

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Rechnen mit Brüchen – Ein Vergleich von Schüler*innenkenntnissen zum Thema
„Rechnen mit Brüchen“ zwischen sechster und achter Schulstufe

verfasst von | submitted by

Dragan Grujić BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Danksagung

Mein Dank gilt allen, die zum Abschluss meines Studiums dazu beitrugen.

Hervorheben möchte ich Mag. Dr. Andreas Ulovec, meinen Betreuer, der mich mit wertvollen Anregungen und seiner fachlichen Unterstützung während des gesamten Arbeitsprozesses begleitete, sowie die Schüler*innen, die an der empirischen Erhebung mitwirkten und damit die Durchführung dieser Untersuchung ermöglichten.

Meinen besonderen Dank möchte ich meiner Großmutter aussprechen, die leider im Sommer 2024 verstarb. Nach dem Tod meiner Eltern wuchs ich bei ihr auf. Eine ihrer wichtigsten Absichten war mein Wohlbefinden und die Möglichkeit, mir eine gute Ausbildung zu bieten.

Ich möchte auch meiner Verlobten danken, die mich in schwierigen und guten Zeiten stets unterstützte und ermutigte.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Freund*innen und Bekannten für die stetige Unterstützung und Motivation während der gesamten Ausbildungszeit bedanken.

Kurzfassung

Die vorliegende Masterarbeit untersucht, ob es Unterschiede bei den Schüler*innen in der sechsten und achten Schulstufe beim Bruchrechnen gibt. Für diese empirische Arbeit wurden 102 Schüler*innen der AHS Franklinstraße 26 im 21. Wiener Gemeindebezirk befragt. Darunter befinden sich 50 Schüler*innen in der sechsten und 52 Schüler*innen in der achten Schulstufe. Die empirische Studie wird mit Hilfe eines selbst erstellten Fragebogens mit verschiedenen Grundrechenaufgaben zum Thema Bruchrechnen zeitgleich in beiden Schulstufen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass es keine signifikanten Unterschiede zugunsten der Schüler*innen der sechsten Schulstufe gibt. Dies widerlegt die Hypothese, dass die jüngeren Schüler*innen signifikant bessere Ergebnisse liefern, da sie das Rechnen mit Brüchen erst erlernt haben. Anzumerken ist, dass die Stichprobe mit 102 Schüler*innen recht klein ist, um bessere Ergebnisse zu erzielen. Ebenso verdeutlicht die Masterarbeit, dass es wichtig ist, erlernte Stoffgebiete immer wieder zu wiederholen, da sie oft in mehreren Schulstufen mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden vorkommen.

Abstract

This master's thesis examines whether there are differences between sixth and eighth grade students when it comes to calculating fractions. For this empirical study, 102 students from AHS Franklinstraße 26 in Vienna's 21st district were surveyed. Among them were 50 sixth-grade students and 52 eighth-grade students. The empirical study was conducted simultaneously in both grades using a self-designed questionnaire with various basic arithmetic problems on the topic of fraction calculation. The results show that there are no significant differences in favor of sixth-grade students. This refutes the hypothesis that younger students perform significantly better because they have just learned how to calculate with fractions. It should be noted that the sample of 102 students is quite small to achieve better results. The master's thesis also illustrates that it is important to repeat learned material repeatedly, as it often occurs in several school grades with varying degrees of difficulty.

Inhalt

1.	Einleitung.....	1
2.	Aktueller Forschungsstand	3
2.1	Studie von Padberg	3
2.2	Studie von Karika und Csíkos.....	5
2.3	Studie von Widyanesti et. al.....	5
2.4	Studie von Fitri und Prahmana	6
4.5	Studie von Aksoy und Yazlik.....	6
4.6	Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Studien	8
3.	Lehrpläne	10
3.1	Alter Lehrplan	11
3.2	Neuer Lehrplan	11
3.3	Vergleich der Lehrpläne.....	12
3.3.1	Unterschiede	12
3.3.2	Gemeinsamkeiten.....	14
3.4	Vergleich zum Thema Bruchrechnen	16
4.	Lerntypen und Grundvorstellungen	18
4.1	Lerntypen	18
4.2	Grundvorstellungen bei Brüchen.....	21
4.2.1	Die Bruchzahl als Teil einer ganzen Einheit.....	21
4.2.2	Die Bruchzahl als Teil von mehreren ganzen Einheiten.....	23
4.2.3	Bruchzahl als relativer Anteil von einer Zahl	23
4.2.4	Bruchzahl als absoluter Anteil	24
4.2.5	Quasikardinalzahl	24
4.2.6	Bruch als Verhältnis: „a zu b“.....	25
4.3	Grundvorstellungen beim Operieren und Rechnen mit Brüchen.....	25
4.3.1	Kürzen als Vergrößerung	25
4.3.2	Erweitern als Verfeinerung.....	26
4.3.3	Addition ist das Zusammenfügen gleichartiger Teile bzw. die Bewegung auf der Zahlengerade	27
4.3.4	Subtrahieren als gemeinsamen Unterteilung	28
4.3.5	Multiplikation als $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$	29
4.3.6	Division durch mehrere Zugänge	30
5.	Fragebogen und Ergebnisse	32
5.1	Auswertung.....	36
5.2	Interpretation	80
6.	Unterrichtsmaterial	84
6.1	Erweitern und Kürzen von Brüchen	85
6.2	Addition von Brüchen	87
6.3	Subtraktion von Brüchen	88
6.4	Multiplikation von Brüchen.....	89
6.5	Division von Brüchen.....	90
7.	Fazit.....	91

8.	Literaturverzeichnis.....	I
9.	Abbildungsverzeichnis.....	III
10.	Tabellenverzeichnis	VI
11.	Anhang (Fragebogen)	XI

1. Einleitung

Die folgende Masterarbeit befasst sich, wie der Titel schon sagt, mit dem Thema Bruchrechnen. Dieses wird insbesondere auf die vier Grundrechnungsarten, das Kürzen und das Erweitern von Brüchen bezogen. Ein wichtiger Punkt, um die Arbeit mit Theorie zu stützen, sind erstmals wichtige Erkenntnisse in der Forschung. Diese werden im nächsten Kapitel herausgearbeitet und Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Forschungen werden zusammengefasst.

Das Bruchrechnen ist im Mathematikunterricht, vor allem in der Sekundarstufe I, sehr präsent. Dementsprechend sind die Inhalte, welche im Unterricht gelehrt werden müssen, im Lehrplan zu finden. Dieser wird in gewissen Abständen neu geschrieben und zurzeit befinden wir uns in so einer Phase. Die Lehrpläne werden neu geschrieben und demzufolge auch der Lehrplan im Unterrichtsfach Mathematik. Ein weiterer Punkt dieser Arbeit wird das Analysieren des alten Lehrplans (Jahr 2000) und des neuen Lehrplans (Jahr 2023) sein. Insbesondere werden die Grundstruktur und die Inhalte des Bruchrechnens verglichen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausgearbeitet.

Das Thema Bruchrechnen ist für Schüler*innen nach eigener Erfahrung nicht sehr beliebt. Da meine eigene Erfahrung nicht sehr groß ist, weil ich erst seit vier Jahren als Lehrperson arbeite, kann ich nicht viel dazu erzählen. Die Schularbeiten, in denen das Thema Bruchrechnen vorkommt, fallen nicht sehr gut aus, obwohl das Bild in den Unterrichtsstunden einem das Gefühl gibt, dass die Schüler*innen das Thema gut verstanden haben. Ein weiterer wichtiger Punkt ist, dass nicht jede*r Schüler*in gleiche Lernmethoden hat. Diese Lernmethoden werden Lerntypen genannt und werden im dritten Kapitel dargestellt. Ebenso wird im dritten Kapitel auf die Grundvorstellungen beim Bruchrechnen eingegangen, was ein wichtiger Bestandteil der Forschung und der Auswertung der Forschung sein wird.

Im Hauptteil (Kapitel 5) geht es hauptsächlich um den empirischen Teil der Arbeit. Es wird der Fragebogen näher beschrieben, der anschließend in verschiedenen Klassen der sechsten und der achten Schulstufe durchgeführt wird. Im Fragebogen werden hauptsächlich die Grundrechnungsarten bei Bruchzahlen, das Erweitern und das Kürzen erfragt. Insgesamt nehmen 102 Schüler*innen bei der Befragung teil. 50 davon

gehen in die sechste Schulstufe und 52 in die achte Schulstufe der AHS Franklinstraße 26 im 21. Wiener Gemeindebezirk.

Mit dieser Forschung soll die Hypothese „Schüler*innen der sechsten Schulstufe weisen bessere Ergebnisse beim Rechnen mit Brüchen auf als Schüler*innen der achten Schulstufe“ überprüft werden. Diese Annahme ergibt sich aus der Vermutung, dass die älteren Schüler*innen schon länger mit dem Taschenrechner rechnen. Dieser wird in der siebten Schulstufe eingeführt. Die Ergebnisse werden mit Hilfe von Pivot-Tabellen und mit Hilfe von T-Tests dargestellt, beschrieben und anschließend mit Hilfe der zuvor erarbeiteten Literaturrecherche interpretiert.

Zum Abschluss der Arbeit gibt es in Kapitel 6 noch geeignetes selbst erstelltes Unterrichtsmaterial zu den vier Grundrechnungsarten mit Bruchzahlen und zum Kürzen und Erweitern von Brüchen, bevor die Arbeit mit einem Fazit abschließt (Kapitel 7).

Insgesamt soll die Arbeit eine Verknüpfung von Theorie und Praxis darstellen und Lehrpersonen anregen, die Grundvorstellungen beim Erklären von Bruchrechnungen nicht außer Acht zu lassen.

2. Aktueller Forschungsstand

Es gibt zahlreiche Studien bezogen auf das Thema Bruchrechnen. Im Folgenden werden einige dieser Studien vorgestellt.

2.1 Studie von Padberg

Friedhelm Padberg (1983) analysierte mit seiner Studie „Analyse von Schülerfehlern“ (sic!) einige wichtige Punkte, die ebenfalls bei der empirischen Arbeit im Zusammenhang mit dieser Masterarbeit stehen. Ziel der Studie war es, Problembereiche in der Bruchrechnung zu identifizieren und darauf aufbauend gezielte individuelle Fördermaßnahmen umzusetzen. Schüler*innenfehler wurden besonders analysiert und aus Rechenregeln abgeleitet (vgl. ebd., S.45).

Eine der Kategorien bei Padberg war „Kürzen, Erweitern und Umwandeln“, welche ebenfalls beim Fragebogen dieser Masterarbeit (Frage 4 bis 7) eine wichtige Rolle spielt. Die Ergebnisse der Studie von Padberg zeigten bei dieser Kategorie wenig Probleme. Die Lösungsquoten betrugen hier über 90%. Fehler kamen überwiegend bei Sonderfaktoren (wie Assoziationsfehlern, großen Zahlen) oder bei der Einbettung natürlicher Zahlen in Bruchzahlen vor. Schwierigkeiten beim Kürzen nach Rechenoperationen wurden eher auf Flüchtigkeit und nicht auf mangelndes Wissen über die Thematik zurückgeführt (vgl. ebd., S. 46f.).

Eine weitere Kategorie, die ebenfalls bei der Erhebung dieser Masterarbeit relevant ist, ist die Strichrechnung. Dazu zählen die Addition und die Subtraktion. Padbergs Ergebnisse zeigten, dass Aufgaben der Art Bruchzahl $\pm$ Bruchzahl ausgezeichnet gelöst wurden. Aufgaben mit unterschiedlichen Nennern waren aufgrund der Bestimmung des Hauptnenners etwas schwieriger (80 % korrekt) als solche mit gleichen Nennern (90 % korrekt). Der häufigste systematische Fehlertyp (ungefähr 50 % der Fehler) war die Regel „Zähler + Zähler / Nenner + Nenner“ beziehungsweise „Zähler - Zähler / Nenner - Nenner“. Die Ursachen dieser Fehler sind eine mangelhafte Bruchvorstellung oder ein inkorrekt transfer von der Multiplikation. Die Lösungsquoten bei Aufgaben, die eine natürliche Zahl enthielten ($n + \frac{a}{b}$ oder $\frac{a}{b} + n$), waren überraschend niedriger, oft aufgrund formaler Vorgehensweisen wie der fehlerhaften Einbettung natürlicher Zahlen (z.B. $5 = \frac{5}{3}$, $n = \frac{n}{m}$) (vgl. ebd., S. 47f.).

Die Multiplikation zählt zur nächsten Kategorie. Ungefähr zwei Drittel der Schüler*innen lösten gleichnamige Aufgaben bei „Bruchzahl mal Bruchzahl“ richtig,

während es bei ungleichnamigen Aufgaben etwa drei Viertel waren. Der Hauptfehlertyp, der rund 50% aller Multiplikationsfehler ausmachte, war die „Hauptnennerbestimmung“ gefolgt von der Multiplikation der Zähler und der Beibehaltung des Hauptnenners (z. B. $\left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \left(\frac{6}{10}\right) = \frac{18}{10}$). Auch bei „Bruchzahl mal natürliche Zahl“ ($\frac{a}{b} \cdot n$ oder $n \cdot \frac{a}{b}$) trafen die Fehler auf einen Typ zu, der Schwierigkeiten bei der Einbettung natürlicher Zahlen in Bruchzahlen anzeigt (z. B.: $\frac{2}{5} \cdot 5 = \frac{10}{55}$) (vgl. ebd., S. 48f.).

Die letzte Kategorie der Grundrechnungsarten ist die Division. Die Lösungsquote bei „Bruchzahl durch Bruchzahl“ ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$) lag bei etwa 70 %, was im Vergleich zu anderen Untersuchungen als erfolgreich angesehen wurde. Bei gleichnamigen Brüchen lagen die Fehler zu drei Vierteln bei zwei Typen: bei „Zähler : Zähler / Nenner“ (falscher Transfer von Addition/Subtraktion) und bei der irrtümlichen Bildung des Kehrwertes des ersten Bruches. Die Lösungsquoten für „Bruchzahl durch natürliche Zahl“ ($\frac{a}{b} : n$) oder umgekehrt ($n : \frac{a}{b}$) waren geringer und beinhalteten Hauptfehler wie die Kehrwertbildung der ersten Zahl und Unsicherheiten bei der Einbettung natürlicher Zahlen ($n = \frac{n}{1}$) (vgl. ebd., S. 49f.).

Padberg unterscheidet hier vier Fehlertypen. Bei den systematischen Fehlern war ein Großteil der beobachteten Fehler nicht dem Zufall geschuldet, sondern resultierte aus systematischen fehlerhaften Strategien, die sich auf Aufgaben desselben Typs beziehen. Hierzu zählen unter anderem die falsche Addition/Subtraktion von Nennern sowie der Gebrauch der Hauptnennerbestimmung bei Multiplikationen. Bei den Transferfehlern stellten unzutreffende Übertragungen von Regeln aus anderen Rechenoperationen (z.B. Addition/Subtraktion auf Multiplikation oder Division) eine häufige Fehlerquelle dar. Bei den konzeptuellen Schwierigkeiten traten die Unsicherheiten bezüglich der Einordnung natürlicher Zahlen in die Menge der Bruchzahlen wiederholt auf, insbesondere bei den Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit natürlichen Zahlen. Ebenso unterscheidet Padberg Fehler, die von der Lehrperson abhängen. Die Untersuchungen ließen vermuten, dass einige Fehler von den Lehrer*innen abhängen, da bestimmte Fehler in einigen Klassen häufig vorkamen, in anderen hingegen gänzlich fehlten (vgl. ebd., S. 56.).

2.2 Studie von Karika und Csíkos

Ein zuverlässiger Diagnosetest zum Verständnis einfacher Brüche bei Fünftklässler*innen wurde von Karika und Csíkos (2024) entwickelt. Die Studie ergab, dass die Art der Darstellung (z. B. Kreisdiagramm, Balken, Zahlengerade) einen größeren Einfluss auf die Leistung hat als die Art des Bruches selbst. Die besten Leistungen der Schüler*innen wurden bei Kreisdiagrammen und bei Brüchen mit dem Nenner 2 verzeichnet, wohingegen Brüche mit dem Nenner 3 als die schwierigsten galten (vgl. ebd., S. 4ff.). Die Autor*innen schließen daraus Folgendes: „*diagram type is more influential on performance than the fraction type itself*“ (ebd., S. 7). Somit sind visuelle Darstellungen für das Verständnis von Brüchen entscheidend und die Art der Darstellung beeinflusst Lernende mehr als die mathematische Struktur.

2.3 Studie von Widyanesti et. al.

Widyanesti et al. (2023) führten eine Analyse typischer Fehler beim Lösen von Bruchrechnungsaufgaben unter Verwendung des Newman-Fehlerprotokolls durch (vgl. ebd., S. 65f.). Laut den Autor*innen lassen sich nach Newman die Fehlerkategorien in fünf Teile unterteilen:

Lesefehler: Die entstehen, wenn Schüler*innen die Aufgabenstellung nicht richtig verstehen oder wesentliche Informationen übersehen.

Missverständnisse: Die resultieren aus unzureichendem Verständnis von Begriffen oder inkorrektur Deutung der Problematik.

Transformationsfehler: Die beziehen sich auf Probleme, eine Textaufgabe in eine mathematische Darstellung oder Gleichung zu konvertieren.

Prozess- oder Rechenfehler: Diese treten auf, wenn Rechenoperationen oder Algorithmen nicht korrekt ausgeführt werden.

Antwortfehler: Diese entstehen, wenn das Ergebnis falsch vermerkt oder nicht der Aufgabenstellung entsprechend angegeben wird (vgl. ebd., S. 66).

Die häufigsten Fehler traten beim Lesen und Verstehen der Aufgabenstellungen, beim Übersetzen visueller Darstellungen in Brüche sowie beim Berechnen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (beim Erweitern von Brüchen) auf (vgl. ebd., S. 65ff.). Eine Kernaussage der Autor*innen lautet: „*Errors occur when students change the form of images to fractional numbers and when calculating the LCM value*“ (ebd., S. 66). Schwierigkeiten beim Bruchrechnen sind weniger auf mangelnde Rechenfertigkeiten zurückzuführen, sondern vielmehr auf Verständnisprobleme in den frühen Prozessen.

Vor allem ist das beim Interpretieren von Aufgaben und Darstellungen zu sehen.

2.4 Studie von Fitri und Prahmana

Um die Fehlvorstellungen von Siebtklässler*innen beim Lösen von Bruchaufgaben zu untersuchen, kam in der Studie von Fitri und Prahmana (2019) eine deskriptive Forschungsmethode zum Einsatz. Das Vorgehen gliederte sich in drei Phasen: Vorbereitung, Durchführung und Analyse der Daten. Es wurde in der Vorbereitungsphase eine Sammlung von zehn Bruchaufgaben aus Prüfungstests zusammengestellt. Die Schüler*innen arbeiteten während der Durchführung schriftlich an den Aufgaben und sollten falsche Antworten, um den Denkprozess nachvollziehbar zu halten, nicht löschen, sondern lediglich durchstreichen. Daraufhin erfolgte eine systematische Analyse der Lösungsansätze und Fehler mit dem Ziel, typische Fehlkonzpte zu erkennen (vgl. ebd., S. 2.).

Die Ergebnisse zeigten sechs zentrale Fehlvorstellungen von den Proband*innen beim Lösen von Bruchaufgaben. Unterschieden werden folgende Fehler: Fehler beim Wiedergeben gegebener Informationen aus der Aufgabenstellung, Fehlanwendung der Rechenregeln für Brüche, Unkenntnis beim Umwandeln gemischter und unechter Brüche, Fehler beim Konvertieren ganzer Zahlen in Brüche, Unachtsamkeit bei Rechenoperationen mit Brüchen sowie Fehlvorstellungen beim Ordnen von Brüchen (vgl. ebd., S. 6f.). Die Ergebnisse machen grundlegende Konzeptdefizite im Verständnis der Bruchrechnung deutlich. Sie dienen als Basis für die Entwicklung gezielter Lernpfade, um das Bruchverständnis in zukünftigen Unterrichts- und Forschungsansätzen zu verbessern (vgl., ebd., S. 7.).

4.5 Studie von Aksoy und Yazlik

Die Studie von Aksoy und Yazlik (2017) untersuchte die Fehler und Fehlvorstellungen, die Schüler*innen der fünften und sechsten Schulstufe im Umgang mit Brüchen und Bruchrechnungen aufweisen. Um eine vertiefte Analyse der Denkprozesse der Schüler*innen vornehmen zu können, wurde ein qualitatives Forschungsdesign in Form einer Fallstudie gewählt (vgl. ebd., S.220f.).

Die Ergebnisse zeigen sechs Hauptfehler beim Rechnen mit Brüchen. Zum Ersten war es für viele Schüler*innen nicht klar, dass Brüche gleichwertige Teile eines Ganzen repräsentieren müssen. Beim Modellieren oder Darstellen auf dem Zahlenstrahl wurde

häufig nicht gleichmäßig aufgeteilt, was zu falschen Nennern führte. Laut den Autor*innen hat diese Fehlvorstellung ihren Ursprung schon im Unterricht der Primarstufe, in dem das Konzept der Gleichteiligkeit nicht genügend verinnerlicht wird (vgl. ebd., S. 231).

Zum Zweiten tauschten Schüler*innen oft die Positionen von Zähler und Nenner aus oder missverstanden diese. Laut den Autor*innen könnte dieses Problem, das auf ein unzureichendes Verständnis der Teil eines Ganzen Beziehung hinweist, durch die Verwendung konkreter und visueller Materialien besser angegangen werden (vgl. ebd.).

Zum Dritten traten beim Umwandeln komplexer Brüche in unechte Brüche und beim Darstellen von Ganzzahlen als Brüche Schwierigkeiten auf. Typische Fehler umfassten das Auslassen des Ganzzahlanteils, das Vertauschen von Zähler und Nenner sowie das additive Zusammenfassen von Zähler und Nenner. Das lässt darauf schließen, dass zahlreiche Schüler*innen prozedurales Wissen nutzen, ohne ein konzeptuelles Verständnis zu besitzen (vgl. ebd.).

Zum Vierten wurden beim Addieren und Subtrahieren gleicher Nenner die Zähler und Nenner getrennt addiert oder subtrahiert, was auf ein arithmetisches Missverständnis der Bruchstruktur hinweist. Auch bei der Multiplikation und Division kamen ähnliche Fehler vor, wobei viele Schüler*innen Additionen anstelle von Multiplikationen vornahmen oder keinen Zusammenhang zwischen einer ganzen Zahl und eines Bruches erkennen konnten (vgl. ebd.).

Zum Fünften ergab die Untersuchung, dass zahlreichen Schüler*innen unklar ist, dass der Nenner die Anzahl der Teile und der Zähler die Anzahl der betrachteten Teile angibt. Aufgaben, bei denen es darum ging, aus einem Ganzen einen Teil zu bestimmen, waren vor allem von dieser falschen Vorstellung betroffen (vgl. ebd.).

Zum Letzten hatten viele Schüler*innen Schwierigkeiten, textbasierte Aufgaben zum Thema Brüche zu lesen und zu verstehen. Einige führten Rechenoperationen zufällig oder mechanisch aus, um ein Ergebnis stehen zu haben, ohne den Sinn der Aufgabenstellung zu verstehen (vgl. ebd.).

Die Ergebnisse machen deutlich, dass bei Schüler*innen das Bruchverständnis oft nur oberflächlich ausgeprägt ist und vorwiegend auf mechanischen Rechenoperationen statt auf einem konzeptuellen Verständnis gründet. Insbesondere das Verständnis als Teil eines Ganzen, die Gleichheit der Teile sowie die richtige Deutung von Zähler und Nenner stellen zentrale Schwächen dar. Laut den Autor*innen behindern diese

Fehlvorstellungen nicht nur gegenwärtige Lernprozesse, sondern wirken sich auch negativ auf spätere mathematische Lerninhalte aus. Die Autor*innen fordern daher, dass Lehrkräfte gezielt auf diese Fehlkonzepte hingewiesen werden und durch konkrete Materialien, visuelle Darstellungen und begriffliche Diskussionen unterstützt werden. Darüber hinaus sollte das Thema Fehleranalyse im Bruchrechnen in die Lehrer*innenausbildung integriert werden (vgl. ebd., S. 231f.).

4.6 Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Studien

Zusammenfassend lassen sich die folgenden gemeinsamen Erkenntnisse der Studien herauslesen. Die analysierten Studien kommen übereinstimmend zu dem Ergebnis, dass Schwierigkeiten beim Bruchrechnen nicht in erster Linie auf unzureichende Rechenfertigkeiten zurückzuführen sind, sondern auf gravierende konzeptionelle Fehlvorstellungen. Ein wesentliches Muster bezieht sich auf das mangelhafte Verständnis der Teil eines Ganzen Beziehung und auf das Fehlen der Vorstellung von gleichen Teilen eines Ganzen. Aksoy und Yazlik (2017, S. 231) sowie Padberg (1983, S. 47f.) heben hervor, dass zahlreiche Schüler*innen beim Darstellen und Modellieren von Brüchen nicht gleichmäßig teilen, wodurch ihnen die Grundidee der Brüche als gleich große Teile eines Ganzen nicht klar ist. Diese Mängel treten schon im frühen Unterricht auf und bestehen über mehrere Jahrgangsstufen hinweg. Außerdem zeigen verschiedene Untersuchungen, dass Schüler*innen Zähler und Nenner oft verwechseln oder isoliert betrachten, was dazu führt, dass sie die strukturelle Bedeutung eines Bruches nicht verstehen (vgl. Aksoy und Yazlik (2017), S. 231; Fitri und Prahmana (2019), S. 6f.). Diese Fehlkonzepte resultieren in typischen Rechenfehlern, wie der Addition oder Subtraktion von Zähler und Nenner („Zähler $\pm$ Zähler / Nenner $\pm$ Nenner“), die Padberg (1983, S. 48) bereits als systematische Fehlertypen klassifiziert hat.

Die Einbettung von natürlichen Zahlen in Brüche stellt ebenfalls ein Problem dar, wie mehrere Studien zeigen. Padberg (1983, S. 46f.), Fitri und Prahmana (2019, S. 6) sowie Aksoy und Yazlik (2017, S. 231f.) beschreiben Fehlvorstellungen beim Umwandeln gemischter Zahlen, Erweitern und Kürzen sowie beim Umgang mit natürlichen Zahlen in Bruchoperationen (z. B. $n = \frac{n}{1}$).

Ein weiteres Ergebnis, das von beiden geteilt wird, betrifft das oberflächliche, prozedurale Rechnen ohne konzeptionelles Verständnis. Alle Untersuchungen belegen, dass Schüler*innen Rechenregeln oft mechanisch anwenden, ohne deren

mathematische Bedeutung zu begreifen (vgl. Padberg (1983), S. 56; Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.; Fitri und Prahmana (2019), S. 7). Insbesondere betrifft dies die Multiplikation und Division von Brüchen, die oft mit den Strategien der Addition oder Subtraktion verwechselt werden (vgl. Padberg (1983), S. 49; Aksoy und Yazlik (2017), S. 231).

Auch das Verstehen von Aufgaben, die in sprachlicher oder visueller Form präsentiert wurden, stellte sich als schwierig heraus. Widyanesti et al. (2023, S. 65ff.) und Aksoy und Yazlik (2017, S. 231) demonstrieren, dass zahlreiche Fehler schon beim Lesen, Verstehen und Übersetzen von Aufgabenstellungen auftreten. Diese sind in Newmans Fehlerkategorien als Lesefehler, Verständnisfehler und Transformationsfehler zu finden.

Mehrere Studien betonen schließlich, wie wichtig visuelle Darstellungen für das Verständnis von Brüchen sind. Laut Karika und Csikos (2024, S. 7) hat die Art der Darstellung (z. B. Kreisdiagramm vs. Zahlengerade) einen größeren Einfluss auf die Leistung der Lernenden als der Bruchtyp selbst. Dies entspricht den Forderungen von Aksoy und Yazlik (2017), konkrete und visuelle Materialien im Unterricht systematisch zu verwenden, um konzeptuelle Fehlvorstellungen zu verringern.

Trotz zahlreicher Gemeinsamkeiten weisen die Studien Unterschiede in Bezug auf ihre Fokussierung, Methodik und Zielaltersgruppen auf.

Padberg (1983) konzentrierte sich auf eine systematische Kategorisierung typischer Fehler bei den vier Grundrechenarten mit Brüchen und hob die Bedeutung systematischer, transferbedingter sowie lehrerabhängiger Fehlerquellen hervor. Seine Tätigkeit war auf Diagnostik und Quantifizierung ausgerichtet, wobei der Schwerpunkt auf Fehlerkategorien wie „Kürzen/Erweitern“ und „Strichrechnung“ lag.

Im Gegensatz dazu untersuchten Fitri und Prahmana (2019) sowie Widyanesti et al. (2023) konzeptuelle Fehlvorstellungen und kognitive Prozesse im Bruchrechnen, meist durch qualitative Analysen wie Fehlerprotokolle und Inhaltsanalysen. Diese Arbeiten haben eher das Verstehen der Denkprozesse zum Ziel, während die reine Fehlerklassifikation weniger im Fokus steht.

Eine Kombination aus qualitativer Analyse und didaktischer Interpretation wurde von Aksoy und Yazlik (2017) vorgenommen, wobei sie die Fehler in einen umfassenderen Kontext von Lernbarrieren einordneten. Insbesondere hoben sie das Defizit im konzeptuellen Verständnis der Teil eines Ganzen Beziehung als zentrale Ursache

hervor.

Karika und Csíkos (2024) fokussierten sich schließlich auf den Einfluss der Darstellungsebene. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Visualisierung eine größere Wirkung entfaltet als die Bruchkomplexität selbst, was die Bedeutung von anschaulichen Darstellungsformen für den Unterricht unterstreicht.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass alle Studien hervorheben, dass Fehlvorstellungen beim Bruchrechnen tief im Verständnis des Bruchbegriffs verwurzelt sind. Sie treten früh auf, werden häufig nicht im Unterricht korrigiert und führen zu systematischen Rechenfehlern in höheren Klassen.

Die Ergebnisse machen zudem deutlich, dass ein erfolgreicher Unterricht auf konzeptuelles Verstehen und nicht auf bloßes Regelwissen abzielen muss. Visuelle, handlungsorientierte und kommunikative Lernumgebungen sind besonders geeignet dafür (vgl. Aksoy und Yazlik (2017); Karika und Csíkos (2024)).

