

# MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Interpolation durch epizyklische Kreisbahnen

verfasst von | submitted by  
Tobias Flandorfer BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree  
programme code as it appears on the  
student record sheet:

UA 199 500 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree  
programme as it appears on the student  
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach  
Bewegung und Sport Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Dr. Martin Ehler Privatdoz.

# Abstract

Diese Arbeit untersucht die diskrete Fouriertransformation (DFT) und deren Anwendung zur Interpolation in der komplexen Ebene. Neben der Darstellung der theoretischen Grundlagen wird ein GeoGebra-Workflow entwickelt, der beliebige Punktmengen mithilfe von Epizykel-Bahnkurven interpoliert. Darüber hinaus wird der Approximationsfehler zwischen der interpolierten Kurve und der ursprünglichen Punktmenge mathematisch abgeschätzt. Durch die Sortierung der Fouriermoden nach ihrem Betrag und die Reduktion um die kleinsten Koeffizienten werden zudem Verfahren zur Datenkompression und Kurvenapproximation aufgezeigt. Die Arbeit verbindet somit fundierte mathematische Theorie mit einer dynamischen Visualisierung.

## **Vorwort**

Einen besonderen Dank möchte ich meiner Freundin Flavia aussprechen. Ohne sie wäre es nicht möglich gewesen, so viel Zeit in diese Arbeit zu investieren.

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                          |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                                        | <b>1</b>  |
| 1.1      | Das geozentrische Weltbild . . . . .                                     | 1         |
| 1.1.1    | Deferent und Epizykel . . . . .                                          | 1         |
| 1.2      | Joseph Fourier . . . . .                                                 | 2         |
| <b>2</b> | <b>Grundlagen</b>                                                        | <b>4</b>  |
| 2.1      | Projektion eines Vektors auf einen Unterraum . . . . .                   | 4         |
| 2.2      | Periodische Funktionen . . . . .                                         | 11        |
| <b>3</b> | <b>Epizyklen</b>                                                         | <b>14</b> |
| 3.1      | Bahnpunkt in der komplexen Ebene . . . . .                               | 14        |
| 3.2      | Helixdarstellung komplexer Exponentialfunktionen . . . . .               | 15        |
| 3.3      | Das Konzept von Epizyklen . . . . .                                      | 17        |
| <b>4</b> | <b>Diskrete Fourier Interpolation (DFT)</b>                              | <b>23</b> |
| 4.1      | Bilddateien . . . . .                                                    | 23        |
| 4.2      | Eigenschaften komplexer Exponentialfunktionen . . . . .                  | 24        |
| 4.3      | Existenz und Eindeutigkeit der trigonometrischen Interpolation . . . . . | 28        |
| 4.4      | Die Güte der Approximation . . . . .                                     | 31        |
| <b>5</b> | <b>Grafische Darstellung</b>                                             | <b>36</b> |
| 5.1      | Visualisierung der DFT Basis in der komplexen Ebene . . . . .            | 36        |
| 5.1.1    | Frequenzvorzeichen und Abtastrichtung . . . . .                          | 37        |
| 5.1.2    | Struktur der Stützstellen für $k \neq 1$ . . . . .                       | 37        |
| 5.1.3    | Die Nullfrequenz . . . . .                                               | 38        |
| 5.2      | Grafische Interpretation der DFT . . . . .                               | 39        |
| 5.2.1    | Grafische Bestimmung von $c_0$ . . . . .                                 | 40        |
| <b>6</b> | <b>GeoGebra</b>                                                          | <b>45</b> |
| 6.1      | Implementierung in GeoGebra . . . . .                                    | 46        |
| 6.1.1    | Stützwerte . . . . .                                                     | 46        |
| 6.2      | DFT . . . . .                                                            | 46        |
| 6.3      | Fourierinterpolation . . . . .                                           | 49        |
| 6.3.1    | Parametrisierung der Punkte auf den Kreisen . . . . .                    | 49        |
| 6.3.2    | Verbinden der Bahnpunkte durch Vektoren . . . . .                        | 50        |
| 6.3.3    | Konstruktion der Kreise . . . . .                                        | 50        |
| 6.4      | Die Kurve der Fourierinterpolation . . . . .                             | 50        |
| 6.5      | Beispiele . . . . .                                                      | 52        |
| 6.5.1    | Experimentieren mit Fourierkoeffizienten . . . . .                       | 52        |
| 6.5.2    | Nachzeichnen von Bildern . . . . .                                       | 52        |



|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| 6.5.3    | Herz . . . . .                                 | 53        |
| 6.5.4    | Maus . . . . .                                 | 54        |
| 6.5.5    | Hai . . . . .                                  | 54        |
| 6.6      | Drache . . . . .                               | 56        |
| 6.7      | Fuchs . . . . .                                | 58        |
| 6.8      | Frequenzspektrum . . . . .                     | 58        |
| 6.8.1    | Mauersegler . . . . .                          | 60        |
| 6.9      | Approximation durch weniger Epizykel . . . . . | 60        |
| 6.9.1    | 1. Schrittweises Entfernen . . . . .           | 60        |
| 6.9.2    | Zweite Möglichkeit . . . . .                   | 66        |
| 6.9.3    | Dritte Möglichkeit . . . . .                   | 67        |
| 6.9.4    | Vergleich der Möglichkeiten . . . . .          | 67        |
| <b>7</b> | <b>Conclusio</b>                               | <b>70</b> |
| <b>8</b> | <b>Didaktische Perspektive</b>                 | <b>70</b> |
| 8.1      | Einsatzmöglichkeiten im Unterricht . . . . .   | 71        |
| 8.2      | Geförderte Kompetenzen . . . . .               | 72        |

# 1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Interpolation und Visualisierung geschlossener Kurven mittels Fourieranalyse. Die mathematischen Ursprünge dieser Idee finden sich um ca. 200 v. Christus. Im 19. Jahrhundert wurde die mathematische Idee weiterentwickelt. Diese spielt in vielen modernen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle.

## 1.1 Das geozentrische Weltbild

Die Entschlüsselung der Gesetzmäßigkeiten der Bewegung von Himmelskörpern ist ein Thema, das im Laufe der Geschichte der Menschheit große Aufmerksamkeit erfahren hat. Frühe Hochkulturen versuchten, die Bewegungen der Himmelskörper zu verstehen und in Gesetzmäßigkeiten zu fassen.

Im zweiten Jahrhundert nach Christus erdachte Claudius Ptolemäus ein Modell, das für beinahe eineinhalbtausend Jahre die astronomische Grundlage des geozentrischen Weltbilds bildete. Dabei war unter anderem axiomatisch festgelegt, dass die Erde der Mittelpunkt des Kosmos ist und dass die Himmelskörper göttlicher Natur sind. Aus der göttlichen Natur wurde geschlossen, dass die Himmelskörper sich bloß auf perfekten Kreisbahnen bewegen können. Von der Erde aus betrachtet, bewegten sich die Planeten allerdings nicht auf diesen, sondern beschrieben komplizierte Schleifenbewegungen.

### 1.1.1 Deferent und Epizykel

Als Lösung für dieses Problem zog Ptolemäus das Konzept von Epizykeln heran. Das mathematische Konzept, die Epizykeltheorie, wurde bereits ca. 200 v. Christus von Apollonius von Perge entwickelt.

In diesem Modell bewegt sich ein Punkt mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit auf dem Deferenten (Trägerkreis). Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines weiteren Kreises (des Epizykels). Auf diesem bewegt sich ein weiterer Punkt mit fester Winkelgeschwindigkeit. Damit ließen sich die schleifenförmigen Bahnkurven der Planeten erklären (vgl. [15]).

Es ist bekannt, dass dieses Modell durch das heliozentrische Weltbild ersetzt wurde, dennoch bleibt die Eleganz der Idee erhalten.

Abbildung 1 gibt ein Beispiel für Deferent und Epizykel zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Deferent ist violett und der Epizykel braun dargestellt.  $P_0$  stellt den Punkt auf der Bahn des Deferenten und  $P_1$  jenen auf der des Epizykels dar. Unter <https://www.geogebra.org/m/zrmdesrc> steht ein interaktives Tool zur Visualisierung zur Verfügung.

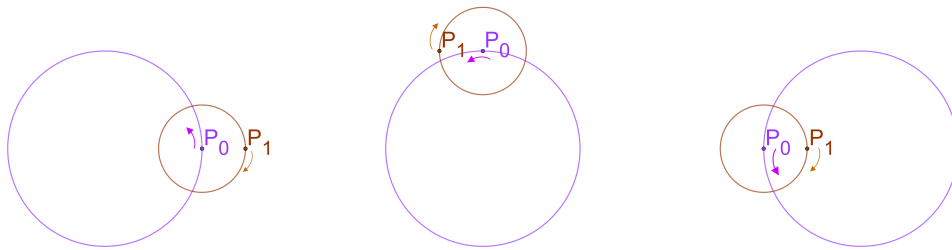


Abbildung 1: Epizykel und Deferent zu unterschiedlichen Zeitpunkten

## 1.2 Joseph Fourier

Im Jahr 1807 untersuchte Joseph Fourier die Wärmeleitung in Metallplatten. Dabei entwickelte er die Idee, Temperaturverteilungen durch Kombination von Sinus- und Kosinusschwingungen darzustellen. Sein Manuskript *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides* wurde begutachtet, aber nicht veröffentlicht. Erst 1822 erschien mit der *Théorie analytique de la chaleur* die systematische Ausarbeitung, die als Grundstein der modernen Fourier-Analyse gilt (vgl. [17]).

Der Fouriertransformation entstammen eine Vielzahl von Anwendungen. Als wichtiges Ergebnis liefert sie, dass sich hinreichend glatte 1-periodische Funktionen als Linearkombination komplexer Exponentialfunktionen der Form

$$e^{2\pi ikt} = \cos(2\pi kt) + i \cdot \sin(2\pi kt), \quad k \in \mathbb{Z}$$

darstellen lassen.

Die Visualisierung dieser Formel in der komplexen Ebene beschreibt die Bewegung eines Bahnpunktes auf einer Kreisbahn. Dadurch stellt sich der Zusammenhang zur Epizykeltheorie her. In Abbildung 2 ist der Bahnpunkt  $P$  von  $e^{2\pi ikt}$  schwarz und die Kreisbahn, auf der er sich bewegt, grau dargestellt.

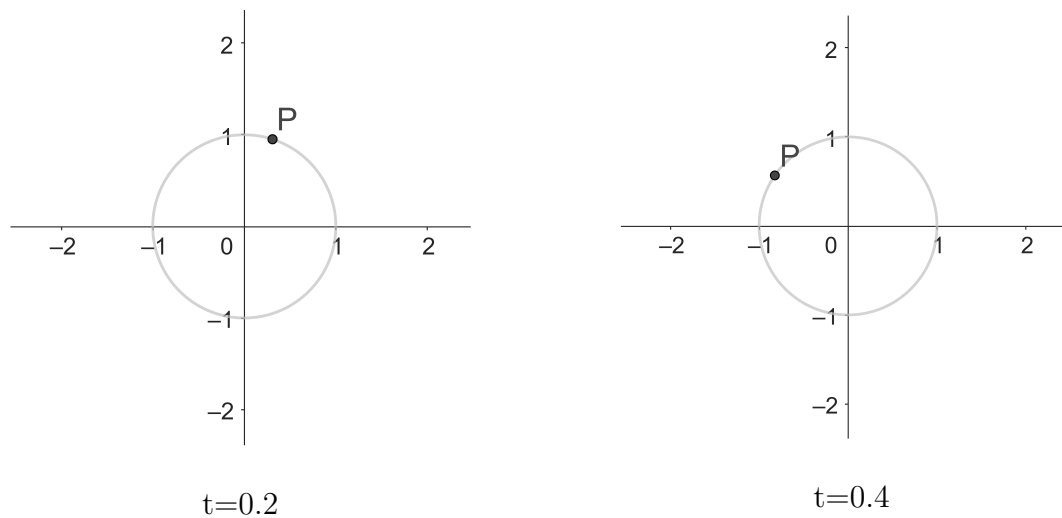


Abbildung 2: Bahnpunkt in der komplexer Ebene für unterschiedliches  $t$

## Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 behandelt einige notwendige theoretische Grundlagen, woraufhin Kapitel 3 einen Einstieg in das Thema Epizykel liefert. Das darauffolgende Kapitel 4 beschreibt die diskrete Fouriertransformation, während Kapitel 5 die Interpolation durch Epizykel behandelt. Kapitel 6 demonstriert schließlich die Umsetzung in GeoGebra.

## 2 Grundlagen

Ziel dieser Arbeit ist die Interpolation von Punkten durch epizyklische Bahnkurven sowie deren Herleitung.

Als mathematischer Einstieg wird die Idee der Projektion eines Vektors auf einen Unterraum erläutert. Um das Konzept der Fourierentwicklung als Projektion besser zu verstehen, wird zunächst die Orthogonalprojektion im endlichdimensionalen Raum diskutiert.

Dazu wird das Skalarprodukt definiert.

### 2.1 Projektion eines Vektors auf einen Unterraum

Nach [22, S. 219 f.] gilt:

**Definition 2.1.** Sei  $X$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow K$  heißt *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls für alle  $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$  und  $\lambda \in K$  gilt:

$$(a) \quad \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$$

$$(b) \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$(c) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$(d) \quad \langle x, x \rangle \geq 0,$$

$$(e) \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Aus (a), (b) und (c) folgt als unmittelbare Konsequenz:

$$(a') \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle,$$

$$(b') \quad \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

Skalare werden aus dem zweiten Argument konjugiert komplex herausgezogen, weshalb  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  als *sesquilinear* bezeichnet wird. Die Eigenschaften (d) und (e) zusammen heißen *positive Definitheit*. Nach (c) gilt stets  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ .

Für die Fouriertransformation wird insbesondere das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$  benötigt.

Die folgenden Definition orientieren sich an [8, Kap. 5.1].

**Definition 2.2** (Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^n$ ). Für  $u = (u_1, \dots, u_n)$  und  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$  ist das Skalarprodukt definiert durch

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^n u_j \overline{v_j}.$$

Vektorräume, in denen ein Skalarprodukt definiert ist, werden auch als unitäre Vektorräume oder Innenprodukträume bezeichnet.

Die folgenden Beweise orientieren sich an [13, S. 11 ff.].

**Definition 2.3.** Sind  $\vec{x}, \vec{y} \in V$  mit  $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$  und ist  $U$  ein Unterraum des Vektorraums  $V$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dann gilt:

- $\vec{x}_{\vec{y}}$  wird als die Orthogonalprojektion von  $\vec{x}$  auf den von  $\vec{y}$  erzeugten eindimensionalen Unterraum bezeichnet, wenn ein  $z \in \mathbb{C}$  existiert mit

$$\vec{x}_{\vec{y}} = z \cdot \vec{y} \quad \text{und} \quad \langle \vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}, \vec{y} \rangle = 0.$$

- $\vec{x}_U \in U$  wird als die Orthogonalprojektion von  $\vec{x}$  auf  $U$  bezeichnet, wenn

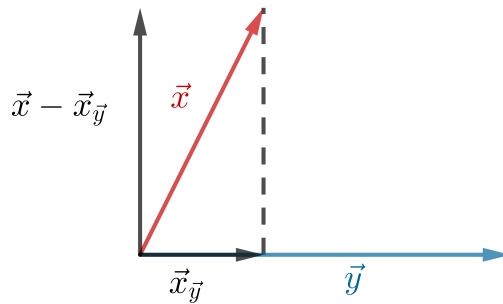
$$\langle \vec{x} - \vec{x}_U, \vec{u} \rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{u} \in U$$

gilt.

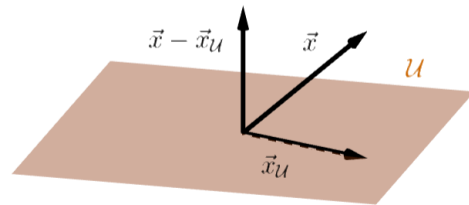
Es gilt dabei:  $\vec{x}_{\vec{y}} = \vec{x}_U$  mit  $U = \text{span}\{\vec{y}\}$ .

Der erste Fall ergibt sich als Spezialfall des zweiten. Grafische Beispiele sind in Abbildung 3 dargestellt. Im Folgenden wird die Eindeutigkeit gezeigt.

**Proposition 2.4.** *Die Orthogonalprojektion auf einen endlichdimensionalen Unterraum  $U \subset V$  eines unitären Vektorraums  $V$  ist eindeutig bestimmt.*



(a) Orthogonalprojektion vom  $\mathbb{R}^2$  auf einen eindimensionalen Unterraum



(b) Orthogonalprojektion im  $\mathbb{R}^3$  auf einen zweidimensionalen Unterraum

Abbildung 3: Orthogonalprojektionen auf Räume niedrigerer Dimension

*Beweis.* Sei  $\vec{x} \in V$  und sei  $\vec{x}_U \in U$  die Orthogonalprojektion von  $\vec{x}$  auf  $U$ , d. h. es gilt

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_U, \vec{u} \rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{u} \in U.$$

Angenommen, es existiert ein weiteres Element  $\vec{p} \in U$ , das ebenfalls diese Bedingung erfüllt:

$$\langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{u} \in U.$$

Dann folgt für alle  $\vec{u} \in U$ :

$$\langle \vec{x}_U - \vec{p}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{x}_U - \vec{x} + \vec{x} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{x}_U - \vec{x}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{x} - \vec{p}, \vec{u} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Da  $\vec{x}_U - \vec{p} \in U$ , setzen wir speziell  $\vec{u} := \vec{x}_U - \vec{p}$  und erhalten:

$$\langle \vec{x}_U - \vec{p}, \vec{x}_U - \vec{p} \rangle = 0.$$

Aufgrund der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt daraus  $\vec{x}_U = \vec{p}$ . Somit ist die Orthogonalprojektion eindeutig.  $\square$

**Bemerkung 2.5.** Im Spezialfall der Projektion eines Vektors  $\vec{x}$  auf einen Vektor  $\vec{y} \neq \vec{0}$ , also auf den eindimensionalen Unterraum  $U = \text{span}\{\vec{y}\}$ , lässt sich der projizierte Vektor  $\vec{x}_{\vec{y}}$  explizit angeben.

Aus der Bedingung

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}, \vec{y} \rangle = 0$$

und der Annahme  $\vec{x}_{\vec{y}} = z \cdot \vec{y}$  folgt:

$$\langle \vec{x} - z \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0,$$

also

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - z \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = 0, \quad \text{d.h.} \quad z = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2}.$$

Damit ergibt sich die explizite Darstellung der Orthogonalprojektion als:

$$\vec{x}_{\vec{y}} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \vec{y}.$$

Diese Formel macht deutlich, dass die Projektion entlang der Richtung von  $\vec{y}$  erfolgt, wobei der Skalar gewählt ist, dass der Vektor  $\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}$  orthogonal zu  $\vec{y}$  steht. Ein Beispiel dafür ist in Abbildung 3 ersichtlich.

**Satz 2.6** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). Seien  $\vec{x}, \vec{y}$  Vektoren eines unitären Vektorraums  $V$  (zum Beispiel  $\mathbb{C}^n$ ). Dann gilt:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  linear abhängig sind.

*Beweis.* Für  $\vec{y} = \vec{0}$  ist die Ungleichung trivialerweise mit  $0 \leq 0$  erfüllt. Sei nun  $\vec{y} \neq \vec{0}$ . Die Orthogonalprojektion von  $\vec{x}$  auf  $\vec{y}$  ist gegeben durch

$$\vec{x}_{\vec{y}} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}.$$

Nach Definition der Orthogonalprojektion steht der Vektor  $\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}$  orthogonal auf  $\vec{y}$  und somit auch auf  $\vec{x}_{\vec{y}} \in \text{span}\{\vec{y}\}$ . Nach dem Satz des Pythagoras gilt daher:

$$\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}} + \vec{x}_{\vec{y}}\|^2 = \|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}\|^2 + \|\vec{x}_{\vec{y}}\|^2 \geq \|\vec{x}_{\vec{y}}\|^2.$$



Für die Norm von  $\vec{x}_{\vec{y}}$  gilt wiederum:

$$\|\vec{x}_{\vec{y}}\|^2 = \left\| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} \right\|^2 = \left| \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{y}\|^2} \right|^2 \|\vec{y}\|^2 = \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{y}\|^4} \|\vec{y}\|^2 = \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{y}\|^2}.$$

Einsetzen in die obige Ungleichung liefert:

$$\|\vec{x}\|^2 \geq \frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2}{\|\vec{y}\|^2},$$

woraus durch Multiplikation mit  $\|\vec{y}\|^2$  und anschließendes Wurzelziehen direkt folgt:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\|\vec{x} - \vec{x}_{\vec{y}}\|^2 = 0$ , also  $\vec{x} = \vec{x}_{\vec{y}}$ , was bedeutet, dass  $\vec{x}$  ein lineares Vielfaches von  $\vec{y}$  ist.  $\square$

**Bemerkung 2.7.** *Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert eine obere Schranke für den Betrag des Skalarprodukts. Dieser kann niemals größer werden als das Produkt der Normen der beiden beteiligten Vektoren. Die Extremfälle werden im Laufe dieser Arbeit thematisiert. Sie werden vor allem bei der grafischen Veranschaulichung der diskreten Fourier-Transformation ersichtlich.*

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt die Dreiecksungleichung für die induzierte Norm. Unter Verwendung der Eigenschaften des komplexen Skalarprodukts gilt nämlich:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2.$$

Da der Realteil einer komplexen Zahl durch ihren Absolutbetrag nach oben beschränkt ist ( $\operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|$ ), folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2.$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel auf beiden Seiten ergibt sich direkt die Dreiecksungleichung:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

**Satz 2.8** (Dreiecksungleichung). *Seien  $\vec{x}, \vec{y}$  Vektoren eines unitären Vektorraums  $V$ . Dann gilt für die induzierte Norm:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn einer der Vektoren ein nicht-negatives reelles Vielfaches des anderen ist (d. h.  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  oder  $\vec{y} = \vec{0}$ ).*

**Bemerkung 2.9.** *Dieser Aspekt tritt besonders deutlich bei der grafischen Veranschaulichung der Fourierinterpolation durch in Epizykel eingefügte Vektoren hervor.*

Ein wesentlicher Vorteil von Vektorräumen mit Skalarprodukt und den daraus induzierten Normen liegt in ihrer engen Verknüpfung mit dem Satz des Pythagoras, der eine natürliche und anschauliche Längenbestimmung auch im mehrdimensionalen Raum ermöglicht.

