

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Wirksamkeit des TI-Nspire im Mathematikunterricht:
Entwicklung und Evaluation innovativer Lehrmaterialien

verfasst von | submitted by
Claudia Oswald BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 513 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Haushaltsökonomie und Ernährung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Martina Müller

1 Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinen herzlichen Dank an alle aussprechen, die mich auf meinem Weg zu dieser Masterarbeit begleitet und unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt der Leitung meiner Schule, die mir stets Unterstützung und die Möglichkeit zur Forschung gegeben hat. Durch das Vertrauen und die zahlreichen Gelegenheiten, eigene Projekte zu verfolgen, konnte ich wertvolle Erfahrungen sammeln und mich sowohl fachlich als auch persönlich weiterentwickeln.

Ebenso bedanke ich mich bei meinen Kolleginnen, die mir nicht nur wertvolle Unterstützung geleistet, sondern auch durch kritische Fragen und Perspektiven immer wieder neue Blickwinkel gegeben haben. Diese Rückmeldungen und Diskussionen haben einen wichtigen Beitrag zu meiner Arbeit geleistet und mich inspiriert, weiter zu denken und kontinuierlich zu verbessern.

Ein besonderer Dank gilt meiner Betreuerin, die mir während des gesamten Prozesses stets zur Seite stand und mir die nötige Freiheit gewährte, meine Ideen zu entfalten. Ihre Unterstützung und das Vertrauen in meine Arbeit haben mir den nötigen Raum gegeben, um kreativ und eigenständig zu arbeiten.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie und meinen Freunden danken, die in den herausfordernden Phasen immer für mich da waren, mich aufgebaut und mir den nötigen Rückhalt gegeben haben. Ohne ihre Ermutigung und die vielen Momente der Unterstützung wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

2 Abstract

Diese Masterarbeit untersucht die Wirksamkeit des Einsatzes des graphikfähigen Taschenrechners TI-Nspire im Mathematikunterricht, insbesondere im Kontext der linearen Optimierung. Ziel der Arbeit ist es, zu klären, inwiefern der TI-Nspire das mathematische Verständnis sowie die Problemlösefähigkeit von Schülerinnen und Schülern im Vergleich zur traditionellen händischen Bearbeitung fördert. Die zentrale Forschungsfrage lautet: *Wie beeinflusst der Einsatz des TI-Nspire das Verständnis und die Leistungsfähigkeit bei Aufgaben zur linearen Optimierung?* Es wird die Hypothese aufgestellt, dass der Taschenrechner durch Visualisierungen, die Reduktion kognitiver Belastung und automatisierte Rechenschritte das konzeptuelle Verständnis und die Effizienz der Schülerinnen und Schüler signifikant verbessert.

Die Untersuchung basiert auf einem praxisorientierten Unterrichtsprojekt mit einer Klasse der 10. Schulstufe, in dem zwei Phasen – eine händische und eine technologiegestützte – miteinander verglichen wurden. Die Evaluation erfolgte mittels zweier standardisierter Kompetenzchecks und qualitativer Beobachtungen. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Leistungssteigerung bei der rechnergestützten Bearbeitung: Höhere Punktzahlen, geringere Leistungsschwankungen und besseres konzeptuelles Verständnis belegen den positiven Effekt des TI-Nspire, insbesondere bei graphisch-visuellen Aufgaben. Zugleich wird deutlich, dass der Einsatz technologischer Hilfsmittel fundierte Bedienkompetenz und didaktische Einbettung erfordert, um sein volles Potenzial zu entfalten.

This master's thesis investigates the effectiveness of using the TI-Nspire graphing calculator in mathematics education, with a particular focus on linear optimization. The aim is to determine to what extent the TI-Nspire enhances students' mathematical understanding and problem-solving skills compared to traditional manual methods. The central research question asks: *How does the use of the TI-Nspire influence students' understanding and performance when solving linear optimization problems?* The underlying hypothesis assumes that the calculator improves conceptual understanding and efficiency through visualizations, reduced cognitive load, and automated calculations.

The study is based on a practice-oriented teaching project involving a second-year class, comparing two instructional phases—one using traditional methods and the other incorporating the TI-Nspire. Evaluation was conducted through two standardized achievement

tests and qualitative classroom observations. The findings indicate a clear performance improvement in the technology-supported phase: students achieved higher scores, showed reduced performance variability, and demonstrated stronger conceptual understanding, especially in graphically and visually demanding tasks. At the same time, the study reveals that technological tools must be accompanied by solid user skills and thoughtful pedagogical integration to fully realize their benefits.

Inhaltsverzeichnis

1	Danksagung	I
2	Abstract	II
3	Einleitung	1
4	Technologie im Mathematikunterricht	2
4.1	Definition und Bedeutung im Unterricht	2
4.2	Arten von Technologie im Unterricht	2
4.2.1	Computer-Algebra-Systeme (CAS)	2
4.2.2	Tabellenkalkulationssoftware (TKS)	3
4.2.3	Dynamische Geometriesoftware (DGS)	4
4.3	Bezug zum Lehrplan und zur Reife- und Diplomprüfung	4
4.3.1	Lehrplan AHS Oberstufe	4
4.3.2	Lehrplan BHS	5
4.3.3	Reife- und Diplomprüfungsverordnung	7
4.4	Anpassungen und Neuerungen im Unterricht	9
4.5	Chancen und Herausforderungen	10
4.6	Didaktische Grundlagen	11
4.6.1	Mathematisches Wissen	11
4.6.2	Kreativspirale	13
4.6.3	White Box- und Black Box-Prinzip	16
4.6.4	Spiralprinzip	17
4.6.5	Modulprinzip	18
4.7	Einsatzmöglichkeiten	19
4.7.1	Visualisierung	19
4.7.2	Experimentieren	21
4.7.3	Modellierungsfunktion	22
4.7.4	Rechenfertigkeit	23
4.7.5	Kontrollieren	24
4.8	Auswirkungen auf den Unterricht	26
4.8.1	Strukturerkennungskompetenz	26
4.8.2	Werkzeugkompetenz	27

4.8.3	Visualisierungskompetenz	27
4.8.4	Kontrollkompetenz	27
4.9	Vor- und Nachteile des Technologieeinsatzes	28
4.10	Bestehende Forschungen.....	32
4.10.1	Modellversuch M3	32
4.10.2	CALIMERO	33
4.10.3	TIM	34
4.10.4	ACDCA	35
4.10.5	CAS Pilotprojekt	39
4.10.6	Fazit der Studien	41
5	Einsatz des TI-Nspire im Mathematikunterricht	42
5.1	Bedeutung von CAS	42
5.2	Zeitlicher Überblick über den Einsatz von CAS im Unterricht.....	43
5.3	Funktionsweise und Möglichkeiten des TI-Nspire CXII-T CAS.....	45
5.3.1	Apps und deren Möglichkeiten für einen Einsatz im Unterricht	45
5.3.2	Erweiterte Funktionen.....	48
6	Empirische Forschung	49
6.1	Forschungsfragen und Hypothesen.....	49
6.1.1	Forschungsfrage.....	49
6.1.2	Vermutungen	50
6.1.3	Hypothese	51
6.2	Methode und Vorbereitung	52
6.2.1	Lineare Optimierung	52
6.2.2	Konzeption und Gestaltung der Lehrmaterialien	55
6.2.3	Integration im Unterricht	60
6.3	Durchführung der Evaluation	64
6.4	Evaluation der Ergebnisse	67
6.5	Diskussion	76
6.6	Zukünftige Forschungen und Limitationen.....	79
7	Conclusio	81
8	Literaturverzeichnis	82

9	Abbildungsverzeichnis	89
10	Anhang.....	89

3 Einleitung

Mathematikunterricht mit Papier, Bleistift und Tafel – jahrzehntelang das vertraute Bild in Klassenzimmern. Doch was passiert, wenn plötzlich ein Taschenrechner mehr kann als nur rechnen? Wenn er Funktionen zeichnen, Gleichungssysteme lösen und sogar ganze Optimierungsprobleme modellieren kann?

Mit der fortschreitenden Digitalisierung wird der Mathematikunterricht zunehmend von technologischen Entwicklungen geprägt. Besonders graphikfähige Taschenrechner, wie der TI-Nspire CX II-T CAS, eröffnen neue didaktische Perspektiven: Sie ermöglichen dynamische Visualisierungen, fördern entdeckendes Lernen und bieten Unterstützung beim Lösen komplexer Aufgabenstellungen.

Die vorliegende Masterarbeit nimmt diesen Wandel in den Blick und widmet sich der zentralen Frage, wie wirksam der Einsatz des TI-Nspire im Mathematikunterricht tatsächlich ist. Dabei steht nicht nur die technische Funktionalität des Geräts im Fokus, sondern vor allem sein konkreter Einfluss auf den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler sowie auf die didaktischen Entscheidungen der Lehrpersonen.

Ziel der Arbeit ist es, die Effizienz und den Mehrwert des TI-Nspire im Vergleich zu herkömmlichem Unterricht zu untersuchen. Im Zentrum steht dabei das Themengebiet der linearen Optimierung, das sowohl rechnerische als auch visuelle und anwendungsorientierte Elemente enthält. Es bietet damit eine geeignete Grundlage, um die unterschiedlichen Potenziale technologischen und traditionellen Unterrichts gegenüberzustellen.

Zur Untersuchung wurde eine empirische Studie in einer Schulklasse durchgeführt: Die lineare Optimierung wurde zunächst ohne technologische Hilfsmittel unterrichtet, anschließend mit gezieltem Einsatz des TI-Nspire. Nach beiden Phasen erfolgte jeweils ein Kompetenzcheck, bei dem Ergebnisse miteinander verglichen wurden.

Die Arbeit ist in mehrere Kapitel gegliedert. Zunächst wird die Rolle von Technologie im Mathematikunterricht, einschließlich didaktischer Grundlagen, curricularem Bezug und bestehender Forschung umfassend beleuchtet. Darauf folgt eine detaillierte Vorstellung des TI-Nspire CX II-T CAS sowie dessen Funktionsspektrum. Im empirischen Teil werden Konzeption, Durchführung und Auswertung der Untersuchung vorgestellt. Abschließend werden die Ergebnisse diskutiert und mögliche Schlussfolgerungen für die Unterrichtspraxis gezogen.

4 Technologie im Mathematikunterricht

4.1 Definition und Bedeutung im Unterricht

Technologieeinsatz im Mathematikunterricht bezieht sich auf die Integration moderner technischer Hilfsmittel zur Unterstützung des Unterrichts. Dabei geht es vor allem darum, wie neue Technologien zur Vermittlung und Generierung von Wissen eingesetzt werden können. Die technischen Entwicklungen der letzten Jahre haben dabei vielfältige Möglichkeiten eröffnet. Zu den zentralen Werkzeugen im Mathematikunterricht zählen Computer-Algebra-Systeme (CAS), Tabellenkalkulationssoftware (TKS) und dynamische Geometriesoftware (DGS). Oft vereinen die derzeit verfügbaren Programme mehrere dieser Funktionen in einem System. In dieser Arbeit wird der Begriff Technologieeinsatz stets als Kombination dieser verschiedenen Systeme verstanden. Zur besseren Übersicht werden im folgenden Abschnitt die einzelnen Werkzeuge kurz erläutert.

4.2 Arten von Technologie im Unterricht

4.2.1 Computer-Algebra-Systeme (CAS)

Eine einheitliche Definition für Computer-Algebra-Systeme (CAS) gibt es nicht, jedoch finden sich in der Literatur mehrere Erklärungen, von denen hier exemplarisch zwei angeführt werden:

„Ein Computeralgebra-System (CAS) ist ein interaktives System, das auf der Basis von in Softwaresystemen implementierten, algebraisch ausgeführten Algorithmen in der Lage ist, sowohl mit Zahlen als auch mit Zeichen und Symbolen algebraische Operationen durchzuführen.“ (Unger, 2000)

„Ein CAS ist eine Technologie, mit der man mindestens Terme symbolisch ableiten und Gleichungen algebraisch lösen kann.“ (Pallack, 2007)

Zusammengefasst handelt es sich bei CAS um eine Software, die mathematische Operationen ausführt, wobei der Hauptunterschied zu klassischen Taschenrechnern in der Fähigkeit liegt, symbolische Berechnungen durchzuführen. Diese Funktion erweitert das Anwendungsspektrum erheblich und fördert zugleich, die für die Mathematik erforderliche, Exaktheit. Im Schulalltag wird oft nicht klar zwischen Näherungslösungen und exakten Lösungen unterschieden. Ein CAS kann hier hilfreich eingesetzt werden, um Näherungslösungen durch exakte Ergebnisse zu ersetzen. CAS entlastet die Schülerinnen und Schüler bei rechenintensiven Operationen, wodurch im Unterricht Zeit für die tiefere Einsicht und das Verständnis von Inhalten gewonnen wird. Der Vorwurf, dass der Einsatz von CAS operative mathematische Fertigkeiten schwächen könnte, wird durch zahlreiche Studien widerlegt. Dies zeigt beispielsweise die Studie CALiMERO, siehe Kapitel 5.11.2. Mit einem gezielten Einsatz von CAS kann zudem das Arbeiten ohne technische Hilfsmittel weiterhin gefördert werden. Eine häufige Herausforderung besteht darin, dass Schülerinnen und Schüler oft zwischen Vertrauen in ihre eigenen Rechenfähigkeiten und dem Drang, einfache Berechnungen mit dem Taschenrechner auszuführen, schwanken. Dieses Verhalten tritt unabhängig vom Einsatz von CAS auf. Ein Projekt wie CALiMERO, fördert gezielt Kopfrechenübungen, um auch in höheren Klassen und ebenso über die schulische Laufbahn hinaus, die grundlegenden mathematischen Fähigkeiten zu erhalten. Ein Beispiel hierfür sind zum Beispiel Eingangsprüfungen bei Universitäten als auch während dem Studium, in welchen weiterhin ohne Taschenrechner gearbeitet werden muss. (vgl. Barzel, 2012)

4.2.2 Tabellenkalkulationssoftware (TKS)

Tabellenkalkulationssoftware (TKS) ermöglicht das Verwalten und Verarbeiten von Daten in tabellarischer Form. Moderne TKS enthalten oft auch Funktionen eines CAS, wobei der Fokus auf der strukturierten Aufbereitung numerischer und alphanumerischer Daten liegt. Diese strukturierte Darstellung erlaubt es, Daten in Diagrammen zu visualisieren, welches im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle spielt. Die Darstellung und auch Modellierung im Mathematikunterricht sind auch wichtige Aspekte im Lehrplan, siehe Kapitel 5.3.1 und 5.3.2, sowohl für die AHS als auch die BHS, in den Teilbereichen Stochastik und funktionalen Zusammenhängen.

Die Visualisierung mathematischer Inhalte trägt wesentlich zum Verständnis bei und unterstützt die didaktische Aufbereitung. Heymann nennt in seinem Buch „Allgemeinbildung und Mathematikunterricht“ sieben Aufgaben einer allgemeinbildenden Schule. Einen dieser Punkte beschreibt er als „Lebensvorbereitung“, wobei der Fokus auf die Bildung eines Wissens für das weitere Leben, sowohl in privater als auch berufsbildender Sicht, gemeint ist. Das Arbeiten mit TKS fügt sich gut in dieses Konzept ein, da der Umgang mit Daten, deren Strukturierung und Visualisierung im beruflichen und privaten Alltag von großer Bedeutung ist. (vgl. Heymann, 1996)

4.2.3 Dynamische Geometriesoftware (DGS)

Dynamische Geometriesoftware (DGS) erlaubt es, mit Hilfe von Computern klassische geometrische Konstruktionen zu erstellen. Der entscheidende Vorteil gegenüber traditionellen Werkzeugen, wie Lineal und Zirkel, liegt in der Dynamik: Punkte, Winkel oder Geraden können beliebig verschoben werden, wodurch sich die gesamte Konstruktion entsprechend anpasst.

Diese Dynamik fördert das Experimentieren und unterstützt die Schülerinnen und Schüler dabei, eigene Vermutungen zu entwickeln und vor allem unterstützt es auch die Anschaulichkeit, sich Dinge vorstellen zu können und hiermit tieferes Verständnis zu entwickeln. Im Unterricht bietet DGS zudem die Möglichkeit, anschauliche, didaktische Beweise zu erarbeiten, beispielsweise indem eine geometrische Eigenschaft für alle Objekte einer Klasse veranschaulicht wird. (vgl. Ulovec, 2008)

4.3 Bezug zum Lehrplan und zur Reife- und Diplomprüfung

4.3.1 Lehrplan AHS Oberstufe

In den didaktischen Grundsätzen für die Klassen fünf bis acht wird betont, dass technologische Unterstützung beim Lernen eine wesentliche Rolle spielt. Technologische Hilfsmittel sollten in allen Kompetenzbereichen sinnvoll eingesetzt werden. Diese müssen mindestens grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionen, Kurven und

anderen geometrischen Objekten, zum symbolischen Umformen von Termen sowie zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen bieten. Zudem sollten sie in der Lage sein, Ableitungs- und Stammfunktionen zu ermitteln, Integrationen durchzuführen und Methoden in der Stochastik zu unterstützen. Der sachgerechte und sinnvolle Einsatz technologischer Hilfsmittel erfordert ein geplantes Vorgehen.

Die grundlegende Umsetzung umfasst die Verwendung geeigneter Hilfsmittel zur Lösung von Aufgaben und deren gelegentlichem Einsatz als didaktisches Werkzeug zur Erarbeitung neuer Inhalte. Die optimale Umsetzung hingegen besteht im gezielten Einsatz dieser Technologien als Werkzeuge für Modellierung, Visualisierung und Experimentieren. (vgl. BGBl. II Nr. 204/2024, 2024)

4.3.2 Lehrplan BHS

In den Lernergebnissen des Clusters "Mathematik, Naturwissenschaften und Ernährung" wird festgehalten, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, sich über neue Entwicklungen und Technologien zu informieren, diese kritisch zu hinterfragen und sowohl deren Nutzen als auch Risiken zu beschreiben und zu bewerten. (vgl. BGBl. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999, 1999)

Die didaktischen Grundsätze zur Unterrichtsplanung empfehlen, den Einsatz von Informations- und Kommunikationstechnologien in allen Unterrichtsfächern zu fördern.

Diese umfassen die inhaltlichen Bereiche Zahlen und Maße, Algebra und Geometrie, funktionale Zusammenhänge, Analysis und Stochastik sowie die Handlungsbereiche Argumentieren und Kommunizieren, Operieren und Technologieeinsatz, Interpretieren und Dokumentieren, Modellieren und Transferieren. Bei der Planung und Gestaltung des Unterrichts liegt der Fokus besonders auf praxisnahen Aufgabenstellungen sowie der Förderung folgender Kompetenzen der Lernenden:

- Verständnis grundlegender mathematischer Strukturen
- eigenständiges logisches Denken
- Modellierung von sprachlich formulierten Problemen durch Gleichungen, Funktionen oder graphische Darstellungen
- Durchführung allgemeiner Rechenverfahren unter schrittweiser Analyse

Moderne Technologien sollen im Unterricht zum Einsatz kommen. (vgl. BGBl. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999, 1999)

Im Bereich Angewandte Mathematik und deren Kompetenzbereiche lassen sich folgende Aspekte hinsichtlich des Technologieeinsatzes identifizieren:

- **Zahlen und Maße:** Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, mit Zahlen in Gleitkommadarstellung sowohl mit als auch ohne den Einsatz von Technologien zu arbeiten.
- **Algebra und Geometrie:** Die Schülerinnen und Schüler können lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen sowohl mit als auch ohne technologische Hilfsmittel lösen und die Lösungsmenge interpretieren. Zudem sind sie in der Lage, ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen ohne Technologie und mit mehreren Variablen unter Verwendung von Technologie zu lösen. Sie bestimmen die Lösungsbereiche linearer Ungleichungen in zwei Variablen mithilfe von Technologie, ermitteln und interpretieren Lösungen linearer Optimierungsprobleme und erläutern den Lösungsweg. Auch die Summe, Differenz und das Produkt zweier Matrizen sowie die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar können sie unter technologischem Einsatz berechnen.
- **Funktionale Zusammenhänge:** Die Schülerinnen und Schüler können die Nullstelle einer linearen Funktion sowohl graphisch als auch rechnerisch mit und ohne den Einsatz von Technologien bestimmen. Sie berechnen den Schnittpunkt zweier Geraden mit und ohne technische Hilfsmittel. Quadratische Funktionen sowie Potenz- und Polynomfunktionen können sie graphisch skizzieren oder mit Technologie exakt darstellen und deren Eigenschaften erläutern. Außerdem ermitteln sie gesuchte Werte von quadratischen, Potenz- und Polynomfunktionen unter Verwendung von Technologie und setzen diese kompetent zur Berechnung von Wachstums- und Zerfallsproblemen ein, wobei sie die Ergebnisse interpretieren. In der Finanzmathematik nutzen sie Technologie für Berechnungen und interpretieren die Resultate.
- **Stochastik:** Die Schülerinnen und Schüler können Lage- und Streuungsmaße mithilfe von Technologie ermitteln. Sie berechnen die Regressionslinie zweidimensionaler Daten mit technologischer Unterstützung, stellen diese graphisch dar und interpretieren die Ergebnisse. Darüber hinaus sind sie in der Lage, die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von binomial- oder normalverteilten Ereignissen mit Technologie zu berechnen und zu interpretieren.

- **Analysis:** Die Schülerinnen und Schüler können Flächeninhalte mithilfe des Integrals sowohl mit als auch ohne technologischen Einsatz berechnen.

(vgl. BGBl. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999, 1999)

Für all diese mathematischen Bereiche gilt, dass die Schülerinnen und Schüler ihre erworbenen Fähigkeiten im Umgang mit Technologie gezielt und sicher einsetzen können, um anwendungsbezogene Problemstellungen aus den jeweiligen Kompetenzbereichen zu bearbeiten. (vgl. BGBl. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999, 1999)

4.3.3 Reife- und Diplomprüfungsverordnung

AHS

Ab dem Haupttermin 2018 wurden in § 18 Absatz 3 der Prüfungsordnung der AHS spezifische Mindestanforderungen für den Einsatz elektronischer Hilfsmittel festgelegt:

Bei der Bearbeitung beider Aufgabenbereiche dürfen herkömmliche Schreibgeräte, Bleistifte, Lineal, Geo-Dreieck und Zirkel verwendet werden. Außerdem ist die Nutzung einer vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausur freigegebenen Formelsammlung sowie elektronischer Hilfsmittel erlaubt. Die Mindestanforderungen an diese elektronischen Hilfsmittel umfassen grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen, zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, zur Ermittlung von Ableitungs- und Stammfunktionen, zur numerischen Integration sowie zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren in der Stochastik. In den mathematischen Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik findet sich in der Fußnote zu einigen Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler erreichen sollen, folgender Hinweis: Der Einsatz elektronischer Hilfsmittel ermöglicht bei (Un-)Gleichungen und Gleichungssystemen auch die Durchführung komplexerer Umformungen von Termen, Formeln sowie von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen.

Bei Polynomfunktionen erlauben elektronische Hilfsmittel zudem die Bestimmung von Argumentwerten, dies gilt auch für Polynomfunktionen höheren Grades. In Bezug auf Änderungsmaße können mit elektronischen Hilfsmitteln außerdem Differenzen- und Differenzialquotienten beliebiger (differenzierbarer) Funktionen berechnet werden. Das Ableiten von Funktionen im Bereich Ableitungsfunktion/Stammfunktion ist durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel nicht auf, die in den Grundkompetenzen angeführten

Differentiationsregeln, beschränkt. Schließlich ist die Berechnung bestimmter Integrale im Kontext von Summation und Integral mithilfe elektronischer Hilfsmittel nicht durch die in den Grundkompetenzen vorgegebenen Integrationsregeln begrenzt. (vgl. BMBWF, 2021)

BHS

Um den schulübergreifenden Charakter der neuen Reife- und Diplomprüfung zu berücksichtigen und gleiche Chancen für alle sicherzustellen wurden allgemeingültige, produkt-unabhängige Mindestanforderungen an die eingesetzte Technologie festgelegt. Folgende Funktionen sind dabei erforderlich:

- Visualisierung von Funktionsgraphen
- Möglichkeiten zur numerischen Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen
- Numerische Berechnung von Integralen
- Grundlegende Operationen in der Matrizenrechnung
- Statistische Funktionen, wie Kennzahlen, lineare Regression und Korrelation, sowie Berechnungen zur Binomial- und Normalverteilung

Ab dem Haupttermin 2030/31 ist angedacht in der SRDP für Angewandte Mathematik (BHS) Aufgaben gemeinsam mit der SRP-Mathematik (AHS) zu stellen. Aus diesem Grund müssen die Regelungen für zulässige Hilfsmittel in den folgenden Bereichen angeglichen werden:

- Eine einheitliche Formelsammlung für AHS und BHS
- Harmonisierte Mindestanforderungen für elektronische Hilfsmittel

Für die SRDP in Angewandter Mathematik (BHS) bedeutet dies, dass elektronische Hilfsmittel über ein CAS (Computer-Algebra-System) verfügen müssen (z. B. GeoGebra, TI-Nspire, Casio ClassPad...). Bei der Anschaffung von elektronischen Hilfsmitteln für Schülerinnen und Schüler, die im Schuljahr 2030/31 ihre Matura ablegen, sollte dies entsprechend beachtet werden. (vgl. Standardisierte Reife- und Diplomprüfung, 2024)

Bei der Bearbeitung beider Aufgabenbereiche dürfen herkömmliche Schreibgeräte wie Bleistifte, Lineale, Geodreiecke und Zirkel verwendet werden. Zudem ist die Nutzung einer vom zuständigen Regierungsmitglied zugelassenen Formelsammlung, eines (elektronischen) Wörterbuchs sowie elektronischer Hilfsmittel erlaubt. Die elektronischen

Hilfsmittel müssen dabei mindestens über folgende Funktionen verfügen: Darstellung von Funktionsgraphen, numerisches Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen, Matrizenrechnung, numerische Integration sowie Unterstützung bei stochastischen Methoden und Verfahren. (vgl. BGBl. II Nr. 362/2023, 2024)

4.4 Anpassungen und Neuerungen im Unterricht

Die Einführung moderner Technologien in den Mathematikunterricht erfordert eine Anpassung der didaktischen Prinzipien. Es wäre veraltet zu glauben, dass der Unterricht starr den früheren Richtlinien folgen könnte, während die technologische Entwicklung rasant voranschreitet. Dabei müssen drei zentrale Elemente des Unterrichts – Lehrende, Lernende und Inhalte – berücksichtigt werden, welche in der Literatur als „didaktisches Dreieck“ bezeichnet wird. (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand, 2015)

In Bezug auf den Einsatz höherer Technologien müssen Ziele, Inhalte und Methoden neu überdacht werden. Die folgenden Fragen spielen dabei eine zentrale Rolle:

- Wie können Technologien den Lernprozess unterstützen?
- Welche zusätzlichen Fertigkeiten müssen Schülerinnen und Schüler erwerben (z. B. Werkzeugkompetenzen)?
- Welche traditionellen Inhalte bleiben bestehen und welche müssen ergänzt oder ersetzt werden?
- Inwiefern müssen Lehrmethoden angepasst werden?

(vgl. Schmidt-Thieme & Weigand, 2015)

In Kapitel 5.7. wird ein theoretischer Überblick über die didaktischen Prinzipien gegeben, die als Grundlage, für den effektiven Einsatz und die verantwortungsvolle Nutzung von Technologie im Unterricht, dienen sollen. Diese Prinzipien zeigen, wie die Verknüpfung von Technologie und Mathematikunterricht das selbstständige und experimentelle Lernen fördern kann, insbesondere im Hinblick auf die heuristische Lernphase.

4.5 Chancen und Herausforderungen

Der Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht bringt sowohl Chancen als auch Herausforderungen mit sich. Es müssen neue Werkzeugkompetenzen erworben, Unterrichtsmethoden angepasst und Inhalte verändert werden. Zudem ist sicherzustellen, dass alle Schülerinnen und Schüler Zugang zu der notwendigen Software haben. Ein rein zeitlich begrenzter Zugang zum Computerraum ist dabei keine ausreichende Lösung. Besser geeignet sind Handhelds (wie graphische oder CAS-Taschenrechner), Notebooks, Tablets oder Selbstlernzentren innerhalb der Klassenzimmer. (vgl. Elschenbroich, 2005)

Obwohl diese Umstellung zunächst aufwendig erscheint, bietet sie viele Vorteile. Der Unterricht wird durch den Einsatz von Technologie lernendenzentrierter, experimenteller und interaktiver gestaltet. Die technischen Werkzeuge fördern durch Funktionen wie Experimentieren, Modellieren und Visualisieren ein tieferes mathematisches Verständnis und regen die aktive Auseinandersetzung mit den Inhalten an. Diese Aspekte sind zudem auch im Lehrplan verankert, siehe Kapitel 5.3.1 und 5.3.2. Durch die Ermöglichung der verschiedenen Zugänge zur Mathematik kann die Motivation der Schülerinnen und Schüler gesteigert werden.

Durch den Einsatz technologischer Hilfsmittel können Schülerinnen und Schüler neue Herangehensweisen an mathematische Problemstellungen entwickeln und diese auch eigenständig lösen. Sie lernen die Arbeitsschritte, die durch die Technologie ausgeführt werden, angemessen zu dokumentieren und die Ergebnisse im Kontext zu reflektieren. Neben der nötigen Werkzeugkompetenz müssen sie auch über Strukturerkennungskompetenzen verfügen, um mathematische Strukturen zu erkennen und in die technologische Sprache zu übersetzen.

Besonders bei Modellierungsaufgaben können höhere Technologien den Lernprozess erleichtern, da sie den Schülerinnen und Schülern helfen, selbstständig zu arbeiten und Verknüpfungen zwischen Mathematik und Alltagsproblemen herzustellen. Dadurch wird Mathematik als praxisnaher und relevanter wahrgenommen. Ein wesentlicher Vorteil des Einsatzes von Computer-Algebra-Systemen (CAS) besteht in der Möglichkeit, rechenintensive Aufgaben auszulagern. Dies verschafft mehr Zeit für wichtige Aktivitäten wie

Argumentation, Modellierung, Experimentieren und Interpretation. (vgl. Embacher et al., 2005)

Technologien können alle drei Phasen des Lernprozesses, wie in der Kreativitätsspirale (siehe Kapitel 5.7.2) beschrieben, unterstützen. Besonders in der heuristischen, experimentellen Phase tragen technologische Hilfsmittel zur Entwicklung konzeptuellen Wissens bei, indem sie schnelles symbolisches Manipulieren und einfache dynamische Darstellungswechsel ermöglichen.

In der Black-Box/White-Box-Methodik (siehe Kapitel 5.7.3) wird häufig zuerst ein Problem mithilfe von Technologie gelöst, bevor die zugrunde liegenden Theoreme und Formeln entwickelt werden. Dies fördert das experimentelle Lernen, da Schülerinnen und Schüler so die Technologie als Hilfsmittel für exploratives Denken nutzen können.

4.6 Didaktische Grundlagen

4.6.1 Mathematisches Wissen

Wissen im Mathematikunterricht lässt sich in drei Bereiche unterteilen: deklaratives, prozedurales und konzeptuelles Wissen. Diese Unterscheidung ist wesentlich, wenn es um die Frage geht, wie der Einsatz von Technologie, insbesondere Computer-Algebra-Systemen (CAS), das Erreichen mathematischer Lernziele unterstützen kann. (vgl. Barzel, 2012)

Deklaratives Wissen:

Deklaratives Wissen bezieht sich auf reines Fakten- oder Sachwissen. In der Mathematik umfasst es grundlegende Begriffe, Formeln und Regeln, die auswendig gelernt werden können.

Prozedurales Wissen:

Prozedurales Wissen bezeichnet die Fähigkeit, mathematische Schritte und Abläufe korrekt durchzuführen. Dies umfasst nicht nur das Lösen von Rechenoperationen, sondern auch das Modellieren mathematischer Probleme sowie das Argumentieren in

mathematischen Zusammenhängen. Wer über prozedurales Wissen verfügt, kann gängige mathematische Verfahren und Schemata eigenständig anwenden. (vgl. Moormann, 2009)

Konzeptuelles Wissen:

Konzeptuelles Wissen beschreibt das tiefere Verständnis der zugrunde liegenden Zusammenhänge und Strukturen. Schülerinnen und Schüler mit konzeptuellem Wissen sind in der Lage, mathematische Operationen, Interpretationen und Modellierungen zu verstehen und nachzuvollziehen. Erst durch dieses Verständnis wird ein tieferes Erkennen der mathematischen Prinzipien und Zusammenhänge möglich.

Ziel des Mathematikunterrichts ist es, dass Lernende alle drei Wissensarten erwerben und miteinander verknüpfen. (vgl. Barzel, 2012)

Dies spiegelt sich auch im dreidimensionalen Kompetenzmodell des Mathematikunterrichts wider. Kompetenzen werden hier als langfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten definiert, die Lernende entwickeln können und die es ihnen ermöglichen, bestimmte Problemlösungsfähigkeiten in verschiedenen Situationen anzuwenden. Dazu gehört auch die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten aktiv anzuwenden. Mathematische Kompetenzen umfassen drei Dimensionen:

Handlungsdimension: Sie beschreibt, welche Art von mathematischen Tätigkeiten ausgeführt wird (also was getan wird).

Inhaltsdimension: Sie bezieht sich auf die mathematischen Inhalte, auf die die Tätigkeiten angewendet werden (also womit etwas getan wird).

Komplexitätsdimension: Sie gibt an, wie stark die Vernetzungen und die Verknüpfungen der Inhalte ausgeprägt sind (also wie die Inhalte verknüpft sind und wie komplex diese Verbindungen sind).

Innerhalb jeder dieser Dimensionen lassen sich verschiedene Ausprägungen unterscheiden: unterschiedliche mathematische Handlungen, verschiedene mathematische Inhalte sowie variierende Arten und Grade der Komplexität.

Im hier vorgestellten Modell mathematischer Kompetenzen werden verwandte Handlungen in Handlungsbereiche (H1, H2, ...), verwandte Inhalte in Inhaltsbereiche (I1, I2, ...) und ähnliche Arten und Grade von Vernetzungen in Komplexitätsbereiche (K1, K2, ...) zusammengefasst.

(vgl. Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen, o. J.)

Dabei zeigt sich in der modernen Mathematikdidaktik ein deutlicher Trend zur Förderung des konzeptuellen Wissens. Dies hängt eng mit dem Einsatz von Technologie zusammen, insbesondere mit der Nutzung von CAS.

Der Einsatz von Technologie, wie CAS, bietet die Möglichkeit, zeitintensive Rechenoperationen auszulagern. Dies schafft Freiräume, die effektiv für konzeptuelle Lernprozesse genutzt werden können. Da durch den Technologieeinsatz mathematische Symbole und Operationen schnell und präzise bearbeitet werden können, werden Lernende weniger durch langwierige Rechenschritte abgelenkt. Stattdessen können sie sich unmittelbar auf die Interpretation der Ergebnisse konzentrieren.

Ein wichtiger Aspekt hierbei ist, dass Schülerinnen und Schüler lernen, die mit Hilfe von Technologie ermittelten Ergebnisse korrekt zu deuten und zu verstehen. So unterstützt der Technologieeinsatz nicht nur das Erlernen prozeduraler Fertigkeiten, sondern trägt auch maßgeblich zur Entwicklung eines fundierten konzeptuellen Verständnisses bei.

Insgesamt zeigt sich, dass Technologie, insbesondere CAS, den Mathematikunterricht dahingehend bereichert, dass Lernende mehr Zeit und Raum für das Verständnis mathematischer Konzepte gewinnen. So wird der Unterricht nicht nur effizienter, sondern ermöglicht auch ein tieferes mathematisches Lernen. (vgl. Barzel, 2012)

4.6.2 Kreativspirale

Die Kreativspirale wurde von Buchberger (1993) als ein möglicher Lernpfad im Mathematikunterricht beschrieben. Spätere Fachdidaktiker griffen dieses Konzept auf und erweiterten es um die Komponente MRP (Mathematical Reasoning Processes). Die Kreativspirale zeigt die notwendigen Schritte im Lernprozess und dient als Modell zur Unterstützung mathematischer Lernprozesse durch gezielten Einsatz von MRP. Dabei wird die Intensität der Unterstützung an die Lernenden und das jeweilige Themengebiet angepasst.

Eine mögliche Gefahr beim Einsatz von Technologie ist das Überspringen einzelner Punkte der Spirale, die zu einem Verlust wichtiger mathematischer Fähigkeiten führen kann. Ein bewusstes Durchlaufen der Spirale in mehreren Zyklen ermöglicht es, die Komplexität der Aufgaben schrittweise zu steigern und damit die Motivation der Lernenden

aufrechtzuerhalten. Ein zu hoher Schwierigkeitsgrad könnte sonst zu Demotivation führen. (vgl. Heugl et al., 1996)

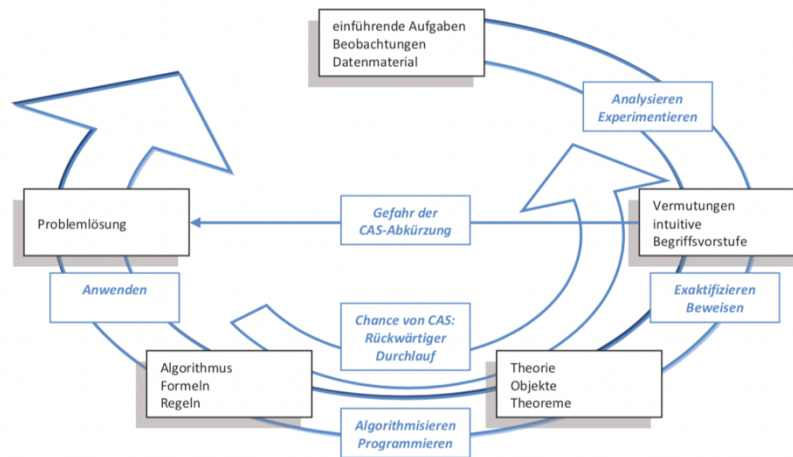


Abbildung 1: Kreativspirale nach Buchberger (Müller, 2014)

Durchlaufen im Uhrzeigersinn:

Dies entspricht einem systematischen Unterrichtsaufbau, bei dem neue Inhalte schrittweise erarbeitet werden. Ziel ist es, am Ende in der Lage zu sein, bestimmte Probleme zu lösen. Dieser Weg spiegelt weitgehend den klassischen Mathematikunterricht ohne den Einsatz von Technologie wider.