Die Forschungsergebnisse haben eine eindeutige didaktische Konsequenz: Es wird empfohlen, dass Lehrkräfte sich auf die gezielte Diagnose typischer Fehlvorstellungen konzentrieren, visuelle Modelle zur Förderung des Bruchverständnisses verwenden und Fehleranalysen in der Unterrichtsplanung sowie der Ausbildung von Lehrkräften systematisch verankern (vgl. Padberg (1983), S. 56; Fitri und Prahmana (2019), S. 7; Widyanesti et al. (2023), S. 66).

3. Lehrpläne

Die Schule als zentrale Institution der Gesellschaft unterliegt einem stetigen Wandel. Gesellschaftliche, technologische und bildungspolitische Entwicklungen beeinflussen die Art und Weise, wie Wissen vermittelt wird und welche Kompetenzen als zukunftsrelevant gelten. Lehrpläne werden also regelmäßig angepasst, um den Anforderungen einer sich wandelnden Welt gerecht zu werden. Im Jahr 2000 trat ein neuer Lehrplan in Kraft. Im Jahr 2023 tritt der neue Lehrplan aufbauend mit der fünften Schulstufe in Kraft (vgl. BMBWF (2000) und BMBWF (2023), S. 2). Im folgenden Kapitel werden die beiden Lehrpläne analysiert und verglichen. Es werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede analysiert. Ebenfalls wird genauer auf das Thema Bruchrechnen eingegangen.

3.1 Alter Lehrplan

Der im Jahr 2000 eingeführte Lehrplan, der seit mehr als 20 Jahren den Unterricht in österreichischen Schulen bestimmt, wurde mit dem neuen Lehrplan von 2023 überarbeitet und an aktuelle pädagogische und gesellschaftliche Bedürfnisse angepasst.

Diese Veränderung ist nicht neu. Schon Johann Heinrich Pestalozzi hob hervor, dass es nötig sei, Bildung den zeitgenössischen Erfordernissen anzupassen: „Erziehung ist Beispiel und Liebe – sonst ist sie nichts.“ (Pestalozzi, 1803). Heutzutage wird Bildung nicht mehr nur als Wissensvermittlung betrachtet, sondern als ein Prozess, der auf die ganzheitliche Entwicklung von Kindern abzielt. In Anbetracht dessen ist die Frage zu stellen: Inwiefern weichen die Zielsetzungen, Inhalte und didaktischen Grundsätze des Lehrplans 2000 von denen des neuen Lehrplans 2023 ab?

Im Folgenden werden wesentliche Merkmale der beiden Lehrpläne systematisch miteinander gegenübergestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei sowohl auf inhaltlichen Veränderungen als auch auf den methodisch-didaktischen Anpassungen, die mit der Reform verbunden sind. Ziel ist es, neben der Herausarbeitung der Unterschiede auch zu verstehen, welche pädagogischen Konzepte den Neuerungen zugrunde liegen und welche Auswirkungen diese auf den Schulalltag haben.

3.2 Neuer Lehrplan

Die neuen Lehrpläne in den Schulen werden mit dem Schuljahr 2023/24 ab der fünften Schulstufe (Sekundarstufe I) sowie der Primarstufe aufsteigend eingeführt. Dementsprechend werden mit dem Schuljahr 2026/27 alle Schulstufen der Sekundarstufe I und der Primarstufe mit den neuen Lehrplänen unterrichtet.

Die neuen Lehrpläne sind angesichts einer sich ständig verändernden Lebenswelt sowie Arbeitswelt notwendig. Die Welt ist von technologischem Fortschritt, globaler Vernetzung, digitalen Kommunikationswegen und dem Klimawandel geprägt, was Wechselhaftigkeit, Komplexität und Mehrdeutigkeit mit sich bringt. Schüler*innen müssen in der Lage sein, ihr Wissen, ihre Fertigkeiten und Fähigkeiten problemlösend in verschiedenen Situationen anzuwenden. Ebenfalls ist der Fokus auf personalen und sozialen Kompetenzen gegeben. Dabei sind die „4K-Kompetenzen der 21st century skills“ wichtig. Diese sind Kollaboration, Kreativität, kritisches Denken und Kommunikation (vgl. BBWF (2023), S. 1).

3.3 Vergleich der Lehrpläne

Die wichtigsten Neuerungen der neuen Lehrpläne in der Sekundarstufe I sind folgende.

Erstens werden die Bezeichnungen einiger Gegenstände geändert, damit die aktuellen inhaltlichen sowie methodisch-didaktischen Entwicklungen eingebunden werden.

Zweitens wird das Fach „Digitale Grundbildung“ als Pflichtfach mit zusätzlichen Unterrichtsstunden über alle Schulstufen hinweg eingeführt. Das legt eine Grundlage für die Verwendung von digitalen Medien in allen Unterrichtsfächern.

Als letzte wichtige Änderung ist die Ergänzung und Aktualisierung der Freigegegenstände und unverbindlichen Übungen mit neuen Angeboten. Darunter zählt beispielsweise Soziales Lernen (vgl. BBWF (2023), S. 2).

Ebenfalls fordert die Umsetzung des neuen Lehrplans eine engere Zusammenarbeit im Lehrer*innenteam, da die Unterrichtsthemen nicht mehr isoliert behandelt werden, sondern aus verschiedenen Gesichtspunkten behandelt werden und dadurch die Vernetzung mehrerer Unterrichtsfächer gefordert wird. Das Positive dabei ist, dass mehr Flexibilität in der Unterrichtsgestaltung entsteht, da sich die Orientierung auf die erworbenen Kompetenzen der Schüler*innen fokussiert. Lehrer*innen nutzen verstärkt Fragen, um Lernprozesse anzuleiten und Schüler*innen in ihrem Lernfortschritt zu begleiten, anstatt lediglich klassischen "Lehrstoff" zu vermitteln (vgl. ebd., S. 3).

Im Folgenden werden die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der beiden Lehrpläne analysiert.

3.3.1 Unterschiede

Es gibt Unterschiede und Gemeinsamkeiten beim Vergleich der beiden Lehrpläne. Im Folgenden werden die Unterschiede beleuchtet.

Der Lehrplan 2000 legt den Schwerpunkt auf mathematische Grundtätigkeiten und deren Aufbau, während der neue Lehrplan mehr auf die Grunderfahrungen, welche das Verständnis von Mathematik in einem breiteren Spektrum des gesellschaftlichen und kulturellen Kontextes betont. Die Grundlage der Struktur und des Unterrichts im neuen Lehrplan ist Heinrich Winters Konzept, welches die Wahrnehmung der Welt betont, die Auseinandersetzung mit mathematischen Gegenständen und die Förderung von Problemlösefähigkeiten, die auch außerhalb der Mathematik anwendbar sind (vgl. BUKA (2000), S. 986).

Beim Thema Problemlösungsfähigkeit und Transfer ist der neue Lehrplan mit einem stärkeren Fokus auf eine Problemlösungsfähigkeit ausgelegt. Schüler*innen sollen lernen, Lösungsmethoden auf ähnliche Situationen zu übertragen. Im alten Lehrplan lag ein Fokus auf dem exakten Arbeiten und der Anwendung bekannter Verfahrenstechniken in neuen Situationen (vgl. BUKA (2000), S. 1049 und BBWF (2023), S. 82).

Im Lehrplan von 2000 wurde Mathematik vor allem als Werkzeug betrachtet, um die Realität durch mathematische Modelle und Methoden abzubilden. Der Fokus lag darauf, Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten herzustellen und diese zur Lösung von Problemen zu nutzen (vgl. BUKA (2000), S. 1050f.). Im neuen Lehrplan hingegen wird Mathematik als eine universelle Sprache verstanden, die weit über die klassische Anwendung hinausgeht. Sie soll nicht nur im mathematischen Kontext, sondern auch in anderen Fächern und Lebensbereichen eine Rolle spielen. Zudem wird stärker betont, welche Bedeutung Mathematik für den Alltag und die Berufswelt hat, sodass Schülerinnen und Schüler einen direkteren Bezug zu ihrer eigenen Lebensrealität herstellen können (vgl. BBWF (2023), S. 82f.).

Im alten Lehrplan wurden Computer und andere technologische Hilfsmittel hauptsächlich als Hilfsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt, ohne klare Anweisungen, wie genau und in welchem Maß sie verwendet werden sollten. Der neue Lehrplan ändert das deutlich: Digitale Technologien sollen von Anfang an gezielt eingesetzt werden, um das entdeckende Lernen zu unterstützen, mathematische Zusammenhänge anschaulicher zu machen und die Ergebnisse zu überprüfen. Außerdem wird mehr Wert darauf gelegt, mit digitalen Tools auch praktische Fähigkeiten weiterzuentwickeln, damit die Schüler und Schülerinnen einen aktiven und erkundenden Zugang zur Mathematik finden (vgl. BUKA (2000), S. 1051 und BBWF (2023), S. 84).

Im alten Lehrplan ging es vor allem darum, den Schülern und Schülerinnen zu zeigen, wie sie verantwortungsvoll mit mathematischen Aussagen und Modellen umgehen können. Sie sollten lernen, Mathematik sinnvoll anzuwenden und dessen Bedeutung zu verstehen. Der neue Lehrplan geht jedoch noch einen Schritt weiter: Mathematik wird jetzt stärker in einen gesellschaftlichen Kontext eingebunden und als Werkzeug zur Förderung von kritischem Denken genutzt. Themen wie Geschlechterpädagogik, Reflexion und gesellschaftliche Diskussionen finden hier mehr Platz. Außerdem wird Mathematik als Beispiel für logisches Argumentieren betrachtet, wobei auch

verschiedene Sichtweisen willkommen sind. So soll Mathematik nicht nur Wissen vermitteln, sondern auch helfen, sich in der Gesellschaft zurechtzufinden (vgl. BUKA (2000), S. 1050 und BBWF (2023), S. 83).

Früher spielten Bildungsstandards im Lehrplan keine besondere Rolle. Das gab den Lehrpersonen mehr Freiraum in der Gestaltung des Unterrichts, ohne dass sie an feste Kompetenzbereiche gebunden waren. Mit dem neuen Lehrplan hingegen stehen die Bildungsstandards M8 von 2009 klar im Mittelpunkt. Das bedeutet, dass die Ziele für den Unterricht heute viel moderner und zielgerichteter formuliert sind. Der Fokus liegt jetzt stark auf den konkreten Kompetenzen, die unsere Schüler*innen entwickeln sollen. Dadurch wird der Mathematikunterricht viel systematischer aufgebaut und orientiert sich an einheitlichen Anforderungen. So stellen wir sicher, dass alle Schüler*innen eine vergleichbare und fundierte mathematische Bildung erhalten (vgl. BBWF (2023), S. 83).

3.3.2 Gemeinsamkeiten

Trotz dieser Unterschiede verfolgen beide Lehrpläne ein gemeinsames Ziel: den Schüler*innen eine fundierte mathematische Bildung zu vermitteln. Während sich die Schwerpunkte und Methoden weiterentwickelt haben, bleibt die grundlegende Bedeutung der Mathematik im Unterricht bestehen. Daher lohnt es sich, neben den Unterschieden auch die Gemeinsamkeiten genauer zu betrachten. In beiden Lehrplänen wird großen Wert auf die Vermittlung grundlegender mathematischer Fähigkeiten gelegt. Dazu gehören Argumentation, präzises Arbeiten, kritisches Denken und die Interpretation mathematischer Darstellungen. Unabhängig von den inhaltlichen Anpassungen bleibt das Ziel dasselbe: den Schülerinnen und Schülern eine fundierte mathematische Denkweise zu vermitteln, die sie in verschiedenen Bereichen einsetzen können (vgl. BUKA (2000), S. 1048f. und BBWF (2023), S. 83).

In beiden Lehrplänen wird Mathematik nicht einfach isoliert betrachtet. Stattdessen sehen wir sie als ein spannendes Feld, das viele Verbindungen zu anderen Disziplinen herstellt. Durch Modellierung, Analyse und den Austausch mit anderen Fächern soll Mathematik uns helfen, die Welt besser zu verstehen. Es handelt sich um mehr als nur Zahlen. Es ist ein Netzwerk von Zusammenhängen, das in vielen Lebensbereichen Anwendung findet (vgl. BUKA (2000), S. 1052 und BBWF (2023), S. 82).

Beide Lehrpläne legen großen Wert darauf, dass Schülerinnen und Schüler Mathematik nicht nur passiv aufnehmen, sondern aktiv erarbeiten. Sie sollen zunehmend eigenständig an mathematische Fragestellungen herangeführt werden und durch Reflexion ihr Verständnis vertiefen. Ziel ist es, ihnen die Fähigkeit zu vermitteln, mathematische Probleme selbstständig zu lösen und ihre Lösungswege kritisch zu hinterfragen (vgl. BUKA (2000), S. 1050 und BBWF (2023), S. 84).

In beiden Lehrplänen spielt kritisches Denken eine zentrale Rolle. Schülerinnen und Schüler sollen mathematische Aussagen und Modelle nicht nur anwenden, sondern auch hinterfragen und reflektieren. Dabei wird die Fähigkeit zur Argumentation gezielt gefördert, da sie eine essenzielle Kompetenz im Mathematikunterricht darstellt. Ziel ist es, fundierte mathematische Überlegungen logisch zu begründen und überzeugend darzustellen (vgl. BUKA (2000), S. 1049 und BBWF (2023), S. 83).

In beiden Lehrplänen wird hervorgehoben, dass Mathematik nicht nur theoretisch existiert, sondern in zahlreichen Lebensbereichen eine bedeutende Rolle spielt. In realen wie auch in abstrakten Kontexten sollen die Schülerinnen und Schüler nachvollziehen, wie mathematische Methoden zur Anwendung kommen können. Es soll ihnen ein Verständnis dafür vermittelt werden, wie Mathematik in verschiedenen Kontexten nützlich und relevant ist (vgl. BUKA (2000), S. 1048f. und BBWF (2023), S. 82).

Beide Lehrpläne befürworten den Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht, unterscheiden sich jedoch in ihrer Herangehensweise. Während der alte Lehrplan digitale Hilfsmittel eher als unterstützendes Werkzeug betrachtet, geht der neue Lehrplan einen Schritt weiter: Er definiert gezielt, wie digitale Technologien zur Förderung des Lernprozesses eingesetzt werden sollen. Dadurch erhält der Technologieeinsatz eine klarere Struktur und eine größere Bedeutung im Unterricht (vgl. BUKA (2000), S. 1049 und BBWF (2023), S. 82 und 84).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der alte Lehrplan Mathematik eher fachbezogen und strukturiert lehrt. Er definiert klare Anforderungen für Kern- und Erweiterungsbereiche und legt einen starken Fokus auf methodische Anwendungen sowie auf das sichere Beherrschen mathematischer Strukturen. Der neue Lehrplan hingegen verfolgt einen Ansatz, der moderner und kompetenzorientierter ist. Mathematik wird hier nicht nur als eigenständiges Fach angesehen, sondern auch als eine fächerübergreifende und gesellschaftlich bedeutende Disziplin. In diesem Zusammenhang wird vor allem die Wichtigkeit von Lernprozessen hervorgehoben,

ebenso wie der Gebrauch digitaler Technologien und eine offene Fehlerkultur, die als Bestandteil des Lernens angesehen wird.

3.4 Vergleich zum Thema Bruchrechnen

Die Behandlung der Bruchrechnung verdeutlicht einen wesentlichen Unterschied zwischen dem alten und dem neuen Lehrplan. Der alte Lehrplan sah die Bruchrechnung hauptsächlich als grundlegende Fähigkeit im Umgang mit rationalen Zahlen vor. Der neue Lehrplan hingegen betont ein tieferes Verständnis und die vielfältige Anwendbarkeit von Brüchen stärker. Der alte Lehrplan fokussiert sich auf die sichere Beherrschung der Rechenregeln für Brüche, insbesondere Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit kleinen Zählern und Nennern. Außerdem gelten Brüche als Vorstufe zur Algebra, weshalb die richtige Anwendung der Rechenregeln im Hinblick auf weiterführende mathematische Themen besonders hervorgehoben wird. Auch die Umwandlung zwischen Bruch- und Dezimaldarstellung wird behandelt, jedoch mehr als eine technische Fertigkeit und weniger als ein zentrales Konzept für das mathematische Verständnis (vgl. BUKA (2000), S. 1052-1054 und BBWF (2023), S. 85-95).

Der neue Lehrplan legt den Fokus über das bloße mechanische Rechnen hinaus auf die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, Brüche in unterschiedlichen Kontexten zu interpretieren und anzuwenden. Dadurch wird nicht nur das Rechnen mit Brüchen gelehrt, sondern auch deren Bedeutung als relative Anteile und als Operatoren im Zusammenhang mit Teilbarkeitsregeln hervorgehoben. Ein wesentlicher Fokus liegt auf dem flexiblen Wechsel zwischen Bruch-, Dezimal- und Prozentdarstellung, wobei auch periodische Dezimalzahlen ausdrücklich behandelt werden. Zusätzlich findet nicht nur die Anwendung von Rechenregeln statt, sondern auch deren Interpretation mittels geometrischer Darstellungen und praxisnaher Sachprobleme (vgl. BBWF (2023), S. 90).

Auch in der Anwendungsorientierung zeigt sich ein deutlicher Unterschied zwischen dem neuen und alten Lehrplan. Während Bruchrechnung im alten Lehrplan zum Großteil als eine mathematische Technik gelehrt wird, die für spätere algebraische Themen relevant ist, werden im neuen Lehrplan Brüche öfter in alltagsnahe und mathematische Sachsituationen integriert. Zum Beispiel können Brüche verwendet werden, um Anteile in Diagrammen anzugeben, um Maßeinheiten zu berechnen oder

um Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Ein weiterer Unterschied ist die Berücksichtigung digitaler Technologien. Es gab keine Hinweise auf den Einsatz digitaler Hilfsmittel im alten Lehrplan, aber der neue Lehrplan macht konkrete Vorschläge dazu, wie digitale Werkzeuge verwendet werden können, um Bruchrechnungen zu veranschaulichen und zu berechnen. Zum Beispiel können Schülerinnen und Schüler mithilfe von digitalen Simulationen Teilbarkeitsaussagen oder verschiedene Darstellungsformen von Brüchen überprüfen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der neue Lehrplan mehr Breite und Tiefe in der Thematik Bruchrechnen aufweist (vgl. BUKA (2000), S. 1052-1054 und BBWF (2023), S. 85-95).

Es kann außerdem festgestellt werden, dass die Herangehensweise an das Thema Bruchrechnen im neuen Lehrplan eine deutliche Weiterentwicklung erfahren hat. Der alte Lehrplan konzentriert sich vor allem auf das sichere Rechnen mit Brüchen, während der neue Lehrplan deutlich darüber hinausgeht. Neben der korrekten Anwendung der Rechenregeln ist ihm auch die Förderung eines tiefergehenden Verständnisses für die Bedeutung der vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Brüchen in verschiedenen mathematischen und realen Zusammenhängen wichtig.

Bemerkenswert ist vor allem, dass Brüche im neuen Lehrplan nicht länger isoliert als bloße Rechenoperationen behandelt werden, sondern verstärkt in umfassendere mathematische Kontexte eingebettet sind. Auf diese Weise erwerben die Schülerinnen und Schüler die Fähigkeit, Brüche in unterschiedlichen Darstellungsformen flexibel zu verwenden und sicher zwischen Bruch-, Dezimal- und Prozentdarstellung zu wechseln. Außerdem wird die Nutzung von Brüchen in Sachsituationen stärker hervorgehoben. Dies beinhaltet, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur das Rechnen mit Brüchen erlernen, sondern auch nachvollziehen, wie Brüche in Alltags- und Wissenschaftskontexten eine Rolle spielen – sei es bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, der Darstellung von Anteilen oder dem Umgang mit proportionalen Zusammenhängen (vgl. BUKA (2000), S. 1052-1054 und BBWF (2023), S. 85-95).

Ein weiterer zentraler Unterschied ist, dass der neue Lehrplan einen höheren Einsatz moderner Technologien vorsieht. Während der alte Lehrplan keinen Bezug zu digitalen Hilfsmitteln herstellt, werden diese im neuen Lehrplan absichtlich integriert. Digitale Hilfsmittel sollen von Schülerinnen und Schülern verwendet werden, um Brüche darzustellen, Zusammenhänge zu erkennen und effiziente Berechnungen anzustellen.

Dadurch wird der Unterricht nicht nur praxisnaher und anschaulicher, sondern unterstützt auch verschiedene Lernstrategien und fördert die eigenständige Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten (vgl. BBWF (2023), S. 83).

Insgesamt wird deutlich, dass der neue Lehrplan einen ganzheitlicheren Ansatz zum Thema Brüche verfolgt. Er kombiniert mathematische Theorie mit praxisnahen Anwendungen, fördert ein tieferes Verständnis anstelle von rein mechanischem Rechnen und nutzt moderne Technologien zur Unterstützung des Lernens. Dies hilft, Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, dass Brüche nicht nur abstrakte Zahlen sind, sondern ein grundlegendes Konzept, das in vielen Aspekten des Alltags und der Wissenschaft von großer Bedeutung ist.

4. Lerntypen und Grundvorstellungen

Im folgenden Kapitel werden verschiedene Lerntypen und anschließend verschiedene Grundvorstellungen bei der Bruchrechnung erklärt.

4.1 Lerntypen

Schüler*innen lernen individuell, wobei die bevorzugten Wahrnehmungskanäle eine große Rolle spielen. Literatur unterscheidet häufig vier grundlegende Lerntypen. Darunter zählt der auditive, der visuelle, der haptische (kinästhetische) und der kognitive (kommunikative) Lerntyp (vgl. Matuschke (2001), S. 54; vgl. Mitteldeutsches Institut. (2021), online).

Informationen nimmt der auditive Lerntyp vor allem über das Gehör wahr. Er zieht besonderen Nutzen aus mündlichen Erklärungen, Diskussionen und lautem Wiederholen (Mitteldeutsches Institut. (2021), online). Beim Bruchrechnen kann dieser Lerntyp unterstützt werden, indem Rechenschritte mündlich beschrieben oder mathematische Zusammenhänge erklärt werden. Zum Beispiel: „Ein Halb ist größer als ein Viertel, weil der Nenner kleiner ist“ (Mitteldeutsches Institut. (2021), online).

Wissen nimmt der visuelle Lerntyp hauptsächlich durch Sehen auf. Grafische Abbildungen, visuelle Modelle und Farbcodierungen tragen dazu bei, dass es leichter ist, etwas zu verstehen (vgl. ebd., online). Insbesondere beim Bruchrechnen ist dieser Zugang entscheidend, da Brüche oft durch Diagramme dargestellt werden. Eine

Zeichnung kann zum Beispiel dazu dienen, die Vorstellung „ein Drittel eines Pizzastücks“ zu konkretisieren.

Der haptische oder kinästhetische Lerntyp erwirbt Wissen durch praktische Aktivitäten, Anfassen und Bewegung. Ein aktiver Umgang mit Materialien ist für diese Lernenden von besonderer Bedeutung (vgl. ebd., online). Im Bereich der Bruchrechnung eignen sich konkrete Materialien wie Bruchkreise, Bruchstreifen oder Legematerialien besonders gut, um das Teilen, Vergleichen und Addieren von Brüchen physisch erfahrbar zu machen.

Der kognitive bzw. kommunikative Lerntyp neigt dazu, Wissen vor allem über sprachlich-logische Zugänge zu erwerben. Diese Lernenden erfassen Inhalte besonders gut, wenn sie sie in Gesprächen reflektieren, diskutieren oder anderen erklären (vgl. ebd., online). Im Mathematikunterricht können Partner- und Gruppenarbeiten, bei denen Rechenwege gemeinsam erörtert werden, von Vorteil sein.

Im Themengebiet der Bruchrechnung heißt das für den Unterricht, dass es sich als besonders wirksam erweist, verschiedene Lernzugänge miteinander zu kombinieren. Das Lernen von Schülerinnen und Schülern wird nachhaltiger, wenn sie sehen (visuell), hören (auditiv), handeln (haptisch) und sprechen bzw. erklären (kognitiv). Mathematische Inhalte können durch den gezielten Einbezug mehrerer Wahrnehmungskanäle konkret erfahrbar und abstrakt verstehbar gemacht werden.

Neben den Lerntypen existieren noch die Grundvorstellungen. Zusammen bilden sie eine Grundlage für das Rechnen. Sebastian Wartha (2005) schreibt, dass vermutet wird, „dass in der mangelnden Erweiterung von Grundvorstellungen eine Hauptursache der Defizite im Umgang mit rationalen Zahlen, insbesondere in Anwendungskontexten, liegt“ (ebd., S.1). Doch was genau sind Grundvorstellungen?

Der Wechsel zwischen realen Situationen und abstrakten mathematischen Modellen ist in der Mathematik von zentraler Bedeutung. Lernende brauchen mentale Objekte mathematischer Konzepte, um reale Probleme mathematisch zu erfassen und die Ergebnisse in den realen Kontext zurückzuführen. Diese mentalen Objekte, so Freudenthal (1983), stellen eine Vorstufe zur Begriffsbildung dar, die bereits wirksam sein kann, ehe ein mathematisches Konzept formal verstanden wird. Er hebt hervor,

dass diese geistigen Konstruktionen die Basis für das Verständnis und die Anwendung mathematischer Konzepte sind. In der deutschen Mathematikdidaktik sind solche mentalen Objekte als Grundvorstellungen bekannt. Die inneren kognitiven Modelle, mit denen Lernende mathematische Konzepte interpretieren, anwenden und mit realen Situationen verknüpfen, werden als Grundvorstellungen bezeichnet. Sie stellen die Verbindung zwischen mathematischer Struktur, psychologischer Verarbeitung und der lebensweltlichen Relevanz eines Begriffs oder Verfahrens her (vgl. Kleine (2025), S. 191f.).

Es wird zwischen verschiedenen Grundvorstellungen unterschieden. Unter anderem gibt es den normativen Aspekt der Grundvorstellung. Der normative Aspekt von Grundvorstellungen bezieht sich auf die didaktische Relevanz bestimmter mentaler Konzepte, die als notwendig angesehen werden und das mathematische Lernen strukturieren und leiten. Grundvorstellungen spielen eine entscheidende Rolle beim Übersetzen zwischen unterschiedlichen Darstellungsebenen und Kontexten, wie zum Beispiel zwischen innermathematischen und realitätsbezogenen Situationen oder zwischen symbolischen, ikonischen und sprachlichen Repräsentationen (vgl. Eggharter (2013), S. 10; Padberg und Wartha (2017), S. 1f.).

Wie Eggharter (2013) hervorhebt, fördern gut entwickelte Grundvorstellungen zu Zahlen, Strategien und Operationen ein flexibles mathematisches Denken, das über das bloße Anwenden auswendig gelernter Regeln hinausgeht. Lernende, bei denen die Grundvorstellungen aktiviert werden, sind in der Lage, ihr mathematisches Wissen auf neue Problemstellungen zu übertragen und adaptiv zu verwenden. Auch Padberg und Wartha (2017) heben hervor, dass Grundvorstellungen für die Übersetzung zwischen symbolischen und bildlich-gegenständlichen Darstellungen unerlässlich sind. Die Bruchzahl $\frac{2}{5}$ dient als Beispiel. Nur wenn die Lernenden begreifen, dass „zwei Fünftel“ „zwei von fünf gleich großen Teilen“ bedeutet, wird eine mentale Grundvorstellung aktiviert, die ein vertieftes Verständnis und einen flexiblen Umgang mit mathematischen Konzepten ermöglicht (vgl. ebd., S. 1f.). Es wird durch beide Herangehensweisen klar, dass Grundvorstellungen nicht nur als kognitive Hilfen, sondern auch als didaktische Leitlinien verstanden werden müssen, um ein konzeptuelles, vernetztes und anwendungsorientiertes mathematisches Wissen aufzubauen (vgl. Eggharter (2013), S. 10; Padberg und Wartha (2017), S. 1f.).

Grundvorstellungen sind nicht nur für die Entwicklung mathematischer Konzepte wichtig, sondern auch für die Analyse und Beschreibung von Denkprozessen sowie Lösungsprozessen. Sie machen deutlich, welche mentalen Strukturen Lernende beim erfolgreichen Bearbeiten einer Aufgabe aktivieren und welche beim Scheitern ungenutzt bleiben (vgl. Eggharter (2013), S. 10f.). Fehlvorstellungen, die falsche Strategien zur Folge haben, entstehen oft aus einer unzureichenden Aktivierung solcher Grundvorstellungen. Deshalb sind sie entscheidend für das Verständnis typischer Schüler*innenfehler.

Auch Padberg und Wartha (2017, S. 2f.) definieren Grundvorstellungen als mentale Modelle, die es Lernenden ermöglichen, mathematische Inhalte auf verschiedenen Repräsentationsebenen symbolisch, ikonisch, handelnd und sprachlich zu erfassen und zwischen diesen flexibel zu wechseln. „Verstehen“ ist demnach erst gegeben, wenn mathematische Sachverhalte über verschiedene Darstellungsebenen hinweg interpretiert und angewendet werden können. Das bloße Anwenden von Regeln, ohne eine inhaltliche Vorstellung zu haben, wird hingegen nur als mechanisches „Können“ betrachtet.

In beiden Ansätzen wird hervorgehoben, dass ein nachhaltiges Lernen in Mathematik auf einem konzeptuellen Verständnis und nicht lediglich auf Regelwissen basiert (vgl. Eggharter (2013), S. 10f.; Padberg und Wartha (2017), S. 2f.). Formeln und Rechenmethoden sollten auf Basis des Verständnisses entwickelt werden, um ein vertieftes mathematisches Denken zu fördern und Fehlanwendungen zu verhindern.

4.2 Grundvorstellungen bei Brüchen

In diesem Kapitel werden die Grundvorstellungen spezifisch beim Bruchrechnen erklärt.