**Satz 2.10** (Satz des Pythagoras). *Seien  $\vec{x}, \vec{y}$  Vektoren eines unitären Vektorraums  $V$ . Stehen  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  orthogonal aufeinander ( $\vec{x} \perp \vec{y}$ ), so gilt:*

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

*Beweis.* Unter Verwendung der Sesquilinearität des komplexen Skalarprodukts gilt allgemein:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2.$$

Da  $\vec{x} \perp \vec{y}$  nach Definition bedeutet, dass  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$  (und damit auch  $\operatorname{Re} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ), vereinfacht sich die Gleichung direkt zu:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2.$$

□

**Satz 2.11** (Mehrdimensionaler Satz des Pythagoras). *Seien  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$  paarweise orthogonale Vektoren eines euklidischen oder unitären Vektorraums. Dann*

*gilt:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\vec{x}_i\|^2.$$

*Beweis.* Da  $\vec{x}_i \perp \vec{x}_j$  für  $i \neq j$ , gilt  $\langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = 0$ . Daher:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \vec{x}_i, \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle + \sum_{i \neq j} \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|\vec{x}_i\|^2.$$

□

Dadurch wird ein wesentlicher Vorteil von Orthonormalbasen sichtbar: Aufgrund der Orthogonalität der Basisvektoren kann die Norm einer Linearkombination als Quadratwurzel aus der Summe der quadrierten Normen (bzw. Koeffizientenbeträge) der beteiligten Vektoren berechnet werden. Dies findet insbesondere bei der geometrischen Längenbestimmung in Vektorräumen mit Skalarprodukt Anwendung.

**Bemerkung 2.12.** *In einer Orthonormalbasis lassen sich die Koeffizienten zur Darstellung eines Vektors besonders einfach berechnen: Sie entsprechen jeweils dem Skalarprodukt des Vektors mit dem zugehörigen Basiselement (siehe Abbildung 4). Das folgt direkt aus Bemerkung 2.5.*

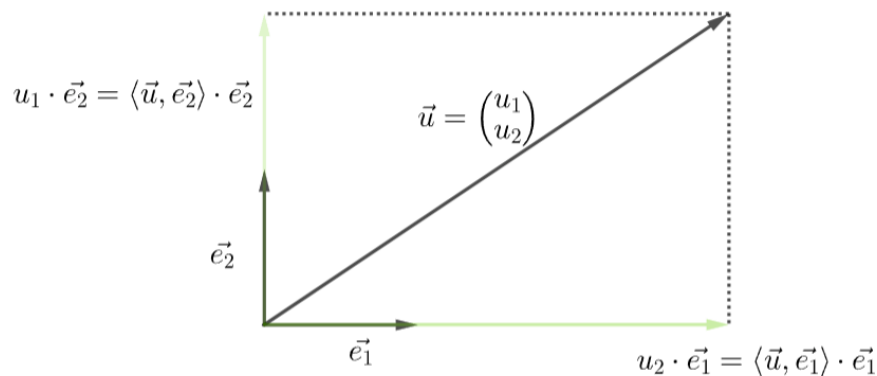


Abbildung 4: Skalarprodukt eines Vektors mit den Basiselementen im euklidischen Vektorraum

**Bemerkung 2.13.** Ein Vektor  $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$  lässt sich stets als Linearkombination einer Basis darstellen. Ist die Basis ein Orthonormalsystem  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ , so gilt

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \cdot \vec{e}_i,$$

wobei die Koeffizienten direkt durch Skalarprodukte bestimmt werden. Diese Darstellung legt den Grundstein für die Zerlegung allgemeiner Funktionen in Reihen orthogonaler Basisfunktionen und wird uns später bei der inversen diskreten Fouriertransformation wieder begegnen. Sie folgt als Spezialfall aus Bemerkung 2.5.

## 2.2 Periodische Funktionen

Im nächsten Schritt werden spezielle Funktionen betrachtet. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich periodisch verhalten. Eine Eigenschaft, die ebenfalls auf die Position eines auf einer Kreisbahn rotierenden Punktes zutrifft. Die nachstehenden Begriffe und Definitionen basieren auf [6]. Nachfolgende Definition orientiert sich an [9, Kap. 21].

**Definition 2.14** ( $\mathbb{Z}$ -periodisch, Torus). Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt  $\mathbb{Z}$ -periodisch, wenn

$$f(x + k) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Der Torus ist definiert als  $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Bemerkung 2.15.** Eine  $\mathbb{Z}$ -periodische Funktion ist stets 1-periodisch, kann jedoch auch eine kleinere Grundperiode besitzen. In diesem Fall entspricht die Periode 1 einem Vielfachen der Grundperiode.

Offensichtlich ist  $x \mapsto \sin(2\pi x)$   $\mathbb{Z}$ -periodisch, siehe Abbildung 5. Diese Funktion besitzt eine Grundperiode der Länge 1. Jede  $\mathbb{Z}$ -periodische Funktion  $f$  kann als Funktion auf dem Torus aufgefasst werden, d. h. als Abbildung

$$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}.$$

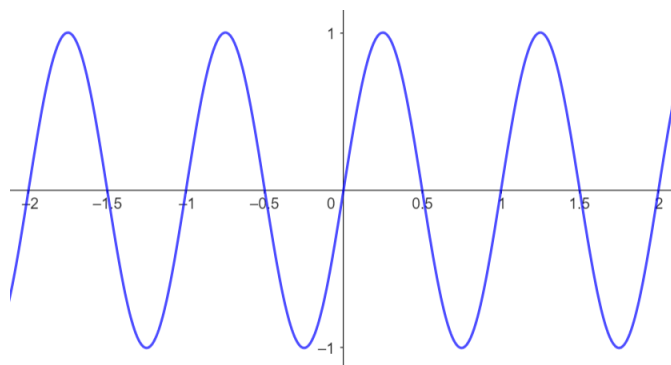


Abbildung 5:  $\sin(2\pi x)$  für  $|x| \leq 2$

Standardrepräsentantenmengen in  $\mathbb{T}$  sind etwa  $(0, 1]$  oder  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Das Skalarprodukt im Raum  $L^2(\mathbb{T})$  ist dann gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{[0, 1)} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

**Bemerkung 2.16.** Auch andere Repräsentationsmengen mit Länge 1 sind möglich.

**Definition 2.17.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  definieren wir die komplexe Exponentialfunktion als

$$e_k(x) := e^{2\pi i k x}.$$

**Bemerkung 2.18.** Die komplexe Exponentialfunktion lässt sich auch in der Form

$$e^{2\pi i k x} = \cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x)$$

darstellen. Diese Identität ist als Eulersche Formel bekannt und verknüpft trigonometrische Funktionen mit komplexen Zahlen. Sie spielt in dieser Arbeit eine zentrale Rolle bei der Visualisierung der diskreten Fouriertransformation in GeoGebra.

**Bemerkung 2.19.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  haben die Funktionen  $e_k(x)$  alle die Periode 1. Für  $k \neq 0$  beträgt die Minimalperiode  $1/|k|$ .

Nachfolgender Satz ist aus [14, Kap. 11.1] entnommen.

**Satz 2.20.** Die Funktionen  $e_k(x) := e^{2\pi i k x}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  bilden ein orthonormales System in  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Beweis.* Für  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\langle e_k, e_\ell \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^1 e^{2\pi i k x} \cdot \overline{e^{2\pi i \ell x}} dx = \int_0^1 e^{2\pi i (k-\ell)x} dx.$$

Wir betrachten zwei Fälle:

**Fall 1:**  $k = \ell$

$$\int_0^1 e^{2\pi i (k-k)x} dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Norm in diesem Fall gleich 1 ist.

**Fall 2:**  $k \neq \ell$

$$\int_0^1 e^{2\pi i (k-\ell)x} dx = \frac{1}{2\pi i (k-\ell)} \left[ e^{2\pi i (k-\ell)x} \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi i (k-\ell)} (e^{2\pi i (k-\ell)} - 1) = 0,$$

da  $k - \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  gilt und somit  $e^{2\pi i (k-\ell)} = 1$  ist.

Daraus folgt:

$$\langle e_k, e_\ell \rangle = \delta_{k\ell}.$$

□

Die Orthonormalität der Funktionen  $e_k(x) := e^{2\pi i k x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , wurde bereits gezeigt. Die Vollständigkeit des Systems als Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{T})$  wird z. B. in [19] bewiesen. Damit bilden sie eine Orthonormalbasis der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Torus.

**Definition 2.21** (Fourier-Koeffizienten). Sei  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Die Fourier-Koeffizienten von  $f$  sind definiert durch

$$c_k(f) := \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} f(x) e_{-k} dx, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Für  $f \in L^2(\mathbb{T})$  folgt aus der Theorie der Hilberträume:

$$(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \quad \text{und insbesondere} \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} c_k(f) = 0.$$

Die zugehörige Fourierreihe ist dann

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k,$$

wobei die Konvergenz im Sinne der  $L^2$ -Norm zu verstehen ist.

**Bemerkung 2.22.** *Durch die Multiplikation der Basisfunktionen mit den Fourier-Koeffizienten wird die Funktion  $f$  exakt dargestellt.*

**Definition 2.23** (Trigonometrische Polynome). Für  $n \in \mathbb{N}$  ist der Raum der *trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens  $n$*  definiert als

$$\Pi_n := \text{span}\{e_k : |k| \leq n\},$$

wobei  $e_k(x) := e^{2\pi i k x}$  die Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{T})$  bezeichnet.

**Definition 2.24** (Orthogonale Projektion). Die orthogonale Projektion auf  $\Pi_n$  ist definiert durch

$$P_n : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \Pi_n, \quad f \mapsto \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k| \leq n}} \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} e_k.$$

**Bemerkung 2.25.** *Die Theorie der Hilberträume liefert, dass die orthogonalen Projektionen  $P_n f$  gegen  $f$  im  $L^2(\mathbb{T})$ -Raum konvergieren, wenn  $n \rightarrow \infty$ .*

**Bemerkung 2.26.** *Die orthogonale Projektion approximiert die Funktion  $f$ . Es werden die Fourierkoeffizienten als Gewichtungsfaktoren in der Teilsumme verwendet. In der Regel beschreibt sie die Funktion  $f$  nicht exakt.*

## 3 Epizyklen

### 3.1 Bahnpunkt in der komplexen Ebene

Folgendes orientiert sich an [10] und [18].

Durch

$$P_1 = r \cdot e_k(t) = r \cdot e^{2\pi i k t}, \quad r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

lässt sich die Position eines Bahnpunktes  $P_1$  in der komplexen Ebene, der auf einer Kreisbahn mit Radius  $r$  rotiert und dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, parametrisieren. Aus der Eulerschen Formel (vgl. Bemerkung 2.18) folgt unmittelbar

$$P_1(t) = r \cdot e_k(t) = r \cdot \cos(2\pi kt) + i \cdot r \cdot \sin(2\pi kt), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Abbildung 6 zeigt die Position des Bahnpunktes  $P_1 = 1.4 e^{2\pi i t}$  für unterschiedliche

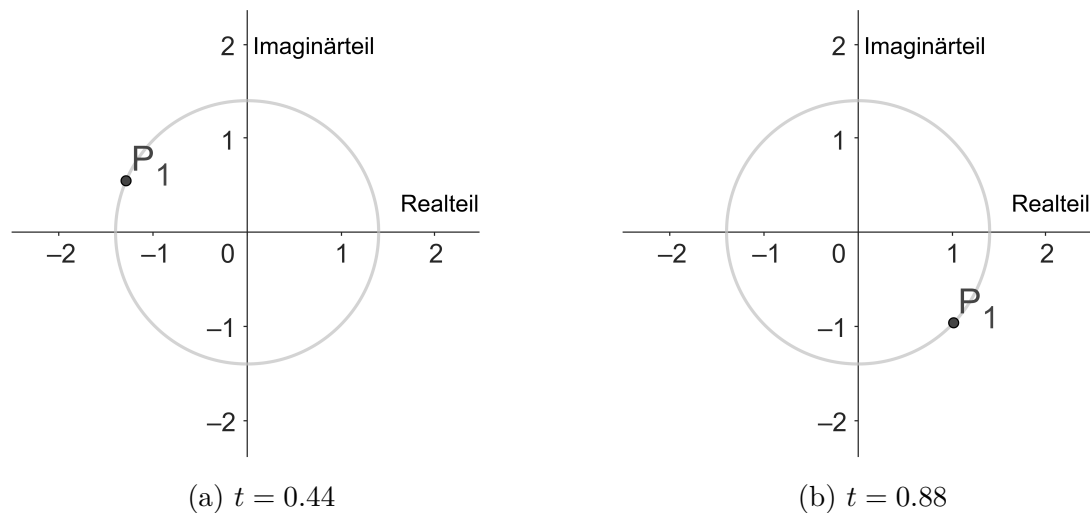


Abbildung 6: Position des Bahnpunktes  $P_1$

Werte von  $t$ . Diese sind jeweils unter den Abbildungen vermerkt. Die kreisförmige Kurve, auf der sich der Bahnpunkt bewegt, ist grau dargestellt.

Unter <https://www.geogebra.org/m/ftddenp8> steht ein, im Zuge der Arbeit entwickeltes interaktives Tool zur Veranschaulichung zur Verfügung.

### 3.2 Helixdarstellung komplexer Exponentialfunktionen

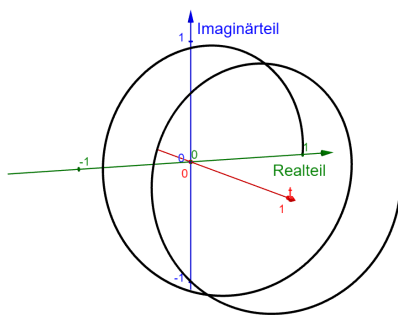
Komplexe Exponentialfunktionen lassen sich anschaulich im dreidimensionalen Koordinatensystem darstellen. Auf diese Weise treten zentrale Eigenschaften dieser Funktionen besonders deutlich hervor. In Abbildung 7 wird die Funktion

$$e_2(t) = e^{2\pi i 2t}, \quad t \in [0, 1)$$

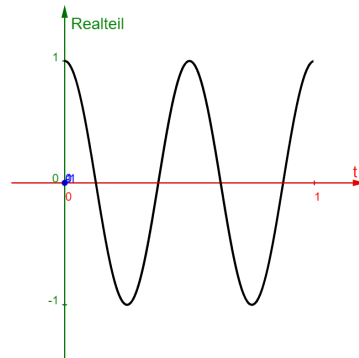


betrachtet.

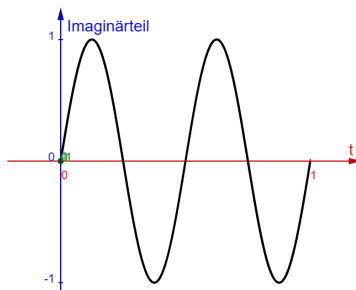
Durch unterschiedliche Blickwinkel auf die dreidimensionale Spiralkurve lassen sich der Sinus- und Kosinusverlauf sowie die Kreisstruktur erkennen. Besonders deutlich ist, dass jedem Parameter  $t$  genau ein Funktionswert zugeordnet wird (vgl. 2.18). Unter <https://www.geogebra.org/m/pdhkennu> steht ein GeoGebra Applet zur besseren Veranschaulichung zur Verfügung.



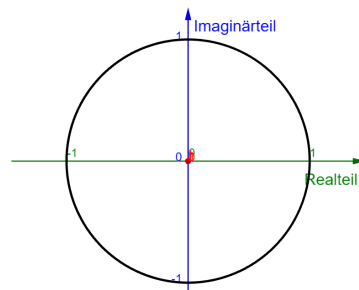
Spiralkurve im dreidimensionalen



Kosinus



Sinus



Kreis in der komplexen Ebene

Abbildung 7: Darstellungen der Funktion  $e^{2\pi i 2x}$ .

### 3.3 Das Konzept von Epizyklen

An dieser Stelle wird das in Kapitel 1.1 erwähnte Konzept der Epizyklen aufgegriffen. Die Einführung in die Epizykeltheorie orientiert sich an [5].

Man stelle sich einen Punkt vor, der mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit festem Radius rotiert. Solche Punkte werden Bahnpunkte genannt.

Durch Annahme des Zentrums des Kreises im Ursprung kann die Bewegung des Bahnpunktes  $P_1$  durch einfache parametrische Gleichungen

$$P_1(t) = r_1 e^{2\pi i k_1 t} = \begin{cases} \text{Realteil}(P_1(t)) = \text{Re}(r_1 e^{2\pi i k_1 t}) = r_1 \cos(2\pi k_1 t) \\ \text{Imaginärteil}(P_1(t)) = \text{Im}(r_1 e^{2\pi i k_1 t}) = r_1 \sin(2\pi k_1 t). \end{cases}$$

angegeben werden.

$r_1$  steht dabei für den Radius des Punktes  $P_1$  zu seinem Mittelpunkt und  $|k_1|$  für die Anzahl der Umdrehungen in einer Periode der Länge eins.

Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $\Delta t = 1$  durchläuft der Punkt dabei exakt  $|k_1|$  Umdrehungen.

In Abbildung 8 ist die Position des Bahnpunktes bei einer Frequenz von  $k_1 = 1$  für verschiedene Werte von  $t$  ersichtlich.

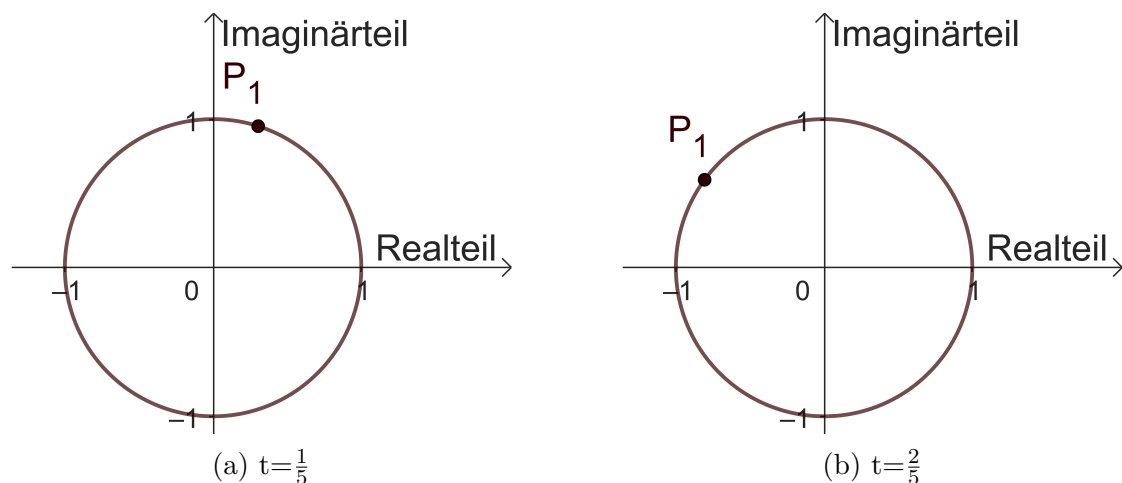


Abbildung 8: Punkt auf dem Einheitskreis für verschiedene Parameter  $t$

Das Vorzeichen von  $k_1$  bestimmt die Rotationsrichtung. Ist dieses positiv, handelt es sich um eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn. Ein negatives Vorzeichen führt zu einer Umdrehung im Uhrzeigersinn. Der Term  $e^{2\pi i t}$  beschreibt beispielsweise einen Bahnpunkt, der sich auf einer Kreisbahn mit Radius 1 und einer Frequenz von 1 gegen den Uhrzeigersinn bewegt.

Unter <https://www.geogebra.org/m/ftddenp8> steht ein GeoGebra Applet zur Veranschaulichung zur Verfügung.

Nun wird der Abbildung ein zweiter Kreis hinzugefügt. Dieser wird so konstruiert, dass  $P_1$  sein Mittelpunkt ist. Dadurch wird der erste Kreis zum Trägerkreis (Deferent) und der aufgesetzte Kreis zum Epizykel. Sofern sich  $P_1$  bewegt, bewegt sich somit der Mittelpunkt des Epizykels.

Durch Festlegen von  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = 2$ ,  $k_1 = 2$  und  $k_2 = -3$  entsteht der Stern aus Abbildung 9.

Die Position von  $P_2$  in Abhängigkeit von  $t$  kann durch

$$P_2(t) = r_1 \cdot e^{2\pi i k_1 t} + r_2 \cdot e^{2\pi i k_2 t} = \begin{cases} \text{Realteil}(P_2(t)) = r_1 \cos(2\pi k_1 t) + r_2 \cos(2\pi k_2 t) \\ \text{Imaginärteil}(P_2(t)) = r_1 \sin(2\pi k_1 t) + r_2 \sin(2\pi k_2 t) \end{cases}$$

berechnet werden.

$r_1$  steht für den Radius des ersten und  $r_2$  für den Radius des zweiten Kreises.

Durch Erhöhung der Anzahl der Epizyklen lässt sich die Komplexität der erzeugten geschlossenen Kurve erhöhen. Diese wird epizyklische Bahnkurve genannt und stellt die Bahn des Bahnpunktes des zuletzt hinzugefügten Epizykels dar.