Durchlaufen gegen den Uhrzeigersinn:

Hier wird mit einem konkreten Problem gestartet, das mithilfe von Technologie gelöst wird. Anhand der Lösung werden Rückschlüsse auf die zugrundeliegende Theorie gezogen. Diese Methode ist, abhängig vom Thema, ohne Technologie nur bedingt oder gar nicht möglich.

(vgl. Heugl et al., 1996)

Während des Durchlaufs der Kreativspirale absolvieren die Lernenden drei Phasen, die fließend ineinander übergehen.

Heuristische Phase:

In dieser Phase erarbeiten die Lernenden mathematische Inhalte experimentell und stellen erste Vermutungen auf. (vgl. Heugl, Klinger, & Lechner, 1996) Die traditionelle universitäre Herangehensweise, bei der fertige Theoreme und deren Beweise präsentiert werden, ist oft nicht geeignet für den schulischen Mathematikunterricht. Ein heuristischer

Zugang, bei dem neue Erkenntnisse durch Erkundung und Experimente gewonnen werden, spielt hier eine zentrale Rolle. Der Einsatz von MRP kann den Lernenden, ohne vorherige Anweisungen der Lehrkraft, dabei helfen, mathematische Prozeduren selbstständig durchzuführen. Eine Gefahr besteht allerdings darin, dass Lernende ziellos experimentieren und keine sinnvollen Schlussfolgerungen ziehen. (vgl. Heugl, 2014)

Exaktifizierende Phase:

Nach der heuristischen Phase folgt die exaktifizierende Phase, in der die Lernenden ihre aufgestellten Vermutungen absichern und beweisen sollen. Der Begriff „exaktifizierend“ wird bewusst verwendet, um zu betonen, dass nicht immer absolute Exaktheit gefordert ist, sondern eine schrittweise Steigerung des Exaktheitsniveaus. In dieser Phase werden mathematische Abläufe und logisches Denken trainiert. Der Einsatz von MRP ermöglicht es den Lernenden, eine Vielzahl von Beispielen durchzuführen oder Gegenbeispiele zu finden, um Vermutungen zu widerlegen. Auch kann der operative Teil eines Beweises durch Technologie ausgelagert werden, sodass die Lernenden sich auf die Beweisidee konzentrieren können. (vgl. Heugl et al., 1996)

Anwendungsphase:

In der Anwendungsphase setzen die Lernenden das zuvor theoretisch Erarbeitete in die Praxis um. Dabei wird zwischen zwei Arten der Anwendung unterschieden:

1. Innermathematische Anwendung: Hierbei werden Algorithmen, Regeln und Formeln verwendet, die in den vorherigen Phasen erarbeitet wurden.
2. Praxisnahe Anwendung: Mathematische Fertigkeiten werden genutzt, um reale, konkrete Probleme zu lösen.

In dieser Phase sollen die Lernenden verstehen, dass Mathematik dabei hilft, die Realität zu beschreiben und zu verstehen. Beim Erstellen von Modellen steht die Komplexität oder Exaktheit nicht immer im Vordergrund, da in den Naturwissenschaften oft vereinfachte Modelle verwendet werden. Die Lernenden sollen erkennen, dass durch wiederholtes Durchlaufen der Spirale zunehmend komplexere Modelle entwickelt werden können. (vgl. Heugl, 2014)

4.6.3 White Box- und Black Box-Prinzip

Das White-Box / Black-Box-Prinzip

Das White-Box / Black-Box-Prinzip ist ein didaktisches Unterrichtskonzept, das von Helmut Heugl (1996) entwickelt wurde. Es basiert auf dem klassischen Spiralprinzip, legt jedoch den Schwerpunkt auf den Einsatz von Technologie. Das Modell ist rekursiv und in zwei Phasen unterteilt, wobei immer mit der White-Box-Phase begonnen wird.

1) White-Box-Phase (Phase des verstehenden Lernens)

In dieser ersten Phase geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler neue Inhalte erarbeiten, verstehen und festigen. Sie sollen Probleme formulieren, Aufgaben ohne technologische Hilfsmittel (MRP, Mathematical Reasoning Processes) rechnen, sowie mathematische Begriffe und Beweise erklären können. Das Ziel dieser Phase ist ein tiefes Verständnis der mathematischen Konzepte. Erst wenn alle Schritte dieser Phase erfolgreich abgeschlossen sind, erfolgt der Übergang zur nächsten Phase. (vgl. Heugl et al., 1996)

2) Black-Box-Phase (Erkennen und begründetes Anwenden)

In der zweiten Phase dürfen und sollen technologische Hilfsmittel eingesetzt werden. Der Fokus liegt nun nicht mehr auf dem "Wie" der Rechenprozesse, sondern auf dem "Wo". Das bedeutet, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, in welchen Situationen das erlernte Wissen sinnvoll angewendet werden kann. Operative Rechenaufgaben können nun vom MRP übernommen werden, wobei die zugrunde liegenden mathematischen Konzepte weiterhin verstanden bleiben müssen. (vgl. Heugl et al., 1996)

Helmut Heugl betont dies mit der Aussage:

„Auf die Technologie als Black Box ausgelagert wird nur das Ausführen von Operationen, nicht aber das Verstehen des dahinterstehenden mathematischen Konzeptes.“ (Heugl, 2014)

Das Black-Box / White-Box-Prinzip

Im Gegensatz zum White-Box / Black-Box-Prinzip beginnt das Black-Box / White-Box-Prinzip mit einer Black-Box-Phase, bei der sofort technologische Hilfsmittel (MRP) zum Einsatz kommen. Die Lernenden durchlaufen dabei die Kreativspirale gegen den Uhrzeigersinn, wobei die experimentelle Phase des Lernens im Vordergrund steht.

In der ersten Phase dieses Ansatzes lösen die Schülerinnen und Schüler konkrete Aufgaben mit Unterstützung von Technologie als Forschungswerkzeug. Anhand dieser Lösungen stellen sie Vermutungen und Zusammenhänge auf. In der zweiten Phase müssen diese Vermutungen und Erkenntnisse geordnet und abgesichert werden. Ziel ist es, durch die Arbeit mit konkreten Beispielen die Theorie zu erschließen und so ein tieferes Verständnis der Mathematik, die hinter der Lösung des Problems liegt, zu entwickeln. (vgl. Heugl et al., 1996)

4.6.4 Spiralprinzip

Das von Bruner (2006) entwickelte Spiralprinzip ist für seinen spiralförmigen Aufbau und die Entstehung von Lernlinien bekannt. Es basiert darauf, dass ein Thema über verschiedene Zeiträume hinweg, also auch in unterschiedlichen Schulstufen, wiederholt aufgegriffen und dabei auf ein höheres Niveau gehoben wird. Dieser nachhaltige Lernprozess fördert die Vernetzung von Wissen und ermöglicht den Aufbau von Lernlinien, die für die langfristige Entwicklung von Kompetenzen entscheidend sind. Wichtig dabei ist, dass die verschiedenen Lernstufen nicht isoliert betrachtet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen in der Lage sein, frühere Lerninhalte wiederzuerkennen und mit neuen Erkenntnissen in Zusammenhang zu bringen. Besondere Aufmerksamkeit sollte daraufgelegt werden, dass das neu Erlernte nicht im Widerspruch zu den bereits gelernten Inhalten steht. Stattdessen sollen die bisherigen Lernschritte eine logische Fortsetzung finden und aufeinander aufbauen. (vgl. Bruner, 2006)

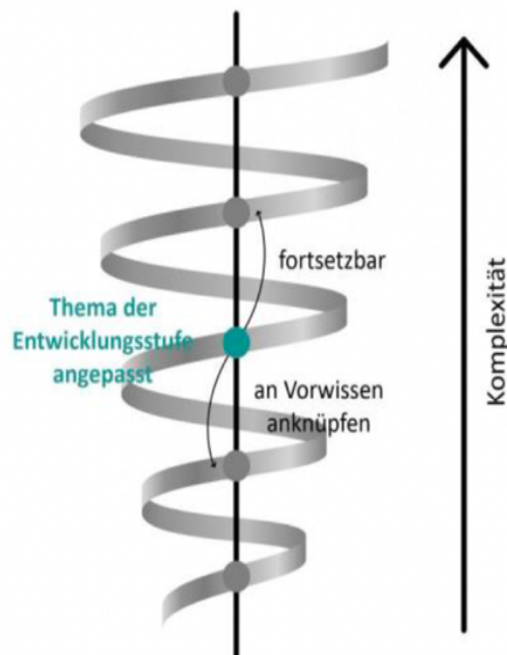


Abbildung 2: Spiralprinzip (Bruner, 2006)

4.6.5 Modulprinzip

Das Modulprinzip basiert auf der Zerlegung eines mathematischen Problems in kleinere, handhabbare Teilbereiche, die als Module bezeichnet werden. Diese Zerlegung ist besonders bei komplexen Problemen hilfreich, da das Wissen dadurch strukturiert, komprimiert und hierarchisch geordnet wird. Die einzelnen Module können nach der Lösung der Teilbereiche wieder zu einer Gesamtlösung zusammengesetzt werden. (vgl. Hußmann, 2001)

Aufbauend auf den Erkenntnissen des Modulprinzips stellt Heugl (2014) einen geeigneten Ablauf für den Mathematikunterricht vor, der dieses Konzept in die Praxis umsetzt:

1) Entwicklung und Definition von Modulen

Zu Beginn sollten Module identifiziert und definiert werden. Dabei können sowohl neu entwickelte Module als auch bereits bestehende vordefinierte Module verwendet werden.

2) Analyse und Anwendung von Modulen

Vorgefertigte Module – seien es selbst entwickelte oder vorab definierte – werden erneut angewendet. Dabei ist es wichtig jedes Modul genau zu analysieren, um dessen Struktur und Funktionsweise zu verstehen.

3) Erstellung eines Modulpools

Durch die kontinuierliche Definition und Entwicklung neuer Module entsteht ein sogenannter Modulpool, der zur Problemlösung bereitsteht. Dieser Pool bietet eine flexible Grundlage für das Bearbeiten verschiedener mathematischer Probleme.

4) Nutzung der Module als Black Boxes

Die Module werden dabei als Black Boxes verwendet, das heißt, die genauen internen Prozesse sind nicht von Bedeutung, solange das Modul zuverlässig funktioniert und zur Gesamtlösung beiträgt.

5) Verknüpfung und Erweiterung der Module

Abschließend sollen die entstandenen Module miteinander in Beziehung gesetzt und verknüpft werden. Außerdem können aus bereits bekannten Modulen neue, komplexere Module geschaffen werden, um schwierigere Probleme zu lösen.

(vgl. Heugl, 2014)

Dieses modulare Vorgehen erleichtert das Verständnis und die Lösung komplexer mathematischer Probleme, indem es den Lernenden ermöglicht, sich auf einzelne, klar definierte Teilbereiche zu konzentrieren.

4.7 Einsatzmöglichkeiten

Technologische Werkzeuge werden häufig primär mit ihrer rechnerischen Funktion assoziiert. Bereits die Begriffe „Taschenrechner“ oder „Computer“ legen nahe, dass ihr Hauptzweck im Rechnen liegt. Doch moderne Technologien bieten weit mehr als nur Rechenfunktionen. Sie vereinen eine Vielzahl unterschiedlicher Einsatzmöglichkeiten, die oft ineinandergreifen und sich nicht klar voneinander trennen lassen. In diesem Kapitel werden die fünf häufigsten genannten Anwendungsmöglichkeiten dieser Technologien näher beleuchtet.

4.7.1 Visualisierung

Visualisierungen gelten in der einschlägigen Literatur als zentraler Bestandteil eines effektiven Mathematikunterrichts. Sie bieten unabhängig vom schulischen Kontext eine wesentliche Grundlage, um Verständnis für mathematische Themen zu entwickeln (vgl.

Schmitz, 2016). Insbesondere in Schulen plädieren Fachdidaktikerinnen und Fachdidaktiker zunehmend für einen verstärkten Einsatz von Visualisierungen, um das Lernen zu unterstützen.

Um die Rolle der Technologie in diesem Konzept zu verstehen, ist es zunächst notwendig, den Begriff „Visualisierung“ zu definieren und zu kategorisieren. Eine weit verbreitete Einteilung unterscheidet zwischen drei Hauptformen der Darstellung: (vgl. Böckmann, 1982)

Ikonomisch: Bildliche Darstellungen, die reale Gegebenheiten abbilden, wie beispielsweise Fotos.

Schematisch: Abstrakte Darstellungen, die reale Situationen vereinfachen und weitere Fähigkeiten erfordern, um den Bezug zur Realität zu erkennen, wie etwa Tabellen, Funktionsgraphen oder der Zahlenstrahl.

Symbolisch: Die Verwendung von Symbolen und Zeichen, die bestimmten Regeln folgen, wodurch das mathematische Arbeiten erleichtert wird, jedoch der Bezug zur realen Welt stark abstrahiert wird, wie bei Gleichungen.

Moderne mathematische Werkzeuge, wie MRP (Multi-Representation-Tools), können hierbei einen entscheidenden Beitrag leisten. Sie ermöglichen es den Lernenden, verschiedene Darstellungsformen parallel und in Echtzeit zu nutzen, die den Transfer zwischen den Formen erleichtert und intensiviert (vgl. Hafenbrak, 2005). In Lernumgebungen sollten Schülerinnen und Schüler daher über solche Werkzeuge verfügen, um mathematische Konzepte durch den Wechsel zwischen vielfältigen Darstellungen und Funktionsvariationen besser verstehen und konstruieren zu können.

In der schulischen Praxis dominiert jedoch häufig die symbolische Darstellung. Dies liegt zum einen an der aufwendigen händischen Anfertigung von Graphiken, zum anderen an der höheren Effizienz symbolischer Darstellungen bei Aufgaben, die in erster Linie algebraische Lösungen erfordern. Es wird kritisch angemerkt, dass verschiedene Darstellungsformen nur dann eingesetzt werden sollten, wenn sie einen erkennbaren pädagogischen Nutzen bieten. Schneider (2002) warnt vor einem unreflektierten Umgang mit erstellten Graphiken, der durch die Möglichkeit, Visualisierungen schnell und einfach zu verändern, begünstigt wird. Dies könnte dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler mehr

ausprobieren, ohne den zugrunde liegenden mathematischen Kontext zu verstehen. (vgl. Schneider, 2002)

4.7.2 Experimentieren

Der Ursprung mathematischer Erkenntnisse liegt häufig nicht in bereits formulierten Theoremen, sondern in Aufgaben und Beispielen, an denen experimentiert wurde (vgl. Leuders et al., 2011). In ähnlicher Weise begründet Heintz (2000) umfangreiches mathematisches Wissen auf der Grundlage zahlreicher berechneter Beispiele und deren Analyse. Wenn neue mathematische Entdeckungen veröffentlicht werden, bleiben die Hintergründe, wie diese Vermutungen entstanden sind, meist im Verborgenen. Oftmals haben diese Vermutungen ihren Ursprung in der experimentellen Untersuchung verschiedener Problemstellungen (vgl. Heintz, 2000). Im Vergleich zu Modellierung, Problemlösung oder Begriffsbildung hat experimentelles Arbeiten in der Lerntheorie bisher jedoch eine eher untergeordnete Rolle gespielt. In diesem Abschnitt wird die Bedeutung des Experimentierens im mathematischen Lernprozess untersucht, um im Anschluss den Einfluss technologischer Hilfsmittel darauf zu bewerten.

Leuders et al. beschreibt den experimentellen Zugang zur Mathematik anhand eines grundlegenden Konzepts von Pierce („Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften“ (vgl. Pierce, 1985)), das den Lernprozess in drei Phasen unterteilt: Abduktion, Induktion und Deduktion. Abduktion bezeichnet dabei das Aufstellen einer Hypothese aufgrund eines beobachteten Phänomens. Mithilfe der Induktion wird die Hypothese anhand von Beispielen überprüft. Die Deduktion schließlich erfolgt durch rein logische Schlussfolgerungen und dient als Beweis für eine Vermutung. Der Abduktion und Induktion wird im Entstehungsprozess mathematischen Wissens eine besonders bedeutende Rolle zugeschrieben, die Leuders als „innermathematisches Experimentieren“ bezeichnet. (vgl. Leuders et al., 2011)

Da das Experimentieren nun als ergänzendes Unterrichtskonzept vorgestellt wurde, stellt sich die Frage, inwiefern technologische Hilfsmittel den Lernprozess positiv beeinflussen können. Dabei spielen folgende Faktoren eine entscheidende Rolle: Die Möglichkeit, operative Tätigkeiten auszulagern, die einfache Überführung symbolischer Darstellungen in andere Darstellungsformen und der unkomplizierte Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen. Durch die Auslagerung dieser Aufgaben eröffnen sich den

Schülerinnen und Schülern neue Wege, um mathematische Konzepte zu entdecken. Besonders Punkt 2 und 3 basieren auf den in vorherigen Abschnitten beschriebenen Visualisierungsfunktionen. Punkt 1 bezieht sich auf die Fähigkeit, operative Aufgaben schnell und einfach an Multi-Representation-Tools (MRP) zu delegieren. Je nach Ziel der Unterrichtseinheit kann dieser operative Teil entweder als „Black-Box“ (Lernende kennen die Funktionsweise des zugrunde liegenden Moduls nicht) oder als „White-Box“ (Lernende sind mit der Funktionsweise vertraut, nutzen jedoch das MRP, da es effizienter ist) eingesetzt werden (siehe Kapitel 5.7.3). (vgl. Schneider, 2002)

4.7.3 Modellierungsfunktion

Modellierungen nehmen im modernen Mathematikunterricht eine zentrale Rolle ein. Schülerinnen und Schüler sollen befähigt werden, reale Problemstellungen in die „mathematische Welt“ zu überführen. Dieser Prozess kann mit der folgenden Graphik (Abbildung 3) beschrieben werden.

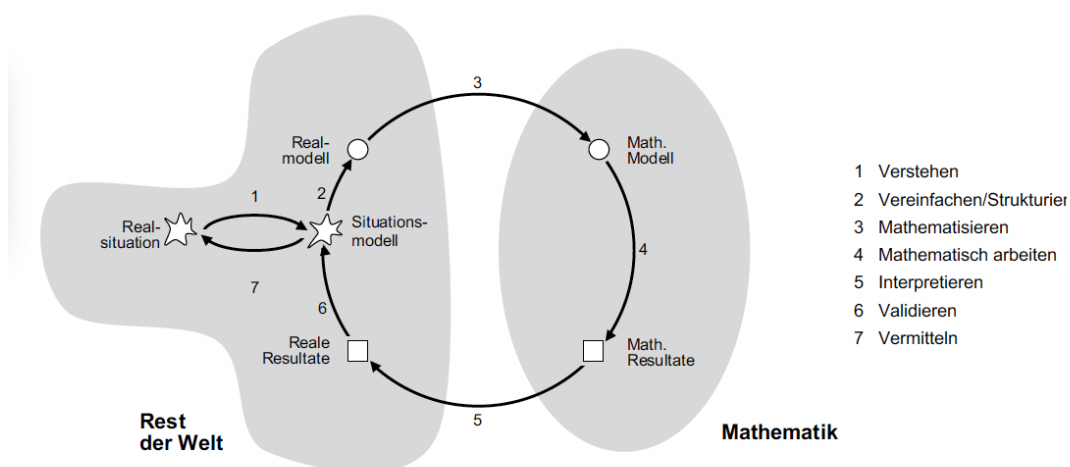


Abbildung 3: Modellierungskreislauf nach Blum (Blum et al., 2018)

Die Graphik (Abbildung 3) stellt den mathematischen Modellierungsprozess als zyklischen Ablauf dar, bei dem zwischen der realen Welt und der Mathematik gewechselt wird. Auf der linken Seite befindet sich die „Rest der Welt“-Sphäre, die die reale Situation darstellt, während auf der rechten Seite die mathematische Ebene mit Modellen und Berechnungen liegt. Der Prozess beginnt mit dem Verstehen der realen Situation, wobei eine erste gedankliche Vorstellung, das sogenannte Situationsmodell, entwickelt wird. Anschließend folgen das Vereinfachen und Strukturieren, indem relevante Variablen

identifiziert und Annahmen getroffen werden. Auf dieser Basis wird ein Realmodell erstellt. Der nächste Schritt ist das Mathematisieren, bei dem die reale Problemstellung in mathematische Gleichungen übertragen wird. Diese Gleichungen bilden das mathematische Modell, das dann durch mathematische Berechnungen weiterbearbeitet wird (Mathematisch arbeiten). Nach der Berechnung erfolgt das Interpretieren der Ergebnisse im realen Kontext. Dabei wird überprüft, ob die Ergebnisse eine sinnvolle Antwort auf die Ausgangsfrage liefern. Anschließend folgt die Validierung, bei der geprüft wird, ob alle relevanten Faktoren berücksichtigt wurden und ob das Modell realitätsnah ist. Falls Unstimmigkeiten bestehen, beginnt der Zyklus erneut mit angepassten Annahmen und zusätzlichen Variablen. Sobald eine passende Lösung gefunden wurde, wird diese abschließend vermittelt, indem sie verständlich dokumentiert und präsentiert wird. (vgl. Blum et al., 2018)

Der Nutzen von Technologie in diesem Prozess ist offensichtlich. Der rechnerisch intensive Teil des Modellierungsprozesses kann vollständig an ein Computer-Algebra-System (CAS) delegiert werden. Dies bringt einerseits eine erhebliche Zeitersparnis, andererseits ermöglicht es überhaupt erst die Modellierung bestimmter Problemstellungen, die sonst zu komplex wären. Ein Beispiel hierfür sind rekursive Modelle, die händisch nur schwer zu berechnen und kaum zu variieren wären. Die Umwandlung solcher rekursiven Modelle in explizite Darstellungen übersteigt oft den schulischen Rahmen und wird daher nicht weiter betrachtet.

Darüber hinaus erlaubt die Technologie, alle relevanten Parameter experimentell und in Echtzeit zu ändern. Dies macht den dynamischen Prozess der Modellbildung für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbarer. Auch die graphische Darstellung mittels Multi-Representation-Tools (MRP) kann diesen Lernprozess erheblich unterstützen, indem sie abstrakte mathematische Konzepte visuell zugänglich macht. (vgl. Herbert & Leneke, 1998)

4.7.4 Rechenfertigkeit

Der Begriff „Taschenrechner“ wird häufig noch als Synonym für Multi-Representation-Tools (MRP) verwendet. Dies erweckt den Eindruck, dass deren Einsatz sich nur auf rechnerische Funktionen beschränkt. Wie jedoch im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde,

ist dies nicht der Fall. Trotz der Tatsache, dass die Rechenfunktion einen wesentlichen Teil des Funktionsumfangs von MRP ausmacht, bieten sie weitaus mehr Möglichkeiten, die im Unterricht effektiv genutzt werden können.

MRP unterscheiden sich von herkömmlichen Taschenrechnern durch ihre Fähigkeit, sowohl symbolische Berechnungen als auch Manipulationen durchzuführen. Sie ermöglichen unter anderem das algebraische Lösen von Gleichungen und die Durchführung statistischer Analysen. Ein wesentlicher Vorteil von MRP liegt in der Unterscheidung zwischen numerischen und symbolischen Lösungen. Während einige moderne Taschenrechner numerische Algorithmen verwenden, um Integrale zu berechnen, bieten MRP stets exakte Ergebnisse durch symbolische Berechnungen. Lernende können den Unterschied zwischen genauen und näherungsweisen Ergebnissen besser nachvollziehen, da viele MRP spezielle Befehle wie „solve“ für exakte und „approximate“ für annähernde Lösungen verwenden.

Bei der Übertragung realer Aufgabenstellungen in den mathematischen Kontext werden oft standardisierte Variablennamen wie „x“ oder „n“ verwendet, um die Berechnungen zu vereinfachen und zu strukturieren. Mit einem MRP ist es jedoch nicht notwendig, sich an diese kurzen Namen zu halten. Um den Bezug zur ursprünglichen Aufgabenstellung zu erhalten, können längere und präzisere Variablennamen gewählt werden. So könnte bei statistischen Berechnungen anstelle von „n“ für die Grundgesamtheit der Name „Grundgesamtheit“ verwendet werden. (vgl. Weigand, 1995)

4.7.5 Kontrollieren

Höhere Technologien bieten nicht nur Möglichkeiten zur Visualisierung und Entdeckung mathematischer Zusammenhänge, sondern ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern auch, manuell erzielte Ergebnisse eigenständig zu überprüfen (vgl. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildung, 2011). Diese Fähigkeit zur Selbstkontrolle befreit die Lernenden von der Abhängigkeit der Lehrperson als einziger Kontrollinstanz. Besonders nützlich ist dies in Situationen, in denen die Lehrkraft nicht verfügbar ist, wie etwa bei Prüfungen oder Hausaufgaben. Der Einsatz von Multi-Repräsentation-Tools (MRP) als Kontrollwerkzeug entlastet gleichzeitig die Lehrperson, da die Überprüfung der Ergebnisse nun an die Schülerinnen und Schüler oder an das CAS übergeben werden kann. (vgl. Bichler, 2010)

Jedoch darf diese Verantwortungsübergabe nicht ohne gründliche Vorbereitung erfolgen. Die Lernenden müssen verstehen, dass die von CAS gelieferten Ergebnisse nicht unkritisch übernommen werden dürfen. (vgl. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildung, 2011) Beispielsweise können technologische Vereinfachungen von Termen unvollständig sein oder zu veränderten Lösungs- oder Definitionsmengen führen. Auch eine ungünstige Wahl der Fenstereinstellungen kann dazu führen, dass wichtige Eigenschaften einer Funktion im Graphen übersehen werden. (vgl. Behrens, 2019) Bei der Suche nach Winkeln, für die der Sinus den Wert 0,5 annimmt, darf man sich nicht blind auf die Software verlassen. Während GeoGebra nur das Ergebnis 30° liefert, wird eine graphische Kontrolle zeigen, dass es auch andere Lösungen gibt. Um solche Fehler zu vermeiden, müssen die Schülerinnen und Schüler lernen, die Ergebnisse kritisch zu hinterfragen und deren Plausibilität zu überprüfen. Sie müssen die Fähigkeit erwerben, technologische Hilfsmittel zur Kontrolle ihrer manuellen Lösungen effektiv einzusetzen. (vgl. Heugl, 2005)

Fehlende Vertrautheit mit der Technologie als Kontrollwerkzeug kann dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler die Ergebnisse von CAS unreflektiert als korrekt annehmen. Der Einsatz von MRP als Kontrollwerkzeug ermöglicht es den Lernenden nicht nur ihre Ergebnisse individuell zu überprüfen, sondern auch ihr Vorgehen sowie mögliche Fehlerquellen durch schrittweise Kontrolle zu analysieren. Dies fördert selbstständiges und eigenverantwortliches Arbeiten und Lernen, insbesondere bei Hausaufgaben. (vgl. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildung, 2011)

Technologie kann auf verschiedene Weise als Kontrollinstrument eingesetzt werden:

1. Überprüfung händisch gelöster Aufgaben mittels CAS (vgl. Bichler, 2010).
2. Kontrolle von Ergebnissen der Technologie: Auch die mit MRP erzielten Resultate können durch technologische Mittel überprüft werden. Ein Beispiel hierfür sind die Termumformungen, die Heugl als Kontrollbeispiel beschreibt. (vgl. Heugl, 2005)

Nicht allein Berechnungen, sondern auch Schätzungen und damit eingehende Fehler sowie Ideen zur Lösung oder Vermutungen können durch Technologie auf ihre Plausibilität überprüft werden. (vgl. Bichler, 2010) (vgl. Herget et al., 2000) Ein wichtiger lernpsychologischer Aspekt ist die zeitnahe Rückmeldung. Positive Rückmeldungen stärken das

bestehende Verhalten, während negative Rückmeldungen eine Verhaltensänderung bewirken können. Die Ergebniskontrolle durch CAS ermöglicht eine unmittelbare und wertneutrale Rückmeldung, sowohl für Endergebnisse als auch für Zwischenschritte. Diese individuelle Rückmeldung gibt den Schülerinnen und Schülern Sicherheit und zeigt ihnen, ob sie sich auf dem richtigen Weg befinden. (vgl. Bichler, 2010)

4.8 Auswirkungen auf den Unterricht

Durch den Einsatz von Technologie verschiebt sich der Fokus im Mathematikunterricht weg von manuellen, fehleranfälligen Berechnungen hin zu planerischen und strategischen Aufgaben. Schülerinnen und Schüler befassen sich intensiver mit dem Reflektieren über die verwendete Mathematik, da sie Ergebnisse oft interpretieren müssen, die durch technologische Hilfsmittel berechnet wurden. Dies fördert eine kontextbezogene Reflexion und unterstützt das Nachdenken über mathematische Zusammenhänge auf einer höheren Ebene. (vgl. BIFIE, 2015)

Die Integration von Technologien in den Mathematikunterricht trägt entscheidend zur Förderung zentraler Kompetenzen bei, die auch im Lehrplan der AHS und BHS festgelegt sind (siehe Kapitel 5.3.1 und 5.3.2). Insbesondere unterstützt sie die Entwicklung der Fähigkeit zur Argumentation und Modellierung, fördert das Lösen von Problemen und stärkt die Verwendung sowie Interpretation von Darstellungen. Darüber hinaus wird der Umgang mit symbolischen und formalen Elementen verbessert, welche die mathematische Denkweise der Schülerinnen und Schüler auf verschiedenen Ebenen unterstützt. (vgl. Roth, 2015) (vgl. Weigand H. , 2020)

Heugl ergänzt diese Kompetenzen durch weitere technologische Kompetenzen, die im Folgenden näher beschrieben werden.

4.8.1 Strukturerkennungskompetenz

Um mathematische Ausdrücke in eine für technologische Systeme verständliche Sprache zu übersetzen, benötigen Schülerinnen und Schüler eine Strukturerkennungskompetenz. Diese Fähigkeit ermöglicht es, die Struktur eines mathematischen Ausdrucks zu erkennen und korrekt in die Technologie einzugeben. Beispielsweise durch richtiges Setzen

von Klammern. Außerdem müssen sie die Ergebnisse technischer Systeme kritisch reflektieren und auf ihre Gültigkeit überprüfen können. Diese Kompetenz erfordert Übung, die durch manuelles Umformen von Gleichungen erworben wird. Heugl nennt dies Handkalkülkompetenz, die unerlässlich ist, um technologische Ergebnisse kritisch beurteilen zu können. (vgl. Heugl, 2005)

4.8.2 Werkzeugkompetenz

Die Werkzeugkompetenz bezieht sich auf den sicheren und automatisierten Umgang mit technologischen Hilfsmitteln. Sowohl Lehrkräfte als auch Lernende müssen diese Fertigkeit entwickeln, um das volle Potenzial der Technologie auszuschöpfen. Der Erwerb dieser Kompetenz erfordert ein schrittweises Vorgehen, um Überforderung zu vermeiden. Wichtig ist, dass Schülerinnen und Schüler lernen, ihre Arbeitsschritte und Ergebnisse angemessen zu dokumentieren, um den Lernprozess nachvollziehbar zu gestalten. (vgl. Heugl, 2005)

4.8.3 Visualisierungskompetenz

Die Visualisierungskompetenz umfasst das Erstellen und Interpretieren graphischer Darstellungen. Sie ermöglicht den Lernenden, Zusammenhänge zwischen mathematischen Konzepten und deren graphischen Repräsentationen zu erkennen. Hier findet sich eine Verknüpfung zum Kompetenzmodell der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, siehe Kapitel 5.7.1. Dies ermöglicht ein tieferes Verständnis und Erkennen von Zusammenhängen durch die verschiedenen Darstellungen eines Problems. (vgl. Heugl, 2001) Diese Kompetenz wird zunehmend wichtiger, da technologische Werkzeuge oft graphische Darstellungen nutzen, um komplexe mathematische Beziehungen zu visualisieren. (vgl. Heugl, 2005)

4.8.4 Kontrollkompetenz

Die Kontrollkompetenz ist entscheidend für den Umgang mit technologisch generierten Ergebnissen. Lernende müssen in der Lage sein, sowohl eigene Berechnungen als auch

automatisch erzeugte Resultate, durch ein Technologiewerkzeug, zu überprüfen und kritisch zu hinterfragen. Technologische Systeme bieten dabei zusätzliche Möglichkeiten, etwa durch algebraische und graphische Überprüfungen, sodass Lernende individuelle Lösungswege entwickeln können. (vgl. Heugl, 2005)

Der technologische Fortschritt führt zu einem lernendenzentrierten und experimentellen Unterricht, der auf Modellierung, Interpretation und Argumentation abzielt. (vgl. Heugl, 2001) Technologische Hilfsmittel erweisen sich als besonders nützlich für selbstgesteuerte Lernprozesse und die individuelle Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten. (vgl. Roth, 2015) Für den erfolgreichen Einsatz von Technologie im Unterricht ist es jedoch notwendig, dass sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Lehrkräfte über die erforderlichen Kompetenzen verfügen. (vgl. Heugl, 2005)

Damit technologische Hilfsmittel den Mathematikunterricht bereichern, müssen sie zielgerichtet und reflektiert eingesetzt werden. Der bloße Einsatz neuer Medien führt nicht automatisch zu einer besseren Lernkultur. Es ist wichtig, dass Lehrkräfte interaktive Zugänge schaffen und die Technologie nicht nur zur Demonstration verwenden. (vgl. Elschenbroich, 2005) Es bleibt stets zu beleuchten, wann der Einsatz technologischer Werkzeuge sinnvoll ist und wann herkömmliche Methoden, wie Stift und Papier, vorgezogen werden sollten. Beide Ansätze haben ihren Platz im Mathematikunterricht und sollten ergänzend verwendet werden. (vgl. Heugl, 2005)

4.9 Vor- und Nachteile des Technologieeinsatzes

Die Integration von Computer-Algebra-Systemen (CAS) in den Mathematikunterricht ist ein Thema, das zunehmend an Bedeutung gewinnt. Diese technologischen Werkzeuge bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten, das Lernen und Lehren von Mathematik zu unterstützen. Auf der anderen Seite gibt es jedoch auch kritische Stimmen, die vor den potenziellen Nachteilen der CAS-Nutzung warnen.

