



universität
wien

MASTERARBEIT / MASTER'S THESIS

Titel der Masterarbeit / Title of the Master's Thesis

Verstehensorientierter Mathematikunterricht Didaktische Annäherung an Martin Wagenscheins Lehrkunst

verfasst von / submitted by

Kerstin Kummer, BEd

angestrebter akademischer Grad / in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien, 2026 / Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt /
degree programme code as it appears on
the student record sheet:

Studienrichtung lt. Studienblatt /
degree programme as it appears on
the student record sheet:

Betreut von / Supervisor:

UA 199 511 520 02

Masterstudium Lehramt Sek (AB)
Unterrichtsfach Geschichte und Politische Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Assoz. Prof. Dr. Martin Ehler, Privatdoz.

„Verstehen ist schwerer zu vermitteln als Wissen.“

– [Scholz, 2011, S. 12]

Abstract (Deutsch)

Diese Masterarbeit untersucht die Bedeutung von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht im Kontext der exemplarischen Lehrkunst nach Martin Wagenschein. Ausgangspunkt ist die Forschungsfrage, inwiefern exemplarisches Lernen durch realitätsbezogene Aufgaben zu einem vertieften mathematischen Verständnis bei Schülerinnen und Schülern beitragen kann.

Theoretisch basiert die Arbeit auf Wagenscheins didaktischem Ansatz, der durch genetisches, sokratisches und exemplarisches Lernen geprägt ist. Im Zentrum steht dabei die Idee, mathematische Inhalte ausgehend von lebensnahen Phänomenen zu entwickeln und Lernprozesse verstehensorientiert zu gestalten.

Auf dieser Grundlage wurde eine eigene Unterrichtssequenz konzipiert, die ein alltagsnahes Problem als Ausgangspunkt nutzt und die Lernenden schrittweise zur eigenständigen Entwicklung mathematischer Zusammenhänge führt. Die Sequenz wurde im schulischen Kontext durchgeführt und anschließend reflektiert.

Die Ergebnisse zeigen, dass realitätsbezogene Aufgaben im Sinne des exemplarischen Lernens das Verständnis mathematischer Inhalte fördern können. Insbesondere wurde deutlich, dass Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge nachhaltiger erschließen, wenn sie diese selbstständig aus konkreten Situationen heraus entwickeln. Gleichzeitig werden Herausforderungen hinsichtlich der Umsetzbarkeit im schulischen Alltag sichtbar.

Die Arbeit leistet damit einen Beitrag zur Diskussion über verstehensorientierten Mathematikunterricht und zeigt Potenziale sowie Grenzen exemplarischen Lernens im schulischen Kontext auf.

Abstract (English)

This master's thesis explores the significance of real-world contexts in mathematics education within the framework of Martin Wagenschein's concept of exemplary teaching. The central research question investigates how exemplary learning through real-life tasks contributes to a deeper mathematical understanding among students.

The theoretical foundation of the study is based on Wagenschein's didactic principles, shaped by genetic, Socratic, and exemplary learning. At its core lies the idea of developing mathematical concepts from authentic, everyday phenomena and of structuring learning processes around understanding.

Based on this framework, a teaching sequence was designed that takes a real-life problem as its starting point and guides students step by step toward independently developing mathematical relationships. The sequence was implemented in a school setting and subsequently analyzed and reflected upon.

The findings indicate that reality-based tasks, in the sense of exemplary learning, can enhance students' comprehension of mathematical content. In particular, students appear to develop more sustainable insights when they construct knowledge based on authentic situations. At the same time, practical challenges related to implementation in everyday classroom settings become evident.

Overall, this study contributes to the ongoing discussion on understanding-oriented mathematics education and highlights both the potential and the limitations of exemplary learning in school contexts.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretischer Hintergrund	5
2.1. Exemplarisches Lernen im Mathematikunterricht	5
2.1.1. Problemlage des Mathematikunterrichts	5
2.1.2. Begriff und didaktisches Prinzip exemplarischen Lernens	7
2.1.3. Exemplarisches Lernen und mathematisches Verstehen	9
2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst	11
2.2.1. Martin Wagenschein - Leben und pädagogische Haltung	11
2.2.2. Bildungstheoretischer Hintergrund Wagenscheins	14
2.2.3. Grundprinzipien der exemplarischen Lehrkunst	17
2.2.4. Realität als Ausgangspunkt mathematischen Denkens	20
2.2.5. Umsetzung der exemplarischen Lehrkunst	22
2.3. Mathematisches Verstehen als Ziel des Unterrichts	27
2.3.1. Bedeutung von mathematischen Verstehen	27
2.3.2. Rolle realitätsbezogener Aufgaben für Verstehen	28
2.3.3. Exemplarisches Lernen - Realität - Verstehen	30
3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs	33
3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs	33
3.2. Rahmenbedingungen des Unterrichts	46
3.2.1. Lerngruppe	46
3.2.2. Lehrplanbezug	47
3.2.3. Begründung der Themenwahl	50
3.3. Didaktisch-methodische Analyse	51
3.3.1. Exemplarische Bedeutung des Inhalts	51
3.3.2. Realitätsbezug der Aufgabe	52
3.3.3. Mathematisches Verstehen als Ziel	54
3.4. Planung des Unterrichts im Sinne Wagenscheins	55
3.4.1. Genetischer Aufbau	55

Inhaltsverzeichnis

3.4.2.	Rolle der Lehrkraft	56
3.4.3.	Sozialformen und Methoden	57
3.4.4.	Lernziele	58
3.5.	Darstellung des Unterrichtsverlaufs	61
3.5.1.	Erste Doppelstunde	61
3.5.2.	Zweite Doppelstunde	64
3.6.	Durchführung des Unterrichts	68
3.6.1.	Rahmenbedingungen der Unterrichtssituation	68
3.6.2.	Beschreibung der ersten Doppelstunde	68
3.6.3.	Beschreibung der zweiten Doppelstunde	71
3.6.4.	Sichtbare Lernprozesse im Gesamtverlauf	73
3.7.	Reflexion des Unterrichtsbeispiels	73
3.7.1.	Zielperspektive und Rolle der Reflexion	73
3.7.2.	Reflexion in Bezug auf mathematisches Verstehen	74
3.7.3.	Reflexion im Sinne Wagenscheins	75
3.7.4.	Grenzen der durchgeführten Unterrichtseinheit	77
3.7.5.	Verbesserungspotenzial und Ausblick	78
4.	Fazit	81
A.	Anhang	85
	Literaturverzeichnis	92

1. Einleitung

Zu Beginn einer Unterrichtsstunde stellte ich meinen Schülerinnen und Schülern eine Aufgabe vor, die eigentlich lebensnah sein sollte. Sie berechneten eifrig, tauschten Ergebnisse aus und kamen schließlich zu einer korrekten Lösung. Dennoch blieb bei mir ein Gefühl der Unzufriedenheit zurück. Zwar war die Rechnung richtig, doch im anschließenden Gespräch zeigte sich, dass der zugrunde liegende Zusammenhang kaum verstanden worden war. Diese Erfahrung hat mich erneut vor die Frage gestellt, wann eine Aufgabe im Mathematikunterricht tatsächlich zu einem tieferen Verständnis führt.

Als Mathematiklehrerin stelle ich mir immer wieder dieselbe Frage: *Wie kann ich mathematische Inhalte so gestalten, dass sie für meine Schülerinnen und Schüler nicht nur verständlich, sondern auch spannend und bedeutsam werden?* Besonders deutlich wird diese Fragestellung jedes Jahr aufs Neue, wenn ich mit der Planung des kommenden Schuljahres beginne. Beim Durchsehen des Schulbuchs und beim Erstellen der Jahresplanung überlege ich, welche Themen logisch aufeinander aufbauen, welche Inhalte mehr Zeit benötigen und an welche Stellen es sinnvoll sein könnte, die Lernenden selbst entdecken zu lassen. Dabei gerate ich oft ins Grübeln: *Welche Themen erschließen sich erst im Zusammenhang mit anderen? Wo lohnt es sich genauer hinzusehen, gemeinsam zu verweilen und nachzufragen? Und wann darf man Lernende auch einfach „hineinstoßen“, damit sie eigene Wege finden und mathematische Verknüpfungen verstehen?*

In diesem Planungsprozess wird mir wiederholt bewusst, dass Mathematikunterricht weit mehr ist als das strukturierte Abarbeiten von Lehrplaninhalten. Vielmehr stellt sich die Herausforderung, mathematische Strukturen so aufzubereiten, dass sie für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar, anregend und möglichst lebensnah erscheinen. Dabei spielen realitätsbezogene Aufgaben eine besondere Rolle. Sie sollen dazu beitragen, mathematische Inhalte mit der Lebenswelt der Lernenden zu verbinden und ihnen zu zeigen, dass Mathematik nicht nur ein abstraktes System von Regeln und Verfahren ist, sondern auch ein Werkzeug, um reale Phänomene zu verstehen und zu beschreiben.

1. Einleitung

Gleichzeitig zeigt die Erfahrung im Unterricht, dass ein bloßer Bezug zur Realität nicht automatisch zu einem tieferen mathematischen Verständnis führt. Aufgaben können zwar einen lebensnahen Kontext aufweisen, werden von Schülerinnen und Schülern jedoch häufig dennoch lediglich als weitere Rechenaufgaben wahrgenommen. Daraus ergibt sich für mich als Lehrerin fortlaufend die Frage, wie Aufgaben gestaltet sein müssen, damit sie tatsächlich zum Nachdenken über mathematische Zusammenhänge anregen und nicht nur bekannte Verfahren reproduzieren lassen.

Auf der Suche nach didaktischen Ansätzen, die ein solches vertieftes Verständnis fördern können, bin ich auf die Ideen der Lehrkunst Martin Wagenscheins gestoßen. Sein Verständnis von exemplarischem Lernen, sokratischer Gesprächsführung und phänomenorientiertem Unterricht stellt hohe Ansprüche an die Gestaltung mathematischer Lernprozesse. Wagenschein betont immer wieder, dass echtes mathematisches Verstehen Zeit, Konzentration und eine sorgfältige Entwicklung von Fähigkeiten erfordert. Dies wird auch im folgenden Satz prägnant zum Ausdruck gebracht:

„Nur wenn man sich klarmacht, dass mathematisches Verstehen in Fähigkeiten besteht, und sich klarmacht, welche Teilfähigkeiten im Einzelnen konstitutiv für eine bestimmte Form und Stufe des mathematischen Verstehens sind, und genügend Zeit, Sorgfalt und Kontrolle aufwendet, um diese Fähigkeit zu vermitteln, kann man ein guter Lehrer der Mathematik sein.“ [Scholz, 2011, S. 13]

Wagenscheins Ansatz fordert dazu auf, sich im Unterricht bewusst auf wenige, ausgewählte Inhalte zu konzentrieren und diese exemplarisch so zu bearbeiten, dass grundlegende mathematische Einsichten entstehen können. Dabei spielen reale Phänomene und anschauliche Problemstellungen eine wichtige Rolle, weil sie als Ausgangspunkt für mathematische Denkprozesse dienen können.

Vor diesem Hintergrund stellt sich die Frage, wie realitätsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht so gestaltet werden können, dass sie nicht nur authentisch erscheinen, sondern tatsächlich zu einem vertieften Verstehen führen. Die vorliegende Arbeit geht daher der folgenden Forschungsfrage nach:

Inwiefern kann exemplarisches Lernen nach Martin Wagenschein durch realitätsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht zu einem tieferen mathematischen Verständnis der Lernenden beitragen?

Zur Beantwortung dieser Fragestellung werden zunächst zentrale theoretische Grundlagen dargestellt. Dabei werden insbesondere die didaktischen Überlegungen zum exemplarischen Lernen nach Martin Wagenschein sowie Ansätze zu realitätsbezogenen Aufgaben im Mathematikunterricht betrachtet. Aufbauend auf diesen theoretischen Perspektiven wird eine Unterrichtssequenz entwickelt und im eigenen Unterricht umgesetzt. Die dabei gemachten Erfahrungen sowie ausgewählte Unterrichtssituationen werden anschließend reflektiert und im Hinblick auf die formulierte Forschungsfrage analysiert. Ziel ist es, aufzuzeigen, inwiefern realitätsbezogene Aufgaben im Sinne des exemplarischen Lernens zu einem vertieften mathematischen Verständnis der Schülerinnen und Schüler beitragen können.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1. Exemplarisches Lernen im Mathematikunterricht

2.1.1. Problemlage des Mathematikunterrichts

Die dargestellte Problemlage des Bildungssystems und die daran anschließende didaktische Kritik lassen sich in folgende zentrale Aspekte gliedern:

- hoher Umfang und steigende Komplexität des Unterrichtsstoffs
- Überbetonung von Faktenwissen ohne tiefes Verständnis
- Dominanz linear-systematischer Strukturen
- Fokus auf Fachlogik statt auf Lernendenorientierung
- Einschränkungen durch curriculare Vorgaben

Ein häufig beklagtes und stets bekanntes Problem in unserem Bildungssystem ist die zunehmende Fülle und Komplexität an Lernstoff. Schulen laufen dadurch Gefahr, sich immer weiter von ihrem eigentlichen Bildungsauftrag zu entfernen. Anstatt sich auf das Wesentliche zu konzentrieren, neigt das System zu einer unkontrollierten Ausweitung: Jedes Fach und jede Disziplin möchte an Bedeutung gewinnen und sich möglichst breit entfalten, selbst dann, wenn dies auf Kosten anderer Fächer geschieht. Diese Entwicklung führt zu einer Überlastung der Lernenden und zu einer Verschiebung des Fokus von Bildung hin zu bloßer Stoffbewältigung. [Scheuerl, 2017, S. 1]

Martin Wagenschein kritisiert diese Tendenz bereits früh und warnt eindringlich vor den Folgen einer solchen Unterrichtslogik. Er stellt infrage, ob durch die bloße Anhäufung von Wissen überhaupt Bildung im eigentlichen Sinne entstehen kann:

„Niemand weiß, ob wir in fünfzig oder hundert Jahren in unseren Breiten überhaupt noch kopfschütteln oder lächeln werden. Wenn ja, dann gewiß

2. Theoretischer Hintergrund

auch über eine Schule, die glaubte, durch Anhäufung halbverstandener und verabsolutierter Wissensergebnisse irgend etwas retten zu können.“ [Wagenschein, 2001, S. 52]

Um Schule davor zu bewahren, im endlosen Stoff zu versinken und zur bloßen Abarbeitungsfabrik zu verkommen, ist ein Abstand zu einer bestimmten Grundhaltung nötig. Besonders in traditionellen und stark etablierten Fächern setzt sich leicht die Vorstellung durch, der Unterricht müsse streng linear aufgebaut sein. Schritt für Schritt vom Einfachen zum Komplexen, ohne Auslassung, in einem sogenannten systematischen Lehrgang. Jeder einzelne Lerninhalt fungiert dabei lediglich als kleine Vorstufe zu etwas Größerem und Schwierigerem, das den Lernenden noch gar nicht bekannt ist. Die Gründe dafür klingen nachvollziehbar. Wissen scheine logisch oder historisch aufeinander aufzubauen, Ordnung schütze vor Lücken, und der Nutzen einzelner Inhalte könne im Voraus nicht abgeschätzt werden. Diese Argumente besitzen zwar innere Logik, greifen pädagogisch jedoch zu kurz. Im Fokus steht dabei das Fach in seiner fertigen, abgeschlossenen Struktur und nicht das Kind. Gedacht wird an den voll entwickelten Erwachsenen, lediglich in eine kindliche Miniaturform verkleinert. [Wagenschein, 2001, S. 28–29]

Ein solches linear-systematische Vorgehen hat erhebliche Konsequenzen für den Unterrichtsalltag. Da Lehrkräfte sich häufig an Lehrplänen oder vorgegebenen Lehrstoffverteilungen orientieren müssen, entsteht ein hohes Unterrichtstempo, das wenig Rücksicht auf den tatsächlichen Erkenntnis- und Entwicklungsstand der Schülerinnen und Schüler nimmt. Dieser lineare Lehrgang verlangt Vollständigkeit, was dazu führt, dass bei der großen Stoffmenge meist nur das scheinbar Wichtigste einzelner Teilgebiete oder gar nur das vermeintlich Wichtigste des Wichtigen behandelt wird. Wenn der Unterricht von einem Thema zum nächsten eilt und das Ziel vor allem darin besteht „*abfragbares Wissen*“ für Prüfungen bereitzustellen, entsteht ein oberflächliches Wissen, das schnell wieder in Vergessenheit geraten wird. [Eichelberger et al., 2008, S. 112–113]

Diese Problematik wird zusätzlich durch die Struktur der Lehrpläne verstärkt. Sie verlangen, dass Schülerinnen und Schüler das gesamte Gebäude der Schulmathematik Stockwerk für Stockwerk, systematisch und möglichst ohne Lücken durchlaufen. Dieses Vorgehen soll sicherstellen, dass angehende Studierende der Mathematik oder Naturwissenschaften später genau dort weitermachen können, wo die Hochschule einsetzt. [Wagenschein, 1955, S. 521] Damit wird jedoch ein Unterricht begünstigt, der sich primär an der

2.1. Exemplarisches Lernen im Mathematikunterricht

inneren Logik der Fachwissenschaft orientiert und weniger an den Bildungsbedürfnissen der Lernenden.

Demgegenüber betont Wagenschein, dass für Bildung nicht Vollständigkeit entscheidend ist, sondern wenige, dafür intensive und authentische Begegnungen mit ausgewählten mathematischen Problemen. Ein grundlegendes Verständnis zentraler mathematischer Ideen und Zusammenhänge wiegt schwerer als die lückenlose Durcharbeitung des Stoffplans. Mit weniger Stoff und sogar mit weniger Zeit ließe sich mehr erreichen als im gegenwärtigen Unterricht. Gebildete Menschen würden tatsächlich wissen, was Mathematik im Kern ausmacht. Und diejenigen, die Mathematik später in ihrem Beruf benötigen, hätten die entscheidenden Grundlagen, nämlich Verständnis und selbstständiges Denken. [Wagenschein, 1955, S. 521]

Diese skizzierte Problemlage bildet den Ausgangspunkt für didaktische Konzepte, die sich bewusst von dem Anspruch lösen, schulische Lerninhalte vollständig und lückenlos abzudecken. Stattdessen rücken Ansätze in den Vordergrund, die auf eine exemplarische Auswahl und vertiefte Behandlung zentraler Inhalte setzen, um nachhaltiges Verstehen zu ermöglichen. Im Mittelpunkt steht dabei weniger die Stofffülle als vielmehr die Qualität der Auseinandersetzung mit ausgewählten Themen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, den Begriff des exemplarischen Lernens zu präzisieren und ihn als didaktisches Prinzip in den Blick zu nehmen.

2.1.2. Begriff und didaktisches Prinzip exemplarischen Lernens

Zentrales Merkmal exemplarischen Lernens ist, dass Lernen an bewusst ausgewählten, exemplarischen und häufig alltagsnahen Beispielen stattfindet. Diese Beispiele sind so gewählt, dass sich an ihnen grundlegende Einsichten, Strukturen und Zusammenhänge erschließen lassen, die über den einzelnen Lerngegenstand hinausgehen. Auf diese Weise können zentrale Erkenntnisse im Denken der Lernenden verankert werden. Exemplarisches Lernen setzt sich damit deutlich von starren, fachsystematisch aufgebauten Lehrplänen ab, die auf Vollständigkeit und lineare Stoffabfolgen zielen. [Ulrich, 2018, S. 45]

Anstatt schnell von Thema zu Thema zu wechseln und nur oberflächlich Wissen anzusammeln, entsteht eine Lernform, die alle kennen, Kindern aber oft nicht gestattet wird: das „*Sich-in-eine-Sache-Versenken*“. In diesem Lernprozess wird bei ausgewählten, ex-

2. Theoretischer Hintergrund

exemplarischen Themen verweilt und mit viel Ausdauer gründlich bearbeitet. Ein solcher Zugang kennt keinen festgefahrenen linearen Lehrgang, sondern die einzelnen Themen sind Spiegel des Ganzen. [Eichelberger et al., 2008, S. 113–114]

Dabei sind Dinge oder Ereignisse nicht aus sich heraus exemplarisch. Ihre exemplarische Bedeutung ergibt sich erst aus dem Zusammenhang, in dem sie miteinander stehen. Das Exemplarische ist somit kein absoluter, sondern ein relationaler Begriff. Es beschreibt eine Beziehung zwischen einem bestimmten Gegenstand, für die Sache, die er repräsentiert, und der Person, für die diese Beziehung Bedeutung hat. In diesem Sinne schlägt das Exemplarische Brücken: Zusammenhänge zwischen Wissen und Verstehen, zwischen den Erfahrungen und den Einsichten, die beim Arbeiten mit exemplarischen Beispielen gewonnen werden und zwischen der Sache selbst und dem Lernenden, der sich damit auseinandersetzt. [Scheuerl, 2017, S. 27]

Dem exemplarischen Prinzip steht die im Unterricht weit verbreitete Vorstellung gegenüber, jeder einzelne Lerninhalt bilde eine kleine vorsorgliche Stufe auf dem Weg zu einem noch unbekannten, komplexeren Thema. Der Grundsatz „*erst das Einfache, dann das Komplizierte*“ darf nicht allein dominieren, da das vermeintlich Einfache oft weder wirklich einfach noch motivierend ist. Vielmehr erzeugt ein solcher Lehrgang häufig die Erwartung kommender Überforderung. Deshalb bedarf es bewusster Prinzipien der Auswahl und Beschränkung auf das Wesentliche. Es wird daher empfohlen, den „*Mut zur Lücke*“ zu zeigen und Gebrauch zu machen. Dabei sollte sich auf wenige ausgewählte Inhalt konzentriert und diese gründlich behandelt werden. [Müller and Schumann, 2022c, S. 77–78]

„Die Worte, die immer wieder auftauchen, wenn das Gespräch um das Exemplarische kreist: stellvertretend, abbildend, repräsentativ, prägnant, Modellfall, mustergültig, beispielhaft, paradigmatisch. – Die Beziehung, die das Einzelne hier zum Ganzen hat, ist nicht die des Teils, der Stufe, der Vorstufe, sondern sie ist von der Art des Schwerpunktes, der zwar einer ist, in dem aber das Ganze getragen wird. Dieses Einzelne häuft nicht, es trägt, es erhellt; es leitet nicht fort, sondern es strahlt an. Es erregt das Fernere, doch Verwandte, durch Resonanz.“ [Müller and Schumann, 2022c, S. 80]

Das exemplarische Lernen zielt somit darauf, im Besonderen das Allgemeine sichtbar zu

2.1. Exemplarisches Lernen im Mathematikunterricht

machen, etwa in Form von Gesetzen, Strukturen, Prinzipien oder grundlegenden Begriffen. Das Einzelbeispiel dient dabei als Zugang zum Allgemeinen, indem aus ihm heraus verallgemeinert und die gewonnenen Einsichten immer wieder an der Wirklichkeit überprüft werden. Es gibt folglich nicht „das eine“ Exemplarische, sondern der Lehrende muss genau wissen, welches Allgemeine, welche Struktur oder welches Gesetz durch das ausgewählte Beispiel verdeutlicht werden soll. Dies setzt ein fundiertes fachliches und didaktisches Verständnis voraus. Zentrale Leitfragen sind dabei: *Welcher allgemeine Sinnzusammenhang soll durch das exemplarische Beispiel erschlossen werden? Welches Grundprinzip oder welche Struktur soll durch das exemplarische Beispiel erschlossen werden? Welches Grundprinzip oder welche Struktur gilt es zu entdecken? Und welche Bedeutung hat der Lerngegenstand heute und zukünftig für die Lernenden?* [Straßer, 2013, S. 501–503]

Exemplarisches Lernen ist jedoch nicht nur ein Prinzip der Stoffauswahl, sondern eng mit der Frage verbunden, wie Verstehen im Unterricht überhaupt entsteht. Besonders im Mathematikunterricht zeigt sich, dass tiefes Verstehen weniger durch die Menge bearbeiteter Inhalte als durch die Art der Auseinandersetzung mit ausgewählten Problemen gefördert wird. Welche Rolle exemplarisches Lernen dabei für mathematisches Verstehen spielt, wird im folgenden Kapitel näher betrachtet.

2.1.3. Exemplarisches Lernen und mathematisches Verstehen

Aus der pädagogischen Perspektive fallen zwei besondere Lernmomente ins Auge: Der eine, weil das Wissen in ihm selbst erlebt wird, der andere, weil das Verstehen sich als ein eigenständiges Bildungsereignis offenbart. Dabei geht es nicht um ein bloßes Registrieren von Informationen, sondern um ein Erleben, das den ganzen Menschen ergreift und eine persönliche Aneignung des Verstandenen ermöglicht. Damit wird Lernen zu einem ganzheitlichen Prozess, der nicht nur kognitive, sondern auch emotionale und personale Dimensionen einschließt. Wagenschein beschreibt solche Bildungsprozesse als „*Herzensmomente*“, in denen Lernende etwas wirklich selbst verstanden haben. Bildung zeigt sich hier nicht im Besitz von Wissen, sondern im Erleben von Einsicht. [Wagenschein, 2002, S. 16]

Diese Auffassung von Verstehen steht im engen Zusammenhang mit der Frage nach der Nachhaltigkeit von Wissen. Lernen ist dann bedeutsam, wenn erworbene Einsichten nicht

2. Theoretischer Hintergrund

an einzelne Situationen gebunden bleiben, sondern in neuen Kontexten erneut aktiviert werden können. [Straßer, 2013, S. 504]

„Das wirklich Verstandene ist das, was man klären konnte, nicht das, was man einfach so dahersagt; das wirklich Verstandene muss man nicht auswendig lernen, weil man erinnern kann, wie man es hergeleitet hat – man kennt den Weg vom Phänomen zur Deutung und von der Theorie zum Phänomen.“ [Müller and Schumann, 2022b, S. 10]

Exemplarisches Lernen zielt genau auf diese Form des nachhaltigen Verstehens. Durch die intensive Auseinandersetzung mit ausgewählten, tragenden Problemen sollen Lernende nicht möglichst viel Stoff bearbeiten, sondern grundlegende Einsichten gewinnen. Entscheidend ist dabei eine innere Beteiligung der Lernenden, ein aktives und mitgehendes Denken, das über bloße Neugier hinausgeht. Erst wenn ein Lerngegenstand den Lernenden wirklich ergreift, kann er zum Ausgangspunkt tieferen Verstehens werden. [Wagenschein, 2001, S. 35–36]

Ein solches Verständnis von Lernen steht im Spannungsfeld schulischer Rahmenbedingungen. Unterricht lässt sich nicht vollständig in vorgegebene Zeiteinheiten pressen, ohne Gefahr zu laufen, den eigentlichen Lernprozess zu verkürzen. Lernen im Sinne exemplarischen Verstehens bedeutet nicht, Stoff vollständig abzuschließen, sondern tragfähige Anfänge zu schaffen. Ziel ist es, Lernende so zu begleiten, dass sie über den Unterricht hinaus weiterfragen, weiterdenken und eigene Denkwege entwickeln können. [Wagenschein, 1955, S. 522–523]

Damit berührt exemplarisches Lernen zugleich grundlegende Bildungsziele der Schule. Die Förderung von Mündigkeit, verstanden als Fähigkeit zu selbstständigem und verantwortungsbewusstem Denken, ist ein zentrales Anliegen schulischer Bildung. Der Mathematikunterricht kann hierzu beitragen, wenn er nicht auf das reproduktive Abarbeiten von Inhalten beschränkt bleibt, sondern Raum für verstehensorientierte Lernprozesse eröffnet. Lernen findet dabei nicht linear oder gleichförmig statt, sondern individuell und oft in nicht vorhersehbaren Denkbewegungen. Aufgabe der Lehrkraft ist es, diese Prozesse anzuregen und zu begleiten, nicht sie vollständig zu steuern. [Maaß, 2020, S. 9, 28]

„Lernen findet im Kopf der Kinder statt; Lehrerinnen und Lehrer können und sollen so gut es geht dazu beitragen, Lernprozesse in den Köpfen der Kinder zu initiieren und zu unterstützen. Gut verständliche Informationen gehören ohne Zweifel dazu, sind aber nicht das Wichtigste. Aus Sicht vieler Lehrenden verläuft der Lernprozess zielgerecht gesteuert und mit den richtigen Informationen zur richtigen Zeit begleitet wird. Lernprozesse in den verschiedenen Köpfen verlaufen jedoch individuell und manchmal sehr chaotisch.“ [Maaß, 2020, S. 28]

Exemplarisches Lernen erweist sich somit als didaktisches Prinzip, das mathematisches Verstehen in den Mittelpunkt stellt. Es verbindet inhaltliche Reduktion mit inhaltlicher Tiefe und eröffnet Lernenden die Möglichkeit, Mathematik als sinnstiftenden Denkprozess zu erfahren. Wie diese Prinzipien konkret im Unterricht umgesetzt werden können und welche Rolle dabei reale Phänomene, genetische Zugänge und dialogische Lernformen spielen, zeigt die exemplarische Lehrkunst von Martin Wagenschein, die im folgenden Kapitel näher betrachtet wird.

