

# MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Vorstellungen und Lernentwicklungen von Schüler:innen zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit in der 7. Schulstufe

verfasst von | submitted by

Pius Bodemann BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt |  
Degree programme code as it appears on the  
student record sheet:

UA 199 511 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree pro-  
gramme as it appears on the student record  
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach  
Geschichte und Politische Bildung Unterrichtsfach  
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz



## **Abstract**

Diese Masterarbeit untersucht die Vorstellungen und Lernentwicklungen von Schüler:innen der 3. Klasse Mittelschule zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit. Im Rahmen einer empirischen Pre-Post-Untersuchung wurde ein eigens entwickelter Fragebogen mit offenen und geschlossenen Aufgaben eingesetzt, um intuitive Deutungen, Fehlvorstellungen und fachlich orientierte probabilistische Konzepte zu erfassen. Die Erhebung erfolgte vor und nach der Unterrichtssequenz zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit in zwei Klassen einer Mittelschule. Die Auswertung erfolgte mittels quantitativer und qualitativer Verfahren auf Grundlage einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring.

Die Ergebnisse der Vorerhebung zeigen ein heterogenes Ausgangsniveau mit überwiegend alltagsbezogenen und intuitiven Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. Der Vergleich mit der Nacherhebung weist in mehreren Bereichen Lernfortschritte hin zu fachlich angemesseneren probabilistischen Vorstellungen auf. Gleichzeitig bleiben bestimmte Fehlvorstellungen, insbesondere Ausgleichsdenken und Musterdenken sowie weitere stabile intuitive Deutungsmuster, auch nach der Unterrichtseinheit teilweise bestehen. Die Ergebnisse verdeutlichen, dass Lernentwicklungen im Bereich der Stochastik nicht linear verlaufen und liefern Hinweise für die didaktische Gestaltung von Unterricht zu Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Sekundarstufe I.

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 Einleitung .....                                                                | 1  |
| 2 Theoretischer Hintergrund .....                                                 | 3  |
| 2.1 Das Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht.....          | 3  |
| 2.2 Lehrplanbezüge .....                                                          | 4  |
| 2.3 Begriffsverständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit.....                    | 6  |
| 2.4 Typische Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepte.....                     | 9  |
| 2.5 Bedeutung von Alltagsvorstellungen und intuitivem Wissen.....                 | 16 |
| 2.6 Didaktische Ansätze zur Einführung des Themas Zufall und Wahrscheinlichkeit . | 16 |
| 3 Empirischer Teil – Forschungsdesign.....                                        | 18 |
| 3.1 Ziel der empirischen Untersuchung.....                                        | 18 |
| 3.2 Forschungsfragen und Hypothesen .....                                         | 19 |
| 3.3 Untersuchungsgruppe.....                                                      | 20 |
| 3.4 Erhebungsmethode .....                                                        | 21 |
| 3.5 Datenauswertung.....                                                          | 22 |
| 3.6 Gütekriterien der Untersuchung .....                                          | 23 |
| 4 Ergebnisse der Untersuchung .....                                               | 25 |
| 4.1 Ergebnisse der Vorerhebung und Nacherhebung .....                             | 25 |
| 4.2 Inferenzstatistik .....                                                       | 50 |
| 5 Fazit .....                                                                     | 54 |
| 5.1 Beantwortung der Forschungsfragen .....                                       | 54 |
| 5.2 Beantwortung der Hypothesen.....                                              | 68 |
| 5.3 Einordnung der Ergebnisse in die Literatur .....                              | 70 |
| 6 Grenzen der Studie .....                                                        | 72 |
| 7 Implikationen für die Unterrichtspraxis.....                                    | 73 |
| 7.1 Unterrichtssequenz: Interpretation von Wetterwahrscheinlichkeiten.....        | 73 |
| 7.2 Unterrichtssequenz: Vergleich von Würfelkombinationen .....                   | 79 |

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 8 Literatur .....          | 84 |
| 9 Anhang .....             | 86 |
| 9.1 Fragebogen .....       | 86 |
| 9.2 Kategorie-System ..... | 92 |
| 9.3 Auszüge Rohdaten ..... | 99 |

# 1 Einleitung

Zufall und Wahrscheinlichkeit begegnen Schüler:innen bereits lange vor ihrer Behandlung im Mathematikunterricht. Alltagssituationen wie Spiele, Glückssituationen, Wettervorhersagen oder zufällige Begegnungen prägen frühzeitig intuitive Vorstellungen darüber, was als zufällig gilt und wie wahrscheinlich bestimmte Ereignisse erscheinen. Diese alltagssprachlichen Deutungen sind häufig subjektiv, emotional geprägt und nicht eindeutig definiert. Im schulischen Kontext treffen sie auf einen mathematischen Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriff, der sich durch Wertneutralität, Modellannahmen und eine prozessuale Betrachtungsweise auszeichnet. Die daraus entstehende Diskrepanz stellt eine zentrale Herausforderung für den Mathematikunterricht dar.

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I erfolgt eine zunehmend systematische und vertiefte Auseinandersetzung mit stochastischen Konzepten, die an erste Erfahrungen aus der Primarstufe anknüpft. Ziel ist es, Schüler:innen schrittweise von intuitiven Einschätzungen hin zu einem tragfähigen probabilistischen Denken zu führen, das sowohl die Nichtvorhersagbarkeit einzelner Ereignisse als auch das Auftreten von Regelmäßigkeiten bei wiederholten Zufallsexperimenten berücksichtigt. Zahlreiche Studien zeigen jedoch, dass dieser Lernprozess von stabilen Fehlvorstellungen begleitet wird. Dazu zählen unter anderem Ausgleichs- und Musterdenken, die Fokussierung auf einzelne Ereignisse, die Annahme einer Beeinflussbarkeit von Zufall sowie Schwierigkeiten im Umgang mit langfristigen Häufigkeiten. Diese Fehlkonzepte erweisen sich häufig als persistent und lassen sich nicht allein durch formales Wissen oder einmalige Unterrichtseinheiten auflösen.

Vor diesem Hintergrund gewinnt die empirische Untersuchung von Vorstellungen und Lernentwicklungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit besondere Bedeutung. Ein vertieftes Verständnis darüber, welche Denkweisen Schüler:innen vor dem Unterricht mitbringen und wie sich diese im Verlauf einer Unterrichtseinheit verändern, kann dazu beitragen, Unterricht gezielter zu planen und typische Lernhürden bewusster zu adressieren. Insbesondere die Analyse offener Begründungen erlaubt Einblicke in zugrunde liegende Argumentationsmuster, die über reine Antwortentscheidungen hinausgehen.

Ziel der vorliegenden Masterarbeit ist es daher, die Vorstellungen von Schüler:innen der 3. Klasse Mittelschule zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit vor und nach der

unterrichtlichen Behandlung empirisch zu untersuchen. Im Mittelpunkt stehen dabei nicht Leistungsbewertungen, sondern die Beschreibung von Denk- und Argumentationsmustern sowie die Lernentwicklungen. Die Untersuchung knüpft an den aktuellen Lehrplan der Mittelschule an und leistet einen Beitrag zur stochastikdidaktischen Forschung, indem sie exemplarische Einblicke in den Lernstand und die Lernprozesse einer sprachlich heterogenen Lerngruppe bietet.

## 2 Theoretischer Hintergrund

Der theoretische Teil der Arbeit stellt zentrale Grundlagen zum Themenbereich Zufall und Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht dar. Zunächst wird die Bedeutung des Themas im schulischen Kontext sowie seine Verankerung im Lehrplan der Mittelschule erläutert. Anschließend werden zentrale Begriffe wie Zufall und Wahrscheinlichkeit sowie deren Unterschied zwischen Alltags- und Fachsprache beschrieben. Darauf aufbauend werden typische Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepte aus der stochastikdidaktischen Forschung dargestellt. Abschließend werden didaktische Ansätze zur Einführung des Themenbereichs im Unterricht diskutiert.

### 2.1 Das Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht

Zufall und Wahrscheinlichkeit bilden zentrale Inhalte des mathematischen Teilgebiets der Stochastik und nehmen im Mathematikunterricht eine besondere Stellung ein. Im Unterschied zu deterministischen Bereichen der Mathematik beschäftigen sie sich mit Situationen, deren Ergebnisse im Einzelfall nicht vorhergesagt werden können. Der Umgang mit Unsicherheit stellt dabei eine wesentliche Herausforderung dar und verleiht dem Themenbereich zugleich eine hohe gesellschaftliche sowie alltagsbezogene Relevanz.

Schüler:innen begegnen dem Begriff des Zufalls bereits früh in ihrem Alltag. Häufig wird Zufall dabei mit seltenen, überraschenden oder bedeutsamen Ereignissen assoziiert, etwa im Zusammenhang mit unerwarteten Vorkommnissen oder Begegnungen. Der alltagssprachliche Zufallsbegriff ist zudem oftmals vieldeutig und mit Vorstellungen von Glück, Schicksal oder Besonderheit verknüpft. Dieses alltagssprachliche Verständnis von Zufall unterscheidet sich jedoch deutlich vom mathematischen Zugang (Hauer-Typpelt 2020, S. 7-8).

Im schulischen Kontext wird Zufall in der Regel wertneutral und unabhängig von subjektiver Bedeutung betrachtet. Zur Veranschaulichung zufälliger Prozesse werden im Unterricht häufig einfache Zufallsexperimente herangezogen, etwa der Münzwurf, bei dem der Ausgang eines einzelnen Versuchs nicht vorhergesagt werden kann, sich jedoch bei wiederholter Durchführung stabile Wahrscheinlichkeitsaussagen ergeben. Solche Experimente dienen unter anderem als Grundlage für faire Entscheidungsverfahren, da

die möglichen Ergebnisse unter idealisierten Annahmen als gleich wahrscheinlich modelliert werden können (Hauer-Typpelt 2020, S. 7-8).

Ein zentrales Strukturmerkmal stochastischer Situationen liegt in der Spannung zwischen der Nicht-Vorhersagbarkeit einzelner Ereignisse und dem Auftreten von Regelmäßigkeiten bei wiederholten Zufallsexperimenten. Während einzelne Ergebnisse nicht sicher prognostiziert werden können, zeigen sich bei einer großen Anzahl von Wiederholungen stabile Häufigkeiten, was bei vielen Schüler:innen zu Fehlvorstellungen führen kann. Borovcnik, Götz und Maaß heben in „*Stochastik in der Schule*“ zudem hervor, dass das subjektive Erleben von Ereignissen nicht zwangsläufig mit deren mathematischer Bewertung übereinstimmt. Ereignisse können als überraschend wahrgenommen werden, obwohl sie im mathematischen Sinne nicht ungewöhnlich sind. Diese Differenz zwischen Alltagserfahrung und mathematischer Beschreibung unterstreicht die didaktische Besonderheit des Themenbereichs (Borovcnik et al. 2018, S. 4-5).

Ziel des Mathematikunterrichts ist es daher nicht allein, rechnerische Verfahren zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten zu vermitteln, sondern ein tragfähiges probabilistisches Denken aufzubauen. Dazu gehört die Fähigkeit, Zufallssituationen zu beschreiben, Wahrscheinlichkeiten zu vergleichen sowie Ergebnisse im Kontext des zugrunde liegenden Zufallsprozesses zu interpretieren. Vor diesem Hintergrund kommt der Auseinandersetzung mit den Vorstellungen und Denkweisen der Schüler:innen eine besondere Bedeutung zu. Eine empirische Untersuchung dieser Vorstellungen und ihrer Veränderung im Verlauf des Unterrichts erscheint daher sowohl didaktisch sinnvoll als auch fachlich relevant.

## 2.2 Lehrplanbezüge

Das Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit ist im österreichischen Schulwesen mit der Lehrplanreform der Mittelschule und AHS-Unterstufe im Curriculum verankert. Der neue Lehrplan der Mittelschule und AHS-Unterstufe wird seit dem Schuljahr 2023/24 stufenweise eingeführt und bildet für alle Pflichtgegenstände eine verbindliche Grundlage für die Unterrichtsplanung sowie für die Entwicklung fachlicher und überfachlicher Kompetenzen. Im Rahmen dieser Reform wird deutlich, dass wahrscheinlichkeitstheoretische Inhalte nicht erst in höheren Jahrgangsstufen behandelt

werden sollten, sondern bereits in den frühen Jahren der Sekundarstufe I systematisch eingeführt werden und aufeinander aufbauen.

Im neuen Lehrplan ist der Kompetenzbereich Daten und Zufall unter anderem in der 7. Schulstufe ausgewiesen und stellt einen zentralen Bestandteil des Mathematikunterrichts dar. Schüler:innen sollen in diesem Zusammenhang befähigt werden, statistische Darstellungen zu erstellen und zu nutzen sowie unterschiedliche grafische Darstellungsformen von Häufigkeitsverteilungen zu interpretieren. Zu diesen grafischen Darstellungsformen zählen Säulen-, Balken-, Linien- und Kreisdiagramme sowie Prozentdarstellungen. Ein weiterer Schwerpunkt des neuen Lehrplans liegt auf dem Erkennen möglicher Manipulationen statistischer Darstellungsformen.<sup>1</sup>

Darüber hinaus sieht der Lehrplan vor, dass Schüler:innen aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren können. Dazu gehört sowohl die Quantifizierung von Sicherheit mithilfe eines intuitiven Wahrscheinlichkeitsverständnisses als auch das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten auf Grundlage empirisch gewonnener relativer Häufigkeiten. Zudem sollen Laplace-Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten, etwa beim Münzwerfen oder Würfeln, bestimmt und als Vorhersagewerte für relative Häufigkeiten interpretiert werden.<sup>2</sup>

Der Kompetenzbereich Daten und Zufall legt somit in dieser Schulstufe einen deutlichen Schwerpunkt auf das Beschreiben, Deuten und Interpretieren stochastischer Situationen und weniger auf rein formale Berechnungen. Ziel ist es, mathematische Inhalte in lebensnahe und alltagsbezogene Kontexte einzubetten und Schüler:innen zu einem sachgerechten Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit zu befähigen.<sup>3</sup>

Im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I erfolgt erstmals eine systematische Auseinandersetzung mit zufälligen Phänomenen und Wahrscheinlichkeiten. Ziel ist es, Schüler:innen schrittweise von subjektiven Einschätzungen hin zu einem tragfähigen probabilistischen Denken zu führen. Zufallssituationen sollen dabei nicht nur durchgeführt,

---

<sup>1</sup>Vgl. <https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>. Am 21.02.2026.

<sup>2</sup>Vgl. <https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>. Am 21.02.2026.

<sup>3</sup>Vgl. <https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>. Am 21.02.2026.

sondern auch beschrieben, interpretiert und reflektiert werden. Zufall wird im Unterricht somit nicht als Beliebigkeit verstanden, sondern als ein Phänomen, das unter bestimmten Annahmen mathematisch modelliert werden kann.<sup>4</sup>

Die 3. Klasse der Mittelschule stellt dabei einen geeigneten Zeitpunkt für die Behandlung dieser Inhalte dar, da Schüler:innen zu diesem Zeitpunkt bereits über grundlegende mathematische Fertigkeiten verfügen und gleichzeitig erstmals systematisch mit stochastischen Konzepten konfrontiert werden. Die empirische Untersuchung der Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit knüpft somit direkt an die im Lehrplan vorgesehenen Bildungsziele an und ist insbesondere vor dem Hintergrund der Kompetenzentwicklung im Bereich der Stochastik lehrplankonform verortet.

## 2.3 Begriffsverständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit

### 2.3.1 Der Begriff Zufall

Der Begriff Zufall wird sowohl im Alltag verwendet als auch in der Mathematik, weist jedoch unterschiedliche Bedeutungen auf. Im alltäglichen Sprachgebrauch wird Zufall häufig mit seltenen, überraschenden oder bedeutsamen Ereignissen in Verbindung gebracht. Aussagen wie „Das ist ja ein Zufall!“ verdeutlichen, dass dem Zufallsbegriff im Alltag oftmals eine subjektive, intuitive oder emotionale Bedeutung zugeschrieben wird (Precht & von Schroeders 2018, S. 2-3).

In der Mathematik wird Zufall hingegen als wertneutral verwendet. Zufällige Ereignisse sind dadurch gekennzeichnet, dass ihr Ausgang im Einzelfall nicht sicher vorhergesagt werden kann, obwohl die möglichen Ergebnisse bekannt sind. Zufall beschreibt dabei keine Eigenschaft eines einzelnen Ergebnisses, sondern eine Situation, in der mehrere mögliche Ausgänge existieren, deren Eintreten nicht deterministisch festgelegt ist. Typische Beispiele für Zufallsexperimente sind wie oben erwähnt der Münzwurf oder das Würfeln, bei denen alle möglichen Ergebnisse vor der Durchführung bekannt sind, der konkrete Ausgang jedoch offen bleibt (Precht & von Schroeders 2018, S. 3-4).

Dass die Doppelbedeutung des Zufallsbegriffs im Alltag und in der Mathematik besondere Anforderungen an den Unterricht stellt, ist außer Frage. Da Lernende den Begriff bereits vor den Unterrichtseinheiten kennen, besteht die Gefahr, dass alltagssprachliche

---

<sup>4</sup>Vgl. <https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=>. Am 21.02.2026.

Bedeutungen unreflektiert auf mathematische Kontexte übertragen werden. Eine explizite begriffliche Klärung ist daher eine zentrale Voraussetzung für den Aufbau eines tragfähigen mathematischen Verständnisses von Zufall (Precht & von Schroeders 2018, S. 4).

Ein weiterer zentraler Aspekt besteht darin, dass Zufall im Mathematikunterricht stets im Zusammenhang mit Modellannahmen betrachtet wird. Borovcnik, Götz und Maaß betonen, dass identische Situationen je nach gewähltem Modell unterschiedlich beschrieben und beurteilt werden können. Zufall ist damit weniger eine Eigenschaft der Realität als vielmehr eine Eigenschaft der mathematischen Beschreibung. Diese Einsicht erfordert von Lernenden ein hohes Maß an Abstraktion und stellt eine besondere Herausforderung beim Aufbau probabilistischen Denkens dar (Borovcnik et al. 2018, S. 5-6).

### 2.3.2 Der Begriff Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit dient in der Mathematik als Maß zur Beschreibung und zum Vergleich der Chancen des Eintretens eines Ereignisses. Im Unterschied zur alltagssprachlichen Verwendung, in der „wahrscheinlich“ häufig als unscharfe Einschätzung oder subjektives Gefühl verwendet wird, ist Wahrscheinlichkeit im mathematischen Sinn eindeutig definiert und an formale Bedingungen gebunden (Precht & von Schroeders 2018, S. 4-5).

Im schulischen Kontext wird Wahrscheinlichkeit zunächst auf einer intuitiven Ebene eingeführt. Schüler:innen lernen, Ereignisse als sicher, möglich oder unmöglich einzuordnen und Wahrscheinlichkeiten miteinander zu vergleichen. Aufbauend darauf wird Wahrscheinlichkeit zunehmend quantifiziert, etwa durch die Betrachtung relativer Häufigkeiten oder durch die Annahme gleichwahrscheinlicher Ergebnisse bei einfachen Zufallsexperimenten (Precht & von Schroeders 2018, S. 5). In der Abbildung 1 wird die Wahrscheinlichkeit in einem Schulbuch erklärt. Sie stammt aus einem Mathematik-Schulbuch der 3. Klasse und zeigt, dass Wahrscheinlichkeit ein Maß dafür ist, wie sicher oder unsicher ein Ereignis eintritt.

## 4.1 Wahrscheinlichkeit im Alltag

Tobias, Emine und Luca spielen „Mensch ärgere dich nicht“. Luca hat in der dritten Runde immer noch keinen Sechser gewürfelt und darf daher nicht ausrücken. Tobias und Emine haben ihre Figuren schon am Spielfeld. Luca denkt: „Heute werde ich 100-prozentig verlieren.“ Er sagt: „50-50, dass einer von euch beiden gewinnt“.

Was meint Luca mit 100-prozentig bzw. 50-50 in dieser Situation?



Möchte man im Alltag die Wahrscheinlichkeit möglicher Ereignisse beschreiben, wie hier in diesem Fall den Ausgang des Spieles, verwendet man als Maß für die Wahrscheinlichkeit oft Prozentangaben. Je höher der Prozentsatz ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass dieses Ereignis eintritt dh. desto eher tritt es ein:



**Wahrscheinlichkeiten sind dabei theoretische Werte**, mit denen man angibt, mit welchem Grad an Sicherheit Ereignisse eintreten.

Erkläre, warum Lucas Denkweise, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 % verlieren wird, nicht stimmen kann, da das Spiel erst begonnen hat.

Abbildung 1: Wahrscheinlichkeitserklärung im Mathematik-Schulbuch (Humenberger et al. 2025, S. 193).

Wahrscheinlichkeiten können einzelnen Ereignissen zugeordnet werden, ihre mathematische Bedeutung liegt jedoch nicht in der Vorhersage eines konkreten Einzelfalls, sondern in der Beschreibung des erwarteten Auftretens von Ergebnissen bei wiederholter Durchführung eines Zufallsexperiments. Diese Unterscheidung ist insbesondere im schulischen Kontext bedeutsam, da alltagssprachliche Vorstellungen häufig auf einzelne Ereignisse fokussieren, während mathematische Wahrscheinlichkeitsaussagen eine langfristige Perspektive einnehmen (Precht & von Schroeders 2018, S. 5-6).

### 2.3.3 Abgrenzung von Alltags- und Fachsprache

Sowohl der Zufallsbegriff als auch der Wahrscheinlichkeitsbegriff zählen zu den sogenannten mehrdeutigen Begriffen, die im Alltag und in der Mathematik verwendet werden, jedoch unterschiedliche Bedeutungen besitzen können (2.3.1, 2.3.2). Diese Mehrdeutigkeit kann dazu führen, dass Lernende den Eindruck haben, die

mathematischen Begriffe bereits zu verstehen, obwohl sie tatsächlich auf alltagssprachliche Deutungen zurückgreifen (Prechtel & von Schroeders 2018, S. 2-4).

Für den Mathematikunterricht ergibt sich daraus die Notwendigkeit, diese Begriffe explizit zu thematisieren und zwischen alltagssprachlicher und mathematischer Bedeutung zu unterscheiden. Die begriffliche Präzisierung bildet eine zentrale Grundlage für den Aufbau stochastischen bzw. probabilistischen Denkens und ist Voraussetzung für das Verständnis weiterführender stochastischer Konzepte (Prechtel & von Schroeders 2018, S. 6).

Die Mehrdeutigkeit der Begriffe Zufall und Wahrscheinlichkeit verdeutlicht, dass Schüler:innen diesen zentralen Konzepten häufig mit vorgeprägten, alltagssprachlichen Vorstellungen begegnen. Für die vorliegende Untersuchung ist daher von besonderem Interesse, wie Schüler:innen diese Begriffe vor der unterrichtlichen Behandlung deuten und inwiefern sich ihr Begriffsverständnis im Verlauf des Unterrichts verändert. Aus diesem Grund enthält der eingesetzte Fragebogen mehrere Items, die gezielt auf das intuitive Begriffsverständnis, alltagsbezogene Deutungen sowie erste fachliche Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit abzielen.

Borovcnik, Götz und Maaß zeigen anhand verschiedener Beispiele, dass Zufall im Alltag häufig als etwas Unerwartetes oder Seltenes interpretiert wird, während mathematische Betrachtungen auf der Beschreibung und Quantifizierung von Wahrscheinlichkeiten beruhen. Diese begriffliche Mehrdeutigkeit prägt die Vorerfahrungen der Lernenden und stellt einen zentralen Ausgangspunkt für die didaktische Auseinandersetzung mit Zufall und Wahrscheinlichkeit im Unterricht dar (Borovcnik et al. 2018, S. 2-4).

## 2.4 Typische Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepte

In der Forschung zum probabilistischen Denken werden zahlreiche Fehlkonzepte beschrieben, die zu systematischen Fehleinschätzungen zufälliger Situationen führen. Diese Denkweisen beeinflussen probabilistische Urteile häufig auch dann, wenn Lernende die zugrunde liegenden mathematischen Regeln grundsätzlich kennen. Forschungen zeigen, dass intuitive Heuristiken und alltagsnahe Deutungsmuster im Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit besonders stabil sind und sich nicht automatisch durch formales Wissen ersetzen lassen (Husereau et al. 2024, S. 57-59).

Empirische Studien bestätigen diesen Befund und machen deutlich, dass korrektes Rechnen und tragfähiges Verständnis oft auseinanderfallen. Khazanov und Prado zeigen in „*Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics*“ etwa, dass Studierende trotz formaler Kenntnisse weiterhin typische Fehlvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit aufweisen und in Entscheidungssituationen überwiegend auf intuitive Einschätzungen zurückgreifen. Fehlkonzepte erweisen sich damit als persistente Lernhürden, die auch durch traditionellen Unterricht nur eingeschränkt abgebaut werden können (Khazanov & Prado 2010, S. 24-27).

In der stochastikdidaktischen Literatur werden verschiedene solcher Fehlkonzepte beschrieben, darunter die Representativitätsverzerrung, die sogenannte Outcome Orientation sowie der Equiprobabilitätsbias. Sie betreffen unterschiedliche Aspekte probabilistischen Denkens und beeinflussen die Beurteilung zufälliger Situationen jeweils auf spezifische Weise (Husereau et al. 2024, S. 63-66).

Die Representativitätsverzerrung bezieht sich auf die Tendenz, Ergebnisfolgen danach zu beurteilen, wie „typisch“ oder „zufällig“ sie auf den ersten Blick erscheinen. Insbesondere kurze Zufallsfolgen werden dabei anhand ihres äußeren Erscheinungsbildes bewertet, wobei gleichmäßige oder stark strukturierte Folgen häufig als weniger wahrscheinlich eingeschätzt werden als abwechslungsreiche Abfolgen, obwohl alle möglichen Folgen formal gleich wahrscheinlich sind (Khazanov & Prado 2010, S. 25-26).

Die Outcome Orientation hingegen ist durch eine starke Fokussierung auf einzelne Ereignisse gekennzeichnet. Lernende schreiben dem Eintreten eines konkreten Ergebnisses eine übermäßige Bedeutung zu und interpretieren es als Beleg für dessen Wahrscheinlichkeit oder Relevanz. Dabei wird das beobachtete Ergebnis unmittelbar bewertet, ohne den zugrunde liegenden Zufallsprozess oder eine langfristige Perspektive einzubeziehen. Das tatsächliche Auftreten eines Ereignisses wird somit mit seiner probabilistischen Bewertung gleichgesetzt (Khazanov & Prado 2010, S. 25-26).

Beim Equiprobabilitätsbias wird schließlich angenommen, dass unterschiedliche Ereignisse grundsätzlich gleich wahrscheinlich seien, selbst wenn die Struktur des Zufallsexperiments dieser Annahme widerspricht. Dieses Fehlkonzept tritt besonders dann auf, wenn Lernende die Modellannahmen eines Experiments nicht berücksichtigen und stattdessen pauschal von einer Gleichverteilung ausgehen (Khazanov & Prado 2010, S. 25-26).

Für ein tragfähiges Verständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit ist es daher zentral, Zufallsergebnisse nicht isoliert zu betrachten, sondern sie als Ergebnisse eines zugrunde liegenden Prozesses zu verstehen. Krüger, Sill und Sikora betonen in *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I* die Bedeutung einer prozessualen Sichtweise und heben hervor, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen stets auf wiederholbaren Vorgängen beruhen (Krüger et al. 2015, S. 223). Einzelne Ergebnisse sind nur im Zusammenhang mit diesem Prozess sinnvoll interpretierbar. Lernende fokussieren jedoch häufig einzelne Resultate oder kurze Folgen und lösen diese vom zugrunde liegenden Zufallsprozess ab. Dies führt zu Schwierigkeiten beim Wechsel zwischen der Betrachtung einzelner Ergebnisse und der Beschreibung langfristiger Häufigkeiten, etwa beim Vergleich kurzer Münzwurffolgen mit Aussagen über viele Wiederholungen. Ein fehlendes prozessuales Verständnis von Zufall stellt somit eine zentrale Ursache für inkonsistentes probabilistisches Denken dar.

#### 2.4.1 Intuitive/Persönliche Vorstellungen zu Zufall

Im Alltag wird Zufall häufig mit etwas Seltenem, Überraschendem oder Besonderem verbunden. Ereignisse gelten dann als zufällig, wenn sie unerwartet eintreten oder für die betroffene Person eine besondere bzw. persönliche Bedeutung haben. Dieses alltagssprachliche Verständnis unterscheidet sich deutlich vom mathematischen Zufallsbegriff, bei dem Zufall wertneutral betrachtet wird und unabhängig von subjektiven Einschätzungen ist. Untersuchungen zeigen, dass solche alltagssprachlichen Vorstellungen bei Schüler:innen weit verbreitet sind und auch im schulischen Kontext fortbestehen. Sie beeinflussen, wie Lernende Zufall und Wahrscheinlichkeit wahrnehmen und stochastische Situationen im Mathematikunterricht beurteilen (Döhrmann 2004, S. 1-2).

#### 2.4.2 Fehlkonzepte bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen

In der Literatur wird beschrieben, dass Lernende Zufallssituationen häufig nicht als Folge unabhängiger Ereignisse verstehen, sondern ihre Urteile an subjektiven Vorstellungen von Regelmäßigkeit oder Ausgeglichenheit ausrichten. Besonders verbreitet ist in diesem Zusammenhang die sogenannte Repräsentativitätsverzerrung, die unter anderem bereits beschrieben worden ist (Khazanov & Prado 2010, S. 24-26).

Eng damit verbunden ist das sogenannte Musterdenken. Schüler:innen orientieren sich bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen stark an äußeren Strukturen oder vermeintlichen

Mustern. Folgen, die regelmäßig erscheinen oder einen ausgeglichenen Wechsel aufweisen, werden als „echter Zufall“ wahrgenommen, während gleichförmige oder sich ungleichmäßige wiederholende Folgen als untypisch gelten. Die Bewertung erfolgt dabei nicht auf Grundlage mathematischer Wahrscheinlichkeiten, sondern anhand visueller oder intuitiver Mustererkennung.

Ein weiteres beschriebenes Problem besteht darin, dass Lernende frühere Ergebnisse in ihre Beurteilung einbeziehen, so dass sich Zufallsprozesse bereits in kurzen Folgen ausgleichen müssten. Diese Ergebnisorientierung steht im Widerspruch zum mathematischen Verständnis von Zufallsexperimenten, wenn jedes Ergebnis unabhängig von vorherigen Ergebnissen auftritt (Khazanov & Prado 2010, S. 25-26).

Diese in der Literatur häufig beschriebene Vorstellung des Ausgleichsdenkens bildet eine zentrale Grundlage für die Gestaltung mehrerer Fragen des in dieser Arbeit eingesetzten Fragebogens. Insbesondere die Aufgaben zu Münzwurffolgen zielen darauf ab, sichtbar zu machen, inwiefern Schüler:innen erwarten, dass sich Zufallsergebnisse bereits in kurzen Folgen ausgleichen oder bestimmte Ergebnisfolgen als wahrscheinlicher einschätzen als andere. Darüber hinaus wurden das Musterdenken sowie die damit verbundene Repräsentativitätsverzerrung bei der Entwicklung des Fragebogens gezielt berücksichtigt. Die Items zur Einschätzung der wahrscheinlichsten und unwahrscheinlichsten Münzwurffolgen ermöglichen es, zu untersuchen, ob Schüler:innen ihre Urteile an äußeren Strukturen und scheinbaren Regelmäßigkeiten orientieren oder die Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Folgen erkennen.

#### 2.4.3 Vorstellungen zu großen Wiederholungszahlen

Bei Aufgaben mit großen Wiederholungszahlen zeigt sich häufig eine besondere Erwartung an die Verteilung der Ergebnisse. Lernende gehen nicht selten davon aus, dass sich bei vielen Wiederholungen eine nahezu exakte Gleichverteilung einstellen müsse. Krüger, Sill und Sikora betonen in *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*, dass auch bei einer großen Anzahl von Wiederholungen keine genaue Gleichverteilung zu erwarten ist. Zwar kann es zufällig vorkommen, dass einzelne Ergebnisse bei einer bestimmten Versuchszahl gleich häufig auftreten, bei weiteren Wiederholungen unterscheiden sich diese Häufigkeiten jedoch wieder (Krüger et al. 2015, S. 99). Ein zentrales Problem besteht darin, dass Lernende Unterschiede in absoluten Häufigkeiten stark bewerten und diese nur selten in Relation zur Gesamtzahl der Versuche setzen.

