



MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Die Vorstellung von der Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse
Sek. I bis zur 4. Klasse Sek. II

verfasst von | submitted by

Bernadette Stiefelbauer BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student record
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Andreas Ulovec

Abstract

Die vorliegende Arbeit untersucht Vorstellungen und Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern zur Unendlichkeit und deren Entwicklung im Verlauf der Sekundarstufe. Angesichts der zentralen Bedeutung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik sowie in Disziplinen wie Philosophie und Theologie wird zunächst ein fachübergreifender Überblick über grundlegende Konzepte in diesen drei Bereichen gegeben. Darauf aufbauend erfolgt eine Verbindung der mathematischen Grundlagen mit den Inhalten des aktuellen Lehrplans für allgemeinbildende höhere Schulen in Österreich. Dieser theoretische Teil dient als Basis für die empirische Untersuchung.

Für die Erhebung wurden Schülerinnen und Schüler verschiedener Jahrgangsstufen mittels Fragebogen befragt. Die Auswertung ermöglicht Aussagen zu vorhandenen Konzepten sowie typischen Fehlvorstellungen. Die Ergebnisse zeigen, dass Lernende bereits früh mit dem Begriff der Unendlichkeit in Berührung kommen und vielfach angeben, ein grundlegendes Verständnis zu besitzen. Dennoch lassen sich in allen Altersgruppen hartnäckige Fehlvorstellungen feststellen.

Die Studie unterstreicht die Notwendigkeit, den Unendlichkeitsbegriff im schulischen Kontext systematisch und fundiert zu vermitteln, um eine solide Grundlage für weiterführende mathematische und philosophische Studien zu schaffen.

This thesis examines students' conceptions and misconceptions of infinity and how these develop throughout secondary education. Given the central importance of the concept of infinity in mathematics as well as in disciplines such as philosophy and theology, the study first provides an interdisciplinary overview of fundamental concepts in these three fields. Building on this, the mathematical foundations are linked to the contents of the current curriculum for Austrian academic secondary schools (Allgemeinbildende Höhere Schulen). This theoretical framework serves as the basis for the empirical investigation.

For the data collection, students from different grade levels were surveyed using a questionnaire. The analysis provides insights into existing conceptions and typical misconceptions. The findings indicate that learners encounter the concept of infinity at an early stage and often claim to have a basic understanding. Nevertheless, persistent misconceptions can be identified across all age groups.

The study highlights the necessity of systematically and thoroughly teaching the concept of infinity in the school context in order to establish a solid foundation for further mathematical and philosophical studies.

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG	1
1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN	5
1.1 DIE UNENDLICHKEIT – GEDANKENGÄNGE INS GRENZENLOSE	5
1.1.1 <i>Was ist Unendlichkeit?</i>	5
1.1.2 <i>Historischer Überblick über die Idee der Unendlichkeit</i>	8
1.2 DIE UNENDLICHKEIT IN DER PHILOSOPHIE	10
1.3 DIE UNENDLICHKEIT IN DER THEOLOGIE	13
1.4 DIE UNENDLICHKEIT IN DER MATHEMATIK	16
1.5 DIE UNENDLICHKEIT ALS GRUNDLAGE FÜR THEMEN IM LEHRPLAN IN MATHEMATIK	20
1.5.1 <i>Lehrplan Mathematik</i>	20
1.5.2 <i>Lehrplan und Unendlichkeit</i>	23
2 EMPIRISCHE FORSCHUNG	26
2.1 METHODIK	26
2.1.1 <i>Wahl des Messinstruments</i>	26
2.1.2 <i>Gütekriterien für Fragebogen</i>	27
2.2 STICHPROBENBESCHREIBUNG	28
2.3 FRAGEBOGEN	29
2.3.1 <i>Vorbereitungen</i>	30
2.3.2 <i>Aufbau</i>	31
2.4 DURCHFÜHRUNG DER ERHEBUNG	32
3 ERGEBNISSE	34
3.1 DATENAUFBEREITUNG	34
3.2 VORSTELLUNGEN ÜBER DIE UNENDLICHKEIT	45
3.2.1 <i>Allgemeine Vorstellungen über die Unendlichkeit</i>	45
3.2.2 <i>Vorstellungen über die Unendlichkeit in der Mathematik</i>	47
3.2.3 <i>Vorstellungen über die Unendlichkeit in der Realität</i>	49
3.3 ZUSAMMENHANG ZWISCHEN VORSTELLUNGEN UND LEHRPLANINHALTEN	51
3.3.1 <i>Unterstufe</i>	51
3.3.2 <i>Oberstufe</i>	53
3.4 FEHLVORSTELLUNGEN	55
3.4.1 <i>Fehlende Vorstellungen</i>	55
3.4.2 <i>Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Mathematik</i>	57
3.4.3 <i>Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Realität</i>	60
3.5 FEHLVORSTELLUNGEN UND ALTERSGRUPPEN	61
3.5.1 <i>Unterstufe</i>	62
3.5.2 <i>Oberstufe</i>	63
3.6 ANALYSE	65
3.6.1 <i>Diskussion – Forschungsfrage 1</i>	65
3.6.2 <i>Diskussion – Forschungsfrage 2</i>	67
3.6.3 <i>Limitationen</i>	68
CONCLUSIO	72
LITERATURVERZEICHNIS	75
ANHANG	78
I DOKUMENTE BILDUNGSDIREKTION NIEDERÖSTERREICH	78
I.I Elternbrief	78
I.II Fragebogen	78
I.III Projektbeschreibung	80
I.IV Daten zur Schule, an der die Erhebung stattfand	81
II FRAGEBOGEN	82

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

ABBILDUNG 1: ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK	35
ABBILDUNG 2: ERGEBNIS 5. SCHULSTUFE.....	40
ABBILDUNG 3: ERGEBNIS 6. SCHULSTUFE.....	40
ABBILDUNG 4: ERGEBNIS 7. SCHULSTUFE.....	41
ABBILDUNG 5: ERGEBNIS 8. SCHULSTUFE.....	42
ABBILDUNG 6: ERGEBNIS 9. SCHULSTUFE.....	42
ABBILDUNG 7: ERGEBNIS 10. SCHULSTUFE.....	43
ABBILDUNG 8: ERGEBNIS 11. SCHULSTUFE.....	44
ABBILDUNG 9: ERGEBNIS 12. SCHULSTUFE.....	44
ABBILDUNG 10: EINLEITUNG FRAGEBOGEN	82
ABBILDUNG 11: PERSONENBEZOGENE DATEN.....	83
ABBILDUNG 12: ALLGEMEINE AUSSAGEN.....	84
ABBILDUNG 13: AUSSAGEN ZUR MATHEMATIK.....	85
ABBILDUNG 14: LEERE FELDER BZW. MITTE	86
ABBILDUNG 15: AUSSAGEN ZUR UNENDLICHKEIT IN DER REALITÄT – TEIL 1	86
ABBILDUNG 16: AUSSAGEN ZUR UNENDLICHKEIT IN DER REALITÄT - TEIL 2	87
ABBILDUNG 17: ACHILLES UND DIE SCHILDKRÖTE	88

Einleitung

Die Unendlichkeit ist als Themengebiet von verschiedenen Fachrichtungen gut erforscht. So können Erkenntnisse über die Unendlichkeit nicht nur im Kontext der Mathematik, sondern auch vermehrt in der Philosophie und Theologie gefunden werden. Man beschäftigt sich in den verschiedenen Disziplinen mit unterschiedlichen Ideen und Kontexten von Unendlichkeit.

*„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.“
(David Hilbert 1925, in Basieux 2011)*

Besonders in der Mathematik ist der Anspruch jedoch, die wahre Wissenschaft vom Unendlichen zu sein (vgl. Basieux 2011, S. 63). Bereits seit jeher sind die Mathematiker von großen Zahlen und dem Übergang zur Unendlichkeit fasziniert. Archimedes sogenannte *Sandrechnung* diente der Berechnung der extrem großen Anzahl an Sandkörner, die sich in das zu seiner Zeit angenommene Universum packen lassen. Der bereits in der Antike formulierten Paradoxien versuchte man sich mit Tricks wie der Aristotelischen Einteilung in potenzielle und aktuelle¹ Unendlichkeit zu befreien (vgl. Loos, Sinn, & Ziegler 2022, S. 218). Der heute etablierte Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik ist also ein Zusammenspiel jahrhundertelanger Überlegungen unterschiedlicher Mathematiker und deren Ideen.

Im Vergleich zur Mathematik können in der Theologie und Philosophie keinerlei konkrete, genaue Aussagen über das Unendliche getätigt werden. Jedoch ist alles Physische, von dem wir Kenntnis haben, endlich. Keines der real existierenden, physischen Objekte hat die Eigenschaft der Unendlichkeit. Somit ist das Denken über Unendlichkeit ein Denken im physisch Unmöglichen, also reine Fiktion (vgl. Basieux 2011, S.63).

Auch heute noch hat die Unendlichkeit eine wesentliche wissenschaftliche Relevanz. Besonders in der Mathematik findet man diese in diversen Themenbereichen wieder. Um also mit der Unendlichkeit konfrontiert zu werden, muss man kein Mathematikstudium absolvieren. Die unterschwellige Auseinandersetzung mit dieser Thematik passiert bereits während der Schulkarriere. Neben dem Mathematikunterricht stößt man auch in den Fächern Religion bzw. Ethik sowie Philosophie auf die Unendlichkeit. Besonders in der Mathematik greifen Inhalte wie die Unendlichkeit von Zahlenmengen, Folgen und Reihen, Grenzwerte und schließlich Integrale dieses Thema auf.

¹ In der deutschsprachigen Literatur finden sich aufgrund unterschiedlicher Übersetzungen der englischen Originaltexte sowohl die Termini „aktuale“ als auch „aktuelle“ Unendlichkeit. In der vorliegenden Arbeit wird die Terminologie jeweils entsprechend der verwendeten Quelle übernommen.

Besonders in der Literatur und in verschiedenen Studien werden diverse wichtige Grunderfahrungen, dadurch erworbene Vorstellungen und auch Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht beschrieben. Darüber hinaus findet man beispielsweise von Weigand 2016 eine fundierte Vermittlungsidee zum Grenzwertbegriff. Neben der Vorstellung von unendlich großen Zahlenmengen und somit unendlich vieler Elemente, die sich darin befinden, zählt in der Analysis wohl der Grenzwertbegriff zu den grundlegendsten Begriffen. Allerdings soll es laut Weigand 2016 im Schulunterricht nicht zur Vermittlung eines propädeutischen Grenzwertbegriffs kommen, da verständnisorientierter Unterricht die sorgfältige Ausbildung von tragfähigen Grundvorstellungen voraussetzt. Besonders der Folgenbegriff ist in diesem Zusammenhang ein unverzichtbares Mittel, um Vorstellungen von Annäherungen an das Unendliche, oder auch beliebig kleine Annäherungen an fest vorgegebene Zahlen mental nachvollziehen und beschreiben zu können (vgl. Weigand 2016, S. 135).

Während also einerseits im Unterricht die Vorstellung des Unendlichen bei Schülerinnen und Schülern aufgebaut wird, wird in weiterer Folge zu einem späteren Zeitpunkt der Schullaufbahn ein grundlegendes Verständnis und eine gewisse Vorstellung zur Annäherung an das Unendliche vorausgesetzt. Umso wichtiger erscheint es also, diese Grundlagen von Beginn an aufzubauen und zu festigen, um später sinnvoll darauf zurückgreifen zu können.

In der beschriebenen Literatur bleibt jedoch die Unendlichkeit auf der Strecke. Eine allumfassende schulfachdidaktische Betrachtung mit aktuellen Erhebungen und Daten aus Österreich zu unendlichen Größen wäre aufschlussreich, um einen genaueren Einblick zu bekommen.

Da es wenig Forschung zu den genannten Problemen gibt, wird die Entwicklung dieses wissenschaftlichen Materials für die wissenschaftliche Gemeinschaft relevant sein.

Zur Generierung aktueller Daten wurde ein Fragebogen erstellt. Insgesamt 134 Schülerinnen und Schüler nahmen an dieser Befragung teil.

Als Grundlage für die empirische Forschung und auch für die gesamte Masterarbeit, dienen die vier Standards der Wissenschaftlichkeit.

Zunächst fordern diese die Formulierung eines wissenschaftlichen Forschungsproblems – ausdifferenziert in folgenden Forschungsfragen:

1. Welche Vorstellungen über die Unendlichkeit gibt es bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2?
 - 1a) Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Vorstellungen über die Unendlichkeit und der bearbeiteten Inhalte des Lehrplans aus Mathematik?
2. Welche Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit gibt es bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2?

2a) Gibt es Altersgruppen, in denen Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit gehäuft vorkommen?

Die entsprechenden Hypothesen, die demnach formuliert wurden, lauten:

1. Die Vorstellungen über die Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2 unterscheiden sich voneinander.
2. Bei älteren Schülerinnen und Schülern ist die Vorstellung über die Unendlichkeit genauer, detaillierter und umfassender als bei jüngeren.
3. Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit tauchen sowohl bei jüngeren Schülerinnen und Schülern auf als auch bei älteren.
4. Bei älteren Schülerinnen und Schülern sind Fehlvorstellungen nicht so stark gehäuft wie bei jüngeren Schülerinnen und Schülern.

In weiterer Folge geht es um die Realisierung eines wissenschaftlichen Forschungsprozesses. Dieser soll mit etablierten wissenschaftlichen Forschungsmethoden arbeiten und durch gängige wissenschaftstheoretische Paradigmen und Methodologien begründet werden. Dies findet sich besonders in Kapitel 2 wieder.

Als dritter Standard kann die Orientierung an der Wissenschafts- und Forschungsethik genannt werden. Hiermit ist gemeint, dass sich der Forschungsprozess an ethische Regeln halten soll. Nicht zuletzt wird die vollständige schriftliche Dokumentation des gesamten Forschungsprojekts in jeder einzelnen Phase verlangt. Diese muss intersubjektiv nachvollziehbar sein (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 86). Hierbei soll explizit auf den Anhang der Arbeit verwiesen werden, da hier alle zusätzlichen Materialien, die verwendet worden sind, angeführt sind.

Die vorliegende Arbeit wird zunächst einen theoretischen Überblick über die Grundlagen liefern. Hierbei soll einerseits die Unendlichkeit allgemein beschrieben werden. Insbesondere wird hier die historische Entwicklung des heute vorherrschenden Unendlichkeitsbegriffes skizziert. Daran anschließend wird die Unendlichkeit unter der Perspektive der Philosophie, Theologie und Mathematik beschrieben. Am Ende des Theorieteils wird der aktuelle österreichische Lehrplan der AHS beleuchtet und eine Verbindung zu den Themenbereichen der Unendlichkeit hergestellt.

In den beiden daran anschließenden Kapiteln folgen zunächst die genaue Erläuterung der empirischen Forschung und danach die Ergebnisse, sowie die Beantwortung der Forschungsfragen.

Das Ziel der Arbeit soll es einerseits sein, vorherrschende Vorstellungen und mögliche Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern diverser Altersgruppen über die Unendlichkeit zu erheben. Andererseits soll auch die Entwicklung der Vorstellungen über die Unendlichkeit von der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2 beschrieben und anhand der im Lehrplan für Mathematik verankerten Themen aufgearbeitet werden.

Die Ergebnisse dieser empirischen Forschung könnten für die (bildungs-)wissenschaftliche Gemeinschaft ein idealer Ausgangspunkt sein, um vorherrschende Fehlvorstellungen zu identifizieren, diese gewissen Altersgruppen zuzuordnen und in weiterer Folge Rückschlüsse auf die Organisation von Lehrplaninhalten zu ziehen.

1 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die Betrachtung der Unendlichkeit geschaffen. Um später diese Thematik differenziert betrachten zu können, ist es notwendig, vorab einen fundierten Blick auf die Breite der Unendlichkeit zu werfen. Zu diesem Zweck wird zunächst die Unendlichkeit im Allgemeinen mit allen notwendigen Vorüberlegungen, insbesondere der historischen Entwicklung, vorgestellt und beschrieben. Die darauffolgenden Kapitel widmen sich der Unendlichkeit in drei verschiedenen Wissenschaften, nämlich der Philosophie, der Theologie und der Mathematik. Natürlich kann die Unendlichkeit in weiteren Disziplinen vorgefunden werden. Die Auswahl auf eben jene drei Wissenschaftsgebiete ist so getroffen worden, dass sie sich mit den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler decken. Im Laufe ihrer Schullaufbahn werden bereits die befragten Lernenden mit allen drei Unterrichtsfächern in Berührung kommen bzw. sind bereits damit in Berührung gekommen. Somit kommt oder kam es unter Umständen auch zur Konfrontation mit jenen inhaltlichen Theorien.

Abschließend wird der aktuelle österreichische Lehrplan für das Fach Mathematik an der allgemeinbildenden höheren Schule (AHS) beschrieben. Im Zuge dessen werden die Inhalte auf die Verbindungen zur Unendlichkeit untersucht.

Mit dieser nachfolgenden Beschreibung soll ein Bogen von der wissenschaftlichen Betrachtung hin zur empirischen Forschung und den erhaltenen Ergebnissen gesponnen werden.

1.1 Die Unendlichkeit – Gedankengänge ins Grenzenlose

Als Grundlage, bevor die Unendlichkeit den spezifischen, wissenschaftlichen Teilbereichen zugeordnet und unter dem entsprechenden Blickwinkel jener beschrieben wird, sollen vorab noch allgemeine Informationen gesammelt werden. Mit der Beantwortung der Frage, was Unendlichkeit ist, soll zunächst ein grundlegendes Vorwissen vermittelt werden. Die allgemeine Beschäftigung mit der Thematik führt unweigerlich in die Richtung der später betrachteten fachwissenschaftlichen Diskurse mit ihren jeweiligen historischen Hintergründen. Aus diesem Grund wird in weiterer Folge die historische Entwicklung der Idee von Unendlichkeit näher erläutert.

1.1.1 Was ist Unendlichkeit?

Schlägt man den Begriff im „Duden“ nach, so wird die Bedeutung eines „Ohne-Ende-Sein“ angeboten. Den Begriff tatsächlich zu definieren, fällt allerdings schwer. Er ist sowohl in der Alltagssprache als auch in diversen wissenschaftlichen Disziplinen vorhanden und wird jeweils unterschiedlich verwendet. In der Alltagssprache wird damit, wie auch im „Duden“ angegeben, eine große, unüberblickbare Menge, häufig in Kontext von Raum und Zeit, beschrieben (vgl. Duden 2025). Betrachtet man den Begriff jedoch unter Anbetracht eines mathematischen oder

philosophischen Diskurses, so wird mit der Unendlichkeit etwas völlig anderes gemeint. Hier geht es um die bewusste Betrachtung einer Grenzüberschreitung, nämlich über das Endliche, für uns Greifbare, hinaus (vgl. Zell 2021, S. 9).

Nachfolgend sollen zur besseren Vorstellung der Thematik einige Ideen zur Unendlichkeit in Verbindung mit den verschiedenen Fachrichtungen beschrieben werden.

Die Unendlichkeit ist unter anderem deshalb so besonders, weil wir keinerlei reale, physische Objekte oder Dinge kennen, die die Eigenschaften der Unendlichkeit haben. Alle uns bekannten physischen Objekte haben die Eigenschaft endlich zu sein. Somit sind auch Gedankengänge, die die Unendlichkeit repräsentieren sollen, physisch unmöglich, fiktiv. Dennoch lassen sich Überlegungen in diese Richtung anstellen. Beispielsweise könnte die Größe unseres Universums betrachtet werden. Dieses ist räumlich und zeitlich begrenzt, alles Physische im All ist endlich und dennoch kann man sich die Endlichkeit des Alls nur schwer vorstellen. Zum direkten Vergleich ist die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen schwieriger vorzustellen. Der nötige Denkprozess zur Bildung einer fortlaufenden Reihe von natürlichen Zahlen lässt sich endlos fortführen. Dieser menschliche Denkprozess hat mit der unendlichen Zahlenmenge etwas Reales erschaffen, das dem Begriff der Unendlichkeit sinnvoll zugeordnet werden kann. Dennoch kann man hinterfragen, ob etwas Unendliches existieren kann. Durchaus, da die Existenz von Dingen nicht zwischen physischer und fiktiver Realität unterscheiden muss. Jedoch muss für die Existenz einer Fiktion die logische Konsistenz, demnach Widerspruchsfreiheit, als notwendige Voraussetzung erfüllt sein (vgl. Basieux 2011, S. 63 ff).

In der gängigen Literatur finden sich zwei Kategorien von Unendlichkeit: das potentielle und das aktuelle Unendliche. Mit dem potentiellen Unendlichen meint man Prozesse, die man unendlich fortsetzen kann. Hierzu zählen beispielsweise das Zählen oder das Teilen von Zahlen. Ebenso zählt die Eigenschaft dazu, die Lernende besonders gut am Zahlenstrahl durch „hineinzoomen“ erkennen können: zwischen zwei noch so nahe nebeneinanderliegenden Zahlen kann man immer eine weitere Zahl dazwischen finden. Im Vergleich dazu beschreibt das aktuelle Unendliche eine vollendete Gesamtheit, wie beispielsweise eine unendliche Menge, die jedoch als Ganzes existiert. Die Anzahl der Zahlen, die sich in der Zahlenmenge der reellen Zahlen befinden, ist unendlich. Da diese Zahlenmenge als Ganzes existiert, spricht man hier von aktueller Unendlichkeit (vgl. Aristoteles, Physik III, S. 6). Diese Unterscheidung findet traditionellerweise in der Philosophie Anwendung und geht auf Aristoteles zurück. Sie prägte darüber hinaus die westliche Denkweise über Jahrhunderte.

Besonders in der Mathematik hat das Konzept der Unendlichkeit eine zentrale Bedeutung. Die Bedeutung dieses Konzepts in der Mathematik war jedoch lange umstritten. Auch wenn man sich bereits in der Antike damit befasst hat, ist immer wieder erkennbar geworden, dass das

Verständnis von Unendlichkeit komplex ist. Dieses steht häufig in Konflikt mit der alltäglichen Intuition. Beispielsweise befasste man sich schon damals mit den Paradoxien von Zenon. Unter anderem zählt hierzu der berühmte Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte (vgl. Huggett 2010, S. 41).

Doch nicht nur die Paradoxien spielen für die Vorstellung von Unendlichkeit in der Mathematik eine wesentliche Rolle. Besonders Georg Cantor trug im 19. Jahrhundert wesentlich dazu bei, dass das mathematische Verständnis von Unendlichkeit erweitert wurde. So findet man bei der Betrachtung von Unendlichkeit neben den von der Philosophie verwendeten Kategorien der Unendlichkeit in der Mathematik die abzählbare und die überabzählbare Unendlichkeit. Diese Unterscheidung geht auf Cantor zurück. Er entwickelte die Mengenlehre und zeigte mit seinem Konzept der transfiniten Zahlen, dass es mehrere Arten von Unendlichkeit gibt. Die abzählbare Unendlichkeit trifft etwa auf die natürlichen Zahlen zu. Die überabzählbare Unendlichkeit stellt eine Eigenschaft der reellen Zahlen dar (vgl. Ferreirós, 2007, S. 88). Diese Erkenntnisse stellen ein zentrales mathematisches Paradoxon dar. Obwohl die Menge der geraden Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen jeweils unendlich sind, sind die beiden Mengen dennoch gleich groß, man sagt gleich mächtig. Sie können nämlich in eine bijektive Beziehung (jedem Element der einen Menge wird genau ein Element der anderen Menge zugeordnet und umgekehrt) gebracht werden. Betrachtet man allerdings die Menge der reellen Zahlen, so ist diese Menge mächtiger, da es keine solche Zuordnung zur Menge der natürlichen Zahlen gibt (vgl. Zell, 2021, S. 29).

Obwohl nun bereits verschiedene Arten von Unendlichkeit vorgestellt wurden, und ebenso auftretende Paradoxien, soll nun auch noch die Unendlichkeit als ein Attribut betrachtet werden. Setzt man sich nämlich in der Theologie mit der Unendlichkeit auseinander, so findet sie sich vorwiegend als ein Attribut Gottes wieder. Thomas von Aquin, ein bedeutender Kirchenlehrer der römisch-katholischen Kirche, betonte, dass nur Gott wahrhaft unendlich sein kann, vollkommen ewig und grenzenlos. Im Vergleich stellte das mathematische Unendliche nur ein nützliches Werkzeug in jener Fachrichtung dar, aber keine reale Entität (vgl. Gabriel, Olay, & Ostritsch 2018, S. 31). Diese metaphysische Vorstellung beeinflusste über Jahrhunderte die Ablehnung des aktuellen Unendlichen in der wissenschaftlichen Welt und trug auch zur kontroversen Betrachtung der Thematik innerhalb der Mathematik bei.

Heute ist die Unendlichkeit ein fester Bestandteil der Mathematik. Im modernen mathematischen Kontext findet man die Unendlichkeit beispielsweise in Teilbereichen wie der Analysis, der Mengenlehre, der Stochastik und ebenso in der Geometrie wieder. Die darin enthaltenen Konzepte bauen auf ein grundlegendes Verständnis von Unendlichkeit. Ein grundlegend gefestigter Grenzwertbegriff, die Vorstellung der Konvergenz, von unendlichen Reihen oder unendlichen Flächeninhalten wären ohne entsprechende Grundlage nicht möglich

(vgl. Biehler et al. 2018, S. 111). Dabei ist entscheidend, dass das Unendliche nicht als Zahl im herkömmlichen Sinn verstanden wird, sondern als abstraktes Konzept. Dies macht das Thema dementsprechend anspruchsvoll. Einerseits steht die Notwendigkeit der Auseinandersetzung mit der Thematik im Vordergrund, andererseits soll aus einem didaktischen Blickwinkel die Überforderung der Lernenden vermieden werden. Hierbei ein gutes Mittelmaß zu finden, wäre ein wichtiges Ziel für Lehrende. Dafür sprechen auch die Ergebnisse von diversen Studien. Sie zeigen, dass Schülerinnen und Schüler häufig präformierte Alltagsvorstellungen über Unendlichkeit mitbringen. Beispielsweise ist die Unendlichkeit weniger als Konzept erfasst, sondern mitunter als die größte Zahl, die es gibt, oder etwas, das unerreichbar ist. Kollidieren diese Vorstellungen mit jenen eines mathematischen Verständnisses und werden nicht ausreichend thematisiert, kann es durchaus zu Fehlvorstellungen kommen (vgl. Jahnke & Hefendehl-Hebeker 2008, S. 57).

Diese Alltagsvorstellungen von Schülerinnen und Schülern, aber auch von älteren Menschen in der Gesellschaft, lassen sich auch auf die sprachliche Herausforderung in Verbindung mit diesem Thema zurückführen. Im Alltag werden Ausdrücke, die sich mit der Unendlichkeit befassen, meist metaphorisch verwendet. So sollen Begriffe wie „unendlich klein“ oder „unendlich groß“ häufig sehr kleine oder sehr große Dinge beschreiben. In der mathematischen Fachsprache hingegen sind diese Begrifflichkeiten klar definiert. Diese Diskrepanz kann Missverständnisse hervorrufen, die es idealerweise im Unterricht aufzugreifen und zu klären gilt (vgl. Biehler et al. 2018, S. 113).

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Unendlichkeit in ihren verschiedenen Betrachtungsweisen nicht als fester Begriff, sondern als vielfältig interpretierbares Konzept gesehen werden muss. Je nach Disziplin lassen sich daher verschiedene Arten und Zwecke der Unendlichkeit beschreiben. Außer Frage steht, dass die Unendlichkeit ein faszinierender Aspekt ist, der trotz der damit einhergehenden Herausforderung zum kritischen Nachdenken anregt. Die Vielschichtigkeit und die dennoch nicht zu unterschätzende Notwendigkeit dessen machen dieses Thema auch besonders geeignet für interdisziplinäre Lernprozesse im schulischen Kontext (vgl. Zell 2021, S. 36).

1.1.2 Historischer Überblick über die Idee der Unendlichkeit

Im vorangegangenen Kapitel wurden bereits Personen genannt, die sich über die Zeit hinweg mit der Unendlichkeit beschäftigten und den Begriff demnach prägten. Nachfolgend soll ein chronologischer, wenn auch limitierter Überblick über wesentliche Weiterentwicklungen der Konzepte gegeben werden.

Überlegungen und Ideen zur Unendlichkeit finden sich bereits im antiken Griechenland wieder. Hier kann man auch die ersten Versuche im Erfassen des Grenzenlosen rekonstruieren. Die Idee der Unendlichkeit zählt damit zu den ältesten Konzepten des menschlichen Denkens. Der vorsokratische griechische Philosoph Anaximander, der ca. 610 – 546 vor Christus lebte, führte den Begriff *ápeiron*, der für das Unbegrenzte steht, ein. Mit diesem Prinzip sollte die Ursubstanz des Universums dargestellt werden. Das *ápeiron* erfüllte diverse Eigenschaften: Es war weder bestimmt noch messbar. Es wurde beschrieben als ein ursprüngliches, unendliches Etwas, aus dem alles hervorgehe, und in das alles zurückkehre (vgl. Zell 2021, S. 15). Auch wenn damit erstmals das Unendliche nicht nur abstrakt, sondern als kosmisches Prinzip gedacht wurde, nahm es Aristoteles zwar auf, analysierte diesen Gedanken jedoch kritisch. Er erkannte das Unendliche nicht als real existierendes Objekt, sondern als eine Denkfigur und unterschied zwischen einem potentiellen Unendlichen und einem aktuellen Unendlichen. Mit einem potentiellen Unendlichen meinte er die Vorstellung, man könne eine Linie immer weiter teilen. Das aktuelle Unendliche lehnt er kategorisch ab, da das Unendliche in einer realen Welt nicht als vollendete Größe existiere. Es sei lediglich eine Möglichkeit oder ein Prozess (vgl. Aristoteles 2004, S. 6). Diese Unterscheidung prägte die philosophische und mathematische Diskussion über Jahrhunderte hinweg und wird später auch wieder aufgegriffen werden.

Besonders im Mittelalter wurde der Begriff der Unendlichkeit stark theologisch gefärbt. Der bereits erwähnte Thomas von Aquin stellte die Unendlichkeit als Attribut Gottes dar. Er lehnte zwar, wie auch Aristoteles, ein aktuelles Unendliches in der Natur ab, jedoch akzeptierte er es in Bezug auf Gott. Die Unendlichkeit Gottes wurde als real angenommen. Seine Allwissenheit, Allgegenwart und Ewigkeit blieben lediglich für den menschlichen Geist unzugänglich (vgl. Gabriel, Olay, & Ostritsch 2018, S. 31).

Damit wurde das Unendliche dem Göttlichen vorbehalten und in der Wissenschaft mit Skepsis betrachtet. Dies änderte sich allmählich mit dem mathematischen Fortschritt in der frühen Neuzeit. Im 17. Jahrhundert stellte Galileo Galilei, ein italienischer Universalgelehrter, scheinbar paradoxe Überlegungen zur Unendlichkeit an. Er betrachtete die Anzahl der Quadratzahlen im Verhältnis zur Anzahl der Primzahlen. Auch wenn es unendlich viele Quadratzahlen und unendlich viele Primzahlen gibt, sind es doch „mehr“ Quadratzahlen als Primzahlen. Dies ließ erstmals auf unterschiedliche Arten von Unendlichkeit schließen (vgl. Zell 2021, S. 18).

In weiterer Folge griff auch der berühmte Philosoph Immanuel Kant die Unendlichkeit auf und warnte vor dem unkritischen Umgang mit ihr. Auch wenn das Unendliche ein notwendiges Konzept der Vernunft sei, stelle es laut seiner Vorstellung keinen Gegenstand möglicher Erfahrung dar. Für ihn war das Unendliche eine regulative Idee, die eine Grenze des Denkens markiert. Zudem schreibt er in seiner Kritik der reinen Vernunft, dass die reale Existenz des

Unendlichen nie bewiesen werden könne (vgl. Kant 1781/1998, B435 ff.). Damit brachte er erneut die epistemologische Spannung zum Ausdruck: Das Unendliche ist denkbar, aber möglicherweise nicht wirklich.

Nachdem Kant die epistemologische Spannung des Unendlichen aufbrachte, kam es diesbezüglich erst mit dem Mathematiker Georg Cantor im 19. Jahrhundert zum entscheidenden Wendepunkt. Er setzte sich gemeinsam mit seinen theologischen Zeitgenossen intensiv mit der Thematik der Unendlichkeit auseinander. Sie nahmen mitunter die Unterscheidung des Aristoteles zwischen einem aktual und einem potentiell Unendlichen auf. Hier wurde die Kritik geäußert, dass das potentiell Unendliche in der Mathematik eigentlich endlich sei, jedoch noch keine Schranke dafür gefunden worden sei. Das aktual Unendliche differenzierte er mit Philosophen in seinen Schriften in drei verschiedene Unendlichkeiten (vgl. Tapp 2008, S. 236).