Argumente für die Nutzung eines Computer-Algebra-Systems im Unterricht:

Förderung des selbstständigen und eigenverantwortlichen Lernens: Computer-Algebra-Systeme ermöglichen es Schülerinnen und Schülern, Berechnungen eigenständig zu überprüfen und Aufgaben autonom zu lösen. Insbesondere bei lernendenzentrierten Aufgabenstellungen wird dadurch die Fähigkeit zur Selbstkontrolle und zum eigenverantwortlichen Arbeiten gestärkt. (vgl. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildung, 2011)

Erleichterung des Wechsels zwischen verschiedenen Darstellungsformen: Der Übergang zwischen Wertetabellen, Funktionstermen und Graphen wird durch den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen erheblich vereinfacht. So können Schülerinnen und Schüler schneller Zusammenhänge erkennen und verstehen, wie unterschiedliche Darstellungen miteinander verknüpft sind. (vgl. Böer & Leuders, 2005) (vgl. Laakmann, 2011)

Unterstützung aktiver, kreativer und entdeckender Tätigkeiten: Die Möglichkeit, Funktionsgraphen zu manipulieren und dabei sofort die entsprechenden Funktionsterme angezeigt zu bekommen, fördert ein aktives und entdeckendes Lernen. Schülerinnen und Schüler können eigene Hypothesen entwickeln und durch visuelle Rückmeldungen direkt überprüfen. (vgl. Böer & Leuders, 2005) (vgl. Laakmann, 2011) (vgl. Pallack, 2007)

Entlastung von komplexen Rechenoperationen: Umfangreiche algebraische Umformungen und das Lösen von Gleichungen werden durch Computer-Algebra-Systeme vereinfacht. Dadurch können sich Schülerinnen und Schüler auf das Verstehen und Anwenden mathematischer Konzepte konzentrieren, anstatt sich mit aufwändigen Rechenprozessen zu beschäftigen. (vgl. Pallack, 2007) (vgl. Leuders T. , 2010)

Unterstützung bei der Modellierung realer Phänomene: Computer-Algebra-Systeme bieten zahlreiche Möglichkeiten zur Modellierung von Realweltsituationen. Zum Beispiel können Ableitungen schnell und ohne großen Aufwand gebildet werden. Dies erleichtert die Analyse komplexer Zusammenhänge und vertieft das Verständnis für mathematische Modelle. (vgl. Böer & Leuders, 2005) (vgl. Leuders T. , 2010)

Förderung offener Aufgabenstellungen im Unterricht: In einem offenen Lernumfeld können Schülerinnen und Schüler neben den Lehrkräften auch das Computer-Algebra-System als zusätzliche „Lernperson“ nutzen. Dies entlastet die Lehrkräfte und fördert eine offene Lernkultur, in der eigenständiges Arbeiten und kreatives Denken im Vordergrund stehen. (vgl. Barzel, 2012)

Förderung digitaler Kompetenzen: Durch den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen erwerben Schülerinnen und Schüler wichtige digitale Kompetenzen, die für den modernen Unterricht und das spätere Berufsleben essenziell sind. Sie lernen, technologische Werkzeuge sinnvoll einzusetzen, Ergebnisse zu interpretieren und kritisch zu hinterfragen. Dies stärkt ihre Fähigkeit, digitale Technologien reflektiert und zielführend zu nutzen. (vgl. Barzel & Schreiber, 2017) (vgl. Barzel et al., 2005)

Förderung der Problemlösekompetenz: Der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen unterstützt Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung von Problemlösestrategien. Sie können verschiedene Lösungswege ausprobieren, Ergebnisse variieren und Rückschlüsse auf zugrunde liegende mathematische Prinzipien ziehen. Dies fördert das analytische Denken und stärkt die Fähigkeit, komplexe Aufgaben systematisch zu lösen. (vgl. Dreher, 2013)

Steigerung der Motivation: Die Nutzung von Technologie im Unterricht kann die Motivation der Schülerinnen und Schüler erheblich steigern. Interaktive und visuelle Darstellungen erleichtern den Zugang zu mathematischen Inhalten und machen das Lernen spannender und greifbarer. Besonders bei abstrakten Konzepten kann der Einsatz eines Computer-Algebra-Systems zu einem tieferen Verständnis und einer höheren Lernbereitschaft führen. (vgl. Kohn, 2011)

Argumente gegen die Nutzung eines Computer-Algebra-Systems im Unterricht:

Gefahr des Verlusts grundlegender mathematischer Fähigkeiten: Wenn Routinetätigkeiten an Computer-Algebra-Systeme (CAS) ausgelagert werden, besteht die Gefahr, dass Schülerinnen und Schüler grundlegende mathematische Fertigkeiten und Basiswissen verlernen. Diese Fähigkeiten sind jedoch essenziell, um mathematische Probleme eigenständig und kritisch beurteilen zu können. (vgl. Pallack, 2007a) (vgl. Weidl, 2014)

Unzureichende Unterstützung bei wirklichkeitsnahen Modellierungsaufgaben: Obwohl CAS theoretisch die Bearbeitung von realitätsnahen Modellierungsaufgaben erleichtern sollen, wird diese Erwartung in der Praxis oft nicht erfüllt. Die Komplexität solcher Aufgaben bleibt häufig unberührt, und die erhoffte Vereinfachung tritt nicht ein. (vgl. Weidl, 2014) (vgl. Pallack, 2007)

Benachteiligung schwächerer Schülerinnen und Schüler: Die Bedienung von CAS kann für schwächere Schülerinnen und Schüler eine zusätzliche Hürde darstellen. Da vor

allem leistungsstarke Schülerinnen und Schüler von den Möglichkeiten der CAS profitieren, besteht das Risiko einer Polarisierung, bei der schwächere Lernende weiter zurückfallen. (vgl. Koepf, 2013) (vgl. Weigand & Bichler, 2010b)

Ungünstiges Kosten-Nutzen-Verhältnis: Obwohl CAS neue didaktische Möglichkeiten bieten, stehen diese oft in keinem Verhältnis zu der Anschaffung und dem erforderlichen Zeitaufwand, der benötigt wird um CAS zu bedienen. Die Anschaffungskosten sowie die Zeit, die für das Erlernen der Bedienung aufgewendet werden muss, können den praktischen Nutzen im Unterricht übersteigen. (vgl. Pallack, 2007a) (vgl. Weidl, 2013)

Einschränkung der Entwicklung algebraischer Fähigkeiten: Um mathematische Lösungen richtig bewerten und einordnen zu können, müssen Schülerinnen und Schüler algebraische Fähigkeiten beherrschen und regelmäßig üben. Das Auslagern solcher Aufgaben an CAS kann dazu führen, dass diese wichtigen Fertigkeiten nicht ausreichend entwickelt werden. (vgl. Weth, 2003)

Defizite im mathematischen Verständnis aufgrund früher CAS-Nutzung: Beobachtungen und Aussagen von Studierenden deuten darauf hin, dass eine frühe Einführung von CAS zu Defiziten im mathematischen Wissen führen kann, insbesondere in der Mittelstufe. Diese Defizite könnten langfristig das Verständnis komplexerer mathematischer Konzepte beeinträchtigen. (vgl. Weidl, 2013)

Automatisierung von Lösungsprozessen: Computer-Algebra-Systeme beherrschen nahezu alle in der Schulmathematik behandelten Operationen, wodurch regelhafte operative Tätigkeiten zunehmend ausgelagert werden können. Dies führt dazu, dass operatives Wissen komprimiert in einem Gerät verfügbar ist, ohne dass es von den Schülerinnen und Schüler selbst kognitiv entwickelt werden muss. (vgl. Schneider, 2002)

Entfremdung von Mathematik:

Schneider (2002) warnt davor, dass die einfache Wiederholbarkeit von Rechnungen ohne gezielte Lenkung dazu führen kann, dass Schülerinnen und Schüler mathematische Ergebnisse unreflektiert akzeptieren. Dadurch rückt das Verständnis für mathematisches Wissen in den Hintergrund. Weigand & Weth (2002) sprechen in diesem Zusammenhang von der Gefahr des "blinden Aktionismus", bei dem zielloses Hantieren mit Technologie zu unproduktivem Arbeiten führt. Barzel, Hußmann & Leuders (2005) befürchten zudem, dass eine Überflutung mit Informationen durch Versuch-Irrtum-Strategien Reflexionsprozesse blockieren und systematisches Denken erschweren kann.

Sowohl Befürworter als auch Kritiker von Computer-Algebra-Systemen (CAS) sind sich in einem zentralen Punkt einig: Es ist sinnvoll, im Mathematikunterricht eine „rechenfreie“ Phase zu erhalten, in dem das Verstehen mathematischer Konzepte im Vordergrund steht. Beide Seiten stimmen zudem darin überein, dass es nicht das primäre Ziel des Unterrichts sein sollte, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, sehr komplexe algebraische Aufgaben manuell zu lösen. (vgl. Herget, 2000) Es stellt sich die Frage nach dem didaktischen Mehrwert dieser Systeme: Ist der pädagogische Gewinn, den CAS bieten, tatsächlich größer als der Aufwand, der für ihre Integration in den Unterricht erforderlich ist? Dieser Aspekt erfordert eine sorgfältige Abwägung, um sicherzustellen, dass der Einsatz von CAS den Lernprozess wirklich bereichert. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Einsatz eines Taschenrechners in der schriftlichen Reife- und Diplomprüfung verpflichtend ist, da er dort offiziell bereitgestellt wird. Dennoch bleibt die Frage, in welchen Bereichen sein Einsatz didaktisch sinnvoll ist und wo es förderlicher wäre, auf manuelle Rechenwege zu setzen, um das mathematische Verständnis zu vertiefen. (vgl. Eichler, 2013)

4.10 Bestehende Forschungen

4.10.1 Modellversuch M3

Der Modellversuch M3 wurde 2003 gestartet, um den langfristigen Einsatz von Taschencomputern (TC) im Mathematikunterricht an bayerischen Gymnasien zu untersuchen. Das Projekt begann in der 10. Jahrgangsstufe und wurde später auf die 11. Klasse ausgeweitet. Eine Fortführung in die 12. Jahrgangsstufe scheiterte an administrativen Differenzen bezüglich der Technologie-Nutzung im Abitur. (vgl. Bichler et al. 2012)

Forschungsziel:

Untersucht wurden die Auswirkungen des TC-Einsatzes auf mathematische Kernkompetenzen, insbesondere das Lösen von Gleichungen. Zudem wurde analysiert, ob leistungsstarke und leistungsschwache Schülerinnen und Schüler unterschiedlich profitieren, wie sich die Nutzung in Prüfungssituationen gestaltet und inwieweit sich die Einstellung der Lernenden zum TC verändert. (vgl. Bichler & Weigand, 2009)

Methoden:

Es wurden Vor- und Nachtests in Modell- und Kontrollklassen durchgeführt. Die Lernenden dokumentierten ihre Arbeitsweise, während Lehrkräfte und Lernende Fragebögen zur Nutzung und Wahrnehmung des TC ausfüllten. (vgl. Bichler & Weigand, 2009)

Ergebnisse:

- Leistung: Keine signifikanten Unterschiede zwischen starken und schwachen Schülerinnen und Schülern.
- Einsatz: Vor allem für Problemlösungsaufgaben, meist als Kontrollwerkzeug.
- Herausforderungen: Eingewöhnungszeit von ca. einem Jahr.
- Prüfungen: Nach Einarbeitung verbesserte Ergebnisse durch TC-Nutzung.
- Lehrkräfte: Bevorzugten den TC als Funktionsplotter; keine Abnahme händischer Rechenfähigkeiten.
- Probleme: Nachvollziehbarkeit von Lösungswegen erschwert.

(vgl. Bichler & Weigand, 2009)

4.10.2 CALiMERO

Das Projekt CALiMERO (Computer-Algebra im Mathematikunterricht – Entdecken, Rechnen, Organisieren) wurde 2005/2006 in Niedersachsen initiiert und richtete sich an Gymnasiasten der 7. Klasse. Es wurde in Kooperation zwischen der Landesregierung Niedersachsen, Texas Instruments und der TU Darmstadt durchgeführt. (vgl. TU Darmstadt CALiMERO (2005-2010), 2018)

Forschungsziel:

Untersucht wurde, ob der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) die mathematischen Leistungen verbessert. Zusätzlich wurde die Akzeptanz bei Lehrkräften und Schülerinnen und Schülern evaluiert. (vgl. Bruder & Weiskirch, 2007)

Methoden:

Über fünf Jahre nahmen 29 Klassen von sechs Gymnasien teil. Jährliche schriftliche Tests erfassten die Leistungen, wobei einige Klassen als Kontrollgruppe dienten. Ab der 8. Klasse wurden CAS-basierte Leistungstests ergänzt. Zudem fanden jährliche

Grundwissenstests ohne Technologie sowie rechenfreie Kopfrechenübungen statt. (vgl. Bruder & Weiskirch, 2007)

Ergebnisse:

- Leistungssteigerung: Kein signifikanter Unterschied zur Kontrollgruppe, aber leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler profitierten vom CAS-Einsatz.
- Besonderheiten: Männliche Schüler zeigten stärkere Leistungszuwächse; Modellierungskompetenz wurde durch CAS verbessert.
- Unterrichtsgestaltung: Lehrkräfte gestalteten 49 % der Stunden eigenständig, 26 % beinhalteten Gruppenarbeit. Der TC wurde in 54 % der Unterrichtsstunden genutzt, allerdings traten in 11 % technische Probleme auf.
- Kopfrechenübungen: Klassen mit regelmäßigen Kopfrechenübungen erzielten deutlich höhere Leistungszuwächse.

(vgl. Bruder & Weiskirch, 2007)

4.10.3 TIM

Das Projekt TIM wurde 2005 als Modellversuch in Rheinland-Pfalz parallel zum CALI-MERO-Projekt gestartet. Es wurde vom Kulturministerium Rheinland-Pfalz und Texas Instruments finanziert und wissenschaftlich von Regina Bruder (TU Darmstadt) begleitet. Acht Schulen mit 16 Klassen nahmen teil, wodurch die Ergebnisse eher hypothesenbildend als generalisierbar sind. (vgl. Bruder, 2008)

Forschungsziel:

Untersucht wurde, wie Lehrkräfte mit geringer Technologieerfahrung digitale Werkzeuge in den Mathematikunterricht integrieren und welchen Einfluss dies auf den Lernfortschritt der Schülerinnen und Schüler hat. (vgl. Bruder, 2008)

Methoden:

Über zwei Jahre nahmen 13 Lehrkräfte mit Zugang zu Materialien und vierteljährlichen Austauschmeetings teil. Die Evaluation basierte auf qualitativen Methoden wie Interviews und Protokollen, ergänzt durch Pre- und Posttests. Zur Ergebnisbewertung wurden

Leistungszuwächse aus der Lernentwicklungsstudie (LAU) als Referenz herangezogen. (vgl. Bruder, 2008)

Ergebnisse:

- Leistungszuwächse: Besonders leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler erzielten eine Steigerung von bis zu 18 %. In den Klassen 9 und 10 lagen die Zuwächse über dem Durchschnitt, jedoch blieben sie in zwei Klassen aus, wo die Technologie auf geringe Akzeptanz stieß.
- Kopfrechenfertigkeiten: Diese blieben stabil, wurden jedoch nur in 9 % der Unterrichtsstunden geübt.
- Fokussierung auf Themen: Die Lehrplananpassung führte dazu, dass bestimmte mathematische Themen vernachlässigt wurden.
- Technologieakzeptanz: In der 7. Klasse war die Akzeptanz hoch, nahm aber in höheren Klassen ab. Dies spricht für einen frühen Technologieeinsatz.
- Modellierungskompetenz: Es wurden signifikante Verbesserungen festgestellt.
- Technologieeinsatz: In über 50 % der Unterrichtsstunden wurden digitale Werkzeuge genutzt.

(vgl. Bruder, 2008)

Zusatz: Bruder warnt vor der Annahme, dass Defizite bei rechnerfreien Fertigkeiten auf den Technologieeinsatz zurückzuführen seien. Sie betont, dass diese Fertigkeiten nur durch aktives Training aufrechterhalten werden können und dass regelmäßige rechnerfreie Übungsphasen erforderlich sind, um die Kopfrechenfertigkeiten stabil zu halten. (vgl. Bruder, 2008)

4.10.4 ACDCA

Der ACDCA ist ein gemeinnütziger Verein, der als Schnittstelle zwischen Wissenschaft, Softwareentwicklung und Unterrichtspraxis fungiert. Ziel ist die Verbreitung von Computer-Algebra-Systemen (CAS) im Unterricht. Der Verein engagiert sich in verschiedenen Bereichen, einschließlich der Initiierung von Forschungsprojekten, der Entwicklung und Verbreitung von Unterrichtsmaterialien und der Überarbeitung von Lehrplänen.

Bereits 1984 fanden erste Experimente mit CAS im Schulunterricht statt. Ein bedeutendes Projekt war CAS-1, das 1993 vom Bundesministerium für Unterricht gestartet wurde, gefolgt von weiteren Projekten CAS-2 bis CAS-5. (vgl. ACDCA, 2019)

CAS-1

Forschungsziel: Untersuchung des Einflusses von Computeralgebra-Systemen (CAS) auf den Mathematikunterricht, mit Fokus auf didaktische Methoden, Lernziele und die Entwicklung geeigneter Unterrichtsmaterialien. (vgl. Heugl et al., 1996)

Methode: Langzeitstudie mit 39 Klassen (ca. 700 Schülerinnen und Schüler, Jahrgangsstufen 7–12), die in drei Gruppen unterteilt wurden:

- **Typ 1:** Vollzugang zu CAS im Unterricht, bei Hausaufgaben und Prüfungen.
- **Typ 2:** CAS nur als Unterrichtshilfe, nicht in Prüfungen.
- **Typ 3:** Kontrollgruppen ohne CAS-Einsatz.

Die Evaluation erfolgte durch Befragungen von Schülerinnen und Schülern sowie Lehrkräften.

(vgl. Heugl et al., 1996)

Ergebnisse:

- Akzeptanz: 84 % der Schülerinnen und Schüler bewerteten CAS positiv, besonders Buben.
- Nutzung: Ältere Schülerinnen und Schüler bevorzugten CAS in Prüfungen, während jüngere es anfangs enthusiastischer aufnahmen.
- Leistungsunterschiede: Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler profitierten, schwächere hatten Schwierigkeiten.
- Vorteile: Zeitersparnis, bessere Visualisierung, tiefere Wissensvermittlung; Lehrkräfte empfanden den Unterricht als interessanter und motivierender.

(vgl. Heugl et al., 1996)

CAS-2

Forschungsziel: Untersuchung des Einflusses eines CAS-fähigen Handhelds (TI-92) auf den Mathematikunterricht, insbesondere hinsichtlich der permanenten Verfügbarkeit des Geräts und deren Auswirkungen auf den Lernprozess. (vgl. Grogger, 1999)

Methode: 1997 beauftragte das Bundesministerium für Unterricht und Kultur die Studie, die vom Zentrum für Schulentwicklung unter Dr. Helmut Heugl evaluiert wurde. 70 Klassen mit 1.678 Schülerinnen und Schülern nahmen teil. Unterrichtssequenzen („Beobachtungsfenster“) wurden vereinheitlicht, während Lehrkräfte nach einer Einführung in den TI-92 den Unterricht individuell gestalteten. Die Evaluation erfolgte durch Pre- und Posttests sowie Fragebögen. (vgl. Grogger, 1999)

Ergebnisse:

- **Nutzungskompetenz:** Zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler hatten Schwierigkeiten mit der Bedienung des TI-92.
- **Schwerpunktverschiebung:** Lehrkräfte beobachteten eine Verlagerung hin zu Anwendungsaufgaben.
- **Belastung durch neue Kompetenzen:** Die Einarbeitung in den TI-92 stellte eine zusätzliche Herausforderung dar.

(vgl. Grogger, 1999)

Zusatz: Untersuchung der Rechenfertigkeiten

In zehn Projektklassen wurde der TI-92 systematisch genutzt und anschließend ein schriftlicher Test ohne technische Hilfsmittel mit 17 Kontrollklassen verglichen.

- **Rechenleistung:** Kontrollklassen erzielten eine höhere Erfolgsquote (50,8 %) als die Projektklassen (44,8 %), dies deutet auf eine Verlagerung von Rechenoperationen auf das CAS hin.
- **Argumentationsfähigkeit:** Projektklassen lieferten häufiger korrekte Begründungen (40,7 % vs. 30,9 % in Kontrollklassen), und 90 % der richtigen Lösungen wurden korrekt begründet (Kontrollklassen: 60,8 %).

Der Einsatz des TI-92 verändert den Fokus des Mathematikunterrichts. Während manuelle Rechenfertigkeiten leicht abnehmen, verbessert sich die Fähigkeit zur schriftlichen Argumentation und Modellierung. (vgl. Grogger, 1999)

CAS-3

Forschungsziel: Untersuchung des erweiterten Einsatzes von Computeralgebra-Systemen (CAS) im Mathematikunterricht, insbesondere der Integration des TI-92 und der daraus resultierenden didaktischen Ansätze. (vgl. Heugl, 2001)

Methode: Im Schuljahr 1999/2000 wurde die Teilnehmerzahl auf 140 Klassen mit über 2000 Schülerinnen und Schüler ausgeweitet. Die Studie untersuchte verschiedene didaktische und methodische Aspekte durch eine projektbegleitende Homepage, die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien sowie standardisierte Tests zur Analyse von Leistungsmessung, Unterrichtsgestaltung und Lernkultur. (vgl. Heugl, 2001)

Ergebnisse:

1. Elektronische Lehr- und Lernmedien:

- Entwicklung einer Homepage mit digitalen Materialien für den TI-92.
- Bereitstellung spezieller Programme zur Unterstützung der Nutzung.

2. Qualitätsstandards im Mathematikunterricht:

- CAS-Klassen erzielten bessere Ergebnisse in 51 von 54 Testaufgaben.
- Wissenschaftliche Belastbarkeit der Ergebnisse ist eingeschränkt.

3. Leistungsmessung und Beurteilung:

- Schülerinnen und Schüler lehnten Tests ohne Technologie zunehmend ab.
- Aufgaben wurden komplexer und erforderten mehr Visualisierungen.
- Bestimmte Rechenfertigkeiten traten durch CAS-Nutzung in den Hintergrund.

4. Neue Lernkulturen:

- Einführung eines Stationenbetriebs zur Funktionenlehre, der selbstständiges Arbeiten förderte und positiv bewertet wurde.

(vgl. Heugl, 2001)

Die Studie zeigt eine verstärkte Integration elektronischer Hilfsmittel, die Lernmotivation, Eigenständigkeit und den Fokus auf Visualisierung und komplexe Aufgaben fördert. Aufgrund methodischer Einschränkungen sind die Ergebnisse jedoch nicht vollständig wissenschaftlich validiert. (vgl. Heugl, 2001)

CAS-4

Im Jahr 2001 wurde die Studie CAS-4 gestartet, die direkt an das vorangegangene CAS-3-Projekt anknüpfte und offen gebliebene oder neu aufgetretene Fragestellungen weiter untersuchte. Etwa 100 Klassen nahmen daran teil, und das Konzept der Unterteilung in Projektgruppen wurde fortgeführt. Neue Teilbereiche und deren zentrale Ergebnisse waren:

- **Betreuungs- und Fortbildungsgruppe**
 - Durchführung themenspezifischer Seminare
 - Kooperation mit der T-3-Initiative zur Förderung des Technologieeinsatzes
 - Einführungsveranstaltungen für angehende Lehrkräfte sowie Unterrichtspraktikantinnen und Unterrichtspraktikanten
 - Insgesamt wurden 529 Schulungen und Fortbildungskurse erfolgreich angeboten
- **Technologiegruppe**
 - Sammlung praxisnaher Anwendungsbeispiele für den Unterricht
 - Entwicklung und Bereitstellung von maßgeschneiderten Lernmodulen

(vgl. Heugl et al., 2003)

CAS-5

Mit dem Projekt CAS-5 wurde die erste umfassende österreichische Studie zum Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht abgeschlossen. Das Projekt verlagerte den Fokus von CAS-spezifischen Fragestellungen hin zu aktuellen technologischen Entwicklungen, darunter Lernplattformen, Notebook-Klassen und elektronische Unterrichtsmaterialien. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit jedoch nicht auf dem Einsatz von Medien liegt, wird auf eine detaillierte Darstellung der gewonnenen Erkenntnisse verzichtet. (vgl. Heugl et al., 2005)

4.10.5 CAS Pilotprojekt

2005 startete das neuseeländische Bildungsministerium in Zusammenarbeit mit der New Zealand Qualifications Authority (NZQA) ein dreijähriges Pilotprojekt zur Untersuchung des Einsatzes von CAS-Taschenrechnern im Mathematikunterricht. Ziel war es,

Erkenntnisse für Lehrkräftefortbildungen zu gewinnen und die Möglichkeit der CAS-Nutzung in Prüfungen genauer zu betrachten. (vgl. NZQA, 2019)

Forschungsziel: Die Studie hatte mehrere zentrale Ziele: Zum einen sollte die Lehrkräftefortbildung im Umgang mit CAS-Technologie verbessert werden, um eine fundierte Integration der Technologie in den Unterricht zu ermöglichen. Darüber hinaus wurde untersucht, welche Auswirkungen CAS auf den Mathematikunterricht, die Leistung der Lernenden und die Lernmotivation hat. Schließlich sollte überprüft werden, ob CAS-Taschenrechner in Prüfungen des National Certificate of Educational Achievement zugelassen werden können. (vgl. Neill & Maguire, 2008)

Methode: An dem Projekt nahmen insgesamt 22 Schulen teil, wobei jede Schule zwei Klassen stellte – eine mit CAS-Unterstützung und eine Kontrollklasse ohne den Einsatz der Technologie. Die Lehrkräfte erhielten sowohl vor als auch während des Projekts spezielle Schulungen, um den effektiven Einsatz der CAS-Taschenrechner zu gewährleisten. Die Datenerhebung erfolgte sowohl quantitativ als auch qualitativ: Standardisierte Tests wurden genutzt, um Leistungsentwicklungen zu messen, während Fragebögen und Hospitationen dazu dienten, subjektive Eindrücke von Schülerinnen, Schülern und Lehrkräften zu erfassen. Zudem wurden acht spezifische Forschungsfragen formuliert, die sich mit Veränderungen im Unterricht, den Wahrnehmungen der Beteiligten und möglichen Leistungssteigerungen durch den CAS-Einsatz befassten. (vgl. Neill & Maguire, 2008)

Ergebnisse

1. Unterrichtskultur:

- Offenerer Unterrichtsstil, mehr Diskussionen und vielfältigere Aufgabenformate.
- Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sahen CAS als Chance zur neuen Betrachtung mathematischer Konzepte.

2. Mathematische Leistung:

- Keine signifikanten Unterschiede zwischen CAS- und Kontrollklassen.
- Standardisierte Tests zeigten schwankende Ergebnisse mit leichten Vorteilen für CAS-Klassen im dritten Jahr.

- Besseres Algebra-Verständnis durch visuelle Aufbereitung, jedoch empfanden einige Schülerinnen und Schüler CAS als zusätzliche Hürde.
- Lehrkräfte bewerteten Leistungsänderungen neutral.

3. **Motivation:**

- Genereller Rückgang der Mathematikmotivation in beiden Gruppen.
- CAS-Klassen zeigten in der 10. Klasse eine etwas positivere Einstellung, besonders im Fach Algebra.

4. **Lehrkräftefortbildung:**

- Schulungen wurden positiv bewertet, jedoch unterschiedliche Bedürfnisse:
 - Einige forderten mehr technische Unterstützung.
 - Andere wünschten sich stärkeren Fokus auf pädagogische Konzepte.

(vgl. Neill & Maguire, 2008)

Fazit: Das Pilotprojekt zeigte Veränderungen in der Unterrichtsgestaltung und ein verbessertes Algebra-Verständnis, jedoch keine klaren Leistungssteigerungen. Die Motivation nahm insgesamt ab, mit leichtem Vorteil für CAS-Klassen. Die Lehrkräftefortbildung wurde positiv bewertet, jedoch mit unterschiedlichen Anforderungen.

4.10.6 Fazit der Studien

Die bisherigen Studien zu technologischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht bieten zwar nur einen begrenzten Einblick in ein komplexes Themenfeld, zeigen jedoch eine klare Tendenz: Es gibt bislang keine konsistenten Belege für eine signifikante Leistungssteigerung der Schülerinnen und Schüler. Auch wenn einige Studien, wie das CAS-Pilotprojekt, Hinweise auf eine Verschiebung von Fertigkeiten und einen leichten Anstieg der Leistungen in bestimmten Kontexten liefern, bleibt die Richtung und Tragweite dieser Effekte unklar. Die ermittelten Leistungsdaten basieren meist auf projektbezogenen Settings und sind oft auf einen begrenzten Zeitraum beschränkt. Daher können keine nachhaltigen Schlussfolgerungen über die langfristige mathematische Leistungsbeeinflussung durch den Einsatz technischer Hilfsmittel gezogen werden. Dennoch ist eine positive Entwicklung in der Unterrichtskultur unbestreitbar. Die Integration von technologischen Hilfsmitteln hat zu veränderten Methoden, Inhalten und Sozialformen geführt, die den

Unterricht bereichern. (vgl. Neumann, 2016) Diese genannten Aspekte finden sich auch in den Kriterien guten Unterrichts nach Mayer wieder. Darunter fällt die klare Strukturierung des Unterrichts, ein lernförderliches Klima, inhaltliche Klarheit, sinnvolles Kommunizieren, Methodenvielfalt, individuelles Fördern und eine vorbereitete Lernumgebung. (vgl. Meyer, 2011)

Lehrkräfte sowie Schülerinnen und Schüler berichten von einer insgesamt positiven Einstellung zu den neuen Technologien, die auf eine Öffnung und Flexibilität im Lehr- und Lernprozess hinweist. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass, obwohl die unmittelbaren Auswirkungen auf die Leistungssteigerung noch unklar sind, die Veränderungen in der Unterrichtskultur und die positive Wahrnehmung der Technologien durch Lehrkräfte sowie Schülerinnen und Schüler einen vielversprechenden Schritt in Richtung einer modernen, technologiegestützten Mathematikausbildung darstellen. Künftige Untersuchungen sollten sich daher verstärkt mit der langfristigen Wirkung und Integration dieser Hilfsmittel im Schulalltag auseinandersetzen. (vgl. Neumann, 2016)

5 Einsatz des TI-Nspire im Mathematikunterricht

5.1 Bedeutung von CAS

CAS steht für "Computer-Algebra-System", ein Begriff, der sich auf ein spezialisiertes System bezieht, das zur Lösung mathematischer Probleme durch symbolische Algorithmen entwickelt wurde. Die Fachgruppe Computeralgebra beschreibt dieses System folgendermaßen:

„Die Computeralgebra ist ein Wissenschaftsgebiet, das Methoden zur symbolischen Lösung mathematisch formulierter Probleme entwickelt und diese in Software und Hardware umsetzt. Diese Verfahren basieren auf der exakten, endlichen Darstellung sowohl endlicher als auch unendlicher mathematischer Objekte und Strukturen, wodurch eine symbolische Bearbeitung durch Maschinen ermöglicht wird. Mathematisches Wissen spielt dabei eine zentrale Rolle im Entwurf, der Verifikation und der Analyse der Komplexität dieser Algorithmen.“ (Fachgruppe Computeralgebra, o. J.)

Ein entscheidendes Merkmal eines Computer-Algebra-Systems (CAS) ist, dass es neben numerischen Berechnungen auch exakte, algebraische Lösungen ermöglicht. Dies bedeutet, dass mathematische Ausdrücke exakt umgeformt und kompakte, präzise Ergebnisse erzielt werden können. Mit dem Aufstieg der Computeralgebra in der modernen Mathematik hat sich das Anwendungsgebiet von CAS-Systemen erheblich erweitert. Sie finden nicht nur in der Mathematik Anwendung, sondern auch in anderen Bereichen wie der Physik, Chemie, Sicherheitstechnik, Robotik und Genforschung.

Die Bedeutung von Computer-Algebra-Systemen hat auch im Schulunterricht zugenommen, insbesondere im Bereich der Schulalgebra. Eine zentrale Eigenschaft von CAS im schulischen Kontext ist die Fähigkeit, Gleichungssysteme algebraisch zu lösen, anstatt sich ausschließlich auf numerische Verfahren zu stützen. Dadurch erhalten Lernende exakte Lösungen und nicht nur Näherungswerte. Diese präzise Lösungsfindung, aber auch die Aspekte des Modellierens (siehe Kapitel 5.7.3), Experimentierens (siehe Kapitel 5.7.2) und Visualisierens (siehe Kapitel 5.8.3) macht CAS zu einem wertvollen Werkzeug im Mathematikunterricht. (vgl. Barzel, 2012)

5.2 Zeitlicher Überblick über den Einsatz von CAS im Unterricht

Die ersten Computer-Algebra-Systeme (CAS) fanden in den 1980er-Jahren ihren Weg in den schulischen Unterricht. Zu dieser Zeit waren sie jedoch ausschließlich als Software auf stationären Computern in speziellen Computerräumen verfügbar. Erst in den 1990er-Jahren kam es zu einem weiteren entscheidenden Schritt, als in Deutschland beispielsweise der TI-92 von Texas Instruments eingeführt wurde. Diese Einführung führte zu intensiven Diskussionen, da befürchtet wurde, dass die Geräte viele der traditionellen Aufgaben im Mathematikunterricht übernehmen und somit die bisherigen Unterrichtsformate verändert werden müssten. Ängste wie diese und die damit verbundene Debatte erinnern an die Einführung des wissenschaftlichen Taschenrechners in den 1970er-Jahren, als Lehrkräfte eine "Bedrohung" durch die Technologie wahrnahmen. (vgl. Neumann R. , 2016)

Während der wissenschaftliche Taschenrechner vor allem die Rechenarbeit und das Nachschlagen in Sinus- oder Logarithmentabellen erleichterte bzw. überflüssig machte,

hatten Computer-Algebra-Systeme einen wesentlich größeren Einfluss auf den Unterricht und dessen Gestaltung. Sie konnten in fast allen Bereichen der Mathematik eingesetzt werden und viele Aspekte des Unterrichts übernehmen. In den 1990er-Jahren wurden in Deutschland und anderen Ländern Schulversuche durchgeführt, bei denen CAS im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts standen. Diese Untersuchungen beschäftigten sich mit der Frage, welche Inhalte Schülerinnen und Schüler noch verstehen müssen, wenn sie CAS verwenden. Es gibt sogar Beispiele, wie in Australien, wo Arbeiten von Lernenden nicht anerkannt wurden, weil CAS genutzt wurde. (vgl. Neumann R. , 2016)

In den darauffolgenden Jahren blieb die Verbreitung von Computer-Algebra-Systemen relativ begrenzt. Weigand (2006) nennt dafür verschiedene Gründe, darunter die umständliche Handhabung der Geräte, die hohen Kosten, die Einstellung der Lehrkräfte und die fehlende Integration in die Lehrpläne. (vgl. Neumann R. , 2016)

Weigand (2014) reflektiert in seinem Artikel „Wohin, Warum und Wie? – Zum Einsatz digitaler Technologien im zukünftigen Mathematikunterricht“ über den begrenzten Erfolg der CAS-Systeme:

„Neue Technologien haben sich trotz zahlloser Ideen, praktischer Unterrichtserfahrungen und Forschungsberichte nicht so durchgesetzt, wie viele es zu Beginn der 1990er Jahre erwartet oder erhofft hatten.“ (Weigand, 2014)

5.3 Funktionsweise und Möglichkeiten des TI-Nspire CXII-T CAS

Der TI-Nspire CXII-T CAS ist ein moderner graphischer Taschenrechner, der vielseitige Funktionen zur Unterstützung mathematischer und naturwissenschaftlicher Aufgaben bietet. Mit seiner leistungsstarken Technologie ermöglicht er es, komplexe Berechnungen und Analysen effizient durchzuführen. Diese Eigenschaften machen ihn zu einem wertvollen Werkzeug im schulischen und universitären Bereich.



Abbildung 4: TI-nspire CX II-T CAS (Texas Instruments, o. J.)

„Nach erfolgreicher Prüfung durch das Sekretariat der Kultusministerkonferenz wird dieses Update den Anforderungen für das Abitur 2030 entsprechen. Lehrkräfte und Lernende, die im Schuljahr 2024/25 ein TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld erwerben, können rechtzeitig zur Vorbereitung und Ablegung der Prüfungen im Jahr 2030 das kostenlose Update des Betriebssystems nutzen.“ (Texas Instruments, o. J.)

5.3.1 Apps und deren Möglichkeiten für einen Einsatz im Unterricht

Beim Starten des TI-Nspire Systems stehen auf dem Bildschirm verschiedene Apps zur Verfügung, die eine breite Palette an mathematischen Bereichen abdecken. Diese Apps ermöglichen es Lehrkräften und Lernenden, die unterschiedlichsten mathematischen Fragestellungen interaktiv zu bearbeiten. Mit den integrierten Modulen können mathematische Fragestellungen aus verschiedenen Perspektiven betrachtet und bearbeitet werden. Außerdem lassen sich die Module flexibel miteinander verbinden, dies hilft dabei, komplexe Zusammenhänge leichter zu verstehen. Der Taschenrechner TI-Nspire CX II-

T CAS von Texas Instruments verfügt zudem über eine umfangreiche Speicherfunktion. Nutzer können sowohl Variablen und Terme speichern als auch komplette Dokumente sichern, um sie später erneut zu bearbeiten. (vgl. Texas Instruments, o. J.)

Im Folgenden werden die mathematischen Bereiche, die der TI-Nspire abdeckt, aufgelistet. Die Auswahl der verfügbaren Apps, die über den Startbildschirm zugänglich sind, ist in Abbildung 4 dargestellt und bietet einen klaren Überblick über die vielseitigen Funktionen des Taschenrechners.

Rechenoperationen und Funktionen

Im Standard-Taschenrechner-Modus ("Calculator") stehen zahlreiche mathematische Funktionen zur Verfügung. Diese umfassen Grundrechenarten, Primfaktorzerlegung, Teilbarkeitstests, Rundungen, Betragsberechnungen, Prozentrechnungen, Quadratwurzeln, Kehrwerte und Einheitenumwandlungen. Der Rechner kann auch Gleichungen numerisch lösen, lineare Gleichungssysteme bearbeiten, Ungleichungen auflösen und Nullstellen von Polynomen bestimmen. Darüber hinaus ermöglicht der Modus Berechnungen mit Termen, Bruchtermen, Polynomdivisionen, quadratischer Ergänzung und die Durchführung trigonometrischer Berechnungen. Funktionen zur Umrechnung zwischen Bogenmaß und Gradmaß, sowie zur Arbeit mit Exponential- und Logarithmusfunktionen, sind ebenfalls integriert. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Graphen und Funktionen

In der App „Graphs“ können Funktionen visualisiert und interaktiv untersucht werden. Mit Schiebereglern lassen sich Funktionen erkunden, abschnittsweise definieren und speichern, Funktionswerte berechnen und ablesen, sowie Wertetabellen erstellen. Der Rechner unterstützt die Untersuchung von Symmetrien, die Bestimmung von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten sowie die Darstellung von Ableitungen. In Kombination mit dem CAS lassen sich Extremwerte mithilfe der 1. Ableitung ermitteln, Tangentengleichungen an einem Punkt bestimmen und gebrochenrationale Funktionen sowie Grenzwerte untersuchen. Die App ermöglicht außerdem die Integralrechnung, einschließlich näherungsweise Bestimmen von Integralen über Rechteckssummen, bestimmter und unbestimmter Integrale, sowie der Berechnung von Flächen zwischen Graphen und Volumen von Rotationskörpern. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Geometrie

Die App „Geometrie“ bietet Werkzeuge zur Darstellung grundlegender geometrischer Objekte, Konstruktion von Dreiecken und Abbildung symmetrischer und regulärer Vielecke. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Tabellen und Datenmodellierung

Mit der App „Lists & Spreadsheets“ lassen sich Daten modellieren und Regressionen durchführen. Der Rechner unterstützt lineare, quadratische, exponentielle und kubische Regressionen, die anhand von eingegebenen Datenpunkten erstellt werden. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Vektorrechnung

Der Rechner kann mit Vektoren arbeiten, deren lineare Unabhängigkeit prüfen, das Vektorprodukt und Skalarprodukt berechnen und Winkel zwischen Vektoren sowie Flächen von Parallelogrammen ermitteln. Es ist möglich, Schnittpunkte von Geraden, Abstände zwischen windschiefen Geraden und Abstände von Punkten zu Geraden und Ebenen zu berechnen. Der Rechner erlaubt es, Kugelgleichungen einzugeben und die Lagebeziehung zwischen Geraden und Kugeln zu erforschen. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Matrizenrechnung

Auch das Arbeiten mit Matrizen wird unterstützt. Nutzer innen und Nutzer können Matrizen eingeben und addieren, multiplizieren, die transponierte und inverse Matrix erstellen und die Determinante sowie die Diagonalform anzeigen lassen. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)

Daten und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für statistische Berechnungen kann der Rechner Stichproben und Zufallswerte in Tabellen eingeben, Wahrscheinlichkeitsverteilungen simulieren und Zufallsgrößen analysieren. Er unterstützt die Berechnung von Fakultäten, binomialen Koeffizienten, Binomialverteilungen und Normalverteilungen. Für die Übersichtlichkeit kann der Bildschirm geteilt werden, um gleichzeitig eine Tabelle und das CAS-Modul anzuzeigen. (vgl. Gruber & Neumann, 2019)



Abbildung 5: Apps TI-Nspire CX II-T CAS (Texas Instruments, o. J.)