In Abbildung 10 gilt  $r_1 = r_2 = r_3 = 3$ ,  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = 3$  und  $k_3 = -4$ . Die Position von  $P_3$  in Abhängigkeit vom Parameter  $t$  ergibt sich analog zu den vorhergehenden Beispielen über

$$P_3(t) = \sum_{l=1}^3 r_l \cdot e^{2\pi i k_l t} \begin{cases} \text{Realteil}(P_3(t)) = \sum_{l=1}^3 r_l \cos(2\pi k_l t) \\ \text{Imaginärteil}(P_3(t)) = \sum_{l=1}^3 r_l \sin(2\pi k_l t). \end{cases}$$

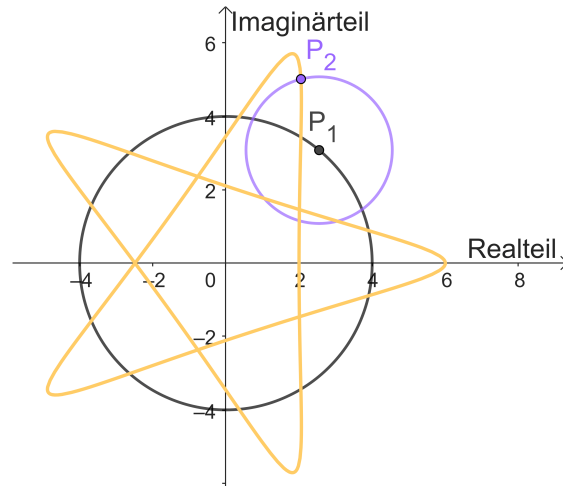


Abbildung 9: Stern der durch die Rotation zweier Kreise entsteht

Die Formel lässt sich für die Position des  $n$ -ten Bahnpunktes zu

$$P_n(t) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot e^{2\pi i k_l t} = \begin{cases} \text{Realteil}(P_n(t)) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot \cos(2\pi k_l t) \\ \text{Imaginärteil}(P_n(t)) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot \sin(2\pi k_l t) \end{cases} \quad (1)$$

verallgemeinern.

Dadurch lässt sich für ein beliebig großes aber endliches  $n$  die Position des  $n$ -ten Bahnpunktes berechnen. Gleichung 1 besitzt allerdings eine Schwachstelle. Betrachtet man einen einzelnen Summanden

$$r_l \cdot e^{2\pi i k_l t} = \begin{cases} \text{Realteil}(P_l(t)) = \cos(2\pi k_l t) \\ \text{Imaginärteil}(P_l(t)) = \sin(2\pi k_l t) \end{cases}$$

isoliert von allen übrigen Teilen der Summe lässt sich dieser Ausdruck als ein rotierender Punkt auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_l$  und Mittelpunkt im Ursprung der Gaußschen Zahlenebene interpretieren.

Für  $t = 0$  folgt

$$r_l \cdot \cos(0) = r_l$$

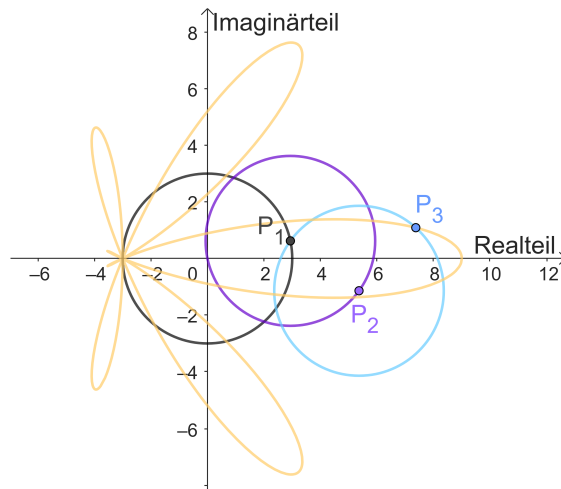


Abbildung 10: Epizyklische Bahnkurve von drei Kreisen

und

$$r_l \cdot \sin(0) = 0.$$

Somit können mit Gleichung 1 bloß Kurven gezeichnet werden für die

$$P_n(0) = \begin{cases} \operatorname{Re}(P_n(0)) = \sum_{l=1}^n r_l \\ \operatorname{Im}(P_n(0)) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

gilt.

Abbildung 11 verdeutlicht dies anhand der vorangegangenen Beispiele.

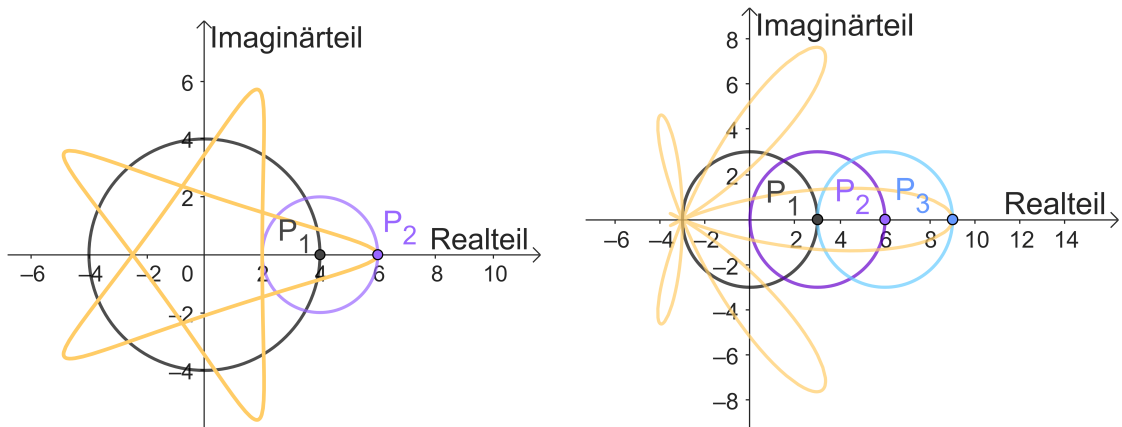


Abbildung 11: t=0 Vergleich

Durch Modifikation von Gleichung 1 durch einen Phasenwinkel  $\phi_l$  lässt sich diese Schwachstelle beheben. Die Position des  $n$ -ten Bahnpunktes wird dann über

$$P_n(t) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot e^{2\pi i k_l t} \begin{cases} \text{Realteil}(P_n(t)) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot \cos(2\pi k_l t + \phi_l) \\ \text{Imaginärteil}(P_n(t)) = \sum_{l=1}^n r_l \cdot \sin(2\pi k_l t + \phi_l) \end{cases} \quad (3)$$

berechnet.

Das neu eingeführte Symbol  $\phi_l$  gibt an, wie stark der Punkt an der Stelle  $l$  zu Beginn rotiert ist.

In Abbildung 12 (a) und (b) wurde  $\phi_2 = \frac{\pi}{4}$  gesetzt. Die Abbildung zeigt die Position der Bahnpunkte für  $t = 0$ . Es ist ersichtlich, dass der Punkt  $P_2$  um  $\frac{\pi}{4}$  Radiant rotiert ist.

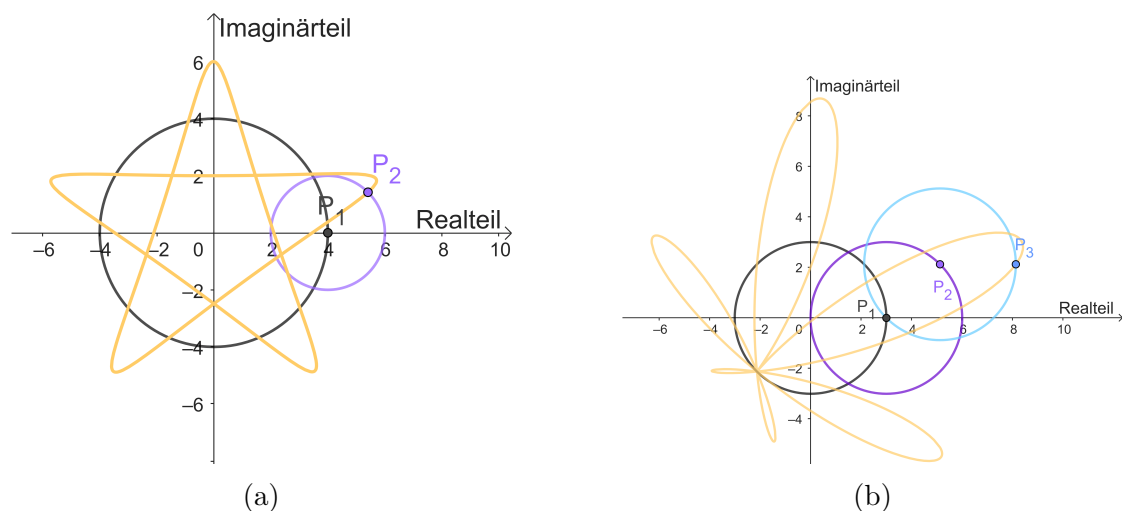


Abbildung 12: Punkt auf dem Einheitskreis für verschiedene Parameter  $t$

Mit Hilfe der komplexen Zahlen lässt sich Gleichung 3 weiter vereinfachen. Die Applets sind unter <https://www.geogebra.org/m/sbw8fpcp> und <https://www.geogebra.org/m/ecmf34aq> abrufbar.

**Proposition 3.1.** *Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  entspricht geometrisch dem Produkt ihrer Beträge und der Addition ihrer Phasenwinkel.*

**Beweis 3.2.** Seien  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  die Polardarstellungen zweier komplexer Zahlen. Dann gilt

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Das Produkt besitzt als Betrag das Produkt der Beträge und als Argument die Summe der Argumente.

Damit lässt sich Formel 3 durch die Wahl geeigneter  $c_l \in \mathbb{C}$  umschreiben zu

$$P_l(t) = \sum_{l=1}^n c_l \cdot e^{2\pi i k_l t} = \begin{cases} \text{Realteil}(P_l(t)) = \sum_{l=1}^n c_l \cdot \cos(2\pi k_l t) \\ \text{Imaginärteil}(P_l(t)) = \sum_{l=1}^n c_l \cdot \sin(2\pi k_l t) \end{cases} \quad (4)$$

,wobei  $|c_l| = r_l$  und  $\arg(c_l) = \phi_l$  gilt.

In Abbildung 13 ist ersichtlich welchen Einfluss die Multiplikation mit einer komplexen Zahl auf die Ausgangsposition der Bahnpunkte hat. Der grüne Vektor stellt den Faktor  $4 \cdot e^{i4.15}$  und der türkise Vektor den Faktor  $2 \cdot e^{i2.89}$ , abgetragen vom Punkt  $P_1$  dar. Die Faktoren  $c_l$  geben den Phasenwinkel, der addiert werden muss, sowie den Radius vor.

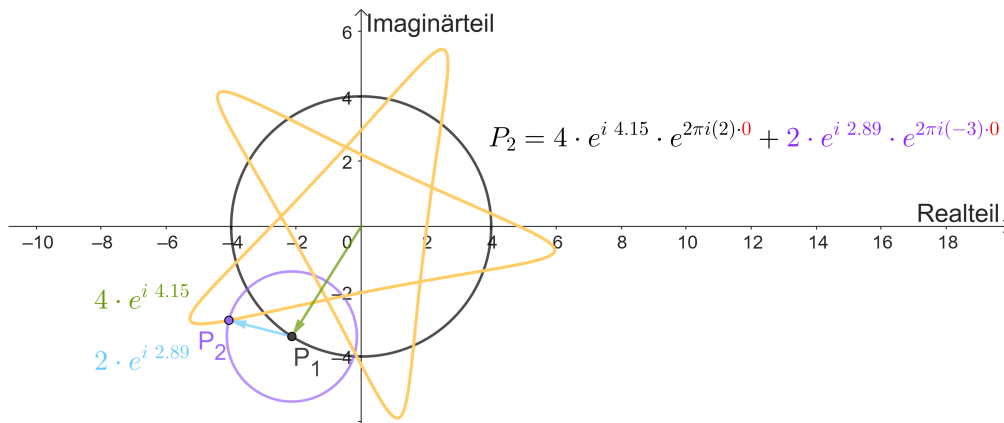


Abbildung 13: Beziehung zwischen Phasenwinkel und Eulerscher Formel

## 4 Diskrete Fourier Interpolation (DFT)

Definition 2.21 etabliert die vollständige Darstellung einer Funktion  $f$  mittels ihrer Fourierkoeffizienten.

In Kapitel 3.3 wurde aufgezeigt, wie durch die Vorgabe einiger Basisfunktionen  $e_k$  und Koeffizienten  $c_k$  verschiedene geschlossene Kurven erzeugt werden können.

Es drängt sich die Frage auf, ob dieses mathematische Gerüst im Kontext der Interpolation von Bildern verwendet werden kann. Ziel ist es, die Parameter so zu justieren, dass sie ein gegebenes Bild (bzw. eine Auswahl von Stellen auf dessen Kontur) möglichst exakt interpolieren.

### 4.1 Bilddateien

Um die Interpolationsmethode praxisnah einsatzfähig zu machen, soll diese vorgegebene Bilder interpolieren können. Im Allgemeinen liegt den verwendeten Bildern keine bekannte Funktionsgleichung  $f$  zugrunde. Es ist lediglich der Graph dieser bekannt. Um die Interpolation durchführen zu können, werden zufällig gewählte Stützwerte auf dem Bild gewählt. Für diese gilt, dass zwar der Wert bekannt ist, nicht aber die Stelle an der dieser angenommen wird. Dies folgt daraus, dass  $f$  unbekannt ist. Es gilt, die Parameter  $c_k$  und  $e_k$  derart zu justieren, dass die resultierende Kurve exakt durch die Stützwerte verläuft. Dazu werden sie in einen Signalvektor zusammengefasst.

Eine elegante Lösung des Problems bietet die diskrete Fouriertransformation (DFT). Mit ihr können die Gewichte  $c_k$  auf einfache Art bestimmt werden. Außerdem klärt die Theorie hinter ihr, welche Basisfunktionen zu verwenden sind.

Ihre Basis entsteht aus  $e_k$  Funktionen, die in äquidistanten Abständen abgetastet, passend normiert und in einem Vektor zusammengefasst werden. Daraus ergibt sich eine ONB die den wesentlichen Vorteil hat, dass die Orthogonalprojektion (vgl. Definition 2.3) über ein Skalarprodukt berechnet werden kann.

Ein Beispiel, für die zufällige Wahl der Stützwerte, entlang der Konturen eines Bildes, ist in Abbildung 14 ersichtlich. Um bereits einen Ausblick auf das Endergebnis zu geben zeigt Abbildung 16(b) die Bahnkurve, die diese Punkte interpoliert



in gelb.

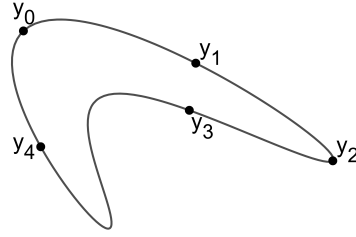


Abbildung 14: Wahl der Stützwerte von einer Kurve

Im nächsten Abschnitt wird die Basis der DFT eingeführt und essentielle Eigenschaften von ihr diskutiert. Anschließend wird mit dieser trigonometrisch interpoliert.

## 4.2 Eigenschaften komplexer Exponentialfunktionen

**Lemma 4.1.** *Seien  $k, n, j \in \mathbb{Z}$  mit  $n \neq 0$ . Dann gilt für um  $n$  verschobene Frequenzen:*

$$e^{2\pi i(k+n) \cdot \frac{j}{n}} = e^{2\pi i k \cdot \frac{j}{n}}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$e^{2\pi i \cdot \frac{k+n}{n} j} = e^{2\pi i \left(\frac{k}{n} + 1\right) j} = e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n} j} \cdot e^{2\pi i j}.$$

Da  $j \in \mathbb{Z}$  folgt unmittelbar

$$e^{2\pi i \cdot \frac{k}{n} j} \cdot e^{2\pi i j} = e^{2\pi i k \cdot \frac{j}{n}}.$$

□

**Bemerkung 4.2.** *Das Lemma zeigt, dass der obige Ausdruck für Frequenzen die sich modulo  $n$  unterscheiden den selben Wert liefert. Das heißt, Frequenzen, die um den Summanden  $n$  verschoben sind, liefern an den Stellen  $\frac{j}{n}, j \in \mathbb{Z}$  ausgewertet das gleiche Ergebnis. Das ist in Abbildung 15 zu sehen. Trotz unterschiedlichen Minimalperioden fallen die Funktionswerte der beiden Funktionen an den abgetasteten Stellen zusammen.*

Diese Eigenschaft wird unter anderem genutzt, um mit niederfrequenten Basisfunktionen zu interpolieren.

In violett ist die Funktion  $e_3$ , in schwarz die Funktion  $e_1$  im Intervall  $x \in [0, 1]$  ersichtlich. Die orangen Punkte markieren die Funktionswerte an den Stellen  $t = 0$  und  $t = \frac{1}{2}$ .

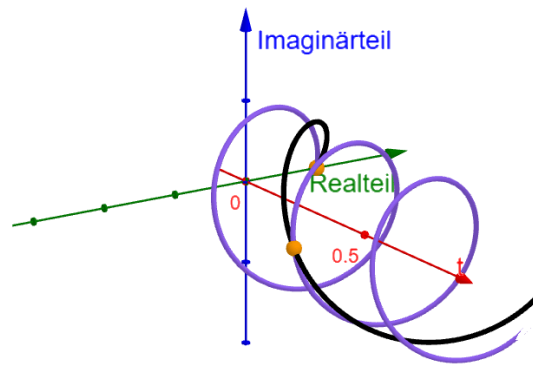


Abbildung 15: Abtastpunkte für  $n = 2$  von zwei komplexen Exponentialfunktionen ( $e_1$  schwarz  $e_3$  violett)

**Definition 4.3.** Die Menge:

$$[n] := \left\{ j \in \mathbb{Z} : -\frac{n}{2} < j \leq \frac{n}{2} \right\}$$

wird für die Schwingungen der Frequenzen verwendet.

Dabei werden Frequenzen, für die  $\frac{n}{2} < j < n$  gilt, durch  $j - n$  ersetzt (siehe Lemma 4.1). Sie werden also durch niederfrequentere Frequenzen ausgetauscht.

**Definition 4.4.** Die Abtastwerte eines sich mit Frequenz  $k$  auf dem Einheitskreis bewegendes Bahnpunktes lassen sich als Vektor

$$B_k := \left( e^{2\pi i k \frac{j}{n}} \right)_{j \in [n]} \in \mathbb{C}^n, \quad k \in [n].$$

zusammenfassen.

**Lemma 4.5** (Charakteristische Summen). *Für  $m \in \mathbb{Z}$  gilt:*

$$\frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i m \frac{j}{n}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \in n\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Sei  $m = k \cdot n$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i m \frac{j}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i \frac{k n j}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i k j}.$$

Da  $e^{2\pi i k j} = 1$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$ , folgt:

$$\frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i m \frac{j}{n}} = 1.$$

Ist  $n$  gerade, dann ergibt sich aus der geometrischen Summe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j \in [s]} e^{2\pi i \frac{m j}{n}} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{m(j+1-\frac{n}{2})}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{2\pi i \frac{m(1-\frac{n}{2})}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{m j}{n}} \\ &= \frac{1}{n} e^{2\pi i \frac{m(1-\frac{n}{2})}{n}} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{n}}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da der Zähler verschwindet und  $m \notin n\mathbb{Z}$  ist.

Ist  $n$  ungerade, dann führen ähnliche Rechnungen zur Behauptung.  $\square$

Der einzige Fall in dem die Summe ungleich Null ist, ist jener in dem alle Abtastwerte auf dem Punkt  $1 + 0i$  zusammenfallen. Das ist entweder der Fall wenn es sich um die Nullfrequenz, oder eine kongruente Frequenz modulo  $n$  handelt.

Nachstehendes Lemma orientiert sich an [20, Kap. 2.3].

**Lemma 4.6** (Orthonormale Basis). *Eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$  ist gegeben durch die Vektoren*

$$b_k := \left( \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi i k \frac{j}{n}} \right)_{j \in [n]} \in \mathbb{C}^n, \quad k \in [n]$$

*Beweis.* Wir betrachten das Skalarprodukt zweier Vektoren  $b_k$  und  $b_\ell$ . Auf Grund der Periodizität der Frequenzen (siehe Bemerkung 4.2) wählen wir  $-\frac{n}{2} < k, \ell \leq \frac{n}{2}$ :

$$\langle b_k, b_\ell \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i k \frac{j}{n}} \cdot \overline{e^{2\pi i \ell \frac{j}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} e^{2\pi i (k-\ell) \frac{j}{n}}.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

- Falls  $k = \ell$ , so ist  $k - \ell = 0$ . Auf Grund von Lemma 4.5 gilt:

$$\langle b_k, b_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} 1 = \frac{n}{n} = 1.$$

- Falls  $k \neq \ell$ , so ist  $m := k - \ell \notin n\mathbb{Z}$ . Nach Lemma 4.5 gilt dann:

$$\sum_{j \in [n]} e^{2\pi i m \frac{j}{n}} = 0,$$

also ist:

$$\langle b_k, b_\ell \rangle = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0.$$

Damit sind die Vektoren orthonormal. Da es  $n$  viele linear unabhängige Vektoren in einem  $n$ -dimensionalen Raum sind, bilden sie eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^n$ . □

**Bemerkung 4.7.** *Es wurde gezeigt, dass die Vektoren eine Orthonormalbasis im  $\mathbb{C}^n$  bilden. Diese Eigenschaft ist entscheidend. Sie stellt sicher, dass jeder Signalvektor aus  $\mathbb{C}^n$  durch eine geeignete Linearkombination der Basisvektoren  $(b_k)_{k \in [n]}$  dargestellt werden kann.*

Die Definition der DFT folgt [20, Kap. 2.3].

**Definition 4.8** (Diskrete Fourier-Transformation). Die Abbildung  $\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , definiert durch

$$\mathcal{F}y := (\langle y, b_k \rangle)_{k \in [n]} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\langle y, B_k \rangle)_{k \in [n]} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j \in [n]} y_j e^{-2\pi i \frac{kj}{n}} \right)_{k \in [n]},$$

wird *diskrete Fourier-Transformation* genannt.

Eine zusätzliche Skalierung des Signalvektors mit  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  führt zum skalierten Sampling.

**Definition 4.9.** (Skaliertes Sampling) Für  $f \in C(\mathbb{T})$  wird das *skalierte Sampling* durch

$$f_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \left( f \left( \frac{j}{n} \right) \right)_{j \in [n]} \in \mathbb{C}^n.$$

definiert.

Die DFT approximiert die Fourier-Koeffizienten mittels einer Quadraturformel:

$$c_k(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} f \left( \frac{j}{n} \right) e^{-2\pi i k \frac{j}{n}} = \langle f_n, b_k \rangle_{\mathbb{C}^n} = (\mathcal{F} f_n)_k. \quad (5)$$

Durch eine Linearkombination der Fourierkoeffizienten mit den entsprechenden Basisvektoren ergibt sich der Signalvektor.

