

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Konfokale Quadriken

verfasst von | submitted by

Hannes Schättle BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt |
Degree programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 505 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree pro-
gramme as it appears on the student record
sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Darstellende Geometrie Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Ao.Univ.Prof. Dr.techn. Martin Peternell

Abstract

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit Quadriken, es werden sowohl Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$ als auch Flächen zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Der Schwerpunkt liegt dabei auf konfokalen Quadriken im $\mathbb{R}^3$.

Im ersten Kapitel werden einige wichtige Grundbegriffe und Eigenschaften von Quadriken geklärt. Außerdem wird mit Hilfe der Hauptachsentransformation die kompakte Normalform bzw. Matrixform der Gleichung hergeleitet.

Das zweite Kapitel gibt einen kurzen Einblick in die projektive Geometrie der Ebene und des Raumes, um die Begriffe „homogene Koordinaten“ und „Dualität“ einzuführen.

Kapitel 3 widmet sich den Kegelschnitten in der Ebene, es werden die fünf Typen von Kegelschnittsbüscheln sowie die dazu dualen Kegelschnittsscharen beschrieben. Anschließend wird erklärt, was unter konfokalen Kegelschnitten zu verstehen ist. Mit Hilfe von homogenen Koordinaten wird eine Gleichung für konfokale Kegelschnittsscharen hergeleitet.

Das vierte Kapitel handelt von konfokalen Quadriken im $\mathbb{R}^3$, auch hier wird die Gleichung einer Konfokalschar hergeleitet. Dies führt zu dem Begriff „Fokalkegelschnitte“, welche bei der ebenfalls beschriebenen Fadenkonstruktion eines dreiaxigen Ellipsoides eine wichtige Rolle spielen. Weiters wird gezeigt, dass eine Schar konfokaler Quadriken ein dreifaches Orthogonalsystem bildet, in so einem Flächensystem gilt der Satz von Dupin.

Um den Satz von Dupin verstehen und beweisen zu können, liefert das fünfte Kapitel eine Einführung in die Differentialgeometrie von Flächen. Durch Zuhilfenahme der ersten und zweiten Fundamentalform werden die Hauptkrümmungen berechnet. Anschließend werden die Begriffe „Krümmungslinie“ und „Krümmungslinienparametrisierung“ eingeführt.

Mit den im vorangegangenen Abschnitt erlangten Informationen kann im Kapitel 6 der Satz von Dupin bewiesen werden. Außerdem werden ein paar weitere Beispiele für dreifach orthogonale Flächensysteme genannt.

Diese Arbeit orientiert sich hauptsächlich an den Werken „The Universe of Conics“ (Glaeser et al., 2016) und „The Universe of Quadrics“ (Odehnal et al., 2020).

Abstract

This master's thesis deals with quadrics, both conics in $\mathbb{R}^2$ and second-order surfaces in the $\mathbb{R}^3$ are considered. The focus is on confocal quadrics in the $\mathbb{R}^3$. In the first chapter, some important basic concepts and properties of quadrics are clarified. In addition, with the help of the main axis transformation, the compact normal form or rather matrix form of the equation is obtained. The second chapter gives a brief insight into the projective geometry of the plane and space to introduce the concept of “homogeneous coordinates” and “duality”.

Chapter 3 deals with conics in the plane, the five types of pencils of conics are described as well as their dual counterparts - flocks of conics. Then we explain what is understood by confocal conics. With the help of homogeneous coordinates, an equation for families of confocal conics gets derived.

The fourth chapter deals with confocal quadrics in $\mathbb{R}^3$, also the equation of a family of confocal quadrics is derived. This leads to the term “focal conics” which plays an important role in the string construction of a triaxial ellipsoid. Furthermore, it is shown that a family of confocal quadrics forms a triply orthogonal system, in such a system of surfaces Dupin's theorem holds.

In order to be able to understand and prove Dupin's theorem, the fifth chapter provides an introduction to the differential geometry of surfaces. The principal curvatures are calculated by using the first and second fundamental forms. Subsequently, the terms “curvature line” and “curvature line parameterization” are introduced. The information obtained in the previous section can prove Dupin's theorem in chapter 6. In addition, a few more examples of triply orthogonal systems of surfaces are mentioned.

This work is mainly based on the books “The Universe of Conics” (Glaeser et al., 2016) and “The Universe of Quadrics”. (Odehnal et al., 2020).

Inhaltsverzeichnis

1	Quadriken	5
1.1	Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$	5
1.2	Quadriken im $\mathbb{R}^3$	6
1.3	Hauptachsentransformation	8
1.4	Ellipsoid, ein- und zweischaliges Hyperboloid	12
1.5	Reguläre und singuläre Quadriken	14
1.6	Erweiterte Matrixdarstellung	15
2	Einführung in die projektive Geometrie	16
2.1	Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$	16
2.2	Der projektive Raum $\mathbb{P}^3$	18
3	Kegelschnittsbüschel und -scharen	19
3.1	Kegelschnittsbüschel	19
3.2	Kegelschnittsscharen	21
3.3	Konfokale Kegelschnittsbüschel	22
4	Quadrikenbüschel und -scharen	26
4.1	Quadrikenbüschel	26
4.2	Konfokalscharen	26
4.3	Fokalkegelschnitte	29
4.3.1	Fadenkonstruktion eines dreiachsigen Ellipsoides	32
4.4	Weitere Konfokalscharen	35
4.5	Dreifaches Orthogonalsystem	36
4.6	Schnitt in Krümmungslinien	38
5	Differentialgeometrie	39
5.1	Parameterdarstellung der Quadriken	39
5.2	Erste Fundamentalform	41
5.3	Gauß-Abbildung	42
5.4	Zweite Fundamentalform	42
5.5	Normalkrümmung einer Fläche	43
5.6	Hauptkrümmungen einer Fläche	43
5.7	Konjugierte Netze	44
5.8	Krümmungslinien	45
5.8.1	Krümmungslinienparametrisierung	46
6	Satz von Dupin	47
6.1	Weitere Beispiele für dreifache Orthogonalsysteme	49

7	Fazit	52
8	Bibliografie	54
8.1	Literaturverzeichnis	54
8.2	Abbildungsverzeichnis	56

1 Quadriken

Die folgenden Absätze zur Klärung des Begriffs „Quadrik“ orientieren sich an Högel (2022). Unter dem Begriff Quadrik versteht man die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung mit mehreren Unbekannten. Das Wort Quadrik stammt von dem lateinischen „quadra“ (=Quadrat) ab.

Im zweidimensionalen Fall bilden Quadriken i.A. Kurven in der Ebene, diese werden Kegelschnitte genannt.

Im dreidimensionalen Fall sind Quadriken Flächen im Raum und werden auch als Flächen zweiten Grades bzw. zweiter Ordnung oder quadratische Flächen bezeichnet.

Quadratische Flächen spielen im $\mathbb{R}^3$ eine analoge Rolle zu den Kegelschnitten in der Ebene. Daher soll auch diese Einleitung mit einer kurzen Erklärung der Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$ beginnen.

1.1 Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$

In diesem Unterkapitel wird ein erster Überblick zu Quadriken im $\mathbb{R}^2$ in Anlehnung an Odehnal et al. (2020, S. 1 f.) gegeben.

Kegelschnitte können durch eine algebraische Gleichung der Form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

angegeben werden. Der Fall $A = B = C = 0$ muss dabei ausgeschlossen sein, denn sonst erhält man eine lineare Gleichung, welche lediglich eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ beschreibt.

I.A. beschreibt (1) die bekannten Kegelschnitte: Ellipse, Parabel und Hyperbel.

Wenn $F \neq 0$ ist, kann man die Gleichung durch F dividieren, setzt man anschließend für x und y die Koordinaten von 5 verschiedenen Punkten, von welchen keine 3 kollinear sind, ein, so erhält man durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit 5 Unbekannten die Gleichung des Kegelschnittes, der durch die 5 Punkte eindeutig festgelegt ist.

Es können auch ausgeartete Kegelschnitte in Form von einander schneidenden oder parallelen Geradenpaaren auftreten.

Kegelschnitte sind Kurven 2. Grades, das heißt: Jeder Kegelschnitt c hat mit einer Gerade, die in der selben Ebene liegt, zwei Schnittpunkte, diese können reell oder komplex sein. Ist die Gerade eine Tangente an c , so fallen die beiden Schnittpunkte zusammen.

Dual zu der Klassifizierung von Kegelschnitten als Kurven 2. Grades ist jene als Kurven 2. Klasse. Das bedeutet, dass von jedem Punkt P , der in der Ebene des Kegelschnitts c liegt, 2 Tangenten an c existieren. Liegt P auf dem Kegelschnitt, so fallen die beiden Tangenten zusammen. Jene Lagen von P , an denen die Tangenten komplex sind, bilden das Innere des Kegelschnitts c .

Die Brennpunkte von c sind die Punkte, an denen die Tangenten konjugiert komplexe Minimalgeraden mit Normalvektor $(1, \pm i)$ sind. Diese Tangenten schneiden die Ferngerade in den absoluten Kreispunkten I und $\bar{I}$.¹

Die Kegelschnitte können in drei verschiedene Typen unterteilt werden:

- Ellipsen: Es existieren keine reellen Schnittpunkte mit der Ferngerade.
- Parabeln: Es existiert ein reeller Berührungspunkt mit der Ferngerade.
- Hyperbeln: Es existieren zwei reelle Schnittpunkte mit der Ferngerade.

1.2 Quadriken im $\mathbb{R}^3$

Das nachfolgende Unterkapitel orientiert sich an Odehnal et al. (2020, S. 2 ff.). Quadriken können durch die folgende algebraische Gleichung beschrieben werden.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (2)$$

Sind die Koeffizienten A bis F alle gleich 0, so verschwinden die quadratischen Anteile der Gleichung und (2) beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, diesen Fall möchten wir ausschließen. Im Allgemeinen beschreibt (2) die typischen Quadriken: Ellipsoid, Paraboloid und Hyperboloid.

Ist $J \neq 0$, so kann die Gleichung durch J dividiert werden, durch Einsetzen der Koordinaten von 9 verschiedenen Punkten in zulässiger Lage erhält man ein lineares Gleichungssystem. Die Lösung dieses Gleichungssystems führt auf die zugehörige Quadrik.

Analog zu den Kegelschnitten im $\mathbb{R}^2$ gibt es auch bei den Quadriken im Raum ausgeartete Formen in der Gestalt von quadratischen Zylindern, quadratischen Kegeln sowie parallele oder einander schneidende Ebenenpaare.

¹Die Begriffe „Ferngerade“ und „absolute Kreispunkte“ werden in Kapitel 2.1 bzw. 3.3 erklärt.

Algebraisch gesehen sind Quadriken Q Flächen 2. Grades, für sie gilt genauso wie für Kegelschnitte, dass sie von einer Geraden g in zwei Punkten geschnitten werden.² Diese Schnittpunkte sind entweder reell oder konjugiert komplex. Die beiden Schnittpunkte sind ident, wenn g eine Tangente an Q ist.

Quadriken im $\mathbb{R}^3$ sind, wie der Vergleich zu Kegelschnitten schon vermuten lässt, Flächen 2. Klasse. Das heißt, von jedem beliebigen Punkt P im Raum lassen sich unendlich viele Tangentialebenen an die Quadrik Q legen. Diese Tangentialebenen hüllen einen quadratischen Kegel ein.

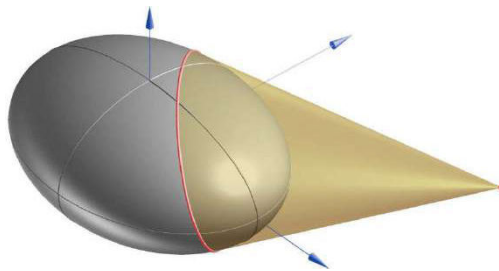


Abbildung 1: Tangentialkegel aus einem Punkt P an eine Quadrik Q .

Für den Fall, dass P auf Q liegt, existiert nur genau eine Tangentialebene, welche gleichzeitig auch den degenerierten quadratischen Kegel darstellt. Alle Punkte, für welche es keine reellen Tangentialebenen gibt, bilden das Innere der Quadrik Q (sofern ein Inneres existiert, HP-Flächen besitzen z.B. kein Inneres). Jene Punkte, von welchen die ausgehenden Tangentialkegel Drehkegel³ sind, werden die Brennpunkte der Quadrik genannt. Diese Drehkegel können sowohl innerhalb als auch außerhalb von Q liegen und die entsprechenden Drehkegel somit reell oder imaginär sein. Alle Brennpunkte einer Quadrik Q bilden ein Paar von quadratischen Kurven, die sogenannten Fokalkegelschnitte. Diese Fokalkurven spielen eine vergleichbare Rolle wie die Brennpunkte von Kegelschnitten in der Ebene.⁴

Die Quadriken im $\mathbb{R}^3$ können in drei verschiedene Typen unterteilt werden:

- Ellipsoide: Es existiert kein reeller Schnitt-Kegelschnitt mit der Fernebene
- Paraboloid: Die Fernebene berührt die Quadrik.
- Hyperboloide: Es existiert ein reeller Schnitt-Kegelschnitt mit der Fernebene.

²Der Fall $g \in Q$ muss dabei ausgeschlossen werden.

³Diese Kegel können auch imaginär sein.

⁴Eine genauere Erklärung zu den Fokalkegelschnitten folgt in Kapitel 4.3

1.3 Hauptachsentransformation

Das folgende Beispiel sowie die dazugehörigen Erklärungen folgen dem Aufbau von Xylander (2016).

Da Gleichung (2) für die meisten Quadriken ziemlich lang und somit unpraktisch und unübersichtlich ist, werden Quadriken meist durch ihre Matrixform angegeben. Damit diese Matrixdarstellung möglichst kompakt wird, empfiehlt es sich zuvor eine Hauptachsentransformation durchzuführen. Diese Transformation bewirkt, dass die Achsen und der Flächenmittelpunkt mit den Koordinatenachsen bzw. dem Ursprung des Koordinatensystems übereinstimmen. Am folgenden Beispiel soll die Hauptachsentransformation nun erklärt werden.