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

2.2.1. Martin Wagenschein - Leben und pädagogische Haltung

Martin Wagenschein wurde 1896 geboren und absolvierte ein Studium der Physik und Mathematik. Bereits während seines Studiums in Gießen erlebte er eine gleichzeitige Öffnung von Mathematik und Didaktik. An seiner eigenen Erfahrung wurde sichtbar, wie sich Mathematik durch einen Lehrer aufschließen kann und wie sie sich durch einen anderen ebenso leicht verschließen lässt. Diese Einsicht prägte sein weiteres pädagogisches Denken nachhaltig. [Wagenschein, 2002, S. 19]

Prägende Impulse für sein pädagogisches Denken erhielt er bereits in den 1920er-Jahren durch seine Mitarbeit in Paul Geheeb's Freier Schulgemeinde Odenwaldschule. Dort begegnete er einer Unterrichtspraxis, die nicht auf Belehrung, sondern auf gemeinsames Nachdenken und Austausch über die Sache ausgerichtet war. Nach weiteren Jahren als Lehrer an staatlichen Gymnasien engagierte sich Wagenschein nach dem Zweiten Weltkrieg intensiv in Schulreformprozessen und bei der Erarbeitung neuer Bildungspläne. Um das Jahr 1955 bildete sich ein Kreis, der das exemplarische Prinzip in Zeitschriften

2. Theoretischer Hintergrund

und Büchern erörterte, Ansätze einer Oberstufenreform erprobte und die Einrichtung von Versuchsschulen vorbereitete. Sein Leben endete im Frühjahr 1988. Persönlich und geistig war er zeitlebens eng mit seiner Frau Wera Wagenschein, geborene Biermer, verbunden, die für ihn eine wichtige Gesprächspartnerin und Anregungsquelle darstellte. [Berg, 1989, S. 11] [Müller and Schumann, 2022a, S. 18] [Wagenschein, 2002, S. 74]

Aus diesen biografischen Erfahrungen entwickelte Wagenschein früh eine pädagogische Haltung, die ihrer Zeit weit voraus war. Viele Gedanken, die erst in den 1960er- und 1970er-Jahren im Zuge neuer didaktischer Strömungen, etwa unter Bezug auf Piaget oder Montessori, erneut an Bedeutung gewannen, finden sich bei ihm in grundlegender Form bereits deutlich früher. Im Kern geht es dabei um die Überzeugung, dass jedes Kind grundsätzlich alles lernen kann, wenn die Rahmenbedingungen stimmen. Das Wissen sollte nur in dem Umfang vermittelt werden, der für den nächsten Lernschritt tatsächlich notwendig ist. Wagenschein formulierte diese Einsichten bereits Jahrzehnte zuvor, auch wenn sie später unter anderen Begriffen wie *Motivation*, *Verstärkung* oder *Transfer* wieder aufgegriffen wurden. Dennoch bilden sie, nur unter anderen Namen, längst den Kern von Wagenscheins Idee des exemplarischen Lernens. [Wagenschein, 2001, S. 15, 20–21]

Diese Grundhaltung prägte maßgeblich Wagenscheins Verständnis von Unterricht und der Rolle der Lehrkraft. Sie bestimmte, wie er Lernprozesse initiierte, begleitete und reflektierte. Sein Umgang mit Schülerinnen und Schülern war dabei weder antiautoritär noch autoritär, sondern im Sinne einer von Macht und Angst freien, auf gegenseitiger Achtung beruhenden Haltung geprägt. Unterricht verstand er als gemeinsames Gespräch, in dem eine schwierige Sache im Mittelpunkt steht, an ihr festgehalten wird und sie Schritt für Schritt bis zur Klärung durchdrungen wird. Der Anblick der Gesichter drängte ihn immer wieder ins Gespräch, das er als wirksamste Form des Lehrens betrachtete. *Ansprechen statt Mitreißen*, *Herausfordern statt Drängen* und *Abwarten statt Vorantreiben* kennzeichnen diese Haltung. Die Lehrerin oder der Lehrer führt, indem er sich selbst zurücknimmt, aufmerksam zuhört und den Denkprozess der Lernenden stützt. In dieser Haltung zeigt sich eine deutliche Nähe zur sokratischen Methode, wie sie auch von Leonard Nelson vertreten wurde. [Wagenschein, 2002, S. 37–38, 59]

Später versuchte Wagenschein, die Regeln dieser Gesprächsdiziplin genauer zu fassen. Die Tugend der einzelnen Schülerin und des einzelnen Schülers bestehe darin, alles mitzuteilen, was er oder sie zur Sache denke. Die Tugend der Lehrkraft liege im Führen durch größtmögliche Zurückhaltung der eigenen Person. Dies schließt umfassendes Zu-

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

hören ein. Jede und jeder im Gespräch trage Mitverantwortung dafür, dass Verstehen entstehen könne. Belehrung trat dabei zugunsten eines gemeinsamen Suchens in den Hintergrund. [Wagenschein, 2002, S. 38]

Eng mit dieser pädagogischen Grundhaltung verbunden ist Wagenscheins Verständnis exemplarischen Lernens. Das wahrhaft Exemplarische ist für Wagenschein nicht als bloße Stufe oder Plattform innerhalb eines linearen Lehrgangs zu verstehen. Sobald das exemplarische Element ins Blickfeld tritt, verliert die Vorstellung eines stufenweisen Aufbaus ihre Bedeutung. Das Einzelne wird vielmehr zum Spiegel des Ganzen. In diesem Spiegel soll nicht nur Struktur des Faches sichtbar werden, sondern zugleich das Kind in seiner Ganzheit angesprochen werden. Kind und Sache müssen gleichermaßen berücksichtigt werden. [Wagenschein, 2001, S. 31–34]

Von zentraler Bedeutung ist in diesem Zusammenhang Wagenscheins Auffassung des Einstiegs in einen Lernprozess. Lernen soll nicht mit vorbereitender Belehrung beginnen, sondern mit einem Problem, das ohne Vorwissen aufgegriffen werden kann und dennoch hinreichend Komplexität besitzt. Eine solche Fragestellung weckt die Spontaneität der Lernenden und führt vom vorliegenden Phänomen aus tiefer in das Elementare hinein. Gesucht wird nicht Wissen auf Vorrat, sondern genau das, was zur Klärung des Problems notwendig wird. Das Befremdliche und Ungewohnte fordert heraus und ermöglicht es, aus dem zunächst Fremden das Einfache herauszulösen. Für ein exemplarisches Thema genügt es daher nicht, bloß Neugier zu wecken. Es bedarf einer stärkeren inneren Beteiligung, eines mitgehenden und ergriffenen Denkens. [Wagenschein, 2001, S. 35, 99–100]

Diese Prinzipien waren für Wagenschein besonders im Mathematikunterricht von Bedeutung. Er kritisierte scharf das Vorwegnehmen abstrakter Inhalte, insbesondere dann, wenn Lehrkräfte zu früh und zu schnell von der anschaulichen Sprache der Erfahrung in die Welt der Symbole und Kalküle wechseln. Gerade in der Mathematik sah er die Gefahr, dass Begriffe und Verfahren vermittelt werden, bevor sie für die Lernenden eine innere Bedeutung gewonnen haben. Seine eigene Unterrichtspraxis war dabei keineswegs frei von Schwierigkeiten. Insbesondere das Erstellen und Korrigieren mathematischer Klassenarbeiten empfand er als mühsam, nicht zuletzt weil er selbst kein geübter Rechner war. Dennoch versuchte er immer wieder, Aufgaben zu stellen, die wenigstens ein kleines eigenes Nachdenken eröffneten und nicht ausschließlich auf routinierte Verfahren abzielten. [Wagenschein, 2002, S. 44–45]

2. Theoretischer Hintergrund

Wagenschein verstand sich dabei nicht als außergewöhnlicher Pädagoge, sondern als jemand, der das tut, was Lehren im eigentlichen Sinn bedeutet: Kinder beim Lernen zu begleiten, sodass sie wirklich verstehen lernen. Seine Pädagogik gründete auf echter Zuwendung und einer tiefen Freude am Verstehen, die er selbst als „*Lust am Klarmachen*“ bezeichnete. Lerninhalte sollten zu festen Bestandteilen von Verstand und Gefühl werden, um nachhaltig wirksam zu sein. [Wagenschein, 2001, S. 10] [Kubli, 1996, S. 175–176]

Obwohl zahlreiche Kritiker seine Überlegungen, Beispiele und seinen pädagogischen Optimismus infrage stellten, ging Wagenschein mit diesen Angriffen bemerkenswert gelassen um. Er verarbeitete sie in seinen Schriften mit Ruhe und Freundlichkeit, ohne sich vom teils spöttischen Ton irritieren zu lassen. Zeit seines Lebens war Wagenschein in unterschiedlichen Unterrichtssituationen präsent. Gleich ob mit Kindern, Jugendlichen, Studierenden, Lehrpersonen und Interessierten, bis ins hohe Alter leitete er Seminare in einer begeisternden und fast schon familiären Art und Weise. Sein Wirken lässt ihn als einen Pädagogen erscheinen, der selbst ein Suchender war und zugleich für viele andere zum Wegweiser wurde. [Wagenschein, 2001, S. 13][Berg, 1989, S. 11]

Insgesamt zeigt sich Martin Wagenschein als Pädagoge, der sein gesamtes Wirken dem Versuch widmete, das lineare Denken in Stoffabfolgen durch ein Denken in exemplarischen Fällen zu ersetzen. Sein pädagogisches Konzept entstand zunächst im Kontext der Fächer Mathematik und Physik, besitzt jedoch eine deutlich fachübergreifende Bedeutung. Leben, Haltung und Lehrverständnis bilden bei ihm eine untrennbare Einheit und stellen die Grundlage seiner exemplarischen Lehrkunst dar. Wie sich diese Haltung didaktisch konkretisiert, insbesondere im genetischen Vorgehen, im sokratischen Gespräch und im Umgang mit realen Phänomenen, wird im folgenden Kapitel näher ausgeführt. [Eichelberger et al., 2008, S. 102–103] [Wagenschein, 1955, S. 519–524]

2.2.2. Bildungstheoretischer Hintergrund Wagenscheins

Zentral für Wagenscheins Denken ist ein Bildungsverständnis, das sich entschieden gegen eine bloße Anhäufung von Wissen richtet. Bildung bedeutet für ihn keine innere Spaltung zwischen Verstand und Erfahrung, sowie zwischen Theorie und Wirklichkeit. Fortschritt stellt in diesem Sinne kein hastiges Voranschreiten entlang eines Stoffplans dar, sondern ein besonnenes Weiterführen ursprünglicher Erfahrungen mit der Welt. Bildung erscheint bei Wagenschein als ein genetischer Prozess, als Wachstum aus einem Ursprung heraus.

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

Sie zeigt sich letztlich in der Fähigkeit, zwischen dem zu unterscheiden, was wirklich verstanden ist, und dem, was trotz äußerer Vertrautheit unklar geblieben ist. [Wagenschein, 2001, S. 61, 71]

Dieses Verständnis von Bildung steht in einer langen pädagogisch-philosophischen Tradition. Bereits Sokrates und Platon vertraten die Auffassung, dass Wissen im Menschen angelegt sei und durch gezieltes Fragen zum Vorschein gebracht werden könne. Demnach sollen Menschen nicht mit Wissen belehrt, sondern vielmehr durch geeignete Methoden und Fragetechniken dazu angeregt werden, das in ihnen verborgene Wissen selbstständig zu erschließen. Dabei sollen sich die verdichteten Knotenpunkte des Stoffes auch im Inneren des Lernenden bilden und sowohl den Intellekt als auch die persönliche Beteiligung ansprechen. [Eichelberger et al., 2008, S. 104] [Wagenschein, 2001, S. 31–34]

Auch Maria Montessori entwickelte Ansätze, die exemplarischen Charakter besitzen und zugleich genetische sowie sokratische Elemente enthalten. Ihre sogenannten „*großen Geschichten*“ gehen stets von einer ganzheitlichen Sicht aus und vom umfassenden Zusammenhang der Dinge. Durch gezielte ausgewählte, konkrete Beispiele wird das Staunen der Kinder angesprochen und zugleich ein Zugang zu grundlegenden Zusammenhängen eröffnet. Einzelne exemplarische Inhalte dienen dabei als Schlüssel zum Verständnis des Ganzen. [Eichelberger et al., 2008, S. 108]

Vor diesem Hintergrund lässt sich Wagenscheins pädagogischer Ansatz als bewusste Gegenbewegung zur zunehmenden Komplexität und Abstraktion moderner Wissenschaft verstehen. Hochentwickelte wissenschaftliche Methoden, die in ihrem Streben nach möglichst großer Genauigkeit zwangsläufig komplex werden, treten bei ihm bewusst in den Hintergrund. Ebenso verzichtet er auf endgültige, abgeschlossene Resultate. Stattdessen rückt er ein schlichtes, anschauliches Modell ins Zentrum, das das grundlegende Lösungsprinzip sichtbar macht. Ein solcher Zugang ist unmittelbar nachvollziehbar, weckt die Neugier, regt geradezu dazu an, selbst weiterzudenken und bereitet obendrein Freude am Lernen. [Wagenschein, 2001, S. 9]

In diesem Vorgehen zeigt sich Wagenscheins didaktisches Verständnis in konzentrierter Form. Ihm geht es um eine echte Vermittlung zwischen unmittelbarer Erfahrung und wissenschaftlich fundiertem Wissen. Diese Verbindung beschreibt er selbst als ein Zusammenspiel von „*ursprünglichem Verstehen und exakt durchdachtem Denken*“. [Wagenschein, 2001, S. 9]

2. Theoretischer Hintergrund

Historisch betrachtet veränderte sich jedoch genau dieser Vermittlungsprozess grundlegend. Über viele Generationen hinweg waren Lehrkräfte davon überzeugt, dass ihre Aufgabe darin bestehe, zwischen dem Lernenden und dem Lerngegenstand zu vermitteln. Was sie dabei jedoch kaum bemerkten, ist, dass der sogenannte „*Gegenstand*“ längst nicht mehr das greifbare, sinnlich erfahrbare Objekt der Wirklichkeit ist. Er erscheint vielmehr in einer Form, die durch menschliches Denken stark überformt ist. Zusätzlich wird er auch in theoretischen Rahmen eingeordnet, sprachlich festgelegt, abstrahiert, in Systeme gepresst und mit Bedeutungen versehen. Das bedeutet: Was im Unterricht präsentiert wird, ist nicht das Ding selbst, sondern ein konstruiertes Element eines Wissenssystems, das oft komplizierter und schwerer zugänglich ist als das ursprüngliche Phänomen, das es eigentlich erhellen soll. [Wagenschein, 2001, S. 10]

Diese Entwicklung verweist auf ein tiefer liegendes Problem moderner Wissenschaft. Sie wächst in einer Geschwindigkeit, die sie zunehmend unübersichtlich macht, spaltet sich in immer speziellere Fachgebiete auf und bedient sich zunehmend abstrakter Denkweisen. Dadurch verliert sie ihre Verständlichkeit, nicht nur für Lernende, sondern zuweilen sogar für diejenigen, die in ihr arbeiten. In dieser Entwicklung gefährdet die Wissenschaft ihre eigene Anschlussfähigkeit. Sie wird für die Gesellschaft weniger nutzbar und findet zugleich immer schwerer Nachwuchs, der sich in diesem Geflecht überhaupt noch zurechtfinden möchte. [Wagenschein, 2001, S. 10]

Wagenscheins Bildungsverständnis ist eng mit dem Begriff des Wahrheitserlebnisses verbunden. Erkenntnis entsteht nicht allein durch die Übereinstimmung sinnlicher Wahrnehmung mit theoretischem Wissen, sondern muss den Menschen in seiner Ganzheit ansprechen. [Müller and Schumann, 2022b, S. 10] Entscheidend ist dabei weniger das dauerhaft gespeicherte Wissen als die Art und Weise, wie gelernt wurde, da Lernwege häufig nachhaltiger erinnert werden als Inhalte selbst [Eichelberger et al., 2008, S. 103].

Der Ausgangspunkt exemplarischen Lehrens und Lernens liegt in der bewussten Reduktion übermäßiger Stofffülle zugunsten des Verstehens grundlegender Zusammenhänge und Strukturen. Bereits im 19. Jahrhundert nahm die Menge schulischer Inhalte stark zu, ohne dass deren bildender Gehalt gleichermaßen wuchs. Erst Mitte des 20. Jahrhunderts wurde dieser Entwicklung ausdrücklich widersprochen, indem exemplarisches Lernen als Gegenkonzept zur sogenannten „*Stoffüberschüttung*“ formuliert wurde. Wagenscheins Überzeugung, dass sich im gründlichen Durchdringen des Einzelnen das Ganze erschließt, bringt diesen Ansatz prägnant zum Ausdruck. [Straßer, 2013, S. 500]

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

Um den Begriff des exemplarischen Lernens zu verstehen, muss man ihn im pädagogischen Kontext betrachten. Wenn von exemplarischen Einsichten oder Erfahrungen die Rede ist, geht es um Bildungsprozesse. Genauer formuliert um das Lernen, Verstehen und Erweitern persönlicher Fähigkeiten und Vorstellungen. Solche Erfahrungen sind bedeutsame Schritte, manchmal auch Sprünge, auf dem Weg zur Erweiterung der eigenen geistigen Welt. Nur in diesem Zusammenhang erhält das Wort „*exemplarisch*“ überhaupt einen Nutzen. [Scheuerl, 2017, S. 27]

„Wir behalten oft viel eher, wie wir etwas gelernt haben oder wie uns etwas beigebracht worden ist, auch wenn wir das, was wir gelernt haben, schon längst wieder vergessen haben.“ [Eichelberger et al., 2008, S. 103]

Exemplarisches Lernen erhält seinen Sinn aus der Frage nach dem „*Wozu?*“ eines ausgewählten Beispiels. Exemplarische Fälle werden nicht zufällig gewählt, sondern sollen helfen, komplexe Zusammenhänge verstehbar zu machen. Auch im alltäglichen Denken orientieren sich Menschen an anschaulichen Beispielen, um allgemeine Prinzipien zu begreifen. [Eichelberger et al., 2008, S. 115] Wie sich dieses bildungstheoretische Verständnis exemplarischen Lernens im Unterricht konkret ausgestalten lässt, ist jedoch keine abstrakte Frage. Sie betrifft unmittelbar die Auswahl von Lerngegenständen, den Einstieg in Lernprozesse, die Rolle der Lehrperson sowie die Art und Weise, wie Verstehen im Unterricht entstehen kann. Diese didaktische Konkretisierung exemplarischen Lernens findet sich in der exemplarischen Lehrkunst Martin Wagenscheins, die im folgenden Kapitel präsentiert wird.

2.2.3. Grundprinzipien der exemplarischen Lehrkunst

Die zentralen Grundprinzipien der exemplarischen Lehrkunst lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Sokratisches Prinzip: Lernen durch dialogisches, kooperatives Nachdenken und Formulieren eigener Gedanken
- Exemplarisches Prinzip: Vertiefte Auseinandersetzung mit ausgewählten, tragenden Inhalten statt Vollständigkeit

2. Theoretischer Hintergrund

- Genetisches Prinzip: Rückführung auf ursprüngliche Problemsituationen, um Erkenntnisprozesse nachzuvollziehen

Im Zentrum von Wagenscheins Didaktik steht die enge Verbindung der drei Prinzipien: *genetisch*, *sokratisch* und *exemplarisch*. Diese Dreigliedrigkeit bildet keine lose Sammlung einzelner Methoden, sondern eine zusammengehörige pädagogische Grundhaltung. Das genetische Prinzip richtet den Unterricht auf das Entstehen von Erkenntnis aus, das sokratische Prinzip auf den dialogischen Prozess des gemeinsamen Denkens, und das exemplarische Prinzip auf die bewusste Auswahl tragender Inhalte. Die Lernenden schlagen eine Verbindung zwischen bisherigen Naturerlebnissen und neuem Wissen. Dabei erkennen sie sowohl Übereinstimmungen als auch Unterschiede, und verstehen somit die Notwendigkeit neuer Methoden und theoretischer Modelle. Psychologisch legt er den Fokus dabei auf das „*Bruchlose*“, dass das allmähliche Hineinwachsen in neue Erkenntnisse beschreibt. Genetisches und sokratisches Arbeiten ist nur an ausgewählten Themen möglich, während umgekehrt exemplarisches Arbeiten zwingend ein genetisches Vorgehen voraussetzt. [Wagenschein, 2001, S. 75, 97] [Labudde, 1996, S. 171]

Das sokratische Gespräch nimmt innerhalb dieser Dreigliedrigkeit eine besondere Stellung ein. Lernen und Verstehen werden als kooperative Prozesse verstanden, in denen Schülerinnen und Schüler eigene Gedanken entwickeln, formulieren und zur Diskussion stellen. Der dialogische Austausch dient dabei nicht nur der gemeinsamen Klärung der Sache, sondern auch der Entwicklung neuer Begriffe sowie dem bewussten Übergang von der Alltagssprache zur Fachsprache. Auf diese Weise leistet der sokratische Unterricht zugleich einen Beitrag zur sprachlichen Bildung. Die Rolle der Lehrkraft besteht darin, diesen Denkprozess zu begleiten, ohne durchzusetzen. Der Lehrer stellt die wesentliche Frage nicht einfach hin, sondern sorgt dafür, dass sie sich selbst bildet, dass sie sich zeigt und hervortritt. Jedes Drängen oder jedes Erzwingen erstickt den natürlichen Denktrieb dabei sofort. [Labudde, 1996, S. 172] [Wagenschein, 2001, S. 81]

Im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich gilt Wagenschein als der Begründer des exemplarischen Prinzips. Er betont, dass Unterrichtsinhalte so ausgewählt werden sollen, dass sie stellvertretend für zentrale Inhalte, Fragestellungen und Grenzen eines ganzen Faches stehen. Gerade in allgemeinbildenden Schulen soll so eine Beschränkung auf das Wesentliche erreicht werden. Es geht nicht darum, das gesamte Wissen einer Disziplin zu vermitteln, sondern darum charakteristische Methoden und Erkenntnisse exemplarisch zu erarbeiten. Die Auswahl der Unterrichtsinhalte ist daher bei Wagen-

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

schein von besonderer Bedeutung. [Labudde, 1996, S. 173]

Das exemplarische Verfahren unterscheidet sich grundlegend von einem linearen, stufenförmig aufgebauten Lehrgang. In seiner reinsten Form kennt es keinen systematischen Aufbau vom Einfachen zum Schwierigen, sondern kann sich ganz auf ein einziges, besonders tragfähiges Problem konzentrieren. Dies wird ohne vorbereitende Belehrung aufgegriffen und entfaltet seine exemplarische Wirkung dadurch, dass sich an ihm grundlegende Zusammenhänge und Einsichten erschließen lassen. Auch ein solcher Einstieg kann bereits exemplarischen Rang besitzen, da er als Ausgangspunkt für weiterführendes Denken dient und tragende Einsichten ermöglicht. [Wagenschein, 2001, S. 37–38]

Eng damit verbunden ist das von Wagenschein formulierte genetische Prinzip. Genetisches Lernen bedeutet, Lernende in eine ursprüngliche Problemsituation zurückzuführen, in der ein ungelöstes Problem so vor ihnen steht, wie es der Menschheit selbst einst begegnet ist. Wissenschaft soll auf diese Weise wieder als Mittel dienen, reale Fragen zu klären, und nicht als fertiger Wissensbestand vermittelt werden. Aus diesem Grund ersetzt Wagenschein den traditionellen Stoffkatalog durch die sogenannten *Funktionsziele*, die grundlegende Erfahrungen und Einsichten beschreiben. Nicht die Vollständigkeit eines Themengebiets ist entscheidend, sondern das Durchdringen ausgewählter Inhalte, an denen sich die Denk- und Arbeitsweise einer Disziplin exemplarisch erschließen lässt. [Wagenschein, 2001, S. 14–15] [Scheuerl, 2017, S. 20]

Ein genetischer Lehrgang zielt darauf, Lernende jene Denkwege nachvollziehen zu lassen, die auch die Wissenschaft selbst gegangen ist. Im Vordergrund steht nicht die fertige Darstellung wissenschaftlicher Ergebnisse, sondern das eigene Aufspüren von Zusammenhängen. Gemeint ist die lebendige Wissenschaft, die aus der aufmerksamen Betrachtung der Wirklichkeit hervorgeht und zum eigenständigen Denken herausfordert. Das exemplarische Arbeiten schafft hierfür die notwendigen Bedingungen, indem es Raum für vertiefte Auseinandersetzung lässt. [Wagenschein, 2001, S. 80]

Die Grundprinzipien der exemplarischen Lehrkunst verdeutlichen somit, dass Unterricht nicht durch Stofffülle, sondern durch die Qualität der ausgewählten Inhalten und Lernprozesse wirksam wird. Wie sich diese Prinzipien konkret im Unterricht umsetzen lassen und welche Rolle dabei reale Phänomene, genetische Zugänge und dialogische Lernformen spielen, wird in den beiden folgenden Kapitel näher ausgeführt.

2. Theoretischer Hintergrund

2.2.4. Realität als Ausgangspunkt mathematischen Denkens

Für einen Einstieg mag es zunächst genügen, dass ein Problem Neugier weckt. Soll jedoch ein exemplarisches Thema gewählt werden, das das Ganze zu spiegeln vermag, so braucht es mehr als bloße Aufmerksamkeit. Ein solcher Einstieg muss eine innere Beteiligung der Lernenden auslösen und ein tragfähiges Problem ins Zentrum stellen, das ohne vorbereitende Belehrung aufgegriffen wird. Gleich zu Beginn steht daher eine Frage im Mittelpunkt, die eine gewisse Komplexität besitzt und damit die Spontaneität des Kindes weckt und eigenständiges Denken herausfordert. Die gedankliche Auseinandersetzung dringt zu den Grundelementen vor und zugleich weiter zu anspruchsvolleren Fragestellungen. Spätere erneute Einstiege können an ähnlicher Stelle anknüpfen, ebenso etwas höher und mit erweitertem Blick. [Wagenschein, 2001, S. 34–36]

Vor diesem Hintergrund lässt sich begründen, weshalb der Mathematikunterricht stärker an Anwendungen ausgerichtet werden sollte. Nach Kaiser [Kaiser, 2015, S. 4] lassen sich hierfür drei zentrale Argumente anführen: Erstens sollen Lernende solche mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten erwerben, mit denen sie reale Situationen beschreiben, verstehen und bewältigen können. Zweitens dienen Anwendungsaufgaben dazu, mathematische Inhalte anschaulich zu machen und ihre Einführung sinnvoll zu motivieren. Drittens würde ein Mathematikunterricht ohne Bezüge zur außermathematischen Wirklichkeit ein verzerrtes Bild des Faches vermitteln. Durch eine angemessene Anwendungsorientierung entsteht hingegen ein ausgewogenes Bild der Mathematik als Disziplin.

