

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Quod erat demonstrandum – Eine empirische Studie zur Einflussnahme auf beweisbezogene Beliefs in der Analysis von Lernenden der Sekundarstufe II

verfasst von | submitted by

Elisa Zboril BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 511 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree pro-
gramme as it appears on the student record
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geschichte und Politische Bildung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger Pri-
vatdoz.

Abstract (Deutsch)

Im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit werden die beweisbezogenen *Beliefs* von Lernenden der Sekundarstufe II erhoben sowie eine Veränderung derselben im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender und der Aufnahme neuer Beliefs untersucht. Die Beliefänderung wird dabei über die Entwicklung von Interventionseinheiten zu Beweisen aus dem Gebiet der Analysis sowie deren Durchführung im Mathematikunterricht angestrebt. Die Prä-Post-Erhebung sowohl mathematik- als auch beweisbezogener Überzeugungen der Lernenden zum Gegenstand sowie zu sich selbst und im Sinne von sozio-affektiven Beliefs erfolgt dabei im Rahmen eines Mixed-Methods-Ansatzes auf Basis einer quantitativen Fragebogenerhebung und qualitativen Einzelfallinterviews. Die Ergebnisse bestätigen eine mögliche Veränderung bestehender mathematik- und beweisbezogener Beliefs in der untersuchten Gruppe, wobei insbesondere eine Abkehr von einem empirischen Beweisverständnis und eine Hinwendung zu einem strukturellen Aspekt von Beweisen festzustellen ist. Darüber hinaus verdeutlicht die vorliegende Arbeit die Limitation quantitativer Erhebungen von Beliefs und plädiert für systematische qualitative Untersuchungen beweisbezogener Überzeugungen. Ein entsprechender Nutzen zeigt sich insbesondere im Einfluss von Beliefs auf mathematische Leistungen sowie in der Charakterisierung der Mathematik als beweisende Disziplin und einer zunehmenden Trennung von Schul- und Fachmathematik.

Abstract (Englisch)

This thesis examines beliefs about mathematical proof of upper-secondary students and investigates changes of beliefs in terms of further development of existing beliefs and the adaption of new ones. These changes are intended to be analysed through the development of interventions based on the issue of mathematical proof in analysis and its implementation in class. Therefore, beliefs about mathematics and proof as well as beliefs about oneself and socio-affective beliefs are assessed using a pre-post-test as part of a mixed-methods approach including a quantitative survey and qualitative case interviews. The results confirm a change in beliefs about mathematics and proof in the investigated group. This marks a shift away from an empirical proof scheme and towards structural aspects of mathematical proofing. Moreover, the thesis illustrates the limitations of quantitative research on beliefs and advocates for systematic qualitative studies. A corresponding benefit is evident in the impact of beliefs on mathematical performance, in a view on mathematics as a proofing discipline and in a growing separation of school mathematics and abstract mathematics.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	6
Tabellenverzeichnis	8
1 Einleitung	10
2 Stand der Forschung zur Thematik	15
2.1 Forschungsstand im Kontext von mathematischem Beweisen	15
2.2 Befunde zu (mathematikbezogenen) Beliefs.....	20
2.3 Forschungsstand zu beweisbezogenen Beliefs.....	28
3 Forschungsfragen und Zielsetzung.....	34
4 Theoretischer Hintergrund	36
4.1 Beweis(en).....	36
4.1.1 Begriffsklärung.....	36
4.1.2 Funktionen von Beweisen in der Mathematik und Schule.....	40
4.1.3 Argumentieren, Begründen, Beweisen in der Mathematik	41
4.1.4 Mathematische Beweisprozesse im Unterricht	44
4.1.5 Didaktische Beweiskonzepte.....	46
4.2 Beliefs.....	50
4.2.1 Allgemeine Begriffsklärung	50
4.2.2 Konzepte mathematikbezogener Beliefs	57
4.2.3 Kategorisierungen beweisbezogener Beliefs.....	60
4.2.4 Änderung von Beliefs.....	63
5 Forschungsmethode.....	68
5.1 Forschungsdesign	68
5.2 Strichprobenauswahl und Rahmenbedingungen	72
5.3 Erhebungsinstrumente und Auswertungsmethoden	75
5.3.1 Quantitatives Erhebungsinstrument – Fragebogen	76
5.3.2 Qualitative Einzelfallanalysen – Follow-up-Interview	93
5.4 Entwicklung der Interventionsmaßnahmen.....	98
5.4.1 Cognitive Apprenticeship als Methode	99
5.4.2 Beschreibung des Unterrichtskonzepts	103
6 Durchführung der Studie	123
6.1 Beschreibung der Datenerhebung und Interventionsmaßnahmen.....	123
6.1.1 Prätest und Interventionseinheit 1	124
6.1.2 Interventionseinheit 2	124

6.1.3	Interventionseinheit 3	125
6.1.4	Interventionseinheit 4	126
6.1.5	Interventionseinheit 5	126
6.1.6	Interventionseinheit 6	127
6.1.7	Interventionseinheit 7	127
6.1.8	Posttest und Reflexion.....	127
6.2	Follow-up-Interview.....	128
7	Ergebnisse	130
7.1	Charakteristika der Stichprobe	130
7.2	Prätest	133
7.2.1	Deskriptive Ergebnisse.....	134
7.2.2	Inferenzstatistische Ergebnisse.....	145
7.3	Vergleich der Ergebnisse des Prä- und Posttests	151
7.4	Ergebnisse der Einzelfallanalysen.....	163
7.4.1	Fall A1	163
7.4.2	Fall A8	166
7.4.3	Fall A12	168
7.4.4	Fall A13	170
7.4.5	Fall B7	171
8	Interpretation und Diskussion der Ergebnisse.....	175
9	Fazit.....	184
	Literatur.....	187
	Anhang A.....	207
	Anhang B.....	213
	Anhang C.....	228
	Anhang D	233
	Anhang E.....	246

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 5.1 Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen.....	108
Abbildung 5.2 Präformaler Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen.....	109
Abbildung 5.3 Gegenbeispiel zur Konvergenz beschränkter Folgen.....	111
Abbildung 5.4 Arbeitsblattausschnitt zu prototypischen Schüler*innenbeweisen	113
Abbildung 5.5 Experimenteller Beweis zur Anzahl von Wendestellen	117
Abbildung 5.6 Experimenteller Beweis der Faktorregel.....	119
Abbildung 5.7 Möglicher graphisch-intuitiver Beweis der Faktorregel	120
Abbildung 7.1 Geschlechterspezifische Verteilung der Teilnehmenden (in %).....	130
Abbildung 7.2 Notenverteilung im Unterrichtsfach Mathematik (in %)	131
Abbildung 7.3 Verständnisverteilung der Themen der Analysis (in %).....	132
Abbildung 7.4 Verteilung der Thematisierung von Beweisen im Unterricht (in %).....	132
Abbildung 7.5 Verteilung der Teilnahme am Wahlpflichtfach Mathematik (in %)	133
Abbildung 7.6 Beispiel zur Konstruktion einer Beweisidee (1)	143
Abbildung 7.7 Beispiel zur Konstruktion einer Beweisidee (2)	144
Abbildung 7.8 Prä- und Postergebnisse Kategorie 1A: Statische Sichtweise.....	151
Abbildung 7.9 Prä- und Postergebnisse Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept	152
Abbildung 7.10 Prä- und Postergebnisse Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise	153
Abbildung 7.11 Prä- und Postergebnisse Kategorie 1D: Entdecken/Explorieren.....	154
Abbildung 7.12 Prä- und Postergebnisse Kategorie 1E: Beweisverständnis	155
Abbildung 7.13 Prä- und Postergebnisse Kategorie 2: Beliefs über sich selbst	156
Abbildung 7.14 Prä- und Postergebnisse Kategorie 3: Sozio-affektiven Beliefs	157
Abbildung 7.15 Prä- und Postergebnisse: Rangordnung der Beweisfunktionen	159
Abbildung 7.16 Prä- und Postergebnisse: Konstruktionsleistung der Lernenden.....	160
Abbildung 7.17 Prä- und Postergebnisse Fall A1	164
Abbildung 7.18 Prä- und Postergebnisse Fall A1: Ranking der Beweisfunktionen.....	165
Abbildung 7.19 Prä- und Postergebnisse Fall A8	166
Abbildung 7.20 Prä- und Postergebnisse Fall A12	169
Abbildung 7.21 Prä- und Postergebnisse Fall A13	171
Abbildung 7.22 Prä- und Postergebnisse Fall B7	172
Abbildung B1 Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen	216
Abbildung B2 Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen	217
Abbildung B3 Graphisch-intuitiver Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen.....	217
Abbildung B4 Graphisch-intuitiver Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen.....	218

Abbildung B6 Geometrische Interpretation Differenzenquotient	224
Abbildung B7 Geometrische Interpretation Differentialquotient	224

Tabellenverzeichnis

Tabelle 5.1 Itemkonstruktion Teil A	80
Tabelle 5.2 Kategorie 1A: Statische Sichtweise	84
Tabelle 5.3 Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept.....	85
Tabelle 5.4 Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise	85
Tabelle 5.5 Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken und Explorieren	86
Tabelle 5.6 Kategorie 1E: Beweisverständnis	87
Tabelle 5.7 Kategorie 2: Beliefs über sich selbst.....	88
Tabelle 5.8 Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs	89
Tabelle 7.1 Deskriptive Statistik – Kategorie 1A: Statische Sichtweise	134
Tabelle 7.2 Deskriptive Statistik – Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept.....	135
Tabelle 7.3 Deskriptive Statistik – Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise	135
Tabelle 7.4 Deskriptive Statistik – Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren	136
Tabelle 7.5 Deskriptive Statistik – Ranking der Beweisfunktionen	137
Tabelle 7.6 Deskriptive Statistik – Kategorie 1E: Beweisverständnis.....	138
Tabelle 7.7 Deskriptive Statistik – Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (1)	139
Tabelle 7.8 Deskriptive Statistik – Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (2)	140
Tabelle 7.9 Deskriptive Statistik – Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (1)	141
Tabelle 7.10 Deskriptive Statistik – Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (2)	142
Tabelle 7.11 Deskriptive Statistik – Mittelwerte Kategorie 2 und 3.....	142
Tabelle 7.12 Deskriptive Statistik – Konstruktion einer Beweisidee	143
Tabelle 7.13 t-Test für unabhängige Stichproben zum Merkmal Geschlecht.....	145
Tabelle 7.14 t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (1)	146
Tabelle 7.15 t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (2)	147
Tabelle 7.16 t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (3)	148
Tabelle 7.17 Spearmans Rangkorrelation zur Mathematiknote.....	148
Tabelle 7.18 Spearmans Rangkorrelation zum Verständnis der Analysis.....	149
Tabelle 7.19 Spearmans Rangkorrelation zu mathematik- und beweisbezogenen Beliefs....	150
Tabelle D1 Demographische Verteilung nach Geschlecht.....	233
Tabelle D2 Verteilung der Mathematiknoten im letzten Jahreszeugnis.....	233
Tabelle D3 Verteilung des individuellen Verständnisses der Themen aus der Analysis.....	233
Tabelle D4 Verteilung der Thematisierung von Beweisen im Mathematikunterricht	233
Tabelle D5 Verteilung der Teilnahme am Wahlpflichtfach Mathematik	233
Tabelle D6 t-Test für unabhängige Stichproben zur Prüfung der Störvariablen (1).....	234

Tabelle D7 t-Test für unabhängige Stichproben zur Prüfung der Störvariablen (2)	235
Tabelle D8 Spearmans Rangkorrelation zur Prüfung der Störvariablen.....	236
Tabelle D9 Prüfung der Reliabilität mittels Konsistenzanalyse	237
Tabelle D10 Deskriptive Statistik der Kategorie 1	238
Tabelle D11 Deskriptive Statistik der Kategorie 2 und Kategorie 3.....	239
Tabelle D12 Deskriptive Statistik zum Ranking der Beweisfunktionen	240
Tabelle D13 Deskriptive Statistik zur Beweiskonstruktion.....	240
Tabelle D14 t-Test für unabhängige Stichproben Merkmal Geschlecht.....	241
Tabelle D15 t-Test für unabhängige Stichproben Merkmal Wahlpflichtfach	242
Tabelle D16 Deskriptive Statistik nach den Gruppen Geschlecht und Wahlpflichtfach	243
Tabelle D17 Spearmans Rangkorrelation zur Prüfung von Zusammenhängen (1)	244
Tabelle D18 Spearmans Rangkorrelation zur Prüfung von Zusammenhängen (2)	244
Tabelle D19 t-Test für abhängige Stichproben Prä- und Posttestung	245

1 Einleitung

Die Mathematik bietet zum einen ein Werkzeug zur Beschreibung und Lösung diverser praktischer Probleme und stellt zum anderen eine systematisch entwickelte Theorie dar (Szűcs, 2023, S. 1). Aus diesem Blickwinkel heraus, die Mathematik als ein strukturiertes und zusammenhängendes theoretisches Konstrukt zu verstehen, nimmt das Beweisen als erkenntnissichernde Methode eine zentrale Stellung ein (Jahnke et al., 2023, S. 371). Im Rahmen der Mathematik als beweisender Disziplin werden demnach neue Erkenntnisse stets auf Basis von Axiomen, Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen durch Beweise verifiziert (Reiss, 2009, S. 4). Für Rav (1999, S. 6) bilden sie dahingehend sogar das Herzstück der Mathematik und gelten als Königsweg zur Schaffung neuer analytischer Werkzeuge und Vorgehensweisen. Diese Perspektive der zentralen Rolle von Beweisen in der Mathematik kann zudem durch einen mathematikhistorischen Blick bestätigt werden (Szűcs, 2023, S. 1).

Auf Basis dieser unbestritten hohen Bedeutung des Beweises innerhalb der Mathematikwissenschaft existiert das weit verbreitete Plädoyer, dem Beweisen gleichfalls im Mathematikunterricht einen gewichtigen Platz einzuräumen (Szűcs, 2023, S. 2). Diesbezüglich verweisen Hanna und Jahnke (1996, S. 887) auf den Beweis als bedeutsames Merkmal der Mathematik und auf die daraus folgende Notwendigkeit, diesen als Schlüsselkomponente in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen. Dabei sehen sie allerdings auch die Schwierigkeit ihrer Forderung in den unterschiedlichen und sich stetig weiterentwickelnden Ansichten zum Wesen und der Rolle von Beweisen sowie den zu erfüllenden Normen (Hanna & Jahnke, 1996, S. 887). Dieser Ansicht schließt sich Brunner (2014, S. 2) an und zieht aus dem hohen Stellenwert von Beweisen in der Mathematik den Schluss, dass diese ebenso unverzichtbarer Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollten. An dieser Forderung beteiligt sich Szűcs (2023, S. 2) und plädiert an die Mathematikdidaktik, Beweise wieder langfristig in der Schulmathematik zu etablieren und unterstützende Maßnahmen in der Lehramtsaus- und -weiterbildung sowie entsprechendes Unterrichtsmaterial zu entwickeln.

Darüber hinaus verweist auch Heinze (2004, S. 150) auf die zunehmende Bedeutung des Beweises, Argumentierens und Begründens im Mathematikunterricht und der Mathematikdidaktik. Diesbezüglich ist festzuhalten, dass diese erhöhte Bedeutungszuschreibung erst Mitte der 90er Jahre des vorangegangenen Jahrhunderts festzustellen ist, was mit dem Scheitern der Neuen Mathematik in den 70er Jahren sowie einer damaligen Überbetonung des Formalismus begründet werden kann (Heinze, 2004, S. 150). Dies führte daraufhin in den 80er Jahren zu einer marginalen Berücksichtigung von Beweisen im Unterricht, welche zu dieser Zeit vielmehr

als innermathematischer Aspekt gesehen wurden (Heinze, 2004, S. 150). Der beschriebene Wandel wird heute in diversen Bildungsstandards und Curricula ersichtlich, welche Beweise als Teil der mathematischen Erfahrungen von Lernenden fordern (Stylianides et al., 2016, S. 315). Brunner (2014, S. 2) verweist in diesem Kontext insbesondere auf die Nutzung verschiedener Begrifflichkeiten, wie dem Begründen und Argumentieren, welche den Anspruch schulischen Beweisens verringern.

In den österreichischen Bildungsstandards für die vierte Schulstufe findet sich dazu unter den allgemeinen mathematischen Kompetenzen als dritte Kompetenz das „Kommunizieren“, welche das „Argumentieren“ umfasst, wobei die Lernenden ihre Aussagen und Handlungsweisen durch schlüssiges Argumentieren belegen sollen (bifie, 2011a, S. 12). Für die achte Schulstufe gibt es vier Handlungsbereiche, von welchen der vierte als „Argumentieren, Begründen“ bezeichnet wird (bifie, 2011b, S. 10). In diesem Sinne meint das Argumentieren „die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen“ (bifie, 2011b, S. 10) und „erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache“ (bifie, 2011b, S. 10). Unter Begründen wird sodann die Angabe einer Argumentation bzw. Argumentationskette verstanden, welche zu einer bestimmten Schlussfolgerung führt (bifie, 2011b, S. 10).

Ein ähnliches Bild liefern die Bildungsstandards der Bundesrepublik Deutschland, wo im Bereich der Primarstufe unter den prozessbezogenen Kompetenzen sowie für die Allgemeine Hochschulreife unter den allgemeinen mathematischen Kompetenzen ebenfalls das „mathematisch Argumentieren“ Eingang findet (KMK, 2012, S. 14; 2022, S. 10). Im schweizerischen Rahmenlehrplan der gymnasialen Maturitätsschulen wird unter den überfachlich-methodischen Kompetenzen dazu angeführt, dass die Lernenden Methoden und Regeln des logischen Argumentierens beherrschen, worunter abstrahierendes und schlussfolgerndes Denken gefasst wird (EDK, 2024, S. 64). Während in den hier angeführten Beispielen durchwegs von „Argumentieren“ die Rede ist, findet sich in den Prinzipien und Standards des National Council of Teachers of Mathematics (2000) auf eindeutige Weise der Begriff „Proof“ über sämtliche Schulstufen hinweg.

Wie bereits Reiss (2009, S. 4) für Deutschland feststellt, nimmt allerdings das Beweisen einen marginalen Bestandteil in diversen Lehrplänen ein. Im österreichischen Lehrplan für die Unterstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen findet sich diesbezüglich der Kompetenzbereich „Vermuten und Begründen“, wobei letzteres das Darlegen von Argumenten sowie Bilden von

Argumentationsketten zur Bestätigung oder Widerlegung einer Aussage meint (LP AHS, 2024, Anlage A). Für die Oberstufe ist im Lehrplan unter der Handlungsdimension „Kritisch-argumentatives Arbeiten“ explizit der Begriff „Beweisen“ als Schwerpunkt jenes Bereiches angeführt (LP AHS, 2024, Anlage A).

Auf eine starke Diskrepanz zwischen den hier angeführten normativen Anforderungen und der tatsächlichen Unterrichtspraxis verweisen sowohl Brunner (2014, S. 2) als auch Nagel und Reiss (2016, S. 304). Trotz der scheinbar unbestrittenen Bedeutung von Beweisen scheinen diese nach Brunner (2014, S. 2) nur marginal Eingang in den Mathematikunterricht zu finden. Dies zeigt unter anderem das Angebot an diverseren Aufgabenstellungen zum Beweisen in den vorhandenen Lehrmitteln, welches im Vergleich zu anderen Tätigkeitsbereichen und Kompetenzen eher gering scheint (Brunner, 2014, S. 2). Da Beweise und das Beweisen oftmals als Handlungsbereich für begabtere bzw. leistungsstärkere Lernende gesehen wird, fehlen kontinuierliche Lerngelegenheiten, sodass der Aufbau einer entsprechenden Kompetenz nicht bewusst gefördert wird (Brunner, 2014, S. 2).

Diverse empirische Befunde verdeutlichen dabei die Schwierigkeiten im praktischen Feld des Mathematikunterrichts und verweisen auf Probleme mathematisches Wissen entsprechend einzusetzen sowie geeignete Argumente zu finden und diese zu Argumentationsketten zusammenzuführen (z. B. Heinze et al., 2004; Reiss et al., 2002). Daneben zeigen sich Schwierigkeiten bezüglich mathematischen Faktenwissens (z. B. Heinze 2004; Reiss & Ufer 2009) und fehlendem Methodenwissen zum Beweisen (z. B. Heinze, 2004; Heinze & Reiss, 2003; Ufer et al., 2009). In verschiedenen Untersuchungen wird zudem deutlich, dass auch leistungsstarke Lernende Schwierigkeiten beim Beweisen haben (z. B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004). Empirische Befunde, welche einen Zusammenhang zwischen Beweisvorstellungen bzw. beweisbezogenen Beliefs und der Beweiskompetenz feststellen, sind in diesem Kontext von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit (z. B. Healy & Hoyles, 1998; Grundey, 2015; Reiss et al., 2002). Dies führt zur Relevanz von *Beliefs* im Kontext von Bildung und Unterricht.

Die in der Philosophie grundgelegte Annahme, Beliefs seien der wesentliche Indikator für die Entscheidungen und das Verhalten eines Individuums, rückte sie in das Blickfeld didaktischer Forschung (Pajares, 1992, S. 307). Eine einheitliche Bezeichnung gibt es dahingehend allerdings weder in der deutschen noch in der englischsprachigen Forschungsliteratur. Calderhead (1996) führt dazu Begriffe wie „attitudes, values, judgements, axioms, opinions, ideology, perceptions, conceptions, conceptual systems, preconceptions, dispositions, implicit theories, explicit theories, personal theories, internal mental processes, action strategies,...“ (S. 719, zitiert

nach Szücs, 2023, S. 5) an. Ebenso finden sich sowohl in der deutschen fachdidaktischen als auch pädagogischen Literatur neben dem Begriff *Belief* Ausdrücke wie Vorstellungen, Haltungen, Einstellungen, Auffassungen oder Überzeugungen (Szücs, 2023, 5–6). Mit einem Schwerpunkt auf die Mathematik wird in der Forschung zudem von sogenannten *mathematischen Weltbildern* gesprochen (z. B. Rolka & Halverscheid, 2011; Törner, 1996; Törner & Grigutsch, 1994).

Ein spezifischer Fokus auf Beweise zeigt sich im Rahmen empirischer Forschungen in einem Interesse an Beweisvorstellungen. Auf Basis der Ergebnisse von Healy und Hoyles (1998), die einen Zusammenhang zwischen Schwierigkeiten beim Beweisen und falschen, unvollständigen oder zu eng gefassten Beweisvorstellungen nachweisen, untersucht Grundey (2015, S. 274) den Zusammenhang zwischen Beweisvorstellungen und Beweiskompetenz und stellt fest, dass die vorhandenen bzw. im Laufe des Designexperiments entwickelten Beweisvorstellungen sowohl eine förderliche als auch eine hinderliche Auswirkung auf den Beweisprozess haben.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird an diesen auf Beliefs bezogenen Aspekt angeknüpft und ein Fokus auf die Erhebung beweisbezogener Beliefs von Lernenden gelegt. Ausgangspunkt und Motivation stellt dabei neben vorliegenden Forschungsergebnissen die eigene Unterrichtserfahrung dar, in welcher Beweise Gegenstand diverser Unterrichtseinheiten wurden. Dabei stellte sich heraus, dass selbst der Begriff „Beweis“ bei den Lernenden der Sekundarstufe II zu Ablehnung und regelrechter Abneigung führte, bevor es gar zur Anregung eines Beweisprozesses kam. Dies führte zur Frage nach den Einstellungen und Vorstellungen im Sinne von Beliefs der Lernenden gegenüber Beweisen.

Basis für die Relevanz der Erhebung beweisbezogener Beliefs von Lernenden bieten neben den bereits angeführten Befunden von Healy und Hoyles (1998) sowie Grundey (2015) diverse empirische Studien, welche Hinweis auf den hohen Stellenwert von Beliefs im Rahmen von mathematischen Lehr- und Lernprozessen geben (z. B. Philipp, 2007; Reiss et al., 2002; Schoenfeld, 1992) geben.

Neben den bereits bestehenden Beliefs ist zudem eine Veränderung bzw. Weiterentwicklung derselben von Interesse, insbesondere da von Beginn an überwiegend eine ablehnende Haltung zu erwarten ist. In diesem Kontext hebt Pajares (1992, S. 325) hervor, dass Beliefs umso schwieriger verändert werden können, je früher sie aufgenommen und verinnerlicht werden, sodass zwischen vor längerer Zeit erworbenen und damit robusten sowie neu erworbenen und somit für Änderungen anfälligeren Beliefs unterschieden werden kann. Liljedahl et al. (2012, S. 105) differenzieren diesbezüglich zwischen stabilen „core beliefs“ (Liljedahl et al., 2012, S.

105) und veränderlichen „peripheral beliefs“ (Liljedahl et al., 2012, S. 105). Mit Blick auf didaktische Konzepte zur Änderung von Beliefs beschreibt Bernack-Schüler (2018, S. 40) anhand vorliegender Studien diverse Möglichkeiten zur Veränderung bzw. Weiterentwicklung von Beliefs, welche sich allerdings überwiegend auf Lehrpersonen und Lehramtsstudierende beziehen. Anknüpfend an diese theoretischen und empirischen Darstellungen liefert die vorliegende Arbeit zum einen aktuelle empirische Befunde zu beweisbezogenen Beliefs von Lernenden und zum anderen ein didaktisches Konzept, welches eine Veränderung bestehender Beliefs im Sinne einer Weiterentwicklung vorhandener und Ergänzung neuer Überzeugungen anstrebt. Zudem dient das entwickelte Unterrichtskonzept der expliziten Thematisierung von Beweisen in der Sekundarstufe II.

Wie insbesondere der nachfolgend angeführte und hier bereits knapp skizzierte aktuelle Forschungsstand zeigt, kann damit die geringe Anzahl vorhandener empirischer Studien zu beweisbezogenen Beliefs ergänzt werden. Dadurch wird es für Lehrpersonen möglich, Einblicke in potentielle Vorstellungen und Einstellungen zu erhalten. Zudem liefert die Arbeit einen Ausgangspunkt für weitere und umfangreicher angelegte Studien, die es in weiterer Folge ermöglichen können, mathematische Lehr- und Lernprozesse unter dem Aspekt von Beliefs weiterzuentwickeln.

Ergänzend dazu bietet die Arbeit einen Interventionsentwurf, welcher auf die Veränderung beweisbezogener Beliefs ausgelegt ist und damit auf Ebene der Sekundarstufe II neben Grundey (2015) ein neues Unterrichtskonzept darlegt. Dadurch wird die fachdidaktische Forschung zu Beweisen im Mathematikunterricht ergänzt. Diesbezüglich ist hervorzuheben, dass im Kontext von Argumentieren und Beweisen im Mathematikunterricht nur wenige empirische Studien im Bereich der Analysis vorliegen, obwohl diesem Gebiet insbesondere in der gymnasialen Oberstufe eine wichtige Rolle zukommt (Bersch, 2023, S. 64). Die vorliegende Arbeit setzt daher und aus unterrichtspraktischen Gründen an dieser Stelle an und fokussiert im Rahmen der Interventionsmaßnahmen auf Beweise im Bereich der Analysis.

Die nachfolgenden Ausführungen zum aktuellen Forschungsstand im Hinblick auf die beschriebene Thematik unterstreichen insbesondere das hier skizzierte vorhandene Forschungsdesiderat und verdeutlichen damit den Mehrwert der vorliegenden Arbeit sowohl für die Forschung zu Beliefs als auch für die Mathematikdidaktik und die unterrichtliche Praxis.

2 Stand der Forschung zur Thematik

Im Rahmen der Thematisierung beweisbezogener Beliefs von Lernenden findet eine Vereinigung zweier etablierter Forschungsrichtungen statt. Sowohl im Umfeld um den Aspekt von Beweisen in der Mathematik und im Unterricht als auch im Bereich von Fragestellungen zu Beliefs findet sich ein breiter Fundus an theoretischen und empirischen Arbeiten. Um eine ideale Orientierung auf dem Feld beweisbezogener Beliefs von Schüler*innen zu ermöglichen, erfolgt eine Darstellung des aktuellen Forschungsstandes im Kontext von Beweisen und damit eng verbundenen Begrifflichkeiten. Diese wird durch Ausführungen zum Stand der Forschung zu Beliefs und spezifisch mathematische Beliefs ergänzt, bevor speziell beweisbezogene Überzeugungen in den Fokus rücken.

2.1 Forschungsstand im Kontext von mathematischem Beweisen

Im Zuge der Beschäftigung mit einem spezifischen Forschungsgegenstand ist es unerlässlich, diesen zu definieren und damit festzulegen. Zahlreiche Werke haben sich im Kontext des Beweisens dieser Aufgabe angenommen und bemühen sich um die Definition eines Beweisbegriffes (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Hanna, 1990; Jahnke et al., 2023; Kempen, 2019; Manin, 2010; Meyer, 2021; Reiss & Hammer, 2021; Reiss & Ufer, 2009; Stylianides, 2007). Diesbezüglich unterscheiden diverse Arbeiten zwischen einer Produkt- und Prozessperspektive auf den Beweisbegriff (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Reid & Knipping, 2010; Wittmann, 2018). Im Kontext von didaktisch orientierten Ausführungen geht mit dem Terminus zudem die Frage nach den formalen Kriterien für Beweisprodukte bzw. den Grad formaler Strenge einher (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Hanna, 1990; Hersh, 1993; Kempen, 2019; Meyer, 2021;). Eine Vielzahl von Arbeiten vertreten hier nicht nur auf schulischer, sondern auch auf wissenschaftlicher Ebene einen vom Ideal eines strengen Formalismus abkehrenden Blick auf die tatsächliche Praxis des Beweisens (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Hanna, 1990; Jahnke et al., 2023;). Für die Etablierung eines schulischen Beweisbegriffes ist zudem eine sozial-kommunikative Perspektive auf den Beweisbegriff von zentraler Bedeutung (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Hanna, 1990; Heintz, 2000; Hersh, 1993; Manin, 2010; Meyer, 2021; Reiss & Ufer, 2009; Stylianides, 2007). Neben der Festlegung des Beweisbegriffs und den damit einhergehenden verschiedenen Perspektiven, spielen Funktionen von Beweisen eine wesentliche Rolle in der Forschung (z. B. Bell, 1976; Brunner, 2014; de Villiers, 1990; Hanna & Jahnke, 1996; Hersh, 1993; Kuntze, 2005).

Brunner (2014, S. 29) verweist mit Fokus auf den Mathematikunterricht auf die enge Verbindung des Beweisbegriffes mit einer formal-deduktiven Vorstellung, sodass in diesem Kontext weitergefasste Begriffe wie „Argumentieren“ und „Begründen“ verwendet werden (z. B. Bersch, 2023; Jahnke et al., 2023; Meyer, 2021; Tietze et al., 1997). Eine Vielzahl von theoretischen und empirischen Arbeiten widmet sich daher dem Argumentationsbegriff (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Habermas, 2011; Hefendehl-Hebeker & Hußmann, 2018; Kempen, 2019; Meyer, 2021; Reid & Knipping, 2010; Reiss & Ufer, 2009) und in weiterer Folge dem Verhältnis zwischen den Begriffen Argumentieren, Begründen und Beweisen (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014; Duval, 1991; Jahnke et al., 2023; Kempen, 2019; Pedemonte, 2007; Reid & Knipping, 2010).

Für den Kontext Schule sind zudem Arbeiten mit einem Überblick und Vergleich verschiedener didaktischer Beweiskonzepte von Relevanz (z. B. Biehler & Kempen, 2016; Kempen, 2019; Reid & Knipping, 2010). Dahingehend ist insbesondere die Entwicklung einer Vielzahl diverser unterschiedlicher Konzepte festzuhalten (z.B. Blum & Kirsch, 1989, 1991; Branford, 1908; Freudenthal 1978; Kirsch, 1979; Semadeni, 1984; Wittmann, 1985, 2014; Wittmann & Müller, 1988, zitiert nach Biehler & Kempen, 2016). Brunner (2014) entwickelt schließlich in Anlehnung an bisherige Beweiskonzepte ein kognitionspsychologisches Modell schulischen Beweissens.

Ein Blick auf die empirische Forschung zum Beweisen zeigt eine grobe Orientierung in zwei Richtungen. Zum einen werden Schwierigkeiten im Hinblick auf das Beweisen identifiziert und analysiert, zum anderen daran anknüpfend Methoden und Maßnahmen entwickelt sowie getestet, um den gefundenen Problematiken entgegenzuwirken. Dabei lassen sich spezifische Forschungsarbeiten zu Lehramts- bzw. Mathematikstudierenden (z. B. Abels, 2025; Alcock & Weber, 2005; Bauer et al., 2022; Neuhaus & Rach, 2019; Schwarz et al., 2008; Sommerhoff, 2017; Stewart & Thomas, 2019; Weber, 2001), sowie mit besonderer Relevanz für die vorliegende Arbeit, Forschungen mit einem Fokus auf Schüler*innen diverser Schulstufen (z. B. Bell, 1976; Galbraith, 1981; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003, 2004; Porteous, 1990; Reiss et al. 2001; Williams, 1979) identifizieren. Zudem liegen Arbeiten mit übergreifendem Format vor (z. B. Reiss et al., 2002; Sommerhoff & Ufer, 2019), wobei Reid und Knipping (2010) eine detaillierte Zusammenstellung empirisch identifizierter Schwierigkeiten beim Beweisen liefern.

Große Hürden bei der Notation bzw. Konstruktion von Beweisen werden dabei sowohl bei Studierenden (z. B. Abels, 2025; Schwarz et al., 2008) als auch bei Schüler*innen der

Sekundarstufe I (z. B. Bell, 1976; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Kempen, 2019; Reiss et al., 2002) festgestellt. Zudem werden Beispiele bzw. Argumente mit fehlender logischer Kohärenz als Verifikation angenommen, wohingegen dies bei deduktiven Beweisen nicht zwingend zutreffen muss (z. B. Healy & Hoyles, 1998, 2000; Williams, 1979). Darüber hinaus werden die widerlegende Eigenschaft von Gegenbeispielen nicht akzeptiert (z. B. Galbraith, 1981) sowie empirische Argumente zur Überprüfung angeboten (z. B. Bell, 1976; Bieda, 2010; Galbraith, 1981; Porteous, 1990) und induktive Argumentationen bevorzugt (z. B. Heinze & Reiss, 2003), obwohl bekannt ist, dass diese nicht generalisierbar sind (z. B. Healy & Hoyles, 2000; Reiss et al., 2001). Insbesondere fällt es den Lernenden schwer, eine Brücke von einer empirischen zu einer formalen Argumentation zu schlagen (z. B. Heinze & Reiss, 2003; Schwarz et al., 2008) und sowohl Schüler*innen als auch Studierende haben Schwierigkeiten beim Anbieten passender Begründungen (z. B. Sommerhoff & Ufer, 2019). Problematiken bestehen zudem bei der Identifikation falscher bzw. nicht korrekt geführter Beweise (z. B. Alcock & Weber, 2005; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Reiss et al., 2002), wobei festzuhalten ist, dass Lernenden der Sekundarstufe I und II die Bewertung von Beweisen tendenziell leichter fällt als die eigenständige Konstruktion derselben (z. B. Healy & Hoyles, 1998, 2000; Reiss et al. 2001).

Als Ursache für die genannten Schwierigkeiten wird unter anderem domänenspezifisches Wissen von Studierenden (z. B. Sommerhoff, 2017) sowie Faktenwissen von Schüler*innen (z. B. Heinze, 2004) als entscheidende, wenn auch seltener fehlende Komponente genannt. Bauer et al. (2022) weisen in diesem Kontext nach, dass leistungsstarke Studierende mit entsprechendem inhaltlichem Vorwissen ein höheres Beweisverständnis aufweisen. Diese Ergebnisse können durch die Studie von Neuhaus und Rach (2019) ergänzt werden, welche für Studierende den Einfluss von Vorwissen auf das Verständnis von Beweisen ebenfalls bestätigen. Ein positiver Zusammenhang zwischen dem Beweisverständnis und dem Interesse an Hochschulmathematik sowie mathematischem Selbstvertrauen kann allerdings nicht festgestellt werden (Neuhaus & Rach, 2019). Auf ähnliche Weise zeigen Schwarz et al. (2008), dass eine universitäre Ausbildung sowie Affinität für das Beweisen nicht ausreichend auf das Lehren von Beweisen vorbereiten.

Neben domänenspezifischem Faktenwissen beziehen sich zentrale Ergebnisse vorliegender Forschungen zudem auf ein fehlendes Methodenwissen sowie Metakognition und Metawissen als entscheidende Komponenten im Hinblick auf Beweiskompetenz und -verständnis (z. B. Abels, 2025; Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003; Reiss et al., 2002; Reiss et al., 2001; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2009; Weber, 2001). Dabei wird deutlich, dass fehlendes strategisches Wissen zentraler Prädiktor für Schwierigkeiten beim Beweisen ist (z.

B. Sommerhoff, 2017; Weber, 2001) und alle drei Aspekte von Methodenwissen – Beweisstruktur, Beweisschema und Beweiskette – für die Beurteilung von Beweisen von Bedeutung sind (z. B. Heinze & Reiss, 2003). Ufer et al. (2009) stellen insbesondere ein Fehlen von Wissen zur Beweisstruktur heraus und plädieren daher für eine stärkere Berücksichtigung von Zusammenhängen in Beweisschritten. Zudem scheinen ein Mangel an Wissen zu deduktiven Schlussweisen und hypothetischem Denken (Reiss et al., 2002) sowie Schwierigkeiten beim Einsatz von mathematischem Wissen und der Identifikation sowie Kombination von Argumenten (Heinze et al., 2004) gegeben zu sein. Heinze (2004) stellt dahingehend Defizite sowohl im Bereich des Faktenwissens, des Methodenwissens und bei der Entwicklung von Beweisstrategien bei leistungsschwächeren Schüler*innen fest, wohingegen leistungsstärkere Lernende insbesondere Schwierigkeiten im letzten Bereich aufweisen. Weitere Studien streichen explizit die Bedeutung von metakognitivem Wissen und Prozessen im Rahmen der Beweiskompetenz heraus (z. B. Abels, 2025; Reiss et al., 2001).

Darüber hinaus verweisen diverse Arbeiten auf den bedeutenden Einfluss des Mathematikunterrichts und damit verbundenen Instruktionen von Lehrkräften auf die Entwicklung von Beweisfähigkeiten (z. B. Bieda, 2010; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2004; Reiss et al., 2002).

Aus den vorliegenden Forschungsarbeiten zu Schwierigkeiten und Problemfeldern im Kontext von Beweisen und Argumentieren ergeben sich in weiterer Folge diverse Implikationen für die Lehramtsausbildung sowie den Unterricht und zahlreiche Arbeiten, welche sich mit der Entwicklung sowie empirischen Überprüfung unterschiedlicher Konzepte und Maßnahmen befassen (z. B. Bersch 2023; Buchbinder und McCrone, 2023; Hilbert et al., 2008; Hodds et al., 2014; Hoffmann et al., 2024; Kempen, 2019; Kuntze et al., 2004; Sill, 2019; Stylianides, 2007; Stylianides & Stylianides, 2017, 2022).

Ansätze für diverse intervenierende Maßnahmen mit positiven Effekten auf die Beweiskompetenz und das Beweisverständnis erstrecken sich dabei von der Arbeit mit heuristischen Lösungsbeispielen (z. B. Heinze, 2004; Hilbert et al., 2014) über die Methode „Illustrieren am Beispiel“ (z. B. Bauer et al., 2022) hin zu Selbsterklärungstrainings (z. B. Hodds et al., 2014) und schriftlichen Selbstreflexionen (z. B. Hoffmann et al., 2024). Weitere Arbeiten betonen in diesem Kontext die hohe Bedeutung einer aktiven Rolle der Lehrperson im Rahmen von Beweistätigkeiten (z. B. Hanna & Jahnke, 1996; Stylianides, 2007). Sill (2019, S. 216) plädiert dahingehend für die permanente Einforderung von Begründungen im Unterricht.

Insbesondere im Rahmen der Lehramtsausbildung sowie von Weiterbildungsmaßnahmen steht die Entwicklung von Lehrveranstaltungen und Kursen im Fokus. Kempen (2019) zeigt, dass eine Lehrveranstaltung mit einem Schwerpunkt auf dem Beweisen zu Verbesserungen in den Bereichen Beweiskonstruktion, -bewertung und -akzeptanz bei den Studierenden führt. Ähnlich dazu können Buchbinder und McCrone (2023) eine Zunahme von pädagogischem und inhaltlichem Wissen zur Rolle von Beispielen beim Beweisen mittels eines Abschlusskurses zur Thematik verzeichnen. Einen Ansatz, der sowohl Schüler*innen als auch Lehrkräfte anspricht, liefern Stylianides und Stylianides (2022) mit der Entwicklung eines Lernverlaufs und einer Unterrichtssequenz, welche zur Erkenntnis eines Lernbedarfs im Hinblick auf Beweise und der Entwicklung einer entsprechenden Konzeptionalisierung derselben führt.

Für den schulischen Kontext stellen Kuntze et al. (2004) eine ungenügende Berücksichtigung beweisrahmender Elemente wie der Formulierung von Behauptungen, der Diskussion der Beweisbedürftigkeit sowie allgemeiner Bemerkungen über das Beweisen fest. Zudem zeigen sie ein niedriges Anforderungsniveau der Aufforderungen und Fragen der Lehrpersonen und plädieren für einen schüler*innenzentrierten und materialgestützten Unterricht mit einem Schwerpunkt auf der Förderung von Metawissen (Kuntze et al., 2004).

Mit spezifischerem Fokus untersucht Bersch (2023) mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht aus der Sicht von Lehrkräften und stellt dabei unter anderem eine mangelnde Beachtung von Beweisen und theoretischen Herleitungen sowie eine Dominanz von schematischen und verfahrensorientierten Aufgaben fest. Auf dieser Basis entwickelt sie eine differenzierende und aufgabenbasierte Lernumgebung mit sprachförderlichen Elementen und stellt im Rahmen der Evaluation eine allgemein positive Bewertung und Bestätigung der unterstützenden Funktion von Lösungsbeispielen fest (Bersch, 2023).

Neben den bereits angeführten Ansätzen existieren zudem Forschungsarbeiten, welche sich auf digitale Unterstützungsmaßnahmen und Interventionen fokussieren (z. B. Roy et al., 2010, 2017; Sümmermann et al., 2021). Roy et al. (2017) zeigen, dass multimediale Interventionen im Sinne einer Präsentation von Beweisen mittels Audiokommentaren und visuellen Animationen mit einer schlechteren langfristigen Sicherung und einer Störung von Integrationsprozessen in bestehendes Wissen verbunden sind. Dies ergänzt die Ergebnisse von Roy et al. (2010), wonach die Präsentation eines Beweises durch einen Dozenten sowie die schriftliche Darstellung für das Beweisverständnis effektiver sind als computerbasierte Beweise. Mit einem Fokus auf interaktive Simulationen von Beweisen weg von vordefinierten computerbasierten Animationen verweisen Sümmermann et al. (2021) hingegen auf eine theoretische Übereinstimmung

der Funktionen solcher simulationsbasierten mit traditionellen, symbolischen Beweisen. Mit einem stärker praxisorientierten Fokus thematisiert Elschenbroich (2009) den Einsatz visuell-dynamischer Puzzles beim Beweisen und verweist auf den präformalen Charakter derselben.

Die hier angeführten Studien bestätigen das Bild von Bersch (2023, S. 64), wonach spezifische empirische Untersuchungen oftmals auf die mathematischen Teilbereiche Geometrie und Arithmetik bzw. Algebra fokussieren, sodass nur verhältnismäßig wenige empirische Studien zum Argumentieren und Beweisen im Bereich der Analysis vorliegen, obgleich diesem Gebiet insbesondere in der gymnasialen Oberstufe eine wichtige Rolle zukommt. Die Ursache dafür sieht Bersch (2023, S. 64) insbesondere in der Rolle der Geometrie als traditionellem Gebiet des Beweisens. Dementsprechend fokussiert ein überwiegender Teil der dargelegten Untersuchungen im Rahmen von Beweisen und Argumentieren auf den Teilbereich Geometrie (z. B. Abels, 2025; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Heinze 2004; Hilbert et al., 2008; Kuntze et al., 2004; Reiss et al., 2002; Reiss et al., 2001; Ufer et al. 2009). Ein Schwerpunkt auf Arithmetik und Algebra findet sich unter anderem bei Healy und Hoyles (1998, 2000) sowie Stewart und Thomas (2019).

Im Kontext der Analysis ist auf die Studie von Grundey (2015) zu Beweisvorstellungen und eigenständiger Beweisaktivität von Lernenden der Sekundarstufe II zu verweisen, auf welche an späterer Stelle näher eingegangen wird. Auch Bersch (2023) nimmt diesen Befund aus der Forschung zum Anlass, mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht aus Lehrperspektive zu untersuchen, wie bereits zuvor dargestellt wurde. Weitere Studien auf dem Teilgebiet der Analysis mit einem Fokus auf Studierende liefern unter anderem Alcock und Weber (2005), Bauer et al. (2022) sowie Neuhaus und Rach (2019).

Ein für die vorliegende Arbeit weiterer relevanter Fokus zeigt sich bezüglich der Aufteilung der Arbeiten im Sekundarbereich in einem überwiegenden Teil von Arbeiten zum Sekundarbereich I (z. B. Bell, 1976; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003, 2004; Kempen, 2019; Reiss et al., 2002; Ufer et al., 2009) und einer verhältnismäßig geringeren Anzahl von Studien für den Sekundarbereich II (z. B. Bersch, 2023; Grundey, 2015; Reiss et al., 2001).

2.2 Befunde zu (mathematikbezogenen) Beliefs

Beliefs werden seit einiger Zeit als bedeutendes Element pädagogisch-didaktischen Handelns gesehen (Szűcs, 2023, S. 5). Dabei steht das Aufkommen eines Interesses an Beliefs in diversen Forschungsbereichen wie der pädagogischen Psychologie und empirischen Bildungsforschung

mit einer Ansicht in Verbindung, diese als besten Indikator für Entscheidungen im Leben eines Individuums zu sehen (Pajares, 1992; S. 307; Thompson, 1992, S. 129).

Der Terminus *Beliefs* selbst war bereits vor Jahren so populär, dass auf eine Definition desselben in vielen pädagogischen Werken verzichtet wurde (Philipp, 2007, S. 25). Allerdings existieren ebenso Arbeiten, welche sich um eine Definition des Begriffs bemühen (z. B. Cross, 2009; Cross Francis et al. 2015; Op't Eynde et al., 2003; Pajares, 1992; Philipp, 2007; Törner, 2003). Einzelne Ausführungen plädieren zudem für das Aufgeben einer multifunktionellen Definition zugunsten eines vom Verständnis von Beliefs geleiteten strukturellen Rahmens (Goldin et al., 2009, S. 3) oder eines Fokus auf Zielorientierung und Kontextualisierung zur Charakterisierung von Beliefs (Furinghetti & Pehkonen, 2003, S. 53).

Neben der Schwierigkeit einer einheitlichen Definition von Beliefs, besteht zudem keine Eindeutigkeit im Hinblick auf diverse Bezeichnungen. Calderhead (1996) führt dabei Begriffe wie „attitudes, values, judgements, axioms, opinions, ideology, perceptions, conceptions, conceptual systems, preconceptions, dispositions, implicit theories, explicit theories, personal theories, internal mental processes, action strategies,...“ (S. 719, zitiert nach Szücs, 2023, S. 5) an. Ebenso treten sowohl in der deutschen fachdidaktischen als auch pädagogischen Literatur neben dem Begriff *Belief*, Ausdrücke wie Vorstellungen, Haltungen, Einstellungen, Auffassungen oder Überzeugungen auf (Szücs, 2023, 5–6). Darüber hinaus findet sich in diversen Forschungsarbeiten der Terminus *mathematisches Weltbild* nach Törner und Grigutsch (1994) (z. B. Grigutsch et al., 1998; Törner, 1996; Weygandt, 2021) sowie das englische Pendant *world view* (z. B. Rolka & Halverscheid, 2011; Schoenfeld, 1985).

Nach einführenden Versuchen einer Begriffsdefinition besteht eine weitere Debatte in der Trennung von Beliefs und Wissen (z. B. Beswick, 2012; Furinghetti & Pehkonen, 2003; Pajares, 1992; Philipp, 2007). Während einzelne Autor*innen eine Unterscheidung nicht anstreben (z. B. Beswick, 2012; Thompson, 1992), legt der Großteil Wert auf eine gemeinsame Betrachtung bei gleichzeitiger Trennung der Begriffe (z. B. Ernest, 1989; Pehkonen, 1995; Richardson, 2003; Törner & Grigutsch, 1994). Ähnlich dazu werden Werte auf der einen Seite gegensätzlich zu Beliefs als kontextunabhängig und internalisierter, auf der anderen Seite als Untergruppe von Beliefs gesehen (Bishop et al. 2003; Philipp, 2007). DeBellis & Goldin (1999) sowie Rokeach (1970) verstehen Werte gemeinsam mit Beliefs als Teil eines übergeordneten Systems.

Dies führt zur charakteristischen Organisation von Beliefs in sogenannten Belief-Systemen und Clustern nach Rokeach (1970) und Green (1971) sowie zur Unterscheidung zwischen primären und abgeleiteten bzw. sekundären sowie zentralen und peripheren Beliefs nach Green (1971).

Sein Konzept findet sich weitgehend in allen folgenden Forschungsarbeiten im Umfeld von Beliefs (z. B. Beswick 2005, 2007/2008; 2012; Cooney et al., 1998; Cross, 2009; Erens, 2017; Erens & Eichler, 2014; Liljedahl et al., 2007; Philipp, 2007; Richardson, 1996; Schoenfeld, 1983, 1985; Thompson, 1992; Törner, 1996; Törner & Grigutsch, 1994).

Von entscheidender Bedeutung für zukünftige Forschungen ist zudem die Entwicklung des Konzepts von McLeod (1992), welcher Beliefs, Einstellungen und Emotionen unter eine affektive Domäne einordnet. Der Einbezug affektiver Aspekte findet daran anknüpfend in zahlreichen Arbeiten seine Berücksichtigung (z. B. Bernack-Schüler, 2018; Ernest, 1998; Goldin, 2003; Goldin et al., 2009; Grigutsch et al., 1998; McLeod, 1994; Pehkonen, 1995; Törner, 1996; Törner & Grigutsch, 1994). Zudem beziehen sich diverse Forschungen auf das neuere Konzept von Hannula (2012), wonach Belief-Systeme und Ziele Teil der mathematikbezogenen Affektivität, bestehend aus affektiven, kognitiven und motivationalen Aspekten, sind (z. B. Eichler & Erens, 2014; Erens, 2017; Erens & Eichler, 2014).

Neben der Erweiterung des Ansatzes von McLeod (1992) um wertbezogene, ethische und moralische Aspekte, führen DeBellis und Goldin (1999, 2006) den Begriff Meta-Affektivität, in Anlehnung an Metakognition im Sinne des Fühlens über Gefühle, ein. Hinzu treten Ansichten, dass Beliefs durch ihre Gebundenheit an spezifische Objekte, ihre Inhalte sowie die Erfüllung affektiver und kognitiver Funktionen selbst strukturiert sind (Goldin et al., 2009; Törner, 2003). Diverse Arbeiten unternehmen darüber hinaus den Versuch, Beliefs bzw. mathematische Beliefs zu kategorisieren (z. B. Liljedahl et al., 2007; McLeod, 1992; Op't Eynde et al., 2003; Pehkonen, 1995; Rösken et al., 2007; Törner, 2003; Törner & Grigutsch, 1994).

Im Rahmen von Forschungsarbeiten zu Beliefs sind dabei stets Instrumente zur Messung von (mathematikbezogenen) Beliefs von Relevanz. Leder und Forgasz (2003, S. 98–99) führen diesbezüglich in einem kurzen Überblick unter anderem quantitative Tests wie Intervallskalen, Likert-Skalen sowie das semantische Differential und qualitative Methoden wie Interviews und Beobachtungen an. Ebenso verweist Philipp (2007, S. 268) auf offene Befragungen zur Erhebung von Beliefs und betont den vielfachen Einsatz von Likert-Skalen bei größeren Stichproben.

Hinsichtlich quantitativer Instrumente greift eine Vielzahl der hier dargestellten Forschungen auf Fragebögen (z. B. Kuntze, 2012; Geisler & Rolka, 2021; Beumann & Benölken 2022; Beumann & Kisters, 2022; Kotelawala, 2016) unter besonderer Verwendung von Likert-Skalen (z. B. Beswick 2005, 2012; Beumann & Geisler, 2022; Grigutsch et al., 1998; Kempen, 2019; Kloosterman, 2003; Pehkonen, 1995; Richardson, 1996; Szücs, 2023; Törner & Grigutsch

1994) zurück. Dennoch gibt es bezüglich der Methode von Fragebögen und Likert-Skalen auch kritische Stimmen, welche ihre fehlende Flexibilität (z. B. Kollosche, 2015, S. 479) und Problematik der Interpretation der Ergebnisse aufgrund sozialer Erwünschtheit (Safrudiannur & Rott, 2020, S. 2; Szücs, 2023, S. 11) hervorheben. Auf dieser Basis entwickeln beispielsweise Safrudiannur und Rott (2020) diese Methode durch Berücksichtigung sozialer Kontexte in der Schule und „rank-then-rate“-Items weiter.

Hervorzuheben sind zudem die im Kontext angewandten qualitativen Methoden wie Interviews (z. B. Beumann & Benölken, 2022; Beumann & Kisters, 2022; Cai & Wang, 2010; DeBellis & Goldin, 1999; Eichler & Erens, 2014, Erens & Eichler, 2017; Furinghetti & Morselli, 2011; Kloosterman & Cougan, 1994; Kloosterman et al., 1996; Lee, 2019; Rolka & Halverscheid, 2011) und Unterrichtsbeobachtungen (z. B. Knipping, 2002; Kuntze, 2012; Pehkonen, 1995), aber auch die Untersuchung von Beliefs anhand von Bildern (z. B. Halverscheid & Rolka, 2007; Rolka & Bulmer, 2005; Rolka & Halverscheid, 2011).

Mit Blick auf empirische Forschungsarbeiten zu mathematikbezogenen Beliefs von Lehrpersonen und Lehramtsstudierenden stellt Thompson (1992, S. 130) fest, dass zumeist in die zwei Kategorien Natur über die Mathematik sowie Lehren und Lernen von Mathematik unterschieden wird. Bezüglich dieses Forschungsgebietes liefern Cross Francis et al. (2015) eine Zusammenfassung der wichtigsten Entwicklungen und verweisen auf eine Erweiterung um persönliche Überzeugungen, fachliches und fachdidaktisches Wissen sowie auf Forschungen zur Beziehung von Wissen und Beliefs sowie deren Auswirkungen auf den Unterricht. Zudem werden epistemologische Beliefs, Selbstwirksamkeitsüberzeugungen, Beliefs über Schüler*innen und kulturelle Hintergründe im Forschungsgebiet stärker berücksichtigt (Cross Francis et al., 2015).

Vorliegende Arbeiten stellen im Hinblick auf die Bildung von Überzeugungen fest, dass diese insbesondere im Mathematikunterricht der Primar- und Sekundarstufe sowie im Studium und der eigenen Berufstätigkeit erworben werden und damit wesentlich mit eigenen Erfahrungen in Verbindung stehen (z. B. Bernack-Schüler, 2018; Beswick, 2012; Richardson, 1996, 2003).

Studien, welche sich auf die Auswirkungen dieser von Lehrpersonen erworbenen Beliefs auf die eigene Praxis fokussieren, können nicht nur eine Auswirkung bestätigen (z. B. Cross, 2009; Liljedahl et al., 2007), sondern stellen auch fest, dass die eigene Praxis insbesondere mit den Beliefs über die Mathematik und weniger mit jenen über das Lehren und Lernen im Einklang steht (z. B. Raymond, 1997; Thompson, 1992). Diesbezüglich zeigen daher diverse Studien Inkonsistenzen zwischen den Beliefs und der Praxis von Lehrpersonen auf (z. B. Bernack-Schüler, 2018; Cross Francis et al., 2015; Raymond, 1997). Im Hinblick auf diese Diskrepanz wird

auf entsprechende Kontexte als Ursache verwiesen, die unter anderem in Zeitbeschränkungen, dem Fähigkeitsniveau der Lernenden und entsprechenden weiteren Ressourcen gegeben sind (z. B. Beswick, 2005; Raymond, 1997). Furinghetti und Morselli (2011) vertreten zudem die Ansicht, dass primäre bzw. führende Beliefs dabei helfen, die Rolle und das Gewicht verschiedener Beliefs zu verstehen und mit jenem Konstrukt die Inkonsistenz zwischen Beliefs und Praxis überwunden werden kann.

Mit Blick darauf, welche mathematischen Beliefs bei Lehrpersonen und Lehramtsstudierenden gegeben sein können, unterscheiden vorliegende Studien häufig im Hinblick auf statische Sichtweisen, Mathematik als System von Regeln und Formeln zu sehen, sowie dynamische Perspektiven mit einem Fokus auf Anwendungs- und Prozessaspekte (z. B. Geisler & Rolka, 2021; Grigutsch et al., 1998; Törner, 1996). Ernest (1989) unterscheidet diesbezüglich in eine problemlösungsorientierte, instrumentalistische und platonische Sichtweise. Im Allgemeinen kann ein positives Bild der Mathematik sowie eine Hinwendung zum Prozess- und Anwendungsaspekt im Sinne einer dynamischen Sichtweise nachgewiesen werden (z. B. Grigutsch et al., 1998; Törner, 1996). Beswick (2007/2008) stellt allerdings im Hinblick auf Beliefs über Schüler*innen im Allgemeinen und solchen mit mathematischen Lernschwierigkeiten Unterschiede fest.

Im Rahmen der Fokussierung auf die Beliefs von Studierenden am Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik zeigen Geisler und Rolka (2021) eine Abnahme dynamischer Beliefs, wohingegen statische Beliefs stabil bleiben, welche als negativer Prädiktor für Leistungen gesehen werden. Törner und Grigutsch (1994) stellen eine Hinwendung zum Prozessaspekt fest, wobei im Hinblick auf eine statische Sichtweise der Toolboxaspekt, Mathematik als „Werkzeugkiste“ mit Formel und Verfahren zum Anwenden zu verstehen, ebenso hervortritt. Zudem zeigen die Studierenden eine mittelmäßige bis tendenziell negative Einschätzung ihrer eigenen Leistungen (Törner & Grigutsch, 1994).

Für eine kontext- und gegenstandsgebundene Erhebung von Beliefs plädieren unter anderem Bernack-Schüler (2018) sowie Erens und Eichler (2014). Letztere stellen im Hinblick auf den Teilbereich der Analysis eine überwiegende Ablehnung der Lehrpersonen gegenüber starrem Formalismus und exakten Definitionen fest (Eichler & Erens, 2014). Rolka und Bulmer (2005) untersuchen dazu die Beliefs von Studierenden über das Fachgebiet Statistik, können allerdings in ihrer Studie keine signifikanten Assoziationen zwischen Bildern zu statischen Beliefs und anschließenden Leistungsmessungen feststellen.

Daneben bestätigen länderübergreifende Untersuchungen zu mathematikbezogenen Belief von Lehrpersonen, Studierenden und Schüler*innen die theoretischen Annahmen zur kulturellen

Prägung von Beliefs (z. B. Cai & Wang, 2010; Knipping, 2002; Kuntze, 2012; Pehkonen, 1995, 1994).

Neben zahlreichen Studien mit einem Fokus auf die Beliefs von Mathematiklehrkräften und Studierenden, existiert ein breiter Fundus an Arbeiten, welche sich mit den mathematikbezogenen Überzeugungen von Schüler*innen befassen (z. B. Kislenko, 2009; Kloosterman, 2003; Kloosterman & Cougan, 1994; Kolloosche, 2015; Maaß & Ege, 2007; Reiss et al., 2002; Rösken et al., 2007; Rolka & Halverscheid, 2011; Wen & Dubé, 2022).

Rösken et al. (2007) stellen in ihrer Studie eine eher ablehnende Haltung gegenüber Freude an Mathematik fest, wohingegen Schwierigkeit eine hohe Zustimmung erfährt. Anhand der gewonnenen Ergebnisse konstatieren sie eine starke Verbindung von Kompetenz, Schwierigkeitsgrad sowie Selbstvertrauen und sehen darin die Kernbeliefs (Rösken et al., 2007). Weitere Studien stellen einen starken Fokus auf das Auswendiglernen als wichtigen Teil der Mathematik fest (z. B. Kloosterman, 2003) und berichten von einer Häufung negativer Wahrnehmungen wie Unwohlsein, schwachem Interesse und Verständnisschwierigkeiten (z. B. Kolloosche, 2015).

Demgegenüber stehen Ergebnisse der Studie von Reiss et al. (2002), welche insgesamt eine positive Prägung der Beliefs zum Mathematikunterricht feststellen, wobei für die Proband*innen Mathematik von Formalismus sowie Exaktheit dominiert wird und der Anwendungs- sowie Prozesscharakter unabhängig von den Leistungen der Schüler*innen in den Hintergrund tritt. Die Autor*innen können zudem keinen signifikanten Zusammenhang zwischen den Leistungen und Beliefs der Lernenden feststellen, sodass davon auszugehen ist, dass die Überzeugungen über diverse Mediatorvariablen wie Motivation und Interesse wirken (Reiss et al., 2002). Diese Sicht bestätigen Wen und Dubé (2022), die eine negative Korrelation für Angst und eine positive für Freude, Selbstkonzept und -vertrauen sowie den wahrgenommenen Wert auf die Mathematikleistung festhalten.

Daneben untersuchen Samuelsson et al. (2015) Unterschiede im Hinblick auf Beliefs von Schüler*innen mit differentem sozioökonomischem Hintergrund und stellen bei hohen vorhandenen Ressourcen eine relationale, bei niedrigen Voraussetzungen eine instrumentelle Sichtweise auf die Mathematik fest.

Mit Blick auf den Nützlichkeitsaspekt von Mathematik zeigt sich auf der einen Seite eine positive Zuschreibung, wobei davon ausgegangen wird, dass es sich um übernommene Glaubenssätze handeln könnte (Kolloosche, 2015) und zum anderen eine begrenzte Einsicht in den Nutzen von Mathematik (Maaß & Ege, 2007). Maaß und Ege (2007) streichen dabei heraus, dass

Mathematik überwiegend als selbstreferenzielles System gesehen wird und bilden aufbauend auf den Erkenntnissen ihrer Studie eine Theorie verschiedener Schüler*innentypen.

Einen spezifischen Fokus auf die Beliefs von begabten Schüler*innen legen Beumann und Benölken (2022) sowie Beumann und Kisters (2022), wobei ein Auftreten vielseitiger Beliefs über die Mathematik festgestellt und eine problemlösende Sichtweise als vorteilhaft identifiziert wird.

Für eine Schwerpunktsetzung auf Problemlösen und mathematisches Argumentieren plädiert auch Garofalo (1989), nachdem er einige von ihm identifizierte Sichtweisen von Schüler*innen auf die Mathematik darlegt. Dabei zeigt sich die Annahme, mathematische Probleme mittels Anwendens von Formeln und Verfahren lösen zu können, die zuvor von der Lehrperson dargelegt wurden oder im Buch zu finden sind (Garofalo, 1989, S. 502). Dies wird ergänzt durch die Sichtweise, nur jene Mathematik als wichtig und wertvoll anzusehen, welche auch getestet wird (Garofalo, 1989, S. 503). Garofalo (1989, S. 504) hebt diesbezüglich hervor, dass jene Beliefs einen spezifischen Blick in die Unterrichtsmathematik geben.

Diese spezielle Situation zum Problemlösen im Unterricht spricht auch Schoenfeld (1989, S. 349) an und verweist auf eine entstehende Trennung der Schulmathematik, jener Mathematik, welche die Lernenden durch ihre Unterrichtserfahrung kennen, von der Mathematik als Wissenschaft, von der sie zwar gehört, diese jedoch nicht erfahren haben. Insbesondere führt dies nach Schoenfeld (1989, S. 349) dazu, dass eine positive Sichtweise auf die Wissenschaft Mathematik von den Schüler*innen zwar vertreten wird, ihr Problemlöseverhalten allerdings stärker von ihren durch den Unterricht geprägten Erfahrungen als von ihren positiven Überzeugungen über die Mathematik dominiert wird. Auf Basis von Lampert (1990, zitiert nach Schoenfeld, 1992, S. 359) listet Schoenfeld (1992, S. 359) drei Jahre später diverse allgemeine Beliefs von Schüler*innen zur Natur der Mathematik auf und zeigt die Überzeugungen auf, dass mathematische Probleme nur eine korrekte Antwort hätten und es nur einen Weg gäbe, diese zu lösen, welcher von der Lehrperson vorgegeben wird. Zudem könnten gewöhnliche Schüler*innen nicht erwarten Mathematik zu verstehen, diese werde in Einzelarbeit betrieben, Mathematik und die reale Welt seien kaum miteinander verbunden und formale Beweise seien irrelevant für Erfindungs- und Entdeckungsprozesse (Schoenfeld, 1992, S. 359).

Im Rahmen der Beliefforschung interessiert neben der Erhebung und Analyse von mathematikbezogenen Beliefs zudem eine Veränderung derselben. Dabei findet sich häufig eine dynamische Sichtweise, nach welcher Beliefs und Belief-Systeme durch emotionale Erfahrungen verändert werden können (z. B. Ambrose, 2004; Goldin, 2003; Liljedahl, 2005; Richardson, 2003;

Thompson, 1992). Richardson (1996, 2003) betont diesbezüglich, dass das Studium eine eher schwache Rolle bei der Veränderung einnimmt und zudem eine Änderung von Beliefs nicht zwingend auf die pädagogische Praxis von Lehrkräften wirken muss. Andere Arbeiten verweisen auf eine Änderung von Überzeugungen durch Reflexion (z. B. Furinghetti & Pehkonen, 2003; Philipp, 2007) oder auf Beliefänderungen durch widersprüchliche Spannungen zwischen den Beliefs und der eigenen Praxis (z. B. Chapmann, 2003).

Dabei wird bezüglich der Veränderung von Beliefs zudem für die Berücksichtigung entsprechender Strukturen und Beziehungen plädiert (z. B. Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 2015; Cross, 2009; Grigutsch et al., 1998). Erens (2017) hebt in diesem Kontext die Wirkung fest verwurzelter Beliefs als psychologische Filter und ihre damit einhergehende erschwerte Modifizierbarkeit, je zentraler ihre Stellung im Belief-System ist, hervor. Daneben hält Bernack-Schüler (2018) fest, dass der Veränderungsprozess sowie das Ergebnis davon bestimmt sind, ob kontext- bzw. gegenstandsbezogene Beliefs oder ein gesamtes Belief-System in Frage gestellt werden.

Mit Blick auf intendierte Beliefänderungen verweisen zudem unter anderem Cross Francis et al. (2015) und Richardson (2003) auf eine entsprechende Rechtfertigung und ethische Fragestellungen zur Entscheidung, welche Überzeugungen einer Änderung bedürfen.

Im Rahmen empirischer Studien zur Veränderung von Beliefs verdeutlichen unter anderem Ambrose (2004) und Yoo (2008), dass es sich dabei um einen länger andauernden Prozess handelt, der schrittweise erfolgt. Zahlreiche Studien sind gleichwohl in der Lage, Beliefänderungen empirisch festzustellen (z. B. Ambrose, 2004; Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 1999; Kempen, 2019; Liljedahl et al., 2007; Safrudiannur et al., 2022; Vacc & Bright, 1999; Weygandt, 2021; Weygandt & Oldenburg, 2015). Sowohl Liljedahl et al. (2007) als auch Bernack-Schüler (2018) und Kempen (2019) können anhand von Interventionen bei Lehramtsstudierenden eine Entwicklung hin zum Prozessaspekt feststellen, wobei Bernack-Schüler (2018) diesbezüglich insbesondere die affektiven Erfahrungen im Rahmen der Beliefänderung herausstreicht. Dabei verweist sie auf ein Ausbleiben einer Änderung hin zum Prozessaspekt bei fehlenden Erfolgserlebnissen und negativen Emotionen (Bernack-Schüler, 2018). Darüber hinaus zeigen empirische Ergebnisse die Begünstigung einer problemorientierten Sichtweise durch Lehrveranstaltungen zur Universitätsmathematik (z. B. Safrudiannur et al., 2022) und eine mögliche Einflussnahme auf Beliefs bei fortgeschrittenen Studierenden (z. B. Weygandt, 2021; Weygandt & Oldenburg, 2015). Ambrose (2004) hebt allerdings in diesem Kontext hervor, dass alte Beliefs weiterhin bestehen bleiben und entweder stärker oder weniger zentral werden, sodass davon

auszugehen ist, dass neue Überzeugungen mit bereits bestehenden Beliefs koexistieren und diese nicht ersetzt werden.

Neben den hier angeführten Arbeiten zur Änderung mathematikbezogener Beliefs sei an dieser Stelle am Rande auf Forschungen zur Veränderung epistemologischer Überzeugungen von Schüler*innen verwiesen (z. B. Beumann & Geisler, 2022; Stoppel, 2019).

Da die vorliegende Arbeit eine Änderung bzw. Weiterentwicklung von Beliefs anstrebt, interessieren insbesondere didaktische Konzepte zur Beliefänderung. Bernack-Schüler (2018, S. 40) beschreibt diesbezüglich anhand vorliegender Studien diverse Möglichkeiten, um eine Veränderung anzustreben.

Die vorliegenden Studien zeigen dabei einen starken Fokus auf das Sammeln eigener Erfahrungen mittels neuer Inhalte und Problemlöseinterventionen (z. B. Ambrose, 2004; Bernack, 2011; Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 1999; DeBellis & Rosenstein, 2004; Liljedahl, 2005; Roscoe & Sriraman, 2011; Yoo, 2008). Zudem spielen der Austausch über sowie die Reflexion und Dokumentation von Beliefs in diversen Studien eine wesentliche Rolle (z. B. Ambrose, 2004; Bernack, 2011; Chapman, 1999; Furinghetti & Pehkonen, 2003; Liljedahl et al., 2007; Roscoe & Sriraman, 2011; Weygandt, 2021), wobei Journal-Writing oftmals eine gewählte Variante darstellt (z. B. Bernack, 2011; Chapman, 1999; Liljedahl et al., 2007).

2.3 Forschungsstand zu beweisbezogenen Beliefs

Sowohl im Umfeld der Forschung zum Beweisen als auch zu mathematischen Beliefs findet sich, wie zuvor dargestellt, ein reicher Fundus an vorliegenden Forschungsarbeiten, welche diese beiden Gebiete bereits breit untersuchen. Das Interesse der vorliegenden Arbeit liegt dabei noch spezifischer auf beweisbezogenen Beliefs im Sinne von Überzeugungen zum Beweisen in der Mathematik und dem Mathematikunterricht.

Diverse Forschungsarbeiten untersuchten diesbezüglich bereits die beweisbezogenen Beliefs oder damit in Verbindung stehende Konzepte von Lehramtsstudierenden und Lehrpersonen (z. B. Kotelawala, 2016; Lee, 2019, 2025; Stewart & Thomas, 2019; Szücs, 2023; Varghese, 2009; Weber & Mejia-Ramos, 2014; Yoo, 2008).

Einen Blick auf die Wahrnehmung von Studierenden bezüglich des Beweisens in der linearen Algebra werfen Stewart und Thomas (2019), wobei sie herausstellen, dass Sinnbildung sowie Verständnis den persönlichen Beliefs vorausgehen. Kotelawala (2016) zeigt anhand von empirischen Ergebnissen, dass die Wichtigkeit von Beweisen für allgemeine mathematische Fähigkeiten durchaus wahrgenommen wird, mit Blick auf die Klasse jedoch verfahrensorientierte

Fertigkeiten beim Beweisen im Vordergrund stehen. Dabei sieht Kotelawala (2016, S. 1113) die mit Angst verbundenen persönlichen Erfahrungen der Proband*innen mit der Thematik als wesentlichen Faktor. Darüber hinaus stellt Szücs (2023, S. 26) eine mangelnde Erfahrung von Studierenden mit Beweisen heraus, was sie zur Vermutung bringt, dass einschlägige Beliefs überwiegend im Studium etabliert werden. Damit kommt es zur Prägung der Beliefs durch einen wissenschaftlichen Beweisbegriff sowie eine überwiegend ablehnende Haltung gegenüber der Thematisierung von Beweisen im Unterricht (Szücs, 2023, S. 26).

Ebenfalls im Kontext von Lehramtsstudierenden verweist Lee (2019) auf eine produktive Wahrnehmung der Proband*innen bezüglich des Lehrens von Beweisen, jedoch auf eine nachteilige Interpretation der Lernbedürfnisse der Schüler*innen, wonach Beweise nicht für alle Lernenden geeignet bzw. notwendig sind. Lee (2019) identifiziert dabei eine prüfungsorientierte Lernkultur als Hauptfaktor für fehlende Beweisaktivitäten in der Praxis. Zudem betont Lee (2025) die entscheidende Bedeutung affektiver Aspekte bei der Übernahme von Ideen und der Förderung produktiver Beliefs zu Beweisen im Mathematikunterricht.

Mit einem verstärkten Fokus auf schüler*innenbezogene Beliefs von Lehrpersonen stellt Varghese (2009) fest, dass Überzeugungen dominieren, welche von einem fehlenden schüler*innenseitigen Interesse Beweise zu lernen und einer beschränkenden Sichtweise von Beweisen auf die Schulgeometrie geprägt sind. Zudem besteht die Ansicht, Beweise würden aufgrund ihrer Komplexität und Abstraktheit über die Kapazitäten der meisten Lernenden hinausgehen (Varghese, 2009).

Spezifischer betrachten Weber und Mejia-Ramos (2014) die Beliefs von Studierenden zum Lesen von Beweisen, wobei sie Differenzen im Hinblick auf Professor*innen feststellen. Weber und Mejia-Ramos (2014, S. 99) fassen zusammen, dass, während Studierende davon ausgehen in unter 15 Minuten einen Beweis zu studieren, Mathematiker*innen jedenfalls mehr Zeit in Betracht ziehen. Darüber hinaus vertreten Studierende die Ansicht, Beweisverständnis zu erlangen, indem sie jeden Schritt begründen können, während Professor*innen hier von einem globaleren Beweisverständnis ausgehen (Weber & Mejia-Ramos, 2014, S. 99). Zudem wird das Lesen eines Beweises von den Student*innen als eher passiv empfunden, während Mathematiker*innen für ergänzende Teilbeweise oder Graphiken plädieren (Weber & Mejia-Ramos, 2014, S. 99). Diesbezüglich halten Weber und Mejia-Ramos (2014, S. 100–101) fest, dass unproduktive Beliefs bereits im Mathematikunterricht entwickelt werden.

Dies führt zur Frage nach beweisbezogenen Beliefs von Schüler*innen. Schoenfeld (1985, S. 185) stellt mit dem Begriff der mathematischen Weltbilder von Lernenden fest, dass diese

insbesondere auf Erfahrungen im Klassenraum aufgebaut werden. Damit einhergeht eine Einschätzung der Nützlichkeit geometrischer Beweise auf Basis der erfolgten Thematisierung im Unterricht (Schoenfeld, 1985, S. 185). Allerdings entsteht nach Schoenfeld (1985, S. 186) somit häufig die Einsicht, dass mathematische Argumentation und Beweisen der ausschließlichen Verifikation von vorgegebenem Wissen dient und damit nicht mit einer Entdeckungs- oder Verständnisfunktion verbunden wird. Schoenfeld (1985, S. 186) nutzt in diesem Kontext das Konzept des „naiven Empirismus“, um einen Weg aufzuzeigen, wie Beliefs auf das Verhalten von Schüler*innen wirken.

Daneben werden nachfolgend drei empirische Studien vorgestellt, die sich explizit mit den Beweisvorstellungen von Studierenden (Harel & Sowder, 1998) sowie Schüler*innen (Grundey, 2015; Healy & Hoyles, 1998, 2000) befassen und für die vorliegende Arbeit daher besonders zentral sind.

Harel und Sowder (1998) untersuchen im Rahmen des Projekts „Proof Understanding, Production and Appreciation“ die Vorstellungen zur Beweisführung von Collegestudierenden. In diesem Kontext klassifizieren sie verschiedene Beweisschemata, welche sich darauf beziehen, was eine Person überzeugt und daraufhin auch anbietet, um zu überzeugen (Harel & Sowder, 1998, S. 244). Jede der Kategorien repräsentiert dabei insbesondere eine kognitive Stufe (Harel & Sowder, 1998, S. 244). Sie präsentieren drei Oberkategorien, welche allerdings einander nicht ausschließen und jeweils in weitere Unterkategorien gegliedert sind (Harel & Sowder, 1998, S. 245). Harel und Sowder (1998, S. 278) identifizieren in ihrer Studie insbesondere eine Dominanz von autoritären und empirischen Beweisschemata. Zudem plädieren sie für eine frühzeitige Anleitung der Lernenden im Hinblick auf transformative, deduktive Beweisstrategien (Harel & Sowder, 1998, S. 280).

Die bereits im Rahmen des Forschungsstandes im Umfeld von Beweisen angeführte Studie von Healy und Hoyles (1998) untersucht im Zuge des Projektes „Justifying and Proving in School Mathematics“ unter anderem die Ansichten von leistungsstarken Lernenden in der Sekundarstufe I über die Rolle von Beweisen und inkludiert Aufgaben im Bereich der Arithmetik und Algebra sowie der Geometrie. Die Ergebnisse verdeutlichten, dass Lernende schlechte Leistungen beim Konstruieren von Beweisen erzielen, Erfolge im Rahmen der Algebra eher erreicht werden als in der Geometrie und die Schüler*innen im Allgemeinen besser in der Auswahl gültiger mathematischer Argumente sind als bei der eigenständigen Konstruktion derselben (Healy & Hoyles, 1998, S. 2–3). Mit Blick auf die Beweisvorstellungen der Lernenden zeigt sich ein signifikant positiver Einfluss der allgemeinen mathematischen Leistungen auf die

Ansichten der Lernenden über Beweise sowie ihre Kompetenzen, wobei hervorzuheben ist, dass dies nicht die einzige Variable darstellt (Healy & Hoyles, 1998, S. 4). Zudem wirken sich die Ansichten der Schüler*innen über Beweise sowie ihre Zwecke auf ihre Antworten im Fragebogen aus (Healy & Hoyles, 1998, S. 4). Genauer zeigt sich, dass die Vorstellung von der Rolle von Beweisen die Argumentwahl beeinflusst und insbesondere Lernende, welche allgemein eine Ansicht dazu abgegeben haben, weniger geneigt sind, empirische Argumente auszuwählen (Healy & Hoyles, 1998, S. 30). Zudem weisen Lernende, welche die Allgemeingültigkeit von Beweisen und ihre Rolle bei der Verifizierung einer Aussage anerkennen, bessere Konstruktionsleistungen auf (Healy & Hoyles, 1998, S. 47). Darüber hinaus neigen Schüler*innen mit einem Fokus auf die erklärende Funktion von Beweisen eher zur Konstruktion narrativer Argumente und Lernende mit einer Einsicht in den Zweck von Beweisen zur Verifizierung einer Aussage erreichen bei Argumentbewertungen hinsichtlich ihrer Korrektheit und Allgemeingültigkeit bessere Leistungen (Healy & Hoyles, 1998, S. 54–61). Abschließend zeigt sich in Klassen, wo Beweisen als separates Thema unterrichtet wird, ein vorteilhafteres Ergebnis hinsichtlich der Bewertung von Argumenten (Healy & Hoyles, 1998, S. 62).

Healy und Hoyles (2000, S. 418) streichen in ihrem Überblick über die Ergebnisse der Studie von 1998 im Bereich der Algebra heraus, dass ungefähr die Hälfte der teilnehmenden Personen den Zweck von Beweisen im Belegen der Richtigkeit einer mathematischen Aussage sieht und nur ein Prozent auf eine Systematisierungs- oder Entdeckungsfunktion verweist. Daneben sieht mehr als ein Drittel eine erklärende Funktion in Beweisen, wobei sich im Rahmen von Interviews herausstellt, dass von einer höheren Anzahl auszugehen ist (Healy & Hoyles, 2000, S. 418). Mehr als ein Viertel der Befragten hat wenig bis keine Vorstellung von der Bedeutung und dem Zweck von Beweisen (Healy & Hoyles, 2000, S. 418).

Anknüpfend an die Studie von Healy und Hoyles (1998) untersucht Grundey (2015) im Rahmen einer qualitativ-empirischen Studie das Wechselspiel zwischen Beweisvorstellungen und der eigenständigen Beweisaktivität von Schüler*innen der Sekundarstufe II aus deutschen und kanadischen Klassen mit einem Fokus auf den Analysisunterricht. Auf Basis des methodischen Ansatzes der fachdidaktischen Entwicklungsforschung nach dem Dortmunder Modell führt sie in vier Lerngruppen dasselbe Designexperiment durch, wobei Beweisaufgaben auf dem Gebiet der Analysis herangezogen werden und ein dreimaliger Durchlauf eines Prozesses von Beweisrezeption, -diskussion und -konstruktion vollzogen wird (Grundey, 2015). Die Ergebnisse von Grundey (2015, S. 273–274) zeigen eine stark ausgeprägte formal-algebraische Sichtweise, wobei zwar eine Erweiterung um soziale und funktionelle Aspekte des Beweisens sowie um logische Strukturen und Allgemeingültigkeit erfolgt, für die meisten Teilnehmer*innen allerdings

die Anfangsvorstellung weiterhin grundlegend bleibt. Indes konnten bereits bestehende Vorstellungen durch das vorgelegte Unterrichtskonzept erweitert bzw. verändert werden, wobei Grundey (2015, S. 274) vermutet, dass der Verlauf der einzelnen Phasen sowie das Interventionsverhalten der Lehrperson einen entscheidenden Einflussfaktor darstellen. Im Wechselspiel zwischen einer Beweis- und Inhaltsebene betont Grundey (2015, S. 275–276), dass eine enge formal-algebraische Beweisvorstellung die Konstruktion derselben behindert, obgleich dies auf Inhaltsebene möglich wäre. Zudem zeigt sich, dass Schwierigkeiten auf der Inhaltsebene oftmals auf die des Beweisens übertragen werden und es zudem bei ausschließlicher Konzentration auf eine Ebene zu Problematiken im Beweisprozess kommt (Grundey, 2015, S. 276–279). Grundey (2015, S. 281–282) hebt die positive Wirkung von Beweisdiskussionsphasen bei der Erweiterung und Veränderung enger bzw. falscher Vorstellungen hervor und betont den Einfluss der Lehrperson auf die Änderung von Beweisvorstellungen. Gleichzeitig stellt Grundey (2015, S. 283–284) fest, dass die vorgelegten prototypischen Schüler*innenbeweise lediglich für einen kleinen Teil der Teilnehmer*innen hilfreich waren und die damit implizierten Analogien wenig angenommen wurden.

Die Betrachtung des aktuellen Forschungsstandes im Umfeld von Beweisen sowie Beliefs und damit einhergehend beweisbezogenen Überzeugungen zeigt damit ein klares Bild. Es existieren bereits zahlreiche Forschungsarbeiten und theoretische Grundlagen zum Beweisen im Kontext von Schule, wobei auch Ausführungen zum mathematischen Argumentieren und Begründen zu berücksichtigen sind. Diverse didaktische Beweiskonzepte bieten dabei Anhaltspunkte für unterrichtliche Interventionen. Dahingehend wurden ebenso diverse Schwierigkeiten beim Beweisen aufgedeckt und analysiert sowie mögliche unterstützende Unterrichtskonzepte entwickelt und empirisch geprüft. Ein ähnliches Bild zeigt sich im Hinblick auf Beliefs und spezifisch mathematische Überzeugungen, die bereits sowohl auf Ebene von Lehrpersonen und Studierenden als auch aus Schüler*innenperspektive ausführlich behandelt und untersucht wurden. Überdies scheint sich auch aus theoretischer Perspektive ein zunehmender Konsens zu bilden, Beliefs in Belief-Systemen und Clustern zu verorten, welche sich wiederum mit Emotionen und Einstellungen sowie Werten in Verbindung stehen. Zudem wird überwiegend die Unterscheidung zwischen zentralen und peripheren sowie primären und abgeleiteten bzw. sekundären Beliefs betont. Was jedoch im Hinblick auf beweisbezogene Beliefs auffällt, ist ein stärkerer Fokus neuerer Forschungsarbeiten auf Lehramtsstudierende. Überzeugungen zum Beweisen von Schüler*innen werden in jüngster Zeit dahingehend kaum thematisiert, obwohl mehrfach festgehalten wird, dass Beliefs bereits in entscheidender Weise im Schulunterricht entwickelt werden. An diesem festgestellten Forschungsdesiderat zu beweisbezogenen Beliefs von

Schüler*innen möchte die vorliegende Arbeit ansetzen und dabei einen Fokus auf die Sekundarstufe II und das Teilgebiet der Analysis legen, Schwerpunkte, die wie vorangegangen dargelegt, ebenfalls weniger Beachtung in bisherigen Forschungen finden.

3 Forschungsfragen und Zielsetzung

Basierend auf den einführenden Ausführungen zum Stellenwert des Beweisens, Argumentierens und Begründens im Mathematikunterricht sowie auf dem dargelegten Forschungsstand ergibt sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit die zentrale Fragestellung, inwiefern bestehende beweisbezogene Beliefs von Lernenden der Sekundarstufe II durch unterrichtliche Interventionen auf dem Gebiet der Analysis beeinflusst werden können. Der Fokus auf spezifische Überzeugungen zum Beweisen sowie auf die Sekundarstufe II und das Teilgebiet Analysis ergibt sich insbesondere aus der vorangegangenen Analyse des aktuellen Forschungsstandes zu Beweisen und Beliefs. Die Wahl des Begriffes „beeinflussen“ orientiert sich dabei an vorliegenden Arbeiten, welche verdeutlichen, dass es weniger zu einer Veränderung im Sinne eines Ersetzens bestehender Beliefs kommt, sondern vielmehr zu einer Weiterentwicklung vorhandener und Ergänzung neuer Überzeugungen (z. B. Ambrose, 2004; Grundey, 2015). Insbesondere liegt ein Schwerpunkt auf der Festigung und dem Ausbau produktiver Beliefs sowie auf der Entkräftung und positiven Fortentwicklung hinderlicher Überzeugungen im Hinblick auf Beweisverständnis, -konstruktion und -akzeptanz.

Die dieser Arbeit zugrundeliegende leitende Forschungsfrage ergibt sich somit wie folgt:

„Inwiefern können bestehende beweisbezogene Beliefs von Lernenden der Sekundarstufe II durch unterrichtliche Interventionen auf dem Gebiet der Analysis beeinflusst werden?“

Daraus folgen weitere Subfragen, welche im Zuge der vorliegenden Arbeit beantwortet werden sollen:

- i. Welche Beliefs unter Berücksichtigung von Emotionen finden sich bei Schüler*innen der Sekundarstufe II im Hinblick auf mathematische Beweise und Beweisen im Mathematikunterricht?
- ii. Welche Zusammenhänge zwischen mathematischen und beweisbezogenen Beliefs der Schüler*innen lassen sich erkennen?
- iii. Inwiefern erzielen die entwickelten unterrichtlichen Interventionen eine Veränderung im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender und Aufnahme neuer beweisbezogener und mathematischer Beliefs?
- iv. Welche spezifischen Komponenten der Interventionsmaßnahmen bewirken im Einzelfall eine vorliegende Veränderung beweisbezogener Beliefs?

In diesem Sinne besteht ein erstes Ziel der vorliegenden Arbeit in der systematischen Erhebung vorrangig beweisbezogener Beliefs unter Berücksichtigung der Emotionen von Schüler*innen

der Sekundarstufe II. Im Spezifischen handelt es sich dabei um eine Untersuchung mittels Paper-Pencil-Fragebogen in zwei Klassen der 11. Schulstufe eines Wiener Gymnasiums in Form eines Prätests. Das Vorhaben wird ergänzt durch die theoretische Entwicklung und praktische Durchführung von Interventionsmaßnahmen, um eine Veränderung im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender sowie Aufnahme neuer Beliefs zu erreichen. Die Interventionen werden dahingehend als Unterrichtseinheiten konzipiert, welche im regulären Mathematikunterricht umgesetzt werden. Den Abschluss der Untersuchungen bildet schließlich ein Posttest, mit welchem eine mögliche Veränderung der Beliefs quantitativ erfasst wird. In Einzelfällen wird dies um entsprechende Interviews nach der Auswertung der Daten aus den Fragebogenerhebungen ergänzt, um tiefergehende Einblicke in die Veränderungsprozesse und entsprechende Wirkungen der Interventionsmaßnahmen zu erlangen.

Da bereits der aktuelle Forschungsstand sowohl auf theoretischer als auch empirischer Ebene ausführlich dargestellt wurde, um im beachtlichen Fundus an vorliegenden Arbeiten zum Thema eine Orientierung zu bieten und die nachfolgenden Ausführungen entsprechend einzuordnen, beschränkt sich der theoretische Teil der Arbeit auf jene Begriffe und Konzepte zum Beweisen sowie zu Beliefs, welche für die Entwicklung der Testinstrumente und Interventionen von Bedeutung sind. Daran anknüpfend finden sich diesbezügliche methodische Ausführungen bevor auf die Durchführung sowie die Ergebnisse der Studie eingegangen wird. Abschließend erfolgen eine Diskussion und Interpretation der Ergebnisse sowie ein Fazit zur gesamten Arbeit.

4 Theoretischer Hintergrund

Im Rahmen der Darstellung zum aktuellen Forschungsstand wurde bereits auf zentrale theoretische Aspekte und Debatten im Kontext von Beweisen im Mathematikunterricht sowie Beliefs peripher eingegangen. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich daher insbesondere auf die für die vorliegende Arbeit entscheidenden theoretischen Grundlagen zu den Gebieten Beweisen und Beliefs. Diese bilden sodann die Basis für die Entwicklung des Testinstruments sowie der unterrichtlichen Interventionen. Im ersten Abschnitt werden die wichtigsten Aspekte zum mathematischen Beweisen herausgearbeitet, wobei eingangs eine Begriffsklärung (4.1.1) vorgenommen sowie auf die spezifischen Beweisfunktionen (4.1.2) eingegangen wird. Daran anknüpfend gilt es die insbesondere im Unterrichtskontext verwandten Begriffe Argumentieren und Begründen sowie deren Verbindung mit Beweisen (4.1.3) anzusprechen, um einen entsprechenden Rahmen für die Arbeit zu schaffen. Schließlich rücken unterrichtliche Beweisprozesse (4.1.4) und didaktische Beweiskonzepte (4.1.5) in den Fokus. Die theoretischen Ausführungen zu Beliefs befassen sich sodann ebenfalls mit einer Klärung des Begriffs (4.2.1) sowie mit Konzepten mathematikbezogener (4.2.2) und Kategorisierungen beweisbezogener Beliefs (4.2.3). Im Rahmen der Thematisierung von Beliefänderungen wird insbesondere auf theoretische Aspekte und didaktische Konzepte eingegangen (4.2.4).

4.1 Beweis(en)

Was kann unter einem Beweis und Beweisen verstanden werden und auf welche Weise sind schulische Beweisprozesse aufzufassen? Wie kann der Beweisbegriff von bekannten Termini wie mathematischem Argumentieren und Begründen abgegrenzt oder mit diesen in Verbindung gesetzt werden? Welche Möglichkeiten gibt es, Beweisprozesse im Unterricht anzustoßen? Diese hier dargestellten Fragen erfahren in den nachfolgenden Ausführungen eine Klärung und bilden insbesondere die theoretische Basis für die Entwicklung von intervenierenden Maßnahmen im Hinblick auf Beliefänderungen.

4.1.1 Begriffsklärung

Kempen (2019, S. 26) verweist zu Beginn seiner Ausführungen zum Beweisbegriff auf die schwierige normative Fassbarkeit des Terminus und seines Verständnisses. Diesbezüglich ergänzt Bersch (2023, S. 24), dass vor allem Unterschiede im Hinblick auf die Perspektive zum Beweisen festzustellen sind.

Ein Blick auf verschiedene Definitionen des Beweisbegriffes zeigt dabei die Betonung verschiedener Aspekte. So streicht Bersch (2023, S. 26) hervor, dass es sich beispielsweise bei der

Definition von Reiss und Hammer (2021, S. 47) um einen rückführenden Fokus auf das Beweisen handelt. Die Autor*innen sehen dabei die Bedeutung von Beweisen in der Rückführung einer mathematischen Aussage auf eine andere (Reiss & Hammer, 2021, S. 73).

Im Gegensatz dazu sind Definitionen wie unter anderem jene von Meyer (2021) oder Jahnke et al. (2023) auf eine Folgerung bzw. Herleitung fokussiert (Bersch, 2023, S. 26). Meyer (2021, S. 20–21) hebt ein Verständnis von Beweisen im mathematischen Sinn hervor und verweist auf die schrittweise formal-deduktive Folgerung einer Behauptung aus bekannten Sätzen und Definitionen. Dabei wird angenommen, dass ein Rückgriff bis auf die entsprechenden theoretischen Grundlagen wie beispielsweise Axiome möglich ist (Meyer, 2021, S. 21). Allerdings zeigt Meyer (2021, S. 21) auch die Problematik eines solchen Verständnisses für die Praxis auf. In ähnlicher Weise verstehen Jahnke et al. (2023) unter einem mathematischen Beweis „die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bewiesenen Sätzen nach spezifischen Schlussregeln“ (S. 370). Auch Jahnke et al. (2023, S. 372) verweisen jedoch darauf, dass die damit einhergehende vollständige mathematische Strenge in der Praxis meistens weder zu erreichen noch wünschenswert ist.

Diese Frage nach den formalen Kriterien für Beweise bzw. den Grad formaler Strenge spielt im Kontext didaktisch orientierter Ausführungen eine zentrale Rolle (z. B. Bersch, 2023; Brunner, 2014). Hersh (1993) unterscheidet diesbezüglich zwei Bedeutungen eines Beweises in der Mathematik und verweist dabei auf eine praktische Perspektive sowie eine Sichtweise im Sinne der Logik und mathematischen Philosophie (S. 391). Die erste beschreibt Hersh (1993) als „argument that convinces qualified judges“ (S. 391), die zweite als „sequence of transformations of formal sentences, carried out according to the rules of the predicate calculus“ (S. 391). Aus dieser und ähnlichen Sichtweisen schließt Bersch (2023, S. 28), dass der Fokus bei einem formalen Beweisverständnis auf der Form des Beweises sowohl im Hinblick auf die äußere Darstellung als auch die verwendete Logik liegt. Meyer (2021, S. 21) betont dabei insbesondere die schrittweise zwingende Ableitung einer Aussage aus einer anderen und Brunner (2014, S. 9) hebt die formal-deduktive Darstellung sowie die Forderung nach absoluter Strenge hervor. Daneben identifiziert Bersch (2023, S. 28) aus bestehender Literatur weitere Merkmale, welche einem solchen Idealtyp eines Beweises zugeschrieben werden und verweist unter anderem auf die Verwendung logischer Schlüsse, die ausschließliche Zulassung deduktiver Schlussformen, die Anordnung in Ketten und Folgerungen sowie die Vollständigkeit, Lückenlosigkeit und Minimalismus. Gemäßigtere Perspektiven finden sich daneben, wie bereits angeführt unter anderem bei Jahnke et al. (2023, S. 372) sowie bei Hersh (1993, S. 391).

Neben den Aspekten der Richtung sowie der Strenge, spielt auch eine Produkt- oder Prozessperspektive auf das Beweisen in einigen Definitionen eine zentrale Rolle (Bersch, 2023, S. 26). So spricht Brunner (2014, S. 7) von einem Prozess, der nach streng logischen Regeln vom Allgemeinen zum Speziellen erfolgt. Mit Blick auf diese Unterscheidung verweist Bersch (2023, S. 27) auf das häufig implizite oder explizite Verständnis des Begriffs Beweisen als Prozess und des Terminus Beweis als Produkt. Wittmann (2018, S. 26) nimmt diesbezüglich eine Unterscheidung in die *Beweisfindung* mit Fokus auf den Prozess und den Beweis als Produkt dieses Prozesses vor. Im englischsprachigen Kontext verweisen Reid und Knipping (2010, S. 18) auf die Verwendung von *proof* im Singular für das Konzept, *proof* mit Artikel oder im Plural für das Produkt und *prove* für die Prozessperspektive. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird dabei unter Beweisen bzw. Beweisprozess der jeweilige Prozess verstanden und unter Beweis das entsprechende Produkt.

An dieser Stelle sei noch auf den weiteren Aspekt der mathematischen Gemeinschaft bzw. community verwiesen, der in vielen Definitionen eine wichtige Rolle einnimmt (Bersch, 2023, S. 26). Reiss und Ufer (2009) betonen hier „den Anspruch, nach Kriterien der mathematischen Community letztendlich die Gültigkeit einer Behauptung abzusichern“ (S. 157). Dabei heben sie den sozialen Prozess der Akzeptanz eines Beweises beispielsweise mittels Peer-Review hervor (Reiss & Ufer, 2009, S. 158). Auch Manin (2010) schreibt dazu: „A proof becomes a proof only after the social act of ‘accepting it as a proof‘“ (S. 45). Ergänzend dazu führt auch Hanna (1990) neben zwei weiteren Beschreibungen diesen Aspekt in ihrer Definition an:

1. Formal proof: proof as a theoretical concept in formal logic (or metalogic), which may be thought of as the ideal which actual mathematical practice only approximates.
2. Acceptable proof: proof as a normative concept that defines what is acceptable to qualified mathematicians.
3. The teaching of proof: proof as an activity in mathematics education which serves to elucidate ideas worth conveying to the student. (S. 6)

Auch Brunner (2014, S. 12) verweist in dieser Hinsicht auf die kommunikative Bedeutung von Beweisen. Darüber hinaus ist nach Heintz (2000) ein Beweis demnach ein „hochgradig normiertes Kommunikationsverfahren“ (S. 219). Die Perspektive findet sich zudem auch bei Hersh (1993), der von „qualified judges“ (S. 391) spricht sowie bei Meyer (2021) mit dem Begriff „Gemeinschaft“ (S. 29) und als „community“ (S. 30) bei Bersch (2023). In der weiter unten angeführten Definition von Stylianides (2007, S. 291) wird sogar diese Abhängigkeit in die Beweisdefinition aufgenommen, welche er spezifisch für die Schulmathematik etabliert.

Mit Blick auf den schulischen Kontext zeigen sich insbesondere zwei Orientierungen, wobei nach Bersch (2023, S. 26) kein Konsens über eine Hinwendung zu der einen oder anderen Richtung besteht. So sind nach Brunner (2014, S. 2) Beweise aufgrund ihres hohen Stellenwertes in der Mathematik auch im Unterricht unverzichtbar. Um den Anspruch des schulischen Beweises jedoch zu verringern, werden unterschiedliche Begrifflichkeiten wie Argumentieren und Begründen in diesem Kontext verwendet (Brunner, 2014, S. 2). Auch Bersch (2023, S. 31) verweist auf den engen Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen. Auf die Bedeutung dieser Begriffe sowie Modelle für die Beschreibung ihres Zusammenhangs wird in Abschnitt 4.1.3 eingegangen.

Neben diesem Fokus gibt es Ansätze, welche für veränderte Maßstäbe an einen schulischen Beweisbegriff plädieren (Bersch, 2023, S. 26). Jahnke et. al (2023, S. 373) verweisen dabei auf die Nutzung eines offenen Begriffes von Beweisen, der nicht mehr auf den axiomatischen Aufbau rekurriert und führen dazu den Begriff der *Argumentationsbasis* ein, worunter jene Aussagen und Annahmen zu verstehen sind, die zum geteilten Wissen einer Gruppe gehören und zugrunde gelegt werden (Jahnke et al., 2023, S. 373). Stylianides (2007) verfolgt einen ähnlichen Ansatz und definiert das Folgende:

Proof is an mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, worth the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justifications;
 2. It employs forms of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
 3. It is communicated with forms of expressions (*modes of the argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community.
- (S. 291, Hervorhebungen im Original)

Kempen (2019, S. 29) verweist allerdings im Hinblick auf diese Definition von Stylianides (2007) auf die fehlende Rolle der Lehrperson als Teil der mathematischen Gemeinschaft und die Frage nach der Nähe der gesetzten Normen in der Klasse zu jenen der fachlichen Community.

Wenngleich in der Literatur verschiedene Wege beschrieben werden, Beweisen und Beweise im Mathematikunterricht zu beschreiben, so besteht jedoch Einigkeit über die Funktion von Beweisen.

