

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Die Bank gewinnt immer - Stochastische Betrachtung zu Black Jack und ähnlichen Glücksspielen

verfasst von | submitted by

Daniela Stoick BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:

UA 199 502 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Biologie und Umweltbildung Unterrichtsfach
Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abstrakt

Kasino- und Lotteriespiele weisen eine nicht enden wollende Beliebtheit auf. Der Zufall, die Vielfalt, die Ungewissheit und die Aussicht auf den großen Gewinn sorgen dafür, dass Spielerinnen und Spieler wieder und wieder ihr Glück versuchen. Diese Masterarbeit fokussiert die Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeiten des Glücksspiels Black Jack. Dafür notwendig sind die mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im zweiten Kapitel erläutert werden. Der Wandel der Vorstellung von Zufall als Wille Gottes hin zur mathematischen Betrachtung wird in einem kurzen historischen Exkurs geschildert. Intuitiv führt anschließend ein Beispiel in das Thema der Markov-Ketten ein. Wir erkennen die Markov-Eigenschaft, dass ein im $n + 1$ -ten Versuch eingetretenes Ereignis, nur von dem im n -ten Versuch eingetretenen Ereignis abhängt, also ausschließlich die Gegenwart für die Zukunft relevant ist. Da diese Eigenschaft auch bei Black Jack wiederzufinden ist, lassen sich auch hier die Gewinnwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Markov-Ketten berechnen. In den darauffolgenden Kapiteln werden die mathematischen Grundlagen der Markov-Ketten sowie die Spielregeln von Black Jack erklärt. So nah wie möglich an die 21 Punkte zu gelangen, ist das Ziel dieses Glücksspiels. Direkt ein Black Jack, also ein Ass in Kombination mit der Karte 10, einem Buben, einer Dame oder einem König, zu erhalten, ist der Wunsch jeder und jedes Spielenden, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(\text{Black Jack}) = \frac{8}{169}$ in Erfüllung geht. Noch eine Karte ziehen, stehen bleiben oder doch den Einsatz verdoppeln, teilen oder versichern - die Entscheidungen, die die Spielerinnen und Spieler treffen können, sind groß. Eine genau Analyse ausgewählter Spielsituationen bringt einen Eindruck von der Komplexität dieser Entscheidungsfindung. Manchmal stimmen Berechnungen und intuitive Entscheidung von uns Menschen überein, oft liegen sie jedoch weit daneben. Abschließend werden weitere Berechnungsmöglichkeit der Gewinnwahrscheinlichkeiten mit Markov-Ketten und der Unterstützung von Computerprogrammen gezeigt.

Abstract

Casino and lottery games enjoy never-ending popularity. Chance, variety, uncertainty ensure that players try their luck over and over again. This master's thesis focuses on calculating the probabilities of winning in the game of Black Jack. For this purpose, the mathematical foundations of probability theory, which are explained in the second chapter, are essential. A short historical excursion describes the shift in the perception of chance from being seen as the will of God to a mathematical concept. An intuitive example then introduces the topic of Markov chains. We recognize the Markov property, which states that an event occurring in the $n + 1$ -th attempt depends only on the event of the n -th attempt meaning that only the present is relevant for the future. Since this property is also found in Black Jack, the probabilities of winning can be calculated using Markov chains. The following chapters explain the mathematical foundations of Markov chains as well as the rules of Black Jack. The goal of this game is to get as close as possible to 21 points. Every player's dream is to get an immediate Black Jack, this means an Ace paired with 10, Jack, Queen or King. The probability of this occurring is $P(\text{Black Jack}) = \frac{8}{169}$. Drawing another card, standing, doubling the bet, splitting, or taking insurance - players have numerous decisions to make. A detailed analysis of selected game situations provides insight into the complexity of these choices. Sometimes, mathematical calculations align with our intuitive decision-making, but often they differ significantly. Finally, more methods for calculating the probabilities of winning using Markov chains and computer programs are presented.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	3
2.1	Zufällige Ereignisse	3
2.2	Relative Häufigkeiten	7
2.3	Axiomensystem von Kolmogoroff	12
2.4	Wahrscheinlichkeiten nach Laplace	15
2.5	Kombinatorik	18
2.6	Bedingte Wahrscheinlichkeit	26
3	Historisches und Allgemeines	33
4	Markov-Ketten	37
4.1	Intuitive Erarbeitung	37
4.2	Mathematische Betrachtung	41
5	Black Jack	61
5.1	Wichtige Begriffe	61
5.2	Spielbeschreibung	62
5.3	Entscheidungen treffen	65
5.4	Besondere Regeln	75
5.5	Berechnungen mit Markov-Ketten	87
	Literaturverzeichnis	107
	Abbildungsverzeichnis	109
	Tabellenverzeichnis	111

1 Einleitung

„Ein echter Glückspilz ist nicht derjenige, der die besten Karten hat, sonder derjenige, der weiß, wann man vom Tisch aufsteht, um nach Hause zu gehen.“

(John Ray, 1627 - 1705)

Und nach Hause gehen, möchten die Besucherinnen und Besucher eines Kasinos am liebsten mit dem ganz großen Gewinn. Die Hoffnung auf diesen Gewinn, die Hoffnung, so wie *John Ray* schreibt, der Glückspilz des Abends zu sein, ist der Grund für die nicht nachlassende Beliebtheit der Kasino- und Lotteriespiele (Bewersdorff 2018).

Doch wie gelingt es, dass die Spielerinnen und Spieler selbst nach einer Niederlage wieder den Gedanken „Neues Spiel - neues Glück“ fassen?

Bei den Spielen lassen sich drei Faktoren erkennen, die zu einer stetigen Ungewissheit und dadurch ergebenden Abwechslung führen:

- **Der Zufall:** In dieser Arbeit werden wir uns auf das Glücksspiel Black Jack und dessen Sonderregeln fokussieren, wo, erreicht durch das Mischen der Spielkarten, zufällige Ereignisse neben Entscheidungen der Spielenden den Verlauf des Spiels beeinflussen.
- **Die Vielfalt:** Die Spielerinnen und Spieler treffen Entscheidungen, die durch Spielregeln definiert sind, wodurch eine immense Vielfalt an möglichen Zügen zustande kommt.
- **Die Ungewissheit:** Der Verlauf des Spieles ist niemandem bekannt. Oft müssen Entscheidungen getroffen werden, ohne über den aktuellen Stand der gegnerischen Spielenden Bescheid zu wissen (Bewersdorff 2018).

Dem Großteil der Menschen ist durchaus bewusst, dass es niemals sicher ist zu gewinnen und die Chancen hierfür sehr gering sind, doch die emotionale Komponente, die Aussicht auf den großen Gewinn, verleitet sie immer wieder zum Spielen.

Die garantierte Gewinnwahrscheinlichkeit gibt es nicht, in dieser Arbeit wollen wir deshalb beleuchten, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, zu gewinnen. Betrachtet werden jene Fälle, in denen Spielerinnen und Spieler keine spontanen Entscheidungen, geleitet von ihren Emotionen treffen, sondern nach klaren Regeln, die am ersten Blick möglicherweise nicht so wirken, entscheiden (Monka et al. 1999).

Als Grundlage dient die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auf den ersten Blick ist bei Glücksspielen wie Black Jack nur die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person gewinnt

1 Einleitung

entscheidend. Bei der näheren Betrachtung werden wir erkennen, dass wir vielmehr die Bank als unsere Gegnerin analysieren müssen (Bewersdorff 2018).

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Zufällige Ereignisse

Im täglichen Leben treffen wir oft auf Situationen, die durch den Zufall bestimmt sind. Als zufallsabhängige Phänomene können das Werfen von Münzen, das Würfeln mit Würfeln oder das Ziehen von Spielkarten genannt werden.

Durch das Modellieren werden diese alltäglichen Situationen berechenbar. Die Wahrscheinlichkeitstheorie bildet bei solch zufallsabhängigen Phänomenen die Grundlage und ermöglicht reale stochastische Probleme in eine mathematische Frage zu übersetzen und zu lösen (Kütting & Sauer 2014).

Betrachtet man das Werfen mit Würfeln, so kann dieser Vorgang beliebig oft wiederholt werden und er findet unter bestimmten Bedingungen statt.

Die Ausgänge, also alle möglichen Zahlen, die gewürfelt werden können, sind bereits im Vorhinein bekannt (Henze 2008).

Dieses Beispiel zeigt bereits einige wichtige Eigenschaften auf. Zusammengefasst lauten die wesentlichen Grundlagen und Begriffe:

- Findet ein stochastischer Vorgang unter exakt definierten *Versuchsbedingungen* statt, so wird er als *Zufallsexperiment* oder *Zufallsversuch* bezeichnet.
- Dieses Zufallsexperiment kann theoretisch beliebig oft, ohne veränderte Versuchsbedingungen, durchgeführt werden (Henze 2008).
- Alle möglichen Ausgänge, häufiger auch alle *möglichen Ergebnisse*, eines Zufallsexperiments sind bereits vor der Durchführung bekannt, welchen Ausgang sie genau nehmen, kennt man jedoch nicht (Bosch 2010).

Alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments werden als *Ergebnismenge* zusammengefasst und mit Ω angeschrieben. Häufig wird Ω auch als *Grundraum* definiert. Einer dieser möglichen Versuchsausgänge wird als *Ereignis* bezeichnet (Henze 2008).

Beispiel 1. Wird im Zuge eines Zufallsexperiments unter der Bedingung, dass mit einem regelmäßigen Würfel gespielt wird, dieser geworfen, so lautet die Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2 Mathematische Grundlagen

Dies sind alle möglichen Ergebnisse, die nach einmaligem Würfeln eintreten können. Betrachten wir folgende Ereignisse:

- (i). Ereignis A: „Eine Primzahl wird gewürfelt“. So gilt $A = \{2, 3, 5\}$.
- (ii). Ereignis B: „Eine gerade Zahl wird gewürfelt“. So gilt $B = \{2, 4, 6\}$.
- (iii). Ereignis C: „Eine Zahl, die größer als 10 ist wird gewürfelt“. So gilt $C = \emptyset$.
- (iv). Ereignis D: „Eine Zahl, die größer als 0 und kleiner als 7 ist, wird gewürfelt“. So gilt $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Definition 1. Sei Ω die endliche, nicht leere Ergebnismenge, so gilt:

- Jede Teilmenge von Ω heißt *Ereignis*. Man schreibt $B \subseteq \Omega$.
- Die uneigentliche Teilmenge $B = \Omega$ von Ω heißt *sicheres Ereignis*.
- Die uneigentliche Teilmenge $B = \emptyset$ heißt *unmögliches Ereignis*.

