

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Didaktisch wirksame Gestaltung von GeoGebra-Books im Mathematikunterricht
der Sekundarstufe I - ein Vergleich dreier didaktischer Ansätze

verfasst von | submitted by

Teresa Tamara Reither BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2026

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 500 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Bewegung und Sport Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger
Privatdoz.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei all jenen bedanken, die mich während der ganzen Studiumsphase unterstützt und begleitet haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger, der mich bei der Wahl des Themas kompetent beraten und mich während des gesamten Entstehungsprozesses dieser Arbeit engagiert begleitet hat. Durch seine fachlichen Hinweise, konstruktiven Rückmeldungen und die jederzeitige Bereitschaft zum Austausch konnte ich meine Arbeit kontinuierlich weiterentwickeln. Besonders hervorheben möchte ich seine schnellen und stets hilfreichen Antworten, die mir in allen Phasen der Arbeit wertvolle Orientierung boten.

Ebenso bedanken möchte ich mich bei all den mitwirkenden Schüler:innen der AHS BG/BRG Radetzkystraße. Ohne ihrer Unterstützung wäre die Durchführung meiner empirischen Untersuchung nicht möglich gewesen.

Mein größter Dank gilt meinem Freund, der mich über alle Phasen meines Studiums hinweg mit großem Rückhalt begleitet hat. Seine stetige Unterstützung, seine Geduld sowie seine Motivation in Zeiten von Höhen und Tiefen waren für mich von unschätzbarem Wert. Ohne ihn wäre ich nicht an dem Punkt, an dem ich heute stehe.

Zusammenfassung

Diese Masterarbeit untersucht, wie GeoGebra-Books im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I konzipiert werden müssen, um einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten. Im Mittelpunkt steht der Vergleich von drei unterschiedlichen didaktischen Ansätzen: Direkte Instruktion, EIS-Prinzip und Entdeckendes Lernen. Die empirische Untersuchung basiert auf zwei Untersuchungsdurchführungen in einer 7. Schulstufe, in denen Schüler:innen in Zweiergruppen jeweils eines der GeoGebra-Books bearbeiteten. Als Inhalte wurden die Addition und Subtraktion rationaler Zahlen sowie die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks gewählt. Für die Datenerhebung wurden Bildschirm- und Audioaufnahmen der Bearbeitung des GeoGebra-Books, Schüler:inneninterviews, sowie Post-Tests eingesetzt.

Die Ergebnisse zeigen ein differenziertes Wirkprofil der drei Ansätze. Das Entdeckende Lernen ging mit der höchsten kognitiven Aktivierung und überwiegend semantischen Begründungen einher, zeigte jedoch vermehrt Unsicherheiten und längere Bearbeitungszeiten. Die Direkte Instruktion hatte eine hohe Lernwirksamkeit, insbesondere beim Thema regelmäßiges Sechseck. Allerdings erwies sie sich nicht als kognitiv aktivierend. Das EIS-Prinzip erzielte beim Thema rationale Zahlen die höchsten Post-Test-Ergebnisse. Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass GeoGebra-Books einen hohen didaktischen Wert aufweisen, wenn sie Struktur und Eigenaktivität kombiniert und Repräsentationswechsel gezielt anregt. Diese Arbeit liefert praxisnahe Empfehlungen zur Gestaltung digitaler Lernumgebungen und benennt Ansatzpunkte für weiterführende Forschung.

Abstract

This master's thesis examines how GeoGebra-Books should be designed for mathematics lessons in lower secondary education to achieve high didactic value in terms of conceptual understanding, cognitive activation and learning effectiveness. The focus is on comparing three different didactic approaches: direct instructions, the EIS-principle and discovery learning. The empirical study is based on two investigations conducted in a 7th grade class, in which students worked on one of the GeoGebra-Books in pairs. The content chosen was the addition and subtraction of rational numbers and the construction of a regular hexagon. Screen and audio recordings of the GeoGebra-Books work, student interviews, and post-tests were used for data collection.

The results show a differentiated effect profile for the three approaches. Discovery learning was associated with the highest cognitive activation and predominantly semantic reasoning but also showed increased uncertainty and longer processing times. Direct instructions had a high learning effectiveness, especially on the topic of regular hexagons. However, it did not prove to be cognitively activating. The EIS-principle achieved the highest post-test results on the topic of rational numbers. Overall, it can be summarized that GeoGebra-Books have a high didactic value when they combine structure and independent activity and specifically encourage changes in representation. This work provides practical recommendations for the design of digital learning environments and identifies starting points for further research.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	ii
Zusammenfassung	iii
Abstract.....	iv
1. Einleitung.....	3
2. Stand der Forschung.....	5
2.1. Digitale Lernumgebungen im Mathematikunterricht	5
2.2. GeoGebra und GeoGebra-Books.....	6
3. Forschungsfrage.....	9
4. Theoretischer Rahmen	10
4.1. Begriffsdefinition	10
4.1.1. Lernwirksamkeit	10
4.1.2. Kognitive Aktivierung.....	11
4.1.3. Konzeptuelles Verständnis	13
4.2. Direkte Instruktion	14
4.2.1. Begriffsbestimmung	14
4.2.2. Rollenverteilung.....	14
4.2.3. Historisch.....	15
4.2.4. Fehler	16
4.2.5. Vergleich Frontalunterricht	16
4.2.6. Phasen	17
4.2.7. Methoden	18
4.2.8. Im Unterricht.....	20
4.2.9. Vor- und Nachteile.....	21
4.3. Entdeckendes Lernen	23
4.3.1. Begriffsbestimmung	23
4.3.2. Rollenverteilung.....	24
4.3.3. Formen des entdeckenden Lernens.....	25
4.3.4. Historisch.....	28
4.3.5. Vor- und Nachteile.....	29
4.3.6. Umsetzung im Unterricht	31
4.4. EIS – Prinzip	33
4.4.1. Begriffserklärung	33
4.4.2. Die enaktive Ebene.....	34
4.4.3. Die ikonische Ebene	34
4.4.4. Die symbolische Ebene	35
4.4.5. Zusammenhang der Ebenen	36
4.5. Theoretische Rahmengrundlagen zur Gestaltung digitaler Lernmaterialien	39
4.5.1. Multimedia Learning	39
4.5.2. Cognitive Load Theory	40

5. Methode	42
5.1. <i>Forschungsdesign und Ablauf</i>	42
5.2. <i>Strichprobe und Setting</i>	42
5.3. <i>GeoGebra-Books</i>	43
5.3.1. Rationale Zahlen – Direkte Instruktion	44
5.3.2. Rationale Zahlen – EIS-Prinzip	46
5.3.3. Rationale Zahlen – Entdeckendes Lernen	50
5.3.4. Regelmäßiges Sechseck – Direkte Instruktion	53
5.3.5. Regelmäßiges Sechseck – EIS-Prinzip	56
5.3.6. Regelmäßiges Sechseck – Entdeckendes Lernen	58
5.4. <i>Erhebungsinstrumente</i>	59
5.5. <i>Auswertungsplan/Datenanalyse der Bildschirm- und Audioaufnahmen</i>	60
5.6. <i>Post-Test</i>	62
5.7. <i>Datenschutzerklärung</i>	63
6. Ergebnisse	64
6.1. <i>Stichprobe und Datensichtung</i>	64
6.2. <i>Video- und Audiodaten – Outcome</i>	64
6.2.1. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	64
6.2.2. Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks	73
6.3. <i>Post-Test</i>	80
6.4. <i>Schüler:innen – Interviews</i>	82
7. Interpretation	87
7.1. <i>Rückbezug auf die Forschungsfrage</i>	87
7.2. <i>Konzeptuelles Verständnis</i>	87
7.3. <i>Kognitive Aktivierung</i>	88
7.4. <i>Lernwirksamkeit</i>	90
7.5. <i>Vergleich der drei didaktischen Ansätze</i>	91
7.6. <i>Limitationen der Studie</i>	94
8. Fazit	96
Literaturverzeichnis	99
Abbildungsverzeichnis	105
Anhang	106

1. Einleitung

Durch die Digitalisierung in der Schule gewinnen digitale Lernmittel zunehmend an Bedeutung. Im Mathematikunterricht gibt es zum Beispiel GeoGebra-Books. Diese Lernmittel bieten vielseitige Möglichkeiten zur Visualisierung, Interaktivierung sowie Individualisierung und Differenzierung von Lernprozessen (Yorganci & Subasi, 2025). Obwohl GeoGebra eine kostenlose Plattform ist, wird es nur in wenigen Ländern im Mathematikunterricht eingesetzt (Saha et al., 2021).

Der Einsatz digitaler Lernumgebungen gewinnt insbesondere im schulischen Unterricht zunehmend an Bedeutung. Verschiedene digitale Technologien, wie Computer und Tablets, finden zunehmend Anwendung durch Schüler:innen und Bildungseinrichtungen. Schüler:innen sind heutzutage umgeben von neuen Technologien. Die Integration von Technologie ist daher ein großes Ziel in der Schule. Lehrpersonen müssen geeignete Lerntechnologien und Strategien wählen, die die Aufmerksamkeit der Schüler:innen anregen um eine aktive Teilnahme am Unterricht zu fördern (Radović et al., 2020). Schon ältere Studien wie von Korenova (2017) beschrieben, dass Lehrpersonen vermehrt digitales Material und kostenlose Softwares verwenden. Ebenso haben Schüler:innen die Chance, bestimmte Programme gratis zuhause über ihre Smartphones und Tablets zu nutzen (Korenova, 2017). Auch im Unterrichtsfach Mathematik gibt es seit mehreren Jahren eine große Anzahl an Softwareprodukten und diese steigt auch jährlich (Yohannes & Chen, 2023).

Die fortgeschrittene Digitalisierung des Bildungswesens stellt den Lehrpersonen vor neue Chancen, aber genauso auch vor neuen Herausforderungen. Im Mathematikunterricht versprechen digitale Werkzeuge wie dynamische Geometriesoftware oder interaktive Lernumgebungen mathematische Inhalte anschaulicher und lernwirksamer zu gestalten. Dennoch zeigt sich, dass der bloße Einsatz von digitalen Medien nicht automatisch zu besseren Lernergebnissen oder besseren Noten führt (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025). Dadurch stellt man sich immer mehr die Frage, wie diese digitalen Werkzeuge didaktisch sinnvoll gestaltet und eingesetzt werden müssen, um einen Mehrwert für das Lernen zu erzeugen.

Immer mehr Beliebtheit für eine digitale Lernumgebung im Mathematikunterricht gewinnen sogenannte GeoGebra-Books. GeoGebra-Books ermöglichen interaktive Arbeitsmaterialien zu strukturieren und in einen digitalen Lernpfad zu bündeln. Sie schaffen Text, Applets, Aufgaben, Bilder und Videos innerhalb einer strukturierten Lernsequenz zu kombinieren (Saha et al.,

2021). Dabei werden GeoGebra-Books als Übungsformate wie auch als vollwertige Unterrichtseinheit eingesetzt. Es bleibt dennoch häufig unklar, nach welchen didaktischen Prinzipien man sie gestaltet soll, sowie welche Auswirkungen unterschiedliche Gestaltungsansätze auf die Lernprozesse haben (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025; Yohannes & Chen, 2023).

Für diese Masterarbeit wurden drei verschiedene didaktische Ansätze diskutiert. Die Direkte Instruktion (Rosenshine, 2012), das Entdeckende Lernen (Bruner, 1961), sowie das EIS-Prinzip (Berger, 2025) repräsentieren unterschiedliche Gewichtungen von Struktur, Eigenaktivität und Anleitung. Dabei steht die Direkte Instruktion für Effizienz und Klarheit, dem Entdeckenden Lernen wird ein hohes Potenzial zur Selbstständigkeit und kognitiven Aktivierung zugeschrieben, das EIS-Prinzip wiederum beides mittels der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene zu verbinden. Der Vergleich zwischen den drei Ansätzen ist bislang nur begrenzt empirisch untersucht (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025). Neben den drei Ansätzen fokussierte sich die Arbeit auf die drei Dimensionen konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit. Mathematisches Lernen geht über reines Anwenden von Rechenverfahren hinaus und verlangt ein tiefes Verständnis von Zusammenhängen.

Die vorliegende Arbeit setzt an dieser Forschungslücke an. Ziel ist es zu untersuchen, wie GeoGebra-Books konzipiert werden müssen, um im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten. Im Fokus liegen die zwei Unterrichtsthemen Addition und Subtraktion rationaler Zahlen, sowie die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks. Diese werden mithilfe von GeoGebra-Books nach den drei didaktischen Ansätzen gestaltet, durchgeführt und empirisch untersucht.

Der Mehrwert dieser Masterarbeit liegt sowohl auf wissenschaftlicher als auch auf unterrichtspraktischer Ebene. Sie liefert Einblicke auf verschiedene Gestaltungsansätze innerhalb digitaler Lernumgebungen und einen direkten Vergleich. Sie ermöglicht eine vielschichtige Betrachtung von Lernprozessen mittels der Video- und Audioanalyse, den Schüler:innen-Interviews und den Ergebnissen, die danach erfolgen. Für Lehrpersonen bietet diese Masterarbeit konkrete Hinweise zur didaktischen Gestaltung von GeoGebra-Books und zur diversen Integration digitaler Werkzeuge in den Unterricht.

Dadurch leistet die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur Frage, wie digitale Medien im Mathematikunterricht eingesetzt und didaktisch wirksam genutzt werden können.

2. Stand der Forschung

2.1. Digitale Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Die digitalen Medien eröffnen im Unterricht vielfältige Möglichkeiten, Lernprozesse zu individualisieren, zu visualisieren und aktiv zu gestalten. Die Benutzung interaktiver Lernumgebungen im Mathematikunterricht wirkt sich positiv auf die Leistungen und die Wissensspeicherung der Schüler:innen aus. Es ermöglicht ihnen Konzepte eigenständig zu erkunden, Hypothesen zu formulieren und deren Zusammenhänge zu erkennen. Das Wissen wird so aktiv verknüpft, überprüft und transferiert (Radović et al., 2020). Die technologische Entwicklung im schulischen Kontext hat in den vergangenen Jahren erhebliche Fortschritte gemacht und ermöglicht die Gestaltung von Lernumgebungen, die kognitive und affektive Lernprozesse unterstützen (Yorganci & Subasi, 2025). „Studies have shown that IT greatly enhances student performance and motivation in many educational disciplines, including natural sciences, language, engineering, and so on.“ (Yorganci & Subasi, 2025)

Besonders effektiv sind digitale Werkzeuge wie E-Books oder Applets. Diese unterstützen die Visualisierung abstrakter Inhalte und fördern das konzeptuelle Verständnis. Durch interaktive Darstellungen können mathematische Zusammenhänge unmittelbar erfahrbar und die kognitive Aktivierung gestärkt werden. Ursprünglich wurde das E-Book als eine Ergänzung zu den gedruckten Schulbüchern angesehen, wird aber nun als hilfreiches Lehrmittel zur Vermittlung von Inhalten für Schüler:innen gesehen. Insbesondere GeoGebra-Applets steigern die Lernleistung und Motivation und verbessern die Aufmerksamkeit und Zufriedenheit der Schüler:innen. Die Autor:innen (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025) kommen zum Schluss, dass interaktive Elemente wie visuelle Darstellungen, Texte, Videos oder Audiodateien, sowohl online als auch im Präsenzunterricht eingesetzt werden können. Sie betonen, dass diese Medien vor allem die Lernmotivation fördern (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025).

„Interactive eBooks can provide significant intuitive support to learners in the presentation of abstract mathematical concepts when compared to traditional materials. With using eBooks to learn, students can develop a constructivist approach to mathematics, based on the exploration and deeper understanding of mathematical processes and objects. Studies also point out that such learning design can encourage innovative thinking, knowledge acquisition, and creativity of students.“ (Radović et al., 2020, S. 34)

Dennoch sind die digitalen Medien auch mit Herausforderungen verbunden. Besonders die Funktionen wie zum Beispiel Videos oder Audiodateien können sich genauso negativ auf die Konzentration der Schüler:innen und somit auf die Lernwirksamkeit auswirken (Radović et al., 2020). Genauso könnten manche mathematischen Konzepte zu abstrakt für die Durcharbeitung in einem E-Book sein (Yohannes & Chen, 2023).

Damit solche Interaktionen lernwirksam sind, ist es daher entscheidend, dass digitale Medien nicht als Selbstzweck, sondern eher als didaktisches Instrument zur Förderung der Lernprozesse verstanden werden (Korenova, 2017). Korenova (2017) stellt in ihrem Artikel das TPACK-Modell vor, welches verdeutlicht, dass der Unterricht wirksam digital gestaltet werden kann, wenn Lehrpersonen das fachliche Wissen, didaktische Kompetenzen, sowie technologische Fertigkeiten miteinander verbinden können.

2.2. GeoGebra und GeoGebra-Books

Es gibt eine Vielzahl an Softwares, die beim Lehren und Lernen von Mathematik helfen können. Die zwei wichtigsten Softwares sind *Computer Algebra Systems* (CAS), welche algebraische Ausdrücke symbolisch berechnen, vereinfachen und analysieren, und *Dynamic Geometric Software* (DGS), die sich auf die Beziehungen zwischen Punkten, Linien, Kreisen usw. konzentriert. Bis GeoGebra auf den Markt gebracht wurde, gab es keine Software, die beides integrierte. Im Jahr 2001 veröffentlichte Markus Hohenwarter die Software GeoGebra, welche GEOMETrie und ALGEBRA in ein einheitliches Paket verbindet (Yohannes & Chen, 2023). Die Software ist nicht nur offline als kostenlose App zu verwenden, sondern auch als Onlineplattform, die als Web-Applikation aufrufbar ist (Laurens et al., 2025).

GeoGebra ist für alle frei nutzbar und am Computer, Notebooks, Tablets und Smartphones verfügbar. Der Entwickler verbessert seine Software regelmäßig, sodass ebenso die Funktionen Geometrie, Algebra, Analysis, Statistik und Tabellenkalkulationen zur Verfügung stehen (Korenova, 2017). Dadurch, dass die Software einzigartig ist, ist sie nicht nur in Europa weit verbreitet, sondern in insgesamt 180 verschiedenen Ländern. GeoGebra ist zudem in über 50 Sprachen verfügbar (Yohannes & Chen, 2023).

Der Hauptanwendungsbereich von GeoGebra liegt in Schulen. Die Schüler:innen können durch GeoGebra besser ihre Lernaktivitäten, die sie davor händisch am Blatt Papier kennengelernt haben, nachvollziehen und erleben. Es können Anwendungen, sogenannte Applets, erstellt werden, die den Schüler:innen die Grundlage dafür bieten, die Themen anhand konkreter Darstellungen zu verstehen. So kann die Beziehung zwischen der analytischen und visuellen

Darstellung mathematischer Konzepte sofort erkannt werden (Yorganci & Subasi, 2025). Die Software ermöglicht Schüler:innen kritisches Denken und kreative, innovative Lösungen für mathematische Probleme zu entwickeln. Dadurch verbessern sich die Problemlösefähigkeiten wie zum Beispiel Erkundung und Reflexion. Dadurch ist GeoGebra sowohl für Primarstufe, Sekundarstufe, als auch für die Universität geeignet (Korenova, 2017; Yohannes & Chen, 2023; Yorganci & Subasi, 2025).

Eine der neueren Entwicklungen von GeoGebra ist die online Funktion GeoGebra Classroom. Hierbei können zum Beispiel Lehrpersonen sogenannte GeoGebra-Books erstellen, auf die jede Person öffentlich zugreifen kann. Diese GeoGebra-Books beinhalten digitale Arbeitsblätter, die sowohl GeoGebra Applets beinhalten können als auch einen normalen Text mit Aufgaben. Die Schüler:innen können diese GeoGebra-Books während der Unterrichtseinheit durcharbeiten, während die Lehrpersonen die Arbeit der Schüler:innen online nachverfolgen können, ohne von Platz zu Platz gehen zu müssen. Es ist ebenso möglich, die Arbeitszeit festzulegen und mit einem Klick alle Bildschirme zu pausieren (Laurens et al., 2025).

Es gibt einige Studien (Korenova, 2017; Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025), die schon mit dem Einsatz von GeoGebra bzw. GeoGebra-Books im Mathematikunterricht gearbeitet haben. Radović et al. (2020) verglich eine Testgruppe, die diese interaktiven eBooks verwendet haben, mit einer Kontrollgruppe. Die Nutzung von GeoGebra-Applets erwies sich als förderlich für die Verknüpfung zwischen mathematischen Texten und der visuellen Darstellung der Inhalte. Es ermöglichte den Schüler:innen, während des Lernprozesses tiefergehende Aspekte des Themas zu erkunden als in den Kontrollgruppen. Das stellt einen wichtigen Beitrag zum Prozess der Übernahme mathematischer Kenntnisse dar, wodurch sich Problemlösefähigkeiten bei Schüler:innen entwickeln (Radović et al., 2020).

Untersuchungen zeigen, dass der Einsatz solcher interaktiven Bücher zu nachhaltigen Lernzuwächsen führt, da Schüler:innen durch unmittelbares Feedback und selbstgesteuerte Exploration ihr Wissen vertiefen können (Yorganci & Subasi, 2025). Laurens et al. (2025) zeigten ebenso, dass Schüler:innen, die diese GeoGebra Classrooms benutzt haben, ein besseres Lernergebnis erzielten als jene, die es nicht benutzt haben. Gemessen wurde die Leistung im Themenbereich Zylinder, insbesondere Aufgaben zum Konstruieren und Beschreiben, sowie auch zum Herleiten und Anwenden von Formeln für Oberfläche und Volumen. Dadurch konnten Laurens et al. (2025) schlussfolgern, dass GeoGebra-Books bzw. GeoGebra Classrooms einen signifikanten Einfluss auf die Lernwirksamkeit in Mathematik haben (Laurens et al., 2025). Nicht nur die Lernergebnisse verbessern sich, sondern laut Yorganci und

Subasi (2025) erhöht die Anwendung von GeoGebra-Books die Motivation von Schüler:innen. Ebenso positiv hervorzuheben ist, dass GeoGebra die digitale Kompetenz von Schüler:innen, als auch von Lehrpersonen erhöht (Korenova, 2017; Laurens et al., 2025).

Die E-Books bieten interaktive und anwendungsbezogene Lernmöglichkeiten durch Simulationen und Problemlöseaufgaben, wodurch das Verständnis der Schüler:innen für mathematische Konzepte gezielt erweitert werden kann. GeoGebra-Books wirken sich positiv auf den mathematischen Lernerfolg der Schüler:innen aus (Yorganci & Subasi, 2025). In den Ergebnissen von Radović et al. (2020), zeigte sich, dass die Gruppe mit den E-Books in den Tests danach besser abgeschnitten hatte als die Kontrollgruppe. Das Design von solchen digitalen Lernmitteln fördert außerdem innovatives Denken und die Kreativität der Schüler:innen (Radović et al., 2020). In der Studie von Yorganci und Subasi (2025) sollte mithilfe einer Test- und Kontrollgruppe der Lernerfolg und die Motivation der Proband:innen herausgefunden und miteinander verglichen werden. Getestet wurden Student:innen, die zufällig in die Gruppen gewählt wurden. Die Testgruppe bekam E-Books mit interaktiven GeoGebra-Applets, während die Kontrollgruppe ein PDF-E-Book benutzte (Yorganci & Subasi, 2025). Yorganci und Subasi (2025) zeigen, dass die Testgruppe, die diese GeoGebra-Applets benutzt haben, signifikant bessere Lernerfolge und höhere Motivation erzielte als die Kontrollgruppe.

Jedoch ist weiterhin Forschung zu diesem Gebiet erforderlich, um das Potenzial, sowie auch die Auswirkung dieser digitalen Lernmittel zu bestimmen (Yorganci & Subasi, 2025). Zukünftig sollten vermehrt Unterrichtsmaterialien zu verschiedenen Unterrichtsmethoden erstellt und von Expert:innen geprüft werden. Außerdem sollten diese Materialien für Lehrpersonen auf zugänglichen Plattformen bereitgestellt werden, die thematisch und altersgerecht strukturiert sind. Die Fortbildungen von Lehrpersonen sollte sich demnach verstärkt auf den Ausbau digitaler Kompetenzen, sowie den didaktisch sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge, wie GeoGebra, im Mathematikunterricht konzentrieren (Korenova, 2017). Die Effektivität der E-Books gilt in der Forschung bereits als erwiesen (Korenova, 2017; Radović et al., 2020; Yohannes & Chen, 2023; Yorganci & Subasi, 2025), dennoch bleibt die Frage offen, wie solche Materialien didaktisch sinnvoll gestaltet werden können. Der Einsatz digitaler Medien zeigt sich oft als innovativ, doch in der Praxis wird klar, dass die Qualität der didaktischen Konzeption entscheidend für den Lernerfolg der Schüler:innen ist (Radović et al., 2020; Yorganci & Subasi, 2025). Laut Radović et al. (2020) soll für die maximalen Effekte eines Unterrichtsdesigns die Gestaltung gut geplant, strukturiert, als auch effektiv in den Unterrichtsprozess integriert sein.

3. Forschungsfrage

Die vorliegende Masterarbeit möchte beleuchten, auf welcher Art und Weise GeoGebra-Books zu gestalten sind. Dazu möchte ich drei unterschiedliche Unterrichtsmethoden heranziehen, das Entdeckende Lernen, die Direkte Instruktion und das EIS-Prinzip, sie näher erläutern und dazu jeweils ein passendes GeoGebra-Book gestalten, welche Schüler:innen der 7. Schulstufe erarbeiten werden. Es soll dabei herausgefunden werden, welche dieser drei Methoden die größte Lernwirksamkeit, kognitive Aktivierung und das größte konzeptuelle Verständnis ausweist. Dabei beziehe ich mich in meiner Arbeit auf die Multimedia Learning Theory und die Cognitive Load Theory. Die Forschungsfrage lautet folgendermaßen:

Wie müssen GeoGebra-Books konzipiert werden, um im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten?

Diesbezügliche Hypothesen sind:

- H1: Entdeckendes Lernen über GeoGebra-Books fördert die kognitive Aktivierung der Schüler:innen stärker als die anderen beiden Ansätze, führt aber häufiger zu Fehlvorstellungen und geringerer Lernwirksamkeit.
- H2: Direkte Instruktion in GeoGebra-Books zeigt kurzfristig höhere Lernerfolge, führt jedoch zu geringerer kognitiver Aktivierung und schwächerem konzeptuellem Verständnis im Vergleich zum EIS-Prinzip.

4. Theoretischer Rahmen

4.1. Begriffsdefinition

4.1.1. Lernwirksamkeit

Lernwirksamkeit stellt ein wesentliches Qualitätsmerkmal von Unterricht dar, da die Leistungsfähigkeit des Gehirns in weit stärkerem Maß durch Lernprozesse geprägt wird als durch die genetische Veranlagung (Carmesin, 2014). Die Lernwirksamkeit bezeichnet den durch eine Unterrichtsmaßnahme bewirkten, empirisch nachweisbaren Lernzuwachs. Dabei werden Veränderungen des Wissens, Könnens und Verständnisses gemessen, welche kausal auf das Lehr-Lern-Angebot zurückgeführt werden kann. Die Lernwirksamkeit bezieht sich auf die Veränderung zwischen Vor- und Nachtest. Dabei dient der Vortest der Erfassung des Wissensstands vor einer Lernphase, während der Nachtest den Wissensstand nach der Intervention misst. Entscheidend ist somit der erzielte Lernfortschritt (Brandl, 2016).

Empirische Beispiele im naturwissenschaftlichen Bereich verdeutlichen die Wirksamkeit von Videoeinsatz im Sinne der Lernwirksamkeit. In einer Interventionsstudie zu Erklärvideos für Elektromotoren, erzielten Schüler:innen signifikant höhere Lernfortschritt-Zuwächse beim Videoeinsatz im Vergleich zu rein schriftbasiertem Material. In dieser Studie wurde Lernwirksamkeit sowohl objektiv, mittels Lernzuwachs, als auch subjektiv, durch Selbsteinschätzung, erfasst (Vonschallen et al., 2024).

Um solche gewünschten Lernergebnisse zu erreichen, ist Adaptivität als essenzielles Merkmal in den Blick zu nehmen. Ebenso wie die damit verbundene adaptive Lehrkompetenz (Brandl, 2016). Laut Prediger und Scherres (2012), ist die Lernwirksamkeit von Unterrichtsaktivitäten weniger von der Richtigkeit der Ergebnisse abhängig, sondern eher von der Intensität und Qualität.

Nach Felten und Stern (2012) bedeutet lernwirksames Unterrichten, wenn eine „erfolgreiche“ Lehrperson Lernsequenzen und Lernprozesse zielorientiert und abwechslungsreich gestaltet, flexibel und in vielfältiger Art und Weise ihre Aufgaben erklärt und variabel argumentieren kann. Ebenso soll sie entsprechende Hilfestellungen geben und ihre Themen spannend präsentieren. Die Lehrpersonen wissen auch, dass Kinder und Jugendliche lernen wollen und es verschiedene Unterrichtsmethoden gibt, die zu einem Erfolg führen können. Es sollte genauso bekannt sein, dass das Vorwissen der Kinder eine wichtige Rolle für den Unterricht und für den Lernerfolg spielt. Die Aufgaben sollten zwar herausfordernd, aber dennoch

bewältigbar und nachvollziehbar sein und es sollten verschiedene Lösungen auf verschiedenen Niveaustufen zugelassen werden (Brandl, 2016). Das bedeutet, die Kompetenz der Lehrperson kann sehr ausschlaggebend für die Lernwirksamkeit sein. Diese Kompetenz ist ein komplexes Geflecht aus fachlichem Wissen, reflektierter Unterrichtserfahrung und persönlicher Haltung (Carmesin, 2014).

4.1.2. Kognitive Aktivierung

Die kognitive Aktivierung ist neben Klassenführung oder konstruktiver Unterstützung, eine der wichtigsten Dimensionen der Unterrichtsqualität. Denn *„sie stellen eine sparsame, aber relativ umfassende Systematisierung der im Unterricht zu beobachtenden Lehr-Lernprozesse dar und sie haben sich im deutschen Sprachraum sehr gut etabliert, nicht zuletzt auch daher, weil mittlerweile gute Instrumente für deren Erfassung vorliegen“* (Kunter & Ewald, 2016, S. 16, zitiert nach Brandl, 2016).

Der Begriff kognitive Aktivierung bezeichnet also ein Merkmal lernwirksamer Unterrichtsprozesse, die Schüler:innen zu einer gedanklichen, aktiven Auseinandersetzung mit Lerninhalten auf einem für sie optimalen Niveau anregen. Eine hohe Aktivität der Schüler:innen ist nicht automatisch gleichbedeutend mit kognitiver Aktivität. Ein typisches Beispiel ist das Abschreiben von Lösungen von der Tafel. Es wird geschrieben und gearbeitet, aber kein echtes Verstehen oder Problemlösen findet statt (Fauth & Leuders, 2022; Leuders & Holzäpfel, 2011). Nach Fauth und Leuders (2022) und Leuders und Holzäpfel (2011) ist Unterricht dann kognitiv aktivierend, wenn Lehrpersonen Aufgaben so gestalten, dass sie Schüler:innen zu anspruchsvollem Denken auf hohem kognitivem Niveau anregen, an deren Vorwissen anknüpfen und dieses aktivieren sowie die Entwicklung eigener Ideen und Lösungsansätze ermöglichen. Die Lehrperson bietet dabei Lerngelegenheiten, die zum Denken herausfordern. Ob diese Möglichkeit auch wirklich genutzt wird, hängt von individuellen und situativen Faktoren der Schüler:innen ab. Unterricht kann somit immer nur einen bestimmten Grad zur kognitiven Aktivierung bereitstellen (Fauth & Leuders, 2022; Pauli et al., 2008).

„Damit ist gemeint, inwieweit die Lernenden angeregt werden, sich vertieft mit dem Lernstoff auseinanderzusetzen, das heißt also, inwieweit der Unterricht so angelegt ist, dass er hochwertige kognitive Prozesse auslöst, von denen angenommen wird, dass sie zu nachhaltigem Lernen führen.“ (Kunter & Ewald, 2016, S.15f., zitiert nach Brandl, 2016)

Durch die kognitive Aktivierung werden Schüler:innen angeregt, sowohl ihr Vorwissen („Woher“) als auch die Prozesse der Lösungsfindung („Wie“) und die angestrebten Lernziele („Wohin“) bewusst in den Blick zu nehmen. Diese einzelnen Punkte sind genauer auch in Abbildung 1 zu sehen. Forschungsergebnisse zeigen jedoch, dass Lernende Selbsterklärungen nicht ohne gezielte Vorbereitung und Unterstützung wirksam einsetzen können. Lehrpersonen müssen daher geeignete Impulse geben, um diese Strategien anzubahnen und zu fördern (Fauth & Leuders, 2022).

Ein kognitiv aktivierender Unterricht legt besonderes Augenmerk auf	
1. die Fokussierung der kognitiven Aktivitäten auf die Lernziele, insbesondere auf die zentralen Verstehenselemente,	das „ Wohin “
2. den Anschluss an das bestehende Schülerdenken, also das Vorwissen aus Unterricht und Alltag,	das „ Woher “
3. das Anregen und Aufrechterhalten von anspruchsvollen kognitiven Prozessen, z. B. durch Erklären oder Verknüpfen.	das „ Wie “

Abbildung 1: Wohin, Woher, Wie (Fauth & Leuders, 2022)

Es ist empirisch belegt (Fauth & Leuders, 2022), dass kognitive Aktivierung wesentlich zur Wirksamkeit von Unterricht beiträgt. Sie bezieht sich nicht auf eine bestimmte Methode, sondern auf ein didaktisches Prinzip, das in allen Unterrichtsformen realisiert werden kann. Dazu zählen zum Beispiel herausfordernde Aufgabenstellungen, zum Nachdenken anregende Gesprächsführung oder auch Reflexionsphasen. Obwohl es bislang kein einheitliches theoretisches Modell zur kognitiven Aktivierung gibt, befassen sich die allgemeine und fachdidaktische Forschung seit langem mit der Frage, wie anspruchsvolle Denkprozesse im Unterricht angeregt werden können (Fauth & Leuders, 2022). Der Lernerfolg und die kognitive Aktivierung hängen von grundlegenden Qualitätsmerkmalen des Unterrichts, sowie auch von der Interaktion zwischen Lehrperson und Schüler:in ab und weniger von bestimmten Methoden (Pauli et al., 2008). Es zeigt sich, dass für eine valide Erfassung kognitiver Aktivierung insbesondere direkte Beobachtungsansätze besonders geeignet sind. In der Literatur werden beispielsweise videobasierte Ratinganalysen genannt (Leuders & Holzäpfel, 2011). In der aktuellen Forschung richtet sich die Aufmerksamkeit auf fachlich-inhaltliche Dimensionen, wie beispielsweise die kognitive Aktivierung in Theoriephasen (Drollinger-Vetter & Lipowsky, 2006, zitiert nach Leuders & Holzäpfel, 2011). Die Einbeziehung dieser Kriterien eröffnet neue Perspektiven für die Weiterentwicklung des Konzepts der kognitiven Aktivierung (Leuders & Holzäpfel, 2011).

4.1.3. Konzeptuelles Verständnis

Konzeptuelles Verständnis bezeichnet die Fähigkeit, fachliche Konzepte, Prinzipien und Zusammenhänge inhaltlich zu durchdringen und flexibel auf neue Situationen anzuwenden. Verständnis beruht auf einer vernetzten Wissensstruktur, die es Schüler:innen ermöglicht, fundierte Deutungen und Vorhersagen vorzunehmen und ihr Wissen flexibel in verschiedenen Kontexten anzuwenden (Ewerhardy et al., 2012; Schneider et al., 2021).

Dabei geht es nicht nur um reines Faktenwissen, sondern auch um das Verständnis der Relation zwischen Wissenselementen und die Fähigkeit, diese miteinander zu verknüpfen. In der Mathematik heißt das, dass Schüler:innen die dahinterliegenden Beziehungen und Bedeutungen der Zahlen und Strukturen verstehen und nicht nur Rechenverfahren anwenden (Schneider et al., 2021) (S.113-151). „Aktuelle Forschungsarbeiten weisen darauf hin, dass eine [...] konstruktivistische Orientierung des Unterrichts den Erwerb eines konzeptuellen Verständnisses fördert.“ (Ewerhardy et al., 2012)

Becker et al. (2019) beschreiben konzeptuelles Verständnis als die Fähigkeit, kohärente mentale Repräsentationen physikalischer oder mathematischer Phänomene zu bilden, die ein tieferes Begreifen von Gesetzmäßigkeiten ermöglichen. Durch die Verknüpfung verschiedener Repräsentationsformen, wie zum Beispiel Diagrammen oder Formeln, wird ein nachhaltiger Wissensaufbau unterstützt (Becker et al., 2019).

4.2. Direkte Instruktion

4.2.1. Begriffsbestimmung

Die Unterrichtsmethode Direkte Instruktion ist eine stark lehrer:innenzentrierte und kleinschrittige Art Schüler:innen beim Erwerb konkreter Fähigkeiten oder Strategien strukturiert zu unterstützen. Die Lehrperson leitet dabei die Kinder und Jugendlichen explizit, zielorientiert und in kleinen Schritten aufbauend an. International wird die Methode mit DI abgekürzt oder auch explizite bzw. systematische Instruktion genannt (Lutz & Koutsianikouli, 2024). Unterrichtsmethoden können in unterschiedlichem Ausmaß instruktionale oder konstruktivistische Elemente enthalten. Instruktionale Ansätze zeichnen sich durch eine klare Strukturierung der Inhalte, das Vormachen von Lösungswegen und gezielte Übungsphasen aus. Konstruktivistisch geprägte Ansätze legen hingegen den Schwerpunkt auf den Lernprozess der Schüler:innen, indem sie diesen ermöglichen, eigenständig Lösungswege zu entwickeln und Aufgaben auf unterschiedliche Weise zu bearbeiten. Ein solcher Zugang zeigt sich insbesondere beim Entdeckenden Lernen, bei dem mehrere Lösungsansätze zugelassen sind (Zentel & Gebhardt, 2024). Die direkte Instruktion kann auch als die Präsentation von Informationen durch die Lehrperson und die aktive Steuerung des Lernprozesses bis zur Festigung und Verankerung von Lerninhalten im Langzeitgedächtnis verstanden werden (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Zentrale Merkmale, die im Unterricht bei dieser Methode enthalten sein müssen, sind unter anderem klar formulierte und erklärte Lernschritte und Anweisungen, also ein angegebener Input aus der Sicht der Lehrpersonen. Außerdem sollten die Lernabsichten bezüglich der zu erwerbenden Fähigkeiten und Erkenntnisse, klare Modellierung neuer Inhalte durch Beispiele und ständiges Überprüfen des Verständnisses der Schüler:innen, regelmäßiges individuelles Feedback sowie klare Bewertungskriterien für das Erreichen des Lernzieles erkennbar sein. Ebenso essenziell ist das schrittweise Üben der neu gelernten Inhalte in verschiedenen Situationen, damit die Generalisierung erleichtert wird. Den Schüler:innen wird so viel Zeit zum wiederholten Üben gegeben, sodass bestimmte Fertigkeiten selbständig beherrscht werden können (Hornby & Greaves, 2023).

4.2.2. Rollenverteilung

Das Ziel dieser Methode ist die Selbstständigkeit und nicht der Weg zur Selbstständigkeit. Die Lehrperson hat bis zur Selbstständigkeit eine aktive Rolle, indem sie präzise die Stunde davor geplant haben muss. Der Erfolg der Schüler:innen hängt in dieser Methode zu einem großen

Teil von der Kompetenz der Lehrperson ab. Erst wenn die Schüler:innen selbständig arbeiten können, nimmt die Lehrperson die Rolle des Lernbegleiters ein. Man könnte sagen, dass die direkte Instruktion die Unterrichtselemente enthält, die Kinder von einer Lehrperson erwarten: Die Lehrperson erklärt den entsprechenden Inhalt so lange, bis jede:r Schüler:in es verstanden hat und gibt im Lernprozess die Hilfe die jede:r aktive Schüler:in braucht. Die Methode wird von Lehrpersonen oft als befreiend beschrieben, da sie diese ohne mit dem Vorwurf, ausschließlich Frontalunterricht zu halten, konfrontiert werden (Brüning & Saum, 2020). International ist die Direkte Instruktion eine Standard-Unterrichtsmethode im pädagogischen Schwerpunkt Lernen und Entwicklung. Vor allem in den US-amerikanischen Schulen mit diesen Schwerpunkten, wird grundsätzlich diese Methode von den Lehrpersonen angewandt (Zentel & Gebhardt, 2024).

