ein weiterer Forschungsbedarf ergibt sich hinsichtlich der Frage, warum Schüler:innen trotz vorhandener Kenntnisse über alternative oder situationsgerechte Lösungsverfahren weiterhin überwiegend auf das Standardverfahren zurückgreifen. Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zeigen, dass insbesondere ein Teil der Schüler:innen zwar sowohl das Standardverfahren als auch ein situationsgerechtes Verfahren demonstrieren konnte, dennoch aber das Standardver-

fahren als das bessere Verfahren bewertete oder dieses spontan als ersten Lösungsansatz wählte. Ähnliche Beobachtungen wurden bereits in früheren Studien gemacht und unter anderem mit Vertrautheit, Gewohnheit sowie dem sogenannten Einstellungseffekt erklärt. Da sich die Gründe für die Wahl bestimmter Strategien anhand der vorliegenden Daten jedoch nur eingeschränkt rekonstruieren lassen, erscheinen ergänzende qualitative Untersuchungen sinnvoll. Interviews, Think-Aloud-Protokolle oder Beobachtungen während der Aufgabenbearbeitung könnten dazu beitragen, die Überlegungen der Lernenden bei der Auswahl von Lösungsverfahren genauer zu erfassen. Auf diese Weise ließe sich besser verstehen, welche Rolle Faktoren wie Vertrautheit, wahrgenommene Sicherheit, Effizienzüberlegungen, Unterrichtserfahrungen oder das mathematische Selbstkonzept bei der Entwicklung und Anwendung prozeduraler Flexibilität spielen.

Weitere Untersuchungen erscheinen insbesondere im Hinblick auf den Einsatz metakognitiver Strategien erforderlich. Die Ergebnisse dieser Studie liefern keine eindeutigen Hinweise auf einen Zusammenhang zwischen selbstberichteten metakognitiven Strategien und prozeduraler Flexibilität. Zukünftige Untersuchungen sollten daher differenziertere Erhebungsmethoden einsetzen, um metakognitive Prozesse während des Problemlösens unmittelbarer erfassen zu können.

Schließlich erscheinen weitere internationale Vergleichsstudien besonders aufschlussreich. Die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den Ergebnissen österreichischer Schüler:innen und den Befunden aus Finnland, Schweden und Spanien, und die gleichzeitige Abgrenzung zu den Ergebnissen chinesischer Schüler:innen legen nahe, dass auch bildungssystemische, kulturelle und unterrichtsbezogene Faktoren die Entwicklung mathematischer Flexibilität beeinflussen könnten. Eine Ausweitung vergleichender Studien auf weitere Länder könnte dazu beitragen, diese Zusammenhänge besser zu verstehen und erfolgreiche Unterrichtspraktiken zu identifizieren.

7 Fazit und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die prozedurale Flexibilität österreichischer Schüler:innen beim Lösen linearer Gleichungen zu untersuchen, Unterschiede zwischen verschiedenen Schulstufen und Schulformen zu analysieren sowie mögliche Zusammenhänge mit metakognitiven Strategien zu erfassen. Darüber hinaus sollten die Ergebnisse in Bezug zu internationalen Forschungsergebnissen, insbesondere der Studie von Star et al., 2022, gesetzt werden.