Beispiel 1:

Gegeben sei das einschalige Hyperboloid H mit der allgemeinen Gleichung

$$3x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xz + 4y - 12 = 0. \quad (3)$$

Diese Gleichung lässt sich in der Matrixform allgemein anschreiben als

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + \alpha = 0.$$

In diesem Bsp. ergibt sich daraus

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \langle (0, 4, 0), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle - 12 = 0.$$

Dabei wird der Vektor $\vec{x}^T = (x, y, z)$ Koordinatenvektor genannt.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ist eine symmetrische Matrix und enthält die Koeffizienten der quadratischen und gemischtquadratischen Terme der Gleichung, A wird auch Formenmatrix genannt.

Im Vektor $\vec{a}^T = (0, 4, 0)$ stehen die Koeffizienten der linearen Glieder.

Das Vorhandensein gemischtquadratischer Glieder in der Gleichung (3) verrät uns, dass die Koordinatenachsen nicht parallel zu den Hauptachsen von H sind. Wird

H geeignet um seine Hauptachsen gedreht, sodass diese zu den Koordinatenachsen parallel sind, so verschwinden die gemischtquadratischen Terme aus der Flächengleichung.

Dazu werden zuerst die Eigenwerte der Formenmatrix bestimmt, um daraus die Formenmatrix der Normalform zu gewinnen und anschließend die Drehmatrix als orthogonale Transformationsmatrix ermittelt. Schließlich ergibt sich als erster Zwischenschritt eine transformierte Flächengleichung, verbunden mit einem Koordinatenübergang von (x, y, z) zu neuen, transformierten Koordinaten (x', y', z') .

Berechnung der Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$$

Aus den Eigenwerten von A wird nun die Diagonalmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gebildet, sie ist die Formenmatrix der Normalform von H .

Die Drehung des Hyperboloids H wird durch die Transformationsmatrix C beschrieben. C ist eine orthogonale Matrix (d.h. $C^T = C^{-1}$ bzw. $C \cdot C^T = \mathbb{I}$) und es muss gelten: $E = C^T \cdot A \cdot C$.

Wird nun $E = C^T \cdot A \cdot C$ umgeformt zu $C \cdot E = A \cdot C$,

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

so lassen sich die Komponenten der Matrix C bestimmen. Die normierten Lösungsvektoren der folgenden drei Vektorgleichungen liefern die Spaltenvektoren der gesuchten Transformationsmatrix C .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5c_{11} & 1c_{12} & -2c_{13} \\ 5c_{21} & 1c_{22} & -2c_{23} \\ 5c_{31} & 1c_{32} & -2c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5c_{11} \\ 5c_{21} \\ 5c_{31} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1c_{12} \\ 1c_{22} \\ 1c_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2c_{13} \\ -2c_{23} \\ -2c_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{13} \\ c_{23} \\ c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Die durch C beschriebene Drehung führt zu einer Koordinatentransformation der Form $\vec{x} = C \cdot \vec{x}'$ mit den Transformationsgleichungen

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \quad y = z' \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

Setzt man die transformierten Koordinaten in die Gleichung (3) ein, so erhält man eine erste transformierte Gleichung von H

$$5x'^2 + y'^2 - 2z'^2 + 4z' - 12 = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung enthält keine gemischtquadratischen Terme mehr, da durch die Drehung alle Hauptachsen der Fläche parallel zu den Koordinatenachsen sind. Das verbliebene lineare Glied wird im Folgenden durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Mittelpunkt der Fläche eliminiert.

Die notwendige Verschiebung erfolgt durch eine quadratische Ergänzung in der Gleichung (4)

$$5x'^2 + y'^2 - 2(z' - 1)^2 - 10 = 0.$$

Die dadurch entstehende Koordinatentransformation wird beschrieben durch die Gleichungen

$$x' = x'' \quad y' = y'' \quad z' = z'' + 1.$$

Daraus erhält man die gesuchte Flächengleichung des einschaligen Hyperboloids H in Normalform ⁵

$$5x''^2 + y''^2 - 2z''^2 - 10 = 0. \quad (5)$$

Die Matrixform davon lautet

$$(x, y, z) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 10 = 0. \quad (5.1)$$

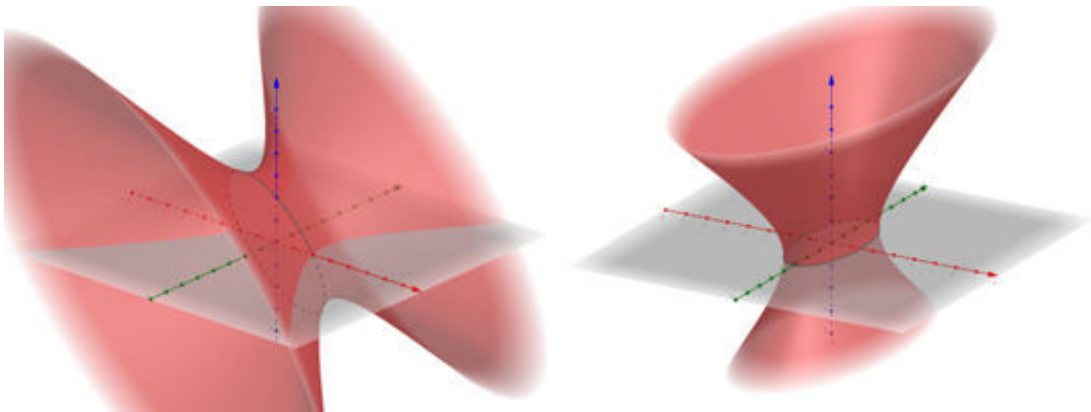


Abbildung 2: Links: Einschaliges Hyperboloid in allgemeiner Lage wie in Gleichung (3). Rechts: Einschaliges Hyperboloid in Normalform wie in Gleichung (5) bzw. (5.1).

⁵Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird bei Flächengleichungen in Normalform zur besseren Lesbarkeit anstelle von x'' nur x geschrieben, analog für y'' und z'' .

1.4 Ellipsoid, ein- und zweischaliges Hyperboloid

Da sich der Großteil dieser Arbeit mit Ellipsoiden sowie ein- und zweischaligen Hyperboloiden beschäftigen wird, werden diese drei Flächentypen nun genauer untersucht, dabei dient Xylander (2016) als Vorlage.

Oft wird die Normalform, wie sie oberhalb hergeleitet wurde, durch eine weitere Division umgeformt zu einer Gleichung der Form: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = d$ mit $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Einschaliges Hyperboloid

Bei einem einschaligen Hyperboloid in Normalform liefern die Schnitte mit zwei Koordinatenebenen Hyperbeln, daher stammt auch der Name Hyperboloid (griechisch: „eine Hyperbel zeigend“). Der Schnitt mit der dritten Koordinatenebene ist eine Ellipse.

Im Fall des einschaligen Hyperboloids aus Beispiel 1 lautet die Gleichung in Normalform $5x^2 + y^2 - 2z^2 - 10 = 0$.

Eine Division durch das konstante Glied 10 liefert eine Gleichung der Gestalt $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} - \frac{z^2}{5} = 1$.

Allgemein gilt: Flächengleichungen der Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ beschreiben einschalige Hyperboloide.

Aus dieser Darstellung lassen sich die Abmessungen der Achsenrechtecke der Hyperbeln sowie der Ellipse, die als Schnittkurven der Hauptschnitte des einschaligen Hyperboloids auftreten, ablesen.

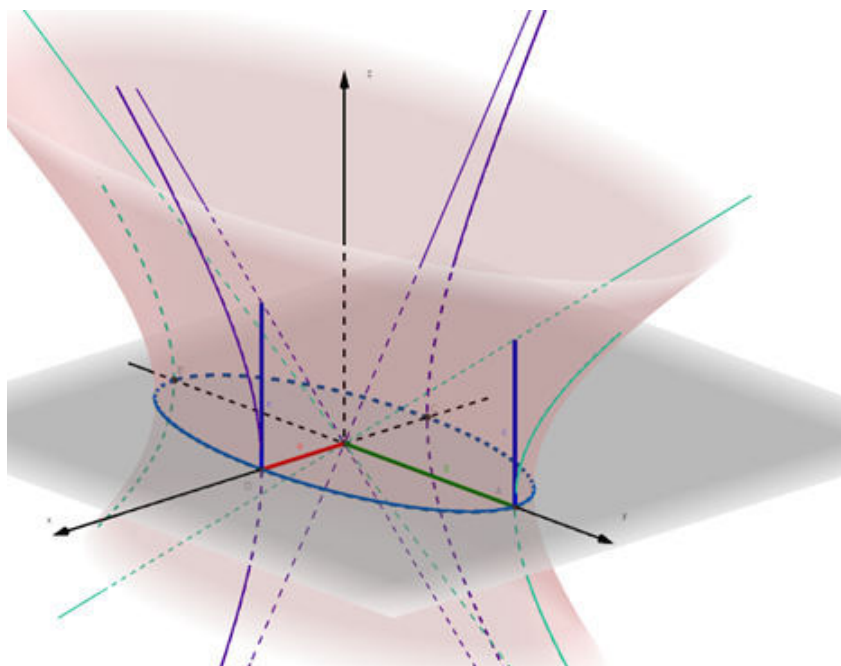


Abbildung 3: In diesem Beispiel haben die Strecken a, b, c die Längen: $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{10}$, $c = \sqrt{5}$.

Zweischaliges Hyperboloid

Auch beim zweischaligen Hyperboloid liefern die Hauptschnitte in zwei Koordinatenebenen Hyperbeln. Mit der xy -Ebene existieren keine reellen Schnittkurven.

Aus der allgemeinen Gleichung in Normalform $\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 + \delta = 0$ erhält man durch Division durch δ eine Flächengleichung der Gestalt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Die oben gewählte Normalform für das zweischalige Hyperboloid beschreibt die Fläche so, dass die xy -Ebene die beiden Schalen trennt, somit sind die Schnittkurven mit xy -parallelen Ebenen Ellipsen. Für Ebenen mit $|z| > c$ sind diese Schnittellipsen reell.

Auch in diesem Fall geben die Parameter a, b, c die halben Seitenlängen der Achsenrechtecke der Schnitthyperbeln mit den Koordinatenebenen an.

Ellipsoid

Schneidet man ein Ellipsoid in Normalform mit Ebenen, die parallel zu einer der drei Koordinatenebenen sind, so sind die Schnittkurven Ellipsen, daher hat auch diese Fläche ihren Namen, der aus dem Griechischen kommt und soviel bedeutet wie „eine Ellipse zeigend“.

Analog zu den beiden zuvor beschriebenen Flächen kann auch die allgemeine Flächenformel eines Ellipsoids in Normalform $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$ durch Division mit dem konstanten Glied δ in die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ gebracht werden.

Die Parameter a, b, c geben die Halbachsenlängen in x -, y - und z -Richtung an. Da bei dem hier beschriebenen allgemeinen Fall eines Ellipsoids alle drei Achsen verschiedene Längen haben, wird diese Fläche als dreiachsiges Ellipsoid bezeichnet.

1.5 Reguläre und singuläre Quadriken

Dieses Kapitel orientiert sich hauptsächlich an Xylander (2016) sowie Högel (2019). Ist eine Quadrik durch ihre allgemeine Flächengleichung (vgl. (2)) gegeben, so lautet die entsprechende Matrixdarstellung $\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + \alpha = 0$.

Ersetzt man nun $\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle$ durch $2 \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle$, so führt dies zur Matrixform

$$\vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} + 2 \langle \vec{b}, \vec{x} \rangle + \alpha = 0. \quad (6)$$

Nun lässt sich eine erweiterte Matrix A^* bilden:

$$A^* = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \quad (7)$$

Definition 1: Eine Quadrik heißt regulär, wenn ihre erweiterte Matrix A^* vollen Rang hat. Ist dies nicht der Fall, so heißt die Quadrik singulär. (siehe z.B. Odehnal et al. , 2020, S. 106)

Da es sich bei $A^* \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ um eine quadratische Matrix handelt, gilt: A^* hat vollen Rang ($rg(A^*) = 4$), genau dann, wenn ihre Determinante $\det(A^*) \neq 0$ ist.

Zu den regulären Quadriken im $\mathbb{R}^3$ gehören die Ellipsoide, ein- und zweischalige Hyperboloide sowie elliptische und hyperbolische Paraboloiden.

Ellipsoide und die oben genannten Hyperboloide zählen zu den Mittelpunktsquadriken.

Eine Mittelpunktsquadrik Q in Normalform besitzt ein Symmetriezentrum. Dieses stimmt mit dem Koordinatenursprung überein; d.h. liegt ein Punkt $P = (x, y, z)$ auf Q , so liegt auch sein Spiegelpunkt $P^* = (-x, -y, -z)$ auf der Quadrik.

1.6 Erweiterte Matrixdarstellung

Nach Odehnal et al. (2020, S. 97 f.) lässt sich zusammenfassen: Mit den bis jetzt erlangten Informationen kann nun jede Quadrik $Q \in \mathbb{R}^n$ durch eine erweiterte Matrixform der folgenden Gestalt angeschrieben werden, unabhängig davon, ob die Gleichung in Normalform eine lineare Komponente besitzt oder nicht:

$$Q : \vec{x}^{*T} \cdot A^* \cdot \vec{x}^* = 0 \quad A^* \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \quad \vec{x}^* \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (8)$$

Dabei ist A^* die erweiterte Matrix analog zu Gleichung (7) und $\vec{x}^*$ der erweiterte Koordinatenvektor $\vec{x}^* = (1, x_1, \dots, x_n)^T$.⁶

⁶Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird bei Flächengleichungen in Matrixform zur besseren Lesbarkeit anstelle von A^* nur A geschrieben, analog für $\vec{x}^*$ nur $\vec{x}$.

2 Einführung in die projektive Geometrie

Dieses Kapitel gewährt einen kurzen Einblick in die projektive Geometrie und orientiert sich an online einsehbaren Skripten von Barth (1998), Brauner (1973), sowie Halbeisen und Hungerbühler (2016).

2.1 Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$

Definition 2: Eine projektive Ebene ist eine Menge von Punkten und Geraden, welche folgende Axiome erfüllt:

- P1** Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- P2** Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- P3** Es gibt 4 Punkte, so dass keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

(siehe z.B. Halbeisen & Hungerbühler, 2016, S. 1)

Bemerkung: Die euklidische Ebene (bzw. die reelle kartesische Ebene) ist keine projektive Ebene, da das Axiom P2 für parallele Geraden nicht erfüllt ist.

Aus der euklidischen Anschauungsebene $\mathbb{E}^2$ erhält man die projektiv abgeschlossene Anschauungsebene $\mathbb{P}^2$ indem man neue Punkte und Geraden hinzufügt.