4.2.3. Historisch

Historisch geht die Direkte Instruktion auf die Arbeiten von Siegfried Engelmann und Carl Bereiter in den 1960er Jahren zurück (Bereiter & Engelmann, 1966). Sie untersuchten die Auswirkungen von direkten, anleitenden und sich wiederholenden Übungen auf die Fähigkeiten von leistungsschwachen Schüler:innen. Die Forschung beinhaltete lehrerzentrierte Anweisungen und viele Vorträge mit genauen Vorlagen zum Folgen der Aufgaben. Durch dieses Modell konnte herausgefunden werden, dass durch Beobachtung und Befolgung der genauen Schritte der Lehrperson in der Problemlösephase, die Schüler:innen praktische Lernfähigkeiten entwickeln konnten. Nach einem Jahr konnte Engelmann, bei einer Gruppe von leistungsschwachen Schüler:innen im Volksschulalter, eine Verbesserung im Lösen arithmetischer Probleme sehen. Seine Arbeit war der Grundbaustein für die nachfolgenden Forschungen in diesem Gebiet (Hornby & Greaves, 2023; Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Engelmann entwickelte auch mit Kolleg:innen das DISTAR-Programm (Direct Instructional System for Teaching and Remediation) für Arithmetik und Lesen, sowie Corrective Math und Funnix Math. Diese Programme enthalten Material und Aktivitäten, die Lehrpersonen für den Unterricht in der Direkten Instruktion anwenden können (Bereiter & Engelmann, 1966; Hornby & Greaves, 2023; What Works Clearinghouse, 2007). Laut Engelmann sollten die Unterrichtseinheiten mit Direkter Instruktion den Aufbau befolgen, dass Fertigkeiten schrittweise eingeführt werden, sodass Schüler:innen die Chance haben, diese Fertigkeit zu erlernen und richtig anzuwenden, bevor sie neue Fertigkeiten erlernen müssen. Diese Fertigkeiten werden durch die Lehrperson zunächst isoliert gelehrt und dann mit

anspruchsvolleren Aufgaben, die andere Fertigkeiten voraussetzen, geübt (Zentel & Gebhardt, 2024). Rosenshine (1987) fasste die Direkte Instruktion so zusammen:

„eine systematische Lehrmethode, bei der der Schwerpunkt auf dem Vorgehen in kleinen Schritten, der Überprüfung des Verständnisses der Schüler und der aktiven und erfolgreichen Beteiligung aller Schüler liegt.“ (Rosenshine, 1987, zitiert nach Zentel & Gebhardt, 2024, S.337-338)

Bereits vor 1960 beschrieb H. Aebli Unterrichtsformen, die sich durch eine klare Strukturierung der Lerninhalte und eine starke Rolle der Lehrperson auszeichnen und heutigen instruktionalen Ansätzen ähneln. Bei diesem Unterricht knüpft die Lehrperson an die Vorkenntnisse der Schüler:innen an und vermeidet eine frühe Formalisierung. Es wird versucht, mit verschiedenen Ansätzen eine solide inhaltlich-begriffliche Basis aufzubauen, wie das konkrete Manipulieren oder Experimentieren. Dadurch gilt Aebli als einer der ersten Vertreter der Direkten Instruktion (Wellenreuther, 2009).

4.2.4. Fehler

Aus diesen Konzepten entstand dann das Instruktionsdesign, welches Fertigkeiten schrittweise einführt und Fehler von Beginn an minimiert. Der Unterricht bei der Direkten Instruktion versucht Fehler zu vermeiden, indem er so aufgebaut ist, dass vor allem bei der Einführung fast keine Fehler gemacht werden können. Der Gedanke dahinter ist, dass keine falschen Aneignungen und Schemata etabliert werden sollen, da sie im späteren Verlauf nur mühsam reduziert werden müssten, wodurch ein schneller Lernfortschritt verhindert wird. Typische DI-Lehreinheiten betonen deshalb einen geringen Anteil neuer Elemente pro Lektion (nur zehn Prozent) und einen hohen Anteil gesicherter Anwendung (restlichen 90 Prozent). Die 90 Prozent enthalten auch Wiederholungen und Anwendungen der Fähigkeiten, die die Schüler:innen davor erworben haben und noch üben müssen, um sie gesichert beherrschen zu können. Das Prinzip, dass Schüler:innen eine Lektion erst dann abschließen, wenn sie alle Ziele dieser Lektion vollständig erreicht haben, nennt sich „Mastery Learning“ (Zentel & Gebhardt, 2024).

4.2.5. Vergleich Frontalunterricht

Oft wird, zum Beispiel im deutschsprachigen Raum, der Begriff Direkte Instruktion missverstanden und mit dem Frontalunterricht fälschlicherweise als gleichwertig gesehen (Lutz & Koutsianikouli, 2024). Es ist wichtig zu betonen, dass die Direkte Instruktion nicht mit „borniertem Frontalunterricht“ gleichzusetzen ist. „Borniert“ bedeutet in diesem Zusammenhang „engstirnig“, und bezeichnet eine geringe Offenheit. Die Direkte Instruktion

ist interaktionsreich, diagnostisch und adaptiv, sie knüpft an Vorkenntnisse an und vermeidet vorschnelle Formalisierungen. Während Frontalunterricht häufig als monologischer Vortrag verstanden wird (Wellenreuther, 2009).

4.2.6. Phasen

Die Direkte Instruktion besteht nach Rosenshine (2012) aus drei verschiedenen Phasen: Instruktion, angeleitetes Üben und selbstständiges Üben. In der Instruktionsphase sollen die Schüler:innen ein Bild bekommen, was zu lernen ist. In dieser Phase sind die Erklärungen lebendig, klar, strukturiert, anschaulich, und mit Mustern und Modellen demonstriert. Es soll klar gemacht werden, was die Lehrperson denkt, und was sie von den Schüler:innen erwartet. Die Lehrperson überprüft immer wieder, ob die Schüler:innen das Erklärte verstehen oder es einer Wiederholung bedarf. Ziel ist es, dass sich die Schüler:innen an diesen Modellen orientieren und zum Denken angeregt werden (Brüning & Saum, 2020). Die Inhaltsdarbietung sollte lehrer:innenzentriert und kleinschrittig erfolgen. Während dieser Phase liegt der Fokus auf einer klaren und ungestörten Darstellung der Inhalte. Rückfragen der Schüler:innen sind dabei auf kurze Verständnisklärungen beschränkt und werden gezielt aufgegriffen. Dieser Abschnitt darf maximal 15 Minuten dauern, da ansonsten die Konzentration der Schüler:innen nachlässt, insbesondere bei lernschwächeren Kindern (Lutz & Koutsianikouli, 2024). In der Literatur wird auch von der „I do it“ – Phase gesprochen (Zentel & Gebhardt, 2024).

Nachdem dann die neuen Lerninhalte eingeführt wurden, bekommen die Schüler:innen Lernaufgaben mit einer Schritt-für-Schritt Anleitung, damit sie die Kompetenzen selbständig entwickeln können. In dieser Phase müssen verschieden schwierige Herausforderungen angeboten werden, da die Schüler:innen in unterschiedlichen Maßen Hilfe brauchen (Brüning & Saum, 2020). Die Schüler:innen sollen hier ihre Vorgehensweise verbalisieren. Die Lehrperson kann ihre Schritte bei Bedarf wiederholt vorzeigen. In dieser Phase ist Feedback durch die Lehrperson wichtig, damit die Schüler:innen so wenig Fehler machen wie möglich. Dadurch sollte in der Bearbeitungszeit die Lehrperson diese Phase zweimal unterbrechen: um eine Rückmeldung zu geben und danach noch Fehler auszubessern. Bevor die Phase zu Ende ist, überprüft die Lehrperson den aktuellen Fortschritt der Schüler:innen, um danach zu entscheiden, wie es weitergehen soll. Diese Phase ist besonders für leistungsschwache Schüler:innen wichtig, da diese oft geringe Kompetenzen beim selbstständigen Arbeiten zeigen und sich so verbessern können. Zudem brauchen sie genügend Zeit, um sich mit neuen Inhalten zu beschäftigen. Obwohl es eine sehr wichtige Phase ist, wird im Unterricht meist kein großer Fokus darauf gelegt. Für das angeleitete Üben können jedoch mehrere Unterrichtseinheiten

investiert werden (Lutz & Koutsianikouli, 2024). Zentel & Gebhardt (2024) benennen in der Literatur die Phase auch als „We do it“.

In der letzten Phase zieht sich die Lehrpersonen zurück, und die Schüler:innen wählen ihre Aufgaben mit ihrem jeweiligen Arbeitstempo. Sie selbst entscheiden auch, ob sie Hilfe der Lehrperson in Anspruch nehmen oder nicht (Brüning & Saum, 2020). Handelt es sich um eine leistungsstarke Gruppe, kann das angeleitete Üben auch übersprungen werden und direkt zum selbständigen Üben übergegangen werden. Dennoch sollten auch in dieser Phase Pausen von der Lehrperson eingeplant werden, damit Fragen beantwortet werden können oder Feedback gegeben werden kann (Lutz & Koutsianikouli, 2024). Diese Phase kann auch als „You do it“ bezeichnet werden (Zentel & Gebhardt, 2024).

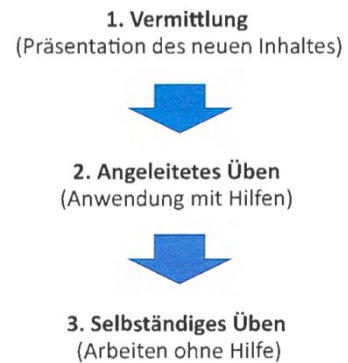


Abbildung 2: Phasen der Direkten Instruktion (Brüning & Saum, 2020)

Diese drei Phasen kann man zusammengefasst in Abbildung 2 erkennen (Brüning & Saum, 2020).

Koutsianikouli & Lutz (2024) beschreiben noch zwei weitere Phasen der Direkten Instruktion: Die Vorwissensaktivierung und die Reflexion. Diese kommen vor allem in der sonderpädagogischen Praxis vor, da diese Schüler:innen beim Lernen große Schwierigkeiten haben, Informationen aus dem Langzeitgedächtnis abzurufen. Bevor die Instruktionsphase beginnt, wiederholt die Klasse den bisherigen Lerninhalt, um so ihr Vorwissen aktivieren zu können. Vor allem für lernschwächere Schüler:innen ist diese Phase besonders zur kognitiven Entlastung wichtig. Durch ihre Lernumgebung, Hefteintragungen oder ihre Lernnotizen findet Aktivierung statt. Dennoch sollte hier kein Vorwissen vorausgesetzt werden (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

In der Reflexionsphase soll das Gelernte in der Unterrichtseinheit noch einmal wiederholt werden. Das kann mündlich, als auch schriftlich in Form einer Lernnotiz stattfinden. Dafür sollen zumindest fünf Minuten eingeplant werden. Wichtig ist es, dass die Reflexion rein von den Schüler:innen ausgeht, was bedeutet, dass sich die Lehrperson dabei zurücknimmt (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

4.2.7. Methoden

Um diese Phasen erfolgreich zu planen, gibt es einige Methoden, die in den Unterricht integriert werden können. Die bekannteste Methode ist das sogenannte Scaffolding:

Scaffolding kommt vom Englischen und bedeutet so viel wie „Gerüst“. Diese Methode hilft den Schüler:innen Aufgaben zu bewältigen, die sie noch nicht allein ohne Unterstützung schaffen. Mit wachsender Kompetenz wird dieses Gerüst schrittweise zurückgenommen, um Selbstständigkeit aufzubauen (Lutz & Koutsianikouli, 2024). Zur Unterstützung zählen Materialien und vielfältige Lernhilfen, die Schüler:innen beim Entwickeln, Verfeinern oder Erweitern ihrer Kompetenzen begleiten. Diese Hilfen können verbal oder visuell sein, ebenso materiell oder aktivitätsbasiert. Sie werden schrittweise abgebaut, können bei Rückschritten der Schüler:innen jedoch gezielt wieder eingesetzt werden. So werden sie bei der Bewältigung von Lernschwierigkeiten unterstützt (Hornby & Greaves, 2023). Scaffolding könnte laut Brüning & Saum (2020) im Unterricht so aussehen:

„Die erste Aufgabe ist vollständig gelöst, bei der nächsten fehlt nur der letzte Schritt, bei der übernächsten fehlen die beiden letzten Schritte - und so wird bei jeder Aufgabe ein Schritt weniger vorgegeben und muss selbst geleistet werden. Erst in der dritten Phase bekommen die Schüler Aufgaben, die sie ganz selbst lösen müssen. So nähern sich die Schüler der selbständigen Bearbeitung Schritt für Schritt an und internalisieren das Muster.“ (Brüning & Saum, 2020, S. 14)

Das Scaffolding besteht aus vier Elementen: Die Bedarfsanalyse mit der Zielsetzung, die Lernstandsanalyse für den Lernstand der Schüler:innen zum aktuellen Zeitpunkt, die Unterrichtsplanung, zum Beispiel vom Einfachen zum Komplexen oder von der Alltagssprache zur Fachsprache, und die Unterrichtsinteraktion, wie das aktive Zuhören der Schüler:innen oder kooperative Lernmethoden (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Eine weitere Methode ist das Think-Pair-Share. Sie ist für alle Unterrichtsphasen geeignet und kann ohne größeren Vorbereitungsaufwand eingesetzt werden. In einer ersten Phase, der Think-Phase, arbeiten alle Schüler:innen individuell an der Fragestellung und halten ihre Überlegungen fest. Anschließend, in der Pair-Phase, tauschen sie sich mit ihrem Partner/ihrer Partnerin aus und vergleichen ihre Ergebnisse, wobei sie sich auch gegenseitig ergänzen. In der Share-Phase werden die in der Austauschphase erarbeiteten Lösungen in der Klasse vorgestellt und reflektiert, sowie auch korrigiert, falls nötig. Die Methode hat den Vorteil, dass sie zu einer intensiveren Informationsverarbeitung, sowie zur kognitiven Aktivierung führt. Diese Methode ist durch die innere Aktivierung in der ersten Phase und der Absicherung durch den Austausch mit der zweiten Person in der Pair-Phase sehr erfolgreich. Ein zusätzlicher Faktor ist der Lernfortschritt durch die Kommunikation an das Plenum (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Ebenso geeignet ist die Methode der Wiederholungen. Sie kann täglich, wöchentlich oder auch monatlich stattfinden. Durch diese Wiederholungen soll das Gelernte gefestigt werden. Zugleich sind inhaltliche Bezüge explizit herauszuarbeiten und zu einem vernetzten Wissensgefüge zu verdichten. Dafür bieten sich Wochenplan- und Freiarbeitsmaterialien an, die in der Lernumgebung bereitgestellt sind. Im Unterricht kann die Methode zu Beginn der Unterrichtseinheit als Auffrischung der letzten Stunde dienen. Ebenso können Wiederholungen am Ende der Stunde stattfinden, damit die Stunde nochmals zusammengefasst wird. Die Wiederholungen können sowohl mündlich als auch schriftlich, zum Beispiel als Hefteintragung, stattfinden. Ebenso möglich sind Wiederholungen nach jedem fertigen Kapitel oder zwischendurch im Schuljahr, damit bereits erlernte Inhalte nicht vergessen werden (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Prompts gehören zu den wichtigsten Methoden der Direkten Instruktion und sind dem Scaffolding sehr ähnlich. Prompts sind Hinweise oder Unterstützungen, die Schüler:innen helfen, bestimmte Fähigkeiten zu erlernen oder auch zu verbessern. Auch hier werden die Schüler:innen schrittweise zur neuen Fertigkeit hingeführt. Je nach Bedürfnis und Fähigkeit der Schüler:innen gibt es auch verschiedene Arten von Prompts. Verbale Prompts sind mündliche Hinweise, die das gewünschte Verhalten oder die richtige Lösung vormodellieren oder erläutern. Visuelle Prompts nutzen Bilder, Grafiken und Diagramme, um Informationen bereitzustellen oder eine Handlung zu verdeutlichen. Physische Prompts bestehen aus einer taktilen/körperlichen Unterstützung, die durch eine Handlung führt oder deren korrekte Ausführung zeigt. Gestenbasierte Prompts schließlich arbeiten mit Zeigen und Deuten, um Aufmerksamkeit zu lenken, Anweisungen zu geben oder auf relevante Aspekte hinzuweisen. Im Unterricht werden zuerst weniger eingreifende Prompts eingesetzt, um eine übermäßige Abhängigkeit von Hilfen zu vermeiden. Erst nachdem die Schüler:innen Schwierigkeiten erleben, kann die Lehrperson zu stärkeren/direktiveren Prompts greifen. Die Lehrer:innen sollten dennoch mit den Prompts schon Erfahrungen haben, da sie die Lernsituation richtig einschätzen müssen. Der Unterricht muss an den Bedürfnissen der Schüler:innen angepasst werden, damit sie nicht überfordert sind (Zentel & Gebhardt, 2024).

4.2.8. Im Unterricht

Im Unterricht selbst ist die Direkte Instruktion erfolgreich, wenn mit Lösungsbeispielen gearbeitet wird. Das bedeutet, die Lehrperson gibt fertige Musterlösungen vor, die sie dann zusammen im Unterricht durchgehen können. Wie schon in der Phase des angeleiteten Übens beschrieben wurde, sollten Lernbeispiele gemeinsam durchgegangen werden, und dabei auf die

individuellen Bedürfnisse der Schüler:innen eingehen. Der Prozess wird bei schwierigeren Themen nochmals erleichtert, wenn mehrere Lösungsbeispiele gemeinsam durchgegangen und analysiert werden. Es ist weitaus effektiver, sich mehr auf die Lösungsbeispiele zu konzentrieren, als zu früh die Kinder in die Selbstständigkeit zu schicken, in der sie Aufgaben selbst lösen müssen. Dadurch, dass das Arbeitsgedächtnis weniger in Anspruch genommen wird, können die Schüler:innen sich mehr Gedanken zu den Lösungsbeispielen machen, vor allem in Bezug auf jene Aspekte, die sie bei der Erklärungsphase nicht verstanden haben (Wellenreuther, 2009).

Um den Schüler:innen wissenschaftliche Begriffe einfacher näherzubringen, können mehrere Beispiele dafür verwendet werden, um den Kontext zu kontrastieren. Es handelt sich didaktisch um niedrig-komplexe Lernziele, die sich besonders für eine mehrfache inhaltliche Verankerung und aktive Generierung eignen. Präsentiert man den Schüler:innen zunächst eine präzise Definition und mehrere kontrastierende Beispiele, so lässt sich der Begriff über verschiedene Anknüpfungspunkte hinweg stabilisieren. Danach sollen die Schüler:innen den Begriff selbst aktiv anwenden, um einen sogenannten Generierungseffekt zu erzielen, bei dem durch eigenständige Bearbeitung und Anwendung ein tieferes Verständnis und eine bessere Behaltensleistung gefördert werden. Das kann mittels Lückentext erfolgen. Per Computerprogramm kann eine motivierende Rückmeldekultur eingeführt werden, wie eine positive Verstärkung bei richtigen Antworten oder eine unmittelbare Korrektur bei Fehlern. Dies kann sich vor allem bei leistungsmäßig schwächeren Schüler:innen positiv auswirken (Wellenreuther, 2009).

4.2.9. Vor- und Nachteile

Die Direkte Instruktion weist eine hohe Lernwirksamkeit auf. Hattie (2009) arbeitete aus über 800 Metaanalysen von insgesamt 50 000 Studien mit 250 Millionen Lernenden, die wichtigsten Faktoren für effektiven Unterricht heraus. Er identifizierte 138 Einflussfaktoren in sechs Domänen, für die er jeweils die Effektstärke angibt. Dabei stellte sich heraus, dass die Direkte Instruktion einen bedeutsamen durchschnittlichen Effekt auf Schüler:innenleistung hat. Zur Direkten Instruktion untersuchte er vier Metaanalysen von insgesamt 304 Studien. Hattie kam zu einer Effektstärke von 0,59, welche im oberen Quartil der Domäne „Unterricht“ liegt. Dadurch wird die Methode auch als sehr erfolgreich beschrieben (Quittenbaum, 2016). Schüler:innen zeigten vor allem Verbesserungen in den Leseverständnisfähigkeiten und den mathematischen Problemlösefähigkeiten. Dadurch kann die Direkte Instruktion als evidenzbasierte Praxis angesehen werden, welche einen spezifischen Bildungsplan, sowie ein

praktisches Lehrmodell zur Verfügung stellt (Hornby & Greaves, 2023). Sie ist eine der wenigen Methoden, bei der die Forschung einen erfolgreichen, effektiven Nachweis erbringen konnte, insbesondere in der Erreichung einfacher Lernziele (Quittenbaum, 2016). Ebenso wird betont, dass die Verbindung von Kooperativem Lernen und Direkter Instruktion sehr effektiv ist (Brüning & Saum, 2020).

Dennoch hängt die Lernwirksamkeit stark davon ab, in welchem Ausmaß es der Lehrperson gelingt, die Eigenschaften der Direkten Instruktion, die oben beschrieben wurden, im Unterricht umzusetzen. Durch eine klare Lernsteuerung der Lehrperson lässt sich die Lernwirksamkeit des Unterrichts nachweislich erhöhen, weil Lehrpersonen ihre Aufmerksamkeit primär auf Strukturierung, Modellierung und Feedback richten können. Eine überwiegend selbstgesteuerte Bearbeitung überfordert dagegen leistungsschwächere Schüler:innen. Sie müssten nämlich parallel zum fachlichen Lernen auch die Prozesssteuerung bewältigen (Wellenreuther, 2009).

Quittenbaum (2016) verweist auf mehrere Studien der Unterrichtsforschung, die zeigen, dass Direkte Instruktion insbesondere im Hinblick auf kognitive Lernprozesse und den Erwerb grundlegender fachlicher Kompetenz wirksam ist, vor allem bei der Einführung neuer Inhalte und beim Aufbau grundlegender fachlicher Fähigkeiten. Auch sie konnte nachweisen, dass vor allem in Klassen, in denen typische Merkmale der Direkten Instruktion zu sehen waren, ein hoher Lerneffekt festgestellt wurde (Quittenbaum, 2016).

Für das eigenständige Aufstellen und Überprüfen von Hypothesen ist diese Methode nur eingeschränkt geeignet. Die Direkte Instruktion kann jedoch genutzt werden, um den Prozess des Hypothesenbildens anzuleiten, indem beispielhaft gezeigt und gemeinsam eingeübt wird, wie tragfähige Hypothesen formuliert und geprüft werden (Brüning & Saum, 2020). Vergleicht man diese Methode mit anderen, wie dem entdeckenden Lernen oder dem offenen Unterricht, ist die Direkte Instruktion sehr beliebt unter den Lehrpersonen und konnte sich im Unterricht sehr gut durchsetzen (Quittenbaum, 2016).

Weiters ist bezüglich der Direkten Instruktion positiv zu erwähnen, dass präzise Qualitätsmerkmale vorliegen, an denen sich die Umsetzung orientieren kann. Dazu gehören klare Lernziele, ein strukturiertes Modeling mit Beispielen, laufende Verständniskontrollen, gezieltes individuelles Feedback und Korrektur, regelmäßiges Wiederholen zentraler Aspekte, sowie Üben in variierenden Situationen zur Generalisierung des Gelernten. Dadurch erhöht sich die Zieltransparenz und reduziert unnötige kognitive Belastungen (Zentel & Gebhardt, 2024). Kleinschrittige Anleitungen, wie auch Scaffolding oder Promptings, sind besonders für Schüler:innen mit Lernschwierigkeiten lernförderlich. Zudem ist die Direkte Instruktion an

keine Sozialform gebunden, wodurch ein vielfältiger Unterricht geplant werden kann (Lutz & Koutsianikouli, 2024).

Obwohl die Wirksamkeit der Direkten Instruktion empirisch belegt wurde, hat sie teilweise einen schlechten Ruf und wird 1986 zum Beispiel als „Early education pressure cooker“ in der New York Times beschrieben. Die Unterrichtsmethode wäre laut Kritikern zu „roboterhaft“ und „starr“ (Quittenbaum, 2016). Es ermöglicht den Lehrpersonen zwar Informationen klar und korrekt zu vermitteln, kann aber dadurch auch als demotivierend auf die Schüler:innen wirken. Insbesondere, wenn die Schüler:innen unterfordert sind, da die Schritt-für-Schritt Anleitung zu langsam voran geht oder zu langatmig sein kann (Zentel & Gebhardt, 2024). Lehrpersonen brauchen für diese Methode einen klaren Plan, wie sie diesen Unterricht organisieren und durchführen, was mitunter eine Herausforderung darstellen kann (Hornby & Greaves, 2023). Ein weiterer Kritikpunkt ist der mangelnde Spielraum für Eigeninitiative und Wahlmöglichkeiten (Quittenbaum, 2016).

4.3. Entdeckendes Lernen

4.3.1. Begriffsbestimmung

Für das Unterrichtskonzept Entdeckendes Lernen gibt es keine einheitliche Definition. In der Literatur beschreiben viele Autor:innen Unterrichtssituationen mit dieser Methode, allerdings gibt es keine Erläuterung zum Entdeckenden Lernen. Dennoch ist es in den mathematikdidaktischen Diskursen ein bekanntes Unterrichtskonzept (Kollosche, 2017). Winter (2016) argumentierte, dass es aufgrund der prinzipiellen Offenheit keine endgültige und formal befriedigende Definition geben kann. Sobald ein Definitionsversuch durchgeführt wird, würde sich das System bereits verändern (Winter, 2016).

„Wäre Entdecken präzise (als außenstehendes Phänomen) beschreibbar, so wäre es maschinell simulierbar, technisch beherrschbar. Da das Letztere offenbar nicht möglich ist, bleibt ein irrationaler, allenfalls intuitiv fühlbarer Rest von Unaussprechlichem.“
(Winter, 2016, S. 1)

Unter Entdeckendem Lernen ist eine Unterrichtsform zu verstehen, die Lerngelegenheiten so gestaltet, dass Schüler:innen sich aktiv mit dem Unterrichtsstoff auseinandersetzen. Das kann mittels Beobachtungen, Fragen, Vermutungen oder Erproben erfolgen. Dabei gewinnen sie Einsicht in curricular vorgegebene Inhalte und mathematische Arbeitsweisen (Kollosche, 2017). Nach Jerome Bruner (1961) ist Entdeckendes Lernen ein selbsttätiger Erkenntnisprozess, in dem Lernende ein Fachgebiet eigenständig erkunden, strukturieren und

begründen. Das Ziel dieser Methode ist die Entwicklung tragfähiger Problemlösekompetenzen, durch den Fokus auf ihre eigene Denkhandlungen (Bruner, 1961; Riedl & Schelten, 2013). Dementsprechend ist das Entdeckende Lernen ein wichtiger Bestandteil für das eigenständige Lernen der Schüler:innen (Reiss & Hammer, 2021).

Ausubel, ein Pädagoge, sieht Entdeckendes Lernen als eine Unterrichtsmethode und nicht als einen Prozess. Er unterscheidet zwischen Entdeckendem Lernen und einem stärker lehrergesteuerten, darbietenden Unterricht (Ausubel et al., 1981). Während beim Entdeckenden Lernen nicht alle Lerninhalte vorgegeben sind und zentrale Zusammenhänge von den Lernenden selbst erschlossen werden sollen, werden im darbietenden Unterricht die Inhalte in ihrer ausgearbeiteten und fachlich korrekten Form präsentiert. Ein solcher lehrergesteuerter Zugang kann entdeckende Lernphasen sinnvoll ergänzen, indem er Ergebnisse bündelt und absichert (Ausubel et al., 1981; Klewitz & Mitzkat, 1977).

Der Findungs- und Entdeckungsprozess lässt sich in der Mathematik in vier Stadien einteilen. Die erste Phase ist die Präparation bzw. die Vorbereitung, in der man seiner Schwierigkeit begegnet. Die zweite Phase ist die Inkubation oder auch Ausbrütung. Hier wird die Schwierigkeit lokalisiert sowie präzisiert und es wird ein Ansatz einer möglichen Lösung überlegt. Im Anschluss folgt die Illumination bzw. die Erleuchtung und Inspiration, indem logische Entwicklungen der Konsequenzen des Ansatzes beobachtet werden. Zuletzt findet die Verifikation statt, in der weitere Beobachtungen und experimentelles Vorgehen stattfinden, um einen Ansatz anzunehmen oder abzulehnen. Erfolgreiches Lernen kommt dann zustande, wenn die maximale Aktivierung, die maximale Motivierung und die Beachtung der Phasenfolge beim Lösen von Aufgaben beachtet werden (Winter, 2016).

4.3.2. Rollenverteilung

Wichtig für das Entdeckende Lernen ist die Hilfe der Lehrperson. Ohne starke Unterstützung gelingt die Methode selten. Die Lehrperson hat die Aufgabe, den Unterricht zu arrangieren, Entdeckungsprozesse zu unterstützen und die fachlich korrekten Benennungen vorzugeben (Kollosche, 2017). Ebenso hat sie eine beobachtende und helfende Rolle und setzt gezielte Impulse, wie sich Lern- und Problemlöseprozesse verbessern lassen. Ein wichtiger Punkt des Entdeckenden Lernens ist die Neugier der Schüler:innen gegenüber dem Themengebiet und die daraus entstehende intrinsische Motivation. Die fehlenden Informationen und Zusammenhänge des Stoffes, welcher gelernt wird, sollen eigenständig eingeholt bzw. entdeckt werden. Hier muss dazu gesagt werden, dass eine Vorraussetzung für das Entdecken Vorwissen ist. Die Lehrperson ermöglicht den Schüler:innen einen individuellen Erkenntnisprozess, indem sie

geeignete Aufgaben, Medien und Arbeitsmaterialien zur Verfügung stellt (Reiss & Hammer, 2021; Riedl & Schelten, 2013).

„Dafür ist ein Lehr-Lern-Arrangement erforderlich, das eng mit den Konzepten der Lernaufgaben und dem problemlösenden Lernen verbunden ist und auf den selbsttätigen Erwerb von Wissen und dem Erkennen von Zusammenhängen und Ordnungsstrukturen zielt.“ (Riedl & Schelten, 2013, S. 2)

Dennoch muss beachtet werden, dass Lehrpersonen Informationen zur Verfügung stellen, die von den Schüler:innen nicht entdeckt werden können, wie konventionelle Regeln, Bezeichnungen, Sprech- und Schreibweisen oder Formulierungen. Dadurch ist die Aufgabe der Lehrperson nicht nur die Vermittlung des Lehrstoffes, sondern auch die Organisation der Aktivitäten für Schüler:innen, damit sie Selbstständigkeit erlernen und sich eigenständig mit dem Stoff auseinandersetzen (Wittmann, 2019). Entdeckendes Lernen umfasst vorwiegend individuelle Arbeitsphasen, integriert jedoch zugleich die Förderung sozialer Interaktion und wechselseitiger Unterstützung unter den Schüler:innen. Nachdem die Schüler:innen individuell gearbeitet haben, folgt eine gemeinsame Diskussion, in der sie ihre Ergebnisse und Lösungswege präsentieren, vergleichen und ihre Überlegungen zu den gewählten Strategien erläutern (Filler, 2012).

4.3.3. Formen des entdeckenden Lernens

Mathematische Begriffe, Verfahren oder Zusammenhänge können entdeckt werden, da sie mathematische Ideen enthalten, aber zeitgleich auch Normen, die mitgeteilt werden müssen. Im Unterricht kann zwischen verschiedenen Arten des Entdeckenden Lernens unterschieden werden (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

Die erste Form ist die induktive Begriffsbildung. Damit Schüler:innen einen Begriff *entdecken*, untersuchen sie viele passende Beispiele und Gegenbeispiele. Dadurch können sie durch die Struktur der Beispiele Regeln und Eigenschaften erkennen, die für den Begriff wichtig sind und diese dann selbstständig präzisieren. Durch weitere Beispiele, die sie selbst erstellen oder Aufgaben, die die Lehrperson zur Verfügung stellt, können sie ihre Gedanken überprüfen (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

Das Forschende Lernen, oder auch inquiry learning, ist die nächste Variante. Es beschreibt Lernarrangements, in denen Schüler:innen eigenständig eine Fragestellung untersuchen und dafür geeignete Lösungsstrategien entwickeln. Eine häufige Ausprägung ist das Lernen durch Experimentieren (scientific inquiry). Die Schüler:innen formulieren hierbei Hypothesen zu

Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten und prüfen diese mithilfe passend ausgewählter oder selbst gestalteter Experimente (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

Die letzte Form ist das Problembasierte Lernen (engl. problem-based learning). Problembasiertes Lernen fordert Schüler:innen auf, ein gezielt offen gehaltenes und nur teilweise strukturiertes Problem zu bearbeiten und dabei das gegenstandsspezifische Wissen zu erschließen. Besteht die Aufgabe darin, ein Produkt mit gewissen Qualitätsmerkmalen zu entwickeln, spricht man von design-based learning (Linneweber-Lammerskitten, 2014). Aufgabenstellungen werden nach einem bestimmten Schema bearbeitet. Dabei handelt es sich um sieben Schritte. Beim ersten Gruppentreffen erfolgen die ersten fünf Schritte Begriffe klären, Problem definieren, Brainstorming, Ideen ordnen und Recherchefragen formulieren. Dabei wird zuerst in der Gruppe geklärt, was noch unklar ist, und was genau das zentrale Problem ist. Die Gruppe erstellt dann Hypothesen, die passend zur Entstehung, Aufrechterhaltung und Lösung des Problems sind. Dadurch sollen die Schüler:innen dann Oberbegriffe formulieren und daraus konkrete Recherchefragen ableiten. Nach dieser Phase kommt das Selbststudium, in dem alle Mitglieder eigenständig zu den zuvor erstellten Fragen recherchieren. Nach Abschluss der Recherche werden die Ergebnisse, sowie mögliche Lösungen für das Ausgangsproblem in der Gruppe besprochen. (Kozakiewicz et al., 2024; Scholkmann, 2016).

In der Abbildung 3 werden nochmal alle Phasen zusammengefasst und geordnet dargestellt:

PBL-Schritt	Aktivität	Zeitpunkt
1 <i>Begriffe klären</i>	In diesem Schritt verständigen sich die Lernenden über terminologische Unklarheiten .	Erstes Gruppentreffen
2 <i>Problem definieren</i>	Die Gruppe einigt sich auf die zentrale Problemstellung im Fall.	
3 <i>Brainstorming</i>	Alle Anwesenden generieren Hypothesen zur Entstehung, Aufrechterhaltung und Lösung des Problems.	
4 <i>Ideen ordnen</i>	Die Gruppenmitglieder ordnen die Ideen aus Schritt 3 und formulieren Oberbegriffe .	
5 <i>Recherchefragen formulieren</i>	Die Gruppenmitglieder diskutieren, zu welchen Aspekten des Problemfalles sie noch nicht ausreichend Wissen verfügbar haben und formulieren konkrete Recherchefragen .	
6 <i>Recherchephase</i>	Jedes Gruppenmitglied recherchiert eigenständig zu den in Schritt 5 formulierten Fragen und hält die Ergebnisse bis zum nächsten Gruppentreffen fest.	Selbststudium
7 <i>Synthese</i>	Die Gruppenmitglieder tauschen sich über die Ergebnisse ihrer Recherchen in Bezug auf die Fragen aus Schritt 5 sowie auf die in Schritt 2 festgelegte Problemstellung aus.	Zweites Gruppentreffen

Abbildung 3: Die sieben Schritte des Problembasierten Lernens (Scholkmann, 2016)

Auch wenn die drei Formen sehr ähnlich wirken, unterscheiden sie sich laut Linneweber-Lammerskitten (2014) wie folgt:

„Bei der induktiven Begriffsbildung steht der zu bildende Begriff im Zentrum, forschendes Lernen fokussiert eher auf Zusammenhänge. Beim problembasierten Lernen dient der Entdeckungsprozess primär der Lösung eines konkreten Problems oder der Herstellung eines Produktes.“ (Linneweber-Lammerskitten, 2014, S. 239)

Nach Scholkmann (2016) lassen sich vier übergeordnete Formen des Entdeckenden Lernens unterscheiden: das Problembasierte Lernen, das Forschende Lernen, das Projektbasierte Lernen und das Fallbasierte Lernen. Diese Formen können unterschieden werden über die beiden Dimensionen *Offenheit* und *Strukturiertheit*. Bei der Offenheit wird nach den Freiheitsgraden bezüglich Themen, Fragestellung und Ergebnissen, und bei der Strukturiertheit wird nach den Freiheitsgraden bezüglich der Bearbeitungsprozesse unterschieden (Scholkmann, 2016).

Die Einteilung der vier Formen in die Dimensionen ist in Abbildung 4 dargestellt.

		Offenheit Freiheitsgrade bezüglich Thema, Fragestellung und Ergebnissen	
		<i>festgelegt</i>	<i>offen</i>
Strukturiertheit Freiheitsgrade bezüglich Bearbeitungs- prozessen	<i>hoch strukturiert</i>	Problembasiertes Lernen (<i>problem-based learning</i> , PBL)	Projektbasiertes Lernen (<i>project-based learning</i> , PjBL)
	<i>gering strukturiert</i>	Fallbasiertes Lernen (<i>case-based learning</i> , CBL/FBL)	Forschendes Lernen (<i>inquiry-based learning</i> , IBL/FL)

Abbildung 4: Vier Formen des Entdeckenden Lernens (Scholkmann, 2016)

Innerhalb der Lernprozesse ist das Projektbasierte Lernen ähnlich zum Problembasierten Lernen, räumt den Schüler:innen jedoch größere inhaltliche Freiheit ein. Die zu bearbeitenden Problemen werden innerhalb des fachlichen Rahmens eigenständig entwickelt oder aus einem von der Lehrperson bereitgestellten Aufgabenpool ausgewählt. Wie beim Problembasierten Lernen erfolgt die Bearbeitung strukturiert sowie phasenorientiert. Dabei wird häufig an fachspezifische, in der Praxis bewährte Bearbeitungsphasen angelehnt, in denen Ergebnisse präsentiert und reflektiert werden. Die Zusammenarbeit ist größtenteils kooperativ und weniger streng kollaborativ organisiert (Scholkmann, 2016).

Vergleichsweise ist das Fallbasierte Lernen eine weniger stark strukturierte Variante entdeckender Lernformen. Im Vordergrund stehen authentische Problemstellungen, die die spätere berufliche Praxis, im Vergleich zu anderen Ansätzen, noch deutlicher in den Fokus rücken. Ziel ist nicht die Anwendung der erarbeiteten Theorie, sondern der Aufbau neuen Wissens und ein tiefes Verständnis komplexer Sachverhalte. Aus der Berufswelt entnommene und didaktisch aufbereitete Fälle dienen als Ausgangspunkt, um Schüler:innen auf eine vertiefte Wissensaneignung vorzubereiten. Die Aufgabenbearbeitung ist offener und weniger formalisiert (Scholkmann, 2016).

4.3.4. Historisch

Im Laufe des 20. Jahrhunderts etablierte sich in der Lehr-Lernforschung das Entdeckende Lernen durch konzeptuell verwandte Ansätze. Dazu zählen insbesondere die didaktischen Überlegungen von John Dewey, Jerome Bruner und David Kolb, die entwicklungspsychologischen Theorien von Jean Piaget und Lev Vygotsky, sowie die des Pädagogen und Rechendidaktikers Johannes Kühnel (Scholkmann, 2016; Wittmann, 2019).

Bereits in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts hoben Piaget und Vygotsky hervor, dass die kognitive Entwicklung einsetzt, wenn Schüler:innen in neuartigen und ihnen unvertrauten Situationen mit ihrem jeweils verfügbaren Handlungsrepertoire an ihre Grenzen stoßen. Begegnungen mit Phänomenen, die sich mit dem vorhandenen Wissen und Können nicht bewältigen oder erklären lassen, erfordern den Aufbau neuen Wissens und neuer Strategien. Piaget spricht hier von einem Wechselspiel zwischen Assimilation und Akkommodation. Wobei Assimilation die Einordnung von neuen Erfahrungen in bestehende Schemata und Akkommodation die Anpassung dieser Schemata an nicht passende Erfahrungen ist. Zusammen bilden sie den Kern kognitiver Entwicklung. Genau wie beim Entdeckenden Lernen werden Schüler:innen hier mit unbekannten Situationen konfrontiert, die als Ziel haben das Lernen anzuregen (Scholkmann, 2016).

John Dewey, der US-amerikanische Philosoph und Bildungstheoretiker, behauptete, dass sowohl die allgemeine menschliche Entwicklung als auch das Lernen in Bildungssituationen denselben Prinzipien, der aktiven Auseinandersetzung mit neuer Herausforderung, ihrer Integration in vorhandene Erfahrungszusammenhänge und der adaptiven Umgestaltung dieser Zusammenhänge, folgen. Kinder erschließen Kausalzusammenhänge vor allem durch eigenes Handeln. Schulen sind daher gefordert Lerngelegenheiten zu schaffen, in denen Lernende problemhaltige Situationen aktiv bearbeiten, eigene Handlungen erproben und deren Konsequenzen reflektieren können (Scholkmann, 2016).

Der eigentliche Begriff „Entdeckendes Lernen“ wurde von Bruner in den 1960er Jahren geprägt. Er bezog sich jeweils auf die Arbeiten von Piaget, Vygotsky und Dewey. Nach Bruner können Lerninhalte nur dann nachhaltig verankert werden, wenn sie durch eine Neugier basierende intrinsische Motivation getragen sind. Das bedeutet, dass die neuen gelernten Inhalte im Gedächtnis bleiben und jederzeit abrufbar sind (Scholkmann, 2016). Zudem stellt Bruner diesen Ansatz dem Expositionslernen gegenüber, welches in Form von Vorträgen von Lehrpersonen und Lehrtexten stattfindet. Das Entdeckende Lernen richtet sich laut Bruner konsequent auf eine aktive Schüler:innenbeteiligung. Es steht damit für das gemeinsame Anliegen von Lehrpersonen und Didaktiker:innen, Lernprozesse primär auf der intellektuellen Eigenaktivität der Schüler:innen zu gründen (Kollosche, 2017). In entdeckenden Lernarrangements zeigt sich, dass Schüler:innen zu einem Thema eigene, für sie bedeutsame Fragestellungen entwickeln, und darauf ihren Erkenntnisweg ableiten (Scholkmann, 2016).

Kolb, ebenso inspiriert von Piaget, Vygotsky und Dewey, versteht Lernen als Zusammenspiel von echter Erfahrung und angeleiteter Reflexion. In wiederkehrenden Zyklen erleben Schüler:innen zunächst eine reale bzw. simulierte Situation, sammeln dabei Erfahrungen und werten diese anschließend aus. Daraus leiten sie weitere Handlungspläne ab. Anders als bei Kolb muss die Grundlage nicht immer eine selbst erlebte Situation sein. Dabei können aufbereitete Darstellungen, wie ein Text zu einer realen Situation, den Ausgangspunkt des Lernens bilden (Scholkmann, 2016).