5.3.2 Erweiterte Funktionen

Press-to-Test-Modus

Im Press-to-Test-Modus wird der Zugriff auf alle im Handheld gespeicherten Dokumente, Dateien, Anwendungen und Bilder während einer Prüfung gesperrt, ohne dass sie gelöscht werden. Dieser Modus lässt sich einfach über einen Testcode aktivieren. (vgl. Texas Instruments, o. J.)

TI-Nspire™ CX II Connect

Die webbasierte App TI-Nspire™ CX II Connect ist für PC, Mac® und Chromebook™ verfügbar und ermöglicht die Verbindung des TI-Nspire™ CX II-T Graphikrechners mit dem Computer. Sie erlaubt es, Screenshots zu erstellen, Dateien zu übertragen, das Betriebssystem zu aktualisieren und den Prüfungsmodus zu beenden – alles in einer praktischen Anwendung vereint. (vgl. Texas Instruments, o. J.)

Texas Instruments stellt auf seiner Website (<https://education.ti.com>) ein umfassendes Handbuch zur Funktionsweise des TI-Nspire CX II-T CAS zur Verfügung. Dieses Handbuch bietet detaillierte Anleitungen und Erklärungen zu den zahlreichen Funktionen des Geräts. Zusätzlich gibt es eine Vielzahl an Erklärvideos, die Schritt für Schritt durch verschiedene Anwendungsbereiche und Funktionen führen und das Verständnis erleichtern. Diese Ressourcen ermöglichen es den Nutzerinnen und Nutzern, sich sowohl theoretisch als auch praktisch in die Arbeit mit dem TI-Nspire CX II-T CAS einzuarbeiten.

6 Empirische Forschung

Ausgehend von den Erkenntnissen der Literaturrecherche und vorangegangener Studien möchte diese Arbeit nun einen Schritt weiter gehen und den eigenen Unterricht unter wissenschaftlichen Gesichtspunkten untersuchen. Ziel der empirischen Forschung ist es, durch die Analyse realer Unterrichtssituationen neue Erkenntnisse zu gewinnen und die in der Theorie gewonnenen Ergebnisse in der Praxis zu überprüfen.

6.1 Forschungsfragen und Hypothesen

In der vorliegenden Arbeit soll der Frage nach der Wirksamkeit des TI-Nspire im Mathematikunterricht nachgegangen werden. Zur genaueren Analyse werden Fragen zum Verständnis und den Problemlösungsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler aufgeworfen. Dabei liegt der Fokus auf bestimmten Anwendungsbereichen, insbesondere der linearen Optimierung, und der Untersuchung, wie der TI-Nspire das Lernen und die Bearbeitung von Aufgaben im Vergleich zur traditionellen Methode beeinflusst.

Diese Fragestellungen stehen in direktem Zusammenhang mit der Unterscheidung zwischen deklarativem, prozeduralem und konzeptuellem Wissen (vgl. Barzel, 2012). Der Einsatz von Technologie, wie dem TI-Nspire, kann insbesondere das konzeptuelle Verständnis fördern, indem er mathematische Zusammenhänge durch Visualisierungen verständlicher macht und den Lernenden ermöglicht, sich weniger auf langwierige Rechenschritte und mehr auf das Verständnis der Konzepte zu konzentrieren (vgl. Heugl et al., 1996).

6.1.1 Forschungsfrage

Inwiefern beeinflusst der Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners TI-Nspire das Verständnis und die Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben zur linearen Optimierung im Vergleich zur traditionellen händischen Bearbeitung? Welche konkreten Aspekte des Verständnisses und der Problemlösungsfähigkeit werden durch die Nutzung des TI-Nspire möglicherweise verbessert oder beeinträchtigt? Im Zentrum der Untersuchung steht die Frage, ob der TI-Nspire durch seine

Fähigkeit zur schnellen Durchführung komplexer Berechnungen und die Darstellung von Graphen den Schülerinnen und Schülern ein tieferes Verständnis der zugrunde liegenden mathematischen Konzepte vermittelt und ob dadurch die Effizienz und Genauigkeit der Problemlösung im Vergleich zur händischen Bearbeitung gesteigert wird.

6.1.2 Vermutungen

1) Verbesserung des Verständnisses durch Visualisierung:

Der TI-Nspire bietet die Möglichkeit, komplexe Optimierungsprobleme graphisch darzustellen, dies könnte das Verständnis der mathematischen Konzepte erleichtern. Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben, die algebraischen Zusammenhänge zu verstehen, profitieren möglicherweise von der visuellen Darstellung der Lösungsmöglichkeiten, wie etwa der Darstellung von Zielfunktionen und Nebenbedingungen.

2) Beschleunigung der Rechenprozesse:

Der TI-Nspire übernimmt viele der zeitaufwendigen Rechenprozesse, wie das Lösen von linearen Gleichungssystemen oder das Berechnen der optimalen Lösung. Dies könnte dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler mehr Zeit haben, sich auf das eigentliche Verständnis der Problemstellung zu konzentrieren, anstatt sich mit den Berechnungen zu belasten.

3) Reduzierte kognitive Belastung:

Die kognitive Belastung durch manuelle Berechnungen, wie z.B. Lösen von Gleichungen, könnte durch den TI-Nspire verringert werden. Dies ermöglicht es Schülerinnen und Schülern, sich stärker auf die Lösungsmethoden und die Interpretation der Ergebnisse zu konzentrieren, anstatt auf die Mechanik der Berechnungen.

4) Bessere Fehlererkennung durch technische Unterstützung:

Der TI-Nspire könnte Schülerinnen und Schülern helfen, ihre eigenen Fehler in der Bearbeitung von Aufgaben besser zu erkennen, da das Gerät sofort Feedback gibt, wenn Eingabefehler oder falsche Berechnungen vorliegen. Dies könnte das

Verständnis und die Leistung verbessern, indem Lernende durch den technischen Support schneller aus ihren Fehlern lernen.

5) Fokusverschiebung auf Problemlösungsstrategien:

Da der TI-Nspire viele Rechenschritte übernimmt, könnten Schülerinnen und Schüler mehr Zeit darauf verwenden, Strategien zur Lösung des Problems zu entwickeln und zu hinterfragen. Anstatt sich auf Rechentechniken zu konzentrieren, liegt der Fokus auf der Analyse des Problems und der Entscheidungsfindung.

6) Mögliche Abhängigkeit vom Taschenrechner:

Eine mögliche negative Folge könnte sein, dass sich Schülerinnen und Schüler zu sehr auf den TI-Nspire verlassen und dadurch weniger in der Lage sind, die Aufgaben ohne technische Hilfe zu lösen. Dies könnte zu einer schlechteren Leistung führen, wenn sie die Konzepte ohne Taschenrechner nachvollziehen müssen.

7) Unterschiedliche Wirkung je nach Leistungsniveau der Schülerinnen und Schüler:

Es ist möglich, dass der TI-Nspire unterschiedlich starke Auswirkungen auf Schülerinnen und Schüler verschiedener Leistungsniveaus hat. Stärkere Lernende könnten ihn als nützliches Werkzeug zur Vertiefung des Verständnisses nutzen, während schwächere Schülerinnen und Schüler möglicherweise Schwierigkeiten haben, die Vorteile des Geräts voll auszuschöpfen, da sie vielleicht die zugrunde liegenden Konzepte nicht vollständig verstehen.

6.1.3 Hypothese

Der Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners TI-Nspire in der Bearbeitung von Aufgaben zur linearen Optimierung führt zu einer signifikanten Verbesserung sowohl des mathematischen Verständnisses als auch der Leistungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler im Vergleich zur traditionellen händischen Bearbeitung. Dies liegt insbesondere daran, dass der TI-Nspire in der Lage ist, komplexe Berechnungen automatisch und schneller durchzuführen und dabei graphische Darstellungen von Optimierungsproblemen effizienter zu generieren. Durch diese Funktionalitäten können Lernende schneller ein Verständnis für die mathematischen Vernetzungen und den Lösungsprozess

entwickeln. Es wird erwartet, dass die Visualisierungsmöglichkeiten des TI-Nspire den Schülerinnen und Schülern erleichtert, den Zusammenhang zwischen algebraischen und graphischen Lösungsansätzen zu erkennen und die Ergebnisse von Optimierungsprozessen besser zu interpretieren. Darüber hinaus soll die kognitive Belastung durch manuelle Berechnungen reduziert werden, wodurch sich die Lernenden stärker auf das Verständnis der Problemstruktur und weniger auf zeitaufwendige Berechnungen konzentrieren können. Insgesamt wird angenommen, dass dies zu einer gesteigerten Problemlösungsfähigkeit und besseren schulischen Leistungen führt.

6.2 Methode und Vorbereitung

6.2.1 Lineare Optimierung

Das Thema der linearen Optimierung wurde für diese Untersuchung gewählt, weil es im Lehrplan der 10. Schulstufe verankert ist und auf bereits erworbenem Wissen aus der 9. Schulstufe aufbaut. In der 9. Schulstufe haben die Schülerinnen und Schüler grundlegende Kenntnisse über lineare Funktionen und lineare Ungleichungen erworben. Diese bilden die Basis für die Weiterentwicklung in der linearen Optimierung, da die Konzepte von linearen Beziehungen und deren graphische Darstellung ein fundamentales Verständnis für die Modellierung realer Probleme ermöglichen. Die Schülerinnen und Schüler sind mit den grundlegenden Konzepten vertraut und wissen, wie sie mit dem Taschenrechner lineare Funktionen aufstellen, zeichnen und Wertetabellen erstellen können. Sie sind auch in der Lage, wichtige Punkte wie Nullstellen oder Schnittpunkte zu bestimmen und Ungleichungen zu lösen sowie graphisch darzustellen (vgl. BGBl. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999, 1999).

Das Thema lineare Optimierung baut auf diesen Kenntnissen auf und führt die Schülerinnen und Schüler in die Modellierung und Lösung konkreter Optimierungsprobleme ein. Die Schülerinnen und Schüler lernen, Lösungsbereiche linearer Ungleichungen in zwei Variablen mithilfe von Technologie zu bestimmen und problembezogene Ungleichungssysteme zu lösen. Ein zentrales Element der linearen Optimierung ist die Zielfunktion, die im Kontext realer Probleme formuliert und mit Technologie gelöst wird. Im Gegensatz zu früheren Themen liegt hier der Fokus nicht nur auf der rechnerischen Lösung, sondern

auch auf der expliziten Erklärung des Lösungsprozesses. Schülerinnen und Schüler sollen nicht nur das optimale Ergebnis finden, sondern auch die Schritte des Lösungswegs nachvollziehen und deren Bedeutung verstehen. Dies fördert die Reflexion und das kritische Denken, welches in der didaktischen Theorie als zentrale Kompetenz im Mathematikunterricht gilt.

Die Wahl dieses Themas ermöglicht es, mathematische Modellierungsprozesse gemäß dem Modellierungskreislauf von Blum et al. (2018) zu untersuchen. Dieses Modell betont, wie Schülerinnen und Schüler lernen können, reale Problemstellungen in mathematische Modelle zu überführen und diese zu lösen. Beim Thema lineare Optimierung bezieht sich dies auf den Prozess, wie Schülerinnen und Schüler ein Optimierungsproblem formulieren, eine Zielfunktion aufstellen und das zugehörige Ungleichungssystem definieren. Sie lernen, Lösungsbereiche zu bestimmen, indem sie geometrische Darstellungen wie Graphiken und algebraische Berechnungen miteinander kombinieren. In der Modellierungsphase erkennen sie, wie mathematische Modelle konkrete Problemlösungen bieten, beispielsweise bei der Optimierung von Ressourcen in wirtschaftlichen oder praktischen Kontexten. Diese Art der mathematischen Modellierung ist eine praxisorientierte Herangehensweise, die den Schülerinnen und Schülern hilft, die Theorie mit der Anwendung zu verbinden.

Ein weiterer didaktischer Ansatz, der in dieser Untersuchung berücksichtigt wird, ist die Kreativspirale von Buchberger (1993), die den mathematischen Erkenntnisgewinn durch die Phasen der heuristischen, exaktifizierenden und anwendungsbezogenen Arbeit strukturiert. In der heuristischen Phase haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, experimentell zu arbeiten, indem sie mit Technologie, wie dem TI-Nspire, die Auswirkungen von Änderungen in den Parametern der linearen Optimierung (z.B. der Zielfunktion oder den Ungleichungen) untersuchen. Dies unterstützt sie dabei, Intuition und Problemlösungsstrategien zu entwickeln, bevor sie formale mathematische Verfahren anwenden. Zum Beispiel können sie die Auswirkungen der Änderung der Steigung einer linearen Funktion auf den Lösungsraum graphisch untersuchen. Diese experimentellen und visuellen Ansätze fördern ein tieferes Verständnis der mathematischen Prinzipien und bieten eine gute Grundlage für die anschließende exaktifizierende Phase, in der die Schülerinnen und Schüler die Berechnungen formal durchführen und die Ergebnisse

systematisch überprüfen. In der anwendungsbezogenen Phase wenden die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen an, um reale Probleme zu lösen, wie z.B. Optimierungsprobleme aus der Wirtschaft oder Naturwissenschaft. Hier kommt es auf die Fähigkeit an, das mathematische Modell auf die Problemstellung zu übertragen und Lösungen sowohl algebraisch als auch graphisch zu interpretieren. Diese Phase fördert das praktische Verständnis und unterstützt die Schülerinnen und Schüler dabei, die Theorie der linearen Optimierung auf konkrete, reale Szenarien zu übertragen. (vgl. Heugl et al., 2014).

Ein zentraler Grund für die Wahl dieses Themas ist die bereits vorhandene Erfahrung der Schülerinnen und Schüler mit dem Taschenrechner, den sie seit einem Jahr im Mathematikunterricht verwenden. Trotz dieser Erfahrung gibt es noch Herausforderungen im Umgang mit linearen Funktionen, besonders beim Ablesen von Steigungen, dem Einzeichnen von Geraden und dem Aufstellen der Funktionsgleichungen. Diese Unsicherheiten machen das Thema lineare Optimierung besonders relevant, da es eine Möglichkeit bietet, bestehende Schwierigkeiten gezielt anzugehen und die Schülerinnen und Schüler zu unterstützen, ihre mathematischen Kompetenzen weiterzuentwickeln. Der gezielte Einsatz des Taschenrechners kann helfen, diese Unsicherheiten zu überwinden und bietet die Gelegenheit, das Werkzeug effizient zu nutzen.

Ein weiterer Vorteil der linearen Optimierung liegt in der Kombination aus rechnerischen und graphischen Verfahren, wodurch den Schülerinnen und Schüler ein umfassender Einblick in die Anwendungsfelder der Optimierung geboten wird. Durch die Verwendung von graphischen Darstellungen können die Schülerinnen und Schüler besser verstehen, wie sich rechnerische Ergebnisse visuell darstellen und interpretieren lassen. Dies fördert das Verständnis für die Zusammenhänge zwischen Algebra und Geometrie und stärkt die Fähigkeit, mathematische Modelle interpretieren zu können.

Darüber hinaus eröffnet das Thema die Möglichkeit, auf verschiedene Lösungsstrategien einzugehen und das Zusammenspiel von algebraischen Berechnungen und graphischen Darstellungen zu verdeutlichen. Dies trägt zu einem tieferen Verständnis der mathematischen Zusammenhänge bei und fördert die Selbstständigkeit im Umgang mit dem Taschenrechner, die langfristig zu einer besseren Mathematikkompetenz führt.

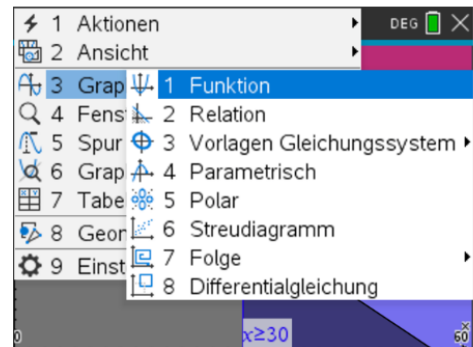
6.2.2 Konzeption und Gestaltung der Lehrmaterialien

Um den Schülerinnen und Schülern eine systematische und nachvollziehbare Einführung in die lineare Optimierung zu ermöglichen, wurde eine detaillierte Anleitung zur Nutzung des TI-Nspire erstellt. Diese Anleitung führt sie schrittweise durch die Bearbeitung von Optimierungsproblemen und umfasst sowohl ein Maximalproblem als auch ein Minimalproblem. Die Schülerinnen und Schüler erhalten nicht nur eine textliche Beschreibung der notwendigen Schritte, sondern auch ergänzende Tastenkombinationen mit Bildern, die ihnen helfen, präzise und zielgerichtet vorzugehen. Diese strukturierte Anleitung stellt sicher, dass die Lernenden wissen, welche Eingaben erforderlich sind, um das gewünschte Ergebnis zu erzielen und fördert so ein tieferes Verständnis für den technologischen Werkzeuggebrauch.

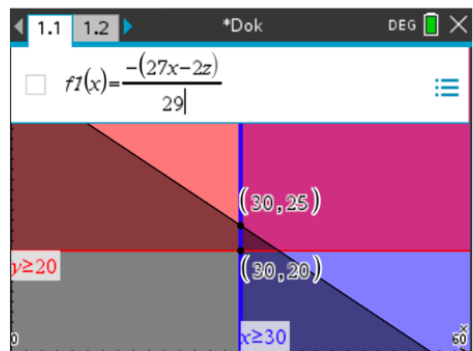
Das Konzept dieser Anleitung hat nicht nur eine didaktische Funktion, sondern dient gleichzeitig als Dokumentationsprotokoll. Während der Bearbeitung können die Schülerinnen und Schüler die Anleitung als eine Art Rechenweg-Protokoll nutzen, das sie durch den gesamten Lösungsprozess begleitet und dabei hilft, ihre Lösungen strukturiert und schlüssig festzuhalten. Die bildhaften Darstellungen der Taschenrechnerausgaben in der Anleitung ermöglichen es den Schülerinnen und Schülern, den Visualisierungsprozess des TI-Nspire nachzuvollziehen und zu verstehen, wie die Schritte auf dem eigenen Gerät umgesetzt werden. Diese Visualisierungen bieten eine zusätzliche Ebene der Unterstützung und erleichtern das Verständnis von abstrakten mathematischen Konzepten, wie sie in der linearen Optimierung vorkommen.

1) Eingabe der Funktion

- Um in der Eingabezeile eine Funktion eingeben zu können tippt man nun menü-3-1-(Funktion).



- Nun kann in der Eingabezeile die Funktionsgleichung eingetippt werden.
- Mit „enter“ wird der Funktionsgraph gezeichnet.



2) Schieberegler generieren

- Bei der Eingabe erscheint das Feld „Schieberegler erstellen“ mit der Variable z aus unserer Funktion, dieser dient dazu die Funktion parallel verschieben zu können.

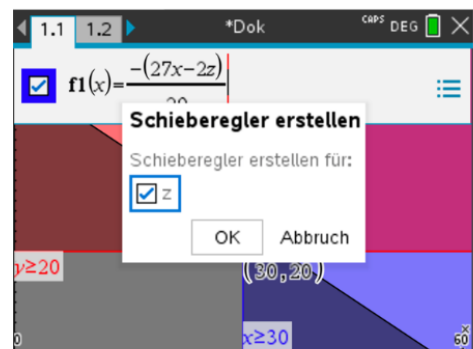


Abbildung 6: Ausschnitt Anleitung mit TI-Nspire

Die strukturierte Anleitung dient als roter Faden und bietet den Schülerinnen und Schülern klare Orientierung. Das didaktische Modell, das hier zugrunde gelegt wird, fördert selbstständiges Lernen und das Erarbeiten von mathematischem Wissen durch den Einsatz eines technologischen Hilfsmittels. Falls die Schülerinnen und Schüler an einer bestimmten Stelle Schwierigkeiten haben oder nicht weiterkommen, können sie gezielt in der Anleitung nachsehen, welche Eingaben notwendig sind und wie sie die jeweilige Funktion des Taschenrechners nutzen können. Hier zeigt sich der didaktische Ansatz des konstruktivistischen Lernens, der den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, durch aktives Experimentieren und selbstständiges Erarbeiten ihr Verständnis für die Konzepte der

linearen Optimierung zu entwickeln und anschließend zu vertiefen sowie die Technologie als effektives Lerninstrument zu begreifen.

Der Einsatz des TI-Nspire ist im Kontext der linearen Optimierung besonders wichtig, da dieser sowohl rechnerische als auch graphische Verfahren integriert. Gerade durch die Kombination dieser beiden Methoden wird den Schülerinnen und Schülern ein umfassender Blick auf die Lösungsmöglichkeiten gegeben. Das graphische Verständnis und die Fähigkeit, Lösungen visuell darzustellen, sind essenziell, um die komplexen Zusammenhänge der linearen Optimierung in unterschiedlichen Kontexten richtig zu interpretieren. Dies entspricht den didaktischen Zielen der Modellbildung und Visualisierung, wie sie in der Theorie des konkreten Lernens und im Modellierungskreislauf nach Blum et al. (2018) beschrieben werden. Hier geht es darum, ein abstraktes Problem in eine mathematische Darstellung zu überführen, die sowohl algebraisch als auch geometrisch interpretiert werden kann.

Um das erlernte Wissen gezielt zu festigen, wurde ein umfangreiches Aufgabenpaket erstellt, das in zwei Hauptkategorien unterteilt ist:

1. Standardbeispiele: Diese Aufgaben orientieren sich an den Beispielen aus dem Schulbuch und folgen einem klar strukturierten Schema. Die Schülerinnen und Schüler können sie mit Hilfe der zuvor erarbeiteten Anleitung systematisch lösen. Dies entspricht der Idee des Spiralprinzips nach Bruner (2006), nach dem ein Thema in aufeinander aufbauenden Zyklen behandelt wird. Jedes Mal, wenn die Schülerinnen und Schüler auf ein Thema zurückkommen, werden ihre Vorkenntnisse weiter vertieft und die Komplexität des Wissens nimmt zu. Durch das systematische Üben der linearen Optimierung erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Schritt für Schritt das nötige Grundverständnis zu entwickeln.

- 1) Die Firma von Herrn Meier produziert zwei Arten von Saft. Die Abfüllanlage für die erste Sorte kann maximal 1200 Flaschen pro Tag füllen, während die Maschine für die zweite Sorte täglich höchstens 1600 Flaschen schafft. Insgesamt dürfen jedoch nicht mehr als 2000 Flaschen pro Tag abgefüllt werden. Für jede Flasche der ersten Sorte beträgt der Gewinn 0,80 €, für jede Flasche der zweiten Sorte 0,50 €.
- Bestimmen Sie, wie viele Flaschen jeder Sorte produziert werden müssen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.
 - Berechnen Sie außerdem den maximal möglichen Gewinn.

Abbildung 7: Standardbeispiel

2. Abweichende Aufgabenstellungen: Neben den Standardbeispielen beinhaltet das Aufgabenpaket auch nicht-standardisierte Aufgaben, die sich an den Aufgaben des Matura-Aufgabenpools orientieren. Diese Aufgaben wurden so konzipiert, dass sie nicht den gesamten Prozess der linearen Optimierung in einer einzigen Aufgabe abfragen, sondern nur einzelne Aspekte davon herausgreifen. Diese Art von Aufgaben fördert die flexible Anwendung des erlernten Wissens und unterstützt die Schülerinnen und Schüler dabei, auf verschiedene Fragestellungen kreativ und effektiv zu reagieren. Sie sind dadurch in der Lage, ihr mathematisches Problemlösungsdenken weiter auszubilden.

13) Boote

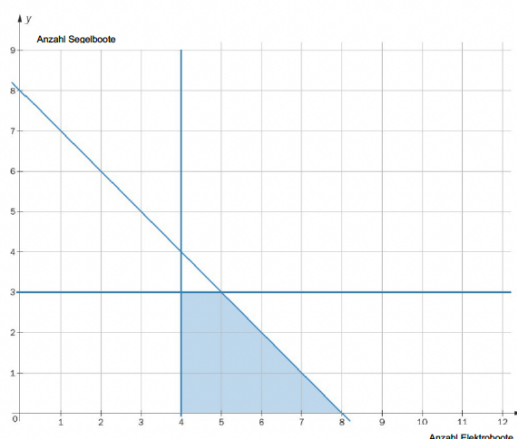
- a) Eine Schulgruppe mit 18 Schülern plant einen Tag am Bodensee. Im Bootsverleih stehen Kanus mit zwei Plätzen und Kajaks mit vier Plätzen zur Verfügung. Der Bootsverleiher kann der Gruppe insgesamt höchstens sechs Boote zur Verfügung stellen.

- Stellen Sie Ungleichungen auf, die diesen Sachverhalt beschreiben.

Es wird behauptet, dass die Nichtnegativitätsbedingungen für diesen Sachverhalt wie folgt lauten: $x \leq 0$ und $y \leq 0$.

- Begründen Sie, warum diese Behauptung nicht stimmt.

- b) Die folgende Grafik zeigt die Aufteilung einer anderen Schülergruppe auf Elektro- und Segelboote:



- Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich eingrenzen.

Ein Elektroboot kostet pro Stunde dreimal so viel wie ein Segelboot. Ein Segelboot kostet 10 Euro pro Stunde.

- Zeichnen Sie die Gerade ein, bei der der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, und berechnen Sie die minimalen Kosten.
- Erklären Sie, wie sich die Steigung der Zielfunktion ändert, wenn der Preis für Elektroboote steigt.

Abbildung 8: Abweichendes Beispiel

Durch diese Struktur wird gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler zunächst die grundlegenden Abläufe der linearen Optimierung mit Unterstützung der Anleitung nachvollziehen und dann auf anspruchsvollere Aufgabenstellungen übertragen können. Dies fördert nicht nur das verständnisvolle Anwenden des TI-Nspire, sondern auch die Fähigkeit, verschiedene Lösungsstrategien zu kombinieren und das Mathematikwissen flexibel und kreativ in neuen Kontexten anzuwenden. Ein wichtiger Aspekt dabei ist, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es für jedes Problem mehrere Lösungswege geben kann und stärkt somit ihre mathematische Flexibilität und ihr Problemlösungsdenken. Diese Kompetenzen sind nicht nur im schulischen Kontext von Bedeutung, sondern auch für spätere Anwendungen im Studium oder Beruf von großer Wichtigkeit.

Die Lehrmaterialien orientieren sich an didaktischen Modellen, die den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler strukturiert und zugleich methodisch flexibel gestalten. Die Materialien wurden auf Grundlage des Spiralprinzips von Bruner (2006) entwickelt, das eine kontinuierliche Vertiefung des Wissens in wiederholten Zyklen vorsieht. Die Inhalte der linearen Optimierung wurden in aufeinander aufbauenden Schritten eingeführt. Dies ermöglicht es den Schülerinnen und Schülern ihre mathematischen Kompetenzen langfristig zu entwickeln. Zudem beruht die Struktur der Lehrmaterialien auf dem Modulprinzip nach Heugl (2014), das durch die Unterteilung der linearen Optimierung in klar definierte Module den Lernprozess übersichtlich und leicht nachvollziehbar macht. Jedes Modul wird zunächst für sich bearbeitet und anschließend mit anderen kombiniert. Dies hilft den Schülerinnen und Schülern den Lernstoff in komplexeren Aufgabenstellungen zu integrieren und die Visualisierungsfunktionen des TI-Nspire gezielt zu nutzen (vgl. Hafenbrak, 2005).

6.2.3 Integration im Unterricht

Die Einführung in das Thema lineare Optimierung erfolgte schrittweise, um den Schülerinnen und Schülern ein möglichst umfassendes Verständnis für die Thematik zu vermitteln. Dabei wurde besonderer Wert daraufgelegt, sowohl die theoretischen als auch die praktischen Aspekte des Themas zu erarbeiten und den gezielten Einsatz des Taschenrechners als unterstützendes Hilfsmittel zu erlernen. Diese doppelte Fokussierung auf Theorie und Praxis steht im Einklang mit einem konstruktivistischen Ansatz, bei dem das Wissen nicht nur vermittelt, sondern aktiv aufgebaut und in konkreten Anwendungssituationen verankert wird.

Gemäß der Kreativspirale von Buchberger (1993) durchliefen die Schülerinnen und Schüler während der Unterrichtseinheit mehrere Phasen des mathematischen Erkenntnisgewinns. In der heuristischen Phase wurden explorative Aufgabenstellungen eingesetzt, in denen die Lernenden Vermutungen zur linearen Optimierung aufstellten. Dieser Schritt ist entscheidend, um den Schülerinnen und Schülern eine Entdeckungsreise durch das Thema zu ermöglichen und das kritische Denken sowie die Problemlösungsfähigkeit zu fördern. In der darauffolgenden exaktifizierenden Phase wurden diese Vermutungen durch mathematische Argumentationen und Beweise untermauert, wodurch das mathematische Wissen formalisiert und auf eine fundierte Basis gestellt wurde. Abschließend

erfolgte die Anwendungsphase, in der die erworbenen Kenntnisse auf realistische Problemstellungen übertragen wurden. Dies half den Lernenden die Relevanz der linearen Optimierung in alltäglichen und wissenschaftlichen Kontexten zu erkennen. Diese Struktur entspricht dem didaktischen Ziel, sowohl Fähigkeiten als auch Kompetenzen in der Anwendung mathematischer Konzepte zu entwickeln.

Zudem wurde der experimentelle Zugang zur Mathematik (vgl. Leuders et al., 2011) gezielt gefördert. Der TI-Nspire ermöglichte es den Schülerinnen und Schülern, verschiedene Parameter zu verändern und die Auswirkungen auf die optimale Lösung direkt zu beobachten. Diese Methode des mathematischen Experimentierens folgt dem Modell der Abduktion und Induktion (vgl. Leuders et al., 2011): In der Phase der Abduktion formulieren die Lernenden eine Hypothese als mögliche Erklärung für ein beobachtetes Phänomen – etwa ein auffälliges Verhalten einer mathematischen Funktion oder Struktur. Daran schließt sich die Phase der Induktion an, in der diese Hypothese systematisch durch Beispiele überprüft wird. Die Schülerinnen und Schüler variieren gezielt Eingabewerte, analysieren die Ergebnisse und suchen nach Regelmäßigkeiten, um ihre anfängliche Vermutung zu stützen oder zu widerlegen. Dieses Vorgehen fördert nicht nur das vernetzende Denken, sondern auch die Fähigkeit, komplexe Probleme in überschaubare Einheiten zu zerlegen. Es unterstützt die Lernenden dabei, Zusammenhänge zwischen mathematischer Theorie und praktischer Anwendung besser zu verstehen und auf neue Probleme zu übertragen.

Zu Beginn der Unterrichtseinheit wurde gemeinsam erarbeitet, wofür die lineare Optimierung benötigt wird, in welchen Kontexten sie Anwendung findet und wie sie mathematisch umgesetzt werden kann. Die Schülerinnen und Schüler erhielten einen Überblick darüber, in welchen realen und mathematischen Situationen Optimierungsprobleme auftreten und welche Lösungsstrategien es gibt. Dabei wurde der Anwendungsbezug zur Alltagswelt betont, um den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, dass mathematische Methoden nicht abstrakt bleiben, sondern im Leben und in der Arbeitswelt praktische Bedeutung haben. Anschließend wurde reflektiert, welche mathematischen Vorkenntnisse aus dem bisherigen Unterricht für die Bearbeitung von Optimierungsproblemen benötigt werden. Hierzu gehörten insbesondere:

- Lineare Funktionen und ihre Darstellung
- Lineare Ungleichungen und deren graphische Lösung

- Grundlagen der Algebra und der Interpretation von Funktionengleichungen
- Lösen von Gleichungssystemen

Die gezielte Verknüpfung dieser Vorkenntnisse mit dem neuen Thema verdeutlicht ein integratives Lernkonzept, bei dem vorhandenes Wissen als Grundlage für neue Lernprozesse dient. Der Aufbau neuer Inhalte erfolgt damit in einem engen Bezug zu bereits Gelerntem, wodurch die Schülerinnen und Schüler Sicherheit gewinnen und eine tiefere Verankerung der neuen Inhalte ermöglicht wird.

Ein zentrales Ziel des Themas wurde ebenso erläutert: Die Schülerinnen und Schüler sollten lernen, lineare Optimierungsprobleme zu analysieren und sowohl rechnerisch als auch graphisch zu lösen, um praxisnahe Problemstellungen systematisch zu bearbeiten. Hier wird das Prinzip des anwendungsorientierten Lernens angewendet, bei dem es nicht nur um das Erlernen von Verfahren geht, sondern darum, den praktischen Nutzen mathematischer Methoden zu verstehen und anzuwenden.

Im nächsten Schritt wurde das Thema zunächst ohne technische Hilfsmittel bearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler lernten die klassischen Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen, indem sie die Aufgaben händisch lösten. Dieser Schritt entspricht der Konstruktionsphase des Lernens, in der die Lernenden den Lösungsweg zunächst manuell nachvollziehen, um ein tiefes Verständnis für die Mathematik zu entwickeln, bevor sie technologische Werkzeuge zu Hilfe nehmen. Dabei folgten sie den methodischen Schritten:

- Aufstellen der Nebenbedingungen
- Bestimmen der Zielfunktion
- Graphische Darstellung der Lösungsmenge
- Bestimmung des optimalen Wertes

Nachdem diese grundlegenden Konzepte erarbeitet wurden, wurden zusätzlich Beispiele aus dem offiziellen SRDP-Aufgabenpool behandelt. Auch diese Aufgaben wurden ohne Taschenrechner gelöst, um sicherzustellen, dass die Schülerinnen und Schüler die mathematischen Zusammenhänge und Rechenprozesse verstehen, bevor sie den Taschenrechner zur Unterstützung nutzen.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler das Thema bereits theoretisch und händisch erarbeitet hatten, wurde nun der Taschenrechner TI-Nspire gezielt als Werkzeug anhand der Lehrmaterialien eingeführt. Die Lernenden hatten die Möglichkeit, ihre eigenen Ergebnisse am Taschenrechner mit den bereitgestellten Bildern in der Anleitung zu vergleichen. Diese visuelle Unterstützung half ihnen, die Funktionsweise des Taschenrechners besser zu verstehen und Fehler schnell zu erkennen. Dies entspricht dem didaktischen Ansatz der Fehleranalyse und Selbstkorrektur, die das reflexive Lernen und die Fehlerbewältigungskompetenz der Schülerinnen und Schüler stärkt.

Nach dieser intensiven Einführung wussten die Lernenden nun genau:

- Welche rechentechnischen Aufgaben der Taschenrechner ihnen abnehmen kann
- Wie sie die einzelnen Berechnungsschritte durchführen
- Wie sie ihre Lösungswege mit Hilfe des Protokolls dokumentieren

Nach der Einführung in den Taschenrechner wurde den Schülerinnen und Schülern ein umfassendes Aufgabenpaket vorgelegt, das in verschiedenen Sozialformen bearbeitet wurde. Dies förderte das kooperative Lernen und die Individualisierung, da die Lernenden in Gruppen und einzeln an den Aufgaben arbeiten konnten:

1. Erste Doppelstunde: Die ersten Beispiele wurden gemeinsam im Plenum bearbeitet, wobei die Lehrperson den Taschenrechner am Computer öffnete und die Schritte projizierte, sodass alle Schülerinnen und Schüler den Lösungsweg nachvollziehen konnten.
2. Zweite Doppelstunde: Die Aufgaben wurden in Partnerarbeit oder Einzelarbeit bearbeitet, wodurch das selbstständige Arbeiten und die Anwendung des Gelernten gefördert wurden.
3. Dritte Doppelstunde: Im Plenum wurden variierende Aufgaben behandelt, um den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, dass es unterschiedliche Lösungswege gibt, die durch den flexiblen Einsatz des Taschenrechners unterstützt werden können.

Durch die abschließende Reflexion und Dokumentation der Taschenrechnereingaben konnten die Lernenden ihren eigenen Lernprozess nachvollziehen und sich optimal auf zukünftige Prüfungsformate vorbereiten. Diese Struktur förderte nicht nur die Mathematikkompetenz, sondern auch das selbstregulierte Lernen, da die Schülerinnen und

Schüler in der Lage waren, ihre Lernstrategien zu reflektieren und gegebenenfalls anzupassen.

Die Lehrperson übernahm in diesem Prozess die Rolle einer lernbegleitenden Instanz, die Impulse setzt, individuelle Unterstützungsangebote macht und gezielt herausfordernde Fragen stellt, um Denkprozesse anzuregen. Sie schuf eine Lernumgebung, in der selbstständiges Entdecken, gemeinsames Erarbeiten und reflektierendes Nachdenken gefördert wurden. Durch differenzierte Aufgabenstellungen und methodische Vielfalt wurde auf unterschiedliche Lernniveaus eingegangen, wodurch ein inklusives und motivierendes Lernklima entstand.