- Jede Gerade wird durch einen Fernpunkt erweitert, sodass parallele Gerade denselben Fernpunkt besitzen. Alle parallelen Geraden einer Richtung schneiden einander in ihrem gemeinsamen Fernpunkt, damit erfüllt $\mathbb{P}^2$ das Axiom P2.
- Die Menge der Geraden wird um die sogenannte Ferngerade ergänzt, sie ist die Menge aller Fernpunkte.

Homogene Koordinaten: Die aus der euklidischen Geometrie bekannten kartesischen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eignen sich nicht zur Beschreibung von Fernpunkten. Daher wird in der projektiven Geometrie die Ebene in einen Dreiraum mit den Koordinatenachsen x_0, x_1, x_2 als Ebene $x_0 = 1$ eingebettet.

- Punkte des $\mathbb{P}^2$ werden nun als Geraden durch den Ursprung definiert.
- Geraden des $\mathbb{P}^2$ werden nun als Ebenen durch den Ursprung definiert.

Aus dem Koordinatenpaar (x, y) das einen Punkt in $\mathbb{E}^2$ eindeutig festlegt, wird in $\mathbb{P}^2$ ein Koordinatentriplett $(1, x, y)$. Dieses Koordinatentriplett kann als Richtungsvektor der entsprechenden Gerade durch den Ursprung interpretiert werden. Da eine Gerade jedoch keinen eindeutigen Richtungsvektor hat, beschreibt jedes Triplett der Form $\lambda(1, x, y) = (x_0, x_1, x_2)$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dieselbe Gerade und legt somit den Punkt (x, y) eindeutig fest, dabei gilt:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad x_0 \neq 0$$

(x_0, x_1, x_2) heißen homogene Koordinaten. Da sie bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, werden sie oft auch mit $(x_0 : x_1 : x_2)$ angeschrieben.

Der gemeinsame Fernpunkt aller parallelen Geraden mit dem Richtungsvektor (g_1, g_2) wird mit den homogenen Koordinaten $(0, g_1, g_2)$ beschrieben.

Alle eigentlichen Punkte der Geraden g liegen in einer Ebene durch den Ursprung (2-dim Unterraum des $\mathbb{R}^3$).

Fernpunkte (uneigentliche Punkte) sind durch $x_0 = 0$ gekennzeichnet, $x_0 = 0$ ist eine Ebene durch den Ursprung, daher wird die Menge aller Fernpunkte als Gerade (Ferngerade) aufgefasst.

Zwei wichtige Begriffe der projektiven Geometrie sind „**Inzidenz**“ und „**Dualität**“.

In der projektiven Geometrie ist es üblich, die Relationen, wie sie in den Axiomen P1 und P2 vorkommen, anders zu formulieren:

- Statt „Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.“, sagt man „Zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden“.
- Statt „Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.“, sagt man „Zwei verschiedene Geraden inzidieren mit genau einem Punkt“.
- Punkte, die mit derselben Geraden inzidieren, heißen kollinear.
- Geraden, die mit demselben Punkt inzidieren, heißen kopunktal.

Dualitätsprinzip: Vertauscht man in einer wahren Aussage in $\mathbb{P}^2$, welche durch Punkte, Geraden und Inzidenzen formuliert ist, die Begriffe „Punkt“ und „Gerade“ und behält die Inzidenzen bei, so erhält man wieder eine wahre Aussage - die duale Aussage.

2.2 Der projektive Raum $\mathbb{P}^3$

In der projektiven Ebene wurden bereits alle Geraden um einen Fernpunkt ergänzt. Im projektiv abgeschlossenen Anschauungsraum $\mathbb{P}^3$ wird zusätzlich jede Ebene um eine Ferngerade ergänzt, sodass parallele Ebenen dieselbe Ferngerade besitzen. Alle Fernpunkte und -geraden liegen in der sogenannten Fernebene.

Wie in der projektiven Ebene arbeiten wir auch im $\mathbb{P}^3$ mit homogenen Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3) . Analog zum ebenen Fall gilt:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}$$

Fernpunkte sind durch $x_0 = 0$ gekennzeichnet.

Das **Dualitätsprinzip** im $\mathbb{P}^3$ lautet: Vertauscht man in einer wahren Aussage in $\mathbb{P}^3$, welche durch Punkte, Geraden, Ebenen und Inzidenzen formuliert ist, die Begriffe „Punkt“ und „Ebene“ und behält die Geraden und Inzidenzen, so erhält man wieder eine wahre Aussage - die duale Aussage.

3 Kegelschnittsbüschel und -scharen

3.1 Kegelschnittsbüschel

Der folgende Abschnitt über Kegelschnittsbüschel orientiert sich am Vorlesungsskriptum zu Projektiver Geometrie von Brauner (1973).

In Kapitel 1.1 wurde gezeigt, dass ein Kegelschnitt im $\mathbb{R}^2$ durch 5 Punkte, von welchen keine 3 kollinear sind, eindeutig festgelegt ist. Sind lediglich 4 Punkte vorgegeben, so kann der fünfte Punkt frei gewählt werden.

Die folgende Definition gilt sowohl für Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$ als auch für Quadriken im $\mathbb{R}^3$.

Definition 3: Seien $Q_A : \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = 0$ und $Q_B : \vec{x}^T \cdot B \cdot \vec{x} = 0$ zwei Quadriken mit der Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$, so bestimmen sie das Quadrikenbüschel

$$\vec{x}^T \cdot (\lambda A + \mu B) \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \quad (9)$$

Bemerkung: Bis auf den Fall $\lambda = 0$ kann ein Quadrikenbüschel auch durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\vec{x}^T \cdot (A + tB) \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{mit} \quad t = \frac{\mu}{\lambda}$$

Satz 1:

- Jede Quadrik des Büschels (9) enthält die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$.
- Je zwei beliebig gewählte Quadriken eines Büschels spannen dieses auf.
- Durch jeden Punkt des $\mathbb{P}^n$ mit $n \in \{2, 3\}$, der nicht in der Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ enthalten ist, geht genau eine Quadrik des Büschels.

Je nachdem, welche Elemente die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ enthält, werden verschiedene Typen von Kegelschnittsbüscheln unterschieden.

- **Kegelschnittsbüschel 1. Art**

Die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ enthält 4 Punkte $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, von denen keine 3 kollinear sind. Sie werden Basis- oder Grundpunkte genannt.

Singuläre Quadriken des Büschels: 3 Geradenpaare

- **Kegelschnittsbüschel 2. Art**

Die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ enthält 2 Punkte und ein Linienelement (B_1, t_1) . Ein Linienelement ist ein Punkt mit einer inzidenten Gerade (in diesem Fall handelt es sich dabei um eine gemeinsame Tangente der Kegelschnitte).

Singuläre Quadriken des Büschels: 2 Geradenpaare

- **Kegelschnittsbüschel 3. Art (Berührbüschel)**

Die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ besteht aus zwei Linienelementen.

Singuläre Quadriken des Büschels: ein Geradenpaar (die beiden gemeinsamen Tangenten) und die doppelt gezählte Verbindungsgerade der beiden Grundpunkte.

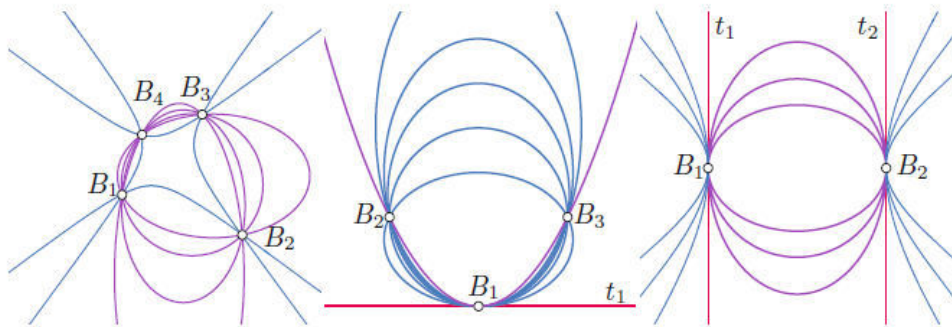


Abbildung 4: v.l.n.r.: Kegelschnittsbüschel der 1., 2. und 3. Art.

- **Kegelschnittsbüschel 4. Art (Oskulationsbüschel)**

Die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ besteht aus einem „gewöhnlichen“ Schnittpunkt und einem dreifachen Schnittpunkt, d.h. ein gemeinsamer Punkt von zwei Kegelschnitten, in welchem sowohl ihre Tangenten als auch ihre Krümmungskreise (engl. „osculating circle“) identisch sind.

Singuläre Quadriken des Büschels: Die Tangente am dreifachen Schnittpunkt $B_1 = B_2 = B_3$ und die Verbindungsgerade $B_1 B_4$ zum anderen Schnittpunkt.

- **Kegelschnittsbüschel 5. Art (Hyperoskulationsbüschel)**

Die Schnittmenge $Q_A \cap Q_B$ besteht nur aus einem einzigen vierfachgezählten Punkt. Der Berührungspunkt ist (euklidisch betrachtet) ein Scheitelpunkt der beiden Kegelschnitte, Q_A und Q_B haben in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente und denselben Krümmungskreis.

Singuläre Quadriken des Büschels: Die doppelt gezählte Tangente im Berührungspunkt.

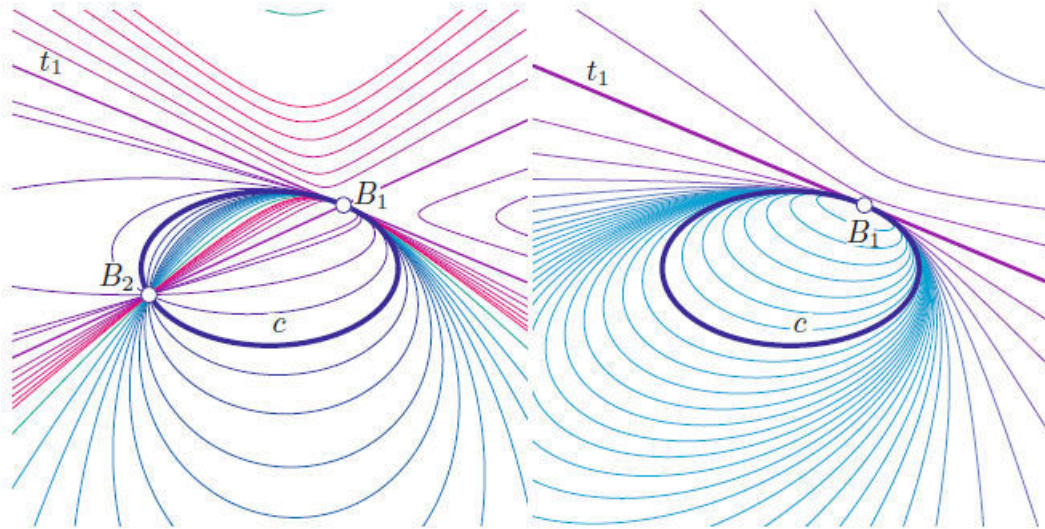


Abbildung 5: v.l.n.r.: Kegelschnittsbüschel der 4. und 5. Art.

Für die singulären Quadriken eines Büschels $x^T \cdot (\lambda A + \mu B) \cdot x = 0$ gilt, wie in (Kap. 1.4) erklärt wurde, dass ihre Koeffizientenmatrix singulär sein muss. D.h. ein Kegelschnitt des Büschels ist singulär genau dann, wenn $\det(\lambda A + \mu B) = 0$.

3.2 Kegelschnittsscharen

Dieses Unterkapitel orientiert sich an Glaeser et al. (2016, S. 307 f.) Dual zu einem Kegelschnittsbüschel im $\mathbb{P}^2$ ist eine Kegelschnittsschar, dabei werden Kegelschnitte nicht als Menge von Punkten, sondern als Hüllkurven ihre Tangenten aufgefasst. Dualisiert man die verschiedenen Typen von Kegelschnittsbüscheln, so erhält man die folgenden Kegelschnittsscharen.

Bem.: Linienelemente sind selbstdual, sie bleiben beim Dualisieren als solche erhalten.

- **Kegelschnittsschar 1. Art**

Alle Kegelschnitte mit 4 gemeinsamen Tangenten $\{a, b, c, d\}$. Keine drei dieser Tangenten sind kopunktual, sie bilden also ein Vierseit.

- **Kegelschnittsschar 2. Art**

Besteht aus allen Kegelschnitten, die ein Linienelement (A, a) und zwei weitere von a verschiedene Tangenten b, c gemein haben. Dabei gilt: $A \notin b, A \notin c$.

- **Kegelschnittsschar 3. Art**

Die beiden Linienelemente des Berührbüschels bleiben beim Dualisieren erhalten (selbstdual), daher enthält die Schar 3. Art dieselben regulären Kegelschnitte wie das Büschel. Man spricht auch von einer Büschelschar.

- **Kegelschnittsschar 4. Art**

Alle Kegelschnitte, die einander in einem gemeinsamen Punkt A oskulieren und zusätzlich eine gemeinsame Tangente b mit $A \notin b$ besitzen.

- **Kegelschnittsschar 5. Art**

Auch in diesem Fall bleibt das Linienelement erhalten und die Schar 5. Art enthält dieselben regulären Kegelschnitte wie das duale Büschel. Singuläre Quadriken des Büschels: Die doppelt gezählte Tangente wird zu einem doppelten Geradenbüschel.

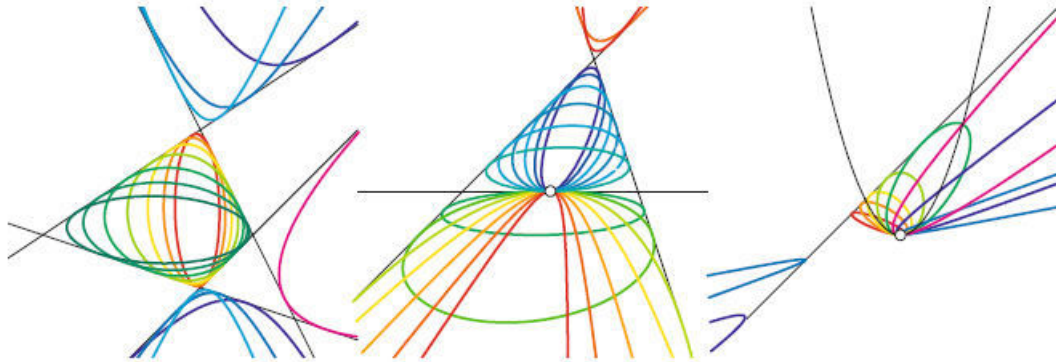


Abbildung 6: Die 3 Arten von Kegelschnittsscharen, welche sich von ihren dualen Gegenstücken unterscheiden: Links: KS-Schar 1. Art: alle Kegelschnitte, die tangential zu einem gemeinsamen Tangenten-Vierseit liegen; Mitte: KS-Schar 2. Art: alle Kegelschnitte, welche ein Linienelement und zwei weitere Tangenten gemein haben; Rechts: KS-Schar 4. Art: Alle Kegelschnitte berühren die schwarze Parabel in einem gemeinsamen Punkt und haben eine weitere gemeinsame Tangente.