Obwohl das Entdeckende Lernen schon früh konzipiert wurde, wird es im Mathematikunterricht als eine eher neuartige Strömung empfunden. In Deutschland wurde es erst in den 1980er Jahren in den Mathematiklehrplan integriert (Wittmann, 2019).

„Trotz vieler guter Vorsätze, die Lernvoraussetzungen der Schüler aufzunehmen und ihre Eigenständigkeit zu fördern, hat sich die traditionelle Didaktik auf Maßnahmen konzentriert, wie den Schülern etwas beizubringen sei, anstatt auf Maßnahmen, wie ihre Aktivität angeregt und organisiert werden könne.“ (Wittmann, 2019, S. 12)

4.3.5. Vor- und Nachteile

Aus konstruktivistischer Perspektive gilt Entdeckendes Lernen als besonders anschlussfähig, weil Wissen nicht bloß übernommen, sondern aktiv aufgebaut wird. Entdeckendes Lernen wird zudem von der Neugier der Schüler:innen getragen und wirkt dadurch in der Regel motivationsfördernd (Linneweber-Lammerskitten, 2014; Winter, 2016; Wittmann & Müller, 1990). Entdeckendes Lernen kann dazu beitragen, dass Schüler:innen mathematische Inhalte

nicht nur anwenden, sondern auch verstehen, warum bestimmte Zusammenhänge gelten. Das bedeutet, es ermöglicht ihnen Strukturen, Zusammenhänge sowie Begründungen eines Verfahrens zu erkennen (Winter, 2016; Wittmann & Müller, 1990).

Darüber hinaus begünstigt Entdeckendes Lernen den Transfer. Das besagt, dass schon bekanntes Wissen eher auf neue Anwendungsgebiete übertragen wird. Zudem wird in der Literatur beschrieben, dass neue Lerninhalte, die durch das Entdeckende Lernen eigenständig gelernt wurden, viel länger im Gedächtnis bleiben. Nicht zuletzt eröffnet eigenständiges Entdecken Schüler:innen die Möglichkeit, Potenziale und Grenzen des eigenen Denkens zu erfahren. So werden dann auch metakognitive Einsichten gewonnen (Kollosche, 2017; Linneweber-Lammerskitten, 2014; Winter, 2016; Wittmann & Müller, 1990).

Es zeigt sich, dass Entdeckendes Lernen kompetenzorientierte Ziele besonders gut fördert. Ebenso gilt eine Überlegenheit problemorientierter Ansätze beim Erwerb anwendungsnaher Problemlösekompetenzen als belegt (Scholkmann, 2016). Diese Vorteile zeigen sich auch beim „Erwerb der Methoden, die zum wissenschaftlichen Arbeiten gehören, sofern dies in den Lernzielen des entsprechenden Curriculums angelegt ist.“ (Scholkmann, 2016, S. 25)

Kollosche (2017) zählt in seiner Arbeit einige negative Eigenschaften des Entdeckenden Lernens auf. Er erklärt, dass „Entdeckendes Lernen“ in der Didaktik häufig als ein vager Sammelbegriff dient, mit dem sehr unterschiedliche Lernumgebungen legitimiert werden. Das „Entdecken“ in dieser Lernmethode klingt danach, als ob die richtige Erkenntnis schon in der Sache steckt und nur „aufgedeckt“ werden muss. Lernen erfolgt häufig dadurch, dass wir Bedeutungen neu konstruieren. In der Praxis müssen Lehrpersonen den Prozess selektiv steuern, ansonsten landen die Entdeckungen nicht beim vorgesehenen Inhalt. Jedoch gelingt diese Steuerung in der konkreten Ausführung oftmals nicht, da sie in vielen Konzepten unklar ist (Kollosche, 2017).

Dennoch sind einige wie Kollosche (2017) der Meinung, dass Versprechen wie bessere Behaltensleistung, höhere Motivation durch Neugier oder überlegene Transferleistungen nicht unbedingt empirisch bestätigt werden. Sie sind der Meinung, dass diese Belege meist aus Laborsettings stammen und lassen sich kaum auf den Unterricht übertragen. Ein un gelenktes, nicht geplantes Entdecken im Unterricht hat meist schlechtere Erfolgsquoten als klare, strukturierte Instruktionen. Aufgaben mit Musterlösungen oder vorangestellte Expositionsphasen sind oft wirksamer. Diese Offenheit und Selbststeuerung erzeugen zusätzliche kognitive Belastungen und setzen metakognitive Kompetenzen voraus. Die sind für eher unerfahrene Schüler:innen problematischer als für Erfahrene, die das schon öfters gemacht

haben. Es zeigte sich jedoch, dass eine Hybridform aus Direkter Instruktion und Entdeckendem Lernen weniger Wissenslücken erzeugen, als die jeweiligen Unterrichtsformen alleine (Kollosche, 2017).

Entdeckendes Lernen soll nach Kollosche (2017) nicht die erste Unterrichtsmethodenwahl sein, vor allem, weil sie auch viel Zeit kostet. Ebenso kann Entdeckendes Lernen strukturell benachteiligend wirken, zum Beispiel für Schüler:innen mit bildungsfernen Kontexten. Sie ist sinnvoll, wenn Lernende erst Erfahrungen aufbauen müssen. Wirksam wird es aber nur mit gezielter Unterstützung, wie Reflexionsanlässen. Ansonsten kann es zu einer Verfehlung des Lernziels oder zu einer oberflächlichen Entdeckung führen (Kollosche, 2017).

4.3.6. Umsetzung im Unterricht

Induktive Begriffsbildung: Wie oben schon erwähnt, ist die induktive Begriffsbildung das Erarbeiten eines Begriffs über die Analyse gezielt gewählter Beispiele und Gegenbeispiele. Sie eignet sich besonders in Situationen, in denen eine Vielzahl unterschiedlicher Erscheinungsbilder eines Objekts nach bestimmten Kriterien geordnet werden können. Dadurch wechseln die Schüler:innen von anschaulichen, typischen Vorstellungen hin zu einer systematischen, merkmalsbasierten Einteilung. Die Methode ist jedoch anspruchsvoll, da sie viele geeignete Beispiele, ein sprachlich-fachliches Repertoire zum Beschreiben oder Vergleichen und eine Lenkung erfordert, damit nicht irrelevante Merkmale in den Fokus geraten. Für diese Methode sind Typen von Vierecken, Körperformen, Symmetrietypen, quadratische Funktionstypen und Typen von Funktionsgraphen geeignete Themen (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

Mathematisches Experimentieren: Aussagen über logische oder funktionale Abhängigkeit eignen sich besonders für Entdeckendes Lernen. Schüler:innen bilden aus Beispielen Vermutungen und prüfen diese. Typisch dafür sind das Erzeugen vieler unterschiedlicher Beispiele, Suche nach Gegenbeispielen und Isolieren relevanter Variablen. Anschließend werden diese Vermutungen bzw. diese Beispiele erklärt, begründet oder sogar bewiesen. Typische Themen sind Sätze der ebenen Geometrie, wie der Satz von Thales, aber auch funktionale Zusammenhänge aus Tabellen oder Graphen (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

„Das erfolgreiche mathematische Experimentieren setzt strategische Kompetenzen der Lernenden voraus, die nicht unbedingt bei allen gegeben sind. Sie können durch geeignete Anleitung, durch Lehrerimpulse, durch schrittweise ausgeblendete Unterstützung gefördert werden.“ (Linneweber-Lammerskitten, 2014, S. 244)

Eine Möglichkeit für das mathematische Experimentieren ist das computergestützte Entdecken. Wirksames Erkunden von Beispielen setzt voraus, dass Schüler:innen die Beispiele schnell und in großer Zahl, sowie gezielt variieren können. Da eine händische Durchführung häufig nicht möglich ist, lassen sich solche Prozesse mit dynamischen Werkzeugen wie GeoGebra problemlos umsetzen. Interaktive Applets in Form sogenannter „Black Boxes“, bei denen die zugrunde liegende Regel zunächst verborgen bleibt, ermöglichen ein systematisches Experimentieren (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

Problemgenetisches Lernen: Beim genetischen Lernen ist Lernen als problemangestoßener, aktiver Konstruktionsprozess zu verstehen, in dem Schüler:innen einen Begriff oder einen Zusammenhang aus einer Kernidee heraus entwickeln, bis er die Lösung des Ausgangsproblems nachvollziehbar erklärt. Statt einer „fertigen Mathematik“, nähern sich die Schüler:innen über deren „Kernideen aus der Vorschauerspektive“. Geeignet ist es besonders für Begriffe, oft im engen Zusammenspiel mit Verfahren und Konzepten. Beim Problemgenetischen Lernen erweisen sich ähnliche Herausforderungen an die Schüler:innen und Lehrpersonen wie beim mathematischen Experimentieren. Hohe Anforderungen entstehen vor allem in der Aufgabenkonstruktion, da die „fertige Mathematik“ in die Ausgangssituation zurückverwandelt werden muss. Dabei muss zuerst ein Zielkonzept bestimmt werden, mit der Frage: *Auf welches Problem ist das mathematische Konzept eine Antwort?* Dadurch kann man die Kernidee als Antwort auf eine Kernfrage verstehen. Im letzten Schritt muss noch eine Kernfrage im konkreten Kontext formuliert werden (Linneweber-Lammerskitten, 2014).

4.4. EIS – Prinzip

4.4.1. Begriffserklärung

In der Mathematik werden Erkenntnisse und Ergebnisse meist symbolisch ausgedrückt. Im Gehirn selbst, werden oft Informationen auch symbolisch, mittels den Symbolen entsprechenden Wörtern oder Formeln, gemerkt (Berger, 2017). Um mathematische Begriffe besser zu vermitteln, können sie auf unterschiedlichste Art repräsentiert werden (Laakmann, 2013). Diese verschiedenen Darstellungen lassen sich durch ihre Erscheinungsform unterscheiden. Einerseits kann das durch selbst durchgeführte Handlungen am Material, bildliche Darstellungen, mathematisch-symbolische Darstellungen oder sprachlich-symbolische Darstellungen klassifiziert werden, allerdings kann es nicht immer eindeutig zugeordnet werden (Kuhnke, 2013). Dennoch gibt es keine eindeutig bessere oder wichtigere Form, sie hängen alle voneinander ab (Berger, 2017).

Auch Leisen (2015) differenziert im Kontext fachlichen Lernens zwischen mehreren Darstellungsebenen, die zur Unterstützung von Verstehensprozessen herangezogen werden. Die erste Ebene bildet die gegenständliche Darstellung, die konkrete Sachverhalte sichtbar macht. Insbesondere im experimentell ausgerichteten Unterricht entfaltet diese Darstellungsform besondere Wirksamkeit, da sie die Schüler:innen in die Lage versetzt, Sachverhalte über die anschauliche Erfahrung unmittelbar zu erschließen. Darauf aufbauend beschreibt er die bildliche Darstellung, die sich der Bildsprache bedient. Realisiert wird sie durch die Verwendung von Fotografien, Zeichnungen, Schaubildern oder Piktogrammen. Dadurch wird eine visuelle und strukturierte Repräsentation von Inhalten ermöglicht. Eine höhere Abstraktionsebene wird durch die sprachliche Darstellung erreicht. Diese kann in Alltagssprachlicher, sowie in fachsprachlicher Formulierung erfolgen. Die Fachsprache, dient der präzisen und spezifischen Begriffsbildung, während die Alltagssprache den Zugang zum Thema erleichtert. Die letzte Ebene ist die symbolische Darstellung. Hierbei kommen formalisierte Symbolisierungsformen wie Tabellen, Diagramme und Graphiken zur Anwendung. Um diese Darstellungsweise lernwirksam einzusetzen, ist bei den Schüler:innen eine hohe fachmethodische Kompetenz erforderlich (Leisen, 2015).

Im Verlauf der mathematikdidaktischen Forschung wurden unterschiedliche Repräsentationsformen entwickelt, um mathematische Inhalte lernwirksam dazustellen. Eines der bekanntesten Konzepte in diesem Zusammenhang ist das EIS-Prinzip. Es geht auf Jerome

Bruner zurück und beschreibt drei grundlegende Repräsentationsmodi des Lernens (Bruner, 1971):

- Enaktive (handelnde) Ebene
- Ikonische (bildlich-figürliche) Ebene
- Symbolische (sprachlich/zeichensprachliche) Ebene

4.4.2. Die enaktive Ebene

Auf der enaktiven Ebene werden bestimmte Objekte oder Handlungen benutzt, die helfen, mathematische Begriffe besser zu verstehen (Wittmann, 1981). Diese Ebene ist insbesondere bei kleinen Kindern als erstes entwickelt, da sie ihre Umgebung durch Handlungen begreifen. Das passiert vor allem im Kindergarten oder in der Volksschule, um mathematische Anforderungen besser zu begreifen. Passieren diese Handlungen immer wieder, fällt es den Kindern viel leichter, den Prozess und den zu erlernenden Gegenstand im Gedächtnis zu behalten. Es entsteht ein Handlungsschema, welches ohne Material auf Vorstellungen anwendbar ist. Diese Objekte werden Träger von Handlungsregeln, die im Kopf sicher angewendet und kombiniert werden können. Die Schüler:innen können Schritte umkehren und verschiedene Schritte miteinander verknüpfen (Lauter, 2005).

Ein anschauliches Beispiel für die enaktive Ebene wäre eine Addition oder Subtraktion mithilfe von Gegenständen. Die Lehrperson kann zum Beispiel zwei Stifte aus ihrer Tasche nehmen, welche sie dann auf ihren Tisch legt. Danach nimmt sie drei weitere Stifte aus ihrer Tasche und legt sie ebenso auf ihrem Tisch. So kann den Schüler:innen gezeigt werden, dass insgesamt fünf Stifte am Tisch liegen. Durch Nachzählen am Schluss wird nochmal deutlich, dass die Anzahl der Stifte fünf ergibt (Grevsmühl, 1995).

Bruner (1971) vergleicht die drei Ebenen mit der Darstellungsart eines Knotens. Bei der enaktiven Ebene kann vor den Augen der Schüler:innen ein Seil geknüpft werden, sodass es zu einem Knoten wird (Bruner, 1971).

4.4.3. Die ikonische Ebene

Ikonische Repräsentationen zeichnen sich durch eine strukturelle oder bildhafte Ähnlichkeit mit dem Referenzobjekt aus. Zum Beispiel kann „3“ als ikonische Darstellung des Herzens repräsentiert werden. Besonders wirksam sind schematisierte Visualisierungen, die auf die strukturellen Merkmale des zu vermittelnden Inhalts zugeschnitten sind, da sie Nebensächliches ausblenden und das Wesentliche hervorheben (Wittmann, 1981). Diese Darstellung stützt sich auf innere Vorstellungsbilder und erlaubt es dem/der Schüler:in, seine Umwelt flexibler und

unabhängiger von konkreten Handlungen wahrzunehmen. Als gegenüber der Handlungsebene abstraktere Repräsentation erzeugt die bildhafte Darstellung eine größere kognitive Distanz zur unmittelbaren Erfahrungswelt des Kindes (Lauter, 2005).

Zugleich ist die ikonische Darstellung bedeutsam, um Handlungsabläufe zu erfassen und alternative Vorgehensweisen parallel zu erkennen. Hierfür ist jedoch ein gewisses Maß an Abstraktionsfähigkeit erforderlich (Wittmann, 1981).

Wenn wir das Beispiel von vorhin anschauen, können die Stifte in der ikonischen Darstellung auf die Tafel gezeichnet werden. Dabei zeichnet die Lehrperson zuerst zwei Stifte und daneben drei weitere Stifte. Durch gemeinsames Nachzählen können die Schüler:innen wieder sehen, dass es insgesamt fünf Stifte sind (Wittmann, 1981).

Auf der ikonischen Ebene stellt Bruner (1971) den Knoten mithilfe von Bildern eines Knotens dar. Dabei können die Bilder aufgeteilt werden in zum Beispiel ein Bild von der Schnur ohne Knoten, die Zwischenphasen, wie die Schnur zu legen ist und dann zum Schluss ein Bild in der der Knoten zu sehen ist. Allerdings muss gesagt werden, dass durch die Bilder allein kein Knoten entsteht. Das müssen die Schüler:innen dann selbst ausprobieren (Bruner, 1971).

4.4.4. Die symbolische Ebene

Die letzte Ebene ist die abstrakteste und zugleich leistungsfähigste Form. Ihr zentrales Merkmal ist der Gebrauch von Zeichen. In Wittmanns (1974) Verständnis umfasst symbolisch ausschließlich klar abgrenzbare Zeichensysteme und schließt Handlungen, als auch Bilder aus. Zur symbolischen Ebene zählt zum Beispiel formal-algebraische Notationen. Entsprechend stellt man die symbolische Ebene in einen deutlichen Gegensatz zur Bildlichkeit. Symbole an sich bilden nicht ab, sie bezeichnen. Ihre Beziehung zum Gemeinten ist konventional und nicht durch strukturelle Ähnlichkeit motiviert. Sie besitzen keine bildhafte Isomorphie zum Referenzobjekt, wie bei ikonischen Darstellungen (Wittmann, 1981).

Der Mensch neigt dazu, Dinge sprachlich zu benennen, wobei die dabei entstehenden Symbole grundsätzlich willkürlich sind. Daher kann derselbe Gegenstand in verschiedenen Sprachen völlig unterschiedliche Lautfolgen tragen, wie zum Beispiel „Baum“ auf Deutsch und „tree“ auf Englisch, ohne dass eine bildhafte Beziehung vorläge. Diese Arbitrarität ermöglicht die Entwicklung künstlicher Symbolsysteme wie der Mathematik. Typische Beispiele wären „ π “ für das Kreiszahlverhältnis, „ $=$ “ für Gleichheit oder „ x “ als unbekannte Größe. Das sind alles Zeichen ohne strukturelle Ähnlichkeit zu ihrem Referenten (Lauter, 2005).

„Die Mathematik wird zumeist als eine formale Wissenschaft angesehen, die ihre Erkenntnisse symbolisch ausdrückt. Doch auch jede andere Disziplin bewegt sich auf der symbolischen Ebene, denn alle drücken ihre Ergebnisse irgendwie sprachlich aus.“
(Berger, 2017, S. 17)

Um das Beispiel von vorhin symbolisch darzustellen, wäre die einfachste Art mit Hilfe von Zeichen, wie zum Beispiel: $2 + 3 = \underline{\quad}$. Ebenso möglich wäre es durch ein Textbeispiel: „Susi hat zwei Stifte in ihrer Schultasche, Max borgt ihr drei andere Stifte. Wie viele Stifte hat Susi nun?“ (Grevsmühl, 1995).

Bruner (1971) betont, dass symbolische Repräsentationen, wie zum Beispiel der Knoten, in unterschiedlichen Zeichensystemen realisiert werden können. Entweder sprachlich oder formal kodiert mit algebraischen Notationen, formaler Sprache, Programmiersprache, etc. Sie setzen die Fähigkeit voraus, Bedeutungen in das jeweilige Symbolsystem zu übersetzen (Bruner, 1971).

4.4.5. Zusammenhang der Ebenen

Bruner war einer der ersten, der auf den systematischen Zusammenhang zwischen diesen drei Repräsentationsformen hingewiesen hat (Grevsmühl, 1995). Zentral ist weniger eine starre Reihenfolge als die didaktisch gestaltete Verknüpfung, sowie auch der flexible Wechsel zwischen den drei Ebenen. Es sind deshalb keine getrennten Ebenen. Je nachdem, welcher Inhalt, welches Lernziel und welche Lernvoraussetzung gebraucht werden. Im Lehr-Lern-Prozess soll dieser Verknüpfung der Repräsentationsebenen Aufmerksamkeit geschenkt werden (Filler & Ludwig, 2012). Mathematische Bildung setzt einen tragfähigen Vorstellungsraum voraus. Dadurch lässt sich mathematisches Denken als regelgeleitetes Hantieren in diesem Raum verstehen (Kraus, 2010). Nach Bruner (1976) entsteht ein solcher Vorstellungsraum zunächst enaktiv, wird anschließend ikonisch stabilisiert und schließlich symbolisch verdichtet. Er spricht hier von „Stufen“, was auch als Niveau gedeutet wird, „die in einem zeitlichen Nacheinander stehen (und damit eine Entwicklungshierarchie bilden) [...]“ (Berger, 2017, S. 17). Dadurch weiß man heute, dass die drei Formen immer in Verbindung bleiben. Zum Beispiel kann jederzeit von der symbolischen zur ikonischen Ebene gewechselt werden, wenn es benötigt wird (Berger, 2017).

Es gibt in der Entwicklung des Menschen tatsächlich eine Entwicklungshierarchie. Zuerst wird die enaktive Ebene benutzt, danach folgt die ikonische Ebene und erst am Schluss die symbolische Ebene. Es sind dennoch keine Stufen, die einander ablösen. Vielmehr handelt es

sich um fortschreitende Abstraktionen der ursprünglichen Darstellungsweisen, die weiterhin aktiv verfügbar und didaktisch bedeutsam bleiben. Die „abstrakteren“ Repräsentationsebenen werden nur sicher beherrscht, wenn Lernende sie jederzeit durch Rückgriff auf elementare Ebenen re-konkretisieren und damit rückbinden können (Berger, 2017). Die Abbildung 5 visualisiert den Zusammenhang zwischen den drei Ebenen. Hier ist es wichtig anzumerken, dass die symbolische Ebene nicht über den anderen beiden steht:

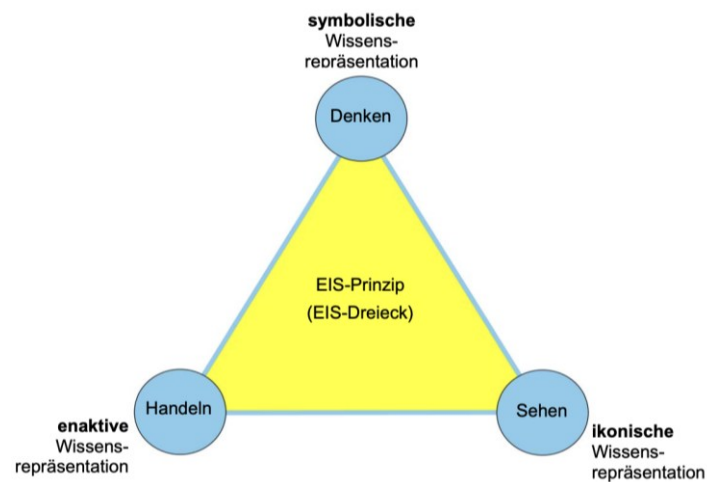


Abbildung 5: EIS-Dreieck (Berger, 2017)

„Beim Umgang mit Bildern, Diagrammen, Modellen (ikonische Ebene) wie auch im Umgang mit formalen, formelhaften Ausdrucksformen (symbolische Ebene: Sprache, mathematische Formeln etc.) werde ich immer wieder – manchmal als ‚Rettungsanker‘, manchmal einfach nur aus ‚Lust am konkreten Tun‘ – mit Erfolg auf die Ebene des wirklichen Handelns (enaktive Ebene) zurückkehren.“ (Berger, 2017, S. 19)

Dieser Gedankengang von Bruner bezieht sich auf Piaget, der behauptet, dass Denken vorgestelltes Handeln ist (Piaget et al., 1972). Der Übergang zur symbolischen Ebene setzt voraus, dass ikonische Darstellungen so weit verarbeitet sind, dass sie beim Betrachten eine weitgehend automatisierte mentale Simulation der zugrunde liegenden Handlungsabläufe auslösen (Berger, 2017). Laut Reiss und Hammer (2021) kommt es auch auf die Entwicklungsstufe bzw. auf das Alter des Kindes an, welche der drei Ebenen priorisiert werden soll. Während bei Kindern eher auf enaktive Darstellungen zurückgegriffen wird, verwendet man bei Jugendlichen und Erwachsenen eine Mischung aus symbolischen und ikonischen Darstellungen (Reiss & Hammer, 2021).

Das EIS – Prinzip bekommt laut Lambert (2011) erst dann eine Bedeutung, wenn ein Wechsel zwischen den bzw. die Verknüpfung der drei Repräsentationsebenen möglich gemacht wird. Diese Verknüpfung sollte auch der Fokus im Unterricht sein, damit ein Lernprozess für die

Schüler:innen zustande kommt (Lambert, 2012). Auch Lauter (2005) ist der Meinung, dass die kognitive Entwicklung der Kinder und Jugendlichen durch die Einführung der drei Formen im Unterricht gefördert wird. Es werden ebenso Verknüpfungen zwischen unterschiedlichen Wissensbereichen hergestellt, wie in den Bereichen Geometrie und Algebra. So können zum Beispiel algebraische Probleme geometrisch gelöst werden und umgekehrt. Eine klassische Aufgabe ist die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden, welche mithilfe von Gleichungen leicht gelöst werden kann (Kuntze, 2013).

Für die Oberstufe kann die Flugkurve eines Balles, also eine Parabel, gut im EIS-Prinzip dargestellt werden. Wirft man den Ball zur Veranschaulichung, ist es die enaktive Ebene. Danach kann diese Flugbahn auf die Tafel aufgezeichnet werden für die ikonische Ebene. Symbolisch kann man die Beschreibung dieser Flugbahn mittels Funktionsgleichungen aufstellen (Wittmann, 1981).

4.5. Theoretische Rahmengrundlagen zur Gestaltung digitaler Lernmaterialien

4.5.1. Multimedia Learning

„People learn better from words and pictures than from words alone.“ (Mayer, 2009, S. 4). Das ist die Grundaussage und das Versprechen des Multimedia Learning. Es wird gesagt, dass Menschen bestimmtes Material besser mit einem Text und einer zusätzlichen Graphik verstehen können. Ein einfaches Beispiel für eine multimediale Erfahrung wäre ein Video am Fernseher oder am Computer anzusehen. Genauso würde hier eine PowerPoint Präsentation dazu zählen, die jemand auf einem Bildschirm präsentiert. Im Unterricht wird das ebenso genutzt, wenn ein Arbeitsblatt mit einem Bild und einer passenden Beschreibung dazu aufgeteilt wird (Mayer, 2009). „Words include speech and printed text; pictures include static graphics (such as illustrations or photos) and dynamic graphics (such as animations or video).“ (Mayer, 2009, S. 6).

Es gibt laut Mayer (2009) drei verschiedene Sichtweisen zu multimedialen Informationen. Die erste Sichtweise ist das Übertragungsmedium (*delivery media*), in der zwei oder mehr Übertragungsgeräte Informationen liefern, wie bei einem Computer Bildschirm und einem Lautsprecher. Als zweites ist die Darstellungsform (*presentation mode*), welche verbale und bildliche Darstellungen definiert, also in welcher Form die Information repräsentiert wird. Typischerweise ist es ein Text mit einer passenden Graphik bzw. Animation dazu. Die letzte Sichtweise ist die sensorische Modalität (*sensory modality*), wo die Information über den Sinneskanal aufgenommen wird, vor allem Hör- und Sehsinn, wie bei einem Vortrag mit Folien (Mayer, 2009).

Die Theorie geht davon aus, dass erhaltene Informationen über zwei Kanäle verarbeitet werden, zum einen den visuellen bzw. bildhaften und zum anderen den verbalen bzw. auditiven Kanal. Beide Kanäle haben nur eine begrenzte Kapazität, weshalb das Lernmaterial so gestaltet werden muss, dass das Arbeitsgedächtnis nicht überlastet wird. Etwas zu lernen wird als eine aktive Verarbeitung verstanden, bei der Schüler:innen wichtige Informationen auswählen, diese mit Vorwissen anknüpfen und zu Modellen organisieren. Für die digitalen Lernmaterialien lässt sich daraus schließen, dass die Kombinationen von Wörtern und Bildern nicht automatisch lernförderlich sind. Es hängt eher stark von der konkreten Gestaltung ab (Becker et al., 2019; Mayer, 2009).

Mayer (2009) präsentiert einige zentrale Gestaltungsprinzipien für die Erstellung von Aufgaben. Das erste ist das Kohärenzprinzip, welches versucht irrelevante oder dekorative Zusatzinformationen zu vermeiden, da diese die kognitive Verarbeitung binden können, ohne das eigentliche Verständnis zu verbessern. Ebenso spricht Mayer (2009) vom Redundanzprinzip, welches darauf hinweist, dass doppelte Informationen unter bestimmten Bedingungen die Verarbeitung der Informationen behindern könnten. Die verfügbaren Ressourcen werden hier für unnötige Wiederholung statt für Verständnis genutzt. Das nächste Prinzip ist das Kontiguitätsprinzip, welches besagt, dass zusammengehörige Informationen räumlich nahe und zeitlich abgestimmt präsentiert werden sollen. Das verursacht nur eine unnötige Suche, wodurch die Schüler:innen schlechtere Lernergebnisse erzielen. Das Segmentierungsprinzip besagt, dass man komplexe multimediale Inhalte in sinnvolle Abschnitte gliedern sollte, um eine Überforderung zu reduzieren (Mayer, 2009). Empirische Studien im deutschsprachigen Raum nutzen diese Prinzipien, um zu begründen, dass multimediale, gut strukturierte Anleitungen Lernprozesse erleichtern können, wenn sie kognitiv entlastend gestaltet sind (Amacker et al., 2024).

Das EIS-Prinzip ist gut mit dem Multimedia Learning kompatibel, da verschiedene Repräsentationen unterschiedliche kognitive Zugänge eröffnen können, jedoch müssen die Übergänge so gestaltet werden, dass die Schüler:innen nicht durch unnötige Integrationsanforderungen belastet werden. Das Entdeckende Lernen lässt sich damit verbinden, wenn die multimediale Lernumgebung nicht ablenkt, sondern das Entdecken durch eine klare Gliederung und eine eindeutige Verbindung von Darstellung und Erklärung unterstützt.

4.5.2. Cognitive Load Theory

Die Kernidee der Cognitive Load Theory beschreibt das Arbeitsgedächtnis als einen Engpass des Lernens, weil nur eine begrenzte Menge an Informationen gleichzeitig verarbeitet werden kann. Lernen wird verstanden als ein Aufbau und eine Automatisierung von bestimmten Schemata im Langzeitgedächtnis (Sweller, 2011). Das spiegelt sich auch bei der Gestaltung von Lernmaterialien wider. Eine Instruktion im Unterricht soll so organisiert sein, dass die Arbeitsgedächtnisressourcen möglichst effizient für einen schemaaufbauenden Prozess genutzt werden (Sweller, 2020). „While cognitive load theory is not unique in using human cognition to generate instructional procedures, it is regrettably rare for instructional design to be based on human cognitive architecture.“ (Sweller, 2011, S. 38).

Die Cognitive Load Theory unterscheidet zwischen drei verschiedenen Belastungsarten. Die erste ist die intrinsische Belastung, in der es um inhaltliche Komplexität geht. Die zweite ist die lernirrelevante Belastung, die durch unnötig erzeugten Aufwand im Rahmen der Instruktion entsteht. Die dritte Belastung ist die lernrelevante Belastung, der Schemaaufbau wird durch eine ressourcenbezogene Verarbeitung unterstützt. Das Ziel der Gestaltung einer Lernsituation, ist es die lernirrelevante Belastung zu reduzieren und kognitive Ressourcen gezielt auf die lernrelevante Verarbeitung zu lenken (Becker et al., 2019).

„Bei der Trennung der Darbietung von korrespondierenden Informationsquellen in einer Lernumgebung kommt es zum sogenannten Split-Attention Effekt. Diese Trennung führt zur Erforderlichkeit mentaler Integrationsprozesse, welche nach der CLT die lernirrelevante kognitive Belastung erhöhen und damit die lernrelevante kognitive Belastung verringern, was letztlich zu einer Verminderung der Lernleistung führt.“
(Becker et al., 2019, S. 3)

Die konkrete Belastung hängt zudem vom Vorwissen ab, wodurch der Unterstützungsgrad und die Darstellungsform adaptiv geplant werden sollte (Sweller, 2020).

Die Cognitive Load Theory beschreibt verschiedene zentrale Effekte und Designimplikationen für die Aufgabenerstellung. Der Worked-Example-Effekt ist der bekannteste. Dieser besagt, dass Schüler:innen einen höheren Lerneffekt haben, wenn sie es nicht eigenständig probieren, sondern an vollständig gelösten, gut ausgewählten Beispielen lernen. Als Lernmaterial empfehlen sich Beispielsequenzen und schrittweise eine Aufgabenprogression (Sweller, 2020). Der Split-Attention-Effekt, wie oben schon kurz erwähnt, beschreibt, dass räumlich getrennte, aber inhaltlich zusammengehörige Informationen zusätzliche Integrationsarbeit erzeugen (Becker et al., 2019). Daraus kann man ableiten, dass Informationen physisch zu integrieren sind, wie zum Beispiel Beschriftungen direkt an den Objekten oder kurze Hinweise in der Nähe zu setzen (Sweller, 2011). Der Redundanz-Effekt ist ähnlich dem oben beschriebenen Redundanzprinzip. Überflüssige und doppelte Informationen können das Lernen verschlechtern. Ein weiterer Effekt ist der Expertise-Reversal-Effekt, welches zeigt, dass stark geführte Unterstützung für bessere Schüler:innen unterfordernd wirken kann und daher eher als Störung angesehen wird. Hierfür ist das sogenannte Guidance Fading hilfreich, ein schrittweises Ausblenden von Unterstützung (Sweller, 2020).

Die Cognitive Load Theory stützt die Prinzipien der Direkten Instruktion. Diese reduziert Suchprozesse und durch eine explizite Anleitung sowie Beispiele wird die lernirrelevante Belastung minimiert, wodurch sich schemaaufbauende Verarbeitung erleichtert.

5. Methode

5.1. Forschungsdesign und Ablauf

Die vorliegende Untersuchung folgt einem empirischen Ansatz mit einem experimentellen Design mit drei unterschiedlichen didaktischen Konzepten: Die Direkte Instruktion, das Entdeckende Lernen, und das EIS-Prinzip. Ziel ist, zu überprüfen, wie GeoGebra-Books gestaltet sein müssen, um konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung, und kurzfristige Lernwirksamkeit in der Sekundarstufe I zu maximieren. Die konkrete Fragestellung lautet:

Wie müssen GeoGebra-Books konzipiert werden, um im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten?

Daraus ergeben sich die Hypothese H1 „Entdeckendes Lernen über GeoGebra-Books fördert die kognitive Aktivierung der Schüler:innen stärker als die anderen beiden Ansätze, führt aber häufiger zu Fehlvorstellungen und geringerer Lernwirksamkeit.“ und H2 „Direkte Instruktion in GeoGebra-Books zeigt kurzfristig höhere Lernerfolge, führt jedoch zu geringerer kognitiver Aktivierung und schwächerem konzeptuellem Verständnis im Vergleich zum EIS-Prinzip.“. Im Folgenden wird dargelegt, wie diese Fragestellung operationalisiert und statistisch sowie qualitativ geprüft werden kann.

In einer Klasse der 7. Schulstufe des BG/BRG Radetzkystraße arbeiten die Schüler:innen in Zweierteams über eine Unterrichtsstunde, mit inhaltsäquivalenten, aber didaktisch verschieden – nämlich den drei oben genannten Konzepten folgend - gestalteten GeoGebra-Books. Die Bildschirmaktivitäten, sowie die Gespräche der Schüler:innen während des Durcharbeitens werden durchgängig aufgezeichnet. In der Folgestunde absolvieren die Schüler:innen ein Arbeitsblatt mit passenden Aufgaben zum Thema der GeoGebra-Books. Dieses Arbeitsblatt dient als „Post-Test“ zur Überprüfung, wie viel durch dieses Book bei den Schüler:innen repliziert werden kann. Nach Auswertung der Video- und Audioaufnahmen werden leitfadengestützte Kurzinterviews zu besonders auffallenden Momenten, AHA-Momente oder ähnliches geführt. Der gesamte Ablauf wird zweimal mit derselben Jahrgangsstufe durchgeführt, um die Robustheit zu erhöhen.

5.2. Strichprobe und Setting

Getestet wurden 29 Schüler:innen in einer 3. Klasse AHS (7. Schulstufe), die ich selbst auch in Mathematik unterrichte. Das Alter der Kinder erstreckt sich von zwölf bis vierzehn Jahren. In

der Klasse befinden sich fünfzehn männliche Teilnehmer ($\approx 51,7\%$) und vierzehn weibliche Teilnehmerinnen ($\approx 48,3\%$). Die Klasse wurde in dreizehn Zweierteams und ein Dreierteam geteilt, wobei die Aufteilungslogik nach Schulnoten erfolgte. Die Zweierteams wurden bewusst leistungsheterogen zusammengesetzt. Schüler:innen mit der Note „Sehr Gut“ arbeiteten bevorzugt mit Schüler:innen mit „Genügend“ oder „Nicht Genügend“ zusammen. Schüler:innen mit einem „Gut“ wurden mit Schüler:innen mit einem „Befriedigend“ gepaart. Ziel dieser Zusammensetzung war es, schwächere Schüler:innen durch Peer-Erklärungen gezielt zu unterstützen. Die didaktischen Ansätze wurden zufällig zugeteilt, unter der Nebenbedingung einer möglichst gleichmäßigen Verteilung. Das bedeutet, fünf Teams erhielten das GeoGebra-Book Direkte Instruktion, fünf das EIS-Prinzip und vier das Entdeckende Lernen.

Der Unterricht erfolge im großen EDV-Saal der Schule. Der Ablauf der Stunde, sowie die Einteilung der Gruppen und der GeoGebra-Books, wurde in der Stunde davor kurz erläutert und während der Stunde noch einmal auf die Wand projiziert. Darin stand:

1. Mit eurem Schulaccount einloggen (pro Gruppe reicht 1 Computer)
2. In Teams einsteigen und auf den entsprechenden Link deiner Gruppe drücken
3. Auf „Aufnahme starten“ drücken und Audioaufnahme mit deinem Tablet starten
4. Buch starten – ungefähr 40 Minuten Zeit
5. Bei Verständnisfragen gerne aufzeigen
6. Am Schluss Webseite schließen, Aufnahme beenden und auf Teams hochladen

Da die Schüler:innen bereits mit GeoGebra-Classrooms vertraut sind, bedarf es hier keinerlei Erklärung bei der Anmeldung. Fünf Minuten vor Ablauf der 40 Minuten, gab es eine Ansage, dass die Zeit bald vorbei ist. Dieses standardisierte Skript diente dazu, Instruktionseinflüsse zu minimieren.

Das Experiment wurde unter ausdrücklicher Erlaubnis und Unterstützung der Direktion sowie Zustimmung der Eltern und Erziehungsberechtigten durch Einverständniserklärung durchgeführt. Betont wurde unter anderem die vollständige Anonymisierung der Ergebnisse und das Nicht-Einfließen der Leistungen im Experiment in die Schulnote. Dieser Punkt wird in 5.7. nochmals genauer erläutert.

5.3. GeoGebra-Books

Erstellt wurden insgesamt sechs verschiedene GeoGebra-Books: Je zwei zum Entdeckenden Lernen, zwei zum EIS-Prinzip und zwei zur Direkten Instruktion. Der erste Teil des Projekts

erfolgte zum Thema „Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen“, im Lehrplan „Zahlen und Maße: Veranschaulichen des Addierens, Subtrahierens und, in einfachen Fällen, des Multiplizierens auf der Zahlengeraden und schriftliches Durchführen der vier Grundrechenoperationen“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023), und der zweite Teil zum Thema „Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks“, im Lehrplan „Figuren und Körper: Konstruieren regelmäßiger Sechsecke und allenfalls weiterer regelmäßiger Vielecke“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023). Die GeoGebra-Books wurden so erstellt, dass sie im Regelfall 30 bis 40 Minuten Bearbeitungszeit bedürfen. Im Folgenden werde ich die einzelnen GeoGebra-Books genauer erläutern. Einige Aufgaben wurden vom Schulbuch „Das ist Mathematik 3“ übernommen (Humenberger et al., 2025).

5.3.1. Rationale Zahlen – Direkte Instruktion

Bei allen drei Büchern zu Rationalen Zahlen ist zu Beginn das Ziel der Stunde eingeblendet, welches wie folgt lautet: Wir arbeiten mit rationalen Zahlen (Brüchen und Dezimalzahlen) bei Addition und Subtraktion. Wir nutzen klare Schritte: gleichnamig machen, umformen (z.B.: $a - b = a + (-b)$), Zähler addieren/subtrahieren, kürzen.

Im nächsten Schritt wurde die Struktur „Ich – Wir – Du“ verwendet (Brüning & Saum, 2020; Zentel & Gebhardt, 2024). Dafür wurden jeweils eigene Buchkapitel erstellt. In den einzelnen Kapiteln können nun vorhandene Kapiteln anderer User:innen verwendet werden, oder es wird selbst erstellt. Dafür gibt es als Auswahl „Text“, „Video“, „GeoGebra“, „Bild“, „Notizen“, „PDF-Datei“, „Frage“ oder „Web“. Das kann in Abbildung 6 gesehen werden.

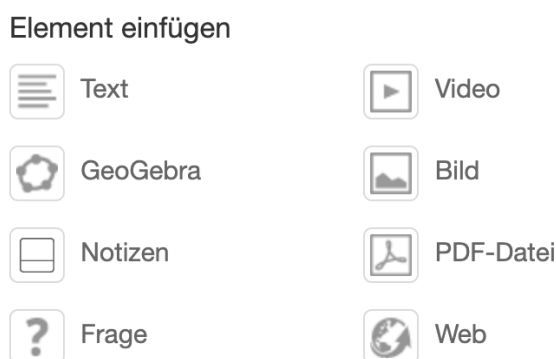


Abbildung 6: Tool-Auswahl GeoGebra-Books

Da in der „Ich-Phase“ nur Erklärungen erfolgen, wurde in diesem Kapitel nur die Funktion „Text“ verwendet. Für die Schüler:innen gab es hier eine Schritt-für-Schritt Anleitung, wie sie Additionen und Subtraktion rationaler Zahlen mit gleichem und unterschiedlichem Nenner

durchführen können (Zentel & Gebhardt, 2024). Die Schüler:innen konnten diese Seite so lange und so oft durchlesen, bis sie es verstanden haben. Wie diese Schritt-für-Schritt Anleitung aussieht, kann man in Abbildung 7 genauer sehen.