Das eingesetzte Material – insbesondere digitale Werkzeuge wie der TI-Nspire – spielte dabei eine zentrale Rolle. Es ermöglichte dynamische Darstellungen, exploratives Arbeiten und direkte Rückmeldungen zu mathematischen Hypothesen und Lösungen. Ergänzende Arbeitsblätter, graphische Darstellungen und strukturierte Aufgabenstellungen halfen dabei, sowohl individuelle als auch kooperative Lernprozesse zu fördern und die Lerninhalte nachhaltig zu verankern.

6.3 Durchführung der Evaluation

Im Rahmen dieses Unterrichtsprojekts wurde nicht nur die Vermittlung der linearen Optimierung mit und ohne technische Hilfsmittel fokussiert, sondern auch eine Untersuchung durchgeführt, um wichtige Erkenntnisse über den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler sowie die Praktikabilität der entwickelten Lehrmaterialien zu gewinnen.

Ein zentrales Ziel bestand darin, zu analysieren, ob die Lernenden beim händischen Bearbeiten der Aufgaben oder beim Einsatz des Taschenrechners bessere Ergebnisse erzielen. Dabei wurde insbesondere darauf geachtet, in welchen Bereichen der Einsatz des Taschenrechners die Schülerinnen und Schüler unterstützen konnte und ob er potenzielle Fehlerquellen reduzierte oder möglicherweise neue Herausforderungen mit sich brachte.

Bevor die Evaluation an der Schule durchgeführt wurde, waren mehrere Genehmigungsschritte erforderlich. Zunächst wurde die Zustimmung der Schulleitung eingeholt, gefolgt

von einer formellen Anfrage an die Bildungsdirektion Burgenland, um die Erlaubnis zur Forschung im schulischen Kontext zu erhalten. Dies entspricht dem ethischen Vorgehen in der schulischen Forschung, bei dem die Zustimmungen der zuständigen Institutionen eingeholt werden müssen, um die Integrität und Rechtmäßigkeit der Forschung sicherzustellen. Nach der Genehmigung dieses Antrags wurde ein Elternbrief verfasst, um das Einverständnis der Erziehungsberechtigten für die Teilnahme ihrer Kinder an der Untersuchung einzuholen. Die Einbeziehung der Eltern in den Forschungsprozess ist ein wesentlicher Schritt, um die Transparenz und das Vertrauen in die Forschungspraktiken zu gewährleisten. Selbstverständlich wurde sichergestellt, dass alle erhobenen Daten anonymisiert wurden, sodass keine Rückschlüsse auf einzelne Schülerinnen oder Schüler möglich waren. Dies gewährleistet den Datenschutz und die Wahrung der Privatsphäre der Teilnehmer und Teilnehmerinnen und entspricht den ethischen Richtlinien für die Durchführung von Bildungsforschung.

Als Forschungsgruppe wurde eine zweite Klasse mit insgesamt 23 Schülerinnen und Schülern ausgewählt, darunter 16 Mädchen und 7 Buben. Diese Klasse wurde gezielt herangezogen, da die Lernenden bereits über grundlegende Kenntnisse zu linearen Funktionen und Ungleichungen verfügten und somit die notwendigen Voraussetzungen für die Beschäftigung mit der linearen Optimierung gegeben waren.

Im Rahmen dieses Unterrichtsprojekts wurde nicht nur die Vermittlung der linearen Optimierung mit und ohne technische Hilfsmittel fokussiert, sondern auch eine Untersuchung durchgeführt, um wichtige Erkenntnisse über den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler sowie die Praktikabilität der entwickelten Lehrmaterialien zu gewinnen. Diese Forschungsfrage knüpft an den Ansatz des praktischen Lernens an, bei dem der Fokus auf der Erhebung von Ergebnissen liegt, die nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch und anwendungsorientiert sind.

Die Evaluation erfolgte auf Basis einer Gegenüberstellung zweier Unterrichtsphasen: eine Phase der händischen Bearbeitung von Optimierungsproblemen und eine Phase unter Nutzung des TI-Nspire. Dieser methodische Ansatz folgt dem White-Box-/Black-Box-Prinzip (vgl. Heugl et al., 1996), welches zuvor im Kapitel 4.6.3 näher erläutert wurde, bei dem zu Beginn sichergestellt wurde, dass die Schülerinnen und Schüler die

mathematischen Grundlagen ohne technologische Hilfsmittel verstehen, bevor der Einsatz des Taschenrechners erfolgte. Diese Vorgehensweise folgt der didaktischen Überlegung, dass technologische Hilfsmittel nicht als Ersatz für grundlegendes Verständnis dienen, sondern als Unterstützung für weiterführende Lernprozesse. Zunächst wird die Kompetenzentwicklung ohne Technologie gefördert, bevor der Taschenrechner als Werkzeug zur Effizienzsteigerung eingesetzt wird.

Zusätzlich wurde geprüft, ob der Einsatz des TI-Nspire zur Verbesserung der Visualisierung und damit zu einem tieferen konzeptuellen Verständnis führte. Dies entspricht der Annahme, dass der Einsatz von Technologie, wie im kognitiven Ansatz beschrieben, das Verständnis komplexer mathematischer Konzepte vertiefen kann, da Lernende durch direkte Visualisierung von mathematischen Zusammenhängen und Lösungen unterstützt werden. Dabei wurden die Evaluationskriterien an die drei Wissensarten (deklarativ, prozedural, konzeptuell) angelehnt, um festzustellen, in welchen Bereichen der Taschenrechner besonders wirksam war (vgl. Barzel, 2012). Dies folgt dem Modell von Anderson und Krathwohl (2001), dass die drei Dimensionen des Wissens – Faktenwissen, prozedurales Wissen und konzeptuelles Wissen – unterscheidet und zeigt, wie Technologie die verschiedenen Lernarten unterstützen kann.

Die Evaluation erfolgte in zwei aufeinanderfolgenden Stufen, um die Auswirkungen des händischen Arbeitens im Vergleich zur Nutzung des TI-Nspire Taschenrechners zu untersuchen.

Erste Stufe Kompetenzcheck nach händischer Bearbeitung:

Nachdem die Forschungsgruppe das Thema lineare Optimierung vollständig ohne technische Hilfsmittel erarbeitet hatte, wurde ein Kompetenzcheck durchgeführt. Dieser umfasste verschiedene Aufgabentypen, die jeweils einzelne Aspekte der linearen Optimierung prüften, ohne dass die Aufgaben inhaltlich miteinander verknüpft waren. Der Kompetenzcheck dient der Messung des Erkenntnisstandes und ermöglicht eine objektive Feststellung, wie gut die Schülerinnen und Schüler die mathematischen Konzepte auf ihre Problemlösungskompetenz anwenden können. Um eine objektive und anonyme Auswertung zu gewährleisten, wurden die Namen der Schülerinnen und Schüler durch numerische Codes ersetzt, die eine Verzerrung der Ergebnisse durch persönliche Vorlieben oder Voreingenommenheit verhindert.

Der Kompetenzcheck umfasste unter anderem folgende Aufgaben:

- Ungleichung ablesen
- Zielfunktion in ein Koordinatensystem einzeichnen
- Maximalen Gewinn berechnen
- Ungleichungen graphisch darstellen und Lösungsbereich markieren
- Werte einer linearen Funktion ablesen

Diese Aufgaben prüften grundlegende, aber auch komplexere mathematische Fertigkeiten, die für das Verständnis der linearen Optimierung und ihre Anwendung erforderlich sind. Die Schülerinnen und Schüler konnten insgesamt 14 Punkte erreichen, dies diente als Maßstab für das Lernziel.

Zweite Stufe Kompetenzcheck nach Bearbeitung mit dem Taschenrechner:

Nachdem die Schülerinnen und Schüler das Thema mithilfe des Taschenrechners erarbeitet und sich mit den bereitgestellten Lehrmaterialien (Anleitungen und Aufgabenpaketen) vertraut gemacht hatten, wurde ein zweiter Kompetenzcheck durchgeführt. Diese zweite Phase erweiterte den Fokus auf die effiziente Nutzung des Taschenrechners und dessen Einfluss auf die Genauigkeit und Effizienz der Lösungen. Um sicherzustellen, dass die Ergebnisse aussagekräftig und vergleichbar waren, wurden die Aufgabenstellungen so konzipiert, dass sie inhaltlich von den vorherigen Prüfungen abwichen, jedoch die gleichen Anforderungen stellten. Diese Methodik zielt darauf ab, validierbare Ergebnisse zu erhalten, die sowohl die Effektivität der Technologie als auch die mathematischen Fortschritte der Schülerinnen und Schüler messen.

Auch hier war das maximale Ergebnis 14 Punkte, wobei dieses Mal der TI-Nspire als unterstützendes Werkzeug zur Verfügung stand. Der Fokus lag darauf, zu analysieren, ob die Schülerinnen und Schüler durch den Taschenrechner genauere und effizientere Lösungen erzielen konnten.

6.4 Evaluation der Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse zweier Kompetenzchecks zum Thema „Lineare Optimierung“ dargestellt. Die erste Kontrolle wurde ohne technische Hilfsmittel durchgeführt, während bei der zweiten ein grafikfähiger Taschenrechner zum Einsatz kam. Die

Auswertung umfasst sowohl die erzielten Punktzahlen als auch die Bearbeitung einzelner Aufgabentypen. Ziel ist es, einen Überblick über die erbrachten Leistungen unter den unterschiedlichen Bedingungen zu geben.

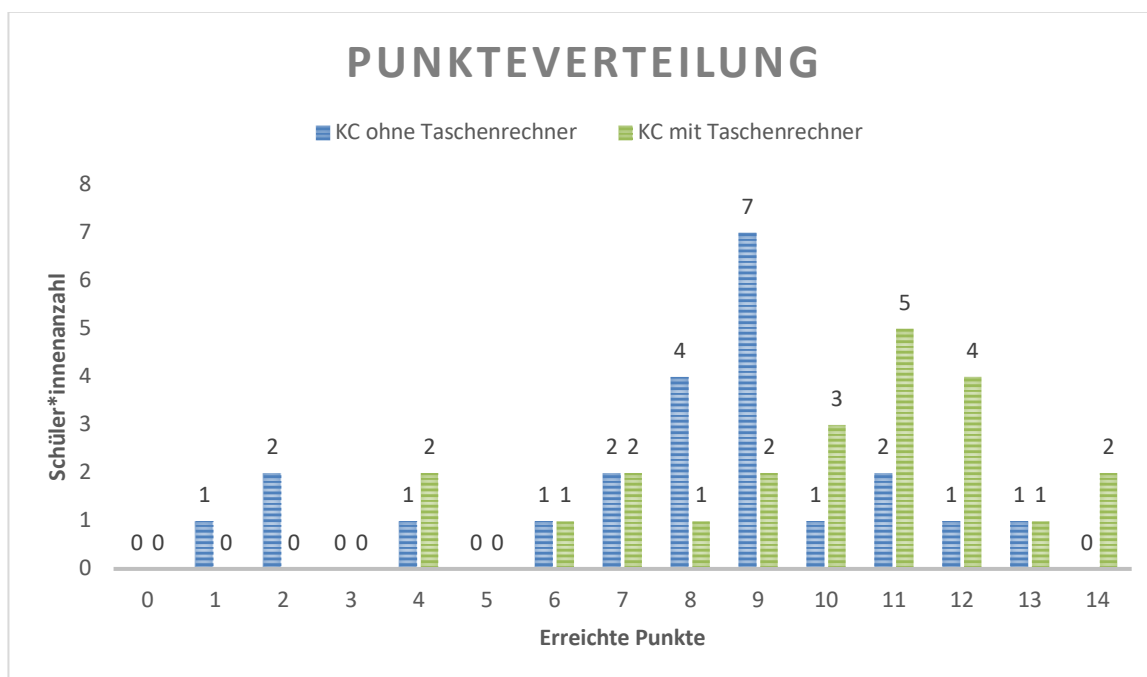


Abbildung 9: Statistik erreichte Punkte

Die Statistik zeigt die Punkteverteilung von Schülerinnen und Schülern in zwei Kompetenzchecks – einmal ohne Taschenrechner (blaue Balken) und einmal mit Taschenrechner (grüne Balken). Auf der x-Achse sind die erreichten Punkte von 0 bis 14 dargestellt, auf der y-Achse die Anzahl der Schülerinnen und Schüler.

In dem Kompetenzcheck ohne Taschenrechner wurde der häufigste Wert bei 9 Punkten erreicht, dort liegen 7 Schülerinnen und Schüler. Weitere Häufungen sind bei 8 Punkten (4 Schülerinnen und Schüler) und bei 7 Punkten (2 Schülerinnen und Schüler). Einzelne Lernende erreichten auch 1, 2, 6, 10, 11, 12 oder 13 Punkte. In den Bereichen 0, 3, 4, 5 und 14 Punkten wurden keine Werte verzeichnet.

In dem Kompetenzcheck mit Taschenrechner zeigt sich eine andere Verteilung. Die meisten Schülerinnen und Schüler erreichten 11 Punkte (5 Schülerinnen und Schüler), gefolgt von 12 Punkten (4 Schülerinnen und Schüler), sowie 10 und 14 Punkten (jeweils 3 bzw. 2 Lernende). Weitere Punkteverteilungen befinden sich bei 4, 6, 7, 8, 9, 13 Punkten

(jeweils 1 bis 2 Schülerinnen und Schüler). Keine Lernenden erreichten 0, 1, 2, 3 oder 5 Punkte.

Insgesamt ist der Kompetenzcheck mit Taschenrechner tendenziell besser ausgefallen: Die erreichten Punktzahlen liegen überwiegend im oberen Bereich der Skala. Auch die Streuung ist geringer – die Werte sind stärker um den Bereich 10 bis 14 Punkte konzentriert. Im Vergleich dazu zeigt der Kompetenzcheck ohne Taschenrechner eine breitere Streuung der Ergebnisse und eine geringere Häufung im oberen Punktebereich.

AUFGABE 1A

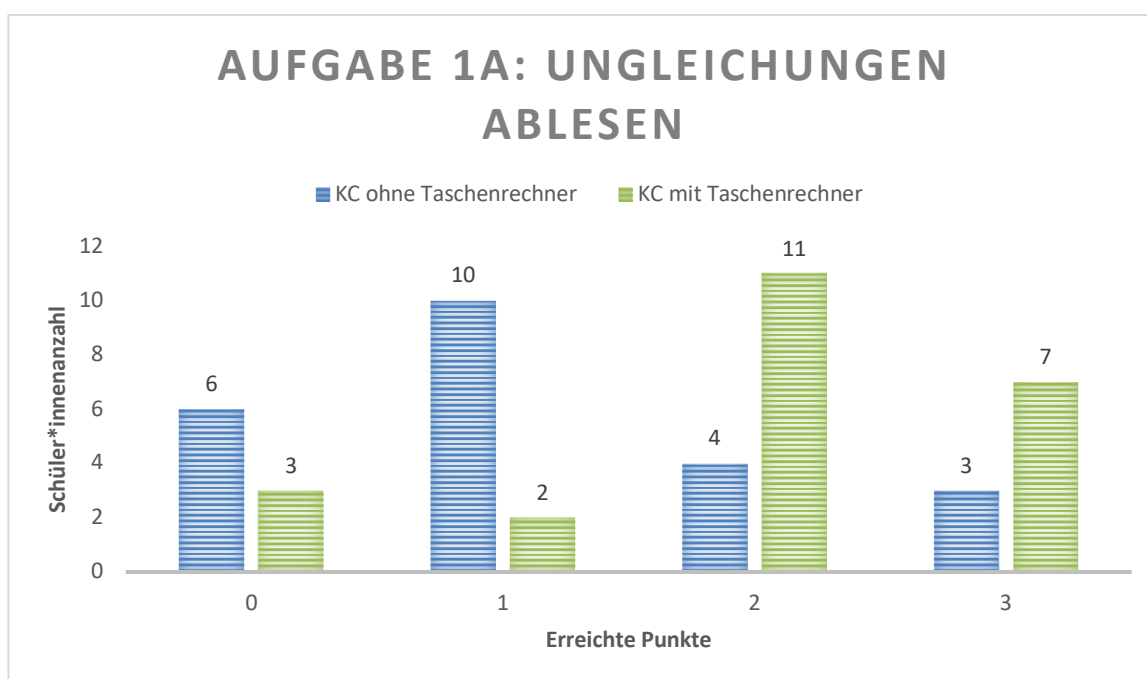


Abbildung 10: Statistik Aufgabe 1A

In Aufgabe 1A sollten drei lineare Ungleichungen abgelesen werden, die gemeinsam einen Lösungsbereich einschließen. Zwei unterschiedliche Zugänge wurden miteinander verglichen: eine händische Variante und eine mit dem Taschenrechner unterstützte Version.

Händische Variante: Die Schülerinnen und Schüler mussten anhand eines gegebenen Graphen die Ungleichungen durch Bestimmung von Steigung und Ordinatenabschnitt ablesen. Die Ergebnisse verteilen sich wie folgt:

- 6 Schülerinnen und Schüler erreichten 0 Punkte.
- 10 erreichten 1 Punkt.
- 4 erreichten 2 Punkte.
- 3 erreichten die volle Punktzahl (3 Punkte).

Insgesamt hatten 10 Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten, die Steigungen bzw. Ordinatenabschnitte korrekt zu bestimmen. Die Ungleichung der Form $x \leq 60$ konnte dabei häufiger korrekt erkannt werden. 5 Schülerinnen und Schüler konnten keine der Ungleichungen korrekt angeben, 1 Abgabe war leer. 4 Schülerinnen und Schüler konnten zwei der drei Ungleichungen ablesen, jeweils jene, bei denen der Ordinatenabschnitt direkt im Graphen ersichtlich war. 3 Schülerinnen und Schüler konnten alle drei Ungleichungen korrekt angeben.

Variante mit Taschenrechner: In der rechnergestützten Version wurden zwei Punkte pro Ungleichung aus dem Graphen entnommen, daraus lineare Funktionen per Regression bestimmt und schließlich das Gleichheitszeichen durch das entsprechende Ungleichheitszeichen ersetzt. Zusätzlich war ein Protokoll der Vorgehensweise gefordert.

Die Punkteverteilung war wie folgt:

- 3 Schülerinnen und Schüler erreichten 0 Punkte.
- 2 erreichten 1 Punkt.
- 11 erreichten 2 Punkte.
- 7 erreichten die volle Punktzahl (3 Punkte).

7 Schülerinnen und Schüler konnten alle drei Ungleichungen inklusive des geforderten Protokolls korrekt aufstellen. Bei 11 Schülerinnen und Schülern trat ein spezifisches Problem bei der Aufstellung der Ungleichung der Form $x \geq 2$ auf. 2 Schülerinnen und Schüler gaben nur eine der drei Ungleichungen korrekt an. 3 Abgaben waren leer.

AUFGABE 1B(1)

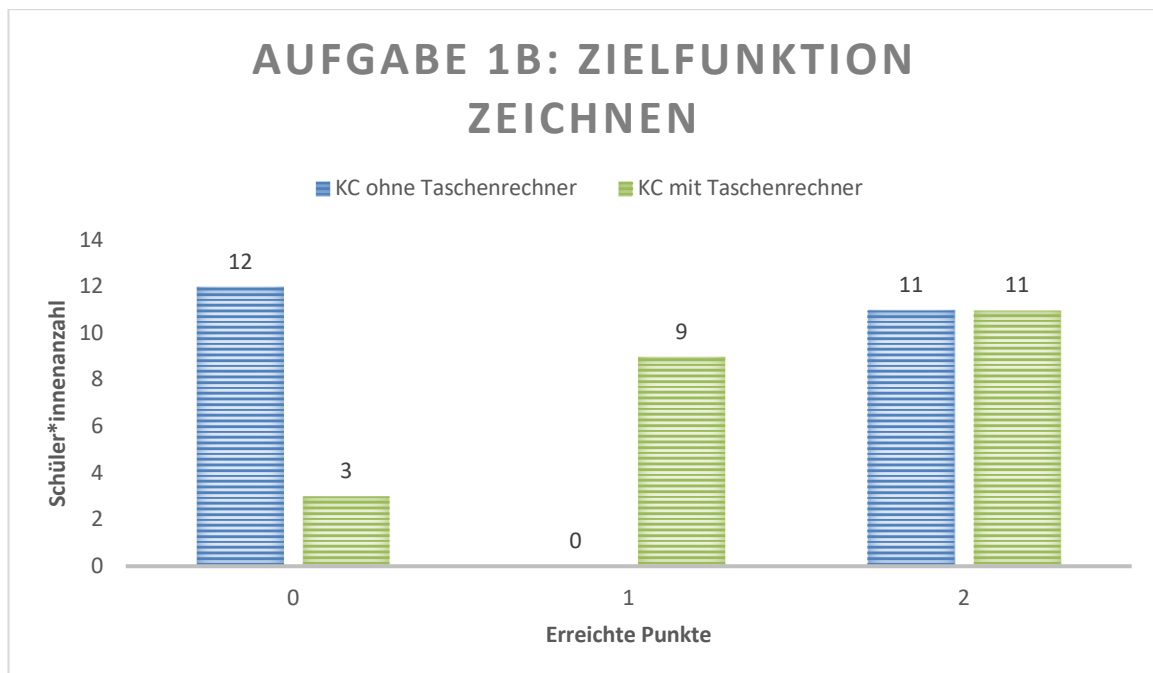


Abbildung 11: Statistik Aufgabe 1B(1)

Aufgabe 1B forderte eine vorgegebene Zielfunktion zeichnerisch darzustellen – konkret sollte die Funktion bei einem optimalen Wert eingezeichnet werden. Auch hier wurden zwei Varianten miteinander verglichen: eine händische Lösungsmethode sowie eine rechnergestützte mit dem TI-Nspire.

Händische Variante: Die Schülerinnen und Schüler mussten die Zielfunktion zunächst algebraisch umformen, anschließend durch den Ursprung oder einen gewählten Ordinateabschnitt zeichnen und diese parallel bis zum optimalen Punkt verschieben.

Die erreichten Punktzahlen zeigten folgende Verteilung:

- 12 Schülerinnen und Schüler erzielten 0 Punkte.
- 0 erzielten 1 Punkt.
- 11 erreichten die volle Punktzahl (2 Punkte).

Die Hauptschwierigkeit in dieser Variante lag in der Umformung der Zielfunktion. 12 Schülerinnen und Schüler konnten diesen Schritt nicht erfolgreich durchführen und erhielten daher keine Punkte. 11 Schülerinnen und Schüler konnten die Aufgabe vollständig lösen.

Variante mit Taschenrechner: Bei der rechnergestützten Lösung wurden die Ungleichungen mithilfe des Taschenrechners eingezeichnet, die Zielfunktion umgeformt und

per Schieberegler graphisch dargestellt. Der Lösungsweg musste zusätzlich in einem Protokoll dokumentiert werden.

Die Punkteverteilung laut Statistik:

- 3 Schülerinnen und Schüler erreichten 0 Punkte.
- 9 erreichten 1 Punkt.
- 11 erreichten die volle Punktzahl (2 Punkte).

Drei Schülerinnen und Schüler scheiterten an der Umformung der Zielfunktion. Fünf weitere konnten die Funktion zwar umformen, führten die Aufgabe jedoch nicht vollständig zu Ende. Vier Protokolle blieben unvollständig. Insgesamt konnten 11 Schülerinnen und Schüler die Aufgabe vollständig bearbeiten, einschließlich der geforderten Dokumentation.

AUFGABE 1B(2)

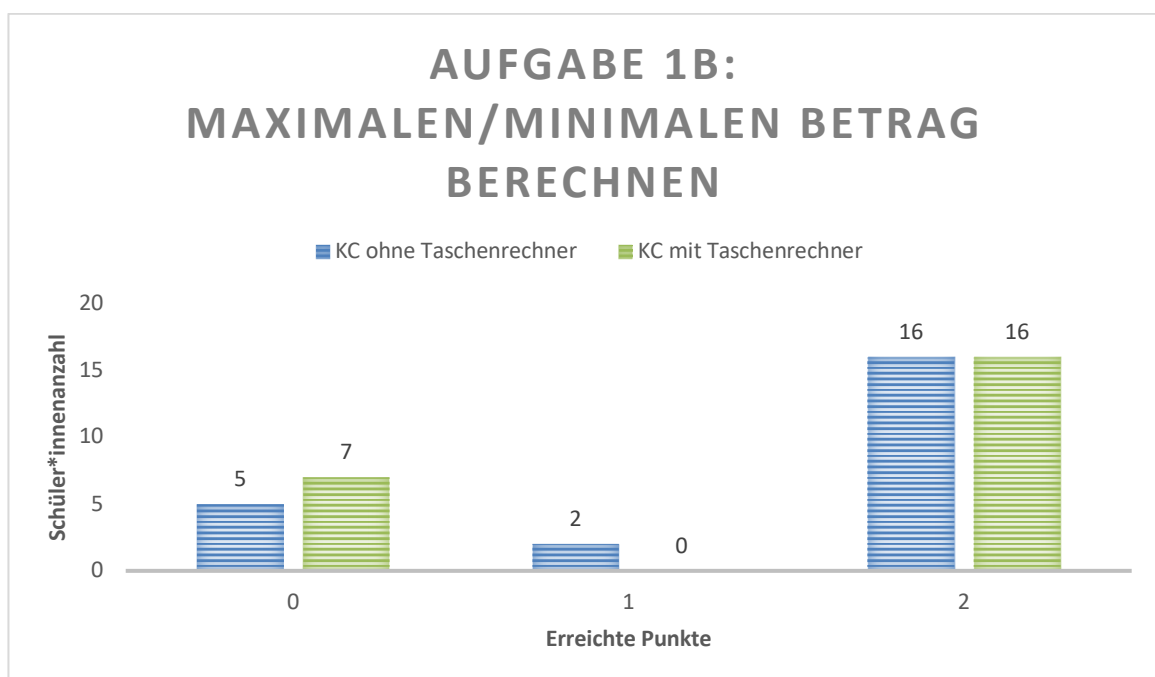


Abbildung 12: Statistik Aufgabe 1B(2)

In dieser Aufgabe bestand die Anforderung darin, den optimalen Wert in eine gegebene Zielfunktion einzusetzen und das Ergebnis rechnerisch zu ermitteln. Die Aufgabenstellung war identisch in beiden Kompetenzchecks – sowohl in der händischen als auch in der rechnergestützten Variante – und erforderte nicht zwingend den Einsatz des Taschenrechners.

Händische Variante:

- 5 Schülerinnen und Schüler gaben keine Antwort ab und erreichten 0 Punkte.
- 2 Schülerinnen und Schüler machten einen Rechenfehler und erhielten 1 Punkt.
- 16 Schülerinnen und Schüler lösten die Aufgabe korrekt und erhielten die volle Punktzahl (2 Punkte).
-

Variante mit Taschenrechner:

- 7 Schülerinnen und Schüler machten keine Angabe und erreichten entsprechend 0 Punkte.
- 0 Schülerinnen und Schüler erreichten 1 Punkt (kein Rechenfehler dokumentiert).
- 16 Schülerinnen und Schüler erreichten die volle Punktzahl (2 Punkte).

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler – unabhängig von der eingesetzten Methode – die Aufgabe erfolgreich bearbeiten konnte. Die Differenz liegt vor allem im Anteil derjenigen, die keine Lösung notierten.

AUFGABE 2

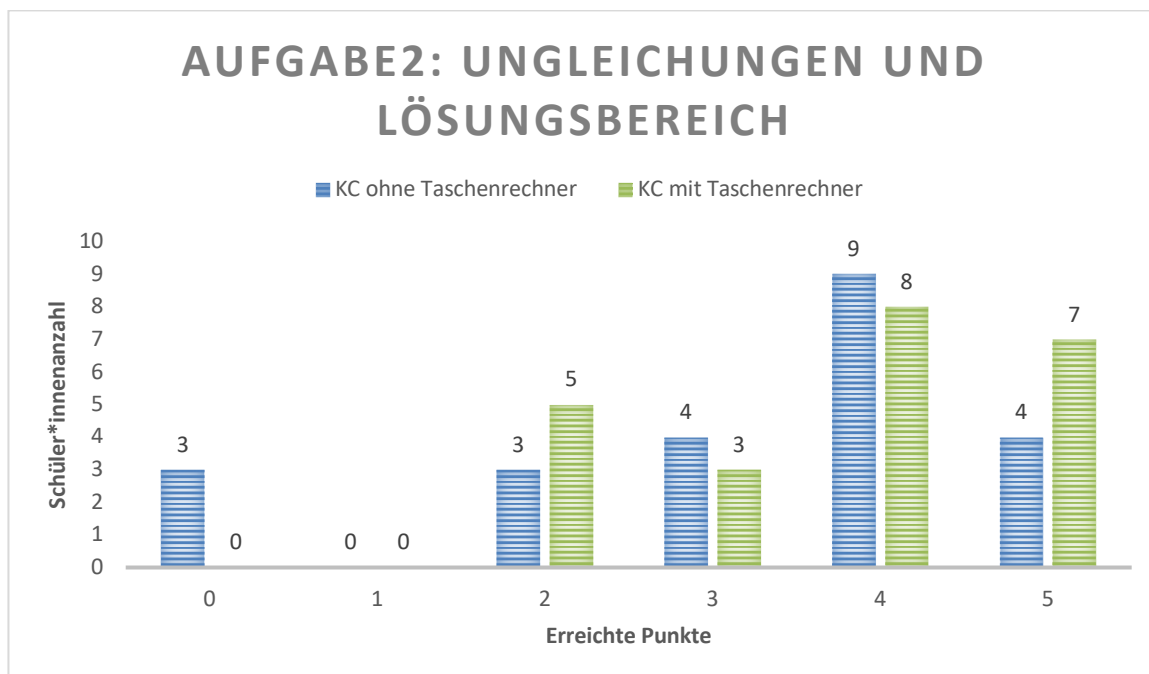


Abbildung 13: Statistik Aufgabe 2

In dieser Aufgabe sollten vier lineare Ungleichungen graphisch dargestellt und anschließend der Lösungsbereich korrekt markiert werden.

Händische Variante: Die Schülerinnen und Schüler mussten zwei der vier Ungleichungen vor dem Zeichnen umformen. Die graphische Darstellung erfolgte mithilfe von Steigung und y-Achsenabschnitt.

- 3 Schülerinnen und Schüler erreichten keine Punkte – davon 1 ohne jegliche Bearbeitung, 2 vertauschten die Achsen.
- 3 Schülerinnen und Schüler erzielten 2 Punkte – konnten nur die 3. und 4. Ungleichung korrekt einzeichnen.
- 4 Schülerinnen und Schüler erreichten 3 Punkte – konnten die 2., 3. und 4. Ungleichung zeichnen.
- 9 Schülerinnen und Schüler erzielten 4 Punkte – darunter 3 mit allen korrekt gezeichneten Ungleichungen, aber ohne korrekten Lösungsbereich; 6 machten Folgefehler bei der 1. Ungleichung.
- 4 Schülerinnen und Schüler erreichten alle 5 Punkte – vollständige, korrekte Lösung.

Insgesamt 10 Schülerinnen und Schüler hatten Schwierigkeiten mit der Umformung der 1. Ungleichung.

Variante mit Taschenrechner: Hier mussten die Ungleichungen größtenteils in den Taschenrechner eingegeben und als Graph dargestellt werden. Zwei Punkte aus der Wertetabelle sollten abgelesen, eingezeichnet und zur graphischen Darstellung genutzt werden. Der Lösungsbereich war durch die Graphen selbst erkennbar.

- 5 Schülerinnen und Schüler erhielten 2 Punkte – konnten nur die 2., 3. und/oder 4. Ungleichung eintragen.
- 3 Schülerinnen und Schüler erzielten 3 Punkte – zeichneten die 2., 3. und 4. korrekt, aber mit Unsicherheiten.
- 8 Schülerinnen und Schüler erreichten 4 Punkte – darunter 1 mit Punktabzug wegen ungenauer Zeichnung.
- 7 Schülerinnen und Schüler erzielten alle 5 Punkte – korrekte und vollständige Lösung.

4 Schülerinnen und Schüler scheiterten am Umformen der 1. Ungleichung, 4 weitere am Schreiben des Protokolls.

AUFGABE 3

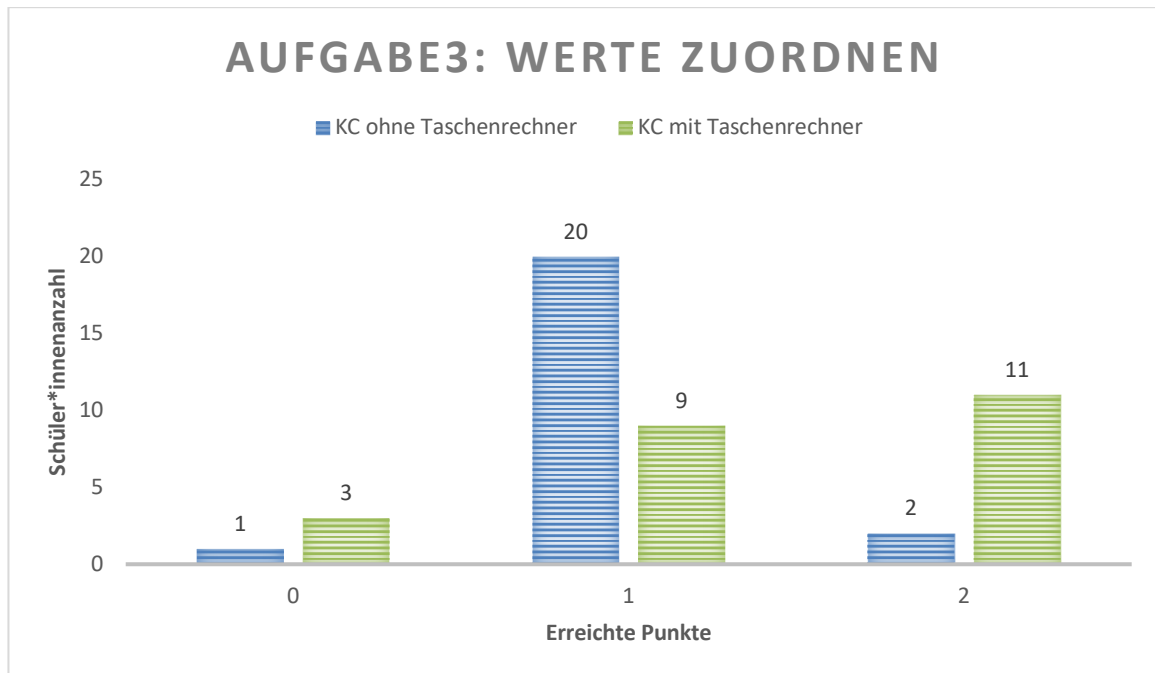


Abbildung 14: Statistik Aufgabe 3

Bei dieser Aufgabe mussten die Schülerinnen und Schüler graphische Eigenschaften von Ungleichungen erkennen und interpretieren – entweder durch Ablesen oder durch Nutzung des Taschenrechners. Obwohl sich die Aufgabenstellung in beiden Kompetenzchecks leicht unterschied, waren dieselben mathematischen Kompetenzen erforderlich.

Händische Variante: Es wurden 5 Ungleichungen gegeben, bei einer davon sollten die Steigung und der y-Achsenabschnitt korrekt abgelesen werden.

- 1 Schülerin oder Schüler konnte keinen Punkt erzielen – konnte weder Steigung noch Ordinatenabschnitt erkennen.
- 20 Schülerinnen und Schüler erreichten 1 Punkt – konnten nur den y-Achsenabschnitt korrekt ablesen.
 - Davon:
 - 18 machten einen systematischen Rechenfehler (statt $20/350$ rechneten sie $350/20$)
 - 2 setzten einfach einen beliebigen Wert ein.
- 2 Schülerinnen und Schüler erreichten alle Punkte – konnten beide Werte korrekt bestimmen.

Variante mit Taschenrechner: Es gab 2 Ungleichungen, zu denen jeweils ein passender Graph aus einer Auswahl von vier Graphen zugeordnet werden sollte.

- 3 Schülerinnen und Schüler erzielten keine Punkte– haben die Ungleichungen nicht umgeformt und konnten deshalb keine Zuordnung vornehmen.
- 9 Schülerinnen und Schüler erhielten 1 Punkt– konnten beide Ungleichungen umformen, aber:
 - Bei einer der beiden war die Umformung nur vereinfacht darstellbar, weshalb nur ein Punkt erreichbar war.
 - 2 von diesen haben korrekt umgeformt, aber nichts im Taschenrechner eingezeichnet – dadurch nur eine richtige Zuordnung.
- 11 Schülerinnen und Schüler erreichten alle Punkte– konnten beide Ungleichungen korrekt zuordnen.
 - Davon:
 - 3 verwendeten den Taschenrechner zur graphischen Darstellung.
 - 8 vereinfachten die 2. Ungleichung händisch und bestimmten anschließend Steigung und y-Achsenabschnitt selbstständig.

6.5 Diskussion

Die durchgeführte Untersuchung zum Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners TI-Nspire im Mathematikunterricht, speziell im Themenbereich der linearen Optimierung, zeigt eine Reihe bedeutsamer Tendenzen und bestätigt in weiten Teilen die zuvor formulierten Vermutungen und Hypothesen. Die Auswertung zweier Kompetenzchecks – einmal ohne, einmal mit dem TI-Nspire – erlaubt differenzierte Aussagen über die Wirkung des technologischen Hilfsmittels auf das mathematische Verständnis und die Problemlösungsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler.