Dadurch werden zufallsbedingte Schwankungen überinterpretiert und der Einfluss des Stichprobenumfangs unterschätzt, da viele Lernende ähnliche Ergebnisverteilungen bei wenigen und bei vielen Wiederholungen erwarten, obwohl größere Abweichungen bei kleinen Versuchszahlen deutlich wahrscheinlicher sind als bei großen (Krüger et al. 2015, S. 175).

Diese Vorstellungen stehen im Zusammenhang mit einem fehlenden Verständnis dafür, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen langfristige Tendenzen beschreiben und keine exakten Vorhersagen einzelner Häufigkeiten liefern. Ein tragfähiges probabilistisches Verständnis erfordert daher die Fähigkeit, absolute und relative Häufigkeiten zu unterscheiden und Ergebnisse stets im Kontext der Anzahl der durchgeführten Zufallsexperimente zu interpretieren (Krüger et al. 2015, S. 175).

#### 2.4.4 Inkonsistenzen im probabilistischen Denken

In der Literatur wird wiederholt darauf hingewiesen, dass probabilistisches Denken bei Lernenden häufig nicht konsistent ausgeprägt ist. Schüler:innen gelangen in unterschiedlichen Situationen zu widersprüchlichen Einschätzungen, obwohl den Aufgaben vergleichbare probabilistische Grundannahmen zugrunde liegen. Besonders deutlich zeigt sich dies im Nebeneinander von formalen Kenntnissen und intuitiven Vorstellungen. Khazanov und Prado weisen darauf hin, dass korrektes Wissen und Fehlvorstellungen gleichzeitig bestehen können und je nach Situation unterschiedlich wirksam werden (Khazanov & Prado 2010, S. 24-25).

Solche Inkonsistenzen treten insbesondere beim Wechsel zwischen kurzfristigen und langfristigen Betrachtungsweisen von Zufallsprozessen auf. Während bei großen Wiederholungszahlen häufig eine Annäherung an eine Gleichverteilung erwartet wird, werden bei kurzen Zufallsfolgen gleichzeitig bestimmte Ergebnisfolgen als wahrscheinlicher eingeschätzt als andere. Diese widersprüchlichen Annahmen deuten darauf hin, dass Zufall nicht als zusammenhängender Prozess verstanden wird, sondern situationsabhängig unterschiedlich interpretiert wird. Einzelne Ergebnisse, kurze Folgen und langfristige Häufigkeiten werden nicht konsequent auf denselben zugrunde liegenden Zufallsprozess bezogen.

Ein tragfähiges probabilistisches Verständnis erfordert jedoch die Einsicht für einen stochastischen Prozess, dass sowohl einzelne Zufallsergebnisse als auch langfristige Häufigkeiten Ausdruck desselben zufälligen Vorgangs sind, der sich lediglich auf

unterschiedlichen Betrachtungsebenen zeigt. Die beschriebenen Inkonsistenzen verdeutlichen, dass der Aufbau eines solchen Verständnisses eine zentrale Herausforderung im Stochastikunterricht darstellt (Khazanov & Prado 2010, S. 24-25).

#### 2.4.5 Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit von Zufall

Neben den bisher beschriebenen Fehlkonzepten zeigt sich bei Schüler:innen häufig auch die Vorstellung, dass Zufall bis zu einem gewissen Grad beeinflussbar oder steuerbar sei. Zufällige Ergebnisse werden dabei nicht ausschließlich als unabhängig vom eigenen Handeln verstanden, sondern mit persönlichem Vorgehen, Erfahrung oder „Geschick“ in Verbindung gebracht. Besonders in Handlungssituationen wie dem Würfeln, Kartenspielen oder dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne entsteht die Annahme, dass bestimmte Strategien die Wahrscheinlichkeit eines gewünschten Ergebnisses erhöhen könnten.

Auch Döhrmann zeigt in ihrer Untersuchung zum Zufallsbegriff, dass Lernende Zufall im Alltag häufig nicht als neutralen Prozess verstehen, sondern nach Ursachen und Einflussmöglichkeiten suchen. Zufällige Ergebnisse werden dabei als Folge unbekannter oder noch nicht kontrollierter Bedingungen interpretiert, was die Vorstellung begünstigt, Zufall könne durch eigenes Handeln zumindest teilweise gesteuert werden (Döhrmann 2004, S. 2-3).

Solche Kontrollvorstellungen stehen im Widerspruch zum mathematischen Zufallsbegriff, nach dem die Ergebnisse eines Zufallsexperiments unabhängig von der ausführenden Person sind. In der Stochastikdidaktik wird darauf hingewiesen, dass diese alltagsnahen Deutungen besonders stabil sind, da sie aus wiederholten persönlichen Erfahrungen entstehen und sich auch im Unterricht nicht ohne Weiteres auflösen lassen. Zufall wird dadurch weniger als objektiver Prozess, sondern stärker als subjektiv beeinflussbares Geschehen verstanden, was das Verständnis von Unabhängigkeit und Wahrscheinlichkeit nachhaltig erschwert.

Diese Annahmen bilden die Grundlage für die im Zuge der empirischen Untersuchung gestellten Frage „Kann man Zufall beeinflussen?“ sowie für weitere Aufgaben zu Glücksdenken und Kontrollillusionen, mit denen erfasst werden soll, inwiefern Schüler:innen Zufall mit persönlichem Handeln oder individuellen Strategien verknüpfen (Döhrmann 2004, S. 2).

#### 2.4.6 Vorstellungen bei Urnen- und Kugelziehmodellen

Vergleichbare intuitive Vorstellungen zeigen sich auch bei Urnen- und Kugelziehmodellen, wie sie häufig im Stochastikunterricht eingesetzt werden. Obwohl diese Modelle als formalisiert gedachte Zufallsprozesse dienen, werden sie von Schüler:innen nicht selten alltagsnah interpretiert. So wird beispielsweise angenommen, dass frühere Ziehungen Einfluss auf spätere Ergebnisse haben, obwohl dies bei Ziehen mit Zurücklegen nicht der Fall ist. Bei Ziehen ohne Zurücklegen besteht hingegen tatsächlich eine Abhängigkeit zwischen den Ziehungen. Besonders die Erwartung eines Ausgleichs nach mehreren Ziehungen macht deutlich, dass die Unabhängigkeit der einzelnen Ziehungen nicht als zentrales Merkmal des Zufallsprozesses erkannt wird. Diese Fehlvorstellungen lassen sich im Sinne von Tversky und Kahneman (1971) als Ausdruck eines allgemeinen kognitiven Musters interpretieren, nach dem Menschen Zufallsprozesse als selbstkorrigierend wahrnehmen und auch bei kleinen Stichproben eine hohe Repräsentativität der zugrunde liegenden Verteilung erwarten (Tversky & Kahneman, 1971, S. 105–106).

Darüber hinaus treten in Urnenmodellen dieselben Schwierigkeiten auf wie bei anderen Zufallsexperimenten. Lernende orientieren sich häufig an absoluten Anzahlen, ohne diese in Relation zur Gesamtmenge zu setzen. Veränderungen der Zusammensetzung der Urne oder unterschiedliche Stichprobenumfänge werden dadurch nicht angemessen berücksichtigt, was zu fehlerhaften Wahrscheinlichkeitsurteilen führt. Urnen- und Kugelziehmodelle stellen somit keinen Sonderfall dar, sondern einen standardisierten Kontext, in dem bestehende Fehlkonzepte zu Zufall, Ausgleich und Beeinflussbarkeit besonders deutlich sichtbar werden (Krüger et al. 2015, S. 145-154).

#### 2.4.7 Bedeutung für die vorliegende Untersuchung

Die dargestellten Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepte bilden das Motiv für die Gestaltung des in dieser Arbeit eingesetzten Fragebogens. Aufgaben zur Beurteilung kurzer Zufallsfolgen zielen darauf ab, Muster- und Ausgleichsdenken sichtbar zu machen, während Aufgaben zu großen Wiederholungszahlen das Verständnis langfristiger Häufigkeiten erfassen. Durch die Kombination beider Aufgabentypen wird es möglich, inkonsistente Vorstellungen im probabilistischen Denken der Schüler:innen zu identifizieren und Veränderungen im Rahmen einer Unterrichtssequenz systematisch zu untersuchen.

## 2.5 Bedeutung von Alltagsvorstellungen und intuitivem Wissen

Die in Abschnitt 2.4 beschriebenen Vorstellungen entstehen nicht zufällig, sondern haben ihren Ursprung in alltäglichen Erfahrungen mit Zufall und Unsicherheit. Schüler:innen begegnen Zufall bereits vor der Schulzeit, etwa beim Spielen, Würfeln oder in Glückssituationen, und entwickeln dabei eigene intuitive Vorstellungen davon, wie Zufall funktioniert. Diese sogenannten Primärintuitionen entstehen lange vor der formalen Einführung stochastischer Begriffe im Mathematikunterricht (Döhrmann 2004, S. 1-2).

Hauer-Typpelt weist darauf hin, dass diese alltagsbasierten Vorstellungen nicht immer mit dem mathematischen Zufallsbegriff vereinbar sind. Aufgrund der Nähe zwischen Alltags- und Fachsprache kommt es häufig zu Missverständnissen, die Lernprozesse erschweren (Hauer-Typpelt 2020, S. 9-10). Borovcnik, Götz und Maaß betonen jedoch, dass Alltagsvorstellungen nicht grundsätzlich als falsch zu bewerten sind, da sie in vielen Alltagssituationen funktional erscheinen. Problematisch wird ihre unreflektierte Übertragung auf mathematische Zufallssituationen, die eine prozessuale Betrachtungsweise erfordern (Borovcnik et al. 2018, S. 2-4).

Ein zentrales Ziel des Unterrichts besteht daher darin, Zufall nicht punktuell, sondern als zusammenhängenden Prozess zu thematisieren und intuitive Deutungen systematisch zu reflektieren.

## 2.6 Didaktische Ansätze zur Einführung des Themas Zufall und Wahrscheinlichkeit

Für die Einführung des Themenbereichs Zufall und Wahrscheinlichkeit wird empfohlen, nicht mit formalen Definitionen oder Rechenregeln zu beginnen, sondern geeignete Lerngelegenheiten zu schaffen, in denen Schüler:innen eigene Einschätzungen äußern und reflektieren können. Neben den curricularen Vorgaben und den Zielen stochastischen Wissens und Könnens kann sich die Auswahl und Strukturierung von Zielen und Inhalten an sogenannten zentralen oder fundamentalen Ideen der Stochastik sowie an Aspekten des „statistischen Denkens“ orientieren (Krüger et al. 2015, S. 16).

Eine zentrale Rolle spielt zudem die bewusste Arbeit mit Sprache. Begriffe wie „sicher“, „unmöglich“ oder „wahrscheinlich“ werden im Alltag häufig anders verwendet als in der Mathematik. Durch gezielte Klärung und den Einsatz von Wahrscheinlichkeitsskalen oder

sprachlichen Abstufungen können Unterschiede zwischen alltagssprachlichen und mathematischen Bedeutungen sichtbar gemacht werden.

Ein weiterer didaktischer Schwerpunkt liegt auf dem Einsatz von Experimenten und Simulationen. Während reale Experimente bei großen Versuchszahlen schnell an praktische Grenzen stoßen, ermöglichen Simulationen die Untersuchung langfristiger Entwicklungen und relativer Häufigkeiten. Hauer-Typpelt hebt hervor, dass insbesondere Simulationen von Münzwürfen oder Würfelexperimenten verdeutlichen, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen keine exakten Gleichverteilungen vorhersagen, sondern langfristige Tendenzen beschreiben (Hauer-Typpelt 2020, S. 11).

Um Fehlvorstellungen gezielt zu bearbeiten, sollten Unterrichtsphasen so gestaltet werden, dass Schüler:innen zunächst eigene Vermutungen äußern, diese überprüfen und anschließend reflektieren. Solche Lernarrangements machen intuitive Vorstellungen sichtbar und ermöglichen deren Abgleich mit mathematischen Modellen. Ziel ist es dabei nicht, Alltagsvorstellungen zu vermeiden, sondern Lernprozesse anzuregen, in denen diese reflektiert und schrittweise weiterentwickelt werden. Insgesamt verdeutlichen diese didaktischen Ansätze, dass der Einstieg in den Themenbereich Zufall und Wahrscheinlichkeit vor allem über geeignete Lernumgebungen und aktive Lernprozesse gestaltet werden sollte (Khazanov & Prado 2010, S. 24-26).

## 3 Empirischer Teil - Forschungsdesign

### 3.1 Ziel der empirischen Untersuchung

Ziel der vorliegenden empirischen Untersuchung ist es, die Lernentwicklung, die Vorstellungen und die Fehlvorstellungen von Schüler:innen einer 3. Klasse zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit zu erfassen und deren Veränderung im Anschluss an die dazugehörige Unterrichtseinheit zu untersuchen. Im Mittelpunkt der Arbeit steht dabei die Frage, welche intuitiven, alltagsbezogenen oder fachlich geprägten Vorstellungen Schüler:innen bereits vor der Behandlung des Themas im Unterricht besitzen und inwiefern sich diese Vorstellungen nach dem Abschluss der Unterrichtseinheit zu Zufall und Wahrscheinlichkeit weiterentwickeln oder verändern.

Ausgehend von den im theoretischen Teil beschriebenen typischen Vorstellungen und Fehlkonzerten im Bereich der Stochastik wird zunächst untersucht, welche Denkweisen und Argumentationsmuster vor dem Unterricht vorherrschen. Der Fokus liegt dabei insbesondere auf häufig beschriebenen Fehlvorstellungen wie dem Ausgleichsdenken, dem Musterdenken, der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen sowie auf Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit von Zufall und zum Verständnis von Wahrscheinlichkeit. Die Ergebnisse der Vorerhebung dienen als Ausgangspunkt, um die vorhandenen Konzepte und intuitiven Deutungen der Schüler:innen sichtbar zu machen.

In einem zweiten Schritt wird analysiert, wie sich diese Vorstellungen nach der Behandlung des Themas im Unterricht verändern. Dazu wird die identische Erhebung erneut durchgeführt. Durch den Vergleich von Pre- und Postfragebogen soll aufgezeigt werden, in welchen Bereichen sich fachlich angemessenere probabilistische Vorstellungen entwickeln, in welchen Fällen Fehlvorstellungen reduziert wurden und welche Fehlvorstellungen und Denkweisen auch nach dem Unterricht weiterhin bestehen bleiben oder sogar neu dazugekommen sind. Der Fokus der Arbeit liegt nicht auf der Bewertung einzelner Leistungen, sondern beschäftigt sich wie oben genannt mit den Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schüler:innen sowie auf der Beschreibung von Lernentwicklungen im Sinne veränderter oder stabiler Konzepte zu Zufall und Wahrscheinlichkeit.

## 3.2 Forschungsfragen und Hypothesen

Auf Grundlage der im theoretischen Teil dargestellten Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepte werden im Folgenden die zentralen Forschungsfragen der Untersuchung formuliert. Anschließend werden Hypothesen dargestellt, die erwartete Entwicklungstendenzen im Verständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit beschreiben.

F1: Welche Vorstellungen und Fehlvorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit zeigen Schüler:innen einer 3. Klasse Mittelschule vor der unterrichtlichen Behandlung des Themas?

F2: Wie verändern sich diese Vorstellungen und Fehlvorstellungen nach der Behandlung des Themas Zufall und Wahrscheinlichkeit im Unterricht?

F3: Welche typischen Denk- und Argumentationsmuster lassen sich in den Begründungen der Schüler:innen erkennen?

F4: In welchen Bereichen zeigen sich besonders stabile Fehlvorstellungen, die auch nach der Unterrichtseinheit weiterhin bestehen bleiben?

Zur Strukturierung der Untersuchung und auf Grundlage der im theoretischen Teil dargestellten Forschungsergebnisse werden zusätzlich Hypothesen formuliert. Die Hypothesen dienen nicht der Überprüfung kausaler Effekte, sondern der Strukturierung erwarteter Entwicklungstendenzen auf Grundlage der Literatur.

H1: Vor der Unterrichtseinheit dominieren bei den Schüler:innen intuitive und alltagsbezogene Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit, insbesondere Ausgleichs- und Musterdenken.

H2: Nach der Unterrichtseinheit zeigen die Schüler:innen häufiger fachlich angemessenere probabilistische Vorstellungen, während bestimmte Fehlvorstellungen zwar reduziert, jedoch nicht vollständig überwunden werden.

H3: Die Begründungen der Schüler:innen weisen vor dem Unterricht häufiger intuitive oder gefühlsbasierte Argumentationsmuster auf, während nach dem Unterricht vermehrt fachlich begründete Argumentationen auftreten.

Die Hypothesen dienen dabei nicht nur dem Nachweis kausaler Wirkungen des Unterrichts, sondern der Beschreibung erwarteter Entwicklungstendenzen im Verständnis von Zufall und Wahrscheinlichkeit.

### 3.3 Untersuchungsgruppe

Die empirische Untersuchung wurde mit zwei Klassen der 3. Schulstufe einer Mittelschule durchgeführt. An der Untersuchung des Pre- und Posttests nahmen jeweils dieselben 43 Schüler:innen teil. Die Gruppe setzte sich aus 20 weiblichen und 23 männlichen Schüler:innen zusammen. Bei der Erhebung gaben 10 Schüler:innen an 12 Jahre alt, 23 Schüler:innen 13 Jahre alt sowie 10 Schüler:innen 14 Jahre alt zu sein.

Die Klasse wies eine sprachlich heterogene Zusammensetzung auf. Als zu Hause überwiegend gesprochene Sprache wurde am häufigsten Deutsch angegeben (19 Nennungen). Darüber hinaus wurden unter anderem Türkisch (4), Farsi (3), Russisch (3), Serbisch (3), Rumänisch (2), Paschtu (2), Kurdisch (1), Somalisch (1), Bulgarisch (1), Spanisch (1) sowie Chinesisch (1) genannt. Diese Vielfalt verdeutlicht die unterschiedlichen sprachlichen und kulturellen Hintergründe innerhalb der Klassen.

Zur weiteren Beschreibung der Untersuchungsgruppe wurden im Fragebogen Selbsteinschätzungen zur Einstellung gegenüber dem Fach Mathematik erhoben. Dabei gaben fünf Schüler:innen an, Mathematik gar nicht zu mögen, weitere fünf eher nicht. Der Großteil der Klasse, 20 Schüler:innen bewertete Mathematik neutral mit „mittel“, während neun Schüler:innen Mathematik gern und vier sehr gern mochten. Diese Angaben weisen auf eine insgesamt heterogene Einstellung zum Fach Mathematik innerhalb der Klassen hin.

Ebenfalls aufgenommene Schüler:innendaten waren, wie schwer oder leicht sich die Schüler:innen in Mathematik tun. Bei der wahrgenommenen Schwierigkeit des Mathematikunterrichts zeigte sich eine breite Streuung. Eine Schülerin bzw. ein Schüler schätzte Mathematik als sehr schwer ein, zwölf eher schwer, 18 als mittel, neun als eher leicht und drei als sehr leicht. Diese Selbsteinschätzungen unterstreichen die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen innerhalb der Lerngruppe.

Schüler:innen wurden außerdem befragt, ob sie bereits vor dem Unterricht etwas über Zufall oder Wahrscheinlichkeit gehört hatten. Im Pre-Test beantworteten 31 Schüler:innen diese Frage mit „ja“, sieben mit „nein“ und fünf mit „weiß ich nicht“. Als mögliche Quellen

für die Begriffe wurden dabei insbesondere die Schule, Familie, Fernsehen sowie das Internet genannt. In der Nacherhebung gaben 40 Schüler:innen an, bereits etwas über Zufall oder Wahrscheinlichkeit gehört zu haben, während drei Schüler:innen dies verneinten.

Die Untersuchung wurde im regulären Unterricht durchgeführt und bezieht sich auf zwei bestehende Klassen der Mittelschule, sodass es sich um eine Gelegenheitsstichprobe handelt. Die Ergebnisse der Studie sind daher nicht repräsentativ für alle Schüler:innen der Sekundarstufe I, ermöglichen jedoch exemplarische Einblicke in typische Vorstellungen und Lernentwicklungen im Themenbereich Zufall und Wahrscheinlichkeit in einer Mittelschule mit sprachlich heterogener Schüler:innenschaft.

### 3.4 Erhebungsmethode

Für die Datenerhebung wurde ein eigens entwickelter Fragebogen eingesetzt, der offene und geschlossene Aufgaben kombiniert. Dadurch können sowohl Antwortentscheidungen als auch Begründungen und Denkweisen der Schüler:innen erfasst werden. Der Fragebogen wurde in identischer Form in einer Vor- und Nacherhebung eingesetzt und findet sich im Anhang in Abschnitt 8.1.

#### 3.4.1 Aufbau des Fragebogens

Der Fragebogen wurde auf Basis mathematikdidaktischer und psychologischer Forschung zu probabilistischem Denken entwickelt und orientiert sich an bestehenden Instrumenten bzw. Aufgabentypen aus der Forschung z. B. Khazanov & Prado (2010) und Talawat (2015).

Inhaltlich deckt der Fragebogen zentrale Bereiche im Hinblick auf Verständnis und Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit ab, darunter alltagsbezogene Zufallsvorstellungen, typische Fehlvorstellungen, z. B. Ausgleichs- und Musterdenken, Wahrscheinlichkeitsvergleiche sowie die Interpretation probabilistischer Aussagen aus Alltagssituationen. Viele Items kombinieren geschlossene Antwortoptionen mit kurzen offenen Begründungen, um neben der Entscheidung auch die zugrunde liegenden Argumentationsmuster sichtbar zu machen. Am Ende des Fragebogens finden sich Fragen zur Selbsteinschätzung der Schüler:innen, insbesondere zur subjektiven Sicherheit im Umgang mit Zufall und Wahrscheinlichkeit, sowie ergänzende Reflexionsfragen.

### 3.4.2 Durchführung der Vor- und Nacherhebung

Die Erhebung erfolgte in zwei Phasen im Rahmen des regulären Mathematikunterrichts: zuerst wurde der Pre-Test vor der Unterrichtssequenz durchgeführt und nach Abschluss der Unterrichtssequenz in der Schule wurde der Post-Test durchgeführt. Beide Erhebungen wurden im Klassenverband unter vergleichbaren Bedingungen durchgeführt. Die Bearbeitungszeit betrug jeweils etwa 30 bis 40 Minuten. Hilfsmittel waren nicht erlaubt. Zu Beginn erhielten die Schüler:innen eine kurze standardisierte Instruktion, wobei betont wurde, dass es keine „richtigen“ oder „falschen“ Antworten gibt und dass die Teilnahme freiwillig sowie anonym erfolgt. Zur Anonymisierung wurde ein Schülercode verwendet. Während der Bearbeitung stand ich bei organisatorischen Rückfragen oder Unklarheiten zum Verständnis der Aufgaben jederzeit zur Verfügung, ohne jedoch inhaltliche Hinweise zu geben oder Antworten zu beeinflussen. Besondere Vorkommnisse während der Durchführung traten nicht auf.

### 3.5 Datenauswertung

Die Daten wurden sowohl qualitativ als auch quantitativ ausgewertet. Diese kombinierte Datenauswertung ermöglicht es, einerseits Veränderungen in den Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schüler:innen zum Thema Zufall und Wahrscheinlichkeit sichtbar zu machen und andererseits Einblicke in die zugrunde liegenden Denk- und Argumentationsmuster zu gewinnen. Die qualitative und quantitative Auswertung ergänzen sich dabei teilweise gegenseitig und tragen zu einer differenzierten Betrachtung der Lernentwicklungen bei.

Die qualitative Datenauswertung bezog sich auf die offenen Antworten und Begründungen der Schüler:innen. Diese wurden mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) ausgewertet. Das Kategoriensystem wurde auf Grundlage des theoretischen Hintergrunds entwickelt und orientiert sich an in der Literatur beschriebenen typischen Schüler:innenvorstellungen und Fehlkzepten im Bereich der Stochastik. Dazu zählen unter anderem alltagsbezogene Zufallsvorstellungen, Ausgleichsdenken, Musterdenken und intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen.

Die Fragen wurden in Blöcke unterteilt und mit gemeinsamen Kategorien ausgewertet, um eine konsistente Auswertung sicherzustellen, beispielsweise bei den Aufgaben zu Münzwürfen und Zufallsfolgen. Antworten, die keine inhaltlich verwertbare Aussage enthielten oder unverständlich waren, wurden der Kategorie „*kein Konzept / unklar*“

zugeordnet. Die Kategorien wurden vor Beginn der Auswertung festgelegt und während der Kodierung nicht verändert. Eine vollständige Darstellung des Kategoriensystems mit Definitionen und Beispielen ist im Anhang dieser Arbeit dokumentiert.

### 3.6 Gütekriterien der Untersuchung

Bei der Untersuchung wird die Qualität anhand folgender zentralen Gütekriterien berücksichtigt. Da die Studie im schulischen Kontext durchgeführt wurde und sich auf zwei bestehende Klassen einer Mittelschule bezieht, stehen insbesondere die Nachvollziehbarkeit des Vorgehens, die Vergleichbarkeit der Erhebung und die inhaltliche Passung von Forschungsfragen, Erhebungsinstrument und Auswertung im Vordergrund.

Die Objektivität der Untersuchung wurde durch die in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen einheitlichen Durchführungsbedingungen gewährleistet. Die Verwendung desselben Fragebogens in der Vor- und Nacherhebung sowie eine standardisierte Anleitung trugen dazu bei, möglichst vergleichbare Voraussetzungen für alle Schüler:innen zu schaffen. Die Möglichkeit, Verständnisfragen zu stellen, war auf organisatorische und sprachliche Klärungen beschränkt, sodass keine inhaltliche Beeinflussung der Antworten erfolgte. Durch die Auswertung der offenen Antworten und Begründungen mithilfe des Kategoriensystems nach Mayring (2015) konnte die Zuordnung der Antworten anhand transparenter und nachvollziehbarer Kriterien erfolgen.

Die Reliabilität der Untersuchung ist insbesondere im Zusammenhang mit dem gewählten Pre- und Postdesign zu betrachten. Durch den Einsatz eines identischen Erhebungsinstruments zu beiden Messzeitpunkten sind die Voraussetzungen für einen Vergleich der Antwortmuster grundsätzlich gegeben.

Einschränkend ist zu beachten, dass die qualitative Kodierung der offenen Antworten überwiegend durch eine Person erfolgte und daher keine umfassende Berechnung der Interrater-Reliabilität für das gesamte Datenmaterial durchgeführt wurde (Neuman, 1997 S. 138-139). Zur Absicherung der Kodierung wurde jedoch ein Teil der Daten zusätzlich von einer zweiten Person unabhängig geprüft. Für diesen Teil der Daten wurde die Interrater-Reliabilität mithilfe von Cohen's Kappa berechnet und lag je nach Frage im Bereich guter Übereinstimmung  $\kappa = 0,65$  bis  $\kappa = 0,80$  (Grouven et al., 2007, S.66).

Die Übereinstimmung der Codierungen deutet auf eine konsistente Anwendung des Kategoriensystems hin. Zur Erhöhung der Nachvollziehbarkeit wurden die Kategorien klar definiert und konsequent angewendet.

Die Validität der Untersuchung ergibt sich vor allem aus der inhaltlichen Passung zwischen theoretischem Hintergrund, Forschungsfragen und Erhebungsinstrument. Die Kombination aus geschlossenen Antwortformaten und offenen Begründungen ermöglicht es, nicht nur geschlossene Antwortentscheidungen auszuwerten, sondern auch zugrunde liegende Denk- und Argumentationsmuster zu erfassen. Dadurch wird die inhaltliche Aussagekraft der Erhebung erhöht. Gleichzeitig ist zu berücksichtigen, dass schriftliche Begründungen von den sprachlichen Kompetenzen der Schüler:innen abhängen und Selbsteinschätzungen grundsätzlich subjektiv geprägt sind.

Ein zentrales Gütekriterium der vorliegenden Untersuchung stellt die Transparenz dar. Das Vorgehen bei der Entwicklung des Fragebogens, der Durchführung der Erhebung sowie der qualitativen und quantitativen Datenauswertung wird in dieser Arbeit systematisch dargestellt. Der vollständige Fragebogen sowie das Kategoriensystem der qualitativen Inhaltsanalyse sind im Anhang dokumentiert, sodass das methodische Vorgehen nachvollzogen und überprüft werden kann.

## 4 Ergebnisse der Untersuchung

### 4.1 Ergebnisse der Vorerhebung und Nacherhebung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Vorerhebung und der Nacherhebung vergleichend dargestellt und thematisch entlang zentraler inhaltlicher Schwerpunkte gegliedert. Ziel ist es, Veränderungen sowie stabile Muster in den Vorstellungen der Schüler:innen sichtbar zu machen. Die Zuordnung der Antworten zu den Kategorien erfolgte auf Grundlage der inhaltlich dominanten Argumentation der jeweiligen Schüler:innen. Wenn mehrere Argumentationsmuster erkennbar waren, wurde jene Kategorie gewählt, die den Schwerpunkt der Begründung am deutlichsten widerspiegelte.

#### 4.1.1 Vorstellungen zum Begriff Zufall und Wahrscheinlichkeit (Fragen 1–4)

In Frage 1: „Was bedeutet für dich Zufall?“ sollten die Schüler:innen ihr persönliches Verständnis des Begriffs Zufall beschreiben. In der Vorerhebung dominierte die Kategorie Unvorhersehbarkeit. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Zufall ist, wenn man nicht wissen kann, was als Nächstes passiert.“ Daneben traten auch alltagsbezogene und unspezifische Vorstellungen auf. So formulierte eine Schüler:in beispielsweise: „Wenn jemand bei mir einbricht, ist das Zufall.“ Diese Antwort wurde der Kategorie alltagsbezogen/unspezifisch zugeordnet, da ein zufälliges Ereignis anhand einer persönlichen Alltagssituation beschrieben wird. Die übrigen Kategorien traten insgesamt seltener auf und waren nicht dominant.

In der Nacherhebung blieb die Kategorie Unvorhersehbarkeit weiterhin dominant. Gleichzeitig nahm die Vorstellung zu, dass Zufall nicht beeinflussbar ist. So beschrieb eine Schüler:in beispielsweise: „Man kann Zufall nicht beeinflussen, weil man nicht entscheiden kann, was passiert.“ Diese Antwort wurde der Kategorie nicht beeinflussbar zugeordnet, da die nicht Steuerbarkeit ausdrücklich betont wird. Emotionale und deterministische Deutungen gingen dagegen zurück, während alltagsbezogene Beschreibungen weiterhin bestehen blieben.

Abbildung 2 zeigt die Verteilung der Antwortkategorien in der Vor- und Nacherhebung.