Beginnen wir mit Brüchen:

$$\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(-\frac{1}{8}\right) =$$

Wir wissen bereits: Plus und Minus ergibt Minus. Deswegen schreiben wir es zuerst um und rechnen danach.

1. Addition umschreiben: $-\frac{3}{8} - \frac{1}{8} =$

2. Nenner überprüfen: Beide haben als Nenner 8, das bedeutet, wir müssen die Brüche nicht ändern.

3. Nun müssen wir die Zähler zusammen rechnen, der Nenner bleibt gleich. Wir übernehmen beim Zähler die Vorzeichen, die beim Bruch stehen:

$$(-3) - 1 = -4 \rightarrow -\frac{4}{8}$$

4. Kann man kürzen? JA! Man kann beide Zahlen durch 4 dividieren:

$$-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Nun haben wir unser Ergebnis!

Abbildung 7: Schritt-für-Schritt Anleitung

In der „Wir-Phase“ kamen zu den einzelnen Schritten auch jeweils Fragen für die Schüler:innen hinzu, sodass sie einige Schritte selbst überlegen müssen (Zentel & Gebhardt, 2024). Diese Fragen kann man mit dem Tool „Frage“ erstellen, wobei zwischen einer offenen und Multiple Choice Frage unterschieden werden kann. Als Beispiel kann man in Abbildung 8 eine Multiple Choice Frage und in Abbildung 9 eine offene Frage sehen. Bei der Multiple Choice Frage haben die Schüler:innen drei Mal die Chance, die Frage richtig zu beantworten, während sie bei der offenen Frage direkt die richtige Antwort sehen können, sobald sie auf „Antwort überprüfen“ drücken.

Aufgabe 1:

$$\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

Minus und Minus ergibt was?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Minus

B ☐ Plus

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Abbildung 8: Multiple Choice Frage

Schreibe nun das Ergebnis auf! Tippe dafür auf π und klicke die Zahlen an. Für den Bruchstrich machst du zwischen den Zahlen das Symbol $\div$.

Aa π Gib hier deine Antwort ein...

ANTWORT ÜBERPRÜFEN

Abbildung 9: Offene Frage

Für die „Wir-Phase“ wurden zwei verschiedene Aufgaben erstellt. Pro Aufgabe gab es jeweils sieben kurze Fragen, die die Schüler:innen beantworten mussten. Am Ende dieser Phase wurde nochmal betont, dass die Schüler:innen die Schrittfolge in ihr Schulübungsheft aufschreiben sollen, damit sie diese für die nächsten Aufgaben nicht vergessen. Das sah folgendermaßen aus: Schreib dir nun in dein Schulübungsheft die Schritte auf, die zu tun sind, damit du sie nicht vergisst!

1. Rechnung umschreiben + Umwandeln in Brüche/Dezimalzahlen falls nötig
2. Gleicher Nenner?
3. Zähler zusammenrechnen
4. Kürzen?
5. Endergebnis!

Im letzten Kapitel, in der „Du-Phase“, mussten die Schüler:innen nun selbst fünf verschiedene Rechnungen durchführen (Zentel & Gebhardt, 2024). Diese Rechnungen waren die gleichen für alle Gruppen. Sie dienten zur Überprüfung der Lernwirksamkeit der drei getesteten Methoden (Brandl, 2016). Diese Aufgaben beginnen leicht und werden immer anspruchsvoller. Anhand von Abbildung 10 wird die steigende Komplexität in Aufgabe 4 und 5 verdeutlicht. Diese Aufgaben wurden adaptiert vom Schulbuch „Das ist Mathematik 3“ (Humenberger et al., 2025).

Aufgabe 4:

$$\frac{8}{16} - \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{2}{4}\right) =$$

Aa π

ANTWORT ÜBERPRÜFEN

Aufgabe 5:

$$\left(-\frac{1}{4}\right) - (+0,5) + (-2,5) =$$

Aa π

ANTWORT ÜBERPRÜFEN

Abbildung 10: Aufgabe 4 & 5

5.3.2. Rationale Zahlen – EIS-Prinzip

Das nächste GeoGebra-Book bezieht sich auf das EIS-Prinzip. Zu Beginn wurde wieder das Ziel der Stunde präsentiert, wie bei der Direkten Instruktion. Danach wurden die Kapitel

unterteilt in jeweils eine enaktive, ikonische und symbolische Ebene, wobei die strukturierte Sequenz dem Aufbau enaktiv → ikonisch → symbolisch folgte. Das Ziel war hier, einen roten Faden zu finden, sodass ein flüssiger Übergang zwischen den Repräsentationsebenen stattfindet (Lambert, 2012).

Im Kapitel der enaktiven Ebene wurde ein fertiges Applet von der Userin Natalia Shenkman (Stand: 11.11.2025, abrufbar unter: <https://www.geogebra.org/m/nefe99kw>) verwendet, welches einen Fahrstuhl für die Addition von Ganzen Zahlen darstellen soll. Die Schüler:innen können den roten Punkt, als auch den blauen Fahrstuhl verschieben. Der Rote Punkt stellt dar, in welchem Stock die Person sich aktuell befindet und den blauen Fahrstuhl können sie in das Stockwerk verschieben, wohin die Person dann möchte. Nebenbei wird die Veränderung der Stockwerke als Rechnung angezeigt und die rote Zahl soll darstellen, wie viele Stockwerke die Person nach oben oder nach unten gefahren ist. Die Schüler:innen sollen bei dieser Aufgabe zuerst selbst ausprobieren, und das Prinzip dahinter zu verstehen versuchen. Dieses Applet ist in Abbildung 11 zu sehen.

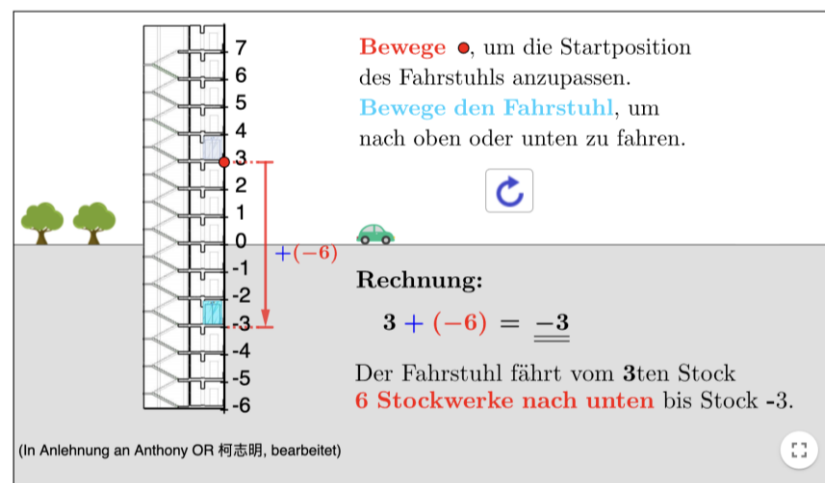


Abbildung 11: Applet 1 Aufzug

Darunter müssen die Schüler:innen dann selbstständig einfache Aufgaben bearbeiten. Für jede richtige Antwort bekommen sie einen Punkt, insgesamt müssen sie mindestens 10 Punkte erzielen. Für eine neue Rechnung können die Schüler:innen auf „Neue Aufgabe anzeigen“ drücken. Falls sie Schwierigkeiten haben, ist daneben noch einmal der Fahrstuhl dargestellt, der ihnen hilft, die Aufgabe zu lösen. Das ist in Abbildung 12 ersichtlich.

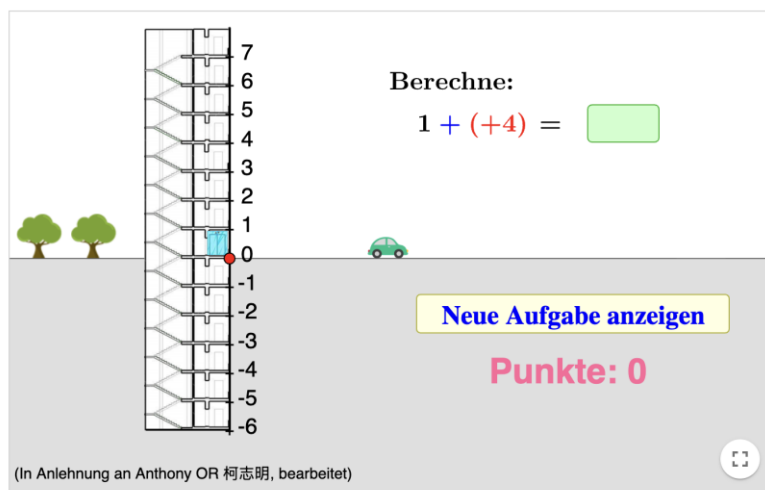


Abbildung 12: Applet 2 Aufzug

Im nächsten Kapitel, also auf der ikonischen Ebene, ist zuerst ein Applet implementiert, angelehnt an die Userin Lisa Stummer (Stand: 11.11. 2025, abrufbar unter: <https://www.geogebra.org/m/FnnQabB8>), welches Additionen und Subtraktionen rationaler Zahlen auf den Zahlenstrahl darstellt. Das GeoGebra-Applet basiert auf zwei Schiebereglern, einer Schaltfläche namens „Lauf“, welches einen Start Knopf repräsentiert, einer Schaltfläche namens „Zurück!“, welches einen Reset Knopf darstellt, Schaltflächen, in denen ausgesucht werden kann, ob die Rechnung eine Addition oder Subtraktion sein soll und Kontrollkästchen um die Veranschaulichung und das Ergebnis anzuzeigen. Die Schieberegler laufen von der Zahl -10 bis zur Zahl 10 . Die Schüler:innen können beliebig beide Schieberegler so verschieben wie sie wollen, die Zahlen werden als Dezimalzahlen angezeigt. Sobald sie sich für zwei Zahlen entschieden haben, sollen sie auf „Lauf“ drücken.

Die Rechnung wird mithilfe von Pfeilen am Zahlenstrahl dargestellt. Der rote Pfeil stellt die Richtung der ersten Zahl dar, indem bei einer positiven Zahl der Pfeil nach rechts läuft und bei einer negativen Zahl nach links. Der blaue Pfeil mit der Maus stellt die zweite Zahl dar, welcher am Ende des roten Pfeiles angehängt wird. Dieser wird erst gezeigt, sobald auf den „Lauf“ Knopf gedrückt wurde. Die Spitze des blauen Pfeils soll das Ergebnis darstellen, dieses selbst wird mit einem grünen Pfeil angezeigt. Die Schüler:innen sollen bei dieser Aufgabe erneut selbst herumprobieren und das Prinzip dahinter verstehen. Nach ein paar Versuchen können die Schüler:innen ebenso auf das Häkchen beim Kontrollkästchen „Ergebnis anzeigen“ drücken, sodass das Häkchen verschwindet, um die Ergebnisse selbst zu berechnen. Das Applet ist in der Abbildung 13 zu sehen.

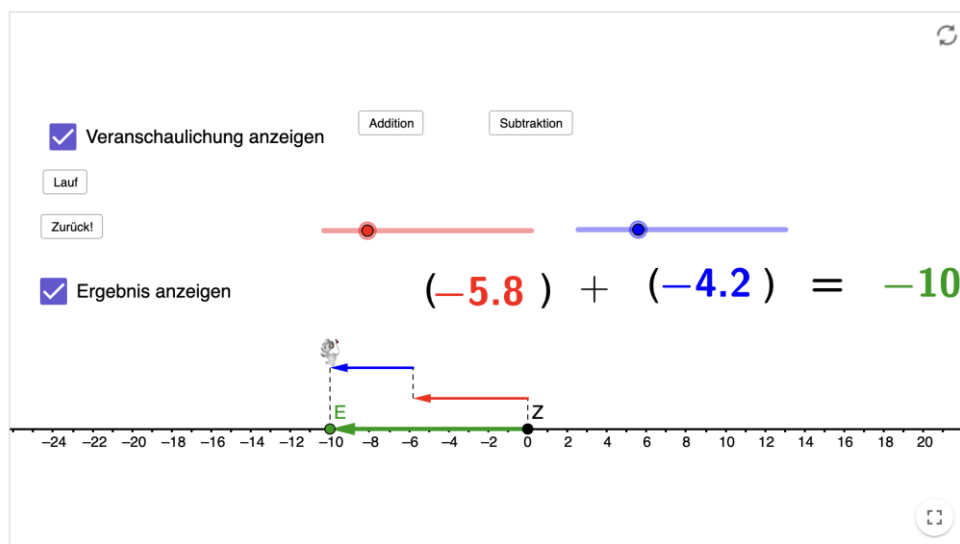


Abbildung 13: Darstellung am Zahlenstrahl 1

Auf der nächsten Seite ist wieder ein Zahlenstrahl zu sehen, nur dieses Mal mit Brüchen beschriftet. Es soll die Aufgabe $\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) =$ gelöst werden. Im GeoGebra-Applet ist ein Zahlenstrahl mit dem Startwert $\left(-\frac{1}{3}\right)$ zu sehen. Die Schüler:innen sollen zuerst die Kästchen „Addition“ und „Rechenweg“ anklicken, um den Pfeil der Rechenoperation $\left(-\frac{4}{3}\right)$ anzeigen zu lassen. Danach müssen sie noch auf die Kästchen „Ergebnis“ und „Wert des Ergebnisses“ drücken, und können das Endergebnis der Aufgabe einsehen. Unter diesem Applet sind auch noch offene Fragen zu beantworten wie „Warum geht der Pfeil nach links?“. Direkt darunter ist genau das gleiche Applet nochmal, nur dieses Mal mit der Rechnung $\left(-\frac{2}{5}\right) + \left(+\frac{6}{5}\right) =$. Die erste Aufgabe wird als Applet in Abbildung 14 gezeigt.

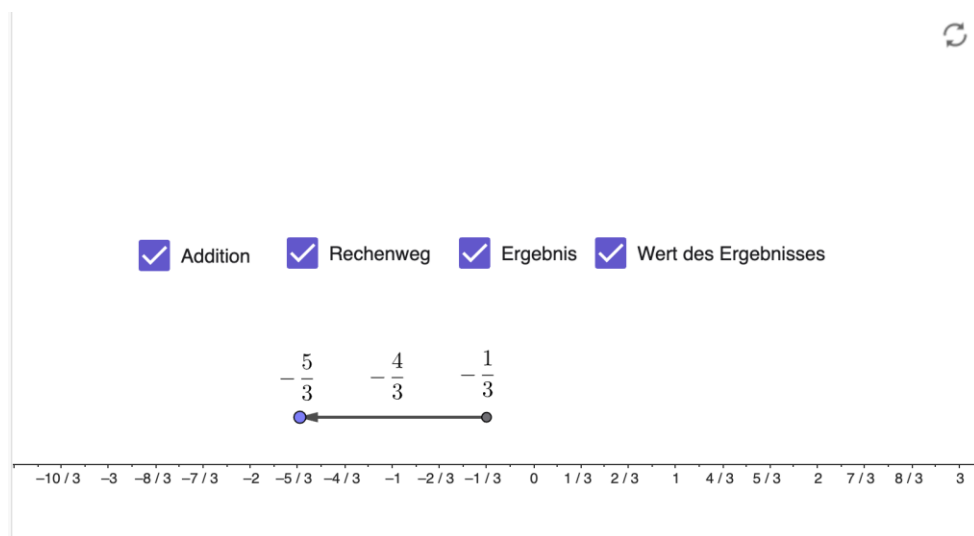


Abbildung 14: Darstellung am Zahlenstrahl 2

Im Kapitel der symbolische Ebene wird zu Beginn nochmal versucht gleichnamige Brüche allgemein zusammenzufassen. Das wird mithilfe von $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, anhand des Beispiels $-\frac{3}{7} + \frac{5}{7}$ erklärt. Danach kommt als Aufgabe $-\frac{3}{4} - \frac{5}{8}$, in der sich nun unterschiedliche Nenner befinden. Mithilfe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) wird gemeinsam herausgefunden, dass der kleinste gemeinsame Nenner die Zahl 8 ist. Sobald die Rechnung gemeinsam gelöst wurde, sehen die Schüler:innen den Merksatz „Merke: Umformen $\rightarrow$ Gleichnamig machen $\rightarrow$ Zähler addieren/subtrahieren $\rightarrow$ kürzen.“, den sie in ihr Schulübungsheft schreiben sollen.

Im letzten Kapitel befinden sich wieder dieselben fünf Aufgaben, die genauso im vorherigen GeoGebra-Book beschrieben wurden.

5.3.3. Rationale Zahlen – Entdeckendes Lernen

Im letzten Buch wird die Methode Entdeckendes Lernen verwendet (Klewitz & Mitzkat, 1977; Wittmann, 2019a, 2019b). In der Einleitung wird den Schüler:innen wieder das Ziel der Einheit erklärt. Danach beginnt dieses Buch mit kleinen Aktivierungsaufgaben, welche Textaufgaben aus dem Alltag sind. Die erste Aufgabe ist: „Heute morgen hatte es $-3,5^\circ\text{C}$. Bis zur Mittagssonne nahm die Temperatur um 5°C zu. War die Temperatur zu Mittag größer, kleiner oder gleich 0°C ?“ Der zweite Teil dieser Aufgabe lautet dann: „Wie viel Grad Celsius hatte es nun zu Mittag? Überlege mit deinem Partner/deiner Partnerin!“.

Die nächsten beiden Textaufgaben sind sehr ähnlich. Diese lauten „Herr Propper hat Schulden von 35,28€. Er zahlt bei seiner Bank 50,50€ ein. Ist Herr Propper jetzt schuldenfrei?“ und „Frau Winzer hat Schulden von 12,40€. Sie borgt sich von ihrer Bank weitere 50€ aus. Ist Frau Winzer jetzt schuldenfrei?“ Bei beiden Aufgaben müssen die Schüler:innen ebenso überlegen, wie der neue Kontostand der beiden Personen ist.

Die letzte Aktivierungsaufgabe lautet: „Ein Hotel besitzt 13 Stockwerke. Von diesen 13 liegen 4 Stockwerke im Keller. Ein Stockwerk ist 3,5 m hoch. Was bedeutet in diesem Fall die Rechnung: $-3,5 - 3,5 - 3,5 = -10,5$ “. Mit der Anschlussfrage „Der Lift fährt vom 4. Obergeschoss 6 Stockwerke nach unten. In welchem Stock befindet sich der Lift nun?“. Diese Aufgabe ähnelt sehr dem Applet aus dem GeoGebra-Book des EIS-Prinzips.

Diese Aktivierungsaufgaben dienen dazu, den Schüler:innen einen eher leichten Einstieg zu rationalen Zahlen zu geben, die auch realitätsnah sind, und sie ihre ersten Hypothesen aufstellen können (Scholkmann, 2016).

Im nächsten Kapitel sollen die Schüler:innen ohne vollständiges Ausrechnen entscheiden, ob die Summe zweier rationaler Zahlen positiv, negativ oder null ist. Dazu werden Aufgaben präsentiert, wie $5,5 + (-6,5)$ oder $\left(-\frac{8}{2}\right) + (-3)$. Zunächst müssen die Schüler:innen entscheiden, ob das Endergebnis positiv oder negativ ist. Die Begründung dazu erfolgt mündlich im Zweierteam. Didaktisch steht nicht die Rechenroutine im Vordergrund, sondern das Umformen in Differenzen, sowie Zahlengeraden-Argumente. Das bedeutet die Schüler:innen sollen durch die Erfahrungen der letzten Schuljahre sich überlegen, wo der Startpunkt auf der Zahlengerade liegen könnte, in welche Richtung die Rechnung geht, und in welchem Bereich das Ergebnis liegt. Zur kognitiven Aktivierung erhalten die Lernenden nur minimale Anweisungen zum Vorgehen. Die Aufgabenabfolge ist progressiv strukturiert. Das bedeutet zunächst kommen ganze Zahlen, dann folgen Dezimalzahlen, anschließend Bruch-/Dezimal-Mischformen. So können Strategien von Schüler:innen stabilisiert werden und typische Fehlkonzepte werden sichtbar. Wie dieses Format aussieht, kann in Abbildung 15 gesehen werden.

$5,5 + (-6,5) =$

Aa π

Gib hier deine Antwort ein...

ANTWORT ÜBERPRÜFEN

$\left(-\frac{8}{2}\right) + (-3) =$

Aa π

Gib hier deine Antwort ein...

ANTWORT ÜBERPRÜFEN

Abbildung 15: Bruch-/Dezimal-Mischformen

Noch im selben Kapitel auf der nächsten Seite ist wieder ein GeoGebra Applet zu sehen, in dem herausgefunden werden soll, welche rationalen Zahlenpaare a und b in Summe null ergeben. Dafür wurde in GeoGebra eine Zahlengerade erstellt mit zwei Schieberegler. Die Schüler:innen können den Schieberegler nun selbst verschieben, und dabei werden unten auf der Zahlengerade die Punkte der Rechnung verschoben. Das Ergebnis der Rechnung $a + b$ wird als Punkt namens „Ergebnis“ angezeigt. Sobald Schüler:innen verstanden haben, dass Zahl und Gegenzahl gesucht sind, liegt der Punkt „Ergebnis“ genau auf $A = 0$. Dieses Applet kann in Abbildung 16 gesehen werden. Sobald sie ein Beispiel gefunden haben, müssen sie es darunter

bei der Frage „Welche rationale Zahlen können a und b sein, damit das Ergebnis in A liegt?“ notieren.

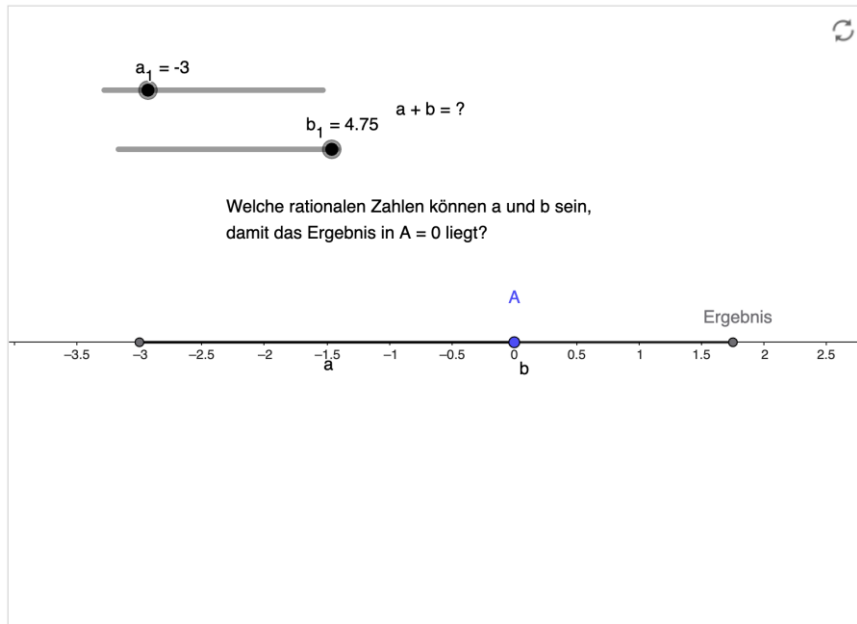


Abbildung 16: Gegenzahl finden

Im nächsten Kapitel wechseln die Schüler:innen vom begründeten Vorzeichen-Urteil zum aktiven Rechnen. Zunächst bearbeiten sie zwei Einstiegsaufgaben, bei denen sie zuerst das Vorzeichen bestimmen und anschließend die komplette Rechnung durchführen. Als minimaler Hinweis wird angezeigt, zu prüfen, ob die Brüche einen gemeinsamen Nenner besitzen. Nachdem beide Aufgaben gelöst sind, sollen sie mit dem/der Partner:in diskutieren, welches Rechenmuster bzw. welche bestimmte Abfolge von Schritten sich aus den Beispielen ableiten lässt.

Auf der nächsten Seite folgt eine Transferaufgabe mit einer Dezimalzahl in Kombination mit einer Bruchzahl. Auch hier reflektieren die Schüler:innen zusammen, welche Lösungsstrategien sich bei dieser Aufgabe anbieten. Hier bietet sich als Lösung die Umwandlung in einen gemeinsamen Darstellungsmodus. Die Aufgabenstellung ist in Abbildung 17 dargestellt. Falls die Schüler:innen nicht weiterkommen oder ihren Ansatz überprüfen möchten, können sie einen einblendbaren Tipp nutzen. Wenn die Lernenden die Lösung nun gefunden haben, können sie diese darunter in der Frage „Wie kann man die Rechnung nun lösen?“ notieren. Anschließend wird eine musterhafte Lösung mit transparentem Rechenweg angezeigt.

Im letzten Kapitel haben sie nun die gleichen fünf Aufgaben wie bei den anderen zwei Büchern zu lösen.

Was passiert nun, wenn ich folgende Rechnung habe?

$$0,7 - \frac{8}{5} =$$

Überlege dir kurz mit deinem Partner/deiner Partnerin, wie ihr bei dieser Aufgabe vorgehen würdet.

Abbildung 17: gemeinsamer Darstellungsmodus

5.3.4. Regelmäßiges Sechseck – Direkte Instruktion

Der zweite Teil des Projekts beschäftigt sich nun mit dem Thema regelmäßiges Sechseck. Zu Beginn wird wieder das Ziel der Einheit vorgestellt: „Dieses Mal wird dich die Konstruktion eines Sechsecks erwarten! Am Ende dieser Einheit sollst du ein regelmäßiges Sechseck mit allen möglichen Seitenlängen konstruieren können. Du brauchst unbedingt dein Schulübungs-Heft, einen Zirkel, und ein Geodreieck!“.

Alle drei Gruppen bekommen neben den gemeinsamen Aufgaben am Ende auch ein gemeinsames Kapitel zu den Eigenschaften eines regelmäßigen Sechsecks. Dabei sollen sie zuerst einen Merksatz in ihr Schulübungsheft schreiben, welcher lautet: „Ein regelmäßiges Vieleck mit 5 (6, 7, ..., n) Ecken besitzt 5 (6, 7, ..., n) Symmetrieachsen. Es besitzt einen Umkreis und einen Inkreis. Beide haben denselben Mittelpunkt M.“ (Humenberger et al., 2025).

Darunter sind zwei Bilder eines regelmäßigen Sechsecks mit unterschiedlichen Eigenschaften zu sehen. Diese Bilder wurden von mir in GeoGebra selbst erstellt. Beim ersten Bild ist zu erkennen, dass jede Seite gleich lang, und der Radius des Umkreises genauso groß ist wie die Seite selbst. Zudem ist zu erkennen, wie die Ecken des Sechsecks beschriftet werden und dass der Zentriwinkel 60° ist. Im zweiten Bild ist zusätzlich noch der Umkreis und Inkreis des Sechsecks eingezeichnet, sowie der Inkreisradius ρ , welcher normal auf die Seite a steht. Danach müssen die Schüler:innen Fragen zu den Eigenschaften beantworten, welche sie anhand des Merksatzes oder der Bilder beantworten müssen. Dabei handelt es sich um Fragen wie „Wie viele Ecken hat dieses Vieleck?“, „Welche Bezeichnung hat der Inkreis im Bild?“ oder „Wenn du dir die 3 roten Seiten anschaust, kannst du erkennen, dass sie ein Dreieck ergeben. Welche Art von Dreieck ist das?“ (Humenberger et al., 2025).

Im nächsten Kapitel startet erneut die „Ich-Phase“, in der die einzelnen Konstruktionsschritte erläutert werden. Dabei wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Schüler:innen noch nicht selbst konstruieren, sondern die Schritte zunächst nur lesen und nachvollziehen sollen. Es sind insgesamt vier Schritte, welche mittels Text und GeoGebra Applets unterstützt werden.

Die Applets von Schritt 1, 2 und 4 basieren auf denselben Funktionen. Es sind Kontrollkästchen angegeben, auf die Schüler:innen klicken können, um die Konstruktion zu sehen. Im Schritt 1 wird zum Beispiel beschrieben: „Zuerst zeichnet man einen Kreis und zieht durch den Mittelpunkt einen beliebigen Durchmesser. Die Endpunkte bezeichnet man mit A und D. Klicke dafür auf das Kästchen "Kreis" und auf das Kästchen "Durchmesser".“ (Humenberger et al., 2025). Das Applet, welches sich direkt darunter befindet, ist in der Abbildung 18 zu sehen.

Im Schritt 3 basiert das GeoGebra Applet auf einem Schieberegler mit einem „Start“ Knopf, welches eine Schaltfläche ist. Um als Startknopf zu fungieren, wurde der Text „SetzeWert(a,0)“ und „StartAnimation(a,true)“ im GeoGebra Skript eingegeben. Die einzelnen Seiten des Sechsecks wurden in den Einstellungen mit jeweils $a \geq \dots$ verändert, je nachdem ab welchem Schieberegler-Schritt die Seite angezeigt werden soll. Zum Beispiel ist die Seite DE ab $a = 4$ sichtbar und wurde definiert mit $a \geq 4$. Das Applet ist in Abbildung 19 ersichtlich. Der passende Konstruktionstext lautet: „Jetzt verbindet man die Punkte der Reihe nach und beschriftet sie vollständig. Ebenso zeichnet man 2 weitere Diagonalen ein! Klicke auf das Kästchen „Start“ um den Prozess zu sehen!“ (Humenberger et al., 2025).

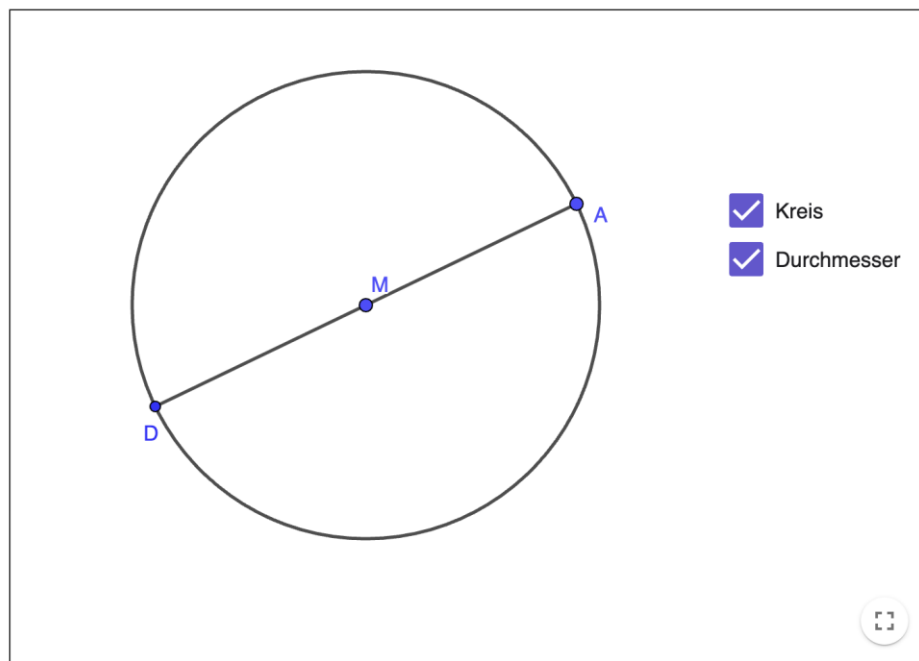


Abbildung 18: Schritt 1

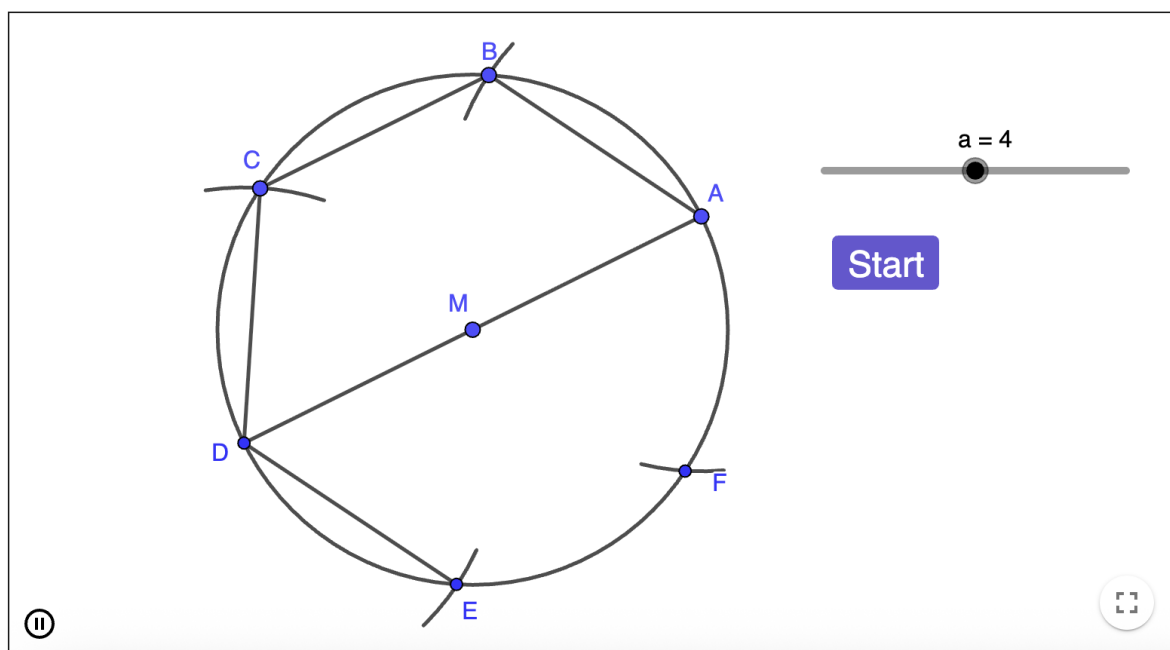


Abbildung 19: Schritt 3

Im anschließenden Kapitel beginnt die „Wir-Phase“. Die Schüler:innen führen die Konstruktion selbstständig durch. Die Aufgabenstellung lautet, ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit Seitenlänge $a = 3,5$ cm zu konstruieren. Die Bearbeitung ist in vier Schritte gegliedert. Zu jedem Schritt steht ein Lösungs-Applet bereit, das nach Abschluss des jeweiligen Schritts zur Selbstkontrolle oder bei Unsicherheiten genutzt werden kann. Diese Applets sind nach dem gleichen Prinzip wie im vorherigen Kapitel bei Schritt 3 aufgebaut. Nach den einzelnen Schritten gibt es auch verständnissichernde Fragen. Beim Schritt 2 wird zum Beispiel gefragt, wie lang die Seite AB ist, sowie in Schritt 4: „Wie lang ist der Inkreisradius?“ und „Wie groß ist der Umfang des regelmäßigen Sechsecks?“.

Im letzten Kapitel, der „Du-Phase“, dürfen die Schüler:innen zwei Aufgaben selbstständig lösen. Diese Aufgaben sind in jedem der drei Brücher wiederum gleich. Die erste Aufgabe lautet: „Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit der Seitenlänge $a = 47$ mm. Wie groß ist der Umfang des Sechsecks?“. Die zweite Aufgabe ist: „Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ mit den Koordinaten $M(4|0)$ und $A(7|0)$. Welche Koordinaten hat der Eckpunkt D ? Wie lang ist der Radius des Sechsecks?“. Beide Aufgaben haben jeweils das fertig konstruierte Sechseck als Bild in den Lösungen.

5.3.5. Regelmäßiges Sechseck – EIS-Prinzip

Auch in diesem Buch ist das Ziel der Einheit wieder in der Einleitung zu sehen. Danach erfolgt auch wieder genau dasselbe Kapitel mit dem Merksatz und den Eigenschaften des regelmäßigen Sechsecks wie im Buch zur Direkten Instruktion.

Im nächsten Kapitel wird zunächst auf der ikonischen Repräsentationsebene gearbeitet. Die Schüler:innen sehen sich zuerst ein Konstruktionsvideo zum regelmäßigen Sechseck an. Dieses Video wurde bewusst ausgewählt, weil es die Konstruktion besonders klar demonstriert und ohne Ton verständlich ist. In GeoGebra-Books ist der Link des Videos direkt eingebettet, sodass das Video im Book sichtbar ist und abgespielt werden kann. Dadurch ist kein Wechsel der Internetseite nötig. Zusätzlich ist die relevante Zeitmarke angegeben, damit die Schüler:innen nicht das gesamte Video ansehen müssen, sondern gezielt die für die Aufgabe benötigte Passage.

In der enaktiven Repräsentationsebene wird zunächst ein GeoGebra-Applet von der Userin Irmi Hausharter (Stand: 15.11.2025, abrufbar unter: <https://www.geogebra.org/m/scpgqdxj>) verwendet. Dieses zeigt die Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks, welches Schritt für Schritt angezeigt werden kann. Die Schüler:innen können auf den Play Button neben 0,25 s drücken, dann wird es im Schnelldurchlauf gezeigt. Falls sie die Schritte langsamer ansehen wollen, können sie auf das Symbol ▷▷ drücken. Um wieder von vorne zu beginnen, können sie auf das Symbol |◁ drücken. Bei der Konstruktion ist ebenso der Zentriwinkel und der Inkreisradius erklärt, sowie auch die Berechnung des Umfanges. Dieses Applet kann in Abbildung 20 gesehen werden.

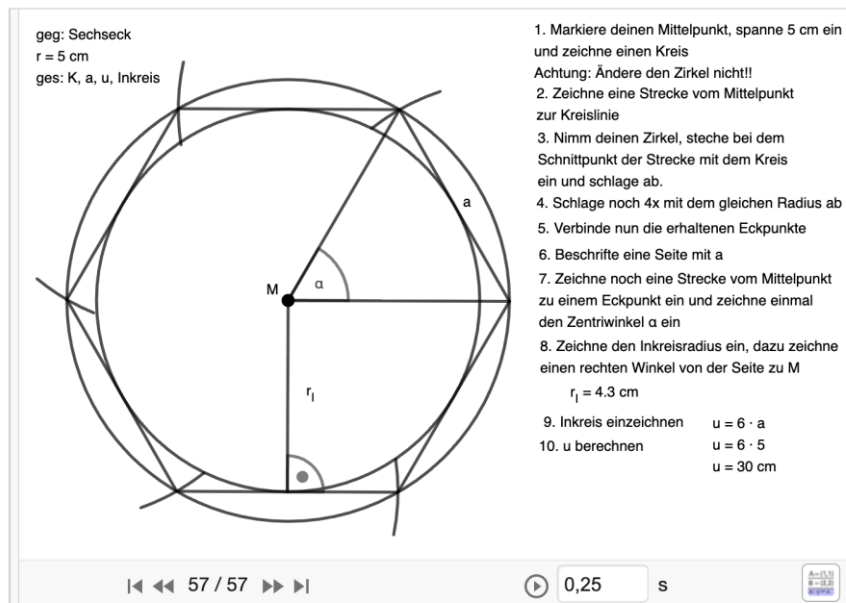


Abbildung 20: Konstruktionsapplet

Auf der nächsten Seite sollen die Schüler:innen nun selbst versuchen, das Sechseck des Applet davor zu konstruieren. Die Aufgabenstellung lautet: „Zeichne ein Sechseck mit der Seitenlänge 5 cm. Zeichne ebenso den Inkreis ein! Berechne den Umfang des Sechsecks und gib deine Lösung unten ein. Falls du nochmal Hilfe brauchst, kannst du unten Schritt für Schritt nachschauen, indem du wieder auf $\triangleright \triangleright$ drückst.“. Das bedeutet, darunter befindet sich nochmal das gleiche Applet, falls Hilfestellungen benötigt werden. Danach folgt dieselbe Aufgabe mit einer variierten Seitenlänge von 3,5 cm. Auch hier müssen die Schüler:innen den Umfang des regelmäßigen Sechsecks berechnen.

Im Kapitel der Symbolischen Ebene wird das zuvor ikonisch erarbeitete Sechseck in mathematischer Sprache und Notation überführt. Die Schüler:innen nutzen ihre Zeichnung und den Merksatz, den sie zu Beginn aufschreiben mussten, um Fragestellungen mit Begriffen, Zahlenangaben und Formeln zu bearbeiten. Die erste Frage lautet, wie viele Symmetrieachsen ein regelmäßiges Sechseck hat. Ganz unten befindet sich auch ein Lösungsbild, in dem alle sechs Symmetrieachsen eingezeichnet sind. In der zweiten Frage sollen die Schüler:innen dann selbst die allgemeine Umfangsformel eines regelmäßigen Sechsecks aufstellen, indem sie den Umfang als Summe gleich langer Seiten ausdrücken, hier steht die Generalisierung in Symbolen im Mittelpunkt. Damit erfolgt der Übergang von der anschaulichen Darstellung zu algebraischen Beschreibung einer Regel.

Im letzten Kapitel sind dann wieder die gleichen Abschlussaufgaben wie im Buch davor.

5.3.6. Regelmäßiges Sechseck – Entdeckendes Lernen

Die Schüler:innen finden zu Beginn eine schriftliche Anleitung zur Konstruktion auf Papier. Dabei wird ihnen nicht gesagt, dass es sich um ein Sechseck handelt oder welche Eigenschaften die Figur hat. Das bedeutet, die Einleitung zu Beginn wurde so abgeändert, sodass die Schüler:innen nur darüber Bescheid wissen, welches Material gebraucht wird. Die Schüler:innen arbeiten mit Zirkel, Geodreieck und Bleistift und setzen die Konstruktion schrittweise um. Kurze Hinweiszeilen, wie zum Beispiel die Erinnerung an der unveränderten Seitenlänge oder die Lage des Durchmessers, dienen als minimale Scaffolds. Zur Selbstüberprüfung ist darunter ein GeoGebra-Applet eingebettet. Nach Abschluss der Konstruktion können die Schüler:innen über den Knopf „Start“ die korrekte Konstruktion schrittweise abspielen und ihre Lösung visuell abgleichen. Dieses Applet soll dennoch rein als Kontroll- und Reflexionshilfe dienen. Dieses Kapitel führt ausschließlich in die Werkzeughandhabung ein, also feste Seitenlänge oder Punktabträge, ohne Ziel- oder Eigenschaftsvorgaben.