Ähnlich wie auch Galileo Galilei widmete sich Cantor den verschiedenen Größen der Unendlichkeit und schaffte es erstmals in seinen Schriften zur Mengenlehre, diese systematisch nachzuweisen. In diesen Schriften zeigte er, dass die Menge der natürlichen Zahlen abzählbar unendlich ist, während die Menge der reellen Zahlen eine größere Unendlichkeit darstellt und somit überabzählbar ist. Dieses Konzept, das er damit einführte, bezeichnete er als transfinite Zahlen.

Die Entdeckungen Cantors stießen auf Widerstand, dennoch wurde seine Theorie zur Grundlage der modernen Mathematik (vgl. Ferreirós, 2007, S. 87).

In der Philosophie beschäftigten sich Bertrand Russell und David Hilbert im 20. Jahrhundert mit logischen Paradoxien des Unendlichen. Beispielsweise kann hier das berühmte „Hotel Hilbert“, das unendlich viele Gäste aufnehmen kann und doch nie voll ist, genannt werden (vgl. Russell 1919, S. 139).

Die historische Entwicklung des Begriffs der Unendlichkeit und die Veränderung des Verständnisses über Jahrtausende hinweg zeigen, welche Komplexität in dieser Thematik liegen.

1.2 Die Unendlichkeit in der Philosophie

Nach der allgemeinen und der historischen Betrachtung der Unendlichkeit soll diese nun unter dem Blickwinkel der Philosophie beschrieben werden. Da die Entstehung des Begriffs der Unendlichkeit nur in Verbindung mit vielen Philosophen möglich war, finden sich einige bereits beschriebene Ideen wieder. Diese werden nachfolgend, wiederum in chronologischer Reihenfolge, nur kurz beschrieben. Der Fokus wird auf der Ergänzung durch die Ansichten jener liegen, die bislang zu kurz gekommen oder noch nicht vorgekommen sind.

Wie schon angeführt liegt der Ursprung des Begriffs der Unendlichkeit in der Philosophie im altgriechischen *ápeiron*. Der Begriff dient als Beschreibung eines Übergangs vom Endlichen ins Grenzenlose. Die frühe Konzeption des Philosophen Anaximander, der das unbegrenzte Prinzip aller Dinge beschrieb, stellt die Unendlichkeit als metaphysisches Grundprinzip dar. Das Unendliche ist weder intuitiv noch erfahrbar, aber notwendig für das Verständnis der Weltstruktur (vgl. Sieroka 2020, S. 2).

Ebenfalls bekannt ist Zeno von Elea, der Paradoxien hervorbrachte, um das unbegrenzte Denken zu hinterfragen. Ihm ist beispielsweise das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte zuzuordnen (vgl. Sieroka, 2020, S. 4).

Mit Aristoteles wird die zur Vollständigkeit erneut angeführte Liste der bereits beschriebenen Philosophen abgeschlossen. Seine Idee der Begriffsunterscheidung des potentiell und des aktuell Unendlichen wurde bereits vorgestellt (vgl. Dadaczyński, 2020, S. 1).

Mit dem Spätmittelalter lernen wir nun einen herausragenden Denker kennen, der die Unendlichkeit derart behandelt hat, dass die philosophisch-theologische Tradition nachhaltig beeinflusst worden ist: Nikolaus von Kues. Er schrieb in seinem Werk *De docta ignorantia* (1440), dass wahre Erkenntnis darin besteht, das Nichtwissen über das Unendliche anzuerkennen. Er formulierte Thesen dahingehend, dass der Mensch die Gesamtheit der Unendlichkeit niemals verstehen oder erfassen könne, man könne nur spekulieren. Seine Idee der *coincidentia oppositorum*, der „Einheit der Gegensätze“, die in der göttlichen Unendlichkeit ihren Ausdruck findet, ist besonders bedeutend. Laut dieser Idee sei Gott die absolute Unendlichkeit und weder räumlich noch zeitlich begrenzt. Außerdem sei Gott nicht in Kategorien menschlicher Logik zu fassen und jenseits aller Dualismen wie groß/klein, endlich/unendlich oder gut/böse (vgl. Enders 2009, S. 119ff).

Die entscheidende Weiterentwicklung des Unendlichkeitskonzeptes wurde im 17. Jahrhundert von Gottfried Wilhelm Leibniz geliefert. Er unterscheidet in seiner Philosophie verschiedene Formen von Unendlichkeit. Für ihn gab es die metaphysische, die mathematische und die logische Unendlichkeit. In seinen Korrespondenzen und Manuskripten finden sich Aufzeichnungen, die darauf schließen lassen, dass Leibniz die Unendlichkeit als erkenntnistheoretische Herausforderung einerseits und als methodisches Hilfsmittel andererseits verstand. Seine Konzepte der infinitesimalen Größen stellten eine besondere Relevanz dar, da sie grundlegende Beiträge zur Entwicklung der Differentialrechnung leisteten. Im Hinblick auf das von Aristoteles postulierte aktuell Unendliche war Leibniz vorsichtig. Er akzeptierte hingegen die potentielle Unendlichkeit als nützliche mathematische Funktion. Für ihn gab es zu bedenken, dass das Unendliche im praktischen Sinne nicht als reale Entität verstanden werden könne. Die Unendlichkeit stelle nur eine Denkfigur dar, die die Beschreibung natürlicher Phänomene erleichterte (vgl. Eklund 2020, S. 33ff).

Zuletzt stellte Leibniz das Konzept der Monade vor. Es handelt sich hierbei um ein grundlegendes metaphysisches Prinzip, das gleichzeitig einfach und in sich geschlossen, aber auch unendlich an Inhalt ist. Eine solche Monade sollte das Universum auf ihre eigene Weise widerspiegeln. Diese Vorstellung beinhaltete eine implizite Form der Unendlichkeit (vgl. Harmer 2024, S. 21ff).

Der bereits erwähnte Immanuel Kant, stellte zwei einander gegensätzliche Thesen gegenüber: Die Welt hat einen Anfang und sie ist unendlich. Beide Positionen sind logisch konsistent, lassen sich aber empirisch nicht entscheiden (vgl. Kant, 1781/1998, B435ff.).

Mit Georg Wilhelm Friedrich Hegel wurde im 18. und 19. Jahrhundert die Diskussion um die Unendlichkeit in eine neue systematische Form gebracht. Auch er trifft eine Unterscheidung, nämlich nach dem schlechten Unendlichen und der wahren Unendlichkeit. Stellt man sich ein endloses Fortschreiten ohne Ziel vor, so würde dies ein schlechtes Unendliches darstellen. Dieses ist durch die Negation des Endlichen bestimmt. Da dieses Konzept mit seinem endlosen Fortschreiten etwas darstellt, das immer weitergeht, ohne je eine Grenze zu überwinden, lehnte Hegel selbst dieses als unzureichend ab.

Die wahre Unendlichkeit hingegen stehe laut Hegel dem gegenüber. Diese stellt als Selbstbezüglichkeit des Gedankens ein dialektisches Prinzip dar, in dem das Endliche im Unendlichen aufgehoben wird, ohne dass das Unendliche außerhalb oder jenseits liegt. Für Hegel entsteht Unendlichkeit nicht durch eine unweigerliche Fortsetzung, sondern durch eine qualitative Transformation. Laut ihm erkenne sich das Endliche als Teil eines Ganzen, das es selbst mit konstituiert (vgl. Agar 2015, S. 37ff).

Dieses Konzept kann auch ethisch und gesellschaftlich angewandt werden. Ein Individuum realisiert sich nicht durch endloses Fortschreiten, sondern durch die Erkenntnis seiner Stellung im Ganzen.

Walter Benjamin (1892 bis 1940), ein deutscher Philosoph, zeigte in seinen Werken einen unüblichen Zugang zur Unendlichkeit. Er griff in seinen philosophischen und literaturtheoretischen Schriften insbesondere auf die Metapher der Monade von Leibniz zurück. Besonders interessant ist, dass er eine Form der intensiven Unendlichkeit thematisierte. Damit bezieht er sich nicht auf eine mathematische Größe, sondern auf eine Erfahrung totaler Bedeutungsdichte. Benjamin verwende laut Schwebel (2012) Leibniz' Monaden als symbolischen Rahmen, um die Idee einer Welt in einem Punkt, einer Totalität im Fragment, darzustellen. Hier wird die Unendlichkeit als Moment der Offenheit dargestellt, die weder mathematisch noch logisch strukturiert ist. Laut Benjamin könne sich in jedem Bild oder auch in jedem Textfragment die ganze Welt spiegeln. Dies erinnert stark an die Idee von Nikolaus von Kues in seiner Idee der *coincidentia oppositorum*. Somit wird die Unendlichkeit zu einem

Symbol für das nicht Einholbare. Es beschreibt etwas, das sich rational nicht erfassen lässt (vgl. Schwebel 2012, S. 589ff).

Der französische Philosoph Emanuel Lévinas beschrieb 1961 in seinem Werk *Totalité et Infini* die Unendlichkeit als ethisches Verhältnis zum Anderen. Mit seinem radikalen Zugang, die Unendlichkeit keiner ontologischen oder qualitativen Kategorie zuzuordnen, offenbarte er eine neue Dimension. Die Begegnung mit dem Anderen führt über das eigene Ich hinaus, weshalb diese Beziehung niemals vollständig erfasst werden kann: Sie ist unendlich.

Die Bezeichnung der Unendlichkeit als das „Nicht-zu-Endende“ zieht für Lévinas auch eine ethische Verantwortung mit sich. Da sich der Andere jeder Totalisierung und Objektivierung entzieht, wird das Unendliche zu einem asymmetrischen Verhältnis. Ich bin immer „mehr“ verantwortlich, als ich leisten kann (vgl. Lévinas 1969, S. 194ff).

Auch wenn sich dieser Kontext keinem einzelnen Philosophen zuordnen lässt, so findet man das Thema Unendlichkeit in der modernen analytischen Philosophie im Kontext sogenannter Supertasks. Hier handelt es sich um Aufgaben, die aus einer unendlichen Anzahl von Teilschritten bestehen, aber in endlicher Zeit abgeschlossen werden sollen. James F. Thomson (1954) beschrieb in diesem Kontext ein berühmtes Gedankenexperiment. Dieses dreht sich um eine Lampe, die in immer kürzeren Abständen an- und ausgeschaltet wird. Nach einer endlichen Zeit liegt die Frage nahe, ob die Lampe nun ein- oder ausgeschaltet ist. Diese Fragestellung führt jedoch zu einem logischen Paradoxon, das die Schwierigkeit beim Umgang mit tatsächlicher Unendlichkeit zeigt. Solche Szenarien werden insbesondere von der modernen Philosophie aufgegriffen, um die Grenzen logischer Konsistenz in unendlichen Prozessen auszuloten. Nicht nur in der Mathematik, sondern vor allem auch in der Zeitlogik und der Handlungstheorie kann die Unendlichkeit zu Widersprüchen führen (vgl. Manchak & Roberts 2022).

Die philosophischen Zugänge zur Unendlichkeit sind sehr vielfältig und verlaufen, beginnend mit Anaximander und einem kosmologischen Prinzip, hin zu Zenos Paradoxien, der systematischen Differenzierung Aristoteles', über die metaphysische Unterscheidung von Leibniz bis hin zur ethischen Begegnung (Lévinas). Mit diesen ausgewählten Philosophen und der damit dargestellten Vielfalt ist erkennbar, dass es in der Philosophie keinen einheitlichen Unendlichkeitsbegriff gibt.

1.3 Die Unendlichkeit in der Theologie

Nachfolgend soll die Unendlichkeit in der christlichen Theologie beschrieben werden. Dazu wird zunächst die Idee der Unendlichkeit in Bezug auf Gott beschrieben. In weiterer Folge sollen auch einzelne historische Persönlichkeiten vorgestellt werden, die zur Entwicklung der heutigen

Ideen hinsichtlich der Unendlichkeit in der Theologie beigetragen haben. Wie auch schon in Kapitel 1.2 finden sich hier einige Personen und Ideen wieder, die bereits in Kapitel 1.1.2 dargestellt worden sind. Diese werden aus Gründen der Vollständigkeit hier nochmals kurz beschrieben und deren Ansichten und Ideen erläutert.

Unendlichkeit zählt in der Theologie zu den zentralen Attributen Gottes – sie bezeichnet das absolute, unbegrenzte Sein Gottes. Theologische Reflexion betrachtet dieses Konzept nicht als abstraktes Gedankenexperiment, sondern als ein klassisches Attribut Gottes (vgl. Owen, zitiert in Hasker 2019, S. 258).

Dennoch ist nicht klar, was genau es bedeutet, zu behaupten, dass Gott unendlich sei. Für das Verstehen der göttlichen Unendlichkeit gibt es mindestens vier verschiedene Methoden.

Einerseits kann damit die Allmacht, Allwissenheit, moralische Vollkommenheit und die Ewigkeit Gottes angesprochen werden. Andererseits könnte auch zum Ausdruck gebracht werden, dass Gott kein Objekt menschlichen Verstehens ist (vgl. Göcke 2015, S. 142f). Besonders die apophatische Theologie nimmt diesen Ansatz auf. Sie sieht Gott in der Abgrenzung zum Irdischen. Dabei ist Gott weder begrenzt, noch teilt er sich durch definierende Identitäten mit. Er hüllt sich in Nichterkennen ein (vgl. Russell 2011, S. 275ff).

Als dritte Möglichkeit könnte sich die Unendlichkeit Gottes auf eine Eigenschaft eines bestimmten göttlichen Attributes beziehen. Beispielsweise könnte damit die vollkommene Macht Gottes gemeint werden. Viertens wäre die Aussage „Gott ist unendlich“ als kategoriale Eigenschaft Gottes zu denken. Diese Eigenschaft kann nicht auf klassische Attribute reduziert werden, sondern repräsentiert einen eigenständigen Aspekt des göttlichen Seins (vgl. Göcke 2015, S. 143).

In der antiken griechischen Tradition wurde der Begriff einer negativ-unendlichen Qualität geprägt. Dem zufolge bedeutet Unendlichkeit *„das völlige Fehlen jeder positiven Bestimmbarkeit einer Sache.“* (Göcke 2015, S. 152) Bezieht man sich auf einen solchen Unendlichkeitsbegriff, kann man nachvollziehen, dass unter anderem Platon und Aristoteles Gott nicht als unendlich bezeichnet haben. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass aufgrund der zwei vorherrschenden Stufen im antiken griechischen Denken, Gott nur der negativen Unendlichkeit oder der qualitativen Endlichkeit zugeordnet werden konnte. Aufgrund der Eigenschaften der Unendlichkeit konnte Gott somit nur als qualitativ endliche Entität gedacht werden (vgl. Göcke 2015, S. 152f). Spätestens seit Gregor von Nyssa findet man eine semantische Neuinterpretation, denn der christliche Bischof, Heilige und Kirchenlehrer Gregor von Nyssa, der etwa 400 Jahre nach Christus lebte, formulierte eine visionäre, apophatische Theologie: Die Unendlichkeit Gottes sei so groß, dass der menschliche Geist sie niemals vollständig erfassen könne (vgl. Maspero & Mateo Seco 2007, S. 424f).

Der Unendlichkeitsbegriff wird nun als Begriff positiv-unendlicher Qualität verstanden. Diese Neuinterpretation ist laut Göcke (2015) darauf zurückzuführen, *„dass Gott in der Absicht der*

Letztbegründung konsequent als erstes Prinzip allen endlichen und wohlbestimmten Seins gedacht wurde und aufgrund dessen nicht auf derselben Skala ontologischer Bestimmtheit stehen konnte, wie das von ihm Bestimmte.“ (Göcke 2015, S. 155).

Der bereits beschriebene Thomas von Aquin nimmt diese Ideen ebenfalls auf. Er verbindet die Unendlichkeit mit der Schöpferkraft Gottes. Er sagt, dass Gott nur durch eine wirklich unendliche Macht aus dem Nichts etwas schaffen könne. Somit kann kein Geschöpf jemals Unendlichkeit besitzen. Aquin's Konzept der Schöpfung ist mit dem göttlichen Absolutum untrennbar verbunden, denn Gott besitzt uneingeschränktes *esse subsistens*² (vgl. Carroll 2011, S. 54f.).

In weiterer Folge unterscheidet Aquin verschiedene Bedeutungsformen von Unendlichkeit. Beispielsweise stehen die Prinzipien des Seins bei Geschöpfen der absoluten Unendlichkeit bei Gott gegenüber (vgl. Tomarchio 2002, S. 163ff).

Auch heute findet man die Identifikation Gottes mit der absoluten Unendlichkeit („absolute infinity“) noch. Einer der bedeutendsten Mathematiker der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, Georg Cantor, spinn im Laufe seiner Korrespondenz mit diversen Theologen, einen Bogen von der Mathematik zur Theologie. Die transfinite Mathematik ist selbst von Cantor, der diese beschrieben hat, als Ausdruck des göttlichen Unendlichen gesehen worden. Diese Unendlichkeit steht nicht in Konkurrenz mit der Unendlichkeit der Mathematik, sondern stellt sich als reflexives Spiegelungsverhältnis dar (vgl. Russell 2011, S. 275ff).

In der Zeitschrift „Theology an Science“ stellt der Philosoph Eric Steinhardt ein mathematisch-inspiriertes Modell der göttlichen Unendlichkeit vor. Darin beschreibt er Gottes Perfektion - unter anderem hinsichtlich seiner Macht und Güte - als transfinite Grade, die sich durch Rekursion formal beschreiben lassen. Obwohl die Unendlichkeit damit nicht rein symbolisch gefasst wird, kann die Unendlichkeit damit dennoch theologisch modelliert werden (vgl. Steinhardt 2009, S. 261ff).

Diverse Studien befassen sich damit, wie Mathematik und Theologie interagieren. So setzte sich Russel (2011) dafür ein, dass Cantors mathematisches Konzept auch sinnvoll für die Theologie anzunehmen ist. Beispielsweise verdeutlicht es das Verhältnis von Raum und Zeit, in dem sich Gottes Unendlichkeit manifestiert. Russel verweist jedoch auch darauf, dass die mathematischen Theorien mit ihren formalen Modellen für die Unendlichkeit nicht vollständig auf Gott angewandt werden können. Dies begründet er damit, dass die traditionelle Theologie das Unendliche oft nur metaphorisch verwendet (vgl. Hasker 2019, S. 258ff).

² Sein, das unabhängig von anderem Sein existiert und aus sich selbst heraus besteht. (vgl. Carroll 2011, S. 54).

Die christliche Theologie fasst die Unendlichkeit also in verschiedenen Interpretationen auf, bezieht sich dabei aber ausschließlich auf Gott. Im Sinne der Vollständigkeit wäre eine Analyse weiterer Religionen in Hinblick auf die Vorstellung der Unendlichkeit notwendig. Dies würde aber für das eigentliche Thema der Arbeit zu weit führen.

1.4 Die Unendlichkeit in der Mathematik

Nach der Betrachtung der Unendlichkeit in der Philosophie und der Theologie soll diese Thematik nun auch noch auf die Mathematik bezogen werden. Dies stellt insbesondere eine wesentliche Grundlage für die weitere Arbeit dar.

Untenstehend werden einige besondere Ideen hinsichtlich der Unendlichkeit in der Mathematik beschrieben. Auch hier gibt es aufgrund der stetigen Weiterentwicklung durch diverse Mathematikerinnen und Mathematiker einen historischen Zusammenhang.

Die Unendlichkeit in der Mathematik meint nicht nur etwas sehr Großes, sondern im Vergleich zur Philosophie und Theologie wird die Unendlichkeit in der Mathematik als präzise definierter Zustand aufgefasst. Beispielsweise können hier Mengen genannt werden, die keine endliche Anzahl von Elementen haben (vgl. Cantor 1874, S. 260). Dennoch wird heute üblicherweise „unendlich“ nicht als Zahl aufgefasst bzw. werden unendliche Größen in der Mathematik nicht zugelassen (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 217).

Der präzise definierte Zustand der Unendlichkeit ist ein Produkt der Überlegungen verschiedenster Mathematikerinnen und Mathematiker. So verwendeten Mathematiker wie Eudoxos in der Antike die Methode der Erschöpfung. Somit konnten begrenzte Ergebnisse mit unendlichen Prozessen erreicht werden, ohne die Unendlichkeit im eigentlichen Sinne zu verwenden.

Mit dem Sprung in die Renaissance findet man Cavalieri mit dem Konzept der „Indivisibles“ wieder. In diesem Konzept beschreibt er Elemente, die kleiner als jedes Maß, sind und skizziert damit eine Vorstufe zur modernen Infinitesimalrechnung (vgl. Mancosu 1996, S. 34ff). Er bezieht sich dabei auf Archimedes' Werk, in dem er das Volumen einer Kugel vom Radius r zu einer Kugel mit dem Radius $\frac{4}{3}r^3\pi$ vergleicht. Dazu vergleicht er die Kugel mit einem Zylinder, aus dem ein Doppelkegel herausgeschnitten ist. In jeder einzelnen horizontalen Schicht haben beide Körper dieselbe Fläche. Da diese aus unendlich vielen dünnen Schichten aufgebaut sind, müssen sie auch dasselbe Volumen besitzen. Später heißt dieses Argumentationsschema das *Prinzip von Cavalieri* und gilt als Anfang der Analysis und insbesondere der Integration (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 215).

In der Entstehungszeit der Differenzenrechnung bzw. Differentialrechnung im 17. Jahrhundert argumentierte man gerne geometrisch (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 215). Den formalen

Infinitesimalbegriff führten erst Newton und Leibniz ein. Dies ermöglichte zwar die Konzeptualisierung von Ableitungen und Integralen, jedoch ohne strenge Grundlagen (vgl. Mancosu 1996, S. 34ff). Hier knüpfte insbesondere der deutsche Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß im 19. Jahrhundert an. Er legte mit der Beschreibung des ε - δ -Kalküls den Grundstein für den modernen Aufbau der Analysis. Hierbei wird nicht mit unendlich großen oder kleinen Zahlen gearbeitet, sondern die betrachteten Größen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ können „beliebig klein“ sein. Diese beiden Größen sind positive reelle Zahlen und finden sich in den Definitionen von Grenzwerten, Stetigkeit und Ableitung wieder (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 217).

Möglicherweise ereilt die Leserinnen und Leser mittlerweile der Eindruck, als ob die Mathematik das Konzept der Unendlichkeit seit jeher angenommen und lediglich stetig weiterentwickelt hätte. Dies ist allerdings nicht der Fall. Der deutsche Mathematiker Leopold Kronecker (19. Jahrhundert) war ein prominenter Vertreter des Finitismus. Diese Position lehnt die tatsächliche Unendlichkeit ab und akzeptiert nur endliche mathematische Objekte (vgl. Moore 1990, S. 165).

Ein Mathematiker, der die Unendlichkeit annahm und sich mit dieser auseinandersetzte - diesmal im Kontext der Zahlenmengen - war Galileo Galilei. Er hat erkannt, dass es genauso viele Quadratzahlen wie natürliche Zahlen gibt. Dieses Paradoxon war für ihn ein Hinweis darauf, dass es verschiedene Arten mathematischer Unendlichkeit geben müsse (vgl. Moore 1990, S. 23). Nicht nur Galileo, sondern viele weitere Mathematiker, die sich mit der Unendlichkeit befassten, arbeiteten mit den verschiedenen (Zahlen-)Mengen.

Es gilt zu berücksichtigen, dass in der Mengenlehre insbesondere der Begriff des Aktual-Unendlichen untersucht wird. Die Geburtsstunde der Mengenlehre schlug mit den Ergebnissen Cantors (vgl. Goldstern 2000, S. 2).

Cantor griff die Idee der Betrachtung diverser unendlicher Mengen auf. Er ging dazu über, die Kardinalzahlen unendlicher Mengen als Zahlen zu betrachten, als sogenannte transfinite Zahlen. Damit erweckte er das aktual Unendliche zum Leben und das Rechnen mit unendlichen Mengen wurde Wirklichkeit (vgl. Fritzsche 2008, S. 9).

In weiterer Folge setzte sich Cantor mit den geordneten Mengen auseinander. Er führte die Begrifflichkeiten „total geordnet“ und „wohlgeordnet“ ein. Zu den total geordneten Mengen gehören die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, da man für je zwei Elemente x und y (beide stammen aus derselben Zahlenmenge) entscheiden kann, ob $x < y$, $x = y$ oder $x > y$ ist. Ist eine Menge wohlgeordnet, so gibt es zu jedem Element, das nicht bereits das größte ist, ein nächstgrößeres Element.

„Zwei wohlgeordnete Mengen heißen ähnlich, falls es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt, die die Ordnung respektiert. Die Gesamtheit aller zu einer festen Menge ähnlichen Mengen bezeichnet man als eine Ordnungszahl (Fritzsche 2008, S. 11).“

Die Ordnungszahl erleichtert das Sortieren von Mengen nach ihrer Größe. Cantor sortierte die üblichen Zahlenbereiche nach ihrer Mächtigkeit und hielt fest, dass die rationalen Zahlen abzählbar sind. Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ haben dieselbe Mächtigkeit. Im Vergleich dazu stellen sich die reellen Zahlen als nicht abzählbar da. Die Menge $\mathbb{R}$ hat also eine größere Kardinalität als $\mathbb{N}$ (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 216).

Da zu jeder Ordnungszahl eine Kardinalzahl³ gehört, vermutete Cantor, dass es umgekehrt möglich ist, jede Menge mit einer Wohlordnung zu versehen. Daraus abgeleitet, stellte Cantor die Frage, ob es eine Menge mit größerer Kardinalität als $\mathbb{N}$ und kleinerer Kardinalität als $\mathbb{R}$ gebe. Insbesondere zeigte er, dass die Menge der reellen Zahlen ungleich größer als die der natürlichen Zahlen ist. Er bezeichnete dies als unterschiedliche Mächtigkeiten. Für unendliche Mengen, die gleich groß sind, setzte er voraus, dass es eine Bijektion⁴ zwischen ihnen geben müsse. Die Kontinuumshypothese betitelt die Gleichung $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. (vgl. Fritzsche 2008, S. 11). Diese berühmte Hypothese beschäftigt sich also mit der Kardinalität zwischen $2^{\aleph_0}$ und $\aleph_1$ und fragt, ob diese existiere. Cantors Ergebnisse zeigen, dass sich Naturzahlen ($\aleph_0$) in ihrer Größe von reellen Zahlen ($2^{\aleph_0}$) unterscheiden. Er spricht von einem fundamentalen Unterschied und prägt in weiterer Folge die Begriffe der Abzählbarkeit und der Überabzählbarkeit (vgl. Cantor 1874, S. 261f).

Der in Wien arbeitende Mathematiker Kurt Gödel und der Amerikaner Paul Cohen haben gezeigt, dass die Frage der Größe der Kardinalität unabhängig von den üblichen Mengenaxiomen ist (Ferreirós 2007, S. 200). Beide haben bewiesen, dass die Kontinuumshypothese in ZF⁵ (Beweis von Gödel) und in ZFC⁶ (Beweis von Cohen) nicht widerlegbar ist bzw. nicht bewiesen werden kann (vgl. Fritzsche 2008, S. 12).

In den Zermelo-Fraenkel-Axiomen, die nach Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel benannt und in der Fußnote erklärt sind, ist das Axiom der Unendlichkeit erforderlich, um beispielsweise das Zahlenmodell der natürlichen Zahlen zu entwickeln (vgl. Moore 1990, S. 7).

³ **Definition:** Sei M eine beliebige Menge. Unter der Kardinalität von M versteht man die Gesamtheit aller Mengen N , für die es eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ gibt. Man bezeichnet diese Kardinalität mit $|M|$. Jede der Mengen N nennt man einen Repräsentanten von N (Fritzsche 2008, S. 6).

⁴ **Definition:** Eine Abbildung f zwischen Mengen M und N ist eine Zuordnung $f: M \rightarrow N$, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y = f(x) \in N$ zuordnet.

Definition: Eine Abbildung heißt bijektiv, falls die Zuordnung umkehrbar ist, falls also auch jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ zugeordnet ist, so dass $f(x) = y$ ist (Fritzsche 2008, S. 5).

⁵ Hierbei handelt es sich um ein Axiomensystem, das auf den Grundlagen von Zermelo (System Z) von Fraenkel und Skolem zum System ZF vervollständigt wurde (vgl. Fritzsche 2008, S. 12).

⁶ Da im ZF-System das Auswahlaxiom herausgenommen wurde, entstand gemeinsam mit diesem Axiom das System ZFC, worin bislang kein Widerspruch gefunden wurde (vgl. Fritzsche 2008, S. 12).

Auch wenn die Mengenlehre im 19. Jahrhundert bereits ein gutes Gerüst hatte, endete die Auseinandersetzung mit der Thematik nicht. Insbesondere befassten sich viele Mathematikerinnen und Mathematiker des 20. Jahrhunderts mit der Betrachtung der Unendlichkeit über die Mengenlehre hinaus. So eröffnete der Mathematiker Abraham Robinson mit der Formalisierung der infinitesimalen Größen und dem hyperreellen Zahlenmodell neuartige Lehr- und Denkwege (vgl. Robinson 1966, S. 15f).

Auch der 1937 geborene John Horton Conway entwickelte die Unendlichkeit der Zahlen weiter. Er beschrieb ein übergreifendes System, das reelle, infinitesimale und unendliche Zahlen umfasste: die surrealen Zahlen. Die surrealen Zahlen bieten ein umfassendes algebraisches System aller Größenordnungen. Im Vergleich dazu zielen die hyperreellen Zahlen auf die Analysis ab (vgl. Gonshor 1986, S. 20ff).

Obwohl ein großer Teil des Kapitels bis hierher auf die Betrachtung der Unendlichkeit in der Mengenlehre ausgelegt ist, wird insbesondere mit den jüngeren Mathematikerinnen und Mathematikern und deren Arbeit gezeigt, welche Bedeutung diese Thematik darüber hinaus hat. Der Begriff und das Verständnis von Unendlichkeit sind insbesondere in den Bereichen der Grenzwerte, Stetigkeit, Kompaktheit und Konvergenz zentral. Somit stellt die Unendlichkeit einen Eckpfeiler der Analysis und der Topologie dar (vgl. Munkres 2000, S. 146).

Doch auch in der Geometrie findet man Paradoxien wieder, die sich auf die Unendlichkeit beziehen. Der bereits genannte Galileo Galilei beispielsweise diskutierte Kreise, die beliebig groß werden können. Im Grenzfall jedoch, kann kein unendlich großer Kreis auftreten, sondern eine Gerade. Daraus schließt er, dass es unendlich große Kreise nicht geben könne (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S.215).

In der Geometrie erhält man Unendlichkeit meist durch das Hinzufügen von Punkten. Somit ergeben sich in der Geometrie des $\mathbb{R}^n$ verschiedene Versionen der Unendlichkeit.

Beispielsweise könnte man eine Schar von parallelen Geraden im $\mathbb{R}^n$ so betrachten, dass sie eine Richtung, also einen Punkt im Unendlichen bestimmen. In weiterer Folge ergibt sich, dass diese zwei verschiedenen Geraden in einer Ebene einen Schnittpunkt im Unendlichen haben. Betrachtet man die Unendlichkeit hingegen derart, dass es überhaupt nur einen einzelnen Punkt im Unendlichen geben soll, so werden Geraden als unendlich große Kreise aufgefasst, als Kreise durch den Punkt im Unendlichen (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 217).

Vergleicht man nun die Ergebnisse der Unendlichkeit in der Philosophie und Theologie mit jenen der Mathematik, drängt sich die Frage auf, ob die Unendlichkeit in der Mathematik nun „abgeschlossen“ ist. Damit ist gemeint, dass die Mathematik mit ihrer Formalität und den Möglichkeiten von Beweisen die Eigenschaft „unendlich zu sein“ klar definieren und auf unwiderlegbare Beine stellen könnte. Einen derartigen Versuch, der in eine ähnliche Richtung ging, wagte der Mathematiker David Hilbert. Er versuchte die gesamte Mathematik,

einschließlich unendlicher Konstrukte, formal konsistent zu begründen. 1931 zeigte Gödel allerdings, dass das unmöglich ist (vgl. Zach 2005, S. 150).

Trotz der vielfältigen Auseinandersetzungen der Mathematikerinnen und Mathematiker mit der Thematik erscheint die Unendlichkeit auch heute noch teilweise abgründig und überraschend. Dennoch erkennt man, dass sie durch die Konzepte von Cantor und anderen viel greifbarer erscheint, und viel von ihrer Bizartheit verloren hat (vgl. Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 234).

Die dargestellten Inhalte hinsichtlich der Unendlichkeit in der Mathematik zielen in keiner Weise auf Vollständigkeit ab. Intention war es, den Leserinnen und Lesern damit einen Einblick zu geben, der als Grundlage für die nachfolgende Auseinandersetzung mit der Thematik dient.

1.5 Die Unendlichkeit als Grundlage für Themen im Lehrplan in Mathematik

Nachstehend wird der Lehrplan für das Fach Mathematik an allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) betrachtet. Eine vollständige Analyse aller österreichischen Lehrpläne würde auch die Lehrpläne der Berufsbildenden Höheren Schulen (BHS) einschließen. Da dies jedoch den Umfang der vorliegenden Arbeit überschreiten würde, werden die BHS-Lehrpläne nicht berücksichtigt. Darüber hinaus hat die Erhebung im Kontext der AHS stattgefunden, weshalb sich die Analyse gezielt auf diesen Schultyp bezieht.