Damit Anwendungen im Unterricht ihr Potenzial entfalten können, müssen jedoch bestimmte Kriterien erfüllt sein. Geeignete Anwendungsprobleme sollte dabei lebensnah und für die Lernenden bedeutsam sein, ohne dabei einen übermäßigen fachfremden Aufwand zu erfordern. Zudem müssen sie sowohl inhaltlich zugänglich sein, als auch mathematisch für Schülerinnen und Schüler erreichbar sein. Darüber hinaus ist es wichtig, dass die Aufgabenstellung mit den curricularen Vorgaben vereinbar ist und idealerweise eine strukturierende Funktion im Unterricht übernehmen kann. [Kaiser, 2015, S. 5]

Die Forderung, den Mathematikunterricht stärker an der Realität auszurichten, erscheint auf den ersten Blick selbstverständlich. Entscheidend ist jedoch die Frage, ob die im Unterricht eingesetzten alltagsbezogenen Aufgaben tatsächlich mit Situationen des wirklichen Lebens übereinstimmen. Grundlage hierfür bildet der Begriff der Authentizität. Authentische Aufgaben zeichnen sich dadurch aus, dass Mathematik ein geeignetes Werk-

zeug darstellt, um eine reale Fragestellung aus der Lebenswelt zu bearbeiten. Ob diese Passung zwischen Situation und Aufgabe tatsächlich vorliegt, ist jedoch nicht zweifelsfrei und muss kritisch überprüft werden. Das Konzept der Authentizität bietet hierfür einen geeigneten Bezugsrahmen. [Eichler, 2015, S. 105–106]

Eine belastbare Verbindung zwischen mathematischen Inhalten und realen Kontexten ist anspruchsvoll. Nicht jede Alltagssituation eignet sich zur Formulierung einer sinnvollen mathematischen Fragestellung, und umgekehrt lässt sich auch nicht jeder mathematische Inhalt überzeugend in eine authentische Realsituation einbetten. Eine gelungene Verzahnung von Mathematik und Wirklichkeit ist also möglich, aber keineswegs selbstverständlich. Tatsächlich existiert nur eine kleine Zahl wirklich authentischer Kontexte, die sich für den Unterricht eignen, da viele realitätsorientierte Modelle ein theoretisches Hintergrundwissen voraussetzen, das über das schulische Niveau hinausgeht. [Eichler, 2015, S. 116] [Förster, 2015, S. 137]

Angesichts dessen ist eine differenzierte Betrachtung verschiedener Aufgabenformate erforderlich. Aufgaben in lebensnahen oder anwendungsorientierten Kontexten zielen darauf ab, mithilfe mathematischer Methoden Informationen über reale Situationen zu gewinnen. Demgegenüber stehen sogenannte eingekleidete Aufgaben, bei denen die Realität lediglich als dekorativer Rahmen dient, um mathematische Inhalte anschaulich zu machen und zu üben. Solche Aufgaben führen häufig zu Missverständnissen, da sie den Eindruck erwecken, tatsächliche Aussagen über die Wirklichkeit zu treffen, obwohl der Kontext für die Lösung nicht wirklich relevant ist. [Jahnke, 2011, S. 162]

Die übrigen realitätsbasierten Aufgaben umfassen jene, die lediglich Daten mit echtem Bezug enthalten. Dabei sollte jedoch nicht übersehen werden, dass auch reale Daten nicht einfach existieren. Sie wurden immer von jemandem aus einem bestimmten Anlass erhoben oder zusammengestellt. Wird der Begriff der Authentizität auf Mathematikaufgaben angewandt, erscheint es daher sinnvoll, ihn nicht wörtlich, sondern im übertragenen Sinn zu verstehen, etwa im Sinne von *Plausibilität* oder *Glaubwürdigkeit*. [Jahnke, 2011, S. 163, 169]

Auch in den mathematikdidaktischen Forschungen werden unterschiedliche Aufgabenformate unterschieden, darunter *eingekleidete Aufgaben*, *Textaufgaben*, *Sachaufgaben* und *Modellierungsaufgaben*. Während eingekleidete Aufgaben vor allem der Einübung von Rechenfertigkeiten dienen und der Kontext weitgehend austauschbar ist, erfordern Text-

2. Theoretischer Hintergrund

aufgaben bereits ein eigenständiges Erfassen der Situation sowie die Übersetzung des Aufgabentextes in mathematischen Strukturen. Dennoch bleiben auch sie häufig stark vereinfacht und führen eindeutig zu genau einer Lösung. Sachaufgaben und insbesondere Modellierungsaufgaben greifen hingegen reale Probleme aus der Lebenswelt auf und stellen authentische Fragestellungen sowie tatsächliche Daten bereit. Sie zeichnen sich durch eine höhere Komplexität, Offenheit der Lösungswege und die Notwendigkeit aus, zwischen realer Situation und mathematischem Modell zu vermitteln. Gerade diese Übersetzungsprozesse rücken dabei in den Mittelpunkt des Lernens. [Plath, 2020, S. 239–240]

Ein zentrales Anliegen realitätsbezogenen Mathematikunterricht besteht schließlich darin, den Lernenden ein realistisches und stimmiges Bild der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin zu vermitteln. Dazu gehört auch, ihre Bedeutung für gesellschaftliche Entwicklungen sichtbar zu machen, ein Aspekt, der von Schülerinnen und Schülern häufig kaum wahrgenommen wird. Um entsprechende Kompetenzen im Modellieren und Anwenden zu fördern, müssen mathematische Anwendungen fest im Unterricht verankert werden. Dabei ist entscheidend, dass Lernende nicht nur selbst modellieren, sondern auch die Modellierungen anderer kritisch reflektieren können. [Henn, 2003, S. 1–2]

Wenn Realität als Ausgangspunkt mathematischen Denkens verstanden wird, stellt sich folgerichtig die Frage, wie dieser Anspruch konkret im Unterricht eingelöst werden kann. Das folgende Kapitel widmet sich daher der Umsetzung der exemplarischen Lehrkunst im Sinne Wagenscheins.

2.2.5. Umsetzung der exemplarischen Lehrkunst

Die Umsetzung der exemplarischen Lehrkunst kann durch folgende Kernaspekte veranschaulicht werden:

- Gestaltung offener und frageorientierter Lernprozesse unter Auflösung gewohnter Sicherheiten
- Orientierung der Unterrichtsplanung an dokumentierten Unterrichtserfahrungen statt an vorab festgelegten Inhaltskatalogen
- Organisation längerer zusammenhängender Lernphasen (Epochenunterricht) zur Sicherung kontinuierlicher Denk- und Verstehensprozesse

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

- Auswahl und didaktische Aufbereitung exemplarischer Inhalte im Hinblick auf grundlegende Strukturen und Zusammenhänge
- Bedeutung der Lehrperson als fachlich und didaktisch kompetente, präsent handelnde Instanz im Lernprozess
- Förderung nachhaltiger Lernprozesse durch aktive, fragende und verstehende Auseinandersetzung der Lernenden

Damit ein Problem exemplarische Kraft entfalten kann, müssen Lehrende wie Lernende ihre gewohnte Sicherheit verlassen und sich auf einen offenen, fragenden Lernprozess einlassen. Wagenschein betont, dass sich exemplarische Lernwege nicht durch eine Auswahl vorab bestimmter Inhalte bestimmen lassen. Entscheidend sind vielmehr ausführliche Berichte realer Unterrichtserfahrungen, die als Orientierung dienen. Exemplarisches Lehren funktioniert nicht als Rezept, sondern als Anregung, die weiterträgt und ansteckt. [Wagenschein, 2001, S. 39] Exemplarisches Lernen wird damit weniger als Methode der Stoffvermittlung, sondern vielmehr als Form verstehensorientierten Denkens sichtbar.

Aus meiner Sicht liegt die besondere Bedeutung dieses Ansatzes darin, dass Lernen nicht als bloßes Nachvollziehen vorgegebener Inhalte verstanden wird, sondern als offener, mitunter auch irritierender Denkprozess. Gerade im Mathematikunterricht zeigt sich für mich immer wieder, dass nachhaltiges Verständnis oft erst dann entsteht, wenn Lernende Unsicherheiten begegnen, eigene Fragen entwickeln und sich aktiv mit Denkproblemen auseinandersetzen.

Als geeigneten Rahmen für genetisch-exemplarische Prozesse sah Wagenschein den über mehrere Tage hinweg stattfindenden Epochenunterricht, in dem Schülerinnen und Schüler durch eigenes Beobachten, Erforschen und Zusammenfassen zu einem tiefgehenden Verständnis gelangen. [Ulrich, 2018, S. 40] Seine Lehrkustdidaktik versteht sich dabei weniger als Theorie, sondern als Methode des praktischen genetisch-exemplarisch-sokratischen Arbeitens, die im schulischen Alltag nachzuvollziehen und weiterzuentwickeln ist. [Ulrich, 2018, S. 43–45]

Wagenschein weist zugleich darauf hin, dass exemplarischer Unterricht im herkömmlichen Schulbetrieb strukturell erschwert ist. Fehlt der epochenartige Unterrichtsrahmen, bedarf es Mut und Kompromisse. Doppelstunden können einzelne Aspekte des genetischen Vorgehens ermöglichen, doch längere Pausen unterbrechen die für das genetische Lernen

2. Theoretischer Hintergrund

notwendige innere Verbindung zwischen Lernende und Sache. Trotz dieser Einschränkungen hält Wagenschein genetische Unterrichtserfahrungen auch im Kurzstundenbetrieb für möglich. Der Wirkungsgrad bleibt zwar geringer als im Epochenunterricht, ist aber immer noch höher als im heute üblichen Vorgehen, sofern man ihn an der Dauerhaftigkeit des Gelernten misst. [Wagenschein, 2001, S. 115]

Aus meiner Perspektive zeigt sich hier ein zentrales Spannungsfeld. Ich stehe dem Doppelstundenmodell grundsätzlich offen gegenüber und sehe darin durchaus eine sinnvolle Möglichkeit, längere zusammenhängende Lern- und Denkprozesse im schulischen Alltag zu realisieren. Gleichzeitig wird deutlich, dass die konsequente Umsetzung exemplarischen Unterrichts im bestehenden Schulbetrieb nur begrenzt realistisch ist, da Unterrichtsorganisation, Zeitstruktur und Leistungsanforderungen dem häufig entgegenstehen. Besonders kritisch ist dabei zu sehen, dass Lernprozesse im Kurzstundenbetrieb leicht fragmentiert verlaufen und dadurch der von Wagenschein betonte Zusammenhang zwischen Lernenden und Sache abgeschwächt werden kann. Besonders der enge zeitliche und curriculare Rahmen begrenzt die Möglichkeiten vertiefender Lernprozesse.

Schließlich stellt sich die Frage, welche Themen eines Faches exemplarisch sind. Ein fester Katalog exemplarischer Inhalte würde dem Geist dieses Zugangs widersprechen. Exemplarisch wird ein Thema nicht aufgrund seiner äußeren Eigenschaften, sondern erst im lebendigen Wechselspiel zwischen Lehrenden, Lernenden und Gegenstand. Anstelle eines verbindlichen Kanons fordert Wagenschein eine Vielzahl von Erfahrungenberichten und lebendigen Unterrichtsdarstellungen, die zur eigenen Auseinandersetzung anregen. [Müller and Schumann, 2022c, S. 85]

Exemplarische Inhalte müssen so gewählt werden, dass grundlegende Strukturen, Prinzipien oder Gesetzmäßigkeiten sichtbar werden. Wagenschein spricht hierbei von *Inseln* oder *Brückenpfeilern*, die vertiefendes Lernen ermöglichen. Gleichzeitig bleibt offen, wie diese Auswahl konkret zu gestalten ist. Zentral bleibt die Begeisterung des Lehrenden für die Sache, die sich im besten Fall auf die Lernenden überträgt. [Straßer, 2013, S. 503] In diesem Verfahren ist die persönliche Gegenwart der Lehrperson entscheidender als in jeder anderen Unterrichtsform. [Wagenschein, 2001, S. 127–128] Die Auswahl geeigneter Inhalte erweist sich daher als zentrale didaktische Herausforderung.

Die konkrete Auswahl eines geeigneten exemplarischen Beispiels stellt somit einer der größten Herausforderungen im Rahmen dieser Lernstrategie dar. Sie erfordert sowohl

2.2. Martin Wagenschein und seine Lehrkunst

breite fachliche Einblicke als auch vertiefte Auseinandersetzung mit dem gesamten Themenbereich. Es ist in erster Linie die Aufgabe der Lehrenden, ein passendes Beispiel bewusst auszuwählen und in weiterer Folge didaktisch aufzubereiten. Dabei ist insbesondere ihre didaktische Kompetenz gefordert. [Eichelberger et al., 2008, S. 115] Wagenschein selbst betont, dass eine solche Verbindung in der Lehrerbildung häufig fehle. Es brauche eine konsequente Verknüpfung von Stofferschließung und stoffvermittelnder Tätigkeit, um exemplarisches Denken wirklich fruchtbar werden zu lassen. [Straßer, 2013, S. 503]

Aus eigener Perspektive erscheint hierbei insbesondere die These bedeutsam, dass nicht jedes Themengebiet des Lehrplans gleichermaßen für einen exemplarischen Zugang geeignet ist. Vielmehr dürfte die Eignung stark davon abhängen, ob sich grundlegende Strukturen tatsächlich sinnvoll herausarbeiten lassen und ob das jeweilige Thema ausreichend Tiefgang für einen genetisch-exemplarischen Zugang bietet. In diesem Zusammenhang wird die Begeisterung der Lehrperson für das jeweilige Thema als zentraler Gelingensfaktor eingeschätzt.

In diesem Zusammenhang ist auch die bereits zuvor thematisierte Notwendigkeit der Stoffreduktion relevant. Diese stellt eine grundlegende Voraussetzung für exemplarisches Lernen dar, da nur durch eine bewusste Auswahl und Reduktion von Inhalten jene vertiefenden Lernprozesse ermöglicht werden können, die für den Ansatz charakteristisch sind. Gleichzeitig verdeutlicht dies jedoch auch eine zentrale Herausforderung im Spannungsfeld zu curricularen Vorgaben und Leistungsanforderungen.

Besonders herausfordernd erscheint mir dabei die Umsetzung als Lehrperson im Mathematikunterricht, da dieser stark durch einen systematischen Aufbau und aufeinander aufbauende Inhalte geprägt ist. Gerade dieser strukturelle Charakter erschwert es, Inhalte konsequent zu reduzieren, ohne grundlegende Anschlussfähigkeit für spätere Lernprozesse zu gefährden.

Ergänzend zeigt sich, dass in der Lehramtsausbildung oftmals nicht nur diese Verbindung zwischen Fachlichkeit und Didaktik zu kurz kommt, sondern auch die intensive Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Lehr- und Lernmethoden nur begrenzt erfolgt. Dadurch fehlen angehenden Lehrpersonen häufig konkrete Erfahrungsräume, um exemplarische oder alternative Unterrichtsformen sicher einzuordnen und didaktisch umzusetzen.

Darüber hinaus erscheint mir die Rolle der Lehrperson in dieser Unterrichtsform in beson-

2. Theoretischer Hintergrund

derer Weise hervorgehoben. Auch wenn Lehrpersonen grundsätzlich in jeder Unterrichtsstunde präsent sind, nehme ich im exemplarischen Unterricht eine nochmals gesteigerte fachlich-didaktische Präsenz wahr. Der Lernprozess ist deutlich offener gestaltet und stärker durch die Interaktion zwischen Lehrperson, Lernenden und dem Gegenstand geprägt, wodurch von mir als Lehrperson ein höheres Maß an situativer Aufmerksamkeit und Flexibilität gefordert wird.

Wagenscheins Ansatz ist nicht nur eine Methode der Vermittlung, sondern Ausdruck eines pädagogischen Weltbildes, das nicht für jede Lehrperson selbstverständlich anschlussfähig ist und kontroverse Reaktionen auslösen kann. Dennoch bleibt die Leitfrage fruchtbar: „*Wie würde Wagenschein mein Tun als Lehrperson beurteilen?*“ Sie kann als Orientierung für den Unterricht dienen, auch wenn weitere Anforderungen berücksichtigt werden müssen. [Kubli, 1996, S. 178–179]

Zusammenfassend zeigt sich, dass die exemplarische Lehrkunst im Mathematikunterricht vor allem als ergänzender und punktuell eingesetzter Ansatz sinnvoll erscheint, während eine dauerhafte Umsetzung an strukturelle Grenzen des Schulalltags stößt. Trotz struktureller Grenzen bietet exemplarische Lehrkunst wichtige Impulse für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht.

Exemplarische Lehrkunst verlangt von Lehrpersonen insbesondere:

- Mut zur Stoffreduktion
- Mut zur Offenheit
- Zeit für Verstehen
- Begeisterung für die Sache
- fachliche und didaktische Präsenz
- Bereitschaft, Lernen nicht vollständig kontrollieren zu wollen

Mein persönlicher Standpunkt zur exemplarischen Lehrkunst lässt sich wie folgt zusammenfassen:

- Ich sehe exemplarische Lehrkunst als didaktisch wertvollen, aber begrenzt einsetzbaren Ansatz.

2.3. Mathematisches Verstehen als Ziel des Unterrichts

- Ich halte eine durchgängige Umsetzung im schulischen Alltag für nur eingeschränkt realistisch.
- Ich bewerte den Ansatz besonders im Mathematikunterricht als gewinnbringend für vertieftes Verständnis.
- Ich sehe seinen größten Nutzen in punktuellen, bewusst gesetzten Unterrichtsphasen.

Damit exemplarisches, genetisches und sokratisches Lernen im Sinne Wagenscheins möglich werden kann, muss mathematisches Lernen auf das Ziel des Verstehens ausgerichtet sein. Im folgenden Kapitel wird daher erläutert, was unter mathematischem Verstehen zu verstehen ist, welche Dimensionen es umfasst und welche Bedeutung es für die Gestaltung eines lernwirksamen Mathematikunterrichts hat.

2.3. Mathematisches Verstehen als Ziel des Unterrichts

2.3.1. Bedeutung von mathematischen Verstehen

Obwohl Mathematik den Alltag in vielfältiger Weise strukturiert, wird sie von vielen Menschen nur in elementaren Zusammenhängen bewusst wahrgenommen, etwa bei einfachen Rechnungen oder Schätzungen. Gerade vor diesem Hintergrund gewinnt die schulische Förderung mathematischen Verstehens an Bedeutung, da sie über bloße Anwendung hinaus Orientierung und Einsicht ermöglichen soll. [Förster, 2015, S. 138]

Mathematisches Begreifen bildet ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts. Obwohl Mathematik in hohem Maße zur Gestaltung der modernen Welt beiträgt, bleiben ihre Wirkungen für Lernende häufig unsichtbar, da mathematische Prozesse in technische Systeme eingebettet sind. Diese Unsichtbarkeit erschwert den Zugang zum Fach und verstärkt das Gefühl der Fremdheit gegenüber der Mathematik. [Förster, 2015, S. 138] [Henn, 2015, S. 203–204]

„Die Lernenden sollen ihre Welt auch durch eine mathematische Brille sehen lernen und mit Hilfe dieser Brille erkennen, wo überall Mathematik zu entdecken ist.“ [Henn, 2015, S. 203]

2. Theoretischer Hintergrund

Mathematisches Verstehen zielt dabei nicht auf das bloße Beherrschen einzelner Rechenverfahren. Im Mittelpunkt steht vielmehr die Fähigkeit, mathematische Strukturen zu erkennen, Zusammenhänge zu durchdringen und Einsichten begründet zu gewinnen. Schülerinnen und Schüler sollen Mathematik als sinnstiftendes Denkwerkzeug erfahren, das Wegfindung ermöglicht. Dadurch werden sie zur aktiven Auseinandersetzung mit der Welt befähigt. Ein solcher Zugang geht über kurzfristig abrufbares Wissen hinaus und fördert nachhaltige Bildungsprozesse. [Labudde, 1989, S. 222–225]

Ein Unterricht mit Realitätsbezug kann zur Entwicklung dieses Verständnisses wesentlich beitragen, insbesondere wenn er vielfältige methodische Zugänge eröffnet und mathematische Inhalte nicht isoliert, sondern in sinnhaften Zusammenhängen erfahrbar macht. Der Realitätsgrad einer Aufgabe stellt dabei einen bedeutsamen Gestaltungsfaktor dar, da er nicht nur mathematische Einsichten unterstützt, sondern auch zentrale Bildungsziele wie Selbstständigkeit und die Entwicklung mündiger Bürgerinnen und Bürger fördert. [Maaß, 2011a, S. 226]

„Im Mathematikunterricht werden immer mehr Aufgaben mit Realitätsbezug eingesetzt, um Schülerinnen und Schüler zu befähigen, sich als mündige Bürgerinnen und Bürger mit der sich umgehenden Welt auseinanderzusetzen.“ [Plath, 2020, S. 237]

Es ist unrealistisch zu erwarten, im Mathematikunterricht alle Ziele gleichzeitig und auf höchstem Niveau erreichen zu können. Umso bedeutsamer ist es, die Unterrichtsplanung nicht nur an den traditionellen oder naheliegendsten Zielen auszurichten, sondern verschiedene Resultate über die Zeit hinweg zu berücksichtigen. Realitätsbezogener Unterricht kann dabei bestimmte Absichten besonders gut unterstützen, oft besser als andere Unterrichtsformen. [Maaß, 2011a, S. 227]

2.3.2. Rolle realitätsbezogener Aufgaben für Verstehen

Im Mathematikunterricht sollte nicht die bloße Bearbeitung einzelner Anwendungen im Mittelpunkt stehen, sondern vielmehr die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, mathematische Aufgaben selbstständig zu erschließen, zu interpretieren und anzuwenden. Eine zentrale Rolle spielt dabei die Mathematisierung realer Situationen, also die Fähigkeit, außermathematische Sachverhalte so zu beschreiben, dass sie in eine mathematische

Sprache überführt und bearbeitet werden können. [Rieß, 2018, S. 240–241]

Das Bestreben, den Unterricht möglichst lebensnah zu gestalten und mathematische Inhalte für das alltägliche Leben nutzbar zu machen, führt konsequent zum Themenfeld des Modellierens. [Rieß, 2018, S. 239] Modellierungsaufgaben knüpfen an bekannte Inhalte an, verbinden verschiedene mathematische Bereiche miteinander und fördern den fachlichen Austausch unter den Lernenden. Dadurch gewinnen die Schülerinnen und Schüler mehr Sicherheit im Umgang mit mathematischen Herausforderungen. [Fries, Dietmar and Kaiser, Gabriele and Blum, Werner, 2004, S. 7–8]

Der Modellierungsprozess beginnt mit einer komplexen Problemsituation aus der Realität, die zunächst vereinfacht und strukturiert wird, um ein Realmodell zu erstellen. Dieses wird anschließend in ein mathematisches Modell überführt, aus dem sich Ergebnisse ableiten lassen. Diese gewonnenen Resultate müssen danach wieder auf die Ausgangssituation übertragen und interpretiert werden, um ihre Nützlichkeit zu prüfen. Dieser Prozess verläuft nicht linear, sondern erfordert häufiges Überarbeiten und erneutes Modellieren, bis eine stimmige Lösung erreicht ist. [Rieß, 2018, S. 241–242]

Bevor eine reale Fragestellung mathematisch bearbeitet werden kann, muss zunächst ein Situationsmodell aufgebaut werden, das anschließend zu einem vereinfachten Realmodell weiterentwickelt wird. Dabei müssen Lernende entscheiden, welche Informationen für die mathematische Bearbeitung relevant sind, welche Angaben vernachlässigt werden können und wo zusätzliche Annahmen erforderlich sind. Fehler im Aufbau dieses Situationsmodells wirken sich häufig direkt auf den weiteren Lösungsprozess aus. Studien zeigen, dass ein erheblicher Anteil der Fehler bei realitätsbezogenen Aufgaben darauf zurückzuführen ist, dass die dargestellten Umstände oder die darin enthaltenen Informationen nicht korrekt verstanden werden. [Plath, 2020, S. 244–245]

Probleme mit realitätsbezogenen Aufgaben entstehen jedoch nicht zwangsläufig durch drastische Verfälschungen. Häufig sind sie vielmehr das Ergebnis fachlich unglücklicher Umsetzungen des verständlichen Wunsches, Mathematik möglichst lebensnah zu gestalten. Solche misslungenen Realitätsbezüge können den Eindruck verstärken, Mathematik habe wenig mit der wirklichen Welt zu tun. [Eichler, 2015, S. 107]

Zusammenfassend zeigt sich, dass realitätsbezogene Aufgaben einen wesentlichen Beitrag zum mathematischen Verstehen leisten. Dies gilt insbesondere dann, wenn sie nicht

2. Theoretischer Hintergrund

als bloße Einkleidung mathematischer Verfahren dienen, sondern als Ausgangspunkt für eigenständige Denk-, Modellierungs- und Interpretationsprozesse genutzt werden. In diesem Sinne tragen sie dazu bei, mathematisches Verstehen als aktiven, sinnstiftenden Prozess zu gestalten.

2.3.3. Exemplarisches Lernen - Realität - Verstehen

Obwohl seit vielen Jahrzehnten die Bedeutung praxisnaher Anwendungen von Mathematik im Unterricht betont wird, wurde dieser Forderung in Lehrplänen und im tatsächlichen Unterricht unterschiedlich konsequent umgesetzt. Daher lassen sich keineswegs alle Aufgaben mit Realitätsbezug automatisch als Modellierungsaufgaben einstufen. Entscheidend ist vielmehr, ob eine Aufgabe tatsächlich an reale Tätigkeiten oder fachliche Kontexte außerhalb der Mathematik anknüpft und dadurch einen sinnvollen Bezug zur Wirklichkeit herstellt. [Rieß, 2018, S. 250]

Mathematisches Modellieren ist dabei kein künstliches Unterrichtskonstrukt, sondern ein grundlegender Bestandteil mathematischen Arbeitens. Modellierungsprozesse im Unterricht aufzugreifen, ermöglicht es, ein realistisches Verständnis davon zu vermitteln, was Mathematik als Disziplin ausmacht. Gleichzeitig erwerben Schülerinnen und Schüler Fähigkeiten, die ihnen helfen können, komplexe reale Fragestellungen im Alltag oder im späteren Berufsleben zu bewältigen. Zudem wird sichtbar, wie Mathematik in der Wirklichkeit Anwendung findet, was sich positiv auf die Einstellung und das Verständnis der Lernenden auswirken kann. [Maaß, 2011b, S. 232–233]

Realitätsbezogene Aufgaben unterscheiden sich stark hinsichtlich ihrer Alltagsnähe und ihrer Komplexität. Sie fordern Schülerinnen und Schüler dazu heraus, sowohl mathematische als auch sprachliche Kompetenzen einzusetzen und verschiedene Informationen miteinander zu verknüpfen. In diesem Zusammenhang gewinnt auch das Ziel der mathematischen Grundbildung an Bedeutung. Lernende sollen befähigt werden, sich selbstständig in ihrer Umwelt zu orientieren, beruflich aktiv zu sein und am gesellschaftlichen Leben teilzunehmen. Dies kann unter anderem dadurch unterstützt werden, dass im Mathematikunterricht verstärkt Aufgaben eingesetzt werden, die an reale Lebenssituationen anknüpfen. [Plath, 2020, S. 237–238]

Gleichzeitig zeigen Untersuchungen, dass der Umgang mit realitätsbezogenen Aufgaben auch mit besonderen Herausforderungen verbunden ist. Schwierigkeiten entstehen dabei

2.3. Mathematisches Verstehen als Ziel des Unterrichts

nicht ausschließlich aus mathematischen oder sprachlichen Anforderungen, sondern können auch aus den dargestellten Realitätsbezügen selbst hervorgehen. In manchen Fällen können diese zusätzliche Anforderungen sogar Hürden für Lernende darstellen. [Leufer, 2015, S. 3–4]

Vor diesem Hintergrund gewinnt das Konzept des exemplarischen Lernens besondere Bedeutung. Exemplarisches Lernen orientiert sich an der Lebenswelt der Lernenden und wählt Inhalte so aus, dass an einzelne bedeutsamen Beispielen grundlegende Zusammenhänge erkennbar werden. Der Lebensbezug stellt dabei ein zentrales Kriterium exemplarischer Bildung dar. Lernen wird in dieser Wechselwirkung nicht als bloßes Speichern von Informationen verstanden, sondern als aktive Erfahrung, in der sich Lernende mit bedeutungsvollen Fragestellungen auseinandersetzen. [Eichelberger et al., 2008, S. 115–116] Lernen wird in diesem Sinne als Lernerfahrung verstanden, die über reines Informationsspeichern hinausgeht und aktives Erleben einschließt. [Winter, 2003, S. 7]

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, dass exemplarisches Lernen, realitätsbezogene Aufgaben und mathematisches Verstehen in einem engen wechselseitigen Zusammenhang stehen. Mathematisches Verständnis entsteht nicht allein durch die Vermittlung von Verfahren, sondern durch die aktive Auseinandersetzung mit bedeutsamen Problemstellungen, die zum Denken, Modellieren und Reflektieren anregen.

