

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Spielkarten und Mathematik
Mathematische Kartentricks als Zugang zu abstrakten
Konzepten und damit verbundene Möglichkeiten der
Binnendifferenzierung in der Sekundarstufe

verfasst von | submitted by

Johannes Clemens Huber BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 510 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Geographie und wirtschaftliche Bildung
Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Gerald Teschl

*„In fact, mathematics is the closest that we humans get to true magic.
How else to describe the patterns in our heads that — by some mysterious
agency — capture patterns of the universe around us?“*

(Ian Stewart, The Magical Maze 1998)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen meinen Dank aussprechen, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt haben. Dieser gebührt vor allem meinem Betreuer Dr. Gerald Teschl, der mich bei meinen Abschlussarbeiten für das Bachelor- und nun auch das Master-Studium dazu animiert hat, mich mit interessanten Anwendungsmöglichkeiten von Mathematik zu beschäftigen, die ich auch in meinen Unterricht einbauen kann. Darüber hinaus bedanke ich mich auch bei Dr. Michael Eichmair und allen anderen Beteiligten des Projekts *Mathematik macht Freude* für viele lehrreiche Praxiserfahrungen.

Ich bedanke mich meinen Eltern Ingrid und Johannes senior, sowie meinen beiden Brüdern Paul und Adrian dafür, dass sie mir nicht nur finanziell, sondern auch in allen anderen Belangen meiner des Lebens stets unter die Arme gegriffen haben. Besonderer Dank gilt auch meiner zweiten Familie bestehend aus Stephan Felber, Dr. Magdalena Lohninger und Philip Pramer, mit denen ich auf zehn wundervolle Jahre in unserer Wohngemeinschaft zurückblicken kann.

Ich möchte mich außerdem bei meinen beiden Pfadfindergruppen Salzburg 11 und Wien 51 bedanken, wo ich die Möglichkeit hatte, meine Leidenschaft für die Arbeit mit Kindern und Jugendlichen zu entdecken und mein Methodenrepertoire erheblich zu erweitern. Besonderer Dank gebührt auch meinem Ausbildungspaten Dr. Alfons Bridi, der mir nicht nur im Rahmen meiner ehrenamtlichen Tätigkeit als Jugend-, Stufen- und Gruppenleiter mit Rat und Tat zur Seite gestanden ist.

Ein großes Dankeschön gebührt auch meinen Mitstudierenden Stefan Kammerer und Jana Gindl, die mir aufgrund der gemeinsamen Fächerkombination bei der Navigation durch unser Curriculum in vielen Fällen behilflich waren. Ebenso danke ich meiner Pfadfinder- und Arbeitskollegin Sabina Smits dafür, dass sich mich an meinen neuen Schulstandort geholt und auch meine Arbeit korrekturgelesen hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretischer Hintergrund	3
2.1	Differenzierung im Schulunterricht	3
2.1.1	Arten der Differenzierung	3
2.1.2	Definition von Binnendifferenzierung	5
2.1.3	Formen der Binnendifferenzierung	6
2.2	Mathematische Kartentricks	8
2.2.1	Notation und Glossar	8
2.2.2	Nützliche Eigenschaften von Spielkarten	9
2.2.3	Definitionsversuche und Kriterien für die Auswahl von Tricks . . .	11
2.2.4	(Karten-)Zauberei im Schulunterricht	14
2.2.5	Tipps für den Einsatz in der Praxis	16
3	Kartentricks für verschiedene Schulstufen	21
3.1	Erste Klasse (fünfte Schulstufe)	21
3.1.1	Die fehlende Karte	21
3.1.2	Piano-Duett	23
3.1.3	Abzähltricks	25
3.1.4	Große Pause	27
3.2	Zweite Klasse (sechste Schulstufe)	29
3.2.1	Doppelt vertikal	29
3.2.2	Fünffacher Poker	30
3.2.3	Aus fünf mach vier	31
3.2.4	Kartenwette	32
3.3	Dritte Klasse (siebte Schulstufe)	33
3.3.1	Das berechnete Abheben	33
3.3.2	(Kopfgeld)-jäger	34
3.3.3	Countdown	36
3.4	Vierte Klasse (achte Schulstufe)	40
3.4.1	Rot und Schwarz	40
3.4.2	Thronfolge	44
3.4.3	Die letzten drei	47
3.5	Fünfte Klasse (neunte Schulstufe)	52
3.5.1	Findley's vier Karten-Trick	52
3.5.2	Der Name der Karte ist...	53
3.5.3	Wir haben unsere Differenzen	55

Inhaltsverzeichnis

3.6	Sechste Klasse (zehnte Schulstufe)	59
3.6.1	Kartenhausformel	59
3.6.2	Kleine Schwindeleien	63
3.6.3	Kartencodierung	66
4	Schluss	69
	Abbildungsverzeichnis	72
	Literaturverzeichnis	73
Anhang		I
	Vier Reiter	I
	Das vorhergesagte Umstecken	III
	Spell the Deck	V
	Down Under	VII
	klassische Variante	VII
	Josephus Problem-Variante	IX
	Große Pause-Rahmengeschichte	XII
	Aus fünf mach vier-Lösungen	XIII
	(Kopfgeld-)Jäger-Lageplan	XIV
	Kartencodierung-Kennzahlen	XV
	Rot und Schwarz-Lageplan	XVI
	Kartenhausformel-Arbeitsmaterial	XVII
	Arbeitsblatt (Standard AHS)	XVII
	Arbeitsblatt (Standard)	XVIII
	Musterlösungen (Standard AHS)	XIX
	Musterlösungen (Standard)	XX
	Tabelle und Formeln der regulären Variante	XXI
	Tabelle und Formeln der vereinfachten Variante	XXII
	Abstract	XXIII

1 Einleitung

Ein einfaches Kartendeck ermöglicht Einblicke in verschiedenste Themenbereiche der Mathematik. Wir können es in nur einer Hand halten und damit dennoch unvorstellbar große Zahlen erzeugen. Im Schulunterricht dienen Spielkarten deshalb häufig als Versuchsobjekt für Permutationen und Variationen, wenn das Thema Kombinatorik behandelt wird. Sie werden auch gerne in Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet und eignen sich außerdem als Anwendungsbeispiel für die Gaußsche Summenformel, wenn wir beispielsweise alle Werte im Deck zusammenzählen möchten.

Derartige Beispiele haben für manche von uns womöglich bereits etwas Magisches an sich, aber es gibt auch eine Fülle an mathematischen Zauberkunststücken, bei denen mit Spielkarten gearbeitet wird. Manche davon bieten sich nicht nur für einen Einsatz auf der Bühne, sondern auch im Klassenzimmer an. Ein Publikum mit Magie in Staunen zu versetzen motiviert ungemein, aber im Vordergrund sollte dabei vor allem eine nachvollziehbare Erklärung der zugrundeliegenden Funktionsweise stehen. Viele Zaubertricks beruhen nämlich bloß auf geschickt durchgeführten Täuschungsmanövern. Mathematische Magie hingegen lässt sich in der Regel mit ein wenig geistiger Anstrengung entschlüsseln. Diese Herangehensweise dürfte insbesondere jene Menschen ansprechen, die mit dem Vorwand der Zauberei eher wenig anfangen können, weil ihnen von vornherein klar ist, dass keine wirkliche Magie dahintersteckt.

Der kanadische Universitätsprofessor Dr. Peter Liljedahl und der australische Lehrer Edward K. Woo nutzen Kartentricks seit vielen Jahren im Rahmen ihrer Lehre an Schulen und Universitäten, um die Prinzipien bestimmter Algorithmen aufzuzeigen, die Übersetzung in mathematische Notation zu trainieren oder eher abstrakte Lehrplaninhalte mit praktischen Versuchen zu ergänzen. Entsprechende Arbeiten zum Einsatz von Zauberei im Unterricht, bei der auch Spielkarten zum Einsatz kommen, wurden unter anderem von Bernhard Schwankl (2021) und Tanja M. Fasching (2022) erbracht. In beiden Fällen lag der Fokus auf dem Thema Motivation beim Einsatz mathematischer Tricks im Unterricht sowie der Erstellung exemplarischer Aufgaben und Materialien.

Manche Menschen können dem Konzept der Zauberei wenig abgewinnen, solange so getan wird, als ob es keine rationale Erklärung dafür gibt, warum etwas vermeintlich Unmögliches passiert. Bei der mathematischen Magie spielt jedoch auch das Entschlüsseln des Tricks eine entscheidende Rolle und es kann mitunter sogar erfüllender sein, die zugrundeliegende Funktionsweise herauszufinden und zu verstehen. Dadurch kann man einen Trick in weiterer Folge nicht nur selbst vorführen, sondern möglicherweise auch noch personalisieren. Als Lehrer an einer AHS mit dem Schulversuch der

1 Einleitung

Wiener Mittelschule arbeite ich täglich mit heterogenen Klassen. Deshalb beschäftige ich mich in meiner Arbeit unter anderem damit, wie der Einsatz von Spielkarten im Unterrichtsgegenstand Mathematik mit Möglichkeiten der Binnendifferenzierung verknüpft werden kann, um Lernende mit unterschiedlichen Leistungsniveaus anzusprechen.

Im ersten Teil dieser Arbeit werden deshalb zunächst verschiedene Arten der Differenzierung im Schulunterricht voneinander abgegrenzt. Anschließend wird auf Basis von vorhandener Literatur eine mögliche Definition von Binnendifferenzierung gegeben, ehe ihre unterschiedlichen Formen und bedeutende Einflussfaktoren für ihre Auswahl behandelt werden. Im Anschluss werden wichtige Begriffe in Zusammenhang mit Spielkarten sowie die Wahl der Notation erläutert. Dabei wird auch auf nützliche Eigenschaften von Spielkarten für den Einsatz in der Zauberei eingegangen, ehe versucht wird, mathematische Kartentricks genauer zu definieren. Darauf aufbauend werden Kriterien für die Auswahl geeigneter Tricks vorgestellt. Am Ende finden sich noch praktische Hinweise zur Arbeit mit Spielkarten im Unterricht.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden entsprechende Tricks und Methoden vorgestellt und im Lehrplan verortet. Dabei wird auch darauf eingegangen, welche Formen von Binnendifferenzierung in diesem Zusammenhang jeweils möglich sind, und es werden Vorschläge für eine praktische Umsetzung gegeben. Zum Schluss werden Vor- und Nachteile der Arbeit mit Spielkarten im Unterricht diskutiert und eigene Erfahrungen aus der Erprobung in der Praxis geschildert.

2 Theoretischer Hintergrund

2.1 Differenzierung im Schulunterricht

Vor geraumer Zeit war es in den österreichischen Pflichtschulen noch üblich, die Lernenden entsprechend ihrer Leistungen zu trennen und in sogenannte Klassenzüge einzuteilen. Mittlerweile wird diese Maßnahme nicht mehr angewandt, aber auch in allgemein- und berufsbildenden höheren Schulen hat die Heterogenität in Bezug auf die Leistungsniveaus der Lernenden aufgrund von unterschiedlichem Vorwissen, Interesse und Motivation an den jeweiligen Lerninhalten zugenommen (vgl. Klein 2016 [22], Westphal et al. 2016 [46] sowie Letztel & Otto 2019 [25]). Hinzu kommt, dass die heutigen Lehrpläne [8] stärker kompetenz- und weniger inhaltsorientiert sind und das übergeordnete Ziel haben, individuelle Lernerfolge zu ermöglichen.

2.1.1 Arten der Differenzierung

Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten für den Umgang mit heterogenen Lerngruppen. Eine davon ist die Differenzierung von Lernenden, wobei grob zwischen zwei Arten, und zwar der äußeren und der inneren Differenzierung, unterschieden wird.

Äußere Differenzierung kann das Fördern von leistungsschwächeren oder das Fordern von leistungsstärkeren Lernenden zum Ziel haben und begegnet der Heterogenität mit organisatorischen Maßnahmen, indem eine Umstrukturierung des Klassenverbandes stattfindet (vgl. Roder (2020 [39])). Man spricht in diesem Zusammenhang von sogenannten Fachklassen, falls es Gruppenteilungen in bestimmten Unterrichtsgegenständen gibt. Beispiele dafür wären die früher gebräuchliche Einteilung in Leistungsgruppen sowie das heutzutage übliche Anbieten von Förder- und Forderkursen. Sie kann jedoch auch zeitlich versetzt stattfinden. Im Anschluss an den Regelunterricht sind Intensiv- oder Aufbaukurse, Freifächer sowie unverbindliche Übungen denkbar und abseits davon die Teilnahme an der Sommerschule, Wochenendveranstaltungen oder Feriencamps. Beim System der Jahrgangsklassen, das sich im Allgemeinen etabliert hat, bietet sich eine generelle Trennung in allen Unterrichtsgegenständen an. Beispiele dafür sind spezielle Klassen und im Extremfall sogar eigene Schulen für Hochbegabte. Im österreichischen Schulsystem sind in der Regel Mischformen aus Jahrgangs- und Fachklassen gebräuchlich.

Andererseits gibt es Formen der inneren Differenzierung. Diese wird deshalb auch als Binnendifferenzierung bezeichnet und verzichtet im Gegensatz zur äußeren Differenzierung auf räumliche und zeitliche Trennung, sodass eine heterogene Lerngruppe grundsätzlich

2 Theoretischer Hintergrund

gemeinsam betreut wird. Stattdessen wird nach Möglichkeiten gesucht, wie man den unterschiedlichen Leistungsniveaus innerhalb der Gruppe entgegenkommen kann (vgl. Aschemann, Gugler & Nimmerfall 2011 [2]). Dabei wird, im Hinblick auf die jeweilige Zielsetzung, grob zwischen sogenannter konvergenter und divergenter Differenzierung unterschieden. Während bei der konvergenten Differenzierung (auch: Fundamentum) darauf geachtet wird, dass alle Lernenden ein gemeinsames Ziel erreichen, wird leistungsstärkeren Lernenden bei der divergenten Differenzierung (auch: Additum) die Möglichkeit gegeben, sich auch darüber hinaus mit den Lerninhalten zu beschäftigen. Ersteres kann unter anderem durch eine Differenzierung nach Methoden und Medien erreicht werden, während Letzteres einer Differenzierung nach Lernzielen und -inhalten entspricht.

Endepohls-Ulpe (2017 [13]) nennt Binnendifferenzierung (*internal differentiation*, auch: *differentiated instruction* sowie *ability grouping*, *tiered instruction* oder *within-class grouping*), d. h. die Differenzierung innerhalb einer Lerngruppe (z. B. ein Klassenverband), als eine von vier Möglichkeiten der Begabtenförderung. Allerdings wird in mehreren Quellen auch angemerkt, dass diese von Lehrpersonen als vergleichsweise schwierig zu organisieren und daher als hohe Arbeitsbelastung wahrgenommen wird (vgl. Aschemann, Gugler & Nimmerfall 2011 [2], Bastian 2016 [3], Loibl & Leuders 2021 [26], Roder 2020 [39] und Roeder 1997 [40]).

Abgesehen davon gibt es noch das Überspringen von Schulstufen (*acceleration*), die Absolvierung eines Frühstudiums an einer Hochschule (*early placement*) sowie die Anreicherung des Curriculums (*enrichment*). Die ersten beiden Maßnahmen entsprechen jedenfalls der äußeren Differenzierung. Falls ein Frühstudium nicht parallel zur regulären Beschulung betrieben wird, sondern diese gänzlich ersetzen soll, werden diese auch miteinander kombiniert. Sie bedeuten jedenfalls einen vergleichsweise geringen organisatorischen Aufwand. Allerdings werden sie nicht nur von Lehrpersonen, sondern auch von Eltern vergleichsweise weniger geschätzt, da sie darauf abzielen, Lernende zu segregieren.

Eine Anreicherung der Lerninhalte wiederum kann unter anderem durch die Beschäftigung mit Inhalten aus den Erweiterungsbereichen der Lehrpläne [8] erreicht werden, aber es ist genauso möglich, bestimmte Themen des Lehrstoffs anderweitig zu ergänzen oder sogar zu ersetzen. Maßnahmen dieser Art weisen deshalb unter Umständen viele Gemeinsamkeiten mit Binnendifferenzierung auf, da sie einerseits in der Regel ebenfalls das Ziel haben, alle Lernenden in einer Gruppe zu belassen, und andererseits auch während des Regelunterrichts stattfinden können. Der zeitliche und finanzielle Aufwand kann jedoch hoch ausfallen, wenn Schulen derartige Möglichkeiten selbst anbieten. Das gilt insbesondere bei der äußeren Differenzierung, wenn diese außerhalb des Regelunterrichts stattfindet.

2.1.2 Definition von Binnendifferenzierung

Klein (2016 [22]) schlägt vor, die Bezeichnung Binnendifferenzierung als Sammelbegriff für didaktische, methodische und organisatorische Maßnahmen in der Bildungsarbeit zu verwenden, mit denen Lernende innerhalb einer Lerngruppe individuell gefördert werden können. Im Vordergrund stehen dabei Chancengleichheit sowie Kooperation in und mit der Gruppe. Dazu muss sich die Lehrperson zu Beginn mithilfe von diagnostischen Verfahren einen Überblick über das Vorwissen und die Kompetenzen der Lernenden verschaffen. Darauf aufbauend können in weiterer Folge geeignete Maßnahmen für die weitere Vorgehensweise gewählt werden.

In Bezug auf die Umsetzung unterscheiden Aschemann, Gugler & Nimmerfall drei Arten von Binnendifferenzierung nach Bönsch (2008):

- nachgehende Differenzierung: Zu Beginn gibt es eine kurze Instruktion für alle gefolgt von einer Arbeitsphase, bei der sich die Lernenden mit Aufgaben, die ihrem jeweiligen Leistungsniveau entsprechen, auseinandersetzen. Diese können sich unter anderem in Bezug auf den Umfang, die Komplexität, die Art der Unterstützungsangebote oder die verfügbare Arbeitszeit unterscheiden.
- Bearbeitungsdifferenzierung bei klaren Vorgaben: Zu Beginn werden bestimmte Aufgaben vorgegeben. Anschließend haben die Lernenden die Möglichkeit, sich über einen längeren Zeitraum damit auseinanderzusetzen, um diese zu erledigen. Das erfordert zwar wesentlich mehr Eigenständigkeit als die nachgehende Differenzierung, aber da der Fokus auf ausgewählten Themen liegt, gibt es einen klaren Rahmen, an dem sich die Lernenden orientieren können.
- freigebende Differenzierung: Im Extremfall werden alle Lerninhalte verlautbart, die am Ende, d. h. nach einem Semester oder Schuljahr beherrscht werden sollen. Die Lernenden sind in weiterer Folge selbst dafür verantwortlich, sich diese in ihrem eigenen Tempo anzueignen. Dies erfordert ein dementsprechend hohes Maß an Eigenständigkeit und Verantwortungsbewusstsein.

In weiterer Folge nennen sie folgende Kriterien, die zur Differenzierung herangezogen werden können und sich teilweise mehr oder weniger gut miteinander kombinieren lassen:

- Leistungsanforderungen bzw. Schwierigkeitsgraden der Aufgaben und Übungen: Man spricht deshalb in diesem Zusammenhang von einer sogenannten Niveaudifferenzierung.
- Lernthemen: Dies kann zum Beispiel in Form einer Gliederung in Unterthemen bzw. durch verschiedene Bearbeitungsfragen geschehen.
- Lernziele: Das kann sich derart äußern, dass die Lernenden ihre eigenen Ziele verfolgen.
- Lernmedien und Lernmaterialien: Diese können gegebenenfalls in einem Lernquellenpool zur Verfügung gestellt werden.

2 Theoretischer Hintergrund

- unterschiedliche Sozialformen wie Gruppen-, Kleingruppen- bzw. Tandem- oder Einzelarbeit
- Methoden bzw. geschlossene/offene Aufgabenformate
- Lernzeiten: Diese können entweder von den Teilnehmenden selbstständig oder durch die Kursleitung (mit-)gesteuert flexibel eingeteilt werden.
- Lerntechniken und -strategien: Dabei steht die Förderung individueller Lernstile im Mittelpunkt.
- Ausgangssprachen: Denkbar wäre zum Beispiel die temporäre Auflösung von diesbezüglich gemischten Gruppen.

2.1.3 Formen der Binnendifferenzierung

Letzel & Otto (2019 [25]) verwenden für ihre Untersuchungen zum Thema Binnendifferenzierung eine Taxonomie von Pozas und Schneider mit sechs verschiedenen Gestaltungsvarianten:

- Einsatz abgestufter Unterrichtsmaterialien und Aufgaben: Dazu zählen unter anderem Regeln, visuelle Hilfen, inhaltliche Ideen, Strukturierungshilfen und Checklisten, Nachschlagewerke, Hilfekärtchen. Loibl & Leuders (2021 [26]) merken diesbezüglich an, dass Lernende mit mehr Vorwissen insbesondere durch visuelle Hilfen eher daran gehindert werden, größere Zusammenhänge zu erkennen.
- gezielte Gruppenzusammensetzungen von Lernenden: Diese können homogen, heterogen oder einfach interessenbasiert zusammengesetzt sein.
- Hilfestellungen und Tutorien innerhalb der Lerngruppe: Dies kann von Assistenzlehrpersonen übernommen werden, aber auch Lernen auf gleicher Augenhöhe (engl. *peer learning*) ist eine Möglichkeit.
- sonstige nonverbale Lernhilfen
- Varianten zielerreichenden Lernens (engl. *mastery learning*)
- Öffnung des Unterrichts mit dem Ziel der Autonomiegewährung: Dies kann unter anderem in Form von Lerntheken oder -werkstätten, Wahlaufgaben, Wochenplänen, Projektarbeiten, Portfolios, Stationenlernen etc. geschehen.

Loibl & Leuders [26] verwenden in diesem Zusammenhang den Begriff methodische Individualisierung für die Strukturierung von Räumen, Zeiten und Materialien und merken an, dass die Auswahl passender Unterrichtsstrukturen die Grundlage für erfolgreiche Binnendifferenzierung ist. Sie fügen jedoch hinzu, dass eine Auswahl aufgrund der Passung der Lernziele zu den Lernenden, der Qualität der Lernangebote und deren Nutzung durch die Lernenden und jener der Unterstützung durch die Lehrkraft getroffen werden muss.

2.1 Differenzierung im Schulunterricht

Aschemann et al. [2] wiederum unterscheiden anhand der didaktischen Ausrichtung grob zwischen Formen der Binnendifferenzierung, die eher von den Lehrerenden oder von den Lernenden gesteuert werden und listen insgesamt vierzig Methoden für Binnendifferenzierung auf, die in folgende Bereiche zusammengefasst werden können:

- latente Differenzierung: Dazu zählen individuelle Fragen, Hilfestellungen oder Korrekturen sowie offene Fragen an die gesamte Lerngruppe.
- Einzelunterricht in der Gruppe: Damit hängen Maßnahmen wie zum Beispiel individuelle Lernziele, Lehrpläne, Lernkarteien oder Kompetenzraster zusammen.
- Extra-Angebote für Leistungstärkere: Eine mögliche Form davon sind zusätzliche oder freie Aufgaben für leistungstärkere und fixe Aufgaben für leistungsschwächere Lernende.
- Extra-Angebote für Leistungsschwächere: Dazu zählen unter anderem verschiedene mittel- bis langfristige Einteilungen in (Klein-)Gruppen für leistungsschwächere Lernende und in weiterer Folge gegebenenfalls eine (räumliche und/oder zeitliche) Trennung dieser Gruppen.
- unterschiedliche Aufgabenstellungen: Ein typisches Beispiel hierfür sind unterschiedlich gestaltete Arbeitsblätter.
- offene Aufgabenstellungen: Hierbei sind qualitativ oder quantitativ variable Lösungen möglich, wie zum Beispiel eine Gruppenarbeit mit anschließender Präsentation der Ergebnisse oder auch Projektunterricht. Falls der Ausgang einheitlich bleiben soll, können die Lernenden stattdessen aus mehreren Aufgaben auswählen.
- Formen mit wenig Zielausrichtung: Dazu zählen unter anderem Methoden wie der Stationenbetrieb oder die Freiarbeit. Beide Formen können jedoch mit Möglichkeiten zur Ergebniskontrolle kombiniert werden.
- Peer-Learning (siehe weiter oben)

2.2 Mathematische Kartentricks

2.2.1 Notation und Glossar

Behrends (2015 [4]) wählt eine Notation, bei der die Symbole für die Farben der Karten ♠, ♥, ♣ und ♦ mit den jeweiligen Zahlen oder Buchstaben kombiniert werden, die im Rahmen dieser Arbeit übernommen wird. Das Ass (engl. *ace*) wird dabei jedenfalls mit dem Buchstaben A notiert. Den drei Bildkarten Bube (engl. *jack*, dt. auch Junge oder Bauer), Dame (engl. *queen*) und König (engl. *king*) können dementsprechend entweder die Buchstaben B, D und K oder stattdessen auch J, Q und K zugewiesen werden. Die englischen Bezeichnungen werden zwar auch im deutschsprachigen Raum verwendet, sind aber nicht allzu gebräuchlich und somit vermutlich auch den Lernenden weniger bekannt. Aus diesem Grund werden die Bildkarten im Rahmen dieser Arbeit mit den deutschsprachigen Bezeichnungen notiert. Außerdem kann so stattdessen ein Joker, sofern dieser nötig sein sollte, mit dem Buchstaben J notiert werden.

Es folgt eine kurze Erläuterung einiger ausgewählter Begriffe des Fachjargons in Zusammenhang mit Kartentricks, da diese im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder verwendet werden:

- Rang (engl. *rank*): Dieser Begriff bezeichnet den Wert einer Karte (meist unabhängig von der Spielfarbe). In vielen Fällen haben die Asse den Rang eins, die Buben den Rang elf, die Damen den Rang zwölf und die Könige den Rang dreizehn.
- Bild (engl. *picture/face*): Hierbei handelt es sich um die Karten Bube, Dame und König sowie manchmal im erweiterten Sinn auch die Asse und Joker. Aufgrund der Bildmotive werden sie manchmal auch als Hofkarten (engl. *court cards*) bezeichnet.
- Stapel (engl. *stack*): Damit ist in jedem Fall eine Menge aufeinandergestapelter Karten gemeint. Das Deck entspricht ganz einfach einem Stapel mit allen Spielkarten.
- Paket (engl. *pack(age)*): Dieser Begriff ist nicht ganz trennscharf und stellt eine andere Bezeichnung für einen (Teil-)Stapel dar. Die Begriffe Paket und Stapel werden im Rahmen dieser Arbeit teilweise synonym verwendet.
- Blatt (engl. *hand*): Dieser Begriff bezeichnet neben der Art der Spielkarten bzw. deren Herkunft auch die Handkarten einer Person.
- Fächer (engl. *fan*): Diese Form entsteht, wenn die Handkarten oder auch das gesamte Deck gemäß der Bezeichnung aufgefächert werden. Beim Zaubern dient dies häufig der Veranschaulichung einer bestimmten Sortierung oder auch das (vermeintliche) Fehlen einer solchen.
- Abheben (engl. *cut*): Hiermit ist zunächst einmal nur gemeint, dass ein Paket von einem Stapel abgehoben wird. In der Regel wird anschließend der verbleibende

Stapel darüber gelegt, was auch als *completing the cut* bzw. vollständiges Abheben bezeichnet wird (siehe auch Mulcahy 2013 [33]). In vielen Fällen soll dies als Zusicherung für das Gegenüber dienen, dass die Anordnung der Karten tatsächlich zufällig ist.

- Überhandmischen (engl. *overhand shuffle*): Eine der am häufigsten verwendeten Mischtechniken, bei der Pakete abgehoben und danach möglichst zufällig in den restlichen Stapel gesteckt werden. Wenn man es geschickt anstellt, kann man diese Mischtechnik nutzen, um zu verschleiern, dass in Wirklichkeit nur sukzessive Karten abgehoben werden (siehe auch Mulcahy 2013 [33]).
- Bogenmischen (engl. *riffle shuffle* oder *dovetail shuffle*): Eine weitere häufig verwendete Mischtechnik. Dafür wird das Deck in zwei Stapel geteilt, die ineinander gemischt werden, indem man sie aneinanderlegt und die Karten gewissermaßen ineinander fallen lässt. Bei vielen Tricks macht man sich den Umstand zunutze, dass die jeweilige Reihenfolge der Karten in den beiden Paketen untereinander nach einem solchen Mischvorgang unverändert bleibt.
- Durchwühlen (engl. *wash* oder *scramble*): Vergleichsweise verlässliche Mischvariante, die unter anderem in Casinos zum Einsatz kommt. Dabei werden alle Karten verdeckt ausgebreitet und dann durcheinander geschoben.
- Ziehen (engl. *draw*): Das (in der Regel zufällige) Auswählen einer Karte.
- Ausgeben (engl. *deal*): Hiermit sind jegliche Formen des Austeilens von Karten gemeint.

2.2.2 Nützliche Eigenschaften von Spielkarten

Gardner (1956 [1]) betont fünf Merkmale von Spielkarten, die man sich zunutze machen kann, um Kartentricks zu entwickeln, die auf mathematischen Grundlagen basieren:

- Sie eignen sich, ähnlich wie Münzen und Streichhölzer (oder etwas abstrakter: Punkte und Striche), als einfache und anschauliche Zähleinheiten, d. h. noch ohne Berücksichtigung der Zahlen und Bilder.
- Sie haben bestimmte Zahlenwerte, wobei man den Bildkarten je nach Bedarf unterschiedliche zuweisen kann.
- Sie lassen sich in verschiedene Kategorien wie die vier Spielfarben (Pik, Herz, Kreuz und Karo) oder die beiden Farben Rot und Schwarz aufteilen.
- Sie haben Vorder- und Rückseiten.
- Ihre einheitliche Größe und Festigkeit erleichtern ihre Anordnung in verschiedenste Reihen und Mengen, die darüber hinaus durch Mischen leicht wieder zerstört werden können.

2 Theoretischer Hintergrund

Behrends stellt unter anderem einige Tricks vor, bei denen die Eigenschaften von Karten genutzt werden, um Informationen zu codieren. Manche Kartentricks, wie das Kartenlesen mittels Asymmetrie [4] [14] [41], machen sich den Umstand zunutze, dass bestimmte Karten (o. B. d. A. Ass, Drei, Fünf, Sechs, Sieben und Neun der Farben Pik, Herz und Kreuz sowie $\heartsuit 7$ und meist auch die Joker) weder achsen- bzw. spiegel- noch punkt- bzw. rotationssymmetrisch sind (siehe Abbildung 2.1).

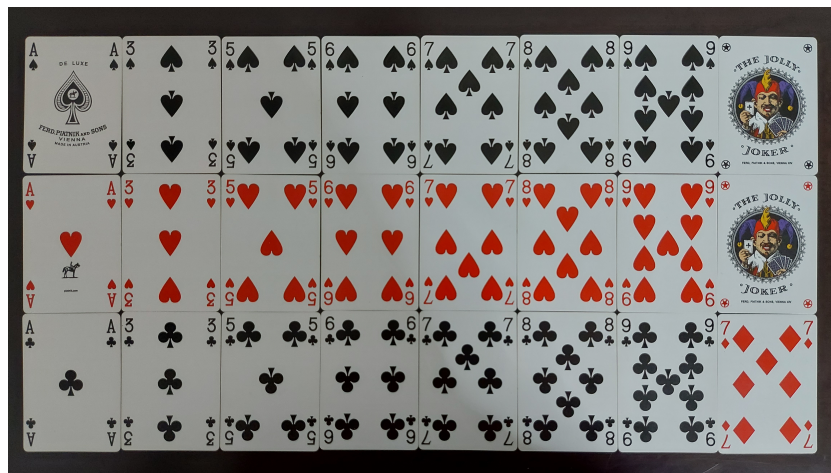


Abbildung 2.1: Asymmetrische Spielkarten (eigene Abbildung)

Eine weitere häufig genutzte Eigenschaft sind sogenannte Invarianten. Das können zum Beispiel bestimmte Anordnungen des Kartendecks sein, die sich auch nach der Durchführung bestimmter Transformationen nicht ändern. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Hummer-Mischen (benannt nach dem Magier Bob Hummer). Hierbei handelt es sich, streng genommen, nicht um eine bestimmte Mischtechnik, sondern um eine Sammlung von Arbeitsschritten, die gewisse Eigenschaften des Kartendecks unverändert lassen. Falls die zyklische Reihenfolge in einem Kartendeck unverändert bleiben soll, sind unter anderem wiederholtes Abheben (solange der abgehobene Teilstapel anschließend unter den anderen wandert) oder das Invertieren des Stapels (indem alle Karten der Reihe nach abgelegt werden) erlaubt (siehe auch Behrends 2015 und 2017 [4] [5] [6]). Dazu zählen unter anderem die vier Reiter 4 und das vorhergesagte Umstecken 4 [28], welche im Anhang erläutert werden.

Abgesehen davon lassen sich auch Parallelen zu den Zahlen und Bildern ziehen, die man in Geschichten verpacken kann, um bestimmte Tricks ein wenig auszuschnücken. Die Anzahl Karten in einem Deck entspricht der Anzahl der Wochen in einem Kalenderjahr und die Summe aller Werte ist fast gleich wie die Anzahl der Tage. Jene der Spielfarben wiederum entspricht der Anzahl der Jahreszeiten. Beim doppeldeutschen Deck kommen diese sogar als Bildmotive vor, aber in diesem Fall sind es in Summe lediglich 32 statt 52 Karten.