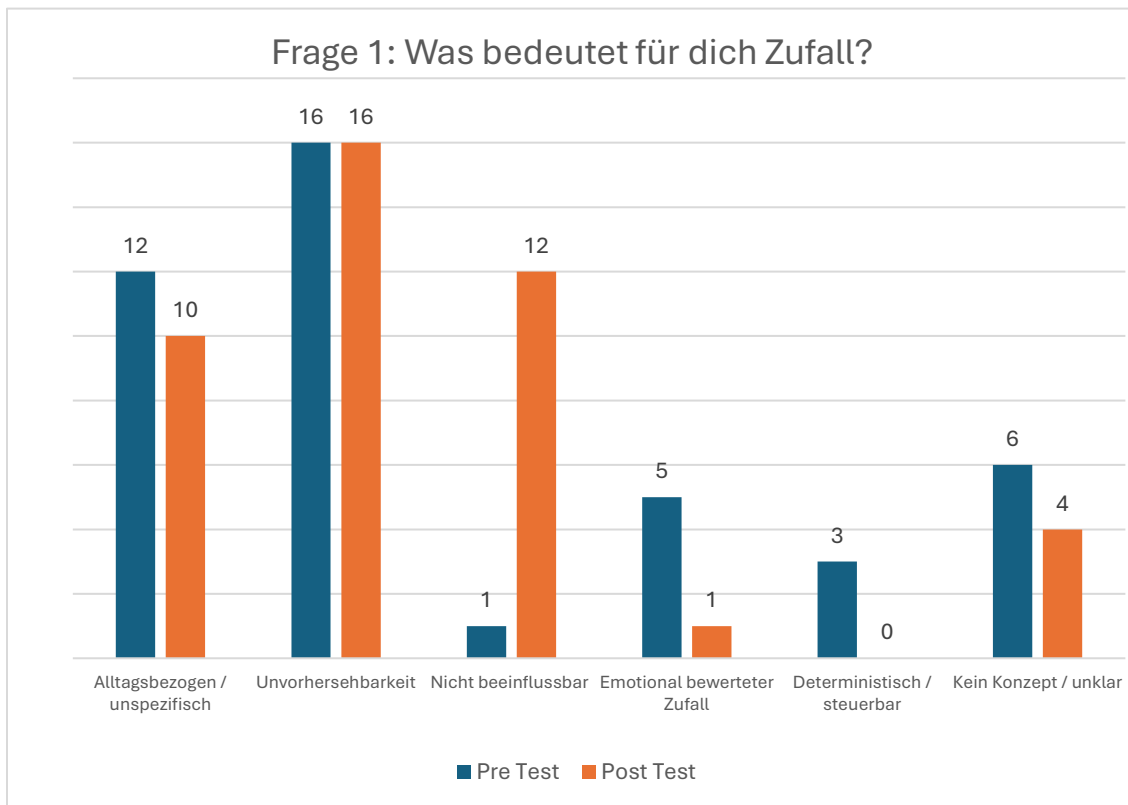


Abbildung 2: Verteilung der Kategorien zum Zufallsbegriff

In Frage 2: „Nenne ein Beispiel aus deinem Alltag, wo etwas zufällig passiert.“ sollten die Schüler:innen ein Alltagsbeispiel für ein zufälliges Ereignis nennen. In der Vorerhebung dominierte die Kategorie Schule / Alltag. Viele Schüler:innen nannten Situationen aus ihrem schulischen oder alltäglichen Umfeld. Besonders häufig wurden dabei zufällige Begegnungen mit bekannten Personen beschrieben, etwa das unerwartete Treffen von Freund:innen oder Bekannten in der Freizeit. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Ich treffe jemanden im Kino den ich kenne.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Schule / Alltag zugeordnet, da ein zufälliges Ereignis anhand einer alltäglichen Begegnung beschrieben wird.

Die starke Ausprägung dieser Kategorie kann dabei auch im Zusammenhang mit der Formulierung der Fragestellung gesehen werden, da ausdrücklich nach einem Beispiel aus dem Alltag gefragt wurde und somit alltagsbezogene Situationen naheliegend waren. Neben dieser dominanten Kategorie trat auch die Kategorie kein Konzept / unklar

vergleichsweise häufig auf. Die übrigen Kategorien traten insgesamt deutlich seltener auf und waren nicht dominant.

In der Nacherhebung blieb die Kategorie Schule / Alltag weiterhin dominant. Viele Schüler nannten erneut Beispiele aus ihrem schulischen oder persönlichen Umfeld. Daneben traten auch weiterhin Antworten auf, die der Kategorie kein Konzept / unklar zugeordnet wurden. Die übrigen Kategorien kamen in geringer Anzahl vor und waren nicht dominant. Abbildung 3 zeigt die Verteilung der Antwortkategorien in der Vor- und Nacherhebung.

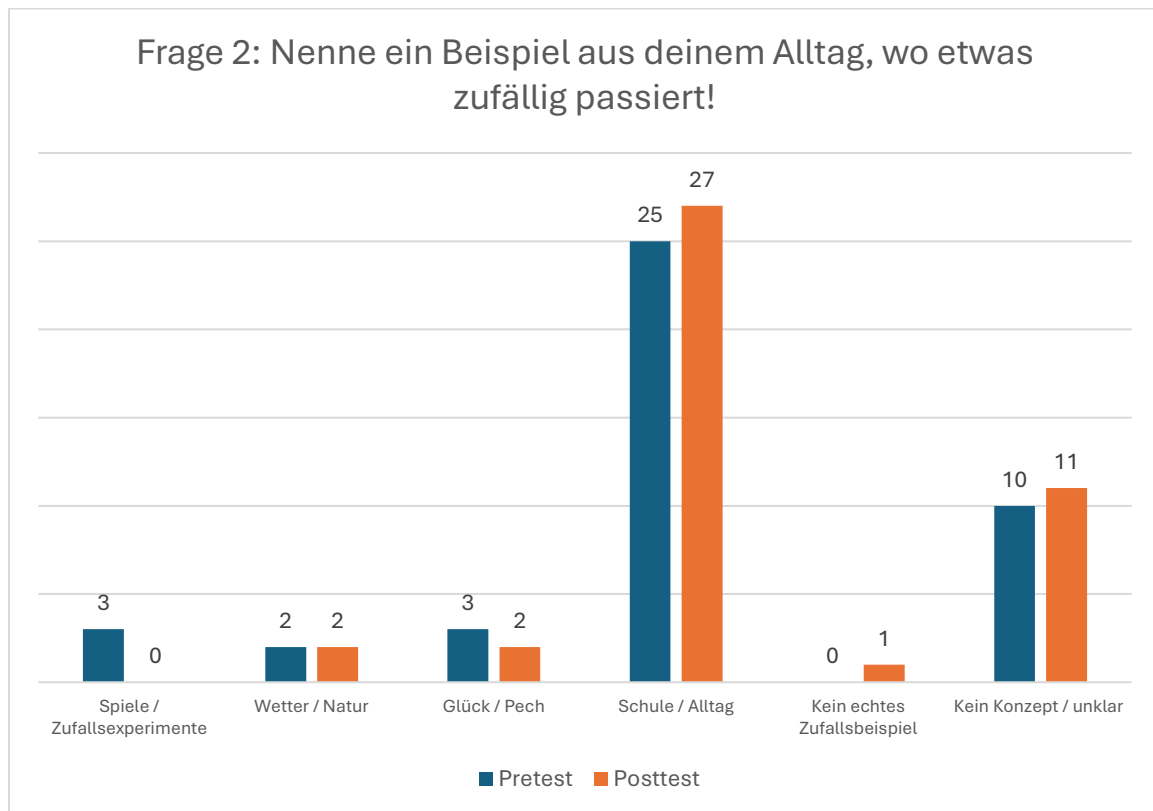


Abbildung 3: Verteilung der genannten Beispiele für zufällige Ereignisse im Alltag

In Frage 3: „Kann man Zufall beeinflussen?“ sollten die Schüler:innen angeben, ob Zufall ihrer Meinung nach beeinflussbar / steuerbar ist, und ihre Antwort begründen. In der Vorerhebung dominierte die Kategorie nicht beeinflussbar. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Man kann Zufall nicht beeinflussen, weil man nicht entscheiden kann, was passiert.“ Diese Antwort wurde der Kategorie nicht beeinflussbar zugeordnet, da die fehlende Steuerbarkeit des Ereignisses ausdrücklich betont wird. Daneben traten auch Antworten auf, in denen Zufall als beeinflussbar oder teilweise

beeinflussbar beschrieben wurde. Zudem wurde ein Teil der Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar zugeordnet. Die übrigen Kategorien traten insgesamt seltener auf und waren nicht dominant.

In der Nacherhebung blieb die Kategorie nicht beeinflussbar weiterhin dominant. Viele Schüler:innen begründeten ihre Antworten weiterhin damit, dass Zufall nicht gesteuert werden kann. Daneben traten auch weiterhin Antworten auf, die der Kategorie kein Konzept / unklar zugeordnet wurden. Die übrigen Kategorien kamen in geringer Anzahl vor und waren nicht dominant. Abbildung 4 zeigt die Verteilung der Antwortkategorien in der Vor- und Nacherhebung.

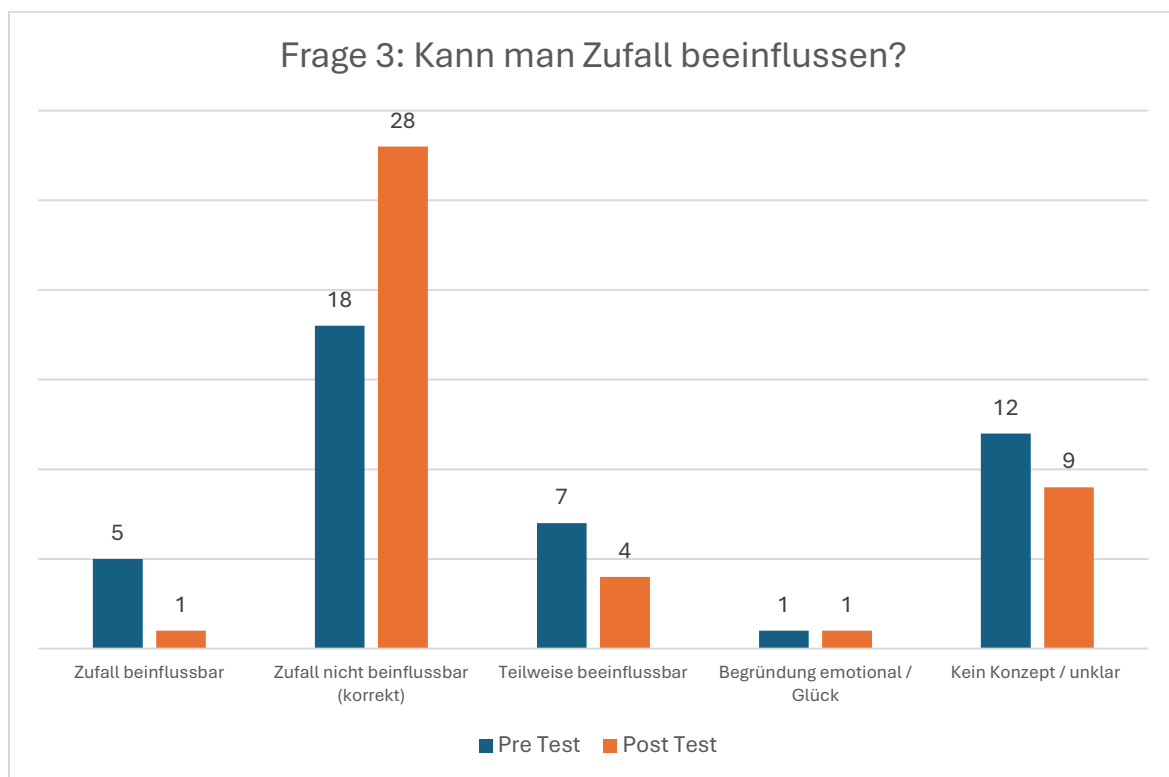


Abbildung 4: Verteilung der Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit von Zufall

In Frage 4: „Was bedeutet für dich Wahrscheinlichkeit?“ sollten die Schüler:innen ihr Verständnis des Begriffs Wahrscheinlichkeit angeben. In der Vorerhebung traten insbesondere Antworten auf, in denen Wahrscheinlichkeit als Gefühl beschrieben wurde. Daneben traten auch Antworten auf, in denen Wahrscheinlichkeit als Einschätzung der Sicherheit eines Ereignisses oder als Häufigkeit eines Ereignisses beschrieben wurde.

Zudem wurde ein Teil der Antworten zu der Kategorie „Weiß ich nicht“ eingeordnet. Die übrigen Kategorien traten insgesamt seltener auf.

In der Nacherhebung traten besonders häufig Antworten auf, in denen Wahrscheinlichkeit als Maß dafür beschrieben wurde, wie oft etwas passiert, sowie Antworten, in denen Wahrscheinlichkeit damit verbunden wurde, wie sicher etwas passiert. Die übrigen Kategorien kamen in geringer Anzahl vor und waren nicht dominant. Abbildung 5 zeigt die Verteilung der Antwortkategorien in der Vor- und Nacherhebung.

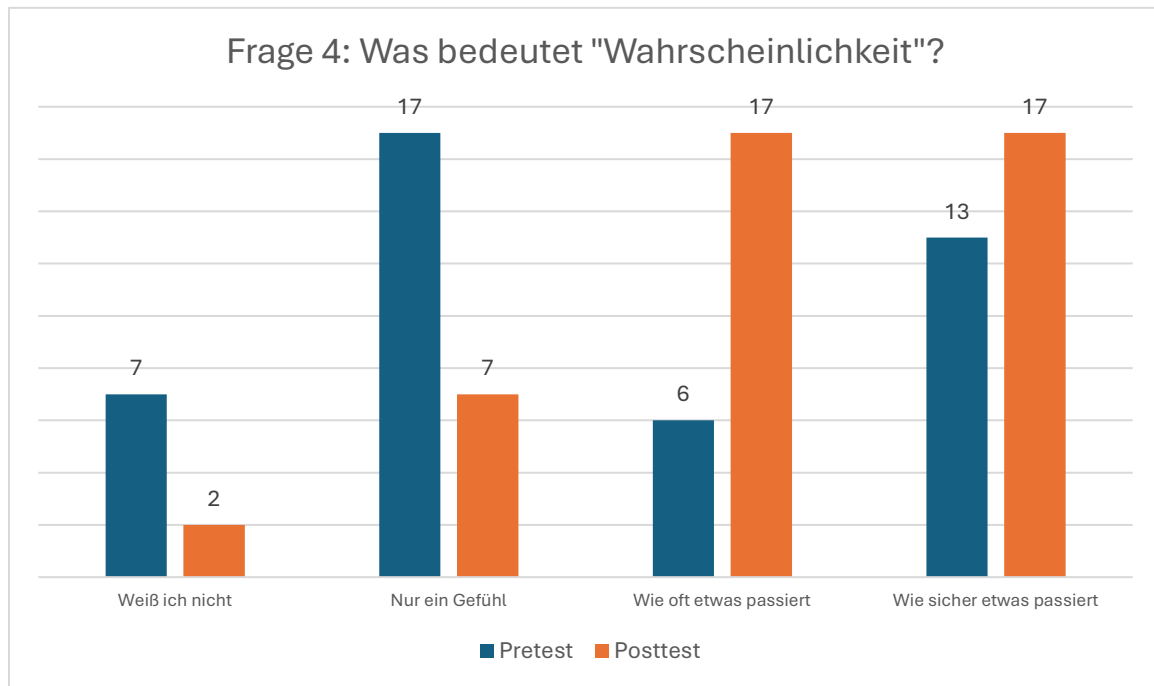


Abbildung 5: Verteilung der Vorstellungen zum Begriff Wahrscheinlichkeit

#### 4.1.2 Zufall bei kurzen Folgen – Münzaufgaben (Fragen 5–9)

Bei Frage 5: „Wo begegnet dir Zufall im Alltag?“ dient als Übergang von begrifflichen Vorstellungen hin zu anwendungsbezogenen Fragestellungen und erfasst, in welchen Alltagsbereichen Schüler:innen zufällige Ereignisse verorten. Dabei waren Mehrfachnennungen möglich.

In der Vorerhebung wurden Zufallsereignisse insbesondere den Bereichen Spiele und Internet zugeordnet. Viele Schüler:innen nannten mehrere Lebensbereiche gleichzeitig. Daneben traten auch Beispiele aus dem Verkehr sowie aus dem Bereich Wetter auf. In geringer Anzahl wurde angegeben, keine passende Antwort nennen zu können.

In der Nacherhebung wurden Zufallsereignisse weiterhin in verschiedenen Alltagsbereichen verortet. Besonders häufig wurden erneut die Bereiche Spiele und Internet genannt. Daneben traten auch weiterhin Beispiele aus dem Verkehr sowie aus dem Bereich Wetter auf. Antworten der Kategorie „weiß ich nicht“ traten nicht mehr auf. Abbildung 6 zeigt die Verteilung der genannten Bereiche in der Vor- und Nacherhebung.

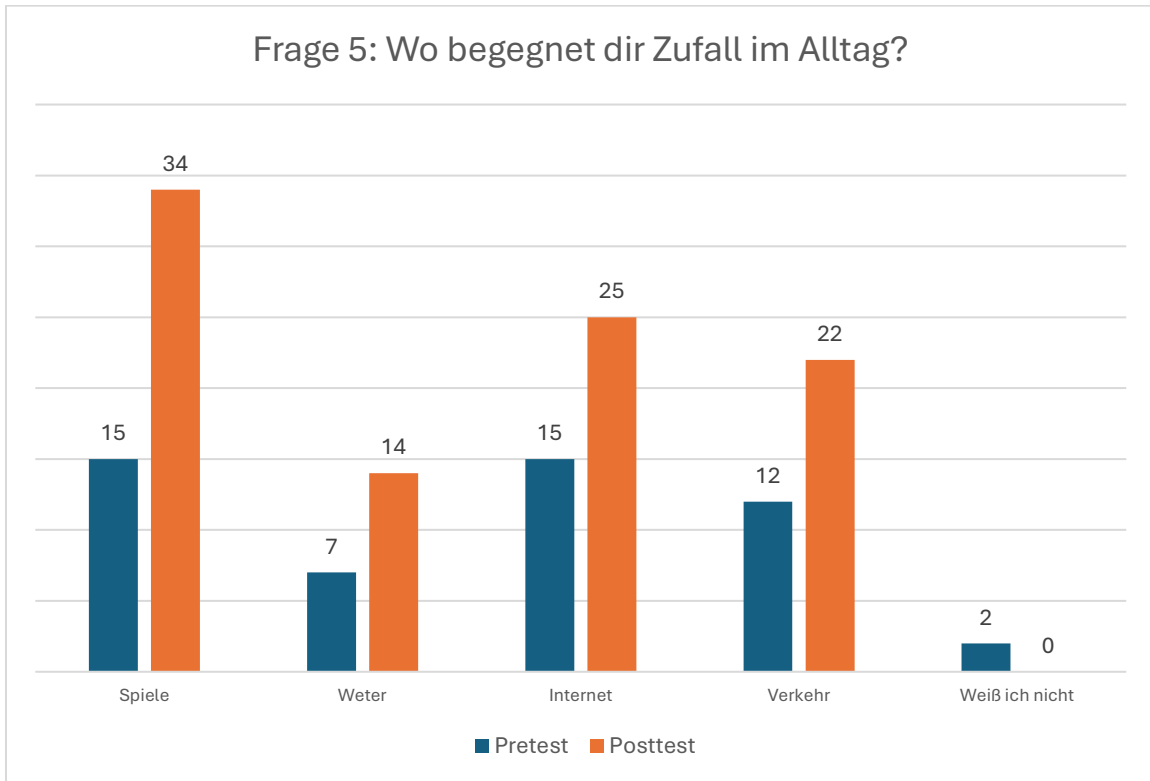


Abbildung 6: Verteilung der genannten Beispiele zu Zufallssituationen

Bei Frage 6: „Eine faire Münze wird 5-mal hintereinander mit „Kopf“ geworfen. Was glaubst du, kommt beim nächsten Wurf?“ sollten die Schüler:innen einschätzen, welches das nächste Ergebnis eines Münzwurfes sein wird, nachdem bereits fünfmal hintereinander Kopf gefallen ist.

In der Vorerhebung traten besonders häufig Antworten auf, die der Kategorie kein Konzept / unklar sowie der Kategorie intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen zugeordnet wurden. Daneben fanden sich auch Begründungen, die auf Ausgleichsdenken basieren. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Es kam schon oft Kopf, jetzt muss Zahl kommen.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Ausgleichsdenken zugeordnet, da angenommen wird, dass sich die Ergebnisse auch kurzfristig ausgleichen

muss. Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen, traten ebenfalls auf, waren jedoch auch nicht dominant.

In der Nacherhebung traten weiterhin besonders häufig intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen auf. Daneben wurden auch Begründungen genannt, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar kamen weiterhin vor, waren jedoch seltener als in der Vorerhebung. Ausgleichsdenken trat ebenfalls weiterhin auf, jedoch nicht mehr so stark. Abbildung 7 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

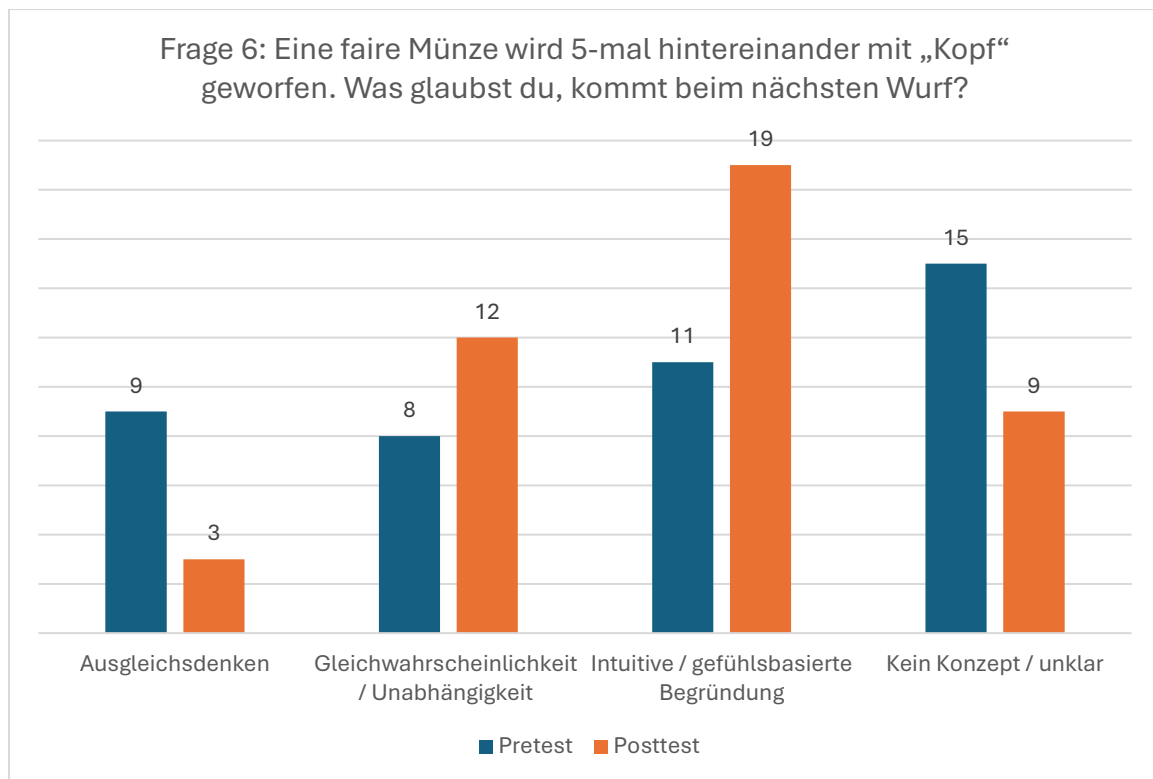


Abbildung 7: Verteilung der Antworten zur Einschätzung eines Münzwurfresultates

In Frage 7: „Welche Reihenfolge ist am wahrscheinlichsten?“ sollten die Schüler:innen zunächst angeben, welche der dargestellten kurzen Zufallsfolgen sie für wahrscheinlicher hielten. In der Vorerhebung wurde die Folge K–Z–K–Z–K am häufigsten gewählt (n=15), gefolgt von Z–K–K–Z–K (n=14). Die Antwortoption „alle gleich“ wurde von sieben Schüler:innen gewählt. Die übrigen Folgen (K–K–K–Z–Z und Z–K–Z–Z–Z) wurden seltener genannt (n=2 bzw. n=5).

In der Nacherhebung zeigt sich nur eine veränderte Verteilung der geschlossenen Antworten. Die Auswahl der Folge „alle gleich“ nahm deutlich zu ( $n=17$ ) und gleichzeitig gingen die Nennungen der Folge K–Z–K–Z–K von 15 auf fünf zurück, während die übrigen Folgen insgesamt seltener oder in ähnlicher Häufigkeit gewählt wurden.

Die Begründungen zu dieser Einschätzung wurden inhaltlich kategorisiert. In der Vorerhebung traten besonders häufig Antworten auf, die der Kategorie kein Konzept / unklar sowie der Kategorie intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen zugeordnet wurden. Daneben fanden sich auch Begründungen, die auf Ausgleichsdenken basieren. Eine Antwort lautete beispielsweise: „Es kam schon oft dasselbe, deshalb muss jetzt etwas anderes kommen.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Ausgleichsdenken zugeordnet, da angenommen wird, dass sich die Ergebnisse ausgleichen. In geringer Anzahl traten auch Begründungen auf, die dem Musterdenken zugeordnet wurden. So formulierte eine Schüler:in beispielsweise: „Weil sich Kopf und Zahl 50-50 abwechseln müssen.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Musterdenken zugeordnet, da ein regelmäßiges Wechselmuster erwartet wird. Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen, traten ebenfalls auf, waren jedoch nicht dominant.

In der Nacherhebung traten weiterhin intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen sowie Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar häufig auf. Gleichzeitig fanden sich auch viele Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen. Die übrigen Kategorien kamen in geringer Anzahl oder gar nicht vor. Abbildung 8 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

In Frage 8: „Welche Reihenfolge ist am wenigsten wahrscheinlich?“ sollten die Schüler erneut kurze Zufallsfolgen beurteilen. In der Vorerhebung wurde die Folge Z–K–Z–Z–Z am häufigsten gewählt ( $n=14$ ), gefolgt von K–K–K–Z–Z ( $n=8$ ). Die Antwortoption „alle gleich“ wurde von neun Schüler:innen gewählt. Die übrigen Folgen (K–Z–K–Z–K und Z–K–K–Z–K) wurden jeweils seltener genannt ( $n=6$ ).

In der Nacherhebung nahm die Auswahl der Antwortoption „alle gleich“ erneut zu ( $n=16$ ). Die übrigen Folgen wurden in ähnlicher oder geringerer Häufigkeit gewählt, wobei insbesondere die Folge Z–K–K–Z–K seltener genannt wurde ( $n=1$ ). Die Folge Z–K–Z–Z–Z wurde weiterhin häufig gewählt ( $n=11$ ). Die Folgen K–K–K–Z–Z und K–Z–K–Z–K wurden in ähnlicher Häufigkeit genannt ( $n=8$  bzw.  $n=7$ ).

In der Vorerhebung traten besonders häufig intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen sowie Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar auf. In geringer Anzahl fanden sich auch Begründungen, die dem Musterdenken und der Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet werden konnten.

In der Nacherhebung traten weiterhin intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen sowie Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar häufig auf. Gleichzeitig fanden sich auch viele Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen. Die übrigen Kategorien kamen in geringer Anzahl oder gar nicht vor. Abbildung 9 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

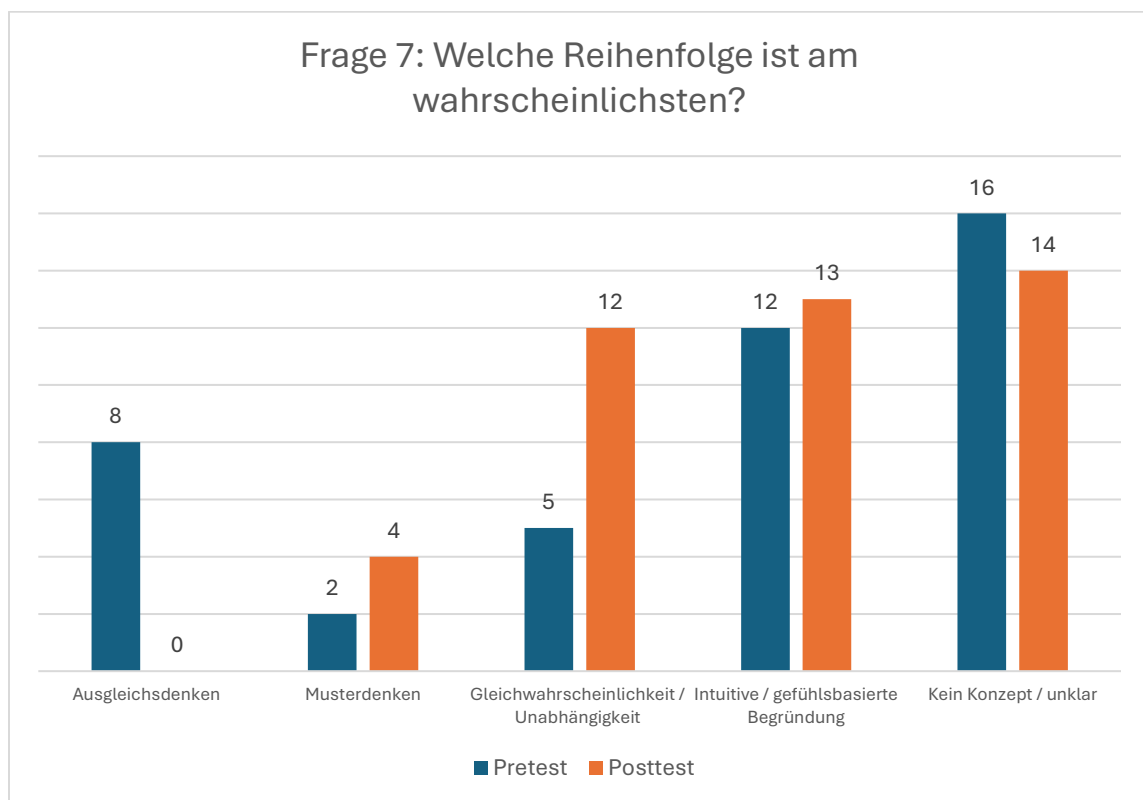


Abbildung 8: Verteilung der Einschätzungen zur wahrscheinlichsten Münzwurffolge

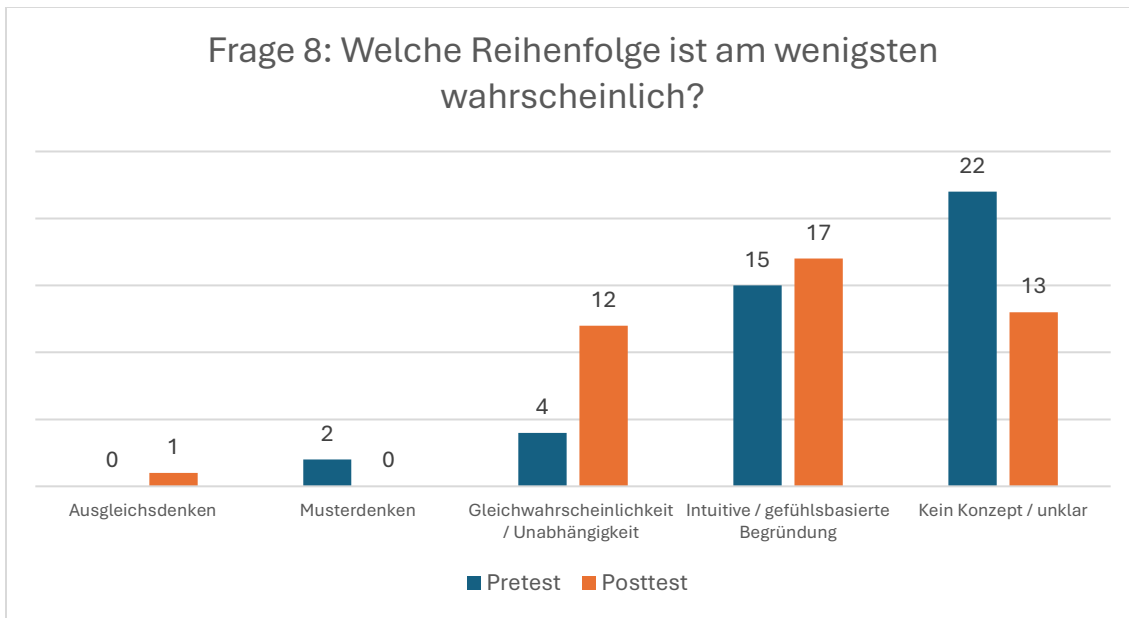


Abbildung 9: Verteilung der Einschätzungen zur unwahrscheinlichsten Münzwurfserie

In Frage 9: „Wenn du ganz oft eine Münze wirfst, kommt dann ...“ sollten die Schüler einschätzen, welches Ereignis bei wiederholtem Münzwurf häufiger auftritt. In der Vorerhebung wählten viele Schüler:innen die Antwortoption „weiß ich nicht“ ( $n=20$ ). Darüber hinaus gaben mehrere Schüler:innen an, dass Kopf häufiger aufträte ( $n=9$ ), während einige Schüler:innen Zahl häufiger erwarteten ( $n=5$ ). Die Antwortoption „beides gleich“ wurde von neun Schüler:innen gewählt ( $n=9$ ).