4.2.1 Die Bruchzahl als Teil einer ganzen Einheit

Eine grundlegende Auffassung im Zusammenhang mit der Bruchrechnung ist die Idee, dass Brüche Anteile einer bestimmten Größe darstellen. Lernende sollen begreifen, dass ein Bruch wie $\frac{2}{3}m$ bedeutet, eine festgelegte Größe, wie z. B. einen Meter, in drei gleich große Teile zu zerlegen und zwei davon auszuwählen (vgl. Eggharter, 2013, S. 15). Ein aktives, handelndes Verständnis mathematischer Beziehungen ist für diese Vorstellung erforderlich, und es kann besonders durch Lernformen wie das Falten oder

Teilen von Papierstreifen, Blättern oder geometrischen Flächen gefördert werden. Auch Rollnik (2009, S. 97) hebt hervor, dass Brüche als Bestandteile von Standardgrößen (z. B. Liter, Meter, Euro) interpretiert werden sollten. Diese Größen dienen Lernenden dazu, Anteile eines Ganzen zu beschreiben. So verstehen Kinder $\frac{1}{4}l$ als ein Viertel eines Liters oder $\frac{1}{2}m$ als $0,5m$. Diese praxisnahen Beispiele nutzen bereits vorhandene Vorerfahrungen und fördern somit den Aufbau stabiler Grundvorstellungen. Insbesondere durch die anschauliche Arbeit mit Strecken-, Flächen- und Volumenmodellen, die das Verhältnis zwischen Teil und Ganzem veranschaulichen, entwickelt sich das Verständnis von Brüchen. Die beiden Autor*innen heben hervor, wie wichtig es ist, zwischen unterschiedlichen Formen der Darstellung zu wechseln. Es sollen konkreten Handlungen über bildliche Repräsentationen bis zur symbolischen Notation unterrichtet werden, um ein vertieftes Verständnis von Brüchen als Anteilen zu fördern (vgl. Eggharter (2013), S. 15; Rollnik (2009), S. 97). Gleichzeitig machen sie deutlich, dass nicht jede gewählte Darstellung gleich gut geeignet ist: Geeignete Größen und Formen fördern das Verständnis, während ungeeignete Beispiele Verwirrung stiften oder zu Fehlvorstellungen führen können.

Ebenso zeigten Aksoy und Yazlik (2017) in ihren Ergebnissen, dass Schüler*innen oft die Positionen von Zähler und Nenner austauschten oder diese missverstanden. Laut den Autor*innen könnte dieses Problem auf ein unzureichendes Verständnis der Teil eines Ganzen Beziehung hinweisen (vgl. ebd., S. 231). Das ist genau diese Grundvorstellung, die den Kindern fehle. Wie Eggharter (2013) und Aksoy und Yazlik (2017) hinweisen, kann die Verwendung verschiedener visueller Materialien, wie Papierstreifen oder anderer geometrischer Flächen herangezogen werden.

Es sollte zusammenfassend gesagt werden, dass die Vorstellung von Brüchen als Teil eines Ganzen durch handlungsorientiertes Lernen und vielfältige Repräsentationswechsel gefördert werden sollte. Ein dauerhaftes und tragfähiges Verständnis mathematischer Größen kann sich nur entwickeln, wenn Lernende Brüche sowohl als symbolische Notation als auch als konkrete Anteile verstehen (vgl. Eggharter (2013), S. 15; Rollnik (2009), S. 97).

4.2.2 Die Bruchzahl als Teil von mehreren ganzen Einheiten

Die Grundvorstellung der Bruchzahl als Teil von mehreren Ganzen erweitert das Verständnis des Bruchbegriffs, indem eine Menge von Ganzen statt nur eines einzelnen Ganzen betrachtet wird. Daher steht zum Beispiel $\frac{1}{3}$ von $2m$, wobei die Gesamtlänge von zwei Metern in drei gleich große Teile aufgeteilt wird und ein Teil davon genommen wird (vgl. Eggharter, 2013, S. 15f.).

Für Schüler*innen ist diese Vorstellung eine größere kognitive Herausforderung, da sie identifizieren müssen, welches „Ganze“ die Bezugsgröße des Bruchs ist. Der Unterschied zur Auffassung des Bruchs als Teil eines Ganzen besteht vor allem in der Reihenfolge der Operationen, nämlich dem Teilen und dann Vervielfachen, deren Gleichwertigkeit im Unterricht ausdrücklich behandelt werden sollte. Eggharter (2013, S. 16) hebt hervor, dass sich diese Gleichwertigkeit besonders gut durch ikonische Darstellungen oder über den Quasikardinalzahlaspekt verdeutlichen lässt, indem beispielsweise gezeigt wird, dass zwei Pizzen durch drei geteilt werden $= \frac{2}{3}$ Pizzen.

4.2.3 Bruchzahl als relativer Anteil von einer Zahl

Die Bruchzahl wird grundlegend als relativer Anteil verstanden, wobei Brüche als Verhältnisse zwischen zwei Größen dargestellt werden. Eine Größe wird dabei als Teil im Verhältnis zu einer anderen, nämlich dem Ganzen, betrachtet. Diese Perspektive ist besonders bedeutsam, wenn Brüche genutzt werden, um Anteile, Vergleiche oder Proportionen zu beschreiben. Eggharter (2013, S. 16) illustriert diese Vorstellung mit einem alltagsbezogenen Beispiel: „Anna erbt $\frac{1}{3}$ von 100 000€, und Berta erbt den Rest.“ Solche Kontexte beziehen sich auf die Erfahrungswelt der Schüler*innen und tragen so zu einem intuitiven Verständnis von Brüchen als relativen Größenanteilen bei. Diese Grundvorstellung unterscheidet sich von der Auffassung des Bruchs als Teil eines Ganzen dadurch, dass das Verhältnis zwischen zwei Größen im Vordergrund steht und nicht die absolute Größe selbst. Damit wird der Bruch als relationale Zahl betrachtet. Das ist eine Sichtweise, die für das Verständnis von Prozentrechnung, Verhältnissen und Skalierungen besonders wichtig ist.

Auch Motzer (2021) betont, dass das Verhältnisverständnis für das mathematische Denken über Brüche von zentraler Bedeutung ist. Brüche können seiner Ansicht nach „nicht nur als Teile eines Ganzen verstanden werden, sondern auch als Verhältnisse

zweier Größen, wodurch der relationale Aspekt von Brüchen hervorgehoben wird, der für das Verständnis von Anteilen, Verhältnissen und Proportionen grundlegend ist“ (vgl. S. 13). Mit diesem Verständnis vollzieht sich der Übergang vom anschaulichen zum funktionalen Denken: Lernende beginnen, Brüche als relationale Zahlen zu verstehen, die Beziehungen zwischen Größen ausdrücken, anstatt sie nur als absolute Teilmengen zu betrachten.

Die Autor*innen demonstrieren somit, dass die Auffassung der Bruchzahl als relativer Anteil eine wesentliche kognitive Basis für das Verständnis von Proportionalität und Prozentrechnung ist (vgl. Eggharter (2013), S. 16; Motzer (2021), S. 13).

4.2.4 Bruchzahl als absoluter Anteil

Viele Lernende betrachten Brüche nicht als eigenständige Zahlen, sondern lediglich als zwei natürliche Zahlen (Zähler und Nenner). Bei der Addition zweier Bruchzahlen haben Kinder oft die falsche Herangehensweise: $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ „Zähler + Zähler / Nenner + Nenner“ = $\frac{5}{7}$. Diese Fehlstrategie ist eng mit der grundlegenden Vorstellung verknüpft, Brüche nur als Teile eines Ganzen oder als relative Anteile zu betrachten, ohne sie als Zahlen mit eigener Bedeutung zu verstehen (vgl. Eggharter (2013), S. 16). Eine aktuelle Studie zeigt ergänzend, dass mehr als 60 % der Siebtklässler*innen davon ausgingen, Brüche wie ganze Zahlen addieren zu können, was darauf hindeutet, dass ihr Verständnis der Bruchzahl als Zahl noch nicht ausreichend entwickelt ist (Lestiana, Rejeki & Setyawan (2016), S. 136).

4.2.5 Quasikardinalzahl

Lernende verstehen bei der Grundvorstellung der Quasikardinalzahl bei Bruchzahlen den Zähler als Zählzahl, während der Nenner die Einheit bzw. das gleich große Teilstück bestimmt. Mit anderen Worten unterteilt der Nenner das Ganze in gleich große Teile und der Zähler gibt an, wie viele dieser Teile gemeint sind (vgl. Padberg & Wartha (2017), S. 21). Diese Vorstellung erleichtert insbesondere die Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche, da dann analog zum natürlichen Zahlbereich gerechnet werden kann („3 Birnen + 2 Birnen = 5 Birnen“ $\rightarrow \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$) (vgl. ebd., S. 30).

4.2.6 Bruch als Verhältnis: „a zu b“

Die grundlegende Idee, die Bruchzahl als Verhältnis zu betrachten, beschreibt Brüche als einen Ausdruck des Verhältnisses zwischen zwei Größen, wie zum Beispiel bei einem Fußballspiel, in dem die Torchancen im Verhältnis „7 zu 5“ stehen, also 7:5 (vgl. Eggharter (2013), S. 17). Ebenso ist das ein Aspekt, der den Schüler*innen im realen Leben immer wieder begegnet. Das Ergebnis eines Fußballspiels, die Maßstabsrechnung, eine Division usw.

Es ist entscheidend, dass Lernende vor ihrem ersten Kontakt mit Verhältnissen bereits über fundierte Kenntnisse zur Addition und zum Teil-Ganzes-Prinzip verfügen. Andernfalls können typische Fehlstrategien wie die inkorrekte Regel „Zähler + Zähler / Nenner + Nenner“ entstehen (vgl. Eggharter, 2013, S. 17).

Im Unterricht soll den Lernenden beigebracht werden, dass eine Verhältnisangabe $a : b$ ein eigenständiges mathematisches Objekt ist und nicht nur eine Beziehung zwischen zwei Zahlen. Nur wenn Verhältnisse als eigenständige Denkobjekte begriffen werden, ist der Übergang von der Proportionsaussage $a : b = 2 : 3$ zur Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ möglich. Ein grundlegendes Verständnis des Bruchzahlbegriffs ist dafür notwendig (vgl. Rieger (2016), S. 20f.).

4.3 Grundvorstellungen beim Operieren und Rechnen mit Brüchen

Im folgenden Kapitel werden die grundlegenden Rechenoperationen, das Kürzen, das Erweitern und das Rechnen mit Brüchen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) mit den dazugehörigen Grundvorstellungen näher beschrieben.

4.3.1 Kürzen als Vergröberung

Das Kürzen von Brüchen ist das Gegenteil des Erweiterns und kann als eine Vergröberung von Unterteilungen betrachtet werden. Das Erweitern verfeinert die Einteilung eines Ganzen, während das Kürzen die Anzahl der Teilstücke reduziert, ohne den Wert des Bruchs zu verändern. Um dieses Prinzip zu verstehen, muss man erkennen, dass eine Bruchzahl mehrere gleichwertige Darstellungen haben kann (vgl. Eggharter (2013), S. 18).

Rieger (2016, S. 26f.) definiert das Kürzen als einen rechnerischen Vorgang, bei dem sowohl der Zähler als auch der Nenner durch den gleichen gemeinsamen Teiler geteilt werden. Hierdurch wird ein gleichwertiger Bruch erzeugt, der den gleichen Anteil am

Ganzen darstellt. Es handelt sich um einen Prozess, der das Erweitern rückgängig macht. Er kann nur so lange fortgeführt werden, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind. Der daraus resultierende, vollständig gekürzte Bruch wird Kernbruch genannt. Laut Padberg (2009, S. 55f.) sind das Erweitern und das Kürzen gleichwertige Operationen, die nur die Darstellung einer Bruchzahl ändern, nicht jedoch ihren Wert. Die beiden Abläufe verdeutlichen, dass es für Brüche unzählige gleichwertige Darstellungen gibt. Außerdem kann das Kürzen didaktisch als Multiplikation mit Eins verstanden werden, was den Lernenden zeigt, dass der Bruchwert sich nicht ändert, obwohl Zähler und Nenner verändert werden.

Insgesamt zeigen Eggharter (2013), Rieger (2016) und Padberg (2009), dass das Verständnis von Erweitern und Kürzen wesentlich zum Aufbau eines tragfähigen Bruchbegriffs beiträgt, da Lernende so die Äquivalenz und Struktur von Bruchzahlen begreifen.

4.3.2 Erweitern als Verfeinerung

Das Erweitern von Brüchen kann als ein Verfeinerungsprozess von Einteilungen betrachtet werden, bei dem eine Bruchzahl in eine andere gleichwertige Darstellung umgewandelt wird, ohne dass sich ihr Wert ändert. Schüler*innen erkennen, dass eine Bruchzahl mehrere äquivalente Repräsentationen haben kann, die sich lediglich in der Anzahl der Unterteilungen unterscheiden. Eggharter (2013, S. 18) empfiehlt anschauliche Tätigkeiten wie das Falten von Papierstreifen oder Blättern, um diese Einsicht zu fördern. Dabei wird das Verfeinern durch wiederholtes Falten und Einfärben sichtbar. Wird ein Blatt beispielsweise zunächst in Drittel geteilt und zwei Teile eingefärbt, so entsteht $\frac{2}{3}$. Wird das Blatt danach in der Mitte gefaltet, entsteht $\frac{4}{6}$. Durch diese Tätigkeit wird dem Lernenden deutlich, dass der Bruchwert sich durch eine feinere Unterteilung (größerer Nenner) nicht ändert, sondern nur anders dargestellt wird.

Laut Rieger (2016, S. 24f.) handelt es sich beim Erweitern um einen Prozess, bei dem die Unterteilungen eines Ganzen rechnerisch verfeinert werden, indem Zähler und Nenner eines Bruchs mit derselben natürlichen Zahl multipliziert werden. So entspricht etwa $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, was demonstriert, dass der Bruchwert konstant bleibt, selbst wenn die Anzahl der Teilstücke vervielfacht wird. Diese Einsicht ist die Basis für das Verständnis, dass es beliebig viele gleichwertige Brüche gibt.

Laut Padberg (2009, S. 52ff.) hat diese Phase als Übergang vom anschaulichen zum rechnerischen Denken eine wichtige didaktische Funktion. Es soll bei Lernenden die Einsicht geweckt werden, dass das Multiplizieren von Zähler und Nenner mit derselben Zahl einer inhaltlich verstandenen Verfeinerung gleichkommt. Der Rechenprozess dient nicht als abstraktes Kalkül, sondern als Entlastung des Denkens für ein bereits verstandenes Konzept. Eine bedeutende Erkenntnis ist, dass das Erweitern mathematisch gesehen keine Vergrößerung des Bruchwertes darstellt, sondern lediglich eine neue Darstellung desselben Anteils.

In der Summe verdeutlichen die drei Herangehensweisen, dass das Erweitern von Brüchen eine wesentliche Funktion beim Entwickeln von Grundverständnissen zu Äquivalenz und Proportionalität hat. Das Verständnis für die Unveränderlichkeit des Bruchwertes, trotz unterschiedlicher Darstellungsformen, wird durch die Kombination von handelndem, ikonischem und symbolischem Lernen gefestigt (vgl. Eggharter (2013), S. 18.; Rieger (2016), S. 24ff.; Padberg (2009), S. 52ff.).

4.3.3 Addition ist das Zusammenfügen gleichartiger Teile bzw. die Bewegung auf der Zahlengerade

Das Addieren von Brüchen beruht auf der grundlegenden Idee, Teile eines Ganzen zusammenzufügen oder hinzuzufügen. Diese Vorstellung baut auf alltagsnahen Erfahrungen der Lernenden auf und stellt somit eine wesentliche Grundlage für das Verständnis von Bruchoperationen dar. Eggharter (2013, S. 19) hebt hervor, dass das Verständnis durch konkrete und visuelle Handlungen, wie das Darstellen von Tortenstücken oder Flüssigkeitsmengen, gefördert wird. Der Übergang von der enaktiven zur ikonischen und schließlich zur symbolischen Ebene wird durch anschauliche Materialien wie Kreise, Rechtecke oder Längenabschnitte ermöglicht. Ergänzend kann die Addition als Voranschreiten auf dem Zahlenstrahl verstanden werden, was den Zahlaspekt des Bruchs betont.

Laut Rieger (2016, S. 35f.) wird die Addition von Brüchen besonders durch Größenkontexte wie Längen, Volumina oder Flächeninhalte begreifbar. Hierbei können Lernende aktiv werden, indem sie Maßbänder anordnen oder Flüssigkeiten vermengen, um die resultierende Gesamtsumme zu beobachten. Bei ungleichnamigen Brüchen wird die Notwendigkeit eines gemeinsamen Nenners durch das Auffinden einer gemeinsamen Unterteilung anschaulich. Diese Einsicht ist eine bedeutende Basis für das später durchzuführende Rechenverfahren.

Auch Padberg (2009, S. 72–75) schildert die Addition von Brüchen als eine Verallgemeinerung der Größenaddition, die anfänglich auf der Handlungsebene verankert werden sollte. Indem man Repräsentanten wie Stäbe, Flächen oder Flüssigkeiten zusammenlegt oder aneinanderfügt, wird der Summenbegriff intuitiv verständlich. Danach erfolgt die Bestimmung der Maßzahl der Summe durch die gemeinsame Unterteilung, wie beispielsweise bei der Viertelteilung einer Strecke: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Lernende erkennen durch diese didaktische Progression, dass die Addition von Brüchen nicht bloß ein rechnerisches Verfahren ist, sondern inhaltlich auf dem Prinzip der Vereinigung von Teilmengen beruht.

Zusammenfassend demonstrieren Eggharter (2013), Rieger (2016) und Padberg (2009), dass das Verständnis der Bruchaddition durch konkrete Erfahrungen, anschauliche Darstellungen und strukturiertes Übersetzen zwischen Repräsentationsebenen gefördert werden sollte. Die Lernenden müssen die Addition als das Zusammenfügen gleichartiger Teile und als Bewegung auf der Zahlengerade verstehen, bevor sie die formale Rechenregel nachhaltig begreifen können.

4.3.4 Subtrahieren als gemeinsamen Unterteilung

Die grundlegenden Konzepte zur Subtraktion von Brüchen sind ähnlich denen der Addition und basieren auf der Idee, Anteile eines Ganzen wegzunehmen oder miteinander zu vergleichen. Eggharter (2013, S. 19f.) erläutert, dass die Einführung der Subtraktion zunächst mithilfe von alltagsnahen Situationen erfolgen sollte, zum Beispiel durch Aufgaben wie „Von einer Literflasche Mineralwasser fehlt ein Viertel. Wie viel Inhalt hat die Flasche noch?“ (ebd.) Das Verständnis entwickelt sich schrittweise von der enaktiven zur ikonischen und schließlich zur symbolischen Ebene durch konkrete Visualisierungen, wie mit Flaschen, Torten oder Flächen. Die Subtraktion kann auf dem Zahlenstrahl auch als Rückwärtsgehen dargestellt werden, was den Zahlaspekt hervorhebt und den Übergang zu abstrakteren Darstellungen erleichtert.

Rieger (2016, S. 37f.) betont, dass die Subtraktion, wie die Addition, zu Beginn anschaulich und handlungsorientiert erlernt werden sollte. Das Wegnehmen eines Bruchs von einem anderen beinhaltet das Entfernen eines Teilstücks, was den Schüler*innen eine gemeinsame Unterteilung automatisch vor Augen führt. Wenn man von einem halben Meter ein Drittel Meter abzieht, ergibt sich durch die erforderliche Unterteilung in Sechstel sofort ein gemeinsamer Nenner. Diese Methode verdeutlicht,

dass das Verständnis für die Subtraktion zunächst aus konkreten Handlungen erwächst und danach in symbolische Rechenoperationen überführt wird. Auch Padberg (2009, S. 93–96) hebt hervor, dass die anschaulichen Methoden der Addition direkt auf die Subtraktion anwendbar sind. Er betrachtet die Subtraktion als Bestimmung von Differenzen und rät zu einer schrittweisen Abstraktion in Richtung der formalen Regel zur Bildung gemeinsamer Nenner. Der sogenannte quasikardinale Aspekt unterstützt Lernende dabei, Brüche als Zählobjekte zu verstehen: Nur Brüche mit gleichen Nennern können addiert oder subtrahiert werden, da sie dieselbe Einheit darstellen. Mit diesem Ansatz kann auch die oft vorkommende Fehlstrategie $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$ verhindert werden, die laut Padberg (2009, S. 96) zu den häufigsten Fehlern bei Subtraktionsaufgaben zählt.

Zusammenfassend zeigen Eggharter (2013), Rieger (2016) und Padberg (2009), dass die Subtraktion von Brüchen sowohl inhaltlich als auch symbolisch über die gemeinsame Unterteilung verstanden werden muss, indem sie als Wegnehmen und Vergleichen von Anteilen betrachtet wird. Eine enaktive und bildhafte Einführung, die durch Größenmodelle und Zahlengeraden unterstützt wird, bildet die Basis für ein tragfähiges Verständnis und verhindert inhaltlich falsches Rechnen.

4.3.5 Multiplikation als $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$

Beim Bruchrechnen muss für die Multiplikation eine grundlegende Änderung der Grundvorstellung vorgenommen werden, im Gegensatz zur Multiplikation natürlicher Zahlen. Bei natürlichen Zahlen wird die Multiplikation intuitiv als wiederholte Addition verstanden, während diese Vorstellung im Bereich der Brüche nur in speziellen Fällen gilt, wie bei „natürliche Zahl mal Bruch“ oder „Bruch mal natürliche Zahl“. In diesen Fällen kann das Resultat noch als wiederholtes Hinzufügen desselben Bruchteils interpretiert werden (vgl. Eggharter, 2013, S. 20).

Werden aber zwei echte Brüche miteinander multipliziert, so ist die Vorstellung von wiederholter Addition nicht mehr ausreichend. Der „Von Ansatz“, der das Produkt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ darstellt, wird hier als „ $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$ “ interpretiert. Diese Auslegung hebt den relativen Anteil hervor und trägt zu einem konzeptuell tragfähigen Verständnis der Bruchmultiplikation bei (vgl. Rieger (2016), S. 46f.; Eggharter (2013), S. 21).

Diese Vorstellung kann auf enaktiver Ebene durch Faltübungen oder Flächenmodelle entwickelt werden, zum Beispiel indem Schüler*innen $\frac{3}{4}$ auf der Grundlage von $\frac{1}{2}$ Blatt bestimmen. Dabei wird sichtbar, dass $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{2}$ gleich $\frac{3}{8}$ ist. Ebenso können Rechteckdarstellungen die ikonische Ebene unterstützen, indem das Produkt als überlappende Fläche zweier Anteile interpretiert wird. Eine visuelle Umsetzung der Formel $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Laut Padberg (2009, S. 113f.) stellt diese grundlegende Veränderung der Denkweise für Lernende eine besondere Herausforderung dar, da sie der gewohnten Vorstellung widerspricht, dass Multiplikation immer zu einer Vergrößerung führt. Studien belegen, dass eine große Anzahl von Schüler*innen nach wie vor der Überzeugung ist, jedes Produkt müsse größer als die Faktoren sein, selbst wenn sie mathematisch richtige Resultate liefern. Um derartige Fehlvorstellungen zu vermeiden, ist es erforderlich, den „Von Ansatz“ systematisch in anschaulichen Kontexten zu entwickeln und ihn mit der Vorstellung vom Flächeninhalt zu verknüpfen. Diese gestattet eine Erklärung, die auf den Inhalten basiert und erklärt, aus welchem Grund das Produkt zweier Brüche kleiner sein kann als beide Faktoren.

Nach Padberg (2009), Rieger (2016) und Eggharter (2013) ist ein tiefes Verständnis der Bruchmultiplikation nur möglich, wenn man von der operativen zur konzeptuellen Ebene übergeht. Wesentlich ist, dass die Lernenden $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$ wahrnehmen und dass die Multiplikation im Bereich der Brüche nicht immer zu einer Vergrößerung führt, sondern einen Anteil von einem anderen Anteil darstellt.

4.3.6 Division durch mehrere Zugänge

Das Teilen von Brüchen ist für Schüler*innen eine der größten konzeptionellen Umstellungen im Rahmen der Bruchrechnung. Wie Eggharter (2013, S. 22f.) betont, ist die Auffassung der Division als wiederholte Subtraktion nur in bestimmten Fällen sinnvoll, insbesondere wenn eine natürliche Zahl durch einen Bruch ohne Rest dividiert wird. Um die Division von Brüchen umfassend zu begreifen, sind zwei grundlegende Vorstellungen zentral: Zum einen die Division als Teilen (Aufteilen) und zum anderen die Division als Messen (Verteilen). Teilen wird als die Handlung verstanden, bei der eine Menge in gleich große Teile zerlegt wird, während Messen beschreibt, wie oft eine Größe in eine andere „hineinpasst“. Die Messvorstellung ist im Bereich der

Bruchzahlen besonders tragfähig, da sie das Verhältnis zwischen Dividenden und Divisor als Vergleich zweier Größen beschreibt.

Laut Rieger (2016, S. 51) ist ein grundlegender Perspektivenwechsel erforderlich, um zur Bruchdivision überzugehen. Schüler*innen müssen verstehen, dass die vertrauten Konzepte der Division aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, wie das wiederholte Abziehen oder das gleichmäßige Verteilen, nur bedingt anwendbar sind. Die Vorstellungen vom Verteilen und Messen sollten daher zunächst auf der enaktiven und ikonischen Ebene erarbeitet werden, bevor sie auf die symbolische Ebene übergehen. Dieser illustrative Zugang fördert das Verständnis der zentralen Frage beim Messen: Wie oft passt der Divisor in den Dividenden?

Laut Padberg (2009, S. 140ff.) ist die Division ein Bereich, in dem besonders viele Umbrüche in der Grundvorstellung vorkommen. Lernende müssen sich von vertrauten Überzeugungen distanzieren, wie zum Beispiel „Division verkleinert immer“ oder „eine kleinere Zahl ist nicht durch eine größere teilbar“. Diese Vorstellungen sind tief verwurzelt und stammen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, aber sie gelten nicht im Bereich der Brüche. So wird deutlich, dass bei Brüchen Divisionen in manchen Fällen vergrößern (z. B. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2$) und in anderen Fällen verkleinern können. Diese Einsicht kann nur durch gezielte Reflexion und anschauliche Kontexte, wie das Messen („Wie oft passt etwas hinein?“), vermittelt werden.

Außerdem kann die Division als Umkehrung der Multiplikation verstanden werden. Eggharter (2013, S. 23) demonstriert, dass aus der Gleichung $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$ und $\frac{c}{d} \cdot x = \frac{a}{b}$, indem man beide Seiten mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert, unmittelbar die Rechenregel $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ resultiert. Das Prinzip der Umkehrbeziehung zur Multiplikation, das vor allem für fortgeschrittene Lernende von Bedeutung ist, wird durch diese formal-mathematische Herleitung verdeutlicht.

Laut Padberg (2009) ist es notwendig, die Grenzen anschaulicher Vorstellungen bei der Bruchdivision zu akzeptieren und zu thematisieren. Bei Aufgaben wie $\frac{3}{7} : \frac{5}{8}$ sind diese nicht sinnvoll aufteilbar oder verteilbar. Nur der formale Rechenweg ist tragfähig. Wie Malle unterstreicht, „tragen formale Regeln dort weiter, wo Grundvorstellungen an ihre Grenzen stoßen“ (zit. in Padberg (2009), S. 142).

Zusammenfassend demonstrieren Eggharter (2013), Rieger (2016) und Padberg (2009), dass das Verständnis der Bruchdivision auf drei Ebenen entwickelt werden muss:

- Illustrativ über die Basisvorstellungen des Teilens und Messens,
- Reflexiv durch einen bewussten Umgang mit typischen Fehlvorstellungen,
- In formeller Weise die Ableitung der Rechenregel als Umkehroperation der Multiplikation darstellen.

Nur durch die Kombination dieser drei Zugänge können Lernende ein inhaltliches und symbolisches Verständnis für die Division von Brüchen entwickeln.

5. Fragebogen und Ergebnisse

In folgendem Kapitel werden die Ergebnisse und die Interpretation eines selbst erstellten Fragebogens zum Thema Bruchrechnen dargestellt und analysiert. Der Fragebogen wurde in fünf verschiedenen Klassen durchgeführt. Darunter zählen zwei Klassen zu der sechsten Schulstufe und drei Klassen zu der achten Schulstufe. In der achten Schulstufe wurde der Fragebogen in zwei verschiedenen Schulzweigen durchgeführt. In einer der beiden sechsten Schulstufen, bin ich selbst Lehrperson im Fach Mathematik. Die anderen Klassen werden von anderen Lehrpersonen unterrichtet.

Allgemein ist der Fragebogen folgend aufgebaut. Die erste Frage erhebt, in welche Schulstufe die Schüler*innen gehen. Zur Auswahl stehen die sechste und die achte Schulstufe. Wenn sie in die achte Schulstufe gehen, kreuzen die Schüler*innen ebenso den Zweig an. Die Auswahlmöglichkeiten sind Realgymnasium (RG), Gymnasium (G) oder wirtschaftskundliches Realgymnasium (WIKU). Ebenso wird in der Frage das Geschlecht erfragt. Die Auswahlmöglichkeiten sind männlich, weiblich und divers, wobei nur männlich und weiblich von den Proband*innen angegeben wurde.

1. Persönliche Angaben: Bitte kreuze an, was auf dich zutrifft:

• **Geschlecht:** ☐ Männlich ☐ Weiblich ☐ Divers

• **Schulstufe:** ☐ 6. Schulstufe ☐ 8. Schulstufe

Falls 8. Schulstufe: In welchen Schulzweig gehst du? ☐ RG ☐ G ☐ WIKU

In der zweiten Frage wird die Darstellung von Brüchen erfragt. Insbesondere mussten die Schüler*innen den relativen Anteil einer farbigen Fläche als Bruch angeben. Es ist nicht relevant, ob die Schüler*innen einen gekürzten Bruch, eine gemischte Zahl oder einen unechten Bruch als Antwort stehen haben.

2. Darstellung als Bruch: Stelle den relativen Anteil der farbigen Fläche jeweils als Bruch dar:

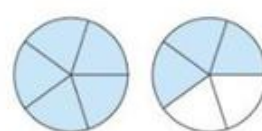
a)



b)



c)



Die dritte Frage gliedert sich in mehrere Unterpunkte. Drei Rechnungen zu jeder Rechenart mit Brüchen sind gegeben. Der erste Unterpunkt ist das Addieren mit gleichnamigen Brüchen.