Kapitel zwei stellt leitende Entdeckerfragen und fordert Begründungen. Somit folgt es dem Prinzip des angeleiteten Entdeckens. Die Schüler:innen sollen anhand ihrer Zeichnungen bestimmte Muster erkennen, um so selbst auf die Eigenschaften zu kommen. Sie müssen zuerst folgende vier Fragen beantworten:

1. Miss die Seite MA, AB und MB ab. Was fällt dir auf?
2. Was für eine Figur entsteht zwischen den Seiten MA, AB und MB, wenn du noch MB einzeichnest?
3. Miss den Winkel bei M zwischen den Seiten MA und MB ($\angle AMB$). Wie groß ist er?
4. Zeichne nun auch die Seite MC ein. Wie groß ist der Winkel bei M zwischen den Seiten MB und MC ($\angle BMC$)??

Auf der nächsten Seite folgen noch zwei weitere Aufgaben. Einerseits müssen die Schüler:innen versuchen, alle Symmetrieachsen einzuzeichnen und dadurch herauszufinden, wie viele Symmetrieachsen das regelmäßige Sechseck hat. Andererseits sollen sie sich überlegen, wie sie den Umfang des Sechsecks berechnen können.

Nachdem die Schüler:innen das selbstständig herausgefunden haben, folgt im nächsten Kapitel der Merksatz, den sie in ihr Schulübungsheft schreiben müssen, sowie die kleinen Fragen, welche die anderen beiden Gruppen schon zu Beginn beantworten mussten.

Zum Abschluss bearbeiten die Schüler:innen dieselben beiden Aufgaben wie die übrigen Gruppen.

5.4. Erhebungsinstrumente

Um die Lernprozesse der Schüler:innen zu erfassen, wurden ihre Bildschirmaktivitäten und ihre Gespräche während der Bearbeitung der GeoGebra-Books simultan aufgezeichnet. Für die Bildschirmaufnahmen wurde OBS Studio/Screen-Capture-Software verwendet. Die Voreinstellungen wurden bereits von mir vorgenommen, sodass die Schüler:innen nur noch auf „Aufnahme starten“ und „Aufnahme beenden“ drücken mussten. Die Datei wurde automatisch auf ihr Laufwerk gespeichert und sollte dann auf den gemeinsamen Teams-Kanal unter „Aufgaben“ abgegeben werden. Die Audioaufnahmen erfolgten durch das Audioprogramm, welches auf den Tablets der Schüler:innen installiert ist. Dadurch, dass sie auf ihrem Schultablet auf Teams eingeloggt sind, konnten die Schüler:innen die gespeicherte Audiodatei genauso auf Teams hochladen. Obwohl durch das Programm OBS die Stimmen der Schüler:innen aufgenommen wurden, sollte die extra Audiodatei noch einmal als Absicherung dienen. Die Aufnahmen ermöglichen eine zeitliche Prozessanalyse über alle Aufgabenblöcke hinweg. Die Bildschirm- und Audiozeitachsen konnten gut miteinander synchronisiert werden, wodurch die verbalen Begründungen gut mit dem aktuellen Geschehen am Computer übereinstimmten. Folgende Variablen waren bei der Aufnahme wichtig für die Analyse:

- Verweildauer bei einzelnen Aufgabenblöcke und Gesamtdauer
- Relative Redebeiträge
- Richtigkeit der Aufgaben
- Anzahl der Nachfragen bei der Lehrperson
- Art der Fehler
- Semantisch vs. syntaktisch

Gleichzeitig wurden die Fortschritte der Schüler:innen in den einzelnen GeoGebra-Classrooms gespeichert. Die Eingaben der Schüler:innen sind auch dann vorhanden, falls die Bildschirmaufnahmen nicht funktioniert haben sollten.

Unmittelbar nach der Bearbeitung wurden Kurzinterviews mit den einzelnen Schüler:innen durchgeführt, welche auf markierte Episoden aus den Aufzeichnungen Bezug nehmen. Dazu zählen zum Beispiel das Sichtbarwerden von Fehlkonzepten, Aha-Momente, ein Strategie-Wechsel, oder Ähnliches. Dabei wurden diese besonderen Aufnahmestellen den Schüler:innen als Aufnahme oder als Transkription gezeigt, und Fragen dazu gestellt. Es wurde in Form eines

Leitfadeninterviews durchgeführt. Ein Leitfadeninterview gehört zu den gängigsten Forschungsmethoden in der Kommunikationsforschung (Brosius et al., 2012). Beim Leitfadeninterview sind strukturierte Fragen geplant, es kann jedoch auch zusätzlich nachgefragt werden, falls noch etwas offen ist (Gläser & Laudel, 2010). Dabei fokussierte sich der Leitfaden auf Zielverständnis, Begründungen, wahrgenommene Hürden, Über- oder Unterforderungen, Nutzung von Hinweisen, sowie Transfervorstellungen. Diese Interviews sollen maximal fünf Minuten dauern. Zu diesem Zweck erfolgte auch bei den Interviews eine Audioaufzeichnung, gefolgt von der Transkription.

Zur Erfassung kurzfristiger Lernergebnisse wurde ein gemeinsamer Post-Test für alle drei Gruppen eingesetzt. Dieser Test umfasst nochmals Übungsaufgaben, ähnlich dem jeweils letzten Kapitel der einzelnen GeoGebra-Books. Die Schüler:innen beantworteten die Fragen dieses Post-Tests in der dem Projekt folgenden Unterrichtseinheit. Beurteilt wurden vor allem, an wie viel sich erinnert werden konnte und wie viel richtig gelöst wurde. Der Post-Test wurde mit Punkten bewertet, damit die einzelnen didaktischen Methoden miteinander verglichen werden können.

5.5. Auswertungsplan/Datenanalyse der Bildschirm- und Audioaufnahmen

Die Daten aus Bildschirm- und Audioaufnahmen werden genutzt, um Gestaltungsprinzipien der GeoGebra-Books empirisch zu bewerten. Konkret sollen aus den einzelnen Aufnahmen der Schüler:innen zeitliche, interaktive und inhaltlich-kognitive Indikatoren gewonnen werden. Diese erlauben, Rückschlüsse auf das konzeptuelle Verständnis, die kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu ziehen.

Für die Auswertung wird ein Codierraster verwendet. Dieser Raster erfasst folgende sechs Dimensionen:

1. Verweildauer/Zeit pro Aufgabe: Es wird sowohl die Bearbeitungszeit pro Item in Sekunden, als auch die Gesamtzeit der einzelnen Kapitel und für das GeoGebra-Book selbst gemessen. Diese Zeitmaße dienen sowohl als Indikatoren der Lernwirksamkeit, im Sinne von Effizienz, als auch der kognitiven Aktivierung, insofern sie auf eine intensive Bearbeitung und sinnvolle Aktivität hinweisen, statt Inaktivität und Off-Tasks. Für die Auswertung wird die durchschnittliche Zeit aller Aufgaben jeder Gruppe verwendet und analysiert.

2. Redebeiträge: Für die Redebeiträge der Zweiergruppen, wird die Sprech-Ratio zur gesamten Zeit berechnet, um die Interaktionsqualität abzubilden. Die Sprech-Ratio wird in Prozenten angegeben. Dieses Merkmal steht primär für kognitive Aktivierung durch das argumentative Aushandeln.
3. Richtigkeit: Bei der Richtigkeit geht es darum, ob die Schüler:innen die einzelnen Aufgaben richtig (=2), teilweise richtig (=1) oder falsch (=0) gelöst haben. Richtig gelöst bedeutet, die Schüler:innen haben beim 1. Versuch direkt das richtige Ergebnis eingegeben. Teilweise richtig gelöst heißt, die Schüler:innen haben richtig gedacht und richtige Zwischenschritte gemacht, aber durch einen Rechenfehler das falsche Ergebnis erhalten. Falsch gelöst bedeutet, die Schüler:innen haben die Aufgabe gar nicht verstanden und falsch gerechnet, wodurch das Ergebnis nicht richtig ist. Untersucht wird die Häufigkeitsverteilung der Ausprägungen 0, 1 und 2 sowie der gruppenspezifische Mittelwert. Dieses Qualitätsmaß repräsentiert unmittelbar die Lernwirksamkeit als Outcome. Ebenso gibt es Rückschlüsse auf das konzeptuelle Verständnis, vor allem bei Begründungs- und Transferaufgaben.
4. Nachfragen: Beim Nachfragen wird dokumentiert, wie oft die Schüler:innen ihr Zweiergespräch abbrechen, um bei einer Aufgabe etwas nachzufragen. Dazu zählen sowohl Verständnisfragen, Bestätigung, als auch technische Fragen, wie zum Beispiel wie ein GeoGebra-Applet funktioniert. Auch hier wird die Lernwirksamkeit fokussiert, und es wird auf Unsicherheiten im Bearbeitungsverlauf verwiesen.
5. Art der Fehler: Die vorletzte Kategorie ist die Art der Fehler, die die Schüler:innen während des Lernprozesses machen. Dazu zählen Rechen- und Flüchtigkeitsfehler (=0), Bedien- und Navigationsfehler (=1) oder Probleme beim Aufgabenverständnis (=2). Dadurch werden konzeptuelle Defizite von prozeduralen oder bedienbezogenen Schwierigkeiten getrennt. In der Kategorie wird ebenso wieder die Anzahl der verschiedenen Fehler gezählt und miteinander verglichen. Dieser Punkt ist relevant sowohl für die Diagnose des konzeptuellen Verständnisses als auch für die Beurteilung der Lernwirksamkeit mit den Fehlerraten.
6. Semantisch vs. Syntaktisch: Damit dieses Merkmal qualitativ gemessen werden kann, wird eine fünfstufige Semantisch-Syntaktisch-Skala benutzt, in der die Dominanz verständnisorientierter Beiträge gegenüber prozessorientierten Abläufen eingeschätzt wird. Die Skala sieht folgendermaßen aus: 1 = voll semantisch; 2 = überwiegend semantisch, etwas syntaktisch; 3 = halb-halb; 4 = überwiegend syntaktisch, wenig semantisch; 5 = voll syntaktisch. Zusätzlich wird zur Auswahl auch ein transkribierter

Satz aus den Aufnahmen der Schüler:innen angegeben, der diese Auswahl zeigt. Diese Skala bildet den Grad konzeptueller Durchdringung ab und fungiert gleichzeitig als Indikator kognitiver Aktivierung, vor allem, wenn zum Beispiel Begründungen gegeben werden.

Der genaue Codierraster ist im Anhang zu sehen.

5.6. Post-Test

Für den Post-Test erhalten alle Schüler:innen das gleiche Arbeitsblatt. Sie haben eine Stunde Zeit für die Beantwortung der Aufgaben. Die Aufgaben wurden aus dem Schulbuch *Das ist Mathematik 3* (Humenberger et al., 2025) entnommen und leicht adaptiert. Das erste Arbeitsblatt zu Addition und Subtraktion rationaler Zahlen besteht aus sieben Aufgaben. Die ersten drei Aufgaben sind einfache Rechnungen, die ähnlich dem letzten Kapitel des GeoGebra-Books sind. Danach gibt es eine Zuordnungsaufgabe mit vier etwas anspruchsvolleren Rechnungen und fünf Auswahlmöglichkeiten. Folgende Aufgaben wurden bearbeitet:

1. Wie lautet das Ergebnis?

a. $\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{18}{12}\right) =$

b. $\left(+\frac{8}{16}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{2}{4}\right) =$

c. $\left(-\frac{1}{4}\right) - (+0,5) + (-2,5) =$

2. Ordne zu!

A	$(+22,5) + (-13,83) + (-5,4) =$	
B	$\left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) =$	
C	$(-7,4) + (+29,3) - (+12,6) =$	
D	$\left(+1\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) =$	

1	-1
2	0,5
3	3,27
4	-0,5
5	9,3

Das zweite Arbeitsblatt zur Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks besteht aus zwei großen Aufgaben mit einigen Unterpunkten. Bei beiden Aufgaben muss ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet werden. Bei der ersten Aufgabe muss alles richtig beschriftet und der Inkreis zusätzlich eingezeichnet werden. Bei der zweiten Aufgabe muss zusätzlich der Umfang des Sechsecks berechnet werden. Die Aufgaben sehen folgendermaßen aus:

1. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge $a = 4,5$ cm. Konstruiere zusätzlich den Inkreis des Sechsecks. Beschrifte alle wichtigen Elemente (Mittelpunkt, Radius, Seiten, Inkreisradius, Umkreis und Inkreis). Wie lange ist der Inkreisradius?
2. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge $a = 3,9$ cm. Konstruiere zusätzlich den Inkreis des Sechsecks. Wie groß ist der Umfang des regelmäßigen Sechsecks?

Diese Arbeitsblätter wurden am Ende der Stunde eingesammelt und bewertet.

5.7. Datenschutzerklärung

Wie oben schon kurz erwähnt, mussten die Erziehungsberechtigten zu diesem Experiment einwilligen. Dafür mussten sie ein Informationsblatt unterzeichnen und abgeben.

In dieser Einwilligung wurden die Erziehungsberechtigten darüber informiert, worum es in meiner Arbeit gehen wird und welche Aufgaben die Schüler:innen bearbeiten. Es wurde beschrieben, dass die Bildschirme der Schüler:innen, sowie auch ihre Stimmen aufgenommen und danach Schüler:inneninterviews stattfinden werden. Ebenso wird beschrieben, dass in meiner Arbeit die Schüler:innen anonymisiert werden und die Aufnahmen nicht zur Leistungsbeurteilung herangezogen werden. Es wurde auch hingewiesen, dass die Schüler:innen und die Erziehungsberechtigten ihre Meinungen jederzeit ändern können, falls sie die Teilnahme im Nachhinein ablehnen. Die Vorlage dieses Formulars ist im Anhang zu sehen.

6. Ergebnisse

6.1. Stichprobe und Datensichtung

Die Charakteristika der Stichprobe sind in Kapitel 5.2. beschrieben. Für die Auswertung lagen Video- und Audiodaten von $n = 14$ Gruppen beim Thema Addition und Subtraktion rationaler Zahlen, sowie $n = 14$ beim Thema Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks, vor, wobei jeweils $n = 5$ beim EIS-Prinzip, $n = 5$ bei der Direkten Instruktion und $n = 4$ beim Entdeckenden Lernen vorliegen. Davon waren alle $n = 28$ vollständig codierbar.

Insgesamt wurden $n = 11$ Schüler:innen-Interviews durchgeführt, wobei $n = 3$ Gruppen zu beiden Themen befragt wurden. Die Transkription ist im Anhang zu finden. Für die Post-Tests lagen beim Thema Addition und Subtraktion rationaler Zahlen $n = 27$ Schüler:innen (2 Ausfälle, wegen Krankheit) vor und beim Thema Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks $n = 25$ (4 Ausfälle wegen Krankheit).

In der folgenden Tabelle wird die Stichprobe nochmal kurz zusammengefasst:

Thema	Bedingung	Gruppen gesamt	Videodaten gültig	Interviews gültig	Post- Test gültig
Addition und Subtraktion rationaler Zahlen	EIS-Prinzip	5	5	2	10
	Direkte Instruktion	5	5	2	9
	Entdeckendes Lernen	4	4	2	8
Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks	EIS-Prinzip	5	5	1	10
	Direkte Instruktion	5	5	2	7
	Entdeckendes Lernen	4	4	2	8

Tabelle 1: Übersicht der Stichprobe

6.2. Video- und Audiodaten – Outcome

6.2.1. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

6.2.1.1. EIS-Prinzip

Für das EIS-Prinzip liegen für das Thema rationale Zahlen von fünf Gruppen detaillierte Prozessdaten vor. Der erste Punkt ist die Gesamtzeit des GeoGebra-Books, diese variiert

deutlich zwischen den einzelnen Gruppen. Nur zwei von fünf Teams schlossen das GeoGebra-Book vollständig ab. Das Team 3 schaffte es in 38 Minuten und 46 Sekunden und das Team 5 in 33 Minuten und 45 Sekunden. Team 1 hatte zu Beginn technische Probleme, wodurch sie im letzten Kapitel die letzten drei Aufgaben nicht mehr geschafft haben. Dadurch hatten sie eine Bearbeitungszeit von 33 Minuten und 42 Sekunden. Team 2 schaffte ebenso im letzten Kapitel die letzten drei Aufgaben nicht, da sie bei Aufgabe 3 sehr viel diskutiert und Inhaltliche Uneinigkeiten haben, wodurch sie eine Bearbeitungszeit von 37 Minuten 52 Sekunden hatten. Team 4 hatte eine Gesamtzeit von 42 Minuten und 25 Sekunden, und hatte es bis zum letzten Kapitel Aufgabe 1 geschafft. Dieses Team verlor im ersten und zweiten Kapitel sehr viel Zeit, dadurch schafften sie die restlichen Kapitel nicht.

Alle vollständig erledigten Kapitel werden in der folgenden Tabelle mit der durchschnittlichen Zeit aller Gruppen dargestellt. Wie zu sehen ist, hat das Kapitel auf der Ikonischen Ebene durchschnittlich am längsten gebraucht, da hier auch die meisten Aufgaben zu erledigen waren.

Enaktives Kapitel	Ikonisches Kapitel	Symbolisches Kapitel
545,4 Sekunden	653,8 Sekunden	176,8 Sekunden

Tabelle 2: durchschnittliche Zeiten EIS-Kapiteln

Im folgenden Säulendiagramm sind alle Zeiten in Sekunden der einzelnen Aufgabenabschnitte von allen Gruppen zu sehen. Es wurde in die einzelnen Kapitel unterteilt.

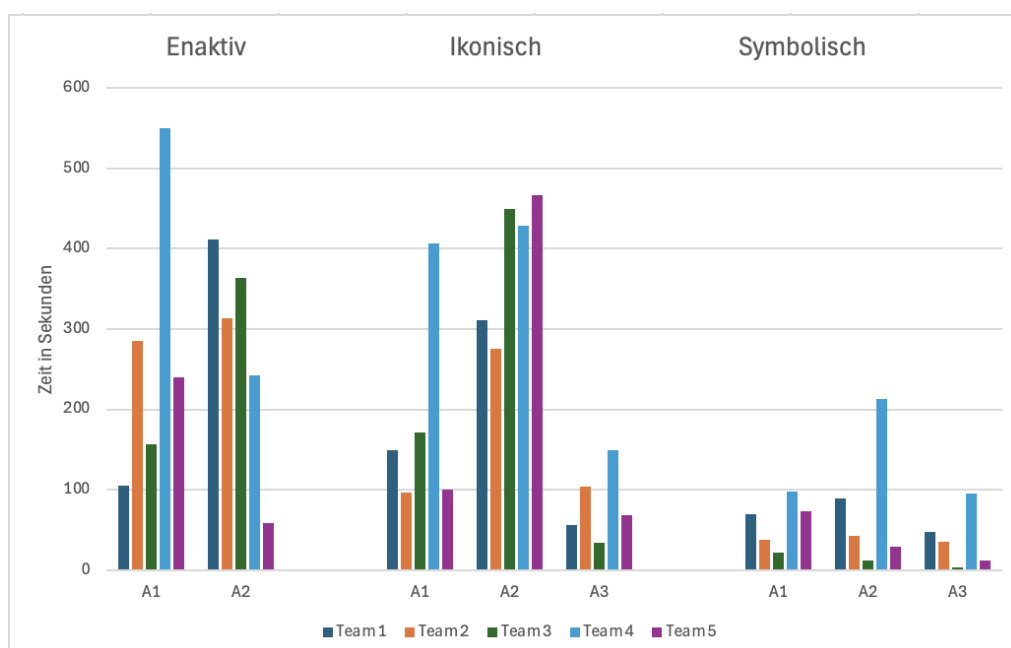


Abbildung 21: Säulendiagramm EIS_1

Auch die Redebeitragsanteile streuen stark zwischen den einzelnen Teams. Gruppe 1 sprach insgesamt 18 Minuten und 9 Sekunden miteinander, was einem relativen Anteil von 53,86% entspricht. Team 2 hatte einen relativen Anteil von 43,88%. Sie sprachen insgesamt 37 Minuten und 52 Sekunden. Team 3 hatte im Gegensatz zu den anderen Gruppen den höchsten relativen Anteil von 87,40%. Das entspricht 33 Minuten und 53 Sekunden. In Gruppe 4 ist der Redeanteil bei 26 Minuten und 46 Sekunden, also 63,10%. Die letzte Gruppe hat 15 Minuten und 5 Sekunden miteinander gesprochen, was einem relativen Anteil von 44,69% entspricht.

Bei der Richtigkeit der Aufgabebearbeitungen zeigen die Teams hohe Anteile korrekt gelöster Items. Dennoch treten auch hier Unterschiede zwischen den Gruppen auf. Im EIS-GeoGebra-Book konnten insgesamt 17 Aufgaben gelöst werden, zehn davon im enaktiven Kapitel, zwei im ikonischen Kapitel und fünf im letzten Kapitel „Aufgaben“. Team 1 konnte davon 14 lösen, wovon zehn komplett richtig waren, zwei teilweise richtig und zwei falsch. Von den vier nicht komplett richtigen Aufgaben, waren drei davon Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler und bei einer gab es Probleme beim Aufgabenverständnis. Team 2 konnte ebenso 14 Aufgaben lösen, wovon auch alle 14 richtig gelöst waren. Team 3 konnte alle 17 Aufgaben lösen, wovon 13 komplett richtig waren und vier teilweise richtig. Von diesen vier, waren es zweimal Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler und zweimal Probleme beim Aufgabenverständnis. Team 4 schafften 13 Aufgaben, wovon 12 komplett richtig waren und eine teilweise richtig. Diese Aufgabe hatte einen Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler. Das letzte Team ist zwar fertig geworden, sie haben jedoch das erste Kapitel sehr schnell übersprungen, wodurch sie nur drei Aufgaben von zehn lösen konnten. Dadurch haben sie insgesamt zehn Aufgaben erledigt, wovon sieben komplett richtig und drei teilweise richtig waren. Alle drei teilweise richtigen Aufgaben, waren Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler.

Das Nachfragen bleibt insgesamt moderat und betrifft hauptsächlich inhaltliche Klärungen, technische Fragen oder Bestätigungen. In der Abbildung 22 kann gesehen werden, wer wie oft nachgefragt hat und um welche Art von Nachfragen es sich handelt.

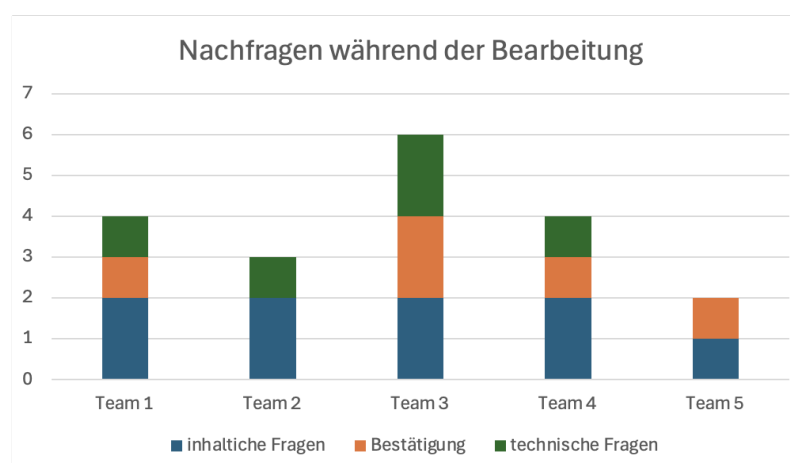


Abbildung 22: Nachfragen EIS

Auf der Skala semantisch zu syntaktisch bewegen sich die Gruppen im mittleren Bereich. Team 1 wird auf der Skala mit 3 mit einer Tendenz zu 2 kodiert. Dafür sprechen mehrere Passagen, in denen die Lernenden mit bedeutungsbezogenen Begründungen arbeiten, etwa mit dem Zitat „weil links die negativen Zahlen sind“, was den Bezug zur Zahlengerade und das Denken in Lage zur Null sichtbar macht. Daneben treten jedoch auch Aussagen wie „Subtraktion geht links und Addition nach rechts“ auf, welches eher auf syntaktischer Ebene auftritt. Mit dem Zitat „wieso ist das Ergebnis $3/4$... ahhh, weil es eine Minuszahl ist, darauf haben wir nicht geschaut“ wechseln sie wieder auf die Bedeutungsebene zurück. In der Summe überwiegen damit semantische Aussagen, vereinzelt auftretende syntaktische Beispiele relativieren dieses Bild und führen zur genannten Einstufung.

Team 2 bekam die Bewertung „überwiegend syntaktisch, wenig semantisch“. Überwiegende Aussagen wie „Drücken wir mal auf Subtraktion“ „Ja da wird die Maus zurück gehen“ führten zu diesem Entschluss. Dennoch waren in dieser Gruppe genauso Aussagen wie „also schau „der Fahrstuhl startet bei (-1) und fährt zwei Stockwerke nach oben und ist dann im 1. Stock. Weil $(-1) + 2$, also $(-1) + 2 = 1$ ergibt“, welches überwiegend semantisch ist und „minus und minus ergibt plus, deswegen geben wir die Klammer weg und schreiben stattdessen ein plus hin“, welches vollkommen syntaktisch ist.

Die nächste Gruppe wird, genauso wie Gruppe 5 zwischen 3 und 4 eingestuft, dennoch mit einer Tendenz zu 4. Gruppe 3 machten Aussagen wie „wir sind jetzt bei -5 und wir gehen eine Ebene hinunter also -6“ (Skala 2), „warum geht der Pfeil nach links? Weil es eine Addition ist?“ „Nein wenn eine Addition ist, müsste der Pfeil nach rechts gehen“ (Skala 4) oder „ich sage jetzt so: wenn Plus und Minus sind, wird es zu Minus und wenn es Minus ist, geht der Pfeil nach links, weil links weniger wird, also minus“ (Skala 4). Team 5 berichteten: „ $-6 + (+9) = +3$, ah dafür ist das, das bedeutet wir fahren zu -6 hinunter und fahren mit dem Lift 9 Stockwerke hinauf, so kommen wir zu + 3“ (Skala 2), „warum geht der Pfeil nach links?“ „ja weil es eine Addition ist“ „nein bei Addition geht der Pfeil nach rechts“ (Skala 4) oder „1,2 sind $12/10$. Ich würde mal sagen wir schreiben $12/10$ und dann + und – ergibt – und dann $2/9$. Der gemeinsame Nenner ist 90 oder?“.

Das Team 4 zeigt ein gemischtes Profil. Zum einen finden sich Aussagen zu „überwiegend semantisch, etwas syntaktisch“, etwa „Also wir starten im -4. Stock. Und fahren zwei Stockwerke hinunter, dann befinden wir uns im -6. Stock“. Zum anderen treten auch überwiegend syntaktische, mit etwas semantischen Äußerungen auf, zum Beispiel: „das haben wir gestern schon ein bisschen gelernt. Wenn der Pfeil nach links geht, subtrahiert man es, also

ist es eine negative Zahl. Es steht ein Minus davor. Würde man rechts gehen wäre es eine positive Zahl, die man dazu gibt“. Dadurch wird diese Gruppe auf der Skala zu 3 eingestuft.

6.2.1.2. Direkte Instruktion

Für die Direkte Instruktion liegen erneut fünf Gruppen vor. Zwei der fünf Gruppen haben das GeoGebra-Book vollständig abgeschlossen. Team 2 brauchte insgesamt 24 Minuten und 31 Sekunden, Team 4 brauchte 33 Minuten und 2 Sekunden. Team 1 hatte zuerst technische Probleme und die beiden Schüler:innen sprachen hauptsächlich über nicht matherelevante Themen. Dadurch hatten sie eine Zeit von 32 Minuten und 42 Sekunden und die zwei Aufgaben im letzten Kapitel nicht geschafft. Team 3 hatte eine Gesamtzeit von 38 Minuten und 52 Sekunden und alle Aufgaben bis auf die letzte geschafft. Das letzte Team hatte ebenso zunächst technische Probleme, wodurch sie die letzten beiden Aufgaben im letzten Kapitel ebenso nicht geschafft haben. Ihre Gesamtzeit betrug 38 Minuten und 39 Sekunden.

Alle vollständig erledigten Kapitel werden in der folgenden Tabelle mit der durchschnittlichen Zeit aller Gruppen dargestellt.

I do - Kapitel	We do – Kapitel
365,6 Sekunden	745,8 Sekunden

Tabelle 3: durchschnittliche Zeiten Direkte Instruktion-Kapiteln

In Abbildung 23 sind alle Zeiten in Sekunden der einzelnen Aufgabenabschnitte von allen Gruppen zu sehen. Es wurde in den einzelnen Kapiteln unterteilt. Die Aufgaben, die nicht erledigt wurden, sind nicht als Säule sichtbar.

Der Sprechanteil variiert zwischen den Teams nicht stark. Der niedrigste Anteil liegt bei 33,85% (Team 5) und der höchste Anteil bei 58,32% (Team 4). Nachfragen ist außer bei Team 3 eher selten. Team 3 musste sieben Mal nachfragen, wovon vier Mal inhaltliche Fragen, zwei Mal technische Fragen und einmal Bestätigung waren. Team 1 und 2 haben nur jeweils einmal nachfragen müssen, entweder wegen Bestätigung oder ob sie auf ihrem Tablet rechnen dürfen. Team 4 musste auch nur zwei Mal nachfragen, wovon beide Male inhaltliche Fragen waren. Das letzte Team musste kein einziges Mal nachfragen.

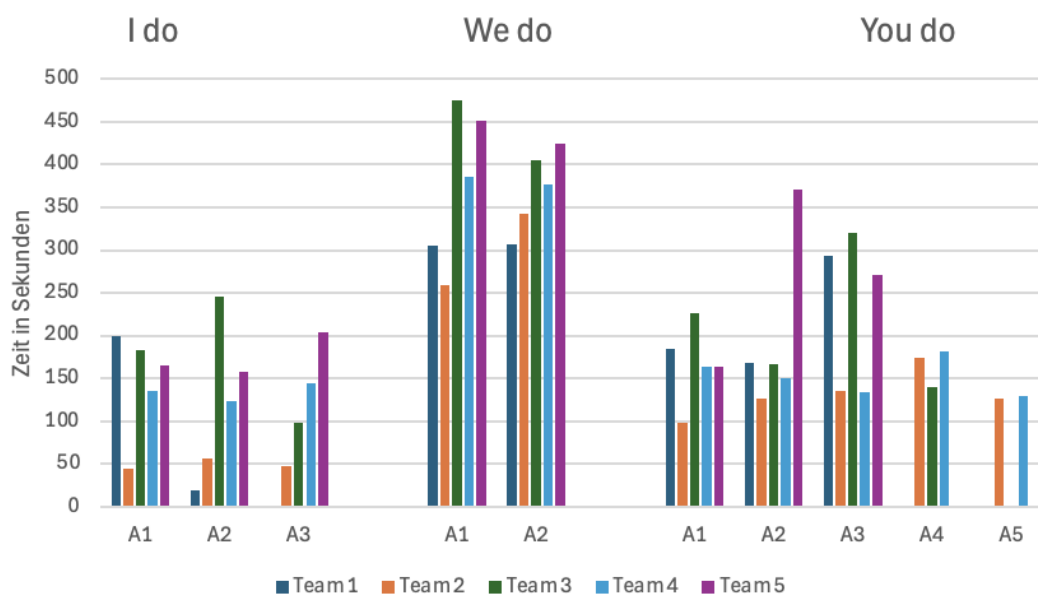


Abbildung 23: Säulendiagramm Direkte Instruktion_1

Bei der Richtigkeit der Aufgaben dominieren korrekte Lösungen über alle Teams hinweg und die meisten Fehler waren Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler. Es waren insgesamt 19 einzelne Aufgaben zu lösen. 14 Aufgaben davon im Kapitel „We do“ und 5 Aufgaben im Kapitel „You Do“. Team 1 konnte 17 davon lösen, wovon zwölf komplett richtig waren, drei teilweise richtig und zwei falsch. Davon waren drei Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler und bei zwei Aufgaben hatten sie Probleme beim Aufgabenverständnis. Team 2 hatte alle 19 Aufgaben gelöst und nur eine falsche Antwort geliefert, welche ein Rechenfehler war. Team 3 konnte 18 Aufgaben lösen, wobei 13 richtig waren, vier teilweise richtig und eine Aufgabe falsch gelöst wurde. Alle fünf falschen Antworten waren jeweils Rechen- und Flüchtigkeitsfehler. Gruppe 4 konnte alle Aufgaben lösen, es waren dennoch sechs nur teilweise richtig. Von diesen sechs waren fünf Aufgaben Rechen- und Flüchtigkeitsfehler und bei einer Aufgabe hatte die Gruppe ein Problem beim Aufgabenverständnis. Die letzte Gruppe konnte 17 Aufgaben lösen, mit 13 richtigen Aufgaben, drei teilweise richtigen und einer falschen Antwort. Alle vier nicht korrekt gelösten Aufgabenbearbeitung zeigten Rechenfehler.

Auf der Skala semantisch zu syntaktisch bewegen sich die Zweiergruppen überwiegend im Bereich 4. Team 1 wurde mit „überwiegend syntaktisch, wenig semantisch“ beurteilt, durch ihre Aussagen „wieso ist es nicht $-\frac{5}{6} + \frac{1}{3}$? Da ist auch ein plus“ „du kannst ja nicht einfach ein minus hinzufügen“ „ja stimmt“ (Skala 4), „fünf plus zwei ist sieben, also ist der Zähler sieben.“ (Skala 4), „Kann noch gekürzt werden? Ja!“ „Nein“ „Aja stimmt 7 und 6 können wir nicht kürzen“ (Skala 3). Die zweite Gruppe hatte sehr gemischte Aussagen, wodurch sie dann auf 3 eingestuft wurden. Dabei traten Aussagen wie „kann noch gekürzt werden? Nein weil 7 ist eine

Primzahl!“ (Skala 2), „oh nein ... ok das ist leicht, das ist leicht. 0,3 ist gleich $\frac{3}{10}$.“ (Skala 3) und „ $\frac{5}{8}$ sind $\frac{10}{16}$ oder? Und minus und minus ergibt plus oder?“ „Ja genau“ (Skala 4) auf.

Team 3 hat sowohl Beiträge zu halb semantisch, halb syntaktisch, wie zum Beispiel „was ist jetzt das Ergebnis?“ „ $\frac{7}{6}$ oder?“ „Aja macht Sinn“ „wir könnten auch $1\frac{1}{6}$ schreiben“, als auch Aussagen, die überwiegend syntaktisch sind, als Beispiel „Gemeinsamer Nenner ist 15!“ „nein was es ist 10! Du kannst 10 nicht auf 15 erweitern“ „Stimmt“. Dadurch liegt diese Gruppe zwischen 3 und 4.

Die beiden letzten Gruppen werden als 4 kodiert. Team 4 hatten Gespräche wie „was ist der gemeinsame Nenner? Von der Rechnung oder was?“ „ja“ „dann ist es von 6 und 3 6 der gemeinsame Nenner.“ (Skala 3) oder „zuerst klammern auflösen. Das bedeutet minus und minus ergibt plus. Und dann...“ „auf gleichen Nenner bringen“ „aja genau, und das ist 3?“ „nein den nächstgrößten Nenner musst du nehmen, also 18“ (Skala 5). Die letzte Gruppe tätigte Aussagen wie „wir müssen das auswählen, was sechs ergibt“ (Skala 4) oder „Warum eine Klammer? ok, wir machen es Schritt für Schritt. Minus und minus ergibt plus. Also $\frac{2}{9} + \frac{5}{6}$. Kann ich kurz rechnen?“ „aber wir bringen wir auf gemeinsamen Nenner?“ „es ist 18 der gemeinsame Nenner, also 9 mal 2 und 6 mal 3“ (Skala 4)

Die Belege zeigen typische Muster der Direkten Instruktion, wie zum Beispiel verfahrensorientierte Kurzformeln (gleichnamig machen, Klammern auflösen, ...).

6.2.1.3. Entdeckendes Lernen

Beim Unterrichtsprinzip Entdeckendes Lernen gab es vier Gruppen. Von den vier hatte es nur eine Gruppe geschafft, fertig zu werden. Team 1 schaffte das GeoGebra-Book in 41 Minuten und 29 Sekunden. Gruppe 2 schaffte es bis zur zweiten Aufgabe im letzten Kapitel und brauchte insgesamt 34 Minuten und 5 Sekunden. Sie hatten zu Beginn Internetprobleme, wodurch sie erst viel später starten konnten. Team 3 brauchte 35 Minuten und 58 Sekunden und kam bis zur dritten Aufgabe im letzten Kapitel. Die vierte Gruppe brauchte 32 Minuten und 55 Sekunden und schaffte es bis zum Ende des dritten Kapitels „Aufgabe B“. Auch sie hatten zu Beginn technische Probleme.

Die durchschnittlichen Zeiten pro Kapitel, die jeder geschafft hat, werden wieder in der Tabelle darunter aufgezeigt. Dabei ist zu sehen, dass das 3. Kapitel „Aufgabe B“ durchschnittlich am längsten gedauert hat.

Aktivierungsaufgabe	Aufgabe A	Aufgabe B
561,75 Sekunden	509,5 Sekunden	572,75 Sekunden

Tabelle 4: durchschnittliche Zeiten Entdeckendes Lernen-Kapiteln

In der Graphik darunter sind wieder die Zeiten der einzelnen Aufgabenabschnitte zu sehen. Es ist gut zu erkennen, dass vor allem bei den Aktivierungsaufgaben, die Schüler:innen ungefähr gleich lang gebraucht haben.

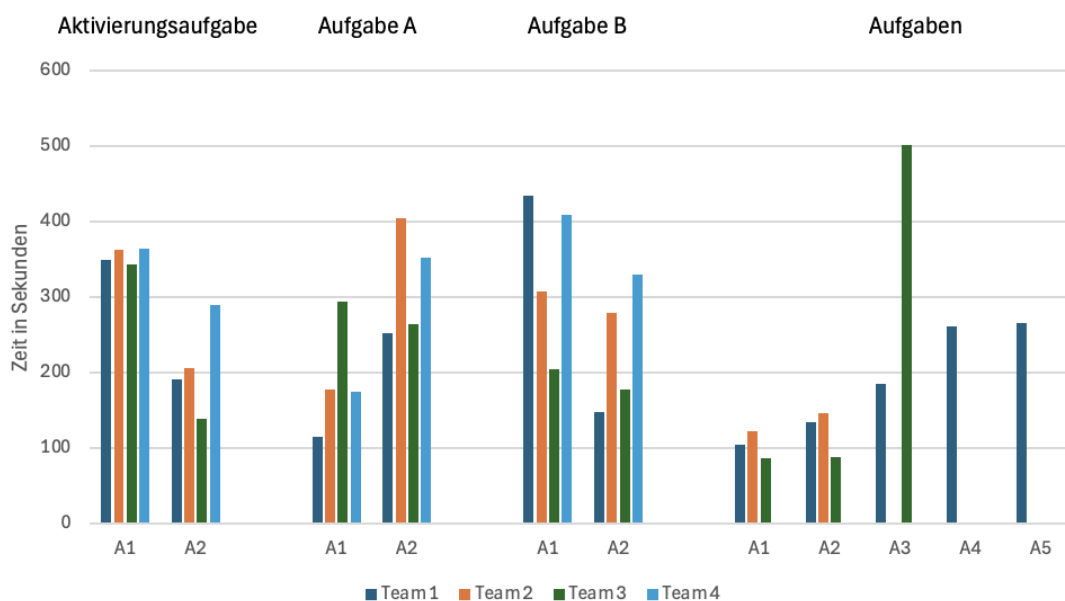


Abbildung 24: Säulendiagramm Entdeckendes Lernen_1

Die Interaktionsintensität fällt beim Entdeckenden Lernen überwiegend mittel bis hoch aus. Jede Gruppe hatte über 50% Sprechanteil. Team 3 hatte noch den geringsten Anteil mit 54,45% und Team 2 den höchsten mit 78,09%.

Bei der Richtigkeit erreichten die Gruppen ebenfalls hohe Anteile korrekt gelöster Items. Insgesamt waren 22 Aufgaben zu lösen, acht in Kapitel 1, fünf in Kapitel 2, vier in Kapitel 3 und fünf bei Kapitel 4. Die erste Gruppe schaffte alle Aufgaben, konnte aber nur 14 Aufgaben richtig lösen, vier waren nur teilweise richtig und vier waren falsch. Von diesen acht nicht richtigen Aufgaben waren es fünf Rechen- bzw. Flüchtigkeitsfehler, ein Bedienfehler von einem GeoGebra Applet und zwei Fehler beim Aufgabenverständnis. Team 2 schaffte 19 Aufgaben, wovon 15 richtig waren, zwei teilweise richtig und zwei falsch. Dieses Team hatte zwei Rechenfehler und zwei Mal Probleme bei der Aufgabenstellung. Gruppe 3 konnte 20 Aufgaben lösen, mit 14 richtigen Items. Die drei teilweise richtigen und die drei falschen Antworten bestanden aus vier Rechen- und Flüchtigkeitsfehler, ein Bedienfehler und einmal Probleme

beim Aufgabenverständnis. Das letzte Team schaffte 17 Aufgaben zu lösen. Davon waren zwölf richtige Antworten, zwei teilweise richtige und drei falsche. Zwei Mal hatten sie Probleme bei der Aufgabenstellung und drei Mal hatten sie Rechen- und Flüchtigkeitsfehler.