In der Nacherhebung zeigte sich eine veränderte Verteilung der geschlossenen Antworten. Die Antwortoption „beides gleich“ wurde nun deutlich häufiger gewählt ( $n=21$ ). Gleichzeitig ging der Anteil der Antworten „weiß ich nicht“ zurück ( $n=8$ ). Die Nennungen von Kopf häufiger ( $n=11$ ) und Zahl häufiger ( $n=3$ ) blieben vergleichsweise gering.

Die Begründungen zeigen in der Vorerhebung überwiegend Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar. Daneben fanden sich auch Begründungen, die sich den Kategorien Gleichwahrscheinlichkeit und intuitive oder gefühlsbasierte zuordnen lassen. Eine Antwort lautete beispielsweise: „Beide Seiten haben die gleiche Chance.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Gleichwahrscheinlichkeit zugeordnet, da davon ausgegangen wird, dass beide Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Begründungen im Sinne des Ausgleichsdenkens oder Musterdenkens traten nicht auf.

In der Nacherhebung traten weiterhin intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen sowie Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar auf. Gleichzeitig fanden sich auch häufiger Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder Unabhängigkeit beziehen. Begründungen im Sinne des Ausgleichsdenkens oder Musterdenkens traten weiterhin nicht auf. Abbildung 10 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

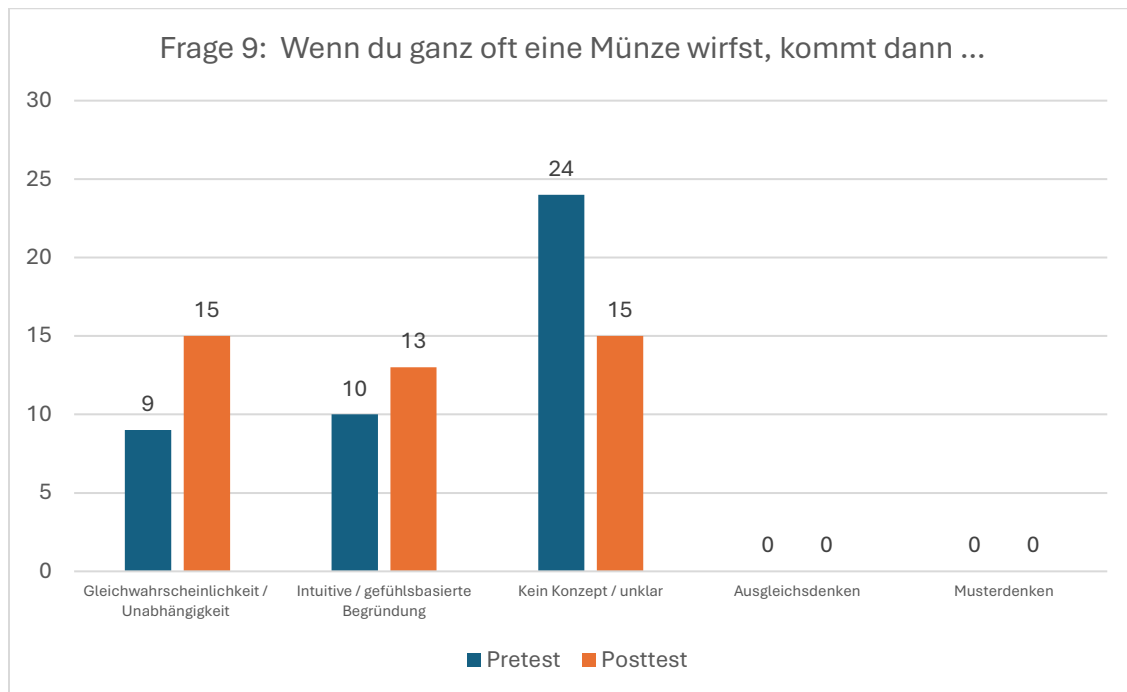


Abbildung 10: Verteilung der Einschätzungen zu langfristigen Ergebnissen beim wiederholten Münzwurf

#### 4.1.3 Zufall und Wahrscheinlichkeit bei Urnen-, Lotto- und Würfelexperimenten (Fragen 10–14, 16)

In Frage 10: „In einem Säckchen sind 8 rote und 2 blaue Kugeln. Kannst du vorher sicher sagen, welche Farbe du ziehst?“ sollten die Schüler:innen einschätzen, ob bei einem Zufallsexperiment mit ungleicher Verteilung (acht rote und zwei blaue Kugeln) das Ergebnis eines einzelnen Ziehens sicher vorhergesagt werden kann. In der Vorerhebung gaben viele Schüler:innen an, dass sicher eine rote Kugel gezogen werde ( $n=24$ ), während niemand angab, sicher eine blaue Kugel zu ziehen ( $n=0$ ). Mehrere Schüler:innen wählten die Antwortoption „Nein, Zufall“ ( $n=14$ ), und einige Schüler:innen gaben an, das Ergebnis fühlen oder erraten zu können ( $n=5$ ).

In der Nacherhebung zeigte sich eine veränderte Verteilung der geschlossenen Antworten. Die Anzahl der Antworten „Ja: rot“ ging zurück ( $n=15$ ), während in geringer Anzahl auch „Ja: blau“ gewählt wurde ( $n=2$ ). Gleichzeitig nahm der Anteil der Antworten „Nein, Zufall“ zu ( $n=25$ ). Die Annahme, das Ergebnis fühlen oder erraten zu können, trat nur noch einmal auf ( $n=1$ ).

In der Vorerhebung traten besonders häufig Begründungen auf, bei denen aus der größeren Anzahl roter Kugeln auf Sicherheit geschlossen wurde. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Es sind viel mehr rote Kugeln drin, also kommt sicher rot.“ Daneben fanden sich auch Antworten, in denen Zufall korrekt erkannt wurde, sowie intuitive oder emotionale Begründungen. In geringer Anzahl traten deterministische oder widersprüchliche Begründungen auf. Zudem wurden auch Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar genannt.

In der Nacherhebung traten häufiger Begründungen auf, in denen Zufall korrekt erkannt wurde. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Obwohl es mehr rote gibt, kann trotzdem eine blaue gezogen werden.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Zufall korrekt erkannt zugeordnet, da betont wird, dass das Ergebnis eines einzelnen Ziehens nicht sicher vorhergesagt werden kann. Daneben fanden sich weiterhin probabilistische Begründungen bei Einzelereignissen sowie intuitive oder emotionale Begründungen. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar traten ebenfalls weiterhin auf. Abbildung 11 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

In Frage 11: „Welche Farbe wird deiner Einschätzung nach mit höherer Wahrscheinlichkeit gezogen?“ sollten die Schüler:innen angeben, welche Kugel ihrer Einschätzung nach in einem Urnenmodell häufiger gezogen wird. In der Vorerhebung wählten die meisten Schüler die Antwortoption Rot ( $n=32$ ), während Blau nur einmal genannt wurde ( $n=1$ ). Die Antwortoption „beides gleich wahrscheinlich“ wurde von zehn Schüler:innen gewählt ( $n=10$ ).

In der Nacherhebung wurde die Antwortoption Rot noch häufiger gewählt ( $n=37$ ), während Blau nicht mehr genannt wurde ( $n=0$ ). Die Annahme gleicher Wahrscheinlichkeit trat seltener auf ( $n=6$ ).

Die Begründungen zeigen in der Vorerhebung überwiegend korrekte Argumente, die sich auf die ungleiche Anzahl der Kugeln bezogen. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Weil es mehr Rote gibt, ist es wahrscheinlicher, dass ich eine Rote ziehe.“ Diese Antwort wurde der Kategorie korrekte Anzahlargumente zugeordnet, da die größere Anzahl der roten Kugeln als Begründung für die höhere Wahrscheinlichkeit genannt wird. Daneben traten auch einzelne Nennungen von intuitiven oder unsystematischen Begründungen sowie Fehlinterpretationen von Zufall auf. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar wurden ebenfalls genannt.

In der Nacherhebung traten weiterhin überwiegend korrekte Anzahlargumente auf. Daneben fanden sich in geringer Anzahl intuitive Begründungen sowie Fehlinterpretationen von Zufall. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar traten ebenfalls weiterhin auf, jedoch in geringerer Anzahl. Abbildung 12 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

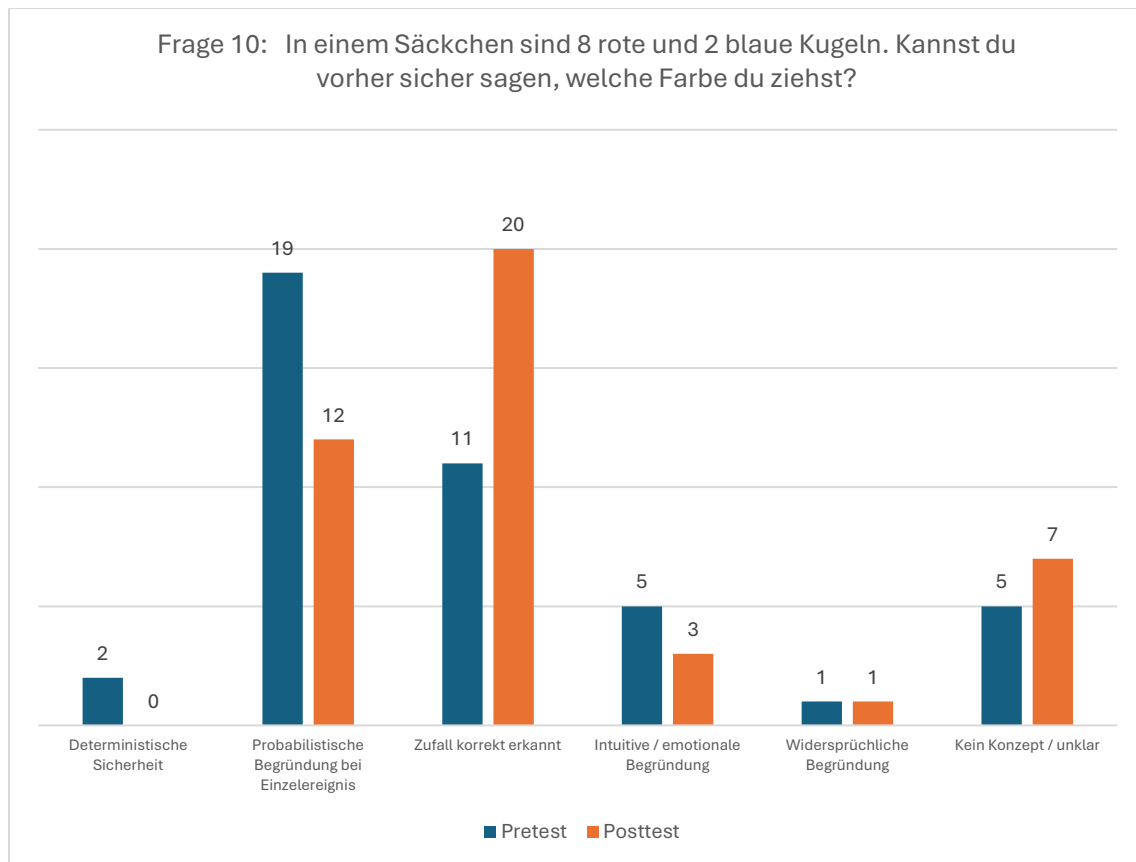


Abbildung 11: Verteilung der Einschätzungen zur Vorhersagbarkeit beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne

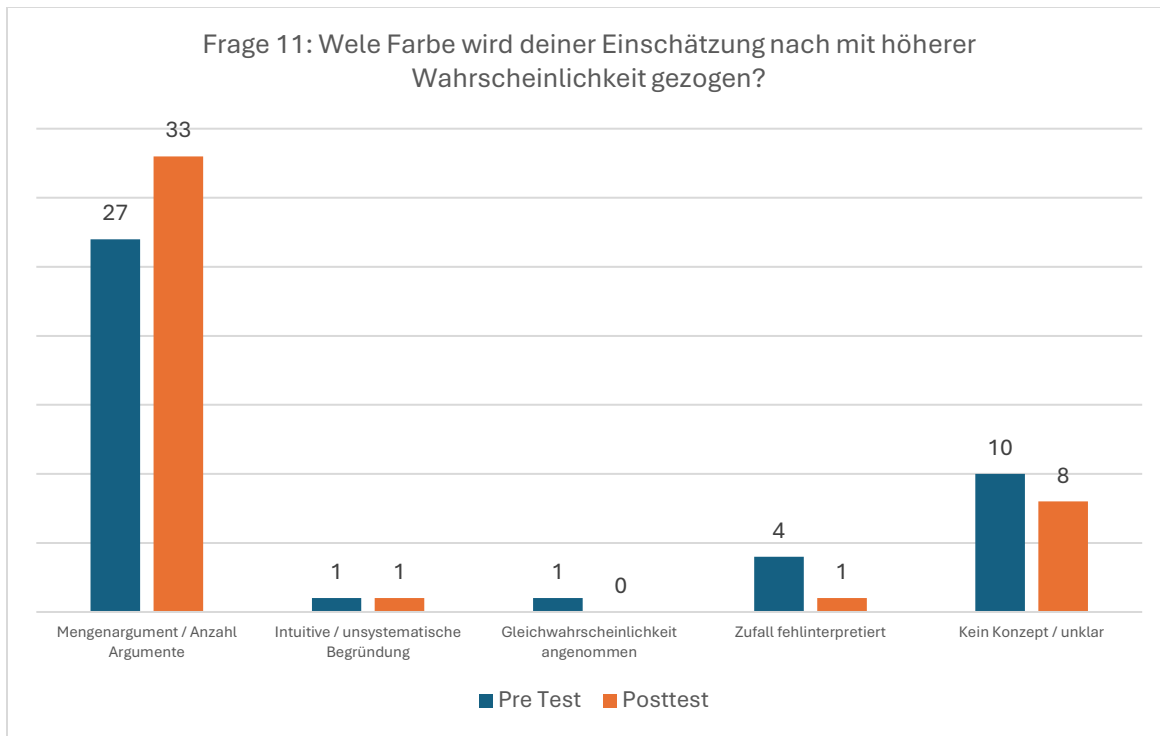


Abbildung 12: Verteilung der Einschätzungen zur Wahrscheinlichkeit beim Ziehen unterschiedlich farbiger Kugeln

In Frage 12: „Im Lotto werden Zahlen zufällig gezogen.“ sollten die Schüler:innen einschätzen, welche Person beim Lotto bessere Gewinnchancen hat. Tim hat sechs Zahlen in Reihenfolge 21 bis 26 und Nina hat sechs Zahlen die „verstreut“ sind (1; 10; 12; 15; 30; 40). In der Vorerhebung entschieden sich 23 Schüler:innen für Nina ( $n=23$ ), elf für Tim ( $n=11$ ), während neun angaben, dass beide die gleichen Chancen hätten ( $n=9$ ).

In der Nacherhebung blieb dieses Antwortmuster weitgehend bestehen. Die Auswahl von Nina ging leicht zurück ( $n=21$ ), während die Antwortoption „beide gleich“ häufiger gewählt wurde ( $n=14$ ). Die Auswahl von Tim trat etwas seltener auf ( $n=8$ ).

Die Begründungen zeigen in der Vorerhebung vor allem Muster- oder Reihenfolgendenken, sowie intuitive oder emotionale Begründungen. Eine Schüler:innen Antwort lautet zum Beispiel: „Weil Nina bessere Zahlen hat, Sie hat nicht alle in einer Reihe.“ Diese Antwort wurde der Kategorie Muster- oder Reihenfolgendenken zugeordnet, da davon ausgegangen wird, dass bestimmte Zahlenfolgen bessere Gewinnchancen haben. Daneben fanden sich auch viele Antworten der Kategorie kein

Konzept / unklar. Begründungen, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit beziehen, traten ebenfalls auf, waren jedoch nicht stark vertreten.

In der Nacherhebung traten weiterhin häufig Begründungen auf, die dem Muster- oder Reihenfolgedenken zugeordnet wurden. Begründungen, die sich auf das Konzept der Gleichwahrscheinlichkeit beziehen, traten weiterhin in geringer Anzahl auf. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete beispielsweise: „Es ist gleich wahrscheinlich, weil beide gleich viele Zahlen haben.“ Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar traten ebenfalls weiterhin stark auf. Abbildung 13 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

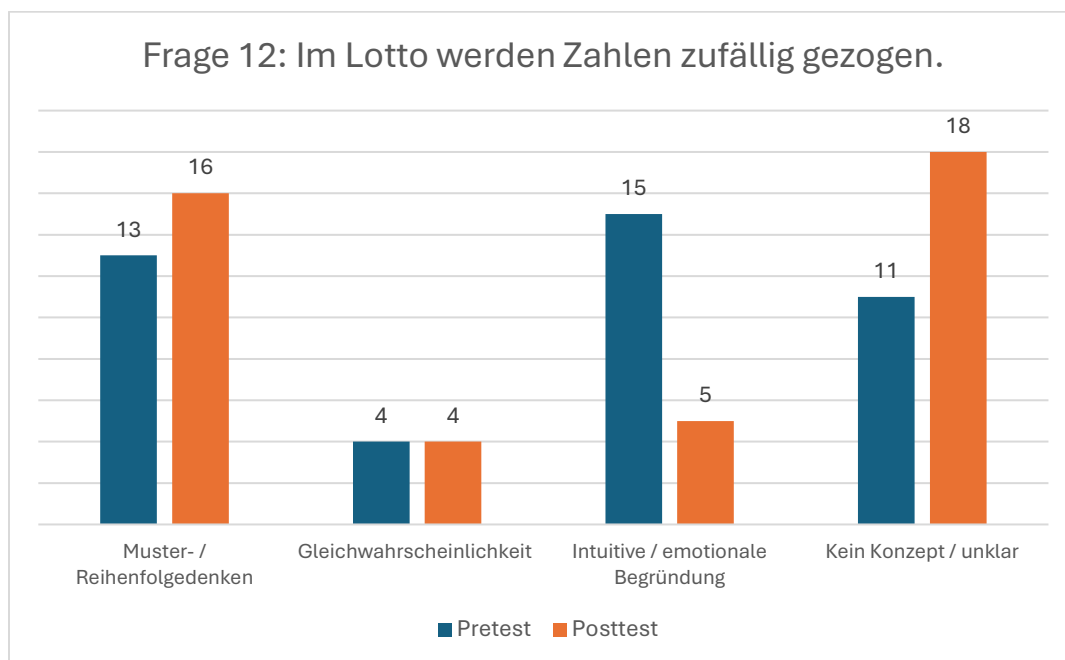


Abbildung 13: Verteilung der Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit beim Lottospiel

Bei Frage 13: „Zwei faire Würfel werden einmal geworfen: Was ist wahrscheinlicher?“ sollten die Schüler einschätzen, ob bestimmte Würfelkombinationen „5 und 6“ oder „6 und 6“ wahrscheinlicher sind. In der Vorerhebung wählten viele Schüler:innen die Antwortoption „beides gleich wahrscheinlich“ (n=19), während einige Schüler:innen die Kombination „5 und 6“ (n=13) sowie „6 und 6“ (n=11) bevorzugten.

In der Nacherhebung wurde die Antwortoption „beides gleich wahrscheinlich“ deutlich häufiger gewählt (n=31). Die Nennungen der Kombinationen „5 und 6“ (n=9) sowie „6 und 6“ (n=3) gingen entsprechend zurück.

Die Begründungen in der Vorerhebung zeigen das häufige Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar gegeben waren. Neben den intuitiven Begründungen traten die restlichen Kategorien im Vergleich eher schwach auf.

In der Nacherhebung traten häufiger Begründungen auf, die sich auf die Gleichverteilung der möglichen Ergebnisse beziehen. Eine Antwort zu dieser Kategorie lautete: „Sie haben beide 1/36 Chance zu kommen.“ Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar sowie intuitive Begründungen traten weiterhin auf. Begründungen, in denen einzelne Zahlen bevorzugt wurden, traten nicht mehr auf. Die Begründung zur korrekten kombinatorischen Lösung trat nur noch drei Mal auf. Abbildung 14 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung. Die korrekte Antwort wurde fünfmal gegeben.

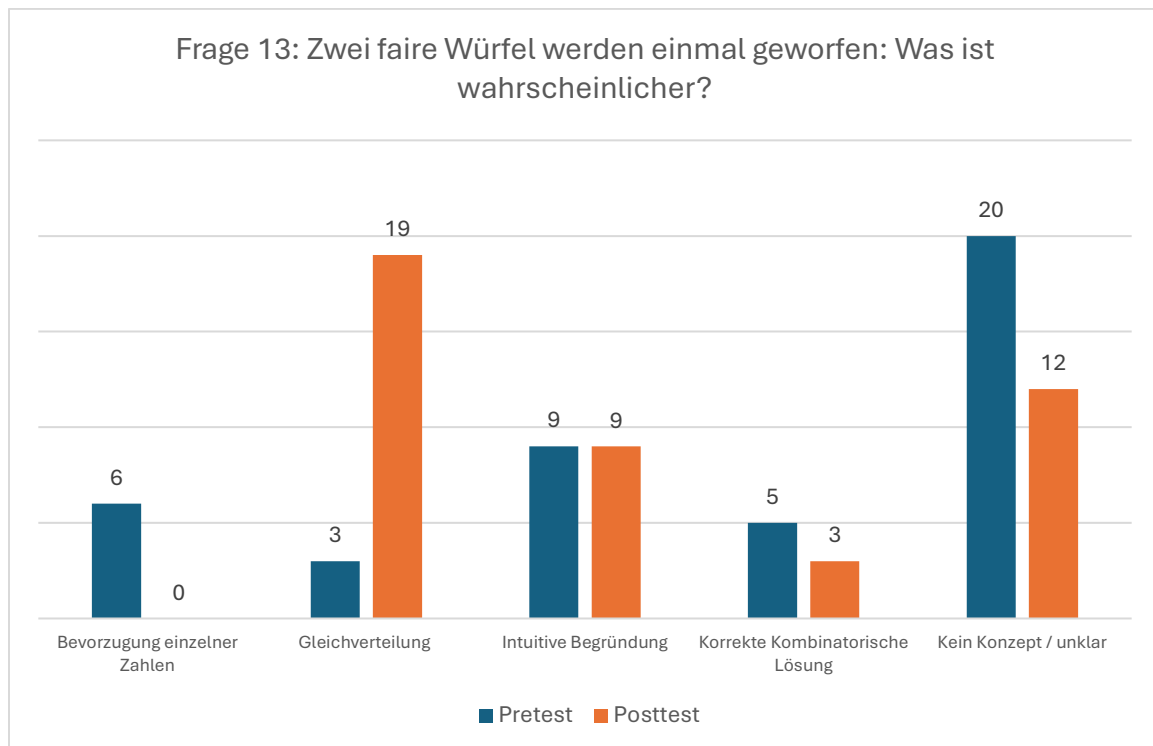


Abbildung 14: Verteilung der Einschätzungen zur Wahrscheinlichkeit bestimmter Ereignisse beim einmaligen Würfelwurf

In Frage 14: „Wenn man oft mit einem fairen Würfel würfelt: Welche Zahl kommt am häufigsten?“ sollten die Schüler:innen einschätzen, welche Zahl ihrer Meinung nach bei vielen Würfeln am häufigsten erscheint. In der Vorerhebung gaben mehrere Schüler:innen an, dass alle Zahlen gleich oft auftreten ( $n=16$ ), während viele Schüler:innen die

Antwortoption „weiß ich nicht“ wählten (n=15). Einzelne Zahlen wurden ebenfalls genannt (1: n=9; 6: n=3).

In der Nacherhebung wurde die Antwortoption „alle gleich oft“ deutlich häufiger gewählt (n=32). Die Nennungen einzelner Zahlen traten nicht mehr auf (n=0), und der Anteil der Antworten „weiß ich nicht“ ging zurück (n=11).

In der Vorerhebung traten besonders häufig Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar auf. Alle anderen Kategorien waren ebenfalls auf, waren jedoch nicht dominant.

In der Nacherhebung traten häufiger Begründungen auf, die sich auf die Gleichverteilung der möglichen Ergebnisse beziehen. Gleichzeitig gingen Begründungen zurück, in denen einzelne Zahlen bevorzugt wurden. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar traten weiterhin auf, waren jedoch seltener. Intuitive Begründungen kamen ebenfalls wieder vor. Ein typisches Beispiel für eine intuitive Vorstellung lautete: „Mein Gefühl sagt mir das es die 1 ist“. Abbildung 15 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

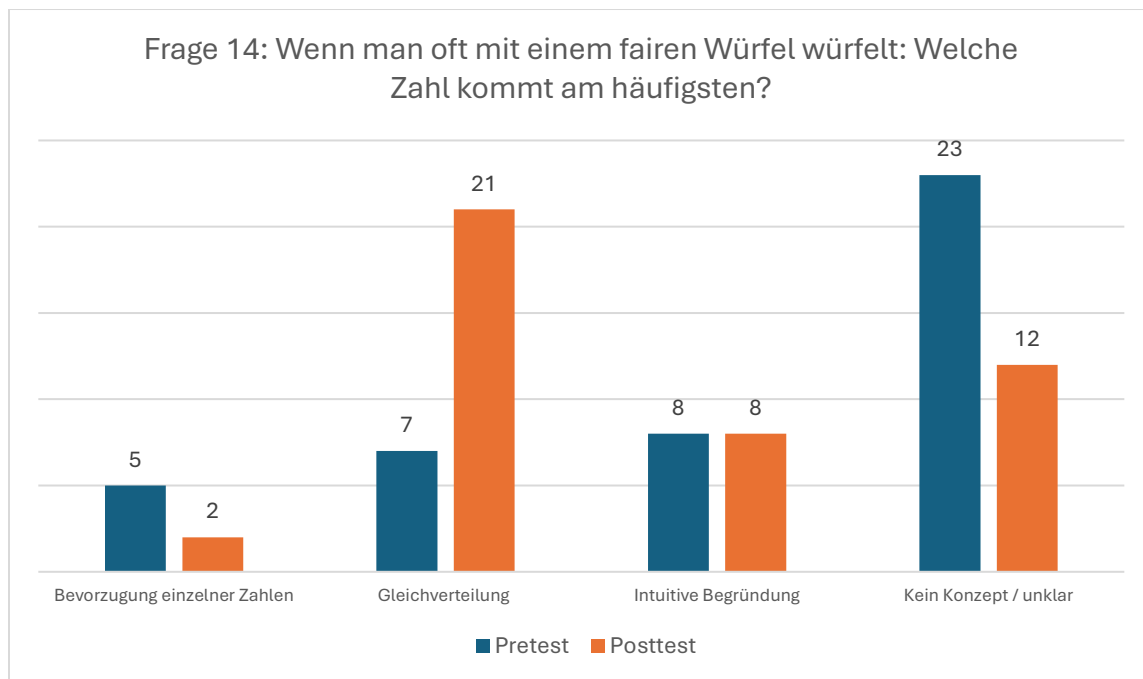


Abbildung 15: Verteilung der Einschätzungen zu langfristigen Ergebnissen beim wiederholten Würfeln

In Frage 16: „Stell dir vor, du spielst ein Würfelspiel: Du musst eine 6 würfeln, um zu gewinnen. Du hast schon viele Male verloren. Denkst du, dass du beim nächsten Wurf bestimmt eine 6 würfelst?“ sollten die Schüler:innen einschätzen, ob sie nach mehreren erfolglosen Würfeln beim nächsten Wurf sicher eine 6 erwarten können. In der Vorerhebung gaben einige Schüler:innen an, dass sie beim nächsten Wurf sicher eine 6 würfeln würden ( $n=9$ ). Mehrere Schüler verneinten dies ( $n=17$ ), während ebenso viele Schüler:innen die Antwortoption „weiß ich nicht“ wählten ( $n=17$ ).

In der Nacherhebung ging der Anteil der Antworten „Ja“ weiter zurück ( $n=5$ ). Gleichzeitig nahm die Anzahl der Schüler:innen zu, die angaben, dass sie nicht davon ausgehen, beim nächsten Wurf sicher eine 6 zu würfeln ( $n=24$ ). Der Anteil der Antworten „weiß ich nicht“ verringerte sich leicht ( $n=14$ ).

Die offenen Fragen zeigen in der Vorerhebung, dass vor allem intuitive Begründungen sowie Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar auftraten. In geringer Anzahl fanden sich auch Begründungen, in denen Ausgleichsdenken erkennbar war, sowie solche, in denen das Ausgleichsdenken ausdrücklich abgelehnt wurde. Eine Schüler:innen Antwort lautete beispielsweise: „Weil ich schon sehr oft verloren habe, heißt das nicht, dass ich jetzt gewinne.“ Diese Antwort lässt sich der Kategorie Ablehnung des Ausgleichsdenkens zuordnen, da betont wird, dass vergangene Ergebnisse keinen Einfluss auf zukünftige Ereignisse haben.

In der Nacherhebung traten weiterhin intuitive Begründungen besonders häufig auf. Begründungen, in denen Ausgleichsdenken erkennbar war oder ausdrücklich abgelehnt wurde, kamen noch in geringer Anzahl vor. Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar traten ebenfalls weiterhin stark auf, waren jedoch etwas seltener. Ein typisches Beispiel für eine intuitive Begründung lautete: „Nein, weil ich nie Glück habe.“ Abbildung 16 zeigt die Verteilung der Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

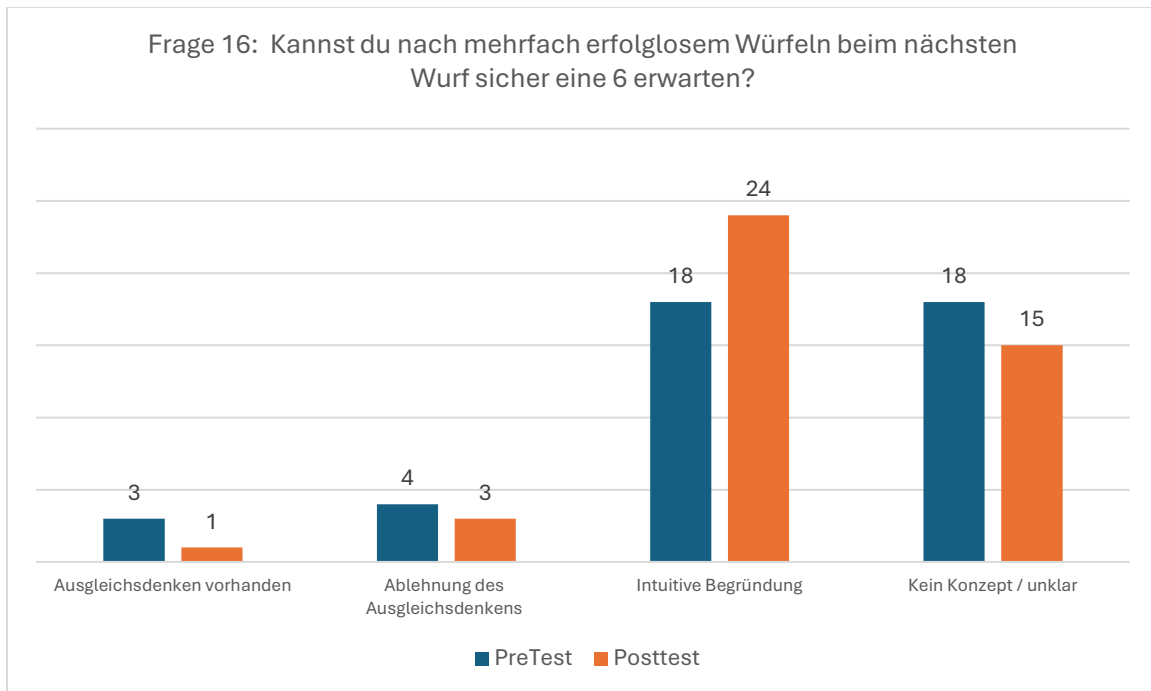


Abbildung 16: Verteilung der Einschätzungen zu wiederholten Würfeln

#### 4.1.4 Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in alltagsnahen Kontexten (Frage 15)

In Frage 15: „Im Wetterbericht steht 70% Regenwahrscheinlichkeit für morgen. Was bedeutet das?“ sollten die Schüler:innen angeben, was eine Angabe von 70% Regenwahrscheinlichkeit im Wetterbericht bedeutet. So gaben mehrere Schüler:innen an, dass es „70 % des Tages regnet“ (n=15). Darüber hinaus wurde die Wahrscheinlichkeit auch als räumlicher Anteil interpretiert, indem angenommen wurde, dass es an 70 % der Orte regnet (n=11). Eine Deutung im Sinne der relativen Häufigkeit gleichartiger Wetterlagen wurde von einigen Schüler gewählt (n=8). Zudem gaben mehrere Schüler an, die Angabe nicht zu verstehen (n=9).