3. Bruchrechnungen: Berechne folgende Aufgaben ohne Hilfsmittel (kein Taschenrechner, kein GeoGebra etc.):

a) I.) $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} =$ II.) $\frac{5}{3} + \frac{9}{3} =$ III.) $\frac{2}{12} + \frac{14}{12} =$

Im Folgenden wird die Kompetenz beim Subtrahieren gleichnamiger Brüche überprüft.

b) I.) $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} =$ II.) $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} =$ III.) $\frac{13}{12} - \frac{11}{12} =$

Danach wird die Addition ungleichnamiger Brüche abgefragt.

c) I.) $\frac{15}{3} + \frac{3}{2} =$ II.) $\frac{4}{5} + \frac{10}{4} =$ III.) $\frac{6}{4} + \frac{1}{12} =$

Als nächster Unterpunkt folgt die Subtraktion mit ungleichnamigen Brüchen.

d) I.) $\frac{14}{3} - \frac{3}{2} =$ II.) $\frac{9}{5} - \frac{2}{3} =$ III.) $\frac{25}{4} - \frac{12}{8} =$

Im weiteren Verlauf werden die Punktrechnungen abgefragt:

Als nächstes wird die Multiplikation zweier Brüche erfragt.

e) I.) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} =$ II.) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$ III.) $\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

Folgend auf die Multiplikation zweier Brüche kommt die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch.

f) I.) $2 \cdot \frac{5}{2} =$ II.) $3 \cdot \frac{2}{7} =$ III.) $5 \cdot \frac{1}{3} =$

Anschließend wird die Division zweier Brüche erfragt.

g) I.) $\frac{4}{3} : \frac{7}{2} =$ II.) $\frac{2}{5} : \frac{8}{3} =$ III.) $\frac{10}{4} : \frac{2}{8} =$

Die Division zweier Brüche wird in einer anderen Darstellungsform, nämlich den Doppelbrüchen, gefragt.

h) I.) $\frac{1}{\frac{3}{2}} =$	II.) $\frac{2}{\frac{8}{5}} =$	III.) $\frac{9}{\frac{2}{5}} =$
----------------------------------	--------------------------------	---------------------------------

Abschließend wird die Division einer natürlichen Zahl mit einem Bruch erfragt.

i) I.) $5 : \frac{2}{3} =$	II.) $2 : \frac{8}{2} =$	III.) $3 : \frac{2}{5} =$
----------------------------	--------------------------	---------------------------

Die vierte Frage handelt vom Kürzen von Brüchen.

4. Brüche kürzen: Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich:		
I.) $\frac{10}{100} =$	II.) $\frac{48}{72} =$	III.) $\frac{125}{50} =$

Die fünfte Frage handelt vom Erweitern von Brüchen.

5. Brüche erweitern: Erweitere die folgenden Brüche mit dem jeweils angegebenen Faktor ($\Rightarrow$):		
I.) $\frac{7}{5} \cdot 3 \Rightarrow$	II.) $\frac{1}{8} \cdot 4 \Rightarrow$	III.) $\frac{2}{6} \cdot 6 \Rightarrow$

Anschließend folgt eine Aufgabe, bei der die Schüler*innen eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch umwandeln sollen.

6. Schreibweise als unechter Bruch: Schreibe die folgenden gemischten Zahlen als unechte Brüche:		
I.) $1 \frac{2}{5} =$	II.) $3 \frac{2}{3} =$	III.) $5 \frac{1}{8} =$

Mit der letzten Aufgabe wird von den Schüler*innen verlangt, einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl umzuwandeln.

7. Schreibweise als gemischte Zahl: Wandle die folgenden unechten Brüche in gemischte Zahlen um:		
I.) $\frac{8}{3} =$	II.) $\frac{22}{5} =$	III.) $\frac{31}{6} =$

Auf der folgenden Seite sieht man den kompletten Fragebogen mit der Schriftart und dem kompletten Aufbau.

Fragebogen zum Thema Bruchrechnen

Erstellt von Dragan Grujić, BEd

1. Persönliche Angaben: Bitte kreuze an, was auf dich zutrifft:

• **Geschlecht:** ☐ Männlich ☐ Weiblich ☐ Divers

• **Schulstufe:** ☐ 6. Schulstufe ☐ 8. Schulstufe

Falls 8. Schulstufe: In welchen Schulzweig gehst du?

☐ RG ☐ G ☐ WIKU

2. Darstellung als Bruch: Stelle den relativen Anteil der farbigen Fläche jeweils als Bruch dar:

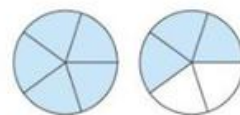
a)



b)



c)



3. Bruchrechnungen: Berechne folgende Aufgaben ohne Hilfsmittel (kein Taschenrechner, kein GeoGebra etc.):

a) I.) $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} =$

II.) $\frac{5}{3} + \frac{9}{3} =$

III.) $\frac{2}{12} + \frac{14}{12} =$

b) I.) $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} =$

II.) $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} =$

III.) $\frac{13}{12} - \frac{11}{12} =$

c) I.) $\frac{15}{3} + \frac{3}{2} =$

II.) $\frac{4}{5} + \frac{10}{4} =$

III.) $\frac{6}{4} + \frac{1}{12} =$

d) I.) $\frac{14}{3} - \frac{3}{2} =$

II.) $\frac{9}{5} - \frac{2}{3} =$

III.) $\frac{25}{4} - \frac{12}{8} =$

e) I.) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} =$

II.) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$

III.) $\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

f) I.) $2 \cdot \frac{5}{2} =$

II.) $3 \cdot \frac{2}{7} =$

III.) $5 \cdot \frac{1}{3} =$

g) I.) $\frac{4}{3} : \frac{7}{2} =$

II.) $\frac{2}{5} : \frac{8}{3} =$

III.) $\frac{10}{4} : \frac{2}{8} =$

h) I.) $\frac{1}{\frac{3}{2}} =$

II.) $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{3}} =$

III.) $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{8}} =$

i) I.) $5 : \frac{2}{3} =$

II.) $2 : \frac{8}{2} =$

III.) $3 : \frac{2}{5} =$

4. Brüche kürzen: Kürze die folgenden Brüche soweit wie möglich:

I.) $\frac{10}{100} =$

II.) $\frac{48}{72} =$

III.) $\frac{125}{50} =$

5. Brüche erweitern: Erweitere die folgenden Brüche mit dem jeweils angegebenen Faktor ($\Rightarrow$):

I.) $\frac{7}{5} \xRightarrow{\cdot 3}$

II.) $\frac{1}{8} \xRightarrow{\cdot 4}$

III.) $\frac{2}{6} \xRightarrow{\cdot 6}$

6. Schreibweise als unechter Bruch: Schreibe die folgenden gemischten Zahlen als unechte Brüche:

I.) $1\frac{2}{5} =$

II.) $3\frac{2}{3} =$

III.) $5\frac{1}{8} =$

7. Schreibweise als gemischte Zahl: Wandle die folgenden unechten Brüche in gemischte Zahlen um:

I.) $\frac{8}{3} =$

II.) $\frac{22}{5} =$

III.) $\frac{31}{6} =$

5.1 Auswertung

Im folgenden Unterkapitel werden die Ergebnisse dargestellt und interpretiert.

Insgesamt machen 102 Schüler*innen bei der Befragung mit. 50 davon gehen in die sechste Schulstufe und 52 davon in die achte Schulstufe, wobei 17 Schüler*innen im Zweig wirtschaftskundliches Realgymnasium und 35 davon im Zweig Realgymnasium mitmachen. Die Geschlechteraufteilung bei der Erhebung ist aus der beiliegenden Grafik zu entnehmen.

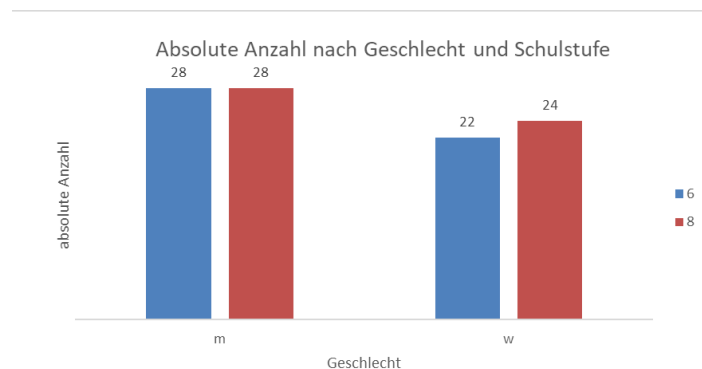


Abbildung 1: Absolute Anzahl der Schüler*innen nach Geschlecht und Schulstufe (eigene Darstellung mit Excel)

In der Aufgabe 2) wurde das Verständnis der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die Darstellung von Brüchen überprüft. Die Lernenden sollten dabei eine vorliegende Bruchdarstellung korrekt interpretieren. Es wurde angestrebt, herauszufinden, ob sich die mathematische Kompetenz im Umgang mit Bruchdarstellungen zwischen der sechsten und achten Schulstufe unterscheidet. Ebenso wird ein Unterschied der Geschlechter ausgewertet.

Die Aufgabe 2a) ist:

a)



Abbildung 2: Frage 2a)

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

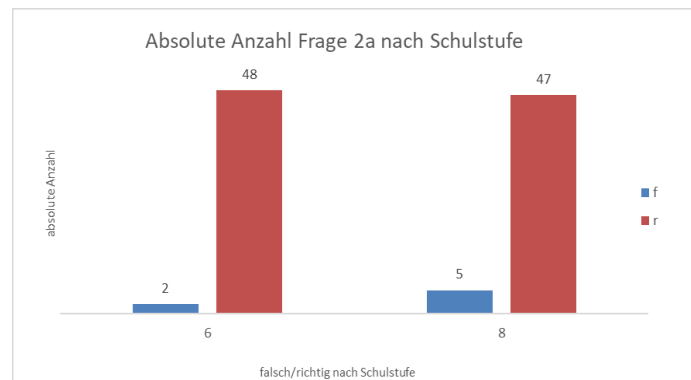


Abbildung 3: Absolute Anzahl Frage 2a) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Ein t-Test für unabhängige Stichproben wurde durchgeführt, um zu überprüfen, ob die Leistungen der Schülerinnen und Schüler der sechsten und achten Schulstufe bei der Aufgabe 2a) zur Bruchdarstellung signifikant unterschiedlich sind. Vorher wurde mit dem Levene-Test überprüft, ob die Voraussetzung der Varianzgleichheit gegeben ist. Er war signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet. Deshalb wurde der t-Test mit der Annahme ungleicher Varianzen (Welch-Test) durchgeführt.

Tabelle 1: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2a) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
2a) (Bruchdarstellung)	Student's t	1.12 ^a	100	0.133

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In Bezug auf die Aufgabe zur Bruchdarstellung wurde ein einseitiger t-Test angewandt, um zu prüfen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Resultate als die der achten Schulstufe erzielten. Das Ergebnis ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Die Annahme, dass die sechste Schulstufe bessere Leistungen erbringt, konnte nicht bestätigt werden, da der p-Wert das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ überschreitet. Der Levene-Test ergab ein signifikantes Ergebnis, was darauf hinweist, dass die Varianzen der Gruppen ungleich sind. Die Auswertung erfolgte daher auf Basis dieser Annahme.

Tabelle 2: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2a) (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	P
2a) (Bruchdarstellung)	Student's t	0.122	100	0.903

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

In Teilaufgabe 2a), die grundlegende Aspekte der Bruchdarstellung behandelt, wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, um mögliche Leistungsunterschiede zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen festzustellen. Die Ergebnisse weisen auf einen nicht signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen hin. Damit zeigt sich, dass das Geschlecht keinen signifikanten Einfluss auf die Leistung bei dieser Teilaufgabe hat. Die Ergebnisse von Mädchen und Buben waren ähnlich, was darauf hinweist, dass das Verständnis der Bruchdarstellung in dieser Altersgruppe geschlechtsunabhängig bzw. vergleichbar ausgeprägt ist.

Die Frage 2b) ist: b)



Abbildung 4: Frage 2b)

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

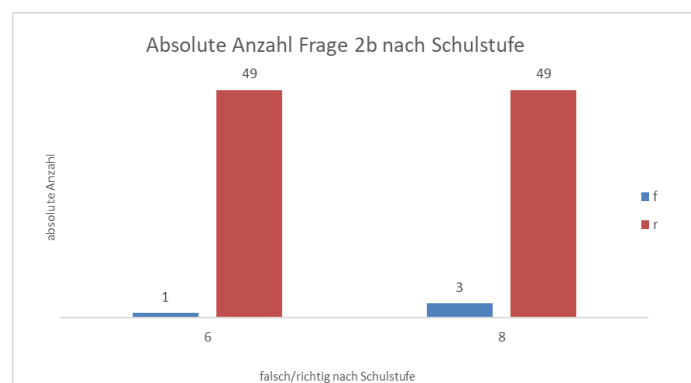


Abbildung 5: Absolute Anzahl Frage 2b) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 3: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2b) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
2b) (Bruchdarstellung)	Student's t	0.975 ^a	100	0.166

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In der Aufgabe zur Bruchdarstellung 2b) wurde ein einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, um zu untersuchen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Leistungen als die der achten Schulstufe erbrachten. Das Resultat ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Die Annahme, dass die sechste Schulstufe bessere Ergebnisse erzielt, konnte nicht bestätigt werden, da der p-Wert das Signifikanzniveau von $\alpha=0,05$ überschreitet. Der Levene-Test ergab ein signifikantes Ergebnis, was auf ungleiche Varianzen zwischen den Gruppen hindeutet. Die Auswertung erfolgte deshalb auf der Grundlage dieser Annahme.

Tabelle 4: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2b) (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
2b) (Bruchdarstellung)	Student's t	-0.199	100	0.843

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

In Teilaufgabe 2b) wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, um mögliche Unterschiede zwischen den Geschlechtern zu untersuchen. Die Untersuchung zeigte, dass es keinen signifikanten Unterschied in den Leistungen dieser Unterfrage zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen gibt. Es kann also vermutet werden, dass das Geschlecht keinen Einfluss auf die Erledigung dieser Aufgabe hatte. Die nahezu identischen Ergebnisse von Mädchen und Buben deuten auf ein vergleichbares Verständnis von Brüchen in dieser Teilaufgabe hin.

In Teilaufgabe 2c) sollten die Proband*innen wieder mit Brüchen arbeiten, jedoch in einem etwas komplexeren Kontext, der ihr Verständnis für den Zusammenhang zwischen verschiedenen Darstellungsformen von Brüchen überprüft.

Die Aufgabe 2c) ist:

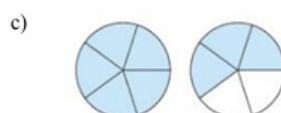


Abbildung 6: Frage 2c)

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

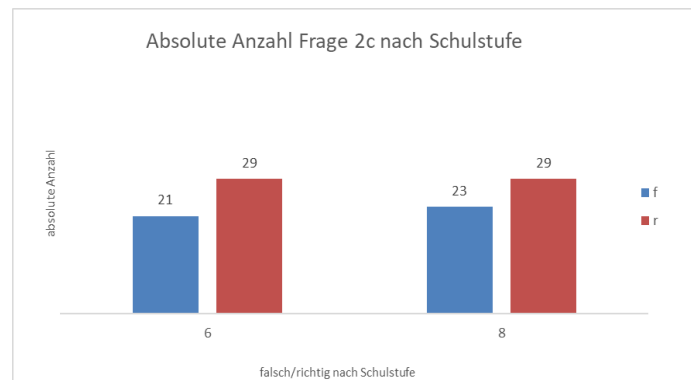


Abbildung 7: Absolute Anzahl Frage 2c) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 5: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2c) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
2c) (Bruchdarstellung)	Student's t	0.225	100	0.411

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In Aufgabe 2c) wurde ein einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben angewendet, um zu untersuchen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Ergebnisse als die der achten Schulstufe erzielten. Es wurde kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen festgestellt.

Die Annahme, dass die Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Leistungen erbringen, konnte nicht bestätigt werden, da der p-Wert das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ überschreitet.

Tabelle 6: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2c (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
2c) (Bruchdarstellung)	Student's t	-0.861	100	0.391

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

In der Teilaufgabe 2c), welche das Verständnis von Brüchen in komplexeren Anwendungssituationen evaluierte, wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben zwischen den männlichen und weiblichen Schüler*innen durchgeführt. Die Resultate ergaben keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Es kann also zusammengefasst werden, dass das Geschlecht auch bei dieser Aufgabe keinen Einfluss auf die Leistung hat. Die beiden Gruppen erreichten ähnliche

Resultate, was darauf hindeutet, dass ihr Verständnis der mathematischen Konzepte in diesem Teilbereich vergleichbar ist.

In der Aufgabe 3) wurde das Verständnis der Schülerinnen und Schüler in Bezug auf die vier Grundrechnungsarten mit Brüchen überprüft. Die Lernenden sollten dabei verschiedene Bruchrechnungen berechnen. Es wurde angestrebt, herauszufinden, ob sich die mathematische Kompetenz im Umgang mit Bruchrechnen zwischen der sechsten und achten Schulstufe unterscheidet. Ebenso wird ein Unterschied der Geschlechter ausgewertet.

Die Frage 3) wird in verschiedenen Unterfragen gegliedert. Jede Unterfrage stellt eine Rechenart dar und wird in zusätzliche drei Unterfragen geteilt. Unterpunkt a) fragt das Addieren zweier gleichnamiger Brüche.

Frage a) I.): $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

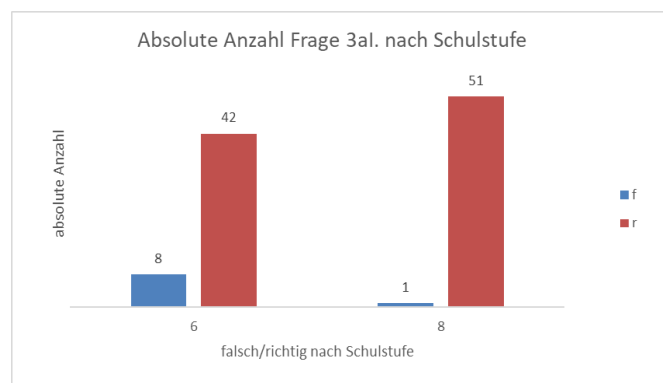


Abbildung 8: Absolute Anzahl Frage 3a) I.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 7: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) I.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3a) I.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-2.56 ^a	100	0.994

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In Teilaufgabe 3a) I.) wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben mit einseitiger Hypothese ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) durchgeführt. Das Ergebnis des Tests war ein t-Wert von -2,56 mit 100 Freiheitsgraden und ein p-Wert von 0,994. Mit dem p-Wert, der weit über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ liegt, ist es nicht möglich, einen signifikanten

Unterschied zwischen den Leistungen der sechsten und achten Schulstufe festzustellen. Wegen des Levene-Tests, der abermals eine signifikante Verletzung der Varianzgleichheit ($p < 0,05$) offenbarte, wurde bei der Auswertung die Testvariante für ungleiche Varianzen verwendet. Der negative t-Wert deutet zwar an, dass die Schüler*innen der sechsten Schulstufe möglicherweise etwas bessere Ergebnisse erzielt haben könnten, aber die statistische Evidenz ist nicht ausreichend, um diese Annahme zu bestätigen.

Didaktisch betrachtet handelt es sich bei dieser Teilaufgabe um eine Aufgabe, die für beide Schulstufen ein vergleichbares Niveau aufweist. Es ist denkbar, dass die Addition gleichnamiger Brüche eine Fähigkeit ist, die auch in der achten Schulstufe noch gut abrufbar bleibt, da sie zu den Basiskompetenzen gehört, die im Unterricht schon frühzeitig automatisiert werden.

Frage 3a) II.): $\frac{5}{3} + \frac{9}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

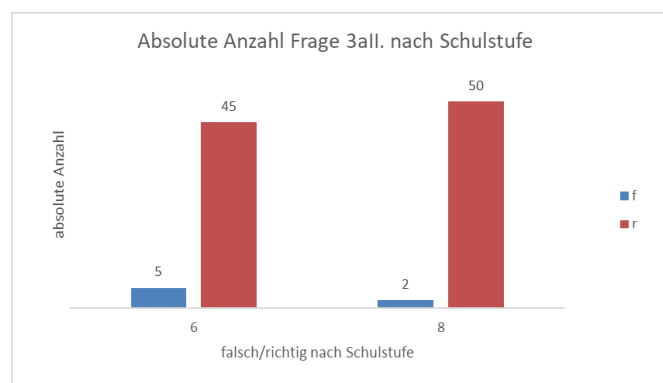


Abbildung 9: Absolute Anzahl Frage 3a) II.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 8: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) II.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3a) II.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.23 ^a	100	0.888

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In Teilaufgabe 3a) II.) wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben mit einseitiger Testung ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) durchgeführt. Die Testergebnisse zeigten einen t-Wert von $-1,23$ bei 100 Freiheitsgraden und einen p-Wert von 0,888.

Mit einem p-Wert, der das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ deutlich übersteigt, ist festzustellen, dass kein signifikanter Unterschied zwischen den Leistungen der Proband*innen in beiden Schulstufen besteht. Der Levene-Test ergab erneut ein signifikantes Ergebnis ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Varianzhomogenität hinweist. Daher wurde die Testversion mit ungleichen Varianzen verwendet. Den Resultaten ist zu entnehmen, dass in dieser Aufgabe keine der beiden Schulstufen signifikant bessere Leistungen erbrachte. Sowohl die eine als auch die andere Gruppe scheinen bei dieser Art von Rechenoperation über ähnliche Fähigkeiten zu verfügen.

Frage 3a) III.): $\frac{2}{12} + \frac{14}{12} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

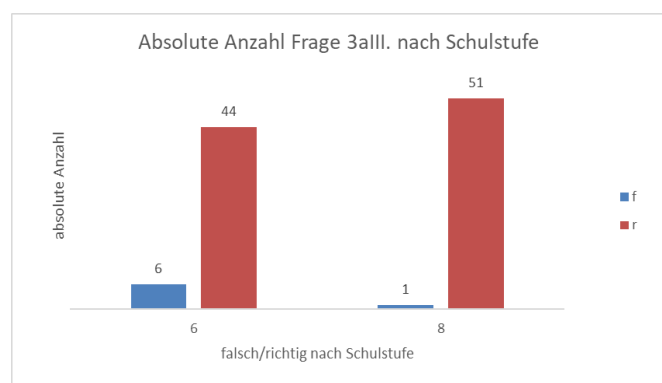


Abbildung 10: Absolute Anzahl Frage 3a) III.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 9: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) III.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3a) III.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-2.03 ^a	100	0.978

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In Teilaufgabe 3a) III.) wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben mit einseitiger Fragestellung durchgeführt, um zu testen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Leistungen als die der achten Schulstufe erzielen. Die Testergebnisse zeigten einen t-Wert von $-2,03$ bei 100 Freiheitsgraden und einen p-Wert von $0,978$. Der Unterschied ist nicht signifikant, da der p-Wert das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ erheblich übersteigt. Somit kann die Nullhypothese,

dass die Mittelwerte der beiden Schulstufen identisch sind, nicht verworfen werden. Der Levene-Test ($p < 0,05$) zeigt signifikante Ergebnisse, was erneut auf eine Verletzung der Varianzgleichheit hinweist. Daher wurde der Test für ungleiche Varianzen verwendet. Trotz des negativen t-Werts, der darauf hindeutet, dass die Schüler*innen der sechsten Schulstufe etwas bessere Ergebnisse erzielt haben, ist diese Differenz statistisch nicht signifikant belegt. Es kann also festgehalten werden, dass es in dieser Teilaufgabe keine signifikanten Leistungsunterschiede zwischen den Schulstufen gibt.

Tabelle 10: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3a) I.), II.) und III.) (Addition gleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3a) I.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.655	100	0.514
3a) II.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.451 ^a	100	0.150
3a) III.) (Addition gleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.658	100	0.512

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Um potenzielle geschlechtsspezifische Unterschiede bei der Addition von Brüchen mit gleichen Nennern zu analysieren, wurde ein t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt. Es wurde überprüft, ob die Mittelwerte der Leistungen von weiblichen und männlichen Proband*innen signifikant voneinander abweichen ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$). Bei einer Teilaufgabe war der Levene-Test signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Varianzgleichheit hinweist. In der Analyse wurden daher die Werte des t-Tests für ungleiche Varianzen berücksichtigt.

Die Ergebnisse zeigen, dass keine der drei Teilaufgaben einen signifikanten Unterschied zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen aufweist (alle $p > 0,05$). Frage 3a) II.) zeigt eine leichte, nicht signifikante Tendenz zugunsten der Mädchen. Die Hypothese, dass die Leistungen im Bereich der Addition gleichnamiger Brüche zwischen den Geschlechtern variieren, kann damit nicht bestätigt werden. Obwohl die t-Werte mit negativem Vorzeichen im Allgemeinen darauf hindeuten, dass die Mädchen möglicherweise etwas bessere Ergebnisse erzielt haben, sind diese Unterschiede statistisch nicht signifikant. Daher kann die Annahme getroffen werden, dass die Fähigkeit zur Addition von Brüchen mit gleichen Nennern unabhängig vom Geschlecht erworben und genutzt wird.

In der Frage 3b) wird die Subtraktion zweier gleichnamiger Brüche erfragt.

Frage 3b) I.): $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt. Hier gibt es auch nicht beantwortete Fragen und somit ist in der Grafik eine dritte Kategorie mit 0 gekennzeichnet.

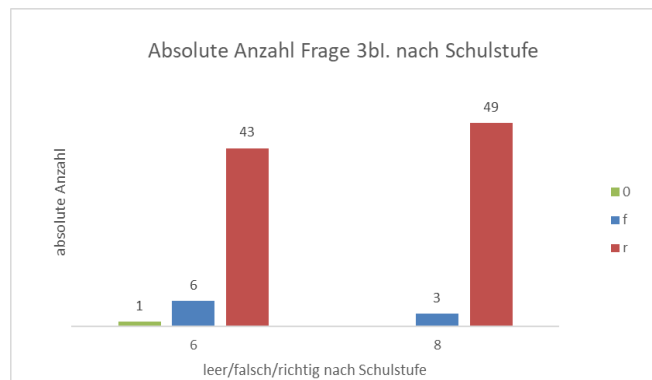


Abbildung 11: Absolute Anzahl Frage 3b) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 11: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) I.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3b) I.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.40 ^a	100	0.917

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Wie das Ergebnis zeigt, ist der Unterschied zwischen den beiden Schulstufen nicht signifikant ($p = 0,917$). Weil der t-Wert negativ ist, deutet das Ergebnis sogar tendenziell auf leicht bessere Leistungen der achten Schulstufe hin, was nicht den ursprünglichen Erwartungen entspricht. Dieser Unterschied hat jedoch keine statistische Bedeutung, was bedeutet, dass er auf Zufall zurückzuführen sein könnte. Die gerichtete Hypothese ($\mu_6 > \mu_8$) wird bei dieser Frage damit nicht bestätigt.

Frage 3b) II.): $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

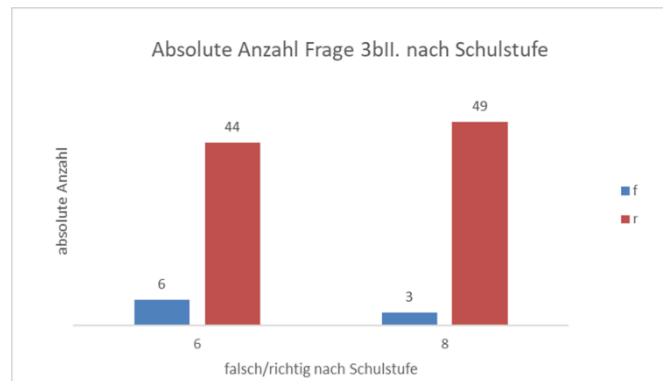


Abbildung 12: Absolute Anzahl Frage 3b) II.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 12: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) II.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3b) II.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.10 ^a	100	0.864

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Mit einem p-Wert von 0,864, der sehr hoch ist, wird deutlich, dass die Leistungen in der sechsten und achten Schulstufe keinen signifikanten Unterschied aufweisen. Der negative t-Wert deutet zwar auf eine leicht höhere Durchschnittsleistung der achten Schulstufe hin, doch ist dieser Unterschied statistisch nicht signifikant. Damit wird die aufgestellte Hypothese, dass die sechste Schulstufe signifikant bessere Ergebnisse erzielt, nicht bestätigt.

Frage 3b) III.): $\frac{13}{12} - \frac{11}{12} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen und falschen Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

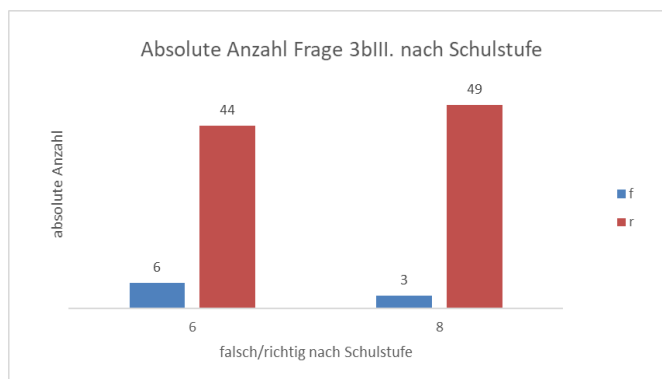


Abbildung 13: Absolute Anzahl Frage 3b) III.) richtig bzw. falsch

Tabelle 13: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3b) III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.10 ^a	100	0.864

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Mit einem p-Wert von 0,864, der weit über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ liegt, muss die gerichtete Alternativhypothese (H_a) verworfen werden.

Dies bedeutet, dass es keinen signifikanten Leistungsunterschied gibt, der zugunsten der sechsten Schulstufe spricht. Im Gegensatz dazu deutet der negative t-Wert auf eine leichte, statistisch nicht signifikante Tendenz hin, dass die achte Schulstufe möglicherweise etwas bessere Ergebnisse erzielt hat.

