

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Die Ramsey-Theorie und ihre Anwendungen in der
Graphentheorie

verfasst von | submitted by
Franziska Schuster BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 502 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Biologie und Umweltbildung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Markus Fulmek

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Markus Fulmek. Er hat mir die Freiheit gegeben, ein Thema zu wählen, das mich zutiefst interessiert. Diese Offenheit hat mir erlaubt, mit Begeisterung und Neugier an meine Arbeit heranzugehen. Seine Begleitung war für mich eine große Stütze, und ich bin sehr dankbar, einen so verständnisvollen und kompetenten Betreuer gehabt zu haben.

Ein ganz herzliches Dankeschön möchte ich auch meinem Firmpaten und Cousin, Dipl.-Ing. Patrick Kochberger, BSc, aussprechen. Sein technisches Wissen, seine Erfahrung in der Betreuung wissenschaftlicher Arbeiten und seine Bereitschaft, sich immer wieder Zeit für meine Fragen zu nehmen, waren für mich von unschätzbarem Wert. Mit seiner ruhigen Art hat er so manchen kleinen technischen Nervenzusammenbruch verhindert. Danke, dass ich mich jederzeit an dich wenden durfte und du mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden bist.

Mein tief empfundener Dank gilt meinem Lebensgefährten Tobias Koppensteiner. Du hast mir all die Jahre Rückhalt und Ruhe gegeben. Deine unermüdliche Geduld, deine Liebe und deine Fähigkeit, mich immer wieder zum Lächeln zu bringen, haben mich durch alle Höhen und Tiefen getragen. Du hast mir in den herausforderndsten Phasen des Studiums den Rücken freigehalten, mir unzählige Alltagslasten abgenommen und mich immer wieder aufgerichtet – auch wenn ich selbst gerade nicht an mich geglaubt habe. Danke, dass du nie müde wurdest, mich zu motivieren, mich aufzufangen und an mich zu glauben. Ohne dich wäre das alles nicht möglich gewesen.

Ein ebenso großer Dank gebührt meinen Schwiegereltern, Brigitte und Konrad Koppensteiner. Durch ihre liebevolle Unterstützung, ihre Ratschläge und ihr immer offenes Ohr konnte ich mich oft ganz auf mein Studium konzentrieren. Sie haben mir Aufgaben abgenommen, mich ermutigt und mir immer wieder mit kleinen Gesten den Alltag erleichtert – mit mehr Wirkung, als man es in Worte fassen kann. Danke für das Gefühl, in euch eine zweite Familie gefunden zu haben, und für all die Kraft, die ich aus eurer Fürsorge und Herzenswärme schöpfen durfte.

Diese Masterarbeit ist nicht nur ein Abschluss eines Studiums, sondern auch ein Zeichen dafür, wie viel möglich ist, wenn man Menschen an seiner Seite hat, die an einen glauben. Danke, dass ich diesen Weg nicht alleine gehen musste.

Kurzfassung

Diese Arbeit behandelt zentrale Konzepte der Graphentheorie und der Ramsey-Theorie, zwei bedeutende Teilgebiete der diskreten Mathematik. Nach einer Einführung in grundlegende Begriffe wie Knoten, Kanten und Wege werden Verfahren zur Bestimmung kürzester Verbindungen vorgestellt, um erste strukturierte Abläufe in Graphen zu verdeutlichen. Weiters erfolgt eine Darstellung verschiedener Graphklassen, darunter bipartite und vollständige Graphen, die grundlegende Konzepte der Graphentheorie veranschaulichen. Ergänzend dazu werden klassische Strukturen sowie graphentheoretische Eigenschaften analysiert, die in engem Zusammenhang mit strukturellen Fragestellungen stehen.

Darauf aufbauend wird die Ramsey-Theorie als Theorie struktureller Unvermeidbarkeit eingeführt. Ihr Grundprinzip sowie ihre historische Entwicklung werden eingehend erläutert, bevor zentrale Aussagen, insbesondere der Satz von Ramsey, anhand anschaulicher Beispiele veranschaulicht werden. Zudem werden zwei weitere Sätze vorgestellt, die eng mit dem Ramsey-Satz verwandt sind.

Im Mittelpunkt der Anwendung der Ramsey-Theorie in der Graphentheorie steht das Auftreten monochromatischer Teilgraphen in gefärbten vollständigen Graphen. Darüber hinaus wird untersucht, wie sich dieses Prinzip auf bipartite Strukturen sowie auf Färbungen mit mehr als zwei Farben übertragen lässt. Abschließend wird die Bedeutung von Zufallsgraphen im Kontext ramsey-theoretischer Fragestellungen aufgezeigt. Durch die Verbindung beider Theorien entsteht ein vertieftes Verständnis für die Wechselwirkungen zwischen Struktur, Größe und Färbung in Graphen. Dabei wird deutlich, wie sich scheinbare Unordnung mathematisch beschreiben lässt und unter welchen Bedingungen Ordnung unausweichlich wird.

Abschließend werden aktuelle Forschungsrichtungen und offene Probleme thematisiert, da viele Fragestellungen der Ramsey-Theorie bislang ungelöst sind und nur für wenige Spezialfälle exakte Ramsey-Zahlen bekannt sind. Dies unterstreicht die Relevanz weiterer theoretischer und algorithmischer Forschung in diesem spannenden Gebiet.

Abstract

This thesis discusses fundamental concepts of graph theory and Ramsey theory, two significant branches of discrete mathematics. It begins with an introduction to key terms such as nodes, edges, and paths, followed by methods for determining shortest connections to illustrate initial structured processes in graphs. Furthermore, various graph classes are presented, including bipartite and complete graphs, which illustrate fundamental concepts of graph theory. In addition, classical structures and graph-theoretical properties closely linked to structural questions are analyzed.

Building on this, Ramsey's theory is introduced as a theory of structural inevitability. Its core principle and historical development are thoroughly explained, followed by central results, particularly Ramsey's theorem, illustrated through concrete examples. Furthermore, two additional theorems closely related to Ramsey's theorem are discussed.

The main focus of applying Ramsey's theory in graph theory lies in the occurrence of monochromatic subgraphs in coloured complete graphs. This principle is then extended to bipartite structures and colourings involving more than two colours. The role of random graphs in the context of Ramsey-theoretical considerations is also examined. By combining both theories, a deeper understanding emerges of the interplay between structure, size, and colouring in graphs. It is shown how apparent disorder can be described mathematically and under which conditions order becomes unavoidable.

Finally, current research directions and open problems are addressed, as many questions in Ramsey theory remain unsolved and exact Ramsey numbers are only known for a few specific cases. This highlights the relevance of continued theoretical and algorithmic research in this compelling field.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen der Graphentheorie	3
2.1	Das Königsberger Brückenproblem als Ursprung der Graphentheorie . . .	3
2.2	Begriffe und Definitionen in der Graphentheorie	4
2.3	Graphklassen	10
2.4	Wege, Pfade und kürzeste Verbindungen	14
2.4.1	Algorithmus von Dijkstra	17
2.4.2	Algorithmus von Kruskal	24
2.4.3	Algorithmus von Prim	26
2.5	Klassische Probleme und Fragestellungen	28
2.5.1	Eulerscher Wege und eulerscher Kreis	28
2.5.2	Hamilton-Wege	29
2.5.3	Vier-Farben-Problem	30
2.6	Strukturen in Graphen	31
2.6.1	Teilgraphen, Cliques und unabhängige Mengen	32
2.6.2	Graphfärbungen	34
2.6.3	Anwendungen von gefärbten Graphen	44
2.6.4	Extremale Graphentheorie	47
3	Grundlagen der Ramsey-Theorie	49
3.1	Schubfachprinzip	49
3.2	Historischer Hintergrund und Idee	51
3.2.1	Entwicklungsgeschichte der Ramsey-Theorie	51
3.2.2	Ordnung im Chaos – das zentrale Prinzip	53
3.3	Satz von Ramsey	53
3.4	Beispiele und bekannte Ramsey-Zahlen	57
3.4.1	Allgemeine Schranken	57
3.4.2	Spezifische Werte und die besten bekannten Schranken	59
3.5	Eigenschaften und Verallgemeinerungen	61
3.6	Weitere strukturverwandte Sätze	63
3.6.1	Satz von Van der Waerden	63

3.6.2	Satz von Schur	64
4	Anwendung der Ramsey-Theorie in der Graphentheorie	67
4.1	Motivation und Bedeutung für die Graphentheorie	67
4.2	Verbindung zur extremalen Graphentheorie	68
4.3	Strukturierte Subgraphen in großen Graphen	68
4.3.1	Anwendung der Ramsey-Theorie auf vollständige Graphen	69
4.3.2	Das Spiel Sim – eine spielerische Anwendung	70
4.3.3	Anwendung der Ramsey-Theorie auf bipartite Graphen	71
4.4	Ramsey-Theorie für multikolorierte Graphen	73
4.5	Ramsey-Theorie in Zufallsgraphen	75
4.5.1	Grundlagen von Zufallsgraphen (Erdős–Rényi-Modell)	75
4.5.2	Ramsey-Eigenschaften für Zufallsgraphen	76
5	Fazit und Ausblick	79
	Literaturverzeichnis	81
	Tabellenverzeichnis	87

1 Einleitung

Strukturen in scheinbar chaotischen Systemen zu entdecken, ist eine der faszinierendsten Aufgaben der Mathematik. Besonders in der diskreten Mathematik lassen sich Muster, Regelmäßigkeiten und Gesetzmäßigkeiten oft auf elegante Weise sichtbar machen. Ein viel diskutiertes Beispiel dafür ist die Ramsey-Theorie, die sich mit der Frage beschäftigt, welche Strukturen in beliebig großen und ungeordneten Systemen unvermeidlich auftreten müssen. Die Vorstellung, dass Ordnung zwangsläufig aus Zufälligkeit entsteht, bietet nicht nur ein theoretisch spannendes Konzept, sondern auch vielfältige Anwendungen, insbesondere in der Graphentheorie.

Die vorliegende Masterarbeit beschäftigt sich mit der Verbindung zwischen Ramsey-Theorie und Graphentheorie. Im Zentrum steht die Frage, wie sich durch gezielte Färbungen und Größenwachstum in Graphen bestimmte Strukturen nachweisen lassen. Strukturen, deren Existenz nicht zufällig, sondern mathematisch zwingend ist.

Das Forschungsinteresse ergibt sich nicht zuletzt aus persönlichen Erfahrungen: Bereits während meiner Bachelorarbeit, in der ich mich intensiv mit Binärbäumen und rekursiven Strukturen befasste, zeigte sich mein Interesse an mathematischen Konzepten, die sowohl formal tiefgreifend als auch visuell nachvollziehbar sind. Der Auslöser für die vertiefte Beschäftigung mit der Ramsey-Theorie war schließlich ein Video auf einer Social-Media-Plattform, das die Thematik mit dem Partyproblem in leicht zugänglicher Form präsentierte. Die Idee, dass bestimmte Strukturen, unabhängig von ihrer Anordnung, unausweichlich sind, faszinierte mich sofort. Als visuell orientierter Mensch erschien mir die Kombination aus Ramsey-Theorie und Graphentheorie als ideale Verbindung von theoretischer Tiefe und anschaulicher Klarheit.

Aus wissenschaftlicher Perspektive besteht die Relevanz des Themas darin, dass die Frage nach konkreten Werten von Ramsey-Zahlen, die Untersuchung von Hypergraphen und die Analyse gefärbter Zufallsgraphen nicht nur Gegenstand aktueller mathematischer Forschung sind, sondern auch mit zahlreichen ungelösten Problemen verbunden sind. Diese Forschungslücken bieten Raum für theoretische Erkundungen, die sowohl methodisch als auch didaktisch von Bedeutung sind.

Ziel dieser Arbeit ist es, zentrale Begriffe und Konzepte der Ramsey-Theorie sowie der Graphentheorie herauszuarbeiten, in Beziehung zueinander zu setzen und die Übertragbarkeit ramseyscher Prinzipien auf graphentheoretische Problemstellungen zu analysie-

1 Einleitung

ren. Im Fokus stehen dabei die Visualisierbarkeit der Phänomene und die strukturelle Interpretation typischer Konstellationen. Die Arbeit basiert auf einer umfassenden Literaturrecherche, durch die klassische wie moderne Ansätze des Themas systematisch dargestellt und auf ihre Potenziale sowie Grenzen hin untersucht werden.

Um die Komplexität des Themas angemessen darzustellen, erfolgt eine gezielte Eingrenzung des Untersuchungsgegenstands. So konzentriert sich die Arbeit auf grundlegende Begriffe, zentrale Anwendungen und ausgewählte Beweise. Auf die vollständige Behandlung probabilistischer Methoden und hypergraphentheoretischer Erweiterungen wird bewusst verzichtet, um den thematischen Fokus zu wahren.

Die Arbeit gliedert sich in vier Hauptkapitel: Nach dieser Einleitung folgt ein Kapitel, das die grundlegenden Begriffe und Werkzeuge der Graphentheorie erläutert. Daran anschließend werden die theoretischen Konzepte und Kernaussagen der Ramsey-Theorie vorgestellt. Im vierten Kapitel steht die Anwendung ramseyscher Prinzipien auf graphentheoretische Fragestellungen im Vordergrund – etwa bei bipartiten Strukturen, multikolorierten Färbungen und Zufallsgraphen. Die Arbeit schließt mit einem Fazit, das zentrale Ergebnisse zusammenfasst und einen Ausblick auf weiterführende Fragestellungen gibt.

2 Grundlagen der Graphentheorie

Die Graphentheorie ist ein zentrales Teilgebiet der diskreten Mathematik und bildet die Grundlage vieler Anwendungen in Informatik, Netzwerktheorie, Operations Research und kombinatorischer Optimierung. Sie beschäftigt sich mit der Untersuchung von Graphen, das sind abstrakte Strukturen, die aus Objekten und deren Verbindungen bestehen. Die Ursprünge der Graphentheorie reichen zurück bis ins 18. Jahrhundert, als Leonard Euler das berühmte Königsberger Brückenproblem untersuchte und damit die Basis für die moderne Graphentheorie legte. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe, Darstellungen und Eigenschaften von Graphen eingeführt. Ziel ist es, ein solides Verständnis für die zentralen Konzepte aufzubauen, die später für das Verständnis der Ramsey-Theorie notwendig sind.

2.1 Das Königsberger Brückenproblem als Ursprung der Graphentheorie

Die Entstehung der Graphentheorie [37, 46] ist eng mit einem historischen Problem aus dem 18. Jahrhundert verknüpft: dem sogenannten Königsberger Brückenproblem. Die Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) war zur damaligen Zeit durch den Fluss Pregel in vier Landmassen unterteilt, verbunden durch insgesamt sieben Brücken. Die Fragestellung, die sich den Bewohnern stellte, war scheinbar einfach: Gibt es einen Rundweg durch die Stadt, bei dem jede der sieben Brücken genau einmal überquert wird, ohne eine Brücke doppelt zu betreten?

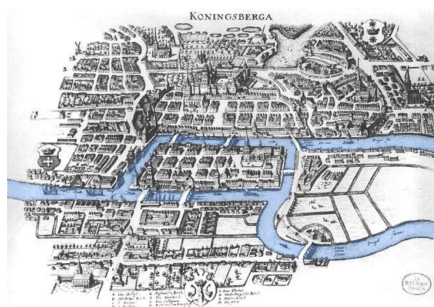


Abbildung 2.1: Stadtplan von Königsberg/Kaliningrad mit den sieben Brücken [54]

Diese Fragestellung [42, 35] wurde im Jahr 1736 von Leonhard Euler untersucht. Seine Herangehensweise bestand darin, die konkrete geografische Situation zu abstrahieren und in ein mathematisches Modell zu überführen. Dabei reduzierte er das Problem auf seine wesentlichen Bestandteile: Die Landmassen wurden als **Knoten** dargestellt, die Brücken als **Kanten**, also Verbindungen zwischen diesen Knoten. Auf diese Weise entstand eine erste Form eines Graphen, ohne dass dieser Begriff zu Eulers Zeit bereits etabliert war. Durch diese Abstraktion konnte Euler allgemeine Überlegungen zur Struktur des entstandenen Graphen anstellen. Er stellte fest, dass für einen geschlossenen Weg, der jede Kante genau einmal durchläuft, ein sogenannter **Eulerkreis** (Definition 2.5.1), jeder Knoten eine gerade Anzahl an Kanten besitzen muss. Im Fall von Königsberg [35] hatten jedoch alle vier Knoten eine ungerade Anzahl an Kanten, sodass ein solcher Weg nicht existieren konnte. Euler konnte somit mathematisch beweisen, dass das ursprüngliche Problem unlösbar war.

Die Bedeutung dieser Arbeit liegt nicht nur in der Lösung einer konkreten Fragestellung, sondern in der Einführung eines neuen Denkansatzes [47]: Die Untersuchung struktureller Eigenschaften abstrakter Netze. Damit begründete Euler die Graphentheorie als eigenständiges mathematisches Gebiet. Seine Veröffentlichung aus dem Jahr 1736 gilt heute als die erste wissenschaftliche Arbeit auf diesem Gebiet und markiert damit den Beginn der modernen Graphentheorie.

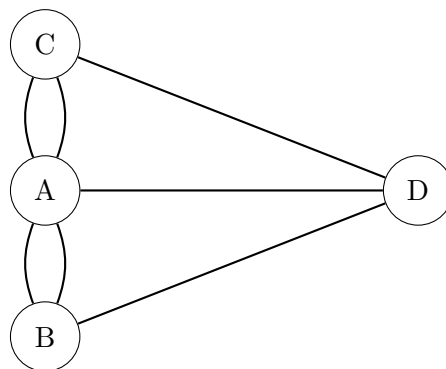


Abbildung 2.2: Stadtteile von Königsberg als Knoten, Brücken als Kanten dargestellt [46]

2.2 Begriffe und Definitionen in der Graphentheorie

Die Betrachtungen des Königsberger Brückenproblems zeigten bereits exemplarisch, wie reale Fragestellungen durch abstrakte mathematische Strukturen modelliert werden können. Begriffe wie „Knoten“, „Kante“ oder „Weg“ wurden dabei zunächst anschaulich

verwendet, ohne formale Definition. Um jedoch komplexere Zusammenhänge zu untersuchen und allgemeingültige Aussagen treffen zu können, ist es notwendig, diese Begriffe mathematisch präzise zu definieren.

Graphen stellen in der diskreten Mathematik ein zentrales Modell dar, um Beziehungen zwischen Objekten strukturiert zu erfassen. Die Grundidee besteht darin, Elemente, sogenannte Knoten, durch Verbindungen, sogenannte Kanten, miteinander zu verknüpfen. Solche Strukturen treten in vielfältigen Kontexten auf, etwa in Kommunikationsnetzwerken, Verkehrsplanung, Biologie oder Informatik. Trotz leicht variierender Definitionen in der Literatur ist der Kernbegriff [37] einheitlich: **Ein Graph ist eine abstrakte, aus Knoten und deren Verbindungen bestehende Struktur.**

Im Folgenden wird eine formal saubere Definition eingeführt, die als Grundlage für alle weiteren Überlegungen dient.

Definition 2.2.1 (Graph). Ein **Graph** G [42, 44] ist ein Paar $G = (V, E)$, bestehend aus:

- einer nichtleeren endlichen Menge V , deren Elemente als *Knoten* oder *Ecken* bezeichnet werden,
- einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$, deren Elemente als *Kanten* bezeichnet werden. Jede Kante verbindet also genau zwei verschiedene Knoten u, v und wird als $\{u, v\}$ notiert.

Die Menge V wird als **Knotenmenge** und E als **Kantenmenge** des Graphen bezeichnet. In einer grafischen Darstellung [35, 32] eines Graphen werden Knoten üblicherweise durch kleine ausgefüllte Kreise oder Punkte dargestellt, Kanten durch Linien, die jeweils zwei Knoten verbinden.

In der Graphentheorie beschreibt der Begriff **Inzidenz** [46] die Beziehung zwischen den Elementen eines Graphen – genauer gesagt zwischen Knoten und Kanten. Ein Knoten $v \in V$ und eine Kante $e \in E$ eines Graphen $G = (V, E)$ heißen *inzident* [37], wenn der Knoten v einer der Endpunkte der Kante e ist.

$$v \text{ ist inzident mit } e \iff v \in e$$

Eine Kante ist somit mit genau den beiden Knoten inzident, die sie verbindet. Umgekehrt sind alle Kanten, die an einem Knoten anliegen, mit diesem inzident.

Zwei Knoten u und v heißen *benachbart* oder *adjazent* [44, 56], wenn eine Kante $\{u, v\} \in E$ existiert und die beiden Ecken verbindet.

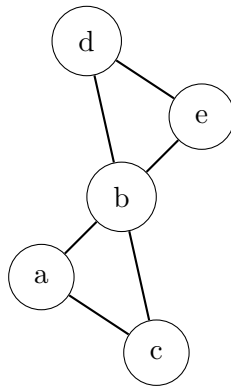
Definition 2.2.2 (Grad). Der **Grad** $\deg(v)$ oder $d(v)$ [37] einer Ecke v in einem Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl der zu v benachbarten Kanten. Dies entspricht der Anzahl der Nachbarn von v .

2 Grundlagen der Graphentheorie

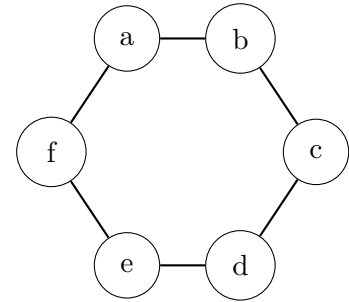
Der *Minimalgrad* eines Graphen G , bezeichnet mit $\delta(G)$, ist der kleinste Grad, der unter allen Knoten von G vorkommt. Der *Maximalgrad* eines Graphen G , notiert als $\Delta(G)$, ist der größte in G auftretende Knotengrad. Ein Graph, in dem alle Knoten denselben Grad $k \in \mathbb{N}_0$ haben, wird als *k-regulär* [56] bezeichnet.

Beispiel 2.2.3. In Abbildung 2.3 besitzt der erste Graph einen Minimalgrad von $\delta(G) = 2$ und einen Maximalgrad von $\Delta(G) = 4$. Der Knoten b hat mit $d(b) = 4$ den höchsten Grad und somit den Maximalgrad, während alle übrigen Knoten a, c, d und e jeweils den Grad 2 aufweisen, also dem Minimalgrad entsprechen.

Der zweite dargestellte Graph ist ein 2-regulärer Graph, da jeder der sechs Knoten genau zwei Nachbarn besitzt, also für alle Knoten $v \in V$ gilt: $d(v) = 2$.



(a) Graph mit Minimalgrad 2 und Maximalgrad 4



(b) 2-regulärer Graph

Abbildung 2.3: Beispielgraphen zu Minimal- und Maximalgrad und k -Regularität

Satz 2.2.4. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Dann gelten folgende grundlegende Eigenschaften [56]:

- i) Die Summe der Grade aller Knoten ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

- ii) Die Anzahl der Knoten ungeraden Grades ist gerade.
- iii) Für jeden Graphen mit mindestens zwei Knoten, also $|V| \geq 2$ existieren mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

2.2 Begriffe und Definitionen in der Graphentheorie

Beweis. i) Jede Kante verbindet genau zwei Knoten und trägt somit zu genau zwei Knotengraden bei, einmal bei jedem Endknoten. Daher wird jede Kante in der Summe der Grade doppelt gezählt, woraus die Gleichung folgt.

ii) Teilt man die Knotenmenge V in die beiden disjunkten Mengen

$$V_0 := \{v \in V \mid d(v) \text{ ist gerade}\} \text{ und } V_1 := \{v \in V \mid d(v) \text{ ist ungerade}\},$$

so ergibt sich mit i):

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_0} d(v) + \sum_{v \in V_1} d(v)$$

Die erste Teilsumme besteht nur aus geraden Zahlen, also ist auch sie gerade. Da die Gesamtsumme ebenfalls gerade ist, muss auch die zweite Teilsumme gerade sein. Diese besteht jedoch ausschließlich aus ungeraden Zahlen, also kann ihre Anzahl nur dann eine gerade Summe ergeben, wenn es eine gerade Anzahl ungerader Summanden gibt. Somit ist die Anzahl der Knoten ungeraden Grades gerade.

iii) Angenommen, G habe $n \geq 2$ Knoten und alle Knoten hätten paarweise verschiedene Grade. Da der Grad eines Knotens in einem einfachen Graphen höchstens $n - 1$ betragen kann, müssten die möglichen Knotengrade genau die Zahlen $0, 1, \dots, n - 1$ umfassen. Wenn jedoch ein Knoten den Grad $n - 1$ hat, ist er mit allen anderen Knoten verbunden - somit kann kein Knoten den Grad 0 haben. Es können also nicht gleichzeitig ein Knoten mit Grad 0 und einer mit Grad $n - 1$ existieren. Das widerspricht der Annahme, dass alle n Knotengrade verschieden sind. Daher müssen mindestens zwei Knoten denselben Grad haben.

□

Definition 2.2.5 (Schlinge). Eine **Schlinge** [34] ist eine Kante, die von einem Knoten zu sich selbst führt, also eine Kante der Form $\{v, v\}$. In einfachen Graphen sind Schlingen in der Regel nicht erlaubt.

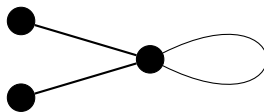


Abbildung 2.4: Graph mit Schlinge

Der Begriff „Schleife“ wird in der Literatur [47] häufig synonym zur Schlinge verwendet und beschreibt ebenfalls eine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet, wie in Abbildung 2.4.

Zwei Graphen können in ihrer Darstellung stark voneinander abweichen und dennoch dieselbe Struktur besitzen. Da die optische Anordnung der Knoten und Kanten allein darüber keine verlässliche Aussage erlaubt, wird zur formalen Unterscheidung das Konzept der Isomorphie [47] verwendet.

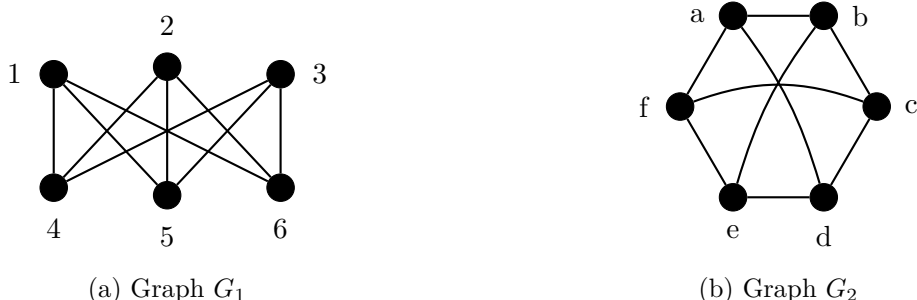
Definition 2.2.6 (Isomorphe Graphen). Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen **isomorph** [37, 21], $G_1 \cong G_2$ wenn es eine bijektive Abbildung $f: V_1 \rightarrow V_2$ gibt, sodass für alle $u, v \in V_1$ gilt:

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Eine solche Abbildung f wird als *Graphen-Isomorphismus* [56] bezeichnet.

Zwei isomorphe Graphen besitzen genau dann also dieselbe Struktur [35], wenn sie gleich viele Knoten und gleich viele Kanten haben.

Beispiel 2.2.7. Beim Vergleich der in Abbildung 2.5 dargestellten Graphen G_1 und G_2 fällt auf, dass sie zunächst sehr unterschiedlich aussehen. Dennoch zeigen sie strukturell die gleiche Verbindung der Knoten.



Abbildungung 2.5: Graph G_1 und G_2 aus dem Beispiel 2.2.7 Graphen [35]

Nach Definition 2.2.6 lässt sich eine bijektive Abbildung f zwischen den Knotenmengen finden [35], die die Isomorphie der beiden Graphen nachweist. Bei der Abbildung $f: V_{G_1} \rightarrow V_{G_2}$ gilt: Zwei Knoten in G_1 sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn auch ihre Bilder in G_2 durch eine Kante verbunden sind. Die folgende Tabelle 2.1 zeigt eine mögliche bijektive Zuordnung der Knoten.

Tabelle 2.1: Bijektive Abbildung f [35]

$f: V_{G_1}$	1	2	3	4	5	6
V_{G_2}	a	c	e	b	d	f

Da diese Abbildung bijektiv ist, sind die Graphen G_1 und G_2 isomorph.

Das Erkennen von Isomorphie zwischen Graphen stellt eine besondere Herausforderung dar und ist algorithmisch aufwendig zu lösen. Zwar ist es grundsätzlich in endlicher Zeit lösbar, jedoch kann im ungünstigsten Fall eine vollständige Überprüfung aller $n!$ möglichen Zuordnungen der Knoten notwendig sein. Eine vereinfachte oder allgemein effizientere Definition des Graphen-Isomorphismus ist in der Literatur [47, 35] nicht bekannt, weshalb das Konzept in seiner formalen Form verwendet und nochmal durch ein konkretes Beispiel veranschaulicht wird.