In der Nacherhebung zeigte sich eine veränderte Verteilung der geschlossenen Antworten. Die zeitliche Interpretation ging zurück (n=8), während die räumliche Deutung häufiger gewählt wurde (n=17). Die Interpretation im Sinne der relativen Häufigkeit trat weiterhin auf (n=6). Gleichzeitig nahm der Anteil der Antworten „weiß ich nicht“ zu (n=12).

In der Vorerhebung traten besonders häufig Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar auf. Daneben fanden sich in geringer Anzahl Begründungen, in denen Prozentangaben

als Zeitanteil oder Ortsanteil interpretiert wurden oder im Sinne der relativen Häufigkeit gedeutet wurden. Intuitive Begründungen kamen ebenfalls vor, waren jedoch nicht dominant. Ein typisches Beispiel für eine zeitbezogene Fehlinterpretation lautete: „Es regnet die meiste Zeit.“

In der Nacherhebung traten weiterhin Antworten der Kategorie kein Konzept / unklar stark auf, jedoch in geringerer Anzahl. Gleichzeitig wurden intuitive Begründungen nun besonders häufig genannt. Die übrigen Begründungen, in denen Prozentangaben als Zeitanteil oder Ortsanteil interpretiert wurden, kamen weiterhin nur in geringer Anzahl vor. Die Anzahl korrekter Antworten, die sich auf die relative Häufigkeit ähnlicher Wetterlagen bezogen, verdoppelten sich, war jedoch immer noch gering. Abbildung 17 zeigt die Verteilung Begründungskategorien in der Vor- und Nacherhebung.

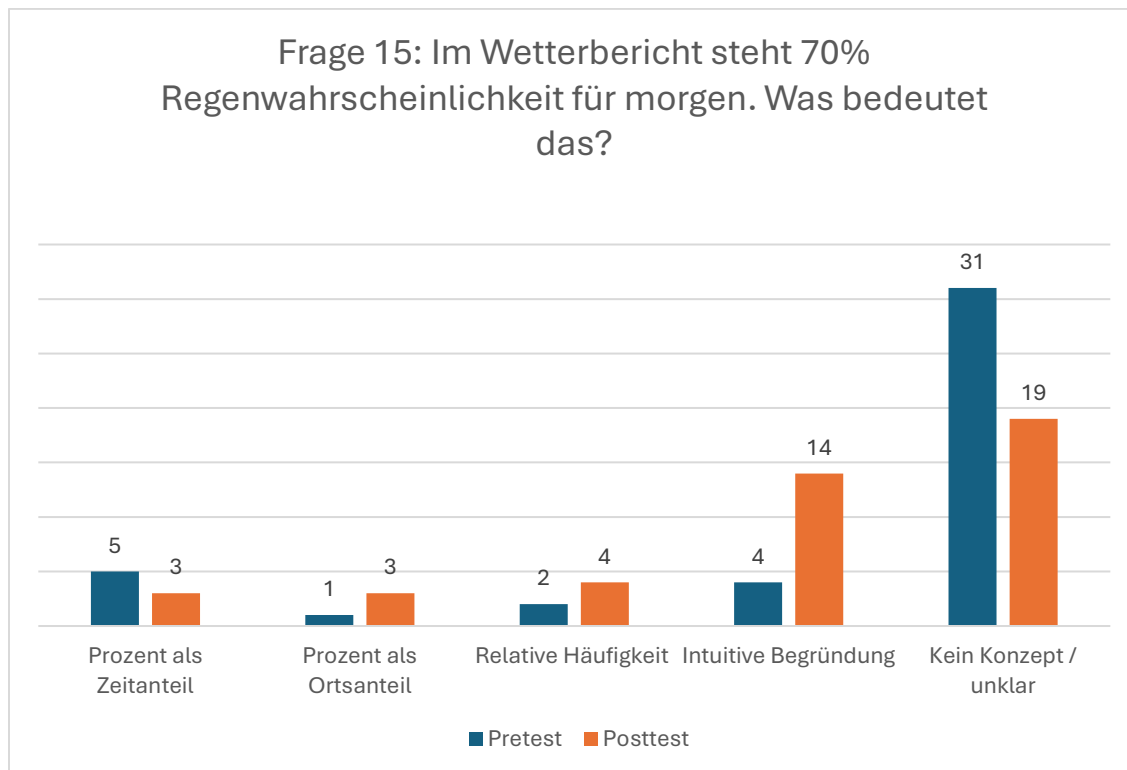


Abbildung 17: Verteilung der Einschätzungen zur Regenwahrscheinlichkeit

#### 4.1.5 Selbsteinschätzung und Alltagsbezug

In Frage 17: „Wie sicher fühlst du dich im Umgang mit dem Thema Zufall?“ sollten die Schüler:innen auf einer Skala von 0 (sehr unsicher) bis 10 (sehr sicher) ihre Selbsteinschätzung angeben. In der Vorerhebung verteilten sich die Einschätzungen über

die gesamte Skala. Niedrige Werte im Bereich von 0 bis 3 wurden von mehreren Schüler:innen gewählt. Mittlere Einschätzungen lagen insbesondere bei einem Wert von 5 ( $n=11$ ). Höhere Werte im Bereich von 7 bis 10 wurden insgesamt etwas seltener genannt.

In der Nacherhebung wurden sehr niedrige Einschätzungen nur noch vereinzelt genannt (0:  $n=1$ ; 1–2:  $n=0$ ). Mittlere Einschätzungen traten weiterhin auf (5:  $n=9$ ). Höhere Werte wurden häufiger gewählt, insbesondere der Wert 7 ( $n=12$ ) sowie der Wert 8 ( $n=7$ ). Sehr hohe Einschätzungen (9 und 10) traten weiterhin vereinzelt auf. Abbildung 18 zeigt die Verteilung der Selbsteinschätzungen in der Vor- und Nacherhebung.

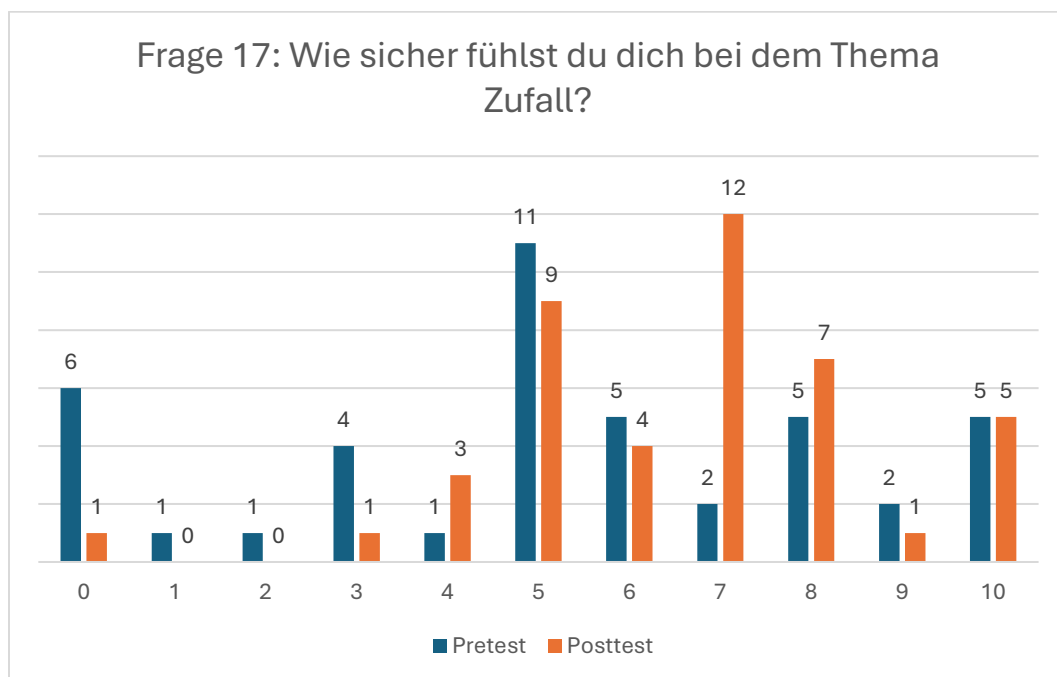


Abbildung 18: Verteilung der Selbsteinschätzungen zur Sicherheit im Umgang mit Zufall

In Frage 18: „Wie sicher fühlst du dich im Umgang mit dem Thema Wahrscheinlichkeit?“ sollten die Schüler:innen auf einer Skala von 0 (sehr unsicher) bis 10 (sehr sicher) ihre Selbsteinschätzung angeben. In der Vorerhebung zeigten sich überwiegend niedrige bis mittlere Einschätzungen. Niedrige Werte im Bereich von 0 bis 3 wurden von mehreren Schüler:innen gewählt. Mittlere Werte, insbesondere der Wert 5 ( $n=9$ ), wurden vergleichsweise häufig genannt. Höhere Einschätzungen im Bereich von 7 bis 10 traten insgesamt etwas seltener auf.

In der Nacherhebung wurden sehr niedrige Werte nur noch vereinzelt genannt (0: n=1), während Einschätzungen im Bereich von 1 bis 3 nicht mehr auftraten. Mittlere Werte traten weiterhin auf (5: n=5; 6: n=5). Höhere Einschätzungen wurden häufiger gewählt, insbesondere der Wert 7 (n=16). Sehr hohe Einschätzungen (7 bis 10) traten weiterhin auf. Abbildung 19 zeigt die Verteilung der Selbsteinschätzungen in der Vor- und Nacherhebung.

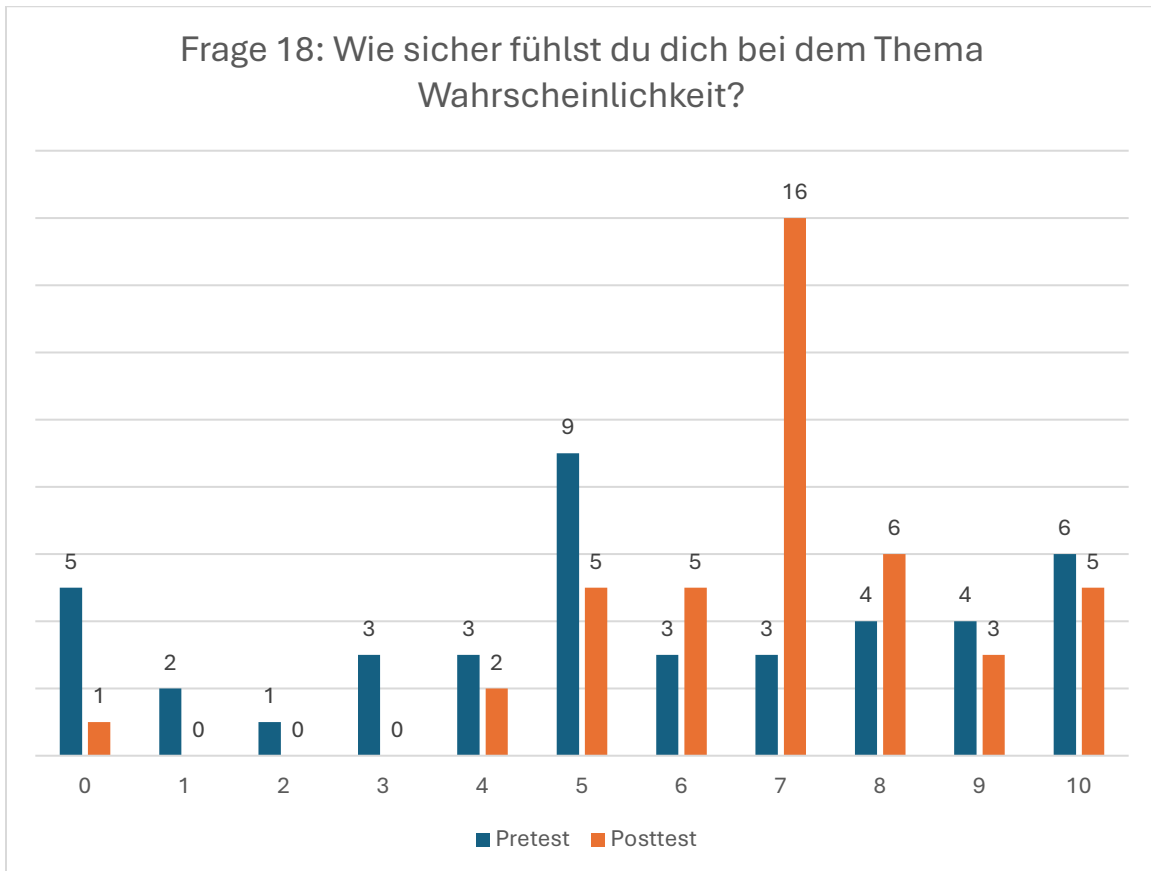


Abbildung 19: Verteilung der Selbsteinschätzungen zur Sicherheit im Umgang mit Wahrscheinlichkeit

In Frage 19: „Denkst du im Alltag über Zufall nach?“ sollten die Schüler:innen angeben, wie oft sie sich im Alltag mit dem Thema Zufall beschäftigen. In der Vorerhebung gaben mehrere Schüler:innen an, *nie* über Zufall nachzudenken (n=13). Ebenso häufig wurden die Antwortoptionen *selten* (n=14) und *manchmal* (n=14) gewählt, während nur wenige Schüler angaben, *oft* über Zufall nachzudenken (n=2).

In der Nacherhebung wurde die Antwortoption *nie* seltener gewählt ( $n=8$ ). Die Antwortoption *selten* wurde weiterhin in ähnlicher Häufigkeit genannt ( $n=14$ ). Die Antwortoption *manchmal* wurde etwas häufiger gewählt ( $n=16$ ), während die Anzahl der Schüler:innen, die angaben, *oft* über Zufall nachzudenken, ebenfalls zunahm ( $n=5$ ). Abbildung 20 zeigt die Verteilung der Antworten in der Vor- und Nacherhebung.

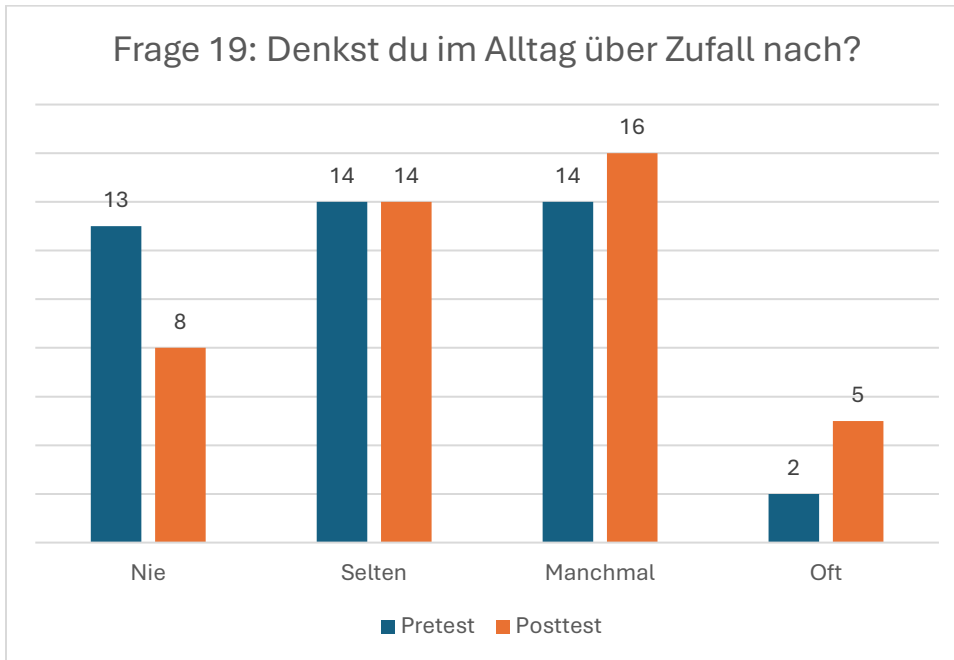


Abbildung 20: Verteilung der Häufigkeit des Nachdenkens über Zufall im Alltag

#### 4.1.6 Zusammenfassung

Zur Orientierung für den nächsten Abschnitt ist ein zusammenfassender Überblick in Tabelle 1 dargestellt. In dieser Tabelle sind jeweils die dominanten Antwortkategorien der Vor- und Nacherhebung sowie die größten Veränderungen dargestellt. Die Übersicht dient ausschließlich der Verdichtung zentraler Befunde und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, da zahlreiche in diesem Abschnitt dargestellte Detailspekte darin nicht abgebildet sind. Insbesondere weniger häufige Kategorien sowie differenzierte Argumentationsmuster, die in diesem Kapitel ausführlich beschrieben wurden, werden in der Tabelle nicht separat ausgewiesen.

Tabelle 1: Übersicht Kategorien

| Frage     | Pre (dominant)             | Post (dominant)                       | Größter Zuwachs                              | Größter Rückgang               |
|-----------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------|
| <b>F1</b> | Unvorhersehbarkeit         | Unvorhersehbarkeit                    | +11 Nicht beeinflussbar                      | -4 Emotional bewerteter Zufall |
| <b>F2</b> | Schule / Alltag            | Schule / Alltag                       | +2 Schule / Alltag                           | -3 Spiele / Zufallsexperimente |
| <b>F3</b> | Zufall nicht beeinflussbar | Zufall nicht beeinflussbar            | +10 Zufall nicht beeinflussbar               | -4 Zufall beeinflussbar        |
| <b>F4</b> | Nur ein Gefühl             | Wie oft und wie sicher etwas passiert | +11 Wie oft etwas passiert                   | -10 Nur ein Gefühl             |
| <b>F5</b> | Spiele / Internet          | Spiele                                | +19 Spiele                                   | -2 Weiß ich nicht              |
| <b>F6</b> | Kopf                       | Beides gleich                         | +9 Beides gleich                             | -9 Kopf                        |
| <b>F7</b> | Kein Konzept / unklar      | Kein Konzept / unklar                 | +7 Gleichwahrscheinlichkeit / Unabhängigkeit | -8 Ausgleichsdenken            |
| <b>F8</b> | Kein Konzept / unklar      | Intuitive gefühlsbasierte Begründung  | +8 Gleichwahrscheinlichkeit / Unabhängigkeit | -9 Kein Konzept / unklar       |

|            |                                                |                                                |                           |                                                   |
|------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------|
| <b>F9</b>  | Kein Konzept / unklar                          | Kein Konzept / unklar und Gleichwahrscheinlich | +6 Gleichwahrscheinlich   | -9 Kein Konzept/ unklar                           |
| <b>F10</b> | Probabilistische Begründung bei Einzelereignis | Zufall korrekt erkannt                         | +9 Zufall korrekt erkannt | -7 Probabilistische Begründung bei Einzelereignis |
| <b>F11</b> | Mengenargument / Anzahlargument korrekt        | Mengenargument / Anzahlargument korrekt        | +6 Mengenargument korrekt | -3 Zufall fehlinterpretiert                       |
| <b>F12</b> | Intuitive / emotionale Begründung              | Kein Konzept / unklar                          | +7 Kein Konzept / unklar  | -10 Intuitive / emotionale Begründung             |
| <b>F13</b> | Kein Konzept / unklar                          | Gleichverteilung                               | +16 Gleichverteilung      | -8 Kein Konzept / unklar                          |
| <b>F14</b> | Kein Konzept / unklar                          | Gleichverteilung                               | +14 Gleichverteilung      | -11 Kein Konzept / unklar                         |
| <b>F15</b> | Kein Konzept / unklar                          | Kein Konzept / unklar                          | +10 Intuitive Begründung  | -12 Kein Konzept / unklar                         |

|            |                                                     |                      |                         |                          |
|------------|-----------------------------------------------------|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| <b>F16</b> | Intuitive Begründung / Kein Konzept (gleich häufig) | Intuitive Begründung | +6 Intuitive Begründung | -3 Kein Konzept / unklar |
|------------|-----------------------------------------------------|----------------------|-------------------------|--------------------------|

## 4.2 Inferenzstatistik

Zur statistischen Überprüfung der Veränderungen zwischen Vor- und Nacherhebung wurde für alle Fragen ein Chi-Quadrat-Test durchgeführt. Ziel dieses Tests war es zu prüfen, ob sich die Antwortverteilungen der Schüler:innen zwischen den beiden Messzeitpunkten signifikant verändert haben oder ob beobachtete Unterschiede zufällig zustande gekommen sind. Der Chi-Quadrat-Test eignet sich für diese Fragestellung, da die erhobenen Daten in Form von Kategorien vorliegen und in Kreuztabellen gegenübergestellt werden können (vgl. Brosius, 2018, S. 498–502).

Die zugrunde liegende Nullhypothese ( $H_0$ ) lautet, dass sich die Antwortverteilungen zwischen Vor- und Nacherhebung nicht signifikant unterscheiden. Die Gegenhypothese ( $H_1$ ) geht davon aus, dass signifikante Unterschiede zwischen den beiden Messzeitpunkten bestehen. Als Signifikanzniveau wurde  $\alpha = 0,05$  festgelegt (vgl. Brosius, 2018, S. 498–502). Ein Ergebnis wurde als statistisch signifikant interpretiert, wenn der p-Wert kleiner als 0,05 war. Lag der p-Wert über 0,05, wurde das Ergebnis als nicht signifikant bewertet. Werte nahe der Signifikanzgrenze oberhalb von 0,05 wurden als tendenziell bzw. knapp nicht signifikant interpretiert (vgl. Bortz & Döring, 2006, S. 494).

Insgesamt wurden 30 statistische Tests durchgeführt. In 11 Fällen zeigten sich statistisch signifikante Veränderungen zwischen Vor- und Nacherhebung, während in 19 Fällen keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden konnten (Tabelle 2). Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass sich die Antwortverteilungen in einzelnen Bereichen messbar verändert haben, während andere Vorstellungen weitgehend stabil geblieben sind. Eine detaillierte inhaltliche Einordnung dieser Veränderungen erfolgt im Fazit.

Tabelle 2: Ergebnisse der Chi-Quadrat-Tests für alle untersuchten Fragen und Begründungen.

| Nr. | Frage                                                                                                     | Chi-<br>Quadrat | df | p-Wert | Interpretation             | Bedeutung                                                     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----|--------|----------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1   | Was bedeutet für dich Zufall?                                                                             | 15.5561         | 5  | 0.0082 | signifikant                | Verständnis des Zufallsbegriffs hat sich verändert            |
| 2   | Nenne ein Beispiel aus deinem Alltag, wo etwas zufällig passiert.                                         | 4.3254          | 5  | 0.5037 | nicht<br>signifikant       | Alltagsvorstellungen bleiben stabil                           |
| 3   | Kann man Zufall beeinflussen/steuern?                                                                     | 6.0873          | 4  | 0.1927 | nicht<br>signifikant       | Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit von Zufall blieben stabil |
| 4   | Was bedeutet „Wahrscheinlichkeit“?                                                                        | 12.7386         | 3  | 0.0052 | signifikant                | Verständnis des Zufallsbegriffs hat sich verändert            |
| 5   | Wo begegnet dir Zufall im Alltag?                                                                         | 4.2693          | 4  | 0.3708 | nicht<br>signifikant       | Alltagsvorstellungen blieben stabil                           |
| 6   | Eine faire Münze wird 5-mal hintereinander mit „Kopf“ geworfen. Was glaubst du, kommt beim nächsten Wurf? | 5.6129          | 2  | 0.0604 | knapp nicht<br>signifikant | mögliche Entwicklungstendenz erkennbar                        |
| 6.1 | Begründung                                                                                                | 7.433           | 3  | 0.0593 | knapp nicht<br>signifikant | leichte Veränderung in den Begründungen möglich               |
| 7   | Welche Reihenfolge ist am wahrscheinlichsten?                                                             | 9.478           | 4  | 0.0502 | knapp nicht<br>signifikant | mögliche Veränderung der Einschätzungen                       |
| 7.1 | Begründung                                                                                                | 11.7224         | 4  | 0.0195 | signifikant                | Argumentationsweisen haben sich verändert                     |
| 8   | Welche Reihenfolge ist am wenigsten wahrscheinlich?                                                       | 5.9683          | 4  | 0.2015 | nicht<br>signifikant       | Einschätzungen blieben stabil                                 |
| 8.1 | Begründung                                                                                                | 9.4393          | 4  | 0.051  | knapp nicht<br>signifikant | mögliche Veränderung in den Begründungen                      |

|      |                                                                                                          |         |   |         |                         |                                                           |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---|---------|-------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 9    | Wenn du ganz oft eine Münze wirfst, kommt dann ...                                                       | 10.6429 | 3 | 0.0138  | signifikant             | Verständnis langfristiger Häufigkeiten hat sich verändert |
| 9.1  | Begründung                                                                                               | 3.9682  | 3 | 0.2649  | nicht signifikant       | Begründungsstrukturen blieben stabil                      |
| 10   | In einem Säckchen sind 8 rote und 2 blaue Kugeln. Kannst du vorher sicher sagen, welche Farbe du ziehst? | 9.8462  | 3 | 0.01992 | signifikant             | Einschätzungen zu Zufallseignissen haben sich verändert   |
| 10.1 | Begründung                                                                                               | 7.0269  | 5 | 0.2186  | nicht signifikant       | Begründungen blieben weitgehend stabil                    |
| 11   | Welche Farbe wird deiner Einschätzung nach mit höherer Wahrscheinlichkeit gezogen (siehe Frage 10)?      | 2.3623  | 2 | 0.3069  | nicht signifikant       | Einschätzungen blieben stabil                             |
| 11.1 | Begründung                                                                                               | 3.6222  | 4 | 0.4595  | nicht signifikant       | Begründungen blieben stabil                               |
| 12   | Im Lotto werden Zahlen zufällig gezogen.                                                                 | 1.6515  | 2 | 0.4378  | nicht signifikant       | Vorstellungen zu Zufallsprozessen blieben stabil          |
| 12.1 | Begründung                                                                                               | 7       | 3 | 0.0719  | knapp nicht signifikant | mögliche Entwicklungstendenz erkennbar                    |
| 13   | Zwei faire Würfel werden einmal geworfen: Was ist wahrscheinlicher?                                      | 8.1787  | 2 | 0.0168  | signifikant             | probabilistische Einschätzungen haben sich verändert      |
| 13.1 | Begründung                                                                                               | 20.1364 | 4 | 0.0005  | hoch signifikant        | deutliche Veränderung der Argumentationsweisen            |
| 14   | Wenn man oft mit einem fairen Würfel würfelt: Welche Zahl kommt am häufigsten?                           | 17.9487 | 3 | 0.0005  | hoch signifikant        | Verständnis langfristiger Verteilungen hat sich verändert |

|      |                                                                                                                                                                                        |         |   |        |                   |                                           |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---|--------|-------------------|-------------------------------------------|
| 14.1 | Begründung                                                                                                                                                                             | 11.7429 | 3 | 0.0083 | signifikant       | Argumentationen haben sich verändert      |
| 15   | Im Wetterbericht steht 70% Regenwahrscheinlichkeit für morgen. Was bedeutet das?                                                                                                       | 4.1304  | 3 | 0.2477 | nicht signifikant | Verständnis blieb weitgehend stabil       |
| 15.1 | Begründung                                                                                                                                                                             | 10.6022 | 4 | 0.0314 | signifikant       | Argumentationsweisen haben sich verändert |
| 16   | Stell dir vor, du spielst ein Würfelspiel: Du musst eine 6 würfeln, um zu gewinnen. Du hast schon viele Male verloren. Denkst du, dass du beim nächsten Wurf bestimmt eine 6 würfelst? | 2.6283  | 2 | 0.2687 | nicht signifikant | Vorstellungen blieben stabil              |
| 16.1 | Begründung                                                                                                                                                                             | 2.2727  | 3 | 0.5178 | nicht signifikant | Begründungen blieben stabil               |
| 17   | Wie sicher fühlst du dich bei dem Thema Zufall?<br>(Zusammengefasst in drei Kategorien)                                                                                                | 10.275  | 2 | 0.0059 | signifikant       | Selbsteinschätzung hat sich verändert     |
| 18   | Wie sicher fühlst du dich bei dem Thema Wahrscheinlichkeit?<br>(Zusammengefasst in drei Kategorien)                                                                                    | 2.18    | 2 | 0.3362 | nicht signifikant | Selbsteinschätzung blieb stabil           |
| 19   | Denkst du im Alltag über Zufall nach?                                                                                                                                                  | 2.6095  | 3 | 0.4558 | nicht signifikant | Reflexion über Zufall blieb stabil        |

## 5 Fazit

Die im vorangegangenen Kapitel dargestellten Ergebnisse geben einen Überblick über die Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schüler:innen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit vor und nach der Behandlung des Themas im Unterricht. Im Folgenden werden diese Ergebnisse im Hinblick auf die Forschungsfragen zusammengeführt und diskutiert. Dabei stehen sowohl Veränderungen als auch stabile Muster in den Vorstellungen der Schüler:innen im Mittelpunkt, die in Beziehung zu den im theoretischen Teil dargestellten Konzepten, typischen Schüler:innenvorstellungen und Fehlkzepten gesetzt werden.

### 5.1 Beantwortung der Forschungsfragen

#### **5.1.1 Forschungsfrage 1: Welche Vorstellungen und Fehlvorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit zeigen Schüler:innen der 3. Klasse Mittelschule vor der unterrichtlichen Behandlung des Themas?**

Die Ergebnisse der Vorerhebung verdeutlichen ein deutlich heterogenes Ausgangsniveau der Schüler:innen im Hinblick auf Zufall und Wahrscheinlichkeit. Bereits vor der unterrichtlichen Behandlung des Themas waren sowohl intuitive als auch strukturierte probabilistische Vorstellungen vorhanden. Diese erwiesen sich jedoch als wenig stabil und traten abhängig vom jeweiligen Aufgabentyp unterschiedlich in Erscheinung. Ein solches Nebeneinander unterschiedlicher Vorstellungen deutet auf inkonsistentes probabilistisches Denken hin, wie es beispielsweise von Khazanov und Prado (2010) beschrieben wird, siehe Abschnitt 2.4.

Diese breite Palette an Vorstellungen wird zunächst in den begrifflichen Fragen 1 bis 4 deutlich. In Frage 1 „Was bedeutet für dich Zufall?“ beschrieben viele Schüler:innen Zufall überwiegend anhand konkreter Alltagssituationen, etwa durch unerwartete Begegnungen oder plötzlich eintretende Ereignisse. Zufall erscheint in diesen Antworten primär als subjektiv erlebtes Ereignis, ohne dass grundlegende Eigenschaften wie Nicht-Vorhersagbarkeit oder Nicht-Beeinflussbarkeit explizit thematisiert werden. Der Zufallsbegriff ist damit stark situationsgebunden und narrativ geprägt. So beschrieb eine Schüler:in Zufall beispielsweise mit der Aussage: „Wenn ich jemanden im Kino treffe, ist das Zufall.“ Solche alltagsbezogenen Deutungen entsprechen den in der Literatur

beschriebenen Alltagsvorstellungen zu Zufall, wie sie etwa von Döhrmann (2004) dargestellt werden, siehe Abschnitt 2.4.1.