2.2.3 Definitionsversuche und Kriterien für die Auswahl von Tricks

Die Frage, was nun genau einen mathematischen Kartentrick ausmacht, ist nicht ganz einfach zu beantworten, da es verschiedene Interpretationsmöglichkeiten gibt. Als grundlegendes Kriterium setzen wir jedenfalls voraus, dass mathematische Kartentricks auf einem mathematischen Prinzip basieren müssen. Cummings (2023 [11]) unterscheidet zwischen arithmetischen, permutationellen, kombinatorischen und topologischen Tricks. Matthew T. Parker, Peter W. McOwan und Jason Davison sprechen in einem Video aus dem Jahr 2012 auch von algebraischen, zahlentheoretischen und vektoriellen Tricks. Behrends [4] stellt neben stochastischen unter anderem auch algebraische und kombinatorische Tricks vor. Es gibt also auch abseits der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine große Bandbreite an Tricks zu vielen anderen mathematischen Themenbereichen.

Eine weitere Bedingung könnte sein, dass bei einem mathematischen Trick stets alles mit rechten Dingen zugeht. Bei der Durchführung ist also keine großartige Fingerfertigkeit vonnöten, da nichts manipuliert werden muss. In der Bühnenmagie geschieht dies häufig im Zuge eines Mischverfahrens, indem ein Überhandmischen vorgetäuscht wird (man spricht auch von Monge-Mischen) oder Karten beim Bogenmischen festgehalten werden. Bei Tricks, die eine Vorhersage oder Gedankenlesen beinhalten, ist es oftmals notwendig, eine bestimmte Karte (häufig die unterste) zu erspähen, was deshalb auch als *peek* oder *glance* bezeichnet wird (siehe auch Mulcahy 2013 [33]).

Ein möglicher Einwand gegen den Verzicht auf jegliche Art von Manipulation ist allerdings, dass bei vielen Tricks mit einem vorsortierten Deck gearbeitet werden muss, damit sie gelingen. Beispiele dafür sind unter anderem Der Name der Karte ist... 3.5.2 [31], die vier Asse oder die Macht der 9 bzw. Such dir eine Zahl aus [20] [28]. In manchen Fällen gibt es dafür sogar äußerst elaborierte Merksätze, wie zum Beispiel für den sogenannten *eight kings stack*, bei dem der englische Satz „*Eight kings threatened to save ninetyfive ladies for one sick knave.*“ für die Reihenfolge 8-K-3-10-2-7-9-5-D-4-1-6-B steht (siehe Benjamin 2023 [7]).

Falls wir zumindest gewisse Manipulationen erlauben, kommen auch Tricks infrage, bei denen Karten vorab an bestimmten Positionen platziert oder bestimmte Sortierungen des gesamten Decks vorgenommen werden. Damit ist jedoch nicht geklärt, ob auch Arbeitsschritte wie das Vorenthalten oder Forcieren bestimmter Karten (siehe Kadan 2017 [21]), die Nutzung von Duplikatkarten, der Austausch oder die Trennung von Decks sowie vermeintliches Mischen, ohne tatsächlich etwas an der Anordnung der Karten zu ändern (zum Beispiel durch sogenannte *false cuts*), erlaubt sind (siehe auch Danilyuk 2017 [12]). Keine Manipulation stellt jedenfalls das Weglassen von Karten dar, insofern diese nicht benötigt werden. Ein typisches Beispiel dafür wäre die Reduktion des Decks auf gewisse Teilmengen wie bestimmte Farben, Zahlen oder Bilder. Dasselbe gilt auch für das Hinzufügen zusätzlicher Karten, falls ein einzelnes Deck nicht ausreicht, wie bei der Kartenschlange [41] oder Penney's Game [14].

2 Theoretischer Hintergrund

Cummings merkt an, dass bei mathematischen Zaubertricks nicht etwa das Unmögliche, sondern ganz einfach das Unvermeidbare geschieht und beschreibt die mathematische Magie (engl. *mathemagics*), d. h. die Kombination von Magie und Mathematik, als jenen Teilbereich der Magie, der ohne Taschenspielertricks auskommt, weil alle Tricks von selbst funktionieren und garantiert gelingen. Wir könnten also außerdem verlangen, dass ein mathematischer Kartentrick nicht schiefgehen darf, solange man alle Arbeitsschritte korrekt ausführt. Derartige Tricks werden dementsprechend oft als selbstarbeitend (engl. *self working*) bezeichnet.

Ein möglicher Einwand gegen dieses Kriterium des garantierten Erfolgs wäre, dass es durchaus Tricks gibt, die fehlschlagen können. Zwei Beispiele dafür sind die Kartenschlange [41], welche auf dem *Kruskal Count* basiert [4] [18] [24] und *Penney's Game*, welches man, insbesondere bei der Durchführung mit Spielkarten statt mit Münzen, auch verlieren kann [4] [6][14].

Von diesen Überlegungen ausgehend wird nun festgelegt, dass alle im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Tricks und Methoden, nach Möglichkeit, folgende Bedingungen erfüllen sollen:

- Bei den verwendeten Karten handelt es sich um Exemplare aus einem *standard deck* mit insgesamt 52 Karten des französischen Blatts, d. h. mit den beiden schwarzen Farben Pik (franz. *Pique*, engl. *Spades*) und Kreuz (franz. *Trèfle*, engl. *Clubs*, öst. *Treff*) sowie den beiden roten Farben Herz (franz. *Cœur*, engl. *Hearts*) und Karo (franz. *Carreau*, engl. *Diamonds*, dt. auch *Eckstein*), wobei manchmal auch Joker inkludiert sind [12]. Die meisten Spielkarten sind ungefähr fünf bis sechs Zentimeter breit und acht bis neun Zentimeter hoch, aber es gibt auch kleinere Ausführungen, die unter anderem bei Patience bzw. Solitaire zum Einsatz kommen, sowie größere, die für Bühnenvorführungen hergestellt werden.

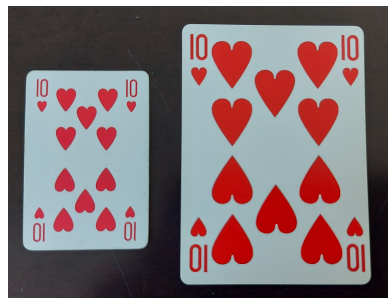


Abbildung 2.2: Größenvergleich von Spielkarten (eigene Abbildung)

Es sind also keinerlei Spezialanfertigungen vonnöten, wie bei der von Kolpas (1992 [23]) vorgestellten Originalversion des Oriental Express von David Copperfield oder der ursprünglichen Version des magischen Dreiecks von Steve Humble (siehe Behrends 2015 [4]). Manche Tricks können ebenso mit anderen Blättern wie dem deutschen (Eicheln, Laub bzw. Grün, Herz und Schellen), dem schweizerischen (Eicheln,

Schilten, Rosen und Schellen) oder dem italienisch-spanischen (Schwerter, Kelche, Münzen und Stäbe) durchgeführt werden.

- Es müssen nicht immer zwingend alle Karten des Decks zum Einsatz kommen, da bei manchen Tricks oder Methoden sogar schon eine Handvoll Karten genügt, wie zum Beispiel beim Piano-Duett 3.1.2, bei den einfachen Varianten verschiedener Abzähltricks 3.1.3 oder beim vorhergesagten Umstecken [28].
- Die Karten sind ausschließlich anhand der aufgedruckten Motive voneinander unterscheidbar. Ihre physische Beschaffenheit wurde also nicht durch bestimmte Färbungen, Muster, Einschnitte, Eselsohren, Abfeilen, Geruch, Oberflächenbeschaffenheit oder Sonstiges manipuliert.
- Abgesehen von einem oder auch mehreren Decks sind keine besonderen Werkzeuge, Requisiten oder Gimmicks vonnöten, und es wird auch nicht mit Gegenständen gearbeitet, welche die Sicht verdecken (engl. *vision-preventing-devices*). Davon ausgenommen sind Schreibmaterial oder technische Geräte, wenn sie nicht für die Durchführung erforderlich sind, sondern stattdessen der besseren Visualisierung für das Publikum dienen.
- Taschenspielertricks (engl. *sleight-of-hand*) sind nur bedingt erlaubt. Es ist zwar zulässig, im Vorhinein das Kartendeck auf eine bestimmte Art und Weise zu arrangieren wie bei *Spell the Deck* 4 oder nur bestimmte Karten zu verwenden wie bei den Komplementärfarben [14], aber nicht durch bestimmte Mischtechniken, die auf Täuschungsmanövern basieren, die Reihenfolge der Karten im Deck zu manipulieren wie bei den vier Gaunern/Bankräubern [12] [38]. Abgesehen davon kommen auch keine Tricks infrage, bei denen lediglich die Tatsache ausgenutzt wird, dass jemand nicht genau aufpasst und eine andere rote oder schwarze Karte für eine der gesuchten hält, wie bei den drei Brüdern [12] oder Behalte die Karten im Auge [28].
- Alle Tricks können grundsätzlich alleine durchgeführt werden. Es sind also keine Helferinnen oder Helfer nötig, um Kartencodierungen zu übermitteln (vgl. Behrends 2015 [4]) oder das Publikum zu täuschen, indem ein Schritt durchgeführt, eine Vorhersage gemacht oder sonstiges unternommen wird, was eine tatsächlich zufällig ausgewählte Person nicht machen würde oder könnte.
- Die Karten sind danach problemlos wiederverwendbar, weil sie nicht bemalt, gefaltet, gebogen, gerollt, zusammengeknüllt, zerschnitten oder anderweitig unbrauchbar gemacht werden. Dadurch kommen bestimmte Tricks nicht infrage, bei denen beispielsweise Autogramme auf Karten geschrieben werden oder für die eine Karte als Requisite vorbereitet werden muss, wie bei der umgestülpten Karte von Morgan & Ginther (1994 [32]). Es ist dementsprechend aber auch keine Voraussetzung bei der Durchführung besonders abgenutzte Karten oder dergleichen zu verwenden, damit ein Trick gelingt (siehe auch Mulcahy 2013 [35]).

2.2.4 (Karten-)Zauberei im Schulunterricht

Schwankl (2021 [41]) und Fasching (2022 [14]) gehen in ihren Arbeiten auch auf mögliche Vorteile des Einsatzes von Zauberei im Mathematikunterricht ein. Die wichtigsten davon werden in diesem Abschnitt kurz zusammengefasst (siehe auch Spencer 2012 [44] und Zwicker 2023 [51]):

- **Erhöhung der (intrinsischen) Motivation:** Falls die Lernenden positive Erfahrungen machen und Freude bei der Sache sind, kann Zauberei eine äußerst sinnstiftende Tätigkeit darstellen, und zwar selbst dann, wenn kein unmittelbarer Nutzen des Gelernten bzw. praktische Anwendungsmöglichkeiten abseits davon erkennbar sind. Sie macht unter Umständen sogar Lust auf mehr bzw. fungiert gewissermaßen als Lockmittel, weil die Lernenden danach eher bereit sind, sich auf neue Themen einzulassen. Kadan (2017 [21]) verwendet in diesem Zusammenhang den Begriff *Edutainment*, der sich aus den englischen Wörtern für Unterricht und Unterhaltung, und zwar *education* und *entertainment* zusammensetzt.
- **Steigerung der Aufmerksamkeit und Konzentration:** Der Anspruch, die Tricks fehlerfrei durchführen zu können, sorgt unter Umständen für große Sorgfalt beim Arbeiten und spornt an, die eigenen (mathematischen) Fähigkeiten zu trainieren. Lernende, die sonst unter Umständen als eher schwach eingestuft werden und womöglich Lernschwierigkeiten haben, legen teilweise ein gänzlich anderes Verhalten an den Tag und zeigen eine vergleichsweise hohe Arbeitsbereitschaft. Das Einüben der Arbeitsschritte oder auch Durchgehen einer diesbezüglichen Anleitung stellt eine Art von Gedächtnistraining dar, stärkt die Ausdauer und hilft außerdem beim Erwerb einer soliden Arbeitshaltung.
- **Aneignung kreativer Problemlösefähigkeiten:** Die Ergründung der Funktionsweise eines Tricks erfordert mitunter vielfältige Kompetenzen. Hierzu zählen unter anderem Beobachtungstechniken, kritisches Denken, Verknüpfung von neu erworbenem mit bereits bestehendem Wissen, Herausfiltern und Analyse von relevanten Informationen und logisches Schließen, aber genauso auch (fein-)motorische Fähigkeiten. Es ist oft nötig Muster zu erkennen, verschiedene Fälle durchzuspielen und schlussendlich Argumente zu finden, welche die eigenen Vermutungen stützen. In der Regel wird im Rahmen der Erarbeitung nämlich auch erwartet, dass Hypothesen formuliert, getestet und verifiziert oder wieder verworfen werden. Sowohl das Gelingen, als auch das Fehlschlagen eines Tricks dienen dabei als unmittelbares konstruktives Feedback.
- **Förderung der Teamfähigkeit:** Im Sinne des Peer-Learning können Lernende dazu aufgefordert werden, sich die Funktionsweise eines Tricks gegenseitig zu erklären oder ihn sich untereinander vorzuführen. Das fördert unter anderem die Zusammenarbeit und Kommunikation mit anderen, Kritikfähigkeit, Führungs- und Präsentationskompetenzen. Abgesehen davon fallen im Zuge von diesbezüglichen Partner- oder Gruppenarbeiten etwaige Leistungsunterschiede und verschiedene

Lernfortschritte womöglich weniger ins Gewicht und es entsteht ein Zusammengehörigkeitsgefühl.

- **Stärkung des Selbstvertrauens:** Falls Lernende dazu angehalten sind, die Tricks selbst vorzuführen, kann nebenbei auch das Selbstwertgefühl gesteigert werden. Immerhin müssen Lernende für die erfolgreiche Darbietung unter anderem ihr Lampenfieber überwinden, die Funktionsweise eines Tricks verstehen und sich die Abfolge der Arbeitsschritte merken. Die selbstständige Vorführung von Zaubertricks sollte für die Lernenden allerdings keine Voraussetzung für eine positive Leistung sein, weil man, wie Schwankl [41] und Fasching [14] anmerken, nicht davon ausgehen darf, dass nicht alle Lernenden gerne zaubern oder im Rampenlicht stehen. Zwicker merkt an, dass es auch eine Kehrseite zu beachten gibt, weil das Wissen um Zauberei und deren erfolgreiche Präsentation mitunter Aufmerksamkeit und Anerkennung bewirken können. Dies sollte jedoch nicht in Überheblichkeit und Besserwisserei münden.

2.2.5 Tipps für den Einsatz in der Praxis

In diesem Abschnitt wird erläutert, was beim Zaubern beachtet werden sollte, um die Aufmerksamkeit einer Schulklasse in den Bann zu ziehen und das Verständnis der Funktionsweisen zu erleichtern.

Fasching [14] orientiert sich dazu an den vier Leitfragen nach dem Was, Wann, Wer und Wie. Bei der Auswahl eines Tricks sollte darauf geachtet werden, dass er sich mit den aktuell relevanten Lehrplaninhalten deckt. Man muss dementsprechend zuerst die Ausgangslage klären und unter anderem erheben, welches Vorwissen beim Publikum vorhanden ist. Nur so kann man sich vergewissern, dass die nötigen mathematischen Grundlagen vorhanden sind, um die Funktionsweise eines Tricks zu verstehen. Abgesehen davon kann auch erfragt werden, wer Kartentricks kennt, schon einmal Zauberei miterlebt oder sogar selbst durchgeführt hat. Da viele Tricks auf dem gleichen oder einem ähnlichen Prinzip basieren und teilweise auch unterschiedliche Varianten desselben Tricks darstellen, bieten sich manche davon unter Umständen als Diagnoseinstrumente für das Leistungsniveau der Lernenden an. Beispiele dafür wären unter anderem das 15243-Verfahren als Vorübung zu *Spell the Deck* [28] oder der Das vorhergesagte Umstecken [28] als Vorübung zu den Hummer-Zaubertricks [4] [5] [6].

Ein weiteres Kriterium ist die Wahl eines geeigneten Zeitpunkts für den Einsatz eines Kartentricks. Predinger & Leuders (2016 [37]) unterscheiden im Falle des Gegenstandes Mathematik unter anderem zwischen Erarbeitung, Systematisierung, Übung, Wiederholung und Überprüfung. Letztere dürfte in Verbindung mit Kartentricks eher eine geringe bis keine Rolle spielen. Matthews (2008 [31]) kritisiert in diesem Zusammenhang, dass viele mathematische Kartentricks oft nur als Stundeneinstieg (siehe auch Kadan 2015 [20]), kurze Überbrückung bzw. Lückenfüller zwischen Unterrichtsphasen oder davon unabhängigen Themen dienen. Die zugrundeliegenden Verfahren sind, seines Erachtens, nämlich in der Regel durchaus bedeutsam genug, um mehr als bloße Unterhaltungsmathematik zu sein, und könnten dementsprechend besser genutzt werden.

Liljedahl (2017 [27]) merkt an, dass das Erreichen eines Flow-Zustands nötig ist, um Lernenden die Möglichkeit zu geben, sich wirklich auf das Thema einzulassen. Beide sprechen sich deshalb dafür aus, den Tricks ausreichend Zeit einzuräumen, damit die Lernenden ihr konzeptuelles und prozedurales Verständnis von Mathematik trainieren können. Matthews (2008 [31]) ist der Meinung, dass auch kompliziertere Tricks, deren Funktionsweise über die Inhalte des Lehrplans hinausgeht, trotzdem als Ausblick auf mathematische Inhalte mit fortgeschrittener Schwierigkeit dienen können, um den Lernenden so möglicherweise die Lust auf eine spätere Vertiefung mit der Materie zu wecken. Fasching [14] hebt in ihrer Arbeit zwar vor allem die Nutzung von Zauberei im Unterricht als Stundeneinstieg hervor, betont jedoch zugleich, dass diese ebenso als Überleitung zu anspruchsvolleren Inhalten oder Wiederholung von bereits Gelerntem geeignet ist.

Ein weiterer Aspekt ist die Unterrichtsgestaltung, d. h. in welcher Form der jeweilige Trick in den Unterricht eingebaut wird. Dabei spielt die vor allem die Bühnenwirksamkeit der Lehrperson eine entscheidende Rolle. Diese benötigt dafür erwartungsgemäß deutlich mehr Hintergrundwissen über die zugrundeliegende Mathematik als die Lernenden. Cummings [11] merkt in diesem Zusammenhang an, dass mathematische Kartentricks in der Literatur häufig leider nur kurz und eher oberflächlich erläutert werden, ohne dabei ausreichend ins Detail zu gehen.

Für Lehrkräfte ist es jedenfalls essenziell, sich gebührend mit den Hintergründen eines Tricks vertraut zu machen, um den Lernenden bei später bei etwaigen Verständnisschwierigkeiten helfen zu können. Damit die Tricks verlässlich gelingen, müssen sie also im Vorfeld sowohl gründlich durchgearbeitet, als auch mehrmals geübt werden. Ein wesentlicher Aspekt der Zauberei ist nämlich die Aufbereitung bzw. Ausschmückung eines Tricks im Rahmen der Vorführung. Falls man selbst noch keinerlei Bühnenerfahrung hat, sollte man sich vorher genau überlegen, wie man den Trick präsentieren will, um das Publikum zu begeistern.

Zu Beginn wird ein Trick in der Regel von der Lehrperson vorgeführt. Hierbei empfiehlt sich der Einsatz eines Projektors, und zwar am besten mit einem Lesegerät oder einer Dokumentenkamera (siehe Abbildung 2.3), damit die Arbeitsschritte aus der Vogelperspektive gezeigt werden können. Sollte kein derartiges Gerät vorhanden sein, kann auch auf ein Tablet oder Mobiltelefon mit Kamera ausgewichen werden, indem man ein Videotelefonat startet, den Bildschirm des Geräts teilt und diese Ansicht mit einem Beamer projiziert.



Abbildung 2.3: Dokumentenkamera (eigene Abbildung)

Bei der Gestaltung von Tafelbildern im Unterricht wird häufig mit Farben gearbeitet, um bestimmte Elemente der Notation hervorzuheben und die Lernenden so dabei zu unterstützen, einen besseren Überblick zu behalten. Bei Kartentricks kommt dieses Prinzip unter Umständen ebenfalls zum Einsatz, falls nur bestimmte Farben oder Bilder genutzt werden. Der britische Mathematiker James Grime hat einen Trick entwickelt,

2 Theoretischer Hintergrund

bei dem er die Karten einer Farbe (im Original: roten Herz- und Karo-Karten) einzig und allein dafür verwendet, um Differenzen zwischen zwei Karten der anderen Farbe (im Original: schwarz) zu markieren [17]. Denkbar wäre auch der Einsatz von Vierfarbendecks, wie sie beim Skat (, , , ) oder Online-Poker (, , , ) üblich sind. Falls möglich und sinnvoll, können Karten mit unterschiedlichen Farben auf der Rückseite als visuelle Hilfe verwendet werden, um gewisse Arbeitsschritte für das Publikum bzw. in diesem Fall die Lernenden leichter nachvollziehbar zu machen. Eine weitere mögliche Hilfestellung seitens der Lehrperson wäre die Bereitstellung von Ressourcen, in denen die Vorgehensweise noch einmal erläutert wird. Denkbar wären unter anderem Anleitungen mit Bildern und Texten oder auch Videos zu allen Arbeitsschritten.

Man sollte sich außerdem überlegen, was die Lernenden in weiterer Folge zu tun haben oder ob sie zu Beginn erst einmal nur zuschauen sollen. Schwankl [41] empfiehlt, wenn möglich, Wetten mit einzelnen Personen oder sogar dem gesamten Publikum einzugehen und Lernende in die Darbietung miteinzubeziehen. Sie können unter anderem bei Tricks assistieren oder Entscheidungen treffen, indem sie zum Beispiel Karten auswählen. Oftmals können die Lernenden die Arbeitsschritte des Tricks während der Vorführung durch die Lehrperson auch gleich selbst durchführen. Dafür müssen jedoch ausreichend Kartendecks für alle Beteiligten vorhanden sein, wobei die Lernenden dafür auch in Zweier- oder Dreierteams eingeteilt werden können, falls es nicht genug Decks gibt. Sie können zwar auch eigene Decks mitbringen, aber es empfiehlt es sich, für die ganze Gruppe einheitliche Decks zur Verfügung zu stellen. Manche Tricks sind nämlich anschaulicher, wenn die Karten bestimmte Eigenschaften wie bestimmte Farben auf der Vorder- und/oder Rückseite, gut sichtbare Symbole, spezielle Beschichtungen, etc. besitzen.

Bei manchen Tricks lassen sich die Arbeitsschritte in eine Rahmengeschichte verpacken, die man während der Darbietung erzählen kann, um das Publikum in den Bann zu ziehen. Solche spielerischen Erzählungen, wie sie unter anderem bei den vier Reitern 4, der großen Pause 3.1.4 und dem (Kopfgeld-)Jäger 3.3.2 vorkommen, können die Lernenden dabei unterstützen, die Arbeitsschritte besser im Gedächtnis zu behalten. Gardner [1] merkt außerdem an, dass so gut wie jeder Zaubertrick, bei dem eine Vorhersage möglich ist, auch in eine Variante mit Gedankenlesen abgeändert werden kann.

Bei vielen Tricks kann gewissermaßen die Macht der Masse ausgenutzt werden, weil sie sich gleichzeitig mit einer großen Anzahl an Teilnehmenden durchführen lassen. Dadurch ist die Verblüffung am Ende womöglich umso größer, weil unter Umständen jede Person eine andere Verteilung der Karten hat und trotzdem zum gleichen Resultat kommt. Aus diesem Grund eignen sich diese auch besonders gut für einen Einsatz im Klassenzimmer. Ein typisches Beispiel für einen (Gedankenlese-)Trick, der auch problemlos mit mehreren Personen durchgeführt werden kann, ist die Kartencodierung 3.6.3. Fasching [14] rät allerdings, darauf zu achten, dass am Ende nicht die Illusion, sondern der mathematische Hintergrund in den Fokus rückt.

Zwei Faustregeln der Magie besagen, dass man einen Trick nicht mehr als einmal vorführt, um die Illusion zu wahren und außerdem niemals verrät, wie ein Trick funktioniert (siehe auch Mulcahy 2013 [35]). Dadurch soll verhindert werden, dass unser Publikum die Funktionsweise durchschaut. Kadan (2017 [21]) ist jedoch der Meinung, dass es sinnvoll und auch legitim ist, derartige Grundsätze im Schulunterricht über Bord zu werfen. Unter Umständen sind sogar mehrere Durchgänge nötig, um das Publikum mit den Arbeitsschritten vertraut zu machen. Mulcahy sieht diese Vorgehensweise ebenso als gerechtfertigt an, insofern man es mit einem intellektuell neugierigen Publikum wie einer Schulklasse oder einer Seminargruppe zu tun hat. Er fügt jedoch hinzu, dass die Beteiligten sich das Recht, das Geheimnis hinter einem Trick zu kennen, auch selbst erarbeiten sollten.

Lim (2019 [29]) plädiert ebenfalls dafür, den Lernenden nicht gleich die Lösung zu verraten, sondern allenfalls beratend zur Seite zu stehen, damit die Lernenden die Funktionsweise selbst ergründen können. Während Liljedahl dementsprechend bewusst auf die Bereitstellung von Lösungen verzichtet, um das Publikum zu animieren, möglichst von allein auf die Lösung zu kommen und somit mehr Wert auf die selbstständige Erarbeitung von Lösungen und den Austausch mit anderen legt, bespricht Woo diese im Anschluss an die Vorführung im Rahmen der Erarbeitungsphase gemeinsam mit seinen Schulklassen, um die zugrundeliegende Mathematik in den Vordergrund zu rücken. In einer ersten Arbeitsphase, die er mit *learn* betitelt, sollen die Lernenden zunächst eine detaillierte Liste mit Instruktionen aufschreiben, um so genau wie möglich zu erklären, was von Anfang bis Ende gemacht werden muss, damit der Trick gelingt (siehe auch Kadan 2015 [20]). Auf diese Weise kann gegebenenfalls bereits eine zündende Idee entstehen und die Lernenden können außerdem ihre vorigen Überlegungen noch einmal überdenken.

In der darauffolgenden Phase, die Woo *perform* nennt, probieren die Lernenden auf Basis ihrer Notizen den Trick in Einzel-, Partner- oder auch Gruppenarbeit noch einmal selbst aus. Diese Vorgehensweise entspricht der sogenannten nachgehenden Differenzierung [22]. Dieser Schritt dient auch dazu, ihnen ein erstes Erfolgserlebnis in Form einer gelungenen Durchführung zu ermöglichen. Bei manchen Tricks gelingt das bereits im Zuge der ersten Vorführung, falls die Lernenden parallel dazu auch gleich selbst die nötigen Arbeitsschritte gemeinsam mit der Lehrperson durchführen. Nachdem der Trick mindestens einmal gezeigt wurde und die Lernenden gegebenenfalls auch die Möglichkeit hatten, ihn selbst auszuprobieren, sollen sie zunächst einmal überlegen, was genau eigentlich passiert ist und warum der Trick funktioniert.

Im Anschluss sollen eigene Hypothesen formuliert und geprüft werden. Diese Arbeitsphase, die Woo als *understand* bezeichnet, nimmt womöglich die meiste Zeit in Anspruch, da die Lernenden nun selbst Vermutungen aufstellen und testen müssen. Um das Prinzip eines Tricks zu verstehen, empfiehlt es sich, ihn unter geänderten Bedingungen durchzuführen, um herauszufinden, ob dieser dann immer noch funktioniert oder anfällig für

2 Theoretischer Hintergrund

Manipulationen ist. Es kann hilfreich für das Verständnis sein, eine Art Fehlersuche zu betreiben. Dazu versuchen wir, Situationen zu erzeugen, bei denen ein Trick misslingt, um herauszufinden, woran das liegen könnte. Häufig handelt es sich dabei um Spezialfälle, bei denen, ähnlich wie bei Extremwertaufgaben, eine minimal oder maximal nötige Menge an Karten zum Einsatz kommt wie bei Rot und Schwarz 3.4.1 oder Countdown 3.3.3. In vielen Fällen funktionieren die Tricks trotzdem, wenn man sie gegebenenfalls ein wenig abändert. Um die Funktionsweise eines Tricks besser zu verstehen, können wir außerdem die Arbeitsschritte in umgekehrter Reihenfolge durchgehen und zusätzlich dazu unter Umständen auch eine Art Röntgenblick nutzen. Damit ist gemeint, dass wir bei Tricks, die normalerweise mit verdeckten Karten durchgeführt werden, stattdessen mit aufgedeckten Karten arbeiten, um zu sehen, was dabei vor sich geht. Im Zuge einer etwaigen Verschriftlichung kann, je nach Zielsetzung, die Notation entweder durch die Lehrperson vorweggenommen oder zu Beginn noch vorenthalten werden, falls die Lernenden sich diese selbst erarbeiten sollen.

Die abschließende Phase beinhaltet das Abändern von Tricks und hat den Namen *transform*. Falls am Ende noch Zeit bleibt, um weiter in die Tiefe zu gehen, können die Lernenden auch versuchen, eigene Varianten zu erfinden und diese gegebenenfalls vor der Klasse vorführen. Sobald die Durchführung eines Tricks hinreichend bekannt ist, können unter Umständen auch verschiedene Parameter abgeändert werden. Man kann zum Beispiel die Grundgesamtheit erhöhen, um zu testen, ob ein Trick auch mit mehr Karten als in einem Deck noch funktioniert, wie bei Jack the Bounty Hunter 4.

Schwankl stellt in seiner Arbeit den Trick Kartenschlange [41] vor und wandelt diesen in Anlehnung an die von Lagarias, Rains und Vanderbei (2009 [24]) vorgeschlagenen Varianten (Bildkarten haben entweder die Ränge 11, 12 und 13, alle 10 oder alle 5) ein wenig ab, indem er die Werte der Bildkarten niedriger ansetzt als bei den Versionen von Behrends [4], Gardner [1] und Grime [18] und so dafür sorgt, dass der Trick im Schnitt häufiger gelingt. Auch jener Trick, den er als Kartenwanderung [41] bezeichnet, lässt sich ein wenig abgewandelt auch mit weniger Karten durchführen, weshalb er oftmals einfach 15er-, 21er- oder 27er-Trick genannt wird [9].

Bevor ein Kartentrick im Unterricht zum Einsatz kommt, sollte man sich jedenfalls genau überlegt haben, welches Ziel man damit verfolgt. Aschemann, Gugler & Nimmerfall [2] betonen, dass Selektion dabei bestenfalls keine oder nur eine untergeordnete Rolle spielen sollte, damit Binnendifferenzierung gelingen kann und die Lernenden weder unter- noch überfordert sind (siehe auch Westphal et al. 2016 [46]). In Anlehnung an konvergente Differenzierung könnte ein dementsprechendes Ziel sein, dass alle Beteiligten am Ende den jeweiligen Trick zumindest selbst durchführen und erklären können. Leistungsstärkere Lernende hingegen könnten, im Sinne der divergenten Differenzierung, die Möglichkeit haben, sich eigene Abwandlungen eines Tricks zu überlegen, was einer Niveaudifferenzierung durch eigenständiges Erstellen von Unterrichtsmitteln entspricht. Zwicker [51] bezeichnet diese beiden unterschiedlichen Zugänge als Kellner- und Kochniveau.

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Wie wir in diesem Abschnitt sehen werden, bieten vor allem die Abwandlungen von Tricks oftmals Möglichkeiten für eine Binnendifferenzierung, da viele bereits vorab entsprechend geändert werden können, sodass die zugrundeliegende Funktionsweise mehr oder auch weniger offensichtlich ist. Um den Zugang auch für leistungsschwächere Lernende zu ermöglichen, lassen sich nämlich in vielen Fällen auch einfachere Varianten eines Tricks mit weniger Karten betrachten. Es folgt eine Auflistung verschiedener Tricks und Methoden, bei denen mit Spielkarten gearbeitet wird, inklusive einer Verknüpfung mit dem Lehrplan der jeweiligen Schulstufe, der Erläuterung aller nötigen Arbeitsschritte sowie der Funktionsweise gefolgt von Vorschlägen für eine Binnendifferenzierung.

3.1 Erste Klasse (fünfte Schulstufe)

3.1.1 Die fehlende Karte

Thema: Division mit Rest

Lehrplanverortung:

- Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen, dabei auch große natürliche Zahlen verwenden und mehrstellige Multiplikationen und Divisionen durchführen können
- anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen
- grundlegende Sicherheit im Kopfrechnen gewinnen
- Kenntnisse über Umkehroperationen erweitern
- Formeln anwenden und interpretieren können

Durchführung: Bei diesem Trick haben die Bildkarten Bube, Dame und König die Ränge elf, zwölf und dreizehn. Wir lassen unser Gegenüber den Stapel mischen und anschließend eine Karte ziehen, ohne zu verraten, um welche es sich dabei handelt. Nun teilen wir Karte für Karte den restlichen Stapel aus und können sofort den Rang der fehlenden Karte nennen.

Funktionsweise: Es genügt zu wissen, dass die Summe aller Ränge im Deck in diesem Fall 364 ergibt. Um das zu zeigen, können wir mit der Gaußschen Summenformel

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

arbeiten: $4 \cdot (1 + 2 + \dots + 13) = 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} = 364$ ergibt. Wir müssen also im Grunde nur sukzessive die Ränge der ausgeteilten Karten addieren und am Ende die Differenz berechnen.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Für leistungsschwächere Lernende kann die Gesamtanzahl der Karten reduziert werden, indem man sich zum Beispiel auf nur zwei Spielfarben beschränkt oder die Bildkarten weglässt. Gardner (1956 [1]) stellt gleich mehrere Varianten vor, die verschiedene Zugänge ermöglichen. Bei einer davon weisen wir den Königen stattdessen den Rang null zu, wodurch die Gesamtsumme bereits ein wenig kleiner wird und nur noch 312 beträgt.