Beispiel 2.2.8. Sind die beiden Graphen isomorph?

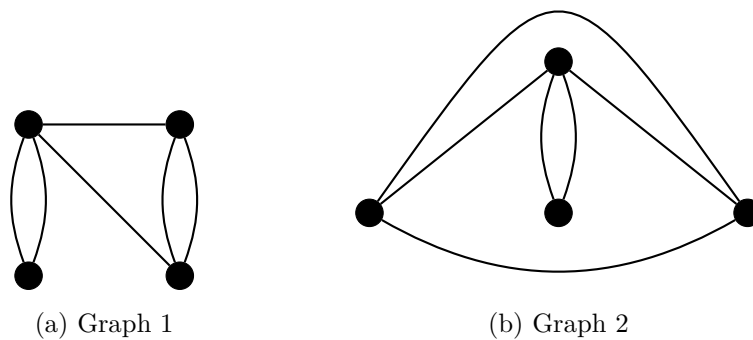


Abbildung 2.6: Graphen zum Beispiel 2.2.8

Ja, denn die Beschriftung mit Zahlen und Buchstaben (Abbildung 2.7) macht sichtbar, dass sich die Knoten beider Graphen so zuordnen lassen, dass die Kantenverbindungen zwischen den Knoten erhalten bleiben.

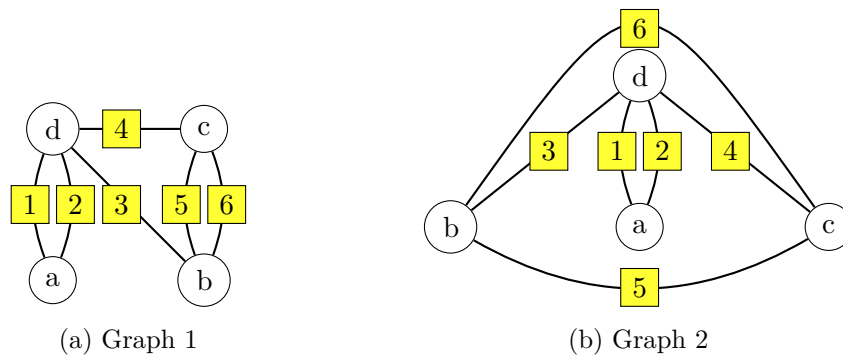


Abbildung 2.7: Beschriftete Graphen zum Beispiel 2.2.8; Knoten mit Kleinbuchstaben und Kanten mit Zahlen beschriftet

2.3 Graphklassen

Graphklassen dienen der strukturierten Einteilung von Graphen nach bestimmten Eigenschaften und bilden die Grundlage für viele zentrale Resultate in der Graphentheorie.

Definition 2.3.1 (Multigraph). Erlaubt man mehrere Kanten zwischen denselben Knoten, so spricht man von einem **Multigraphen** [42].



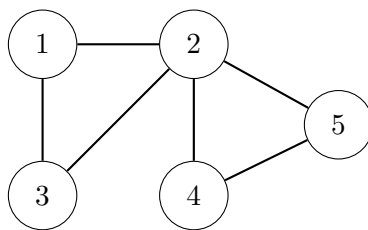
Abbildung 2.8: Multigraph mit zwei Kanten zwischen denselben Knoten

Definition 2.3.2 (Ungerichteter Graph). Ist jede Kante $e \in E$ eine ungeordnete Zweiermenge $\{u, v\}$ mit $u, v \in V$, so ist es ein **ungerichteter Graph**. In diesem Fall gibt es keinen Unterschied zwischen $\{u, v\}$ und $\{v, u\}$.

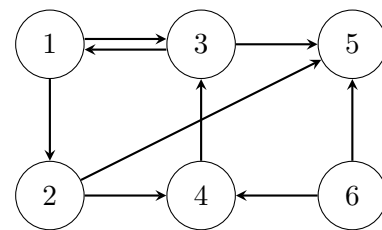
Definition 2.3.3 (Gerichteter Graph). Bestehen die Kanten aus geordneten Paaren (u, v) , wobei $u, v \in V$, so handelt es sich um einen **gerichteten Graphen**. Hierbei zeigt jede Kante vom Startknoten u zum Zielknoten v .

In einem gerichteten Graphen zeigt jede Kante eindeutig vom Startknoten zum Zielknoten und gibt mit Pfeilspitzen die genaue Richtung an. Solche Strukturen [46, 34, 42] sind dann sinnvoll, wenn Relationen mit einer bestimmten Richtung modelliert werden sollen.

In ungerichteten Graphen sind die Kanten im Gegensatz dazu einfache Linien zwischen den Knoten (Abbildung 2.9). In der Fachliteratur [37] wird das Attribut „ungerichtet“ meist weggelassen, da dies als Standardfall gilt. Auch in dieser Arbeit wird bei ungerichteten Graphen auf explizite Kennzeichnung verzichtet.



(a) ungerichteter Graph



(b) gerichteter Graph

Abbildung 2.9: Unterschied ungerichteter Graph und gerichteter Graph [46]

Definition 2.3.4 (Zusammenhängender Graph). Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **zusammenhängend** [37, 34], wenn es für jedes Paar von Knoten $u, v \in V$ einen Weg gibt, der u mit v verbindet. Das bedeutet, von jedem Knoten aus ist jeder andere Knoten durch eine Folge von Kanten erreichbar.

Ist ein Graph nicht zusammenhängend, so besteht er aus mehreren *Zusammenhangskomponenten*, also maximalen Teilgraphen (Definition 2.6.1), die jeweils für sich zusammenhängend sind. Ein Knoten ohne benachbarte Knoten – also mit Grad 0 – wird als *isolierter Knoten* [46] bezeichnet und bildet eine eigene Zusammenhangskomponente.

Definition 2.3.5 (Gewichteter Graph). Ein **gewichteter Graph** [42] ist ein Graph, bei dem jeder Kante ein numerischer Wert zugeordnet ist. Bei einem gerichteten Graphen $G = (V, E, c)$ ist E die Menge gerichteter Kanten (u, v) , und die Abbildung $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jeder Kante ein Gewicht zu. Im ungerichteten Fall wird der Graph mit $G = [V, E, c]$ bezeichnet. Auch hier ordnet c jeder Kante ein numerisches Gewicht zu.

Solche Werte repräsentieren in Anwendungen meistens Größen wie Kosten, Distanzen oder Zeitspannen und erlauben die Modellierung und Analyse vielfältiger Optimierungsprobleme.

Beispiel 2.3.6. Die Knoten A, B, C und D in Abbildung 2.10 stellen vier Städte [42] dar. Die Zahlen an den Kanten geben die Fahrtzeit in Minuten zwischen den Städten an.

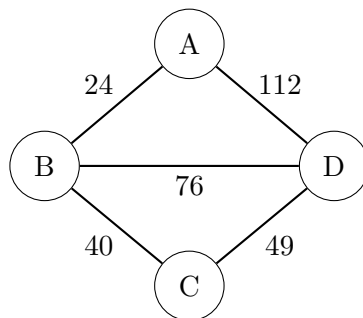


Abbildung 2.10: gewichteter Graph zum Beispiel 2.3.6 [42]

Definition 2.3.7 (Wald). Ein **Wald** [44] ist ein Graph, der keine Kreise (Definition 2.4.3) enthält.

Definition 2.3.8 (Baum). Ein **Baum** [37] ist ein ungerichteter Graph, der kreisfrei und zusammenhängend ist.

Ein Wald muss nicht zwingend zusammenhängend sein. Er besteht aus mehreren Zusammenhangskomponenten [35], die jeweils Bäume sind. Daher wird ein Wald als Graph beschrieben, der aus mehreren Bäumen besteht.

Definition 2.3.9 (Blatt). Ein **Blatt** [56] ist ein Knoten in einem Baum, dessen Grad gleich 1 ist.

Blätter werden auch als „Endecken“ [32] eines Graphen bezeichnet.

Definition 2.3.10 (planarer Graph). Ein **planarer Graph** [47] ist ein Graph, dessen Knoten und Kanten so in der Ebene gezeichnet werden können, dass sich die Kanten nicht kreuzen und nur an gemeinsamen Endknoten berühren.

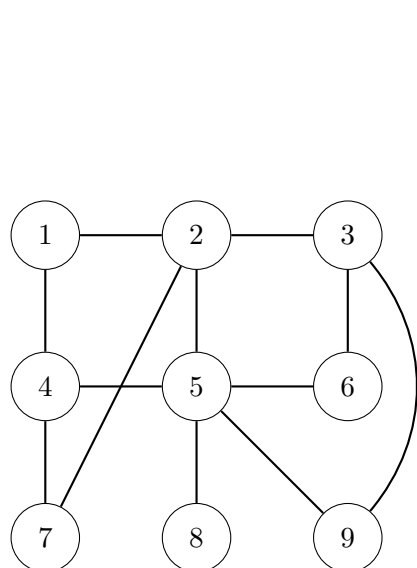
Jeder Baum und jeder Wald ist planar[35]. Die in Abbildung 2.3 gezeigten Graphen lassen sich ohne überschneidende Kanten in der Ebene darstellen und sind daher planar. Ein Graph wird auch als planar bezeichnet, wenn er überkreuzungsfrei gezeichnet werden kann, auch wenn seine aktuelle Darstellung Kreuzungen aufweist. In manchen Quellen [56] finden sich weiterführende Begriffe wie „plättbar“ und „eben“. Diese Unterscheidungen werden in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht vertieft und auch nicht verwendet.

Definition 2.3.11 (bipartiter Graph). Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit** [37, 13], wenn sich die Knotenmenge V in zwei disjunkte und nicht leere Teilmengen V_1 und V_2 zerlegen lässt, sodass jede Kante $e \in E$ zwei Knoten verbindet, von denen einer in V_1 und der andere in V_2 liegt. Es existiert also keine Kante, die zwei Knoten derselben Teilmenge verbindet.

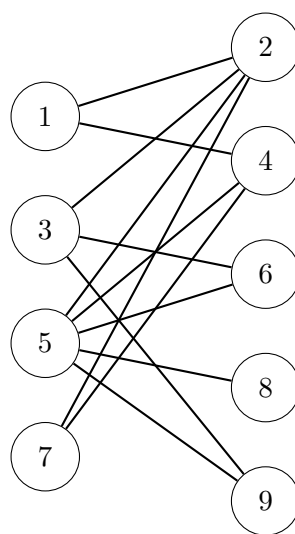
Ein bipartiter Graph, dessen Knotenmenge sich in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen V_1 und V_2 aufteilen lässt, kann formal als $G = (V_1, V_2, E)$ [13, 44] angegeben werden. Weiters gilt $V = V_1 \cup V_2$ und der Durchschnitt $V_1 \cap V_2 = \{\}$ ist leer.

Beispiel 2.3.12. Der Graph in Abbildung 2.11a erfüllt diese Eigenschaft, auch wenn dies in dieser Darstellung nicht gleich zu erkennen ist. Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass alle Kanten ausschließlich Knoten aus den Mengen $V_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ und $V_2 = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ miteinander verbinden. Zur besseren Veranschaulichung ist in Abbildung 2.11b derselbe Graph erneut dargestellt, jedoch so angeordnet, dass alle Knoten der Menge V_1 auf der linken Seite und alle Knoten der Menge V_2 auf der rechten Seite angeordnet sind.

Anhand des Beispiels wird deutlich, dass bipartite Graphen durch eine geeignete Gruppierung der Knoten in zwei disjunkte Mengen so dargestellt werden können, dass keine Kanten innerhalb der Gruppen auftreten.



(a) bipartiter Graph



(b) Erneute Darstellung des bipartiten Graphen aus Abbildung 2.11a

Abbildung 2.11: Zwei Visualisierungen eines bipartiten Graphen [13]

Definition 2.3.13 (vollständiger Graph). Bei einem **vollständigen Graphen** [49] ist jede Ecke mit jeder anderen Ecke durch genau eine Kante verbunden. Weiters gilt, wenn der Graph n Knoten besitzt, hat er genau $\binom{n}{2}$ Kanten [35].

Satz 2.3.14. Sei G ein vollständiger, ungerichteter Graph mit n Ecken. Dann gilt

$$|E(G)| = \binom{n}{2}$$

Beweis. In einem vollständigen Graphen ist jeder Knoten mit allen anderen $n-1$ Knoten durch eine Kante verbunden [47]. Somit besitzt jeder Knoten den Grad $n-1$. Die Summe aller Knotengrade ergibt daher:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = n \cdot (n-1)$$

Nach Satz 2.2.4 gilt jedoch auch:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Damit folgt:

$$2 \cdot |E(G)| = n \cdot (n-1) \quad \Rightarrow \quad |E(G)| = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

□

Beispiel 2.3.15. In Abbildung 2.12 sind die ersten fünf vollständigen Graphen K_n mit $n \leq 5$ Ecken dargestellt.

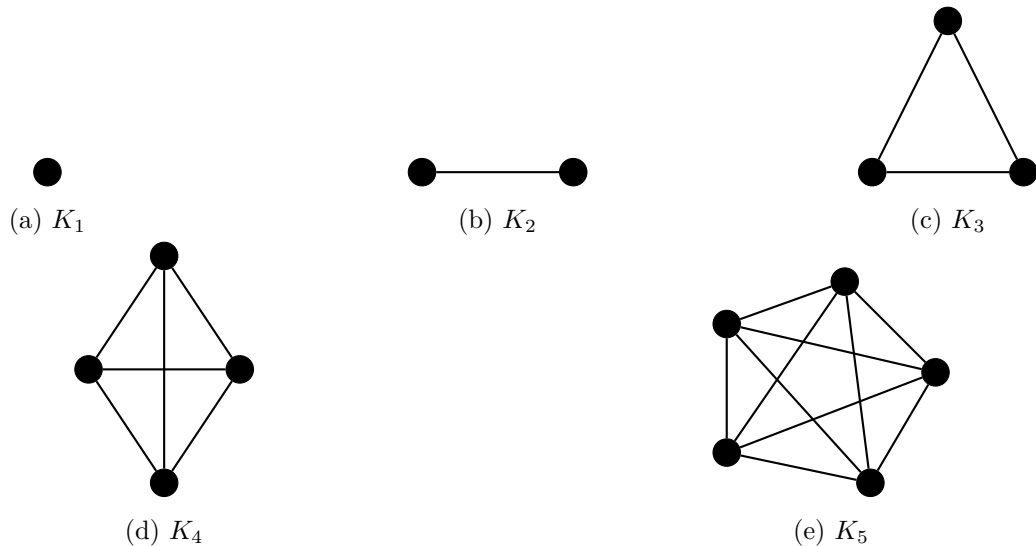


Abbildung 2.12: Die ersten fünf vollständigen Graphen K_n mit $n \leq 5$ [35]

2.4 Wege, Pfade und kürzeste Verbindungen

Ein weiteres wesentliches Konzept in der Graphentheorie ist die Untersuchung von Wegen, also Abfolgen von Kanten, die bestimmte Knoten in einem Graphen miteinander verbinden. Diese bilden die Grundlage vieler Fragestellungen, etwa bei der Analyse von Netzwerken oder beim Nachweis spezieller Strukturen wie in der Ramsey-Theorie. Je nach Kontext (gerichtet oder ungerichtet, mit oder ohne Mehrfachkanten) existieren unterschiedliche Definitionen und Begriffe, die im Folgenden präzisiert werden.

Definition 2.4.1 (Weg). Ein **Weg** [35] in einem Graphen ist eine alternierende Folge von Knoten und Kanten, bei der aufeinanderfolgende Knoten jeweils durch eine Kante verbunden sind.

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

In der Praxis wird ein Weg häufig der Einfachheit halber nicht mit Kanten, sondern lediglich als Folge benachbarter Knoten angegeben, etwa in der Form:

$$W = (v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Der Knoten v_0 wird als Anfangsknoten oder -ecke und v_k als Endknoten oder -ecke [35] bezeichnet. Alle anderen Knoten nennt man innere Knoten. In einem ungerichteten Graphen genügt es, dass die Kante zwischen zwei Knoten existiert, während in einem gerichteten Graphen zusätzlich die Richtung der Kante [13] berücksichtigt werden muss.

Definition 2.4.2 (Pfad). Ein Weg, bei dem kein Knoten doppelt vorkommt, wird als **Pfad** bezeichnet.

Er ist somit ein spezieller Weg ohne Wiederholungen von Knoten.

Definition 2.4.3 (Kreis). Ein **Kreis** [33] ist ein geschlossener Weg, bei dem der Start- und Endknoten identisch sind, also $v_0 = v_k$.

Die Länge eines Weges gibt an, wie „weit“ zwei Knoten über diesen Weg voneinander entfernt sind. Je nach Art des betrachteten Graphen unterscheidet sich die Berechnung der Weglänge:

- In einem ungewichteten Graphen entspricht die Länge eines Weges der Anzahl der durchlaufenen Kanten.
- In einem gewichteten Graphen ergibt sich die Weglänge als die Summe der Gewichte der entlang des Weges genutzten Kanten.

Beispiel 2.4.4. Der Weg $W = (1, 3, 2, 4)$ im ungewichteten Graphen in Abbildung 2.9a, der über vier Kanten führt, hat die Länge 4.

Beispiel 2.4.5. Im Graphen 2.13 existieren fünf verschiedene Pfade vom Knoten 1 bis zum Knoten 8, die jeweils unterschiedliche Längen aufweisen:

- $(1, 2, 5, 4, 7, 8)$ mit Länge 28,
- $(1, 2, 3, 6, 9, 8)$ mit Länge 11,
- $(1, 2, 5, 8)$ mit Länge 22,
- $(1, 2, 5, 6, 9, 8)$ mit Länge 18 und
- $(1, 4, 7, 8)$ mit Länge 13.

Zudem enthält der Graph den Kreis $(6, 9, 10, 6)$. Der Weg $(1, 2, 3, 6, 9, 10, 6, 9, 8)$ ist ein Beispiel für einen Weg, der kein Pfad ist, da er Knoten mehrfach besucht. Das Beispiel verdeutlicht außerdem, dass ein Pfad, der mehr Kanten durchläuft, kürzer sein kann als einer mit weniger Kanten, wenn die Kantengewichte unterschiedlich sind.

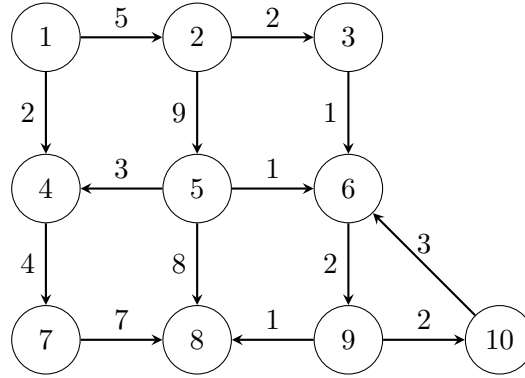


Abbildung 2.13: Beispiel zu Wege, Pfade und Längen [13]

Definition 2.4.6 (Weglänge in einem gewichteten gerichteten Graphen). Besitzt ein gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ eine Bewertungsfunktion c , dann ist für einen Weg

$$W = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

die Länge dieses Weges definiert als

$$c(W) := \sum_{i=1}^{k-1} c(v_i, v_{i+1}).$$

Eine häufige Fragestellung in gewichteten Graphen ist der Weg mit dem minimalsten Gesamtgewicht.

Definition 2.4.7 (Kürzester Weg). Besitzt ein bewerteter, gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ einen Weg [46]

$$W_{ij}^* = (v_1, v_2, \dots, v_k)$$

von einem Startknoten $i = v_1$ zu einem Zielknoten $j = v_k$, so heißt

$$c(W_{ij}^*) := \sum_{l=1}^{k-1} c(v_l, v_{l+1})$$

die Länge des Weges W_{ij}^* [46].

Ein solcher Weg W_{ij}^* wird als **kürzester Weg** bezeichnet, wenn für alle Wege W_{ij} von i nach j gilt [46]:

$$c(W_{ij}^*) \leq c(W_{ij}).$$

Die Größe $c(W_{ij}^*)$ wird auch als *Entfernung* [32] von i nach j bezeichnet.

Für ungerichtete gewichtete Graphen lässt sich diese Definition analog anwenden. Das Finden des kürzesten oder schnellsten Weges ist eine häufige Problemstellung, zum Beispiel für Navigationsgeräte.

Beispiel 2.4.8. Ziel ist es, den kürzesten Weg vom Knoten 2 zum Knoten 5 im dargestellten gewichteten Graphen 2.14 zu bestimmen. Dazu werden alle möglichen Wege zwischen diesen beiden Knoten betrachtet und hinsichtlich ihrer Gesamtlänge verglichen. Der Weg $W = (2, 5)$ hat die Länge 55. Der Weg $W = (2, 4, 3, 5)$ hat die Länge 50 und ist so der kürzeste Weg im Graphen.

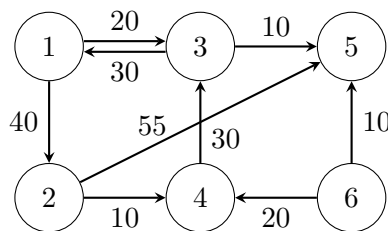


Abbildung 2.14: Graph zum Beispiel 2.4.8 zum Berechnen kürzester Wege [46]

Dieses Beispiel verdeutlicht, wie auch Beispiel 2.4.5, dass ein Weg mit weniger Kanten nicht unbedingt der kürzeste sein muss. So verläuft der Weg $(W = (2, 5))$ nur über eine Kante, ist aber nicht der kürzeste Weg im Graphen.

Dies wirft die zentrale Frage auf, wie sich in einem gewichteten Graphen der kürzeste Weg zwischen zwei Knoten systematisch bestimmen lässt. Genau dafür wurden spezielle Algorithmen entwickelt, von denen im Folgenden drei bedeutende exemplarisch vorgestellt werden.

2.4.1 Algorithmus von Dijkstra

Der Algorithmus von Dijkstra [44, 13, 26] ist ein fundamentales und weit verbreitetes Verfahren in der Graphentheorie, das zur Bestimmung kürzester Wege in Graphen eingesetzt wird. Er wurde 1959 von dem niederländischen Mathematiker und Informatik-Pionier Edsger Wybe Dijkstra entwickelt.

Der Dijkstra-Algorithmus löst das sogenannte Single-Source-Shortest Path-Problem. Das Ziel [46, 35] ist es, die kürzesten oder schnellsten Wege von einem festgelegten Startknoten zu allen anderen erreichbaren Knoten in einem Graphen zu finden.

Die praktische Bedeutung des Algorithmus [46, 35, 44] ist sehr hoch:

- Er ist der Kern jedes Navigationssystems. Verkehrsnetze werden als gewichtete Graphen modelliert, wobei Kreuzungen Knoten und Straßenabschnitte Kanten

2 Grundlagen der Graphentheorie

sind, deren Gewichte Entfernungen darstellen. Der Algorithmus berechnet dann optimale Routen.

- Er wird auch als Routing-Algorithmus im Internet eingesetzt.
- Er kann darüber hinaus für scheinbar Graphentheorie-fremde Probleme wie das Münzproblem aus der Zahlentheorie (Bestimmung der Frobenius-Zahl) verwendet werden.

Voraussetzungen

Damit der Dijkstra-Algorithmus korrekt funktioniert und optimale Ergebnisse liefert, müssen bestimmte Bedingungen [13, 56, 35, 46] erfüllt sein:

1. Der Graph muss gewichtet sein.
2. Alle Kantengewichte müssen nicht-negativ sein.
3. Der Algorithmus wird primär für gerichtete Graphen beschrieben. Er kann jedoch auch auf ungerichtete Graphen angewendet werden, indem jede ungerichtete Kante durch zwei gerichtete Kanten mit demselben Gewicht ersetzt wird.
4. Es wird angenommen, dass der Graph zusammenhängend ist, um alle Knoten erreichen zu können.
5. Für Echtzeitanwendungen, wie Verkehrsinformationen, müssen die Kantengewichte während der Berechnung konstant bleiben.

Funktionsweise

Der Dijkstra-Algorithmus verfolgt eine Greedy-Strategie. Er arbeitet schrittweise und wählt in jedem Schritt den Knoten aus, der aktuell den geringsten Abstand zum Startknoten hat und dessen kürzeste Entfernung noch nicht endgültig festgelegt wurde. Sobald ein Knoten ausgewählt und verarbeitet wurde, gilt seine Distanz als endgültig bestimmt. Das bedeutet, dass kein kürzerer Weg zu diesem Knoten mehr gefunden werden kann.

Für jeden Knoten werden zwei Informationen gespeichert:

- $D(i)$ - die aktuelle kürzeste bekannte Entfernung vom Startknoten s zu i
- $R(i)$ - der Vorgängerknoten von i auf diesem kürzesten Weg

Ablauf

Gegeben sei ein bewerteter gerichteter Graph $G = (V, E, c)$ mit $|V| = n$.

1. Alle Distanzen werden mit ∞ initialisiert, außer für den Startknoten $D(s) = 0$, da der Weg vom Knoten s zu s bekannt und dieser 0 ist.
2. Alle Knoten sind anfänglich „unbesucht“. Anschließend wird folgender Vorgang mehrfach durchlaufen:
 - Der unbesuchte Knoten h mit der aktuell kleinsten Distanz $D(h)$ wird gewählt.
 - Alle Nachbarn j von h werden betrachtet und auf folgendes geprüft:

$$\text{falls } D(h) + c_{hj} < D(j) : D(j) := D(h) + c_{hj}, R(j) := h$$

- h wird als „besucht“ markiert.
3. Dieser Ablauf [44, 34] wird solange wiederholt, bis alle erreichbaren Knoten besucht wurden.

Beispiel 2.4.9. Fortsetzung von Beispiel 2.4.8

Der Startknoten ist $s = 1$. Die erste Iteration startet beim Knoten 1, von dem aus die Kanten zu 2 (Länge 40) und zu 3 (Länge 20) führen. Beide Distanzen werden aktualisiert. In der zweiten Iteration wird Knoten 3 als nächster verarbeitet, da er die aktuell kleinste Distanz besitzt. Von dort aus wird ein besserer Weg zu Knoten 5 gefunden ($D(5) = 30$ über 3). In der dritten Iteration wird 5 ausgewählt, jedoch ergeben sich keine Verbesserungen, da es von 5 aus keine weiteren ausgehenden Kanten gibt. In Iteration vier wird Knoten 2 weiter verarbeitet. Hier ergibt sich ein neuer Pfad zu 4 über 2 mit gesamter Länge 50. In der letzten Iteration wird 4 betrachtet, es erfolgen aber keine weiteren Aktualisierungen. Es existiert zwar über den Knoten 4 ein Weg zu 3, dieser wird jedoch nicht berücksichtigt, da Dijkstra nur dann Aktualisierungen vornimmt, wenn ein kürzerer Weg gefunden wird. Die aktuell bekannte Distanz zu 3 beträgt bereits 20 und ist damit kürzer als die neue mögliche Strecke (80). Der Algorithmus überschreibt Einträge also nur im Fall einer Verbesserung. Der Knoten 6 bleibt unerreicht, da er nicht durch eine Kante mit dem restlichen Graphen verbunden ist.

Abbildung 2.15 zeigt die kürzesten Wege im Graphen vom Startknoten 1 zu allen anderen erreichbaren Knoten. Die Tabelle 2.2 stellt die zugehörigen Berechnungsschritte dar.

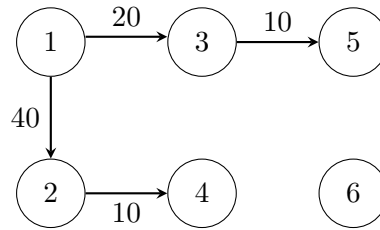


Abbildung 2.15: Baum kürzester Wege [46] zum Beispiel 2.4.9; Knoten 6 bleibt isoliert, da keine Kante ihn zum restlichen Graphen verbinden

Tabelle 2.2: Dijkstra-Algorithmus [46] zum Beispiel 2.4.9

Initialisierung:		i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	∞	∞	∞	∞	∞
1. Iteration:	$h = 1$	i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	40	20	∞	∞	∞
		$R(i)$	1	1				
2. Iteration:	$h = 3$	i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	40	20	∞	30	∞
		$R(i)$	1	1	3			
3. Iteration:	$h = 5$	i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	40	20	∞	30	∞
		$R(i)$	1	1	3			
4. Iteration:	$h = 2$	i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	40	20	50	30	∞
		$R(i)$	1	1	2	3		
5. Iteration:	$h = 4$	i	1	2	3	4	5	6
		$D(i)$	0	40	20	50	30	∞
		$R(i)$	1	1	2	3		

Beispiel 2.4.10. Bei einem Beispiel aus [44] soll für eine Besichtigungstour durch Würzburg, bei der die Residenz als auch die Festung Marienberg eingeplant wird, die kürzeste Route gefunden werden. In Frage kommen Wege über die Neubaustraße, die Domstraße oder durch den Ringpark. Die verschiedenen Strecken werden auf der Karte markiert und die Distanzen in Metern dazugeschrieben. Die Straßenverbindungen werden in einem gewichteten Graphen (Abbildung 2.16) übertragen, wobei jeder Knoten einen wichtigen Ort in der Stadt darstellt und jede Kante die Distanz zwischen zwei Orten angibt. Ziel ist es, mithilfe des Dijkstra-Algorithmus den Weg mit der geringsten Gesamtlänge [44] von der Residenz zur Festung zu bestimmen.