**Definition 4.10.** Die inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT) ist gegeben durch:

$$y = \left( \sum_{k \in [n]} (F f_n)_k \cdot e^{2\pi i k \frac{j}{n}} \right)_{j \in [n]}$$

### 4.3 Existenz und Eindeutigkeit der trigonometrischen Interpolation

Gegeben sei ein Signalvektor  $f_n$ . Das Ziel besteht darin, ein trigonometrisches Polynom derart zu bestimmen, dass für ein beliebiges  $l \in [n]$

$$f_n = \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F} f_n)_k e_k \left( \frac{l}{n} \right),$$

gilt. Mit anderen Worten: Es wird eine endliche Fourierreihe gesucht, die an den gegebenen Stützstellen exakt durch die Stützwerte verläuft.

Der Folgende Beweis orientiert sich an [7].

**Proposition 4.11** (Existenz und Eindeutigkeit der trigonometrischen Interpolation). *Sei  $n \in 2\mathbb{N}_+$  und seien  $x_j = \frac{j}{n}$  sowie  $y_j \in \mathbb{C}$  für  $j = 1, \dots, n$  gegeben. Dann existiert genau ein trigonometrisches Polynom  $f_I \in \Pi_{n/2}$  mit  $c_{-n/2}(f_I) = 0$ , sodass*

$$f_I(x_j) = y_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Dabei ist  $f_I$  gegeben durch

$$f_I(x) = \sum_{k=1-n/2}^{n/2} c_k(f_I) e_k(x),$$

wobei

$$c_k(f_I) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j e^{-2\pi i k x_j}.$$

*Beweis.* Zunächst wird die *Existenz* gezeigt. Die Fourier-Koeffizienten sind durch

$$c_k(f_I) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j e^{-2\pi i k x_j}, \quad \text{für } k = 1 - \frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \quad \text{mit } c_{-n/2}(f_I) := 0$$

gewählt. Es wird

$$f_I(x) := \sum_{k \in [n]} c_k(f_I) e_k(x),$$

gesetzt. Da  $f_I$  eine Linearkombination von genau  $n$  Basisfunktionen  $e_k$  mit  $k \in [n]$  ist, gehört  $f_I$  zum Raum  $\Pi_{n/2}$ .

Nun prüfen wir, dass  $f_I$  tatsächlich die Daten interpoliert. Für jedes  $l = 1, \dots, n$  gilt:

$$f_I(x_l) = \sum_{k=1-n/2}^{n/2} c_k(f_I) e_k(x_l) = \sum_{k=1-n/2}^{n/2} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j e^{-2\pi i k x_j} \right) e^{2\pi i k x_l} = \sum_{j=1}^n y_j \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1-n/2}^{n/2} e^{2\pi i k (x_l - x_j)} \right).$$

Aus Lemma 4.5 folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1-n/2}^{n/2} y_j e^{2\pi i k(x_l - x_j)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } l = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit folgt:

$$f_I(x_l) = \sum_{j=1}^n y_j \cdot \delta_{lj} = y_l.$$

Damit ist gezeigt, dass  $f_I(x_j) = y_j$  für alle  $j = 1, \dots, n$ .

Für die *Eindeutigkeit* sei  $g \in \Pi_{n/2}$  eine weitere Funktion mit  $c_{-n/2}(g) = 0$  und  $g(x_j) = y_j$  für alle  $j$ . Dann gilt nach demselben Argument:

$$c_k(g) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_j) e^{-2\pi i k x_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j e^{-2\pi i k x_j} = c_k(f_I),$$

für alle  $k = 1 - n/2, \dots, n/2$ , also ist  $g = f_I$ .

□

**Bemerkung 4.12.** Die exakten Stützpunkte der Funktion  $f_n$  können unter der Voraussetzung gewählt werden, dass  $f_n$  bekannt ist. Ist bloß der Graph der Funktion  $f_n$  bekannt können auf diesem Stützwerte gewählt werden.

Sammelt man diese Stützwerte in einem Signalvektor  $f_n$  wird jedem Stützwert eine Stelle zugeordnet, an dem dieser angenommen wird. Auf Grundlage dieser Stützwerte kann eine trigonometrisch interpolierende Kurve berechnet werden. Diese Kurve verläuft exakt an den Stellen  $\frac{j}{n}, j \in [n]$  durch die Stützwerte. Die interpolierende Kurve entspricht dabei im Allgemeinen nicht der Ausgangsfunktion  $f$ .

Ein Beispiel für die Wahl der Stützwerte aus einer gegebenen Kurve ist in Abbildung 16 zu sehen.

Dazu werden (beliebige) Stützwerte  $y_0, \dots, y_4$  auf der schwarzen gegebenen Kur-

ve

$$f = (1.08 - 0.04i) \cdot e_{-2} + (-1.16 - 1.18i) \cdot e_{-1} + (-4.42 + 1.02i)e_0 + \\ (-0.73 + 0.27i) \cdot e_1 + (0.13 - 0.89i)e_2$$

(siehe Abbildung 24(a)) gewählt. In (b) ist in gelb die resultierende trigonometrische Bahnkurve

$$f_I = (0.31 - 0.27i) \cdot e_{-2} + (-1.81 - 0.99i) \cdot e_{-1} + (-4.2 + 1.58i)e_0 + \\ + (-0.75 + 0.92i) \cdot e_1 + (-0.06 - 0.54i) \cdot e_2$$

eingezeichnet. Obwohl in der IDFT die gleiche Anzahl an Schwingungen wie in der Ausgangsfunktion  $f$  enthalten sind stimmen die Kurven  $f$  und  $f_I$  nicht überein. Dies liegt daran, dass bloß die Stützwerte, nicht aber die zugehörigen Stützstellen bekannt sind.

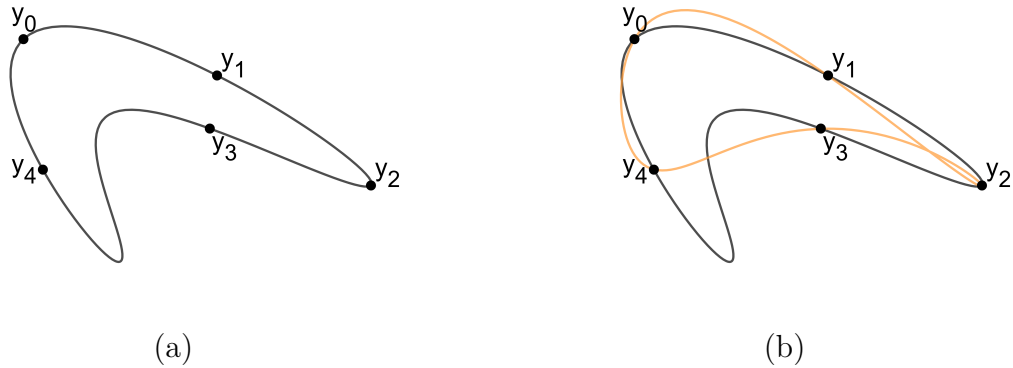


Abbildung 16: Wahl der Stützwerte

## 4.4 Die Güte der Approximation

Im Folgenden wird der Graph einer Funktion  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ , also einer stetigen Funktion auf dem Torus, betrachtet. Sie besitzt im Allgemeinen unendlich viele Fourierkoeffizienten, die ihre Frequenzanteile vollständig beschreiben. Von dieser Funktion werden endlich viele Stützwerte für die Interpolation verwendet.

Ziel ist es zu überprüfen, wie gut der Graph der Eingangsfunktion  $f$  interpoliert



wird. Dazu wird der maximal auftretende Fehler zwischen  $f$  und der interpolierenden Funktion eingeschränkt.

Es gilt anzumerken, dass im gewählten Kontext die Funktion  $f$  nicht bekannt ist. Es ist lediglich der Graph dieser bekannt. Welchen Funktionswert die Funktion an einer bestimmten Stelle annimmt, geht aus dem Graphen nicht hervor. Die Stützwerte werden zufällig auf dem Graphen gewählt. Dadurch, dass diese als Werte des Signalvektors  $f_n$  in der DFT verwendet werden, kann durch die IDFT eine Kurve rekonstruiert werden, die die Stützwerte in äquidistanten Abständen durchläuft.

Folgendes orientiert sich an [6].

**Definition 4.13** (Sobolev-Raum). Für  $s \geq 0$  ist der Sobolev-Raum  $H^s(\mathbb{T})$  definiert als

$$H^s(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |c_k(f)|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{H^s} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s c_k(f) c_k(g).$$

**Bemerkung 4.14.** Je größer  $s$ , desto stärker werden Frequenzanteile mit großem  $|k|$  abgestraft. Funktionen müssen also glatter sein, um in höheren  $H^s(\mathbb{T})$  zu liegen.

**Satz 4.15.** Sei  $s \geq 0$  und  $f \in H^s(\mathbb{T})$ . Dann gilt für die orthogonale Projektion  $P_n f$  auf den Raum der trigonometrischen Polynome  $\Pi_n$ :

$$\|P_n f - f\|_{L^2} \leq n^{-s} \|f\|_{H^s}.$$

*Beweis.* Es wird die Definition der  $L^2$ -Norm in  $L^2(\mathbb{T})$  sowie die Orthonormalität der Fourierbasis  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  verwendet. Dann gilt:

$$\|P_n f - f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{|k| > n} c_k(f) e_k \right\|_{L^2}^2 = \sum_{|k| > n} |c_k(f)|^2.$$

Dieser Ausdruck wird umgeschrieben:

$$\sum_{|k| > n} |c_k(f)|^2 = \sum_{|k| > n} (1 + |k|^2)^{-s} \cdot (1 + |k|^2)^s |c_k(f)|^2.$$

Da für  $|k| > n$  gilt:  $(1 + |k|^2)^{-s} \leq (1 + n^2)^{-s} \leq n^{-2s}$ , folgt durch Verwendung der Definition des Skalarprodukts (vgl. Definition 4.13 )

$$\sum_{|k| > n} |c_k(f)|^2 \leq n^{-2s} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^s |c_k(f)|^2 = n^{-2s} \|f\|_{H^s}^2.$$

Daraus ergibt sich durch das Ziehen der Wurzel:

$$\|P_n f - f\|_{L^2} \leq n^{-s} \|f\|_{H^s}.$$

□

Je größer der Sobolev-Index  $s$  ist (also je glatter  $f$  ist), desto schneller konvergiert die Partialsumme. Auch eine Erhöhung der Anzahl der betrachteten Fourier-Moden (also ein größerer Approximationsgrad  $n$ ) führt zu einer verbesserten Annäherung.

Wird eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$  interpoliert, die hinreichend 'glatt' ist, so reicht es die niedrigen Frequenzen zu betrachten, da die meiste Energie der Funktion in diesen konzentriert ist. Die Konvergenz der Fourierkoeffizienten (siehe Bemerkung 2.25), in Kombination mit dem zuvor gezeigten Abschätzungsverfahren, liefert hierfür eine tragfähige theoretische Begründung. Für die obige Abschätzung ist es notwendig die tatsächlichen Fourierkoeffizienten von  $P_n f$  zu kennen.

Im Folgenden wird eine Schwäche der Interpolation gezeigt, wenn kein ausreichendes Frequenzspektrum berechnet wird. Dazu wird eine Funktion  $f$  mit einer festen Anzahl  $n_1$  an Schwingungen  $\neq 0$  mit  $n_2 < n_1$  Stützwerten interpoliert.

Der folgende Satz ist ein klassisches Resultat und erfolgt ohne Beweis. Er ist in [11] nachzulesen.

**Satz 4.16** (Aliasing). *Sei  $f \in C(\mathbb{T})$  und  $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . Dann gilt für das durch normiertes Sampling definierte Vektorargument  $f_n \in \mathbb{C}^n$  und die diskrete Fouriertransformation  $\mathcal{F}f_n$ :*

$$(\mathcal{F}f_n)(k) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k+ln}(f), \quad \text{für alle } k \in [n].$$

**Bemerkung 4.17.** Der Satz besagt, dass die von der DFT erhaltenen Fourierkoeffizienten sich aus dem tatsächlichen Fourierkoeffizienten von  $f$  (für  $l = 0$ ), sowie aus sämtlichen um die Frequenz  $n$  verschobenen Fourierkoeffizienten zusammensetzen.

Dies geschieht unter der Voraussetzung, dass die Summe der Norm aller tatsächlichen Fourierkoeffizienten endlich ist.

Der folgende Satz ist ein klassisches Resultat und erfolgt ohne Beweis.

**Satz 4.18** (Approximation der Fourier-Koeffizienten). Für  $f \in H^s(\mathbb{T})$  mit  $s > 1/2$  gilt

$$\|c_{[n]}(f) - \mathcal{F}f_n\| \leq C_s \left(\frac{n}{2}\right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

wobei  $C_s = \left(2 + \frac{1}{2s-1}\right)^{\frac{1}{2}}$  gilt.

**Bemerkung 4.19.** Je glatter eine Funktion  $f$  ist (großes  $s$  in der Sobolev Norm), desto geringer ist der Fehler zwischen den tatsächlichen Fourierkoeffizienten und den durch die DFT berechneten Fourierkoeffizienten.

Wichtig ist der Faktor  $\left(\frac{n}{2}\right)^{-s}$ . Der negative Exponent führt für großes  $s$  zu einer schnellen Konvergenz des Aliasing Fehlers der DFT Fourierkoeffizienten.

Ebenso besagt der Term, dass durch eine Erhöhung der Anzahl der Stützwerte der Fehler verkleinert werden kann. Insbesondere im Kontext epizyklischer Bahnkurven ist dieser Punkt besonders deutlich zu unterstreichen. Die Vergrößerung von  $n$  erfolgt über die Auswahl von mehr Stützwerten auf der gegebenen Kurve von  $f$ .

**Satz 4.20** (Interpolation von  $f$ ). Für  $f \in H^s(\mathbb{T})$  mit  $s > 1/2$  interpoliert die Funktion  $\sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k$  die Funktion  $f$  in  $\frac{l}{n}$  für  $l \in [n]$ , und es gilt:

$$\left\| f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_s \left(\frac{n}{2}\right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

wobei  $C_s = 1 + \left(2 + \frac{1}{2s-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

*Beweis.* Um die Interpolationseigenschaft zu prüfen, betrachten wir für  $l \in [n]$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \left( \frac{l}{n} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} \sum_{k \in [n]} f \left( \frac{j}{n} \right) e_{-k} \left( \frac{j}{n} \right) e_k \left( \frac{l}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} f \left( \frac{j}{n} \right) \sum_{k \in [n]} e_k \left( \frac{l-j}{n} \right) \\ &= f \left( \frac{l}{n} \right). \end{aligned}$$

Für die Fehlerabschätzung verwenden wir die Projektion  $\tilde{P}_n f = \sum_{k \in [n]} c_k(f) e_k$  auf den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad  $n$ . Mittels Dreiecksungleichung lässt sich der Gesamtfehler in den Approximationsfehler der Fourier-Partialsumme und den Aliasing-Fehler aufteilen:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq \|f - \tilde{P}_n f\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left\| \tilde{P}_n f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq 2^s n^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} + \left\| \tilde{P}_n f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Der erste Term folgt aus der Standard-Fehlerabschätzung für die Fourier-Projektion in Sobolev-Räumen. Das gilt auch für  $\tilde{P}_n$ . Für den zweiten Term folgt aus der Plancherel-Identität:

$$\left\| \tilde{P}_n f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{k \in [n]} |c_k(f) - (\mathcal{F}f_n)(k)|^2.$$

Das Ziehen der Wurzel ergibt

$$\sqrt{\sum_{k \in [n]} |c_k(f) - (\mathcal{F}f_n)(k)|^2} = \|c_{[n]}(f) - \mathcal{F}f_n\|.$$

Unter Anwendung der Koeffizientenabschätzung aus Satz 4.18 ergibt sich schließ-

lich:

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k \in [n]} (\mathcal{F}f_n)(k) e_k \right\|_{L^2(\mathbb{T})} &\leq \left( \frac{n}{2} \right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|c_{[n]}(f) - \mathcal{F}f_n\| \\
&\leq \left( \frac{n}{2} \right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} + \left( 2 + \frac{1}{2s-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n}{2} \right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
&\leq \left( \frac{n}{2} \right)^{-s} \|f\|_{H^s(\mathbb{T})} \left( 1 + \left( 2 + \frac{1}{2s-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

□

**Bemerkung 4.21.** Der Satz liefert für die Arbeit zwei zentrale Ergebnisse. Diese ergeben sich durch den Faktor  $\left( \frac{n}{2} \right)^{-s}$  in der Abschätzung.

Erstens nimmt die Güte der Approximation mit zunehmender Glattheit der Funktion zu. Je glatter die Funktion desto größer der Sobolev Index. Dadurch, dass dieser als negativer Exponent vorkommt, konvergieren die Fourierkoeffizienten schnell. Zweitens kann die Interpolierende auch durch eine Erhöhung der Anzahl der Stützpunkte verbessert werden.

## 5 Grafische Darstellung

Im Hinblick auf die grafische Darstellung der trigonometrischen Interpolation in der komplexen Ebene werden im Folgenden die Terme der Fouriertransformation an konkreten Beispielen grafisch dargestellt.

### 5.1 Visualisierung der DFT Basis in der komplexen Ebene

Zunächst werden die Abtastpunkte der unnormierten Basisvektoren  $B_k$  (vgl. Definition 4.4) veranschaulicht. Diese treten in der DFT im Skalarprodukt auf.

$$c_k = \frac{1}{n} \langle F_n, B_k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j \in [s]} y_j \cdot e^{2\pi i k \frac{j}{n}}$$

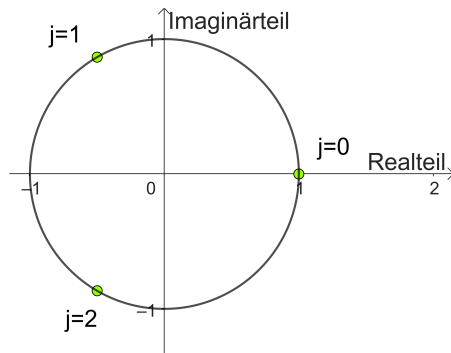


Abbildung 17:  $n=3, k=1$

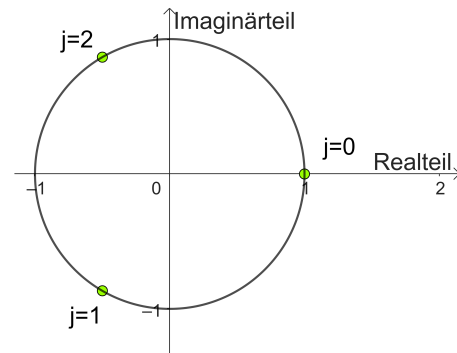


Abbildung 18:  $n=3, k=-1$

### 5.1.1 Frequenzvorzeichen und Abtastrichtung

Sämtliche Abtastwerte befinden sich auf einem Kreis mit Radius 1. Eine Veränderung des Vorzeichens der Grundfrequenz  $k$ , führt zu einer Veränderung der Richtung in der abgetastet wird. Negative Vorzeichen bewirken eine Abtastung im Uhrzeigersinn, positive eine entgegengesetzte. Beim Vergleich von Abbildung 17 und 18 wird ersichtlich, dass die abgetasteten Punkte an der x-Achse gespiegelt sind. Das ist für alle  $n$  so und folgt unmittelbar aus  $\cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$ .

### 5.1.2 Struktur der Stützstellen für $k \neq 1$

Der Parameter  $k$  nimmt nach Konstruktion nur ganzzahlige Werte an. Wird er verändert, wirkt sich das direkt auf die Stützstellen aus. Sie werden auf das  $k$ -fache ihrer Position im Vergleich zur Frequenz mit  $k = 1$  abgebildet. Für  $k = 1$  und beliebiges  $n$  werden alle Komponenten erfasst, die in den Basisvektoren auftreten können. Die Wahl eines anderen  $k \in [n]$  führt zu einem Vektor, der bloß Komponenten besitzt, die ebenfalls in  $k = 1$  enthalten sind.

Abbildung 19 zeigt die Stützstellen für  $k = 2$  und  $n = 6$ . Dabei ist ersichtlich, dass mehrere Abtastpunkte zusammenfallen können. Es stellt sich die Frage, wie viele unterschiedliche Werte die Abtastpunkte in einem bestimmten Basisvektor annehmen.

**Lemma 5.1** (Anzahl verschiedener Abtastpunkte). *Seien  $n, k, m \in \mathbb{N}$  mit  $n = k \cdot m$ . Dann nimmt der Ausdruck  $e^{2\pi i k \frac{j}{n}}$  für  $j \in [n]$  genau  $m$  verschiedene Werte*

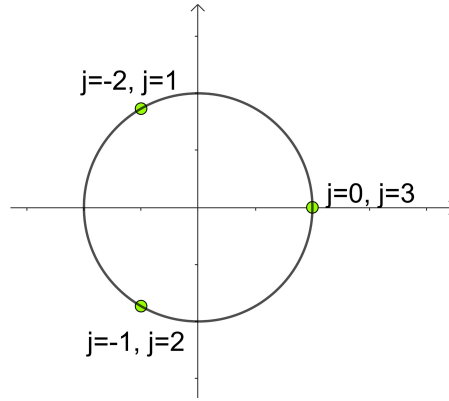


Abbildung 19: Stützstellen für  $k = 2$   $n = 6$

an.

*Beweis.* Sei  $n = k \cdot m$ . Dann gilt für alle  $j \in [n]$ :

$$e^{2\pi i k \frac{j}{n}} = e^{2\pi i k \frac{j}{km}} = e^{2\pi i \frac{j}{m}}.$$

Der Wert hängt somit nur vom Rest von  $j \bmod m$  ab. Da es genau  $m$  verschiedene Restklassen modulo  $m$  gibt, ergeben sich auch genau  $m$  verschiedene Werte der Abtastpunkte. Das ist eine direkte Folgerung aus Lemma 4.1.  $\square$

Die Basisvektoren ergeben sich aus dem in Lemma 5.1 ausgewerteten Ausdruck. Damit ist gezeigt, dass für  $n = k \cdot m$  exakt  $m$  verschiedene Abtastpunkte existieren.