4.1.2 Funktionen von Beweisen in der Mathematik und Schule

In Anlehnung an Hersh (1993) unterscheidet Brunner (2014, S. 13) zwei Hauptfunktionen von Beweisen. Hersh (1993) schreibt dazu: „Mathematical proof can convince, and it can explain. In mathematical research, its primary role is convincing. At the high-school or undergraduate level, its primary role is explaining“ (S. 398). Brunner (2014, S. 13) hebt diesbezüglich hervor, dass die Überzeugungsfunktion im Mathematikunterricht zwar gleichfalls von Bedeutung ist, allerdings Lernende aufgrund der Komplexität des Beweisens und des hierarchischen Ungleichgewichts im Klassenraum tendenziell leicht zu überzeugen sind. Ähnlich dazu identifiziert Bell (1976, S. 24) drei Bedeutungen von mathematischen Beweisen. Zum einen verifizieren oder rechtfertigen Beweise im Sinne der Erfassung der Wahrheit einer Aussage (Bell, 1976, S. 24). Zum anderen nennt Bell (1976) die Funktion „*illumination*“ (S. 24, Hervorhebung im Original), wobei ein guter Beweis zeigen sollte, warum die Aussage wahr ist. Als dritte Komponente fügt Bell (1976, S. 24) eine Systematisierungsfunktion hinzu und meint damit die Organisation der Ergebnisse in größere Systeme und Konzepte sowie in kleinere abgeleitete Resultate davon.

Aufbauend auf Bell (1976) etabliert de Villiers (1990, S. 18) die fünf Funktionen Verifikation/Überzeugung, Erklärung, Systematisierung, Entdeckung und Kommunikation. Die ersten drei Beweisfunktionen werden dabei im Sinne von Bell (1976) verstanden. Mit Entdeckungsfunktion meint de Villiers (1990, S. 18) die Erfindung oder Entdeckung neuer Resultate, mit der Kommunikationsfunktion die Übertragung von mathematischem Wissen. Dabei nehmen in unterschiedlichen Situationen verschiedene der Funktionen eine überwiegende Rolle ein (de Villiers, 1990, S. 23). De Villiers (1990, S. 23) verweist zudem auf die Unvollständigkeit seiner Auflistung und nennt noch eine ästhetische und selbstverwirklichende Funktion von Beweisen als weitere Aspekte. Ergänzend zu den genannten fünf Beweisfunktionen von de Villiers (1990) etablieren Hanna und Jahnke (1996, S. 903) die drei weiteren Funktionen Konstruktion, Exploration und Inkorporation.

Eine für die vorliegende Arbeit zentrale Zusammenführung der genannten Beweisfunktionen liefert Kuntze (2005), welcher ein Kategoriensystem zur Beschreibung der Beweisfunktionen für den schulischen Kontext entwickelt und dessen Einsatz empirisch überprüft. Kuntze (2005, S. 43–55) führt dabei neun nicht disjunkte Kategorien ein, wobei bei einzelnen Typen eine weitere Aufspaltung erfolgt. Beweisen hat demnach die Funktion (1) eine Aussage zu verifizieren, (2) eine Reflexion zugrunde liegender Probleme anzuregen und damit zu erklären, warum eine Aussage gültig ist, (3) andere Personen zu überzeugen, (4a) die Zusammenhänge und Ordnung mathematischen Wissen zu explorieren sowie (4b) eine systematische Ordnung herzustellen und (4c) das Wissen neu zu ordnen (Kuntze, 2005, S. 53–54). Darüber hinaus besitzt Beweisen

die Funktion (5a) mathematisches Wissen zu entdecken, (5b) auf Beweisen bereits bewiesener Behauptungen aufzubauen, (6) mathematisches Wissen mitzuteilen und (7a) sich individuell selbst oder (7b) im sozialen Kontext daran zu beweisen (Kuntze, 2005, S. 54–55). Dies wird durch die Funktionen ergänzt (8) Ästhetisches zu entdecken oder zu erschaffen und (9) eine fundierte Grundlage für Verfahren und Wege in der Praxis zu begründen (Kuntze, 2005, S. 55). Kempen (2019, S. 53–54) reflektiert die genannten Beweisfunktionen zudem aus einer didaktischen Perspektive und weist im Hinblick auf die Verifizierungs- und Überzeugungsfunktion darauf hin, dass sowohl der objektive Gültigkeitsnachweis einer Aussage als auch die subjektive Überzeugung über die Gültigkeit im Unterricht Berücksichtigung finden sollten. Daneben bedarf die Systematisierungsfunktion eines notwendigen Explizierens eines formalen Beweis-konzeptes im Unterricht (Kempen, 2019, S. 54). Nach Kempen (2019, S. 54) sollten Beweise im Sinne der Entdeckungsfunktion nicht als Standardaufgaben im Unterricht erfolgen, sondern in Prozesse der Erkenntnis eingefügt werden. Die Kommunikationsfunktion führt im didaktischen Kontext zur Frage nach der Ausführlichkeit und Darstellung von Beweisen, damit Beweisverständnis erreicht werden kann (Kempen, 2019, S. 55). Andere, wie die ästhetische Funktion entsprechen subjektiven Momenten und können nicht von der Lehrperson oder im Allgemeinen von außen bewirkt werden (Kempen, 2019, S. 55).

Beweisen und Beweise erschöpfen sich damit nicht nur in verschiedenen Perspektiven hinsichtlich einer Akzentuierung in ihrer Definition, sondern haben diverse unterschiedliche Funktionen eingeschrieben. Um eine weitere Klärung des Forschungsgegenstandes zu ermöglichen, interessiert in den nachfolgenden Ausführungen die bereits angesprochene Verbindung zu sowie Abgrenzung von weiteren Begriffen wie Argumentieren und Begründen.

4.1.3 Argumentieren, Begründen, Beweisen in der Mathematik

Ausführliche Darstellungen über den Argumentations- sowie Begründungsbegriff und damit in Verbindung den Begriff Beweis und Beweisen finden sich unter anderem bei Bersch (2023), Brunner (2014) und Kempen (2019). Brunner (2014, S. 27) betont im Hinblick auf den Argumentationsbegriff, dass dieser zum einen in unterschiedlichen Bereichen verwendet und zum anderen darüber hinaus verschieden definiert wird. Mit Blick auf die Mathematikdidaktik verweist Pedemonte (2007, S. 26) auch hier auf das Fehlen einer einheitlichen Definition. Damit ist der Begriff in verschiedenen Arbeiten mit diversen Akzentuierungen in Verwendung (Kempen, 2019, S. 62).

Da das Argumentieren keine spezifisch mathematische Tätigkeit ist, beziehen sich sowohl Bersch (2023) als auch Kempen (2019) am Beginn ihrer Ausführungen auf den Argumentationsbegriff nach Habermas (2011):

Argumentation nennen wir den Typus von Rede, in dem die Teilnehmer strittige Geltungsansprüche thematisieren und versuchen, diese mit Argumenten einzulösen oder zu kritisieren. Ein *Argument* enthält Gründe, die in systematischer Weise mit dem *Geltungsanspruch* einer problematischen Äußerung verknüpft sind. (S. 38, Hervorhebungen im Original)

Im Zusammenhang mit dem Argumentationsbegriff sieht Brunner (2014, S. 28) allerdings die Notwendigkeit Definitionen zu finden, welche stärker im mathematischen Bereich verortet werden können und damit weniger generalisierbar sind als beispielsweise die hier angeführte Definition von Habermas (2011).

Mit Bezug auf den Unterricht definiert Schwarzkopf (2000, S. 240, zitiert nach Brunner, 2014, S. 28) Argumentation als sozialen Prozess, der mit dem Anzeigen eines Begründungsbedarfs und dem damit einhergehenden Versuch, denselben zu befriedigen, einhergeht. Bersch (2023, S. 13) verweist dabei auf den fehlenden strittigen Anspruch als auslösendes Element und das Ausbleiben eines zwingend subjektiven Begründungsbedürfnisses.

Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2018, S. 94–95) verstehen dahingegen Argumentation bereits als für oder gegen eine Aussage gerichtet und betonen eine schrittweise lückenlose Rückführung auf bereits anerkannte Aussagen oder Normen. Ein noch weiteres Verständnis von mathematischem Argumentieren zeigen Reiss und Ufer (2009):

Mathematisches Argumentieren ist dabei weit gefasst als eine Tätigkeit, die auf die Untersuchung und Absicherung von Hypothesen und offenen Fragen ausgerichtet ist. Insbesondere sind dadurch auch nicht-deduktive Formen der Argumentation mit eingeschlossen wie Schlüsse durch Analogien, Metaphern, durch Abduktion oder durch Induktion. (S. 157)

Kempen (2019, S. 67) betont daher für den Mathematikunterricht, dass die Untersuchungsgegenstände nicht notwendigerweise strittig sein müssen, sondern auch von außen, beispielsweise durch die Lehrperson oder das Schulbuch, eingebracht werden können. Dabei können insbesondere verschiedene Argumentationsformen von mathematischem Argumentieren umfasst werden (Kempen, 2019, S. 67). In ähnlich breiter Weise sieht Bersch (2023, S. 16) mathematisches Argumentieren als Tätigkeit oder Prozess im Bereich der Mathematik, wobei unter Zuhilfenahme von logischen Schlüssen Argumente für oder gegen Zusammenhänge, Meinungen, Hypothesen oder Aussagen gesucht, entwickelt, verknüpft oder beurteilt werden. Dies kann schriftlich oder mündlich erfolgen und die Positionen der jeweiligen Personen müssen vorab

nicht klar sein (Bersch, 2023, S. 16). Zudem ist nicht vorgeschrieben, welche Schlussregeln Verwendung finden dürfen (Bersch, 2023, S. 16). Im Sinne von Bersch (2023, S. 16) werden in der vorliegenden Arbeit Argumentieren als Prozess und Argumentationen als Produkt aufgefasst.

Mit Blick auf das Verhältnis von Argumentieren und Beweisen bestehen nach Brunner (2014, S. 29) zwei Ansätze, welche einen engen Zusammenhang postulieren und zum anderen Arbeiten, welche beide Begriffe als unterschiedliche Tätigkeiten auffassen. Pedemonte (2007, S. 26–27) führt beispielsweise die Eigenschaft der rationalen Begründung, den Überzeugungscharakter sowie den Adressatenkreis und die Zugehörigkeit zu einem Bezugsfeld als gemeinsame Kriterien an. Dahingegen vertritt Duval (1991) die folgende Ansicht: „Deductive thinking does not work like argumentation“ (S. 233). Nach Brunner (2014, S. 30) sieht Duval (1991) Begründen als Oberbegriff von Argumentieren und Beweisen. Dies führt zum Verhältnis dieser drei Begrifflichkeiten.

Nach Bersch (2023, S. 20) ergeben sich drei verschiedene Verwendungsweisen des Begründungsbegriffes im Zusammenhang mit Argumentieren und Beweisen. Zum einen kann Begründen als Zwischenform verstanden werden, als spezielle Form von Argumentieren (Bersch, 2023, S. 20). Beweisen ist damit wiederum eine spezifische Art des Begründens (Bersch, 2023, S. 20). In dieser Hinsicht sehen Reiss und Ufer (2009) „Begründen als Teilaspekt des Argumentierens“ (S. 156). In Anlehnung an Mittelstrass (1995/96, zitiert nach Hefendehl-Hebeker & Hußmann, 2018, S. 95) schreiben dazu auch Hefendehl-Hebeker und Hußmann (2018): „Eine schlüssige Argumentation für eine Aussage bzw. Norm heißt eine Begründung derselben [...]“ (S. 95). Unter anderem unter Bezug auf diese Autor*innen versteht auch Bersch (2023, S. 23) Begründen als Zwischenform von Argumentieren und Beweisen, womit der Terminus als Oberbegriff für Beweisen und spezifische Form des Argumentierens fungiert.

Eine weitere Verwendungsweise ist nach Bersch (2023, S. 22) die Verwendung von Begründen als Argumente. Sill (2019, S. 211) versteht dahingehend unter der Tätigkeit des Begründens ein deduktives Argument.

Insbesondere für die vorliegende Arbeit von Bedeutung ist die dritte und letzte Verwendungsart, Begründen als Oberbegriff von Argumentieren und Beweisen zu verstehen (Bersch, 2023, S. 20). In Anlehnung an Duval (1991) vertritt Brunner (2014) diesen Ansatz und versteht Begründen „als Kontinuum mit den Stationen alltagsbezogenes Argumentieren, Argumentieren mit mathematischen Mitteln, logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln und formal-deduktives Beweisen“ (S. 30). Dieses Verständnis bildet neben den nachfolgenden Ausführungen

die Grundlage der vorliegenden Arbeit und die Basis für die Entwicklung entsprechender Interventionsmaßnahmen.

4.1.4 Mathematische Beweisprozesse im Unterricht

Ein Blick auf den Beweisprozess im Mathematikunterricht führt zwangsläufig zum Prozessmodell des Beweisens von Boero (1999). Darin werden sowohl induktive als auch deduktive Phasen beschrieben, die der Exploration und dem Zusammenführen von Teilargumenten zu einer Argumentationskette und damit einem Beweis dienen (Reiss & Ufer, 2009, S. 162). Das ursprüngliche Modell gliedert sich in sechs Phasen, die zwar aufeinander aufbauen, allerdings nicht linear durchlaufen werden müssen, sondern auch mehrfach und in Schleifen absolviert werden können (Reiss, 2009, S. 6). Die sechs Phasen nach Boero (1999, S. 2) sind: (1) Entwicklung einer Vermutung und Erkundung der Problemsituation sowie Identifizierung von Regelmäßigkeiten und Bedingungen, (2) Formulierung einer Behauptung nach geltenden mathematischen Normen, (3) Untersuchung der Vermutung sowie damit einhergehend von Zusammenhängen und Identifizierung geeigneter Argumente, (4) Auswahl und Verknüpfung der Argumente zu einer deduktiven Argumentationskette, (5) Formulierung eines mathematischen Beweises nach aktuellen mathematischen Standards und (6) Annäherung an einen formalen Beweis (siehe auch Reiss, 2009, S. 6).

Reiss und Ufer (2009, S. 162) ergänzen aufbauend auf Manin (2010) sowie Heinze und Reiss (2004) eine weitere Phase der Akzeptanz durch die mathematische Gemeinschaft. Dabei verweisen sie auf die Rolle der Lehrperson als prüfende Community (Reiss & Ufer, 2009, S. 193).

In Anlehnung an das Modell von Boero (1999) sehen Kuntze et al. (2004, S. 6) die Notwendigkeit, dieses im Hinblick auf die spezifische Situation im Klassenzimmer zu adaptieren, um es für den Mathematikunterricht anwendbar zu machen. Damit etablieren Kuntze et al. (2004, S. 6–7) sogenannte inhaltliche Elemente für die Behandlung von mathematischen Beweisen im Unterricht und entwickeln folgendes Prozessmodell: (1) Sammlung der Voraussetzungen, (2) Formulierung der Behauptung(en), (3) Diskussion der Beweisbedürftigkeit, (4) Bereitstellung und Aktivierung von Grundwissen, (5) Sammlung, (6) Erkundung sowie (7) Zusammensetzung von Argumenten, (8) Überblick über das Beweisproblem, (9) Entscheidung für einen Beweisweg, (10) Beweisredaktion, (11) Verifikation und Rückblick sowie Diskussion und (12) allgemeine Bemerkungen über das mathematische Beweisen. Dieses Modell wird insbesondere den Beweisprozessen im Rahmen der Interventionseinheiten zugrunde gelegt.

Zwei entscheidende Aspekte, die in diesem Beweisprozess angesprochen werden, gilt es an dieser Stelle hervorzuheben. Mit der letzten Phase der allgemeinen Bemerkungen über das

mathematische Beweisen wird der Aufbau von beweisbezogenem Methodenwissen impliziert (Kuntze et al., 2004, S. 8). Neben dem Inhaltswissen über Definitionen, Begriffe und Regeln müssen Lernende in der Lage sein auf entsprechende Kriterien für akzeptierte Beweise zurückzugreifen (Ufer et al., 2009, S. 35). Heinze und Reiss (2003, S. 2) gliedern dahingehend methodisches Wissen in drei unabhängige Aspekte.

Der erste Aspekt, das Beweisschema, umfasst jene Argumente, welche im Rahmen eines Beweises zugelassen werden (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Ufer et al., 2009, S. 35). Bei einem mathematischen Beweis sind dies deduktive Schlussweisen, wohingegen empirisch-induktive Argumentationen sowie die Berufung auf eine Autorität oder anschauliche Argumente nicht anerkannt werden (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Ufer et al., 2009, S. 35). Die Fixierung in formaler Sprache ist dahingegen kein relevanter Aspekt des Beweisschemas, sodass insbesondere die Transparenz des Arguments und nicht seine korrekte Form im Vordergrund steht (Ufer et al., 2009, S. 35). Die Beweisstruktur als zweiter Aspekt spricht den logischen Aufbau der deduktiven Schlüsse an, wobei der Beginn bei den Voraussetzungen und das Ende bei der Behauptung liegt (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Ufer et al., 2009, S. 35). In anderen Worten soll der Beweis beweisen, dass aus den Voraussetzungen die Behauptung folgt, wobei Beweislücken und Zirkelschlüsse nicht erlaubt sind (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Ufer et al., 2009, S. 35). Unter dem letzten Aspekt der Beweiskette wird die Formierung als logische Kette im Sinne einer möglichen Herleitung jedes Beweisschrittes aus der vorangegangenen Aussage verstanden (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Ufer et al., 2009, S. 36).

Ufer et al. (2009, S. 36) halten zusammenfassend fest, dass sich der erste Aspekt nur auf die einzelnen Schritte bezieht, während der dritte Bereich die Verbindung der einzelnen Beweisschritte anspricht und der zweite Aspekt die Geschlossenheit der Argumentation aufzeigt.

Neben dem Methodenwissen sprechen Kuntze et al. (2004, S. 7) zudem die Diskussion der Beweisbedürftigkeit an. Kuntze et al. (2004, S. 7) unterscheiden dahingehend eine motivationale und eine kognitiv-methodische Komponente im Sinne der Einsicht in die Unzulänglichkeit des vorausgesetzten Wissens für die Gültigkeit der Behauptung. In ähnlicher Weise trennt Kempen (2019, S. 42) in Anlehnung an Winter (1983, zitiert nach Kempen, 2019, S. 42) zwischen objektivem und subjektivem Beweisbedürfnis. Dabei verweist Kempen (2019, S. 43) auf die enge Verbindung des objektiven Beweisbedürfnisses zum konzeptionellen Beweisverständnis, wonach innerhalb eines Beweises nur Axiome sowie bereits bewiesene Aussagen verwendet werden dürfen und woraus zwingend eine objektive Notwendigkeit eines Beweises entsteht. Das subjektive Beweisbedürfnis sieht Kempen (2019, S. 44) in engem Zusammenhang mit der

Erklärungsfunktion von Beweisen. Dessen Herausbildung im Sinne eines echten intrinsischen Verlangens sollte die didaktische Grundintention im Unterricht sein (Kempen, 2019, S. 44).

Wie diese Beweisprozesse im Unterricht angestoßen werden können, führt zwangsläufig zur Thematik didaktischer Beweiskonzepte.

4.1.5 Didaktische Beweiskonzepte

Ein Vergleich verschiedener didaktischer Beweiskonzepte findet sich unter anderem bei Biehler und Kempen (2016) sowie bei Reid und Knipping (2010). Reid und Knipping (2010, S. 130) nehmen dahingehend eine Unterscheidung im Hinblick auf die verwendeten bzw. nicht verwendeten Darstellungen vor. Dabei unterscheiden Reid und Knipping (2010, S. 130) die Kategorien (1) *Empirisch*, als Verwendung von spezifischen Beispielen, welche allerdings nicht als Repräsentanten einer Klasse fungieren, (2) *Generisch*, als Verwendung von Beispielen, die als Repräsentanten eingesetzt werden, (3) *Symbolisch*, wobei Wörter und Symbole als Darstellung mit semantischer Bedeutung verwendet werden und (4) *Formal*, als Darstellung mittels Wörter und Symbole, die nicht als semantische Bedeutungsträger fungieren (siehe auch Biehler & Kempen, 2016, S. 143).

Die Darstellung in der vorliegenden Arbeit orientiert sich an Biehler und Kempen (2016), welche eine historische Perspektive einnehmen. Biehler und Kempen (2016, S. 147) verweisen dahingehend auf den Ausgangspunkt von Beweiskonzepten bei Branford (1908), der sich in sämtlichen didaktischen Arbeiten im deutschsprachigen Raum zum Thema wiederfindet. Branford (1908, S. 93) verfolgt das Ziel, eine Balance zwischen den experimentellen Verfahren im Unterricht und der „alten Euklidischen Schule“ zu schaffen. Dazu führt Branford (1908, S. 94) drei Stufen bzw. Typen des Beweisens ein: experimentell, intuitiv und wissenschaftlich. Auf der experimentellen Stufe gilt es, Lernende mit dem Wissen im Sinne von Gegenständen und Begriffen vertraut zu machen, wobei die Prüfung konkreter Fälle eine allgemeine Wahrheit anregen soll (Biehler & Kempen, 2016, S. 148; Branford, 1908, S. 94). Auf der zweiten intuitiven Stufe werden allgemeine Wahrheiten gegebenenfalls unter Zuhilfenahme von sinnlich erfahrenen Postulaten entwickelt (Biehler & Kempen, 2016, S. 148; Branford, 1908, S. 97). Hier können insbesondere Anregungen für einen wissenschaftlichen Beweis erfolgen (Biehler & Kempen, 2016, S. 148; Branford, 1908, S. 97). Auf der dritten und letzten Stufe werden keine sinnlich erfahrenen Postulate mehr herangezogen, sondern Axiome als Grundlage festgelegt und rein logisches Schließen verwendet (Biehler & Kempen, 2016, S. 149; Branford, 1908, S. 99–100). Lernende sollten insbesondere daran gewöhnt werden auf dieser Stufe selbstständig Beweise zu entwickeln (Biehler & Kempen, 2016, S. 149; Branford, 1908, S. 100). Branford

(1908, S. 101) verweist zudem auf die Unerreichbarkeit des Ideals eines wissenschaftlichen Beweises und plädiert dafür, dass die Strenge und der Grad des wissenschaftlichen Beweises für die Lernenden angemessen sein sollten.

In weiterer Folge deuten Biehler und Kempen (2016, S. 152) auf das Konzept quasi-allgemeiner Beweise von Freudenthal (1953) hin, welches sie als essentielle Komponente in seinen darauffolgenden beispielgebundenen Beweisen sehen. Mit der Frage, ob die Übung mit zahlreichen Beispielen nicht gerade die Ursache für Lernschwierigkeiten und Misserfolge ist, werden Beispiele eingeführt, die er als Paradigmen bezeichnet und „einen weiten Bereich von Isomorphie“ (Freudenthal, 1978, S. 199) besitzen (Freudenthal, 1978, S. 194–199).

Für weitere Ausführungen zu Freudenthals quasi-allgemeinen Beweisen sowie paradigmatischen Beispielen sei an dieser Stelle auf Freudenthal (1953, 1978) sowie Biehler und Kempen (2016) verwiesen, da andere Konzepte im Rahmen dieser Arbeit zentraler erscheinen.

Insbesondere das Konzept der Prämathematik von Semadeni (1976, zitiert nach Biehler & Kempen, 2016, S. 153) hat nach Biehler und Kempen (2016, S. 153) wesentlichen Einfluss auf nachfolgende didaktische Beweiskonzepte. Im Rahmen des prämathematischen Beweisens oder auch des „action proof“ nach Semadeni (1984) sehen Biehler und Kempen (2016, S. 155) einen dreistufigen Prozess, der in der Durchführung einer physischen Handlung sowie deren Verinnerlichung und schließlich Verallgemeinerung besteht. Biehler und Kempen (2016, S. 157) fassen diesbezüglich zusammen, dass prämathematische Beweise enaktiv oder ikonisch erfolgen, die Argumente allerdings fachlich korrekt sein müssen und nicht auf empirischer Evidenz beruhen dürfen. Ein Fokus liegt dabei auf der Grundschule (Biehler & Kempen, 2016, S. 157).

Mit Bezug auf die prämathematischen Beweise von Semadeni und paradigmatische Beispiele nach Freudenthal spricht Kirsch (1979, S. 261–262) vom „adäquatem Repräsentieren eines Beweises auf enaktivem Niveau“ (Kirsch, 1979, S. 262) oder „beispielgebundenem Begründen“ (Kirsch, 1979, S. 262). Kirsch (1979, S. 262) grenzt diese Art von Beweisen klar von ungenügenden, anschaulichen oder plausiblen Begründungen sowie experimentellen Verifikationen ab. Biehler und Kempen (2016, S. 159) fassen zusammen, dass auch diese Beweise auf enaktiver bzw. ikonischer Ebene stattfinden und als mathematische Beweise ohne formale Darstellung gelten.

Das Konzept inhaltlich-anschaulicher Beweise nach Wittmann und Müller (1988, zitiert nach Biehler & Kempen, 2016, S. 160) beschreiben Biehler und Kempen (2016, S. 160) als

übereinstimmend mit Branfords intuitiver Stufe, wobei diese ebenfalls nicht auf formal-symbolischer Ebene geführt werden.

Blum und Kirsch (1989, 1991) greifen das Konzept des inhaltlich-anschaulichen Beweisens von Wittmann und Müller (1988) auf und etablieren aus einer gescheiterten Übertragung desselben auf die Analysis eine neue Richtung. Blum und Kirsch (1989) wollen darunter „eine Kette von korrekten Schlüssen verstehen, die auf nicht-formale Prämissen zurückgreifen (S. 202). Dabei findet sich in ihren Arbeiten zum einen der Begriff „inhaltlich-anschauliches Beweisen“ (Blum & Kirsch, 1989, S. 202) und zum anderen „preformal proof“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187). Blum und Kirsch (1989, S. 202–203) unterscheiden dabei zwar ihr Konzept von dem Begriff des „präformalen“ Beweisens nach Heidenreich (1987, zitiert nach Blum & Kirsch, S. 202) und fassen handlungsbezogenes und inhaltlich-anschauliches Beweisen unter diesen Begriff, verwenden allerdings in der englischen Version dennoch die Bezeichnung „preformal“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 187). In Anlehnung an Biehler und Kempen (2016, S. 161) wird daher in der vorliegenden Arbeit inhaltlich-anschauliches Beweisen mit Wittmann und Müller sowie präformales Beweisen mit Blum und Kirsch in Verbindung gebracht, um die beiden Konzepte zu trennen.

Da das Konzept des präformalen Beweisens eine Basis der vorliegenden Arbeit bildet, sei an dieser Stelle noch auf eine Unterscheidung im Hinblick auf die Darstellungsform in drei verschiedene Arten von präformalen Beweisen nach Blum und Kirsch (1991, S. 187–188) verwiesen. Unter einem *action proof* wird demnach eine Handlung an einem konkreten paradigmatischen, generischen Beispiel verstanden, wobei die Handlungen korrekten mathematischen Argumenten entsprechen müssen (Biehler & Kempen, 2016, S. 162; Blum & Kirsch, 1991, S. 187–188). Ein *geometrisch-intuitiver Beweis* basiert auf fundamentalen geometrischen Konzepten und intuitiven Fakten (Biehler & Kempen, 2016, S. 162; Blum & Kirsch, 1991, S. 188). Im sogenannten „*reality-oriented proof*“ (Blum & Kirsch, 1991, S. 188) erfolgt die Nutzung sinnstiftender Ideen der Realität, die für Lernende leicht zugänglich sind (Biehler & Kempen, 2016, S. 162; Blum & Kirsch, 1991, S. 188).

An dieser Stelle sei zudem auf die operativen Beweise nach Wittmann (1985, 2014) verwiesen. Als Spezialform des operativen Prinzips führt Wittmann (1985, S. 11) operative Beweise an. Wittmann (1985) charakterisiert diese insbesondere als „Beweise, bei denen die den Objekten durch Konstruktion aufgeprägten Eigenschaften und Beziehungen sowie deren Verhalten bei Operationen explizit ausgenutzt werden“ (S. 11). Von didaktischem Interesse sind operative Beweise damit vorrangig an „konkret oder zeichnerisch repräsentierten Objekten“ (Wittmann,

1985, S. 11). Bieler und Kempen (2016, S. 165) verweisen dabei auf die fehlende explizite Diskussion des Verhältnisses von operativen und inhaltlich-anschaulichen Beweisen. Brunner (2014, S. 17–19) verwendet beide Begriffe bei der Beschreibung von Beweistypen gemeinsam.

Neben den bereits angeführten didaktischen Beweiskonzepten existiert eine Vielzahl weiterer Beweistypen, die jedoch an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden. Zu nennen sind hier unter anderem generische Beispiele und Beweise (z. B. Balacheff, 1988; Biehler & Kempen, 2014, 2016; Dreyfus et al., 2021; Harel & Sowder, 1998; Mason & Pimm, 1984; Reid & Knipping, 2010; Selden, 2021) und weitere Beweiskonzepte wie beispielgebundenes Beweisen von Krumdorf (2017) oder „Proofs Without Words“ von Nelsen (1993) (siehe auch Biehler & Kempen, 2016, S. 168–170).

Von besonderer Relevanz für die vorliegende Arbeit ist, aufbauend auf den didaktischen Beweiskonzepten, das kognitionspsychologische Modell schulischen Beweisens nach Brunner (2014). Eine hervorragende graphische Darstellung des Modells findet sich bei Brunner (2014, S. 72). Dabei wird in die zwei Dimensionen diskursiver und sozialer Raum sowie psychologischer Prozess unterschieden (Brunner, 2014, S. 72). Ausgangspunkt ist ein kognitiver Konflikt und damit ein Beweisbedürfnis, was einen Prozess des Verifizierens und Experimentierens anregt (Brunner, 2014, S. 72–73). Dahingehend skizziert Brunner (2014, S. 72–74) drei Stufen im Sinne eines experimentellen Beweises, welcher in Form von Beispielen erfolgt, eines operativen Beweises, der meist auf ikonischer, aber auch enaktiv oder auf sprachlich symbolischer Ebene den Zusammenhang veranschaulicht und eines formal-deduktiven Beweises, welcher formal symbolisch repräsentiert wird.

Brunner (2014, S. 49, S. 75) integriert dabei nicht nur die Phasen des Prozessmodells von Boero (1999) in sein Konzept, sondern verortet die einzelnen Phasen auch im Kontinuum des Begründens vom alltagsbezogenen Argumentieren bis hin zum formal-deduktiven Schließen. Eine Darstellung, welche die Prozesse, Beweistypen, Darstellungsebenen, Begrifflichkeiten sowie Begründungsarten und Argumente auf den diversen Ebenen zusammenfasst findet sich ebenfalls bei Brunner (2014, S. 49).

Dieses kognitionspsychologische Konzept schulischen Beweisens von Brunner (2014) bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit im Hinblick auf die Interventionsmaßnahmen zum Beweisen im Mathematikunterricht. Dabei wird sowohl die Perspektive eines Kontinuums des Begründens übernommen als auch der Dreischritt von experimentellem, inhaltlich-anschaulichem bzw. operativem und formal-deduktivem Beweis. Da die Interventionen allerdings einen ausschließlichen Fokus auf das Gebiet der Analysis legen, wird für den zweiten Schritt das

beschriebene Konzept des präformalen Beweisens nach Blum und Kirsch (1989, 1991) angewendet, welches ebenfalls einen starken Bezug zur Analysis aufweist. Da Brunner (2014, S. 18) zudem hier keine ausschließende Trennung vom Konzept nach Blum und Kirsch (1989, 1991) vornimmt, ist eine Übernahme des Modells schulischen Beweisens nach Brunner (2014) jedenfalls möglich.

4.2 Beliefs

Was ist unter dem Begriff *Belief* zu verstehen? Wie können Beliefs von anderen Begriffen wie unter anderem Einstellungen und Vorstellungen abgegrenzt oder mit diesen in Verbindung gebracht werden? Welche Konzepte existieren im Hinblick auf spezifisch mathematikbezogene Beliefs? Basierend auf den angeführten Fragestellungen werden eine Auseinandersetzung mit dem diffusen Begriff der Beliefs angestrebt und Konzepte mathematikbezogener sowie in weiterer Folge spezifisch beweisbezogener Beliefs in den Fokus gestellt, welche die Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden.

4.2.1 Allgemeine Begriffsklärung

So, my hypothesis is: whatever the notion of belief is, it may solve our problem. (Bogdan, 1986, S. 2, zitiert nach Törner, 2003, S. 73)

Das vorliegende Zitat verdeutlicht die bislang vorherrschende Schwierigkeit der Definition von Beliefs, welche in sämtlichen Arbeiten immer wieder hervorgehoben wird (z. B. Cross, 2009; Cross Francis et al., 2015; Kempen, 2019; Philipp, 2007; Szücs, 2023; Weygandt, 2021). Pajares (1992) spricht in diesem Kontext auch von einem „Messy Construct“ (S. 307). Dennoch unternehmen einige Autor*innen den Versuch einer Definition von Beliefs.

Richardson (1996, S. 105–106) stellt trotz der Schwierigkeiten einer einheitlichen Definition für die Anthropologie, die Philosophie und die Psychologie die definitorische Kongruenz fest, dass Beliefs insbesondere individuell und auf persönliche Erfahrungen bezogen sind.

Schoenfeld (1998, S. 19) hält in ähnlicher Weise fest, dass es sich bei Beliefs um mentale Strukturen handelt, welche die Erfahrungen und Verständnisse von Personen in kodifizierter Form darstellen und damit das Verhalten wesentlich beeinflussen.

Darüber hinaus betont auch Cross (2009) das Fehlen einer einheitlichen Definition und definiert selbst Beliefs als „embodied conscious and unconscious ideas and thoughts about oneself, the world, and one’s position in it, developed through membership in various social groups; these ideas are considered by the individual to be true“ (S. 326). Beliefs sind demnach für Cross (2009, S. 326) insbesondere stabil und persönlich sowie außerhalb der unmittelbaren

Einflussnahme oder des Wissens eines Individuums. Dieser Definition schließen sich auch Cross Francis et al. (2015, S. 337) an.

Kempen (2019, S. 58) bezieht sich in seiner Arbeit insbesondere auf die Definition nach Philipp (2007), wonach unter Beliefs das Folgende verstanden wird:

Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes. Beliefs might be thought to as lenses that affect one's view of some aspect of the world or as dispositions towards action. Beliefs, unlike knowledge, may be held with varying degrees of conviction and are not consensual. Beliefs are more cognitive than emotions and attitudes. (S. 259)

Mit bereits spezifischem Bezug auf die Mathematik, halten Goldin et al. (2009, S. 2) ebenfalls das Fehlen einer allgemein akzeptierten Definition von Beliefs in der mathematikdidaktischen Forschung fest. Dahingehend wählen Goldin et al. (2009, S. 3) einen abweichenden Ansatz zur Entwicklung einer einheitlichen Definition und stellen konstitutive Elemente eines Rahmens nach ihrem Verständnis von Beliefs vor. Dabei berufen sich Goldin et al. (2009, S. 3) auf Törner (2003) und nennen ontologische, aufzählende, normative und affektive Aspekte von Beliefs. Diese beziehen sich dahingehend immer auf ein sogenanntes „*belief object*“ (Goldin et al., 2009, S. 3, Hervorhebung im Original; Törner, 2003, S. 78) und können als Ansammlungen mentaler Zustände wie unter anderem Eigenschaften, Wahrnehmungen und Ideologien gesehen werden, welche unter Beliefs zusammengefasst sind (Goldin et al., 2009, S. 3; Törner, 2003, S. 78–79). Zudem sind Beliefs hoch individuell im Sinne einer unterschiedlichen Gewichtung von Wahrnehmungen und stark verwoben mit Affektivität im Sinne von Haltungen, Werten und Emotionen (Goldin et al., 2009, S. 3; Törner, 2003, S. 79–82).

Neben Goldin et al. (2009) schlagen auch Furinghetti und Pehkonen (2003) einen anderen Weg ein und betrachten verschiedene Definitionen bzw. Charakterisierungen von Beliefs, um daraus Merkmale zu identifizieren, welche einer Beschreibung von Beliefs dienen. Furinghetti und Pehkonen (2003, S. 54) plädieren dahingehend für die Betrachtung von zwei Wissensarten, dem subjektiven und dem objektiven Wissen, wobei Beliefs dem letzteren zuzuschreiben sind. Zudem sollten affektive Faktoren in Belief-Systeme inkludiert sowie kognitive und affektive Beliefs, wenn nötig, getrennt betrachtet werden (Furinghetti & Pehkonen, 2003, S. 54). Darüber hinaus sollte stets der Stabilitätsgrad und die Möglichkeit von Veränderungen berücksichtigt werden, ebenso wie der entsprechende Kontext und das Untersuchungsziel (Furinghetti & Pehkonen, 2003, S. 54–55).

Unter anderem in Anlehnung an diese Beschreibung nutzt Maaß (2006) die nachfolgende Definition:

Beliefs setzen sich aus relativ überdauerndem subjektivem Wissen von bestimmten Objekten oder Angelegenheiten sowie damit verbundenen Emotionen und Haltungen zusammen. [...] Beliefs können bewusst oder unbewusst sein. (S. 119)

Auch Weygandt (2021, S. 115) nutzt diese Definition, da sie sowohl die subjektive Charakteristik als auch die affektive Komponente von Beliefs berücksichtigt und zudem auf ihre Stabilität verweist.

Neben einer einheitlichen Definition fehlt es darüber hinaus sowohl im englischsprachigen als auch im deutschsprachigen Raum an einer durchgängigen Bezeichnung (Szücs, 2023, S. 5; Weygandt, 2021, S. 114). In deutschsprachigen Werken finden sich dahingehend sowohl in fachdidaktischen als auch pädagogischen Arbeiten Termini wie Einstellungen, Überzeugungen, Vorstellungen, Auffassungen, Haltungen, Verständnis sowie individuelle Annahmen und Erwartungen (Szücs, 2023, S. 6). Für die englischsprachige Literatur nennt Pajares (1992) unter anderem „attitudes, values, judgements, axioms, opinions, ideology, perceptions, conceptions, conceptual systems, preconceptions, dispositions, implicit theories, explicit theories, personal theories, [...]“ (S. 309).

Ein Blick auf das Zusammenspiel bzw. die Unterscheidung von Haltungen, Beliefs und Einstellungen wird darüber hinaus durch das Fehlen einer einheitlichen Definition bzw. einer allgemein anerkannten Theorie bezüglich Einstellungen erschwert (Grigutsch et al., 1998, S. 5; Weygandt, 2021, S. 99). Törner und Grigutsch (1994, S. 212) definieren dahingehend als deutsches Pendant zum Begriff Belief das sogenannte *Weltbild*, wobei sie wörtlich übersetzt den Begriff der Vorstellungen mit Beliefs verbinden. Detailliertere Ausführungen zum Konzept des *mathematischen Weltbildes* finden sich in Abschnitt 4.2.2. An dieser Stelle sei allerdings auf den von Törner und Grigutsch (1994) in Anlehnung an Seiffge-Krenke (1974, S. 104, zitiert nach Törner & Grigutsch, 1994) postulierten Zusammenhang von Einstellungen, Beliefs bzw. Weltbildern und Haltungen verwiesen:

Vorstellungen bzw. „Weltbilder“ erzeugen eine Einstellung, beide zusammen eine Verhaltenskomponente; das beobachtbare Verhalten läßt die in Haltungen integrierten Vorstellungen und Einstellungen sichtbar werden. (S. 213)

Demnach werden Beliefs und Einstellungen unter Haltungen gefasst. Im englischsprachigen Raum wird darüber hinaus die Untersuchung der Beziehung zwischen den Begriffen „belief“ und „attitude“ durch die mögliche Übersetzung sowohl als „Einstellung“ als auch „Haltung“

erschwert (Weygandt, 2021, S. 100). Weygandt (2021, S. 100–101) führt diesbezüglich die Untersuchung von Zan und Di Martino (2007, S. 158) an. Diese unterscheiden im Hinblick auf „attitudes“ zwischen (1) einfachen Definitionen, welche lediglich zwischen positiven und negativen emotionalen Haltungen differenzieren, (2) mehrdimensionalen Ansätzen, die Beliefs, Emotionen und Verhalten umfassen sowie (3) zweidimensionalen Konzepten, welche die Verhaltenskomponente aussparen (Zan & Di Martino, 2007, S. 158).

Andere Ansätze wie jener von McLeod (1992, S. 578) subsumieren Emotionen, Einstellungen bzw. Haltungen und Beliefs gemeinsam unter eine affektive Domäne.

Nach Weygandt (2021, S. 101) ist die Definition von Törner und Grigutsch (1994) in der zweiten Kategorie zu verorten und stellt nach Furinghetti und Pehkonen (2003) die „commonly accepted three-component definition of attitudes“ (S. 50) dar. Auch Szücs (2023, S. 6) nimmt diese Dreikomponententheorie als Grundlage ihrer Studie und verweist auf die damit einhergehende Annahme, Beliefs hätten eine kognitive, affektive und handlungsbezogene Komponente. Dabei bezieht sich die kognitive Ebene auf ein bestimmtes Belief-Objekt, die affektive Dimension entspricht der emotionalen Bindung zu dem jeweiligen Objekt und die konative oder handlungsbezogene Ebene bezeichnet die Bereitschaft und Tendenz für eine bestimmte Handlung oder ein spezifisches Verhalten (Grigutsch et al., 1998, S. 6–7; Szücs, 2023, S. 6).

Bevor auf das dieser Arbeit zugrundeliegende Verständnis von Beliefs eingegangen wird, sei an dieser Stelle knapp auf weitere Unterscheidungen im Hinblick auf die Begriffe Vorstellungen, Wissen und Werte verwiesen.

Törner und Grigutsch (1994, S. 212) übersetzen Beliefs mit dem Terminus Vorstellungen, verweisen allerdings darauf, dass jener Begriff im Deutschen nicht den intendierten Bedeutungsinhalt von Beliefs umfasst. In ähnlicher Weise verbindet Weygandt (2021, S. 104) mit Vorstellungen einen ikonischen Inhalt und eine oftmals idealtypische Form. Diese sind zudem bereits teilweise reflektiert und auf kognitiver Ebene noch nicht mit einem entsprechenden Urteil verbunden (Weygandt, 2021, S. 104). Im Hinblick auf die Mathematikdidaktik erscheint die Thematisierung der Unterscheidung von Vorstellungen und Beliefs insbesondere für das Konzept von Grundvorstellungen von Relevanz (Weygandt, 2021, S. 105, S. 107). Vohns (2005, S. 61) hält diesbezüglich fest, dass im Rahmen der Beliefforschung zwar von Schüler*innenvorstellungen die Rede ist, damit allerdings Vorstellungen zur Mathematik, dem Lernen von Mathematik und über sich selbst als Betreiber*in der Mathematik gemeint sind und damit nicht dem didaktischen Grundvorstellungskonzept entsprechen. Der Begriff stimmt in diesen Forschungsarbeiten daher tendenziell mit der Bedeutung von Beliefs überein.

Im Rahmen von Ausführungen zu Beliefs finden sich in einem Großteil der Arbeiten Anmerkungen zum Verhältnis von Beliefs und Wissen (z. B. Furinghetti & Pehkonen, 2003; Pajares, 1992; Philipp, 2007; Weygandt, 2021). Einzelne Autor*innen unterscheiden dahingehend nicht zwischen den beiden Begriffen (z. B. Beswick, 2012; Thompson, 1992). Beswick (2012, S. 128) sieht Beliefs untrennbar mit Wissen verbunden, da diese notwendigerweise mathematisches Wissen über den Unterricht umfassen. Zudem sind Beliefs ebenso wie Wissen konstruiert (Beswick, 2012, S. 128). Thompson (1992, S. 129–130, S. 140) führt zwar diverse unterscheidende Merkmale von Beliefs und Wissen an, plädiert allerdings für die Betrachtung von Konzeptionen, welche beide Aspekte umfassen.

Ein Großteil der Arbeiten zu Beliefs nimmt im Gegensatz dazu allerdings eine eindeutige Trennung von Wissen und Beliefs vor (z. B. Ernest, 1989; Pehkonen, 1995; Richardson, 2003; Törner, 1999; Törner & Grigutsch, 1994; Weygandt, 2021). Weygandt (2021, S. 101) verweist dahingehend einführend auf die Unterscheidungsmerkmale nach Abelson (1979), auf welche sich unter anderem auch Pajares (1992) und Thompson (1992) beziehen. Nach Abelson (1979, S. 356) sind unter anderem die in Belief-Systemen enthaltenen Elemente nicht zwingend einvernehmlich. Zudem werden Beliefs mit unterschiedlicher Überzeugungskraft gehalten und sind damit nicht vollkommen sicher (Abelson, 1979, S. 360; Thompson, 1992, S. 129; Weygandt, 2021, S. 101). Darüber hinaus beinhalten Beliefs nicht nur eine Vorstellung von der „Welt“ bzw. einem Objekt, sondern auch eine Ansicht, *wie* diese „Welt“ oder das Objekt aussehen sollte (Abelson, 1979, S. 357; 101). Zudem muss, im Gegensatz zu Wissen, kein generelles Einvernehmen über die Angemessenheit und die Validität von Beliefs bestehen (Pajares, 1992, S. 311; Weygandt, 2021, S. 101). Pajares (1992, S. 311) ergänzt darüber hinaus die nicht notwendigerweise gegebene Konsistenz innerhalb des Belief-Systems, was dazu führt, dass diese von Natur aus weniger flexibel, umstritten und dynamisch sind als Wissenssysteme. Zudem sind letztere offen für eine kritische Prüfung und Evaluation (Pajares, 1992, S. 311; Weygandt, 2021, S. 102). Pajares (1992, S. 310, S. 113) schreibt dahingehend zwar Wissen ebenso ein affektives, werten-des Element zu, unterstreicht allerdings auch unterschiedliche zugrundeliegende kognitive Prozesse beim Erwerb von Beliefs und Wissen (siehe auch Weygandt, 2021, S. 102).

Diese Ausführungen abschließend sei auf eine Definition von Wissen in Bezug auf Beliefs von Philipp (2007, S. 259) verwiesen, welche in prägnanter Weise den Zusammenhang, aber auch Unterschied verdeutlicht. Demnach handelt es sich bei Wissen um „beliefs held with certainty or justified true belief“ (Philipp, 2007, S. 259). Dabei hebt Philipp (2007, S. 259) spezifisch hervor, dass Wissen für eine Person ein Belief eines anderen Menschen sein kann und umgekehrt, je nachdem, ob die entsprechende Vorstellung als unbestritten angesehen wird.

In ähnlicher Weise finden sich in der Literatur verschiedene Zugänge im Hinblick auf die Unterscheidung von Beliefs und Werten. Philipp (2007, S. 265–166) bezieht sich in seinen diesbezüglichen Ausführungen überwiegend auf Bishop et al. (2003), welche anhand vorliegender Arbeiten Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Beliefs und Werten herausarbeiten. Dahingehend verweisen Bishop et al. (2003, S. 725) auf die häufig synonyme Nutzung der beiden Begriffe in mathematikdidaktischen Arbeiten. Zwar werden Werte als internalisierter und in einer stärker kognitiven Form vorliegend als Beliefs gesehen, jedoch folgt damit nicht notwendigerweise ein beobachtbarer Unterschied beider Aspekte (Bishop et al., 2003, S. 725). Beliefs werden allerdings in der Literatur eher mit einer Dichotomie von „wahr“ und „falsch“ in Verbindung gebracht, während Werte eher im Hinblick auf den Gegensatz von „erwünscht“ und „unerwünscht“ betrachtet werden (Bishop et al., 2003, S. 725–726; Philipp, 2007, S. 265). Zudem beziehen sich Beliefs auf ein spezifisches Objekt und sind damit im Gegensatz zu Werten kontextabhängig (Bishop et al., 2003, S. 725–726; Philipp, 2007, S. 265). Werte werden daher insbesondere als internalisierter als Beliefs verstanden (Bishop et al., 2003, S. 723; Philipp, 2007, S. 265). In Verbindung mit Beliefs führen Bishop et al. (2003, S. 723) sowie Philipp (2007, S. 266) Sichtweisen verschiedener Arbeiten an, Werte als Untermenge von Beliefs oder als dauerhafte Beliefs zu verstehen. Ebenso wie Beliefs, legen einzelne Werte allerdings nicht die Entscheidungen und das Verhalten von Personen fest, sondern befinden sich innerhalb eines komplexen Wertesystems (Bishop et al., 2003, S. 728; Philipp, 2007, S. 266). Dies führt zu dem weiteren wichtigen Aspekt der Organisation von Beliefs in sogenannten Belief-Systemen, ein Begriff, welcher sich in der vorliegenden Arbeit bereits vorangegangen mehrmals wiederfindet. Grundlegend im Hinblick auf die Struktur von Beliefs sind die Arbeiten von Rokeach (1970) sowie von Green (1971). Insbesondere die Ausführungen von Green (1971) finden sich, wie bereits in Abschnitt 2.2 angeführt, in sämtlichen Forschungsarbeiten im Umfeld von Beliefs.

Beliefs sind demnach in sogenannten Belief-Systemen bzw. Clustern organisiert und treten niemals in totaler Isolation auf (Green, 1971, S. 42; Rokeach, 1970, S. 2). Rokeach (1970) hält detaillierter das Folgende fest:

A belief system may be defined as having represented within it, in some organized psychological but not necessarily logical form, each and every one of a person's countless beliefs about physical and social reality. (S. 2)

Green (1971, S. 44–45) spricht dahingehend von einer quasi-logischen Struktur. Die Ordnung von Beliefs ist damit nicht von einer objektiven Logik bestimmt. (Green, 1971, S. 44–45). Diesbezüglich unterscheidet Green (1971, S. 44–45) zwischen primären und davon abgeleiteten

Beliefs, deren Position im Belief-System allerdings nicht durch eine objektiv logische Beziehung organisiert sein müssen. Darüber hinaus differenziert Green (1971, S. 46) in Abhängigkeit von der Wichtigkeit derselben für die jeweilige Person zwischen zentralen, auch „core beliefs“ (Green, 1971, S. 46), und peripheren Beliefs. Furinghetti und Pehkonen (2003) fassen diese drei Charakterisierungen von Green (1971) in die drei Dimensionen „quasi-logicalness, psychological centrality (the degree of conviction) and cluster structure“ (S. 43) zusammen. Insbesondere im für die vorliegende Arbeit relevanten Kontext von Beliefänderungen verweisen Liljedahl et al. (2012) auf die Relevanz des Konzepts von Green (1971), da die Unterscheidung in zentrale und periphere Beliefs einen Einblick in förderliche und hinderliche Änderungsbedingungen liefert. Nähere diesbezügliche Ausführungen finden sich in Abschnitt 4.2.4.

Zusammenfassend liegt der vorliegenden Arbeit ein Verständnis von Beliefs nach Maaß (2006, S. 119) zugrunde, wonach diese einer Zusammensetzung von stabilem subjektivem Wissen über spezifische Objekte oder Gegebenheiten sowie damit in Verbindung stehenden Emotionen und Haltungen entsprechen. Der Begriff des subjektiven Wissens verweist hier zudem auf eine Unterscheidung zum objektiven Wissen. Damit werden auch in diesem Rahmen Beliefs und Wissen als voneinander getrennt verstanden. Zudem wird die Dreikomponententheorie in Anlehnung an Törner und Grigutsch (1994) als Grundlage herangezogen, sodass Beliefs stets in Verbindung mit einer kognitiven, affektiven und handlungsbezogenen Komponente gesehen werden. Darüber hinaus wird in der vorliegenden Arbeit nicht explizit zwischen Beliefs und Werten unterschieden, da für eine empirische Untersuchung nach Bishop et al. (2003, S. 725) die fehlende Möglichkeit einer explizit beobachtbaren Differenzierung in den Vordergrund tritt, womit eine Unterscheidung die Komplexität der Studie wesentlich erhöhen würde und damit nicht zielführend scheint. Daneben wird allerdings das Konzept von Green (1971) über Belief-Systeme als notwendige Grundlage für die Annahme und Interpretation von Beliefänderungen gesehen. In Anlehnung an die vorangegangenen Ausführungen zu diversen Begrifflichkeiten sei an dieser Stelle auf die synonyme Nutzung der Begriffe Beliefs, Überzeugungen, Vorstellungen und Einstellungen in der vorliegenden Arbeit verwiesen. Analoge Vorgehensweisen finden sich dazu bei Szücs (2023, S. 6) sowie Kempen (2019, S. 58) im Hinblick auf die Termini Überzeugungen und Einstellungen. Die Nutzung des Begriffs Vorstellungen deckt sich darüber hinaus mit der Sichtweise von Vohns (2005, S. 61), wonach in der Beliefforschung hier eher eine synonyme Nutzung mit dem Belief-Begriff konstatiert werden kann.

Einen für die vorliegende Arbeit relevanten spezifischen Fokus stellen diverse Konzepte mathematischer Beliefs dar, welche in den nachfolgenden Ausführungen näher beleuchtet werden.

4.2.2 Konzepte mathematikbezogener Beliefs

Kempen (2019, S. 58) verweist auf die enge Verbindung zwischen einem Verständnis von Beweisen und den individuellen Vorstellungen zur Mathematik. Damit einhergeht die Betrachtung mathematischer Beliefs, woraus zudem spezifischere beweisbezogene Überzeugungen abgeleitet werden können. Kempen (2019, S. 59) betont dahingehend, dass bei einer eher statischen und formalistisch geprägten Sicht auf die Mathematik ein Fokus auf die formalen Momente von Beweisen und die Verifikationsfunktion zu erwarten ist, während bei einer dynamischen und prozessorientierten Perspektive der Beweisprozess sowie die Überzeugungs- und Erklärungsfunktion im Fokus sein wird.

Unter anderem verweist Kempen (2019, S. 60) in den theoretischen Ausführungen auf das Konzept mathematikbezogener Beliefs von Lehrpersonen bei Ernest (1989, o. S.). Ernest (1989, o. S.) führt dahingehend unter anderem Überzeugungen über die Natur der Mathematik an, wobei er drei philosophisch begründete Sichtweisen herausarbeitet. Ernest (1989) nennt hier eine dynamische, problemzentrierte Perspektive auf die Mathematik als „a continually expanding field of human enquiry“ (o. S.). Es handelt sich demnach nicht um ein fertiges Produkt und die Ergebnisse bleiben offen für Anpassungen (Ernest, 1989, o. S.). Eine statische, platonistische Sichtweise fasst dahingegen die Mathematik als einheitlichen Wissensbestand bestehend aus miteinander verwobenen Wahrheiten und Strukturen auf (Ernest, 1989, o. S.). Mathematik ist damit „a static immutable product, which is discovered, not created“ (Ernest, 1989, o. S.). Eine instrumentelle Sichtweise als dritte und letzte Perspektive sieht Ernest (1989) als „the view that mathematics is a useful but unrelated collection of facts, rules and skills“ (o. S.). Neben Beliefs über die Natur der Mathematik spricht Ernest (1989, o. S.) auch Überzeugungen über das Lehren und Lernen von Mathematik, Bildungsprinzipien und Haltungen im Sinne von „attitudes“ an.

Mit einer zunehmenden Ausdifferenzierung etabliert McLeod (1992) ein Konzept mathematikbezogener Beliefs, welche er zusammen mit Haltungen und Emotionen unter eine affektive Domäne subsummiert. Dabei unterscheidet McLeod (1992, S. 578–581) Beliefs über die Mathematik an sich, sich selbst als Betreiber*in von Mathematik, Lehren von Mathematik und den sozialen Kontext. Kislenko (2009) nimmt dieses Konzept mathematikbezogener Beliefs und damit verbundenen Haltungen und Emotionen als Basis zur Entwicklung von Fragenbogenitems zur Erhebung mathematikbezogener Überzeugungen von Schüler*innen.

In ähnlicher Weise findet sich bei Grigutsch et al. (1998, S. 9) auf kognitiver Ebene eine Gliederung des subjektiven Wissens eines Individuums über die Mathematik und den

Mathematikunterricht in verschiedene Kategorien von Einstellungen. Diese betreffen Einstellungen (1) über die Mathematik, (2) das Lernen und (3) Lehren von Mathematik sowie (4) über sich selbst und andere Personen als Betreiber*innen von Mathematik im Sinne des Selbstkonzepts (Grigutsch et al., 1998, S. 9). Dabei führen Grigutsch et al. (1998, S. 9) unter der Rubrik „Einstellungen über Mathematik“ diverse Komponenten wie unter anderem Vorstellungen über die Mathematik selbst, das Schul- bzw. Hochschulfach oder die Natur mathematischer Aufgaben und den Ursprung mathematischen Wissens an. Für jede der Kategorien sind zudem unterschiedliche und vielschichtige Affektionen denkbar, welche sich in Emotionen, Bewertungen und Verhaltensintentionen und -dispositionen widerspiegeln (Grigutsch et al., 1998, S. 10). Unter einem *mathematischen Weltbild* verstehen die Autor*innen hiernach ein System von Einstellungen gegenüber der Mathematik (Grigutsch et al., 1998, S. 10).

Mit spezifischem Blick auf die Grundüberzeugungen über die Mathematik und den Mathematikunterricht unterscheiden Grigutsch et al. (1998, S. 11) eine statische Sichtweise, wonach Mathematik als abstraktes System verstanden wird, sowie eine dynamische, prozess- und tätigkeitsorientierte Perspektive. In diesen Polen einer Prozess- und Systemsichtweise beziehen sich Grigutsch et al. (1998, S. 13) auf die vier Aspekte Schema, Formalismus, Anwendung und Prozess. Eine tendenziell statische Perspektive entspricht dahingehend einer schematischen bzw. formalistischen Orientierung, während sich ein dynamisches Verständnis in den anwendungs- und prozessorientierten Aspekten wiederfindet (Grigutsch et al., 1998, S. 13). Die von Grigutsch et al. (1998) beschriebenen Einstellungen zur Mathematik sowie die Kategorisierungen und entsprechend entwickelten Items werden in zahlreichen Studien als theoretische Grundlage und zur Fragebogenkonstruktion herangezogen (z. B. Kempen, 2019; Liljedahl et al., 2007; Pehkonen, 1995).

Auf Basis vorliegender Arbeiten zu Kategorisierungen und Modellen von mathematikbezogenen Beliefs von Schüler*innen unternehmen Op't Eynde et al. (2003) den Versuch der Entwicklung einer Arbeitsdefinition sowie der Konstruktion eines theoretischen Rahmens, welcher die wichtigsten Bestandteile bestehender Konzepte integriert. Op't Eynde et al. (2003) definieren dabei mathematische Beliefs von Lernenden wie folgt:

Students' mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true, that influence their mathematical learning and problem solving. (S. 16).

Mit dieser Definition verbinden Op't Eynde et al. (2003, S. 16) verschiedene definitorische Versuche und Charakteristiken von Beliefs unter anderem von Richardson (1996) und

Thompson (1992). Op't Eynde et al. (2003, S. 17–20) untersuchen darüber hinaus die Modelle und damit einhergehende Kategorisierungen von Underhill (1988), McLeod (1992), Kloosterman (1996) und Pehkonen (1995). Underhill (1988, zitiert nach Op't Eynde et al., 2003, S. 17) unterscheidet diesbezüglich zwischen Beliefs über die Mathematik als Disziplin, das Lernen sowie Lehren von Mathematik und sich selbst innerhalb eines sozialen Kontextes. Diese Aspekte stimmen im weiteren Sinn mit den bereits angeführten Kategorien bei McLeod (1992) überein. Mit Blick auf das theoretische Modell von Kloosterman (1996, zitiert nach Op't Eynde et al., 2003, S. 18–20) identifizieren Op't Eynde et al. (2003, S. 18–20) in Anlehnung an McLeod (1992) die zwei Basiskategorien Beliefs über Mathematik und über das Lernen von Mathematik. Letztere wird in die drei Aspekte von Überzeugungen über sich selbst als Lernende*r der Mathematik, die Rolle der Lehrkraft und weitere Beliefs über das Lernen von Mathematik differenziert (Kloosterman, 1996, zitiert nach Op't Eynde et al., 2003, S. 18). In einem letzten Schritt untersuchen Op't Eynde et al. (2003, S. 20) das Konzept mathematikbezogener Beliefs von Pehkonen (1995). Hier finden sich in ähnlicher Weise die vier Hauptkategorien „(1) beliefs about mathematics, (2) beliefs about oneself as a learner and as a user of mathematics, (3) beliefs about mathematics teaching, and (4) beliefs about mathematics learning“ (Pehkonen, 1995, S. 19). Jede Kategorie wird zudem nach Pehkonen (1995, S. 20) in kleinere Zweige aufgesplittet. So werden beispielsweise unter Beliefs über die Mathematik, Überzeugungen über das Schulfach Mathematik, den Ursprung mathematischen Wissens sowie über die Mathematik als Disziplin subsummiert (Pehkonen, 1995, S. 20).

Op't Eynde et al. (2003, S. 27) verorten die Entwicklung mathematikbezogener Beliefs von Schüler*innen auf Basis ihrer Untersuchungen in drei konstitutive Dimensionen und führen hier das Objekt, den Kontext im Sinne der Klasse und das Individuum selbst an. Davon ausgehend entwickeln Op't Eynde et al. (2003, S. 28) ein theoretisches Rahmenwerk, welches (1) Beliefs über den Mathematikunterricht, (2) über sich selbst und (3) den sozialen Kontext umfasst. Darüber hinaus bilden Op't Eynde et al. (2003, S. 28–32) jeweils spezifische Unterkategorien und bieten Beispiele zur Orientierung. Beliefs über den Mathematikunterricht werden dabei in Überzeugungen über das Fach selbst, das Lernen von Mathematik und Problemlösen sowie über das Lehren von Mathematik differenziert (Op't Eynde et al., 2003, S. 28). Beliefs über sich selbst umfassen zielorientierte, aufgabenbezogene, kontrollbezogene sowie Selbstwirksamkeitsüberzeugungen (Op't Eynde et al., 2003, S. 30). Die letzte Kategorie der Beliefs über den sozialen Kontext findet sich in Überzeugungen zu sozialen Normen in der Klasse wie der Rolle und Funktion der Lehrperson sowie der Lernenden und den sozio-mathematischen Normen der eigenen Klasse wieder (Op't Eynde et al., 2003, S. 31–32).

Im Hinblick auf die Kategorien von Op't Eynde et al. (2003, S. 30) entwickeln Rösken et al. (2007) in Anlehnung an Hannula et al. (2006, zitiert nach Rösken et al., 2007, o. S.) sieben Dimensionen zur Beschreibung der Sichtweise von Lernenden auf die Mathematik. Diesbezüglich nennen Rösken et al. (2007, o. S.) Kompetenz, Anstrengung und Selbstvertrauen als selbstbezogene Aspekte sowie Qualität der Lehrperson und familiäre Unterstützung als auf den sozialen Kontext bezogen. Auf einer emotionalen Ebene findet sich zudem der Aspekt von Freude an der Mathematik sowie Schwierigkeiten bezogen auf die Mathematik als Fach (Rösken et al., 2007, o. S.).

Die von Op't Eynde et al. (2003) konstruierten Kategorien von Beliefs über den Mathematikunterricht bzw. die Mathematik, sich selbst als Mathematik lernendes und betreibendes Individuum und den sozialen Kontext bilden in Verbindung mit dem Modell von Grigutsch et al. (1998) die Basis für mathematikbezogene Beliefs in der vorliegenden Arbeit. Daneben werden insbesondere dynamische und statische Sichtweisen von Mathematik in Anlehnung an Grigutsch et al. (1998) sowie Ernest (1989) berücksichtigt, welche nach Kempen (2019, S. 59) zudem mit einem unterschiedlichen Beweisverständnis einhergehen. Diese theoretischen Rahmenwerke zu mathematikbezogenen Beliefs liefern zudem eine Grundlage für die Erhebung und Kategorisierung spezifisch beweisbezogener Überzeugungen. Die nachfolgenden Ausführungen dienen einer diesbezüglichen Präzisierung und Thematisierung von Konzepten beweisbezogener Beliefs.

4.2.3 Kategorisierungen beweisbezogener Beliefs

Während, wie bereits angeführt, in Bezug auf mathematikbezogene Beliefs zahlreiche theoretische Modelle entwickelt und zudem empirisch untersucht wurden, findet sich kein Rahmenwerk, welches explizit beweisbezogene Überzeugungen in den Fokus stellt. Allerdings lassen sich anhand vorliegender Forschungen diverse Schwerpunkte bei der Untersuchung von Beliefs zu mathematischem Beweisen herausstellen (z. B. Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 1998; Kempen, 2019).

Kempen (2019, S. 130–132) erhebt im Kontext einer Studie zur Thematik von Begründen und Beweisen am Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik unter anderem die Einstellungen von Studierenden zum Beweisen in der Schule und im Allgemeinen. Dahingehend betont Kempen (2019, S. 132) einen fehlenden Konsens in bestehender Literatur, was unter Einstellungen zum Beweisen zu verstehen ist und fokussiert daraufhin auf Beliefs zum Erlernen der Beweistätigkeit und Beweisaffinität, worunter die subjektive Zuneigung des Individuums zum Beweiskonstrukt verstanden wird.

Darüber hinaus erheben Healy und Hoyles (1998) im Zusammenhang mit Beweisvorstellungen die Ansichten zur Rolle bzw. Funktion von Beweisen. In ihren Ergebnissen unterscheiden Healy und Hoyles (1998, S. 17–18) im Wesentlichen in die Verifizierungs-, Erklärung- und Entdeckungsfunktion sowie fehlende oder sinnbefreite Antworten. Die Ergebnisse der Studie von Healy und Hoyles (1998) zeigen dahingehend einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionszuschreibungen und der Auswahl von Argumenten für einen Beweis sowie der eigenständigen Konstruktion, sodass es jedenfalls sinnvoll erscheint, diese in eine Erhebung beweisbezogener Beliefs einfließen zu lassen.

Im Rahmen einer Untersuchung von Überzeugungen im Hinblick auf mathematische Beweise liefert darüber hinaus das von Harel und Sowder (1998) entwickelte Modell zu verschiedenen Beweisschemata einen weiteren Ansatz. Nach Harel und Sowder (1998) besteht das Beweisschema einer Person „of what constitutes ascertaining and persuading for that person“ (S. 244). Dabei repräsentiert jede der entwickelten Schemata eine kognitive Stufe (Harel & Sowder, 1998, S. 244). Harel und Sowder (1998, S. 244) betonen, dass die drei entwickelten Oberkategorien sowie entsprechende Subtypen einander allerdings nicht ausschließen müssen, sodass eine Person zugleich mehrere Schemata internalisiert haben kann.

Die erste Stufe bezeichnen Harel und Sowder (1998) als „external conviction proof schemes“ (S. 345). In diese Kategorie fallen das ritualistische, das autoritäre und symbolische Beweisschema (Harel & Sowder, 1998, S. 245–246). Unter einem „ritual proof scheme“ (Harel & Sowder, 1998, S. 246) wird die Beeinflussung der Wahl von Argumenten durch ihre Erscheinungsform als mathematische Beweise und weniger durch ihre Richtigkeit verstanden (Harel & Sowder, 1998, S. 246). Ein autoritäres Beweisschema verweist auf die fehlende Notwendigkeit einer intrinsischen Rechtfertigung und der damit einhergehenden Frage nach der Beweislast in der Mathematik (Harel & Sowder, 1998, S. 247). Damit einhergeht eine Überzeugung von außen durch ein Lehrbuch oder die Lehrperson (Harel & Sowder, 1998, S. 247). Ein symbolisches Beweisschema steht darüber hinaus mit symbolischem Denken in Verbindung, welches allerdings oberflächlich oder ohne Sinn erfolgen kann, wobei mit der Problemlösung begonnen wird, ohne zuvor dessen Bedeutung zu verstehen oder ein kohärentes Bild der Situation zu entwickeln (Harel & Sowder, 1998, S. 250–251).

Auf einer weiteren Ebene finden sich empirische Beweisschemata, welche sich in dem „inductive empirical proof scheme“ (Harel & Sowder, 1998, S. 252) und dem „perceptual empirical proof scheme“ (Harel & Sowder, 1998, S. 252) äußern. Ein induktives Beweisschema basiert auf der Verifizierung einer Behauptung bzw. Vermutung durch empirische Prüfung an

spezifischen Fällen im Sinne von Beispielen (Harel & Sowder, 1998, S. 252). Ein wahrnehmungsbasiertes Beweisschema dagegen beruht auf rudimentären mentalen Bildern, welche Objekttransformationen ignorieren und die Ergebnisse einer solchen Transformation nicht oder nur unvollständig antizipieren können (Harel & Sowder, 1998, S. 255).

Auf der letzten Stufe halten Harel und Sowder (1998, S. 258) sogenannte analytische Beweisschemata fest, worunter sie die Verifizierung einer Behauptung durch logisches Schließen verstehen und welche sie in ein transformatives und ein axiomatisches Beweisschema unterteilen. Unter einem transformativen Beweisschema verstehen Harel und Sowder (1998, S. 258) die Transformation von mentalen Bildern mittels Deduktion, welche verbal oder schriftlich erfolgen kann. Dabei wird die Allgemeingültigkeit einer Behauptung berücksichtigt und werden mentale Operationen zielorientiert und vorausschauend angewendet und die Transformationen innerhalb eines Deduktionsprozesses vollzogen (Harel & Sowder, 1998, S. 261). Spezifischer unterscheiden Harel und Sowder (1998, S. 262–272) hier in die Ebene eines internalisierten und interiorisierten Beweisschemas sowie mit Blick auf Einschränkungen des transformativen Beweisschemas auf sogenannte kontextuelle, generische oder konstruktive Beweisschemata. Für detaillierte diesbezügliche Ausführungen wird an dieser Stelle auf die Arbeit von Harel und Sowder (1998) verwiesen. In einem letzten Schritt weisen Harel und Sowder (1998, S. 273) sodann ein axiomatisches Beweisschema aus, welches aus der Einsicht entwickelt wird, dass eine mathematische Begründung im Ursprung auf Axiomen basiert. Ein spezifisch intuitiv-axiomatisches Beweisschema zeigt sich dabei in der eingeschränkten Verarbeitung von Axiomen, die in der Vorstellung der Person liegen (Harel & Sowder, 1998, S. 273). Darüber hinaus nennen Harel und Sowder (1998, S. 273–274) ein strukturelles Beweisschema mit einem Fokus auf eine Sammlung von Axiomen im Sinne einer gemeinsamen Struktur sowie ein axiomatisierendes Beweisschema, wobei eine Person in der Lage ist, ein Feld selbst zu axiomatisieren.

Mit Blick auf das hier beschriebene Modell ist für die vorliegende Arbeit insbesondere festzuhalten, dass Harel und Sowder (1998, S. 278, S. 280) eine Dominanz von autoritären und empirischen Beweisschemata feststellen und für die Entwicklung von transformativen Beweisstrategien plädieren.

In Ermangelung eines spezifischen theoretischen Rahmens zur Kategorisierung beweisbezogener Beliefs wird im Zuge der vorliegenden Arbeit das auf Op't Eynde et al. (2003) basierende Modell mathematikbezogener Beliefs in Verbindung mit dem Konzept von Grigutsch et al. (1998) für beweisbezogene Überzeugungen adaptiert. Dementsprechend ergeben sich die drei Kategorien (1) Beliefs über die Mathematik und mathematisches Beweisen, (2) über sich selbst

und (3) den sozialen Kontext. Insbesondere werden im Rahmen der ersten Kategorie, entsprechend den angeführten Ausführungen, Vorstellungen zu Beweisfunktionen sowie verschiedene Beweisstrategien aufgenommen. Darüber hinaus werden die dynamischen und statischen Sichtweisen von Mathematik nach Grigutsch et al. (1998) sowie Ernest (1989) in der vorliegenden Arbeit auf beweisbezogene Überzeugungen transferiert. Entsprechend dem dieser Arbeit zugrundeliegenden Verständnis nach Maaß (2006, S. 119), wonach Beliefs einer Zusammensetzung von stabilem subjektiven Wissen über spezifische Objekte sowie damit in Verbindung stehenden Emotionen und Haltungen entsprechen, werden zudem affektive Elemente in Bezug auf das Beweisen mitberücksichtigt.

Von besonderer Bedeutung für die vorliegende Arbeit sind darüber hinaus theoretische Aspekte bezüglich einer Änderung bestehender Beliefs, die nachfolgend näher ausgeführt werden.

4.2.4 Änderung von Beliefs

Ansichten im Hinblick auf die Veränderlichkeit und damit einhergehend die Stabilität von Beliefs differieren in vorliegenden Arbeiten stark (Bernack-Schüler, 2018, S. 34). Nach Pajares (1992, S. 325) sind Beliefs umso schwieriger zu verändern, je früher sie in die Belief-Struktur aufgenommen werden, sodass insbesondere eine Beliefänderung im Erwachsenenalter eine Besonderheit darstellt. Allerdings existieren zahlreiche Arbeiten, welche eine dynamische und damit veränderliche Perspektive auf Beliefs und Belief-Systeme einnehmen (z. B. Ambrose, 2004; Goldin, 2003; Liljedahl, 2005; Richardson, 2003; Thompson, 1992).

Mit Blick auf die Stabilitätszuschreibung von Beliefs analysieren Liljedahl et al. (2012) 92 Arbeiten hinsichtlich der Veränderlichkeit von Überzeugungen. Jedes Anzeichen einer Änderung verstehen sie dahingehend als Fehlen der Stabilitätseigenschaft von Beliefs (Liljedahl et al., 2012, S. 103). Die Analyse zeigt dabei verschiedene Interpretationen der Stabilität von Überzeugungen in diversen Arbeiten (Liljedahl et al., 2012, S. 104). Zum einen werden Beliefs als stabil charakterisiert, wobei eine Veränderung durch Interventionen als möglich angesehen wird (Bernack-Schüler, 2018, S. 34; Liljedahl et al., 2012, S. 104). Zum anderen werden Unterscheidungen in neu erworbene und damit leicht veränderliche sowie bereits ältere, fundierte und damit stabile, nicht veränderbare Beliefs unternommen (Liljedahl et al., 2012, S. 104–105).

In ähnlicher Weise findet sich die bereits angesprochene Differenzierung in zentrale und periphere Beliefs nach Green (1971, S. 46). Green (1971, S. 46) nutzt hier die Metapher konzentrischer Kreise für die Struktur von Belief-Systemen, um zu veranschaulichen, dass eine Veränderung von Überzeugungen nicht mit der quasi-logischen Struktur, sondern mit der entsprechend psychologischen Stärke, mit welcher spezifische Beliefs gehalten werden, in Verbindung

steht. Demnach werden „core Beliefs“ (Green, 1971, S. 46) mit besonderer psychologischer Kraft gehalten, liegen damit zentraler und sind somit auch resistenter gegenüber Veränderungen als periphere Beliefs (Green, 1971, S. 46; siehe auch Bernack-Schüler, 2018, S. 34–35). Eine ähnliche Sichtweise findet sich bei Pajares (1992, S. 317), der davon ausgeht, dass früher erworbene Beliefs schwerer zu verändern sind, insbesondere da sie anschließende Wahrnehmungen beeinflussen und die weitere Informationsverarbeitung stark prägen. Neu erworbene Überzeugungen sind damit wesentlich anfälliger für Veränderungen, da sie erst mit der Zeit und durch ihre Nutzung robust werden (Pajares, 1992, S. 317).

Liljedahl et al. (2012, S. 105) betonen diesbezüglich die Schwierigkeit solcher Differenzierungen in zentrale und periphere Beliefs, welche über die Beschreibung empirischer Befunde hinausgehen und in einer ontologischen Sichtweise genutzt werden. Demnach werden „core beliefs“ (Green, 1971 S. 46) per Definition als stabil und damit einhergehend unveränderlich betrachtet, sodass zugleich Stabilität und Veränderungen von Überzeugungen postuliert werden (Liljedahl et al., 2012, S. 105). Sie plädieren daher für das Aufgeben der Stabilitätseigenschaft in Definitionen von Beliefs und für eine tendenzielle Nutzung dieser Eigenschaft im Rahmen der Ergebnisse empirischer Forschungen, welche eine aktuelle Veränderung messen (Liljedahl et al., 2012, S. 113).

Damit kann grundsätzlich die Möglichkeit von Beliefänderungen konstatiert werden, welche allerdings vorrangig auf die empirische Forschung und weniger auf definitorischer Ebene festgehalten werden sollte (Bernack-Schüler, 2018, S. 35). Diese potenzielle Veränderlichkeit bringt die Frage mit sich, wie solche Prozesse angeregt und begünstigt werden können.

Bernack-Schüler (2018, S. 35) fasst basierend auf Ambrose (2004), Furinghetti und Pehkonen (2003) sowie Goldin (2003) insgesamt vier Aspekte zusammen, welche bei der Entstehung und Veränderung von Beliefs von Bedeutung sind. Emotionen, welche im Rahmen von Erfahrungen, in der Interaktion mit anderen sowie bei Wünschen und Zielen auftreten, spielen dabei eine besondere Rolle (Ambrose, 2004, S. 95; Bernack-Schüler, 2018, S. 35; Furinghetti & Pehkonen, 2003, S. 52; Goldin, 2003, S. 68). Nach Goldin (2003, S. 69) haben insbesondere positive und negative Emotionen einen stabilisierenden Effekt auf Beliefs. Die wiederholte positive Erfahrung der Bestätigung von Überzeugungen durch andere Beliefs führt darüber hinaus zur Stabilität von Belief-Systemen, welche wiederum meta-affektive Kontexte für das Erleben von Emotionen, welche mit diesen verbunden sind, etablieren (Goldin, 2003, S. 69). Jene Meta-Affekte besitzen zudem die Stärke, Beliefs trotz widersprechender Erfahrungen beizubehalten (Goldin, 2003, S. 69). Demnach rufen Kontexte, die diese Überzeugungen umgeben, positive oder

negative Emotionen hervor, welche die kognitiven Informationen dementsprechend kodieren (Goldin, 2003, S. 69). Sind in weiterer Folge diese Affektivität und Kognition miteinander verwoben, führt dies zur Konstruktion von Beliefs, welche die Meta-Affektivität aufrechterhalten und unterstützen (Goldin, 2003, S. 69). Goldin (2003) leitet aus diesen Ausführungen daher das Folgende ab:

Mathematics educators who set out to modify existing, strongly-held belief structures of their students [...] are not likely to be successful addressing only the content of their students' beliefs, or only the warrants for their beliefs. It will be important to provide experiences that are sufficiently rich, varied, and powerful in their emotional content to foster the students' construction of new meta-affect. This is a difficult challenge indeed. (S. 70–71)

Von Bedeutung sind in diesem Rahmen sogenannte Aha-Erlebnissen, welche eine affektive und kognitive Komponente umfassen und durchwegs mit positiven Emotionen verbunden sind (Bernack-Schüler, 2018, S. 36). Unter anderem zeigt Liljedahl (2005) dahingehend einen Zusammenhang zwischen den Erfolgserlebnissen im Sinne eines Aha-Effektes und einer damit einhergehenden Beliefänderung in Richtung positiver Einstellungen zur Mathematik und den eigenen mathematischen Fähigkeiten.

Neben dieser mit Emotionen verbundenen Komponente, kann es zudem zu unreflektierten Übernahmen von Beliefs durch andere Personen kommen, insbesondere in hierarchischen Kontexten (Bernack-Schüler, 2018, S. 35–36; Furinghetti & Pehkonen, 2003, S. 52; Goldin, 2003, S. 68). In diesem Rahmen ist auch die Übernahme von Beliefs der Lehrperson durch die Lernenden aufgrund von Dominanz oder sozialer Erwünschtheit zu sehen (Bernack-Schüler, 2018, S. 36). Darüber hinaus kann die Einsicht in bislang unbewusste Beliefs, beispielsweise durch Reflexion, zu einer Änderung von Überzeugungen führen (Ambrose, 2004, S. 59; Bernack-Schüler, 2018, S. 36). Als vierten und letzten Aspekt nennt Bernack-Schüler (2018, S. 36) die Möglichkeit der Veränderung einzelner Beliefs durch eine Neustrukturierung des Belief-Systems, welche durch Erfahrungen oder Reflexion angeregt werden können (siehe auch Ambrose, 2004, S. 95).

Neben den genannten Aspekten, welche eine Entstehung oder Änderung von Beliefs bedingen, spielen zudem die kognitiven Prozesse im Rahmen von Beliefänderungen eine Rolle, welche nach Bernack-Schüler (2018, S. 37) in Anlehnung an Pajares (1992, S. 320) mit den lernpsychologischen Konzepten der Assimilation und Akkommodation beschrieben werden können. Bei der Assimilation erfolgt die Integration neuer Erfahrungen und Informationen in bestehende Überzeugungen, während bei der Akkommodation die Notwendigkeit einer Ersetzung oder

Neuorganisation bestehender Beliefs gegeben ist (Bernack-Schüler, 2018, S. 37; Pajares, 1992, S. 320). In beiden Fällen findet eine Änderung von Überzeugungen statt, wobei allerdings eine grundlegende Beliefänderung nur bei der Akkommodation angenommen wird (Bernack-Schüler, 2018, S. 37; Pajares, 1992, S. 320). Eine Ersetzung bestehender Überzeugungen wird dabei voraussichtlich nicht stattfinden, es sei denn, diese erweisen sich als unbefriedigend und können somit nicht mehr in bestehende Strukturen assimiliert werden (Bernack-Schüler, 2018, S. 37; Pajares, 1992, S. 321). Die beobachtete Zurückweisung neuer Erkenntnisse, um einen Konflikt mit bestehenden Beliefs zu vermeiden zeigt allerdings, dass eine Beliefänderung im Sinne der Akkommodation die letzte Alternative darstellt (Bernack-Schüler, 2018, S. 37; Pajares, 1992, S. 321).

Ambrose (2004) sieht die häufig angestrebte Veränderung naiver oder falscher Beliefs mittels einer Ersetzung durch neue Überzeugungen aufgrund ihrer Widerstandsfähigkeit problematisch und plädiert daher für Ansätze, welche auf bestehenden Beliefs aufbauen, statt diese zu zerstören. Durch intensive Erfahrungen und Reflexion sollen sich bestehende Beliefs weiterentwickeln, neue Überzeugungen bilden und Verbindungen zwischen den Beliefs geschaffen werden (Ambrose, 2004, S. 116). Ambrose (2004, S. 116) verweist dahingehend auf die Beibehaltung bereits bestehender Beliefs bei gleichzeitiger Bildung neuer Überzeugungen. Allerdings handelt es sich dabei eher um einen schrittweisen als monumentalen Prozess, sodass verschiedene Erfahrungen dafür notwendig erscheinen (Ambrose, 2004, S. 117).

Der vorliegenden Arbeit liegt dieser Ansatz nach Ambrose (2004) zugrunde, sodass unter Veränderung die Weiterentwicklung bestehender sowie Aufnahme neuer Beliefs verstanden wird. Diese Sichtweise wird nicht zuletzt aufgrund einer präventiven Vermeidung gewaltsamer Assimilation oder Ablehnung neuer Erkenntnisse vertreten (Pajares, 1992, S. 117).

Darüber hinaus sind die im Rahmen von Beliefänderungen entwickelten didaktischen Konzepte von Relevanz. Bernack-Schüler (2018, S. 40) arbeitet dahingehend auf Basis vorliegender Studien fünf verschiedene Faktoren heraus, welche sich dabei als Bestandteile von Interventionen identifizieren lassen. Eigene mathematische Erfahrungen mit neuen mathematischen Inhalten oder Aufgaben sowie im Rahmen von Problemlösesituationen werden dabei ebenso angeführt wie ein Fokus auf das mathematische Denken von Lernenden sowie die Entwicklung und Implementierung von Unterrichtskonzepten (Bernack-Schüler, 2018, S. 40). Daneben bilden nach Bernack-Schüler (2018, S. 40) die Reflexion und damit die Aufdeckung von Beliefs sowie Austausch und Kooperation wesentliche Einflussfaktoren bei Beliefänderungen. Hervorzuheben ist dabei allerdings, dass ein überwiegender Teil vorliegender Untersuchungen auf

Lehramtsstudierende oder bereits tätige Lehrkräfte fokussiert (z.B. Ambrose, 2004; Bernack, 2011; Chapman, 1999; DeBellis & Rosenstein, 2004; Liljedahl et al., 2007; Roscoe & Sriraman, 2011). Dennoch erscheint eine kurze Einführung an dieser Stelle sinnvoll, um die Wirksamkeit möglicher Interventionen herauszustellen.

Bernack-Schüler (2018, S. 49) hält diesbezüglich fest, dass bei einer Vielzahl vorliegender Studien ähnliche didaktische Konzepte vorzufinden sind. Dabei zeigen Problemlösesettings sowie die eigenständige Erfahrung mit neuen Inhalten ebenso wie ein Fokus auf das mathematische Denken der Lernenden und die Einführung neuer Unterrichtskonzepte eine besonders hohe Wirksamkeit (Bernack-Schüler, 2018, S. 49). Zudem werden diverse Reflexionsarten hervorgehoben, wobei die Aussagekraft aufgrund einer Bandbreite von normativen Zielvorstellungen bis hin zu empirisch abgesicherten Befunden deutlich variiert (Bernack-Schüler, 2018, S. 49). Insbesondere plädiert Bernack-Schüler (2018, S. 49) für zusätzliche experimentell kontrollierte Studien, welche sich ebenso quantitativer Instrumente bedienen, um den Einfluss der diversen Konzepte bestätigen zu können.

Die vorangegangenen theoretischen Ausführungen zu Beliefänderungen sind für die vorliegende Arbeit insbesondere dahingehend von Relevanz, da sie die Möglichkeit einer Veränderung von Überzeugungen im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender und Aufnahme neuer Beliefs sowohl auf einer theoretischen als auch, insbesondere in Verbindung mit den diesbezüglichen Forschungsarbeiten, auf einer empirischen Ebene absichern. Die erfolgreiche Implementierung diverser Aus- und Weiterbildungsseminare mit einem Fokus auf Studierende und Lehrpersonen, wird dabei als Grundlage zur Einführung von intervenierenden Unterrichtskonzepten für Schüler*innen herangezogen. Im Kontext beweisbezogener Beliefs spielen dabei insbesondere didaktische Konzepte und empirische Ergebnisse im Rahmen der Forschung zum Beweisen im Mathematikunterricht eine zentrale Rolle. Die nachfolgenden Ausführungen zu der dieser Arbeit zugrundeliegenden Methode verbinden dahingehend die hier angeführten theoretischen Ausführungen zum Thema Beweisen und Beliefs.

5 Forschungsmethode

In den nachfolgenden Ausführungen wird die der vorliegenden Arbeit zugrundeliegende Forschungsmethode dargestellt sowie auf die Entwicklung der quantitativen und qualitativen Erhebungsinstrumente eingegangen. Anknüpfend an eine allgemeine Erläuterung des Untersuchungsdesigns (5.1), finden sich spezifische Anmerkungen zur Stichprobenauswahl und den Rahmenbedingungen (5.2). Dies wird durch eine detaillierte Beschreibung der Konstruktion der Erhebungsinstrumente sowie der Auswertungsmethoden (5.3) ergänzt, wobei auf den für die quantitative Erhebung konstruierten Fragenbogen (5.3.1) sowie die im Zuge von qualitativen Einzelfallanalysen entwickelten Interviews (5.3.2) eingegangen wird. Im Weiteren wird die Entwicklung der spezifischen Interventionsmaßnahmen im Rahmen eines umfassenden Unterrichtskonzeptes thematisiert (5.4), wobei die zugrundeliegende Methode des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes (5.4.1) näher beleuchtet und das unterrichtspraktische Konzept (5.4.2) detailliert beschrieben wird.

5.1 Forschungsdesign

Döring (2023, S. 184) verweist im Kontext von Untersuchungsdesigns auf das Fehlen eines einheitlichen Klassifikationssystems, wobei sich in der Literatur allerdings dahingehend einige Beschreibungsdimensionen etabliert haben. Ein zentrales Kriterium stellt dabei der wissenschaftstheoretische Ansatz dar, welchem eine Studie bzw. ein Untersuchungsdesign zugeordnet werden kann (Döring, 2023, S. 185). Die vorliegende Arbeit basiert in diesem Sinne auf einem sogenannten Mixed-Methods-Ansatz, welcher qualitative und quantitative Herangehensweisen im Rahmen einer Studie kombiniert (Döring, 2023, S. 186).

Nach Kuckartz (2014, S. 28) arbeiten quantitative Methoden insbesondere mit numerischen Daten und werden mit standardisierten Erhebungsinstrumenten in Verbindung gebracht. Ziel quantitativer Methoden ist dabei ein Inferenzschluss von einer bestenfalls zufälligen Stichprobe auf eine Gesamtpopulation (Kuckartz, 2014, S. 28). Im Gegensatz dazu postulieren qualitative Methoden verstärkt Offenheit und Authentizität sowie Kommunikation und Interaktion der in der Untersuchung involvierten Personen (Kuckartz, 2014, S. 28). Dabei stehen nicht-numerische Daten sowie interpretative Methoden zur Analyse der Daten im Fokus (Döring, 2023, S. 16). Kuckartz (2014, S. 28) betont dahingehend die Vielfalt und Heterogenität qualitativer und quantitativer Ansätze, welche zugunsten eines vermeintlichen Dualismus Gefahr laufen, ausgeblendet zu werden.

Diesbezüglich verweist Döring (2023, S. 26) auf die Überwindung eines Konkurrenzverhältnisses qualitativer und quantitativer Sozialforschung im Hinblick auf ein ergänzendes Verständnis. Der dieser Arbeit zugrundeliegende Mixed-Methods-Ansatz geht über diese Sichtweise noch hinaus und befasst sich mit der Kombination beider Forschungsmethoden in einer einzelnen Studie zur Maximierung des Erkenntnisgewinns (Döring, 2023, S. 26). Ähnlich definiert Kuckartz (2014) das Folgende:

Unter Mixed-Methods wird die Kombination und Integration von qualitativen und quantitativen Methoden im Rahmen des gleichen Forschungsprojekts verstanden. Es handelt sich also um eine Forschung, in der die Forschenden im Rahmen von ein- oder mehrphasig angelegten Designs sowohl qualitative als auch quantitative Daten sammeln. Die Integration beider Methodenstränge, d.h. von Daten, Ergebnissen und Schlussfolgerungen, erfolgt je nach Design in der Schlussphase des Forschungsprojektes oder bereits in früheren Projektphasen. (S. 33)

Sowohl Kuckartz (2014, S. 44) als auch Döring (2023, S. 26) verweisen dabei auf bereits bestehende Ansätze der Verknüpfung unterschiedlicher Methoden und insbesondere die sogenannte Triangulation. Kuckartz (2014, S. 46) führt in Anlehnung an Denzin (1978, zitiert nach Kuckartz, 2014, S. 46) verschiedene Formen der Triangulation an und nennt dabei die Daten-, Beobachter*in- oder Forscher*intriangulation sowie die Theorie- und Methodentriangulation. Die Kombination von qualitativen und quantitativen Forschungsmethoden entspricht dabei der methodenexternen Kombination nach Denzin (1978, zitiert nach Kuckartz, 2014, S. 47), welche häufig mit der Triangulation gleichgesetzt wird (Kuckartz, 2014, S. 47). Zum Verhältnis des Mixed-Methods-Ansatzes zur Triangulation verweist Kuckartz (2014, S. 48) einerseits auf eine gemeinsame forschungspraktische Ausrichtung, andererseits auf das Verständnis des Mixed-Methods-Ansatzes als eigenes Paradigma. Kuckartz (2014, S. 49) sieht dabei Mixed-Methods im Vergleich zur allgemeinen Konzeption der Triangulation als weitergehendes Konzept mit konkreten Umsetzungsformen. Zur Motivation des Einsatzes des Mixed-Methods-Ansatzes verweist Kuckartz (2014, S. 54) auf diverse potenzielle Gewinne wie unter anderem eine wachsende Chance der Generalisierung von quantitativ gewonnenen Ergebnissen sowie ein besseres Verständnis quantitativ untersuchter Probleme durch die Ergänzung um qualitative Daten.

Mixed-Methods-Ansätze unterscheiden sich dabei im Hinblick auf die Reihenfolge der Implementation der qualitativen und quantitativen Erhebungen, die Prioritäten der Methoden untereinander sowie den Zeitpunkt der Integration qualitativer und quantitativer Ergebnisse und die Rolle der theoretischen Sichtweise (Kuckartz, 2014, S. 65). In der vorliegenden Arbeit handelt

es sich im Gegensatz zu einer parallelen Implementation um ein sequenzielles Design, welches als erklärend bzw. vertiefend charakterisiert wird, da im Anschluss an eine quantitative Erhebung und statistische Auswertung der Daten eine qualitative Untersuchung für ein vertieftes Verständnis der Ergebnisse erfolgt (Kuckartz, 2014, S. 66). Priorität hat nach Kuckartz (2014, S. 66) in diesem Design die quantitative Methode. Die Integration der gewonnenen Ergebnisse erfolgt dabei auch im Zuge der vorliegenden Arbeit insbesondere im Rahmen der Interpretation (Kuckartz, 2014, S. 66).

Entsprechend diesem Vertiefungsmodell im Mixed-Methods-Ansatz wird im Zuge der vorliegenden Arbeit aufbauend auf einer etablierten theoretischen Basis eine hypothesenprüfende quantitative Untersuchung durchgeführt, wobei statistisch nachgewiesene Effekte im Zuge einer qualitativen Studie genauer beschrieben und mittels Einzelfallanalysen konkretisiert werden (Döring, 2023, S. 27). Die Ergebnisse der quantitativen Erhebung werden dabei direkt für die Gestaltung anschließender Interviews herangezogen, wobei nicht nur ergänzende Informationen gewonnen, sondern auch etwaige Erkenntnislücken geschlossen werden sollen (Kuckartz, 2014, S. 78).

Im Rahmen von Mixed-Methods-Ansätzen sind dabei sowohl Gütekriterien der quantitativen als auch der qualitativen Sozialforschung zu berücksichtigen (Döring, 2023, S. 114). Diese werden bei der Konstruktion der entsprechenden Erhebungsinstrumente in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 näher thematisiert. Daneben sind spezifische Gütekriterien der Mixed-Methods-Forschung zu prüfen, welche sich auf die Design- sowie die Interpretationsqualität beziehen (Döring, 2023, S. 114).

Mit Blick auf die Designqualität erscheint es an dieser Stelle bedeutend, die Wahl eines Mixed-Methods-Ansatzes im Sinne des Vertiefungsmodells explizit zu begründen. Im Hinblick auf Beliefs sowie spezifischer mathematikbezogene Überzeugungen und die Thematik von Beweisen im Mathematikunterricht ist eine entsprechend gut etablierte theoretische Basis für die vorliegende Untersuchung jedenfalls gegeben. Diverse Arbeiten verbinden bereits beide Forschungsgebiete miteinander und fokussieren insbesondere auf mathematische Beweisvorstellungen, wobei Kategorien mathematikbezogener Beliefs auf spezifische Überzeugungen zum Beweisen übertragen werden können (z. B. Grundey, 2015; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Kempen, 2019; Kotelawala, 2016; Szücs, 2023). Insbesondere aufgrund zeit- und anderer ressourcenökonomischer Überlegungen in Anbetracht der Umsetzung einer Untersuchung zu beweisbezogenen Beliefs samt Implementierung von Interventionsmaßnahmen zur möglichen Änderung derselben in einem schulischen Setting wird dabei eine

quantitative Untersuchung mittels eines standardisierten Fragebogens als vorrangiges Testinstrument eingesetzt. Die bestehende Kritik an Fragebögen und Likert-Skalen im Rahmen der Beliefforschung (z. B. Kollosche, 2015; Safrudiannur & Rott, 2020; Szücs, 2023) sowie das Anliegen eines tiefergehenden Einblicks in auftretende oder ausbleibende Beliefänderungen führen darüber hinaus zur Ergänzung der quantitativen Daten um eine qualitative Erhebung. Detailliertere Einzelfallanalysen werden dabei auf Basis der Auswertung der quantitativen Ergebnisse mittels anschließenden Interviews durchgeführt. Entsprechende Ausführungen finden sich in Abschnitt 5.3.2. Die Befunde der qualitativen Untersuchung werden schließlich im Rahmen der Interpretation der Ergebnisse für ein tiefergehendes Verständnis der quantitativen Daten herangezogen und miteinander in Verbindung gebracht.

Es sei darauf hingewiesen, dass die im Rahmen des aktuellen Forschungsstandes näher beschriebene Studie von Healy und Hoyles (1998, 2000) zu den Beweisvorstellungen sowie Beweiskompetenzen ebenfalls auf einer quantitativen Fragebogenerhebung beruht, welche durch Follow-up-Interviews ergänzt wird.

Mit Blick auf den Gegenstand handelt es sich bei der vorliegenden Arbeit, im Gegensatz zu einer Theorie- oder Methodenstudie, um eine empirische Studie, welche im Allgemeinen auf Basis systematischer Datenerhebung und -analyse der Lösung inhaltlicher Forschungsprobleme dient (Döring, 2023, S. 188). Spezifisch liegt eine empirische Originalstudie mit selbstentwickeltem Design vor (Döring, 2023, S. 191). Dabei ist anzumerken, dass zwar, wie in Abschnitt 2.3 zum Forschungsstand angeführt, ähnliche empirische Arbeiten vorliegen, allerdings aufgrund einer fehlenden spezifischen Untersuchung, welche auf die vorliegende Forschungsarbeit übertragen werden kann, die Entwicklung eines eigenen Designs und adaptierter Erhebungsinstrumente unter Einbezug theoretischer und empirischer Befunde erfolgt.

Im Hinblick auf eine Unterscheidung empirischer Studien nach dem zugrundeliegenden Erkenntnisinteresse, liegt eine explanative Studie zur Überprüfung möglicher Veränderungen mit einem Fokus auf beweisbezogene Beliefs vor. Explanative Studien dienen insbesondere dem Nachweis von diversen Effekten und klären im Rahmen von experimentellen und quasi-experimentellen Untersuchungen mögliche Ursache-Wirkung-Relationen (Döring, 2023, S. 194). Dies entspricht der Intention der vorliegenden Arbeit, eine durch spezifische Interventionen intendierte Beliefänderung im Hinblick auf Beweise im Mathematikunterricht nachzuweisen.

Im Gegensatz zu experimentellen Studien, findet bei quasi-experimentellen Untersuchungen keine Randomisierung statt, wodurch die interne Validität im Hinblick auf personenbezogene Störvariablen geringer ausfällt (Döring, 2023, S. 201). Diese Designs spielen insbesondere in

Feldstudien eine zentrale Rolle, da es im Allgemeinen nicht problemlos umsetzbar ist, feste Personengefüge wie unter anderem Schulklassen zu teilen und im Sinne des Zufallsprinzips neu zusammenzuführen (Döring, 2023, S. 201). Eine Randomisierung würde dabei im Feld stören und wäre aus einer teils forschungsökonomischen und -ethischen Perspektive nicht möglich (Döring, 2023, S. 717). Der vorliegenden Untersuchung beweisbezogener Beliefs zweier Klassen der 11. Schulstufe liegt demnach ein derartiges quasi-experimentelles Design zugrunde.

Um die bereits angesprochene geringere interne Validität auszugleichen, bieten sich unter anderem Messwiederholungen an, da die abhängige Variable vor und nach einer Intervention gemessen wird (Döring, 2023, S. 202). Das hier vorliegende Forschungsdesign entspricht dabei spezifisch einem Eingruppen-Prätest-Posttest-Plan, wobei die Stichprobe einmal vor der entsprechenden Intervention bzw. dem Treatment untersucht wird und einmal danach (Döring, 2023, S. 722). Die unabhängige Variable ist dabei nicht die Intervention, sondern der Messzeitpunkt (Döring, 2023, S. 722). Döring (2023, S. 722, S. 726–727) hebt im Hinblick auf die geringe interne Validität derartiger Designs verschiedene Maßnahmen zur Prüfung der Wirksamkeit der Intervention hervor und verweist darauf, dass eine Verbesserung derselben „mechanisch“ kaum möglich ist. Allerdings sollte ein entsprechendes Problembewusstsein im Rahmen solcher Designs gegeben sein, welches dazu führt, die interne Validität bestmöglich zu sichern (Döring, 2023, S. 727). Döring (2023, S. 727) führt dahingehend Methoden zur Kontrolle personenbezogener und untersuchungsbedingter Störvariablen an. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung ist insbesondere die Konstanzhaltung dieser Störvariablen sowie das Ausschalten untersuchungsbedingter Variablen von Bedeutung (Döring, 2023, S. 202–203). Nähere diesbezügliche Ausführungen finden sich gemeinsam mit der Thematisierung der Stichprobenauswahl im nachfolgenden Abschnitt 5.2.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass Prä-Post-Designs im Rahmen diverser Studien zur Beliefforschung und spezifisch zur Änderung von Überzeugungen nach vorangegangenen Interventionen bereits weithin etabliert sind (z. B. Ambrose, 2004; Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 1999; Grundey, 2015; Roscoe & Sriraman, 2011).