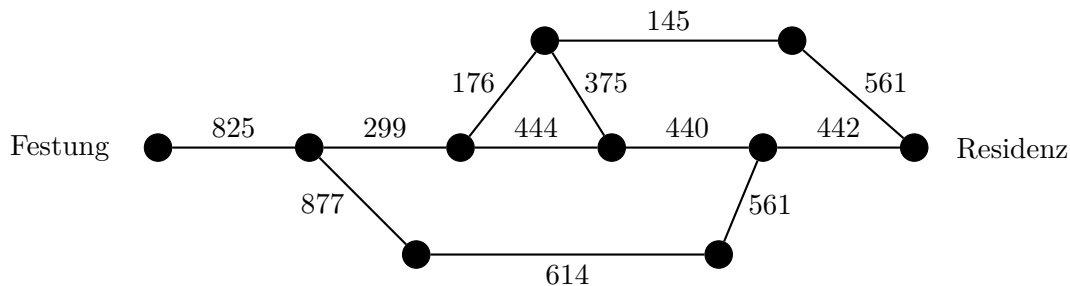


Abbildung 2.16: Beispiel 2.4.10: Mögliche Routen von der Residenz zur Festung Marienberg [44]

So wie bei Beispiel 2.4.9 ist die Distanz $D(s) = 0$ und alle anderen Distanzen werden zunächst mit ∞ initialisiert. In jeder Iteration wird der Knoten mit der aktuell geringsten bekannten Distanz ausgewählt, seine Nachbarn untersucht und, falls ein kürzerer Weg gefunden wird, die Distanz sowie der Vorgängerknoten in der Algorithmus-Tabelle aktualisiert.

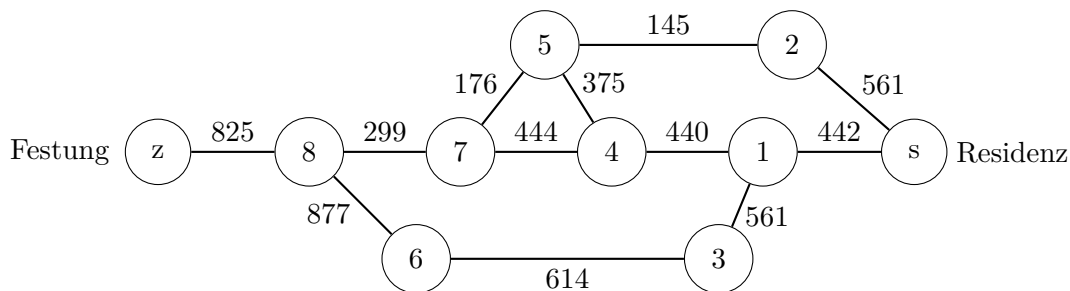


Abbildung 2.17: Beispiel 2.4.10: Graph mit beschrifteten Knoten, s ist der Start (=Residenz) und z ist das Ziel (=Festung) [44]

In Iteration 1 wird der Startknoten s betrachtet. Es existieren direkte Verbindungen zu den Knoten 1 und 2 mit Distanzen 442 m bzw. 516 m. Diese Werte sind kürzer als

2 Grundlagen der Graphentheorie

∞ , daher werden $D(1) = 442$ und $D(2) = 516$ gesetzt und s als Vorgänger eingetragen. In Iteration 2 ist Knoten 1 der Knoten mit der derzeit geringsten Distanz. Von dort aus werden Knoten 3 über die Kante $(1, 3)$ mit Länge 561 und Knoten 4 über die Kante $(1, 4)$ mit Länge 440 erreicht. Daraus ergeben sich die neuen Distanzen $D(3) = 1003$ und $D(4) = 882$. Der Vorgänger beider Knoten wird mit 1 vermerkt. In Iteration 3 wird Knoten 2 verarbeitet, da dieser nach Iteration 2 die geringste Distanz aufweist. Von dort führt eine Kante zu Knoten 5 mit Kosten 145. Der bisherige Wert für $D(5)$ war ∞ , daher wird er nun auf 661 gesetzt ($D(2) + 145$). Der Vorgänger $R(5)$ ist entsprechend 2. In Iteration 4 folgt Knoten 5. Von dort aus könnte Knoten 7 über die Kante $(5, 7)$ mit 176 erreicht werden. Die bisherige Distanz zu 7 beträgt ∞ , der neue Wert $D(7) = 661 + 176 = 837$ ist also kürzer. Daher wird $R(7) = 5$ gesetzt. Eine weitere Kante führt zurück zu Knoten 4, doch deren neue Distanz von 1036 ist länger als die bereits bekannte $D(4) = 882$, weshalb keine Aktualisierung erfolgt. In Iteration 5 wird Knoten 7 betrachtet. Eine Verbindung zu Knoten 8 mit Länge 299 wird genutzt, wodurch $D(8) = 837 + 299 = 1136$ gesetzt und $R(8) = 7$ bestimmt wird. In Iteration 6 folgt Knoten 3. Eine Kante führt zu Knoten 6 mit Länge 614, woraus sich $D(6) = 1003 + 614 = 1617$ ergibt. Da dies kürzer als ∞ ist, wird $R(6) = 3$ notiert. In Iteration 7 wird Knoten 8 verarbeitet. Von dort führt eine Kante zur Ziecke z mit Länge 825, sodass sich $D(z) = 1136 + 825 = 1961$ ergibt und $R(z) = 8$ gesetzt wird. Alle erreichbaren Knoten wurden verarbeitet und weitere Verbesserungen der Distanzen sind nicht mehr möglich, weshalb der Algorithmus beendet wird.

Die kürzeste Verbindung [44] von der Residenz zur Festung beträgt somit 1961 Meter und ist in Abbildung 2.18 dargestellt. Die einzelnen Schritte des Dijkstra-Algorithmus sind in Tabelle 2.3 veranschaulicht.

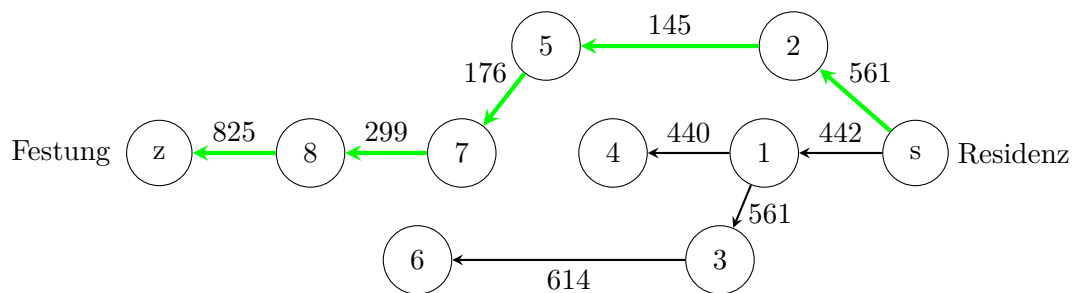


Abbildung 2.18: Beispiel 2.4.10: Baum kürzester Wege zu den einzelnen Knoten [44]; kürzester Weg von der Residenz zur Festung in dicken grünen Pfeilen dargestellt

2.4 Wege, Pfade und kürzeste Verbindungen

Tabelle 2.3: Dijkstra-Algorithmus zum Beispiel 2.4.10

Initialisierung:		i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1. Iteration:	$h = s$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
		$R(i)$		s	s							
2. Iteration:	$h = 1$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	∞	∞	∞	∞	∞
		$R(i)$		s	s	1	1					
3. Iteration:	$h = 2$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	661	∞	∞	∞	∞
		$R(i)$		s	s	1	1	2				
4. Iteration:	$h = 5$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	1257	∞	837	∞	∞
		$R(i)$		s	s	1	1	4		5		
5. Iteration:	$h = 7$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	1257	∞	837	1136	∞
		$R(i)$		s	s	1	1	4		5	7	
6. Iteration:	$h = 3$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	1257	1617	837	1136	∞
		$R(i)$		s	s	1	1	4	3	5	7	
7. Iteration:	$h = 8$	i	s	1	2	3	4	5	6	7	8	z
		$D(i)$	0	442	516	1003	882	1257	1617	837	1136	1961
		$R(i)$		s	s	1	1	4	3	5	7	8

2.4.2 Algorithmus von Kruskal

Der Algorithmus von Kruskal [44, 13] ist ein fundamentaler Algorithmus der Graphentheorie, der zur Bestimmung eines minimalen spannenden Baumes in einem Graphen dient. Er wird der Klasse der Greedy-Algorithmen zugeordnet. Entwickelt wurde dieser Algorithmus 1956 von dem amerikanischen Mathematiker Joseph Bernhard Kruskal.

Das Hauptziel des Algorithmus besteht darin, aus einem zusammenhängenden, gewichteten Graphen einen Teilgraphen zu erzeugen, der alle Knoten enthält, dabei jedoch nur so viele Kanten wie nötig verwendet und die Gesamtkosten (Summe der Kantengewichte) minimiert. Ein solcher Teilgraph wird als *minimaler Spannbaum* [34] bezeichnet. Minimale spannende Bäume, die der Algorithmus von Kruskal findet, haben vielfältige praktische Anwendungen [35]:

- Sie werden in Rechnernetzen eingesetzt, um zu bestimmen, über welche Leitungen eine Nachricht an alle weitergeleitet werden soll und über welche nicht, um Nachrichtenschleifen zu vermeiden.
- Weiters werden sie bei Infrastrukturplanungen verwendet - etwa beim Entwurf effizienter Strom-, Kommunikations- oder Verkehrsnetze, in denen Redundanz minimiert und Kosten reduziert werden sollen.

Voraussetzungen

So wie beim Dijkstra-Algorithmus müssen auch beim Algorithmus von Kruskal bestimmte Bedingungen [46, 34] erfüllt sein:

1. Der Graph muss ungerichtet sein.
2. Der Graph ist zusammenhängend und schlingenfrei.
3. Jede Kante ist mit einem Gewicht versehen. Es handelt sich also um einen gewichteten Graphen.
4. Anders wie beim Dijkstra-Algorithmus ist es optional, dass es keine negativen Kantengewichte gibt. Der Algorithmus von Kruskal kann prinzipiell damit umgehen, solange keine Zyklen entstehen.

Funktionsweise

Der Algorithmus arbeitet nach folgendem Prinzip: In jedem Schritt wird die jeweils aktuell kostengünstigste Kante ausgewählt, unter der Bedingung, dass ihre Aufnahme keinen Zyklus erzeugt. Die Kanten werden so lange nacheinander hinzugefügt, bis ein aufspannender Baum entsteht, also alle Knoten miteinander verbunden sind.

Ablauf

Die Schritte des Algorithmus [34, 13, 35] sind wie folgt:

1. Alle Kanten des Graphen werden nach ihren Bewertungen aufsteigend sortiert.
2. Eine leere Menge E' wird festgelegt, die die Kanten des zu bestimmenden minimalen spannenden Baumes aufnehmen wird. Initial ist diese Menge leer: $E' = \{\}$.
3. Die sortierten Kanten werden sukzessive durchlaufen. Für jede Kante e_i wird geprüft, ob das Hinzufügen dieser Kante einen Kreis erzeugt.
 - Wenn das Hinzufügen der Kante e_i keinen Kreis bildet, wird e_i zur Menge E' hinzugefügt.
 - Andernfalls, wird die Kante verworfen.
4. Dieser Ablauf wird solange wiederholt, bis die Menge E' genau $n - 1$ Kanten enthält, wobei n die Anzahl der Knoten im Graphen ist. Zu diesem Zeitpunkt bildet E' den minimalen spannenden Baum.

Während des Aufbaus kann der Algorithmus zunächst mehrere kreisfreie Komponenten, einen Wald, bilden, bevor er zum finalen, zusammenhängenden Spannbaum wird.

Beispiel 2.4.11. Die Funktionsweise des Algorithmus von Kruskal wird anhand des Beispiels [34] veranschaulicht. Betrachtet wird der Graph aus Abbildung 2.19, der $n = 6$ Knoten und $m = 10$ Kanten besitzt. Um einen minimalen spannenden Baum zu bilden, werden also $n - 1 = 5$ Kanten benötigt.

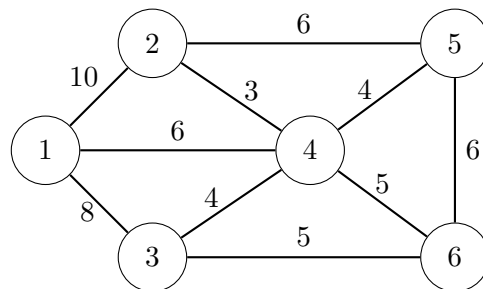


Abbildung 2.19: Graph zum Beispiel 2.4.11 [34]

1. Sortierung der Kanten: Die Kanten werden nach ihren aufsteigenden Bewertungen sortiert:

$[2, 4], [3, 4], [4, 5], [3, 6], [4, 6], [1, 4], [5, 6], [2, 5], [1, 3], [1, 2]$

2. Initialisierung: Die Menge E' der ausgewählten Kanten ist zunächst leer: $E' = \{\}$.

3. Iteration und Kantenprüfung:

- Kante wird hinzugefügt, da sie keinen Kreis bildet. ($E' = [2, 4]$)
- Kante wird hinzugefügt. ($E' = [2, 4], [3, 4]$)
- Kante wird hinzugefügt. ($E' = [2, 4], [3, 4], [4, 5]$)
- Kante wird hinzugefügt. ($E' = [2, 4], [3, 4], [4, 5], [3, 6]$)
- Kante wird nicht hinzugefügt, da sie einen Kreis mit den bereits ausgewählten Kanten $[2, 4], [3, 4], [4, 5], [3, 6]$ bilden würde.
- Kante wird hinzugefügt. ($E' = [2, 4], [3, 4], [4, 5], [3, 6], [1, 4]$)

4. Abbruchbedingung: Die Schleife wird abgebrochen, da E' nun aus 5 Kanten besteht. Das Ergebnis ist der minimale spannende Baum aus Abbildung 2.20.

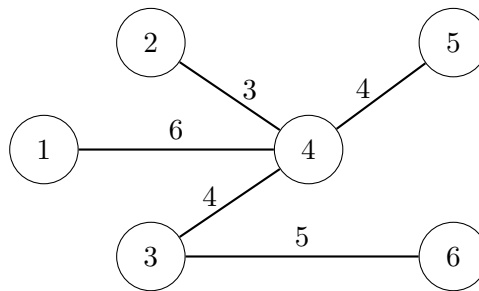


Abbildung 2.20: Minimal spannender Baum zum Beispiel 2.4.11 [34]

2.4.3 Algorithmus von Prim

Auch der Algorithmus von Prim [44, 57] findet minimale Spannbäume. Der Hauptunterschied liegt in der Strategie. Während der Algorithmus von Kruskal mit den Kanten beginnt und diese nach Gewicht sortiert, beginnt Prim's Algorithmus mit einem Startknoten und baut darauf einen aufspannenden Baum schrittweise aus, indem er immer die billigste Kante wählt, die einen neuen Knoten zum bereits konstruierten Baum hinzufügt. Der Algorithmus von Prim, der erstmals 1930 von Vojtěch Jarník entwickelt wurde, wurde später von Robert Clay Prim und unabhängig davon von Edsger Wybe Dijkstra wiederentdeckt. Der Prim-Algorithmus wird zum Beispiel bei der Erzeugung von Labyrinthen verwendet.

Voraussetzungen

Es gelten dieselben Voraussetzungen [46] wie beim Algorithmus von Kruskal: Der Graph muss zusammenhängend, ungerichtet und gewichtet sein. Das Ziel ist es auch, alle Knoten mit möglichst geringem Gesamtgewicht zu verbinden, ohne dass dabei ein Kreis entsteht.

Funktionsweise

Anders als der Algorithmus von Kruskal beginnt der Algorithmus von Prim bei einer beliebigen Startecke v_0 und einer leeren Kantenmenge E' für den Spannbaum. In jedem Schritt [44] wird diejenige Kante ausgewählt, die eine bereits besuchte Ecke mit einer noch nicht besuchten Ecke verbindet und dabei das geringste Gewicht aufweist.

Ablauf

Der Ablauf des Algorithmus ist immer:

1. Ein Startknoten v_0 wird beliebig gewählt und als Teil des Baums markiert.
2. Unter allen Kanten, die vom aktuellen Baum zu noch nicht enthaltenen Knoten führen, wird die Kante mit dem kleinsten Gewicht gewählt.
3. Diese Kante wird mit samt dem neuen Knoten dem Baum hinzugefügt.
4. Schritt 2 und 3 werden wiederholt, bis alle Knoten im Baum enthalten sind.

Beispiel 2.4.12. Am gleichen Beispiel 2.4.11 an dem der Algorithmus von Kruskal gezeigt wurde, wird nun der Algorithmus von Prim angewendet.

- Als Startknoten v_0 wird Knoten 1 ausgewählt.
- Die Kante mit dem geringsten Wert ist $[1, 4]$ mit Gewicht 6. Beide, Knoten 4 und die Kante, werden zum Baum hinzugefügt.
- Im Anschluss stehen $[1, 2]$, $[1, 3]$, $[4, 2]$, $[4, 3]$, $[4, 5]$ und $[4, 6]$ zur Auswahl. Die Kante $[4, 2]$ besitzt das geringste Gewicht und wird mit Knoten 2 aufgenommen.
- Es folgen zwei Kanten mit gleichem Gewicht. Da die Auswahl beliebig ist, wird $[4, 5]$ mit Knoten 5 zum Baum hinzugefügt.
- Danach wird $[4, 3]$ mit Knoten 3 gewählt und hinzugefügt.
- Schließlich vervollständigt die Kante $[3, 6]$ mit Knoten 6 den Baum.
- Da nun alle Knoten im Baum enthalten sind, endet der Algorithmus.

Es ergibt sich somit derselbe minimale Spannbaum wie beim Algorithmus von Kruskal in Abbildung 2.20. Der Prim-Algorithmus läuft aber schneller ab und ist im Vergleich effektiver.

2.5 Klassische Probleme und Fragestellungen

In der Graphentheorie treten einige klassische Probleme immer wieder auf, die sowohl historisch bedeutsam als auch von praktischer Relevanz sind. Zwei besonders zentrale Fragestellungen betreffen sogenannte Wege mit speziellen Eigenschaften: der eulersche und der hamiltonsche Weg. Diese Konzepte sind nicht nur für das Verständnis grundlegender Strukturprinzipien in Graphen wichtig, sondern bilden auch die Basis für viele Anwendungen in Informatik, Netzwerktheorie und Logistik.

2.5.1 Eulerscher Wege und eulerscher Kreis

Die Begriffe des Eulerwegs und des Eulerkreises stehen in direktem Zusammenhang mit der Frage [56], ob sich ein Graph so zeichnen lässt, dass jede Kante genau einmal durchlaufen wird, „ohne den Stift abzusetzen“. Ihren Ursprung haben diese Begriffe im Königsberger Brückenproblem, das bereits in Kapitel 2.1 ausführlich behandelt wurde. Ziel ist es [44], ein einfach überprüfbares Kriterium zu finden, mit dem sich feststellen lässt, ob ein solch spezieller Weg durch den gesamten Graphen überhaupt existiert.

Definition 2.5.1 (Eulerscher Weg und Eulerscher Kreis). Ein **eulerscher Weg** [47] beschreibt einen Weg in einem Graphen G , der jede Kante genau einmal durchläuft und Start- und Endknoten nicht gleich sind.

Ein **eulerscher Kreis** [47] ist ein eulerscher Weg, bei dem zusätzlich der Start- und Endknoten übereinstimmen, also ein geschlossener Weg.

Satz 2.5.2 (Satz von Euler). *Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann gilt [42]:*

- 1. G besitzt genau dann einen eulerschen Kreis, wenn alle Knoten von G geraden Grad haben.*
- 2. G besitzt genau dann einen eulerschen Weg (aber keinen Kreis), wenn genau zwei Knoten von G ungeraden Grad haben.*

Korollar 2.5.3. *Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann keinen eulerschen Weg, wenn mehr als zwei Knoten ungeraden Grad haben.*

Dieses Resultat ist besonders hilfreich zur schnellen Einschätzung eines Graphen. Die Bedingung über die Knotengrade liefert eine einfache Möglichkeit, zu entscheiden, ob ein Eulerscher Weg oder Kreis existiert, ohne den Graphen tatsächlich zu zeichnen.

Beispiel 2.5.4 (Das Haus des Nikolaus). Ein bekanntes Beispiel [47, 56] aus der Kindheit ist das sogenannte „Haus des Nikolaus“, das viele Kinder und Erwachsene aus dem Gedächtnis zeichnen können. Mit etwas Übung auch in einem Zug, ohne den Stift abzusetzen. Bei genauer Betrachtung zeigt sich, dass der zugrunde liegende Graph einen eulerschen Weg, jedoch keinen eulerschen Kreis besitzt:

- Der Graph besteht aus 5 Knoten.
- Zwei der Knoten, die beiden unteren Ecken, haben einen ungeraden Grad.
- Nach dem Satz von Euler gilt: Besitzt ein zusammenhängender Graph exakt zwei Knoten mit ungeradem Grad, so enthält er einen eulerschen Weg, jedoch keinen eulerschen Kreis.

Somit ist das Haus des Nikolaus ein anschauliches Beispiel für einen eulerschen Weg. Man kann es nur zeichnen, wenn man bei einer der beiden Ecken mit ungeradem Grad (Abbildung 2.21) beginnt.

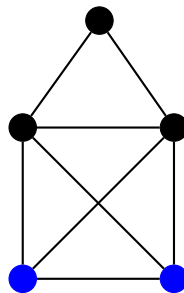


Abbildung 2.21: Haus des Nikolaus mit den beiden Knoten (blau), mit ungeradem Grad

2.5.2 Hamilton-Wege

Im Gegensatz zu eulerschen Wegen, die jede Kante genau einmal durchlaufen, müssen Hamilton-Wege [32, 46] jeden Knoten genau einmal durchlaufen. Der Name leitet sich von einem Spiel ab, das William Rowan Hamilton 1859 herausgab. Die Aufgabe bestand darin, in einem Dodekaedergraphen einen Hamilton Kreis zu finden.

Definition 2.5.5 (Hamilton-Weg und Hamilton-Kreis). Ein **Hamilton-Weg** [37] ist ein Weg in einem Graphen G , bei dem jeder Knoten aus der Knotenmenge genau einmal vorkommt.

Ein **Hamilton-Kreis** [44] ist ein Hamilton-Weg, bei dem Start- und Endpunkt identisch sind und die Länge des Kreises der Anzahl der Knoten im Graphen entspricht.

$$|V| = \text{Länge des Kreises}$$

Die Frage [35, 56], ob ein Graph einen Hamilton-Kreis besitzt, ist deutlich schwieriger zu beantworten als die Existenz eines Eulerkreises. Im Gegensatz zum Eulerkreis gibt es nämlich keine einfache Charakterisierung von Graphen, die einen Hamilton-Kreis enthalten. Das Entscheidungsproblem gehört sogar zu den NP-vollständigen Problemen. Das bedeutet, dass kein effizienter Algorithmus bekannt ist, der in polynomieller Zeit einen Hamilton-Kreis findet oder dessen Nichtexistenz feststellt. Die triviale Lösung, alle Möglichkeiten durchzuprobieren, erfordert im schlechtesten Fall $n!$ Möglichkeiten bei n Knoten – das ist nicht effizient.

Ein bekanntes Optimierungsproblem, das eng mit dem Hamilton-Kreis verwandt ist, ist das Problem des Handlungsreisenden [57]. Dabei geht es darum, eine Rundreise durch alle Knoten eines vollständig gewichteten Graphen zu finden, bei der jeder Knoten genau einmal besucht wird und die Gesamtlänge minimal ist.

Obwohl es keine einfache allgemeine Charakterisierung gibt, existieren hinreichende Bedingungen [44, 32, 46, 56]. Das Kriterium von Dirac besagt, dass ein Graph $G = (V, E)$ mit n Ecken einen Hamilton Kreis besitzt, wenn sein Minimalgrad $\delta(G)$ die Bedingung $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ erfüllt. Auch das Theorem von Ore bietet ein solches Kriterium: Wenn in einem zusammenhängenden, ungerichteten Graphen G mit $|V| \geq 3$ für alle nicht benachbarten Knotenpaare $u, v \in V$ gilt, dass $d(u) + d(v) \geq |V|$, dann ist G ein Graph mit Hamilton-Kreis.

2.5.3 Vier-Farben-Problem

Das Vier-Farben-Problem [37] zählt zu den bekanntesten und historisch bedeutendsten Fragestellungen der Graphentheorie und der diskreten Mathematik. Es beschäftigt sich mit der Frage nach der minimalen Anzahl von Farben, die benötigt wird, um die Regionen einer politischen Landkarte so einzufärben, dass keine zwei benachbarten Regionen dieselbe Farbe erhalten. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass jedes Land ein zusammenhängendes Gebilde bildet, Nachbarländer mit einer gemeinsamen Grenze unterschiedliche Farben erhalten müssen und isolierte Punkte nicht als gemeinsame Grenze zählen. Ziel [56] ist es, mit möglichst wenigen Farben auszukommen. Die Fragestellung [11] wurde erstmals um das Jahr 1852 von Francis Guthrie aufgeworfen, der beim Einfärben der Landkarte von England beobachtete, dass 4 Farben offenbar immer ausreichten, 3 zu wenig und 5 zu viel waren. Sein Lehrer Augustus de Morgan verbreitete das Problem in mathematischen Kreisen. Im Jahr 1878 wurde es in den „Proceedings of the London Mathematical Society“ veröffentlicht und erlangte dadurch internationale Aufmerksamkeit. Alfred Kempe präsentierte 1879 einen Beweis, der als Durchbruch galt, bis dieser 11 Jahre später, 1890, von Percy Heawood als fehlerhaft entlarvt wurde. Dennoch trugen Kempes Methoden maßgeblich zur späteren Lösung bei. Erst 1976 ge-

lang es den Mathematikern Kenneth Appel und Wolfgang Haken gemeinsam mit John Koch, das Vier-Farben-Problem mithilfe von Computerunterstützung [35] endgültig zu beweisen.

In der Graphentheorie ist das Vier-Farben-Problem ein Knotenfärbungsproblem [7]:

- Die Länder der Landkarte werden durch Knoten repräsentiert.
- Gemeinsame Landesgrenzen werden durch Kanten zwischen den einzelnen Knoten dargestellt.
- Landkarten können als planare Graphen aufgefasst werden.

Satz 2.5.6 (Vier-Farben-Satz). *Jeder planare Graph lässt sich so färben [58], dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe erhalten, und es dabei höchstens 4 verschiedene Farben benötigt. Es gilt die Ungleichung [47]:*

$$\chi(G) \leq 4$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ wird auch Knotenfärbungszahl genannt. Sie beschreibt die minimale Anzahl an Farben, mit der die Knoten eines Graphen so gefärbt werden können, dass benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben erhalten. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in Kapitel 2.6.2. Der Vier-Farben-Satz [44] besagt, dass niemals mehr als 4 Farben für eine Landkarte benötigt werden. Das bedeutet aber nicht, dass jede Landkarte auch tatsächlich vier Farben benötigt. Viele Landkarten können mit weniger Farben auskommen. Die Umkehrung des Vier-Farben-Satzes [35] gilt nicht: Nicht jeder Graph, der mit höchstens 4 Farben gefärbt werden kann, ist planar.

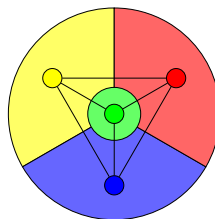


Abbildung 2.22: Schematische Darstellung einer Landkarte mit vier angrenzenden Regionen und der zugehörigen Graphfärbung nach dem Vier-Farben-Satz

2.6 Strukturen in Graphen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Strukturen wie Teilgraphen, Cliques und Färbungen behandelt. Diese Konzepte sind zentral für die Ramsey-Theorie, da sie sich

mit der Frage befasst, ob in jeder hinreichend großen Färbung bestimmter Graphen notwendigerweise monochromatische Teilstrukturen (Cliques) auftreten. Ergänzend dazu werden deshalb auch verschiedene Arten von Graphfärbungen genauer untersucht.