(Kütting & Sauer 2014)

Unter dem Aspekt dieser Definition betrachten wir die Beispiele (iii) und (iv) erneut:

Beispiel 2. ad (iii). Das Ereignis C stellt ein unmögliches Ereignis dar, da mit einem regelmäßigen sechsseitigen Würfel, niemals eine Zahl die größer als 10 ist, gewürfelt werden kann.

ad (iv). Das Ereignis D hingegen bildet ein sicheres Ereignis, da mit Sicherheit eine Zahl zwischen 1 und 6 gewürfelt wird.

Beispiel 3. Wird im Zuge eines Zufallsexperiments mit einem regelmäßigen sechsseitigen Würfel zweimal geworfen, so lautet die Ergebnismenge:

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Wobei i für das Ergebnis des ersten Wurfes, j für das des zweiten steht (Kütting & Sauer 2014). Betrachten wir nun folgende Ereignisse:

- (i). Ereignis E: „Das Ergebnis des ersten Wurfes ist ein Vierer“. So gilt

$$E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\} = \{(4, j) : 1 \leq j \leq 6\}.$$

- (ii). Ereignis F: „Die Augensumme der beiden Würfe ergibt mindestens neun“. So gilt

$$F = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} = \{(i, j) \in \Omega : i + j \geq 9\}.$$

(Henze 2008)

Definition 2. Es seien A und B Ereignisse und Ω die Ergebnismenge.

- *Durchschnitt* von A und B :

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

Das Ereignis $A \cap B$ tritt genau dann ein, wenn A *und* B eintreten.

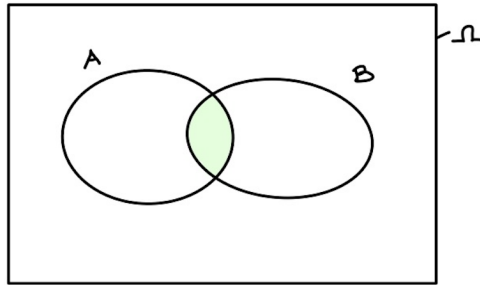


Abbildung 2.1: Durchschnitt $A \cap B$

- *Vereinigung* von A und B :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

Das Ereignis $A \cup B$ tritt genau dann ein, wenn A eintritt *oder* B eintritt *oder beide* eintreten.

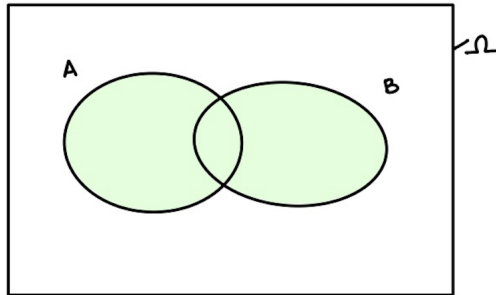


Abbildung 2.2: Vereinigung $A \cup B$

- *Differenz* von A und B :

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$$

Das Ereignis tritt genau dann ein, wenn A eintritt und B nicht eintritt.

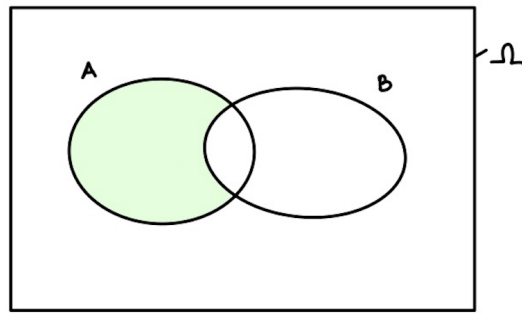


Abbildung 2.3: Differenz $A \setminus B$

- *Gegenereignis* von B (Spezialfall $A = \Omega$):

$$\Omega \setminus B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in \Omega \wedge \omega \notin B\} = \overline{B}$$

Das Ereignis tritt genau dann ein, wenn Ω eintritt und B nicht eintritt.
Man spricht: „Omega ohne B “.

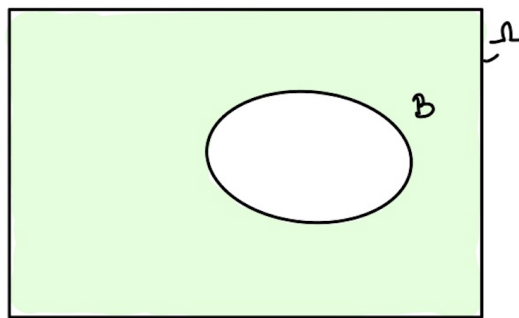


Abbildung 2.4: Gegenereignis $\Omega \setminus B$

(Henze 2008)

Durch das Bilden des Durchschnitts, der Vereinigung und der Differenz von den Mengen A und B können neue Ereignisse gebildet werden (Bosch 2010).

Beispiel 4. Wird im Zuge eines Zufallsexperiments mit einem regelmäßigen sechsseitigen Würfel zweimal geworfen, so gilt

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Betrachten wir nun die weiteren Ereignisse:

- (i). Ereignis G : „Das Ergebnis des ersten Wurfes ist ein Vierer *und* die Augensumme der beiden Würfe ergibt mindestens neun“.

So gilt

$$E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), \mathbf{(4, 5)}, \mathbf{(4, 6)}\}$$

$$F = \{\mathbf{(4, 5)}, \mathbf{(4, 6)}, (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

und daraus ergibt sich

$$G = E \cap F = \{(4, 5), (4, 6)\}.$$

(ii). Ereignis H: „Das Ergebnis des ersten Wurfes ist kein Vierer“.

So gilt $H = \overline{E}$, also H stellt das *Gegenereignis* zu E dar

$$E = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)\} = \{(4, j) : 1 \leq j \leq 6\}.$$

Das Gegenereignis von E, umfasst folgende Ereignisse:

$$\begin{aligned} H = \overline{E} = \{ & (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}. \end{aligned}$$

(Henze 2008)

2.2 Relative Häufigkeiten

Die Funktion der relativen Häufigkeiten r_n , wobei n fest gewählt ist, lautet:

$$r_n : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$r_n = \frac{\text{Anzahl der Versuche mit dem Ereignis } A}{\text{Gesamtanzahl der Versuche}} = \frac{h_n(A)}{n}.$$

Hierbei ist Ω die nichtleere, endliche Ergebnismenge, $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge und A ein beliebiges Ereignis, wobei $A \subseteq \Omega$ gilt (Kütting & Sauer 2014).

$h_n(A)$ wird als *absolute Häufigkeit von A* bezeichnet, diese gibt die Anzahl der Versuche, die das Ereignis A hervorbringen, an.

2 Mathematische Grundlagen

Dividiert man die absolute Häufigkeit $h_n(A)$ durch die Gesamtanzahl n aller Versuche, so erhält man $r_n(A)$, die sogenannte *relative Häufigkeit von A* (Bosch 2010).

Wir werden später sehen, dass nicht alle Teilmengen zugelassen werden, sondern nur zulässige Ereignisse. Solch zulässige Ereignisse werden zu einem späteren Zeitpunkt in der Arbeit definiert.

Beispiel 5. Die Würfelsimulation der TU Clausthal ermöglicht das Simulieren des Werfens eines sechsseitigen Würfels und liefert alle unten angeführten Werte.

Die absoluten und relativen Häufigkeiten der Augenzahlen 1 bis 6 bei einerseits $n = 50$, $n = 500$ sowie $n = 1000$ Versuchen können aus den unten abgebildeten Tabellen entnommen werden (TU Clausthal o.D.).

Wir betrachten die absoluten Häufigkeiten der Augenzahl Drei bei $n = 50$, $n = 500$ sowie $n = 1000$ Versuchen:

$$h_{50}(\text{Augenzahl } 3) = 7$$

$$h_{500}(\text{Augenzahl } 3) = 75$$

$$h_{1000}(\text{Augenzahl } 3) = 163$$

Wir betrachte die relativen Häufigkeiten der Augenzahl Drei bei $n = 50$, $n = 500$ sowie $n = 1000$ Versuchen:

$$r_{50}(\text{Augenzahl } 3) = \frac{7}{50} = 0,14$$

$$r_{500}(\text{Augenzahl } 3) = \frac{75}{500} = 0,15$$

$$r_{1000}(\text{Augenzahl } 3) = \frac{163}{1000} = 0,163$$

Augenzahl	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	11	0,22
2	2	0,04
3	7	0,14
4	8	0,16
5	11	0,22
6	11	0,22

Tabelle 2.1: $n = 50$

Zusammenfassend ist zu erkennen, dass bei einer großen Anzahl n an Versuchen, die relative Häufigkeit der Augenzahl Drei dem exakten Wert der Wahrscheinlichkeit der

2.2 Relative Häufigkeiten

Augenzahl	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	73	0,146
2	86	0,172
3	75	0,15
4	95	0,19
5	90	0,18
6	81	0,162

Tabelle 2.2: n = 500

Augenzahl	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	145	0,145
2	174	0,174
3	163	0,163
4	175	0,175
5	183	0,183
6	160	0,160

Tabelle 2.3: n = 1000

Augenzahl Drei

$$P(\text{Augenzahl } 3) = \frac{1}{6}$$

sehr nahe kommt (Bosch 2010).

Richard Edler von Mises unternahm einen Versuch die Wahrscheinlichkeit durch diese Beobachtung zu definieren.

Definition 3. Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, dass ein Ereignis A eintritt, wird durch den Grenzwert der Folge $r_n(A)$ definiert und es gilt :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(A).$$

(Bosch 2010)

Die Definition von *von Mises* bringt einige Probleme mit sich wie beispielsweise fehlendes Wissen über besagten Grenzwert oder mögliche verändernde Versuchsbedingungen, wenn man das Zufallsexperiment sehr oft wiederholen muss.

Das Hauptproblem jedoch ist, die Unmöglichkeit den Versuch unendlich oft durchzuführen (Bosch 2010).

Eigenschaften der relativen Häufigkeit

Da trotz dieser Probleme ein enger Zusammenhang zwischen den relativen Häufigkeiten und der Wahrscheinlichkeit vorliegt, fassen wir einige wichtige Eigenschaften der relativen Häufigkeiten zusammen:

- (i). Da für die absoluten Häufigkeiten stets

$$h_n(A) \geq 0$$

gilt, ergibt sich durch die Division mit n auch für die relativen Häufigkeiten

$$r_n(A) \geq 0.$$

- (ii). Da das sichere Ereignis immer eintritt, gilt

$$r_n(\Omega) = 1.$$

Durch Multiplikation mit n erhält man somit für die absolute Häufigkeit

$$h_n(A) = n \cdot r_n(A).$$

- (iii). Sind zwei Ereignisse unvereinbar, so können diese Ereignisse nicht zur gleichen Zeit eintreten. Es gilt:

$$r_n(A \cup B) = r_n(A) + r_n(B)$$

falls

$$A \cap B = \emptyset.$$

(Bosch 2010, Kütting & Sauer 2014)

Diese letzte Eigenschaft wird, auch schon in der Schule, durch *Baumdiagramme* visualisiert. Baumdiagramme bestehen aus Knoten und Kanten, wobei die Knoten die verschiedenen Ereignisse darstellen und die Kanten die Wahrscheinlichkeiten symbolisieren. Unvereinbare Ereignisse, wie in (iii) angesprochen, können als verschiedene Äste im Baumdiagramm aufgefasst werden, die miteinander addiert werden müssen. Daraus folgt die sogenannte *Additionsregel* (Kütting & Sauer 2014).