Bei den nächsten beiden Varianten arbeiten wir zusätzlich mit sogenannten Restklassen, und zwar in diesem Fall modulo 20 bzw. 13. Sobald die Zwischensumme 20 bzw. 13 überschreitet, zählen wir stattdessen mit dem jeweiligen Rest weiter. Das hat den Vorteil, dass wir von Anfang bis Ende mit vergleichsweise kleinen Zahlen arbeiten. Zum Schluss landen wir bei einer Zahl zwischen 0 und 12, die wir nur noch von 12 abziehen müssen, um den Rang der gesuchten Karte zu erhalten. Unter Umständen finden die Lernenden auch eigene Strategien, um möglichst einfach auf das Endresultat zu kommen.

Gardner stellt außerdem noch mehrere Möglichkeiten vor, um zusätzlich zum Rang auch die Spielfarbe der Karte zu ermitteln. Bei zwei davon gibt es für die Spielfarben eigene Zähler. Bei der ersten bekommt jede Spielfarbe eine Kennzahl von 0 bis 3. Diese werden ebenfalls aufsummiert, wobei modulo 10 gerechnet werden kann, um die Zwischenergebnisse niedrig zu halten. Am Ende landen wir entweder bei 5, 6, 7 oder 8 und subtrahieren dieses Ergebnis von 8, um die Kennzahl der gesuchten Spielfarbe zu erhalten.

Die zweite Variante des Magiers Charles T. Jordan ist schon wesentlich anspruchsvoller und wäre dementsprechend etwas für besonders ehrgeizige Lernende. Hier arbeiten wir mit einer Art Stellenwertsystem. Wir können uns dazu ein Ziffern Schloss, das zu Beginn 0-0-0-0 zeigt, vorstellen und müssen uns nur entscheiden, welche Spielfarbe welche Position des Zählers belegt. In weiterer Folge addieren wir dann wieder die jeweiligen Ränge. Auch bei dieser Variante können wir den Rechenweg vereinfachen, indem wir mit Restklassen arbeiten und modulo 20 rechnen. Das Endergebnis jenes Zählers, der von den anderen abweicht, muss dann von 11 subtrahiert werden, um den entsprechenden Rang zu erhalten. Falls es jedoch größer ist als 11, subtrahieren wir von 31, um herauszufinden, ob es sich um einen Buben (20), eine Dame (19) oder einen König (18) handelt. Die jeweilige Spielfarbe entspricht einfach der Position des Zählers. Ein Vorteil dieser Variante ist, dass sie auch für vier Karten gleichzeitig funktioniert, insofern alle zu unterschiedlichen Spielfarben gehören, und in diesem Fall auch die Könige wieder den Rang null haben können.

3.1.2 Piano-Duett

Thema: Zahlenmengen und Parität (gerade und ungerade natürliche Zahlen)

Lehrplanverortung: Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen

Durchführung: Liljedahl [27] nennt diesen Trick *Piano Fingers* und merkt an, dass er sich bereits für Kinder ab dem Volksschulalter eignet. Er ist auch als *Piano Duet(s)* oder einfach Piano-Trick [1] bekannt, weil die Haltung der Finger beim Platzieren der Karten so aussieht, als ob jemand Klavier spielt. Zu Beginn bitten wir unser Gegenüber, beide Hände auszustrecken und dabei die Finger auseinander zu spreizen. Dann platzieren wir der Reihe nach Kartenpaare zwischen den Fingern. Es spielt dabei keine Rolle, ob wir mit der linken oder rechten Hand beginnen. Zwischen den letzten beiden Fingern wird schließlich nur noch eine einzelne Karte platziert:



Abbildung 3.1: Vorbereitung des Piano-Tricks (eigene Abbildung)

Im nächsten Schritt nehmen wir die Kartenpaare der Reihe nach wieder zwischen den Fingern heraus, trennen sie voneinander und bilden damit zwei gleich große Stapel bis nur noch die einzelne Karte übrig ist. Unser Gegenüber darf entscheiden, auf welchen der beiden Stapel diese verbleibende Karte gelegt werden soll. Dem Anschein nach sollte diese zusätzliche Karte nun dazu führen, dass die Anzahl der Karten im jeweiligen Stapel dadurch ungerade wird. Diese Vermutung lässt sich jedoch widerlegen, indem man zeigt, dass daraus vier Paare gebildet werden können, während das beim anderen Stapel nicht funktioniert.

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Funktionsweise: Zunächst sollte ergründet werden, wie viele Karten involviert sind. An jeder Hand befinden sich vier Zwischenräume. Dort platzieren wir siebenmal jeweils zwei Karten, aber im letzten nur eine und kommen somit auf $7 \cdot 2 + 1 = 15$. Wenn wir jene Karte abziehen, die am Ende dazugelegt wird, sind es vierzehn Karten aufgeteilt auf zwei gleich große Stapel. Die Gesamtanzahl der Karten ist also gerade, aber die Anzahl der Karten in den einzelnen Stapeln nicht. Es macht somit keinen Unterschied, auf welchen Stapel wir die verbleibende Karte legen, da die Anzahl der Karten im Stapel dadurch automatisch gerade wird. Es wird also fälschlicherweise behauptet, dass beide bereits zuvor gerade wären. Der Trick gelingt also nur, wenn das Publikum dieser Behauptung Glauben schenkt und dadurch einem Trugschluss unterliegt.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Man kann es dem Publikum ein wenig leichter machen, den Trick zu durchschauen, indem man nicht von Paaren spricht, sondern die Karten genau mitzählt. Falls man die Funktionsweise des Tricks stattdessen besser verschleiern möchte, könnte man die Reihenfolge der Kartenplatzierung abändern, indem man mit den beiden Fingerpaaren aus Daumen und Zeigefingern beginnt und sich dann alternierend nach außen arbeitet.

3.1.3 Abzähltricks

Es gibt eine ganze Kategorie von Tricks, die auch unter dem Sammelbegriff *Spelling Bee* bekannt sind darauf beruhen, dass beim Buchstabieren der Kartenwerte in irgendeiner Form mitgezählt wird. Ein klassisches Beispiel dafür ist jener, den Liljedahl [28] als *Spell the Deck* bezeichnet.

Thema: Arithmetik

Lehrplanverortung:

- Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen
- anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen

Durchführung: Wir nehmen einen Kartenstapel mit dreizehn Karten von Ass bis König zur Hand. Diese müssen nicht von derselben Spielfarbe sein, aber es kann zur besseren Übersicht dienen, wenn sie einheitlich sind. Danach gehen wir der Reihe nach die Bezeichnungen der Karten durch, d. h. wir beginnen mit dem Ass und buchstabieren A-S-S. Mit jedem Buchstaben wird die oberste Karte ans Ende des Stapels befördert und am Ende des Wortes wird je nach Variante entweder die letzte oder nächste Karte abgelegt. Wir machen so weiter, bis der komplette Stapel weg ist und auf wundersame Art und Weise automatisch in einer gewünschten Sortierung aufliegt.

Funktionsweise: Dieser Trick funktioniert, weil wir den Stapel entsprechend vorsortiert haben. Da es verschiedene Möglichkeiten dafür gibt, wie wir die Karten bezeichnen bzw. buchstabieren, muss Klarheit bezüglich der Zählweise herrschen. Eine einfache Variante für den Einstieg ist, anstatt zu Buchstabieren, einfach die Ränge abzuzählen. Falls in diesem Fall nach jedem Zählvorgang die letzte Karte abgelegt werden soll, lautet die Reihenfolge A-8-2-5-10-3-D-B-9-4-7-6-K. Falls hingegen die jeweils nächste Karte abgelegt werden soll, lautet sie 4-A-D-K-2-10-6-7-3-5-B-9-8.

Beim tatsächlichen Buchstabieren könnten wir wie oben beschrieben von der neuen Rechtschreibung ausgehen, d. h. wir buchstabieren A-S-S statt nur A-S. Außerdem einigen wir uns darauf, dass die elfte Karte Bube heißt und nicht etwa Bub, Junge oder Bauer. Darüber hinaus werden die Umlaute Ü bei Fünf und Ö bei König als ein Buchstabe gezählt. Falls in diesem Fall nach jedem Zählvorgang die letzte Karte abgelegt werden soll, lautet die Reihenfolge 6-4-A-9-B-8-2-5-K-D-3-7-10. Falls hingegen die jeweils nächste Karte abgelegt werden soll, lautet sie 3-D-9-A-8-10-4-7-2-6-K-B-5.

Im Original, d. h. in der englischsprachigen Version des Tricks, gibt es keinen vergleichbaren Klärungsbedarf, aber dafür bietet es viele Möglichkeiten für die Lernenden eigene Lösungen zu finden und auch zu argumentieren, warum diese mit den von ihnen beschlossenen Regeln funktionieren. Eine Liste mit möglichen Varianten des Zählens und

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Buchstabierens befindet sich im Anhang 4. Analoge Überlegungen können auch für andere (versetzte) Reihenfolgen wie Zwei bis As(s) o. ä. sowie für mehr als nur eine Spielfarbe bis hin zum gesamten Deck vorgenommen werden.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Der Trick *Place One Kill One*, den Behrends als *Down Under* bzw. Australisches Ausgeben bezeichnet, stellt gewissermaßen eine Vorübung des oben beschriebenen Tricks dar. Als Einstieg empfiehlt sich eine Variante, bei der nur die Karten von Ass bis Fünf benötigt werden, wobei das Ass den Rang eins hat. Anstatt die Werte zu buchstabieren, wird einfach jeweils bis zum entsprechenden Zahlenwert gezählt. Die Aufgabe ist nun, die fünf Karten so zu sortieren, dass am Ende ein Stapel in absteigender Reihenfolge abgelegt wurde, d. h. das Ass liegt ganz unten und die Fünf ganz oben. Liljedahl [27] [28] bezeichnet diesen Trick als 15243 und nimmt damit die gesuchte Sortierung für fünf Karten im Namen bereits vorweg.

Eine einfache Strategie ist, die Schritte in umgekehrter Reihenfolge durchzugehen d. h. wir legen den Stapel in der gewünschten Sortierung ab und nehmen zunächst die erste Karte auf. Da wir eine einzelne Karte nicht vor sich selbst geben können, nehmen wir auch gleich die nächste auf und geben anschließend die unterste Karte nach oben. Danach nehmen wir die nächste Karte auf, geben wieder die unterste nach oben und machen so weiter bis wir den gesamten Stapel aufgenommen haben. Am Ende halten wir die gesuchte Startkonfiguration in der Hand. Eine Liste mit den Sortierungen für das gesamte Deck befindet sich im Anhang 4. Sobald die Strategie zur Findung der nötigen Sortierung klar ist, kann man entweder die Anzahl der Karten erhöhen oder zur Analyse des oben beschriebenen Tricks übergehen.

Obwohl die Funktionsweise auf einem vergleichsweise einfachen Algorithmus basiert, lässt sich der Trick mit einer interessanten Aufgabenstellung verknüpfen, und zwar dem Josephus-Problem. In der Geschichte, die für die Aufgabenstellung ein wenig geändert wurde, flieht der namensgebende Historiker Josephus-Flavius vor den römischen Soldaten gemeinsam mit vierzig anderen Juden in eine Höhle. Da ihre Lage aussichtslos erscheint, vereinbarten die Männer, einander zu töten. Dazu stellen sie sich im Kreis auf und strecken der Reihe nach den jeweils nächsten mit ihrem Schwert nieder, bis am Ende nur noch einer übrig bleibt, der sich selbst töten muss. Da Josephus insgeheim lieber in Gefangenschaft leben will als zu sterben, muss er sich überlegen, an welcher Position im Kreis er sich aufstellt, um als Letzter übrigzubleiben (vgl. Siemon 1985 [42]). Eine Liste mit den Sortierungen für die Variante, deren jeweils letzte Karte den Lösungen dieses Problems für die Fälle 1 bis 52 entspricht, befindet sich ebenfalls im Anhang 4.

Wir können den Trick vereinfachen, indem wir das Buchstabieren weglassen und stattdessen einfach allen Karten Zahlenwerte zuweisen. Das ist insofern hilfreich, dass es dann keine Unklarheiten bezüglich der Formulierung bestimmter Wörter gibt. Für mehr Informationen siehe Anhang 4.

3.1.4 Große Pause

Thema: Parität

Lehrplanverortung:

- Kenntnisse und Fähigkeiten im Umgang mit natürlichen Zahlen vertiefen
- anhand von Teilern und Vielfachen Einblicke in Zusammenhänge zwischen natürlichen Zahlen gewinnen

Durchführung: Dieser Trick entspricht der zugrundeliegenden Vorgehensweise des *Oriental Express* von David Copperfield. Die Ausarbeitung entspricht jener von Kolpas (1992 [23]), aber der Einfachheit halber wurde die entsprechende Rahmengeschichte in der folgenden Erläuterung weggelassen.

Zunächst legen wir dazu neun Karten einer Spielfarbe in einem Raster mit drei Zeilen und drei Spalten auf (das Ass hat in diesem Fall den Rang eins). Bevor es losgehen kann, ist es wichtig, dass das Publikum verstanden hat, dass man sich mit jedem Schritt entweder nach oben, unten, links oder rechts bewegen kann. Diagonale Bewegungen sind jedoch nicht erlaubt.

1. Unser Gegenüber darf sich aussuchen, ob es auf ♠2, ♠4, ♠6 oder ♠8 beginnen möchte. Wir wissen jedoch nicht, welche der vier Karten ausgewählt wurde.
2. Es dürfen vier Schritte gemacht werden. Danach nehmen wir ♠9 weg.
3. Es dürfen fünf Schritte gemacht werden. Danach nehmen wir ♠2 weg.
4. Es dürfen zwei Schritte gemacht werden. Danach nehmen wir ♠8 weg.
5. Es dürfen drei Schritte gemacht werden. Danach nehmen wir ♠A und ♠3 weg.
6. Es dürfen erneut drei Schritte gemacht werden. Danach nehmen wir ♠6 weg.
7. Zum Schluss wird ein letzter Schritt gemacht, ehe wir ♠5 und ♠7 weglegen.

Wie durch Zauberhand haben wir es geschafft unserem Gegenüber immer mehr Spielraum zu nehmen und schließlich auf eine bestimmte Karte zu lotsen, obwohl wir bis zum Schluss nicht wussten, welche Schritte gemacht wurden.

Funktionsweise: Der Trick hängt mit der Addition von geraden und ungeraden Zahlen zusammen. Da wir ihn mit Spielkarten durchführen, kann es sein, dass manche Lernende bereits währenddessen erkennen, wie er funktioniert. Der vertikale oder horizontale Schritt von einer Karte zur nächsten entspricht einem Wechsel der Parität, d. h. entweder von gerade auf ungerade oder umgekehrt.

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Da wir im oben beschriebenen Fall auf einem geradzahligen Feld beginnen und anschließend vier Schritte machen, landen wir garantiert auf einer geraden Zahl, weshalb jede ungerade Karte bedenkenlos weggelegt werden kann. Anschließend machen wir fünf Schritte, wodurch wir sicher auf eine ungerade Karte kommen und ♠2 entfernt werden kann. Das Ganze geht so weiter bis wir am Ende garantiert auf ♠4 landen.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Sobald die Funktionsweise bekannt ist, lassen sich relativ mit wenig Aufwand eigene Abwandlungen mit mehr oder auch weniger Karten sowie anderen Instruktionen und Rahmengeschichten erfinden. Ein Beispiel dafür befindet sich im Anhang 4.

Der Trick ist noch um ein Vielfaches eindrucksvoller, wenn alle Beteiligten ein eigenes Feld vor sich liegen haben, auf dem sie ihre ganz persönliche Route abgehen können. Dafür müssen zwar nicht zwangsweise Spielkarten zum Einsatz kommen, aber diese eignen sich gut für die Durchführung, weil die Zahlen bereits aufgedruckt sind und man sie auch vergleichsweise schnell auflegen und wieder wegräumen kann. Um die Funktionsweise besser zu verschleiern, kann jedoch stattdessen auch, wie im Original, mit beschrifteten Feldern o. ä. gearbeitet werden, damit die Lernenden nicht sofort die Verbindung zur Parität erkennen.

3.2 Zweite Klasse (sechste Schulstufe)

3.2.1 Doppelt vertikal

Thema: kartesisches Koordinatensystem

Lehrplanverortung: mit kartesischen Koordinatensystemen arbeiten

Durchführung: Dieser Trick hat in der entsprechenden Quelle bei Gardner (1956 [1]) keinen eigenen Namen, weshalb die Bezeichnung sich am zugrundeliegenden Verfahren der Trickbeschreibung orientiert. Behrends (2015 [4]) erwähnt die hier beschriebene Vorgehensweise im Rahmen der Erläuterungen zu Beginn eines Kapitels über Codierung von Informationen. Wir legen sechzehn Spielkarten Zeile für Zeile in einem vier mal vier Gitter auf und bitten unser Gegenüber, sich eine davon auszusuchen. Nachdem das geschehen ist, fragen wir nach der vertikalen Position der Karte. Sobald wir diese wissen, nehmen wir die Karten spaltenweise auf und teilen sie ein weiteres Mal Zeile für Zeile aus. Danach fragen wir erneut nach der vertikalen Position der Karte und können mit dieser Information sofort die gesuchte Karte identifizieren.

Funktionsweise: Das Prinzip des Tricks ist vergleichsweise einfach. Nach dem ersten Durchgang können wir die Karte bereits auf vier von sechzehn Möglichkeiten eingrenzen. Im nächsten Schritt versuchen wir zu verschleiern, dass nun nach der fehlenden horizontalen Position der vorigen Platzierungen gefragt wird.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Um die Funktionsweise des Tricks mehr oder weniger offensichtlich zu machen, können stattdessen auch mehr oder weniger Karten zum Einsatz kommen. Falls er ein weiteres Mal vorgeführt wird, können wir stattdessen auch zweimal nach der horizontalen Position fragen und müssen dabei nur berücksichtigen, dass wir die Karten zeilenweise aufnehmen und dann Spalte für Spalte ablegen.

Falls jemand es nicht schafft, den Trick zu durchschauen, wäre eine weitere Hilfestellung, ihn schon nach dem ersten Durchgang aufzulösen. Dazu fragt man zuerst nach der vertikalen und dann nach der horizontalen Position, wodurch anschaulich klar werden sollte, dass wir beim zweiten Durchgang lediglich die Orientierung getauscht haben.

3.2.2 Fünffacher Poker

Thema: Teilbarkeit und Vielfache

Lehrplanverortung:

- wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können
- mit Vielfachen und Teilern natürlicher Zahlen sowie mit Aussagen über Teilbarkeit arbeiten

Durchführung: Wir suchen uns vier weitere Personen und teilen jeweils fünf Karten aus. Jede Person wählt eine Karte in ihrem Blatt aus, merkt sie sich und legt anschließend alle Handkarten verdeckt zurück auf den Tisch, wo sie der Reihe nach wieder aufgenommen werden. Danach werden sie der Reihe nach ein weiteres Mal ausgeteilt. Wir wählen eines der fünf Blätter aus und halten es so hoch, dass wir nur die Rückseiten der Karten sehen und fragen in die Runde, ob jemand seine oder ihre Karte sieht. Falls jemand bejaht, können wir die gesuchte Karte sofort identifizieren, obwohl wir lediglich ihre Rückseite sehen.

Funktionsweise: Dieser Trick baut auf demselben Prinzip auf wie jener mit den beiden vertikalen bzw. horizontalen Positionen. Aufgrund der Reihenfolge beim Aufnehmen der Karten wissen wir beim Austeilen, dass die jeweils erste Karte von allen Personen ursprünglich Teil desselben Blatts waren. Das ist, je nachdem, ob wir im oder gegen den Uhrzeigersinn austeilen, das der ersten oder letzten Person in der Runde. Dasselbe gilt auch für die restlichen Karten. Falls wir die Blätter nach dem ersten Durchgang im Uhrzeigersinn beginnend mit der Person links neben uns aufheben, liegen ihre fünf Karten ganz unten im Stapel und werden dementsprechend als letzte wieder ausgeteilt. Wenn wir dann zufällig das Blatt aufheben, in dem die Person links von uns ihre Karte sieht, wissen wir sofort, dass es die letzte sein muss, die ausgeteilt wurde (je nach Auffächern die linke oder rechte Karte).

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Um die Funktionsweise des Tricks mehr oder weniger offensichtlich zu machen, können wir bei mehrmaliger Durchführung die Reihenfolge des Austeilens, Aufnehmens und Auffächerns variieren oder stets gleich belassen. Die Anzahl der Karten und Personen kann ebenfalls verändert werden, wobei darauf geachtet werden, dass diese übereinstimmt.

Um die Funktionsweise zu veranschaulichen kann der Trick mit aufgedeckten bzw. umgedrehten Karten durchgeführt werden. Zusätzlich dazu könnte man Karten in aufsteigender Reihenfolge austeilen, sodass die vier anderen Personen zum Beispiel jeweils die Karten von Ass bis Fünf der gleichen Spielfarbe auf der Hand haben. Nach dem zweiten Mal austeilen dürfte dann anschaulich klar sein, was passiert, da nun jede Person jeweils vier Karten mit gleichem Rang und eine zusätzliche aus unserem ursprünglichen Blatt in der Hand hält. Aus diesem Grund eignet sich auch die vier Reiter (siehe Anhang 4) als Vorübung zu diesem.

3.2.3 Aus fünf mach vier

Thema: Symmetrie

Lehrplanverortung: einfache symmetrische Figuren erkennen und herstellen können

Durchführung: Ray (1992 [38]) stellt diesen Trick vor, bei dem wir nur die vier Fünfer eines Standard-Decks benötigen. Die Aufgabe besteht darin, die Karten so aufzulegen, dass auf jeder Karte nur noch vier Symbole zu sehen sind.

Funktionsweise: In der Regel versuchen viele Lernende zunächst die Karten aufzufächern, sodass jeweils nur noch vier Symbole zu sehen sind. Diese Überlegung ist grundsätzlich sinnvoll und wichtig für die tatsächliche Lösung des Problems. Allerdings funktioniert das für die oberste Karte nicht. Um das zu gewährleisten, müssen wir die Karten im Kreis übereinander legen (siehe Abbildung 3.2).

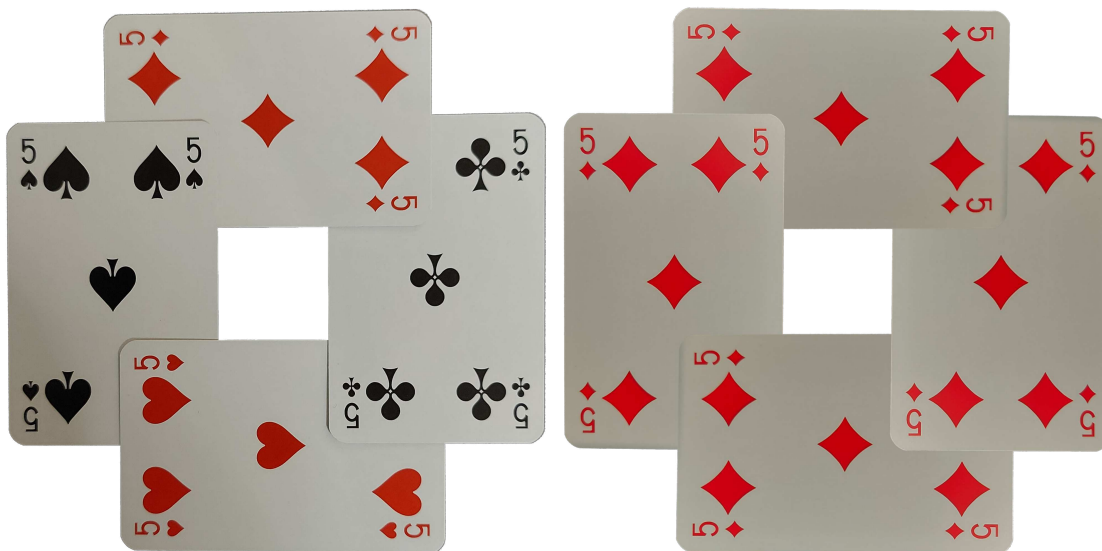


Abbildung 3.2: links: eine allgemeine Lösung, rechts: eine rotationssymmetrische Lösung.
(eigene Abbildung)

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Sobald die Lösung bekannt ist, können sich die Lernenden noch überlegen, was geändert werden müsste, damit das entstandene Gebilde tatsächlich rotationssymmetrisch ist. Dazu müssten vier Fünfer der gleichen Spielfarbe verwendet werden (siehe Abbildung 3.2). Im Anschluss soll nach Begründungen gesucht werden, warum es keine achsensymmetrische Lösung geben kann. Ältere Lernende, die bereits mit dem Thema Kombinatorik vertraut sind, können sich zusätzlich dazu auch noch überlegen, wie viele verschiedene Lösungen es für die Fünfer der vier Spielfarben gibt, wenn wir alle möglichen Anordnungen berücksichtigen. Eine entsprechende Ausarbeitung befindet sich im Anhang 4.

3.2.4 Kartenwette

Thema: Teilbarkeit und Vielfache

Lehrplanverortung:

- wichtige Teilbarkeitsregeln kennen und anwenden können
- mit Vielfachen und Teilern natürlicher Zahlen sowie mit Aussagen über Teilbarkeit arbeiten

Durchführung: Die folgende Erklärung wurde abgeändert nach Gardner (1956 [1]). Wir legen das Kartendeck in die Mitte, wobei es keine Rolle spielt, ob die Karten aufgedeckt oder verdeckt liegen. Anschließend nehmen wir und unser Gegenüber abwechselnd mindestens eine, aber höchstens fünf Karten weg. Wer die letzten Karten wegnimmt, hat gewonnen bzw. wer keine mehr nehmen kann, verliert. Falls unser Gegenüber beginnt und die optimale Strategie nicht kennt, ist die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, dass wir gewinnen, und wenn wir beginnen dürfen, ist uns der Sieg garantiert.

Funktionsweise: Unser Ziel ist, dafür zu sorgen, dass die Anzahl der im Stapel verbleibenden Karten nach jedem unserer Züge eine bestimmte Eigenschaft aufweist, und zwar soll es sich dabei stets um ein Vielfaches der maximalen Anzahl an Karten, die wir wegnehmen dürfen, plus eins handeln.

→ Beispiel: Angenommen wir spielen eine vergleichsweise einfache Variante mit insgesamt nur zehn Karten und maximal drei Karten pro Zug. Falls wir beginnen dürfen, ziehen wir zwei Karten, damit danach noch $2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$ übrig bleiben. Falls unser Gegenüber im nächsten Zug nur eine Karte zieht, ziehen wir im darauffolgenden drei, bei zwei Karten ziehen wir ebenfalls zwei und bei drei Karten nur eine, um dafür zu sorgen, dass auf jeden Fall $1 \cdot (3 + 1) = 1 \cdot 4 = 4$ Karten übrig bleiben. Nun spielt es keine Rolle mehr, wie viele Karten unser Gegenüber zieht, da wir auf jeden Fall die verbleibenden Karten nehmen können und so garantiert gewinnen.

Diese Überlegung lässt sich auf beliebig viele Karten übertragen. Im Falle der weiter oben beschriebenen Variante würden zu Beginn also vier Karten wegnehmen, sodass noch $8 \cdot 6 = 48$ Karten im Stapel verbleiben. Falls unser Gegenüber beginnt, versuchen wir, so bald wie möglich auf ein Vielfaches von sechs zu kommen.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Wir können verschiedene Parameter ändern. Je mehr Karten im Spiel sind, desto überwältigender wirkt es mitunter auf Personen, denen die Strategie noch nicht bekannt ist. Danilyuk [12] stellt eine Variante mit dreißig Karten vor, bei der höchstens sechs weggenommen werden dürfen. Es kann dementsprechend förderlich sein, die Gesamtanzahl an Karten zu verringern, und zwar vor allem dann, wenn man die Funktionsweise erklärt. Für leistungsschwächere Lernende kann es auch hilfreich sein, die maximale Anzahl an Karten, die in einem Zug weggenommen werden kann, zu verringern.

3.3 Dritte Klasse (siebte Schulstufe)

3.3.1 Das berechnete Abheben

Thema: Terme und Gleichungen

Lehrplanverortung:

- Formeln in Sachsituationen aufstellen können
- Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können
- Aufgaben aus Anwendungsbereichen durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können
- Lineare Gleichungen und Formeln umformen
- Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten durch Äquivalenzumformungen lösen

Durchführung: Wir bitten unser Gegenüber eine eher geringe Anzahl an Karten abzuheben. Anschließend heben wir so viele Karten ab, dass wir sicher mehr haben als unser Gegenüber. Angenommen es sind elf und wir haben achtzehn. Nun wählen wir eine eher kleine Zahl wie zum Beispiel drei und verlautbaren, dass wir drei Karten mehr haben als unser Gegenüber und dann noch einmal so viele übrig bleiben, um auf fünfzehn zu kommen. Wir bitten unser Gegenüber gleichzeitig die Handkarten abzulegen und dabei mitzuzählen. Danach werden dementsprechend zwei Stapel mit jeweils elf Karten aufliegen. Anschließend legen wir die angekündigten drei auf unseren Stapel dazu, so dass wir noch vier Karten auf der Hand haben. Danach zählen wir von elf weiter und landen mit den vier Karten bei fünfzehn. Es spielt keine Rolle, wie oft wir den Trick durchführen. Jedes Mal ändert sich die Vorhersage und trotzdem behalten wir Recht.

Funktionsweise: Beim Trick wird nicht nur der Eindruck erweckt, dass wir die Anzahl der Karten unseres Gegenübers kennen, sondern dass diese auch einen Einfluss auf unsere Vorhersage hat. In Wirklichkeit geht es aber lediglich darum, dass wir mehr Karten abgehoben haben und eine Zahl abziehen, die klein genug ist, damit noch ein Rest bleibt. Sei x die Anzahl der Karten, die wir abheben und y jene unseres Gegenübers. Falls $x > y$ gilt, ist $x - y = z$ die Differenz der beiden Anzahlen. Wenn wir also eine Zahl n wählen, die kleiner ist als z und die entsprechende Anzahl an Karten von unserer abziehen, bleibt ein noch kleinerer Rest r übrig. Diesen können wir im Zuge der Erklärung als scheinbar magische Eingebung verschleiern, obwohl wir noch gar nicht wissen, welche Zahl sich dahinter versteckt: $x = y + z = y + n + r$.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Wir können, ähnlich wie bei einigen anderen Tricks, die Grundgesamtheit einschränken oder stattdessen auch auf das ganze Deck bzw. sogar auf mehrere Decks ausweiten, um den Effekt noch eindrucksvoller zu machen. Für leistungsschwächere Lernende empfiehlt sich das Gegenteil.

3.3.2 (Kopfgeld)-jäger

Thema: Terme

Lehrplanverortung:

- Formeln in Sachsituationen aufstellen können
- Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können
- Aufgaben aus Anwendungsbereichen durch Umformungen von Formeln oder Termen lösen können

Durchführung: Liljedahl [28] nennt diesen Trick Jack the Bounty Hunter, während Woo [50] ihn lediglich als *Jack the Hunter* bezeichnet. Der Name des Tricks rührt daher, dass der Bube in der englischen Sprache als Jack bezeichnet wird. Zuerst suchen wir uns also einen Buben als (Kopfgeld-)Jäger aus dem Deck. Danach zieht unser Gegenüber eine Karte als Beute bzw. Ziel (engl. *target card*) aus dem Deck und merkt sie sich.

Danach teilen wir zwei Stapel mit jeweils fünfzehn Karten aus. Unser Gegenüber hebt von jedem Stapel ein Paket ab und legt es daneben ab. Dann darf es die Beute verdeckt auf eines der vier dadurch entstandenen Pakete ablegen. Die Beute liegt nun also auf einem der beiden Pakete eines Stapels mit fünfzehn Karten. Wir legen daraufhin den Jäger aufgedeckt auf eines der beiden anderen Pakete.

Im nächsten Schritt werden die Pakete wieder wie folgt auf einen Stapel zusammengelegt. Vom einen Stapel mit fünfzehn Karten wird das Paket ohne Jäger auf jenes mit der Beute gelegt und jenes ohne Beute auf das mit dem Jäger. Anschließend wird der Teilstapel mit dem Jäger auf jenen mit der Beute gelegt. Danach beginnen wir mit der Jagd. Dazu teilen wir die Karten des Stapels abwechselnd in zwei Stapel auf und achten dabei darauf, in welchen Stapel der Jäger wandert. Diesen heben wir anschließend auf und beginnen erneut mit dem Austeilen. Wir machen so weiter bis nur noch zwei Karten übrig bleiben: Der Jäger und die Beute.

Funktionsweise: Die Anzahl der Karten wird mit jedem Austeilen halbiert, da wir stets zwei Stapel bilden: Einen Stapel mit allen Karten an einer ungeradzahligen und einen mit jenen an einer geradzahligen Position. Die Reihenfolge, in der wir die Stapel zu Beginn wieder zusammenlegen, ist wichtig, damit auf jeden Fall eine ungerade Anzahl an Karten zwischen Jäger und Beute liegt. Vor dem ersten Austeilen liegen noch fünfzehn Karten dazwischen. Danach nur noch sieben, nach dem zweiten Mal nur noch drei und nach dem dritten nur noch eine. Nach dem letzten Austeilen landen sowohl Jäger als auch Beute automatisch auf demselben Stapel.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: In diesem Fall bietet es sich an, mit einem Lageplan zu arbeiten. Auf diesem können Hinweise und/oder Markierungen für

die vier Karten als Strukturierungshilfe platziert werden, damit die Lernenden sich auf die Schrittfolge des Tricks konzentrieren können, ohne lange überlegen zu müssen, wo welches Paket abgelegt werden soll. Eine entsprechende Vorlage befindet sich im Anhang 4. Die Pakete P_1 und P_2 bilden dabei einen Teilstapel mit fünfzehn Karten und P_3 oder P_4 den anderen. Die Beute wird nun o. B. d. A. auf P_1 oder P_2 platziert und der Jäger auf P_3 oder P_4 . Der Stapel setzt sich danach (von oben nach unten), je nachdem, auf welchen Paketen Beute und Jäger liegen, wie folgt zusammen:

- Beute auf P_1 und Jäger auf P_3 : $P_2 - P_3 - P_4 - P_1$
- Beute auf P_2 und Jäger auf P_3 : $P_1 - P_3 - P_4 - P_2$
- Beute auf P_1 und Jäger auf P_4 : $P_2 - P_4 - P_3 - P_1$
- Beute auf P_2 und Jäger auf P_4 : $P_1 - P_4 - P_3 - P_2$

Da die Anzahl der Karten zwischen Jäger und Beute ist stets eine Zweierpotenz mit Exponent größer gleich 3 ist, kann der Trick auch mit weniger oder mehr Karten durchgeführt werden. Mit einem Kartendeck wäre die Durchführung auch mit nur 8 oder 16 möglich. Für 64 Karten hingegen würden wir bereits zwei Kartendecks benötigen, für 128 drei, und so weiter.