Abschließend wird der Lehrplan in Einklang mit den in Kapitel 1.4 beschriebenen Inhalten gebracht, um den Zusammenhang der Unendlichkeit in der Mathematik mit dem aktuellen Lehrplan im Regelschulsystem in Österreich darzustellen.

1.5.1 Lehrplan Mathematik

Der Lehrplan⁷ für das Unterrichtsfach Mathematik lässt sich in die Lehrpläne für die Unterstufe und die Oberstufe unterteilen. Die Inhalte, die für die Unterstufe relevant sind, finden ihre Umsetzung sowohl in den Mittelschulen (MS) als auch der allgemeinbildenden höheren Schule (AHS). Hierbei sind keinerlei inhaltliche Unterscheidungen vorzunehmen.

Der Lehrplan für Mathematik in der Unterstufe gibt zunächst an, welche grundsätzlichen Bildungs- und Lehraufgaben zu beachten sind. Weiters folgen das zugrundeliegende Kompetenzmodell, didaktische Grundsätze sowie die Kompetenzbereiche für die 1. bis 4. Klasse. Diese sollen nun näher betrachtet werden.

⁷ Wichtig ist hier zu erwähnen, dass es sich um die aktuelle Fassung des Lehrplans (Juli 2025) für **Österreich** handelt. Außerdem soll an dieser Stelle festgehalten werden, dass der Lehrplan weitaus ausführlicher gestaltet ist, als er hier angeführt wird. Für die übersichtliche Darstellung und eine gute Nachvollziehbarkeit werden bewusst jene Teilaspekte herausgenommen, die für die Bearbeitung des Themas dieser Arbeit relevant sind.

In den vier Klassen der Unterstufe gibt es in jeder Klasse vier Kompetenzbereiche. Diese finden sich jedes Jahr wieder.⁸ Der Kompetenzbereich 1 bezieht sich auf *Zahlen und Maße*. So wird der Bogen von der 1. Klasse beginnend mit den natürlichen Zahlen und nichtnegativen Dezimal- und Bruchzahlen über die 2. Klasse hin zur 3. Klasse mit den rationalen Zahlen bis hin zur 4. Klasse mit den nichtrationalen Zahlen bzw. reellen Zahlen gespannt (vgl. Bundesministerium Bildung, 2025). Diese Kompetenzbereiche enthalten eine präzisierte Beschreibung, welche wesentliche Aspekte für die Entwicklung einer Vorstellung von Unendlichkeit beinhalten und in weiterer Folge thematische Zusammenhänge mit der empirischen Forschung (insbesondere den Aussagen im Fragebogen) widerspiegeln. Eben jene Kompetenzbereiche werden untenstehend angeführt:

- *grafisches Darstellen von Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl und Ablesen von Zahlen; Lesen großer Zahlen*
- *Verstehen und Anwenden des dezimalen Stellenwertsystems, dh. des Prinzips „Bündeln in Zehner-Schritten“*
- *Deuten von Brüchen als Anteile eines Ganzen bzw. als Anteile von mehreren Ganzen*
- *Vergleichen und Ordnen natürlicher Zahlen sowie nichtnegativer Dezimal- und Bruchzahlen*
- *Wechseln zwischen Bruch- bzw. Dezimaldarstellung auch bei Zahlen mit einfacher periodischer Dezimaldarstellung (zB $\frac{2}{3} = 0,666 \dots$; $\frac{1}{9} = 0,111 \dots$)*
- *Wissen und allenfalls Begründen, dass es Zahlen gibt, die nicht rational sind, zB $\sqrt{2}$*
- *Wissen, dass durch die Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen die Zahlengerade lückenlos ausgefüllt wird*
- *Kennen der Problematik des Rechnens mit Näherungswerten*
(Bundesministerium Bildung, 2025)

Zum Kompetenzbereich 2 gehören *Variablen und Funktionen*, *Figuren und Körper* sind im Kompetenzbereich 3 zu finden. In diesen Bereich fällt auch das Arbeiten mit einfachen geometrischen Objekten in der Ebene. Außerdem werden bereits in der Unterstufe *Daten und Zufall* im Kompetenzbereich 4 abgedeckt (vgl. Bundesministerium Bildung, 2025).

Nach dem Mathematiklehrplan für die Oberstufe wird sowohl an den allgemeinbildenden höheren Schulen (AHS) als auch den Bundesoberstufenrealgymnasien (BORG) sowie Oberstufengymnasien (ORG) unterrichtet.

⁸ Anhand des didaktischen Grundsatzes des Spiralprinzips werden somit Inhalte auf verschiedenen Entwicklungsstufen immer wieder aufgegriffen und in vertiefender Form behandelt.

Auch in der Oberstufe gibt der Lehrplan für Mathematik zunächst die Bildungs- und Lehraufgaben für die 5. bis 8. Klasse an. In weiterer Folge findet man Aspekte der Mathematik (beispielsweise schöpferisch-kreativer Aspekt), Beiträge zu den Bildungsbereichen, Didaktische Grundsätze und Mathematische Kompetenzen wieder.

Obwohl hier nicht mehr explizit vom Spiralprinzip⁹ gesprochen wird, wird dennoch der aufbauende Charakter der Mathematik und die damit einhergehende Relevanz der Aktivierung des Vorwissens, der Wiederholung und der Sicherung der Nachhaltigkeit beschrieben (vgl. Bundesministerium Bildung, 2025).

Im Vergleich zur Unterstufe bietet der Lehrplan für die Oberstufe eine weitaus breitere Palette zur Betrachtung der Unendlichkeit. Nicht nur die Lehrplaninhalte, sondern vor allem auch das mathematische Niveau, das man mit der Oberstufe erreicht, legen die Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit in verschiedenen Richtungen nahe. Während man in der Unterstufe also versucht eine fundierte mathematische Basis zu erarbeiten, kann man in der Oberstufe bereits darauf aufbauen.

In der 5. Klasse finden sich die Themen *Mengen, Zahlen und Rechengesetze, Gleichungen und Gleichungssysteme, Funktionen, Trigonometrie und Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$* wieder. Daran anschließend werden in der 6. Klasse *Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, Ungleichungen, reelle Funktionen, Folgen, Reihen, Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^3$, Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und beschreibende Statistik, sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung* unterrichtet. Für die 7. Klasse halten sich die Themen *Grundlagen der Differentialrechnung anhand von Polynomfunktionen, Kreis, Kugeln, Kegelschnittlinien und andere Kurven, Erweiterungen und Exaktifizierungen der Differentialrechnung, diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen und komplexe Zahlen* bereit. In der Maturaklasse schließen die Themen *Grundlagen der Integralrechnung, Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung, stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, beurteilende Statistik, Differenzen- und Differentialgleichungen und Grundlagen der Systemdynamik* den Schullehrstoff ab (vgl. Bundesministerium Bildung, 2025).

⁹ Nach diesem Prinzip sollen mathematische Inhalte in verschiedenen Schulstufen auf unterschiedlichem Niveau erarbeitet werden. Diese mathematischen Inhalte werden von einer propädeutischen Behandlung in der Grundschule zu einer Systematisierung und Mathematisierung in späteren Schulstufen aufgebaut und thematisiert. Hierbei wird immer wieder Bezug auf das Vorwissen und die Entwicklung der Schülerinnen und Schüler genommen (vgl. Reiss & Hammer 2021, S. 101).

1.5.2 Lehrplan und Unendlichkeit

Der österreichische Lehrplan für das Fach Mathematik in der AHS und MS greift die in Kapitel 1.4 beschriebenen Teilbereiche vielfach auf. Nachfolgend soll der Lehrplan nochmals unter eben jenem Gesichtspunkt der Unendlichkeit beleuchtet werden.

Der Kompetenzbereich 1, der Zahlen und Maße in der Unterstufe abdeckt, zielt auf das wohl größte Teilgebiet der Unendlichkeit in der Mathematik ab: fundierte Grundlagen für die Mengenlehre zu vermitteln. Bereits mit der grafischen Darstellung von Zahlen als Punkte am Zahlenstrahl und dem Ablesen dieser versucht man die Unendlichkeit vorerst geometrisch zu betrachten. Dies war auch in der geschichtlichen Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffes so. Hier zielen auch die Aufgaben in diversen Schulbüchern darauf ab, eine Vorstellung für die Zahlen am Zahlenstrahl zu vermitteln, indem die Idee des „Hineinzoomens“ verdeutlicht wird. Auch wenn zu Beginn noch keine tatsächlich lückenlose Betrachtung möglich ist, so ist mit der Einführung der Dezimalzahlen für Schülerinnen und Schüler eine weitaus genauere Betrachtung möglich. Mit der Erarbeitung von Brüchen, den damit einhergehenden Dezimaldarstellungen und insbesondere den periodischen Dezimaldarstellungen, sowie den nicht rationalen und den reellen Zahlen, ist das große Ziel auf lange Sicht erkennbar: die lückenlose Füllung der Zahlengerade mit reellen Zahlen.

In der Unterstufe wird jedoch nicht nur auf die Zahlen und Zahlenmengen gebaut – auch wenn die Gewichtung deutlich in diese Richtung geht – sondern auch ein kleiner Funke in der Geometrie gezündet. Immerhin wird in der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 die Gerade derart definiert, dass sie keinen Anfang und kein Ende hat. Der Rückschluss, der gezogen werden kann, ist also für Lernende, dass Geraden unendlich lang sind. Auch wenn in weiterer Folge keine zusätzlichen Überlegungen dahingehend angestellt werden, sollte dennoch auf diese Eigenschaft eingegangen werden.

Erst in der Oberstufe spiegelt der Lehrplan eine tiefgreifendere Betrachtung mit den Teilbereichen der Mathematik wider. Dies lässt sich einerseits damit begründen, dass die Lernenden dann bereits gewisse kognitive Fähigkeiten mitbringen, andererseits ist es auch notwendig, in der Unterstufe die notwendigen Grundlagen zu vermitteln, um dann darauf aufbauen zu können (vergleiche Spiralprinzip).

In der 5. Klasse lässt sich mit der Betrachtung von Mengen und Zahlen eine direkte Verbindung zur Unterstufe und den aufgebauten Grundlagen erkennen. Auch wenn dieser Teilbereich in der 6. Klasse kurzzeitig pausiert, findet die Mengenlehre dann in der 7. Klasse mit der Einführung der komplexen Zahlen seinen Höhepunkt und Abschluss.

Darüber hinaus nimmt die 5. Klasse die Idee der 1. Klasse auf und beschäftigt sich mit der analytischen Geometrie im $\mathbb{R}^2$. Hier werden unter anderem die Eigenschaften und Lagen von Geraden thematisiert. Die Vorstellung der Unendlichkeit stellt hier eine wesentliche Grundlage dar.

Die geometrische Auseinandersetzung wird sowohl in der 6. als auch in der 7. Klasse fortgesetzt, vertieft und auf komplexeren Ebenen betrachtet.

Doch nicht nur die bereits von der Unterstufe bekannten Themenbereiche der Mathematik werden in der Oberstufe aufgegriffen, sondern zusätzlich werden neue Aspekte ergänzt. Betrachtet man beispielsweise Gleichungen und Gleichungssysteme, so findet man verschiedene Lösungen. Unter anderem kann es hier vorkommen, dass es aufgrund der Gleichungsstruktur für den angenommenen Wert der Variable(n) unendlich viele Möglichkeiten gibt.

Ein besonders naheliegender Umgang mit der Unendlichkeit findet sich in der 6. Klasse mit der Erarbeitung von Folgen und Reihen wieder. An dieser Stelle muss jedoch angemerkt werden, dass aufgrund der Konzipierung der schriftlichen Reifeprüfung für die AHS, Folgen und Reihen keine Grundkompetenz darstellen. Somit könnte es sein, dass Lehrende auf dieses Themengebiet weniger Fokus richten als auf andere, die eine Grundkompetenz darstellen.

Die wohl komplexeste Herausforderung an die kognitiven Fähigkeiten der Lernenden stellt die Auseinandersetzung mit der Differenzen- und Differentialrechnung in der 7. Klasse dar. Wie bereits beschrieben, liegt die Grundlage der modernen Analysis zwar nicht in der Vorstellung von unendlich großen oder kleinen Größen, jedoch ist die Idee, dass man sich unendlich nahe an etwas annähert, unumgänglich. Dies bezieht sich einerseits auf die grafische Differenzierung, das rechnerische Ableiten, aber auch auf die Überlegungen hinsichtlich Stetigkeit und Konvergenz und vieles mehr.

Auf der Grundlage der 7. Klasse basieren in weiterer Folge auch die Erarbeitung des Integrals in der 8. Klasse und die diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Umso deutlicher zeigt sich, wie wichtig eine solide Vermittlung und eine entsprechende Auseinandersetzung mit den Inhalten der 7. Klasse ist.

In der heutigen Fachdidaktik Mathematik wird die Unendlichkeit als kognitiv besonders anspruchsvolles Thema erkannt. Studien zeigen, dass Schülerinnen und Schüler häufig zwischen alltäglicher, philosophischer und mathematischer Bedeutung nicht klar unterscheiden können (vgl. Biehler et al. 2018, S. 112).

Ebenso machen die bereits beschriebenen Paradoxien in der Mathematik deutlich, wie stark sich das Unendliche der Intuition widersetzt. Genau jene Vorstellungen und Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich der Unendlichkeit werden mit der nachfolgend beschriebenen empirischen Forschung betrachtet.

2 Empirische Forschung

Im folgenden Kapitel wird die Methodik näher beleuchtet, wobei hier auch erläutert werden soll, warum eben jene Methode des Befragens (im Vergleich zu anderen möglichen und ebenfalls gängigen Methoden der empirischen Forschung) der Schülerinnen und Schüler eingesetzt worden ist. Anschließend wird die Stichprobe näher beschrieben und erklärt, wie es zur Auswahl der entsprechenden Probandinnen und Probanden gekommen ist. Im weiteren Verlauf wird der Fragebogen, insbesondere dessen Aufbau und die Durchführung der Erhebung erklärt. Zum Abschluss des Kapitels folgt die Aufbereitung der ausgewerteten Daten.

2.1 Methodik

Nachfolgend sollen einige Aspekte der Methodik beschrieben werden. Es werden jeweils die wissenschaftlichen Standards als theoretische Grundlage dargestellt und daran anschließend ein Vergleich zur durchgeführten Befragung hergestellt. Somit soll gewährleistet werden, dass die empirische Forschung den grundlegenden wissenschaftlichen Anforderungen genügt und die Art der Durchführung wissenschaftliche Berechtigung hat.

2.1.1 Wahl des Messinstruments

Insbesondere in der empirischen Sozialforschung dominiert die Befragungsmethode. In der quantitativen Forschung wird häufig mit vollstrukturierten schriftlichen Befragungen (auf Basis standardisierter Fragebögen) gearbeitet.

Es gibt einige Gründe für die Wahl der Fragebogentechnik. Sie gilt als besonders gut geeignet, wenn subjektives Erleben erfasst werden soll, das nicht direkt beobachtbar und auch nicht in Verhaltensmustern oder Dokumenten manifestiert ist (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 398). Die Vorstellung von Schülerinnen und Schülern über die Unendlichkeit kann nur als subjektive Vorstellung existieren und lässt sich weder in einem Verhaltensmuster, wie Rechenabfolgen, oder anderen Dokumenten nachvollziehen.

Ein weiterer Vorteil der Erhebung mittels Fragebogen ist die Effizienz der Arbeit. Hier können innerhalb kurzer Zeit viele Personen zu sehr vielen Merkmalen befragt werden. Außerdem sind mehr Menschen eher bereit einen Fragebogen auszufüllen, als an einem Interviewtermin teilzunehmen (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 398). Im Falle einer schulischen Erhebung mittels Interviews würde dies neben der Komplexität der Thematik auch noch zusätzlich die Herausforderung darstellen, dass Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen, also ihre „Bilder im Kopf“, verbalisieren müssten. Besonders für jüngere Lernende würde dies vermutlich eine besondere Hürde darstellen und der Output der Befragungen wäre gering.

Nicht zuletzt ist das Ausfüllen eines Fragebogens, insbesondere in einem schulischen Setting aus Sicht der Schülerinnen und Schüler diskreter und anonymer, als eine Interviewsituation

(vgl. Döring & Bortz 2016, S. 398). Somit können heiklere Themen besser erhoben werden und es kommt bei Lernenden nicht zum Gefühl einer Prüfungssituation.

Natürlich bringt diese Methode auch Nachteile mit sich, wie beispielsweise die Notwendigkeit einer gewissen Lese- und Schreibkompetenz bei Schülerinnen und Schülern oder auch die geringe Gestaltbarkeit der Umstände der Datenerhebung (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 399). In der angestrebten Datenerhebung lassen sich diese Faktoren allerdings vernachlässigen, insbesondere da die ausgewählten Probandinnen und Probanden über die notwendigen Lese- und Schreibkompetenzen verfügen.

2.1.2 Gütekriterien für Fragebogen

Es gibt diverse Gütekriterien für wissenschaftliche Fragebogen, um den hohen Qualitätsanforderungen gerecht zu werden.

Das erste Gütekriterium ist die Objektivität, um die erforderliche Vergleichbarkeit der Ergebnisse von verschiedenen Testpersonen zu gewährleisten. Man spricht von der Objektivität eines Fragebogens, wenn das gesamte Verfahren so genau festgelegt ist, dass die Befragung unabhängig von Ort, Testleiter und Auswerter durchgeführt werden könnte, und dennoch dieselben Ergebnisse und dieselben Ergebnisinterpretationen entstehen würden (vgl. Moosbrugger & Kelava 2020, S. 17f). Aus diesem Grund wurden die Lehrenden, die die Erhebung durchgeführt haben, genau instruiert, was sie vor und während der Erhebung sagen und tun sollen. Weiters fand die Befragung jeder Klasse im jeweiligen Klassenraum statt und die Ergebnisse wurden nur von einer Person ausgewertet.

Zudem sollte ein Fragebogen das Gütekriterium der Ökonomie erfüllen. Somit sollten, gemessen am diagnostischen Erkenntnisgewinn, möglichst wenig finanzielle und zeitliche Ressourcen aufgewendet werden müssen. Weitere Gütekriterien sind die Nützlichkeit eines Fragebogens sowie die praktische Relevanz des von ihm erhobenen Merkmals. In Hinblick auf die Testpersonen ist besonders das Kriterium der Zumutbarkeit in zeitlicher, psychischer und körperlicher Hinsicht zu beachten. Ein Fragebogen kann als fair bezeichnet werden, wenn durch die Testwerte keine systematische Benachteiligung bestimmter Personen entstehen kann. Außerdem zählen die Unverfälschbarkeit und die Reliabilität zu den Gütekriterien. Besonders die Zuverlässigkeit/ Reliabilität kann als wichtiges Gütekriterium angesehen werden, da dieses angibt, ob der Fragebogen wirklich das Merkmal misst, das er messen soll (vgl. Moosbrugger & Kelava 2020, S. 23 ff).

Der verwendete Fragebogen erfüllt die zentralen Gütekriterien empirischer Sozialforschung: Die Durchführung und Auswertung erfolgten standardisiert, wodurch Durchführungs- und Auswertungsobjektivität gewährleistet sind. Für die Wahl des Messinstruments mit gebundenem Antwortformat spricht insbesondere, dass zumeist die Auswertungsobjektivität bei diesen

Aufgaben höher ist, als bei Aufgaben mit freiem Antwortformat (vgl. Moosbrugger & Kelava 2020, S. 96). Die Items wurden sorgfältig auf Grundlage einschlägiger mathematikdidaktischer Literatur entwickelt und vorab inhaltlich mit dem Betreuer abgestimmt, sodass von einer hohen Inhaltsvalidität ausgegangen werden kann. Insgesamt kann die methodische Qualität des Instruments als hoch eingeschätzt werden.

Eine direkte Überprüfung der Reliabilität (z. B. durch einen Pretest) wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt. Dennoch lässt die klare Struktur des Fragebogens und die Orientierung an bewährten Skalen eine zufriedenstellende interne Konsistenz erwarten.

2.2 Stichprobenbeschreibung

Die Erhebung wurde in einer Schule in Niederösterreich durchgeführt. Hierbei handelt es sich um eine allgemeinbildende höhere Schule, sodass es möglich gewesen ist, Schülerinnen und Schüler von zehn bis 18 Jahren zu befragen.

Somit ergab sich eine sogenannte Quotenstichprobe von acht Klassen, jeweils eine repräsentativ für den jeweiligen Jahrgang. Da es an der Schule einen Gymnasium- und einen Realgymnasiumszweig gibt, ist hierbei jeweils die Hälfte der Klassen aus einem der entsprechenden Zweige ausgewählt worden.

Bei der Evaluierung wurde also mit einer Stichprobe gearbeitet, die genau betrachtet, bewusst bzw. systematisch ausgewählt wurde, sodass die Zusammensetzung der Stichprobe im Sinne der Aufteilung der Schülerinnen und Schüler zwischen Gymnasium und Realgymnasium repräsentativ ist. Somit muss hierbei genauer von einer Quotenstichprobe („quota sample“) gesprochen werden (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 307).

In jeder befragten Klasse befanden sich zu diesem Zeitpunkt durchschnittlich ca. 20 Schülerinnen und Schüler. Tatsächlich waren es 134 Schülerinnen und Schüler die an der Erhebung teilnahmen. Keiner der ausgefüllten Fragebögen musste ausgeschlossen werden. Lediglich die Angabe der Schulstufe und des Alters stimmten nicht immer überein. In solchen Fällen wurde dann das Alter herangezogen. Aufgrund der Klassenlisten mit der Anzahl der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler konnte somit dann auch ein Rückschluss auf die korrekte Schulstufe gezogen und die Daten richtig eingeordnet werden.

Die demografischen Merkmale lassen sich wie folgt beschreiben: Insgesamt nahmen 80 Schülerinnen (= ca. 60%) und 54 Schüler (= ca. 40%) teil. Die Option „divers“ wurde von keiner Person gewählt. Das Durchschnittsalter lag bei 14,06 Jahren.

Insbesondere ist hervorzuheben, dass aufgrund des Zeitpunktes (die Befragung fand Mitte Juni statt) bereits viele Maturantinnen und Maturanten nicht mehr in der Schule waren. Somit wurde

an die Probandengruppe der 17- und 18-Jährigen der Link zum Fragebogen, mit der Bitte ihn auszufüllen, versendet. Wie erwartet, kamen dieser Bitte allerdings nur neun Schülerinnen und Schüler nach. Somit ist die Stichprobe besonders für diese Altersgruppe nicht repräsentativ. Ebenso stellt auch die 9. Schulstufe mit nur zwölf befragten Schülerinnen und Schülern kein übertragbares Abbild der Klassengrößen dar.

Dass diese Stichprobe nicht repräsentativ ist, lässt sich damit begründen, dass es sich bei der Erhebung anstelle einer Vollerhebung um eine Teilerhebung bzw. Stichprobenerhebung handelte. Eine repräsentative Stichprobe sollte eine miniaturisierte Abbildung der Population darstellen und somit die Merkmale und Effekte innerhalb der Populationen im Kleinen 1:1 abbilden (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 298). In der Population verhält sich die Gesamtzahl der 17- und 18-Jährigen allerdings nicht in jenem Verhältnis zu den anderen befragten Altersgruppen. Dennoch gilt festzuhalten:

*„Die Repräsentativität ist ein Qualitätsmerkmal, das sich lediglich auf das Verhältnis zwischen Stichprobe und Population bezieht, nicht auf die wissenschaftliche Qualität der gesamten Studie.“
(Döring & Bortz 2016, S. 300)*

2.3 Fragebogen

Im folgenden Abschnitt wird zunächst der Fragebogen näher beschrieben, daran anschließend werden die notwendigen Vorbereitungen, wie beispielsweise das Einholen der Einverständniserklärung der Erziehungsberechtigten, und anschließend die Gestaltung des Fragebogens erläutert. Hierbei sollen besonders die Auswahl und Aufbereitung der Fragen beleuchtet werden. Im Anhang findet sich eine Darstellung des tatsächlich verwendeten Fragebogens im entsprechenden Onlinetool zur besseren Nachvollziehbarkeit und zur Visualisierung der Durchführung.

Der verwendete Fragebogen kann als vollstandardisierter Fragebogen („standardized questionnaire“) klassifiziert werden, da dieser aus geschlossenen Fragen besteht, die durch Ankreuzen zu beantworten gewesen sind. Es handelte sich weiters um einen elektronischen Fragebogen, der digital vorlag (vgl. Döring & Bortz 2016, S. 399 f).

Der Fragebogen wurde jedoch nicht mit klassischen Fragen gestaltet, sondern wie häufig üblich, mit Aussagen, die dann eine Zustimmung oder Ablehnung erhalten konnten.

Man spricht hier von der Likert-Skala. Diese ist die am häufigsten angewendete Skala, die mit mehreren Indikatoren ein bestimmtes Konstrukt auf Intervallskalenniveau erfassen soll. Da es bei dem Fragebogen lediglich drei Antwortoptionen gegeben hat, handelt es sich genauer um eine dreistufige Likert-Skala. Die Entscheidung für eine reduzierte Skalenbreite wurde getroffen, um die Beantwortung für die Teilnehmenden zu vereinfachen und kognitive Überforderung zu

vermeiden. Eine dreistufige Skala ist insbesondere bei explorativen Erhebungen geeignet, bei denen es primär um eine grobe Kategorisierung der Einstellungen geht (vgl. Bortz & Döring 2016, S. 270). Durch die neutrale Mittelposition wurde zudem die Möglichkeit gegeben, keine klare Zustimmung oder Ablehnung auszudrücken. Diese Antwortmöglichkeit dient besonders für den Fall, dass Schülerinnen und Schüler nicht verstehen, was die Aussage bedeuten soll. Diese Vorgehensweise ist in fachdidaktischen Untersuchungen mit vergleichbaren Fragestellungen etabliert und methodisch vertretbar:

*„Die ‚Weiß-nicht‘ oder ‚Kann-ich-nicht-beantworten‘-Kategorie sollte als separate Antwortalternative dargeboten werden, wenn angenommen werden muss, dass es Testpersonen gibt, die zu dem jeweiligen Iteminhalt keine ausgeprägte Meinung haben, ihn nicht kennen, die Antwort nicht wissen oder die Frage sprachlich nicht verstanden haben.“
(Moosbrugger & Kelava 2020, S. 110)*

Trotz sorgfältiger Entwicklung des Fragebogens sind gewisse methodische Einschränkungen zu berücksichtigen. Zum einen kann es durch die standardisierten Antwortvorgaben der dreistufigen Likert-Skala zu einer gewissen Reduktion der Antwortdifferenzierung kommen, da Zwischennuancen in den Einstellungen der Befragten nicht abgebildet werden können. Diese Limitierungen sind bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen, schmälern jedoch nicht die grundsätzliche Eignung des Instruments zur Beantwortung der Forschungsfrage.

2.3.1 Vorbereitungen

Um eine solche empirische Datenerhebung durchführen zu können, bedarf es einiger Vorbereitung. Neben dem Erstellen des Fragebogens zählen hierzu vorwiegend diverse organisatorische Tätigkeiten.

Vorab wurde bei der Direktorin der Schule und in nächster Instanz bei der Bildungsdirektion Niederösterreich angefragt, ob eine solche Erhebung möglich ist. Nach dem Einwilligen der Direktion gab es von Seiten der Bildungsdirektion Niederösterreich diverse Unterlagen aufzubereiten und zu übermitteln. Erst nach dem Überprüfen dieser Dateien – auch in rechtlicher Hinsicht – wurde die Erlaubnis zur Durchführung erteilt.

In weiterer Folge war es notwendig, den Kolleginnen und Kollegen, die den Fragebogen ebenfalls von ihren Klassen ausfüllen ließen, alle notwendigen Informationen zur Durchführung zu übermitteln. Besonders wichtig war in diesem Schritt, dass die Fachkolleginnen und Fachkollegen das Einverständnis der Eltern bzw. Erziehungsberechtigten bzw. der eigenberechtigten Schülerinnen und Schüler einholen mussten. Dazu wurde ein gemeinsamer Elterninformationsbrief formuliert und ausgesendet.

Als letzten Schritt in der Vorbereitung galt es die technischen Gegebenheiten mit den Schülerinnen und Schülern vorab zu klären. Grundsätzlich besitzen zwar alle einen Laptop oder

ein Tablet, allerdings ist es immer vorteilhaft, sie nochmals zu erinnern, die Geräte an besagtem Tag auch mitzubringen.

2.3.2 Aufbau

Zur Durchführung der Erhebung wurde ein standardisierter Onlinefragebogen mit insgesamt 15 Items erstellt. Jedes Item bestand aus einer Aussage und zur Beantwortung stand eine Likert-Skala mit den Auswahlmöglichkeiten „stimme zu“, ein leeres Feld und „stimme nicht zu“ zur Verfügung.

Wie bei Befragungen üblich, startete der Fragebogen nach der Begrüßung und der kurzen, erneuten Erklärung im Onlinetool mit der Erhebung der personenbezogenen Daten. Hierzu gehörten die Fragen nach dem Alter, der Schulstufe und dem sich zugehörig fühlenden Geschlecht.

Die Aussagen, die ein reales Abbild der theoretischen Betrachtung erzielen sollten, und somit zur Beantwortung der Forschungsfragen hilfreich sein würden, wurden vorab gesammelt. Hierbei war insbesondere das Buch *Abenteuer Mathematik* von *Basieux, 2011* als Grundlage hilfreich. In weiterer Folge wurden die entsprechenden Aussagen in drei Kategorien gegliedert:

1. allgemeine Einstiegsfragen
2. Fragen zur Mathematik
3. Fragen zur Unendlichkeit in der Realität

Zu den allgemeinen Einstiegsfragen gehören beispielsweise „Ich wurde schon einmal im Alltag (außerhalb der Schule) mit der Unendlichkeit konfrontiert.“ oder „Ich kann Beispiele für die Unendlichkeit angeben.“

Bei den Fragen zur Mathematik wurden Aussagen vorgegeben wie „Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen“, „Es gibt mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen“. Die Komplexität der Fragen steigerte sich hier bereits bis zu „Es gibt verschiedene Arten von Unendlichkeit.

Beispiel¹⁰: Addiere ich jeweils 1 zu einer Zahl und ich beginne bei 1, so kann ich diesen Prozess unendlich oft fortführen. Multipliziere ich eine Zahl jeweils mit 2 und ich beginne bei 1, so kann ich auch diesen Prozess unendlich oft fortführen.

Allerdings fallen hier die ungeraden Zahlen heraus. Deshalb ist diese Unendlichkeit am Ende kleiner als die Unendlichkeit der Addition mit 1.“

Wie unschwer erkennbar ist, steigert sich der Grad der Komplexität zusehends. Dennoch galt

¹⁰ An dieser Stelle soll angemerkt werden, dass bei Aussage 12 ein besseres Beispiel angeführt hätte werden können. Dieses untermauert die Aussage im wissenschaftlichen Sinne nicht. Allerdings führt dieses Beispiel in die gewünschte (Denk-)Richtung und ist besonders für jüngere Schülerinnen und Schüler greifbar.

immer der Vorbehalt, dass es auch für Schülerinnen und Schüler der 1. Klasse Sekundarstufe 1 verständlich sein musste. Ziel war es, zu vermeiden, dass die Aussagen dazu führen, dass jüngere Schülerinnen und Schüler die Fragen auslassen oder als einzige Ankreuzmöglichkeit die mittlere Option wählen.

2.4 Durchführung der Erhebung

Unabhängig von der durchführenden Lehrperson wurde die Erhebung in allen Klassen ident durchgeführt.

Zunächst bedankten sich die Lehrenden dafür, dass die Schülerinnen und Schüler bzw. deren Erziehungsberechtigte zugestimmt hatten, an der Befragung teilnehmen zu dürfen. Jene Schülerinnen und Schüler, die nicht teilnehmen durften, konnten sich in der Zwischenzeit still beschäftigen.

Danach folgte die Erklärung:

Die Lehrperson würde gleich mit dem Beamer einen QR-Code projizieren, mit dem sie direkt zum Fragebogen gelangen. Wer also mit dem Handy oder Tablet arbeite, könne diese Variante wählen. Weiters finde sich zusätzlich im *Moodlekurs* der jeweiligen Mathematikklasse der Link zum Fragebogen. Laptopuserinnen und Laptopuser mögen diese Variante wählen. Der Fragebogen beinhalte Aussagen, denen sie zustimmen können oder denen sie nicht zustimmen können. Das mittlere Feld gebe eine „neutrale“ Antwort. Diese Antwortmöglichkeit sollte dann gewählt werden, wenn man keine Meinung dazu habe oder die Aussage nicht verständlich sei. In diesem Fall werde die Lehrperson auch nicht erklären, was damit gemeint sei. Schülerinnen und Schüler sollen ankreuzen, was sie denken, ohne Hilfe der Lehrperson oder auf die Antwort einer Mitschülerin oder eines Mitschülers zu sehen. Während der Befragung solle nicht gesprochen werden, alle Lernenden beantworten die Fragen für sich. Wer mit der Beantwortung der Fragen fertig sei, müsse unbedingt „absenden“ klicken.