Beispiel 6. Wird ein Würfel einmal geworfen, so hat ein dazu passendes Baumdiagramm sechs verschiedenen Äste. Die Knoten symbolisieren die sechs möglichen Augenzahlen, die gewürfelt werden können. Entlang der Kanten werden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten jeder Augenzahl notiert.

Baumdiagramme sind besonders bei einfachen Aufgaben eine hilfreiche visuelle Unterstützung. Der Nachteil, besonders bei komplexeren Aufgaben, ist, dass sie sehr schnell groß und damit unüberschaubar werden (Kütting & Sauer 2014).

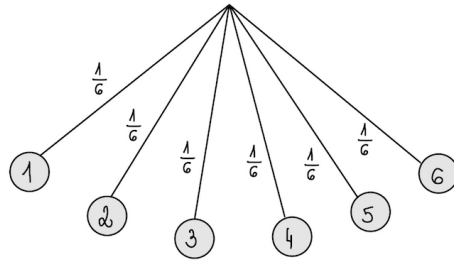


Abbildung 2.5: Baumdiagramm - einmaliges Würfeln

Definition 4. Eine Familie $(A_j)_{j \in J}$ heißt *paarweise disjunkt*, falls $A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$ für alle $j_1 \neq j_2 \in J$ gilt (Bosch 2010).

Ereignisse, die paarweise unvereinbar sind, sind auch vollständig unvereinbar. Die Umkehrung hiervon ist nicht unbedingt korrekt, was wir anhand eines Gegenbeispiels zeigen:

Beispiel 7. Betrachtet man folgende drei Ereignisse:

- (i). $A_1 = \{1\}$
- (ii). $A_2 = \{1, 2\}$
- (iii). $A_3 = \{2, 3\}$

So gilt

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset,$$

das bedeutet die Ereignisse sind vollständig unvereinbar. Jedoch gilt

$$A_1 \cap A_2 = \{1\}$$

und somit

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Die Ereignisse sind vollständig unvereinbar, aber nicht paarweise.

Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \dots, A_n$ paarweise unvereinbar, so gilt

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

(Bosch 2010)

2.3 Axiomensystem von Kolmogoroff

Es dauerte bis 1933 als *A. N. Kolmogoroff* die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung schaffte. Somit war das zuvor angesprochene Problem, dass die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten definiert wurde, beseitigt.

Die Axiome, darunter versteht man nicht beweisbare Grundlagen, stützen sich jedoch sehr wohl auf die bereits erarbeiteten Eigenschaften der relativen Häufigkeiten (Henze 2008).

Man definiert die sogenannte **σ -Algebra**.

Definition 5. Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen einer Grundmenge Ω ist eine σ -Algebra wenn

- (i). $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii). aus $A \in \mathcal{A}$ auch $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ folgt
- (iii). aus $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

folgt.

Daraus können zwei weitere Eigenschaften gefolgert werden:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$, da $\bar{\Omega} = \emptyset$
- aus $A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n.$$

(Hofbauer 2018/2019, Oloff 2017)

Wir definieren nun den Wahrscheinlichkeitsraum unter der Beachtung der neu definierten σ -Algebra.

Definition 6. Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf Ω . Es sei

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Abbildung P ein *Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω* genau dann, wenn gilt:

- $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$

- $P(\Omega) = 1$

- **σ -Additivität**

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare paarweise disjunkte Familie in $\mathcal{A}$. Dann gilt

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(Kütting & Sauer 2014).

Für die folgenden wichtigen Sätze werden die Inhalte aus *Bosch* (2010) und *Kütting & Sauer* (2014) herangezogen.

Satz 1. Für jedes Ereignis A gilt:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Das bedeutet: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses A und dessen Gegenereignisses $\bar{A}$ ergibt Eins.

Sonderfall: Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ besitzt die Wahrscheinlichkeit Null, es gilt $P(\emptyset) = 0$.

Beweis. Da $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$ gelten, folgt aus den Axiomen

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

und durch das Subtrahieren von $P(A)$ folgt $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Sonderfall: $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

□

Satz 2. Monotonie

Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$.

Beweis. Da $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ gilt

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Da aus den Axiomen $P(B \setminus A) \geq 0$ folgt, muss $P(B) \geq P(A)$ sein.

□

Satz 3. Für beliebige Ereignisse A und B gilt

$$P(B \setminus A) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A).$$

2 Mathematische Grundlagen

Beweis. Da

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A}) = (B \cap A) \cup (B \setminus A)$$

und $(B \cap A) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ folgt

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \setminus A)$$

und durch Subtrahieren von $P(B \cap A)$ erhalten wir

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(B \cap A).$$

□

Satz 4. *Additionsgesetz*

Für beliebige Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Beweis. Da die Familie $(A \cap B, A \setminus B, B \setminus A)$ paarweise disjunkt ist, und

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

und

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

gelten, folgt aus den Axiomen, dass

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B),$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

und

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \cap B) + P(A \setminus B)}_{=P(A)} + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A)$$

gelten.

Jetzt erhalten wir

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$$

und daraus ergibt sich

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

2.4 Wahrscheinlichkeiten nach Laplace

Pierre Simon Laplace, Professor für Mathematik an der Pariser *École Polytechnique*, hat sich in seinen Arbeiten mit der Gleichwahrscheinlichkeit von verschiedenen Versuchsausgängen beschäftigt, weshalb viele der nachfolgenden Begriffe nach ihm benannt sind (Henze 2008).

Beispiel 8. Nehmen wir einen Würfel, so können wir davon ausgehen, dass keine der Augenzahlen wahrscheinlicher gewürfelt wird als eine andere. Voraussetzung hierfür ist, dass der Würfel aus einem homogenen Material angefertigt wurde.

Ein weiteres sehr gängiges Beispiel ist eine echte Münze, die sowohl Zahl als auch Kopf mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigt.

Definition 7. Unter einem *Laplace-Experiment* versteht man ein Zufallsexperiment mit der m -elementigen Ergebnismenge

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}.$$

Diese m Ereignisse sollen dieselbe Wahrscheinlichkeit

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_m\}) = p$$

haben (Bosch 2010).

Bemerkung. Da

$$\Omega = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_m\}$$

gilt, wobei die Mengen paarweise disjunkt sind, folgt

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_m\}) = p + p + \dots + p = m \cdot p$$

und durch die Division von m folgt $p = \frac{1}{m}$ (Bosch 2010).

2 Mathematische Grundlagen

Mit dem Symbol $|M|$ wird die Mächtigkeit einer Menge beschrieben. Handelt es sich um eine endliche Menge, so ist damit die Anzahl der Elemente dieser Menge gemeint (Kütting & Sauer 2014).

Definition 8. Sei Ω die endliche Ergebnismenge und sei $|\Omega| = m$. Dann heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{m}$$

für alle $\omega \in \Omega$ *Laplace-Verteilung*.

$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ wird *Laplace - Wahrscheinlichkeitsraum* genannt (Kütting & Sauer 2014).

Handelt es sich um ein Laplace-Experiment, so signalisiert dies Adjektive wie *fair*, *homogen* oder *regelmäßig* (Henze 2008).

Beispiel 9. (i). faire Münze: $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ mit

$$P(\text{Kopf}) = P(\text{Zahl}) = \frac{1}{2}$$

(ii). fairer Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

(iii). fairer Würfel wird zweimal geworfen: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit

$$P(\{(1, 1)\}) = P(\{(1, 2)\}) = \dots = P(\{(6, 6)\}) = \frac{1}{36}$$

Diese Berechnungen sind nur möglich, da alle Ereignisse der Beispiele gleichwahrscheinlich sind und es endlich viele Ausgänge gibt.

Anhand des Beispiel der Augensummen beim zweimaligen Würfeln, wird im Anschluss gezeigt, dass diese zwei Bedingungen grundvoraussetzend sind.

Satz 5. Sei Ω die m -elementige Ergebnismenge eines Laplace-Experiments und sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit $|A| = r$. Dann gilt

$$P(A) = \frac{r}{m} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}.$$

(Bosch 2010)

Beweis. Sei p die Wahrscheinlichkeit, mit der jedes der Ereignisse eintritt und $r = |A|$ die Anzahl der Elemente der Menge A .

2.4 Wahrscheinlichkeiten nach Laplace

Da die Ereignisse $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\}$ paarweise unvereinbar sind, gilt durch die Additivität

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_r}\}).$$

Da

$$P(\{\omega_{i_1}\}) = P(\{\omega_{i_2}\}) = \dots = P(\{\omega_{i_r}\}) = p$$

folgt

$$P(A) = r \cdot p = |A| \cdot p.$$

Um p zu bestimmen wird nun $A = \Omega$ gesetzt und wir erhalten $P(\Omega) = |\Omega| \cdot p$.

Aus dem **Axiom 2** folgt nun $p = \frac{1}{|\Omega|}$. Somit erhalten wir

$$P(A) = |A| \cdot p = |A| \cdot \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

(Hofbauer 2018/19)

□

Beispiel 10. Gegeben ist ein fairer Würfel mit der Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

und dem Ereignis A: „Eine Primzahl wird gewürfelt“.

Das Ereignis A tritt ein, wenn der Würfel die Augenzahl 2, 3 oder 5 zeigt, also

$$A = \{2, 3, 5\}.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle für A ist $|A| = 3$, die der möglichen $|\Omega| = 6$. Es folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Beispiel 11. Wird im Zuge eines Zufallsexperiments mit einem regelmäßigen sechsseitigen Würfel zweimal geworfen, so lautet die Ergebnismenge

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Wir haben schon festgestellt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$ jedes Zahlenpaar gewürfelt wird, alle Zahlenpaare also gleichwahrscheinlich sind.

In diesem Beispiel befassen wir uns mit der Augensumme nach dem zweimaligen Werfen.