3.3 Konfokale Kegelschnittsbüschel

Die folgenden beiden Aussagen folgen den Ausführungen von Glaeser et al. (2016, S. 32 ff.)

Theorem 1: Sei c ein Kegelschnitt mit Brennpunkten F_1 und F_2 . In jedem Punkt $P \in c$ halbiert die zugehörige Tangente t_p den Winkel zwischen den beiden Brennpunktsstrahlen PF_1 und PF_2 . Im Fall einer Parabel wählt man für F_2 den Fernpunkt der

Parabelachse.

Korollar 1: Zwei Kegelschnitte heißen konfokal, wenn ihre Brennpunkte übereinstimmen. Mögliche Paare von konfokalen Kegelschnitten sind (Ellipse, Ellipse), (Hyperbel, Hyperbel), (Ellipse, Hyperbel) und (Parabel, Parabel). Einander schneidende konfokale Kegelschnitte schneiden sich immer unter einem rechten Winkel.

Beweis für den Fall Ellipse und Hyperbel: Högel (2022) liefert folgenden Beweis: Die Tangente an die Ellipse halbiert den Außenwinkel und die Tangente an eine Hyperbel halbiert den Innenwinkel der Brennstrahlen der Kegelschnitte, somit stehen sie orthogonal aufeinander und damit bilden alle konfokalen Ellipsen und Hyperbeln ein orthogonales Netz. $\square$

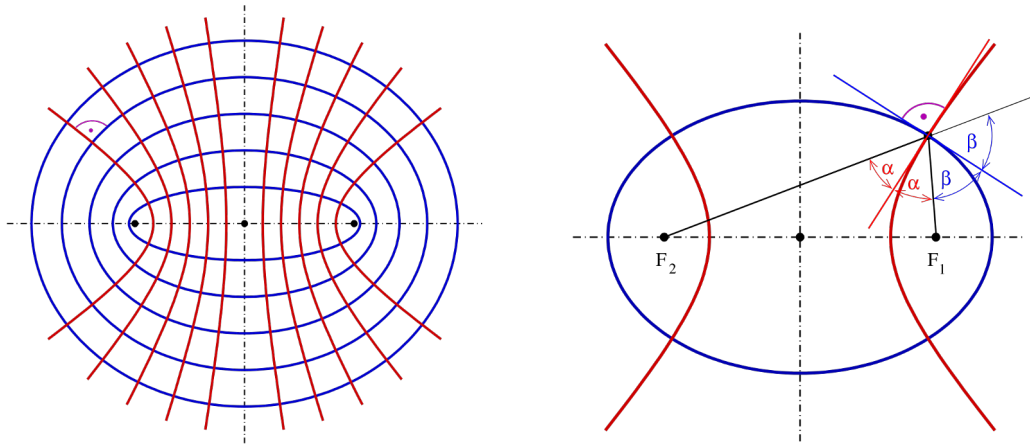


Abbildung 7: Links: Konfokale Ellipsen- und Hyperbelschar. Rechts: Beweis: Konfokale Ellipsen und Hyperbeln schneiden einander orthogonal.

Die Ebene lässt sich durch konfokale Kegelschnitte mit einem orthogonalen Netz überziehen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Ein orthogonales Netz bestehend aus einer Schar konfokaler Ellipsen und Hyperbeln.
- Ein orthogonales Netz bestehend aus einer Schar konfokaler Parabeln.

In beiden Fällen haben alle beteiligten Kegelschnitte sowohl dieselben Brennpunkte als auch idente Achsen.

In Abschnitt (1.1) wurde schon erwähnt, dass die Brennpunkte F_1 und F_2 eines Kegelschnitts c jene Punkte sind, an welchen die Tangenten an c konjugiert komplex und selbstorthogonal sind; sie sind Minimalgeraden.

Diese Tangenten schneiden die Ferngerade $u : x_0 = 0$ in den **absoluten Kreispunkten** I und $\bar{I}$. Grillmayer (2009, S. 122) erklärt dazu: Die absoluten Kreispunkte sind die gemeinsamen Fernpunkte aller Kreise.

Berechnung von I und $\bar{I}$

allg. Kreisgl. k : $(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0 = \dots = x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

k in homogenen Koord.: $x_1^2 + x_2^2 + dx_0x_1 + ex_0x_2 + fx_0^2 = 0$

$$k \cap u : x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I = (0, 1, i), \quad \bar{I} = (0, 1, -i)$$

Schoenflies (1931) erklärt weiter, die duale Auffassung von konfokalen Kegelschnittsbüscheln sind Konfokalscharen, welche durch gemeinsame Tangenten aufgespannt werden. Anstelle der beiden Brennpunkte gibt es nun zwei Paare $(g, \bar{g})$ und $(h, \bar{h})$ von konjugiert komplexen Tangenten, welche die absoluten Kreispunkte I und $\bar{I}$ als Fernpunkte besitzen. Es gilt $F_1 = g \cap \bar{g}$ und $F_2 = h \cap \bar{h}$.

Beispiel 2:

Berechnung der Konfokalschar zu einer gegebenen Ellipse k :

Gegeben sei die Ellipse k : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Matrixform in homog. Koord.:

$$k : \quad \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x} = (x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Die duale Darstellung davon lautet $k^*: \vec{y}^T \cdot A^{-1} \cdot \vec{y} = 0$

Wie im Absatz oberhalb erwähnt, existiert ein Paar von Tangenten durch F_1 mit den Fernpunkten I bzw. $\bar{I}$. Die absoluten Kreispunkte werden durch die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 0$ beschrieben, dualisiert führt dies auf $j : y_1^2 + y_2^2 = 0$, darstellbar durch die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In dieser dualen Form berechnet man nun die Konfokalschar:

$$k^* + \lambda j : \quad \vec{y}^T \cdot (A^{-1} + \lambda J) \cdot \vec{y} = 0$$

$$c^* : \quad (y_0, y_1, y_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Erneutes Dualisieren liefert die gesuchte Konfokalschar in Punktdarstellung:

$$c : \quad (x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 + \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2 + \lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c : \quad -x_0^2 + \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} = 0$$

Umgerechnet in affine Koordinaten liefert dies die in der Literatur oft gebräuchliche Darstellung einer konfokalen Kegelschnittsschar:

$$c : \quad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2\}$$

4 Quadrikenbüschel und -scharen

Der Schwerpunkt dieses Kapitels wird auf Konfokalscharen von Quadriken liegen. Es wird lediglich auf die Existenz von Quadrikenbüscheln hingewiesen, eine genauere Auseinandersetzung damit würde jedoch eine weitere komplette Arbeit füllen.

4.1 Quadrikenbüschel

Die Definition eines Quadrikenbüschels findet sich bereits in Abschnitt (3.1). Im Fall von Kegelschnittsbüscheln im $\mathbb{P}^2$ wurden 5 Typen unterschieden.

Im $\mathbb{P}^3$ gibt es 13 verschiedene Arten von Quadrikenbüscheln, welche von Odehnal et al. (2020, S. 177 ff.) beschrieben werden. Je nach Typ des Büschels schneiden die Quadriken einander in Geraden, Kegelschnitten sowie Raumkurven dritter und vierter Ordnung.

Analog zu den Kegelschnittsbüscheln erhält man die singulären Quadriken eines Büschels $P : \vec{x}^T \cdot (\lambda A + \mu B) \cdot \vec{x} = 0$, indem man die Nullstellen der Determinante $\det(\lambda A + \mu B)$ berechnet.

4.2 Konfokalscharen

Definition 4: Zwei Quadriken heißen konfokal, wenn sie gemeinsame Achsen haben und jede Symmetrieebene in konfokalen Kegelschnitten schneiden. (siehe z.B. Odehnal et al., 2020, S. 280)

Bevor wir uns ausführlicher mit konfokalen Quadriken beschäftigen, werden wir analog zum zweidimensionalen Fall eine Gleichung zur Darstellung einer Familie konfokaler Quadriken erarbeiten.

Analog zu den absoluten Kreispunkten enthält jede Kugel den sogenannten Fernkegelschnitt oder auch absoluten Kegelschnitt j als Schnittkurve mit der Fernebene ω .

Berechnung des absoluten Kegelschnitts:

allg. Kugelgleichung $K: (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 - r^2 = 0$

K in homogenen Koord.:

$$\left(\frac{x_1}{x_0} - m_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0} - m_2 \right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_0} - m_3 \right)^2 - r^2 = 0 \quad \Bigg| \quad x_0^2$$

$$(x_1 - m_1 x_0)^2 + (x_2 - m_2 x_0)^2 + (x_3 - m_3 x_0)^2 - r^2 x_0^2 = 0$$

Schneiden mit der Fernebene $\omega : x_0 = 0$ liefert den absoluten Kegelschnitt:

$$K \cap \omega : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Beispiel 3:

Berechnung der Konfokalschar zu einem gegebenen Ellipsoid E :

Gegeben ist das dreiachsige Ellipsoid $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Matrixform in homogenen Koordinaten:

$$K : \vec{x}^T \cdot B \cdot \vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Die duale Form schreiben wir wie folgt an: $E^* : \vec{y}^T \cdot B^{-1} \cdot \vec{y} = 0$.

Analog zum zweidimensionalen Fall dualisieren wir nun die Gleichung des absoluten Kegelschnitts j , dies führt auf $j : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$, die zugehörige Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das duale Büschel $E^* + \lambda j$ berechnet man nun durch:

$$\vec{y}^T \cdot (B^{-1} + \lambda J) \cdot \vec{y} = 0$$

$$q^* : (y_0, y_1, y_2, y_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 + \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Erneutes Dualisieren führt auf die gesuchte Konfokalschar in Punktdarstellung:

$$q : (x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 + \lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2 + \lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2 + \lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Umrechnen in affine Koordinaten erhält man die in der Literatur häufig anzutreffende Darstellung einer einparametrischen Familie konfokaler Quadriken:

$$q : \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}. \quad (10)$$

Auch Odehnal et al. (2020, S. 280) arbeiten mit dieser Gleichung und führen weiter aus: Wenn $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}$ und $a > b > c > 0$ erfüllt ist, dann erhält man für die folgenden Bedingungen je einen der drei auftretenden Flächentypen:

$$\begin{cases} -c^2 < \lambda < \infty, & \text{dreiaxiale Ellipsoide} \\ -b^2 < \lambda < -c^2, & \text{einschalige Hyperboloide} \\ -a^2 < \lambda < -b^2, & \text{zweischalige Hyperboloide} \end{cases} \quad (11)$$

Schneidet man diese Quadriken mit den Koordinatenebenen (= gemeinsame Symmetrieebenen), so erhält man als Schnittkurven jeweils konfokale Kegelschnitte:

- Schnitt mit der Ebene $z = 0$ liefert Kurven mit den Brennpunkten $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0, 0)$
- Schnitt mit der Ebene $y = 0$ liefert Kurven mit den Brennpunkten $(\pm\sqrt{a^2 - c^2}, 0, 0)$
- Schnitt mit der Ebene $x = 0$ liefert Kurven mit den Brennpunkten $(0, \pm\sqrt{b^2 - c^2}, 0)$

4.3 Fokalkegelschnitte

In den Grenzfällen $\lambda \rightarrow -c^2$ und $\lambda \rightarrow -b^2$ (jeweils Annäherung von oben) erhält man unendlich flache Quadriken.

Im erstgenannten Fall führt dies auf die sogenannte Fokalellipse

$$e : \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0 \quad (12)$$

Der zweite Fall liefert die zugehörige Fokalhyperbel

$$h : \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0 \quad (13)$$

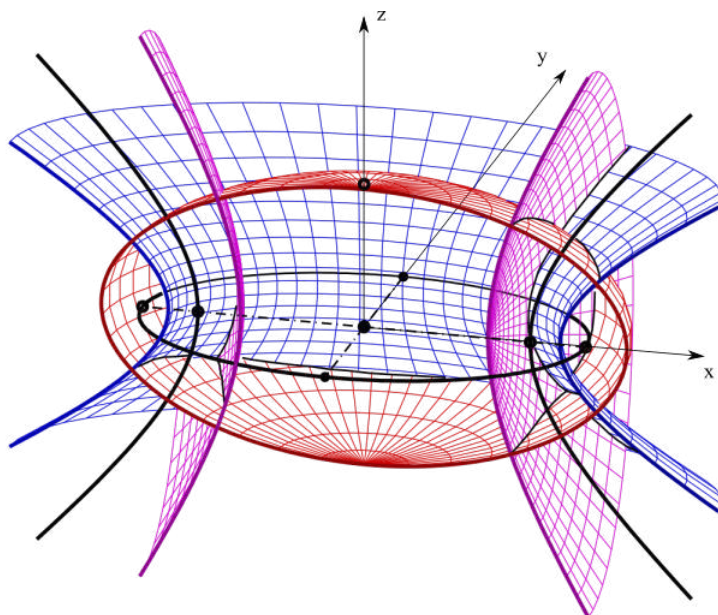


Abbildung 8: Einparametrische Familie konfokaler Quadriken. rot: dreiachsiges Ell., blau: einschaliges Hyp., rosa: zweischaliges Hyp., schwarz: Fokalellipse und -hyperbel

Definition 5: Sei $c_1 \in \mathbb{E}^3$ ein Kegelschnitt, dann heißt ein zweiter Kegelschnitt $c_2 \in \mathbb{E}^3$ **Fokalkegelschnitt** von c_1 , wenn c_1 und c_2 in orthogonalen Ebenen liegen und dieselbe Hauptachse haben. Die Brennpunkte des einen Kegelschnitts fallen dabei mit den Scheitelpunkten des anderen zusammen. (siehe z.B. Glaeser et al., 2016, S. 137)

Nach Glaeser et al (2016, S. 137 ff.) gibt es zwei mögliche Paare von Fokalkegelschnitten:

- Das oberhalb beschriebene Paar bestehend aus einer Ellipse und einer Hyperbel
- Ein Paar aus zwei Parabeln, welche in entgegengesetzte Richtungen geöffnet sind.