2.6.1 Teilgraphen, Cliques und unabhängige Mengen

Ein Teilgraph ist ein grundlegendes Konzept in der Graphentheorie, das eine Substruktur eines größeren Graphen beschreibt. Die Terminologie kann in der Literatur [35] variieren, wobei „Teilgraph“ und „Untergraph“ manchmal synonym verwendet werden, aber auch spezifischere Bedeutungen annehmen können.

Definition 2.6.1 (Teilgraph). Ein **Teilgraph** [56] $T = (W, F)$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph, dessen Knotenmenge W eine Teilmenge von V ist ($W \subseteq V$) und dessen Kantenmenge F eine Teilmenge der Kantenmenge von G ist ($F \subseteq E$). Wenn T ein Teilgraph von G ist, wird dies oft als $T \subseteq G$ notiert.

Ein Teilgraph [35] kann durch das Entfernen von Knoten und Kanten aus dem ursprünglichen Graphen gebildet werden. Werden Knoten entfernt, müssen dabei alle mit diesen Knoten inzidierenden Kanten ebenfalls entfernt werden. Es können aber auch einzelne Kanten entfernt werden, wodurch auch isolierte Knoten entstehen können. Der Nullgraph [32], ein Graph ohne Knoten und Kanten, ist ein trivialer Teilgraph jedes Graphen.

Beispiel 2.6.2. In Abbildung 2.23 sind zwei Teilgraphen von G dargestellt. T entsteht durch das Streichen von Knoten 2 mit allen seinen Kanten, und die Kante zwischen Knoten 1 und 6 wird ebenfalls gestrichen. T' entsteht dann durch zusätzliches Streichen von Knoten 4 mit seinen inzidierenden Kanten und dem Streichen der Kante $\{3, 5\}$.

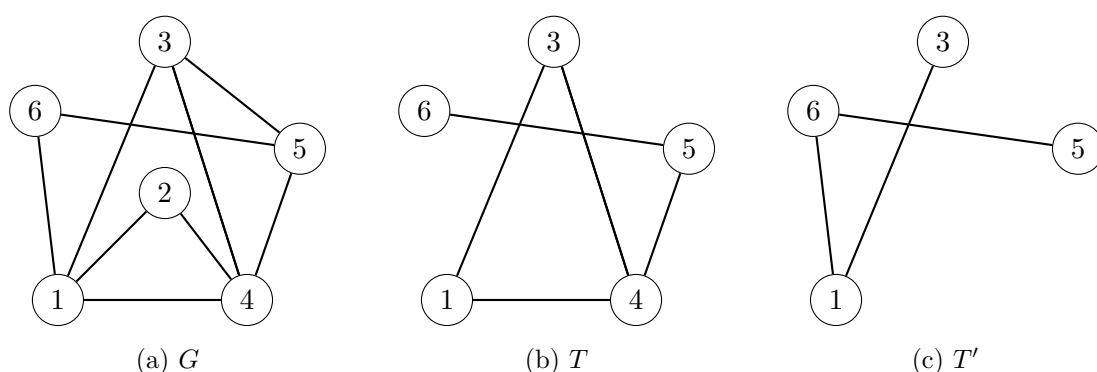


Abbildung 2.23: Graph G mit zwei Teilgraphen T und T' [21]

Definition 2.6.3 (Untergraph). Ein **Untergraph** G' (auch induzierter Teilgraph), eines Graphen $G = (V, E)$, der durch eine Knotenmenge $W \subseteq V$ bestimmt ist, ist der Graph $G' = (W, E_W)$, wobei E_W alle Kanten aus E enthält, deren beide Endpunkte in W liegen. Es gilt also [56, 35]:

$$E_W = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in W\}.$$

Ein Untergraph entsteht somit, indem man aus dem ursprünglichen Graphen einige Knoten entfernt und lediglich jene Kanten beibehält, deren Endpunkte noch im verbleibenden Knotenbereich W liegen. Es handelt sich dabei um eine reduzierte Version von G , bei der so viele Kanten wie möglich erhalten bleiben, solange sie nur zwischen zwei verbleibenden Knoten verlaufen. Der Unterschied [35] zwischen einem Teilgraph und einem Untergraph ist, dass bei Teilgraphen beides, Kanten und Knoten, entfernt werden dürfen und bei Untergraphen nur jene Kanten entfernt werden, die mit den entfernten Ecken inzidieren. Diese Definitionen werden in der Literatur [56, 37, 35, 32] jedoch nicht einheitlich verwendet.

Die in Abbildung 2.23 dargestellten Teilgraphen sind keine Untergraphen von G , da zusätzlich zu den mit den Knoten inzidierenden Kanten andere Kanten entfernt wurden.

Beispiel 2.6.4. Abbildung 2.24 zeigt zwei Untergraphen von G . U entsteht durch das Streichen von Knoten 2 mit allen seinen Kanten und U' entsteht dann durch zusätzliches Streichen von Knoten 4 mit seinen inzidierenden Kanten.

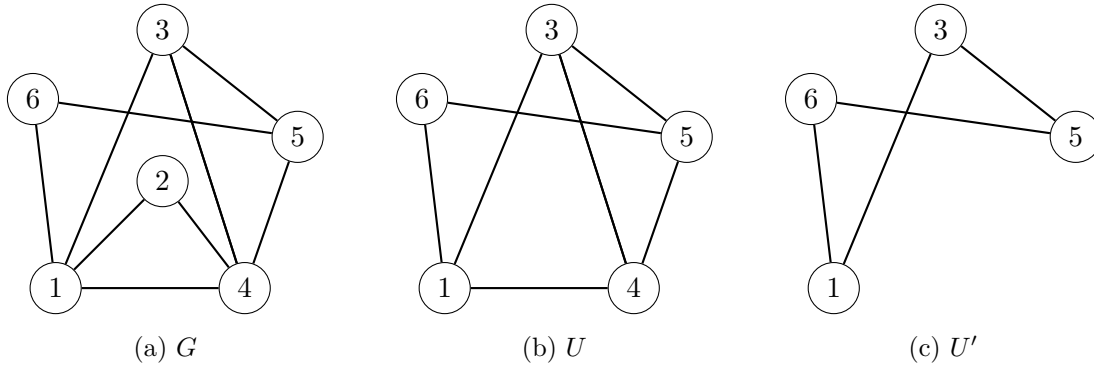


Abbildung 2.24: Graph G mit zwei Untergraphen U und U' [21]

Definition 2.6.5 (Clique). Eine **Clique** [56] beschreibt eine Menge von Knoten in einem Graphen G , in der alle Knoten paarweise miteinander verbunden sind. Anders ausgedrückt, eine Clique ist ein vollständiger Teilgraph.

Ein Graph wird als n -Clique oder Clique mit n Knoten bezeichnet, wenn er zu einem vollständigen Graphen K_n isomorph ist [56].

Definition 2.6.6 (Cliquenzahl). Die **Cliquenzahl** [56] $\omega(G)$ eines Graphen G ist die Kardinalität einer größtmöglichen Clique in G .

Beispiel 2.6.7. Beispiele der Cliquenzahl für spezielle Graphen:

- Für einen vollständigen Graphen K_n ist $\omega(K_n) = n$.
- Für einen leeren Graphen E_n (ohne Kanten) ist $\omega(E_n) = 1$.

Definition 2.6.8 (unabhängige Menge). Eine **unabhängige Menge** [35] S (oder auch stabile Menge) in einem Graphen G ist eine Teilmenge der Knoten $S \subseteq V$, in der keine zwei Knoten benachbart sind. Das bedeutet, für zwei unterschiedliche Knoten $u, v \in S$ existiert keine Kante $\{u, v\} \in E$.

Definition 2.6.9 (Stabilitätszahl). Die Stabilitätszahl [56] eines Graphen G , symbolisiert als $\alpha(G)$, ist die Kardinalität einer größtmöglichen unabhängigen Menge in G .

Beispiel 2.6.10. Beispiele der Stabilitätszahl für spezielle Graphen aus 2.6.7:

- Für einen vollständigen Graphen K_n ist $\alpha(K_n) = 1$.
- Für einen leeren Graphen E_n (ohne Kanten) ist $\alpha(E_n) = n$.

Beispiel 2.6.11. Abbildung 2.25 zeigt eine Clique und eine unabhängige Menge.



Abbildung 2.25: Eine 4-Clique und eine 3-stabile Menge [56]

2.6.2 Graphfärbungen

Graphen und deren Färbungen sind zentrale Konzepte in der Graphentheorie, die sich mit der Zuordnung von Farben zu Elementen eines Graphen unter bestimmten Regeln befassen. Das Hauptziel ist dabei meist, die minimale Anzahl von Farben zu bestimmen, die für eine „zulässige“ Färbung benötigt wird.

Knotenfärbung und chromatische Zahl

Definition 2.6.12 (Knotenfärbung). Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Eine **Knotenfärbung** ist eine Abbildung [37]

$$f : V \rightarrow S.$$

S ist eine endliche Menge von Farben, sodass für alle benachbarten Knoten u, v gilt:

$$f(u) \neq f(v)$$

Dabei ist $f(u)$ die Farbe des Knotens u . Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, dürfen nicht dieselbe Farbe haben. Nur dann ist die Färbung „zulässig“.

Definition 2.6.13 (k -Knotenfärbung). Eine k -Knotenfärbung eines Graphen ist eine zulässige Knotenfärbung, bei der höchstens k verschiedene Farben verwendet werden. Formal ist das eine Abbildung

$$f : V \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ mit } |S| = k.$$

Die Elemente von S [35] stehen dabei für die unterschiedlichen Farben.

Definition 2.6.14 (Farbklasse). Die Menge aller Knoten, die dieselbe Farbe erhalten haben, wird als **Farbklasse** bezeichnet. Eine Farbklasse C_i ist definiert [32] durch

$$C_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}.$$

Jede Farbklasse bildet somit eine unabhängige Menge von Knoten, das heißt, es gibt keine Kante zwischen zwei Knoten derselben Farbklasse.

Beispiel 2.6.15. Die 4-Knotenfärbung des Graphen in Abbildung 2.26 ist gegeben durch die Abbildung $f : V \rightarrow S$ mit $V = \{1, 2, \dots, 10\}$ und $S = \{1, 2, 3, 4\}$, wobei für alle benachbarten Knoten $u, v \in V$ gilt: $f(u) \neq f(v)$. Die verwendeten Farben orange, rot, blau und grün werden durch die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4 \in S$ dargestellt.

Definition 2.6.16 (chromatische Zahl). Die **chromatische Zahl** [56, 37] $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinste natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die es eine zulässige Knotenfärbung mit k Farben gibt:

$$\chi(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ wird in der Literatur [56, 47] auch Färbungszahl oder auch Farbzahl genannt. Wenn $\chi(G) = n$ ist, wird G auch n -chromatisch genannt. Je höher die chromatische Zahl, desto komplexer ist die Struktur des Graphen hinsichtlich seiner Färbbarkeit. Ein Graph mit $\chi(G) = 1$ besitzt keine Kanten, da alle Knoten dieselbe Farbe erhalten dürfen. Es existieren sowohl obere als auch untere Schranken [56, 37] für die chromatische Zahl, die auf anderen Eigenschaften des Graphen basieren.

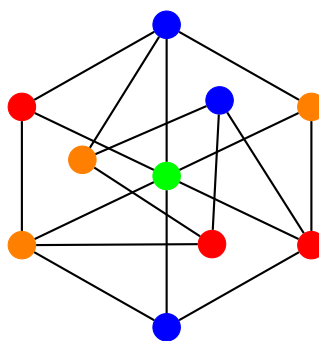


Abbildung 2.26: 4-Knotenfärbung eines Graphen

Satz 2.6.17 (obere Schranke für $\chi(G)$). Für einen Graphen G mit $m = |E|$ Kanten lässt sich die chromatische Zahl $\chi(G)$ nach oben abschätzen. Es gilt:

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Beweis. Angenommen, G sei mit k Farben gefärbt, also $\chi(G) = k$. Zwischen je zwei Farbklassen muss mindestens eine Kante verlaufen, da andernfalls zwei Farbklassen zusammengelegt und mit einer einzigen Farbe gefärbt werden könnten - ein Widerspruch zur Minimalität von k . Somit gibt es mindestens $\binom{k}{2}$ Kanten, also:

$$m \geq \frac{k(k-1)}{2}.$$

Diese Ungleichung lässt sich nach k auflösen:

$$m \geq \frac{k(k-1)}{2} \Rightarrow k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

□

Es gibt noch eine einfachere obere Schranke, die sich durch ein einfaches, aber effektives Verfahren [56] ergibt: Man nummeriert die Knoten des Graphen in beliebiger Reihenfolge und weist jedem Knoten der Reihe nach die kleinste Farbe zu, die sich von allen bereits gefärbten Nachbarknoten unterscheidet. Da ein Knoten höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn haben kann, stehen immer mindestens $\Delta(G)+1$ verschiedene Farben zur Auswahl. Es gilt daher folgende Abschätzung:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Neben den oberen Schranken, die angeben, mit wie vielen Farben ein Graph höchstens eingefärbt werden kann, existieren auch untere Schranken, die beschreiben, wie viele Farben mindestens notwendig sind, um eine gültige Knotenfärbung zu erhalten.

Eine einfache untere Schranke für die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen ergibt sich über die sogenannte Stabilitätszahl $\alpha(G)$ (Definition 2.6.9), also die maximale Anzahl an Knoten, die paarweise nicht benachbart sind.

Satz 2.6.18 (untere Schranke für $\chi(G)$). *Für einen Graphen $G = (V, E)$ mit Stabilitätszahl $\alpha(G)$ existiert für die chromatische Zahl $\chi(G)$ die untere Schranke:*

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$$

Beweis. Bei einer zulässigen k -Färbung wird die Knotenmenge in k disjunkte Farbklassen aufgeteilt, wobei jede Klasse eine unabhängige Menge bildet. Jede dieser k Farbklassen darf höchstens $\alpha(G)$ Knoten enthalten. Daher können alle k Farbklassen zusammen höchstens $k \cdot \alpha(G)$ Knoten enthalten. Das führt zu folgender notwendiger Bedingung:

$$k \cdot \alpha(G) \geq |V|$$

Daraus folgt:

$$k \geq \frac{|V|}{\alpha(G)} \Rightarrow \chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$$

□

Satz 2.6.19. *Sei $U \subseteq G$ ein Untergraph. Dann gilt:*

$$\chi(U) \leq \chi(G)$$

Beweis. Jede zulässige Färbung von G ist automatisch eine zulässige Färbung für U , da U alle Knoten von G , aber nur eine Teilmenge der Kanten von G besitzt. Andernfalls gilt: Benötigt ein Untergraph U mindestens k -Farben, so kann auch der gesamte Graph G nicht mit weniger als k -Farben gefärbt werden, da G alle Kanten von U enthält und somit auch dessen Färbungsanforderungen erfüllt werden müssen. □

Dieses Prinzip ist besonders hilfreich, um untere Schranken für $\chi(G)$ zu bestimmen: Wenn ein Teilgraph bereits k Farben benötigt, dann gilt diese Untergrenze auch für den Gesamtgraphen.

Satz 2.6.20 (Färbung eines vollständigen Graphen). *Ein vollständiger Graph K_n benötigt n verschiedene Farben, da jeder Knoten mit allen anderen verbunden ist. Daher gilt:*

$$\chi(K_n) = n.$$

Satz 2.6.21 (Färbung eines bipartiten Graphen). *Ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ besitzt per Definition keine Kanten innerhalb von V_1 oder V_2 . Es genügt daher, V_1 mit einer und V_2 mit einer zweiten Farbe zu färben. Damit gilt:*

$$\chi(G) = 2,$$

sofern G nicht kantenfrei ist.

Beispiel 2.6.22. In Abbildung 2.27 sieht man einen bipartiten Graphen G mit 6 Knoten. V_1 ist in blau gefärbt und V_2 ist in grün gefärbt.

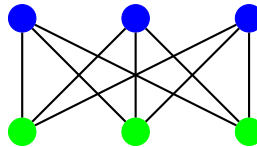


Abbildung 2.27: 2-gefärbter bipartiter Graph

Obwohl die chromatische Zahl theoretisch exakt definiert ist, stellt sich in der Praxis oft die Frage, wie eine minimale Färbung effizient gefunden werden kann. Es existieren verschiedene Heuristiken und Algorithmen [37], wie der Small-Last-Heuristik oder der Greedy-Enumeration-Algorithmus, um Graphen zu färben. Eine vertiefte Behandlung algorithmischer Verfahren erfolgt in dieser Arbeit jedoch nicht.

Kantenfärbung

Definition 2.6.23 (Kantenfärbung). Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Eine **Kantenfärbung** ist eine Abbildung [37]

$$h : E \rightarrow S.$$

S ist eine endliche Menge von Farben, sodass für alle benachbarten Kanten e, f gilt:

$$h(e) \neq h(f)$$

$h(e)$ ist dabei die Farbe der Kante e . Keine zwei Kanten, die einen gemeinsamen Endpunkt haben, dürfen dieselbe Farbe aufweisen.

Definition 2.6.24 (k -Kantenfärbung). Eine k -Kantenfärbung [35] eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine zulässige Kantenfärbung, bei der höchstens k verschiedene Farben verwendet werden. Formal ist das eine Abbildung

$$h : E \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ mit } |S| = k.$$

Beispiel 2.6.25. Eine 6-Kantenfärbung des Graphen in Abbildung 2.28 ist gegeben durch die Abbildung $h : V \rightarrow S$ mit $V = \{1, 2, \dots, 10\}$ und $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wobei für alle benachbarten Kanten $e, f \in E$ gilt: $h(e) \neq h(f)$. Die verwendeten Farben orange, rot, blau, grün, gelb und magenta werden durch die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6 \in S$ dargestellt.

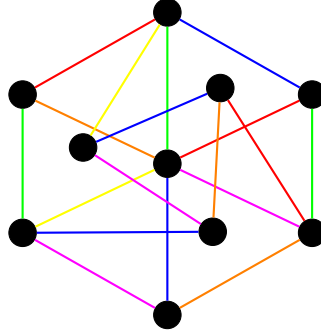


Abbildung 2.28: 6-Kantenfärbung eines Graphen

Definition 2.6.26 (chromatischer Index). Der **chromatische Index** [37] $\chi'(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl k , für die es eine zulässige Kantenfärbung mit k Farben gibt:

$$\chi'(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}.$$

Definition 2.6.27 (Kantengraph). Der **Kantengraph** [32, 35] $L(G)$ eines Graphen G wird konstruiert, indem die Kanten von G zu Knoten in $L(G)$ werden und zwei dieser neuen Knoten genau dann benachbart sind, wenn die entsprechenden Kanten in G einen gemeinsamen Endpunkt haben.

Dies reduziert das Problem der Kantenfärbung auf das Problem der Knotenfärbung. Es gilt:

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

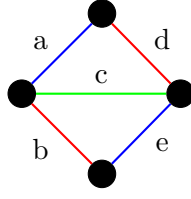
Es ist jedoch zu beachten [35], dass der chromatische Index und die chromatische Zahl desselben Graphen nicht identisch sind. Es gilt also: $\chi'(G) \neq \chi(G)$

Beispiel 2.6.28. In Abbildung 2.29 sieht man einen Graph G mit einer 3-Kantenfärbung und seinen dazugehörigen Kantengraph $L(G)$ mit der Knotenfärbung $\chi(L(G)) = 3$.

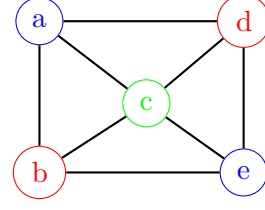
Satz 2.6.29. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit m Knoten und n Kanten. Dann besitzt der zugehörige Kantengraph $L(G) = (V', E')$ [33] genau n Knoten und genau

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} (d(v)^2) - n \text{ Kanten,}$$

wobei $d(v)$ den Grad des Knotens $v \in V$ bezeichnet.



(a) Graph G mit $\chi'(G) = 3$



(b) Kantengraph $L(G)$ mit $\chi(L(G)) = 3$

Abbildung 2.29: Graph G und sein Kantengraph $L(G)$ zum Beispiel 2.6.28 [37]

Beweis. Jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ des Ausgangsgraphen $G = (V, E)$ wird im Kantengraphen $L(G) = (V', E')$ ein Knoten. Das bedeutet, dass die Knotenmenge von $L(G)$ der Kantenmenge von G entspricht, also $L(G) = (E, E')$. Zwei solcher Knoten in $L(G)$, also zwei Kanten im ursprünglichen Graphen, sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie im Ausgangsgraphen G einen gemeinsamen Endpunkt besitzen. Für eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ ist die Anzahl der Kanten, die mit e inzident sind, gleich $d(u) + d(v) - 2$, da e sowohl in $d(u)$ als auch in $d(v)$ enthalten ist und nicht doppelt gezählt wird. Summiert man diese Anzahl über alle Kanten des Graphen G , ergibt sich:

$$\begin{aligned} |E(L(G))| &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} (d(u) + d(v) - 2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} (d(u) + d(v)) - \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} 2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} (d(u) + d(v)) - \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} 2n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{u,v\} \in E} (d(u) + d(v)) - n \end{aligned}$$

Der Bruch $\frac{1}{2}$ ist notwendig, da jedes benachbarte Kantenpaar doppelt gezählt wird (einmal von e_1 zu e_2 und einmal umgekehrt).

Da jeder Knotengrad $d(v)$ in der Summe $\sum_{\{u,v\} \in E} (d(u) + d(v))$ genau $d(v)$ -mal vorkommt, ergibt sich:

$$|E(L(G))| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} (d(v)^2) - n$$

□

Die Kantengraphen liefern eine hilfreiche Grundlage für die Analyse der kantenchromatischen Zahl $\chi'(G)$. In manchen Fällen, bei bipartiten und vollständigen Graphen,

lässt sich diese Zahl exakt angeben. Die folgenden zwei Sätze [37, 33] geben präzise Auskunft über deren Färbungseigenschaften.

Satz 2.6.30 (Satz von König). *Die chromatische Zahl $\chi'(G)$ ist für jeden bipartiten Graphen G gleich dem Maximalgrad von G .*

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

Das bedeutet, bipartite Graphen lassen sich mit genau so vielen Farben kantenfärben, wie ihr höchster Knotengrad beträgt.

Beispiel 2.6.31. In Beispiel 2.3.12 wurde gezeigt, dass der Graph in 2.30 ein bipartiter Graph ist, da er sich in zwei disjunkte Knotenmengen aufteilen lässt, sodass jede Kante nur Knoten von der einen Teilmenge mit der von der anderen Teilmenge verbindet. Nach Satz 2.6.30 besitzt dieser Graph dann den chromatischen Index $\chi'(G) = \Delta(G)$. In unserem Beispiel besitzt der Knoten 5 den höchsten Grad $\Delta(G) = 5 = \chi'(G)$ und lässt sich mit der Abbildung $h : V \rightarrow S$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ färben. Die verwendeten Farben blau, grün, orange, rot und gelb sind als die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \in S$ dargestellt.

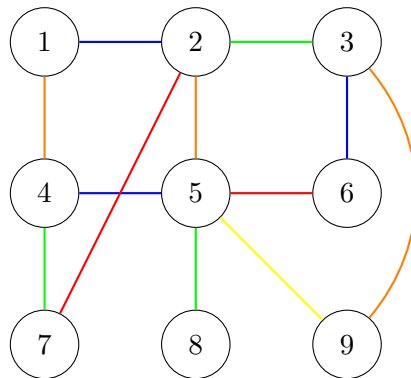


Abbildung 2.30: bipartiter Graph mit Kantenfärbung

Satz 2.6.32. *Für einen vollständigen Graphen K_n mit $n > 1$ Knoten gilt:*

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ n - 1, & \text{wenn } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Das heißt, die kantenchromatische Zahl eines vollständigen Graphen hängt davon ab, ob die Anzahl seiner Knoten gerade oder ungerade ist.

Beispiel 2.6.33. In Abbildung 2.31 sind die beiden vollständigen Graphen K_5 und K_6 gegeben. Die Kanten von K_5 wurden mit folgender Abbildung $h : V \rightarrow S$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gefärbt, da dieser vollständige Graph eine ungerade Anzahl an Knoten besitzt. Der vollständige Graph K_6 besitzt 6 Knoten, also eine gerade Anzahl. Nach 2.6.32 können die Kanten des Graphen mit $n - 1 = 6 - 1 = 5$ Farben gefärbt werden und besitzt ebenfalls die Abbildung $h : V \rightarrow S$ mit $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \in S$ stehen für die verwendeten Farben blau, grün, orange, gelb und rot.



Abbildung 2.31: vollständige Graphen K_5 und K_6 mit Kantenfärbung

Während Satz 2.6.30 und Satz 2.6.32 konkrete Werte für $\chi'(G)$ in Spezialfällen liefern, stellt sich die Frage nach einer allgemeingültigen Schranke für beliebige Graphen. Genau diese liefert der nächste Satz [37, 33].

Satz 2.6.34 (Satz von Vizing). *Für einen Graphen $G = (V, E)$ kann die chromatische Zahl $\chi'(G)$ mit dem Maximalgrad von G abgeschätzt werden. Es gilt:*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Beweis. **Untere Schranke:** $\chi'(G) \geq \Delta(G)$

Ein Knoten $v \in V$ mit Grad $\Delta(G)$ ist mit $\Delta(G)$ Kanten inzident. Da in einer gültigen Kantenfärbung keine zwei benachbarten Kanten dieselbe Farbe haben dürfen, benötigen diese Kanten mindestens $\Delta(G)$ verschiedene Farben. Daher ist die kantenchromatische Zahl immer mindestens so groß wie der maximale Grad und die linke Seite der Ungleichung $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ ist bewiesen [33].

Obere Schranke: $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Diese wird mittels vollständiger Induktion [37] nach der Anzahl der Kanten $|E|$ bewiesen.

Induktionsanfang: Für $|E| = 1$ (Graph mit nur einer Kante) ist $\chi'(G) = 1 = \Delta(G)$. Dann gilt:

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Die Aussage stimmt also für $|E| = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt bereits für alle einfachen Graphen mit weniger als n Kanten gültig.

Induktionsschritt: Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit $|E| = n$ Kanten. Eine beliebige Kante $e = \{u, v\} \in E$ wird gewählt. Nach Induktionsvoraussetzung ist der Teilgraph $G' = (V, E \setminus \{e\})$ kantenfärbbar mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben. Es sei nun f eine solche gültige Kantenfärbung von G' mit Farben aus der Menge $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$. Ziel ist es, eine Farbe $c \in C$ zu finden, mit der $e = \{u, v\}$ gefärbt werden kann, ohne dass benachbarte Kanten dieselbe Farbe erhalten.

Dazu werden folgende Fälle unterschieden.

1. **Fall 1:** Es existiert eine Farbe $c \in C$, die weder an einer zu u noch an einer zu v inzidenten Kante verwendet wurde. $\rightarrow$ Dann kann e mit der Farbe c gefärbt werden. Die Färbung bleibt gültig.
2. **Fall 2:** Für jede Farbe $c \in C$ gilt: Entweder ist c bereits an einer zu u oder einer zu v inzidenten Kante verwendet. $\rightarrow$ In diesem Fall existieren zwei Farben $a, b \in C$, sodass a bei u , aber nicht bei v vorkommt, und b bei v , aber nicht bei u .

Nun wird der durch die Kanten mit den Farben a und b induzierte Teilgraph betrachtet. Die Komponenten dieses Teilgraphen bestehen ausschließlich aus Kanten, die entweder mit a oder b gefärbt sind, und bilden dabei zusammenhängende Teilgraphen, in denen sich die Farben abwechseln. Solche Strukturen werden als *Kempe-Ketten* bezeichnet:

Eine **Kempe-Kette** [8] ist ein maximaler, zusammenhängender Teilgraph, dessen Kanten abwechselnd genau zwei verschiedene Farben verwenden, in diesem Fall a und b .

Innerhalb einer solchen Kempe-Kette kann eine Farbenvertauschung vorgenommen werden, das bedeutet, alle Kanten mit Farbe a werden mit b gefärbt und umgekehrt. Diese Umfärbung erhält die Gültigkeit der Färbung, da benachbarte Kanten weiterhin unterschiedliche Farben tragen.

Durch eine geeignete Wahl der Komponente für die Umfärbung wird erreicht, dass entweder eine der beiden Farben a oder b an einem der Knoten u oder v frei wird, oder eine neue Farbe insgesamt in der Nachbarschaft von $e = \{u, v\}$ nicht mehr verwendet wird. In beiden Fällen kann die Kante e gültig eingefärbt werden, sodass der gesamte Graph mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben kantenfärbt ist.