2 Mathematische Grundlagen

Die Ergebnismenge ist nun

$$\Omega' = \{2, 3, 4, \dots, 12\}.$$

In der Tabelle 2.4 sind die möglichen Augensummen und deren Wahrscheinlichkeiten aufgelistet. Berechnet werden diese, wie zuvor angeführt, mit der Formel

$$P(A) = \frac{r}{m}.$$

Die Berechnungen werden wie folgt durchgeführt:

- Augensumme Drei: Damit das Ereignis „Die Augensumme beträgt Drei“ eintritt, muss einer von zwei verschiedenen günstigen Fällen eintreten. Da wir wissen, dass insgesamt 36 mögliche Zahlenpaare gewürfelt werden können, folgt:

$$P(\text{Augensumme } 3) = \frac{2}{36}.$$

- Augensumme Sechs: Damit das Ereignis „Die Augensumme beträgt Sechs“ eintritt, muss einer von fünf verschiedenen günstigen Fällen eintreten. Da wir wissen, dass insgesamt 36 mögliche Zahlenpaare gewürfelt werden können, folgt:

$$P(\text{Augensumme } 6) = \frac{5}{36}.$$

Betrachtet man die Tabelle 2.4, so ist erkennbar, dass die verschiedenen Augensummen nicht mehr gleichwahrscheinlich sind (Bosch 2010).

2.5 Kombinatorik

Um mit Hilfe des Laplace-Modells Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, muss die Anzahl der günstigen und der möglichen Fälle bekannt sein.

Um diese Werte herauszufinden, wird das Wissen der Kombinatorik herangezogen (Kütting & Sauer 2014).

Die einfachste Methode, um eine Anzahl zu bestimmen, ist das Abzählen, dies ist jedoch sehr aufwendig und nur bei einer überschaubaren Anzahl sinnvoll.

Mit Hilfe der unterschiedlichen *kombinatorischen Figuren* können die Anzahlen bestimmt werden.

Für die folgenden Überlegungen wird *Kütting & Sauer* (2014) herangezogen.

Augensumme	„Günstige“	Anzahl „Günstige“	Wahrscheinlichkeiten Augensummen
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2), (2,1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)	4	$\frac{4}{36}$
10	(4,6), (5,5), (6,4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(5,6), (6,5)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$

Tabelle 2.4: Augensumme - zweimaliges Würfeln

Permutationen ohne Wiederholung

Urnenmodell: Aus einer Urne werden unterscheidbare Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen gezogen, die Reihenfolge wird beachtet.

Beispiel 12. In einer Urne befinden sich drei Kugeln. Eine schwarze (S), eine rote (R) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird hintereinander und ohne Zurücklegen dreimal gezogen, die Reihenfolge wird beachtet.

Welche und wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Beim ersten Ziehen können alle drei Kugeln gezogen werden. Beim zweiten Ziehen gibt es nur noch zwei mögliche Kugeln, die gezogen werden können und beim dritten Ziehen nur noch eine. Wir erhalten also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Folgende Ziehungen sind möglich:

S	R	G		R	S	G
S	G	R		G	S	R
R	G	S		G	R	S

Satz 6. Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln kann man auf

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

verschiedene Arten geordnete Proben ohne Zurücklegen vom Umfang n entnehmen.

Beweis. Da die Reihenfolge beachtet wird und die Kugeln nicht zurückgelegt werden, gibt es für die erste Stelle n Möglichkeiten und für die zweite $(n - 1)$ Möglichkeiten. Führt man das weiter aus, so erhält man für die $n - te$ Stelle eine Möglichkeit. Es ergibt also:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

Der Ausdruck $n!$ wird n *Faktorielle* genannt.

Beispiel 13. In einer Urne befinden sich vier Kugeln. Eine schwarze (S), eine rote (R), eine blaue (B) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird hintereinander und ohne Zurücklegen zweimal gezogen, die Reihenfolge wird beachtet.

Welche und wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Beim ersten Ziehen können alle vier Kugeln gezogen werden. Beim zweiten Ziehen gibt es nur noch drei mögliche Kugeln, die gezogen werden können. Wir erhalten also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.

Folgende Ziehungen sind möglich:

S	R	R	S	G	S	B	S
S	G	R	G	G	R	B	R
S	B	R	B	G	B	B	G

Satz 7. Aus einer Urne mit n unterschiedlichen Kugeln kann man auf

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

verschiedene Arten geordnete Proben ohne Zurücklegen vom Umfang k mit $k \leq n$ entnehmen.

Beweis. Da die Reihenfolge beachtet und nicht zurückgelegt wird, gibt es für die erste Stelle n Möglichkeiten. Für die zweite $(n-1)$ Möglichkeiten. Führt man das weiter aus, so erhält man für die k -te Stelle $(n-(k-1))$ Möglichkeiten. Es ergibt sich also:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$

Durch das Erweitern mit $(n-k)!$ erhalten wir

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Permutationen mit Wiederholungen

Urnenmodell: Aus einer Urne werden unterscheidbare Kugeln nacheinander und mit Zurücklegen gezogen, die Reihenfolge wird beachtet.

Beispiel 14. In einer Urne befinden sich vier Kugeln. Eine schwarze (S), eine rote (R), eine blaue (B) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird hintereinander und mit Zurücklegen fünfmal gezogen, die Reihenfolge wird beachtet.

Welche und wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Beim ersten Ziehen können alle vier Kugeln gezogen werden. Beim zweiten, dritten, vierten und fünften Ziehen können auch wieder alle vier Kugeln gezogen werden. Wir erhalten also $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1024$ Möglichkeiten.

2 Mathematische Grundlagen

Satz 8. Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf

$$n^k$$

verschiedene Arten geordnete Proben mit Zurücklegen vom Umfang k entnehmen.

Beweis. Bei jedem Ziehen kann der entsprechende Platz von n unterscheidbaren Kugeln eingenommen werden. Es gibt also bei k -maligen Ziehen

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Möglichkeiten. □

Kombinationen ohne Wiederholung

Urnenmodell: Aus einer Urne werden unterscheidbare Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen gezogen, die Reihenfolge wird nicht beachtet. Es können deshalb auch alle Kugeln gleichzeitig gezogen werden.

Beispiel 15. In einer Urne befinden sich vier Kugeln. Eine schwarze (S), eine rote (R), eine blaue (B) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird ohne Zurücklegen zweimal gezogen, die Reihenfolge wird nicht beachtet.

Welche und wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Für diese Überlegung betrachten wir nochmals den Fall, dass die Reihenfolge beachtet wird. Beim ersten Ziehen können alle vier Kugeln gezogen werden, beim zweiten Ziehen gibt es nur noch drei mögliche Kugeln. Dies hat zu $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten geführt.

Da im jetzigen Fall die Reihenfolge nicht mehr beachtet wird, fallen jeweils zwei Ereignisse wie beispielsweise S G und G S zusammen. Deshalb wird die Anzahl der Möglichkeiten durch 2 dividiert und wir erhalten $12 : 2 = 6$ Möglichkeiten.

Folgende Ziehungen sind möglich:

S	R	R	G
S	G	R	B
S	B	G	B

Definition 9. Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Definiere

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &:= 1 \\ \binom{n}{k} &:= 0 \text{ für } k > n \\ \binom{n}{k} &:= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!} \text{ für } 1 \leq k \leq n.\end{aligned}$$

Man nennt die Zahlen $\binom{n}{k}$ Binomialkoeffizienten.

Für $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Im Fall $k = 0$ ergibt sich diese Formel durch Einsetzen, im Fall $k \geq 1$ durch Erweitern mit $(n-k)!$.

Aus dieser Darstellung ergibt sich

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } 0 \leq k \leq n.$$

Weiters gelten

$$\binom{n}{n} = 1 \text{ und } \binom{n}{1} = n.$$

Satz 9. Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!}$$

verschiedene Arten ungeordneter Proben ohne Zurücklegen vom Umfang k mit $k \leq n$ entnehmen.

Beweis. Wie bereits gezeigt, können aus einer Menge von n unterscheidbaren Kugeln auf

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

verschiedene Möglichkeiten geordnete Proben ohne Wiederholung vom Umfang k gezogen werden. Da nun die Reihenfolge nicht mehr relevant ist, fallen $k!$ Proben zusammen. Durch die Division mit $k!$ ergibt sich

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{k!}.$$

□

Kombination mit Wiederholung

Urnenmodell: Aus einer Urne werden unterscheidbare Kugeln nacheinander und mit Zurücklegen gezogen, die Reihenfolge wird nicht beachtet.

Beispiel 16. In einer Urne befinden sich vier Kugeln. Eine schwarze (S), eine rote (R), eine blaue (B) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird mit Zurücklegen zweimal gezogen, die Reihenfolge wird nicht beachtet.

Welche und wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

Folgende Ziehungen sind möglich:

S	S		S	R		B	R		R	R
S	B		B	B		G	G			
S	G		B	G		G	R			

Wir erhalten also 10 Möglichkeiten.

Satz 10. Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln kann man auf

$$\binom{n+k-1}{k}$$

verschiedene Arten ungeordnete Proben mit Zurücklegen vom Umfang k entnehmen.

Beweis. Wir betrachten die n -elementige Menge der Kugeln. Für

$$i = \{1, \dots, n\}$$

sei $k_i \in \mathbb{N}$ die Häufigkeit der i -ten Kugel.

Das bedeutet beispielsweise k_2 gibt die Häufigkeit der 2-ten Kugel an.

Weiters muss

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$$

gelten, da insgesamt nur k -mal gezogen wird.

Wir ordnen der Stichprobe eine eindeutige 0 – 1 – Folge der Länge $n + k - 1$ mit k -mal 1 und $n - 1$ -mal 0 zu:

$$1\dots101\dots10\dots01\dots1$$

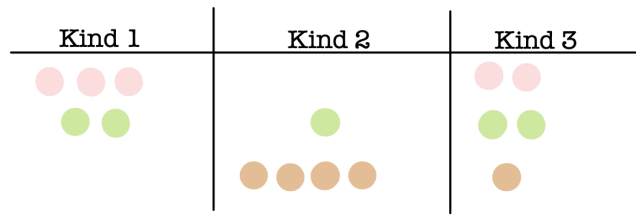


Abbildung 2.6: 0 – 1 – Folge

Wir erhalten also k -elementige Teilmengen in einer $n + k - 1$ -elementigen Menge. Diese Situation lässt sich nun aus Satz 10 zurückführen, wodurch

$$\binom{n + k - 1}{k}$$

folgt.

(Hofbauer 2018/19)

□

Anhand eines Beispiels wird nun gezeigt, wie eine 0 – 1 – Folge einer Stichprobe zugeordnet wird.

Beispiel 17. Gegeben sind fünf nicht unterscheidbare Pralinen, die auf drei Kinder aufgeteilt werden sollen.

Aus der Abbildung 2.6 können drei mögliche Ergebnisse für diese Aufteilung entnommen werden.

Im weiteren Vorgehen wird nun statt den Pralinen die Ziffer 0 angeschrieben und statt den Trennwänden, die sich bildlich gesprochen zwischen den Kindern befinden, wird die Ziffer 1 notiert.