3.3.3 Countdown

Thema: Termumformungen

Lehrplanverortung: Formeln (bzw. Terme) umformen und durch Rechenregeln begründen können

Durchführung: Liljedahl [28] stellt gleich mehrere Tricks vor, welche sich die Eigenschaften von Karten als Zähleinheiten und ihren Werten zunutze machen. Seine Variante dieses Tricks, die er als *Counting Down From 10* bezeichnet, entspricht eher einem Gedankenlesetrick, während die von Morgan & Ginther (1994 [32]) schlicht *The Ninth Card* genannte Version einem Vorhersagetrick entspricht. Garnder [1] hingegen bezeichnet das Original schlicht als Eine erstaunliche Vorhersage und fügt hinzu, dass der namensgebende Countdown vermutlich erst im Zuge von Henry Christs Variante dazu kam. Der grundlegende Ablauf ist zwar gleich, aber da Liljedahls Arbeitsschritte zu Beginn noch keine Schlüsse auf die Funktionsweise zulassen, wird zunächst diese geschildert.

Wir heben am Anfang neun Karten ab und lassen unser Gegenüber eine davon ziehen, um sie sich zu merken. Woo [49] legt die neun Karten dazu in einem drei mal drei Raster auf und lässt jemanden aus dem Publikum die gewünschte Zeile und Spalte auswählen. Anschließend legen wir diese wieder verdeckt auf die verbleibenden acht Karten und den restlichen Stapel darüber. Nun beginnen wir mit dem Countdown und fangen an, von zehn herunterzuzählen. Dabei legen wir jeweils eine Karte aufgedeckt auf einen Stapel ab. Bube, Dame und König haben in diesem Fall alle den Rang zehn. Falls der Rang der abgelegten Karte zufällig der Zahl entspricht, die wir gerade genannt haben, ist dieser Stapel fertig und wir beginnen mit dem nächsten.

→ Beispiel: Wir beginnen mit zehn und decken ♣5 auf. Da die Karte nicht dem Wert zehn entspricht, machen wir weiter mit neun und decken ♥K auf. Diese Karte entspricht in diesem Fall dem Wert zehn und stimmt somit nicht mit der zuletzt genannten Zahl überein. Wir machen weiter mit acht und decken ♦8 auf. Da der Wert mit der Zahl übereinstimmt, sind wir mit diesem Stapel fertig und beginnen mit dem nächsten.

Falls wir bei einem Stapel bis zur eins herunterzählen, ohne dass einer der Ränge mit der jeweils genannten Zahl übereinstimmt und wir den Zählvorgang abbrechen, legen wir danach noch eine weitere Karte verdeckt auf den Stapel und schieben ihn zur Seite.

→ Beispiel: Wir decken der Reihe nach ♦4-♥4-♥3-♣8-♥A-♦D-♠5-♦8-♣5-♦K auf und legen deshalb anschließend noch eine weitere Karte verdeckt auf den Stapel und schieben ihn zur Seite, bevor wir mit dem nächsten beginnen.

Nachdem wir das insgesamt viermal gemacht haben, sollten noch Karten in unserer Hand übrig sein. Nun zählen wir die Ränge der aufgedeckten Karten auf allen Stapeln zusammen und legen dementsprechend viele Karten von unseren Handkarten ab. Die

letzte Karte ist dabei jene, die unser Gegenüber zuvor gezogen hat.

→ Beispiele:

- 1) Die aufgedeckten Karten der vier Stapel sind ♠4, ♦5, ♣Q und ♦7. Deshalb legen wir $4 + 5 + 10 + 7 = 26$ Karten ab.
- 2) Einer der vier Stapel wurde beiseite gelegt und die aufgedeckten Karten auf den restlichen drei sind ♦6, ♣A und ♦B. Deshalb legen wir $6 + 1 + 10 = 17$ Karten ab.

Funktionsweise: Damit der Trick gelingt, müssen wir eine bestimmte Karte kennen. Falls wir die Karten mit der Rückseite nach oben betrachten, ist es die Karte an der neunten Position von unten und umgekehrt. Bei Liljedahls Variante wird im Zuge der Vorbereitungen sichergestellt, dass sich die gezogene Karte an der entsprechenden Position im Stapel befindet. In diesem Fall spielt es also keine Rolle, dass wir gar nicht wissen, um welche Karte es sich handelt.

Morgan & Ginther hingegen schlagen eine subtilere Vorgehensweise vor: Zu Beginn durchsuchen wir das Deck nach den vier Zehnern, die wir als Startpunkte auflegen, um nachher davon herunterzuzählen. Während wir das tun, merken wir uns nebenbei die entsprechende neunte Karte für eine Vorhersage. In diesem Fall beginnen wir unsere Zählvorgänge also jeweils mit neun statt zehn. In weiterer Folge gehen wir ähnlich vor wie bei der anderen Variante und müssen uns nur noch entscheiden, ob wir die Vorhersage bereits zu Beginn irgendwo notieren oder erst kurz bevor die letzte Karte abgelegt wird verlautbaren möchten.

Der Grund für das Gelingen des Tricks hängt mit der Anzahl der abgelegten Karten in den vier Stapeln zusammen, da diese jeweils elf minus dem Rang der aufgedeckten Karte ganz oben entspricht. Bei einem zur Seite geschobenen Stapel hat die verdeckte Karte ganz oben dementsprechend den Rang null. Falls ein Stapel beiseite gelegt wurde, hat dieser den Wert null.

→ Beispiele:

- 1) Falls die oberste Karte auf einem Stapel ♦3 ist, liegen insgesamt $11 - 3 = 8$ Karten in diesem Stapel.
- 2) Falls die oberste Karte auf einem Stapel verdeckt ist und dieser deshalb beiseite geschoben wurde, liegen insgesamt $11 - 0 = 11$ Karten in diesem Stapel.

Wenn wir die Ränge der Karten auf den vier Stapeln mit a, b, c und d bezeichnen, ist die Anzahl der Karten insgesamt $(11 - a) + (11 - b) + (11 - c) + (11 - d) = 44 - (a + b + c + d)$ und jene der Karten im gesamten Deck $52 - (44 - (a + b + c + d)) = 8 + (a + b + c + d)$. Deshalb können wir die Summe der Ränge der aufgedeckten Karten austeilen und erreichen dadurch stets die gleiche Position im Deck. Falls der Extremfall eintritt und bei allen vier Stapeln bis zur eins gezählt wird, liegen am Ende 44 Karten auf den vier Stapeln. Da jedoch alle vier Stapel mit einer Karte bedeckt und zur Seite gelegt wurden, ist die Sum-

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

me der Karten, die wir im nächsten Schritt ablegen sollen gleich null. In diesem Fall ist die gesuchte Karte also ganz einfach jene, die zuletzt auf den vierten Stapel gelegt wurde.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Beide Varianten haben gewisse Vorteile. Bei jener von Morgan & Ginther fungieren die vier Zehner als eine Art visuelle Hilfe, während jene von Liljedahl und Woo bereits einen Hinweis auf die entsprechende Position der gesuchten Karte im Deck geben. Es hängt also davon ab, ob man den Fokus mehr auf die selbstständige Durchführung bzw. das Erlernen des Tricks oder die Entschlüsselung der Funktionsweise legen möchte.

Die grundlegende Funktionsweise dieses Tricks macht es auch möglich, sich verschiedene eigene Abwandlungen zu überlegen. Grime stellt eine Variante mit nur drei Stapeln vor [16]. Gardner merkt an, dass es in diesem Fall im Grunde keine Rolle spielt, welche Karten verwendet werden, solange es insgesamt 52 sind. Wir können jedoch auch die Gesamtanzahl der Karten auf 55 erhöhen, indem wir drei Joker zum Deck hinzufügen. Dadurch können wir sogar fünf statt vier Stapel für die Zählvorgänge nutzen. Da wir in diesem Fall stets bei der untersten Karte landen, eignet sich diese Variante nicht unbedingt für eine Vorführung, sondern eher für die Veranschaulichung des Prinzips.

Woo arbeitet mit seinen Lernenden zunächst eine numerische Übersicht der Standard-Variante aus, die er anschließend in eine allgemeingültige algebraische Notation überleitet. Zunächst müssen wir dafür berücksichtigen, wie viele Karten zu Beginn aus dem Deck entnommen werden. In der Standard-Variante des Tricks sind das 9 Stück. Dadurch verbleiben noch 43 Karten im Deck und die gesuchte Karte befindet sich in diesem Fall stets an der 9. Position von unten bzw. der 44. Position von oben. Anschließend werden vier Stapel gebildet, die jeweils bis zu 11 Karten beinhalten können, weil immer von 10 heruntergezählt wird.

Wir gewinnen dabei drei wichtige Erkenntnisse: Erstens ist die Zahl, von der heruntergezählt wird stets um eins weniger als die maximale Anzahl der Karten pro Stapel, zweitens ergibt sich die Position der gesuchten Karte von oben durch das Produkt aus der Anzahl der Stapel und der maximalen Anzahl an Karten pro Stapel und drittens erhalten wir die Anzahl der Karten, aus denen zu Beginn eine ausgewählt werden darf, indem wir dieses Produkt minus eins von der Anzahl aller Karten um Deck abziehen. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass dreizehn i. A. die größte Zahl darstellt, von der wir herunterzählen können ist. Es sei denn, wir weisen bestimmten Karten noch höhere Ränge zu oder fügen dementsprechend zusätzliche Karten hinzu.

Allgemein betrachtet sind die beiden entscheidenden Parameter des Tricks also lediglich die Anzahl der Stapel n sowie die Anzahl der Karten, die höchstens auf einem dieser Stapel liegen können k . Die Zahl, von der wir anschließend herunterzählen ist dementsprechend $k - 1$, die Position der gesuchten Karte $n \cdot k$ und die Anzahl der verbleibenden Karten zu Beginn $n \cdot k - 1$. Die Anzahl der Karten, aus denen eine gezogen wird erhalten

wir mit $52 - (n \cdot k - 1) = 53 - n \cdot k$.

→ Beispiel: Falls wir mit einem Standard-Deck arbeiten und stattdessen $n = 7$ Stapel mit jeweils höchstens $k = 6$ Karten haben möchten, würden wir von 5 herunterzählen, die gesuchte Karte würde sich an der $7 \cdot 6 = 42$. Position von oben befinden und wir würden sie zu Beginn aus $53 - 42 = 11$ Karten auswählen.

Liljedahl [28] stellt eine Abwandlung mit dem Namen Count to 10 vor. Da ihre Durchführung vergleichsweise weniger kompliziert ist, bietet sie sich besonders für die Arbeit mit leistungsschwächeren Lernenden an. Dabei werden zuerst zwölf Karten verdeckt aufgelegt. Das kann man auch jemanden aus dem Publikum machen lassen. Anschließend werden vier davon aufgedeckt und nebeneinander gelegt. Die restlichen acht Karten kommen ganz unten in den Stapel. Danach wird ausgehend vom Wert der vier aufgedeckten Karten jeweils bis zehn weiter gezählt (Bube, Dame und König haben hier ebenfalls den Rang zehn). Dabei wird für jede weitere Zahl bis zehn jeweils eine Karte verdeckt auf den jeweiligen Stapel gelegt.

→ Beispiel: Falls die erste aufgedeckte Karte die $\clubsuit 7$ ist, beginnen wir bei sieben und zählen von dort aus weiter. Wir legen also drei weitere Karten für acht, neun und zehn verdeckt auf den Stapel und machen dann mit dem nächsten Stapel weiter.

Sobald wir mit den vier Stapeln fertig sind, zählen wir die Ränge der ursprünglichen vier Karten zusammen und legen entsprechend viele Karten vom restlichen Stapel ab. Zum Schluss können wir den Rang der letzten aufgedeckten Karte vorhersagen.

→ Beispiel: Die vier ursprünglich aufgedeckten Karten der vier Stapel sind $\spadesuit 2$, $\diamondsuit B$, $\spadesuit B$ und $\heartsuit 8$. Deshalb legen wir $2 + 10 + 10 + 8 = 30$ Karten ab.

Dieser Trick stellt eine Art Umkehrung der Standard-Variante dar und basiert auf demselben Prinzip. Wir haben es auch hier auf die Karte an der neunten Position von unten abgesehen. Um diese herauszufinden, genügt es, die unterste Karte des Decks zu erspähen, während unser Gegenüber damit beschäftigt ist, vier der zwölf Karten auszuwählen. Da die restlichen acht Karten anschließend wieder ganz nach unten wandern, befindet sich die gesuchte Karte dann automatisch an der gewünschten Position.

3.4 Vierte Klasse (achte Schulstufe)

3.4.1 Rot und Schwarz

Thema: Gleichungssysteme

Lehrplanverortung:

- Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern
- mit Termen, Gleichungen mit einer Variablen und Formeln in vielfältigen Situationen arbeiten
- lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen und lösen
- Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können

Durchführung: Schwankl (2021 [41]) nennt diesen Trick Farbentelekinese. Wir mischen das Kartendeck und teilen danach immer abwechselnd eine Karte aufgedeckt und eine verdeckt aus. Falls wir eine schwarze Karte ziehen, legen wir sie auf einen eigenen Stapel ab. Anschließend legen wir stets eine verdeckte Karte auf einen Stapel daneben. Falls wir hingegen eine rote Karte ziehen, machen wir das Gleiche mit zwei eigenen Stapeln. Dadurch entstehen also insgesamt vier Stapel, von denen jeweils zwei aufgedeckt und verdeckt sind, es sei denn, ein Spezialfall tritt ein, indem wir ausschließlich schwarze oder rote Karten aufdecken und dementsprechend nur zwei Stapel mit jeweils 26 Karten erhalten.

Woo [48] empfiehlt bei der Durchführung mit einer Schulklasse an dieser Stelle noch einmal extra zu betonen, dass jede Person voraussichtlich eine andere Verteilung der schwarzen und roten Karten haben wird. Das liegt daran, dass es $52!$ verschiedene Möglichkeiten für die Anordnung aller Karten im Deck gibt. Dadurch kommt nach so gut wie jedem Mischvorgang eine noch nie zuvor aufgetretene Sortierung zustande, was das Gelingen des Tricks für die Teilnehmenden später umso verblüffender macht.

Sobald wir das gesamte Deck auf diese Weise vor uns abgelegt haben, stellen wir eine kühne Behauptung auf. Obwohl wir nicht gesehen haben, welche Karten auf den beiden verdeckten Stapeln abgelegt wurden, können wir trotzdem etwas über ihre Verteilung sagen. Wir wissen nämlich, dass nun mit Sicherheit gleich viele schwarze Karten im verdeckten Stapel neben den aufgedeckten schwarzen Karten liegen wie rote Karten im verdeckten Stapel neben den aufgedeckten roten Karten. Doch damit nicht genug: Unser Gegenüber darf sogar noch eine Zahl nennen, die allerdings maximal gleich groß sein darf, wie die Anzahl der Karten im kleineren verdeckten Stapel. Anschließend dürfen entsprechend viele Karten aus dem einen verdeckten Stapel mit Karten aus den anderen getauscht werden und trotzdem geht unsere Wette auf.

Funktionsweise: In weiterer Folge nennen wir den aufgedeckten Stapel mit den schwarzen Karten S und jenen mit den roten R . Wir kennzeichnen die verdeckten schwarzen und roten Karten zusätzlich mit einem entsprechenden Index, um anzugeben, ob sie sich im komplementären Stapel der schwarzen oder roten Karten befinden. S_s und R_s stehen also für die verdeckten Karten unter S und S_r und R_r für jene unter R .

Nun schreiben wir die Stapel als Gleichungssystem auf, da wir einige Teilsummen kennen. Wir wissen nämlich, dass die verdeckten Karten stets gleich viele sind wie der korrespondierende Stapel mit den schwarzen bzw. roten Karten:

$$\begin{aligned} I : S &= S_s + R_s \\ II : R &= S_r + R_r \end{aligned}$$

Darüber hinaus wissen wir, dass es gleich viele schwarze wie rote Karten gibt:

$$III : S + S_s + S_r = R + R_s + R_r$$

Wenn wir nun die beiden vorigen Gleichungen in die dritte einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{I, II} III : (S_s + R_s) + S_s + S_r &= (S_r + R_r) + R_s + R_r \\ 2 \cdot S_s + R_s + S_r &= S_r + 2 \cdot R_r + R_s & | - R_s, -S_r \\ 2 \cdot S_s + \cancel{R_s} + \cancel{S_r} &= \cancel{S_r} + 2 \cdot R_r + \cancel{R_s} & | : 2 \\ S_s &= R_r \end{aligned}$$

Nach ein paar elementaren Umformungen erhalten wir also die Begründung dafür, warum der Trick funktionieren muss. Nun bleibt noch zu zeigen, warum auch das Tauschen der Karten keinerlei Unterschied macht, doch auch das ist schnell erklärt. Beim Tauschen zweier Karten können drei verschiedene Fälle eintreten:

1. Zwei schwarze Karten werden miteinander getauscht.
2. Zwei rote Karten werden miteinander getauscht.
3. Zwei Karten verschiedener Spielfarben werden miteinander getauscht.

In den ersten beiden Fällen bleiben die Anzahlen schwarzer und roter Karten gleich. Im dritten Fall ändern sich diese zwar, aber das ändert nichts an der Gleichheit der beiden Anzahlen, da diese entweder in beiden Stapeln um eine Karte zu- oder abnimmt.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Als Einstieg in die Erklärung des mathematischen Hintergrunds bietet sich eine vereinfachte Version des Tricks in Form eines Rätsels an: „Als die Einnahmen einer Zaubershow gezählt werden, fallen versehentlich hundert Münzen auf den Boden. Neunzig von ihnen zeigen Kopf und zehn zeigen Zahl. Als wäre das nicht schon genug, geht kurz darauf auch noch das Licht aus. Erstaunlicherweise kann man die Münzen in zwei Haufen sortieren, sodass in beiden Stapeln

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

gleich viele Münzen Zahl zeigen. Doch wie ist das möglich?“

Da nicht vorgegeben ist, wie viele Münzen in einem Haufen sein müssen, können wir einen mit neunzig und einen mit zehn Münzen bilden. Anschließend drehen wir einfach alle Münzen im kleineren Haufen einmal um und können gewiss sein, dass nun in beiden Haufen gleich viele Münzen Zahl zeigen. Wir können mithilfe eines Gleichungssystems veranschaulichen, warum das immer so ist.

K_{90} steht dabei für die Anzahl der Münzen, die Kopf zeigen und sich im Haufen mit den neunzig Münzen befinden und K_{10} für jene im Haufen mit den zehn Münzen. Das Gleiche gilt für Z_{90} und Z_{10} . Wir wissen, dass es insgesamt 90 Münzen gibt, die Kopf zeigen und 10, die Zahl zeigen:

$$I : K_{90} + K_{10} = 90$$

$$II : Z_{90} + Z_{10} = 10$$

Abgesehen davon setzen sich die Anzahlen der Münzen in den beiden Haufen aus zwei Teilmengen von Münzen mit Kopf oder Zahl zusammen (wobei auch null eine mögliche Menge ist):

$$III : K_{90} + Z_{90} = 90$$

$$IV : K_{10} + Z_{10} = 10$$

Wir können nun entweder die erste und dritte oder die zweite und vierte Gleichung gleichsetzen und kommen mit einer elementaren Umformung darauf, dass die Anzahl der Münzen mit Zahl im großen Haufen gleich ist wie jene mit Kopf im kleinen. Dadurch sollte sofort anschaulich klar sein, warum das Umdrehen des kleineren Haufens dazu führt, dass die Anzahl der Münzen, die Zahl zeigen, in beiden Haufen übereinstimmt.

Das Rätsel mit den Münzen kann problemlos auf ein Kartendeck übertragen werden. Statt Kopf und Zahl arbeiten wir dann mit den Eigenschaften auf- und zugedeckt. Da die Lösung auf demselben Prinzip basiert wie der Kartentrick mit Rot und Schwarz, dient dies als Hilfestellung für weitere Überlegungen. Wir können zum Beispiel eine gewisse Anzahl an aufgedeckten und verdeckten Karten mischen und anschließend in zwei gleich große Stapel teilen. Wir können ohne hinzuschauen dafür sorgen, dass die Anzahl der aufgedeckten bzw. verdeckten Karten in beiden Stapeln gleich ist, indem wir einfach einen der beiden Stapel umdrehen (siehe auch Gardner [1]).

Eine andere Möglichkeit für das gesamte Deck funktioniert wie folgt: Wir legen alle Karten verdeckt auf, drehen uns um und bitten unser Gegenüber, eine gewisse Anzahl an Karten aufzudecken, ohne zu verraten, wie viele es sind. Als Nächstes sollen die Karten auf zwei Stapel aufgeteilt werden, von denen einer aus so vielen Karten besteht, wie zuvor aufgedeckt wurden. Dabei muss dieser jedoch nicht ausschließlich aus den aufgedeckten Karten bestehen. Auch in diesem Fall können wir die Behauptung wahr werden

lassen. Dazu muss lediglich der Stapel mit gleich vielen Karten wie die aufgedeckten umgedreht werden.

Eine Möglichkeit, um sich an die algebraische Notation heranzutasten, ist zunächst ein Beispiel mit Zahlenwerten durchzugehen und erst danach zu versuchen, das Ganze mit Variablen aufzuschreiben. Woo beginnt mit der Ausarbeitung, indem er den Sachverhalt zunächst numerisch durchspielt. Dieser Zugang bietet sich insbesondere für leistungsschwächere Lernende an, weil der Zusammenhang zwischen den Anzahlen der ausgeteilten Karten und den notierten Zahlen unmittelbar klar ist. Er geht erst zur algebraischen Notation über, nachdem alle Beteiligten verstanden haben, wie die Zahlen bei einem konkreten Beispiel zustande kommen.

In beiden Fällen empfiehlt es sich, bei der Durchführung mit einer visuellen Hilfe wie einem Lageplan oder eine Tabelle für die Pakete zu arbeiten. Diese kann entweder durch die Lehrperson vorbereitet werden oder mit wenig Aufwand von den Lernenden erstellt werden, indem sie einfach die Umrisse der Karten viermal auf ein Blatt Papier übertragen. Eine entsprechende Vorlage befindet sich im Anhang 4. Es spielt dabei keine Rolle, welche Farbe auf welchen Stapel kommt, aber im Rahmen der obigen Erläuterungen liegt o. B. d. A. der aufgedeckte schwarze Stapel links oben und der rote rechts oben. Die Lage der beiden verbleibenden Stapel ergibt sich in weiterer Folge von selbst. Das Tauschen von Karten in den beiden verdeckten Stapeln am Ende kann der Einfachheit halber weggelassen oder stattdessen auch mehrere Male wiederholt werden.

Eine andere Herangehensweise, mit der wir das Gelingen des Tricks plausibel machen können, ist die Betrachtung von Spezialfällen wie das Extrembeispiel aus der Erläuterung weiter oben. Wenn wir nur schwarze Karten aufgedeckt haben, dann liegen alle roten verdeckt im Stapel daneben und die Behauptung ist mit Sicherheit richtig. In diesem Fall können nur keine Karten getauscht werden, weil der zweite verdeckte Stapel quasi aus null Karten besteht. Falls wir stattdessen alle bis auf eine schwarze Karte aufdecken, liegen anschließend 25 verdeckte Karten im einen Stapel und eine im anderen. Falls alle 25 verdeckten Karten rot sind, folgt wieder, dass die Behauptung stimmt. Daran würde auch das Tauschen mit der einen Karte im anderen Stapel nichts ändern. Falls die einzelne verdeckte Karte im anderen Stapel rot ist, läuft es auf das Gleiche hinaus. Diese Überlegung kann bei Bedarf beliebig lange fortgesetzt werden.

3.4.2 Thronfolge

Thema: Gleichungssysteme

Lehrplanverortung:

- Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern
- mit Termen, Gleichungen mit einer Variablen und Formeln in vielfältigen Situationen arbeiten
- lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen und lösen
- Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen (zwei Gleichungen mit zwei Variablen) nutzen können

Durchführung: Matthews [31] nennt diesen Trick *Counting Kings*, weil die Könige in diesem Fall den größten Wert beim Zählen darstellen, während Liljedahl [28] ihn schlicht als Count to 13 bezeichnet und somit einfach den entsprechenden Rang der Karte betont. Man benötigt dafür ein vollständiges Deck und die Bildkarten Bube, Dame und König haben in diesem Fall die Ränge elf, zwölf und dreizehn. Wir beginnen, indem wir eine Karte aufdecken. Je nachdem, welchen Rang diese Karte hat, wird von dieser Zahl bis zum König weiter gezählt und für jede Zahl eine weitere Karte aufgedeckt.

→ Beispiel: Falls die erste Karte $\spadesuit 8$ ist, zählen wir wie folgt weiter: neun, zehn, elf, zwölf, dreizehn und decken dabei fünf weitere Karten auf, die wir jeweils auf einen Stapel mit der ersten Karte ganz unten auflegen. Wir haben also einen Stapel mit insgesamt sechs Karten gebildet.

Sobald wir einen solchen Stapel abgelegt haben, drehen wir ihn um und machen das Gleiche mit den restlichen Karten, bis wir keinen vollständigen neuen Stapel mehr auf diese Weise bilden können. In den meisten Fällen bleiben am Ende Karten übrig, mit denen der Vorgang nicht mehr bis zum Ende durchgeführt werden kann. Diese legen wir gegebenenfalls auf einen Ablagestapel zur Seite.

Unser Gegenüber soll nun drei dieser Stapel auswählen und alle anderen auf den Ablagestapel legen. Als Nächstes wird jeweils die oberste Karte von zwei dieser Stapel aufgedeckt. Die oberste Karte des dritten Stapels darf ebenfalls gezeigt werden, aber wir dürfen sie noch nicht sehen, da wir den Rang dieser dritten Karte auf eine andere Art und Weise herausfinden werden. Dazu zählen wir die A Karten im Ablagestapel. Falls die obersten Karten der beiden ausgewählten Stapel die Ränge x und y haben, erhalten wir den Rang z der obersten Karte des dritten Stapels mit folgender Formel: $z = A - 10 - x - y$.

Funktionsweise: Der Schlüssel zur Lösung des Tricks liegt in einem linearen Gleichungssystem. Matthews (2008 [31]) empfiehlt eine durch die Lehrkraft angeleitete Erarbeitung der zugrundeliegenden Mathematik. Dabei sollte weniger Wert auf das selbstständige Lösen durch die Lernenden mittels Notation und stattdessen mehr auf die Vorführung eines Anwendungsbeispiels von Gleichungssystemen gelegt werden.

Um ein solches aufzustellen, überlegen wir uns zu Beginn, ob wir einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Karten in jedem Stapel und der aufgedeckten ersten Karte herstellen können. Dazu könnte man alle Lernenden auffordern, jeweils einen solchen Stapel aufzulegen und dann die Anzahl der Karten zu zählen. Wenn eine ganze Schulklasse das gleichzeitig macht, ist die Wahrscheinlichkeit recht hoch, dass auch alle Möglichkeiten für die erste Karte dabei auftreten.

Anschließend kann die Frage gestellt werden, ob jemand ein Ass als erste Karte hatte. Falls es jemanden gibt, soll diese Person die Anzahl der Karten in ihrem Stapel, also insgesamt 13, nennen. Als Nächstes folgt ein Stapel mit einer Zwei als erste Karte und so weiter. Es sollte klar sein, dass Folgendes gilt: Je höher der Wert der ersten Karte, desto weniger Karten sind insgesamt im Stapel.

Doch es gibt noch ein weiteres Muster zu entdecken. Falls niemand von selbst darauf kommt, sollte man die Lernenden auffordern, die Anzahl ihrer aufgedeckten Karten zum Rang ihrer jeweils ersten Karte zu addieren. Dadurch werden alle feststellen, dass die Anzahl der aufgedeckten Karten zusammen mit dem Rang x der ersten Karte stets 14 ergibt. Das liegt daran, dass nach der jeweiligen Karte noch $13 - x$ Karten folgen. Für die Gesamtanzahl müssen wir zum Schluss noch eine 1 für die erste Karte addieren. Wir können die Anzahl X der aufgedeckten Karten also wie folgt ausdrücken: $X = 1 + (13 - x) = 14 - x$.

Die Summe des Rangs x der obersten Karte und der Anzahl X der Karten ist deshalb immer 14 und somit ergibt auch die Addition dieses Werts zur Anzahl der Karten im Stapel immer $x + X = 14$. Angenommen, die drei ausgewählten Stapel haben jeweils die obersten Karten mit den Rängen x, y und z , während ihre Stapel aus X, Y und Z Karten bestehen, d. h. es gilt $x + X = y + Y = z + Z = 14$. Die Gesamtanzahl aller Karten im Deck ist die Summe von X, Y und Z (in den drei Stapeln) sowie A (im Ablagestapel). Wir können nun folgende Gleichungen aufstellen:

$$I : x + y + z + X + Y + Z = 42$$

$$II : \quad \quad A + X + Y + Z = 52$$

Wenn wir nun die erste Gleichung von der zweiten abziehen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} A - x - y - z &= 10 & | +z, -10 \\ A - 10 - x - y &= z \end{aligned}$$

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Der Umstand, dass wir die Zahl zehn benötigen, lässt sich auch wie folgt begründen: Sobald wir die oberste Karte für den ersten Stapel ablegen, ist eine Karte weniger im Deck. Anschließend legen wir quasi dreizehn Karten ab, um bis zum König zu kommen. Das Gleiche gilt für die nächsten beiden Stapel. Wir haben also theoretisch nur noch 10 von 52 Karten übrig, weil wir drei plus dreimal dreizehn abgelegt haben. Allerdings müssen wir natürlich auch berücksichtigen, dass dem Rang der obersten Karten entsprechend viele eigentlich noch im Deck verblieben sind. Diesen Umstand nutzen wir am Ende aus, um den Rang der fehlenden dritten Karte zu bestimmen.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Falls man die Funktionsweise des Tricks besser verschleiern möchte, kann auf die Verknüpfung der Zahlenwerte elf, zwölf und dreizehn mit den drei Bildkarten Bube, Dame und König verzichtet werden, d. h. die Reihenfolge bzw. die Zuweisung der Ränge bleibt zwar bestehen, aber es wird stattdessen mit den Namen der Bildkarten weiter gezählt.

Der Youtuber Michael D. Stevens (2018 [45]) nennt diesen Trick *Magic 13* und wandelt die Arbeitsschritte geringfügig ab. Bei seiner Variante werden alle Karten verdeckt auf die Stapel abgelegt, was den Umstand der Teilsummen möglicherweise ein wenig mehr verschleiert. Nach der Auswahl der drei Stapel darf sich das Gegenüber einen Stapel aussuchen, der nicht aufgedeckt wird. Bei dieser Variante weiß also bis zum Schluss noch niemand, welche Karte im verbleibenden Stapel ganz unten liegt.

Der größte Unterschied besteht darin, wie die Zahl zehn, welche wir am Ende vom Ablagestapel abziehen müssen, in den Trick eingebaut wird. Während Liljedahl diese einfach ohne nähere Begründung vorschlägt, versteckt Stevens sie in zwei Wörtern, indem er nach einer Lieblingsfarbe fragt und dann um eine vermeintlich eigene ergänzt, sodass die Anzahl an Buchstaben in Summe zehn ergibt. Ein paar einfache Beispiele für Paare von Farben, die sich entsprechend ergänzen, sind Rot und Schwarz, Gelb und Orange oder Braun und Beige. Ähnliche Überlegungen können gegebenenfalls auch mit anderen Kategorien gemacht werden.

3.4.3 Die letzten drei

Thema: Terme

Lehrplanverortung:

- durch zusammenfassendes Betrachten das Zahlenverständnis vertiefen
- Sicherheit beim Arbeiten mit Variablen, Termen, Formeln und Gleichungen steigern
- Arbeiten mit einfachen Bruchtermen

Durchführung: Dieser Trick ist im Allgemeinen als *Final Three* bekannt. Liljedahl nennt ihn entsprechend der Kartenanzahlen in den drei Paketen 14 15 15 [28]. Mulligan (1989 [36]) wiederum stellt eine Variante vor, bei der die Reihenfolge beim Zusammenbauen des Stapels umgekehrt wird, weshalb sie dementsprechend als 5 15 15 bezeichnet werden könnte. Im Zuge der folgenden Erläuterungen wird klar, was damit gemeint ist. Bei Mulligans Variante lassen wir zuallererst unser Gegenüber drei Karten ziehen. Anschließend behaupten wir, dass diese auf magische Art und Weise bei uns verbleiben werden, obwohl wir das gesamte Deck austeilen.

Um den Trick vorzubereiten, bilden wir zunächst vier Stapel wie folgt: einen mit fünf, zwei mit jeweils fünfzehn und einen mit den restlichen vierzehn Karten. Als Nächstes legen wir eine der drei gezogenen Karten auf den Stapel mit fünf Karten und bedecken ihn mit einem Teil des zweiten Stapels. Auf diesen legen wir die nächste der drei Karten und bedecken auch diesen mit einem Teil des dritten Stapels. Wir wiederholen den Schritt ein letztes Mal mit der dritten Karte und bedecken den Stapel mit den restlichen Karten, die wir zu Beginn auf die Seite gelegt haben. Zum Schluss bauen wir das Deck wieder zusammen, indem wir die Stapel in der umgekehrten Reihenfolge wieder aufeinanderlegen.