Schlussfolgerung: Für jeden endlichen einfachen Graphen G mit maximalem Grad $\Delta(G)$ gilt:

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

□

2.6.3 Anwendungen von gefärbten Graphen

Graphenfärbungen spielen eine zentrale Rolle in der Graphentheorie, insbesondere bei Problemen, bei denen Konflikte oder Überschneidungen vermieden werden müssen. Klassische Anwendungen reichen von der Kartenfärbung über die Ressourcenverteilung bis hin zur Planung in Netzwerken. In diesem Kapitel werden grundlegende Sätze zur Färbung behandelt sowie spezielle Klassen von Graphen vorgestellt, für die bestimmte Färbbarkeiten gelten. Diese Anwendungen illustrieren klassische Färbungsprobleme, bei denen Farben gezielt zur Vermeidung von Konflikten eingesetzt werden. Davon zu unterscheiden sind Fragestellungen der Ramsey-Theorie, bei denen gerade das unvermeidbare Auftreten geordneter Strukturen bei beliebigen Färbungen im Vordergrund steht und in Kapitel 3 behandelt wird.

Anwendungsbeispiel: Vier-Farben-Problem

Das Vier-Farben-Problem zählt zu den bekanntesten Fragestellungen der Graphentheorie und wurde bereits in Kapitel 2.5.3 thematisiert. Zum damaligen Zeitpunkt wurde der Begriff der Färbungszahl jedoch noch nicht eingeführt, weshalb auf eine vertiefte Auseinandersetzung verzichtet wurde. An dieser Stelle soll das Problem nochmals aufgegriffen und durch ein konkretes Anwendungsbeispiel ergänzt werden.

Zur Wiederholung: Der Vier-Farben-Satz besagt, dass jede ebene Landkarte so eingefärbt werden kann, dass benachbarte Regionen unterschiedliche Farben erhalten und zwar mit höchstens vier Farben. Formal ausgedrückt bedeutet dies, dass jeder planare Graph eine Färbungszahl von höchstens vier besitzt. Der Beweis des Satzes von Appel und Haken war der erste, bei dem der Einsatz von Computeralgorithmen zur Fallunterscheidung und vollständigen Überprüfung unerlässlich war.

Ein anschauliches Anwendungsbeispiel [7] für das Vier-Farben-Problem liefert die Färbung der sechzehn deutschen Bundesländer. Dabei wird deutlich, wie in der Mathematik reale Probleme auf ihre strukturelle Essenz reduziert werden: Beim Färben von Landkarten ist es unerheblich, wie die Grenzen konkret verlaufen - entscheidend ist lediglich, ob zwei Regionen eine gemeinsame Grenze besitzen oder nicht. Österreich wurde hier als Beispiel nicht herangezogen, weil es mit nur neun Bundesländern und einer vergleichsweise einfachen Nachbarschaftsstruktur eine weniger anspruchsvolle graphentheoretische Herausforderung darstellt. Eine Übersetzung des Färbungsproblems in die Sprache der Graphentheorie lautet wie folgt: Jedem Bundesland wird ein Knoten zugeordnet, und zwischen zwei Knoten wird genau dann eine Kante eingezeichnet, wenn die entsprechenden Länder aneinandergrenzen. Es entsteht ein planarer Graph, der die Nachbarschaftsstruktur der Bundesländer abbildet. Wie man in Abbildung 2.32 sieht, lässt sich der Graph der deutschen Bundesländer so färben, dass keine benachbarten

Knoten dieselbe Farbe erhalten.

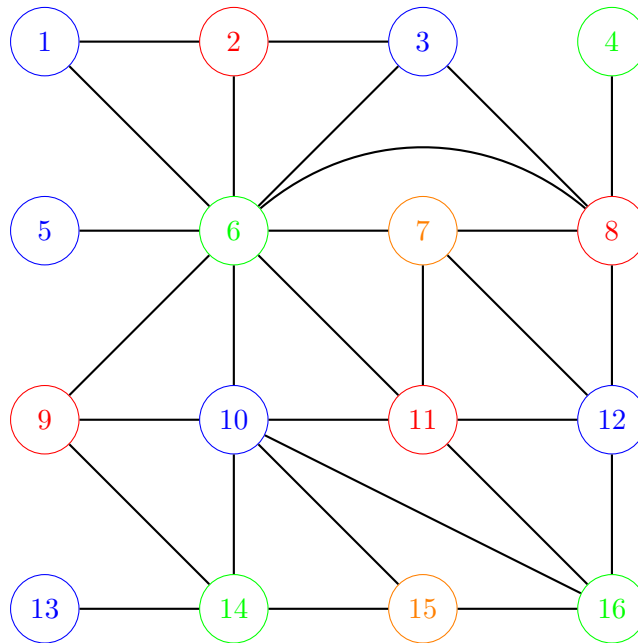


Abbildung 2.32: Knotengefärbter Graph der deutschen Bundesländer [7]

Tabelle 2.4: Verzeichnis Nummern - Bundesländer [7]

1	Hamburg	5	Bremen	9	Nordrhein-Westf.	13	Saarland
2	Schleswig-Holstein	6	Niedersachsen	10	Hessen	14	Rheinland-Pfalz
3	Mecklenburg-Vorpom.	7	Sachsen-Anhalt	11	Thüringen	15	Baden-Württ.
4	Berlin	8	Brandenburg	12	Sachsen	16	Bayern

Der Fünf-Farben-Satz

Der Fünf-Farben-Satz bildet eine wichtige Vorstufe zum bekannten Vier-Farben-Problem. Er besagt, dass jeder planare Graph mit höchstens fünf Farben so gefärbt werden kann, dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben erhalten. Der zugrunde liegende Beweis ist vergleichsweise einfach und basiert auf vollständiger Induktion über die Anzahl der Knoten sowie der Tatsache, dass planare Graphen stets Knoten mit Grad höchstens fünf enthalten.

Satz 2.6.35 (Eulerscher Polyedersatz). *Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen gilt [51, 21]:*

$$|V| + |F| - |E| = 2$$

wobei $|V|$ die Anzahl der Knoten, $|E|$ die Anzahl der Kanten und $|F|$ die Anzahl der Flächen (einschließlich der Außenfläche) ist.

Lemma 2.6.36. *Jeder planare Graph enthält mindestens einen Knoten vom Grad höchstens fünf [56].*

Beweisskizze. Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt für planare Graphen mit mindestens drei Knoten die Ungleichung [56] $|E| \leq 3|V| - 6$. Da die Summe der Knotengrade $2|E|$ beträgt, ergibt sich ein mittlerer Knotengrad kleiner als sechs. Daher muss ein Knoten vom Grad höchstens fünf existieren. $\square$

Satz 2.6.37 (Fünf-Farben-Satz). *Jeder planare Graph ist mit höchstens fünf Farben färbbar [33], sodass benachbarte Knoten stets unterschiedliche Farben erhalten:*

$$\chi(G) \leq 5$$

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf vollständiger Induktion über die Anzahl der Knoten. Ein Knoten vom Grad höchstens fünf (existiert laut Lemma) wird entfernt. Der Restgraph wird mit fünf Farben (Induktionsvoraussetzung) gefärbt und der Knoten wird wieder hinzugefügt. In allen Fällen außer einem ist eine Farbe verfügbar. Im verbleibenden Fall (wenn der Knoten Grad fünf hat und alle Nachbarn verschieden gefärbt sind) kann durch Umfärbung entlang sogenannter Kempe-Ketten eine Farbe freigemacht werden. $\square$

Drei-Farben-Satz

Nicht alle planaren Graphen benötigen vier oder fünf Farben, um korrekt gefärbt zu werden. In vielen Fällen genügen bereits drei Farben. Allerdings lässt sich nicht jeder planare Graph mit drei Farben färben, ohne dass benachbarte Knoten dieselbe Farbe erhalten. Der sogenannte Drei-Farben-Satz gilt also nicht allgemein. Es sind jedoch spezielle Klassen planarer Graphen [32, 37] bekannt, bei denen eine 3-Färbung stets möglich ist. Ein bedeutendes Beispiel liefert der folgende Satz:

Satz 2.6.38 (Satz von Grötzsch). *Für jeden planaren Graphen, der keinen Kreis der Länge 3 enthält, gilt: Seine Knoten können mit 3 Farben eingefärbt werden.*

Während sich klassische Färbungsprobleme damit beschäftigen, wie wenige Farben man verwenden kann, stellt die extremale Graphentheorie gewissermaßen die Gegenfrage: Wie viele Kanten kann ein Graph unter gegebenen Bedingungen maximal enthalten, ohne eine bestimmte Eigenschaft – etwa einen vollständigen Teilgraphen – aufzuweisen? Diese Perspektive erlaubt es, die Strukturen in Graphen gezielt zu untersuchen, die gerade noch nicht gewisse Regularitäten erzwingen. Diese Denkweise bereitet den Übergang

zur Ramsey-Theorie vor, bei der die Unvermeidbarkeit bestimmter Strukturen im Vordergrund steht.

2.6.4 Extremale Graphentheorie

Ein besonders faszinierender Teilbereich der Graphentheorie ist die **extremale Graphentheorie** [38], die sich mit Grenzfragen befasst: Sie untersucht, wie viele Knoten, Kanten oder andere Strukturelemente ein Graph höchstens oder mindestens enthalten darf, ohne eine bestimmte Eigenschaft zu besitzen. Ihre Ursprünge reichen zurück bis ins Jahr 1941 mit dem klassischen Satz von Turán [1], und sie bildet bis heute ein aktives und tiefgreifendes Forschungsfeld.

Von besonderem Interesse ist ihre enge Verbindung zur **Ramsey-Theorie** [42], die sich gewissermaßen mit dem Gegenteil beschäftigt: Während die extremale Graphentheorie fragt, wie weit sich gewisse Strukturen vermeiden lassen, untersucht die Ramsey-Theorie, wann sie unausweichlich auftreten – etwa in Form von monochromatischen Teilgraphen [17, 49]. Die Unterschiede werden in Kapitel 4.2 näher behandelt.

Der **Satz von Turán** ist ein fundamentales Resultat der Graphentheorie. Er wurde 1941 von Paul Turán [1] formuliert. Turán [56], ein ungarischer Mathematiker, führte seine Forschungen in diesem Gebiet auch während seiner Inhaftierung in Arbeitslagern des Zweiten Weltkriegs fort. Sein Satz befasst sich mit der Frage [1], wie viele Kanten ein einfacher Graph mit n Knoten maximal enthalten darf, ohne eine Clique zu enthalten.

Satz 2.6.39 (Satz von Turán). *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $G = (V, E)$ ein Graph mit n Ecken. Wenn G keine Clique der Größe k enthält, dann gilt [56]:*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Zusätzlich ist der Satz durch $k \geq 2$ eingeschränkt.

Beispiel 2.6.40. Wie viele Kanten darf ein Graph mit 10 Knoten haben, ohne eine Clique K_4 , also 4 vollständig verbundene Knoten?

Hier ist $k = 4$ und $n = 10$.

Dann gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{4-1}\right) \frac{10^2}{2} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 50 = 33, \bar{3}$$

Der Graph darf höchstens 33 Kanten haben, wenn er keine Clique der Größe 4 enthalten soll.

Die im Satz von Turán beschriebene obere Schranke für die Anzahl an Kanten in einem K_k -freien Graphen wird genau dann erreicht, wenn der betrachtete Graph ein sogenannter Turán-Graph [31] ist.

Definition 2.6.41 (Turán-Graph). Ein Turán-Graph [31, 1] mit n Knoten und ohne K_k wird als $T_{k-1}(n)$ oder $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ bezeichnet. Dabei handelt es sich um einen vollständig $(k-1)$ -partiten Graphen, das heißt:

- Die Knotenmenge ist in $k-1$ disjunkte Teilmengen $V_1, \dots, V_{k-1}$ partitioniert.
- Innerhalb jeder Menge gibt es keine Kanten, das heißt die Mengen sind unabhängig.
- Zwischen Knoten aus verschiedenen Mengen existieren alle möglichen Kanten.

Die Besonderheit des Turán-Graphen liegt in der gleichmäßigen Verteilung. Das garantiert die maximale Anzahl an Kanten [32] bei gegebener Knotenanzahl n , ohne dass eine K_k -Clique entsteht. Die Mächtigkeiten der Partitions Mengen [1] $n_1, \dots, n_{k-1}$ dürfen sich um höchstens 1 unterscheiden.

Beispiel 2.6.42. Der Graph $K_{2,3,4}$ (Abbildung 2.33) besteht aus drei Partitions Mengen mit jeweils 2, 3 und 4 Knoten. Es existieren alle möglichen Kanten zwischen Knoten aus verschiedenen Partitions Mengen, jedoch keine Kanten innerhalb einer Partitions Menge. Der Graph hat insgesamt 9 Knoten und soll keine Clique der Größe 4 enthalten.

Nach dem Satz von Turán ergibt sich für einen solchen Graphen eine maximale Kantenanzahl von:

$$\left(1 - \frac{1}{4-1}\right) \frac{9^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{81}{2} = 27 \text{ Kanten}$$

Die Struktur enthält 26 Kanten und damit nicht mehr als die im Turán-Satz angegebene maximale Anzahl. Die Zahl 27 stellt nur eine obere Schranke dar, die im Idealfall (gleichmäßige Verteilung der Knoten) erreicht wird.

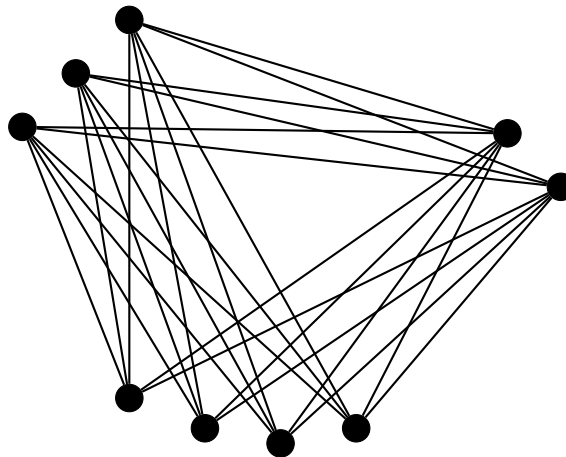


Abbildung 2.33: 3-partiter Graph $K_{2,3,4}$

3 Grundlagen der Ramsey-Theorie

Die Ramsey-Theorie ist ein Teilgebiet der extremalen Kombinatorik und befasst sich mit der fundamentalen Frage, unter welchen Bedingungen zwangsläufig geordnete Strukturen in hinreichend großen oder komplexen Systemen auftreten. Sie basiert auf der Idee, dass in einem scheinbar chaotischen Umfeld ab einer bestimmten Größe immer eine gewisse Ordnung entsteht – ein Prinzip, das unter dem Begriff Strukturzwang bekannt ist.

Die theoretischen Wurzeln der Ramsey-Theorie liegen in einem logischen Beweis von Frank Plumpton Ramsey aus dem Jahr 1930, der ursprünglich nicht im Kontext der Graphentheorie, sondern in der mathematischen Logik verortet war. Erst durch die Arbeiten von Paul Erdős und George Szekeres in den 1930er-Jahren wurde die zentrale Aussage Ramseys auf graphentheoretische Fragestellungen übertragen.

In diesem Kapitel werden die Grundprinzipien der Ramsey-Theorie, ihre historischen Ursprünge und zentralen Aussagen behandelt. Anhand ausgewählter Beispiele, bekannter Ramsey-Zahlen sowie bedeutender Verallgemeinerungen und strukturverwandter Sätze wird aufgezeigt, wie eng die Idee des unausweichlichen Auftretens von Ordnung mit verschiedensten Bereichen der Mathematik verknüpft ist. Ziel ist es, ein grundlegendes Verständnis für diese faszinierende Theorie zu entwickeln, die an der Schnittstelle von Kombinatorik, Logik und Graphentheorie steht und bis heute Gegenstand intensiver Forschung ist.

3.1 Schubfachprinzip

Das **Schubfachprinzip** (englisch: *Pigeonhole Principle*) oder Dirichlet-Prinzip [10], ist ein fundamentales Prinzip der Mathematik, das primär zum Nachweis von Existenzaussagen dient. Es hat seinen Ursprung [51] in der Kombinatorik und wurde erstmals explizit vom deutschen Mathematiker Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet formuliert.

Satz 3.1.1 (Einfaches Schubfachprinzip). *Das **einfache Schubfachprinzip** [22, 2] besagt, dass wenn man $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, dann enthält mindestens ein Schubfach zwei Objekte. Hierbei bezeichnet n [51] eine natürliche Zahl.*

Beweis. Der Beweis [30] erfolgt typischerweise indirekt durch Widerspruch. Würde jedes der n Schubfächer höchstens ein Objekt enthalten, dann gäbe es insgesamt höchstens

n Objekte. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung, dass $n + 1$ Objekte verteilt wurden. $\square$

Das Schubfachprinzip stellt einen nicht-konstruktiven Existenzbeweis [30] dar. Er garantiert die Existenz eines Objekts mit einer bestimmten Eigenschaft, ohne jedoch anzugeben, wie dieses Objekt konkret gefunden werden kann. Bildlich gesprochen weiß man, dass sich mindestens zwei Objekte in einem Schubfach befinden müssen, doch welches Schubfach dies ist, bleibt unbekannt. Das Prinzip wird klassischerweise mit dem Bild von Tauben und Taubenschlägen veranschaulicht.

Beispiel 3.1.2. Angenommen, es stehen nur sieben Plätze zur Verfügung, auf denen acht Tauben untergebracht werden sollen. Da mehr Tauben als Plätze vorhanden sind, folgt aus dem Schubfachprinzip zwangsläufig, dass mindestens zwei Tauben denselben Platz teilen müssen. In Abbildung 3.1 werden die Plätze als Kästchen und die Tauben als Punkte dargestellt.

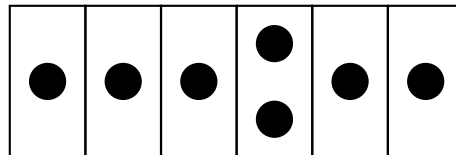


Abbildung 3.1: Beispiel fürs Schubfachprinzip: 7 Objekte in 6 Fächern verteilt

Das Schubfachprinzip lässt sich anschaulich anhand einfacher Alltagssituationen verdeutlichen. Solche Beispiele werden häufig zur Einführung des Themas genutzt, um das zugrundeliegende Strukturprinzip intuitiv zugänglich zu machen:

- In einer Gruppe von 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben [55]. Es gibt nämlich nur 12 Monate, also mehr Objekte als Kategorien.
- Befinden sich acht Personen in einem Raum, so müssen mindestens zwei am selben Wochentag geboren sein [51], da es lediglich sieben Wochentage gibt.
- Möchte man aus einem Korb mit weißen und schwarzen Socken blind mindestens zwei Socken gleicher Farbe entnehmen, so sind drei Socken nötig [10]. In diesem Fall stehen drei Objekte (Socken) zwei Kategorien (Farben) gegenüber. Das Schubfachprinzip garantiert, dass mindestens zwei gleichfarbige Socken dabei sind.

Das Prinzip existiert in mehreren verallgemeinerten Formen, die seine Anwendbarkeit erweitern:

1. **Verallgemeinertes Schubfachprinzip** [30, 10]: Wenn m Objekte in n Kategorien eingeteilt werden und die Bedingung $m > r \cdot n$ erfüllt ist, so enthält mindestens eine Kategorie mindestens $r + 1$ Objekte.
2. **Unendliches Schubfachprinzip** [14]: Werden unendlich viele Objekte auf nur endlich viele Kategorien verteilt, so lässt sich daraus schließen, dass mindestens eine dieser Kategorien unendlich viele Objekte aufnehmen muss. Andernfalls wären insgesamt nur endlich viele Objekte untergebracht – ein Widerspruch zur Ausgangsannahme.

Die fundamentale Idee hinter dem Schubfachprinzip, dass aus einer bloßen Überfülle zwangsläufig Wiederholung und somit Struktur entsteht, bildet das konzeptuelle Fundament der **Ramsey-Theorie** [14]. Diese greift das Prinzip nicht nur auf, sondern hebt es auf eine abstraktere Ebene: Während das Schubfachprinzip garantiert, dass bei der Verteilung endlich vieler Objekte auf weniger Kategorien mindestens eine Kategorie mehrfach belegt wird, zeigt die Ramsey-Theorie, dass selbst in komplexen, scheinbar ungeordneten Strukturen geordnete Teilstrukturen unvermeidlich sind. Der Übergang vom konkreten Schubfach zur abstrakten Färbung vollständiger Graphen markiert eine bemerkenswerte Generalisierung, die in der Arbeit von Frank Plumpton Ramsey ihren Ursprung nahm. Seine bahnbrechenden Überlegungen legten nicht nur den Grundstein für ein neues Teilgebiet der Kombinatorik, sondern verdeutlichten auch, wie aus einem einfachen Prinzip tiefgreifende mathematische Einsichten hervorgehen können.

3.2 Historischer Hintergrund und Idee

Dieses Kapitel beleuchtet die Ursprünge und die konzeptuelle Grundlage der Ramsey-Theorie. Ziel ist es, die historischen Entwicklungen nachzuzeichnen, die zu Ramseys zentralem Satz führten, und die zugrunde liegende Idee verständlich zu machen: Ordnung ist in hinreichend großen Strukturen unvermeidlich.

3.2.1 Entwicklungsgeschichte der Ramsey-Theorie

Die Ramsey-Theorie ist nicht das Ergebnis einer einzelnen Entdeckung [48], sondern ging aus mehreren unabhängigen Entwicklungen hervor, die später zu einer kohärenten Theorie zusammengeführt wurden. Der Namensgeber, Frank Plumpton Ramsey [56], war ein Mathematiker aus Cambridge, der trotz seines frühen Todes im Alter von nur 26 Jahren wegweisende Beiträge in Mathematik, Logik und Philosophie leistete. Sein berühmtes Resultat, das heute als **Ramseys Theorem** bekannt ist, wurde im Jahr 1930 unter dem Titel „On a problem of formal logic“ [29] veröffentlicht. Ursprünglich

diente es lediglich als Hilfslemma [48] in einem logiktheoretischen Kontext. Die Tragweite und das kombinatorische Potenzial dieses Satzes wurden jedoch erst später erkannt [8] und übertrafen die ursprüngliche Zielsetzung bei Weitem.

Die historische Entwicklung der Ramsey-Theorie [53, 48, 17] ist geprägt von einer Reihe bedeutender Vorläufer, deren Bedeutung teilweise erst rückblickend erkannt wurde:

- **Hilberts Würfellemma (1892):** David Hilbert bewies, dass für jedes Paar positiver ganzer Zahlen r und n eine minimale ganze Zahl $m = H(r, n)$ existiert, sodass in jeder r -Färbung von $[m]$ ein monochromatischer n -dimensionaler affiner Würfel enthalten ist. Obwohl dieses Ergebnis keine unmittelbare Wirkung auf die Ramsey-Theorie hatte, wird es heute als früher Vorläufer betrachtet.
- **Schurs Satz (1916) (Kapitel 3.6.2):** Issai Schur zeigte, dass bei jeder endlichen Färbung der natürlichen Zahlen stets einfarbige Tripel a, b, c mit $a + b = c$ existieren. Dies war der erste kombinatorische Existenzbeweis dieser Art. Im Gegensatz zu Hilbert erkannte Schur die Relevanz der Entdeckung und forschte daran weiter.
- **Satz von van der Waerden (1927) (Kapitel 3.6.1):** Bartel Leendert van der Waerden bewies, dass jede endliche Färbung der natürlichen Zahlen monochromatische arithmetische Progressionen beliebiger Länge enthält. Sein Beitrag markiert einen wichtigen Schritt in Richtung des Strukturzwangs.

Ramsey formulierte 1930 erstmals präzise die Idee, dass in hinreichend großen, gefärbten Strukturen zwangsläufig Ordnung entsteht. Es wurde zur formalen Grundlage der heutigen Ramsey-Theorie. Nur wenige Jahre später, im Jahr 1935, wurde das Resultat durch Paul Erdős und George Szekeres unabhängig wiederentdeckt [48], als sie ein von Esther Klein angeregtes geometrisches Problem untersuchten. Ihre Arbeit [17] trug wesentlich zur Popularisierung des Satzes bei und leitete über zur graphentheoretischen Interpretation. Dabei entstanden auch erste konkrete Schätzungen für sogenannte Ramsey-Zahlen.

Die oben dargestellten Ereignisse stellen die zentralen Meilensteine der Ramsey-Theorie dar. Weitere historische Beiträge, die für das Gesamtverständnis relevant, aber hier nicht im Detail ausgeführt wurden, sind im folgenden Zeitstrahl zusammengefasst.

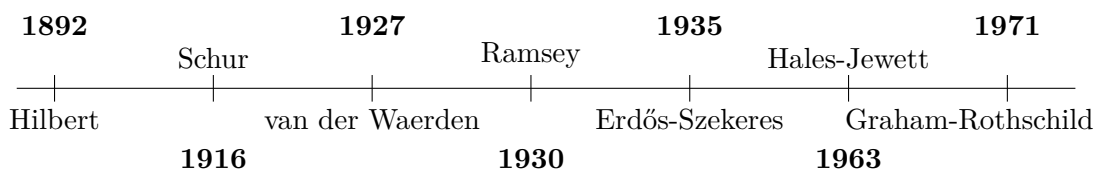


Abbildung 3.2: Wichtige Beiträge zur Entwicklung der Ramsey-Theorie

3.2.2 Ordnung im Chaos – das zentrale Prinzip

Die Ramsey-Theorie ist ein Teilgebiet der Mathematik [53], das sich mit der unvermeidbaren Existenz von Ordnung in ausreichend großen, scheinbar unstrukturierten Systemen beschäftigt. Sie stellt die zentrale Frage [8], unter welchen Bedingungen eine Struktur notwendigerweise wohlgeordnete Teilstrukturen enthalten muss.

Ein prägnanter Ausdruck zu dieser Idee stammt von Theodore Motzkin [6]: „Völlige Unordnung ist unmöglich.“ Unabhängig davon, wie chaotisch oder willkürlich ein System auf den ersten Blick erscheinen mag, sobald es eine bestimmte Größe überschreitet, erzwingt diese Größe das Auftreten einer bestimmten Ordnung.

Zentral dabei ist das Konzept der Färbung, also der Einteilung von Elementen in sogenannte Farbklassen [56, 53]. Besonders relevant ist die Färbung der Kanten (Kapitel 2.6.2). Ramseys Satz [48] besagt, dass in jeder Kantenfärbung eines hinreichend großen vollständigen Graphen zwangsläufig eine vollständig einfarbige (monochrome) Clique bestimmter Größe existiert. Mit anderen Worten: Unabhängig davon, wie die Färbung gewählt wird, lässt sich eine geordnete, einfarbige Teilstruktur nicht vermeiden.

Damit stellt der Satz eine tiefgreifende Verallgemeinerung des klassischen Schubfachprinzips von Dirichlet dar, das bereits besagt, dass unter bestimmten Bedingungen Wiederholungen oder Strukturen unvermeidlich sind. Die Ramsey-Theorie erweitert diesen Gedanken von einfachen Mengen auf komplexe kombinatorische Objekte wie Graphen, Mengenfamilien und mehr.

Die Theorie hat zahlreiche Anwendungen [53] und Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik, insbesondere zur Kombinatorik, Zahlentheorie, Geometrie, Topologie und Mengenlehre.

3.3 Satz von Ramsey

Das Phänomen [56], das der Ramsey-Theorie zugrunde liegt, ist, dass hinreichend große Objekte automatisch wohlstrukturierte Teilobjekte enthalten müssen. Formal befasst sich der Satz von Ramsey mit dem Färben von Kanten eines vollständigen Graphen und der Frage [23], ob unter diesen Färbungen immer ein vollständiger Untergraph, eine Clique, einer bestimmten Größe existiert, dessen Kanten alle dieselbe Farbe haben.

Der Satz von Ramsey lässt sich formal wie folgt ausdrücken [56, 23]:

Satz 3.3.1 (Satz von Ramsey). *Für alle natürlichen Zahlen $s, t \in \mathbb{N}$ existiert eine kleinste Zahl $R(s, t)$, sodass jede 2-Färbung der Kanten eines vollständigen Graphen K_n mit $n \geq R(s, t)$ entweder eine vollständig rote Clique K_s der Größe s oder eine*

3 Grundlagen der Ramsey-Theorie

vollständig blaue Clique K_t der Größe t enthält. Die Zahl $R(s, t)$ wird als **Ramsey-Zahl** bezeichnet.