Nachfragen treten vor allem als Verständnis- bzw. Strategief Fragen auf, aber auch vereinzelt als technische Fragen. Diese Gruppe der GeoGebra-Books hat insgesamt zwölf Mal nachgefragt, das ist die Gruppe, die am meisten nachgefragt hat. Die genaue Anzahl beim Nachfragen der einzelnen Teams, sowie auch was genau sie gefragt haben, ist in der Abbildung darunter zu sehen.

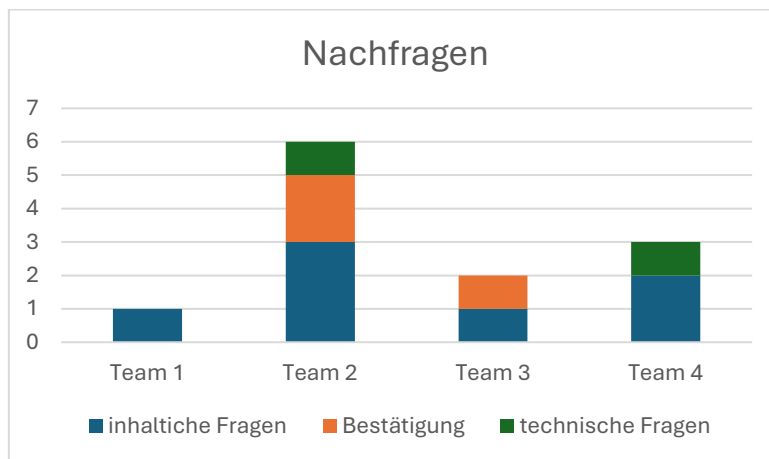


Abbildung 25: Nachfragen Entdeckendes Lernen

Auf der Skala semantisch zu syntaktisch zeigen die Entdeckendes Lernen – Gruppen ein überwiegend semantisches Profil. Team 1, 3 und 4 wurden mit 2 eingestuft. Team 1 hat Zitate wie „Es muss negativ sein! Weil eine minus Zahl mit einer minus Zahl addiert, sind immer negativ. Wenn du dir das auf einen Zahlenstrahl vorstellst, gehst du immer weiter nach links.“ (Skala 2) und „beim Rechnen mit Brüchen müssen die Zahlen unten gleich groß sein. Wir wollen beide auf Zehntel bringen, damit wir sinnvoll zusammenzählen können.“ (Skala 2). Im Team 3 wurde zum Beispiel Folgendes gesagt: „Ist sie jetzt schuldenfrei? Nene sie hat jetzt sogar noch mehr Schulden.“ (Skala 2) und „es gibt an, wie tief der 3. Stock unten ist oder?“ (Skala 2). Im Team 4 kamen folgende Beiträge: „Diese Rechnung ist dann 3 Stockwerke, wie weit unten, also in Meter, sie im Keller dann sind.“ „Stimmt!“ (Skala 2) und „Schau mal, wenn ich mir noch etwas ausleihe, habe ich noch mehr Schulden als davor und nicht weniger, so musst du dir das dauernd jetzt vorstellen beim Rechnen.“ (Skala 2).

Team 2 ist eine Mischung aus „voll semantisch“ und „überwiegend semantisch, etwas syntaktisch“. Die Gruppe hat einerseits Aussagen wie „Schau mal, wenn es viel größer wird, kann es nur über null Grad Celsius haben.“ „Ja stimmt“ (Skala 2). Andererseits auch Aussagen

wie „Es können -1,5 und 1,5 sein, sowie auch 2 und -2 oder -5 und 5 und so weiter. Wir haben es verstanden. Es muss nur dieselbe Zahl sein, aber mit einem Minus.“ (Skala 1).

6.2.2. Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks

6.2.2.1. EIS-Prinzip

Die Bearbeitungszeiten streuen beim Thema regelmäßiges Sechseck deutlich. Drei von fünf Gruppen können das GeoGebra-Book vollständig beenden. Team 2 schaffte es in 38 Minuten und 26 Sekunden, Team 3 in 39 Minuten und 31 Sekunden und Team 5 in 36 Minuten und 48 Sekunden. Team 1 hatte eine Gesamtzeit von 39 Minuten und 38 Sekunden und im letzten Kapitel noch die erste Aufgabe geschafft. Team 4 hatte zu Beginn technische Probleme und zwischenzeitlich sehr viel über nichtmathematische Themen geredet. Sie brauchten insgesamt 33 Minuten und 25 Sekunden und schafften es bis zum dritten Kapitel.

In der Tabelle 5 sind die durchschnittlichen Zeiten der einzelnen Kapitel „Merksatz“, „Ikonisch“, „Enaktiv“ und „Symbolisch“ zu sehen, wobei Gruppe 4 bei Symbolisch nicht mitgezählt werden konnte. Das Kapitel „Enaktiv“, in der hauptsächlich gezeichnet wurde, dauerte durchschnittlich bei allen am längsten, während die ikonische und symbolische Phase vergleichsweise kurz ausfallen.

Merksatz	Ikonisch	Enaktiv	Symbolisch
531 Sekunden	198,2 Sekunden	835,6 Sekunden	180,25 Sekunden

Tabelle 5: durchschnittliche Zeiten EIS-Kapiteln

Die einzelnen Zeiten der Aufgaben werden in der Abbildung 26 dargestellt. Bis auf ein paar Ausnahmen, zum Beispiel Team 4 Kapitel Enaktiv A1 oder Team 1 Kapitel Enaktiv A2, brauchen die Schüler:innen ungefähr gleich lange für die jeweiligen Aufgabenblöcke.

Der Redebeitrag ist bei allen unter 50 Prozent und reicht von 30,16% von Team 5 bis 42,04% von Team 4. Die erste Gruppe hatte einen Redeanteil von 40,75%, Team 2 hatte 41,28% und Team 3 hatte 36,61%.

Die Korrektheit der Aufgaben ist insgesamt hoch. Für dieses GeoGebra-Book gibt es elf Aufgaben zum Erarbeiten. Fünf Aufgaben sind es beim Kapitel „Merksatz“, zwei beim Kapitel „Enaktive Ebene“, zwei beim Kapitel „Symbolische Ebene“ und zwei beim Kapitel „Aufgaben“. Team 1 schaffte zehn Aufgaben, also alle bis auf das letzte und hatte davon 8 richtig und zwei teilweise richtig. Diese zwei Fehler waren ein Rechen- und Flüchtigkeitsfehler und ein Problem beim Aufgabenverständnis. Gruppe 2, 3 und 5 schafften alle Aufgaben. Gruppe

zwei hatte acht richtig und drei teilweise richtig. Davon waren alle drei Rechen- und Flüchtigkeitsfehler. Team 3 schaffte ebenso alle Aufgaben. Die dritte Gruppe hatte sechs richtige Items, vier teilweise richtige und ein falsches Item. Dabei hatte die Gruppe vier Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler und bei einer Aufgabe hatten sie Probleme beim Aufgabenverständnis. Die letzte Gruppe löste zehn Aufgaben korrekt und eine fehlerhaft, dabei handelte es sich um einen Rechenfehler. Team 4 schaffte sieben Aufgaben, davon erreichte sie vier korrekte Lösungen, zwei teilweise richtige und eine falsche. Bei zwei Aufgaben hatten sie Probleme beim Aufgabenverständnis und bei einer einen Rechenfehler.

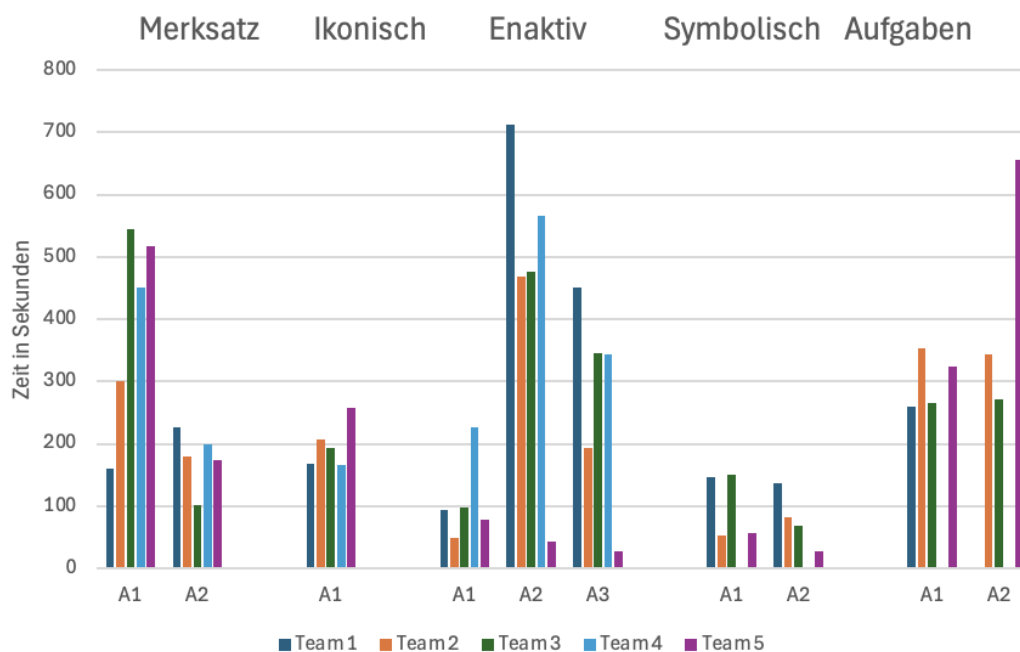


Abbildung 26: Säulendiagramm EIS_2

Nachfragen waren selten bis moderat und betrafen überwiegend kurze Inhalts- und Aufgabenerklärungen und vereinzelt Technik. Insgesamt wurde 13-mal nachgefragt, davon waren zehn Mal eine Frage zum Inhalt oder zur Aufgabe, zwei Mal suchte die Schüler:innen nach Bestätigung und einmal eine technische Frage. Team 3 musste mit vier Mal am meisten nachfragen, Team 2 mit einmal nachfragen am wenigsten.

Auf der Skala semantisch zu syntaktisch zeigt sich ein gemischtes, tendenziell semantisches Profil mit Teamunterschieden. Team 2, 3 und 4 sind zwischen „überwiegend semantisch, etwas syntaktisch“ und „halb-halb“. Gruppe 2 hatte Gespräche wie „die roten Seiten sind ein gleichschenkliges Dreieck, oder? Oder warte ich schau nochmal die Antwortmöglichkeiten... rechtwinklig ist es nicht, also gleichschenklige, oder?“ „oder gleichseitig? Weil es sind ja 3 gleich lange Seiten.“ (Skala 3) und „beim Umfang müssen wir 6 mal 5 rechnen, weil wir haben sechs Mal die Seite $r=5\text{cm}$. Also sind es 30 cm.“ (Skala 2). Die Einstufung der dritten Gruppe stützt

sich auf semantisch geprägte Beiträge wie „ah also alle Seiten sind gleich lang hier.“ „Der Radius ist also die Länge von a“ (Skala 2) sowie auf Äußerungen wie „das ist doch nicht der Umfang! Nein!“ „ah es ist mal sechs!“ „Sag ich ja!“ (Skala 3). Für die Bewertung der vierten Gruppe waren einerseits semantische Aussagen maßgeblich, wie „ah ich check schon. Du stichst im Prinzip sechs Mal im Kreis ab mit derselben Länge wie du den Kreis gezeichnet hast und dann verbindest du die Punkte.“ (Skala 2), andererseits auch Äußerungen wie „es ist gleichseitig, weil alles ja dasselbe ist, quasi. Obwohl nein gleichschenkliges.“ (Skala 3).

Team 1 wird in der Skala insgesamt als 3 eingestuft. Diese Gruppe tätigte Aussagen wie „welches Dreieck ist das?“ „wir können uns das anschauen. Ich glaube ein gleichseitiges, weil es drei Mal die Seite a ist.“ (Skala 2) und „wie berechnet man jetzt den Umfang? Jede Seite plus?“ „ja genau jede Seite plus“ „30 cm hab ich. Wenn das nicht richtig ist, dann weiß ich auch nicht weiter“ (Skala 4). Das letzte Team ist als „überwiegend semantisch, etwas syntaktisch“ einzustufen. Dafür sprechen Aussagen wie „warum hat es sechs Ecken? Es steht Vieleck“ „ein Vieleck ist wie ein Lebewesen, das kann auch unterschiedliche Anzahl an Beinen haben.“ (Skala 2) sowie „Umfang? Haben wir das schon gelernt? Ah. Ganz einfach. Alle Seiten zusammenrechnen oder die Seite mal sechs.“ (Skala 2).

6.2.2.2. Direkte Instruktion

Von den fünf Zweier Gruppen hatten drei Teams das GeoGebra-Book vollständig geschafft. Die Bearbeitungszeiten streuten von rund 31 Minuten bis etwa 40 Minuten. Team 1 schaffte es in 39 Minuten und 57 Sekunden, Team 2, das schnellste Team, in 30 Minuten und 58 Sekunden und Team 3 in 38 Minuten und 21 Sekunden. Das vierte Team wäre fast fertig geworden, ihnen hatte nur die letzte Aufgabe gefehlt. Ihre Bearbeitungszeit lag bei 39 Minuten und 48 Sekunden, wobei sie zu Beginn auch technische Probleme hatten und dadurch erst später starten konnten. Auch das letzte Team hatte zu Beginn große technische Probleme und musste zudem auch Zirkel und Geodreieck suchen. Ihre Gesamtzeit war 31 Minuten und 16 Sekunden und sie schafften alles bis auf die letzten zwei Aufgaben.

In der folgenden Tabelle sind erneut die durchschnittlichen Zeiten der komplett fertigen Kapitel zu sehen. Es ist zu erkennen, dass das Kapitel „We do“ am längsten dauert, da hier die Kinder mit dem Konstruieren begonnen haben. Diese Gruppe hat durchschnittlich weniger Zeit für das Kapitel „Merksatz“ gebraucht, als die Gruppe „EIS-Prinzip“.

Merksatz	I do	We do
471,6 Sekunden	169 Sekunden	814,8 Sekunden

Tabelle 6: durchschnittliche Zeiten Direkte Instruktion-Kapitel

Die Graphik darunter zeigt erneut, wie viele Sekunden die einzelnen Gruppen für die Aufgabenabschnitte gebraucht haben. A2 beim Kapitel „Merksatz“ ist sehr gleichbleibend, während die anderen Aufgabenabschnitte sehr streuen.

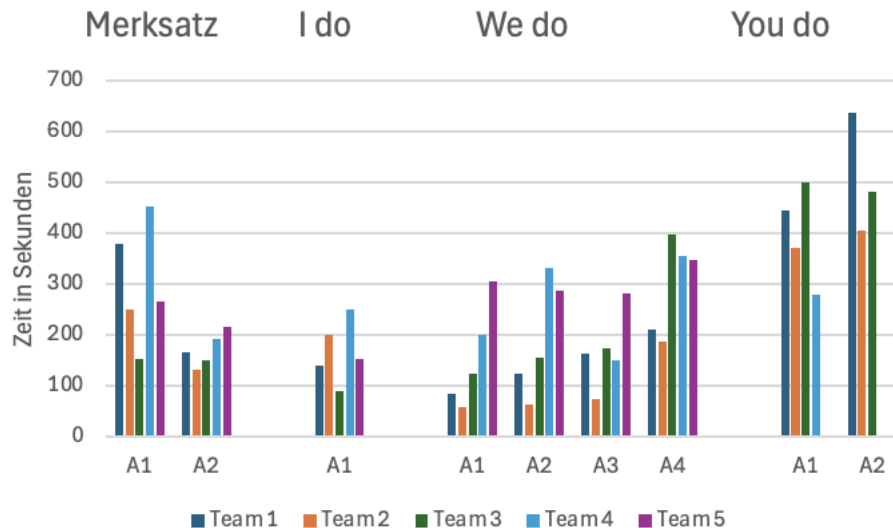


Abbildung 27: Säulendiagramm Direkte Instruktion_2

Die Interaktionsintensität liegt bei allen Teams unter 50 Prozent. Team 1 und Team 5 haben beide zwischen 42 und 44 Prozent und haben so den höchsten relativen Anteil. Team 2 und Team 3 liegen zwischen 31 und 35 Prozent und Team 4 hat den niedrigsten Anteil mit fast 23 Prozent.

Bei der Richtigkeit dominieren erneut korrekte Lösungen. Es gab elf Aufgaben zu lösen, fünf davon im Kapitel „Merksatz“, vier davon im Kapitel „We do“ und zwei im letzten Kapitel. Gruppe 1 konnte acht Aufgaben richtig lösen, eine teilweise richtig und zwei falsch. Die drei nicht korrekten Lösungen sind auf Rechen- und Flüchtigkeitsfehler zurückzuführen. Team 2 erzielte ebenfalls acht korrekte Lösungen, dazu zwei teilweise korrekte und nur eine Aufgabe war komplett falsch. Davon waren zwei Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler und in einem Fall lag ein Missverständnis der Aufgabenstellung vor. Die dritte Gruppe konnte sieben Aufgaben richtig lösen, zwei teilweise korrekt und zwei falsch. Zwei Aufgaben hatten Rechenfehler und bei zwei Aufgaben verstanden sie die Aufgabenstellung nicht. Das Team 4 bearbeitete zehn Aufgaben: neun korrekt und eine teilweise korrekt. Die Teilkorrektheit ist auf einen Flüchtigkeitsfehler zurückzuführen. Die letzte Gruppe konnte neun Aufgaben lösen, wovon acht richtig waren und eine teilweise richtig. Hier beruhte der Fehler auf Unklarheiten im Aufgabenverständnis.

Nachfragen waren insgesamt selten. Das erste Team brauchte keine Hilfe, das Team 2 und 4 musste jeweils nur einmal nachfragen. Dabei war es eine technische und inhaltliche Frage. Gruppe 3 und 5 mussten auch nur zwei Mal nachfragen, die jeweilige Aufteilung der Fragen ist in der Grafik darunter zu sehen.

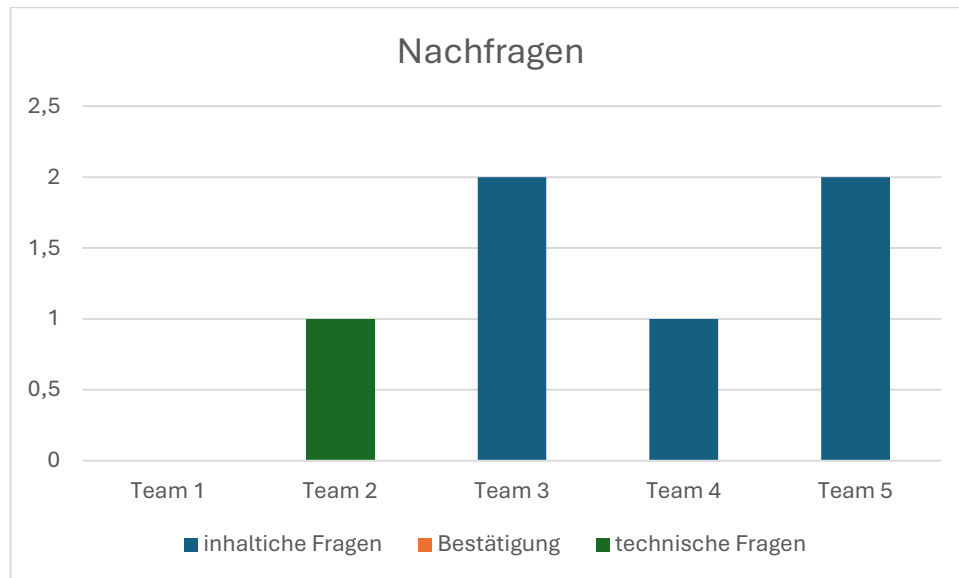


Abbildung 28: Nachfragen Direkte Instruktion

Im Gegensatz zum GeoGebra-Book zu Rationale Zahlen, liegen die Teams in der Skala semantisch zu syntaktisch weit überwiegend im Bereich 3. Team 1 ist in der Skala bei 2-3 zugeordnet, da es überwiegend begriffsnahe, aber teils auch formelhafte Passagen zeigt. Semantisch war der Dialog zu „Es muss immer dieselbe Länge im Zirkel sein“ (Skala 2), während „Schau das sind 3,5. Und es hat sechs Seiten. Also 3,5 mal 6. Das sind 21 cm“ stärker rezeptartig bleibt (Skala 3). Beim zweiten und dritten Team ist die Bewertung „überwiegend syntaktisch, etwas semantisch“. Die Sprache ist mehrheitlich verfahrensorientiert und klar rezeptdominiert. Team 2 hatte Aussagen wie „Wenn die Seiten gleich sind, haben wir gleichzeitig dazu gesagt.“ (Skala 4) und „Uh Umfang ist alle Seiten zusammenrechnen, bedeutet ... der Umfang ist 21cm.“ (Skala 4). Team 3 äußerte zum Beispiel „Achso, dann verbindet man die Punkte und dann hat man das Sechseck. Das ist ja ur einfach.“ (Skala 4) „Umfang $6 \cdot 3 = 18$ cm.“ „nein es ist ja doch 3,5 cm“ „Aja! dann $6 \cdot 3,5 = 21$ cm!“ (Skala 4).

Das Team 4 hatte ein gemischtes Profil aus kurzer Regelreferenz und inhaltlicher Begründung, deswegen sind sie auf der Skala insgesamt auf die 3 gelandet. Dabei hatten sie Aussagen wie „Hä? Umfang? Haben wir das übersehen?“ „Nein, aber denk logisch! Umfang ist alle Seiten addiert oder sechs Mal die Seite“ (Skala 4) und „Wie hast du die Seiten gemacht? Das versteh ich nicht.“ „Du musst einfach den Zirkel hier einstecken und mit der gleichen Länge wie der

Radius hier und hier abschlagen. Das machst du auf der anderen Seite auch nochmal. Checkst du?“ (Skala 2). Das letzte Team wurde wie Team 1 auf 2-3 eingestuft. Ihre Definition „Der Umkreis ist der Kreis, der um das Vieleck da liegt und die Punkte berührt, also ku“ ist auf der Skala eine 3 und das Gespräch „Aber wie zeichne ich jetzt den Inkreisradius?“ „ich glaub du legst das Geodreieck auf eine der Seiten so hin, sodass diese Mittellinie drauf liegt, weil das ja für 90° steht. Und dann machst du ein Strich zwischen M und der Seite.“ ist konzeptuell sauber und wurde deswegen mit einer 2 bewertet.

6.2.2.3. Entdeckendes Lernen

Von den vier Gruppen konnte nur ein Pärchen das GeoGebra-Book beenden. Team 3 schaffte es in 34 Minuten und 3 Sekunden. Team 1 hatte eine Bearbeitungszeit von 38 Minuten und 31 Sekunden und schaffte nur die letzte Aufgabe nicht, weil sie für die erste Frage sehr viel Zeit gebraucht haben. Das zweite Team schaffte es bis zum ersten Aufgabenabschnitt des vierten Kapitels. Sie verloren ihre Zeit für Kapitel 2 und 3. Ihre Gesamtzeit betrug 40 Minuten und 17 Sekunden. Die letzte Gruppe schaffte es bis zum dritten Kapitel zweiten Aufgabenabschnitt. Bei ihnen war es genauso wie bei Team 1, der Zeitverlust lag bei der ersten Aufgabe.

In der folgenden Tabelle sind wieder die durchschnittlichen Zeiten pro Kapitel angegeben. Das erste Kapitel „Konstruktion“ hat durchschnittlich am längsten bei allen gedauert. Im Kapitel „Erkenntnisse“ wurden die Zeiten von Team 1, 2 und 3 gezählt und im Kapitel „Merksatz“ wurden die Zeiten von Team 1 und 3 gezählt.

Konstruktion	Muster	Erkenntnisse	Merksatz
1024,25 Sekunden	562,75 Sekunden	406,66 Sekunden	251 Sekunden

Tabelle 7: durchschnittliche Zeiten Entdeckendes Lernen-Kapiteln

Ebenso sind in der Abbildung 29 die einzelnen Zeiten von allen Aufgabenabschnitten abgebildet. Team 2 sticht sehr bei den Kapiteln „Muster“ und „Erkenntnisse“ heraus. Dafür ist Gruppe 4 beim ersten Kapitel sehr auffällig. Es ist auch zu erkennen, dass das erste Kapitel die meiste Zeit verbraucht hatte.

Die Redebeiträge sind an sich sehr hoch und über 50 Prozent, bis auf eine Ausnahme. Der relative Anteil von Team 1 liegt bei 41,67%. Ansonsten hat Team 2 den höchsten Anteil mit 74,97%, Team 3 55,26% und Team 4 67,46%.

Insgesamt gab es 14 Aufgaben zu erledigen, vier im Kapitel „Muster“, drei im Kapitel „Erkenntnisse“, fünf im Kapitel „Merksatz“ und zwei im Kapitel „Aufgaben“. In dieser GeoGebra-Book Gruppe sind einige Fehler passiert. Team 1 hat 13 Aufgaben lösen können,

wovon neun richtig waren, eins teilweise richtig und drei falsch. Dabei war es drei Mal dasselbe Problem mit der Aufgabenstellung und einmal ein Rechenfehler. Team zwei schaffte elf Aufgaben, mit sieben richtigen, drei teilweise richtigen und eine falsche Antwort. Auch hier hatte die Gruppe zwei Mal Probleme beim Aufgabenverständnis und zwei Mal Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler.

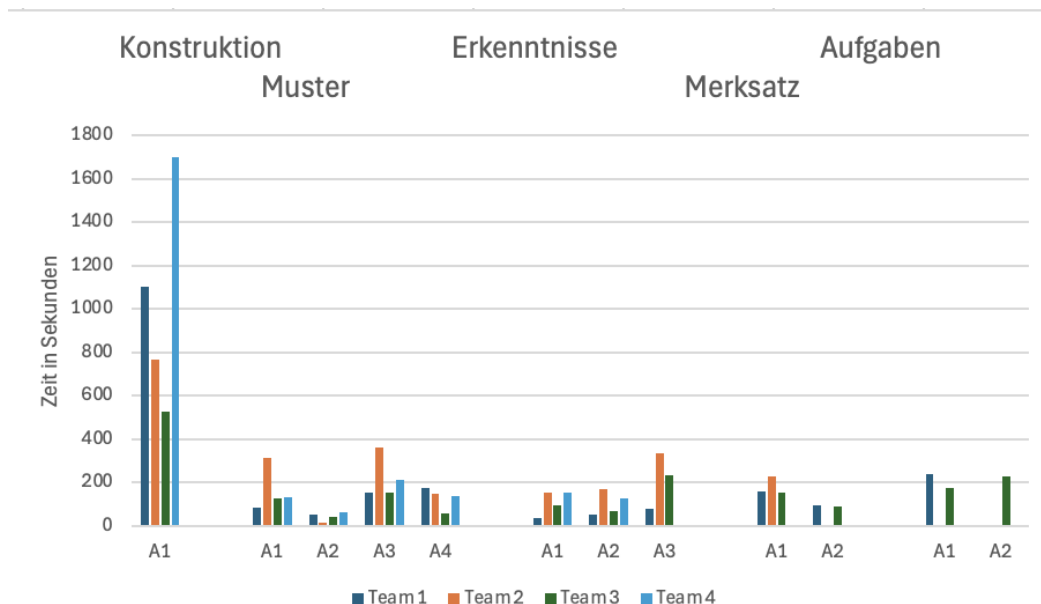


Abbildung 29: Säulendiagramm Entdeckendes Lernen_2

Die dritte Gruppe ist zwar als einzige fertig geworden, hatte dennoch von 14 Aufgaben nur acht richtig, 4 teilweise richtig und 2 falsche Antworten. Die nicht korrekten Aufgaben waren vier Mal Rechen- und Flüchtigkeitsfehler und bei zwei Probleme beim Aufgabenverständnis. Die letzte Gruppe schaffte sechs Aufgaben, wovon vier korrekt, eins teilweise korrekt und eins falsch war. Bei einer Aufgabe hatten sie Probleme bei der Aufgabenstellung und bei einer Aufgabe einen Rechenfehler.

Nachfragen traten in moderatem Umfang auf und bezogen sich primär auf das Aufgabenverständnis, also inhaltliche Fragen. Insgesamt wurden 16 Rückfragen dokumentiert. Team 1 fragte vier Mal nach und Team 2 am häufigsten mit sieben Mal. Team 3 stellte nur zwei Mal und Team 4 drei Mal Rückfragen.

Auf der Skala semantisch zu syntaktisch überwiegt beim Entdeckenden Lernen ein bedeutungsorientiertes Sprachprofil. Gruppe 1 wurde mit 2 bewertet, durch die Aussagen „MA sind drei Zentimeter“, „MB auch“, „AB ist auch drei Zentimeter“, „Ja alles ist drei Zentimeter“ (Skala 2) und „Das sieht für mich nach einem Dreieck aus oder?“ „ja und alle Seiten sind gleich lang“ (Skala 2). Auch die zweite Gruppe ist auf der Skala bei „überwiegend semantisch, etwas

syntaktisch“. Diese Gruppe hatte Gespräche wie „ok ich messe kurz... ah die drei Seiten sind alle gleich lang!“ (Skala 2) und „Der Umfang ist das Ganze von außen. Also müssen wir alle Seiten zusammenrechnen.“ (Skala 2). Team 3 hat ein Mischprofil zwischen 1 und 2, tendiert aber mehr zu 2. Sie hatten Äußerungen wie „sechs Mal der Radius? Aja stimmt, weil die Seite AB ja auch der Radius ist.“ (Skala 2) und „Man kann auch den Inkreis des Sechsecks als weiteren Umkreis eines kleineren Sechsecks verwenden.“ (Skala 1). Dennoch überwiegen mehrheitlich 2er Aussagen. Das letzte Team ist als einziges mit 3 zugeordnet worden. Sie haben Aussagen zum Skalenwert 2 („Wenn die Punkte immer im gleichen Abstand auf dem Kreis liegen, dann sind die Verbindungen auch gleich lang.“), als auch welche zum Skalenwert 4 („Warte haben wir nicht mal gelernt, dass ein gleichseitiges Dreieck immer 60 Grad hat? Deswegen muss es auch hier 60 Grad sein.“).

6.3. Post-Test

Im Post-Test zu Addition und Subtraktion rationaler Zahlen lagen $n=27$ gültige Datensätze vor. Davon waren zehn gültige beim EIS-Prinzip, neun gültige bei der direkten Instruktion und acht gültige beim Entdeckenden Lernen. Die Punktevergabe erfolgte auf einer 7-Punkte Skala (0-7). Die Punkte wurden folgendermaßen aufgeteilt:

- Für die ersten drei Rechnungen gab es jeweils einen Punkt
- Für die Zuordnung gab es insgesamt vier Punkte
- Wenn ein Rechen- oder Vorzeichenfehler gemacht wurde, der Rechenweg dennoch richtig war, wurde nur ein halber Punkt abgezogen. War alles komplett falsch, wurde ein ganzer Punkt abgezogen

Die Gesamtergebnisse unterscheiden sich einer deskriptiven Analyse zufolge zwischen den drei didaktischen Prinzipien. Die EIS-Prinzip-Gruppe erreicht den höchsten Mittelwert $\bar{x} = 6,05$, gefolgt von der Direkten Instruktion mit $\bar{x} = 5,72$ und dem Entdeckenden Lernen mit $\bar{x} = 4,75$. Der Median ist bei EIS und der Direkten Instruktion 6 und beim Entdeckenden Lernen 4. Die Streuung, also die Standardabweichung, ist beim EIS-Prinzip am niedrigsten und beträgt $\sigma \approx 0,83$, gefolgt von der Direkten Instruktion mit $\sigma \approx 1,35$ und dem Entdeckenden Lernen mit $\sigma \approx 1,67$. Die Minimum/Maximum-Werte betragen für das EIS-Prinzip 5-7, für die Direkte Instruktion 4-7 und für das Entdeckende Lernen 3-7. Insgesamt zeigt sich damit eine absteigende Mittelwertreihenfolge $\text{EIS} > \text{Direkte Instruktion} > \text{Entdeckendes Lernen}$ bei gleichzeitig zunehmender Streuung vom EIS-Prinzip über die Direkte Instruktion zum

Entdeckenden Lernen. In der folgenden Tabelle werden alle Daten nochmals in Überblick dargestellt.

Prinzip	Geordnete Liste der Punkte	Mittelwert	Median	Standarda bweichung	Minimum	Maximum
EIS	5; 5; 5; 6; 6; 6; 6,5; 7; 7; 7	6,05	6	0,83	5	7
Direkte Instruktion	4; 4; 4,5; 5; 6; 7; 7; 7; 7	5,72	6	1,35	4	7
Entdeckendes Lernen	3; 3; 4; 4; 4; 6; 7; 7	4,75	4	1,67	3	7

Tabelle 8: Zusammenfassung der Daten zum Thema rationale Zahlen

Für den Post-Test zu Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks standen $n=25$ valide Auswertungen zur Verfügung. Davon waren zehn gültige beim EIS-Prinzip, sieben gültige bei der direkten Instruktion und acht gültige beim Entdeckendes Lernen. Die Punktevergabe erfolgte auf einer 9-Punkte Skala (0-9). Die Punkte sind folgendermaßen aufgeteilt:

- Für die erste Aufgabe gibt es insgesamt 5 Punkte – 2 Punkte für die Konstruktion des Sechsecks, 1 Punkt für den Inkreis, 1 Punkt für die Messung des Inkreisradius, 1 Punkt für die Beschriftung
- Für die zweite Aufgabe gibt es insgesamt 4 Punkte – 2 Punkte für die Konstruktion des Sechsecks, 1 Punkt für den Inkreis, 1 Punkt für die Umfangberechnung

Deskriptiv erzielt die Direkte Instruktion den höchsten Mittelwert $\bar{x} \approx 7,21$, gefolgt vom EIS-Prinzip mit $\bar{x} = 6,95$ und dem Entdeckenden Lernen $\bar{x} = 6,56$. Der Median ist beim EIS-Prinzip 6,5, bei der Direkten Instruktion 8 und beim Entdeckenden Lernen 6. Die Standardabweichung ist beim EIS-Prinzip am niedrigsten mit $\sigma \approx 1,38$, gefolgt von der Direkten Instruktion mit $\sigma \approx 1,52$ und beim Entdeckenden Lernen am höchsten mit $\sigma \approx 1,55$. Die Minimum/Maximum-Werte sind bei allen drei Gruppen genau gleich mit 5-9. Insgesamt zeigt sich bei diesem Thema eine Mittelwertreihenfolge von der Direkten Instruktion $>$ EIS $>$ Entdeckendes Lernen. Die Streuung ist beim EIS-Prinzip am geringsten, beim Entdeckenden Lernen am größten, die Direkte Instruktion liegt dazwischen.

In der nachstehenden Tabelle sind wieder alle Daten übersichtlich dargestellt.

Prinzip	Geordnete Liste der Punkte	Mittelwert	Median	Standarda bweichung	Minimum	Maximum
EIS	5; 6, 6; 6; 6; 7; 7,5; 8; 9; 9	6,95	6,5	1,38	5	9
Direkte Instruktion	5; 6; 6; 8; 8; 8,5; 9	7,21	8	1,53	5	9
Entdeckendes Lernen	5; 5; 5,5; 6; 6; 8; 8; 9	6,56	6	1,55	5	9

Tabelle 9: Zusammenfassung der Daten zum Thema regelmäßiges Sechseck

6.4. Schüler:innen – Interviews

Ausgewertet wurden insgesamt elf Kurzinterviews, drei zum EIS-Prinzip, vier zur Direkten Instruktion und vier zum Entdeckenden Lernen zu den beiden Themen „Addition und Subtraktion rationaler Zahlen“ und „Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks“. Die Transkriptionen befinden sich im Anhang. Die Gespräche dienten ausschließlich der nachträglichen Klärung markierter Episoden aus den Bildschirmaufnahmen, wie zum Beispiel Begründungen, Strategiewechsel, Fehlkonzepte oder auch Aha-Momente. Sie diente nicht der Bewertung der Wirksamkeit einer Bedingung. Die Aussagen wurden offen codiert und anschließend zu thematischen Kategorien gebündelt. Der Fokus lag auf wiederkehrenden inhaltlichen Motiven und ihrer Häufigkeit je Bedingung.

Über beide Themen hinweg traten vier Bereiche besonders hervor. Der erste Punkt waren beim Thema Sechseck zahlreiche Verweise auf die Invarianz des Zirkels und dessen Beziehung von der Seite a des Sechsecks zum Radius r des Umkreises. Die Schüler:innen beschrieben wiederholt, dass das sechsmalige Abtragen der unveränderten Zirkelweite entlang des Umkreises gleiche Seitenlänge erzeugt.

*Lehrperson: In der Bildschirmaufnahme habt ihr im zweiten Kapitel gesagt: „Ah so bekommen wir unser Sechseck! Deswegen zeichnen wir den Kreis!“ *zeigt Videoclip* Was war in diesem Moment euer Aha-Erlebnis?*

Schüler:in 1: Wir, ehm, haben davor nicht wirklich verstanden, wozu der Kreis da ist. Wir dachten, das ist halt einfach ein Kreis zum Zeichnen. Also ich habe erst spät gecheckt, dass wir den Kreis für das Sechseck brauchen. Und dann ist mir klar geworden, dass der Kreis eigentlich bestimmt, wie lang die Seiten vom Sechseck sind.

Lehrperson: Hat euch dieses Verständnis beim Weiterarbeiten geholfen?

Schüler:in 2: Ja, voll. Danach wussten wir, warum wir den Zirkel nicht verstellen dürfen. Vorher haben wir einfach die Schritte gemacht, aber ohne richtig zu wissen, wieso.

Schüler:in 1: Also ich wusste ja schon, dass es ein Sechseck wird und dass man den Zirkel nicht verstellen darf aber für mich war diese Erkenntnis wichtig, um mir die Konstruktion zu merken.

(Interview 9)

Vereinzelt wurde genau dieser Gedanke weitergeführt, wodurch sie dann zur Erkenntnis kamen „den Inkreis des Sechsecks als Umkreis eines kleineren Sechsecks verwenden“ (Interview 10).

*Lehrperson: Ihr habt dann auch formuliert: „Man kann auch den Inkreis des Sechsecks als weiteren Umkreis eines kleineren Sechsecks verwenden.“ *zeigt Videoclip* Wie seid ihr auf diese Idee gekommen?*

Schüler:in 1: Ich hab gemerkt, dass der Inkreis ja eigentlich genauso wieder ein Kreis ist nur mit einem kleineren Radius. Das bedeutet ich könnte genauso wieder innerhalb des kleinen Kreises, also den Inkreis, wieder ein Sechseck hineinzeichnen. Und dann genau dasselbe nochmal. Bedeutet ich kann das eigentlich unendlich oft machen hihi. Nur irgendwann geht das nicht mehr für uns zum Zeichnen. Eigentlich ist das total spannend.

(Interview 10)

Der zweite Punkt war, dass beim Thema der rationalen Zahlen bildhafte Begründungen mit Zahlengerade-, Lift- oder Schuldenmetaphern sehr oft aufgegriffen wurden. Beispiele wären hier „[...] und fährt zwei Stockwerke nach oben... $-1 + 2 = 1$ “ (Interview 2) oder „Nein, weil sie sich von der Bank auch Schulden nimmt...“ (Interview 6).

*Lehrperson: Ihr habt im ersten Kapitel gesagt: „Der Fahrstuhl startet bei -1 und fährt zwei Stockwerke nach oben... $-1 + 2 = 1$.“ *zeigt Videoclip* Wie seid ihr zu dieser Erklärung gekommen?*

Schüler:in 1: Ich stell mir das wirklich wie einen Lift vor. Das macht's einfacher. Und dann haben wir Beispiele hin- und her probiert. Da fand ich dieses ... Ding ... zum rauf und runter ziehen ... wie sagt man zu dem? Ehhh...

Lehrperson: Aso meinst du das Applet? Also diese Anschauung, die ihr im Projekt hattets?

Schüler:in 1: Ja genau. Das war auch sehr praktisch. Vor allem für die Kinder, die das vielleicht zum Anschauen brauchen.

(Interview 2)

*Lehrperson: Ihr habt bei der Geld-Aufgabe gesagt: „Nein, weil sie sich von der Bank auch Schulden nimmt...“ und seid dann bei 38,60 Schulden gelandet. *zeigt Videoclip* Was war hier eure Überlegung? Wie seid ihr dann schlussendlich zu den 62,40 gekommen?*

Schüler:in 1: Ahahah, ich hab da komplett falsch gedacht. Ich habe da nicht mit minus 50 gestartet, sondern mit plus 50. Ich wusste zwar, dass ich dann minus 12,40 rechnen muss aber da hatte ich einen Denkfehler.

Schüler:in 2: Ja, und ich habs im Kopf zuerst anders gerechnet, also ich hab $-50-12,40$ gerechnet, aber war mir dann so unsicher, weil er was anderes hatte. Und er ist normalerweise besser in Mathe als ich. Erst als wir uns dann die Lösung angesehen haben, hab ich ihm erklärt, wieso man so rechnet, weil ich es ja eben schon wusste.

(Interview 6)

Drittens zeigt sich in allen Bedingungen ein Strang kurzer Regel- und Rezeptformeln ohne expliziten Bedeutungsbezug. Zum Beispiel: „minus und minus ergibt plus“ (Interview 3) oder „Umfang ist die Seite mal sechs“ (Interview 8).