5.2 Stichprobenauswahl und Rahmenbedingungen

Die vorliegenden Ausführungen befassen sich zum einen mit der Stichprobenauswahl im Rahmen der empirischen Untersuchung, wobei zwischen der Stichprobe der gesamten Studie und jener der anknüpfenden Follow-up-Interviews unterschieden wird. Darüber hinaus wird auf die entsprechenden Rahmenbedingungen der Untersuchung eingegangen, womit insbesondere etwaige Störvariablen und Gefahren der internen Validität angesprochen werden.

Zur Stichprobenauswahl verweist Kuckartz (2014, S. 86) auf eine bestenfalls gegebene Zufallsauswahl im Rahmen der quantitativen Studie sowie die Bildung einer kleineren qualitativen Stichprobe nach Kriterien einer zielgerichteten Wahl. Dabei könnten bewusst typische Fälle oder Extrembeispiele gewählt werden, um eine maximale Variation in der Stichprobe zu erhalten (Kuckartz, 2014, S. 85).

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit handelt es sich mit Blick auf die gesamte Stichprobe zur quantitativen Erhebung beweisbezogener Beliefs sowie der damit verbundenen Interventionen um eine sogenannte Gelegenheitsstichprobe (Döring, 2023, S. 307). Dies ist nicht zu verwechseln mit einer Klumpenstichprobe, welche aus einer vollständigen Liste von Klumpen zufällig ausgewählt wird (Döring, 2023, S. 315). Dies würde im Kontext von Schulklassen voraussetzen, dass die Stichprobe aus mehreren zufällig gewählten Klassen gebildet wird, was in der vorliegenden Studie nicht gegeben ist (Döring, 2023, S. 216). Im Rahmen einer sogenannten Gelegenheits- oder auch Ad-hoc-Stichprobe werden Personen, welche aktuell zur Verfügung stehen oder leicht zugänglich sind, willkürlich ausgewählt (Döring, 2023, S. 307). In der vorliegenden Untersuchung bilden Schüler*innen zweier Klassen der 11. Schulstufe einer allgemeinbildenden höheren Schule im 19. Wiener Gemeindebezirk die Stichprobe, da sie den Mathematikklassen der Studienleiterin entsprechen und dahingehend leicht zugänglich sind. Die Gelegenheitsstichprobe weist die geringste Stichprobenqualität auf, sodass hier auf die engen Grenzen der Aussagekraft sowie die fehlende Möglichkeit zur Populationsbeschreibung hinzuweisen ist (Döring, 2023, S. 308). Diese und weitere Limitationen der vorliegenden Studie werden in der Diskussion der Ergebnisse explizit gemacht.

Die Stichprobe für die an die quantitativen Ergebnisse anknüpfende qualitative Untersuchung mittels Follow-up-Interviews basiert auf einer sogenannten absichtsvollen bzw. bewussten Auswahl, auch „purposive sampling“ genannt (Döring, 2023, S. 303). Auf Basis der theoretischen und empirischen Informationen werden dabei gezielt Personen in die Stichprobe inkludiert, welche besonders aussagekräftig erscheinen (Döring, 2023, S. 303). Spezifischer handelt es sich in der vorliegenden Arbeit um eine Anlehnung an eine Theoretische Stichprobe, auch „theoretical sample“, wobei die Wahl bewusst für einen maximalen Erkenntnisgewinn getroffen wird (Döring, 2023, S. 304). Hierbei können Extremfälle ebenso wie typische Fälle in die Stichprobe aufgenommen werden (Döring, 2023, S. 304). Die Stichprobenauswahl sollte dabei im Idealfall erst abgeschlossen sein, wenn keine neuen Informationen mehr gewonnen werden können und eine sogenannte theoretische Sättigung vorliegt (Döring, 2023, S. 304). Im Kontext der vorliegenden Studie ist darauf hinzuweisen, dass diese theoretische Sättigung nicht zwangsläufig gegeben ist und aus zeit- und anderen ressourcenökonomischen Gründen explizit fünf Fälle

gewählt werden, welche Extremwerte bzw. Durchschnittswerte und Übereinstimmungen mit einigen weiteren Personen aufweisen. Damit ist die qualitative Stichprobe der Arbeit lediglich an das „theoretical sampling“ (Döring, 2023, S. 303) angelehnt und kann nicht explizit als Theoretische Stichprobe ausgewiesen werden. Spezifische Ausführungen zur Wahl der Fälle finden sich in Abschnitt 5.3.2.

Im Gegensatz zu einem Zweigruppen-Prätest-Posttest-Plan, welcher eine Kontrollgruppe umfasst, muss im Rahmen der vorliegenden Arbeit von einer solchen abgesehen werden (Döring, 2023, S. 723). Da die untersuchte Stichprobe mit $n = 25$ tendenziell bereits sehr klein ist, würde eine Aufteilung in eine Experimental- und Kontrollgruppe die Dateninterpretation und Aussagekraft weiter einschränken. Eine weitere Gruppe wird aufgrund ressourcenökonomischer Gründe nicht herangezogen.

Da im Rahmen von quasi-experimentellen Designs wie der vorliegenden Studie zudem keine Randomisierung stattfindet, ist die interne Validität zur Beurteilung der Sicherheit der Interpretation kausaler Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge geringer als in experimentellen Settings (Döring, 2023, S. 93, S. 201). Um hier Einbußen der internen Validität teilweise auszugleichen, bieten sich unter anderem Kontrolltechniken personengebundener Störvariablen an (Döring, 2023, S. 202). In der vorliegenden Arbeit werden die von Döring (2023, S. 202) angesprochenen personenbezogenen Störvariablen Alter und Klassengröße konstant gehalten, indem die bestehende Klassenzusammensetzung über den Untersuchungszeitraum nicht verändert wird. Darüber hinaus werden die personenbezogenen Daten Geschlecht, Mathematiknote, Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik sowie Verständnis der Themen auf dem Gebiet der Analysis und Vorkenntnisse zu Beweisen im Unterricht im Rahmen der quantitativen Untersuchung erhoben. Dabei erfolgt die Prüfung eines Unterschieds hinsichtlich der Merkmale Geschlecht und Besuch des Wahlpflichtfachs mit den einzelnen Differenzwerten der Items mittels Welch-Test, welcher eine robustere Variante des Student-Tests bei fehlender Homogenität der Varianzen darstellt (Döring, 2023, S. 1053; Janczyk & Pfister, 2020, 54–55). Im Hinblick auf die Prüfung der Items Mathematiknote, Verständnis der Analysis und Vorkenntnisse zum Beweisen wird die Spearmans Rangkorrelation für ordinalskalierte Daten berechnet (Döring, 2023, S. 253). In Tabelle D6 sowie D7 in Anhang D wird diesbezüglich ersichtlich, dass kein signifikanter Unterschied der Differenzwerte hinsichtlich dem Merkmal Geschlecht und dem Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik gegeben ist. Im Rahmen von Spearmans Rangkorrelation zeigen sich in Tabelle D8 in Anhang D jedoch zwei signifikante mittlere positive Zusammenhänge mit der Mathematiknote und dem Verständnis von Themen aus der Analysis. Dies ist jedenfalls bei der Interpretation insbesondere signifikanter Ergebnisse zu berücksichtigen.

Im Hinblick auf die Kontrolle untersuchungsbedingter Störvariablen werden die bekannten Räumlichkeiten sowie Uhrzeiten entsprechend dem Mathematikunterricht konstant gehalten. Zudem erfolgt die Durchführung der Untersuchung durchgängig, sodass keine andere Thematik zwischenzeitlich im Unterricht behandelt wird. Die entsprechenden Rahmenbedingungen in den jeweiligen quantitativen und qualitativen Untersuchungsphasen finden sich in Abschnitt 5.3.1 sowie 5.3.2.

Döring (2023, S. 102) nennt zudem in der Tradition Campbells neun weitere Bedrohungen der internen Validität bei der Interpretation von Ursache-Wirkungs-Relationen, welche nachfolgend im Hinblick auf das vorliegende Forschungsdesign thematisiert werden. Die Gefahr einer unklaren zeitlichen Abfolge besteht aufgrund des strikten Settings eines Prä-Post-Designs nicht (Döring, 2023, S. 102). Da darüber hinaus nur eine Untersuchungs- und keine Kontrollgruppe vorhanden ist, entfallen zudem die von Döring (2023, S. 102) genannten Selektionseffekte. Eine Kontrolle externer zeitlicher Einflüsse kann zwar hier nicht durch eine Kontrollgruppe erfolgen, jedoch werden diese ebenso wie Reifungsprozesse aufgrund der Dauer der Studie von 24 Tagen als tendenziell marginal betrachtet, sind allerdings in der Interpretation als Limitation zu berücksichtigen. Die experimentelle Mortalität nach Döring (2023, S. 102) wird umgangen, indem nur jene Daten in die Studie aufgenommen werden, wo sowohl Prä- als auch Posttest absolviert und an allen Interventionseinheiten teilgenommen wurde. Im Rahmen des Prä-Post-Settings ist zudem der Testübungseffekt zu berücksichtigen (Döring, 2023, S. 103). In der vorliegenden Studie ist mit einer Dauer von 24 Tagen zwischen Prä- und Posttest ein tendenziell geringer Testübungseffekt zu erwarten, kann allerdings auch nicht vollkommen ausgeschlossen werden, insbesondere da die Items der Anfangs- und Endtestung vollkommen identisch sind.

Neben der Kontrolle und Berücksichtigung der bereits genannten personen- und untersuchungsbezogenen Störvariablen gilt es darüber hinaus bei quantitativen sowie qualitativen Methoden spezifische Gütekriterien zu berücksichtigen, welche in den nachfolgenden Ausführungen näher beleuchtet werden. Zudem werden die Entwicklung der quantitativen und qualitativen Erhebungsinstrumente sowie deren spezifischen Auswertungsmethoden dargelegt.

5.3 Erhebungsinstrumente und Auswertungsmethoden

Die nachfolgenden Ausführungen fokussieren spezifisch auf die Entwicklung der quantitativen und qualitativen Untersuchungsinstrumente sowie deren jeweiligen Auswertungsmethoden. Dahingehend wird die jeweils gewählte Methode kurz allgemein beschrieben, bevor auf die detaillierte Konstruktion und Auswertung desselben sowie entsprechende Gütekriterien eingegangen wird. Da in der vorliegenden Arbeit eine quantitative Untersuchung in Form einer

Fragebogenerhebung den anschließenden Interviews mit spezifischen Einzelfällen vorausgeht, erfolgt in einem ersten Schritt die Beschreibung des quantitativen Erhebungsinstruments (5.3.1), bevor daran anknüpfend die Entwicklung und Auswertung der qualitativen Einzelfallanalysen in den Fokus rückt (5.3.2).

5.3.1 Quantitatives Erhebungsinstrument – Fragebogen

Im Zuge des quantitativen Erhebungsinstrumentes ist ein standardisierter Fragebogen von Interesse, welcher überwiegend aus geschlossenen Fragen bzw. Aussagen besteht, sodass die befragten Personen eine passende Antwortalternative wählen können (Döring, 2023, S. 399). Darüber hinaus zeigt sich eine enge Verbindung von vollstandardisierten Fragebögen zu psychometrischen Persönlichkeitstests (Döring, 2023, S. 427). Synonyme Begriffe für standardisierte Paper-Pencil-Fragebögen, welche Persönlichkeitsmerkmale durch Selbstauskunftitems erheben, sind dabei unter anderem Persönlichkeitstests oder -fragebögen (Döring, 2023, S. 427). Nach Döring (2023, S. 427) werden sowohl standardisierte Fragebögen als auch psychometrische Tests oftmals auf Basis der Klassischen Testtheorie entwickelt und bilden Likert-Skalen.

Likert-Skalen stellen dabei nach Döring (2023, S. 270) die psychometrische Skala dar, welche in der sozialwissenschaftlichen Forschung am häufigsten zur Anwendung kommt. Dabei wird insbesondere anhand mehrerer Indikatoren ein spezifisches Konstrukt auf Intervallskalenniveau erhoben, wobei die Items insbesondere als Frage oder Aussage formuliert sind und auf einer mindestens fünfstufigen Ratingskala bewertet werden sollen (Döring, 2023, S. 271). Döring (2023, S. 272) weist dabei im Zuge der Entwicklung solcher Likert-Skalen auf Abweichungen von der Theorie in der tatsächlichen Forschungspraxis hin, wobei der Skalenbildungsprozess häufig abgekürzt wird und von der Bildung eines umfangreichen Item-Pools abgesehen wird, um direkt mit einem Prätest zu starten.

Im Rahmen der Konstruktion eines standardisierten Fragebogens führt Döring (2023, S. 401) daran anknüpfend die Operationalisierung in Form von Einzel-Items sowie psychometrischer Skalen an. Einzelitems weisen dabei insbesondere eine hohe ökonomische Komponente auf, da der Entwicklungsaufwand gering und der Fragebogen kurz bleibt (Döring, 2023, S. 401). Allerdings kann die Reliabilität im Sinne der Messgenauigkeit bei Einzelitems nicht geprüft werden, sodass im Allgemeinen Messungen mittels Einzelitems tendenziell weniger messgenau sind (Döring, 2023, S. 401). Döring (2023, S. 401) empfiehlt im Zuge der Fragebogenkonstruktion zudem die Nutzung erprobter Items und Skalen.

Im Zuge der vorliegenden Arbeit muss auf die Übernahme einer bereits etablierten Skala bzw. eines bereits geprüften Fragebogens verzichtet werden, da ein derartiges Format bisher in der

bestehenden Literatur nicht vorliegt. Diverse spezifische Untersuchungen zu beweisbezogenen Beliefs beziehen sich zum einen auf Studierende und umfassen damit spezifisch für diese Interessensgruppe formulierte Items (z. B. Kempen, 2019; Kotelawala, 2016; Szücs, 2023) oder erheben die Beweisvorstellungen von Schüler*innen tendenziell mit offenen Fragebogenitems (z. B. Grundey, 2015; Healy & Hoyles, 1998).

Aufgrund dessen wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein eigenständiger quantitativer, standardisierter Fragebogen in einer Kombination aus Einzelitems und Likert-Skalen entwickelt, wobei anzuführen ist, dass den wissenschaftstheoretischen Ansprüchen nach Döring (2023, S. 271–272) nicht vollständig Folge geleistet werden kann und sich die Konstruktion tendenziell an der Vorgehensweise in der wissenschaftlichen Praxis orientiert.

Bevor spezifischer auf die Entwicklung entsprechender Kategorien und Items im Zuge der Fragebogenkonstruktion eingegangen wird, sei an dieser Stelle auf die Form der Datenerhebung verwiesen. Im Rahmen der vorliegenden Studie handelt es sich um einen Paper-Pencil-Fragebogen, welcher im Zuge einer Face-to-Face-Gruppensituation ausgeteilt und direkt im Anschluss eingesammelt wird (Döring, 2023, S. 408). Durch das sofortige Einsammeln der Fragebögen kann insbesondere eine Rücklaufquote von nahezu 100 % erreicht werden (Döring, 2023, S. 408). Der Fragebogen wird demnach vor der Erhebung gedruckt und insbesondere zusammengeheftet verteilt.

Döring (2023, S. 406) verweist darauf, dass bei einer tendenziell größeren Anzahl selbstkonstruierter Items auf entsprechende Vortestungen des Fragebogens nicht verzichtet werden sollte. Dabei sollten insbesondere Probleme bei den Befragungspersonen identifiziert und in weiterer Folge das Erhebungsinstrument verbessert werden (Döring, 2023, S. 406). Döring (2023, S. 406) empfiehlt diesbezüglich qualitative Tests, wobei der Fragebogen einer Gruppe von Personen aus der entsprechenden Zielpopulation vorgelegt wird, welche an der Haupttestung nicht teilnehmen. Im Zuge der vorliegenden Arbeit wird ein solcher qualitativer Test mittels der Methode des lauten Denkens durchgeführt, wobei insbesondere bei zwei der fünf teilnehmenden Personen eine Art Fragebogenkonferenz nach Döring (2023, S. 406) stattfindet, indem zwei Mathematiklehrkräfte in die Vortestung mitaufgenommen werden. Zur näheren Beschreibung entspricht die Methode des lauten Denkens oder im Englischen „think-aloud-method“ (Döring, 2023, S. 366) einer mündlichen Befragung, wobei die untersuchten Personen ihre eigenen Gedanken verbal in Worte fassen und im Gegensatz zu Interviewsituationen die Interaktion der Forschenden und Befragten nicht im Zentrum steht (Döring, 2023, S. 366). Im Rahmen der vorliegenden Arbeiten werden die Verbalisierungen der persönlichen Gedanken direkt während

dem Ausfüllen des Fragebogens aufgezeichnet, sodass es sich spezifischer um periaktionales lautes Denken handelt (Döring, 2023, S. 366).

Die Vortestung des Fragebogens im Zuge der Methode des lauten Denkens fand mit zwei Mathematiklehrpersonen am 17.11.2025 statt. Die befragten Personen erhielten nacheinander den Fragebogen vorgelegt und wurden gebeten diesen vollständig auszufüllen sowie ihre entsprechenden Gedanken dabei laut zu äußern. Für die nachträgliche Verarbeitung wurde die Audioaufnahme der Verbalisierungen gestattet. Im Anschluss erfolgte die Vorlage des Fragebogens an drei Lernende aus der Parallelklasse der 11. Schulstufe, welche nicht an der Haupttestung teilnehmen. Wiederum wurde um die verbale Äußerung der eigenen Gedanken sowie die Audioaufnahme des Prozesses gebeten. Die Auswahl der befragten Lehrpersonen erfolgte insbesondere im Hinblick auf ressourcenökonomische Aspekte, sodass jene Personen gewählt wurden, welche Zeit hatten und eine entsprechende Motivation äußerten. Die Lernenden aus der Parallelklasse wurden auf Empfehlung der Mathematiklehrperson in dieser Klasse gewählt, wobei insbesondere auf Schüler*innen die Wahl fiel, bei welchen aus subjektiver Perspektive mit reichhaltigen Antworten zu rechnen war. Die entsprechenden Ergebnisse der Vortestung bzw. die erfolgten spezifischen Änderungen werden im Nachfolgenden bei der Beschreibung der Item- und Skalenkonstruktion beschrieben.

Im Sinne einer guten wissenschaftlichen Praxis ist an dieser Stelle darauf zu verweisen, dass im Rahmen der Fragebogenerstellung Künstliche Intelligenz als unterstützenden Tool bei der Kategorie- und Itemkonstruktion herangezogen wird. Insbesondere werden in einer Kombination aus ChatGPT (Open AI) sowie DeepSeek (DeepSeek AI) die Formulierung entsprechender Kategorien unter Bezug auf spezifische theoretische und empirische Arbeiten angeregt sowie Ideenimpulse zur Ausgestaltung der Items aufgegriffen. Die von der Künstlichen Intelligenz zur Verfügung gestellten Informationen im Sinne von praktischen und literaturbezogenen Hinweisen werden in weiterer Folge in eigenständiger Arbeit zusammengetragen und in ein entsprechendes theoretisches Gesamtkonstrukt integriert. Die finale Ausgestaltung des Fragebogens wird ebenfalls unter Ergänzung von Künstlicher Intelligenz inspiriert.

Der konstruierte Fragebogen besteht insbesondere aus einem einleitenden Teil, wobei auf die Erhebung persönlicher Einstellungen und Vorstellungen zur Mathematik und mathematischen Beweisen hingewiesen wird. Dabei wird explizit auf die persönliche Meinung der Lernenden sowie das Fehlen von falschen oder richtigen Antworten verwiesen. Den einleitenden Ausführungen folgen insgesamt sieben Teile, welche von A bis G nummeriert sind, um zum einen den

Fragebogen übersichtlicher zu gestalten und schließlich bei der Auswertung der Daten die Identifikation der Items zu erleichtern.

Bevor auf die Bildung der einzelnen Kategorien zur Erhebung der mathematik- und beweisbezogenen Beliefs eingegangen wird, sei an dieser Stelle auf den ersten Teil A des Fragebogens zur Erhebung soziodemographischer Merkmale sowie damit einhergehend entsprechender Störvariablen verwiesen (Döring, 2023, S. 266). Dies ist nicht nur zur Beschreibung der Stichprobe notwendig, sondern insbesondere zur Erhebung möglicher Störvariablen, um in weiterer Folge ihren Einfluss auf die abhängigen Variablen neben der Intervention zu prüfen (Döring, 2023, S. 727). Die Ergebnisse im Hinblick auf den Einfluss der Störvariablen wurden bereits im vorangegangenen Abschnitt 5.2 dargestellt.

Insgesamt werden in dieser Kategorie zur Erhebung personenbezogener Daten sowie von Störvariablen fünf Items konstruiert, welche in Tabelle 5.1 dargestellt sind. Die Items werden dabei entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu Teil A im Fragebogen von 1 bis 5 nummeriert. In der Tabelle sind dabei sowohl die formulierte Frage bzw. Aussage als auch die entsprechenden Antwortmöglichkeiten angeführt. Zudem findet sich ein Verweis auf die zugrundeliegende Forschungsliteratur, wodurch die Wahl und Konstruktion des Items begründet werden. Die detaillierten Ergebnisse der angeführten Arbeiten finden sich in Abschnitt 2 zum Forschungsstand sowie Abschnitt 4 zum theoretischen Hintergrund.

Im Hinblick auf soziodemographische Merkmale nach Döring (2023, S. 266), wie unter anderem Alter, Wohnort sowie Geschlecht, wird im Zuge der Itemkonstruktion nur eine Frage zum Geschlecht entwickelt. Aufgrund der spezifischen Wahl der Stichprobe wird auf die Erhebung des Alters verzichtet, da die untersuchte Population ein konstantes Alter von 16 bis 18 Jahren aufweist. Weitere soziodemographische Daten werden aufgrund fehlender Relevanz für die Forschungsfrage sowie zugunsten der Ökonomie des Fragebogens nicht erhoben.

Im Zuge der Vortestung wurde insbesondere von beiden Mathematiklehrpersonen das Anführen der Beispiele für das Gebiet der Analysis in Item A3 positiv bewertet, da die Beantwortung der Frage somit erleichtert wird und der Begriff der Analysis unter den Schüler*innen nicht zwingend bekannt sein muss. Im Rahmen von Item A4 wird im Zuge der Vortestung eine Ergänzung um die Hinweise zu mathematischen Beweisen in der Klammer vorgenommen, da von einer der Mathematiklehrpersonen gefragt wurde, ob die Schüler*innen schon wüssten, was mathematische Beweise sind. Darüber hinaus merkten im Zuge der Methode des lauten Denkens zwei Lernende bei der Vortestung des Fragebogens an, nicht zu wissen, was genau unter mathematischen Beweisen zu verstehen ist.

Zudem wird auf Basis der Vortestung des Fragebogens der Teil A um das Item A5 zum Besuch des Wahlpflichtfaches Mathematik ergänzt. Ausgangspunkt stellt dabei der Verweis auf das Wahlpflichtfach von zwei der drei befragten Lernenden dar, wonach entsprechende Assoziationen mit dem außerregulären Fach angemerkt und Hinweise auf bessere Leistungen in Bezug auf das Beweisen aufgrund des Besuchs hervorgehoben wurden.

Tabelle 5.1

Itemkonstruktion Teil A

Item	Frage/Aussage	Antwortmöglichkeiten	Bezug zur Forschungsliteratur
A1	Welchem Geschlecht fühlst du dich zugehörig?	weiblich (1) männlich (2) divers/keine Angabe (3)	Zusammenhang zwischen Geschlecht und Leistungen bei der Beweiskonstruktion bzw. allgemeinen mathematischen Leistungen (z. B. Healy & Hoyles, 2000)
A2	Was war deine Mathematiknote im letzten Zeugnis, das du erhalten hast?	1 (Sehr gut) 2 (Gut) 3 (Befriedigend) 4 (Genügend) 5 (Nicht genügend)	Zusammenhang zwischen den Leistungen von Lernenden und dem Beweisverständnis sowie der Beweiskonstruktion und Beliefs (z. B. Bauer et al., 2022; Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004; Neuhaus & Rach, 2019; Reiss et al., 2002; Wen & Dubé, 2022)
A3	Wie gut verstehst du die Themen auf dem Gebiet der Analysis (z. B. Funktionen, Grenzwerte, Differentialrechnung)?	sehr gut (1) gut (2) teilweise (3) eher nicht gut (4) gar nicht gut (5)	Zusammenhänge zwischen domänenspezifischem Wissen sowie Methodenwissen zum Beweisen und dem Beweisverständnis sowie der Konstruktionskompetenz (z. B. Bauer et al., 2022; Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003; Neuhaus & Rach, 2019; Reiss et al., 2003; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2009; Weber, 2001)
A4	Wurde in deinem Mathematikunterricht zuvor schon einmal ausführlicher über mathematische Beweise (z. B. „Was ist ein Beweis?“, Beweisformen) gesprochen?	ja, sehr oft (1) ja, hin und wieder (2) nein, so gut wie nie (3)	Zusammenhänge zwischen domänenspezifischem Wissen sowie Methodenwissen zum Beweisen und dem Beweisverständnis sowie der Konstruktionskompetenz (z. B. Bauer et al., 2022; Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003; Neuhaus & Rach, 2019; Reiss et al., 2003; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2009; Weber, 2001)
A5	Ich besuche derzeit das Wahlpflichtfach Mathematik.	ja (1) nein (0)	Kein direkter Bezug zur Forschungsliteratur. Im Zuge der Vortestung des Fragebogens ergab sich die Relevanz des Items als Störvariable bei der Interpretation der Ergebnisse

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die Items aus Teil A des Fragebogens, wobei sowohl die Frage bzw. Aussage, die Antwortmöglichkeiten als auch der theorie- und forschungsbasierte Hintergrund der Itemkonstruktion angegeben sind. Bei den Antwortmöglichkeiten ist in Klammer die numerische Kodierung angegeben. Eigene Darstellung.

Bevor auf die Konstruktion der Kategorien und darin enthaltenen Items zu mathematik- und beweisbezogenen Beliefs eingegangen wird, sei an dieser Stelle auf den letzten Teil G des Fragebogens verwiesen, welcher aus einem offenen Aufgabenitem besteht. Dabei handelt es sich um eine Konstruktionsaufgabe einer Beweisidee zur notwendigen Bedingung lokaler Extrema, genauer zur Aussage „Wenn die Funktion f auf einem offenen Intervall I differenzierbar ist und in $x_0 \in I$ eine lokale Extremstelle besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.“ (Greefrath et al., 2016, S. 197). Im Rahmen der Probetestung des Fragebogens im Zuge der Methode des lauten Denkens wurde die Aufgabenstellung nachträglich wesentlich reduziert. So wurden anfangs sowohl die

Begriffe Beweisidee und Hauptgedanke in die Formulierung der Aufgabe mitaufgenommen, wobei von einer der Mathematiklehrpersonen angemerkt wurde, dass nicht klar sei, ob hier dasselbe verlangt wird. Darüber hinaus wurde im Anschluss an die explizite Aufforderung zur Notation der eigenen zentralen Beweisidee angemerkt, dass Stichpunkte genügen. Dabei war der befragten Lehrperson nicht klar, ob beispielsweise Skizzen erlaubt wären. Um hier möglichst vielfältige Beweisideen und -impulse zu erhalten, wird im finalen Fragebogen auf den Zusatz verzichtet.

Die Wahl der Aussage basiert insbesondere auf ihrer Repräsentativität für das mathematische Gebiet der Analysis sowie einem Minimum an notwendigen Voraussetzungen und einem möglichen induktiven bzw. experimentellen sowie präformalen Ansatz mittels eines graphisch-intuitiven Beweises (Blum & Kirsch, 1991, S. 188; Tietze et al., 1997, S. 175). Zudem schafft die Behauptung einen engen Bezug zur direkt vorangegangenen, im Unterricht behandelten Thematik der Untersuchung von Polynomfunktionen mittels der Differentialrechnung. Die Aufnahme der Konstruktionsaufgabe in den Fragebogen wird insbesondere mit den Ergebnissen diverser Forschungsarbeiten begründet, welche einen Zusammenhang zwischen den Ansichten und Vorstellungen der Lernenden zum mathematischen Beweisen und den entsprechenden Beweiskonstruktionsleistungen feststellen (z. B. Grundey, 2015; Healy & Hoyles, 1998). Nähere diesbezügliche Ausführungen finden sich in Abschnitt 2 zum Forschungsstand.

Wie bereits ebenfalls in Abschnitt 2 angeführt, greift eine Vielzahl an empirischen Forschungsarbeiten bei der Erhebung von Beliefs auf Fragebögen in Verbindung mit Likert-Skalen als Erhebungsinstrumente zurück (z. B. Beswick 2005, 2012; Beumann & Geisler, 2022; Grigutsch et al., 1998; Kempen, 2019; Kloosterman, 2003; Pehkonen, 1995; Richardson, 1996; Szücs, 2023; Törner & Grigutsch 1994). Trotz der erwähnten kritischen Stimmen wird aufgrund der sichtbaren Anerkennung dieser Methode in der Forschung auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit als quantitatives Messinstrument ein Fragebogen entwickelt, welcher Items im Sinne eines Likert-Formats zur Erhebung mathematik- und beweisbezogener Beliefs umfasst. Dabei stellt der Fragebogen eine Kombination aus Einzelitems im Likert-Typ sowie Likert-Skalen dar, wobei erneut darauf zu verweisen ist, dass diese Skalen dem theoretischen Anspruch nach Döring (2023, S. 271–272) nicht vollständig gerecht werden.

Jedes Item besteht dabei aus einer Aussage, welche auf einer Ratingskala von 1 bis 5 bewertet wird. Dabei entspricht der Wert 1 der Beurteilung mit „stimme ich gar nicht zu“ und der Wert 5 der Bewertung mit „stimme ich voll zu“. Nach Döring (2023, S. 247) handelt es sich dabei um eine unipolare Ratingskala, wobei nur die Skalenendpunkte mit verbalen Marken versehen

werden. Insgesamt werden 28 Items im Likert-Stil entwickelt bzw. aufgenommen und in fünf Themengebiete von B bis F im Fragebogen aufgegliedert. Um Antworttendenzen entgegenzuwirken, werden sowohl positive als auch negative Items formuliert (Döring, 2023, S. 271). Diese werden im Rahmen der Auswertung entsprechend umgepolt bzw. invertiert, um sie mit den übrigen positiv formulierten Items vergleichbar zu machen (Döring, 2023, S. 271). Teil C wird zudem um ein Ranking im Sinne der „rank-then-rate“-Methode nach Safrudiannur und Rott (2020) ergänzt. In Anlehnung an McCarty und Shrum (1997, zitiert nach Safrudiannur & Rott, 2020, S. 5) entwickeln Safrudiannur und Rott (2020, S. 2, S. 5) ein Instrument zur Erhebung von Beliefs bei Lehrpersonen über ihre Praxis. In diesem Instrument kombinieren Safrudiannur und Rott (2020, S. 5) Rangordnungs- und Bewertungsverfahren im Sinne von Likert-Items, um die Tendenz zur besseren Bewertung positiv formulierter Items zu verringern sowie die Bereitschaft zu erhöhen, Differenzierungen vorzunehmen. In Anlehnung an Szücs (2023, S. 11) sei allerdings darauf verwiesen, dass es sich dabei erst um eine zu etablierende Form der quantitativen Erhebung von Beliefs handelt, sodass im Rahmen des Fragebogens lediglich ein derartiges Verfahren aufgenommen wird. Eine entsprechende diesbezügliche Reflexion findet sich insbesondere in Abschnitt 9.

Im Nachfolgenden wird auf die Entwicklung der Kategorien sowie der entsprechenden Items näher eingegangen, wobei darauf hinzuweisen ist, dass sich die auf theoretischer Basis konstruierten Kategorien nicht mit den Themenbereichen im Fragebogen decken. Auf die entsprechende Fragebogenstruktur wird im Anschluss verwiesen, wobei die Bezeichnungen der Items bereits einen Hinweis auf die Position und Zuordnung im Fragebogen geben. So bezeichnet Item B1 das erste Item in Teil B des Fragebogens.

Die Grundlage der entwickelten Kategorien zur Erhebung mathematik- sowie beweisbezogener Beliefs bildet das in Abschnitt 4.2.2 vorgestellte theoretische Rahmenwerk zu mathematikbezogenen Beliefs von Op't Eynde et al. (2003). Die von Op't Eynde et al. (2003, S. 28) etablierten Kategorien (1) Beliefs über den Mathematikunterricht, (2) Beliefs über sich selbst und (3) Beliefs über den sozialen Kontext finden sich in dem hier vorgestellten Konzept wieder. Die erste Kategorie umfasst nach Op't Eynde et al. (2003, S. 28) Beliefs über die Mathematik selbst, das Lernen von Mathematik und Problemlösen sowie das Lehren von Mathematik.

Ausgehend von dieser ersten Kategorie nach Op't Eynde et al. (2003, S. 28) entspricht Kategorie 1 in dieser Arbeit den *Beliefs über die Mathematik und mathematisches Beweisen*. Diese gliedert sich wiederum in die fünf Unterkategorien 1A *Statische Sichtweise*, 1B *Formales Beweiskonzept*, 1C *Dynamische Sichtweise*, 1D *Beweisen als Entdecken und Explorieren* und 1E

Beweisverständnis. Die Unterkategorien 1A und 1C entsprechen dabei insbesondere einem Transfer der für mathematikbezogene Einstellungen bzw. Beliefs formulierten statischen und dynamischen Sichtweisen nach Grigutsch et al. (1998) sowie Ernest (1998), welche in Abschnitt 4.2.2 detaillierter dargestellt werden. Ebenso orientieren sich die Subkategorien 1B sowie 1D an der von Grigutsch et al. (1998, S. 13) entwickelten Unterscheidung in einen Formalismus-, Schema-, Prozess- und Anwendungsaspekt mathematischer Weltbilder. Die letzte Unterkategorie zum Beweisverständnis basiert auf dem Beweisschemakonzept von Harel und Sowder (1998), welches in Abschnitt 4.2.3 beschrieben ist. Die Kategorien 2 *Beliefs über sich selbst* und 3 *sozio-affektive Beliefs* werden ebenfalls auf Basis von jenen nach Op't Eynde et al. (2003, S. 30) entwickelt, wobei insbesondere im Rahmen der letzten Kategorie verstärkt affektive Aspekte nach Maaß (2006, S. 119) ebenfalls berücksichtigt werden.

Bei jeder der Kategorien wird zudem im Zuge der Methode der internen Konsistenz der Cronbachs Alpha-Koeffizient berechnet (Döring, 2023, S. 438). Cronbachs Alpha stellt dabei ein Bestimmungsmaß der internen Konsistenz dar, welches höher ist, umso mehr eine Gruppe von Items korreliert (Prospeschill, 2022, S. 168). Prospeschill (2022, S. 170) betont dahingehend, dass die Reliabilität als Gütekriterium der Klassischen Testtheorie nur geschätzt werden kann und Konsistenzanalysen wie jene mittels dem Cronbachs Alpha-Koeffizienten zwar die höchste Praktikabilität aufweisen, bei heterogenen Merkmalen allerdings ungeeignet sind. Dennoch erfreut sich die Schätzung der Reliabilität mittels interner Konsistenzanalysen in der Praxis hoher Beliebtheit, obwohl in der Regel die Voraussetzungen für die Berechnung des Cronbachs Alpha nicht gegeben sind (Döring, 2023, S. 463). Aus diesem Grund wird zusätzlich insbesondere McDonalds Omega ermittelt, ebenfalls ein bekanntes Reliabilitätsmaß, welches allerdings ein weniger strenges Modell im Hinblick auf die Voraussetzungen darstellt (Moosbrugger & Kelava, 2020, S. 634). Da das zur Auswertung genutzte Statistikprogramm JASP bei lediglich zwei Items kein McDonalds Omega berechnen kann, wird hier zudem auf Spearmans Rangkorrelation zurückgegriffen, da diese zum einen auch für ordinalskalierte Daten herangezogen wird und im Gegensatz zur Pearson-Korrelation keine Normalverteilung voraussetzt (Döring, 2023, S. 253, S. 648). Die Normalverteilung wird in JASP mittels Shapiro-Wilk-Test überprüft (Schuster, 2010, S. 145). Sämtliche Berechnungen finden sich in Tabelle D9 in Anhang D. Moosbrugger und Kelava (2020, S. 331, S. 364) führen hinsichtlich der Höhe der Reliabilität an, dass sich im Hinblick auf Persönlichkeitstests ein Wert ab .70 für das Cronbachs Alpha sowie McDonalds Omega etabliert hat, um als angemessen interpretiert zu werden. Mit Blick auf Spearmans Rangkorrelation führt Döring (2023, S. 559) einen Reliabilitätskoeffizienten größer als .80 an.

Tabelle 5.2*Kategorie 1A: Statische Sichtweise*

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
B1	<i>Mathematik besteht aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen, die präzise und streng befolgt werden müssen.</i>	Das Item entspricht der Verbindung des Formalismus- und Schemaaspekts bei Grigutsch et al. (1998, S. 17–18), wobei eine Kombination der Items 29 und 30 erfolgt.
C1	<i>Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.</i>	Das Item berücksichtigt die Verbindung von einer statischen, formalistisch geprägten Sicht und der Verifikationsfunktion von Beweisen nach Kempen (2019, S. 59). Die Formulierung der Verifikationsfunktion erfolgt in Anlehnung an de Villiers (1990, S. 18), Kempen (2019, S. 137) und Kuntze (2005, S. 53).

Anmerkung. Items in der Kategorie 1A: Statische Sichtweise. Eigene Darstellung.

Im Rahmen der Probetestung des Fragebogens ergaben sich bei den Items in Tabelle 5.2 keine notwendigen Änderungen, sodass die Formulierungen aus dem ersten Entwurf beibehalten wurden. Da sich im Zuge der Überprüfung der internen Konsistenz ein Cronbachs Alpha von .546 sowie ein Spearmans Rho von .368 mit einem Wert $p = .070$ ergibt, ist die Korrelation der beiden Items sowie Cronbachs Alpha als unzureichend anzusehen. Die Items werden im Zuge der Ergebnisse dennoch als eine inhaltliche Kategorie angeführt, da dies im Rahmen der angeführten Forschungsliteratur inhaltlich begründet werden kann. Allerdings wird damit kein Mittelwert der gesamten Kategorie gebildet, sondern es erfolgt eine Gegenüberstellung der Einzelitems im Prä-Post-Vergleich.

Die zweite Kategorie steht in engem Zusammenhang mit dem ersten Themenkomplex zur statischen Sichtweise und umfasst zwei Items zum formalen Beweiskonzept. In der nachfolgenden Tabelle 5.3 finden sich die beiden ausformulierten Items sowie ihre theoretische Begründung. Eine allgemeine Zustimmung im Rahmen beider Kategorien würde damit auf ein formales Beweiskonzept hindeuten und mit einer statischen Sichtweise auf die Mathematik in Verbindung stehen. Dabei entspricht die Auffassung weniger einem rezeptartigen Anwenden von Regeln und Gesetzen als einem Beweisverständnis im Sinne der Hochschulmathematik (Grigutsch et al., 1998, S. 6). Auch hier ergaben sich im Zuge der Probetestung keine Änderungen zum ursprünglichen Fragebogenentwurf. Für die beiden Items wurde wiederum der Cronbachs Alpha-Koeffizient mit einem Wert von .400 sowie aufgrund der beschränkten Anzahl von zwei Items ein Spearmans $\rho = .295$ mit $p = .152$ ermittelt. Aufgrund dieser niedrigen Werte muss die Reliabilität hier ebenfalls als unzureichend interpretiert werden, sodass in weiterer Folge lediglich die beiden Einzelitems betrachtet werden, die thematische Kategorie allerdings bestehen bleibt.

Tabelle 5.3**Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept**

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
C4	<i>Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.</i>	Das Item entspricht der Systematisierungsfunktion von Beweisen nach de Villiers (1990, S. 20) sowie Kuntze (2005, S. 54) und berücksichtigt die Verbindung der Systematisierungsfunktion mit dem Vorliegen eines formalen Beweiskonzepts nach Kempen (2019, S. 54).
D5	<i>Beim Beweisen ist es wichtig, die Definitionen aller für den Beweis notwendigen Begriffe zu kennen.</i>	Das Item rekurriert ebenso auf eine formalistische Sicht und damit einhergehend auf ein formales Beweiskonzept, wobei die Formulierung des Items auf Basis der Items Nummer 45 und 48 im Rahmen des Formalismusaspekts bei Grigutsch et al. (1998, S. 17) für das Beweisen adaptiert ist.

Anmerkung. Items in der Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept. Eigene Darstellung.

Die dritte Kategorie zur dynamischen Sichtweise umfasst analog zur Kategorie 1A zwei Items, wobei sich Item B2 wiederum auf die Mathematik im Allgemeinen bezieht, wohingegen Item C2 die Erklärungsfunktion von Beweisen widerspiegelt. Die nachfolgende Tabelle 5.4 zeigt die beiden ausformulierten Items sowie deren theoretische Fundierung. Im Rahmen der Probetestung ergab sich im Hinblick auf Item C2 eine Änderung dahingehend, dass hier ursprünglich von einem „guten Beweis“ gesprochen wurde. Dabei wurde von einer der Lehrpersonen angemerkt, dass nicht deutlich ist, was darunter verstanden werden kann. Die Berechnung im Rahmen der Konsistenzanalyse ergibt in dieser Kategorie ein Cronbachs Alpha von $-.232$ sowie ein Spearman Rho von $-.144$ mit $p = .494$. Nach Prospeschill (2022, S. 169) ist ein negatives Cronbachs Alpha nicht zu interpretieren, doch auch die Ergebnisse im Rahmen der Rangkorrelation weisen auf eine ungenügende Reliabilität hin. Aus diesem Grund wird auch in dieser Kategorie kein Mittelwert der gesamten Items gebildet, sondern diese als inhaltliche Rubrik verstanden.

Tabelle 5.4**Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise**

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
B2	<i>Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.</i>	Das Item entspricht der Verbindung des Prozess- und Anwendungsaspekts bei Grigutsch et al. (1998, S. 17–18), wobei eine Kombination der Items 31 und 72 erfolgt.
C2	<i>Ein Beweis erklärt, warum eine mathematische Aussage gilt.</i>	Das Item berücksichtigt die Verbindung von einer dynamischen, prozessorientierten Sicht und der Erklärungsfunktion von Beweisen bei Kempen (2019, S. 59). Die Formulierung der Erklärungsfunktion erfolgt in Anlehnung an de Villiers (1990, S. 19), Kempen (2019, S. 137) und Kuntze (2005, S. 54).

Anmerkung. Items in der Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise. Eigene Darstellung.

Eine weitere Kategorie im Rahmen von Beliefs über Beweise bilden Items zu einem durch Entdecken und Explorieren geprägten Beweisverständnis. In Tabelle 5.5 finden sich die insgesamt fünf Items innerhalb dieser Kategorie, welche insbesondere in enger Verbindung mit

einer dynamischen Sichtweise stehen und damit die vorangegangene Kategorie weiter ausdifferenzieren. Nach der erfolgten Probetestung wurde hier insbesondere eine Änderung im Hinblick auf die vorgesehene Rangordnung der Items D1 bis D4 vorgenommen. Ursprünglich wurde hier ein Ranking von 1 bis 4 im Hinblick auf die individuelle Wahrnehmung der wichtigsten Beweisstrategie angestrebt. Im Rahmen der Probetestung wurde dabei allerdings sowohl von einem der Lernenden als auch von einer Lehrperson darauf hingewiesen, dass diese stark abhängig vom jeweiligen Beweisproblem ist, weshalb eine allgemeine Ordnung tendenziell als schwierig wahrgenommen wurde. Daher wurde in Teil D des Fragebogens auf ein derartiges „rank-then-rate“-Format verzichtet. Für die bereits in den verschiedenen Kategorien angeführten Items C1 bis C4 zu diversen Beweisfunktionen wurde die Methode allerdings im endgültigen Fragebogen beibehalten.

Tabelle 5.5

Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken und Explorieren

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
C3	<i>Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.</i>	Das Item entspricht der Entdeckungsfunktion mathematischer Beweise nach Kuntze (2005, S. 54) in Anlehnung an de Villiers (1990, S. 21) und verweist auf die Generierung von Methodenwissen (Heinze & Reiss, 2003). Zudem stellt es eine Verbindung zu den von Schoenfeld (1985, S. 15) betonten Heuristiken für das Problemlösen her.
D1	<i>Der erste Schritt beim Beweisen liegt darin, eine intuitive Idee zu entwickeln, warum eine Aussage wahr sein könnte.</i>	Das Item betont die Bedeutung von Intuition und informellem Wissen im Hinblick auf Problemlöseprozesse nach Schoenfeld (1985, S. 15) sowie für die Mathematik allgemein im Sinne des Prozessaspekts nach Grigutsch et al. (1998, S. 18). Das Item entspricht zudem einer Anlehnung an Item 41 bei Grigutsch et al. (1998, S. 18).
D2	<i>Beim Beweisen ist es hilfreich, spezifische Beispiele zu probieren, um ein Muster zu erkennen.</i>	Das Item entspricht ebenso einer prozessorientierten Sichtweise nach Grigutsch et al. (1998, S. 18) und basiert auf deren Item 43. Darüber hinaus betont das Item eine experimentelle Sichtweise, welche durch die Intervention verstärkt werden sollte. Zudem ist das Item in Anlehnung an die Items zur Nutzung von Beispielen im Beweisprozess nach Kempfen (2019, S. 140–141) entstanden.
D3	<i>Ein Beweis entsteht oftmals durch Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen.</i>	Das Item betont erneut verstärkt einen Prozessaspekt und ist insbesondere an das Item 43 bei Grigutsch et al. (1998, S. 18) angelehnt. Darüber hinaus stellt das Item einen Bezug zur Explorationsfunktion von Beweisen nach Hanna und Jahnke (1996, S. 903) her.
D4	<i>Das Finden eines Gegenbeispiels ist ein wichtiger Teil des Beweisprozesses.</i>	Das Item wurde ebenfalls in die Kategorie aufgenommen, da es im Sinne des Entdeckens bzw. Explorierens auf eine Beweistechnik hinweist, welche nach Galbraith (1981) sowie Healy und Hoyles (1998) tendenziell weniger akzeptiert wird.

Anmerkung. Items in der Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken und Explorieren. Eigene Darstellung.

Darüber hinaus erfolgte für die fünf Items in Tabelle 5.5 ebenfalls die Überprüfung der Reliabilität mittels einer Konsistenzanalyse. Die Ergebnisse weisen mit $\alpha = .380$ sowie McDonalds $\omega = .399$ allerdings auf eine unzureichende Reliabilitätsschätzung hin, sodass wie bereits in den anderen Kategorien auch hier lediglich die Einzelitems miteinander verglichen werden.

Die letzte Kategorie im Rahmen von Beliefs zu mathematischen Beweisen besteht aus insgesamt drei Items zum Beweisverständnis. Insbesondere wurde hier ein Fokus auf ein empirisches und autoritäres Beweisschema gelegt, da Harel und Sowder (1998, S. 278) hier eine Dominanz identifizieren. In Abschnitt 4.2.3 finden sich diesbezüglich nähere Ausführungen. Im Zuge der Probetestung stellte sich heraus, dass sowohl einer Lehrperson als auch einem der Lernenden nicht klar war, was unter „formal“ zu verstehen ist. Aus diesem Grund wurden die ergänzenden mathematischen Symbole in der Klammer angeführt. Im Rahmen der Berechnungen zur internen Konsistenz ergeben sich ein $\alpha = .429$ sowie ein $\omega = .474$, sodass hier von einer ungenügenden Reliabilität auszugehen ist und die Kategorie damit insbesondere auf inhaltlicher und nicht statistischer Ebene verstanden wird.

Tabelle 5.6

Kategorie 1E: Beweisverständnis

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
C5	<i>Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.</i>	Das Item entspricht dem empirischen Beweisschema nach Harel und Sowder (1998, S. 252) und greift das Konzept des „naiven Empirismus“ nach Schoenfeld (1985, S. 186) auf.
C6	<i>Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist (z. B. $\Leftrightarrow$, $\in$, $f(x)$, $\mathbb{R}$).</i>	Das Item orientiert sich an den Ergebnissen von Grundey (2015, S. 72–73) in Anlehnung an Healy und Hoyles (1998) sowie Harel und Sowder (1998), wonach Lernende Beweise häufig aufgrund ihrer Darstellungsart und weniger auf Basis ihres Inhalts bewerten. Grundey (2015, S. 275) verweist zudem auf die Dominanz eines engen formal-algebraischen Beweisverständnisses.
C7	<i>Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.</i>	Das Item entspricht dem autoritären Beweisschema nach Harel und Sowder (1998, S. 247).

Anmerkung. Items in der Kategorie 1E: Beweisverständnis. Eigene Darstellung.

Die zweite große Kategorie umfasst insgesamt sieben Items zu Beliefs über sich selbst als Betreiber*in der Mathematik sowie beweisendes Individuum. Das Item B3 bezieht sich insbesondere wiederum auf die Mathematik im Allgemeinen, während die übrigen sechs Items spezifisch auf mathematisches Beweisen fokussieren. Im Zuge der Probetestung wurde der Teil E im Fragebogen mit den Items E1 bis E6 von einer der Lehrpersonen positiv hervorgehoben, wobei darauf verwiesen wurde, dass die Fragen gleichfalls zu beantworten sind, auch wenn noch wenige Erfahrungen mit der Thematik vorliegen sollten. Im Zuge von Item E6 wurde dabei auf die Differenzierung verwiesen, ob bereits Kenntnisse über die spezifische Vorgehensweise bei der Beweiskonstruktion im Sinne von Analogien vorliegen. Dieser Aspekt wurde sodann für eine stärkere Konkretisierung in die Formulierung mitaufgenommen. Von einem der befragten Lernenden wurde darauf verwiesen, dass die Fragen spezifisch für Personen sind, welche sich bereits mit Beweisen besser auskennen würden, sodass hier eventuell eine Unterscheidung

notwendig sein könnte. Dies wurde durch Aufnahme des Items zum Besuch des Wahlpflichtfachs sowie im Zuge der Erhebung der Vorkenntnisse zu Beweisen in Teil A gewährleistet.

Tabelle 5.7

Kategorie 2: Beliefs über sich selbst

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
B3	<i>Meine mathematischen Fähigkeiten verbessern sich im Laufe des Lernprozesses.</i>	Das Item entstammt einer Übersetzung des Items C9 aus der Arbeit von Kislenko (2009, S. 153) und zeigt zudem ein dynamisches Selbstbild nach Dweck (2007, S. 71).
E1	<i>Ich bin davon überzeugt, dass ich meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern kann.</i>	Das Item entspricht einer Adaption des Items B3 für das mathematische Beweisen.
E2	<i>Ich habe genügend Ausdauer, um auch bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.</i>	Das Item entspringt aus dem von Schoenfeld (1985, S. 43) angeführten Belief, mathematische Probleme müssten in unter zehn Minuten gelöst sein. Dies hat frühzeitiges Aufgeben zur Folge (Schoenfeld, 1985, S. 43). Ein ähnliches Item findet sich bei Kislenko (2009, S. 154), wonach das schnelle Finden korrekter Antworten in der Mathematik notwendig ist. Auch Weber und Mejia-Ramos (2014, S. 99) verweisen auf das Belief eines notwendigen zeitlich schnellen Beweisverständnisses.
E3	<i>Ich fühle mich im Umgang mit typischen Beweistechniken (wie direkter Beweis, Widerspruch) sicher.</i>	Das Item verweist insbesondere auf die Sicherheit im beweis-spezifischen Methodenwissen, welches von Kuntze et al. (2004, S. 6) hervorgehoben wird. Insbesondere durch das Sprechen über mathematische Beweise sollte hier nach Kuntze et al. (2004, S. 8) eine tendenziell höhere Zustimmung die Folge sein.
E4	<i>Es bereitet mir Schwierigkeiten, die zentrale Idee eines Beweises von den spezifischen Details zu unterscheiden.</i>	Das Item rekurriert auf die Unterscheidung zwischen Syntaktik und Semantik nach Alcock und Weber (2004, S. 210) im Zuge von Beweiskonstruktionen sowie auf die Studie von Weber und Mejia-Ramos (2014, S. 93), wonach für Lernende Beweis-verständnis aus dem Nachvollziehen aller einzelnen Argumente resultiert, wohingegen Mathematiker*innen dies nicht als ausreichend sehen.
E5	<i>Ich sehe mich in der Lage, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.</i>	In Verbindung mit Item E6 bezieht sich das Item auf die Unterscheidung zwischen dem Lesen sowie der eigenständigen Konstruktion von Beweisen in Anlehnung an Healy und Hoyles (1998) sowie Grundey (2015). Das Item ist zudem eine Umformulierung eines Items zur Selbstwirksamkeit und dem Kompetenzzuwachs bei Kempen (2019, S. 141–142).
E6	<i>Ich fühle mich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.</i>	In Verbindung mit Item E5 bezieht sich das Item auf die Unterscheidung zwischen dem Lesen sowie der eigenständigen Konstruktion von Beweisen in Anlehnung an Healy und Hoyles (1998) sowie Grundey (2015). Das Item ist zudem eine Umformulierung eines Items zur Selbstwirksamkeit und dem Kompetenzzuwachs bei Kempen (2019, S. 141–142), wobei hier die affektive Komponente der Überforderung im Sinne einer negativen Emotion einfließt und eine Erleichterung durch Kenntnis der Vorgehensweise gegeben ist.

Anmerkung. Items in der Kategorie 2: Beliefs über sich selbst. Eigene Darstellung.

Im Gegensatz zu den vorangegangenen Kategorien ergibt sich für die sieben Items in Tabelle 5.7 ein Cronbachs Alpha von .747 sowie ein McDonalds Omega von .708. Diese Werte liegen zwar knapp über dem von Moosbrugger und Kelava (2020, S. 331, S. 364) angeführten Wert von .70 für die Angemessenheit der Reliabilität, werden allerdings aufgrund der geringen

Anzahl der Items sowie der kleinen Stichprobe von $n = 25$ und der Überschreitung des Wertes sowohl im Zuge der Berechnung des Cronbachs Alphas als auch des McDonalds Omegas als ausreichend für die Mittelwertbildung und die Annahme der internen Konsistenz angesehen.

Die letzte Kategorie bezieht sich auf den sozialen Kontext und fokussiert insbesondere verstärkt auf affektive Komponenten, sodass hier von sozio-affektiven Beliefs zum Beweisen sowie zur Mathematik gesprochen wird. Wiederum finden sich auch hier ein Item zur Mathematik im Allgemeinen sowie sechs Items mit einem spezifischen Fokus auf mathematisches Beweisen.

Tabelle 5.8

Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs

Item	Aussage	Bezug zur Forschungsliteratur
B4	<i>Im Mathematikunterricht erscheint es mir wichtig, sich über mathematische Probleme und Lösungen auszutauschen und diskutieren zu können.</i>	Das Item wurde in Anlehnung an das von Schoenfeld (1992, S. 359) konstatierte Belief entwickelt, wonach Mathematik eine Einzelaktivität darstellt, welche in Isolation betrieben wird. Eine hohe Zustimmung steht damit diesem Belief entgegen.
F1	<i>Die Diskussion von Beweisen mit Mitschüler*innen hilft mir, diese besser zu verstehen.</i>	Das Item wurde in Verbindung zu Item B4 mit einem spezifischen Bezug auf Beweise konstruiert.
F2	<i>Der Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten, macht mir Spaß.</i>	Das Item berücksichtigt einen positiven emotionalen Bezug zu Beweisen als sozialer Tätigkeit und verbindet damit das Item A25 aus der Kategorie zur Freude über Mathematik bei Rösken et al. (2007, o. S.) sowie den sozialen Kontext nach Op't Eynde et al. (2003, S. 31).
F3	<i>Es ist befriedigender für mich, eine Beweisidee selbst zu entdecken, als sie nur vorgezeigt zu bekommen.</i>	Das Item zeigt das Verständnis der Rolle der Lehrperson und der Lernenden im Beweisprozess auf und ist damit aus den Unterkategorien von Op't Eynde et al. (2003, S. 32) entwickelt worden.
F4	<i>Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.</i>	Dieses Item steht vordergründig in Verbindung mit Item F5 und befindet sich insbesondere in dieser Kategorie, um die direkte Unterschiedung zu Item F5 zu ermöglichen.
F5	<i>Ich fühle mich auf sozialer Ebene im Klassenverband sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.</i>	Das Item wurde konstruiert, um einen weiteren Fokus auf die Beliefs über den Klassenkontext der Lernenden im Mathematikunterricht zu legen und rekurriert damit auf Op't Eynde et al. (2003, S. 32).
F6	<i>Die Herausforderung einen abstrakten Beweis endlich durchdrungen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.</i>	Das Item spricht insbesondere eine motivationale Komponente beim Beweisen an, welche nach Reiss et al. (2002, S. 60) als Mediatorvariable für das Wirken von Beliefs auf den Unterricht gesehen wird. Die Aufnahme in diese Kategorie wird mit dem verstärkten Fokus auf Emotionen in den hier angeführten Items begründet.

Anmerkung. Items in der Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs. Eigene Darstellung.

Im Zuge der vorgenommenen Probetestung des Fragebogens wurde insbesondere die Betonung der Emotionen in diesem Teil von einer der Lehrpersonen positiv hervorgehoben. Eine Veränderung wurde im Hinblick auf Item F4 und F5 in Tabelle 5.8 vorgenommen. Hier handelte es ursprünglich um ein Item, wobei nicht zwischen einer mathematischen und sozialen Ebene differenziert wurde. Da sowohl von Seiten der Lehrkräfte als auch von Seiten der Lernenden hier

nicht eindeutig ersichtlich war, worauf Bezug genommen wird, wurden zwei separate Items gebildet, um die Unterscheidung zu verdeutlichen.

Im Rahmen der Prüfung der internen Konsistenz zur Schätzung der Reliabilität ergibt sich ein Cronbachs Alpha von .709 sowie ein McDonalds Omega von .764. Mit derselben Begründung wie bereits im Rahmen der zweiten Kategorie zu Beliefs über sich selbst werden auch hier die Ergebnisse als ausreichend für die Annahme interner Konsistenz sowie die Ermittlung eines Gesamtmittelwerts der Kategorie angesehen.

Bevor in den nachfolgenden Ausführungen auf die entsprechenden quantitativen Gütekriterien sowie die Auswertung der im Zuge des Fragebogens erhobenen Daten eingegangen wird, sei an dieser Stelle auf die Struktur des Fragebogens verwiesen, welche bereits anhand der Kodierungen der einzelnen Items in den diversen Kategorien ersichtlich wird.

Der Fragebogen besteht insgesamt aus sieben Teilen, wobei jeder Teil mit einem Großbuchstaben von A bis G sowie einem Titel gekennzeichnet ist. Darüber hinaus findet sich bei jedem Teil, ausgenommen Teil A, ein einleitender Satz, welcher darauf hinweist, worauf der nachfolgende Abschnitt fokussiert. Wie bereits an anderer Stelle angeführt, befasst sich Teil A eingangs mit Fragen zur Person, bevor daran anknüpfend die spezifischen Abschnitte zu den Beliefs der Lernenden folgen. Am Beginn werden dabei die vier Items B1 bis B4 zur Mathematik im Allgemeinen abgefragt, bevor in den übrigen Teilen spezifisch auf mathematisches Beweisen eingegangen wird. Der darauffolgende Teil C fokussiert sodann auf den Sinn und Zweck von Beweisen sowie deren Charakteristika, wobei sowohl die verschiedene Beweisfunktionen als auch Beweisvorstellungen thematisiert werden. In diesem Teil findet zudem die Integration der „rank-then-rate“-Methode statt, da sich das Ranking der Beweisfunktionen in Item C1 bis C4 dazu anbietet, Präferenzen festzustellen, sollten auf der Bewertungsskala keine Unterschiede sichtbar werden. Teil D fokussiert dahingegen stärker auf den Beweisprozess und die Vorgehensweise beim Beweisen. Hier wurde schließlich im Zuge der Ergebnisse der Probetestung auf eine Rangordnungsskala verzichtet. In Teil E wird auf Beliefs über sich selbst eingegangen, wobei hier Aspekte wie Selbstkonzept, Ausdauer und affektive Komponenten einfließen. Teil F konzentriert sich schließlich auf das Erleben von Beweisen im Unterricht selbst, wobei verstärkt auf den sozialen Kontext sowie damit verbundene Emotionen eingegangen wird. Den Abschluss bildet Teil G mit der bereits näher thematisierten offenen Aufgabenstellung. Spezifische Details sind dem Fragebogen in Anhang A zu entnehmen. Von einer übereinstimmenden Übernahme der entwickelten Kategorien in den Fragebogen im Hinblick auf die Reihenfolge wurde zugunsten eines schüler*innenzentrierten Verständnisses sowie einer vereinfachten Gliederung

abgesehen. Während sich die einzelnen entwickelten Kategorien auf die dahinterliegenden Sichtweisen und Beliefs sowohl im Hinblick auf die Mathematik als auch mathematisches Beweisen beziehen, werden für einen allgemeinen Einstieg die mathematikbezogenen Beliefs an den Beginn des Fragebogens gesetzt. Zudem sind die entsprechenden Beweisfunktionen gesammelt angeführt, um die „rank-then-rate“-Methode zu ermöglichen.

Die Auswertung der erhobenen Daten im Rahmen der quantitativen Prä- und Posterhebung erfolgt im Rahmen des Statistikprogramms JASP sowie der ergänzenden Nutzung von Excel. Zu unterscheiden ist dabei die Deskriptivstatistik im Sinne der Zusammenfassung der Stichprobendaten auf Basis von Stichprobenkennwerten, sowie die Inferenzstatistik, wobei insbesondere Methoden zur statistischen Prüfung von Hypothesen herangezogen werden (Döring, 2023, S. 601). Im Sinne der Datenbereinigung werden dabei im ersten Schritt fehlende Werte sowie mehrfache Angaben durch Auslassen in JASP als fehlend ausgewertet (Döring, 2023, S. 605). Sowohl für die Beschreibung der Stichprobe als auch der Ergebnisse der Prä- und Posttestung werden darüber hinaus deskriptivstatistische Methoden herangezogen (Döring, 2023, S. 605).

Für die Items A1 bis A5 werden dabei lediglich absolute und prozentuelle Häufigkeiten ermittelt, da es sich hierbei um nominal- bzw. ordinalskalierte Daten handelt und die Berechnung entsprechender sinnvoll zu interpretierender Mittelwerte nur bei intervallskalierten Daten gegeben ist (Döring, 2023, S. 237). In Anlehnung an die Likert-Skalierung entsprechen die übrigen Items zur Erhebung von Beliefs jeweils einer fünfstufigen Ratingskala und werden nach Döring (2023, S. 271) als intervall- bzw. teilweise ordinalskaliert aufgefasst. Dementsprechend erfolgt hier im Rahmen der deskriptiven Statistik die Bildung der Mittelwerte der jeweiligen Items sowie die Berechnung der Standardabweichung und Minima sowie Maxima. Darüber hinaus werden auf Basis der bereits geprüften Voraussetzung im Hinblick auf die interne Konsistenz der diversen Kategorien Mittelwerte für die Kategorie zu Beliefs über sich selbst und sozio-affektive Beliefs gebildet.

Im Zuge der erstmaligen Erhebung der Beliefs der Lernenden werden darüber hinaus inferenzstatistische Methoden herangezogen, um Zusammenhangs- und Unterschiedshypothesen zu prüfen (Döring, 2023, S. 606). Dabei sind zudem statistische Voraussetzungen wie die Homogenität der Varianzen sowie die Normalverteilung zu prüfen (Döring, 2023, S. 606). Im Allgemeinen wird dabei auf eine bivalente Korrelation und insbesondere Spearmans Rangkorrelation zurückgegriffen, da diese, wie bereits an anderer Stelle angeführt, auch für ordinalskalierte Daten herangezogen kann und im Gegensatz zur Pearson-Korrelation keine Normalverteilung voraussetzt (Döring, 2023, S. 253, S. 648, S. 665). Die Normalverteilung wird in JASP mittels

Shapiro-Wilk-Test überprüft (Schuster, 2010, S. 145). Die Prüfung der Varianzhomogenität erfolgt in JASP über den Levene-Test (Janczyk & Pfister, 2020, 54). Darüber hinaus wird im Rahmen der Eingangserhebung ein t-Test für unabhängige Stichproben zur Prüfung von Unterschieden im Hinblick auf das Geschlecht sowie den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik durchgeführt (Döring, 2023, S. 654). Da allerdings der Student-Test eine Normalverteilung des Merkmals insbesondere bei kleinen Stichproben sowie die Homogenität der Varianzen voraussetzt, wird darüber hinaus der Welch-Test für den Fall ungleicher Varianzen herangezogen (Janczyk & Pfister, 2020, 54–55). Die Effektgrößenmaße werden dabei nach Döring (2023, S. 802) interpretiert. Insbesondere im Hinblick auf bivalente Korrelationen ist dabei ein Wert von 1 als starker Zusammenhang zu interpretieren (Döring, 2023, S. 668), wobei Döring (2023, S. 802) darüber hinaus in Anlehnung an Cohen (1988, zitiert nach Döring, 2023, S. 802) anführt, dass ein Wert ab .50 auch als großer Effekt interpretiert werden kann.

Im Rahmen der Untersuchung eines Unterschieds im Hinblick auf die Prä- und Posttestung wird der t-Test für Beobachtungspaare bzw. abhängige Stichproben herangezogen, sofern die entsprechenden Voraussetzungen der Normalverteilung sowie der Homogenität der Varianzen gegeben sind (Schuster, 2010, S. 124–125). Andernfalls wird auf den Wilcoxon-Test zurückgegriffen, sollte die Normalverteilung verletzt sein (Schuster, 2010, S. 125). Zu berücksichtigen ist dabei, dass aufgrund der tendenziell sehr kleinen Stichprobe eher auf den Welch- bzw. Wilcoxon-Test rekurriert wird (Schuster, 2010, S. 126).

Die Auswertung des offenen Aufgabenteils am Ende des Fragebogens erfolgt in Anlehnung an die Kategorien bei Grundey (2015, S. 111, S. 156) sowie Healy und Hoyles (1998, S. 13) zur Bewertung von Schüler*innenbeweisen. Dabei wird für einen fehlenden oder fehlerhaften Ansatz der Wert 0 vergeben. Darunter fallen insbesondere fehlerhafte graphische Vorstellungen sowie Zirkelschlüsse. Unvollständige Ansätze werden mit dem Wert 1 kodiert. Dies umfasst unter anderem die empirisch-rechnerische bzw. empirisch-graphische Überprüfung der Aussage sowie konkrete Argumentationen über die Steigung ohne tieferliegende Begründungen, warum die Steigung an einer Extremstelle gleich null sein muss. Mit dem Wert 2 werden präformale bzw. inhaltlich-anschauliche Ansätze bewertet, welche in narrativer, graphischer oder kombinierter Form vorliegen können. Darunter fallen insbesondere Argumentationen, welche den Aspekt der Steigung mit einer Änderung des Monotonieverhaltens narrativ argumentieren oder graphisch veranschaulichen. Formal-deduktive Ansätze unter Verwendung mathematischer Sprache und Symbolik sowie der Argumentation über den Differentialquotienten und den Grenzwert werden mit dem Wert 3 kodiert.

Nach der vorangegangenen Darstellung der Auswertungsmethoden beleuchten die nachfolgenden Ausführungen die allgemeinen Gütekriterien für Tests und Fragebögen, welche im Hinblick auf das entwickelte quantitative Erhebungsinstrument geprüft werden. Das erste Kriterium der Objektivität umfasst dabei die Durchführungs-, Auswertungs- und Interpretationsobjektivität (Döring, 2023, S. 438). Die Durchführungsobjektivität wird dabei im vorliegenden Fragebogen durch die einführenden Instruktionen am Beginn des Fragebogens sowie die gleichbleibenden Fragen bzw. Aussagen gewährleistet. Darüber hinaus finden sich in jedem Teil wiederholt Ausführungen zur entsprechenden Bewertung der angeführten Aussagen. Zudem wird während der Durchführung des Tests auf jegliche Kommunikation der Leiterin mit den Teilnehmenden verzichtet. Die Konstruktion des Fragebogens im Sinne von Single-Choice-Items sowie Rangskalen und die Beschreibung der Kodierung der Ergebnisse des offenen Items am Ende des Fragebogens gewährleisten zudem die Auswertungsobjektivität. Die Interpretationsobjektivität ist insbesondere durch die Bewertung individueller Ergebnisse anhand der empirischen Normwerte in der Vergleichsstichprobe sowie durch die vorangegangene Festlegung der Rangskala gegeben (Döring, 2023, S. 430).

Die Reliabilität im Sinne der Zuverlässigkeit bzw. Messgenauigkeit des Fragebogens wurde bereits über die Methode der internen Konsistenz mittels des Cronbachs Alpha-Koeffizienten bzw. McDonalds Omega sowie Spearmans Rangkorrelation überprüft, konnte allerdings lediglich für einen Teil des Fragebogens gewährleistet werden. Dies ist jedenfalls bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen. Es sei allerdings an dieser Stelle darauf verwiesen, dass insbesondere die übrigen Items in engem Bezug zu bestehenden Items in der Literatur entwickelt und in den meisten Fällen lediglich für das Beweisen adaptiert wurden.

Im Hinblick auf die Validität wird als Methode zur Überprüfung der Inhaltsvalidität auf die im Zuge der Probetestung erfolgte Bewertung des Fragebogens durch zwei Fachlehrpersonen verwiesen (Döring, 2023, S. 406). Davon abzugrenzen ist die Augenschein-Validität, welche mittels Bewertung der Fragebogenitems durch die Lernenden gegeben ist (Moosbrugger & Kelava, 2020, S. 32). Im Rahmen der Kriteriums- sowie Konstruktvalidität ist insbesondere auf die Stützung der Interpretation durch den starken Bezug zu vorliegenden theoretischen Arbeiten sowie empirischen Befunden zu verweisen, auf deren Basis die Items entwickelt bzw. generell übernommen und lediglich adaptiert wurden.

5.3.2 Qualitative Einzelfallanalysen – Follow-up-Interview

Im Rahmen der qualitativen Erhebung wird auf ein halbstrukturiertes Interview zurückgegriffen, welches auf der Entwicklung eines Interviewleitfadens basiert (Döring, 2023, S. 355).

Dabei dient der Leitfaden zur Vorgabe von Fragen sowie einer entsprechenden Reihenfolge, gestattet allerdings zudem individuelle Anpassungen und Abweichungen während der Durchführung des Interviews (Döring, 2023, S. 356). Döring (2023, S. 365) spricht in diesem Zusammenhang von teilstandardisierten Interviews, wenn keine entsprechenden Antwortmöglichkeiten geboten sind, sondern sich die interviewten Personen mit eigenen Worten äußern. Spezifisch handelt es sich bei den im Zuge der vorliegenden Arbeit durchgeführten Befragungen um persönliche Einzelinterviews, die in der Schule in einem separaten Raum durchgeführt werden (Döring, 2023, S. 356).

Im Allgemeinen hebt Döring (2023, S. 367) die Entwicklung eines Interviewleitfadens anhand spezifischer Themen und Fragestellungen sowie die Vorabprüfung durch sogenannte Probeinterviews hervor. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Leitfäden spezifisch auf Basis der vorangegangenen quantitativen Ergebnisse der Fragebogenerhebung entwickelt werden und damit individuell stark differieren, wird im Zuge der vorliegenden Studie auf eine Vorabprüfung verzichtet. Spezifischer handelt es sich dabei um fokussierte Interviews nach Döring (2023, S. 373), welche das Ziel haben, verschiedene Sichtweisen auf ein fokussiertes Objekt zu erfragen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit entspricht dieses „fokussierte Objekt“ (Döring, 2023, S. 373) den vorangegangenen Fragebogenergebnissen sowie dahinterliegenden Begründungen.

Da sich die Entwicklung der Interviewleitfäden an den ausgewählten Fällen und damit der Wahl der Stichprobe orientiert, ist an dieser Stelle auf die Stichprobenauswahl hinzuweisen. In Abschnitt 5.2 wurde diesbezüglich bereits festgehalten, dass die qualitative Stichprobe der vorliegenden Arbeit an dem „theoretical sampling“ (Döring, 2023, S. 303) angelehnt ist. Insgesamt werden fünf Fälle aus der quantitativen Stichprobe ausgewählt, um tiefergehende Einblicke in die Fragebogenergebnisse gewährleisten zu können. Die fünf Personen decken dabei spezifische Schwerpunkte bzw. Extremfälle ab, die in den nachfolgenden Ausführungen näher beschrieben werden sollen.

Der erste gewählte Fall A1 repräsentiert den Durchschnitt der Ergebnisse der teilnehmenden Personen. Um diese Person zu ermitteln, wird über sämtliche Items hinweg die Summe der Abweichungen von den errechneten Mittelwerten aller Items des Fragebogens ermittelt. Da die Person insgesamt den kleinsten Wert aufweist, wird sie für ein Interview herangezogen.

Für die Auswahl der übrigen vier Fälle wird eine Übersichtstabelle erstellt, in welcher sämtliche Prä- und Postergebnisse aller teilnehmenden Personen dargestellt sind. Auf Basis bestehender Ergebnisse aus der aktuellen Forschungsliteratur werden sowohl förderliche als auch hinderliche Veränderungen im Ausmaß von ab zwei Werten auf der Zustimmungsskala entsprechend

markiert und gezählt. Darüber hinaus wird die Ausprägung der Zustimmungswerte untersucht, um Personen mit überwiegend hohen und niedrigen Werten zu extrahieren.

Auf Basis dieser Methode wird Fall A8 in die Stichprobe aufgenommen, da dieser auf Grundlage der Datenanalyse als Extremfall mit tendenziell hinderlichen Beliefs und kaum starken Änderungen identifiziert werden kann. Von Interesse sind dabei die Hintergründe des Vorliegens entsprechender Überzeugungen sowie das Ausbleiben größerer Veränderungen. Ergänzend dazu wird eine Person als Extrem auf der anderen Seite der Skala ausgemacht. Fall A13 zeigt keine größeren Änderungen im Rahmen der Interventionsmaßnahmen, weist allerdings bereits am Beginn der Untersuchung überwiegend hohe Zustimmungswerte und damit förderliche Beliefs auf. Dementsprechend interessieren auch in diesem Fall die dahinterliegenden subjektiven Begründungen.

Neben den genannten Extremfällen sowie der Wahl eines den Durchschnitt repräsentierenden Falls, werden darüber hinaus Personen in die qualitative Stichprobe aufgenommen, welche tiefergehende Einblicke in vorliegende Veränderungen ermöglichen können. Fall A12 zeigt dabei insbesondere Unterschiede in den Prä-Post-Ergebnissen, welche sich im Vergleich bei einigen andere Teilnehmer*innen ebenfalls zeigen. Als für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung wird Fall B7 ausgewählt, da sich bei dieser teilnehmenden Person mit deutlichem Abstand die meisten größeren positiven Veränderungen zeigen.

Nach erfolgter Extraktion der fünf Fälle aus der gesamten Stichprobe werden die quantitativen Ergebnisse der Fragebogenerhebung für jeden Einzelfall getrennt zusammengestellt, um darauf aufbauend die individuellen Interviewleitfäden zu entwickeln. Bei der Entwicklung der Leitfäden werden einleitend insbesondere die Ausführungen von Döring (2023, S. 433) zur sozialen Erwünschtheit bei Fragen der Selbstauskunft berücksichtigt, wonach sich die Aussagen der zu interviewenden Personen tendenziell an sozial erwünschten Normen sowie Erwartungen und weniger an dem persönlichen Verhalten und Erleben orientieren. Döring (2023, S. 433) führt dabei als klassische Gegenmaßnahme den einführenden Hinweis auf die Freiwilligkeit und Anonymität der Erhebung sowie die Bitte um eine ehrliche Beantwortung der Fragen an. Ergänzt werden diese in das Interview einführenden Anmerkungen um Hinweise zum Verhältnis der teilnehmenden Personen, wobei insbesondere auf den Rollenwechsel der Lehrkraft zu einer Studentin hingewiesen wird (Döring, 2023, S. 360).

Hinsichtlich der weiteren Gliederung des Interviewleitfadens bezieht sich die Entwicklung auf Döring (2023, S. 365), wobei an einleitende allgemeine Fragen Detailfragen anschließen. Mayring (2002, S. 70) spricht in diesem Kontext von „Sondierungsfragen“ (Mayring, 2002, S. 70),

welche in das Thema einleiten sollen. In diesem Sinne findet sich in jedem der entwickelten Leitfäden die einführende Frage zu den ersten Gedanken und Gefühlen, wenn sich die Befragten an das durchgeführte Projekt zurückerinnern. In ähnlicher Weise schließt das Interview mit einer Frage zu möglichen weiteren Ergänzungen, die nicht explizit angesprochen wurden. Den Hauptteil bilden schließlich spezifische Detailfragen zu den jeweils individuellen Ergebnissen der Teilnehmenden. Dabei werden zum einen spezifische Entwicklungen bei diversen Items erfragt, wo sich besondere Veränderungen oder Stabilität zeigen, und zum anderen allgemeine Tendenzen über den gesamten Fragebogen hinweg angesprochen. Darüber hinaus werden entsprechende Inkonsistenzen innerhalb des „rank-then-rate“-Items eruiert. Mit verstärktem Fokus auf die Interventionsmaßnahmen werden zudem Fragen in den Leitfaden aufgenommen, um tiefergehende Einblicke zu erlangen, welche Maßnahmen zu einer Änderung führten bzw. welche weiteren Aspekte notwendig wären, um Veränderungen hinsichtlich der im Fragebogen angegebenen persönlichen Überzeugungen möglicherweise zu erreichen. Die entwickelten Leitfäden der einzelnen Fälle finden sich in Anhang C.

Über ein mögliches Interview werden die Lernenden bereits zu Beginn der Untersuchung informiert. Für die Durchführung erfolgt eine Freistellung vom Unterricht für die Zeit des Interviews, die vorab mit der entsprechenden Lehrperson abzusprechen ist. Entsprechend der üblichen Vorgehensweise nach Döring (2023, S. 365) werden die Interviews mittels Audioaufnahme dokumentiert und schließlich transkribiert. Die Transkription orientiert sich an den bei Döring (2023, S. 364) angeführten Transkriptionszeichen nach Selting et al. (1998, zitiert nach Döring, 2023, S. 364) sowie an Mayring (2022, S. 56).

Der Inhalt steht bei der Transkription im Vordergrund, sodass Füllwörter wie „äh“, „ähm“ etc. weggelassen werden (Mayring, 2022, S. 56). Zudem werden Dialektfärbungen eingedeutscht und sprachliche Glättungen vorgenommen (Mayring, 2022, S. 56). Darüber hinaus werden kurze, im Hintergrund stattfindende Bestätigungen wie „ja“ und „mhm“ ausgelassen, sofern es für das Verständnis des Inhalts nicht notwendig erscheint. Kurze Gesprächspausen werden durch einen Bindestrich, (-), längere Pausen durch mehrere Bindestriche, wie zum Beispiel durch (--) vermerkt (Selting et al., 1998, zitiert nach Döring, 2023, S. 364). Der Abbruch eines Wortes oder Satzes wird mittels Schrägstrich „\“ gekennzeichnet (Selting et al. 1998, zitiert nach Döring, 2023, S. 364). Besondere Auffälligkeiten, wie beispielsweise Lachen, werden in Klammern vermerkt (Mayring, 2022, S. 56). Wird aus dem Fragebogen vorgelesen, so werden diese Stellen mit Anführungszeichen markiert. Die interviewende Person ist mit „F“ gekennzeichnet, während die Schüler*innen mit „S“ bezeichnet werden (Mayring, 2022, S. 56). Die entsprechenden Transkriptionen finden sich in Anhang E.

Die Auswertung der Interviewtranskriptionen erfolgt dabei in Anlehnung an eine qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2022). Mayring (2022, S. 67) führt diesbezüglich diverse Formen zur qualitativen Analyse von Texten an und nennt unter anderem die Zusammenfassung im Sinne einer induktiven Bildung von Kategorien sowie die Strukturierung im Rahmen einer deduktiven Anwendung zuvor abgeleiteter Kategorien. Darüber hinaus verweist Mayring (2022, S. 67) auf Mischformen diverser Ansätze. Die Auswertung im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist insbesondere an die bei Mayring (2022, S. 107) angeführten Parallelformen angelehnt. Dabei wird das entsprechende Material basierend auf deduktiv abgeleiteten Theorien analysiert sowie darüber hinaus induktiv durch weitere Kategorien erweitert (Mayring, 2022, S. 107). In der vorliegenden Arbeit bildet dabei das im vorangegangenen Abschnitt 4.3.1 entwickelte Kategoriensystem den Ausgangspunkt der Auswertung. Insbesondere erfolgt bereits eine Vorabauswahl diverser Kategorien und Items zur Aufnahme in den Interviewleitfaden, die auf Basis der quantitativen Ergebnisse getroffen wird. Dementsprechend werden die Transkriptionen entlang der in den Leitfäden aufgenommenen Kategorien und Items ausgewertet. Das Kategoriensystem in Abschnitt 4.3.1 wird dabei im Zuge der Interviews um eine Kategorie zur Intervention selbst ergänzt. Darunter sind insbesondere Aspekte aufzunehmen, die sich explizit auf durchgeführte Maßnahmen beziehen oder auch weiterführende Wünsche für Interventionen im Hinblick auf eine mögliche Änderung von Beliefs ausführen. In Anlehnung an die induktive Kategorienbildung bei Mayring (2022, S. 84) wird aus der Transkription darüber hinaus eine weitere Kategorie abgeleitet, welche sich auf die Interpretation und das Verständnis einzelner Items bezieht. Insbesondere werden dabei abweichende Interpretationen und Missverständnisse ausgewertet. Auf einen detaillierten „Kodierleitfaden“ (Mayring, 2022, S. 107) wird an dieser Stelle verzichtet, da die Interviews bereits entlang eines theoretisch fundierten Kategoriensystems entwickelt werden, die aufgenommenen Items sowie Kategorien für jeden Fall individuell sind und im Allgemeinen das Transkriptionsmaterial bei fünf spezifischen Interviews in überschaubaren Mengen vorliegt.

Abschließend sei auf entsprechende qualitative Gütekriterien verwiesen. Döring (2023, S. 107) hält diesbezüglich eine größere Akzeptanz hinsichtlich der Entwicklung von für die qualitative Forschung spezifischen Gütekriterien als der Übernahme derselben aus der quantitativen Forschung fest. Ausführungen zu den quantitativen Hauptgütekriterien finden sich in Abschnitt 5.3.1. Allerdings betont Döring (2023, S. 107) einen bisher fehlenden Konsens hinsichtlich einheitlicher qualitativer Gütekriterien. Da sich die Auswertung der Transkripte an der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2022) orientiert, dienen insbesondere auch die von Mayring (2002, S. 140–148) formulierten Gütekriterien qualitativer Forschung als Grundlage der

vorliegenden Arbeit. Weitere Kriterienkataloge finden sich darüber hinaus bei Döring (2023, S. 108–114). Das erste Kriterium, die Dokumentation des Verfahrens, gewährleisten zum einen die hier beschriebenen Ausführungen zur Zusammenstellung und Auswertung des Materials (Mayring, 2002, S. 144–145). In Abschnitt 6.2 wird zudem die Durchführung der Interviews näher beschrieben (Mayring, 2002, S. 145). Darüber hinaus ist im Rahmen der Interpretation darauf zu achten, dass diese stets argumentativ zu begründen ist (Mayring, 2002, S. 145). Ergänzend dazu nennt Mayring (2002, S. 145–146) die Regelgeleitetheit der Analyse sowie die Nähe zum Gegenstand, die insbesondere durch eine Interessensannäherung erreicht werden kann. Die schrittweise Analyse jedes Interviews entsprechend der aufgenommenen Items und Kategorien sowie die Durchführung im Feld mit spezifischem Bezug auf die Lernenden gewährleisten diese Kriterien (Mayring, 2002, S. 145–146). Zwar wird die von Mayring (2002, S. 147) angeführte kommunikative Validierung im Sinne der nachträglichen Überprüfung der Interpretation mit den befragten Personen in der vorliegenden Arbeit nicht gewährleistet, allerdings findet eine Triangulation im Sinne des Vergleichs der qualitativen und quantitativen Ergebnisse statt.

Nach der in den vorangegangenen Ausführungen näher beschriebenen Entwicklung und Auswertung des quantitativen und qualitativen Erhebungsinstruments, befasst sich der folgende Abschnitt 5.4 mit den im Rahmen der vorliegenden Arbeit zentralen Interventionsmaßnahmen für eine potenzielle Änderung beweisbezogener Beliefs der Lernenden.

5.4 Entwicklung der Interventionsmaßnahmen

Die nachfolgenden Ausführungen befassen sich mit der Entwicklung der Interventionsmaßnahmen zur Veränderung beweisbezogener Beliefs im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender und dem Aufbau neuer Überzeugungen zu Beweisen in der Mathematik und dem Mathematikunterricht. Im Hinblick auf unterrichtliche Interventionen zur Beweisführung führen Stylianides und Stylianides (2017, S. 125) drei Merkmale derselben an. Zum einen sollten solche Interventionen einen theoretischen Rahmen umfassen, welcher die Auswirkungen der jeweiligen Maßnahmen erklärt (Stylianides & Stylianides, 2017, S. 125). Zum anderen plädieren Stylianides und Stylianides (2017, S. 125) für einen klar definierten und engen Anwendungsbereich der Interventionen, sodass diese tendenziell kurz sein können. Darüber hinaus sollten die Maßnahmen konzeptionelle Veränderungen bei den Lernenden auslösen und unterstützen (Stylianides & Stylianides, 2017, S. 125).

Dementsprechend wird im Nachfolgenden die theoretische Basis der einzelnen Interventionen hervorgehoben und ihre spezifisch erwünschte Wirkung dargelegt. Zudem ist darauf zu

verweisen, dass es sich bei dem dargestellten Unterrichtskonzept um eine Kombination mehrerer Interventionen handelt, welche teilweise auch nur partiell in den Unterricht integriert werden können. Die didaktische Basis des Unterrichtskonzeptes bildet dabei der sogenannte Cognitive Apprenticeship-Ansatz, welcher nachfolgend näher beleuchtet wird, bevor auf die Entwicklung der konkreten Interventionen im Rahmen des Konzeptes eingegangen wird und damit einhergehend die Grundlagen der einzelnen didaktischen Maßnahmen aufgedeckt werden.

5.4.1 Cognitive Apprenticeship als Methode

Scherrmann (2016, S. 16) verweist auf Reinmann und Mandl (2006, S. 629, zitiert nach Scherrmann, 2016, S. 16), welche Cognitive Apprenticeship als vielbeachtetes Beispiel im Rahmen des situierten Lernens herausstellen. In der Auffassung situierten Lernens stellt „Lernen einen situations- und kontextgebundenen, im Rahmen von sozialer Transaktivität (Kooperation und Kommunikation) und Unterstützung (Instruktion von Lernbegleitung) stattfindenden Vorgang dar“ (Reusser, 2005, S. 162). Demnach ist Wissen an die in ihnen erworbenen Kontexte gebunden (Reusser, 2005, S. 162). Während in traditionellen Lehr- und Lernkonzepten Kontext und Kognition, Lernprodukt und -prozess, Inhalt und Form sowie Anwendung und Wissen getrennt werden, wird im Rahmen des situierten Lernens deren Untrennbarkeit postuliert (Reusser, 2005, S. 162). Scherrmann (2016, S. 19) betont allerdings, dass insbesondere von einer Einseitigkeit im Hinblick auf kognitivistische und situative Sichtweisen tendenziell Abstand genommen wird. Cognitive Apprenticeship stellt dabei einen Instruktionsansatz dar, welcher sich insbesondere an Merkmalen situierten Lernens orientiert (Reusser, 2005, S. 163).

Scherrmann (2016) bietet eine detaillierte Ausführung des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes, wobei überwiegend auf das Originalwerk von Collins et al. (1989, zitiert nach Scherrmann, 2016) verwiesen wird. Grundlage der vorliegenden Darstellung bilden die Hinweise von Scherrmann (2016) sowie eine frühere Fassung der Arbeit von Collins et al. (1987).

In ihren Ausführungen betonen Collins et al. (1987, S. 2) die in schulischen Kontexten vorgefundene Vernachlässigung der Prozesse von Fachleuten, welche diese zum Wissenserwerb sowie zur Ausführung komplexer Aufgaben heranziehen. Vielmehr stehen Prozesse mit einem Schwerpunkt auf verfahrensorientierte Methoden im Fokus (Collins et al., 1987, S. 2). Die Auflösung dieses Missstandes sehen Collins et al. (1987, S. 2) im Zusammenwirken von kognitiven und metakognitiven Prozessen (siehe auch Scherrmann, 2016, S. 19). Als erfolgreiches Modell wird hierbei das Lehrverhältnis im Sinne einer Meister*in-Lehrling-Dynamik angesehen, wobei ein spezifischer Prozess eingangs durch die Fachperson modelliert und anschließend unter stetiger Rücknahme von Anleitungen und Unterstützungsmaßnahmen vom Lehrling ausgeführt

wird (Collins et al., 1987, S. 2–3; Scherrmann, 2016, S. 19). In dieser Ansicht verstehen Collins et al. (1987) den Cognitive Apprenticeship-Ansatz wie folgt:

We call this rethinking of teaching and learning in school “cognitive apprenticeship“ to emphasize two things. First, these methods are aimed primarily at teaching the processes that experts use to handle complex tasks. [...] That is, in cognitive apprenticeship, conceptual and factual knowledge is exemplified and situated in the contexts of its use. [...] It is this dual focus on expert processes and situated learning that we expect to help solve the educational problems of brittle skills and inert knowledge. (S. 3)

Basierend auf den drei bestehenden Lehr-Lernmodellen „Reciprocal Teaching of Reading“ (Palincsar & Brown, 1984), „Procedural Facilitation of Writing“ (Scardamalia & Breiter, 1985, zitiert nach Collins et al., 1987) sowie „Teaching Mathematical Problem Solving“ (Schoenfeld, 1983, 1985) zur Entwicklung kognitiver und metakognitiver Fähigkeiten, entwickeln Collins et al. (1987) ihren Cognitive Apprenticeship-Ansatz. Eine nähere Betrachtung der drei Ansätze erfolgt aus Relevanzgründen an dieser Stelle nicht, sodass hier auf die entsprechende Primärliteratur verwiesen wird.

Collins et al. (1987, S. 13–23) präsentieren dahingehend einen „Rahmen zur Gestaltung von Lernumgebungen“ (Scherrmann, 2016, S. 24), welcher die vier Dimensionen Inhalt, Methode, Abfolge und Soziologie umfasst. Bevor die einzelnen Dimensionen näher beschrieben werden, sei darauf verwiesen, dass im Rahmen des Cognitive Apprenticeship zwischen diesem genannten Rahmen und dem „Prozess des Cognitive Apprenticeship“ (Scherrmann, 2016, S. 24) zu unterscheiden ist. Letzterer inkludiert insbesondere lediglich die sechs Teilmethoden „modeling, coaching, scaffolding and fading, articulation, reflection, exploration“ (Scherrmann, 2016, S. 24).

Die erste Dimension des Inhalts umfasst domänenspezifisches Wissen, Problemlösestrategien und Heuristiken sowie Kontroll- und Lernstrategien (Collins et al., 1987, S. 13–15; Scherrmann, 2016, S. 25). Nach Collins et al. (1987, S. 13) sind insbesondere alle vier Wissensformen anzustreben, wobei allerdings vorrangig domänenspezifisches Wissen in der Schule Eingang findet (siehe auch Scherrmann, 2016, S. 25).

Die zweite Dimension der Methode ist insbesondere im Rahmen der vorliegenden Arbeit von Bedeutung und entspricht dem „Prozess des Cognitive Apprenticeship“ (Scherrmann, 2016, S. 24). In der ersten Phase des *Modelling* wird die Fachperson bei der Ausführung von Aufgaben von den Lernenden beobachtet, wobei intern ablaufende kognitive Prozesse wie Heuristiken und Kontrollstrategien zu externalisieren sind (Collins et al., 1987, S. 16). Beim *Coaching*

werden die Lernenden bei der Bearbeitung von Aufgaben mittels Anleitungen, Hilfestellungen und Feedback durch die Lehrperson unterstützt (Collins et al., 1987, S. 16–17; Scherrmann, 2016, S. 21). In ähnlicher Weise bezieht sich *Scaffolding* auf die adaptive Unterstützung durch die Lehrperson, um bei der Ausführung von Aufgaben zu helfen (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21). *Fading* beschreibt schließlich die schrittweise Zurücknahme der Unterstützungsmaßnahmen durch die Lehrperson (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21). Die anschließende Methode der *Articulation* umfasst Wege, welche die Lernenden bei der Artikulation ihrer internen Denkprozesse unterstützen (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 25). Die Phase der *Reflection* beinhaltet darüber hinaus die Reflexion der eigenen kognitiven Prozesse sowie jener der Lehrperson (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21). Die Reflexion kann dabei durch Reproduktionstechniken sowohl bei der Lehrperson als auch bei den Lernenden gestärkt werden (Collins et al., 1987, S. 17). *Exploration* meint schließlich das Anregen der Lernenden, eigene Probleme zu finden und damit einhergehend diese zu lösen, wobei hier Explorationsstrategien zu vermitteln sind (Collins et al., 1987, S. 18).

Die ersten drei genannten Methoden bilden dabei den Kern des Ansatzes, da sie bei den Lernenden den Erwerb kognitiver und metakognitiver Fähigkeiten durch Beobachtung sowie angeleitete und unterstützte Übung begünstigen (Collins et al., 1987, S. 16; Scherrmann, 2016, S. 23). Die Methoden der Artikulation und Reflexion dienen insbesondere dem Zugang zu und der Kontrolle von eigenen Problemlösestrategien (Collins et al., 1987, S. 16; Scherrmann, 2016, S. 23). Die Methode der Exploration soll darüber hinaus der Förderung von Autonomie in Problemlöseprozessen dienen und zudem die eigenständige Formulierung von Problemen ermöglichen (Collins et al., 1987, S. 16; Scherrmann, 2016, S. 23).

Die dritte Dimension des Rahmens umfasst die Abfolge, wobei sowohl eine zunehmende Komplexität als auch zunehmende Diversität der Aufgaben zu berücksichtigen ist (Collins et al., 1987, S. 18–19; Scherrmann, 2016, S. 25). Darüber hinaus beschreibt der Aspekt „Global before local skills“ (Collins et al., 1987, S. 19) das Anstreben eines allgemeinen Überblicks vor spezifischen Fähigkeiten (Scherrmann, 2016, S. 25).

Die letzte Dimension umfasst die Soziologie der Lernumgebung, wobei Collins et al. (1987, S. 20) darauf verweisen, dass diese oftmals zugunsten von curricularen und pädagogischen Entscheidungen vernachlässigt wird (siehe auch Scherrmann, 2016, S. 26). Die Autor*innen fassen darunter das situierte Lernen, eine „Culture of expert practice (Collins et al., 1987, S. 21), intrinsische Motivation sowie Kooperation und Wettbewerb der Lernenden (Collins et al., 1987, S. 20–23; Scherrmann, 2016, S. 26).

Scherrmann (2016, S. 26) führt mit Blick auf das Rahmenwerk die Integration diverser psychologischer und erziehungswissenschaftlicher Ansätze an, welche den Cognitive Apprenticeship-Ansatz gleichfalls mit Kritik konfrontieren. Auf Ebene der empirischen Unterrichtsforschung wird zumeist nicht der gesamte Ansatz herangezogen, sondern lediglich auf einzelne Prinzipien rekurriert (Scherrmann, 2016, S. 27). Nach Scherrmann (2016, S. 27) decken die Studien zum Cognitive Apprenticeship-Ansatz jedoch ein breites Altersspektrum von Kleinkindern bis zu Erwachsenen und verschiedenste Themen- und Fachbereiche ab. Darüber hinaus wird der Ansatz auch in der fachdidaktischen Literatur häufig lediglich in Ausschnitten herangezogen, wobei in den meisten Fällen auf die Methoden im Cognitive Apprenticeship verwiesen wird (Scherrmann, 2016, S. 27). Die Abkehr von einer festgelegten Sequenzierung der einzelnen Teilmethoden wird mit Blick auf didaktische Diskussionen und unterrichtspraktische Umsetzungen besonders hervorgehoben (Scherrmann, 2016, S. 28).

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind dabei insbesondere die Ausführungen von Scherrmann (2016, S. 31) zur unterrichtspraktischen Umsetzbarkeit von Bedeutung. Scherrmann (2016, S. 31) hebt dahingehend den Cognitive Apprenticeship-Ansatz als Zielversion hervor, welche nicht generell verworfen werden sollte. Die selektive Umsetzung des Ansatzes in der unterrichtlichen Praxis sieht Scherrmann (2016, S. 31) allerdings nicht für jede Lehr-Lernsituation als geeignet an. Mit spezifischem Blick auf den Mathematikunterricht verweist Scherrmann (2016, S. 31–32) auf die Schwierigkeit der Umsetzung des *Coachings* und *Scaffoldings* aufgrund fehlender Ressourcen für eine individuell abgestimmte Unterstützung. Zudem gestaltet sich die *Fading*-Methode auf individueller Ebene im Klassensetting schwierig (Scherrmann, 2016, S. 32).

Der Cognitive Apprenticeship-Ansatz bildet in der vorliegenden Arbeit den methodischen Rahmen der Unterrichtseinheiten im Zuge der geplanten Interventionen zur Änderung beweisbezogener Beliefs. Damit ist insbesondere der „Prozess des Cognitive Apprenticeship“ (Scherrmann, 2016, S. 24) von Bedeutung, welcher die Teilmethoden Modelling, Coaching, Scaffolding, Articulation, Reflexion und Exploration umfasst. Die einzelnen Phasen werden dabei, ähnlich wie in der allgemeinen didaktischen Diskussion, nicht als lineare Abfolge verstanden, sondern flexibel in die Planung eingeflochten. Darüber hinaus werden auf der Inhaltsebene nicht alle vier Wissensformen nach Collins et al. (1987, S. 13) explizit vermittelt, sondern es wird ein Fokus auf domänenspezifisches Wissen und Problemlösestrategien bzw. Heuristiken gelegt. Zunehmende Komplexität sowie Diversität in Bezug auf die Dimension der Abfolge werden im Rahmen der Interventionsmaßnahmen durch eine Variation der Beweisprobleme sowie einen zunehmenden Anspruch der Aufgabenstellungen gewährleistet. Der Aspekt „Global

before local skills“ (Collins et al., 1987, S. 19) wird zum Teil durch einen den spezifischen Beweisproblemen vorangehenden allgemeinen Überblick berücksichtigt. Mit Blick auf die Dimension Soziologie wird insbesondere in der ersten Interventionsphase durch das Modelling eine „Culture of expert practice (Collins et al., 1987, S. 21) etabliert. Darüber hinaus spielt die Kooperation im Rahmen der geplanten Gruppenarbeiten sowie das situierte Lernen im Sinne der Möglichkeit eines Transfers durch den Erwerb allgemeiner Beweisstrategien eine Rolle in den Interventionseinheiten. Während der Aspekt des Wettbewerbs im vorliegenden Unterrichtskonzept aufgrund zunehmender Komplexität ausgeblendet wird, ist die intrinsische Motivation der Lernenden jedenfalls ein Ziel der Interventionen. Es sei abschließend darauf verwiesen, dass das nachfolgend dargestellte Unterrichtskonzept nicht den Anspruch erhebt, den Cognitive Apprenticeship-Ansatz in seiner Vollständigkeit entsprechend seinen theoretischen Anforderungen auf die Praxis zu übertragen.

5.4.2 Beschreibung des Unterrichtskonzepts

Das vorgestellte Unterrichtskonzept im Sinne einer Intervention zur Weiterentwicklung bestehender und dem Aufbau neuer beweisbezogener Beliefs von Lernenden umfasst neben der Einführung in die Studie sowie der quantitativen Erhebung im Rahmen des Prä- und Posttests insgesamt fünf Einzelinterventionen, welche in den nachfolgenden Ausführungen näher beschrieben werden.

Bevor auf die einzelnen Interventionen detaillierter eingegangen wird, sei an dieser Stelle auf die dem Konzept zugrundeliegende Theorie verwiesen. Den theoretischen Rahmen für die Gesamtheit der Interventionsmaßnahmen stellt der in Abschnitt 5.4.1 beschriebene Cognitive Apprenticeship-Ansatz von Collins et al. (1987) dar. Die jeweils in den einzelnen Interventionen einfließenden Aspekte und Methoden werden an entsprechender Stelle hervorgehoben.

Eine weitere theoretische Basis stellt das in Abschnitt 4.1.5 vorgestellte kognitionspsychologische Konzept schulischen Beweisens von Brunner (2014) dar. Wie in dem entsprechenden Abschnitt beschrieben, wird im Rahmen der nachfolgend angeführten Beweistätigkeiten ein Dreischritt von experimentellem, präformalem und formal-deduktivem Beweis durchlaufen, wobei in der zweiten Phase das inhaltlich-anschauliche Beweisen im Konzept von Brunner (2014) durch präformale Beweise nach Blum und Kirsch (1989, 1991) ersetzt wird.