Darauf aufbauend richtet sich der Blick im folgenden Kapitel auf die konkrete Unterrichtspraxis. Anhand der Planung, Durchführung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsbeispiels wird untersucht, wie exemplarisches Lernen und realitätsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht umgesetzt werden können und inwiefern sie dazu beitragen, mathematisches Verstehen der Schülerinnen und Schüler zu fördern.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Ausgehend von den Schulwegen der Schülerinnen und Schüler wird in der Unterrichtssequenz ein grundlegendes Verständnis von Weg-Zeit-Diagrammen aufgebaut. Durch den Bezug zu eigenen Erfahrungen wird ein lebensweltlicher Zugang geschaffen, der die Auseinandersetzung mit dem Zusammenhang von Weg und Zeit unterstützt. Die Lernenden entwickeln dabei ein erstes Verständnis für die Darstellung von Bewegungen in Diagrammen und nutzen diese, um Unterschiede in Geschwindigkeiten zu erkennen und zu deuten. Ziel ist es, die Kompetenz im Umgang mit Weg-Zeit-Diagrammen zu fördern.

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

Bewegung stellt ein grundlegendes Phänomen der Physik dar und beschreibt die Ortsveränderung eines Körpers im Laufe der Zeit. Zur quantitativen Erfassung von Bewegungen werden insbesondere die Größen *Weg* und *Zeit* herangezogen. Der Weg s gibt an, welche Strecke ein Körper zurückgelegt hat, während die Zeit t die dafür benötigte Dauer beschreibt. Erst durch die Verknüpfung dieser beiden Größen wird eine genaue Beschreibung von Bewegungsabläufen möglich. [Duenbostl et al., 2020, S. 18–21]

Eine zentrale Größe in diesem Zusammenhang ist die Geschwindigkeit. Sie beschreibt, wie schnell sich ein Körper bewegt, und wird als Verhältnis von zurückgelegtem Weg zur benötigten Zeit definiert [Duenbostl et al., 2020, S. 21–22]:

$$v = \frac{s}{t}$$

Diese Beziehung verdeutlicht, dass eine höhere Geschwindigkeit entweder durch eine grö-

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

ßere Strecke bei gleicher Zeit oder durch eine kürzere Zeit für die gleiche Strecke erreicht wird. Daraus folgt: *Je weniger Zeit für einen bestimmten Weg benötigt wird, desto größer ist die Geschwindigkeit.* Alltagsnahe Beispiele, wie der Vergleich zwischen einer gehenden Person, einer Radfahlerin und einem Autofahrer, verdeutlichen diesen Zusammenhang anschaulich. [Duenbostl et al., 2020, S. 18]

Die physikalische Einheit der Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Verhältnis von Weg und Zeit. Im Internationalen Einheitssystem wird die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde (m/s) angegeben. Dies bedeutet, dass ein Körper bei einer Geschwindigkeit von $1m/s$ innerhalb einer Sekunde einen Weg von einem Meter zurücklegt. Im Alltag werden Geschwindigkeiten häufig auch in Kilometer pro Stunde (km/h) angegeben. [Steglich and Heise, 2021, S. 16]

Zur genaueren Beschreibung von Bewegungen wird zudem ein Bezugssystem eingeführt, in dem ein Nullpunkt sowie eine Bewegungsrichtung festgelegt werden. Die Position eines Körpers kann dann durch eine Koordinate entlang einer Achse beschrieben werden. Dabei bezeichnet x die Ortskoordinate entlang dieser Achse. [Grehn, 2013, S. 161]

Dabei ist zwischen dem zurückgelegten Weg und der Ortsänderung zu unterscheiden. Der Weg beschreibt die tatsächlich zurückgelegte Strecke eines Körpers unabhängig von der Bewegungsrichtung. Die Ortsänderung hingegen ergibt sich aus der Differenz zwischen Anfangs- und Endposition und stellt damit eine gerichtete Größe dar. Im eindimensionalen Fall ergibt sich die Ortsänderung aus der Differenz zweier Ortskoordinaten [Grehn, 2013, S. 161]:

$$s = x_2 - x_1$$

Auf dieser Grundlage lässt sich die Geschwindigkeit allgemeiner als Verhältnis der Ortsänderung zur Zeitdifferenz zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ausdrücken [Grehn, 2013, S. 160–161]:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Diese Darstellung macht deutlich, dass die Geschwindigkeit eine gerichtete Größe ist, die

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

sowohl den Betrag als auch die Bewegungsrichtung beschreibt. [Grehn, 2013, S. 160–161]

Um auch nicht gleichförmige Bewegungen mathematisch präzise erfassen zu können, wird der Weg als zeitabhängige Größe betrachtet. Der Ort eines Körpers wird dabei als Funktion der Zeit beschrieben [Rinner, 2025, S. 26]:

$$s = s(t)$$

Diese sogenannte Weg-Zeit-Funktion ordnet jedem Zeitpunkt t eindeutig einen Ort zu und bildet damit die Grundlage für die mathematische Beschreibung von Bewegungen. Sie ermöglicht es insbesondere, auch nicht gleichförmige Bewegungen zu erfassen, bei denen sich die Geschwindigkeit im Zeitverlauf verändert. [Rinner, 2025, S. 26]

Um Veränderungen des Ortes im Zeitverlauf präziser zu beschreiben, werden kleine Änderungen von Ort und Zeit betrachtet. Dabei bezeichnet Δx die Änderung des Ortes und Δt die entsprechende Zeitänderung zwischen zwei Zeitpunkten. Diese Betrachtungsweise ermöglicht es, Bewegungen nicht nur über absolute Werte, sondern über deren Veränderung zu erfassen und bildet die Grundlage für die mathematische Beschreibung von Änderungsraten. Insbesondere stellt sie einen wichtigen Zwischenschritt dar, um von der Betrachtung endlicher Zeitintervalle zur Bestimmung momentaner Größen überzugehen. [Grehn, 2013, S. 168–171]

Auf Basis dieser funktionalen Darstellung kann die Geschwindigkeit zunächst als mittlere Änderungsrate des Weges in einem Zeitintervall beschrieben werden. Für zwei Zeitpunkte t_1 und t_2 ergibt sich die mittlere beziehungsweise Durchschnittsgeschwindigkeit als Differenzenquotient [Steglich and Heise, 2021, S. 14] [Rinner, 2025, S. 27]:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Der Differenzenquotient beschreibt in der Analysis die mittlere Änderungsrate einer Funktion und entspricht im Weg-Zeit-Zusammenhang der durchschnittlichen Geschwindigkeit innerhalb eines Zeitintervalls. [Steglich and Heise, 2021, S. 14]

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

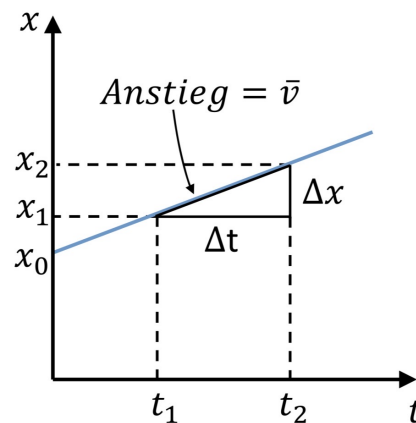


Abbildung 3.1.: Weg-Zeit-Funktion einer gleichförmigen Bewegung [Steglich and Heise, 2021, S. 15]

Grafisch wird diese als Steigung der Sekante im Weg-Zeit-Diagramm interpretiert. Die Abbildung veranschaulicht diesen Zusammenhang: Zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 ergibt sich eine Ortsänderung Δx , während die zugehörige Zeitänderung Δt das betrachtete Intervall beschreibt. Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ entspricht somit der Steigung der Geraden, die die beiden Punkte (t_1, x_1) und (t_2, x_2) im Diagramm verbindet. [Steglich and Heise, 2021, S. 14]

Da reale Bewegungen häufig nicht gleichförmig verlaufen, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit nicht ausreichend, um das Bewegungsverhalten zu einem bestimmten Zeitpunkt genau zu beschreiben. Aus diesem Grund wird die momentane Geschwindigkeit eingeführt. Diese ergibt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten für immer kleiner werdende Zeitintervalle [Steglich and Heise, 2021, S. 15] [Rinner, 2025, S. 28]:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Mathematisch entspricht dieser Grenzwert der Ableitung der Weg-Zeit-Funktion nach der Zeit. Die momentane Geschwindigkeit ist somit die zeitliche Änderungsrate des Ortes [Steglich and Heise, 2021, S. 15]:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

Damit wird der zentrale Begriff der Analysis, die Ableitung als lokale Änderungsrate einer Funktion, eingeführt. Sie ermöglicht eine punktgenaue Beschreibung von Veränderungen. Dieser mathematische Zusammenhang bildet zugleich die Grundlage der Kinematik: *Die Geschwindigkeit ergibt sich als Ableitung des Weges nach der Zeit und beschreibt damit die lokale Änderungsrate der Wegfunktion.* Bei ungleichförmigen Bewegungen ist sie selbst zeitabhängig. [Steglich and Heise, 2021, S. 15–16]

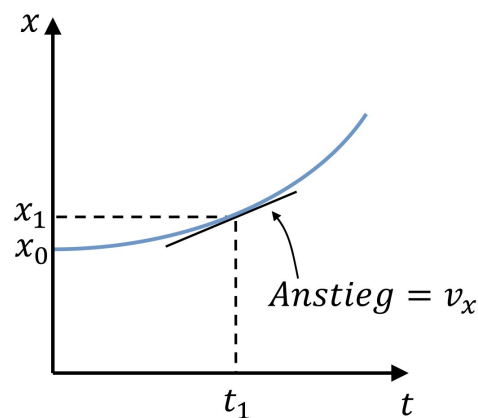


Abbildung 3.2.: Weg-Zeit-Funktion einer ungleichförmigen Bewegung, Steigung der Tangente entspricht der Geschwindigkeit in diesem Punkt [Steglich and Heise, 2021, S. 15]

In der Abbildung wird die Geschwindigkeit als v_x bezeichnet, da hier die Bewegung in x -Richtung betrachtet wird. Die Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Funktion entspricht der momentanen Geschwindigkeit an diesem Punkt. Daraus ergibt sich die folgende Ableitung [Steglich and Heise, 2021, S. 15]:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Neben der rechnerischen Beschreibung spielt die graphische Darstellung von Bewegungen eine zentrale Rolle. Weg-Zeit-Diagramme stellen hierbei ein wichtiges Werkzeug dar. In diesen Diagrammen wird die Zeit auf der horizontalen Achse und der zurückgelegte Weg auf der vertikalen Achse dargestellt. Die Geschwindigkeit entspricht dabei der Steigung des Graphen: Eine steilere Steigung steht für eine höhere Geschwindigkeit, während eine

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

horizontale Linie eine Geschwindigkeit von null beschreibt. [Jerrentrup, 2006, S. 6]

Für gleichförmige Bewegungen ergibt sich im Weg-Zeit-Diagramm eine Gerade, die den proportionalen Zusammenhang zwischen Weg und Zeit verdeutlicht. Bei nicht gleichförmigen Bewegungen hingegen entsteht eine gekrümmte Kurve. In diesem Fall entspricht die momentane Geschwindigkeit der Steigung der Tangente an den Graphen im jeweiligen Punkt. [Grehn, 2013, S. 171]

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge wird ein alltagsnahes Beispiel herangezogen. Das betrachtete Weg-Zeit-Diagramm zeigt den Weg einer Schülerin als abschnittsweise gleichförmige Bewegung. Zunächst bewegt sie sich mit konstanter Geschwindigkeit, was durch eine ansteigende Gerade dargestellt wird. Anschließend folgt eine Ruhephase, die sich in einem waagrechten Abschnitt widerspiegelt. Im letzten Abschnitt erhöht sie ihre Geschwindigkeit, was sich durch eine steilere Gerade zeigt. Dieses Beispiel verdeutlicht anschaulich den Zusammenhang zwischen Steigung und Geschwindigkeit sowie die Darstellung unterschiedlicher Bewegungsphasen. [Duenbostl et al., 2020, S. 22]

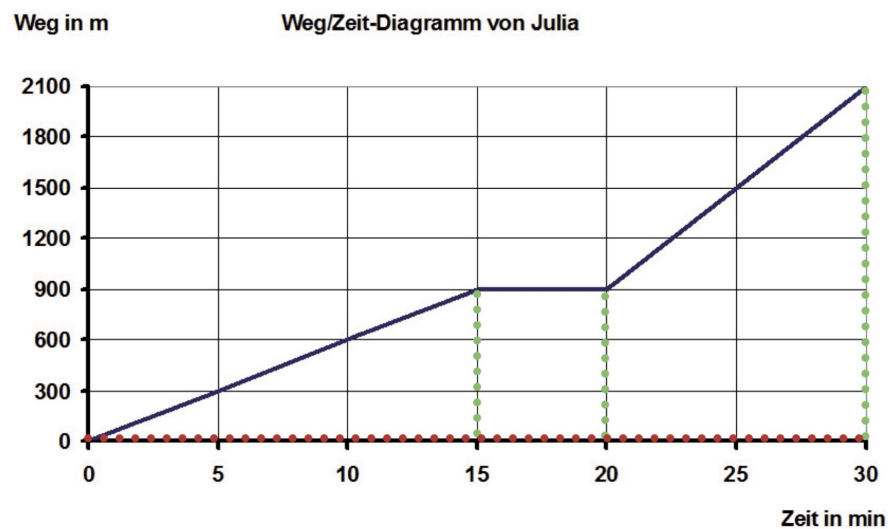


Abbildung 3.3.: Weg-Zeit-Diagramm [Duenbostl et al., 2020, S. 22]

Die Geschwindigkeit eines Körpers ist bei vielen Bewegungen nicht konstant, sondern verändert sich im Laufe der Zeit. Zur Beschreibung dieser Veränderung wird die physikalische Größe der Beschleunigung a eingeführt. Sie beschreibt, wie stark sich die Ge-

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

schwindigkeit innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls verändert. Analog zur Definition der Geschwindigkeit als Änderungsrate des Weges ergibt sich die mittlere Beschleunigung als Verhältnis der Geschwindigkeitsveränderung zur benötigten Zeit. [Steglich and Heise, 2021, S. 16–17]

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Dabei bezeichnet Δv die Änderung der Geschwindigkeit innerhalb des betrachteten Zeitintervalls Δt . Positive Werte der Beschleunigung beschreiben eine Zunahme der Geschwindigkeit, während negative Werte eine Abnahme der Geschwindigkeit und damit eine Verzögerung kennzeichnen.

Für die genauere Beschreibung wird erneut der Grenzübergang betrachtet. Die momentane Beschleunigung ergibt sich als Grenzwert des Differenzenquotienten für immer kleiner werdende Zeitintervalle. [Rinner, 2025, S. 29]

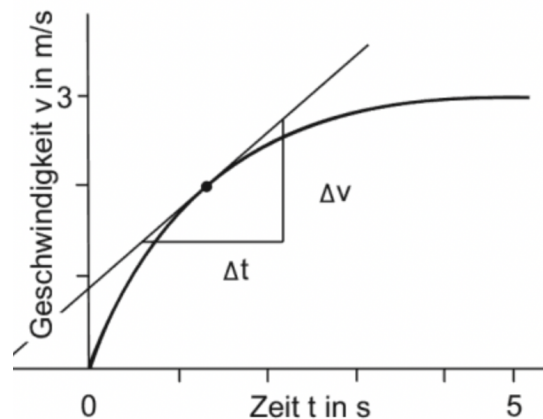


Abbildung 3.4.: Momentane Beschleunigung a als Anstieg der Tangente im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm [Eichler, 2011, S. 7]

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Mathematisch entspricht dieser Grenzwert der Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

nach der Zeit. Die Beschleunigung stellt somit die zeitliche Änderungsrate der Geschwindigkeit dar [Steglich and Heise, 2021, S. 17]:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = v'(t)$$

Die Einheit der Beschleunigung ergibt sich aus der zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit und wird im Internationalen Einheitssystem in Meter pro Sekunde zum Quadrat (m/s^2) angegeben. Eine Beschleunigung von $1m/s^2$ bedeutet, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers pro Sekunde um $1m/s$ verändert. [Steglich and Heise, 2021, S. 21]

Da die Geschwindigkeit selbst bereits die Ableitung der Wegfunktion ist, ergibt sich die Beschleunigung als zweite Ableitung des Weges nach der Zeit [Eichler, 2011, S. 8]:

$$a(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = s''(t)$$

Die Beschleunigung ermöglicht damit eine präzise Beschreibung dynamischer Bewegungsabläufe und stellt eine zentrale Größe der Kinematik dar. Bewegungen können dadurch nicht nur hinsichtlich ihrer Geschwindigkeit, sondern auch hinsichtlich deren zeitlicher Veränderung untersucht werden. [Rinner, 2025, S. 29]

Auch die Beschleunigung lässt sich graphisch interpretieren. Während im Weg-Zeit-Diagramm die Steigung des Graphen der Geschwindigkeit entspricht, beschreibt im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm die Steigung des Graphen die Beschleunigung. Eine positive Steigung kennzeichnet dabei eine zunehmende Geschwindigkeit, eine negative Steigung eine abnehmende Geschwindigkeit. Bei einer konstanten Beschleunigung ergibt sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine Gerade.

Während die Differentialrechnung momentane Änderungsraten beschreibt, ermöglicht die Integralrechnung die Umkehrung dieses Zusammenhangs. Mithilfe des Integrals können aus bekannten Änderungsraten wieder die ursprünglichen Größen bestimmt werden. In der Kinematik bedeutet dies, dass aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit und aus der Geschwindigkeit wiederum der zurückgelegte Weg berechnet werden kann.

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

Das Integral beschreibt dabei die Summe unendlich vieler kleiner Änderungen innerhalb eines bestimmten Intervalls. Grafisch entspricht das bestimmte Integral der Fläche unter dem Graphen einer Funktion. Diese geometrische Interpretation spielt insbesondere bei Bewegungsabläufen eine zentrale Rolle. Wird die Geschwindigkeitsfunktion über ein Zeitintervall integriert, ergibt sich die in diesem Zeitraum zurückgelegte Strecke [Rinner, 2025, S. 28]:

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Wird der Anfangsort mit $s(0) = 0$ gewählt, vereinfacht sich dieser Zusammenhang zu [Eichler, 2011, S. 9]:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Entsprechend kann aus der Beschleunigungsfunktion durch Integration die Geschwindigkeitsfunktion bestimmt werden [Eichler, 2011, S. 10]:

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Wird zusätzlich die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ angenommen, ergibt sich [Eichler, 2011, S. 10]:

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Die Integralrechnung stellt somit die Umkehrung der Differentialrechnung dar. Während durch Ableitung aus dem Weg die Geschwindigkeit und daraus die Beschleunigung bestimmt wird, ermöglicht die Integration den umgekehrten Weg von der Beschleunigung über die Geschwindigkeit zurück zur Wegfunktion.

Dieser Zusammenhang wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschrieben. Er besagt, dass die Integration einer Ableitung wieder zur ursprünglichen

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Funktion führt. Wird beispielsweise die Ableitung der Wegfunktion, also die Geschwindigkeit, integriert, ergibt sich erneut die Wegfunktion [Keller, 2024, S. 290]:

$$\int_0^t s'(\tau) d\tau = s(t) - s(0)$$

Analog dazu ergibt die Integration der Beschleunigungsfunktion wieder die Geschwindigkeitsfunktion:

$$\int_0^t v'(\tau) d\tau = v(t) - v(0)$$

Damit wird nochmals deutlich, dass Differential- und Integralrechnung eng miteinander verknüpft sind. Während die Ableitung lokale Änderungen beschreibt, ermöglicht das Integral die Rekonstruktion der ursprünglichen Funktion aus ihren Änderungsraten.

Die geometrische Bedeutung des Integrals lässt sich anschaulich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm darstellen. Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion entspricht dem zurückgelegten Weg innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls. [Eichler, 2011, S. 9]

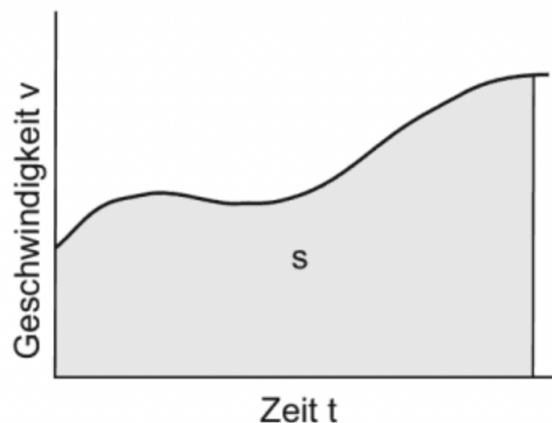


Abbildung 3.5.: Der zurückgelegte Weg s entspricht der Fläche (= Integral) im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. [Eichler, 2011, S. 9]

3.1. Einordnung des Unterrichtsentwurfs

Bei konstanter Geschwindigkeit ergibt sich im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eine horizontale Gerade, da sich die Geschwindigkeit während des gesamten betrachteten Zeitintervalls nicht verändert. Die Fläche unter dem Graphen besitzt somit die Form eines Rechtecks. Dessen Höhe entspricht der konstanten Geschwindigkeit v , während die Breite durch das betrachtete Zeitintervall t gegeben ist. Der Flächeninhalt ergibt sich daher als Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit und entspricht dem zurückgelegten Weg:

$$s = v \cdot t$$

Diese Beziehung entspricht der bereits eingeführten Definition der Geschwindigkeit:

$$v = \frac{t}{s}$$

Dadurch wird deutlich, dass die Integralrechnung die bekannte Beziehung zwischen Weg, Geschwindigkeit und Zeit auf nicht gleichförmige Bewegungen erweitert. Während bei konstanter Geschwindigkeit die Rechtecksfläche direkt berechnet werden kann, erfolgt die Bestimmung des zurückgelegten Weges bei veränderlicher Geschwindigkeit mithilfe des bestimmten Integrals. Dieses Ergebnis verdeutlicht zugleich die geometrische Interpretation des Integrals: Die Fläche unter dem Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls zurückgelegten Weg. Bei veränderlicher Geschwindigkeit, wie in der vorherigen Abbildung dargestellt, entsteht dabei eine gekrümmte Fläche, deren Inhalt mithilfe des bestimmten Integrals berechnet wird [Eichler, 2011, S. 9]:

$$s = s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

Analog dazu beschreibt die Fläche unter dem Graphen einer Beschleunigungs-Zeit-Funktion die Änderung der Geschwindigkeit innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls. Die durch die Beschleunigung bewirkte Geschwindigkeitsänderung entspricht somit dem Flächeninhalt unter der Beschleunigungs-Zeit-Kurve. Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$, so entspricht diese Fläche unmittelbar der erreichten Geschwindigkeit. [Eichler, 2011, S. 8]

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

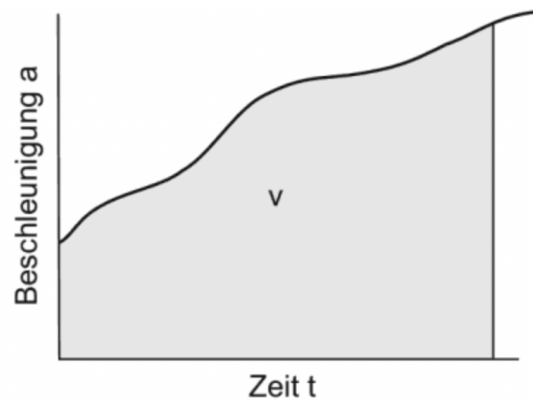


Abbildung 3.6.: Die während der Beschleunigung gewonnene Geschwindigkeit v entspricht der Fläche (= Integral) im Beschleunigung-Zeit-Diagramm. [Eichler, 2011, S. 8]

Die Höhe des Graphen beschreibt dabei die momentane Beschleunigung, während die Breite dem betrachteten Zeitintervall entspricht. Die graue beziehungsweise eingeschlossene Fläche unter dem Graphen setzt sich aus vielen kleinen Geschwindigkeitsänderungen zusammen und entspricht der gesamten Änderung der Geschwindigkeit innerhalb des betrachteten Zeitintervalls.

Mathematisch ergibt sich die Geschwindigkeitsänderung durch Integration der Beschleunigungsfunktion über das betrachtete Zeitintervall [Eichler, 2011, S. 10]:

$$\Delta v = \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Dadurch wird deutlich, dass die mathematischen Konzepte der Differential- und Integralrechnung nicht nur mathematische Werkzeuge darstellen, sondern auch anschauliche physikalische Bedeutung besitzen, indem sie präzise Beschreibungen von Bewegungen beinhalten. Die Ableitung beschreibt lokale Änderungsraten physikalischer Größen, während das Integral die Summation dieser Änderungen über ein Zeitintervall ermöglicht. Dadurch entsteht ein enger Zusammenhang zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$s(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t)$$

sowie umgekehrt:

$$a(t) \xrightarrow{\int dt} v(t) \xrightarrow{\int dt} s(t)$$

Die Kinematik stellt damit ein anschauliches Anwendungsgebiet der Analysis dar, in dem mathematische Methoden unmittelbar zur Beschreibung realer Bewegungsabläufe genutzt werden können.

Die dargestellten mathematischen und physikalischen Grundlagen bilden die theoretische Basis für den vorliegenden Unterrichtsentwurf. Im Zentrum der Einheit steht dabei das Weg-Zeit-Diagramm, das als grundlegender Ausgangspunkt für das Verständnis kinematischer Zusammenhänge dient. Die weiteren Begriffe wie Geschwindigkeit und Beschleunigung werden dabei im Sinne eines aufbauenden Verständnisses vorbereitet, ohne im Rahmen dieser Einheit vollständig vertieft zu werden. Sie stellen jedoch wichtige Anschlussstellen für die weitere schulische Laufbahn der Schülerinnen und Schüler dar.