Zusätzlich ist wichtig zu wissen: Es ist nicht möglich, einen Fragebogen mit dessen Antworten irgendeiner Schülerin oder einem Schüler zuzuordnen. Dieser Fragebogen zählt natürlich auch nicht zur Note.

Nach der Erklärung durften die Schülerinnen und Schüler starten. Es wurde kein Zeitlimit vorgegeben. Allerdings wurden von den Lehrpersonen etwa zehn Minuten für das Beantworten der Fragen anberaumt.

2.5 Vorgehen bei der Datenauswertung

Die erhaltenen Rohdaten konnten einer Ordinalskala zugeordnet werden, da jeweils einer befragten Person, von der Geschlecht, Alter und Schulstufe bekannt war, die pro Item ausgewählte Option auf der Likert-Skala zugeordnet wurde. Somit war beispielsweise Proband 1 männlich, 10 Jahre alt, in der 5. Schulstufe und stimmte der ersten Aussage zu. Leere

Eintragungen bedeuteten, dass die mittlere Option der Likert-Skala gewählt wurde. Eben jene erhaltenen Rohdaten wurden aus *Microsoft Forms* entnommen und in *Microsoft Excel* importiert und dort bearbeitet.

Aus den Rohdaten wurden zunächst die ungültigen Eintragungen korrigiert und in weiterer Folge die Daten nach den Schulstufen sortiert. Innerhalb jeder Schulstufe wurden dann erneut die Grundgesamtheit der Stichprobe und die Aufteilung auf die Geschlechter erhoben. Im nächsten Schritt wurden pro Aussage die absolute Häufigkeit der weiblichen und männlichen Zustimmungen, sowie die jeweiligen leeren Eintragungen gezählt. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden die Antworthäufigkeiten in Dezimalwerten (0 bis 1) angegeben. Ein Wert von 0,75 entspricht dabei 75 %. Somit konnte der prozentuelle Anteil (in Dezimaldarstellung) der Zustimmung zur Aussage pro Item für weibliche und männliche Probandinnen und Probanden und in weitere Folge die Leerfelder erhoben werden. Daraus wiederum ließen sich Rückschlüsse über die Ablehnung der Aussage ziehen. Der Wert, der auf 1 fehlte, stellte eben jenen prozentuellen Anteil dar. Diese erhobenen Daten wurden für alle acht Schulstufen einzeln und zusätzlich für die gesamten Rohdaten aufbereitet.

Diese Daten sollten möglichst anschaulich in einem Diagramm dargestellt werden. Aus diesem Grund wurde für jede Schulstufe und für die gesamten Daten jeweils ein Diagramm angefertigt. Insbesondere sollten die Informationen über die Datensätze für jedes Item der Befragung ablesbar sein. Somit wurde jede Aussage zunächst mit einer Säule für weibliche und einer Säule für männliche Probandinnen und Probanden ausgestattet und unterschiedlich eingefärbt. Obwohl geschlechterspezifisch häufig *rot* und *blau* für weiblich und männlich gewählt wird, ist hier für die weiblichen Daten *orange* gewählt worden, da die Farbe Rot nicht den Eindruck vermitteln sollte, dass falsche Antworten dargestellt würden.

In weiterer Folge sollte auch noch die Ablehnung jeder Aussage dargestellt werden. Während des Erstellens wurde aber schnell klar, dass selten „stimme nicht zu“ gewählt wurde. Wesentlich häufiger wurde im Vergleich die mittlere Option auf der Likert-Skala angekreuzt. Somit wurde diese Antwort mit Whiskern¹¹ in der entsprechenden Farbe dargestellt und die Ablehnung kann aus dem nach oben hin, auf 1 ergänzenden Bereich, abgelesen werden.

¹¹ Die Linie, die von der Box ausgeht und bis zum jeweils letzten Datenpunkt verläuft.

3 Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die erhobenen Daten zunächst aufbereitet und anschließend in Zusammenhang mit den gestellten Forschungsfragen gebracht. Hierzu gehören die nähere Betrachtung der Vorstellungen über die Unendlichkeit sowie Fehlvorstellungen in diesem Zusammenhang.

3.1 Datenaufbereitung

In den folgenden Diagrammen sind die erhobenen Informationen für je eine Schulstufe aufbereitet. Hier kann die Gesamtzahl der in der Schulstufe befragten Schülerinnen und Schüler, sowie die Aufteilung nach Geschlecht abgelesen werden. Anschließend ist die Zustimmung (unterteilt nach Geschlecht) zu der gegebenen Aussage dargestellt. Die Box (dargestellt als farbiges Rechteck) stellt dar, dass Schülerinnen und Schüler „stimme zu“ gewählt haben. Die Whisker stellen dar, dass Schülerinnen und Schüler das mittlere, sozusagen „neutrale“, Feld gewählt haben. Somit lassen sich Rückschlüsse, auf die Antwort „stimme nicht zu“ ebenfalls herleiten: Sie wird jeweils durch den Leerraum (der auf 1 ergänzt) dargestellt. Die Daten sind so dargestellt, dass die abzulesenden Zahlen die Anzahl der Schülerinnen bzw. Schüler in Prozent (gemessen an der Klassengröße) angeben.

Nachstehend sind die Aussagen mit der entsprechenden Nummerierung aufgelistet:

1. Ich wurde schon einmal im Alltag (außerhalb der Schule) mit der Unendlichkeit konfrontiert.
2. Ich wurde schon einmal in der Schule mit der Unendlichkeit konfrontiert.
3. Ich wurde schon einmal im Mathematikunterricht mit der Unendlichkeit konfrontiert.
4. Ich habe klare Vorstellungen zur Unendlichkeit.
5. Ich kann erklären, was mit „Unendlichkeit“ gemeint ist.
6. Ich kann Beispiele für die Unendlichkeit angeben.
7. Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.
8. Es gibt unendlich viele Dezimalzahlen.
9. Es gibt mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen.
10. Eine Gerade hat weder Anfangs- noch Endpunkt, ist also unendlich lang.
11. Egal wie nahe zwei Zahlen am Zahlenstrahl nebeneinander liegen, es ist dennoch möglich, eine Zahl dazwischen zu finden.
12. Es gibt verschiedene Arten von Unendlichkeit.

Beispiel: Addiere ich jeweils 1 zu einer Zahl und ich beginne bei 1, so kann ich diesen Prozess unendlich oft fortführen. Multipliziere ich eine Zahl jeweils mit 2 und ich beginne bei 1, so kann ich auch diesen Prozess unendlich oft fortführen. Allerdings fallen hier die

ungeraden Zahlen heraus. Deshalb ist diese Unendlichkeit am Ende kleiner als die Unendlichkeit der Addition mit 1.

13. Ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern kann niemals vollständig belegt sein.
14. Unser Universum ist riesengroß und hat kein Ende, ist daher unendlich groß.
15. Falls eine Schildkröte und ein Mensch (Achilles) ein Wettrennen machen und die Schildkröte 100 Meter Vorsprung bekommt, kann der Mensch, der zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte, sie dennoch nicht einholen. Während nämlich der Mensch die 100 Meter Vorsprung der Schildkröte einholt, legt die Schildkröte schon wieder einen Weg zurück. Dieser muss dann erst wieder vom Menschen eingeholt werden. Da das immer so weitergeht kommt der Mensch zwar unendlich nah an die Schildkröte heran, wird sie allerdings niemals überholen.

Untenstehend befinden sich die Ergebnisse aller acht Schulstufen überblicksmäßig zusammengefasst, sowie daran anschließend die Einzelergebnisse jeder Schulstufe. Die detaillierte Betrachtung der Überblicksstatistik über alle Items ermöglicht zunächst eine umfassende Darstellung der allgemeinen Tendenzen innerhalb der gesamten Stichprobe. Dies bildet die Grundlage für die Beantwortung der Forschungsfragen und erlaubt es, zentrale Muster und Auffälligkeiten in den Daten zu identifizieren.

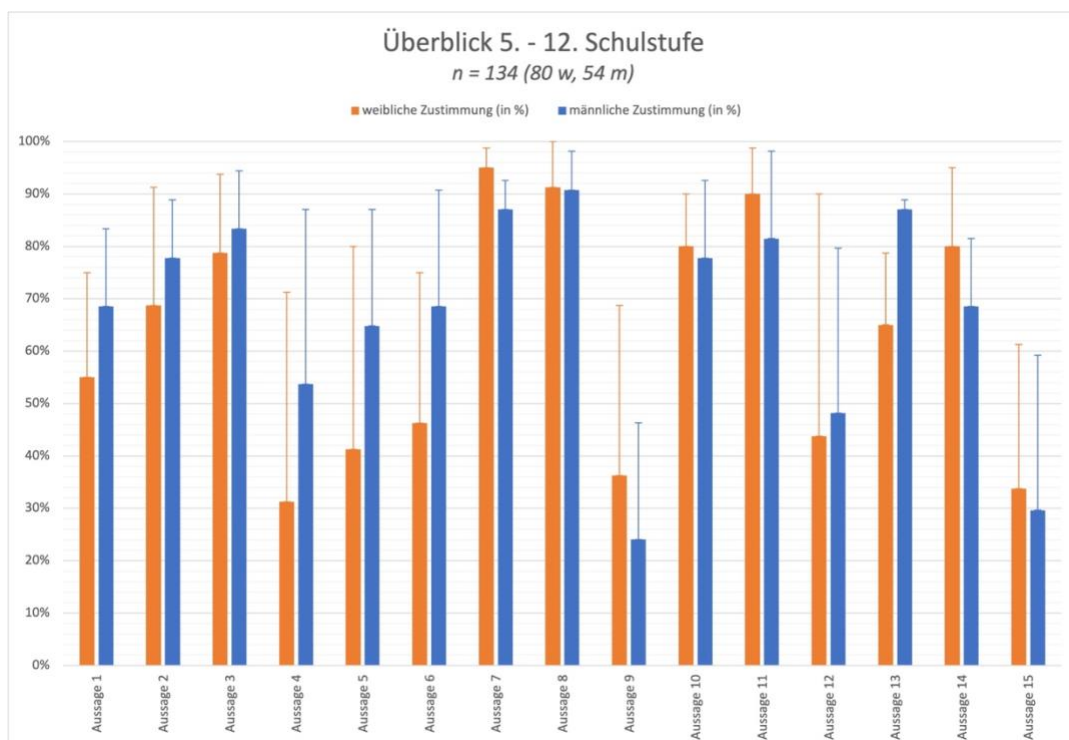


Abbildung 1: Ergebnisse im Überblick

Diese erste Aussage fand bei Schülerinnen über 50%, bei Schülern sogar fast 70% Zustimmung. Unter Berücksichtigung jener, die das Feld leer gelassen haben, gab es

insgesamt 16 Schülerinnen, die der Aussage widersprachen. Bei den Schülern waren es im Vergleich nur acht.

Aus diesen Ergebnissen lässt sich schließen, dass sehr viele Schülerinnen und Schüler wohl bereits in diversen Situationen und verschiedenen Kontexten auf diese Thematik gestoßen sind. Es lässt sich wohl mutmaßen, dass diese Konfrontation mit der Unendlichkeit durchaus aus dem nicht-mathematischen Feld kommen könnte, da die Aussage explizit auf den Alltag abzielt und somit abseits des Schullebens stattfindet. Womöglich könnte hier besonders der Religionsunterricht als wesentlicher Bestandteil dieser Thematik angedacht worden sein.

Die Ergebnisse von Aussage 2 spiegeln im Vergleich zur ersten Aussage eine deutlich höhere Zustimmung bei beiden Geschlechtern wider. Beinahe 70% der Schülerinnen und etwa 78% der Schüler gaben an, in der Schule bereits mit der Unendlichkeit konfrontiert worden zu sein. Obwohl über 20% der Schülerinnen hierbei eine neutrale Haltung einnahmen, waren es im Vergleich bei den Schülern mit nur 11% relativ wenige. Besonders hervorzuheben ist, dass es kaum Ablehnung bei dieser Aussage gab, weniger als 10% der Schülerinnen und knapp über 11% der Schüler.

Hier sollte unbedingt berücksichtigt werden, dass sich diese Aussage noch immer nicht auf die Mathematik und den Mathematikunterricht bezieht. Somit ist hier noch unklar, auf welches Fach sich Schülerinnen und Schüler mit ihrer Antwort beziehen. Die Offenheit dieser Aussage könnte dazu geführt haben, dass Lernende eher ihre Zustimmung gaben, da sie beispielsweise in Religion, Ethik oder Philosophie bereits darüber gesprochen haben.

Andererseits könnte es auch dazu geführt haben, dass sie genau umgekehrt agierten und nicht zuordnen konnten, an welchen konkreten Unterricht bzw. an welches Unterrichtsfach sie denken sollten. Somit wäre es möglich, dass sie kurzfristig überhaupt keinen Zusammenhang herstellen konnten.

Mit einem Blick auf die Ergebnisse von Aussage 3 kann eher in die Richtung argumentiert werden, dass die Offenheit der Aussage 2 wohl zur Limitierung der Zustimmung geführt hat. Bei der Aussage, die sich explizit auf die Konfrontation mit der Unendlichkeit im Mathematikunterricht bezieht, sind die Zustimmungen bei Schülerinnen und Schülern am größten. Nur acht der Schülerinnen und Schüler gaben an, noch niemals im Mathematikunterricht damit konfrontiert worden zu sein. Im Vergleich zu den beiden bisherigen Aussagen ist hier auch die Enthaltung der Schülerinnen und Schüler am geringsten. Insgesamt kann aber festgehalten werden, dass bei diesem Item, ebenso wie auch bei den beiden davor, die Anzahl der Zustimmenden bei Schülern immer deutlich höher war als bei Schülerinnen. Ebenso verhält sich die Geschlechteraufteilung mit der Anzahl der neutralen Haltung.

Während die ersten drei Items kontinuierlich zur Steigerung der Zustimmung führten, obwohl die Aussagen immer enger gefasst wurden, nehmen diese Werte bei der vierten Aussage ab. Im Vergleich zu davor, wo lediglich abgefragt wurde, ob Schülerinnen und Schüler – in diversen Kontexten – mit der Unendlichkeit konfrontiert wurden, stellte sich diesmal die Frage nach einer konkreten Vorstellung besagter Unendlichkeit. Lediglich 31% der Schülerinnen stimmten zu, bei den Schülern waren es 54%. Ein weiterer nicht zu unterschätzender Aspekt ist die Häufigkeit der Enthaltungen: 40% der Schülerinnen und ein Drittel der Schüler wählten diese Antwortmöglichkeit. Dies könnte auf eine hohe Unsicherheit bei den Lernenden hinweisen. Schlussendlich gaben 29% der Schülerinnen und 13% der Schüler an, dass sie dieser Aussage nicht zustimmen und somit keine klare Vorstellung von der Unendlichkeit haben. Auch hier soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass sich die Aussage nicht explizit auf die Vorstellung der Unendlichkeit in der Mathematik bezieht. Somit kann auch hier nicht direkt rückgeschlossen werden, ob die Offenheit der Aussage zu dieser starken Limitierung der Zustimmung bzw. starken Annahme der neutralen Position führt oder ob die Lernenden tatsächlich keine konkrete oder nur eine vage Vorstellung von der Unendlichkeit haben.

In eine ähnliche Kerbe schlägt auch die Aussage 6: „Ich kann Beispiele für die Unendlichkeit angeben.“ Obwohl hier sehr explizit nachgefragt wurde steigerte sich dennoch die Zustimmung zu dieser Aussage im Vergleich zur Aussage davor. Über 40% der Schülerinnen und knapp 70% der Schüler könnten ein solches Beispiel angeben. Auch hier dürfen die Enthaltungen nicht unterschätzt werden: beinahe 29% bei Schülerinnen und über 20% bei Schülern. Somit kam es insbesondere bei Schülerinnen zu einer vergleichsweise hohen Ablehnung der Aussage. Ein Viertel der Schülerinnen gab an, kein Beispiel für die Unendlichkeit angeben zu können. Bei den Schülern waren es weniger als 10%.

Im nächsten Teil der Befragung ging es um konkrete mathematische Zusammenhänge mit der Unendlichkeit. Das siebte Item beinhaltete die Aussage, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Bei keiner anderen Aussage war die Zustimmung der Schülerinnen so hoch wie bei dieser: 95%. 87% der Schüler stimmten der Aussage ebenfalls zu. Die neutrale Haltung wurde mit 4% (weiblich) und 6% (männlich) bei keinem anderen Item so selten gewählt wie hier. Außerdem gaben 1% der Schülerinnen und 7% der Schüler an, dass sie dieser Aussage nicht zustimmen.

Auch Aussage 8 beinhaltet in den Gesamtergebnissen eine einmalige Besonderheit. Es gab keine befragte Schülerin, die dieser Aussage nicht zustimmte. Über 90% stimmten der Aussage zu, die übrigen wählten die mittlere Antwortmöglichkeit. Bei den Schülern stimmten ebenfalls über 90% zu, allerdings stimmten auch 2% nicht zu.

An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Items 7 und 8 sehr ähnlich gestaltet waren, da beide nach der Unendlichkeit bestimmter Zahlenmengen fragten. Besonders interessant ist der Vergleich zwischen Schülerinnen und Schülern. Während die Zustimmung der Schülerinnen zur Unendlichkeit der Dezimalzahlen geringer war als die Zustimmung zur Unendlichkeit der natürlichen Zahlen, spiegelt sich bei den Schülern eine umgekehrte Wahrnehmung wider.

Mit dem neunten Item fällt der Grad der Zustimmung wieder weit ab, während die Ablehnung im Vergleich auf dem Höchststand angekommen ist. 36% der Schülerinnen und 24% der Schüler geben an, dass es mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen gibt. Gleichmaßen lehnen 31% der Schülerinnen und 54% der Schüler diese Aussage ab. Die neutrale Haltung wurde bei knapp einem Drittel der Schülerinnen und über einem Fünftel der Schüler gewählt. Unter Anbetracht der Komplexität dieser Aussage ist die klare Positionierung von über zwei Drittel der Lernenden beachtlich.

80% der Schülerinnen und 78% der Schüler geben an, dass eine Gerade keinen Anfangs- und keinen Endpunkt hat und somit unendlich lang ist. 10% der Schülerinnen und 7% der Schüler hielten diese Aussage für falsch. Im Vergleich zu den Aussagen, die auf Zahlenmengen bezogen sind, ist die Zustimmung hier deutlich geringer, aber auch die neutrale Position wurde häufiger eingenommen. Hierbei könnte mutmaßlich die Unvereinbarkeit der eigenen Vorstellung der Unendlichkeit mit dem im Kopf vorhandenen Bild einer Geraden, die bereits mehrmals von allen Lernenden in diversen Schulübungen gezeichnet worden ist, zum Verhängnis geworden sein.

Aussage 11 bezog sich auf den Zahlenstrahl und die Zahlen, die darauf liegen. Sie zielte auf die Dichte der Zahlenmengen ab, wobei keine spezifische Zahlenmenge vorgegeben wurde. 90% der Schülerinnen und über 80% der Schüler stimmten zu, dass man zwischen noch so nahe nebeneinanderliegenden Zahlen immer noch eine Zahl dazwischen finden könnte. Jeweils 1% und 2% der Schülerinnen und Schüler lehnten diese Aussage ab.

Erneut ist anzumerken, dass das Fehlen der Zahlenmenge die Aussage sehr offen gestaltet. Somit wäre denkbar, dass Lernende diese Offenheit als vermeintlichen Fehler in der Aussage ansahen und deshalb die neutrale Position wählten. Immerhin wählten auch 9% der Schülerinnen und 17% der Schüler die mittlere Antwortmöglichkeit.

Das hohe Maß der Komplexität in der Aussage bei Item 12 spiegelt sich direkt in dem höchsten Anteil der neutralen Haltung wider. 46% der Schülerinnen und 31% der Schüler enthielten sich bei der Frage, ob es verschiedene Arten von Unendlichkeit gäbe. Somit ließen mehr Schülerinnen die Aussage unkommentiert, als sich zu positionieren. 44% stimmten zu, 10% lehnten die Aussage ab. Anders verhält sich die Aufteilung hier bei den Schülern. Obwohl auch

hier die mittlere Antwortmöglichkeit sehr häufig gewählt wurde, stimmten dennoch knapp die Hälfte der Befragten zu. 20% stimmten der Aussage nicht zu.

Mit Item 13 startete der Block, der die Unendlichkeit in der Realität beleuchtete. Bei den Schülerinnen stimmten 65%, bei den Schülern stimmten 87% der Befragten der Aussage zu, dass ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern nie ausgebucht sein kann. Dem gegenüber stehen 21% der Schülerinnen und 11% der Schüler, die diese Aussage ablehnten. Insgesamt haben sich lediglich zwölf der 134 befragten Lernenden enthalten.

Im Vergleich zu Item 13 steigerte sich bei Item 14 die Komplexität der Aussage. Ein Hotel kann man sich gut vorstellen, wenn auch die Unendlichkeit der vorhandenen Zimmer etwas schwierig ist. Aussage 14 bezog sich allerdings auf die Größe des Universums und behauptete, dass dieses unendlich groß sei, da es kein Ende habe. Trotzdem fand diese Aussage bei 80% der Schülerinnen Zuspruch, lediglich 15% der befragten Schülerinnen wählte die neutrale Position. Andersherum verhält es sich bei den befragten Schülern. Hier war die Zustimmung bei Aussage 13 wesentlich höher. Aussage 14 erhielt im Vergleich zu davor nur noch 69% Zuspruch, die Ablehnung steigerte sich auf 19%.

Das letzte Item beinhaltete einerseits den höchsten Grad der Komplexität, andererseits aber auch als einziges Item im gesamten Fragebogen die Darstellung der Aussage als Bild und nicht ausschließlich in schriftlicher Form. Womöglich könnte diese Form der Darstellung als Erklärung dienen, wieso es im Vergleich mit den anderen Items einen vergleichsweise moderaten Anteil an Enthaltungen hat. Etwa ein Drittel der Schülerinnen stimmten der Aussage über Achilles und der Schildkröte zu, gleichzeitig stimmten 39% der Aussage nicht zu. Bei den Schülern stimmten etwas weniger als 30% dieser Aussage zu, über 40% lehnten sie ab. Somit belaufen sich die Stimmen der Enthaltung auf 28% der befragten Schülerinnen und 30% der befragten Schüler.

Aufbauend auf der detaillierten Darstellung der Überblicksstatistik werden die Ergebnisse im Folgenden nach Schulstufen differenziert betrachtet. Diese Analyse erfolgt in vergleichender Form, um zentrale Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen den Schulstufen herauszuarbeiten, ohne dabei die Gesamtbetrachtung aus dem Blick zu verlieren.

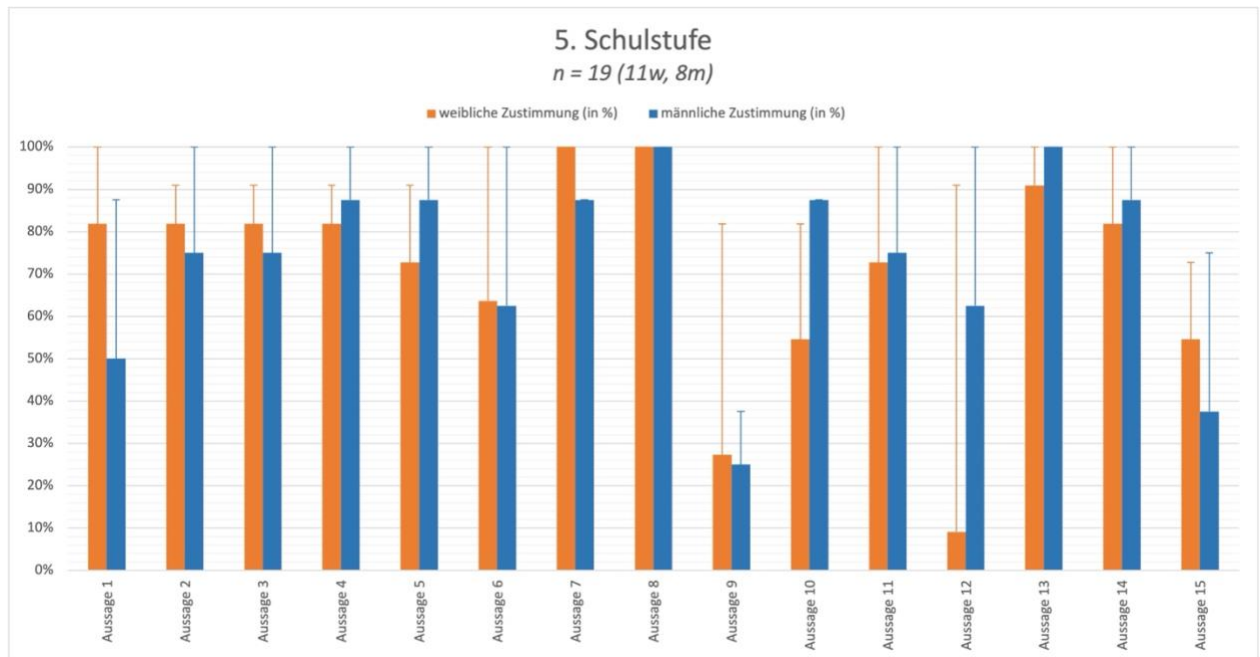


Abbildung 2: Ergebnis 5. Schulstufe

Im Vergleich zum Gesamtergebnis lässt sich aus den Ergebnissen der 5. Schulstufe erkennen, dass es ein sehr hohes Maß an Zustimmung zu allen Aussagen gab. Insbesondere Aussage 8 wurde von allen befragten Schülerinnen und Schülern als korrekt angenommen. Dieses Ergebnis findet sich lediglich in der 10. und 11. Schulstufe wieder. Weiters fällt auf, dass es lediglich drei Items gab, die von beiden Geschlechtern abgelehnt wurden. Besonders herauszuheben ist der mit 82% sehr hohe Anteil an Enthaltungen bei den Schülerinnen bei Aussage 12.

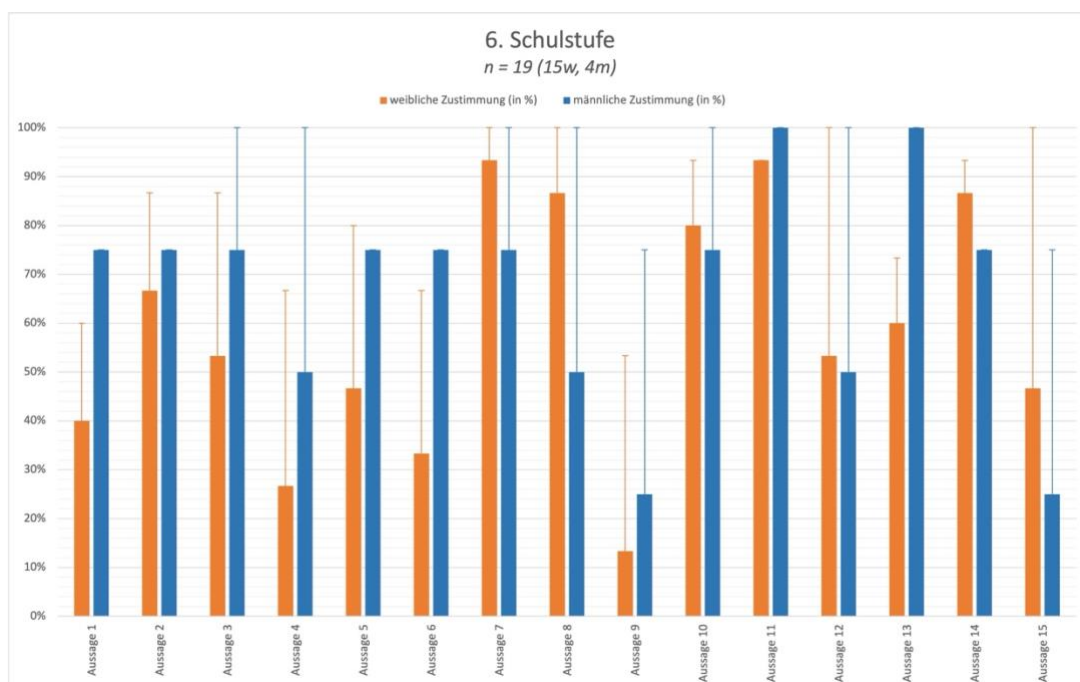


Abbildung 3: Ergebnis 6. Schulstufe

In der 6. Schulstufe nimmt der Grad an Zustimmung im Vergleich zu der 5. Schulstufe ab. Hier findet sich auch keine Aussage mehr, die sowohl von Schülerinnen als auch Schülern zu 100% Zustimmung erhielt.

Auch hier ist erkennbar, dass die Aussagen in Gegenüberstellung mit der Gesamtstatistik wesentlich seltener abgelehnt wurden. Dennoch lassen sich einige Gemeinsamkeiten über die Verläufe hinsichtlich der Zustimmung zu den Aussagen zwischen jener der 6. Schulstufe und jener der Gesamtstatistik erkennen. Der Wert bei Aussage 4 ist wesentlich niedriger als jener der drei Aussagen davor. Ebenso erhielten Aussage 9 und Aussage 15 vergleichsweise wenig Zustimmung.

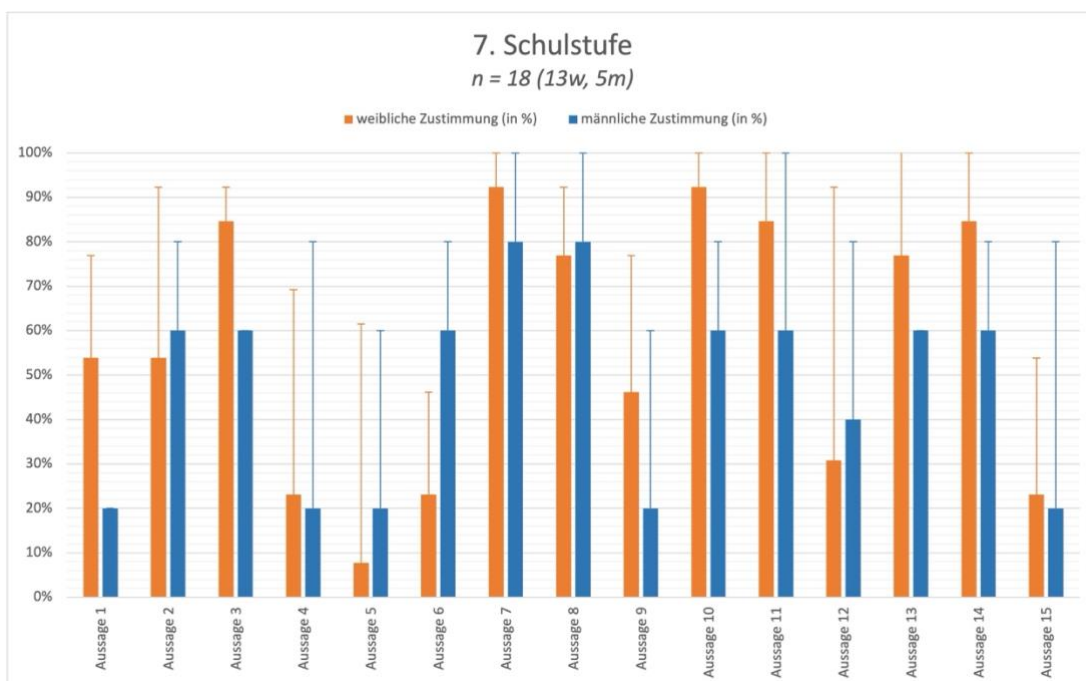


Abbildung 4: Ergebnis 7. Schulstufe

Vergleicht man die Ergebnisse der 7. Schulstufe mit allen anderen Schulstufen, so ist sofort erkennbar, dass es wesentlich weniger Zustimmung zu den Aussagen gab. Das erste Item sticht hier sofort ins Auge. Von den befragten Schülern stimmten 20% zu, 80% lehnten die Aussage ab. Einen derartig geringen Anteil der Zustimmung gab es in keiner anderen Schulstufe. In ähnlicher Weise fällt das Ergebnis von Item 5 auf. Dies erlangte nur knapp 8% an Zustimmung bei den befragten Schülerinnen.

Ähnlich wie bei der 5. und 6. Schulstufe lassen sich hier ebenfalls Aussagen finden, die von mindestens einem der beiden befragten Geschlechter keine Ablehnung erfuhren. Allerdings gibt es keine Aussage, die von einem der beiden befragten Geschlechter volle Zustimmung erhalten hätte.