Die Ergebnisse zeigen, dass die prozedurale Flexibilität der untersuchten österreichischen Schüler:innen insgesamt nur schwach ausgeprägt ist. Obwohl viele Schüler:innen lineare Gleichungen korrekt lösen konnten und häufig über Kenntnisse alternativer Lösungsstrategien verfügten, wurden situationsgerechte Verfahren nur selten spontan eingesetzt. Stattdessen dominierte das Standardverfahren deutlich, selbst in Fällen, in denen alternative Strategien effizienter gewesen wären. Dieses Ergebnis bestätigt frühere Forschungsbefunde, wonach zwischen dem Wissen über verschiedene Lösungswege und deren tatsächlicher Anwendung im Problemlöseprozess eine Diskrepanz bestehen kann. Darüber hinaus zeigte sich ein deutlicher Einfluss von Schulstufe und Schulform. Schüler:innen der 11. Schulstufe erreichten sowohl hinsichtlich der Genauigkeit als auch hinsichtlich der prozeduralen, spontanen und potenziellen Flexibilität höhere Werte als Schüler:innen der 8. Schulstufe. Besonders geringe Flexibilitätswerte wurden bei Schüler:innen der Mittelschule festgestellt. Insgesamt ordnen sich die Ergebnisse der österreichischen Stichprobe weitgehend in die Befunde von Star et al., 2022 ein und deuten darauf hin, dass die geringe Ausprägung prozeduraler Flexibilität kein nationales Phänomen, sondern auch in anderen europäischen Bildungssystemen zu beobachten ist.

Die Untersuchung der metakognitiven Strategien zeigte, dass die Schüler:innen ihren Einsatz metakognitiver Strategien insgesamt eher zurückhaltend einschätzen. Am stärksten wurden Strategien wahrgenommen, die sich auf die Überwachung und Kontrolle des eigenen Lernens beziehen, etwa das Überprüfen, ob ein Rechenweg sinnvoll erscheint, oder das selbstständige Testen des eigenen Verständnisses durch Fragen beim Lernen. Deutlich geringer ausgeprägt waren hingegen Strategien der Planung und Regulation, beispielsweise das gezielte Ausprobieren alternativer Lösungswege, wenn Schwierigkeiten auftreten. Zudem schätzten Oberstufenschüler:innen ihren Einsatz metakognitiver Strategien durchgehend höher ein als Schüler:innen der Unterstufe. Insgesamt konnten jedoch keine starken Zusammenhänge zwischen den Selbstangaben zu metakognitiven Strategien und den Leistungen im Tri-Phase-Flexibilitätstest festgestellt werden. Die Ergebnisse erlauben daher keine eindeutige Aussage darüber, dass ein stärker wahrgenom-

mener Einsatz metakognitiver Strategien unmittelbar mit höherer Genauigkeit oder größerer prozeduraler Flexibilität verbunden ist.

Für die Unterrichtspraxis ergeben sich aus diesen Befunden mehrere Implikationen. Erstens scheint es notwendig, die flexible Nutzung unterschiedlicher Lösungsstrategien im Mathematikunterricht stärker zu fördern. Viele Schüler:innen verfügen zwar über Kenntnisse alternativer Verfahren, nutzen diese jedoch nicht selbstständig. Daher sollte der Vergleich verschiedener Lösungswege sowie die Diskussion ihrer jeweiligen Vor- und Nachteile bewusster in den Unterricht integriert werden. Ziel sollte es sein, nicht nur die Beherrschung einzelner Verfahren zu fördern, sondern auch die Fähigkeit, diese situationsabhängig auszuwählen und zu begründen. Zweitens verdeutlichen die Ergebnisse die Bedeutung metakognitiver Kompetenzen für mathematisches Lernen. Da die Schüler:innen metakognitive Strategien nur teilweise bewusst wahrnehmen und nutzen, erscheint es sinnvoll, diese im Unterricht explizit zu thematisieren. Lehrkräfte könnten beispielsweise Strategien der Planung, Selbstüberwachung und Reflexion gezielt modellieren, gemeinsam mit den Lernenden besprechen und regelmäßig in Unterrichtsprozesse integrieren. Dies betrifft auch die Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrkräfte, in der sowohl mathematische Flexibilität als auch metakognitive Förderung stärker berücksichtigt werden sollten. Drittens sind die Ergebnisse vor dem Hintergrund des geplanten technologiefreien Teils der Mathematik-Matura von besonderer Relevanz. Die Untersuchung zeigte, dass selbst Oberstufenschüler:innen bei einfachen Rechnungen mit Dezimal- und Bruchzahlen ohne technische Hilfsmittel Schwierigkeiten aufwiesen. Gleichzeitig wurde sichtbar, dass situationsgerechte Verfahren in vielen Fällen Rechenaufwand reduzieren und Fehlerquellen minimieren können. Dennoch griff die Mehrheit der Schüler:innen weiterhin bevorzugt auf das Standardverfahren zurück. Für den Unterricht ergibt sich daraus die Aufgabe, das Bewusstsein für die Vorteile flexibler Strategiewahl zu stärken und gemeinsam mit den Schüler:innen zu reflektieren, welche Verfahren in unterschiedlichen Situationen besonders effizient sind. Gerade im Hinblick auf zukünftige Anforderungen in der Reifeprüfung könnte eine solche Förderung prozeduraler Flexibilität einen wichtigen Beitrag zur erfolgreichen Bearbeitung mathematischer Aufgaben leisten.