Beispielsweise ergibt sich dadurch für die erste Aufteilung in der Abbildung die Zahlenfolge

0001100,

für die zweite

0010100

und für die dritte

1000010.

Das ursprüngliche Problem lässt sich nun als folgende, bereits bekannte Fragestellung formulieren: Wie viele Möglichkeiten gibt es fünf Nullen und zwei Einsen auf sieben freie Plätze aufzuteilen (Wolfseher o.D.)?

2.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel 18. Zwei Personen trennen sich räumlich. Person A hat zwei faire Würfel, einer davon ist rot, der andere ist grün. Person A entscheidet sich für eine Farbe, also für den roten oder grünen Würfel, teilt diese Entscheidung Person B aber nicht mit. Person A wirft nun die zwei fairen Würfel und teilt Person B mit, dass die Augenzahl des ausgewählten Würfels kleiner als 6 ist.

Person B muss nun angeben, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Summe der beiden Augenzahlen mindestens 10 beträgt (Kütting & Sauer 2014)?

Anhand dieses Beispiels sieht man, dass das Ergebnis eines stochastischen Vorgangs bereits feststeht. In diesem Fall ist die Augenzahl eines Würfels bereits fixiert.

Diese bereits bekannte Teilinformation, die *Bedingung*, wird mit Hilfe *bedingter Wahrscheinlichkeiten* verarbeitet (Henze 2008).

Definition 10. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B*.

(Henze 2008)

Eine weitere Schreibweise ist $P_B(A) = P(A|B)$. $P(A|B)$ ist nur für $P(B) > 0$ definiert (Henze 2008).

Wir greifen nun das Eingangs erwähnte Beispiel auf.

Beispiel 19. Beim Werfen zweier Würfel gilt

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

und somit

$$|\Omega| = 36.$$

Die bekannte Bedingung lautet „Person A teilt B mit, dass ein Würfel eine Augenzahl kleiner als 6 zeigt“.

Wie aus der Abbildung 2.7 zu entnehmen ist, gibt es für dieses Ereignis nur mehr 30 mögliche Fälle.

Da die ursprüngliche Frage war, wie wahrscheinlich eine Summe der beiden Augenzahlen

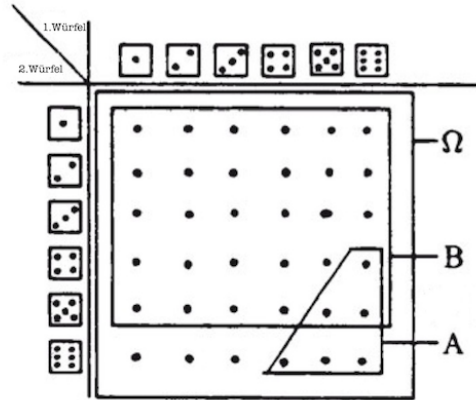


Abbildung 2.7: Bedingte Wahrscheinlichkeit (verändert nach Kütting & Sauer 2014)

ist, die mindestens den Wert 10 aufweist, müssen nun die Augensummen analysiert werden.

Bei den Würfelpaaren $\{(4, 6)\}$, $\{(5, 5)\}$ und $\{(5, 6)\}$ wird eine Summe die mindestens 10 beträgt erreicht, bei allen anderen nicht. Somit ergeben sich drei günstige Fälle von insgesamt 30 möglichen, was zu

$$P(A|B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

führt.

Mit Hilfe der Definition

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

lässt sich das Beispiel auch lösen.

Wir wissen, dass

$$A \cap B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6)\}$$

ist und somit die Wahrscheinlichkeit

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

2 Mathematische Grundlagen

beträgt, sowie

$$P(B) = \frac{30}{36}$$

gilt.

Somit ergibt sich ebenfalls

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}.$$

Wie wir bei diesem Beispiel sehen konnten, ist es oftmals nicht leicht die korrekte Bedingung zu erkennen und zu formulieren, weshalb das Beispiel als Einstiegsbeispiel, so wie es bei *Kütting & Sauer* (2014) gewählt wurde, aufgrund seiner Komplexität nicht zu empfehlen ist.

Definition 11. Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen *stochastisch unabhängig*, genau dann, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

(Kütting & Sauer 2014)

Beispiel 20. Wir bleiben bei dem Werfen zweier Würfel und betrachten die folgenden beiden Ereignisse:

- (i). Ereignis A: Die Augenzahl eines Würfels ist kleiner als 4.
- (ii). Ereignis B: Die Augensumme beider Würfel ist durch 4 teilbar.

In der Abbildung 2.8 ist das Ereignis A mit grüner Farbe und das Ereignis B mit rosa Farbe markiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} |A| &= 18 & P(A) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ |B| &= 9 & P(B) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ P(A) \cdot P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq \frac{5}{36} = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Die Ereignisse A und B sind somit nicht stochastisch unabhängig.

Visualisierung mit Baumdiagrammen

Bereits im Kapitel 2.2 haben wir festgestellt, dass Baumdiagramme vor allem bei einfachen Sachverhalten ein hilfreiches Mittel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten sind.

		2. Würfel					
1. Würfel	+						
		2	3	4	5	6	7
		3	4	5	6	7	8
		4	5	6	7	8	9
		5	6	7	8	9	10
		6	7	8	9	10	11
		7	8	9	10	11	12

Abbildung 2.8: Stochastische Unabhängigkeit (verändert nach Kütting & Sauer 2014)

Additionspfadregel

Gehören zu einem Ereignis eines Zufallsversuches verschiedene Wege, so erhält man die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses durch Addition der zugehörigen Wege (Kütting & Sauer 2014, S. 102).

Sind A und B unvereinbare Ereignisse, so ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A \cap B = \emptyset$.

Allgemein gilt für n unvereinbare Ereignisse mit $n \geq 2$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Multiplikationspfadregel

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades, der zu einem Ereignis gehört, miteinander multipliziert (Kütting & Sauer 2014, S. 184).

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit von A unter B wissen wir, dass

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

für $P(B) > 0$ ist. Durch Multiplikation von $P(B)$ erhalten wir

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

2 Mathematische Grundlagen

Allgemein gilt für n Ereignisse mit $n \geq 2$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

falls $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

Anhand eines Urnenbeispiels werden wir die beiden Regeln nun näher beleuchten.

Beispiel 21. In einer Urne befinden sich vier schwarze Kugeln (S), fünf rote Kugeln (R) und zwei blaue Kugeln (B). Es wird zweimal aus der Urne gezogen, wobei die Kugeln nicht zurückgelegt werden.

Die zwei folgenden Fragen möchten wir mit Hilfe eines Baumdiagrammes lösen:

- (i). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zuerst eine rote Kugel und dann eine schwarze Kugel zu ziehen?
- (ii). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(R)$ genau eine rote Kugel zu ziehen?

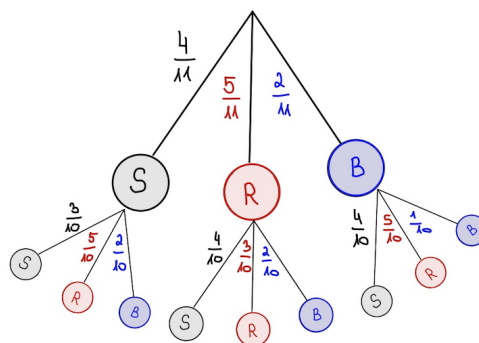


Abbildung 2.9: Baumdiagramm - Urne

ad (i). Der Weg (R)-(S) beschreibt das Ereignis zuerst eine rote Kugel und dann eine schwarze Kugel zu ziehen. Da wir entlang eines Weges gehen, müssen die darauf angegebenen Wahrscheinlichkeiten laut Multiplikationspfadregel multipliziert werden. Die Wahrscheinlichkeit lautet

$$P(R \cap S) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = 0,18.$$

(ii). Die Wege (S)-(R), (R)-(S), (R)-(B), (B)-(R) beschreiben das Ereignis, genau eine rote Kugel zu ziehen.

Da wir sowohl entlang eines Weges gehen, als auch verschiedene Äste des Baumdiagrammes beachten, nutzen wir die Additions- und die Multiplikationspfadregel.

Die Wahrscheinlichkeit lautet

$$P(R) = \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{6}{11} = 0,\overline{54}.$$

3 Historisches und Allgemeines

Bereits seit Jahrhunderten begeistert das Spiel um das Glück die Menschheit. Bis zur Zeit des Mittelalters war die Auffassung verbreitet, dass der Ausgang eines Zufallsversuches durch den Willen Gottes beeinflusst war. Der Begriff Zufall war somit eng mit den religiösen Vorstellungen der Menschen verknüpft.

Die Korrelation, zwischen dem Zufall und dem Handeln Gottes, löste sich im Laufe der nachfolgenden Jahrhunderte auf, wodurch eine mathematische und philosophische Betrachtungsweise ermöglicht wurde (Gebhardt & Korte 2018).

Das mathematische Paradoxon von *Chavalier de Méré*, ein aus Frankreich stammender Amateurmathematiker, gilt als Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *De Méré* beschäftigte sich mit der Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Augenzahl zu würfeln.

Das Paradoxon kann wie folgt beschrieben werden:

Beispiel 22. Das Paradoxon von de Méré

Ein idealer Würfel wird geworfen. Die Wahrscheinlichkeit die Zahl 6 zu würfeln beträgt:

$$P(\text{Sechser}) = \frac{1}{6}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines sogenannten Doppelsechser, also beim zweimaligen Würfeln zweimal die Zahl 6 zu werfen, beträgt:

$$P(\text{Doppelsechser}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

De Méré betrachtete nun das viermalige Würfeln. Hier liegt die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Zahl 6 zu würfeln bei über 50 %. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit kann dies folgendermaßen nachgerechnet werden:

$$P(\text{mindestens ein Sechser}) = 1 - P(\text{kein Sechser}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 1 - 0,4823 \approx 0,5177.$$

Paradox ist nun, dass wenn hingegen 24 Mal mit zwei Würfeln geworfen wird, die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Doppelsechser zu erhalten, bei unter 50% liegt.

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens ein Doppelsechser}) &= 1 - P(\text{keine Doppelsechser}) \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 1 - 0,5086 \approx 0,4914. \end{aligned}$$

(Gebhardt & Korte 2018)

3 Historisches und Allgemeines

Mit diesem Problem konfrontierte *de Méré* den französischen Mathematiker *Blaise Pascal*. *Pascal* schuf in seinem Leben wichtige Erkenntnisse für die Mathematik, besonders bedeutsam das Pascal'sche Dreieck, welches *die geometrische Darstellung der sogenannten Binomialkoeffizienten* abbildet (Devlin 2009, S. 29).