Gleichzeitig zeigt Frage 3 „Kann man Zufall beeinflussen?“, dass ein erheblicher Teil der Schüler:innen durchaus in der Lage ist, Zufall als nicht steuerbar zu charakterisieren. Bereits vor der Unterrichtseinheit vertraten 18 von ihnen die Auffassung, dass Zufall nicht beeinflusst werden kann. Dieser Befund macht deutlich, dass die Vorstellung der Nicht-Beeinflussbarkeit von Zufall bei vielen Schüler:innen grundsätzlich vorhanden ist, jedoch in offenen Definitionsaufgaben wie Frage 1 nicht spontan als zentrales Merkmal aktiviert wird. Der Zufallsbegriff ist folglich weniger durch ein konsistentes abstraktes Verständnis gekennzeichnet als vielmehr durch eine kontextabhängige Nutzung einzelner Aspekte. Frage 3 verdeutlicht auch, dass innerhalb der Lerngruppe erhebliche Unterschiede in den Vorstellungen zur Beeinflussbarkeit von Zufall bestehen. Während ein Teil der Schüler:innen Zufall als vollständig oder zumindest teilweise beeinflussbar beschrieb, betrachtete eine größere Gruppe Zufall bereits vor dem Unterricht als grundsätzlich nicht steuerbar. Innerhalb derselben Lerngruppe existieren somit gegensätzliche Auffassungen nebeneinander, sodass nicht von einem einheitlichen oder dominierenden Fehlkonzept gesprochen werden kann, sondern vielmehr von koexistierenden und teilweise widersprüchlichen Denkweisen, die je nach Fragestellung unterschiedlich aktiviert werden. Auch dieses Nebeneinander unterschiedlicher Vorstellungen wird in der Literatur beschrieben, insbesondere im Zusammenhang mit Inkonsistenzen im probabilistischen Denken, siehe Abschnitt 2.4.4.

Auch das Verständnis des Begriffs Wahrscheinlichkeit bei Frage 4 war vor der Unterrichtseinheit uneinheitlich ausgeprägt. Ein Großteil der Schüler:innen deutete Wahrscheinlichkeit als subjektives Gefühl oder gab an, den Begriff nicht zu kennen. Daneben fanden sich jedoch auch Antworten, in denen Wahrscheinlichkeit als Maß für die Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses oder als Einschätzung der Sicherheit seines Eintretens verstanden wurde. Diese strukturierteren Bedeutungszuschreibungen traten jedoch nur bei einem kleineren Teil der Schüler:innen auf und waren insgesamt nicht stabil verankert.

Die begrifflichen Unsicherheiten spiegeln sich deutlich in den anwendungsbezogenen Aufgaben wider. In den Münzaufgaben von Fragen 6 bis 9 traten mehrere Denk- und Argumentationsmuster parallel auf. In Frage 6 „Erwartung nach fünfmal Kopf“ entschieden

sich viele Schüler:innen für ein weiteres Auftreten von Kopf. Die Analyse der Begründungen zeigt jedoch, dass diese identische Antwortentscheidung auf unterschiedlichen Denkweisen beruhte. Die Begründungen ließen sich in vergleichbarem Umfang dem Ausgleichsdenken, der Annahme von Gleichwahrscheinlichkeit sowie intuitiven oder gefühlsbasierten Argumentationen zuordnen. So kreuzte beispielsweise eine Schüler:in bei Frage 6 die Antwortoption „Zahl“ an und begründete dies mit „Weil schon fünfmal Kopf kam, muss jetzt Zahl kommen“. Diese Begründung zeigt deutlich, dass hier das Ausgleichsdenken eingesetzt wurde. Ein:e andere Schüler:in kreuzte ebenfalls „Zahl“ an und begründete dies jedoch mit: „Es ist Zufall was kommt“. Dies verdeutlicht, dass gleiche Antworten nicht zwangsläufig auf gleiche zugrunde liegende Vorstellungen schließen lassen. Gleichzeitig verwiesen einzelne Schüler:innen bereits auf die Unabhängigkeit der einzelnen Würfe.

Auch bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen von Fragen 7 und 8 zeigte sich ein differenziertes Bild. Zwar wurden bestimmte Folgen aufgrund ihres abwechselnden Erscheinungsbildes bevorzugt, was auf Musterdenken hindeutet, zugleich wählten jedoch auch Schüler:innen die Antwortoption, dass alle dargestellten Folgen gleich wahrscheinlich seien. In den Begründungen traten sowohl Ausgleichs- und Musterdenken als auch Argumentationen zur Gleichwahrscheinlichkeit oder zur Unabhängigkeit der Würfe auf. Ein Beispiel einer formal korrekten Schüler:innen Antwort ist „Alle gleich“ mit der Begründung: „Jede Seite hat 50%, so sind alle gleich wahrscheinlich“. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass innerhalb derselben Lerngruppe unterschiedliche Denkweisen parallel vorhanden waren. Eine weitere typische Schüler:innenbegründung lautete beispielsweise: „Weil sich Kopf und Zahl abwechseln müssen.“ Diese Argumentation entspricht dem Musterdenken bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen, wie es unter anderem von Khazanov und Prado (2010) beschrieben wird, siehe Abschnitt 2.4.2.

Ein ähnliches Muster zeigte sich bei den Würfelaufgaben. In Frage 13 „Einmaliges Werfen zweier Würfel“, gaben viele Schüler:innen an, dass die betrachteten Ereignisse gleich wahrscheinlich seien. Die Begründungen machten dabei deutlich, dass kombinatorische Überlegungen nur selten herangezogen wurden und die Annahme von Gleichwahrscheinlichkeit häufig ohne tragfähige mathematische Begründung erfolgte. Es kam häufig die Antwort „Beides gleich wahrscheinlich“ mit der Begründung „Sie haben die gleiche Chance gewürfelt zu werden“. Auch bei der korrekten Lösung „5 und 6“ fanden

sich unterschiedliche Begründungen, die von den formal korrekten Begründungen wie: „zwei verschiedene Zahlen ist leichter zu Würfeln wie zwei gleiche Zahlen“ bis zu intuitiven „5 und 6, weil es meine Glückszahlen sind“ reichten.

Dieses Bild setzte sich in Frage 14 fort, in der die Schüler:innen einschätzen sollten, welche Zahl bei häufigem Würfeln mit einem fairen Würfel am häufigsten auftritt. Zwar wählten viele Schüler:innen die Antwortoption, dass alle Zahlen gleich oft auftreten. Die offenen Begründungen zeigten jedoch, dass diese Entscheidung häufig nicht mit einem gefestigten Verständnis der Gleichverteilung bei wiederholten Zufallsexperimenten verbunden war, sondern überwiegend auf unklaren oder intuitiven Argumentationen beruhte. Schüler:innen Begründungen zur korrekten Antwort „Alle gleich oft“ waren zum Beispiel: „Mein Gefühl sagt 1“, „Kann man nicht sagen, weil es verschiedene Würfel gibt“ und „Weil es Zufällig ist“.

Ein weiteres differenziertes Bild ergab sich bei den Urnenaufgaben Fragen 10 und 11. Während in Frage 11 Wahrscheinlichkeitsvergleiche häufig korrekt anhand der unterschiedlichen Anzahlverhältnisse vorgenommen wurden, zeigte Frage 10, dass viele Schüler:innen aus derselben Situation auf Sicherheit bei einem einzelnen Ziehversuch schlossen. Der Vergleich beider Fragen verdeutlicht, dass probabilistische Überlegungen grundsätzlich verfügbar waren, jedoch nicht konsistent auf unterschiedliche Fragestellungen übertragen wurden. Eine formal korrekte Antwort für Frage 11 war: „Rot“ mit der Begründung: „Weil es mehr Rote Kugeln gibt“. Diese Begründung wurde der Kategorie Anzahlargument korrekt verwendet zugeschrieben.

Besonders ausgeprägt traten intuitive Vorstellungen bei Aufgaben mit starkem Lebensweltbezug auf. In der Lottoaufgabe Frage 12 wurden Gewinnchancen häufig anhand der Anordnung oder des Erscheinungsbildes der Zahlen beurteilt. Festgestellte Begründungen dazu sind: „Weil Nina verschiedene Zahlen hat“ oder „Nina hat bessere Zahlen gewählt“. Bei der Interpretation der Regenwahrscheinlichkeit bei Frage 15 dominierten zeitliche oder räumliche Deutungen der Prozentangabe. Diese Ergebnisse zeigen, dass alltagsnahe Kontexte falsche intuitive Denkweisen besonders stark aktivieren.

Zusammenfassend beantwortet die Vorerhebung die erste Forschungsfrage dahingehend, dass Schüler:innen bereits vor der Behandlung des Themas im Unterricht über ein breites, stark differenziertes und inkonsistentes Spektrum an Vorstellungen zu

Zufall und Wahrscheinlichkeit verfügen. Fachlich strukturierte probabilistische Konzepte sind punktuell vorhanden, werden jedoch nicht stabil, nicht kontextübergreifend und nicht konsistent angewendet. Charakteristisch ist insbesondere die Diskrepanz zwischen formalen Antwortentscheidungen und den zugrunde liegenden Begründungen. Gerade dieses Nebeneinander unterschiedlicher und teilweise widersprüchlicher Denkweisen verweist auf inkonsistentes probabilistisches Denken, wie es im theoretischen Teil der Arbeit beschrieben wurde, insbesondere in Abschnitt 2.4.4. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass alltagsbezogene Deutungen und subjektive Vorstellungen weiterhin einen starken Einfluss auf die Einschätzungen der Schüler:innen ausüben, was mit den in Abschnitt 2.4.1 sowie Abschnitt 2.5 dargestellten Befunden übereinstimmt. Diese Ergebnisse stehen somit insgesamt im Einklang mit den im theoretischen Teil dieser Arbeit dargestellten typischen Schüler:innenvorstellungen und Fehlkonzepten im Bereich der Wahrscheinlichkeit.

### **5.1.2 Forschungsfrage 2: Wie verändern sich diese Vorstellungen und Fehlvorstellungen nach der Behandlung des Themas Zufall und Wahrscheinlichkeit im Unterricht?**

Bezogen auf die zweite Forschungsfrage zeigt der Vergleich von Vor- und Nacherhebung, dass sich die Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schüler:innen nach der unterrichtlichen Behandlung in mehreren Bereichen veränderten, diese Veränderungen jedoch nicht einheitlich verliefen, sondern stark vom jeweiligen Aufgabentyp und vom Kontext der Fragestellung abhängig waren.

In den begrifflichen Fragen 1 bis 3 zu Zufall zeigte sich nach der Unterrichtseinheit eine Verschiebung hin zu strukturierteren Vorstellungen. Mehr Schüler:innen beschrieben Zufall nun als nicht beeinflussbar, während deterministische und stark bewertende Deutungen zurückgingen. Gleichzeitig blieben alltagsbezogene und unspezifische Beschreibungen auch nach dem Unterricht in vergleichbarem Umfang bestehen. Der Zufallsbegriff wurde somit bei einem Teil der Schüler:innen weiter ausdifferenziert, jedoch nicht durchgängig stabilisiert.

Auch bei Frage 4 zum Wahrscheinlichkeitsbegriff zeigten sich nach der Unterrichtseinheit Veränderungen der Bedeutungszuschreibungen. Deutungen im Sinne eines bloßen Gefühls oder vollständiger Unkenntnis traten seltener auf, während strukturiertere Interpretationen, etwa Wahrscheinlichkeit als Maß für Häufigkeit oder als Einschätzung

der Sicherheit des Eintretens eines Ereignisses, häufiger genannt wurden. Dennoch blieb auch in der Nacherhebung eine gewisse Unsicherheit im Umgang mit dem Begriff bestehen.

In den Münzaufgaben von Fragen 6 bis 9 zeigten sich insbesondere bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen Veränderungen. In den Fragen 7 und 8 nahm die Auswahl der Antwortoption, dass alle dargestellten Folgen gleich wahrscheinlich seien, deutlich zu. Entsprechend traten in den Begründungen nach dem Unterricht häufiger Argumentationen auf, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit oder auf die Unabhängigkeit der Würfe beziehen. Gleichzeitig blieben intuitive oder gefühlbasierte Begründungen weiterhin verbreitet, insbesondere bei der Einschätzung langfristiger Häufigkeiten in Frage 9. Dies deutet darauf hin, dass sich Antwortentscheidungen zwar veränderten, die zugrunde liegenden Denkweisen jedoch nicht durchgängig stabilisiert wurden. Eine Schüler:in begründete ihre Entscheidung mit der Aussage: „Beide Seiten haben die gleiche Chance.“ Diese Begründung zeigt eine Annäherung an das Konzept der Gleichwahrscheinlichkeit, wie es im theoretischen Teil dieser Arbeit beschrieben wurde, siehe Abschnitt 2.4. Ein:e weitere:r Schüler:in gab bei Frage 6 in der Vorerhebung an, dass nach mehreren Würfeln „Kopf“ nun „bestimmt Zahl kommen muss“. In der Nacherhebung wählte dieselbe Schüler:in die Antwortoption „Beides gleich“ und begründete dies ebenfalls mit der Aussage: „Beide Seiten haben die gleiche Chance“. Dieses Beispiel zeigt eine Abkehr vom Ausgleichsdenken hin zu einem probabilistischen Verständnis der Unabhängigkeit von Zufallsereignissen.

Ein vergleichbarer Effekt zeigte sich bei den Würfelaufgaben. In Frage 13 „Einmaliges Werfen zweier Würfel“ nahm in der Nacherhebung der Anteil der Schüler:innen deutlich zu, die die beiden betrachteten Ereignisse („5 , 6“ und „6 , 6“) als fälschlicherweise gleich wahrscheinlich einschätzten, während die Bevorzugung einzelner Zahlenkombinationen zurückging. Die Analyse der Begründungen zeigt, dass korrekte kombinatorische Überlegungen auch nach dem Unterricht nur von einem Teil der Schüler:innen herangezogen wurden. Die Veränderung korrekter Antwortentscheidungen ging somit nicht in allen Fällen mit einem vertieften Verständnis der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsstruktur einher. Eine Schüler:in wählte in der Vorerhebung die Antwortoption „6 und 6“ und begründete dies mit „Weil 6 die höchste Zahl ist“. In der Nacherhebung entschied sich dieselbe Schüler:in für die korrekte Antwort „5 und 6“, begründete dies jedoch mit der Aussage: „Gefühl“. Dieses Beispiel zeigt eine

Verbesserung der Antwortentscheidung, während die zugrunde liegende Begründung weiterhin intuitiv bleibt.

Auch in Frage 14, die auf langfristige Häufigkeiten bei wiederholtem Würfeln abzielte, nahm nach dem Unterricht der Anteil der Schüler:innen zu, die von einer Gleichverteilung der Ergebnisse ausgingen. Gleichzeitig zeigen die offenen Begründungen, dass diese Einschätzung weiterhin häufig intuitiv oder unklar begründet wurde. Auch hier wird deutlich, dass formale Antwortentscheidungen nicht zwangsläufig auf ein gefestigtes probabilistisches Verständnis schließen lassen. Wie Hauer-Typpelt (2020) zeigt, können Experimente und Simulationen dazu beitragen, langfristige Häufigkeiten verständlich zu machen, was auch für die vorliegenden Ergebnisse bedeutsam ist (siehe Abschnitt 2.6).

Bei den Urnenaufgaben von Fragen 10 und 11 zeigten sich ebenfalls Veränderungen. In Frage 10 erkannten nach dem Unterricht mehr Schüler:innen, dass das Ergebnis eines einzelnen Ziehversuchs trotz ungleicher Verteilung nicht sicher vorhergesagt werden kann. Ein Beispiel dafür zeigt sich bei Frage 10: Eine Schüler:in kreuzte in der Vorerhebung die Antwortoption „Ja: rot“ an und begründete dies mit der Aussage: „Weil mehr rote drin sind“. In der Nacherhebung wählte dieselbe Schüler:in die Antwortoption „Nein, Zufall“ und erklärte: „Man kann es nicht sicher wissen, es ist Zufall“. Wahrscheinlichkeitsvergleiche in Frage 11 wurden weiterhin überwiegend korrekt anhand der Anzahlverhältnisse vorgenommen, was auf eine relative Stabilität dieses Aspekts probabilistischen Denkens hindeutet.

Demgegenüber zeigten sich bei Aufgaben mit starkem Alltagsbezug nur geringe Veränderungen. Sowohl die Lottoaufgabe Frage 12 als auch die Interpretation der Regenwahrscheinlichkeit Frage 15 blieben auch nach der Unterrichtseinheit stark von alltagsnahen und falschen intuitiven Deutungen geprägt. Fachlich angemessenere Interpretationen traten hier nur vereinzelt auf. So wählte eine Schüler:in sowohl in der Vor- als auch in der Nacherhebung die Antwortoption „Nina“ und begründete dies mit der Aussage: „Nina hat bessere Zahlen“. Wie bereits im theoretischen Teil beschrieben wurde, erweisen sich alltagsnahe Fehlvorstellungen als besonders stabil und bleiben auch im schulischen Kontext bestehen (siehe Abschnitt 2.4).

Die Interferenzanalysen aus Abschnitt 4.2 ergänzen die qualitative Auswertung und zeigen auf quantitativer Ebene, in welchen Aufgabenbereichen sich messbare Veränderungen zwischen Vor- und Nacherhebung ergeben haben. Insgesamt wurden 30

Items hinsichtlich möglicher Veränderungen überprüft. Dabei zeigten sich in elf Fällen statistisch signifikante Unterschiede, während in 19 Fällen keine signifikanten Veränderungen festgestellt werden konnten (Tabelle 2). Die statistischen Ergebnisse geben somit einen Überblick darüber, in welchen Bereichen Lernentwicklungen nachweisbar waren und in welchen Vorstellungen eine hohe Stabilität bestehen blieb.

Inhaltlich zeigen sich signifikante Veränderungen insbesondere in grundlegenden Konzeptbereichen. So ergaben sich statistisch bedeutsame Entwicklungen beim Verständnis zentraler Begriffe wie Zufall und Wahrscheinlichkeit (Fragen 1 und 4) sowie beim langfristigen Verständnis von Zufallsexperimenten (Frage 9). Auch bei Aufgaben zu Wahrscheinlichkeitsvergleichen und Würfelexperimenten (Fragen 10, 13 und 14) konnten messbare Veränderungen festgestellt werden. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass sich in Frage 13 die Veränderung nicht in einer Verbesserung, sondern in einer Zunahme falscher Antwortentscheidungen zeigte. Die qualitative Analyse der Begründungen verdeutlicht in diesem Zusammenhang, dass sich hier teilweise eine neue beziehungsweise verstärkte Fehlvorstellung entwickelte, insbesondere die Annahme, dass unterschiedliche Ereignisse pauschal gleich wahrscheinlich seien.

Gleichzeitig zeigen die statistischen Ergebnisse, dass sich in mehreren Aufgabenbereichen keine signifikanten Veränderungen ergeben haben. Besonders bedeutsam ist dies bei alltagsnahen Kontexten wie der Nennung von Zufallsbeispielen aus dem Alltag (Frage 2) sowie bei Aufgaben mit starkem Lebensweltbezug wie der Lottoaufgabe (Frage 12) und der Interpretation von Wetterwahrscheinlichkeiten (Frage 15). Diese Befunde bestätigen die Ergebnisse der qualitativen Auswertung und zeigen, dass alltagsbezogene und intuitive Vorstellungen eine hohe Stabilität aufweisen und durch eine einmalige Unterrichtssequenz nur begrenzt verändert werden können.

Zusammenfassend beantwortet die Nacherhebung die zweite Forschungsfrage dahingehend, dass die Unterrichtseinheit zu einer Differenzierung probabilistischer Vorstellungen beitrug, diese Veränderungen jedoch nicht einheitlich und nicht durchgängig stabil verliefen. Während in formalen Zufallskontexten vermehrt strukturierte Antwortentscheidungen getroffen wurden, blieben intuitive und alltagsnahe Deutungen in vielen Bereichen weiterhin bestehen. Dieses Ergebnis entspricht den im theoretischen Teil beschriebenen Befunden, dass probabilistisches Denken häufig inkonsistent ausgeprägt ist und korrektes Wissen sowie intuitive Vorstellungen

nebeneinander bestehen können (siehe Abschnitt 2.4.4). Zugleich bestätigt sich, dass alltagsnahe Fehlvorstellungen besonders stabil sind und sich auch durch Unterricht nur begrenzt verändern lassen, wie in Abschnitt 2.4 und 2.5 dargestellt wurde. Insgesamt zeigt sich, dass Lernprozesse im Bereich der Wahrscheinlichkeit Zeit benötigen und neue Vorstellungen zunächst parallel zu bestehenden Denkweisen auftreten, bevor sich langfristig stabile Veränderungen entwickeln.

### **5.1.3 Forschungsfrage 3: Welche typischen Denk- und Argumentationsmuster lassen sich in den Begründungen der Schüler:innen erkennen?**

Bezogen auf die dritte Forschungsfrage zeigt die Auswertung der offenen Begründungen, dass sich in den Antworten der Schüler:innen mehrere wiederkehrende Denk- und Argumentationsmuster identifizieren lassen, die nicht isoliert auftreten, sondern stark vom jeweiligen Aufgabentyp und Kontext abhängig sind.

Die Analyse der offenen Begründungen anhand des entwickelten Kategoriensystems macht deutlich, dass über die verschiedenen Aufgaben hinweg unterschiedliche Denk- und Argumentationsmuster parallel vorhanden sind. Diese variieren systematisch in Abhängigkeit vom Aufgabentyp und lassen sich nicht einer einzelnen, stabilen Vorstellung zuordnen.

Bei Aufgaben zu Münzexperimenten mit kurzem Zeithorizont, insbesondere Fragen 6 bis 8, treten in den Begründungen vor allem drei Argumentationsmuster in vergleichbarer Häufigkeit auf: Ausgleichsdenken, die Bezugnahme auf Gleichwahrscheinlichkeit bzw. Unabhängigkeit sowie intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen. Auffällig ist dabei, dass identische Antwortentscheidungen, wie etwa die Erwartung eines bestimmten Münzergebnisses, oft auf unterschiedlichen Begründungstypen beruhen. Die Auswertung zeigt, dass sich die Antworten in diesen Aufgaben nicht eindeutig einem dominanten Denkmodell zuordnen lassen, sondern mehrere Kategorien parallel aktiviert werden. So erkannte eine Schüler:in zwar die Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse, begründete ihre Entscheidung jedoch lediglich mit der Aussage „Zufall“.

Ein ähnliches Bild zeigt sich in Aufgaben zur Beurteilung kurzer Zufallsfolgen, bei den Fragen 7 und 8. Neben Begründungen, die auf visuelle Muster oder angenommene Ausgleichsprozesse Bezug nehmen, finden sich auch Argumentationen, in denen explizit

auf Gleichwahrscheinlichkeit verwiesen wird. Die verschiedenen Kategorien treten nebeneinander auf, ohne dass eine Argumentationsform eindeutig überwiegt. Dies gilt sowohl für die Vorerhebung, als auch in veränderter Gewichtung für die Nacherhebung. Ein konkretes Beispiel hierfür zeigt sich bei Frage 7, eine Schüler:in wählte eine bestimmte Reihenfolge und begründete ihre Entscheidung mit der Aussage: „Weil es sich abwechselt“. Diese Begründung verweist auf ein visuelles Musterdenken.

Bei Aufgaben mit Würfelexperimenten differenziert sich das Argumentationsverhalten weiter aus. In Frage 13 „Einmaliges Werfen zweier Würfel“ zeigt die Auswertung, dass viele Schüler:innen die betrachteten Ereignisse als gleich wahrscheinlich einschätzen, die zugehörigen Begründungen dabei überwiegend keiner kombinatorisch fundierten Kategorie zugeordnet werden können. Stattdessen finden sich häufig unklare oder verkürzte Begründungen, in denen Gleichwahrscheinlichkeit ohne explizite Herleitung fälschlicherweise angenommen wird. Das vorherrschende Argumentationsmuster ist hier weniger durch spezifische Fehlvorstellungen als vielmehr durch eine fehlende Strukturierung der Begründungen gekennzeichnet. Wie im theoretischen Teil beschrieben wird, ist das Verständnis des zugrunde liegenden Zufallsprozesses eine wichtige Voraussetzung für tragfähige probabilistische Begründungen (siehe Abschnitt 2.4). Ein Beispiel für eine fehlende strukturierte Begründung zeigt sich bei Frage 13. Ein:e Schüler:in wählte die Antwortoption „Beides gleich wahrscheinlich“ und begründete diese Entscheidung mit der Aussage: „Weil beides Zahlen sind“. Diese Begründung enthält keinen Bezug auf mögliche Kombinationen oder Wahrscheinlichkeiten und lässt erkennen, dass zwar eine Entscheidung getroffen wurde, jedoch keine tragfähige probabilistische Argumentation vorliegt.

Ein vergleichbares Muster zeigt sich in Frage 14, die auf langfristige Häufigkeiten beim wiederholten Würfeln abzielt. Viele Schüler:innen gehen davon aus, dass alle Zahlen langfristig gleich häufig auftreten, was grundsätzlich dem fachlichen Modell eines fairen Würfels entspricht. Die zugehörigen Begründungen lassen sich jedoch häufig den Kategorien „intuitiv/gefühlsbasiert“ oder „kein Konzept / unklar“ zuordnen. So wurden Entscheidungen beispielsweise mit Aussagen wie „Weil das Fair ist“ oder „Ich glaube, alle kommen gleich oft“ begründet, ohne dass auf langfristige Häufigkeiten in Verbindung mit Wahrscheinlichkeiten Bezug genommen wurde. Ein typisches Beispiel für die Diskrepanz zwischen Antwortentscheidung und Begründung zeigt sich darin, dass ein:e Schüler:in die korrekte Antwortoption „Alle gleich oft“ auswählte, diese Entscheidung jedoch mit der

Aussage „Weil das fair ist“ begründete. Diese Begründung verweist nicht auf langfristige Häufigkeiten und ihr Bezug zu Wahrscheinlichkeiten hin, sondern bleibt auf einer intuitiven Ebene. In anderen Fällen wurde Unsicherheit durch Antworten wie „weiß ich nicht“ ausgedrückt, was nicht zwingend auf eine Fehlvorstellung hinweist, sondern auf fehlende oder nicht formulierte probabilistische Argumentationen.

Auch in Frage 10 und Frage 11 der Urnenaufgaben zeigt sich ein differenziertes Argumentationsverhalten. Während in Frage 11 Begründungen häufig korrekt auf die unterschiedlichen Anzahlverhältnisse Bezug nehmen, verdeutlichen die Begründungen zu Frage 10, dass probabilistische Überlegungen bei Einzelereignissen oftmals in deterministische Sicherheit überführt werden. Die Kategoriendaten machen sichtbar, dass dieselben Schüler:innen in ähnlichen Kontexten unterschiedliche Argumentationsmuster verwenden.

Bei Aufgaben mit starkem Alltagsbezug, insbesondere bei den Fragen 12 und 15, dominieren Begründungen, die sich keiner formal-probabilistischen Kategorie zuordnen lassen. In der Lottoaufgabe werden Entscheidungen häufig über das Erscheinungsbild oder die Anordnung der Zahlen begründet, während bei der Wetteraufgabe zeitliche oder räumliche Interpretationen der Prozentangabe überwiegen. Diese Argumentationsmuster treten konsistent und aufgabenübergreifend auf.

Zusammenfassend beantworten die Kategoriendaten die dritte Forschungsfrage dahingehend, dass die Denk- und Argumentationsmuster der Schüler:innen stark aufgabenabhängig variieren und häufig nebeneinander bestehen. Intuitive, teilstrukturierte und probabilistische Begründungen werden je nach Kontext unterschiedlich aktiviert. Besonders charakteristisch ist die wiederkehrende Diskrepanz zwischen Antwortentscheidung und Begründungstyp. Wie bereits im theoretischen Teil dargestellt wurde, können korrekte Antworten und tragfähige Begründungen unabhängig voneinander auftreten, was als typisches Merkmal inkonsistenten probabilistischen Denkens gilt (siehe Abschnitt 2.4.4). Darüber hinaus zeigt sich, dass probabilistische Urteile stark kontextabhängig sind und intuitive Deutungen je nach Aufgabenstellung aktiviert werden können, wie im theoretischen Teil zu Inkonsistenzen im probabilistischen Denken beschrieben wurde (siehe Abschnitt 2.4.4). Formal korrekte Antworten sind vielfach nicht durch tragfähige probabilistische Überlegungen gestützt, während

umgekehrt auch strukturierte Begründungsansätze nicht zwingend zu korrekten Entscheidungen führen.

#### **5.1.4 Forschungsfrage 4: In welchen Bereichen zeigen sich besonders stabile Fehlvorstellungen, die auch nach der Unterrichtseinheit weiterhin bestehen bleiben?**

Bezogen auf die vierte Forschungsfrage verdeutlichen die Ergebnisse der Vor- und Nacherhebung, dass sich Fehlvorstellungen durch die Unterrichtseinheit nicht einheitlich verändern, sondern in bestimmten Bereichen besonders stabil bleiben. Dies betrifft insbesondere Aufgaben mit starkem Alltagsbezug sowie solche, die ein Verständnis zusammengesetzter Zufallsexperimente oder die korrekte Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen erfordern.

Der Vergleich von Vor- und Nacherhebung verdeutlicht, dass sich problematische Vorstellungen in einzelnen Aufgabenbereichen zwar reduzieren, in anderen jedoch auch nach dem Unterricht weiterhin bestehen. Besonders deutlich zeigt sich diese Persistenz in alltagsnahen Kontexten sowie bei Aufgaben, die eine abstraktere probabilistische Betrachtung voraussetzen.

Ein besonders stabiler Problembereich ist die Lottoaufgabe (Frage 12). Bereits in der Vorerhebung entschied sich ein großer Teil der Schüler:innen dafür, dass „verstreute“ Zahlen bessere Gewinnchancen hätten. Dieses Antwortmuster blieb auch nach der Unterrichtseinheit weitgehend bestehen. Zwar nahm die Auswahl der Antwortoption „beide gleich“ zu, insgesamt zeigt sich jedoch, dass der Kontext „Lotto“ weiterhin stark mit alltagsbezogenen Deutungsmustern verknüpft ist. Die grundlegende Vorstellung der Gleichwahrscheinlichkeit aller Zahlenkombinationen konnte sich somit nur begrenzt stabilisieren. Ein Beispiel für eine fachlich korrekte Antwort zeigt sich in der Aussage einer Schüler:in, die die Antwortoption „Beide gleich“ wählte und dies mit „Beide haben gleich viele Zahlen, die gezogen werden können“ begründete. Diese Begründung verweist auf die Gleichwahrscheinlichkeit der Zahlenkombinationen und zeigt damit ein angemessenes probabilistisches Verständnis. Demgegenüber zeigt sich eine weiterhin unzureichend begründete Entscheidung in der Aussage einer Schüler:in, die die Antwortoption „Nina“ wählte, ohne eine fachlich tragfähige Begründung anzugeben beziehungsweise dies mit „Nina hat bessere Zahlen gewählt“ erklärte. Hier wird die Gewinnchance nicht probabilistisch, sondern alltagsbezogen und intuitiv beurteilt.

Noch deutlicher zeigt sich die Hartnäckigkeit von Fehlvorstellungen bei der Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen in Bezug auf die Regenwahrscheinlichkeit von Frage 15. Die korrekte Antwortoption der geschlossenen Frage wurde nach der Unterrichtseinheit sogar seltener gewählt, was darauf hinweist, dass sich auf der Ebene der Antwortentscheidungen keine Verbesserung eingestellt hat. In den offenen Begründungen lassen sich zwar vereinzelt fachlich angemessene Vorstellungen im Sinne relativer Häufigkeiten erkennen, diese bleiben jedoch insgesamt selten. Demgegenüber dominierten weiterhin zeitliche und räumliche Fehlinterpretationen der Prozentangabe, und auch der Anteil der Antworten, in denen die Bedeutung der Prozentangabe nicht eingeordnet werden konnte, nahm zu. Insgesamt zeigt sich damit, dass sich trotz einzelner fachlich korrekter Ansätze kein tragfähiges probabilistisches Verständnis im Umgang mit alltagsbezogenen Wahrscheinlichkeitsaussagen etabliert hat. Schwierigkeiten im Umgang mit Wahrscheinlichkeitsaussagen im Alltag werden auch im theoretischen Teil beschrieben, wie bei Hauer-Typpelt (2020) dargestellt (siehe Abschnitt 2.6). Ein:e Schüler:in z.B. wählte sowohl in der Vor- als auch in der Nacherhebung die Antwortoption „Es wird 70 % des Tages regnen“ und begründete dies mit der Aussage: „Weil es den ganzen Tag ein bisschen regnet“. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass zeitliche Fehlinterpretationen von Wahrscheinlichkeitsangaben auch nach der Unterrichtssequenz bestehen bleiben.