1. Verbesserte Leistungen durch den Einsatz des TI-Nspire

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Schülerinnen und Schüler bei dem rechnergestützten Kompetenzcheck tendenziell bessere Leistungen erzielt haben. Die Punkteverteilungen verschoben sich deutlich in den oberen Bereich und es traten weniger extreme Ausreißer nach unten auf. Insbesondere zeigt sich eine höhere Konzentration im Bereich 10 bis 14 Punkte, dies deutet auf eine allgemein gesteigerte Effizienz und Genauigkeit

bei der Bearbeitung der Aufgaben hin. Damit wird die zentrale Hypothese gestützt: Der TI-Nspire fördert die Leistungsfähigkeit und das Verständnis durch die Übernahme komplexer Rechengänge und durch visuelle Unterstützung.

2. Konkrete Auswirkungen auf unterschiedliche Aufgabentypen

Ein Blick auf die Detailauswertungen einzelner Aufgaben bestätigt diese Beobachtung:

- **Aufgabe 1A (Ungleichungen ablesen und aufstellen)** zeigte eine deutliche Leistungssteigerung durch den Einsatz des TI-Nspire. Insbesondere schwächere Schülerinnen und Schüler profitierten davon, die Ungleichungen mithilfe graphischer Unterstützung systematischer aufstellen zu können. Während bei der händischen Variante ein Großteil nur einen oder keinen Punkt erreichte, erzielten in der rechnergestützten Version deutlich mehr Lernende zwei oder drei Punkte. Dies spricht für eine Reduzierung der kognitiven Belastung (Vermutung 3) sowie für eine Verbesserung des konzeptuellen Verständnisses durch Visualisierung (Vermutung 1).
- **Aufgabe 1B(1) (Zielfunktion graphisch darstellen)** unterstreicht ebenfalls den Vorteil der Technologie. Während in der händischen Variante viele an der algebraischen Umformung scheiterten, konnte mithilfe des Taschenrechners ein größerer Anteil der Schülerinnen und Schüler die Aufgabe vollständig lösen – auch hier half die graphische Unterstützung, insbesondere bei der Positionierung der Zielfunktion im Koordinatensystem. Dies bestärkt erneut die Hypothese einer Entlastung in Rechenschritten und einer besseren Konzeptdurchdringung.
- Bei **Aufgabe 1B(2) (Zielfunktionswert berechnen)**, die in beiden Varianten identisch war, zeigte sich dagegen kaum ein Unterschied in den Leistungen. Dies weist darauf hin, dass der Taschenrechner hier keinen nennenswerten Einfluss hatte – was zu erwarten war, da die Aufgabe keine technologische Unterstützung erforderte. Die Ergebnisse bestätigen, dass die Stärke des TI-Nspire vor allem in der Veranschaulichung und Automatisierung komplexerer Teilprozesse liegt, weniger jedoch in rein rechnerischen Aufgaben.
- **Aufgabe 2 (graphisches Zeichnen von Ungleichungen und Lösungsbereichen)** belegt eine Verbesserung bei der Nutzung des Taschenrechners,

wenngleich auch hier technische Fehler (z. B. unvollständige Protokolle) zu Punktabzügen führten. Die Möglichkeit, Ungleichungen einzugeben und graphisch darzustellen, erwies sich als hilfreich – wenngleich eine gewisse Bedienungssicherheit erforderlich ist. Die Ergebnisse legen nahe, dass technologische Unterstützung zwar das Zeichnen vereinfacht, aber die mathematischen Grundlagen (wie Umformungen) weiterhin verstanden werden müssen – was auch Vermutung 7 (unterschiedliche Wirkung je nach Leistungsniveau) stützt.

- **Aufgabe 3 (graphische Interpretation)** zeigte interessante Unterschiede: In der Taschenrechnerversion konnten mehr Schülerinnen und Schüler beide Ungleichungen korrekt zuordnen – allerdings nicht immer mithilfe des Taschenrechners. Einige bearbeiteten die Aufgabe bewusst händisch. Dies verdeutlicht, dass eine gewisse Wahlfreiheit zwischen traditionellen und technologischen Zugängen sinnvoll sein kann, abhängig vom individuellen Lernstil.

3. Technologische Unterstützung als Chance – aber auch mit Risiken

Ein Aspekt, der in den Ergebnissen zwar nicht dominierend, aber dennoch erkennbar war, betrifft Vermutung 6: die mögliche Abhängigkeit vom Taschenrechner. Einzelne Schülerinnen und Schüler waren nicht in der Lage, Aufgaben vollständig ohne technische Unterstützung zu lösen oder gaben bei technisch unabhängigen Aufgaben (wie 1B(2)) keine Antwort. Dies weist auf die Notwendigkeit hin, ein ausgewogenes Verhältnis zwischen technischem Hilfsmiteleinsatz und methodischem Grundverständnis zu fördern. Der TI-Nspire sollte als ergänzendes, nicht als ausschließliches Werkzeug verstanden und eingesetzt werden.

Abschließendes Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Einsatz des TI-Nspire im Mathematikunterricht – insbesondere bei Themen wie der linearen Optimierung – das Verständnis mathematischer Zusammenhänge erheblich fördern kann. Die Ergebnisse der Untersuchung belegen, dass durch den Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners komplexe Inhalte anschaulicher, effizienter und für viele Schülerinnen und Schüler zugänglicher gemacht werden. Die Visualisierungsmöglichkeiten und automatisierten Rechenschritte erleichtern nicht nur das konzeptuelle Verständnis, sondern verschieben auch den Fokus

von rein mechanischen Berechnungen hin zur Analyse, Interpretation und Strategieentwicklung.

Gleichzeitig zeigt sich aber auch, dass der Einsatz technologischer Hilfsmittel kein Selbstläufer ist: Eine fundierte Einführung, die Förderung von Bedienkompetenzen sowie die Verknüpfung mit grundlegenden mathematischen Fähigkeiten bleiben zentrale Voraussetzungen für einen erfolgreichen Einsatz. Der TI-Nspire kann das Lernen unterstützen, ersetzt aber nicht das Lernen selbst.

6.6 Zukünftige Forschungen und Limitationen

Die vorliegende Untersuchung liefert wertvolle Einblicke in die Wirkung des TI-Nspire im Mathematikunterricht, insbesondere im Bereich der linearen Optimierung. Dennoch sind mit der gewählten Methodik auch bestimmte Einschränkungen verbunden, die bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden müssen und gleichzeitig Ansatzpunkte für weiterführende Forschung bieten.

Ein zentrales methodisches Limit liegt in der Anonymität der durchgeführten Kompetenzchecks. Um eine möglichst unbeeinflusste und ehrliche Bearbeitung zu gewährleisten, wurde bewusst auf eine personenbezogene Auswertung verzichtet. Diese Entscheidung brachte zwar Vorteile hinsichtlich der Datenehrlichkeit und Teilnahmebereitschaft, erschwerte jedoch eine differenzierte Betrachtung der Wirkung des TI-Nspire auf unterschiedliche Leistungsniveaus der Schülerinnen und Schüler. So konnte nicht systematisch untersucht werden, ob und inwiefern leistungstärkere oder leistungsschwächere Lernende unterschiedlich stark von der technologischen Unterstützung profitierten. Dieser Aspekt wurde zwar punktuell beobachtet, bleibt aber auf anekdotischer Ebene und bedarf in zukünftigen Studien einer gezielten, individualisierten Erhebung.

Zukünftige Untersuchungen könnten daher mit einer nicht-anonymisierten, aber dennoch datenschutzkonformen Form der Erhebung arbeiten, etwa durch pseudonymisierte Kompetenzprofile. Dies würde ermöglichen, Leistungsentwicklungen einzelner Lernender nachzuvollziehen und differenzierte Aussagen über die Wirksamkeit des TI-Nspire in Abhängigkeit vom individuellen Lernstand oder der Lernvoraussetzung zu treffen. Gerade im Hinblick auf die in dieser Arbeit formulierte Vermutung 7 – die unterschiedliche

Wirkung je nach Leistungsniveau – wäre eine solche vertiefte Analyse besonders aufschlussreich.

Des Weiteren wäre es sinnvoll, den Zeitraum der Untersuchung auszuweiten, um nicht nur kurzfristige, sondern auch langfristige Effekte des Einsatzes digitaler Werkzeuge zu erfassen. Die Frage, ob durch wiederholten und gezielten Einsatz des TI-Nspire nachhaltige Kompetenzzuwächse im Bereich des konzeptuellen Verständnisses und der Problemlösungsfähigkeit entstehen, bleibt bislang offen.

Ein weiterer Aspekt betrifft die Nutzungsstrategien der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit dem TI-Nspire. In der vorliegenden Untersuchung wurde nicht erhoben, wie intensiv und zielgerichtet das Gerät tatsächlich im Lösungsprozess eingesetzt wurde. Zukünftige Forschungen könnten durch Beobachtungen, Videoanalysen oder Lernprotokolle vertiefende Erkenntnisse über die konkreten Interaktionen mit dem Gerät liefern. So ließe sich untersuchen, ob die Qualität der Nutzung – etwa im Hinblick auf strategisches Denken oder effiziente Fehleranalyse – eine Rolle für den Lernerfolg spielt.

Darüber hinaus wäre es von großem Interesse, die Wirkung des TI-Nspire auch in anderen mathematischen Themenbereichen zu untersuchen. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die lineare Optimierung – ein Bereich, in dem Visualisierung und rechnerische Unterstützung besonders wirksam sein können. Es bleibt jedoch offen, ob vergleichbare Effekte auch in komplexeren Themenfeldern wie der Differential- oder Integralrechnung auftreten. Gerade dort, wo Konzepte wie Änderungsraten, Kurvendiskussionen oder Flächeninhalte im Mittelpunkt stehen, könnten dynamische Visualisierungen und rechnergestützte Experimente neue Zugänge für Lernende eröffnen. Eine Ausweitung der Forschung auf diese Gebiete könnte weitere Rückschlüsse auf das Potenzial digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht ermöglichen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass der TI-Nspire ein hohes didaktisches Potenzial besitzt, dessen Wirkung jedoch von vielen Faktoren abhängt – unter anderem von der Unterrichtsgestaltung, der Kompetenzentwicklung der Lernenden und der Art der Aufgabenstellung. Zukünftige Forschung sollte diese Einflussgrößen systematisch

berücksichtigen, um den gezielten und reflektierten Einsatz digitaler Werkzeuge im Fach Mathematik weiter zu verbessern.

7 Conclusio

Die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchung zeigen deutlich, dass der Einsatz eines graphikfähigen Taschenrechners – konkret des TI-Nspire – die Leistungen von Schülerinnen und Schülern bei linearen Optimierungsaufgaben in mehreren Bereichen positiv beeinflusst. Die Auswertungen belegen, dass mit technischer Unterstützung sowohl höhere Punktzahlen als auch eine geringere Leistungsstreuung erzielt wurden. Besonders auffällig ist die Verbesserung bei Aufgaben, die graphische Darstellungen, Umformungen oder die Interpretation von Ungleichungen erforderten. Hier konnten durch die Visualisierungs- und Rechenfunktionen des Taschenrechners konzeptionelle Schwächen kompensiert und die Lösungsstrategien gezielter umgesetzt werden.

Darüber hinaus zeigt sich, dass der Taschenrechner die kognitive Belastung reduziert und ein strukturierteres Vorgehen fördert, dies erwies sich insbesondere bei rechnerisch komplexeren Aufgaben als vorteilhaft. Gleichzeitig wird deutlich, dass der Erfolg des Technologieeinsatzes nicht nur vom Gerät selbst, sondern auch vom Bedienverständnis und der didaktischen Einbettung abhängt: Schwierigkeiten bei der Protokollführung oder bei der korrekten Eingabe zeigten, dass die Technik allein keine Garantie für Erfolg ist.

Insgesamt lässt sich die Forschungsfrage wie folgt beantworten:

Der Einsatz eines graphikfähigen Taschenrechners wirkt sich insgesamt leistungsfördernd auf die Bearbeitung linearer Optimierungsaufgaben aus, insbesondere durch die Entlastung bei graphisch-visuellen und rechnerischen Anforderungen.

Diese positive Wirkung tritt jedoch vor allem dann ein, wenn die Schülerinnen und Schüler über grundlegende Bedienkompetenzen verfügen und die Technologie zielgerichtet im Lösungsprozess eingesetzt wird.

8 Literaturverzeichnis

- ACDCA. (2019). ACDCA. Von <http://www.acdca.ac.at> abgerufen
- Böckmann, K. (1982). Warum soll man im Unterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In *Visualisierung in der Mathematik*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.
- Böer, H., & Leuders, T. (2005). Modelle für die Einkommenssteuer untersuchen. In S. H. B. Barzel, *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: ein Mehrwert - aber wann?* Münster: Waxmann.
- Barzel, B., & Schreiber, C. (2017). *Digitale Medien im Unterricht*. In: Abshagen, Maïke; Barzel, Bärbel; Kramer, Jürg; Rieke-Baulecke, Thomas; Rösken-Winter, Bettina & Christoph Selter (Hrsg.): *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten*. Seelze: Klett Kallmeyer Verlag.
- Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.
- Bayern Recht Verkündungsplattform. (2009). Von Modellversuch "M3 - Medienintegration im Mathematikunterricht": <https://www.verkuendung-bayern.de/kwmbi/jahrgang:2009/heftnummer:17/seite:319/doc:3> abgerufen
- Behrens, R. (2019). *Formulieren und Variieren mathematischer Fragestellungen mittels digitaler Werkzeuge*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- BGBI. II Nr. 204/2024. (01. 09 2024). *Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule*. Von <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Bundesnormen/NOR40264237/NOR40264237.pdf> abgerufen
- BGBI. II Nr. 362/2023. (26. 10 2024). *Gesamte Rechtsvorschrift für Prüfungsordnung BMHS*. Von <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung/Bundesnormen/20007846/Prüfungsordnung%20BMHS%2c%20Fassung%20vom%2020.10.2024.pdf> abgerufen
- BGBI. Nr. 661/1993, 534/1996, II/372/1999. (1999). Von https://api.abc.berufsbildendeschulen.at/uploads/HLW_Archiv_d2bc3fb139.pdf abgerufen

- Bichler, E. (2010). *Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M3) am Gymnasium*. Hamburg: Verlag Dr. Kovac.
- Bichler, E., & Weigand, H.-G. (2009). *Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M3) an bayrischen Gymnasien*. Hamburg: Dr. Kovač GmbH.
- Bichler, E., Fritsche, F., & Weigand, H.-G. (2012). *Der Modellversuch "M3 - Medienintegration im Mathematikunterricht" an bayrischen Gymnasien*. Hamburg: Dr. Kovac.
- BIFIE. (2015). *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Von <https://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/gkk.pdf> abgerufen
- Blum, W., Greefrath, G., & Siller, H.-S. (2018). *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 4*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- BMBWF. (2021). Von <https://www.matura.gv.at/index.php?elD=dumpFile&t=f&f=4826&token=4574fed24b889f914a68a7411172dbce06459c69> abgerufen
- Bruder, R. (2008). *TIM - ein zweijähriger Modellversuch zum Einsatz von Taschencomputern ab Klasse 7*.
- Bruder, R., & Weiskirch, W. (2007). *CALIMERO*.
- Bruner, J. S. (2006). *In Search of Pedagogy: The Selected Works of Jerome Bruner (1957-1978)*. New York: Routledge.
- Dreher, A. (2013). *Den Wechsel von Darstellungsformen fördern und fordern oder vermeiden? Über ein Dilemma im Mathematikunterricht*. In: Sprenger, Jasmin; Wagner, Anke & Marc Zimmermann (Hrsg.): *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Eichler, A. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Elschenbroich, H.-J. (2005). *Bildungsstandards, Kerncurricula und Einsatz neuer Medien*. In W. H.-G. P. Bender, *Neue Medien und Bildungsstandards*. Berlin: Franzbecker.
- Embacher, F., Himmelbauer, T., Hohenwarter, M., & Stepancik, E. (2005). *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Vortrag auf der Lehrerfortbildungstagung 2005 der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft*. Universität Wien.

- Fachgruppe Computeralgebra. (o. J.). *Was ist Computeralgebra?* Von <http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/allgemeines/> abgerufen
- Grogger, G. (1999). *Evaluation zur Erprobung des TI 92 im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen*. Von <http://www.acdca.ac.at/projekt2/evaluat/evaluat1.htm>. abgerufen
- Gruber, H., & Neumann, R. (2019). *TI-nspire CX II-T CAS gut erklärt*. Freiburg: Freiburger Verlag.
- Hafenbrak, B. (2005). Didaktische Prinzipien des Mathematikunterrichts. In *Einf. Mathematikdidaktik*.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer Verlag.
- Henn, H.-W. (1998). Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen ... oder ... von guten und schlechten Modellen. In *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Herbert, H., & Leneke, B. (1998). Modellbildung im Mathematikunterricht mit Hilfe von Taschenrechnern und Computern. In *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Herget, W. (2000). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *Computeralgebra-Rundbrief*.
- Herget, W., Heugl, H., Lehmann, E., & Kutzler, B. (2000). *Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar?* Von https://disk.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite/Rechenfertigkeiten_Taschenrechner_2000.pdf abgerufen
- Heugl, H. (2005). CAS und Standards - eine interessante Herausforderung. In W. H.-G. P. Bender, *Neue Medien und Bildungsstandards*. Berlin: Franzbecker.
- Heugl, H. (2001). Algebraische Grundkompetenzen im Computerzeitalter. In *Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*.
- Heugl, H. (2001). *Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht (CAS 3)*. Von <http://www.acdca.ac.at/projekt3/61techno.pdf>. abgerufen
- Heugl, H. (2014). *Mathematikunterricht mit Technologie*. Linz: Veritas.

- Heugl, H., Himmelbauer, T., Klinger, W., & Wegscheider, W. (2003). *Neue Medien und Methodik im Mathematikunterricht (CAS 4)*. Von http://www.acdca.ac.at/projekt4/ca4_02.pdf. abgerufen
- Heugl, H., Klinger, W., & Lechner, J. (1996). *Mathematiklehren und -lernen mit Computeralgebra-Systemen*. München: Addison-Wesley.
- Heugl, H., Klinger, W., & Wegscheider, W. (2005). *Elektronische Lernmedien im Mathematikunterricht (CAS 5)*. Von <http://www.acdca.ac.at/projekt3/2allgem.pdf>. abgerufen
- Heymann, H. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim, Basel: Beltz.
- Hußmann, S. (2001). *Konstruktivistisches Lernen an intentionalen Problemen*. Von <https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet/Document-10588/diss.pdf> abgerufen
- Ingelmann, M. (2006). CALIMERO - ein Modellversuch zu CAS-fähigen Taschencomputern ab Klasse 7 in Niedersachsen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht: Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. Osnabrück: Franzbecker.
- Institut des Bundes für Qualitätssicherung im österreichischen Schulwesen*. (o. J.). Von <https://www.iqs.gv.at/themen/nationale-kompetenzerhebung/grundlagen-der-nationalen-kompetenzerhebung/grundlagen-der-bildungsstandards> abgerufen
- Koepf, W. (2013). *Computeralgebrasysteme: Streit um CAS-Mathematik-Computer-SPON*. Von <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/computeralgebrasysteme-streit-um-cas-mathematik-computer-a-894547.html> abgerufen
- Kohn, M. (2011). *Unterricht 2.0 Lehren und Lernen mit interaktiven Tafelbildern*. Seelze: Friedrich Verlag.
- Laakmann, H. (2011). Funktionen besser verstehen durch computergestütztes, systematisches Variieren. In *PM - Praxis der Mathematik in der Schule*.
- Leuders, T. (2010). *Mathematik-Didaktik*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Leuders, T., Naccarella, D., & Philipp, K. (2011). Experimentelles Denken - Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren. In *Journal für Mathematikdidaktik*.

- Müller, M. (2014). *Zur Schülerzentrierung im Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen - eine empirische Untersuchung der CAS-Einführung an Thüringer Schulen mit Oberstufe*. Diss. Friedrich-Schiller-Universität.
- Mathematik, D. Z. (19. 09 2024). Von <https://primakom.dzlm.de> abgerufen
- Meyer, H. (2011). *Was ist guter Unterricht?* Berlin: Cornelsen Verlag.
- Moormann, M. (2009). *Begriffliches Wissen als Grundlage mathematischer Kompetenzentwicklung*. München: Diss. Ludwig-Maximilians-Universität München.
- Neill, A., & Maguire, T. (2008). *An evaluation of the CAS Pilot Project 2006-2007*. Von <https://www.nzcer.org.nz/research/publications/evaluation-caspilot-project-2006-2007>. abgerufen
- Neumann, R. (2016). *Zum Einfluss von Computeralgebrasystemen auf mathematische Grundfertigkeiten*. Diss. Universität Würzburg.
- Neumann, R. (2016). *Zum Einfluss von Computeralgebrasystemen auf mathematische Grundfertigkeiten, eine empirische Bestandsaufnahme*. Freiburg: Springer Spektrum.
- NZQA. (2019). *What we do*. Von <https://www.nzqa.govt.nz/about-us/our-role/whatwe-do/> abgerufen
- Pallack, A. (2007). *Die gute CAS-Aufgabe für die Prüfung In: Vorträge auf der 41. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik*. Hildesheim: Franzbecker.
- Pallack, A. (2007a). *Mit CAS zum Abitur*. In *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Pierce, C. (1985). *Die Festigung der Überzeugung: und andere Schriften*. Frankfurt: Ullstein Verlag.
- Roth, J. (2015). *Lernpfade - Definition, Gestaltungskriterien und Unterrichtseinsatz*. In E. S.-S. J. Roth, *Medienvielfalt im Mathematikunterricht: Lernpfade als Weg zum Ziel*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). In L. H.-H.-T.-G. R. Bruder, *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin: Springer.
- Schmitz, A. (2016). *Beliefs von Lehrerinnen und Lehrern der Sekundarstufen zum Visualisieren im Mathematikunterricht*. Diss. Universität Kassel.

- Schneider, E. (2002). *Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht: didaktische Orientierungen - praktische Erfahrungen*. München/Wien: Profil Verlag.
- Staatsinstitut für Schulqualität und Bildung. (2011). *Computeralgebrasysteme (CAS) im Mathematikunterricht des Gymnasiums: Jahrgangsstufe 10*. München: ISB.
- Standardisierte Reife- und Diplomprüfung. (19. 09 2024). Von <https://www.matura.gv.at/srdp/angewandte-mathematik> abgerufen
- Texas Instruments. (o. J.). Von <https://ticalculators.ae/products/cal-ti-nspire-cx-ii-t-cas> abgerufen
- Texas Instruments. (o. J.). Von <https://education.ti.com/de/produkte/taschenrechner/graphikrechner-und-cas/ti-nspire-cx-cas-technologie/graphikrechner-ti-nspire-cx-ii-t-cas> abgerufen
- TU Darmstadt CALiMERO (2005-2010). (2018). Von https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/didaktik/did/ag_forschung/did_forschung/did_projekte/lehrerprofessionalisierung_unterrichtsentwicklung/projekt_calimero/index.de.jsp abgerufen
- Ulovec, A. (2008). *Dynamische Geometriesoftware - innerhalb und außerhalb der Geometrie. Schriftreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖGM)*.
- Unger, H. (2000). *Computeralgebra in der AHS*. Diss. Universität Wien.
- Weidl, T. (2013). *Deutsche Mathematiker-Vereinigung: Digitale Mathematikwerkzeuge im Abitur*. Von <https://dmv.mathematik.de/index.php/forum/bildungspolitischethemen/12-digitale-mathematikwerkzeuge-im-abitur> abgerufen
- Weidl, T. (2014). *Deutsche Mathematiker-Vereinigung: GTR/CAS-Rechner im Unterricht ja, im Abi nein!* Von <https://dmv.mathematik.de/index.php/forum/bildungspolitische-themen/209-bw-gtr-cas-rechner-im-unterricht-ja-im-abi-nein> abgerufen
- Weigand, H. (2020). Was lehrt und das "Lernen zuhause" im Hinblick auf den (zukünftigen) Einsatz digitaler Technologien im Mathematikunterricht? In *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik und Mathematik*.
- Weigand, H.-G. (1995). Neue Werkzeuge und Kalkülkompetenz. In *Rechenfertigkeit und Begriffsbildung*.

- Weigand, H.-G. (2014). Wohin, Warum und Wie? - Zum Einsatz digitaler Technologien im zukünftigen Mathematikunterricht. In *Beiträge zu Mathematikunterricht 2014*. Münster: WTM-Verlag.
- Weigand, H.-G., & Bichler, E. (2010b). The long-term Project "Integration of Symbolic Calculator in Mathematics Lessons" - The case of Calculus. In S. S.-L. V. Durand-Guerrier, *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Weigand, H.-G., & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weth, T. (2003). *Computeralgebra - Nein, Danke!?* Mathematikinformation.

9 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Kreativspirale nach Buchberger (Müller, 2014).....	14
Abbildung 2: Spiralprinzip (Bruner, 2006)	18
Abbildung 3: Modellierungskreislauf nach Blum (Blum et al., 2018)	22
Abbildung 4: TI-nspire CX II-T CAS (Texas Instruments, o. J.)	45
Abbildung 5: Apps TI-Nspire CX II-T CAS (Texas Instruments, o. J.).....	48
Abbildung 6: Ausschnitt Anleitung mit TI-Nspire	56
Abbildung 7: Standardbeispiel	58
Abbildung 8: Abweichendes Beispiel	59
Abbildung 9: Statistik erreichte Punkte	68
Abbildung 10: Statistik Aufgabe 1A.....	69
Abbildung 11: Statistik Aufgabe 1B(1)	71
Abbildung 12: Statistik Aufgabe 1B(2)	72
Abbildung 13: Statistik Aufgabe 2	73
Abbildung 14: Statistik Aufgabe 3	75

10 Anhang

Anhang 1: Lehrmaterial-Erklärung

LINEARE OPTIMIERUNG – MAXIMALPROBLEM

Buchhändler Max betreibt einen kleinen Buchladen und möchte sein Bücherlager optimal nutzen. Max hat Platz für höchstens 35 Romane und höchstens 25 Sachbücher, insgesamt jedoch nur Platz für höchstens 50 Bücher. Der Einkaufspreis für einen Roman beträgt 10 €, während ein Sachbuch im Einkauf 25 € kostet. Max hat für den Einkauf insgesamt ein Budget von 800 €. Beim Wiederverkauf kann Max für jeden Roman einen Gewinn von 5 € und für jedes Sachbuch einen Gewinn von 10 € erzielen. Für diese Bedingungen ergeben sich folgende Ungleichungen und die Zielfunktion:

$$I: x \geq 0$$

$$II: y \geq 0$$

$$III: x \leq 35$$

$$IV: y \leq 25$$

$$V: x + y \leq 50$$

$$VI: 10x + 25y \leq 800$$

$$Z(x, y) = 5x + 10y \rightarrow \max$$

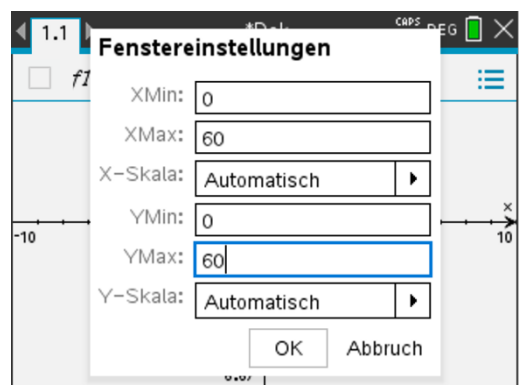
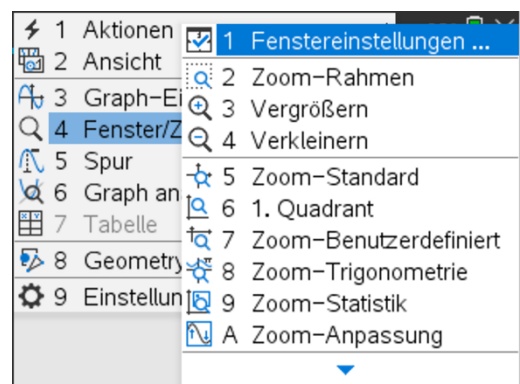
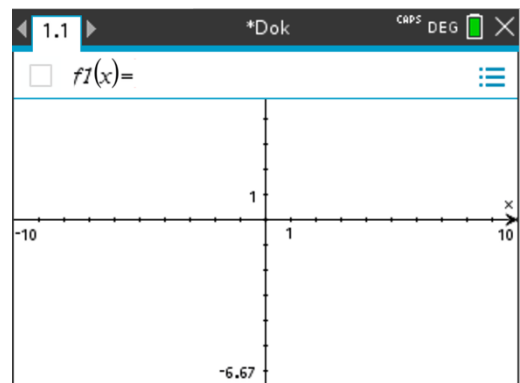
- a) Zeichnen Sie die Ungleichungen und den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in ein Koordinatensystem ein. (Arbeitsschritt 1 und 2)

- b) Zeichnen Sie die Zielfunktion ein, lesen Sie die optimalen Verkaufsmengen ab und ermitteln Sie den maximalen Gewinn. (Arbeitsschritt 3 und 4)

1. Skalierung des Koordinatensystems:

TI-nspire – Graph: on-1-2

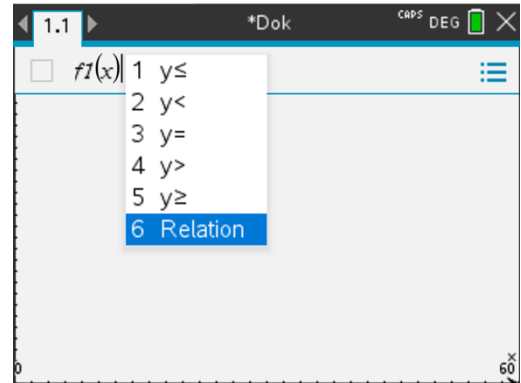
- Man tippt menü-4-1 Fenstereinstellungen, um die Einstellungen des Koordinatensystems zu ändern.
- Für XMin und YMin wird 0 eingesetzt. Dadurch werden die Bedingungen der Ungleichungen I und II bereits eingegrenzt und man muss diese nicht zusätzlich einzeichnen.
- Für XMax und YMax werden an das Beispiel angepasste Werte verwendet. In diesem Fall wird 60 gewählt
- Mit der Bestätigung „OK“ erhält man nun das angepasste Koordinatensystem



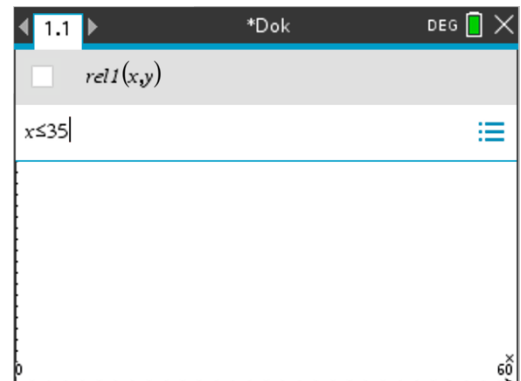
2. Einzeichnen der Ungleichungen in das Koordinatensystem

1) Zeichnen des Ungleichungssystems

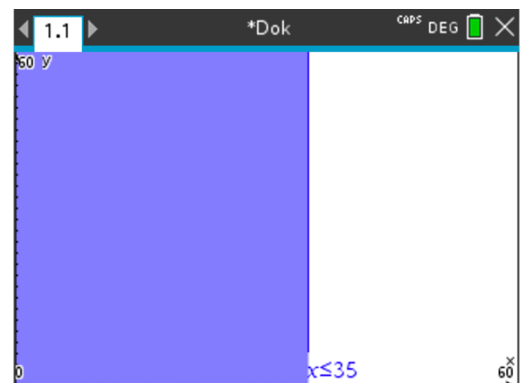
- Der Ausdruck „f1(x)“ in der Eingabezeile wird gelöscht und im erscheinenden Untermenü wird Punkt 6-(Relation) ausgewählt.



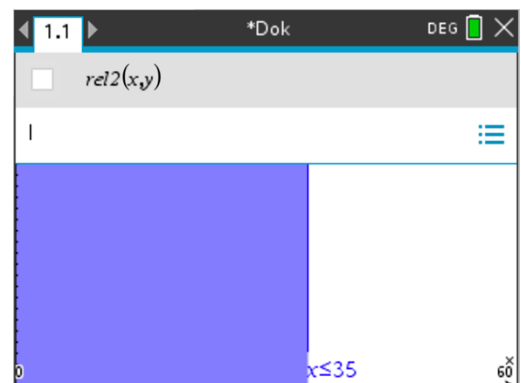
- Die erste Ungleichung wird in die Eingabezeile eingetippt.



- Mit „enter“ erscheint die Ungleichung inklusive eingefärbtem Lösungsbereich.

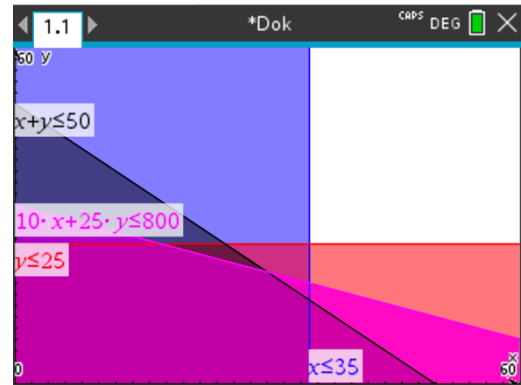


- Mit „tab“ wird die Eingabezeile wieder geöffnet, um eine weitere Ungleichung einzugeben.
- Es werden nacheinander alle Ungleichungen eingetippt und gezeichnet.



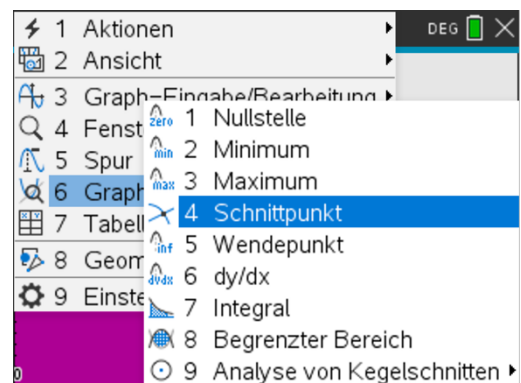
2) Lösungsbereich:

- Sind alle Ungleichungen eingegeben, sieht man den gemeinsamen Lösungsbereich. Das dunkelste Feld ist hierbei der Lösungsbereich für alle Bedingungen.
- Man sieht hier auch die beiden Punkte, die als Randpunkte bzw. optimale Menge in Frage kommen würden.

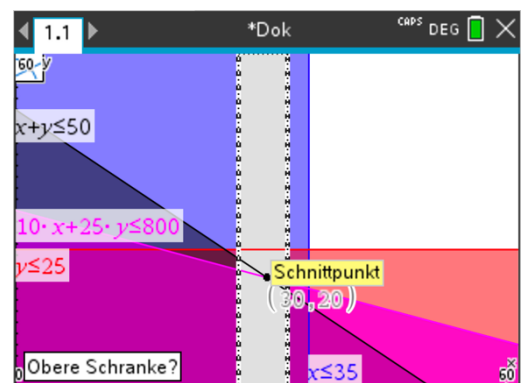


3) Randpunkte einzeichnen

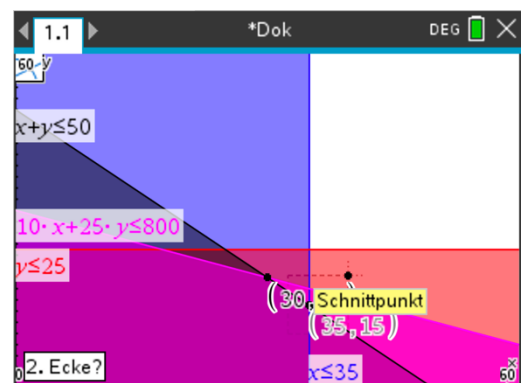
- Um die Randpunkte zu bestimmen, tippt man menü-6-4-(Schnittpunkt).



- Beide Randgeraden, die den Schnittpunkt einschließen, müssen angeklickt und der Bereich darüber aufgezogen werden (klick davor und danach). Der Schnittpunkt wird markiert und angegeben.

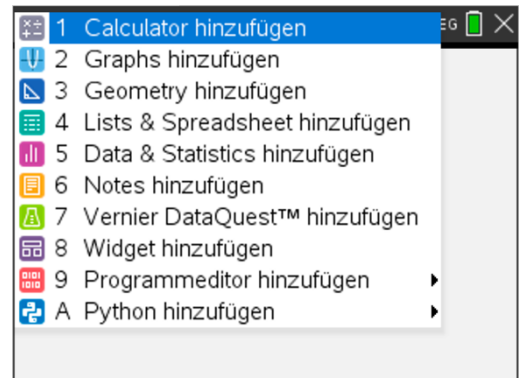


- Derselbe Schritt wird für den 2. Randpunkt angewendet. Hierbei erscheint aber nicht wie vorhin der Bereich zum Aufziehen, sondern ein Punkt bei dem Zeiger, wobei hier ein Viereck über den Randpunkt aufgezogen werden muss.
- Beide Randpunkte sind bekannt. Um die optimale Menge bestimmen zu können, wird die Zielfunktion benötigt.

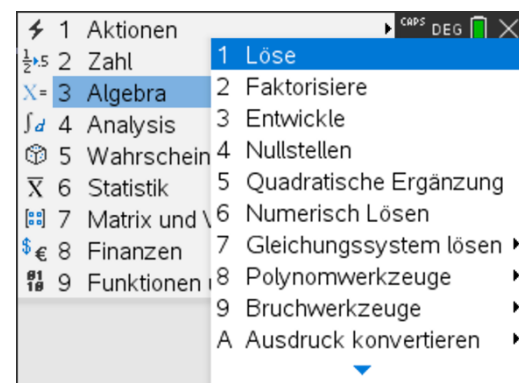


3. Umformen der Zielfunktion

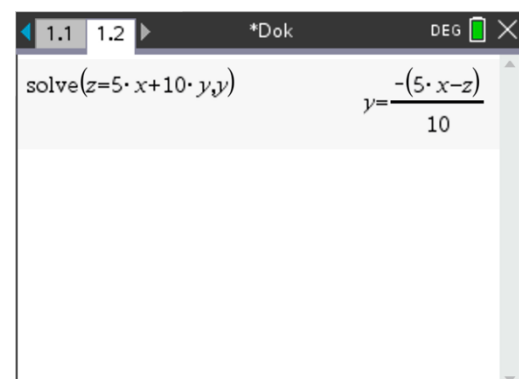
TI-nspire -Berechnen: ctrl-doc-1



- Man tippt menü-3-1-(Löse) und in der Zeile erscheint der Ausdruck „solve()“.