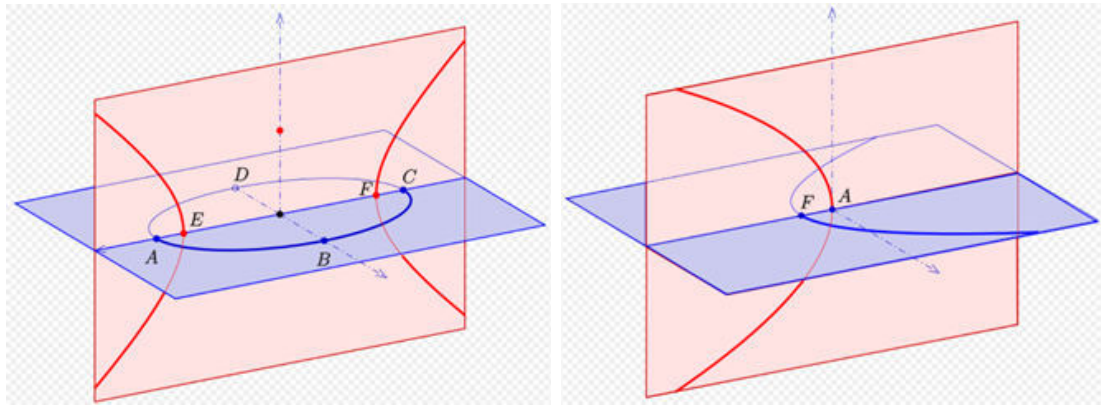


Abbildung 9: Die beiden möglichen Paare von Fokalkegelschnitten

Theorem 2: Seien e, h ein Paar aus Fokalellipse und -hyperbel, dann ist der Verbindungskegel mit beliebiger Spitze $P \in h$ durch die Ellipse e ein Drehkegel. Die Tangente an h im Punkt P ist die Achse dieses Kegels. Dasselbe gilt auch umgekehrt, also jeder Punkt auf e lässt sich durch einen Drehkegel mit h verbinden.

Bemerkung: Die Aussage in Theorem 2 gilt auch für paare von Fokalparabeln (p_1, p_2) . Wählt man eine Kegelspitze $P \in p_1$ beliebig, dann ist der Verbindungskegel durch die Parabel p_2 ein Drehkegel. Die Kegelachse ist die Tangente an p_1 im Punkt P .

Mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln lässt sich dieses Theorem beweisen und veranschaulichen.

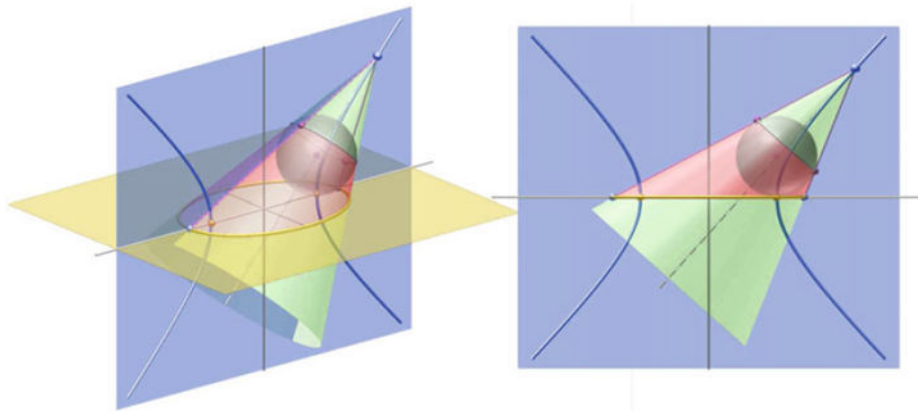


Abbildung 10: Verbindungskegel mit Spitze auf h durch e ; Dandelinsche Kugel berührt die xy -Ebene im Brennpunkt von e .

In Kapitel (1.2) wurde bereits kurz erwähnt, dass Fokalkegelschnitte nicht nur als eigenständige Kurvenpaare auftreten, sondern auch zu einer Fläche zweiter Ordnung gehören und dabei eine vergleichbare Rolle zu den Brennpunkten eines Kegelschnitts in der Ebene spielen.

Hilbert und Cohn-Vossen (1932, S. 18) erklären in diesem Zusammenhang, dass zwei Kegelschnitte die Fokalkurven einer Fläche F zweiter Ordnung sind, wenn:

- die Trägerebenen der Kegelschnitte Symmetrieebenen von F sind und
- die Schnittkurven der Trägerebenen mit der Fläche F wiederum Kegelschnitte sind, die mit den Fokalkurven konfokal liegen.

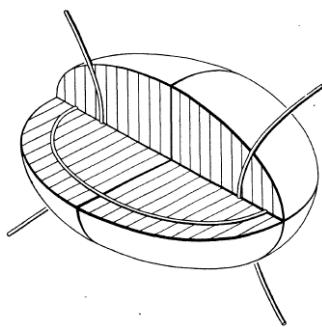


Abbildung 11: Dreiachsiges Ellipsoid mit Ellipse und Hyperbel als Fokalkurven.

4.3.1 Fadenkonstruktion eines dreiachsigen Ellipsoides

Dieses Kapitel orientiert sich an Odehnal et al. (2020, S. 319 ff.) sowie Hilbert und Cohn-Vossen (1932, S. 17 ff.) Da Flächen zweiter Ordnung das räumliche Pendant zu quadratischen Kurven in der Ebene sind, ist es naheliegend zu überlegen, ob man die Fadenkonstruktion (Gärtnerkonstruktion) einer Ellipse auf ein Ellipsoid im Raum übertragen kann.

Otto Staude löste dieses Problem im Jahr 1882. Das folgende Theorem beschreibt die Fadenkonstruktion eines Ellipsoids.

Theorem 3: Sei e eine Ellipse mit Brennpunkten F_1 und F_2 sowie den Hauptscheiteln S_1 und S_2 . Sei h die zugehörige Fokalhyperbel. Dann ist S_1 ein Scheitelpunkt von e und Brennpunkt von h und F_2 ein Brennpunkt von e und ein Scheitelpunkt von h . Nun sei ein Faden mit fester Länge gegeben, der mit einem Ende an S_1 befestigt wird, dann führt man ihn (oberhalb) der Ellipse hinter dem nächstgelegenen Ast von h und (von oben nach unten) vor e vorbei und befestigt das andere Ende schließlich an F_2 (siehe Abb. 12). Wird der Faden an einem Punkt P so gestreckt, dass er ein räumliches Polygon mit den Eckpunkten $S_1, G_1 \in h, P, G_2 \in e, F_2$ (in dieser Reihenfolge!) bildet, dann ist P ein Punkt eines Ellipsoids $\mathcal{E}$, das e und h als Fokalkurven besitzt. (siehe z.B. Odehnal et al., 2020, S. 319 f.)

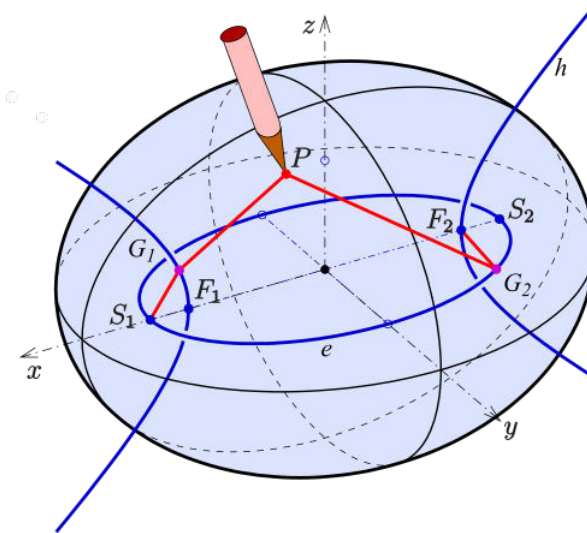


Abbildung 12: Konfiguration wie in Theorem 3

Durch die oben beschriebene Konfiguration wird das vordere obere Viertel des El-

lipsoide erzeugt. Verändert man die Art, wie der Faden zwischen S_1 und F_2 um e und h herumgeführt wird, so lassen sich auch die anderen Teile der Fläche erzeugen.

Das Gerüst aus Ellipse und Hyperbel spielt bei dieser Konstruktion eine ähnliche, wenn auch deutlich komplexere Rolle wie die Brennpunkte bei der ebenen Fadenkonstruktion einer Ellipse (Gärtnerkonstruktion).

Verwendet man für die durch Theorem 3 beschriebene Fadenkonstruktion verschiedene Fadenlängen und lässt das Gerüst der Fokalkurven unverändert, so erhält man eine Schar von konfokalen Ellipsoiden. Diese Ellipsoide überdecken den gesamten $\mathbb{R}^3$ einfach und lückenlos. D.h., dass durch jeden Punkt im Raum genau ein Ellipsoid der Schar hindurchgeht.

Einen Beweis für Theorem 3 liefern z.B. Odenahl et al. (2020, S. 320 ff.).

Zusammenhang von Fadenlänge und Größe des Ellipsoids:

Die Größe des durch die oben beschriebene Fadenkonstruktion erzeugten Ellipsoids $\mathcal{E}$ hängt von der Wahl der Fokalkegelschnitte e und h sowie von der Fadenlänge l ab.

Högel (2023) erklärt dazu, die Fokalkegelschnitte seien durch folgende Parameterdarstellungen gegeben:

$$e(\phi) = (a \cos(\phi), b \sin(\phi), 0), \quad h(\psi) = (c \cosh(\psi), 0, b \sinh(\psi)) \text{ mit } c^2 = a^2 - b^2.$$

Dann erhält man für das Ellipsoid $\mathcal{E}$ mit der Gleichung $\mathcal{E} : \frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} + \frac{z^2}{r_z^2} = 1$ Halbachsenlängen, die sich wie folgt berechnen lassen:

$$r_x = \frac{1}{2}(l - a + c), \quad r_y = \sqrt{r_x^2 - c^2}, \quad r_z = \sqrt{r_x^2 - a^2}$$

Beweis: Die Herleitung der angegebenen Halbachsenlängen lässt sich einfach nachvollziehen, wenn man den Punkt P des gespannten Fadens mit den Scheitelpunkten $Y = (0, r_y, 0)$ bzw. $Z = (0, 0, r_z)$ des Ellipsoid $\mathcal{E}$ zusammenfallen lässt.

Im Grundriss zeigt sich, dass die Fokalellipse e sowie die Äquatorellipse von $\mathcal{E}$ konfokal sind, d.h. sie haben gemeinsame Brennpunkte F_1 und F_2 . Daraus lässt sich leicht erkennen, dass für die Fadenlänge l gilt: $l = 2r_x + (a - c)$ was durch Äquivalenzumformungen die Gleichung $r_x = \frac{1}{2}(l - a + c)$ liefert.

Mit dem Satz des Pythagoras erhält man ebenfalls sofort die Gleichung $r_y^2 = r_x^2 - c^2$.

Im Aufriss sieht man, dass die Schnittellipse von $\mathcal{E}$ mit der xz -Ebene und die Hyperbel h konfokal mit gemeinsamen Brennpunkten S_1 und S_2 sind. Auch hier liefert der Satz des Pythagoras sofort die gesuchte Gleichung $r_z^2 = r_x^2 - a^2$. $\square$

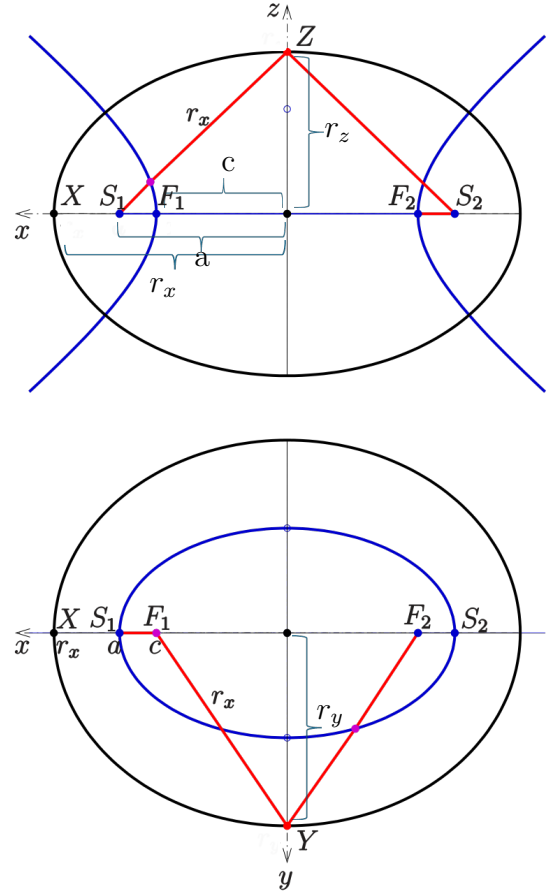


Abbildung 13: Grund- und Aufriss der Fadenkonstruktion; blau: Fokalkegelschnitte, rot: Faden

4.4 Weitere Konfokalscharen

In der Ebene haben wir zwei Konstellationen von konfokalen Kegelschnitten, welche einander schneiden, kennengelernt (Ellipse, Hyperbel), (Parabel, Parabel).

Das dreidimensionale Analogon zum ersten Fall wurde bereits durch die Gleichung (10) ausgehend von einem Ellipsoid beschrieben.

Nun ist es naheliegend, dass es auch für den Fall (Parabel, Parabel) eine Entsprechung im $\mathbb{R}^3$ gibt. Auch diese Schar konfokaler Paraboloiden soll an dieser Stelle in Anlehnung an Odehnal et al. (2020, S. 282 f.) kurz erwähnt werden.