Ein weiterer stabiler Problembereich betrifft Aufgaben, bei denen mehrstufige Zufallsprozesse oder kombinatorische Überlegungen erforderlich sind. Dies wird besonders in Frage 13 „Einmaliges Werfen zweier Würfel“ sichtbar. Die Annahme, dass die betrachteten Ereignisse gleich wahrscheinlich seien, tritt bereits vor dem Unterricht häufig auf und nimmt auch nach der Unterrichtseinheit weiter zu, obwohl die Ereignisse nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Dieser Befund weist darauf hin, dass eine pauschale Gleichwahrscheinlichkeitsannahme sowie die fehlende Berücksichtigung der Anzahl möglicher Kombinationen auch nach dem Unterricht stark verbreitet bleiben. Die Schwierigkeit, mehrstufige Zufallsprozesse korrekt zu berücksichtigen, wird auch im theoretischen Teil dieser Arbeit thematisiert, wie bei Krüger, Sill und Sikora (2015) beschrieben (siehe Abschnitt 2.4).

Auch im Bereich kurzer Zufallsfolgen zeigen sich teilweise stabile intuitive Denkweisen, obwohl sich Antwortentscheidungen verändern. In den Aufgaben zu Münzfolgen, Fragen 7 und 8, nahm die Auswahl der Antwortoption „alle gleich wahrscheinlich“ zwar deutlich

zu, in den offenen Begründungen blieben jedoch intuitive oder nicht tragfähige Argumentationen in relevantem Umfang bestehen. Ein ähnliches Muster zeigt sich in Frage 6 „Erwartung nach fünfmal Kopf“: Zwar verändern sich die Antwortentscheidungen, das zugrunde liegende Begründungsniveau bleibt jedoch häufig intuitiv geprägt. Dies deutet darauf hin, dass sich bei einem Teil der Schüler:innen zwar formale Antworten verändern, die zugrunde liegenden Denkweisen jedoch nur eingeschränkt stabilisiert werden. Eine Schüler:in wählte in der Vor- und Nacherhebung die Antwortoption „Zahl“ und begründete dies jeweils mit der Aussage: „Jetzt muss Zahl kommen“. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass zum Beispiel das Ausgleichsdenken bei einem Teil der Schüler:innen auch nach der Unterrichtssequenz bestehen bleibt.

Schließlich zeigen auch Aufgaben zu langfristigen Häufigkeiten und Gleichverteilung stabile Unsicherheiten, wenn auch in anderer Form. In Frage 14 wird die Vorstellung, dass alle Ergebnisse gleich häufig auftreten, nach der Unterrichtseinheit deutlich häufiger gewählt. Die Analyse der Begründungen zeigt jedoch, dass auch bei formal korrekten Antworten weiterhin häufig unklare oder intuitive Argumentationen auftreten. Die Persistenz liegt hier somit weniger in einer falschen Antwortentscheidung als vielmehr in einem nicht tragfähigen oder nicht explizit begründeten Verständnis. Das Nebeneinander korrekter Antworten und unsicherer Begründungen wird auch im theoretischen Teil als typische Schwierigkeit im probabilistischen Denken beschrieben (siehe Abschnitt 2.4.4). Ein Beispiel dazu wäre: Eine Schüler:in wählte sowohl in der Vor- als auch in der Nacherhebung die Antwortoption „Alle gleich oft“, begründete diese Entscheidung jedoch weiterhin mit der Aussage: „Weil das fair ist“. Die Begründung blieb damit auch nach dem Unterricht auf einer intuitiven Ebene oder Erfahrung und verweist nicht auf langfristige Häufigkeiten oder Wahrscheinlichkeiten.

Die interferenzstatistischen Ergebnisse bestätigen diese Stabilität auch quantitativ, da sich in mehreren Aufgabenbereichen, insbesondere bei alltagsnahen Kontexten wie der Lottoaufgabe (Frage 12) und der Interpretation von Wetterwahrscheinlichkeiten (Frage 15), keine signifikanten Veränderungen zwischen Vor- und Nacherhebung feststellen ließen.

Zusammenfassend kann die vierte Forschungsfrage dahingehend beantwortet werden, dass sich besonders stabile Fehlvorstellungen und unsichere Verständnismuster vor allem in alltagsnahen Kontexten sowie bei komplexeren Zufallssituationen verdeutlichen.

Trotz einzelner Verbesserungen auf der Ebene der Antwortentscheidungen blieben grundlegende intuitive Deutungen in vielen Bereichen bestehen. Dieses Ergebnis entspricht den im theoretischen Teil dargestellten Befunden, dass alltagsnahe Vorstellungen und intuitive Heuristiken besonders persistent sind und sich nicht automatisch durch formales Wissen ersetzen lassen (siehe Abschnitt 2.4 und 2.5). Zugleich bestätigt sich, dass korrektes Wissen und unsichere Begründungen nebeneinander bestehen können, was als typisches Merkmal inkonsistenten probabilistischen Denkens beschrieben wird (siehe Abschnitt 2.4.4).

## 5.2 Beantwortung der Hypothesen

Die in Abschnitt 3.2 formulierten Hypothesen dienten als erwartungsleitender Rahmen zur Strukturierung und Interpretation der empirischen Ergebnisse. Sie sind vor dem Hintergrund des gewählten qualitativen Vor- und Nacherhebung ohne Kontrollgruppe nicht als statistisch prüfbare Hypothesen zu verstehen, sondern als Annahmen über typische Vorstellungen und mögliche Entwicklungstendenzen von Schüler:innen im Themenbereich Zufall und Wahrscheinlichkeit. Ihre Einordnung erfolgt daher beschreibend und interpretativ auf Grundlage der in Kapitel 4 dargestellten Befunde sowie der Beantwortung der Forschungsfragen in Abschnitt 5.1.

Die erste Hypothese, wonach vor der ersten Unterrichtseinheit zum Thema die intuitiven und alltagsbezogenen Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit dominieren, insbesondere Ausgleichs- und Musterdenken, wird durch die Ergebnisse der Vorerhebung in hohem Maße bestätigt. In den begrifflichen Aufgaben zeigte sich, dass Zufall und Wahrscheinlichkeit häufig über subjektive Erfahrungen, Gefühle oder alltagsnahe Situationen beschrieben wurden. Auch in den anwendungsbezogenen Aufgaben traten typische, in der Literatur beschriebene Fehlvorstellungen deutlich zutage, etwa in Form von Ausgleichs- und Musterdenken bei kurzen Zufallsfolgen, alltagsbezogenen Deutungen in der Lottoaufgabe oder zeitlichen und räumlichen Fehlinterpretationen bei der Regenwahrscheinlichkeit. Fachlich strukturierte probabilistische Vorstellungen waren zwar punktuell vorhanden, dominierten jedoch nicht und erwiesen sich als wenig stabil. Hypothese 1 kann daher insgesamt als bestätigt angesehen werden.

Die zweite Hypothese ging davon aus, dass Schüler:innen nach Abschluss des Themas Zufall und Wahrscheinlichkeit in der Schule häufiger fachlich angemessenere probabilistische Vorstellungen zeigen, während bestimmte Fehlvorstellungen zwar

reduziert, jedoch nicht vollständig überwunden werden. Die Ergebnisse der Nacherhebung stützen diese Annahme in differenzierter Weise. In mehreren formalen und schulisch vertrauten Kontexten lassen sich nach dem Unterricht Veränderungen in Richtung fachlich angemessener Vorstellungen beobachten, etwa bei Wahrscheinlichkeitsvergleichen in Urnenaufgaben, bei der Beurteilung kurzer Zufallsfolgen oder bei der Einschätzung langfristiger Häufigkeiten. Gleichzeitig zeigen die Ergebnisse jedoch, dass insbesondere alltagsnahe Fehlvorstellungen sowie Unsicherheiten bei zusammengesetzten Zufallsexperimenten auch nach der Unterrichtseinheit fortbestehen. Die Hypothese kann somit als teilweise bestätigt eingeordnet werden. Die beobachteten Persistenzen stellen dabei keinen Widerspruch zur Hypothese dar, sondern verdeutlichen vielmehr die Komplexität und Kontextabhängigkeit probabilistischer Lernprozesse.

Die dritte Hypothese bezog sich auf die Entwicklung der Denk- und Argumentationsmuster und nahm an, dass vor dem Unterricht vor allem intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen dominieren, während nach dem Unterricht vermehrt fachlich fundierte Argumentationen auftreten. Die Einordnung dieser Hypothese fällt ebenfalls differenziert aus. Zwar zeigt sich in mehreren Aufgabenbereichen nach der Unterrichtseinheit eine Zunahme fachlich orientierter Begründungen, insbesondere solcher, die sich auf Gleichwahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit oder Mengenverhältnisse beziehen. Gleichzeitig bleibt der Anteil intuitiver, verkürzter oder unklarer Begründungen auch nach dem Unterricht hoch und nimmt in einzelnen Kontexten sogar zu. Besonders auffällig ist dabei die wiederkehrende Diskrepanz zwischen Antwortentscheidung und Begründungsniveau: Formal korrekte Antworten werden häufig nicht durch tragfähige probabilistische Argumentationen gestützt. Hypothese 3 kann daher nur eingeschränkt bestätigt werden. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich bei einem Teil der Schüler:innen eher Antwortstrategien verändern als die zugrunde liegenden Argumentationsstrukturen.

Insgesamt zeigt die Einordnung der Hypothesen, dass die im theoretischen Teil formulierten Erwartungen in zentralen Punkten durch die empirischen Ergebnisse gestützt werden. Gleichzeitig verdeutlichen die differenzierten Befunde, dass Lernentwicklungen im Bereich Zufall und Wahrscheinlichkeit nicht linear verlaufen und stark kontextabhängig sind. Die Hypothesen erweisen sich damit als geeignetes Instrument zur Strukturierung und Interpretation der Ergebnisse, ohne den Anspruch einer kausalen

Wirksamkeitsprüfung zu erheben. Besonders deutlich wird, dass korrekte Antwortentscheidungen nicht automatisch mit einem entsprechend gefestigten probabilistischen Verständnis einhergehen.

### 5.3 Einordnung der Ergebnisse in die Literatur

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zeigen, dass bei den Schüler:innen vor der Unterrichtseinheit überwiegend intuitive und alltagsbezogene Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit vorhanden waren. Dabei traten insbesondere typische Fehlvorstellungen wie Ausgleichsdenken, Musterdenken sowie intuitive oder gefühlsbasierte Begründungen auf. Diese Befunde stehen im Einklang mit zahlreichen Ergebnissen der stochastikdidaktischen Forschung. So weisen Khazanov und Prado (2010) darauf hin, dass Fehlvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit weit verbreitet sind und das Verständnis grundlegender Konzepte erschweren können. Zugleich können Fehlvorstellungen auch neben korrekten Konzepten bestehen bleiben (Khazanov & Prado, 2010, S. 23–24). Auch Husereau et al. (2024) beschreiben, dass Menschen beim Urteilen unter Unsicherheit häufig auf Heuristiken, Fehlvorstellungen und kognitive Verzerrungen zurückgreifen. Diese können zu fehlerhaften Einschätzungen führen und Lernprozesse beeinträchtigen (Husereau et al., 2024, S. 57–59). Darüber hinaus zeigen Tversky und Kahneman (1971), dass kleine Stichproben häufig als repräsentativ für den zugrunde liegenden Zufallsprozess betrachtet werden. Damit verbunden ist die Erwartung, dass sich Zufallsfolgen lokal ausgleichen oder typische Muster zeigen müssten, obwohl dies mathematisch nicht begründet ist (Tversky & Kahneman, 1971, S. 105–106).

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zeigen außerdem, dass sich nach der Unterrichtseinheit zwar teilweise fachlich angemessenere Vorstellungen entwickelten, bestimmte Fehlvorstellungen jedoch weiterhin bestehen blieben. Auch dies stimmt mit Befunden der Literatur überein. Talawat (2015) verweist darauf, dass Schüler:innen bereits vor dem Unterricht vielfältige Fehlvorstellungen zur Wahrscheinlichkeit mitbringen und dass diese durch regulären Unterricht nicht automatisch verschwinden. Vielmehr bleiben einige Fehlvorstellungen stabil bestehen, sodass Unterricht gezielt an diesen Vorstellungen ansetzen muss (Talawat, 2015, S. 8 sowie S. 13–14).

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass Schüler:innen bereits vor dem Unterricht über vielfältige, jedoch inkonsistente Vorstellungen zu Zufall und Wahrscheinlichkeit verfügen.

Die Unterrichtseinheit führte in mehreren Bereichen zu fachlich angemesseneren Einschätzungen, insbesondere in formalen Zufallskontexten. Gleichzeitig bleiben bestimmte Fehlvorstellungen, vor allem in alltagsnahen Situationen und bei komplexeren Zufallsexperimenten, stabil bestehen. Die Ergebnisse verdeutlichen damit, dass Lernentwicklungen im Bereich der Stochastik schrittweise und kontextabhängig verlaufen.

## 6 Grenzen der Studie

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie sind unter Berücksichtigung mehrerer Einschränkungen zu interpretieren. Die Untersuchung beschränkt sich auf zwei Klassen einer Mittelschule und basiert auf einer Gelegenheitsstichprobe. Eine Generalisierung der Ergebnisse auf andere Schulformen oder Altersgruppen ist daher nicht möglich. Zudem erlaubt das gewählte Pre-Post-Design ohne Kontrollgruppe keine eindeutigen kausalen Aussagen über die Wirksamkeit der durchgeführten Unterrichtseinheit.

Eine weitere Einschränkung betrifft die Erhebung und Auswertung der offenen Begründungen. Diese setzen ein gewisses Maß an sprachlicher Ausdrucksfähigkeit voraus, sodass insbesondere bei sprachlich schwächeren Schüler:innen vorhandene Vorstellungen möglicherweise nicht vollständig oder nur verkürzt erfasst werden konnten.

Schließlich ist zu berücksichtigen, dass das Untersuchungsdesign ausschließlich kurzfristige Lernentwicklungen erfasst. Aussagen über die Stabilität oder Nachhaltigkeit der beobachteten Veränderungen im probabilistischen Denken sind auf Grundlage der vorliegenden Daten nicht möglich. Insbesondere bleibt offen, inwieweit sich neu entwickelte Vorstellungen langfristig festigen oder in anderen Kontexten erneut von intuitiven Deutungen überlagert werden.

## 7 Implikationen für die Unterrichtspraxis

Aus den Ergebnissen der Studie lassen sich mehrere Hinweise für die Gestaltung von Unterricht zu Zufall und Wahrscheinlichkeit ableiten. Besonders deutlich wird die Bedeutung lebensnaher Kontexte, da diese bei vielen Schüler:innen stabile intuitive Denkweisen aktivieren, die auch nach der Unterrichtseinheit bestehen bleiben. Diese Stabilität lässt sich unter anderem damit erklären, dass im schulischen Unterricht und in Schulbüchern häufig vorwiegend einfache, formal strukturierte Zufallsexperimente wie Münz- oder Würfelwürfe sowie Urnenmodelle behandelt werden, während komplexere alltagsbezogene Wahrscheinlichkeitsaussagen vergleichsweise selten systematisch thematisiert werden.

Vor diesem Hintergrund erscheint es didaktisch sinnvoll, lebensnahe Kontexte nicht nur punktuell einzusetzen, sondern sie gezielt und wiederholt in den Unterricht zu integrieren. Dabei sollte der Fokus nicht allein auf der richtigen Lösung liegen, sondern insbesondere auf der bewussten Auseinandersetzung mit typischen naiven Deutungen und deren Abgrenzung von probabilistischen Modellen. Aufgaben zu Lotto, Wettervorhersagen oder Risikoabschätzungen bieten hierfür geeignete Anknüpfungspunkte, erfordern jedoch eine sorgfältige didaktische Gestaltung.

Im Anschluss werden zwei Unterrichtssequenzen vorgestellt, die an zentrale Fehlvorstellungen aus der vorliegenden Untersuchung anknüpfen. Ziel ist es, typische Deutungen von Wahrscheinlichkeit aufzugreifen und durch geeignete Lernumgebungen weiterzuentwickeln. Die Konzeption der Sequenzen orientiert sich an den zuvor dargestellten Ergebnissen und legt besonderen Wert auf handlungsorientierte Lernphasen sowie die reflektierte Auseinandersetzung mit Fehlvorstellungen.

### 7.1 Unterrichtssequenz: Interpretation von Wetterwahrscheinlichkeiten

Die folgende Unterrichtseinheit ist für die 7. Schulstufe konzipiert und dient der Einführung in die Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen anhand eines alltagsnahen Kontextes. Ausgangspunkt bildet eine typische Wetteraussage, wie sie den Schüler:innen aus ihrem Alltag vertraut ist.

Die Gestaltung der Stunde orientiert sich an einem konstruktivistischen Lernverständnis, bei dem vorhandene Vorstellungen der Schüler:innen als Ausgangspunkt des Lernprozesses genutzt werden. Anstatt eine fachliche Erklärung vorzugeben, werden

zunächst intuitive Deutungen gesammelt, anschließend durch eine konkrete Handlungssituation reflektiert und daraus schrittweise eine fachlich angemessene Bedeutung entwickelt.

#### 7.1.1 Lernziele der Stunde

Die Unterrichtssequenz verfolgt mehrere miteinander verbundene Lernziele. Die Schüler:innen sollen ihre eigenen Vorstellungen zu Wahrscheinlichkeit formulieren und erkennen, dass unterschiedliche Deutungen möglich sind. Darüber hinaus sollen sie verstehen, dass Wahrscheinlichkeit nicht mit Sicherheit gleichgesetzt werden kann und dass Wahrscheinlichkeitsaussagen Aussagen über viele vergleichbare Fälle und nicht über einzelne Ereignisse darstellen. Ein weiteres Ziel besteht darin, typische Fehlinterpretationen von Wahrscheinlichkeiten zu reflektieren und schrittweise eine mathematische Fachsprache zu entwickeln.

Diese Lernziele knüpfen direkt an die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung an, in denen sich gezeigt hat, dass insbesondere bei alltagsnahen Kontexten stabile intuitive Deutungen bestehen bleiben und fachliche Einsichten nicht automatisch auf neue Situationen übertragen werden.

#### 7.1.2 Einstieg in die Stunde: Herstellung eines Alltagsbezugs

Zu Beginn der Unterrichtseinheit stellt die Lehrperson einen direkten Bezug zur Lebenswelt der Schüler:innen her. Dazu wird eine reale oder realitätsnahe Wettervorhersage an der Tafel oder auf einer Leinwand präsentiert (Abbildung 21). Entweder kann eine vorbereitete Darstellung verwendet werden oder es wird auf eine aktuelle Wettervorhersage zurückgegriffen.

Die Lehrperson richtet anschließend eine offene Frage an die Klasse, etwa: „Was bedeutet diese Wetteraussage für morgen?“ Nach einer kurzen Denkpause werden die Schüler:innen aufgefordert, ihre spontane Einschätzung schriftlich festzuhalten. Dazu formuliert die Lehrperson die Arbeitsanweisung: „Schreibt bitte ganz spontan auf: Was bedeutet diese Aussage für euch?“

Der Einstieg erfolgt bewusst ohne fachliche Erklärung, da zunächst die individuellen Vorstellungen der Schüler:innen möglichst unverfälscht sichtbar gemacht werden sollen. Eine frühzeitige inhaltliche Erläuterung könnte die Antworten der Lernenden beeinflussen und dazu führen, dass vorhandene intuitive Deutungen nicht mehr authentisch erfasst

werden. Ziel dieser Phase ist es daher, ein möglichst breites Spektrum an spontanen Vorstellungen zu erfassen, das als Ausgangspunkt für die weitere inhaltliche Auseinandersetzung dient.

Typische Antworten der Schüler:innen können beispielsweise sein:

- Es regnet sicher.
- Morgen regnet es.
- Morgen regnet es 70 % des Tages.
- Morgen regnet es zu 70%.
- Es regnet wahrscheinlich.
- Es regnet lange.
- Es regnet an vielen Orten.
- Es könnte auch trocken bleiben.

Diese möglichen Antworten sind didaktisch besonders wertvoll, da sie unterschiedliche intuitive Deutungen widerspiegeln und somit eine zentrale Grundlage für die anschließende fachliche Klärung und Weiterentwicklung probabilistischen Denkens bilden.



Abbildung 21: Wettervorhersage

### 7.1.3 Diagnosephase: Sichtbarmachen von Vorstellungen

Nach dem Einstieg folgt eine kurze Phase der gemeinsamen Sammlung und Strukturierung der Schüler:innenaussagen. Ziel dieser Phase ist es, die unterschiedlichen

Bedeutungen sichtbar zu machen und als Ausgangspunkt für die anschließende inhaltliche Klärung zu nutzen.

Die Lehrperson bittet einzelne Schüler:innen, ihre Antworten vorzulesen oder kurz zu erläutern. Zentrale Begriffe oder Aussagen werden dabei an der Tafel festgehalten. In einem nächsten Schritt werden die genannten Aussagen gemeinsam geordnet, ohne sie unmittelbar als richtig oder falsch zu bewerten. Die Lehrperson kann diesen Prozess beispielsweise durch eine Frage wie „Lasst uns diese Aussagen einmal sortieren. Worin unterscheiden sie sich?“ anregen.

Die Antworten lassen sich anschließend in einfache Kategorien einteilen, etwa in Bezug auf Sicherheit (z. B. „Es regnet sicher“), Zeit (z. B. „Es regnet lange“), Ort (z. B. „Es wird an 70 % der Orte regnen“) oder Häufigkeit (z. B. „Es regnet öfter als nicht“).

Diese Strukturierung ist aus didaktischer Perspektive bedeutsam, da Fehlvorstellungen zunächst sichtbar gemacht und sprachlich gefasst werden müssen, bevor sie im weiteren Unterricht fachlich aufgegriffen und bearbeitet werden können.

#### 7.1.4 Modellphase: Veranschaulichung der Bedeutung von Wahrscheinlichkeit

Nach der Sammlung und Strukturierung der Vorstellungen folgt die zentrale Phase der Unterrichtssequenz, in der die Bedeutung von Wahrscheinlichkeit anhand eines konkreten Modells erfahrbar gemacht werden soll. Ziel ist es, ausgehend von dieser Erfahrung gemeinsam eine fachlich angemessene Deutung zu entwickeln.

Dazu verwendet die Lehrperson zehn Karten, die auf der Vorderseite mit den Begriffen „Regentag“ (sieben Stück) oder „kein Regen“ (drei Stück) beschriftet sind (Abbildung 22). Die Rückseiten der Karten sind identisch gestaltet, sodass die Schüler:innen vor dem Ziehen nicht erkennen können, welche Karte sie auswählen. Auf diese Weise soll eine zufällige Auswahl ermöglicht werden und eine bewusste Entscheidung ausgeschlossen werden.

Die Lehrperson erläutert die Situation anschließend in einer für die Schüler:innen verständlichen Weise, beispielsweise mit den Worten: „Diese Karten stehen für viele ähnliche Tage mit vergleichbaren Wetterbedingungen. Wir wissen vorher nicht, welcher Tag ein Regentag ist und welcher nicht. Deshalb ziehen wir die Karten zufällig.“

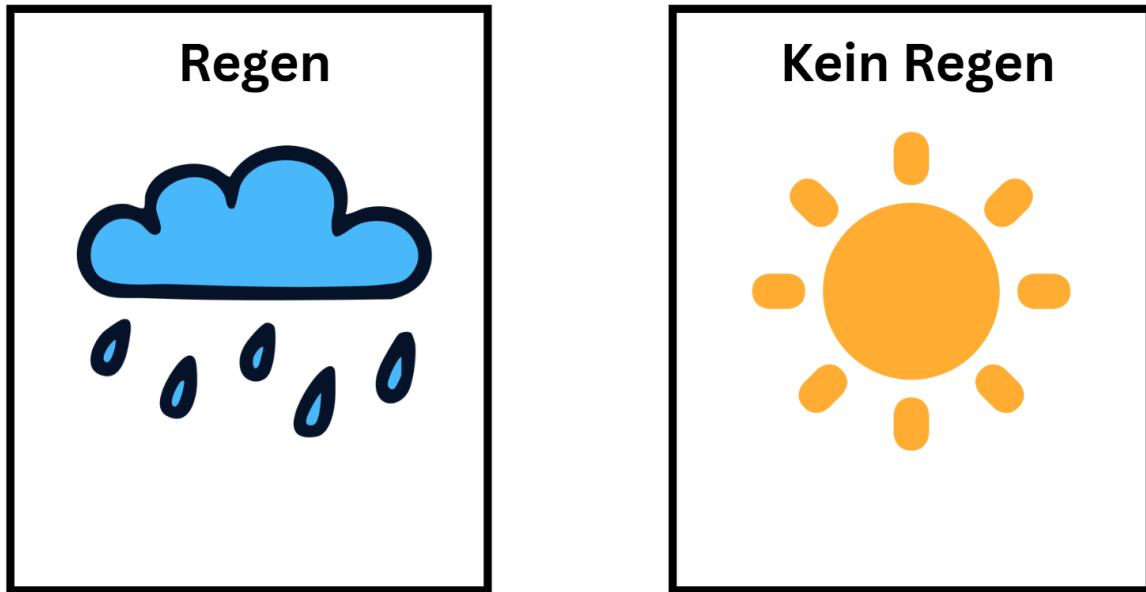


Abbildung 22: Regen Karten

Die Karten werden anschließend gemischt und eine Karte wird gezogen. Angenommen, es wird eine Karte mit der Aufschrift „kein Regen“ gezogen. Daraufhin stellt die Lehrperson die Frage: „Ist das ein Fehler?“

In der Regel erkennen die Schüler:innen rasch, dass ein trockener Tag trotz einer hohen Regenwahrscheinlichkeit möglich ist. Typische Antworten lauten beispielsweise: „Nein“ oder „Das kann passieren“. Anschließend stellt die Lehrperson eine weiterführende Frage: „Warum ist das kein Fehler?“

Durch diese Fragen wird zunächst deutlich, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen keine Garantie für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses darstellen. In einem nächsten Schritt erfolgt die gezielte fachliche Klärung der Bedeutung von Wahrscheinlichkeit. Die Lehrperson greift die Situation auf und formuliert die zentrale Aussage beispielsweise folgendermaßen: „Wenn wir sagen, die Regenwahrscheinlichkeit beträgt 70 %, bedeutet das nicht, dass es sicher regnet. Es bedeutet auch nicht, dass es 70 % des Tages regnet oder dass es auf 70 % der Fläche regnet. Gemeint ist vielmehr, dass es bei vielen ähnlichen Wetterlagen in etwa sieben von zehn Fällen regnet.“

Diese Erklärung verdeutlicht die fachliche Bedeutung von Wahrscheinlichkeit als Aussage über relative Häufigkeiten in vielen vergleichbaren Situationen. Die Schüler:innen erkennen dadurch, dass Wahrscheinlichkeiten nicht einzelne Ereignisse beschreiben,

sondern langfristige Tendenzen in wiederholbaren Situationen(frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff).

Zur weiteren Verdeutlichung kann die Lehrperson die Karten mehrfach ziehen lassen und die Ergebnisse gemeinsam erfassen. Dabei zeigt sich, dass in mehreren Durchgängen häufiger „Regentag“ als „kein Regen“ auftritt, ohne dass das Ergebnis eines einzelnen Ziehens vorherbestimmt ist. Auf diese Weise wird die Verbindung zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit konkret erfahrbar.

Die fachliche Klärung erfolgt somit nicht durch eine isolierte Definition, sondern wird aus der Handlungssituation heraus entwickelt und sprachlich präzisiert. Dieses Vorgehen ist didaktisch besonders bedeutsam, da abstrakte Begriffe nicht nur erklärt, sondern verstehbar gemacht und in einen erfahrbaren Zusammenhang eingebettet werden.

#### 7.1.5 Sicherungsphase: Formulierung einer zentralen Erkenntnis

Am Ende der Unterrichtssequenz erfolgt eine gemeinsame Sicherung der zentralen Erkenntnisse. Die Lehrperson stellt dazu eine offene Frage wie: „Was haben wir heute gelernt?“ Die Schüler:innen formulieren ihre Erkenntnisse in eigenen Worten. Anschließend wird ein gemeinsamer Merksatz entwickelt und im Heft festgehalten. Eine mögliche Formulierung lautet: „Eine Wahrscheinlichkeit beschreibt, wie oft etwas bei vielen ähnlichen Situationen passiert. Sie bedeutet nicht, dass etwas sicher eintritt. Zum Beispiel bedeutet eine Regenwahrscheinlichkeit von 70 %, dass es bei vielen ähnlichen Wetterlagen in etwa sieben von zehn Fällen regnet.“

#### 7.1.6 Rolle der Lehrperson und der Schüler:innen

In dieser Unterrichtseinheit übernimmt die Lehrperson die Rolle einer Moderatorin oder eines Moderators, der Lernprozesse begleitet und strukturiert. Sie stellt Fragen, sammelt Antworten, ordnet Aussagen und unterstützt die Reflexion, ohne von Beginn an fertige Lösungen vorzugeben. Dadurch entsteht eine Lernumgebung, in der Denken und Verstehen im Mittelpunkt stehen.

Die Schüler:innen übernehmen hingegen eine aktive Rolle im Lernprozess. Sie formulieren eigene Vorstellungen, vergleichen unterschiedliche Sichtweisen, diskutieren mögliche Bedeutungen und entwickeln schrittweise ein fachlich angemessenes Verständnis von Wahrscheinlichkeit. Auf diese Weise werden sie nicht zu passiven Zuhörer:innen, sondern zu aktiv handelnden Lernenden.

## 7.2 Unterrichtssequenz: Vergleich von Würfelkombinationen

In der folgenden Unterrichtssequenz wird die Fragestellung von Frage 13 der vorliegenden Untersuchung aufgegriffen und in ein konkretes Unterrichtsbeispiel übertragen. Dabei geht es um den Vergleich der Wahrscheinlichkeiten zweier Würfelkombinationen beim einmaligen Werfen zweier fairer Würfel.

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigten, dass viele Schüler:innen davon ausgingen, dass unterschiedliche Würfelkombinationen gleich wahrscheinlich seien, ohne die Anzahl möglicher Kombinationen zu berücksichtigen. Kombinatorische Überlegungen wurden also nur selten herangezogen.

Ziel der Unterrichtssequenz ist es daher, den Zusammenhang zwischen der Anzahl möglicher Kombinationen und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verständlich zu machen und diesen Zusammenhang durch eine kombinatorische Betrachtung sowie eine grafische Darstellung mithilfe einer digitalen Simulation zu veranschaulichen.

### 7.2.1 Einstieg: Vergleich zweier Würfelkombinationen

Zu Beginn der Unterrichtssequenz stellt die Lehrperson den Schüler:innen eine Problemstellung vor, die an die Fragestellung der Untersuchung anknüpft:

„Zwei faire Würfel werden einmal geworfen. Was ist wahrscheinlicher: die Kombination 5 und 6 oder die Kombination 6 und 6?“

Die Schüler:innen werden zunächst aufgefordert, ihre Einschätzung zu äußern und kurz zu begründen. Dabei können unterschiedliche Antworten auftreten, beispielsweise die Annahme, dass beide Ereignisse gleich wahrscheinlich seien oder dass bestimmte Zahlen häufiger auftreten. Diese Phase dient dazu, vorhandene Vorstellungen sichtbar zu machen und als Ausgangspunkt für die weitere inhaltliche Auseinandersetzung zu nutzen.

### 7.2.2 Erarbeitungsphase: Kombinatorische Überlegung

Im nächsten Schritt erfolgt eine erste fachliche Klärung durch eine kombinatorische Betrachtung der möglichen Ergebnisse. Die Lehrperson kann dazu die möglichen Würfelkombinationen gemeinsam mit den Schüler:innen darstellen oder an der Tafel notieren.

Dabei wird deutlich, dass die Kombination 5 und 6 auf zwei verschiedene Arten auftreten kann (5 und 6; 6 und 5). Die Kombination 6 und 6 hingegen kann nur auf eine einzige Weise auftreten (6 und 6).

Durch diese einfache kombinatorische Überlegung erkennen die Schüler:innen, dass die Kombination 5 und 6 mehr mögliche Realsituationen besitzt und daher wahrscheinlicher ist als die Kombination 6 und 6. Auf diese Weise wird der Zusammenhang zwischen der Anzahl möglicher Kombinationen und der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verständlich gemacht.