Wie bereits im Kapitel 2.5 gezeigt, wird mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, n unterscheidbare Kugeln bei k -maligen Ziehen ohne Zurücklegen zu ziehen, beschrieben.

Beispiel 23. In einer Urne befinden sich vier Kugeln. Eine schwarze (S), eine Rote (R), eine blaue (B) und eine gelbe (G) Kugel. Aus der Urne wird ohne Zurücklegen zweimal gezogen, die Reihenfolge wird nicht beachtet.

Es gilt also

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6 \text{ Möglichkeiten.}$$

Das Pascal'sche Dreieck sieht folgendermaßen aus:

$n = 0$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														
---------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Die Einträge, die sich am Rand befinden, weisen den Wert 1 auf, die weiteren Einträge ergeben sich, indem die beiden darüberliegenden Werte addiert werden. Die erhaltenen Einträge entsprechen den Binomialkoeffizienten.

Beispielsweise kann in der Zeile $n = 4$ an der 3. Position unser zuvor berechneter Binomialkoeffizient

$$\binom{4}{2} = 6$$

abgelesen werden (Koch & Stämpfle 2015).

Beschäftigt man sich mit der Geschichte der Wahrscheinlichkeit und *Pascal*, so ist der Briefwechsel aus dem Jahre 1654 mit *Pierre de Fermat* besonders bedeutsam.

Beispiel 24. Force majeure - Das Teilungsproblem

Zwei Spielerinnen und Spieler A und B kommen zusammen, um einige Glücksspiele zu spielen. Jede Runde endet mit einem Gewinn oder Verlust, ein Gleichstand nach einer Runde ist nicht möglich. Gewonnen hat jene Person, die zuerst fünf Runden gewonnen hat.

Das Spiel muss jedoch abgebrochen werden, der aktuelle Spielstand lautet 4 : 3 für Person A.

Die Frage ist nun: Wie müssen die Einsätze verteilt werden, damit es für beide Spielende fair ist?

Nun haben bereits lange vor dem Briefwechsel der Beiden, Personen nach passenden Lösungsmöglichkeiten solcher Teilungsaufgaben gesucht.

- Eine Idee war, die Einsätze nach dem aktuellen Spielstand aufzuteilen, also im Verhältnis 4 : 3. Dieser Ansicht war *Fra Luca Pacioli* bereits im 15. Jahrhundert.
- *Niccolò Tartaglia* hielt als fairste Lösung den Gewinn im Verhältnis 3 : 2 aufzuteilen.
- Sowohl *Pascal* als auch *Fermat* kamen auf die Lösung den Einsatz im Verhältnis 3 : 1 aufzuteilen.

Pascal zieht die zukünftigen Ergebnisse als Grundlage seiner Überlegungen heran. Wie in Abbildung 3.1 veranschaulicht, gibt es die Möglichkeit das Person A mit dem nächsten Sieg auch insgesamt gewinnt. Es könnte jedoch auch eintreten, dass Person B die nächste Runde gewinnt und dann erst eine weitere Runde entscheidet. Insgesamt ergibt sich:

$$P(\text{Spieler*in A gewinnt}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$P(\text{Spieler*in B gewinnt}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Daraus resultierend soll der Einsatz im Verhältnis 3 : 1 aufgeteilt werden.

Fermat betrachtete ebenfalls die zukünftigen Runden und sah, dass maximal nach zwei Runden die Siegerin oder der Sieger feststeht. Es ergeben sich folgende vier Ausgangsmöglichkeiten:

3 Historisches und Allgemeines

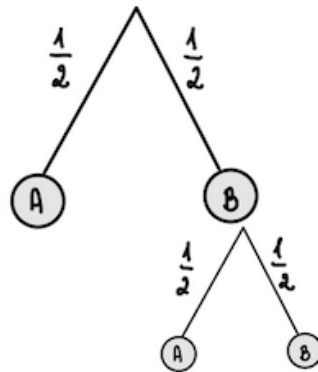


Abbildung 3.1: Baumdiagramm - Force majeure

1. Runde	2. Runde	Sieger*in
Gewinn A	Gewinn A	Sieger*in A
Gewinn A	Gewinn B	Sieger*in A
Gewinn B	Gewinn A	Sieger*in A
Gewinn B	Gewinn B	Sieger*in B

Man sieht, dass in 3 von 4 Fällen A als Siegerin oder Sieger hervorgeht und somit der Einsatz im Verhältnis 3 : 1 aufgeteilt werden soll (Kütting & Sauer 2014).

In ihrem Briefwechsel sprechen die beiden nie über Wahrscheinlichkeiten per se, sondern verwenden nur den Begriff Zufall. *Abraham de Moivre* befasste sich in seinen Büchern mit der *probability* und spricht in seinem Buch über das Maß der Wahrscheinlichkeit.

Bedeutend ist *Pierre Simon Laplace*, der die Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie in seinen Werken *Théorie analytique des probabilités* und *Essai philosophique sur les probabilités* zusammenfasste (Kütting & Sauer 2014).

4 Markov-Ketten

4.1 Intuitive Erarbeitung

Beispiel 25. Gegeben ist ein Spielfeld mit den vier Feldern A, B, C und D.

Zu Beginn wird die Spielfigur auf das Feld A, wo „Start“ zu lesen ist, gestellt und pro Zug je nach dem Ergebnis des Würfels vorgerückt. Landet die Spielfigur auf dem Feld D, so muss sie weiter auf das Feld B rücken. Herausgefunden werden möchte, wie wahrscheinlich es ist auf den jeweiligen Feldern zu landen.

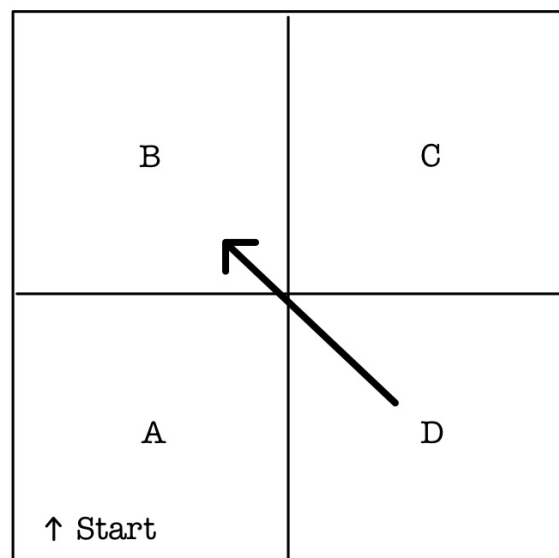


Abbildung 4.1: Einführungsbeispiel

Betrachtet man das Spielfeld, so ist festzustellen, dass die Felder nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit erreicht werden können. Dies liegt an dem Pfeil, der jede Spielfigur vom Feld D zurück zu Feld B schickt.

Deshalb ist zu überlegen, welches Würfelergebnis die Spielfigur von einem auf das andere Feld bringt und wie wahrscheinlich dieser Feldwechsel ist.

Die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels wird als *Übergangswahrscheinlichkeit* bezeichnet (Bewersdorff 2018).

4 Markov-Ketten

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten werden in eine *Übergangsmatrix* mit den Zeilen i und den Spalten j eingetragen, wobei die Matrix angibt, wie wahrscheinlich es ist von dem Zustand i zu dem Zustand j zu gelangen (Wakin & Rozell 2004).

Für das oben beschriebene Spielfeld, können die Übergangswahrscheinlichkeiten wie folgt überlegt und berechnet werden:

- Wechsel von A zu B

Die Spielfigur starte auf dem Startfeld A und soll am Ende dieses Zuges auf dem Feld B landen. Es soll also die Übergangswahrscheinlichkeit vom ersten Zustand (Start: Feld A) zum zweiten Zustand (Ende: Feld B) berechnet werden.

Damit dieses Ereignis eintritt, gibt es drei günstige Fälle, nämlich muss entweder ein Einser, ein Dreier oder ein Fünfer gewürfelt werden, mögliche wären sechs Fälle. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies eintritt, kann mit

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

berechnet werden.

- Wechsel von C zu D

Startet die Spielfigur am Beginn des Zuges von dem Feld C und soll am Ende dieses Zuges auf dem Feld D landen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit hierfür 0, da bei einem Würfelergebnis von eins oder fünf man zwar zum Feld D vorrückt, jedoch durch den Pfeil wieder auf dem Feld B landet. Es gilt

$$P(A) = \frac{0}{6} = 0.$$

Werden alle Berechnungen ausgeführt, so ergibt sich die folgende Übergangsmatrix 4.1 samt Übergangswahrscheinlichkeiten.

Mit $p_n(A)$, $p_n(B)$, $p_n(C)$ und $p_n(D)$ werden die Wahrscheinlichkeiten angeschrieben, nach n -maligen Würfeln, zu dem Feld A, B, C oder D zu gelangen.

Betrachten wir folgende Situationen:

- (i). Beim **Start**, also bei $n = 0$ gilt das sichere Ereignis $p_0(A) = 1$, da die Spielfigur zu Beginn des Spiels immer am Startfeld steht und somit gilt für die übrigen Felder

$$p_0(B) = p_0(C) = p_0(D) = 0.$$

	A	B	C	D
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

Tabelle 4.1: Übergangsmatrix

(ii). Nach **einem Zug**, also bei $n + 1$, ergeben sich die Übergangsgleichungen

$$\begin{aligned}
 p_{n+1}(A) &= \frac{p_n(A) + p_n(B) + 2p_n(C) + 2p_n(D)}{6} \\
 p_{n+1}(B) &= \frac{p_n(A) + p_n(B) + p_n(C) + p_n(D)}{2} \\
 p_{n+1}(C) &= \frac{2p_n(A) + 2p_n(B) + p_n(C) + p_n(D)}{6} \\
 p_{n+1}(D) &= 0
 \end{aligned}$$

indem die Werte aus der Übergangsmatrix abgelesen werden.

In der nachfolgenden Tabelle 4.2 werden die Wahrscheinlichkeiten aufgelistet, die nach $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ Würfeln erreicht werden. Zur besseren Übersicht wurde auf vier Nachkommastellen gerundet.

Zur Berechnung werden die oben beschriebenen Übergangsgleichungen verwendet. Mit Hilfe der Tabelle lässt sich leicht und schnell erahnen, dass sich eine *stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung* einstellt. Diesen Begriff werden wir im nächsten Kapitel erklären.

Es ergeben sich also folgende Wahrscheinlichkeiten, auf den jeweiligen Feldern zu landen:

$$P(A) = \frac{3}{14} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{2}{7} \quad P(D) = 0$$

(Bewersdorff 2018).