Aufbauend auf diesem mathematischen Wissen und den theoretischen Grundlagen zur exemplarischen Lehrkunst nach Martin Wagenschein bildet der vorliegende Unterrichtsentwurf den praktischen Schwerpunkt dieser Masterarbeit. In Form der Umsetzung und Reflexion in einem realen Klassenzimmer werden die Prinzipien genetischen, sokratischen und exemplarischen Lernens konkret erfahrbar gemacht. Im Zentrum steht dabei die Forschungsfrage: *Inwiefern kann exemplarisches Lernen nach Martin Wagenschein durch realitätsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht zu einem tieferen mathematischen Verständnis der Lernenden beitragen?*

Die Sequenz führt Schülerinnen und Schüler von einem lebensnahen Phänomen hin zu einer selbst entdeckten mathematischen Fragestellung, ohne vorgefertigte Formeln oder Definitionen zu kennen und anzuwenden. Auf die Weise wird erprobt, ob ein solcher verstehensorientierter Ansatz auch unter den realen Rahmenbedingungen einer Mittelschule und in begrenztem Zeitraum funktioniert.

Der Unterrichtsentwurf dient in diesem Kapitel als Schnittstelle zwischen den theoretischen Überlegungen aus Kapitel 2 und ihrer konkreten Umsetzung im schulischen Kontext. Zugleich ermöglicht der Entwurf eine spätere Reflexion der Unterrichtsrealität im Hinblick auf Wagenscheins Forderungen. Dabei wird sich besonders auf die Rolle der

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Lehrperson, die Bedeutung des sokratischen Gesprächs und die Strukturierung der Lernprozesse bezogen. Der Entwurf fungiert damit nicht nur als Planungsinstrument, sondern auch als analytisches Werkzeug, das erlaubt, die spätere Unterrichtssituation gezielt im Licht der zuvor entwickelten theoretischen Grundlagen zu betrachten.

Ausgehend davon ermöglicht der Entwurf eine empirische Annäherung an die Forschungsfrage. Durch die Beobachtung der Lernprozesse wird erkennbar, wie Schülerinnen und Schüler mathematische Zusammenhänge erschließen, welche Unterstützung sie benötigen und an welchen Stellen Einschränkungen der Methode sichtbar werden. Die Unterrichtssequenz bietet damit ein konkretes Untersuchungsfeld, um die theoretischen Prinzipien exemplarischen Lernens in ihrer tatsächlichen Wirkung innerhalb einer Mittelschule einzuschätzen.

3.2. Rahmenbedingungen des Unterrichts

3.2.1. Lerngruppe

Die geplante Unterrichtssequenz findet in einer 3. Klasse der Mittelschule statt. Die Lerngruppe umfasst 15 Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, insbesondere im Bereich der mathematischen Grundkompetenzen und der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit. Die Jugendlichen sind zwischen 12 und 14 Jahre alt, wobei der Anteil der männlichen Lernenden höher ist als jener der weiblichen.

Es handelt sich um eine Standardgruppe der Mittelschule, die dem grundlegenden Bildungsniveau des österreichischen Lehrplans entspricht und sich durch eine große Heterogenität in Bezug auf mathematische Vorerfahrungen, Arbeitstempo und sprachliche Fähigkeit auszeichnet. Viele Schülerinnen und Schüler lernen besonders gut mithilfe anschaulicher, lebensnaher Aufgabenstellungen und eines handlungsorientierten Zugangs zu mathematischen Inhalten. Die geplante exemplarische Unterrichtsform ist für diese Lerngruppe besonders geeignet, da sie an konkrete Alltagssituationen anknüpft, gemeinsames Entdecken ermöglicht und Verständnis Schritt für Schritt aus der Sache heraus aufbaut, ohne auf eine stark formalisierte Darstellung zurückzugreifen.

Die Klasse ist eine sehr aktive Lerngruppe, in der zahlreiche Wortmeldungen und eine hohe Beteiligung am Unterrichtsgespräch zu beobachten sind. Die Schülerinnen und Schü-

3.2. Rahmenbedingungen des Unterrichts

ler trauen sich, ihre Gedanken zu äußern, auch wenn sie sich nicht vollkommen sicher sind. In der Klasse herrscht eine wertschätzende Fehlerkultur, sodass falsche Antworten nicht belächelt werden und Beiträge grundsätzlich respektvoll aufgenommen werden.

Die betreffende Lerngruppe zeigt eine ausgeprägte Alltagsorientierung und reagiert erfahrungsgemäß besonders motiviert auf Aufgaben, die direkt mit ihrem Lebensumfeld verknüpft sind. Angesichts der unterschiedlichen Leistungsstände ist ein Unterricht erforderlich, der die Erfahrungen der Lernenden gezielt aufgreift, ihre Denkwege sichtbar macht und durch gemeinsames Erforschen zu einem vertieften Verständnis führt. Dies entspricht der exemplarisch-genetischen Vorgehensweise nach Wagenschein und stellt eine günstige Voraussetzung für die geplante Unterrichtssequenz dar.

3.2.2. Lehrplanbezug

Der vorliegende Unterrichtsentwurf orientiert sich am aktuellen Lehrplan der Mittelschulen in Österreich, der die inhaltliche und methodische Planung des Unterrichts strukturiert und eine kompetenzorientierte Ausrichtung fordert. Der Lehrplan verfolgt das Ziel, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, in variablen und realitätsnahen Situationen selbstständig und verantwortungsbewusst zu handeln. Dabei versteht er Unterricht nicht als reine Wissensvermittlung, sondern als aktiven, erfahrungsbezogenen und reflexiven Lernprozess, in dem die Lernenden an authentischen Problemstellungen arbeiten und mathematische Zusammenhänge eigenständig entdecken. [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023]

„Der umfassende Bildungsauftrag der Mittelschule hat die individuelle Förderung jeder und jedes Jugendlichen zum Ziel. Damit verbunden ist auch ein erweitertes Rollenverständnis der Lehrenden. Sie sind zusehends gefragt, die jungen Menschen bei der Suche nach Antworten auf ihre Frage moderierend zu unterstützen und bei der Entwicklung und Festigung von Kompetenzen lernbegleitend zu agieren.“ [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 2]

Ein zentrales pädagogisches Prinzip des Lehrplans ist die Kompetenzorientierung, die im allgemeinen Teil ausführlich dargestellt wird. Kompetenzen werden als langfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten verstanden, die es Lernenden ermöglichen, mathematische

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Probleme in unterschiedlichen Situationen zu lösen. Der Lehrplan fordert ausdrücklich Aufgabenstellungen, die an die Erfahrung und Lebenswelt der Kinder und Jugendlichen anschließen. Durch authentische Kontexte sollen grundlegende Einsichten, kognitive Aktivierung und die Anwendung von Wissen gefördert werden. [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 3–4]

„Kompetenzorientierter Unterricht ist dadurch gekennzeichnet, dass Aufgabenstellungen im Lernprozess eingesetzt werden, die den Erfahrungen und der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler entsprechen.“ [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 4]

Rückblickend auf den theoretischen Hintergrund zeigt sich, dass im Lehrplan der Mittelschulen zentrale mathematische Kompetenzen differenziert beschreiben werden. Im Bereich des Mathematikunterrichts wird dabei unter anderem zwischen Modellieren, Problemlösen und Darstellen unterschieden. Im Lehrplan ist dies wie folgt aufgelistet:

„Modellieren meint das Bearbeiten außermathematischer Aufgabenstellungen mithilfe von Mathematik. Dabei können deskriptive Modelle (für bereits bestehende außermathematische Sachverhalte) sowie normative Modelle (für erst zu gestaltende außermathematische Bereiche) zum Einsatz kommen. Problemlösen meint das Bearbeiten innermathematischer Aufgabenstellungen, die für Schülerinnen und Schüler keine Routineaufgaben sind, insbesondere, wenn ihnen (noch) kein passendes Lösungsverfahren bekannt ist.“ [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 58]

Diese Aufteilung zeigt, dass mathematisches Lernen im Lehrplan ausdrücklich als vielseitiger Prozess verstanden wird, in dem Schülerinnen und Schüler aktiv Strukturen erforschen, darstellen und interpretieren.

Ein weiterer didaktischer Bezug ergibt sich aus den allgemeinen Grundsätzen des Lehrplans, die betonen, dass Unterricht aktivierend, handlungsorientiert und alltagsnah sein soll. Der Lehrplan hebt hervor, dass Lernangebote entdeckendes Lernen unterstützen und die Erfahrungen der Lernenden einbeziehen sollen. [Bundesministerium für Bildung,

Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 59–60]

„Der Mathematikunterricht ermöglicht vielfältige Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler beim Lösen außermathematischer sowie innermathematischer Aufgaben. Die Schülerinnen und Schüler erleben Mathematik nicht nur als Unterrichtsgegenstand mit fertigen und zu lernenden Zusammenhängen (zB Formeln), sondern vor allem als Prozess, in den sie selbst involviert sind. Gemäß dem genetischen Prinzip werden Zusammenhänge und Wissen aus konkreten Problemstellungen heraus entwickelt und nicht primär auf Vorrat gelernt.“ [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 59]

Die exemplarische Unterrichtssequenz greift diese Ziele unmittelbar auf. Durch das Erheben realer Schulwege der Schülerinnen und Schüler werden authentische Daten genutzt, die nach den Vorgaben des Lehrplans geordnet, verglichen und in geeigneten Darstellungen visualisiert werden. Dabei entsteht ohne formale Formeln eine erste grundlegende Vorstellung vom Verhältnis zwischen Weg und Zeit. Dieser Ansatz entspricht dem im Lehrplan ausdrücklich hervorgehobenen genetischen Prinzip des Mathematiklernens, bei dem Zusammenhänge aus konkreten Problemstellungen heraus entwickelt werden sollen. [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 59]

Besonders relevant für die geplante Unterrichtssequenz sind die in der 3. Klasse ausgewiesenen Kompetenzbereiche. Im Bereich *Variablen und Funktionen* wird gefordert, dass Schülerinnen und Schüler Terme, Gleichungen und einfache Formeln in unterschiedlichen Kontexten aufstellen sowie kontextbezogen deuten können. Dazu zählt ausdrücklich auch das grundlegende Verständnis der Beziehung $\text{Weg} = \text{Geschwindigkeit} \times \text{Zeit}$. Die geplante Unterrichtseinheit bereitet diese Kompetenz auf elementarer Ebene vor, indem sie ohne formale Berechnungen ein intuitives Verständnis der Abhängigkeit zwischen Weg und Zeit entwickelt, das später zu einem funktionalen Verständnis ausgebaut werden kann. [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 68]

Auch in den höheren Jahrgangsstufen wird der Themenbereich weitergeführt: In der 4. Klasse wird schließlich die Interpretation grafischer Darstellungen in Sachsituationen, insbesondere das Lesen und Beschreiben von Zeit-Weg-Diagrammen, explizit verlangt.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

[Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 71] Die gegenständliche Unterrichtseinheit leistet somit einen grundlegenden Beitrag zur Entwicklung jener Kompetenzen, die in späteren Schuljahren vertieft und präzisiert werden.

Eine zusätzliche curriculare Ergänzung ergibt sich aus der im Lehrplan erwähnten *Verkehrs- und Mobilitätsbildung*, die sowohl fächerübergreifend als auch speziell für den Mathematikunterricht bedeutsam ist. Die Auseinandersetzung mit den Schulwegen bietet hierfür einen unmittelbaren Lebensweltbezug. [Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023, S. 15–16]

Insgesamt lässt sich festhalten, dass der Unterrichtsentwurf sowohl inhaltlich als auch methodisch in klarer Übereinstimmung mit den Vorgaben des österreichischen Lehrplans steht. Er verbindet fachliche Kompetenzen mit realitätsnahen und aktivierenden Lernprozessen, fördert Problemlöse-, Modellierungs- und Darstellungskompetenzen und greift zentrale Lehrplanintentionen wie Lebensweltbezug, entdeckendes Lernen und den genetischen Aufbau mathematischer Inhalte auf.

3.2.3. Begründung der Themenwahl

Die Auswahl solcher Themen für größere Projekte ist herausfordernd, da es nahezu unmöglich erscheint, Inhalte zu finden, die alle Lernenden gleichermaßen interessieren. Wie Maaß [Maaß, 2020, S. 30–31] betont, lässt sich dies jedoch lösen, indem man im Schuljahr vielfältige realitätsnahe Inhalte wählt. Somit werden unterschiedliche Interessensgruppen angesprochen und jede Schülerin sowie jeder Schüler erlebt zumindest einmal ein für sie oder ihn persönlich relevantes Thema. Gleichzeitig bleibt der Bezug zum Lehrplan ein unverzichtbarer Bestandteil der Unterrichtsplanung.

Das Thema „*Zeit und Weg am eigenen Schulweg*“ passt hervorragend zu einem exemplarischen Ansatz nach Martin Wagenschein. Es greift direkt in die Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler ein und gewinnt durch seine Alltagsnähe eine starke persönliche Relevanz. Jede Schülerin und jeder Schüler bringt eigene Erfahrungen in Form von Wegen, Wartezeiten und Verkehrsmitteln mit. Dadurch wird die Auseinandersetzung mit Weg-Zeit-Beziehung zu einem echten, selbst getragenen Problem.

Exemplarisches Lernen braucht Themen mit Reiz und Tiefe. Beim Schulweg zeigt sich

oft eine überraschende Realität: Eine kürzere Wegstrecke führt nicht zwingend zu einer schnelleren Ankunftszeit. Wartezeiten, Umwege, Ampeln oder Transportmittel machen das Verhältnis von Weg und Zeit komplexer als zunächst angenommen. Diese Irritation führt zu der Frage: „*Wie kann jemand weiter entfernt wohnen und trotzdem früher ankommen?*“. Diese Verwirrung öffnet für die Lernenden den Zugang zu grundlegenden Strukturen und führt zu vertieften Verstehen.

Dieses Thema erlaubt zudem ein rein genetisches Vorgehen. Begriffe entstehen aus der Erfahrung heraus und werden nicht vorweggenommen. Ohne die formale Geschwindigkeitsformel zu kennen, erkunden die Lernenden die mathematische Ordnung hinter ihren Schulwegen. Die Sache entfaltet somit selbst ihre Problemhaftigkeit, wodurch das Kernanliegen von Martin Wagenschein verankert wird.

Die Themenwahl rundet sich besonders durch ihre hohe Beobachtbarkeit ab. Die spontanen Reaktionen der Schülerinnen und Schüler auf die Irritation liefern direkte Indikatoren für die Entwicklung mathematischen Verständnisses. Diese authentische Momente des Staunens lassen sich im Unterrichtsverlauf klar dokumentieren und später qualitativ analysieren, um die Wirksamkeit des exemplarischen Ansatzes zu belegen.

3.3. Didaktisch-methodische Analyse

3.3.1. Exemplarische Bedeutung des Inhalts

Der gewählte Unterrichtsinhalt trägt exemplarisches Gewicht, da er ein alltägliches, für alle erfahrbares Phänomen zentral stellt. Schülerinnen und Schüler bringen vielfältige Vorerfahrungen mit, die genetisches Lernen einleiten [Möller, 2001, S. 19]. Im Sinne Wagenscheins ist ein Inhalt exemplarisch, wenn er grundlegende Einsichten ermöglicht, die über den konkreten Fall hinausgreifen [Köhnlein, 1973, S. 212–213].

Genau dies zeigt sich im Zusammenhang von Weg und Zeit. Obwohl die tägliche Fortbewegung allen vertraut erscheint, führt die Betrachtung der eigenen Schulwege häufig zu irritierenden Beobachtungen. Diese Widersprüche regen an, verborgene Strukturen zu ergründen und wecken strukturelles Verständnis. Sie besitzen klar eine exemplarische Kraft, die von den Lernenden im Unterricht aufgegriffen werden kann.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Das Thema eröffnet zudem grundlegende mathematische Prinzipien ohne Formalisierungen. Begriffe wie *Verhältnis*, *Veränderung* oder *Geschwindigkeit* entstehen aus der Sache selbst. Es entfaltet jene bildende Kraft, die Wagenschein als Kern seiner Didaktik beschreibt. [Möller, 2001, S. 17–20]

Durch die grafische Darstellung der Wege werden fundamentale mathematische Zusammenhänge sichtbar, die in späteren Schulstufen formalisiert und erweitert werden können. Der Inhalt fungiert somit als Insel der Gründlichkeit, an der zentrale Prinzipien von Veränderungsprozessen exemplarisch erfasst und verstanden werden können.

Insgesamt erweist sich der Zusammenhang von Weg und Zeit als didaktisch hochwertiges Beispiel, weil er die Lernenden an ein mathematisches Strukturverständnis heranführt, ohne voraussetzungsreiche Theorie zu benötigen. Gleichzeitig ermöglicht die Unterrichtssequenz exemplarische Denkweisen einzuüben, wie sie Wagenschein fordert: *langsam*, *fragend*, *phänomenorientiert* und *verstehensorientiert*. [Möller, 2001, S. 15]

Die exemplarische Bedeutung eines Inhalts allein garantiert jedoch noch keinen verstehensorientierten Unterricht. Entscheidend ist vielmehr, auf welche Weise dieser Inhalt für die Lernenden zugänglich gemacht wird. Diesbezüglich spielt insbesondere der Praxisbezug und Lebensnähe der Aufgaben eine zentrale Rolle. Im Folgenden wird demnach der Realitätsbezug der geplanten Unterrichtseinheit näher betrachtet.

3.3.2. Realitätsbezug der Aufgabe

Der Realitätsbezug dieser Unterrichtssequenz ist in mehrfacher Hinsicht gegeben und bildet einen zentralen didaktischen Mehrwert. Die Aufgabe basiert nicht auf einem künstlich konstruierten Kontext, sondern auf einem authentischen Phänomen aus der Lebenswelt der Lernenden, den alltäglichen Wegen zur Schule. Dieser Zugang entspricht der Forderung nach echten und bedeutsamen Realitätsbezügen im Mathematikunterricht, wie sie in der Modellierungsforschung hervorgehoben wird.

Der Begriff „*Modellieren*“ wird häufig uneinheitlich verwendet und taucht oft dann schon auf, wenn zwischen Alltagssprache und mathematischer Darstellung gewechselt wird. Entscheidend ist jedoch die Unterscheidung zwischen realen Problemsituationen und eingekleideten Aufgaben, die zwar einen Kontext vorgeben, aber letztlich reine Übungsformate

bleiben. [Humenberger and Schuppar, 2021, S. V] Der vorliegende Unterrichtsentwurf orientiert sich klar an der ersten Aufgabenkategorie, da die Lernenden ihre eigenen Wege und Zeiten als unverfälschte und authentische Daten in den Unterricht einbringen.

Durch das Sammeln und Analysieren dieser persönlichen Informationen entsteht eine erfahrungsnahe Modellierungssituation, in der die Schülerinnen und Schüler mathematische Strukturen selbst entdecken. Welche Darstellungen und Werkzeuge sinnvoll sind, ergibt sich dabei nicht aus einer vorgegebenen Lösungsmethode, sondern aus dem gemeinsamen Erforschen des Phänomens. Wie Fries [Fries, Dietmar and Kaiser, Gabriele and Blum, Werner, 2004, S. 15–16] betont, können Lernende bereits in unteren Schulstufen grundlegende Modellierungsstrategien entwickeln, wenn Aufgaben praxisorientiert gestaltet sind und Raum für eigenständiges Arbeiten bieten. Genau hier setzt die Unterrichtssequenz an, indem sie an konkrete Erfahrungen der Lernenden anknüpft.

Der Realitätsbezug besitzt zudem eine starke motivationale Komponente. Viele Lehrkräfte berichten, dass gerade im realitätsbezogenen Mathematikunterricht Lernende, die sonst still oder wenig aktiv erscheinen, plötzlich engagiert mitarbeiten und ihre Erfahrungen kompetent einbringen [Maaß, 2020, S. 35–36]. Die Arbeit mit Schulwegdaten schafft einen echten Anlass zum Vergleichen, Hinterfragen und Erklären. Dadurch entstehen häufig neue Fragen, die nicht immer sofort beantwortet werden können. Dies können zum Beispiel Fragestellungen sein, die auf Verkehrsabläufe, Streckenführungen oder Wartezeiten abzielen. Maaß [Maaß, 2020, S. 36] beschreibt, dass in solchen Situationen für die Lehrperson eine veränderte Rolle notwendig wird. Sie muss akzeptieren, dass nicht alle Fragen eindeutig lösbar sind und dass sich in realitätsnahen Projekten Dynamiken ergeben, die Überraschungen oder vorübergehende Sackgassen beinhalten. Diese Offenheit spiegelt die authentische Komplexität realer Situationen wieder und unterstützt eine tiefere mathematische Einsicht.

Darüber hinaus verweist Henn [Henn, 2003, S. 4] darauf, dass der schulische Zeitrahmen oft knapp ist und Realitätsbezüge deshalb sinnvollerweise innerhalb bestehender Themen verankert werden sollten, anstatt sie als zusätzliche Projekte zu betrachten. Der Schulweg als Unterrichtsthema erfüllt diese Vorgabe, da er natürlich in den Bereich „*Messen und Größen*“ eingebettet werden kann und gleichzeitig modellierungsnahe Arbeitsweisen eröffnet. Realitätsbezogene Aufgaben müssen nicht nur im Unterricht aufgegriffen, sondern später auch prüfbar gemacht werden. Umfangreichere Aufgaben können dabei beispielsweise durch Portfolios oder produktorientierte Leistungsfeststellungen bewertet

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

werden [Maaß, 2020, S. 39].

Resümierend zeigt sich, dass der Realitätsbezug der Aufgabe nicht nur motivationale Vorteile erfüllt, sondern die Grundlage dafür bildet, dass die Lernenden mathematische Modellierungsprozesse verstehen, reflektieren und zum Teil selbstständig entwickeln zu können. Die Verbindung aus authentischen Daten, offenem Problemlösen und anschlussfähigen mathematischen Strukturen macht den Schulweg zu einem besonders geeigneten Ausgangspunkt für einen realitätsnahen und zugleich verstehensorientierten Mathematikunterricht.

3.3.3. Mathematisches Verstehen als Ziel

Ein vorrangiges Ziel der geplanten Unterrichtssequenz besteht darin, mathematisches Verstehen im Sinne eines tiefgreifenden, tragfähigen und anschlussfähige Wissens aufzubauen. In der fachdidaktischen Literatur wird Verstehen nicht als das Beherrschen einzelner Verfahren, sondern als ein tiefes Durchdringen mathematischer Zusammenhänge definiert. Es umfasst mehr als das bloße Ausführen von Rechenschritten oder das Anwenden gelernter Verfahren. Vielmehr geht es darum, mathematische Ideen zu erfassen, zu erklären und in neue Situationen übertragen zu können. Damit steht dieses Ziel in enger Verbindung zu Wagenscheins Forderung nach einem „*verstehenden Lernen*“, das aus der Sache heraus entsteht und auf Einsicht abzielt. [Labudde, 1989, S. 222–223]

Im Kontext des Themas „*Weg und Zeit*“ bedeutet mathematisches Verstehen, dass die Lernende nicht lediglich isolierte Größen wahrnehmen, sondern das Verhältnis zwischen ihnen erfassen. Sie sollen erkennen, warum eine längere Strecke nicht zwingend mit einer längeren Zeit verbunden ist. Darüber hinaus sollen sie wahrnehmen, wie unterschiedliche Phasen des Unterwegsseins die Gesamtzeit beeinflussen und welche Rolle dabei die Geschwindigkeit als Veränderungsrate spielt. Die formale Benennung und Berechnung steht dabei noch im Hintergrund. Der genetische Unterrichtsaufbau unterstützt diesen Prozess. Die Lernenden sammeln, ordnen und vergleichen reale Daten, entwickeln aus einem sachlichen Bedürfnis heraus Tabellen sowie erste Weg-Zeit-Skizzen und gelangen so zu einer vertieften Auffassung dynamischer Zusammenhänge.

Mathematische Kompetenzen zeigen sich dabei auch in der Fähigkeit, eine Situation zu erklären. Wenn Lernende etwa begründen können, warum eine scheinbar kürzere Strecke

3.4. Planung des Unterrichts im Sinne Wagenscheins

länger dauern kann, oder wenn sie Unterschiede zwischen gleich langen Wegen identifizieren, wird deutlich, dass sie zugrunde liegenden mathematischen Beziehungen verstanden haben. Dieser Prozess entspricht der Forderung nach verständigem Lernen, bei dem die Lernenden nicht nur Lösungen präsentieren, sondern auch Einsicht in die Struktur des Problems gewinnen. [Rieß, 2018, S. 212] Dass echtes Verstehen nicht nur durch eigenständiges Denken entstehen kann, wird auch von Labudde betont:

„Der Schüler sei selbst in der Lage, als aktiv Handelnder Wissen zu erwerben und Verständnis aufzubauen; der Lehrer setze einen Rahmen, ‘führe die Schüler an der langen Leine’, leiste Hilfe zur Selbsthilfe.“ [Labudde, 1989, S. 225]

Unterm Strich bildet mathematisches Verstehen das übergeordnete Ziel dieser Unterrichtseinheit. Die verwendete realitätsbezogene Problemstellung, das exemplarische Vorgehen und die genetische Entwicklung der Inhalte unterstützen gemeinsam die Einsicht der Lernenden in grundlegende mathematische Strukturen. Diese Einsichten sind nicht auf die konkrete Situation des Schulwegs beschränkt, sondern können auf andere Bewegungs- und Veränderungsprozesse übertragen werden und schaffen somit die Grundlage für weiterführende, formalere mathematische Begriffsbildungen in späteren Schulstufen.

3.4. Planung des Unterrichts im Sinne Wagenscheins

3.4.1. Genetischer Aufbau

Der genetische Aufbau der Unterrichtsstunden orientiert sich durchgängig an Wagenscheins Grundgedanken, dass mathematische Einsichten nicht aus vorgegebenen Begriffen und Formeln stammen, sondern Schritt für Schritt aus dem Gegenstand selbst hervorgehen. Ausgangspunkt ist daher ein vertrautes und zugleich irritierendes Phänomen: *Einige Schülerinnen und Schüler wohnen näher an der Schule und brauchen dennoch länger für ihren Schulweg als andere mit größerer Entfernung.* Diese Irritation bildet den Ausgangspunkt für eine echte Problemfrage, die von den Lernenden selbst formuliert und weiterverfolgt wird.

In der ersten Doppelstunde entwickelt sich daraus ein gemeinsamer Prozess des Erlebens, Ordnen und Vergleichens von Schulwegdaten. Die Lernenden bringen eigene Weglängen,

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Verkehrsmittel und Zeitangaben ein, die im Plenum besprochen werden. Ohne dass die Lehrkraft formale Begriffe einführt, werden erste Zusammenhänge deutlich: *Wartezeiten*, *Verkehrssituationen*, *Ampeln* oder *Umstiege* beeinflussen die Dauer oft stärker als die reine Distanz.

Im weiteren Verlauf entsteht aus dem Wunsch der Lernenden nach mehr Übersicht die Notwendigkeit neuer Darstellungsformen. Gerade hier zeigt sich der genetische Charakter besonders deutlich: Tabellen und später Weg-Zeit-Skizzen werden nicht von der Lehrperson verordnet, sondern ergeben sich als innere Notwendigkeit aus dem Arbeitsprozess.

Die zweite Doppelstunde dient der Visualisierung dieser Überlegungen. Die Schülerinnen setzen ihre Schulwege grafisch um und entdecken selbst grundlegende Beziehungen. Sie erkennen und deuten von sich aus, wie Steigungen, waagrechte Striche oder abweichende Linien wichtige Informationen zum Wegverlauf bergen. Diese Einsichten entstehen aus eigenständigem Arbeiten, Gegenüberstellen und Diskutieren und führen zu einer erfahrungsbasierten Vorstellung des Zusammenhangs von Weg und Zeit. Die Sequenz realisiert damit exemplarisch das genetische Prinzip. Verstehen wächst aus einem gemeinsamen Prozess des Entdeckens und Deutens, nicht aus regelkonformen Definitionen.