### 7.2.3 Vertiefung: Digitale Simulation und grafische Darstellung

Zur Veranschaulichung können Simulationen mit einer großen Anzahl von Wiederholungen eingesetzt werden. Eine solche Vorgehensweise stellt eine zusätzliche Möglichkeit dar, probabilistische Zusammenhänge sichtbar zu machen, die im regulären Unterricht mit realen Würfelwürfen nur eingeschränkt erfahrbar sind.

Der Einsatz digitaler Simulationen kann daher als erweiternde und besonders anschauliche Ergänzung zum Unterricht verstanden werden, die über die üblichen Unterrichtsaktivitäten hinausgeht und neue Perspektiven auf Zufallsprozesse eröffnet. In der vorliegenden Umsetzung wird dazu ein einfaches Python-Programm verwendet, das die Würfelwürfe simuliert und die Häufigkeit der betrachteten Ereignisse grafisch darstellt. Der verwendete Programmcode ist bewusst einfach gehalten und erfordert keine vertieften Programmierkenntnisse. Dadurch kann die Simulation von Lehrpersonen mit grundlegenden technischen Kenntnissen schnell umgesetzt und flexibel im Unterricht eingesetzt werden. In den Abbildungen 23 und 24 sind sowohl der Programmcode als auch die grafische Darstellung der Ergebnisse dargestellt.

```

import random
import matplotlib.pyplot as plt

anzahl_wuerfe = 1000

count_5_6 = 0
count_6_6 = 0

x = []
treffer_5_6 = []
treffer_6_6 = []

for wurf in range(1, anzahl_wuerfe + 1):

    w1 = random.randint(a=1, b=6)
    w2 = random.randint(a=1, b=6)

    if (w1 == 5 and w2 == 6) or (w1 == 6 and w2 == 5):
        count_5_6 += 1

    if w1 == 6 and w2 == 6:
        count_6_6 += 1

    x.append(wurf)
    treffer_5_6.append(count_5_6)
    treffer_6_6.append(count_6_6)

plt.plot(*args: x, treffer_5_6, color="blue", label="5 und 6")
plt.plot(*args: x, treffer_6_6, color="red", label="6 und 6")

plt.xlabel("Anzahl Würfe")
plt.ylabel("Anzahl Treffer")
plt.title("Simulation: 5 und 6 vs. 6 und 6")

plt.legend()
plt.grid(True)

plt.show()

# sorgt dafür, dass das Fenster sicher offen bleibt
input("Enter drücken zum Beenden...")

```

Abbildung 23: Python Code

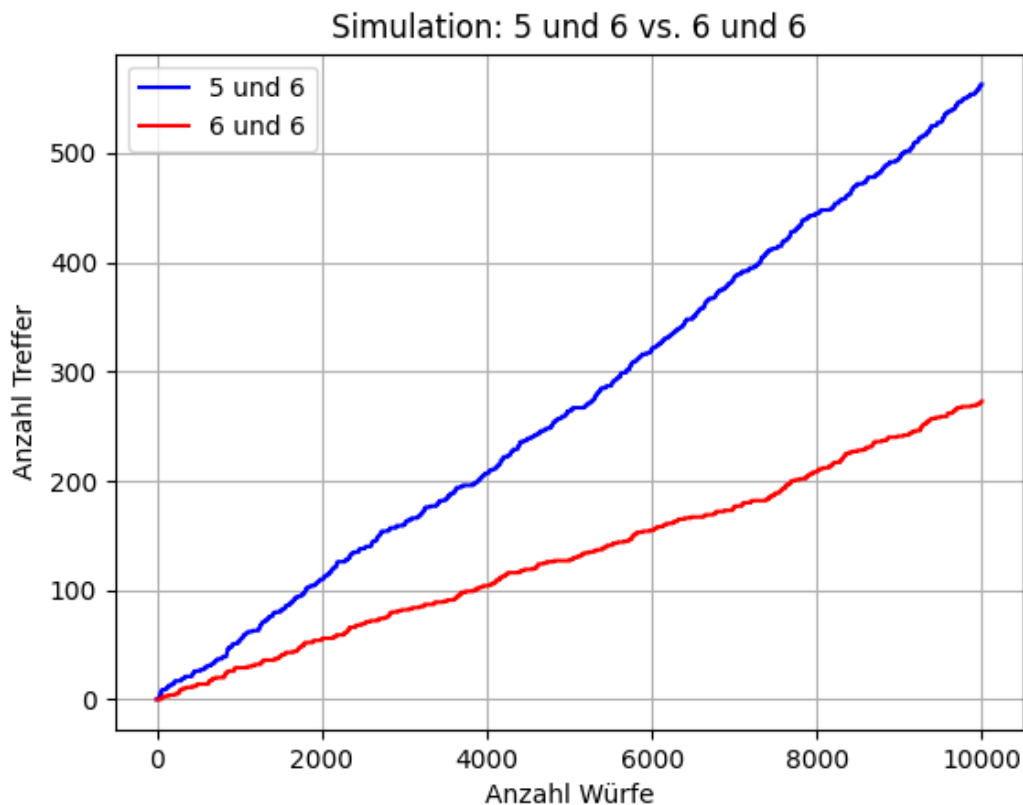


Abbildung 24: Python Häufigkeit

Die grafische Darstellung ermöglicht es den Schüler:innen, die Entwicklung der Häufigkeiten über viele Wiederholungen hinweg zu beobachten. Dabei wird sichtbar, dass die Kombination 5 und 6 im Verlauf der Simulation häufiger auftritt als die Kombination 6 und 6, obwohl beide Ereignisse in einzelnen Würfeln zufällig auftreten können.

Die Visualisierung unterstützt insbesondere das Verständnis dafür, dass Wahrscheinlichkeiten nicht auf einzelnen Ereignissen beruhen, sondern auf der Anzahl möglicher Kombinationen und deren Auftreten in vielen Wiederholungen. Gleichzeitig wird der Umgang mit digitalen Werkzeugen im Mathematikunterricht gefördert.

Der Einsatz einer solchen Simulation stellt eine sinnvolle Ergänzung zum Unterricht dar, insbesondere wenn Lehrpersonen über entsprechende technische Kenntnisse verfügen oder digitale Medien gezielt einsetzen möchten. Python bietet hierfür eine leicht zugängliche Möglichkeit, Zufallsprozesse zu simulieren und Ergebnisse anschaulich darzustellen. Darüber hinaus kann die Anzahl der Würfe sowie die Auswahl der

betrachteten Kombinationen mit wenigen Anpassungen im Programmcode verändert werden. Dadurch lässt sich die Simulation flexibel an unterschiedliche Fragestellungen anpassen und für die Schüler:innen abwechslungsreich und motivierend gestalten.

#### 7.2.4 Erweiterung und Verallgemeinerung

Im Anschluss an die Simulation kann die Lehrperson gemeinsam mit den Schüler:innen darüber nachdenken, ob sich das dargestellte Prinzip auch auf andere Würfelkombinationen übertragen lässt. Dabei wird deutlich, dass der Vergleich von Wahrscheinlichkeiten grundsätzlich für alle möglichen Kombinationen zweier Würfel durchgeführt werden kann.

So kann beispielsweise untersucht werden: Welche Summe tritt am häufigsten auf? Welche Kombinationen sind besonders selten? Wie verändert sich die Häufigkeit bei vielen Wiederholungen? Was ist der Erwartungswert?

Durch diese Erweiterung wird das grundlegende Prinzip offen gelegt. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses hängt davon ab, wie viele mögliche Kombinationen zu diesem Ereignis gehören.

#### 7.2.5 Didaktische Bedeutung der Unterrichtssequenz

Die beschriebene Unterrichtssequenz verbindet eine einfache kombinatorische Überlegung mit einer digitalen Simulation und einer grafischen Darstellung der Ergebnisse. Dadurch wird ein abstraktes mathematisches Konzept auf eine anschauliche und nachvollziehbare Weise vermittelt.

Gleichzeitig zeigt die Sequenz exemplarisch, wie digitale Werkzeuge als ergänzendes Element im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Insbesondere für technisch affine Lehrpersonen bietet die Nutzung von Programmiersprachen wie Python eine Möglichkeit, Zufallsprozesse zu simulieren und mathematische Zusammenhänge visuell darzustellen. Dabei steht nicht die Programmierung selbst im Vordergrund, sondern das Verständnis probabilistischer Zusammenhänge.

## 8 Literatur

Borovcnik, Manfred / Götz, Stefan / Maaß, Jürgen (2018):

Ein literarischer Zugang zu Zufall und Wahrscheinlichkeit. *Stochastik in der Schule*, 38(2), 2–17.

Bortz, Jürgen / Döring, Nicola (2006):

Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler. Berlin: Springer.

Brosius, Felix (2018):

SPSS: Umfassendes Handbuch zu Statistik und Datenanalyse. Frechen: mitp Professional.

Döhrmann, Martina (2004):

Schülervorstellungen zum Begriff „Zufall“. In: *Zufall, Aktien und Mathematik – Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 1-4.

Grouven, Uwe / Bender, Ralf / Ziegler, Andreas / Lange, Stefan (2007):

Der Kappa-Koeffizient – Artikel Nr. 23 der Statistik-Serie in der DMW. *Deutsche Medizinische Wochenschrift*, 132(40), 65-68.

Hauer-Typpelt, Petra (2020):

*Der Zufall und die Mathematik*. Antrittsvorlesungen an der KPH Wien/Krems, Bd. 5. Wien/Krems: Kirchliche Pädagogische Hochschule Wien/Krems.

Humenberger, Johann (Hrsg.) / Himmelsbach, Michael / Hasibeder, Johannes / Schüller-Reichl, Johanna / Aue, Vera (2025):

*Das ist Mathematik 3*. Schulbuch. Wien: ÖBV.

Husereau, Tracy / Cousineau, Denis / Zang, Shuo / Gibeau, Rose-Marie (2024):

A Compendium of Common Heuristics, Misconceptions, and Biased Reasoning used in Statistical Thinking. *The Quantitative Methods for Psychology*, 20(1), 57–59.

Khazanov, Leonid / Prado, Lucio (2010):

Correcting Students' Misconceptions about Probability in an Introductory College Statistics Course. *Adults Learning Mathematics – An International Journal*, 5(1), 23–35.

Krüger, Katja / Sill, Hans-Dieter / Sikora, Christine (2015):

*Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II.* Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.

Mayring, Philipp (2015):

*Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken.* 12. Auflage. Weinheim und Basel: Beltz.

Neuman, William Lawrence (1997):

*Social Research Methods: Qualitative and Quantitative Approaches.* Boston: Allyn and Bacon.

Precht, Alexandra / von Schroeders, Nicolai (2018):

„Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik. *Stochastik in der Schule*, 38(3), 2–11.

Talawat, Puttoei (2015):

*Thai Secondary School Students' Probability Misconceptions: The Impact of Formal Instruction.* Dissertation, University of California, Santa Barbara.

Tversky, Amos / Kahneman, Daniel (1971):

Belief in the Law of Small Numbers. *Psychological Bulletin*, 76(2), 105–110.

Internetquellen:

RIS – Rechtsinformationssystem des Bundes (2026):

*Bundesnorm / Lehrplan zur Stochastik.* Online verfügbar unter:

<https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=> Zugriff am 21.02.2026.

## 9 Anhang

Der Anhang enthält ergänzende Materialien und Auswertungen, die der Transparenz und Nachvollziehbarkeit der vorliegenden Untersuchung dienen. Dazu zählen der eingesetzte Fragebogen, Auszüge aus der Kategoriendefinition der qualitativen Inhaltsanalyse sowie detaillierte Tabellen zu den Pre- und Post-Ergebnissen. Auf die entsprechenden Materialien wird im Text an geeigneten Stellen verwiesen.

### 9.1 Fragebogen

#### Fragebogen Zufall & Wahrscheinlichkeit:

**Liebe Schülerin, lieber Schüler,**

dieser Fragebogen soll herausfinden, wie du über Zufall und Wahrscheinlichkeit denkst.

Es gibt keine richtigen oder falschen Antworten – wichtig ist, was du wirklich denkst.

Bitte lies jede Frage aufmerksam und beantworte sie ehrlich.

Bitte kreuze an oder trage ein, was zutrifft.

Deine Angaben bleiben **anonym** und werden **nur für die Forschung** verwendet.

Danke für deine Teilnahme!

☐ Pre-Test (vor der Einheit)

☐ Post-Test (nach der Einheit)

| Merkmal                                                                                                           | Antwort                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Schülercode</b> ( <i>Initialen</i> und den <i>Geburtsmonat</i> deiner Mutter oder deines Vaters. z. B. „SB05“) |                                                                                                                                |
| <b>Alter</b>                                                                                                      | <input type="checkbox"/> 12 <input type="checkbox"/> 13 <input type="checkbox"/> 14 <input type="checkbox"/> 15 anderes: _____ |
| <b>Geschlecht</b>                                                                                                 | <input type="checkbox"/> Mädchen <input type="checkbox"/> Bursche <input type="checkbox"/> divers                              |
| <b>Sprache, die du zu Hause meist sprichst</b>                                                                    | _____                                                                                                                          |

|                                                                               |                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Wie gern magst du Mathematik?</b>                                          | <input type="checkbox"/> gar nicht <input type="checkbox"/> eher nicht <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> gern <input type="checkbox"/> sehr gern             |
| <b>Wie leicht fällt dir Mathematik im Allgemeinen?</b>                        | <input type="checkbox"/> sehr schwer <input type="checkbox"/> eher schwer <input type="checkbox"/> mittel <input type="checkbox"/> eher leicht <input type="checkbox"/> sehr leicht |
| <b>Hast du schon einmal etwas über Zufall oder Wahrscheinlichkeit gehört?</b> | <input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein <input type="checkbox"/> weiß nicht                                                                                       |
| <b>Wenn ja, wo?</b>                                                           | <input type="checkbox"/> Schule <input type="checkbox"/> Familie <input type="checkbox"/> Fernsehen/Internet <input type="checkbox"/> anderes: _____                                |

**1. Was bedeutet für dich „Zufall“?**

---



---

**2. Nenne ein Beispiel aus deinem Alltag, wo etwas zufällig passiert.**

---



---

**3. Kann man Zufall beeinflussen/steuern? Warum / Warum nicht?**

---



---

**4. Was bedeutet „Wahrscheinlichkeit“? (Bitte ankreuzen.)**

- ☐ Wie sicher etwas passiert
- ☐ Wie oft etwas passiert
- ☐ Nur ein Gefühl
- ☐ Weiß ich nicht

**5. Wo begegnet dir Zufall im Alltag? (Mehrfach möglich)**

- ☐ Spiele
- ☐ Wetter
- ☐ Internet (Social Media...)
- ☐ Verkehr (Straßenbahn)
- ☐ Anderes: \_\_\_\_\_

*Erklärung: „Eine **faire Münze** hat zwei gleich große und gleich schwere Seiten, sodass keine Seite bevorzugt wird. „**Kopf = K**“ bezeichnet die Seite mit dem Bild, „**Zahl = Z**“ die Seite mit der Zahl.“*

**6. Eine faire Münze wird 5-mal hintereinander mit „Kopf“ geworfen. Was glaubst du, kommt beim nächsten Wurf?**

- ☐ Kopf   ☐ Zahl   ☐ Beides gleich

Warum glaubst du das?

---

**7. Welche Reihenfolge ist am wahrscheinlichsten? (K = Kopf, Z = Zahl)**

- ☐ K-Z-K-Z-K
- ☐ K-K-K-Z-Z
- ☐ Z-K-K-Z-K
- ☐ Z-K-Z-Z-Z
- ☐ Alle gleich

Warum glaubst du das?

---

**8. Welche Reihenfolge ist am wenigsten wahrscheinlich? (K = Kopf, Z = Zahl)**

- ☐ K-Z-K-Z-K
- ☐ K-K-K-Z-Z
- ☐ Z-K-K-Z-K
- ☐ Z-K-Z-Z-Z
- ☐ Alle gleich

Warum glaubst du das?

---

**9. Wenn du ganz oft eine Münze wirfst, kommt dann ...**

- ☐ Kopf öfter
- ☐ Zahl öfter
- ☐ Beides gleich
- ☐ Weiß ich nicht

Warum glaubst du das?

---

**10. In einem Säckchen sind 8 rote und 2 blaue Kugeln.**

**Kannst du vorher sicher sagen, welche Farbe du ziehst?**

- ☐ Ja: rot
- ☐ Ja: blau
- ☐ Nein, Zufall
- ☐ Ich kann es fühlen oder erraten

Warum glaubst du das?

---

**11. Welche Farbe wird deiner Einschätzung nach mit höherer Wahrscheinlichkeit gezogen (siehe Frage 10)?**

- ☐ Rot
- ☐ Blau
- ☐ Beides gleich wahrscheinlich

Warum glaubst du das?

---

**12. Im Lotto werden Zahlen zufällig gezogen.**

Tim: 21, 22, 23, 24, 25, 26 | Nina: 1, 10, 12, 15, 30, 40

Wer hat die größere Gewinnchance?

- ☐ Tim
- ☐ Nina
- ☐ Beide gleich

Warum glaubst du das?

---

**13. Zwei faire Würfel werden einmal geworfen: Was ist wahrscheinlicher?** *(Ein fairer Würfel hat sechs gleich große Flächen mit den Zahlen 1 bis 6, und jede Zahl hat die gleiche Chance, geworfen zu werden.)*

- ☐ 5 und 6
- ☐ 6 und 6
- ☐ Beides gleich wahrscheinlich

Warum glaubst du das?

---

**14. Wenn man oft mit einem fairen Würfel würfelt: Welche Zahl kommt am häufigsten?**

- ☐ 6
- ☐ 1
- ☐ Alle gleich oft
- ☐ Weiß ich nicht

Warum glaubst du das?

---

**15. Im Wetterbericht steht 70 % Regenwahrscheinlichkeit für morgen. Was bedeutet das?**

- ☐ Es wird 70 % des Tages regnen
- ☐ In 70 % aller ähnlichen Wetterlagen hat es tatsächlich geregnet
- ☐ An 70 % der Orte wird es regnen
- ☐ Weiß ich nicht

Warum glaubst du das?

---

**16. Stell dir vor, du spielst ein Würfelspiel: Du musst eine 6 würfeln, um zu gewinnen. Du hast schon viele Male verloren. Denkst du, dass du beim nächsten Wurf bestimmt eine 6 würfelst?**

- ☐ Ja
- ☐ Nein
- ☐ Weiß ich nicht

Warum glaubst du das?

---

**17. Wie sicher fühlst du dich bei dem Thema Zufall?** (0 = sehr unsicher/ 10 = sehr sicher)

**Ich fühle mich: \_\_\_\_ / 10 sicher**

Warum glaubst du das?

---

**18. Wie sicher fühlst du dich bei dem Thema Wahrscheinlichkeit?** (0 = sehr unsicher/ 10 = sehr sicher)

**Ich fühle mich: \_\_\_\_ / 10 sicher**

Warum glaubst du das?

---

**19. Denkst du im Alltag über Zufall nach?**

- ☐ Nie
- ☐ Selten
- ☐ Manchmal
- ☐ Oft

## 9.2 Kategorie-System

**Frage 1:**

| Code | Kategorie                     | Definition                                                                        |
|------|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Alltagsbezogen / unspezifisch | Zufall wird alltagssprachlich beschrieben, ohne klare Abgrenzung oder Erklärung.  |
| 2    | Unvorhersehbarkeit            | Zufall wird als etwas beschrieben, dessen Ausgang nicht vorhergesagt werden kann. |
| 3    | Nicht beeinflussbar           | Zufall wird als grundsätzlich nicht steuer- oder kontrollierbar verstanden.       |

|   |                             |                                                                                                                                                                         |
|---|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | Emotional bewerteter Zufall | Ohne Bezug auf mathematische Eigenschaften von Zufall.<br><br>Zufall wird über negative oder positive Bewertung beschrieben („etwas Schlechtes“, „was ich nicht will“). |
| 5 | Deterministisch / steuerbar | Zufall wird als beeinflussbar oder kontrollierbar dargestellt.                                                                                                          |
| 6 | Kein Konzept / unklar       | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich).                                                                                              |

**Frage 2:**

| Code | Kategorie                   | Definition                                                                                |
|------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Spiele / Zufallsexperimente | Zufall wird anhand von Spielen oder klassischen Zufallsexperimenten beschrieben.          |
| 2    | Wetter / Natur              | Zufall wird mit Natur- oder Wetterereignissen verknüpft.                                  |
| 3    | Glück / Pech                | Zufall wird als Ausdruck von Glück, Pech oder Schicksal verstanden.                       |
| 4    | Schule / Alltag             | Zufall wird auf alltägliche Situationen außerhalb klassischer Zufallsexperimente bezogen. |
| 5    | Kein echtes Zufallsbeispiel | Das Beispiel enthält keinen zufälligen Prozess.                                           |
| 6    | Kein Konzept / unklar       | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich).                |

**Frage 3:**

| Code | Kategorie                            | Definition                                                                 |
|------|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Zufall beeinflussbar                 | Zufall wird explizit als steuer- oder beeinflussbar dargestellt.           |
| 2    | Zufall nicht beeinflussbar (korrekt) | Zufall wird als nicht steuerbar beschrieben.                               |
| 3    | Teilweise beeinflussbar              | Zufall wird situationsabhängig oder eingeschränkt beeinflussbar gesehen.   |
| 4    | Begründung emotional / Glück         | Begründung stützt sich auf Glück, Gefühl oder persönliche Erfahrung.       |
| 5    | Kein Konzept / unklar                | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |

**Fragen 6–9:**

| Code | Kategorie                                 | Definition                                                                            |
|------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Ausgleichsdenken                          | Annahme, dass sich Ergebnisse kurzfristig ausgleichen müssen. „Jetzt muss ... kommen“ |
| 2    | Musterdenken                              | Beurteilung von Zufallsfolgen anhand ihres Aussehens.                                 |
| 3    | Gleichwahrscheinlichkeit / Unabhängigkeit | Einsicht, dass einzelne Würfe unabhängig und gleich wahrscheinlich sind.              |
| 4    | Intuitive / gefühlsbasierte Begründung    | Begründung ohne Bezug auf Wahrscheinlichkeitsüberlegungen. „fühlt sich so an“         |
| 5    | Kein Konzept / unklar                     | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich).            |

**Fragen 10:**

| Code | Kategorie                                      | Definition                                                                                                         |
|------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Deterministische Sicherheit                    | Eine sichere Vorhersage wird behauptet.                                                                            |
| 2    | Probabilistische Begründung bei Einzelereignis | Wahrscheinlichkeits- oder Mengen/Anzahlargumente werden genutzt, obwohl nach Sicherheit gefragt ist („mehr rote“). |
| 3    | Zufall korrekt erkannt                         | Einsicht, dass das Ergebnis eines einzelnen Ziehens nicht sicher vorhersagbar ist.                                 |
| 4    | Intuitive / emotionale Begründung              | Begründung basiert auf Gefühl oder Vermutung. „man spürt es“.                                                      |
| 5    | Widersprüchliche Begründung                    | Zufall wird genannt, aber gleichzeitig Sicherheit behauptet.                                                       |
| 6    | Kein Konzept / unklar                          | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich).                                         |

**Frage 11:**

|   |                                           |                                                                     |
|---|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1 | Mengenargument/<br>Anzahlargument korrekt | Wahrscheinlichkeitsvergleich auf Basis von Mengenverhältnissen.     |
| 2 | Intuitive / unsystematische Begründung    | Entscheidung ohne expliziten Mengen- oder Wahrscheinlichkeitsbezug. |
| 3 | Gleichwahrscheinlichkeit angenommen       | Annahme gleicher Chancen trotz ungleicher Mengen.                   |
| 4 | Zufall fehlinterpretiert                  | Zufall wird fälschlich als Gegenargument zum Vergleich genutzt.     |

|   |                       |                                                                            |
|---|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 5 | Kein Konzept / unklar | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |
|---|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|

**Frage 12:**

| Code | Kategorie                          | Definition                                                                 |
|------|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Muster- / Reihenfolgedenken        | Bewertung der Gewinnchance anhand des Aussehens der Zahlenfolge.           |
| 2    | Gleichwahrscheinlichkeit (korrekt) | Einsicht, dass alle Zahlenkombinationen gleich wahrscheinlich sind.        |
| 3    | Intuitive / emotionale Begründung  | Entscheidung ohne probabilistische Argumentation.                          |
| 4    | Kein Konzept / unklar              | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |

**Fragen 13:**

| Code | Kategorie                          | Definition                                                                                 |
|------|------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Bevorzugung einzelner Zahlen       | Bestimmte Zahlen werden als wahrscheinlicher angesehen.                                    |
| 2    | Gleichverteilung (Fehlvorstellung) | Einsicht, dass alle Zahlen langfristig gleich häufig auftreten.                            |
| 3    | Intuitive Begründung               | Begründung ohne Bezug auf Gleichverteilung.                                                |
| 4    | Korrekte Kombinatorische Lösung    | Auswahl des wahrscheinlichsten Ergebnisses unter explizitem Bezug auf die Anzahl möglicher |

|   |                       |                                                                            |
|---|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
|   |                       | Kombinationen der Würfelergebnisse.                                        |
| 5 | Kein Konzept / unklar | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |

**Frage 14:**

| Code | Kategorie                    | Definition                                                                 |
|------|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Bevorzugung einzelner Zahlen | Bestimmte Zahlen werden als wahrscheinlicher angesehen.                    |
| 2    | Gleichverteilung             | Einsicht, dass alle Zahlen langfristig gleich häufig auftreten.            |
| 3    | Intuitive Begründung         | Begründung ohne Bezug auf Gleichverteilung.                                |
| 4    | Kein Konzept / unklar        | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |

**Frage 15:**

| Code | Kategorie              | Definition                                                |
|------|------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1    | Prozent als Zeitanteil | Prozentwert wird auf die Dauer des Tages bezogen.         |
| 2    | Prozent als Ortsanteil | Prozentwert wird räumlich interpretiert.                  |
| 3    | Relative Häufigkeit    | Prozentwert wird als langfristige Häufigkeit verstanden.  |
| 4    | Intuitive Begründung   | Begründung basiert auf Gefühlen, Vermutungen oder Medien. |

|   |                       |                                                                            |
|---|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 5 | Kein Konzept / unklar | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |
|---|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|

**Frage 16:**

| Code | Kategorie                       | Definition                                                                 |
|------|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Ausgleichsdenken vorhanden      | Annahme, dass ein Gewinn nach vielen Verlusten wahrscheinlicher wird.      |
| 2    | Ablehnung des Ausgleichsdenkens | Einsicht in die Unabhängigkeit der Würfe.                                  |
| 3    | Intuitive Begründung            | Begründung basiert auf Gefühl oder Vermutung. Glück oder Pech              |
| 4    | Kein Konzept / unklar           | Keine inhaltlich verwertbare Aussage („weiß nicht“, leer, unverständlich). |

## 9.3 Auszüge Rohdaten

| 2. Nenne ein Beispiel aus deinem Alltag, wo etwas zufällig passiert. |           |                             |             |         |          |             |              |  |  |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|-----------------------------|-------------|---------|----------|-------------|--------------|--|--|
| Pre Test                                                             | Post Test |                             |             | Pretest | Posttest | Prozent Pre | Prozent Post |  |  |
| 6                                                                    | 6         | Spiele / Zufallsexperimente | Kategorie 1 | 3       | 0        | 0,06976744  | 0            |  |  |
| 6                                                                    | 4         | Wetter / Natur              | Kategorie 2 | 2       | 2        | 0,04651163  | 0,04651163   |  |  |
| 4                                                                    | 2         | Glück / Pech                | Kategorie 3 | 3       | 2        | 0,06976744  | 0,04651163   |  |  |
| 6                                                                    | 6         | Schule / Alltag             | Kategorie 4 | 25      | 27       | 0,58139535  | 0,62790698   |  |  |
| 4                                                                    | 4         | Kein echtes Zufallsbeispiel | Kategorie 5 | 0       | 1        | 0           | 0,02325581   |  |  |
| 2                                                                    | 4         | Kein Konzept / unklar       | Kategorie 6 | 10      | 11       | 0,23255814  | 0,25581395   |  |  |
| 6                                                                    | 4         |                             |             | 43      | 43       | 1           | 1            |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 1                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 6                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 6                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 1                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 6                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 5         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 3                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 2                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 1                                                                    | 6         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 3                                                                    | 2         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 3                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 3         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 6                                                                    | 3         |                             |             |         |          |             |              |  |  |
| 4                                                                    | 4         |                             |             |         |          |             |              |  |  |

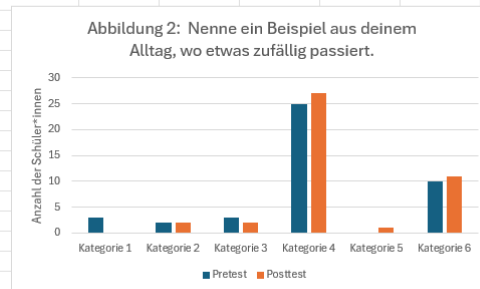


Abbildung 25: Auszüge Rohdaten 1

| 2. Nenne ein Beispiel aus deinem Alltag, wo etwas zufällig passiert.                 | F2_Alltagsbeispiel_Kategorie |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Weiß ich nicht                                                                       | 6                            |
| Wenn ich das gleiche sage was mein Bruder oder Schwester gleichzeitig sagt           | 4                            |
| Einen Unfall, Naturkatastrophe..                                                     | 2                            |
| Nichts                                                                               | 6                            |
| Autounfall                                                                           | 4                            |
| Wenn ich meinen Zug nicht verpasse                                                   | 4                            |
| Auto Unfall                                                                          | 4                            |
| Ich treffe meine Freunde in der Straßenbahn                                          | 4                            |
| Weiß ich nicht                                                                       | 6                            |
| Wenn ich das gleiche sage was mein Bruder oder Schwester gleichzeitig sagt           | 4                            |
| Ich treffe eine Freundin in der Stadt obwohl wir nicht verabredet waren              | 4                            |
| Kann ich nicht                                                                       | 6                            |
| Schule                                                                               | 4                            |
| Ein Autounfall                                                                       | 4                            |
| Auf der Straße                                                                       | 4                            |
|                                                                                      | 6                            |
| Wenn ich und eine Freundin mit dem gleichen Outfit in die Schule kommen              | 4                            |
| Wenn ich einen Bekannten auf der Straße treffe                                       | 4                            |
| Das jemand mich beim Boxen schlägt (also mich zufällig trifft)                       | 4                            |
| Kenne ich keine                                                                      | 6                            |
| Wenn zum Beispiel ich und mein Freund mit der gleichen Kleidung in die Schule kommen | 4                            |
| Als mir meine Mutter ein schwarzes T-Shirt gekauft hat und meine Oma mir auch        | 4                            |
|                                                                                      | 6                            |
| Wenn man von jemanden redet und die Person dann plötzlich in den Raum kommt          | 4                            |
| Nein, kann man nicht weil man nicht wissen kann was in der Zukunft passieren wird    | 5                            |
|                                                                                      | 6                            |
| Wenn man von jemanden redet und die Person dann plötzlich in den Raum kommt          | 4                            |
| Das mein Papa plötzlich vom Sofa fällt                                               | 4                            |
| Weiß ich nicht                                                                       | 6                            |
|                                                                                      | 6                            |
| Wenn ich nach Hause komme und Oma ist zufällig da                                    | 4                            |
| Unfall, Tsunami, Flut....                                                            | 2                            |
| Wo ich meine Freundin in der U-Bahn getroffen habe                                   | 4                            |
| Mein Akku gleichzeitig ausgeht wie meine Kopfhörer                                   | 4                            |
| Jemanden zufällig treffen                                                            | 4                            |
| Das man einen Bekannten zufällig auf der Straße trifft                               | 4                            |
| Das Essen was es zuhause gibt kann zufällig sein                                     | 4                            |
| Ich habe Glück und finde auf der Straße geld (20 Euro)                               | 3                            |
| Ich habe viel Glück im Leben oder viel Pech                                          | 3                            |
| Fast jedes Mal wenn ich aus meiner Wohnung rausgehen, kommt die Straßenbahn          | 4                            |
| Man trifft eine Person irgendwo ohne es geplant zu haben                             | 4                            |
|                                                                                      | 6                            |

Abbildung 26: Auszüge Rohdaten 2