Zusammenfassend verdeutlichen die Ergebnisse dieser Arbeit, dass die Entwicklung prozeduraler Flexibilität eine zentrale Herausforderung des Mathematikunterrichts darstellt. Die Förderung eines bewussten und reflektierten Umgangs mit unterschiedlichen Lösungsstrategien sowie die stärkere Einbindung metakognitiver Prozesse bieten dabei vielversprechende Ansatzpunkte, um mathematisches Lernen nachhaltig zu unterstützen und Lernende besser auf zukünftige Anforderungen vorzubereiten.

Literaturverzeichnis

- Alonso, Gardenia et al. (2017). *Strategien für den Lernerfolg berufstätiger Studierender : Empirische Analysen zum Lernverhalten*. AKAD University Edition. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Anderson, Lorin W. (2008). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing : a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Complete ed. New York [u.a.]: Longman.
- Bellhäuser, Henrik und Bernhard Schmitz (2014). „Förderung selbstregulierten Lernens für Studierende in mathematischen Vorkursen – ein web-basiertes Training“. In: *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 343–358.
- Berger, Jean-Louis und Stuart A. Karabenick (2011). „Motivation and students' use of learning strategies: Evidence of unidirectional effects in mathematics classrooms“. In: *Learning and Instruction* 21.3, S. 416–428. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2010.06.002.
- Blöte, Anke W., Anton S. Klein und Meindert Beishuizen (2000). „Mental computation and conceptual understanding“. In: *Learning and Instruction* 10.3, S. 221–247. DOI: 10.1016/S0959-4752(99)00028-6.
- Blöte, Anke W., Eeke Van Der Burg und Anton S. Klein (2001). „Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects.“ In: *Journal of Educational Psychology* 93.3, S. 627–638. DOI: 10.1037/0022-0663.93.3.627.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2026). *SRP Mathematik (AHS): 3-Stufen-Plan zur Weiterentwicklung des Mathematik-Unterrichts und der Mathematik-Matura*. URL: <https://www.matura.gv.at/index.php?eID=dumpFile&t=f&f=6860&token=a8484f07b9f9ea77cfdb30051bc7ebc5523afb08>.
- Cohen, Jacob (2013). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. 2. ed. New York [u.a.]: Routledge. DOI: 10.4324/9780203771587.
- Dorner, Christian und Christoph Ableitinger (2022). „Procedural mathematical knowledge and use of technology by senior high school students“. In: *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 18.12, S. 1–14. DOI: 10.29333/ejmste/12712.
- Dowker, Ann et al. (1996). „Estimation Strategies of Four Groups“. In: *Mathematical Cognition* 2.2, S. 113–135. DOI: 10.1080/135467996387499.
- Flavell, John H. (1979). „Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry.“ In: *American Psychologist* 34.10, S. 906–911.