Mit diesem Einführungsbeispiel lässt sich die Struktur der Markov-Ketten erahnen. Entscheidend ist, dass im Gegensatz zu beispielsweise einfachen Würfelversuchen, wo die Ereignisse unabhängig voneinander sind, in diesem Fall es sehr wohl eine Rolle spielt, wo die Spielfigur im Zug davor zum Stehen gekommen ist (Bewersdorff 2012).

n	$p_n(A)$	$p_n(B)$	$p_n(C)$	$p_n(D)$
0	1	0	0	0
1	$0,1\bar{6}$	0,5	$0,\bar{3}$	0
2	$0,\bar{2}$	0,5	$0,2\bar{7}$	0
3	0,2130	0,5	0,2870	0
4	0,2145	0,5	0,2854	0
5	0,2142	0,5	0,2857	0

Tabelle 4.2: Wahrscheinlichkeiten

Jedoch, und dies ist die wichtigste Eigenschaft, kommt es gerade nur auf das letzte Feld, wo die Spielfigur stand, an. Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, *dass im $(n+1)$ -ten Versuch ein bestimmtes Ereignis eintritt, nur von dem im n -ten Versuch eingetretenen Ereignis* abhängt (Bewersdorff 2018, S. 74).

4.2 Mathematische Betrachtung

Anhand des intuitiv erarbeiteten Beispiels werden nun die Begriffe mathematisch eingeführt.

Definition 12. Sei S eine endliche Menge und $p = (p_{ij})_{i,j \in S}$ eine $S \times S$ - Matrix mit folgenden Eigenschaften:

(i).

$$p_{ij} \geq 0$$

für alle $i, j \in S$

(ii).

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$$

so ist p eine *stochastische Matrix*.

Das bedeutet, dass die Einträge der Matrix nicht negativ sind und die Summe der Einträge jeder Zeile 1 ergibt (Meintrup & Schäffler 2005).

Das nachfolgende Modell orientiert sich an den Inhalten von *Georgii* (2015).

Modell

Gegeben sei der Zustandsraum S mit

$$S = \{1, \dots, N\}$$

und die Ergebnismenge Ω mit

$$\Omega = \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n \in S\}.$$

Für $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega$ beschreibt ω_n den Zustand zum Zeitpunkt n . Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ definiere die Zylindermenge $[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}]$ durch

$$[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}] := \{(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega : \omega_0 = \alpha_0, \dots, \omega_{n-1} = \alpha_{n-1}\}.$$

4 Markov-Ketten

Nun sei $\mathcal{A}$ die kleinste σ -Algebra, die alle Zylindermengen enthält. Der folgende Satz sichert die Existenz dieser σ -Algebra.

Satz 11. *Sei $(\mathcal{A}_j)_{j \in J}$ eine Familie von σ -Algebren, dann ist $\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$ auch eine σ -Algebra.*

Beweis. Für jedes $j \in J$ gilt

$$\Omega \in \mathcal{A}_j \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j.$$

Sei

$$A \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j.$$

Für jedes $j \in J$ gilt

$$A \in \mathcal{A}_j \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}_j \Rightarrow \Omega \setminus A \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

Sei

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Folge in $\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$.

Für jedes $j \in J$ gilt

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}_j \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_j \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j.$$

□

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die Zufallsvariable $X_n : \Omega \rightarrow S$ durch

$$X_n(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) := \omega_n.$$

Die Zufallsvariable X_n gibt an, in welchem Zustand (aus S) man sich zum Zeitpunkt n befindet.

Definition 13. Sei S eine endliche Menge, α eine Verteilung auf S und $p = (p_{ij})_{i,j \in S}$ eine stochastische Matrix. Die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt (α, p) -Markov-Kette, falls

$$P(X_0 = i) = \alpha(i), i \in S$$

4.2 Mathematische Betrachtung

und für jedes $n \in \mathbb{N}$, $i_{n+1} \in S$ und alle $(n+1)$ -Tupel $(i_0, \dots, i_n) \in S^{n+1}$ mit

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$$

gilt:

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = p_{i_n j}.$$

(Meintrup & Schäffler 2005)

Die Definition wird nun näher betrachtet und einige Aspekte konkretisiert und mit dem Spielfeldbeispiel erläutert (Meintrup & Schäffler 2005).

- Mit p_{ij} werden die Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet. Zur Erinnerung, in dem Spielfeldbeispiel waren die Übergangswahrscheinlichkeiten genau jene Wahrscheinlichkeit, mit der die Figur einen Feldwechsel vollzieht. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind *stationär*, das bedeutet nicht von einem Zeitpunkt n abhängig.
- Das Stehen auf einem Spielfeld kann als *Zustand* aufgefasst werden. Zustände sind die Elemente von S , wobei unter X_n der gegenwärtige Zustand zum Zeitpunkt n zu verstehen ist.
- Die Gleichung

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i_n) = p_{i_n j}$$

beschreibt, dass der nächste Zustand X_{n+1} nur vom Zustand X_n abhängt und die Zustände $X_0, \dots, X_{n-1}$ nicht für den weiteren Verlauf relevant sind. Die Vergangenheit spielt also für die Zukunft keine Rolle, nur die Gegenwart ist für die Zukunft relevant. Diese Eigenschaft wird als *Markov-Eigenschaft* betitelt.

Bemerkung. Die *Übergangswahrscheinlichkeit* von i_n zu i_{n+1} ist gegeben durch die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n).$$

Von einer *homogenen* Markov Kette spricht man, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitpunkt n abhängen. Bei einer Abhängigkeit vom Zeitpunkt n ist von einer *inhomogenen* Markov-Kette die Rede (Stocker & Waldmann 2013).

Satz 12. (i). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \in S$ gilt

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}).$$

4 Markov-Ketten

(ii). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $A_0, \dots, A_{n-1}, A_n \subset S$ gilt

$$P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \sum_{i_0 \in A_0} \cdots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}).$$

(iii). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in S$ gilt

$$P(X_n = j) = \sum_{i_0 \in S} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} P(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \cdots P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1})$$

(Stocker & Waldmann 2013).

Beweis. Da

$$\{X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

und die Markov-Eigenschaft

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)$$

gilt, folgt durch Anwenden der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) &= \\ P(X_n = i_n|X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) &= \\ P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

Wird dieser Schritt wiederholt angewendet, erhält man

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)P(X_1 = i_1|X_0 = i_0) \dots P(X_n = i_n|X_{n-1} = i_{n-1}).$$

Wendet man diese Vorgehensweise auf die Ereignisse

$$A_0, A_1, \dots, A_n \subset S$$

an, so erhält man

$$P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \sum_{i_0 \in A_0} \cdots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$$

und daraus folgend

$$\begin{aligned}
& P(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \\
& \sum_{i_0 \in A_0} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in A_1} P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \sum_{i_n \in A_n} P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
& \sum_{i_0 \in A_0} \cdots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}).
\end{aligned}$$

Wird dies nun auf

$$A_0 = S, \dots, A_{n-1} = S, A_n = \{j\}$$

angewendet, so erhält man

$$\begin{aligned}
P(X_n = j) &= P(X_0 \in S, \dots, X_{n-1} \in S, X_n \in \{j\}) = \\
& \sum_{i_0 \in S} P(X_0 = i_0) \cdot \sum_{i_1 \in S} P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots \\
& \sum_{i_{n-1} \in S} P(X_{n-1} = i_{n-1} | X_{n-2} = i_{n-2}) \cdot \sum_{i_n \in \{j\}} P(X_n = i_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}) = \\
& \sum_{i_0 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 | X_0 = i_0) \cdots P(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 26. Wir betrachten nun nochmals das Spielfeldbeispiel. Gegeben war die folgende stochastische Matrix.

	A	B	C	D
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

Tabelle 4.3: Übergangsmatrix

Wir wenden nun die neu kennengelernten Schreibweisen an.
Sei X_n die Markov-Kette so ist:

4 Markov-Ketten

- Der Wechsel von A zu B:

$$P(X_2 = B | X_1 = A) = p_{AB} = \frac{1}{2}$$

- Der Wechsel von C zu D:

$$P(X_2 = D | X_1 = C) = p_{CD} = 0$$

Neben der stochastischen Matrix, kann eine Markov-Kette, die endliche Zustandsräume S aufweist, durch einen Übergangsgraphen dargestellt werden.

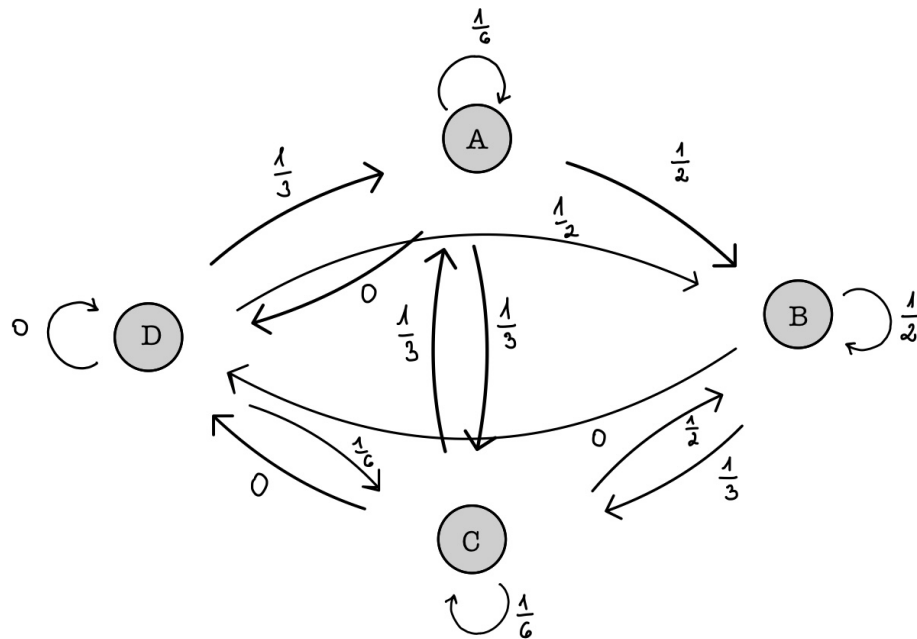


Abbildung 4.2: Übergangsgraphen - ABCD

Definition 14. Sei (X_n) eine (α, p) -Markov-Kette auf dem Zustandsraum S . Man nennt $i \in S$ einen *absorbierenden Zustand*, falls $p_{i,i} = 1$ gilt.

Der absorbierende Zustand ist endgültig, dieser Zustand kann nicht mehr verlassen werden.