### 5.1.3 Die Nullfrequenz

Beim unnormierten Basisvektor  $B_0$  fallen alle Abtastpunkte im Punkt  $1+0i$  zusammen. Für diese spezielle Frequenz gilt  $e^{2\pi i 0 \frac{j}{n}} = e^0 = 1$  für alle  $j \in [n]$ . Unabhängig von der Dimension des Vektorraums erhält man also einen Vektor, der an allen Eintragungen 1 liefert. Das komplex konjugierte ist in diesem Fall gleich der Ausgangszahl.

In Abbildung 20 ist diese Eigenschaft an einem Beispiel ersichtlich. Dabei fallen alle Abtastpunkte zusammen.

Jedes  $B_k$  stellt einen Vektor mit  $n$  Einträgen dar, dessen Komponenten den Funktionswerten der komplexen Exponentialfunktion mit der Frequenz  $k$  an den

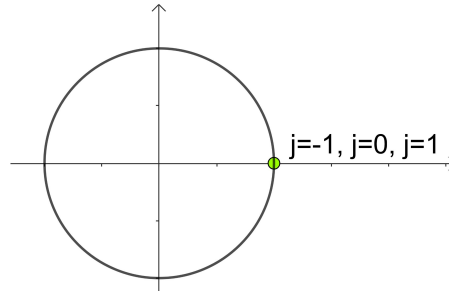


Abbildung 20: Stützstellen für  $k = 0$   $n = 3$

Abtastpunkten für  $j = 1, \dots, n$  entsprechen. Das Vorzeichen von  $k$  bestimmt dabei lediglich die Drehrichtung der Abtastung, während der Betrag  $|k|$  die Anzahl der vollständigen Umläufe auf dem Einheitskreis festlegt

Wie in 4.6 gezeigt, handelt es sich bei der DFT-Basis um eine Orthonormalbasis. Da sie den Raum  $\mathbb{C}^n$  aufspannt, lässt sich jeder Signalvektor aus diesem Raum als eindeutige Linearkombination ihrer Elemente darstellen.

## 5.2 Grafische Interpretation der DFT

Der folgende Ansatz zur grafischen Interpretation des Koeffizienten  $c_0$  orientiert sich an der visuellen Darstellung eines Erklärvideos von *3Blue1Brown* ([1]). Anstatt den Wert nur rein algebraisch über die Formel zu berechnen, entspricht  $c_0$  als konstanter Term der Fourier-Approximation geometrisch dem Mittelwert aller gewählten Stützpunkte in der Gaußschen Zahlenebene.

Ein Bestimmter Abtastwert  $y_j$  ist mit Hilfe der DFT und IDFT als

$$y_j = \sum_{k \in [n]} c_k \cdot e^{2\pi i k \frac{j}{n}}$$

darstellbar. Für ein beliebiges aber festes  $k$  dreht die DFT dabei jeden abgetasteten Punkt

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j \in [s]} y_j \cdot \overline{e^{2\pi i k \frac{j}{n}}}$$



exakt so, dass die Wirkung des  $k$ -ten Koeffizienten aufgehoben wird.

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j \in [n]} \sum_{k \in [n]} c_k \cdot e^{2\pi i k \frac{j}{n}} \cdot e^{-2\pi i k \frac{j}{n}}$$

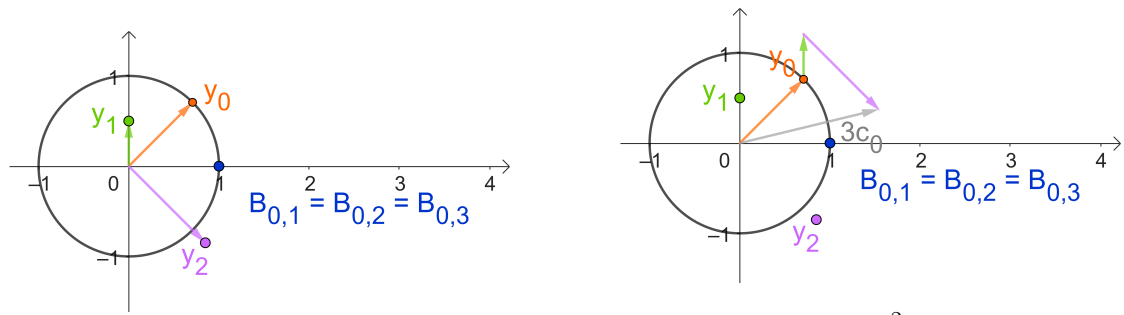
Frequenzen ungleich  $k$  werden durch die Multiplikation auf ganzzahlige Frequenzen ungleich 0 abgebildet. Aus Lemma 4.5 folgt unmittelbar, dass dadurch bloß der DFT- Koeffizient  $c_k$  erhalten bleibt.

### 5.2.1 Grafische Bestimmung von $c_0$

Der Fourierkoeffizient  $c_0$  ergibt sich über:

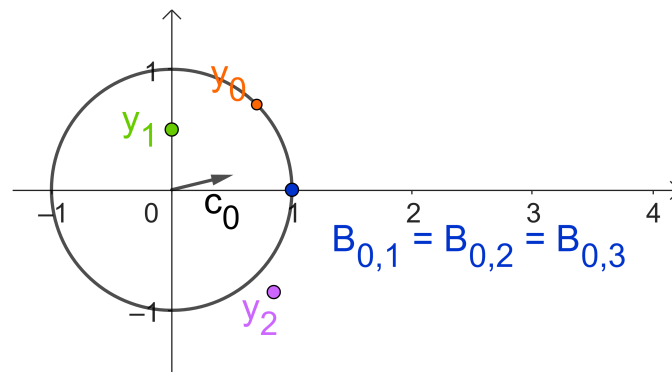
$$c_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 y_j e^{-2\pi i 0 \frac{j}{3}} = \frac{1}{3} (y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 1).$$

Um  $c_0$  zu berechnen wird also das arithmetische Mittel der Signalwerte gebildet. In einem gewissen Sinne bedeutet das eine Schwerpunktbildung der drei Punkte. Die beteiligten Summanden können als Vektoren veranschaulicht werden. Das ist in Abbildung 21 ersichtlich.



Summanden als Vektoren

$$3c_0 = \sum_{j=0}^2 y_j$$



$$c_0 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 y_j$$

Abbildung 21: Geometrische Interpretation der Fourierkoeffizienten

**Beispiel 1.** Nun wird die Idee der Entwerrung grafisch veranschaulicht und eine Methode demonstriert, mit Hilfe derer sich der Fourierkoeffizient an der Stelle  $k$  grafisch ermitteln lässt. Ziel ist es, den Fourierkoeffizienten  $c_1$  bei  $n = 3$  Stützpunkten grafisch zu bestimmen. Dazu werden die Summanden des Ausdrucks

$$c_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 y_j e^{-2\pi i \frac{j}{3}} = \frac{1}{3} (y_0 e^{-2\pi i \frac{0}{3}} + y_1 e^{-2\pi i \frac{1}{3}} + y_2 e^{-2\pi i \frac{2}{3}})$$

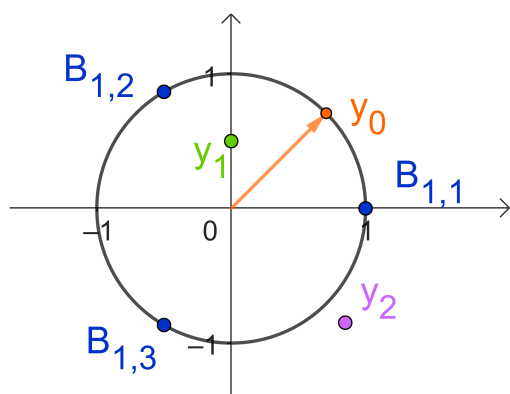
einzel betrachtet und grafisch als Vektoren gezeichnet.

In Abbildung 22 sind die Einträge des Vektors  $B_1$  als blaue Punkte  $B_{1,j}$  eingezeichnet. Die Stützwerte sind mit  $y_j$ ,  $0 \leq j \leq n$  bezeichnet.

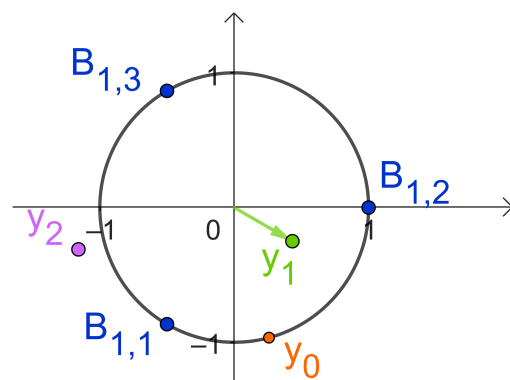
$y_0 e^{-2\pi i 1 \frac{0}{3}} = y_0 \cdot 1$ : Die Multiplikation mit 1 führt zu keiner Rotation. Der sich ergebende Vektor wird vom Ursprung ausgehend zum Punkt  $y_0$  gezeichnet.

$y_1 e^{-2\pi i 1 \frac{1}{3}}$ : Die Multiplikation mit  $e^{-2\pi i 1 \frac{1}{3}}$  bewirkt eine Rotation um  $-\frac{1}{3}rad$ . Der Punkt  $B_{1,1}$  wird dadurch exakt auf  $1 + 0i$  rotiert. Das Ergebnis ergibt sich als Vektor ausgehend vom Ursprung zum rotierten Punkt  $y_1$ .

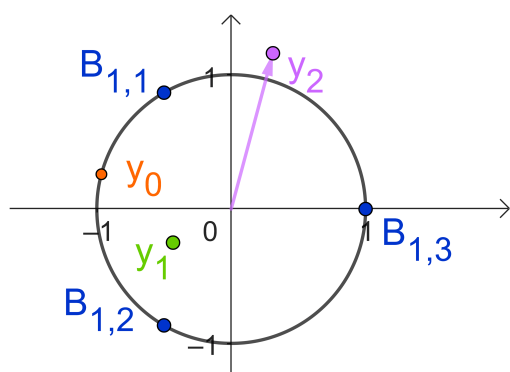
$y_2 e^{-2\pi i 1 \frac{2}{3}}$ : Der letzte Summand ergibt sich aus ähnlichen Überlegungen. Am Ende werden die so erhaltenen Vektoren addiert und durch drei dividiert. Das ergibt einen neuen Vektor, dessen Koordinaten dem gesuchten Fourierkoeffizienten  $c_1$  entsprechen. Die erste Komponente gibt den Realteil, die zweite den Imaginärteil an. Seine Länge entspricht dem Betrag des Koeffizienten und damit der Stärke der enthaltenen Frequenz. Der eingeschlossene Winkel mit der reellen Achse gibt die Phase dieser Frequenz im Signal an. Die einzelnen Schritte sind in Abbildung 22 ersichtlich.



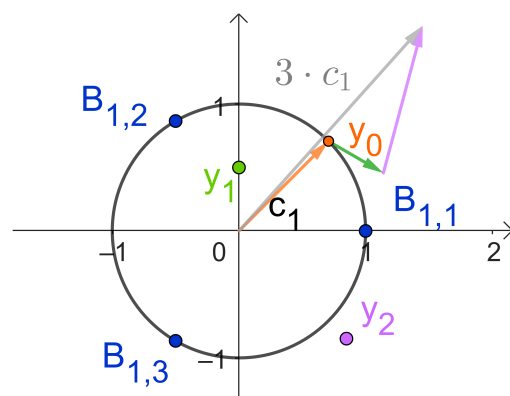
(a)  $y_0 \cdot \overline{B_{1,1}}$



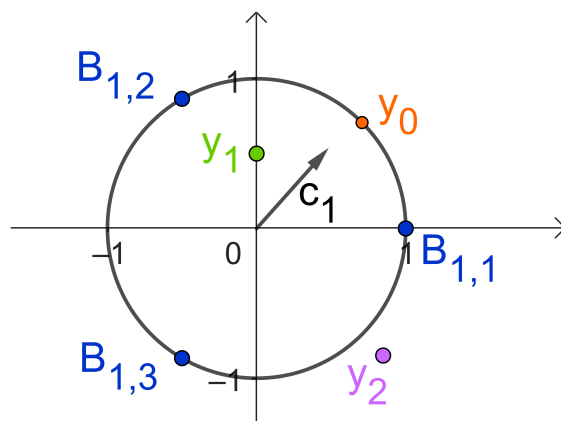
(b)  $y_1 \cdot \overline{B_{1,2}}$



(c)  $y_2 \cdot \overline{B_{1,3}}$



(d)  $3c_1 = \sum_{j=0}^2 y_j \cdot \overline{B_{1,i+1}}$



(e)  $c_1 = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 x_j \cdot \overline{B_{1,i+1}}$

Abbildung 22: Übersichtsdarstellung der Ergebnisse

Aus ähnlichen Überlegungen ergibt sich  $c_{-1}$

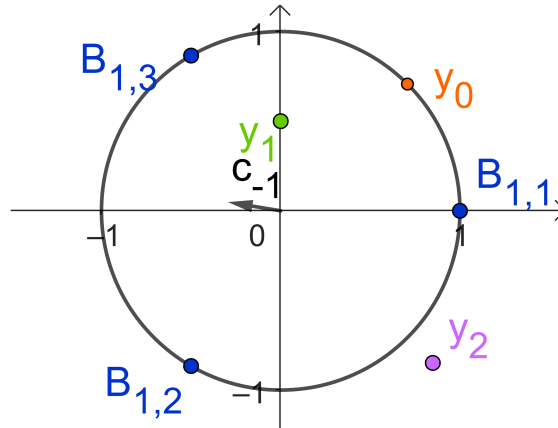


Abbildung 23:  $c_{-1} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 x_j \cdot \overline{B_{1,j+1}}$

Durch Einsetzen der entsprechenden DFT Fourierkoeffizienten in

$$y_j = \sum_{k \in [n]} c_k \cdot 2^{2\pi i k \frac{j}{n}}$$

erhält man an den Signalvektor. Die Einzelnen Summanden können dabei als Vektoren, die auf einer Kreisbahn mit Frequenz  $k$  und Radius  $|c_k|$  rotieren interpretiert werden. Die Kreismittelpunkte befinden sich jeweils in der Pfeilspitze des vorhergehenden Vektors.

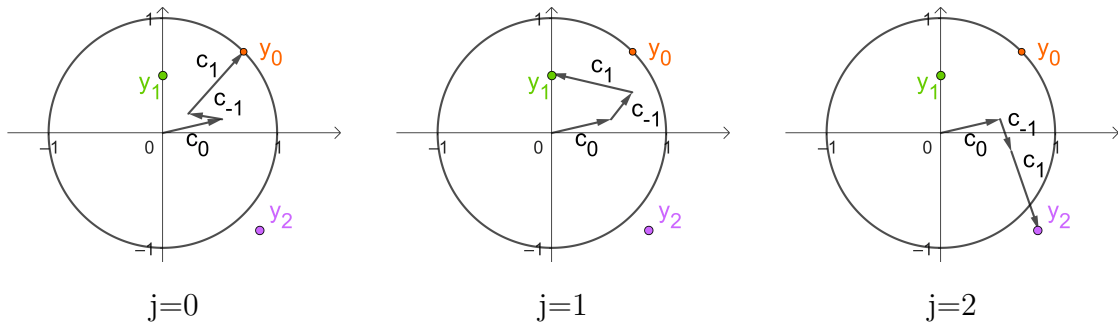


Abbildung 24: Position der summierten Vektoren für unterschiedliches  $j$ .

**Bemerkung 5.2.** Die Werte des Signalvektors lassen sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Der Fourierkoeffizient an der Stelle  $k$  gibt lediglich

den Anteil des Signalvektors auf den Basisvektor an. Es muss also nicht auf einem Kreis mit den Punkten liegen.

**Bemerkung 5.3.** Eine Veränderung der Reihenfolge der Punkte im Signalvektor, führt im Allgemeinen zu einer Veränderung der Fourierkoeffizienten.

**Beispiel 2.** Multiplikation eines Vektors  $B_k$  mit einer komplexen Zahl

In Abbildung 25 ist zu sehen, wie sich die Abtastpunkte auf dem komplexen Einheitskreis durch Multiplikation mit  $c_1 = 1 + i$  verändern. Dieser Faktor kann als Drehung um  $\arg(c_1) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$  sowie Skalierung um  $|c_1| = \sqrt{2}$  interpretiert werden. Anschaulich bleibt die kreisförmige Struktur erhalten, sie wird bloß um  $\arg(c_1)$  gedreht und mit  $|c_1|$  skaliert.

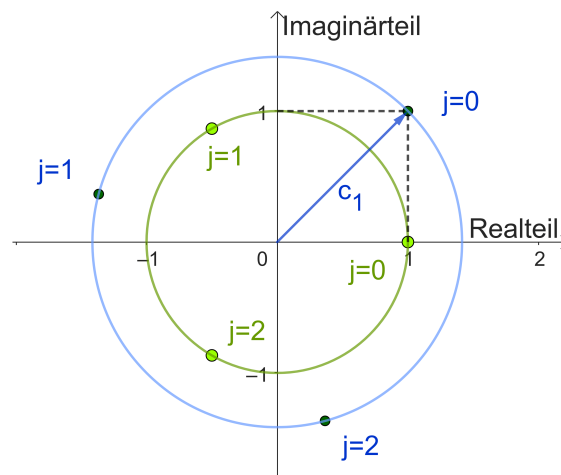


Abbildung 25: Multiplikation des Vektors mit  $B_1$  für  $n = 3$  (grün), mit  $c_1 = 1 + i$ .

## 6 GeoGebra

In diesem Kapitel werden die Wahl der Stützwerte aus einem Bild, die DFT, sowie die Interpolation des Bildes in GeoGebra implementiert.

Weiters werden Befehle, sowie deren Wirkung diskutiert. Zudem wird eine Methode präsentiert mit der die Summation grafisch dargestellt werden kann. Zuletzt werden unterschiedliche Ansätze diskutiert, um den Rechenaufwand, durch das Weglassen von bestimmten Koeffizienten, zu minimieren.

Die Implementation erfolgt in  $\mathbb{R}^2$ . Treten in den Rechnungen imaginäre Zahlen auf, wird deren Real- und Imaginärteil gesondert betrachtet.

## 6.1 Implementierung in GeoGebra

Im Code werden Listen benutzt. In GeoGebra sind Listen geordnete Sammlungen von Objekten. Durch

$$Element(Liste1, k)$$

lässt sich auf das k-te Element der Liste 'Liste1' zugreifen.

### 6.1.1 Stützwerte

Zunächst wird eine Liste

$$y_j = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$$

erstellt, die die Stützwerte enthält. Diese wird in ihren Realteil

$$Re_y = Folge(x(Element(y_j, j)), j, 1, n)$$

und Imaginärteil

$$Im_y = Folge(y(Element(y_j, j)), j, 1, n)$$

aufgespalten.

Aus der Anzahl der Stützwerte wird

$$n = Länge(y_j)$$

berechnet.

## 6.2 DFT

Zum Erzeugen der symmetrischen Indexliste der beteiligten Frequenzen werden der Abrundungsoperator, sowie der Aufrundungsoperator verwendet.

Die Indexliste ergibt sich dann aus

$$k = \text{Folge} \left\{ 1 - \text{ceil} \left( \frac{n}{2} \right), \text{floor} \left( \frac{n}{2} \right) \right\}.$$

Der Befehl Folge fügt alle sich ergebenden Elemente in die Liste 'k' hinzu. Dabei werden alle ganzen Zahlen von der linken bis zur rechten Zahl in der geschweiften Klammer der Liste hinzugefügt.

**Korollar 6.1** (Trigonometrische Darstellung der DFT-Koeffizienten). *Aus der trigonometrischen Zerlegung der Exponentialfunktion folgt unmittelbar, dass sich die DFT-Koeffizienten in Real- und Imaginärteil zerlegen lassen. Es gilt damit für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ :*

$$\text{Re}(c_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \text{Re}(y_j) \cdot \cos \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) + \text{Im}(y_j) \cdot \sin \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) \right],$$

sowie

$$\text{Im}(c_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \text{Im}(y_j) \cdot \cos \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) - \text{Re}(y_j) \cdot \sin \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) \right].$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} c_k = \text{Re}(c_k) + i \cdot \text{Im}(c_k) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot e^{-2\pi i k \frac{j}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cdot \left( \cos \left( -2\pi k \frac{j}{n} \right) + i \sin \left( -2\pi k \frac{j}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\text{Re}(y_j) + i \text{Im}(y_j)) \cdot \left( \cos \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) - i \sin \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \text{Re}(y_j) \cdot \cos \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) + \text{Im}(y_j) \cdot \sin \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left( \text{Im}(y_j) \cdot \cos \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) - \text{Re}(y_j) \cdot \sin \left( 2\pi k \frac{j}{n} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

□



In GeoGebra wird

$$Re_c = \frac{1}{n} Folge( \\ Summe(Element(Re_y, j) \cos(2\pi l((j-1)/(n))) + \\ Element(Im_y, j) \sin(2\pi l * ((j-1)/(n))), j, 1, n) \\ , l, Element(k, 1), Element(k, n))$$

als Liste, deren Eintragungen die Realteile der Fourierkoeffizienten sind, erstellt. In dieser ist der Realteil der Fourierkoeffizienten  $c_k$  nach aufsteigender Frequenz geordnet. Beginnend mit der negativsten bis hin zur positivsten Frequenz.

Die Liste der Imaginärteile der Fourierkoeffizienten wird durch

$$Im_c = ((1)/(n)) Folge( \\ Summe(Element(Im_y, j) \cos(2\pi l * ((j-1)/(n))) - \\ Element(Re_y, j) \sin(2\pi l * ((j-1)/(n))), j, 1, n) \\ , l, Element(k, 1), Element(k, n))$$

erzeugt. Um beim Interpolieren bestimmte Fouriermoden vernachlässigen zu können wird der Schieberegler

$$w = Schieberegler(0, n, 1)$$

eingeführt.