Tabelle 14: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3b) I.), II.) und III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3b) I.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	0.338	100	0.736
3b) II.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	0.738	100	0.463
3b) III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche)	Student's t	0.738	100	0.463

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

Ebenfalls wurde bei Frage 3) untersucht, ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Leistungen von männlichen und weiblichen Schüler*innen bei Aufgaben

zur Subtraktion gleichnamiger Brüche gibt. Die Hypothese, dass keine systematischen Leistungsunterschiede zwischen den Geschlechtern bestehen, wurde dabei geprüft. In allen drei Fällen liegen die p-Werte deutlich über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$. Das bedeutet, dass es keine wesentlichen Leistungsunterschiede zwischen weiblichen und männlichen Schülern gibt. Die positiven t-Werte weisen zwar auf eine minimale Tendenz hin, dass weibliche Schülerinnen möglicherweise etwas bessere Ergebnisse erzielt haben, jedoch sind diese Unterschiede statistisch nicht signifikant.

In der Frage 3c) wird die Addition zweier ungleichnamiger Brüche erfragt.

Frage 3c) I.): $\frac{15}{3} + \frac{3}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

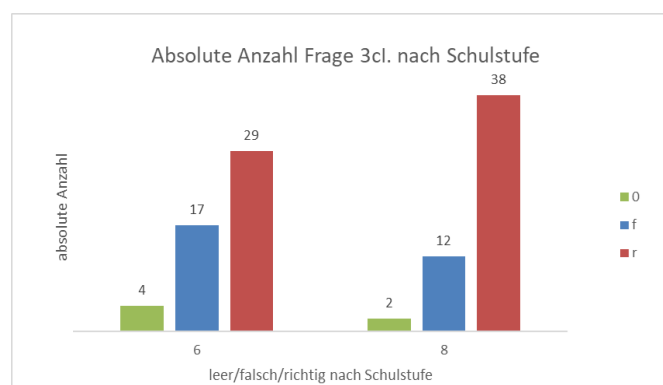


Abbildung 14: Absolute Anzahl Frage 3c) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 15: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) I.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3c) I.) (Addition ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-1.61 ^a	100	0.944

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet

Mit einem p-Wert von 0,944, der das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ deutlich übersteigt, ist eine Bestätigung der gerichteten Hypothese ($\mu_6 > \mu_8$) nicht möglich. Im Gegensatz dazu deutet der negative t-Wert auf eine geringfügig bessere Leistung der achten Schulstufe hin, doch dieser Unterschied ist statistisch irrelevant. Es gibt also keine wesentlichen Unterschiede zwischen den Schulstufen, was die Addition ungleichnamiger Brüche betrifft.

Frage 3c) II.): $\frac{4}{5} + \frac{10}{4} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

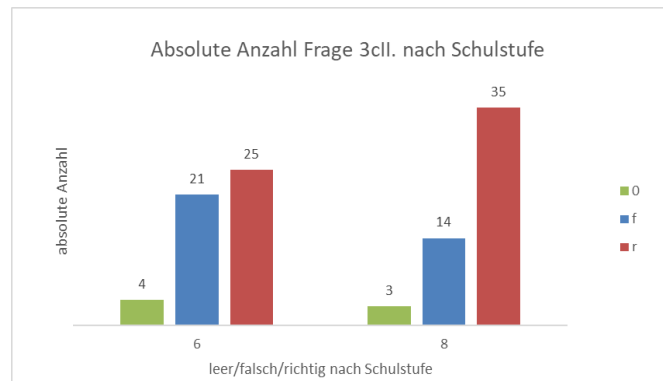


Abbildung 15: Absolute Anzahl Frage 3c) II.) leer, richtig bzw. falsch

Tabelle 16: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) II.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3c) II.) (Addition unterschiedlicher Nenner)	Student's t	-1.79 ^a	100	0.961

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Der p-Wert von 0,961 ist deutlich höher als $\alpha = 0,05$, was zur Folge hat, dass die gerichtete Hypothese nicht bestätigt wird. Vielmehr zeigt das negative t, dass es eine (geringe) Neigung zum Vorteil der älteren Schüler*innen gibt. Dieser Richtungsunterschied ist allerdings statistisch irrelevant.

Frage 3c) III.): $\frac{6}{4} + \frac{1}{12} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

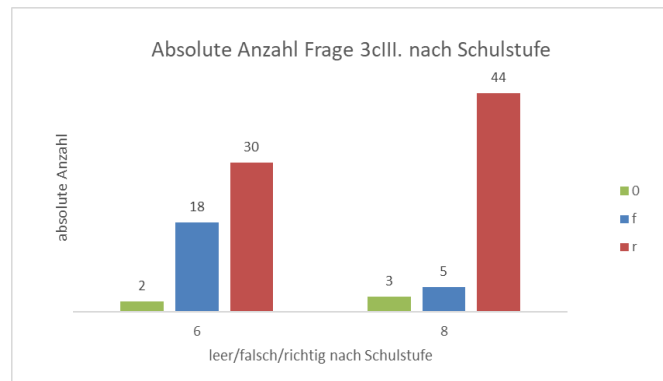


Abbildung 16: Absolute Anzahl Frage 3c) III.) leer, richtig bzw. falsch

Tabelle 17: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) III.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3c) III.) (Addition unterschiedlicher Nenner)	Student's t	-2.87 ^a	100	0.997

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Da das Ergebnis nicht signifikant war, gibt es keinen Beleg dafür, dass die sechste Schulstufe in diesem Aufgabentyp überlegen ist. Vielmehr weist der negative t-Wert darauf hin, dass die Leistungen in der achten Schulstufe tendenziell besser waren, was durch den Lernfortschritt und die zunehmende mathematische Reife erklärbar ist.

Tabelle 18: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3c) I.), II.) und III.) (Addition ungleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3c) I.) (Addition ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.505	100	0.615
3c) II.) (Addition ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.424	100	0.672
3c) III.) (Addition ungleichnamiger Brüche)	Student's t	0.277	100	0.782

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

Bei den Aufgaben 3c) zur Addition ungleichnamiger Brüche gibt es keinen signifikanten Unterschied zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen. Für alle Teilaufgaben ergaben die t-Tests keine statistisch signifikanten Werte. Die Mittelwerte waren in allen Fällen sehr ähnlich, was darauf hindeutet, dass beide Geschlechter

vergleichbare Leistungen bei der Addition ungleichnamiger Brüche erbrachten. Es kann also gefolgert werden, dass in diesem Themenbereich kein Leistungsunterschied zwischen den Geschlechtern festzustellen ist.

In der Frage 3d) wird die Subtraktion zweier ungleichnamiger Brüche erfragt.

Frage 3d) I.): $\frac{14}{3} - \frac{3}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

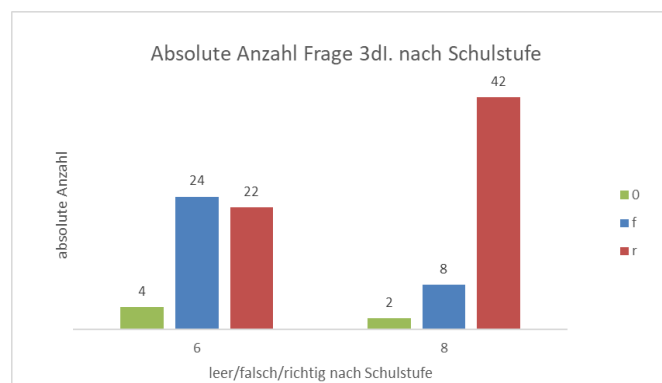


Abbildung 17: Absolute Anzahl Frage 3d) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 19: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) I.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

	Statistik	df	p
3d) I.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t		
	-4.11 ^a	100	1.000

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Der p-Wert ($p = 1,000$) überschreitet das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ deutlich. Daher ist der Unterschied zwischen den Leistungen der Schüler*innen der sechsten und achten Schulstufe nicht statistisch signifikant. Damit kann die gerichtete Hypothese, dass Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Leistungen erbringen als jene der achten Schulstufe, nicht bekräftigt werden. Im Gegenteil zeigten hier die älteren Schüler*innen ein signifikant besseres Ergebnis als die jüngeren Schüler*innen.

Frage 3d) II.): $\frac{9}{5} - \frac{2}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

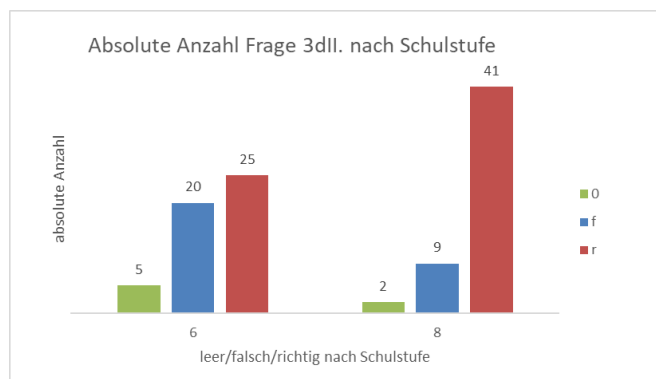


Abbildung 18: Absolute Anzahl Frage 3d) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 20: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) II.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3d) II.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-3.17 ^a	100	0.999

Anmerkung. $H_a \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Der Unterschied ist nicht statistisch signifikant, da der p-Wert ($p = 0,999$) weit über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ liegt. Das bedeutet: Die gerichtete Hypothese, dass die jüngeren Schüler*innen bessere Ergebnisse erzielen als ältere Schüler*innen, kann nicht akzeptiert werden. Im Gegenteil zeigten hier die älteren Schüler*innen ein signifikant besseres Ergebnis als die jüngeren Schüler*innen.

Frage 3d) III.): $\frac{25}{4} - \frac{12}{8} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

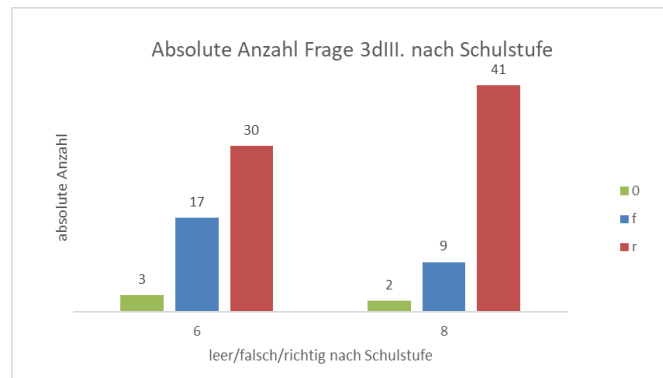


Abbildung 19: Absolute Anzahl Frage 3d) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 21: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3d) III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-2.09 ^a	100	0.981

Anmerkung. $H_a \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Der Unterschied ist nicht statistisch signifikant, da der p-Wert von $p = 0,981$ über dem Signifikanzniveau liegt. Somit liegen bei dieser Frage ebenfalls keine statistisch signifikanten Belege dafür vor, dass die Leistungen der sechsten Schulstufe besser sind als die der achten Schulstufe. Im Gegenteil zeigten hier die älteren Schüler*innen ein signifikant besseres Ergebnis als die jüngeren Schüler*innen.

Tabelle 22: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3d) I.), II.) und III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3d) I.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t	0.464	100	0.644
3d) II.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.730	100	0.467
3d) III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche)	Student's t	-0.437	100	0.663

Anmerkung. $H_a \mu_w \neq \mu_m$

Der p-Wert in allen drei Teilaufgaben liegt deutlich über $\alpha = 0,05$, was darauf hinweist, dass es keine signifikanten Unterschiede zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen gibt. Zudem liegen die t-Werte im sehr niedrigen Bereich (von $-0,73$ bis $+0,46$), was darauf hindeutet, dass die Mittelwerte der beiden Gruppen beinahe gleich

sind. Es gibt somit keinen Hinweis auf systematische Leistungsunterschiede zwischen den Geschlechtern bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche.

In der Frage 3e) wird die Multiplikation zweier Brüche erfragt.

Frage 3e) I.): $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

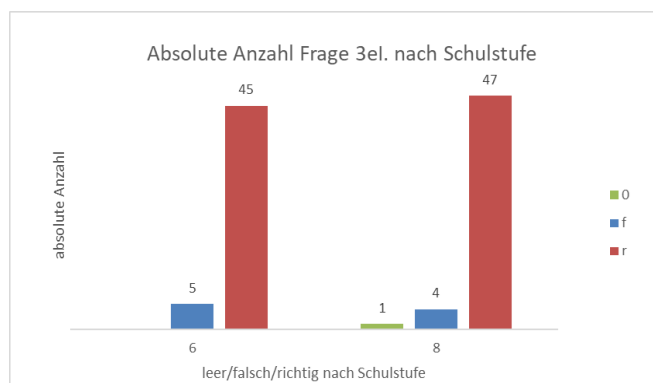


Abbildung 20: Absolute Anzahl Frage 3e) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 23: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) I.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3e) I.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	-0.0647	100	0.526

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Der Vergleich der Leistungen beider Gruppen in der Aufgabe, zwei Brüche zu multiplizieren, ergab mittels eines t-Tests für unabhängige Stichproben keinen signifikanten Unterschied ($t(100) = -0,065$, $p = 0,526$). Selbst unter der gerichteten Annahme, dass Schüler*innen der sechsten Schulstufe höhere Testergebnisse aufweisen, konnte ein derartiger Effekt aufgrund der Daten nicht nachgewiesen werden. Es kann also gezeigt werden, dass die Schüler*innen in Bezug auf die Multiplikation von Brüchen in beiden Schulstufen in etwa das gleiche Niveau zeigen.

Frage 3e) II.): $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

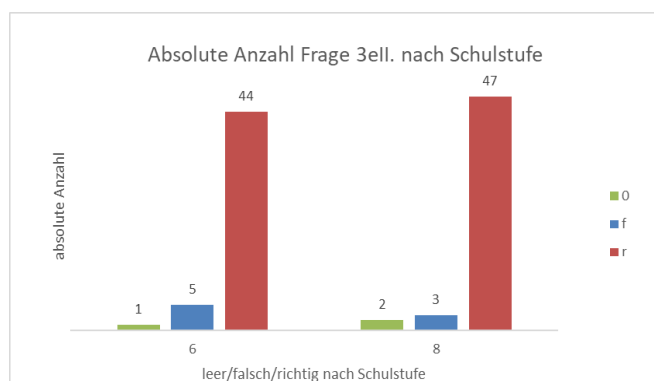


Abbildung 21: Absolute Anzahl Frage 3e) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 24: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) II.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3e) II.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	-0.385	100	0.649

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Der p-Wert ist deutlich höher als $\alpha = 0,05$, was bedeutet, dass der Unterschied zwischen der sechsten und der achten Schulstufe nicht signifikant ist. Der t-Wert in negativer Richtung deutet darauf hin, dass die älteren Schüler*innen tendenziell geringfügig bessere Ergebnisse erzielten. Dieser Unterschied ist jedoch statistisch irrelevant.

Frage 3e) III.): $\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

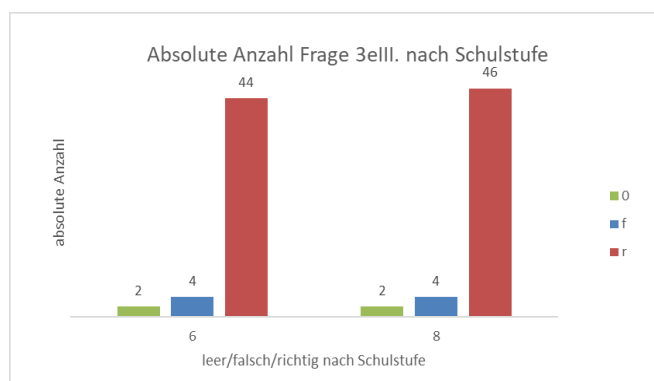


Abbildung 22: Absolute Anzahl Frage 3e) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 25: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) III.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3e) III.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	-0.0716	100	0.528

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Das Resultat ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen ($t(100) = -0,072$, $p = 0,528$). Damit konnte die Vermutung, dass die jüngeren Schüler*innen überlegen sind, nicht bekräftigt werden. Die vergleichbaren Ergebnisse der beiden Schulstufen deuten darauf hin, dass die Fähigkeit, zwei Brüche zu multiplizieren, schon früh erlernt und stabil bewahrt wird.

Tabelle 26: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3e) I.), II.) und III.) (Multiplikation zweier Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3e) I.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	-0.9922 ^a	100	0.323
3e) II.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	-0.0249	100	0.980
3e) III.) (Multiplikation zweier Brüche)	Student's t	0.2519	100	0.802

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Ein t-Test für unabhängige Stichproben wurde durchgeführt, um mögliche Geschlechterunterschiede bei der Multiplikation zweier Brüche zu überprüfen. In allen drei Aufgaben war der Unterschied zwischen weiblichen und männlichen Proband*innen nicht signifikant. Es kann angenommen werden, dass die Fähigkeit, Brüche zu multiplizieren, geschlechtsunabhängig ist. Die beiden Gruppen erreichten vergleichbare Resultate, was darauf hindeutet, dass ihr Verständnis der mathematischen Konzepte in diesem Bereich gleichwertig ist. Trotz des Hinweises des Levene-Tests auf ungleiche Varianzen bleibt die Interpretation der Ergebnisse unverändert, da auch unter dieser Voraussetzung keine signifikanten Unterschiede beobachtet wurden.

In der Frage 3f) wird die Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch erfragt.

Frage 3f) I.): $2 \cdot \frac{5}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

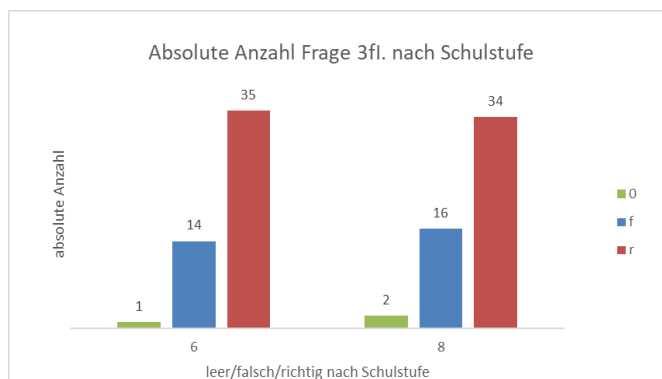


Abbildung 23: Absolute Anzahl Frage 3f) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 27: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) I.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3f I.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch)	Student's t	0.494	100	0.311

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Der t-Wert liegt bei 0,494 und der p-Wert bei 0,311. Es besteht somit kein wesentlicher Unterschied zwischen den Mittelwerten der sechsten und achten Schulstufe. Die Hypothese, dass die jüngeren Schüler*innen beim Multiplizieren einer natürlichen Zahl mit einem Bruch bessere Resultate erzielen als älteren Schüler*innen, fand demnach keine Bestätigung.

Frage 3f) II.): $3 \cdot \frac{2}{7} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

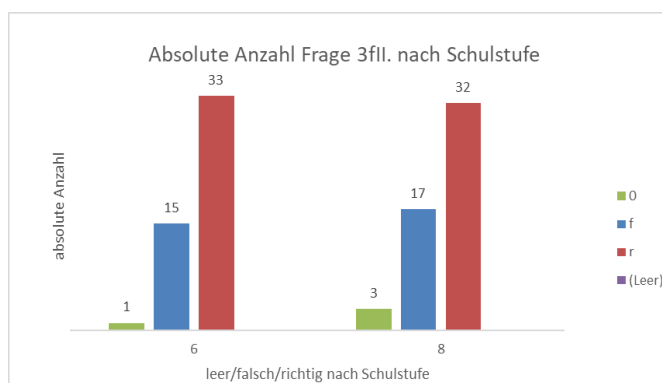


Abbildung 24: Absolute Anzahl Frage 3f) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 28: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) II.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3f) II.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch)	Student's t	0.677	100	0.250

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Bei der Aufgabe 3f) II.) lieferte der t-Test für unabhängige Stichproben einen t-Wert von 0,677 und einen p-Wert von 0,250. Der Unterschied zwischen den Mittelwerten der sechsten und achten Schulstufe ist nicht signifikant, da der p-Wert das übliche Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ übersteigt. Dies bedeutet, dass die Schüler*innen beider Schulstufen bei der Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch vergleichbar gute Resultate erzielten.

Frage 3f) III.): $5 \cdot \frac{1}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

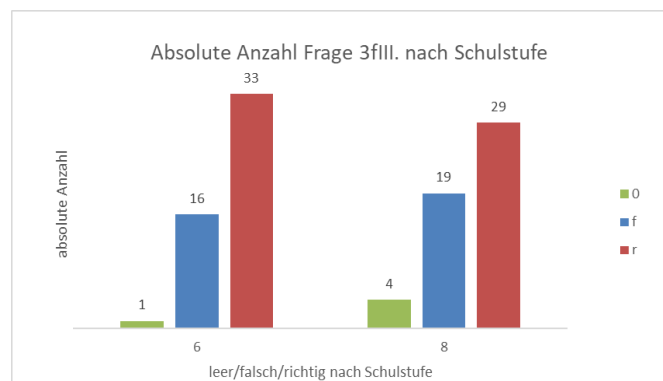


Abbildung 25: Absolute Anzahl Frage 3f) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 29: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) III.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3f) III.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch)	Student's t	1.05	100	0.147

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Für diese Teilaufgabe ergab der t-Test für unabhängige Stichproben einen t-Wert von 1,05 und einen p-Wert von 0,147. Der p-Wert ist größer als $\alpha = 0,05$, was bedeutet, dass kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Schulstufen besteht. Damit kann die gerichtete Hypothese, dass Schüler*innen der

sechsten Schulstufe signifikant bessere Ergebnisse erzielen als jene der achten Schulstufe, nicht bestätigt werden.

Tabelle 30: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3f) I.), II.) und III.) (Multiplikation natürlicher Zahl mit Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3f) I.) (Multiplikation natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.471	100	0.639
3f) II.) (Multiplikation natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.730	100	0.467
3f) III.) (Multiplikation natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.794	100	0.429

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

In Bezug auf die drei Teilaufgaben, in denen eine natürliche Zahl mit einem Bruch multipliziert werden sollte, wurden t-Tests für unabhängige Stichproben zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen durchgeführt.

Die Resultate deuten darauf hin, dass Mädchen und Jungen in Aufgaben, bei denen eine natürliche Zahl mit einem Bruch multipliziert werden soll, vergleichbare Leistungen zeigen. Bei dieser Aufgabenstellung ist vor allem regelgeleitetes, prozedurales Rechnen gefragt, weniger konzeptionelles Denken. Die grundlegenden Rechenverfahren sind in der Regel mechanisch erlernbar und werden oft geübt, weshalb es scheint, dass beide Geschlechter sie gleich gut beherrschen. Obwohl der t-Wert einen geringen Leistungsanstieg bei den Buben anzeigt, ist dieser nicht statistisch signifikant und kann als zufällige Schwankung gedeutet werden. Es kann also festgehalten werden, dass es in dieser Grundkompetenz keinen geschlechtsspezifischen Unterschied gibt.

In der Frage 3g) wird die Division zweier Brüche erfragt.

Frage 3g) I.): $\frac{4}{3} : \frac{7}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

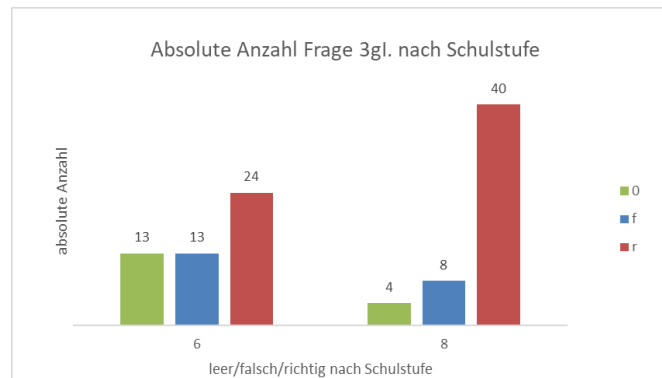


Abbildung 26: Absolute Anzahl Frage 3g) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 31: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) I.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3g) I.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-3.13 ^a	100	0.999

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Für die Aufgabe ergab der t-Test für unabhängige Stichproben einen t-Wert von $-3,13$ und einen p-Wert von $0,999$. Der p-Wert liegt deutlich über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ und somit wurde hier gezeigt, dass die älteren Schüler*innen ein signifikant besseres Ergebnis als die jüngeren Schüler*innen erzielen.

Frage 3g) II.): $\frac{2}{5} : \frac{8}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

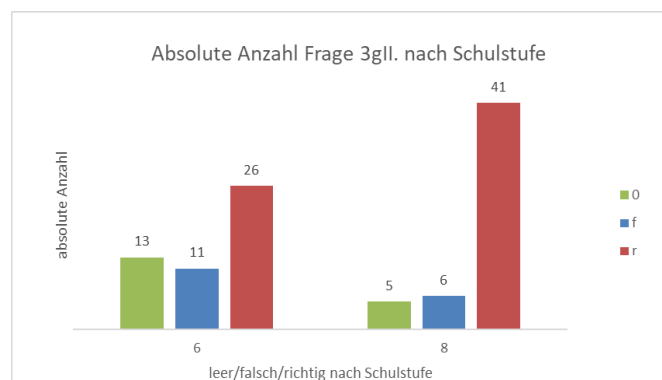


Abbildung 27: Absolute Anzahl Frage 3g) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 32: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) II.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

3g) II.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-2.95 ^a	100	0.998
-----------------------------------	-------------	--------------------	-----	-------

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Für die Aufgabe ergab der t-Test für unabhängige Stichproben einen t-Wert von $-2,95$ und einen p-Wert von $0,998$. Der Unterschied zwischen den Mittelwerten der sechsten und achten Schulstufe ist statistisch nicht signifikant. Hier zeigen die Werte, dass die älteren Proband*innen ein signifikant besseres Ergebnis als die jüngeren erzielen.

Frage 3g) III.): $\frac{10}{4} : \frac{2}{8} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

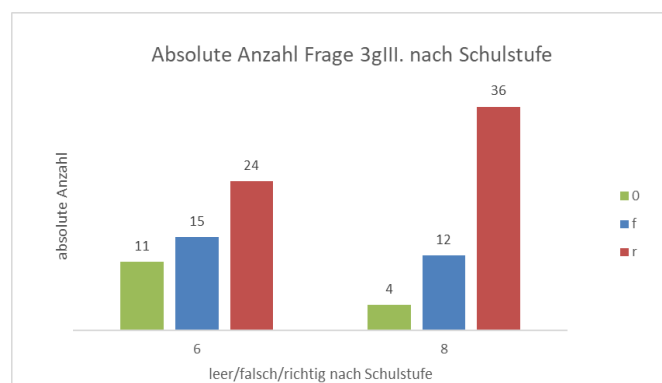


Abbildung 28: Absolute Anzahl Frage 3g) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 33: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) III.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3g) III.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-2.21 ^a	100	0.985

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Bei der Aufgabe zeigte der t-Test für unabhängige Stichproben keinen signifikanten Unterschied zwischen der sechsten und achten Schulstufe.

Trotz des Umstands, dass der Durchschnittswert der jüngeren Schüler*innen leicht höher war, ist der Unterschied statistisch irrelevant. Weil der Levene-Test signifikant ausfiel, ist die Annahme ungleicher Varianzen bei der Interpretation des Ergebnisses notwendig. Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Leistungen in dieser Aufgabe in

beiden Schulstufen als ähnlich zu bewerten sind, obwohl die absoluten Zahlen ein besseres Ergebnis der älteren Schüler*innen zeigen.

Tabelle 34: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3g) I.), II.) und III.) (Division zweier Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3g) I.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-0.761	100	0.448
3g) II.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-1.347 ^a	100	0.181
3g) III.) (Division zweier Brüche)	Student's t	-0.424	100	0.672

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Beim Aufgabentyp „Division zweier Brüche“ wurden t-Tests für unabhängige Stichproben durchgeführt, um mögliche Unterschiede zwischen den Geschlechtern zu untersuchen. Es wurden in keiner der Teilaufgaben signifikante Unterschiede zwischen männlichen und weiblichen Schüler*innen festgestellt. Damit deutet sich keine geschlechtsspezifische Leistungsdifferenz in diesem Bereich an. Insgesamt deuten die Ergebnisse darauf hin, dass männliche und weibliche Proband*innen vergleichbare Kompetenzen bei der Division von Brüchen aufweisen.

In der Frage 3h) wird die andere Darstellungsform von Divisionen zweier Brüche, nämlich der Doppelbrüche, erfragt.

Frage 3h) I.): $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

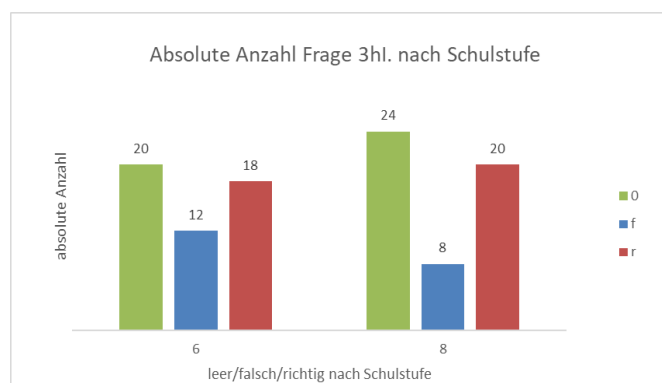


Abbildung 29: Absolute Anzahl Frage 3h) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 35: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) I.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3h) I.) (Doppelbrüche)	Student's t	-0.255	100	0.600

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Es wurde ein gerichteter t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, um zu überprüfen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe in der Aufgabe (Doppelbrüche) bessere Leistungen erbringen als diejenigen der achten Schulstufe. Aus dem Resultat geht hervor, dass die beiden Gruppen keinen signifikanten Unterschied aufweisen. Der p-Wert liegt deutlich über dem festgelegten Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, weshalb die Nullhypothese nicht verworfen werden kann. Es gibt also keinen statistischen Nachweis dafür, dass die sechste Schulstufe in dieser Aufgabenart signifikant bessere Ergebnisse erzielt.

Frage 3h) II.): $\frac{\frac{2}{8}}{\frac{5}{3}} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

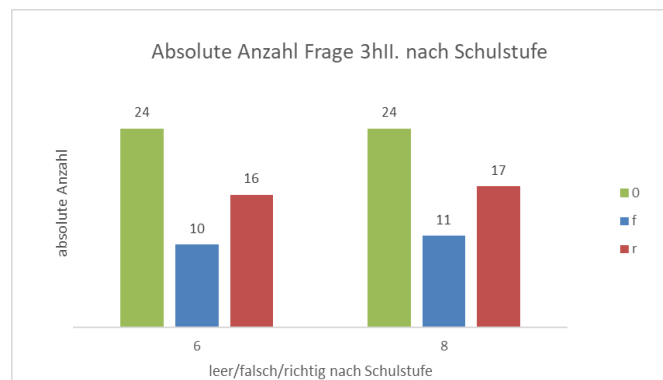


Abbildung 30: Absolute Anzahl Frage 3h) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 36: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) II.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3h) II.) (Doppelbrüche)	Student's t	-0.0740	100	0.529

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Das Resultat weist auf einen nicht signifikanten Unterschied zwischen den zwei Schulstufen hin. Der p-Wert liegt deutlich über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$,

weshalb die Nullhypothese beibehalten wird, dass kein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen besteht.