Darüber hinaus wird der Prozess um die inhaltlichen Elemente für die Behandlung mathematischer Beweise im Unterricht nach Kuntze et al. (2004) ergänzt. Die einzelnen Phasen des Modells von Kuntze et al. (2004) wurden in Abschnitt 4.1.4 bereits näher thematisiert. In den

entsprechenden Ausführungen zu den jeweils einzelnen Interventionen wird auf die jeweiligen Prozessphasen verwiesen.

Insgesamt werden im Rahmen des Unterrichtskonzepts vier Beweisprobleme bzw. -themen angesprochen. Dabei handelt es sich um die Beschränktheit konvergenter Folgen, die Anzahl von Extremstellen einer Polynomfunktion zweiten Grades sowie die Anzahl der Wendestellen einer Polynomfunktion dritten Grades und die Faktorregel im Zuge der Differentialrechnung. Die Auswahl der entsprechenden Themen orientiert sich dabei an den von Tietze et al. (1997, S. 175) angeführten Kriterien für die Bewertung von Beweisen. Tietze et al. (1997, S. 175) nennen dabei insbesondere die Forderungen nach Zugänglichkeit und Einfachheit, Variabilität sowie Situationsangepasstheit und Zielangemessenheit.

Das erste Beweisproblem zur Beschränktheit konvergenter Folgen erfüllt dabei mehrere Kriterien. Zum einen sind für den Beweis entsprechend dem Anspruch von Tietze et al. (1997, S. 175) vergleichsweise kaum neue Voraussetzungen notwendig. Die Lernenden sind bereits mit der Definition einer Zahlenfolge sowie der Konvergenz und Beschränktheit einer Folge vertraut. Lediglich die für einen formalen Beweis essenzielle Dreiecksungleichung ist dabei neu einzuführen, welche allerdings gemäß den Forderungen von Tietze et al. (1997, S. 175) mittels eines geeigneten Zahlenbeispiels leicht plausibel gemacht werden kann. Darüber hinaus eignet sich der Beweis für einen experimentellen Zugang mittels GeoGebra, wobei die Beschränktheit konvergenter Folgen graphisch veranschaulicht werden kann (Tietze et al., 1997, S. 175). Damit entspricht die Wahl der „Forderung nach Einfachheit und Zugänglichkeit“ (Tietze et al., 1997, S. 175). Die Variabilität des Beweises wird insbesondere mit der Verwendung vom „unbestritten wichtigsten Buchstaben der Analysis“ (Behrends, 2015, S. 54), dem „ ε “, begründet. Ein Blick in das Werk von Behrends (2015) verdeutlicht unter anderem die enorme Bedeutung von ε -Beweisen in der Analysis. Der Beweis wird daher paradigmatisch für eine Vielzahl von mathematischen Beweisen im Rahmen der Analysis herangezogen. Damit entspricht das Beweisproblem insbesondere dem von Tietze et al. (1997, S. 175) geforderten repräsentativen Charakter für ein mathematisches Teilgebiet sowie einer bereichsspezifischen heuristischen Strategie. Darüber hinaus wurden reelle Folgen bereits kurz zuvor im Unterricht behandelt, was wiederum die Angemessenheit des Beweises erhöht.

Da die Entscheidung zur Thematisierung von Beweisen zur Anzahl von Extremstellen bzw. Wendestellen von Polynomfunktionen zweiten bzw. dritten Grades miteinander verbunden ist, wird nachfolgend eine gesammelte Begründung für beide Beweisprobleme dargelegt. Zumindest die Lernenden bereits mit Polynomfunktionen sowie deren Untersuchung und damit

einhergehend mit der Differentialrechnung vertraut sind, erscheint die Wahl jedenfalls situationsangemessen. Entsprechend der Forderung von Tietze et al. (1997, S. 175) werden nur wenige und zudem bereits bekannte Voraussetzungen benötigt und ein experimenteller Zugang ist wiederum graphisch mittels GeoGebra leicht zu ermöglichen. Die von Tietze et al. (1997, S. 175) postulierte Variabilität zeigt sich dabei insbesondere in der Wahl der beiden Beweisprobleme selbst, da der Beweis für die Anzahl von Wendestellen einer Polynomfunktion dritten Grades direkt aus jenem für die Anzahl von Extremstellen einer Polynomfunktion vom Grad 2 geschlossen werden kann. Die Wahl wird darüber hinaus auch mit dieser leicht zugänglichen Analogiebildung begründet. Zudem erscheinen beide Beweise insbesondere im Rahmen der Schulmathematik als repräsentativ für den Bereich der Analysis.

Die letzte Phase der Interventionseinheiten befasst sich mit dem Beweis der Faktorregel. Wiederum sind auch hier nur wenige Voraussetzungen notwendig, die den Lernenden bereits bekannt sind. Konkret handelt es sich dabei um die Definition des Differentialquotienten und die Rechenregeln für Limiten. Ein experimenteller Zugang wird dabei ebenfalls durch GeoGebra ermöglicht, sodass auch hier die Forderungen nach Zugänglichkeit und Einfachheit von Tietze et al. (1997, S. 175) erfüllt werden können. Der Beweis unter Verwendung des Differentialquotienten lässt, wie ein Blick auf weitere Beweise aus der Analysis bei Behrends (2015) zeigt, zudem weitere Analogien zu und kann ebenfalls als repräsentativ für das mathematische Teilgebiet gesehen werden. Darüber hinaus zeigt sich darin wiederum eine wichtige „bereichsspezifische heuristische Strategie“ (Tietze et al., 1997, S. 175). Die Lernenden sind zudem bereits mit den Ableitungsregeln vertraut, sodass ein derartiger Beweis jedenfalls angemessen erscheint. Damit erfüllt auch dieses Beweisproblem die von Tietze et al. (1997, S. 175) formulierten Forderungen zur Bewertung von Beweisen.

Nach der Darstellung des theoretischen Rahmens der Interventionseinheiten sowie der dargelegten Begründung für die Wahl der spezifischen Beweisprobleme im Zuge des Unterrichtskonzepts, werden im Folgenden die einzelnen Interventionen näher beschrieben.

Intervention 1 – Input

Die erste Intervention im Rahmen des Unterrichtskonzepts umfasst eine theoretische Einführung zu Beweisen und allgemeinen Beweisformen. Diese erfolgt im Anschluss an den Prätest und dient zum Einstieg in die Thematik. Mit Bezug auf den Cognitive Apprenticeship-Ansatz wird in dieser Phase explizit domänenspezifisches Wissen zu Beweisen von der Lehrperson vermittelt. Darüber hinaus erfolgt ein Einblick in Problemlösestrategien durch die Thematisierung des Beweisprozesses nach Boero (1999). Kuntze et al. (2004, S. 6) betonen im Rahmen

von schulischen Beweisprozessen das Bereitstellen von beweisspezifischem Methodenwissen nach Heinze und Reiss (2003). Daher plädieren die Autor*innen insbesondere für eine Phase der expliziten Thematisierung von allgemeinem Wissen über Beweise in der Mathematik und dem Mathematikunterricht (Kuntze et al., 2004, S. 7). Diesen Ansprüchen wird im Rahmen der ersten Intervention gerecht.

Mittels digitaler Unterstützung durch eine PowerPoint-Präsentation wird im Rahmen eines Vortrags ein allgemeiner Einstieg in beweisbezogenes Inhalts- und Methodenwissen ermöglicht. Einführend wird dabei thematisiert, was gemeinhin unter einem mathematischen Beweis verstanden wird. Daran anknüpfend soll die Frage geklärt werden, was mathematisches Beweisen nützt, wobei insbesondere auf die Beweisfunktionen nach Kuntze (2005) eingegangen wird. In einem weiteren Schritt wird explizit auf beweisspezifisches Methodenwissen nach Heinze und Reiss (2003) verweisen. Darüber hinaus erfolgen die Darstellung eines Beweisprozesses nach Boero (1999) sowie die Thematisierung der Beweisformen eines direkten, indirekten und Induktionsbeweises nach Brunner (2014). Damit den Lernenden insbesondere eine tatsächliche Vorstellung von einem indirekten Beweis und einem Induktionsbeweis ermöglicht werden kann, werden zudem zwei indirekte Beweise und ein Induktionsbeweis exemplarisch vorgestellt. Wichtig ist dabei zu betonen, dass es in dieser Phase tendenziell weniger darum geht, die vorgestellten Beweise zu durchdringen, sondern vielmehr die Struktur und das Aussehen solcher mathematischen Beweise kennenzulernen. Dies wird auch den Lernenden explizit vermittelt. Vorgestellt wird dabei ein indirekter Beweis zur Parität einer Zahl bei geradem Quadrat der Zahl sowie zur Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 (Behrends, 2015, S. 50–51; Pinkernell et al., 2009, S. 42; Tietze et al., 1997, S. 168). Ein Beweis durch vollständige Induktion wird anhand der Gaußschen Summenformel veranschaulicht (Behrends, 2015, S. 40–41; Greefrath et al., 2016, S. 85). Die Wahl für den indirekten Beweis wird insbesondere mit der Relevanz der Irrationalität der Quadratwurzel von 2 im schulischen Kontext begründet. So findet sich dahingehend im Lehrplan der Unterstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen eine explizite Erwähnung (LP AHS, 2024, Anlage A). Da für den geführten Beweis der Satz zur Parität einer Zahl bei geradem Quadrat der Zahl notwendig ist und hier ebenfalls ein indirekter Beweis erfolgt, wird dieser in den Ausführungen ergänzt. Damit bietet sich zudem ein Einblick in die Struktur von Beweisen, auf bereits bewiesenen Sätzen und Definitionen aufzubauen. Die Wahl für den Induktionsbeweis der Gaußschen Summenformel orientiert sich insbesondere an dem Werk von Behrends (2015, S. 40), welcher die vollständige Induktion anhand dieses Beweises einführt. Die spezifischen Inhalte des theoretischen Inputs sowie die exemplarischen Beweise und die Folien der Präsentation finden sich in Anhang B.

Intervention 2 – Beschränktheit konvergenter Folgen

Die zweite Intervention entspricht der im Cognitive Apprenticeship-Ansatz integrierten Modelling-Methode. Die Lehrperson durchläuft hier im Sinne einer Vorzeigefunktion einen gesamten Beweisprozess. Entsprechend der Forderung im Cognitive Apprenticeship werden während der Bearbeitung der Beweisaufgaben die intern ablaufenden kognitiven Prozesse von der Lehrkraft verbal externalisiert (Collins et al., 1987, S. 16). Dabei wird implizit die Methode der Artikulation verfolgt, indem die Lehrperson ihre internen Denkprozesse äußert und damit für die zukünftige eigenständige Artikulation der Lernenden einen ersten Einblick bietet (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 25). Zudem wird der Beweisprozess und der damit einhergehende kognitive Prozess laufend von der Lehrkraft reflektiert, sodass an diesen Stellen auch die Reflexionsmethode im Cognitive Apprenticeship eine Rolle spielt (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21).

Entsprechend dem Beweisprozess nach Kuntze (2009, S. 12) und Kuntze et al. (2004, S. 7) gilt es im ersten Schritt das Beweisproblem zu klären. Dabei werden notwendige Voraussetzungen gesammelt bzw. bereitgestellt sowie die Behauptung formuliert. Im Sinne der Modelling-Methode wird dabei die nachfolgende Aussage formuliert und digital über die PowerPoint-Präsentation dargelegt: „*Jede konvergente Folge ist beschränkt.*“ (Deitmar, 2021, S. 49).

In einem ersten Schritt werden daran anknüpfend die entsprechenden Voraussetzungen der Behauptung durch die Lehrperson eruiert. Vorausgesetzt wird dabei die Existenz einer konvergenten Folge. Dies wird explizit hervorgehoben.

Im Sinne des der Intervention zugrundeliegenden Beweisprozesses wird im nächsten Schritt die Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutiert (Kuntze, 2009, S. 12; Kuntze et al., 2004, S. 7). Dabei ist bei der Wahl dieses Beweisbeispiels zu berücksichtigen, dass anhand graphischer Überlegungen die Behauptung durchaus schnell zur Einsicht in die Wahrheit dieser Aussage bei den Lernenden führen kann. Diesbezüglich ist insbesondere auf die vorangegangene theoretische Input-Phase zu verweisen, um zu verdeutlichen, welche Kriterien ein mathematischer Beweis erfüllen sollte.

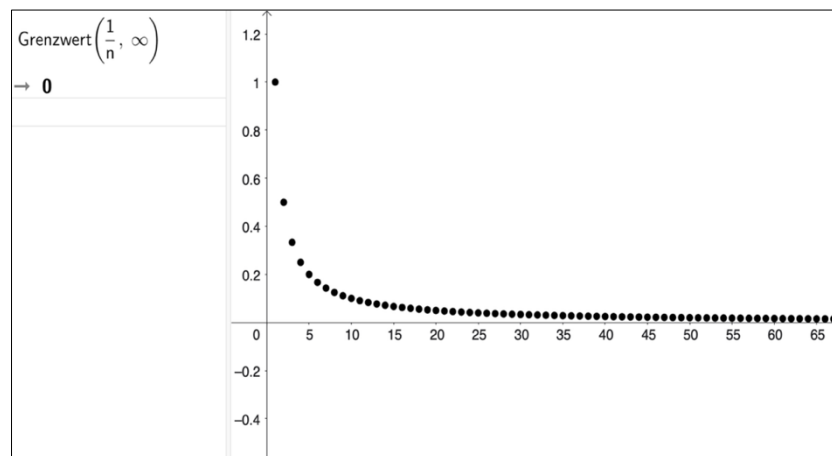
Ist die Beweisbedürftigkeit deutlich geworden, gilt es an dieser Stelle entsprechend notwendiges Grundwissen für den Beweis zu sammeln und zur Verfügung zu stellen bzw. bei den Lernenden zu aktivieren (Kuntze et al., 2004, S. 7). Zu diesem Zweck werden die Definition einer reellen Folge, der Folgenkonvergenz sowie der Beschränktheit von Folgen zur Verfügung gestellt und gemeinsam mit den Schüler*innen wiederholt. Im Allgemeinen sind sämtliche dieser

notwendigen Voraussetzungen den Lernenden bereits aus dem regulären Mathematikunterricht bekannt. Die entsprechend verwendeten Definitionen finden sich in Anhang B.

In dem nachfolgend durchlaufenen Dreischritt des experimentellen, präformalen und formal-deduktiven Beweises nach Brunner (2014, S. 71) erfolgen die weiteren Schritte im Rahmen des Beweisprozesses nach Kuntze et al. (2004, S. 7). Im Zuge des Übergangs von einem experimentellen hin zu einem formal-deduktiven Beweis werden entsprechende Argumente für den Beweis gesammelt, näher erkundet und schließlich zu einer Argumentationskette zusammengesetzt (Brunner, 2014, S. 71; Kuntze et al., 2004, S. 7). Damit wird ein Überblick über das Problem gewonnen und es kann eine Entscheidung über den zu wählenden Beweisweg getroffen werden (Kuntze et al., 2004, S. 7–8). Schließlich erfolgt eine Beweisredaktion im Sinne der Formulierung und Verschriftlichung des Beweises (Brunner, 2014, S. 71; Kuntze et al., 2004, S. 7–8). Den Abschluss des Prozesses bilden eine Rückschau auf und Diskussion über den Beweis zum Aufbau von Metawissen sowie eine bestenfalls allgemeine Akzeptanz der mathematischen Community im Sinne der Klassenmitglieder (Brunner, 2014, S. 71; Kuntze et al., 2004, S. 7–8).

Abbildung 5.1

Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen



Anmerkung. Prüfung der Konvergenz und Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ in GeoGebra. Eigene Darstellung.

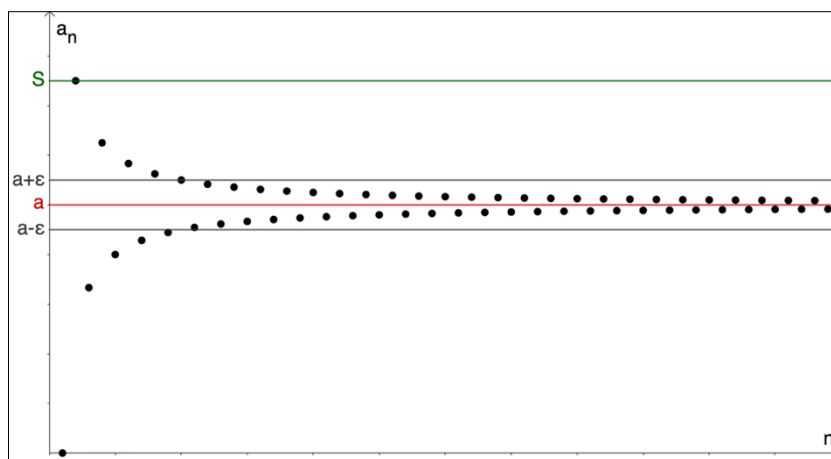
Im Rahmen eines experimentellen Beweises werden unter Verwendung von GeoGebra drei exemplarische Folgen hinsichtlich ihrer Konvergenz und Beschränktheit graphisch untersucht. Um die Konvergenz rechnerisch zu prüfen, wird der Grenzwert der Folge zudem mittels des Computeralgebrasystems von GeoGebra berechnet. Im Sinne des Modelling werden die drei Beispiele von der Lehrperson vorgegeben und überprüft. Die nachfolgende Abbildung 5.1 veranschaulicht den experimentellen Beweis der Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Die übrigen beiden Beispiele

finden sich in Abbildung B1 und B2 in Anhang B. Dabei handelt es sich um die Folgen $b_n = \frac{1}{n+1}$ und $c_n = \frac{2n-7}{3n+4}$.

Nachdem alle drei Beispiele für die Lernenden hinlänglich untersucht wurden, erfolgt die Formulierung eines präformalen Beweises. Dieser wird von der Lehrperson schrittweise an der Tafel geführt und durch graphische Veranschaulichungen ergänzt. Der entsprechende präformale Beweis sowie die Darstellung der graphischen Konstruktionen finden sich wiederum in Anhang B und insbesondere in Abbildung B3 sowie B4. Abbildung 5.2 zeigt dabei einen Einblick in den konstruierten präformalen Beweis, wobei ein geometrisch-intuitiver Beweis nach Blum und Kirsch (1991, S. 188) gewählt wird, welcher durch weitere Ausführungen ergänzt wird.

Abbildung 5.2

Präformaler Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen



Anmerkung. Die graphische Darstellung wurde mittels GeoGebra vorbereitet und an der Tafel im Rahmen eines präformalen Beweises skizziert. Eigene Darstellung in Anlehnung an Büchter und Henn (2010, S. 144).

Die sprachlichen Elemente orientieren sich dabei bereits stark an dem formal-deduktiven Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen. Insbesondere wird mit einer entsprechenden ε -Umgebung argumentiert und von dem Spezialfall einer Folge, bei der die Folgenglieder am Beginn „unter“ der mittels ε -Umgebung gefundenen Schranke liegen, um einen allgemeineren Fall ergänzt, bei welchem als Schranke das Maximum aller endlich vielen Folgenglieder am Beginn der Folge gewählt werden muss. In der vorangegangenen Abbildung 5.2 ist der geometrisch-intuitive Beweis zur Verallgemeinerung der Beschränktheit konvergenter Folgen ersichtlich, welcher in dieser Form an der Kreidetafel skizziert wird. Betont wird dabei insbesondere die Voraussetzung der Konvergenz der gegebenen Folge. Diese ermöglicht die Sicherheit, dass alle „späteren“ Folgenglieder innerhalb der ε -Umgebung liegen und nicht mehr hinsichtlich ihrer Beschränktheit zu untersuchen sind. Daraus folgt wiederum die Möglichkeit, bei den

endlich vielen Folgengliedern am Beginn der Folge ein Maximum zu finden und dieses als Schranke zu wählen.

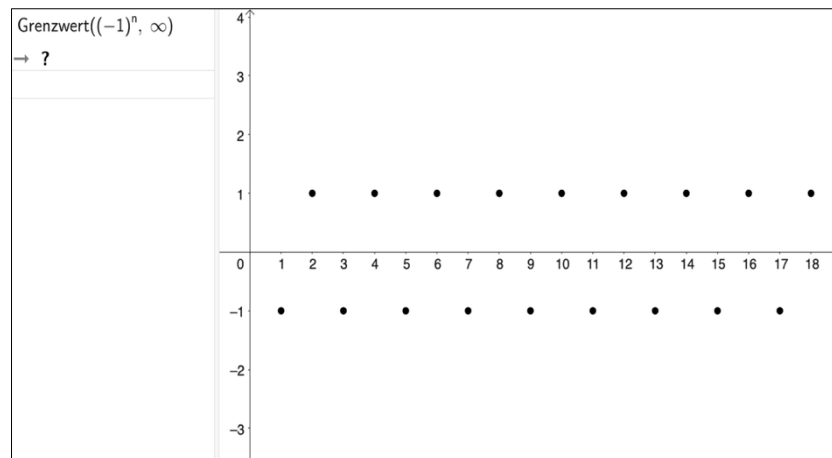
Im Anschluss an die Formulierung des präformalen Beweises zur Beschränktheit konvergenter Folgen sowie einem daran anknüpfenden Überblick und einer Reflexion des dargelegten Beweises erfolgt die Konstruktion eines formal-deduktiven Beweises der Aussage. Dieser orientiert sich an den Ausführungen von Behrends (2015, S. 116) sowie Deitmar (2021, S. 50) und findet sich in vollständiger Form in Anhang B. Grundlage des Beweises bildet wiederum die Definition der Konvergenz einer Folge, welche als Voraussetzung erneut explizit hervorgehoben wird. Aus der Definition wird eine erste Schranke für alle Folgenglieder nach einem bestimmten Folgenindex entwickelt, um sodann darauf zu verweisen, dass dies für eine Verallgemeinerung nicht ausreichend ist, da die Folgenglieder am Beginn der Folge von dieser Schranke nicht zwingend erfasst sein müssen. Da allerdings diese Anfangsfolgenglieder auf eine endliche Anzahl beschränkt werden können, ist es möglich, das Maximum dieser endlich vielen Folgenglieder als endgültige Schranke zu wählen. Dies entspricht schließlich der Beschränktheit der Folge, was zu zeigen ist.

Nach einer Rückschau und Reflexion des geführten formal-deduktiven Beweises wird darüber hinaus darauf verwiesen, dass die Umkehrung der Aussage nicht gültig ist und damit allgemeiner Umkehrungen grundsätzlich nicht einer wahren Aussage entsprechen müssen. Dies wird im Falle der Behauptung der Beschränktheit konvergenter Folgen insbesondere als ertragreich angesehen, da damit die Beweistechnik eines Gegenbeispiels illustriert werden kann. An dieser Stelle wird den Lernenden die Folge $a_n = (-1)^n$ durch Berechnung der ersten Folgenglieder sowie eine graphische Darstellung an der Tafel nähergebracht, welche in Form eines Gegenbeispiels zeigt, dass aus der Beschränktheit einer Folge nicht zwangsläufig die Konvergenz derselben folgen muss (Deitmar, 2021, S. 50).

Wie in Abbildung 5.3 ersichtlich wird, ist die Folge $a_n = (-1)^n$ durch -1 nach unten sowie 1 nach oben beschränkt. Allerdings ist es nicht möglich, eine noch so kleine ε -Umgebung um eine Zahl zu finden, sodass irgendwann alle weiteren Folgenglieder in dieser Umgebung liegen.

Abbildung 5.3

Gegenbeispiel zur Konvergenz beschränkter Folgen



Anmerkung. Prüfung der Konvergenz und Beschränktheit der Folge $a_n = (-1)^n$ in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Intervention 3 – Extremstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades

Die dritte Intervention bezieht sich auf die Anzahl von Extremstellen bei Polynomfunktionen zweiten Grades. Mit Bezug auf den Cognitive Apprenticeship-Ansatz finden hier insbesondere die Methoden Coaching und Scaffolding Eingang. In diesem Sinne durchlaufen die Lernenden den zuvor beschriebenen Beweisprozess mit Unterstützung der Lehrperson in Form von Anleitungen sowie Hilfestellungen und Feedback (Collins et al., 1987, S. 16–17; Scherrmann, 2016, S. 21). Zudem erfolgen im Rahmen des Scaffolding adaptive Unterstützungsmaßnahmen, um vereinzelt die Ausführung von Aufgaben zu fördern (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21). Im Zuge einzelner Gespräche mit den Lernenden sowie in der abschließenden Plenumsdiskussion fließen darüber hinaus die Methoden der Artikulation und Reflexion in diese Interventionsphase ein. Im Hinblick auf die erste Dimension des Inhalts im Cognitive Apprenticeship werden wie in sämtlichen der hier beschriebenen Interventionen insbesondere domänenspezifisches Wissen und Problemlösestrategien vermittelt. Im Rahmen der vierten Dimension der Soziologie spielen in dieser Phase darüber hinaus die Kooperation sowie das situierte Lernen eine tragende Rolle.

Zur Thematik der Anzahl von Extremstellen bei Polynomfunktionen zweiten Grades entwickelte Grundey (2015, S. 71–72) didaktisches Material im Sinne von prototypischen Schüler*innenantworten zum Beweis der Aussage, dass eine Polynomfunktion zweiten Grades genau eine Extremstelle besitzt. Die Intention in der Entwicklung eines solchen Materials liegt in einem verstärkten möglichen Motivationsimpuls sowie einer geringen Hemmschwelle im Hinblick auf mathematisches Beweisen (Grundey, 2015, S. 70). Dabei finden sich sowohl korrekte als auch fehlerbehaftete prototypische Beweisversuche und unterschiedliche

Darstellungsweisen im Sinne von formalen, narrativen und graphischen Darstellungen im Material wieder (Grundey, 2015, S. 70). Darüber hinaus werden sowohl induktive als auch deduktive Schlussweisen berücksichtigt (Grundey, 2015, S. 70). Dabei betont Grundey (2015, S. 72–73) die bewusste Wahl fehlerhafter Beispiele, um die Ergebnisse der Studien von Healy und Hoyles (1998) sowie von Harel und Sowder (1998) zu berücksichtigen, wonach Schüler*innen Beweise häufig anhand der Art ihrer Darstellung und weniger auf Basis ihres Inhalts oder der Art des Schließens bewerten. Obwohl Grundey (2015, S. 283–284, 287) in ihrer Zusammenfassung der Ergebnisse betont, dass lediglich für eine geringe Anzahl von Lernenden die prototypischen Schüler*innenbeweise hilfreich waren und die implizierten Analogien wenig angenommen wurden, werden diese als insgesamt positiv im Hinblick auf ihre Sensibilisierung für das Thema Beweisen bewertet.

Unter Verwendung des von Grundey (2015, S. 71–72) entwickelten Materials, erhalten die Lernenden ein Arbeitsblatt mit insgesamt sieben prototypischen Schüler*innenbeweisen zur Anzahl der Extremstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades. Das mehrseitige Arbeitsblatt wird dabei von den Lernenden gemeinsam in Gruppen erarbeitet, wobei die einzelnen Schüler*innenbeweise jeweils in Gruppenarbeit schriftlich zu bewerten sind. Die Gruppeneinteilung erfolgt dabei ausgehend vom Alphabet in Größen von drei bis vier Personen. Dies ermöglicht insbesondere eine Durchmischung der üblichen Klassenkonstellation.

Im Hinblick auf die Gestaltung des Arbeitsblattes ist festzuhalten, dass die sieben prototypischen Schüler*innenbeweise mit verschiedenen fiktiven Namen von Lernenden versehen sind. In Anlehnung an Grundey (2015, S. 71–72) sowie Healy und Hoyles (1998, o. S.) dient dies der verbesserten Identifikation mit den Argumentationen. Die nachfolgenden Bezeichnungen der Prototypen orientieren sich ebenfalls an Grundey (2015, S. 71–72) sowie Healy und Hoyles (1998, o. S.), finden sich allerdings nicht auf dem für die Schüler*innen vorgesehenen Material. Eine spezifische Reihenfolge der Beweise auf dem Arbeitsblatt wurde dabei nicht berücksichtigt, sondern orientiert sich an der optimalen Nutzung des Platzes auf den einzelnen Seiten. Entsprechend der Reihung werden die angeführten prototypischen Schüler*innenbeweise an dieser Stelle kurz erläutert und beschrieben. Abbildung 5.4 zeigt einen Einblick in die Aufgabenstellung des Arbeitsblattes sowie die Gestaltung der einzelnen prototypischen Schüler*innenbeweise und Hannahs Begründung. Das gesamte Arbeitsblatt findet sich in Anhang B.

Abbildung 5.4

Arbeitsblattausschnitt zu prototypischen Schüler*innenbeweisen

„Eine Polynomfunktion zweiten Grades besitzt genau eine Extremstelle.“

Betrachtet in euren Gruppen die verschiedenen Beweise der Schüler*innen und bewertet diese! Macht euch dazu Notizen unter den entsprechenden Begründungen!

Hannahs Begründung: „Eine Polynomfunktion f zweiten Grades besitzt eine Ableitungsfunktion f' vom Grad 1. Die Ableitung f'' dieser Funktion ist konstant und ungleich Null. Jede Polynomfunktion ersten Grades hat genau eine Nullstelle x_0 . Diese Nullstelle ist damit die einzige Extremstelle von f , da f'' konstant ist und $f''(x_0)$ ungleich Null ist. Daher ist die Aussage wahr.“

Anmerkung. Ausgangsbehauptung sowie Aufgabenstellung und erster prototypischer Schüler*innenbeweis. Eigene Darstellung.

Bei der ersten angeführten Darstellung, Hannahs Begründung, handelt es sich um einen narrativ-deduktiven Beweis zur Anzahl der Extremstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades (Grundey, 2015, S. 71). Grundey (2015, S. 206) betont im Hinblick auf diesen Beweis, dass dieser oftmals auf der Beweisebene aufgrund fehlender formaler Darstellung abgelehnt wird. Nur in Verbindung mit der Inhaltsebene kann dieser als korrekt erkannt werden (Grundey, 2015, S. 206). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit fungiert Hannahs Begründung als eine Art präformaler Beweis nach Blum und Kirsch (1989, 1991), wobei ein graphisch-intuitiver Teil nach Blum und Kirsch (1991, S. 188) ergänzt werden könnte.

Bei der zweiten angeführten Begründung von Sonja handelt es sich um einen empirisch-rechnerischen Beweis, wobei zwei exemplarische Funktionen im Hinblick auf ihre Extremstellen rechnerisch untersucht werden. Mit der Begründung, dass die Funktionen beliebig gewählt wurden, wird eine Verallgemeinerung angestrebt. Grundey (2015, S. 206) hält dabei fest, dass die fehlende Allgemeingültigkeit bei empirischen Argumentationen von den meisten Lernenden durchaus kritisiert wird.

Die dritte Begründung von Robert stellt einen formal-deduktiven Beweis der Existenz einer einzigen Extremstelle bei Polynomfunktionen zweiten Grades dar (Grundey, 2015, S. 71). Grundey (2015, S. 206) führt bezüglich dieses Beweises an, dass dieser von den Lernenden ebenfalls als korrekt identifiziert wurde, wobei auf der Beweisebene mit ausschließlichem Bezug auf die äußere Form argumentiert wird. Dieses Beweisbeispiel bietet sich im Rahmen der anschließenden Diskussion im Plenum insbesondere an, um die Bedeutung entsprechender Voraussetzungen in einem Beweis zu verdeutlichen. Der Beweis würde scheitern, würde nicht

vorausgesetzt werden, dass es sich um eine Polynomfunktion zweiten Grades handelt, wobei der erste Koeffizient a zwingend ungleich null sein muss, da es sich andernfalls nicht um den Grad 2 handelt. Ohne diese Voraussetzung könnte in weiterer Folge nicht durch den Koeffizienten a dividiert werden und nicht geschlossen werden, dass die zweite Ableitung im gesamten Definitionsbereich ungleich null sein muss.

Bei der darauffolgenden Begründung von Paul handelt es sich um einen Autoritätsbeweis (Grundey, 2015, S. 71). Paul versucht die Aussage zur Anzahl der Extremstellen von Polynomfunktionen zweiten Grades mit Bezug auf eine Behauptung der Lehrperson zu beweisen. Bei Grundey (2015, S. 190) wird diesbezüglich festgehalten, dass in sämtlichen Kursen und Klassen dieser Autoritätsbeweis abgelehnt wurde.

Im Falle der Begründung von Aron handelt es sich um einen fehlerhaften formal-deduktiven Beweis (Grundey, 2015, S. 71–72). Der Fehler liegt dabei in Form eines Zirkelschlusses bei der Aussage „ f hat genau einen Extrempunkt, weil f eine Polynomfunktion vom Grad 2 ist.“ vor. Grundey (2015, S. 206) hält im Hinblick auf diese Begründung fest, dass mit ausschließlichem Blick auf die Beweisebene diese aufgrund der äußeren Form häufig abgelehnt wird. Nur in Verbindung mit der Inhaltsebene kann dabei der Zirkelschluss in der Argumentation erkannt und dieser damit richtig bewertet werden (Grundey, 2015, S. 206–207). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit fungiert das Beweisbeispiel darüber hinaus als exemplarische Darstellung eines Zirkelschlusses, die es den Lernenden ermöglicht, diesen Argumentationsfehler besser nachzuvollziehen.

Die Behauptung von Monika bedient sich der Beweistechnik eines Gegenbeispiels, um zu verdeutlichen, dass die Aussage der Existenz einer einzigen Extremstelle bei Polynomfunktionen zweiten Grades falsch ist (Grundey, 2015, S. 71–72). Die Begründung ist allerdings fehlerhaft, da Monika bei der Wahl ihres Gegenbeispiels die Voraussetzung verletzt, indem sie den Koeffizienten a einer Polynomfunktion zweiten Grades gleich null setzt und somit eine lineare Funktion erhält. Grundey (2015, S. 206) hebt dabei hervor, dass auf der Beweisebene das falsche Gegenbeispiel von den Lernenden erkannt wird. Die ergänzende Hervorhebung der Tatsache, dass der führende Koeffizient gleich null gesetzt wurde, rückt dabei zudem die Inhaltsebene in den Fokus (Grundey, 2015, S. 191).

Im Falle der letzten Begründung von Johann handelt es sich um eine empirisch-graphische Argumentation mittels drei Beispielfunktionen (Grundey, 2015, S. 72). Nach Grundey (2015, S. 206) wurde diese Behauptung von den meisten Lernenden auf der Beweisebene aufgrund fehlender Allgemeingültigkeit abgelehnt. Durch die Betonung, dass zusätzlich, ohne Kenntnisse

über den Verlauf von Polynomfunktionen zweiten Grades, nicht festgestellt werden kann, wie die Funktion außerhalb des Ausschnittes verläuft und ob hier möglicherweise weitere Extremstellen zu finden wären, wird ein verstärkter Bezug zur Inhaltsebene hergestellt (Grundey, 2015, S. 191).

Die an die Gruppenarbeit anschließende gemeinsame Diskussion im Plenum soll dabei insbesondere der Offenlegung der hier genannten Aspekte bei den jeweiligen Behauptungen dienen. Zu betonen ist zudem, dass die Erarbeitung der prototypischen Schüler*innenbeweise nicht nur der von Grundey (2015, S. 187) genannten Sensibilisierung für das Thema Beweisen dient, sondern diese insbesondere als unterstützendes Material im Sinne des Coaching, Scaffolding und Fading im Rahmen der nachfolgenden Interventionsphase als Analogien für selbstständige Beweise herangezogen werden können und sollen.

Intervention 4 – Wendestellen von Polynomfunktionen dritten Grades

Im Rahmen der vierten Intervention zur Thematik von Wendestellen bei Polynomfunktionen dritten Grades stellt, ebenso wie im Zuge der zweiten Intervention, das kognitionspsychologische Modell schulischen Beweisens von Brunner (2014) die Basis dar. Dieses wird, wie bereits angeführt, um die inhaltlichen Elemente zur Behandlung mathematischer Beweise im Unterricht nach Kuntze et al. (2004) ergänzt. Demnach werden die einzelnen Phasen des Modells von Kuntze et al. (2004) ebenso wie die Stufen des Konzepts nach Brunner (2014) analog zur zweiten Intervention im Zuge der Beschränktheit konvergenter Folgen durchlaufen.

Mit Bezug auf den Cognitive Apprenticeship-Ansatz stehen hier die Methoden Coaching, Scaffolding und Fading im Vordergrund (Collins et al., 1987, S. 16–17; Scherrmann, 2016, S. 21). Im Zuge von Gesprächen innerhalb der vorgesehenen Gruppen sowie in einer abschließenden Rückschau im Plenum gilt es zudem die Methode der Artikulation und Reflexion anzuregen, wobei die Lernenden dazu motiviert werden sollen, ihre internen Denkprozesse zu äußern und zu reflektieren (Collins et al., 1987, S. 16–17; Scherrmann, 2016, S. 25). Dies wird vorrangig durch wiederkehrende, verbale Aufforderungen durch die Lehrperson angestrebt. Darüber hinaus wird, entsprechend den bereits angeführten Interventionen, der Erwerb von domänenspezifischem Wissen und Problemlösestrategien in dieser Interventionsmaßnahme berücksichtigt (Collins et al., 1987, S. 13–15; Scherrmann, 2016, S. 25). Durch die aus der vorangegangenen Interventionsphase fortbestehende Sozialform der Gruppenarbeit, wird zudem wiederum die Kooperation als Teil der soziologischen Dimension im Cognitive Apprenticeship gewährleistet (Collins et al., 1987, S. 20–23; Scherrmann, 2016, S. 26). Darüber hinaus spielt auch hier situiertes Lernen im Sinne des Cognitive Apprenticeship eine Rolle (Collins et al., 1987, S. 21).

Ausgangspunkt dieser Intervention bilden, entsprechend dem Beweisprozess nach Kuntze (2009, S. 12) und Kuntze et al. (2004, S. 7), die Klärung des Beweisproblems sowie die Bereitstellung und das Sammeln notwendiger Voraussetzungen und die Formulierung der Behauptung. Im Sinne der Coaching-Methode wird hier eine gemeinsame Erarbeitung im Rahmen eines Unterrichtsgesprächs angestrebt. Im Anschluss daran wird in einem ersten Schritt die finale Behauptung „*Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt genau eine Wendestelle.*“ von der Lehrperson unter Heranziehung der PowerPoint-Präsentation offengelegt.

Daran anknüpfend gilt es die Beweisbedürftigkeit der formulierten Aussage zu klären (Kuntze, 2009, S. 12; Kuntze et al., 2004, S. 7). Wie bereits im Rahmen der zweiten Intervention ist dabei möglicherweise eine naheliegende graphisch-intuitive Einsicht in das Beweisproblem bei einigen Lernenden gegeben, sodass hier gegebenenfalls von der Lehrperson explizit auf die bereits angeführten Kriterien eines mathematischen Beweises zu verweisen ist.

Ist die Beweisbedürftigkeit einsichtig geworden, gilt es an dieser Stelle entsprechend notwendiges Grundwissen für den Beweis zu sammeln und zur Verfügung zu stellen bzw. bei den Lernenden zu aktivieren (Kuntze et al., 2004, S. 7). Hier liegt der Fokus weiterhin auf einem Unterrichtsgespräch, wobei nach der erfolgten Sammlung notwendigen Grundwissens, entsprechende Definitionen und Sätze von der Lehrperson über die PowerPoint-Präsentation zur Verfügung gestellt werden. Dabei handelt es sich um die Definition einer Polynomfunktion sowie die hinreichende Bedingung für Wendestellen. Diese finden sich in ausformulierter Form in Anhang B. Im Allgemeinen sind sämtliche dieser notwendigen Voraussetzungen den Lernenden bereits aus dem regulären Mathematikunterricht bekannt.

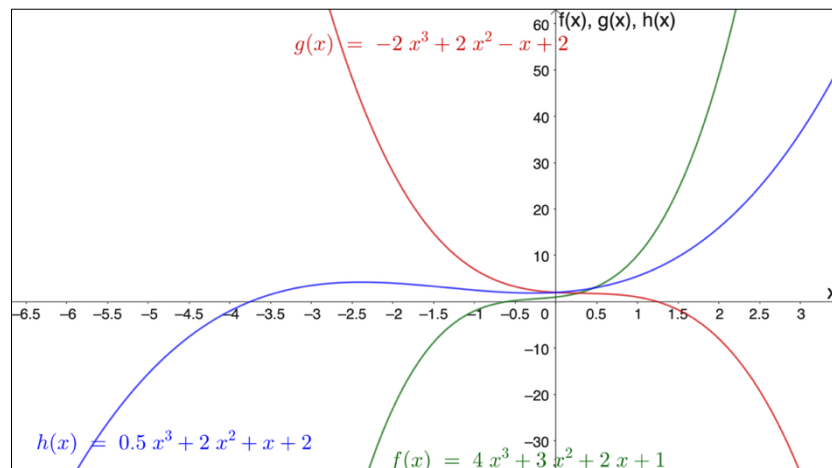
Wie bereits im Rahmen der zweiten Intervention, erfolgen die weiteren Schritte des Beweisprozesses nach Kuntze et al. (2004, S. 7) im von den Lernenden nachfolgend zu durchlaufenden Dreischritt des experimentellen, präformalen und formal-deduktiven Beweises nach Brunner (2014, S. 71). Eine genaue Beschreibung des Bezugs der einzelnen Phasen auf das Modell von Brunner (2014) erfolgte bereits in diesem Abschnitt 5.2 der Intervention 2. Im Sinne der Coaching-Methode im Cognitive Apprenticeship werden die drei Phasen von der Lehrperson explizit an der Tafel festgehalten und mit Bezug auf die zweite Intervention wiederholt.

Im Zuge des experimentellen Beweises wählen die Lernenden im Rahmen ihrer Gruppe drei Beispiele von Polynomfunktionen dritten Grades und untersuchen diese mit digitaler Unterstützung durch GeoGebra hinsichtlich der Anzahl von Wendestellen. Sollte gegebenenfalls in einzelnen Gruppen weitere Unterstützung benötigt werden, wird im Sinne des Scaffolding auf die Analogie zu Johanns graphisch-empirischer Argumentation im Rahmen der prototypischen

Schüler*innenbeweise verwiesen. Ein möglicher experimenteller Beweis in GeoGebra findet sich in der nachfolgenden Abbildung 5.5.

Abbildung 5.5

Experimenteller Beweis zur Anzahl von Wendestellen



Anmerkung. Prüfung der Anzahl von Wendestellen bei Polynomfunktionen dritten Grades anhand von drei Beispielfunktionen in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Wiederum in derselben Gruppenkonstellation erarbeiten die Lernenden im Anschluss an den experimentellen Beweis eine präformale Argumentation. Sollten in dieser Phase der Gruppenarbeit Unterstützungen durch die Lehrperson notwendig werden, kann an dieser Stelle ebenfalls explizit auf die Analogie der Beweisführung zur Begründung von Hannah im Zuge der prototypischen Schüler*innenbeweise verwiesen werden. Ein möglicher narrativer Beweis in Anlehnung an einen präformalen Beweis findet sich in Anhang B, wobei ein graphisch-intuitiver Teil nach Blum und Kirsch (1991, S. 188) hier gegebenenfalls ergänzt werden könnte oder auch für sich alleinstehend möglich wäre. Im Rahmen des narrativen Beweises wird mithilfe der Differentialrechnung darauf geschlossen, dass es sich bei der zweiten Ableitung einer Polynomfunktion dritten Grades um eine lineare Funktion handelt. Daraus kann weiter deduktiv geschlossen werden, dass deren Ableitung wiederum konstant und ungleich null ist. Zudem nutzt der Beweis die Eigenschaft einer Polynomfunktion ersten Grades, genau eine Nullstelle zu besitzen, welche damit die einzige mögliche Wendestelle darstellt. Da bereits geschlossen werden konnte, dass die dritte Ableitung einer Polynomfunktion dritten Grades konstant und ungleich null ist, handelt es sich nach der hinreichenden Bedingung für Wendestellen tatsächlich um eine Wendestelle.

Im Anschluss an die Konstruktion eines präformalen im Sinne eines narrativen oder graphisch-intuitiven Beweises sollen die Lernenden in der bestehenden Gruppenkonstellation einen formal-deduktiven Beweis anstreben. Ähnlich wie in den bereits vorangegangenen Phasen können hier Scaffolding-Maßnahmen getätigt und unter anderem auf die Analogie zu Roberts

Begründung im Rahmen der prototypischen Beweisbeispiele verwiesen werden. Die Argumentation erfolgt dabei analog zum beschriebenen narrativen Beweis, wobei im weiteren Schritt eine algebraisch-symbolische Ebene angestrebt wird. Ausgehend von der allgemeinen Funktionsgleichung einer Polynomfunktion dritten Grades, wird die zweite und dritte Ableitung der Funktion gebildet. Auf Basis der notwendigen Bedingung für Wendestellen wird mittels algebraischer Äquivalenzumformungen eine mögliche Wendestelle ermittelt. Durch Einsetzen in die dritte Ableitung der Funktion zeigt sich, dass aufgrund der Voraussetzung, dass es sich um eine Polynomfunktion dritten Grades handelt, wobei der führende Koeffizient ungleich null sein muss, die dritte Ableitung auf dem gesamten Definitionsbereich und damit insbesondere an dieser Stelle ungleich null ist. Damit ist die hinreichende Bedingung für Wendestellen erfüllt und die Existenz einer einzigen Wendestelle bewiesen. Der entsprechend ausformulierte Beweis findet sich in Anhang B.

Nach erfolgreichem Durchlaufen aller Phasen bildet eine gemeinsame Rückschau im Plenum den Abschluss der Intervention, wobei insbesondere, wie zuvor beschrieben, die Methode der Artikulation interner Denkprozesse sowie die Reflexion des Beweisprozesses im Sinne des Cognitive Apprenticeship angestrebt werden (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21, S. 25). Als motivationaler Aspekt ist dabei insbesondere die erfolgreiche eigenständige Konstruktion von Beweisen durch die Lernenden hervorzuheben.

Intervention 5 – Faktorregel der Differentialrechnung

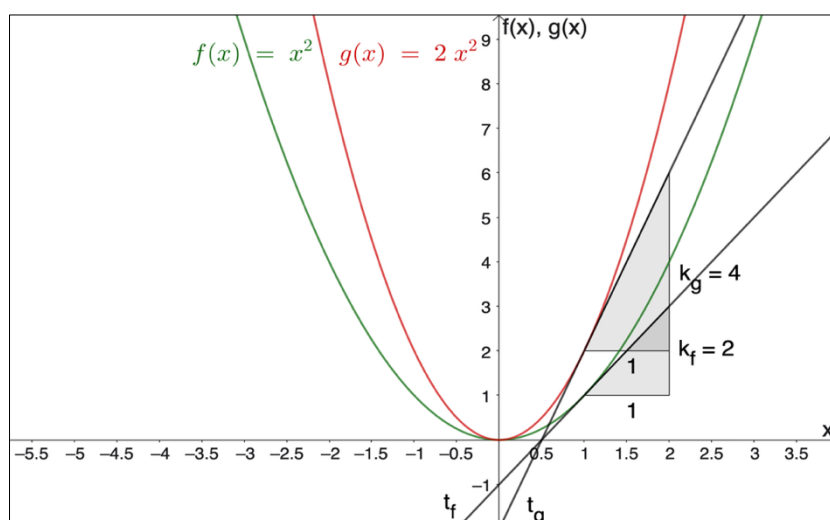
Die letzte Intervention im Rahmen des Unterrichtskonzepts erfolgt zur Faktorregel der Differentialrechnung. Der hier von den Lernenden zu durchlaufende Prozess erfolgt analog zur vorangegangenen Phase, sodass an dieser Stelle auf eine neuerliche detaillierte Ausführung verzichtet wird. Im Sinne des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes liegt hier allerdings nun ein stärkerer Fokus auf der Scaffolding- und Fading-Methode (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21). Demnach werden die Unterstützungsmaßnahmen schrittweise weiter zurückgenommen und das Ziel besteht in dem weitgehend selbstständigen Durchlaufen des Beweisprozesses (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21).

Die Sozialform der Gruppenarbeit wird in der bestehenden Konstellation auch in dieser Phase beibehalten, um vor übermäßiger Überforderung und damit einhergehendem Motivationsverlust am Ende der Interventionseinheiten zu schützen, insbesondere da die Schüler*innen den Beweisprozess weitgehend ohne Unterstützung vollziehen sollen. Nach der Klärung des Beweisproblems sowie der notwendigen Voraussetzungen liegt der Fokus insbesondere auf der eigenständigen Formulierung der Behauptung und damit der Faktorregel (Kuntze, 2009, S. 12;

Kuntze et al., 2004, S. 7). Die Lernenden können dabei auf bereits im regulären Unterricht erworbenes Material zurückgreifen. Eine mögliche Behauptung wäre die Folgende: *Es sei g eine Funktion gegeben durch $g(x) = k \cdot f(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für die Ableitung von g gilt dann $g'(x) = k \cdot f'(x)$* (Greefrath et al., 2016, S. 167). Es sei an dieser Stelle darauf verwiesen, dass es sich hierbei um eine didaktisch reduzierte Behauptung handelt, wobei den Lernenden am Ende des Prozesses der entsprechende fachmathematische Satz nähergebracht wird, der insbesondere die Differenzierbarkeit der Funktion berücksichtigt und sich in Anlehnung an Greefrath et al. (2016, S. 167) in Anhang B wiederfindet. In den einzelnen Gruppen ist im Anschluss zudem bestenfalls eine Diskussion über die Beweisbedürftigkeit der Behauptung anzuregen.

Abbildung 5.6

Experimenteller Beweis der Faktorregel



Anmerkung. Prüfung der Faktorregel anhand der Funktion $g(x) = 2x^2$ in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Daran anknüpfend sammeln die Lernenden gemeinsam in der Gruppe das notwendige Grundwissen, welches sie vermuten für den Beweis zu benötigen. Dies sollte insbesondere Wissen zum Differenzen- und Differentialquotienten sowie deren geometrischen Interpretation und die Definition einer Ableitungsfunktion abdecken. Die Schüler*innen verfügen dabei bereits über diesbezügliches Material aus vorangegangenen Einheiten im Zuge des regulären Mathematikunterrichts. Entsprechende Definitionen sowie geometrische Interpretationen des Differenzen- und Differentialquotienten finden sich in Anhang B angeführt.

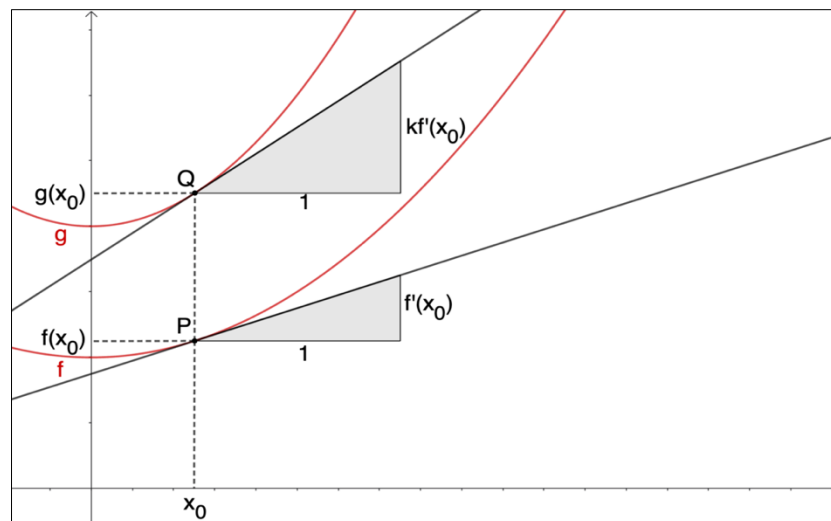
Im Anschluss erarbeiten die Lernenden entsprechend des bereits bekannten Prozesses einen experimentellen Beweis. Dabei können die Ableitungen dreier selbst gewählter Funktionen sowie die ursprüngliche Funktion unter Zuhilfenahme von GeoGebra graphisch und rechnerisch ermittelt werden. Bestenfalls untersuchen die Lernenden bereits hier die Steigung einer Funktion sowie im Vergleich dazu die Steigung derselben Funktion multipliziert mit einer beliebigen

Zahl. Entsprechende Anregungen einer derartigen Untersuchung können dabei von der Lehrperson im Sinne der Scaffolding-Methode gegeben werden. Abbildung 5.6 zeigt einen solchen Vergleich der Steigung in GeoGebra.

In Anlehnung an den experimentellen Beweis erarbeiten die Lernenden einen präformalen Beweis in der Gruppe, wobei gegebenenfalls, im Sinne einer Scaffolding-Maßnahme, ein Hinweis auf einen graphisch-intuitiven Beweis in Verbindung mit der geometrischen Interpretation des Differentialquotienten gegeben werden kann. Einen möglichen präformalen Beweis im Sinne einer solchen graphisch-intuitiven Darstellung findet sich in Abbildung 5.7. Dabei wird graphisch veranschaulicht, dass durch die Multiplikation einer Funktion mit einer beliebigen reellen Zahl k , die Steigung der Funktion in einem beliebigen Punkt mit dem Faktor k verändert wird. Da die Steigung einer Funktion in einem Punkt dem Differentialquotienten in diesem Punkt entspricht, ergibt sich daraus die Faktorregel, wonach die ursprüngliche Steigung im Sinne der ersten Ableitung mit dem entsprechenden Faktor multipliziert wird.

Abbildung 5.7

Möglicher graphisch-intuitiver Beweis der Faktorregel



Anmerkung. Eigene Darstellung in Anlehnung an Greefrath et al. (2016, S. 168).

Im Anschluss an die Formulierung bzw. Darstellung eines präformalen Beweises der Faktorregel erfolgt in den einzelnen Gruppen ein Gespräch über den bisherigen Prozess sowie den konstruierten Beweis. Dabei werden wiederum im Sinne des Cognitive Apprenticeship die Artikulation interner Denkprozesse sowie die Reflexion des eigenen Denk- und Beweisvorgangs angestrebt, bevor zur Formulierung eines formal-deduktiven Beweises übergegangen wird (Collins et al., 1987, S. 17; Scherrmann, 2016, S. 21, S. 25).

Im Rahmen eines formal-deduktiven Beweises kann als Hilfestellung gegebenenfalls der Verweis auf die Definition der ersten Ableitung und damit des Differentialquotienten erfolgen. Demnach kann, entsprechend der Definition, die Ableitung der Funktion über den Differentialquotienten ausgedrückt werden. In einem weiteren Schritt fließt die Voraussetzung ein, dass es sich dabei um eine Funktion g handelt, welche sich aus dem Produkt einer reellen Zahl mit einer anderen Funktion f zusammensetzt. Wird dies in den Differentialquotienten eingesetzt, so kann mithilfe der Grenzwertrechenregeln der reelle Faktor vor den Bruch und in weiterer Folge aus dem Limes herausgezogen werden. Wiederum mit Bezug auf die Definition der Ableitung, kann nun der Differentialquotient der Funktion f als erste Ableitung geschrieben werden. Diese didaktisch reduzierte Formulierung des Beweises beruht auf dem fachmathematischen formal-deduktiven Beweis nach Greefrath et al. (2016, S. 167), welcher sich in Anhang B findet.

Den Abschluss der Intervention bilden wiederum eine Reflexion und Artikulation des durchlaufenen Prozesses sowie der internen Denkprozesse im Rahmen eines Unterrichtsgesprächs. Zudem erfolgen eine abschließende Darstellung und Zusammenfassung des Beweisprozesses durch die Lehrperson, wobei sämtliche Schritte durchlaufen sowie ein möglicher präformaler und formal-deduktiver Beweis vorgestellt werden. Die Präsentation erfolgt wiederum mittels digitaler Unterstützung durch die PowerPoint-Präsentation, welche den Prozess begleitet.

Da es sich dabei um die letzte Interventionsmaßnahme im Rahmen des vorgelegten Unterrichtskonzepts handelt, ist an dieser Stelle zudem ein ausklingender Austausch mit den Lernenden über das gesamte durchlaufene Projekt anzustreben. Ziel ist es dabei, einen ersten Eindruck von den Schüler*innen zu erhalten sowie den gesamten Prozess gemeinsam zu reflektieren und gegebenenfalls offengebliebene Fragen zu klären.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Lernenden im Zuge des vorgestellten Unterrichtskonzepts für eine angestrebte Weiterentwicklung bestehender mathematik- und insbesondere beweisbezogener Beliefs im Sinne des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes nach Collins et al. (1987) sowie dem kognitionspsychologischen Modell schulischen Beweisens nach Brunner (2014) in Verbindung mit dem Beweisprozess nach Kuntze et al. (2004) für mathematische Beweise sensibilisiert werden sollen. Darüber hinaus dienen die Maßnahmen der Entwicklung eines im Idealfall tiefergehenden Beweisverständnisses sowie einer tragfähigen und erweiterten Beweiskompetenz. An dieser Stelle ist allerdings notwendigerweise explizit darauf zu verweisen, dass im Zuge der vorliegenden Arbeit das vorgestellte Konzept nicht eingehender empirisch geprüft wird. Vorrangiges Ziel der Studie ist die Untersuchung möglicher

Beliefänderungen auf Basis der vorgestellten Interventionen, sodass zwar eine Reflexion des geplanten Unterrichtskonzeptes in den abschließenden Ausführungen dieser Arbeit erfolgt und damit auch die Wirksamkeit der angeführten Maßnahmen diskutiert wird, jedoch nicht der Anspruch erhoben wird, eine aus didaktischer Perspektive mögliche Idealform zur Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht vorzulegen.

6 Durchführung der Studie

Die nachfolgenden Ausführungen zur Durchführung der Untersuchungen im Rahmen des Prä- und Posttests sowie der Interventionseinheiten und der abschließenden Follow-up-Interviews geben einen Einblick in die Rahmenbedingungen der Studie. In diesem Sinne wird die Datenerhebung mittels des entwickelten Fragebogens beschrieben, der sowohl für die Anfangs- als auch die Endbefragung nach Abschluss der Interventionsmaßnahmen herangezogen wurde. Damit in Verbindung finden sich Bemerkungen zur Durchführung der zuvor geplanten Interventionseinheiten. Den Abschluss bilden schließlich Anmerkungen zur Durchführung der Follow-up-Interviews mit einzelnen Lernenden. Eine Reflexion des Testinstruments sowie der Interventionsmaßnahmen und der anknüpfenden Befragungen findet sich am Ende der vorliegenden Arbeit.

6.1 Beschreibung der Datenerhebung und Interventionsmaßnahmen

Die Erhebung der Daten zu mathematik- und beweisbezogenen Belief von Schüler*innen der Sekundarstufe II sowie die daran anknüpfenden Interventionsmaßnahmen erfolgten in zwei von drei siebten Klassen der Oberstufe eines Wiener Gymnasiums im 19. Gemeindebezirk. Die Wahl dieser Schulstufe liegt zum einen im Fokus auf der Sekundarstufe II begründet, zum anderen in der möglichen Durchführung im regulären Mathematikunterricht als Mathematiklehrperson dieser beiden Klassen. Schüler*innen, welche an der Anfangserhebung nicht teilnehmen konnten oder denen es nicht möglich war, den gesamten Prozess zu durchlaufen, wurden von der Untersuchung ausgenommen.

Nachdem aufgrund schulinterner Regelungen eine Mathematikschularbeit im ersten Semester vorgesehen ist, wurde der Beginn der Studie auf einen Zeitpunkt nach dem Abschluss der schriftlichen Leistung gelegt, um insbesondere zeitliche und schüler*innenbezogene Ressourcen effektiv nutzen zu können. Insgesamt erfolgte die Erhebung der Daten mittels Anfangs- und Endbefragung sowie den intervenierenden Einheiten vom 7. bis zum 30. Jänner 2026. Da der Prä- und Posttest sowie die Interventionsmaßnahmen in den beiden Klassen getrennt durchgeführt wurden, erfolgt die Beschreibung jeder Einheit teilweise getrennt für beide Gruppen, wobei hervorzuheben ist, dass die Durchführung bis auf zeitliche Unterschiede analog erfolgte. Aus datenschutzrechtlichen Belangen wird hier in Gruppe A und Gruppe B unterschieden und nicht die genaue Klassenbezeichnung angegeben. Auf eine Kontrollgruppe musste aufgrund der Gruppengrößen und zugunsten einer größeren Stichprobe für die Interpretation der Ergebnisse verzichtet werden.

6.1.1 Prätest und Interventionseinheit 1

Die Erhebung der mathematik- und beweisbezogenen Beliefs erfolgte in Gruppe A am 7. Jänner 2026 und in Gruppe B am 8. Jänner 2026. Die teilnehmenden Schüler*innen wurden zu Beginn der 50-minütigen Einheit mündlich über die geplante Studie sowie die Vorgehensweise für die nächsten Einheiten informiert. Daran anknüpfend wurden die teilnehmenden Personen gebeten sich in alphabetischer Reihenfolge im Klassenraum zu positionieren. Dies unterstützte zum einen die Verteilung der Fragebögen, welche mit den entsprechenden Codes von A1 bis A15 bzw. B1 bis B15 versehen wurden. Zum anderen wurde so eine Durchmischung des üblichen Klassensettings arrangiert und die Wahrscheinlichkeit für den Erhalt individueller Ergebnisse bei den Testungen erhöht. Der Paper-Pencil-Fragebogen wurde anschließend an die Proband*innen verteilt und ausgefüllt.

Nachdem alle Fragebögen durch die leitende Person eingesammelt wurden, erfolgte die Inputphase zum Thema „Was versteht man unter Beweisen in der Mathematik?“. Diese fand in Form eines Vortrags durch die Leiterin statt und wurde durch eine PowerPoint-Präsentation visuell unterstützt. Vertiefende und Verständnisfragen durch die Lernenden wurden dabei gestattet und beantwortet. Die erste Einheit schloss in beiden Gruppen mit Ausführungen zu drei Beweisformen, wobei die beispielhaften Darstellungen der zwei indirekten Beweise und des Induktionsbeweises hier aufgrund zeitlicher Ressourcen nicht mehr stattfanden.

6.1.2 Interventionseinheit 2

Die zweite Interventionseinheit erfolgte sowohl für Gruppe A als auch für Gruppe B in der darauffolgenden Unterrichtsstunde am 12. Jänner 2026. Beginnend mit einer Wiederholung des Inputs aus der vorangegangenen Einheit, wurden die Beispiele für indirekte Beweise und der Induktionsbeweis wiederum mit visueller Unterstützung der PowerPoint-Präsentation durch die Studienleiterin vorgestellt. Zudem erfolgte in diesem Rahmen ein Austausch mit einzelnen Teilnehmer*innen bezüglich Fragen zum Input. Während für Gruppe B die Thematisierung dieser beispielhaften Beweise die gesamte Einheit von 50 Minuten in Anspruch nahm, konnte in Gruppe A das erste große Beweisthema zur Beschränktheit konvergenter Folgen eingeführt werden.

Hierfür wurde die entsprechende Aussage „Jede konvergente Folge ist beschränkt.“ wiederum mittels Präsentation an die Wand projiziert. Im Sinne des Cognitive Apprenticeship-Ansatzes erfolgte hier die Methode des Modelling. Die Studienleiterin trat als Expertin im Beweisprozess auf und führte diesen vor den Lernenden vor. In einem ersten Schritt wurden dabei die gegebenen Voraussetzungen geklärt. Schüler*innenmeldungen wurden hierbei zugelassen. Daran

anknüpfend erfolgte die Diskussion der Beweisbedürftigkeit im Austausch mit der Gruppe, wobei insbesondere von der Leiterin auf den vorangegangenen Input verwiesen wurde. Es stellte sich zudem heraus, dass die intuitive Akzeptanz der Aussage von Beginn an in beiden Gruppen nicht gegeben war, was die Beweisbedürftigkeit hervorhob. Darauf aufbauend erfolgte entsprechend dem Beweisprozess die Bereitstellung entsprechenden Grundwissens bzw. der Aktivierung desselben bei den Lernenden. Dies erfolgte wiederum durch Projizierung mittels Power-Point-Präsentation. Als eine Art „sich selbst erklärender Monolog“ betrachtete die Leiterin das für das Beweisproblem notwendige Grundwissen, wobei auf diverse Fragen eingegangen wurde.

Im Rahmen der Phase des experimentellen Beweises wurden durch die Studienleiterin die zuvor gewählten drei Beispiele konvergenter Folgen mittels GeoGebra dargestellt. Dabei wurde der Verlauf der Folgen näher untersucht, indem mögliche Schranken festgelegt und der Grenzwert graphisch eruiert wurde. Neben der graphischen Veranschaulichung erfolgte zudem die Prüfung der Konvergenz mittels dem Computeralgebrasystem von GeoGebra. Nachdem die Teilnehmer*innen eine intuitive Einsicht in die Behauptung erlangt hatten, konnte diese Phase abgeschlossen werden.

6.1.3 Interventionseinheit 3

Die dritte Einheit fand für Gruppe A am 14. Jänner und für Gruppe B am 15. Jänner statt. In diesem Rahmen wurde für den Wiedereinstieg in die Thematik der experimentelle Beweis bei Gruppe A wiederholt, ebenso wie das bereits dargelegte Grundwissen. Daran anknüpfend erfolgte die Phase des präformalen Beweises, wobei die Studienleiterin weiterhin im Rahmen der Modelling-Methode im Sinne des Cognitive Apprenticeship agierte. Die Darstellung des präformalen Beweises erfolgte schrittweise an einer Kreidetafel. Damit während der Beweisführung auf das entsprechende Grundwissen und damit einhergehend verwendete Definitionen und Sätze zurückgegriffen werden konnte, wurde die Präsentation als unterstützendes Tool herangezogen. Die schrittweise Erarbeitung wurde dabei durchwegs von der Leiterin unter Verweis auf ihre eigenen internen Denkprozesse beim Beweisen kommentiert. Auf gleiche Weise wurde daran anknüpfend der formale Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen von der Studienleiterin dargelegt. Darüber hinaus wurde die Frage der Umkehrung der Behauptung in den Raum gestellt und auf das entsprechend vorbereitete Gegenbeispiel einer alternierenden Folge hingewiesen. Der Graph der Folge wurde zudem an der Tafel skizziert. Am Ende der Interventionseinheit erfolgte eine Rückfrage an die teilnehmenden Personen zum durchlaufenen Prozess.

Für Gruppe B bestand diese Interventionseinheit aus der zuvor beschriebenen Einführung in das erste Beweisproblem sowie die genannte Phase des experimentellen und präformalen Beweises. Die jeweiligen Phasen erfolgten dabei analog zur anderen Gruppe, jedoch wurde der präformale Beweis fotografiert, um zur Wiederholung in der darauffolgenden Einheit sicheren Zugriff darauf zu haben.

6.1.4 Interventionseinheit 4

Am 15. Jänner 2026 fand die vierte Interventionseinheit der Gruppe A statt. Hier erfolgte die Erarbeitung des Arbeitsblattes zu den prototypischen Schüler*innenbeweisen zur Extremstelle einer Polynomfunktion zweiten Grades. Zur Bearbeitung wurden Gruppen von drei bis vier Schüler*innen gebildet, wobei die Einteilung nach dem Alphabet erfolgte. Die Gruppenzusammensetzungen blieben dabei für den gesamten weiteren Prozess bestehen. Die Ergebnisse der einzelnen Gruppierungen wurden im Anschluss gemeinsam im Plenum besprochen und reflektiert, wobei wiederum als unterstützende Maßnahme die einzelnen Schüler*innenbeweise digital projiziert wurden. Im Anschluss erfolgte die Hinführung zum zweiten großen Beweisproblem über Wendestellen von Polynomfunktionen dritten Grades. Dabei wurden erneut die ersten Phasen des Beweisprozesses im Plenum gemeinsam durchlaufen. Ab diesem Zeitpunkt übernahm die Studienleiterin die Rolle des Coaching, Scaffolding und Fading im Sinne des Cognitive Apprenticeship. Das notwendige Grundwissen wurde in diesem Rahmen noch von der Leiterin erneut mittels PowerPoint-Präsentation zur Verfügung gestellt, wobei zuvor unter möglichst geringer Anleitung die Voraussetzungen gesammelt, die Beweisbedürftigkeit diskutiert und nötiges Hintergrundwissen erhoben wurde.

In Gruppe B erfolgte die vierte Interventionseinheit am 19. Jänner 2026. Hier wurde der präformale Beweis aus der vorangegangenen Einheit erneut projiziert und wiederholt. Die Erarbeitung des formalen Beweises zum ersten Beweisproblem erfolgte dabei analog zur Gruppe A. Daran anknüpfend wurden auch hier die prototypischen Schüler*innenbeweise in Kleingruppen erarbeitet und anschließend im Plenum diskutiert und reflektiert. Die Hinführung zur zweiten Beweisthematik erfolgte in dieser Gruppe erst in der darauffolgenden Einheit.

6.1.5 Interventionseinheit 5

Die fünfte Interventionseinheit vollzog sich für die Gruppe A am 19. Jänner 2026. Dabei wurde in kleinem Rahmen das zugrundeliegende Beweisproblem sowie das dafür notwendige Grundwissen wiederholt. Im Zuge der Gruppenerarbeitungen eines experimentellen, präformalen und formalen Beweises für die Aussage zur Wendestelle einer Polynomfunktion dritten Grades wurden je nach Wünschen der einzelnen Gruppen sowie auf Initiative der Leiterin weiterführende

Hinweise gegeben und insbesondere auf die Analogien in den prototypischen Beweisen des Arbeitsblattes verwiesen. Die experimentellen Beweise wurden mittels digitaler Unterstützung durch GeoGebra durchgeführt, der präformale und formale Beweis handschriftlich dokumentiert. Nach jeder der Beweisphasen erfolgte zudem ein kurzer Austausch und eine Reflexion über die Erarbeitung gemeinsam mit der Leiterin in den jeweiligen Kleingruppen.

Im Rahmen dieser Einheit konnte bei der Gruppe B am 20. Jänner 2026 nach der Einführung in das Beweisproblem im Sinne der oben beschriebenen Vorgehensweise auch hier mit den Gruppenarbeiten gestartet werden. Am Abschluss dieser Einheit lagen auch hier bereits formale Beweise vor.

6.1.6 Interventionseinheit 6

Die sechste Interventionseinheit gestaltete sich nun für beide Gruppen gleich, wobei diese für Gruppe A am 21. Jänner und Gruppe B am 22. Jänner erfolgte. Insbesondere im Sinne der Fading-Methode gab die Leiterin hier nur Hinweise in Fällen, wo dies für den weiteren Beweisprozess notwendig wurde. Das dritte Beweisproblem, die Faktorregel, wurde wiederum digital projiziert und es erfolgte ein Hinweis auf die Vorgehensweise zuerst eine entsprechende Behauptung zu formulieren und dann erneut den bereits zweimal durchlaufenen Dreischritt zu durchlaufen. Einen Verweis gab es diesbezüglich zum Finden des notwendigen Materials in den Unterlagen des Mathematikunterrichts.

In Rahmen der vorangegangenen Gruppenkonstellationen stellten die Teilnehmer*innen eine entsprechende Behauptung auf und führten unter Zuhilfenahme von GeoGebra einen experimentellen Beweis durch. Der Prozess wurde zudem beim Abschluss der Einheit im Unterrichtsgespräch reflektiert.

6.1.7 Interventionseinheit 7

Die letzte Interventionseinheit fand für Gruppe A am 22. Jänner und für Gruppe B am 27. Jänner statt. In diesem Rahmen wurde in den bestehenden Gruppenkonstellationen an einem präformalen und formalen Beweis der Kettenregel gearbeitet. Die Notation der Ergebnisse erfolgte erneut handschriftlich. Im Sinne der Fading-Methode wurden hier lediglich individuelle Hinweise gegeben. Eine Reflexion und Nachbesprechung des vollzogenen Beweisprozesses erfolgte erst am Ende der Einheit, wobei wiederum individuelle Reflexionen in den einzelnen Kleingruppen angestoßen wurden.

6.1.8 Posttest und Reflexion

Der Posttest sowie eine Reflexion über die vorangegangenen Interventionseinheiten erfolgten für Gruppe A am 28. Jänner 2026, für Teile der Gruppe B am 29. Jänner und die übrigen

Personen der Gruppe B am 30. Jänner 2026. Die Reflexion fand dabei im Unterrichtsgespräch statt und wurde verbal vollzogen. Dabei wurde ein erster Eindruck über die Durchführung der Studie erhoben. Für den Posttest erfolgte erneut die Verteilung nach dem Alphabet.

6.2 Follow-up-Interview

Um einen tiefergehenden Einblick in die Ergebnisse der Prä-Post-Untersuchung zu erhalten und damit im Weiteren insbesondere den individuellen Prozess hinter nachgewiesenen oder auch ausgebliebenen Beliefänderungen zugänglicher zu machen, erfolgen im Anschluss an die Interventionseinheiten sowie die Fragebogenerhebung insgesamt fünf Follow-up-Interviews im Sinne einer anknüpfenden qualitativen Untersuchung. Die Auswahl der Proband*innen erfolgt in Anlehnung an das Prinzip einer theoretischen Strichprobenziehung und wird in den Abschnitten 5.2 und 5.3.2 näher beschrieben.

Die Durchführung der Interviews im Sinne von Einzelfallanalysen erfolgte 18 Tage nach Abschluss der Posttestung vom 17. bis zum 19. Februar 2026. Alle Gespräche wurden dabei während der Unterrichtszeit geführt, wobei die Teilnehmer*innen dafür vom Unterricht befreit wurden. Jedes Interview fand in einem verglasten Raum im Schulgebäude selbst statt und wurde unter Bezug auf den zuvor entwickelten Interviewleitfaden sowie den jeweiligen Prä- und Postfragebogen durchgeführt. Die entsprechenden individuellen Leitfäden finden sich für jeden Fall in Anhang C. Nachfolgend wird daher nur kurz auf die Uhrzeit und Dauer sowie besondere Vorkommnisse während der jeweiligen Interviews eingegangen.

Das erste Interview erfolgte mit Fall A13 am 17. Februar 2026 um 9:14 Uhr. Das Interview dauerte insgesamt 10 Minuten und 31 Sekunden und fokussierte vorrangig auf bereits bestehende positive Beliefs sowie leichte Veränderungen im Prä-Post-Vergleich.

Am selben Tag fand zudem das zweite Interview mit Fall A1 um 10:18 Uhr statt. Dieses hatte eine Dauer von 14 Minuten und 50 Sekunden und legte insbesondere einen Fokus auf ausbleibende Effekte sowie unproduktive Veränderungen.

Zwei weitere Interviews fanden am Tag darauf, den 18. Februar 2026, statt. Das erste Gespräch erfolgte um 11:16 Uhr mit einer Dauer von 18 Minuten und 26 Sekunden und fokussierte insbesondere auf vorliegende Veränderungen, welche bei einigen weiteren Proband*innen gegeben waren. Direkt im Anschluss, um 11:39 Uhr, fand das vierte Interview mit einer Dauer von 14 Minuten und 16 Sekunden statt. Im Zentrum standen dabei tendenziell unproduktive Beliefs für mathematisches Beweisen, welche sich in eine teils positive und teils negative Richtung entwickelt hatten. Die Veränderungen waren hier allerdings tendenziell gering.

Das letzte Interview erfolgte einen Tag später am 19. Februar 2026 um 9:20 Uhr und war mit einer Dauer von 26 Minuten und 25 Sekunden das längste Gespräch. Im Fokus stand dabei insbesondere eine starke Veränderung in Richtung tendenziell produktiver Beliefs, welche in den Fragebogenuntersuchungen identifiziert wurde. Da derartige Beliefänderungen im Zentrum der vorliegenden Arbeit stehen, hatte dieser Leitfaden mit insgesamt zehn Fragen den größten Umfang, was zudem die Dauer des Interviews begründet.

Die qualitativen Ergebnisse der Einzelfallinterviews sowie die Daten der quantitativen Fragebogenuntersuchung der einzelnen Fälle finden sich in der nachfolgenden Darstellung der Ergebnisse in Abschnitt 7.4.

7 Ergebnisse

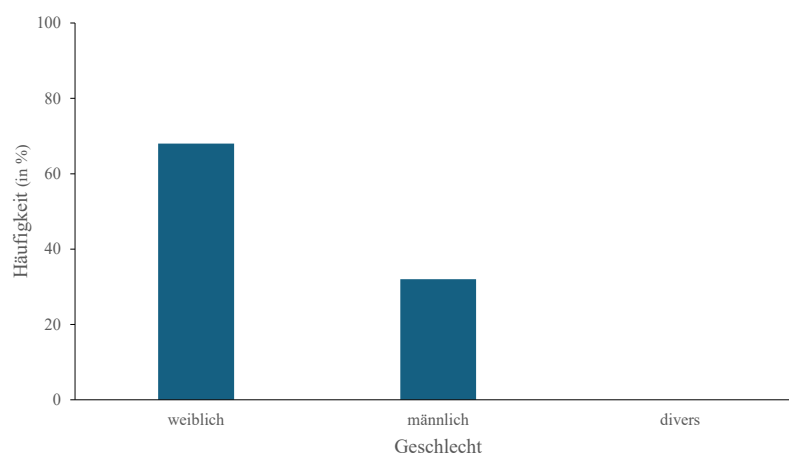
Die nachfolgenden Ausführungen umfassen die Darstellung der quantitativen und qualitativen Ergebnisse der empirischen Untersuchung. Dabei wird einführend die Stichprobe näher charakterisiert (7.1), um die entsprechenden Befunde im Kontext einordnen zu können. Daran anknüpfend findet sich die Beschreibung der quantitativen Ergebnisse aus dem Prätest (7.2), welche sowohl deskriptive als auch inferenzstatistische Befunde umfasst. Diese Darstellung bietet einen Einblick in die bei den Schüler*innen vorliegenden mathematik- und beweisbezogenen Beliefs vor den entsprechenden Interventionseinheiten. Anschließend erfolgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aus dem Prä- und Posttest (7.3), um Veränderungen und Kontinuitäten sichtbar zu machen. Die entsprechenden Befunde werden durch qualitative Resultate aus fünf Follow-up-Interviews ergänzt (7.4).

7.1 Charakteristika der Stichprobe

Im Rahmen der empirischen Untersuchung der vorliegenden Arbeit wurden zwei Klassen der 11. Schulstufe einer allgemeinbildenden höheren Schule im 19. Wiener Gemeindebezirk ausgewählt. Die Wahl ist mit der eigenen Unterrichtstätigkeit im Fach Mathematik in diesen beiden Klassen begründet. Insgesamt umfassen die beiden Schulklassen 31 Schüler*innen, wovon aufgrund von länger andauernder Abwesenheit 25 Lernende an der Studie teilnahmen. Die nachfolgenden Ausführungen dienen der spezifischeren Charakterisierung der Stichprobe, um die aus der Testung resultierenden Ergebnisse entsprechend interpretieren zu können.

Abbildung 7.1

Geschlechterspezifische Verteilung der Teilnehmenden (in %)



Anmerkung. Eigene Darstellung.

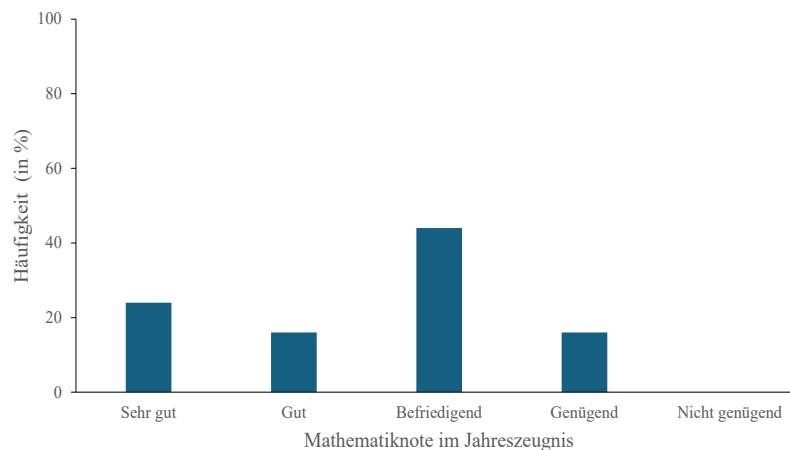
Wie in Abbildung 7.1 ersichtlich wird, identifizieren sich im Hinblick auf die geschlechterspezifische Verteilung der teilnehmenden Personen 17 der insgesamt 25 Lernenden als weiblich.

Dies entspricht mit 68 % etwa zwei Drittel der gesamten Stichprobe. Die übrigen 8 Personen und damit 32 % der Teilnehmenden ordnen sich dem männlichen Geschlecht zu. Keine der teilnehmenden Personen versteht sich als divers. Die entsprechenden absoluten Häufigkeiten finden sich in Tabelle D1 in Anhang D.

Hinsichtlich der Verteilung der Jahresnoten im Unterrichtsfach Mathematik zeigt sich in Abbildung 7.2 eine Mehrheit von 44 % der Teilnehmenden mit einem „Befriedigend“ in der Beurteilung. Zudem ist je ein prozentueller Anteil von 16 % mit einer Bewertung der Note „Gut“ bzw. „Genügend“ im Jahreszeugnis festzustellen. Darüber hinaus weisen insgesamt 24 % der Teilnehmenden die Note „Sehr gut“ und keine Person die Note „Nicht genügend“ im letzten Jahreszeugnis auf. Tabelle D2 in Anhang D zeigt die diesbezüglichen absoluten Häufigkeiten.

Abbildung 7.2

Notenverteilung im Unterrichtsfach Mathematik (in %)

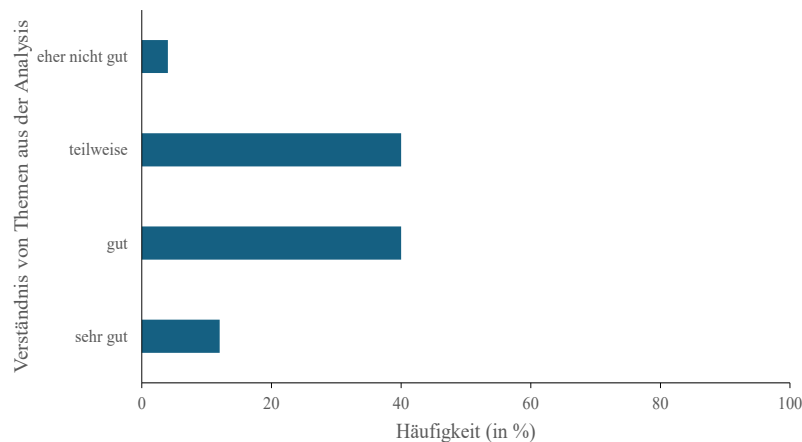


Anmerkung. Die Beurteilung im letzten Jahreszeugnis erfolgt mit Sehr gut (1), Gut (2), Befriedigend (3), Genügend (4), Nicht genügend (5). Eigene Darstellung.

Darüber hinaus zeigt Abbildung 7.3, dass eine überwiegende Mehrheit von 80 % der Proband*innen angibt, Themen aus dem Gebiet der Analysis wie Funktionen, Grenzwerte und die Differentialrechnung gut oder teilweise zu verstehen. Spezifischer gehen 10 Personen von einem guten bzw. teilweisen Verständnis aus. Die diesbezüglichen absoluten Häufigkeiten finden sich in Tabelle D3 in Anhang D. Von insgesamt 25 Personen geben 12 % der Teilnehmenden an, dass sie Themen aus dem Bereich der Analysis sehr gut verstehen. Lediglich eine Person bezeichnet das persönliche Verständnis als eher nicht gut. Dies entspricht 4 % der gesamten Stichprobe. Darüber hinaus wurde in einem Fall keine Angabe gemacht.

Abbildung 7.3

Verständnisverteilung der Themen der Analysis (in %)

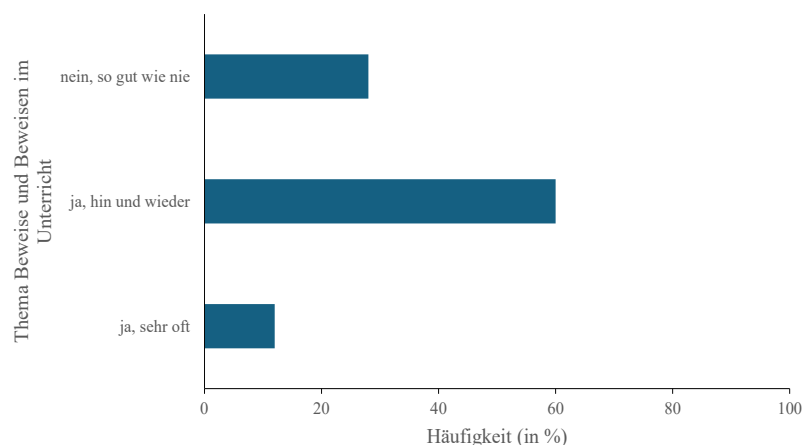


Anmerkung. Die Bewertung des individuellen Verständnisses der Themen aus der Analysis erfolgt in einer Skala von „sehr gut“, „gut“, „teilweise“ bis „eher nicht gut“. Eigene Darstellung.

Im Hinblick auf die Häufigkeit der Thematisierung von mathematischen Beweisen im Unterricht zeigt Abbildung 7.4, dass mit 60 % mehr als die Hälfte der Testpersonen angibt, dass im Unterricht bereits hin und wieder über Beweise gesprochen wurde. Insgesamt 28 % und damit beinahe ein Drittel der Proband*innen hält fest, dass Beweise so gut wie nie im Unterricht thematisiert wurden. Lediglich 12 % und damit 3 der 25 Teilnehmenden geben an, dass Beweise sehr oft Gegenstand des bisherigen Mathematikunterrichts wurden. Detaillierte Daten finden sich in Tabelle D4 in Anhang D.

Abbildung 7.4

Verteilung der Thematisierung von Beweisen im Unterricht (in %)



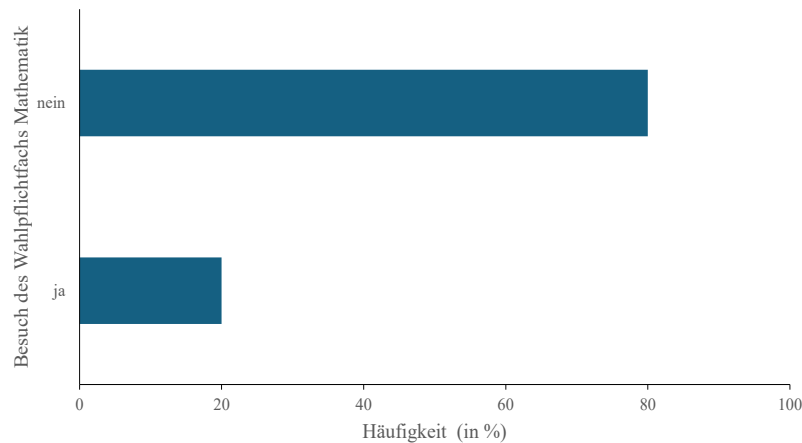
Anmerkung. Die Angabe der expliziten Thematisierung von Beweisen im Unterricht erfolgt in einer Skala von „ja, sehr oft“, „ja, hin und wieder“ bis „nein, so gut wie nie“. Eigene Darstellung.

Hinsichtlich der Teilnahme am Wahlpflichtfach Mathematik zusätzlich zum regulären Unterricht zeigt Abbildung 7.5, dass mit 80 % mehr als drei Viertel der Testpersonen den

Wahlpflichtgegenstand Mathematik nicht besuchen. Insgesamt 20 % der Studienteilnehmer*innen nehmen an diesem zusätzlich zum regulären Unterricht teil. Dies entspricht 5 Personen in der gesamten Stichprobe.

Abbildung 7.5

Verteilung der Teilnahme am Wahlpflichtfach Mathematik (in %)



Anmerkung. Eigene Darstellung.

Zusammenfassend zeigt sich, dass sich ein überwiegender Teil der Stichprobe als weiblich identifiziert und sich im mittleren Leistungsfeld mit der Beurteilung „Befriedigend“ in Mathematik im Jahreszeugnis bewegt. Das spiegelt sich darüber hinaus in dem individuellen Verständnis der Lernenden von Themen aus dem Bereich der Analysis wider, welches von einer großen Mehrheit als gut bzw. teilweise vorhanden charakterisiert wird. Ein Blick auf die Häufigkeit der expliziten Thematisierung von Beweisen gibt zudem Aufschluss darüber, dass diese bisher tendenziell hin und wieder bzw. so gut wie nie im Mathematikunterricht erfolgte. Eine deutliche Minderheit besucht darüber hinaus zusätzlich zum regulären Unterricht den Wahlpflichtgegenstand Mathematik. Die hier dargestellte Charakterisierung der Stichprobe dient im Weiteren der Interpretation der nachfolgenden quantitativen und qualitativen Ergebnisse der Studie.

7.2 Prätest

Die Ergebnisse aus dem Prätest sollen nachfolgend insbesondere explizit hervorgehoben werden, um einen detaillierteren Einblick in die vor den Interventionen bestehenden Beliefs von Lernenden zu mathematischen Beweisen und der Mathematik zu ermöglichen. Ergänzend zu den deskriptiven Ergebnissen des Anfangsfragebogens finden sich zudem inferenzstatistische Befunde in Bezug auf zusätzlich erhobene Merkmale und Zusammenhänge zwischen mathematik- sowie beweisbezogenen Beliefs. Die Darstellung erfolgt dabei insbesondere im Hinblick auf die in Abschnitt 5.3.1 entwickelten Kategorien.

7.2.1 Deskriptive Ergebnisse

Im Zuge der ersten Kategorie zu einer statischen Sichtweise wurde je ein Item in Bezug auf die Mathematik im Allgemeinen und das Beweisen im Spezifischen getestet. Dabei handelt es sich um das Item B1 „Mathematik besteht aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen, die präzise und streng befolgt werden müssen.“ und C1 „Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.“ Die Aussagen sollten je mit einem Zustimmungswert von 1 (stimme ich gar nicht zu) bis 5 (stimme ich voll zu) bewertet werden. Die Ergebnisse in Tabelle 7.1 zeigen einen Mittelwert bei Item B1 von 4.32 sowie eine Standardabweichung von 0.63. Mit 52 % wählt dabei ungefähr die Hälfte der teilnehmenden Personen den Wert 4 auf der Zustimmungsskala. Darüber hinaus wird der Wert 1 und 2 auf der Skala von keiner Person angegeben. Entsprechende Häufigkeiten und Prozente finden sich in Tabelle D10 in Anhang D. Eine insgesamt ähnliche Zustimmung findet sich bei Item C2 mit einem Mittelwert von 4.36 und einer Standardabweichung von 0.86. Mit 56 % stimmt bei diesem Item mehr als die Hälfte der Teilnehmer*innen voll zu, wie in Tabelle D10 in Anhang D ersichtlich.

Tabelle 7.1

Deskriptive Statistik – Kategorie 1A: Statische Sichtweise

	B1_Pre	C1_Pre
Gültig	25	25
Mittelwert	4.32	4.36
Standardabweichung	0.63	0.86
Minimum	3	2
Maximum	5	5

Anmerkung. Item B1: „Mathematik besteht aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen, die präzise und streng befolgt werden müssen.“; Item C1: „Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.“ Eigene Darstellung.

Die zweite Kategorie ist ebenfalls stark an einer statischen Sichtweise orientiert und untersucht Items im Hinblick auf ein formales Beweiskonzept. Dabei wurde die Zustimmung zu Item C4 „Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.“ sowie Item D5 „Beim Beweisen ist es wichtig, die Definitionen aller für den Beweis notwendigen Begriffe genau zu kennen.“ von 1 (stimme ich gar nicht zu) bis 5 (stimme ich voll zu) gemessen. Die Ergebnisse zeigen bei Item C4 einen Mittelwert von 3.60 sowie bei Item D5 einen Mittelwert von 4.40 und demnach eine etwas höhere Zustimmung bei dem zweiten Item. Entsprechende weitere Informationen finden sich in Tabelle 7.2. Mit 44 % wählt der größte Anteil der Stichprobe bei Item C4 den Wert 4 auf der Zustimmungsskala. Keine Person stimmt der Aussage gar nicht zu. Dies trifft auch auf das Item D5 zu, wobei hier mit 60 % eine Mehrheit der Teilnehmer*innen der Aussagen voll zustimmt. Die genauen Häufigkeiten und Prozente der beiden Items finden sich wiederum in Tabelle D10 in Anhang D.

Tabelle 7.2*Deskriptive Statistik – Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept*

	C4_Pre	D5_Pre
Gültig	25	25
Mittelwert	3.60	4.40
Standardabweichung	0.96	0.87
Minimum	2	2
Maximum	5	5

Anmerkung. Item C4: „Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.“; Item D5: „Beim Beweisen ist es wichtig, die Definitionen aller für den Beweis notwendigen Begriffe genau zu kennen.“ Eigene Darstellung.

Im Zuge einer dynamischen Sichtweise auf die Mathematik und mathematisches Beweisen wurden die beiden Items B2 „Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“ sowie C2 „Ein Beweis erklärt, warum eine mathematische Aussage gilt.“ gemessen. Dabei zeigt sich eine Differenz der Mittelwerte, die fast bei einem Wert von 1 liegt. Tabelle 7.3 offenbart dabei einen Mittelwert von 3.96 sowie eine Standardabweichung von 0.89 bei Item B2 sowie einen Mittelwert von 4.84 und eine Standardabweichung von 0.37 bei Item C2. Mit 36 % stimmt der größte Anteil der Stichprobe der Aussage in Item B2 mit einem Wert 4 auf der Zustimmungsskala zu. Bei Item C2 hingegen stimmen 84 % der Aussage voll zu, 16 % der Teilnehmenden mit einem Wert von 4. Keine Person wählt bei diesem Item einen Zustimmungswert von 1 bis 3. Entsprechende Ergebnisse finden sich in Tabelle D10 in Anhang D.

Tabelle 7.3*Deskriptive Statistik – Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise*

	B2_Pre	C2_Pre
Gültig	25	25
Mittelwert	3.96	4.84
Standardabweichung	0.89	0.37
Minimum	2	4
Maximum	5	5

Anmerkung. Item B2: „Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“; Item C2: „Ein Beweis erklärt, warum eine mathematische Aussage gilt.“ Eigene Darstellung.

Verbunden mit einer dynamischen Sichtweise auf die Mathematik sowie mathematisches Beweisen ist zudem die Kategorie zu einem Verständnis von Beweisen als Entdecken und Explorieren. Insgesamt wurden hier fünf Items gemessen. Wie in Tabelle 7.4 ersichtlich, zeigt sich bei Item C3 „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ ein Mittelwert von 3.60 sowie eine Standardabweichung von 0.82. Im Vergleich weist dieses Item in der Kategorie den niedrigsten Zustimmungsmittelwert auf. Mit 44 % stimmt beinahe die Hälfte der Lernenden hier mit einem Wert 4 zu. Ähnliche Werte weisen die beiden Items D1 „Der erste Schritt beim Beweisen liegt darin, eine intuitive Idee zu entwickeln, warum eine Aussage wahr sein könnte.“ mit einem Mittelwert von 4.04 und einer

Standardabweichung von 0.84 sowie Item D2 „Beim Beweisen ist es hilfreich, spezifische Beispiele zu probieren, um ein Muster zu erkennen.“ mit einem Mittelwert von 4.08 und einer Standardabweichung von 0.91 auf. Item D1 stimmt dabei mit 44 % der größte Anteil der Stichprobe mit einem Wert 4 zu, wohingegen lediglich eine Person Wert 2 wählt und keiner der Lernenden gar nicht zustimmt. Item D2 zeigt dahingegen, dass mit 56 % mehr als die Hälfte der Teilnehmenden mit einem Wert 4 auf der Zustimmungsskala zustimmt. Keine Person wählt hier einen Wert von 1 oder 3. Insgesamt 12 % und damit 3 der 25 Personen entscheiden sich allerdings für einen Zustimmungswert von 2. Entsprechende weitere Daten zu den Häufigkeiten und Prozents finden sich in Tabelle D10 in Anhang D. Den höchsten Mittelwert innerhalb der Kategorie erreicht mit 4.24 und einer Standardabweichung von 0.78 Item D3 „Ein Beweis entsteht oftmals durch Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen.“ Wie aus Tabelle 7.4 anhand des Minimums ersichtlich wird, wählt hier keine Person einen Zustimmungswert von 1 oder 2. Mit insgesamt 44 % stimmt der größte Anteil der Stichprobe der Aussage voll zu, wie in Tabelle D10 in Anhang D einsehbar ist. Dahingegen findet sich bei Item D4 „Das Finden eines Gegenbeispiels ist ein wichtiger Teil des Beweisprozesses.“ ein Spektrum von Personen, die der Aussage gar nicht bzw. voll zustimmen. Mit 40 % zeigt sich dabei allerdings, dass eine Vielzahl der Teilnehmenden der Aussage voll und lediglich eine Person gar nicht zustimmt. Entsprechende Werte sind wiederum aus Tabelle D10 in Anhang D zu entnehmen.

Tabelle 7.4

Deskriptive Statistik – Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren

	C3_Pre	D1_Pre	D2_Pre	D3_Pre	D4_Pre
Gültig	25	25	25	25	25
Mittelwert	3.60	4.04	4.08	4.24	3.80
Standardabweichung	0.82	0.84	0.91	0.78	1.23
Minimum	2	2	2	3	1
Maximum	5	5	5	5	5

Anmerkung. Item C3: „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“; Item D1: „Der erste Schritt beim Beweisen liegt darin, eine intuitive Idee zu entwickeln, warum eine Aussage wahr sein könnte.“; Item D2: „Beim Beweisen ist es hilfreich, spezifische Beispiele zu probieren, um ein Muster zu erkennen.“; Item D3: „Ein Beweis entsteht oftmals durch Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen.“; Item D4: „Das Finden eines Gegenbeispiels ist ein wichtiger Teil des Beweisprozesses.“ Eigene Darstellung.

Die in den bereits dargestellten Items C1 bis C4 angeführten Aussagen entsprechen den unterschiedlichen Beweisfunktionen und waren vor der Bewertung auf der Zustimmungsskala von 1 (stimme ich gar nicht zu) bis 5 (stimme ich voll zu) entsprechend ihrer für die teilnehmende Person persönlichen Wichtigkeit zu ordnen. Dabei entspricht 1 der wichtigsten und 4 der unwichtigsten Funktion. Die Ergebnisse des Rankings zeigen dabei, dass Item C2 bzw. hier CR2 mit einem Mittelwert von 1.75 sowie einer Standardabweichung von 1.11 tendenziell als wichtigste Funktion bewertet wird. Mit 56 % setzt mehr als die Hälfte der Teilnehmenden dieses

Item auf den ersten Platz. An die zweite Stelle tritt mit einem Mittelwert von 2.12 und einer Standardabweichung von 1.05 das Item C1 bzw. CR1. Der größte Anteil von 40 % positioniert das Item auf den zweiten Platz, allerdings sehen auch 32 % das Item C1 „Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.“ als wichtigste Funktion von Beweisen an. Die Funktion aus Item C4 „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ folgt mit einem Mittelwert von 3.04 sowie einer Standardabweichung von 0.98. Lediglich zwei Personen sehen diese Funktion auf dem ersten Rangplatz, mit 40 % wählt der größte Anteil dieses Item als unwichtigste Funktion, 32 % setzen die Aussage auf Platz 3. Das letzte Item C3 „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ in dieser Kategorie wird mit 56 % von mehr als der Hälfte der Teilnehmenden auf Platz 3 gesetzt. Keine Person sieht dies als wichtigste Funktion von Beweisen an. Dies führt zu dem in Tabelle 7.5 errechneten Mittelwert von 3.08 sowie einer im Vergleich geringen Standardabweichung von 0.65. Die entsprechenden detaillierten Häufigkeiten und Prozente finden sich wiederum in Tabelle D10 in Anhang D. Bei den Items CR2 sowie CR3 muss je ein fehlender Wert vermerkt werden, da die teilnehmende Person hier zweimal denselben Wert vergeben hatte.

Tabelle 7.5

Deskriptive Statistik – Ranking der Beweisfunktionen

	CR1_Pre	CR2_Pre	CR3_Pre	CR4_Pre
Gültig	25	24	24	25
Fehlend	0	1	1	0
Mittelwert	2.12	1.75	3.08	3.04
Standardabweichung	1.05	1.11	0.65	0.98
Minimum	1	1	2	1
Maximum	4	4	4	4

Anmerkung. Die Items CR1 bis CR4 entsprechen den bereits genannten Items C1 bis C4. In diesem Teil wurden die vier Aussagen zu den Beweisfunktionen nicht auf einer Zustimmungsskala von 1 (stimme ich gar nicht zu) bis 5 (stimme ich voll zu) bewertet, sondern nach ihrer persönlichen Wichtigkeit (1 = wichtigste Funktion, 4 = unwichtigste Funktion) geordnet. Eigene Darstellung.