Der Realteil, Imaginärteil und die zugehörige Frequenz werden in einer Liste von Tripeln

$$F_r = Folge( \\ Element(Sortiere((Re_c, Im_c, k), \\ -Folge(Länge(Element((Re_c, Im_c), i)), i, 1, n)), j) \\ , j, 1, n - w)$$

geordnet. Die Ordnung erfolgt nach den Beträgen der Fourierkoeffizienten, vom Größten zum Kleinsten.

## 6.3 Fourierinterpolation

### 6.3.1 Parametrisierung der Punkte auf den Kreisen

In der Fourierinterpolation werden Summen der Form

$$f(t) = \sum_{k \in [n]} c_k \cdot e^{2\pi i k t}$$

betrachtet. Für einen festen Index  $l \in [n]$  ergibt sich der Summand

$$c_l \cdot e^{2\pi i l t}. \quad (6)$$

Dieser kann als Vektor mit Betrag  $|c_l|$  und Phasenwinkel  $\arg(c_l)$  der mit Frequenz  $l$  rotiert dargestellt werden. Seine Spitze beschreibt eine Kreisbahn.

Aus Korollar 6.2 ergibt sich die Berechnung des Real- und Imaginärteils eines jeden Summationsgliedes zum Zeitpunkt  $t$ . Dies geschieht über

$$\begin{aligned} ARe_P = & Folge(x(Element(F_r, j)) \cos(2\pi z(Element(F_r, j)t)) - \\ & y(Element(F_r, j)) \sin(2\pi z(Element(F_r, j)t)), j, 1, n - w) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} AIm_P = & Folge(x(Element(F_r, j)) \sin(2\pi z(Element(F_r, j)t)) + \\ & y(Element(F_r, j)) \cos(2\pi z(Element(F_r, j)t)), j, 1, n - w) \end{aligned}$$

. Durch das Bilden von Partialsummen bis zum  $l$ -ten Glied aus den obigen Listen, ergibt sich der Real- und Imaginärteil des Punktes an der Stelle  $l$  aus der Liste  $F_r$ . In GeoGebra wird das durch

$$Re_P = Folge(Summe(Teilliste(ARe_P, 1, l)), l, 1, n - w)$$

und

$$Im_P = Folge(Summe(Teilliste(AIm_P, 1, l)), l, 1, n - w)$$

implementiert. Die Einträge werden in der Liste

$$P = (Re_P, Im_P)$$

zusammengefasst. Die Liste enthält die aufsummierten Pfeilspitzen der Vektoren in Abhängigkeit vom Schieberegler  $t$ .

Um das Erstellen von Vektoren und Kreisen zu erleichtern, wird der Ursprung durch

$$P_O = Vereinigungsmenge((0, 0), P)$$

zu der Liste hinzugefügt.

### 6.3.2 Verbinden der Bahnpunkte durch Vektoren

Die Punkte der Liste  $P_O$  sollen durch Vektoren verbunden werden. Dies wird durch

$$v = Folge(Vektor(Element(P_O, i), Element(P_O, i + 1)), i, 1, n - w)$$

erreicht.

### 6.3.3 Konstruktion der Kreise

Die Kreisbahnen auf denen sich die Vektoren bewegen ergeben sich über

$$K = Folge(Kreis(Element(P_O, i), Element(P_O, i + 1)), i, 1, n - w)$$

.

## 6.4 Die Kurve der Fourierinterpolation

Die Menge aller Punkte, die der letzte Punkt aus der Liste  $P$  im Intervall  $[0, 1)$  durchläuft, ergibt die Kurve der Fourierinterpolation.

Um die Bahnkurve darstellen zu können, muss diese in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden. Das folgende Korollar gibt Aufschluss über die Berechnung dieser direkt aus der trigonometrischen Form.

**Korollar 6.2** (Trigonometrische Zerlegung der rekonstruierten Funktion). *Für eine Funktion  $f$ , ergibt sich die folgende Darstellung:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in [n]} c_k \cdot e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in [n]} c_k \cdot (\cos(2\pi k x) + i \sin(2\pi k x)) \\ &= \sum_{k \in [n]} [\operatorname{Re}(c_k) \cdot \cos(2\pi k x) - \operatorname{Im}(c_k) \cdot \sin(2\pi k x) \\ &\quad + i (\operatorname{Im}(c_k) \cdot \cos(2\pi k x) + \operatorname{Re}(c_k) \cdot \sin(2\pi k x))] . \end{aligned}$$

Für den Realteil wird der reelle Anteil

$$\operatorname{Re}(f(x)) = \sum_{k \in [n]} [\operatorname{Re}(c_k) \cdot \cos(2\pi k x) - \operatorname{Im}(c_k) \cdot \sin(2\pi k x)]$$

verwendet. Der imaginäre Anteil ergibt sich über

$$\operatorname{Im}(f(x)) = \sum_{k \in [n]} [(\operatorname{Im}(c_k) \cdot \cos(2\pi k x) + \operatorname{Re}(c_k) \cdot \sin(2\pi k x))] .$$

Damit kann der Realteil

$$\begin{aligned} fR(x) = & \text{Summe}(x(\text{Element}(F_r, l))\cos(2\pi z(\text{Element}(F_r, l)x)) - \\ & y(\text{Element}(F_r, l))\sin(2\pi z(\text{Element}(F_r, l)x)), l, 1, n - w) \end{aligned}$$

und der Imaginärteil der Bahnkurve

$$\begin{aligned} fI(x) = & \text{Summe}(x(\text{Element}(F_r, l))\sin(2\pi z(\text{Element}(F_r, l)x)) + \\ & y(\text{Element}(F_r, l))\cos(2\pi z(\text{Element}(F_r, l)x)), l, 1, n - w) \end{aligned}$$

für jede beliebige Stelle  $x$  berechnet werden.

Die Bahnkurve ergibt sich über

$$\text{Bahn} = \text{Kurve}(fR(u), fI(u), u, 0, 1).$$

**Bemerkung 6.3.** *Durch die gleichzeitige Veränderung der Summationsobergrenze  $n$  von  $fR(x)$  und  $fI(x)$  können Bahnkurven betrachtet werden, die nicht die Kurve des letzten Bahnpunktes  $P_n$ , sondern eines anderen  $P_l$   $0 < l < n$  beschreibt. durch die Summation von  $n$  Epizykeln, sondern durch die Summation einer kleineren Anzahl zu Stande kommen. Es wird also eine Teilsumme der ersten Folgenglieder betrachtet.*

Mit der erarbeiteten Vorlage können ein beliebiger Signalvektor und seine epizyklisch interpolierende Kurve in GeoGebra rekonstruiert werden.

## 6.5 Beispiele

### 6.5.1 Experimentieren mit Fourierkoeffizienten

Unter <https://www.geogebra.org/m/x857mqjt> steht ein GeoGebra Applet zu Verfügung, bei dem die Stützwerte verschoben werden können. In Abbildung 26(a) ist die Bahnkurve mit den verschiebbaren Stützwerten ersichtlich. In 26(b) ist jeweils unter den Kreisen deren Frequenz  $k$  angegeben.

Insbesondere ist zu beobachten unter welchen Bedingungen bestimmte Fourierkoeffizienten groß werden. Dies äußert sich durch die Vergrößerung der entsprechenden Radien.

Außerdem kann mit den Phasenwinkeln der Fourierkoeffizienten experimentiert werden. Dieser ist für  $t = 0$  direkt ersichtlich.

### 6.5.2 Nachzeichnen von Bildern

Durch die Wahl von Stützwerten auf Bildern können fourierinterpolierte Kurven von diesen generiert werden. Es empfiehlt sich Bilder mit klar erkennbaren Konturen zu verwenden. Im Folgenden werden einige Beispiele präsentiert und anschließend diskutiert. Es ist anzumerken, dass die Fourierinterpolation in GeoGebra so implementiert wurde, dass jene Kreise mit den kleinsten Radien bei der Interpolation als erstes vernachlässigt werden.

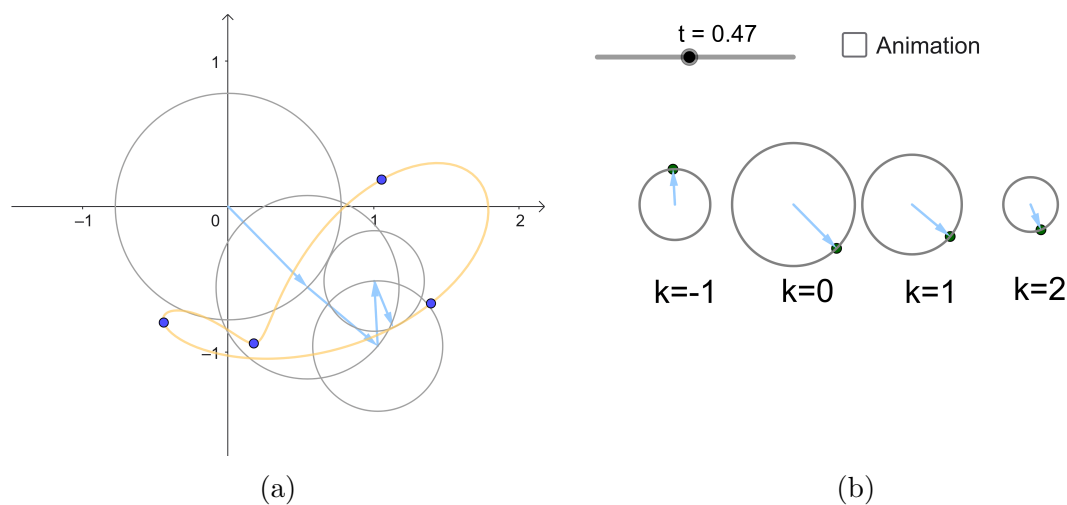


Abbildung 26: Verschiebbare Stützwerte

### 6.5.3 Herz

Zunächst werden Stützwerte auf der Kontur von einem Herz gewählt. Diese sind in Abbildung 28(a) türkis eingezeichnet. Auf Grundlage dieser Werte findet die Interpolation statt. Abbildung (b) zeigt die mit allen 19 Fouriermoden interpolierte Kurve. Abbildung (c) zeigt jene Kurve, die durch die 9 größten Fouriermoden erzeugt wird. Die grobe Struktur bleibt erhalten. Feine Strukturen verschwinden zusehends. Im Allgemeinen führt das Weglassen von Epizykeln zu einer regelmäßigeren und glatteren Kurvenform.

Unter <https://www.geogebra.org/m/stszajvp> steht das GeoGebra Applet zur Verfügung.

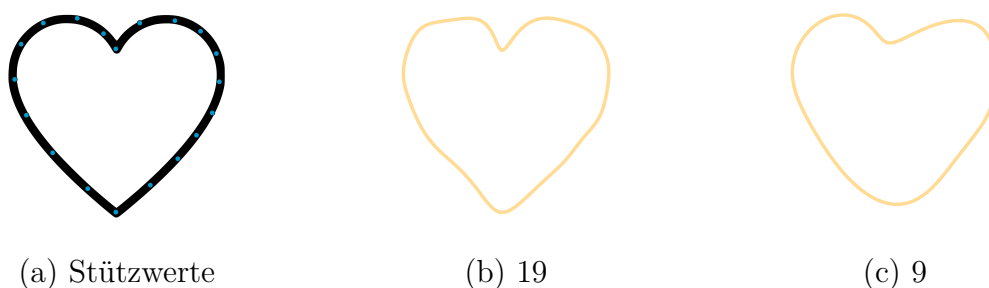


Abbildung 28: Position der summierten Vektoren für unterschiedliches  $j$ .

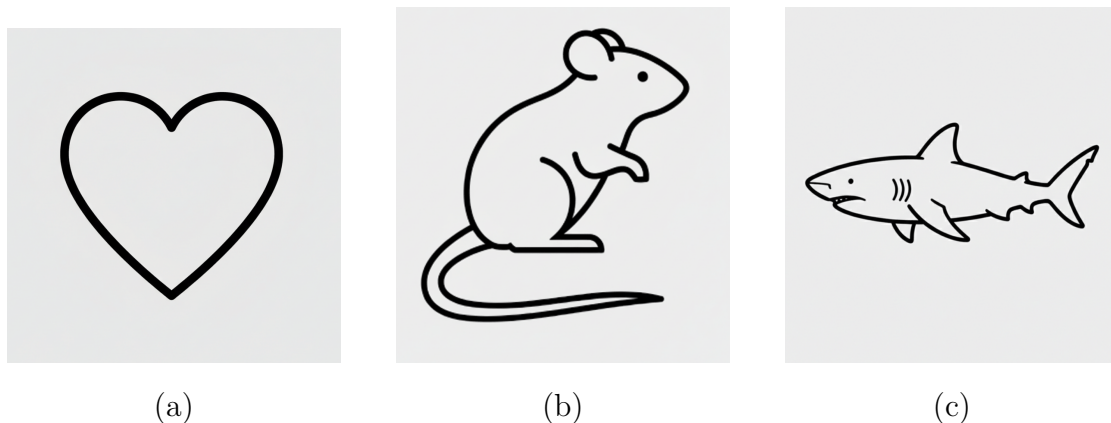


Abbildung 27: Bilder zum Interpolieren

#### 6.5.4 Maus

Die Abbildung mit der Maus besteht aus deutlich erkennbaren Teilabschnitten. Um bei solchen Abbildungen eine zufriedenstellende Fourier- Interpolation durchzuführen ist es notwendig die Dichte der Stützwerte zu erhöhen. Für die Interpolation wurden 40 Stützwerte benutzt. Deren Positionen sind in Abbildung 29 ersichtlich. Unter den Abbildungen (b),(c) und (d) ist jeweils vermerkt wie viele Kreise zum Interpolieren verwendet wurden.

Das GeoGebra Applet ist unter <https://www.geogebra.org/m/achkwqgb> abrufbar.

#### 6.5.5 Hai

Bei diesem GeoGebra Applet wird der Weg in die andere Richtung gegangen. Durch das Hinzufügen von Epizykeln zur Interpolation soll erkannt werden um welche Figur es sich handelt. Es wurde mit insgesamt 38 Stützwerten interpoliert. Die Anzahl der zur Rekonstruktion verwendeten Fouriermoden ist unter den Einzelbildern in Abbildung 30 vermerkt.

Das GeoGebra Applet steht unter <https://www.geogebra.org/m/uvresv4c> zur Verfügung.



Stützwerte



40



20



10

Abbildung 29: Rekonstruktion der Silhouette



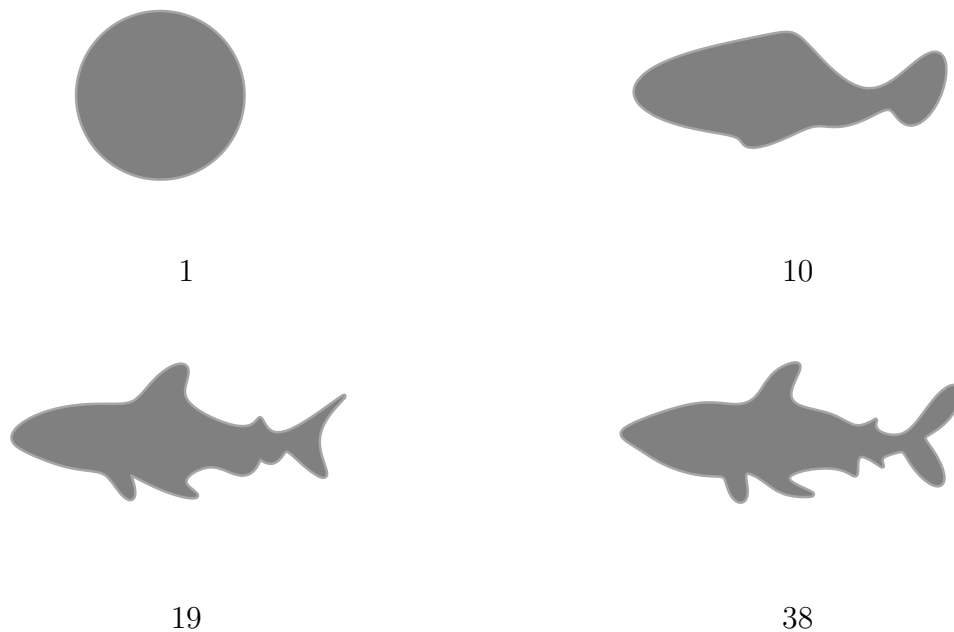


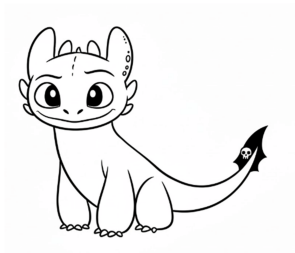
Abbildung 30: Rekonstruktion der Silhouette

## 6.6 Drache

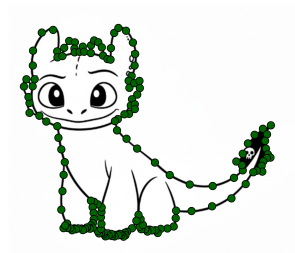
Die Abbildung des Drachen besteht aus klar unterscheidbaren Segmenten. Auf diesem wurden 152 Stützpunkte gesetzt. Durch die Vernachlässigung der kleinsten Fouriermoden in der Approximation kommen annähernd gleiche Kurven wie die Ausgangskurve (c) zustande. Dies ist in Abbildung 31 (d), (e) und (f) ersichtlich. In (g), (h), (i), (j) und (k) sind jeweils Vergrößerungen ersichtlich. Die Spitze des letzten Pfeils ist rot markiert und dient als Referenzpunkt. Die Abbildungen verdeutlichen, dass die letzten Vektoren verhältnismäßig kleine Radien aufweisen. Eine Vernachlässigung dieser in der Rekonstruktion verändert die approximierten Kurve kaum.

(l) zeigt das Frequenzspektrum. Es ist ersichtlich, dass die Beträge der Fourierkoeffizienten mit zunehmendem Abstand von der Nullfrequenz abnehmen. Hochfrequente Schwingungen verändern die Form der interpolierten Kurve nur in geringem Ausmaß.

Unter <https://www.geogebra.org/m/rwqzh8b5> steht das Applet des Drachen zur Verfügung. Beim Hineinzoomen empfiehlt es sich, die Vektoren auszublenden.



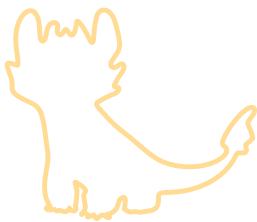
(a) Bild



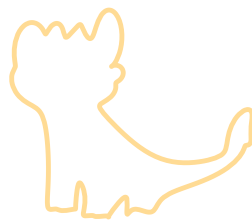
(b) Stützpunkte



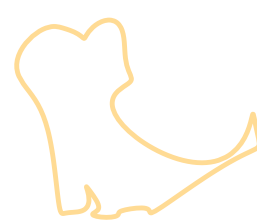
(c) Kurve 152 Vektoren



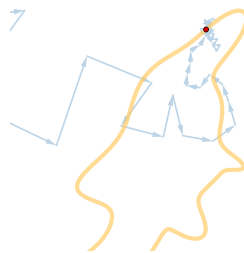
(d) Kurve 76 Vektoren



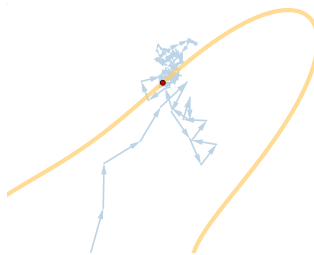
(e) Kurve 38 Vektoren



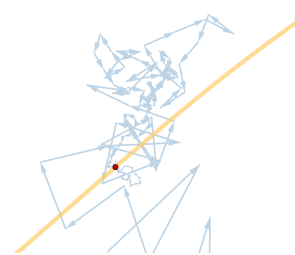
(f) Kurve 19 Vektoren



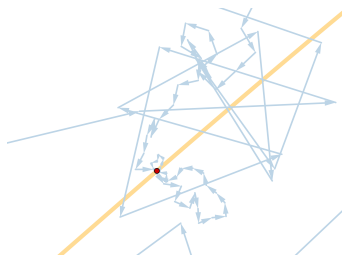
(g) Vergrößerung Schwanzspitze



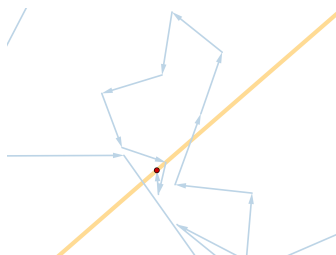
(h) Weitere Vergrößerung



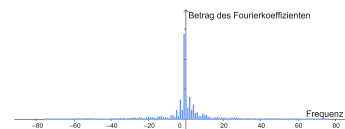
(i) Weitere Vergrößerung



(j) Weitere Vergrößerung



(k) Weitere Vergrößerung



(l) Frequenzspektrum

Abbildung 31: Drachenkurve, Vektoren und Frequenzspektrum

## 6.7 Fuchs

In Abbildung 32(a) ist die Zeichnung eines Fuchses zu sehen. In (b) wurden 430 Stützpunkte auf dieser gewählt.

Abbildung (c), (e) und (g) zeigen die Fourier interpolierten, beziehungsweise approximierten Kurven des Fuchses mit der darunter notierten Anzahl an Vektoren. Abbildung (d), (f) und (h) zeigen die jeweiligen Frequenzspektren. Besonders deutlich ist zu sehen, dass sich die kleinsten Beträge der Fourierkoeffizienten in den hochfrequenten Frequenzen finden. Durch das Vernachlässigen dieser in der Interpolierten, gehen feine Strukturen verloren und die Kurve wird glatter.

## 6.8 Frequenzspektrum

In den vorangegangenen Beispielen wurden die Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von ihrem Betrag in der Interpolation vernachlässigt. Dabei wurde mit dem Kleinsten begonnen. Die Beträge lassen sich als Höhen über den zugrunde liegenden Frequenzen veranschaulichen.

Um das in GeoGebra zu implementieren werden

$$Raden_k = Folge(Länge((x(Element(F_r, i)), y(Element(F_r, i)))), i, 1, n - w)$$

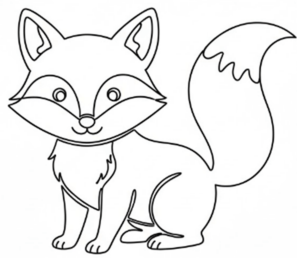
und

$$Spektren = Folge(Strecke((z(Element(F_r, i)), 0), (z(Element(F_r, i)), Element(Raden_k, i))), i, 1, n - w)$$

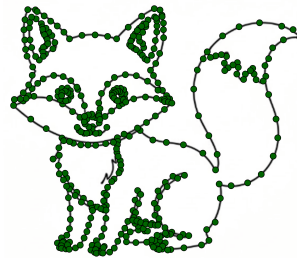
definiert.