- In die Klammer wird die Funktion eingetippt, ein Beistrich gesetzt und anschließend jene Variable (y) eingetippt, nach der die Funktion umgeformt werden soll.
- Mit „enter“ erscheint nun die umgeformte Funktion

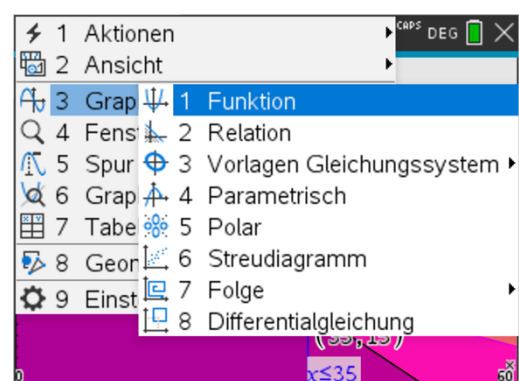


4. Zeichnen der Zielfunktion:

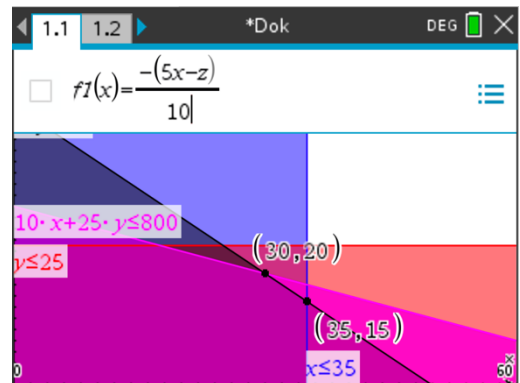
TI-nspire – Graph: (Seite 1.1)

1) Eingabe der Funktion

- Um in der Eingabezeile eine Funktion eingeben zu können tippt man nun menü-3-1-(Funktion).

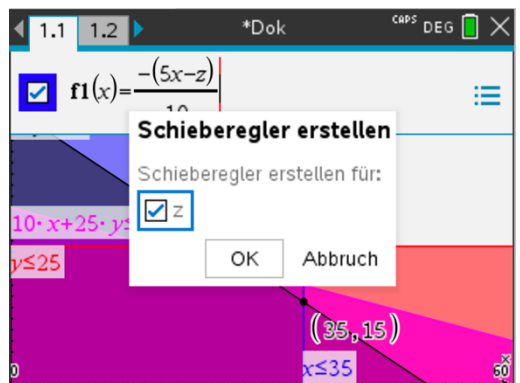


- Nun kann in der Eingabezeile die Funktionsgleichung eingetippt werden. Mit „enter“ wird der Funktionsgraph gezeichnet.



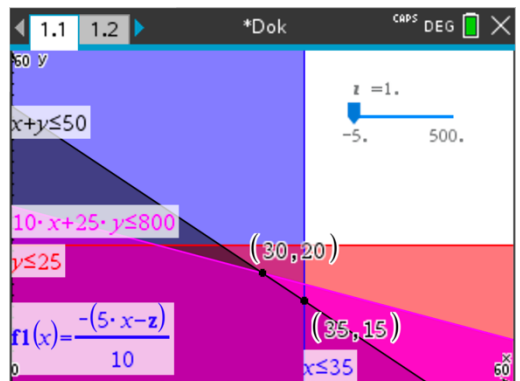
2) Schieberegler generieren

- Bei der Eingabe erscheint das Feld „Schieberegler erstellen“ mit der Variable z aus unserer Funktion, dieser dient dazu die Funktion parallel verschieben zu können.



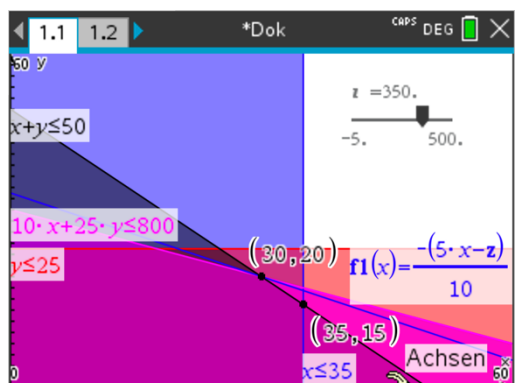
3) Einstellung des Schiebereglers verändern

- Minimum und Maximum können direkt am Schieberegler angetippt und verändert werden.
- Die Wahl des Maximums und Minimums variiert je nach Beispiel, kann aber beliebig hoch gewählt werden, um den Randpunkt des Lösungsbereiches zu treffen.



4) Parallelverschiebung der Funktion

- Man verschiebt den Schieberegler nach rechts, wodurch die gesamte Zielfunktion parallel verschoben wird.
- Die Funktion wird bis zum äußersten der vorher bestimmten Randpunkte verschoben. Dieser Punkt ist die optimale Menge.

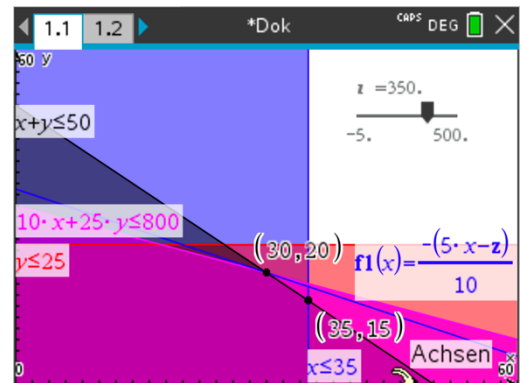


5) Maximaler Gewinn

- Einsetzen der optimalen Menge in die Zielfunktion

$$Z(20,20) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 140 \text{ €}$$

- Alternativ kann z beim Schieberegler abgelesen werden, wenn die Funktion durch den Punkt (optimale Menge) geht.



LINEARE OPTIMIERUNG – MINIMALPROBLEM

Buchhändler Max plant, Buchpakete zusammenzustellen und zu verkaufen. Er möchte mindestens 30 Pakete mit Romanen und mindestens 20 Pakete mit Sachbüchern anbieten. Insgesamt darf er jedoch nicht mehr als 55 Buchpakete auf Lager haben. Die Kosten für ein Roman-Paket betragen 13,50 € pro Paket, während die Kosten für ein Sachbuch-Paket 14,50 € pro Paket betragen. Für diese Bedingungen ergeben sich folgende Ungleichungen und die Zielfunktion:

$$I: x \geq 0$$

$$II: y \geq 0$$

$$III: x \geq 30$$

$$IV: y \geq 20$$

$$V: x + y \leq 55$$

$$Z(x, y) = 13,5x + 14,5y \rightarrow \min$$

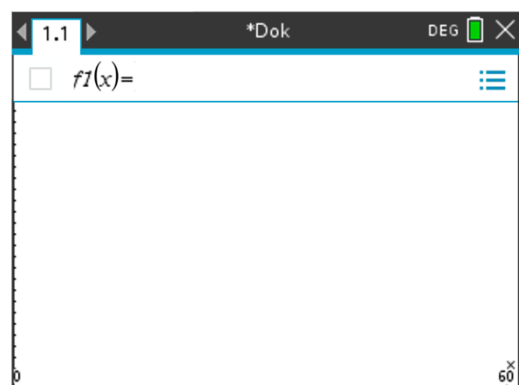
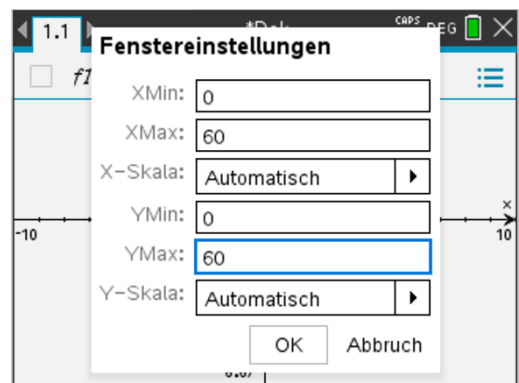
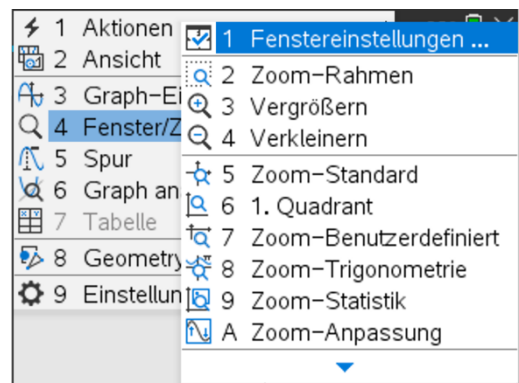
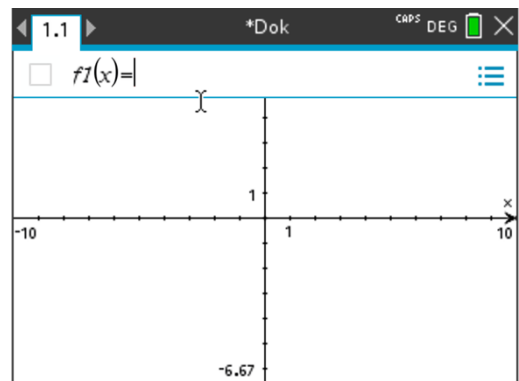
- a) Zeichnen Sie die Ungleichungen und den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in ein Koordinatensystem ein. (Arbeitsschritt 1 und 2)

- b) Zeichnen Sie die Zielfunktion ein, lesen Sie die optimalen Verkaufsmengen ab und ermitteln Sie die minimalen Kosten. (Arbeitsschritt 3 und 4)

1. Skalierung des Koordinatensystems:

TI-nspire – Graph: on-1-2

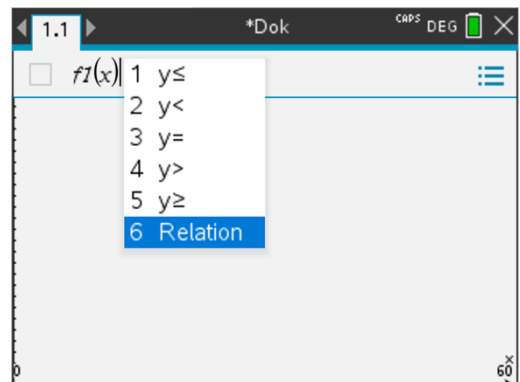
- Man tippt menü-4-1 Fenstereinstellungen, um die Einstellungen des Koordinatensystems zu ändern.
- Für XMin und YMin wird 0 eingesetzt. Dadurch werden die Bedingungen der Ungleichungen I und II bereits eingegrenzt und man muss diese nicht zusätzlich einzeichnen.
- Für XMax und YMax werden an das Beispiel angepasste Werte verwendet. In diesem Fall wird 60 gewählt
- Mit der Bestätigung „OK“ erhält man nun das angepasste Koordinatensystem



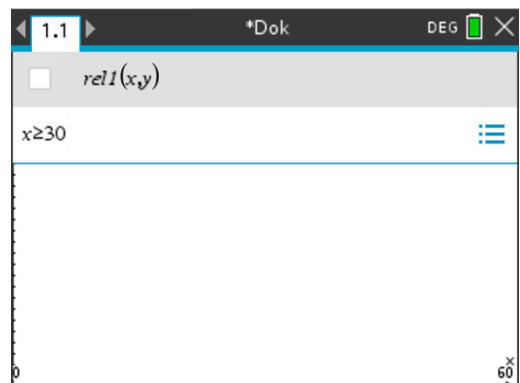
2. Einzeichnen der Ungleichungen in das Koordinatensystem

1) Zeichnen des Ungleichungssystems

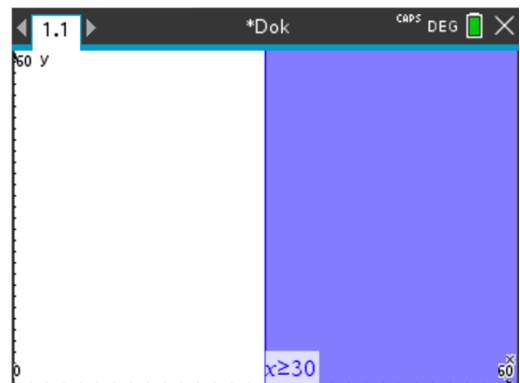
- Der Ausdruck „f1(x)“ in der Eingabezeile wird gelöscht und im erscheinenden Untermenü wird Punkt 6-(Relation) ausgewählt.



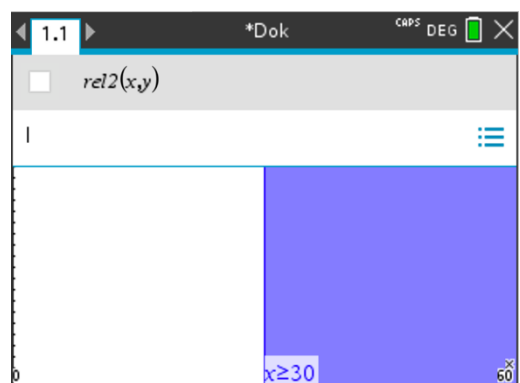
- Die erste Ungleichung wird in die Eingabezeile eingetippt.



- Mit „enter“ erscheint die Ungleichung inklusive eingefärbtem Lösungsbereich.

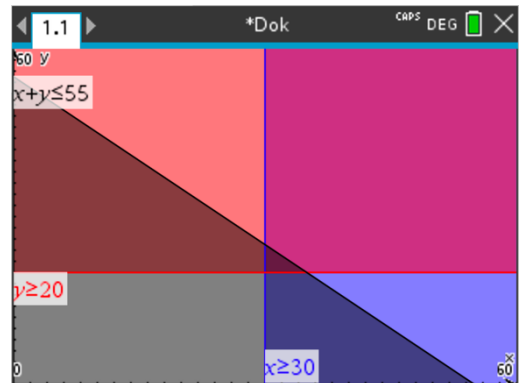


- Mit „tab“ wird die Eingabezeile wieder geöffnet, um eine weitere Ungleichung einzugeben.
- Es werden nacheinander alle Ungleichungen eingetippt und gezeichnet.



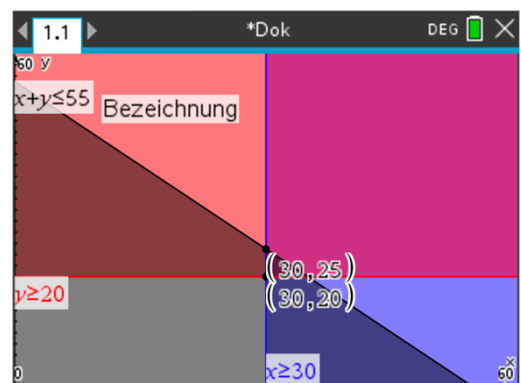
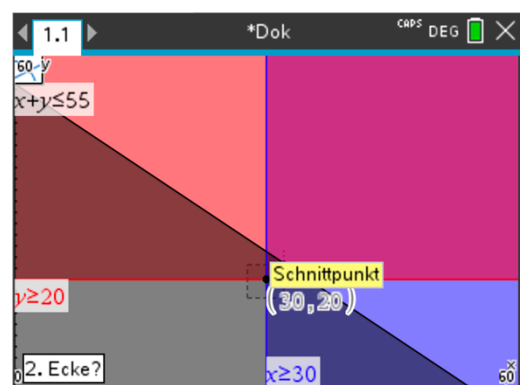
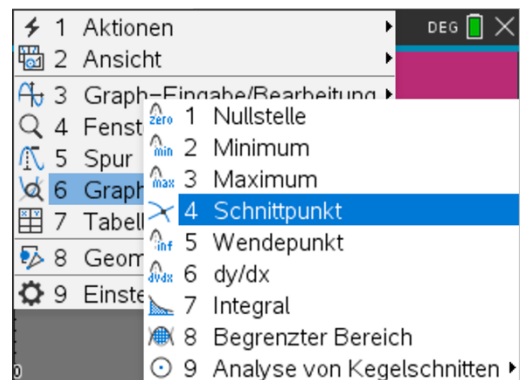
2) Lösungsbereich:

- Sind alle Ungleichungen eingegeben, sieht man den gemeinsamen Lösungsbereich. Das dunkelste Feld ist hierbei der Lösungsbereich für alle Bedingungen.
- Man sieht hier auch die beiden Punkte, die als Randpunkte bzw. optimale Menge in Frage kommen würden.



3) Randpunkte einzeichnen

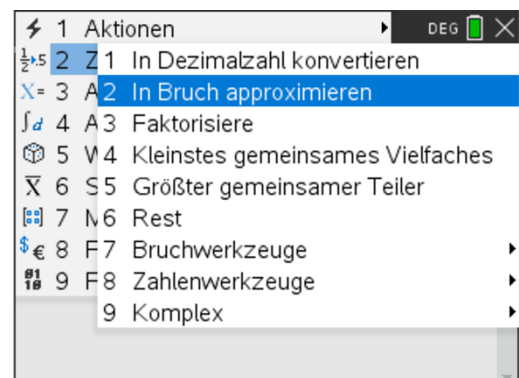
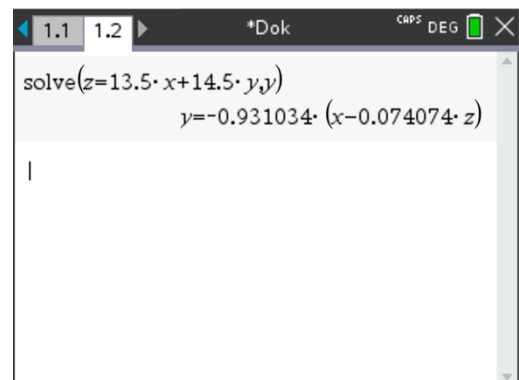
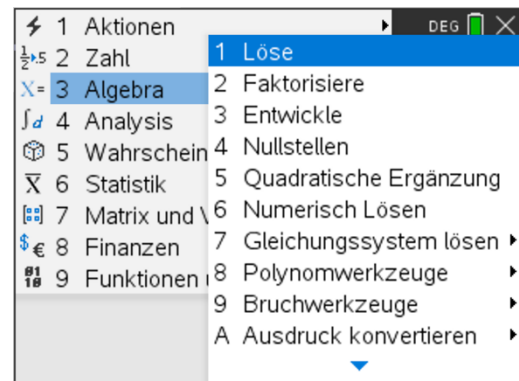
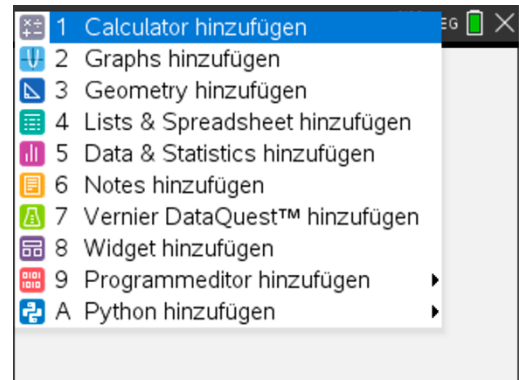
- Um die Randpunkte zu bestimmen, tippt man menü-6-4-(Schnittpunkt).
- Beide Randgeraden, die den Schnittpunkt einschließen, müssen angeklickt und der Bereich darüber aufgezo-gen werden. Dafür erscheint ein Punkt bei dem Zeiger, wobei hier ein Viereck über dem Randpunkt aufgezo-gen werden muss. Der Schnittpunkt wird markiert und angegeben.
- Derselbe Schritt wird für den 2. Randpunkt angewendet.
- Beide Randpunkte sind bekannt. Um die optimale Menge bestimmen zu können, wird die Zielfunktion benötigt.



3. Umformen der Zielfunktion

TI-nspire -Berechnen: ctrl-doc-1

- Man tippt menü-3-1-(Löse) und in der Zeile erscheint der Ausdruck „solve()“.
- In die Klammer wird die Funktion eingetippt, ein Beistrich gesetzt und anschließend jene Variable (y) eingetippt, nach der die Funktion umgeformt werden soll.
- Mit „enter“ erscheint nun die umgeformte Funktion.
- In der Funktionsgleichung kommt eine Dezimalzahl vor. Da dies für die weitere Eingabe schwierig ist, wandelt man diese Ausgabe in einen Bruch um.
- Dazu wählt man die Funktion aus und tippt anschließend menü-2-2-(in Bruch approximieren).



- Mit „enter“ erscheint die Lösung in einem Bruch.

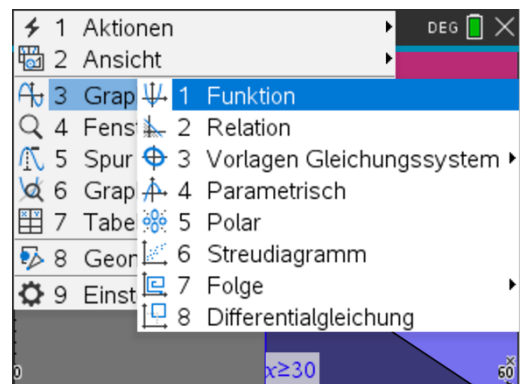
TI-nspire calculator screen showing the solution of a system of linear equations. The input is $\text{solve}(z=13.5 \cdot x + 14.5 \cdot y, y)$ and the output is a fraction: $y = -0.93103448275863 \cdot (x - 0.074074074) - \frac{(27 \cdot x - 2 \cdot z)}{29}$.

4. Zeichnen der Zielfunktion:

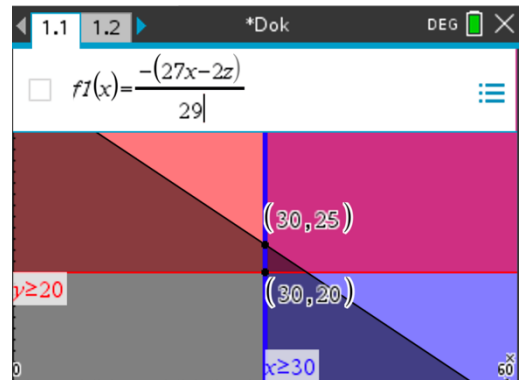
TI-nspire – Graph: (Seite 1.1)

1) Eingabe der Funktion

- Um in der Eingabezeile eine Funktion eingeben zu können tippt man nun menü-3-1-(Funktion).

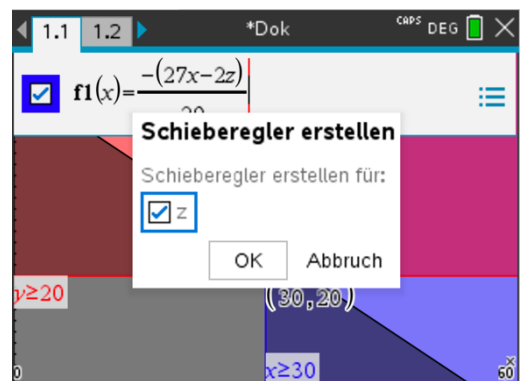


- Nun kann in der Eingabezeile die Funktionsgleichung eingetippt werden.
- Mit „enter“ wird der Funktionsgraph gezeichnet.



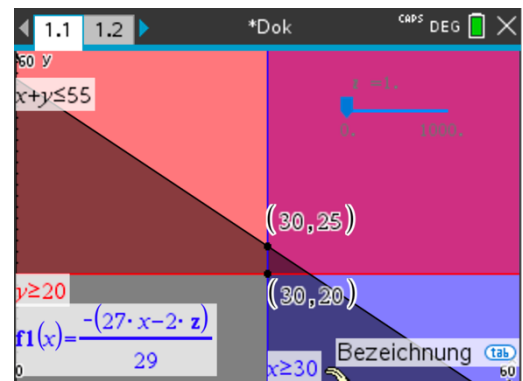
2) Schieberegler generieren

- Bei der Eingabe erscheint das Feld „Schieberegler erstellen“ mit der Variable z aus unserer Funktion, dieser dient dazu die Funktion parallel verschieben zu können.



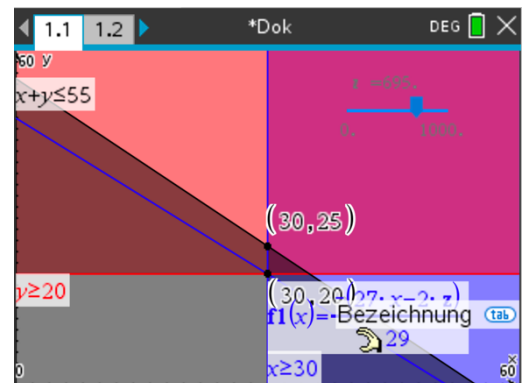
3) Einstellung des Schiebereglers verändern

- Minimum und Maximum können direkt am Schieberegler angetippt und verändert werden.
- Die Wahl des Maximums und Minimums variiert je nach Beispiel, kann aber beliebig hoch gewählt werden, um den Randpunkt des Lösungsbereiches zu treffen.



4) Parallelverschiebung der Funktion

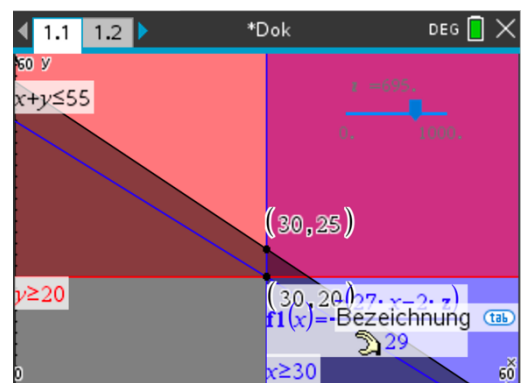
- Man verschiebt den Schieberegler nach rechts, wodurch die gesamte Zielfunktion parallel verschoben wird.
- Die Funktion wird bis zum ersten der vorher bestimmten Randpunkte verschoben. Dieser Punkt ist die optimale Menge.



5) Minimale Kosten

- Einsetzen der optimalen Menge in die Zielfunktion

$$Z(20,20) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 20 = 140 \text{ €}$$
- Alternativ kann z beim Schieberegler abgelesen werden, wenn die Funktion durch den Punkt (optimale Menge) geht.



Anhang 2: Lehrmaterial-Aufgabenpaket inkl. Lösungserwartung

- 1) Die Firma von Herrn Meier produziert zwei Arten von Saft. Die Abfüllanlage für die erste Sorte kann maximal 1200 Flaschen pro Tag füllen, während die Maschine für die zweite Sorte täglich höchstens 1600 Flaschen schafft. Insgesamt dürfen jedoch nicht mehr als 2000 Flaschen pro Tag abgefüllt werden. Für jede Flasche der ersten Sorte beträgt der Gewinn 0,80 €, für jede Flasche der zweiten Sorte 0,50 €.
- Bestimmen Sie, wie viele Flaschen jeder Sorte produziert werden müssen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.

x... Flaschen Sorte 1

y... Flaschen Sorte 2

$$x \leq 1200, y \leq 1600, x + y \leq 2000$$

$$Z(x, y) = 0,8x + 0,5y$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 2000, YMin = 0, YMax = 2000
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (400|1600), (1200|800)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 0,8x + 0,5y, y) \quad y = -1,6(x - 1.25z)$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (1200|800)

Es müssen 1200 Flaschen der Sorte 1 und 800 Flaschen der Sorte 2 hergestellt werden.

- Berechnen Sie außerdem den maximal möglichen Gewinn.
 - Einsetzen in die Zielfunktion: $0,8 \cdot 1200 + 0,5 \cdot 800 = 1360$
 - ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Der maximale Gewinn beträgt 1360€.

- 2) Ein Unternehmen produziert zwei Arten von Snacks: Chips und Kekse. Pro Tag können bis zu 70 Packungen Chips und 100 Packungen Kekse hergestellt werden, jedoch liegt die maximale Produktionsmenge bei insgesamt 140 Packungen. Die Produktionskosten betragen 20 € pro Packung Chips und 15

€ pro Packung Kekse. Die Chips werden zu einem Preis von 45 € pro Packung verkauft, während Kekse für 35 € pro Packung verkauft werden.

- Bestimmen Sie, wie viele Packungen Chips und Kekse produziert werden müssen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.

x... Anzahl der Chips

y... Anzahl der Kekse

$$x \leq 70, y \leq 100, x + y \leq 140$$

$$Z(x, y) = 25x + 20y$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 150, YMin = 0, YMax = 150
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (40|100), (70|70)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 25x + 20y, y) \quad y = \frac{-(25x - Z)}{20}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (70|70)

Es müssen 70 Chips und 70 Kekse pro Tag hergestellt werden.

- Berechnen Sie den maximal möglichen Gewinn.

Einsetzen in die Zielfunktion: $25 \cdot 70 + 20 \cdot 70 = 3150$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Der maximale Gewinn beträgt 3150€.

- 3) Ein Handwerksbetrieb stellt Seifen her. Es sollen mindestens 30 Stück der Seife Sorte 1 und mindestens 20 Stück der Seife Sorte 2 produziert werden. Insgesamt dürfen jedoch nicht mehr als 55 Seifen hergestellt werden. Die Produktionskosten betragen pro Stück der Sorte 1 3,50 €, und für Sorte 2 4,50 € pro Stück.

- Ermitteln Sie graphisch, wie viele Stücke von jeder Sorte hergestellt werden sollen, um die Produktionskosten so gering wie möglich zu halten.

x... Seifen Sorte 1

y... Seifen Sorte 2

$$x \geq 30, y \geq 20, x + y \leq 55$$

$$Z(x, y) = 3,5x + 4,5y$$

TI-nspire: on --2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 60, YMin = 0, YMax = 60
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (30|20), (30|25)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 3,5x + 4,5y, y) \quad y = \frac{-(7x-2z)}{9}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (30|20)

Es sollten 30 Seifen der Sorte 1 und 20 Seifen der Sorte 2 hergestellt werden.

- Berechnen Sie diese Kosten.

Einsetzen in die Zielfunktion: $3,5 \cdot 30 + 4,5 \cdot 20 = 195$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Die minimalen Kosten betragen 195€.

- 4) Laura und Paul möchten für den Geburtstag ihrer Schwester Lena etwas zur Party beitragen. Sie planen, eine alkoholfreie Cocktailmischung aus Fruchtsaft und Mineralwasser herzustellen. Es werden mindestens 70 Liter der Mischung benötigt, wobei 30 Liter Fruchtsaft (Normalpreis 1,80 € pro Liter) von einem Freund gespendet wurden. Laut Rezept muss mindestens genauso viel Mineralwasser wie Fruchtsaft enthalten sein. Sollte der Anteil des Mineralwassers jedoch mehr als doppelt so hoch sein wie der des Fruchtsaftes, wird der Cocktail ungenießbar. Ein Liter Mineralwasser kostet 2,25 €.

- Bestimmen Sie graphisch, wie viel Liter von jeder Getränkesorte verwendet werden müssen, um die Mischung möglichst kostengünstig herzustellen.

x... Menge Mineralwasser in Liter

y... Menge Fruchtsaft in Liter

$$x \geq y, 2y \geq x, y \geq 30, x + y \geq 70$$

$$Z(x, y) = 2,25x + 1,8(y - 30)$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 120, YMin = 0, YMax = 120
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (40|30), (35|35)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 2,25x + 1,8(y - 30), y) \quad y = \frac{-5(9x - 4(z + 54))}{36}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (35|35)

Es müssen jeweils 35 Liter Mineralwasser und 5 Liter Fruchtsaft eingekauft werden.

- Berechnen Sie die minimalen Kosten.

Einsetzen in die Zielfunktion: $2,25 \cdot 35 + 1,8 \cdot 5 = 87,75$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Die minimalen Kosten betragen 87,75€.

- 5) Eine Firma produziert E-Bikes und Elektro-Scooter. Pro Woche können insgesamt maximal 80 Fahrzeuge hergestellt werden. Aufgrund technischer Einschränkungen können pro Woche höchstens 60 E-Bikes und 50 Elektro-Scooter produziert werden. Die Produktionskosten für ein E-Bike betragen 250 €, für einen Elektro-Scooter 200 €. Ein E-Bike wird für 400 € verkauft, ein Elektro-Scooter für 300 €.

- Stellen Sie die Zielfunktion auf, mit der der maximale Gewinn berechnet werden kann.

$$Z(x, y) = 150x + 100y$$

- Bestimmen Sie, bei welchen Produktionsmengen der maximale Gewinn erzielt wird, und berechnen Sie diesen Gewinn.

x... E-Bikes

y... Elektroscooter

$$x \leq 60, y \leq 50, x + y \leq 80$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - $X_{\min} = 0, X_{\max} = 70, Y_{\min} = 0, Y_{\max} = 70$
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - $(60|20), (30|50)$
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 150x + 100y, y) \quad y = \frac{-(150x - z)}{100}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: $(60|20)$
 - Einsetzen in die Zielfunktion: $150 \cdot 60 + 100 \cdot 20 = 11000$
 - ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Es müssen 60 E-Bikes und 20 Elektroscooter hergestellt werden, um den maximalen Gewinn von 11000€ zu erzielen.

Man überlegt, den Verkaufspreis für E-Bikes auf 325 € zu senken. Erklären Sie, wie sich diese Preisänderung auf den maximalen Gewinn auswirkt.

- Zeigen Sie, dass sich durch diese Preisänderung auch die optimalen Produktionsmengen verändern.

Neue Zielfunktion: $Z(x, y) = 75x + 100y$

- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 75x + 100y, y) \quad y = \frac{-(75x - z)}{100}$
- Zielfunktion verändern (Seite 1.1)
 - Durch Anklicken der Funktionsgleichung kann diese verändert werden
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: $(30|50)$

- Berechnen Sie den Gewinn unter diesen neuen Bedingungen.

Einsetzen in die Zielfunktion: $75 \cdot 30 + 100 \cdot 50 = 7250$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Der maximale Gewinn beträgt nun 7250€.

- 6) Eine Wohngemeinschaft möchte höchstens 150 m² ihrer Dachterrasse nutzen, um Tomaten und Zucchini anzubauen. Die Bewohner verkaufen ihre Ernte auf dem lokalen Markt, um Geld für einen gemeinsamen Urlaub zu sparen. Pro Quadratmeter angebauten Tomaten kann ein Gewinn von 15 € erzielt werden, für Zucchini liegt der Gewinn bei 25 € pro Quadratmeter. Die Anbaufläche für Zucchini darf nicht größer sein als die für Tomaten. Für den Anbau von Zucchini benötigen die Bewohner pro Quadratmeter 8 Arbeitsstunden, während für Tomaten nur 5 Stunden erforderlich sind. Insgesamt stehen höchstens 1100 Arbeitsstunden zur Verfügung, um die Dachterrasse zu bewirtschaften.

- Stellen Sie die Zielfunktion auf, um den maximalen Gewinn zu berechnen.

$$Z(x, y) = 15x + 25y$$

- Bestimmen Sie, wie viele Quadratmeter jeweils bepflanzt werden müssen, um den größtmöglichen Gewinn zu erzielen.

x... Anbaufläche Tomaten

y... Anbaufläche Zucchini

$$x > y, 5x + 8y \leq 1100, x + y \leq 150$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 160, YMin = 0, YMax = 160
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (75|75), (150|0)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 15x + 25y, y) \quad y = \frac{-(15x - Z)}{25}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (75|75)

Es müssen 75 m² Tomaten und 75 m² Zucchini angebaut werden.

- Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

$$\text{Einsetzen in die Zielfunktion: } 15 \cdot 75 + 25 \cdot 75 = 3000$$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Der maximale Gewinn beträgt 3000€.

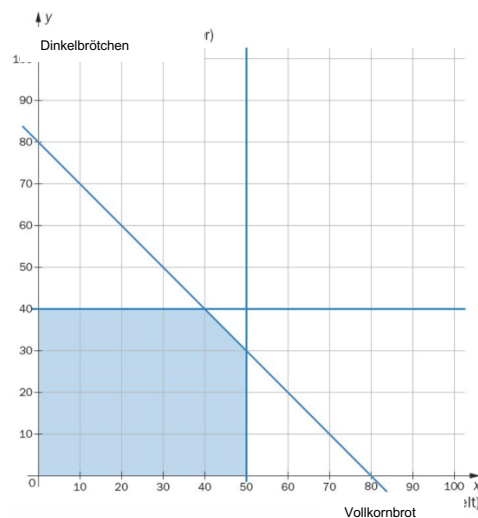
Ein unerwarteter Markteinbruch führt dazu, dass für Tomaten nur noch 10 € und für Zucchini nur noch 20 € Gewinn pro Quadratmeter erzielt werden können.

- Erklären Sie, welche Auswirkungen dies auf die Steigung der zur Zielfunktion gehörigen Geraden hat.

Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 10x + 20y, y) \quad y = \frac{-(10x - Z)}{20}$

Die Steigung wird kleiner, dadurch wird die Zielfunktion flacher.

7) Bäckerin Lena bietet auf dem Wochenmarkt Vollkornbrot und Dinkelbrötchen an.



- Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich für ihre Produktion bestimmen.

$$x \geq 0, y \geq 0, x \leq 50, y \leq 40, y \leq -x + 80$$

Für die letzte Ungleichung kann mit Hilfe von 2 Punkten eine lineare Regression mit dem Taschenrechner aufgestellt werden.