Der Satz von Ramsey [9] besagt also, dass für beliebige $s, t \geq 2$ die Ramsey-Zahl endlich ist. In der Literatur [6, 47, 16] werden häufig die Buchstaben r und b verwendet, da sie sich auf die Farben *rot* und *blau* beziehen, die traditionell zur Darstellung der Kantenfärbung genutzt werden.

Beweis. Der Beweis der Endlichkeit von $R(s, t)$ [9, 1] erfolgt üblicherweise durch Induktion und stützt sich auf die Rekursionsbeziehung:

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1) \quad (3.1)$$

1. **Induktionsanfang:** Basisfall (Abbildung 3.3): Betrachten wir einen vollständigen Graphen mit 2 Knoten (K_2). Dieser hat nur eine Kante. Egal welche Farbe diese Kante hat (rot oder blau), es existiert immer ein K_2 der gefärbten Farbe. Daher ist $R(2, 2) = 2$ und somit endlich.



Abbildung 3.3: Mögliche Färbungen der Kante zwischen Knoten 1 und Knoten 2; rote Kanten sind durchgezogen, blaue Kanten gestrichelt dargestellt.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Angenommen, $R(s - 1, t)$ und $R(s, t - 1)$ existieren und sind endlich.
3. **Induktionsschritt:** Beweis von Ungleichung 3.1:
 - a) Betrachten wir einen vollständigen Graphen K_n mit $n = R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$ Knoten und färben wir seine Kanten rot oder blau.
 - b) Wir wählen einen beliebigen Knoten x . Er hat $n - 1$ Nachbarn, die entweder mit x durch eine rote Kante verbunden sind oder durch eine blaue Kante.
 - c) Es gibt also die zwei Mengen:

$$A = \{\text{Menge der Knoten, die mit } x \text{ durch eine rote Kante verbunden sind}\}$$

$$B = \{\text{Menge der Knoten, die mit } x \text{ durch eine blaue Kante verbunden sind}\}$$

- d) Da es nur zwei Farben gibt $|A| + |B| = n - 1$, sagt das Schubfachprinzip: Wenn du $R(s - 1, t) + R(s, t - 1) - 1$ Kanten hast und sie auf zwei Farben verteilst, dann muss mindestens eine Farbe mindestens so oft auftreten wie

der größere der beiden Summanden. Eine der beiden Bedingungen muss also erfüllt sein:

$$|A| \geq R(s-1, t) \quad (3.2)$$

$$|B| \geq R(s, t-1) \quad (3.3)$$

- e) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass 3.2 gilt. Das bedeutet: Unter den $n-1$ Nachbarn von x gibt es mindestens $R(s-1, t)$ Knoten, die über rote Kanten mit x verbunden sind. Wir bezeichnen diese Knoten als Menge A (Abbildung 3.4).

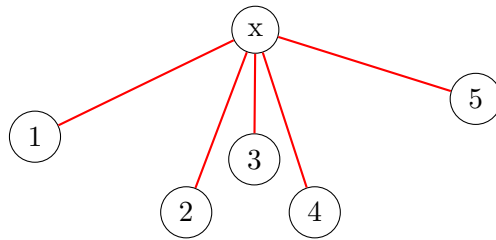


Abbildung 3.4: Ausgangssituation für Fall 1: Alle Knoten der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind über rote, durchgezogene Kanten mit dem Knoten x verbunden. Diese Konstellation bildet die Grundlage für die folgende Analyse des Teilgraphen auf A im Beweis des Ramsey-Satzes.

Wir betrachten nun den induzierten Teilgraphen auf der Menge A , also den vollständigen Graphen auf den Knoten in A . Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

- Fall 1 (Abbildung 3.5) - eine **blaue** Clique der Größe t existiert in A : Dann enthält der Teilgraph auf A eine vollständig blau gefärbte Clique der Größe t . Da alle Kanten innerhalb dieser Clique blau sind, ist die Behauptung erfüllt - wir haben eine gesuchte monochromatische Clique gefunden.
- Fall 2 (Abbildung 3.6) - keine blaue Clique der Größe t in A : Dann garantiert uns die Definition der Ramsey-Zahl $R(s-1, t)$, dass der Teilgraph auf A eine **rote** Clique der Größe $s-1$ enthalten muss. Diese besteht aus $s-1$ Knoten, die untereinander alle mit roten Kanten verbunden sind.

Weil zusätzlich alle Knoten in A mit dem Knoten x über rote Kanten verbunden sind, können wir x zur roten Clique hinzufügen. Dadurch entsteht eine **rote** Clique der Größe s .

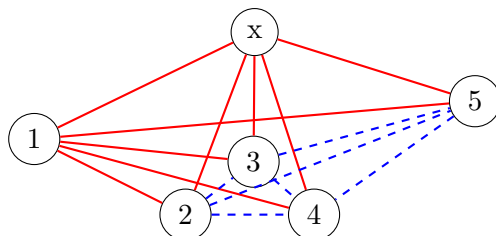
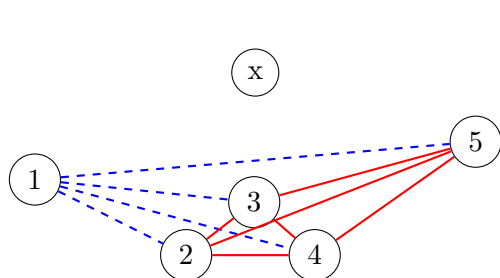
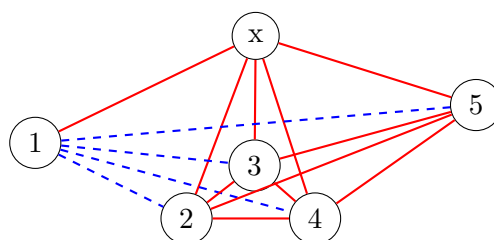


Abbildung 3.5: Darstellung Fall 1: Der Knoten x ist über rote, durchgezogene Kanten mit allen Knoten der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ verbunden. Im Teilgraphen auf A existiert eine vollständig blau gefärbte Clique der Größe $t = 4$ (hier die Knoten 2, 3, 4, 5), dargestellt durch gestrichelte blaue Kanten.



(a) Teilgraph auf der Menge A mit einer vollständig rot gefärbten Clique der Größe $s - 1 = 4$.



(b) Erweiterung durch den Knoten x , der mit allen Knoten der roten Clique verbunden ist – ergibt eine rote Clique der Größe $s = 5$.

Abbildung 3.6: Darstellung Fall 2: Im Teilgraphen auf der Menge A existiert keine vollständig blau, strichliert gefärbte Clique der Größe t , wohl aber eine vollständig rot gefärbte Clique der Größe $s - 1 = 4$ (hier die Knoten 2, 3, 4, 5). Da alle Knoten dieser Clique zusätzlich über rote, durchgezogene Kanten mit dem Knoten x verbunden sind, ergibt sich durch Hinzufügen von x eine vollständig rot gefärbte Clique der Größe $s = 5$.

3.4 Beispiele und bekannte Ramsey-Zahlen

4. **Folgerung:** In beiden Fällen existiert somit entweder eine blaue Clique der Größe t oder eine rote Clique der Größe s . Damit ist gezeigt, dass:

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1)$$

□

Ein klassisches Beispiel ist $R(3, 3) = 6$. Es besagt, dass unter sechs beliebigen Personen stets drei existieren, die sich entweder alle gegenseitig kennen oder alle gegenseitig nicht kennen. Dieses sogenannte *Party-Problem* eignet sich besonders gut zur Veranschaulichung der Aussage. Wird jede Zweierbeziehung zwischen den Personen durch eine farbige Kante dargestellt, **rot** für bekannt, **blau** für unbekannt, so garantiert der Satz und unser obiger Beweis, dass sich unter den Kanten ein monochromatisches Dreieck finden lässt.

Die bisherige Form des Satzes betrachtete nur zwei Farben. Ramsey's Theorem lässt sich jedoch auf beliebig viele Farben verallgemeinern:

Satz 3.3.2 (Allgemeiner Satz von Ramsey). *Für alle natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ gilt:*

$$R(n_1, n_2, \dots, n_k) < \infty$$

Der allgemeine Satz von Ramsey besagt [9] also, dass es für alle natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 2$ eine kleinste natürliche Zahl $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ gibt. Diese Zahl hat die Eigenschaft, dass in jeder k -färbigen Kantenfärbung eines vollständigen Graphen K_n mit $n \geq R(n_1, n_2, \dots, n_k)$ mindestens eine vollständig einfarbige Clique K_{n_i} existiert, deren Kanten alle die Farbe i haben - unabhängig davon, wie die Färbung gewählt wird.

3.4 Beispiele und bekannte Ramsey-Zahlen

Nach dem allgemeinen Satz von Ramsey stellt sich die Frage, wie groß die entsprechenden Ramsey-Zahlen tatsächlich sind. In diesem Kapitel werden bekannte Beispiele, bewiesene Werte sowie offene Fragestellungen vorgestellt.

3.4.1 Allgemeine Schranken

Die Bestimmung der genauen Werte von Ramsey-Zahlen ist schwierig, da sie mit zunehmender Größe bemerkenswert schnell wachsen. Daher konzentriert sich ein großer Teil der Forschung auf die Ermittlung von oberen und unteren Schranken [9, 1] für diese Zahlen.

3 Grundlagen der Ramsey-Theorie

Satz 3.4.1 (Obere Schranke für Ramsey-Zahlen). *Eine obere Schranke [6, 9] für $R(s, t)$ kann rekursiv von 3.1 abgeleitet werden. Dies führt zu der kombinatorischen Formel:*

$$R(s, t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Beweis. Man geht davon aus, dass man die obere Schranke für die Ramsey-Zahlen $R(s-1, t)$ und $R(s, t-1)$ kennt. Dann setzt man in die Rekursionsgleichung 3.1 für $R(s-1, t) \leq \binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1}$ und für $R(s, t-1) \leq \binom{s+(t-1)-2}{(s-1)}$.

$$\begin{aligned} R(s, t) &\leq R(s-1, t) + R(s, t-1) \\ &\leq \binom{(s-1)+t-2}{(s-1)-1} + \binom{s+(t-1)-2}{(s-1)} = \binom{(s+t)-2}{s-1} \\ R(s, t) &\leq \binom{(s+t)-2}{s-1} \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt benötigt man Pascals Regel:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

In unserem Fall ist $n-1 = s+t-3$, $k-1 = s-2$ und $k = s-1$. □

Diese allgemeine obere Schranke ist ein hervorragender Ausgangspunkt, auch wenn die Lücke zu den tatsächlichen Werten mit zunehmenden s und t größer wird.

Definition 3.4.2 (Diagonale Ramsey-Zahlen). Die Ramsey-Zahl $R(s, s)$ ist die kleinste natürliche Zahl n , sodass jede 2-Kantenfärbung (z.B. rot und blau) eines vollständigen Graphen K_n entweder eine rote Clique der Größe K_s oder eine blaue Clique der Größe K_s enthält.

Satz 3.4.3 (Obere Schranke für diagonale Ramsey-Zahlen). *Für den Spezialfall der diagonalen Ramsey-Zahlen ergibt sich [1]:*

$$R(s, s) \leq \binom{2s-2}{s-1} = \binom{2s-3}{k-1} + \binom{2s-3}{k-2} \leq 2^{2s-3}$$

Robert Wayne Thomason hat 1988 eine weitere Verbesserung der oberen Schranke [9] gefunden:

$$R(s, s) \leq \frac{2^{2s}}{s}$$

Satz 3.4.4 (Untere Schranke für diagonale Ramsey-Zahlen). *Eine untere Schranke der diagonalen Ramsey-Zahlen [1, 24] ist:*

$$R(s, s) \geq 2^{\frac{s}{2}}$$

Das ist die berühmte untere exponentielle Schranke, die Erdős mit probabilistischen Methoden bewiesen hat.

Während sich für die diagonalen Ramsey-Zahlen $R(s, s)$ eine einfache untere Schranke angeben lässt, ist keine ähnlich einfache allgemeine untere Schranke für $R(s, t)$ mit $s \neq t$ bekannt. In der Literatur [9, 39, 28] dominieren in diesem Fall komplexere probabilistische oder rekursive Abschätzungen.

3.4.2 Spezifische Werte und die besten bekannten Schranken

Ramsey-Zahlen sind berühmt für die Schwierigkeit ihrer genauen Bestimmung. Auch wenn einige Grenzen bestimmt wurden, sind heute nur wenige exakte Werte [8] bekannt. Triviale Fälle [6, 1]:

- $R(1, t) = 1$
- $R(2, t) = t$

Die Zahl $R(3, 3) = 6$ [8] ist eines der bekanntesten und am häufigsten zitierten Beispiele in der Ramsey-Theorie. Sie ist nicht nur historisch bedeutsam, sondern lässt sich auch leicht visualisieren und ist daher besonders anschaulich. Dieses Beispiel ist als *Party-Problem* bekannt und wird oft verwendet, um das Grundprinzip der Ramsey-Zahlen zu illustrieren.

Beispiel 3.4.5 (Das Party-Problem [9]). Stellen wir uns eine Party mit sechs Personen vor. Die Ramsey-Zahl $R(3, 3) = 6$ besagt, dass unter diesen sechs Personen immer eine Gruppe von drei Personen geben muss, die sich entweder alle gegenseitig kennen oder alle gegenseitig fremd sind. Die Beziehungen zwischen den Personen werden als vollständiger Graph K_6 modelliert, wobei jede Kante entweder rot (sie kennen sich) oder blau (sie kennen sich nicht) gefärbt ist. Das Ziel ist es zu zeigen, dass jede 2-Färbung der Kanten des Graphen K_6 notwendigerweise ein einfarbiges Dreieck enthält.

Wähle eine beliebige Person A aus. Diese Person hat 5 Beziehungen zu den anderen Gästen. Wir haben 5 Kanten von A zu den anderen Personen, die in 2 Farben (Schubfächer) eingeteilt werden: rot oder blau. Nach dem Schubfachprinzip müssen mindestens 3 dieser 5 Beziehungen dieselbe Farbe haben. Nehmen wir an, A kennt die drei Personen B, C und D . Falls sich nun zwei dieser drei Personen (etwa B und C) ebenfalls kennen, dann bilden A, B und C ein rotes Dreieck. Falls sich keine der drei untereinander kennt, dann bilden B, C und D ein blaues Dreieck. In beiden Fällen entsteht ein einfarbiges Dreieck.

3 Grundlagen der Ramsey-Theorie

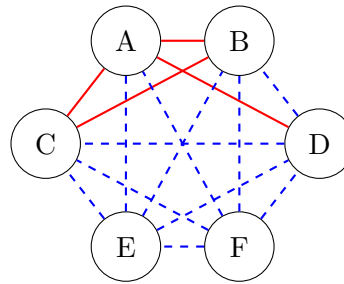


Abbildung 3.7: Visualisierung des Party-Problems im Fall $R(3,3) = 6$: Unabhängig von der Färbung der Kanten in rot (durchgängig) und blau (strichliert) enthält jeder vollständige Graph auf sechs Knoten entweder eine vollständig rot oder eine vollständig blau gefärbte Clique der Größe drei.

Ein gängiger Ansatz zur Bestimmung von Ramsey-Zahlen besteht darin, Gegenbeispiele zu konstruieren. Dabei werden alle möglichen Färbungen der Kanten eines vollständigen Graphen untersucht, um zu zeigen, dass eine bestimmte monochrome Clique noch nicht zwangsläufig entsteht. Im Fall von fünf Personen (siehe Abbildung 3.8) lässt sich beispielsweise keine vollständig rot oder blau gefärbte Clique der Größe drei finden. Erst ab 6 Knoten tritt eine solche Färbung zwangsläufig auf. Der Fall von fünf Personen ist also das Gegenbeispiel zum Fall $R(3,3) = 6$.

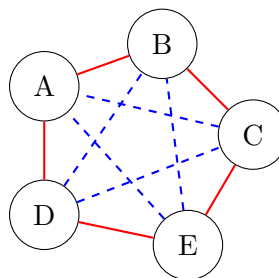


Abbildung 3.8: Gegenbeispiel für K_5 : Eine Färbung der Kanten in rot (durchgängig) und blau (strichliert), bei der keine monochrome Clique der Größe drei entsteht – ein Beleg dafür, dass $R(3,3) > 5$ gilt.

Weitere bekannte Werte [30, 8, 48, 16, 9]:

- $R(3,4) = 9$
- $R(3,7) = 23$
- $R(4,4) = 18$
- $R(3,8) = 28$
- $R(3,6) = 9$
- $R(3,9) = 36$

- $R(4, 5) = 25$
- $R(3, 3, 4) = 30$
- $R(3, 3, 3) = 27$

$R(5, 5)$ ist bis heute unbekannt [16]. Die derzeit besten bekannten Schranken liegen bei $43 \leq R(5, 5) \leq 46$ [4]. Dies bedeutet, dass jede Rot-Blau-Färbung von K_{46} einen monochromatischen K_5 zwangsläufig enthält, und es existiert eine Rot-Blau-Färbung von K_{42} , die keinen K_5 in einer der beiden Farben aufweist. Für $R(10, 10)$ sind die Schranken $798 \leq R(10, 10) \leq 16064$ [8] bekannt.

Diese Schranken wurden mit aufwendigen Computermethoden gefunden. Die Anzahl der möglichen Färbungen wächst exponentiell mit der Anzahl der Knoten. Im Zusammenhang mit der aktuellen oberen Schranke $R(5, 5) \leq 46$ betrachtet man den vollständigen Graphen K_{46} mit

$$\binom{46}{2} = 1035 \text{ Kanten.}$$

Da jede Kante unabhängig in zwei Farben gefärbt werden kann, ergibt sich eine Gesamtzahl von 2^{1035} möglichen Färbungen.

Diese enorme Anzahl zeigt, warum der Nachweis der Existenz oder Nichtexistenz monochromer Cliques bei größeren Graphen rechnerisch sehr aufwändig ist und fast nur mit Computereinsatz gelingt. Die genaue Bestimmung weiterer Ramsey-Zahlen bleibt weiterhin ein herausforderndes Problem und ist bis heute Gegenstand intensiver kombinatorischer Forschung.

3.5 Eigenschaften und Verallgemeinerungen

Ramsey-Zahlen besitzen mehrere grundlegende Eigenschaften und lassen sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern:

- **Symmetrie der Ramsey-Zahlen:** Die Ramsey-Zahl $R(s, t)$ ist symmetrisch [15], was bedeutet, dass $R(s, t) = R(t, s)$ gilt. Dies ist eine natürliche Folge der Symmetrieeigenschaft von Graphen: Betrachtet man eine 2-Färbung eines vollständigen Graphen, so hat ein umgekehrter gefärbter Graph (rot wird blau und umgekehrt) äquivalente Bedingungen [6] für die Existenz einer monochromatischen Clique.
- **Monotonie der Ramsey-Zahlen:** Eine weitere zentrale Eigenschaft der Ramsey-Zahlen ist ihre Monotonie. Sie besagt, dass die Werte der Ramsey-Zahlen mit wachsendem Parameter nicht kleiner werden. Formal gilt:

$$R(s, t) \leq R(s + 1, t) \quad \text{und} \quad R(s, t) \leq R(s, t + 1).$$

Diese Eigenschaft ist intuitiv nachvollziehbar: Wenn also in einem vollständigen Graphen mit n Knoten schon garantiert ist, dass entweder eine rote Clique der Größe s oder eine blaue Clique der Größe t vorkommt, dann wird diese Eigenschaft nicht verschwinden, nur weil man jetzt eine noch eine größere Clique - zum Beispiel der Größe $s+1$ fordert. Im Gegenteil: Größere Cliques sind schwerer zu finden, daher braucht man dafür mindestens genauso viele Knoten, meist sogar mehr. Diese Eigenschaft hilft in vielen Beweisen und Tabellen, weil man so aus bekannten Werten direkt neue abschätzen kann.

- **Multikolorierte Ramsey-Zahlen:** Die klassische Definition kann auf mehr als zwei Farben erweitert werden (siehe Satz 3.3.2).
- **Erweiterung auf Hypergraphen (Definition 3.5.1):** Das Ramsey-Theorem kann auch auf Hypergraphen [24, 17] erweitert werden. Die Hypergraph-Ramsey-Zahl $R^{(k)}(s, t)$ bezeichnet die kleinste natürliche Zahl n , sodass jede zweifarbige Färbung der Kanten eines vollständigen k -uniformen Hypergraphen auf n Knoten entweder eine monochrom gefärbte vollständige k -uniforme Clique der Größe s oder t enthält.

Ein Hypergraph heißt dabei k -uniform, wenn jede Kante genau k Knoten umfasst – analog zu normalen Graphen, bei denen jede Kante zwei Knoten verbindet ($k = 2$). Die entsprechenden Ramsey-Zahlen wachsen mit steigendem k extrem schnell und sind bislang nur in wenigen Spezialfällen bekannt.

Definition 3.5.1 (Hypergraph). Ein k -uniformer Hypergraph ist ein Paar $H = (V, E)$, wobei V eine Menge von Ecken und E eine Sammlung von k -elementigen Teilmengen von V (sogenannten Hyperkanten) ist. Während ein gewöhnlicher Graph aus einer Menge von Knoten und Kanten besteht, wobei jede Kante genau zwei Knoten verbindet [20], kann eine Hyperkante in einem Hypergraphen mehr als zwei Knoten [5] gleichzeitig verbinden. Dies ermöglicht es, komplexere, nicht paarweise Beziehungen zwischen Objekten darzustellen.

Beispiel 3.5.2. Ein Beispiel (Abbildung 3.9) eines ungerichteten, ungewichteten Hypergraphen [5, 20]. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

$$E = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5, v_6\}, \{v_4\}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

- **Nicht-konstruktive Existenzbeweise:** Viele Existenzbeweise für Ramsey-Zahlen, insbesondere für untere Schranken, sind nicht konstruktiv. Berühmt ist der probabilistische Beweis von Erdős [8], mit dem sich zeigen lässt, dass bestimmte Ramsey-Zahlen existieren müssen – ohne dass man ein konkretes Beispiel kennt. Diese Methode zeigt, wie stark kombinatorische Aussagen durch Wahrscheinlichkeitsüberlegungen unterstützt werden können.

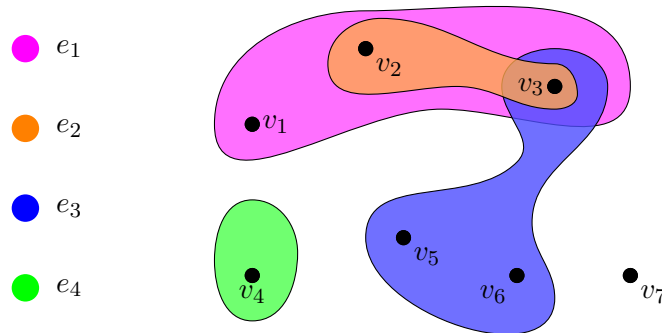


Abbildung 3.9: Beispiel eines Hypergraphen mit 7 Knoten und 4 Hyperkanten

3.6 Weitere strukturverwandte Sätze

Die Idee, dass durch einfache Färbungsregeln zwangsläufig geordnete Strukturen entstehen, findet sich nicht nur in der Ramsey-Theorie wieder. Auch in anderen Bereichen der Kombinatorik und Zahlentheorie treten ähnliche Phänomene auf. Zwei besonders bekannte Beispiele sind der Satz von Van der Waerden und der Satz von Schur.

3.6.1 Satz von Van der Waerden

Der Satz von Van der Waerden ist ein klassisches Beispiel dafür, dass bei jeder noch so „chaotischen“ Färbung der natürlichen Zahlen zwangsläufig geordnete Strukturen entstehen. Genauer gesagt: Wenn man die natürlichen Zahlen mit endlich vielen Farben färbt, lassen sich bestimmte arithmetische Muster nicht vermeiden.

Satz 3.6.1 (Satz von Van der Waerden). *Für jede Anzahl von Farben r und jede gewünschte Länge k existiert eine natürliche Zahl n [36], sodass jede r -Färbung der Zahlen $\{1, 2, \dots, n\}$ eine monochrome arithmetische Progression der Länge k enthält. Dies gilt nur für $r, k \in \mathbb{N}$ [48].*

Die Van-der-Waerden-Zahl $W(r, k)$ ist die kleinste Zahl n , die den Satz von Van der Waerden für gegebene r und k erfüllt.

Beispiel 3.6.2. Ein bekanntes Beispiel [6] ist $W(2, 3) = 9$. Eine mögliche Zerlegung der Menge $\{1, 2, \dots, 9\}$ in zwei Teilmengen ist in Tabelle 3.1 sichtbar. Die erste Teilmenge $\{1, 3, 4, 6, 9\}$ enthält die arithmetische Folge 3, 6, 9, die alle drei denselben Abstand haben und daher eine gleichfarbige Progression in der Farbe Blau bilden. Wäre hingegen 9 rot eingefärbt, ergäbe sich mit 5, 7, 9 eine arithmetische Folge der Länge 3 in der Farbe Rot. Dies zeigt, dass sich bei einer Zweifärbung der Zahlen von 1 bis 9 eine gleichfarbige

arithmetische Folge der Länge drei nicht mehr vermeiden lässt – eine solche Struktur tritt zwangsläufig auf.

Tabelle 3.1: Beispielhafte Färbung von $\{1, 2, \dots, 9\}$; gemäß $W(2, 3) = 9$ lässt sich eine gleichfarbige arithmetische Progression der Länge drei nicht vermeiden. B steht hier für die Farbe blau und R für die Farbe Rot.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	R	B	B	R	B	R	R	B

Dieser Satz hat zahlreiche Anwendungen in der Zahlentheorie [36] und zeigt, ähnlich wie die Ramsey-Theorie, dass bei ausreichender Größe geordnete Strukturen unvermeidbar werden, unabhängig davon, wie die Elemente gefärbt werden.

3.6.2 Satz von Schur

Der Satz von Schur ist ein weiteres klassisches Beispiel für zwanghafte Ordnung bei endlichen Färbungen.

Satz 3.6.3 (Satz von Schur). *Für jede positive ganze Zahl n (Anzahl der Farben) existiert eine kleinste positive ganze Zahl $f(n)$ [14]. Wenn die Menge $\{1, 2, \dots, f(n)\}$ in n beliebige disjunkte Teilmengen (Farbklassen) $T_1, \dots, T_n$ zerlegt wird, dann enthält mindestens eine dieser Teilmengen ein monochromatisches Tripel (a, b, c) [32, 14], das die Gleichung $a + b = c$ erfüllt. Dabei ist es nicht ausgeschlossen, dass zwei der Zahlen a, b, c gleich sind.*

Beispiel 3.6.4. Betrachtet man das Beispiel $f(2) = 5$. Die Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ werden mit zwei Farben eingefärbt. Wir betrachten jedoch zuerst die Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ (Tabelle 3.2) um auszuschließen, dass es bereits hier ein gleichfarbiges Tripel $a + b = c$ existiert.

Tabelle 3.2: Zweifärbung der Zahlen $\{1, 2, 3, 4\}$, bei der kein gleichfarbiges Tripel $a + b = c$ vorkommt. Diese Färbung zeigt, dass für $n = 4$ noch eine Schur-freie Einfärbung mit zwei Farben (R = rot, B = blau) möglich ist.

Zahl	1	2	3	4
Farbe	R	B	B	R

Wir prüfen die Tripel:

- $1 + 1 = 2 : R + R = B$ nicht gleichfarbig

- $1 + 2 = 3 : R + B = B$ nicht gleichfarbig
- $1 + 3 = 4 : R + B = R$ nicht gleichfarbig
- $2 + 2 = 4 : B + B = R$ nicht gleichfarbig

→ keine echte monochrome Lösung vorhanden.

Nun kommt die Zahl 5 ins Spiel (Tabelle 3.3). Sie kann als Summe von $1 + 4$ oder $2 + 3$ dargestellt werden. Da sowohl $1, 4 \in R$ als auch $2, 3 \in B$ sind, führt jede mögliche Färbung von 5 zu einem monochromen Tripel:

Tabelle 3.3: Wird die Zahl 5 zu der bisherigen Färbung ergänzt, entsteht – unabhängig von ihrer Farbe – ein gleichfarbiges Tripel ($R = \text{rot}$, $B = \text{blau}$) $a + b = c$.
Damit lässt sich $f(2) = 5$ nachweisen.

Zahl	1	2	3	4	5
Farbe	R	B	B	R	?

- Ist $5 \in R$, ergibt $\{1, 4, 5\}$ eine rote Lösung.
- Ist $5 \in B$, ergibt $\{2, 3, 5\}$ eine blaue Lösung.

Daher muss gelten:

$$f(2) = 5$$

Die zugehörige Schur-Zahl $f(n)$ gibt an, wie groß eine Menge mindestens sein muss, damit bei einer n -Färbung eine solche monochrome Lösung garantiert auftritt. Damit wird deutlich, dass auch additive Strukturen nicht beliebig „zerstört“ werden können.