In Abbildung 33 sind die Frequenzspektren der Fourierkoeffizienten der Bilder des Herzens, der Maus und des Haies dargestellt. Auf der x-Achse ist jeweils die Frequenz, der der Fourierkoeffizient zugeordnet wird, abzulesen. Auf der y-Achse ist der Betrag des jeweiligen Fourierkoeffizienten dargestellt.

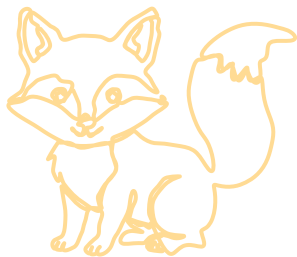
Der Betrag der Fourierkoeffizienten entspricht jeweils der Länge des auf der Kreisbahn rotierenden Vektors. Bei genauerer Betrachtung ist auffällig, dass sich die größten Fourierkoeffizienten um die Nullfrequenz konzentrieren. Mit zunehmender



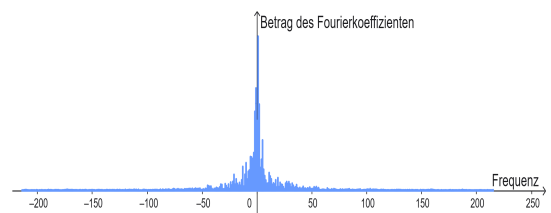
(a) Ausgangsbild



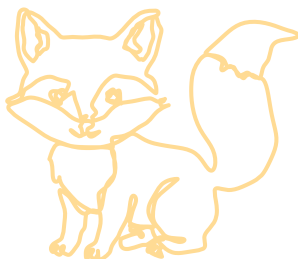
(b) Stützpunkte



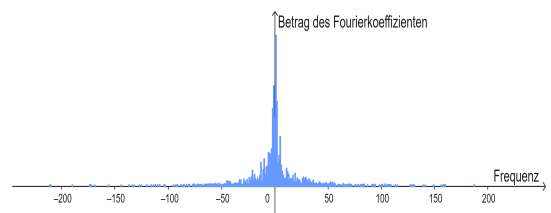
(c) 430 Frequenzen



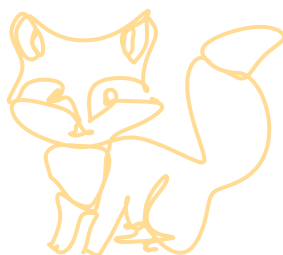
(d) Frequenzspektrum



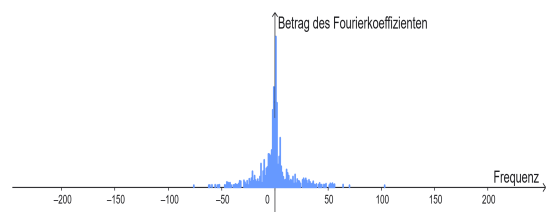
(e) 215 Frequenzen



(f) Frequenzspektrum



(g) 108 Frequenzen



(h) Frequenzspektrum

Abbildung 32: Gesamtdarstellung der Implementierungsschritte in GeoGebra

Distanz von diesen nehmen die Beträge tendenziell ab.

### 6.8.1 Mauersegler

In Abbildung 34 ist die Silhouette eines Mauerseglers zu sehen. Auf dieser wurden 256 Stützwerte gewählt. Die Wahl dieser ist in Abbildung 35 zu sehen.

Abbildung 36 zeigt das Frequenzspektrum des Mauerseglers. Auch bei diesem befinden sich die Fourierkoeffizienten mit den größten Beträgen in der Nähe der Nullfrequenz. Mit zunehmender Distanz von dieser nehmen die Beträge tendenziell ab.

## 6.9 Approximation durch weniger Epizykel

Da sich die Energie offenbar auf wenige dominante Fourier-Koeffizienten konzentriert, drängt sich eine naheliegende Frage auf: Reicht es aus, nur eine Auswahl der Frequenzen zu verwenden, um eine Kurve mit visuellem Eindruck vergleichbar mit jenem der Interpolierenden zu erzeugen?

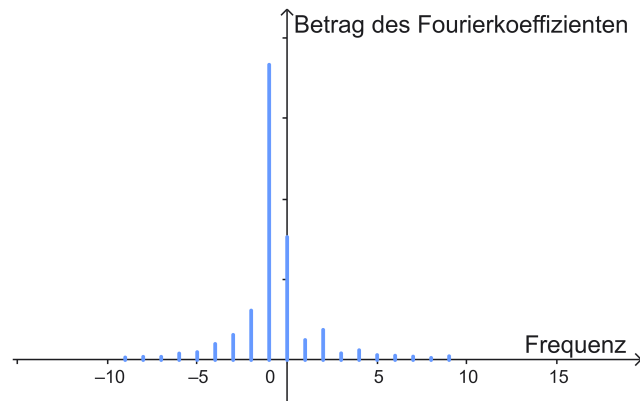
Im Folgenden werden drei Möglichkeiten diskutiert, die auf dem Verwerfen von kleinen Radian beruhen.

1. Schrittweises Entfernen der kleinsten Radian, bis nur noch eine gewünschte Anzahl von Frequenzen verbleibt.
2. Ausschluss aller Frequenzen unterhalb eines vorgegebenen Schwellenwerts.
3. Konstruktion durch Frequenzen nahe der Nullfrequenz.

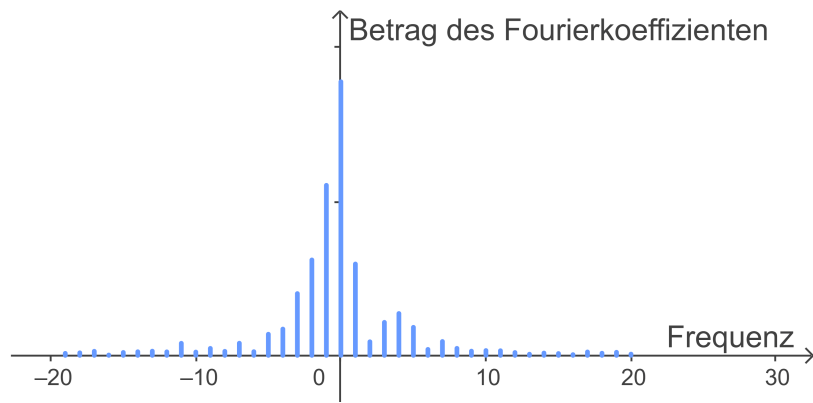
### 6.9.1 1. Schrittweises Entfernen

Wie oben besprochen werden im folgenden Frequenzen mit niedrigen Amplituden vernachlässigt. Diese werden schrittweise eliminiert, beginnend mit der niedrigsten. Der Schieberegler 'w' ist für diese Methode ausschlaggebend. Er gibt an, wie viele Vektoren bei der Approximation der Kurve vernachlässigt werden.

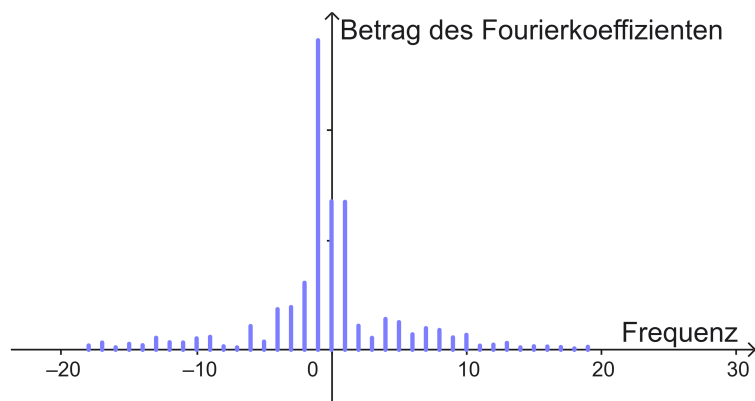
Ziel ist es, ein annähernd gleiches Bild mit weniger Epizykeln zu erzeugen. In Abbildung 37 ist die resultierende Bahnkurve des Mauerseglers für unterschiedliche



(a) Frequenzspektrum Herz



(b) Frequenzspektrum Maus



(c) Frequenzspektrum Hai

Abbildung 33: Vergleich der Frequenzspektren

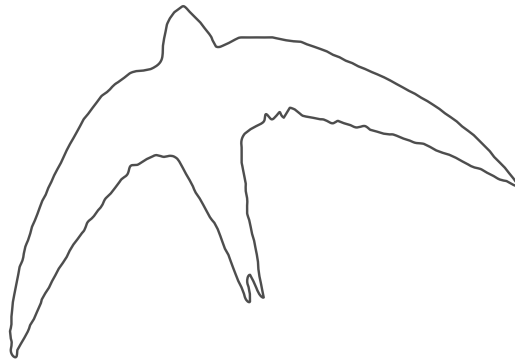


Abbildung 34: Silhouette Mauersegler

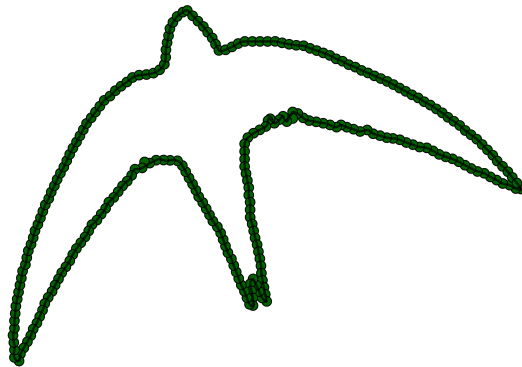


Abbildung 35: Stützwerte auf dem Mauersegler

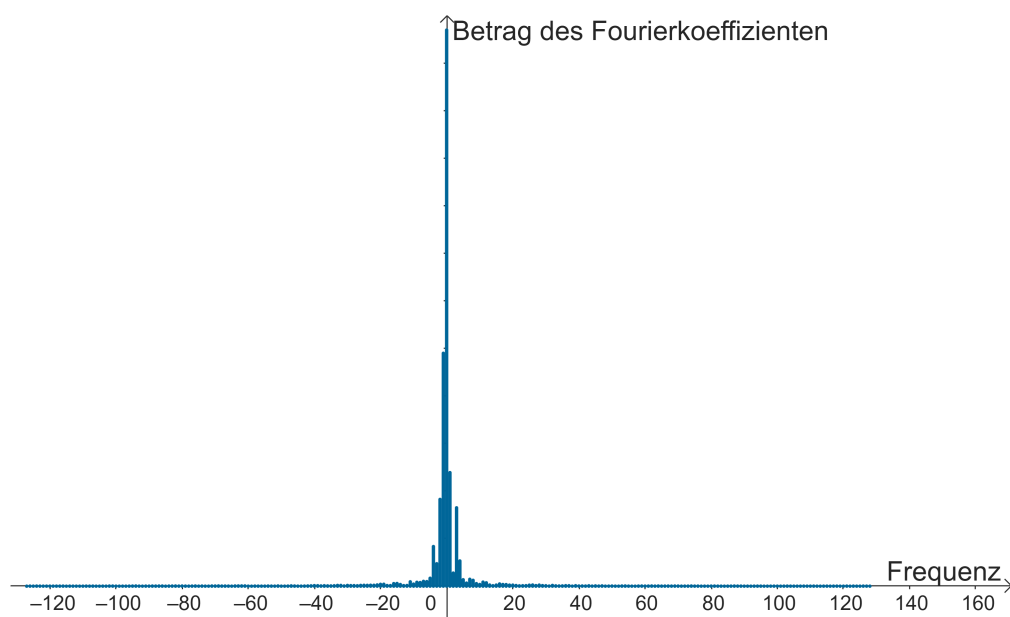
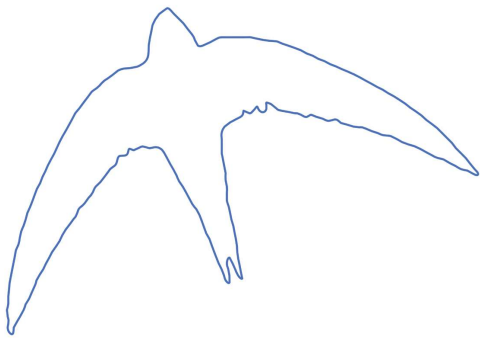


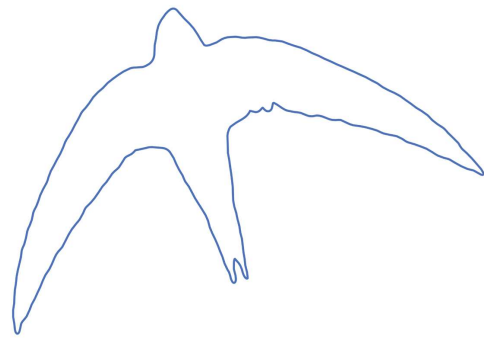
Abbildung 36: Frequenzspektrum des Mauerseglers

Anzahlen verwendeter Epizykeln dargestellt.

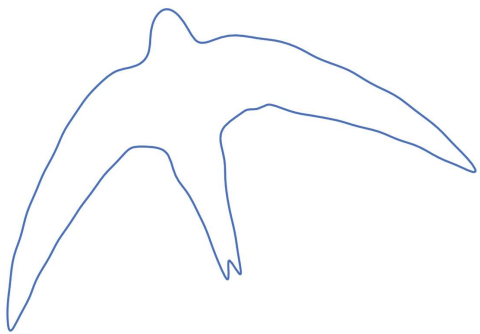




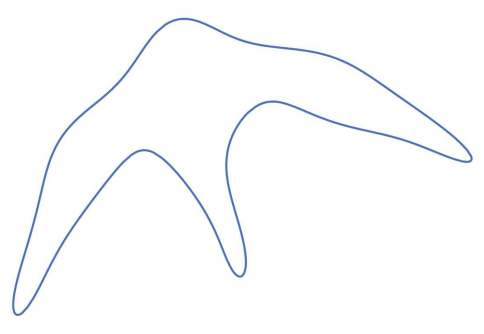
(a) 256 Vektoren



(b) 128 Vektoren



(c) 64 Vektoren



(d) 16 Vektoren

Abbildung 37: Vergleich der rekonstruierten Bahnkurven mit abnehmender Anzahl an Fouriermoden.

Abbildung 37 zeigt den Einfluss, den verschiedene Anzahlen an Epizykeln in der Interpolation haben. Zwischen 37(a) und 37(b) besteht auf den ersten Blick kaum ein Unterschied, obwohl (b) mit der Hälfte der Vektoren konstruiert wurde. Bei näherer Betrachtung werden vor allem Unterschiede an eckigen Stellen, wie den Schwanzfedern, ersichtlich. Abbildung 37c) kommt mit einem Viertel

der Epizykeln aus, stellt den Mauersegler allerdings noch deutlich erkennbar dar. Die Einkerbungen an den Flügeln sind bei dieser Konstruktion nicht mehr erhalten geblieben. Abbildung 37d) wurde mit Hilfe von 16 Epizykeln konstruiert. Das entspricht einem Sechzehntel der Ursprungsmenge. In dieser Abbildung ist die grobe Struktur noch erkennbar. Auch hier wurden kantige Strukturen, wie der Kopf, flacher gemacht.

Im Allgemeinen gilt, dass die Bilder mit abnehmender Anzahl an summierten Epizykeln weicher werden. Das heißt, spitze Stellen können nicht mehr so gut dargestellt werden. Hohe Frequenzen tragen vor allem zur feinen Struktur an eckigen Stellen bei. Durch sie können Einkerbungen besser dargestellt werden.

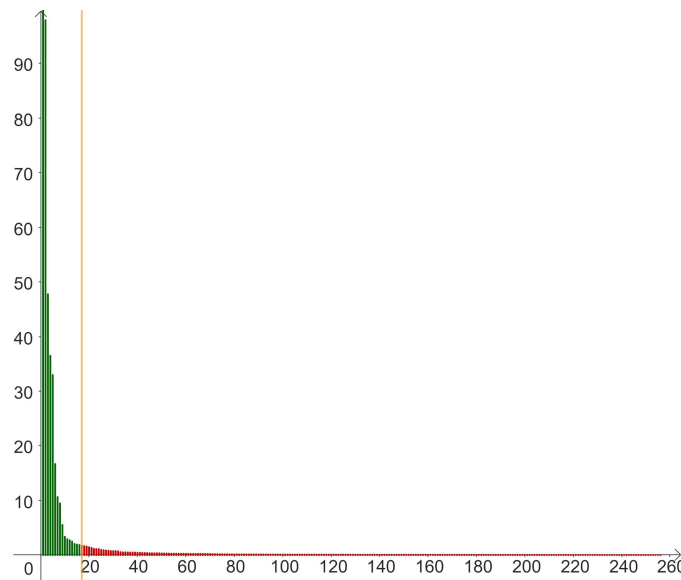


Abbildung 38: Nach Größe sortierte Frequenzen

Abbildung 38 zeigt die 256 Normen der Fourierkoeffizienten der Bahnkurve. Diese sind nach absteigender Norm geordnet. Die Abbildung gibt keinen Aufschluss darüber, welche Frequenz welche Norm hat. Auf der x-Achse liegt auf der Stelle eins jener Fourierkoeffizient mit der größten Norm, an der Stelle 256 jener mit der kleinsten. In diesem Fall ist die Nullfrequenz auf der ersten Position. In der epizyklischen Bahnkurve bewegt sich der Kreis mit der Nullfrequenz nicht. Er stellt eine Art Schwerpunkt des Bildes dar. In der Abbildung ist ersichtlich, dass die Frequenzen mit den größten Normen deutlich mehr zur Bahnkurve als die fol-

genden beitragen. An dieser Stelle ist der Zusammenhang zwischen der Norm der Fourierkoeffizienten und dem Radius der Kreise zur Konstruktion der Epizykeln in Erinnerung zu rufen. Diese sind ein und dasselbe!

Die vertikale, orangefarbene Linie stellt die Grenze der berücksichtigten Frequenzen der epizyklischen Bahnkurve dar. Normen die grün markiert sind wurden mit ihren zugehörigen Frequenzen zur Konstruktion benutzt, jene die rot markiert sind nicht. Abbildung 38 zeigt die Normen der für 37(d) benutzten Frequenzen. Das Applet der Variante ist unter <https://www.geogebra.org/m/nwbkkt8d> verfügbar.

### 6.9.2 Zweite Möglichkeit

In der zweiten Möglichkeit wird mit einem Threshold gearbeitet. Es werden alle Fourierkoeffizienten und deren Betrag berechnet. Bei der Rekonstruktion werden bloß Fourierkoeffizienten beachtet, die einen gewissen Betrag, den Threshold überschreiten. Die dafür erforderlichen Veränderungen sind im Anhang skizziert, sowie im GeoGebra Applet ersichtlich.

Abbildung 39(a) zeigt das Frequenzspektrum des Mauerseglers. Dabei wurde der Threshold auf 6 gesetzt. Die orangene Gerade markiert dabei diesen Wert. Auf der x-Achse sind die beteiligten Frequenzen abgetragen. Die y-Achse gibt Aufschluss über die Größe der Norm der Fourierkoeffizienten. Weist eine Frequenz eine Norm unterhalb des Thresholds auf, so wird diese rot markiert, solche die einen höheren Wert haben, sind grün dargestellt.

Abbildung 39(b) zeigt zwei verschiedenen Bahnkurven von einer Auswahl der Epizykeln. Diese orientieren sich nach dem obigen Schwellenwert. In grün ist die Bahnkurve der Epizykeln mit einer Norm größer gleich, dem Threshold zusammengefasst. Jene der Epizykeln mit einem kleineren Schwellenwert ist in rot dargestellt. Die Abbildung enthält ein Koordinatensystem zur Orientierung. Der Abstand der Bahnkurven zum Ursprung gibt Aufschluss darüber wie viel maximal durch diese zur Gesamtstruktur addiert, beziehungsweise subtrahiert wird. Zwei charakteristischer Merkmale werden bei den zwei Kurven sichtbar. Die grüne Kurve, welche sich fast ausschließlich aus den Frequenzen nahe der Nullfrequenz zusammensetzt, ist sehr glatt. Die rote Kurve hingegen ist sehr hektisch.

In Abbildung 39(c) ist in grün wiederum die Bahnkurve der Frequenzen überhalb

des Schwellenwerts sichtbar. Die rote Bahnkurve ist die Addition von der Nieder- und hochfrequenten Bahnkurve im Intervall  $[0, 0.5)$ . Dabei kann der Einfluss der hochfrequenten Frequenzen als Abstand von der grünen Kurve gesehen werden. Das Applet zur Variante steht unter <https://www.geogebra.org/m/zyjjhhdy> zur Verfügung.

### 6.9.3 Dritte Möglichkeit

Bisher hat sich gezeigt, dass sich die größten Radian vorwiegend um die Nullfrequenz konzentrieren. Diese Beobachtung stimmt mit Satz 4.15 überein.

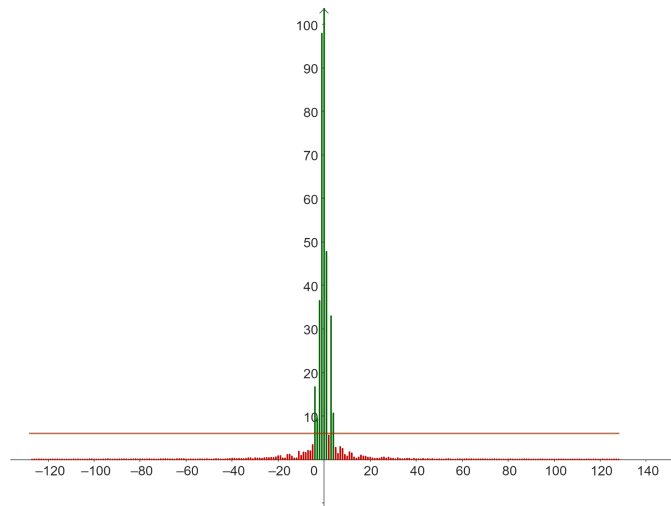
Bei der Rekonstruktion kann dieser Umstand genutzt werden. Es werden bloß Frequenzen berücksichtigt, welche sich nahe um die Nullfrequenz befinden. Bei der Konstruktion wird von der Nullfrequenz schrittweise nach außen gegangen. Beginnend mit  $k = 0$  zu  $k = -1$ , dann  $k = 1$  und so weiter. Dadurch kann durch die Berechnung von weniger Fourierkoeffizienten eine zufriedenstellende Annäherungen der epizyklischen Bahnkurve generiert werden. Dies ist in Abbildung 40 ersichtlich. Hier gilt wieder, dass die Frequenzen im Allgemeinen nach rechts gehend abnehmen.