TI-nspire: Regression on-1-4

1) 2 Punkte der Gerade ablesen

- (0|80), (80|0)

2) X-Werte werden in die erste Spalte (x) eingetragen, Y-Werte werden in die Spalte (y) daneben eingetippt

3) Menü-4-1-3-(lineare Regression)

4) Jeweils x für die X-Liste und, y für die Y-Liste wählen und mit „OK“ bestätigen

5) Werte für Steigung (m) und Ordinatenabschnitt (b) ablesen und in die Funktionsgleichung einsetzen

- Interpretieren Sie mithilfe der Graphik, wie viele Laibe Vollkornbrot bzw. Dinkelbrötchen Lena höchstens zu ihrem Stand mitnehmen soll.

Lena sollte höchstens 50 Laibe Vollkornbrote und 40 Dinkelbrötchen mitnehmen. Jedoch insgesamt 80 Gebäckstücke.

- Pro Laib Vollkornbrot fallen Produktionskosten von 3 Euro an, für ein Dinkelbrötchen betragen die Kosten 2,50 €. Ein Laib Vollkornbrot kann für 9,50 € verkauft werden, ein Dinkelbrötchen für 8 €. Stellen Sie die Zielfunktion zur Berechnung des Gewinns auf.

$$Z(x, y) = (9,5 - 3)x + (8 - 2,5)y$$

- Bestimmen Sie mithilfe der Graphik und der Zielfunktion Lenas maximalen Gewinn.

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 80, YMin = 0, YMax = 80
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (50|30), (40|40)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 6,5x + 5,5y, y) \quad y = \frac{-(13x-2Z)}{11}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (50|30)
- Einsetzen in die Zielfunktion: $6,5 \cdot 50 + 5,5 \cdot 30 = 490$
 ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Wenn Sie 50 Laibe Vollkornbrot und 30 Dinkelbrötchen mitnimmt beträgt der maximale Gewinn 490€.

- 8) Ein Hotel möchte bis zu 15 neue Geschirrspülmaschinen für die Küche kaufen. Eine Maschine der Marke Aqua ist 2 m breit und kann 120 Teller pro Spülgang reinigen. Eine industrielle Spülmaschine der Marke Delta ist 1,5 m breit und schafft 90 Teller pro Spülgang. Die Maschinen sollen alle nebeneinander in einer Reihe aufgestellt werden. Dafür steht dem Hotel ein Raum mit 26 m Länge zur Verfügung. Von jeder Marke sind maximal 10 Maschinen auf Lager.

- Ermitteln Sie, wie viele Maschinen von jedem Typ das Hotel kaufen soll, um möglichst viel Geschirr gleichzeitig spülen zu können.

x... Anzahl Maschinen Aqua

y... Anzahl Maschinen Delta

$$x + y \leq 15, 2x + 1,5y \leq 26, x \leq 10, y \leq 10$$

$$Z(x, y) = 120x + 90y$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)

- $X_{\min} = 0, X_{\max} = 14, Y_{\min} = 0, Y_{\max} = 14$
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - $(7|8), (10|4)$
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 120x + 90y, y) \quad y = \frac{-(120x - z)}{90}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: $(7|8)$

Es sollten 7 Maschinen Aqua und 8 Maschinen Delta gekauft werden.

- Berechnen Sie, wie viele Teller gleichzeitig gespült werden können.

Einsetzen in die Zielfunktion: $120 \cdot 7 + 90 \cdot 8 = 1560$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Es können maximal 1560kg gewaschen werden.

- Interpretieren Sie, was mit folgendem Term im Sachzusammenhang berechnet wird.: $7 \cdot 2 + 8 \cdot 1,5$
Es wird berechnet welche Gesamtlänge für 7 Maschinen Aqua und 8 Maschinen Delta benötigt wird.

9) Ein Schmuckdesigner fertigt auf Bestellung einzigartige Schmuckstücke. Für die Herstellung eines Armbands benötigt er 10 Minuten Arbeitszeit, während die Herstellung einer Kette doppelt so lange dauert. Er arbeitet täglich 6 Stunden. Die Materialkosten für ein Armband betragen 3 Euro, für eine Kette 2 Euro. Insgesamt kann der Schmuckdesigner pro Tag maximal 50 € an Materialkosten ausgeben. Ein Armband wird für 9 Euro verkauft, eine Kette für 7 Euro.

- Erstellen Sie die Ungleichungen, die den Lösungsbereich bestimmen.
- Stellen Sie den Lösungsbereich graphisch dar.
- Formulieren Sie die Zielfunktion zur Berechnung des Gewinns pro Tag.
- Zeichnen Sie die Gerade ein, bei der der Maximalwert der Zielfunktion erreicht wird.
- Lesen Sie die optimale Lösung ab und berechnen Sie den maximalen Gewinn pro Tag.

x... Anzahl Armbänder

y... Anzahl Kette

$$10x + 20y \leq 360, 3x + 2y \leq 50, x + y \leq 20$$

$$Z(x, y) = (9 - 3)x + (7 - 2)y$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 40, YMin = 0, YMax = 40
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (10|10), (4|16)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 6x + 5y, y) \quad y = \frac{-(6x-Z)}{5}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (10|10)
- Einsetzen in die Zielfunktion: $6 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 110$
 ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Es sollten jeweils 10 Armbänder und Ketten hergestellt werden damit der maximale Gewinn von 110€ erzielt wird.

10) Das Sportzentrum in Altenmarkt plant im Rahmen eines großen Sportevents eine Veranstaltung. Der Hauptsaal bietet Platz für 450 Personen. Es können maximal 250 Sitzplätze und nicht mehr als 400 Stehplätze angeboten werden. Sitzplätze werden für je 30 € und Stehplätze für je 20 € verkauft. Dem Veranstalter entstehen Kosten in Höhe von 10.000 €.

- Bestimmen Sie, wie viele Sitz- und Stehplätze verkauft werden müssen, um den maximalen Gewinn zu erzielen.

x... Anzahl Sitzplätze

y... Anzahl Stehplätze

$$x \leq 250, y \leq 400, x + y \leq 450$$

$$Z(x, y) = 30x + 20y - 10000$$

TI-nspire: on-1-2

- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 500, YMin = 0, YMax = 500
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden

- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (250|200), (50|400)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 30x + 20y - 10000, y) \quad y = \frac{-(30x - Z - 10000)}{20}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (250|200)

Es müssen 250 Sitzplätze und 200 Stehplätze verkauft werden.

- Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Einsetzen in die Zielfunktion: $30 \cdot 250 + 20 \cdot 200 - 10000 = 1500$

ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Der maximale Gewinn beträgt 1500€.

11) Eine Transportgesellschaft plant, eine Busverbindung zwischen zwei Städten einzurichten. Ziel ist es, in einem bestimmten Zeitraum 1800 Fahrgäste und mindestens 112 t Fracht zu befördern. Derzeit stehen zwei Bustypen zur Verfügung: mindestens zwölf Busse des Typs X und neun Busse des Typs Y. Typ X kostet pro Fahrt 2500 € und kann 300 Fahrgäste sowie 8 t Fracht transportieren. Typ Y kostet pro Fahrt 5000 € und kann 150 Fahrgäste und 20 t Fracht befördern.

- Bestimmen Sie, wie viele Busse von jedem Typ die Transportgesellschaft einsetzen sollte, um die Gesamtkosten zu minimieren.

x... Anzahl Busse Typ A

y... Anzahl Busse Typ B

$$x \leq 12, y \leq 9, 8x + 20y \geq 112, 300x + 150y \geq 1800$$

$$Z(x, y) = 2500x + 5000y$$

TI-nspire: on-1-2

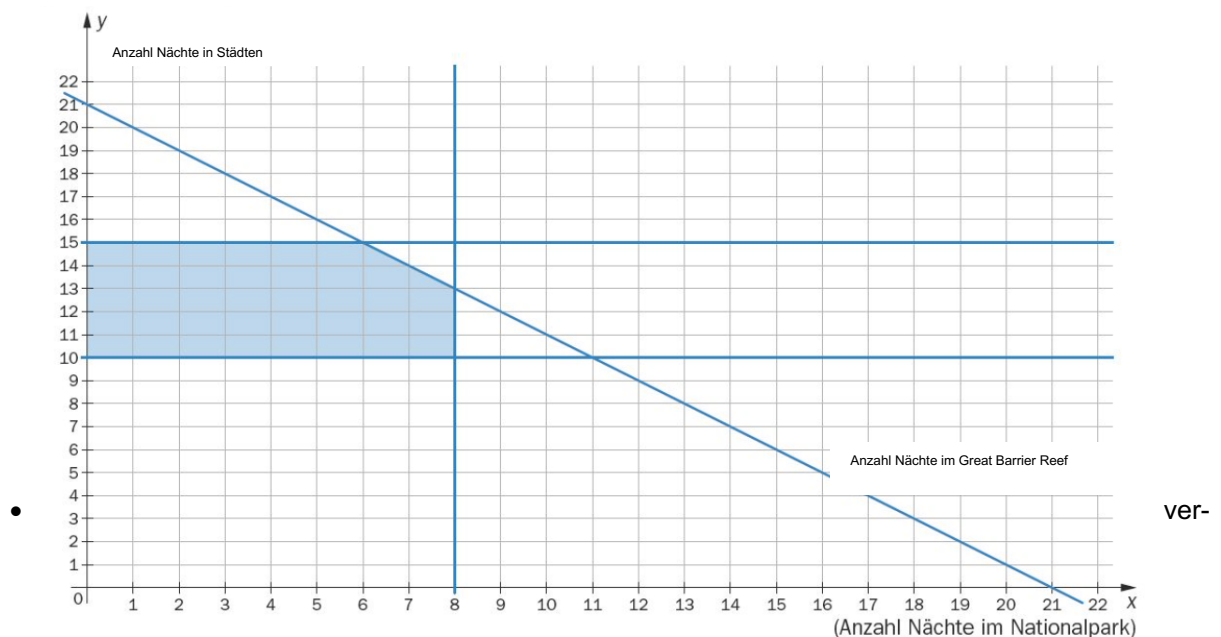
- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 16, YMin = 0, YMax = 16
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (4|4), (12|1)
- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1

- Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 2500x + 5000y, y) \quad y = \frac{-(2500x - z)}{5000}$
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (4|4)

Es sollten 4 Busse vom Typ A und 4 Busse vom Typ B eingesetzt werden.

12) Reisen

- a) Max plant, in Australien zu reisen. Er möchte das Great Barrier Reef und einige Städte besuchen, hat sich jedoch noch nicht genau festgelegt, wie lange er an den einzelnen Stationen verbringen wird. Er hat jedoch bestimmte Einschränkungen für seine Aufenthaltsdauer festgelegt, die in der folgenden Graphik veranschaulicht sind.



- Lesen Sie aus der Graphik ab, wie viele Nächte Max insgesamt plant, in Australien zu bleiben.
 $x + y \leq 21$ Er plant 21 Tage in Australien zu bleiben.
- Bestimmen Sie die 5 Ungleichungen, die den Lösungsbereich für seinen Aufenthalt definieren.
 $y \geq 10, x \leq 15, x \leq 8, x \geq 0, x + y \leq 21$

Die letzte Ungleichung kann bei Bedarf durch eine Regression mit dem Taschenrechner aufgestellt werden.

TI-nspire: Regression on-1-4

- 1) 2 Punkte der Gerade ablesen
 - (21|0), (0|21)
- 2) X-Werte werden in die erste Spalte (x) eingetragen, Y-Werte werden in die Spalte (y) daneben eingetippt
- 3) Menu-4-1-3-(lineare Regression)
- 4) Jeweils x für die X-Liste und, y für die Y-Liste wählen und mit „OK“ bestätigen
- 5) Werte für Steigung (m) und Ordinatenabschnitt (b) ablesen und in die Funktionsgleichung einsetzen

Eine Nacht im Great Barrier Reef kostet 210 €, während eine Nacht in einem Hotel in einer Stadt im Durchschnitt 55 € kostet.

- Stellen Sie die Zielfunktion auf, um den kostengünstigsten Preis zu berechnen.

$$Z(x, y) = 210x + 55y$$

- Erklären Sie, wie Max mithilfe der Graphik und der Zielfunktion zur optimalen Lösung gelangt.
Man zeichnet die zur Zielfunktion passende Gerade ein und verschiebt diese parallel, sodass die Kosten möglichst gering sind aber die Gerade den Lösungsbereich trotzdem berühren muss.

b) Auch Lisa möchte Australien bereisen. Sie plant maximal 25 Nächte in Jugendherbergen und maximal 15 Nächte in Hotels zu verbringen. Insgesamt hat sie maximal 32 Nächte zur Verfügung.

- Stellen Sie die Ungleichungen auf, die die Einschränkungen für x Nächte in einer Jugendherberge und y Nächte in einem Hotel darstellen.

$$x \leq 25, y \leq 15, x + y \leq 32$$

- Erklären Sie, was unter den Nichtnegativitätsbedingungen zu verstehen ist, und formulieren Sie diese Bedingungen für diesen Sachverhalt.

Negative Übernachtungen ergeben keinen Sinn, daher gelten folgende Nichtnegativitätsbedingungen. $x \geq 0, y \geq 0$

Lisa erhält vom Reisebüro zwei Angebote. Angebot 1 beinhaltet 20 Nächte in einer Jugendherberge und 12 Nächte im Hotel für insgesamt 1040 €. Angebot 2 umfasst 16 Nächte in einer Jugendherberge und 16 Nächte im Hotel und kostet 1120 €.

- Berechnen Sie die durchschnittlichen Kosten für eine Übernachtung in der Jugendherberge sowie die durchschnittlichen Kosten für eine Übernachtung im Hotel.

$$I: 20x + 12y = 1040$$

$$II: 16x + 16y = 1120$$

TI-Nspire: on-1-1

- Menü-3-7-1 (Gleichungssystem lösen)
- Anzahl der Gleichungen: 2, Variablen: x, y
- $\text{solve} \left(\begin{cases} 20x + 12y = 1040 \\ 16x + 16y = 1120 \end{cases}, \{x, y\} \right) x = 25, y = 45$

Eine Nacht in der Jugendherberge kostet 25 €, eine Nacht im Hotel 45 €.

13) Boote

- a) Eine Schulgruppe mit 18 Schülern plant einen Tag am Bodensee. Im Bootsverleih stehen Kanus mit zwei Plätzen und Kajaks mit vier Plätzen zur Verfügung. Der Bootsverleiher kann der Gruppe insgesamt höchstens sechs Boote zur Verfügung stellen.

- Stellen Sie Ungleichungen auf, die diesen Sachverhalt beschreiben.

x ... Anzahl Kanus

y ... Anzahl Kajaks

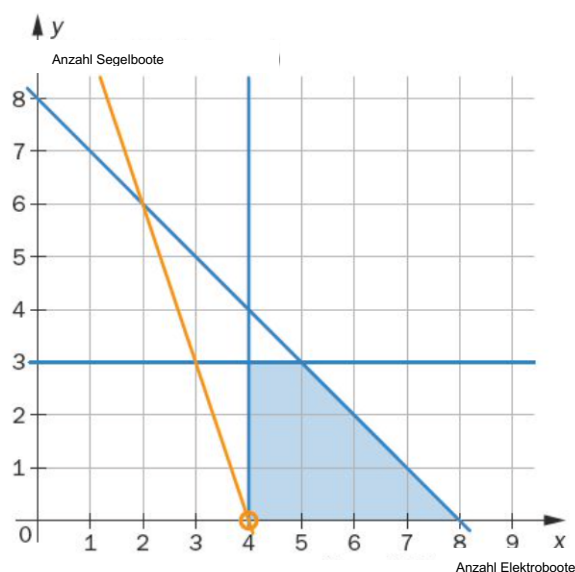
$$x + y \leq 6, 2x + 4y \geq 18$$

Es wird behauptet, dass die Nichtnegativitätsbedingungen für diesen Sachverhalt wie folgt lauten: $x \leq 0$ und $y \leq 0$.

- Begründen Sie, warum diese Behauptung nicht stimmt.

Die Lösung wird in einem praktisch sinnvollen Bereich gesucht, daher können die Anzahl der Kanus und Kajaks nicht kleiner als Null sein. Richtig wäre: $x \geq 0, y \geq 0$

- b) Die folgende Graphik zeigt die Aufteilung einer anderen Schülergruppe auf Elektro- und Segelboote:



- Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich eingrenzen.

$$x \geq 4, y \leq 3, x + y \leq 8$$

Die letzte Ungleichung kann bei Bedarf mit einer Regression über den Taschenrechner aufgestellt werden.

TI-nspire: Regression on-1-4

- 1) 2 Punkte der Gerade ablesen
 - (8|0), (0|8)
- 2) X-Werte werden in die erste Spalte (x) eingetragen, Y-Werte werden in die Spalte (y) daneben eingetippt
- 3) Menu-4-1-3-(lineare Regression)
- 4) Jeweils x für die X-Liste und, y für die Y-Liste wählen und mit „OK“ bestätigen
- 5) Werte für Steigung (m) und Ordinatenabschnitt (b) ablesen und in die Funktionsgleichung einsetzen

Ein Elektroboot kostet pro Stunde dreimal so viel wie ein Segelboot. Ein Segelboot kostet 10 Euro pro Stunde.

- Zeichnen Sie die Gerade ein, bei der der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, und berechnen Sie die minimalen Kosten.

$$Z(x, y) = 30x + 10y$$

- Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 30x + 10y, y) \quad y = \frac{Z}{10} - 3x$
- Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 9, YMin = 0, YMax = 9
- Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
- Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (4|0), (4|3)
- Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (4|0)
- Einsetzen in die Zielfunktion: $30 \cdot 4 + 10 \cdot 0 = 120$
- ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Die minimalen Kosten betragen 120€.

- Erklären Sie, wie sich die Steigung der Zielfunktion ändert, wenn der Preis für Elektroboote steigt. Die Steigung wird kleiner.

- c) Der Bootsverleih hat 6 Stunden pro Tag geöffnet. Ein Elektroboot verursacht pro Tag Instandhaltungskosten von 20 €, ein Kajak 35 €. Ein Elektroboot kann für 30 € pro Stunde und ein Kajak für 55 € pro Stunde verliehen werden. Die Auslastung des Bootsverleihs beträgt 100%. Sei x die Anzahl der Elektroboote und y die Anzahl der Kajaks.

- Stellen Sie die Zielfunktion zur Berechnung des Gewinns des Bootsverleihs auf.

$$Z(x, y) = (30 \cdot 6 - 20)x + (55 \cdot 6 - 35)y = 160x + 295y$$

14) Wohnheim

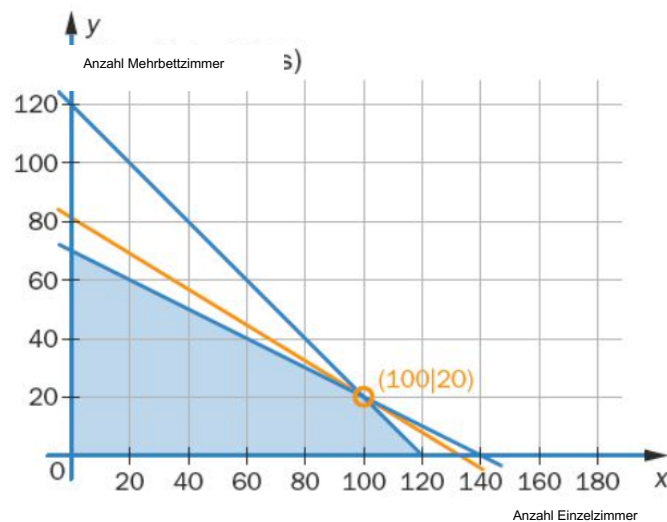
- a) Ein neues Wohnheim für Studenten soll gebaut werden. Es können höchstens 1800 m² Wohnraum geschaffen werden, wobei nicht mehr als 75 Wohneinheiten entstehen dürfen. Zur Auswahl stehen Einzelzimmer mit 20 m² Fläche und Mehrbettzimmer (MBZ) für 4 Personen mit 50 m² Wohnraum. Der geplante Gemeinschaftsraum bietet Platz für 250 Personen, sodass die Wohneinheiten insgesamt für maximal 250 Personen ausgelegt sein sollen.
- Übertragen Sie diesen Sachverhalt in ein lineares Ungleichungssystem.

x... Anzahl Einzelzimmer

y... Anzahl Mehrbettzimmer

$$x + y \leq 75, 20x + 50y \leq 1800, 2x + 4y \leq 250, x \geq 0, y \geq 0$$

- b) Der Lösungsbereich für ein anderes Studentenwohnheim wird wie folgt dargestellt:



- Entnehmen Sie der Graphik die 4 Ungleichungen, die den Lösungsbereich beschreiben.

$$x + y \leq 120, x + 2y \leq 140, x \geq 0, y \geq 0$$

Für die beiden ersten Ungleichungen kann wieder eine Regression am Taschenrechner durchgeführt werden.

TI-nspire: Regression on-1-4

- 1) 2 Punkte der Gerade ablesen
 - (140|0), (0|70)
- 2) X-Werte werden in die erste Spalte (x) eingetragen, Y-Werte werden in die Spalte (y) daneben eingetippt
- 3) Menu-4-1-3-(lineare Regression)
- 4) Jeweils x für die X-Liste und, y für die Y-Liste wählen und mit „OK“ bestätigen
- 5) Werte für Steigung (m) und Ordinatenabschnitt (b) ablesen und in die Funktionsgleichung einsetzen

In diesem Wohnheim wird ein Einzelzimmer für 700 € und ein Mehrbettzimmer für 1140 € vermietet.

- Stellen Sie die Zielfunktion zur Berechnung der gesamten Mieteinnahmen auf.

$$Z(x, y) = 700x + 1140y$$

- Zeichnen Sie die Gerade ein, bei der der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, und berechnen Sie die maximalen Mieteinnahmen dieses Wohnheims.
 - Zielfunktion umformen
 - ctrl-doc-1
 - Menü-3-1 (Löse) $\text{solve}(Z = 700x + 1140y, y) \quad y = \frac{-(700x - Z)}{1140}$
 - Skalierung des Koordinatensystems – menü-4-1 (Fenstereinstellungen)
 - XMin = 0, XMax = 160, YMin = 0, YMax = 160
 - Alle Ungleichungen einzeichnen „f1(x)“ löschen und 6 (relation) auswählen, mit „tab“ öffnet sich die Eingabezeile und die weiteren Ungleichungen können eingetippt werden
 - Randpunkte einzeichnen: menü-6-4 (Schnittpunkt)
 - (100|20), (120|0)
 - Zielfunktion einzeichnen (Seite 1.1)
 - Menü-3-1 (Funktion)
 - Werte des Schiebereglers verändern
 - Verschieben der Zielfunktion
 - Optimaler Wert: (100|20)
 - Einsetzen in die Zielfunktion: $700 \cdot 100 + 1140 \cdot 20 = 92800$
 - ODER: Ablesen des Wertes von Z bei der optimalen Menge

Die maximalen Einnahmen betragen 92800€.

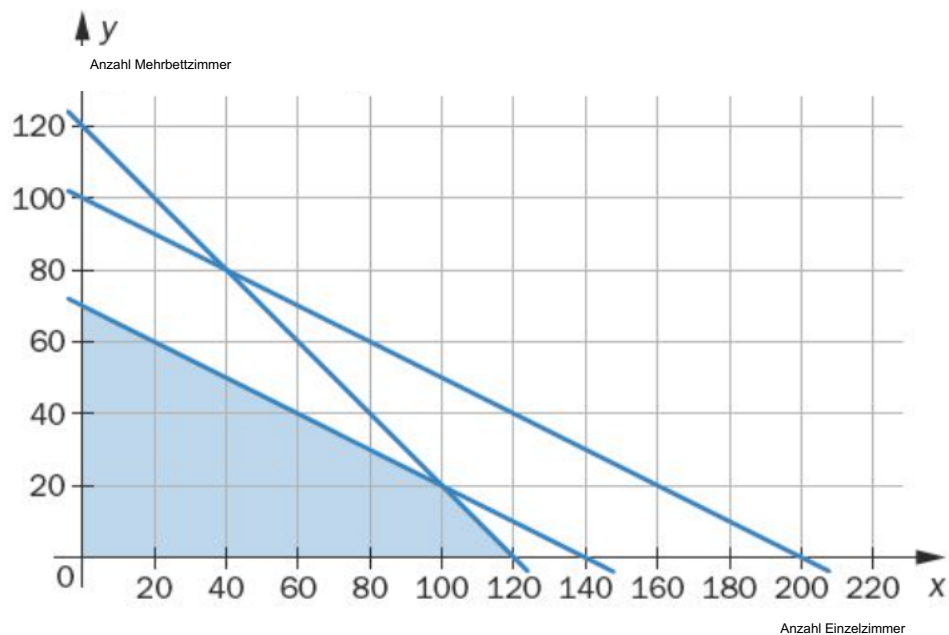
- c) Für ein drittes Studentenwohnheim gilt folgendes Ungleichungssystem:

$$x + y \leq 120, 25x + 50y \leq 3500, 2x + 4y \leq 400, x \geq 0, y \geq 0$$

- Stellen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems im vorgegebenen Koordinatensystem dar und kennzeichnen Sie den Lösungsbereich.

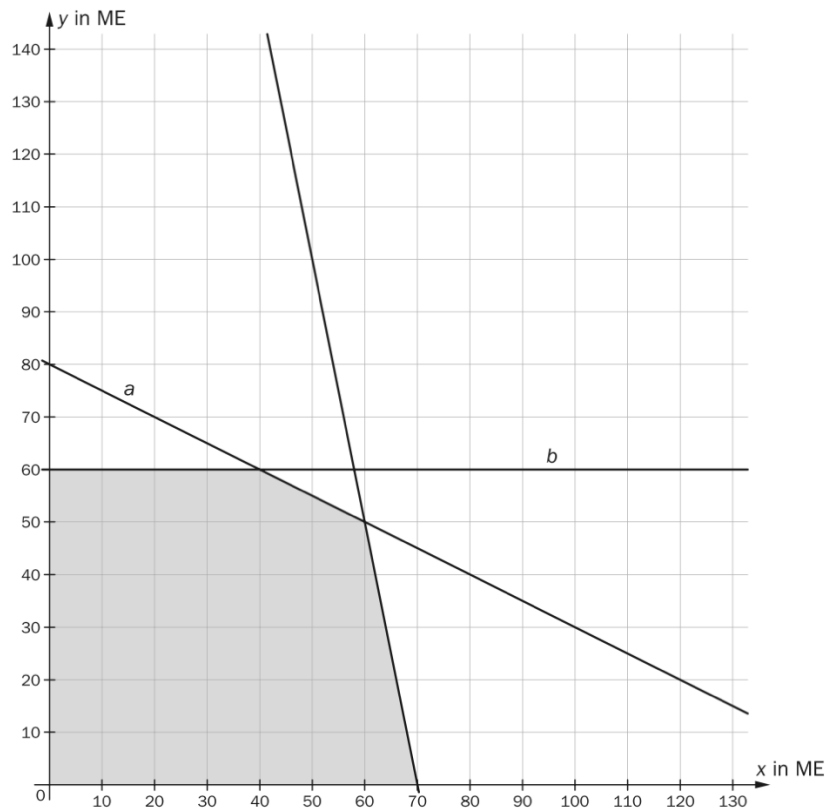
TI-nspire: on 1-1

- Umformen der Ungleichungen nach y
 - Menü-3-1 (löse)
 - Man tippt statt den Ungleichheitszeichen ein „=“
 - $\text{solve}(x + y = 120, y) \ y = 120 - x$
 - Dies wird für alle weiteren Funktionen durchgeführt
- Zeichnen der Funktionen: ctrl-doc-2
 - Eintippen der ersten Funktion
 - Menü-7-1 (Tabelle mit geteiltem Bildschirm)
 - Die erscheinende Wertetabelle kann genutzt werden, um die Funktion im Graphen händisch einzuzichnen
 - Dies kann für alle weiteren Funktionen durchgeführt werden



Anhang 3: Lehrmaterial-Kompetenzcheck-händisch

- 1) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von x ME Cappuccino und y ME Caffè Latte dargestellt.



- a) Lesen Sie aus der Graphik die Ungleichungen, die den Lösungsbereich eingrenzen, ab.

/3P

- b) Die Zielfunktion Z beschreibt den täglichen Gewinn in Euro:

$$Z(x, y) = 35x + 30y$$

- Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die der maximale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

/2P

- Ermitteln Sie den maximalen Gewinn und schreiben Sie eine Antwort.

/2P

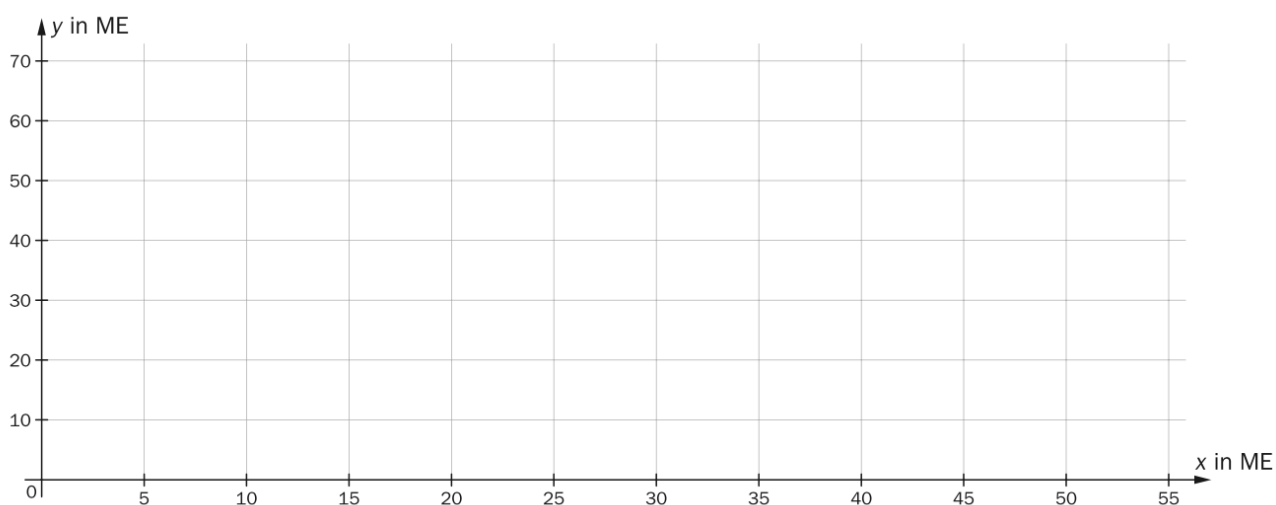
- 2) Trinkjoghurt wird in den Sorten Vanille und Erdbeere produziert. Das folgende Ungleichungssystem beschreibt die Produktionsbeschränkungen für die Herstellung von x ME der Sorte Vanille und y ME der Sorte Erdbeere.:

$$\text{I: } x + 0,5y \leq 50$$

$$\text{II: } 0,5y \leq 25$$

$$\text{III: } x \geq 10$$

$$\text{IV: } y \geq 30$$

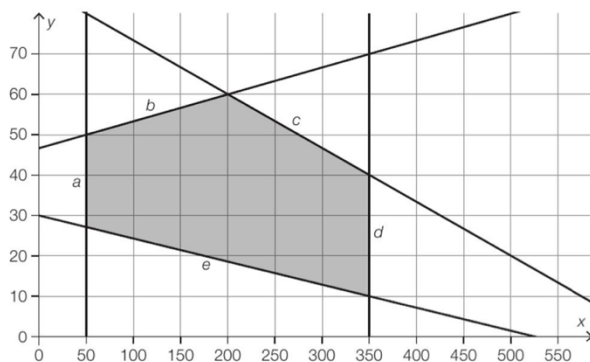


- Zeichnen Sie die Ungleichungen in das Koordinatensystem ein und kennzeichnen Sie den Lösungsbereich.

/5P

- 3) Die Produktionseinschränkungen des Joghurts sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

- Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden e durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

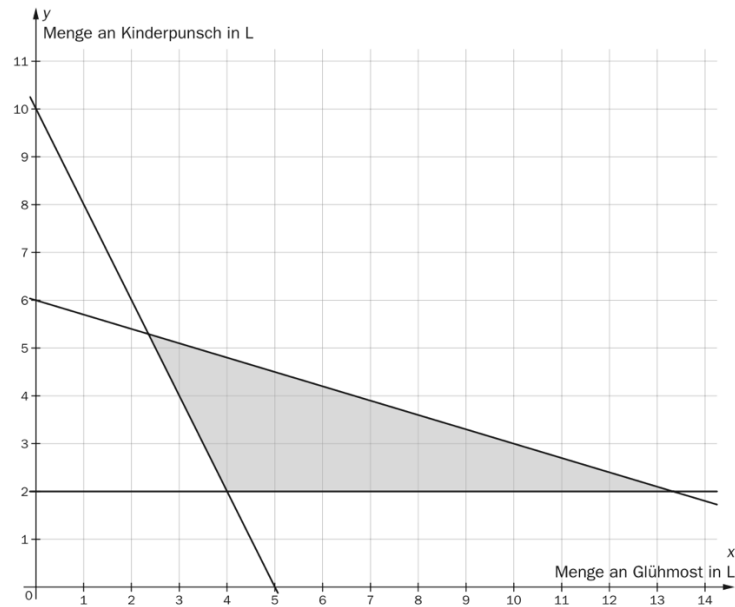


$$y = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$$

/2P

Anhang 4: Lehrmaterial-Kompetenzcheck-Taschenrechner

- 1) Stephanie stellt Glühmost und Kinderpunsch her. Die Herstellungsbeschränkungen dafür sind im folgenden Koordinatensystem dargestellt:



- a) Lesen Sie aus der Graphik die Ungleichungen, die den Lösungsbereich eingrenzen, ab.

Protokoll:

/3P

- b) Die Zielfunktion Z beschreibt die Produktionskosten in Euro:

$$Z(x, y) = 0,5 \cdot x + y$$

- Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Protokoll:

/2P

- Ermitteln Sie die minimalen Produktionskosten und schreiben Sie eine Antwort.

Protokoll:

/2P

2) Stephanie stellt zusätzlich x Liter Glühwein und y Liter Jägertee her. Dafür wurde folgendes Ungleichungssystem ermittelt:

- Zeichnen Sie die Ungleichungen in das Koordinatensystem ein und kennzeichnen Sie den Lösungsbereich.

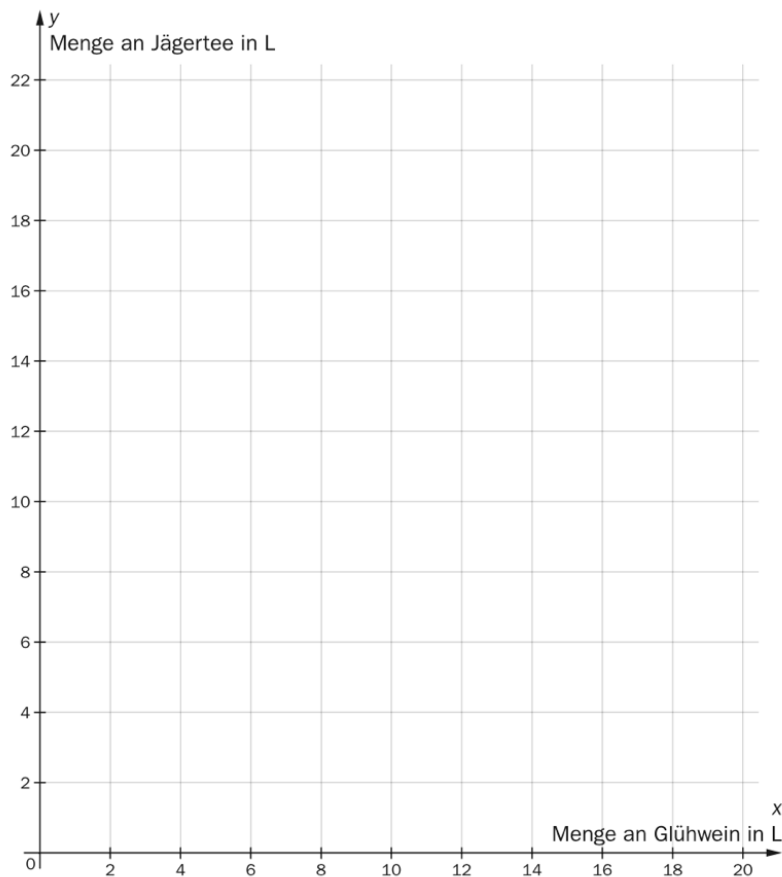
I: $0,6x + 0,4y \leq 8$

II: $3 \leq x$

III: $x \leq 10$

IV: $y \geq 4$

Protokoll:

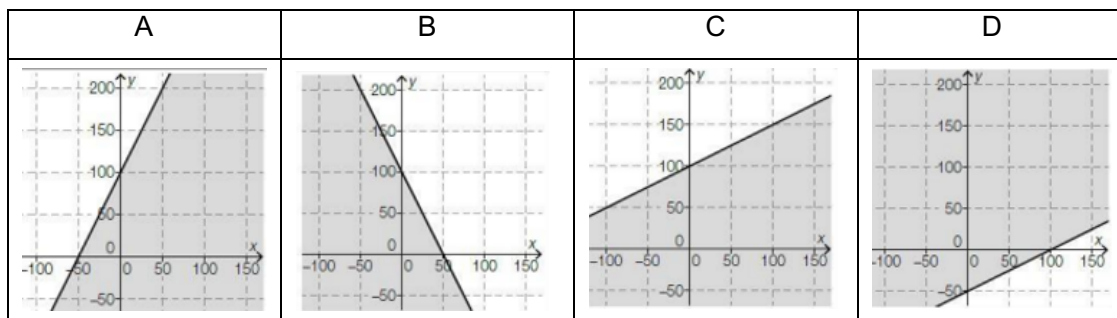


/5P

3) Ordnen Sie den beiden Ungleichungen jeweils die richtige graphische Darstellung A bis D zu.

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	

Protokoll:



/2P