Nun teilen wir abwechselnd Karten an uns und unser Gegenüber aus. Dadurch entstehen zunächst zwei Stapel mit jeweils 26 Karten. Wir können unser Gegenüber an dieser Stelle fragen, ob sich auch nur eine der drei gesuchten Karten in den ausgeteilten Handkarten befindet, aber bis jetzt hat sich keine davon gezeigt, weil sie sich alle noch in unserem Blatt befinden. Deshalb wiederholen wir diese Vorgehensweise mit unseren Handkarten erneut.

Danach haben wir beide 13 Karten, doch die drei gesuchten Karten befinden sich nach wie vor in unserem Blatt. Also machen wir das Ganze nochmal und beginnen diesmal bei unserem Gegenüber. Nach diesem Durchgang haben wir beide nur noch 6 Karten (siehe Abbildung 3.6). Wir teilen unsere Handkarten ein letztes Mal aus. Allerdings beginnen wir diesmal wieder bei uns und stellen so sicher, dass die drei gesuchten Karten tatsächlich bei uns verblieben.

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Funktionsweise: Aufgrund der Gesamtanzahl der Karten im Deck befinden sich die drei zusätzlichen Karten nach dem Zusammenlegen der Stapel an einer ungeradzahlig Position, und zwar der 47., 31. und 15. von oben. In der folgenden Abbildung 3.3 wird dieser Umstand veranschaulicht, indem die drei gesuchten Karten ♥A, ♥2 und ♥3 nicht umgedreht wurden.

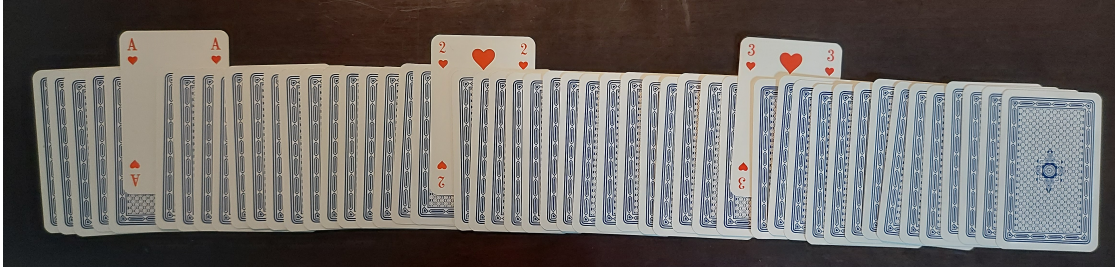


Abbildung 3.3: Karten zu Beginn (eigene Abbildung)

Dadurch landen sie nach dem ersten Durchgang alle in unserem Blatt und befinden sich dort erneut an einer ungeradzahlig Position, und der 3., 11. 19. von oben (siehe Abbildung 3.4).

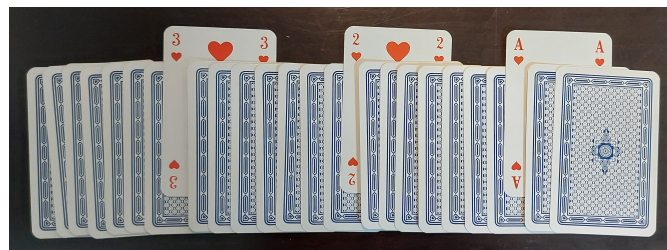


Abbildung 3.4: Karten nach der ersten Runde (eigene Abbildung)

Nach dem zweiten Durchgang befinden sie sich nun an einer geradzahlig Position, und zwar der 12., 8. und 4. von oben (siehe Abbildung 3.5). Aus diesem Grund müssen wir an dieser Stelle die Reihenfolge beim Austeilen ändern.

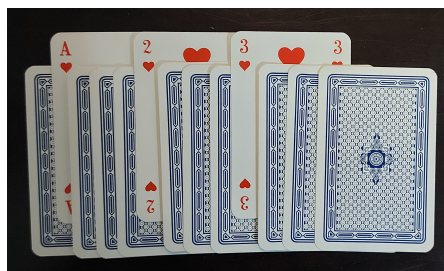


Abbildung 3.5: Karten nach der zweiten Runde (eigene Abbildung)

3.4 Vierte Klasse (achte Schulstufe)

Nach dem dritten Durchgang befinden sie sich wieder an einer ungeradzahlgigen Position, und zwar der 1., 3. und 5. von oben (siehe Abbildung 3.6).

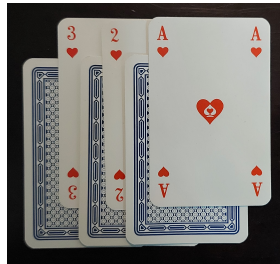


Abbildung 3.6: Karten nach der dritten Runde (eigene Abbildung)

Falls wir unsere Handkarten ein letztes Mal auf die gleiche Art und Weise austeilen und dabei wieder bei uns beginnen, bleiben die drei gesuchten Karten übrig.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Eine mögliche Abwandlung, bei der die Funktionsweise noch mehr verschleiert wird, beinhaltet einen zusätzlichen Arbeitsschritt. Anstatt zu Beginn den ersten Stapel mit vierzehn Karten zu versehen, ändern wir die Zahl ein wenig ab und geben erst nach dem Zusammenbauen entweder entsprechend viele Karten von oben nach unten oder umgekehrt. Auf diese Weise sorgen wir dafür, dass schlussendlich die nötige Verteilung für das Gelingen des Tricks zustande kommt.

Liljedahl schlägt als Alternative zum Ziehen der Karten vor, stattdessen selbst drei markante Karten auszuwählen, um sicherzustellen, dass am Ende des Tricks klar ist, welche drei überhaupt gesucht waren. Die Karten Ass, Zwei und Drei eignen sich zusätzlich dazu als Kennzahlen für die erste, zweite und dritte gesuchte Karte. Bei seiner Variante werden die Karten einfach abwechselnd aufgedeckt und verdeckt ausgeteilt.

Die Versionen von Mulligan und Liljedahl unterscheiden sich in Bezug auf die Reihenfolge, in der das Deck vor dem Austeilen wieder zusammengesetzt wird. Während bei Mulligan der Stapel mit vierzehn Karten ganz oben aufliegt, ist es bei Liljedahl genau umgekehrt. Die Positionen der ersten (**E**), zweiten (**Z**) und dritten (**D**) Karte sind dann für jede der vier Runden wie folgt:

	Mulligan							Liljedahl							
	von unten				von oben				von unten				von oben		
<i>Runde</i>	E	Z	D		E	Z	D		E	Z	D		E	Z	D
0	6	22	38		47	31	15		15	31	47		38	22	6
2	24	16	8		3	11	19		19	11	3		8	16	24
2	2	6	10		12	8	4		4	8	12		10	6	2
3	6	4	2		1	3	5		5	3	1		2	4	6
4	1	2	3		3	2	1		1	2	3		3	2	1

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

Das hat in weiterer Folge auch einen Einfluss auf die Reihenfolge beim Austeilen. Während bei Mulligan beachtet werden muss, dass wir beim dritten Durchgang zuerst unserem Gegenüber die Karten austeilen, ändert sich die Reihenfolge bei Liljedahl bei keinem Durchgang, da sich die Karten stets an geradzahligen Positionen befinden, was die Durchführung vereinfacht.

Um besser nachzuvollziehen, was während des Austeilens passiert, empfiehlt es sich außerdem, die drei gesuchten Karten, ähnlich wie den Kopfgeldjäger 4, aufgedeckt einzusortieren und den Trick so durchzuspielen. Falls man kein Problem damit hat, ein Kartendeck unbrauchbar zu machen, kann man auch die Rückseiten der Karten mit den Zahlen von 1 bis 52 zu beschriften, um die entsprechenden Positionswechsel zu kennzeichnen.

Mulligan [36], empfiehlt, den Trick mit leistungstärkeren Lernenden auch algebraisch zu analysieren. Da alle weiteren Schritte letztendlich von der von unten aus gezählten Position einer Karte abhängen, arbeiten wir von dort weiter. Um aus der von unten gezählten Position die von oben gezählte zu erhalten, müssen wir die Anzahl der Karten um eins erhöhen und anschließend die komplementäre Position davon abziehen. Falls wir das nicht tun, machen wir einen sogenannten Zaunpfahlfehler, der dazu führen würde, dass die oberste Karte die nullte Karte von unten ist, was keinen Sinn ergibt. Angenommen eine der drei Karten liegt an der Position $b_0 = n$ von unten, dann erhalten wir ihre dementsprechende Position von oben, also mit $t_0 = 52 + 1 - n$. Nun stellen wir folgende Formeln auf, bei denen b_i für die von unten aus und t_i für die von oben aus gezählte Position einer Karte nach i Durchgängen steht:

$$\begin{array}{ll} i = 0 : & b_0 = n \qquad \qquad \qquad t_0 = 53 - b_0 \\ i = 1 : & b_1 = \frac{t_0 + 1}{2} \qquad \qquad \qquad t_1 = 27 - b_1 \\ i = 2 : & b_2 = \frac{t_1 + 1}{2} \qquad \qquad \qquad t_2 = 14 - b_2 \\ i = 3 : & b_3 = \frac{t_2}{2} \qquad \qquad \qquad t_3 = 7 - b_3 \\ i = 4 : & b_4 = \frac{t_3 + 1}{2} \qquad \qquad \qquad t_4 = 4 - b_3 \end{array}$$

Daraus ergeben sich folgende Positionen für die gesuchten Karten:

$$\begin{array}{ll} b_1 = \frac{53 - n + 1}{2} & t_1 = 27 - \frac{53 - n + 1}{2} = \frac{n}{2} \\ b_2 = \frac{\frac{n}{2} + 1}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & t_2 = 14 - \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right) = 14 - \frac{n}{4} - \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{14 - \frac{n}{4} - \frac{1}{2}}{2} = 7 - \frac{n}{8} - \frac{1}{4} & t_3 = 7 - \left(7 - \frac{n}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{n}{8} + \frac{1}{4} \\ b_4 = \frac{\frac{n}{8} + \frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{n}{16} + \frac{5}{8} & t_4 = 4 - \left(\frac{n}{16} + \frac{5}{8} \right) = \frac{27}{8} - \frac{n}{16} \end{array}$$

3.4 Vierte Klasse (achte Schulstufe)

Bei Liljedahls Variante müssen die Formeln ein wenig geändert werden, aber da wir in diesem Fall die jeweilige Position einer Karte von oben aus gezählt nach jedem Durchgang problemlos halbieren können, um auf die Position von unten im nächsten Durchgang zu kommen, sind sie auch ein wenig einfacher:

$$\begin{array}{ll}
 i = 0 : & b_0 = n & t_0 = 53 - b_0 \\
 i = 1 : & b_1 = \frac{t_0}{2} & t_1 = 27 - b_1 \\
 i = 2 : & b_2 = \frac{t_1}{2} & t_2 = 14 - b_2 \\
 i = 3 : & b_3 = \frac{t_2}{2} & t_3 = 7 - b_3 \\
 i = 4 : & b_4 = \frac{t_3}{2} & t_4 = 7 - b_4
 \end{array}$$

In diesem Fall erhalten wir folgende Positionen für die gesuchten Karten:

$$\begin{array}{ll}
 b_1 = \frac{53 - n}{2} & t_1 = 27 - \frac{53 - n}{2} = \frac{n + 1}{2} \\
 b_2 = \frac{\frac{n+1}{2}}{2} = \frac{n + 1}{4} & t_2 = 14 - \left(\frac{n + 1}{4} \right) = \frac{55 - n}{4} \\
 b_3 = \frac{\frac{55-n}{4}}{2} = \frac{55 - n}{8} & t_3 = 7 - \left(\frac{55 - n}{8} \right) = \frac{n + 1}{8} \\
 b_4 = \frac{\frac{n+1}{8}}{2} = \frac{n + 1}{16} & t_4 = 4 - \left(\frac{n + 1}{16} \right) = \frac{63 - n}{16}
 \end{array}$$

Zum Schluss können wir in beiden Fällen die Terme für b_4 und t_4 gleich 1, 2 oder 3 setzen, um die entsprechenden Positionen von unten oder oben gezählt zu bestimmen, an denen die Karten zu Beginn platziert werden müssen, damit der Trick gelingt. Dabei stellen wir fest, dass es jeweils nur eine Möglichkeit dafür gibt.

3.5 Fünfte Klasse (neunte Schulstufe)

3.5.1 Findley's vier Karten-Trick

Thema: Zahlensysteme (Binärsystem)

Lehrplanverortung: Zahlen in einem nichtdekadischen Zahlensystem darstellen können

Durchführung: Gardner (1956 [1]) stellt einen Trick des Zauberers Arthur Findley vor, bei dem wir unser Gegenüber bitten, eine beliebige Karte zu nennen. Wir nehmen an, dass wir als Antwort die ♠D bekommen. Nun ziehen wir das ♠A aus der Tasche und behaupten, dass wir die Spielfarbe bereits wussten. Anschließend ziehen wir noch ♣4 und ♦8 und rechnen $4 + 8 = 12$, was dem Rang der Dame entspricht.

Funktionsweise: Da der Trick auf Zweierpotenzen basiert, wählen wir die Karten Ass, Zwei, Vier und Acht mit vier unterschiedlichen Spielfarben aus. Im oben beschriebenen Fall sind das ♠A, ♥2, ♣4 und ♦8. Es spielt dabei jedoch keine Rolle, welche Spielfarbe welchen Rang hat, d. h. es gibt $4! = 24$ mögliche Auswahlmöglichkeiten für die Vorbereitung des Tricks. Aufgrund der Verdopplung können wir alle Werte bis $2^n - 1$ erzeugen, wodurch selbst ein König mit Rang dreizehn abgedeckt ist. Wir müssen uns also lediglich merken, welche Karte sich wo befindet, damit wir die richtigen ziehen. Falls wir Glück haben und zufällig eine der vier Karten genannt wird, wählen wir genau diese.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Dieser Trick wird erwartungsgemäß immer offensichtlicher, je häufiger er mit denselben Karten durchgeführt wird. Wir können anschließend die Frage stellen, wie viele weitere Zahlenkarten wir brauchen würden, wenn jede Karte im Deck einen Rang von 1 bis 52 hat. Die Antwort lautet lediglich zwei mehr.

3.5.2 Der Name der Karte ist...

Thema: Zahlensysteme und Polynomfunktionen

Lehrplanverortung:

- Zahlen im dekadischen Zahlensystem darstellen können
- Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können
- Rechenregeln für Zehnerpotenzen kennen
- Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschreiben und untersuchen können
- Funktionen als mathematische Modelle auffassen können

Durchführung: Bevor der Trick vorgeführt wird, muss das ♦A an der achtzehnten Position des Kartenstapels liegen. Nun erzählen wir dem Publikum, dass wir vorhersagen können, welche Karte aus dem Deck gezogen wird. Diese Vorhersage schreiben wir auf ein Stück Papier, das wir anschließend in einen Umschlag oder in eine Box geben.

Als Nächstes soll sich jemand aus dem Publikum eine dreistellige Zahl mit drei unterschiedlichen Ziffern aussuchen. Danach sollen die größt- und die kleinstmögliche Zahl mit den drei Ziffern der Zahl gebildet werden. Anschließend wird die kleinere Zahl von der größeren subtrahiert und zum Schluss wird die Quersumme vom Ergebnis gebildet.

Wir schauen uns das am Beispiel der Zahl 231 an. Die größtmögliche Zahl, die wir mit den drei Ziffern bilden können, ist 321 und die kleinstmögliche 123. Wir rechnen also $321 - 123 = 198$ und erhalten die Ziffernsumme $\text{dig}(198) = 1 + 9 + 8 = 18$. Die Person aus dem Publikum zieht nun die Karte an dieser Position aus dem Deck. Dabei muss darauf geachtet werden, dass zunächst nur das Publikum die Karte sehen kann.

Um zu überprüfen, ob wir richtig getippt haben, nimmt die Person anschließend die Vorhersage aus dem Umschlag und liest sie laut vor. Unglücklicherweise klingt diese recht kryptisch, weshalb wir noch ein wenig nachhelfen, indem wir ein paar der Buchstaben durchstreichen:

DIESE KARTE IST OFTMALS EINS. → ~~DIESE KARTE IST~~ OFTMALS EINS.

Bei der gezogenen Karte handelt es sich also um das Karo Ass.

Funktionsweise: Dieser Trick wird von Matthews (2008) [31] als „*The name of the card is...*“ bezeichnet. Der Name ist gleichzeitig eine geeignete Vorhersage in englischer Sprache, bei der stattdessen die Karte ♥10 (engl. *ten of hearts*) als Zielkarte genutzt wird. Das fehlende T erhält man, indem ein Makron über das I geschrieben wird:

THE NAME OF THE CARD IS... → THE NAME OF THE CARD IS...

Man kann sich auch viele weitere Botschaften für andere Karten überlegen, aber um zu verstehen, wie der eigentliche Trick funktioniert, schauen wir uns die Stellenwerte des Dezimalsystems aus algebraischer Sicht an. Dazu schreiben wir die dreistellige Zahl in erweiterter Notation auf: Jede Zahl n -stellige natürliche Zahl $a_n \dots a_2 a_1 a_0$ kann in erweiterter Form als Polynom mit den entsprechenden Zehnerpotenzen als Koeffizienten $10^n a_n + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 = 10^n a_n + \dots + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0$ geschrieben werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir in weiterer Folge davon aus, dass $a_2 a_1 a_0$ die größtmögliche dreistellige Zahl ist, die wir mit den drei gewählten Ziffern bilden können. Diese können wir dementsprechend auch als $100 a_2 + 10 a_1 + a_0$ schreiben. Die zugehörige kleinstmögliche Zahl ist dann $a_0 a_1 a_2$ bzw. als Polynom $100 a_0 + 10 a_1 + a_2$. Beim Bilden der Differenz erhalten wir:

$$a_2 a_1 a_0 - a_0 a_1 a_2 = 100 a_2 + 10 a_1 + a_0 - (100 a_0 + 10 a_1 + a_2) = 99 a_2 - 99 a_0 = 99(a_2 - a_0)$$

Da außerdem $2 \leq (a_2 - a_0) \leq 9$ gilt, sind die einzigen möglichen Differenzen 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 und 891, deren Ziffernsummen jeweils 18 ergeben.

Um sicherzustellen, dass auf jeden Fall die achtzehnte Karte gezogen wird, kann man zusätzlich dazu einen Stapel mit nur 35 Karten verwenden. Dadurch macht es keinen Unterschied, ob man die Position der Zielkarte von unten oder oben bestimmt.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Um die vorab manipulierte Platzierung der Karte besser zu verschleiern, kann auch ein längerer Satz aufgeschrieben werden, dessen Buchstaben möglichst viele verschiedene Karten zulässt, wie dieser für alle Karten der Spielfarbe Karo außer Fünf und König: *„Die Karten offenbaren sich dir vielleicht auch zwischen den Zeilen oder inmitten von Buchstaben.“*

In diesem Satz wiederum können sogar alle 52 Karten des Decks gefunden werden: *„Penible Kartensuche ist hier zwecklos, denn sie könnte einem Zahlenwert entsprechen und oftmals dürfte sie auch ein farbenfreudiges Bildmotiv zieren.“* Die Suche nach geeigneten Sätzen für bestimmte andere Spielkarten macht den Lernenden mitunter auch großen Spaß und hängt nicht vom jeweiligen Leistungsniveau im Unterrichtsgegenstand ab, aber im Vordergrund sollte letztendlich trotzdem der mathematische Hintergrund stehen.

Leistungsstärkere Lernende können sich nach der Auflösung des Tricks noch mit der Frage beschäftigen, was passiert, wenn wir uns alle dreistelligen Ziffernkombinationen auf einem Zahlenschloss vorstellen und diese als dreistellige Zahlen zulassen. Der Trick funktioniert nämlich tatsächlich für alle dreistelligen Zahlen außer jene, bei denen dreimal die gleiche Ziffer vorkommt, d. h. 000, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 und 999, weil in diesen Fällen die Ziffernsumme stets 0 ergibt.

3.5.3 Wir haben unsere Differenzen

Thema: Formeln aufstellen und Terme umformen

Lehrplanverortung:

- Terme und Formeln aufstellen und interpretieren können; Umformungsschritte durch Rechengesetze begründen können
- Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind, mittels Termen, Tabellen und Graphen beschreiben und über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren können
- Quadratische Funktionen der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschreiben und untersuchen können
- Formeln in Hinblick auf funktionale Aspekte untersuchen können; direkte und indirekte Proportionalitäten mithilfe von Funktionen beschreiben können
- Mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen arbeiten können; Funktionen als mathematische Modelle auffassen können

Durchführung: Woo [47] hat in der Pandemiezeit einen Trick vorgestellt, der ursprünglich von Grime [17] entwickelt wurde, aber keinen offiziellen Namen hat. Dafür benötigen wir im Grunde nur die Karten Ass bis Zehn einer Spielfarbe, wobei das Ass in diesem Fall den Rang eins hat. Zusätzlich dazu verwenden wir noch die Karten von Ass bis Neun der beiden komplementären anderen Spielfarben, um Differenzen zwischen gegenüberliegenden Karten zu markieren.

Zunächst legen wir die Karten beiseite, die für die Markierung der Differenzen gedacht sind und mischen anschließend die zehn Karten. Im nächsten Schritt verteilen wir diese auf eine beliebige Art und Weise auf uns und unser Gegenüber. Wichtig ist dabei nur, dass beide jeweils die Hälfte der Karten bekommen. Falls sie verdeckt ausgeteilt oder gezogen wurden, drehen wir sie nun um und legen sie anschließend in von links nach rechts aufsteigender Reihenfolge vor uns auf. Das hat zu Folge, dass unsere niedrigste Karte gegenüber von der höchsten unseres Gegenübers liegt und umgekehrt.

Anschließend bilden wir jeweils die absolute Differenz zweier gegenüberliegender Karten und legen dafür die entsprechende Karte der anderen Spielfarbe zwischen die beiden gegenüberliegenden, um diese zu veranschaulichen. Zum Schluss fordern wir unser Gegenüber auf, diese fünf Differenzen zu addieren. Währenddessen offenbaren wir unsere Vorhersage, auf der ebenfalls die Zahl 25 steht. In diesem Fall könnten wir den Vorherstriktrick als Gedankenlesetrick durchführen, indem wir uns die ganze Zeit wegdrehen und unser Gegenüber die Karten auflegen lassen. Zusätzlich dazu können wir das Ganze in beiden Fällen auch als Wette verpacken.

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

→ Beispiel: Wir verwenden ♠A bis ♠10 für die Verteilung und ♥A bis ♥9 sowie ♦A bis ♦9 für die Veranschaulichung der Differenzen. Eine mögliche Verteilung der Karten könnte dann ♠A-♠4-♠5-♠7-♠9 auf unserer Seite und ♠2-♠3-♠6-♠8-♠10 bei unserem Gegenüber sein. Dabei liegt das Ass also gegenüber vom Zehner, der Vierer gegenüber vom Achter und so weiter. Woo arbeitet bei der Erläuterung des Tricks mit einem Lageplan, auf dem er Pfeile für die Reihenfolgen einzeichnet, in der die Karten aufgelegt werden sollen, damit es hier keine Unklarheiten gibt (siehe Abbildung 3.7).

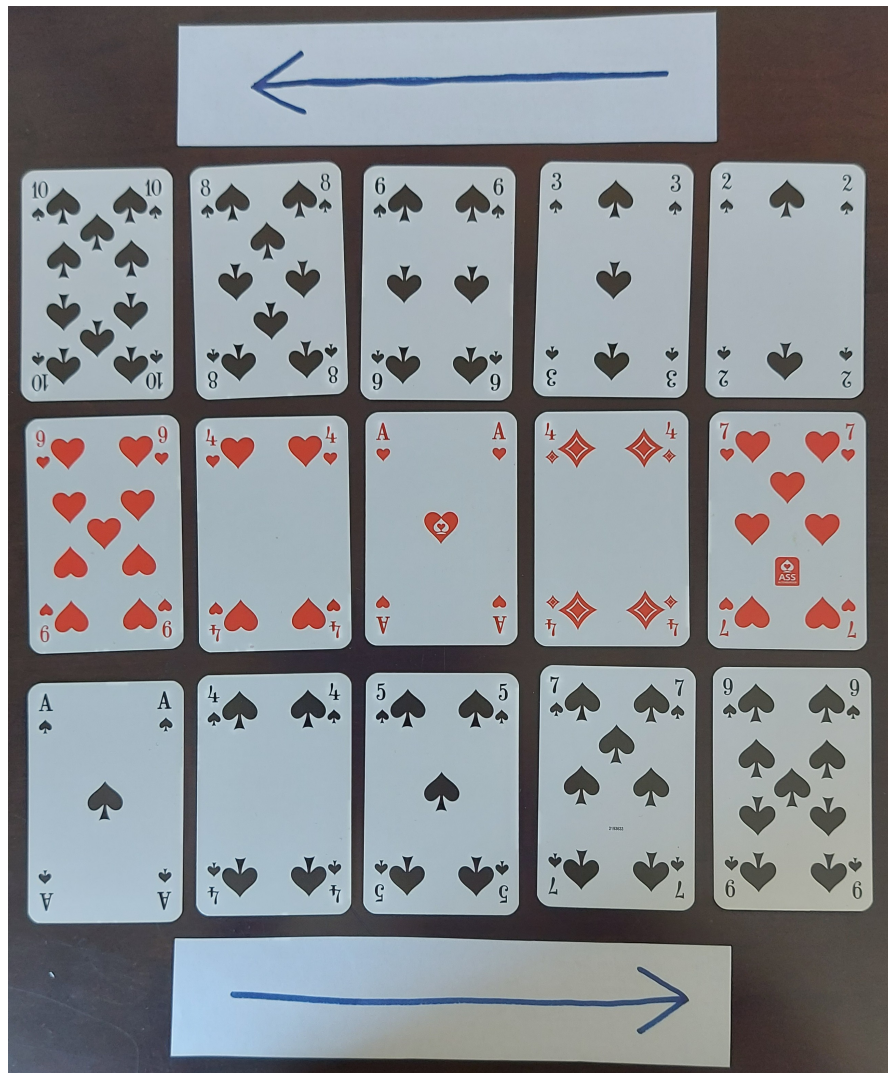


Abbildung 3.7: beispielhafte Verteilung der Karten (eigene Abbildung)

Funktionsweise: Es spielt keine Rolle, wie die Karten aufgeteilt werden, denn die Summe der Differenzen D ist in jedem Fall 25. Das liegt daran, dass für jeden Unterschied jeweils einer der fünf niedrigen $\{A; 2; 3; 4; 5\}$ von einem der fünf hohen Ränge $\{6; 7; 8; 9; 10\}$ abgezogen wird. Um das zu zeigen, arbeiten wir mit der Gaußschen Sum-

menformel $S(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ und überlegen uns Folgendes: Zuerst berechnen wir die Summe aller zehn Ränge und ziehen dann die Summe der fünf niedrigen ab, um jene der fünf hohen zu erhalten. Anschließend müssen wir erneut die Summe der fünf niedrigen abziehen, um schließlich die gewünschte Summe der Differenzen zu erhalten. Zusammengefasst subtrahieren wir also zweimal die Summe der niedrigeren Ränge von der Gesamtsumme aller Ränge und kommen so auf folgende Formel:

$$D(n) = S(n) - 2 \cdot S\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n^2+n}{2} - 2 \cdot \left(\frac{\frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}}{2}\right) = \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Dabei fällt uns auf, dass es sich stets um eine Quadratzahl handelt, und zwar jene der Anzahl an Karten, die jede Seite bekommt. Für zehn Karten ist die Summe der Differenzen demnach stets $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Woo schlägt folgende vereinfachte Notation vor, bei der die Lernenden lediglich wissen müssen, wie das Assoziativitätsgesetz funktioniert, um die Funktionsweise plausibel zu machen: $(H - N) + (H - N) + (H - N) + (H - N) + (H - N) = 5H - 5N = (10 + 9 + 8 + 7 + 6) - (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 40 - 15 = 25$.

Eine Möglichkeit zur Unterstützung der Lernenden ist der Hinweis, dass die Summe aller Karten gleich 55 ist. Falls man diesen Umstand nicht gleich verraten möchte, können sie zumindest aufgefordert werden, die Summe der Kartenwerte zu bilden, um ein Muster zu erkennen. Dazu können unter anderem folgende Impulsfragen gestellt werden:

- Wie groß ist der Unterschied zwischen den beiden mittleren Karten höchstens?
A: Die maximale Differenz zwischen den mittleren Karten ist $8 - 3 = 5$.
- Findest du eine Verteilung, bei der die paarweise Summe gegenüberliegender Karten stets elf ist?
A: Eine Möglichkeit wäre: $1 + 10, 2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 5 + 6$.
- Findest du eine Verteilung, bei der keine der paarweisen Differenzen gegenüberliegender Karten gleich ist?
A: Eine Möglichkeit wäre: $10 - 2, 9 - 3, 8 - 4, 7 - 5, 6 - 1$.
- Würde der Trick auch mit weniger als zehn Karten funktionieren?
A: Ja, aber die Anzahl der Karten muss gerade sein. Bei zwei Karten gibt es genau eine Möglichkeit für die Verteilung der Karten (unabhängig davon, welche Seite welche Karte bekommt) und die Differenz ist stets 1. Bei vier Karten ist die Differenz stets 4, bei sechs Karten 9 und bei acht Karten 16. Im Zuge dessen dürfte uns auffallen, dass es sich dabei um die Quadratzahlen handelt.
- Wären auch mehr als zehn Karten möglich?
A: Ja, es wären auch zwölf Karten möglich, wenn wir einen Buben und eine Dame mit den Rängen elf und zwölf hinzufügen. Die Summe der Differenzen ergibt dann stets 36. Falls wir auch den König mit Rang dreizehn einen Joker mit Rang null

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

oder vierzehn hinzufügen, wären sogar vierzehn Karten möglich und die Summe der Differenzen stets 49.

Falls wir eine andere feste, aber beliebige Schrittlänge wählen, indem wir sie entsprechend skalieren, überträgt sich diese Veränderung auch auf die Summe der Differenzen.

→ Beispiel: Falls der Abstand zwei ist, d. h. statt $A - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10$ hätten wir $2 - 4 - 6 - 8 - 10 - D - A - 3 - 5 - 7$, wobei wir eine Überschreitung von $K = 13$ machen müssen, um die Zahlen 14, 16, 18 und 20 auszudrücken. In diesem Fall ist die Summe der Differenzen doppelt so groß, d. h. gleich 50. Eine Verschiebung ist ebenso möglich, insofern die Schrittlänge gleich bleibt, d. h. wir könnten theoretisch auch gewisse Kartenwerte als negative Zahlen verwenden.

3.6 Sechste Klasse (zehnte Schulstufe)

3.6.1 Kartenhausformel

Thema: Folgen und Reihen

Lehrplanverortung:

- Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen)
- Folgen durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Reihen berechnen können

Durchführung: Hierbei handelt es sich nicht wirklich um einen Trick, sondern eher um eine praktische Anwendung zur Arbeit mit Formeln und Zahlenfolgen, bei der die Karten als anschauliche Zähleinheiten fungieren. Der praktische Teil, d. h. das Bauen des Kartenhauses fällt zwar mit dickeren Bausteinen wie Bierdeckeln o. ä. leichter, ist aber genauso auch mit Spielkarten möglich. Als Einstieg kann man den Lernenden die Frage stellen, wie hoch sie mit einem einzelnen Deck höchstens bauen können, bis ihnen die Karten ausgehen.

Das können sie gleich im Anschluss in der Praxis ausprobieren, um besser nachvollziehen zu können, wie viele Karten für jedes weitere Stockwerk benötigt werden. Auch wenn ausreichend Decks für die ganze Klasse zur Verfügung stehen, ist es ratsam, die Lernenden hierfür in Zweier- oder Dreierteams einzuteilen, damit zumindest eine Person pro Gruppe sich darum kümmert, die Erkenntnisse zu verschriftlichen.

Das Ziel der Aufgabe ist jedenfalls, mindestens eine allgemeine (rekursive oder explizite) Formel zu finden, mit der die Anzahl der Karten für eine vorgegebene Anzahl an Stockwerken berechnet werden kann. Ein entsprechendes Arbeitsblatt in zwei verschiedenen Ausführungen für eine etwaige Niveaudifferenzierung durch unterschiedliche Aufgabenstellungen [2] samt Musterlösungen auf der Basis von früheren Arbeiten [19] befindet sich im Anhang 4.

Funktionsweise: Wir beginnen mit der Suche nach einer rekursiven Formel. Dafür betrachten wir zunächst ein paar einfache Fälle, um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie sich die Anzahl der Karten mit jedem weiteren Stockwerk ändert. Es sollte anschaulich klar sein, dass wir null bzw. zwei Karten für die trivialen Fälle mit keinem bzw. einem Stockwerk benötigen. Erst ab dem zweiten Stockwerk kommt auch ein Boden für jede weitere der oberen Etagen dazu.

Die Lernenden sollten erkennen, dass die bisher benötigten Karten $k(x)$ stets auch im

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

größeren Haus enthalten sein müssen, weil das kleinere mit jedem Schritt gewissermaßen in das Dach des nächsthöheren wandert. Wir brauchen außerdem um eine Karte weniger als die künftige Anzahl der Stockwerke bzw. gleich viele wie die bisherige Anzahl der Stockwerke x , um die Zimmerböden des zuvor untersten Stockwerks einzuziehen. Anschließend kommen noch doppelt so viele Karten wie die künftige Anzahl der Stockwerke für die neuen Wände dazu, weil wir stets zwei davon für ein Zimmer ohne Boden brauchen. Auf diese Weise erhalten wir folgende Formel: $k(x+1) = k(x) + x + 2(x+1) = k(x) + 3x + 2$ (mit $k(0) = 0$).