Ausgehend vom genetischen Aufbau des Unterrichts stellt sich im nächsten Schritt die Frage nach der Rolle der Lehrkraft, die diesen Prozess initiiert, begleitet und strukturiert.

3.4.2. Rolle der Lehrkraft

Die Rolle der Lehrkraft entspricht in der geplanten Unterrichtssequenz Wagenscheins Ideal einer zurückhaltenden, fragenden und unterstützenden Begleitung. Sie tritt nicht als Vermittlerin fertiger mathematischer Konzepte auf, sondern gestaltet eine Lernumgebung, in der Beobachten, Staunen und gemeinsames Nachdenken möglich werden kann.

In der ersten Doppelstunde moderiert die Lehrperson die Auseinandersetzung mit dem Ausgangsphänomen, stellt offene Fragen, regt zur Formulierung eigener Vermutung an und hält zentrale Beobachtungen fest, ohne selbst Erklärungen vorzuschlagen. Ihre Aufgabe besteht darin, wesentliche Gedanken der Lernenden aufzugreifen, zu bündeln und sokratisch angelegte Impulse weiterzuführen. Somit ermöglicht sie echtes, selbstständiges mathematisches Denken der Schülerinnen und Schüler, die das Problem selbst tragen.

3.4. Planung des Unterrichts im Sinne Wagenscheins

In der zweiten Doppelstunde begleitet die Lehrperson individuelle grafische Darstellung der Schulwege. Durch Fragestellungen wie „*Was geschieht an dieser Stelle deines Weges?*“, „*Weshalb ändert sich hier die Steigung?*“ oder „*Wie würdest du diesen Abschnitt beschreiben?*“ lenkt sie den Blick auf relevante Strukturen ohne vorschnell zu korrigieren. Im Kern ist die Lehrkraft keine Inhalts-, sondern Lernprozess-Expertin. Sie lässt die Sache sprechen und nimmt die Gedanken der Schülerinnen und Schüler ernst.

Gleichzeitig akzeptiert sie die typischen Unsicherheiten realitätsnaher Modellierungsprozesse. Die Lehrkraft fungiert weniger als reine Wissensvermittlerin, sondern stärker als Begleitperson und Moderator. Dazu gehört, Lernenden eigenständiges Arbeiten zu ermöglichen, Vertrauen in deren Lösungsstrategien zu haben und mit einer Vielzahl individueller Herangehensweisen umzugehen. Zu dieser Rolle gehört es auch, geeignete Unterstützungsangebote bereitzustellen und Modellierungsprozesse in der Leistungsbewertung zu berücksichtigen. Zudem umfasst sie die Überzeugung, dass Schülerinnen und Schüler durch Modellieren grundlegende mathematische Einsichten gewinnen. [Maaß, 2011b, S. 239]

An die Darstellung der Lehrpersonenrolle schließt die Betrachtung der Sozialformen und Methoden an, die den organisatorischen und interaktiven Rahmen des Unterrichts bilden. Das folgende Kapitel widmet sich daher der Frage, welche geeigneten Sozialformen und methodischen Entscheidungen den exemplarischen Unterricht und einen verstehensorientierten Mathematikunterricht unterstützt.

3.4.3. Sozialformen und Methoden

Die Wahl der Sozialformen und Methoden folgt ebenfalls dem exemplarisch-genetischen Ansatz und ist auf die Struktur der beiden Doppelstunden abgestimmt. Im Zentrum steht das gemeinsame Arbeiten an einer realen Fragestellung, weshalb Plenumsphasen eine bedeutende Rolle einnehmen. Besonders zu Beginn der Stunden ermöglicht das Gespräch im Klassenverband, vielfältige Erfahrungen zu sammeln und miteinander zu vergleichen. In sokratisch geführten Sequenzen kann darauf aufbauend schrittweise ein gemeinsames Verständnis der Problemstellung entwickelt werden.

Einzelarbeit wird vor allem bei der Datenerhebung und beim Anfertigen der Weg-Zeit-Skizzen eingesetzt. Sie erlaubt eine konzentrierte und persönliche Auseinandersetzung

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

mit dem eigenen Schulweg und fördert sorgfältiges Arbeiten. Gleichzeitig unterstützt sie den Aufbau einer individuellen Beziehung zur mathematischen Darstellung. Der eigene Schulweg wird so zur erlebbaren Datenquelle, die in späterer Folge auch zum Thema der gesamten Lerngruppe ausgeweitet wird.

Partnerarbeit ergänzt diesen Prozess, insbesondere in der zweiten Doppelstunde. Beim gegenseitigen Erklären und Vergleichen der Darstellungen prüfen die Lernenden ihre Überlegungen, formulieren Begründungen und gewinnen eine vertiefte Sicht auf die Bedeutung der grafischen Strukturen. Die Zusammenarbeit ermöglicht zudem, unterschiedliche Perspektiven wahrzunehmen und von den Ideen der Mitschülerinnen und Mitschüler zu profitieren. Auf diese Weise stärkt die Partnerarbeit nicht nur die fachliche Auseinandersetzung, sondern auch zentrale soziale Kompetenzen.

Die eingesetzten Darstellungen entstehen konsequent aus dem Lernprozess heraus: Tabellen, Skizzen und Diagramme werden nicht als vorab festgelegtes Methodenset präsentiert, sondern entwickeln sich von selbst. Dieser methodische Minimalismus entspricht Wagenscheins Forderung, dass Darstellungsmittel aus der Sache selbst hervorgehen sollen [Wagenschein, 2001, S. 127–128]. Der resultierende Mix aus dialogischer Arbeit, individueller Darstellung und gemeinsamer Reflexion eröffnet einen anschaulichen Zugang zu mathematischen Zusammenhängen und unterstützt ein verstehensorientiertes Lernen.

Die zuvor beschriebenen sozialen Prozesse weisen bereits auf zentrale Lernziele hin, die über die fachlichen Inhalte hinausgehen. Im folgenden Kapitel werden diese Zielsetzungen präzensiert und in geordneter Form dargestellt. Dabei werden sowohl die fachlichen Kompetenzen als auch soziale und kommunikative Fähigkeiten systematisch ausgewiesen.

3.4.4. Lernziele

Die geplante Unterrichtssequenz verfolgt als übergeordnetes Ziel, mathematisches Verstehen durch einen exemplarisch-genetischen Zugang aufzubauen. Die Lernenden sollen anhand ihres eigenen Schulwegs zentrale Zusammenhänge zwischen Weg und Zeit erkennen, visualisieren und reflektieren. Auf Grundlage dieser primären Zielsetzung werden nun die spezifischen Teilziele formuliert. Die Lernziele orientieren sich sowohl an den Kompetenzbereichen des österreichischen Lehrplans für die Mittelschulen als auch an den prozess- und inhaltsbezogenen Anforderungen des Mathematikunterrichts.

Fachliche Lernziele

Die fachlichen Lernziele beziehen sich auf jene mathematischen Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler inhaltlich im Bereich *Weg, Zeit* und *deren Zusammenhänge* erwerben sollen. Sie bilden die Grundlage für ein verstehensorientiertes Lernen auf fachlicher Ebene. Was unter dem Begriff der fachlichen Lernziele im engeren Sinne verstanden wird, lässt sich an der folgenden Definition verdeutlichen:

„Fachkompetenz umfasst Wissen und Fertigkeiten. Sie ist die Fähigkeit und Bereitschaft, Aufgaben und Problemstellungen eigenständig, fachlich angemessen, methodengeleitet zu bearbeiten und das Ergebnis zu beurteilen.“ [Daberkow and Popescu-Willigmann, 2015, S. 118]

Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- reale Weg- und Zeitdaten ihres eigenen Schulwegs erfassen und in einer geeigneten Form notieren.
- Daten ordnen, vergleichen und strukturiert darstellen.
- erkennen, dass Wegstrecke und benötigte Zeit nicht proportional zusammenhängen müssen, sondern von mehreren Faktoren beeinflusst werden.
- grundlegende Eigenschaften eines Weg-Zeit-Verlaufs beschreiben.
- ein eigenes Weg-Zeit-Diagramm zeichnen und seine Merkmale interpretieren.
- einfache Aussagen zur Effizienz und Schnelligkeit verschiedener Wege formulieren.
- verstehen, dass Geschwindigkeit als Verhältnis zwischen Weg und Zeit gedeutet werden kann, auch ohne exakte Berechnung.

Prozessbezogene Lernziele

Die prozessbezogenen Lernziele betreffen die Denk-, Arbeits- und Handlungskompetenzen, die im Verlauf der Sequenz entwickelt werden. Sie umfassen insbesondere die allgemein mathematischen Kompetenzen des Problemlösens, Kommunizierens, Argumentierens, Modellierens und Darstellens. Damit beschreiben sie, wie Lernenden mathematische

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Fragestellungen strukturieren, untersuchen, begründen und in geeigneter Darstellung ausdrücken. [Krauthausen, 2018, S. 12]

Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- mathematische Modellierungsschritte in elementarer Form anwenden.
- argumentieren und erklären, warum bestimmte Wege länger oder kürzer dauern.
- verschiedene Darstellungsformen (Text, Tabelle, Diagramm) vergleichen und deren jeweiligen Aussagekraft beurteilen.
- zentrale Aspekte eines mathematischen Problems im Gespräch herausfiltern, begründen und kritisch reflektieren.

Soziale und personale Lernziele

Die sozialen und personalen Lernziele umfassen jene Kompetenz, die die Lernenden im gemeinsamen Arbeiten, im Austausch und in der Reflexion über eigene Erfahrungen entwickeln. Sie stärken Kooperation, Selbstständigkeit und die Anwendung des Gelernten in Alltagssituationen. Die Bedeutung sozialer und personaler Lernziele lässt sich anhand der folgenden Definition präzisieren:

„Personale Kompetenz - auch Personale oder Humankompetenz - umfasst Sozialkompetenz und Selbstständigkeit. Sie bezeichnet die Fähigkeit und Bereitschaft, sich weiterzuentwickeln und das eigene Leben eigenständig und verantwortlich im jeweiligen sozialen, kulturellen bzw. beruflichen Kontext zu gestalten.“ [Daberkow and Popescu-Willigmann, 2015, S. 118]

Die Schülerinnen und Schüler sollen ...

- ihre persönlichen Erfahrungen einbringen und für den Lernprozess nutzbar machen.
- in Partner- oder Gruppenphasen kooperativ arbeiten und gemeinsam Daten sammeln oder Diagramme vergleichen.
- im Plenumsgespräch zuhören, argumentieren und auf Beiträge anderer eingehen.
- ein Bewusstsein für Mobilität, Zeitplanung und Verkehrssituation entwickeln.

- Erkenntnisse aus der Unterrichtssequenz auf eigene Alltagssituationen übertragen.

Die zuvor dargestellten fachlichen, prozessbezogenen sowie sozialen und personalen Kompetenzen bilden die Grundlage für die Konzeption der Unterrichtssequenz. Sie definieren, welche Fähigkeiten und Einsichten die Schülerinnen und Schüler im Verlauf des exemplarisch angelegten Lernprozesses entwickeln sollen, und dienen zugleich als Kriterien für die Auswahl der Methoden, Sozialformen und der konkreten Gestaltung der Lernumgebung. Aufbauend auf diesen Kompetenzzielen folgt im nächsten Schritt die detaillierte Darstellung des Unterrichtsverlaufs. Dabei wird sichtbar, wie die angestrebten Kompetenzen in den beiden Doppelstunden praktisch umgesetzt, aufgebaut und beobachtbar gemacht werden können.

3.5. Darstellung des Unterrichtsverlaufs

3.5.1. Erste Doppelstunde

Die Doppelstunde beginnt mit einer kurzen, realitätsbezogenen Alltagssituation, die für die Schülerinnen und Schüler einen Anreiz bieten soll. Eine Schülerin, die nahe an der Schule wohnt, benötigt dennoch häufig mehr Zeit als ein Schüler, der deutlich weiter entfernt wohnt. Diese Irritation führt zu spontanen Einfällen und Hypothesen der Lernenden und öffnet den Raum für Diskussionen und Wortmeldungen. Die Problemfrage, die hier aufkommt, lautet: *„Wovon hängt es wirklich ab, wie lange man zur Schule braucht?“*

Im Anschluss erheben die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Daten (Weglänge, Verkehrsmittel, durchschnittliche Zeit). Diese Daten werden im Plenum in einer Tabelle gesammelt und geordnet. Der Unterricht verläuft in dieser Phase bewusst langsam und sokratisch. Die Lehrperson gibt keine Antworten, sondern fragt nach, präzensiert und lässt die Lernenden Unterschiede und Gemeinsamkeiten selbst entdecken.

Die Klasse vergleicht erste Muster in der Datensammlung und stellt fest, dass Wegstrecke allein keine verlässliche Aussage über die Dauer des Schulweges erlaubt. Wegzeiten, Ampeln, Umstiege oder Verkehr beeinflussen die Dauer erheblich. Dies bildet den zentralen „Aha-Moment“ der ersten Doppelstunde. Die Stunde endet mit der Erkenntnis, dass die Beziehung zwischen Weg und Zeit komplexer ist, als es auf den ersten Blick scheint. Auf die graphische Darstellung, die helfen könnte, diese Zusammenhänge sichtbar zu machen,

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

soll im Schlussteil der Unterrichtssequenz angedeutet werden.

Diese Einheit ist lebensweltlich verankert, ermöglicht aktives Forschen und schafft eine Grundlage für das Verständnis von Geschwindigkeit. Darüber hinaus fördert sie die unterschiedlichen Kompetenzen und bereitet die Schülerinnen und Schülern auf funktionales Denken vor. Sie verbindet mathematisches Strukturieren mit alltagsbezogener Relevanz.

Der im Folgenden dargestellte tabellarische Verlaufsplan konkretisiert die zuvor skizzierte Unterrichtseinheit und veranschaulicht deren zeitliche Struktur sowie die Abfolge der einzelnen Unterrichtsphasen. Aspekte wie Sozialform, Rolle der Lehrperson und Kompetenzen wurden bereits im vorangegangenen Kapitel ausführlich erläutert und werden daher in der tabellarischen Übersicht nicht erneut gesondert ausgewiesen.

Phase	Zeit	Inhalt
Einstieg	10 min	Die Lehrperson eröffnet die Stunde mit einer kurzen Alltagsszene: „ <i>Eine Schülerin wohnt nur 700 m von der Schule entfernt, trotzdem kommt sie oft später in die Schule als ihr Klassenkollege, der drei Kilometer entfernt wohnt. Wie kann das sein?</i> “ Die Schülerinnen und Schüler äußern spontane Vermutungen. Ziel ist es, einen kognitiven Konflikt zu erzeugen, dass die Entfernung allein nicht automatisch die benötigte Zeit bestimmt.
Daten-sammlung und Hypothesen	10 min	Die Schülerinnen und Schüler nennen Gründe für die beiden unterschiedlichen Weg- und Zeitbeschreibungen. Diese könnten zum Beispiel sein: <i>Ampeln, Wartezeiten, Busfahrpläne, Umwege, Verkehr</i> . Die Beiträge werden strukturiert an der Tafel oder am interaktiven digitalen Whiteboard festgehalten.

3.5. Darstellung des Unterrichtsverlaufs

Einführung in das Un- terrichts- vorhaben	5 min	Die Lehrperson formuliert das Ziel der Unterrichtsstunde transparent mit folgendem Satz: „ <i>Wir erforschen heute unsere eigenen Schulwege. Wir wollen herausfinden, wie Weg und Zeit zusammenhängen.</i> “ Hier wird die Problemstellung explizit gemacht, dass es um eine systematische Untersuchung eines Zusammenhangs geht.
Individuelle Datenerhe- bung	20 min	Die Schülerinnen und Schüler notieren eigenständig auf einem Blatt Papier: <i>Wie weit ist mein Schulweg? Wie komme ich zur Schule? Wie lange brauche ich durchschnittlich für meinen Schulweg?</i> Falls nötig, werden auch Schätzstrategien besprochen.
Gemeinsame Datenerhe- bung	25 min	Auf dem interaktiven digitalen Whiteboard in der Klasse wird eine gemeinsame Tabelle erstellt, in der Name, Wegstrecke, Zeit und Verkehrsmittel notiert werden. Die Daten werden gemeinsam gesammelt und geordnet, sodass eine Vorbereitung der darauffolgenden Analyse stattfindet.
Erste ma- thematische Vergleiche	15 min	Mithilfe von gezielten sokratischen Leitfragen wird die Tabelle analysiert. Fragen wie <i>Wer hat den längsten Weg? Wer benötigt am wenigsten Zeit? Wer ist am schnellsten? Wer ist trotz kurzer Strecke länger unterwegs?</i> lenken die Schülerinnen und Schüler auf zentrale Zusammenhänge. Die Lernenden werden dazu angeregt, die angegebenen Strecken- und Zeitwerte miteinander zu vergleichen und in Beziehung zu setzen. Auf diese Weise erkennen sie eigenständig erste Muster und Verknüpfungen.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Sicherung der Er- kenntnisse	10 min	Die gemeinsamen Ergebnisse werden formuliert und strukturiert. Folgende Ergebnisse können dabei festgehalten werden: <i>Weg und Zeit stehen in einem Zusammenhang. Dieser Zusammenhang ist abhängig von Verkehrsmittel. Gleiche Strecken können unterschiedlich lange dauern. Zeit hängt nicht nur von der Strecke ab.</i>
Ausblick	5 min	Die Lehrperson rundet die Stunde und das Stundenthema ab und gibt einen Ausblick auf die nächste Doppelstunde: <i>„Nächste Stunde stellen wir eure Schulwege grafisch dar. Dann wird sichtbar, wie ihr euch zur Schule bewegt.“</i> Hier wird die Brücke zur Visualisierung und möglicherweise zur Einführung von Diagrammen oder Streckendarstellungen geschlagen.

Tabelle 3.1.: *Unterrichtsverlauf – Erste Doppelstunde*

3.5.2. Zweite Doppelstunde

Zu Beginn der zweiten Doppelstunde werden die Erkenntnisse der zuvor durchgeführten Unterrichtseinheit kurz wiederholt. Anschließend führt die Lehrkraft anhand eines einfachen Beispiels in die Idee eines Weg-Zeit-Diagramms ein, jedoch ohne formale Begriffsbildung. Es wird gezeigt, dass Gehphasen, Wartezeiten und Fahrten unterschiedliche grafische Formen erzeugen.

Im Hauptteil der Stunde erstellen die Lernenden eigene Weg-Zeit-Skizzen, die ihre tatsächlichen Schulwege darstellen: Gehzeiten erscheinen als leicht steigende Linien, Wartezeiten als horizontale Abschnitte und Bus- oder Autofahrten als steilere Anstiegsabschnitte. Die Schülerinnen und Schüler übertragen ihre Daten eigenständig in diese Darstellung und vergleichen im Anschluss ihre Diagramme in der Klasse. Dabei entstehen zentrale Einsichten:

- Eine waagrechte Linie zeigt eine Wartephase, in der Zeit vergeht, aber kein Weg zurückgelegt wird.

3.5. Darstellung des Unterrichtsverlaufs

- Eine steilere Linie bedeutet, dass in dieser Zeit mehr Weg zurückgelegt wird.
- Unterschiedliche Verkehrsmittel und äußere Umstände erzeugen unterschiedliche Kurvenverläufe.

In einem sokratischen Abschlussgespräch formuliert die Klasse gemeinsam zentrale Erkenntnisse: *Weg und Zeit hängen miteinander zusammen, aber nicht linear*. Geschwindigkeit zeigt sich als Steigung im Diagramm, auch ohne rechnerische Ermittlung. Damit entsteht ein tiefes, tragfähiges Konzeptverständnis, das sich aus den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler heraus entwickelt hat. Die Stunde endet mit einer kurzen reflexiven Frage: *Wie könnte ich meinen eigenen Schulweg verändern, um schneller zu sein und woran sehe ich das in meinem Diagramm?* Dadurch werden die Kenntnisse sowohl gesichert als auch auf andere Situationen übertragbar.

Diese Doppelstunde vertieft das in der ersten Einheit entwickelte Verständnis von Weg und Zeit durch eine grafische Repräsentation. Die Lernenden bewegen sich von der Datenerhebung zur Modellierung und Interpretation. Dadurch werden Kompetenzen wie Darstellen, Interpretieren und Modellieren gefördert. Gleichzeitig wird eine Grundlage für spätere formale Verständnis der Geschwindigkeit als Verhältnisgröße gelegt.

Die folgende tabellarische Planung der zweiten Doppelstunde dient der struktuierten Übersicht über den zeitlichen Ablauf und den inhaltlichen Schwerpunkten der Stunde. Eine erneute Darstellung von Sozialform, Lehrerrolle und Kompetenzbezug erfolgt auch in dieser Doppelstunde nicht, da diese Aspekte bereits zuvor ausführlich erläutert wurden.

Phase	Zeit	Inhalt
Aktivierung	10 min	Zu Beginn greift die Lehrperson die Ergebnisse der vorangegangenen Doppelstunde auf und aktiviert das Vorwissen der Lernenden mit der Frage: <i>„Was haben wir letzte Stunde über Weg und Zeit herausgefunden?“</i> Die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an zentrale Erkenntnisse, insbesondere daran, dass Strecke und benötigte Zeit zwar zusammenhängen, diese Beziehung jedoch nicht allein von der Länge des Weges abhängt.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Einführung: Weg-Zeit- Darstellungen	10 min	Die Lehrkraft führt in die grafische Darstellung ein, indem sie exemplarisch einen vereinfachten Weg-Zeit-Verlauf an der Tafel oder am interaktiven digitalen Whiteboard demonstriert. Beispielsituation: <i>Zunächst wird ein Stück zu Fuß gegangen (mäßig steigende Linie). Danach folgt eine Wartezeit (waagrechte Linie). Anschließend erfolgt eine Busfahrt (deutlich steilere Linie).</i> Die Lehrperson erläutert dabei: <i>Je steiler die Linie, desto schneller erfolgt die Fortbewegung.</i>
Erstellen von eigenen Weg-Zeit- Skizzen	20 min	Im Anschluss übertragen die Schülerinnen und Schüler ihren eigenen Schulweg in eine grafische Darstellung. Dabei sollen sie typische Abschnitte ihres Weges berücksichtigen, etwa Gehen, Warten und Fahren. Die Lehrperson unterstützt bei Bedarf durch gezielte Fragen: <i>Wann wartest du? Wo bewegst du dich besonders schnell?</i>
Vergleich der Diagramme	25 min	In einer moderierten Austauschrunde werden ausgewählte Diagramme verglichen. Die Lehrperson lenkt die Diskussion mithilfe gezielter Impulse: <i>Wer hat die steilste Linie? Was bedeutet eine waagrechte Linie? Warum unterscheiden sich eure Diagramme, obwohl manche ähnlich weit weg wohnen?</i> Die Schülerinnen und Schüler erkennen setzen sich dabei aktiv mit den Darstellungen auseinander, vergleichen ihre Ergebnisse und hinterfragen Unterschiede. Auf diese Weise erkennen sie, dass die Steigung einer Linie mit der Schnelligkeit zusammenhängt und dass unterschiedliche Verkehrsmittel abweichende Steigungen erzeugen.

3.5. Darstellung des Unterrichtsverlaufs

Gemeinsame Interpreta- tion	15 min	In einem sokratisch angelegten Gespräch vertieft die Lehrperson das Verständnis für den funktionalen Zusammenhang. Sie stellt Leitfragen und fördert die Entdeckungsfreude der Schülerinnen und Schüler: <i>Was bestimmt wirklich, wie lange wir brauchen? Warum ist die Strecke allein nicht aussagekräftig? Wie erkennt man Schnelligkeit im Diagramm?</i> Die Lernenden formulieren zunehmend eigenständig, dass Geschwindigkeit als Steigung sichtbar wird.
Sicherung	10 min	Die gewonnenen Erkenntnisse werden gemeinsam und schriftlich festgehalten: <i>Weg und Zeit stehen in einem Zusammenhang. Geschwindigkeit zeigt sich im Diagramm als Steigung. Eine waagrechte Linie bedeutet Stillstand. Unterschiedliche Verkehrsmittel erzeugen verschiedene Steigungen.</i> Eine formale Geschwindigkeitsformel wird bewusst noch nicht eingeführt. Ziel ist die qualitative Erkenntnis.
Reflexive Abschluss- frage	10 min	Am Ende der Unterrichtseinheit wird als Abschluss ein Transfer der gelernten Inhalte mit den Schülerinnen und Schülern in andere Bereiche ihres Alltags gemacht. Die Frage <i>„Wie würdet ihr euren Schulweg ändern, um schneller zu sein?“</i> kann als abschließender Denkanstoß gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler reflektieren dabei ihre Wahl des Verkehrsmittels, die Vermeidung von Wartezeiten und mögliche Abkürzungen.

Tabelle 3.2.: Unterrichtsverlauf – Zweite Doppelstunde

Die zwei zuvor dargestellten Verlaufspläne bilden die Grundlage für die praktische Umsetzung. Im nächsten Schritt wird beschrieben, wie die beiden Doppelstunden tatsächlich verlaufen sind und in welcher Weise die geplanten Elemente im realen Unterrichtsgeschehen aufgegriffen, verändert oder weiterentwickelt wurden.

3.6. Durchführung des Unterrichts

3.6.1. Rahmenbedingungen der Unterrichtssituation

Die beiden Doppelstunden wurden an einer Mittelschule im Bezirk Melk in Niederösterreich durchgeführt. Durch die ländliche Lage der Schule haben die Schülerinnen und Schüler die unterschiedlichsten Schulwege sowie verschiedene Verkehrsmittel, mit denen sie zur Schule kommen. Dies erwies sich als bedeutsam für den thematischen Zugang, da vielseitige Transportmittel, Entfernungen und Routen eine große Rolle im Unterrichtsgespräch spielten. An der ersten Doppelstunde am 24.02.2026 nahmen 12 von 15 Lernenden teil. Bei der zweiten Doppelstunde am 25.02.2026 waren 13 von 15 Schülerinnen und Schüler anwesend.

Der Unterricht fand in einem Klassenzimmer statt, das mit einem digitalen interaktiven Whiteboard sowie einer herkömmlichen Tafel ausgestattet war. Die Sitzordnung bestand aus drei Reihen, die nach einem von der Lehrperson vorgegebenen Plan angeordnet waren, um besonders kontaktfreudige Schülerinnen und Schüler in ihrem Austausch zu bremsen.

Die beiden Doppelstunden dauerten jeweils insgesamt 100 Minuten, aufgeteilt in zwei Einheiten von 50 Minuten mit einer fünfminütigen Pause dazwischen.

Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler verfügten bezüglich der Geschwindigkeitsberechnung und der Interpretation von Diagrammen über kein nennenswertes Vorwissen. Sie hatten jedoch bereits Erfahrungen im Umgang mit Formeln und Gleichungen, insbesondere im Umformen von Gleichungen. In den vorangegangenen Unterrichtsstunden wurden die Themen *Gleichungen* und *Verhältnisse* behandelt.

3.6.2. Beschreibung der ersten Doppelstunde

Die Stunde begann mit der am interaktiven Whiteboard notierten Ausgangssituation: „*Lisa wohnt nur 700 m von der Schule entfernt, trotzdem kommt sie oft später als Moritz, der 3 km weit weg wohnt. Wie kann das sein?*“ Anschließend wurden die Lernenden aufgefordert, Gründe für dieses scheinbare Paradox zu nennen.