Ebenso wäre eine Kombination mit Möglichkeit zwei denkbar. Also zunächst eine Berechnung der Fourierkoeffizienten innerhalb des gewählten Bereichs und anschließend eine Berechnung des Thresholds. Das Applet zur dritten Möglichkeit steht unter <https://www.geogebra.org/m/nq2qsyhq> zur Verfügung.

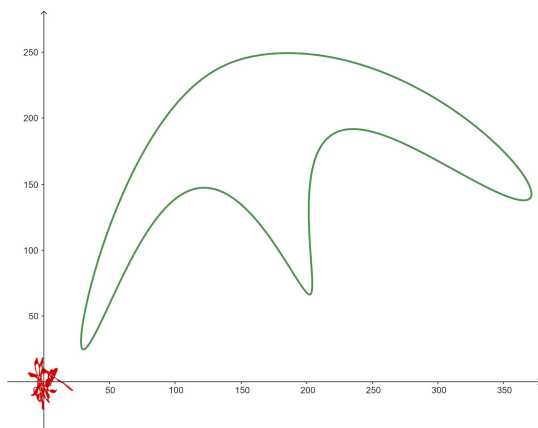
### 6.9.4 Vergleich der Möglichkeiten

Möglichkeit eins und zwei beruhen darauf zunächst die Fourierkoeffizienten zu berechnen und diese nach ihrer Größe zu ordnen. Dadurch liefern sie in der grafischen Rekonstruktion die genauesten Übereinstimmungen mit dem Originalbild. Diese Methoden setzen allerdings voraus, dass zunächst sämtliche Fourierkoeffizienten berechnet werden. Erst im Anschluss kann man ihre Norm vergleichen und ausgehend davon bestimmte Frequenzen in der Approximation vernachlässigen.

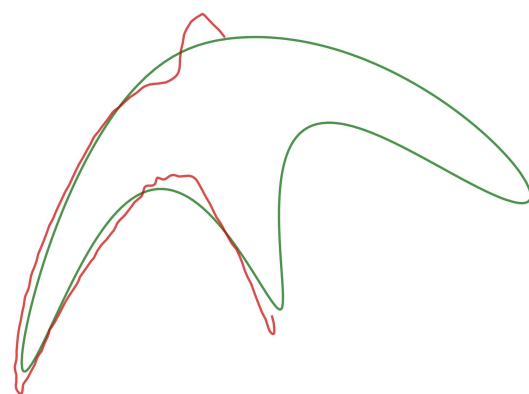
Diese Methoden sind dadurch rechenintensiver. Um den Rechenaufwand zu minimieren, bietet sich die dritte Methode an. Dies funktioniert dann besonders gut, wenn die rekonstruierenden Punkte eine glatte Bahn beschreiben.



(a) Frequenzspektrum



(b) Vogel-Spektrum (nicht vereinigt)



(c) Vogel-Spektrum (vereinigt)

Abbildung 39: Vergleich der Spektren: (a) Frequenzspektrum, (b) Vogel-Spektrum nicht vereinigt, (c) Vogel-Spektrum vereinigt.

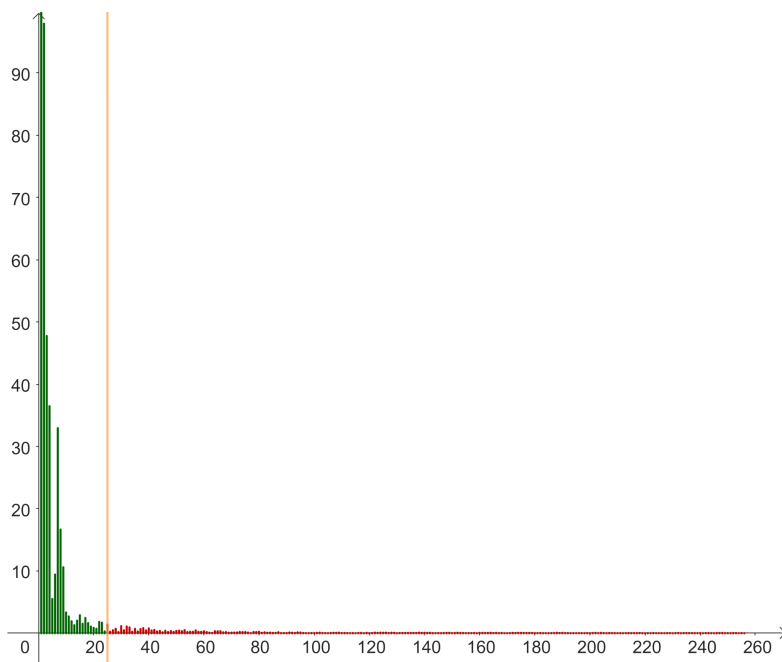


Abbildung 40: Frequenzen nach Absolutbetrag aufsteigend sortiert

## 7 Conclusio

In dieser Arbeit wurde gezeigt, wie sich die diskrete Fouriertransformation als Mittel zur Interpolation von beliebigen Signalwerten in der komplexen Ebene, verwenden lässt.

Das theoretische Fundament wurde durch grafische Intuitionen unterstützt. Unter anderem wurde gezeigt, wie Fourierkoeffizienten in der DFT grafisch gewonnen werden können. Außerdem wurden Begriffe wie Phasenwinkel, Norm und Frequenz, aber auch die CS Ungleichung und die Dreiecksungleichung, durch die Visualisierung mit Epizykeln unterstützt. In GeoGebra wurde schließlich das Konzept implementiert und für beliebige Punktmengen ein Interpolations- Workflow erarbeitet. Über das Frequenzspektrum wurde besonders ersichtlich, dass sich bei glatten Funktionen die Energie der Fourierkoeffizienten vorwiegend um die Nullfrequenz konzentriert. Ein Umstand der sich durch die Theorie bestätigt. Durch die Veränderung der Summationsreihenfolge und anschließende Verminderung der Anzahl der Summanden wurde das ausgenutzt. Aufbauend darauf wurden Methoden gezeigt, die mit weniger Epizykeln die Bahnkurve approximieren.

Die mathematische Theorie liefert ein solides Fundament um das scheinbare Chaos der Interpolation, betrachtet über die Zeit, mathematisch nüchtern aufzubauen. Dieses stellt sich in der Frequenzdomäne, als wesentlich einfacheres Problem dar. Einer der wesentlichsten Schritte bei der Lösung des Problems ist dabei die Verlagerung dieses aus dem Raum der stetigen Funktionen in einen Vektorraum. Anschließend wird es in diesem gelöst und wieder in den Raum der stetigen Funktionen zurücküberführt.

## 8 Didaktische Perspektive

Der Übergang von der mathematischen Theorie zur Schulpraxis zeigt, wie die in dieser Arbeit behandelten Inhalte konkret im Unterricht genutzt werden können. Auch wenn Fourierkoeffizienten und die mathematische Signalverarbeitung kein Standardstoff für alle Schulformen sind, bietet der visuelle Zugang über die Epizykel eine gute Möglichkeit, grundlegende Lehrplaninhalte der Sekundarstufe II anschaulich zu vermitteln [vgl. 3]. Das Thema eignet sich dabei besonders für

spezialisierte höhere Schulen, wie bestimmte technische Zweige, oder für den vertiefenden Unterricht im Rahmen von Wahlpflichtfächern und Projekten [vgl. 12].

Der eigentliche Wert dieser Visualisierungen liegt darin, dass abstrakte mathematische Objekte eine geometrische Form annehmen. Anstatt nur mit Formeln zu arbeiten, sehen die Schülerinnen und Schüler direkt in GeoGebra, wie sich Veränderungen in den Gleichungen auf die gezeichneten Bahnen auswirken. Das nimmt vielen Lernenden die Scheu vor der Formalisierung und lädt dazu ein, mathematische Zusammenhänge durch bildhafte Repräsentationen und aktives Ausprobieren selbst zu entdecken [vgl. 2].

Inhaltlich hilft dieser Ansatz vor allem dabei, das Verständnis für komplexe Zahlen zu festigen. Die Lernenden erfahren, dass diese Zahlen keine rein theoretischen Konstrukte sind, sondern als mächtige Werkzeuge für Drehungen und Streckungen in der Ebene dienen. Durch die Bewegung der Kreise wird außerdem die Eulersche Formel anschaulich, weil das Zusammenspiel von Radius, Winkel und Drehrichtung direkt sichtbar wird.

Ein wesentlicher Lerneffekt betrifft das Verständnis des Kreises selbst. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass eine Kreisbewegung als Kombination von Sinus- und Kosinusfunktionen aufgefasst werden kann. Da die einzelnen Epizykel in der Animation aneinandergereiht sind, wird das Prinzip der Vektoraddition im wahrsten Sinne des Wortes Schritt für Schritt nachvollziehbar. Die Hintereinanderausführung von Drehzeigern zeigt den Lernenden ganz direkt, wie durch das bloße Zusammenzählen von Vektoren komplexe, geschlossene Figuren entstehen.

Zusammenfassend geht es im Unterricht also weniger darum, die mathematische Tiefe der Fouriertransformation vollständig zu durchdringen. Vielmehr dient die Methode als motivierender Kontext, um fundamentale Kompetenzen der Oberstufenmathematik wie die Trigonometrie, die Vektorrechnung und die komplexen Zahlen miteinander zu verknüpfen und visuell erfahrbar zu machen.

## 8.1 Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Für den konkreten Einsatz im Unterricht bieten sich vor allem jene Themenbereiche der Sekundarstufe II an, in denen die geometrischen und algebraischen Grundlagen ohnehin im Lehrplan verankert sind. Im regulären Mathematikunterricht



lässt sich das Modell der Epizykel wunderbar als anschauliches Abschlussbeispiel für die Vektorrechnung oder die Trigonometrie nutzen. Wenn Schülerinnen und Schüler sehen, dass eine Kreisbewegung durch das Zusammenspiel von Sinus- und Kosinusfunktionen beschrieben wird und dass das Aneinanderreihen dieser Kreise eine reine Vektoraddition ist, festigt das die grundlegenden Kernkompetenzen auf eine sehr plastische Weise. Auch beim Einstieg in die komplexen Zahlen kann die Visualisierung helfen, um die Gaußsche Zahlenebene und die geometrische Wirkung von Drehstreckungen begreifbar zu machen.

Da das Thema der Fourierkoeffizienten selbst im normalen Unterrichtsalltag meist zu weit führt, bieten sich tiefergehende Einblicke vor allem für den projektorientierten Unterricht oder für mathematische Wahlpflichtfächer an [vgl. 12]. In diesem Rahmen haben die Jugendlichen die Zeit, selbstständig in GeoGebra mit Stützpunkten zu experimentieren, eigene Silhouetten zu laden und die mathematische Rekonstruktion auszuprobieren. Darüber hinaus ist diese Verknüpfung von Geometrie und Analysis ein hervorragender Ausgangspunkt für fächerübergreifende Projekte oder eigenständige Arbeiten wie die Vorwissenschaftliche Arbeit. An höheren technischen Lehranstalten, in denen die Fouriertransformation ohnehin eine Rolle spielt, bietet der Ansatz zudem die Chance, die mathematischen Hintergründe der Signalverarbeitung mit vertrauten geometrischen Werkzeugen anwendungsorientiert zu verknüpfen.

## 8.2 Geförderte Kompetenzen

Durch die Arbeit mit den Epizykeln werden ganz gezielt zentrale Handlungskompetenzen des Lehrplans der Sekundarstufe II gefördert, allen voran das Modellieren und das Interpretieren [vgl. 3]. Beim Erfassen der Silhouetten stehen die Lernenden vor der Aufgabe, eine visuelle Form in mathematische Objekte zu übersetzen, was den Kern des mathematischen Modellierungskreislaufs ausmacht. Ein besonders wertvoller Lernmoment im Sinne der Kompetenz des Interpretierens entsteht, wenn die Schülerinnen und Schüler die Parameter in GeoGebra verändern. Wenn sie beobachten, wie sich die Anzahl der verwendeten Kreise auf die Genauigkeit der Zeichnung auswirkt, verknüpfen sie formale Terme direkt mit dem visuellen Ergebnis. Sie lernen dabei zu argumentieren, warum das Weglassen bestimmter

Frequenzen die Kurve glättet, wodurch auch die mathematische Argumentationskompetenz gestärkt wird [vgl. 4]. Nicht zuletzt fordert und fördert dieser Ansatz die technologische Kompetenz sowie das grundlegende Verständnis für funktionale Abhängigkeiten. Die Jugendlichen erleben den Parameter  $t$  nicht als statische Variable, sondern als dynamische Zeitkomponente, die die Zeiger in Bewegung versetzt, wodurch funktionale Zusammenhänge im wahrsten Sinne des Wortes begreifbar werden [vgl. 16], [21].

Die Ergebnisse dieser Arbeit können insbesondere dazu beitragen, eine Intuition zu sonst abstrakten Themen zu entwickeln. Das Endprodukt in GeoGebra bietet einen anschaulichen und motivierenden Zugang, der sich auch im schulischen Kontext einsetzen lässt. Darüber hinaus eröffnet sich als Ausblick die Möglichkeit, die hier entwickelten Methoden auf den drei- bzw.  $n$ -dimensionalen Raum zu übertragen. Damit wird deutlich, dass die Fourier-Analyse nicht nur als analytisches Verfahren, sondern auch als visuelles und didaktisches Instrument ein erhebliches Potenzial besitzt [vgl. 2].

## Literatur

- [1] 3Blue1Brown, *Aber was ist eine Fourier-Reihe? Vom Wärmefluss zu Kreiszeichnungen / DE4*, YouTube Video (2019), Zugriff am 15.1.2026. Adresse: <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k&t=411s>.
- [2] A. Arcavi, “The role of visual representations in the learning of mathematics,” *Educational Studies in Mathematics*, Jg. 52, Nr. 3, S. 215–241, 2003. DOI: 10.1023/A:1024312321077.
- [3] BMBWF, *Lehrplan der Sekundarstufe II – Allgemeinbildende Höhere Schulen (AHS), Pflichtfach Mathematik*, Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich, 2023. Adresse: <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>.
- [4] E. Brunner, *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen*. Heidelberg, Deutschland: Springer Spektrum, 2014, ISBN: 978-3-642-41864-8.
- [5] J. C. P. Campuzano, “Tracing closed curves with epicycles: A fun application of the discrete Fourier transform,” *North American GeoGebra Journal*, Jg. 11, Nr. 1, S. 1–14, 2023.
- [6] M. Ehler, “Computational Fourier Analysis,” Vorlesungsskript, Universität Wien, 2024.
- [7] M. Ehler, “Image and Signal Processing,” Vorlesungsskript, Universität Wien, 2023.
- [8] G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, 18. Aufl. Wiesbaden, Deutschland: Springer Spektrum, 2014, ISBN: 978-3-658-03944-8.
- [9] O. Forster, *Analysis 2: Differentialrechnung im  $\mathbb{R}^n$ , Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 9. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2010, ISBN: 3834812315.
- [10] E. Freitag und R. Busam, *Funktionentheorie 1*, 4. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2006, ISBN: 978-3-540-31764-7.
- [11] C. Gasquet und P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. New York: Springer, 1999, ISBN: 978-1-4612-7211-3.

- [12] G. Greefrath, *Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht*, 2. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer Spektrum, 2018, ISBN: 3-662-57679-1.
- [13] J. Heitzer, *Orthogonalität und Approximation: Vom Lotfällen bis zum JPEG-Format Von der Schulmathematik zu modernen Anwendungen*. Wiesbaden, Deutschland: Vieweg+Teubner Verlag, 2012. DOI: 10.1007/978-3-8348-8629-3.
- [14] K. Königsberger, *Analysis 2*, 5. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, 2004, ISBN: 978-3-540-35077-4.
- [15] W. Kuhn, *Ideengeschichte der Physik: Eine Analyse der Entwicklung der Physik im historischen Kontext*, 2. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer Spektrum, 2016, ISBN: 978-3-662-47058-9.
- [16] M. Lichti, *Funktionales Denken fördern*. Wiesbaden, Deutschland: Springer Spektrum, 2019, ISBN: 978-3-658-23621-2.
- [17] T. N. Narasimhan, “Fourier’s heat conduction equation: History, influence, and connections,” *Reviews of Geophysics*, Jg. 37, Nr. 1, S. 151–172, 1999. DOI: 10.1029/1998RG900006.
- [18] T. Needham, *Anschauliche Funktionentheorie*, 2. Aufl. München, Deutschland: Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2001, ISBN: 348670902X.
- [19] E. M. Stein und R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton, United Kingdom: Princeton University Press, 2003, ISBN: 1400831237.
- [20] J. Stoer und R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 1*, 10. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, 2007, ISBN: 978-3-540-45389-5.
- [21] H.-J. Vollrath, “Funktionales Denken,” *Journal für Mathematik-Didaktik*, Jg. 10, Nr. 1, S. 3–37, 1989. DOI: 10.1007/BF03338719.
- [22] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 8. Aufl. Berlin, Deutschland: Springer Spektrum, 2018. DOI: 10.1007/978-3-662-55407-4.

# Abbildungsverzeichnis

|    |                                                                                                              |    |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Epizykel und Deferent zu unterschiedlichen Zeitpunkten . . . . .                                             | 2  |
| 2  | Bahnpunkt in der komplexer Ebene für unterschiedliches $t$ . . . . .                                         | 3  |
| 3  | Orthogonalprojektionen auf Räume niedrigerer Dimension . . . . .                                             | 6  |
| 4  | Skalarprodukt eines Vektors mit den Basiselementen im euklidi-<br>schen Vektorraum . . . . .                 | 10 |
| 5  | $\sin(2\pi x)$ für $ x  \leq 2$ . . . . .                                                                    | 12 |
| 6  | Position des Bahnpunktes $P_1$ . . . . .                                                                     | 15 |
| 7  | Darstellungen der Funktion $e^{2\pi i 2x}$ . . . . .                                                         | 16 |
| 8  | Punkt auf dem Einheitskreis für verschiedene Parameter $t$ . . . . .                                         | 17 |
| 9  | Stern der durch die Rotation zweier Kreise entsteht . . . . .                                                | 19 |
| 10 | Epizyklische Bahnkurve von drei Kreisen . . . . .                                                            | 20 |
| 11 | $t=0$ Vergleich . . . . .                                                                                    | 20 |
| 12 | Punkt auf dem Einheitskreis für verschiedene Parameter $t$ . . . . .                                         | 21 |
| 13 | Beziehung zwischen Phasenwinkel und Eulerscher Formel . . . . .                                              | 22 |
| 14 | Wahl der Stützwerte von einer Kurve . . . . .                                                                | 24 |
| 15 | Abtastpunkte für $n = 2$ von zwei komplexen Exponentialfunktionen<br>( $e_1$ schwarz $e_3$ violet) . . . . . | 25 |
| 16 | Wahl der Stützwerte . . . . .                                                                                | 31 |
| 17 | $n=3, k=1$ . . . . .                                                                                         | 37 |
| 18 | $n=3, k=-1$ . . . . .                                                                                        | 37 |
| 19 | Stützstellen für $k = 2 \ n = 6$ . . . . .                                                                   | 38 |
| 20 | Stützstellen für $k = 0 \ n = 3$ . . . . .                                                                   | 39 |
| 21 | Geometrische Interpretation der Fourierkoeffizienten . . . . .                                               | 41 |
| 22 | Übersichtsdarstellung der Ergebnisse . . . . .                                                               | 43 |
| 23 | $c_{-1} = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^2 x_j \cdot \overline{B_{1,j+1}}$ . . . . .                                 | 44 |
| 24 | Postition der summierten Vektoren für unterschiedliches $j$ . . . . .                                        | 44 |
| 25 | Multiplikation des Vektors mit $B_1$ für $n = 3$ (grün), mit $c_1 = 1 + i$ . . . . .                         | 45 |
| 26 | Verschiebbare Stützwerte . . . . .                                                                           | 53 |
| 28 | Postition der summierten Vektoren für unterschiedliches $j$ . . . . .                                        | 53 |
| 27 | Bilder zum Interpolieren . . . . .                                                                           | 54 |

|    |                                                                                                                            |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 29 | Rekonstruktion der Silhouette . . . . .                                                                                    | 55 |
| 30 | Rekonstruktion der Silhouette . . . . .                                                                                    | 56 |
| 31 | Drachenkurve, Vektoren und Frequenzspektrum . . . . .                                                                      | 57 |
| 32 | Gesamtdarstellung der Implementierungsschritte in GeoGebra . . .                                                           | 59 |
| 33 | Vergleich der Frequenzspektren . . . . .                                                                                   | 61 |
| 34 | Silhouette Mauersegler . . . . .                                                                                           | 62 |
| 35 | Stützwerte auf dem Mauersegler . . . . .                                                                                   | 62 |
| 36 | Frequenzspektrum des Mauerseglers . . . . .                                                                                | 63 |
| 37 | Vergleich der rekonstruierten Bahnkurven mit abnehmender Anzahl<br>an Fouriermoden. . . . .                                | 64 |
| 38 | Nach gröÙe sortierte Frequenzen . . . . .                                                                                  | 65 |
| 39 | Vergleich der Spektren: (a) Frequenzspektrum, (b) Vogel-Spektrum<br>nicht vereinigt, (c) Vogel-Spektrum vereinigt. . . . . | 68 |
| 40 | Frequenzen nach Absolutbetrag aufsteigend sortiert . . . . .                                                               | 69 |