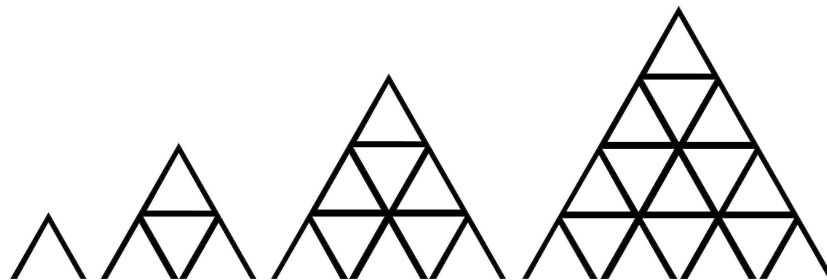


Abbildung 3.8: $k(1)$ bis $k(4)$ (eigene Abbildung)

Wenn wir also zu einem dreistöckigen Kartenhaus ein viertes Stockwerk dazu bauen, brauchen wir einerseits die fünfzehn Karten für ein dreistöckiges Haus (orange) und andererseits vier minus eins, also drei Karten für die nächsten Böden (blau) sowie zwei mal vier, also acht Karten für die Wände (grün):

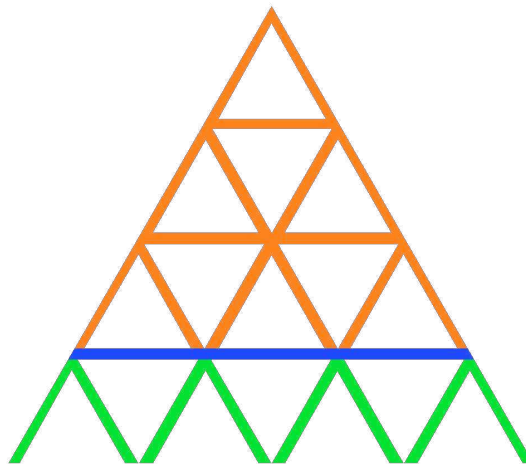


Abbildung 3.9: von oben nach unten (eigene Abbildung)

Wir können uns stattdessen auch vorstellen, dass wir das Haus zur Seite hin erweitern. Ein Vorteil dieser Herangehensweise ist, dass sie sich, im Gegensatz zur oben beschriebenen, auch tatsächlich in der Praxis umsetzen lässt. In diesem Fall stellen die bisher benötigten Karten (orange) ebenfalls einen Baustein unserer Formel dar. Danach kommen stets zwei Karten (türkis) für die Erweiterung des Fundaments bzw. die beiden Wände des zusätzlichen Zimmers im untersten Stockwerk dazu und zum Schluss brauchen wir noch dreimal so viele Karten wie die bisherige Anzahl an Stockwerken (magenta) für die darüber liegenden zusätzlichen Zimmer:

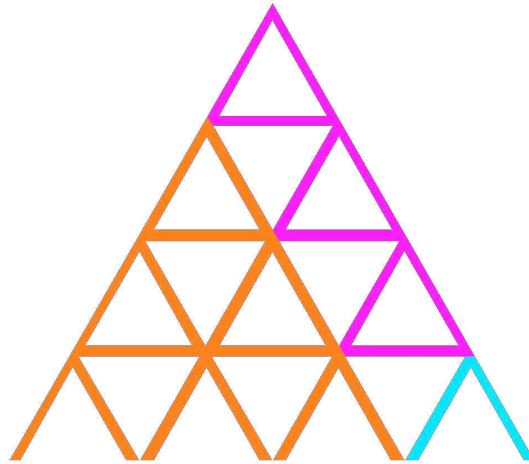


Abbildung 3.10: von links nach rechts (eigene Abbildung)

Die im Zuge der Konstruktion von x Stockwerken benötigten Karten lassen sich als Folge $k(x)$ aufschreiben (siehe Tabelle im Anhang 4). Ihre Glieder sind die sogenannten Pentagonalzahlen (Fünfeckszahlen) der zweiten Art [30] und werden deshalb auch als Kartenhauszahlen bezeichnet.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Die beiden oben beschriebenen Möglichkeiten für die Vorstellung der Erweiterung des Hauses bieten unterschiedliche Zugänge, um auf die Formeln zu kommen. Abgesehen davon können wir uns das Kartenhaus auch mit einem Boden im untersten Stockwerk vorstellen, um zunächst zwei vergleichsweise weniger komplizierte Formeln herzuleiten. Wir erhalten die rekursive Formel, indem wir zur bisherigen Anzahl der Karten noch das Dreifache der nächsten Anzahl an Stockwerken addieren und erhalten: $\tilde{k}(x) = \tilde{k}(x-1) + 3x$ bzw. $\tilde{k}(x+1) = \tilde{k}(x) + 3x + 3$. Die explizite Formel ergibt sich daraus, dass für jedes Zimmer im Kartenhaus jeweils drei Karten nötig sind. Wir müssen also in diesem Fall nur die Anzahl der Zimmer verdreifachen und erhalten: $\tilde{k}(x) = 3(1 + 2 + 3 + \dots + x) = 3 \cdot \frac{x(x+1)}{2}$

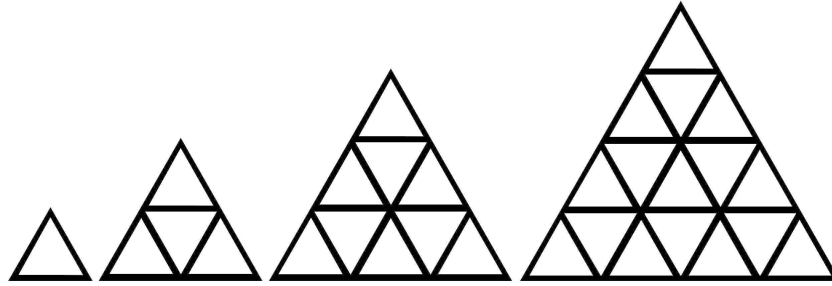


Abbildung 3.11: Variante mit Boden von $k(1)$ bis $k(4)$ (eigene Abbildung)

Diese können anschließend als Steighilfe genutzt werden, um auf die Formeln für das reguläre Kartenhaus zu kommen. Dazu müssen wir am Ende lediglich die entsprechende Anzahl an Karten für die Böden im untersten Stockwerk subtrahieren, indem wir einfach die künftige Anzahl der Stockwerke $(x + 1)$ abziehen. Die Erfahrung hat gezeigt, dass dieser Schritt auch leistungsschwächeren Lernenden ermöglicht, die Formel für das reguläre Kartenhaus nachzuvollziehen.

Der Einsatz von Spielkarten für das selbstständige Ausprobieren sowie farbige Markierungen bei der Veranschaulichung durch Zeichnungen, um die verschiedenen Rollen der Karten (Böden, Wände, Überdachung etc.) hervorzuheben, hat sich ebenfalls als hilfreich erweisen. Für leistungsschwächere Lernende kann auch die Verwendung der bereits oben erwähnten Begriffe Böden (waagrecht liegende Karten) und Wände (schräg stehende Karten) sowie Zimmer (mit der Spitze nach oben orientierte Dreiecke) hilfreich sein, um sich die verschiedenen Komponenten besser vorzustellen.

3.6.2 Kleine Schwindeleien

Thema: Folgen und Reihen

Lehrplanverortung:

- Zahlenfolgen als auf $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ definierte reelle Funktionen kennen (insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen)
- Folgen durch explizite und rekursive Bildungsgesetze darstellen und in außermathematischen Bereichen anwenden können
- Summen endlicher arithmetischer und geometrischer Reihen berechnen können

Durchführung: Wir lassen unser Gegenüber zwei Karten ziehen und bitten darum, uns die Summe der beiden Karten zu nennen, woraufhin wir sofort sagen können, um welche es sich handelt und die beiden Karten aufdecken.

Funktionsweise: Der Name dieses Tricks von Mulcahy (2013 [34]) ist im Original *Little Fibs*. Dabei handelt es sich um ein Wortspiel, weil das englische Wort *fib* einerseits Schwindelei bedeutet und andererseits eine Referenz auf die Fibonacci-Zahlen darstellt:

$$F(0) = 0 \quad F(1) = 1 \quad n > 1 : F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Wir haben nämlich für die Ziehung zu Beginn nur eine ganz bestimmte Teilmenge des Decks zur Verfügung gestellt, und zwar: {A; 2; 3; 5; 8; K}. Ihre Ränge entsprechen den folgenden Fibonacci-Zahlen: $\{F(1) = F(2) = 1; F(3) = 2; F(4) = 3; F(5) = 5; F(6) = 8; F(7) = 13\}$.

Die Fibonacci-Zahlen stellen eine sogenannte Sidon-Folge dar und haben die praktische Eigenschaft, dass jede Summe zweier ihrer Folgenglieder verschieden von allen anderen ist. Wir können also problemlos von der Summe auf die beiden Summanden schließen, weil jedes Ergebnis nur durch zwei der sechs Zahlen zustande kommt: $\{3 = 1 + 2; 4 = 1 + 3; 5 = 2 + 3; 6 = 1 + 5; 7 = 2 + 5; 8 = 3 + 5; 9 = 1 + 8; 10 = 2 + 8; 11 = 3 + 8; 13 = 5 + 8; 14 = 1 + 13; 15 = 2 + 13; 16 = 3 + 13; 18 = 5 + 13; 21 = 8 + 13\}$.

Im Original wird zusätzlich dazu noch die jeweilige Spielfarbe vorhergesagt. Dazu legen wir uns vorab auf eine bestimmte Reihenfolge fest, die wir auswendig können müssen. Mulcahy verwendet die sogenannte *CHaSeD*-Sortierung, was für die Reihenfolge *clubs-hearts-spades-diamonds* bzw. auf Deutsch Kreuz-Herz-Pik-Karo steht (siehe auch Benjamin 2023 [7]) und in diesem Fall zu folgenden Karten führt: ♣A-♥2-♠3-♦5-♣8-♥K.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Mulcahy merkt an, dass stattdessen auch die sechs Karten einer Spielfarbe genommen werden können, damit man sich nicht extra merken muss, welche Karte zu welcher Farbe gehört. Das hat den Vorteil, dass

3 Kartentricks für verschiedene Schulstufen

die Durchführung des Tricks vereinfacht wird, was ihn für leistungsschwächere Lernende zugänglicher macht. Ein Nachteil ist wiederum, dass er so womöglich weniger Eindruck schindet und außerdem einfacher zu durchschauen ist. Insbesondere bei wiederholter Durchführung wird nämlich schnell offensichtlich, dass alle gezogenen Karten dieselbe Spielfarbe aufweisen.

Er schlägt folgende Impulsfragen vor, die man den Lernenden stellen kann, sobald die Funktionsweise klar ist:

- Funktioniert der Trick auch noch, wenn drei der sechs Karten gezogen werden?
A: Ja, aber dann kann folgender Fall eintreten, bei dem nicht eindeutig gesagt werden kann, um welche drei Karten es sich handelt: $1+2+13 = 3+5+8$. Mulcahy schlägt vor, in diesem Fall ein kleines Wortgeplänkel einzubauen, das darauf abzielt, eine der Spielfarben herauszufinden, um dadurch auf die drei Karten zu schließen.
- Funktioniert der Trick auch, wenn vier der sechs Karten gezogen werden?
A: Ja, und es ist sogar, wie Mulcahy es formuliert, doppelt so beeindruckend, aber nur halb so schwierig, da wir lediglich die Summe der Ränge von der Gesamtsumme abziehen müssen. Mit dem Rest machen wir dasselbe wie bei der Variante mit nur zwei Karten. Dadurch wissen wir, welche Karten nicht gezogen wurden und dementsprechend auch, um welche vier Karten es sich handelt. Als Hilfestellung empfiehlt er, die Lernenden aufzufordern, die Gesamtsumme aller sechs Karten zu bestimmen.
- Gibt es noch weitere Zahlenmengen, für die der Trick mit zwei Karten funktioniert?
A: Ja, denn eine vergleichsweise einfache und artverwandte Möglichkeit wäre eine Teilmenge der Tribonacci-Zahlen:

$$T(0) = 0 \quad T(1) = T(2) = 1 \quad n \geq 3 : T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3)$$

Falls wir unbedingt sechs Zahlen haben möchten, bieten sich folgende Tribonacci-Zahlen an: $\{T(0) = 0; T(1) = T(2) = 1; T(3) = 2; T(4) = 4; T(5) = 7; T(6) = 13\}$, wobei für die Null zum Beispiel ein Joker verwendet werden könnte und folgende Karten infrage kommen: $\{J; A; 2; 4; 7; K\}$. Wir können stattdessen auch gewissermaßen die Reihenfolge umkehren und die Fibonacci-Zahlen als Differenzen betrachten, die wir von 14 abziehen: $\{1; 6; 9; 11; 12; 13\}$. Dasselbe lässt sich auch mit den Tribonacci-Zahlen bewerkstelligen, indem wir sie als Differenzen betrachten, die wir von 13 abziehen: $\{0; 6; 9; 11; 12; 13\}$.

- Welche Möglichkeiten gibt es, wenn wir nur fünf statt sechs Zahlen haben?
A: Eine naheliegende Strategie ist, einfach eine der sechs Zahlen zu entfernen: $\{1; 2; 3; 5; 8\}; \{1; 2; 3; 5; 13\}; \{1; 2; 3; 8; 13\}; \{1; 2; 5; 8; 13\}; \{1; 3; 5; 8; 13\}; \{2; 3; 5; 8; 13\}$. Weitere Möglichkeiten sind (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) $\{1; 3; 4; 7; 11\}$ (Lukas-Zahlen ohne 2), $\{2; 3; 5; 7; 11\}$ (Primzahlen), $\{1; 2; 4; 6; 10\}$ (Primzahlen minus 1), $\{0; 1; 2; 5; 12\}$ (Pell-Zahlen), $\{0; 1; 3; 5; 11\}$ (Jacobsthal-Zahlen), $\{1; 3; 5; 8; 9\}$ oder

$\{1; 2; 5; 7; 13\}$. Falls auch weniger Zahlen zulässig sind, bieten sich unter anderem auch noch die Potenzen der Zahlen zwei und drei an: $\{1; 2; 4; 8\}$, $\{1; 3; 9\}$.

- Gibt es noch andere Rechenoperationen, die einen eindeutigen Rückschluss auf zwei Zahlen zulassen?

A: Ja, denn ein naheliegendes Beispiel wäre die Multiplikation mit den ersten sechs Primzahlen: $\{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$. Abgesehen davon funktioniert das auch mit $\{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$, $\{1; 2; 3; 4; 5; 9\}$, $\{1; 2; 3; 4; 5; 11\}$ oder $\{1; 2; 3; 4; 5; 13\}$. Bei der Subtraktion oder Division hingegen kommt erschwerend hinzu, dass die Reihenfolge der Zahlen eine Rolle spielt.

In der oben beschriebenen Variante beschränken wir uns auf die Ziehung, aber der Trick kann unter anderem mit verschiedenen Mischtechniken, wie zum Beispiel durch das Zurückhalten der sechs Karten beim Bogenmischen, noch weiter ausgeschmückt werden. Dadurch wird der Effekt noch mehr verschleiert, aber auch die im zweiten Abschnitt festgelegte Voraussetzung für die Auswahl von Tricks verletzt. Die wesentliche Erkenntnis sollte jedenfalls sein, dass es bestimmte Zahlenmengen gibt, die sich für eine derartige Codierung von Informationen eignen und man diese auch variieren kann, um die Funktionsweise des Tricks besser zu verschleiern. Falls auch mit Computern gearbeitet wird, sollten die Lernenden dazu animiert werden, mit Tabellenkalkulation zu arbeiten, um verschiedene Zahlenmengen zu testen.

3.6.3 Kartencodierung

Thema: Formeln und Tabellenkalkulation

Lehrplanverortung: Verkettungen von Funktionen kennen; Umkehrfunktionen kennen

Durchführung: Wir gehen mit einem Kartenstapel durch das Publikum und lassen mehrere Personen jeweils eine Karte ziehen. Geer (1992) [15] empfiehlt zwar, den Trick mit einem Deck übergroßer Karten aus dem Fachhandel vorzuführen, aber eines in regulärer Größe reicht vollkommen aus. Da es 52 Karten beinhaltet, sollten außerdem alle Lernenden in einer Schulklasse problemlos mitmachen können. Sobald alle Teilnehmenden eine Karte gezogen haben, bekommen sie folgende Instruktionen: Der Rang ihrer Karte wird verdoppelt, danach wird drei addiert und das Ergebnis verfünffacht. Ass hat hier den Rang eins, der Bube den Rang elf, die Dame den Rang zwölf und der König den Rang dreizehn. Zum Schluss wird abhängig von der Farbe der Karte noch eine Zahl addiert, und zwar bei Pik eins, bei Herz zwei, bei Kreuz drei und bei Karo vier. Nun kann jemand aus dem Publikum das eigene Ergebnis verkünden und wir wissen sofort, welche Karte jeweils gezogen wurde.

Funktionsweise: Wir können für jeden Rechenschritt eine Funktion aufstellen, um uns ein besseres Bild davon machen, was passiert:

1. $a(k) = 2k$ (Verdopplung des Rangs)
2. $b(k) = k + 3$ (Addition der Zahl drei)
3. $c(k) = 5x$ (Verfünffachung des Zwischenergebnisses)
4. $d(k) = k + n$ (Addition der Kennzahl der jeweiligen Spielfarbe)

Wenn wir diese anschließend miteinander verketteten, erhalten wir folgenden Term:

$$(d \circ c \circ b \circ a)(k) = d(c(b(a(x)))) = 5(2k + 3) + n = 10k + 15 + n$$

Wir müssen also lediglich im Kopf fünfzehn vom Endergebnis abziehen, um herauszufinden, welche Karte es ist. Die Hunderter- und Zehnerstellen verraten uns dabei den Rang und die Einerstelle die Spielfarbe der Karte, wobei diese natürlich davon abhängt, welche der Zahlen von eins bis vier wir welcher Farbe zuordnen.

Möglichkeiten der Binnendifferenzierung: Wir können die Codierung offensichtlicher machen, indem wir den letzten Schritt, d. h. die Subtraktion der Zahl fünfzehn in die Arbeitsanweisungen miteinbeziehen. Um das Durchschauen des Tricks entweder zu vereinfachen oder zu erschweren, können generell die verschiedenen Parameter der Formel entsprechend verändert oder auch neue hinzugefügt werden.

Lim (2019 [29]) merkt an, dass Lernende in der Regel größere Schwierigkeiten mit der

Verkettung von Funktionen haben, weshalb stattdessen die Operationen der Arbeitsschritte miteinander kombiniert werden können, um den gewünschten Term zu erhalten. Statt der Variable für die Kennzahl der Spielfarbe kann zwecks Übersicht auch das jeweilige Symbol ♠, ♥, ♣ oder ♦ verwendet werden.

Falls die Lernenden mit Computern arbeiten, sollten sie dazu angehalten werden, die Ergebnisse für alle 52 Karten des Decks mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms durchzuspielen, um das Muster zu erkennen. Eine entsprechende Tabelle mit allen Ausgängen befindet sich im Anhang 4.

Im Anschluss können sie sich auch überlegen, welche Parameter problemlos geändert werden könnten und nach Möglichkeit auch Ideen für eigene Tricks umsetzen. Kadan (2017 [21]) stellt eine einfachere Variante vor, bei der die Spielfarbe irrelevant ist: Wir verdoppeln den Rang der Karte, addieren dann die Zahl zwei, multiplizieren das Ergebnis mit fünf und subtrahieren schließlich die Zahl sieben, was einfach nur dem folgenden Term entspricht: $5(2k + 2) - 9 = 10k + 1$. Der Rang der ursprünglichen Karte steht dabei auf der Zehner- sowie gegebenenfalls auch der Hunderterstelle. Nun bitten wir unser Gegenüber, uns das Ergebnis zu nennen, woraufhin wir den Rang der gesuchten Karte nennen und außerdem ein Ass zücken, das wir daneben legen, um das Ergebnis zu veranschaulichen.

4 Schluss

Ein Kartendeck eignet sich für wesentlich mehr, als Zufallsversuche in Form von Ziehungen zu veranschaulichen. Es ist eine kostengünstige Requisite für praktische Vorführungen und ermöglicht einen niederschweligen und spielerischen Zugang zu vielen mathematischen Themen. Für die Arbeit mit Spielkarten spricht vor allem, dass der Ressourcenaufwand sich im Vergleich zu anderen Methoden in Grenzen hält. Immerhin kommt man im Grunde bereits mit einem einzelnen Kartendeck aus, falls darauf verzichtet wird, die Lernenden einen Trick selbst ausprobieren zu lassen. Abgesehen davon können Kartentricks zur Methodenvielfalt beitragen und Lernende dazu anregen, sich auf kreative Art und Weise mit dem Schulstoff auseinanderzusetzen.

Ein möglicher Nachteil in Zusammenhang mit dem Schulunterricht ist sicherlich der häufig beklagte Zeitmangel. Im Regelunterricht bleiben aufgrund von Schularbeiten, Lehrausgängen und sonstigen terminlichen Verpflichtungen in der Regel nicht allzu viele Unterrichtsphasen, in denen man sich mit Themen beschäftigt, die eher in den Erweiterungsbereich des Lehrplans fallen. Allerdings würde ich nun dagegenhalten, dass es genug Tricks gibt, die direkt an den Lehrplan anknüpfen und deshalb eine willkommene Ergänzung darstellen.

Ein weiterer möglicher Nachteil ist die Menge an Eigeninitiative seitens der Lehrperson. Diese muss sich nämlich im Vorfeld mit Inhalten beschäftigen, die teilweise nicht nur über die Schulmathematik, sondern unter Umständen auch über Inhalte des Curriculums eines Lehramt-Studiums hinausgehen. Hinzu kommt anschließend noch, dass selbst die Vorbereitung eines einzelnen Tricks äußerst zeitintensiv werden kann, da man stets berücksichtigen muss, welche Verständnisschwierigkeiten bei der selbstständigen Durchführung durch die Lernenden auftreten können.

Eines meiner Ziele war, im Rahmen dieser Arbeit neue Methoden für meinen eigenen Unterricht kennenzulernen und zugleich in der Praxis zu erproben. Beides ist mir, meiner Meinung nach, gelungen. Ich habe mich mit einer Unmenge an Kartentricks beschäftigt und konnte dadurch viele Lehrplaninhalte in neuen und interessanten Zusammenhängen kennenlernen. Oftmals war es dabei auch möglich, einen Blick über den Tellerrand bzw. den Schulstoff zu werfen. Einige der hier vorgestellten Tricks konnte ich außerdem bereits im Zuge der Projektstage an meiner Schule mit Schülerinnen und Schülern der siebten Klassen ausprobieren und die Resonanz war sehr gut.

Da die Tricks im Rahmen eines Workshops angeboten wurden, bin ich davon ausgegangen, dass alle Beteiligten grundsätzlich bereit sein würden, sich auf das Thema ein-

4 Schluss

zulassen und dementsprechend der Zauberei zumindest nicht vollkommen abgeneigt sind. Die Jugendlichen aus insgesamt drei verschiedenen Klassen konnten im Vorfeld aus einem bestimmten Kursangebot wählen und alle Anwesenden hatten sich, wie sich später herausgestellt hat, auch tatsächlich selbst für eine Teilnahme entschieden. Sie wurden also beispielsweise nicht aufgrund von Platzmangel in anderen Kursen oder fehlender Rückmeldung zugeteilt.

Die Arbeitszeit mit der Kursgruppe im Rahmen der Projekttag war auf fünf Unterrichtsstunden beschränkt, weshalb nicht ausreichend Zeit vorhanden war, um sich vorab ein genaueres Bild vom Kenntnisstand der Lernenden zu machen. Die Jugendlichen haben sich selbstständig in kleinen Arbeitsgruppen zusammengeschlossen und gegenseitig beim Arbeiten unterstützt. In Zusammenhang mit der Zeitplanung sollte man sich jedenfalls an folgenden Grundsatz halten: Weniger ist mehr. An dem besagten Vormittag haben wir uns mit insgesamt zwölf verschiedenen Tricks und teilweise auch möglichen Abwandlungen beschäftigt und im Nachhinein betrachtet war das eindeutig zu viel.

Manche der Lernenden konnten die gezeigten Tricks trotzdem bereits nach nur einer Vorführung reproduzieren und waren in mehreren Fällen auch dazu in der Lage, eigene Abwandlungen vorzunehmen, die sie anschließend stolz präsentierten. Andere wiederum benötigten mehrere Anläufe und waren teilweise sehr stark auf die Unterstützung durch die Lehrperson oder Mitlernenden angewiesen, um die dafür nötigen Schritte noch einmal gemeinsam durchzugehen. Wichtig ist dabei jedenfalls, dass die Lehrperson diese bereits ausreichend verinnerlicht hat, um schnell und gezielt auf etwaige Verständnisprobleme eingehen zu können. Gerade bei leistungsschwächeren Lernenden empfiehlt sich eine Abkehr vom entdeckenden Lernen zugunsten von Lernen am Beispiel, gepaart mit frontaler Instruktion durch die Lehrperson.

Im Zuge der Erarbeitungsphasen habe ich so gut wie alle von beschriebenen Vorteile eines Einsatzes von Zauberei im Schulunterricht beobachten können. Die Motivation der Teilnehmenden blieb, unabhängig vom vermuteten Leistungsniveau, ungebrochen und sie hatten großen Spaß daran, sich die Tricks gegenseitig vorzuführen und herauszufinden, wie und warum sie funktionieren. Vor allem schnell und einfach umsetzbare Tricks sind dabei auf besonders großen Zuspruch gestoßen, weil die Teilnehmenden diese auch ihren jüngeren Verwandten zeigen können. Das Gleiche gilt auch für jene Tricks, bei denen alle die Arbeitsschritte gleich direkt selbst mitgemacht haben, nur um am Ende verblüfft festzustellen, dass es auf Anhieb funktioniert hat.

Aus meiner Sicht ist es jedenfalls unerlässlich, die Arbeitsschritte in irgendeiner Form für alle Beteiligten gut sichtbar zu projizieren. An meiner Schule kommt beispielsweise in den Unterrichtsgegenständen geometrisches Zeichnen und analytische computergestützte Geometrie eine Dokumentenkamera zum Einsatz. Deshalb war es naheliegend, davon Gebrauch zu machen (siehe Abbildung 4.1). Mit einem solchen Gerät kann die Vorführung durch die Lehrperson in Echtzeit und mit relativ wenig technischem Aufwand aus einem

Blickwinkel gezeigt werden, der dem entspricht, was die Lernenden sehen, wenn sie einen Trick selbst durchführen. Das hat zusätzlich den Vorteil, dass auch bei einer größeren Gruppe alle sehen können, was passiert.



Abbildung 4.1: Einsatz der Dokumentenkamera (eigene Abbildung)

Da der Workshop das erste Mal angeboten wurde, war die Auswahl der Tricks zu Beginn noch nicht streng festgelegt und hat sich im Zuge des Vormittags durch die Wünsche und Interessen innerhalb der Kursgruppe ergeben. Eine entsprechende Zusammenfassung der gezeigten Tricks inklusive detaillierter Arbeitsanweisungen wurde danach fertiggestellt und an die Teilnehmenden verschickt. Weitere Formen der Unterstützung, die sich als äußerst hilfreich erwiesen haben, sind Erklärvideos, Notation mit verschiedenen Farben und Arbeitsunterlagen mit Kennzeichnungen für die Ablage bestimmter Kartenstapel. Im Falle einer größeren Gruppe sollte vermutlich eine zweite Lehrperson als Unterstützung dabei sein, und zwar insbesondere bei jüngeren Lernenden.

Ein Schüler hat am Ende des Workshops rückgemeldet, dass er sich zumindest einen einfachen Trick gewünscht hätte, der nicht nur schnell durchgeführt werden kann, sondern auch unmittelbar Eindruck schindet. Ich habe mir anschließend Gedanken gemacht, mit welchen Tricks ich das Repertoire in Zukunft noch entsprechend ergänzen kann. Einige der dadurch neu dazugekommenen Tricks bieten sich womöglich eher als kurzer Einstieg in eine Unterrichtsstunde an, weil die Funktionsweise vergleichsweise weniger kompliziert ist. Die Bereitschaft, sich intensiver mit den mathematischen Hintergründen auseinanderzusetzen, war trotzdem bei allen Teilnehmenden vorhanden, was höchstwahrscheinlich auch im regulären Unterricht äußerst förderlich sein dürfte. Aus meiner Sicht überwiegen also klar die Vorteile und ich freue mich auf eine erneute Durchführung mit den überarbeiteten Materialien im nächsten Schuljahr.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Asymmetrische Spielkarten (eigene Abbildung)	10
2.2	Größenvergleich von Spielkarten (eigene Abbildung)	12
2.3	Dokumentenkamera (eigene Abbildung)	17
3.1	Vorbereitung des Piano-Tricks (eigene Abbildung)	23
3.2	links: eine allgemeine Lösung, rechts: eine rotationssymmetrische Lösung. (eigene Abbildung)	31
3.3	Karten zu Beginn (eigene Abbildung)	48
3.4	Karten nach der ersten Runde (eigene Abbildung)	48
3.5	Karten nach der zweiten Runde (eigene Abbildung)	48
3.6	Karten nach der dritten Runde (eigene Abbildung)	49
3.7	beispielhafte Verteilung der Karten (eigene Abbildung)	56
3.8	$k(1)$ bis $k(4)$ (eigene Abbildung)	60
3.9	von oben nach unten (eigene Abbildung)	60
3.10	von links nach rechts (eigene Abbildung)	61
3.11	Variante mit Boden von $k(1)$ bis $k(4)$ (eigene Abbildung)	62
4.1	Einsatz der Dokumentenkamera (eigene Abbildung)	71
4.2	Zwölf verschiedene Arrangements (eigene Abbildung)	XIII

Literaturverzeichnis

- [1] Adrion A. (2016): Das verschwundene Kaninchen und andere mathematische Tricks; Dumont. Neuauflage der deutsche Übersetzung aus dem Jahr 1981 von Gardner M. (1956): Mathematics, Magic and Mystery; Dover.
- [2] Aschemann, B., Gugler P., & Nimmerfall M. (2011): Vierzig Wege der Binnendifferenzierung für heterogene LernerInnen-Gruppen; online verfügbar auf der entsprechenden Website des BMBWF (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [3] Bastian J. (2016): Binnendifferenzierung. Von einer „untauglichen Idee“ zu einer Maxime für Schul- und Unterrichtsentwicklung; In: Pädagogik 9/2016, 6-9.
- [4] Behrends E. (2015): Der mathematische Zauberstab. Verblüffende Tricks mit Karten und Zahlen; Rowohlt.
- [5] Behrends E. (2015): Die Hummer-Zaubertricks; online verfügbar auf der Website des Autors (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [6] Behrends E. (2017): Mathematik und Zaubern. Ein Einstieg für Mathematiker; Springer.
- [7] Benjamin A. (2023): Seven-Card Stud Magic and the Gilbreath principle; In: Math Horizons, 30:4, 26-28.
- [8] Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF) (2021): Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – AHS. online verfügbar im Rechtsinformationssystem des Bundes (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [9] Bonomo J. P. (2008): You Can Teach an Old Magician New Tricks; In: The College Mathematics Journal, 39:5 (Nov., 2008), 346-356.
- [10] Bruder R., Linneweber-Lammerskitten H. & Wälti B. (2015): Differenzierung; In: Bruder R., Büchter A., Gasteiger H., Schmidt-Thieme B. & Weigand H.-G. (2023): Handbuch der Mathematikdidaktik (2. Auflage), 619-646.
- [11] Cummings J. (2023): A Survey of Mathemagical Books; In: Math Horizons, 30:3, 28-29.
- [12] Danilyuk R. (2017): 1x1 der Kartenspiele: Von Bridge über Poker und Skat bis Zwickern. Glücks- und Familienspiele. Kartentricks und vieles mehr; Humboldt.

- [13] Endepohls-Ulpe M. (2017): Acceleration, Enrichment, or Internal Differentiation – Consequences of Measures to Promote Gifted Students Anticipated by German Secondary School Teachers; In: *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 41:15(1), 147-163.
- [14] Fasching T. M. (2022): „Mathematik (ver)zaubert“. Zaubertricks als Möglichkeit zur Vermittlung von Inhalten des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (Masterarbeit).
- [15] Geer C. P. (1992): Exploring patterns, relations, and functions; In: *The Arithmetic Teacher*, 39:9 (Mai, 1992), 19-21.
- [16] Grime J. (2009): A Mathematical Card Trick; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025). <https://www.youtube.com/watch?v=BMOijTYM3Hw>
- [17] Grime J. (2019): James ♥ A Card Trick - Numberphile; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [18] Grime J. (2020): Kruskal's Count (unveröffentlichtes Manuskript); online verfügbar auf der Website des Autors (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [19] Huber J. C. (2022): Der Bau eines Kartenhauses. Eine Frage der geeigneten Formel; Blog-Beitrag auf *Der Standard* (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [20] Kadan D. (2015): Zauberhafte Mathematik - Mathematische Zaubereien. *ÖMG*, 48, 46-57.
- [21] Kadan D. (2017): Zauberhafte Mathematik - Mathematische Zaubereien 2. *ÖMG*, 50, 43-53.
- [22] Klein R. (2016): Binnendifferenzierung. Der DIE-Wissensbaustein für die Praxis. online verfügbar auf der Website des deutschen Institutes für Erwachsenenbildung (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [23] Kolpas S. J. (1992): David Copperfield's Orient Express Card Trick; In: *The Mathematics Teacher*, 85:7 (Okt.,1992), 568-570.
- [24] Lagarias J. C., Rains E. & Vanderbei R. J. (2009): The Kruskal Count; In: *Brams S., Gehrlein W. V. & Roberts F. S. (Hrsg.) (2009): The Mathematics of Preference, Choice and Order. Essays in Honor of Peter J. Fishburn*, 371-391. online verfügbar auf ArXiv (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [25] Letztel V. & Otto J. (2019): Binnendifferenzierung und deren konkrete Umsetzung in der Schulpraxis – eine qualitative Studie; In: *Zeitschrift für Bildungsforschung* 9, 375-393.
- [26] Loibl, K. & Leuders, T. (2021): Strategien der Binnendifferenzierung; In: *Pädagogik* 1/2021, 39-45. online verfügbar auf der Website der Pädagogischen Hochschule Freiburg (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).