Die Antworten der Schülerinnen und Schüler fielen zunächst humorvoll oder alltagsnah aus. Einige vermuteten beispielsweise, dass Lisa später zur Schule komme, weil sie

„*faul*“ sei. Andere erklärten, sie brauche länger, weil sie morgens „*so viel esse*“. Im weiteren Verlauf wandten sich die Lernenden jedoch zunehmend realistischen Einflussfaktoren zu. Mehrere Schülerinnen und Schüler nannten den Verkehr als mögliche Ursache oder wiesen auf unterschiedliche Verkehrsmittel wie Bus, Auto oder E-Scooter hin. Auch Wartezeiten, Busfahrpläne, Baustellen oder die Topografie wurden erwähnt. Beispielsweise äußerte sich ein Schüler, dass Moritz „*am Berg*“ wohne und deshalb bergab besonders schnell fahren könne. Anschließend diskutierten die Lernenden intensiv über Höhenmeter, mögliche Umwege und den Zeitpunkt des Aufstehens.

Die Lehrperson griff Äußerungen gezielt auf, stellte Rückfragen und lenkte die Diskussion auf zentrale Aspekte wie Verkehrsmittel, Wartezeiten und Unterschiede zwischen Hin- und Rückweg. Mehrmals äußerten Lernende spontan Vermutungen über Zusammenhänge zwischen Strecke, Zeit und Geschwindigkeiten. In diesem Kontext meinte ein Schüler etwa: „*Irgendwie hängt das schon zusammen.*“

Im Anschluss erhielten alle Schülerinnen und Schüler einen leeren Zettel im A6-Format. Auf der Vorderseite sollten sie ihr verwendetes Verkehrsmittel und auf der Rückseite Schätzungen zu ihrem Schulweg und der benötigten Zeit notieren. Die Lehrperson unterstützte diese Phase mithilfe von Google Maps, um Distanzen zu überprüfen und die Nachvollziehbarkeit einzelner Angaben zu klären. Dabei entwickelten sich Gespräche über mögliche Umwege, eine realistische Routenwahl und individuelle Schätzstrategien.

Daraufhin wurde am interaktiven, digitalen Whiteboard gemeinsam eine Tabelle erstellt, in die nacheinander alle Lernenden ihre Daten eintrugen: Name, Weg, benötigte Zeit und genutztes Verkehrsmittel. Für die Darstellung in dieser Arbeit wurden die Namen der Schülerinnen und Schüler anonymisiert und mit fortlaufenden Nummern bezeichnet:

Name	Zeit	Weg	Fortbewegungsmittel
Schüler 1	25 min	6,1 km	zu Fuß - Bus 1 - Bus 2
Schüler 2	20 min	7,4 km	zu Fuß - Bus

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Schüler 3	40 min	53,3 km	Auto
Schüler 4	14 min	11,1 km	zu Fuß - Bus
Schüler 5	15 min	2,1 km	zu Fuß - Bus
Schüler 6	15 min	6,9 km	zu Fuß - Bus
Schüler 7	5 min	1 km	Fahrrad
Schüler 8	30 min	4,5 km	zu Fuß - Bus - zu Fuß
Schüler 9	45 min	15 km	Bus
Schüler 10	40 min	3,9 km	zu Fuß - Bus 1 - Bus 2
Schüler 11	18 min	6,5 km	zu Fuß - LKW - zu Fuß
Schüler 12	3 min	1,8 km	Auto

Tabelle 3.3.: *Gemeinsame Datensammlung der Schulwege*

Bereits nach den ersten Beiträgen begannen die Schülerinnen und Schüler, spontane Vergleiche anzustellen. Ein Schüler kommentierte etwa: „*Du fährst ja direkt mit dem großen Bus.*“ Schüler 2 stellte sofort fest und erläuterte: „*Schüler 1 hat weniger Strecke, aber braucht länger als ich.*“ Mehrfach wurden in dieser Phase des Unterrichts Unregelmäßigkeiten und überraschende Relationen sichtbar. Eine Schülerin benötigt beispielsweise für 3,9 Kilometer rund 40 Minuten, weil sie zweimal umsteigen und warten muss. Ein anderer Schüler bewältigt eine Strecke von 1,8 Kilometer in nur drei Minuten. Dies wurde im Austausch mit den Lernenden sofort kritisch hinterfragt. Ein Mitschüler fragte dabei direkt: „*Wie ist das möglich?*“

In dieser Phase zeigte sich ein ausgeprägtes Interesse am Vergleichen der Daten. Die Lernenden wollten unbedingt alle Angaben erfassen und miteinander in Beziehung setzen. Dabei nannten sie zahlreiche thematisch bedeutsame Einflussfaktoren wie Verkehrsdichte, Ampelphasen, Busverspätungen, Unfälle oder andere Verkehrsteilnehmer, darunter etwa die Müllabfuhr oder langsam fahrende Fahrzeuge.

Gegen Ende der Stunde lenkte die Lehrperson die Aufmerksamkeit der Gruppe auf grundlegende Fragen zum Zusammenhang zwischen Weg und Zeit. Sie fragte beispielsweise, ob eine kürzere Strecke zwangsläufig auch weniger Zeit in Anspruch nehme. Die Lernenden gelangten zunehmend eigenständig zu der Einsicht, dass Verkehrsmittel, Wartezeiten, Umwege und topografische Bedingungen maßgebliche Einflussgrößen darstellen. Zum Abschluss gab die Lehrperson einen kurzen Ausblick auf die folgende Doppelstunde, in der die gesammelten Daten in grafische Darstellungen überführt und anschließend interpretiert werden sollten.

3.6.3. Beschreibung der zweiten Doppelstunde

Zu Beginn der zweiten Doppelstunde wurden die zentralen Ergebnisse der vorherigen Stunde wiederholt. Die Daten eines zuvor abwesenden Schülers wurde in die Tabelle aufgenommen, wodurch die Wiederholung sinnvoll in den Unterricht integriert wurde:

Name	Zeit	Weg	Fortbewegungsmittel
Schüler 13	6 min	6 km	Auto

Tabelle 3.4.: *Schulweg Schüler 13*

Als Einstieg in das Unterrichtsthema zeichnete die Lehrperson ein einfaches Weg-Zeit-Diagramm an die Tafel. Die Lernenden äußerten erste Vermutungen über die Bedeutung der Linien: „*Je höher die Linien, desto länger brauchen die Kinder.*“ Diese Aussage wurden gemeinsam im Plenum aufgegriffen, geklärt und korrigiert.

Durch gezielte Fragen leitete die Lehrperson zur Interpretation der grafischen Elemente an: *Steile Linien stellen eine schnelle Fortbewegung dar. Flache Steigungen deuten auf*

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Fußwege. Waagrechte Linien kennzeichnen Wartezeiten.

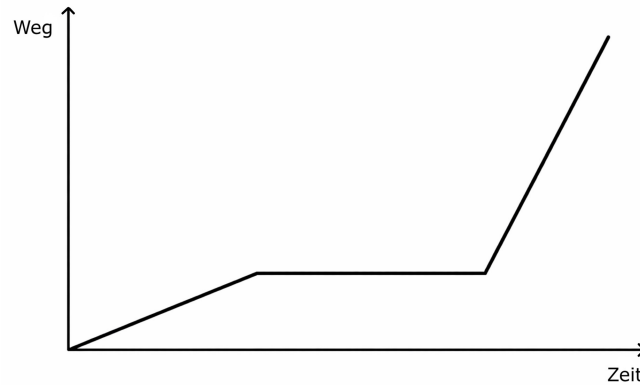


Abbildung 3.7.: Weg-Zeit-Diagramm der Lehrperson

Anschließend erhielten die Schülerinnen und Schüler den Auftrag, ihren eigenen Schulweg ohne Beschriftung als Weg-Zeit-Skizze darzustellen. Die fertigen Zeichnungen wurden eingesammelt, abfotografiert und am digitalen Whiteboard präsentiert. Die Skizzen der Schülerinnen und Schüler befinden sich im Anhang dieser Arbeit. (vgl. Anhang A) In einer moderierten Gesprächsphase sollten die Lernenden anhand der Linien erkennen, welche Form der Fortbewegung vorliegt, wie viele verschiedene Verkehrsmittel genutzt wurden und ob Wartezeiten enthalten sind.

Diese Phase wurde von den Schülerinnen und Schülern mit großer Begeisterung aufgenommen. Neben humorvollen Kommentaren wie „*Er springt unter dem Fahren vom Auto in den Bus.*“ zeigten sie präzise Beobachtungen. Schülerin 12 zeichnete sogar kurze Wartezeiten an Kreuzungen oder schnelles Wegfahren mit dem Auto ein. Besonders produktiv war die Diskussion darüber, dass ohne Achsenbeschriftung keine exakten Werte für Zeit und Weg ablesbar sind. Dies stellt einen wichtigen Schritt zum Verständnis mathematischer Darstellungen dar.

Die geplante Abschlussdiskussion über mögliche Verbesserungen des eigenen Schulwegs konnte in dieser Doppelstunde aus Zeitgründen nicht mehr durchgeführt werden. Aus diesem Anlass wurde sie auf die darauffolgende Stunde verlegt, um die zuvor erarbeiteten Inhalte nochmals gemeinsam zu reflektieren und das Thema inhaltlich abzurunden.

3.6.4. Sichtbare Lernprozesse im Gesamtverlauf

Über beide Doppelstunden hinweg zeigten die Lernenden großes Interesse an den realen Zusammenhängen zwischen Weg und Zeit. Besonders deutlich wurde ihre Fähigkeit, alltagsnahe Daten differenziert zu vergleichen und unerwartete Relationen zu erkennen. Auf diese Weise bemerkten sie beispielsweise selbstständig, dass eine kürzere Strecke nicht zwangsläufig mit einer früheren Ankunftszeit verbunden ist, und formulierten entsprechende Beobachtungen. Durch die sokratisch angeleitete Gesprächsführung der Lehrperson entwickelten viele Schülerinnen und Schüler eigene Erklärungsansätze und begründeten ihre Vermutungen.

In der zweiten Doppelstunde zeigte sich zudem, dass ein großer Teil der Lernenden bereits erste modellhafte Interpretationen der grafischen Darstellungen vornehmen konnte. Sie identifizierten Wartezeiten, unterschiedliche Geschwindigkeiten und den Wechsel zwischen verschiedenen Verkehrsmitteln. Diese Aspekte ordneten sie stimmig in das Weg-Zeit-Diagramm ein. Diese Entwicklungen verdeutlichen, dass die Lernende nicht nur die Oberfläche des dargestellten Phänomens erfassten, sondern begannen, die zugrunde liegenden Strukturen zu verstehen.

Die beschriebenen Beobachtungen bilden eine zentrale Grundlage für die anschließende Reflexion des dargestellten Unterrichtsbeispiels. Im folgenden Abschnitt wird das Unterrichtsgeschehen daher unter didaktischen und methodischen Gesichtspunkten systematisch analysiert. Dabei werden die gewonnenen Erfahrungen mit dem im theoretischen Teil der Arbeit dargestellten Konzepten und Überlegungen in Beziehung gesetzt. Ziel ist es, zentrale Erkenntnisse herauszuarbeiten, die Stärken der gewählten Unterrichtsgestaltung zu identifizieren und zugleich mögliche Weiterentwicklungen kritisch zu reflektieren.

3.7. Reflexion des Unterrichtsbeispiels

3.7.1. Zielperspektive und Rolle der Reflexion

Die beiden Doppelstunden bilden einen zusammenhängenden Lernprozess, der von der Sammlung realer Schulwegdaten bis zur ersten grafischen Modellierung in Form eines Weg-Zeit-Diagramms führt. Die Reflexion setzt daher bewusst übergreifend an und betrachtet beide Einheiten im Hinblick auf die vorgesehenen Lernprozesse, die Rolle der Lehrperson sowie die Erfahrungen der Lernenden. Besonderes Augenmerk liegt dabei

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

dem mathematischen Verstehen und den Prinzipien nach Martin Wagenscheins Lehrkunst.

3.7.2. Reflexion in Bezug auf mathematisches Verstehen

Die Unterrichtseinheit eröffnete den Lernenden vielfältige Gelegenheiten, mathematische Zusammenhänge zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit aus einer lebensweltlich bedeutsamen Situation heraus zu erkunden. Bereits in der ersten Doppelstunde zeigten sie ein ausgeprägtes Interesse daran, reale Daten zu vergleichen. Sie bemerkten Unterschiede zwischen ihren Schulwegen, die sich nicht allein durch die Länge der Strecke erklären ließen. Sie äußerten Vermutungen darüber, weshalb eine Strecke, die auf den ersten Blick kurz erscheint, in der Praxis dennoch länger dauern kann. Dabei bezogen sie Wartezeiten, Verkehr, topografische Bedingungen, Umwege oder die Wahl des Verkehrsmittels in ihre Überlegungen ein und verbanden diese Faktoren mit ihrem Alltag.

Die Beobachtungen lassen sich gut im Lichte der pädagogischen Theorie Wagenscheins deuten: Lernen geschieht hier nicht nur auf kognitiver Ebene, sondern schließt auch die emotionalen und persönlichen Dimensionen ein. Es entstehen die sogenannten „*Herzensmomente*“, in denen Einsichten erlebt und verinnerlicht werden, statt dass nur Wissen aufgenommen wird [Wagenschein, 2002, S. 16]. Typische Unregelmäßigkeiten der Schulwege regten zu vertieften Nachdenken an. Beispielsweise benötigt Schüler 10 trotz einer kurzen Strecke unerwartet lange, während Schüler 3 eine erheblich längere Strecke sehr schnell zurücklegt. Solche Kontraste führten zu produktiven Irritationen, aus denen heraus die Lernenden eigenständig Erklärungen entwickelten. Die aktive Beteiligung und das mitgehende Denken der Schülerinnen und Schüler spiegeln Wagenscheins Idee wider, dass ein Lerngegenstand erst dann zum Ausgangspunkt tieferen Verstehens wird, wenn er die Lernenden innerlich ergreift. [Wagenschein, 2001, S. 35–36]

In der zweiten Doppelstunde vollzogen viele Lernende den Übergang von alltagsnahen Beschreibungen zu ersten modellhaften Darstellungen. Sie erkannten, dass steile Linien auf schnelle Bewegung, leichte Steigungen auf das Gehen und waagrechte Abschnitte auf Wartezeiten hinweisen. Schüler 12 (vgl. Anhang A) erstellte ein besonders differenziertes Weg-Zeit-Diagramm. Der Lernende berücksichtigte dabei auch Haltestellen mit dem Auto, beispielsweise Kreuzungen, an der er warten muss, und stellte diese im Diagramm entsprechend dar. Im Unterricht wurde zudem die unterschiedliche Steigung der Linien

von Bus und Auto aufgegriffen und im Zusammenhang mit den verschiedenen Geschwindigkeiten der Verkehrsmittel besprochen.

Besonders bedeutsam war die Einsicht, dass ohne eine Skalierung der Achsen keine exakten Zeit- und Wegangaben möglich sind. Diese Erkenntnis zeigt, dass die Lernenden begannen, mathematische Darstellungen nicht nur zu lesen, sondern kritisch zu hinterfragen. Einige Lernende, wie etwa Schüler 5 (vgl. Anhang A), nahmen bereits eine leichte Skalierung vor, wodurch die zeitlichen Verläufe anschaulicher und vergleichbarer wurden.

Durch diese Erfahrungen lernen die Schülerinnen und Schüler, mathematische Darstellungen nicht nur zu entschlüsseln, sondern sie kritisch zu hinterfragen und auf den Alltag zu übertragen. Gleichzeitig wird hier die Bedeutung von nachhaltigem Wissen deutlich: Die gewonnen Einsichten waren nicht auf den eigenen Schulweg der einzelnen Lernenden beschränkt, sondern konnten auch auf die Schulwege ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler übertragen und in diesen neuen Kontexten wieder aufgegriffen werden [Straßer, 2013, S. 504]. Insgesamt bildeten die Doppelstunden einen tragfähigen Zugang zu grundlegenden Aspekten des mathematischen Modellierens und relationalen Verstehens, der über bloßes Ausrechnen hinausgeht und den Lernprozess als ganzheitliches Erlebnis begreift [Förster, 2015, S. 138].

3.7.3. Reflexion im Sinne Wagenscheins

In dieser Reflexion werden die zentralen Elemente der Lehrkunst Martin Wagenscheins im Rahmen der beiden durchgeführten Doppelstunden besonders deutlich und sichtbar: Die konsequente Orientierung am konkreten Phänomen zeigte sich darin, dass die Schülerinnen und Schüler mit ihren eigenen Schulwegen arbeiteten und damit von einem für ihren Alltag bedeutsamen Ausgangspunkt ausgingen. Dadurch entstand eine stimmige Verbindung zwischen Lebenswelt und Mathematik, wie sie Wagenschein für exemplarisches Lernen fordert. Bereits in der ersten Doppelstunde konnten die Lernenden vielfältige Informationen zu ihren Schulwegen einbringen, die sie in der zweiten Doppelstunde systematisch verglichen und modellierten.

Auch die Bedeutung des sokratischen Unterrichts tritt klar hervor: Die Lehrperson stellte bewusst offene Fragen, nahm die Beiträge der Lernenden auf und begleitete ihre Denkprozesse, ohne Lösungen vorwegzunehmen. Dadurch entwickelten die Schülerinnen und

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Schüler Hypothesen, hinterfragten eigene Annahmen und setzten sich mit den Sichtweisen ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler auseinander. In dieser dialogischen Struktur entstanden mathematische Einsichten gemeinsam, anstatt dass Wissen lediglich übermittelt wurde. Gleichzeitig fördert dieser Prozess eine zunehmende sprachliche Genauigkeit und die bewusste Verwendung fachlicher Begriffe, wie es Wagenschein und Labudde hervorheben. [Labudde, 1989, S. 172] [Wagenschein, 2001, S. 81]

Das exemplarische Lernen wurde besonders am Schulweg als Ausgangsphänomen sichtbar. Anhand dieses konkreten Alltagsbeispiels erschloss das Lernen grundlegende Zusammenhänge zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit. Vom Einzelbeispiel aus gelangten sie zu allgemeinen mathematischen Prinzipien, was ganz im Sinne des exemplarischen Ansatzes liegt. [Eichelberger et al., 2008, S. 113–114]

Außerdem zeigte sich der Wert des genetischen Lernens: Die Lernenden konnten die Situation der Schulwege selbst entdecken und reflektieren, ohne dass die fertigen Lösungen vorgegeben wurden. Sie folgten eigenen Denkwegen und erarbeiteten Zusammenhänge Schritt für Schritt, ähnlich wie sie die Wissenschaft im historischen Kontext nachvollziehen würden [Wagenschein, 2001, S. 14–15]. Die Lehrperson begleitete diesen Prozess konsequent in der Rolle der fragend-helfenden Unterstützung, ohne den natürlichen Denktrieb zu unterbrechen oder Ergebnisse zu erzwingen [Wagenschein, 2001, S. 81].

Wagenschein [Wagenschein, 2001, S. 99–100] betont, dass ein Lernprozess idealerweise nicht mit einleitenden Erklärungen startet, sondern mit einer Herausforderung, die auch ohne Vorwissen lösbar ist. Entsprechend erhielten die Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Unterrichts eine konkrete Situation, die sie eigenständig analysieren, begründen und erschließen mussten. Für die Lernenden zeigte sich dabei eine deutliche motivationale Wirkung, da sie die Aufgabe selbstständig bearbeiten konnten.

Darüber hinaus erwies sich die bewusste Begrenzung der Stofffülle zugunsten einer vertieften Auseinandersetzung mit einem ausgewählten Phänomen als zentral für die Planung, Durchführung und Reflexion der Unterrichtseinheit im Sinne Wagenscheins [Straßer, 2013, S. 500]. Die Entscheidung, am Beispiel des Schulwegs zu verweilen, ermöglichte eine exemplarische Erschließung grundlegender Begriffe und Strukturen mathematischen Denkens. Dadurch wurde vermieden, eine Vielzahl voneinander isolierten Aufgaben zu bearbeiten. In der Rückschau zeigt sich, dass gerade diese Konzentration auf ein „*gutes Exempel*“ nicht nur fachliche Einsichten, als auch nachhaltige Lernprozesse fördert. Da-

mit wird Wagenscheins Forderung nach einem Denken in Exempeln und nach Verstehen vor bloßer Wissensanhäufung Rechnung getragen.

Insgesamt wurde in der Unterrichtseinheit sichtbar, dass die Lernenden mathematische Zusammenhänge nicht nur erkannten, sondern in einer vertieften, exemplarischen Weise erschlossen. Der Unterricht bot Raum zur Entwicklung kognitiver, sprachlicher und persönlicher Kompetenzen, wobei die Schülerinnen und Schüler aktiv in den Denkprozess einbezogen wurden und die Lehrperson als unterstützende Begleitung wirkte.

3.7.4. Grenzen der durchgeführten Unterrichtseinheit

Trotz der vielen positiven Aspekte traten im Verlauf der Durchführung der Doppelstunden verschiedene Grenzen deutlich hervor. Diese betreffen sowohl die zeitliche Umsetzung als auch fachliche, organisatorische und strukturelle Aspekte des Unterrichts. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Zeitliche Beschränkungen im Verlauf der Doppelstunden
- Fachliche Schwierigkeiten bei der Interpretation von Distanzen und Diagrammen
- Ungenauigkeit bei der Schätzung von Zeitangaben durch die Lernenden
- Organisatorische Herausforderungen und Ablenkung durch digitale Hilfsmittel

Zeitliche Beschränkungen stellten dabei eine zentrale Herausforderung dar. Die intensive Diskussion der Schülerinnen und Schüler sowie die dynamische Auseinandersetzung mit den Schulwegdaten führten dazu, dass einige geplante Elemente, insbesondere die abschließende gemeinsame Reflexion in der zweiten Doppelstunde, nicht mehr umgesetzt werden konnten. Diese Phase der Unterrichtseinheit wurde auf die darauffolgenden Mathematikstunde verlegt.

Fachliche Schwierigkeiten zeigten sich vor allem bei der Einschätzung der Distanzen und der anfänglichen Interpretation der Weg-Zeit-Diagramme. Einige Lernende hatten zunächst Probleme, Strecken realistisch einzuschätzen oder die grafischen Darstellungen korrekt zu deuten. Fehlvorstellungen, etwa die Annahme, dass höhere Linien automatisch längere Zeiten bedeuten, traten auf. Solche Irritationen sind zwar pädagogisch wertvoll, erforderten jedoch gezielte Klärung und Zeit, um in Verstehen umgesetzt zu werden.

3. Entwicklung, Umsetzung und Reflexion eines eigenen Unterrichtsentwurfs

Ein besonderer Aspekt zeigte sich bei der Schätzung der Zeitangaben für die eigenen Schulwege. Trotz Strategien wie Vergleich, Rückblick auf den eigenen Alltag oder grobe Orientierungshilfen führten die Schätzungen häufig zu ungenauen Ergebnissen. Die Lernenden mussten erst lernen, Hypothesen zu formulieren und diese kritisch zu prüfen und reflektieren. Dieser Prozess offenbarte sowohl die Grenzen der eigenen Vorerfahrungen als auch die Komplexität realitätsbezogener mathematischer Aufgaben und bot wertvolle Einblicke in das praktische mathematische Arbeiten. Der Einsatz digitaler Hilfsmittel wie Google Maps brachte organisatorische Anforderungen mit sich, die den Fokus gelegentlich vom mathematischen Kern ablenkten.

Die Grenzen dieser Unterrichtssequenz lassen sich auch in Bezug auf die strukturellen Bedingungen des schulischen Alltags einordnen. Wagenschein [Wagenschein, 2001, S. 115] weist darauf hin, dass exemplarischer Unterricht im regulären Schulbetrieb oft erschwert wird. Längere Epochen, die ein durchgängiges genetisches Lernen ermöglichen, fehlen häufig. Pausen oder organisatorische Zwänge unterbrechen die innere Verbindung zwischen Lernenden und Sache. In der Umsetzung konnte durch die Doppelstunden an aufeinanderfolgenden Tagen zwar ein gewisser Zusammenhang bewahrt werden, die Organisation solcher Doppelstunden stellte jedoch zusätzliche Herausforderungen dar. Unterricht lässt sich somit nicht vollständig in vorgegebene Zeiteinheiten pressen, ohne dass die Qualität des Lernprozesses leidet [Wagenschein, 1955, S. 522–523].

Insgesamt verdeutlicht die Reflexion im Hinblick auf Grenzen der durchgeführten Unterrichtseinheit, dass die Durchführung exemplarischer, lebensweltlich verankerter Lernprozesse im schulischen Kontext immer auch von zeitlichen, organisatorischen und fachlichen Rahmenbedingungen begrenzt wird. Die Doppelstunden konnten dennoch wesentliche Einsichten ermöglichen, wenngleich die optimale Umsetzung genetischer Prinzipien im regulären Schulbetrieb nur teilweise realisierbar war.

3.7.5. Verbesserungspotenzial und Ausblick

Aus den Beobachtungen der beiden Doppelstunden ergeben sich mehrere Ansatzpunkte, um das Unterrichtsvorhaben weiterzuentwickeln. Diese lassen sich in folgende Punkte gliedern:

- Notwendigkeit einer klareren Strukturierung der Diskussionsphasen

- Erweiterter Zeitbedarf für Analyse und Vergleich der Weg-Zeit-Diagramme
- Unterstützung beim Verständnis von Achsenbeschriftung und Skalierung
- Gezielter Einsatz von Partner- und Kleingruppenphasen

Eine klarere Strukturierung der Diskussionsphasen könnte dazu beitragen, die Vielzahl spontaner Beiträge gezielter zu ordnen, ohne die Offenheit des sokratischen Gesprächs zu beeinträchtigen. Ebenso wäre es sinnvoll, mehr Zeit für die Analyse und den Vergleich der Weg-Zeit-Diagramme einzuplanen, um den Lernenden die Möglichkeit zu geben, die gewonnenen Einsichten vertiefter zu reflektieren und systematisch zu verknüpfen.

Darüber hinaus könnte eine behutsame Einführung in die Bedeutung der Achsenbeschriftung und Skalierung das mathematische Verständnis weiter fördern. Partner- oder Kleingruppenphasen könnten gezielter eingesetzt werden, sodass die Lernenden ihre Überlegungen zunächst untereinander sortieren und erläutern, bevor sie diese im Plenum diskutieren. Auf diese Weise ließen sich auch die individuellen Beiträge stärker in den Gesamtprozess integrieren.

Zudem zeigt die Reflexion der Schätzungen und der Interpretation realer Daten, dass Lernende beim Übergang von Alltagserfahrungen zu mathematischen Darstellungen besondere Unterstützung benötigen. Konkrete Impulse oder kurze Leitfragen könnten helfen, Diskrepanzen zwischen Erwartung und Realität bewusst zu machen und die eigenständige Hypothesenbildung zu fördern.

Die Unterrichtseinheit verdeutlicht insgesamt, dass ein phänomorientierter Zugang mit authentischen Schulwegen nicht nur motivierend wirkt, sondern zugleich ein hohes Potenzial für mathematisches Verstehen und modellierende Aktivitäten bietet. Sie bestätigt die Bedeutung eines Unterrichtsansatzes, der am Verstehen orientiert ist und durch aktive Einbindung der Lernenden exemplarische Einsichten ermöglicht. Zugleich wird deutlich, dass eine bewusste Abstimmung von Zeit, organisatorischem Rahmen und methodischer Begleitung essenziell ist, um die Lernprozesse nachhaltig zu unterstützen.

Für zukünftige Durchführungen ergibt sich somit der Ausblick, den genetischen, sokratischen und exemplarischen Charakter der Unterrichtseinheit noch stärker zu entfalten und die Lernenden in ihrem eigenständigen Entdecken zu unterstützen, ganz im Sinne der Lehrkunst Wagenscheins.