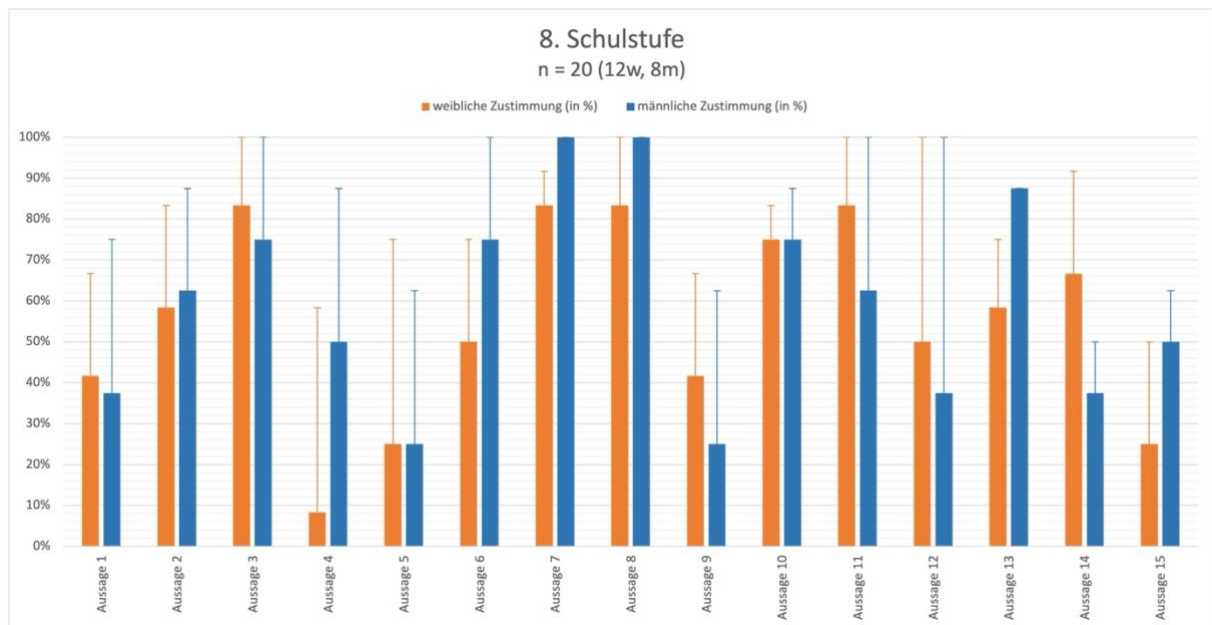


Abbildung 5: Ergebnis 8. Schulstufe

Auch in den Ergebnissen der 8. Schulstufe lassen sich im Vergleich zu den anderen Schulstufen einige Besonderheiten feststellen. Allen voran stellt hier die 4. Aussage das Item mit der geringsten Zustimmung der Schülerinnen dar. Lediglich 8% der Lernenden gaben an, dass sie eine konkrete Vorstellung von der Unendlichkeit hatten. Auch wenn die Stimmen der Enthaltung einen großen Teil einnehmen, haben dennoch über 40% der Schülerinnen rückgemeldet, dass sie keine Vorstellung von der Unendlichkeit hatten.

Andererseits finden sich in den Ergebnissen auch zwei Aussagen, die von allen befragten Schülern ihre Zustimmung erhielten.

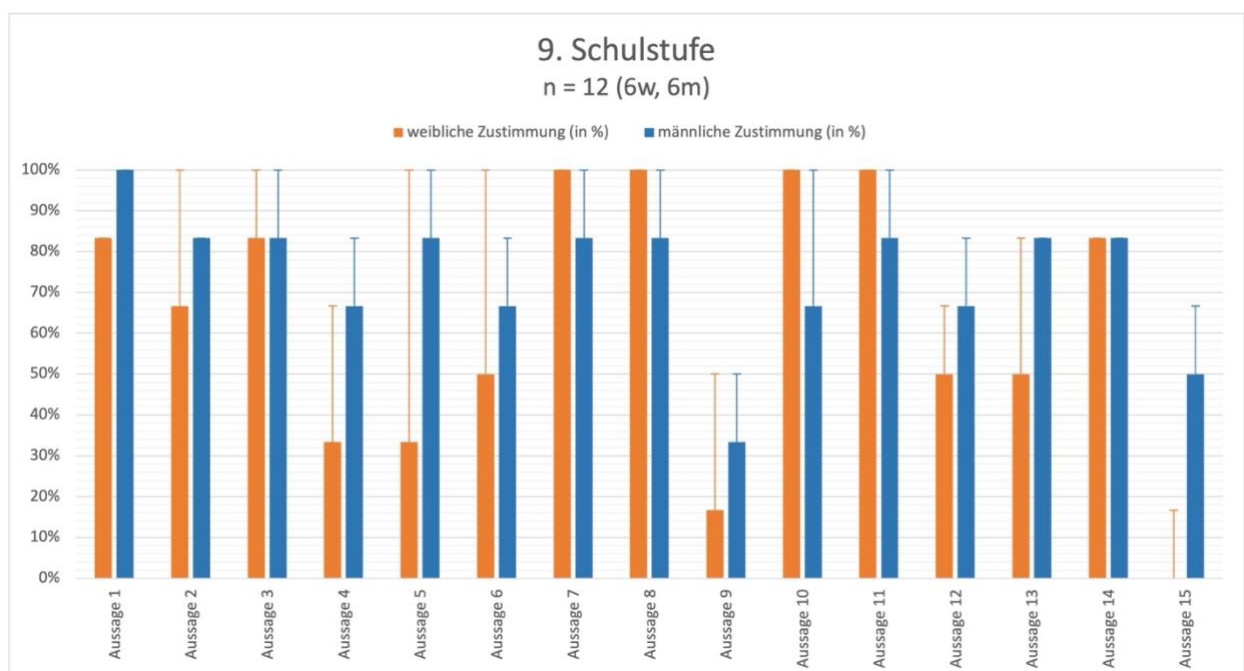


Abbildung 6: Ergebnis 9. Schulstufe

In der 9. Schulstufe lassen sich bislang die meisten Aussagen finden, denen alle Befragten zustimmten. Insgesamt fünf Aussagen fanden von jeweils einem befragten Geschlecht einhundertprozentige Zustimmung.

Nicht zu übersehen sind hier die Ergebnisse bei Aussage 9. Sowohl unter den befragten Schülerinnen als auch unter den befragten Schülern gaben jeweils 50% an, dass sie nicht denken, dass es mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen gebe.

Bisher einzigartig ist, dass die Aussage zu Achilles und der Schildkröte von keiner befragten Schülerin als korrekt eingestuft wurde. Hier gaben über 80% an, dass sie der Aussage nicht zustimmen.

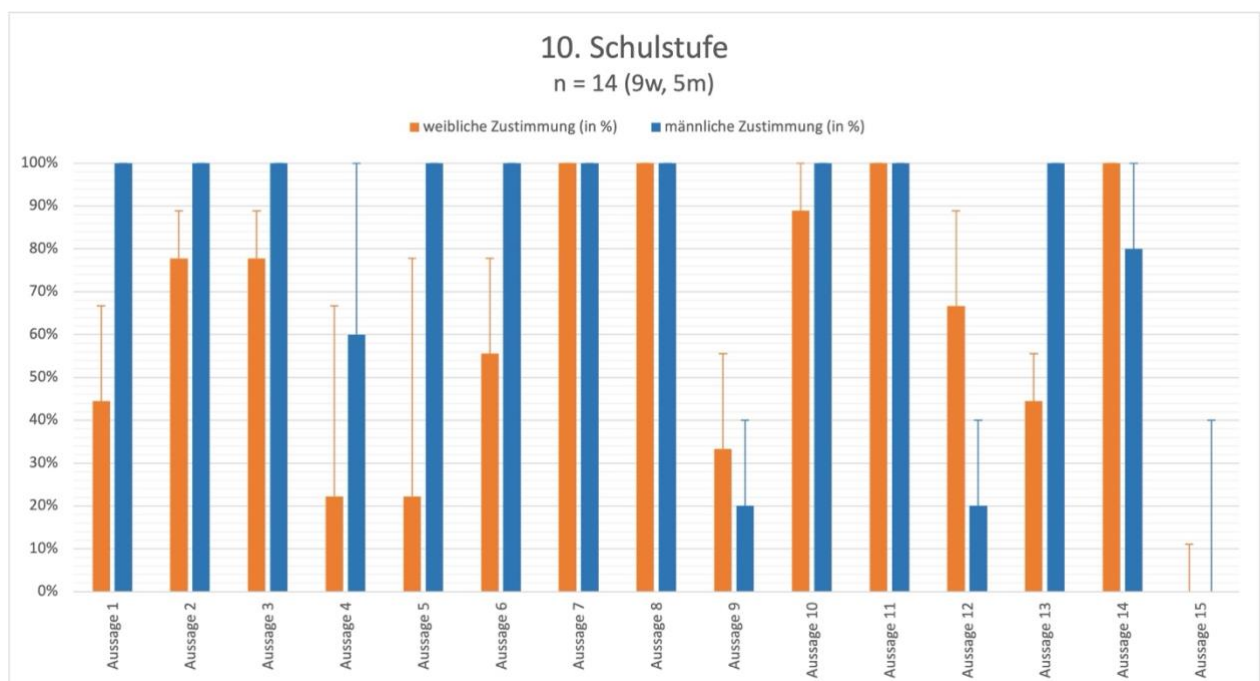


Abbildung 7: Ergebnis 10. Schulstufe

Die Ergebnisse der 10. Schulstufe zeigen ganz deutlich, dass hier vorwiegend bei den befragten Schülern ein überdurchschnittlich hohes Maß an Zustimmung zu den vorgegebenen Aussagen herrschte. Zehn der 15 Aussagen stimmten alle befragten Schüler zu. Mit vier der 15 Aussagen ist die Zustimmung bei den befragten Schülerinnen im direkten Vergleich niedriger, aber dennoch sehr hoch.

Nichtsdestotrotz ist das Ergebnis der letzten Aussage in dieser Schulstufe einzigartig. Hierbei gab es keine befragte Schülerin und keinen befragten Schüler, die oder der dieser Aussage zustimmte. Dennoch ist auch der Grad der Enthaltung eher niedriger geblieben. Fast 90% der Schülerinnen und 60% der Schüler gaben an, dass sie dieser Aussage nicht zustimmen.

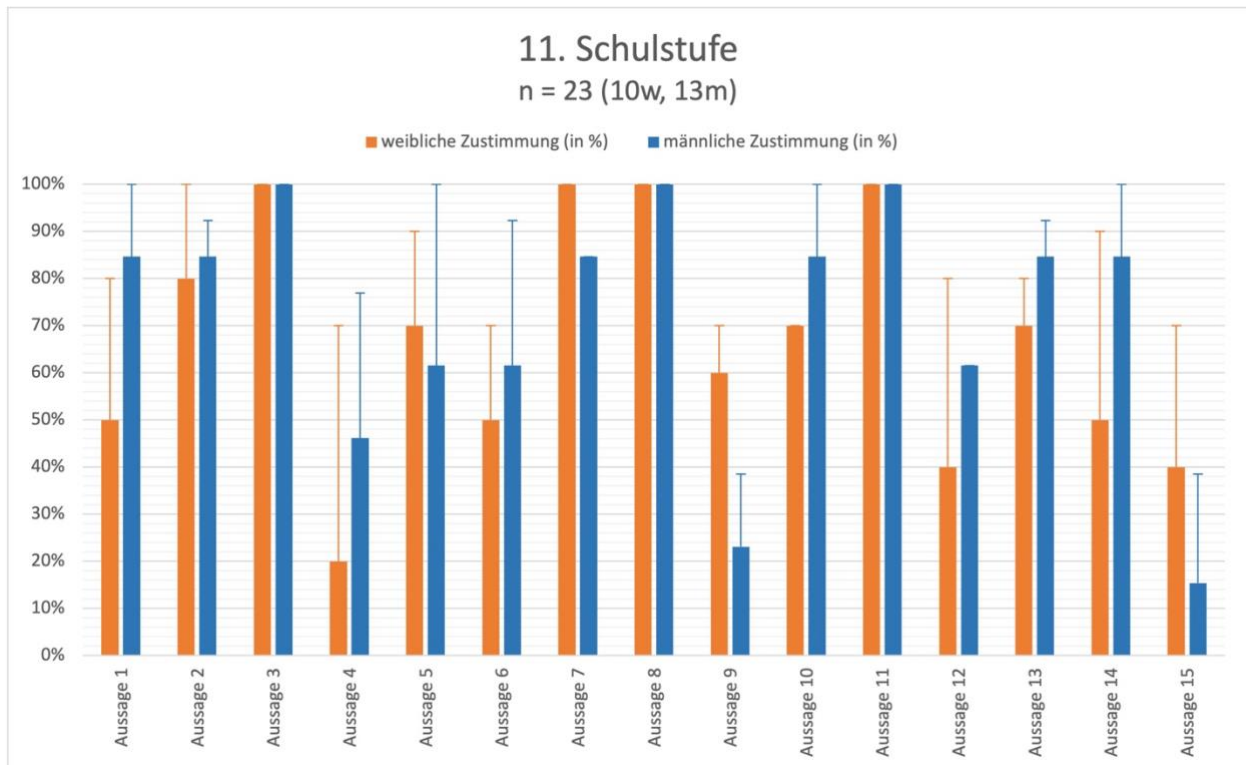


Abbildung 8: Ergebnis 11. Schulstufe

Die Ergebnisse in der 11. Schulstufe wirken sehr differenziert und haben große Ähnlichkeit mit der Gesamtstatistik. Immer wieder finden sich Items mit höherer Zustimmung, andererseits auch welche mit mehr Enthaltungen oder stärkerem Widerspruch.

Allerdings lässt sich auch hier eine Besonderheit finden. Insgesamt drei Items erhielten ausnahmslose Zustimmung von der gesamten Klasse.

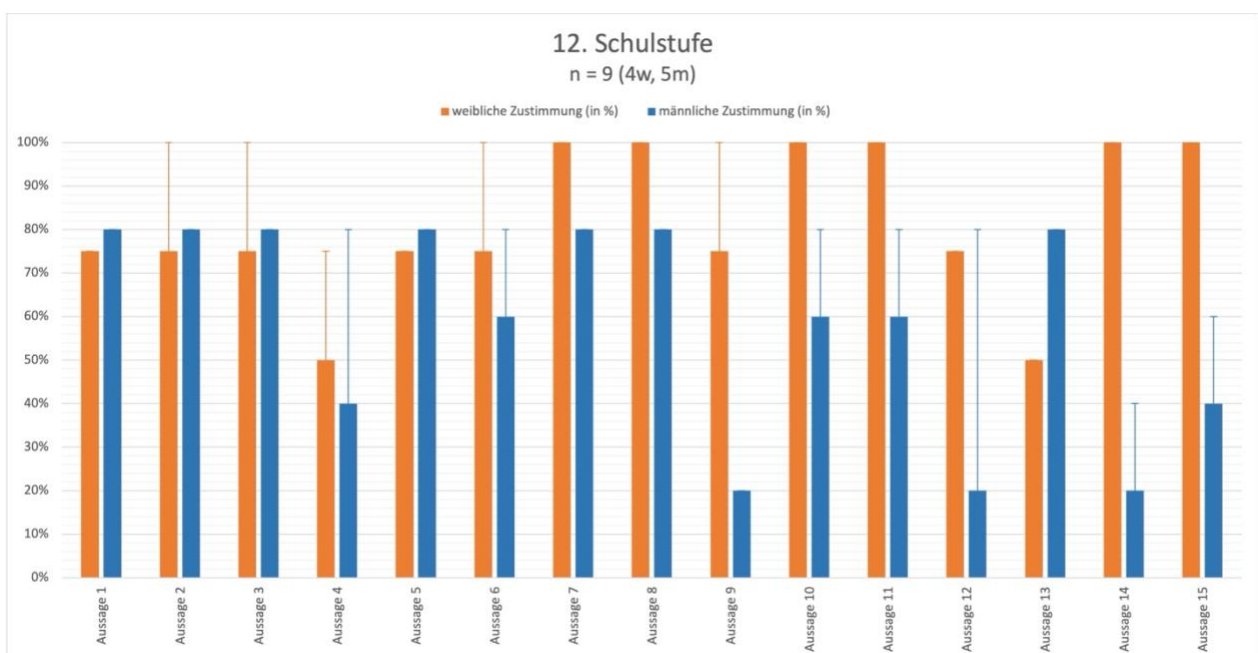


Abbildung 9: Ergebnis 12. Schulstufe

Bei diesen Ergebnissen fällt besonders auf, wie viele sich in Hinblick auf die Aussage klar positionierten. Besonders im Vergleich mit der 6. und 7. Schulstufe fällt auf, dass nur sehr wenige die neutrale Position gewählt haben.

Ein weiterer Punkt, der nicht außer Acht gelassen werden sollte, ist die totale Zustimmung der befragten Schülerinnen zu insgesamt sechs Items. In Hinblick auf die befragten Schülerinnen ist dies der höchste Wert, der sich unter den gesammelten Daten finden lässt.

Obwohl in der 12. Schulstufe die kleinste Stichprobe vorgelegen hat, können sich auch hier interessante Einblicke in die Vorstellungen über die Unendlichkeit bei den Schülerinnen und Schülern aus den Ergebnissen ableiten lassen.

3.2 Vorstellungen über die Unendlichkeit

In diesem Absatz sollen die Ergebnisse der einzelnen Schulstufen genauer beleuchtet und insbesondere in Hinblick auf die Kategorien, derer die Aussagen zugeordnet worden sind, verglichen werden. Die erneute Betrachtung in dieser doch sehr zielgerichteten Weise dient als Grundlage für entsprechende Rückschlüsse und zur Beantwortung der Forschungsfragen.

3.2.1 Allgemeine Vorstellungen über die Unendlichkeit

Auf die allgemeine Vorstellung in Hinblick auf die Unendlichkeit zielten im Fragebogen Aussage 1 bis Aussage 6 ab. Sie fragten die persönliche Einschätzung ab. Ein hoher Zustimmungswert zu den einzelnen Aussagen würde also dafür sprechen, dass Schülerinnen und Schüler – aus ihrer persönlichen Sicht – eine Vorstellung über die Unendlichkeit haben, mit der Thematik bereits konfrontiert worden sind und auch Beispiele dafür angeben könnten.

Für diese Aussagenkategorie finden sich in der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 relativ hohe Zustimmungswerte. Außerdem füllen hier die Enthaltungen häufig die 100%. Somit gibt es nur einen geringen Stichprobenanteil (zwischen 9% und 13%), der den Aussagen nicht zugestimmt hat.

Betrachtet man weiterhin nur die Items 1 bis 6 erkennt man im direkten Vergleich zwischen der 1. und 2. Klasse Sekundarstufe 1, dass die älteren Schülerinnen und Schüler die Aussagen wesentlich häufiger abgelehnt haben. Zusätzlich finden sich in diesen Ergebnissen hohe Anteile an Enthaltungen wieder. Der Grad der Zustimmung ist niedriger, besonders bei Schülerinnen.

Eine ähnliche Tendenz zeichnet sich auch in den Ergebnissen der 3. Klasse Sekundarstufe 1 bei den ersten sechs Aussagen ab. Hier finden sich bis zu 80% an Schülern, die der Aussage nicht zustimmen. In weiterer Folge haben bis zu 60% die neutrale Position gewählt. Somit ist

der Grad der Zustimmung zu den Aussagen vergleichsweise niedrig. Teilweise haben maximal 20% der Befragten einer Aussage zugestimmt.

Die Ergebnisse der 4. Klasse Sekundarstufe 1 deuten wieder etwas mehr in eine zustimmende Richtung. Zwar gibt es auch hier keinen derartig hohen Grad der Zustimmung wie in der 1. Klasse, allerdings mehr als davor. Vor allem finden sich weniger Ergebnisse, die die Aussagen ablehnen. Der Anteil beträgt bei den Befragten dieser Klasse höchstens 42%. Es gibt auch eine Aussage, die niemand ablehnte, nämlich bereits einmal im Mathematikunterricht mit der Unendlichkeit konfrontiert worden zu sein.

Mit dem Sprung von der Unterstufe in die Oberstufe und somit zur Betrachtung der 1. Klasse Sekundarstufe 2 nimmt der Anteil der Zustimmungen Fahrt auf. Während besonders unter den Schülern mindestens 66% den ersten sechs Aussagen zustimmen, sind es bei Schülerinnen im Vergleich weniger. Dennoch kommt es nicht zu einer solchen ablehnenden Haltung wie teilweise in der Unterstufe, da die fehlende Zustimmung durch die neutrale Position häufig kompensiert wurde. Somit gibt es zwei Aussagen, die von keiner befragten Person abgelehnt wurden. Der Grad der Ablehnung ist mit maximal 32% vergleichsweise gering.

Das Bild ändert sich auch nicht, wenn man die 2. Klasse Sekundarstufe 2 betrachtet. Insgesamt stimmten 100% der Schüler fünf von sechs Aussagen in dieser Kategorie zu. Unter den Schülern findet sich auch keine ablehnende Haltung zu der sechsten Aussage (entspricht Item 4) wieder, sondern lediglich Enthaltung. Die befragten Schülerinnen gaben keine so deutliche Zustimmung, enthielten sich auch häufiger und lehnten teilweise sogar mit über 30% die Aussagen ab. Dennoch beinhalten diese Ergebnisse im Vergleich mit der Unterstufe weniger ablehnende Antworten.

In der 3. Klasse Sekundarstufe 2 findet sich mit Aussage 3, der Konfrontation mit der Unendlichkeit im Mathematikunterricht, bei allen Befragten einhundertprozentige Zustimmung wieder. Obwohl die Zustimmung bei den anderen befragten Items nicht so hoch ist, lässt sich dennoch kein besonders großes Maß an Ablehnung finden. Höchstens 30% der Schülerinnen stimmten einer Aussage nicht zu, bei den befragten Schülern noch weniger.

Betrachtet man das Ergebnis der Maturantinnen und Maturanten, so lässt sich zwar viel Zustimmung (meist zwischen 70% und 80%), etwas Ablehnung (höchstens 25%), aber nur sehr wenig Enthaltung (kommt nur bei 50% der Ergebnisse vor) erkennen. Hier dürfte wohl größtenteils klar verstanden worden sein, was die Aussagen zu bedeuten haben. Außerdem sind die Einschätzungen offenbar so präzise, dass die neutrale Position im Vergleich am seltensten gewählt worden ist.

3.2.2 Vorstellungen über die Unendlichkeit in der Mathematik

Die Aussagen, die sich in den Items 7 bis 12 befanden, nahmen Bezug auf die Unendlichkeit im Kontext der Mathematik. Zunächst wurden Aussagen zu Zahlenmengen, dann zur Geraden, zum Zahlenstrahl und abschließend zu verschiedenen Arten der Unendlichkeit angegeben. All diese Aussagen sind grundsätzlich als korrekt anzusehen. Somit spricht ein hohes Maß an Zustimmung für ein gutes Verständnis in Hinblick auf die Unendlichkeit in der Mathematik.

In der 1. Klasse Sekundarstufe 1 erhielten die beiden Aussagen zu den Zahlenmengen beinahe vollkommene Zustimmung. Lediglich 12,5% der Schüler stimmten Aussage 7 nicht zu. Aussage 9 verband allerdings die ersten beiden Aussagen dieser Kategorie und fügte somit ein höheres Maß an Komplexität hinzu. Hier fallen die Werte der Zustimmung dementsprechend auf etwas über 25%, die Enthaltung (ca. 55% bei Schülerinnen und 12,5% bei Schülern) und die Ablehnung (ca. 19% bei Schülerinnen und 62,5% bei Schülern) nehmen zu. Mit den Aussagen zur Geraden und dem Zahlenstrahl wächst der Anteil der Zustimmung zwar auf über 50%, allerdings fällt dieser mit Aussage 12 und den verschiedenen Arten der Unendlichkeit. Besonders Schülerinnen fallen hier auf, da weniger als 10% der Aussage zustimmten.

Betrachtet man die Ergebnisse der 2. Klasse Sekundarstufe 1, so erhält man ein Ergebnis mit ähnlichen Tendenzen. Die Aussagen 7 und 8 erhalten noch mehr Zustimmung als Aussage 9, allerdings im Vergleich zur 1. Klasse auch bereits weniger. Aussage 9 wurde ähnlich selten als korrekt angenommen. Jedoch finden sich bei den nächsten drei Aussagen wesentlich mehr Schülerinnen und Schüler wieder, die zustimmen. Aussage 10 erlangt 75% bis 80%, Aussage 11 sogar 93% bis 100% Zustimmung. Offenbar ist in dieser Klasse die Vorstellung im Bereich der Zahlenmengen schwieriger als im Bereich der Geometrie.

Gut erkennbar ist hier der Grad der Komplexität in Aussage 12. Obwohl nur etwa 50% der Schülerinnen und Schüler zustimmen, gibt es keine Ablehnung. Die andere Hälfte der Befragten nahm eine neutrale Haltung ein.

Obwohl sich auch in der 3. Klasse Sekundarstufe 1 Ähnlichkeiten mit den bisher beschriebenen Ergebnissen wiederfinden, nimmt hier das Maß der Zustimmung im Vergleich ab. Keines der Items 7 bis 12 erlangte einhundertprozentige Zustimmung. Aussage 7 und 8 liegen bei 92% und 77% Zustimmung der Schülerinnen und 80% Zustimmung der Schüler. Dennoch muss festgehalten werden, dass in dieser Klasse die beiden Aussagen zu den Zahlenmengen etwa das gleiche Maß an Zustimmung erhielten wie die beiden Aussagen zur Geraden und zum Zahlenstrahl. Auch hier stieg mit Aussage 12 neben dem Grad der Komplexität erneut der Grad an Enthaltungen.

Auffällig in dieser Klasse ist jedoch, dass Aussage 7 und Aussage 11 von keiner befragten Person abgelehnt worden ist.

Mit dem Ende der Unterstufe steigen die Zustimmungswerte bei den komplexeren Aussagen. Aussage 7 und Aussage 8 wurden bereits von allen Schülern und von etwa 83% der Schülerinnen angenommen. Auch Aussage 9 erhielt hier 42% (weiblich) und 25% (männlich) Zustimmung. Besonders hervorzuheben ist, dass im Vergleich vor allem Aussage 12 besonders positiv beurteilt wurde. Die Hälfte der Schülerinnen und 37,5% der Schüler stimmten der Aussage zu, niemand lehnte diese ab.

Die Ergebnisse in der Oberstufe, also der 1. Klasse Sekundarstufe 2, gehen in die gleiche Richtung. Hier fällt besonders auf, dass die beiden Aussagen zu den Zahlenmengen und die beiden Aussagen zu der Geraden und dem Zahlenstrahl von allen Schülerinnen Zustimmung erhielten. Die befragten Schüler lehnten diese Aussagen nicht ab, etwa 17% (Aussage 7, 8 und 11) bzw. etwa 33% (Aussage 10) wählten aber jeweils die neutrale Position.

Dennoch wurde Aussage 9, die die natürlichen Zahlen mit den Dezimalzahlen vergleicht, nur von etwa 17% der Schülerinnen und 33% der Schüler angenommen. 50% der Schülerinnen und Schüler stimmten dieser Aussage nicht zu.

Vergleichsweise hoch ist allerdings der Grad der Zustimmung zu Aussage 12 und den verschiedenen Arten der Unendlichkeit. Die Hälfte der Schülerinnen und etwa zwei Drittel der Schüler geben an, dass diese Aussage korrekt ist.

Betrachtet man die Ergebnisse der 2. Klasse Sekundarstufe 2 wird klar, dass hier bereits ein recht gutes Verständnis für die Unendlichkeit in der Mathematik herrscht. Aussage 7, 8 und 11 wurden von allen Schülerinnen und Schülern als korrekt angesehen. Die Zustimmungsergebnisse von Aussage 9 stellen hier mit der Zustimmung von etwa einem Drittel der Schülerinnen und einem Fünftel der Schüler vergleichsweise niedrige Werte dar. Aussage 10 stimmten 89% der Schülerinnen und 100% der Schüler zu. Sie wurde auch von niemandem abgelehnt.

Besonders interessant ist, dass bei Aussage 12 der Grad der Zustimmung bei den Schülerinnen im Vergleich zur 1. Klasse Sekundarstufe 2 weiterhin gestiegen ist, während jener der Schüler gefallen ist. Hier gaben etwa 67% der Schülerinnen und 20% der Schüler ihre Zustimmung.

Mit dem höheren Alter der befragten Schülerinnen und Schülern geht auch eine gewisse Stringenz mit den Ergebnissen einher. Zwar gaben bei Aussage 7 alle Schülerinnen der 3. Klasse Sekundarstufe 2 ihre Zustimmung, jedoch stimmten nur etwa 85% der Schüler zu. Aussage 8 und 11 wurden von allen Befragten angenommen. Wiederum stimmten Aussage 9

60% der Schülerinnen und ca. 23% der Schüler zu. Aussage 10 wurde nur von 70% der Schülerinnen angenommen, aber von keinem Schüler abgelehnt.

Auch in dieser Klasse ist zu beobachten, dass die Zustimmung zu Aussage 12 deutlich höher ist als in den Unterstufenklassen. Während 40% der Schülerinnen ihr Zustimmung gaben, waren es bei den Schülern sogar über 60% der Befragten.

Auch in der Abschlussklasse findet sich bei Aussage 7, 8, 10 und 11 von den befragten Schülerinnen einhundertprozentige Zustimmung wieder. Die befragten Schüler stimmten nur zu 80% (Aussage 7 und 8), 20% (Aussage 9) und 60% (Aussage 10 und 11) zu.

Wirft man einen Blick auf die Ergebnisse von Item 12 findet sich hier bei den Schülerinnen der höchste Wert der Zustimmung in der Befragung: 75%. Die Schüler hingegen stimmten nur zu 20% zu, 60% wählten die neutrale Position.

3.2.3 Vorstellungen über die Unendlichkeit in der Realität

Die letzten drei Items (Aussage 13, 14 und 15) erhoben die Vorstellungen über die Unendlichkeit in einem Kontext, der abseits jeglicher Fachrichtung auf reale Begebenheiten abzielt. So wurden hier die Kapazitäten von einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern, die Größe des Universums und das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte beschrieben. Aus einem mathematischen Blick betrachtet ist keine der Aussagen korrekt. Die Aussagen 13 und 14 werden aber von Schülerinnen und Schülern vermutlich dennoch als korrekt eingestuft, da sie sich intuitiv plausibel anhören, und ohne spezielles mathematisches oder naturwissenschaftliches Vorwissen schwer zu hinterfragen sind. Insbesondere die Vorstellung, dass ein unendlich großes Hotel nicht vollständig belegt sein kann (Aussage 13) oder dass das Universum kein Ende hat und daher unendlich groß sein muss (Aussage 14), entspricht einem alltagsnahen Verständnis von Unendlichkeit. Die mathematisch-physikalischen Feinheiten, die diese Aussagen problematisieren, sind für Lernende in der Regel noch nicht zugänglich. Dies wird in der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt. Hier wird also angenommen, dass die Zustimmung zu den beiden Aussagen eine gute Vorstellung über die Unendlichkeit in der Realität darstellt.

Aussage 15 kann aus dem Gedankenexperiment heraus als korrekt angesehen werden. Auch hier bringt aber die mathematische Betrachtung die Einsicht, dass die Aussage abgelehnt werden sollte. Aus diesem Grund werden die Ergebnisse dieser Aussage hier nicht näher beleuchtet, da sie keinen Rückschluss auf das Verständnis, sondern eher auf die persönliche Vorstellung bieten (experimentell oder mathematisch geprägt). Diese Ergebnisse werden in Kapitel 3.6.3 genauer betrachtet.

In der 1. Klasse Sekundarstufe 1 stimmten 91% der Schülerinnen und 100% der Schüler Aussage 13 zu. Aussage 14 erhielt von ca. 82% der Schülerinnen und von ca. 88% der Schüler deren Zustimmung. Niemand lehnte die Aussage ab.

Es fällt auf, dass die 1. Klasse häufig Ergebnisse aufweist, die auf eine gute Vorstellung in Hinblick auf die Unendlichkeit schließen lassen. Vergleicht man jedoch die Ergebnisse der 2. Klasse Sekundarstufe 1, so sind diese im Grad der Zustimmung meist niedriger. Dies spiegeln auch Aussagen 13 und 14 wider: 60% und ca. 87% der Schülerinnen stimmten zu. Die Schüler stimmten zu 100% und ca. 75% zu. Während es keinen Widerspruch in der 1. Klasse gab, waren es in dieser Klasse zwischen 8% und 27%.

Das Maß der Zustimmung zu den Aussagen 13 und 14 nimmt in der 3. Klasse Sekundarstufe 1 leicht zu. Hier stimmen ca. 77% und ca. 85% der Schülerinnen sowie jeweils 60% der Schüler den beiden Aussagen zu. Unter den befragten Schülerinnen gibt es niemand, die den beiden Aussagen widersprochen hat.

In der 4. Klasse der Sekundarstufe 1 deuten die Ergebnisse darauf hin, dass die Vorstellung über die Unendlichkeit in der Realität entweder nicht so gut ausgeprägt ist oder bereits mehr mathematisches und naturwissenschaftliches Vorwissen vorhanden ist, sodass die Aussagen unter diesen Gesichtspunkten betrachtet wurden. Hier liegt bei Aussage 13 das Maß der Zustimmung bei ca. 58% der Schülerinnen und ca. 88% der Schüler. Vergleicht man Aussage 14 findet man bei ca. zwei Drittel der Schülerinnen und 37,5% der Schüler eine zustimmende Haltung.