Frage 3h) III.): $\frac{9}{\frac{2}{\frac{5}{8}}} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

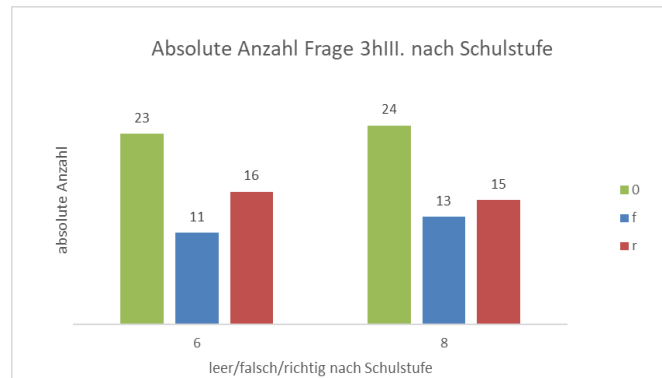


Abbildung 31: Absolute Anzahl Frage 3h) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 37: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) III.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3h) III.) (Doppelbrüche)	Student's t	0.343	100	0.366

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Die Untersuchung zeigte keinen signifikanten Unterschied zwischen den zwei Gruppen. Die Annahme, dass die jüngeren Schüler*innen bessere Leistungen erbringen, konnte somit nicht bestätigt werden. Die beiden Schulstufen erreichten ähnliche Ergebnisse, was darauf hindeutet, dass das Verständnis der erforderlichen Rechenoperationen bei Doppelbrüchen schon frühzeitig erworben wird und im Verlauf der weiteren Sekundarstufe I weitgehend konstant bleibt.

Tabelle 38: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3h) I.), II.) und III.) (Doppelbrüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3h) I.) (Doppelbrüche)	Student's t	-1.29 ^a	100	0.200
3h) II.) (Doppelbrüche)	Student's t	-1.66 ^a	100	0.101
3h) III.) (Doppelbrüche)	Student's t	-2.18 ^a	100	0.031

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Um eventuelle Geschlechterunterschiede beim Lösen von Aufgaben zu Doppelbrüchen zu kontrollieren, kam ein t-Test für unabhängige Stichproben zum Einsatz. In zwei von drei Aufgaben traten keine signifikanten Unterschiede zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen auf. In der Aufgabe 3h) III.) zeigte sich dagegen ein signifikanter Unterschied ($t(100) = -2,18$, $p = 0,031$), wobei die männlichen Schüler im Durchschnitt etwas bessere Ergebnisse erzielten. Die Levene-Tests, deren Ergebnisse signifikant sind, weisen auf ungleiche Varianzen hin. Diese wurden bei der Interpretation in Rechnung gestellt. Insgesamt deuten die Ergebnisse darauf hin, dass die Fähigkeiten im Umgang mit Doppelbrüchen größtenteils nicht vom Geschlecht abhängig sind, obwohl in einzelnen Aufgaben kleinere Unterschiede vorkommen können.

In der Frage 3i) wird die Division einer natürlichen Zahl mit einem Bruch erfragt.

Frage 3i) I.): $5 : \frac{2}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

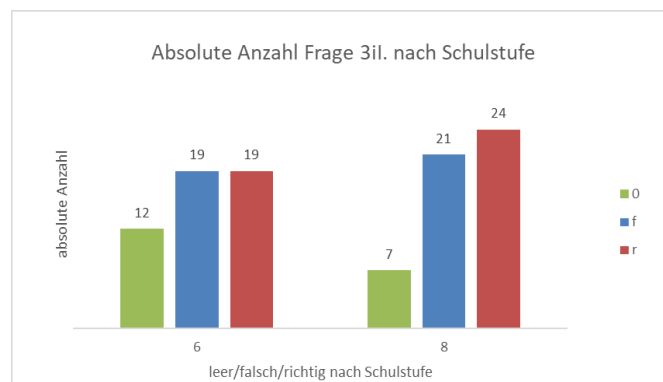


Abbildung 32: Absolute Anzahl Frage 3i) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 39: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) I.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3i) I.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.828	100	0.795

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In der Aufgabe „Division einer natürlichen Zahl und eines Bruchs“ wurde mit einem gerichteten t-Test untersucht, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Leistungen erbringen als die der achten Schulstufe. Das Resultat ergab keinen signifikanten Unterschied ($t(100) = -0,83$, $p = 0,795$). Die Hypothese, dass

die jüngeren Proband*innen höhere Leistungen aufweisen, konnte damit nicht bestätigt werden.

Frage 3i) II.): $2:\frac{8}{2} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

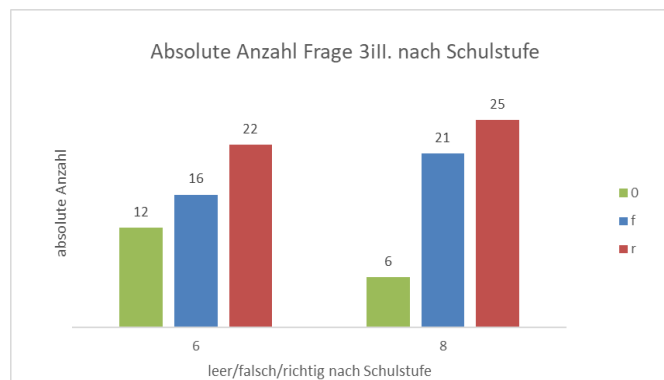


Abbildung 33: Absolute Anzahl Frage 3i) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 40: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) II.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3i) II.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.409	100	0.658

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Bei dieser Aufgabe wurde ein einseitiger t-Test angewandt, um zu untersuchen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Ergebnisse als jene der achten Schulstufe erzielen. Die Untersuchung zeigte keinen signifikanten Unterschied ($t(100) = -0,41$, $p = 0,658$). Die Annahme, dass die jüngeren Schüler*innen in dieser Teilaufgabe bessere Leistungen erbringen, konnte somit nicht bekräftigt werden. Die beiden Gruppen wiesen ein ähnliches Leistungsniveau auf, was darauf hindeutet, dass das Konzept der Division durch Brüche in beiden Schulstufen ähnlich verstanden und angewendet wird.

Frage 3i) III.): $3 : \frac{2}{5} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

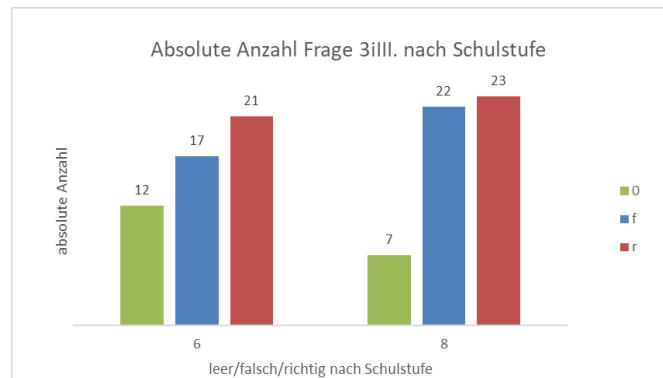


Abbildung 34: Absolute Anzahl Frage 3i) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 41: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) III.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3i) III.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-0.225	100	0.589

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Da der p-Wert weit über $\alpha = 0,05$ liegt, ist das Ergebnis nicht signifikant. Das bedeutet, dass es keinen statistisch signifikanten Unterschied gibt, der die Hypothese unterstützt, dass die sechste Schulstufe bessere Leistungen als die achte Schulstufe zeigt. Weil der t-Wert negativ ist, bedeutet dies, dass die achte Schulstufe tendenziell leicht besser abgeschnitten hat, was jedoch keinen signifikanten Unterschied ausmacht.

Tabelle 42: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3i) I.), II.) und III.) (Division natürliche Zahl und Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
3i) I.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-1.78 ^a	100	0.078
3i) II.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-1.27	100	0.206
3i) III.) (Division natürliche Zahl und Bruch)	Student's t	-2.83 ^a	100	0.006

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Den Ergebnissen zufolge bestehen in der Fähigkeit, eine natürliche Zahl durch einen Bruch zu dividieren, überwiegend keine signifikanten Unterschiede zwischen den Geschlechtern. Nur bei Teilaufgabe 3i) III.) wurde ein signifikanter Unterschied festgestellt ($p = 0,006$). Hier lagen die durchschnittlichen Leistungen weiblicher Schülerinnen über denen männlicher Schüler. Die bedeutende Differenz in einer von drei Aufgaben, kann diverse Gründe haben. Weil die ersten beiden Aufgaben identisch sind, sieht es allerdings so aus, als handele es sich nicht um einen systematischen Geschlechtsunterschied, sondern vielmehr um eine aufgabenspezifische Differenz.

In der Frage 4) handelt es sich um das Kürzen von Brüchen.

Frage 4) I.): $\frac{10}{100} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

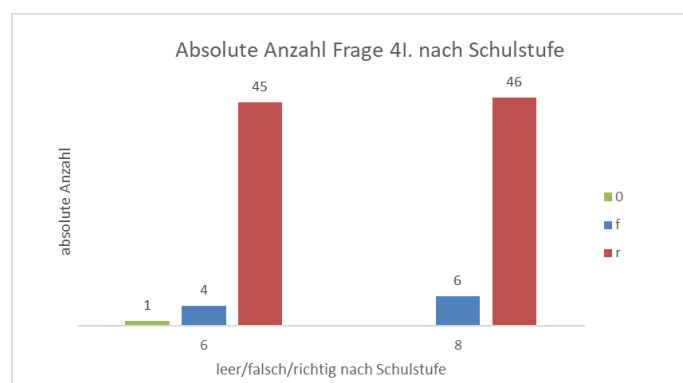


Abbildung 35: Absolute Anzahl Frage 4) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 43: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) I.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
4) I.) (Kürzen)	Student's t	0.248	100	0.402

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In der ersten Aufgabe „Kürzen von Brüchen“ wurde ein einseitiger t-Test angewandt, um zu untersuchen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Leistungen erbringen als die der achten Schulstufe. Das Ergebnis erwies sich als nicht signifikant, was darauf hindeutet, dass es keinen Unterschied zwischen den beiden Gruppen gibt. In beiden Schulstufen bestehen ein vergleichbares Verständnis und eine ähnliche Sicherheit im Kürzen von Brüchen.

Frage 4) II.): $\frac{48}{72} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

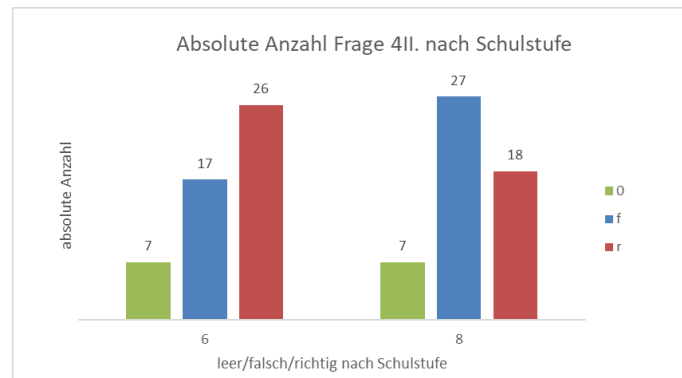


Abbildung 36: Absolute Anzahl Frage 4) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 44: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) II.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
4) II.) (Kürzen)	Student's t	1.78 ^a	100	0.039

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In der zweiten Teilaufgabe „Kürzen von Brüchen“ wurde ein einseitiger t-Test verwendet, um zu untersuchen, ob Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Leistungen als die der achten Schulstufe erzielen. Das Resultat war signifikant ($t(100) = 1,78, p = 0,039$), was darauf hindeutet, dass die jüngeren Schüler*innen beim Kürzen von Brüchen bessere Ergebnisse erzielt haben. Weil der Levene-Test eine Verletzung der Varianzhomogenität ergab, kam der Welch-Test zum Einsatz. Dieses Resultat legt die Vermutung nahe, dass das Kürzen in der sechsten Schulstufe derzeit geübt und thematisiert wird.

Frage 4) III.): $\frac{125}{50} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

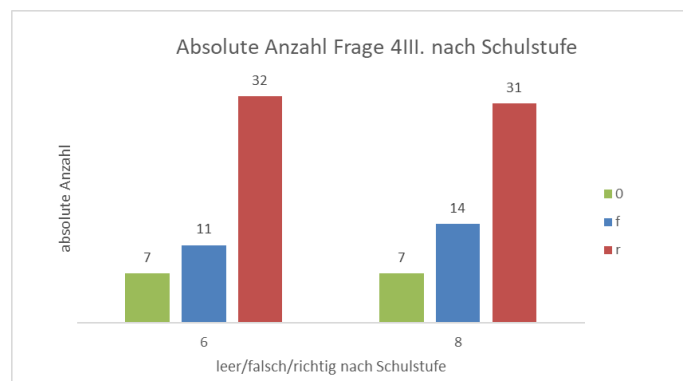


Abbildung 37: Absolute Anzahl Frage 4) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 45: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) III.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
4) III.) (Kürzen)	Student's t	0.452	100	0.326

Anmerkung. $H_a \mu_6 > \mu_8$

Die letzte Teilaufgabe zeigte im t-Test keinen signifikanten Unterschied zwischen der sechsten und achten Schulstufe. Die Resultate beider Gruppen waren vergleichbar, was darauf schließen lässt, dass das Kürzen von Brüchen als elementare mathematische Fähigkeit in beiden Jahrgangsstufen sicher beherrscht wird. Während bei der vorherigen Teilaufgabe 4) II.) ein erheblicher Unterschied zugunsten der sechsten Schulstufe festgestellt wurde, scheint diese Aufgabe ein stabileres Leistungsniveau über beide Schulstufen hinweg darzustellen. Die Resultate zeigen, dass essenzielle Vorgänge, wie das Kürzen, schon in der Unterstufe internalisiert werden und sich im weiteren Verlauf kaum noch verändern.

Tabelle 46: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 4) I.), II.) und III.) (Kürzen), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
4) I.) (Kürzen)	Student's t	-0.6616	100	0.510
4) II.) (Kürzen)	Student's t	0.0624	100	0.950
4) III.) (Kürzen)	Student's t	1.0552 ^a	100	0.294

Anmerkung. $H_a \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Im Bereich „Kürzen von Brüchen“ zeigte der Leistungsvergleich zwischen Jungen und Mädchen keine signifikanten Unterschiede. Die Ergebnisse der drei Teilaufgaben lagen alle unter dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$. Daher kann man annehmen, dass beide Geschlechter die grundlegende Rechenfertigkeit des Kürzens gleich gut beherrschen. Die Resultate untermauern die Vermutung, dass bei routinierten, algorithmischen Aufgaben keine geschlechtsspezifischen Leistungsunterschiede zu erwarten sind, da die Bearbeitung vor allem auf dem sicheren Anwenden bekannter Rechenregeln basiert und weniger von sprachlichen oder kontextuellen Faktoren abhängt.

In der Frage 5) handelt es sich um das Erweitern von Brüchen.

Frage 5) I.): $\frac{7}{5} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

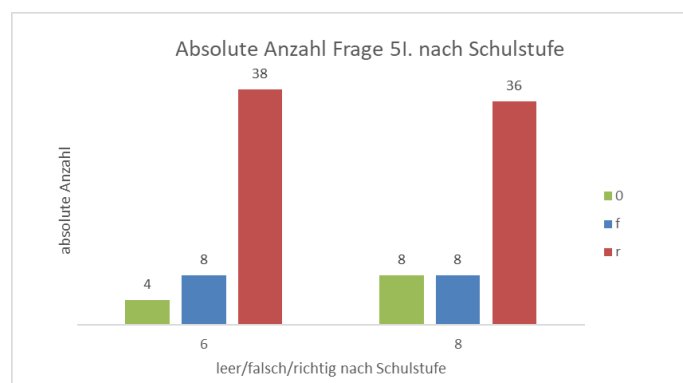


Abbildung 38: Absolute Anzahl Frage 5) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 47: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) I.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
5) I.) (Erweitern)	Student's t	0.760	100	0.224

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Im Bereich der Leistung im Erweitern von Brüchen ergab der Vergleich zwischen den beiden Schulstufen keinen signifikanten Unterschied. Trotz der Tatsache, dass die Durchschnittswerte der sechsten Schulstufe geringfügig höher waren, war dieser Unterschied statistisch irrelevant. Das Ergebnis deutet darauf hin, dass das Erweitern von Brüchen in der sechsten Schulstufe bereits ausreichend gefestigt ist und im weiteren Verlauf des Unterrichts keine signifikante Leistungssteigerung mehr zu beobachten ist.

Frage 5) II.): $\frac{1}{8} \cdot 4 \Rightarrow$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

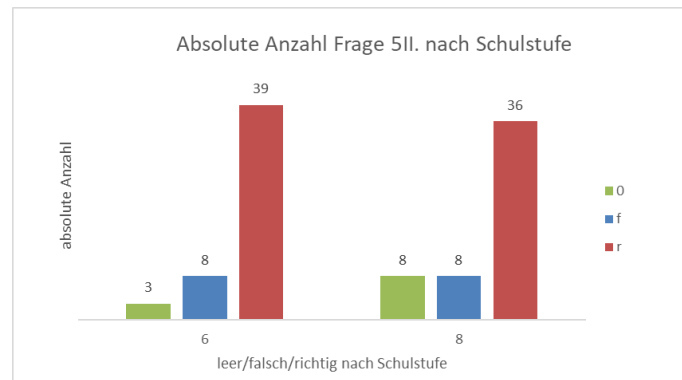


Abbildung 39: Absolute Anzahl Frage 5) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 48: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) II.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
5) II.) (Erweitern)	Student's t	0.999 ^a	100	0.320

Anmerkung. $H_a: \mu_6 \neq \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Bei der nächsten Teilaufgabe ergab der gerichtete t-Test keinen signifikanten Unterschied zwischen der sechsten und der achten Schulstufe. Trotz der Tatsache, dass die Mittelwerte der sechsten Schulstufe leicht höher waren, ist dieser Unterschied statistisch nicht signifikant. Daher kann man annehmen, dass die Fähigkeit, Brüche zu erweitern, in beiden Schulstufen auf einem ähnlichen Niveau ist.

Frage 5) III.): $\frac{2}{6} \Rightarrow$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

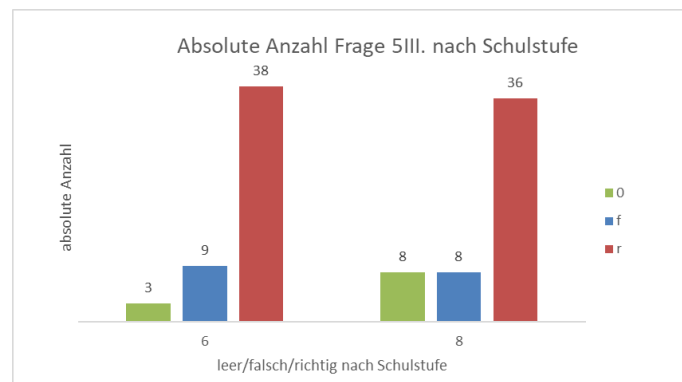


Abbildung 40: Absolute Anzahl Frage 5) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 49: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) III.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
5) III.) (Erweitern)	Student's t	0.760	100	0.224

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Die Leistungen in der letzten Teilaufgabe zum Erweitern weisen keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Schulstufe auf. Trotz der Tendenz zu einem etwas besseren Abschneiden der jüngeren Schüler*innen ist dieser Unterschied statistisch irrelevant. Dieses Resultat lässt darauf schließen, dass das Erweitern von Brüchen schon in der sechsten Schulstufe sicher verankert ist und in den darauffolgenden Schuljahren konstant bleibt. Es kann daher vermutet werden, dass die Schüler beider Klassenstufen in dieser grundlegenden Fähigkeit ein ähnliches Kompetenzniveau haben.

Tabelle 50: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Erweitern), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
5) I.) (Erweitern)	Student's t	0.2771	100	0.782
5) II.) (Erweitern)	Student's t	0.0788	100	0.937
5) III.) (Erweitern)	Student's t	0.2771	100	0.782

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

Beim Vergleich der Leistungen von Schüler*innen unterschiedlichen Geschlechts im Bereich des Erweiterns von Brüchen wurden keine signifikanten Unterschiede

festgestellt. Die Ergebnisse beider Gruppen waren nahezu identisch, was darauf hinweist, dass das Erweitern von Brüchen unabhängig vom Geschlecht sicher beherrscht wird. Damit stehen die Ergebnisse der Annahme entgegen, dass in diesem elementaren Teilbereich der Bruchrechnung geschlechtsspezifische Leistungsunterschiede sichtbar werden.

In der Frage 6) handelt es sich um Umrechnen von einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch.

Frage 6) I.): $1\frac{2}{5} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

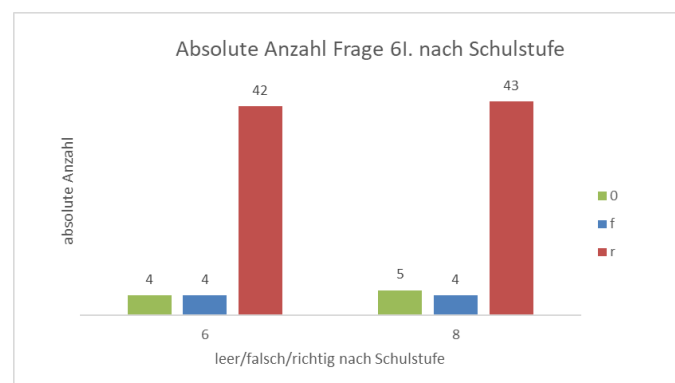


Abbildung 41: Absolute Anzahl Frage 6) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 51: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) I.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
6) I.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	0.175	100	0.431

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Ein einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben wurde durchgeführt, um die Hypothese zu überprüfen, dass Schüler*innen der sechsten Schulstufe beim Umwandeln gemischter Zahlen in unechte Brüche bessere Ergebnisse erzielen als Schüler*innen der achten Schulstufe. Der t-Wert von 0,175 weist darauf hin, dass die Mittelwerte der beiden Schulstufen nur geringfügig voneinander abweichen. Der Unterschied ist bei einem p-Wert von 0,431 nicht von statistischer Signifikanz.

Frage 6) II.): $3\frac{2}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

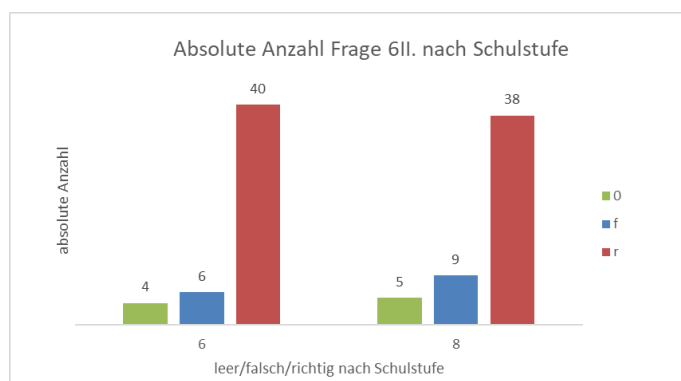


Abbildung 42: Absolute Anzahl Frage 6) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 52: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) II.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
6) II.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	0.819	100	0.207

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

Mit einem t-Test für unabhängige Stichproben wurde in der zweiten Teilaufgabe zum Umwandeln gemischter Zahl in unechte Brüche überprüft, ob die Leistungen der Schüler*innen in der sechsten und achten Schulstufe signifikant unterschiedlich sind. Das Testergebnis ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen. Der Durchschnittswert der jüngeren Schüler*innen war zwar etwas höher, doch handelt es sich bei dieser Differenz um keinen statistisch relevanten Unterschied.

Frage 6) III.) $5\frac{1}{8} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

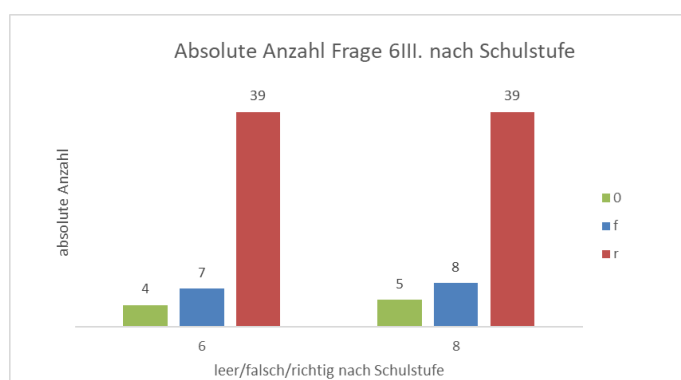


Abbildung 43: Absolute Anzahl Frage 6) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 53: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
6) III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	0.354	100	0.362

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In der letzten Teilaufgabe wurde mit einem einseitigen t-Test untersucht, ob die Schüler*innen der sechsten Schulstufe signifikant bessere Leistungen als die der achten Schulstufe zeigten. Das Testergebnis ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Gruppen.

Eine mögliche Erklärung dafür, dass es keine signifikanten Unterschiede zwischen den Jahrgangsstufen gibt, könnte sein, dass diese Umwandlungsregel bereits zu Beginn des Mathematikunterrichts eingeführt und kontinuierlich angewandt wird, was dazu führt, dass kein signifikanter Lernfortschritt zwischen den beiden Schulstufen mehr beobachtet werden kann.

Tabelle 54: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechten Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
6) I.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	1.424 ^a	100	0.158
6) II.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	0.383	100	0.703
6) III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch)	Student's t	1.323 ^a	100	0.189

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

Um herauszufinden, ob es Leistungsunterschiede zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen im Aufgabenbereich „Umwandeln gemischter Zahlen in unechte Brüche“ gibt, wurden drei t-Tests für unabhängige Stichproben durchgeführt. Die Resultate weisen in drei Teilaufgaben keine signifikanten Unterschiede zwischen den Geschlechtern auf. Die Nullhypothese konnte in keinem Fall verworfen werden, da alle p-Werte über dem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ lagen. Statistisch betrachtet kann daher kein bedeutsamer geschlechtsspezifischer Unterschied in der Fähigkeit festgestellt werden, gemischte Zahlen in unechte Brüche umzuwandeln.

In der Frage 7) handelt es sich um das Umrechnen eines unechten Bruches in eine gemischte Zahl.

Frage 7) I.): $\frac{8}{3} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

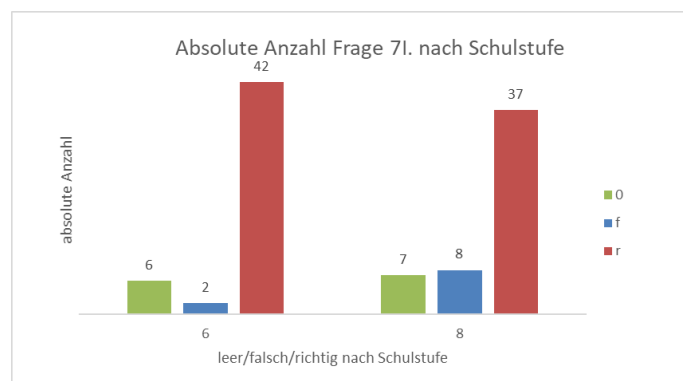


Abbildung 44: Absolute Anzahl Frage 7) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 55: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) I.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
7) I.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	1.56 ^a	100	0.062

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

^a Der Levene-Test ist signifikant ($p < 0,05$), was auf eine Verletzung der Annahme gleicher Varianzen hindeutet.

In dieser Aufgabe wurde ein einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, um zu überprüfen, ob die Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Leistungen als die der achten Schulstufe erbrachten. Der p-Wert von 0,062 liegt nur geringfügig über dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$, was zu einem nicht signifikanten Ergebnis führt. Dennoch deutet sich ein leichter Trend zugunsten der sechsten Schulstufe an.

Aus statistischer Sicht kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Der Wert deutet jedoch darauf hin, dass Schüler*innen der sechsten Schulstufe tendenziell etwas bessere Ergebnisse erzielten.

Frage 7) II.): $\frac{22}{5} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

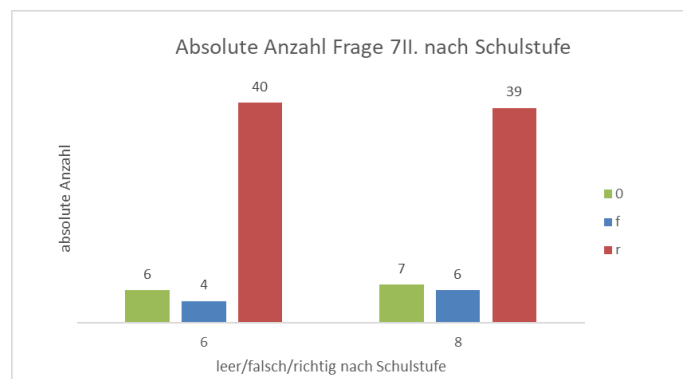


Abbildung 45: Absolute Anzahl Frage 7) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 56: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) II.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
7) II.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	0.599	100	0.275

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In der zweiten Teilaufgabe zum Umwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen wurde untersucht, ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Leistungen der Schüler*innen der sechsten und achten Schulstufe gibt. Der t-Test für unabhängige Stichproben zeigte keinen signifikanten Unterschied.

Damit erreichten beide Schulstufen bei dieser Aufgabenstellung ähnliche Resultate.

Frage 7) III.): $\frac{31}{6} =$

In folgender Grafik wird die absolute Anzahl der richtigen, falschen und nicht ausgefüllten Antworten dieser Frage nach Schulstufe dargestellt.