*Lehrperson: Ehm, ihr habt bei einer Rechnung gesagt: „Minus und minus ergibt plus, also müsste es $-3/8 + 1/8$ sein, oder?“ *zeigt Videoclip* Was war da euer Gedankengang? *räusper**

Schüler:in 1: Ich glaub ich kann mich daran erinnern, darf ich?

Schüler:in 2: Ja bitte, ich weiß die Situation nicht mehr genau.

Schüler:in 1: Ich war mir nicht sicher, ob man zuerst die Vorzeichen zusammenrechnet oder den Bruch anschaut. Deswegen hab ich nachgefragt. Bei diesem Thema tu ich mir jetzt auch noch schwer.

*Schüler:in 2: Aja ich glaub ich weiß es wieder. *räusper* Ich hab auch nicht genau gewusst, wie das gemeint ist, deswegen haben wir dauernd nachgefragt.*

(Interview 3)

*Lehrperson: Später habt ihr beim Umfang relativ schnell gesagt: „3,5 mal 6 sind 21 cm.“ Ich spiele das kurz für euch ab. *zeigt Videoclip* Wie seid ihr da vorgegangen?*

Schüler:in 1: Das war für mich recht easy, weil ein Sechseck halt sechs gleich lange Seiten hat. Und ehm... wenn eine Seite 3,5 cm ist, dann rechnet man ehm... das einfach mal sechs oder so.

*Schüler:in 2: Ja safe. Ich hab auch nicht lang überlegen müssen. *räusper* Umfang heißt ja alles außen zusammen, und wir wussten schon, dass alle Seiten gleich lang sind.*

(Interview 8)

Das Vierte ist Bedien- und Instruktionsaspekte, wie das korrekte Auslösen von Eingaben oder Unsicherheiten zur erwarteten Schrittfolge. Die Konstruktion des Sechsecks mit dem Zirkel ist hier besonders oft vorgekommen.

Lehrperson: Im dritten Kapitel habt ihr dann fast alles selbstständig gezeichnet und nur beim vierten Schritt kurz in die Lösung geschaut. Wie war das für euch?

Schüler:in 1: Eigentlich ok. Wir wollten nur sicher sein, dass wir keinen Schritt falsch machen. Und dann ist uns ehm aufgefallen, dass wir noch was vergessen haben und das war eben dieser ehm Inkreis glaub ich.

Schüler:in 2: Ja, wir wussten schon, was zu tun ist, aber wir wollten sicher gehen, dass wir es nicht nochmal neu zeichnen müssen. Es ist auch an sich nicht schwierig gewesen.

(Interview 9)

Semantische Begründungen beim Entdeckenden Lernen erscheinen besonders präsent, wie beim Sechseck Thema, wo die Schüler:innen Seite-Radius Zusammenhänge klar benennen und gelegentlich weiterdenken müssen. Beim EIS-Prinzip dominieren anschauliche, ikonische Bezüge. Das sieht man vor allem bei den rationalen Zahlen im Sprachfeld der Zahlengerade und der Gegenüberstellung von der linken und rechten Seite zur Null. In der Direkten Instruktion sind Rezept-Formulierungen und Merksätze, wie Klammer- oder Umfangsregeln, am häufigsten vertreten. Außerdem berichten die Schüler:innen Aha-Momente zur Rolle des Umkreises oder zur Notwendigkeit, die Zirkelweite unverändert zu lassen. Zur Anschauung genügen hier Zitate wie „sechs Mal der Radius ... weil die Seite AB auch der Radius ist“ und

„wenn du Schulden hast und dir noch was ausborgst, hast du mehr Schulden“. Diese Beispiele spiegeln die jeweilige Motivlage, ohne über den Einzelfall hinaus interpretiert zu werden.

*Lehrperson: Ihr habt auch mehrmals nachgefragt, ob Radius und Seite dasselbe sind. Hier sind die Beispiele. *zeigt Videoclip* Warum war das unklar?*

Schüler:in 2: Weil wir nicht gewusst haben, ob man den Zirkel verstellen darf oder nicht. Das war für uns der Aha-Moment. Zumindest für mich.

Schüler:in 1: Genau, erst später haben wir verstanden, dass man ihn eben nicht verstellen soll, weil sonst die Seiten nicht gleich lang sind.

Lehrperson: Obwohl bei der Anleitung stand, dass man ihn nicht verstellen soll?

Schüler:in 1: Ja ich glaub wir haben das einfach nicht realisiert, was genau das jetzt bedeutet.

(Interview 11)

Zusammenfassend stützen die Interviews die Videobefunde hinsichtlich typischer Denkweisen, machen situative Stolperstellen sichtbar und liefern eine deskriptive Einordnung der Sprachprofile je Bedingung. Die Entdeckendes-Lernen-Interviews betonen häufiger das Warum, die Direkte-Instruktion-Interviews häufiger das Wie und die EIS-Prinzip-Interviews verbinden Anschaulichkeit mit knappen Begründungen.

7. Interpretation

7.1. Rückbezug auf die Forschungsfrage

Ziel der vorliegenden Studie war es, zu untersuchen, wie GeoGebra-Books konzipiert werden müssen, um im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten. Die Ergebnisse aus Videodaten, Schüler:innen-Interviews und Post-Tests erlauben eine differenzierte Betrachtung der drei didaktischen Ansätze Direkte Instruktion, EIS-Prinzip und Entdeckendes Lernen, die im Folgenden entlang der drei Zielkategorien diskutiert werden.

7.2. Konzeptuelles Verständnis

Nochmal kurz zusammengefasst ist das konzeptuelle Verständnis die Fähigkeit, fachliche Konzepte, Prinzipien und Zusammenhänge inhaltlich zu durchdringen und flexibel auf neue Situationen anzuwenden. Die Schüler:innen sollen die dahinterliegende Beziehung und Bedeutung der Zahlen und Strukturen verstehen und nicht nur Rechenverfahren anwenden (Ewerhardy et al., 2012; Schneider et al., 2021).

Hier zeigen die Ergebnisse deutliche Unterschiede zwischen den drei didaktischen Ansätzen. Durch die Analyse der Bildschirm- und Audioaufnahmen ist klar zu erkennen, dass beim Entdeckenden Lernen überwiegend semantische Begründungen auftraten und beim EIS-Prinzip sowohl semantisch als auch syntaktische Diskussion stattfanden, während in der Direkten Instruktion häufiger syntaktische und regelhafte Aussagen dominierten. Das deckt sich auch gut mit der Literatur, die besagt, insbesondere ikonische und enaktive Zugänge die Ausbildung konzeptueller Vorstellungen unterstützen, während rein symbolische Darstellungen eher zur Anwendung von Rechenrezepten führen (Bruner, 1971).

Das kann auch gut beim Thema Konstruktion des regelmäßigen Sechsecks gesehen werden, indem die Schüler:innen beim Entdeckenden Lernen und beim EIS-Prinzip ihre Vorgehensweisen über Bedeutungszusammenhänge erklären. Zum Beispiel die Beziehung zwischen dem Radius r und der Seitenlängen a oder die Invarianz der Zirkelweite, was darauf hindeutet, dass diese geometrischen Eigenschaften in diesem Zusammenhang verstanden wurden und nicht nur einfach angewendet wurden. Die Schüler:innen-Interviews stützen dieses Bild. Die Gruppen beschrieben ihre Überlegungen nochmals mit Bezug auf „gleich lange Seiten“ (Interview 8, 10), „den nicht verstellten Zirkel“ (Interview 9, 10, 11) oder das „sechsmalige Abtragen“ (Interview 10) entlang des Kreises. Diese Aussagen sprechen für die

semantische Ebene und für ein vertieftes konzeptuelles Verständnis. In der Direkten Instruktion zeigten sich vermehrt regelhafte Formulierungen, wie zum Beispiel „Umfang ist Seite mal sechs“ oder „minus und minus ergibt plus“. Diese Aussagen wurden eher selten weiter begründet, dennoch korrekt angewendet. Das spricht eher für ein prozedurales Vorgehen, bei dem Regeln im Vordergrund stehen.

Insgesamt zeigen diese Ergebnisse, dass GeoGebra-Books besonders förderlich für das konzeptuelle Verständnis sind, wenn sie Bedeutungsbezüge explizit anregen und weniger auf formale Regeln fokussieren.

7.3. Kognitive Aktivierung

Zum Merkmal kognitive Aktivierung zeigen die Ergebnisse deutliche Unterschiede zwischen den didaktischen Ansätzen. Die kognitive Aktivierung ist zusammenfassend ein zentrales Konzept, welches darauf abzielt, die Schüler:innen zu tiefem Nachdenken, Verstehen und eigenständigem Problemlösen anzuregen. Es wird aktiv Wissen konstruiert, anstatt es nur passiv aufzunehmen (Fauth & Leuders, 2022; Pauli et al., 2008).

In dieser Studie wurde die kognitive Aktivierung über mehrere Indikatoren erfasst. Zum einen bei der Video- und Audioanalyse die Verweildauer einzelner Aufgabenabschnitte, die Anzahl und Art des Nachfragens, sowie auch die Redebeiträge innerhalb der Teams und beobachtete Strategiewechsel.

Beim Entdeckenden Lernen traten erhöhte Sprechanteile und intensive Interaktionen innerhalb der Gruppen auf. Bis auf eine Ausnahme sprach jedes Team der Entdeckendes-Lernen-GeoGebra-Books über der Hälfte der Bearbeitungszeit miteinander. Der größte relative Anteil betrug 78,09%. Die Schüler:innen diskutierten viel häufiger ihre Lösungsansätze miteinander, stellten Vermutungen auf und überprüften diese auch gemeinsam. Das hatte jedoch auch den Nachteil, dass sie eine längere Bearbeitungszeit einzelner Aufgaben in Kauf nehmen mussten, sowie auch eine erhöhte Anzahl an Nachfragen. Die lange Bearbeitungszeit führte auch dazu, dass pro Thema jeweils nur eine Gruppe das GeoGebra-Book beenden konnte. Dennoch ist das wenig überraschend, da in der Literatur auch verdeutlicht wird, dass diese Methode viel Zeit kostet und für unerfahrene Schüler:innen meist schlechtere Erfolgsquoten bedeutet (Kollösche, 2017). Das Nachfragen bezog sich überwiegend auf das Aufgabenverständnis oder auf Unsicherheiten im Vorgehen. Das deutet zwar auf eine hohe, aber wenig gesteuerte kognitive Aktivierung hin, aber diese Offenheit, die beim Entdeckenden Lernen entsteht, erzeugt zusätzliche kognitive Belastungen, wodurch auch des Öfteren mehr Probleme entstehen

können. Offene Lernsettings wie das Entdeckende Lernen besitzen ein hohes Aktivierungspotenzial, dieses muss jedoch stärker gesteuert werden, um Überforderung zu vermeiden (Kollosche, 2017).

Beim EIS-Prinzip zeigten sich vereinzelt auch erhöhte Aktivierungsmerkmale, dennoch eher in einer strukturierteren Form. Die Schüler:innen waren hauptsächlich selbstständig, griffen dennoch auf die ikonischen Darstellungen und die vorgegebenen Hinweise zurück. Dadurch verliefen die Diskussionen untereinander gezielter. Das passt auch gut mit der Literatur zum EIS-Prinzip zusammen, welche sagt, dass Jugendliche eher auf ikonische und symbolische Darstellungen zurückgreifen (Reiss & Hammer, 2021). Diese GeoGebra-Books wurden auch deutlich öfter abgeschlossen, wobei die Bearbeitungszeiten insgesamt im mittleren Bereich lagen. Das deutet auf eine ausgewogene Balance zwischen Aktivität und Struktur hin. Nach Lauter (2005) fördert dieser Wechsel der drei Ebenen die kognitive Entwicklung der Schüler:innen. Das EIS-Prinzip scheint hier eine vermittelnde Rolle einzunehmen, indem es Eigenaktivität ermöglicht, gleichzeitig aber durch strukturierende Elemente lenkend wirkt. Sehr überraschend ist dennoch das wiederholte Nachfragen bei beiden Büchern, mit einem wiederholten Nachfragen zu inhaltlichen Themen. Das könnte auch daran liegen, dass sie vergleichsweise mehr Applets beinhalten als die anderen beiden Prinzipien. Diese Klasse hatte davor schon mit GeoGebra-Books gearbeitet, es waren dennoch viele neue Applet-Arten dabei.

Nicht überraschend fiel die kognitive Aktivierung bei der Direkten Instruktion eher geringer aus. Die Gespräche untereinander fielen eher kurz aus, und das wirkte sich auch auf die Redebeiträge aus. Nur eine einzige Gruppe schaffte es, über der Hälfte der Zeit miteinander zu kommunizieren. Ansonsten liegen alle Aufnahmen zwischen 30 und 40 Prozent. Es fällt auch auf, dass die Zweiergruppen beim Konstruieren noch weniger miteinander gesprochen haben, als bei den Rechnungen mit Rationalen Zahlen. Eine Gruppe schaffte es sogar, nur 23 Prozent der Gesamtzeit miteinander zu kommunizieren. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte dementsprechend auch zügiger. Auch wenn nur zwei Gruppen beim ersten GeoGebra-Book fertig geworden sind, sind die meisten im letzten Kapitel bis zu den letzten beiden Aufgaben vorangekommen. Auch beim Thema regelmäßiges Sechseck sind alle Gruppen bis zum letzten Kapitel gekommen. Nachfragen traten insgesamt seltener auf und bezogen sich meist auf formale Aspekte oder die Bestätigung ihrer Ergebnisse. Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Schritt-für-Schritt Anleitung Orientierung geboten hat und weniger Anlass zu vertiefender Auseinandersetzung und Diskussion zu den einzelnen Themen. Obwohl Quittenbaum (2016) auf einige Studien verwies, in der die kognitive Fähigkeit bei der direkten Instruktion positiv wirkte, zeigte es sich in dieser Studie eher weniger.

7.4. Lernwirksamkeit

Unter Lernwirksamkeit wird der empirisch nachweisbare Lernzuwachs verstanden, der durch eine konkrete Unterrichtsmaßnahme hervorgerufen wird. Dabei werden Veränderungen im Wissen, im Können und im Verständnis der Schüler:innen erfasst, die ursächlich auf das Lehr-Lern-Angebot zurückzuführen sind (Brandl, 2016).

Die Lernwirksamkeit wurde in dieser Studie anhand der Richtigkeit der Aufgabenbearbeitung während der Intervention, sowie die Ergebnisse der Post-Tests erfasst. Durch diese beiden Indikatoren können Aussagen über kurzfristige Lernerfolge erfasst werden, sowohl bei Addition und Subtraktion rationaler Zahlen als auch bei der Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks.

Beim Thema Addition und Subtraktion rationaler Zahlen erzielte das EIS-Prinzip die höchste durchschnittliche Punktzahl im Post-Test. Knapp danach kommt die Direkte Instruktion. Das Entdeckende Lernen wies den geringsten Mittelwert und die größte Streuung der Ergebnisse auf. Auch während der Bearbeitung der GeoGebra-Books zeigte sich beim EIS-Prinzip eine geringere Fehlerquote als bei den anderen beiden Methoden. Auch wenn bei allen die Grundfehlerquelle Rechen- und Flüchtigkeitsfehler waren, zeigen sich bei der Direkten Instruktion die höchste Anzahl davon. Das lag vor allem am zu schnellen Handeln oder am Übersehen von Vorzeichen. Beim Entdeckenden Lernen zeigten sich die meisten Fehler, nicht nur Rechen- oder Flüchtigkeitsfehler, sondern auch Probleme beim Aufgabenverständnis. Das alles zeigte nun wieder, dass besonders bei inhaltlich anspruchsvollen Zahlvorstellungen eine strukturierte Abfolge von Repräsentationsebenen lernwirksam sein kann.

Im Bereich Konstruktion eines regelmäßigen Sechsecks zeigte sich hingegen ein anderes Muster. Die Direkte Instruktion erzielte hier im Mittelwert als auch im Median die höchsten Post-Test-Ergebnisse. Das EIS-Prinzip liegt knapp darunter. Dennoch hat das EIS-Prinzip die geringere Streuung im Vergleich zur Direkten Instruktion. Das Entdeckende Lernen wies hier ebenso sowohl einen geringeren Mittelwert als auch eine größere Streuung im Vergleich zu den anderen Methoden der Ergebnisse des Post-Test auf. Auch bei der Bearbeitung des GeoGebra-Books hatte die Gruppe der Direkten Instruktion verhältnismäßig mehr Aufgaben richtig gelöst und eine leicht geringere Fehlerquote. Dennoch liegt das EIS-Prinzip knapp dahinter. Das Entdeckende Lernen schaffte trotz geringer Abschlussquote eine höhere Fehleranzahl. Bei der Gruppe lag es sowohl an Rechen- und Flüchtigkeitsfehler als auch an Problemen beim Aufgabenverständnis. Diese Befunde deuten insgesamt darauf hin, dass bei klar strukturierten,

geometrischen Konstruktionsaufgaben eine explizite Anleitung kurzfristig besonders lernwirksam sein kann.

Es konnte nun beobachtet werden, dass über beide Themen hinweg keiner der untersuchten Ansätze eindeutig durchgängig überlegen ist. Es zeigte die Direkte Instruktion, als auch das EIS-Prinzip ähnliche Ergebnisse im Post-Test. Es kann nur gedeutet werden, dass das Entdeckende Lernen sowohl beim ersten Teil als auch beim zweiten Teil am schlechtesten abgeschnitten hat. Die Lernwirksamkeit scheint stark vom Zusammenspiel zwischen didaktischem Prinzip und Inhaltsbereich abzuhängen. Das EIS-Prinzip schaffte bei den Rationalen Zahlen, also einem algebraischen Themengebiet, besonders günstige Lernbedingungen, während die Direkte Instruktion beim Thema Sechseck, ein geometrisches Thema, sich als effizienter erwies. Die Literatur verweist darauf, dass die Direkte Instruktion generell eine hohe Lernwirksamkeit aufzeigt (Hattie, 2009). Das deckt sich sehr gut mit den Ergebnissen dieser Studie. Sowohl bei den Aufgaben während des GeoGebra-Books als auch beim Post-Test zeigte die Gruppe Direkte Instruktion eine hohe Erfolgsquote. Das Entdeckende Lernen zeigte zwar Potenzial für eine tiefere Auseinandersetzung mit den jeweiligen Themen, ging jedoch mit heterogeneren und teilweise geringeren kurzfristigen Lernerfolgen einher. Somit legen die Ergebnisse nahe, dass eine hohe kognitive Aktivierung nicht automatisch mit hoher kurzfristiger Lernwirksamkeit gleichzusetzen ist.

7.5. Vergleich der drei didaktischen Ansätze

Vergleicht man nun die drei untersuchten Ansätze, also Direkte Instruktion, EIS-Prinzip und Entdeckendes Lernen, wird klar, dass alle drei unterschiedliche Stärken in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit aufweisen. Diese Ergebnisse sprechen nicht für eine Überlegenheit eines einzelnen Ansatzes, sondern eine Abhängigkeit vom Inhalt.

Die Direkte Instruktion ist vor allem bei klar strukturierten, prozedural geprägten Inhalten lernwirksam. Das zeigte sich in dieser Studie gut beim Themenbereich des regelmäßigen Sechsecks, nachdem hier die Schüler:innen die höchsten Post-Test-Ergebnisse, sowie Erfolgsquote während der Bearbeitung des GeoGebra-Books erzielt haben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte effizient, also ohne lange Diskussionen und mit vergleichsweise geringer Streuung. Studien wie Hattie (2009) verweisen darauf, dass diese Methode bei klar strukturierten Inhalten zu hohen kurzfristigen Lernerfolgen führen kann. Zudem war hier die kognitive Aktivierung geringer ausgeprägt, was sich in der reduzierten Sprechanteilen und einer stärkeren Orientierung an vorgegebenen Rechenschritten und Merksätzen widerspiegelte.

Dadurch unterstützt die Direkte Instruktion den sicheren Vollzug bekannter Verfahren. Das bedeutet, Schüler:innen können Regeln, Schritte oder Algorithmen sicher und korrekt anwenden, wie zum Beispiel „minus und minus ergibt plus“ oder „Umfang ist gleich sechs mal die Seite a“. Das ist in den Ergebnissen auch sichtbar, die hohe Punkteanzahl bei den Post-Tests, die wenigen Fehler, die kurze Bearbeitungszeit und den vielen syntaktischen Aussagen. Das bedeutet dennoch nicht, dass kein tieferes Verständnis vorhanden ist, wie bei den anderen zwei Ansätzen. Die Schüler:innen hinterfragen die Regeln weniger, erklären seltener das *Warum* und sie verbinden Inhalte seltener mit Vorstellungen oder Bedeutungen. Das ist in dieser Studie zu sehen, in dem weniger semantische Aussagen, weniger Diskussionen und weniger Nachfragen vorkamen. Im Vergleich zum EIS-Prinzip oder zum Entdeckendem Lernen wird weniger begrifflich argumentiert.

Das EIS-Prinzip zeigte sich in fast allen Bereich sehr positiv. Es zeigte seine Stärken vor allem im Themenbereich der Addition und Subtraktion rationaler Zahlen, in dem es die höchsten Post-Test-Ergebnisse und die höchste Erfolgsquote während der Bearbeitung des GeoGebra-Books erzielte. Zudem zeigten die Ergebnisse eine vergleichsweise geringe Streuung. In den qualitativen Daten zeigte sich insgesamt ein gemischtes Profil, da der Skalenwert im Mittel bei 3 liegt. Neben semantischen Begründungen, die sich auf anschauliche und ikonische Vorstellungen stützen, traten auch wiederholt syntaktische, regelhafte Formulierungen auf. Diese Befunde deuten darauf hin, dass das EIS-Prinzip besonders geeignet ist, konzeptuelle Vorstellungen aufzubauen, ein tieferes Verstehen und eigenständiges Problemlösen anzuregen und gleichzeitig stabile Lernergebnisse über unterschiedliche Leistungsniveaus hinweg zu fördern. Das bestätigt die Annahmen des EIS-Prinzip nach (Berger, 2017), in dem gesagt wird, dass Lernen mathematischer Inhalte besonders dann begünstigt wird, wenn enaktive, ikonische und symbolische Repräsentationen sinnvoll aufeinander bezogen sind.

Für die kognitive Aktivierung weist das Entdeckende Lernen das größte Potenzial auf, sowohl bei den rationalen Zahlen als auch beim regelmäßigen Sechseck. Die Schüler:innen waren nicht nur stark in Diskussionsprozesse eingebunden, sondern reflektierten auch ihre Lösungswege sehr intensiv, wodurch längere Bearbeitungszeiten, vermehrtes Nachfragen und größere Streuungen bei den Post-Test-Ergebnissen folgten. In der Literatur wird wiederholt auf eine hohe kognitive Aktivierung hingewiesen, welche jedoch auch mit dem Risiko zur Überforderung und Ausbildung von Fehlvorstellungen verbunden sind. Diese Ergebnisse legen nahe, dass bei nicht ausreichendem Vorwissen und nicht hoher Selbststeuerungsfähigkeit es zu ineffizienten Lernprozessen und uneinheitlichen Ergebnissen führen kann. Das bedeutet nicht, dass die Schüler:innen nichts gelernt haben, da die Ergebnisse des Post-Test dennoch

zufriedenstellend sind und einige sehr gut abgeschnitten haben. Das kann nur darauf hinweisen, dass diese Methode nicht für jeden geeignet ist und dass eventuell die Themen, die gefragt wurden, sich nicht ideal für diese Methode erweisen.

Damit lassen sich gut die Hypothesen von Beginn beantworten. Die Hypothese H1 „Entdeckendes Lernen über GeoGebra-Books fördert die kognitive Aktivierung der Schüler:innen stärker als die anderen beiden Ansätze, führt aber häufiger zu Fehlvorstellungen und geringerer Lernwirksamkeit.“ wird durch die Ergebnisse der vorliegenden Studie größtenteils bestätigt.

Bezüglich der kognitiven Aktivierung zeigen, wie schon oben erwähnt, die Video- und Audioanalysen eindeutig, dass das Entdeckende Lernen mit einer intensiven Auseinandersetzung der Schüler:innen einhergeht. Im Vergleich zu den anderen beiden Ansätzen wiesen die Gruppen im Entdeckenden Lernen einen höheren relativen Sprechanteil, längere Bearbeitungszeiten einzelner Aufgaben, sowie eine größere Anzahl an inhaltlichen Fragen auf. Die Schüler:innen stellten öfters Vermutungen auf, überprüfen diese und besprachen ihre Lösungsansätze miteinander. All diese Eigenschaften sprechen für eine hohe kognitive Aktivierung. Die Aussagen der Schüler:innen lag überwiegend im semantischen Bereich, da die Begründungen oft über anschauliche Vorstellungen erfolgten. Dennoch traten auch vermehrt Unsicherheiten und Fehlvorstellungen auf. Das zeigte sich vor allem bei der Analyse der Videos, indem Schüler:innen falsche Schlussfolgerungen gezeigt haben sowie in den Schüler:innen-Interviews. Hinsichtlich der Lernwirksamkeit ergibt sich durch die Post-Test-Ergebnisse ein heterogenes Bild, einzelne Schüler:innen erzielten eine hohe Punktzahl, dennoch lag der Durchschnitt unter jenem der Direkten Instruktion und des EIS-Prinzips. Außerdem zeigt es die größte Streuung, was darauf hindeutet, dass das Entdeckende Lernen stark vom individuellen Vorwissen, sowie die Fähigkeit zur Selbststeuerung abhängig ist. Dadurch bedeutet die Methode nicht für alle Schüler:innen einen Lernerfolg. Es lässt sich zusammenfassen, dass H1 in Bezug auf die kognitive Aktivierung und Fehlvorstellungen bestätigt wird, dennoch sich die Annahme zu Lernwirksamkeit differenziert und kontextabhängig darstellt.

Die Hypothese H2 „Direkte Instruktion in GeoGebra-Books zeigt kurzfristig höhere Lernerfolge, führt jedoch zu geringerer kognitiver Aktivierung und schwächerem konzeptuellem Verständnis im Vergleich zum EIS-Prinzip.“ wird in dieser Studie weitgehend bestätigt.

Wie oben schon erwähnt, zeigten die Post-Test-Ergebnisse, dass die Direkte Instruktion beim Thema regelmäßiges Sechseck die höchsten durchschnittlichen Punktwerte erzielte. Während der Bearbeitung des GeoGebra-Books waren die meisten Gruppen sehr effizient mit hoher Anzahl korrekt gelöster Aufgaben und kurzer Bearbeitungszeiten. Das spricht dafür, dass die Direkte Instruktion zu hohen kurzfristigen Lernerfolgen führen kann, besonders bei klar strukturierten geometrischen Inhalten. Dennoch hat auch EIS-Prinzip hohe Werte aufweisen können und hat beim Thema Addition und Subtraktion rationaler Zahlen besser abschneiden können als die Direkte Instruktion. Zudem deuten die Ergebnisse auf eine geringe kognitive Aktivierung, durch die niedrigeren relativen Sprechanteile und das weniger Nachfragen als die anderen beiden Ansätze. Die Interaktionen beschränkte sich meist auf kurze Absprachen oder Bestätigung der Rechenschritte. Das deutet sehr für eine ausführungsorientierte Lernaktivität. Auch beim konzeptuellen Verständnis zeigen sich Unterschiede im Gegensatz zum EIS-Prinzip. Die verbalen Äußerungen ergaben in der Direkten Instruktion überwiegend syntaktische Skalenwerte. Schüler:innen griffen häufig auf Merksätze oder feste Vorgehensweisen zurück, ohne diese weiter zu begründen. Auch wenn vereinzelt Aha-Momente aufgetreten sind, waren es insgesamt dennoch weniger als im EIS-Prinzip. Zusammenfassend bestätigen die Ergebnisse H2 weitgehend, da die Direkte Instruktion teilweise lernwirksamer bei kurzfristigen Leistungsergebnissen ist, jedoch nicht eindeutig. Was dennoch einstimmig mit H2 ist, dass im Vergleich zum EIS-Prinzip eine geringere kognitive Aktivierung sowie auch ein weniger ausgeprägtes konzeptuelles Verständnis besteht.

Die Ergebnisse der Studie trägt ebenso zur aktuellen Diskussion um digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht bei. Die Studie zeigt, dass GeoGebra-Books je nach didaktischer Gestaltung sehr unterschiedliche Lernprozesse anstoßen können. Es ist wichtig zu erwähnen, dass die digitalen Werkzeuge an sich nicht entscheidend für den Lernerfolg sind, sondern dessen didaktische Einbettung, also die Gestaltung dieser Bücher. Mithilfe von Ansätzen wie dem EIS-Prinzip kann das Potenzial digitaler Werkzeuge gezielt genutzt werden, indem man Struktur mit Eigenaktivität verbindet.

7.6. Limitationen der Studie

Die erste Einschränkung dieser Studie war die limitierte Anzahl an Studienteilnehmer:innen. Insgesamt wurden 29 Schüler:innen in 14 Gruppen an der Studie herangezogen. Obwohl die drei didaktischen Ansätze bewusst ausgewählt und systematisch umgesetzt wurden, ist die Anzahl der untersuchten Gruppen vergleichsweise gering. Das lag vor allem an zeitlichen Gründen, sowie auch an möglicher Kapazität. Es ist schwierig andere Klassen zu finden, deren

unterrichtende Lehrperson mit diesem Aufwand einverstanden wäre. Durch die Einschränkung des Stichprobenumfangs, lassen sich nicht so genaue Werte treffen, als wenn die Studie mit mehreren Klassen bzw. mehrere Schulen durchgeführt worden wäre.

Eine weitere Limitation war die Entwicklung der GeoGebra-Books selbst. Diese Bücher wurden an sich nur für diese Studie erstellt und an die jeweiligen didaktischen Prinzipien angepasst. Die Einschätzung, ob das GeoGebra-Book in seiner Struktur, Aufgabenstellung und Unterstützungstiefe dem jeweiligen didaktischen Prinzip komplett entspricht, bleibt subjektiv zu bewerten. Indem es zum Beispiel für das Entdeckende Lernen keine Anleitung zum Erstellen von Aufgaben gibt, musste viel mehr recherchiert werden. Ebenso war es im Vorfeld schwierig abzuschätzen, ob der Umfang der GeoGebra-Books für die geplante Zeit angemessen war oder ob es zu umfangreich gestaltet wurde.

Während der Durchführung zeigte sich, dass vor allem beim Entdeckenden Lernen einzelne Gruppen deutlich mehr Zeit benötigten als ursprünglich geplant. Das liegt daran, dass teilweise intensive Diskussionen stattfanden, die zwar auf eine hohe kognitive Aktivierung hinweisen, jedoch zu Zeitmängeln führten. Aus diesem Grund konnte nicht jede Gruppe alle Aufgaben vollständig bearbeiten, wodurch sich die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zwischen den drei Ansätzen zusätzlich erschwerte. Ebenso gab es einige technische und organisatorische Schwierigkeiten, wodurch sich ebenso wieder die Arbeitszeit verkürzte. Auch wenn den Kindern davor schon die Einführung in die Bildschirmaufnahme OBS gezeigt wurde, gab es dennoch am Projekttag selbst viele Fragen dazu. Indem ich alleine in dieser Klasse unterrichtete, kam es insbesondere zu Beginn der Einheit zu Wartezeiten, wenn mehrere Gruppen gleichzeitig Unterstützung benötigten. Dadurch wurde ebenso die verfügbare Arbeitszeit beeinflusst.

Bei erneuter Betrachtung, sowie auch der Analyse der GeoGebra-Books, ist für mich festzuhalten, dass sie in ihrer aktuellen Form für eine Unterrichtsstunde teilweise zu umfangreich gestaltet waren. Eine Reduktion des Umfangs, wie auch eine Fokussierung auf zentrale Lerninhalte würden die unterrichtspraktische Tauglichkeit erhöhen. Das könnte zu vergleichbaren Bearbeitungszeiten führen. Für zukünftige Studien, die ähnliches erforschen, wäre es daher sinnvoll, kürzere, klarer fokussierte GeoGebra-Books einzusetzen.

Trotz dieser Limitationen liefern diese Ergebnisse wertvolle Einblicke in die Wirkung unterschiedlicher didaktischer Ansätze in einer digitalen Lernumgebung. Durch die Reflexion können neue Ansatzpunkte für eine Weiterentwicklung zukünftiger Untersuchungen und für eine praxisnahe Gestaltung GeoGebra-Books im Mathematikunterricht umgesetzt werden.

8. Fazit

Ziel dieser Masterarbeit war es zu untersuchen, wie GeoGebra-Books konzipiert werden müssen, um im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I einen hohen didaktischen Wert in Bezug auf konzeptuelles Verständnis, kognitive Aktivierung und Lernwirksamkeit zu entfalten. Dafür wurden die drei didaktischen Ansätze die Direkte Instruktion, das EIS-Prinzip und das Entdeckendes Lernen anhand Video- und Audioanalysen, Schüler:innen-Interviews, sowie Post-Tests vergleichend untersucht.

Eine zentrale Erkenntnis der Arbeit besteht darin, dass kein einzelner Ansatz in allen Dimensionen durchgängig überlegen und geeignet ist. Vielmehr wird deutlich, dass die Wirksamkeit von GeoGebra-Books sehr von der Verbindung zwischen didaktischem Prinzip und Inhaltsbereich abhängt. Genauso ist Strukturierung ein zentrales Qualitätsmerkmal digitalen Lernens. Vor allem bei neuen und schwierigeren Themen benötigen Schüler:innen Orientierung, um digitale Werkzeuge lernwirksam nutzen zu können. Die unterschiedlichen Ansätze haben jeweils spezifische Stärken, die im Mathematikunterricht gezielt genutzt werden können.

Die Direkte Instruktion erweist sich bei klar strukturierten, geprägten Inhalten als lernwirksam und effizient. Sie führt zu hohen kurzfristigen Lernerfolgen. Für den Aufbau begrifflicher Vorstellungen sind anschauliche und bedeutungsorientierte Zugänge notwendig. Hier zeigte sich das EIS-Prinzip als sehr geeignet, da es enaktive, ikonische und symbolische Ebenen systematisch miteinander verbindet. Die Schüler:innen können dadurch mathematische Zusammenhänge anwenden, erklären und begründen. Für den Unterricht bedeutet dies, dass GeoGebra-Books dann vorteilhaft sind, wenn man bewusst Repräsentationswechsel anregen will und nicht nur auf symbolische Darstellungen fokussieren will. Das Entdeckende Lernen zeigte in der Studie ein hohes Potenzial zur kognitiven Aktivierung, da die Schüler:innen durch die intensiven Diskussionen und Hypothesenbildungen stark in den Lernprozess eingebunden sind. Zugleich stellte sich auch heraus, dass ohne ausreichende Struktur es zu Unsicherheiten und Zeitproblemen führen kann. Für den Unterricht kann gesagt werden, dass entdeckende Phasen zwar didaktisch wertvoll sind, jedoch gezielt scaffolded werden muss, wie durch Leitfragen oder Kontrollmöglichkeiten.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich drei konkrete Empfehlungen für die Gestaltung und den Einsatz von GeoGebra-Books im Mathematikunterricht ableiten:

1. GeoGebra-Books müssen klar strukturiert und zeitlich realistisch gestaltet sein. Sind die Bücher zu umfangreich, kann es dazu führen, dass Schüler:innen den Arbeitsauftrag nicht vollständig bearbeiten können. Sind sie kürzer konzipiert erhöhen sie die Unterrichtstauglichkeit und eine bessere Vergleichbarkeit der Lernprozesse.

2. Nachdem keiner der Ansätze eindeutig überlegen war, empfiehlt sich eine didaktische Kombination der untersuchten Ansätze. Eine Mischung aus der Direkten Instruktion und dem Entdeckenden Lernen wurde schon in der Literatur als möglich erwähnt und wäre auf jeden Fall eine Möglichkeit auszuprobieren. Direkte instruktionale Elemente können hier gezielt eingesetzt werden, um das Grundwissen aufzubauen, damit dann entdeckende Phasen zur Vertiefung und Aktivierung genutzt werden können. Genauso bietet das EIS-Prinzip eine tragfähige Grundlage, um strukturierende Elemente mit eigenaktiven Phasen zu verbinden.

3. Digitale Lernumgebungen können bewusst Reflexionsanlässe integrieren, also Aufgaben so zu gestalten, sodass Schüler:innen dazu angeregt sind ihre Vorgänge zu begründen oder ihre Zusammenhänge zu erklären. Das fördert das konzeptuelle Verständnis und unterstützt nachhaltige Lernprozesse.

Diese Studie gibt mehrere Anknüpfungspunkte für die zukünftige Forschung. Aufgrund des begrenzten Stichprobenumfangs und der kurzen Interventionsdauer wäre es für die zukünftige Forschung sinnvoll, die angegebenen didaktischen Ansätze in größeren Stichproben und über einen längeren Zeitraum hinweg zu analysieren. Zusätzlich müsste auch jede Schulstufe der Sekundarstufe I getestet werden, um eindeutig etwas darüber sagen zu können. Es empfiehlt sich ebenso Follow-up-Tests durchzuführen. Diese können Aufschluss darüber geben, inwiefern sich die Lernwirksamkeit langfristig zwischen den Gruppen unterscheidet.

Interessant wäre es auch zu forschen, ob diese GeoGebra-Books genauso in der Sekundarstufe II eingesetzt werden können. Hier kann hinterfragt werden, ob solche digitalen Werkzeuge wie GeoGebra-Books überhaupt einen Sinn haben und welche konkrete Umsetzung hier nötig wäre.

Genauso sinnvoll wäre es die Ansätze nicht einzeln zu betrachten, sondern als Kombination. Dafür könnte die Anzahl der GeoGebra-Books erhöht werden und zu einem Thema nicht nur die drei zu dem jeweiligen Ansatz, sondern auch eine Mischung aus Direkter Instruktion und Entdeckenden Lernen, oder EIS-Prinzip mit Direkter Instruktion. Die Entwicklung und empirische Überprüfung adaptiver GeoGebra-Books, die je nach Lernstand zwischen instruktionalen und entdeckenden Elementen variieren, stellt genauso ein wichtiges Forschungsfeld dar.

Diese Arbeit zeigt abschließend ein hohes Potenzial für GeoGebra-Books in der Sekundarstufe I, jedoch nur dann, wenn sie didaktisch reflektiert eingesetzt werden können. Digitale Werkzeuge sind nicht per se lernwirksam, sondern können erst durch die bewusste Verbindung von Technologie und Didaktik zu nachhaltigen Lernprozessen beitragen. Somit leistet diese Masterarbeit einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung eines lernwirksamen, kompetenzorientierten und digital unterstützten Mathematikunterrichts.

Literaturverzeichnis

- Amacker, V., Wilhelm, M., Bollmann, S. S., & Brovelli, D. (2024). Der Einfluss multimedialer Versuchsanleitungen auf die Lernwirksamkeit und die Selbstwirksamkeitserwartung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 30(1), 5. <https://doi.org/10.1007/s40573-024-00170-7>
- Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H., & Vontin, W. (1981). *Psychologie des Unterrichts*. 2 (2., völlig überarb. Aufl). Beltz.
- Becker, S., Klein, P., Gößling, A., & Kuhn, J. (2019). Förderung von Konzeptverständnis und Repräsentationskompetenz durch Tablet-PC-gestützte Videoanalyse: Empirische Untersuchung der Lernwirksamkeit eines digitalen Lernwerkzeugs im Mechanikunterricht der Sekundarstufe 2. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 25(1), 1–24. <https://doi.org/10.1007/s40573-019-00089-4>
- Bereiter, C., & Engelmann, S. (1966). *Teaching disadvantaged children in the preschool*. Prentice-Hall.
- Berger, P. (2017). *Einführung in die Mathematikdidaktik* [Lehrskript]. https://www.prof-dr-berger.de/_downloads.htm
- Brandl, W. (2016). Lernstand erheben, Lernwirksamkeit feststellen, Lernleistung beurteilen – eine Skizze des Bezugssystems. *Haushalt in Bildung & Forschung*, 5(4), 3–24. <https://doi.org/10.3224/hibifo.v5i4.25691>
- Brosius, H.-B., Haas, A., & Koschel, F. (2012). *Methoden der empirischen Kommunikationsforschung*. VS Verlag für Sozialwissenschaften. <https://doi.org/10.1007/978-3-531-94214-8>
- Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31(1), 21–32.
- Bruner, J. S. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung* (1. Auflage). Ernst Klett.
- Bruner, J. S. (1976). *Der Prozess der Erziehung* (4. Auflage). Berlin Verlag.

- Brüning, L., & Saum, T. (2020). Direkte Instruktion – Kompetenzen wirksam vermitteln. *Schulverwaltung. Nordrhein-Westfalen*, 31(11).
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. (2023). *Lehrplan Mathematik (Sekundarstufe I)—AHS-Unterstufe*. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.
- Carmesin, H.-O. (2014). *Lernwirksamkeit in der Lehrerbildung*. 70–83.
- Ewerhardy, A., Kleickmann, T., & Möller, K. (2012). Fördert ein konstruktivistisch orientierter naturwissenschaftlicher Sachunterricht mit strukturierenden Anteilen das konzeptuelle Verständnis bei den Lernenden? *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 5(1), 76–88.
- Fauth, B., & Leuders, T. (2022). *Kognitive Aktivierung im Unterricht*. Institut für Bildungsanalysen Baden - Württemberg (IBBW).
- Felten, M., & Stern, E. (2012). *Lernwirksam unterrichten: Im Schulalltag von der Lernforschung profitieren*. Cornelsen Scriptor.
- Filler, A. (2012). *Unterrichtsmethoden im Mathematikunterricht: Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik“, Teil 6* [Vorlesungsskript].
- Filler, A., & Ludwig, M. (2012). *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht: Ziele und Visionen 2020*. Franzbecker.
- Gläser, J., & Laudel, G. (2010). *Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse als Instrumente rekonstruierender Untersuchungen* (4. Auflage). VS Verlag.
- Grevsmühl, U. (1995). Handlungsorientierung und Veranschaulichung. In *Didaktisches Begleitheft des Fernstudienlehrgangs „Mathematik für Grundschullehrer“* (S. 17–38). FernUniversität Hagen.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement*. Routledge.