Ausgehend von einem elliptischen Paraboloid $P_{ell} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ erhält man eine Schar konfokaler Paraboloiden, dargestellt durch die folgende Gleichung:

$$p: \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - 2z - \lambda = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2\} \quad (14)$$

Wenn $0 < b < a$ erfüllt ist, enthält diese einparametrische Familie von Quadriken die folgenden Flächen:

$$\begin{cases} -b^2 < \lambda < \infty, & \text{elliptische Paraboloiden} \\ -a^2 < \lambda < -b^2, & \text{hyperbolische Paraboloiden} \\ \lambda < -a^2, & \text{elliptische Paraboloiden} \end{cases}$$

Der Scheitel der Paraboloiden ist abhängig vom Parameter λ und hat stets die Koordinaten $(0, 0, \frac{-\lambda}{2})$.

Schneidet man diese Quadriken mit den Koordinatenebenen, so erhält man als Schnittkurven jeweils konfokale Kegelschnitte:

- Schnitt mit der Ebene $x = 0$ liefert Kurven mit dem gemeinsamen Brennpunkt $(0, 0, \frac{b^2}{2})$
- Schnitt mit der Ebene $y = 0$ liefert Kurven mit dem gemeinsamen Brennpunkt $(0, 0, \frac{a^2}{2})$

Die beiden Fokalparabeln erhält man, indem man den Parameter λ gegen die Grenzwerte $-b^2$ bzw. $-a^2$ konvergieren lässt.

Der Fall $\lambda \rightarrow -b^2$ liefert:

$$f_1: \frac{x^2}{a^2 - b^2} - 2z + b^2 = 0, \quad y = 0$$

Der Fall $\lambda \rightarrow -a^2$ liefert:

$$f_2 : \frac{y^2}{a^2 - b^2} - 2z + a^2 = 0, \quad x = 0$$

4.5 Dreifaches Orthogonalsystem

Dieses Unterkapitel orientiert sich an Högel (2022).

Analog zum zweidimensionalen Fall, bei dem durch jeden Punkt der Ebene genau zwei konfokale Kegelschnitte hindurch gehen, welche einander orthogonal schneiden, gilt für den dreidimensionalen Fall.

Satz 2: Im $\mathbb{R}^3$ beschreibt eine Familie von konfokalen Quadriken ein dreifaches Orthogonalsystem. Das heißt, durch jeden Punkt P im Raum, der nicht in einer der Koordinatenebenen (= gemeinsame Symmetrieebenen) liegt, gehen genau drei konfokale Quadriken (von jedem Flächentyp genau eine); die Quadriken schneiden einander paarweise orthogonal.

Beweis:

(i) Existenz der drei Quadriken durch einen Punkt: Sei $P = (x_0, y_0, z_0)$ mit $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$ ein Punkt im $\mathbb{R}^3$. Setzt man diesen Punkt in die Gleichung (10) einer Familie konfokaler Quadriken ein, so erhält man die Funktion:

$$f(\lambda) = \frac{x_0^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_0^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z_0^2}{c^2 + \lambda} - 1.$$

Diese Funktion hat die drei Polstellen $-a^2 < -b^2 < -c^2$, in den dadurch entstehenden Intervallen liegen drei Nullstellen λ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ der Funktion:

$$-a^2 < \lambda_1 < b^2 < \lambda_2 < c^2 < \lambda_3 < \infty$$

Durch den Punkt P liefert die Nullstelle

- λ_1 das zweischalige Hyperboloid,
- λ_2 das einschalige Hyperboloid,
- λ_3 das dreiachsige Ellipsoid.

Bemerkung: Die Parameter $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, welche die drei Quadriken durch einen Punkt P beschreiben, werden die elliptischen Koordinaten (allg. auch krummlinige Koordinaten) des Punktes P genannt. Aus Gründen der Symmetrie gibt es

jeweils acht Punkte, welche symmetrisch bezüglich der Koordinatenebenen liegen, die dieselben elliptischen Koordinaten besitzen.

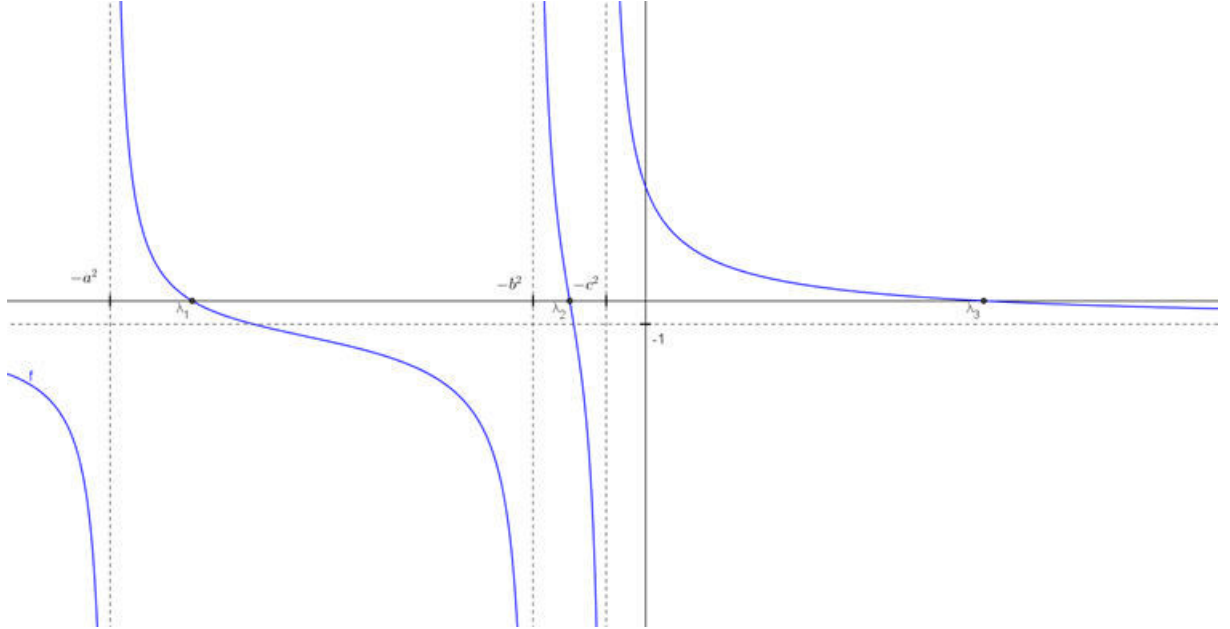


Abbildung 14: Funktion $f(\lambda)$

(ii) Paarweise orthogonale Flächen:

Mit Hilfe der Funktionenschar $F_\lambda(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}$ mit dem Scharparameter λ lassen sich die konfokalen Quadriken durch $F_\lambda(x, y, z) = 1$ beschreiben. Seien $F_{\lambda_1}(x, y, z) = 1$ und $F_{\lambda_2}(x, y, z) = 1$ zwei einander schneidende Quadriken; für sie gilt in einem gemeinsamen Punkt $P = (x, y, z)$:

$$0 = F_{\lambda_1}(x, y, z) - F_{\lambda_2}(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda_1} - \frac{x^2}{a^2 + \lambda_2} + \dots =$$

$$\frac{x^2 a^2 + x^2 \lambda_2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} - \frac{x^2 a^2 + x^2 \lambda_1}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \dots =$$

$$\frac{x^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \dots =$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)} \right) = 0$$

Daraus folgt für die Gradienten $\text{grad } F_{\lambda_i}(x, y, z) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$ der beiden Flächen in einem gemeinsamen Punkt:

$$\langle \text{grad } F_{\lambda_1}(x, y, z), \text{grad } F_{\lambda_2}(x, y, z) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \frac{x}{a^2 + \lambda_1} \\ 2 \frac{y}{b^2 + \lambda_1} \\ 2 \frac{z}{c^2 + \lambda_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \frac{x}{a^2 + \lambda_2} \\ 2 \frac{y}{b^2 + \lambda_2} \\ 2 \frac{z}{c^2 + \lambda_2} \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$4 \left(\frac{x^2}{(a^2 + \lambda_1)(a^2 + \lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)} \right) = 0$$

Somit ist gezeigt, dass die Flächen einer Familie konfokaler Quadriken paarweise orthogonal aufeinander stehen. $\square$

4.6 Schnitt in Krümmungslinien

Mit der Gewissheit, dass die Quadriken einer Konfokalschar ein dreifaches Orthogonalsystem bilden, kann nun eine interessante Folgerung daraus genauer untersucht werden. Folgenden Satz formulierte Charles Dupin 1813.

Satz 3 - Satz von Dupin: Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems schneiden sich gegenseitig in Krümmungslinien. (siehe z.B. Strubecker, 1959, S. 80)

Um diesen Satz zu beweisen, bietet das nachfolgende Kapitel eine Einführung in die Differentialgeometrie.

5 Differentialgeometrie

Das Kapitel über Differentialgeometrie basiert auf den Ausführungen von Bobenko (2006, S. 69 ff.), Högel (2016, 2021, 2022) und Strubecker (1959, S. 25 ff. bzw. 1969, S. 28 ff.). Einige Formulierungen und Abbildungen dieses Kapitels habe ich bereits in meiner Bachelorarbeit „Krümmungen von regulär parametrisierten Flächen“ verwendet.

5.1 Parameterdarstellung der Quadriken

Um Quadriken differentialgeometrisch untersuchen zu können, benötigen wir eine Parameterdarstellung der Flächen, man spricht dann von einer parametrisierten Fläche.

Definition 6: Eine parametrisierte Fläche ist eine glatte Abbildung⁷ $\sigma : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$, das Bild $\sigma(U)$ heißt Fläche und $\sigma(p)$ für $p \in U$ wird Flächenpunkt genannt. Die Kurven $u \mapsto \sigma(u, v_0)$ und $v \mapsto \sigma(u_0, v)$, wobei $(u_0, v_0) \in U$ heißen Parameterlinien.

Jede parametrisierte Fläche besitzt also zwei Familien von Parameterlinien, die u -Linien und die v -Linien.

Bemerkung: Die offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^2$ wird als Parameterbereich bezeichnet.

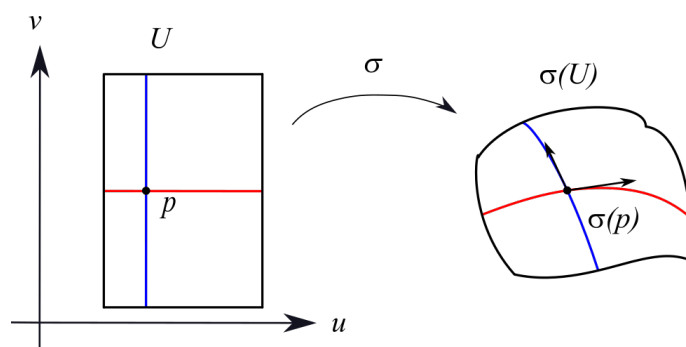


Abbildung 15: σ bildet den Parameterbereich U auf die Fläche $\sigma(U)$ ab.

Ein **Ellipsoid** mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ kann auch durch die folgende Parameterdarstellung angegeben werden:

⁷Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt glatt, falls $f_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $i = 1 \dots n$, d.h. f ist unendlich oft (stetig) differenzierbar.

$$e(u, v) = (a \cos(u) \cos(v), b \sin(u) \cos(v), c \sin(v)) \quad (15)$$

Ein **einschaliges Hyperboloid** mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ wird in Parameterform wie folgt dargestellt:

$$h_1(u, v) = (a \cosh(u) \cos(v), b \cosh(u) \sin(v), c \sinh(u)) \quad (16)$$

Ein **zweischaliges Hyperboloid** mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ besitzt die folgende Parameterdarstellung:

$$h_2(u, v) = (\pm a \cosh(u), b \sinh(u) \cos(v), c \sinh(u) \sin(v)) \quad (17)$$

Die Koeffizienten a, b, c bewirken jeweils eine Streckung bzw. Stauchung in die entsprechende Koordinatenrichtung im Vergleich zu einer reinen Rotationsfläche desselben Typs.

Wir arbeiten bei der Darstellung der konfokalen Quadriken mit der Gleichung (10):

$$q : \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}.$$

Setzt man nun $a^2 + \lambda = \alpha$, $b^2 + \lambda = \beta$ und $c^2 + \lambda = \gamma$, so lassen sich die entsprechenden Parameterdarstellungen auf folgende Weise anschreiben.

Ellipsoid

$$e(u, v) = (\sqrt{|\alpha|} \cos(u) \cos(v), \sqrt{|\beta|} \sin(u) \cos(v), \sqrt{|\gamma|} \sin(v))$$

Einschaliges Hyperboloid

$$h_1(u, v) = (\sqrt{|\alpha|} \cosh(u) \cos(v), \sqrt{|\beta|} \cosh(u) \sin(v), \sqrt{|\gamma|} \sinh(u))$$

Zweischaliges Hyperboloid

$$h_2(u, v) = \left(\pm \sqrt{|\alpha|} \cosh(u), \sqrt{|\beta|} \sinh(u) \cos(v), \sqrt{|\gamma|} \sinh(u) \sin(v) \right)$$

In den folgenden Unterkapiteln werden einige Eigenschaften, Größen und Funktionen eingeführt, um damit erklären zu können, was man unter Krümmungslinien versteht.

5.2 Erste Fundamentalform

Definition 7: Sie $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, dann heißt $I := \langle d\sigma, d\sigma \rangle$ die erste Fundamentalform oder induzierte Metrik von σ . Die Funktionen

$$E := \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \quad F := \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \quad G := \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$$

heißen die Koeffizienten von I .⁸

Bemerkung: Oft wird die erste Fundamentalform auch als Tensor oder Matrix geschrieben:

Tensor: $I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$

Matrix: $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

Anhand der Koeffizienten der ersten Fundamentalform lassen sich drei Typen von speziellen Parametrisierungen charakterisieren.

Definition 8: Eine Parametrisierung $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt:

- orthogonal, wenn $F = 0$
- konform, wenn $E = G$ und $F = 0$
- isometrisch, wenn $E = G = 1$ und $F = 0$

⁸ $\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}$ und $\sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ heißen die partiellen Ableitungen der parametrisierten Fläche $\sigma(u, v)$.

5.3 Gauß-Abbildung

In diesem Abschnitt soll die Fläche ein Einheitsnormalenfeld erhalten, das heißt eine Familie von Vektoren, die normal auf die Fläche stehen und Länge 1 haben. Da parametrisierte Flächen in jedem regulären Punkt ⁹ eine eindeutige Tangentialebene besitzen, gibt es auch in jedem dieser Flächenpunkte genau eine Normale auf die Fläche.

Definition 9: Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, dann heißt das Einheitsnormalenfeld

$$N : U \rightarrow S^2, \quad (u, v) \mapsto \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}(u, v) \quad (18)$$

die Gauß-Abbildung.