Der Satz von Schur wird häufig der additiven Kombinatorik zugeordnet, steht aber in enger inhaltlicher Verbindung zur Ramsey-Theorie, da auch hier Ordnung durch Färbung entsteht. Die Schur-Zahl $f(n)$ ist nach oben durch eine Ramsey-Zahl begrenzt [32], genauer gilt $f(n) \leq R(3, 2, n)$. Die Existenz monochromatischer Tripel [32] mit $a + b = c$ kann also auch durch das Ramsey-Theorem über dreielementige monochromatische Mengen in gefärbten Graphen gezeigt werden.

Beweisidee: Egal wie man die Zahlen 1 bis $N := R(3, 2, n)$ mit n Farben einfärbt, es gibt immer drei gleich gefärbte Zahlen x, y, z , bei denen gilt $x + y = z$. Der Trick dabei ist, dass wir nicht direkt nach solchen Zahlen suchen, sondern uns die Abstände zwischen Zahlen anschauen. Wir färben die Abstände so ein, wie wir vorher die Zahlen eingefärbt haben. Wenn vorher die Zahl 5 rot gefärbt war, dann wird jede Kante zwischen zwei Zahlen, die Abstand 5 haben, rot.

3 Grundlagen der Ramsey-Theorie

Beweis. Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$f(n) \leq R(3, 2, n)$$

Dieser Zusammenhang soll bewiesen [56] werden.

1. Wir nehmen an, wir haben eine beliebige Färbung der Zahlen 1 bis $N := R(3, 2, n)$ mit n Farben. Diese Färbung nennen wir f , also:

$$f : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

2. Wir machen aus f eine Färbung von Kanten $\hat{f}$ zwischen Zahlen und definieren:

$$\hat{f}(\{i, j\}) := f(|j - i|)$$

3. Da $N = R(3, 2, n)$, sagt uns das Ramsey-Theorem, dass in dieser Kantenfärbung ein monochromatisches Dreieck existiert, also drei Zahlen $a < b < c$, bei dem alle drei Kanten dieselbe Farbe haben. Das heißt:

$$\hat{f}(\{a, b\}) = \hat{f}(\{b, c\}) = \hat{f}(\{a, c\}) := r_0$$

4. Jetzt schauen wir uns die Abstände an:

- $y := b - a$
- $z := c - b$
- $x := c - a$

Dann gilt:

$$y + z = (b - a) + (c - b) = c - a = x$$

Und weil die Kanten alle Farbe r_0 haben gilt weiter:

$$\hat{f}(y) = \hat{f}(\{a, b\}) = r_0; \quad \hat{f}(z) = \hat{f}(\{b, c\}) = r_0; \quad \hat{f}(x) = \hat{f}(\{a, c\}) = r_0$$

Schlussfolgerung: Es gibt also drei gleich gefärbte Zahlen x, y, z mit $y + z = x$. Das ist genau ein monochromatisches Schur-Tripel.

□

4 Anwendung der Ramsey-Theorie in der Graphentheorie

Auch wenn Anwendungen der Ramsey-Theorie bereits in den vorangegangenen Kapiteln immer wieder angesprochen wurden, widmet sich dieses Kapitel gezielt der Frage, welche graphentheoretischen Strukturen sich mithilfe ramseyscher Überlegungen modellieren, analysieren und beweisen lassen. Dabei wird insbesondere deutlich, wie mächtig das Prinzip des Strukturzwangs für konkrete Fragestellungen in der Graphentheorie – etwa bei Kantenfärbungen, Cliques oder Schranken – eingesetzt werden kann.

4.1 Motivation und Bedeutung für die Graphentheorie

Die Ramsey-Theorie ist für die Graphentheorie von höchster Relevanz [56], da sie ein fundamentales Prinzip der Ordnung in scheinbar chaotischen Systemen auf Graphen anwendet und somit die Existenz spezifischer, geordneter Teilstrukturen in ausreichend großen Graphen garantiert.

Ramseys ursprüngliches Theorem aus dem Jahr 1930 kann außerdem direkt als Satz über Graphen [16] interpretiert werden:

- **Knoten - Objekte und Kanten - Beziehungen** [10]: Elemente einer Menge (z.B. Personen) werden als Knoten eines Graphen dargestellt, und die Beziehungen zwischen diesen Elementen (z.B. ob sie sich kennen oder nicht) werden als Kanten modelliert.
- **Kantenfärbungen** [16]: Die Klassifizierung dieser Beziehungen erfolgt durch das Färben der Kanten eines vollständigen Graphen (z.B. rot für „kennen sich“, blau für „kennen sich nicht“)
- **Monochromatische Teilstrukturen** [16]: Die vorhergesagte geordnete Teilstruktur ist ein monochromatischer vollständiger Teilgraph, also eine Clique, in der alle Kanten dieselbe Farbe haben.

Die zentrale Fragestellung der Ramsey-Theorie ist: Wann ist eine monochromatische Clique unausweichlich? Dies ist die Kernfrage der klassischen Ramsey-Theorie im Kon-

text von Graphen. Sie wird durch die Ramsey-Zahlen [30] quantifiziert. Eine Ramsey-Zahl $R(s, t)$ (oder in vereinfachter Notation $R(k)$ für $R(k, k)$) gibt die kleinste Anzahl von Knoten n an, die ein vollständiger Graph K_n haben muss, um bei einer 2-Färbung seiner Kanten garantiert eine monochromatische Clique der Größe K_s (z.B. alle rot) oder K_t (z.B. alle blau) [9] zu enthalten.

Das bekannteste Beispiel ist das Party-Problem [6] (Beispiel 3.4.5): Auf einer Party mit mindestens sechs Personen gibt es immer eine Gruppe von drei Personen, die sich alle untereinander kennen oder drei Personen, die sich nicht kennen.

4.2 Verbindung zur extremalen Graphentheorie

Die Ramsey-Theorie unterscheidet sich grundlegend von der extremalen Graphentheorie [43], obwohl beide oft zusammen untersucht werden. Die extremale Graphentheorie (Kapitel 2.6.4) fragt [31]: „Wie viele Kanten darf ein Graph auf n Knoten enthalten, der keinen Graphen aus G als Teilgraph besitzt?“ Ihr Fokus liegt auf der Vermeidung bestimmter Strukturen und der Maximierung anderer Eigenschaften unter dieser Bedingung. Ziel [38, 12] ist es also, eine Obergrenze für die Anzahl der Kanten zu finden, bevor eine unerwünschte Struktur zwangsläufig auftritt. Ein prominentes Beispiel und ein Grundstein dieses Gebiets ist Turáns Theorem (Satz 2.6.39).

Die Ramsey-Theorie 3.3 hingegen fokussiert sich auf die Unvermeidbarkeit von Strukturen [23]. Dies bedeutet, dass in ausreichend großen Systemen [53], selbst wenn das System zufällig oder unstrukturiert erscheint, eine bestimmte geordnete Teilstruktur existiert. Die zentrale Fragestellung der Ramsey-Theorie ist: „Wann ist eine monochromatische Clique unausweichlich?“ Ziel ist es, die minimale Knotenanzahl zu finden, so dass eine gewünschte Struktur auftritt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, die **extremale Graphentheorie** beschäftigt sich mit der **maximalen Kantenanzahl**, die ein Graph haben darf, ohne eine gegebene Struktur zu enthalten. Die **Ramsey-Theorie** hingegen fragt nach der **minimalen Knotenanzahl**, die ein Graph haben muss, damit eine bestimmte Struktur unvermeidlich auftritt.

4.3 Strukturierte Subgraphen in großen Graphen

Im Kontext der Graphentheorie konzentriert sich der Ramsey-Satz klassischerweise [25] auf vollständige Graphen K_n . Es gibt jedoch auch direkte Erweiterungen für bipartite Graphen.

4.3.1 Anwendung der Ramsey-Theorie auf vollständige Graphen

Zur Wiederholung [10]: Ein vollständiger Graph auf n Knoten K_n ist ein Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch genau eine Kante verbunden ist. Ein K_n besitzt genau $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ Kanten [46].

Die Ramsey-Zahl $R(s, t) = n$ [9] ist die kleinste Anzahl n an Knoten die ein vollständiger Graph haben K_n haben muss, damit jede 2-Färbung seiner Kanten garantiert einen vollständigen Teilgraphen der Größe s oder einen vollständigen Teilgraphen der Größe t enthält.

Einige Beispiele wurden bereits in Kapitel 3.4.2 erwähnt und grafisch veranschaulicht.

Beispiel 4.3.1. Die Ramsey-Zahl $R(3, 4)$ ist definiert als die kleinste natürliche Zahl n , für die in jeder 2-Färbung der Kanten in rot und blau des vollständigen Graphen K_n entweder ein rotes vollständiges Dreieck (K_3) oder ein blauer vollständiger Viererkreis (K_4) entstehen muss. Um zu zeigen, dass $R(3, 4) > 8$, genügt es, eine konkrete Färbung der Kanten von K_8 (Abbildung 4.1) zu konstruieren, bei der weder ein rotes K_3 noch ein blaues K_4 enthalten ist. Diese Färbung dient als Gegenbeispiel und beweist: $R(3, 4) > 8$

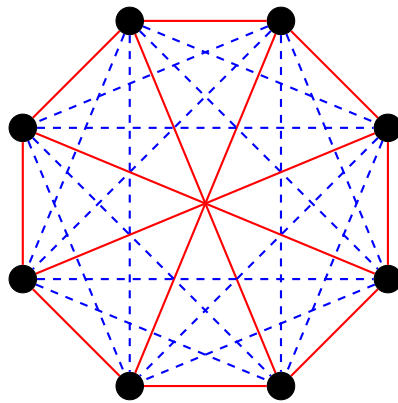


Abbildung 4.1: Graph zu $8 < R(3, 4) = 9$; keine rote, durchgezogene Clique K_3 oder blaue, strichlierte Clique K_4 sichtbar

Dies stellt eine gute Untergrenze für den Wert von $R(3, 4)$ dar. Eine Obergrenze für diesen Wert kann auch mit der Rekursionsungleichung 3.1 gefunden werden:

$$R(3, 4) \leq R(2, 4) + (3, 3)$$

$$R(3, 4) \leq 4 + 6 = 10$$

Gleichzeitig ist aus der mathematischen Literatur [16, 39] der genaue Wert für $R(3, 4)$ bekannt, der durch einen Widerspruchsbeweis gefunden wurde. $R(3, 4) = 9$ bedeutet, dass in jeder 2-Färbung der Kanten von K_9 entweder ein rotes Dreieck oder ein blauer Viererkreis auftreten muss.

4.3.2 Das Spiel Sim – eine spielerische Anwendung

Das Spiel **Sim** ist ein faszinierendes und vielbeachtetes kombinatorisches Spiel [52], das erstmals 1969 von Simmons beschrieben wurde. Es hat seither großes Interesse in der mathematischen Forschung geweckt und stellt eine anschauliche Anwendung der Ramsey-Theorie dar.

Sim wird von zwei Spielern auf den Kanten des vollständigen Graphen K_6 (Abbildung 4.2) gespielt [52], wobei diese abwechselnd je eine noch nicht gefärbte Kante in ihrer eigenen Farbe färben - typischerweise rot oder grün. Ziel ist es, die Bildung eines gleichfarbigen Dreiecks, eines monochromen K_3 , zu vermeiden. Der Spieler, der gezwungen ist, eine solche Konstellation [52] zu vervollständigen, verliert das Spiel sofort. Somit liegt ein perfektes Vermeidungszielspiel vor, das ohne Zufallselemente oder versteckte Informationen auskommt.

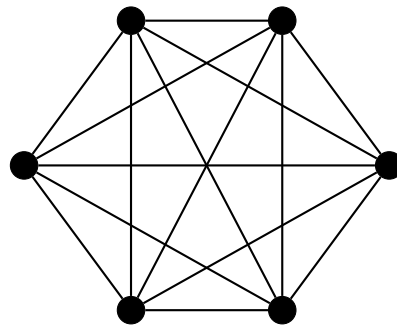


Abbildung 4.2: Spielbrett von Sim

Die mathematische Grundlage bildet die Tatsache, dass jede 2-Färbung der Kanten eines K_6 ein monochromes Dreieck enthalten muss, da $R(3, 3) = 6$ gilt. Dieses klassische Resultat der Ramsey-Theorie schließt ein Unentschieden im Spiel Sim [19] strenggenommen aus: Spätestens mit dem 15. Zug, also nachdem alle 15 Kanten gefärbt wurden, muss mindestens ein gleichfarbiges Dreieck entstanden sein. Eine intuitive Begründung ergibt sich durch Betrachtung eines beliebigen Knotens, der mit fünf weiteren verbunden ist: Mindestens drei dieser Kanten müssen dieselbe Farbe haben. Betrachtet man nun die drei zugehörigen Zielknoten, so folgt – je nach Färbung der zwischen ihnen liegenden Kanten – zwangsläufig die Existenz eines monochromen Dreiecks.

Computergestützte Analysen [19] des gesamten Spielbaums haben ergeben, dass der zweite Spieler – bei optimalem Spiel – stets gewinnen kann. Dennoch ist die zugehörige Gewinnstrategie so komplex [52], dass sie bislang nicht in eine einfache, für Menschen intuitiv nachvollziehbare Form gebracht werden konnte. Dies macht Sim zu einem spannenden Forschungsobjekt an der Schnittstelle zwischen kombinatorischer Spieltheorie und algorithmischer Strategieentwicklung.

4.3 Strukturierte Subgraphen in großen Graphen

Es existieren verschiedene Varianten [52] des Spiels Sim. Eine davon ist Sim+, bei der jeder Spieler pro Zug mehr als eine Kante färben darf. Diese Regeländerung erhöht die Komplexität des Spiels erheblich und erweitert den zugrundeliegenden Spielbaum, wodurch strategische Entscheidungen noch anspruchsvoller werden. Eine weitere Variante stellt Sim4 dar. Diese basiert auf der Ramsey-Zahl $R(4, 4) = 18$ und verwendet somit einen vollständigen Graphen mit 18 Knoten, was insgesamt 153 zu färbende Kanten ergibt. Ziel dieser Spielversion ist es, die Bildung eines einfarbigen K_4 (also eines Tetraeders) zu vermeiden. Aufgrund der hohen Knotenanzahl und der damit verbundenen Komplexität wird Sim4 typischerweise nämlich in einem computersimulierten dreidimensionalen Raum gespielt, um die visuelle Darstellung und strategische Analyse zu erleichtern.

Didaktisch bietet Sim eine hervorragende Möglichkeit, Schüler*innen spielerisch an Konzepte wie Strukturzwang, Unvermeidbarkeit und kombinatorische Argumentationen heranzuführen. Die scheinbar einfache Spielregel verbirgt eine tiefgreifende mathematische Struktur, die sich durch eine gezielte Unterrichtsinszenierung offenbaren lässt – etwa durch explorative Spielphasen, die in eine systematische Analyse der zugrunde liegenden Ramsey-Zahl $R(3, 3)$ münden. Eine grafische Visualisierung kann zusätzlich dabei helfen, zentrale Zusammenhänge im Spielverlauf transparent zu machen und strategische Denkweisen zu fördern.

4.3.3 Anwendung der Ramsey-Theorie auf bipartite Graphen

Bipartite Graphen [13, 33] sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Knotenmenge in zwei disjunkte Mengen (Partitions Mengen) aufgeteilt werden kann, sodass Kanten nur zwischen Knoten aus verschiedenen Partitions Mengen verlaufen.

Die Anwendung der Ramsey-Theorie auf bipartite Graphen [16, 59] konzentriert sich typischerweise auf die Kantenfärbung von vollständigen bipartiten Graphen, um monochromatische bipartite Untergraphen zu finden. Die bipartite Ramsey-Zahl wird meist mit dem Symbol $b(s, t)$ oder $BR(s, t)$ bezeichnet und definiert sich wie folgt:

Definition 4.3.2 (Bipartite Ramsey-Zahl). Die bipartite Ramsey-Zahl [59] $BR(s, t) = N$ ist die kleinste natürliche Zahl N , sodass jede 2-Kantenfärbung des vollständigen bipartiten Graphen $K_{N,N}$ entweder einen roten $K_{s,s}$ oder einen blauen $K_{t,t}$ als Untergraphen enthält.

Ein vollständiger bipartiter Graph $K_{s,t}$ [25] verbindet dabei alle s Knoten der einen Menge V_1 mit allen t Knoten der anderen Menge V_2 .

In den frühen 1970er Jahren wurde die Untersuchung bipartiter Ramsey-Zahlen [59] von Faudree und Schelp sowie Gyárfás und Lehel initiiert.

Beispiel 4.3.3. Gegeben ist der bipartite Graph $K_{4,4}$. Ist es möglich, bei einer 2-Färbung der Kanten eine Färbung zu finden, ohne dass ein roter $K_{2,2}$ oder ein blauer $K_{2,2}$ entsteht?

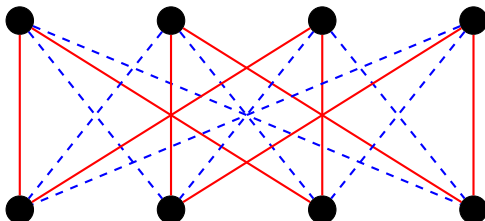


Abbildung 4.3: Beispielhafte 2-Färbung des vollständigen bipartiten Graphen $K_{4,4}$, bei der weder ein roter $K_{2,2}$ noch ein blauer $K_{2,2}$ auftritt. Die Kanten wurden abwechselnd rot (durchgängig) und blau (strichliert) eingefärbt.

Aus Abbildung 4.3 folgt, dass $b(2, 2) > 4$, da die 2-Färbung von $K_{4,4}$ keine monochrome Clique erzwingt.

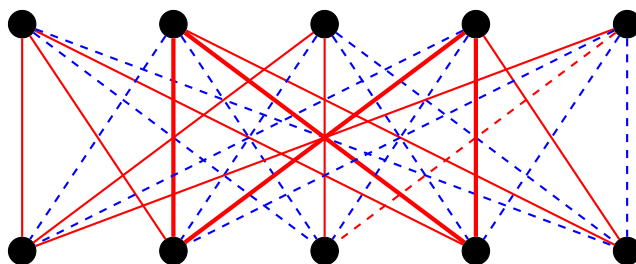


Abbildung 4.4: 2-Färbung des vollständigen bipartiten Graphen $K_{5,5}$ mit durchgezogenen roten und gestrichelten blauen Kanten. Die vier dick hervorgehobenen roten Kanten bilden ein monochromes $K_{2,2}$.

So wie in der Literatur [16, 27] angegeben und die Abbildung 4.4 zeigt, ist die bipartite Ramsey-Zahl $b(2, 2) = 5$.

Auch für bipartite Ramsey-Zahlen $b(s, t)$ existiert - analog zu den klassischen Ramsey-Zahlen vollständiger Graphen - eine obere Schranke, die eine grobe Abschätzung ihres Wertes ermöglicht.

Satz 4.3.4 (Obere Schranke für bipartite Ramsey-Zahlen). *Seien s, t zwei positive natürliche Zahlen. Eine obere Schranke für $b(s, t)$ [27, 16] ist gegeben durch:*

$$b(s, t) \leq \binom{s+t}{s} - 1$$

Wenn wir dies anhand unseres vorherigen Beispiels 4.3.3 überprüfen, sehen wir:

$$b(2, 2) \leq \binom{2+2}{2} - 1 = \binom{4}{2} - 1 = 5$$

Beispiel 4.3.5. Wir berechnen nun drei bipartite Ramsey-Zahlen unter Verwendung der Schranke und vergleichen diese mit den tatsächlich bekannten Werten [16]:

- $b(2, 3) \leq \binom{2+3}{2} - 1 = \binom{5}{2} - 1 = 9$. Der bekannte Wert von $b(2, 3)$ ist ebenfalls 9.
- $b(2, 4) \leq \binom{2+4}{2} - 1 = \binom{6}{2} - 1 = 14$. Der bekannte Wert von $b(2, 4)$ ist 14.
- $b(3, 3) \leq \binom{3+3}{3} - 1 = \binom{6}{3} - 1 = 19$. Der bekannte Wert von $b(3, 3)$ ist 17.

Diese Beispiele zeigen, dass die obere Schranke eine brauchbare Orientierung bietet, aber schon bei kleinen Parametern nicht immer exakt ist.

Bipartite Ramsey-Zahlen sind besonders relevant in Anwendungen, in denen die zugrundeliegende Struktur nicht vollständig vernetzt, sondern natürlich zweigeteilt ist – zum Beispiel in Netzwerken mit zwei Typen von Objekten (z. B. Schüler vs. Aufgaben, Server vs. Clients, ...).

Ähnlich wie bei klassischen Ramsey-Zahlen sind auch bipartite Ramsey-Zahlen sehr schwer zu berechnen.

4.4 Ramsey-Theorie für multikolorierte Graphen

Die klassische Ramsey-Theorie befasst sich mit der Unvermeidbarkeit einfarbiger Teilstrukturen in Graphen, deren Kanten mit zwei Farben gefärbt sind. Diese Idee lässt sich jedoch auf beliebig viele Farben [17] erweitern. Wie in Satz 3.3.2 gezeigt, existiert für jede endliche Anzahl an Farben stets eine endliche Zahl $R(n_1, n_2, \dots, n_k)$, bei der jede k -färbige Kantenfärbung eines vollständigen Graphen K_N eine monochrome Clique K_{n_i} in einer der k Farben enthält.

Ein besonders interessantes Beispiel ist die Zahl $R(3, 3, 3) = 17$ [48, 9]. Dabei handelt es sich um die kleinste natürliche Zahl n , sodass jede 3-Färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_n zwangsläufig einen monochromen vollständigen Untergraphen K_3 in einer der Farben enthält. Der Wert wurde 1955 von Greenwood und Gleason [27] bestimmt und stellt bis heute den einzigen bekannten nichttrivialen Fall [52] einer exakten mehrfarbigen Ramsey-Zahl mit drei gleichen Zielgraphen dar.

Die Aussage $R(3, 3, 3) = 17$ bedeutet:

- Für $n = 16$ gibt es mindestens eine konkrete 3-Färbung der Kanten von K_{16} , die kein monochromes K_3 enthält.

4 Anwendung der Ramsey-Theorie in der Graphentheorie

- Für $n = 17$ hingegen garantiert jede beliebige 3-Färbung der Kanten von K_{17} ein monochromatisch gefärbtes Dreieck in einer der drei Farben.

Abbildung 4.5 zeigt eine Färbung von K_{16} , bei der kein einfarbiges K_3 auftritt.

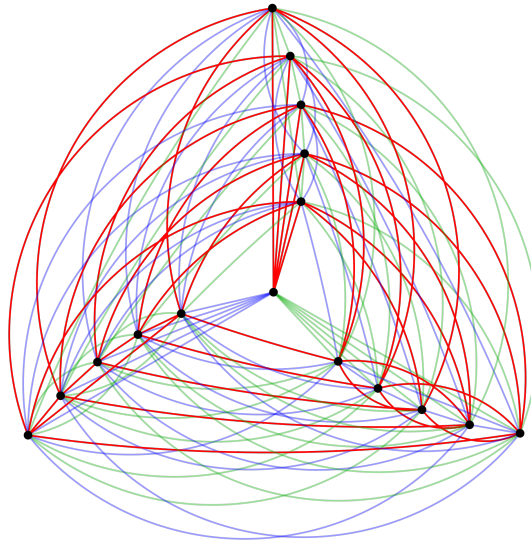


Abbildung 4.5: Färbung des vollständigen Graphen K_{16} mit drei Farben (Rot, Blau, Grün), sodass keine monochrome Clique der Größe 3 entsteht. Diese Darstellung zeigt, dass $R(3, 3, 3) > 16$.
Grafik von Maproom [18]

Beispiel 4.4.1. Ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung einer mehrfarbigen Ramsey-Zahl ist $R(3, 2, 2) = 3$. Dies ist der vollständig multikolorierte Graph mit drei Knoten, bei dem jede Kante eine andere Farbe erhält. In jedem 3-Färbungsfall tritt entweder ein rotes K_3 , ein grünes K_2 oder ein blaues K_2 auf. Eine mögliche Färbung ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Bei dieser Färbung des Graphen treten sowohl ein grüner als auch ein blauer K_2 auf.

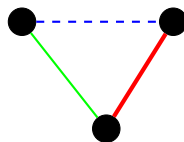


Abbildung 4.6: Multikolorierter vollständiger Graph K_3 zur Veranschaulichung von $R(3, 2, 2) = 3$; kein rotes, verdicktes K_3 , aber ein blaues, strichliertes K_2 und ein grünes, durchgezogenes K_2 sichtbar

4.5 Ramsey-Theorie in Zufallsgraphen

Die Ramsey-Theorie in Zufallsgraphen ist ein weiteres faszinierendes Forschungsgebiet [48]. Es untersucht die Bedingungen, unter denen in großen, zufällig generierten Strukturen notwendigerweise eine bestimmte Ordnung oder Unterstruktur auftauchen muss.

4.5.1 Grundlagen von Zufallsgraphen (Erdős–Rényi-Modell)

Die Theorie der Zufallsgraphen [43] wurde von Paul Erdős und Alfred Rényi in einer Reihe von Veröffentlichungen zwischen 1959 und 1968 begründet. Das am häufigsten verwendete Modell ist $G(n, p)$ wird wie folgt definiert [56]:

Definition 4.5.1 (Erdős–Rényi-Modell). Das Erdős–Rényi-Modell $G(n, p)$ beschreibt einen Zufallsgraphen mit n Knoten, in dem jede Kante unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit p existiert.

Konkret bedeutet dies [56], dass auf der Knotenmenge jede der $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten mit Wahrscheinlichkeit p auftritt. Der Wahrscheinlichkeitsraum dieses Experiments wird als Produktraum binärer Ergebnisse (Kante existiert oder nicht) für jede potenzielle Kante modelliert. Ein zentrales Untersuchungsobjekt ist das Auftreten von Cliques. Die Wahrscheinlichkeit, dass $G(n, p)$ eine Clique der Größe k enthält, kann näherungsweise über Erwartungswerte abgeschätzt werden. So beträgt die erwartete Anzahl an k -Cliques etwa $\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}}$.

Die Formel setzt sich zusammen aus $\binom{n}{k}$ [56]: In einem Graphen der Größe n existieren insgesamt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, eine Menge von k auszuwählen, die potenziell eine k -Clique bilden könnte.

Der zweite Teil der Formel ist $p^{\binom{k}{2}}$: Eine k -Clique ist ein vollständiger Graph auf k Knoten - das heißt, alle $\binom{k}{2}$ Kanten zwischen diesen Knoten müssen im Zufallsgraph vorhanden sein. $p^{\binom{k}{2}}$ ist also die Wahrscheinlichkeit, dass alle $\binom{k}{2}$ Kanten vorhanden sind.

Beispiel 4.5.2. Im Fall einer 4-Clique K_4 besitzt jede solche Clique genau $\binom{4}{2} = 6$ Kanten. Die erwartete Anzahl der 4-Cliques in einem Zufallsgraphen $G(n, p)$ ist daher

$$\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6,$$

wobei X die Zufallsvariable ist, die die Anzahl der 4-Cliques in $G(n, p)$ zählt.

Ein zentrales Resultat hierzu ist, dass es einen scharf definierten Schwellenwert für die Existenz einer 4-Clique gibt. Es gilt folgender Satz [39]:

Satz 4.5.3. *Der Schwellenwert für das Auftreten einer 4-Clique in einem Erdős-Rényi-Zufallsgraphen $G(n, p)$ liegt bei:*

$$p = n^{-\frac{2}{3}}.$$

Genauer gilt:

- Für $p \ll n^{-\frac{2}{3}}$ enthält $G(n, p)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit keine Kopie von K_4 .
- Für $p \gg n^{-\frac{2}{3}}$ enthält $G(n, p)$ mit hoher Wahrscheinlichkeit mindestens eine Kopie von K_4 .

Der Beweis dafür findet sich in [39] und wird in dieser Masterarbeit nicht geführt.

4.5.2 Ramsey-Eigenschaften für Zufallsgraphen

Die Untersuchung von Ramsey-Eigenschaften in $G(n, p)$ ist ein aktives Forschungsfeld, das als „Random Ramsey Theory“ bezeichnet wird. Die entscheidende Verbindung zwischen Zufallsgraphen und der Ramsey-Theorie wird durch die probabilistische Methode [39] hergestellt, die von Paul Erdős entwickelt wurde. Der zentrale Gedanke [56] dieser Methode besteht darin, die Existenz eines diskreten Objekts mit bestimmten Eigenschaften indirekt nachzuweisen, indem man ein geeignetes Zufallsexperiment konstruiert und zeigt, dass ein solches Objekt mit positiver Wahrscheinlichkeit existiert. Zusammenfassend zeigt die probabilistische Analyse, dass selbst in dünn besetzten, zufällig konstruierten Graphen strukturierte Ordnung in Form von monochromatischen Cliques unvermeidlich wird, sobald eine kritische Dichte überschritten ist.