- Hornby, G., & Greaves, D. (2023). *Evidenzbasierte Lehrstrategien: Optimierung des Bildungserfolgs von Schülerinnen und Schülern*. Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-39294-8>
- Humenberger, D. H., Aue, V., Hasibeder, J., Himmelsbach, M., & Schüller-Reichl, J. (2025). *Das ist Mathematik 3, Schulbuch + E-Book* (1. Auflage). öbv, Firmensitz Wien ÖBV 3-209.
- Klewitz, E., & Mitzkat, H. (1977). Entdeckendes Lernen und offener Unterricht. In *Entdeckendes Lernen und offener Unterricht* (Bd. 4). Georg Westermann.
- Kollosche, D. (2017). Entdeckendes Lernen: Eine Problematisierung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(2), 209–237. <https://doi.org/10.1007/s13138-017-0116-x>
- Korenova, L. (2017). GeoGebra in Teaching of Primary School Mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(3), 155–160.
https://doi.org/10.1564/tme_v24.3.08
- Kozakiewicz, N., Bosset, I., Buchner, J., & Reitingner, J. (2024). Entdeckend-forschendes Lernen im Kontext einer Bildung für nachhaltige Entwicklung. *HiBiFo – Haushalt in Bildung & Forschung*, 13(1–2024), 68–84. <https://doi.org/10.3224/hibifo.v13i1.05>
- Kraus, A. (2010). *Körperlichkeit in der Schule*. 3 (1. Aufl, Bd. 3). Athena.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Springer Spektrum Wiesbaden.
- Kuntze, S. (2013). Vielfältige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen: Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 17–33). Springer Spektrum Wiesbaden.
- Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Berufsbildung: Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

- Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten? Enaktiv – ikonisch – symbolisch: Aneignungsformen beim Geometrielernen. In *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht: Ziele und Visionen 2020* (S. 5–32). Franzbecker.
- Laurens, T., Mataheru, W., Lekitoo, J. N., & Inuhan, M. (2025). *Using GeoGebra classroom to learn mathematics*. 050007. <https://doi.org/10.1063/5.0269202>
- Lauter, J. (2005). *Fundament der Grundschulmathematik: Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule* (4. Auflage). Auer Verlag GmbH.
- Leisen, J. (2015). Fachlernen und Sprachlernen! Bringt zusammen, was zusammen gehört! *MNU – Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 68(3), 132–137.
- Leuders, T., & Holzäpfel, L. (2011). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Unterrichtswissenschaft* 39, 213---230.
- Linneweber-Lammerskitten, H. (2014). *Fachdidaktik Mathematik: Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sekundarstufe I und II* (1. Auflage). Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Lutz, G., & Koutsianikouli, S. (2024). Direkte Instruktion in offenen Unterrichtsformaten – ein Unterrichtsbeispiel. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 75, 347–356.
- Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2. ed., reprint). Cambridge University Press.
- Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Hugener, I., & Lipowsky, F. (2008). Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 22(2), 127–133. <https://doi.org/10.1024/1010-0652.22.2.127>
- Piaget, J., Aebli, H., & Kubli, F. (1972). *Die Entwicklung des Erkennens. 1: Das mathematische Denken* (1. Aufl.). Klett.
- Prediger, S., & Scherres, C. (2012). Niveauangemessenheit von Arbeitsprozessen in selbstdifferenzierenden Lernumgebungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(1), 143–173. <https://doi.org/10.1007/s13138-012-0035-9>
- Quittenbaum, N. (o. J.). *Training für direkte Instruktion*.

- Quittenbaum, N. (2016). *Training für direkte Instruktion: Die Entwicklung und Erprobung eines Kommunikationstrainings für den Unterricht mit direkter Instruktion*. Verlag Julius Klinkhardt.
- Radović, S., Radojičić, M., Veljković, K., & Marić, M. (2020). Examining the effects of Geogebra applets on mathematics learning using interactive mathematics textbook. *Interactive Learning Environments*, 28(1), 32–49.
<https://doi.org/10.1080/10494820.2018.1512001>
- Reiss, K., & Hammer, C. (2021). *Grundlagen der Mathematikdidaktik: Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Springer International Publishing.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-65429-0>
- Riedl, A., & Schelten, A. (2013). *Grundbegriffe der Pädagogik und Didaktik beruflicher Bildung* (1. Aufl.). Franz Steiner Verlag. <https://doi.org/10.25162/9783515103336>
- Rosenshine, B. (1987). Explicit teaching and teacher training. *Journal of Teacher Education*, 38(3), 34–36. <https://doi.org/10.1177/002248718703800308>
- Rosenshine, B. (2012). Principles of Instruction. *American Educator*, 12–19.
- Schneider, W., Küspert, P., & Krajewski, K. (2021). *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen* (3. Aufl.). utb GmbH. <https://doi.org/10.36198/9783838557472>
- Scholkmann, A. (2016). Forschend-entdeckendes Lernen: (Wieder-)Entdeckung eines didaktischen Prinzips. *Lehren und Lernen*, 1–26.
- Sweller, J. (2011). Cognitive Load Theory. In *Psychology of Learning and Motivation* (Bd. 55, S. 37–76). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-387691-1.00002-8>
- Sweller, J. (2020). Cognitive load theory and educational technology. *Educational Technology Research and Development*, 68(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11423-019-09701-3>
- Vonschallen, S., Labude, M., Schneider, C., Krüger, M., & Susanne Metzger. (2024). YouTube vs. Lehrmittel – Lernwirksamkeit von Erklärvideos für den

- Naturwissenschaftsunterricht. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 30(1), 6. <https://doi.org/10.1007/s40573-024-00171-6>
- Wellenreuther, M. (2009). Frontalunterricht, direkte Instruktion oder offener Unterricht? Empirische Forschung für die Schulpraxis nutzen. *Schulverwaltung. Nordrhein-Westfalen*, 20(6), 169–172.
- What Works Clearinghouse. (2007). *Direct Instruction, DISTAR, and Language for Learning*.
- Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-10605-8>
- Wittmann, E. C. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts* (6., neu bearbeitete Auflage). Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (1. Auflage). Klett.
- Wittmann, Erich Ch. (2019). *Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht* (Arbeitskreis Grundschule e.V. (ab 1999 Grundschulverband e.V.), Hrsg.). Arbeitskreis Grundschule e.V. <https://doi.org/10.25656/01:17495>
- Yohannes, A., & Chen, H.-L. (2023). GeoGebra in mathematics education: A systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, 31(9), 5682–5697. <https://doi.org/10.1080/10494820.2021.2016861>
- Yorganci, S., & Subasi, M. (2025). Interactive GeoGebra applets to improving students' learning performance in e-book-based learning environment. *Education and Information Technologies*, 30(5), 5477–5500. <https://doi.org/10.1007/s10639-024-13021-2>
- Zentel, P., & Gebhardt, M. (2024). Direkte Instruktion als Methode des individuellen Lernens. Eine sonderpädagogische Methode? *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 75, 336–346.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Wohin, Woher, Wie (Fauth & Leuders, 2022)	12
Abbildung 2: Phasen der Direkten Instruktion (Brüning & Saum, 2020)	18
Abbildung 3: Die sieben Schritte des Problembasierten Lernens (Scholkmann, 2016) .	26
Abbildung 4: Vier Formen des Entdeckenden Lernens (Scholkmann, 2016)	27
Abbildung 5: EIS-Dreieck (Berger, 2017)	37
Abbildung 6: Tool-Auswahl GeoGebra-Books	44
Abbildung 7: Schritt-für-Schritt Anleitung	45
Abbildung 8: Multiple Choice Frage	45
Abbildung 9: Offene Frage	45
Abbildung 10: Aufgabe 4 & 5	46
Abbildung 11: Applet 1 Aufzug	47
Abbildung 12: Applet 2 Aufzug	48
Abbildung 13: Darstellung am Zahlenstrahl 1	49
Abbildung 14: Darstellung am Zahlenstrahl 2	49
Abbildung 15: Bruch-/Dezimal-Mischformen	51
Abbildung 16: Gegenzahl finden	52
Abbildung 17: gemeinsamer Darstellungsmodus	53
Abbildung 18: Schritt 1	54
Abbildung 19: Schritt 3	55
Abbildung 20: Konstruktionsapplet	57
Abbildung 21: Säulendiagramm EIS_1	65
Abbildung 22: Nachfragen EIS	66
Abbildung 23: Säulendiagramm Direkte Instruktion_1	69
Abbildung 24: Säulendiagramm Entdeckendes Lernen_1	71
Abbildung 25: Nachfragen Entdeckendes Lernen	72
Abbildung 26: Säulendiagramm EIS_2	74
Abbildung 27: Säulendiagramm Direkte Instruktion_2	76
Abbildung 28: Nachfragen Direkte Instruktion	77
Abbildung 29: Säulendiagramm Entdeckendes Lernen_2	79

Anhang

Anhang 1

Elterninformation und Einverständniserklärung zur Teilnahme an einer wissenschaftlichen Untersuchung im Rahmen einer Masterarbeit

Sehr geehrte Erziehungsberechtigte,

Ich, Teresa Reither, BEd., studiere aktuell noch Mathematik und Sport auf Lehramt an der Universität Wien und schreibe derzeit meine Masterarbeit im Unterrichtsfach Mathematik. Im Rahmen dieser Arbeit führe ich an der Schule GRG3 Radetzkystraße eine Untersuchung zum Thema „Didaktisch wirksame Gestaltung von GeoGebra-Books im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – ein Vergleich dreier didaktischer Ansätze“ durch.

Ablauf:

- Im Mathematik Unterricht sollen die Schüler:innen ein online Arbeitsblatt zu unserem aktuellen Thema ausfüllen. Das wird im EDV-Saal stattfinden. Dabei werden die Bildschirme der Kinder aufgenommen, damit ich sehen kann, was genau sie eingeben. Es werden auch ihre Stimmen aufgenommen, damit ich mir die Gedankengänge der Kinder zu den jeweiligen Aufgaben anhören kann.
- Dieser Ablauf wird 2x erfolgen. Einmal Ende September und einmal Mitte Oktober.
- Zusätzlich werden nach der Auswertung kurze Interviews mit freiwilligen Schüler:innen durchgeführt. In diesen Gesprächen wird erhoben, wie die Schüler:innen über die Aufgabenstellungen gedacht haben.

Ziele:

Ziel ist es, online einen didaktisch wirksamen Weg zu finden ein Arbeitsblatt zu gestalten. Die Ergebnisse werden ausschließlich für wissenschaftliche Zwecke genutzt und verarbeitet. Die erhobenen Daten werden anonymisiert in meiner Masterarbeit veröffentlicht. Es werden keine Namen, Schulnoten oder personenbezogenen Daten veröffentlicht oder weitergegeben. Das Projekt wird nicht zur Mathematik-Note gerechnet, es dient rein der Forschung.

Datenschutz:

Die Teilnahme ist freiwillig. Alle Angaben und Aussagen der Schüler:innen werden streng vertraulich behandelt. Es entstehen keinerlei Nachteile bei Nichtteilnahme. Es zählt nicht zu Note. Eine erteilte Zustimmung kann jederzeit ohne Angabe von Gründen widerrufen werden.

Einverständniserklärung (Untersuchung):

Name des Kindes: _____

Ich bin damit einverstanden, dass mein Kind an der Untersuchung teilnimmt und ihre Bildschirme, sowie ihre Stimmen für wissenschaftliche Zwecke aufgenommen werden. Ich weiß, dass diese Forschung nicht zur Note zählen wird. Ich weiß, dass alle Daten vertraulich behandelt und in der Masterarbeit nur in anonymisierter Form veröffentlicht werden.

Unterschrift Erziehungsberechtigte: _____

- ☐ Ich stimme der Teilnahme meines Kindes an der Untersuchung zu.
- ☐ Ich stimme nicht zu.

Einverständniserklärung (Interview):

Ich bin damit einverstanden, dass mein Kind an einem Interview im Rahmen der Masterarbeit teilnimmt. Das Interview darf zu wissenschaftlichen Zwecken aufgezeichnet und transkribiert werden. Die Aufzeichnung wird ausschließlich für die Auswertung im Rahmen der Masterarbeit verwendet, nicht veröffentlicht und nach Abschluss der Arbeit gelöscht. Sie zählt ebenso nicht zu Note.

Unterschrift Erziehungsberechtigte: _____

- ☐ Ich stimme der Teilnahme meines Kindes an einem Interview zu.
- ☐ Ich stimme nicht zu.

Anhang 2

Team 1 EIS – Rationale Zahlen				
Zeit pro Aufgabenabschnitt	Enaktiv: 1. 2.	Ikonisch: 1. 2. 3.	Symbolisch 1. 2. 3.	Aufgaben 1. 2. 3. 4. 5.
Zeit pro Kapitel	Enaktiv: Insgesamt:	Ikonisch: Insgesamt:	Symbolisch: Insgesamt:	Aufgaben: Insgesamt:
Gesamtzeit (fertig oder nicht)				
Redebeiträge (Zeit und relativer Anteil)				
Richtigkeit (0, 1, 2)	0:	1:	2:	
Nachfragen (Anzahl)				
Art der Fehler (0, 1, 2)	0:	1:	2:	
Semantisch vs syntaktisch (1, 2, 3, 4, 5)	Insgesamt: Zitat:			

Anhang 3

Transkription der Schüler:inneninterviews

Interview 1 – EIS (Rationale Zahlen)

Lehrperson: In euren Bildschirmaufnahmen hast du, (Schüler:in 1), gesagt: „Ich checke, das soll eine Rechnung darstellen... - und + wird zu -, oder?“ *zeigt Videoclip*. Was genau war da für dich unklar?

Schüler:in 1: Ich hab zuerst gedacht, dass das immer so ist, also dass minus und plus automatisch minus wird. Aber dann hab ich gesehen, dass die nicht nebeneinanderstehen, und es hat mich verwirrt.

Lehrperson: Und wie hat sich das im Applet, also dieser Darstellung, für euch gezeigt?

Schüler:in : Wir haben zuerst nicht enter gedrückt *räusper*, deswegen hat sich nichts bewegt. Das hat uns voll verwirrt. Aber als wir es richtig gemacht haben, war eigentlich klar, dass der Lift von -4 zwei Stockwerke hinauffährt.

Lehrperson: Später habt ihr gesagt: „Subtraktion geht links und Addition nach rechts, deswegen diese Pfeile.“ *zeigt Videoclip* Was war eure Überlegung dahinter?

Schüler:in 1: Ich hab einfach gedacht, links ist negativ, rechts ist positiv, also passen die Pfeile so. Stimmt ja auch irgendwie. Zumindest haben wir das auch so im Unterricht gelernt.

Schüler:in 2: Ja, wir haben das dann eh verstanden, ehm, aber die Darstellung war am Anfang ungewohnt, weil wir mit sowas noch nicht gearbeitet haben. Aber wir haben dann schnell gecheckt, was der Sinn hinter dieser Aufgabe sein sollte.

Lehrperson: Okay super, danke für eure Erklärungen! Das wars schon wieder!

Interview 2 – EIS (Rationale Zahlen)

Lehrperson: Ihr habt im ersten Kapitel gesagt: „Der Fahrstuhl startet bei -1 und fährt zwei Stockwerke nach oben... $-1 + 2 = 1$.“ *zeigt Videoclip* Wie seid ihr zu dieser Erklärung gekommen?

Schüler:in 1: Ich stell mir das wirklich wie einen Lift vor. Das macht's einfacher. Und dann haben wir Beispiele hin- und her probiert. Da fand ich dieses ... Ding ... zum rauf und runter ziehen ... wie sagt man zu dem? Ehmm...

Lehrperson: Aso meinst du das Applet? Also diese Anschauung, die ihr im Projekt hattets?

Schüler:in 1: Ja genau. Das war auch sehr praktisch. Vor allem für die Kinder, die das vielleicht zum Anschauen brauchen.

Lehrperson: Okay, und wie, ehm, bist du zu dieser Erklärung gekommen (Schüler:in 2)? Du hast ja gesagt „ja stimmt, das ist eh total einfach“.

Schüler:in 2: Ja, ich hab mich eigentlich nur an dieses Bild gehalten, welches man so hin und her schieben konnte. Für mich war das voll logisch.

Lehrperson: Gleichzeitig habt ihr gesagt: „Ich kann das eigentlich selber ausrechnen, aber ok.“ *zeigt Videoclip* Was hat euch an der Darstellung gestört? Zuerst (Schüler:in 2) bitte.

Schüler:in 2: Ich fand's ein bissl unnötig, weil ich eh weiß, wie man das rechnet. Das hatten wir letztes Jahr schon ein wenig. Aber irgendwann hab ich schon verstanden, wieso das helfen kann.

Lehrperson: Okay, und du (Schüler:in 1)?

Schüler:in 1: Ja, ich wollte eigentlich gleich rechnen, aber es war eh ok zuerst mit der Darstellung so ein Gefühl zu bekommen.

Lehrperson: Okay, vielen Dank euch zwei! Das wars schon!

Interview 3 – Direkte Instruktion (Rationale Zahlen)

Lehrperson: Im Kapitel 1 habt ihr gesagt: „Das ist eine Anleitung, wir müssen nur lesen, wir können noch nichts machen... wieso müssen wir uns das Durchlesen? Das ist so unnötig.“ *zeigt Videoclip* Warum hattet ihr das Gefühl, das Überspringen zu können?

Schüler:in 1: Weil wir gedacht haben, es kommt eh wieder eine Aufgabe danach, und Lesen dauert immer so lang. Das hat uns im Moment einfach nicht so interessiert. Wir wollten einfach gleich was rechnen. Zumindest dachten wir, wir müssen gleich wo was rechnen oder so. So *räusper* haben wir das eig noch nie davor durchgemacht. Und manche Sachen wussten wir ja eh schon, also dachten wir uns zumindest.

Lehrperson: Und habt ihr dann Sachen gewusst oder habt ihr euch schwergetan? (Schüler:in 2) bitte.

Schüler:in 2: Also ich finde, wir haben uns schon schwergetan. Wir wussten oft nicht, ehm, was zu tun ist oder zu welcher Aufgabe diese Fragen gehört haben.

Lehrperson: Okay, danke für eure Ehrlichkeit. Eine zweite Aussage noch. Ehm, ihr habt bei einer Rechnung gesagt: „Minus und minus ergibt plus, also müsste es $-3/8 + 1/8$ sein, oder?“ *zeigt Videoclip* Was war da euer Gedankengang? *räusper*

Schüler:in 1: Ich glaub ich kann mich daran erinnern, darf ich?

Schüler:in 2: Ja bitte, ich weiß die Situation nicht mehr genau.

Schüler:in 1: Ich war mir nicht sicher, ob man zuerst die Vorzeichen zusammenrechnet oder den Bruch anschaut. Deswegen hab ich nachgefragt. Bei diesem Thema tu ich mir jetzt auch noch schwer.

Schüler:in 2: Aja ich glaub ich weiß es wieder. *räusper* Ich hab auch nicht genau gewusst, wie das gemeint ist, deswegen haben wir dauernd nachgefragt.

Lehrperson: Habt ihr euch oft innerlich gefragt, ob ihr lieber nachfragen sollt, oder war das für euch sowieso immer klar?

Schüler:in 2: Also ich hab an sich kein Problem mit nachfragen, weil dafür sind Sie ja da dachte ich. *kichern von allen drei Personen* Aber Sie meinten ja, wir sollen so viel wie möglich alleine probieren. Aber vielleicht hätten wir es mehr gecheckt, wenn wir mehr gefragt hätten.

Lehrperson: Okay, Dankeschön, das wars schon wieder von mir.

Interview 4 – Direkte Instruktion (Rationale Zahlen)

Lehrperson: So ihr zwei, mir ist vor allem bei euch zwei etwas aufgefallen. Ihr wart ja sehr schnell fertig mit dem Projekt. Das hat vor allem einen Grund: Ihr habt das erste Kapitel einfach übersprungen. Warum? *zeigt nochmal Kapitel her*

Schüler:in 1: Keine Ahnung eigentlich *lacht*, ich glaub wir dachten, das ist nur sowas wie ne kleine Einleitung und es wird nicht so wichtig sein. Wir haben uns glaube ich nicht so viele Gedanken darüber gemacht, weil wir die Aufgaben danach auch schnell kapiert haben.

Schüler:in 2: Ja, vor allem ich wollte schauen, wie viel ich auch so schaffe. Vieles kannte ich schon, als ich mir das kurz angesehen habe.

Lehrperson: Später kam von euch der Satz: „Gemeinsamer Nenner – wie kann es 9 sein? Es ist 10!“ *zeigt Videoclip* Was war da euer Problem?

Schüler:in 2: Keine Ahnung, ich fand diese Auswahl irgendwie lustig. Weil 9 keinen Sinn gemacht hat also als Auswahl. Weil Neuntel ist nur bei periodischen Zahlen und diese Zahl, ehm... ich glaub 0,3 war das... war ja keine periodische Zahl. Also wenn es zumindest als Auswahl noch $\frac{3}{1000}$ wäre, dann hätte ich nicht so reagiert denke ich.

Lehrperson: Oh also warst du unzufrieden mit meiner Auswahl?

Schüler:in 2: So quasi ja haha. *kichert*

Lehrperson: Ihr habt davor auch noch folgendes gesagt „kann noch gekürzt werden? Nein weil 7 ist eine Primzahl!“ *zeigt Videoclip*. Was waren eure Gedanken dazu?

Schüler:in 1: Naja wir haben halt schauen müssen, ob wir noch kürzen können. Wir sind beide relativ schnell draufgekommen, dass wir nicht weiter kürzen können. Und dann hat (Schüler:in 2) das gesagt.

Schüler:in 2: Genau. Also 7 und 6 haben keine gemeinsame Zahl mehr zum kürzen, weil eben die 7 eine Primzahl ist. Und ehm, solange der Nenner kein Vielfaches ist, geht es nicht mehr. Das ist recht praktisch, wenn eine oder beide Zahlen kleine Primzahlen sind. Die haben als gemeinsamen Teiler nur sich selbst und eins.

Lehrperson: Okay super, danke für eure Erklärungen!

Interview 5 – Entdeckendes Lernen (Rationale Zahlen)

Lehrperson: Ihr habt im ersten Kapitel gesagt: „Wenn du dir das auf einem Zahlenstrahl vorstellst, gehst du immer weiter nach links.“ *zeigt Videoclip* Was genau habt ihr damit gemeint?

Schüler:in 1: Naja, wenn es beides Minus ist, wird's halt negativer. Also ich stell mir das immer mit Schulden vor. Wenn du schon Schulden hast, und dir noch was ausborgst, dann hast du noch mehr Schulden als davor. Deswegen geht man halt links.

Schüler:in 2: Wir haben versucht uns das alles bildlich vorgestellt. War aber nicht immer richtig, wir haben dann oft Fehler gemacht soweit ich mich erinnern kann.

Lehrperson: War das schlimm für euch? Also ehm... dass ihr so viele Fehler gemacht habts?

Schüler:in 2: Nein gar nicht eigentlich.

Schüler:in 1: Ich fand auch nicht, aber ich dachte mir, dass es so auch nicht richtig sein kann wenn wir dauernd Fehler machen und es nur dann so verbessern.

Lehrperson: Also habt ihr euch nicht überlegt, warum die Lösung so richtig ist?

Schüler:in 2: Also ich schon, in meinem Kopf zumindest. Ich hab's auch versucht (Schüler:in 1) zu erklären oder selbst zu verstehen, wenn er „hää“ oder so gesagt hat *kichern*.

Lehrperson: Im dritten Kapitel hast du, (Schüler:in 2), gesagt: „Wir müssen bei Brüchen ja auf denselben Nenner bringen.“ *zeigt Videoclip* Wie bist du darauf gekommen?

Schüler:in 2: Das war aus dem, was wir davor schon in der zweiten Klasse hatten. Da meinten sie, dass ist das Wichtigste bei Brüchen. Immer zuerst schauen, ob sie den gleichen Nenner haben. Darum dachte ich, das soll schon hier auch. Ich hab's einfach angewendet, auch wenn ich nicht sicher war, ob es hier passt und es war dann auch Gott sei Dank so richtig.

Lehrperson: Hat dich das gefreut, dass du richtig oder dass ihr richtig wards oder wie habt ihr euch gefühlt?

Schüler:in 2: Keine Ahnung, ehm... Ich glaube ich hab mich innerlich gefreut. Aber in Mathe freut man sich immer, wenn man etwas richtig hatte. Vor allem, wenn man es selbst herausfindet. *kichert*

Lehrperson: Das stimmt natürlich! Gut, danke euch, das wars schon wieder!

Interview 6 – Entdeckendes Lernen (Rationale Zahlen)

Lehrperson: Ihr habt bei der Geld-Aufgabe gesagt: „Nein, weil sie sich von der Bank auch Schulden nimmt...“ und seid dann bei 38,60 Schulden gelandet. *zeigt Videoclip* Was war hier eure Überlegung? Wie seid ihr dann schlussendlich zu den 62,40 gekommen?

Schüler:in 1: Ahahah, ich hab da komplett falsch gedacht. Ich habe da nicht mit minus 50 gestartet, sondern mit plus 50. Ich wusste zwar, dass ich dann minus 12,40 rechnen muss aber da hatte ich einen Denkfehler.

Schüler:in 2: Ja, und ich habs im Kopf zuerst anders gerechnet, also ich hab $-50-12,40$ gerechnet, aber war mir dann so unsicher, weil er was anderes hatte. Und er ist normalerweise besser in Mathe als ich. Erst als wir uns dann die Lösung angesehen haben, hab ich ihm erklärt, wieso man so rechnet, weil ich es ja eben schon wusste.

Schüler:in 1: Jaja, lüg nicht.

Schüler:in 2: Hääh ich lüge nicht *kichert*, ich wusste es wirklich.

Schüler:in 1: Na gut. *kichert*

Lehrperson: Gut. Später habt ihr gesagt: „Ich wusste nicht, dass das Minus und Minus gleich Plus bei Brüchen auch zählt.“ *zeigt Videoclip* Wie hat das eure Lösung beeinflusst?

Schüler:in 2: Viel. *kichert* Ich hab statt dem Plus dann halt Minus gerechnet und dann war zuerst natürlich das Ergebnis falsch. Ich wusste nicht, dass die Vorzeichenregeln gleich sind, wie bei normalen Zahlen.

Schüler:in 1: Ja oida. Als wir die Lösung gesehen haben, waren wir wieder so „was hä, wieso ist das falsch“. Als wir dann die Lösung gesehen haben, haben wir voll lange herumprobiert, bis wir es kapiert haben. Dann sind wir endlich draufgekommen, dass das zu plus wird.

Lehrperson: Aber es war doch schon eine Übung dazu, wo ihr plus und minus erfolgreich zu einem Minus umgeändert habt. Oder habt ihr da nicht so darauf geachtet?

Schüler:in 1: Was für eine Aufgabe war das?

Lehrperson: Ehm... Moment... $\frac{4}{10} + \left(-\frac{3}{5}\right)$

Schüler:in 1: Asooo ja, aber ich glaube, da haben wir das plus ignoriert, weil es ja sowieso $-\frac{3}{5}$ war. Also da wars dann glaub ich automatisch.

Lehrperson: Okay, vielen Dank euch zwei, das wars schon wieder!

Interview 7 – EIS (Sechseck)

Lehrperson: Ihr musstet beim Zentriwinkel den Tipp viermal lesen und wart trotzdem unsicher. *zeigt Videoclip* Was war daran so schwierig?

Schüler:in 1: Aso ja, ich hab einfach nicht verstanden, was ein Zentriwinkel sein soll. Ich glaube die Erklärung war zu schwer für uns. Wir haben da zuerst irgendwelche Längen mit dem Geodreieck gemessen.

Schüler:in 2: Ja, bei mir genauso. *kichert* Wir haben es zuerst komplett falsch interpretiert. Ich bin zwar draufgekommen, dass Winkel steht, das heißt ich wusste dann wir müssen irgendwo, was in Grad messen... ehm... aber was genau hab ich bei der Erklärung nicht verstanden. Deswegen mussten wir dann Sie fragen.

Lehrperson: könnt ihr euch jetzt noch erinnern was der Zentriwinkel ist?

Schüler:in 2: Ehm... also ich glaube nicht, ich glaube, wenn wir diese Abbildung nochmal vor uns hätten, dann, ehm, könnten wir das vielleicht sagen, aber sonst nicht. Zumindest ich nicht.

Schüler:in 1: Ja same. Ich glaub ich habs bei der Aufgabe selbst auch nicht kapiert, nachdem Sie es uns erklärt haben.

Schüler:in 2: Doch ich schon, deswegen wusste ich glaub ich ja die richtige Antwort dann.

Schüler:in 1: Das weiß ich nicht mehr. Aber vielleicht muss ich mir das für die Schularbeit dann nochmal anschauen.

Lehrperson: Haha ja das wäre nicht schlecht. Das kann gut auch eine Frage sein. Alles klar. Dann machen wir mal weiter. *schaut bei Notizen nach* Später habt ihr gesagt: „Wir müssen noch die Höhe einzeichnen... und jetzt den Inkreis.“ Wie seid ihr da vorgegangen, und was genau meintet ihr mit der Höhe?

Schüler:in 2: Also, ehm, diese Linie mit der wir dann den Inkreis zeichnen konnten. Ich hab mich durch die Anleitungsschritte dieser Darstellungen erinnert, dass man vom Mittelpunkt senkrecht runter muss. Also das dachte ich zumindest. War aber nicht sicher. Und dann hab ich den Zirkel mit dieser Länge eingenommen und vom Mittelpunkt den kleineren Kreis, also, ehm, diesen Inkreis glaub ich, gezeichnet.

Schüler:in 1: Mir hat (Schülerin 2) dabei geholfen den zu zeichnen. Da hab ich mir noch sehr schwergetan.

Lehrperson: Sah die Zeichnung dann in euren Augen gut aus? Also so wie ihr es davor gesehen habts?

Schüler:in 1 und Schüler:in 2 gleichzeitig: Joa.

Schüler:in 2: Schon eigentlich.

Schüler:in 1: Ich habe mich glaub ich auch gefreut, weil das zum ersten Mal ne schöne Zeichnung von mir war. *kichert mit Schüler:in 2*

Lehrperson: Alles klar, dann danke ich euch für das Gespräch!

Interview 8 – Direkte Instruktion (Sechseck)

Lehrperson: In der Bildschirmaufnahme habt ihr beim ersten Betrachten des Sechsecks gesagt: „Das sieht aus wie so ein Stern.“ Hier seht ihr die Szene nochmal. *zeigt Videoclip* Was habt ihr damit gemeint?

Schüler:in 1: Aso ja das war eine kurze Idee, die mir da eingefallen ist. Es war so, dass man im Kreis diese Linien gesehen hat und das halt ein bisschen wie ein Stern ausgesehen hat.

Schüler:in 2: Ja genau, wir haben das Bild gesehen und dachten uns einfach, dass das Muster innen sternförmig ist. Wir wussten auch noch nicht ganz, was das für eine Figur sein soll.

Lehrperson: Hat euch diese erste Assoziation irgendwie beim Arbeiten geholfen oder eher nicht? (Schüler:in 2) bitte zuerst.

Schüler:in 2: Eigentlich nicht wirklich. Wir haben dann eh gleich gelesen, was wir machen sollen, und dann war klar, dass wir zeichnen müssen.

Lehrperson: Und bei dir (Schüler:in 1)?

Schüler:in 1: Ja, das war eher nur ein Kommentar, kein Problem beim Verstehen. Wenn ich jetzt so darüber nachdenke, hat es mir gar nichts gebracht.

Lehrperson: Später habt ihr beim Umfang relativ schnell gesagt: „3,5 mal 6 sind 21 cm.“ Ich spiele das kurz für euch ab. *zeigt Videoclip* Wie seid ihr da vorgegangen?

Schüler:in 1: Das war für mich recht easy, weil ein Sechseck halt sechs gleich lange Seiten hat. Und ehm... wenn eine Seite 3,5 cm ist, dann rechnet man ehm... das einfach mal sechs oder so.

Schüler:in 2: Ja safe. Ich hab auch nicht lang überlegen müssen. *räusper* Umfang heißt ja alles außen zusammen, und wir wussten schon, dass alle Seiten gleich lang sind.

Lehrperson: Hattet ihr dabei irgendwo Zweifel oder Unsicherheiten?

Schüler:in 2: Nein, eigentlich nicht. Das war einer der Teile, wo wir uns ziemlich sicher waren und da gabs nicht so viele. *kichern*

Schüler:in 1: Ja, im Vergleich zum Zeichnen oder zu den ganzen Begriffen war das Rechnen mit dem Umfang viel einfacher für uns. Obwohl das Zeichnen war auch in Ordnung.

Lehrperson: Okay, vielen Dank euch zwei!

Interview 9 – Direkte Instruktion (Sechseck)

Lehrperson: In der Bildschirmaufnahme habt ihr im zweiten Kapitel gesagt: „Ah so bekommen wir unser Sechseck! Deswegen zeichnen wir den Kreis!“ *zeigt Videoclip* Was war in diesem Moment euer Aha-Erlebnis?

Schüler:in 1: Wir, ehm, haben davor nicht wirklich verstanden, wozu der Kreis da ist. Wir dachten, das ist halt einfach ein Kreis zum Zeichnen. Also ich habe erst spät gecheckt, dass wir den Kreis für das Sechseck brauchen. Und dann ist mir klar geworden, dass der Kreis eigentlich bestimmt, wie lang die Seiten vom Sechseck sind.

Lehrperson: Hat euch dieses Verständnis beim Weiterarbeiten geholfen?

Schüler:in 2: Ja, voll. Danach wussten wir, warum wir den Zirkel nicht verstellen dürfen. Vorher haben wir einfach die Schritte gemacht, aber ohne richtig zu wissen, wieso.

Schüler:in 1: Also ich wusste ja schon, dass es ein Sechseck wird und dass man den Zirkel nicht verstellen darf aber für mich war diese Erkenntnis wichtig um mir die Konstruktion zu merken.

Lehrperson: Im dritten Kapitel habt ihr dann fast alles selbstständig gezeichnet und nur beim vierten Schritt kurz in die Lösung geschaut. Wie war das für euch?

Schüler:in 1: Eigentlich ok. Wir wollten nur sicher sein, dass wir keinen Schritt falsch machen. Und dann ist uns ehm aufgefallen, dass wir noch was vergessen haben und das war eben dieser ehm Inkreis glaub ich.

Schüler:in 2: Ja, wir wussten schon, was zu tun ist, aber wir wollten sicher gehen, dass wir es nicht nochmal neu zeichnen müssen. Es ist auch an sich nicht schwierig gewesen.

Lehrperson: Beim Umfang habt ihr dann gesagt: „ $3,5 + 3,5$ ist 7, dann 14, dann 17,5 und 21.“ *zeigt Videoclip* Warum hast du so gerechnet (Schüler:in 2)?

Schüler:in 2: Ich wusste, dass man beim Umfang alle Seiten plus rechnet. Nachdem ich dann (Schüler 1) nochmal gefragt habe, wie lange die Seite ist wollte ich auch mal was erledigen. Ich hab davor nicht so viel gemacht. Zudem rechne ich lieber Schritt für Schritt, dann sehe ich besser, ob es stimmt.

Lehrperson: Wie sicher wart ihr euch am Ende mit dem Ergebnis?

Schüler:in 2: Ja, da waren wir uns beide einig. (Schüler:in 1) hat mir dann auch gesagt, dass er einfach $3,5$ mal 6 gerechnet hat. Das hab ich dann auch schnell gecheckt.

Schüler:in 1: Stimmt da war ja was *kichert*

Lehrperson: Super, danke euch für die Antworten!

Interview 10 – Entdeckendes Lernen (Sechseck)

Lehrperson: In der Bildschirmaufnahme habt ihr beim Konstruieren gesagt: „Alle Striche, die du zu Beginn machst, sind 5 cm.“ *zeigt Videoclip* Wie seid ihr zu dieser Einschätzung gekommen?

Schüler:in 1: Weil überall der Radius mit 5 cm angegeben war. Wir haben uns gedacht, das muss einen Grund haben.

Schüler:in 2: Ja, wir haben gemerkt, dass man den Zirkel nicht verstellen soll. Dann sind automatisch alle Strecken gleich lang.

Lehrperson: Später habt ihr gesagt: „Sechs Mal der Radius? Aja stimmt, weil die Seite AB ja auch der Radius ist.“ *zeigt Videoclip* Was war da der entscheidende Gedanke?

Schüler:in 1: Wir hatten es an sich schon richtig gehabt *kichert*. Aber ich war mit meiner Antwort nicht zufrieden. Die Lösung war auch um einiges kürzer.

Lehrperson: Hier muss ich kurz unterbrechen, bevor du weitererzählst. Wir haben eben nochmal die Aufnahme dazu gesehen. Du hast ja $AB + BC + CD +$ und so weitergeschrieben. Wieso warst du nicht zufrieden damit?

Schüler:in 1: Ja also ich wusste es ist richtig, weil alle Seiten zusammengerechnet ergibt den Umfang. Aber ich fand die Lösung mit Sechs mal der Radius kürzer und eleganter.

Lehrperson: Okay und wie kamst du beziehungsweise ihr drauf, dass die Seite AB auch der Radius ist?

Schüler:in 1: Naja wir haben ja vorhin überall dieselbe Seite abgeschlagen, das bedeutet ja, dass der Radius überall ist. Also alle Seiten sind auch der Radius des Umkreises.

Schüler:in 2: Was er sagt. *lachen* Spaß. Nein, als wir die Lösung gesehen haben, war's voll klar. Vorher hab ich gar nicht daran gedacht. Ich hab zuerst nur den Kreis gesehen. Erst beim Verbinden der Punkte hab ich gecheckt, ahh jede Seite gleich lang ist wie der Radius.

Lehrperson: Ihr habt dann auch formuliert: „Man kann auch den Inkreis des Sechsecks als weiteren Umkreis eines kleineren Sechsecks verwenden.“ *zeigt Videoclip* Wie seid ihr auf diese Idee gekommen?

Schüler:in 1: Ich hab gemerkt, dass der Inkreis ja eigentlich genauso wieder ein Kreis ist nur mit einem kleineren Radius. Das bedeutet ich könnte genauso wieder innerhalb des kleinen Kreises, also den Inkreis, wieder ein Sechseck hineinzeichnen. Und dann genau dasselbe nochmal. Bedeutet ich kann das eigentlich unendlich oft machen hihi. Nur irgendwann geht das nicht mehr für uns zum Zeichnen. Eigentlich ist das total spannend.

Lehrperson: Hat euch beziehungsweise dir dieses Weiterdenken beim Verständnis geholfen?

Schüler:in 2: Ich wusste eigentlich nicht was er damit meinte, also nein gar nicht.

Schüler:in 1: Ich weiß nicht ob es mir weitergeholfen hat, aber ich fand das sehr spannend zum Überlegen. Auch jetzt wieder.

Lehrperson: Gab es trotzdem Stellen, die schwierig waren?

Schüler:in 1: Nur ein wenig die Anleitung zu Beginn, aber sonst nichts.

Lehrperson: Bei dir (Schüler:in 2)?

Schüler:in 2: Rechnen war leichter als Zeichnen, aber vom Verständnis her war es dann klar.

Lehrperson: Super danke, für das Gespräch!

Interview 11 – Entdeckendes Lernen (Sechseck)

Lehrperson: In euren Aufnahmen habt ihr beim Konstruieren gesagt: „Mach random“ und später „Ich hoff, ich mach richtig.“ *zeigt Videoclip* Was ist euch in diesem Moment durch den Kopf gegangen?

Schüler:in 1: Ich war mir einfach nicht sicher, wie groß der Zirkel sein muss. Es stand zwar irgendwo, dass wir ihn uns aussuchen können, aber ich hab's nicht genau gecheckt. Ich find die Anleitung etwas schwierig. Aber indem wir zuerst nicht genau wussten, was uns erwarten wird haben wir einfach probiert jeden Schritt zu folgen.

Schüler:in 2: Ja, wir haben einfach probiert. Ich dachte mir, wenn es ungefähr passt, dann wird's schon stimmen.

Lehrperson: Ihr habt auch mehrmals nachgefragt, ob Radius und Seite dasselbe sind. Hier sind die Beispiele. *zeigt Videoclip* Warum war das unklar?

Schüler:in 2: Weil wir nicht gewusst haben, ob man den Zirkel verstellen darf oder nicht. Das war für uns der Aha-Moment. Zumindest für mich.

Schüler:in 1: Genau, erst später haben wir verstanden, dass man ihn eben nicht verstellen soll, weil sonst die Seiten nicht gleich lang sind.

Lehrperson: Obwohl bei der Anleitung stand, dass man ihn nicht verstellen soll?

Schüler:in 1: Ja ich glaub wir haben das einfach nicht realisiert, was genau das jetzt bedeutet.

Lehrperson: Okay, kommen wir zum nächsten Thema. Beim Umfang habt ihr dann gesagt: „Der Umfang ist das Ganze von außen.“ Hier der Clip. *zeigt Videoclip* Wie sicher wart ihr euch da?

Schüler:in 1: Da war ich mir ziemlich sicher, weil das Wort Umfang das schon sagt. *kichert* Außerdem kennt man den Umfang schon seit der Volksschule und der sollte ja überall gleich funktionieren denk ich mir halt mal. Also das war für uns das einfachste denk ich mal.

Schüler:in 2: Ja das stimmt. *kichert* Rechnen war dann leichter als das Zeichnen. Das Zeichnen war echt das Schwierige. Aber ich glaube trotzdem, dass wir das gut geschafft haben.

Lehrperson: Okay super. Vielen Dank für eure Antworten.