Im Zuge der Kategorie zum Beweisverständnis wurde die Zustimmung zu drei Items von 1 (stimme ich gar nicht zu) bis 5 (stimme ich voll zu) gemessen. Hervorzuheben ist dabei, dass es sich um negativ formulierte Items handelt. Um allerdings eine Vergleichbarkeit mit den übrigen Kategorien zu ermöglichen, werden hier die jeweils invertierten Items angeführt. Dementsprechend verweist ein hoher Wert auf eine hohe Zustimmung zur jeweils positiv formulierten Aussage. Den höchsten Mittelwert zeigt mit 4.36 sowie einer Standardabweichung von 0.81 das Items C7 „Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.“. Demnach wird die Aussage überwiegend abgelehnt, wobei 52 % der Aussage gar nicht zustimmen und 36 % einen Wert 2 auf der Zustimmungsskala

wählen. Das Item C5 „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“ erfährt mit einem invertierten Mittelwert von 3.84 sowie einer Standardabweichung von 0.85 eine tendenziell geringe bis mittlere Zustimmung. Mit 40 % weist der größte Anteil der Stichprobe dieser Aussage den Wert 2 zu, 32 % entscheiden sich für eine neutrale Haltung und damit Wert 3. Eine weniger eindeutige Verteilung zeigt sich bei Item C6 „Es handelt sich erst um einen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist.“ Hierbei wird ein invertierter Mittelwert von 3.28 sowie eine Standardabweichung von 1.06 ersichtlich, was auf eine tendenziell neutrale Haltung bei diesem Item verweist. Je 32 % der Teilnehmenden wählen hier den Wert 2 oder 3 auf der Zustimmungsskala. Zudem entscheidet sich mit 20 % ein Fünftel der Stichprobe für den Wert 4 und stimmt dabei der Aussage überwiegend zu.

Tabelle 7.6

Deskriptive Statistik – Kategorie 1E: Beweisverständnis

	C5_Pre_inv	C6_Pre_inv	C7_Pre_inv
Gültig	25	25	25
Mittelwert	3.84	3.28	4.36
Standardabweichung	0.85	1.06	0.81
Minimum	2	1	2
Maximum	5	5	5

Anmerkung. Item C5: „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“; Item C6: „Es handelt sich erst um einen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist [...]“; Item C7: „Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.“ Eigene Darstellung.

Während die vorangegangenen beschriebenen Kategorien Beliefs zur Mathematik und zu Beweisen als Gegenstand untersuchen, beschreiben die nachfolgenden Items insbesondere Überzeugungen über sich selbst als mathematikbetreibende bzw. beweisführende Personen. Da es sich dabei um insgesamt sieben Items handelt, werden diese in die zwei Tabellen 7.7 und 7.8 aufgeteilt, wobei die invertierten Items zusammengefasst werden. Die größte Zustimmung in dieser Kategorie erfährt Item B3 „Meine mathematischen Fähigkeiten verbessern sich im Laufe des Lernprozesses.“ mit einem Mittelwert von 4.48 und einer Standardabweichung von 0.77, wie in Tabelle 7.7 ersichtlich wird. Wie zudem am angegebenen Minimum deutlich wird, wählt bei diesem Item keine Person den Wert 1 oder 2 auf der Zustimmungsskala. Mit 64 % stimmen beinahe zwei Drittel der Aussage sogar voll zu. In ähnlicher Weise findet sich bei Item E1 „Ich bin davon überzeugt, dass ich meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern kann.“ bei keiner Person in der Stichprobe der Wert 1 oder 2 auf der Skala sowie ein Mittelwert von 4.40 mit einer Standardabweichung von 0.65. Insgesamt stimmt mit 48 % beinahe die Hälfte der Teilnehmenden der Aussage voll zu, 44 % Prozent wählen den Wert 4 auf der Zustimmungsskala. Eine tendenziell neutrale bis zustimmende Haltung zeigt sich mit einem Mittelwert von 3.36

sowie einer Standardabweichung von 3.36 bei Item E5 „Ich sehe mich in der Lage, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ Je 32 % der Teilnehmenden wählen bei diesem Item einen Wert von 3 oder 4 auf der Zustimmungsskala, insgesamt vier Personen stimmen der Aussage voll zu. Eine breitere Verteilung der Zustimmungswerte zeigt sich bei Item E3 „Ich fühle mich im Umgang mit typischen Beweistechniken sicher.“ mit einem Mittelwert von 3.32 und einer Standardabweichung von 1.22. Mit 32 % bezieht der größte Anteil der Stichprobe bei diesem Item mit dem Wert 3 eine neutrale Position. Insgesamt 24 % der Teilnehmenden stimmen der Aussage allerdings auch tendenziell bzw. 20 % der teilnehmenden Personen sogar voll zu. Allerdings lehnen 4 der 25 Personen und damit 16 % der Teilnehmer*innen das Item mit einem Wert 2 eher ab. Eine ähnlich breite Verteilung zeigt sich bei Item E2 „Ich habe genügend Ausdauer, um auch bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.“ mit einem Mittelwert von 3.16 und einer Standardabweichung von 1.14. Je 32 % der Lernenden wählen hier einen Zustimmungswert von 2 bzw. 4 auf der Skala, 20 % der teilnehmenden Personen entscheiden sich für eine neutrale Haltung und damit den Wert 3. Lediglich drei Personen stimmen der Aussage voll zu. Detaillierte Werte zu den Häufigkeiten und Prozentsen finden sich wiederum in Tabelle D11 in Anhang D.

Tabelle 7.7

Deskriptive Statistik – Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (1)

	B3_Pre	E1_Pre	E2_Pre	E3_Pre	E5_Pre
Gültig	25	25	25	25	25
Mittelwert	4.48	4.40	3.16	3.32	3.36
Standardabweichung	0.77	0.65	1.14	1.22	1.15
Minimum	3	3	1	1	1
Maximum	5	5	5	5	5

Anmerkung. Item B3: „Meine mathematischen Fähigkeiten verbessern sich im Laufe des Lernprozesses.“; Item E1: „Ich bin davon überzeugt, dass ich meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern kann.“; Item E2: „Ich habe genügend Ausdauer, um auch bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.“; Item E3: „Ich fühle mich im Umgang mit typischen Beweistechniken [...] sicher.“; Item E5: „Ich sehe mich in der Lage, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ Eigene Darstellung.

Darüber hinaus wurden im Kontext von Beliefs über sich selbst auch Daten zu zwei negativ formulierten Items erhoben. Zur besseren Vergleichbarkeit der Mittelwerte werden diese wiederum invertiert. Höhere Mittelwerte entsprechen demnach positiveren Überzeugungen. Item E6 „Ich fühle ich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.“ weist entsprechend der Tabelle 7.8 einen invertierten Mittelwert von 3.34 sowie eine Standardabweichung von 1.23 auf. Je 28 % der Teilnehmenden stimmen dem Item mit einem Wert von 2 tendenziell nicht zu bzw. nehmen mit einem Zustimmungswert von 3 eine neutrale Haltung ein. 24% der Teilnehmenden stimmt der Aussage gar nicht zu. Diese Tendenzen zeigen sich in den tendenziell hohen Mittelwerten. Einen etwas

niedrigeren invertierten Mittelwert zeigt Item E4 „Es bereitet mir Schwierigkeiten, die zentrale Idee eines Beweises von den spezifischen Details zu unterscheiden.“ mit einem Wert von 3.36 sowie einer Standardabweichung von 1.04. Keine Person stimmt der Aussage des Items voll zu, während vier Teilnehmende dem Item gar nicht zustimmen. Der größte Anteil von 32 % nimmt hier wiederum mit einem Zustimmungswert von 3 eine tendenziell neutrale Haltung ein. Darüber hinaus lehnen 28 % der Lernenden die Aussage mit dem Wert 2 auf der Skala eher ab, 24 % der Teilnehmenden stimmen allerdings darüber hinaus eher zu.

Tabelle 7.8

Deskriptive Statistik – Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (2)

	E4_Pre_inv	E6_Pre_inv
Gültig	25	25
Mittelwert	3.36	3.48
Standardabweichung	1.04	1.23
Minimum	2	1
Maximum	5	5

Anmerkung. Item E4: „Es bereitet mir Schwierigkeiten, die zentrale Idee eines Beweises von den spezifischen Details zu unterscheiden.“; Item E6: „Ich fühle mich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.“ Eigene Darstellung.

Neben der Kategorie zu Beliefs über sich selbst wurden in einer letzten Kategorie Daten von sieben Items zu sozio-affektiven Beliefs erhoben. Diese werden wiederum für eine verbesserte Übersicht in Tabelle 7.9 und 7.10 aufgeteilt. Item B4 „Im Mathematikunterricht erscheint es mir wichtig, sich über mathematische Probleme und Lösungen austauschen und diskutieren zu können.“ bezieht sich dabei insbesondere auf allgemeinere mathematikbezogene Überzeugungen. Ein Mittelwert von 4.24 sowie eine Standardabweichung von 0.93 spricht bei diesem Item für eine tendenzielle Zustimmung zur Aussage. Der größte Anteil der Stichprobe stimmt mit 52 % der Aussage voll zu. 24 % der Teilnehmenden entscheiden sich für den Wert 4 auf der Zustimmungsskala. Lediglich eine Person wählt Wert 2 und niemand aus der Stichprobe lehnt die Aussage ab. Eine noch höhere Zustimmung innerhalb der Kategorie findet sich bei Item F6 „Die Herausforderung einen abstrakten Beweis durchdringen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.“ mit einem Mittelwert von 4.48 und einer Standardabweichung von 0.82. Mit einer überwiegenden Mehrheit von 64 % stimmen beinahe zwei Drittel der Aussage voll zu und 24 % der Proband*innen wählen eine tendenzielle Zustimmung mit dem Wert 4. Das Item wird zudem von keiner Person vollständig abgelehnt, wie das Minimum in Tabelle 7.9 zeigt. Eine insgesamt minimal geringere Zustimmung erfährt das Item F1 „Die Diskussion von Beweisen mit Mitschüler*innen hilft mir, diese besser zu verstehen.“ mit einem Mittelwert von 4.16 sowie einer Standardabweichung von 0.75. Keine Person entscheidet sich bei diesem Item für den Wert 1 oder 2 auf der Skala, wohingegen 44 % der Teilnehmenden der Aussage mit dem Wert

4 auf der Zustimmungsskala tendenziell zustimmen. Mit 36 % stimmt mehr als ein Drittel dem Item zudem voll zu. Darüber hinaus zeigt sich auch bei Item F2 eine neutrale bis positive Haltung gegenüber der Aussage „Der Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten, macht mir Spaß.“ mit einem Mittelwert von 3.88 und einer Standardabweichung von 0.97. Je 32 % der Befragten stimmen dieser Aussage voll oder eher zu, 28 % der Teilnehmenden nimmt eine neutrale Haltung mit einem Zustimmungswert von 3 auf der Skala ein. Item F3 „Es ist befriedigender für mich, eine Beweisidee selbst zu entdecken, als sie nur vorgezeigt zu bekommen.“ weist zwar einen ähnlichen Mittelwert von 3.84 auf, zeigt allerdings eine größere Standardabweichung von 1.21. Tiefere Einblicke liefern hier erneut die Häufigkeiten und Prozente aus Tabelle D11 in Anhang D. Mit 40 % stimmt hier der größte Anteil der Aussage voll zu, allerdings entscheiden sich darüber hinaus zwei Personen und damit 8 Prozent dazu, dem Item gar nicht zuzustimmen, während keine Person den Wert 2 wählt. Zudem nehmen 32 % der Befragten eine eher neutrale Haltung mit einem Zustimmungswert von 3 ein.

Tabelle 7.9

Deskriptive Statistik – Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (1)

	B4_Pre	F1_Pre	F2_Pre	F3_Pre	F6_Pre
Gültig	25	25	25	25	25
Mittelwert	4.24	4.16	3.88	3.84	4.48
Standardabweichung	0.93	0.75	0.97	1.21	0.82
Minimum	2	3	2	1	2
Maximum	5	5	5	5	5

Anmerkung. Item B4: „Im Mathematikunterricht erscheint es mir wichtig, sich über mathematische Probleme und Lösungen austauschen und diskutieren zu können.“; Item F1: „Die Diskussion von Beweisen mit Mitschüler*innen hilft mir, diese besser zu verstehen.“; Item F2: „Der Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten, macht mir Spaß.“; Item F3: „Es ist befriedigender für mich, eine Beweisidee selbst zu entdecken, als sie nur vorgezeigt zu bekommen.“; Item F6: „Die Herausforderung einen abstrakten Beweis durchdrungen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.“ Eigene Darstellung.

Im Vergleich tendenziell niedrige Mittelwerte zeigen sich bei den in Tabelle 7.10 angeführten Items zu sozio-affektiven Beliefs. Beide Items thematisieren dabei die Präsentation von eigenen Beweisideen in der Klasse, wobei explizit zwischen einer mathematischen und sozialen Ebene unterschieden wird. Item F4 „Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.“ weist hier einen Mittelwert von 2.64 und eine Standardabweichung von 1.38 auf, was auf eine tendenziell neutrale bzw. ablehnende Haltung verweist. Mit 32 % hat der größte Anteil der Stichprobe dieser Aussage gar nicht zugestimmt. Je 24 % der Teilnehmenden wählten den Wert 3 bzw. 4 auf der Zustimmungsskala und zeigen damit eine eher neutrale bis positive Haltung. Lediglich 2 Personen stimmen der Aussage voll zu. Etwas zustimmender gestalten sich die Ergebnisse bei Item F5 „Ich fühle mich auf sozialer Ebene im Klassenverband sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.“ Hier zeigt sich ein Mittelwert von 3.32 und ebenfalls eine Standardabweichung

von 1.38. Insgesamt 28 % der teilnehmenden Personen stimmen der Aussage eher zu, 24 % tun dies sogar voll. Allerdings lehnen darüber hinaus 20 % das Item mit einem Wert von 2 auf der Zustimmungsskala eher ab.

Tabelle 7.10

Deskriptive Statistik – Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (2)

	F4_Pre	F5_Pre
Gültig	25	25
Mittelwert	2.64	3.32
Standardabweichung	1.38	1.38
Minimum	1	1
Maximum	5	5

Anmerkung. Item F4: „Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.“; Item F5: „Ich fühle mich auf sozialer Ebene im Klassenverband sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.“ Eigene Darstellung.

Im Zuge der Reliabilitätsprüfung in Abschnitt 5.3.1 konnte bereits festgestellt werden, dass mit einem Cronbachs α von 0.747 bzw. einem McDonalds ω von 0.708 der Mittelwert über die Items in Kategorie 2 zu den Beliefs über sich selbst gebildet werden kann. Dies trifft mit einem α von 0.709 bzw. einem ω von 0.764 ebenso auf Kategorie 3 zu den sozio-affektiven Beliefs zu. Die nachfolgende Tabelle 7.11 zeigt dabei einen Mittelwert von 3.65 sowie eine Standardabweichung von 0.66 in der Kategorie 2 und damit eine neutrale bis mittlere Zustimmung. Ein minimal höherer Mittelwert von 3.79 sowie eine übereinstimmende Standardabweichung von 0.66 wird in Kategorie 3 sichtbar und verweist auf eine ebenfalls neutrale bis zustimmende Haltung.

Tabelle 7.11

Deskriptive Statistik – Mittelwerte Kategorie 2 und 3

	MW_BS_Pre	MW_BSA_Pre
Gültig	25	25
Mittelwert	3.65	3.79
Standardabweichung	0.66	0.66
Minimum	2.29	2.29
Maximum	4.86	4.86

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die Mittelwerte der Kategorie 2 zu Beliefs über sich selbst (MW_BS_Pre) und Kategorie 3 zu sozio-affektiven Beliefs (MW_BSA_Pre). Eigene Darstellung.

Den Abschluss des Fragebogens bildet eine offene Aufgabe zur Konstruktion einer Beweisidee zur Aussage „Ist eine Funktion f auf einem offenen Intervall I differenzierbar und besitzt f in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.“ (Greefrath et al., 2016, S. 197). Dabei wird der Wert 0 für fehlerhafte oder fehlende Ansätze, 1 für unvollständige, jedoch teilweise korrekte Ansätze, 2 für bereits präformale im Sinne inhaltlich-anschaulicher Ansätze und 3 für beginnende formal-deduktive Ansätze vergeben. Es ist darauf hinzuweisen, dass der Wert 3, wie am Maximum in Tabelle 7.12 ersichtlich, nicht vergeben werden konnte.

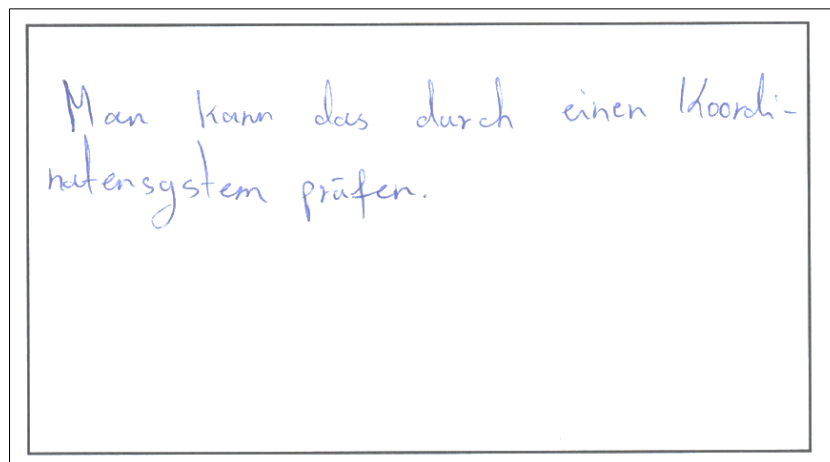
Tabelle 7.12*Deskriptive Statistik – Konstruktion einer Beweisidee*

	G_Pre
Gültig	25
Mittelwert	0.68
Standardabweichung	0.90
Minimum	0
Maximum	2

Anmerkung. Die Konstruktionen wurden mit den Zahlen 0 (= fehlerhafter oder kein Ansatz), 1 (= unvollständiger Ansatz), 2 (= präformaler/inhaltlich-anschaulicher Ansatz) und 3 (= formal-deduktiver Ansatz) kodiert. Eigene Darstellung.

Insgesamt zeigt sich zudem ein niedriger Mittelwert von 0.68 sowie eine Standardabweichung von 0.90. Mit 60 % zeigt die Mehrheit der Teilnehmenden keinen oder einen fehlerhaften Ansatz. Insgesamt 28 % der Befragten und damit konkret 7 Personen können allerdings auch einen bereits präformalen bzw. inhaltlich-anschaulichen Ansatz liefern, welcher mit graphischen Elementen arbeitet und/oder über die Monotonie argumentiert. Von den insgesamt 25 Lernenden zeigen drei Personen zudem einen unvollständigen Ansatz, welcher zwar Bezüge zu Vorstellungen wie der Steigung einer Tangente herstellt, allerdings diese nicht näher konkretisiert. Die detaillierten Häufigkeiten und Prozente finden sich wiederum in Tabelle D11 in Anhang D.

An dieser Stelle sollen zudem zwei exemplarische Ausarbeitungen dargestellt werden, welche das Spektrum der von den Lernenden skizzierten Ansätze für eine Beweisidee widerspiegeln. Abbildung 7.6 zeigt dabei eine Ausarbeitung, welche mit dem Wert 0 bewertet wurde. Die Person verweist auf die Prüfung durch ein Koordinatensystem.

Abbildung 7.6*Beispiel zur Konstruktion einer Beweisidee (1)*

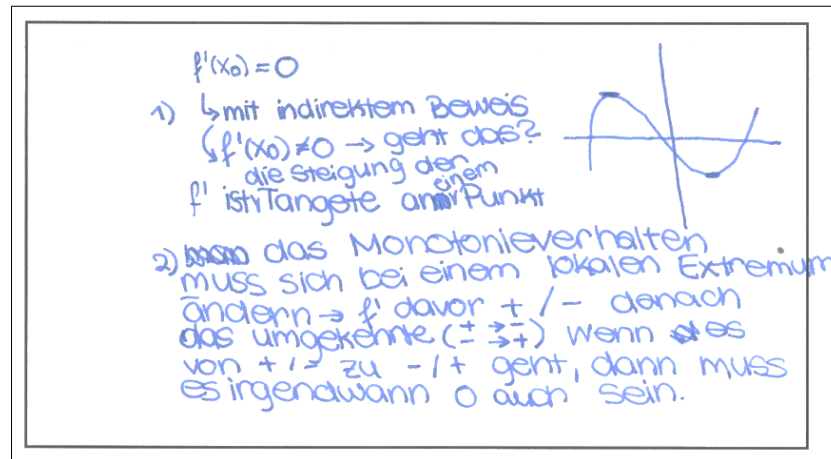
Anmerkung. Konstruktion einer Beweisidee zur notwendigen Bedingung lokaler Extrema.

Im Gegensatz dazu zeigt sich in Abbildung 7.7 eine Ausarbeitung, welche mit dem Wert 2 bewertet wurde. Die Person bringt auf der einen Seite einen Ansatz über einen indirekten Beweis

und führt auf der anderen Seite Ausführungen zu einem direkten Beweis an, wobei über das Monotonieverhalten argumentiert wird. Ergänzt werden die Ansätze um eine Skizze.

Abbildung 7.7

Beispiel zur Konstruktion einer Beweisidee (2)



Anmerkung. Konstruktion einer Beweisidee zur notwendigen Bedingung lokaler Extrema.

Zusammenfassend zeigen sich in der Kategorie zur statischen Sichtweise sowie zu einem formalen Beweiskonzept tendenziell mittlere bis hohe Mittelwerte der Zustimmung. Ähnliches trifft auf die Kategorie zur dynamischen Sichtweise auf die Mathematik und mathematische Beweise zu, wobei die Zustimmung beim Thema Beweisen ausgeprägter ist als bei einer Perspektive auf die Mathematik im Allgemeinen. Ein Blick auf die Items in der Kategorie, Beweisen als Entdecken und Explorieren zu verstehen, zeigt darüber hinaus tendenziell neutrale bis mittelhohe Zustimmungswerte, die sich insbesondere um den Wert 4 auf der Zustimmungsskala bewegen. In der Kategorie zum Beweisverständnis finden sich ebenso tendenziell mittlere bis hohe Mittelwerte, wobei darauf zu achten ist, dass ein hoher Mittelwert insbesondere wünschenswert ist, da die negativ formulierten Items hier invertiert wurden. Diese neutrale bis zustimmende Haltung in einem Bereich zwischen 3 und 4 auf der Zustimmungsskala zeigt sich auch bei den Mittelwerten der Kategorien zu Beliefs über sich selbst und sozio-affektiven Überzeugungen. Im Rahmen der selbstständigen Konstruktion einer Beweisidee zeigen sich vorrangig fehlerhafte bzw. unvollständige Ansätze. Kein Ansatz stellt einen formal-deduktiven Bezug her.

Bevor die Ergebnisse im Prä-Post-Vergleich dargestellt werden, interessieren nachfolgend etwaige Zusammenhänge im Hinblick auf die im Zuge des im Anfangsfragebogen erhobenen Beliefs und den gesammelten Daten zum Geschlecht, dem Besuch des Wahlpflichtfaches Mathematik, der Mathematiknote, dem Verständnis der Analysis und dem Vorwissen der

Lernenden. Darüber hinaus wird die Korrelation zwischen den mathematik- sowie spezifisch beweisbezogenen Beliefs in den Blick genommen.

7.2.2 Inferenzstatistische Ergebnisse

Da im Zuge der Inferenzstatistik die Unterschiede zwischen dem Merkmal Geschlecht sowie dem Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik und die Zusammenhänge zur Mathematiknote, dem Verständnis von Themen der Analysis und den Vorerfahrungen mit Beweisen zu jedem einzelnen Item geprüft wurden, finden sich an dieser Stelle lediglich die signifikanten Ergebnisse angeführt. Eine vollständige Darstellung sämtlicher Berechnungen findet sich in Tabelle D14 bis D17 in Anhang D. Darüber hinaus werden in den nachfolgenden Tabellen sowohl der Student- als auch der Welch-Test dargestellt, die Bestimmung der Voraussetzungen findet sich ebenfalls in Tabelle D14 und D15 im Anhang.

Tabelle 7.13

t-Test für unabhängige Stichproben zum Merkmal Geschlecht

	Test	Statistik	p	df	Cohens d	Std.-Fehler Cohens d
MW_BSA_Pre	Student	-3.102	.005	23.00	-1.330	0.486
	Welch	-3.777	.001	22.04	-1.459	0.496
F3_Pre	Student	-2.436	.023	23.00	-1.044	0.465
	Welch	-2.902	.008	21.23	-1.135	0.471
F4_Pre	Student	-2.765	.011	23.00	-1.185	0.475
	Welch	-3.403	.003	22.37	-1.307	0.484
F5_Pre	Student	-2.576	.017	23.00	-1.105	0.469
	Welch	-3.230	.004	22.79	-1.227	0.478

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Unterschiede im Hinblick auf das Geschlecht. Eigene Darstellung.

Einen Blick auf Unterschiede hinsichtlich des Merkmals Geschlecht bei einzelnen Items liefert Tabelle 7.13. Dabei ist hervorzuheben, dass ein *t*-Test zur Bestimmung des Unterschieds insbesondere möglich war, da keine der befragten Personen im Hinblick auf ihr Geschlecht „divers/keine Angabe“ angibt. Hinsichtlich des Unterschieds bezüglich des Geschlechts sowie des Mittelwerts der Kategorie 3 zu den sozio-affektiven Beliefs kann aufgrund der Voraussetzung der Normalverteilung ($W = .981$, $p = .907$) sowie der Homogenität der Varianzen ($F = 2.702$, $p = .114$) der Student-Test angewendet werden. Dabei zeigt Tabelle 7.13 mit $t = -3.102$ und $p = .005$ einen signifikanten Unterschied zwischen Jungen und Mädchen im Hinblick auf die Kategorie zu sozio-affektiven Beliefs. Mit $t = -3.777$ und $p = .001$ wird dieser Unterschied zudem durch den Welch-Test bestätigt. Mit einem Mittelwert von 4.304 weisen dabei die männlichen Teilnehmenden einen höheren Wert auf als die weiblichen mit einem Mittelwert von 3.555. Mit $d = -1.330$ zeigt sich diesbezüglich zudem ein großer Effekt. Innerhalb der Kategorie ergibt sich dabei ein signifikanter Unterschied bei drei Items. Sowohl bei Item F3 ($W = .890$, $p = .011$) als auch F4 ($W = .872$, $p = .005$) kann die Normalverteilung nicht vorausgesetzt werden. Für Item F3 zeigt sich im Welch-Test mit $t = -2.902$ und $p = .008$ ein signifikanter Unterschied im

Hinblick auf das Geschlecht. Das negative Vorzeichen verweist auf eine höhere Zustimmung der männlichen Teilnehmer zur Aussage, dass es für sie befriedigender ist, eine Beweisidee selbst zu entwickeln als nur vorgezeigt zu bekommen. Mit $d = -1.135$ zeigt sich auch hier ein starker Effekt. Auch im Hinblick auf Item F4 und die Aussage „Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.“ ergibt sich ein signifikanter Unterschied im Hinblick auf das Geschlecht mit starkem Effekt ($t = -3.403$, $p = .003$, $d = -1.307$), wobei männliche Teilnehmende der Aussage höher zustimmen als weibliche. Dies trifft gleichfalls auf das Vorstellen von eigenen Beweisideen hinsichtlich der Sicherheit auf sozialer Ebene zu ($t = 3.230$, $p = 0.004$, $d = -1.227$).

Im Hinblick auf den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik zusätzlich zum regulären Unterricht zeigen sich deutlich mehr signifikante Unterschiede als in Bezug auf das Geschlecht. Die Prüfung der entsprechenden Voraussetzungen, ob der Student- oder Welch-Test heranzuziehen ist, findet sich wiederum in Tabelle D15 in Anhang D. Die durchwegs negativen Vorzeichen verweisen dabei auf höhere Zustimmungsmittelwerte in der Gruppe, welche das Wahlpflichtfach besuchen. Die entsprechenden Mittelwerte der Gruppen sind Tabelle D16 in Anhang D zu entnehmen.

Tabelle 7.14

t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (1)

	Test	Statistik	p	df	Cohens d	Std.-Fehler Cohens d
C4_Pre	Student	-1.619	.119	23.000	-0.809	0.516
	Welch	-2.502	.024	15.213	-0.969	0.523
D1_Pre	Student	-2.494	.020	23.000	-1.247	0.537
	Welch	-3.515	.004	11.659	-1.448	0.550
C5_Pre_inv	Student	-1.711	.101	23.000	-0.855	0.518
	Welch	-2.243	.049	9.739	-0.967	0.523

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Unterschiede im Hinblick auf den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik. Eigene Darstellung.

Der erste signifikante Unterschied mit großem Effekt ergibt sich in Tabelle 7.14 bei Item C4 und der Aussage, dass Beweise dabei helfen, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen ($t = -2.503$, $p = .024$, $d = -0.969$). Teilnehmende des Wahlpflichtfachs zeigen damit tendenziell höhere Zustimmungswerte bei diesem Item. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei Item D1, wonach der erste Schritt beim Beweisen in der Entwicklung einer intuitiven Idee liegt ($t = -3.515$, $p = -.004$, $d = -1.448$) sowie Item C5 zur Prüfung einer Aussage anhand vieler Beispiele als Beweisform ($t = -2.243$, $p = .049$, $d = -0.967$).

Neben den hier beschriebenen Einzelitems verdeutlicht Tabelle 7.15 zudem einen signifikanten Unterschied mit großem Effekt zwischen dem Besuch des Wahlpflichtfachs und den Beliefs über sich selbst im Rahmen des Welch-Tests ($t = -2.740$, $p = .014$, $d = -1.036$). Der Unterschied

spiegelt sich dabei insbesondere in den Items E2 zur Ausdauer bei schwierigen Beweisen ($t = -4.058$, $p < .001$, $d = -1.525$), Item E5 zur Aussage „Ich sehe mich in der Lage, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ ($t = -2.494$, $p = .020$, $d = -1.247$) und Item E6 zur Überforderung beim selbstständigen Führen eines Beweises ($t = -2.548$, $p = .019$, $d = -0.925$) wider. Dabei zeigt sich im Hinblick auf die Ausdauer ein hochsignifikanter Unterschied, wobei das negative Vorzeichen wiederum auf höhere Zustimmungswerte beim Besuch des Wahlpflichtfachs verweist. Darüber hinaus weisen alle Items einen großen Effekt auf, wie am jeweiligen Cohens d erkennbar wird. Bei Item E5 sind, wie in Tabelle D15 in Anhang D ersichtlich, die Voraussetzungen für den Student-Test gegeben, welcher auf einen signifikanten Unterschied hinweist. Im Zuge des Welch-Tests zeigt sich ebenfalls ein signifikantes Ergebnis ($t = -3.712$, $p = .002$, $d = -1.475$).

Tabelle 7.15

t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (2)

	Test	Statistik	p	df	Cohens d	Std.-Fehler Cohens d
MW_BS_Pre	Student	-1.713	.100	23.00	-0.856	0.518
	Welch	-2.740	.014	16.90	-1.036	0.526
E2_Pre	Student	-2.514	.019	23.00	-1.257	0.538
	Welch	-4.058	< .001	17.37	-1.525	0.555
E5_Pre	Student	-2.494	.020	23.00	-1.247	0.537
	Welch	-3.712	.002	13.59	-1.475	0.552
E6_Pre_inv	Student	-1.503	.147	23.00	-0.751	0.514
	Welch	-2.548	.019	20.00	-0.925	0.521

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Unterschiede im Hinblick auf den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik. Eigene Darstellung.

Darüber hinaus ergibt sich sowohl mit dem Student- als auch mit dem Welch-Test ein signifikanter Unterschied mit großem Effekt für den Besuch des Wahlpflichtfaches und die getesteten sozio-affektiven Beliefs ($t = -2.265$, $p = .033$, $d = -1.133$ bzw. $t = -2.851$, $p = .019$, $d = -1.260$), wobei wiederum anhand des Vorzeichens ersichtlich wird, dass Teilnehmende des Wahlpflichtfaches höhere Zustimmungswerte aufweisen. Die entsprechenden Gruppenmittelwerte finden sich wiederum in Tabelle D16 in Anhang D. Ein signifikanter Unterschied mit großem Effekt ergibt sich dabei spezifisch bei Item B4 zur Mathematik im Allgemeinen, wonach es im Mathematikunterricht wichtig erscheint, sich über mathematische Probleme und Lösungen austauschen und diskutieren zu können ($t = -2.375$, $p = .032$, $d = -0.928$). Spezifisch für das Beweisen zeigt sich bei Item F2 zum Spaß am Prozess des gemeinsamen Arbeitens an einem Beweis ein signifikanter Unterschied mit großem Effekt ($t = -2.740$, $p = .019$, $d = -1.135$), wobei Teilnehmende des Wahlpflichtfaches hier eine tendenziell höhere Zustimmung zeigen. Bei Item F3, wonach es befriedigender ist eine Beweisidee selbst zu entdecken, als nur vorgezeigt zu bekommen, zeigt sich ein signifikantes Ergebnis mit großem Effekt im Hinblick auf den Unterschied ($t = -3.527$, $p = .002$, $d = -1.296$).

Tabelle 7.16*t-Test für unabhängige Stichproben zum Besuch des Wahlpflichtfachs (3)*

	Test	Statistik	p	df	Cohens d	Std.-Fehler Cohens d
MW_BSA_Pre	Student	-2.265	.033	23.000	-1.133	0.531
	Welch	-2.851	.019	8.905	-1.260	0.538
B4_Pre	Student	-1.557	.133	23.000	-0.778	0.515
	Welch	-2.375	.032	14.630	-0.928	0.521
F2_Pre	Student	-1.960	.062	23.000	-0.980	0.523
	Welch	-2.740	.019	11.405	-1.135	0.531
F3_Pre	Student	-2.116	.045	23.000	-1.058	0.527
	Welch	-3.527	.002	19.090	-1.296	0.540

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Unterschiede im Hinblick auf den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik. Eigene Darstellung.

Neben den Unterschieden im Hinblick auf das Geschlecht sowie den Besuch des Wahlpflichtfaches bezüglich der Beliefs der Lernenden im Prätest, wurden darüber hinaus Zusammenhänge mit der Mathematiknote sowie dem Verständnis der Themen aus der Analysis und den Vorerfahrungen zu beweisen untersucht. Während bei keinem Item ein signifikanter Zusammenhang zu den Vorkenntnissen festgestellt werden kann, zeigt sich bezüglich der Mathematiknote eine signifikante Korrelation bei der Kategorie zu Beliefs über sich selbst ($p = .020$), wobei mit $\rho = -.462$ ein negativer mittlerer Zusammenhang bzw. Effekt festzustellen ist. Bessere Mathematiknoten stehen damit mit tendenziell positiven Beliefs über sich selbst im Zusammenhang. Spezifischer besteht ein signifikanter negativer mittlerer Zusammenhang zwischen der Mathematiknote sowie dem Item E5 und der empfundenen Sicherheit auf sozialer Ebene bei der Präsentation von Beweisideen in der Klasse ($\rho = -.480$, $p = .015$). Damit besteht ein positiver Zusammenhang im Hinblick auf bessere Mathematiknoten und der Sicherheit bei der Präsentation eigener Beweisideen auf sozialer Ebene.

Tabelle 7.17*Spearman's Rangkorrelation zur Mathematiknote*

		n	Spearman's Rho	p
Mathematiknote	– MW_BS_Pre	25	-.462	.020
Mathematiknote	– E5_Pre	25	-.480	.015

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Zusammenhänge im Hinblick auf die Mathematiknote. Eigene Darstellung.

Darüber hinaus zeigen sich mehrere signifikante Zusammenhänge im Hinblick auf das Verständnis der Themen aus der Analysis und Beliefs über sich selbst sowie sozio-affektive Beliefs. Tabelle 7.18 veranschaulicht dabei einen signifikanten, negativen mittleren bis hohen Zusammenhang zwischen dem Verständnis und der Kategorie zu Beliefs über sich selbst ($\rho = -.680$, $p = .001$). Entsprechend der Kodierung von 1 (= sehr gut) bis 5 (= gar nicht gut) steht damit ein besseres Verständnis mit höheren Zustimmungswerten und damit positiveren Beliefs in Verbindung. Innerhalb der Kategorie trifft dies insbesondere auf Item B3 zur Einsicht, dass sich mathematische Fähigkeiten im Laufe des Lernprozesses verbessern ($\rho = -.712$, $p < .001$) sowie

Item E5 „Ich sehe mich in der Lage einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ ($\rho = -.598$, $p = .002$) zu. Im Hinblick auf Item B3 zeigt sich dabei insbesondere ein hochsignifikanter, tendenziell hoher Zusammenhang.

Zudem ergibt sich ein weiterer hochsignifikanter, negativer mittlerer bis hoher Zusammenhang im Hinblick auf die Kategorie zu sozio-affektiven Beliefs ($\rho = -.639$, $p < .001$), wobei hier insbesondere bei Item F4 zur Sicherheit auf mathematischer Ebene bei der Präsentation von Beweisideen in der Klasse ($\rho = -.576$, $p = .003$) und Item F6 das Durchdringen eines abstrakten Beweises als lohnende Erfahrung zu sehen ($\rho = -.542$, $p = .006$) negative mittlere bis hohe, signifikante Zusammenhänge festzustellen sind, wie in Tabelle 7.18 ersichtlich wird. Dementsprechend steht ein besseres Verständnis mit positiveren sozio-affektiven Beliefs in Verbindung, wobei hier spezifisch die Sicherheit auf mathematischer Ebene bei der Präsentation von Beweisideen sowie das Durchdringen eines Beweises als lohnende Erfahrung hervorzuheben sind.

Tabelle 7.18

Spearman's Rangkorrelation zum Verständnis der Analysis

			n	Spearman's Rho	p
Verständnis der Analysis	–	MW_BS_Pre	24	–.620	.001
Verständnis der Analysis	–	B3_Pre	24	–.712	< .001
Verständnis der Analysis	–	E5_Pre	24	–.598	.002
Verständnis der Analysis	–	MW_BSA_Pre	24	–.639	< .001
Verständnis der Analysis	–	F4_Pre	24	–.576	.003
Verständnis der Analysis	–	F6_Pre	24	–.542	.006

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Zusammenhänge im Hinblick auf das individuelle Verständnis der Themen aus dem Gebiet der Analysis. Eigene Darstellung.

In einem letzten Schritt wurde zudem der Zusammenhang zwischen den mathematik- sowie spezifisch beweisbezogenen Beliefs untersucht. In Tabelle 7.19 wird dabei insbesondere ersichtlich, dass sowohl im Hinblick auf eine statische ($\rho = .368$, $p = .070$) als auch dynamische Sichtweise ($\rho = -.144$, $p = .494$) geringe bis mittlere Zusammenhänge zwischen mathematik- und beweisbezogenen Beliefs festzustellen sind, wobei statistische Signifikanz nicht gegeben ist. Darüber hinaus veranschaulicht Tabelle 7.19 tendenziell positive mittlere Zusammenhänge der allgemeinen mathematikbezogenen Items zu Beliefs über sich selbst sowie sozio-affektive Beliefs und den übrigen beweisspezifischen Items innerhalb dieser Kategorien ($\rho = .307$ bzw. $\rho = .315$). In Tabelle D in Anhang D9 finden sich entsprechende Voraussetzungsüberprüfungen zur Bildung der Mittelwerte innerhalb der Kategorien, wenn die jeweils mathematikbezogenen Items entfernt werden. Mit $p = .136$ und $p = .125$ sind die Zusammenhänge allerdings für keine der beiden Kategorien signifikant. Es zeigt sich demnach kein signifikanter Zusammenhang zwischen den mathematik- und beweisbezogenen Beliefs in dieser Gruppe.

Tabelle 7.19*Spearman's Rangkorrelation zu mathematik- und beweisbezogenen Beliefs*

			n	Spearman's Rho	p
B1_Pre	–	C1_Pre	25	.368	.070
B2_Pre	–	C2_Pre	25	–.144	.494
B4_Pre	–	MW_BSA_B	25	.307	.136
B3_Pre	–	MW_BS_B	25	.315	.125

Anmerkung. Die Tabelle zeigt die signifikanten Zusammenhänge zwischen den mathematik- und beweisbezogenen Beliefs in den verschiedenen Kategorien. Eigene Darstellung.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass im Zuge der Inferenzstatistik signifikante Unterschiede im Hinblick auf das Geschlecht sowie den Besuch des Wahlpflichtfaches festzustellen sind. Die Ergebnisse zeigen diesbezüglich insbesondere signifikant höhere Zustimmungswerte hinsichtlich sozio-affektiver Beliefs bei männlichen Teilnehmern, sodass einer sozialen Komponente von Beweisen eine höhere Bedeutsamkeit zugeschrieben wird. Insbesondere wird das selbstständige Entwickeln von Beweisideen sowie die Sicherheit beim Präsentieren von Beweisen sowohl auf mathematischer als auch sozialer Ebene positiver hervorgehoben. Hinsichtlich des Besuchs des Wahlpflichtfaches Mathematik außerhalb des regulären Unterrichts zeigen sich signifikante Unterschiede bei der Betonung der Systematisierungsfunktion, der Entwicklung einer intuitiven Idee und der Prüfung vieler Beispiele als ungenügender Beweis, wobei eine höhere Zustimmung bei Lernenden des Wahlpflichtfaches festzustellen ist. Darüber hinaus zeigen sich signifikante Unterschiede im Zuge der Beliefs über sich selbst und der sozio-affektiven Beliefs, wobei auch hier Schüler*innen, die das Wahlpflichtfach Mathematik besuchen, tendenziell höhere Zustimmungswerte und damit positivere bzw. produktive Überzeugungen für mathematisches Beweisen zeigen. Zudem ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Mathematiknote und der Kategorie zu Beliefs über sich selbst, wobei insbesondere die Betonung der Sicherheit bei der Präsentation von Beweisideen auf mathematischer Ebene hervorzuheben ist. Bessere Noten gehen dabei mit höheren Zustimmungswerten einher und zeigen damit hier tendenziell positivere Beliefs über sich selbst. Ebenso zeigt sich ein Zusammenhang zwischen dem Verständnis der Themen aus dem Gebiet der Analysis und den Beliefs der Lernenden über sich selbst und den sozio-affektiven Beliefs. Dabei wird von Lernenden mit einem größeren Verständnis das Durchdringen eines abstrakten Beweises als lohnende Erfahrung bewertet und die Sicherheit bei der Präsentation von Beweisideen auf der mathematischen Ebene betont. Zudem zeigt sich bei diesen Lernenden eine höhere Zustimmung im Hinblick auf die Verbesserung der mathematischen Fähigkeiten im Laufe des Lernprozesses und beim selbstständigen Nachvollziehen von Beweisen. Innerhalb der untersuchten Stichprobe ist darüber hinaus kein Zusammenhang zwischen den mathematik- und beweisbezogenen Beliefs im Hinblick auf eine

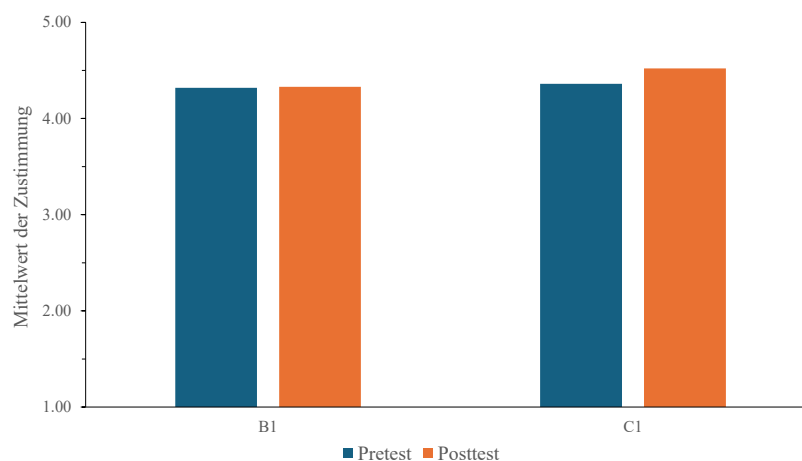
statische bzw. dynamische Sichtweise sowie Überzeugungen über sich selbst und sozio-affektive Einstellungen festzustellen.

7.3 Vergleich der Ergebnisse des Prä- und Posttests

Anknüpfend an die Darstellung der Ergebnisse aus der ersten Erhebung mathematik- und beweisbezogener Beliefs der Lernenden, werden in den nachfolgenden Ausführungen die Items innerhalb jeder Kategorie im Prä-Post-Vergleich gegenübergestellt. Darüber hinaus wird für jedes Item ein t-Test für abhängige Stichproben durchgeführt. Dabei wurde zuerst die Voraussetzung der Normalverteilung mittel Shapiro-Wilk-Test geprüft und sowohl der Student-Test für abhängige Stichproben als auch der Wilcoxon-Test durchgeführt. Sämtliche diesbezügliche Ergebnisse finden sich in Tabelle D19 in Anhang D. Die hier im Rahmen des Prä-Post-Vergleichs angeführten deskriptiven Ergebnisse finden sich darüber hinaus in Tabelle D10 und D11 in Anhang D.

Abbildung 7.8

Prä- und Postergebnisse Kategorie 1A: Statische Sichtweise



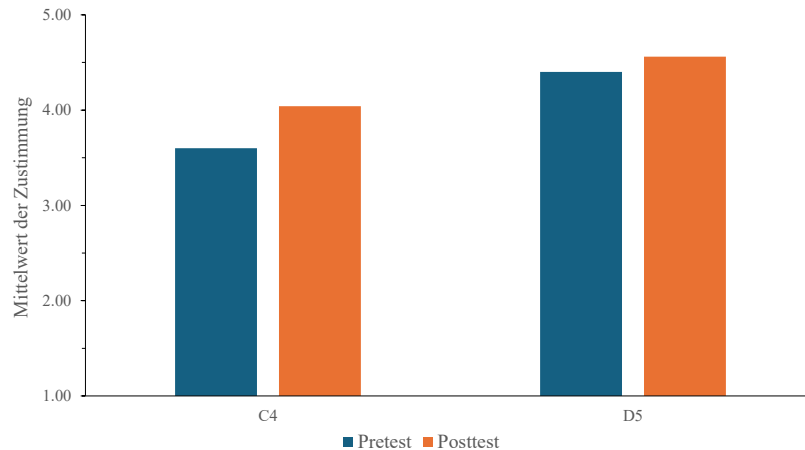
Anmerkung. Mathematik besteht aus dem präzisen und streng zu befolgenden Anwenden von Regeln und Gesetzen (B1); Verifikationsfunktion (C1). Eigene Darstellung.

Innerhalb der Kategorie 1A zur statischen Sichtweise auf die Mathematik und mathematische Beweise zeigt der Prä-Post-Vergleich in Abbildung 7.8 kaum eine Veränderung im Hinblick auf die Zustimmung zur Aussage, dass Mathematik aus der präzisen und streng zu befolgenden Anwendung von Regeln und Gesetzen besteht ($MW = 4.32$, $SD = 0.63$ bzw. $MW = 4.33$, $SD = 0.48$). Dies wird durch den Wilcoxon-Test ebenfalls bestätigt ($z = 0.338$, $p = 0.777$). Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Zustimmung zur Verifikationsfunktion von Beweisen, wobei ein minimal höherer Zustimmungsmittelwert in Abbildung 7.8 ersichtlich ist ($MW = 4.36$, $SD = 0.86$ bzw. $MW = 4.52$, $SD = 0.77$). Der Wilcoxon-Test zeigt dabei mit $z = -1.274$ sowie $p =$

.183 keinen signifikanten Unterschied. Insgesamt ergibt sich damit kein signifikanter Unterschied im Hinblick auf eine mathematik- und beweisbezogene statische Sichtweise und eine allgemein eher hohe Zustimmung zu einer statischen Perspektive.

Abbildung 7.9

Prä- und Postergebnisse Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept



Anmerkung. Systematisierungsfunktion von Beweisen (C4); Notwendigkeit der Kenntnis sämtlicher Definitionen in Beweisen (D5). Eigene Darstellung.

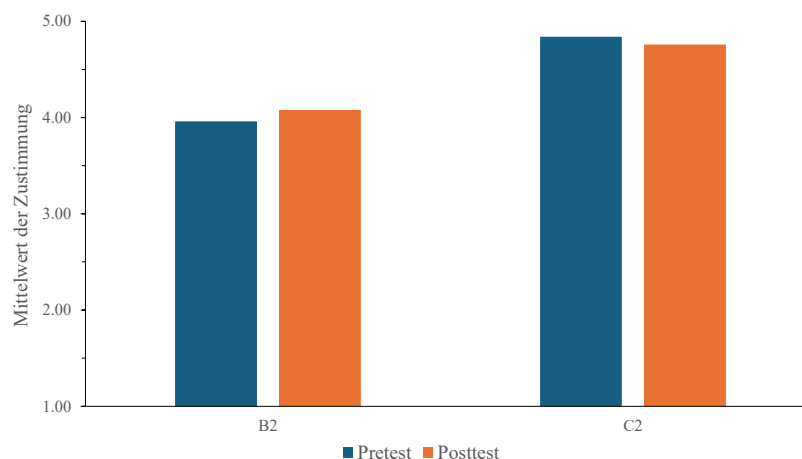
In Zusammenhang mit einer statischen Sichtweise auf die Mathematik und mathematisches Beweisen zeigt sich im Rahmen eines formalen Beweiskonzepts eine neutrale bis tendenziell zustimmende Haltung zur Systematisierungsfunktion von Beweisen in dem Sinne, dass Beweise dabei helfen, mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen. Im Zuge des Prä-Post-Vergleiches wird in Tabelle 7.9 eine höhere Zustimmung zu diesem Aspekt nach Abschluss der Interventionsmaßnahmen ersichtlich (MW = 3.60, SD = 0.96 bzw. MW = 4.04, SD = 0.79). Allerdings verweist der Wilcoxon-Test diesbezüglich auf keinen signifikanten Unterschied ($z = -1.883$, $p = .053$). Sowohl in der Anfangs- als auch der Enderhebung zeigt sich darüber hinaus eine tendenziell hohe Zustimmung zur Notwendigkeit im Zuge des Beweisens die Definition sämtlicher einfließender Begriffe zu kennen (MW = 4.40, SD = 0.87 bzw. MW = 5.56, SD = 0.71). Auch wenn die Posttestung einen höheren Mittelwert der Zustimmung zeigt, ist der Unterschied auch hier nicht signifikant ($z = -0.917$, $p = .358$). Insgesamt zeigt sich damit eine Tendenz zu einer höheren und im Allgemeinen deutlicheren Ausprägung eines formalen Beweiskonzeptes am Ende der Untersuchung.

Ein ähnliches Bild zur statischen Sichtweise auf die Mathematik und mathematisches Beweisen ergibt sich in der Kategorie zu einer dynamischen Perspektiven in Abbildung 7.10. Eine im Vergleich zur statischen Sichtweise auf die Mathematik niedrigere, neutrale bis tendenziell zustimmende Haltung zeigt sich bei Item B2 und zur Aussage, dass Mathematik dabei hilft Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt, wobei am Ende der Intervention ein etwas höherer

Zustimmungswert erzielt wird (MW = 3.96, SD = 0.89 bzw. MW = 4.08, SD = 0.83). Wiederum zeigt sich allerdings, dass der Unterschied im Zuge der Prä-Post-Erhebung nicht signifikant ist ($t = -0.385$, $p = .704$). Eine hohe Zustimmung zur Erklärungsfunktion von Beweisen zeigt sich sowohl im Zuge der Prä- als auch Posterhebung, wobei ein marginal geringerer Zustimmungswert in der Abschlusstestung in Abbildung 7.10 ersichtlich wird (MW = 4.84, SD = 0.37 bzw. MW = 4.76, SD = 0.60). Auch hier zeigt sich kein signifikanter Unterschied zwischen der Anfangs- und Enderhebung ($z = 0.734$, $p = .484$). Insgesamt ergeben sich damit sowohl vor den Interventionsmaßnahmen als auch im Anschluss eine zustimmende Haltung zur dynamischen Sicht auf die Mathematik und eine hohe Zustimmung zur Erklärungsfunktion von Beweisen.

Abbildung 7.10

Prä- und Postergebnisse Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise



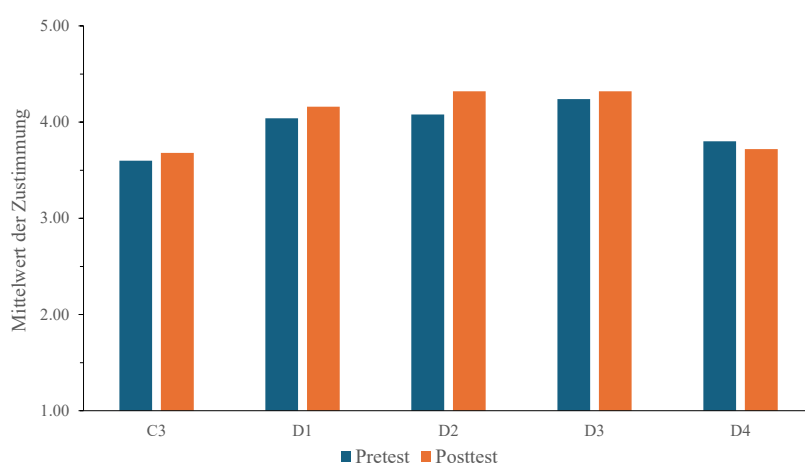
Anmerkung. Mathematik als Lösung von Problemen und zum Finden neuer Ideen (B2); Erklärungsfunktion von Beweisen (C2). Eigene Darstellung.

Die mit einer dynamischen Sichtweise einhergehende Kategorie zu Beweisen im Sinne des Entdeckens und Explorierens zeigt darüber hinaus ein ähnliches Bild. Hinsichtlich der Aussage, dass man durch das Beweisen allgemeine Methoden lernt, um mathematische Probleme zu lösen ergibt sich sowohl am Beginn als auch beim Abschluss eine tendenziell neutrale bis zustimmende Haltung (MW = 3.60, SD = 0.82 bzw. MW = 3.68, SD = 0.95), wobei die höhere Zustimmung beim Posttest nicht signifikant ist ($t = 0.467$, $p = .629$). Darüber hinaus zeigen die Items zur Entwicklung einer intuitiven Idee am Beginn eines Beweises (MW = 4.04, SD = 0.84 bzw. MW = 4.16, SD = 0.85), dem Probieren von Beispielen, um Muster zu erkennen (MW = 4.08, SD = 0.91 bzw. MW = 4.32, SD = 0.85) und dem Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen (MW = 4.24, SD = 0.78 bzw. MW = 4.32, SD = 0.75) sowohl vor als auch nach den Interventionsmaßnahmen eine eher zustimmende Haltung, welche sich bei jedem der Items zudem am Ende minimal erhöht. Die Unterschiede sind dabei allerdings wiederum bei keinem der genannten Items signifikant ($z = -0.588$, $p = .570$ bzw. $z = -1.022$, $p = .282$ bzw. $z = -0.431$, p

= .675). Das Finden eines Gegenspiels als wichtigen Teil des Beweisprozesses zu sehen, zeigt ebenfalls eine eher neutrale bis zustimmende Haltung, die allerdings am Ende der Intervention minimal abnimmt (MW = 3.80, SD = 1.23 bzw. MW = 3.71, SD = 1.06), wobei dieser Unterschied entsprechend dem Wilcoxon-Test nicht signifikant ist ($z = 0.710$, $p = .469$). Insgesamt zeigt sich damit sowohl im Prä- als auch im Posttest eine relativ stabile neutrale bis eher zustimmende Haltung gegenüber entdeckenden und explorierenden Aspekten mathematischer Beweise, die mit einer dynamischen Perspektive in Verbindung stehen.

Abbildung 7.11

Prä- und Postergebnisse Kategorie 1D: Entdecken/Explorieren



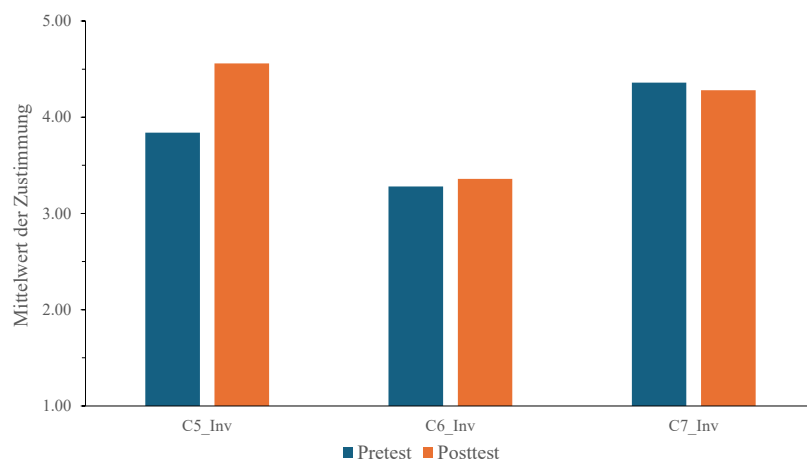
Anmerkung. Entdeckungsfunktion mathematischer Beweise (C3); Entwicklung einer intuitiven Idee beim Beweisen (D1); Prüfung von Beispielen zur Erkennung von Mustern (D2); Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen (D3); Finden von Gegenbeispielen (D4). Eigene Darstellung.

Innerhalb der Kategorie zu verschiedenen Beweisverständnissen zeigt sich ein gemischtes Bild im Zuge des Prä-Post-Vergleichs. Zur besseren Vergleichbarkeit mit anderen Kategorien werden in Abbildung 7.12 die invertierten Mittelwerte abgebildet, da es sich jeweils um negativ formulierte Items handelt. Ein hoher Mittelwert entspricht damit einer Ablehnung des jeweiligen Beweisschemas bzw. -verständnisses. Im Hinblick auf ein empirisches Beweisverständnis zeigt sich dahingehend am Beginn der Interventionen eine eher ablehnende Haltung, welche am Ende der Untersuchung deutlich gesteigert ist (MW = 3.84, SD = 0.85 bzw. MW = 4.56, SD = 0.77). Im Zuge des Wilcoxon-Tests bestätigt sich dabei mit $z = -2.726$ und $p = .005$ ein hochsignifikanter Unterschied im Hinblick auf die Anfangs- und Enderhebung. Anders verhält es sich bei einer engen formal-algebraischen Beweisvorstellung, wonach es sich erst um einen Beweis handelt, wenn er formal mittels mathematischer Sprache und Symbole formuliert ist. Hierbei zeigt sich in Abbildung 7.12 sowohl im Prä- als auch im Posttest eine tendenziell neutrale Haltung (MW = 3.28, SD = 1.06 bzw. MW = 3.36, SD = 1.38). Die hohe Standardabweichung lässt sich dabei mit einer Betrachtung der Häufigkeiten näher beleuchten. Während 24

% der Teilnehmenden der Ansicht sind, dass es sich nicht erst um einen Beweis handelt, wenn diese formalen Aspekte berücksichtigt werden, vertreten 20 % eher bzw. 12 % der teilnehmenden Personen vollkommen eine Sichtweise auf Beweise, die stark formal geprägt ist. Der Unterschied ist im Prä-Post-Vergleich nicht signifikant ($t = -0.262$, $p = .795$). Im Zuge eines autoritären Beweisschemas zeigt sich sowohl am Beginn als auch am Ende der Erhebung eine eher ablehnende Haltung (MW = 4.36, SD = 0.81 bzw. MW = 4.28, SD = 0.89), wobei der geringe Prä-Post-Unterschied nicht signifikant ist ($z = 0.392$, $p = .705$). Insgesamt ergibt sich damit sowohl vor als auch nach den Interventionsmaßnahmen eine eher neutrale Haltung gegenüber einem formal-algebraischen Beweisverständnis sowie eine ablehnende Sichtweise im Hinblick auf ein autoritäres Beweisschema. Allerdings zeigt sich eine deutlich gestiegene Abkehr von einem empirischen Beweisverständnis im Posttest im Vergleich zu einer neutralen bis ablehnenden Haltung am Beginn der Intervention.

Abbildung 7.12

Prä- und Postergebnisse Kategorie 1E: Beweisverständnis



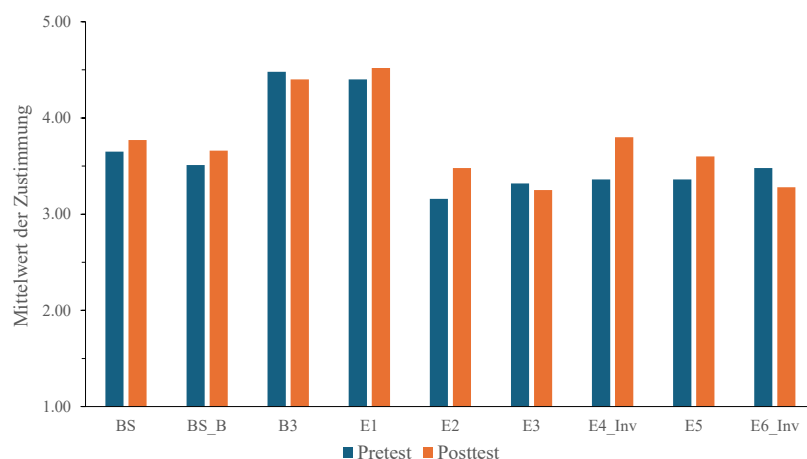
Anmerkung. Die Items sind ursprünglich negativ formuliert, sodass diese in der Abbildung zur besseren Vergleichbarkeit invertiert werden. Empirisches Beweisschema (C5); formal-algebraische Beweisvorstellung (C6); autoritäres Beweisschema (C7). Eigene Darstellung.

Die nachfolgende Abbildung 7.13 veranschaulicht die Gegenüberstellung der Prä-Post-Ergebnisse der Kategorie zu den Beliefs der Lernenden über sich selbst als Betreibende der Mathematik und beweisende Individuen. Ein Blick auf die Mittelwerte der gesamten Kategorie (MW = 3.65, SD = 0.66 bzw. MW = 3.77, SD = 0.58) bzw. der Kategorie mit ausschließlich beweisbezogenem Fokus (MW = 3.51, SD = 0.72 bzw. MW = 3.66, SD = 0.60) zeigt dabei sowohl am Beginn der Erhebung als auch beim Abschluss eine tendenziell neutrale bis eher zustimmende Haltung. Insgesamt ergibt sich dabei im Hinblick auf eine Veränderung über die Überzeugungen über sich selbst hinweg kein signifikanter Unterschied hinsichtlich der Prä- und Postergebnisse ($t = -1.284$, $p = .211$). Spezifischer zeigt sich dabei eine insgesamt positive Überzeugung

hinsichtlich der Verbesserung mathematischer Fähigkeiten (B3) (MW = 4.48, SD = 0.77 bzw. MW = 4.40, SD = 0.87) bzw. Beweisfähigkeiten (E1) (MW = 4.40, SD = 0.65 bzw. MW = 4.52, SD = 0.59) im Laufe des Lern- bzw. Übungsprozesses. Bei beiden Items ist allerdings kein signifikanter Unterschied im Prä-Post-Vergleich festzustellen ($z = 0.630$, $p = .530$ bzw. $z = -0.943$, $p = .375$). Im Hinblick auf die Ausdauer bei schwierigen Beweisen (E2) zeigt sich eine eher neutrale bis zustimmende Haltung, wobei eine positive Entwicklung im Sinne einer zunehmenden Zustimmung im Posttest zu verzeichnen ist (MW = 3.16, SD = 1.14 bzw. MW = 3.48, SD = 1.01). Nach Abschluss der Interventionen geben dabei 36 % der Teilnehmenden an, der Aussage zur vorhandenen Ausdauer eher zuzustimmen, 16 % stimmen voll zu. Am Beginn stimmen insgesamt 44 % der Aussage eher bzw. voll zu. Der Wilcoxon-Test zeigt diesbezüglich allerdings keinen signifikanten Unterschied ($z = -1.600$, $p = .097$).

Abbildung 7.13

Prä- und Postergebnisse Kategorie 2: Beliefs über sich selbst



Anmerkung. Item E4 und E6 sind negativ formuliert, sodass zur besseren Vergleichbarkeit die invertierten Mittelwerte herangezogen werden. Kategorie 2 (BS); Kategorie 2 exklusive Item B3 (BS_B). Auf die einzelnen Items wird im Text verwiesen. Eigene Darstellung.

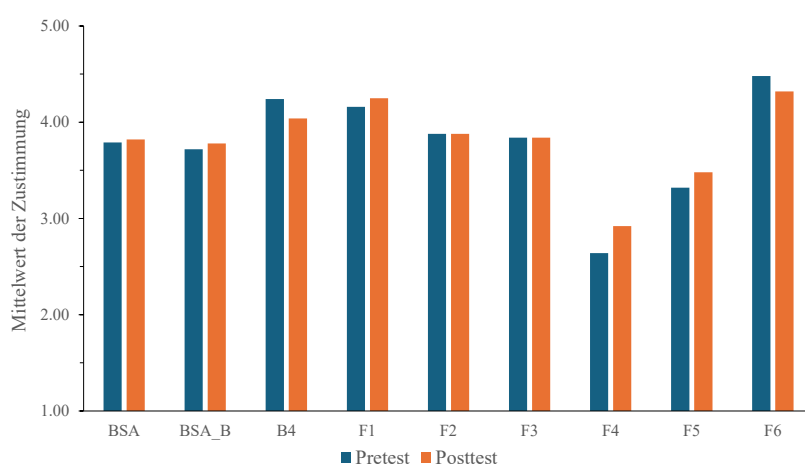
Darüber hinaus zeigt sich, dass die Lernenden sowohl am Beginn als auch Ende der Interventionen eher eine neutrale bis leicht zustimmende Haltung gegenüber der Sicherheit beim Umgang mit typischen Beweistechniken (E3) (MW = 3.32, SD = 1.22 bzw. MW = 3.25, SD = 0.79) und dem selbstständigen Nachvollziehen von Beweisen (E5) (MW = 3.36, SD = 1.15 bzw. MW = 3.60, SD = 0.87) einnehmen, wobei auch hier Unterschiede im Prä-Post-Vergleich minimal und nicht signifikant sind ($z = 0.000$, $p = 1.000$ bzw. $z = -1.224$, $p = .198$). Zudem ist eine Veränderung im Hinblick auf Schwierigkeiten zur Unterscheidung der Beweisidee von spezifischen Details (E4) eine eher neutralen bis tendenziell ablehnenden Haltung zu verzeichnen (MW = 3.26, SD = 1.04 bzw. MW = 3.80, SD = 0.82) und es zeigt sich hinsichtlich der Überforderung beim selbstständigen Führen von Beweisen unter Kenntnis der Vorgehensweise (E6),

ein Wandel von einer eher ablehnenden zu einer neutraleren Haltung ($MW = 3.48$, $SD = 1.23$ bzw. $MW = 3.28$, $SD = 1.21$). Wiederum stellen sich diese Unterschiede allerdings nicht als statistisch signifikant heraus ($z = -1.831$, $p = .054$ bzw. $z = 0.824$, $p = .398$). Insbesondere hervorzuheben ist dabei, dass im Hinblick auf die Schwierigkeiten zur Unterscheidung einer Beweisidee von den spezifischen Details der Student-Test für abhängige Stichproben mit $t = -2.107$ und $p = .046$ einen signifikanten Unterschied zeigen würde, allerdings zeigt der Shapiro-Wilk-Test hier mit $W = .892$ und $p = .012$ eine mögliche Verletzung der Normalverteilung. Darüber hinaus legen die niedrigeren Standardabweichungen bei sämtlichen Items im Zuge der Posttestung eine allgemeine Angleichung der Zustimmungswerte nahe.

Insgesamt zeigen sich innerhalb der Kategorie zu Beliefs über sich selbst keine statistisch signifikanten Unterschiede im Hinblick auf die Anfangs- und Enderhebung sowie eine allgemein neutrale bis positive im Sinne von produktiven Überzeugungen der Lernenden über sich selbst.

Abbildung 7.14

Prä- und Postergebnisse Kategorie 3: Sozio-affektiven Beliefs



Anmerkung. Kategorie 3 (BSA); Kategorie 3 exklusive Item B4 (BSA_B). Auf die einzelnen Items wird im Text verwiesen. Eigene Darstellung.

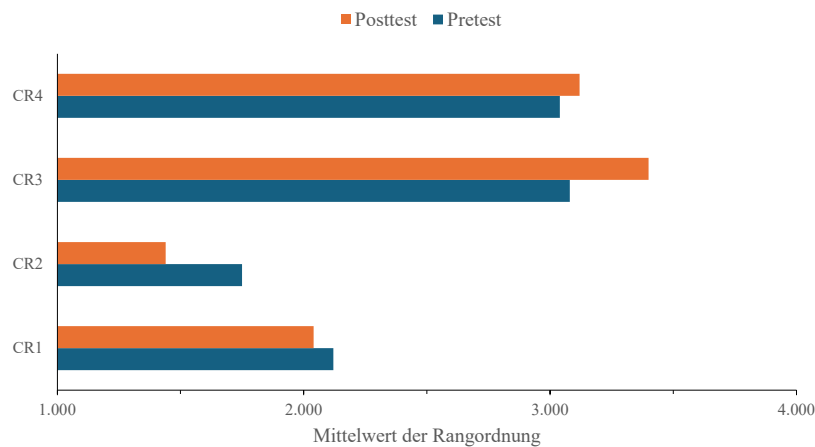
Im Hinblick auf die Kategorie zu sozio-affektiven Beliefs zeigt sich sowohl insgesamt ($MW = 3.79$, $SD = 0.66$ bzw. $MW = 3.82$, $SD = 0.66$) als auch spezifisch beweisbezogen ($MW = 3.72$, $SD = 0.70$ bzw. $MW = 3.78$, $SD = 0.71$) eine relativ stabil bleibende neutrale bis tendenziell zustimmende Haltung im Sinne von sozialen Aspekten und positiven affektiven Komponenten beim mathematischen Beweisen. Der Student-Test für abhängige Stichproben bestätigt dabei den zu vermutenden nicht signifikanten Unterschied der Prä- und Postergebnisse dieser Kategorie ($t = -0.279$, $p = .782$). Insgesamt zeigt sich dabei eine Veränderung spezifisch zum Gefühl von Spaß beim gemeinsamen Arbeiten an einem Beweis ($MW = 3.88$, $SD = 0.79$ bzw. $MW = 3.88$, $SD = 1.05$) sowie bei der Bevorzugung, einen Beweis eher selbstständig zu entdecken als vorgezeigt zu bekommen ($MW = 3.84$, $SD = 1.21$ bzw. $MW = 3.84$, $SD = 1.21$). Allerdings

verdeutlicht ein Blick auf die prozentuellen Häufigkeiten, dass mit insgesamt 68 % der Teilnehmenden der überwiegende Anteil dem Aspekt von Spaß eher bis voll zustimmt, wohingegen in der Anfangsbefragung hier ein Anteil von 64 % zu verzeichnen ist. Auch hinsichtlich der selbstständigen Erarbeitung zeigt sich hier ein Unterschied von 4 Prozentpunkten, wobei eine abnehmende Zustimmung ersichtlich ist. Tendenziell mittlere bis hohe Zustimmungswerte zeigen sich sowohl in der Anfangs- als auch Enderhebung hinsichtlich der Bewertung des Austausches über mathematische Probleme und Lösungen in der Klasse (MW = 4.24, SD = 0.93 bzw. MW = 4.04, SD = 0.96), der Diskussionen mit Mitschüler*innen zum besseren Verständnis von Beweisen (MW = 4.16, SD = 0.75 bzw. MW = 4.25, SD = 0.79) sowie des Durchdringens eines abstrakten Beweises als lohnende Erfahrung (MW = 4.48, SD = 0.82 bzw. MW = 4.32, SD = 1.03). Dabei stellt sich der Unterschied bei keinem der genannten Items als statistisch signifikant heraus ($z = 0.840$, $p = .407$ bzw. $z = -0.454$, $p = .644$ bzw. $z = 1.468$, $p = .129$).

Eine eher ablehnende Haltung, welche beim Abschluss der Interventionen tendenziell in eine neutrale Sichtweise übergeht, zeigt sich im Hinblick auf die Sicherheit beim Präsentieren von Beweisideen in der Klasse auf mathematischer Ebene (MW = 2.64, SD = 1.38 bzw. MW = 2.92, SD = 1.12). Die prozentuellen Häufigkeiten zeigen dabei eine Tendenz zur Mitte auf. Während noch am Beginn insgesamt 8 % der Teilnehmenden der Aussage voll zustimmen, sind es bei der Endbefragung um 4 Prozentpunkte weniger, wobei im Gegenzug statt 24 % der untersuchten Personen zu Beginn, am Ende insgesamt 32 % der Teilnehmenden eher zustimmen. Darüber hinaus lehnen im Prätest 32 % der teilnehmenden Personen die Aussage vollständig ab, während sich dies im Endfragebogen auf einen Anteil von 12 % an der Stichprobe reduziert. Der Unterschied ist allerdings nach dem Wilcoxon-Test statistisch nicht signifikant ($z = -1.334$, $p = .166$). Ein ähnliches Bild zeigt sich im Hinblick auf die Sicherheit beim Vorstellen von Beweisideen auf sozialer Ebene (MW = 3.32, SD = 1.38 bzw. MW = 3.48, SD = 1.23), wobei sich eine allgemein neutralere Haltung zeigt, welche sich nicht signifikant veränderte ($z = -1.067$, $p = .276$). Insgesamt ergibt sich damit im Rahmen der Prä- und Posterhebung kein statistisch signifikanter Unterschied in der Kategorie zu sozio-affektiven Beliefs. Insbesondere zeigt sich dabei eine allgemeine Tendenz zur Mitte im Sinne einer neutralen bis produktiven Haltung gegenüber einer sozialen Komponente beim Beweisen sowie damit verbundenen positiven Emotionen. Eine Ausnahme zeigt sich hinsichtlich der Sicherheit beim Vorstellen eigener Beweisideen vor der Klasse auf mathematischer Ebene, wobei tendenziell eine eher ablehnende Einstellung ersichtlich wird.

Abbildung 7.15

Prä- und Postergebnisse: Rangordnung der Beweisfunktionen



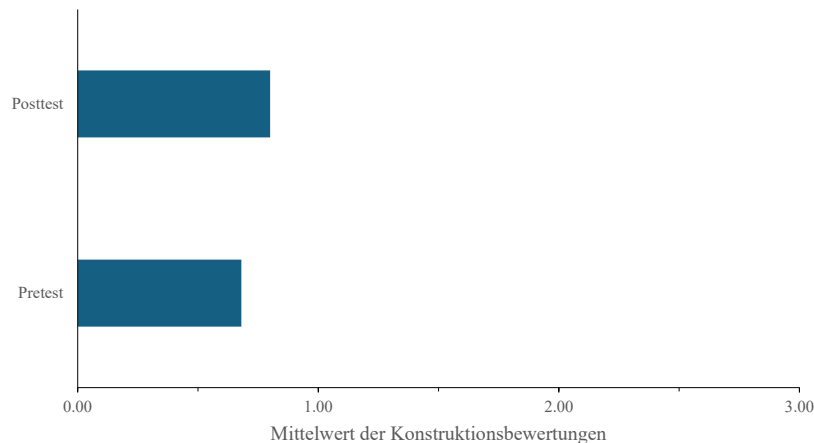
Anmerkung. Ranking der Verifikationsfunktion (CR1), Erklärungsfunktion (CR2), Entdeckungsfunktion (CR3) und Systematisierungsfunktion (CR4) von 1 (= wichtigste Funktion) bis 4 (= unwichtigste Funktion). Eigene Darstellung.

Im Hinblick auf die Rangordnung der verschiedenen Beweisfunktionen zeigt Abbildung 7.15 eine Übereinstimmung der Prä- und Postergebnisse hinsichtlich der Ordnung der Wichtigkeit der Funktionen. Die Erklärungsfunktion wird dabei allgemein als wichtigste Funktion angesehen (MW = 1.75, SD = 1.11 bzw. MW = 1.44, SD = 0.65), gefolgt von der Verifikations- (MW = 2.12, SD = 1.05 bzw. MW = 2.04, SD = 1.02) und Systematisierungsfunktion (MW = 3.04, SD = 0.98 bzw. MW = 3.12, SD = 0.73). Der Abschluss und damit die unwichtigste Funktion wird in der Erklärung gesehen (MW = 3.08, SD = 0.65 bzw. MW = 3.40, SD = 0.76). Mit 58.3 % bzw. 64 % der Teilnehmenden sieht ein überwiegender Anteil sowohl in der Anfangs- als auch in der Enderhebung die Erklärung als wichtigste Funktion von Beweisen an. Im Hinblick auf die Verifikationsfunktion zeigt sich ein weniger eindeutiges Bild, wobei insbesondere im Posttest je 36 % der teilnehmenden Personen den ersten bzw. zweiten Rangplatz zuordnen. Darüber hinaus zeigt sich, dass während zu Beginn mit 40 % der Teilnehmenden ein überwiegender Anteil der Stichprobe die Systematisierungsfunktion auf dem vierten Platz sieht, im Posttest mit 48 % beinahe die Hälfte der Personen den dritten Platz zuweist. Ein ähnlich deutliches Bild zeigt sich bei der Entdeckungsfunktion. In der Anfangserhebung ergibt sich eine Mehrheit von 58.3 % der teilnehmenden Personen, welche der Entdeckung als Beweisfunktion den dritten Rangplatz zuweisen. Im Posttest hingegen wird mit 56 % von mehr als der Hälfte der Personen die Entdeckungsfunktion als unwichtigste Funktion gesehen. Insgesamt zeigen die Ergebnisse damit eine gleichbleibende Präferenz der Erklärungsfunktion und eine nicht eindeutige Positionierung hinsichtlich der Verifikationsfunktion auf dem zweiten Rangplatz. Während die prozentuellen Häufigkeiten eine Erhebung der Systematisierungsfunktion auf den dritten Rangplatz ersichtlich machen, zeigt sich auch hier am Mittelwert eine tendenziell

gleichbleibende Präferenz. Dies trifft im gegenteiligen Sinne auch auf die Erklärungsfunktion zu, wobei hier eine Dominanz der Sichtweise als unwichtigste Funktion ersichtlich wird.

Abbildung 7.16

Prä- und Postergebnisse: Konstruktionsleistung der Lernenden



Anmerkung. Bewertung der Konstruktionen der Beweisideen mit 0 (= fehlerhaft oder fehlend), 1 (= unvollständig), 2 (= präformal bzw. inhaltlich-anschaulich) und 3 (= formal-deduktiv). Eigene Darstellung.

Im Hinblick auf die Konstruktionsleistungen der Lernenden zeigt sich eine tendenziell höhere Bewertung im Posttest (MW = 0.68, SD = 0.90 bzw. MW = 0.84, SD = 0.85), wobei der Unterschied allerdings statistisch nicht signifikant ist ($z = -0.714$, $p = .405$). Einen tieferen Einblick zeigen dabei die deskriptiven Ergebnisse. Während am Beginn der Untersuchung mit 60 % der Teilnehmenden mehr als die Hälfte einen fehlenden oder fehlerhaften Ansatz einer Beweisidee aufweist, zeigt sich dies im Posttest nur noch bei 44 % der Lernenden. Darüber hinaus finden sich beim Abschluss der Interventionsmaßnahmen bei je 28 % der Teilnehmenden unvollständige sowie bereits präformale bzw. inhaltlich-anschauliche Ansätze. Bei keiner Person zeigt sich dabei sowohl im Prä- als auch im Posttest ein formal-deduktiver Ansatz. Insgesamt ergeben sich damit im Hinblick auf die Beweiskonstruktionsleistungen der Lernenden tendenziell fehlerhafte oder unvollständige Ansätze für eine Beweisidee.

Zusammenfassend zeigen sich im Rahmen der Prä- und Posttestung zu den mathematik- und beweisbezogenen Beliefs kaum statistisch signifikante Änderungen im Sinne einer grundlegenden Veränderung der Überzeugungen der Lernenden. Hervorzuheben ist allerdings eine bedeutsame Änderung bezüglich eines empirischen Beweisschemas, wonach es für einen Beweis ausreichend ist, eine Aussage anhand vieler Beispiele zu prüfen. Hier zeigt sich insbesondere ein statistisch signifikanter Unterschied hinsichtlich einer Abkehr von einem derartigen Beweisverständnis.

Darüber hinaus zeigt sich im Allgemeinen sowohl im Rahmen der Anfangs- als auch Enderhebung eine mittlere bis hohe Zustimmung zu einer statischen Sichtweise, wonach Mathematik aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen besteht, welche präzise und streng zu befolgen sind. Dies spiegelt sich darüber hinaus in einer tendenziell hohen Zustimmung zur Verifikationsfunktion von Beweisen wider, welche mit einem solchen Verständnis in Verbindung gesehen wird. Ergänzend dazu zeigt sich im Hinblick auf ein Beweisverständnis, welches von einem formalen Beweiskonzept geprägt ist, dass hinsichtlich der Systematisierungsfunktion im Zuge der Abschlusserhebung eine deutlichere Zustimmung zu verzeichnen ist. Auch wenn der Unterschied nicht statistisch signifikant ist, ist diese Veränderung auf Basis der kleinen Stichprobe doch hervorzuheben. Diese Änderung spiegelt sich darüber hinaus in dem Ranking der Beweisfunktionen wider, wo zu Beginn ein überwiegender Anteil der Teilnehmenden diese Funktion auf den letzten Rangplatz verweist, während in der Endbefragung die Funktion von ungefähr der Hälfte der Personen auf den dritten Platz positioniert wird. Darüber hinaus zeigt sich innerhalb eines formalen Beweiskonzeptes sowohl im Prä- als auch Posttest eine hohe Zustimmung zur Notwendigkeit, sämtliche Definitionen innerhalb eines Beweises zu kennen.

Mit Blick auf eine dynamische Sichtweise zur Mathematik zeigt sich verglichen mit einer statischen Perspektive eine tendenziell geringere Zustimmung zur Aussage, dass die Mathematik dabei hilft, Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt, wobei eine allgemein mittlere Zustimmung gegeben ist. Hier ist zudem kein signifikanter Unterschied im Zuge der Prä-Post-Erhebung festzustellen. Im Vergleich dazu weist die Erklärungsfunktion als beweisbezogener dynamischer Aspekt sowohl innerhalb der Kategorie als auch verglichen mit der Verifikationsfunktion eine deutlich höhere Zustimmung auf. Dies stimmt darüber hinaus mit dem Ranking der Beweisfunktionen überein, wonach sowohl im Zuge der Prä- als auch Posttestung ein überwiegender Anteil der Befragten die Erklärung als wichtigste Funktion ansieht, gefolgt von der Verifikationsfunktion. In Verbindung mit einer dynamischen Perspektive zeigt sich innerhalb der Kategorie, Beweisen im Sinne von Entdecken und Explorieren zu verstehen, eine überwiegend neutrale bis zustimmende Haltung zu den darin enthaltenen Items. Insbesondere ergeben sich hier im Vergleich der Prä- und Postergebnisse tendenziell stabile Überzeugungen. Die im Vergleich niedrigere Zustimmung zur in dieser Kategorie befindlichen Entdeckungsfunktion von Beweisen, wonach man durch das Beweisen allgemeine Methoden lernt, um mathematische Probleme zu lösen, deckt sich dabei mit dem im Zuge der Posttestung überwiegend vergebenen vierten und letzten Rangplatz.

Hinsichtlich der Kategorie zu verschiedenen Beweisverständnissen wurde bereits der signifikante Unterschied bezüglich eines empirischen Beweisverständnisses hervorgehoben. Darüber

hinaus zeigen sich im Hinblick auf eine neutrale Haltung gegenüber einem formal-algebraischen Beweisverständnis sowie einer tendenziell ablehnenden Position hinsichtlich eines autoritären Beweisschemas allgemein kaum Veränderungen.

Bezüglich der Kategorie zu Beliefs der Lernenden über sich selbst als Betreibende der Mathematik und in Ausübung von Beweistätigkeiten zeigt sich insgesamt sowohl im Prä- als auch im Posttest eine neutrale bis eher zustimmende Haltung und damit weder besonders hinderliche noch stark förderliche Überzeugungen zum mathematischen Beweisen. Hervorzuheben ist dabei allerdings im Spezifischen die überwiegend positive Einstellung, dass sich die eigenen mathematischen Fähigkeiten im Laufe des Lernprozesses verbessern sowie Beweisfähigkeiten durch Übung optimiert werden können. Allerdings ist festzuhalten, dass hinsichtlich der Ausdauer beim Beweisen eine tendenziell positivere Zustimmung nach dem Prozess zu verzeichnen ist, auch wenn der Unterschied statistisch nicht signifikant ist. Auch im Hinblick auf Schwierigkeiten bei der Unterscheidung einer Beweisidee von den spezifischen Details zeigt sich bei der Abschlusserhebung eine eher ablehnende Haltung. Zwar zeigt hier der Wilcoxon-Test kein signifikantes Ergebnis, doch unter der Voraussetzung der Normalverteilung würde der Student-Test für abhängige Stichproben hier einen signifikanten Unterschied ausweisen.

Darüber hinaus zeigt die Prä-Post-Erhebung der sozio-affektiven Beliefs eine starke Stabilität hinsichtlich einer neutralen bis eher produktiven Haltung im Sinne eines Verständnisses von Beweisen als sozialen Prozess und einer Verbindung mit positiven Emotionen. Eine mittlere bis hohe Zustimmung ergibt sich dabei in der positiven Bewertung von Austausch und Diskussion sowohl über mathematische Probleme im Allgemeinen als auch über Beweise im Spezifischen sowie dem Durchdringen eines abstrakten Beweises als lohnende Erfahrung sowohl im Prä- als auch im Posttest. Eine tendenziell eher zustimmende Haltung zeigt sich darüber hinaus auch hinsichtlich der eigenständigen Entdeckung von Beweisideen und dem Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten. Eher ablehnende Überzeugungen zeigen sich hinsichtlich der Sicherheit auf mathematischer Ebene bei der Präsentation eigener Beweisideen in der Klasse. Insbesondere ergibt sich hier im Posttest eine Tendenz zur Mitte.

Abschließend ist im Hinblick auf die Konstruktionsleistungen der Lernenden darauf zu verweisen, dass sowohl im Rahmen der Prä- als auch Posterhebung überwiegend fehlerhafte bzw. unvollständige Ansätze festzustellen sind, auch wenn eine Reduktion fehlerbehafteter Beweisideenansätze in der Abschlusserhebung zu verzeichnen ist.

7.4 Ergebnisse der Einzelfallanalysen

Die nachfolgenden Ausführungen stellen eine Kombination der quantitativen und qualitativen Ergebnisse von den insgesamt fünf ausgewählten Einzelfällen dar, um einen tiefergehenden Einblick in die beschriebenen ausgebliebenen und stattgefundenen Änderungen im Hinblick auf die untersuchten mathematik- und beweisbezogenen Beliefs zu erlangen. Der Fokus liegt dabei insbesondere auf den qualitativen Ergebnissen der leitfadengestützten Interviews, wobei für eine hinreichende Einordnung der Interviewinhalte die entsprechenden quantitativen Daten in den einzelnen Kategorien dargestellt werden.

7.4.1 Fall A1

Bei Fall A1 handelt es sich um eine Person aus der Stichprobe, welche in Summe die geringsten Abweichungen von den allgemeinen Mittelwerten aufweist und somit exemplarisch für die durchschnittlichen Ergebnisse der Teilnehmenden herangezogen wird. Die untersuchte Person identifiziert sich mit dem männlichen Geschlecht und hatte im letzten Zeugnis die Beurteilung „Genügend“ in Mathematik. Der Teilnehmer gibt an, die Themen auf dem Gebiet der Analysis gut zu verstehen und bereits hin und wieder Beweise im Mathematikunterricht thematisiert zu haben. Das Wahlpflichtfach Mathematik besucht der Schüler nicht.

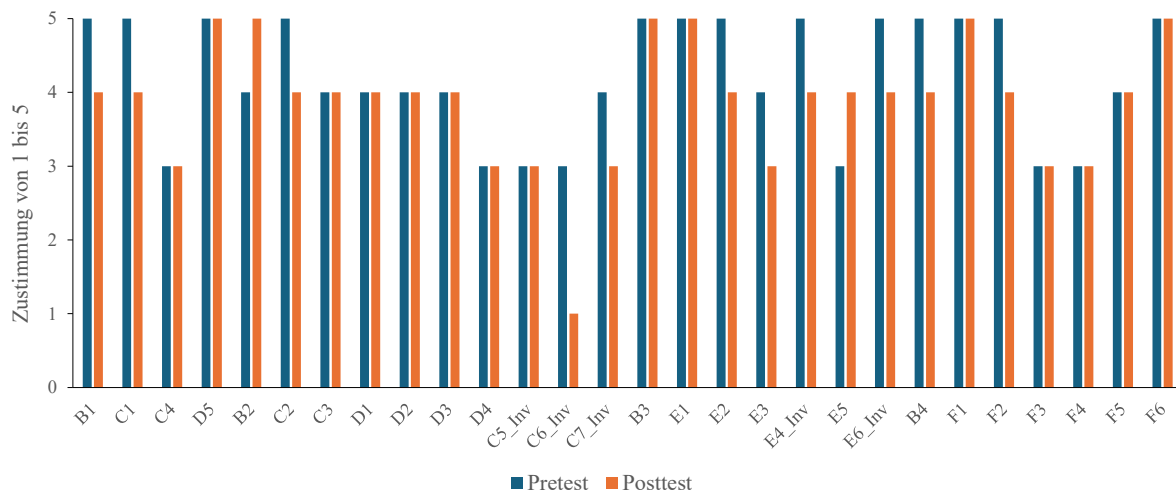
Wie in der nachfolgenden Abbildung 7.17 ersichtlich wird, ergeben sich im Zuge der mathematik- und beweisbezogenen Beliefs tendenziell keine bis marginale Veränderungen im Rahmen des Interventionsprozesses. Im Zuge des Interviews gab der Schüler diesbezüglich am Beginn die persönliche Einschätzung ab, dass sich für ihn jedenfalls Veränderungen bemerkbar machten: „Ja es hat sich verändert, weil zuerst wusste ich nichts vom Thema, bevor Sie es präsentiert haben und ich habe halt angekreuzt, was für mich halt richtig war.“ Insbesondere wurde angemerkt, dass sich für den Lernenden im Rahmen des Prozesses herausstellte, dass Beweisen viel komplizierter ist, als er es sich anfangs gedacht hatte.

Die in Abbildung 7.17 ersichtliche größere Veränderung bei Item C6 zu einem formal-algebraischen Beweisverständnis wurde im Interview explizit erfragt. Dabei wurde von dem Lernenden die nachfolgende Begründung angegeben: „Also beim ersten Fragebogen, da wo wir das Thema noch nicht vertiefend gemacht haben, dachte ich mir okay, man kann es mit der Sprache formulieren, ohne jetzt die mathematischen Symbole.“ Darüber hinaus führte er aus: „Nachdem Sie uns das Ganze präsentiert haben, dachte ich mir nein okay, es ist komplett das Gegenteil. Sprache ist wichtig, aber die mathematischen Symbole sind viel wichtiger, damit man Formeln aufstellen kann, damit man auch irgendwie ableiten kann.“ Auf den Hinweis, dass im Rahmen der Interventionen ebenso präformale Beweise thematisiert und formuliert wurden, verwies der

Schüler darauf, dass Skizzen zwar möglich sind, die Einbeziehung mathematischer Symbole allerdings besser ist, um auch Zusammenhänge darstellen zu können.

Abbildung 7.17

Prä- und Postergebnisse Fall A1



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse aller Items. Negativ formulierte Items werden invertiert und mit „Inv“ gekennzeichnet. Eigene Darstellung.

Hinsichtlich einer ausbleibenden Veränderung im Zuge eines empirischen Beweisverständnisses, wo sich, wie in Abschnitt 7.3 angeführt, ein allgemein signifikanter Unterschied ergibt, verwies der Schüler darauf, dass man theoretisch eine Aussage anhand von Beispielen prüfen kann und führte weiter aus: „Bevor man ein Beispiel macht, muss man es irgendwie beweisen, dass es immer so sein wird, egal wie man es ausrechnet.“

In Abbildung 7.17 wird darüber hinaus ersichtlich, dass im Rahmen der Beliefs über sich selbst die Interventionen zu einer eher negativen Veränderung führten. Der Schüler griff dabei Item E6 zur Überforderung beim selbstständigen Führen von Beweisen auf und meinte dazu: „Also ich habe mich bei Beweisen nie überfordert gefühlt.“ Die Veränderung begründet er damit, dass es in weiterer Folge doch nicht so leicht schien und er merkte an: „Aber es ist auch überhaupt nicht schwierig und man muss einfach ein bisschen nachdenken.“

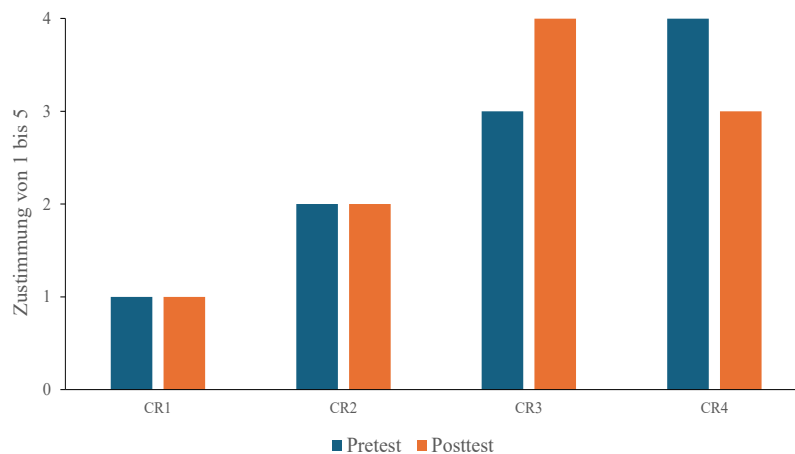
Insbesondere zeigen sich bei der Person keine Übereinstimmungen hinsichtlich der Rangordnung der vier verschiedenen Beweisfunktionen und deren anschließenden Bewertung. Dabei wurde im Interview als Erklärung eingangs angemerkt, dass sich der Schüler des Zusammenhangs der Rangordnung und Bewertung nicht bewusst war. Er führte weiter aus, dass die Bestätigung der Wahrheit einer Aussage „das Allerwichtigste“ ist und die Zusammenhänge mathematischer Konzepte „viel wichtiger“ sind als allgemeine Methoden zu lernen. Dies begründete er damit: „Wenn ich zum Beispiel den größeren Zusammenhang verstehe, dann kann ich

auch die allgemeinen Methoden leichter verstehen.“ Auch die Veränderung bei Item E3 begründete er damit.

Als Begründung, warum die Person keiner der Aussagen und damit den Beweisfunktionen in den Item C1 bis C4 völlig zustimmte, führte der Schüler hinsichtlich der Verifikationsfunktion an, dass manche Beweise „nicht immer die Wahrheit einer Aussage bestätigen“ müssen, sondern auch das Gegenteil erzielen können.

Abbildung 7.18

Prä- und Postergebnisse Fall A1: Ranking der Beweisfunktionen



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse des Rankings der Beweisfunktionen. Eigene Darstellung.

Abschließend wurde der Lernende darauf aufmerksam gemacht, dass seine Überzeugungen relativ stabil geblieben sind und nach einer möglichen Begründung gefragt: „Es kommt nicht davon, weil meine mathematischen Fähigkeiten schlecht sind, sondern weil ich manchmal faul bin und mich nicht so konzentrieren will, weil ich denke, okay, das ist doch leicht.“ Dazu ergänzte er: „Ich kann eh alles nachvollziehen und ich kann alles verstehen und deshalb hat sich bei mir nicht so viel verändert.“ Auf die Frage, ob es etwas gäbe, was seine Überzeugungen verändern könnte, meinte der Lernende: „Nein, ich glaube Sie haben eh alles ganz gut durchgeführt.“

Die Lernenden wurden im Zuge des Interviews nicht auf die eigenen Konstruktionsleistungen angesprochen, um eine prüfungsähnliche Situation zu vermeiden. Allerdings sei zur Vollständigkeit an dieser Stelle angeführt, dass im Rahmen der Konstruktion eine fehlerhafte graphische Vorstellung einer Ableitungsfunktion im Prätest sowie eine falsche Wiedergabe der Faktorregel im Posttest ersichtlich sind.

Insgesamt zeigt sich bei der befragten Person ein starker Fokus auf die persönlichen Fähigkeiten, die allgemein positiv hervorgehoben werden. Zudem werden Veränderungen im eigenen

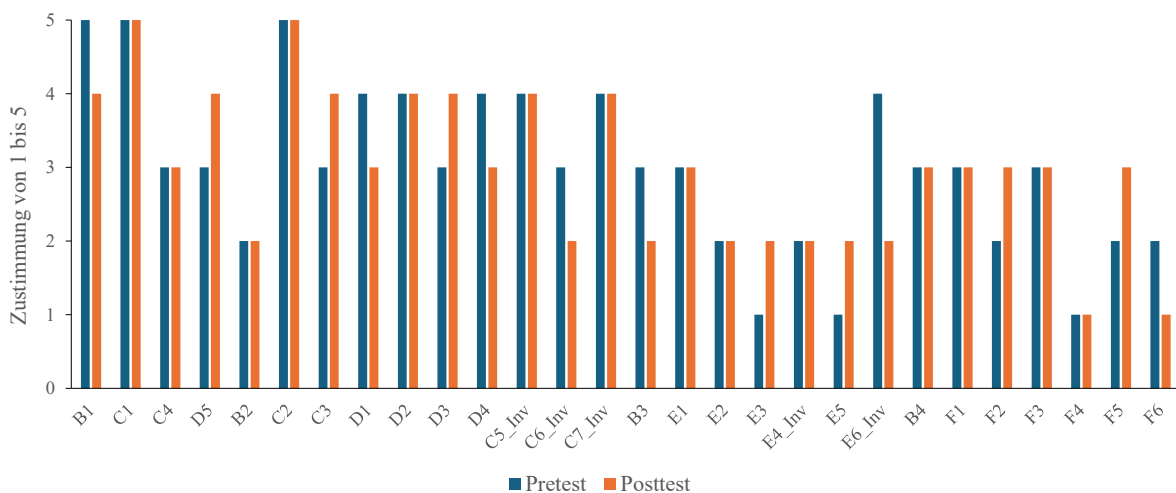
Prozess und die weitere Unveränderbarkeit der persönlichen Überzeugungen verstärkt betont. Es zeigt sich insbesondere ein tendenziell positives Selbstbild der eigenen Fähigkeiten, welche nicht mit den entsprechenden Beweiskonstruktionsleistungen im Einklang stehen.

7.4.2 Fall A8

Im Rahmen von Fall A8 wurde eine Person gewählt, welche auf Basis des Fragebogens tendenziell unproduktive Beliefs über die Mathematik und mathematische Beweise sowie damit in Verbindung über sich selbst und sozio-affektive Beliefs aufweist. Die nachfolgende Abbildung 7.19 veranschaulicht die Zustimmungswerte in den einzelnen Items und verdeutlicht die beschriebenen Tendenzen. Dabei handelt es sich um eine weibliche Teilnehmerin, welche eine Beurteilung mit der Note „Genügend“ im letzten Zeugnis aufweist. Die Person gibt an, Themen auf dem Gebiet der Analysis teilweise zu verstehen und hin und wieder bereits über Beweise im Mathematikunterricht gesprochen zu haben. Das Wahlpflichtfach Mathematik besucht sie nicht.

Abbildung 7.19

Prä- und Postergebnisse Fall A8



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse aller Items. Negativ formulierte Items werden invertiert und mit „Inv“ gekennzeichnet. Eigene Darstellung.

Im Zuge erster Gedanken und Gefühle äußerte die Schülerin im Interview: „Also ich muss schon sagen, es hat mir schon Spaß gemacht. Vor allem, weil wir halt als Gruppe gearbeitet haben.“ Diese Aussage spiegelt sich in den quantitativen Ergebnissen der Fragebogenuntersuchung wider, wo die Lernende bei Item F2 zum Spaß eine höhere Zustimmung beim Abschluss aufweist. Gruppenarbeiten werden dabei besonders hervorgehoben, „weil dann die anderen halt auch Ideen haben und dann kann ich mehr damit anfangen, weil ich selbst das nicht so schnell begreife.“

Im Vergleich zu den allgemeinen Ergebnissen zeigt sich bei der Schülerin eine tendenzielle Ablehnung der Aussage, dass Mathematik dabei hilft Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt. Dies begründete die Lernende im Interview folgendermaßen: „Ich denk mir so, also Mathematik existiert schon so lange. Das müssten ja eigentlich immer schon die gleichen Regeln gewesen sein, weil es können ja nicht einfach so jetzt neue Regeln existieren, weil dann würden ja wahrscheinlich viele alte Regeln dann nicht mehr gelten.“ Bei der Betonung der Probleme verwies sie darauf, dass dies schon für mathematische Probleme zutreffen würde, nicht jedoch für ihre Alltagsprobleme.