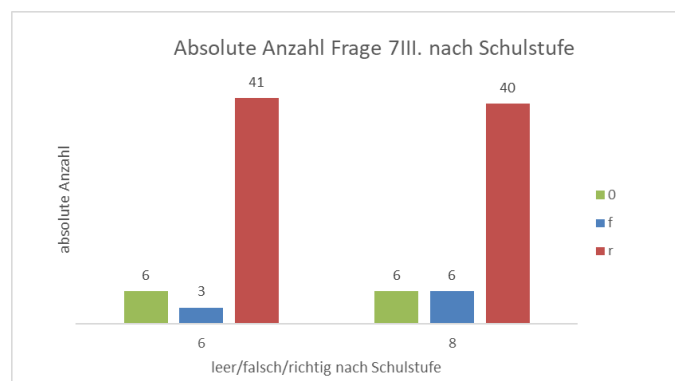


Abbildung 46: Absolute Anzahl Frage 7) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel)

Tabelle 57: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) III.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
7) III.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	0.629	100	0.265

Anmerkung. $H_a: \mu_6 > \mu_8$

In der dritten Teilaufgabe zum Umwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen wurde untersucht, ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Leistungen der Schüler*innen der sechsten und achten Schulstufe gibt. Mit einem p-Wert von 0,265 wird das Standard-Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ deutlich überschritten, somit wurde kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen festgestellt.

Das Ergebnis legt nahe, dass die Kompetenz, unechte Brüche in gemischte Zahlen umzuwandeln, in beiden Schulstufen vergleichbar ist. Der p-Wert, der keinen signifikanten Wert aufweist, lässt darauf schließen, dass der festgestellte Unterschied zwischen den Mittelwerten möglicherweise dem Zufall geschuldet ist. Auch wenn die p-Werte für alle drei Aufgaben höher sind als das übliche Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, weist das Ergebnis der ersten Teilaufgabe ($p = 0,062$) auf einen leichten, jedoch nicht signifikanten Trend zugunsten der sechsten Schulstufe hin.

Tabelle 58: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)

		Statistik	df	p
7) I.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	0.176	100	0.861
7) II.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	-0.296	100	0.768
7) III.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl)	Student's t	0.229	100	0.819

Anmerkung. $H_a: \mu_w \neq \mu_m$

Ein zweiseitiger t-Test für unabhängige Stichproben wurde durchgeführt, um mögliche Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Burschen beim Umwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen zu überprüfen. Die Resultate zeigen, dass es für keine der drei Teilaufgaben signifikante Unterschiede zwischen den Geschlechtern gibt. Alle p-Werte übersteigen das Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ bei weitem, was darauf hindeutet, dass kein statistisch signifikanter Unterschied zwischen weiblichen und männlichen Schüler*innen festgestellt werden konnte. Dies deutet darauf hin, dass die grundlegenden Rechen- und Verständnisprozesse unabhängig vom Geschlecht sind und von beiden Gruppen in vergleichbarer Weise beherrscht werden.

5.2 Interpretation

Die in dieser Masterarbeit gesammelten Leistungen im Bereich des Bruchrechnens sind im Kontext des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I zu interpretieren, in dem Bruchzahlen und Operationen mit rationalen Zahlen als fundamentale Inhalte etabliert sind. Der Lehrplan der Sekundarstufe I legt einen besonderen Fokus auf kompetenzorientiertes Lernen und die Entwicklung tragfähiger Konzepte, um den Schüler*innen die Fähigkeit zu vermitteln, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln, Ergebnisse zu interpretieren und mathematische Methoden effektiv anzuwenden (vgl. BUKA (2000), S. 1049 und BBWF (2023), S. 82 und 84).

Dieses Ziel lässt sich theoretisch gut mit dem Konzept der Grundvorstellungen erfassen. Laut Eggharter sind Grundvorstellungen eine essentielle Voraussetzung für flexible Nutzung mathematischer Inhalte, insbesondere durch Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen und das Herausarbeiten tragfähiger Vorstellungen zu Zahlen, Strategien und Operationen (vgl. Eggharter (2013), S. 10).

Padberg und Wartha betonen zudem, dass Grundvorstellungen den Wechsel zwischen symbolischen, bildhaften und handelnden Repräsentationen ermöglichen. Verstehen kann folglich vor allem dann angenommen werden, wenn Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen gelingen, nicht nur das regelmäßige Rechnen auf der symbolischen Ebene (vgl. Padberg und Wartha (2017), S. 1ff.). Bei der Bruchrechnung ist diese Perspektive entscheidend, da viele typische Fehler genau an dem Punkt entstehen, an dem Brüche nicht als eigenständige Zahlen mit Bedeutung betrachtet werden, sondern als Paare natürlicher Zahlen, die getrennt behandelt werden.

Didaktisch wird die Idee der Mehrrepräsentation durch verschiedene Zugänge unterstützt. Die Differenzierung zwischen auditiven, visuellen, haptischen sowie kognitiven und kommunikativen Lerntypen zeigt auf, dass ein nachhaltiger Kompetenzaufbau besonders wahrscheinlich ist, wenn Inhalte nicht nur erklärt, sondern auch visualisiert, durch Handeln erfahrbar gemacht und sprachlich reflektiert werden. Insbesondere bei Brüchen wird in der relevanten Didaktik immer wieder hervorgehoben, dass Faltungen, Streifen, Flächenmodelle und Zahlengerade nicht nur Anschauungsmittel sind, sondern eine Brücke zum Verständnis des Themas darstellen (vgl. Eggharter (2013), S. 15ff.; Padberg (2009), S. 52ff, 72ff., 93ff. 113f.; Rieger (2016), S. 35f., 46f., 51).

Die relevante Fehlerforschung bietet einen deutlichen Bezugsrahmen für die Erhebung erkennbarer Schemata. Padberg konnte schon früh demonstrieren, dass ein erheblicher Teil der Fehler in der Bruchrechnung systematischer Natur ist. Dazu gehören die bekannte Regelanwendung „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ bei der Addition sowie analog bei der Subtraktion, Transferfehler zwischen den Operationen und Schwierigkeiten beim Einfügen natürlicher Zahlen in Bruchzahlen (vgl. Padberg (1983), S. 47ff., 56). Fitri und Prahmana berichten, dass bei Siebtklässler*innen sechs zentrale Fehlvorstellungen auftreten, darunter Umwandlungsprobleme zwischen gemischten und unechten Brüchen sowie Unsicherheiten bei der Umwandlung ganzer Zahlen in Brüche (vgl. Fitri und Prahmana (2019), S. 2, 6f.). Laut Aksoy und Yazlik sind unter anderem unzureichende Kenntnisse beim Gleichteilen, beim Verständnis von Zähler und Nenner, bei Zahlengeraden und Modellbezug sowie automatischem Rechnen ohne konzeptionelles Verständnis grundlegende Ursachen (vgl. Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.) Widyanesti sowie ihre Kolleginnen und Kollegen klassifizieren typische Fehlleistungen zusätzlich anhand des Newman Modells, das die Schritte Lesen, Verstehen, Transformieren, Prozessdurchführung und Antwortformulierung unterscheidet. Sie heben insbesondere Schwierigkeiten beim Übersetzen von Darstellungen und beim Bestimmen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen hervor (vgl. Widyanesti et al. (2023), S. 65f.). Karika und Csíkos demonstrieren letztlich, dass Darstellungsformate einen erheblichen Einfluss auf die Leistungen ausüben. Dabei kann neben „dem Rechnen“ auch die Darstellung sowie die Interpretation von Brüchen leistungsbestimmend sein (vgl. Karika und Csíkos (2024), S. 4ff., 7).

In Anbetracht dessen können die Resultate der eigenen Erhebung aus verschiedenen Blickwinkeln interpretiert werden. Insgesamt waren die Mittelwertunterschiede zwischen der sechsten und achten Schulstufe in vielen Teilbereichen nicht signifikant, was darauf hindeutet, dass einige grundlegende Kompetenzen in beiden Altersgruppen ähnlich verfügbar sind oder dass Lernfortschritte in bestimmten Bereichen nicht automatisch mit dem Alter zunehmen. Mehrere Aufgaben aus den schwierigeren Operationsbereichen verdeutlichen allerdings zugleich die Vorzüge der achten Schulstufe. Dies trifft besonders auf das Subtrahieren ungleichnamiger Brüche (Aufgaben 3d I.) bis 3d III.) zu, bei dem signifikante Unterschiede festgestellt wurden ($t(100) = -4,11, p < 0,001$; $t(100) = -3,17, p = 0,002$; $t(100) = -2,09, p = 0,039$) sowie auf die Division von Brüchen (Aufgaben 3g1 bis 3g3), die ebenfalls signifikante

Unterschiede aufweist ($t(100) = -3,13$, $p = 0,002$; $t(100) = -2,95$, $p = 0,004$; $t(100) = -2,21$, $p = 0,029$). In diesen Fällen deutet das negative Vorzeichen bei der Gegenüberstellung der Schulstufen darauf hin, dass die achte Schulstufe im Durchschnitt höher lag als die sechste Schulstufe. Die Tatsache, dass diese Bereiche besonders präzise abgrenzbar sind, stimmt mit der Literatur überein: Insbesondere Subtraktion und Division werden als anfällig für Fehler betrachtet, da hierbei mehrere Grundvorstellungen gleichzeitig aktiviert werden müssen, wie Gleichteiligkeit, Einbettung natürlicher Zahlen, Umkehroperationen sowie das „passt in“ und Messen bei Division (vgl. Padberg (1983), S. 49f.; Padberg (2009), S. 140ff.; Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.).

Zugleich existierte ein Bereich, in dem die sechste Schulstufe zumindest gelegentlich bessere Ergebnisse erzielte: Im gerichteten Test beim Kürzen (Aufgabe 4 II.) zeigte die sechste Schulstufe einen signifikanten Vorteil ($t(100) = 1,78$, $p = 0,039$ bei $H_a: \mu_6 > \mu_8$). Dieses Muster lässt sich didaktisch gut erklären. Inhalte wie das Kürzen und Erweitern werden oft zuerst systematisch eingeführt und danach weniger intensiv geübt, weshalb bei älteren Lernenden ein Teil des strukturierten Wissens ohne erneute Anwendung weniger zugänglich ist. In seiner Analyse von Fehlern beschreibt Padberg auch, dass Kürzen und Erweitern insgesamt oft hohe Lösungsquoten aufweisen. Fehler stehen eher im Zusammenhang mit speziellen Faktoren oder Flüchtigkeit als mit einem fehlenden Grundverständnis (vgl. Padberg (1983), S. 46f.). Eine nachvollziehbare Erklärung für den Vorteil der sechsten Schulstufe ist somit ein Nähe- und Frischeffekt durch jüngere Unterrichtserfahrungen, während die achte Schulstufe zwar bei komplexeren Operationen Vorteile hat, aber bei selten geübten Routinen nicht automatisch überlegen ist.

Die Geschlechtervergleiche vermitteln insgesamt einen sehr zurückhaltenden Eindruck. In den meisten Teilaufgaben werden keine statistisch signifikanten Unterschiede weiblichen und männlichen Lernenden festgestellt, was gegen die Annahme konsistenter Geschlechtereffekte über verschiedene Aufgaben hinweg spricht. Angesichts der hohen Anzahl an Einzeltests sollten einzelne signifikante Ergebnisse in isolierten Items vorsichtig interpretiert werden. Inhaltlich deutet das Gesamtmuster eher darauf hin, dass Unterschiede stärker von Lerngelegenheiten, Darstellungsverständnis und Strategiegebrauch abhängen als vom Geschlecht selbst, was gut mit der Literatur übereinstimmt, die typische Fehler eher als konzeptuell,

sprachlich und darstellungsbezogen erklärt und nicht als gruppenspezifisch (vgl. Widyanesti et al. (2023), S. 65f.; Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.).

Die signifikante Überlegenheit der achten Schulstufe in mehreren komplexen Bereichen kann hauptsächlich durch zusammenhängende Lerngelegenheiten erklärt werden. Je mehr Unterrichtsjahre vergehen, desto mehr wird mit der Bildung des Hauptnenners, der Umkehroperation, Modellierungen und Transfers geübt. Insbesondere bei der Division und der Subtraktion ungleichnamiger Brüche ist ein koordiniertes Arbeiten mit mehreren Repräsentationen und eine sichere Vorstellung von den Operationen erforderlich. Dies kann sich jedoch mit wachsender Erfahrung festigen. Die Literatur liefert zugleich eine Erklärung dafür, weshalb die Resultate in der Summe trotzdem oft vergleichbar sind. Ohne die Entwicklung belastbarer Grundvorstellungen behalten viele Schüler*innen prozedurale Regeln, was dazu führt, dass sie über verschiedene Schulstufen hinweg typische Fehlerstrategien anwenden. Die Forschungsergebnisse zu getrenntem Denken von Zähler und Nenner, zu Gleichteiligkeitsproblemen und zu Schwierigkeiten beim Übersetzen zwischen Bildern, Zahlengerade und Symbolik zeigen genau diese Persistenz (vgl. Padberg (1983), S. 47f.; Fitri und Prahmana (2019), S. 6f.; Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.; Karika und Csíkos (2024), S. 4ff.). Wenn der Unterricht hauptsächlich algorithmisch strukturiert ist oder wenn nach der Einführung nur wenig Wiederholung und Vernetzung stattfindet, reduzieren sich die Leistungsunterschiede zwischen den Jahrgängen. Dies geschieht, weil zwar einzelne Routinen sich verbessern, aber die konzeptuelle Grundlage nicht im gleichen Maße wächst. Aus der Perspektive der Grundvorstellungen bedeutet dies, dass viele Lernende Aufgaben „können“, ohne sie in verschiedenen Darstellungen erklären zu können, und sie somit anfällig für Transfer- und Transformationsfehler sind, wie sie sowohl Padberg als auch das Newman-Modell beschreibt (vgl. Padberg und Wartha (2017), S. 2f.; Widyanesti et al. (2023), S. 66).

Die Ergebnisse der Erhebung unterstützen daher insgesamt eine doppelte Schlussfolgerung. Erstens sind in der achten Schulstufe deutliche altersbedingte Vorteile zu erkennen, wenn es um mehrschrittige Bruchrechnung geht und Hauptnenner, Umkehroperation sowie „Messen“ konzeptionell abgesichert werden müssen, insbesondere bei der Subtraktion ungleichnamiger Brüche und bei der Division. Zweitens sind viele der Unterschiede zwischen der sechsten und achten Schulstufe geringfügig und da es weitgehend an Geschlechterunterschieden mangelt,

deutet dies darauf hin, dass zentrale Probleme bei der Bruchrechnung weniger mit dem Alter oder dem Geschlecht zusammenhängen sondern vielmehr mit der Tiefe des Verständnisses, der Repräsentationskompetenz und den Lerngelegenheiten. Hier setzen die didaktischen Implikationen ein. Um prozedurales Wissen in ein tragfähiges Verständnis zu überführen, ist es entscheidend, stabile Grundvorstellungen über mehrere Darstellungsebenen hinweg aufzubauen und verschiedene Zugänge zu nutzen, einschließlich visueller, handlungsorientierter, sprachlich erklärender und diskursiv reflektierender Ansätze (vgl. Eggharter (2013), S. 10ff.; Padberg (2009), S. 72ff., 113f.; Rieger (2016), S. 35f., 46f.).

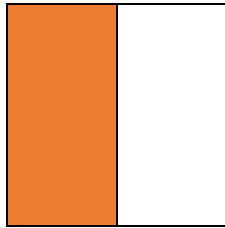
Somit kann die aufgestellte Hypothese der Arbeit, dass die Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Ergebnisse in der Bruchrechnung aufweisen als die Schüler*innen der achten Schulstufe nicht bestätigt werden.

6. Unterrichtsmaterial

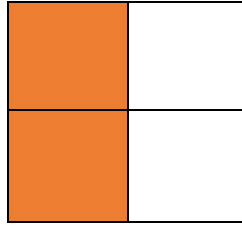
Im folgenden Kapitel werden Unterrichtsmaterialien zum Erweitern und Kürzen von Brüchen und zu den vier Grundrechnungsarten mit Brüchen dargestellt. Die Beispiele wurden nach den in Kapitel 4 dargestellten Lerntypen und Grundvorstellungen ausgearbeitet.

6.1 Erweitern und Kürzen von Brüchen

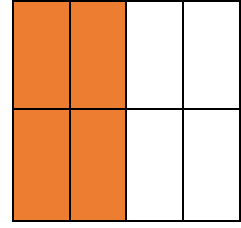
Das Erweitern kann als Verfeinerung von Teilen verstanden werden. Wir haben ein Blatt Papier und falten dieses. Wenn man eine Hälfte davon betrachtet, ist $\frac{1}{2}$ des Blattes dann relevant. Wenn wir das Blatt noch einmal in der Mitte falten, dann hat das Blatt vier Teile und die relevante Fläche beträgt dann $\frac{2}{4}$. Wenn das Blatt noch einmal gefaltet wird, entstehen $\frac{4}{8}$.



Ein Blatt wird in der Hälfte gefaltet. Somit entsteht $\frac{1}{2}$.



Das gefaltete Blatt wird noch einmal gefaltet. Es entstehen nun $\frac{2}{4}$.



Das gefaltete Blatt wird noch einmal gefaltet. Es entstehen nun $\frac{4}{8}$.

Das Erweitern kann auch als Multiplikation mit 1 verstanden werden. Der Bruch $\frac{2}{2}$ stellt die Zahl 1 dar, weil 2 durch 2 das Ergebnis 1 hat. Somit kann man das Erweitern von Brüchen auch so berechnen: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$.

Wenn man einen Bruch mit 2 erweitert, meint man, dass mit $\frac{2}{2}$ erweitert wird. Wenn man einen Bruch mit 5 erweitert, meint man, dass mit $\frac{5}{5}$ multipliziert wird.

Merksatz: Beim Erweitern von Brüchen muss man den Zähler und den Nenner des Bruches mit derselben Zahl multiplizieren.

1) Erweitere die Brüche mit der gegebenen Zahl.

mit 2: $\frac{2}{5} =$ $\frac{1}{4} =$ $\frac{13}{7} =$ $\frac{8}{9} =$

mit 5: $\frac{1}{3} =$ $\frac{2}{5} =$ $\frac{11}{9} =$ $\frac{5}{6} =$

mit 7: $\frac{2}{3} =$ $\frac{1}{10} =$ $\frac{7}{9} =$ $\frac{4}{7} =$

2) Finde heraus, mit welcher Zahl hier erweitert wurde.

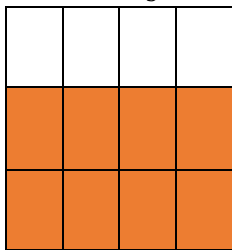
a) $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ mit: ____ b) $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$ mit: ____ c) $\frac{3}{7} = \frac{27}{63}$ mit: ____ d) $\frac{20}{35} = \frac{80}{140}$ mit: ____

3) Hier wurde erweitert. Schreibe die fehlende Zahl in den Zähler bzw. in den Nenner.

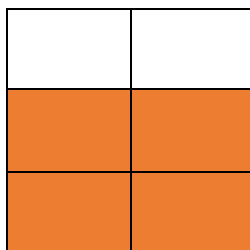
a) $\frac{3}{8} = \frac{9}{\quad}$ b) $\frac{4}{10} = \frac{\quad}{70}$ c) $\frac{50}{3} = \frac{200}{\quad}$ d) $\frac{9}{5} = \frac{81}{\quad}$

e) $\frac{22}{53} = \frac{\quad}{106}$ f) $\frac{105}{77} = \frac{315}{\quad}$ g) $\frac{1}{10} = \frac{\quad}{100}$ h) $\frac{5}{6} = \frac{\quad}{42}$

Das Kürzen von Brüchen kann als Vergrößerung von Teilen verstanden werden. Hier betrachtet man ein schon (mehrmals) gefaltetes Blatt und öffnet dieses schrittweise. Man hat zum Beispiel $\frac{8}{12}$ eines Blattes ausgemalt. Das Blatt ist gefaltet und im nächsten Schritt öffnet man das. Es entstehen $\frac{4}{6}$. Öffnet man die nächste Falte, so entsteht $\frac{2}{3}$.



Ein Blatt wurde mehrmals gefaltet und es entstehen $\frac{8}{12}$.



Das gefaltete Blatt wird einmal entlang einer Falte geöffnet und es entstehen $\frac{4}{6}$.



Das gefaltete Blatt wird einmal entlang einer weiteren Falte geöffnet und es entstehen $\frac{2}{3}$.

Das Kürzen kann auch als separate Division von Zähler und von Nenner verstanden werden. Hier müssen der Zähler und der Nenner des Bruches mit derselben Zahl dividiert werden. Bsp.: $\frac{20}{25} = \frac{20:5}{25:5} = \frac{4}{5}$.

Wenn man einen Bruch durch 2 kürzt, meint man, dass der Zähler und der Nenner durch 2 dividiert werden. Wenn man einen Bruch durch 5 kürzt, meint man, dass der Zähler und der Nenner durch 5 dividiert werden.

Merksatz: Beim Kürzen von Brüchen muss man den Zähler und Nenner des Bruches mit derselben Zahl dividieren.

1) Kürze die Brüche mit der gegebenen Zahl.

durch 2: $\frac{8}{14} =$	$\frac{12}{6} =$	$\frac{28}{44} =$	$\frac{16}{50} =$
durch 4: $\frac{16}{20} =$	$\frac{12}{8} =$	$\frac{40}{24} =$	$\frac{4}{16} =$
durch 7: $\frac{49}{98} =$	$\frac{14}{35} =$	$\frac{7}{21} =$	$\frac{28}{42} =$

2) Finde heraus, durch welche Zahl hier gekürzt wurde.

a) $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ durch: ____ b) $\frac{15}{25} = \frac{3}{4}$ durch: ____ c) $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ durch: ____ d) $\frac{81}{27} = \frac{9}{3}$ durch: ____

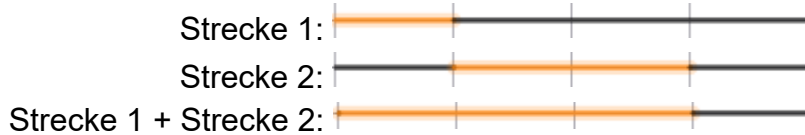
3) Hier wurde gekürzt. Schreibe die fehlende Zahl in den Zähler bzw. in den Nenner.

a) $\frac{27}{21} = \frac{9}{\quad}$	b) $\frac{12}{10} = \frac{\quad}{5}$	c) $\frac{300}{150} = \frac{6}{\quad}$	d) $\frac{25}{35} = \frac{5}{\quad}$
e) $\frac{44}{99} = \frac{\quad}{9}$	f) $\frac{46}{69} = \frac{2}{\quad}$	g) $\frac{3}{12} = \frac{\quad}{4}$	h) $\frac{12}{16} = \frac{\quad}{4}$

6.2 Addition von Brüchen

Beim Addieren von Brüchen legt man die beiden Bruchteile zusammen. Man kann das mit Strecken gut darstellen.

$$\text{Bsp.: } \frac{1}{4}m + \frac{2}{4}m = \frac{1+2}{4}m = \frac{3}{4}m$$



Wenn der Nenner unterschiedlich ist, müssen die Brüche durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner gebracht werden, bevor man die Teile (Zähler) zusammenzählt. Bsp.: $\frac{1}{3} + \frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} + \frac{6}{12} = \frac{10}{12}$

Eine natürliche Zahl hat im Nenner immer eine 1 stehen. $4 = \frac{4}{1}$, $10 = \frac{10}{1}$ usw.

Merksatz: Beim Addieren von Brüchen müssen die Brüche durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner gebracht werden. Anschließend werden nur die Zähler addiert und der Nenner ist dann der zuvor herausgefundene gemeinsame Nenner.

1) Addiere die folgenden gleichnamigen Brüche.

$$\begin{array}{llll} a) \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = & b) \frac{12}{20} + \frac{3}{20} = & c) \frac{3}{7} + \frac{6}{7} = & d) \frac{2}{11} + \frac{7}{11} = \\ e) \frac{12}{13} + \frac{12}{13} = & f) \frac{15}{2} + \frac{3}{2} = & g) \frac{2}{5} + \frac{5}{5} = & h) \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \end{array}$$

2) Addiere die folgenden ungleichnamigen Brüche. Du musst zuerst die Brüche auf denselben Nenner bringen. Schreibe die Zwischenschritte auf.

$$\begin{array}{llll} a) \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = & b) \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = & c) \frac{9}{7} + \frac{4}{3} = & d) \frac{3}{5} + \frac{8}{10} = \\ e) \frac{3}{6} + \frac{1}{2} = & f) \frac{3}{4} + \frac{4}{7} = & g) \frac{6}{8} + \frac{7}{3} = & h) \frac{10}{11} + \frac{10}{22} = \end{array}$$

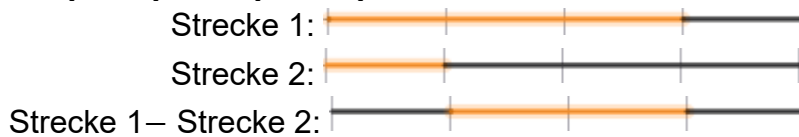
3) Addiere die folgende natürliche Zahl mit einem Bruch. Stelle die natürliche Zahl als Bruch dar und bringe die Brüche anschließend auf denselben Nenner, bevor du sie addierst.

$$\begin{array}{llll} a) 3 + \frac{1}{3} = & b) 5 + \frac{3}{8} = & c) 10 + \frac{2}{7} = & d) 1 + \frac{4}{5} = \\ e) \frac{4}{3} + 2 = & f) \frac{5}{2} + 4 = & g) \frac{7}{10} + 6 = & h) \frac{2}{11} + 2 = \end{array}$$

6.3 Subtraktion von Brüchen

Beim Subtrahieren von Brüchen zieht man von einem Bruchteil einen anderen Bruchteil ab. Man kann das mit Strecken gut darstellen.

Bsp.: $\frac{3}{4}m - \frac{1}{4}m = \frac{3-1}{4}m = \frac{2}{4}m$



Wenn der Nenner unterschiedlich ist, müssen die Brüche durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner gebracht werden, bevor man die Teile (Zähler) voneinander abzieht. Bsp.: $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

Eine natürliche Zahl hat im Nenner immer eine 1 stehen, z.B. $4 = \frac{4}{1}$, $10 = \frac{10}{1}$ usw.

Merksatz: Beim Subtrahieren von Brüchen müssen die Brüche durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner gebracht werden. Anschließend werden nur die Zähler voneinander subtrahiert und der Nenner ist dann der zuvor herausgefundene gemeinsame Nenner.

1) Subtrahiere die folgenden gleichnamigen Brüche.

a) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} =$	b) $\frac{12}{20} - \frac{3}{20} =$	c) $\frac{6}{7} - \frac{2}{7} =$	d) $\frac{10}{11} - \frac{7}{11} =$
e) $\frac{12}{13} - \frac{4}{13} =$	f) $\frac{15}{2} - \frac{3}{2} =$	g) $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} =$	h) $\frac{5}{9} - \frac{3}{9} =$

2) Subtrahiere die folgenden ungleichnamigen Brüche. Du musst zuerst die Brüche auf denselben Nenner bringen. Schreibe die Zwischenschritte auf.

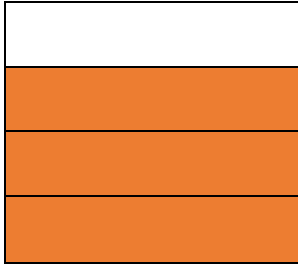
a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} =$	b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$	c) $\frac{9}{7} - \frac{2}{3} =$	d) $\frac{4}{5} - \frac{7}{10} =$
e) $\frac{3}{6} - \frac{1}{4} =$	f) $\frac{3}{4} - \frac{3}{7} =$	g) $\frac{15}{8} - \frac{4}{3} =$	h) $\frac{10}{11} - \frac{10}{22} =$

3) Subtrahiere die folgende natürliche Zahl mit einem Bruch. Stelle die natürliche Zahl als Bruch dar und bringe die Brüche anschließend auf denselben Nenner, bevor du sie subtrahierst.

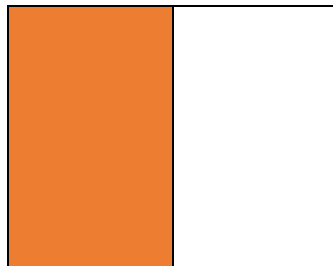
a) $3 - \frac{1}{3} =$	b) $5 - \frac{3}{8} =$	c) $10 - \frac{2}{7} =$	d) $1 - \frac{4}{5} =$
e) $\frac{8}{3} - 2 =$	f) $\frac{19}{2} - 4 =$	g) $\frac{77}{10} - 6 =$	h) $\frac{57}{11} - 2 =$

6.4 Multiplikation von Brüchen

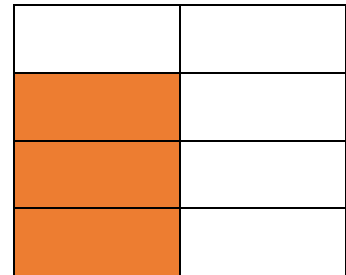
Das Multiplizieren von zwei Brüchen kann als „ $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$ “ verstanden werden. Man kann sich das wieder an einem Blatt Papier darstellen. Man faltet ein Blatt in 4 gleichgroße Teile und malt $\frac{3}{4}$ an. Man faltet ein anderes Blatt in zwei gleichgroße Teile und malt $\frac{1}{2}$ des Blattes an. Die Multiplikation entspricht der gemeinsam angemalten Fläche der beiden Blätter.



$\frac{3}{4}$ eines Blattes werden angemalt.



$\frac{1}{2}$ eines Blattes wird angemalt.



Die gemeinsame angemalte Fläche der beiden Blätter ergibt $\frac{3}{8}$.

Merksatz: Beim Multiplizieren von Brüchen gilt die Regel: „Zähler mal Zähler“ dividiert durch „Nenner mal Nenner“ ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$). Bei natürlichen Zahlen ist der Nenner die Zahl 1 (Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$).