Mit dem Wechsel in die Oberstufe bleibt der Vorbehalt aufrecht, es könnte durch spezifisches Vorwissen zu anderen Einschätzungen durch Lernende gekommen sein. In der 1. Klasse der Sekundarstufe 2 stimmten 50% der Schülerinnen und ca. 83% der Schüler Aussage 13 zu. Die Zustimmung zu Aussage 14 beläuft sich bei allen befragten Lernenden auf ca. 83%.

Die Ergebnisse der 2. Klasse der Sekundarstufe 2 drängen die Vermutung in die Richtung, dass das Vorwissen möglicherweise nicht derart gegeben ist. Hier finden sich nämlich bei Aussage 13 ca. 44% Zustimmung bei den Schülerinnen und 100% Zustimmung bei Schülern. Ähnliche Ergebnisse zeigt Aussage 14: 100% Zustimmung bei Schülerinnen und 80% Zustimmung bei Schülern.

Während in der 2. Klasse teilweise vollständige Zustimmung geherrscht hat, lassen sich solche Ergebnisse in der 3. Klasse der Sekundarstufe 2 nicht mehr finden. Von den befragten Schülerinnen gaben zum belegten Hotel 70% ihre Zustimmung, zum Universum 50%. Die befragten Schüler stimmten jeweils zu ca. 85% den beiden Aussagen zu.

Die Schülerinnen und Schüler der 4. Klasse Sekundarstufe 2 stimmten einerseits in hohem Maß zu, andererseits lehnten sie die Aussagen stärker ab als die bisher betrachteten Klassen. So finden sich bei Aussage 13 50% weibliche Zustimmung und 50% Ablehnung, 80% männliche Zustimmung und 20% Ablehnung. Bei Aussage 14 verändern sich die Geschlechterverhältnisse: 100% weibliche Zustimmung, 20% männliche Zustimmung und 60% Ablehnung.

3.3 Zusammenhang zwischen Vorstellungen und Lehrplaninhalten

In diesem Absatz sollen die in Kapitel 3.2 beschriebenen Ergebnisse in Einklang mit dem aktuellen Lehrplan für das Fach Mathematik (Stand Juli 2025), welcher in Kapitel 1.5.1 beschrieben worden ist, gebracht werden. Hier liegt der Fokus auf dem mathematischen Aspekt der Unendlichkeit. Um tatsächlich einen Zusammenhang mit den Lehrplaninhalten herstellen zu können, werden die durch den Fragebogen generierten Daten zu jenen spezifischen Aspekten herangezogen.

Da sich die Lehrplaninhalte in der Unter- und Oberstufe deutlich unterscheiden, werden die Ergebnisse in einem weiteren Schritt getrennt nach diesen beiden Bereichen betrachtet. Dies ermöglicht eine genauere Einordnung der Resultate im Hinblick auf die jeweiligen lehrplanmäßigen Voraussetzungen. Es soll also ein Vergleich der Aussagen 7 bis 12, den nach Schulstufen klassifizierten Antworten und den entsprechenden Lehrplaninhalten stattfinden.

3.3.1 Unterstufe

Mitunter ein wesentliches Kriterium für die Erstellung des Fragebogens war die Machbarkeit für alle befragten Schülerinnen und Schüler. Demnach wurde sichergestellt, dass alle Aussagen, die sich auf den mathematischen Kontext beziehen, im Lehrplan bereits vorgesehen und somit auch bereits unterrichtet wurden.

Bereits in der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 wird das Rechnen mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen erarbeitet und gefestigt. Somit ist es nicht verwunderlich, dass die befragten Schülerinnen und Schüler der 1. Klasse zu den Aussagen, die sich auf die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen und der Dezimalzahlen beziehen, einen derart großen Zuspruch gaben. Im Kompetenzbereich 3 des Lehrplans findet man in der 1. Klasse auch das Arbeiten mit einfachen geometrischen Objekten in der Ebene wieder. So zählt hierzu das Kennenlernen von Strecke, Strahl und Gerade. Insbesondere die Unterscheidung der jeweiligen Objekte durch ihre Charakterisierung steht hierbei im Vordergrund. Die Lernenden sollten gelernt haben, dass eine Gerade keinen Anfang und kein Ende hat. Dies deckt sich mit der Aussage in Item 10. Dennoch konnten entweder viele Schülerinnen und Schüler aus der Aussage nichts schlussfolgern oder es wurde womöglich im Unterricht zu kurz behandelt. Hier lag die Zustimmung nämlich deutlich

niedriger als erwartet. Hinzu kommt, dass 18% der Schülerinnen und 13% der Schüler die Aussage sogar ablehnten.

Neben dem Rechnen mit natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen steht auch die Betrachtung dieser Zahlen unter verschiedenen Gesichtspunkten im Lehrplan. Unter anderem sollen diese Zahlen auch dargestellt und geordnet werden. Hierfür bietet sich die Betrachtung am Zahlenstrahl sehr gut an. Da es keinerlei Beschränkung gibt, wie klein die Ausschnitte des Zahlenstrahls gewählt werden sollen, drängt diese Thematik eigentlich in die Richtung der Aussage 11. Hier wurde angegeben, man könne zwischen zwei noch so nahe nebeneinanderliegenden Zahlen immer eine Zahl dazwischen finden. Obwohl diese Aussage also aufgrund des Lehrplans im Unterricht besprochen werden sollte, waren sich die Lernenden nicht mehr sicher. 25% bis 27% der Befragten wählten daher die neutrale Position.

Die geringe Zustimmung zu den Aussagen 9 und 12 lässt sich neben dem höheren Grad der Komplexität auch schlichtweg darauf zurückführen, dass diese Themen nicht im Lehrplan der Unterstufe vorgesehen sind. Mutmaßlich werden daher nur wenige Lehrende übrige Unterrichtszeit haben, um sich mit den Schülerinnen und Schüler auf derartige Diskurse einzulassen.

In der 2. Klasse der Sekundarstufe 1 findet man im Lehrplan keine neuen Zahlenmengen und ebenso wenig eine Vertiefung in die geometrischen Objekte in der Ebene. Hier kommt vielmehr das Spiralprinzip zum Tragen. Die Lehrenden sind dazu angehalten, im Sinne der nachhaltigen Sicherung, diese Themengebiete zu wiederholen und darauf aufzubauen. An diesem Punkt stellt sich die Frage, wie viele Lehrkräfte sich in der 2. Klasse erneut tiefgreifend mit den natürlichen Zahlen und den Dezimalzahlen auseinandersetzen, wenn es doch eigentlich viele neue Themen zu erarbeiten gibt.

Dass der Fokus offenbar wirklich nicht mehr so stark auf diesen Themen liegt, zeigen die Ergebnisse der 2. Klasse. Im Vergleich waren sich bei der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen und der Dezimalzahlen wesentlich mehr Schülerinnen und Schüler unsicher und wählten die neutrale Position.

Offenbar dürften jedoch die Geraden und der Zahlenstrahl entweder intensiver besprochen worden sein oder zumindest bei den Lernenden besser im Gedächtnis geblieben sein. Die Zustimmung bei diesen beiden Items war im Vergleich mit der 1. Klasse deutlich höher, die Ablehnung sehr gering.

Mit Beginn der 3. Klasse Sekundarstufe 1 wird nochmals rekapituliert, was bereits über Zahlenmengen bekannt ist, da man beginnt die ganzen und anschließend die rationalen Zahlen einzuführen. Obwohl in dieser Schulstufe also eigentlich ein gewisser Tiefgang in die Thematik stattfindet, sind die Ergebnisse nicht dementsprechend eindeutig. Dies könnte möglicherweise daran liegen, dass die ganzen und rationalen Zahlen im Vordergrund lagen und die natürlichen

Zahlen sowie die Dezimalzahlen in den Hintergrund rückten. Die Zustimmung zu Aussage 7 war zwar noch sehr hoch und der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen wurde auch nicht widersprochen, doch bei den Dezimalzahlen änderte sich das.

Besonders interessant ist, dass auch in dieser Schulstufe keine weitere Auseinandersetzung mit Geraden stattfindet, und dennoch ein derartig hohes Maß an Zustimmung (bei Schülerinnen 92% und 8% Enthaltung, bei Schülern 60% und 20% Enthaltung) erkennbar ist.

Aussage 11 erhielt keinen Widerspruch. Dies ist wenig verwunderlich, da mit dem Erarbeiten einer neuen Zahlenmenge auch das erneute Betrachten des Zahlenstrahls einhergeht. Hier wäre sogar ein höherer Zustimmungsgrad erwartbar gewesen.

Mit der letzten Klasse der Unterstufe kommen inhaltlich die nichtrationalen Zahlen hinzu und man erarbeitet in weiterer Folge die reellen Zahlen. Auch in dieser Schulstufe ist dieses Thema also präsent und die Aussagen in Item 7 und 8 sind mit dem Lehrplan durchaus kompatibel, da man sich meist einen Überblick über die gesamten in der Unterstufe erarbeiteten Zahlenmengen verschafft.

Die befragten Schüler dürften hierzu ein besseres Verständnis aufgebaut haben als die befragten Schülerinnen. Die Schüler stimmten zu 100% beiden Aussagen zu, die Schülerinnen wählten auch die neutrale Position und der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen widersprachen sogar 9%.

Dass in dieser Schulstufe die Geraden in der Ebene nicht im Lehrplan verankert sind, lässt sich auch aus den Ergebnissen von Item 10 schlussfolgern. Obwohl die Zustimmung bei ca. 75% lag, lehnten auch 12,5% bis 17% der Lernenden die Aussage ab.

Inwieweit mit der Erarbeitung der nichtrationalen bzw. reellen Zahlen die Betrachtung des Zahlenstrahls einhergegangen ist, ist nur schwer nachvollziehbar. Die befragten Schülerinnen und Schüler waren sich scheinbar nicht sicher, da hier häufiger (unter den Schülern sogar 38%) eine neutrale Haltung eingenommen worden ist.

3.3.2 Oberstufe

Der Einstieg in die Oberstufe beginnt thematisch bei vielen Lehrenden mit der erneuten Betrachtung von den bereits bekannten Zahlenmengen. Neben der Erarbeitung der Grundlagen soll hier auch reflektiert werden, Mengen als solche werden betrachtet und Intervalle am Zahlenstrahl dargestellt. Außerdem werden Näherungswerte besprochen und es wird geklärt, wie man mit solchen sinnvoll umgehen kann. In dieser Schulstufe sind Geraden erstmals seit der 1. Klasse Sekundarstufe 1 wieder Lehrplanthema als Geraden im $\mathbb{R}^2$. Dennoch soll zur besseren Vergleichbarkeit mit der Unterstufe auch hier vorwiegend auf die Aussagen 7, 8, 10 und 11 Bezug genommen werden.

Es fällt auf, dass es nun nicht mehr nur um die reine Wissensvermittlung, sondern auch um die

(kritische) Auseinandersetzung mit Konzepten der Mathematik geht.

Wenig erstaunlich sind dementsprechend die vorliegenden Ergebnisse der 1. Klasse Sekundarstufe 2. Die Aussagen 7 und 8 wurden von niemandem abgelehnt, lediglich ein Schüler enthielt sich jeweils, alle anderen befragten Lernenden stimmten den beiden Aussagen zu. Ähnlich verhalten sich die Antworten bei Aussage 10 und Aussage 11. Alle Schülerinnen stimmten den beiden Aussagen zu. Einige Schüler waren sich unsicher, niemand lehnte aber die Aussage ab.

Die 6. Klasse (2. Klasse Sekundarstufe 2) bietet mit den Lehrplanthemen ein weites Spektrum, das sich zur Anbahnung an die Unendlichkeit nutzen lässt. Hier werden Folgen und Reihen unterrichtet und die analytische Geometrie wird vertieft (auf $\mathbb{R}^3$) betrachtet.

Auch hier sind mit eben jenem Lehrplanhintergrund kaum überraschende Ergebnisse zustande gekommen. Den Aussagen zur Unendlichkeit der natürlichen Zahlen und der Dezimalzahlen haben alle befragten Schülerinnen und Schüler zugestimmt. Auch wenn sich 11% der Schülerinnen nicht sicher waren, ob Geraden unendlich lang sind, wenn sie weder Anfangs- noch Endpunkt besitzen, widersprach dieser Aussage niemand. Von den befragten Schülern stimmten alle zu. Ebenso stimmten alle Schülerinnen und Schüler Aussage 11 zu.

Nachdem in der 10. Schulstufe keine Zahlenmengen erarbeitet werden, erfolgt das in der 11. Schulstufe (3. Klasse Sekundarstufe 2). Ansonsten finden sich in dieser Klasse keine Lehrplanthemen, die sich genau auf die im Fragebogen vorgegebenen Aussagen zur Unendlichkeit in der Mathematik beziehen.

Dennoch ist auch hier das Maß der Zustimmung zu den Aussagen sehr hoch. Dies könnte einerseits daran liegen, dass die Lernenden bis dahin bereits viel Vorwissen angesammelt haben, und somit gute Vorstellungen erarbeitet haben. Zusätzlich finden sich Themen wieder, die sich auf andere Weise mit der Unendlichkeit befassen. So ist beispielsweise die Differentialrechnung das große Thema in dieser Schulstufe.

Andererseits wäre eine weitere mögliche Erklärung, dass diese Schülerinnen und Schüler in einem Jahr maturieren werden, und somit Lehrende bereits mit dem Wiederholen des Stoffs begonnen haben.

Zu Aussage 7 und 8 gaben alle befragten Schülerinnen ihre Zustimmung. Die befragten Schüler widersprachen zwar teilweise der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen, stimmten jener der Dezimalzahlen aber zu 100% zu.

Der Aussage, dass Geraden unendlich lang sind, widersprachen drei von zehn befragten Schülerinnen. Unter den befragten Schülern finden sich ca. 15%, die sich enthalten haben.

Die Aussage, die sich auf die Zahlen am Zahlenstrahl beziehen, wurde aber von allen befragten Lernenden als korrekt angesehen.

Die befragten Schülerinnen und Schüler in der 12. Schulstufe (4. Klasse Sekundarstufe 2) befassen sich laut Lehrplan mit der Integralrechnung und somit in gewissen Zügen mit der Unendlichkeit. Da sie sich aber in diesem Jahr auf die Matura vorbereiteten und zum Zeitpunkt der Erhebung diese bereits absolviert hatten, sollten die Lernenden alle Themen, die auch im Fragebogen angeschnitten wurden, wiederholt haben.

Die Ergebnisse der befragten Lernenden werden den Erwartungen in Hinblick auf die Schülerinnen gerecht. Sie alle stimmten Aussage 7, 8, 10 und 11 zu. Einer der befragten Schüler hingegen widersprach allen vier Aussagen, nur drei der fünf Schüler stimmten allen Aussagen zu.

3.4 Fehlvorstellungen

Mit dem gewählten Messinstrument ist es nur bedingt möglich, Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern zur Unendlichkeit zu identifizieren. Hierzu wäre es notwendig gewesen, die gegebenen Antworten begründen zu lassen und somit beispielsweise ein Interview durchzuführen. Da aufgrund der in Kapitel 2.1.1 angeführten Argumente mit einem Fragebogen gearbeitet worden ist, können zwar keine Rückschlüsse auf die Vorstellung über die Unendlichkeit von jeder befragten Person gezogen werden, jedoch kann nachfolgend ein Überblick über die fehlenden Vorstellungen bzw. die Fehlvorstellungen hinsichtlich der Unendlichkeit in der Mathematik und in der Realität gegeben werden. Dies ist möglich, indem die einzelnen Items nach ihren Kategorien für jede Schulstufe einzeln betrachtet werden.

3.4.1 Fehlende Vorstellungen

Fehlende Vorstellungen liegen insbesondere dann vor, wenn sich in den Ergebnissen der befragten Schülerinnen und Schüler ein hohes Maß an Ablehnung zu den ersten sechs Items wiederfinden lässt, da hier nach der Konfrontation, der vorhandenen Vorstellung und der Fähigkeit, Beispiele für die Unendlichkeit angeben zu können, gefragt wurde.

In der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 wählten wenige Schülerinnen und Schüler die Antwortmöglichkeit „stimme nicht zu“. Bei den befragten Schülerinnen geben ca. 9% an, fehlende Vorstellungen zur Unendlichkeit zu haben, unter den befragten Schülern sind es ca. 12%. Zusätzlich nahmen bis zu 36% der Lernenden dieser Schulstufe eine neutrale Haltung zu einer der ersten sechs Aussagen ein.

Im direkten Vergleich mit der 1. Klasse scheinen die fehlenden Vorstellungen in der 2. Klasse gehäuft aufzutreten. Hier lassen sich wesentlich mehr Ergebnisse finden, in denen den Aussagen widersprochen wird. Das Maß der Ablehnung nimmt hier Werte bis zu 40% an. Neben der bereits teilweise hohen Ablehnung kommen noch viele unentschlossene

Schülerinnen und Schüler hinzu. Bis zu 50% wählten bei den Aussagen die neutrale Position. Außerdem gibt es kein Item, das keinen Widerspruch erfahren hat.

Noch mehr Ablehnung zu den Aussagen als in der 5. und der 6. Schulstufe findet man in der 7. Schulstufe. Bei dem Item mit dem größten Widerspruch gaben 80% der befragten Schüler an, dass sie der Aussage nicht zustimmen. Wie auch in der 6. Schulstufe ist zusätzlich der Wert der Enthaltungen mit bis zu 60% sehr hoch. Darüber hinaus gibt es auch hier keine Aussage, welcher nicht widersprochen worden ist.

Erst mit dem Blick in die 4. Klasse Sekundarstufe 1 findet man eine Aussage wieder, die von keiner befragten Person abgelehnt worden ist. In dieser Schulstufe gaben alle an, im Mathematikunterricht bereits mit der Unendlichkeit konfrontiert worden zu sein. Dennoch dürfte dies nicht zwingend dazu geführt haben, dass die befragten Schülerinnen und Schüler auch eine Vorstellung von der Unendlichkeit entwickelt haben. Weiterhin wählten bei den Aussagen 1 bis 6 bis zu 42% die Antwortmöglichkeit „stimme nicht zu“. Auch in dieser Klasse finden sich nach wie vor mit bis zu 50% der Befragten viele Lernende, die keine konkrete Haltung zu den Aussagen einnehmen wollten.

In der Oberstufe angekommen, lassen sich wesentlich weniger Rückschlüsse auf fehlende Vorstellungen zur Unendlichkeit ziehen. So geben die Schülerinnen und Schüler der 9. Schulstufe im Vergleich zu deutlich weniger Aussagen ihren Widerspruch. Insbesondere ist die relative Häufigkeit derer geringer. Der höchste Wert der Lernenden, die „stimme nicht zu“ gewählt haben, beläuft sich auf ca. ein Drittel. Außerdem befinden sich unter den sechs Aussagen zwei, die niemand abgelehnt hat.

Auch in der 10. Schulstufe finden sich wesentlich weniger ablehnende Haltungen den Aussagen gegenüber als in den Unterstufenklassen. Besonders wenn die Schüler betrachtet werden, gibt es hier niemanden, der von sich behaupten würde, fehlende Vorstellungen zur Unendlichkeit zu besitzen oder mit der Thematik noch nicht konfrontiert worden zu sein. Unter den befragten Schülerinnen finden sich einige Widersprüche zu den Aussagen, die Häufigkeiten sind aber auch hier mit höchstens einem Drittel im Vergleich gering. Es gibt aber keine Aussage, die von niemandem abgelehnt worden ist.

Vergleicht man die Ergebnisse der 10. Schulstufe mit der 11. Schulstufe, so fällt auf, dass es nach wie vor ein gewisses Maß an Ablehnung zu den Aussagen gibt, dieses aber etwas gesunken ist. Höchstens 30% gaben an, dass sie einer Aussage nicht zustimmten. Allerdings gab es niemanden unter den befragten Schülerinnen und Schüler, die oder der angab, noch nie im Mathematikunterricht mit der Thematik konfrontiert worden zu sein.

Ähnlich wie auch in der 6. Klasse gibt es mit einem Maximalwert von 50% nach wie vor viele Enthaltungen in den Ergebnissen.

Auch in der 8. Klasse scheint es immer noch eine fehlende Vorstellung von der Unendlichkeit zu geben. Bis zu 25% der befragten Schülerinnen und Schüler stimmten den Aussagen nicht zu. Es gibt keine Aussage, die keinen Widerspruch erfahren hat. Zusätzlich sind mit maximal 40% Enthaltung viele Lernende unentschlossen, wie sie der Thematik gegenüberstehen.

3.4.2 Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Mathematik

Um die Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Mathematik zu analysieren, werden die Ergebnisse der Items 7 bis 12 in den einzelnen Schulstufen betrachtet. Da alle Aussagen, die in den Items vorgegeben wurden, korrekt sind, spricht ein hohes Maß an Ablehnung für die Fehlvorstellung im entsprechenden Teilbereich der Mathematik.

In der 5. Schulstufe herrschen wenig Fehlvorstellungen (lediglich bei 12% der befragten Schüler) zu den natürlichen Zahlen und keinerlei Fehlvorstellungen zu den Dezimalzahlen vor, da der Aussage 8 niemand widersprochen hat. Während in Aussage 9 die Items 7 und 8 verbunden worden ist, lassen sich auch die entsprechenden Fehlvorstellungen erkennen. 18% der Schülerinnen und 62,5% der Schüler haben angegeben, dass die Aussage 9 falsch sei. Vergleicht man die Ergebnisse der Zahlenmengen mit jenen der Geraden, so dürften auch hier keine tiefgreifenden Vorstellungen zur Unendlichkeit entwickelt worden sein. 18% der Schülerinnen und 12,5% der Schüler widersprachen Aussage 10.

Die Zahlengerade hingegen zur Demonstration der Unendlichkeit dürfte den Schülerinnen und Schülern wesentlich geläufiger sein. Hier gab es keine befragte Person, die Aussage 11 mit „stimme nicht zu“ beantwortete. Dennoch wählten ca. 32% der Schülerinnen und 25% der Schüler die neutrale Position.

Obwohl Aussage 12 mit den unterschiedlichen Arten der Unendlichkeit lediglich bei den befragten Schülerinnen Widerspruch erhielt (ca. 9%) ist der Grad der Enthaltungen mit ca. 82% bei Schülerinnen und ca. 38% bei Schülern sehr hoch. Tiefgreifendere Aussagen über die Unendlichkeit scheinen also mit gewisser Unwissenheit oder auch Fehlvorstellungen verbunden zu sein.

Vergleicht man die Ergebnisse der 6. Schulstufe mit jenen der 5. Schulstufe, so lassen sich insgesamt weniger Fehlvorstellungen vorfinden.

Sowohl die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen als auch der Dezimalzahlen wurde von allen befragten Schülerinnen und Schülern als Tatsache angenommen.

Auch hier hat Aussage 9 gezeigt, dass die Verbindung der beiden vorangegangenen Items zu

Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen führt. Ca. 47% der Schülerinnen und 25% der Schüler stimmten dieser Aussage nicht zu.

Zur Unendlichkeit der Geraden gaben lediglich 7% der Schülerinnen ihren Widerspruch, die befragten Schüler stimmten alle zu. Ebenso verhält es sich mit den Ergebnissen von Item 11.

Trotz der hohen Komplexität der Aussage 12 gab keine befragte Person an, dieser zu widersprechen. Dennoch sollte festgehalten werden, dass es bei den Befragten zwischen 47% und 50% Enthaltung gibt.

Auch in der 3. Klasse der Sekundarstufe 1 scheinen sich die Fehlvorstellungen zu reduzieren. Die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist von niemandem angezweifelt worden, lediglich bei den befragten Schülerinnen herrscht eine Fehlvorstellung hinsichtlich der Unendlichkeit der Dezimalzahlen.

Die Verbindung der beiden Zahlenmengen erhielt weniger Widerspruch als in der Klasse davor: 23% bei den Schülerinnen und 40% bei den Schülern.

Während alle Schülerinnen eine gute Vorstellung zur Unendlichkeit von Geraden haben, gaben 20% der Schüler an, dass die Aussage nicht korrekt sei. Aussage 11 widersprach hingegen niemand.

Zu den Arten der Unendlichkeit scheint es in dieser Schulstufe einige Fehlvorstellungen zu geben, da 8% der Schülerinnen und 20% der Schüler Aussage 12 nicht zustimmten.

In der 8. Schulstufe finden sich exakt gleiche Fehlvorstellungen zu den natürlichen Zahlen wie in der 5. Schulstufe. Dafür scheint es keine Fehlvorstellungen in Hinblick auf die Unendlichkeit der Dezimalzahlen zu geben.

Außerdem herrschen hier weniger häufig Fehlvorstellungen zu der Anzahl an Dezimalzahlen und natürlichen Zahlen vor als in der 5. Schulstufe. In dieser Schulstufe widersprachen nur 33% der Schülerinnen und 38% der Schüler Aussage 9.

Jedoch lassen sich in dieser Klasse Fehlvorstellungen zu den Geraden vorfinden. 17% der Schülerinnen und 12,5% der Schüler stimmten der Aussage zur Unendlichkeit von Geraden nicht zu.

Item 11 und Item 12 erhielten keinerlei Ablehnung. Es dürften also in dieser Schulstufe keine Fehlvorstellungen zum Zahlenstrahl oder zu den verschiedenen Arten von Unendlichkeit vorliegen.

Der Wechsel in die Oberstufe dürfte dazu führen, dass vorherrschende Fehlvorstellungen zur Unendlichkeit in der Mathematik reduziert werden. In der 1. Klasse der Sekundarstufe 1 hat keine Schülerin und kein Schüler angezweifelt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen und unendlich viele Dezimalzahlen gibt. Dennoch widersprachen 50% der Befragten Aussage 9.

Auch zu den Items 10 und 11 lässt sich in dieser Schulstufe kein Widerspruch finden.

Die verschiedenen Arten von Unendlichkeit stellten wohl für die Schülerinnen und Schüler einen Aspekt der Unendlichkeit dar, mit dem sie womöglich noch nicht in Berührung gekommen sind und so Fehlvorstellungen dazu haben. Ein Drittel der Schülerinnen und ca. 17% der Schüler haben angegeben, dass die Aussage 12 nicht korrekt sei.

In der 2. Klasse Sekundarstufe 2 gibt es keine vorhandenen Fehlvorstellungen zu der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen und der Dezimalzahlen. Ebenso wenig findet man Fehlvorstellungen zur Unendlichkeit von Geraden und zu den Eigenschaften der Zahlen am Zahlenstrahl.

Trotz des guten Verständnisses für diese Teilbereiche der Unendlichkeit scheinen die Aspekte hinsichtlich der Anzahl an Dezimalzahlen und natürlichen Zahlen sowie der Arten von Unendlichkeit mit Fehlvorstellungen behaftet zu sein. Aussage 9 erhielt von den befragten Schülerinnen 44% Widerspruch, von den befragten Schülern 60%. Aussage 12 stimmten 11% der Schülerinnen und 60% der Schüler nicht zu.

Vergleicht man die Ergebnisse der bisher analysierten Schulstufen mit der 11. Schulstufe, so erkennt man eine Zunahme der Fehlvorstellungen. Während bislang mit jeder höheren Schulstufe weniger Fehlvorstellungen vorherrschten (oder diese zumindest gleich blieben), fällt in der 3. Klasse Sekundarstufe 2 auf, dass Aussage 7 und 10 erstmals seit der 8. Schulstufe Fehlvorstellungen in diesem Bereich sichtbar machen.

Während alle befragten Schülerinnen eine gute Vorstellung von der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen haben, haben ca. 15% der befragten Schüler angegeben, dass die Aussage 7 nicht korrekt sei. Der Unendlichkeit der Dezimalzahlen widersprach jedoch niemand.

In den Ergebnissen von Aussage 9 wird klar, dass es erhebliche Fehlvorstellungen zur Anzahl an Dezimalzahlen und zur Anzahl an natürlichen Zahlen im Sinne eines Unendlichkeitsbegriffs gibt. 30% der Schülerinnen und 62% der Schüler widersprachen dieser Aussage.

Die Vorstellung von der Unendlichkeit einer Geraden ist bei 30% der Schülerinnen fehlerhaft. Von den befragten Schülern widersprach niemand Aussage 10.

Ebenso finden sich in dieser Schulstufe keine Fehlvorstellungen zu den Zahlen am Zahlenstrahl.

Die verschiedenen Arten der Unendlichkeit sind auch in dieser Klasse mit Fehlvorstellungen verbunden. 20% der Schülerinnen und 38% der Schüler stimmten Aussage 12 nicht zu.

Wie auch schon die 11. Schulstufe spiegeln die Ergebnisse der 12. Schulstufe im Vergleich zu niedrigeren Schulstufen einige Fehlvorstellungen wider.

Nur die befragten Schülerinnen sind sich hinsichtlich der Unendlichkeit von natürlichen Zahlen, Dezimalzahlen, Geraden und den zu findenden Zahlen am Zahlenstrahl sicher. Unter den

befragten Schülern finden sich jeweils 20%, die hier Fehlvorstellungen aufgebaut haben. Aussage 9 wurde von keiner Schülerin mit „stimmt nicht“ beantwortet, währenddessen wählten 80% der Schüler diese Antwortmöglichkeit.

Die verschiedenen Arten von Unendlichkeit stoßen bei einem Viertel der befragten Schülerinnen und einem Fünftel der befragten Schüler auf Fehlvorstellungen. Sie lehnten Aussage 12 ab. Gleichzeitig soll hier festgehalten werden, dass 60% der Schüler die neutrale Position gewählt und sich so der Aussage enthalten haben.

3.4.3 Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Realität

Abschließend sollen die Items 13 und 14 näher betrachtet werden, um Rückschlüsse hinsichtlich der Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit in der Realität ziehen zu können. Die Beurteilung hinsichtlich der Richtigkeit der Aussagen 13 und 14 sowie der bewusste Ausschluss der Betrachtung von Item 15 wurden bereits in Kapitel 3.2.3 beschrieben und begründet. Nachstehend wird also davon ausgegangen, dass Lernende Fehlvorstellungen in Hinblick auf die Unendlichkeit in der Realität entwickelt haben, wenn sie die Aussagen 13 und 14 abgelehnt haben.

Schülerinnen und Schüler der 1. Klasse Sekundarstufe 1 haben eine recht gute Vorstellung zur Unendlichkeit in der Realität. Niemand der Befragten hat den beiden Aussagen widersprochen. Dies liegt vermutlich an einem recht intuitiven, alltagsnahen Verständnis.

In der 2. Klasse Sekundarstufe 1 sollte zwar ein ähnliches, intuitives Verständnis vorhanden sein, jedoch könnte der naturwissenschaftliche Unterricht (der Physikunterricht startet in dieser Klasse) bereits Einfluss genommen haben. Aussage 13 widersprachen ca. 27% der Schülerinnen. In Hinblick auf die Unendlichkeit des Universums äußerten sich ca. 7% der Schülerinnen und 25% der Schüler kritisch, sie stimmten der Aussage also nicht zu.

Die Schülerinnen der 7. Schulstufe widersprachen weder der 13. noch der 14. Aussage. Dennoch positionierten sich zwischen 15% und 40% der Schülerinnen in der neutralen Mitte. Bei den Schülern scheint es hier weniger Zuspruch zu den Aussagen zu geben. 40% widersprachen Aussage 13, 20% widersprachen der Unendlichkeit des Universums.

Auch in der 4. Klasse Sekundarstufe 1 stimmten die Befragten den Aussagen nicht zu. Aussage 13 erhielt von einem Viertel der befragten Schülerinnen und von 12,5% der befragten Schüler einen Widerspruch erteilt. Ebenso stimmten Aussage 14 8% der Schülerinnen und 50% der Schüler nicht zu. Auch in dieser Schulstufe wird der naturwissenschaftliche Unterricht verstärkt und Chemie findet sich als neues Fach im Stundenplan der Lernenden wieder.

Betrachtet man die Ergebnisse in der 9. Schulstufe, so lässt sich erkennen, dass jeweils 17% der Schülerinnen und Schüler den Aussagen 13 und 14 nicht zustimmen. In dieser Schulstufe gibt es, im Vergleich zu den anderen, wenige Enthaltungen. Nur der Aussage zur Belegung des Hotels enthielten sich ein Drittel der Schülerinnen.

In der 10. Schulstufe scheinen wenig Fehlvorstellungen aufgrund eines vorherrschenden intuitiven Verständnisses vorzuliegen. Während Aussage 13 zwar noch von ca. 44% der Schülerinnen abgelehnt wird, wird sie von allen Schülern angenommen. Aussage 14 erhielt keinen Widerspruch.

Ein ähnliches Bild, mit scheinbar wenigen Fehlvorstellungen bzw. wenig naturwissenschaftlich geprägtem Vorwissen in diesem Kontext, zeichnet sich in den Ergebnissen der 11. Schulstufe ab. In der 3. Klasse Sekundarstufe 2 stimmten 20% der befragten Schülerinnen und 8% der befragten Schüler der Aussage 13 nicht zu. Aussage 14 erhielt von den Schülerinnen 10% Widerspruch, die Schüler widersprachen nicht.

In der 12. Schulstufe lehnte die Hälfte der befragten Schülerinnen und 20% der befragten Schüler Aussage 13 ab. Hier gab es aber niemanden unter den Befragten, die oder der die neutrale Position wählte. Alle positionierten sich eindeutig.