Die Arbeiten von Rödl und Ruciński [48] haben in diesem Zusammenhang eine präzise Charakterisierung der Schwellenwerte für Ramsey-Eigenschaften geliefert und damit die enge Verbindung zwischen Ramsey-Theorie und Zufallsgraphen eindrucksvoll verdeutlicht. Ein zentrales Resultat ist der folgende allgemeine Schwellenwertsatz:

Satz 4.5.4 (Allgemeiner Schwellenwertsatz für Ramsey-Eigenschaften). *Sei F ein fixer Graph mit mindestens einer Kante. Dann besitzt der Zufallsgraph $G(n, p)$ die Ramsey-Eigenschaft [45]*

$$G(n, p) \rightarrow (F)_r$$

mit hoher Wahrscheinlichkeit genau dann, wenn [41]

$$p \gg n^{-1/m^*(F)}, \text{ wobei } m^*(F) = \max_{H \subseteq F, e(H) > 0} \frac{e(H)}{|H| - 1}.$$

Für $p \ll n^{-1/m^(F)}$ gilt hingegen mit hoher Wahrscheinlichkeit $G(n, p) \not\rightarrow (F)_r$.*

Die Größe $m^*(F)$ bezeichnet den maximalen Quotienten aus der Anzahl der Kanten $e(H)$ eines nichtleeren Teilgraphen $H \subseteq F$ und der Anzahl seiner Knoten minus eins. Sie liefert eine Kenngröße für die strukturelle Dichte des Graphen F und ist maßgeblich für das Auftreten der Ramsey-Eigenschaft in $G(n, p)$. Der fixe Graph F ist ein beliebiger, aber konstanter, nichttrivialer Graph. Dabei steht das Symbol $(F)_r$ [3] für die Ramsey-Eigenschaft in r Farben, das heißt: Unabhängig davon, wie man die Kanten des Graphen mit r Farben färbt, enthält jede solche Färbung eine monochromatische Kopie von F . Im Fall $r = 2$ bedeutet dies konkret, dass jede Rot-Blau-Färbung der Kanten von $G(n, p)$ eine einfarbige Clique isomorph zu F enthält.

Beispiel 4.5.5. Für verschiedene Graphen F ergeben sich folgende Werte für $m^*(F)$ und damit konkrete Schwellenfunktionen:

- Für K_3 : $m^*(K_3) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Schwelle bei $p = n^{-2/3}$.
- Für K_4 : $m^*(K_4) = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$ Schwelle bei $p = n^{-1/2}$.
- Allgemein für K_k : $m^*(K_k) = \frac{\binom{k}{2}}{k-1} = \frac{k}{2} \Rightarrow$ Schwelle bei $p = n^{-2/k}$.
- Für Pfade P_ℓ [40]: keine konstante Schwelle – es genügt $p \cdot n \rightarrow \infty$, um monochromatische Pfade der Länge $\approx \frac{2}{3}n$ zu erzwingen.

Ein Vergleich mit der bereits zuvor diskutierten Schwelle von $p = n^{-2/3}$ für das reine Auftreten einer 4-Clique zeigt deutlich, dass die Anforderungen an die Dichte für die Erzwingung der Ramsey-Eigenschaft deutlich höher liegen als für das bloße Vorkommen der gesuchten Struktur.

Beispiel 4.5.6 (Berechnung von $m^*(K_4)$). Gegeben ist der vollständige Graph K_4 , also ein Graph mit vier Knoten, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist. Der Graph besitzt 4 Knoten und 6 Kanten.

Nach Definition lautet:

$$m^*(F) = \max_{H \subseteq F, e(H) > 0} \frac{e(H)}{|H| - 1}$$

Das bedeutet: Man betrachtet alle Teilgraphen H von K_4 (Tabelle 4.1) mit mindestens einer Kante und berechnet für jeden diesen Quotienten. Der größte dieser Werte ist dann $m^*(K_4)$. Der größte Wert unter allen berechneten Quotienten ist:

$$m^*(K_4) = \frac{6}{3} = 2$$

Die Schwellenwertfunktion für die Ramsey-Eigenschaft $G(n, p) \rightarrow (K_4)_2$ ergibt sich zu:

$$p = n^{-1/m^*(F)} = n^{-\frac{1}{2}}$$

Tabelle 4.1: Berechnung von $m^*(K_4)$ über Teilgraphen

Teilgraph $H \subseteq K_4$	Anzahl Knoten $v(H)$	Anzahl Kanten $e(H)$	$\frac{e(H)}{v(H) - 1}$
2 Knoten, 1 Kante	2	1	$\frac{1}{1} = 1$
3 Knoten, 2 Kanten (Pfad)	3	2	$\frac{2}{2} = 1$
3 Knoten, 3 Kanten (K_3)	3	3	$\frac{3}{2} = 1,5$
4 Knoten, 4 Kanten (Teil von K_4)	4	4	$\frac{4}{3} \approx 1,33$
4 Knoten, 5 Kanten	4	5	$\frac{5}{3} \approx 1,67$
4 Knoten, 6 Kanten (ganz K_4)	4	6	$\frac{6}{3} = 2$

Satz 4.5.7. Der Schwellenwert für die Ramsey-Eigenschaft $G(n, p) \rightarrow (K_4)_2$ liegt bei

$$p = n^{-1/2}.$$

Genauer gilt:

- Für $p \ll n^{-1/2}$ gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit: $G(n, p) \not\rightarrow (K_4)_2$.

Das bedeutet: Es existiert mit hoher Wahrscheinlichkeit eine 2-Färbung der Kanten von $G(n, p)$, in der kein vollständiger monochromatischer K_4 vorkommt.

- Für $p \gg n^{-1/2}$ gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit: $G(n, p) \rightarrow (K_4)_2$.

Das bedeutet: Mit hoher Wahrscheinlichkeit enthält jede 2-Färbung der Kanten von $G(n, p)$ einen vollständigen monochromatischen K_4 .

Weitere bemerkenswerte Ergebnisse zu Ramsey-Schwellen für spezielle Graphklassen finden sich in neueren Arbeiten. So konnte Letzter [40] zeigen, dass bereits bei $p \cdot n \rightarrow \infty$ mit hoher Wahrscheinlichkeit eine monochromatische Kopie eines Pfades der Länge $\left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)n$ in jeder 2-Färbung von $G(n, p)$ auftritt. Dies stellt eine nahezu optimale Schranke für Pfade dar. Ergänzend analysierten Rödl, Ruciński und Schacht [50] die Struktur und Regularität monochromatischer Cliques und liefern eine präzisere Einordnung der Ramsey-Eigenschaft für unterschiedliche Graphklassen im Kontext der Zufallsgraphen.

Diese Ergebnisse zeigen, dass selbst zufällig konstruierte Graphen gezwungenermaßen hochgradig strukturierte Eigenschaften besitzen.

5 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit widmete sich zwei bedeutenden Teilgebieten der diskreten Mathematik: der Graphentheorie und der Ramsey-Theorie. Beide Felder zeichnen sich durch eine beeindruckende Vielfalt an Begriffen, Strukturen und Anwendungen aus und weisen zugleich eine enge theoretische Verbindung auf, die insbesondere im letzten Kapitel anhand konkreter Anwendungen der Ramsey-Theorie in der Graphentheorie verdeutlicht wurde.

Die Auseinandersetzung mit der Graphentheorie begann mit einem historischen Rückblick auf das Königsberger Brückenproblem, das als Ausgangspunkt dieses Forschungsbereichs gilt. Darauf aufbauend wurden zentrale Begriffe wie Knoten, Kanten, Pfade, Kreise und verschiedene Graphklassen eingeführt und durch zahlreiche Beispiele veranschaulicht. Besondere Aufmerksamkeit galt algorithmischen Verfahren zur Bestimmung kürzester Wege (Dijkstra) sowie zur Berechnung minimaler Spannbäume (Kruskal, Prim), da sie nicht nur in der Theorie, sondern auch in praxisnahen Problemstellungen, etwa in der Informatik oder Netzwerkanalyse, von großer Relevanz sind. Darüber hinaus wurden klassische Problemstellungen wie eulersche und hamiltonsche Wege behandelt, deren Lösungen tiefgreifende Einsichten in die Struktur und Komplexität von Graphen ermöglichen.

Im Anschluss daran wurde die Ramsey-Theorie als eigenständiger, aber eng verwandter Bereich eingeführt. Ausgehend vom Schubfachprinzip entwickelte sich eine Theorie, deren zentrales Anliegen die Untersuchung unvermeidbarer Strukturen innerhalb großer und scheinbar chaotischer Systeme ist. Der Satz von Ramsey bildet das Herzstück dieser Theorie und liefert die theoretische Grundlage für die Bestimmung sogenannter Ramsey-Zahlen, die angeben, ab welcher Größe eines Graphen bestimmte monochromatische Teilstrukturen notwendigerweise auftreten. Die Beschäftigung mit allgemeinen Schranken und konkreten Werten dieser Zahlen zeigt eindrucksvoll, wie herausfordernd viele Fragen der Ramsey-Theorie bis heute geblieben sind. Selbst kleinste Verbesserungen bestehender Schranken gelten in der mathematischen Forschung als bedeutende Fortschritte.

Ein zentraler Schwerpunkt der Arbeit lag auf der Anwendung der Ramsey-Theorie innerhalb der Graphentheorie. Obwohl die Ramsey-Theorie klassischerweise auf vollständige Graphen angewendet wird, zeigt ihre Erweiterung auf bipartite Graphen so-

5 Fazit und Ausblick

wie auf Färbungen mit mehr als zwei Farben, wie flexibel das zugrunde liegende Prinzip struktureller Unvermeidbarkeit auf unterschiedliche graphentheoretische Konstellationen übertragbar ist. Auch spielerische Zugänge wie das „Sim“-Spiel oder Betrachtungen in Zufallsgraphen verdeutlichen das Potenzial dieser Theorie, komplexe Phänomene auf elegante Weise zu modellieren.

Trotz zahlreicher Fortschritte bleiben viele Fragen offen. Die exakten Werte vieler Ramsey-Zahlen sind bis heute unbekannt, selbst bei vergleichsweise kleinen Parametern. Vermutungen und neue Schranken beschäftigen eine Vielzahl von Forschenden weltweit. Besonders dynamisch entwickelt sich derzeit die Hypergraph-Ramsey-Theorie, die sich mit Verallgemeinerungen in höheren Dimensionen beschäftigt und vielversprechende neue Einsichten liefert. Auch die Untersuchung ramsey-theoretischer Eigenschaften in zufälligen Graphen stellt ein aktuelles Forschungsfeld dar.

Die Bedeutung der Ramsey-Theorie reicht jedoch weit über die Grenzen der Graphentheorie hinaus. Sie beeinflusst Bereiche wie die Kombinatorik, Logik, Informatik und selbst die theoretische Physik. In all diesen Disziplinen spielt die Frage nach unvermeidbaren Strukturen, Ordnung im Chaos und der Existenz von Mustern eine zentrale Rolle – genau jene Fragen, mit denen sich die Ramsey-Theorie befasst. Gerade in einer zunehmend komplexen und datengetriebenen Welt eröffnen sich dadurch zahlreiche Anwendungsfelder, etwa in der Analyse großer Netzwerke, in algorithmischen Prozessen oder in der Modellierung von Systemverhalten.

Abschließend lässt sich festhalten: Die Verbindung von Graphen- und Ramsey-Theorie eröffnet nicht nur tiefgreifende theoretische Einsichten, sondern bildet auch eine wertvolle Grundlage für die Weiterentwicklung mathematischer Methoden. Obwohl bereits bedeutende Fortschritte erzielt wurden, ist das Feld weit davon entfernt, vollständig erschlossen zu sein. Die Vielzahl offener Fragen, insbesondere im Bereich der Ramsey-Zahlen und ihrer Verallgemeinerungen, unterstreicht das enorme Potenzial zukünftiger Forschung in diesem faszinierenden Grenzbereich zwischen Struktur, Zufall und Notwendigkeit.

Literaturverzeichnis

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer Berlin, Heidelberg, 2018. doi:10.1007/978-3-662-57767-7.
- [2] Miklós Ajtai. The complexity of the pigeonhole principle. *Combinatorica*, 14(4):417–433, 1994. doi:10.1007/bf01302964.
- [3] José D. Alvarado, Y. Kohayakawa, Patrick Morris, and Guilherme O. Mota. A canonical ramsey theorem for even cycles in random graphs, 2024. doi:10.48550/arXiv.2411.14566.
- [4] Vigleik Angelteit and Brendan D. McKay. $r(5, 5) \leq 46$, 2024. doi:10.48550/arXiv.2409.15709.
- [5] Song Bai, Feihu Zhang, and Philip H.S. Torr. Hypergraph convolution and hypergraph attention. *Pattern Recognition*, 110, 2020. doi:10.1016/j.patcog.2020.107637.
- [6] Lane Barton IV. Ramsey theory, 2016. URL: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>.
- [7] Ehrhard Behrends. *Fünf Minuten Mathematik: 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT*. Springer Spektrum Wiesbaden, 3rd edition, 2013. doi:10.1007/978-3-658-00998-4.
- [8] Mordechai Ben-Ari. *Mathematische Überraschungen*. Springer Cham, 2025. doi:10.1007/978-3-031-76041-9.
- [9] Leo Berggren. Ramsey’s theorem. Master’s thesis, Uppsala University, Department of Mathematics, 2022. URL: <https://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1729430/FULLTEXT01.pdf>.
- [10] Albrecht Beutelspacher and Marc-Alexander Zschiegner. *Diskrete Mathematik für Einsteiger: Bachelor und Lehramt*. Springer Spektrum Wiesbaden, 5th edition, 2014. doi:10.1007/978-3-658-05781-7.

- [11] Alexander Blinne, Matthias Müller, and Konrad Schöbel. *Was wäre die Mathematik ohne die Wurzel?* Springer Spektrum Wiesbaden, 2017. doi:10.1007/978-3-658-14759-4.
- [12] Johannes Brantner. Der satz von turán, 2013. URL: <https://imsc.uni-graz.at/baur/lehre/WS2013-Seminar/S2.pdf>.
- [13] Dirk Briskorn. *Operations Research: Eine (möglichst) natürlichsprachige und detaillierte Einführung in Modelle und Verfahren*. Springer Gabler Wiesbaden, 2nd edition, 2023. doi:10.1007/978-3-658-39425-7.
- [14] Merlin Carl. *Wie kommt man drauf?*, chapter Das Schubfachprinzip, pages 23–44. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017. doi:10.1007/978-3-658-18250-2_3.
- [15] Christos Nestor Chachamis. Ramsey numbers, 2018. URL: https://math.mit.edu/~apost/courses/18.204_2018/ramsey-numbers.pdf.
- [16] Gary Chartrand and Ping Zhang. New directions in ramsey theory. *Discrete Mathematics Letters*, 6:84–96, 2021. doi:10.47443/dml.2021.s110.
- [17] David Conlon, Jacob Fox, and Benny Sudakov. *Surveys in Combinatorics 2015*, chapter Recent developments in graph Ramsey theory, pages 49–118. Cambridge University Press, 2015. doi:10.1017/cbo9781316106853.003.
- [18] Wikipedia contributors. Ramsey’s theorem — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 19-Juli-2025]. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem.
- [19] Wikipedia contributors. Sim (Spiel) — Wikipedia, die freie Enzyklopädie, 2025. [Online; accessed 15-Juli-2025]. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sim_\(Spiel\)&oldid=254937870](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sim_(Spiel)&oldid=254937870).
- [20] Qionghai Dai and Yue Gao. *Hypergraph Computation*. Springer Singapore, 2023. doi:10.1007/978-981-99-0185-2.
- [21] Oliver Deiser. Einführung in die mathematik 2.1: Elementare zahlentheorie und graphentheorie, 2018. URL: <https://www.aleph1.info/Resource?method=get&obj=Pdf&name=ema21.pdf>.
- [22] José Luis Díaz-Barrero. The pigeonhole principle. *ARHIMEDE*, 9:56–62, 2022. URL: <https://amj-math.com/wp-content/uploads/2022/07/AMJ2022-vol9iss1.pdf>.

- [23] Jacob Fox. Lecture 5: Ramsey theory, 2009. URL: <https://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture05.pdf>.
- [24] Jacob Fox. Lecture 6: Ramsey theory: continued, 2009. URL: <https://math.mit.edu/~fox/MAT307-lecture06.pdf>.
- [25] Shinya Fujita, Colton Magnant, and Kenta Ozeki. Rainbow generalizations of ramsey theory - a dynamic survey. *Theory And Applications Of Graphs*, 0(1), 2014. doi:10.20429/tag.2014.000101.
- [26] Georg Glaeser. *77-mal Mathematik für zwischendurch*. Springer Berlin, Heidelberg, 2020. doi:10.1007/978-3-662-61766-3.
- [27] Wayne Goddard, Michael A. Henning, and Ortrud R. Oellermann. Bipartite ramsey numbers and zarankiewicz numbers. *Discrete Mathematics*, 219:85–95, 2000. doi:10.1016/s0012-365x(99)00370-2.
- [28] Ronald L. Graham and Bruce L. Rothschild. *Ramsey theory*. Wiley-Interscience, 2nd edition, 1990. URL: [https://people.dm.unipi.it/dinasso/ULTRABIBLIO/Graham_Rothschild_Spencer%20-%20Ramsey%20Theory%20\(2nd%20edition\).pdf](https://people.dm.unipi.it/dinasso/ULTRABIBLIO/Graham_Rothschild_Spencer%20-%20Ramsey%20Theory%20(2nd%20edition).pdf).
- [29] Ronald L. Graham and Joel H. Spencer. Ramsey theory. *Scientific American*, 263(1):112–117, 1990. doi:10.1038/scientificamerican0790-112.
- [30] Daniel Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*, pages 189–211. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016. doi:10.1007/978-3-658-14765-5_10.
- [31] Frank Göring. Ausgewählte kapitel der graphentheorie, 2003. URL: <https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/discrete/goering/AusKapGT.pdf>.
- [32] Rudolf Halin. *Graphentheorie*. De Gruyter, 1989. doi:10.1515/9783112471401.
- [33] Martin Hebenstreit. Färbung von graphen: Grundlagen, algorithmen und anwendungen. Diplomarbeit, Naturwissenschaftlichen Fakultät der Paris-Lodron-Universität Salzburg, 2018. URL: <https://eplus.uni-salzburg.at/obvusbhs/content/titleinfo/4997320/full.pdf>.
- [34] Gert Heinrich. *Basiswissen Mathematik, Statistik und Operations Research für Wirtschaftswissenschaftler*. De Gruyter, 6th edition, 2018. doi:10.1515/9783110601718.

- [35] Sebastian Iwanowski and Rainer Lang. *Diskrete Mathematik mit Grundlagen: Lehrbuch für Studierende von MINT-Fächern*. Springer Vieweg Wiesbaden, 2nd edition, 2020. doi:10.1007/978-3-658-32760-6.
- [36] Konrad Jacobs and Dieter Jungnickel. *Einführung in die Kombinatorik*. De Gruyter, 2nd edition, 2003. doi:10.1515/9783110197990.
- [37] Alina Jannach. Angewandte graphentheorie: Betrachtung von färbungen, mit speziellem blick auf die landkartenfärbung und das daraus resultierende 4-farbenproblem. Diplomarbeit, Karl-Franzens-Universität Graz, 2017. URL: <https://unipub.uni-graz.at/obvugrhs/content/titleinfo/1958449/full.pdf>.
- [38] Petra Johann. *Eindeutige Faktoren von Graphen: Maximale Kantenzahl und Extremalgraphen*. PhD thesis, Technische Hochschule Aachen, Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften, 2000. URL: <https://d-nb.info/962007013/34>.
- [39] Stasys Jukna. *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science*. Springer Berlin, Heidelberg, 2001. doi:10.1007/978-3-642-17364-6.
- [40] Shoham Letzter. Path ramsey number for random graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 25(4):612–622, 2015. doi:10.1017/s0963548315000279.
- [41] Tomasz Łuczak, Andrzej Ruciński, and Bernd Voigt. Ramsey properties of random graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 56(1):55–68, 1992. doi:10.1016/0095-8956(92)90006-J.
- [42] Clara Löh, Stefan Krauss, and Niki Kilbertus. *Quod erat knobelandum: Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 2019. doi:10.1007/978-3-662-58725-6.
- [43] Martin Marciniszyn. *Ramsey and Turán Type Problems in Random Graphs*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2006. doi:10.3929/ethz-a-005271379.
- [44] Katja Mönius, Jörn Steuding, and Pascal Stumpf. *Algorithmen in der Graphentheorie: Ein konstruktiver Einstieg in die Diskrete Mathematik*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2021. doi:10.1007/978-3-658-34176-3.
- [45] Rajko Nenadov and Angelika Steger. A short proof of the random ramsey theorem. *Combinatorics, Probability and Computing*, 25(1):130–144, 2016. doi:10.1017/S0963548314000832.

- [46] Stefan Nickel, Steffen Rebennack, Oliver Stein, and Karl-Heinz Waldmann. *Operations Research*. Springer Gabler Berlin, Heidelberg, 3rd edition, 2022. doi:10.1007/978-3-662-65346-3.
- [47] Lukas Pottmeyer. *Diskrete Mathematik: Ein kompakter Einstieg*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2019. doi:10.1007/978-3-662-59663-0.
- [48] Hans Jürgen Prömel. *Ramsey Theory for Discrete Structures*, volume 3. Springer Cham, 2013. doi:10.1007/978-3-319-01315-2.
- [49] Fred S. Roberts. Applications of ramsey theory. *Discrete Applied Mathematics*, 9(3):251–261, 1984. doi:10.1016/0166-218x(84)90025-8.
- [50] Vojtěch Rödl, Andrzej Ruciński, and Mathias Schacht. Ramsey properties of random graphs and folkman numbers. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 37(3):755–776, 2017. URL: <https://www.dmgt.uz.zgora.pl/publish/pdf.php?doi=1971>, doi:10.7151/dmgt.1971.
- [51] Susanne Schindler-Tschirner and Werner Schindler. *Mathematische Geschichten III – Eulerscher Polyedersatz, Schubfachprinzip und Beweise: Für begabte Schülerinnen und Schüler in der Unterstufe*. Springer Spektrum Wiesbaden, 2021. doi:10.1007/978-3-658-33669-1.
- [52] Wolfgang Slany. Graph ramsey games. Technical Report DBAI-TR-99-34, Technische Universität Wien, 1999. URL: <http://www.dbai.tuwien.ac.at/ftp/papers/slany/dbai-tr-99-34.ps.gz>.
- [53] Alexander Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow*. Birkhäuser Boston, MA, 2011. doi:10.1007/978-0-8176-8092-3.
- [54] Katie Steckles. The bridges of königsberg, 2018. [Online; accessed 01-Juli-2025]. URL: <https://scilogs.spektrum.de/hlf/the-bridges-of-konigsberg/>.
- [55] Rogério Ricardo Steffenon and Felipe Milan Guarnieri. *Schöne Probleme der diskreten Mathematik*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2024. doi:10.1007/978-3-662-70041-9.
- [56] Anusch Taraz. *Diskrete Mathematik*. Birkhäuser Basel, 2012. doi:10.1007/978-3-7643-8901-7.
- [57] Evangelia Tsiouprou. Minimale spannbäume, 2004. URL: <https://www2.tcs.uni-lmu.de/~abel/lehre/WS04-05/Prosem/tsiouprou.pdf>.

Literaturverzeichnis

- [58] Klaus Voss. *Theoretische Grundlagen der digitalen Bildverarbeitung*. De Gruyter, 1988. doi:10.1515/9783112731772.
- [59] Zilong Yan and Yuejian Peng. Bipartite ramsey numbers of cycles. *European Journal Of Combinatorics*, 118, 2024. doi:10.1016/j.ejc.2024.103921.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Stadtplan von Königsberg/Kaliningrad mit den sieben Brücken [54]	3
2.2	Stadtteile von Königsberg als Knoten, Brücken als Kanten dargestellt [46]	4
2.3	Beispielgraphen zu Minimal- und Maximalgrad und k -Regularität	6
2.4	Graph mit Schlinge	7
2.5	Graph G_1 und G_2 aus dem Beispiel 2.2.7 Graphen [35]	8
2.6	Graphen zum Beispiel 2.2.8	9
2.7	Beschriftete Graphen zum Beispiel 2.2.8; Knoten mit Kleinbuchstaben und Kanten mit Zahlen beschriftet	9
2.8	Multigraph mit zwei Kanten zwischen denselben Knoten	10
2.9	Unterschied ungerichteter Graph und gerichteter Graph [46]	10
2.10	gewichteter Graph zum Beispiel 2.3.6 [42]	11
2.11	Zwei Visualisierungen eines bipartiten Graphen [13]	13
2.12	Die ersten fünf vollständigen Graphen K_n mit $n \leq 5$ [35]	14
2.13	Beispiel zu Wege, Pfade und Längen [13]	16
2.14	Graph zum Beispiel 2.4.8 zum Berechnen kürzester Wege [46]	17
2.15	Baum kürzester Wege [46] zum Beispiel 2.4.9	20
2.16	Beispiel 2.4.10: Mögliche Routen von der Residenz zur Festung Marienberg [44]	21
2.17	Graph mit beschrifteten Knoten für Beispiel 2.4.10	21
2.18	Beispiel 2.4.10: Baum kürzester Wege zu den einzelnen Knoten [44]	22
2.19	Graph zum Beispiel 2.4.11 [34]	25
2.20	Minimal spannender Baum zum Beispiel 2.4.11 [34]	26
2.21	Haus des Nikolaus	29
2.22	Beispiel Vier-Farben-Problem	31
2.23	Graph G mit zwei Teilgraphen T und T' [21]	32
2.24	Graph G mit zwei Untergraphen U und U' [21]	33
2.25	Eine 4-Clique und eine 3-stabile Menge [56]	34
2.26	4-Knotenfärbung eines Graphen	36
2.27	2-gefärbter bipartiter Graph	38
2.28	6-Kantenfärbung eines Graphen	39
2.29	Graph G und sein Kantengraph $L(G)$ zum Beispiel 2.6.28 [37]	40

Abbildungsverzeichnis

2.30	bipartiter Graph mit Kantenfärbung	41
2.31	vollständige Graphen K_5 und K_6 mit Kantenfärbung	42
2.32	Knotengefärbter Graph der deutschen Bundesländer [7]	45
2.33	3-partiter Graph $K_{2,3,4}$	48
3.1	Beispiel fürs Schubfachprinzip	50
3.2	Wichtige Beiträge zur Entwicklung der Ramsey-Theorie	52
3.3	Mögliche Färbungen in K_2	54
3.4	Beweis Satz von Ramsey - Ausgangssituation: Verbindung Knoten x mit Menge A	55
3.5	Beweis Satz von Ramsey - Darstellung Fall 1: Blaue Clique im Teilgraphen	56
3.6	Beweis Satz von Ramsey - Darstellung Fall 2: Rote Clique entsteht	56
3.7	Visualisierung des Party-Problems bei $R(3, 3) = 6$	60
3.8	Gegenbeispiel mit K_5	60
3.9	Beispiel eines Hypergraphen mit 7 Knoten und 4 Hyperkanten	63
4.1	Graph zu $8 < R(3, 4) = 9$	69
4.2	Spielbrett vom Spiel Sim	70
4.3	Beispielhafte 2-Färbung des vollständigen bipartiten Graphen $K_{4,4}$	72
4.4	2-Färbung des vollständigen bipartiten Graphen $K_{5,5}$	72
4.5	3-Färbung von K_{16} ohne monochromes K_3	74
4.6	Multikolorierter vollständiger Graph K_3 zur Veranschaulichung von $R(3, 2, 2) = 3$	74

Tabellenverzeichnis

2.1	Bijektive Abbildung f [35]	8
2.2	Dijkstra-Algorithmus [46] zum Beispiel 2.4.9	20
2.3	Dijkstra-Algorithmus zum Beispiel 2.4.10	23
2.4	Verzeichnis Nummern - Bundesländer [7]	45
3.1	Beispielhafte Färbung von der Menge $\{1, 2, \dots, 9\}$	64
3.2	Zweifärbung der Zahlen von 1 bis 4 ohne monochromes Schur-Tripel . . .	64
3.3	Unvermeidbarkeit eines Schur-Tripels bei fünf Zahlen	65
4.1	Berechnung von $m^*(K_4)$ über Teilgraphen	78