1) Multipliziere die folgenden Brüche miteinander.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{20} =$

c) $\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{5} =$

d) $\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{11} =$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} =$

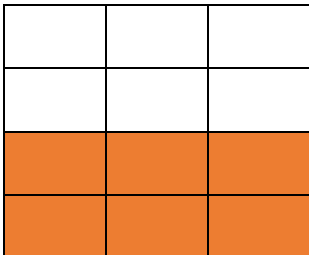
f) $\frac{1}{3} \cdot \frac{10}{13} =$

g) $\frac{5}{5} \cdot \frac{2}{5} =$

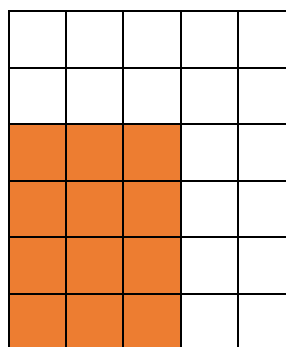
h) $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{6} =$

2) Schreibe die Multiplikation auf, die hinter dieser Figur steckt.

a)



b)



3) Multipliziere die natürliche Zahl und den Bruch miteinander.

a) $3 \cdot \frac{1}{4} =$

b) $5 \cdot \frac{3}{8} =$

c) $10 \cdot \frac{2}{7} =$

d) $3 \cdot \frac{4}{5} =$

e) $\frac{8}{3} \cdot 2 =$

f) $\frac{19}{2} \cdot 4 =$

g) $\frac{7}{10} \cdot 6 =$

h) $\frac{5}{11} \cdot 2 =$

6.5 Division von Brüchen

Bei der Division von Brüchen gibt es die Vorstellung: Wie oft passt der Bruch in etwas hinein?

Bsp.: Wir haben eine Strecke von $4m$ ($= \frac{4}{1} m$) und fragen uns, wie oft passt $\frac{1}{2} m$ in diese Strecke hinein. Das entspricht der Division $\frac{4}{1} : \frac{1}{2}$.

Strecke von $4m$: 

Teilstrecke von $\frac{1}{2}m$: 

Die Teilstrecke $\frac{1}{2}m$ passt 8 Mal in die Strecke von $4m$ hinein.

Merksatz: Beim Dividieren von Brüchen gilt die Regel: Der erste Bruch wird mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert ($\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$). Bei natürlichen Zahlen ist der Nenner die Zahl 1 (Bsp.: $4 = \frac{4}{1}$; $5 = \frac{5}{1}$).

1) Dividiere die folgenden Brüche.

a) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} =$	b) $\frac{1}{2} : \frac{3}{20} =$	c) $\frac{6}{7} : \frac{2}{5} =$	d) $\frac{10}{3} : \frac{7}{11} =$
e) $\frac{3}{4} : \frac{4}{9} =$	f) $\frac{1}{3} : \frac{10}{13} =$	g) $\frac{5}{5} : \frac{2}{5} =$	h) $\frac{5}{9} : \frac{4}{6} =$

2) Dividiere die folgenden Brüche mit der natürlichen Zahl.

a) $3 : \frac{1}{4} =$	b) $5 : \frac{3}{8} =$	c) $10 : \frac{2}{7} =$	d) $3 : \frac{4}{5} =$
e) $\frac{8}{3} : 2 =$	f) $\frac{19}{2} : 4 =$	g) $\frac{7}{10} : 6 =$	h) $\frac{5}{11} : 2 =$

3) Dividiere die folgenden gemischten Brüche miteinander.

a) $3\frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$	b) $2\frac{4}{6} : \frac{2}{3} =$	c) $\frac{14}{20} : 3\frac{1}{2} =$	d) $\frac{4}{5} : 5\frac{1}{5} =$
e) $2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{3} =$	f) $5\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4} =$	g) $1\frac{1}{10} : 1\frac{1}{5} =$	h) $4\frac{5}{11} : 2\frac{4}{6} =$

7. Fazit

Diese Masterarbeit positioniert die Bruchrechnung als zentrale Verbindung zwischen arithmetischen Fähigkeiten, konzeptionellem Verständnis und der Kompetenz, zwischen Darstellungen zu transferieren. Lehrpläne der Sekundarstufe I fordern ausdrücklich den Wechsel zwischen symbolischer, ikonischer und handlungsorientierter Darstellung von Bruchzahlen sowie die Interpretation von Brüchen aus verschiedenen Bedeutungsaspekten. Hierzu gehören vor allem Brüche als Anteile eines Ganzen oder mehrerer Ganzer, als Quotient und als Verhältnis, sowie das begründete Erweitern und Kürzen mithilfe von Veranschaulichungen. Damit wird ein Unterrichtsansatz unterstützt, der Rechenregeln nicht isoliert einführt, sondern sie aus tragfähigen Konzepten und modellierenden Situationen entwickelt. (vgl. BBWF (2023), S. 79, 81f. und vgl. BUKA (2000), S. 1053).

In der Mathematikdidaktik wird dieses didaktische Leitmotiv durch das Konzept von Grundvorstellungen konkretisiert. Mentale Modelle, die als Grundvorstellungen fungieren, ermöglichen Lernenden, innermathematische Strukturen mit außermathematischen Kontexten zu verknüpfen und zwischen verschiedenen Darstellungsformen flexibel zu wechseln. Im Hinblick auf den normativen Aspekt hebt Eggharter hervor, dass Grundvorstellungen dazu dienen, flexibel zu agieren und mathematisches Wissen auf neue Probleme anzuwenden, anstatt Aufgaben nur mit auswendig gelernten Regeln zu lösen (vgl. Eggharter (2023), S. 10). Zusätzlich machen Padberg und Wartha deutlich, dass Verstehen vor allem dort gegeben ist, wo Übersetzungen zwischen Darstellungsebenen erfolgreich sind und Rechenregeln mit dem Verständnis verbunden bleiben. Andernfalls werden Regelverwechslungen und sprachliches Handeln gefördert (vgl. Padberg und Wartha (2017), S. 2f.). In der Bruchrechnung heißt das, dass solche Rechenoperationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren in Handlungen, Bildern und Situationen ebenso wie in Symbolen verankert werden müssen.

Die Grundvorstellungen, die im Theorieteil präsentiert werden, dienen der Konkretisierung dieses Anspruchs für die verschiedenen Bedeutungen von Brüchen. Der Aufbau von Bruchzahlen als Anteile von Standardgrößen wird über alltagsnahe Größenbezüge als besonders anschlussfähig beschrieben, jedoch nur, wenn die gewählten Modelle geeignet sind und ein systematischer Wechsel zwischen Rechtecken, Kreisen und Streifen erfolgt (vgl. Eggharter (2013), S. 15; vgl. Rollnik

(2009), S. 97). Auch wird klar, dass gewisse Interpretationen, wie Bruchzahl als zwei von drei, zwar intuitiv nachvollziehbar sind, jedoch typische Fehlerstrategien beim Addieren begünstigen, wenn Zähler und Nenner als getrennte natürliche Zahlen angesehen werden. Dies offenbart ein zentrales Spannungsfeld. Anschauliche Zugänge sind notwendig, müssen jedoch so gestaltet sein, dass sie den Zahlcharakter und die Struktur von Bruchzahlen stärken und nicht unbeabsichtigt Fehlkonzepte festigen.

Die empirische Untersuchung baute auf dieser theoretischen Einbettung auf. Sie verglich die Leistungen in verschiedenen Teilaspekten der Bruchrechnung von Schüler*innen der sechsten und achten Schulstufe und nahm zudem Analysen zu Geschlechterunterschieden innerhalb der Altersgruppen vor. Insgesamt zeigen die Muster der t-Tests, dass die Ergebnisse der beiden Schulstufen bei vielen Items ähnlich waren und die Unterschiede oft nicht signifikant waren. Dies deutet darauf hin, dass ein wesentlicher Anteil der grundlegenden Prozeduren bereits bis zur sechsten Schulstufe verfügbar ist oder dass bis zur achten Schulstufe keine systematische Leistungsverbesserung über alle Aufgabentypen zu beobachten ist. Zugleich wurden in einzelnen Bereichen signifikante Unterschiede festgestellt, die meist nicht der sechsten Schulstufe zugutekamen, sondern in die entgegengesetzte Richtung wiesen. Dies trat besonders deutlich bei schwierigeren Operationen wie der Subtraktion ungleichnamiger Brüche und der Division von Brüchen auf, bei denen negative t-Werte in den zweiseitigen Tests höhere Mittelwerte der achten Schulstufe anzeigen. Die einseitigen Tests der Hypothese, dass Schüler*innen der sechsten Schulstufe bessere Leistungen erbringen als solche der achten Schulstufe, führten folglich oft zu sehr hohen p-Werten. Dies unterstützt die Hypothese nicht.

Die Ergebnisse können mit den Ergebnissen der Forschung zu typischen Lernhürden im Bruchrechnen erklärt werden. In seiner Untersuchung von Fehlern weist Padberg nach, dass systematische Fehlstrategien vor allem dann auftreten, wenn Lernende Zähler und Nenner getrennt behandeln und beispielsweise den Nenner irrtümlich addieren oder subtrahieren. Dies gilt auch für Situationen, in denen natürliche Zahlen inkorrekt in Bruchzahlen integriert werden (vgl. Padberg (1983), S. 45 bis 49; vgl. Padberg (2009), S. 96). Auch Aksoy und Yazlik berichten, dass Schwierigkeiten oft aus einem unzureichenden Verständnis der Gleichteiligkeit, der Teil-Ganzes-Beziehung sowie aus Problemen beim Modellieren auf dem Zahlenstrahl und beim

Übersetzen zwischen Darstellungen resultieren, was prozedurales Rechnen ohne begriffliche Fundierung begünstigt (vgl. Aksoy und Yazlik (2017), S. 231f.). Zusätzlich erkennen Fitri und Prahmana falsche Vorstellungen beim Umwandeln von gemischten und unechten Brüchen, beim Umwandeln ganzer Zahlen in Brüche sowie bei der Durchführung von Rechenoperationen (vgl. Fitri und Prahmana (2019), S. 2 und S. 6f.). Diese Muster stimmen mit den Aufgabenformaten der Erhebung überein. Subtraktion und Division erfordern oft mehrere Schritte, einen sicheren Umgang mit Umwandlungen und das koordinierte Arbeiten mit Einheiten. Insbesondere in solchen Situationen werden Unterschiede deutlich, da hier grundlegende Vorstellungen zu Operationen und Strategien aktiviert werden müssen und die simple Anwendung von Regeln schneller an Grenzen stößt.

Warum erzielen ältere Schüler*innen in bestimmten Bereichen signifikant bessere Ergebnisse, obwohl ihre Gesamtleistung oft vergleichbar ist? Vermehrte Übung und Verankerung stellen einen offensichtlichen Erklärungsansatz dar. Zentrale Operationen wurden in der achten Schulstufe häufiger wiederholt, wurden in vielfältigeren Kontexten angewandt und sind damit stärker automatisiert. Gleichzeitig wird die Vielzahl an Strategien erweitert, zum Beispiel durch eine flexiblere Auswahl von Darstellungen oder durch effizientere Methoden zur Herstellung gemeinsamer Einheiten. Die Tatsache, dass viele Resultate ähnlich sind, kann aber auch darauf hinweisen, dass ein Teil der Inhalte bereits in der sechsten Schulstufe gut beherrscht wird oder dass ohne fortlaufende, verstehensorientierte Wiederholung keine signifikante Verbesserung zu erwarten ist. Diese Interpretation lässt sich mit dem Ergebnis in Einklang bringen, dass Schüler*innen Regeln zum Teil logisch anwenden, ohne die zugrunde liegenden Konzepte zu aktivieren. Diesen Sachverhalt beschreiben Padberg und Wartha als bloßes Können im Gegensatz zum Verstehen (vgl. Padberg und Wartha (2017), S. 2f.). Die empirische Untersuchung zeigt solche Mechanismen vor allem an den Stellen, an denen die einseitige Hypothese zugunsten der sechsten Schulstufe nicht bestätigt wird, obwohl einzelne zweiseitige Tests signifikante Gruppenunterschiede aufweisen, jedoch in die gegenteilige Richtung.

Die Analysen zu Geschlechterunterschieden ergaben insgesamt kein einheitliches Muster. Die Mehrheit der Vergleiche ergab keine statistisch signifikanten Unterschiede. Wo jedoch einzelne Items signifikant waren, sollten die Interpretationen vorsichtig formuliert werden. Eine größere didaktische Bedeutung ist nicht eine

Zuschreibung, welche auf das Geschlecht zielt, sondern die Frage, welche Merkmale von Aufgaben bestimmte Lernschwierigkeiten hervorrufen. Fehlerklassen wie das Newman Fehlerprotokoll bieten einen zusätzlichen Interpretationsrahmen, indem sie hervorheben, dass Fehler nicht nur auf Rechenprozesse zurückzuführen sind, sondern bereits beim Lesen, Verstehen, Transformieren und Formulieren von Antworten entstehen können. Dies ist für Bruchaufgaben besonders wichtig, wenn Darstellungen oder Texte in Symbolik umgewandelt werden müssen.

Die Verknüpfung von Theorie, Forschungsstand und empirischen Ergebnissen hat eindeutige Auswirkungen auf Unterricht und Förderung. Zunächst sollten grundlegende Konzepte systematisch entwickelt und in allen vier Grundrechenarten fortlaufend wiederverwendet werden. Dies betrifft beispielsweise das Erweitern als Verfeinerung und das Kürzen als Vergröberung der Unterteilung, die durch Faltaktivitäten sowie durch die klassische Analyse von Flächenmodellen begründet werden können (vgl. Eggharter (2013), S. 18; vgl. Padberg (2009), S. 52ff.). Zweitens ist es wichtig, den Wechsel zwischen Darstellungen konsequent zu verwenden, um das Zahlverständnis für Brüche zu fördern und Fehlstrategien zu vermeiden. Zum Dritten spricht die Literatur für eine multimodale Herangehensweise, die verschiedene Wahrnehmungszugänge einbezieht. Auditive Elemente wie das Versprachlichen von Einheiten, visuelle Hilfsmittel wie Flächen und Zahlengeraden, haptische Aktivitäten wie Falten und Legen sowie kognitive und kommunikative Phasen der Begründung und Diskussion können dazu beitragen, dass Regeln aus Verständnis hervorgehen, anstatt isoliert auswendig gelernt zu werden.

Die zentralen Hypothesen werden im Fazit der empirischen Untersuchung anhand der statistischen Ergebnisse bewertet. In der Wissenschaft wird nicht von einer Verifikation gesprochen, sondern davon, ob die Daten die Hypothese unterstützen oder nicht. Die Ergebnisse dieser Arbeit unterstützen die gerichtete Annahme, dass die Schüler*innen der sechsten Schulstufe insgesamt bessere Leistungen als die Schüler*innen der achten Schulstufe zeigen, überwiegend nicht. Die Leistungen waren in mehreren Teilbereichen vergleichbar und bei einzelnen Items zeigte sich sogar ein Vorteil der achten Schulstufe. Zugleich zeigen die Ergebnisse, dass es keinen Hinweis auf umfassende Geschlechterunterschiede gibt. In der Summe heben die Resultate hervor, wie wichtig Grundvorstellungen und Repräsentationswechsel sind. Besonders deutlich werden die Unterschiede an Stellen, wo Aufgaben mehrschrittige Operationen

und Umwandlungen erfordern. Sie können als Anzeichen dafür gedeutet werden, in welchem Maße Schüler*innen über tragfähige mentale Modelle verfügen oder ob sie vorrangig prozedural handeln.

8. Literaturverzeichnis

- Aksoy, Nuri Can and Yazlik, Derya Ozlem (2017): Student Errors in Fractions and Possible Causes of These Errors". Journal of Education and Training Studies Redfame Publishing, vol. 5, No. 11, November 2017, S. 219-233. doi.org/10.11114/jets.v5i11.2679
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BBWF] [Hrsg.] (2023): LEHRPLAN DER ALLGEMEINBILDENDEN HÖHEREN SCHULE. BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH. Anlage A, ausgegeben am 02. Januar 2023. Webseite: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2023_II_1/Anlagen_0012_E1BFECE6_7E8B_4ACF_AEFD_3EC871222138.pdf
- Bundesministerium für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten [BUKA] [Hrsg.] (2000): BUNDESGESETZBLATT FÜR DIE REPUBLIK ÖSTERREICH, 136 II, 157–984. Ausgegeben am 11. Mai 2000. Webseite: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/2000_133_2/2000_133_2.pdf
- Eggharter, Cornelia (2013): Fehlvorstellungen zur Bruchrechnung als Ausgangspunkte für substanzielle Unterrichtsgespräche - eine qualitative Studie. Universität Wien.
- Fitri, Nur Lailatul and Prahmana, Rully Charitas Indra (2019): Misconception in fraction for seventh-grade students. Journal of Physics.: Conf. Ser. 1188 012031. doi:10.1088/1742-6596/1188/1/012031
- Karika, Tímea and Csíkos, Csaba (2022): "A Test for Understanding Simple Fractions Among 5th Grade Students at the Beginning of Lower Secondary Education". Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, vol. 18, no. 2, em2081. doi.org/10.29333/ejmste/11654
- Kleine, M. (2025): Entwicklung mathematischer Grundvorstellungen als gemeinsames Forschungsfeld für Schule und Hochschule. PFLB – Praxis Forschung Lehrer*innen Bildung, 7(3), Seite: 185–200.
- Lestiana, Herani T., Rejeki, Sri, & Setyawan, Fariz (2016): Identifying students' errors on fractions. Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 1(2), 131–139. <https://journals.ums.ac.id/index.php/jramathedu/article/download/3396/2148>
- Matuschke, S. (2011): LERNTYPEN – SINNVOLL ODER IRRTUM? In: Emotionale Bedingungen des Fernstudiums. S. 54-56. Diplomica Verlag.
- Motzer, Renate (2021): Fractions, Ratios, and Roots: Rediscover the Basics and Learn About Interesting Applications. Springer Wiesbaden. doi.org/10.1007/978-3-658-32574-9
- Padberg, Friedhelm (1983): Über Schülerfehler im Bereich der Bruchrechnung. In: Zahlbereiche, Seite: 45–58. Klett Stuttgart.

- Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Bruchrechnung. *[für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung]* (4., erweiterte stark überarbeitete Auflage). Spektrum, Akad. Verl.
- Padberg, Friedhelm und Wartha, Sebastian (2017): *Didaktik Der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum.
- Pestalozzi, Johann Heinrich (1803): *An die Unschuld, den Ernst und den Edelmut meines Zeitalters und meines Vaterlandes*. Tübingen: Cotta.
- Rieger, Marlen (2016): Gegenüberstellung des Bruchrechnens in der Schule und Hochschule [Diplomarbeit], Karl-Franzens-Universität Graz.
- Rieu, Andreas; Loibl, Katharina und Leuders, Timo (2020): Förderung diagnostischer Kompetenz von Lehrkräften bei Aufgaben der Bruchrechnung. Herausforderung Lehrer*innenbildung Zeitschrift zur Konzeption, Gestaltung und Diskussion, 3(1): 492–509.
- Rollnik, Stefan (2009): Das pragmatische Konzept für den Bruchrechnenunterricht. Ein neues didaktisches Konzept für den Bruchrechnenunterricht in der Sekundarstufe I, das anders als die bisher dominierenden Konzepte nicht auf der konkreten Ebene, sondern im Formalen ansetzt. Ausgehend von dem Wunsch, jeden Quotienten zweier natürlicher Zahlen wieder als Zahl zu akzeptieren, wird der Zahlbereich erweitert. Alle Rechenregeln für diese Zahlen können in einer Teilmenge, nämlich in der Menge der natürlichen Zahlen, gewonnen und per Permanenzprinzip auf den neuen Zahlbereich übertragen werden. Außerdem wird ein neuer, multiplikativer Algorithmus für die Entwicklung der Perioden „unendlicher Dezimalbrüche“ vorgestellt [Dissertation]. Universität Flensburg.
- Mitteldeutsches Institut. (2021): *Lerntypen: 4 Lerntypen nach Vester in der Übersicht*. Mitteldeutsches Institut. Webseite: <https://mitteldeutsches-institut.de/lerntypen/>. Zugriffen am 21.10.2025.
- Wartha, Sebastian (2005): Fehler in der Bruchrechnung durch Grundvorstellungsumbrüche. Beiträge zum Mathematikunterricht 2005, 39. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 4.3. 2005 in Bielefeld.
- Widyanesti, Soffi, et. al. (2023): Common errors analysis in solving fractional number problems reviewed from newman's theory. International Journal on Education Insight, 4(2), S. 65-72. doi: 10.12928/ije.v4i2.10291

9. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Absolute Anzahl der Schüler*innen nach Geschlecht und Schulstufe (eigene Darstellung mit Excel).....	36
Abbildung 2: Frage 2a)	36
Abbildung 3: Absolute Anzahl Frage 2a) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	37
Abbildung 4: Frage 2b)	38
Abbildung 5: Absolute Anzahl Frage 2b) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	38
Abbildung 6: Frage 2c)	39
Abbildung 7: Absolute Anzahl Frage 2c) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	40
Abbildung 8: Absolute Anzahl Frage 3a) I.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	41
Abbildung 9: Absolute Anzahl Frage 3a) II.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	42
Abbildung 10: Absolute Anzahl Frage 3a) III.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	43
Abbildung 11: Absolute Anzahl Frage 3b) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	45
Abbildung 12: Absolute Anzahl Frage 3b) II.) richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	46
Abbildung 13: Absolute Anzahl Frage 3b) III.) richtig bzw. falsch	47
Abbildung 14: Absolute Anzahl Frage 3c) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	48
Abbildung 15: Absolute Anzahl Frage 3c) II.) leer, richtig bzw. falsch	49
Abbildung 16: Absolute Anzahl Frage 3c) III.) leer, richtig bzw. falsch	50
Abbildung 17: Absolute Anzahl Frage 3d) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	51
Abbildung 18: Absolute Anzahl Frage 3d) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	52
Abbildung 19: Absolute Anzahl Frage 3d) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	53

Abbildung 20: Absolute Anzahl Frage 3e) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	54
Abbildung 21: Absolute Anzahl Frage 3e) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	55
Abbildung 22: Absolute Anzahl Frage 3e) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	55
Abbildung 23: Absolute Anzahl Frage 3f) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	57
Abbildung 24: Absolute Anzahl Frage 3f) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	57
Abbildung 25: Absolute Anzahl Frage 3f) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	58
Abbildung 26: Absolute Anzahl Frage 3g) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	60
Abbildung 27: Absolute Anzahl Frage 3g) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	60
Abbildung 28: Absolute Anzahl Frage 3g) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	61
Abbildung 29: Absolute Anzahl Frage 3h) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	62
Abbildung 30: Absolute Anzahl Frage 3h) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	63
Abbildung 31: Absolute Anzahl Frage 3h) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	64
Abbildung 32: Absolute Anzahl Frage 3i) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	65
Abbildung 33: Absolute Anzahl Frage 3i) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	66
Abbildung 34: Absolute Anzahl Frage 3i) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	67
Abbildung 35: Absolute Anzahl Frage 4) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	68
Abbildung 36: Absolute Anzahl Frage 4) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	69
Abbildung 37: Absolute Anzahl Frage 4) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	70

Abbildung 38: Absolute Anzahl Frage 5) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	71
Abbildung 39: Absolute Anzahl Frage 5) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	72
Abbildung 40: Absolute Anzahl Frage 5) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	73
Abbildung 41: Absolute Anzahl Frage 6) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	74
Abbildung 42: Absolute Anzahl Frage 6) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	75
Abbildung 43: Absolute Anzahl Frage 6) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	75
Abbildung 44: Absolute Anzahl Frage 7) I.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	77
Abbildung 45: Absolute Anzahl Frage 7) II.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	78
Abbildung 46: Absolute Anzahl Frage 7) III.) leer, richtig bzw. falsch (eigene Darstellung mit Excel).....	78

10. Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2a) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	37
Tabelle 2: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2a) (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	38
Tabelle 3: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2b) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	39
Tabelle 4: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2b) (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	39
Tabelle 5: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 2c) (Bruchdarstellung), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	40
Tabelle 6: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 2c) (Bruchdarstellung), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	40
Tabelle 7: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) I.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	41
Tabelle 8: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) II.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	42
Tabelle 9: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3a) III.) (Addition gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	43
Tabelle 10: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3a) I.), II.) und III.) (Addition gleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	44
Tabelle 11: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) I.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	45
Tabelle 12: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) II.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	46
Tabelle 13: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3b) III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	47

Tabelle 14: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3b) I.), II.) und III.) (Subtraktion gleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	47
Tabelle 15: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) I.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	48
Tabelle 16: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) II.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	49
Tabelle 17: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3c) III.) (Addition ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	50
Tabelle 18: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3c) I.), II.) und III.) (Addition ungleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	50
Tabelle 19: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) I.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	51
Tabelle 20: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) II.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	52
Tabelle 21: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3d) III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	53
Tabelle 22: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3d) I.), II.) und III.) (Subtraktion ungleichnamiger Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	53
Tabelle 23: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) I.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	54
Tabelle 24: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) II.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	55
Tabelle 25: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3e) III.) (Multiplikation zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	56
Tabelle 26: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3e) I.), II.) und III.) (Multiplikation zweier Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	56

Tabelle 27: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) I.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	57
Tabelle 28: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) II.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	58
Tabelle 29: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3f) III.) (Multiplikation natürliche Zahl mit Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	58
Tabelle 30: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3f) I.), II.) und III.) (Multiplikation natürlicher Zahl mit Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	59
Tabelle 31: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) I.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	60
Tabelle 32: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) II.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	61
Tabelle 33: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3g) III.) (Division zweier Brüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	61
Tabelle 34: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3g) I.), II.) und III.) (Division zweier Brüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	62
Tabelle 35: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) I.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	63
Tabelle 36: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) II.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	63
Tabelle 37: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3h) III.) (Doppelbrüche), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	64
Tabelle 38: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3h) I.), II.) und III.) (Doppelbrüche), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	64
Tabelle 39: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) I.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	65
Tabelle 40: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) II.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	66

Tabelle 41: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 3i) III.) (Division natürliche Zahl und Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	67
Tabelle 42: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 3i) I.), II.) und III.) (Division natürliche Zahl und Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	67
Tabelle 43: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) I.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	68
Tabelle 44: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) II.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	69
Tabelle 45: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 4) III.) (Kürzen), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	70
Tabelle 46: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 4) I.), II.) und III.) (Kürzen), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	70
Tabelle 47: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) I.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	71
Tabelle 48: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) II.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	72
Tabelle 49: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 5) III.) (Erweitern), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	73
Tabelle 50: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Erweitern), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	73
Tabelle 51: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) I.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	74
Tabelle 52: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) II.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	75
Tabelle 53: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 6) III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechter Bruch), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	76
Tabelle 54: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Umwandeln gemischte Zahl in unechten Bruch), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	76
Tabelle 55: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) I.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	77

Tabelle 56: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) II.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	78
Tabelle 57: Unabhängiger t-Test zum Vergleich der 6. und 8. Schulstufe in Aufgabe 7) III.) (Umwandeln unechter Bruch in gemischte Zahl), einseitig ($H_a: \mu_6 > \mu_8$) (eigene Darstellung mit Jamovi)	79
Tabelle 58: Unabhängiger t-Tests zum Vergleich von Geschlechterunterschieden in Aufgabe 5) I.), II.) und III.) (Umwandeln unechten Bruch in gemischte Zahl), zweiseitig ($H_a: \mu_w \neq \mu_m$) (eigene Darstellung mit Jamovi).....	79

11. Anhang (Fragebogen)

Fragebogen zum Thema Bruchrechnen

Erstellt von Dragan Grujić, BEd

1. Persönliche Angaben: Bitte kreuze an, was auf dich zutrifft:

• **Geschlecht:** ☐ Männlich ☐ Weiblich ☐ Divers

• **Schulstufe:** ☐ 6. Schulstufe ☐ 8. Schulstufe

Falls 8. Schulstufe: In welchen Schulzweig gehst du?

☐ RG ☐ G ☐ WIKU

2. Darstellung als Bruch: Stelle den relativen Anteil der farbigen Fläche jeweils als Bruch dar:

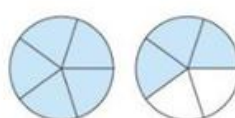
a)



b)



c)



3. Bruchrechnungen: Berechne folgende Aufgaben ohne Hilfsmittel (kein Taschenrechner, kein GeoGebra etc.):

a) I.) $\frac{3}{7} + \frac{8}{7} =$

II.) $\frac{5}{3} + \frac{9}{3} =$

III.) $\frac{2}{12} + \frac{14}{12} =$

b) I.) $\frac{8}{3} - \frac{4}{3} =$

II.) $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} =$

III.) $\frac{13}{12} - \frac{11}{12} =$

c) I.) $\frac{15}{3} + \frac{3}{2} =$

II.) $\frac{4}{5} + \frac{10}{4} =$

III.) $\frac{6}{4} + \frac{1}{12} =$

d) I.) $\frac{14}{3} - \frac{3}{2} =$

II.) $\frac{9}{5} - \frac{2}{3} =$

III.) $\frac{25}{4} - \frac{12}{8} =$

e) I.) $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} =$

II.) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$

III.) $\frac{8}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

f) I.) $2 \cdot \frac{5}{2} =$

II.) $3 \cdot \frac{2}{7} =$

III.) $5 \cdot \frac{1}{3} =$

g) I.) $\frac{4}{3} : \frac{7}{2} =$

II.) $\frac{2}{5} : \frac{8}{3} =$

III.) $\frac{10}{4} : \frac{2}{8} =$

h) I.) $\frac{1}{\frac{3}{2}} =$

II.) $\frac{2}{\frac{8}{5}} =$

III.) $\frac{9}{\frac{2}{5}} =$

i) I.) $5 : \frac{2}{3} =$

II.) $2 : \frac{8}{2} =$

III.) $3 : \frac{2}{5} =$

4. Brüche kürzen: Kürze die folgenden Brüche soweit wie möglich:

I.) $\frac{10}{100} =$

II.) $\frac{48}{72} =$

III.) $\frac{125}{50} =$

5. Brüche erweitern: Erweitere die folgenden Brüche mit dem jeweils angegebenen Faktor ($\Rightarrow$):

I.) $\frac{7}{5} \xrightarrow{\cdot 3}$

II.) $\frac{1}{8} \xrightarrow{\cdot 4}$

III.) $\frac{2}{6} \xrightarrow{\cdot 6}$

6. Schreibweise als unechter Bruch: Schreibe die folgenden gemischten Zahlen als unechte Brüche:

I.) $1\frac{2}{5} =$

II.) $3\frac{2}{3} =$

III.) $5\frac{1}{8} =$

7. Schreibweise als gemischte Zahl: Wandle die folgenden unechten Brüche in gemischte Zahlen um:

I.) $\frac{8}{3} =$

II.) $\frac{22}{5} =$

III.) $\frac{31}{6} =$