- Grundey, Svenja (2015). „Metakognition und Beliefs“. In: *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen: Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, S. 47–57. DOI: 10.1007/978-3-658-08937-5_3.
- Hiebert, James und Thomas P. Carpenter (1992). „Learning and Teaching with Understanding“. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Hrsg. von Douglas A. Grouws. New York: Simon & Schuster Macmillan, S. 65–97.
- Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS) (2026). *Internationale Studien – Überblick*. IQS. URL: <https://www.iqs.gv.at/themen/internationale-studien/internationale-studien-ueberblick> (besucht am 27.05.2026).
- Kaiser, Ruth (2018). „Modul 1. Das Konzept Metakognition“. In: *Metakognition: Die Neue Didaktik*. Vandenhoeck & Ruprecht, S. 31–68. DOI: 10.13109/9783666702549.31.
- Klingsieck, Katrin B. (2018). „Kurz und knapp – die Kurzsкала des Fragebogens „Lernstrategien im Studium“ (LIST)“. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie* 32.4, S. 249–259. DOI: 10.1024/1010-0652/a000230.
- Konrad, Klaus (2014). *Lernen lernen – allein und mit anderen : Konzepte, Lösungen, Beispiele*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Kruteckij, Vadim Andreevič (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lingel, Klaus (2016). *Metakognitives Wissen Mathematik: Entwicklung und Zusammenhang mit der Mathematikleistung in der Sekundarstufe I*. Würzburg: Würzburg University Press.
- Newton, Kristie Jones, Jon R. Star und Kathleen Lynch (2010). „Understanding the Development of Flexibility in Struggling Algebra Students“. In: *Mathematical Thinking and Learning* 12.4, S. 282–305. DOI: 10.1080/10986065.2010.482150.
- Pintrich, P et al. (1991). „A Manual for the Use of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ)“. In: *Ann Arbor*.
- Richardson, Michelle, Charles Abraham und Rod Bond (2012). „Psychological Correlates of University Students’ Academic Performance: A Systematic Review and Meta-Analysis“. In: *Psychological Bulletin* 138.2, S. 353–387.
- Rittle-Johnson, Bethany und Michael Schneider (2015). „Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics“. In: *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford University Press, S. 1118–1134. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014.
- Rittle-Johnson, Bethany und Jon R. Star (2007). „Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve

- equations.“ In: *Journal of Educational Psychology* 99.3, S. 561–574. DOI: 10.1037/0022-0663.99.3.561.
- Schoenfeld, Alan (1987). „What’s all the fuss about metacognition“. In: *Cognitive Science and Mathematics Education*, S. 189–215.
- Schraw, Gregory (2001). „Promoting General Metacognitive Awareness“. In: *Metacognition in Learning and Instruction*. Hrsg. von Hope J. Hartman und R. Malatesha Joshi. Bd. 19. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 3–16. DOI: 10.1007/978-94-017-2243-8_1.
- Siegler, Robert S. und Patrick Lemaire (1997). „Older and younger adults’ strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method.“ In: *Journal of Experimental Psychology: General* 126.1, S. 71–92.
- Sjuts, Johann (2022). „Metakognition innerhalb von Aufgaben und Aufgabenbearbeitungen in Mathematik“. In: *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung & Praxis* 3, S. 1–54. DOI: 10.48648/r2r9-6d11.
- Song, John H. H., Sasha Loyal und Benjamin Lond (2021). „Metacognitive Awareness Scale, Domain Specific (MCAS-DS): Assessing Metacognitive Awareness During Raven’s Progressive Matrices“. In: *Frontiers in Psychology* 11, S. 1–14. DOI: 10.3389/fpsyg.2020.607577.
- Star, Jon (2005). „Reconceptualizing Procedural Knowledge“. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 36, S. 404–411. DOI: 10.2307/30034943.
- Star, Jon und Bethany Rittle-Johnson (2008). „Flexibility in problem solving: The case of equation solving“. In: *Learning and Instruction* 18.6, S. 565–579. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2007.09.018.
- Star, Jon et al. (2022). „Exploring students’ procedural flexibility in three countries“. In: *International Journal of STEM Education* 9.1, S. 1–18. DOI: 10.1186/s40594-021-00322-y.
- Star, Jon R. und Colleen Seifert (2006). „The development of flexibility in equation solving“. In: *Contemporary Educational Psychology* 31.3, S. 280–300. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2005.08.001>.
- Star, Jon R. et al. (2015). „Student, teacher, and instructional characteristics related to students’ gains in flexibility“. In: *Contemporary Educational Psychology* 41, S. 198–208. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.001>.
- Toferer, Bettina, Birgit Lang und Silvia Salchegger (2023). *PISA 2022. Kompetenzen in Mathematik, Lesen und Naturwissenschaft am Ende der Pflichtschulzeit im internationalen Vergleich*. Ergebnisbericht. Salzburg: Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS). DOI: 10.17888/pisa2022-eb. URL: <https://www.iqs.gv.at/downloads/internationale-studien/pisa/pisa-2022>.