5.4 Zweite Fundamentalform

Definition 10: Sei $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, dann heißt $II := \langle d\sigma, dN \rangle$ die zweite Fundamentalform von σ . Die Funktionen

$$e := \langle -\sigma_u, N_u \rangle \quad f := \langle -\sigma_u, N_v \rangle \quad g := \langle -\sigma_v, N_v \rangle$$

heißen die Koeffizienten von II .

Bem.: Durch Differenzieren der Gleichungen $\langle \sigma_u, N \rangle = 0$ und $\langle \sigma_v, N \rangle = 0$ erhält man die folgenden Identitäten:

- $e = \langle -\sigma_u, N_u \rangle = \langle \sigma_{uu}, N \rangle$
- $f = \langle -\sigma_u, N_v \rangle = \langle -\sigma_v, N_u \rangle = \langle \sigma_{uv}, N \rangle$
- $g = \langle -\sigma_v, N_v \rangle = \langle \sigma_{vv}, N \rangle$

Bem.: Auch die zweite Fundamentalform wird oft als Matrix oder Tensor geschrieben.

⁹In einem regulären Punkt gilt: σ_u und σ_v sind linear unabhängig; bis auf einige Scheitelpunkte erfüllen alle Punkte der untersuchten Quadriken diese Bedingung.

5.5 Normalkrümmung einer Fläche

Sei $\sigma(u_0, v_0) = p$ ein Punkt auf der Fläche $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ und $n = \lambda N$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ein Normalvektor der Fläche im Punkt p . Außerdem sei ξ ein beliebiger Tangentialvektor von σ in p . Nun wird die Normalkrümmung der Fläche σ in Richtung ξ interpretiert als die Krümmung der ebenen Schnittkurve, die entsteht, wenn die Fläche σ mit ihrer Normalebene aufgespannt durch den Normalvektor n und die Tangentialrichtung ξ geschnitten wird.

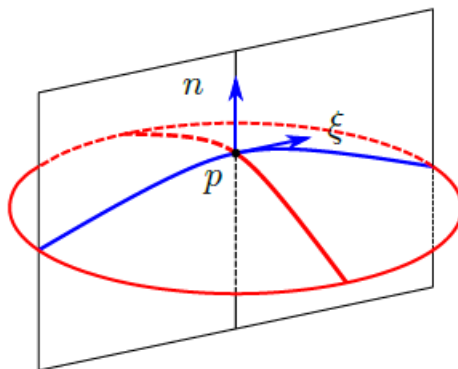


Abbildung 16: Schnitt der Fläche σ mit einer Normalebene

Definition 11: Sei $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ eine parametrisierte Fläche, $\sigma(u_0, v_0) = p$ ein Punkt auf der Fläche σ und ξ ein Tangentialvektor an σ in p . Dann heißt $\kappa_n := \frac{II(\xi)}{I(\xi)}$ die Normalkrümmung von σ in p in Richtung ξ .

Bem.: Analog dazu gilt für eine Flächenkurve $t \mapsto \alpha(t) := \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$:

$$\kappa_n := \frac{II(\gamma')}{I(\gamma')} = \frac{e \gamma_1'^2 + 2f \gamma_1' \gamma_2' + g \gamma_2'^2}{E \gamma_1'^2 + 2F \gamma_1' \gamma_2' + G \gamma_2'^2}$$

5.6 Hauptkrümmungen einer Fläche

Wenn man die Normalkrümmung in einem Flächenpunkt $p \in \sigma$ betrachtet, so nimmt sie dabei im Allgemeinen in jeder Richtung einen anderen Wert an. Der kleinste bzw. größte dieser Werte wird mit κ_1 bzw. κ_2 bezeichnet, κ_1 und κ_2 werden Hauptkrümmungen genannt. Die zugehörigen Richtungen werden als Hauptkrümmungsrichtungen e_1 bzw. e_2 bezeichnet. Der Winkel zwischen diesen Richtungen

beträgt 90° .

Eine einfache Methode, die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 sowie die Hauptkrümmungsrichtungen e_1 und e_2 zu berechnen, ist es, die Matrixdarstellung A der Weingartenabbildung zu benutzen.

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & Gf - Fg \\ Ef - Fe & Eg - Ff \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 .

Die Eigenvektoren sind die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen e_1 und e_2 .

Für den Beweis, dass κ_1 bzw. κ_2 wirklich die kleinste bzw. größte Normalkrümmung liefern, benötigt man zuerst der Satz von Euler.

Satz 4 - Satz von Euler: Seien e_1, e_2 die Hauptkrümmungsrichtungen und κ_1, κ_2 die Hauptkrümmungen, dann ist die Normalkrümmung in Richtung

$$e(\varphi) := \cos(\varphi) e_1 + \sin(\varphi) e_2$$

gegeben durch

$$\kappa_n(\varphi) = \kappa_1 \cos^2(\varphi) + \kappa_2 \sin^2(\varphi)$$

Bemerkung: Mit Hilfe dieses Satzes kann nachgerechnet werden, dass κ_1 bzw. κ_2 das Minimum bzw. Maximum der Normalkrümmungen liefern.

Sei O.B.d.A. $\kappa_1 \leq \kappa_2$

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2(\varphi) + \kappa_2 \sin^2(\varphi) = \kappa_1 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2(\varphi) \geq \kappa_1,$$

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2(\varphi) + \kappa_2 \sin^2(\varphi) = \kappa_2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + (\kappa_1 - \kappa_2) \cos^2(\varphi) \leq \kappa_2.$$

5.7 Konjugierte Netze

Definition 12: Zwei Vektoren $\tau = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$ und $\varepsilon = \lambda \sigma_u + \mu \sigma_v$ in der Tangentialebene der Fläche $\sigma(u, v)$ heißen konjugiert (zueinander), wenn sie orthogonal

bezüglich der zweiten Fundamentalform sind, d.h.

$$(\alpha, \beta) \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = 0$$

Definition 13: Eine Parametrisierung $\sigma : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt konjugiert, wenn in jedem Punkt die Tangenten an die Parameterlinien konjugiert sind.

Lemma 1: σ ist konjugiert $\Leftrightarrow \sigma_{uv} \in \text{span}(\sigma_u, \sigma_v)$

Beweis: σ ist konjugiert $\Leftrightarrow (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Leftrightarrow \langle \sigma_{uv}, N \rangle = 0 \Leftrightarrow \sigma_{uv} \perp N \Leftrightarrow \sigma_{uv} \in \text{span}(\sigma_u, \sigma_v)$ $\square$

Bemerkung: Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit ist insbesondere das Resultat: σ ist konjugiert $\Leftrightarrow f = 0$ von Bedeutung.

5.8 Krümmungslinien

Definition 14: Eine Kurve $t \mapsto \alpha(t)$ auf der Fläche $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ heißt Krümmungslinie genau dann, wenn ihre Tangente in jedem Punkt p parallel zu einer Hauptkrümmungsrichtung der Fläche in p ist.

Für Krümmungslinien gilt demzufolge, dass ihre Normalkrümmung κ_n in jedem Punkt gleich einer Hauptkrümmung der Fläche ist. Da die Hauptkrümmungsrichtungen normal aufeinander stehen, gilt weiters:

$$\sigma_u \perp \sigma_v \Rightarrow \sigma_u \parallel N_u, \quad \sigma_v \parallel N_v.$$

Damit ergeben sich die **Formeln von Rodriguez**, mit welchen sich Krümmungslinien charakterisieren lassen.

$$N_u = -\kappa_1 \sigma_u, \quad N_v = -\kappa_2 \sigma_v. \quad (19)$$

Bemerkung: Da die Hauptkrümmungsrichtungen normal aufeinander stehen, bilden auch die Krümmungslinien ein orthogonales Kurvennetz auf einer Fläche σ .

5.8.1 Krümmungslinienparametrisierung

Definition 15: Eine Parametrisierung $(u, v) \mapsto \sigma(u, v)$ heißt Krümmungslinienparametrisierung, wenn alle Parameterlinien Krümmungslinien sind.

Bemerkung: Krümmungslinienparametrisierungen sind konjugiert. Daher genügt es zu zeigen, dass für die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform $F = f = 0$ gilt, um nachzurechnen, ob eine Fläche nach ihren Krümmungslinien parametrisiert ist.

6 Satz von Dupin

Zur Erinnerung an dieser Stelle nochmal der **Satz von Dupin**: Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems schneiden sich gegenseitig in Krümmungslinien.

Der folgende Beweis orientiert sich an den Ausführungen von Dörrie (1941, S. 186 f.)

Beweis: In einem dreifachen Orthogonalsystem kann jeder Punkt im $\mathbb{R}^3$ als gemeinsamer Schnittpunkt X von drei Flächen angegeben werden. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Scharparameter der entsprechenden Flächen, dann können diese $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$ als neue Koordinaten des Punktes X interpretiert werden. $X = x(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Im Fall von drei konfokalen Quadriken heißen die λ_i die elliptischen Koordinaten des Punktes X . Allgemein spricht man auch von krummlinigen Koordinaten.

Hält man eine der drei Koordinaten konstant, so erhält man durch Variation der anderen beiden Koordinaten eine Fläche durch X .

Sei $\lambda_1 = r = \text{const.}$ liefert dies die Fläche $x(r, \lambda_2, \lambda_3)$.

$\lambda_2 = s = \text{const.}$ liefert die Fläche $x(\lambda_1, s, \lambda_3)$.

$\lambda_3 = t = \text{const.}$ liefert die Fläche $x(\lambda_1, \lambda_2, t)$.

Setzt man für r, s, t immer andere geeignete Werte (für den Fall konfokaler Quadriken siehe (11)) ein, so erhält man drei Flächenscharen.

Sei nun $x_i = \frac{\partial x}{\partial \lambda_i}$, dann liefert die Voraussetzung, dass es sich um paarweise orthogonale Flächen handelt, die folgenden Bedingungen:

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 0, \quad \langle x_2, x_3 \rangle = 0, \quad \langle x_3, x_1 \rangle = 0 \quad (20)$$

Leitet man diese Gleichungen erneut nach dem jeweils fehlenden Parameter ab, erhält man das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_{23} \rangle + \langle x_2, x_{13} \rangle &= 0 \\ \langle x_3, x_{12} \rangle + \langle x_2, x_{13} \rangle &= 0 \\ \langle x_1, x_{23} \rangle + \langle x_3, x_{12} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Lösen des Gleichungssystems erkennt man, dass die drei auftretenden Skalarprodukte alle gleich 0 sind, also:

$$\langle x_1, x_{23} \rangle = 0, \quad \langle x_2, x_{13} \rangle = 0, \quad \langle x_3, x_{12} \rangle = 0 \quad (22)$$

Aus (20) und (22) erkennt man nun, dass gilt:

$$x_3 \perp x_1, x_2, x_{12} \Rightarrow x_{12} \in \text{span}\{x_1, x_2\} \Rightarrow \det(x_1, x_2, x_{12}) = 0 \quad (23)$$

analog erhält man:

$$\begin{aligned} \det(x_2, x_3, x_{23}) &= 0 \\ \det(x_1, x_3, x_{13}) &= 0 \end{aligned}$$

Aus (20) lässt sich sofort ablesen, dass für den Koeffizienten F der 1. Fundamentalform gilt: $F = 0$.

Mit Hilfe von (23) lässt sich wiederum der Koeffizient f der 2. Fundamentalform berechnen:

$$\det(x_1, x_2, x_{12}) = \langle (x_1 \times x_2), x_{12} \rangle \cong \langle n, x_{12} \rangle = f = 0$$

Damit ist für die Fläche $x(\lambda_1, \lambda_2, t)$ gezeigt, dass für die Koeffizienten F und f der zugehörigen 1. und 2. Fundamentalform gilt: $F = f = 0$.

$F = 0$ bedeutet, die Parametrisierung ist orthogonal.

$f = 0$ heißt, die Parameterlinien bilden ein konjugiertes Netz.

Somit sind die Parameterlinien, welche die Schnittkurven mit den Flächen der anderen beiden Scharen sind, Krümmungslinien.

Analog lässt sich dieses Ergebnis auch für die anderen Flächen zeigen. $\square$

6.1 Weitere Beispiele für dreifache Orthogonalsysteme

Neben den konfokalen Quadriken, wie sie durch Gleichung (10) beschrieben werden, gibt es noch weitere Beispiele für dreifache Orthogonalsysteme.

Auch Scharen konfokaler Paraboloiden, wie sie in Abschnitt (4.4) beschrieben werden, bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem. In Abbildung (17) wird der Satz von Dupin für konfokale Paraboloiden veranschaulicht.

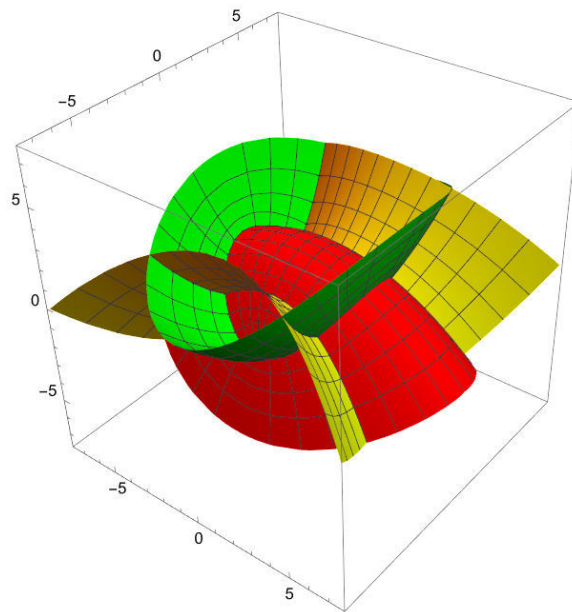


Abbildung 17: Konfokale Paraboloiden mit Krümmungslinien

Das einfachste Beispiel für ein dreifaches Orthogonalsystem sind die drei Scharen von Ebenen, welche zu je einer der Ebenen eines kartesischen Koordinatensystems parallel sind.

Ein ähnlich triviales Beispiel ist: Eine Schar koaxialer senkrechter Drehzylinder, ein Ebenenbüschel welches die Zylinderachse enthält, sowie eine Schar von Ebenen, welche auf die Zylinderachse orthogonal stehen.