Während alle Schülerinnen der Aussage zur Unendlichkeit des Universums zustimmten und somit keine Vermutung zu einer vorherrschenden Fehlvorstellung (ohne Berücksichtigung eines einschlägigen Vorwissens) besteht, stimmten 60% der Schüler dieser Aussage nicht zu.

3.5 Fehlvorstellungen und Altersgruppen

In diesem Unterkapitel sollen die in Kapitel 3.4 beschriebenen Fehlvorstellungen nach Altersgruppen gruppiert werden. Damit sollen Erkenntnisse gewonnen werden, die der Beantwortung von Fragen wie „Kommen in der gleichen Altersgruppe ähnliche Fehlvorstellungen vor?“ dienen sollen. Um diese Altersgruppen besser fassen zu können, werden die gewonnenen Ergebnisse getrennt nach jenen der Unter- und Oberstufe betrachtet. Somit kann eine grobe Unterteilung in jüngere und ältere Schülerinnen und Schüler vorgenommen werden.

Ähnlich wie in Kapitel 3.3 beschrieben, werden auch hier nicht alle Items berücksichtigt. So wurden mit den Aussagen 1 bis 6 lediglich die Konfrontation mit der Thematik, die Vorstellung von der Unendlichkeit, die Fähigkeit, Unendlichkeit zu erklären, und entsprechende Beispiele angeben zu können, abgefragt. Keine dieser Aussagen lässt durch die erhaltenen Ergebnisse auf Fehlvorstellungen rückschließen. Hier würde man eher von fehlenden Vorstellungen (wie in Kapitel 3.4.1 beschrieben) sprechen. Ebenso lassen die Aussagen von Item 13, 14 und 15 einen zu großen Interpretationsspielraum, als dass fundierte Rückschlüsse möglich wären.

Somit werden ausschließlich die Ergebnisse der Items 7 bis 12 verwendet. Darin lassen sich eindeutig „falsche“ Antworten erkennen und somit Schlussfolgerungen auf vorhandene Fehlvorstellungen ableiten.

3.5.1 Unterstufe

In der Unterstufe (5. bis 8. Schulstufe) lassen sich zur Unendlichkeit der natürlichen Zahlen nur in der 1. und 4. Klasse Sekundarstufe 1 Fehlvorstellungen aus den Ergebnissen ableiten. Die Anzahl jener Lernenden, die hier Fehlvorstellungen aufweist, ist mit 12,5% bei den befragten Schülern der 1. Klasse und 8% bei den befragten Schülerinnen der 4. Klasse jedoch gering.

Auch die Vorstellung über die Unendlichkeit der Dezimalzahlen scheint auf sicheren Beinen zu stehen. Lediglich in der 3. Klasse lassen die Ergebnisse auf Fehlvorstellungen bei 8% der befragten Schülerinnen rückschließen. Alle anderen befragten Schülerinnen und Schüler der Unterstufe stimmten entweder der Aussage zu oder wählten die neutrale Position.

Mit Betrachtung der Antworten zur 9. Aussage lassen sich Fehlvorstellungen in gehäufte Weise wiederfinden. Nicht nur, dass in allen Klassen Schülerinnen und Schüler „stimme nicht zu“ gewählt haben, und somit Fehlvorstellungen zur Anzahl der Dezimalzahlen und der natürlichen Zahlen haben, darüber hinaus ist die Anzahl jener, die diese Antwortmöglichkeit gewählt haben, sehr hoch. In der 1. Klasse gaben von den 19 befragten Lernenden zwei Schülerinnen und fünf Schüler an, dass sie der Aussage nicht zustimmen. Auch in der 2. Klasse wurden 19 Lernende befragt. Hier dürften bei sieben Schülerinnen und einem Schüler Fehlvorstellungen vorliegen. Von den 18 befragten Lernenden in der 7. Schulstufe widersprachen drei Schülerinnen und zwei Schüler der 9. Aussage. In der 8. Schulstufe wurden 20 Lernende befragt. Davon kann man bei 4 Schülerinnen und drei Schülern vorhandene Fehlvorstellungen schlussfolgern. Insgesamt sind das also 37% in der 1. Klasse, 42% in der 2. Klasse, 28% in der 3. Klasse und 35% in der 4. Klasse. Hier lässt sich kein eindeutiger Trend in eine Richtung erkennen. Lediglich kann festgehalten werden, dass in diesem Bereich in allen Unterstufenklassen Fehlvorstellungen vorliegen.

In Item 10 wurde die Unendlichkeit von Geraden postuliert. Auch hier findet man Ergebnisse, die auf Fehlvorstellungen hindeuten. In der 5. Schulstufe stimmten zwei Schülerinnen und ein Schüler der Aussage nicht zu. Hingegen gibt es in der 6. Schulstufe keine Ablehnung von Seiten der befragten Schüler. Nur eine Schülerin lehnte die Aussage ab. Ebenso widersprach in der gesamten 7. Schulstufe nur ein befragter Schüler dieser Aussage. In der 8. Schulstufe waren zwei Schülerinnen und ein Schüler der Meinung, dass Geraden nicht unendlich lang sind.

Im Vergleich zu Aussage 9 lassen sich für die gesamte Unterstufe in Anbetracht der Geraden weniger Fehlvorstellungen finden. Trotzdem kann auch hier kein Trend für eine bestimmte Altersgruppe gegeben werden. Fehlvorstellungen finden sich in allen Ergebnissen wieder.

Im Vergleich mit der Oberstufe scheinen die befragten Schülerinnen und Schüler der Unterstufe wesentlich fundiertere Vorstellungen zu den Zahlen am Zahlenstrahl zu haben. Zur Aussage 11 findet man weder in der 5., 7. noch 8. Schulstufe Antworten von Lernenden, die dieser Aussage widersprachen. Lediglich in der 6. Schulstufe stimmte eine Schülerin der Aussage nicht zu.

Obwohl bei Aussage 12, die sich auf die verschiedenen Arten der Unendlichkeit bezieht, viele Befragte eine neutrale Position gewählt haben, haben auch einige angegeben, der Aussage nicht zuzustimmen. In der 5. Schulstufe wählte eine Schülerin und in der 7. Schulstufe eine Schülerin und ein Schüler diese Antwortmöglichkeit. Insgesamt stimmten also drei von 76 befragten Lernenden der Unterstufe dieser Aussage nicht zu.

Auch wenn hier ebenfalls keine klare Richtung hinsichtlich einer bestimmten Altersgruppe erkennbar ist, so lässt sich doch festhalten, dass sich wenige Schülerinnen und Schüler gegen dieses Konzept stellen. Mit der zusätzlich hohen Anzahl an neutral positionierten Antworten könnte man sagen, dass viele Lernende zwar unsicher, der Idee gegenüber aber durchaus aufgeschlossen sind.

Abschließend kann für die Unterstufe also zusammengefasst werden, dass es in allen Schulstufen zu allen abgefragten Teilbereichen der Mathematik Fehlvorstellungen gibt, diese aber nur bei wenigen Schülerinnen und Schülern vorherrschen und sich auf keine bestimmte Altersgruppe reduzieren lassen.

3.5.2 Oberstufe

Mit der Betrachtung der 9. bis 12. Schulstufe und den Items 7 bis 12 können auch für ältere Schülerinnen und Schüler Rückschlüsse auf Fehlvorstellungen gezogen werden.

Die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen wurde zwar von allen Befragten der 9. und 10. Schulstufe angenommen, in der 11. Schulstufe stimmten jedoch zwei Schüler und in der 12. Schulstufe ein Schüler dagegen. Hier geht der Trend zur Fehlvorstellung also eher in Richtung der höheren Klassen.

Die Unendlichkeit der Dezimalzahlen scheint bei den befragten Schülerinnen und Schülern der Oberstufe gut fundiert zu sein. Hier lassen sich weder in der 9., 10. noch 11. Schulstufe Antworten finden, die auf mögliche Fehlvorstellungen hinweisen. Auch hier setzt sich aber der

Trend zu den Fehlvorstellungen in den höheren Klassen fort, da in der 12. Schulstufe ein befragter Schüler der Aussage widersprochen hat.

Wie auch in der Unterstufe, zeigen die Ergebnisse der Oberstufe zu Aussage 9, dass der Vergleich von der Unendlichkeit der Dezimalzahlen mit der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen viele Fehlvorstellungen mit sich bringt. So gaben drei Schülerinnen und drei Schüler der befragten zwölf Lernenden aus der 9. Schulstufe an, dass sie der Aussage nicht zustimmen. In der 10. Schulstufe widersprachen von 14 befragten Lernenden vier Schülerinnen und drei Schüler dieser Aussage. Drei Schülerinnen und acht Schüler der insgesamt 23 befragten Lernenden aus der 11. Schulstufe wählten ebenfalls die Antwortmöglichkeit „stimme nicht zu“. Erst in der 12. Schulstufe finden sich unter den befragten Schülerinnen erstmals keine Fehlvorstellungen wieder. Die Ergebnisse der befragten Schüler in dieser Klasse hingegen zeigen, dass vier von fünf Lernenden Fehlvorstellungen aufweisen. Aus diesem Item kann man folgern, dass zu komplexeren Themen auch in der Oberstufe Fehlvorstellungen in allen Schulstufen vorherrschen.

Die unendlich langen Geraden und die damit verbundene Aussage 10 wurden weder von der 5. noch der 6. Klasse in Frage gestellt. Die Ergebnisse dieses Items nehmen aber wieder Fahrt in Richtung des bereits beschriebenen Trends auf, da in der 7. Klasse drei Schülerinnen widersprochen haben und in der 8. Klasse ein Schüler der Aussage nicht zugestimmt hat.

Auch die vorherrschenden Fehlvorstellungen zu den Zahlen am Zahlenstrahl findet man lediglich in der 8. Klasse wieder. In der 5., 6. und 7. Klasse lehnte niemand die Aussage 11 ab. Hingegen hat in der Maturaklasse ein Schüler angegeben, dass er der Aussage nicht zustimmt.

Mit dem höheren Grad an Komplexität in Aussage 12 treten wieder in allen Klassen der Oberstufe Fehlvorstellungen hervor. So stimmten in der 9. Schulstufe vier von sechs befragten Schülerinnen und einer von sechs befragten Schülern der Aussage nicht zu. In der 10. Schulstufe widersprachen von 14 befragten Lernenden eine Schülerin und drei Schüler. Zwei Schülerinnen und fünf Schüler der 11. Schulstufe scheinen hier Fehlvorstellungen zu haben. In der 12. Schulstufe sind es von den insgesamt neun Befragten eine Schülerin und ein Schüler.

Zusammengefasst kann man bei der Betrachtung der Oberstufe zwar erkennen, dass es in einigen Bereichen der Mathematik weniger Fehlvorstellungen gibt, jedoch kein Teilgebiet ohne auskommt. Selbst wenn zu einem Themengebiet wenig Fehleinschätzungen aus den Ergebnissen geschlussfolgert werden konnten, finden sich die vorherrschenden Fehlvorstellungen in den höheren Klassen wieder.

3.6 Analyse

Nachfolgend werden die Ergebnisse aus den Kapiteln 3.2, 3.3, 3.4 und 3.5 in Zusammenhang mit den zu Beginn der Arbeit beschriebenen Forschungsfragen (inklusive der jeweiligen Unterfrage) gebracht. Dazu werden die Ergebnisse so zugeordnet, dass sie zur Diskussion und in weiterer Folge zur Beantwortung der Forschungsfragen dienen. Neben den Forschungsfragen wird in diesem Kapitel auch Rücksicht auf die angegebenen Hypothesen genommen. Diese sind in Anlehnung an die Forschungsfragen formuliert worden und werden somit auch im Zuge der jeweiligen Forschungsfrage am Ende der Diskussion angenommen oder verworfen.

Schließlich wird auf die Limitationen der Erhebung näher eingegangen. Teilweise fanden sich bereits in den vorangegangenen Kapiteln Bemerkungen dazu. Hier werden aber nochmals Details aufgegriffen, die bislang zu kurz gekommen oder noch gar nicht beleuchtet worden sind.

3.6.1 Diskussion – Forschungsfrage 1

Die erste Forschungsfrage, die mit Hilfe der empirischen Forschung und unter Berücksichtigung des aktuellen Wissensstandes beantwortet werden soll, lautet: „Welche Vorstellungen über die Unendlichkeit gibt es bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2?“ In weiterer Folge sollte die Frage: „Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Vorstellungen über die Unendlichkeit und der bearbeiteten Inhalte des Lehrplans aus Mathematik?“ beantwortet werden. Zum Bearbeiten und schließlich zum Beantworten dieser beiden Fragen dienen die Ergebnisse aus den Kapiteln 3.2 und 3.3.

Aus den erhobenen Daten kann man Rückschlüsse ziehen, dass grundsätzlich in allen Klassen Schülerinnen und Schüler mit der Unendlichkeit in diversen Kontexten konfrontiert worden sind. Insbesondere die Konfrontation mit der Unendlichkeit im Mathematikunterricht stellt hier einen wesentlichen Bestandteil dar. Darüber hinaus haben in allen Klassen Lernende angegeben, eine konkrete Vorstellung von der Unendlichkeit zu haben, diese erklären und eigene Beispiele dafür angeben zu können. Ebenso scheinen die befragten Schülerinnen und Schüler eine Vorstellung von der Unendlichkeit der natürlichen Zahlen sowie der Dezimalzahlen, von unendlich langen Geraden und von der Eigenschaft der Zahlen, die am Zahlenstrahl liegen, zu haben.

Natürlich sind diese Inhalte nicht von den Lernenden selbst gekommen, sondern sind durch die Vorgabe vorausgewählt und somit auch limitiert worden. Darauf wird in Kapitel 3.6.3 noch näher eingegangen. Dennoch kann man sagen, dass – wenn auch nicht immer alle – die befragten Schülerinnen und Schüler zu diesen angeführten Themen Vorstellungen, vor allem zur Unendlichkeit in der Mathematik, haben.

Besonders in Hinblick auf die Unterfrage zur angeführten Forschungsfrage gibt es eine klare Antwort: Ja, es gibt einen Zusammenhang zwischen der Vorstellung über die Unendlichkeit und der bearbeiteten Inhalte des Lehrplans aus Mathematik. Dieser lässt sich aus den Ergebnissen eindeutig herstellen. In allen Bereichen, in denen aufgrund des Lehrplans bereits Wissen von den Lernenden vorhanden war, wurden tendenziell mehr korrekte Ergebnisse vorgefunden als in jenen Bereichen, in denen kein Vorwissen auf den Lehrplan zurückzuführen ist. So können die befragten Schülerinnen und Schüler zwar die Unendlichkeit der Dezimalzahlen und der natürlichen Zahlen annehmen, da dies auch im Unterricht behandelt wird, jedoch nicht abschätzen, welche dieser beiden Unendlichkeiten größer ist. Dies kommt vermutlich im Unterricht zu kurz, falls es überhaupt von der Lehrkraft thematisiert wird. Genauso verhält es sich mit den verschiedenen Arten von Unendlichkeit. Betrachtet man jedoch die Ergebnisse beispielsweise von der Unendlichkeit von Geraden oder auch von den Zahlen am Zahlenstrahl, so zeigt sich, dass mit der wiederholten Auseinandersetzung die Vorstellungen gefestigt werden. Insbesondere in jenen Jahrgängen, in denen diese Themen besonders intensiv bearbeitet werden oder einen wesentlichen Teil des Lehrplans ausmachen, sind hier eindeutige Zusammenhänge zu erkennen. Ebenso erkennt man gewisse Unsicherheiten hinsichtlich einiger Teilbereiche in jenen Jahrgängen, in denen ein Thema erst einmalig im Vorjahr unterrichtet worden ist und im darauffolgenden Schuljahr nicht mehr so stark forciert wird.

Mit den erhaltenen Ergebnissen lassen sich jedoch keine Rückschlüsse auf tatsächliche Unterschiede in der Vorstellung über die Unendlichkeit bei den befragten Schülerinnen und Schülern feststellen. Obwohl die allgemeinen Fragen zur Vorstellung über die Unendlichkeit, vor allem hinsichtlich der Konfrontation mit der Thematik einen breiteren Spielraum zur Beantwortung ließ, konnten keinerlei relevante Unterschiede hinsichtlich der Ergebnisse von jüngeren Schülerinnen und Schülern zu älteren festgestellt werden. Somit kann die Hypothese, dass sich die Vorstellung über die Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2 voneinander unterscheiden, aufgrund der vorliegenden Daten nicht angenommen werden und wird demnach verworfen.

Jedoch erkennt man Tendenzen, dass in der Oberstufe bereits detailliertere Vorstellungen zur Unendlichkeit vorhanden sind, die zum größten Teil auch gut fundiert sind. Betrachtet man hierbei nämlich die Ergebnisse zur Unendlichkeit in der Mathematik, so lassen sich in der Oberstufe mehr korrekte Ergebnisse (Zustimmung zu korrekten Aussagen) finden, als das in der Unterstufe der Fall ist. Man kann jedoch nicht pauschal sagen, dass mit höherer Schulstufe bessere Ergebnisse in diesem Teilbereich des Fragebogens erzielt worden ist.

Die Hypothese, dass bei älteren Schülerinnen und Schülern die Vorstellung über die Unendlichkeit genauer, detaillierter und umfassender ist als bei jüngeren, wird somit angenommen.

3.6.2 Diskussion – Forschungsfrage 2

Mithilfe der zweiten Forschungsfrage sollte beantwortet werden, welche Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit es bei Schülerinnen und Schülern der 1. Klasse Sekundarstufe 1 bis zur 4. Klasse Sekundarstufe 2 gibt. Die Unterfrage erkundigt sich nach den womöglich vorhandenen Altersgruppen, in denen Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit gehäuft vorkommen. Um dies beantworten zu können, werden die Ergebnisse aus den Kapiteln 3.4 und 3.5 als Grundlage verwendet.

Grundsätzlich sollte festgehalten werden, dass es in jeder Schulstufe zu mehreren abgefragten Teilbereichen Fehlvorstellungen bei einzelnen Schülerinnen und Schülern gibt. Besonders auffällig sind jedoch die Ergebnisse, bei denen sich die Aussagen auf Themengebiete abseits des Mathematiklehrplans beziehen. Hier müssen die beiden Aussagen zu den verschieden großen unendlichen Mengen (Item 9) und in weiterer Folge zu den unterschiedlichen Arten von Unendlichkeit (Item 12) ins Auge gefasst werden. Bei diesen Items finden sich einerseits die höchsten Werte an Ablehnung zu einer Aussage wieder, andererseits wählten verhältnismäßig viele befragte Schülerinnen und Schüler die neutrale Position.

Man könnte die Frage also dahingehend beantworten, dass es grundsätzlich einzelne Schülerinnen und Schüler in allen Schulstufen gibt, die zu den im Fragebogen vorhandenen Teilbereichen der Mathematik Fehlvorstellungen oder auch lediglich fehlende Vorstellungen haben. Besonders konzentriert treten die Fehlvorstellungen aber in Teilbereichen der Mathematik auf, die abseits des Lehrplans auffindbar sind beziehungsweise die Verbindung jener Bereiche darstellen. Vernachlässigt man diese beiden Items bei der Betrachtung der Ergebnisse, so findet man die häufigsten Fehlvorstellungen bei den Schülerinnen und Schülern bei der Vorstellung hinsichtlich der Unendlichkeit von Geraden. Daran anschließend folgt die fehlende Vorstellung von den unendlichen natürlichen Zahlen.

Ob die Fehlvorstellungen zur Unendlichkeit in gehäufte Form in einzelnen Altersgruppen auftreten, ist schwer zu beantworten. Prinzipiell gibt es keine Items, deren Ergebnisse deutlich zeigen, dass mit höher werdender Schulstufe die Fehlerquote kontinuierlich sinkt. Dennoch lassen sich gewisse Trends beobachten. Schließt man die Aussagen, die abseits des Lehrplans formuliert worden sind, aus, so findet man in der 9. und 10. Schulstufe keine Ablehnungen zu den mathematikbezogenen Items. Somit kann man in diesen beiden Klassen keine Rückschlüsse auf vorhandene Fehlvorstellungen ziehen. Dieser Trend setzt sich allerdings in der 11. und 12. Schulstufe nicht fort. Auch wenn es nur wenige Schülerinnen und Schüler sind, die den Aussagen widersprochen haben, so scheinen diese dennoch Fehlvorstellungen zu einigen Teilbereichen zu haben. Man kann also sagen, dass in der Unterstufe mehr Fehlvorstellungen vorhanden sind als in der Oberstufe. Eine Erklärung dafür wäre die längere

und intensivere Auseinandersetzung mit der Mathematik, ein höherer Grad an Komplexität in den bearbeiteten Themen und darüber hinaus eine gewisse kognitive Reife, die mit höherem Alter erreicht wird.

Die Hypothese, dass Fehlvorstellungen über die Unendlichkeit sowohl bei jüngeren Schülerinnen und Schülern als auch bei älteren Lernenden auftreten, kann aufgrund der bereits ausgeführten Ergebnisse angenommen werden.

Dass die Fehlvorstellungen bei älteren Schülerinnen und Schülern nicht so stark gehäuft sind wie bei jüngeren Schülerinnen und Schülern, ist in einzelnen Aspekten ebenfalls erkennbar. Dies kann aber nicht auf alle betrachteten Schulstufen umgelegt werden. Die Ergebnisse von der 5. Schulstufe zeigen im Vergleich zu jenen der 6. Schulstufe weniger vorhandene Fehlvorstellungen auf. Vergleicht man jedoch jede einzelne Schulstufe der Unterstufe mit den Ergebnissen der 9. und 10. Schulstufe, so würde die Hypothese zutreffen. Betrachtet man im nächsten Schritt noch die erhobenen Daten der 11. und 12. Schulstufe, so stellt man fest, dass sich die Fehlvorstellungen wieder häufen und zunehmen. Insgesamt finden sich in der Oberstufe aber weniger Schülerinnen und Schüler mit Fehlvorstellungen wieder als in der Unterstufe.

Da die Hypothese eine allgemeingültige Aussage in Hinblick auf ältere und jüngere Schülerinnen und Schüler und deren Fehlvorstellungen darstellen soll, kann sie nicht angenommen werden. Die Hypothese wird daher abgelehnt.

3.6.3 Limitationen

Die Eigenheit einer jeden Befragung liegt in ihrer Limitation. Natürlich können die erhaltenen Ergebnisse nur einen begrenzten Einblick in Teilbereiche bieten. Nachstehend werden diese erläutert, um die Ergebnisinterpretation in ein angemessenes Licht zu rücken.

Zunächst muss unbedingt berücksichtigt werden, dass jede Klasse anders ist. Damit ist gemeint, dass es ein Zufall war, dass beispielsweise die Klasse 1A anstelle der Klasse 1B zu dieser Thematik befragt wurde. Innerhalb jeder Schulstufe könnte also mit der Durchführung in einer Parallelklasse ein anderes Ergebnis entstehen. Vor allem lässt sich das damit begründen, dass in jeder Klasse eine andere Dynamik herrscht. Unterrichtet eine Lehrperson eine Klasse, die sich für die Mathematik nicht begeistern kann, das Fach als mühsam empfindet und Schwierigkeiten hat, den Inhalten zu folgen, so wird man inhaltlich mit dieser Klasse vermutlich wenig über den sprichwörtlichen Tellerrand hinausblicken. Handelt es sich allerdings um eine Klasse, die sehr wissbegierig ist, gerne diskutiert und bereit ist, ein bisschen genauer hinzusehen, so wird der Unterricht vermutlich in die andere Richtung gehen. Dass in verschiedenen Klassen eines Jahrganges unterschiedliche Ergebnisse entstehen können, liegt aber nicht nur an den befragten Klassen mit den darin vorhandenen Schülerinnen und

Schülern. Selbst wenn die Befragung als solche von der durchführenden Lehrperson unabhängig ist, so ist der Einfluss, den die Lehrperson aufgrund des Unterrichts bis dahin gehabt hat, vorhanden. Obwohl alle Lehrenden nach demselben Lehrplan unterrichten, legt eine Lehrperson auf ein Themengebiet mehr Wert, widmet sich diesem genauer, bespricht mehr Details, diskutiert mehr mit den Lernenden etc. als eine andere Lehrperson. Somit entstehen durch den Unterricht in einer spezifischen Klasse mit einem spezifischen Lehrer oder einer spezifischen Lehrerin gezwungenermaßen andere Ergebnisse als in einer anderen Klasse. Die gewonnenen Daten hinsichtlich einer Schulstufe beziehen sich somit eher auf diese eine Klasse. Um ein objektives Bild zu einer konkreten Schulstufe zu bekommen, wäre es notwendig, den ganzen Jahrgang zu befragen.

In eine ähnliche Richtung geht ein weiterer Gedanke, der sich auf die zufällige Auswahl der befragten Klassen bezieht. Wie bereits erläutert, gibt es an der Schule, an der die Erhebung durchgeführt worden ist, Klassen, die sich im Gymnasium befinden und Klassen, die das Realgymnasium besuchen. Der erhebliche Unterschied liegt darin, dass Schülerinnen und Schüler im Gymnasium ab der 3. Klasse der Sekundarstufe 1 eine Mathematikstunde pro Woche weniger haben. Stattdessen erlernen diese eine zusätzliche Fremdsprache. Schülerinnen und Schüler im Realgymnasium hingegen haben neben einer zusätzlichen Wochenstunde Mathematik auch das Unterrichtsfach Geometrisches Zeichnen. Auch in der Oberstufe bleibt das unterschiedliche Stundenniveau an Mathematikstunden vorhanden, während hier auch noch eine Gewichtung der Naturwissenschaften in den Realklassen stattfindet.

Es spielen also mehrere Komponenten zusammen. Geht man davon aus, dass Lehrende eher gewillt sind, sich mit Themen tiefergründiger zu beschäftigen, wenn sie das Gefühl haben, ausreichend Zeit (im Sinne von vorhandenen Schulstunden) zu haben, würde das bedeuten, dass Schülerinnen und Schüler des Realgymnasiums eher mit der intensiveren Betrachtung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik in den lehrplanspezifischen Teilbereichen in Berührung kommen als Lernende im Gymnasium.

Nicht zu vergessen: Die Lernenden wählen den Zweig selbst. Entscheidet sich also ein Schüler oder eine Schülerin gezielt für den Realzweig, so fällt die Entscheidung mitunter auch bewusst für die Mathematik. Auch hier liegt nahe, dass eben jene Schülerinnen und Schüler eher gewillt sind, sich mit der Unendlichkeit in der Mathematik sowohl während des Unterrichts als auch möglicherweise abseits davon auseinanderzusetzen, als Schülerinnen und Schüler im Gymnasium. Somit könnte es sein, dass die Ergebnisse einzelner Schulstufen deshalb besser ausgefallen sind, weil die Lernenden dieser Klasse bereits auf mehr Erfahrungswerte zurückgreifen können als andere.

Unabhängig von der Schulstufe und ebenso von dem Zweig, der befragt worden ist, stellt möglicherweise die Konstruktion der Items einen gewissen Stolperstein dar. Betrachtet man die Aussagen, die sich in den Items 1 bis 12 vorfinden, so handelt es sich überall um Aussagen, die korrekt sind und somit von den Schülerinnen und Schülern eine Zustimmung erhalten sollten. Da ich selbst in einigen Klassen die Erhebung durchgeführt habe, kann ich nachträglich sagen, dass das für viele Befragte verwirrend gewesen ist. Nach der Beantwortung des Fragebogens fragten mich viele Schülerinnen und Schüler „ob das normal ist, dass da so viel richtig ist“. „Ich hab mich gewundert, dass da überall dieselbe Antwort war. Drum hab ich mir gedacht, dass das nicht stimmen kann. Dann hab ich nicht zugestimmt.“ Inwieweit das auch die Befragten in den anderen Klassen betroffen hat, kann ich nicht sagen. Weder haben mir die Kolleginnen und Kollegen, die die Befragung durchgeführt haben diesbezüglich etwas rückgemeldet, noch habe ich von den befragten Schülerinnen und Schülern Feedback zum Fragebogen erhalten. Trotzdem ist es mir wichtig, dies hier zu dokumentieren und festzuhalten.

Neben der allgemeinen Aussagenkonstruktion ist bereits bei den Items 13 und 14, aber spätestens bei der Auswertung von Item 15 klar geworden, dass sich mit diesen Ergebnissen kaum Rückschlüsse, die für die Beantwortung der Forschungsfragen hilfreich gewesen wären, ziehen lassen. Wie bereits in Kapitel 3.2.3 beschrieben, müssten dazu die Antworten von Schülerinnen und Schülern mit einem gewissen Hintergrundwissen anders eingeordnet werden als jene, von Lernenden, die dieses Hintergrundwissen noch nicht haben. Es wäre daher sinnvoll gewesen, die Antwort bei diesem Item von den befragten Schülerinnen und Schülern begründen zu lassen. Dies hätte aber vermutlich den Nebeneffekt gehabt, dass viele Lernende die neutrale Position gewählt hätten. Dennoch wären die Ergebnisse damit zumindest nachvollziehbar und somit für die Beantwortung der Forschungsfragen sinnvoll verwendbar gewesen.

Besonders wichtig ist es, sich vor Augen zu halten, dass bereits durch die Erstellung des Fragebogens eine gewisse Limitation der Thematik stattgefunden hat. Wären Schülerinnen und Schüler in einem Gespräch und man würde sie nach ihrer Vorstellung von Unendlichkeit befragen, könnten sämtliche Teilbereiche der Mathematik erläutert werden. Mit den Aussagen in den einzelnen Items wird dies stark eingeschränkt und die Lernenden haben keine Möglichkeit, ihr Wissen und ihre Vorstellungen abseits der vorgegebenen Inhalte kundzutun.

Nicht zuletzt soll eine Besonderheit festgehalten werden, die bei der genauen Betrachtung der Ergebnisse in der 12. Schulstufe auffällt. In den Daten findet man einen Schüler, der bei den Items 1 bis 12 jedes Mal „stimme nicht zu“ gewählt hat. Da es sich hier um einen Schüler handelt, der bereits maturiert und somit den Fragebogen im privaten Umfeld ausgefüllt hat, könnte man davon ausgehen, dass er die Befragung nicht sonderlich ernst genommen hat.

Darauf weist auch die Angabe der Schulstufe hin. Er hat angegeben, in der 3. Schulstufe zu sein. Natürlich kann man die Gleichgültigkeit beim Ausfüllen des Fragebogens allen Schülerinnen und Schülern unterstellen. Ebenso gibt es Lernende, die sich nicht der Schulstufe, in derer sie sich befinden, bewusst sind. Dass dies alles aber auf einen achtzehnjährigen Maturanten aus reinem Zufall zutrifft, ist dennoch unwahrscheinlich.

Egal ob die Angaben mit Absicht verfälscht worden oder zufällig so zustande gekommen sind, seine Antworten machen aufgrund der geringen Befragten in der 12. Schulstufe einen sehr hohen Anteil in den Ergebnissen aus. Lässt man diesen Schüler mit seinen Antworten weg, so würde man in dieser Klasse keine Fehlvorstellungen zur Unendlichkeit von natürlichen Zahlen, von Dezimalzahlen, zu unendlich langen Geraden, zu den Zahlen am Zahlenstrahl und zu den verschiedenen Arten von Unendlichkeit finden.

Conclusio

Dass die Unendlichkeit im Fachgebiet der Mathematik einen wesentlichen Aspekt – sowohl in der Schule als auch in weiterer Auseinandersetzung mit der Materie – darstellt, konnte sowohl historisch als auch mit der Beschreibung des österreichischen Lehrplans für einen aktuellen Kontext belegt werden.

Hermann Weyl untermauert die Bedeutung in seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft“:

„Will man zum Schluss ein kurzes Schlagwort, welches den lebendigen Mittelpunkt der Mathematik trifft, so darf man wohl sagen: sie ist die Wissenschaft vom Unendlichen (Loos, Sinn & Ziegler 2022, S. 218).“

Mit dem Wissen um die Wichtigkeit der Unendlichkeit in der Mathematik folgt auch unmittelbar die Notwendigkeit einer entsprechenden Vermittlung. Im Idealfall haben Lehrende ein entsprechendes Wissen, das sie den Lernenden weitergeben können. Ob dies tatsächlich der Fall ist, kann aus aktueller Sicht nicht beurteilt werden. Obwohl der Unendlichkeitsbegriff in seiner historischen Entstehung bestens aufbereitet ist und die Literatur viel Information zur Anwendung der Unendlichkeit in der Mathematik wiedergibt, findet man dazu im Schulkontext kaum etwas. Um auch hier anzusetzen, wäre eine breite Erhebung notwendig, die Lehrende befragt. Es wäre interessant zu wissen, wie viele Lehrerinnen und Lehrer sich im Unterricht tatsächlich die Zeit nehmen, um „über den Tellerrand hinauszublicken“ und sich mit den Lernenden auf eine derart komplexe Ebene begeben. In weiterer Folge wäre eine flächendeckende Befragung von Lernenden spannend.