- Tuscher, Johannes Alois (2025). „Prozedurale Flexibilität im Mathematikunterricht“. Bachelorarbeit. Pädagogische Hochschule Steiermark.
- Veenman, Marcel V. J. (2011). „Alternative assessment of strategy use with self-report instruments: a discussion“. In: *Metacognition and Learning* 6.2, S. 205–211. DOI: 10.1007/s11409-011-9080-x.
- Wiesinger, Lisa und Christina Wallner-Paschon (2024). *TIMSS 2023. Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenz am Ende der 8. Schulstufe*. Ergebnisbericht. Salzburg: Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen (IQS). DOI: 10.17888/timss2023-eb. URL: <https://www.iqs.gv.at/downloads/internationale-studien/timss/timss-2023>.
- Xiao, Chengwei et al. (2016). „Using Spearman’s correlation coefficients for exploratory data analysis on big dataset“. In: *Concurrency and Computation: Practice and Experience* 28.14, S. 3866–3878. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpe.3745>.
- Xu, Le et al. (2017). „Measures of Potential Flexibility and Practical Flexibility in Equation Solving“. In: *Frontiers in Psychology* 8. DOI: 10.3389/fpsyg.2017.01368.

Prozedurale Flexibilität

Zehetner Victoria

Liebe Schüler*innen,

vielen Dank, dass ihr an dieser wissenschaftlichen Untersuchung teilnehmt. Ziel dieser Studie ist es, zu erfassen, welche unterschiedlichen Strategien ihr beim Lösen mathematischer Aufgaben verwendet. Eure Teilnahme hilft uns, besser zu verstehen, wie mathematische Lösungsstrategien in der Schule genutzt und weiterentwickelt werden können.

Bitte bearbeitet die Aufgaben konzentriert und selbstständig. Achtet darauf, dass ihr eure Rechenwege gut lesbar aufschreibt. Die Bearbeitung erfolgt in drei Phasen:

Phase 1: Löst die Gleichungen auf eine für euch übliche Weise.

Phase 2: Findet alternative Lösungswege für die Gleichungen.

Phase 3: Wählt die aus eurer Sicht am besten geeignete Lösungsmethode.

Die Teilnahme an dieser Untersuchung ist freiwillig. Eure Daten werden anonym erfasst und ausschließlich zu wissenschaftlichen Zwecken verwendet.

Viel Erfolg!