Eine weitere Frage im Interview betraf die Veränderung bei Item C6 und einem formal-algebraischen Beweisverständnis. Ihre abschließende Tendenz, der Notwendigkeit von mathematischer Sprache und Symbole für einen Beweis zuzustimmen, begründete die Schülerin damit, dass es für sie im Interventionsprozess so gewirkt habe, dass es allerdings mit „normalen Sätzen“ auch gehen würde. Der Aussage, dass ein Beweis nur notwendig ist, wenn man den Aussagen erfahrener Mathematiker*innen nicht vertraut, stimmte sie im Interview „ziemlich gar nicht“ zu, betonte dabei jedoch, dass es schon sein kann, „dass man das auch macht, wenn eine Aussage ein bisschen komisch für einen selbst wirkt“.

Die steigende Überforderung (E6) am Ende des Interventionsprozesses begründete die Lernende damit, dass sie davor wenig Ahnung von Beweisen hatte und sich dann „schon ziemlich überfordert gefühlt“ hat. Ähnlich begründet die Schülerin ihre Entwicklung hinsichtlich der Verbesserung der mathematischen Fähigkeiten im Laufe der Zeit: „Ich glaube, ich bin einfach davon ausgegangen, wenn ich es viel mache, dann verstehe ich es und ich habe es nicht wirklich verstanden, aber ich habe es jetzt auch nicht so viel gemacht.“ Auf die Frage, ob ein länger andauernder Prozess mehr verändern hätte können, entgegnete die Lernende: „Es hätte sich verändern können, aber nicht sehr.“

Eine ausbleibende bzw. lediglich minimale Veränderung begründet die Schülerin damit, dass sie „Mathematik vom Gegenstand her nicht sonderlich lustig“ findet, wenn man allerdings etwas versteht und allein darauf kommt, dass das „schon ziemlich cool“ ist. Hinsichtlich einer nicht vorhandenen Änderung bei der Bewertung der Items zum Austausch und zur Diskussion im Mathematikunterricht, hob die Schülerin hervor, dass sie meistens von Anfang an nicht so schnell mitgekommen sei und deswegen dann „ziemlich schnell verloren“ war.

Abschließend wurde die Lernende befragt, ob es im Prozess und im Allgemeinen Aspekte geben würde, welche ihre Überzeugungen und Einstellungen tendenziell verbessern könnten. Diesbezüglich merkte die Schülerin an: „Ich glaub das ist von außen ziemlich schwierig, weil ich

glaube, mir fehlen generell einfach Grundlagen in Mathe, die ich einfach nicht habe.“ Die Frage, ob gesichertes Faktenwissen dazu führen könnte, dass sich ihre Überzeugungen verändern würden, erwidert sie zustimmend.

Im Hinblick auf die Konstruktionsleistungen einer Beweisidee zeigt sich bei der Schülerin unter Anführung der Aussage: „Ich habe leider keine Ahnung.“ kein Ansatz bei der Anfangserhebung. Im Zuge der Posttestung findet sich ein fehlerhafter Ansatz mit einem Verweis auf das Vorliegen von Wendestellen bei der Ableitungsfunktion an den Extremstellen der ursprünglichen Funktion.

Zusammenfassend sind bei der teilnehmenden Person tendenziell negative affektive Aspekte mit der Mathematik im Allgemeinen und mathematischem Beweisen im Spezifischen verbunden. Die eigenen Fähigkeiten und Leistungen werden als gering eingeschätzt, was insbesondere mit dem Fehlen domänenspezifischen Wissens begründet wird. Diese Einschätzung wird zudem mit eher ablehnenden Überzeugungen in Verbindung gebracht. Eine mögliche Veränderung der eigenen Beliefs wird von der befragten Person ambivalent eingeschätzt.

7.4.3 Fall A12

Die Person aus Fall A12 wurde insbesondere ausgewählt, da sich hier einige Änderungen zeigten, welche allgemein bei mehreren teilnehmenden Personen ersichtlich sind. Bei dem befragten Teilnehmer handelt es sich um eine Person männlichen Geschlechts, welche im letzten Jahreszeugnis die Beurteilung mit der Note „Gut“ erhielt. Der Schüler gibt an, Themen auf dem Gebiet der Analysis gut zu verstehen und mathematische Beweise bereits sehr oft im Unterricht thematisiert zu haben. Das Wahlpflichtfach Mathematik besucht der Teilnehmer nicht.

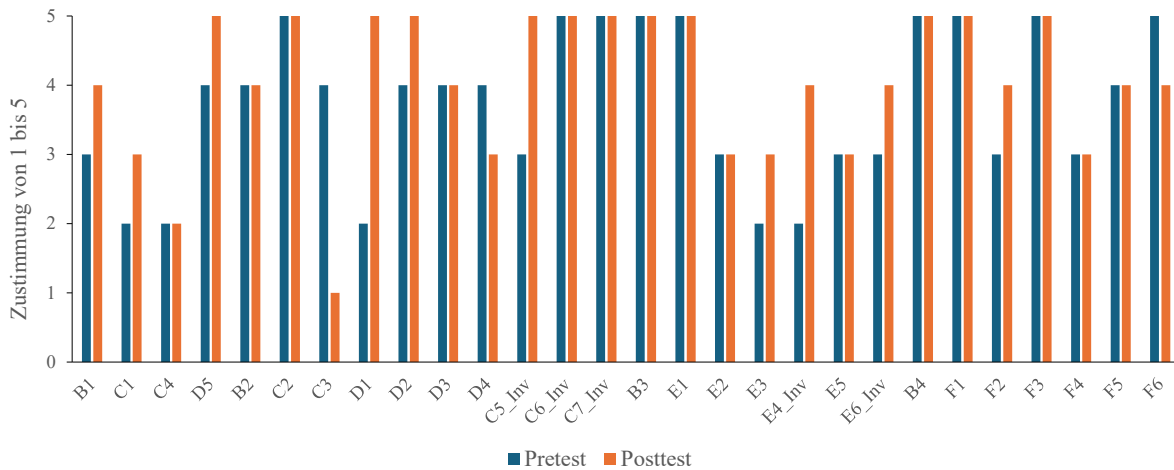
Einleitend bewertete die befragte Person den Interventionsprozess als „nette Abweichung vom normalen Unterricht“ und betonte, dass es wenigstens im Vergleich zur Differentialrechnung „ziemlich Spaß gemacht“ habe. Im weiteren Verlauf des Interviews wurde insbesondere die Struktur beim Beweisen als „Hauptsache“ der Erkenntnis im Laufe des Prozesses hervorgehoben. Die persönliche Überforderung (E6) sei insbesondere durch die Kenntnis der Struktur und das Lernen verschiedener Beweistypen positiv beeinflusst worden.

Bei dem Lernenden zeigt sich insbesondere eine Entwicklung hinsichtlich eines empirischen Beweisschemas, die sich im Allgemeinen als signifikanter Unterschied in der gesamten Gruppe herausstellt. Auf eine genauere Nachfrage konnte sich der Schüler allerdings selbst nicht die Wahl im Prätest erklären und betonte, dass dies „einfach nicht zur Definition“ eines Beweises passen würde. In ähnlicher Weise konnte auch die Frage nach der Änderung bei Item D1

hinsichtlich der Entwicklung einer intuitiven Idee nicht selbst nachvollzogen werden: „Es ist halt einfach für mich so. Also ich brauche irgendetwas. Ich brauche eine Idee.“

Abbildung 7.20

Prä- und Postergebnisse Fall A12



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse aller Items. Negativ formulierte Items werden invertiert und mit „Inv“ gekennzeichnet. Eigene Darstellung.

Darüber hinaus verwies der Lernende bezüglich einer tendenziellen Ablehnung der Entdeckungsfunktion, im Sinne des Lernens neuer Methoden zur Lösung mathematischer Probleme, darauf, dass es sich hier um „keine allgemeinen Methoden“ handle, sondern ein Beweis „sehr spezifisch“ sein kann. Damit rekurren er insbesondere auf die mathematischen Inhalte der einzelnen Beweise. Hinsichtlich der Schwierigkeiten zur Unterscheidung der Beweisidee von spezifischen Details zeigte sich darüber hinaus eine ähnlich abweichende Interpretation, wobei dem Schüler nicht die Unterscheidung, sondern der Übergang zu den Einzelheiten eines Beweises schwierig erschien. Darüber hinaus wurden im Hinblick auf eine allgemeine Veränderung insbesondere Interesse und damit verbundene positive Emotionen wie Spaß hervorgehoben.

An dieser Stelle ist ein im Interview auftretender Aspekt hervorzuheben, der eine in den quantitativen Daten scheinbare Stabilität postuliert, allerdings eine dahinterliegende Veränderung zeigt. Dies betrifft die Sicherheit bei der Präsentation eigener Beweisideen auf mathematischer Ebene: „Also meine Beweisfähigkeiten haben sich verbessert, aber hier könnte man mehr kritisieren als da, weil hier mehr Menschen mitgemacht haben.“

Hinsichtlich der Konstruktionsleistung zeigte sich zwar eine strukturelle Änderung, allerdings wurde sowohl im Prä- als auch im Posttest inhaltlich mit der Krümmung einer Funktion argumentiert und ist damit als fehlerhafter Ansatz zu werten.

Insgesamt zeigt sich bei der Befragung der teilnehmenden Person ein Fokus auf den Strukturaspekt beim Beweisen, der insbesondere positiv bewertet wurde und Einfluss auf Veränderungen

hinsichtlich diverser Beliefs zu Beweisen, aber auch zu Überzeugungen über sich selbst zeigt. Darüber hinaus ist festzuhalten, dass es bei diversen der hinterfragten Items zu Verständnis- bzw. Interpretationsschwierigkeiten kam, die zu einer abweichenden Bewertung der Aussagen führten. Diesen Aspekt gilt es jedenfalls bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen. Beispielsweise wurden die allgemeinen Methoden aus Item C3 mit der inhaltlichen Verschiedenheit von Beweisen identifiziert und Schwierigkeiten der Unterscheidung mit dem Übergang zu spezifischen Details ersetzt. Darüber hinaus zeigt sich auch bei diesem Teilnehmer die Betonung von positiven Emotionen und motivationalen Aspekten wie Interesse.

7.4.4 Fall A13

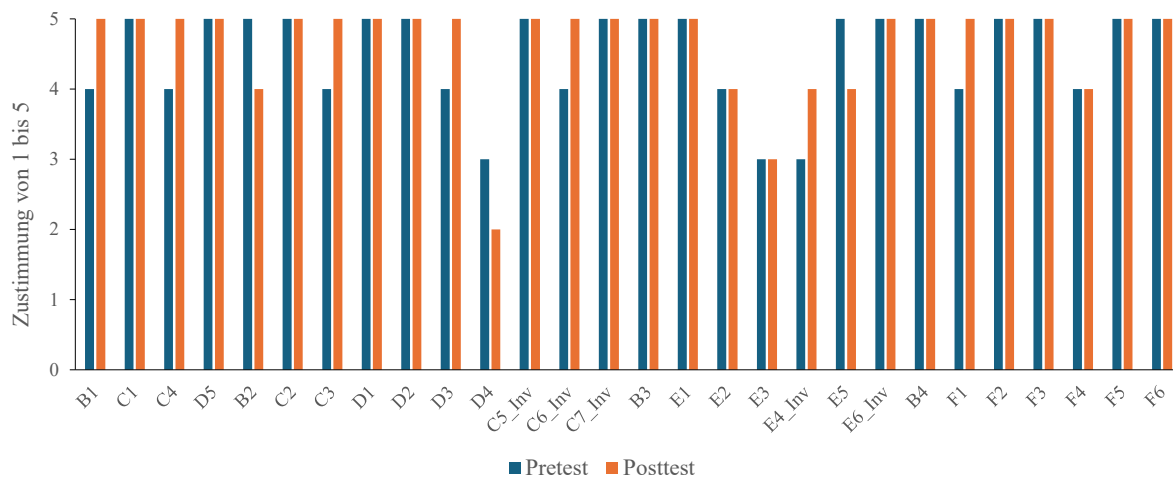
Das Interview mit der Person aus Fall A13 wurde insbesondere aufgrund des Vorliegens von überwiegend positiven bzw. produktiven Beliefs zur Mathematik und mathematischen Beweisen sowie über sich selbst und sozio-affektive Überzeugungen gewählt. Darüber hinaus zeigt die Person im Falle einer Änderung der bestehenden Beliefs tendenziell eine wünschenswerte Entwicklung in Richtung für mathematisches Beweisen förderlicher Überzeugungen. Die Schülerin gibt an, im letzten Jahreszeugnis die Beurteilung „Sehr gut“ erhalten zu haben und Themen auf dem Gebiet der Analysis sehr gut zu verstehen. Darüber hinaus vermerkt sie, hin und wieder bereits über Beweise im Mathematikunterricht gesprochen zu haben und das Wahlpflichtfach zusätzlich zum regulären Unterricht zu besuchen.

Einleitend ist hervorzuheben, dass die befragte Teilnehmerin im Interview positive Emotionen und motivationale Aspekte in Verbindung mit dem Beweisen hervorhob: „Also ich finde es eigentlich sehr interessant und ich mag das, dass es so eine Abfolge gibt und ich mag auch sehr das Gefühl, wenn ich es dann geschafft habe, einen Beweis richtig zu machen oder wenn ich es geschafft habe, einen Beweis zu durchschauen eben und zu verstehen.“ Dazu ergänzte die Schülerin: „Es macht mir eigentlich sehr Spaß, auch wenn ich es manchmal nicht durchschauen kann.“

Ähnlich wie zum vorangegangenen Fall A12, betonte die Lernende die Strukturierung beim Beweisen und erklärte dadurch ihre erhöhte Zustimmung zum Schema- und Formalismusaspekt in Item B1: „Aber ich glaube das und einfach durch diesen strukturierten Ablauf, indem Sie uns halt erklärt haben, wie man einen Beweis angeht, war es für mich klarer, dass es noch mehr wirklich Regeln und Gesetze sind.“ Im Interview hob sie zudem hervor, auch der dynamischen Sichtweise in Item C2 nachträglich voll zuzustimmen.

Abbildung 7.21

Prä- und Postergebnisse Fall A13



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse aller Items. Negativ formulierte Items werden invertiert und mit „Inv“ gekennzeichnet. Eigene Darstellung.

Für eine gesteigerte Sicherheit beim Umgang mit typischen Beweistechniken sowie auf mathematischer Ebene beim Präsentieren eigener Beweisideen, verwies die Schülerin auf die Notwendigkeit eines länger andauernden Prozesses: „Ich glaube [...], dass ich für mich persönlich länger brauchen würde, um wirklich komplett sicher zu werden und mich wirklich komplett sicher zu fühlen, das vor der Klasse auch zu präsentieren.“ Insbesondere fände es die Lernende förderlich, wenn man „doch immer wieder irgendwelche Beweise macht und selbst wenn man sie nicht selbst macht, zumindest anzuschauen und zu versuchen zu verstehen“. Dabei betont sie: „Natürlich kann es für viele überfordernd sein, das verstehe ich auch, aber mir persönlich hilft es eigentlich sogar, Sachen besser zu verstehen, wenn man mehr in die Tiefe geht.“

Hinsichtlich der Konstruktionsleistungen zeigte sich bei der Schülerin in der Anfangserhebung ein differenzierter Ansatz in einer Kombination aus einem präformalen Beweis mit der Prüfung spezifischer Beispiele. Im Posttest zeigte sie allerdings einen formal-deduktiven Beweis der hinreichenden Bedingung für lokale Extremstellen.

Zusammenfassend zeigt sich bei der befragten Teilnehmerin ebenfalls die Betonung struktureller Aspekte beim Beweisen im Sinne von Methodenwissen sowie positiver affektiver und motivationaler Aspekte beim Beweisen. Darüber hinaus offenbart sich eine dynamische Perspektive auf mögliche weitere Veränderungen der eigenen Überzeugungen.

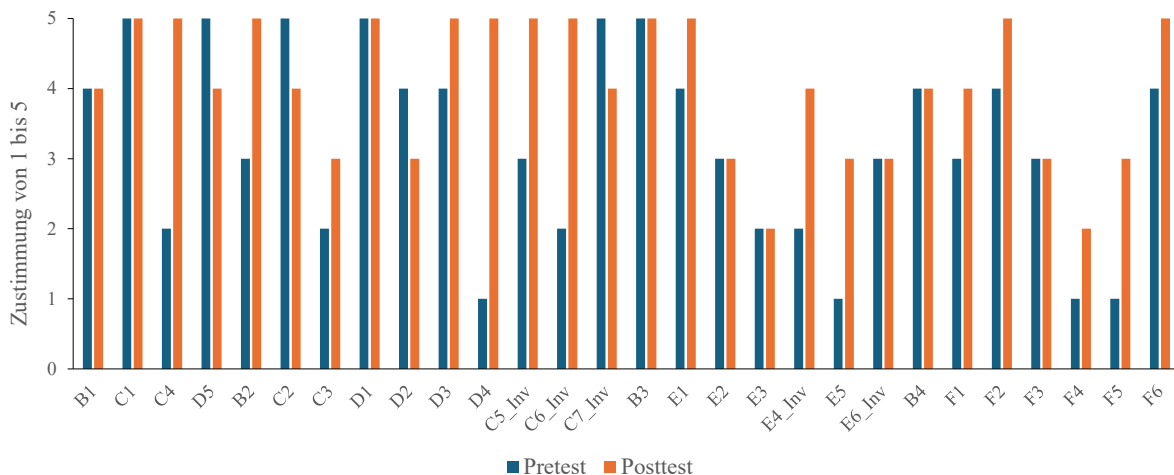
7.4.5 Fall B7

Beim Fall B7 handelt es sich um eine teilnehmende Person, welche insbesondere eine deutliche, produktive Veränderung der Beliefs im Rahmen der Prä- und Posttestung zeigt. Die Schülerin gibt als letzte Mathematiknote die Beurteilung mit „Befriedigend“ an und verweist darauf, dass

sie die Themen auf dem Gebiet der Analysis teilweise versteht. Darüber hinaus führt die Lernende an, im Mathematikunterricht bereits hin und wieder Erfahrungen mit Beweisen gemacht zu haben und das Wahlpflichtfach Mathematik nicht zu besuchen.

Abbildung 7.22

Prä- und Postergebnisse Fall B7



Anmerkung. Die Abbildung zeigt eine Gegenüberstellung der Prä- und Postergebnisse aller Items. Negativ formulierte Items werden invertiert und mit „Inv“ gekennzeichnet. Eigene Darstellung.

Ähnlich wie in Fall A12 und A13 wurde auch von der hier befragten Schülerin die Struktur beim Beweisen positiv hervorgehoben: „Also schon, dass es halt so irgendwie eine Regel\ [...] Es muss zuerst das passieren und dann das und so, dass es dann irgendwie so zusammengehört.“ Darüber hinaus wurden gleichfalls motivationale Aspekte und positive Emotionen hervorgehoben, wie die Aussage „Also ich fand das Thema schon spannend.“ oder „Also ich denke, ich habe halt mehr über Beweise erfahren und es macht schon irgendwie einigermäßen Spaß daran zu arbeiten, wenn es nicht zu schwer ist.“ verdeutlichen. Insbesondere erklärt die Schülerin damit die positiven Veränderungen zu ihren Beliefs über sich selbst. Dabei ist hervorzuheben, dass für die Lernende der Hinweis auf eine große Änderung im Rahmen der Posttestung „unerwartet“ war: „Ich wusste nicht, dass ich mich so sehr verändert habe.“

Wiederum wurden spezifische Veränderungen im Interview aufgegriffen, um hier tiefergehende Einblicke zu erlangen. Den deutlichen Unterschied bei Item B2 zu einer dynamischen Sicht auf die Mathematik erklärte die Schülerin wie folgt: „Also es hilft dabei diese Probleme zu lösen, weil Beweise sind dafür da um Sachen, bei denen man sich nicht sicher ist, zu beweisen, also halt zu verstehen, also Probleme zu lösen. Also man versucht ja regelmäßig irgendwelche neuen Beweise aufzustellen, also sind es quasi schon neue Ideen.“ Ihre Änderung hinsichtlich der Bewertung von Gegenbeispielen begründet sie direkt mit den Vorträgen und Beispielen, welche im Rahmen der Intervention Eingang fanden.

Der allgemein signifikante Unterschied hinsichtlich eines empirischen Beweisverständnisses zeigt sich ebenfalls bei der interviewten Schülerin: „Also dann habe ich erfahren, dass es eigentlich gar nicht um die Beispiele geht, sondern um das ganze Prinzip.“ und hebt dabei die Bedeutung des Vortrags im Zuge der Interventionen erneut hervor. Zudem zeigt die Lernende eine Abkehr von einem tendenziell formal-algebraischen Beweisverständnis, indem sie im Prozess erfahren habe, dass mathematische Symbole nicht zwingend benötigt werden.

Verständnis- bzw. Interpretationsschwierigkeiten zeigten sich auch hier insbesondere hinsichtlich des Items C7 zur ausschließlichen Notwendigkeit von Beweisen, wenn man erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut, und bezüglich der Unterscheidung von Item C1 und C2 zur Verifikations- und Erklärungsfunktion: „Dann würde ich sagen, die Erklärung ist wichtiger als allgemein die Aussage zu bestätigen.“ Auch die Aussage in Item C7 wurde im Zuge des Interviews schließlich vollständig abgelehnt. Ein ähnliches Bild zeigt sich bei Item E6 zur Überforderung, wobei die Schülerin anmerkte, dass diese insbesondere mit der Unsicherheit ihrer Ergebnisse sowie deren Präsentation und Prüfung durch die Lehrkraft einhergeht und weniger aus einer persönlichen Überforderung resultiert.

Im Allgemeinen zeigt sich bei der Lernenden ein dynamisches Selbstbild, wonach sich auf Basis von weitergehender Übung und ausreichend Zeit ihre Fähigkeiten verbessern und Sicherheiten steigern würden: „Allgemein, weil Übung macht den Meister. Wenn man übt zu beweisen, dann sollte es sich verbessern mit der Zeit denke ich.“ Darüber hinaus wurde sowohl im Anfangs- als auch Endfragebogen im Zuge der Konstruktion einer Beweisidee über das Monotonieverhalten mit einem korrekten Ansatz argumentiert.

Zusammenfassend erklären sich die deutlichen Veränderungen der Schülerin mit tendenziell positiven Emotionen und motivationalen Aspekten zum Beweisen sowie im Allgemeinen einem ersten tiefergehenden Kontakt mit der Thematik, wobei wiederum strukturelle Aspekte verstärkt hervorgehoben werden. Zudem zeigt sich eine dynamische Sichtweise auf die eigenen Fähigkeiten und Leistungen sowie eine weiterführende Änderung der eigenen Einstellungen.

Insgesamt ergibt sich damit über alle geführten Interviews hinweg ein deutlicher Fokus auf den Einfluss positiver sowie negativer affektiver Komponenten und motivationaler Aspekte, welche für die persönlichen Überzeugungen der Lernenden bedeutsam sind. Dabei zeigen sich insbesondere bei Änderungen hinsichtlich produktiver Beliefs für die Mathematik und mathematisches Beweisen dahinterliegende dynamische Sichtweisen bezüglich der eigenen Fähigkeiten und Leistungen. Andersherum verdeutlichen tendenziell hinderliche Entwicklungen dahinterliegende statische Perspektiven, die mit stark persönlichen Aspekten in Beziehung gesetzt

werden. Förderlich für weiterführende Veränderungen werden dabei zeitliche Aspekte und damit einhergehend Möglichkeiten der Übung betrachtet. Abschließend erscheint es besonders essenziell hervorzuheben, dass verschiedene Interpretationen sowie Verständnisschwierigkeiten bei einzelnen Items im Interview zu anderen Ergebnissen als in den Fragebögen führen. Darüber hinaus zeigen sich tieferliegende Änderungen, die innerhalb der quantitativen Erhebung als stabil erscheinen. Insbesondere ist damit festzuhalten, dass sich im Rahmen der vorliegenden Untersuchung ein Mixed-Methods-Ansatz als gewinnbringende Methode zur Untersuchung von bestehenden und sich verändernden Beliefs erweist.

8 Interpretation und Diskussion der Ergebnisse

Im Rahmen der nachfolgenden Ausführungen zur Interpretation und Diskussion der dargestellten Ergebnisse soll die der vorliegenden Arbeit zugrundeliegende leitende Forschungsfrage beantwortet werden:

„Inwiefern können bestehende beweisbezogene Beliefs von Lernenden der Sekundarstufe II durch unterrichtliche Interventionen auf dem Gebiet der Analysis beeinflusst werden?“

Zur Beantwortung der zentralen Fragestellung wurden insgesamt vier Subfragen entwickelt, welche im Nachfolgenden systematisch mit den gewonnenen Ergebnissen verbunden werden.

- i. Welche Beliefs unter Berücksichtigung von Emotionen finden sich bei Schüler*innen der Sekundarstufe II im Hinblick auf mathematische Beweise und Beweisen im Mathematikunterricht?

Hinsichtlich beweisbezogener Beliefs von Lernenden wurden in der vorliegenden Arbeit, angelehnt an Op't Eynde et al. (2003), die Hauptkategorien *Beliefs über die Mathematik und mathematisches Beweisen*, *Beliefs über sich selbst* und *sozio-affektive Beliefs* entwickelt sowie untersucht. Die erste Kategorie wurde dabei in insgesamt fünf Subkategorien unterteilt, die in den nachfolgenden Ausführungen einzeln betrachtet werden. Hinsichtlich der Überzeugungen der Lernenden zur Mathematik und insbesondere zu mathematischen Beweisen als Gegenstand zeigt sich eine deutlich ausgeprägte statische Sichtweise auf die Mathematik im Allgemeinen und zu Beweisen im Sinne der Verifikationsfunktion im Spezifischen. Kempen (2019, S. 59) hebt diesbezüglich hervor, dass eine statische, formalistisch geprägte Sicht auf die Mathematik mit einem erwartbaren Fokus auf die Verifikationsfunktion von Beweisen in Zusammenhang steht. Diese von Kempen (2019, S. 59) postulierte Korrelation kann allerdings im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht bestätigt werden. Es zeigt sich zwar mit Blick auf eine dynamische Sichtweise der Mathematik, welche dabei hilft Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt, eine weitgehende Zustimmung, diese ist allerdings weniger ausgeprägt als hinsichtlich einer eher statischen Sichtweise, wonach die Mathematik aus dem präzisen und streng zu befolgenden Anwenden von Regeln und Gesetzen besteht. Im Kontrast dazu zeigt sich allerdings eine stärkere Hinwendung zur Erklärungsfunktion von Beweisen, die nach Kempen (2019, S. 58) mit einer eher dynamischen und prozessorientierten Perspektive einhergehen würde. Die Dominanz der Erklärungsfunktion gegenüber der Verifikationsfunktion von Beweisen kann insbesondere im Rahmen der „rank-then-rate“-Methode bestätigt werden. Hinsichtlich der mathematikbezogenen Beliefs decken sich die Ergebnisse allerdings mit den Befunden der Studie von

Reiss et al. (2002), wonach Formalismus und Exaktheit dominieren, während der Anwendungs- und Prozesscharakter der Mathematik eher in den Hintergrund tritt.

Daran anknüpfend zeigt sich in der Anfangserhebung eine tendenziell neutrale bis zustimmende Einstellung zur Systematisierungsfunktion von Beweisen im Sinne des Verbindens mathematischer Konzepte zu einem größeren Zusammenhang. Kempen (2019, S. 54) sieht dabei eine Verbindung dieser Funktion zu einem formalen Beweiskonzept, welches auf dieser Basis auch im Zuge der vorliegenden Arbeit mit der Systematisierungsfunktion verbunden wird. Entsprechend einer formalen Beweisvorstellung wird von den Lernenden die Notwendigkeit der Kenntnis von Definitionen in Beweisen durchaus anerkannt, wobei sich jedoch auf Grundlage der Ergebnisse der Beweisideenkonstruktionen zeigt, dass diese Ansicht überwiegend nicht umgesetzt wird. Dies deckt sich mit der von Schoenfeld (1989, S. 349) postulierten Trennung von Schul- und Fachmathematik, wobei die geäußerten durchaus positiven, im Sinn von förderlichen Beliefs zur abstrakten Mathematik nicht mit dem Problemlöseverhalten der Lernenden übereinstimmen, welches tendenziell durch den Unterricht geprägt ist.

Mit einer tendenziell dynamischen Sichtweise wird darüber hinaus ein Beweisverständnis verstanden, welches Beweistätigkeiten im Kontext von Entdeckung und Exploration versteht. Insbesondere zeigen hier die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit eine eher neutrale bis leicht zustimmende Einstellung. Dies deckt sich wiederum mit der von Schoenfeld (1992, S. 359) formulierten Sichtweise bei Lernenden, Beweise als irrelevant für Erfindungs- und Entwicklungsprozesse zu verstehen. Schoenfeld (1985, S. 186) hebt dabei eine dominante Ansicht von Lernenden hervor, wonach mathematisches Beweisen und Argumentieren vorrangig der Verifikation und weniger der Entdeckung und dem Verständnis dient. Hinsichtlich der Entdeckungsfunktion von Beweisen kann dies in der vorliegenden Arbeit bestätigt werden.

Die von den Lernenden angegebenen Präferenzen der verschiedenen Beweisfunktionen decken sich dabei nur teilweise mit den Ergebnissen der Studie von Healy und Hoyles (2000, S. 418), wonach ein überwiegender Teil der hier befragten Schüler*innen auf die Verifikationsfunktion rekurriert. Allerdings wird auch bei Healy und Hoyles (2000, S. 418) die Erklärungsfunktion häufiger als die Systematisierungs- oder Entdeckungsfunktion von Beweisen angeführt.

Als letzter Aspekt zu Beliefs über mathematisches Beweisen selbst, wurden verschiedene Beweisverständnisse untersucht. Dabei zeigt sich eine neutrale bis eher ablehnende Haltung gegenüber einem empirischen und engem formal-algebraischen Beweisverständnis am Beginn der Erhebung. Deutliche Ablehnung tritt darüber hinaus bei einem autoritären Beweisschema auf, sodass im Zuge der vorliegenden Arbeit die von Harel und Sowder (1998, S. 278) festgestellte

Dominanz von autoritären und empirischen Beweisschemata nicht zwingend bestätigt werden kann. Auch im Rahmen der Beweiskonstruktion finden sich tendenziell keine empirischen Beweisansätze, sondern vielmehr unvollständige oder fehlerhafte Beweisideen. Auch eine ausgeprägte formal-algebraische Sichtweise, wie in den Befunden der Untersuchung von Grundey (2015, S. 273–274), kann zumindest auf Basis der Fragebogenergebnisse nicht bestätigt werden.

Hinsichtlich der Beliefs über sich selbst als Betreibende der Mathematik und beweisführende Individuen zeigen sich neutrale bis tendenziell positive Überzeugungen insbesondere im Hinblick auf eine Verbesserung der eigenen mathematischen und beweisbezogenen Fähigkeiten durch Übung und im Laufe des Lernprozesses. In Bezug auf die persönliche Ausdauer findet sich allerdings eine eher zurückhaltende, neutrale Einstellung über die untersuchte Stichprobe hinweg. Neutrale bis teils positiv zustimmende Überzeugungen zeigen sich in der Anfangserhebung hinsichtlich des selbstständigen Nachvollziehens von Beweisen sowie des Umgangs mit typischen Beweistechniken und einer eher geringen Überforderung beim selbstständigen Führen von Beweisen.

Darüber hinaus weisen die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Lernenden überwiegend durch positive Emotionen geprägte sozio-affektive Beliefs und eine das Beweisen als gemeinschaftliche Tätigkeit verstehende Überzeugung auf. Damit entsprechen die Ergebnisse nicht der von Lampert (1990, zitiert nach Schoenfeld, 1992, S. 359) aus bestehender Literatur zitierten Sichtweise, Mathematik würde in Einzelarbeit betrieben werden. Insbesondere hinsichtlich affektiver Aspekte beim Beweisen zeigt sich dabei eine eher neutrale bis mäßig zustimmende Einstellung zum Spaß am gemeinsamen Erarbeiten eines Beweises, während dem Durchdringen eines abstrakten Beweises als lohnender Erfahrung überwiegend zugestimmt wird. Dies legt die Interpretation gemischter Gefühle hinsichtlich des Beweisens nahe.

Abschließend sei an dieser Stelle auf die Konstruktionsleistungen der Lernenden verwiesen, welche sich trotz tendenziell produktiver und positiver Überzeugungen für das Beweisen als mangelhaft herausstellen. Dieses Ergebnis deckt sich unter anderem mit diversen Studien, welche große Hürden bei der Konstruktion und Notation von Beweisen bei Schüler*innen festhalten (z. B. Bell, 1976; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Kempen, 2019; Reiss et al., 2002). Anders als beispielsweise bei Bell (1976), Bieda (2010), Galbraith (1981) und Porteous (1990) wurden im Rahmen der vorliegenden Studie allerdings weniger empirische Argumente angeboten, sondern vielmehr fehlerhafte und unvollständige Ansätze ohne empirischen Fokus dargelegt.

Neben der allgemeinen Erhebung vorliegender Überzeugungen der Lernenden zur nachträglichen Prüfung von Veränderungen, interessieren auch diverse Zusammenhänge zwischen mathematik- und beweisbezogenen Beliefs:

- ii. Welche Zusammenhänge zwischen mathematischen und beweisbezogenen Beliefs der Schüler*innen lassen sich erkennen?

Wie bereits vorangegangen angedeutet, zeigt sich auf Basis der quantitativen Ergebnisse kein statistisch signifikanter Zusammenhang zwischen den mathematik- und beweisbezogenen Beliefs hinsichtlich einer statischen und dynamischen Perspektive. Darüber hinaus kann keine Korrelation bezüglich mathematik- und beweisbezogener Beliefs über sich selbst sowie sozio-affektiver Beliefs anhand der dargestellten quantitativen Fragebogenergebnisse verzeichnet werden. Da diesbezüglich keine weiteren empirischen Forschungen vorliegen, kann an dieser Stelle nur vermutet werden, dass hier die von Schoenfeld (1989, S. 349) postulierte Trennung der Schulmathematik von einer abstrakten, wissenschaftlichen Mathematik erfolgt. Während die Lernenden ihre Überzeugungen zur Mathematik an ihre Erfahrungen aus dem alltäglichen Unterricht anlehnen, könnte die mangelnde bis kaum vorliegende Erfahrung mit Beweisen dazu führen, diesbezügliche Beliefs an anderen Orientierungspunkten wie gesellschaftlich anerkannten Sichtweisen oder übernommenen Glaubenssätzen auszurichten, eine Sichtweise, die sich auch bei Kollosche (2015) findet.

Zwar zeigen die Ergebnisse keinen direkten Zusammenhang zwischen mathematik- und beweisbezogenen Beliefs, allerdings werden bei der Analyse der Daten diverse zusammenhängende Aspekte sichtbar, welche an dieser Stelle zur Vollständigkeit erwähnt seien. So zeigen sich insbesondere geschlechterspezifische Unterschiede hinsichtlich sozio-affektiver Beliefs, wobei die männlichen Teilnehmer eine tendenziell gemeinschaftlich orientierte Sicht und damit verbundene positive Emotionen zeigen. Ein geschlechterspezifischer Unterschied hinsichtlich der Konstruktionsleistungen wie ihn Healy und Hoyles (2000, S. 421) zeigen, kann nicht bestätigt werden. Darüber hinaus zeigt sich ein Unterschied im Hinblick auf den Besuch des Wahlpflichtfachs Mathematik außerhalb des regulären Unterrichts. Lernende des Wahlpflichtfaches zeigen dabei tendenziell positivere Beliefs über sich selbst sowie sozial-affektive Beliefs und lehnen ein empirisches Beweisverständnis stärker ab. Darüber hinaus zeigt sich eine stärkere Hinwendung zur Systematisierungsfunktion und Entwicklung einer intuitiven Idee am Beginn des Beweisprozesses. Auf Basis des Interviews mit einer Schüler*in aus dem Wahlpflichtfach ist zu vermuten, dass der Unterschied durch eine größere Vorerfahrung sowie generell durch den Besuch des Wahlpflichtfaches auf Basis eines persönlichen Interesses an der Mathematik

und damit verbundenen positiven Emotionen begründet ist. Ein Zusammenhang zwischen besseren Mathematiknoten und der behaupteten Fähigkeit, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen, ist ebenfalls festzustellen. Darüber hinaus zeigen sich keine Korrelationen mit der Mathematiknote. Allerdings ergeben sich hinsichtlich des Verständnisses der Themen aus dem Gebiet der Analysis Zusammenhänge zu den angeführten Beliefs über sich selbst und sozio-affektiven Beliefs. Insbesondere werden von Lernenden, die ein besseres Verständnis angeben, die Verbesserung der eigenen Fähigkeiten sowie das selbstständige Nachvollziehen eines Beweises und die Sicherheit auf mathematischer Ebene bei der Präsentation einer Beweisidee zustimmender hervorgehoben. Hinsichtlich der angegebenen Vorerfahrungen zeigt sich allerdings kein statistisch signifikanter Zusammenhang.

Zwar stehen die angeführten Unterschiede und Zusammenhänge nicht im Fokus der vorliegenden Arbeit, sollen allerdings insbesondere verdeutlichen, dass eine Vielzahl von Faktoren einen entscheidenden Einfluss auf die Überzeugungen der Lernenden hat, während möglicherweise andere, wie die Mathematiknote, weniger mit den persönlichen Einstellungen in Verbindung stehen, wie eventuell vermutet werden könnte. Auf eine tiefergehende Untersuchung der beschriebenen Zusammenhänge wird in der vorliegenden Arbeit aufgrund eines abweichenden Fokus verzichtet. Von vorrangigem Interesse ist dabei insbesondere die nachfolgende Forschungsfrage:

- iii. Inwiefern erzielen die entwickelten unterrichtlichen Interventionen eine Veränderung im Sinne einer Weiterentwicklung bestehender und Aufnahme neuer beweisbezogener und mathematischer Beliefs?

Hinsichtlich einer durch die geplanten Interventionsmaßnahmen im Rahmen eines Unterrichtskonzeptes angestrebten Änderungen bestehender Beliefs, ergibt sich auf Basis der quantitativen Fragebogenergebnisse ein signifikantes Ergebnis im Hinblick auf eine Abkehr von einem empirischen Beweisverständnis. Insbesondere bestätigen die geführten Interviews eine tendenzielle Anlehnung gegenüber eines solchen Beweisschemas, welches bei Harel und Sowder (1998, S. 278) als dominant hervorgehoben wird.

Zwar zeigt sich bei diesem Item im Fragebogen der einzige statistisch signifikante Unterschied hinsichtlich eines Prä-Post-Vergleichs, es soll an dieser Stelle allerdings auf weitere zentrale Veränderungen eingegangen werden. So zeigen sich darüber hinaus im Hinblick auf die Systematisierungsfunktion im Rahmen der Endbefragung deutlich höhere Zustimmungswerte, die sich auch im Ranking der Beweisfunktionen widerspiegeln. Während in der Anfangserhebung ein überwiegender Anteil der Teilnehmenden diese Funktion auf dem letzten Platz positioniert

und damit als unwichtigste Funktion sieht, zeigt sich in der Posttestung eine dominante Positionierung auf dem dritten Rang. Insbesondere werden in drei der insgesamt fünf Interviews Strukturaspekte beim Beweisen als dominante Erfahrung im Rahmen der Interventionsmaßnahmen hervorgehoben. Angesprochen wird dabei die Struktur beim Ablauf eines Beweises und eine entsprechende Vorgehensweise im Beweisprozess. Insbesondere zeigt sich damit, dass eine starke Betonung einer Struktur im Sinne einer Vorgehensweise in den Interventionsmaßnahmen deutlich geworden ist und positiv hinsichtlich der Auswirkung auf die Beliefs über das Beweisen und über sich selbst gewirkt hat. Dieser strukturierende Beweisaspekt wird insbesondere in Verbindung mit der Vermittlung von Methodenwissen gesehen. Die in einer Vielzahl von Studien hervorgehobene Bedeutung von strategischem bzw. methodischem Beweiswissen (z. B. Heinze, 2004; Heinze et al., 2004; Heinze & Reiss, 2003; Reiss et al., 2002; Reiss et al., 2001; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2009; Weber, 2001) kann damit in der vorliegenden Arbeit ebenfalls bestätigt werden.

Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse der quantitativen Untersuchung insbesondere stabile Überzeugungen hinsichtlich einer sowohl statischen als auch dynamischen Sichtweise auf die Mathematik im Allgemeinen und das mathematische Beweisen im Spezifischen. Darüber hinaus weisen die Lernenden tendenziell stabile Beliefs über sich selbst auf. Allerdings zeigt sich hinsichtlich der persönlichen Ausdauer bei schwierigen Beweisen eine eher positive Einstellung, die jedoch statistisch nicht signifikant ist. Ebenso zeigt sich eine Abkehr hinsichtlich der empfundenen Schwierigkeiten bei der Unterscheidung einer Beweisidee von den spezifischen Details. Wäre dabei die Voraussetzung der Normalverteilung erfüllt, würde sich diesbezüglich sogar ein signifikanter Unterschied im Hinblick auf die Anfangserhebung ergeben. Ebenso zeigt sich bei den sozio-affektiven Beliefs eine tendenzielle Stabilität der Überzeugungen der Lernenden.

Diese Ergebnisse lassen sich zum Teil in jene aus der Studie von Grundey (2015, S. 273–274) einordnen, wonach es zwar zu einer Erweiterung um soziale und funktionelle Aspekte des Beweisens sowie um logische Strukturen und Allgemeingültigkeit kam, für die meisten Teilnehmer*innen allerdings ihre Anfangsvorstellungen grundlegend blieben. Einer derartigen Interpretation stehen allerdings auch mehrere Aspekte entgegen. Zum einen zeigt sich eine statistisch signifikante Veränderung hinsichtlich eines empirischen Beweisverständnisses sowie darüber hinaus, weitere deutliche Änderungen im Hinblick auf einzelne Aspekte. Eine diese Befunde ablehnende Interpretation der Ergebnisse würde dabei einen wesentlichen Umstand der durchgeführten Studie aussparen: die Stichprobengröße, welche die Interpretation statistisch signifikanter oder nicht signifikanter Ergebnisse erschwert. Dementsprechend ist für eine vollständige

Interpretation die durchgeführte qualitative Untersuchung im Rahmen der an die quantitative Erhebung anschließenden Interviews von entscheidender Bedeutung. Hier zeigt sich zum einen die bereits angesprochene Hervorhebung eines strukturellen Aspekts, der durch die Interventionen vermittelt wurde und sowohl die beweisbezogenen als auch Beliefs über sich selbst entscheidend zu beeinflussen scheint. Darüber hinaus bestätigt sich in den Interviews die von Bernack-Schüler (2018) hervorgehobene Bedeutung von affektiven Erfahrungen im Rahmen von Beliefänderungen, wobei positive Emotionen und motivationale Aspekte wie Interesse insbesondere von Personen geäußert werden, die ein dynamisches Selbstbild nach Dweck (2007, S. 71) zeigen und davon ausgehen, dass sich ihre eigenen Überzeugungen durchaus verändern können. Entsprechend gegenteilig zeigt sich in den Interviews eine generell statische Sichtweise zur Verbesserung der eigenen Fähigkeiten und Veränderung der persönlichen Beliefs in Verbindung mit negativen Emotionen und tendenziell schlechteren Beurteilungen im Fach Mathematik, was sich mit den Ergebnissen von Wen und Dubé (2022) deckt, die eine negative Korrelation für Angst und eine positive für Selbstkonzept und -vertrauen mit der Mathematikleistung festhalten. Im Rahmen der Interviews kann zudem die von Heinze (2004) hervorgehobene Bedeutung von Faktenwissen für Schwierigkeiten im Umgang mit Beweisen bestätigt werden. Demnach werden von den Lernenden selbst ihre Beweisfähigkeiten und Ansichten mit fehlendem Faktenwissen in Verbindung gebracht.

Ergänzend ist hinzuzufügen, dass trotz einer in den quantitativen Ergebnissen sichtbaren Abkehr von einem empirischen Beweisverständnis sowie der im Interview zum überwiegenden Teil postulierten Verbesserungen der eigenen Fähigkeiten und Einsichten in die Struktur von Beweisprozessen, nur eine geringe Verbesserung der Konstruktionsleistungen ersichtlich wird, wobei allerdings eine Reduktion fehlerbehafteter Ansätze in der Abschlusserhebung festzustellen ist. Das legt eine Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Reiss et al. (2002) nahe, wobei kein signifikanter Zusammenhang zwischen den Leistungen und Beliefs der Lernenden festzustellen ist. Darüber hinaus scheint die vorliegende Arbeit weiter die von Schoenfeld (1989, S. 349) postulierte Trennung zwischen der Schul- und Fachmathematik zu bestätigen, wodurch insbesondere positiv geäußerte Überzeugungen nicht mit dem Verhalten im Rahmen von Problemlöseprozessen und, im Zuge der vorliegenden Arbeit, Beweisprozessen übereinstimmen.

Insgesamt reiht sich damit die vorliegende Arbeit in eine Reihe von diversen Studien ein, die empirisch Beliefänderungen feststellen (z. B. Ambrose, 2004; Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 1999; Kempen, 2019; Liljedahl et al., 2007; Safrudiannur et al., 2022; Vacc & Bright, 1999; Weygandt, 2021; Weygandt & Oldenburg, 2015). Dabei zeigen sich insbesondere vereinzelte Veränderungen insgesamt über die gesamte Gruppe hinweg, wie hinsichtlich einer

verstärkten Abkehr von einem empirischen Beweisverständnis sowie einer stärkeren Zuwendung zur Systematisierungsfunktion von Beweisen, sowie deutliche Veränderungen bei einzelnen Personen, wie insbesondere die Einzelfallanalyse von Fall B7 zeigt. Eine ausbleibende tiefergehende Veränderung bestehender mathematik- und beweisbezogener Beliefs ist dabei zudem vor dem Hintergrund zu betrachten, dass bereits vor der Durchführung der Interventionsmaßnahmen durchaus für das mathematische Beweisen und die Mathematik überwiegend produktive Beliefs bei den Lernenden vorliegen, wie unter anderem im Zuge der Einzelfallanalyse von Fall A13 deutlich wird. Von Interesse für die vorliegende Arbeit ist damit zudem die Wirkung der einzelnen Interventionsmaßnahmen, die im Rahmen der Interviews erfragt wurden, um die nachfolgende Forschungsfrage zu beantworten:

- iv. Welche spezifischen Komponenten der Interventionsmaßnahmen bewirken im Einzelfall eine vorliegende Veränderung beweisbezogener Beliefs?

Ein Zusammenhang zwischen einer dynamischen Sichtweise zur Änderung beweis- und mathematikbezogener Beliefs zeigt sich in den durchgeführten Interviews insbesondere mit positiven Emotionen und motivationalen Aspekten wie Interesse. Dabei werden die Gruppenarbeiten als emotional positiv konnotiert in den Gesprächen hervorgehoben. Da, wie bereits angeführt, auch in anderen vorliegenden Studien die Bedeutung von affektiven Erfahrungen im Rahmen von Beliefänderungen hervorgehoben wird (z. B. Bernack-Schüler, 2018), ist auf Basis der qualitativen Ergebnisse der Einfluss kooperativer Sozialformen, wie die Gruppenarbeit, positiv für die Änderung von Beliefs hervorzuheben.

In drei der insgesamt fünf Interviews wird darüber hinaus die Vermittlung von Struktur im Rahmen der Interventionseinheiten deutlich positiv hervorgehoben. Damit erweist sich das von Brunner (2014) entwickelte kognitionspsychologische Modell schulischen Beweisens als tragfähige didaktische Grundlage um einerseits den Lernenden mathematisches Beweisen allgemein näher zu bringen und um andererseits in weiterer Folge Beliefänderungen zu bewirken.

Darüber hinaus werden die zu Beginn der Interventionseinheiten vermittelten allgemeinen Wissensinhalte zum Beweisen in der qualitativen Erhebung hervorgehoben. Das bestätigt die Bedeutung der inhaltlichen Elemente für die Behandlung mathematischer Beweise im Unterricht nach Kuntze et al. (2004, S. 6–7), wobei die allgemeinen Bemerkungen über das mathematische Beweisen zum Aufbau von Methodenwissen damit besonders positiv hervorzuheben sind.

Für weiter- bzw. tiefergehende Änderungen der persönlichen Überzeugungen, insbesondere im Hinblick auf Beliefs über sich selbst und affektive Aspekte, wurde mehr Zeit für weitere Übungsmöglichkeiten in den Interviews hervorgehoben. Dieser Befund deckt sich mit den

Ansichten von Ambrose (2004) und Yoo (2008), wonach es sich bei einer Veränderung von Beliefs um einen länger andauernden, schrittweise erfolgenden Prozess handelt.

Abschließend sind allerdings einige Limitationen der dargestellten Ergebnisse sowie deren Interpretation zu berücksichtigen, welche im Nachfolgenden ausgeführt werden. Zum einen handelt es sich bei der vorliegenden Untersuchung um eine, mit 25 Personen, kleine Stichprobe, die als Gelegenheitsstichprobe auszuweisen ist (Döring, 2023, S. 307). Demnach sind keine Verallgemeinerungen auf die gesamte Population möglich und die Interpretationen sind auf die untersuchte Gruppe beschränkt.

Darüber hinaus wurde bereits angedeutet, dass die quantitativen Fragebogenergebnisse lediglich einen ungenauen Einblick in tatsächliche Veränderungen ermöglichen, was zudem im Zuge der qualitativen Erhebung in Form von persönlichen Interviews bestätigt werden kann. Die interviewten Lernenden sprechen hier von Veränderungen, die in den quantitativen Ergebnissen nicht ersichtlich sind. Ergänzend dazu, offenbaren sich in den Interviews abweichende Interpretationen und Verständnisschwierigkeiten bei einzelnen Items, sodass es zu einer nachträglichen Verzerrung der quantitativen Fragebogenergebnisse kommt.

Daneben ist sowohl im Rahmen der Interviews als auch im Zuge der Fragebogenerhebung die unter anderem von Safrudiannur und Rott (2020, S. 2) sowie Szücs (2023, S. 11) angesprochene Problematik der sozialen Erwünschtheit zu berücksichtigen, da diese auch in der vorliegenden Arbeit nicht ausgeschlossen werden kann. Dabei ist hinsichtlich des quantitativen Messinstruments in Form eines standardisierten Fragebogens darauf hinzuweisen, dass dieser nicht bereits vorab im Rahmen einer separaten Studie empirisch geprüft wurde.

Abschließend ist insbesondere hervorzuheben, dass die entstandenen Veränderungen zudem dadurch bedingt sein können, dass eine überwiegende Anzahl der teilnehmenden Lernenden vor der expliziten Thematisierung im Rahmen der Interventionseinheiten bisher kaum mit Beweisen in Kontakt gekommen ist. Damit ist davon abzusehen, die Änderungen den hier spezifischen geplanten Interventionsmaßnahmen und -methoden zuzuschreiben, da möglicherweise jegliche Art der Behandlung von Beweisen im Unterricht zu einer Veränderung geführt hätte.

9 Fazit

Zusammenfassend kann im Rahmen der vorliegenden Studie nachgewiesen werden, dass bestehende beweisbezogene Beliefs von Lernenden der Sekundarstufe II durch unterrichtliche Interventionen auf dem Gebiet der Analysis beeinflusst werden können. Spezifischer zeigt sich eine Veränderung bestehender Überzeugungen bei den Lernenden insbesondere hinsichtlich eines empirischen Beweisverständnisses nach Harel und Sowder (1998, S. 252), wobei eine Abkehr eines solchen Schemas erreicht wird. Dabei ist darauf zu verweisen, dass die untersuchte Gruppe bereits vor der Durchführung entsprechender beweisspezifischer Interventionsmaßnahmen für die Mathematik und mathematisches Beweisen bereits in vorliegenden Studien als produktiv identifizierte Überzeugungen aufweist. Vor diesem Hintergrund ist das Ergebnis zu sehen, dass weitreichende Veränderungen auf Basis der quantitativen Fragebogenerhebung nicht festzustellen sind. Innerhalb von Einzelstudien macht allerdings ein tiefergehender Einblick allgemein tiefergreifende Beliefänderungen bei einzelnen Lernenden ersichtlich, die sich insbesondere auf Beliefs über mathematisches Beweisen im Spezifischen sowie verstärkt Beliefs über sich selbst im Sinne der persönlichen Selbstwirksamkeit beziehen. Damit reihen sich die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit in eine Vielzahl von Studien ein, die Beliefänderungen bereits empirisch feststellen konnten (z. B. Ambrose, 2004; Bernack-Schüler, 2018; Chapman, 1999; Kempen, 2019; Liljedahl et al., 2007; Safrudiannur et al., 2022; Vacc & Bright, 1999; Weygandt, 2021; Weygandt & Oldenburg, 2015).

Hinsichtlich einer Reflexion des für die intendierte Veränderung bestehender beweisbezogener Beliefs entwickelten Unterrichtskonzepts, zeigt sich ein weitergehender zeitlicher Bedarf zur entsprechenden Umsetzung von Interventionsmaßnahmen. Der von Brunner (2014, S. 71) entwickelte Dreischritt aus empirischem, inhaltlich-anschaulichem und formal-deduktivem Beweis ist dabei rückwirkend positiv hervorzuheben, da sich auf Basis der Interviews mit den Lernenden sowie auf Grundlage der quantitativen Ergebnisse eine positive Resonanz zeigt. Die einführende Inputphase im Zuge der Interventionsmaßnahmen erweist sich insbesondere zur Vermittlung von beweisspezifischem Methodenwissen und hinsichtlich einer anfänglichen Sensibilisierung für das Beweisen als zielführende Maßnahme, wobei eine Kürzung des Inputs anzudenken ist. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit allerdings nicht die empirische Prüfung des entwickelten Unterrichtskonzepts im Vordergrund steht, eine solche Entwicklung und empirische Überprüfung jedoch für weitere diesbezügliche Untersuchungen als wünschenswert und notwendig erachtet wird, plädiert die vorliegende Arbeit für die Entwicklung und Weiterentwicklung sowie empirische Prüfung von Interventionsmaßnahmen, die insbesondere auch

kleinteilig im Unterricht eingesetzt werden können, um Beweiskompetenz und damit in Verbindung die Herausbildung förderlicher Beliefs für das mathematische Beweisen weiter zu unterstützen.

Die vorliegende Arbeit greift insbesondere eine Forschungslücke in der mathematischen Beliefforschung auf, innerhalb welcher zwar bereits zahlreiche Studien zu mathematikbezogenen Beliefs von Lernenden vorliegen (z. B. Kislenko, 2009; Kloosterman, 2003; Kloosterman & Cougan, 1994; Kollosche, 2015; Maaß & Ege, 2007; Reiss et al., 2002; Rösken et al., 2007; Rolka & Halverscheid, 2011; Wen & Dubé, 2022), beweisbezogene Beliefs allerdings bisher weitgehend ausgespart wurden, trotz der hohen Bedeutungszuschreibung mathematischer Beweise sowohl für die Fachwissenschaft als auch die Mathematikdidaktik und den Mathematikunterricht (z. B. Brunner, 2014; Hanna & Jahnke, 1996; Jahnke et al., 2023, Rav, 1999; Szűcs, 2023). Dies erscheint vor dem Hintergrund eines bestehenden Plädoyers für eine kontext- und gegenstandsgebundene Erhebung von Beliefs (z. B. Bernack-Schüler, 2018; Erens & Eichler, 2014) umso bedeutender.

Abseits eines allgemeinen Interesses an beweisbezogenen Beliefs von Lernenden erweist sich dies insbesondere auf der Praxisebene umso notwendiger, da „kritisch-argumentatives Arbeiten“ und „Beweisen“ explizit im Lehrplan der österreichischen Oberstufe angeführt sind (LP, AHS, 2024, Anlage A) und diverse Studien vorliegen, welche einen Zusammenhang zwischen mathematischen Leistungen und über Mediatorvariablen und Emotionen wirksam werdende Beliefs nachweisen bzw. postulieren (Reiss et al., 2002; Wen & Dubé, 2022). Zwar zeigen sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit trotz überwiegend produktiver Beliefs, tendenziell mangelhafte Leistungen bei der Konstruktion von Beweisideen, die auf einer durchaus größeren Datengrundlage basierende Studie von Healy und Hoyles (1998, S. 4) weist diesbezüglich allerdings einen signifikanten Zusammenhang nach. Zudem erscheint dieses gegensätzliche Bild von beweisbezogenen Beliefs und Konstruktionsleistungen umso bedeutsamer vor dem Hintergrund der von Schoenfeld (1989, S. 349) angesprochenen Trennung von Schul- und Fachmathematik in den Köpfen der Lernenden, die dazu führt, dass die positiven Überzeugungen der Lernenden über die abstrakte Mathematik nicht mit dem Verhalten und den Fähigkeiten in Problemlösesituationen übereinstimmen oder es sich, im Sinne von Kollosche (2015), vornehmlich um übernommene Glaubenssätze handelt.

Auf dieser Basis plädiert die vorliegende Arbeit für umfangreichere Untersuchungen beweisbezogener Beliefs sowie die Entwicklung eines diesbezüglichen quantitativen Erhebungsinstruments und dessen empirischer Überprüfung. Dabei wäre eine Weiterentwicklung des im Zuge

dieser Arbeit entwickelten Fragebogens sowie der dafür konstruierten Kategorien anzustreben, welche die aufgedeckten Schwierigkeiten aufgreift und tiefergehende Einblicke durch den Einbezug der „rank-then-rate“-Methode nach Safrudiannur und Rott (2020) ermöglicht, die sich im Zuge des entwickelten Erhebungsinstruments als wertvolle Ergänzung im Rahmen der Ergebnisinterpretation herausstellt. Darüber hinaus bestätigt die Arbeit den Bedarf an qualitativen Methoden zur tiefergehenden Untersuchung von Beliefs, sodass hier die Entwicklung eines qualitativen Erhebungsinstruments beispielsweise im Sinne eines standardisierten Interviewleitfadens zur systematischen Untersuchung beweisbezogener Beliefs anzudenken ist.

Abschließend sei hervorzuheben, dass insbesondere im Sinne einer vielfach vertretenen Perspektive wie bei Rav (1999, S. 6), das Beweisen als Herzstück der Mathematik zu sehen, und Beweise als essenziellen Bestandteil im Mathematikunterrichts zu etablieren (z. B. Brunner, 2014; Hanna & Jahnke, 1996; Jahnke et al., 2023, Rav, 1999; Szücs, 2023), Beweisfähigkeiten, -kompetenz und -verständnis in enger Verbindung mit beweisbezogenen Beliefs durch die Einführung verschiedener kleinteiliger Unterrichtskonzepte und -methoden gefördert werden müssen. Damit diese Forderung allerdings tatsächlich realistisch in einer von Zeitmangel beherrschten Unterrichtspraxis realisiert werden kann, bedarf es einer verstärkten Abkehr von regelhaftem Anwenden von Formeln und Regeln, was insbesondere in der Oberstufe unter Anbetracht von Formelheften und technologischer Vielfalt überholt erscheint. Damit bleibt auch Zeit und Raum für: *quod erat demonstrandum*.

Literatur

- Abels, N. (2025). *Argumentation und Metakognition bei geometrischen Beweisen und Beweisprozessen. Eine Untersuchung von Studierenden im Grundschullehramt*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-46468-4>
- Abelson, R. P. (1979). Differences Between Belief and Knowledge Systems. *Cognitive Science*, 3(4), 355–366. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(79\)80013-0](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(79)80013-0)
- Alcock, L. & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125–134. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003>
- Ambrose, R. (2004). Initiating Change in Prospective Elementary School Teachers' Orientations to Mathematics Teaching by Building on Beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 91–119. <https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000021879.74957.63>
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Hrsg.), *Mathematics, teachers and children* (S. 216–235). Hodder and Stoughton.
- Balacheff, N. (1999, Mai/Juni). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate.... *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Abgerufen am 21. Juli 2025 von <http://www.lettredelaPräuve.org/OldPräuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeUK.html>
- Bauer, T., Müller-Hill, E., Neuhaus-Eckardt, S. & Rach S. (2022). Beweisverständnis im Mathematikstudium unterstützen: Vergleich unterschiedlicher Varianten der Strategie „Illustrieren am Beispiel“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43(2), 311–346. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00191-6>
- Behrends, E. (2015). *Analysis Band 1. Ein Lehrbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni* (6., aktualisierte Auflage). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07123-3>
- Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1–2), 23–40. <https://doi.org/10.1007/BF00144356>
- Bernack, C. (2011). Understanding the impact of a problem solving course on pre-service teachers' beliefs. In B. Rösken & M. Casper (Hrsg.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVII. Proceedings of the MAVI-17 Conference September 17-20, 2011, Bochum, Germany* (S. 23–32).

- Bernack-Schüler, C. (2018). Die Entwicklung von Mathematikbildern bei Lehramtsstudierenden. Beliefänderungen durch ein Problemlöseseminar. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22587-2>
- Bersch, S. (2023). Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht. Explorative Studien zu Herausforderungen und Lösungsansätzen aus der Perspektive von Lehrkräften. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-40969-2>
- Beswick, K. (2005). The Beliefs/Practice Connection in Broadly Defined Contexts. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 39–68. <https://doi.org/10.1007/BF03217415>
- Beswick, K. (2007/2008). Influencing teachers' beliefs about teaching mathematics for numeracy to students with mathematics learning difficulties. *Mathematics Teacher Education and Development*, 9, 3–20. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ822098.pdf>
- Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians mathematics and their relationship to practice. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 127–147. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9333-2>
- Beumann, S. & Benölken, R. (2022). Just more than numbers, facts or calculus? – Beliefs of mathematically gifted students. In S. A. Chamberlin (Hrsg.), *On the Road to Mathematical Expertise and Innovation. Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Creativity and Giftedness (MCG 12)* (S. 86–92). WTM-Verlag.
- Beumann, S. & Geisler, S. (2022). Epistemologische Überzeugungen und innermathematische Experimente – Eine Interventionsstudie mit mathematisch interessierten Lernenden. *mathematica didactica*, 45, 1–16. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1389>
- Beumann, S. & Kisters, M. (2022). Beliefs zur Mathematik – Explorative Fallstudien mathematisch begabter Schüler*innen. *Pädagogische Horizonte*, 6(2), 107–119. <https://doi.org/10.17883/pa-ho-2022-02-08>
- Bieda, K. N. (2010). Enacting Proof-Related Tasks in Middle School Mathematics: Challenges and Opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382. <https://www.jstor.org/stable/41103880>
- Biehler, R., & Kempen, L. (2014). Entdecken und Beweisen als Teil der Einführung in die Kultur der Mathematik für Lehramtsstudierende. In J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prädiger (Hrsg.), *Übergänge konstruktiv gestalten. Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 121–136). Springer Spektrum.

- Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 141–179. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0097-1>
- Bishop, A., Seah, W. T., & Chin, C. (2003). Values in Mathematics Teaching – The Hidden Persuaders? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Hrsg.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (S. 717–765). Kluwer.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1989). Warum haben nicht-triviale Lösungen von $f' = f$ keine Nullstellen? Beobachtungen und Bemerkungen zum “inhaltlich-anschaulichen Beweisen“. In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.), *Anschauliches Beweisen. 7. und 8. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik“ in Klagenfurt im Juli 1987 und 1988* (S. 199–209). B. G. Teubner.
- Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal Proofing: Examples and Reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 183–203. <https://doi.org/10.1007/BF00555722>
- Boero, P. (1999, Juli/August). Argumentation and mathematical proof. A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Abgerufen am 21. Juli 2025 von <http://www.lettredelaPräuve.org/OldPräuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html>
- Bogdan, R. J. (1986). The importance of belief. In R. J. Bogdan (Hrsg.), *Belief: Form, content, and function* (S. 1–16). Oxford University Press.
- Branford, B. (1908). *A Study of Mathematical Education including The Teaching of Arithmetic*. Clarendon Press.
- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41864-8>
- Buchbinder, O. & McCrone, S. (2023). Preparing prospective secondary teachers to teach mathematical reasoning and proof: the case of the role of examples in proving. *ZDM Mathematics Education*, 55(4), 779–792. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01493-4>
- Büchter, A. & Henn, H.W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Spektrum.

- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (Hrsg.). (2022). *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)*. https://prod.aufgabenpool.at/amn/gk/srp_mat_grundkompetenzen_2022-03-31.pdf
- Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (bifie) (Hrsg.). (2011a). *Praxishandbuch für „Mathematik“ 4. Schulstufe* (Bd. 1, 2., durchgesehene und erweiterte Auflage). <https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/materialien-zu-bildungsstandards/publikationen-mathematik>
- Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (bifie) (Hrsg.). (2011b). *Praxishandbuch für „Mathematik“ 8. Schulstufe* (Bd. 1, 2., überarbeitete Auflage). <https://www.iqs.gv.at/downloads/nationale-kompetenzerhebung/materialien-zu-bildungsstandards/publikationen-mathematik>
- Cai, J., & Wang, T. (2010). Conceptions of effective mathematics teaching within a cultural context: Perspectives of teachers from China and the United States. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(3), 265–287. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9132-1>
- Chapman, O. (1999). Inservice Teacher Development in Mathematical Problem Solving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(2), 121–142. <https://doi.org/10.1023/A:1009948231298>
- Chapman, O. (2003). Belief Structure and Inservice High School Mathematics Teacher Growth. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 177–193). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Collins, A., Brown, J. S. & Newman S. E. (1987). *Cognitive Apprenticeship: teaching the craft of reading, writing, and mathematics* (Technical Report No. 403). University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Cooney, T. H., Shealy, B. E. & Arvola, B. (1998). Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 306–333. <https://doi.org/10.2307/749792>
- Cramer, J. (2018). *Mathematisches Argumentieren als Diskurs. Eine theoretische und empirische Betrachtung diskursiver Hindernisse*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22908-5>
- Cross, D. (2009). Alignment, cohesion and change: Examining mathematics teachers' belief structure and its influence on instructional practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(5), 325–346. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9120-5>

- Cross Francis, D., Rapacki, L. & Eker, A. (2015). The Individual, the Context, and Practice: A Review of the Research on Teacher's Beliefs Related to Mathematics. In H. Fives & M. G. Gill (Hrsg.), *International Handbook of Research on Teachers' Beliefs* (S. 336–352). Routledge.
- Dawkins, P. C. & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 123–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (1999). Aspects of affect: Mathematical intimacy, mathematical integrity. In O. Zaslavsky (Hrsg.), *Proceedings of the 23rd annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 249–256). <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2019/05/PME23-1999-Haifa.pdf>
- DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A rePräsentational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131–147. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4>
- DeBellis, V. A. & Rosenstein, J. G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(2), 46–55. <https://doi.org/10.1007/BF02655758>
- Deitmar, A. (2021). *Analysis* (3., überarbeitete und erweiterte Auflage). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62858-4>
- de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 17–24.
- Döring, N. (2023). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (6., vollständig überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Auflage). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64762-2>
- Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2021). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proofing in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 1–10). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apPräntissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 233–261. <https://doi.org/10.1007/BF00368340>

- Dweck, C. (2007). *Selbstbild. Wie unser Denken Erfolge oder Niederlagen bewirkt*. Campus Verlag.
- Eichler, A. & Erens, R. (2014). Teachers' beliefs towards teaching calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46(4), 647–695. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0606-y>
- Elschenbroich, H.-J. (2009). Mit dem Computer anschaulich beweisen. Beweise mit visuell-dynamischen Puzzles. *Mathematik lehren. Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien*, 155, 58–61.
- Erens, R. (2017). Entwicklung von Beliefs von Lehrkräften. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Vorträge auf der 51. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 27.02.2017 bis 02.03.2017 in Potsdam* (Bd. 3, S. 1097–1100). WTM-Verlag.
- Erens, R. & Eichler, A. (2014). On the Structure of Secondary High-School Teachers' Belief Systems on Calculus. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (Hrsg.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 25–32). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599804.pdf>
- Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teachers: A Model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13–33. <https://doi.org/10.1080/0260747890150102>
- Freudenthal, H. (1953). Zur Geschichte der vollständigen Induktion. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 22, 17–37.
- Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. Oldenbourg.
- Furinghetti, F. & Morselli, F. (2011). Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education*, 43(4), 587–599. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0316-7>
- Furinghetti, F. & Pehkonen, E. (2003). Rethinking Characterizations of Beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 39–57). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Galbraith, P. L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 1–28. <https://doi.org/10.1007/BF00386043>

- Garofalo, J. (1989). Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance. *The Mathematics Teacher*, 82(7), 502–505. <https://www.jstor.org/stable/27966379>
- Geisler, S. & Rolka, K. (2021). “That Wasn’t the Math I Wanted to do!” – Students’ Belief During the Transition from School to University Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(3), 599–618. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10072-y>
- Goldin, G. A. (2003). Affect, Meta-Affect, and Mathematical Belief Structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 59–72). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Goldin, G. A., Rösken, B. & Törner, G. (2009). Beliefs – No longer a Hidden Variable in Mathematical Teaching and Learning Processes. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results* (S. 1–18). Brill. <https://doi.org/10.1163/9789087907235>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. McGraw Hill.
- Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3–45. <https://doi.org/10.1007/BF03338859>
- Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen. Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-08937-5>
- Habermas, J. (2011). *Theorie des kommunikativen Handelns. Band 1: Handlungsrationalität und gesellschaftliche Rationalisierung* (8. Auflage). Suhrkamp.
- Halverscheid, S. & Rolka, K. (2007). Mathematical Beliefs in Pictures and Words seen through „Multiple Eyes“. In J. H. Woo, K. S. Park, H. C. Lew & D. Y. Seo (Hrsg.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 281–288).

- Hanna, G. (1989). Proofs that Prove and Proofs that Explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artique (Hrsg.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 45–51).
- Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), 6–13. <https://doi.org/10.1007/BF01809605>
- Hanna, G. & de Villiers, M. (2021). Aspects of Proof in Mathematics Education. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proofing in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 1–10). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 877–908). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0>
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (CBMS Issues in Mathematics Education, Bd. 7, S. 234–283). American Mathematical Society.
- Healy L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and Proving in School Mathematics*. University of London, Institut of Education.
- Healy L. & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396–428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, S. (2018). Beweisen – Argumentieren. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (6. Auflage, S. 93–106). Cornelsen.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.
- Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben – eine Interviewstudie –. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(5), 150–161. <https://doi.org/10.1007/BF02655667>

- Heinze, A., Cheng, Y.-H. & Yang, K.-L. (2004). Students' performance in reasoning and proof in Taiwan and Germany: Results, paradoxes and open questions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(5), 162–171. <https://doi.org/10.1007/BF02655668>
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: methodological knowledge as an important component of proof competence. M. A. Mariotti (Hrsg.), *CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Thematic Group 4* (S. 1–10).
- Heinze, A. & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level – a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(3), 98–104. <https://doi.org/10.1007/BF02652777>
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 389–399. <https://doi.org/10.1007/BF01273372>
- Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S. & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, 18(1), 54–65. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.008>
- Hodds, M., Alcock, L. & Inglis, M. (2014). Self-Explanation Training Improves Proof Comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 62–101. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.1.0062>
- Hoffman, K., Williams, T. H. & Kephart, K. (2024). The Use of Guided Reflections in Learning Proof Writing. *Education Sciences*, 14(10), Artikel 1084. doi.org/10.3390/educsci14101084
- Jahnke, H. N., Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2023). Argumentieren, Begründen und Beweisen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiner, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Auflage, S. 369–398). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3>
- Janczyk, M. & Pfister, R. (2020). *Inferenzstatistik verstehen. Von A wie Signifikanztest bis Z wie Konfidenzintervall* (3. Auflage). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59909-9>
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründungen, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemsterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24415-6>

- Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler, & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. internationalen Symposiums für Didaktik der Mathematik von 26.9. bis 19.9. in Klagenfurt* (S. 261–274). Hölder-Pichler-Tempsky.
- Kislenko, K. (2009). ‘Mathematics is a bit difficult but you need it a lot’: Estonian Pupils’ Beliefs about Mathematics. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education. New Research Results* (S. 143–163). Sense Publishers.
- Kloosterman, P. (2003). Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning in the Secondary School: Measurement and Implications for Motivation. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 247–269). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Kloosterman, P. & Cougan, M. C. (1994). Students’ Beliefs about Learning School Mathematics. *The Elementary School Journal*, 94(4). <https://www.jstor.org/stable/1001944>
- Kloosterman, P., Raymond, A. M. & Emenaker, C. (1996). Students’ Beliefs about Mathematics: A Three-Year Study. *The Elementary School Journal*, 97(1). <https://www.jstor.org/stable/1001791>
- Knipping, C. (2002). Die Innenwelt des Beweises im Mathematikunterricht. Vergleiche von französischen und deutschen Mathematikstunden. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(6), 258 – 266. <https://doi.org/10.1007/BF02655724>
- Kollosche, D. (2015). Schülervorstellungen von Mathematik. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel* (Bd. 1, S. 476–479). WTM-Verlag.
- Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektorinnen und -direktoren (EDK). (2024). *Rahmenlehrplan Gymnasiale Maturitätsschulen. Bern, 20. Juni 2024 (Stand am 19. Dezember 2024)*. <https://edudoc.ch/record/232281/files/Rahmenlehrplan-maturitatsschulen.pdf>
- Kotelawala, U. (2016). The Status of Proving Among US Secondary Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1113–1131. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9638-1>
- Krumsdorf, J. (2017). *Beispielgebundenes Beweisen* (Ars Inveniendi et Dejudicandi, Bd. 8). WTM.

- Kuckartz, U. (2014). *Mixed Methods. Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren*. Springer VS. <https://doi.org/10.1007/978-3-531-93267-5>
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012*. Wolters Kluwer. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- Kultusministerkonferenz (KMK). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Kuntze, S. (2005). „Wozu muss man denn das beweisen?“. Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. *mathematica didactica*, 28(2), 48–70. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2005.1042>
- Kuntze, S. (2009). Beweisen – was ist das? Gesprächs-, „Rahmen“ und Reflexionsanlässe schaffen. *Mathematik lehren. Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien*, 155, 12–17.
- Kuntze, S. (2012). Pedagogical content beliefs: Global, content domain-related and situation-specific components. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 273–292. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9347-9>
- Kuntze, S., Rechner, M. & Reiss, K. (2004). Inhaltliche Elemente und Anforderungsniveau des Unterrichtsgesprächs beim geometrischen Beweisen. Eine Analyse videografiertter Unterrichtsstunden. *mathematica didactica*, 27(1), 3–22. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2004.1016>
- Leder, G. C. & Forgasz, H. J. (2003). Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 95–113). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Lee, C. Y. (2019). Factors influencing teachers’ decision making on reasoning-and-proving in Hong Kong. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. hal-02398450
- Lee, G. C-Y. (2025). Conditions for change in pre-service teachers’ beliefs about proof and proof teaching. *Mathematics Education Research Journal*. Online-Vorabpublikation. <https://doi.org/10.1007/s13394-025-00525-4>

- Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: the effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2–3), 219–235. <https://peterliljedahl.com/wp-content/uploads/JA-IJMEST-2005.pdf>
- Liljedahl, P., Oesterle, S. & Bernèche, C. (2012). Stability of beliefs in mathematics education: a critical analysis. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17(3–4), 101–118.
- Liljedahl, P., Rolka, K. & Rösken, B. (2007). Affecting Affect: The Reeducation of Preservice Teachers' Beliefs about Mathematics and Mathematics Learning and Teaching. In W. G. Martin, M. E Strutchens & P. C. Elliott (Hrsg.), *The Learning of Mathematics. Sixty-ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 319–330). NCTM.
- Maaß, K. (2006). Bedeutungsdimensionen nützlichkeitsorientierter Beliefs. Ein theoretisches Konzept zu Vorstellungen über die Nützlichkeit von Mathematik und eine erste empirische Annäherung bei Lehramtsstudierenden. *mathematica didactica*, 29(2). 114–138. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2006.1063>
- Maaß, K. & Ege, P. (2007). Mathematik und Mathematikunterricht aus der Sicht von Hauptschülern. *mathematica didactica*, 30(2). 53–85. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2007.1082>
- Manin, Y. I. (2010). *A Course in Mathematical Logic for Mathematicians* (2. Auflage). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0615-1>
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics* 15(3), 277–289. <https://doi.org/10.1007/BF00312078>
- Mayring, P. (2002). *Einführung in die qualitative Sozialforschung. Eine Anleitung zum qualitativen Denken* (5. Auflage). Beltz.
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (13., aktualisierte und überarbeitete Auflage). Beltz.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 575–596). Macmillan. <https://peterliljedahl.com/wp-content/uploads/Affect-McLeod.pdf>
- McLeod, D. B. (1994). Research on Affect and Mathematics Learning in the JRME: 1979 to the Present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637–647. <https://doi.org/10.2307/749576>

- Meyer, M. (2021). *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument* (2. Auflage). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-32391-2>
- Moosbrugger, H. & Kelava, A. (Hrsg.) (2020). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (3., vollständig neu bearbeitete, erweiterte und aktualisierte Auflage). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61532-4>
- Nagel, K. & Reiss, K. (2016). Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*, 19(2), 299–327. <https://doi.org/10.1007/s11618-016-0677-3>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17719/Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics.pdf>
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.
- Neuhaus, S. & Rach, S. (2019). Proof comprehension of undergraduate students and the relation to individual characteristics. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. hal-02398493.
- Op't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. (2003). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. A Quest for Conceptual Clarity and a Comprehensive Categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 13–37). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Palincsar, A. S. & Brown, A. L. (1984). Reciprocal Teaching of Comprehension-Fostering and Comprehension-Monitoring Activities. *Cognition and Instruction*, 1(2), 117–175. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0102_1
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x>
- Pehkonen, E. (1994). On Differences in Pupils' Conceptions about Mathematics Teaching. *The Mathematics Educator*, 5(1), 3–10.

- Pehkonen, E. (1995). *Pupils' View of Mathematics. Initial report for an international comparison project*. University of Helsinki, Department of Teacher Education. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED419712.pdf>
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 157–224).
- Pinkernell, G., Burczyk, S., Lotter, A. & Bruder, R. (2009). Mathe Welt. Das Schülerarbeitsheft. Beweisen lernen. *Mathematik lehren. Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien*, 155, 27–42.
- Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 589–598. <https://www.jstor.org/stable/3482393>
- Prospeschild, M. (2022). *Testtheorie, Testkonstruktion, Testevaluation* (2. aktualisierte Auflage). Ernst Reinhardt. <https://doi.org/10.36198/9783838558332>
- Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(3), 5–41. <https://doi.org/10.1093/philmat/7.1.5>
- Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550–576. <https://doi.org/10.2307/749691>
- Reid, D. & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Sense Publishers. <https://doi.org/10.1163/9789460912467>
- Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen. Einen „Habit of Mind“ im Mathematikunterricht etablieren. *Mathematik lehren. Erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien*, 155, 4–10.
- Reiss, K. & Hammer, C. (2021). *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe* (2. Auflage). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-65429-0>
- Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Pränzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen [Beiheft]*, *Zeitschrift für Pädagogik*, 45, 51–64. <https://doi.org/10.25656/01:3938>

- Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4, S. 97–104). Utrecht University.
- Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 111(4), 155–177.
- Reusser, K. (2005). Problemorientiertes Lernen – Tiefenstruktur, Gestaltungsformen, Wirkung. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 23(2), 159–182. <https://doi.org/10.25656/01:13570>
- Richardson, V. (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula (Hrsg.), *Handbook of research on teacher education* (2. Auflage, S. 102–119). Macmillan.
- Richardson, V. (2003). Preservice teachers' beliefs. In J. Raths & A. C. McAninch (Hrsg.), *Teacher beliefs and classroom performance: The impact of teacher education* (Advances in Teacher Education, Bd. 6, S. 1–22). Information Age.
- Rösken, B., Hannula, M. S., Pehkonen, E., Kaasila, R., & Laine, A. (2007). Identifying dimensions of students' view of mathematics. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Hrsg.), *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 349–358).
- Rokeach, M. (1970). *Beliefs, Attitudes and Values. A Theory of Organization and Change* (3. Auflage). Jossey-Bass.
- Rolka, K. & Bulmer, M. (2005). Picturing Student Beliefs in Statistics. *ZDM Mathematics Education*, 37(5), 412–417. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0030-4>
- Rolka, K. & Halverscheid, S. (2011). Researching young students mathematical world views. *ZDM Mathematics Education*, 43(4), 521–533. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0330-9>
- Roscoe, M. & Sriraman, B. (2011). A quantitative study of the effects of informal mathematics activities on the beliefs of preservice elementary school teachers. *ZDM Mathematics Education*, 43(4), 601–615. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0332-7>
- Roy, S., Alcock, L. & Inglis, M. (2010). Undergraduates Proof Comprehension: A Comparative Study of Three Forms of Proof Presentation. *Proceedings of the 13th Annual Conference*

- on Research in Undergraduate Mathematics Education. <http://sig-maa.maa.org/rume/crume2010/Archive/Roy%20et%20al.pdf>
- Roy, S., Inglis, M. & Alcock, L. (2017). Multimedia resources designed to support learning from written proofs: an eye-movement study. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 249–266. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9754-7>
- Safrudiannur, Belke, L. & Rott, B. (2022). A Pseudo-Longitudinal Approach for Investigating Preservice Teachers' Beliefs During Their University Education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(6), 1099–1122. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10194-x>
- Safrudiannur, S. & Rott, B. (2020). Measuring Teachers' Beliefs: A Comparison of Three Different Approaches. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 16(1), Artikel em1796. <https://doi.org/10.29333/ejmste/110058>
- Samuelsson, J., Bjorklund-Boistrup, L & Sundstrom, P. (2015). Students' beliefs about mathematics in schools located in different socioeconomic areas. *European Journal of Educational Studies*, 7(3), 137–149.
- Scherrmann, A. (2016). *Lernen mit Lösungsbeispielen im Mathematikunterricht. Eine empirische Untersuchung zur Datenauswertung im Unterricht*. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-11807-5>. Springer Spektrum.
- Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the Purely Cognitive: Belief Systems, Social Cognitions, and Metacognitions As Driving Forces in Intellectual Performance. *Cognitive Science*, 7(4), 329–363. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(83\)80003-2](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(83)80003-2)
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338–355. <https://doi.org/10.2307/749440>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334–370) Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a Theory of Teaching-in-Context. *Issues in Education*, 4(1), 1–94.
- Schuster, B. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Auflage). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12770-0>

- Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J. & Vale, C. (2008). Future teacher's professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *ZDM Mathematics Education*, 40(5), 791–811. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0150-8>
- Selden, A. (2021). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proofing in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (S. 391–420). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6>
- Semadeni, Z. (1984). Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher teaching. *For the Learning of Mathematics* 4(1), 32–34. <http://www.jstor.org/stable/40247842>
- Sill, H.-D. (2019). *Grundkurs Mathematikdidaktik*. Ferdinand Schöningh. <https://doi.org/10.36198/9783838550084>
- Sommerhoff, D. (2017). *The Individual Cognitive Resources Underlying Students' Mathematical Argumentation and Proof Skills* [unveröffentlichte Dissertation]. Ludwig-Maximilians-Universität München.
- Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in context of teaching. *ZDM Mathematics Education*, 51(5), 717–730. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7>
- Stewart, S. & Thomas, M. O. J. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM Mathematics Education*, 51(7), 1069–1082. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z>
- Stoppel, H.-J. (2019). *Beliefs und selbstreguliertes Lernen. Eine Studie in Projektkursen der Mathematik in der gymnasialen Oberstufe*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-24913-7>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321. <https://www.jstor.org/stable/30034869>
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N. & Morselli, N. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Hrsg.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 315–351). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9
- Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119–127. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9782-3>

- Stylianides, A. J. & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 66, Artikel 100957. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957>
- Sümmermann, M. L., Sommerhoff, D. & Rott, B. (2021). Mathematics in the Digital Age: The Case of Simulation-Based Proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7(3), 438–465. <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00125-6>
- Szücs, K. (2023). Beliefs über Beweise(n) im Mathematikunterricht – eine empirische Studie unter Lehramtsstudierenden. *mathematica didactica*, 46, 1–40. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2023.1849>
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Vieweg.
- Törner, G. (1996). Mathematische Weltbilder von Lehrern. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1997. Vorträge auf der 31. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 1997 in Leipzig* (S. 433–436). Franzbecker.
- Törner, G. (2003). Mathematical Beliefs – A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Hrsg.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (S. 73–94). Springer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3>
- Törner, G. & Grigutsch, S. (1994). „Mathematische Weltbilder“ bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 15(3–4), 211–251. <https://doi.org/10.1007/BF03338808>
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions. A Synthesis of the Research. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 127–146). Macmillan.
- Ufer, S., Heinze, A., Kunzle, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 30–54. <https://doi.org/10.1007/BF03339072>
- Vacc, N. N. & Bright, G. W. (1999). Elementary Preservice Teachers' Changing Beliefs and Instructional Use of Children's Mathematical Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), 89–110. <https://doi.org/10.2307/749631>

- Varghese, T. (2009). Secondary-level Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *IUMPST: The Journal*, 1. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ859284.pdf>
- Verordnung über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen (LP AHS) in der Fassung der Bekanntmachung vom 14. November 1984 (BGBl. Nr. 88/1985), die zuletzt durch die Verordnung vom 17. Juli 2024 (BGBl. II. Nr. 204/2024) geändert worden ist. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>
- Vohns, A. (2005): Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(1), 52–79. <https://doi.org/10.1007/BF03339006>.
- Weber, K. (2001). Students difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>
- Weber, K. & Mejia-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 89–103. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790514>
- Wen, R. & Dubé, A. K. (2022). A Systematic Review of Secondary Students' Attitudes Towards Mathematics and its Relations With Mathematics Achievement. *Journal of Numerical Cognition*, 8(2), 295–325. <https://doi.org/10.5964/jnc.7937>
- Weygandt, B. (2021). *Mathematische Weltbilder weiter denken. Empirische Untersuchung des Mathematikbildes von Lehramtsstudierenden am Übergang Schule–Hochschule sowie dessen Veränderungen durch eine hochschuldidaktische Mathematikvorlesung*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-34662-1>
- Weygandt, B. & Oldenburg, R. (2015). First-year teacher students' mathematical beliefs. *CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2965–2966). Charles University in Prague, hal-01289684
- Williams, E. R. (1979). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof [unveröffentlichte Dissertation]. University of Alberta, Edmonton.
- Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht*. Vieweg.

- Wittmann, E. C. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen. Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren. Die Zeitschrift für den Unterricht in allen Schulstufen*, 11, 7–34.
- Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica*, 37(2), 213–232. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2014.1127>
- Wittmann, G. (2018). Beweisen und Argumentieren. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmiedt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (3., erweiterte und überarbeitete Auflage, S. 21–42). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>
- Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers* [unveröffentlichte Dissertation]. University of Texas at Austin.
- Zan, R & Di Martino, P. (2007). Attitude towards mathematics: Overcoming the positive/negative dichotomy. In B. Sriraman (Hrsg), *The Montana Mathematics Enthusiast* (Bd. 3, S. 157–168). The Montana Council of Teachers of Mathematics.

Anhang A

Fragebogen zum Thema: Beweisen und Beweise in der Mathematik

Liebe Schüler*innen!

In dieser Umfrage geht es um **deine persönlichen Einstellungen und Vorstellungen** zur Mathematik und speziell zu mathematischen Beweisen.

Bitte lies dir die Fragen genau durch und beantworte sie vollständig. Es ist deine persönliche Meinung gefragt – es gibt keine richtigen oder falschen Antworten!

Am Beginn findest du ein paar Fragen zu deiner Person. Die anschließenden Teile beinhalten immer einen kurzen Satz, worum es in dieser Kategorie geht.

Vielen Dank für deine Unterstützung!

TEIL A: Fragen zu deiner Person

1. **Welchem Geschlecht fühlst du dich zugehörig?**
 - ☐ weiblich
 - ☐ männlich
 - ☐ divers/keine Angabe
2. **Was war deine Mathematiknote im letzten Zeugnis, das du erhalten hast?**
 - ☐ 1 (Sehr gut)
 - ☐ 2 (Gut)
 - ☐ 3 (Befriedigend)
 - ☐ 4 (Genügend)
 - ☐ 5 (Nicht genügend)
3. **Wie gut verstehst du die Themen auf dem Gebiet der Analysis (z.B. Funktionen, Grenzwerte, Differentialrechnung)?**
 - ☐ sehr gut
 - ☐ gut
 - ☐ teilweise
 - ☐ eher nicht gut
 - ☐ gar nicht gut
4. **Wurde in deinem Mathematikunterricht zuvor schon einmal ausführlicher über mathematische Beweise (z.B. „Was ist ein Beweis?“, Beweisformen) gesprochen?**
 - ☐ ja, sehr oft
 - ☐ ja, hin und wieder
 - ☐ nein, so gut wie nie
5. **Ich besuche derzeit das Wahlpflichtfach Mathematik.**
 - ☐ ja
 - ☐ nein

TEIL B: „Wie siehst du Mathematik?“

Bei diesem Teil geht es darum, was das Fachgebiet Mathematik und den Mathematikunterricht für dich ausmacht und was dir zentral erscheint.

Beurteile die nachfolgenden Aussagen durch Einkreisen oder Ankreuzen (1 = stimme ich gar nicht zu, 5 = stimme ich voll zu).

	stimme ich gar nicht zu				stimme ich voll zu
(1) Mathematik besteht aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen, die präzise und streng befolgt werden müssen.	1	2	3	4	5
(2) Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.	1	2	3	4	5
(3) Meine mathematischen Fähigkeiten verbessern sich im Laufe des Lernprozesses.	1	2	3	4	5
(4) Im Mathematikunterricht erscheint es mir wichtig, sich über mathematische Probleme und Lösungen austauschen und diskutieren zu können.	1	2	3	4	5

TEIL C: „Wozu gibt es (mathematische) Beweise und was macht sie aus?“

Hierbei geht es darum, welchen Sinn und Zweck du selbst in mathematischen Beweisen siehst und was du unter einem mathematischen Beweis verstehst.

Ordne die nachfolgenden Beweisfunktionen nach deiner persönlichen Wichtigkeit, indem du den entsprechenden Rang von 1 bis 4 einträgst (1 = wichtigste Funktion, 4 = unwichtigste Funktion).

Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.	☐
Ein Beweis erklärt, warum eine mathematische Aussage gilt.	☐
Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.	☐
Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.	☐

Beurteile die nachfolgenden Aussagen durch Einkreisen oder Ankreuzen (1 = stimme ich gar nicht zu, 5 = stimme ich voll zu).

	stimme ich gar nicht zu				stimme ich voll zu
(1) Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.	1	2	3	4	5
(2) Ein guter Beweis erklärt, warum eine mathematische Aussage gilt.	1	2	3	4	5
(3) Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.	1	2	3	4	5
(4) Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.	1	2	3	4	5
(5) Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.	1	2	3	4	5
(6) Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist (z.B. $\Leftrightarrow, \in, f(x), \mathbb{R}$).	1	2	3	4	5
(7) Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.	1	2	3	4	5

TEIL D: „Wie geht man beim mathematischen Beweisen vor?“

Bei diesem Teil geht es um die Frage, wie Beweise gefunden werden und wie du selbst einen finden oder verstehen kannst.

Beurteile die nachfolgenden Aussagen durch Einkreisen oder Ankreuzen (1 = stimme ich gar nicht zu, 5 = stimme ich voll zu).

	stimme ich gar nicht zu				stimme ich voll zu
(1) Der erste Schritt beim Beweisen liegt darin, eine intuitive Idee zu entwickeln, warum eine Aussage wahr sein könnte.	1	2	3	4	5
(2) Beim Beweisen ist es hilfreich, spezifische Beispiele zu probieren, um ein Muster zu erkennen.	1	2	3	4	5

(3) Ein Beweis entsteht oftmals durch Ausprobieren und Verwerfen von Ansätzen.	1	2	3	4	5
(4) Das Finden eines Gegenbeispiels ist ein wichtiger Teil des Beweisprozesses.	1	2	3	4	5
(5) Beim Beweisen ist es wichtig, die Definitionen aller für den Beweis notwendigen Begriffe genau zu kennen.	1	2	3	4	5

TEIL E: „Wie sicher fühlst du dich selbst beim Beweisen?“

Hier geht es darum, für dich einzuschätzen, wie sicher du dich beim Arbeiten mit Beweisen fühlst und was du dir dabei selbst zutraust, selbst wenn du damit noch kaum/keine Erfahrungen hast.

Beurteile die nachfolgenden Aussagen durch Einkreisen oder Ankreuzen (1 = stimme ich gar nicht zu, 5 = stimme ich voll zu).

	stimme ich gar nicht zu				stimme ich voll zu
(1) Ich bin davon überzeugt, dass ich meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern kann.	1	2	3	4	5
(2) Ich habe genügend Ausdauer, um auch bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.	1	2	3	4	5
(3) Ich fühle mich im Umgang mit typischen Beweistechniken (wie direkter Beweis, Widerspruch) sicher.	1	2	3	4	5
(4) Es bereitet mir Schwierigkeiten, die zentrale Idee eines Beweises von den spezifischen Details zu unterscheiden.	1	2	3	4	5
(5) Ich sehe mich in der Lage, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.	1	2	3	4	5
(6) Ich fühle mich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.	1	2	3	4	5

TEIL F: „Wie erlebst du Beweise im Unterricht?“

Dabei geht es darum, wie du Beweise und das Beweisen im Unterricht selbst empfindest und was du darüber denkst.

Beurteile die nachfolgenden Aussagen durch Einkreisen oder Ankreuzen (1 = stimme ich gar nicht zu, 5 = stimme ich voll zu).

	stimme ich gar nicht zu				stimme ich voll zu
(1) Die Diskussion von Beweisen mit Mitschüler*innen hilft mir, diese besser zu verstehen.	1	2	3	4	5
(2) Der Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten, macht mir Spaß.	1	2	3	4	5
(3) Es ist befriedigender für mich, eine Beweisidee selbst zu entdecken, als sie nur vorgezeigt zu bekommen.	1	2	3	4	5
(4) Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.	1	2	3	4	5
(5) Ich fühle mich auf sozialer Ebene im Klassenverband sicher, wenn ich meine eigenen Beweisideen in der Klasse vorstellen soll.	1	2	3	4	5
(6) Die Herausforderung einen abstrakten Beweis endlich durchdrungen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.	1	2	3	4	5

TEIL G: Konkrete Aufgabe

Stell dir vor, du möchtest Mitschüler*innen die wichtigste Idee für den Beweis der folgenden Aussage aus der Analysis erklären. Was ist die zentrale Idee dabei?

Wichtig: Du musst keinen perfekten oder vollständigen Beweis hinschreiben. Es genügt völlig, wenn du den Kern deiner Idee notierst.

Die Aussage:

Ist eine Funktion f auf einem offenen Intervall I differenzierbar und besitzt f in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Schreibe deine zentrale Beweisidee auf!

Vielen Dank für deine Mithilfe!

Anhang B

Anhang B1 – Theoretischer Input Intervention 1

Was versteht man unter Beweisen in der Mathematik?

Was ist ein mathematischer Beweis?

Beim Beweisen handelt es sich um einen Prozess, bei dem eine Behauptung schrittweise deduktiv (also vom Allgemeinen zum Speziellen) aus bereits bekannten Definitionen und Sätzen gefolgert wird (Brunner, 2014, S. 7).

Hinweis: Im Gegensatz zu einem mathematischen Satz, legt man mit einer Definition fest, was unter einem bestimmten mathematischen Begriff oder Objekt zu verstehen ist. Es handelt sich also um eine Aussage, die nicht zu beweisen ist (Pinkernell et al., 2009, S. 30).

Beim Prozess des Beweisens wird zwischen Behauptung und Voraussetzung unterschieden (Brunner, 2014, S. 7). Das Ziel ist es dann, aus der Voraussetzung die Behauptung zu folgern bzw. diese daraus ableiten zu können (Brunner, 2014, S. 7). Ist dieser Prozess erfolgreich, so wird die Behauptung als wahre Aussage gesehen (Brunner, 2014, S. 7). Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn ausschließlich auf Definitionen oder auf bereits bewiesene Aussagen zurückgegriffen wurde und sich die verwendeten Aussagen nicht widersprechen (Brunner, 2014, S. 7).

Damit ein Beweis allgemein gültig ist, muss dieser dokumentiert werden, sodass er von der mathematischen Community geprüft werden kann (Brunner, 2014, S. 8). Dies erfolgt nicht zwingend deduktiv (vom Allgemeinen zum Speziellen), sondern kann auch ein induktiver Vorgang vom Speziellen zum Allgemeinen sein, eine Strategie, die vor allem in der ersten Phase des Beweisens sinnvoll und angebracht ist (Brunner, 2014, S. 8).

Was bringt das Beweisen?

Da nun geklärt ist, was ein mathematischer Beweis überhaupt ist und was ihn ausmacht, stellt sich vielleicht die Frage, wozu das Beweisen in der Mathematik dient. Insbesondere wenn Beweise von Mathematiker*innen entwickelt werden, kann dies folgende Funktionen haben (Kuntze, 2005, S. 53–55; Kuntze, 2009, S. 13):

- Mit einem Beweis kann festgestellt werden, ob Aussagen wahr oder falsch sind.
- Ein Beweis ermöglicht es, zugrundeliegende Probleme und Zusammenhänge zu verstehen und damit die Einsicht zu gewinnen, warum eine Aussage wahr oder falsch ist.
- Mithilfe eines Beweises können andere Personen von der Wahrheit oder Falschheit einer Aussage überzeugt werden.
- Ein Beweis ermöglicht es, die Ordnung von mathematischem Wissen zu erkunden, eine systematische Ordnung des Wissens herzustellen oder dieses aus einer neuen Perspektive heraus anders zu ordnen.
- Aus dem Beweisprozess heraus kann mathematisches Wissen, wie neue Sätze, Begriffe oder Zusammenhänge, entdeckt und wiederum auf den bewiesenen Aussagen in weiterer Folge aufgebaut werden.
- Mathematisches Wissen kann durch mathematische Beweise in einer weltweit geteilten Sprache mitgeteilt werden.
- Beweise ermöglichen es, sich selbst und die mathematische Community zu überzeugen.
- Durch den Beweisprozess können „elegante“ bzw. „schöne“ Beweise entdeckt oder erschaffen werden, Beweisen hat also auch eine ästhetische Komponente.
- Beweise liefern eine gesicherte Grundlage für praktische Entscheidungen und Verfahren.

Wann ist ein Beweis „richtig“?

Um zu erkennen, ob eine Argumentation tatsächlich als Beweis zugelassen werden kann, ist nicht ausschließlich fachliches Wissen notwendig, sondern auch Wissen über zugelassene Methoden in der Mathematik (Kuntze, 2009, S. 13). Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Unterricht andere Arten von Beweisen akzeptiert werden als auf wissenschaftlicher Ebene (Heinze & Reiss, 2004, S. 1–2). Dieses methodische Wissen über Beweise wird in der Literatur in drei voneinander unabhängige Bereiche unterteilt (Heinze & Reiss, 2003, S. 2; Kuntze, 2009, S. 13):

- Beweisschema: Damit ist das Wissen über zulässige Argumentationsarten gemeint. Im Unterschied zum deduktiven Schließen (vom Allgemeinen zum Speziellen), sind induktive Verallgemeinerungen oder die Berufung auf eine höhere Autorität als Argumentationen nicht ausreichend bzw. zulässig.
- Beweisstruktur: Ein Beweis beginnt mit einer bestimmten Voraussetzung und endet schließlich mit einer Behauptung bzw. Aussage. Es stellt sich also die Frage, was vorausgesetzt wird und was daraus folgen soll. Es muss also tatsächlich bewiesen werden, was gezeigt werden soll. Beweislücken oder die Nutzung der Behauptung als Argument (Zirkelschluss) sind dabei unzulässig.
- Jeder Beweisschritt muss aus dem vorangegangenen abgeleitet werden können. Dies kann auch durch zusätzliche Informationen wie Sätze oder Definitionen erfolgen.

Wie kommt man zu einem Beweis?

Mathematische Beweise entstehen in einem Prozess. Dieser kann in verschiedene Phasen eingeteilt werden, wobei die einzelnen Phasen nicht in einer geradlinigen Abfolge verlaufen müssen, sondern einzelne Schritte auch mehrfach wiederholt werden können (Boero, 1999, S. 2–3; Kuntze, 2009, S. 13):

1. Untersuchung einer Problemstellung, Entwicklung einer Vermutung (Hypothese) und Identifikation möglicher Argumente
2. Formulierung der Hypothese als Aussage
3. Untersuchung der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen durch Sammeln von Informationen und möglicher Verbindungen
4. Auswahl der Argumente und Verbindung zu einer Kette von deduktiven Schlüssen (vom Allgemeinen zum Speziellen)
5. Formulierung des Beweises
6. Gegebenenfalls Annäherung an einen formalen Beweis

Welche Formen von Beweisen gibt es aus mathematikwissenschaftlicher Sicht?