An dieser Stelle soll noch eine wesentliche Überlegung formuliert werden. Blickt man nochmals auf die Ergebnisse der empirischen Forschung zurück, so sind Aussagen wie „Ich wurde schon einmal in der Schule mit der Unendlichkeit konfrontiert“ entweder mit „stimme zu“, neutraler Position oder „stimme nicht zu“ beantwortet worden. Besonders in jenen Schulstufen, in denen solche Aussagen ein hohes Maß an Zustimmung erhalten haben, wäre es interessant, hier näher hinzuschauen und solche Aussagen begründen zu lassen. Beispielsweise könnte nach dem Auswählen der Antwortmöglichkeit „stimme zu“ ein Textfeld erscheinen, in das man eingeben muss, wie man diese Antwort begründet. Die Gefahr ist jedoch, dass die befragten Personen erkennen, dass mit einer Antwortmöglichkeit das Schreiben einer Begründung einhergeht, das bei den anderen beiden Antwortmöglichkeiten aber nicht verlangt wird. Somit könnte es passieren, dass die befragten Lernenden den „angenehmen“ Weg wählen, um möglichst schnell fertig zu sein, und unabhängig von ihrer persönlichen Einschätzung absichtlich die neutrale oder die ablehnende Antwortmöglichkeit wählen.

Ein weiterer spannender Ansatz wäre die Befragung der Schülerinnen und Schüler in einem

Interview¹². In diesem Setting wäre auch eine einfache Beschreibung von vorherrschenden „Bildern im Kopf“ möglich. Insbesondere könnte dann auch um eine Erklärung gebeten werden, warum Aussagen beispielsweise als falsch eingeordnet worden sind. Solche Zusatzinformationen würden fundiertere Aussagen zu den Vorstellungen und Fehlvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern garantieren.

Zusammengefasst kann festgehalten werden, dass die historische Entwicklung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik nur in Verbindung mit den damals forschenden Philosophen und Theologen möglich gewesen ist. In Anlehnung dessen erkennt man, dass auch der Aufbau des Lehrplans ähnliche grundlegende Ideen vorbereitet, bevor kognitiv anspruchsvollere Themengebiete erarbeitet werden. Nichtsdestotrotz konnten mit dem Fragebogen Ergebnisse generiert werden, die auch den jüngeren Schülerinnen und Schülern bereits eine gewisse Grundvorstellung von Unendlichkeit zuspricht. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass Lernende grundsätzlich eine Vorstellung von der Unendlichkeit haben. Diese Vorstellung steht in starkem Zusammenhang mit den Lehrplaninhalten. Eine Unterscheidung der Vorstellung hinsichtlich des Alters der Lernenden ist nur schwer möglich. Fehlvorstellungen kommen in Verbindung mit der Unendlichkeit sowohl bei jüngeren als auch bei älteren Schülerinnen und Schülern vor. Besonders in den Themenbereichen der Mengenlehre und der Geometrie treten Fehlvorstellungen häufig auf. Dass besagte Fehlvorstellungen bei jüngeren Lernenden gehäuft vorkommen als bei älteren Lernenden, konnte nicht bestätigt werden. Egal welche Altersgruppe betrachtet wurde: Fehlvorstellungen ließen sich in den Ergebnissen der Erstklässler bis zu jenen der Maturantinnen und Maturanten schlussfolgern.

An diesem letzten beschriebenen Punkt knüpfen auch Universitäten an. Die Maturantinnen und Maturanten sind beispielsweise befähigt, die Fachrichtung Mathematik für ihr zukünftiges Studium zu wählen. Wie Hermann Schichl und Roland Steinbauer, beide Lehrende an der Universität Wien, beschrieben haben, kommt es besonders zu Studienbeginn zu diversen Problemen. Die beiden von ihnen herausgearbeiteten Hauptaspekte beinhalten einerseits den Abstraktionsschock und andererseits die Beherrschung des Schulstoffs. Mit dem Abstraktionsschock ist das Abstraktionsniveau in der universitären Lehre im Vergleich zum Schulunterricht gemeint. Während im Mathematikstudium mit dem schematischen Definition-Satz-Beweis-Aufbau ein sehr abstrakter Zugang gegeben wird, bringen Studienanfängerinnen und Studienanfänger häufig die Erfahrung mit, dass mathematische Inhalte hauptsächlich an Beispielen entwickelt werden. Daneben meint die Beherrschung des Schulstoffs, dass je nach Schultyp und vermutlich auch nach Qualität des Unterrichts, die Maturantinnen und Maturanten

¹² Warum anstelle des Fragebogens kein Interview durchgeführt wurde, wurde bereits in Kapitel 2.1.1 erklärt.

einen unterschiedlichen Wissenstand mitbringen. Hier ist eine deutliche Lücke zwischen dem mitgebrachten Wissen aus der Schule und dem an der Universität unkommentiert verwendeten Schulstoff zu erkennen.

Ursprünglich hatte die Anfängerinnen- und Anfängerausbildung für das erste Semester im Diplom- und Lehramtsstudium einen dreisemestrigen Analysiszyklus, einen zweisemestrigen Zyklus zur Linearen Algebra und Geometrie und begleitende Übungen vorgesehen. In den Jahren 2000 bzw. 2001 wurden aufgrund der alarmierend hohen Abbrecherquoten die fachlichen Schwächen der Studierenden offensichtlich. Aufgrund dessen wurde eine Lösungsstrategie gesucht und dementsprechend die Studieneingangsphase anders konstituiert (vgl. Schichl & Steinbauer 2009, S. 1). Auch wenn die Universität hier ihren Beitrag geleistet hat und mit der neu gestalteten Studieneingangsphase ein breites Unterstützungsangebot vorliegt, so schwingt dennoch auch gegenüber der schulischen Ausbildung ein gewisser Vorwurf hinsichtlich der Unzulänglichkeiten der Maturantinnen und Maturanten mit. Wirft man erneut einen Blick auf den früheren Aufbau des Mathematikstudiums, so erkennt man in der Analysis sowie der Linearen Algebra und Geometrie Themenbereiche, die vielfach auf ein fundiertes Verständnis von Unendlichkeit abzielen. An dieser Stelle die einzige Schuld bei Lehrerinnen und Lehrern zu suchen und einen Appell an eben jene zu formulieren, um das Problem von Seiten der Schule zu lösen, käme der Beschreibung der realen Situation zu kurz. Die Schulrealität stellt sich so dar, dass man teilweise bis zu 30 Schülerinnen und Schüler gleichzeitig unterrichtet, das große Ziel die schriftliche Matura ist und somit die Bemühungen der Lehrkraft aufgrund eines vorherrschenden Zeitdrucks dahin gehen, dass die Lernenden die Zentralmatura bestehen werden. Mit diesem Ziel vor Augen kommt die Betrachtung einer komplexeren Ebene häufig zu kurz.

Der angesprochene Zeitdruck ergibt sich aus einer inhaltlich breiten, zu vermittelnden Vorgabe, die erfüllt werden muss, während beispielsweise im Gymnasium lediglich drei Wochenstunden Mathematik zur Verfügung stehen. Hinzu kommen diverse Stunden, die entfallen, weil Exkursionen in anderen Fächern durchgeführt werden, Sprachreisen stattfinden, Feiertage sind, Schularbeiten gehalten werden oder sonstiges. Wenn an dieser Stelle also an jemanden appelliert werden soll, dann an das Bildungsministerium sowie die künftigen Lehrplanschreibenden. Für die Vermittlung von Inhalten zur Gewährleistung eines fundierten Verständnisses bei den Schülerinnen und Schülern braucht es die nötigen Rahmenbedingungen: entweder weniger Inhalte, die vermittelt werden sollen, oder mehr Unterrichtsstunden und im Idealfall kleine Klassen.

Literaturverzeichnis

- Agar, J. (2015). Hegel's political theology: "True Infinity". *Philosophy & Social Criticism*, 37-44.
- Basieux, P. (2011). *Abenteuer Mathematik: Brücken Zwischen Wirklichkeit und Fiktion*.
Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 5., überarbeitete Auflage.
- Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (2018). *Mathematik verstehen und unterrichten*.
Springer Spektrum.
- Bundesministerium Bildung. (o. J.). *RIS - Lehrpläne - allgemeinbildende höhere Schulen Anl. 1 - Bundesrecht konsolidiert, tagesaktuelle Fassung*. Von
<https://www.ris.bka.gv.at/NormDokument.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568&Artikel=&Paragraf=&Anlage=1&Uebergangsrecht=> zuletzt am 29.07.2025 abgerufen
- Cantor, G. (1874). Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, S. 258-262.
- Cantor, G. (1984). *Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*. In: *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*. Teubner-Archiv zur Mathematik.
Wien: Springer.
- Carroll, W. (2011). *God and Infinity: Theological Insights from Cantor's Mathematics*. Cambridge University Press.
- Döring, N., & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Dadaczynski, J. (2020). *The Concept of Infinity in Ancient Mathematics and Philosophy*.
Lublin: Roczniki Filozoficzne.
- Duden. (o. J.). Von <https://www.duden.de/rechtschreibung/Unendlichkeit> zuletzt am 27.08.2025 abgerufen
- Enders, M. (2009). *Zum Begriff der Unendlichkeit im abendländischen Denken*. Hamburg: Dr. Kovač.
- Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Springer.
- Fritzsche, K. (27. Mai 2008). *Das Unendliche in der Mathematik*. Von <https://www2.math.uni-wuppertal.de/~fritzsche/lectures/ref/unend08.pdf> zuletzt am 07.09.2025 abgerufen
- Göcke, B. P. (2015). Eine Analyse der Unendlichkeit Gottes. *Freiburger Zeitschrift für Philosophie und Theologie*, S. 142-160.
- Gabriel, M., Olay, C., & Ostritsch, S. (2018). *Welt und Unendlichkeit*. Baden-Baden: Alber Philosophie.
- Goldstern, M. (April 2000). *TU Wien*. Von
https://www.google.com/search?q=Mengenlehre%3A+Hierarchie+der+Unendlichkeiten%0D%0AMartin+Goldstern%0D%0A&client=safari&sca_esv=81a4eb9d017737df&source=

e=hp&ei=VmCaaK3GB_akwPAP-

uKFqQc&ifsig=AOw8s4IAAAAAaJpuZtPg4s75h3CEkC476myA7WD4cibc&ved=0ahUK

EwityejD2YOP zuletzt am 07.09.2025 abgerufen

Gonshor, H. (1986). *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*. Cambridge: Cambridge University Press.

Harmer, A. (2024). Leibniz on Infinity and Theodicy. *The Leibniz Review*, 13-42.

Hasker, W. (2019). Infinite God, Open Future. *University of Notre Dame Press*, S. 258-260.

Holzinger, M. (2004). *Aristoteles Physik*. Berlin: Contumax GmbH & Co. KG.

Huggett, N. (2010). *Zeno's Paradoxes*. In: E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Jahnke, H., & Hefendehl-Hebeker, L. (2008, Heft 151). Grundvorstellungen und Vorstellungen vom Unendlichen. *Mathematik lehren*, 56-59.

Kant, I. (1781/1998). *Kritik der reinen Vernunft*. Suhrkamp.

Levinas, E. (1969). *Totality and Infinity*.

Loos, A., Sinn, R., & Ziegler, G. M. (2022). *Panorama der Mathematik*. Berlin: Springer.

Manchak, J., & Roberts, B. (2022). *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Von <https://plato.stanford.edu/archives/sum2022/entries/spacetime-supertasks/> zuletzt am 07.09.2025 abgerufen

Mancosu, P. (1996). Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century. *Oxford University Press*, S. 34-50.

Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman.

Maspero, A., & Mateo Seco, E. (2007). *Gregory of Nyssa: The Life of Moses*. Boston: Brill.

Moore, G. H. (1990). *Zermelo's Axiom of Choice*. New York: Springer.

Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2020). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Deutschland: Springer-Verlag GmbH.

Reiss, K., & Hammer, C. (2021). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Cham: Birkhäuser.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: Princeton University Press.

Rudolf, J. (o. J.). Von Bildquelle: https://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/kurse/04_mathe_os/paradoxien.pdf zuletzt am 04.08.2023 abgerufen

Russel, B. (1919). *Introduction to Mathematical Philosophy*. Allen & Unwin.

Schichl, H., & Steinbauer, R. (2009). *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Berlin: Springer.

Schwebel, P. (2012). Intensive Infinity: Walter Benjamin's Reception of Leibniz. *MLN*, 127 (3), 589-610.

Sieroka, N. (2020). *The Concept of Infinity: Critical Evaluation of Ápeiron*. Zürich: ETH.

Steinhart, E. (2009). A Mathematical Model of Divine Infinity. *Theology and Science*, S. 261-274.

- Tapp, C. (2008). *Unendlichkeit: Interdisziplinäre Perspektiven*. Tübingen: Mohr Siebeck.
- Tomarchio, J. (2002). Aquina's Concept of Infinity. *Jornal of History of Philosophy*, S. 163-187.
- Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung Des Grenzwertbegriffs Unter Stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte* 63.1, 135-154.
- Wood, D. A. (2012). *On the Implications of the Idea of Infinity for Postmodern Fundamental Theology*. Pacifica.
- Zach, R. (2005). Hilbert's Program Then an Now. *Bulletin of Symbolic Logic*, S. 141-186.
- Zell, A. (2021). *Unendlich! Eine Einführung in das Denken des Grenzenlosen*. Springer Spektrum.

Anhang

I Dokumente Bildungsdirektion Niederösterreich

I.I Elternbrief

Folgender Text wird über WebUntis an die Eltern versandt:

Sehr geehrte Eltern und Erziehungsberechtigte!

Im Zuge meiner Masterarbeit in Mathematik befasse ich mich mit der Vorstellung von der Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern im Lauf ihrer Schulkarriere (also von der 1. bis zur 8. Klasse). Dazu möchte ich gerne in zumindest einer Klasse von jedem Jahrgang eine kurze Onlineumfrage durchführen, in der die Ansichten der Schülerinnen und Schüler zur Unendlichkeit erhoben werden. Die erhobenen Daten werden anonym gespeichert. Sie dienen ausschließlich dem Zweck meiner Masterarbeit und stehen in keinerlei Zusammenhang mit schulischen Leistungen oder Bewertungen.

Ich bitte Sie nun um Ihr Einverständnis, dass Ihr Sohn/Ihre Tochter an der Erhebung teilnehmen darf, indem Sie die Lesebestätigung übermitteln. Wenn Sie dies nicht tun, nimmt ihr Kind an der Befragung nicht teil.

Vielen Dank für Ihre Unterstützung!

Mit freundlichen Grüßen

Bernadette Stiefelbauer, BEd

I.II Fragebogen

Der Fragebogen besteht aus vier Teilen: dem personenbezogenen Teil, dem allgemeinen Teil, jenem mit Mathematikbezug und jenem, mit Realitätsbezug.

Ich habe mich dazu entschieden, bei jedem Item drei Antwortmöglichkeiten zu geben, da es in der empirischen Forschung üblich ist, auch eine neutrale Position bei solchen Fragen zuzulassen. In meinem konkreten Fragebogen möchte ich ja die Stellungnahme der Schülerinnen und Schüler zu den Aussagen abfragen, was dafür sprechen würde, nur „stimme zu“ oder „stimme nicht zu“ als Antwortmöglichkeiten zuzulassen. Allerdings sind einige Aussagen, insbesondere für sehr junge Schülerinnen und Schüler, noch sehr komplex. Mit dieser neutralen Antwortmöglichkeit sollen eben jene Kinder die Chance haben, deutlich zu machen, dass sie sich für keine Position festlegen können bzw. wollen. Somit ist auch gegeben, dass vermeintliche Fehlaussagen aufgrund von Verständnisschwierigkeiten minimiert werden.

Einleitungstext:

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Vielen Dank, dass du an dieser Befragung teilnimmst!

Während der Bearbeitung des Fragebogens soll nicht gesprochen werden (weder mit Mitschülerinnen und Mitschülern noch mit Lehrenden). Außerdem sollen keinerlei Hilfsmittel verwendet werden.

Im Fragebogen werden dir gleich einige Aussagen präsentiert. Du sollst jeweils angeben, ob du der Aussage zustimmst.

Falls du eine Aussage nicht verstehst oder du dir nicht sicher bist, ob du sie richtig verstanden hast, kannst du die mittlere Antwort („neutrale“ Antwort) wählen.

Es geht bei der Befragung nicht darum, korrekte Antworten zu erhalten, sondern um DEINE Ansicht zu den jeweiligen Aussagen.

Nimm dir Zeit und lies die Aussagen genau durch!

Die Antworten werden anonym gespeichert.

Wenn du am Ende angelangt bist, vergiss nicht auf „**absenden**“ zu klicken!

1. Personenbezogene Daten

Wie alt bist du?

Welchem Geschlecht fühlst du dich zugehörig? ☐ m ☐ w ☐ d

In welche Schulstufe gehst du?

2. Allgemeine Aussagen:

Aussage	stimme zu		stimme nicht zu
Ich wurde schon einmal im Alltag (außerhalb der Schule) mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich wurde schon einmal in der Schule mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich wurde schon einmal im Mathematikunterricht mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich habe klare Vorstellungen zur Unendlichkeit.	☐	☐	☐
Ich kann erklären, was mit „Unendlichkeit“ gemeint ist.	☐	☐	☐
Ich kann Beispiele für die Unendlichkeit angeben.	☐	☐	☐

3. Aussagen zur Mathematik:

<i>Aussage</i>	<i>stimme zu</i>		<i>stimme nicht zu</i>
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.	☐	☐	☐
Es gibt unendlich viele Dezimalzahlen.	☐	☐	☐
Es gibt mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen.	☐	☐	☐
Eine Gerade hat weder Anfangs- noch Endpunkt, ist also unendlich lang.	☐	☐	☐
Egal wie nahe zwei Zahlen am Zahlenstrahl nebeneinander liegen, es ist dennoch möglich, eine Zahl dazwischen zu finden.	☐	☐	☐
Es gibt verschiedene Arten von Unendlichkeit. Beispiel: Addiere ich jeweils 1 zu einer Zahl und ich beginne bei 1, so kann ich diesen Prozess unendlich oft fortführen. Multipliziere ich eine Zahl jeweils mit 2 und ich beginne bei 1, so kann ich auch diesen Prozess unendlich oft fortführen. Allerdings fallen hier die ungeraden Zahlen heraus. Deshalb ist diese Unendlichkeit am Ende kleiner als die Unendlichkeit der Addition mit 1.	☐	☐	☐

4. Aussagen zur Unendlichkeit in der Realität:

<i>Aussage</i>	<i>stimme zu</i>		<i>stimme nicht zu</i>
Ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern kann niemals vollständig belegt sein.	☐	☐	☐
Unser Universum ist riesengroß und hat kein Ende, ist daher unendlich groß.	☐	☐	☐
<i>Letzte Aussage siehe Datei „Achilles und die Schildkröte“.</i>	☐	☐	☐

Folgende Literatur wurde ideengebend für die Aussagen im Fragebogen verwendet:

Basieux, P. (2011). *Abenteuer Mathematik* (5. Auflage Ausg.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

I.III Projektbeschreibung

Wie Sie meinem Exposé entnehmen können, soll die empirische Untersuchung meine Literaturrecherche ergänzen.

Ich interessiere mich im Konkreten dafür, wie sich die Vorstellung der Unendlichkeit bei Schülerinnen und Schülern im Lauf ihrer Schulkarriere entwickelt und verändert. Natürlich ist insbesondere der Mathematikunterricht jener Ort, wo die Unendlichkeit (wenn auch oftmals nur unterschwellig) thematisiert wird. Doch auch andere Fächer wie beispielsweise Religion, Ethik und auch Philosophie beschäftigen sich mit der Unendlichkeit und bringen somit die Kinder und

Jugendlichen immer wieder zu dieser Thematik. Für mich ist nun spannend zu sehen, inwieweit Vorstellungen der Unendlichkeit aufgebaut werden und wie die Schülerinnen und Schüler dementsprechend mit Aussagen dazu umgehen.

Aus diesem Grund möchte ich in meiner Erhebung Einschätzungen von Schülerinnen und Schülern zur Richtigkeit von Aussagen zur Unendlichkeit erheben. Dazu werde ich den Link zu einem von mir auf „*GoogleForms*“ erstellten Onlinefragebogen an meine Kolleginnen und Kollegen weitergeben mit der Bitte, diesen von ihren Schülerinnen und Schülern ausfüllen zu lassen. Ziel ist es, dass in jedem Jahrgang (Unter- und Oberstufe) zumindest eine Klasse (gesamt also mindestens acht Klassen) befragt wird. Die Fragen, die im Fragebogen enthalten sind, können einem weiteren Dokument entnommen werden. Diese Fragen werden dann genau so im Onlinefragebogen zu finden sein.

Für die Durchführung bitte ich meine Kolleginnen und Kollegen, den Link auf ihrer Moodleseite einzubetten. Die Schülerinnen und Schüler dürfen während der Befragung nicht miteinander sprechen und keine zusätzlichen Hilfsmittel verwenden.

Nachdem der Link angeklickt und die Seite geöffnet worden ist, kommen die Schülerinnen und Schüler zur Startseite, wo der Ablauf und der Hintergrund der Erhebung nochmals erklärt werden. Danach werden die Fragen beantwortet und abschließend die Antworten abgesendet. Sobald die Schülerinnen und Schüler fertig sind, können sie das Fenster schließen.

I.IV Daten zur Schule, an der die Erhebung stattfand

Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Krems, Piaristengasse

Plz:	3500	Ort:	Krems/Donau
Straße:	Piaristengasse 2	Kurzbezeichnung:	Piaristengymnasium Krems
Politischer Bezirk:	Krems an der Donau		
Telefon:	02732/83300-00	Fax:	02732/83300-44
E-Mail Päd. Leitung:	direktion@piaristengymnasium.at	E-Mail Verwaltung:	bg.krems-piaristen@noeschule.at
E-Mail Administration:	administration@piaristengymnasium.at	Website:	www.piakrems.ac.at

5-Tage Woche:	Nachmittagsbetreuung:	Internat:	Elternvertretung:
Schulerhalter:	Schulgeld:		
Schulleiter:	Mag. Bärbel Jungmeier, MSc	Administrator:	Mag. Robert Wittmann
Unterrichtszeiten:	1. St.: 7.45 - 8.35 2. St.: 8.40 - 9.30 3. St.: 9.35 - 10.25 4. St.: 10.40 - 11.30 5. St.: 11.35 - 12.25 6. St.: 12.25 - 13.15 Nachmittagsunterricht ab 13.50	Schulversuche:	
Besonderheiten:	Mittagsbetreuung, Nachmittagsbetreuung, Begabtenförderung	Veranstaltungen:	
Privatschule:	Konfessionell:	Statutschule:	

II Fragebogen

Im Folgenden wird verbildlicht, was Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten des Fragebogens gesehen haben, welche Auswahlmöglichkeiten sie hatten und welche Aufgabenstellungen gegeben waren.

Zunächst fanden sich – zusätzlich zur Erklärung durch die Lehrperson – nochmals die wichtigsten Informationen zusammengefasst und verschriftlicht.




Fragebogen

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Vielen Dank, dass du an dieser Befragung teilnimmst!

Während der Bearbeitung des Fragebogens soll nicht gesprochen werden (weder mit Mitschülerinnen und Mitschülern noch mit Lehrenden). Außerdem sollen keinerlei Hilfsmittel verwendet werden.

Im Fragebogen werden dir gleich einige Aussagen präsentiert. Du sollst jeweils angeben, ob du der Aussage zustimmst. Falls du eine Aussage nicht verstehst oder du dir nicht sicher bist, ob du sie richtig verstanden hast, kannst du die mittlere Antwort („neutrale“ Antwort) wählen. Es geht bei der Befragung nicht darum korrekte Antworten zu erhalten, sondern um DEINE Ansicht zu den jeweiligen Aussagen.

Nimm dir Zeit und lies die Aussagen genau durch!
Die Antworten werden anonym gespeichert.
Wenn du am Ende angelangt bist, vergiss nicht auf „absenden“ zu klicken!

Wenn Sie dieses Formular übermitteln, werden Ihre Details wie Name und E-Mail-Adresse nicht automatisch erfasst, es sei denn, Sie geben es selbst an.

* Erforderlich

Abbildung 10: Einleitung Fragebogen

Anschließend folgten die personenbezogenen Daten. Diese waren als Pflichtfelder (*erforderlich) markiert, da die Auswertung ansonsten nachträglich keine Rückschlüsse über Klasse bzw. Altersgruppe zugelassen hätte. In den darauffolgenden Abschnitten gab es keine Pflichtfelder mehr.

Die Fragen zu Alter und Schulstufe waren die einzigen beiden offenen Fragen.

Personenbezogene Daten

1

Wie alt bist du? *

Ihre Antwort eingeben

2

Welchem Geschlecht fühlst du dich zugehörig? *

männlich weiblich divers

3

In welche Schulstufe gehst du? *

Ihre Antwort eingeben

Weiter

Abbildung 11: Personenbezogene Daten

Nach der Bearbeitung der ersten Seite des Fragebogens mussten die Schülerinnen und Schüler „Weiter“ klicken. Falls sie eines der Felder nicht ausgefüllt hätten, wären sie an dieser Stelle darauf hingewiesen worden und hätten nicht zur nächsten Seite wechseln können, ohne die entsprechenden Leerstände zu befüllen.

4
Allgemeine Aussagen *

	stimme zu		stimme nicht zu
Ich wurde schon einmal im Alltag (außerhalb der Schule) mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich wurde schon einmal in der Schule mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich wurde schon einmal im Mathematikunterricht mit der Unendlichkeit konfrontiert.	☐	☐	☐
Ich habe klare Vorstellungen zur Unendlichkeit.	☐	☐	☐
Ich kann erklären, was mit „Unendlichkeit“ gemeint ist.	☐	☐	☐
Ich kann Beispiele für die Unendlichkeit angeben.	☐	☐	☐

Zurück
Weiter

Abbildung 12: Allgemeine Aussagen

Insgesamt waren sechs allgemeine Aussagen zur Unendlichkeit und ebenso sechs Aussagen zur Mathematik aufgelistet.

5
Aussagen zur Mathematik

	stimme zu		stimme nicht zu	
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.	☐	☐	☐	☐
Es gibt unendlich viele Dezimalzahlen.	☐	☐	☐	☐
Es gibt mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen.	☐	☐	☐	☐
Eine Gerade hat weder Anfangs- noch Endpunkt, ist also unendlich lang.	☐	☐	☐	☐
Egal wie nahe zwei Zahlen am Zahlenstrahl nebeneinander liegen, es ist dennoch möglich, eine Zahl dazwischen zu finden.	☐	☐	☐	☐
Es gibt verschieden Arten von Unendlichkeit. Beispiel: Addiere ich jeweils 1 zu einer Zahl und ich beginne bei 1, so kann ich diesen Prozess unendlich oft fortführen. Multipliziere ich eine Zahl jeweils mit 2 und ich beginne bei 1, so kann ich auch diesen Prozess unendlich oft fortführen. Allerdings fallen hier die ungeraden Zahlen heraus. Deshalb ist diese Unendlichkeit am Ende kleiner als die Unendlichkeit der Addition mit 1.	☐	☐	☐	☐

Zurück
Weiter

Abbildung 13: Aussagen zur Mathematik

Nachstehend wird dargestellt, was passiert, wenn Schülerinnen und Schüler eine Frage leer gelassen bzw. die Mitte gewählt haben.

5
Aussagen zur Mathematik

	stimme zu		stimme nicht zu
Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen.	☐	☐	☐
Es gibt unendlich viele Dezimalzahlen.	☒	☐	☐
Es gibt mehr Dezimalzahlen als natürliche Zahlen.	☐	☒	☐
Eine Gerade hat weder Anfangs- noch Endpunkt, ist also unendlich lang.	☐	☐	☒
Egal wie nahe zwei Zahlen am Zahlenstrahl nebeneinander liegen, es ist dennoch möglich, eine Zahl dazwischen zu finden.	☐	☒	☐
Es gibt verschiedene Arten von Unendlichkeit. Beispiel: Addiere ich jeweils 1 zu einer Zahl und ich beginne bei 1, so kann ich diesen Prozess unendlich oft fortführen. Multipliziere ich eine Zahl jeweils mit 2 und ich beginne bei 1, so kann ich auch diesen Prozess unendlich oft fortführen. Allerdings fallen hier die ungeraden Zahlen heraus. Deshalb ist diese Unendlichkeit am Ende kleiner als die Unendlichkeit der Addition mit 1.	☒	☐	☐

Zurück
Weiter

Abbildung 14: Leere Felder bzw. Mitte

Auch in diesem Fall kamen sie zu „Weiter“ und konnten wie gewohnt zur nächsten Seite des Fragebogens wechseln. Für etwaige spätere Antworten konnte man jederzeit zu allen Seiten zurück.

6
Aussagen zur Unendlichkeit in der Realität *

	stimme zu		stimme nicht zu
Ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern kann niemals vollständig belegt sein.	☒	☐	☐
Unser Universum ist riesengroß und hat kein Ende, ist daher unendlich groß.	☐	☐	☒

Zurück
Weiter

Abbildung 15: Aussagen zur Unendlichkeit in der Realität – Teil 1

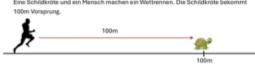
Für die letzte Frage war es notwendig, die Inhalte auch zu visualisieren. Insbesondere für jüngere Schülerinnen und Schüler bringt die Aussage an sich einen hohen Grad an Komplexität mit sich, weshalb die Darstellung unterstützend wirken sollte.

Die Grundlage für die Abbildung stammte von der Website von *Jörg Rudolf*. Allerdings waren die Bilddaten nicht zur freien Verfügung und der darin beinhaltete Text nicht für die angedachte Erhebung passend. Somit wurde mit freien Bildern und der dahinterliegenden Idee das untenstehende Bild selbst hergestellt.

7

Frage * 

Eine Schildkröte und ein Mensch machen ein Wettrennen. Die Schildkröte bekommt 100m Vorsprung.



Der Mensch, der zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte, hat diese 100m natürlich schnell aufgeholt. Eigentlich hat er die Schildkröte dann aber noch nicht, denn die ist in der Zeit ja auch gelaufen, und zwar 10m.



Wenn der Mensch diese 10m gelaufen ist, ist die Schildkröte aber auch schon wieder ein kleines Stück weiter und hat immer noch einen Vorsprung von einem Meter.



Da das immer so weitergeht kommt der Mensch zwar unendlich nah an die Schildkröte heran, wird sie allerdings niemals überholen.

stimme zu

stimme nicht zu

Aussage siehe Bild oben

☐

☐

☐

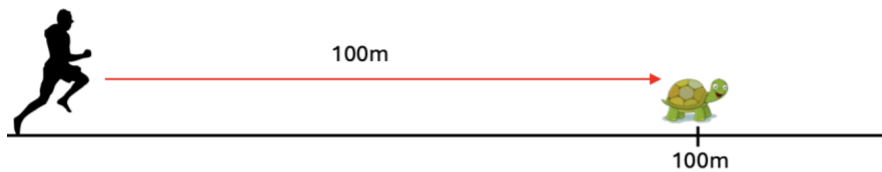
Zurück

Absenden

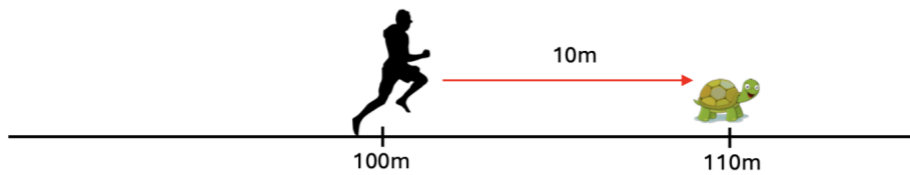
Abbildung 16: Aussagen zur Unendlichkeit in der Realität - Teil 2

Wie gut erkennbar ist, war das Bild aufgrund der Position im Fragebogen zu klein, um den Text darauf lesen zu können. Mit einem Klick auf das Bild wurde dieses allerdings vergrößert.

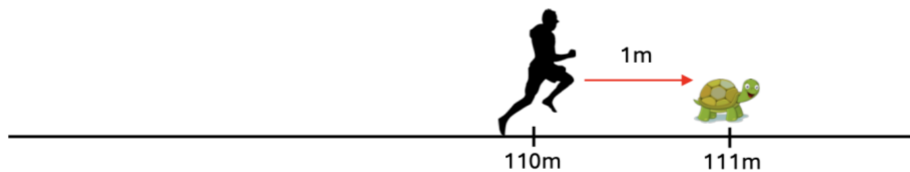
Eine Schildkröte und ein Mensch machen ein Wettrennen. Die Schildkröte bekommt 100m Vorsprung.



Der Mensch, der zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte, hat diese 100m natürlich schnell aufgeholt. Eingeholt hat er die Schildkröte dann aber noch nicht, denn die ist in der Zeit ja auch gelaufen, und zwar 10m.



Wenn der Mensch diese 10m gelaufen ist, ist die Schildkröte aber auch schon wieder ein kleines Stück weiter und hat immer noch einen Vorsprung von einem Meter.



Da das immer so weitergeht kommt der Mensch zwar unendlich nah an die Schildkröte heran, wird sie allerdings niemals überholen.

Abbildung 17: Achilles und die Schildkröte