- [27] Liljedahl P. (2017): Card Tricks, Discovery Learning, and Flow in Mathematics Teacher Education; In: Cummings J. & Blatherwick M. (Hrsg.): Creative Dimensions of Teaching and Learning in the 21st Century, 175-179.
- [28] Liljedahl P. (2016): Card tricks. online verfügbar auf der Website des Autors.
- [29] Lim K. H. (2019): Using math magic to reinforce algebraic concepts: an exploratory study; In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50:5, 747-765.
- [30] Matroid (2002): Pentagon, Kartenhaus und Summenzerlegung; In: Wohlgemuth M. (Hrsg.) (2010): Mathematik für fortgeschrittene Anfänger, 177-182; Spektrum der Wissenschaft. online verfügbar auf Matroids Matheplanet (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [31] Matthews M. E. (2008): Selecting and Using Mathemagic Tricks in the Classroom; In: The Mathematics Teacher, 102:2 (Sept., 2008), 98-101.
- [32] Morgan J. L. & Ginther J. L. (1994): The Magic of Mathematics; In: The Mathematics Teacher, 87: 3 (März 1994), 150-153.
- [33] Mulcahy C. (2013): Convention Center; In: Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects, 1-11; Chapman & Hall/CRC Press.
- [34] Mulcahy C. (2013): Little Fibs; In: Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects, 89-93; Chapman & Hall/CRC Press.
- [35] Mulcahy C. (2013): Tips of the Trade; In: Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects, xix-xx; Chapman & Hall/CRC Press.
- [36] Mulligan C. H. (1989): Interest in Mathematics. It's in the Cards; In: Mathematics Teacher 82:2 (Februar 1989), 100-103.
- [37] Prediger S. & Leuders T. (2016): Flexibel differenzieren im Mathematikunterricht. „One size does not fit all “; In: Pädagogik 9/2016, 24-29.
- [38] Ray C. (1992): Zauberhafte Kartentricks. Carlsen.
- [39] Roder U. (2020): Ein Förderkonzept zu mathematischem Grundwissen und Grundkönnen am Übergang in die Sekundarstufe II. Theoriebasierte Entwicklung, exemplarische Umsetzung und Ersterprobung der Lernumgebung BASICS-Mathematik (Dissertation). Springer.
- [40] Roeder P. M. (1997): Binnendifferenzierung im Urteil von Gesamtschullehrern; In: Zeitschrift für Pädagogik 43:2, 241-259.
- [41] Schwankl B. (2021): Magische Mathematik im Unterricht (Diplomarbeit).
- [42] Siemon H. (1985): Das Josephus-Problem; In: Praxis Mathematik, 27:4, 200-212.

- [43] Sloane N. J. A. (1996): A006257 - Josephus-Problem; In: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS); online verfügbar in der OEIS (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [44] Spencer K. (2012): Hocus Focus: Evaluating the Academic and Functional Benefits of Integrating Magic Tricks in the Classroom; In: Journal of the International Association of Special Education, 13; online verfügbar auf ResearchGate (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [45] Stevens M. D. (2018): Magic 13; online verfügbar dem Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [46] Westphal A., Gronostaj A., Vock M., Emmrich R. & Harych P. (2016): Differenzierung im gymnasialen Mathematik und Deutschunterricht - vor allem bei guten Diagnostiker/innen und in heterogenen Klassen?; In: Zeitschrift für Pädagogik 62:1, 131-148.
- [47] Woo E. (2021): A mathemagical card trick!; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [48] Woo E. (2022): Black & Red Cards; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [49] Woo E. (2022): Countdown Card Trick; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [50] Woo E. (2023): Jack the Hunter; online verfügbar auf Youtube (zuletzt aufgerufen am 20.06.2025).
- [51] Zwicker T. (2023): Zahlenzauber und Laufdiktate in einem motivierenden Mathematikunterricht; In: More of Mathematics (Konferenzband zum Tag der Mathematik), 10:2, 79-86.

Anhang

Vier Reiter

Liljedahl [27] nennt diesen Trick *Four Horsemen* und merkt an, dass er sich für Kinder ab dem Volksschulalter anbietet. Er stellt in gewisser Hinsicht eine Abwandlung bzw. Erweiterung der Partnervermittlung von Behrends (2015 [4]) dar. Wir nehmen die vier Buben, Damen, Könige und Asse aus dem Deck und erzählen eine Geschichte:

„Es waren einmal vier Königreiche im Land der Karten. So ein Königreich zu regieren ist eine anstrengende Tätigkeit. Aus diesem Grund machten die königlichen Familien einmal im Jahr einen gemeinsamen Urlaub. Gemeinsam mit ihren vier Wächtern, den Assen der königlichen Garde, reisten die vier Königinnen und Könige zu ihrer üblichen Gaststätte. Ihre Söhne konnten es kaum erwarten und ritten voraus. Dort angekommen machten es sich die vier Prinzen in jeweils einem der Zimmer gemütlich.“

Wir legen die vier Buben nebeneinander auf.

„Kurze Zeit später trafen die Königinnen ein und leisteten ihnen Gesellschaft.“

Wir legen jeweils eine Dame auf den Buben derselben Spielfarbe.

„Danach stießen die Könige dazu und begaben sich ebenfalls auf ihre Zimmer.“

Wir legen jeden König auf den Stapel mit der passenden Spielfarbe.

„Zu guter Letzt erschienen auch die Asse, welche zuvor noch die Umgebung kontrolliert hatten, um sicherzustellen, dass die königlichen Familien dort ungestört blieben.“

Wir legen jedes Ass auf den Stapel mit der passenden Spielfarbe.

„Mittlerweile war bereits ein ziemliches Chaos in den Zimmern und die Familien wurden zunehmend lauter. Alle beschwerten sich über die verschiedensten Probleme. Mal lag es daran, dass jemand laut schnarchte oder die eigene Kleidung überall verteilte und ein anderes Mal daran, dass jemand zu lange gelüftet oder das ganze warme Wasser aufgebraucht hatte. Irgendwann wurde es dem Wirt schließlich zu viel und er orderte alle von ihnen in den Empfangsbereich.“

Wir legen die vier Stapel aufeinander.

Anhang

„Sobald sie sich dort wieder beruhigt hatten, schlug er ihnen vor, die Zimmereinteilung ein wenig zu ändern, damit seine Gäste nicht immer mit denselben Personen auf engem Raum waren. Dafür sollten sie sich ein wenig mischen.“

Wir heben dreimal ab.

„Nachdem sie seiner Aufforderung nachgekommen waren, zogen sie sich wieder auf die Zimmer zurück und es kehrte endlich Ruhe ein. Nun schien einem entspannten Aufenthalt nichts mehr im Wege stehen.“

Wir teilen die Karten der Reihe nach in vier Stapel aus und stellen fest, dass auf wundersame Weise alle Buben, Damen, Könige und Asse zu viert auf je einem der Stapel beisammen liegen.

Dieser Trick basiert auf einer Invarianten. In diesem Fall nützen wir die Eigenschaft aus, dass die jeweils nächste Karte mit gleichem Rang stets vier Karten weiter liegt. Aufgrund der Art und Weise, wie wir alle Karten gegen Ende des Tricks aufeinander gelegt haben, zieht sich die Reihenfolge der Karten B-D-K-A durch den ganzen Stapel. Danach haben wir dreimal abgehoben, aber die Anzahl der Abhebevorgänge spielt gar keine Rolle, da sich die Reihenfolge der vier Karten dabei nicht ändert.

Um zu verstehen, warum das so ist, müssen wir lediglich drei Fälle betrachten (vgl. Behrends 2017 [6]). Wir illustrieren das am Beispiel eines Ass A . Bevor das erste Mal abgehoben wird, liegt das nächste Ass A' vier Karten weiter. Falls A sich am unteren Ende des Stapels befindet, gehen wir davon aus, dass von oben bis A' weiter gezählt wird.

1. Falls wir vor A abheben, wandert das Paket mit A und A' von unten nach oben.
2. Falls wir nach A' abheben, ist es umgekehrt.
3. Falls wir zwischen A und A' abheben, tritt der zuvor beschriebene Fall ein, dass wir einfach von oben weiter zählen.

In allen drei möglichen Fällen belegen die beiden Karten danach zwar andere Positionen im Stapel, aber der Abstand zwischen ihnen ändert sich nicht. Da dies für alle Karten im Stapel gilt, können wir also beliebig oft abheben, um den Eindruck zu verstärken, dass der Stapel durcheinander gemischt wird, obwohl die Reihenfolge in Wirklichkeit gleich bleibt. Die Lernenden können den Trick mit aufgedeckten Karten durchführen, um das nachzuvollziehen.

Das vorhergesagte Umstecken

Liljedahl nennt diesen Trick *Rearrange 10* [28]. Das liegt vermutlich daran, dass er, im Gegensatz zu Gardner [1], nicht mit dreizehn, sondern nur mit zehn Karten (Ass bis Zehn) arbeitet. Die Spielfarbe ist dabei zwar nebensächlich, aber es sieht unter Umständen schöner aus, wenn wir nur eine verwenden. Zu Beginn muss geklärt werden, wie die Leserichtung der Karten ist bzw. auf welcher Seite die Karte mit dem niedrigsten Rang (das Ass) liegt. In weiterer Folge gehen wir davon aus, dass dieses aus der Blickrichtung unseres Gegenübers links liegt bzw. von uns aus gesehen rechts. Außerdem muss unser Gegenüber die Karten von der linken auf die rechte Seite bzw. von unserer rechten auf unsere linke Seite verschieben.

Zu Beginn legen wir die zehn Karten in aufsteigender Reihenfolge nebeneinander auf und drehen sie um. Dann führen wir den Trick einmal unter dem Vorwand einer Proberunde durch. Dazu drehen wir uns um und fordern unser Gegenüber auf, eine beliebige Anzahl an Karten von der linken auf die rechte Seite bzw. von uns aus gesehen von der rechten auf die linke Seite geschoben werden. Nachdem das geschehen ist, drehen wir uns wieder um und decken die von uns aus gesehen linke Karte auf. Daraufhin erklären wir stolz, dass dem Rang der aufgedeckten Karte entsprechend viele Karten bewegt wurden und fügen hinzu, dass das selbstverständlich noch nicht allzu beeindruckend war. Wir drehen die Karte wieder um und starten sogleich eine zweite Runde. Nachdem erneut Karten bewegt wurden, drehen wir uns wieder um und decken zielsicher eine bestimmte Karte auf, die uns sofort anzeigt, wie viele diesmal bewegt wurden. Dieser Trick lässt sich beliebig oft wiederholen.

Für das Gelingen des Tricks ist es essenziell, dass wir uns nach dem ersten Durchgang bzw. dem vermeintlichen Probelauf die letzte Karte auf unserer linken Seite anschauen, um herauszufinden, welche Karte wir nach dem zweiten Durchgang aufdecken müssen. Diese Vorgehensweise stellt gleichzeitig einen kleinen Hinweis zur Funktionsweise des Tricks dar, auf die wir später im Zuge der Erarbeitung mit den Lernenden zurückkommen können.

Um besser zu verstehen, wie sich die Position der nächsten aufzudeckenden Karte ergründen lässt, können wir uns zunächst einmal überlegen, was passiert, wenn im ersten Durchgang gar keine Karten bewegt wurden. Dann würde die letzte Karte ganz links eine Zehn zeigen und wir könnten uns stattdessen auch vorstellen, dass alle zehn Karten auf einmal bewegt wurden, wodurch sich im Endeffekt nichts geändert hat. Nach dem zweiten Durchgang würden wir erneut die Karte an dieser Position betrachten, um herauszufinden, wie viele Karten diesmal bewegt wurden. Der Zehner ist in diesem Fall nämlich unsere sogenannte Leitkarte, wobei uns nach der Verschiebung der Karten nicht seine aktuelle, sondern die vorige Position interessiert.

Falls tatsächlich Karten bewegt wurden, ändert sich die Position des Zehners um entspre-

chend viele Plätze nach (von uns aus gesehen) rechts. Sollte er im Zuge der Verschiebung wieder an das andere Ende der Reihe wandern, zählen wir von dort weiter. Würden wir nach dem zweiten Durchgang stattdessen erneut die letzte Karte aufdecken, wüssten wir immerhin, wie viele Karten insgesamt bisher bewegt wurden und könnten einfach die Differenz berechnen. Falls wir jedoch stattdessen direkt ablesen möchten, wie viele Karten zuletzt bewegt wurden, müssen wir dementsprechend jene Karte aufdecken, die sich an der letzten Position unserer Leitkarte befindet.

→ Beispiel: Ist die aufgedeckte Karte die Drei, so wurden im ersten Durchgang drei Karten bewegt. Das bedeutet jedoch außerdem, dass wir beim zweiten Durchgang die von uns aus gesehen vierte Karte von links (bzw. die siebte Karte von rechts) aufdecken müssen, weil unsere Leitkarte, d. h. die Zehn nun drei Positionen weiter gerutscht ist. Sie ist also nicht mehr die Karte an der Position 10, sondern $10 - 3 = 7$ von rechts.

Allgemein gilt: Wenn wir insgesamt n Karten in aufsteigender Reihenfolge von 1 bis n haben und k Karten verschoben werden, dann befindet sich die Leitkarte, d. h. jene mit Rang n , danach an der Position $n - k$. Um besser zu verstehen, was passiert, können wir die Karten aufgedeckt lassen, während wir den Trick durchführen. Im Zuge der Erarbeitung kann es auch sinnvoll sein, zunächst mit einer geringeren Anzahl an Karten zu beginnen, damit die Lernenden ein paar einfache Fälle durchspielen können. Bei diesem Trick kann jedoch im Extremfall sogar mit dem kompletten Deck gearbeitet werden. Abgesehen davon gibt es auch eine Variante, die mit Dominosteinen durchgeführt wird (vgl. Gardner 1956 [1]).

Spell The Deck

Im Zuge einer praktischen Erprobung mit Schülerinnen und Schülern einer siebten Klasse sind mehrere unterschiedliche Varianten des Tricks aufgekomen, weil im Vorhinein nicht genau festgelegt wurde, wie bestimmte Karten dafür gezählt werden müssen. Es folgt eine kurze Übersicht der möglichen Regeln inklusive Auflistung der entsprechenden Startkonfigurationen, wobei kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben wird:

1) Zahlenkarten werden abgezählt und A = 1, B = 11, D = 12, K = 13

letzte Karte: A-8-2-5-10-3-D-B-9-4-7-6-K nächste Karte: 4-A-D-K-2-10-6-7-3-5-B-9-8

2) Zahlenkarten werden abgezählt, Bildkarten buchstabiert

neue Rechtschreibung: Ass

letzte Karte: 6-D-A-8-2-5-10-3-B-K-9-4-7 nächste Karte: 9-8-4-A-B-D-2-10-6-7-3-5-K

alte Rechtschreibung: As

letzte Karte: D-A-8-2-5-10-3-B-K-9-4-7-6 nächste Karte: 8-4-A-B-D-2-10-6-7-3-5-K-9

neue Rechtschreibung: Ass, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: 6-B-A-8-2-5-10-3-K-D-9-4-7 nächste Karte: 9-8-4-A-D-K-2-10-6-7-3-5-B

alte Rechtschreibung: As, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: B-A-8-2-5-10-3-K-D-9-4-7-6 nächste Karte: 8-4-A-D-K-2-10-6-7-3-5-B-9

3) Zahlen- und Bildkarten werden buchstabiert

neue Rechtschreibung: Ass

letzte Karte: 6-4-A-9-B-8-2-5-K-D-3-7-10 nächste Karte: 3-D-9-A-8-10-4-7-2-6-K-B-5

alte Rechtschreibung: As

letzte Karte: 4-A-9-B-8-2-5-K-D-3-7-10-6 nächste Karte: D-9-A-8-10-4-7-2-6-K-B-5-3

neue Rechtschreibung: Ass, ü = ue

letzte Karte: 10-4-A-6-9-B-2-8-5-3-K-D-7 nächste Karte: 3-5-D-A-9-8-4-10-2-7-6-K-B

alte Rechtschreibung: As, ü = ue

letzte Karte: 4-A-6-9-B-2-8-5-3-K-D-7-10 nächste Karte: 5-D-A-9-8-4-10-2-7-6-K-B-3

neue Rechtschreibung: Ass, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: 6-4-A-9-K-8-2-5-D-B-3-7-10 nächste Karte: 3-K-9-A-8-10-4-7-2-6-B-D-5

alte Rechtschreibung: As, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: 4-A-9-K-8-2-5-D-B-3-7-10-6 nächste Karte: K-9-A-8-10-4-7-2-6-B-D-5-3

neue Rechtschreibung: Ass, ü = ue, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: 10-4-A-6-9-K-2-8-5-3-D-B-7 nächste Karte: 3-5-K-A-9-8-4-10-2-7-6-B-D

alte Rechtschreibung: As, ü = ue, ugs. Bub statt Bube

letzte Karte: 4-A-6-9-K-2-8-5-3-D-B-7-10 nächste Karte: 5-K-A-9-8-4-10-2-7-6-B-D-3

Wir können vergleichsweise einfach von einer Variante mit der neuen Rechtschreibung für das Ass auf eine mit der alten wechseln, indem einfach die erste Karte ans Ende wandert und umgekehrt. Außerdem spielt lediglich die Karte Fünf eine Rolle, wenn es darum geht, ob Umlaute als einzelne Buchstaben oder stattdessen als Verbindung der beiden entsprechenden Vokale geschrieben werden sollen. Der König ist nämlich in diesem Fall ohnehin stets die letzte Karte (letzte Karte: 4-6-9-B-8-5-K-D-7-10, nächste Karte: 4-10-7-6-K-B-5-D-9-8).

Falls die Reihenfolge für die Bezeichnung „Bub“ anstatt von „Bube“ geändert werden muss, reicht es, den Fall für die letzten vier Karten zu betrachten und deren Reihenfolge entsprechend anzupassen (letzte Karte: 10-K-D-B, nächste Karte: 10-B-D-K). Bei der englischsprachigen Version gibt es hingegen keinen vergleichbaren Klärungsbedarf.

Down Under - Australisches Ausgeben

Die Reihenfolge der Spielfarben entspricht hier o. B. d. A. ♠ – ♥ – ♣ – ♦ und kann bei Bedarf entsprechend vertauscht werden.

Place One Kill One (klassische Variante)

<i>k</i>	Sortierung
1	♠A
2	♠A-♠2
3	♠A-♠3-♠2
4	♠A-♠3-♠2-♠4
5	♠A-♠5-♠2-♠4-♠3
6	♠A-♠4-♠2-♠6-♠3-♠5
7	♠A-♠6-♠2-♠5-♠3-♠7-♠4
8	♠A-♠5-♠2-♠7-♠3-♠6-♠4-♠8
9	♠A-♠9-♠2-♠6-♠3-♠8-♠4-♠7-♠5
10	♠A-♠6-♠2-♠10-♠3-♠7-♠4-♠9-♠5-♠8
11	♠A-♠9-♠2-♠7-♠3-♠B-♠4-♠8-♠5-♠10-♠6
12	♠A-♠7-♠2-♠10-♠3-♠8-♠4-♠D-♠5-♠9-♠6-♠B
13	♠A-♠D-♠2-♠8-♠3-♠B-♠4-♠9-♠5-♠K-♠6-♠10-♠7
14	♠A-♠8-♠2-♠K-♠3-♠9-♠4-♠D-♠5-♠10-♠6-♥A-♠7-♠B
15	♠A-♠D-♠2-♠9-♠3-♥A-♠4-♠10-♠5-♠K-♠6-♠B-♠7-♥2-♠8
16	♠A-♠9-♠2-♠K-♠3-♠10-♠4-♥2-♠5-♠B-♠6-♥A-♠7-♠D-♠8-♥3
17	♠A-♥4-♠2-♠10-♠3-♥A-♠4-♠B-♠5-♥3-♠6-♠D-♠7-♥2-♠8-♠K-♠9
18	♠A-♠10-♠2-♥5-♠3-♠B-♠4-♥2-♠5-♠D-♠6-♥4-♠7-♠K-♠8-♥3-♠9-♥A
19	♠A-♥2-♠2-♠B-♠3-♥6-♠4-♠D-♠5-♥3-♠6-♠K-♠7-♥5-♠8-♥A-♠9-♥4-♠10
20	♠A-♠B-♠2-♥3-♠3-♠D-♠4-♥7-♠5-♠K-♠6-♥4-♠7-♥A-♠8-♥6-♠9-♥2-♠10-♥5
21	♠A-♥6-♠2-♠D-♠3-♥4-♠4-♠K-♠5-♥8-♠6-♥A-♠7-♥5-♠8-♥2-♠9-♥7-♠10-♥3-♠B
22	♠A-♠D-♠2-♥7-♠3-♠K-♠4-♥5-♠5-♥A-♠6-♥9-♠7-♥2-♠8-♥6-♠9-♥3-♠10-♥8-♠B-♥4
23	♠A-♥5-♠2-♠K-♠3-♥8-♠4-♥A-♠5-♥6-♠6-♥2-♠7-♥10-♠8-♥3-♠9-♥7-♠10-♥4-♠B-♥9-♠D
24	♠A-♠K-♠2-♥6-♠3-♥A-♠4-♥9-♠5-♥2-♠6-♥7-♠7-♥3-♠8-♥B-♠9-♥4-♠10-♥8-♠B-♥5-♥D-♥10
25	♠A-♥B-♠2-♥A-♠3-♥7-♠4-♥2-♠5-♥10-♠6-♥3-♠7-♥8-♠8-♥4-♠9-♥D-♠10-♥5-♠B-♥9-♠D-♠6-♠K
26	♠A-♥A-♠2-♥D-♠3-♥2-♠4-♥8-♠5-♥3-♠6-♥B-♠7-♥4-♠8-♥9-♠9-♠5-♠10-♥K-♠B-♥6-♠D-♥10-♠K-♥7
27	♠A-♥8-♠2-♥2-♠3-♥K-♠4-♠3-♠5-♥9-♠6-♥4-♠7-♥D-♠8-♥5-♠9-♥10-♠10-♥6-♠B-♠A-♠D-♥7-♠K-♥B-♥A
28	♠A-♥2-♠2-♥9-♠3-♥3-♠4-♠A-♠5-♥4-♠6-♥10-♠7-♥5-♠8-♥K-♠9-♥6-♠10-♥B-♠B-♥7-♠D-♠2-♠K-♥8-♥A-♥D
29	♠A-♥K-♠2-♥3-♠3-♥10-♠4-♥4-♠5-♠2-♠6-♥5-♠7-♥B-♠8-♥6-♠9-♠A-♠10-♥7-♠B-♥D-♠D-♥8-♠K-♠3-♥A-♥9-♥2

30	♠A-♥3-♠2-♣A-♠3-♥4-♠4-♥B-♠5-♥5-♠6-♣3-♠7-♥6-♠8-♥D-♠9-♥7-♠10-♣2-♠B-♥8-♠D-♥K-♠K-♥9-♥A-♠4-♥2-♥10
31	♠A-♥B-♠2-♥4-♠3-♣2-♠4-♥5-♠5-♥D-♠6-♥6-♠7-♣4-♠8-♥7-♠9-♥K-♠10-♥8-♠B-♣3-♠D-♥9-♠K-♣A-♥A-♥10-♥2-♣5-♥3
32	♠A-♥4-♠2-♥D-♠3-♥5-♠4-♣3-♠5-♥6-♠6-♥K-♠7-♥7-♠8-♣5-♠9-♥8-♠10-♣A-♠B-♥9-♠D-♣4-♠K-♥10-♥A-♣2-♥2-♥B-♥3-♣6
33	♠A-♣7-♠2-♥5-♠3-♥K-♠4-♥6-♠5-♣4-♠6-♥7-♠7-♣A-♠8-♥8-♠9-♣6-♠10-♥9-♠B-♣2-♠D-♥10-♠K-♣5-♥A-♥B-♥2-♣3-♥3-♥D-♥4
34	♠A-♥5-♠2-♣8-♠3-♥6-♠4-♣A-♠5-♥7-♠6-♣5-♠7-♥8-♠8-♣2-♠9-♥9-♠10-♣7-♠B-♥10-♠D-♣3-♠K-♥B-♥A-♣6-♥2-♥D-♥3-♣4-♥4-♥K
35	♠A-♣A-♠2-♥6-♠3-♣9-♠4-♥7-♠5-♣2-♠6-♥8-♠7-♣6-♠8-♥9-♠9-♣3-♠10-♥10-♠B-♣8-♠D-♥B-♠K-♣4-♥A-♥D-♥2-♣7-♥3-♥K-♥4-♣5-♥5
36	♠A-♥6-♠2-♣2-♠3-♥7-♠4-♠10-♠5-♥8-♠6-♣3-♠7-♥9-♠8-♣7-♠9-♥10-♠10-♣4-♠B-♥B-♠D-♣9-♠K-♥D-♥A-♣5-♥2-♥K-♥3-♠8-♥4-♣A-♥5-♣6
37	♠A-♣7-♠2-♥7-♠3-♣3-♠4-♥8-♠5-♣B-♠6-♥9-♠7-♣4-♠8-♥10-♠9-♣8-♠10-♥B-♠B-♣5-♠D-♥D-♠K-♣10-♥A-♥K-♥2-♣6-♥3-♣A-♥4-♣9-♥5-♣2-♥6
38	♠A-♥7-♠2-♣8-♠3-♥8-♠4-♣4-♠5-♥9-♠6-♣D-♠7-♥10-♠8-♣5-♠9-♥B-♠10-♣9-♠B-♥D-♠D-♣6-♠K-♥K-♥A-♣B-♥2-♣A-♥3-♣7-♥4-♣2-♥5-♣10-♥6-♣3
39	♠A-♣4-♠2-♥8-♠3-♣9-♠4-♥9-♠5-♣5-♠6-♥10-♠7-♣K-♠8-♥B-♠9-♣6-♠10-♥D-♠B-♣10-♠D-♥K-♠K-♣7-♥A-♣A-♥2-♣D-♥3-♣2-♥4-♣8-♥5-♣3-♥6-♣B-♥7
40	♠A-♥8-♠2-♣5-♠3-♥9-♠4-♠10-♠5-♥10-♠6-♣6-♠7-♥B-♠8-♦A-♠9-♥D-♠10-♣7-♠B-♥K-♠D-♠B-♠K-♣A-♥A-♠8-♥2-♣2-♥3-♣K-♥4-♣3-♥5-♣9-♥6-♣4-♥7-♣D
41	♠A-♣K-♠2-♥9-♠3-♣6-♠4-♥10-♠5-♣B-♠6-♥B-♠7-♣7-♠8-♥D-♠9-♦2-♠10-♥K-♠B-♠8-♠D-♣A-♠K-♣D-♥A-♣2-♥2-♠9-♥3-♣3-♥4-♦A-♥5-♣4-♥6-♣10-♥7-♣5-♥8
42	♠A-♥9-♠2-♦A-♠3-♥10-♠4-♣7-♠5-♥B-♠6-♣D-♠7-♥D-♠8-♣8-♠9-♥K-♠10-♦3-♠B-♣A-♠D-♣9-♠K-♣2-♥A-♠K-♥2-♣3-♥3-♣10-♥4-♣4-♥5-♦2-♥6-♣5-♥7-♣B-♥8-♣6
43	♠A-♣7-♠2-♥10-♠3-♦2-♠4-♥B-♠5-♣8-♠6-♥D-♠7-♣K-♠8-♥K-♠9-♣9-♠10-♣A-♠B-♦4-♠D-♣2-♠K-♣10-♥A-♣3-♥2-♦A-♥3-♣4-♥4-♣B-♥5-♣5-♥6-♦3-♥7-♣6-♥8-♣D-♥9
44	♠A-♥10-♠2-♣8-♠3-♥B-♠4-♦3-♠5-♥D-♠6-♣9-♠7-♥K-♠8-♦A-♠9-♣A-♠10-♣10-♠B-♣2-♠D-♦5-♠K-♣3-♥A-♣B-♥2-♣4-♥3-♦2-♥4-♣5-♥5-♣D-♥6-♣6-♥7-♦4-♥8-♣7-♥9-♣K
45	♠A-♦A-♠2-♥B-♠3-♣9-♠4-♥D-♠5-♦4-♠6-♥K-♠7-♣10-♠8-♣A-♠9-♦2-♠10-♣2-♠B-♣B-♠D-♣3-♠K-♦6-♥A-♠4-♥2-♣D-♥3-♣5-♥4-♦3-♥5-♣6-♥6-♣K-♥7-♣7-♥8-♦5-♥9-♣8-♥10
46	♠A-♥B-♠2-♦2-♠3-♥D-♠4-♣10-♠5-♥K-♠6-♦5-♠7-♣A-♠8-♣B-♠9-♣2-♠10-♦3-♠B-♣3-♠D-♣D-♠K-♣4-♥A-♦7-♥2-♣5-♥3-♣K-♥4-♣6-♥5-♦4-♥6-♣7-♥7-♦A-♥8-♣8-♥9-♦6-♥10-♣9
47	♠A-♣10-♠2-♥D-♠3-♦3-♠4-♥K-♠5-♣B-♠6-♣A-♠7-♦6-♠8-♣2-♠9-♣D-♠10-♣3-♠B-♦4-♠D-♣4-♠K-♣K-♥A-♣5-♥2-♦8-♥3-♣6-♥4-♦A-♥5-♣7-♥6-♦5-♥7-♣8-♥8-♦2-♥9-♣9-♥10-♦7-♥B
48	♠A-♥D-♠2-♣B-♠3-♥K-♠4-♦4-♠5-♣A-♠6-♣D-♠7-♣2-♠8-♦7-♠9-♣3-♠10-♣K-♠B-♣4-♠D-♦5-♠K-♣5-♥A-♦A-♥2-♣6-♥3-♦9-♥4-♣7-♥5-♦2-♥6-♣8-♥7-♦6-♥8-♣9-♥9-♦3-♥10-♣10-♥B-♦8

49	♠A-♦9-♠2-♥K-♠3-♣D-♠4-♣A-♠5-♦5-♠6-♣2-♠7-♣K-♠8-♣3-♠9-♦8-♠10-♣4-♠B- ♦A-♠D-♣5-♠K-♦6-♥A-♠6-♥2-♦2-♥3-♣7-♥4-♦10-♥5-♣8-♥6-♦3-♥7-♣9-♥8-♦7- ♥9-♣10-♥10-♦4-♥B-♣B-♥D
50	♠A-♥K-♠2-♦10-♠3-♣A-♠4-♣K-♠5-♣2-♠6-♦6-♠7-♣3-♠8-♦A-♠9-♣4-♠10-♦9-♠B- ♣5-♠D-♦2-♠K-♣6-♥A-♦7-♥2-♣7-♥3-♦3-♥4-♣8-♥5-♦B-♥6-♣9-♥7-♦4-♥8-♣10- ♥9-♦8-♥10-♣B-♥B-♦5-♥D-♣D
51	♠A-♣K-♠2-♣A-♠3-♦B-♠4-♣2-♠5-♦A-♠6-♣3-♠7-♦7-♠8-♣4-♠9-♦2-♠10-♣5-♠B- ♦10-♠D-♣6-♠K-♦3-♥A-♣7-♥2-♦8-♥3-♣8-♥4-♦4-♥5-♣9-♥6-♦D-♥7-♣10-♥8-♦5- ♥9-♣B-♥10-♦9-♥B-♣D-♥D-♦6-♥K
52	♠A-♣A-♠2-♦A-♠3-♣2-♠4-♦D-♠5-♣3-♠6-♦2-♠7-♣4-♠8-♦8-♠9-♣5-♠10-♦3-♠B- ♣6-♠D-♦B-♠K-♣7-♥A-♦4-♥2-♣8-♥3-♦9-♥4-♣9-♥5-♦5-♥6-♣10-♥7-♦K-♥8-♣B- ♥9-♦6-♥10-♣D-♥B-♦10-♥D-♣K-♥K-♦7

Die Abstände der Karten entsprechen Zweierpotenzen. Wenn wir die Startkonfiguration das erste Mal durchlaufen, liegt trivialerweise stets eine Karte zwischen jenen, die abgelegt werden, beim nächsten Durchgang stets drei, beim nächsten sieben und so weiter.