Aus fachwissenschaftlicher Sicht gibt es in der Mathematik eine Unterscheidung in direkte und indirekte Beweise (Brunner, 2014, S. 15).

Bei einem direkten Beweis wird eine Behauptung durch Anwendung bereits bewiesener Aussagen bzw. durch logische Schlussfolgerung bewiesen, wohingegen bei einem indirekten Beweis davon ausgegangen wird, dass das Gegenteil der aufgestellten Behauptung zutrifft, wodurch im Laufe des Beweisprozesses ein Widerspruch entsteht, der dadurch begründet wird, dass die Annahme der negierten Behauptung selbst falsch ist (Brunner, 2014, S. 15). Damit wird die ursprüngliche Behauptung indirekt bewiesen (Brunner, 2014, S. 15).

Neben den beiden genannten Kategorien gilt die vollständige Induktion als wichtiges Beweisverfahren. Dabei wird nach Prüfung der Behauptung für eine kleine natürliche Zahl n gezeigt, dass eine Aussage, die für n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist (Brunner, 2014, S. 16).

Diese drei genannten Beweistypen beziehen sich insbesondere auf vollständig geführte Beweise durch Mathematiker*innen, wobei anzumerken ist, dass unter anderem im schulischen Kontext weitere relevante Typen von Beweisen existieren, wie beispielsweise das Widerlegen durch Gegenbeispiele (Brunner, 2014, S. 16).

Beispiele:

Zwei indirekte Beweise (Behrends, 2015, S. 50–51; Pinkernell et al., 2009, S. 42; Tietze et al., 1997, S. 168):

Für den nachfolgenden Beweis benötigen wir die Definition ungerader natürlicher Zahlen.

Definition. Eine natürliche Zahl k heißt ungerade, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $k = 2n + 1$.

Satz 1. Ist für $k \in \mathbb{N}$ die Zahl k^2 gerade, so ist auch k gerade.

Beweis. Wir zeigen diesen Satz durch einen indirekten Beweis in Form eines Widerspruchs der Aussage: „Ist für $k \in \mathbb{N}$ die Zahl k^2 gerade, so ist k ungerade.“

Es sei nun k eine ungerade natürliche Zahl. Nach Definition einer ungeraden Zahl lässt sich k schreiben als $k = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Das Quadrat dieser Zahl ist dann gegeben durch

$$k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Das bedeutet nach Definition der ungeraden Zahlen jedoch genau, dass k^2 ungerade ist. Hier liegt also ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Diesen Satz und die nachfolgende Definition benötigen wir für den anschließenden Beweis:

Definition. Eine natürliche Zahl k heißt gerade, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $k = 2n$.

Satz 2. Die Quadratwurzel aus 2 ist irrational.

Beweis. Wir zeigen diesen Satz wieder indirekt:

Angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, so lässt sich diese nach Definition der rationalen Zahlen als Bruch darstellen, also

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

mit m und n aus den natürlichen Zahlen. Wir nehmen dabei an, dass dieser Bruch vollständig gekürzt ist. Es gilt dann

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

und weiter

$$2n^2 = m^2. \quad (1)$$

Nach Definition einer geraden Zahl ist damit m^2 gerade.

Aus dem Satz, dass die Zahl selbst gerade ist, wenn das Quadrat der Zahl gerade ist, folgt nun, dass m gerade ist.

Wieder mit der Definition einer geraden Zahl können wir nun schreiben $m = 2k$ für eine natürliche Zahl k .

Dies setzen wir nun in Gleichung (1) ein und erhalten

$$2n^2 = 4k^2$$

und weiter

$$n^2 = 2k^2.$$

Damit ist auch n^2 gerade und wieder aus dem Satz für Quadrate gerader Zahlen folgt, dass dann auch n gerade ist.

Somit sind jedoch m und n gerade und der Bruch $\frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt. Ein Widerspruch. Damit ist $\sqrt{2}$ irrational. ■

Beweis durch vollständige Induktion (Behrends, 2015, S. 40–41):

Satz 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen stimmt und müssen dazu das Folgende beweisen:

1. Die Aussage gilt für $n = 1$.
2. Gilt die Aussage für n , so gilt sie auch für $n + 1$.

Beweis. Durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: Der Satz ist richtig für $n = 1$ wegen

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

2. Induktionsvoraussetzung: Der Satz gelte für eine feste natürliche Zahl n , also es sei

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Induktionsschluss: Zu zeigen ist nun, dass der Satz auch für $n + 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 1 + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

■

Anhang B2 – Material Intervention 2

Grundwissen.

Definition 1.1. (Büchter & Henn, 2010, S. 136; Deitmar, 2021, S. 45) Eine *reelle Folge* oder kurz *Folge* ist eine Funktion

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n.$$

Man schreibt dafür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_n) und nennt $a_1, a_2, \dots$ die *Folgenglieder*.

Definition 1.2. (Büchter & Henn, 2010, S. 145) Eine Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl a für n gegen Unendlich, wenn für jede noch so kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine Nummer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > n_\varepsilon$ gilt.

Die Zahl wird dann Grenzwert der Folge (a_n) genannt.

Man schreibt dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Definition 1.3. (Deitmar, 2021, S. 49) Eine Folge (a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls es ein $S_o \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n < S_o$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Folge (a_n) heißt *nach unten beschränkt*, falls es ein $S_u \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n > S_u$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, also falls es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq S$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

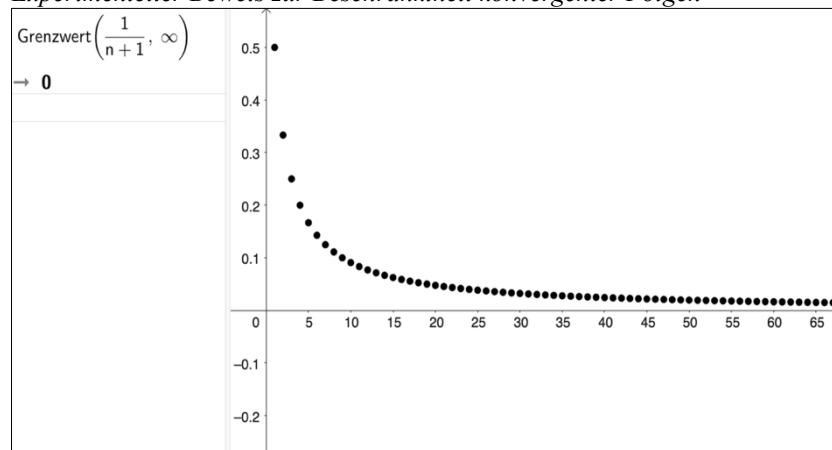
Satz 1.4. (Behrends, 2015, S. 97) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Experimenteller Beweis.

Abbildung B1

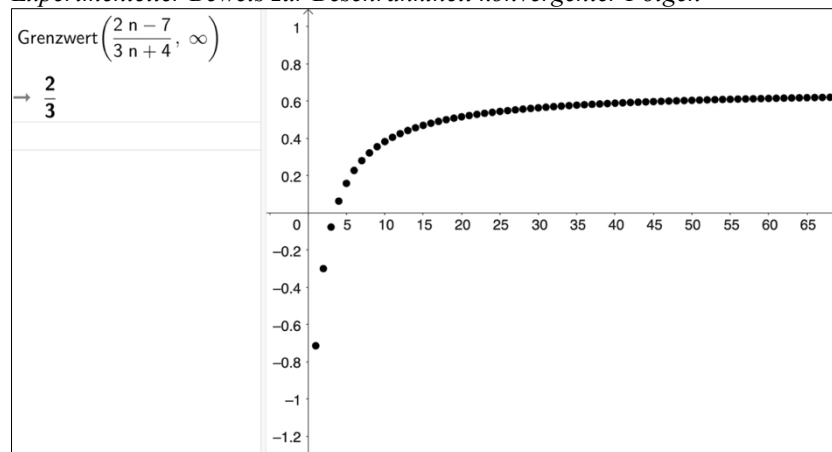
Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen



Anmerkung. Überprüfung der Konvergenz und Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{1}{n+1}$ in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Abbildung B2

Experimenteller Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen



Anmerkung. Überprüfung der Konvergenz und Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{2n-7}{3n+4}$ in GeoGebra. Eigene Darstellung.

Präformaler Beweis.

Wir betrachten eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$. Da die Folge konvergent ist, gibt es eine beliebig kleine positive Zahl ε , sodass irgendwann, ab einem gewissen Folgenglied, alle weiteren in dem Intervall $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ liegen.

Das bedeutet, dass für alle Folgenglieder a_n nach dem gewissen Folgenglied $|a_n| < |a| + \varepsilon$ gilt. Im Falle von Abbildung B3 kann man daher $S = |a| + 1$ setzen und die Folge ist beschränkt.

Abbildung B3

Graphisch-intuitiver Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen

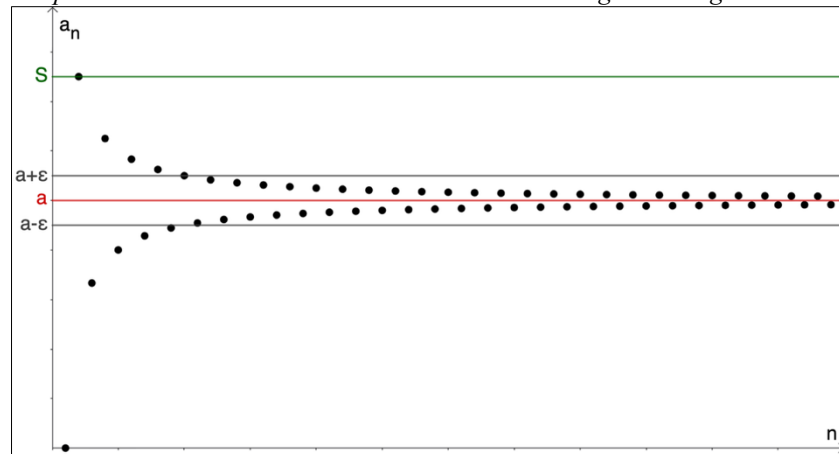


Anmerkung. Die graphische Darstellung wurde mittels GeoGebra vorbereitet und an der Tafel im Rahmen des präformalen Beweises skizziert. Eigene Darstellung.

Allerdings ist dies nicht allgemein möglich, wie Abbildung B4 zeigt, sodass noch ein weiterer Schritt notwendig ist, um die Behauptung allgemein zu beweisen.

Abbildung B4

Graphisch-intuitiver Beweis zur Beschränktheit konvergenter Folgen



Anmerkung. Die graphische Darstellung wurde mittels GeoGebra vorbereitet und an der Tafel im Rahmen des präformalen Beweises skizziert. Eigene Darstellung in Anlehnung an Büchter und Henn (2010, S. 144).

Wie zuvor gilt auch hier für alle Folgenglieder ab einem gewissen Folgenglied, dass $|a_n| < |a| + \varepsilon$. Für die Folgenglieder am Beginn trifft dies nicht zu, also müssen wir die Schranke S größer wählen und nehmen damit das Maximum aller Zahlen $|a_1|, |a_2|, \dots, |a| + 1$. Dann gilt $|a_n| \leq S$ für alle a_n .

Formal-deduktiver Beweis.

Beweis. (Behrends, 2015, S. 116; Deitmar, 2021, S. 50) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n := a$. Da die Folge konvergiert, gilt nach Definition, dass für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < 1$$

für jedes $n \geq n_\varepsilon$.

Für $n \geq n_\varepsilon$ gilt dann

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|,$$

also können wir für *diese* n unsere Schranke $s = 1 + |a_n|$ wählen.

Allerdings gilt damit nicht notwendigerweise, dass $|a_1| \leq s, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}| \leq s$. Um dies sicherzustellen, wählen wir S als das Maximum der endlich vielen Zahlen $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|, 1 + |a|$. Dann gilt offensichtlich

$$|a_n| \leq S$$

für alle a_n . Dies entspricht der Definition der Beschränktheit einer Folge, was zu zeigen war.

■

Anhang B3 – Material Intervention 3

SCHÜLER*INNENBEWEISE ZU POLYNOMFUNKTIONEN ZWEITEN GRADES UND EXTREMSTELLEN

Auf diesem Arbeitsblatt findet ihr insgesamt sieben verschiedene Beweise von Schüler*innen zu der folgenden Aussage:

„Eine Polynomfunktion zweiten Grades besitzt genau eine Extremstelle.“

Betrachtet in euren Gruppen die verschiedenen Beweise der Schüler*innen und bewertet diese! Macht euch dazu Notizen unter den entsprechenden Begründungen!

Hannahs Begründung: „Eine Polynomfunktion f zweiten Grades besitzt eine Ableitungsfunktion f' vom Grad 1. Die Ableitung f'' dieser Funktion ist konstant und ungleich Null. Jede Polynomfunktion ersten Grades hat genau eine Nullstelle x_0 . Diese Nullstelle ist damit die einzige Extremstelle von f , da f'' konstant ist und $f''(x_0)$ ungleich Null ist. Daher ist die Aussage wahr.“

Sonjas Begründung: „Ich betrachte zwei Funktionen. Durch Rechnen habe ich herausbekommen, dass $f(x) = 2x^2 - 4$ bei $x = 2$ eine Extremstelle hat. Durch eine weitere Rechnung zeigt sich auch, dass $g(x) = -5x^2 + 2x - 3$ bei $x = \frac{1}{5}$ eine Extremstelle hat. Da beide Funktionen genau eine Extremstelle haben und diese beliebig gewählt wurden, ist die Aussage wahr.“

Roberts Begründung: „Ich wähle diesen Ansatz:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Dann gilt für die erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = 2ax + b \text{ und } f''(x) = 2a.$$

Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle ist: $f'(x_0) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= 2ax_0 + b && | -b \\ \Leftrightarrow -b &= 2ax_0 && | : 2a \text{ (möglich, da } a \neq 0) \\ \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} &= x_0 \text{ ist die einzige mögliche Extremstelle.} \end{aligned}$$

$f''(\frac{-b}{2a}) = 2a$ und da $a \neq 0$ ist, gilt: $f''(x_0) \neq 0$.

Damit besitzt f die einzige Extremstelle bei $x_0 = \frac{-b}{2a}$. Die Aussage ist also wahr.“

Pauls Begründung: „Alle Polynomfunktionen vom Grad 2 sind Parabeln und unsere Lehrerin hat gesagt, dass jede Parabel genau einen Scheitelpunkt besitzt. Dieser Scheitelpunkt ist dann ein Extrempunkt. Damit ist die Aussage wahr.“

Arons Begründung: „Voraussetzung:

$$f(x) = a^2x + bx + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0),$$

da f eine Polynomfunktion zweiten Grades ist.

Aus der Faktorregel und der Summenregel folgt:

$$f'(x) = 2ax + b \text{ und } f''(x) = 2a.$$

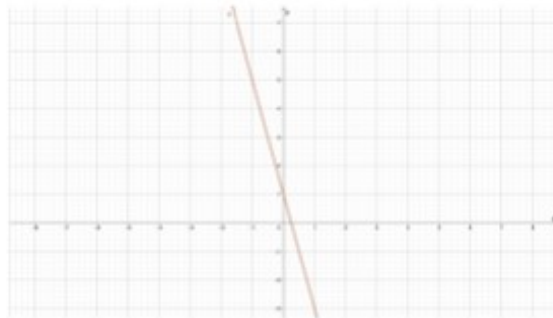
f hat genau einen Extrempunkt, weil f eine Polynomfunktion vom Grad 2 ist.

Für x_0 gilt: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, da dies die notwendige und hinreichende Bedingung für Extremstellen ist. x_0 ist die einzige Extremstelle, da $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

Damit ist die Aussage bewiesen.“

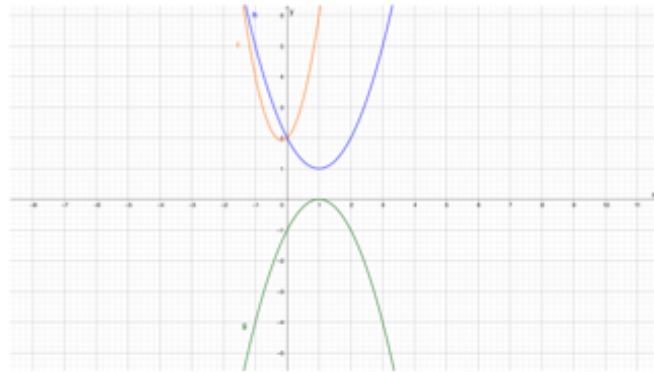
Monikas Begründung: „Ich betrachte die folgende Funktion in GeoGebra:

$$f(x) = 0x^2 - 4x + 1.$$



Diese Funktion besitzt keine Extremstelle. Daher ist die Aussage falsch.“

Johanns Begründung: „Ich stelle drei Beispiele in GeoGebra dar:



Alle drei Funktionen besitzen genau eine Extremstelle. Daher ist die Aussage wahr.“

Anhang B4 – Material Intervention 4

Grundwissen.

Definition 2.1. (Büchter & Henn, 2010, S. 63) Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_n, \dots, a_1, a_0$ und $a_n \neq 0$ heißt *Polynomfunktion vom Grad n* .

Satz 2.2. (Büchter & Henn, 2010, S. 286) Es sei f in einer Umgebung von x_0 dreimal differenzierbar. Zudem seien $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 eine Wendestelle von f .

Präformaler Beweis.

Besitzt eine Polynomfunktion f den Grad 3, so ist die zweite Ableitung f'' vom Grad 1 und f''' ist konstant und ungleich null. Jede Polynomfunktion ersten Grades besitzt genau eine Nullstelle x_0 . Diese Nullstelle ist damit die einzig mögliche Wendestelle x_0 von f , da f''' konstant und $f'''(x_0)$ ungleich null ist.

Formal-deduktiver Beweis.

Beweis. Wir gehen von einer Polynomfunktion dritten Grades aus:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Dann gilt für die zweite und dritte Ableitung:

$$f''(x) = 6ax + 2b \text{ und } f'''(x) = 6a.$$

Die notwendige Bedingung für Wendestellen ist $f''(x_0) = 0$. Das heißt

$$\begin{aligned} 0 &= 6ax_0 + 2b \quad | -2b \\ \Leftrightarrow -2b &= 6ax_0 \quad | :6 \text{ (möglich, da } a \neq 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{b}{3a} &= x_0 \end{aligned}$$

ist die einzige mögliche Wendestelle.

$$f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \text{ und da } a \neq 0 \text{ ist, gilt } f'''(x_0) \neq 0.$$

Damit besitzt f die einzige Wendestelle bei $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Die Aussage ist also wahr. ■

Anhang B5 – Material Intervention 5

Grundwissen.

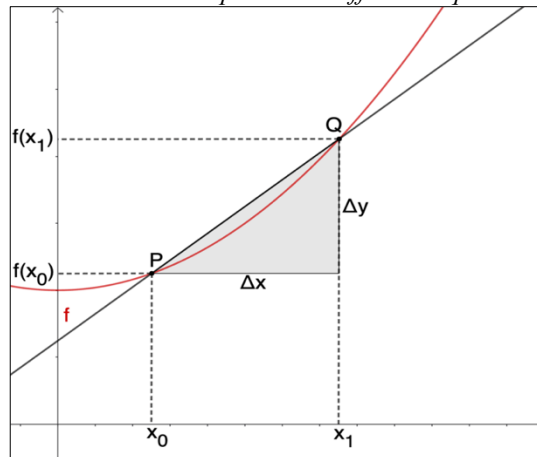
Definition 3.1. (Büchter & Henn, 2010, S. 196; Greefrath et al., 2016, S. 147) Es seien I ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x_1 \in I$. Der *Differenzenquotient* der Funktion f im Intervall $[x_0; x_1]$ ist definiert durch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Wie in Abbildung B5 ersichtlich, entspricht der Differenzenquotient geometrisch der Steigung der Sekante durch die Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_1, f(x_1))$ (Büchter & Henn, 2010, S. 196).

Abbildung B5

Geometrische Interpretation Differenzenquotient



Anmerkung. Eigene Darstellung in Anlehnung an Büchter und Henn (2010, S. 196).

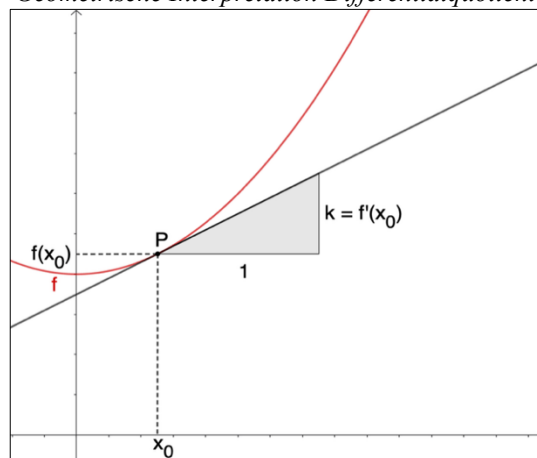
Definition 3.2. (Büchter & Henn, 2010, S. 197) Es seien I ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert des Differenzenquotienten heißt dann der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Abbildung B6

Geometrische Interpretation Differentialquotient



Anmerkung. Eigene Darstellung.

Geometrisch entspricht der Differentialquotient der Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $P(x_0, f(x_0))$, wie in Abbildung B6 ersichtlich wird (Büchter & Henn, 2010, S. 196).

Definition 3.3. (Büchter & Henn, 2010, S. 197) Ist die Funktion f auf D definiert und an jeder Stelle $x \in D$ differenzierbar, so heißt die Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die *Ableitungsfunktion* von f auf D und f heißt differenzierbar.

Formal-deduktiver Beweis.

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar. Dann gilt

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \cdot f'(x_0)$$

Da x_0 beliebig war, gilt dies für jede Stelle x , in welcher f differenzierbar ist.

■

Anhang B3 – Präsentation

Was versteht man unter Beweisen in der Mathematik?	Inhalte • Was ist ein mathematischer Beweis? • Was bringt das Beweisen? • Wann ist ein Beweis „richtig“? • Wie kommt man zu einem Beweis? • Welche Formen von Beweisen gibt es aus mathematikwissenschaftlicher Sicht?
Was ist ein mathematischer Beweis? ... Prozess, bei dem eine Behauptung deduktiv (vom Allgemeinen zum Speziellen) aus bereits bekannten Definitionen und Sätzen gefolgt wird. • Es ist zwischen Voraussetzung und Behauptung zu unterscheiden → Ziel: aus der Voraussetzung die Behauptung mittels Definitionen oder bereits bewiesener Aussagen zu folgern • Beweise müssen dokumentiert und von der mathematischen Community geprüft werden Hinweis: Mit einer Definition wird festgelegt, was unter einem bestimmten mathematischen Begriff verstanden wird. Es handelt sich um eine Aussage, die NICHT zu BEWEISEN ist.	Was bringt das Beweisen? Mit Beweisen kann man... • feststellen, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. • zugrundeliegende Probleme und Zusammenhänge verstehen und die Einsicht erhalten, warum eine Aussage wahr oder falsch ist. • andere Personen von der Wahrheit/Falschheit einer Aussage überzeugen. • die Ordnung von mathematischem Wissen erkunden, eine Ordnung des Wissens herstellen oder dieses aus einer neuen Perspektive heraus ordnen. • mathematisches Wissen entdecken und auf den bewiesenen Aussagen weiter aufbauen. • mathematisches Wissen in einer weltweit geteilten Sprache mitteilen. • sich selbst und andere, vor allem die mathematische Community, überzeugen. • etwas „Schönes“ und „Elegantes“ schaffen oder entdecken. • auf eine gesicherte Grundlage für praktische Entscheidungen und Verfahren zugreifen.
Wann ist ein Beweis „richtig“? Methodisches Wissen: • Beweisschema: Wissen über zulässige Argumentationsarten → deduktives Schließen (vom Allgemeinen zum Speziellen) • Beweisstruktur: Voraussetzung und Behauptung → keine Beweislücken oder Zirkelschlüsse • Ableitung jedes Beweisschrittes aus dem vorangegangenen Schritt samt zusätzlicher Informationen (Definitionen, Sätze)	Wie kommt man zu einem Beweis? 1. Untersuchung einer Problemstellung, Entwicklung einer Vermutung (Hypothese) und finden möglicher Argumente 2. Formulierung der Hypothese als Aussage 3. Untersuchung der Hypothese und Argumentverknüpfungen durch Sammeln von Informationen und Verbindungen 4. Auswahl der Argumente und Verbindung zu einer Kette von deduktiven Schlüssen 5. Formulierung des Beweises 6. Eventuell Annäherung an einen formalen Beweis
Welche Formen von Beweisen gibt es aus mathematikwissenschaftlicher Sicht? Direkter Beweis: Beweis der Behauptung durch Anwendung bereits bewiesener Aussagen bzw. logische Schlussfolgerung Indirekter Beweis: ausgegangen wird vom Gegenteil der Behauptung, wodurch ein Widerspruch geschaffen wird → ursprüngliche Behauptung wird indirekt bewiesen Vollständige Induktion: Prüfung der Behauptung für eine kleine natürliche Zahl n und anschließendes Schließen der Gültigkeit der Aussage für n auf $n+1$	Indirekter Beweis I Für den nachfolgenden Beweis benötigen wir die Definition ungerader natürlicher Zahlen. Definition. Eine natürliche Zahl k heißt ungerade, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $k = 2n + 1$. Satz. Ist für $k \in \mathbb{N}$ die Zahl k^2 gerade, so ist auch k gerade. Beweis. Wir zeigen diesen Satz durch einen indirekten Beweis in Form eines Widerspruchs der Aussage: „Ist für $k \in \mathbb{N}$ die Zahl k^2 gerade, so ist k ungerade.“ Es sei nun k eine ungerade natürliche Zahl. Nach Definition einer ungeraden Zahl lässt sich k schreiben als $k = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N}$. Das Quadrat dieser Zahl ist dann gegeben durch $k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$ Das bedeutet nach Definition der ungeraden Zahlen jedoch genau, dass k^2 ungerade ist. Hier liegt also ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Indirekter Beweis II

Diesen Satz und die nachfolgende Definition benötigen wir für anschließenden Beweis:

Definition. Eine natürliche Zahl k heißt gerade, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $k = 2n$.

Satz. Die Quadratwurzel aus 2 ist irrational.

Beweis. Wir zeigen diesen Satz wieder indirekt:

Angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl, so lässt sich diese nach Definition der rationalen Zahlen als Bruch darstellen, also

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

mit m und n aus den natürlichen Zahlen. Wir nehmen dabei an, dass dieser Bruch vollständig gekürzt ist.

Indirekter Beweis II

Es gilt dann

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

und weiter

$$2n^2 = m^2 \quad (1)$$

Nach Definition einer geraden Zahl, ist damit m^2 gerade.

Aus dem Satz, dass die Zahl selbst gerade ist, wenn das Quadrat der Zahl gerade ist, folgt nun, dass m gerade ist.

Wieder mit der Definition einer geraden Zahl können wir nun schreiben $m = 2k$ für eine natürliche Zahl k .

Indirekter Beweis II

Dies setzen wir nun in Gleichung (1) ein und erhalten

$$2n^2 = 4k^2$$

und weiter

$$n^2 = 2k^2$$

Damit ist auch n^2 gerade und wieder aus dem Satz für Quadrate gerader Zahlen folgt, dass dann auch n gerade ist.

Somit sind jedoch m und n gerade und der Bruch $\frac{m}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt. Ein Widerspruch.

Damit ist $\sqrt{2}$ irrational. $\square$

Beweis durch vollständige Induktion

Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir wollen zeigen, dass diese Aussage für alle natürlichen Zahlen stimmt und müssen dazu das Folgende beweisen:

1. Die Aussage gilt für $n = 1$.
2. Gilt die Aussage für n , so gilt sie auch für $n + 1$.

Beweis durch vollständige Induktion

Beweis. Durch vollständige Induktion:

1. **Induktionsanfang:** Der Satz ist richtig für $n = 1$ wegen

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

2. **Induktionsvoraussetzung:** Der Satz gelte für eine feste natürliche Zahl n , also es sei

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion

3. **Induktionsschluss:** Zu zeigen ist nun, dass der Satz auch für $n + 1$ gilt:

Nun ist

Nach Addition
einer Summe

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

Hier heißt die Induktionsvoraussetzung an!

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 1 + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)((n+1) + 1)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

„Jede konvergente Folge ist beschränkt.“

Grundwissen (1)

Definition 1.1. Eine reelle Folge oder kurz Folge ist eine Funktion

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n.$$

Man schreibt dafür $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_n) und nennt $a_1, a_2, \dots$ die Folgenglieder.

Definition 1.2. Eine Folge (a_n) konvergiert gegen eine reelle Zahl a für n gegen Unendlich, wenn für jede noch so kleine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine Nummer $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt.

Die Zahl wird dann Grenzwert der Folge (a_n) genannt.

Man schreibt dafür $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Grundwissen (2)

Definition 1.3. Eine Folge (a_n) heißt nach oben beschränkt, falls es ein $S_o \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leq S_o$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Folge (a_n) heißt nach unten beschränkt, falls es ein $S_u \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \geq S_u$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, also falls es ein $S \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_n| \leq S$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 1.1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

„Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt genau eine Wendestelle.“

Grundwissen

Definition 2.1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffizienten $a_n, \dots, a_1, a_0$ und $a_n \neq 0$ heißt *Polynomfunktion* vom Grad n .

Satz 2.1. Es sei f in einer Umgebung von x_0 dreimal differenzierbar. Zudem seien $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Dann ist x_0 eine Wendestelle von f .

Möglicher präformaler Beweis

Besitzt eine Polynomfunktion f den Grad 3, so ist die zweite Ableitung f'' vom Grad 1 und f''' ist konstant und ungleich 0. Jede Polynomfunktion ersten Grades besitzt genau eine Nullstelle x_0 . Diese Nullstelle ist damit die einzig mögliche Wendestelle x_0 von f , da f''' konstant und $f'''(x_0)$ ungleich Null ist.

Möglicher formaler Beweis

Wir gehen von einer Polynomfunktion dritten Grades aus:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

Dann gilt für die zweite und dritte Ableitung:

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad \text{und} \quad f'''(x) = 6a.$$

Die notwendige Bedingung für Wendestellen ist: $f''(x_0) = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= 6ax_0 + 2b & | -2b \\ \Leftrightarrow -2b &= 6ax_0 & | :6a \text{ (möglich, da } a \neq 0) \\ \Leftrightarrow -\frac{b}{3a} &= x_0 \text{ ist die einzige mögliche Wendestelle.} \end{aligned}$$

$$f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \text{ und da } a \neq 0 \text{ ist, gilt: } f'''(x_0) \neq 0.$$

Damit besitzt f die einzige Wendestelle bei $x_0 = -\frac{b}{3a}$. Die Aussage ist also wahr.

Faktorregel

Behauptung

Satz 3.1. Ist die Funktion f in einem Bereich differenzierbar, so ist auch $g = k \cdot f$ mit $k \in \mathbb{R}$ in diesem Bereich differenzierbar und es gilt

$$g' = k \cdot f'.$$

Grundwissen (1)

Definition 3.1. Es seien I ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, x_1 \in I$. Der *Differenzenquotient* der Funktion f im Intervall $[x_0, x_1]$ ist definiert durch

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

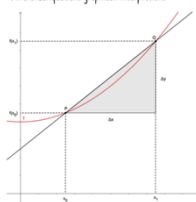
Definition 3.2. Es seien I ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Dann heißt f differenzierbar an der Stelle x_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

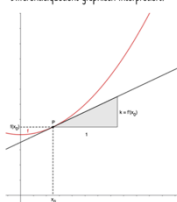
existiert. Dieser Grenzwert des Differenzenquotienten heißt dann der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

Grundwissen (2)

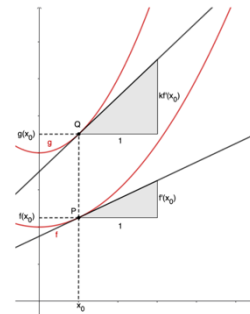
Differenzenquotient graphisch interpretiert:



Differentialquotient graphisch interpretiert:



Möglicher präformaler Beweis



Möglicher formaler Beweis

Satz 3.1. Ist die Funktion f in einem Bereich differenzierbar, so ist auch $g = k \cdot f$ mit $k \in \mathbb{R}$ in diesem Bereich differenzierbar und es gilt

$$g' = k \cdot f'.$$

Beweis. Sei f in x_0 differenzierbar. Dann gilt

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k \cdot f'(x_0).$$

Da x_0 beliebig war, gilt dies für jede Stelle x , in welcher f differenzierbar ist. $\square$

Anhang C

Interviewleitfaden: Fall A1

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Wir haben in den letzten Wochen das Thema Beweisen im Mathematikunterricht ausführlicher behandelt. Wie ich euch allen bereits mitgeteilt habe, haben wir das insbesondere im Zuge meiner Masterarbeit gemacht, die ich zum Thema beweisbezogene Beliefs verfasse. Damit ich noch etwas tiefere Einblicke in die Ergebnisse meiner Untersuchung erhalte, würde ich gerne dieses kurze Gespräch mit dir führen und dir ein paar Fragen stellen.

Ich würde dich bitten, diese vollkommen offen und ehrlich zu beantworten. Bitte sieh mich dabei nicht als deine Lehrerin, sondern einfach als Studentin, die jetzt deine Unterstützung bei ihrer Studie benötigt! Es ist auf keinen Fall eine Prüfungssituation mit richtigen oder falschen Antworten. Vielen Dank!

Frage 1:

Wir haben in den letzten Wochen eine Art Projekt zu Beweisen im Mathematikunterricht gemacht.

Was sind deine ersten Gedanken und Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst?

Frage 2:

Bei der Datenauswertung zum Teil C ist mir aufgefallen, dass du beim Abschlussfragebogen jeweils für die ersten drei Beweisfunktionen (Bestätigung der Wahrheit einer Aussage, Erklärung der Wahrheit einer Aussage und Entdeckung von Methoden zum Problemlösen) auf der Zustimmungsskala Platz 4 gewählt hast. Für die vierte Aussage „Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.“ hast du den mittleren Wert gewählt. Hier gibt es Unterschiede zu deiner Reihung, wo du die letzte Aussage auf Platz 3 gesetzt hast.

Was waren deine Gedanken dazu?

Frage 3:

Eine weitere sehr konkrete Frage im Anschluss: Vor unseren Einheiten zum Beweisen hast du angegeben, dass du der Aussage „Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist [...]“ weder gar nicht noch vollkommen zustimmst. Im Abschlussfragebogen hast du dieser Aussage vollkommen zugestimmt. Ähnlich dazu hast du der Aussage „Ein Beweis ist nur notwendig, wenn man erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.“ in der Endbefragung mehr zugestimmt als zu Beginn.

Womit würdest du das für dich begründen?

Frage 4:

Sowohl im Anfangs- als auch im Abschlussfragebogen hast du für die Behauptung „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiel prüft, reicht das als Beweis.“ den Wert 3 gewählt.

Was sind deine Gedanken dabei gewesen?

Frage 5:

Mir ist bei deinen Daten aufgefallen, dass deine Einstellung dazu, wie du dich beim Beweisen fühlst, beim Anfangsfragebogen minimal positiver war als beim Abschluss. Das trifft beispielsweise auf die Sicherheit im Umgang mit Beweistechniken und die eigene Überforderung beim selbstständigen Führen von Beweisen zu.

Wie würdest du diese Entwicklung einschätzen?

Frage 6:

Die Ergebnisse aus dem Fragebogen zeigen, dass deine Ansichten und Einstellungen relativ stabil geblieben sind.

Wie würdest du das für dich persönlich wahrnehmen?

Frage 7:

Was würdest du an dieser Stelle gerne noch ergänzen, was vielleicht noch nicht angesprochen wurde?

Interviewleitfaden: Fall A8

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Wir haben in den letzten Wochen das Thema Beweisen im Mathematikunterricht ausführlicher behandelt. Wie ich euch allen bereits mitgeteilt habe, haben wir das insbesondere im Zuge meiner Masterarbeit gemacht, die ich zum

Thema beweisbezogene Beliefs verfasse. Damit ich noch etwas tiefere Einblicke in die Ergebnisse meiner Untersuchung erhalte, würde ich gerne dieses kurze Gespräch mit dir führen und dir ein paar Fragen stellen.

Ich würde dich bitten, diese vollkommen offen und ehrlich zu beantworten. Bitte sieh mich dabei nicht als deine Lehrerin, sondern einfach als Studentin, die jetzt deine Unterstützung bei ihrer Studie benötigt! Es ist auf keinen Fall eine Prüfungssituation mit richtigen oder falschen Antworten. Vielen Dank!

Frage 1:

Wir haben in den letzten Wochen eine Art Projekt zu Beweisen im Mathematikunterricht gemacht.

Was sind deine ersten Gedanken und Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst?

Frage 2:

Eine sehr konkrete Frage im Anschluss: Sowohl bei der Anfangserhebung als auch beim Abschluss stimmst du der Aussage „Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“ eher nicht zu.

Womit würdest du das für dich begründen?

Frage 3:

Im Teil C hast du bei der Aussage 6 „Es handelt sich erst um einen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist [...]“ zu Beginn den Wert 3 auf der Zustimmungsskala gewählt. Am Ende unseres Projektes hat du dieser Behauptung dann mit einem Wert von 4 eher zugestimmt.

Was sind deine Gedanken dabei gewesen?

Frage 4:

Ich würde noch gerne bei Teil C und bei der Aussage „Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.“ bleiben. Hier hast du in der Anfangs- und Endbefragung den Wert 2 gewählt, also eher nicht zustimmt.

Womit würdest du das für dich begründen?

Frage 5:

Generell zeigen die Daten, dass deine Überzeugungen im Hinblick darauf, wie du dich beim Beweisen fühlst im Laufe des Prozesses tendenziell negativer geworden sind. Das trifft beispielsweise auf die Aussagen „Meine mathematischen Fähigkeiten verbessern sich im Laufe des Lernprozesses.“ (von 3 auf 2), „Ich fühle mich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.“ (von 2 auf 4) und „Die Herausforderung einen abstrakten Beweis endlich durchdrungen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.“ (von 2 auf 1) zu.

Gleichzeitig hast du den Aussagen, dass du dich beim Umgang mit typischen Beweistechniken sicher fühlst (von 1 auf 2) und, dass du dich in der Lage siehst, einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen (von 1 auf 2) etwas mehr zugestimmt.

Wie würdest du diese Entwicklung einschätzen?

Frage 6:

Im Teil F zu deinem persönlichen Erleben von Beweisen im Unterricht hast du bei den Aussagen „Die Diskussion von Beweisen mit Mitschüler*innen hilft mir, diese besser zu verstehen.“ und „Es ist befriedigender für mich, eine Beweisidee selbst zu entdecken, als sie nur vorgezeigt zu bekommen.“ einen mittleren Zustimmungswert angegeben. Dieser hat sich durch unsere Einheiten nicht verändert. Gleichzeitig hast du der Aussage „Der Prozess, gemeinsam an einem Beweis zu arbeiten, macht mir Spaß.“ (von 2 auf 3) etwas mehr zugestimmt.

Welche Gründe würdest du dafür identifizieren?

Frage 7:

Ganz allgemein: Welche Interventionen denkst du hätten dir persönlich geholfen, deine Einstellungen und Überzeugungen gegenüber Beweisen und der Mathematik tendenziell positiver zu gestalten? Was hättest du dir persönlich gewünscht?

Frage 8:

Was würdest du an dieser Stelle gerne noch ergänzen, was vielleicht noch nicht angesprochen wurde?

Interviewleitfaden: Fall A12

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Wir haben in den letzten Wochen das Thema Beweisen im Mathematikunterricht ausführlicher behandelt. Wie ich euch allen bereits mitgeteilt habe, haben wir das insbesondere im Zuge meiner Masterarbeit gemacht, die ich zum Thema beweisbezogene Beliefs verfasse. Damit ich noch etwas tiefere Einblicke in die Ergebnisse meiner Untersuchung erhalte, würde ich gerne dieses kurze Gespräch mit dir führen und dir ein paar Fragen stellen.

Ich würde dich bitten, diese vollkommen offen und ehrlich zu beantworten. Bitte sieh mich dabei nicht als deine Lehrerin, sondern einfach als Studentin, die jetzt deine Unterstützung bei ihrer Studie benötigt! Es ist auf keinen Fall eine Prüfungssituation mit richtigen oder falschen Antworten. Vielen Dank!

Frage 1:

Wir haben in den letzten Wochen eine Art Projekt zu Beweisen im Mathematikunterricht gemacht.

Was sind deine ersten Gedanken und Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst?

Frage 2:

Eine erste sehr konkrete Frage an dich: Bei dir ergab sich, wie bei vielen anderen, ein Sprung bei der Behauptung „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“ von einer Zustimmung vom Wert 3 auf den Wert 1. Am Ende der Interventionen hast du also gar nicht zugestimmt.

Womit würdest du das für dich begründen?

Frage 3:

Ein weiterer großer Sprung zeigt sich bei deinen Daten zur Behauptung „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ Im Anfangsfragebogen hast du hier mit einem Wert von 4 zugestimmt, im Abschlussfragebogen hast du gar nicht mehr zugestimmt.

Welche Gedanken hattest du hierzu?

Frage 4:

Eine weitere sehr konkrete Frage im Anschluss: Vor unseren Einheiten zum Beweisen hast du angegeben, dass du der Aussage „Der erste Schritt beim Beweisen liegt darin, eine intuitive Idee zu entwickeln, warum die Aussage wahr sein könnte.“ mit einer Zustimmung vom Wert 2 eher nicht zustimmst. Im Abschlussfragebogen hast du dieser Aussage vollkommen zugestimmt.

Welche Interventionen haben dich deiner Ansicht nach zur Änderung deiner Wahl bewegt?

Frage 5:

Im Allgemeinen hat sich bei dir eine positive Veränderung im Hinblick auf deine Überzeugungen über deine persönliche Sicherheit beim Beweisen gezeigt. Du hast angegeben, dass du dich beim Umgang mit typischen Beweistechniken ein wenig sicherer fühlst (von 2 auf 3) und hast einen positiven Sprung gemacht, was Schwierigkeiten beim Identifizieren der zentralen Beweisidee anbelangt (von 4 auf 2). Zudem hast du angegeben, dich weniger überfordert zu fühlen, wenn du einen Beweis selbstständig führen sollst (von 3 auf 2).

Was könnte deiner Ansicht nach diese Änderungen bewirkt haben? Gab es spezifische Interventionen, die dazu geführt haben?

Frage 6:

Auf der anderen Seite gab es bei dir auch einige Werte, welche gleichgeblieben sind. Das betrifft etwa deine persönliche Ausdauer, das selbstständige Nachvollziehen eines Beweises und die Sicherheit auf mathematischer Ebene einen Beweis in der Klasse vorzustellen. Bei all diesen Aussagen bist du auf Stufe 3 der Zustimmung geblieben.

Welche Maßnahmen hätten deiner Ansicht nach hier eine positive Veränderung bewirken können, die in unserem Setting nicht gegeben waren?

Frage 7:

Was würdest du an dieser Stelle gerne noch ergänzen, was vielleicht noch nicht angesprochen wurde?

Interviewleitfaden: Fall A13

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Wir haben in den letzten Wochen das Thema Beweisen im Mathematikunterricht ausführlicher behandelt. Wie ich euch allen bereits mitgeteilt habe, haben wir das insbesondere im Zuge meiner Masterarbeit gemacht, die ich zum Thema beweisbezogene Beliefs verfasse. Damit ich noch etwas tiefere Einblicke in die Ergebnisse meiner Untersuchung erhalte, würde ich gerne dieses kurze Gespräch mit dir führen und dir ein paar Fragen stellen.

Ich würde dich bitten, diese vollkommen offen und ehrlich zu beantworten. Bitte sieh mich dabei nicht als deine Lehrerin, sondern einfach als Studentin, die jetzt deine Unterstützung bei ihrer Studie benötigt! Es ist auf keinen Fall eine Prüfungssituation mit richtigen oder falschen Antworten. Vielen Dank!

Frage 1:

Wir haben in den letzten Wochen eine Art Projekt zu Beweisen im Mathematikunterricht gemacht.

Was sind deine ersten Gedanken und Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst?

Frage 2:

Die Auswertung deiner Daten ergab im Allgemeinen positive Beliefs für das Beweisen im Mathematikunterricht und zeigt darüber hinaus, dass deine Ansichten und Einstellungen relativ stabil geblieben sind.

Wie würdest du das für dich persönlich wahrnehmen?

Frage 3:

Im Hinblick auf deine Sichtweise auf die Mathematik hat bei dir eine kleine Veränderung stattgefunden. Du hast am Beginn der Aussage, dass Mathematik aus dem korrekten Anwenden von Regeln und Gesetzen besteht, die präzise und streng befolgt werden müssen, mit einem Wert von 4 zugestimmt. Dies hat sich dann um einen Wert erhöht. Bei der Aussage, dass Mathematik dabei hilft Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt, ist es genau andersherum.

Welche Interventionen haben deiner Ansicht nach zu dieser Änderung geführt?

Frage 4:

Auch deine Überzeugungen dazu, wie sicher du dich beim Beweisen selbst fühlst, waren schon zu Beginn gut. Du hast im Hinblick auf deine persönliche Ausdauer beim Beweisen angegeben, dass du mit einem Wert von 4 zugestimmst. Das trifft auch auf deine persönliche Sicherheit auf mathematischer Ebene beim Präsentieren von Beweisen in der Klasse zu. Für dein Sicherheitsgefühl im Umgang mit typischen Beweistechniken hast du auf der Skala den Wert 3 gewählt. In diesen Kategorien kam es zu keiner weiteren Steigerung.

Womit würdest du das für dich begründen?

Frage 5:

Welche anderen Interventionen oder Unterrichtsmethoden hätten dich hier möglicherweise unterstützen können, die in diesem Rahmen nicht gegeben waren?

Frage 6:

Es gab im Fragebogen zudem in Teil E die Aussage „Ich sehe mich in der Lage einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ Zu Beginn hast du hier mit einem Wert von 5 voll zugestimmt. Beim Abschlussfragebogen hast du hier einen Wert weniger als Zustimmung angegeben?

Wie kam es deiner Ansicht nach zu dieser Veränderung?

Frage 7:

Was würdest du an dieser Stelle gerne noch ergänzen, was vielleicht noch nicht angesprochen wurde?

Interviewleitfaden: Fall B7

Liebe Schülerin! Lieber Schüler!

Wir haben in den letzten Wochen das Thema Beweisen im Mathematikunterricht ausführlicher behandelt. Wie ich euch allen bereits mitgeteilt habe, haben wir das insbesondere im Zuge meiner Masterarbeit gemacht, die ich zum Thema beweisbezogene Beliefs verfasse. Damit ich noch etwas tiefere Einblicke in die Ergebnisse meiner Untersuchung erhalte, würde ich gerne dieses kurze Gespräch mit dir führen und dir ein paar Fragen stellen.

Ich würde dich bitten, diese vollkommen offen und ehrlich zu beantworten. Bitte sieh mich dabei nicht als deine Lehrerin, sondern einfach als Studentin, die jetzt deine Unterstützung bei ihrer Studie benötigt! Es ist auf keinen Fall eine Prüfungssituation mit richtigen oder falschen Antworten. Vielen Dank!

Frage 1:

Wir haben in den letzten Wochen eine Art Projekt zu Beweisen im Mathematikunterricht gemacht.

Was sind deine ersten Gedanken und Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst?

Frage 2:

Die Auswertung deiner Daten ergab im Allgemeinen eine große Veränderung in Richtung produktiver Beliefs für das Beweisen im Mathematikunterricht.

Wie würdest du das für dich persönlich wahrnehmen?

Frage 3:

Ganz konkret fand bei dir bei den folgenden Aussagen eine große Veränderung statt: „Mathematik hilft dabei, Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“ (von 3 auf 5), „Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen.“ (von 2 auf 5) und „Das Finden eines Gegenbeispiels ist ein wichtiger Teil des Beweisprozesses.“ (von 1 auf 5).

Womit würdest du diese starken Veränderungen für dich begründen? Gibt es hier spezifische Interventionen, die wir gemacht haben?

Frage 4:

Weitere Veränderungen zeigen sich bei deiner Zustimmung zu den Behauptungen „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“ (von 3 auf 1) und „Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist [...]“ (von 4 auf 1).

Was hat deiner Ansicht nach zu diesen Veränderungen geführt?

Frage 5:

Bleiben wir bei Teil C. Der Aussage „Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen erfahrener Mathematiker*innen nicht vertraut.“ hast du im Anfangsfragebogen gar nicht zugestimmt und diese Wertung dann am Ende um einen Skalenwert erhöht.

Welche Gedanken hast du dir hierzu gemacht?

Frage 6:

Bei der Aussage, dass man durch das Beweisen allgemeine Methoden kennenlernt, hat sich bei dir laut Angabe im Fragebogen deine Zustimmung von 2 auf 3 um einen Wert verändert.

Wie würdest du diese Veränderung für dich begründen?

Frage 7:

Ganz allgemein haben sich deine Überzeugungen, wie sicher du dich selbst beim Beweisen fühlst, positiv erweitert. Dies trifft beispielsweise auf die Aussagen „Ich bin davon überzeugt, dass ich meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern kann.“ (von 4 auf 5), „Es bereitet mir Schwierigkeiten, die zentrale Idee eines Beweises von den spezifischen Details zu unterscheiden.“ (von 4 auf 2), „Ich sehe mich in der Lage einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ (von 1 auf 3) sowie „Die Herausforderung einen abstrakten Beweis endlich durchdrungen zu haben, ist für mich eine lohnende Erfahrung.“ (von 4 auf 5) zu.

Welche Interventionen haben deiner Ansicht nach zu dieser Veränderung deiner Überzeugungen geführt?

Frage 8:

Daneben gibt es auch Aussagen, wo sich deine Zustimmung nicht oder nur minimal verändert hat wie beispielsweise bei der Aussage „Ich fühle mich auf mathematischer Ebene sicher, wenn ich meine eigene Beweisidee in der Klasse vorstellen soll.“ (von 1 auf 2) oder keine Veränderung bei den Behauptungen „Ich habe genügend Ausdauer, um auch bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.“ (Wert 3) bzw. „Ich fühle mich überfordert, wenn ich einen Beweis selbstständig führen soll, selbst wenn ich die Vorgehensweise beim Beweis kenne.“ (Wert 3).

Was wäre deiner Ansicht nach noch möglich gewesen, um hier eine (stärkere) Veränderung zu erreichen?

Frage 9:

Eine weitere Frage hätte ich noch zu den Ergebnissen deines Abschlussfragebogens. Im Teil C hattet ihr die Aufgabe, vier Aussagen zu Beweisfunktionen zu reihen und anschließend zu bewerten. Dabei hast du die Funktion der Verifizierung einer Aussage auf Platz 3, die Erklärung, warum eine mathematische Aussage gilt, auf Platz 1 sowie das Lernen allgemeiner Methoden zum Lösen von Problemen auf Platz 4 und die Funktion, dabei zu unterstützen, mathematische Konzepte in einen größeren Zusammenhang zu stellen, auf Platz 2 gesetzt. Allerdings hast du bei der Bewertung hier der Reihe nach den Wert 5, 4, 3 und dann 5 vergeben, was sich nicht mit dem Ranking deckt.

Welche Gedanken hast du dir hierzu gemacht?

Frage 10:

Was würdest du an dieser Stelle gerne noch ergänzen, was vielleicht noch nicht angesprochen wurde?

Anhang D

Tabelle D1

Demographische Verteilung nach Geschlecht

Geschlecht	Häufigkeit	Prozent	Prozent gültig	Prozent kumulativ
weiblich	17	68	68	68
männlich	8	32	32	100
divers	0	0	0	100
Fehlend	0	0		
Gesamt	25	100		

Anmerkung. Eigene Darstellung.

Tabelle D2

Verteilung der Mathematiknoten im letzten Jahreszeugnis

Mathematiknote	Häufigkeit	Prozent	Prozent gültig	Prozent kumulativ
Sehr gut	6	24	24	24
Gut	4	16	16	40
Befriedigend	11	44	44	84
Genügend	4	16	16	100
Nicht genügend	0	0	0	100
Fehlend	0	0		
Gesamt	25	100		

Anmerkung. Die Verteilung der Mathematiknoten im letzten Jahreszeugnis erfolgt mit Sehr gut (1), Gut (2), Befriedigend (3), Genügend (4), Nicht genügend (5). Eigene Darstellung.

Tabelle D3

Verteilung des individuellen Verständnisses der Themen aus der Analysis

Verständnis der Analysis	Häufigkeit	Prozent	Prozent gültig	Prozent kumulativ
sehr gut	3	12	12.5	12.5
gut	10	40	41.7	54.2
teilweise	10	40	41.7	95.8
eher nicht gut	1	4	4.2	100.0
Fehlend	1	4		
Gesamt	25	100		

Anmerkung. Die Verteilung des individuellen Verständnisses der Themen aus der Analysis erfolgt in einer Skala von „sehr gut“, „gut“, „teilweise“ bis „eher nicht gut“. Eigene Darstellung.

Tabelle D4

Verteilung der Thematisierung von Beweisen im Mathematikunterricht

Beweise im Unterricht	Häufigkeit	Prozent	Prozent gültig	Prozent kumulativ
ja, sehr oft	3	12	12	12
ja, hin und wieder	15	60	60	72
nein, so gut wie nie	7	28	28	100
Fehlend	0	0		
Gesamt	25	100		

Anmerkung. Die Verteilung der expliziten Thematisierung von Beweisen im Unterricht erfolgt in einer Skala von „ja, sehr oft“, „ja, hin und wieder“ bis „nein, so gut wie nie“. Eigene Darstellung.

Tabelle D5

Verteilung der Teilnahme am Wahlpflichtfach Mathematik

Wahlpflichtfach	Häufigkeit	Prozent	Prozent gültig	Prozent kumulativ
ja	5	20	20	20
nein	20	80	80	100
Fehlend	0	0		
Gesamt	25	100		

Anmerkung. Eigene Darstellung.

Tabelle D6

t-Test für unabhängige Stichproben zur Prüfung der Störvariablen (1)

	Shapiro-Wilk (W)		p	Levene (F)	p	Geschlecht – Welch (t)		df	p	Geschlecht – Student (t)		df	p
Kategorie 1A: Statische Sichtweise													
Diff_ B1	.758	< .001	0.052	.821	–0.229	10.858	.823	–0.233	22	.818			
Diff_ C1	.748	< .001	7.477	.012	0.460	7.637	.658	0.637	23	.530			
Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept													
Diff_ C4	.881	.007	0.737	.399	1.154	18.200	.263	1.036	23	.311			
Diff_ D5	.914	.037	0.137	.715	–1.111	21.784	.279	–0.919	23	.368			
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise													
Diff_ B2	.966	.559	0.298	.591	–0.896	12.109	.388	–0.951	22	.352			
Diff_ C2	.808	< .001	1.134	.298	–1.226	9.565	.249	–1.459	23	.158			
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren													
Diff_ C3	.915	.039	2.302	.143	1.147	9.927	.278	1.336	23	.195			
Diff_ D1	.815	< .001	0.106	.748	–0.391	12.970	.702	–0.401	23	.692			
Diff_ D2	.917	.043	0.334	.569	0.391	14.527	.702	0.383	23	.705			
Diff_ D3	.942	.167	1.139	.297	0.932	19.747	.362	0.810	23	.426			
Diff_ D4	.802	< .001	2.555	.124	–0.234	21.568	.817	–0.195	23	.847			
Kategorie 1E: Beweisverständnis													
Diff_ C5_Inv	.895	.014	0.060	.808	–0.107	17.001	.916	–0.099	23	.922			
Diff_ C6_Inv	.943	.175	1.972	.174	0.208	20.942	.837	0.176	23	.862			
Diff_ C7_Inv	.848	.002	1.058	.314	0.605	11.008	.557	0.668	23	.510			
Ranking der Beweisfunktionen													
Diff_ CR1	.968	.590	2.931	.100	–0.164	9.964	.873	–0.190	23	.851			
Diff_ CR2	.861	.003	4.460	.046	–0.158	21.237	.876	–0.109	22	.914			
Diff_ CR3	.941	.169	1.454	.241	0.410	9.057	.691	0.460	22	.650			
Diff_ CR4	.917	.043	3.151	.089	0.223	8.641	.829	0.282	23	.780			
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst													
Diff_ B3	.955	.325	9.417×10 ^{–4}	.976	–1.030	13.030	.322	–1.055	23	.303			
Diff_ E1	.806	< .001	0.788	.384	–0.493	15.400	.629	–0.472	23	.641			
Diff_ E2	.832	< .001	3.043	.094	–1.295	10.092	.224	–1.495	23	.149			
Diff_ E3	.902	.020	2.171	.154	–0.985	9.560	.349	–1.171	23	.253			
Diff_ E3	.927	.085	0.776	.388	–1.727	11.652	.111	–1.864	22	.076			
Diff_ E4_Inv	.911	.032	0.005	.946	0.210	13.885	.837	0.209	23	.836			
Diff_ E5	.926	.071	2.300	.143	–0.647	22.713	.524	–0.518	23	.609			
Diff_ E6_Inv	.920	.050	1.165	.292	0.850	10.740	.414	0.951	23	.352			
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs													
Diff_ B4	.971	.665	0.090	.766	1.006	11.110	.336	1.106	23	.280			
Diff_ F1	.830	< .001	3.300	.083	0.704	8.674	.500	0.880	22	.389			
Diff_ F2	.857	.003	1.299	.267	–0.193	19.424	.849	–0.170	22	.866			
Diff_ F3	.962	.463	0.014	.906	–1.167	15.326	.261	–1.120	23	.274			
Diff_ F4	.925	.067	0.088	.770	1.133	12.013	.279	1.202	23	.242			
Diff_ F4	.919	.050	5.608	.027	1.287	22.785	.211	1.027	23	.315			
Diff_ F5	.891	.012	0.020	.888	1.329	10.116	.213	1.532	23	.139			
Diff_ F6	.729	< .001	0.203	.656	0.657	14.419	.522	0.645	23	.525			
Beweiskonstruktion													
Diff_ G	.879	.007	0.265	.612	.539	11.910	.600	0.574	23	.572			

* p < .05 ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung: Zur Prüfung der Störvariablen Geschlecht (männlich, weiblich) wurden die Voraussetzungen der Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test) sowie der Homogenität der Varianzen (Levene-Test) geprüft und sowohl der Welch-Test als auch der Student-Test angewendet. Eigene Darstellung.

Tabelle D7

t-Test für unabhängige Stichproben zur Prüfung der Störvariablen (2)

	Shapiro-Wilk (W)	p	Levene (F)	p	Wahlpflichtfach – Welch (t)	df	p	Wahlpflichtfach – Student (t)	df	p
Kategorie 1A: Statische Sichtweise										
Diff_B1	.819	< .001	0.005	.945	-1.255	4.601	.269	-1.171	22	.254
Diff_C1	.822	< .001	5.362	.030	1.014	4.288	.364	1.711	23	.101
Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept										
Diff_C4	.862	.003	0.436	.516	0.670	7.896	.522	0.567	23	.577
Diff_D5	.888	.010	1.375	.253	1.630	12.378	.128	1.132	23	.269
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise										
Diff_B2	.931	.101	0.901	.353	-0.234	5.378	.823	-0.271	22	.789
Diff_C2	.797	< .001	0.015	.905	-1.535	6.628	.171	-1.451	23	.160
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren										
Diff_C3	.881	.007	0.347	.561	0.190	7.509	.855	0.165	23	.870
Diff_D1	.795	< .001	2.018	.169	-0.297	18.784	.770	-0.179	23	.859
Diff_D2	.911	.032	1.305	.265	-0.575	13.368	.575	-0.388	23	.701
Diff_D3	.939	.137	0.150	.702	-1.252	10.496	.238	-0.925	23	.365
Diff_D4	.845	.001	2.447	.131	2.324	21.701	.030	1.323	23	.199
Kategorie 1E: Beweisverständnis										
Diff_C5 Inv	.923	.060	1.305	.265	1.150	13.368	.270	0.777	23	.445
Diff_C6 Inv	.945	.194	0.025	.875	0.432	5.867	.681	0.451	23	.656
Diff_C7 Inv	.829	< .001	1.305	.265	0.516	14.182	.614	0.341	23	.736
Ranking der Beweisfunktionen										
Diff_CR1	.961	.432	0.541	.469	-2.159	6.663	.070	-2.033	23	.054
Diff_CR2	.891	.014	0.002	.969	0.892	6.489	.404	0.870	22	.394
Diff_CR3	.936	.136	0.427	.520	1.408	7.467	.199	1.252	22	.224
Diff_CR4	.919	.048	1.058	.314	0.256	8.754	.804	0.205	23	.839
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst										
Diff_B3	.959	.389	1.603	.218	-0.397	9.338	.701	-0.308	23	.761
Diff_E1	.842	.001	0.314	.580	-1.463	7.882	.182	-1.238	23	.228
Diff_E2	.835	< .001	0.672	.421	-0.304	11.405	.766	-0.218	23	.830
Diff_E3	.937	.142	2.144	.157	-1.472	12.792	.165	-1.029	22	.315
Diff_E4 Inv	.917	.045	0.802	.380	-0.426	7.345	.682	-0.376	23	.710
Diff_E5	.918	.047	1.486	.235	0.794	7.838	.450	0.674	23	.507
Diff_E6 Inv	.903	.022	3.154	.089	0.322	4.640	.762	0.455	23	.653
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs										
Diff_B4	.838	.001	4.208	.052	0.888	4.461	.420	1.358	22	.188
Diff_F1	.868	.005	0.022	.884	-0.349	6.353	.738	-0.347	22	.732
Diff_F2	.943	.177	3.034	.095	-0.717	19.689	.482	-0.426	23	.674
Diff_F3	.897	.016	1.251	.275	-0.751	18.509	.462	-0.455	23	.653
Diff_F4	.907	.026	3.625	.069	-0.572	4.525	.595	-0.849	23	.404
Diff_F5	.808	< .001	1.157	.293	-0.163	15.978	.873	-0.104	23	.918
Diff_F6	NaN		NaN		NaN			NaN		
Beweiskonstruktion										
Diff_G	.859	.003	5.722	.025	1.526	4.635	.192	2.163	23	.041

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung: Zur Prüfung der Störvariablen im Sinne des Besuchs des Wahlpflichtfaches Mathematik wurden die Voraussetzungen der Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test) sowie der Homogenität der Varianzen (Levene-Test) geprüft und sowohl der Welch-Test als auch der Student-Test angewendet. Eigene Darstellung.

Tabelle D8
Spearman's Rangkorrelation zur Prüfung der Störvariablen

	n	Mathematiknote (Spearman's Rho)	p	n	Verständnis Analysissthemen (Spearman's Rho)	p	n	Vorverfährng (Spearman's Rho)	p
Kategorie 1A: Statische Sichtweise									
Diff_B1	24	-.283	.181	23	-.222	.309	24	-.211	.321
Diff_C1	25	-.196	.348	24	-.109	.614	25	-.078	.712
Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept									
Diff_C4	25	.273	.186	24	.190	.375	25	.197	.346
Diff_D5	25	.329	.108	24	-.038	.861	25	-.053	.802
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise									
Diff_B2	24	.133	.535	23	-.125	.570	24	-.131	.542
Diff_C2	25	-.355	.081	24	-.446*	.029	25	-.066	.756
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren									
Diff_C3	25	.089	.671	24	.074	.731	25	.353	.084
Diff_D1	25	-.300	.145	24	-.364	.081	25	.144	.494
Diff_D2	25	-.255	.219	24	-.096	.656	25	-.243	.241
Diff_D3	25	.269	.193	24	.385	.063	25	-.107	.610
Diff_D4	25	.212	.309	24	.018	.933	25	.122	.560
Kategorie 1E: Beweisverständnis									
Diff_C5_Inv	25	-.066	.754	24	.061	.777	25	-.018	.933
Diff_C6_Inv	25	-.211	.312	24	-.016	.939	25	-.071	.734
Diff_C7_Inv	25	-.158	.452	24	.149	.486	25	-.259	.211
Ranking der Beweisfunktionen									
Diff_CR1	25	.349	.087	24	.216	.310	25	.174	.405
Diff_CR2	24	-.402	.051	23	-.284	.189	24	.082	.704
Diff_CR3	24	.015	.945	23	-.080	.717	24	-.042	.847
Diff_CR4	25	-.102	.627	24	.276	.192	25	-.245	.239
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst									
Diff_B3	25	-.004	.985	24	.077	.720	25	-.349	.087
Diff_E1	25	-.042	.842	24	.151	.482	25	.148	.481
Diff_E2	25	.118	.573	24	.002	.993	25	-.333	.104
Diff_E3	24	-.020	.923	24	-.023	.917	25	-.322	.116
Diff_E4_Inv	24	.116	.589	23	-.023	.292	24	-.197	.355
Diff_E5	25	-.105	.617	24	.066	.760	25	-.201	.336
Diff_E6_Inv	25	.417*	.038	24	.324	.123	25	-.281	.174
Diff_E6_Inv	25	-.257	.214	24	.067	.757	25	-.041	.845
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs									
Diff_B4	24	.101	.630	24	-.044	.840	25	-.213	.307
Diff_F1	24	.095	.658	23	.074	.737	24	.050	.815
Diff_F2	24	.238	.263	23	.111	.615	24	.142	.509
Diff_F3	25	.137	.513	24	-.030	.891	25	-.169	.420
Diff_F4	25	-.110	.600	24	-.165	.440	25	-.104	.622
Diff_F5	25	.103	.624	24	.320	.128	25	-.175	.402
Diff_F6	25	.142	.499	24	.181	.398	25	-.189	.366
Diff_F6	25	.000	1.000	24	.021	.923	25	.090	.669
Beweiskonstruktion									
Diff_G	25	.017	.935	24	-.079	.712	25	.071	.738

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung: Zur Prüfung der Störvariablen im Sinne der Mathematiknote, des Verständnisses der Themen aus dem Gebiet der Analysis und der Vorverfährngen zu Beweisen im Unterricht wurde Spearman's Rangkorrelation durchgeführt. Eigene Darstellung.

Tabelle D9

Prüfung der Reliabilität mittels Konsistenzanalyse

	Anzahl der Items	Shapiro-Wilk (W)	p	Cronbachs α	McDonalds ω	Spearman's Rho	p
Kategorie 1A: Statistische Sichtweise	2	.867	< .001	.547	–	.368	.070
Kategorie 1B: Formales Beweisiskonzept	2	.858	< .001	.400	–	.295	.152
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise	2	.704	< .001	–.232	–	–.144	.494
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren	5			.380	.399	–	–
Kategorie 1E: Beweisverständnis	3			.429	.474	–	–
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst	7			.747	.708	–	–
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst Posttest	7			.773	.785	–	–
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (beweisbezogen)	6			.728	.687	–	–
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst (beweisbezogen) Posttest	6			.753	.770	–	–
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs	7			.709	.764	–	–
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs Posttest	7			.734	.734	–	–
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (beweisbezogen)	6			.700	.772	–	–
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs (beweisbezogen) Posttest	6			.735	.744	–	–

Anmerkung. Zur Prüfung der Reliabilität im Sinne der Überprüfung der internen Konsistenz wurden sowohl der Cronbachs Alpha-Koeffizient als auch McDonalds Omega ermittelt. Im Falle von lediglich zwei Items innerhalb einer Kategorie wurde darüber hinaus Spearman's Rangkorrelation angewendet. Eigene Darstellung.

Tabelle D10

Deskriptive Statistik der Kategorie I

	1	2	3	4	5	Gültig	Fehlend	Mittelwert	Standardabweichung
Kategorie IA: Statische Sichtweise									
B1_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (8 %)	13 (52 %)	10 (40 %)	25	0	4.32	0.63
B1_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	16 (66.7 %)	8 (33.3 %)	24	1	4.33	0.48
C1_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	3 (12 %)	7 (28 %)	14 (56 %)	25	0	4.36	0.86
C1_Post	0 (0 %)	1 (4 %)	1 (4 %)	7 (28 %)	16 (64 %)	25	0	4.52	0.77
Kategorie IB: Formales Beweiskonzept									
C4_Pre	0 (0 %)	4 (16 %)	6 (24 %)	11 (44 %)	4 (16 %)	25	0	3.60	0.96
C4_Post	0 (0 %)	1 (4 %)	4 (16 %)	13 (52 %)	7 (28 %)	25	0	4.04	0.79
D5_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	3 (12 %)	6 (24 %)	15 (60 %)	25	0	4.40	0.87
D5_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	3 (12 %)	5 (20 %)	17 (68 %)	25	0	4.56	0.71
Kategorie IC: Dynamische Sichtweise									
B2_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	7 (28 %)	9 (36 %)	8 (32 %)	25	0	3.96	0.89
B2_Post	0 (0 %)	1 (4.2 %)	4 (16.7 %)	11 (45.8 %)	8 (33.3 %)	24	1	4.08	0.83
C2_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (16 %)	21 (84 %)	25	0	4.84	0.37
C2_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (8 %)	2 (8 %)	21 (84 %)	25	0	4.76	0.60
Kategorie ID: Beweisen als Entdecken/Explorieren									
C3_Pre	0 (0 %)	2 (8 %)	9 (36 %)	11 (44 %)	3 (12 %)	25	0	3.60	0.82
C3_Post	1 (4 %)	1 (4 %)	7 (28 %)	12 (48 %)	4 (16 %)	25	0	3.68	0.95
D1_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	5 (20 %)	11 (44 %)	8 (32 %)	25	0	4.04	0.84
D1_Post	0 (0 %)	1 (4 %)	4 (16 %)	10 (40 %)	10 (40 %)	25	0	4.16	0.85
D2_Pre	0 (0 %)	3 (12 %)	0 (0 %)	14 (56 %)	8 (32 %)	25	0	4.08	0.91
D2_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	6 (24 %)	5 (20 %)	14 (56 %)	25	0	4.32	0.85
D3_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (20 %)	9 (36 %)	11 (44 %)	25	0	4.24	0.78
D3_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (16 %)	9 (36 %)	12 (48 %)	25	0	4.32	0.75
D4_Pre	1 (4 %)	3 (12 %)	6 (24 %)	5 (20 %)	10 (40 %)	25	0	3.80	1.23
D4_Post	0 (0 %)	4 (16 %)	6 (24 %)	8 (32 %)	7 (28 %)	25	0	3.72	1.06
Kategorie IE: Beweisverständnis									
C5_Pre	6 (24 %)	10 (40 %)	8 (32 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	25	0	2.16	0.85
C5_Pre_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.84	0.85
C5_Post	18 (72 %)	3 (12 %)	4 (16 %)	0 (0 %)	0 (0 %)	25	0	1.44	0.77
C5_Post_Inv	–	–	–	–	–	25	0	4.56	0.77
C6_Pre	3 (12 %)	8 (32 %)	8 (32 %)	5 (20 %)	1 (4 %)	25	0	2.72	1.06
C6_Pre_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.28	1.06
C6_Post	6 (24 %)	8 (32 %)	3 (12 %)	5 (20 %)	3 (12 %)	25	0	2.64	1.38
C6_Post_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.36	1.38
C7_Pre	13 (52 %)	9 (36 %)	2 (8 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	25	0	1.64	0.81
C7_Pre_Inv	–	–	–	–	–	25	0	4.36	0.81
C7_Post	13 (52 %)	7 (28 %)	4 (16 %)	1 (4 %)	0 (0 %)	25	0	1.72	0.89
C7_Post_Inv	–	–	–	–	–	25	0	4.28	0.89

Anmerkung: Im Zuge der deskriptiven Statistik werden die absoluten und prozentuellen Häufigkeiten der Prätest- und Posttestergebnisse der einzelnen Items sowie der Mittelwert und die Standardabweichung in der Tabelle angeführt. Darüber hinaus findet sich die Anzahl der gültigen und fehlenden Werte. Die Bewertung der Items erfolgte von 1 (= stimme ich gar nicht zu) bis 5 (= stimme ich voll zu). Für eine bessere Vergleichbarkeit sind bei negativ formulierten Items die invertierten Mittelwerte ebenfalls angeführt. Eigene Darstellung.

Tabelle D11

Deskriptive Statistik der Kategorie 2 und Kategorie 3

Item	1	2	3	4	5	Gültig	Fehlend	Mittelwert	Standardabweichung
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst									
MW_BS_Pre	–	–	–	–	–	25	0	3.65	0.66
MW_BS_Post	–	–	–	–	–	25	0	3.77	0.58
MW_BS_Pre (beweisbezogen)	–	–	–	–	–	25	0	3.51	0.72
MW_BS_Post (beweisbezogen)	–	–	–	–	–	25	0	3.66	0.60
B3_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	4 (16 %)	5 (20 %)	16 (64 %)	25	0	4.48	0.77
B3_Post	0 (0 %)	1 (4 %)	3 (12 %)	6 (24 %)	15 (60 %)	25	0	4.40	0.87
E1_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	2 (8 %)	11 (44 %)	12 (48 %)	25	0	4.40	0.65
E1_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	1 (4 %)	10 (40 %)	14 (56 %)	25	0	4.52	0.59
E2_Pre	1 (4 %)	8 (32 %)	5 (20 %)	8 (32 %)	3 (12 %)	25	0	3.16	1.14
E2_Post	0 (0 %)	5 (20 %)	7 (28 %)	9 (36 %)	4 (16 %)	25	0	3.48	1.01
E3_Pre	2 (8 %)	4 (16 %)	8 (32 %)	6 (24 %)	5 (20 %)	25	0	3.32	1.22
E3_Post	0 (0 %)	4 (16.7 %)	11 (45.8 %)	8 (33.3 %)	1 (4.2 %)	24	1	3.25	0.79
E4_Pre	4 (16 %)	7 (28 %)	8 (32 %)	6 (24 %)	0 (0 %)	25	0	2.64	1.04
E4_Pre_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.36	1.04
E4_Post	4 (16 %)	14 (56 %)	5 (20 %)	2 (8 %)	0 (0 %)	25	0	2.20	0.82
E4_Post_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.80	0.82
E5_Pre	2 (8 %)	3 (12 %)	8 (32 %)	8 (32 %)	4 (16 %)	25	0	3.36	1.15
E5_Post	0 (0 %)	3 (12 %)	7 (28 %)	12 (48 %)	3 (12 %)	25	0	3.60	0.87
E6_Pre	6 (24 %)	7 (28 %)	7 (28 %)	3 (12 %)	2 (8 %)	25	0	2.52	1.23
E6_Pre_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.48	1.23
E6_Post	4 (16 %)	8 (32 %)	6 (24 %)	5 (20 %)	2 (8 %)	25	0	2.72	1.21
E6_Post_Inv	–	–	–	–	–	25	0	3.28	1.21
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs									
MW_BSA_Pre	–	–	–	–	–	25	0	3.79	0.66
MW_BSA_Post	–	–	–	–	–	25	0	3.82	0.66
MW_BSA_Pre (beweisbezogen)	–	–	–	–	–	25	0	3.72	0.70
MW_BSA_Post (beweisbezogen)	–	–	–	–	–	25	0	3.78	0.71
B4_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	5 (20 %)	6 (24 %)	13 (52 %)	25	0	4.24	0.93
B4_Post	0 (0 %)	1 (4.1 %)	7 (29.2 %)	6 (25 %)	10 (41.7 %)	24	1	4.04	0.96
F1_Pre	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (20 %)	11 (44 %)	9 (36 %)	25	0	4.16	0.75
F1_Post	0 (0 %)	0 (0 %)	5 (20.8 %)	8 (33.3 %)	11 (45.9 %)	24	1	4.25	0.79
F2_Pre	0 (0 %)	2 (8 %)	7 (28 %)	8 (32 %)	8 (32 %)	25	0	3.88	0.97
F2_Post	1 (4 %)	1 (4 %)	6 (24 %)	9 (36 %)	8 (32 %)	25	0	3.88	1.05
F3_Pre	2 (8 %)	0 (0 %)	8 (32 %)	5 (20 %)	10 (40 %)	25	0	3.84	1.21
F3_Post	1 (4 %)	2 (8 %)	8 (32 %)	3 (12 %)	11 (44 %)	25	0	3.84	1.21
F4_Pre	8 (32 %)	3 (12 %)	6 (24 %)	6 (24 %)	2 (8 %)	25	0	2.64	1.38
F4_Post	3 (12 %)	6 (24 %)	7 (28 %)	8 (32 %)	1 (4 %)	25	0	2.92	1.12
F5_Pre	3 (12 %)	5 (20 %)	4 (16 %)	7 (28 %)	6 (24 %)	25	0	3.32	1.38
F5_Post	2 (8 %)	4 (16 %)	4 (16 %)	10 (40 %)	5 (20 %)	25	0	3.48	1.23
F6_Pre	0 (0 %)	1 (4 %)	2 (8 %)	6 (24 %)	16 (64 %)	25	0	4.48	0.82
F6_Post	1 (4 %)	1 (4 %)	1 (4 %)	8 (32 %)	14 (56 %)	25	0	4.32	1.03

Anmerkung: Im Zuge der deskriptiven Statistik werden die absoluten und prozentuellen Häufigkeiten der einzelnen Items sowie der Mittelwert und die Standardabweichung in der Tabelle angeführt. Darüber hinaus findet sich die Anzahl der gültigen und fehlenden Werte. Die Bewertung der Items erfolgte von 1 (= stimme ich gar nicht zu) bis 5 (= stimme ich voll zu). Für eine bessere Vergleichbarkeit sind bei negativ formulierten Items die invertierten Mittelwerte ebenfalls angeführt. Eigene Darstellung.

Tabelle D12

Deskriptive Statistik zum Ranking der Beweisfunktionen

Item	1	2	3	4	Gültig	Fehlend	Mittelwert	Standardabweichung
Ranking der Beweisfunktionen								
CR1_Pre	8 (32 %)	10 (40 %)	3 (12 %)	4 (16 %)	25	0	2.12	1.05
CR1_Post	9 (36 %)	9 (36 %)	4 (16 %)	3 (12 %)	25	0	2.04	1.02
CR2_Pre	14 (58.3 %)	6 (25 %)	0 (0 %)	4 (16.7 %)	24	1	1.75	1.11
CR2_Post	16 (64 %)	7 (28 %)	2 (8 %)	0 (0 %)	25	0	1.44	0.65
CR3_Pre	0 (0 %)	4 (16.7 %)	14 (58.3 %)	6 (25 %)	24	1	3.08	0.65
CR3_Post	0 (0 %)	4 (16 %)	7 (28 %)	14 (56 %)	25	0	3.40	0.76
CR4_Pre	2 (8 %)	5 (20 %)	8 (32 %)	10 (40 %)	25	0	3.04	0.98
CR4_Post	0 (0 %)	5 (20 %)	12 (48 %)	8 (32 %)	25	0	3.12	0.73

Anmerkung. Im Zuge der deskriptiven Statistik werden die absoluten und prozentuellen Häufigkeiten der Prätest- und Posttestergebnisse der einzelnen Items sowie der Mittelwert und die Standardabweichung in der Tabelle angeführt. Darüber hinaus findet sich die Anzahl der gültigen und fehlenden Werte. Das Ranking der Funktionen erfolgte von 1 (= wichtigste Funktion) bis 4 (= unwichtigste Funktion). Eigene Darstellung.

Tabelle D13

Deskriptive Statistik der Beweiskonstruktion

Item	0	1	2	3	Gültig	Fehlend	Mittelwert	Standardabweichung
Beweiskonstruktion								
G_Pre	15 (60 %)	3 (12 %)	7 (28 %)	0 (0 %)	25	0	0.68	0.90
G_Post	11 (44 %)	7 (28 %)	7 (28 %)	0 (0 %)	25	0	0.84	0.85

Anmerkung. Im Zuge der deskriptiven Statistik werden die absoluten und prozentuellen Häufigkeiten der Prätest- und Posttestergebnisse der Beweiskonstruktionen sowie der Mittelwert und die Standardabweichung in der Tabelle angeführt. Darüber hinaus findet sich die Anzahl der gültigen und fehlenden Werte. Die Bewertung der Items erfolgte 0 (= fehlerhaft oder fehlend), 1 (= unvollständig), 2 (= präformal bzw. inhaltlich-anschaulich) und 3 (= formal-deduktiv). Eigene Darstellung.

Tabelle D14

t-Test für unabhängige Stichproben Merkmal Geschlecht

	Shapiro-Wilk (W)		p	Levene (F)	p	Geschlecht – Welch (t)		df	p	Geschlecht – Student (t)		df	p
Kategorie 1A: Statische Sichtweise													
B1_Pre	.859	.003		2.371	.137		0.897	9.520	.392		1.07	23	.296
C1_Pre	.844	.001		1.812	.191		0.795	9.774	.445		0.935	23	.360
Kategorie 1B: Formales Beweisiskonzept													
C4_Pre	.903	.021		0.071	.792		0.361	14.787	.723		0.352	23	.728
D5_Pre	.761	< .001		3.594	.071		-0.479	22.402	.636		-0.389	23	.701
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise													
B2_Pre	.899	.018		4.149	.053		-0.734	20.369	.471		-0.629	23	.536
C2_Pre	.572	< .001		2.492	.128		0.726	10.531	.484		0.819	23	.421
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren													
C3_Pre	.925	.066		0.903	.352		-0.673	16.877	.510		-0.622	23	.540
D1_Pre	.877	.006		0.077	.784		-0.313	11.374	.760		-0.34	23	.737
D2_Pre	.750	< .001		0.118	.734		-0.16	12.646	.875		-0.166	23	.869
D3_Pre	.790	< .001		0.960	.337		-0.046	16.091	.964		-0.043	23	.966
D4_Pre	.901	.020		1.043	.318		-1.007	18.061	.327		-0.907	23	.374
Kategorie 1E: Beweisverständnis													
C5_Pre_Inv	.879	.007		0.041	.842		-0.141	14.549	.890		-0.138	23	.891
C6_Pre_Inv	.953	.296		1.745	.199		-1.851	20.956	.078		-1.564	23	.132
C7_Pre_Inv	.803	< .001		0.447	.510		0.440	12.521	.668		0.458	23	.651
Ranking der Beweisfunktionen													
CR1_Pre	.874	.005		1.927	.178		-0.375	10.904	.715		-0.416	23	.681
CR2_Pre	.764	< .001		4.383	.048		1.233	21.911	.231		0.904	22	.376
CR3_Pre	.840	.001		1.287	.269		0.426	13.527	.677		0.393	22	.698
CR4_Pre	.887	.010		0.026	.874		-0.771	15.896	.452		-0.729	23	.473
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst													
B3_Pre	.971	.663		0.096	.759		0.046	15.752	.964		0.044	23	.965
E1_Pre	.800	< .001		1.982	.173		-1.263	15.249	.226		-1.214	23	.237
E2_Pre	.854	.002		0.195	.663		-1.106	11.291	.292		-1.207	23	.240
E3_Pre	.903	.021		0.796	.382		0.094	11.314	.927		0.103	23	.919
E4_Pre_Inv	.962	.451		0.012	.914		0.865	12.560	.403		0.900	23	.378
E5_Pre	.934	.108		0.895	.354		0.793	14.802	.440		0.771	23	.448
E6_Pre_Inv	.913	.036		2.932	.100		-0.053	21.989	.958		-0.044	23	.965
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs													
B4_Pre	.981	.907		2.702	.114		-3.777**	22.044	.001		-3.102**	23	.005
F1_Pre	.881	.007		0.931	.345		-1.607	17.657	.126		-1.46	23	.158
F2_Pre	.916	.042		0.584	.453		-1.575	12.988	.139		-1.615	23	.120
F3_Pre	.865	.003		0.764	.391		0.019	17.206	.985		0.017	23	.986
F4_Pre	.890	.011		2.147	.156		-2.902**	21.232	.008		-2.436*	23	.023
F5_Pre	.872	.005		4.657	.042		-3.403**	22.366	.003		-2.765*	23	.011
F6_Pre	.945	.188		5.404	.029		-3.230**	22.789	.004		-2.576*	23	.017
Beweiskonstruktion													
G_Pre	.744	< .001		0.395	.536		-0.632	16.011	.536		-0.596	23	.557
Beweiskonstruktion													
G_Pre	.804	< .001		4.148	.053		1.282	17.401	.217		1.171	23	.253

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung. Zur Prüfung der Unterschiede im Hinblick auf das Merkmal Geschlecht (männlich, weiblich) wurden die Voraussetzungen der Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test) sowie der Homogenität der Varianzen (Levene-Test) geprüft und sowohl der Welch-Test als auch der Student-Test für unabhängige Stichproben angewendet. Eigene Darstellung.

Tabelle D15
t-Test für unabhängige Stichproben Merkmal Wahlpflichtfach

	Shapiro-Wilk (W)		p	Levenes (F)	p	Wahlpflichtfach – Welch (t)		df	p	Wahlpflichtfach – Student (t)		df	p
Kategorie 1A: Statische Sichtweise													
B1_Pre	.869		.004	0.832	.371	.292	1.165	5.522	.292	1.293	23	.209	
C1_Pre	.757		< .001	4.662×10^-4	.983	.914	-0.112	6.070	.914	-0.114	23	.910	
Kategorie 1B: Formales Beweisakzept													
C4_Pre	.914		.038	5.397	.029	.024	-2.502*	15.213	.024	-1.619	23	.119	
D5_Pre	NaN			NaN			NaN			NaN			
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise													
B2_Pre	.915		.039	0.010	.919	.262	-1.235	6.070	.262	-1.252	23	.223	
C2_Pre	.483		< .001	0.253	.620	.826	0.231	5.423	.826	0.262	23	.796	
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren													
C3_Pre	NaN			NaN			NaN			NaN			
D1_Pre	.852		.002	1.434	.243	.004	-3.515**	11.659	.004	-2.494*	23	.020	
D2_Pre	.801		< .001	0.100	.755	.070	-2.01	10.891	.070	-1.463	23	.157	
D3_Pre	.833		< .001	0.163	.690	.663	-0.459	5.570	.663	-0.506	23	.618	
D4_Pre	.851		.002	0.103	.751	1.000	0.000	7.032	1.000	0	23	1.000	
Kategorie 1E: Beweisverständnis													
C5_Pre_Inv	.901		.019	1.602	.218	.049	-2.243*	9.739	.049	-1.711	23	.101	
C6_Pre_Inv	.948		.221	0.051	.823	.276	-1.199	5.942	.276	-1.238	23	.228	
C7_Pre_Inv	.840		.001	2.354	.139	.069	-1.993	12.378	.069	-1.383	23	.180	
Ranking der Beweisfunktionen													
CR1_Pre	.870		.004	0.626	.437	.399	0.892	7.932	.399	0.752	23	.459	
CR2_Pre	.723		< .001	0.034	.856	.620	-0.523	5.849	.620	-0.556	23	.584	
CR3_Pre	.838		.001	1.083	.309	.727	-0.368	5.221	.727	-0.440	23	.664	
CR4_Pre	.844		.001	0.018	.895	.935	0.085	5.253	.935	0.100	23	.921	
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst													
B3_Pre	.962		.457	2.718	.113	.014	-2.740*	16.899	.014	-1.713	23	.100	
E1_Pre	.715		< .001	0.011	.918	.743	-0.345	5.533	.743	-0.382	23	.706	
E2_Pre	.855		.002	2.391	.136	.075	-2.015	8.933	.075	-1.599	23	.124	
E3_Pre	.919		.048	4.255	.051	< .001	-4.058***	17.386	< .001	-2.514*	23	.019	
E4_Pre	.931		.093	4.600	.043	.372	0.927	12.003	.372	0.650	23	.522	
E4_Pre_Inv	.883		.008	4.518	.045	.889	-0.142	13.867	.889	-0.095	23	.926	
E5_Pre	.939		.140	1.119	.301	.002	-3.712**	13.592	.002	-2.494**	23	.020	
E6_Pre_Inv	.905		.023	5.030	.035	.019	-2.548*	20.001	.019	-1.503	23	.147	
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs													
B4_Pre	.975		.774	0.917	.348	.019	-2.851*	8.905	.019	-2.265*	23	.033	
F1_Pre	.861		.003	4.448	.046	.032	-2.375*	14.630	.032	-1.557	23	.133	
F2_Pre	.815		< .001	3.321	.081	.856	-0.185	11.659	.856	-0.131	23	.897	
F3_Pre	.893		.013	2.521	.126	.019	-2.740*	11.405	.019	-1.960	23	.062	
F4_Pre	.873		.005	4.681	.041	.002	-3.527**	19.090	.002	-2.116*	23	.045	
F5_Pre	.860		.003	0.568	.459	.328	-1.058	6.507	.328	-1.015	23	.321	
F6_Pre	.911		.032	0.241	.628	.397	-0.907	6.521	.397	-0.868	23	.395	
Beweiskonstruktion													
G_Pre	.763		< .001	0.011	.918	.446	-0.818	5.664	.446	-0.885	23	.385	

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung: Zur Prüfung der Unterschiede im Hinblick auf das Merkmal Wahlpflichtfach (ja, nein) wurden die Voraussetzungen der Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test) sowie der Homogenität der Varianzen (Levene-Test) geprüft und sowohl der Welch-Test als auch der Student-Test für unabhängige Stichproben angewendet. Eigene Darstellung.

Tabelle D16*Deskriptive Statistik nach den Gruppen Geschlecht und Wahlpflichtfach*

	Gruppe Geschlecht		N	Mittelwert	Standardabweichung	Gruppe Wahlpflichtfach		N	Mittelwert	Standardabweichung
B1_Pre	1	17		4.412	0.507	0	20		4.400	0.598
	2	8		4.125	0.835	1	5		4.000	0.707
C1_Pre	1	17		4.471	0.717	0	20		4.350	0.875
	2	8		4.125	1.126	1	5		4.400	0.894
C4_Pre	1	17		3.647	0.996	0	20		3.450	0.999
	2	8		3.500	0.926	1	5		4.200	0.447
D5_Pre	1	17		4.353	0.996	0	20		4.250	0.910
	2	8		4.500	0.535	1	5		5.000	0.000
B2_Pre	1	17		3.882	0.993	0	20		3.850	0.875
	2	8		4.125	0.641	1	5		4.400	0.894
C2_Pre	1	17		4.882	0.332	0	20		4.850	0.366
	2	8		4.750	0.463	1	5		4.800	0.447
C3_Pre	1	17		3.529	0.874	0	20		3.500	0.889
	2	8		3.750	0.707	1	5		4.000	0.000
D1_Pre	1	17		4.000	0.791	0	20		3.850	0.813
	2	8		4.125	0.991	1	5		4.800	0.447
D2_Pre	1	17		4.059	0.899	0	20		3.950	0.945
	2	8		4.125	0.991	1	5		4.600	0.548
D3_Pre	1	17		4.235	0.831	0	20		4.200	0.768
	2	8		4.250	0.707	1	5		4.400	0.894
D4_Pre	1	17		3.647	1.320	0	20		3.800	1.281
	2	8		4.125	0.991	1	5		3.800	1.095
C5_Pre_inv	1	17		3.824	0.883	0	20		3.700	0.865
	2	8		3.875	0.835	1	5		4.400	0.548
C6_Pre_inv	1	17		3.059	1.144	0	20		3.150	1.040
	2	8		3.750	0.707	1	5		3.800	1.095
C7_Pre_inv	1	17		4.412	0.795	0	20		4.250	0.851
	2	8		4.250	0.886	1	5		4.800	0.447
CR1_Pre	1	17		2.059	0.966	0	20		2.200	1.105
	2	8		2.250	1.282	1	5		1.800	0.837
CR2_Pre	1	17		1.882	1.269	0	19		1.684	1.108
	2	7		1.429	0.535	1	5		2.000	1.225
CR3_Pre	1	17		3.118	0.697	0	19		3.053	0.621
	2	7		3.000	0.577	1	5		3.200	0.837
CR4_Pre	1	17		2.941	1.029	0	20		3.050	0.945
	2	8		3.250	0.886	1	5		3.000	1.225
B3_Pre	1	17		4.353	0.786	0	20		4.450	0.759
	2	8		4.750	0.707	1	5		4.600	0.894
E1_Pre	1	17		4.294	0.588	0	20		4.300	0.657
	2	8		4.625	0.744	1	5		4.800	0.447
E2_Pre	1	17		3.176	1.074	0	20		2.900	1.119
	2	8		3.125	1.356	1	5		4.200	0.447
E3_Pre	1	17		3.471	1.179	0	20		3.400	1.314
	2	8		3.000	1.309	1	5		3.000	0.707
E4_Pre_inv	1	17		3.471	1.068	0	20		3.350	1.137
	2	8		3.125	0.991	1	5		3.400	0.548
E5_Pre	1	17		3.353	1.320	0	20		3.100	1.119
	2	8		3.375	0.744	1	5		4.400	0.548
E6_Pre_inv	1	17		3.471	1.007	0	20		3.300	1.302
	2	8		3.500	1.690	1	5		4.200	0.447
B4_Pre	1	17		4.059	0.966	0	20		4.100	0.968
	2	8		4.625	0.744	1	5		4.800	0.447
F1_Pre	1	17		4.000	0.707	0	20		4.150	0.813
	2	8		4.500	0.756	1	5		4.200	0.447
F2_Pre	1	17		3.882	1.054	0	20		3.700	0.979
	2	8		3.875	0.835	1	5		4.600	0.548
F3_Pre	1	17		3.471	1.231	0	20		3.600	1.231
	2	8		4.625	0.744	1	5		4.800	0.447
F4_Pre	1	17		2.176	1.380	0	20		2.500	1.395
	2	8		3.625	0.744	1	5		3.200	1.304
F5_Pre	1	17		2.882	1.409	0	20		3.200	1.399
	2	8		4.250	0.707	1	5		3.800	1.304
F6_Pre	1	17		4.412	0.870	0	20		4.350	0.875
	2	8		4.625	0.744	1	5		5.000	0.000
G_Pre	1	17		0.824	0.951	0	20		0.600	0.883
	2	8		0.375	0.744	1	5		1.000	1.000
MW_BS_Pre	1	17		3.656	0.702	0	20		3.544	0.687
	2	8		3.644	0.610	1	5		4.088	0.282
MW_BSA_Pre	1	17		3.555	0.633	0	20		3.657	0.637
	2	8		4.304	0.355	1	5		4.344	0.435

Anmerkung. Im Zuge der deskriptiven Statistik werden der Mittelwert und die Standardabweichung der Prätestergebnisse der einzelnen Items für das Merkmal Geschlecht (1 = weiblich, 2 = männlich) und den Besuch des Wahlpflichtfaches (0 = nein, 1 = ja) in der Tabelle angeführt. Für eine bessere Vergleichbarkeit sind bei negativ formulierten Items die invertierten Mittelwerte angeführt. Eigene Darstellung.

Tabelle D17

Spearman's Rangkorrelation zur Prüfung von Zusammenhängen (1)

	n	Mathematiknote (Spearman's Rho)	p	n	Verständnis Analysischemen (Spearman's Rho)	p	n	Vorverfahren (Spearman's Rho)	p
Kategorie 1A: Statistische Sichtweise									
B1_Pre	25		.010	961	24	-.161	451	.142	.499
C1_Pre	25		.193	.355	24	.146	.495	.108	.606
Kategorie 1B: Formales Beweisiskonzept									
C4_Pre	25		-.455	.022	24	-.288	.172	.026	.903
D5_Pre	25		-.257	.214	24	-.132	.537	-.095	.652
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise									
B2_Pre	25		-.299	.146	24	-.312	.138	.266	.199
C2_Pre	25		-.192	.358	24	-.052	.808	-.087	.680
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren									
C3_Pre	25		-.360	.077	24	-.411	.046	-.025	.907
D1_Pre	25		.184	.379	24	.195	.361	-.021	.920
D2_Pre	25		-.147	.482	24	-.232	.274	.138	.511
D3_Pre	25		-.241	.246	24	-.300	.155	.399	.048
D4_Pre	25		-.048	.820	24	-.045	.834	.130	.534
Kategorie 1E: Beweisverständnis									
C5_Pre_Inv	25		-.276	.182	24	-.291	.167	-.041	.845
C6_Pre_Inv	25		-.041	.845	24	-.166	.437	-.191	.359
C7_Pre_Inv	25		-.307	.136	24	-.327	.119	-.035	.869
Ranking der Beweisfunktionen									
CR1_Pre	25		-.354	.083	24	-.049	.821	-.130	.535
CR2_Pre	24		.264	.213	23	.079	.720	.098	.650
CR3_Pre	24		-.193	.365	23	-.223	.305	-.192	.368
CR4_Pre	25		-.041	.845	24	-.002	.992	.277	.181
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst									
B3_Pre	25		-.462*	.020	24	-.620**	.001	-.044	.835
E1_Pre	25		-.379	.062	24	-.712***	< .001	-.177	.398
E2_Pre	25		-.103	.624	24	-.280	.185	.106	.615
E3_Pre	25		-.305	.138	24	-.320	.128	.112	.593
E4_Pre_Inv	25		-.236	.257	24	-.075	.726	-.067	.751
E5_Pre	25		-.216	.299	24	-.299	.156	.163	.436
E6_Pre_Inv	25		-.480*	.015	24	-.598**	.002	.101	.631
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs									
B4_Pre	25		-.371	.068	24	-.651	< .001	-.322	.116
F1_Pre	25		-.283	.171	24	-.639***	< .001	-.268	.195
F2_Pre	25		-.089	.780	24	-.265	.211	-.230	.269
F3_Pre	25		.004	.983	24	.012	.956	-.308	.135
F4_Pre	25		-.270	.191	24	-.182	.394	.046	.828
F5_Pre	25		-.276	.182	24	-.422*	.040	-.095	.652
F6_Pre	25		-.227	.276	24	-.576	.003	-.075	.721
Beweiskonstruktion	25		-.112	.596	24	-.482*	.017	-.181	.387
G_Pre	25		-.520	.008	24	-.542	.006	-.188	.367
Beweiskonstruktion									
G_Pre	25		-.253	.225	24	.039	.855	.077	.715

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung. Zur Prüfung der Zusammenhänge der einzelnen Items und Kategorien mit der Mathematiknote, dem Verständnis der Themen aus dem Gebiet der Analysis und den Vorerfahrungen zu Beweisen im Unterricht wurde Spearman's Rangkorrelation durchgeführt. Eigene Darstellung.

Tabelle D18

Spearman's Rangkorrelation zur Prüfung von Zusammenhängen (2)

	n	Kategorie 2 beweisbezogen (Spearman's Rho)	p	Kategorie 3 beweisbezogen (Spearman's Rho)	p
B3_Pre	25		.315	–	–
B4_Pre	25		.125	.307	.136

Anmerkung. Die Tabelle zeigt den Zusammenhang der mathematikbezogenen Items zu Beliefs über sich selbst und sozio-affektiven Beliefs mit den beweisbezogenen Items. Eigene Darstellung.

Tabelle D19
t-Test für abhängige Stichproben Prä- und Posttestung

	Shapiro-Wilk (W)			p	Student (t)	df	p	Wilcoxon (W)	z	p	Rang-Biserale Korrelation
Kategorie 1A: Statische Sichtweise											
B1	.725	< .001		0.371	23	.714		16.000	0.338	.777	.143
C1	.677	< .001		-0.941	24	.356		15.000	-1.274	.183	-.455
Kategorie 1B: Formales Beweiskonzept											
C4	.824	< .001		-2.107	24	.046		15.000	-1.883	.053	-.615
D5	.834	< .001		-1.000	24	.327		18.500	-0.917	.358	-.327
Kategorie 1C: Dynamische Sichtweise											
B2	.918	.051		-0.385	23	.704		47.000	-0.345	.743	-.105
C2	.668	< .001		0.811	24	.425		14.000	0.734	.484	.333
Kategorie 1D: Beweisen als Entdecken/Explorieren											
C3	.870	.004		-0.337	24	.739		92.500	-0.467	.629	-.119
D1	.790	< .001		-0.549	24	.588		31.500	-0.588	.570	-.192
D2	.886	.009		-1.186	24	.247		42.000	-1.022	.282	-.300
D3	.886	.009		-0.464	24	.647		33.500	-0.431	.675	-.141
D4	.797	< .001		0.289	24	.775		91.500	0.710	.469	.196
Kategorie 1E: Beweisverständnis											
C5_Inv	.885	.009		-3.524	24	.002		12.000	-2.726**	.005	-.800
C6_Inv	.932	.095		-0.262	24	.795		82.500	-0.131	.910	-.035
C7_Inv	.795	< .001		0.464	24	.647		44.000	0.392	.705	.128
Ranking der Beweisfunktionen											
CR1	.961	.432		0.283	24	.779		83.000	0.308	.770	.085
CR2	.848	.002		1.218	23	.236		46.000	1.156	.260	.394
CR3	.908	.033		-1.430	23	.166		43.000	-1.293	.176	-.368
CR4	.903	.021		-0.419	24	.679		39.500	-0.419	.685	-.132
Kategorie 2: Beliefs über sich selbst											
B3	.958	.367		-1.284	24	.211		90.500	-1.169	.248	-.285
E1	.742	< .001		0.700	24	.491		22.500	0.630	.530	.250
E2	.676	< .001		-1.000	24	.327		6.000	-0.943	.374	-.429
E3	.821	< .001		-1.778	24	.088		15.000	-1.600	.097	-.545
E4_Inv	.907	.030		0.000	23	1.000		68.000	0.000	1.000	.000
E5	.892	.012		-2.107	24	.046		49.500	-1.831	.054	-.479
E6_Inv	.880	.007		-1.365	24	.185		33.000	-1.224	.198	-.371
Kategorie 3: Sozio-affektive Beliefs											
B4	.868	.004		0.926	24	.364		74.500	0.824	.398	.242
F1	.932	.095		-0.279	24	.782		95.500	-0.355	.736	-.090
F2	.719	< .001		1.000	23	.328		24.000	0.840	.407	.333
F3	.839	.001		-0.492	23	.627		39.000	-0.454	.644	-.143
F4	.920	.052		0.000	24	1.000		58.000	-0.114	.929	-.033
F5	.861	.003		0.000	24	1.000		32.000	-0.089	.963	-.030
F6	.842	.001		-1.495	24	.148		22.000	-1.334	.166	-.436
Beweiskonstruktion											
G	.797	< .001		-0.848	24	.405		21.000	-1.067	.276	-.364
	.636	< .001		1.693	24	.103		17.500	1.468	.129	.667
Beweiskonstruktion											
G	.826	< .001		-0.848	24	.405		20.500	-0.714	.495	-.255

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Anmerkung. Zur Prüfung der Unterschiede im Zuge der Prä- und Posttestung wurden die Voraussetzung der Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test) geprüft und sowohl der Student-Test für abhängige Stichproben als auch der Wilcoxon-Test angewendet. Eigene Darstellung.