Pädagogische
Hochschule
Steiermark



universität
wien

Phase 1

Löse die folgenden Gleichungen! Bitte schreibe hierbei nur im Feld **P1!** (15 Minuten)

Gleichung 1: $4(x - 2) = 24$

P1

P2

Gleichung 2: $3(x + 0,69) = 15$

P1

P2

Gleichung 3: $4\left(x + \frac{3}{5}\right) = 12$

P1

P2

Gleichung 4: $4(x + 6) + 3(x + 6) = 21$

P1

P2

Gleichung 5: $5\left(x + \frac{3}{7}\right) + 3\left(x + \frac{3}{7}\right) = 16$

P1

P2

Gleichung 6: $2(x - 0,31) + 3(x - 0,31) = 15$

P1

P2

Gleichung 7: $8(x - 5) = 3(x - 5) + 20$

P1

P2

Gleichung 8: $8\left(x - \frac{2}{5}\right) - 11 = 6\left(x - \frac{2}{5}\right)$

P1

P2

Gleichung 9: $5(x + 0,6) + 3x = 5(x + 0,6) + 7$

P1

P2

Gleichung 10: $\frac{2x-6}{2} + \frac{6x-18}{3} = 5$

P1

P2

Gleichung 11: $\frac{x+3}{3} + \frac{3x+9}{9} = 1$

P1

P2

Gleichung 12: $\frac{5x+5}{5} + \frac{6x+6}{6} = 6$

P1

P2

Phase 2

*Kannst du die Gleichungen jeweils auch auf eine andere Art lösen? Löse die Gleichungen auf möglichst viele verschiedene Arten! Schreibe hierbei deine Vorgangsweisen jeweils in das Feld **P2**. Den zuvor verwendeten Lösungsweg brauchst du nicht mehr aufschreiben! (20 Minuten)*

Phase 3

Markiere für jede Gleichung die am besten geeignete Lösungsmethode! Betrachte dazu alle aufgeschriebenen Lösungen zu einer Gleichung! Verwende einen farbigen Stift (wenn möglich)!

Fragebogen

1. Allgemeiner Teil

- A1 Geschlecht ☐ weiblich ☐ männlich ☐ divers
- A2 Vorjahresnote in Mathematik ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5
- A3 Leistungsniveau (nur für Mittelschule) ☐ Standard ☐ Standard AHS

2. Technologienutzung im Fach Mathematik

	GeoGebra, TI-Nspire, etc.	KI (z.B. ChatGPT, Photomath)
H1 Wie häufig hat deine Mathematiklehrer*in typischerweise höherwertige Technologie im Unterricht eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)	☐ (fast) jede Mathematikstunde ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie	☐ (fast) jede Mathematikstunde ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie
H2 Wie häufig hast du in der Schulübung typischerweise höherwertige Technologie eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)	☐ (fast) jede Mathematikstunde ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie	☐ (fast) jede Mathematikstunde ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie
H3 Wie häufig hast du bei der Hausübung typischerweise höherwertige Technologie eingesetzt? (Gewöhnliche Taschenrechner sind hier nicht gemeint.)	☐ (fast) bei jeder Hausübung ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie	☐ (fast) bei jeder Hausübung ☐ ca. 1 Mal pro Woche ☐ ca. 1-2 Mal pro Monat ☐ seltener als 1 Mal pro Monat ☐ nie

3. Metakognitive Strategien

- M1 Bevor ich mit dem Lernen für Mathematik beginne, überlege ich mir, was ich lernen möchte und wie ich dabei vorgehen werde. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu
- M2 Bevor ich mit dem Lernen für Mathematik beginne, überlege ich mir, wie viel Zeit ich für ein Thema einplanen sollte. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu
- M3 Während ich für Mathematik lerne, teste ich mich selbst (z.B. durch Fragen), um zu überprüfen, ob ich den Stoff verstanden habe. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu
- M4 Wenn ich eine Mathematikaufgabe bearbeite, achte ich darauf, ob mein Rechenweg sinnvoll ist. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu
- M5 Wenn mir eine Mathematikaufgabe schwerfällt, nehme ich mir Zeit, die Aufgabe zu verstehen. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu
- M6 Wenn ich beim Lösen einer Mathematikaufgabe Schwierigkeiten habe, versuche ich einen anderen Lösungsweg. trifft zu ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ trifft nicht zu