Kill One Place One (Josephus Problem-Variante)

Die Positionen der jeweils zuletzt abgelegten Karten wurden hervorgehoben und stimmen mit den Lösungen für das Josephus-Problem [43] mit der entsprechenden Anzahl überein. Man erhält die Startkonfigurationen für diese Variante des Tricks, indem die jeweils letzte Karte der Place One Kill One-Variante als erste gereiht wird, wodurch sich die Reihenfolge der Karten um eins verschiebt.

k	Sortierung
1	♠A
2	♠2-♠A
3	♠2-♠A-♠3
4	♠4-♠A-♠3-♠2
5	♠3-♠A-♠5-♠2-♠4
6	♠5-♠A-♠4-♠2-♠6-♠3
7	♠4-♠A-♠6-♠2-♠5-♠3-♠7
8	♠8-♠A-♠5-♠2-♠7-♠3-♠6-♠4
9	♠5-♠A-♠9-♠2-♠6-♠3-♠8-♠4-♠7
10	♠8-♠A-♠6-♠2-♠10-♠3-♠7-♠4-♠9-♠5
11	♠6-♠A-♠9-♠2-♠7-♠3-♠B-♠4-♠8-♠5-♠10
12	♠B-♠A-♠7-♠2-♠10-♠3-♠8-♠4-♠D-♠5-♠9-♠6
13	♠7-♠A-♠D-♠2-♠8-♠3-♠B-♠4-♠9-♠5-♠K-♠6-♠10
14	♠B-♠A-♠8-♠2-♠K-♠3-♠9-♠4-♠D-♠5-♠10-♠6-♥A-♠7
15	♠8-♠A-♠D-♠2-♠9-♠3-♥A-♠4-♠10-♠5-♠K-♠6-♠B-♠7-♥2
16	♥3-♠A-♠9-♠2-♠K-♠3-♠10-♠4-♥2-♠5-♠B-♠6-♥A-♠7-♠D-♠8
17	♥9-♠A-♥4-♠2-♠10-♠3-♥A-♠4-♠B-♠5-♥3-♠6-♠D-♠7-♥2-♠8-♠K
18	♥A-♠A-♠10-♠2-♥5-♠3-♠B-♠4-♥2-♠5-♠D-♠6-♥4-♠7-♠K-♠8-♥3-♠9

Anhang

19	♠10-♠A-♥2-♠2-♠B-♠3-♥6-♠4-♠D-♠5-♥3-♠6-♠K-♠7-♥5-♠8-♥A-♠9-♥4
20	♥5-♠A-♠B-♠2-♥3-♠3-♠D-♠4-♥7-♠5-♠K-♠6-♥4-♠7-♥A-♠8-♥6-♠9-♥2-♠10
21	♠B-♠A-♥6-♠2-♠D-♠3-♥4-♠4-♠K-♠5-♥8-♠6-♥A-♠7-♥5-♠8-♥2-♠9-♥7-♠10-♥3
22	♥4-♠A-♠D-♠2-♥7-♠3-♠K-♠4-♥5-♠5-♥A-♠6-♥9-♠7-♥2-♠8-♥6-♠9-♥3-♠10-♥8-♠B
23	♠D-♠A-♥5-♠2-♠K-♠3-♥8-♠4-♥A-♠5-♥6-♠6-♥2-♠7-♥10-♠8-♥3-♠9-♥7-♠10-♥4-♠B-♥9
24	♥10-♠A-♠K-♠2-♥6-♠3-♥A-♠4-♥9-♠5-♥2-♠6-♥7-♠7-♥3-♠8-♥B-♠9-♥4-♠10-♥8-♠B-♥5-♥D
25	♠K-♠A-♥B-♠2-♥A-♠3-♥7-♠4-♥2-♠5-♥10-♠6-♥3-♠7-♥8-♠8-♥4-♠9-♥D-♠10-♥5-♠B-♥9-♠D-♠6
26	♥7-♠A-♥A-♠2-♥D-♠3-♥2-♠4-♥8-♠5-♥3-♠6-♥B-♠7-♥4-♠8-♥9-♠9-♠5-♠10-♥K-♠B-♥6-♠D-♥10-♠K
27	♥A-♠A-♥8-♠2-♥2-♠3-♥K-♠4-♠3-♠5-♥9-♠6-♥4-♠7-♥D-♠8-♥5-♠9-♥10-♠10-♥6-♠B-♠A-♠D-♥7-♠K-♥B
28	♥D-♠A-♥2-♠2-♥9-♠3-♥3-♠4-♠A-♠5-♥4-♠6-♥10-♠7-♥5-♠8-♥K-♠9-♥6-♠10-♥B-♠B-♥7-♠D-♠2-♠K-♥8-♥A
29	♥2-♠A-♥K-♠2-♥3-♠3-♥10-♠4-♥4-♠5-♠2-♠6-♥5-♠7-♥B-♠8-♥6-♠9-♠A-♠10-♥7-♠B-♥D-♠D-♥8-♠K-♠3-♥A-♥9
30	♥10-♠A-♥3-♠2-♠A-♠3-♥4-♠4-♥B-♠5-♥5-♠6-♠3-♠7-♥6-♠8-♥D-♠9-♥7-♠10-♠2-♠B-♥8-♠D-♥K-♠K-♥9-♥A-♠4-♥2
31	♥3-♠A-♥B-♠2-♥4-♠3-♠2-♠4-♥5-♠5-♥D-♠6-♥6-♠7-♠4-♠8-♥7-♠9-♥K-♠10-♥8-♠B-♠3-♠D-♥9-♠K-♠A-♥A-♥10-♥2-♠5
32	♠6-♠A-♥4-♠2-♥D-♠3-♥5-♠4-♠3-♠5-♥6-♠6-♥K-♠7-♥7-♠8-♠5-♠9-♥8-♠10-♠A-♠B-♥9-♠D-♠4-♠K-♥10-♥A-♠2-♥2-♥B-♥3
33	♥4-♠A-♠7-♠2-♥5-♠3-♥K-♠4-♥6-♠5-♠4-♠6-♥7-♠7-♠A-♠8-♥8-♠9-♠6-♠10-♥9-♠B-♠2-♠D-♥10-♠K-♠5-♥A-♥B-♥2-♠3-♥3-♥D
34	♥K-♠A-♥5-♠2-♠8-♠3-♥6-♠4-♠A-♠5-♥7-♠6-♠5-♠7-♥8-♠8-♠2-♠9-♥9-♠10-♠7-♠B-♥10-♠D-♠3-♠K-♥B-♥A-♠6-♥2-♥D-♥3-♠4-♥4
35	♥5-♠A-♠A-♠2-♥6-♠3-♠9-♠4-♥7-♠5-♠2-♠6-♥8-♠7-♠6-♠8-♥9-♠9-♠3-♠10-♥10-♠B-♠8-♠D-♥B-♠K-♠4-♥A-♥D-♥2-♠7-♥3-♥K-♥4-♠5
36	♠6-♠A-♥6-♠2-♠2-♠3-♥7-♠4-♠10-♠5-♥8-♠6-♠3-♠7-♥9-♠8-♠7-♠9-♥10-♠10-♠4-♠B-♥B-♠D-♠9-♠K-♥D-♥A-♠5-♥2-♥K-♥3-♠8-♥4-♠A-♥5
37	♥6-♠A-♠7-♠2-♥7-♠3-♠3-♠4-♥8-♠5-♠B-♠6-♥9-♠7-♠4-♠8-♥10-♠9-♠8-♠10-♥B-♠B-♠5-♠D-♥D-♠K-♠10-♥A-♥K-♥2-♠6-♥3-♠A-♥4-♠9-♥5-♠2
38	♠3-♠A-♥7-♠2-♠8-♠3-♥8-♠4-♠4-♠5-♥9-♠6-♠D-♠7-♥10-♠8-♠5-♠9-♥B-♠10-♠9-♠B-♥D-♠D-♠6-♠K-♥K-♥A-♠B-♥2-♠A-♥3-♠7-♥4-♠2-♥5-♠10-♥6
39	♥7-♠A-♠4-♠2-♥8-♠3-♠9-♠4-♥9-♠5-♠5-♠6-♥10-♠7-♠K-♠8-♥B-♠9-♠6-♠10-♥D-♠B-♠10-♠D-♥K-♠K-♠7-♥A-♠A-♥2-♠D-♥3-♠2-♥4-♠8-♥5-♠3-♥6-♠B
40	♠D-♠A-♥8-♠2-♠5-♠3-♥9-♠4-♠10-♠5-♥10-♠6-♠6-♠7-♥B-♠8-♥A-♠9-♥D-♠10-♠7-♠B-♥K-♠D-♠B-♠K-♠A-♥A-♠8-♥2-♠2-♥3-♠K-♥4-♠3-♥5-♠9-♥6-♠4-♥7
41	♥8-♠A-♠K-♠2-♥9-♠3-♠6-♠4-♥10-♠5-♠B-♠6-♥B-♠7-♠7-♠8-♥D-♠9-♠2-♠10-♥K-♠B-♠8-♠D-♠A-♠K-♠D-♥A-♠2-♥2-♠9-♥3-♠3-♥4-♠A-♥5-♠4-♥6-♠10-♥7-♠5
42	♠6-♠A-♥9-♠2-♠A-♠3-♥10-♠4-♠7-♠5-♥B-♠6-♠D-♠7-♥D-♠8-♠8-♠9-♥K-♠10-♠3-♠B-♠A-♠D-♠9-♠K-♠2-♥A-♠K-♥2-♠3-♥3-♠10-♥4-♠4-♥5-♠2-♥6-♠5-♥7-♠B-♥8

43	♥9-♠A-♣7-♠2-♥10-♠3-♦2-♠4-♥B-♠5-♣8-♠6-♥D-♠7-♣K-♠8-♥K-♠9-♣9-♠10-♣A-♠B-♦4-♠D-♣2-♠K-♣10-♥A-♣3-♥2-♦A-♥3-♣4-♥4-♣B-♥5-♣5-♥6-♦3-♥7-♣6-♥8-♣D
44	♣K-♠A-♥10-♠2-♣8-♠3-♥B-♠4-♦3-♠5-♥D-♠6-♣9-♠7-♥K-♠8-♦A-♠9-♣A-♠10-♣10-♠B-♣2-♠D-♦5-♠K-♣3-♥A-♣B-♥2-♣4-♥3-♦2-♥4-♣5-♥5-♣D-♥6-♣6-♥7-♦4-♥8-♣7-♥9
45	♥10-♠A-♦A-♠2-♥B-♠3-♣9-♠4-♥D-♠5-♦4-♠6-♥K-♠7-♣10-♠8-♣A-♠9-♦2-♠10-♣2-♠B-♣B-♠D-♣3-♠K-♦6-♥A-♠4-♥2-♠D-♥3-♣5-♥4-♦3-♥5-♣6-♥6-♣K-♥7-♣7-♥8-♦5-♥9-♣8
46	♣9-♠A-♥B-♠2-♦2-♠3-♥D-♠4-♣10-♠5-♥K-♠6-♦5-♠7-♣A-♠8-♣B-♠9-♣2-♠10-♦3-♠B-♣3-♠D-♣D-♠K-♣4-♥A-♦7-♥2-♣5-♥3-♣K-♥4-♣6-♥5-♦4-♥6-♣7-♥7-♦A-♥8-♣8-♥9-♦6-♥10
47	♥B-♠A-♣10-♠2-♥D-♠3-♦3-♠4-♥K-♠5-♣B-♠6-♣A-♠7-♦6-♠8-♣2-♠9-♣D-♠10-♣3-♠B-♦4-♠D-♣4-♠K-♣K-♥A-♣5-♥2-♦8-♥3-♣6-♥4-♦A-♥5-♣7-♥6-♦5-♥7-♣8-♥8-♦2-♥9-♣9-♥10-♦7
48	♦8-♠A-♥D-♠2-♣B-♠3-♥K-♠4-♦4-♠5-♣A-♠6-♣D-♠7-♣2-♠8-♦7-♠9-♣3-♠10-♣K-♠B-♣4-♠D-♦5-♠K-♣5-♥A-♦A-♥2-♣6-♥3-♦9-♥4-♣7-♥5-♦2-♥6-♣8-♥7-♦6-♥8-♣9-♥9-♦3-♥10-♣10-♥B
49	♥D-♠A-♦9-♠2-♥K-♠3-♣D-♠4-♣A-♠5-♦5-♠6-♣2-♠7-♣K-♠8-♣3-♠9-♦8-♠10-♣4-♠B-♦A-♠D-♣5-♠K-♦6-♥A-♣6-♥2-♦2-♥3-♣7-♥4-♦10-♥5-♣8-♥6-♦3-♥7-♣9-♥8-♦7-♥9-♣10-♥10-♦4-♥B-♣B
50	♣D-♠A-♥K-♠2-♦10-♠3-♣A-♠4-♣K-♠5-♣2-♠6-♦6-♠7-♣3-♠8-♦A-♠9-♣4-♠10-♦9-♠B-♣5-♠D-♦2-♠K-♣6-♥A-♦7-♥2-♣7-♥3-♦3-♥4-♣8-♥5-♦B-♥6-♣9-♥7-♦4-♥8-♣10-♥9-♦8-♥10-♣B-♥B-♦5-♥D
51	♥K-♠A-♣K-♠2-♣A-♠3-♦B-♠4-♣2-♠5-♦A-♠6-♣3-♠7-♦7-♠8-♣4-♠9-♦2-♠10-♣5-♠B-♦10-♠D-♣6-♠K-♦3-♥A-♣7-♥2-♦8-♥3-♣8-♥4-♦4-♥5-♣9-♥6-♦D-♥7-♣10-♥8-♦5-♥9-♣B-♥10-♦9-♥B-♣D-♥D-♦6
52	♦7-♠A-♣A-♠2-♦A-♠3-♣2-♠4-♦D-♠5-♣3-♠6-♦2-♠7-♣4-♠8-♦8-♠9-♣5-♠10-♦3-♠B-♣6-♠D-♦B-♠K-♣7-♥A-♦4-♥2-♣8-♥3-♦9-♥4-♣9-♥5-♦5-♥6-♣10-♥7-♦K-♥8-♣B-♥9-♦6-♥10-♣D-♥B-♦10-♥D-♣K-♥K

Rahmengeschichte für die große Pause

Bei der hier vorgestellten Rahmengeschichte sind die Zuordnungen der Zahlen wie folgt:
♠A ... Schulwart, ♠2 ... Bibliothek, ♠3 ... Buffet, ♠4 ... Klassenzimmer, ♠5 ... Hof, ♠6 ... Atelier, ♠7 ... Festsaal, ♠8 ... Turnsaal und ♠9 ... Proberaum.

„Noch hast du Unterricht. Vielleicht bist du gerade für Mathematik im Klassenzimmer, für Deutsch in der Bibliothek, für Sport im Turnsaal oder für Kunst im Atelier. Als der Sekundenzeiger die Zwölf erreicht, läutet es und die große Pause beginnt. Du springst freudig auf und verlässt den Raum. Du darfst jetzt erst einmal vier Schritte machen. Da der Schulchor den Proberaum zum Üben braucht, gibt es heute ausnahmsweise kein Konzert von der Schulband, aber das macht nichts, weil du dich ohnehin entschieden hast, woanders hinzugehen.“

Danach wird die ♠9 weggelegt.

„Du darfst jetzt fünf Schritte machen. In der Bibliothek findet gleich eine Lesung statt, weshalb ab jetzt niemand mehr hinein darf, aber das macht nichts, weil du dich gerade ohnehin an einem anderen Ort aufhältst.“

Danach wird die ♠2 weggelegt.

„Du darfst danach zwei Schritte machen. Aufgrund des Fußballturniers ist der Turnsaal bis zum Anschlag voll. Hier gibt es kein Hineinkommen mehr, aber du hast es dir sowieso anders überlegt und überlässt das Anfeuern den anderen.“

Danach wird die ♠8 weggelegt.

„Du darfst diesmal drei Schritte machen. Beim Buffet schaut es leider nicht besser aus, denn es hat sich eine meterlange Schlange gebildet. Bis du dran kommst, ist die große Pause längst vorbei, aber zum Glück hast du dich heute schon um deine Jause gekümmert. Normalerweise würdest du stattdessen auf einen Besuch beim Schulwart vorbeischauchen, um kurz Hallo zu sagen, aber er versperrt gerade sein Büro und macht sich mit seinem Werkzeugkoffer auf den Weg in einen anderen Teil des Gebäudes.“

Danach werden das ♠A und die ♠3 weggelegt.

„Du darfst erneut drei Schritte machen. Jetzt weißt du, warum der Schulwart plötzlich wegmusste. Das Waschbecken im Atelier ist verstopft, weil jemand versehentlich Farbe hineingekippt hat. Da der Boden unter Wasser steht, ist es ratsam, sich von dort fernzuhalten, aber das machst du ja bereits.“

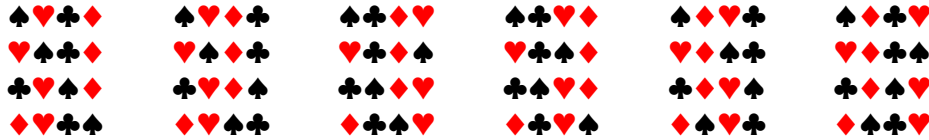
Danach wird die ♠6 weggelegt.

„Du darfst noch einen letzten Schritt machen. Sobald du die Türschwelle überschreitest, läutet es und die große Pause ist vorbei. Zum Glück hast du es gerade noch geschafft, rechtzeitig zurück in deine Klasse zu kommen.“

Danach werden die ♠5 und die ♠7 weggelegt und es verbleibt nur die ♠4.

alle Lösungen für Aus fünf mach vier

Es gibt grundsätzlich $4! = 24$ verschiedene Möglichkeiten dafür, wie wir die vier Karten in einer Reihe arrangieren können:



Da wir die Karten allerdings im Kreis auflegen, reduziert sich diese Anzahl auf sechs:



Wir können uns dazu vorstellen, dass wir die Reihenfolge der Karten wie eine Uhr lesen. In der bei der Erklärung der Funktionsweise gezeigten Abbildung ist die Reihenfolge beispielsweise ♦♣♥♠. Wenn wir diese um neunzig Grad im Uhrzeigersinn drehen, erhalten wir ♠♦♣♥. In anderen Worten: Jede der oben aufgelisteten sechs Möglichkeiten beinhaltet noch drei weitere, wenn wir jeweils eine der drei anderen Spielfarben als Startpunkt nehmen. Da wir außerdem die Laufrichtung bzw. die Reihenfolge der Überlappungen umkehren können, müssen wir diese Anzahl noch verdoppeln:

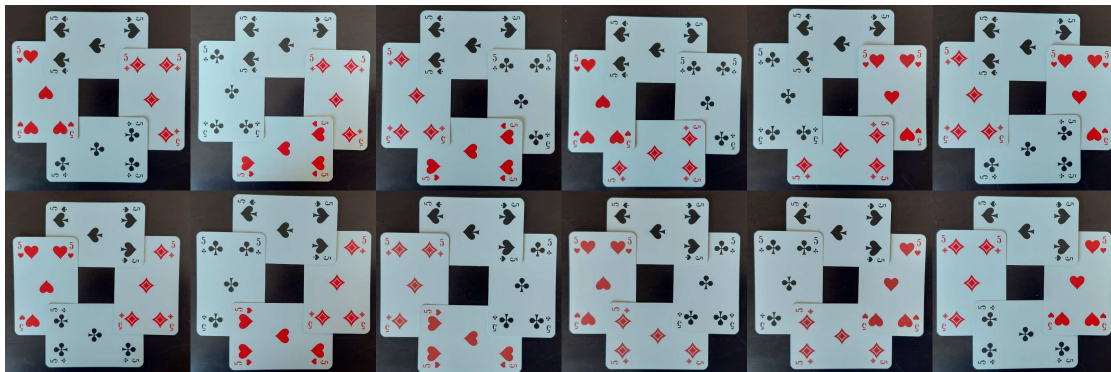


Abbildung 4.2: Zwölf verschiedene Arrangements (eigene Abbildung)

Allerdings müssen wir streng genommen auch noch berücksichtigen, dass es bei allen Spielfarben außer Karo zwei mögliche Orientierungen des Symbols in der Mitte der Karte gibt, und kommen somit auf insgesamt $12 \cdot 2^3 = 96$ verschiedene Möglichkeiten.

(Kopfgeld-)Jäger-Lageplan

P_1

P_2

P_3

P_4

Übersicht möglicher Kennzahlen der Kartencodierung

Die folgenden Regeln können bei Bedarf auch abgeändert werden:

$$i \in \{\spadesuit; \heartsuit; \clubsuit; \diamondsuit\} \quad j \in \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; B; D; K\}$$

$$k(K_{ij}) = \begin{cases} j = A : & k = 1 \\ j \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq j \leq 10 : & k = j \\ j = B : & k = 11 \\ j = D : & k = 12 \\ j = K : & k = 13 \end{cases} \quad n(K_{ij}) = \begin{cases} i = \spadesuit : & n = 1 \\ i = \heartsuit : & n = 2 \\ i = \clubsuit : & n = 3 \\ i = \diamondsuit : & n = 4 \end{cases}$$

K_{ij}	k	$\cdot 2$	$+3$	$\cdot 5$	$+n$	-15		K_{ij}	k	$\cdot 2$	$+3$	$\cdot 5$	$+n$	-15
$\spadesuit A$	1	2	5	25	26	11		$\clubsuit A$	1	2	5	25	28	13
$\spadesuit 2$	2	4	7	35	36	21		$\clubsuit 2$	2	4	7	35	38	23
$\spadesuit 3$	3	6	9	45	46	31		$\clubsuit 3$	3	6	9	45	48	33
$\spadesuit 4$	4	8	11	55	56	41		$\clubsuit 4$	4	8	11	55	58	43
$\spadesuit 5$	5	10	13	65	66	51		$\clubsuit 5$	5	10	13	65	68	53
$\spadesuit 6$	6	12	15	75	76	61		$\clubsuit 6$	6	12	15	75	78	63
$\spadesuit 7$	7	14	17	85	86	71		$\clubsuit 7$	7	14	17	85	88	73
$\spadesuit 8$	8	16	19	95	96	81		$\clubsuit 8$	8	16	19	95	98	83
$\spadesuit 9$	9	18	21	105	106	91		$\clubsuit 9$	9	18	21	105	108	93
$\spadesuit 10$	10	20	23	115	116	101		$\clubsuit 10$	10	20	23	115	118	103
$\spadesuit B$	11	22	25	125	126	111		$\clubsuit B$	11	22	25	125	128	113
$\spadesuit D$	12	24	27	135	136	121		$\clubsuit D$	12	24	27	135	138	123
$\spadesuit K$	13	26	29	145	146	131		$\clubsuit K$	13	26	29	145	148	133
$\heartsuit A$	1	2	5	25	27	12		$\diamondsuit A$	1	2	5	25	29	14
$\heartsuit 2$	2	4	7	35	37	22		$\diamondsuit 2$	2	4	7	35	39	24
$\heartsuit 3$	3	6	9	45	47	32		$\diamondsuit 3$	3	6	9	45	49	34
$\heartsuit 4$	4	8	11	55	57	42		$\diamondsuit 4$	4	8	11	55	59	44
$\heartsuit 5$	5	10	13	65	67	52		$\diamondsuit 5$	5	10	13	65	69	54
$\heartsuit 6$	6	12	15	75	77	62		$\diamondsuit 6$	6	12	15	75	79	64
$\heartsuit 7$	7	14	17	85	87	72		$\diamondsuit 7$	7	14	17	85	89	74
$\heartsuit 8$	8	16	19	95	97	82		$\diamondsuit 8$	8	16	19	95	99	84
$\heartsuit 9$	9	18	21	105	107	92		$\diamondsuit 9$	9	18	21	105	109	94
$\heartsuit 10$	10	20	23	115	117	102		$\diamondsuit 10$	10	20	23	115	119	104
$\heartsuit B$	11	22	25	125	127	112		$\diamondsuit B$	11	22	25	125	129	114
$\heartsuit D$	12	24	27	135	137	122		$\diamondsuit D$	12	24	27	135	139	124
$\heartsuit K$	13	26	29	145	147	132		$\diamondsuit K$	13	26	29	145	149	134

Rot und Schwarz-Lageplan

S

R

$S_s + R_s$

$S_r + R_r$

Arbeitsmaterial für die Kartenhausformel

Wir suchen eine Formel für das Kartenhaus (Standard AHS)

Ein Kartenhaus kannst du aus Spielkarten, Bierdeckeln oder anderen rechteckigen Flächen bauen. Dazu lehnst du jeweils zwei Karten aneinander, sodass sich die Wände gegenseitig stützen. Sobald du zwei dieser Zimmer nebeneinander gebaut hast, legst du eine Karte obendrauf, um einen Boden für das nächste Stockwerk zu bauen:



Versuche folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie viele Stockwerke (Ebenen) hat ein Kartenhaus, das aus hundert Karten besteht?
2. Wie viele Karten brauchst du für ein zehnstöckiges Kartenhaus?
3. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem zehnstöckigen Kartenhaus ein elfstöckiges zu machen?
4. Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $k(x)$ für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken x ermitteln kannst!
5. Wie viele Stockwerke kann ein Kartenhaus höchstens haben, wenn du es aus einem klassischen Spielkartendeck mit 52 Karten baust?
6. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein fünfzehnstöckiges Kartenhaus und wie viele Karten bleiben dabei übrig?
7. Wie viele Stockwerke muss das Kartenhaus mindestens haben, damit keine Karten übrig bleiben?

Ebenen	Wände	Böden	Karten	Ausbau
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Wir suchen eine Formel für das Kartenhaus (Standard)

Ein Kartenhaus kannst du aus Spielkarten, Bierdeckeln oder anderen rechteckigen Flächen bauen. Dazu lehnst du jeweils zwei Karten aneinander, sodass sich die Wände gegenseitig stützen. Sobald du zwei dieser Zimmer nebeneinander gebaut hast, legst du eine Karte obendrauf, um einen Boden für das nächste Stockwerk zu bauen:



Versuche folgende Fragen zu beantworten:

1. Wie viele Stockwerke (Ebenen) hat ein Kartenhaus, das aus 45 Karten besteht?
 2. Reicht ein Kartendeck (52 Karten) für ein sechsstöckiges Kartenhaus?
 3. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein siebenstöckiges Kartenhaus?
 4. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem siebenstöckigen Kartenhaus ein achtstöckiges zu machen?
 5. Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $\tilde{k}(x)$ für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken x ermitteln kannst! Du kannst dafür auch die Tabelle ganz unten auf dem Arbeitsblatt verwenden.
- *) Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $k(x)$ für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken x ermitteln kannst (siehe Abbildung unten)!



Ebenen	Wände	Böden	Karten	Ausbau
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Musterlösungen (Standard AHS)

1. Wie viele Stockwerke hat ein Kartenhaus, das aus hundert Karten besteht?

Antwort: Das Kartenhaus ist höchstens acht Stockwerke hoch.

Begründung: $k(x) = 100 \Rightarrow x = 8$

2. Wie viele Karten brauchst du für ein zehnstöckiges Kartenhaus?

Antwort: Wir brauchen 155 Karten.

Begründung: $k(10) = 155$

3. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem zehnstöckigen Kartenhaus ein elfstöckiges zu machen?

Antwort: Wir brauchen 32 zusätzliche Karten.

Begründung: $k(11) - k(10) = 187 - 155 = 32$

4. Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $k(x)$ für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken x ermitteln kannst!

→ siehe Tabelle und Formeln der regulären Variante

5. Wie viele Stockwerke kann ein Kartenhaus höchstens haben, wenn du es aus einem klassischen Spielkartendeck mit 52 Karten baust?

Antwort: Das Kartenhaus kann höchstens fünf Stockwerke hoch sein.

Begründung: $k(x) = 52 \Rightarrow x \approx 5,7$

6. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein fünfzehnstöckiges Kartenhaus und wie viele Karten bleiben dabei übrig?

Antwort: Wir brauchen sieben Kartendecks und es bleiben 19 Karten übrig.

Begründung: $k(15) = 345 \Rightarrow 345 : 52 \approx 7 \Rightarrow 7 \cdot 52 = 364 \Rightarrow 364 - 345 = 19$

7. Wie viele Stockwerke muss das Kartenhaus mindestens haben, damit keine Karten übrig bleiben?

Antwort: Für ein Kartenhaus mit dreizehn Stockwerken sind 260 Karten bzw. fünf vollständige Decks nötig.

Begründung: $k(13) = 260 \Rightarrow 260 : 52 = 5$

Musterlösungen (Standard)

1. Wie viele Stockwerke (Ebenen) hat ein Kartenhaus, das aus 45 Karten besteht?

Antwort: Das Kartenhaus ist vier Stockwerke hoch (siehe Abbildung).

Begründung: $\tilde{k}(x) = 45 \Rightarrow x = 5$ bzw. durch Fortsetzung des Musters in der Abbildung (ein weiteres Stockwerk dazu bauen)

2. Reicht ein Kartendeck (52 Karten) für ein sechsstöckiges Kartenhaus?

Antwort: Nein, weil es dann 11 Karten zu wenig sind.

3. Wie viele Kartendecks brauchst du für ein siebenstöckiges Kartenhaus?

Antwort: Wir brauchen 84 Karten.

Begründung: $\tilde{k}(7) = 84$

4. Wie viele zusätzliche Karten brauchst du, um aus einem siebenstöckigen Kartenhaus ein achtstöckiges zu machen?

Antwort: Wir brauchen 23 zusätzliche Karten.

Begründung: $\tilde{k}(8) - \tilde{k}(7) = 108 - 84 = 24$

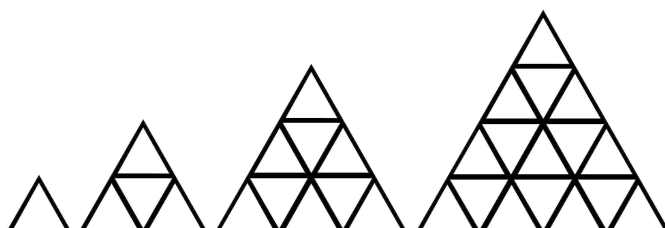
5. Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $\tilde{k}(x)$ für ein Haus mit x Stockwerken ermitteln kannst! Du kannst dafür die Tabelle ganz unten auf dem Arbeitsblatt verwenden.

→ siehe Tabelle und Formeln der vereinfachten Variante

- *) Stelle eine Formel auf, mit der du die Anzahl der Karten $k(x)$ für ein Haus mit beliebig vielen Stockwerken x ermitteln kannst (siehe Abbildung unten)!

→ siehe Tabelle und Formeln der regulären Variante

Tabelle und Formeln der regulären Variante



Ebenen	Böden	Wände	Karten	Ausbau
0	0	0	0	0
1	0	2	2	2
2	1	6	7	5
3	3	12	15	8
4	6	20	26	11
5	10	30	40	14
6	15	42	57	17
7	21	56	77	20
8	28	72	100	23
9	36	90	126	26
10	45	110	155	29
11	55	132	187	32
12	66	156	222	35
13	78	182	260	38
14	91	210	301	41
15	105	240	345	44

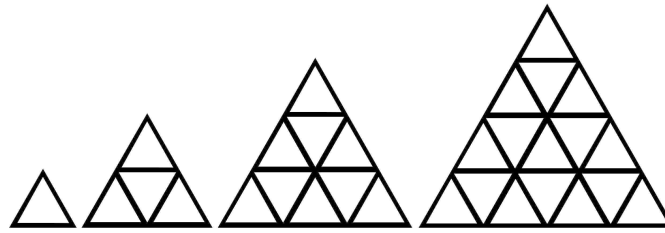
rekursive Formel:

$$k(x) = k(x-1) + 3x - 1 \quad \text{bzw.} \quad k(x+1) = k(x) + 3x + 2 \quad k(0) = 0$$

explizite Formel:

$$k(x) = 3(1 + 2 + \dots + x) - x = \frac{3x(x+1)}{2} - x = \frac{3x^2 + x}{2} = \frac{x(3x+1)}{2}$$

Tabelle und Formeln der vereinfachten Variante



Ebenen	Böden	Wände	Karten	Ausbau
0	0	0	0	0
1	1	2	3	3
2	3	6	9	6
3	6	12	18	9
4	10	20	30	12
5	15	30	45	15
6	21	42	63	18
7	28	56	84	21
8	36	72	108	24
9	45	90	135	27
10	55	110	165	30
11	66	132	198	33
12	78	156	234	36
13	91	182	273	39
14	105	210	315	42
15	120	240	360	45

rekursive Formel:

$$\tilde{k}(x) = \tilde{k}(x-1) + 3x \quad \text{bzw.} \quad \tilde{k}(x+1) = \tilde{k}(x) + 3x + 3 \quad \tilde{k}(0) = 0$$

explizite Formel:

$$\tilde{k}(x) = 3(1 + 2 + \dots + x) = \frac{3x(x+1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x}{2}$$

Zusammenfassung

Abstract (Deutsch)

Die vorliegende Masterthesis beschäftigt sich damit, wie die Arbeit mit Spielkarten im Unterricht den Lernenden in der Sekundarstufe einen Zugang zu abstrakten Konzepten der Mathematik ermöglichen kann. Der Einsatz von Spielkarten bietet sich nicht nur bei der Behandlung des Themas Wahrscheinlichkeitsrechnung an, sondern ist im Allgemeinen gut geeignet, um viele mathematische Inhalte zu veranschaulichen. Kartentricks im Speziellen dienen oftmals als eine Art Köder, um dem Publikum ein neues Unterrichtsthema schmackhaft zu machen sowie bereits bekannte Inhalte zu festigen oder diese in einem anderen Kontext zu erproben. Im Rahmen dieser Arbeit wird unter anderem auch auf Möglichkeiten der Binnendifferenzierung in heterogenen Klassenräumen eingegangen. Dazu werden ausgewählte Tricks und andere Methoden, bei denen mit Karten gearbeitet wird, vorgestellt, im Lehrplan verortet und im Hinblick auf ihren Einsatz im Schulunterricht erläutert. Zum Schluss werden Vor- und Nachteile der praktischen Umsetzbarkeit im Unterricht diskutiert.

Abstract (Englisch)

This master's thesis examines how working with playing cards in the classroom can provide secondary school students with access to abstract concepts in mathematics. The use of playing cards is not only useful for dealing with the topic of probability theory, but is also generally well-suited for illustrating many mathematical concepts. Card tricks, in particular, often serve as a kind of bait to make a new teaching topic appealing to the audience, as well as to reinforce already known content or to test it in a different context. This thesis will also address, among other things, possibilities for internal differentiation in heterogeneous classrooms. Selected tricks and other methods involving card work will be presented, located in the curriculum, and explained with regard to their use in school lessons. Finally, the advantages and disadvantages of practical implementation in the classroom are discussed.