4. Fazit

Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, inwiefern exemplarisches Lernen nach Martin Wagenschein durch realitätsbezogene Aufgaben zu einem tieferen mathematischen Verständnis beitragen kann. Auf Grundlage der durchgeführten Unterrichtseinheit lässt sich diese Frage eindeutig dahingehend beantworten, dass ein solcher Zugang in hohem Maße geeignet ist, mathematisches Verstehen nachhaltig zu fördern. Dabei sollte vorausgesetzt werden, dass ausreichend Zeit für individuelle Denkprozesse sowie für gemeinsame Reflexion eingeräumt wird.

Im Sinne der Lehrkunst Wagenscheins erwies sich insbesondere die Konzentration auf ein zentrales, lebensweltlich relevantes Phänomen als gewinnbringend. Das Arbeiten am „guten *Exempel*“ ermöglichte es, grundlegende mathematische Prinzipien exemplarisch zu erschließen und auf neue Situationen zu übertragen. Gleichzeitig zeigte sich die Bedeutung der Rolle der Lehrperson als fragend-helfende Begleitung, die Denkprozesse anregt, ohne Lösungen unmittelbar vorzugeben. Besonders die im Unterricht beobachteten Momente eigenständiger Einsicht verdeutlichen das Potenzial eines verstehensorientierten Mathematikunterrichts.

Am Beispiel der Schulwege wurde deutlich, dass Lernende mathematische Zusammenhänge zwischen Weg, Zeit und Geschwindigkeit nicht nur anwenden, sondern in ihrer Bedeutung erfassen können. Besonders aufschlussreich war dabei, dass Unterschiede zwischen den Schulwegen nicht ausschließlich rechnerisch erklärt wurden. Vielmehr entwickelten die Schülerinnen und Schüler eigenständige Hypothesen unter Einbezug von Alltagsfaktoren wie Verkehr, Wartezeiten oder Streckenverlauf. Solche produktiven Irritationen regten vertiefte Denkprozesse an und führten zu Einsichten, die über das reine Rechnen hinausgehen. Die Lernenden gelangten dadurch zu der Erkenntnis, dass mathematische Modelle die Wirklichkeit nicht nur abbilden, sondern auch interpretieren und hinterfragen müssen.

Auch der Übergang von alltagsnahen Beschreibungen zu grafischen Darstellungen in Form von Weg-Zeit-Diagrammen stellte einen zentralen Lernschritt dar. Die Lernenden erkann-

4. Fazit

ten Zusammenhänge zwischen Steigung und Geschwindigkeit sowie die Bedeutung geeigneter Skalierungen. Dadurch entwickelte sich ein Verständnis dafür, wie mathematische Darstellungen zur Beschreibung realer Situationen genutzt werden können. Darüber hinaus zeigt sich, dass die in dieser Unterrichtseinheit angelegten Grundvorstellungen weit über die behandelte Jahrgangsstufe hinausweisen. Konzepte wie Geschwindigkeit als Zusammenhang von Weg und Zeit, die Interpretation von Steigungen oder das Arbeiten mit grafischen Darstellungen bilden wichtige Grundlagen für weiterführende Themen wie Durchschnittsgeschwindigkeit, Änderungsraten oder die Differentialrechnung. Ebenso eröffnen sich Anknüpfungspunkte zum Physikunterricht, in dem Bewegungsprozesse und Weg-Zeit-Zusammenhänge eine zentrale Rolle spielen.

Besonders deutlich zeigte sich dies in der vorliegenden Unterrichtssequenz vor dem Hintergrund der Lerngruppe, die erfahrungsgemäß mehr Zeit benötigt, um mathematische Zusammenhänge zu erfassen und miteinander zu verknüpfen. Umso bemerkenswerter war, dass grundlegendes Verständnis von Beginn an angelegt war und im weiteren Verlauf kontinuierlich ausgebaut werden konnte. Auftretende Fehlvorstellungen konnten direkt in der jeweiligen Situation aufgegriffen und geklärt werden, wodurch ein tragfähiges Verständnis entstehen konnte. Gleichzeitig wurde deutlich, wie motivierend es für Lernende ist, eigene Lebensweltbezüge einzubringen und mathematisch zu durchdringen.

Gleichzeitig wurden jedoch klare Grenzen exemplarischen Lernens sichtbar. Der genetisch-exemplarische Zugang benötigt deutlich mehr Zeit als ein stärker gelenkter Unterricht, da Schülerinnen und Schüler eigene Denkwege entwickeln, diskutieren und reflektieren müssen. Gerade im schulischen Alltag steht dafür jedoch häufig nur ein begrenzter zeitlicher Rahmen zur Verfügung. Zusätzlich erschweren Lehrplanvorgaben, Leistungsbeurteilungen sowie organisatorische Rahmenbedingungen eine dauerhaft vertiefte Auseinandersetzung mit einzelnen Themenbereichen. Auch eignet sich nicht jedes mathematische Thema gleichermaßen für einen genetisch-exemplarischen Zugang, da insbesondere im systematisch aufgebauten Mathematikunterricht das Verlassen vertrauter Lösungswege zu Verunsicherung führen kann.

Darüber hinaus stellt diese Unterrichtsform auch für Lehrpersonen eine besondere Herausforderung dar. Offene Lernprozesse lassen sich nur begrenzt vorausplanen, da Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Ideen, Fragen und Lösungswege einbringen. Dadurch sind ein hohes Maß an Flexibilität sowie die Fähigkeit erforderlich, Denkprozesse situativ aufzugreifen und gleichzeitig den fachlichen Überblick zu bewahren. Zusätzlich entsteht

ein erhöhter Vorbereitungsaufwand, da geeignete realitätsbezogene Aufgaben sorgfältig ausgewählt und didaktisch aufbereitet werden müssen. Umso wichtiger sind gegenseitige Unterstützung innerhalb des Kollegiums sowie schulische Rahmenbedingungen, die offene und verstehensorientierte Unterrichtsformen zumindest punktuell ermöglichen. Exemplarisches Lernen erweist sich damit nicht allein als Aufgabe einzelner Lehrpersonen, sondern auch als gemeinsame Herausforderung schulischer Unterrichtsgestaltung.

Für mich persönlich wurde dabei eine weitere Qualität dieses Zugangs deutlich: die besondere Dynamik und Motivation, die entsteht, wenn Lernende eigene Lebensweltbezüge einbringen. Es war spürbar, mit welchem Interesse und Ehrgeiz die Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Erfahrungen einbrachten und mathematisch zu durchdringen versuchten. Diese Form der Auseinandersetzung führte nicht nur zu fachlichen Einsichten, sondern wurde auch persönlich als äußerst bereichernd erlebt.

Zugleich wurde erkennbar, dass ein verstehensorientierter Unterricht mit realitätsbezogenen Aufgaben nur dann sein Potenzial entfalten kann, wenn ausreichend Zeit für offene Lernprozesse und deren gezielte Begleitung vorhanden ist. Gerade in diesem Spannungsfeld zwischen Offenheit und Struktur liegt eine zentrale Herausforderung, aber auch eine besondere Chance für einen verstehensorientierten Mathematikunterricht.

Die Ergebnisse der Arbeit verdeutlichen insgesamt, dass exemplarisches Lernen nach Wagenschein nicht als durchgängiges Unterrichtsprinzip verstanden werden sollte, sondern vielmehr als gezielt eingesetzte Ergänzung des Mathematikunterrichts. Es eröffnet Räume für vertieftes Denken, eigenständiges Entdecken und nachhaltiges mathematisches Verstehen. Gleichzeitig verweist dieser Ansatz auf eine grundlegende Aufgabe von Schule und Unterricht: Lernenden einen Raum zu bieten, in dem sie sich mit eigenen Fragen, Erfahrungen und Interessen aktiv am Lernprozess beteiligen können. Gerade darin liegt aus meiner Sicht der besondere didaktische Wert von Wagenscheins Lehrkunst.

Gleichzeitig hat die Arbeit mein eigenes Verständnis von Mathematikunterricht nachhaltig beeinflusst. Insbesondere messe ich der bewussten Reduktion auf zentrale Inhalte sowie der vertieften Auseinandersetzung mit einzelnen Beispielen inzwischen eine größere Bedeutung bei als einer möglichst breiten Stoffabdeckung. Damit verbunden ist ein Perspektivwechsel hin zu einem stärker verstehensorientierten und offeneren Unterrichtsverständnis.

4. Fazit

Insgesamt zeigt sich damit als zentrale Erkenntnis dieser Arbeit, dass exemplarisches Lernen nach Wagenschein in Verbindung mit realitätsbezogenen Aufgaben einen wirksamen Zugang zum mathematischen Verstehen darstellen kann. Gleichzeitig ist dieser Ansatz nicht als durchgängiges Unterrichtsprinzip im bestehenden Schulsystem umsetzbar, da zeitliche, curriculare und leistungsbezogene Rahmenbedingungen deutliche Grenzen setzen. Exemplarisches Lernen erfordert zudem eine hohe Offenheit im Unterrichtsgeschehen sowie eine intensive didaktische Vorbereitung und flexible Reaktion auf Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler. Aus meiner Sicht stellt es daher vor allem eine sinnvolle Ergänzung des Mathematikunterrichts dar, die gezielt und situationsabhängig eingesetzt werden sollte.

Abschließend bestätigt die Untersuchung die Leitidee, mit der sie eingeleitet wurde: „*Verstehen ist schwerer zu vermitteln als Wissen*“ [Scholz, 2011, S. 12]. Die durchgeführte Unterrichtseinheit zeigt jedoch, dass mathematisches Verstehen wachsen kann, wenn Lernende aktiv beteiligt werden, an lebensnahen Problemen arbeiten und ausreichend Raum für eigene Denkprozesse erhalten. Mathematikunterricht wird dadurch nicht als bloße Vermittlung von Verfahren verstanden, sondern als gemeinsamer Prozess des Verstehens und Durchdringens mathematischer Zusammenhänge.

A. Anhang



Abbildung A.1.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 1

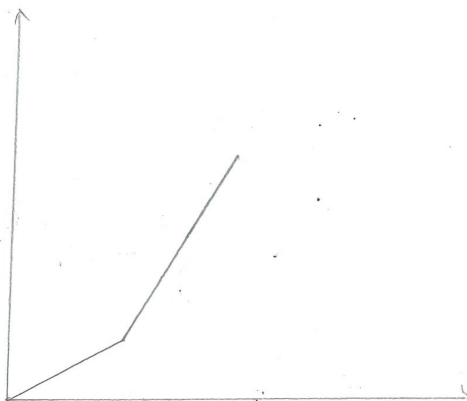


Abbildung A.2.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 2

A. Anhang

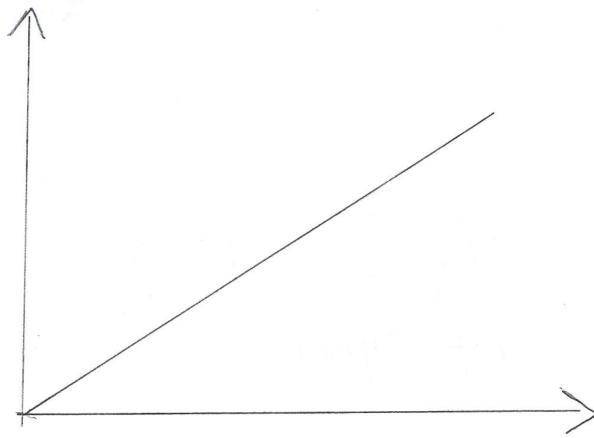


Abbildung A.3.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 3

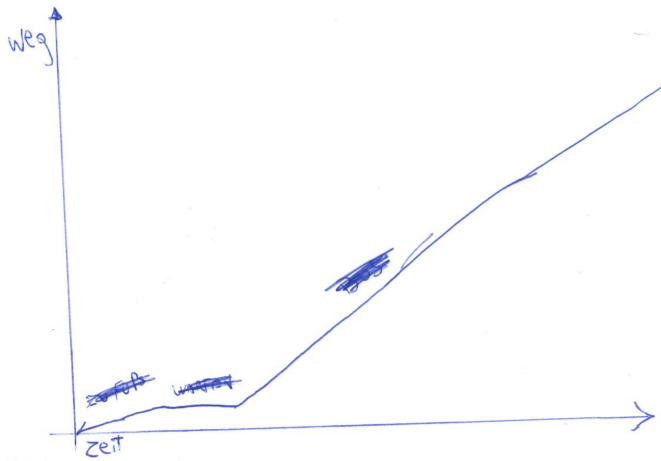


Abbildung A.4.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 4

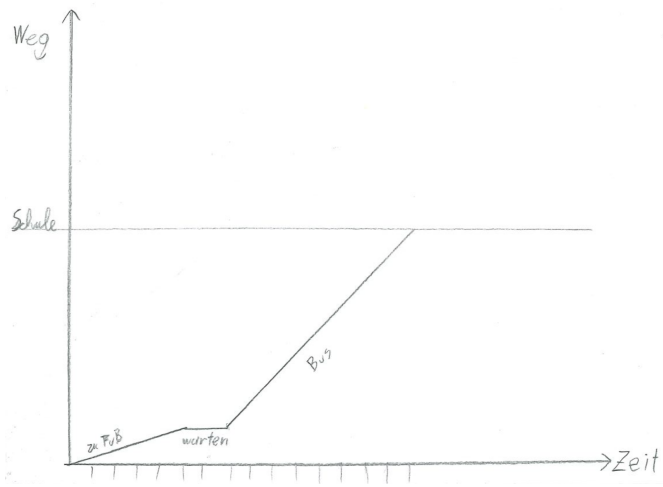


Abbildung A.5.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 5

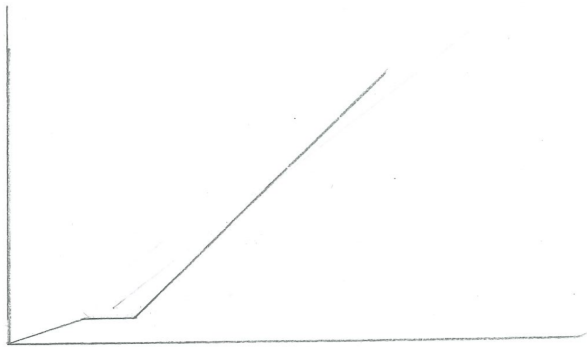


Abbildung A.6.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 6

A. Anhang

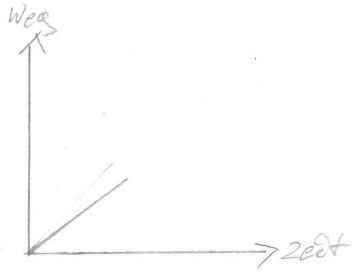


Abbildung A.7.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 7

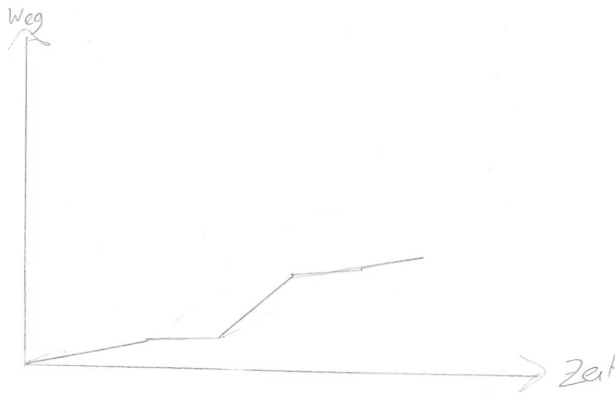


Abbildung A.8.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 8

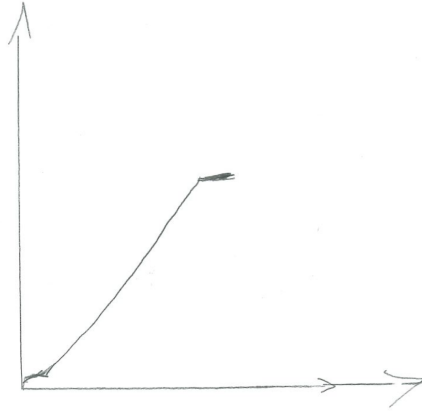


Abbildung A.9.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 9

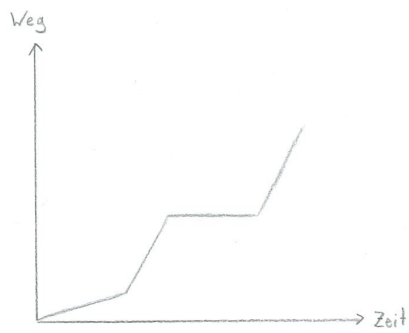


Abbildung A.10.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 10

A. Anhang

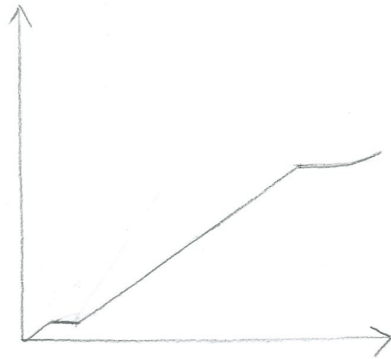


Abbildung A.11.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 11



Abbildung A.12.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 12

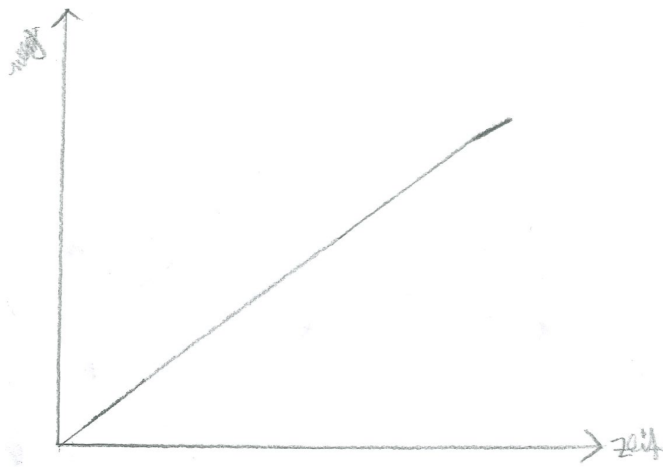


Abbildung A.13.: Weg-Zeit-Diagramm Schüler 13

Literaturverzeichnis

[Berg, 1989] Berg, H. C. (1989). Martin Wagenschein (1896 - 1988) und seine Lehrkunst – heute. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 7(1):11 – 18.

[Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023]

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2023). Lehrplan der Mittelschule. Anlage 1 zu den Lehrplänen der Mittelschulen.

[Daberkow and Popescu-Willigmann, 2015] Daberkow, L. and Popescu-Willigmann, S. (2015). Lernergebnisorientierung im Deutschen und im Europäischen Qualifikationsrahmen (DQR/EQR). In Klebl, M. and Popescu-Willigmann, S., editors, *Handbuch Bildungsplanung: Ziele und Inhalte beruflicher Bildung auf unterrichtlicher, organisationaler und politischer Ebene*, pages 99–150. W. Bertelsmann.

[Duenbostl et al., 2020] Duenbostl, T., Mathelitsch, L., Matouschek, S., and Oudin, T. (2020). *Genial! DUO Physik 2 – Info-Teil*. Bildungsverlag Lemberger and Hölzel Verlag GmbH.

[Eichelberger et al., 2008] Eichelberger, H., Kohlberg, W. D., Sary, E., Laner, C., and Sary, C. (2008). Exemplarisches Lehren und Lernen nach Martin Wagenschein. In *Reformpädagogik Goes ELearning*, pages 101 – 120. Walter de Gruyter GmbH.

[Eichler, 2015] Eichler, A. (2015). Zur Authentizität realitätsorientierter Aufgaben im Mathematikunterricht. In Kaiser, G. and Henn, H.-W., editors, *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Festschrift zum 20. Geburtstag von Werner Blum*, pages 105–118. Springer.

[Eichler, 2011] Eichler, J. (2011). *Physik für das Ingenieurstudium - prägnant mit knapp 300 Beispielaufgaben*. Vieweg + Teubner, Springer, 4 edition.

- [Fries, Dietmar and Kaiser, Gabriele and Blum, Werner, 2004] Fries, Dietmar and Kaiser, Gabriele and Blum, Werner (2004). *Mathematik hilft [fast] immer! Mathematisches Modellieren in der Schule*. Rheinische Dr.
- [Förster, 2015] Förster, F. (2015). „Wofür braucht man das eigentlich?“ — Reflexionen zum Anwenden von Mathematik. In Kaiser, G. and Henn, H.-W., editors, *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Festschrift zum 20. Geburtstag von Werner Blum*, pages 135–150. Springer.
- [Grehn, 2013] Grehn, J. (2013). *PSSC Physik*. Vieweg + Teubner.
- [Henn, 2003] Henn, H.-W. (2003). Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In Henn, H.-W., editor, *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, pages 1 – 5. Franzbecker.
- [Henn, 2015] Henn, H.-W. (2015). Mathematik im Alltag. In Kaiser, G. and Henn, H.-W., editors, *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Festschrift zum 20. Geburtstag von Werner Blum*, pages 203–216. Springer.
- [Humenberger and Schuppar, 2021] Humenberger, H. and Schuppar, B. (2021). Vorwort. In Humenberger, H. and Schuppar, B., editors, *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 7*, pages V–VI. Springer.
- [Jahnke, 2011] Jahnke, T. (2011). Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. In Krohn, T., Malitte, E., Richter, G., Richter, K., Schöneburg, S., and Sommer, R., editors, *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik. Mathematikdidaktische Ansätze*, pages 159 – 172. Franzbecker.
- [Jerrentrup, 2006] Jerrentrup, A. (2006). *Physik. Die gesamte Physik in einem Skript*. MEDI-LEARN.
- [Kaiser, 2015] Kaiser, G. (2015). Werner Blum und sein Beitrag zum Lehren und Lernen mathematischen Modellierens. In Kaiser, G. and Henn, H.-W., editors, *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht. Festschrift zum 20. Geburtstag von Werner Blum*, pages 1–24. Springer.

- [Keller, 2024] Keller, L. G. A. (2024). *Mathematik interaktiv und verständlich für Naturwissenschaftler, Ingenieure und Mediziner*. Springer.
- [Krauthausen, 2018] Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Springer, 4 edition.
- [Kubli, 1996] Kubli, F. (1996). Wagenschein und die Didaktik des Physikunterrichts am Gymnasium. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 14(2):175–179.
- [Köhnlein, 1973] Köhnlein, W. (1973). *Die Pädagogik Martin Wagenschein*. Dissertation, Philosophische Fakultät der Friedrich-Alexander-Universität Nürnberg.
- [Labudde, 1989] Labudde, P. (1989). Verstehen im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 7(2):219–226.
- [Labudde, 1996] Labudde, P. (1996). Genetisch – sokratisch – exemplarisches Lernen im Lichte der neueren Wissenschaftstheorie. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 14(2):170 – 174.
- [Leufer, 2015] Leufer, N. (2015). *Kontextwechsel als implizite Hürden realitätsbezogener Aufgaben: Eine sozialologische Perspektive auf Texte und Kontexte nach Basil Bernstein*. Springer.
- [Maaß, 2011a] Maaß, J. (2011a). Realitätsbezug und Realität im Mathematikunterricht. In Krohn, T., Malitte, E., Richter, G., Richter, K., Schöneburg, S., and Sommer, R., editors, *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik. Mathematikdidaktische Ansätze*, pages 221–230. Franzbecker.
- [Maaß, 2020] Maaß, J. (2020). *Realitätsbezogen Mathematik unterrichten: Ein Leitfaden für Lehrende*. Springer.
- [Maaß, 2011b] Maaß, K. (2011b). Modellierungsaufgaben auf ihrem Weg in den Unterrichtsalltag. Was wurde erreicht? In Krohn, T., Malitte, E., Richter, G., Richter, K., Schöneburg, S., and Sommer, R., editors, *Mathematik für alle. Wege zum Öffnen von Mathematik. Mathematikdidaktische Ansätze*, pages 231 – 244. Franzbecker.
- [Möller, 2001] Möller, K. (2001). Genetisches Lehren und Lernen – Facetten eines Begriffs. In Cech, D., Feige, B., Kahlert, J., Löffler, G., Schreier, H., Schwier, H.-J., and

- Stoltenber, U., editors, *Die Aktualität der Pädagogik Martin Wagenscheins für den Sachunterricht. Walter Köhnlein zum 65. Geburtstag*, pages 15–30. Klinkhardt.
- [Müller and Schumann, 2022a] Müller, M. and Schumann, S. (2022a). Durch wen und wodurch wurde Wagenschein inspiriert? In Müller, M. and Schumann, S., editors, *Wagenscheins Pädagogik neu reflektiert: Mit Martin Wagenschein Bildungserfahrungen verstehen und unterstützen*, pages 17–53. Waxmann.
- [Müller and Schumann, 2022b] Müller, M. and Schumann, S. (2022b). Vorwort. In Müller, M. and Schumann, S., editors, *Wagenscheins Pädagogik neu reflektiert: Mit Martin Wagenschein Bildungserfahrungen verstehen und unterstützen*, pages 9–14. Waxmann.
- [Müller and Schumann, 2022c] Müller, M. and Schumann, S. (2022c). Was sagte, schrieb und lehrte Wagenschein? In Müller, M. and Schumann, S., editors, *Wagenscheins Pädagogik neu reflektiert: Mit Martin Wagenschein Bildungserfahrungen verstehen und unterstützen*, pages 54–176. Waxmann.
- [Plath, 2020] Plath, J. (2020). Verstehensprozesse bei der Bearbeitung realitätsbezogener Mathematikaufgaben: Klassische Textaufgaben vs. Zeitungstexte. *Journal für Mathematik-Didaktik (Internet)*, 41(2):237 – 266.
- [Rieß, 2018] Rieß, M. (2018). *Zum Einfluss digitaler Werkzeuge auf die Konstruktion mathematischen Wissens*. Springer.
- [Rinner, 2025] Rinner, S. (2025). Kinematik. In Rinner, S., editor, *Physik für Wirtschaftsingenieure*, pages 25–39. Springer.
- [Scheuerl, 2017] Scheuerl, H. (2017). *Die exemplarische Lehre: Sinn und Grenzen eines didaktischen Prinzips*. Max Niemeyer.
- [Scholz, 2011] Scholz, O. R. (2011). Verstehen verstehen. In Helmerich, M., Lengnink, K., Nickel, G., and Rathgeb, M., editors, *Mathematik Verstehen. Philosophische und Didaktische Perspektiven*, pages 3–14. Vieweg+Teubner.
- [Steglich and Heise, 2021] Steglich, P. and Heise, K. (2021). Kinematik. In Steglich, P. and Heise, K., editors, *Vorkurs Physik fürs MINT-Studium*, pages 13–31. Springer.

- [Straßer, 2013] Straßer, P. (2013). Lernfelder – die (ungenutzte) Wiederkehr des Exemplarischen. *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik*, 109(4):496–512.
- [Ulrich, 2018] Ulrich, H. (2018). Weiterhin ein Außenseiter? Die Didaktik der Waldorfschulen im allgemein-didaktischen Diskurs. *Pädagogische Rundschau*, 72(1):39 – 48.
- [Wagenschein, 1955] Wagenschein, M. (1955). Vierter Tag Pädagogische Folgerungen. Das Exemplarische in seiner Bedeutung für die Überwindung der Stofffülle. *Bildung und Erziehung*, 8:519 – 532.
- [Wagenschein, 2001] Wagenschein, M. (2001). *Verstehen lehren: genetisch – sokratisch – exemplarisch*. Beltz.
- [Wagenschein, 2002] Wagenschein, M. (2002). *Erinnerungen für morgen: eine pädagogische Autobiographie*. Beltz.
- [Winter, 2003] Winter, H. (2003). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In Henn, H.-W., editor, *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, pages 6 – 15. Franzbecker.