Bei diesen Beispielen ist zu beachten, dass die Ebenen selbst keine Krümmungslinien besitzen, da die Normalkrümmung in alle Richtungen gleich null ist. Die Ebenen schneiden jedoch die Zylinder nach deren Krümmungslinien (Erzeugende, horizontale Breitenkreise).

Ein weiteres Beispiel liefert ein Flächensystem bestehend aus einer Schar Tori mit demselben Mittenkreis, einer Schar Kegel durch diesen Leitkreis und Spitze auf der Torusachse sowie einer Schar von Ebenen, welche die Torusachse enthält.

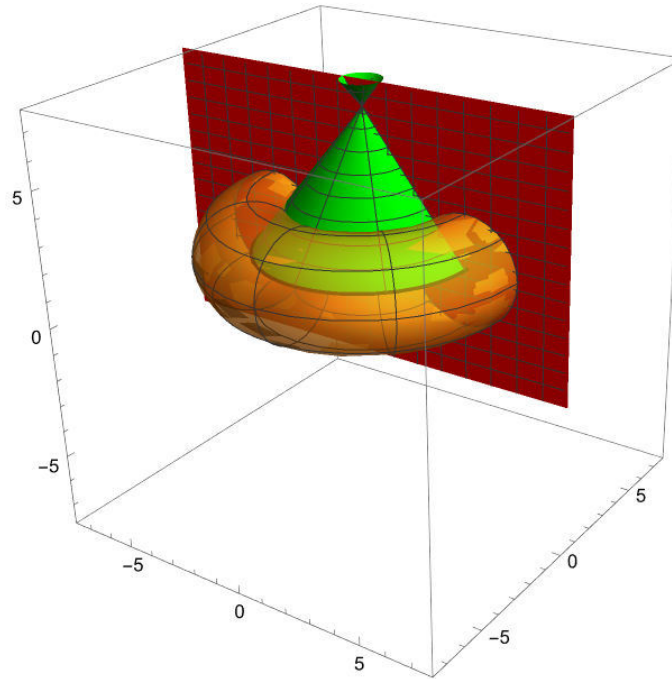


Abbildung 18: Der Torus ist hier transparent dargestellt, damit der Mittenkreis im Inneren erkennbar ist.

Es ist leicht ersichtlich, dass Torus und Kegel orthogonal aufeinander stehen, denn der Mittenkreis ist die Menge aller Mittelpunkte der Meridiankreise des Torus. Somit sind die Erzeugenden des Kegels (in der oben beschriebenen Lage), welche durch den Mittenkreiskreis hindurchgehen Radien der Meridiankreise.

Die Tori und Kegel in diesem Beispiel sind Drehflächen, sie entstehen durch die Rotation einer Meridiankurve um die z -Achse. Die Bahnkurven der einzelnen Punkte eines Meridians sind Kreise, sie werden als Breitenkreise bezeichnet. Die Meridiane und Breitenkreise einer Drehfläche sind ihre Krümmungslinien. Beim Torus sind dies zwei Scharen von Kreisen. Die Meridiane eines Kegels sind Geraden - die Erzeugenden des Kegels.

Die räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) liefern ein anderes Beispiel bestehend aus: Allen Kugeln mit gemeinsamen Mittelpunkt O , allen coaxialen Drehkegeln mit derselben Spitze im Kugelmittelpunkt O sowie einem Ebenenbündel durch die Kegelachse (= z -Achse).

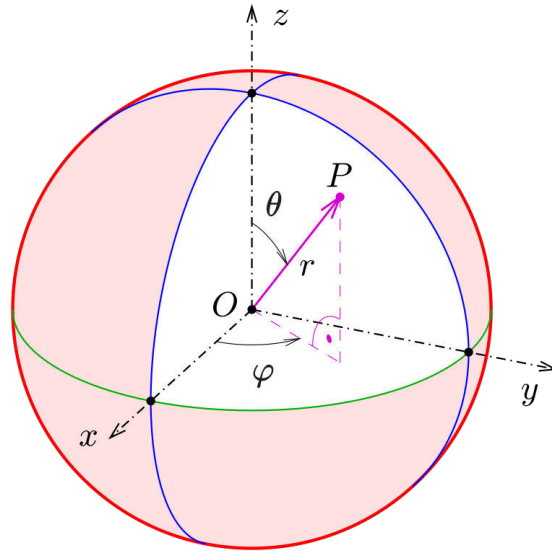


Abbildung 19: Die räumlichen Polarkoordinaten auf einer Kugel

Fasst man die Kugeln und Kegel als Drehflächen auf, so erkennt man, dass die auftretenden Schnittkurven bzw. -geraden genau die Meridiankurven (bzw. Erzeugenden des Kegels) sowie die Breitenkreise und somit auch die Krümmungslinien der Flächen sind.

7 Fazit

Das Thema dieser Arbeit sind Quadriken, dabei werden sowohl Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$ als auch Flächen zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$ behandelt. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten und für diese Arbeit relevanten Typen von Quadriken und deren Eigenschaften vorgestellt. Außerdem wird gezeigt, dass mit Hilfe der Hauptachsentransformation jede Quadrik so verschoben und gedreht werden kann, dass ihr Mittelpunkt sowie ihre Achsen mit dem Koordinatenursprung bzw. den -achsen übereinstimmen.

Kapitel zwei befasst sich mit den Grundlagen der Projektiven Geometrie. Es wird dabei das Dualitätsprinzip sowie die homogenen Koordinaten eingeführt. Ein Punkt $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ erhält im $\mathbb{P}^3$ die homogenen Koordinaten $P = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ wobei gilt: $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$, $x_0 \neq 0$ für alle eigentlichen Punkte.

Im dritten Kapitel werden die zueinander dualen Kegelschnittsbüschel und -scharen betrachtet. Insbesondere werden auch die Eigenschaften konfokaler Kegelschnitte erklärt. Außerdem wird die Berechnung einer konfokalen Kegelschnittsschar durchgeführt.

In Kapitel vier wird die Gleichung $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-a^2, -b^2, -c^2\}$ einer einparametrischen Familie konfokaler Quadriken im $\mathbb{R}^3$ hergeleitet. Ein besonderer Schwerpunkt liegt im Folgenden auf den dabei auftretenden Fokalkegelschnitten, welche z.B. für die Fadenkonstruktion eines dreiachsigen Ellipsoids von Bedeutung sind.

Des Weiteren wird der Beweis erbracht, dass in einer einparametrischen Familie konfokaler Quadriken jede Fläche eines Typs jede Fläche der beiden anderen Flächentypen unter einem rechten Winkel schneidet. Ein solches Flächensystem heißt dreifach orthogonal.

Im fünften Kapitel wird ein kurzer Einblick in die Differentialgeometrie gewährt. Die Hauptkrümmungen κ_1 , κ_2 bzw. Hauptkrümmungsrichtungen e_1 , e_2 werden als Eigenwerte bzw. -vektoren der Matrixdarstellung der Weingartenabbildung berechnet. Dabei wird nachgewiesen, dass die Hauptkrümmungen das Minimum bzw. Maximum der Normalkrümmungen darstellen. Krümmungslinien sind jene Kurven auf einer Fläche, deren Tangentenvektor in jedem Punkt Hauptkrümmungsrichtung hat.

In Kapitel sechs wird mit den Erkenntnissen aus der Differentialgeometrie der Satz von Dupin bewiesen. Dieser besagt, dass sich die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems in ihren Krümmungslinien schneiden. Außerdem werden weitere

Beispiele für dreifach orthogonale Flächensysteme besprochen und mit Grafiken veranschaulicht.

8 Bibliografie

8.1 Literaturverzeichnis

- Barth, Wolf Paul (1998): Projektive Geometrie. (Vorlesungsskriptum) Universität Erlangen. In: https://www.math-datascience.nat.fau.de/files/2022/03/barth_pgset.pdf [11.04.2024]
- Bobenko, Alexander (2006): Differentialgeometrie von Kurven und Flächen (Vorlesungsskriptum) Technische Universität Berlin. In: <https://page.math.tu-berlin.de/~bobenko/Lehre/Skripte/KuF.pdf> [11.04.2024]
- Brauner, Heinrich (1973): Projektive Geometrie I. (Vorlesungsskriptum) Technische Universität Wien. In: https://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/pdf/brauner_projektive_geometrie_i_1972-1973.pdf [11.04.2024]
- Dörrie, Heinrich: Vektoren. Verlag von R. Oldenbourg München, Berlin: 1941
- Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnal, Boris: The Universe of Conics. Springer-Verlag Berlin: 2016
- Grillmayer, Dieter: Im Reich der Geometrie. Teil I: Ebene Geometrie. Books on Demand GmbH Norderstedt: 2009
- Halbeisen, Lorenz; Hungerbühler, Norbert (2016): Einführung in die Projektive Geometrie. (Workshop-Manuskript) ETH Zürich. In: <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-1511-00L/sc/ProjektiveGeometrie.pdf> [11.04.2024]
- Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stefan: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XXXVII: Anschauliche Geometrie. Springer – Verlag Berlin 1932
- Högl, Bianca (2023): Ellipsoid. In: <https://www.biancahoegel.de/geometrie/koerper/ellipsoid.html> [16.02.2024]
- Högl, Bianca (2016): Erste Fundamentalform. In: https://www.biancahoegel.de/geometrie/diff/fundamentalform_erste.html [11.04.2024]
- Högl, Bianca (2022): Flächen (Mathematik). In: <https://www.biancahoegel.de/geometrie/ebene/flaeche.html> [12.04.2024]
- Högl, Bianca (2022): Hauptkrümmung. In: <https://www.biancahoegel.de/geometrie/diff/hauptkruemmung.html> [11.04.2024]

- Högl, Bianca (2022): Konfokale Kegelschnitte. In: https://www.biancahoegel.de/geometrie/kegel/kegelschnitt_konfokal.html [16.02.2024]
- Högl, Bianca (2022): Quadrik. In: <https://www.biancahoegel.de/geometrie/koerper/quadrik.html> [16.02.2024]
- Högl, Bianca (2019): Rang. In: <https://www.biancahoegel.de/mathe/algebra/rang.html> [16.02.2024]
- Högl, Bianca (2021): Zweite Fundamentalform. In: https://www.biancahoegel.de/geometrie/diff/fundamentalform_zweite.html [11.04.2024]
- Odehnal, Boris; Stachel, Hellmuth; Glaeser, Georg: The Universe of Quadriks. Springer-Verlag Berlin: 2020
- Schoenflies, Arthur: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XXI: Einführung in die Analytische Geometrie. Springer-Verlag Berlin: 1931
- Strubecker, Karl: Differentialgeometrie. Band II: Theorie der Flächenmetrik. Walter de Gruyter & Co Berlin: 1969
- Strubecker, Karl: Differentialgeometrie. Band III: Theorie der Flächenkrümmung. Walter de Gruyter & Co Berlin: 1959
- Xylander, Bert (2016): Das einschalige Hyperboloid. In: http://www.maphi.de/mathematik/flaechen/hyperboloid_einschalig.html [16.02.2024]
- Xylander, Bert (2016): Das Ellipsoid. In: <http://www.maphi.de/mathematik/flaechen/ellipsoid.html> [16.02.2024]
- Xylander, Bert (2016): Das zweischalige Hyperboloid. In: <http://www.maphi.de/mathematik/flaechen/ellipsoid.html> [16.02.2024]
- Xylander, Bert (2016): Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung. In: <http://www.maphi.de/mathematik/flaechen/klassifikation.html> [16.02.2024]
- Xylander, Bert (2016): Transformation in die Normalform. In: <http://www.maphi.de/mathematik/flaechen/transformation.html> [16.02.2024]

8.2 Abbildungsverzeichnis

- Abbildung 1: Odehnal, Boris; Stachel, Hellmuth; Glaeser, Georg: The Universe of Quadriks. S. 4, Springer-Verlag Berlin: 2020 S. 8
- Abbildung 2: Eigene Darstellung S. 12
- Abbildung 3: Eigene Darstellung S. 14
- Abbildung 4: Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnal, Boris: The Universe of Conics. S. 286, Springer-Verlag Berlin: 2016 S. 21
- Abbildung 5: Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnal, Boris: The Universe of Conics. S. 288, Springer-Verlag Berlin: 2016 S. 22
- Abbildung 6: Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnal, Boris: The Universe of Conics. S. 308, Springer-Verlag Berlin: 2016 S. 23
- Abbildung 7: Högl, Bianca (2022): Konfokale Kegelschnitte. In: https://www.biancahoeegel.de/geometrie/kegel/kegelschnitt_konfokal.html [16.02.2024] S. 24
- Abbildung 8: Veränderte Abbildung nach: https://de.wikipedia.org/wiki/Konfokale_Kegelschnitte [06.05.2024]¹⁰ S. 30
- Abbildung 9: Högl, Bianca (2022): Fokalkegelschnitt. In: <https://de.wikipedia.org/wiki/Fokalkegelschnitt> [06.05.2024] S. 31
- Abbildung 10: Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnal, Boris: The Universe of Conics. S. 138, Springer-Verlag Berlin: 2016 S. 32
- Abbildung 11: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stefan: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XXXVII: Anschauliche Geometrie. S. 18, Springer – Verlag Berlin 1932 S. 32
- Abbildung 12: Veränderte Abbildung nach: <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid#/media/Datei:Fokalks-ellipsoid.svg> [24.07.2024]¹¹ S. 33

¹⁰Link zur Lizenz, die das Verändern der Abbildung erlaubt: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quadriken-konf-fk.svg>

¹¹Link zur Lizenz, die das Verändern der Abbildung erlaubt: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fokalks-ellipsoid.svg>

- Abbildung 13: Veränderte Abbildung nach: <https://de.wikipedia.org/wiki/Ellipsoid> [06.05.2024]¹² S. 35
- Abbildung 14: In Anlehnung an Högl, Bianca (2022): Konfokale Kegelschnitte. In: https://www.biancahoegel.de/geometrie/kegel/kegelschnitt_konfokal.html [16.02.2024] S. 38
- Abbildung 15: Eigene Darstellung S. 40
- Abbildung 16: Eigene Darstellung S. 44
- Abbildung 17: Eigene Darstellung S. 50
- Abbildung 18: Eigene Darstellung S. 51
- Abbildung 19: Högl, Bianca (2022): Kugelkoordinaten. In: <https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#/media/Datei:Kugelkoord-def.svg> [08.07.2024] S. 52

¹²Link zur Lizenz, die das Verändern der Abbildung erlaubt: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fokalks-ellipsoid-xyz.svg>