Anhang E

Transkript Fall A1

1 F: Gut, also wir haben in den letzten Wochen einiges zum Thema Beweisen im Mathematikunterricht gemacht und
2 ich habe euch ja schon mitgeteilt, dass ich das für meine Masterarbeit mache.
3 S: Ja.
4 F: Und ich schaue mir hier eure beweisbezogenen Beliefs an. Also ich schaue mir einfach eure Überzeugun-
5 gen/Einstellungen zu Beweisen an und damit ich noch ein bisschen einen besseren Einblick in die Ergebnisse
6 bekomme, führe ich diese Interviews mit euch.
7 S: Okay.
8 F: Und ich würde dich wirklich bitten ganz, ganz offen und ehrlich zu antworten, auch wenn es vielleicht etwas
9 ist, was ich nicht hören will. Das ist egal. Ich bin nicht deine Lehrerin im Moment. Es ist keine Prüfungssituation.
10 Ich bin eine Studentin, die deine Hilfe braucht.
11 S: Okay.
12 F: Gut. Der erste Punkt ist einmal ganz allgemein die Frage: Wir haben eben das Projekt gemacht. Wenn du jetzt
13 daran zurückdenkst, was sind so deine ersten Gedanken/Gefühle dazu? Ganz allgemein einmal.
14 S: Naja, also als wir das zuerst gemacht haben\ Ich dachte mir okay\ Ich dachte mir wir machen das generell. Dann
15 habe ich herausgefunden, das ist doch nur über Beweise. Und so, Beweise (-)\ Bei mir sind die halt entweder gut
16 oder schlecht, kommt darauf an. Wenn ich mich wirklich darauf konzentriere und mich dazusetze, dann kann ich
17 diese Beweise auch verstehen und nachvollziehen und bei der Schularbeit zum Beispiel wiedergeben, aber wenn
18 ich sie zum Beispiel nicht mache, dann kann ich das nie allein machen.
19 F: Mhm.
20 S: (-) Und ja.
21 F: Zum Prozess, wie wir es gemacht haben, irgendetwas noch? Irgendwelche Gedanken noch dazu?
22 S: Nein, es war\ also halt gut, wie Sie es strukturiert haben. Zuerst der Fragebogen, dann haben Sie alles erklärt
23 und dann die Gruppenarbeiten und dann am Ende wieder dieser Fragebogen. (-) Ja und bei mir haben sich auch
24 so\ (-) Am Beginn\ Die Antworten haben sich dann am Ende ein bisschen verändert beim Fragebogen und ja.
25 F: Womit würdest du das jetzt begründen, wenn du sagst, du glaubst, es hat sich verändert?
26 S: Ja es hat sich verändert, weil zuerst wusste ich nichts vom Thema, bevor Sie es präsentiert haben und ich habe
27 halt angekreuzt, was für mich halt richtig war.
28 F: Mhm.
29 S: Und dann, nachdem wir das Thema explizit gemacht haben, vertiefend gemacht haben, habe ich realisiert: Okay,
30 es ist doch nicht so, sondern es ist viel komplizierter als ich mir dachte.
31 F: Okay. Gut, danke.
32 S: Bitte.
33 F: Dann komme ich gleich zu den direkten Ergebnissen, und zwar beim Teil C. Den habe ich mir angeschaut. (-)
34 Das war hier. (-) So, das war der Teil C. Und es war ja beim Teil C hier zum Zustimmung.
35 S: Ja.
36 F: Und hier war zum Ranken.
37 S: Ja.
38 F: Nur ersten vier Aussagen waren zum Ordnen und da hast du hier beim\ Das ist der Abschlusstest gewesen. Bei
39 den ersten drei Funktionen, da ging es um Funktionen von Beweisen, hast du jeweils den Wert 4 angekreuzt.
40 S: Ja.
41 F: Also nicht ganz zugestimmt, aber relativ und beim letzten Punkt hast du dann ein bisschen weniger mit dem
42 Wert 3 zugestimmt.
43 S: Ja.
44 F: Und da war für mich die Frage: Hier ist eine unterschiedliche Reihung. Du hast zum Beispiel hier bei der vierten
45 Aussage am wenigsten zugestimmt.
46 S: Ja.
47 F: Und (-)\ Warte, machen wir es so, damit du beides vergleichen kannst. Und hier hast du aber die dritte Aussage:
48 „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ dann eigentlich
49 auf dem vierten Platz. Das heißt hier hat sich etwas getan. Wenn du das noch einmal anschaust, was waren jetzt
50 deine Gedanken dazu würdest du sagen? Lass dir Zeit. Es hat keine Eile.
51 S: Okay, nein. Ich glaube, ich weiß, was ich hier gemacht habe. Ich habe zuerst dieses Ranking gemacht, bevor
52 ich angekreuzt habe.
53 F: Ja.
54 S: Und dann bin ich nicht wieder zurückgegangen und ich glaube, ich habe im Moment nicht realisiert, dass beide
55 miteinander zusammenhängen.

56 F: Okay. Das wäre auch gar nicht schlimm, wenn du das gar nicht realisierst, aber dann würdest du ja quasi\ Hier
57 hättest du eine andere Einstellung dazu gehabt und Vorstellung als dann hier.
58 S: Ja.
59 F: Wenn du es dir nochmal anschaust, was würdest du\ Kannst du mir irgendetwas dazu sagen vielleicht? Lies es
60 dir gerne auch nochmal durch.
61 S: Naja ich habe sie sozusagen nach, unter Anführungszeichen, nach meinem persönlichen Geschmack irgendwie
62 geordnet.
63 F: Okay.
64 S: Also zum Beispiel hier: „Ein Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.“ Das ist halt
65 das Allerwichtigste, wenn es um einen Beweis geht und dann habe ich es einfach so geordnet, was halt wichtiger
66 ist, was weniger wichtig ist. Und hier kann man sehen, dass ich hier zuerst drei und vier geschrieben habe und
67 dann wieder vertauscht habe\
68 F: Genau.
69 S: weil dann habe ich mir das nochmal angeschaut. Dann dachte ich mir okay, vielleicht sollte ich das vertauschen,
70 weil zum Beispiel die Aussage „Beweise helfen dabei, verschiedene mathematische Konzepte in einem größeren
71 Zusammenhängen zu verstehen.“ ist viel wichtiger als zum Beispiel die Aussage „Durch das Beweisen lernt man
72 allgemeine Methoden.“
73 F: Okay.
74 S: Weil wenn ich zum Beispiel den größeren Zusammenhang verstehe, dann kann ich auch die allgemeinen Me-
75 thoden leichter verstehen.
76 F: Okay, gut. Danke.
77 S: Bitte.
78 F: Und dann dazu noch: Hier hast du dann quasi\ Also du hast mir hier schön beschrieben, was jetzt für dich am
79 wichtigsten wäre von den Aussagen. Hier hast du dann aber trotzdem keiner von diesen vier Aussagen eindeutig
80 zugestimmt. Gäbe es theoretisch irgendetwas, wo du sagen würdest, das wäre wirklich etwas, was für mich eigent-
81 lich beim Beweisen am wichtigsten ist?
82 S: Von diesen Aussagen jetzt? Die ersten vier?
83 F: Oder eine andere, weil du hast ja quasi keiner von vier Aussagen jetzt komplett zugestimmt.
84 S: Ja. (-) Naja, wie ich das irgendwie (--). Okay.
85 F: Sag es geradeheraus. Mich interessiert total, was du denkst.
86 S: Naja manchmal habe ich mir gedacht (-), manche Beweise müssen nicht immer die Wahrheit einer Aussage
87 bestätigen.
88 F: Okay, sondern?
89 S: Sie können das Gegenteil manchmal.
90 F: Okay.
91 S: Wenn man zum Beispiel eine Aussage bekommt\ (--). Keine Ahnung, ob das jetzt dumm klingt, aber zum Bei-
92 spiel: „A Quadrat plus b Quadrat ist gleich c.“
93 F: Mhm.
94 S: Dann muss man das irgendwie beweisen und dann kommt man darauf: Okay, wenn man jetzt die Wurzeln
95 einsetzt, dann ist a plus b die Wurzel von c.
96 F: Okay, ja.
97 S: Und das stimmt dann nicht. Dann muss es irgendwie sein: A Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat.
98 F: Mhm, okay.
99 S: Und ja manchmal können Beweise auch das Gegenteil bestimmen.
100 F: Okay, deswegen hättest du da nicht ganz zugestimmt?
101 S: Ja.
102 F: Okay, gut. Möchtest du da noch etwas ergänzen?
103 S: Mmh. Nein.
104 F: Okay. Dann\ Genau. Vor unseren hast du hier\ Wir sind noch bei dem Teil.
105 S: Okay.
106 F: Hier. Das war der erste Fragebogen: „Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal
107 mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist.“ Da hast du ganz am Anfang eine mittelmäßige Zu-
108 stimmung angegeben.
109 S: Ja.
110 F: Und ganz am Ende beim Abschlusstest hast du der Aussage dann total zugestimmt.
111 S: Okay. Darf ich sehen?
112 F: Jaja, bitte. Schau dir das gerne an. Also diese Aussage. Und da würde mich einfach interessieren, womit würdest
113 du das begründen, dass du dann am Ende gesagt hast, dem stimme ich ganz sicher zu.
114 S: Okay. Also beim ersten Fragebogen, da wo wir das Thema noch nicht vertiefend gemacht haben, dachte ich mir
115 okay, man kann es mit der Sprache formulieren, ohne jetzt die mathematischen Symbole. Nachdem wir\ Nachdem
116 Sie uns das Ganze präsentiert haben, dachte ich mir nein okay, es ist komplett das Gegenteil. Sprache ist wichtig,

117 aber die mathematischen Symbole sind viel wichtiger, damit man Formeln aufstellen kann, damit man auch ir-
118 gendwie ableiten kann.

119 F: Okay. Aber es ist quasi so formuliert, dass es sich ERST um einen Beweis handelt, wenn du diese Zeichen
120 verwendest. Das heißt, alles andere, wenn ich zum Beispiel eine Skizze mache oder irgendetwas, ist kein Beweis.
121 Und wir haben zum Beispiel präformale Beweise im Unterricht gemacht.

122 S: Ja. Okay. (-)

123 F: Aber hättest du das quasi dann in den Interventionen eher so verstanden, dass auf jeden Fall mathematische
124 Symbole und Zeichen verwendet werden müssen?

125 S: Ja, so habe ich es verstanden.

126 F: Okay.

127 S: Also Skizzen ja, aber es ist eher besser, wenn wir die mathematischen Symbole dabei haben, damit wir auch
128 einen Zusammenhang darstellen können.

129 F: Okay, gut. Danke. Das ist nur für mich wichtig, um zu verstehen, woher dann diese Änderung kommt.

130 S: Okay.

131 F: Gut, genau. Wir sind noch immer da.

132 S: Ist okay.

133 F: „Wenn man eine Aussage anhand vieler Beispiel prüft, reicht das als Beweis.“ Hier darüber, bei der Aussage 5.

134 S: Ja.

135 F: Da bist du ziemlich gleichgeblieben. Also da bist du im mittleren Bereich. Was sind deine Gedanken dabei
136 gewesen, dass du sagst, ich bleibe bei dem, dass ich denke, es ist in der Mitte?

137 S: Ja, also halt (-)\ Man kann theoretisch eine Aussage anhand von Beispielen prüfen. Man\ Ich kann nicht so
138 tausend Beispiele machen zu einer bestimmten Aussage, aber trotzdem\ es wird mir auch nichts bringen, wenn ich
139 so davon sagen wir einmal 700-mal das gleiche Ergebnis bekomme von dieser Aussage und 300 irgendwie ver-
140 schiedene Antworten. Dann ist es ein bisschen kompliziert, weil die Aussagen zum Beispiel\ die Beispiele können
141 verschieden sein.

142 F: Ja.

143 S: Sie können (--) falsch gerechnet sein und das ist halt das Problem bei mir, weil es ist halt so.

144 F: Okay. Könntest du das noch ein bisschen ausführen. Du meinst jetzt, Beispiele helfen dir, aber nicht nur Bei-
145 spiele?

146 S: Ja, nicht nur Beispiele. Man muss\ weil\ Ja, Beweise sind halt auch wichtig für mich. Also wenn man\ Bevor
147 man ein Beispiel macht, muss man es irgendwie beweisen, dass es immer so sein wird, egal wie man es ausrechnet
148 und jetzt halt, wenn man einfach aus dem Nichts eine Aussage anhand von Beispielen prüfen will, dann hilft das
149 auch gar nichts.

150 F: Okay, gut. Danke.

151 S: Okay.

152 F: Gut. Dann ist mir aufgefallen\ Ich habe mir auch deine Einstellungen, wie ihr euch beim Beweisen fühlt ange-
153 sehen. Also das war eher so, wie es euch geht. Und beim Anfangsfragebogen\ (-) Da sind wir hier\ Also das war
154 vor allem das: Wie fühlst du dich beim Beweisen. Da war es so, dass du dich sogar am Anfang minimal besser
155 gefühlt hast als beim Abschluss.

156 S: (Lachen) Ja.

157 F: (Lachen) Das ist überhaupt nicht schlimm. Und zum Beispiel war das bei der Sicherheit im Umgang mit typi-
158 schen Beweistechniken.

159 S: Ja.

160 F: Da hast du um einen Punkt dann weniger zugestimmt.

161 S: Ja.

162 F: Und bei dem selbstständigen Führen\ also bei Aussage 5 (-) hast du dann eben auf den Wert 4 gewechselt. Nein
163 entschuldige bitte, bei der Überforderung war das, hier. Bei der Überforderung hast du gesagt: Ich fühle mich eben
164 überfordert, wenn ich einen Beweis führe, und dann hast du da gar nicht zugestimmt. Also es ist ein bisschen
165 ambivalent irgendwie.

166 S: Ja.

167 F: Wie würdest du diese Entwicklung einschätzen?

168 S: Also zum Beispiel bei Aussage 6 bei der Überforderung\ Also ich habe mich bei Beweisen nie überfordert
169 gefühlt.

170 F: Mhm.

171 S: Aber nachdem wir jetzt halt ein bisschen kompliziertere Beweise durchgeführt haben, dachte ich mir okay, da
172 muss ich wirklich nachdenken. Ich kann nicht das gleiche Muster benutzen, wie ich das immer benutzt habe. Da
173 muss ich sogar meinen eigenen Beweis irgendwie darstellen und meinen eigenen Gedankengang und nicht das
174 vom Buch oder von einem Lehrer oder einer Lehrerin. Und da dachte ich mir, okay, es ist doch nicht so leicht, aber
175 es ist auch überhaupt nicht schwierig und man muss einfach ein bisschen nachdenken. (-) Und ja (--) Und wo war
176 es noch?

177 F: Genau. Zum Beispiel hier bei der dritten Aussage: „Ich fühle mich eben mit dem Umgang sicher“. Da hast du
178 dann schon quasi hier: „Ich fühle mich beim Umgang mit typischen Beweistypen sicher.“\ Da hast du hier

179 mittelmäßig zugestimmt und dann hast du hier doch mehr zugestimmt. Nein, andersherum. Da hast du mehr zu-
 180 gestimmt und dann ist es weniger geworden.
 181 S: Ja. Ich glaube ich werde wiederholen, was\
 182 F: Also es trifft bei dem auch zu?
 183 S: Ja, auch bei dem.
 184 F: Okay. Das heißt, wo du dann gemerkt hast, wie das ganze wirklich ist\ Okay. (-) Dann ganz allgemein: Also,
 185 wenn man so über deinen ganzen Fragebogen betrachtet und jetzt nicht einzelne Sachen ansieht, ist mir schon
 186 aufgefallen, dass es relativ stabil geblieben ist.
 187 S: Aso, okay.
 188 F: Da bist du nicht der Einzige. Es gibt einige, bei denen das Ganze relativ stabil geblieben ist und da würde mich
 189 interessieren: Wie würdest du das persönlich wahrnehmen? Warum denkst du, ist das so stabil geblieben? Das
 190 wäre einmal die erste Frage.
 191 S: Ich glaube halt\ ja\ meine Mathematikfähigkeiten\ Also ja, ich bin nicht schlecht in Mathe. Ich bin nur, und das
 192 sage ich jetzt einfach offen, faul manchmal. Deshalb, naja, meine Schularbeitsnoten zum Beispiel. Es kommt nicht
 193 davon, weil meine mathematischen Fähigkeiten schlecht sind, sondern weil ich manchmal faul bin und mich nicht
 194 so konzentrieren will, weil ich denke, okay, das ist doch leicht. Ich mache es jetzt einfach irgendwie. Deshalb hier
 195 ging es halt darum meine mathematischen Fähigkeiten (--) in der Praxis umzusetzen sozusagen. Und ich dachte
 196 mir, okay, es hat sich schon etwas verändert. Da habe ich irgendwie realisiert, okay, man muss doch viel mehr
 197 machen als ich es mir gedacht habe. Aber (-), ich kann eh alles nachvollziehen und ich kann alles verstehen und
 198 deshalb hat sich bei mir nicht so viel verändert.
 199 F: Okay. Würdest du irgendetwas sagen, auch so bei deinen generellen Einstellungen zu deiner Fähigkeit oder so,
 200 weil das zum Beispiel noch höher steigen würde oder so (-). Gäbe es irgendwelche Interventionen, die ich jetzt
 201 nicht\ also die wir jetzt nicht so gemacht haben, wo du sagst, das wäre vielleicht noch gut gewesen, um dich da
 202 mehr zu unterstützen oder irgendetwas? Lass dir kurz dafür Zeit auch darüber nachzudenken. Also irgendetwas,
 203 was wir vielleicht jetzt nicht gemacht haben.
 204 S: (--) Nein, ich glaube, Sie haben eh alles ganz gut durchgeführt. Sie haben alles beantwortet, was ich auch fragen
 205 wollte, den präformalen Beweis und wie ich das machen kann. Ich glaube, nein, also bei mir gibt es gar nichts\
 206 also nichts wo sie noch\
 207 F: Also du glaubst nicht, dass das generell noch verbessert werden könnte, sondern du denkst das ist dein Einstel-
 208 lungslevel und so\
 209 S: Ja.
 210 F: Okay. Magst du sonst noch etwas ergänzen, wo du sagst, das haben noch überhaupt nicht besprochen oder ist
 211 noch gar nicht gefallen?
 212 S: Um ehrlich zu sein, nein. Sie haben alles\ Das sage ich nochmal. Sie haben alles eh ganz gut abgedeckt und es
 213 war eigentlich perfekt von der Gestaltung her und ja.
 214 F: Okay. Dankeschön für das Interview. Danke.
 215 S: Bitte sehr.

Transkript Fall A8

1 F: Gut. Also wir haben eben das Thema Beweisen im Unterricht gemacht. In Mathematik. Und ich mache das ja
 2 für meine Masterarbeit. Also ich schaue mir einfach eure Überzeugungen und Einstellungen zum Beweisen in der
 3 Mathematik an, ob die eher positiv oder negativ sind. Genau. Und ich habe mir dann eben angeschaut, ob sich da
 4 vielleicht etwas tut, wenn man das quasi auf die Art und Weise macht, wie ich das mit euch gemacht habe. Und
 5 einfach damit ich noch so ein bisschen tiefere Einblicke in die Fragebogenergebnisse bekomme, möchte ich gerne
 6 das Interview mit dir führen.
 7 S: Ja.
 8 F: Und ich würde dich bitten wirklich ganz offen zu antworten. Also ich bin jetzt nicht deine Lehrerin (lachen),
 9 wenn das geht, sondern ich bin wirklich eine Studentin, die deine Hilfe braucht bei ihrer Arbeit. Also es gibt auch
 10 kein richtig oder falsch, sondern eher einfach nur, was du dir gedacht hast, damit ich das ein bisschen nachvollzie-
 11 hen kann. Ja und ganz allgemein einmal am Anfang, was ich eh auch jeden frage: Wenn du jetzt an das Projekt
 12 zurückdenkst, was sind deine ersten Gedanken/Gefühle irgendwie dazu, wenn du daran zurückdenkst?
 13 S: Also ich muss schon sagen, es hat mir schon Spaß gemacht.
 14 F: Okay.
 15 S: Vor allem, weil wir halt als Gruppe gearbeitet haben.
 16 F: Mhm.
 17 S: Und ich finde es als Gruppe insgesamt einfacher zu arbeiten als allein, weil dann die anderen halt auch Ideen
 18 haben und dann kann ich mehr damit anfangen, weil ich selber das nicht so schnell begreife und auch in der Gruppe
 19 habe ich mir ziemlich schwer getan, also ich habe\ Ich würde nicht sagen, dass ich es wirklich verstanden habe,
 20 aber das ist halt bei mir ein generelles Problem mit Mathematik. Also da tue ich mir generell ziemlich schwer,
 21 deswegen ja.

22 F: Okay. Gut, aber sonst fandest du die Gruppenarbeit positiv?
 23 S: Ja.
 24 F: Super. Gut. Dann ein paar Fragen zu den spezifischen Items.
 25 S: Mhm.
 26 F: Beim Anfang\ Das ist der erste Test. Beim Anfang hast du angekreuzt\ Genau. Bei der Aussage: „Mathematik
 27 hilft dabei, Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“ Du hast zum Beispiel hier dieser ersten Aussage schon
 28 immer sehr zugestimmt, also, dass ich Regeln und Gesetze habe und die wende ich einfach an und bei\ Also du
 29 bist da gleichgeblieben, dass Mathematik dabei hilft, Probleme zu lösen und von neuen Ideen lebt. Da hast du eher
 30 nicht so zugestimmt. Also sowohl davor als auch danach und mich würde einfach nur interessieren, wie würdest
 31 du das für dich begründen, dass du sagst, eher nicht so und das andere mehr?
 32 S: Ich mein, vielleicht denke ich einfach falsch.
 33 F: Man kann nicht falsch denken (lachen).
 34 S: (Lachen) Ich denk mir so, also Mathematik existiert schon so lange. Das müssten ja eigentlich immer schon die
 35 gleichen Regeln gewesen sein, weil es können ja nicht einfach so jetzt neue Regeln existieren, weil dann würden
 36 ja wahrscheinlich viele alte Regeln dann nicht mehr gelten.
 37 F: Okay. Das heißt deswegen würdest du sagen eher die Regeln und die Gesetze, die befolgt werden und dass aber
 38 Mathematik dabei hilft Probleme zu lösen oder so zum Beispiel?
 39 S: (--) Ja schon auch, also halt mathematische Probleme.
 40 F: Okay.
 41 S: Aber das sind halt Probleme, die ich sonst\ die mich jetzt nicht im Alltag betreffen.
 42 F: Okay also das heißt für mathematische Probleme ja, deswegen wahrscheinlich auch den Wert 2, aber\
 43 S: Ja.
 44 F: Okay. Gut. Genau (-). Dann beim Teil C hatte ich eine Frage. Aja. Beim Teil C, das war dieser hier. Ich gehe
 45 wieder bei beiden Fragebögen dorthin. (-) Das ist am Anfang, das ist am Ende. Also das war zuerst, der erste
 46 Fragebogen. Da war die Aussage: „Es handelt sich erst um einen mathematischen Beweis, wenn er formal mittels
 47 mathematischer Symbole und Sprache formuliert ist.“
 48 S: Mhm.
 49 F: Da hast du eben am Anfang hier den Wert 3 angekreuzt, also weder zu noch nicht zugestimmt, so in der Mitte.
 50 Und dann hast du hier dann beim Abschluss schon eher zugestimmt, dass du sagst: Ein Beweis ist es schon eher
 51 dann, wenn er mit Zeichen und Symbolen geschrieben ist. Und da würde mich nur interessieren, was deine Ge-
 52 danken dabei waren, dass du dann doch eher zustimmen würdest bei der Aussage 6?
 53 S: Es hat so gewirkt, als wir die ganzen Beweise gemacht haben, dass es halt schon das dafür braucht. Ich meine
 54 es braucht eben schon auch die Beispiele und so, aber es hat auf mich so gewirkt wie wird die ganzen Beweise
 55 gemacht haben.
 56 F: Ja. Dass es am Ende dann einfach schon wichtig ist, dass ich diese Zeichen habe, oder?
 57 S: Ja schon. Also ich glaube es geht auch mit normalen Sätzen, ohne wirklich fachmathematische Sprache glaube
 58 ich.
 59 F: Mhm.
 60 S: Aber ich glaube es ist einfacher quasi mit den\
 61 F: Wenn man dann diese Zeichen verwendet.
 62 S: Ja.
 63 F: Okay gut, danke. Wir bleiben bei Teil C. Genau da war der letzte Punkt hier: „Beweise sind nur dann notwendig,
 64 wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematiker*innen nicht vertraut.“ Du hast hier eher nicht zugestimmt.
 65 Bei beiden Fragebögen. Also eher auf dem Wert 2.
 66 S: Ziemlich gar nicht eigentlich.
 67 F: Ziemlich gar nicht. Also du würdest eher auf den Wert 1 tendieren jetzt?
 68 S: Ja, wahrscheinlich.
 69 F: Okay. Kannst du dir vielleicht irgendwie vorstellen, was du dir dabei gedacht, hast dass du vielleicht doch eher
 70 den Wert 2 und nicht den Wert 1 gewählt hast?
 71 S: Wahrscheinlich, weil man es nicht ausschließen kann. Also ich würde jetzt nicht\ Ich glaube niemand macht
 72 einen Beweis einfach, weil er irgendeiner Aussage nicht traut, sondern um es halt\ weil es einen interessiert, wie
 73 das geht oder wie man das prüfen kann.
 74 F: Okay.
 75 S: Aber es kann schon sein, dass man das auch macht, wenn eine Aussage ein bisschen komisch für einen selbst
 76 wirkt.
 77 F: Okay, also so würdest du es interpretieren. Das heißt, ich sage das und du denkst dir, dass das komisch klingt
 78 jetzt, was die Frau Professor sagt, sodass man es dann braucht. So in der Art?
 79 S: Mhm, ja.
 80 F: Okay. Gut. Danke. Ich frage das nur, weil manche von diesen Aussagen einfach jeder ein bisschen anders ver-
 81 standen hat und deswegen führe ich die Interviews, um auch zu schauen, was meine Intention dahinter war und
 82 was ihr euch dabei gedacht habt.
 83 S: Mhm, ja.

84 F: /damit mir das hilft. Genau, ja. Was bei ist\ Das war beim Teil (--) E, genau. Da habe ich mir ein bisschen
85 angeschaut, wie ihr euch selbst beim Beweisen fühlt. Also wie es euch einfach so persönlich damit geht. Und (-)
86 da habe ich das Gefühl, dass es dir dann danach ein bisschen schlechter ging als davor.
87 S: Ui (lachen).
88 F: (Lachen) Das ist überhaupt nicht schlimm. Nein, vielleicht war es dann auch einfach so, dass du wirklich mit
89 Beweisen in Verbindung gekommen bist, keine Ahnung. Auf jeden Fall war das hier: „Meine Fähigkeiten“ Ah,
90 das war noch am Anfang. Entschuldigung. (--) Hier die allererste Aussage: „Meine Fähigkeiten verbessern sich im
91 Laufe des Lernprozesses.“ Da hast du am Anfang in der Mitte angekreuzt. Und (-) dann hast du beim Nachtest auf
92 den Wert 2\
93 S: Oh.
94 F: also, dass du eher weniger gesagt hast, sie verbessern sich. Wo noch zum Beispiel? Genau, auch wie du dich (-
95 -)\ „Ich fühle mich überfordert.“ Hier hast du am Anfang eher nicht so zugestimmt und dann hast du schon zuge-
96 stimmt. Genau, es würde mich nur interessieren, was da einmal passiert ist, weil du hast dann nämlich auch\
97 Ma- chen wir das im nächsten Schritt. \auch Dinge, wo es sich positiv verändert hat. Also du hast beides, aber zum
98 Beispiel die Aussage, dass sich deine Lernfähigkeiten im Laufe des Lernprozesses verbessern und auch die Über-
99 forderung waren etwas, wo du eher nicht zugestimmt hast. Was würdest du dir dazu denken?
100 S: Okay, also jetzt zur Überforderung.
101 F: Ja.
102 S: Ich glaube\ Also davor hatte ich ja ziemlich wenig Ahnung, was ein Beweis ist und dann wie wir es gemacht
103 haben\ Es hat mich schon ziemlich überfordert. Ja.
104 F: Okay. Das heißt da war es quasi so, dass du es nicht weißt\
105 S: Mhm.
106 F: Beweise habe ich ja noch gar nicht so viele gemacht und dann hast du gemerkt, wenn ich Beweise mache, dann
107 schon?
108 S: Ja.
109 F: Okay. Und der Lernprozess, wo du gemeint hast, dass sich die Fähigkeiten im Laufe der Zeit verbessern?
110 S: Mmh. Ich glaube, ich bin einfach davon ausgegangen, wenn ich es viel mache, dann verstehe ich es und ich
111 habe es nicht wirklich verstanden, aber ich habe es jetzt auch nicht so viel gemacht.
112 F: Mhm.
113 S: Also das kann daran liegen.
114 F: Okay. Gut. Das heißt, wenn wir es vielleicht sogar noch länger gemacht hätten, glaubst du hätte das etwas
115 geändert oder denkst du, es ist einfach da\
116 S: Es hätte sich verändern können, aber nicht sehr. Also\
117 F: Okay, gut. Und positiv war aber zum Beispiel\ Wenn wir da kurz hingehen\ (-) Du hast hier am Anfang gesagt:
118 Ich fühle mich beim Umgang mit typischen Beweistechniken gar nicht sicher. Also da hast du gar nicht zuge-
119 stimmt.
120 S: Mhm.
121 F: Und dann hat sich das bei dir zumindest schon auf den Wert 2 verbessert. Du hast zwar nicht total zugestimmt,
122 aber du hast schon gesagt, ein bisschen etwas hat sich verbessert. Und wo war das noch so? Auch das selbstständige
123 Nachvollziehen. Hier warst du zuerst auf dem Wert 1 und hast gesagt: Nein, das sehe ich jetzt nicht so. Und hier
124 hast du dann gesagt, ja, doch, ein bisschen mehr fühle ich mich schon in der Lage. Gab es da irgendetwas in
125 unserem Prozess, wo du sagst, das hat das ein bisschen verbessert?
126 S: Mmh. (--)
127 F: Schau es dir gern noch einmal an und lass dir Zeit.
128 S: Ich glaube ich habe jetzt kein konkretes Beispiel, wann sich das verbessert hat. Aber so\ Im Laufe der Zeit habe
129 ich schon teilweise halt Prozesse nachvollziehen können. Also ich wäre selbst wahrscheinlich nicht darauf gekom-
130 men, aber ich habe es halt nachvollziehen können.
131 F: Okay. Gut, also nachvollziehen. Und hier mit den Beweistechniken, weil du es nachvollziehen konntest, oder?
132 S: Ja. Ich meine wir haben dann auch über die ganzen verschiedenen Arten geredet und das haben wir eh öfters
133 gemacht, also da habe ich dann schon ein bisschen etwas mitbekommen.
134 F: Okay, gut. (--) Genau. Dann zum letzten vielleicht. Dann kommen wir dann eh schon bald zum Ende. Bei diesem
135 Teil, wie du Beweise im Unterricht erlebst. Also dieser ganz letzte Teil. Da warst du relativ in der Mitte.
136 S: Okay.
137 F: Viele. Und da ging es zum Beispiel darum: „Die Diskussion hilft mir eben Beweise besser zu verstehen.“ Da
138 bist du gleichgeblieben, also eine mittlere Zustimmung.
139 S: Mhm.
140 F: Und: „Es ist befriedigender für mich den selbst zu entdecken, als nur vorgezeigt zu bekommen.“ von mir zum
141 Beispiel. Auch da bist du in der Mitte geblieben. Genau. Und zum Beispiel hat sich aber wieder etwas verbess-
142 wenn man das so sagen kann, verändert. Bei der Aussage: „Es macht dir Spaß.“ warst du zuerst auf Stufe 2 und
143 dann auf Stufe 3. Was würdest du da jetzt für Gründe nennen, dass du sagst, hier bist du vielleicht gleichgeblieben,
144 da hat es sich doch ein bisschen verbessert oder so?

145 S: Ich finde generell Mathematik vom Gegenstand her nicht sonderlich lustig, aber wenn man es versteht, wenn
 146 man es dann selber machen kann, wenn man dann alleine auf etwas kommt, finde ich das dann schon ziemlich
 147 cool.
 148 F: Okay.
 149 S: Und dann mache ich es eigentlich auch ganz gerne.
 150 F: Deswegen dann hier der Wert 3? Oder war das jetzt auf den Wert 2 bezogen?
 151 S: Aso nein, das war auf den Wert 3 bezogen. War das davor oder war das danach?
 152 F: Das ist danach. Das ist davor.
 153 S: Aso, ja okay. Ja voll.
 154 F: Das ist eben davor gewesen und mich würde eben interessieren\ Bei der Diskussion bist du eher beim Wert 3
 155 geblieben oder auch hier bei der Aussage, dass du es selbst entdeckst.
 156 S: Mhm.
 157 F: Und hier hat es sich dann doch verbessert. Also das hast du gerade eh gesagt zum Thema Spaß.
 158 S: Mhm.
 159 F: War das dann die Gruppenarbeit oder\ Also mich würde einfach interessieren\ Hier hat sich nichts getan. Hätte
 160 es hier vielleicht etwas gegeben, sodass sich etwas hätte verändern können, dass es dir bei der Diskussion hilft, es
 161 doch besser verstehen zu können?
 162 S: Ich bin halt meistens von Anfang an nicht so schnell mitgekommen, deswegen war ich dann ziemlich schnell
 163 verloren.
 164 F: Okay, das heißt, deswegen sagst du dann auch die Diskussion dann ist zu\
 165 S: Ja, das war dann\ Ich bin halt nicht mitgekommen.
 166 F: Okay. Und (--) die Aussage mit dem selbstständigen Entdecken eher als es vorgezeigt zu bekommen. Glaubst
 167 du gäbe es irgendetwas, wo du sagst, okay ich entdecke es lieber selbst als vorgezeigt zu bekommen? Oder?
 168 S: Ja. Das kann schon sein, aber halt nicht bei den Beweisen, weil ich mich da halt nicht genug auskenne, würde
 169 ich sagen.
 170 F: Okay. Das heißt du sagst einfach, weil ich mich nicht genug auskenne, ist es so ein Mittelding?
 171 S: Ja.
 172 F: Okay, gut. Gut. Das ist es eigentlich eh schon von meinen konkreten Fragen her. Dann ein bisschen allgemeiner
 173 über den ganzen Prozess, den wir gemacht haben. Welche Sachen hätten dir glaubst du vielleicht geholfen, dass
 174 die Einstellungen für dich selbst einfach noch positiver geworden wären über die Mathematik und das Beweisen?
 175 Irgendetwas. Lass dir Zeit. Wo du einfach sagst, das hätte mir vielleicht doch ein bisschen mehr noch geholfen,
 176 dass es ein bisschen mehr zu einer positiven Steigerung kommt, oder das hätte ich mir vielleicht eher gewünscht
 177 oder würde ich mir wünschen.
 178 S: Ich glaube das ist von außen ziemlich schwierig, weil ich glaube, mir fehlen generell einfach Grundlagen in
 179 Mathe, die ich einfach nicht habe.
 180 F: Okay. Das heißt vom Faktenwissen, oder wie?
 181 S: Generell zum Beispiel Funktionen oder Ableitungen betreffend. So das alles\ Da bin ich ziemlich instabil. Also
 182 wahrscheinlich wäre es\ Hätte ich einfach mehr Grundlagen, wäre es einfacher, aber das war ja nicht alles, was
 183 wir dieses Jahr gemacht haben. Es sind teilweise Sachen, die ich einfach\ die mir von davor fehlen.
 184 F: Mhm. Das heißt, du würdest schon sagen, dass wenn dein mathematisches Wissen, wenn ich das jetzt so richtig\
 185 wenn das quasi fester wäre, wären deine persönlichen Einstellungen gegenüber dem Beweisen besser?
 186 S: Ja, ich glaube schon.
 187 F: Okay. Das heißt du glaubst, wenn dein Faktenwissen mehr gesichert ist, dann würde es tendenziell positiver
 188 werden, oder wie?
 189 S: Ja, würde ich schon sagen.
 190 F: Okay gut. Dann kommen wir eh zum Ende. Gäbe es noch irgendetwas, was du zu diesem ganzen Prozess, den
 191 wir gemacht haben, ergänzen möchtest, worüber wir jetzt nicht geredet haben? Was ich jetzt nicht ausgefragt habe?
 192 S: Ich glaube nicht eigentlich.
 193 F: Okay, gut. Dann, Dankeschön.
 194 S: Danke.
 195 F: Danke für das Interview.

Transkript Fall A12

1 F: Lieber Schüler, liebe Schülerin. (Lachen) Wir haben in den letzten zwei Wochen das Thema Beweisen im Ma-
 2 thematikunterricht gemacht und ich habe euch ja mitgeteilt, dass das für meine Masterarbeit ist. Und ich mache
 3 das zu beweisbezogenen Beliefs, also zu euren Einstellungen und Überzeugungen zum Beweisen und einfach,
 4 damit ich jetzt noch ein bisschen tiefere Einblicke in diese Entwicklung bekomme, möchte ich gerne das Interview
 5 mit dir führen und ich würde dich bitten, dass du es wirklich offen und ehrlich beantwortest und nicht, wie ich mir
 6 das wünsche oder so. Ich bin jetzt nicht deine Lehrerin, sondern eine Studentin, die einfach deine Hilfe braucht.
 7 Also es ist keine Prüfung mit richtigen oder falschen Antworten. (-) Die erste Frage ist einmal ganz allgemein: Wir

8 haben ja das Projekt gemacht im Unterricht. Was sind deine ersten Gedanken/Gefühle dazu, wenn du dich jetzt
9 daran zurückerinnerst?

10 S: Mmh (--). Ich finde es war\ Also ich habe das glaube ich eh irgendwann im Unterricht gesagt, aber für mich war
11 es (-- eigentlich so eine nette (-) Ausweichung vom normalen Unterricht.

12 F: Mhm.

13 S: Und es hat eh so ziemlich Spaß gemacht, wenigstens im Vergleich zu so Differentialrechnung jetzt, Sie verste-
14 hen.

15 F: Ja.

16 S: Und (-- ich habe auch das Gefühl, ich habe\ Es ist mir schon etwas im Kopf geblieben. Ich hatte gestern oder
17 vorgestern Englischnachhilfe und ich habe darauf so irgendwie\ Irgendwie habe ich mich so zurückerinnert, weil
18 wir haben über Beweise gesprochen und er hat so\ Wir haben so irgendwas\ und ich habe mich erinnert und ich
19 habe erwähnt, ja das ist ein präformaler Beweis oder so.

20 F: Ah, cool.

21 S: Ja. Also ja, es ist schon irgendetwas im Kopf geblieben.

22 F: Ja.

23 S: Ob ich jetzt besser mathematische Beweise durchführen kann\ (-) Ich habe es halt nicht versucht alleine. Ich
24 hoffe\ Also ich habe das Gefühl, es würde schon besser gehen, weil ich eine Struktur hätte.

25 F: Mhm.

26 S: Ich glaube das ist die Hauptsache, was ich von dem Ganzen mitgenommen habe.

27 F: Mhm, okay. Gut. Danke. Dann komme ich zu konkreten Ergebnissen. Also bei dir ergaben sich Sprünge, die
28 bei vielen anderen Personen eben auch so waren.

29 S: Mhm.

30 F: Und zum Beispiel war das bei dieser Aussage hier. Ich gehe gleich hin, damit wir das im Fragebogen auch
31 anschauen können. (-) Und zwar hier. Das ist eben dein erster Fragebogen. „Wenn man eine Aussage anhand vieler
32 Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“ Also die Aussage 5 war das.

33 S: Ja.

34 F: Und dann hast du bei der Endbefragung, das wäre dann diese hier, vom Wert 3 auf den Wert 1 diesen Sprung.
35 Das heißt, dass es eben nicht genügt, dass du hier eben gar nicht zustimmst. Wie würdest du das jetzt für dich
36 begründen? Woher kam dann dieser Sprung?

37 S: (-- Ich weiß nicht, warum ich da überhaupt den Wert 3 angekreuzt habe um ehrlich zu sein jetzt im Nachhinein.

38 F: Mhm.

39 S: Weil es ist ja klar. Ich meine\ Also wir haben das besprochen, aber nicht nur\ Es erscheint jetzt logisch für mich,
40 dass es einfach nicht reicht Beispiele zu machen, um irgendwas zu beweisen, auch wenn es sehr viele Beispiele
41 sind.

42 F: Mhm.

43 S: Und auch wenn man sich denkt\ Also es ist einfach keine Definition von Beweis.

44 F: Ja.

45 S: Es könnte allgemein stimmen\ Wir haben in Physik auch\ Wir reden über Quantenphysik und dass es nicht
46 widerlegt werden kann und dass hunderte Beispiele\ also (---) Beispiele gerechnet wurden und alle\ Also die schaf-
47 fen es nicht Quantenphysik zu widerlegen, aber es ist quasi kein Beweis dafür, dass es so irgendwie existiert.

48 F: Okay.

49 S: Und\ Es passt einfach nicht.

50 F: Genau. Das passt jetzt zur Endbefragung, wo du angekreuzt hast, du stimmst dieser Aussage jetzt gar nicht zu.

51 Interessant war eben, ob das durch irgendetwas in unseren Interventionen jetzt passiert ist oder\

52 S: Ja, es passt einfach nicht zur Definition.

53 F: Okay.

54 S: Es könnte halt allgemein korrekt sein, aber es passt nicht zur Definition davon, was ein Beweis ist.

55 F: Mhm, okay gut. Dann hast du noch einen großen Sprung gemacht, und zwar (-- das war hier: „Durch das
56 Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ Diese Aussage 3 hier. Und da
57 hast du zuerst hier bei der Aussage „Durch das Beweisen lernt man allgemeine Methoden, um mathematische
58 Probleme zu lösen.“\ Das ist quasi wieder dein erster Fragebogen. Da hast du hier schon recht zugestimmt.

59 S: Ja.

60 F: Und beim\ Ich sehe hier eh, dass du hier zuerst den Wert 5, dann 4 und dann doch 1 gewählt hast.

61 S: Nein, weil ich habe das alles\ Ich kann mich erinnern, ich habe einfach die Richtungen vertauscht am Anfang.

62 F: Okay.

63 S: Und ich habe am Anfang alles so angekreuzt und dann habe ich es weggemacht.

64 F: Okay, aber hier wäre es dann trotzdem, dass du jetzt quasi dann dem gar nicht mehr zustimmst.

65 S: Ja.

66 F: Also, dass man durch das Beweisen jetzt nicht Methoden lernt, um Probleme zu lösen.

67 S: Mhm.

68 F: Wie würdest du das\ Welche Gedanken hattest du da dazu?

69 S: Ich muss mir das mal durchlesen.

70 F: Jaja, lass dir Zeit.
71 S: (---) Ja halt für mich passt das jetzt gar nicht zusammen. Es sind keine allgemeinen Methoden. Ein Beweis kann
72 sehr spezifisch sein.
73 F: Mhm.
74 S: Und (-) daher ist es einfach keine passende Aussage.
75 F: Okay, das heißt du hast gemeint, okay, wenn ich einen Beweis habe, der wird so gelöst und ein anderer wieder
76 ganz anders, oder wie?
77 S: Ja, meistens schon. Ich meine von der Struktur her, wie man Beweise durchführen sollte, ist es ja immer ähnlich
78 eigentlich.
79 F: Ja.
80 S: Aber mathematisch sind sie\ von meiner\ komplett anders immer.
81 F: Okay, gut.
82 S: Deswegen habe ich das so angekreuzt.
83 F: Okay. Danke.
84 S: Vielleicht hätte ich auch den Wert 2 ankreuzen können, aber\
85 F: Nein, nein, alles gut. Mir ist einfach nur wichtig, wie du die Aussage verstanden hast, weil es war zum Beispiel
86 von mir eigentlich damit eben genau intendiert: Ich gehe bei jedem Beweis dieselbe Reihenfolge an.
87 S: Ah okay.
88 F: Und ich verwende immer\ Ich fange mit meiner Behauptung an und prüfe dann und schaue dann und so etwas,
89 aber deswegen ist das auch einfach wichtig für mich, warum\ Ja.
90 S: Mhm.
91 F: Gut. Genau. Dann bleiben wir gleich hier. Beim Teil D hattest du auch einen sehr großen Sprung. Und zwar\
92 das ist wieder dein Endfragebogen gewesen, also nach unseren Einheiten, und das war der am Anfang. Hier eben
93 bei der Aussage: „Der erste Schritt beim Beweisen liegt in einer intuitiven Idee.“
94 S: Ja.
95 F: Und da hast du am Anfang eben gemeint\
96 S: Ja, das ist komisch. Ich weiß nicht warum\
97 F: Du stimmst eher nicht zu und dann hast du da voll zugestimmt. Also ja, ich brauche eine intuitive Idee, warum
98 das überhaupt wahr sein könnte.
99 S: (-) Ich glaube, ich\ Ich weiß nicht\ Ich weiß einfach nicht, warum ich hier den Wert 2 angekreuzt habe, aber\
100 F: Das heißt, du würdest eher dem\
101 S: Ja sicher. Es ist halt einfach für mich so. Also ich brauche irgendetwas. Ich brauche eine Idee oder ein\ keine
102 Ahnung ein Beispiel, das einfach zeigen würde, dass man einen Beweis durchführen kann.
103 F: Okay.
104 S: Ich kann nicht einfach blind beginnen, wie ich da andeuten würde.
105 F: Okay.
106 S: Keine Ahnung, warum ich das so gemacht habe.
107 F: Okay, also du kannst nicht sagen, was dein Gedanke da dahinter war? Okay.
108 S: Oder (--)
109 F: Lass dir bitte Zeit. Wir haben alle Zeit der Welt.
110 S: (-----) Gibt es andere so erste Schritte?
111 F: Es\ Du kannst es dir gern noch einmal durchlesen. Es waren eben diese fünf Sachen bei der Reihenfolge, wie
112 man einen Beweis angehen könnte.
113 S: Mhm. (-----) Ja ich bin mir nicht sicher.
114 F: Okay. Nein, ist überhaupt kein Problem. Würdest du jetzt aber sagen, unabhängig davon, dass es irgendwie eine
115 Intervention gab, also irgendetwas, was wir gemacht haben in diesen Einheiten, dass du sagst, deshalb ist mir das
116 jetzt als besonders wichtig erschienen.
117 S: Ja, auf jeden Fall. Ich meine, ich bin mir schon sicher, dass ich mir irgendetwas dazu gedacht habe, als ich das
118 angekreuzt habe.
119 F: Mhm.
120 S: Ich kann mich jetzt einfach nicht zurückerinnern. Und das hat sich schon\
121 F: Okay. Kannst du dir vielleicht irgendetwas Spezifisches denken, was wir gemacht haben, dass das\ dass du dann
122 sagst, diese intuitive Idee ist für mich total wichtig? Wenn du dich zurückerinnerst, was wir gemacht haben?
123 S: (-) Wir haben die Ableitungsregeln bewiesen, oder?
124 F: Genau, die Faktorregel haben wir bewiesen und das mit den Polynomfunktionen dritten Grades mit der Wende-
125 stelle.
126 S: Ja.
127 F: Das haben wir gezeigt.
128 S: (-) Ich meine wir haben davor ja schon die Differentialrechnung gemacht und ohne dem hätte ich halt keine
129 Idee, wo ich beginnen soll.
130 F: Okay.

131 S: Aber auch allgemein sollte ich\ Also ich muss schon verstanden haben oder eine grobe Idee haben, wie Ablei-
132 tungen funktionieren, was die Steigung oder was die erste Ableitung angibt, was die Steigung überhaupt ist und
133 wie die Funktion aussehen könnte, um im Kopf einen Beweis aufstellen zu können.

134 F: Okay, gut. Danke. Dann hast du allgemein eine positive Veränderung gemacht, wo es um deine persönliche
135 Sicherheit beim Beweisen ging. Also das war dieser (-) Teil hier. Teil E: „Wie sicher fühlst du dich beim Bewei-
136 sen?“. Und insgesamt hast du eine positive Veränderung hier gehabt. Du hast eben angegeben, wenn ich kurz\ Ich
137 gehe da auch kurz hin, dann haben wir den Vergleich. Du hast hier zum Beispiel angegeben, dass du dich beim
138 Umgang mit typischen Beweistechniken hier sicherer fühlst.

139 S: Ja.

140 F: Ja, das ist der erste Test gewesen und das ist der Endtest. Also du hast zuerst den Wert 2 angegeben und dann
141 hast du den Wert 3 angegeben, also einen Schritt mehr. Dann hast du dich auch hier dazu, dass du Schwierigkeiten
142 hast, die zentrale Idee herauszufinden, sogar um zwei Sprünge verbessert. Du hast gesagt dem stimmst du nicht
143 mehr zu. Also ich habe keine\ also kaum Schwierigkeiten. Und dann hast du noch angegeben bei der Überforde-
144 rung hier (-): „Ich fühle mich überfordert.“. Auch da hast du dann weniger zugestimmt. Und da würde mich einfach
145 interessieren, was glaubst du in diesem Prozess könnte irgendwie diese Änderung bewirkt haben?

146 S: Ich glaube ich habe eh darauf hingedeutet am Anfang, wo ich über diese Struktur geredet habe. Ich glaube das
147 hat mir vor allem geholfen und einfach auch Definitionen zu lernen, was ein direkter und indirekter Beweis ist.

148 F: Okay.

149 S: Präformal, formal. Das hätte ich davor nicht gewusst.

150 F: Mhm. Das heißt Struktur und einfach Grundwissen zu den\
151 S: Ja.

152 F: Okay. Gab es hier irgendwelche Interventionen, also irgendetwas ganz Spezifisches, was wir gemacht haben,
153 wo du dann sagst\ Also du hast schon gesagt eben das mit dem direkten und indirekten Beweis, das haben wir
154 schon gesagt. Und bei der selbstständigen Arbeit, gab es da irgendetwas oder\
155 S: Selbstständig? Aso, in der Grupp\
156 F: Wo ihr dann in Gruppen gearbeitet habt.

157 S: Ich wollte auch das sagen. Ich finde (--)\ Vielleicht besonders beim sechsten Punkt ist es so, als Gruppe konnten
158 wir uns\ Also ich habe mich gar nicht überfordert oder irgendwie gefühlt. Ich finde es hat Spaß gemacht diese
159 Beweise zu machen, durchzurechnen, zu verstehen.

160 F: Mhm.

161 S: Und das könnte auch einfach ein Grund dafür sein, warum sich das alles verbessert hat.

162 F: Genau und dann eben das mit den Schwierigkeiten, hier bei der zentralen Idee, da hast du ja zwei Sprünge
163 gemacht.

164 S: Mhm.

165 F: Was würdest du hier sagen? Weil da hast du zuerst gesagt, es bereitet mir Schwierigkeiten. Da hast du schon
166 eher zugestimmt, dass du gesagt hast, es bereitet dir schon Schwierigkeiten.

167 S: Ja, ich würde nicht sagen, dass es mir Schwierigkeiten bereitet, sie zu unterscheiden, aber vielleicht von der
168 groben Idee in diese Details zu kommen, würde mir vielleicht mehr Schwierigkeiten bereiten. Aber die zu unter-
169 scheiden, ist für mich jetzt nicht so eine große Sache.

170 F: Okay, gut. Dann gab es bei dir Werte, die gleichgeblieben sind. Das betrifft deine persönliche Ausdauer zum
171 Beispiel. Da bist du auf der mittleren Stufe geblieben. Und genau, was war das noch? Das selbstständige Nach-
172 vollziehen von einem Beweis. Da bist du auch auf der Stufe 3 geblieben, also so in der Mitte. Genau und auch\
173 Wenn ich kurz wechsele\ Hier, dass du dich auf mathematischer Ebene sicher fühlst, einen Beweis in der Klasse
174 vorzustellen. Da bist du auch bei dem Wert 3 geblieben.

175 S: Okay.

176 F: Das heißt, hier hat sich einfach nichts getan. Also eher eine mittlere Zustimmung. Und mich würde interessieren,
177 ob du glaubst, dass es irgendetwas gegeben hätte in unserem Prozess, was jetzt nicht gegeben war, was vielleicht
178 hier eine Veränderung bewirkt hätte. Also es war das hier: Aussage 2 und Aussage 5, wo du auf der Stufe 3 geblie-
179 ben bist.

180 S: Also ich glaube bei Aussage 2 auf jeden Fall ist es\
181 F: Die Ausdauer, ja.

182 S: Ist es ziemlich persönlich für mich. Also ich denke da könnte man nichts gemacht haben. Auch bei diesen
183 Gruppenarbeiten\ Ab irgendeiner Zeit habe ich dann nicht so viel mitgemacht.

184 F: Mhm.

185 S: Ja und ich glaube da könnte man vielleicht\ Wenn der Beweis mich persönlich sehr, sehr interessiert hätte, aber
186 es ist wiederum dann mein persönliches Gefühl, ob es für mich interessant ist, ob das Thema mir Spaß bereitet
187 oder nicht.

188 F: Mhm.

189 S: Dann Aussage 5: „Ich sehe mich in der Lage einen Beweis selbstständig nachzuvollziehen.“ (--)\ Wenn ich\ Also
190 ob man was gemacht hätte, um das zu\
191 F: Genau. Gäbe es irgendetwas, wo du sagst\
192 S: Ich glaube wieder nicht.

193 F: Das selbstständige Nachvollziehen war ja zum Beispiel bei diesen prototypischen Schülerbeispielen, dieses
 194 Arbeitsblatt, was ich euch gegeben habe, wo es ein bisschen darum ging, Beweise auch nachzuvollziehen.
 195 S: Ja, aber das ging eigentlich eh gut, finde ich. Also es hat Spaß gemacht und\ aber, ob man was machen kann\
 196 Ich glaube, je besser man unterrichtet, desto einfacher ist es, besonders für mich, weil ich meine, es hängt mit
 197 Aufmerksamkeit schon zusammen.
 198 F: Okay.
 199 S: Wenn ich irgendwann nicht aufpasse für fünf oder zehn Minuten, dann ist es schon so, dass ich mich ein bisschen
 200 verloren fühle.
 201 F: Okay. Aber selbstständig nachzuvollziehen wäre ja dann gegeben, wenn ich gar nicht da bin, sondern du be-
 202 kommst den Beweis vorgelegt und du musst ihn selbstständig nachvollziehen, wie der geführt wurde, was da
 203 gemacht wurde.
 204 S: Okay, als wenn\
 205 F: Also wirklich selbstständig für dich. Also du solltest ihn eigentlich nachvollziehen.
 206 S: Dann ja, wenn ich die mathematische Ebene davon verstehe, dann würde ich schon sagen, dass es für mich nach
 207 dieser Intervention (lachen) einfacher oder, dass es schon besser\ Wie sagt man?
 208 F: Besser gehen würde.
 209 S: Ja.
 210 F: Okay und das mit dem Vorstellen auf der mathematischen Ebene, dass du eine Beweisidee vorstellst vor deiner
 211 Klasse. Da warst du dann auch eher im mittleren Bereich.
 212 S: Mhm. (--)
 213 F: Das war hier. (-) Also eben das ist da.
 214 S: Aber ich glaube das hängt auch damit zusammen, dass wir als Klasse jetzt alles gemeinsam gelernt haben und
 215 gemacht haben und wir haben alle diese Struktur gelernt und was ein Beweis ist und wie man Beweise durchführt.
 216 Das heißt\ Und zu dem Zeitpunkt haben wir das alle nicht gewusst und zu dem Zeitpunkt haben wir das alle
 217 gewusst. Deswegen finde ich, ist es gleichgeblieben, obwohl es sich trotzdem viel verbessert hat.
 218 F: Okay, aber da wäre quasi ja die Frage gewesen, dass du dich von deinem mathematischen Wissen zu Beweisen
 219 jetzt so sicher fühlst, dass du vor der Klasse es jetzt vorstellen könntest. Oder du meinst jetzt sind alle gleich sicher\
 220 Also ganz verstehe ich es noch nicht ganz. (-) Du sagst, da habt ihr es alle noch nicht gewusst\
 221 S: Ja, weil hier könnten mehr\ okay\ ich\ keine Ahnung\ Aber ich glaube hier könnte man mehr dann kritisieren.
 222 F: Ah, okay. Aber das wäre quasi\
 223 S: Also meine Beweisfähigkeiten haben sich verbessert, aber hier könnte man mehr kritisieren als da, weil hier
 224 mehr Menschen mitgemacht haben.
 225 F: Okay.
 226 S: Und halt die ganze Klasse jetzt\
 227 F: Ein anderes Niveau hat sagen wir mal.
 228 S: Ja genau.
 229 F: Okay. Das heißt\ Okay. Weil deshalb habe ich eigentlich versucht, diese zwei Fragen nämlich zu trennen mit
 230 der sozialen Ebene. Hier wäre es wegen deinen Klassenkameraden eher nicht so gewesen nämlich. Okay, nein, ich
 231 kenne mich aus. Gut. Würdest du noch gerne etwas ergänzen wollen, was wir jetzt nicht angesprochen haben?
 232 Irgendetwas, was dir noch einfällt?
 233 S: (---) Ich glaube nicht.
 234 F: Nicht?
 235 S: Nein.
 236 F: Okay gut. Dann danke.

Transkript Fall A13

1 F: Passt. Gut. Also erste Sache: Wir haben ja schon ganz viel über Beweise gesprochen. Wir haben das eben in den
 2 letzten Wochen behandelt und ich mache das ja im Zuge meiner Masterarbeit eben zu beweisbezogenen Beliefs.
 3 Also ich schaue mir eben an, was sind eure Überzeugungen/Einstellungen zu Beweisen und damit ich einfach noch
 4 ein paar Einblicke in eure Ergebnisse bekomme, möchte ich euch eben interviewen. Und ja. Was mir ganz, ganz
 5 wichtig ist: Ich bin jetzt nicht deine Lehrerin, sondern eine Studentin, die deine Hilfe braucht, weil sonst\ Also es
 6 ist jetzt keine Prüfungssituation\
 7 S: Passt, ja.
 8 F: Es gibt keine richtigen oder falschen Antworten, sondern es geht wirklich einfach darum, was du denkst. Ja, die
 9 erste Frage ist einmal ganz allgemein. Wir haben eben das Projekt zu Beweisen gemacht im Mathematikunterricht.
 10 Was sind jetzt deine ersten Gedanken/Gefühle dazu, wenn du dich daran zurückerinnerst? Was kommt dir als
 11 erstes?
 12 S: Also, dass es verschiedene Art\ Also, dass es eine fixe mehr oder weniger Abfolge gibt, wie man einen Beweis
 13 angehen kann. Dass man sich eben zuerst Gedanken macht und dann versucht einen präformalen Beweis zu for-
 14 mulieren. Und, dass man dann eben schaut\ Aber es muss nicht sein, das in mathematische Zeichen auch

15 umzuwandeln, dass es dann ein formaler Beweis ist. Und, dass ein Beweis auch nie so, wie man ihn dann quasi
16 präsentiert bekommt entstanden ist, sondern, dass eben die Mathematiker und Mathematikerinnen, die daran ge-
17 arbeitet haben, das mehr oder weniger durcheinander gemacht haben, von hinten begonnen haben, wieder neu
18 überarbeitet haben. Also ich weiß nicht, ob das die Antwort auf die Frage ist.

19 F: Ja, nein, nein. Einfach was du dir dazu jetzt im ersten Moment gedacht hast. Okay. Gefühle auch irgendetwas
20 dazu oder neutral?

21 S: Also für mich persönlich wie mir das so\

22 F: Ja genau wie es für dich war. Diese\

23 S: Also ich finde es ist eigentlich sehr interessant und ich mag das, dass es so eine Abfolge gibt und ich mag auch
24 sehr das Gefühl, wenn ich es dann geschafft habe, einen Beweis richtig zu machen oder wenn ich es geschafft
25 habe, einen Beweis zu durchschauen eben und zu verstehen. Also ich finde das sehr interessant, weil das sind halt
26 auch generelle mathematische Aussagen und dann sich aber auch zu überlegen, wieso das so ist. Also das finde
27 ich eigentlich sehr interessant.

28 F: Okay, freut mich. Ich habe dann quasi deine Daten und von jedem generell genauer ausgewertet und die Aus-
29 wertung deiner Daten ergab einmal sehr allgemein positive Überzeugungen/Beliefs für das Beweisen und es hat
30 sich bei dir auch gezeigt, dass deine Ansichten und Einstellungen relativ stabil geblieben sind vom Anfang an,
31 über den Prozess hinweg und dann am Ende habe ich sie mir ja nochmal angeschaut. Wie würdest du das wahr-
32 nehmen, dass der Fragebogen zeigt, dass deine Werte relativ stabil sind? Wie würdest du das wahrnehmen für
33 dich?

34 S: Also ich glaube, das ist eben viel auch wegen dem Wahlpflichtfach (-), wobei ich sagen muss, dass wir im
35 Wahlpflichtfach nie so wirklich die Herangehensweise besprochen haben. Deswegen war es am Anfang ein biss-
36 chen überfordernd, aber ich habe mich da halt langsam einfach eingefunden, würde ich sagen. Und deswegen war
37 das für mich jetzt trotzdem nochmal ein guter Überblick und so. Und ich habe auch das Gefühl, dass ich dann das
38 zweite Mal diesen Beweis strukturierter angegangen bin. Aber ja ich glaube generell hat es sich halt nicht so viel
39 verändert.

40 F: Wenn es halt schon sehr positiv ist\

41 S: Ja, genau.

42 F: Genau. Ein paar kleine Änderungen sind mir trotzdem aufgefallen. Du hast am Beginn dieser Aussage\ Ich habe
43 die Fragebögen mitgebracht, um dir das zu zeigen.

44 S: Also ich war bei ein paar Aussagen immer so\ da habe ich mir überlegt\ also da war ich zwischen zwei und dann
45 habe ich mich so\ ich weiß nicht entschieden. Deswegen es kann da\

46 F: Ja, nein. Es ist einfach interessant, weil du hast\ genau, dass die Mathematik hier aus dem korrekten Anwenden
47 von Regeln und Gesetzen besteht. Das ist dein erster\ quasi deine Anfangsbefragung und das ist deine Endbefra-
48 gung. Und hier ist es total interessant, weil es bei dir genau gewechselt hat. Zwar nur um einen Wert, es ist jetzt
49 nicht\ aber keine Ahnung, denkst du, dass es irgendetwas gab, in diesem ganzen Prozess, irgendeine Intervention,
50 die jetzt diese kleine Änderung bewirkt haben könnte?

51 S: Also eben, dass Sie nochmal gesagt haben, dass man wirklich nur Definitionen verwenden darf. Das war mir
52 jetzt vorher nicht so ganz bewusst, sonst hätte ich vorher auch so, keine Ahnung, allgemeine Sätze verwendet.
53 Aber ich glaube das und einfach durch diesen strukturierten Ablauf, indem Sie uns halt erklärt haben, wie man
54 einen Beweis angeht, war es für mich klarer, dass es noch mehr wirklich Regeln und Gesetze sind.

55 F: Okay, deswegen dann das erste. Und das zweite, dass dann aber Mathematik generell dabei hilft Probleme zu
56 lösen und von neuen Ideen lebt, da bist du dann ein bisschen abgekommen. Gibt es da irgendeinen\ wo du.

57 S: Ähm.

58 F: Also die zweite Frage war das.

59 S: (--) (Lachen) Das weiß ich leider nicht. (-)

60 F: Okay.

61 S: Ich weiß nicht, was ich mir dabei gedacht habe, ganz genau. (-)

62 F: Nicht schlimm. Was würdest du dir jetzt denken oder\

63 S: Also ich würde dem eigentlich jetzt mehr zustimmen.

64 F: Also beides auf den Wert 5?

65 S: Ja.

66 F: Okay. Ja, das sind einfach nur Dinge, die aufgefallen sind bei der Auswertung. Genau. Dann habe ich mir ja
67 auch angeschaut, wie sicher ihr euch beim Beweisen fühlt bei einem Teil und da war es einmal bei dir generell
68 schon gut. Und du hast bei ein paar Sachen\ Ich suche das wieder im Fragebogen, damit wir dort sind. (-) Genau,
69 das war dieser Teil E hier, wie sicher du dich beim Beweisen fühlst.

70 S: Ja.

71 F: Und du hast hier eben bei der persönlichen Ausdauer\ hast du eben angegeben, dass du mit einem Wert 4 hier
72 zustimmst. Das hast du hier auch gleich gelassen und es war dann auch noch die Frage zur Sicherheit vom Präsen-
73 tieren in der Klasse. Also das war dann hier hinten. Genau. Da bist du nämlich auch gleichgeblieben und bei dem
74 Umgang mit diesen typischen Beweistechniken, also bei der zweiten und dritten Aussage hier, bist du auch gleich
75 geblieben auf dem Wert 3 und 4. Und da würde ich einfach gerne wissen, womit du das begründen würdest, dass
76 sich hier vielleicht nichts getan hat?

77 S: Ich glaube das liegt generell daran, weil halt der Zeitraum\ Ich weiß nicht, war es vielleicht ein Monat, wenn
 78 überhaupt, den wir verwendet haben für diese Beweisstunden und ich glaube, dass man für dieses Thema\ oder
 79 zumindest glaube ich, dass ich für mich persönlich länger brauchen würde, um wirklich komplett sicher zu werden
 80 und mich wirklich komplett sicher zu fühlen, das vor der Klasse auch zu präsentieren. Weil es ist etwas anderes,
 81 wenn man es selbst versteht, als wenn man es dann wirklich anderen Leuten erklären muss und das wirklich so
 82 präsentieren muss, dass das andere dann auch verstehen.
 83 F: Okay und das\
 84 S: Also ich glaube einfach, dass der Zeitrahmen dafür zu kurz war.
 85 F: Mhm. Das heißt, würdest du eben\ Du hast jetzt schon den Zeitrahmen angesprochen, irgendwelche anderen
 86 Interventionen oder Unterrichtsmethoden, die wir jetzt nicht gemacht haben, wo du glaubst, das könnte das irgend-
 87 wie noch verstärken, dass du zum Beispiel beim Umgang sicherer wirst also beim Präsentieren?
 88 S: Meinen Sie jetzt generell im Unterricht oder wenn man das so\
 89 F: Im Unterricht oder so, wie wir es jetzt gemacht haben. Also\
 90 S: Also ich glaube es würde helfen, das haben wir dazwischen eh auch ein bisschen gemacht, halt so wie es der
 91 Zeitrahmen halt hergibt generell, dass man doch immer wieder irgendwelche Beweise macht und selbst wenn man
 92 sie nicht selbst macht, zumindest anzuschauen und zu versuchen zu verstehen.
 93 F: Okay.
 94 S: Also ich glaube, dass das auch für mathematisches Verständnis generell sehr hilft, weil ich habe im Wahlpflicht-
 95 fach schon gemerkt generell, auch wenn es dann teilweise die einfachsten Beweise von den grundlegendsten Aus-
 96 sagen sein können, dass das einfach dabei hilft, Sachen dann zusammenzufügen.
 97 F: Mhm, okay.
 98 S: Und auch dem Verständnis durchaus behilflich sein kann. Also ich weiß nicht\ Natürlich kann es für viele über-
 99 fordernd sein, das verstehe ich auch, aber mir persönlich hilft es eigentlich sogar, Sachen besser zu verstehen,
 100 wenn man mehr in die Tiefe geht.
 101 F: Mhm, okay. Das heißt, das wäre jetzt so regulär im Unterricht das ein bisschen mehr einbringen\
 102 S: Ja.
 103 F: Gäbe es irgendwas jetzt an dem Format, wie wir es jetzt gemacht haben, wo du sagst, das könnte da vielleicht
 104 ein bisschen besser sein, um das noch mehr zu unterstützen als so, wie wir es gemacht haben?
 105 S: Also vielleicht, dass vor dem Fragebogen wirklich alle allein und nicht nur in Gruppenarbeit einen Beweis
 106 nochmal machen.
 107 F: Mhm.
 108 S: Da ist dann halt auch die Frage, wie es die Zeit hergibt, aber ich glaube, dass das auch helfen würde, weil bei
 109 dem Fragebogen mussten wir den Beweis allein machen und es ist schon etwas anderes, wenn man davor in einer
 110 Gruppe ist und auch Sie dann theoretisch etwas fragen kann und beim Verständnis da\ also, wenn Sie dann auch
 111 behilflich sein können. Also, dass das vielleicht alle allein nochmal machen vor dem Fragebogen.
 112 F: Okay. Als Interessensfrage: Denkst du, wenn vielleicht auch mehr Zeit gewesen wäre, dass es besser gewesen
 113 wäre, wenn ich mich mehr herausgenommen hätte? Oder denkst du, dass die Unterstützung nötig war?
 114 S: Ja, also ich glaube vor allem am Anfang war Ihre Unterstützung schon sehr notwendig und auch bei dem Beweis,
 115 den wir in der Gruppe ausgearbeitet haben, habe ich auch Ihre Hilfe gebraucht. Also allein hätte ich das wahr-
 116 scheinlich nicht so geschafft. Aber ich glaube dann mit der Zeit, also wenn wir das länger gemacht hätten, dass sie
 117 immer sukzessive weniger helfen müssen.
 118 F: Okay. Gut, danke. Dann war noch eine Frage. Genau bei Teil E auch: „Ich sehe mich in der Lage einen Beweis
 119 selbstständig nachzuvollziehen.“ bei der Frage 5. Da hast du hier am Beginn vollständig zugestimmt und beim
 120 Endfragebogen dann um einen Wert weniger. Also jetzt nicht drastisch. Und da würde mich einfach interessieren:
 121 Was würdest du sagen, wie kam es zu dieser Veränderung, dass du dann doch vielleicht ein bisschen weniger sicher
 122 warst oder zugestimmt hast?
 123 S: Also ich glaube ich habe halt gemerkt\ Also ich glaube vielleicht habe ich Beweise am Anfang auch ein bisschen
 124 unterschätzt.
 125 F: Okay.
 126 S: Und ich glaube, ich habe halt wirklich gemerkt, dass wenn ich es wirklich komplett selbstständig mache, ich
 127 mich jetzt nicht komplett sicher fühle. Also am Anfang waren für mich Beweise halt\ Also im Wahlpflichtfach wir
 128 machen jetzt auch nicht so viele Beweise. Das haben wir eher letztes Jahr gemacht, jetzt machen wir eher Arbeits-
 129 blätter allein. (-) Und da hatte ich es wahrscheinlich so in Erinnerung\ Diese Beweise im Wahlpflichtfach haben
 130 wir auch gemeinsam gemacht und deswegen habe ich das wahrscheinlich so übertragen, dass ich es allein mehr
 131 oder weniger auch geschafft hätte. Und dann habe ich eben hier bemerkt, wenn man das dann wirklich komplett
 132 allein macht, ist es dann doch nicht so leicht, wie ich es mir vorgestellt habe.
 133 F: Okay. Nein, sehr gut. Danke. Dann komme ich schon bei dir zu der letzten Frage: Gibt es irgendetwas, was du
 134 jetzt noch ergänzen würdest, was du jetzt noch nicht gesagt hast oder was wir noch nicht angesprochen haben?
 135 Etwas, was dir noch am Herzen liegt oder du dir denkst?
 136 S: Also generell vielleicht, dass man Beweise mehr im Unterricht einbauen könnte, wenn es der Zeitrahmen her-
 137 gibt. Auch zum Beispiel diese kurzen Beweise wie bei den Logarithmusrechenregeln und ja es macht mir eigentlich
 138 sehr Spaß, auch wenn ich es manchmal nicht durchschauen kann oder so (lachen).

139 F: (Lachen) Ja, aber generell, wenn es dir Spaß macht, ist es schon gut. Okay. Danke auf jeden Fall. Dankeschön.
140 (lachen)
141 S: Dankeschön.

Transkript Fall B7

1 F: Passt. Okay. Also wir haben Beweise im Unterricht gemacht und ich mache das für meine Masterarbeit. Das
2 heißt ich würde dich jetzt wirklich bitten, mich als Studentin zu sehen. Ich brauche deine Hilfe und bin nicht deine
3 Mathematiklehrerin.
4 S: Okay.
5 F: Und ich wollte mir eben eure Einstellungen und Vorstellungen ansehen, also was ihr euch zur Mathematik und
6 zu den Beweisen denkt und fühlt. Und damit ich einfach noch einen tieferen Einblick in deinen Fragebogen be-
7 komme, würde ich gerne das Interview mit dir führen. Es gibt keine richtigen oder falschen Antworten. Es ist eben
8 keine Prüfungssituation, sondern das ist nur für mich, damit ich dann mehr interpretieren kann, was ich noch
9 ändern kann oder was gut funktioniert hat. Gut und dann habe ich schon eine erste Frage an dich einfach einmal
10 ganz allgemein, wenn du dich jetzt zurückerinnerst an das, was wir gemacht haben: Was sind deine ersten Gedan-
11 ken und Gefühle dazu, wenn du daran zurückdenkst?
12 S: Allgemein an Beweise?
13 F: An das, was wir gemacht haben. Ganz egal, was es betrifft.
14 S: Also ich fand das Thema schon spannend. Manchmal ist es schon schwer zu verstehen, aber ich mag es schon
15 so Sachen zu beweisen und nachzuvollziehen, wieso das eigentlich so sein soll.
16 F: Mhm. Okay. Und von der Dauer her vielleicht noch etwas? Oder wie hast du dich gefühlt dabei?
17 S: (-) Ja es was schon manchmal verwirrend, aber interessant.
18 F: Okay, gut. Danke. Bei dir hat sich eben eine große Veränderung in Richtung positive und produktive Beliefs
19 also Überzeugungen zu den Beweisen im Mathematikunterricht gezeigt. Wie würdest du das, wenn ich dir das
20 jetzt so sage, für dich persönlich wahrnehmen? Jetzt ohne Fragebogen. Wie würdest du das für dich jetzt wahrneh-
21 men, wenn ich sage, bei dir hat sich positiv etwas getan?
22 S: Also unerwartet.
23 F: Okay.
24 S: Ich wusste nicht, dass ich mich so sehr verändert habe. Also meine Antworten, weil ich kann mich nicht mehr
25 erinnern, was genau ich angegeben habe.
26 F: Okay, also du hättest jetzt gar nicht damit gerechnet, dass sich bei dir so viel getan hat. Okay, das ist interessant.
27 Dann komme ich vielleicht einmal gleich zu konkreten Sachen, damit wir darüber reden. Und zwar war das bei dir
28 zum Beispiel\ Also das ist der erste Fragebogen gewesen, den ihr am Anfang ausgefüllt habt und das war dann der
29 zweite im Anschluss. Und bei dir zum Beispiel hat sich hier bei der Frage 2 doch um zwei Punkte etwas getan,
30 also hier: „Mathematik hilft dabei Probleme zu lösen und lebt von neuen Ideen.“ Da hast du am Anfang eben eine
31 mittlere Zustimmung angekreuzt, eher den Wert 3. Und dann am Ende nach unseren Interventionen sage ich jetzt
32 einmal, hast du dann hier auf den Wert 5 hoch gewechselt, wenn ich das so sagen kann. Also das war hier zum
33 Beispiel. Genauso\ Also das war die erste Aussage, wo das zutrifft. Aber auch hier\ Wir können es dann eh der
34 Reihe nach durchgehen. Bei der Aussage: „Beweise helfen dabei verschiedene mathematische Konzepte in einen
35 größeren Zusammenhang zu stellen.“ Da hast du hier den Wert 2 und hier hast du dann auch den Wert 5, also auch
36 ein sehr großer Sprung, wo du sagst: Okay, zuerst eher nicht so und dann doch mehr. Und ja, vielleicht reden wir
37 einmal über die zwei Aussagen, bevor es weitergeht. Wenn du jetzt sagst: „Mathematik hilft dabei Probleme zu
38 lösen und lebt von neuen Ideen.“ Was könntest du dir einfach einmal vorstellen\ Womit würdest du so eine Verän-
39 derung für dich begründen? Gab es da irgendetwas?
40 S: Ich denke halt, ich habe halt mehr\ genauer über Beweise erfahren und also ich finde schon, dass diese ganzen
41 Probleme, also Beweise, dass das halt\ man kann es halt\ Also es hilft dabei diese Probleme zu lösen, weil Beweise
42 sind dafür da um diese Sachen, bei denen man sich nicht sicher ist, zu beweisen also halt zu verstehen, also Prob-
43 leme zu lösen. Und es gibt ja schon\ Also man versucht ja regelmäßig irgendwelche neuen Beweise aufzustellen,
44 also sind es quasi schon neue Ideen.
45 F: Mhm. Okay, gut. Und das ist dir dann in unserem Prozess quasi erst bewusst geworden, dass du dann sagst\
46 S: Mhm.
47 F: Okay, interessant. Sehr gut. Dann kommen wir vielleicht zur zweiten Aussage. Genau, wo es eben darum ging:
48 Beweisen hilft dabei, die mathematischen Konzepte eben in einen größeren Zusammenhang zu stellen. Da war bei
49 dir eben auch ein großer Sprung vom Wert 2 auf den Wert 5. Gibt es da irgendetwas Spezifisches, wo du sagst,
50 durch das hast du dir das dann anders gedacht oder so?
51 S: Also ich denke, ich habe auch erfahren, dass es irgendwie solche Einteilungen gibt irgendwie. Und dass halt so
52 verschiedene Sachen zu einem Teil oder so gehören und andere auch wo anders hin und dass es so irgendwie
53 aufgeteilt ist. Man kann es auch so zuordnen in der Art.
54 F: Okay. Das heißt Struktur, wenn ich das jetzt so sehe?
55 S: Ja, sozusagen.

56 F: Okay. Gibt es da etwas Spezifisches bei den ganzen Sachen, die wir gemacht haben, wo dir das besonders
57 aufgefallen ist?

58 S: Mir fällt gerade nichts ein, aber ich denke ich habe an irgendetwas gedacht, als ich das angekreuzt habe.

59 F: Okay. Vielleicht wenn du kurz nachdenkst. Ich habe ja zuerst Input gegeben und dann habt ihr die Gruppenar-
60 beiten gemacht. In den Gruppenarbeiten habt ihr zuerst das Thema mit den Wendestellen gemacht, nachdem ihr
61 die Aussagen zu den Schüler*innenbeweisen zuordnen musstet. Dann habt ihr euch eben die Wendestelle\ dass
62 eine Polynomfunktion dritten Grades nur eine Wendestelle hat, angeschaut und dann eben die Faktorregel ganz
63 zum Schluss. Gibt es da irgendetwas, wo du sagst, da ist mir das besonders aufgefallen, dass das so ineinander-
64 greift?

65 S: Ähm.

66 F: Wir haben es nicht eilig.

67 S: Also schon, dass es halt so irgendwie eine Regel\ sozusagen eine Befolgung\ Es muss zuerst das passieren und
68 dann das und so. Dass das dann irgendwie so zusammengehört.

69 F: Okay, also da ist dir das dann so ein bisschen klarer geworden?

70 S: Ja.

71 F: Okay. Dann ein Punkt, wo sich bei dir noch viel getan hat, war das hier: „Das Finden eines Gegenbeispiels\
72 Genau, das war hier. Da bist du vom Wert 1 auf den Wert 5. Und das ist natürlich ein interessanter Sprung, wo ich
73 mir denke, okay, zuerst hast du gar nicht\ also das ein Gegenbeispiel überhaupt gar nicht wichtig ist quasi. Und
74 dann doch, dass es schon ein ganz wichtiger Teil ist.

75 S: Mhm.

76 F: Wie würdest du da diese Veränderung irgendwie begründen?

77 S: Also davor\ Also wusste nicht\ Also ich dachte Gegenbeispiele sind gar nicht relevant und so. Aber nach Ihren
78 Vorträgen und so, habe ich\ wurde mir bewusst, dass Gegenbeispiele eigentlich sehr wichtig sind und auch ein Teil
79 des Beweises sind.

80 F: Okay. Also durch die Vorträge vor allem dann. Weil ich habe ja glaube ich auch ein Gegenbeispiel gezeigt bei
81 diesem\ bei der Umkehrung von dem einen Satz zu den Folgen.

82 S: Ja, auch durch die Beispiele wurde es mir halt\

83 F: Mhm. Gut, danke. Dann gab es noch Veränderungen, und zwar war das\ Ich glaube das war hier. Bei Teil C war
84 das. Genau. Und zwar gab es da ein paar Aussagen. Diese hier unten: „Wenn man eine Aussage anhand vieler
85 Beispiele prüft, reicht das als Beweis.“ Da hast du am Anfang eben auf den Wert 3 getippt, also nicht ganz zuge-
86 stimmt, aber auch nicht ganz abgelehnt. Und dann am Ende von unseren Einheiten quasi hier auf: Dem stimme
87 ich gar nicht zu, dass das reicht. Wie würdest du deine Veränderung hier einschätzen?

88 S: Also ich dachte früher, dass man halt so\ dass man halt Beweise irgendwie nur durch Beispiele beweisen kann.
89 Aber\ Also dann habe ich erfahren, dass es eigentlich gar nicht um die Beispiele geht, sondern um das ganze
90 Prinzip. Und man muss das halt beweisen können und ja.

91 F: Und woran ist dir das, wenn du zurückdenkst, besonders aufgefallen? Was ich gesagt habe oder wie wir es
92 gemacht haben? Oder?

93 S: Ähm. Also ja, durch Ihren Vortrag, weil Sie es zuerst einmal erklärt haben, aber auch durch Beispiele. Also dass
94 halt nicht jedes Beispiel zutreffen kann, nicht stimmen kann.

95 F: Mhm, gut. Danke. Und bleiben wir gleich da. Was war noch. Hier: „Es handelt sich erst um einen Beweis, wenn
96 er mittels mathematischer Symbole und Sprache formuliert wird.“ Das war eben am Anfang. Da hast du schon
97 zugestimmt. Also ja, ich brauche schon mathematische Symbole und Sprache und dann hast du eben hier gar nicht
98 mehr zugestimmt, dass du sagst; Nein, es ist nicht dann erst ein Beweis. Wie kam es zu dieser Veränderung?

99 S: Also es gab Fachbegriffe dazu, aber ich kann mich nicht mehr erinnern (lachen).

100 F: Alles gut (lachen).

101 S: Man kann es halt denk ich auch mit Worten formulieren und man braucht nicht wirklich so mathematische
102 Symbole dazu.

103 F: Genau, präformaler Beweis war das.

104 S: Genau.

105 F: Wir haben es mit Worten formuliert und ja auch nur mit einer Skizze bei dem letzten Beispiel.

106 S: Jaja, genau.

107 F: Das heißt, dass ist dir dadurch dann bewusst geworden?

108 S: Mhm.

109 F: Okay, ja. Gut. Ja wir sind noch immer bei dem Teil (lachen). Bei dir waren wirklich so viele spannende Ergeb-
110 nisse, wo ich einfach nachfrage. Manche haben am Anfang dasselbe gewählt wie am Ende und deswegen\ Ja.
111 „Beweise sind nur dann notwendig, wenn man den Aussagen von erfahrenen Mathematikern nicht traut.“ Also
112 Aussage 7. Da hast du am Anfang gar nicht zugestimmt, du hast gesagt: Nein. Und dann bei der Endbefragung\
113 Das ist jetzt keine riesige Veränderung, aber hier hast du auf den Wert 2 quasi doch umgeschwenkt. Woran liegt
114 das, dass du dem dann doch ein bisschen mehr zugestimmt hast?

115 S: Also die Sachen, die halt bewiesen wurden, da man kann sich nie wirklich hundert Prozent sicher sein, dass es
116 stimmt.

117 F: Mhm.

118 S: Und wenn man das halt wirklich überprüfen will, dann ist es gut, wenn man selbst diese Beweise nachzuvoll-
 119 ziehen versucht. Und ja, man sollte nie wirklich so vertrauen damit. Also am besten man versucht es selbst, um es
 120 zu verstehen.
 121 F: Mhm, ja. Das würde ja quasi auf das hier zutreffen. Dem stimmst du gar nicht zu. Also du musst es selbst prüfen.
 122 S: Mhm.
 123 F: Aber hier hast du dann ja gemeint: Naja nicht so ganz.
 124 S: (--)
 125 F: Das was du beschrieben hast, trifft darauf zu. Ich muss das ja nicht\
 126 S: Ähm. (---)
 127 F: Da hast du gemeint, sie sind eher nur dann notwendig, wenn ich den anderen nicht vertraue, aber sonst nicht.
 128 S: (--) Dann (---) Also nicht nur. Beweise sind nicht nur dafür da, finde ich.
 129 F: Okay.
 130 S: Also es geht auch allgemein\ Also man kann auch selber versuchen etwas zu beweisen einfach so, ohne dass
 131 man\
 132 (Unterbrechung durch eintretende Person)
 133 F: Das heißt, du würdest dann doch eher wieder zum Wert 1 tendieren, wenn ich das jetzt richtig verstehe, weil es
 134 nicht nur dafür ist?
 135 S: Ja. Naja (---). Also weil da steht ja, Beweise sind NUR DANN notwendig.
 136 F: Genau.
 137 S: Also eigentlich würde ich sage es ist nicht nur deswegen, sondern\
 138 F: Das heißt, du würdest eben nicht zustimmen, weil es nicht nur deswegen ist.
 139 S: Ja, schon. Entschuldigung.
 140 F: Nein, alles gut. Es ist nur für mich auch interessant, weil zum Beispiel manche Aussagen, also das ist jetzt nicht
 141 nur bei dir, habe ich etwas anders gemeint in meiner Formulierung und wurden von euch ganz unterschiedlich
 142 interpretiert.
 143 S: Aso.
 144 F: Und das ist für mich dann auch interessant. Wie wurde das überhaupt von euch gesehen, damit ich dann einord-
 145 nen kann, warum das gewählt wurde. Gut. Dann bei den\ Genau. Hier: „Beim Beweisen lernt man allgemeine
 146 Methoden, um mathematische Probleme zu lösen.“ Da hast du einen kleinen Sprung gemacht. Also du hast zuerst
 147 mit dem Wert 2 eher nicht so zugestimmt, dass man dadurch Methoden lernt, und dann warst du doch auf der Stufe
 148 3, wo du ein bisschen mehr in Richtung Zustimmung gehst. Wie würdest du das für dich begründen, dass hier so
 149 ein kleiner Sprung stattgefunden hat?
 150 S: Also, ich denke man lernt irgendwie diese Beweise anders anzuschreiben und so, ja.
 151 F: Also, dass man dann schon ein bisschen etwas lernt?
 152 S: Ja.
 153 F: Aber das ist für dich scheinbar nicht der Hauptgrund, weil du hier nur Stufe 3 gewählt hast.
 154 S: Ja, weil es gibt ja eigentlich schon so Methoden, durch die man etwas beweisen kann, deswegen war ich mir
 155 nicht so ganz sicher.
 156 F: Okay. Das heißt, du meinst es gibt diese Methoden und da lerne ich dann nichts Neues oder wie?
 157 S: Also es gibt ja schon Methoden, durch die man beweisen kann, aber man kann auch zum Beispiel andere\ Man
 158 kann lernen, es anders anzuschreiben irgendwie so.
 159 F: Mhm, okay.
 160 S: Würde ich sagen.
 161 F: Gut, danke. Dann gehen wir zum anderen Teil. Bei dem Teil E war das, wo ich euch eben gefragt habe, wie ihr
 162 euch selbst beim Beweisen fühlt. Also da ging es hauptsächlich um euer Gefühl, wie ihr euch selbst einschätzt und
 163 da hat sich das bei dir auch positiv verändert. Also da war es auch eher zuerst so naja und dann ein bisschen besser.
 164 Und zum Beispiel ist das\ Ich habe mir hier die Aussagen herausgeschrieben. „Ich bin davon überzeugt, dass sich
 165 meine Beweisfähigkeiten durch Übung verbessern.“ Hier warst du schon auf Stufe 4. Also du hast gesagt: Ja, wenn
 166 ich übe, dann verbessert sich das. Und das hast du dann noch stärker erhöht. Oder zum Beispiel bei der Aussage:
 167 „Es bereitet mir Schwierigkeiten\ Die Aussage vier. \die zentrale Beweisidee von den einzelnen Details zu erken-
 168 nen.“ Und bei Schwierigkeiten hast du zuerst schon gemeint, dass du Schwierigkeiten hast und dann hast du an-
 169 gekreuzt, dass es eigentlich doch nicht so ist. Es ist auf jeden Fall besser geworden. Genau. Was war noch? „Ich
 170 sehe mich in der Lage selbstständig einen Beweis nachzuvollziehen.“ Da hast du zuerst gesagt, dass du dich gar
 171 nicht in der Lage siehst. Und dann doch zumindest Stufe 3 gewählt, also in der Mitte. Also das wäre zum Beispiel
 172 einmal das. Genau. Was würdest du zu diesen Aussagen\ Oder warum hat sich da dein Selbstbild, würde ich jetzt
 173 einmal sagen, so positiv verändert schätzt du?
 174 S: Also ich denke ich habe halt mehr über Beweise erfahren und es macht schon irgendwie einigermassen Spaß
 175 daran zu arbeiten, wenn es nicht zu schwer ist.
 176 F: Ja.
 177 S: Und (--) ja, ich denke, dass ich auch vielleicht einen Beweis selbst nachvollziehen könnte.
 178 F: Mhm. Wodurch ist das denn gekommen würdest du sagen, dass du das jetzt denkst und am Anfang nicht gedacht
 179 hast?

180 S: Durch Übungen vor allem würde ich sagen.
181 F: Okay. Gut. Weil du gesagt hast Spaß, nehme ich an\ Weil hier hat es sich auch von\ Dass es für dich eine
182 lohnende Erfahrung ist, wenn du den Beweis verstanden hast. Da warst du eh schon sehr positiv und bist dann auf
183 den Wert 5 hoch. Womit hängt das zusammen? Ich nehme an in ähnlicher Weise mit dem, was du schon gesagt
184 hast?
185 S: Ja, also davor habe ich nicht wirklich mit Beweisen gearbeitet, aber nachdem\ Also es ist schon eine positive
186 Erfahrung für mich, wenn ich das halt schon hinter mir habe und es verstehe.
187 F: Okay, sehr gut. Gut, dann gibt es auch ein paar Aussagen, die mich natürlich auch interessieren, wo sich nämlich
188 deine Zustimmung fast gar nicht\ also entweder gar nicht oder nur minimal verändert hat.
189 S: Mhm.
190 F: Und das wäre zum Beispiel, wenn wir schon hier sind, die Aussage: „Ich fühle mich auf mathematischer Ebene
191 sicher, wenn du deine Beweisidee vorstellen sollst.“ Da hat sich minimal etwas getan, und zwar hast du zuerst
192 gesagt, dass du dich gar nicht sicher fühlst und dann bist auf Stufe 2 hoch. Das war jetzt eine Veränderung. Diese
193 ist aber nicht so enorm. Wie würdest du das begründen? Was wäre hier wichtig gewesen, dass vielleicht eine höhere
194 Zustimmung passiert wäre?
195 S: Weil ich denke, dass ich halt nie wirklich so\ also nicht hundert Prozent richtig sein kann, also meine Ergebnisse,
196 und deswegen bin ich eher unsicher.
197 F: Okay. Das heißt du vertraust dir selbst nicht, dass es zu hundert Prozent richtig ist und deswegen eher nicht so.
198 S: Ja.
199 F: Okay. Gut. Gibt es da irgendetwas, wo du sagst, vielleicht wenn wir das und das gemacht hätten oder noch
200 etwas anderes gemacht hätten, hätte sich das noch weiter verbessert? Was auch immer?
201 S: Vielleicht wenn wir mehrere Übungen gemacht hätten.
202 F: Mhm. Also noch länger dazu\
203 S: Mhm.
204 F: Im Unterricht oder noch in unserer Phase?
205 S: Allgemein, weil Übung macht den Meister. Wenn man übt zu beweisen, dann sollte es sich verbessern mit der
206 Zeit denke ich.
207 F: Mhm, okay. Das heißt\ Ich meine so lange war das nicht. Drei Wochen haben wir das jetzt gemacht.
208 S: Ja.
209 F: Okay. Wo du gar keine Veränderung hast, war\ Ich gehe mal zurück zum Teil E. Da war das. Das war deine
210 Ausdauer hier: „Ich habe genügend Ausdauer, um eben bei schwierigen Beweisen dabei zu bleiben.“ Hier bist du
211 im mittleren Bereich geblieben, also auf Stufe 3. Genau. Da wäre eben meine selbe Frage: Hätte es hier etwas
212 gegeben überhaupt oder würde es dafür in der Zukunft etwas geben, wo du sagst, dass sich deine Ausdauer noch
213 etwas steigern könnte?
214 S: Ich denke es hängt vom Beweis ab. Wenn er so sehr schwer ist, so kompliziert, dann ist es auch schwer für
215 mich.
216 F: Okay.
217 S: Aber wenn er einfach ist, dann bleibe ich eh dabei. Deswegen habe ich den Mittelwert genommen.
218 F: Okay, also den mittleren Wert, weil es einfach darauf ankommt, was das für ein Beweis ist.
219 S: Ja, genau.
220 F: Okay, gut. Danke. Und was noch war, wo du auf Stufe 3 geblieben bist, war hier\ wobei ich sehe, dass du da
221 hin und her gewechselt hast\
222 S: Ja.
223 F: Dass es eben für dich ein bisschen überfordernd ist, wenn du einen Beweis jetzt eben selbstständig führen sollst,
224 obwohl du die Vorgehensweise kennst. Vorgehensweise kennen war dann für mich eben ein bisschen dieses\ Wir
225 haben ja zum Beispiel diese Schülerbeispiele gesehen und ihr musstest dann darauf aufbauend selbst einen Beweis
226 erstellen und da würde mich wieder interessieren, was hier vielleicht zu einer stärkeren Änderung geführt hätte.
227 S: Ähm. (---) Also ich denke, dass ich halt auch so nicht hundert Prozent richtig\ also die richtigen Ergebnisse
228 vorführen könnte, deswegen so.
229 F: Okay. Angenommen du machst das jetzt nur für dich, nur ganz allein, ohne dass du das präsentieren müsstest
230 oder mir zeigen müsstest. Wie würde sich das dann für dich anfühlen? Auch überfordernd oder kommt das eher
231 davon, dass du es dann eben zeigen und präsentieren müsstest?
232 S: Eher zeigen und präsentieren. Also es würde halt schon interessant sein so einen Beweis selbst nachzuvollziehen
233 und daran zu arbeiten, wenn ich auch Fortschritte machen würde. Wenn ich halt die ganze Zeit nicht weiterkomme,
234 dann ist es auch nicht so gut.
235 F: Okay. Aber das heißt die Überforderung\ Wenn du alle mathematischen Informationen bekommst und weißt,
236 wie das Verfahren theoretisch gehen würde, weil wir es zum Beispiel schon einmal gemeinsam gemacht haben,
237 und du müsstest es dann selbst machen, ohne dass ich dich dann zwingen würde, das zu präsentieren. Wie würdest
238 du dann deine Überforderung einschätzen?
239 S: Ähm, wenig. Also dann wäre es eigentlich eh okay für mich.
240 F: Okay, gut. Dann weiß ich eben, was die Überforderung auslösen würde. Gut, wir kommen langsam zum Ende.
241 Und zwar betrifft das jetzt nur deinen Abschlussfragebogen, also den vom Beginn gar nicht mehr. Beim

242 Abschlussfragebogen hattet ihr bei Teil C\ Genau. Ihr musstet hier die vier Aussagen von der wichtigsten Funktion
243 zur eher weniger wichtigeren von 1 bis 4 ordnen. Und da hast du dich dazu entschieden, dass ein Beweis die
244 Aufgabe hat, die Wahrheit zu bestätigen nur auf Platz 3 zu setzen, dass er eben erklärt, warum das überhaupt gilt
245 auf Platz 1 und die Aussage mit den Methoden auf Platz 4 und am zweiten Platz das mit „in einen gemeinsamen
246 Zusammenhang stellen“.

247 S: Mhm.

248 F: Das ist schon allein sehr interessant, aber was mich dann vor allem interessiert ist, dass sich das hier nicht ganz\
249 weil das sind dieselben vier Aussagen.\

250 S: Aso, ja.

251 F: \deckt mit deiner Zustimmung dann.

252 S: Mhm.

253 F: Das ist überhaupt nicht schlimm. Es ist nur von meinem Interesse einfach, weil du hier zum Beispiel bei der
254 Aussage: „Der Beweis hat die Aufgabe, die Wahrheit einer Aussage zu bestätigen.“ Platz 3 gewählt hast. Also eher
255 weiter unten. Und hier hast du aber die mit dem Wert 5 bewertet. Also dem stimmst du voll zu.

256 S: Aso, ja. Mhm und beim zweiten die 4.

257 F: Genau, bei der zweiten Aussage den Wert 4. Und auch zum Beispiel bei der Nummer\ Bei der Nummer 4:
258 „Durch das Beweisen lernt man\ Da hast du eh den Wert 3 als Aussage, aber hier zum Beispiel deckt sich das nicht
259 ganz. Da hast du als Zustimmung Wert 5 gewählt zum Beispiel. Das heißt\ Das ist eben wichtig für dich. Das hast
260 du auch hier auf Platz 2. Ja.

261 S: (---)

262 F: Lass dir ruhig Zeit dabei es nochmal anzusehen. Es ist einfach nur interessant für mich. Auch vielleicht was du
263 dir jetzt im Moment dazu denkst, wenn du das liest.

264 S: (---) Also ich würde es ehrlich gesagt ändern. Also hier die den Wert 4 und hier den Wert 5 vergeben, weil ich
265 denke, dass es nicht wirklich darum geht die Wahrheit zu zeigen, sondern eher um zu zeigen, ob dieser Beweis
266 gilt, ob er halt wirklich stimmt.

267 F: Mhm.

268 S: Aber ist das nicht theoretisch dasselbe?

269 F: Das ist theoretisch dasselbe. Was hier war: „Der Beweis hat die Aufgabe, die Aussage zu bestätigen.“ Stimmt
270 oder stimmt nicht. Und hier bei der zweiten Aussage geht es eher darum, dass er dann noch genauer erklärt, WA-
271 RUM das überhaupt gilt. Und da ist für mich eben interessant gewesen, was für euch in erster und zweiter Linie
272 wichtig ist.

273 S: Okay, ja. Dann würde ich sagen die Erklärung ist wichtiger als allgemein die Aussage zu bestätigen.

274 F: Okay, also so, wie du es hier eigentlich geordnet hast\

275 S: Genau, ja.

276 F: \dass du das hier dann noch ändern würdest.

277 S: Ja, ich weiß nicht, was ich hier gemacht habe. (lachen)

278 F: Das ist überhaupt nicht schlimm und du bist überhaupt nicht die einzige, bei der das so war und da habe ich
279 dann auch nachgefragt. Ja. Gut. Das war es auch schon. Das war übrigens das längste Interview. (lachen)

280 S: (Lachen)

281 F: Würdest du jetzt zum Abschluss noch gerne etwas ergänzen wollen, wo du meinst, das habe ich nicht angespro-
282 chen und wir haben nicht darüber geredet?

283 S: (--) Mmh. Nein, alles gut.

284 F: Nicht?

285 S: Nein (lachen).

286 F: Okay, gut. Dann danke für das Interview.

287 S: Ich danke Ihnen auch.