Beispiel 27. Ein Teilchen kann sich entlang einer ganzzahligen Leiter nach rechts oder nach links frei bewegen. Der Zustandsraum ist durch

$$S = \{0, 1, \dots, N\}$$

mit $N \geq 1$ festgelegt. Mit der Wahrscheinlichkeit p findet eine Rechtsbewegung statt, mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ eine Linksbewegung. Gelangt das Teilchen an

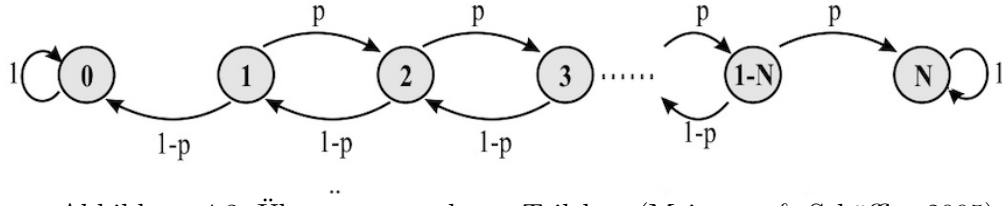


Abbildung 4.3: Übergangsgraphen - Teilchen (Meintrup & Schäffler 2005)

die Enden, bleibt es an diesen Positionen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten und der Übergangsgraph lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
 p_{i(i+1)} &= p & \text{für alle } 0 < i < N \\
 p_{i(i-1)} &= 1 - p & \text{für alle } 0 < i < N \\
 p_{ii} &= 0 & \text{für alle } 0 < i < N \\
 p_{00} &= p_{NN} = 1
 \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Enden jeweils absorbierende Zustände, da sich das Teilchen nicht mehr von den Enden wegbewegen kann.

Bisher haben wir bei den Markov-Ketten nur den nächsten Zustand herausfinden wollen, nun ist das Verhalten nach mehreren Schritten gefragt. Wir haben die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zustand i zum Zustand j mit

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

erläutert und ergänzen nun, dass wir in m Schritten vom Zustand i zum Zustand j gelangen wollen (Meintrup & Schäffler 2005).

Definition 15. Unter der m -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit versteht man

$$p_{ij}^{(m)} := P(X_{n+m} = j | X_n = i)$$

für jedes Paar $i, j \in S$.

Satz 13. Ist (X_n) eine (α, p) -Markov-Kette auf einem Zustandsraum S , so gilt für jedes Paar $i, j \in S$:

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$. Also ist für $m \in \mathbb{N}$ die Zahl $p_{i,j}^{(m)}$ der (i, j) -te Eintrag in der Matrix p^m .

Beweis. Unter $p_{i,j}^{(m+n)}$ ist also zu verstehen, in $m+n$ Schritten vom Zustand i zu Zustand j zu gelangen. Es wird also vom Zustand i aus in m Schritten ein Zustand k erreicht

4 Markov-Ketten

und schließlich nach weiteren n Schritten der Zustand j .

$$\begin{aligned}
 p_{i,j}^{(m+n)} &= P(X_{m+n} = j | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i) \cdot P(X_m = k | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} P(X_{m+n} = j | X_m = k) \cdot P(X_m = k | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Für $m = 1$ ist $p_{i,j}^{(1)} = p_{i,j}$ nach der Definition der Übergangsmatrix der (i, j) -te Eintrag der Matrix $p = p^1$.

Jetzt sei $m > 1$. Dann ist $p_{k,l}^{(m-1)}$ der (k, l) -te Eintrag der Matrix p^{m-1} .

Weiters ist $p_{i,j}^{(m)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(m-1)} p_{k,j}$, und das ist der (i, j) -te Eintrag der Matrix $p^{m-1}p = p^m$ $\square$

Beispiel 28. Wir greifen nochmals das Einführungsbeispiel auf.

Angenommen wir stehen auf dem Spielfeld A und wollen nach zweimaligen Würfeln auf dem Feld C landen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall?

	A	B	C	D
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0

Tabelle 4.4: Übergangsmatrix

$$\begin{aligned}
P(X_2 = C | X_0 = A) &= \sum_{k=A}^{k=D} P(X_2 = C, X_1 = k | X_0 = A) \\
&= \sum_{k=A}^{k=D} P(X_2 = C | X_1 = k, X_0 = A) \cdot P(X_1 = k | X_0 = A) \\
&= \sum_{k=A}^{k=D} p_{kC} p_{Ak} \\
&= p_{AC} p_{AA} + p_{BC} p_{AB} + p_{CC} p_{AC} + p_{DC} p_{AD} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot 0 \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

Verwendet man die Erkenntnis aus dem Theorem, dass $p_{ij}^{(m)}$ der (i, j) -te Eintrag in der Matrix p^m ist, so können wir auch anhand der folgenden Matrizen das Ergebnis ablesen.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} & 0 \\ \frac{7}{36} & \frac{1}{2} & \frac{11}{36} & 0 \\ \frac{7}{36} & \frac{1}{2} & \frac{11}{36} & 0 \end{pmatrix}$$

Für unsere Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, von Feld A in zwei Schritten zu Feld C zu gelangen, müssen wir in der Matrix in der 1. Zeile (entspricht Startfeld A) und 3. Spalte (entspricht Endfeld C) nachsehen.

Der gesuchte Eintrag $p_{13} = \frac{5}{18}$.

(Meintrup und Schäffler 2005)

Seien

$$\pi_j(n) = P(X_n = j)$$

mit $j \in S$ die *Zustandswahrscheinlichkeiten* der Markov-Kette zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$P(X_n = j) = \sum_{i \in S} P(X_0 = i) \cdot P(X_n = j | X_0 = i)$$

4 Markov-Ketten

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}.$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $\pi_j(n)$ können zu einem Zeilenvektor $\pi(n)$ zusammengefasst werden. Dann folgt

$$\pi(n) = \pi(0) p^n.$$

Dies besagt, dass durch die Multiplikation der Anfangsverteilung $\pi(0)$ mit der n -Schritt Übergangsmatrix p^n sich die Verteilung $\pi(n)$ ergibt. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $P(X_n = j)$ können durch das Ablesen der Elemente

$$P(X_n = j) = \pi_j(n) = (\pi(0) p^n)_j$$

der Zeilenvektoren bestimmt werden (Stocker & Waldmann 2013).

Beispiel 29. Greifen wir das Beispiel 28 auf, bei dem die Wahrscheinlichkeit von Feld A in zwei Schritten zu Feld C zu gelangen, gefragt ist.

Die Anfangsverteilung $\pi(0)$ ist durch den Zeilenvektor

$$\pi(0) = (1, 0, 0, 0)$$

gegeben, da auf dem Feld A gestartet wird.

Durch die folgende Multiplikation

$$\pi(0) \cdot p^2 = \pi(2)$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{18}, 0 \right)$$

erhalten wird die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\pi(2) = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{18}, 0 \right).$$

Dieser Vektor gibt uns folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- Mit 22,22% erreichen wir, ausgehend vom Feld A, nach zwei Schritten wieder das Feld A.
- Mit 50% erreichen wir, ausgehend vom Feld A, nach zwei Schritten das Feld B.

- Mit 27,77% erreichen wir, ausgehend vom Feld A, nach zwei Schritten das Feld C.
- Mit 0% erreichen wir, ausgehend vom Feld A, nach zwei Schritten das Feld D.

Definition 16. Sei (X_n) eine (α, p) -Markov-Kette mit Zustandsraum S und $i, j \in S$ zwei Zustände.

j heißt von i aus erreichbar, man schreibt $i \rightarrow j$, falls es ein $n \geq 0$ gibt mit

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Ist i von j aus erreichbar und j von i aus erreichbar, so heißen i und j kommunizierend, man schreibt $i \leftrightarrow j$.

Definition 17. Ist $C \subseteq S$ eine Teilmenge des Zustandsraums S einer (α, p) -Matrix und gilt für jedes $i \in C$:

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$$

so heißt C abgeschlossen.

4 Markov-Ketten

Definition 18. Ist $C \subseteq S$ eine Teilmenge des Zustandsraums S einer Markov-Kette und gilt

$$i \leftrightarrow j \quad \text{für alle } i, j \in C$$

so heißt C irreduzibel.

Definition 19. Sei X_n eine (α, p) -Markov-Kette mit Zustandsraum S und $i \in S$. Gilt

$$P(X_n = i \text{ für ein } n \geq 1 | X_0 = i) < 1, \quad \text{so heißt } i \text{ transient}$$

$$P(X_n = i \text{ für ein } n \geq 1 | X_0 = i) = 1 \quad \text{so heißt } i \text{ rekurrent.}$$

Beispiel 30. Anhand der Abbildung werden die zuvor definierten Zustände nun erläutert:

- (i). Vom Zustand A aus *erreicht* man Zustand B und umgekehrt, sie sind *kommunizierend*. Die Teilmenge $\{A, B\}$ ist *abgeschlossen*.
- (ii). Die Zustände D, E und F sind *irreduzibel*.

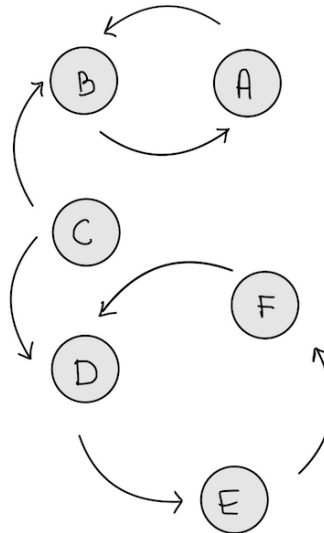


Abbildung 4.4: Übergangsgraphen - ABCDEF

Definition 20. Es sei p eine stochastische Matrix mit dem Zustandsraum

$$S = \{1, 2, \dots, N\},$$

$$J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$$

Teilmenge dieses Zustandsraumes und

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Mit $q_{i,J}$ beschreibt man die Wahrscheinlichkeit ausgehend vom Zustand i irgendwann einen Zustand J zu erreichen.

Es muss auf jeden Fall $q_{i,J} = 1$ gelten, falls $i \in J$, da man schon zum Zeitpunkt 0 in einem Zustand J ist.

Definition 21. Der Spaltenvektor q ist definiert durch

$$q = \begin{pmatrix} q_{1,J} \\ q_{2,J} \\ \vdots \\ q_{N,J} \end{pmatrix}.$$

Der folgende Satz und dessen Beweis orientieren sich an *Kemeny & Snell* (1960). Aufgrund des altertümlichen Zugangs wurden Anpassungen des Satzes und des Beweises wie in *Georgii* (2015) vorgenommen.

Satz 14. Sei p eine stochastische $N \times N$ -Matrix, $J \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$. Der Spaltenvektor q ist der kleinste Spaltenvektor $x = (x_i)_{i=1}^N$ mit folgenden Eigenschaften:

- $x_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.
- $x_i = 1$ für alle $i \in J$.
- $(p \cdot x)_i = x_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus J$.

Beweis. Wir setzen den Spaltenvektor $x = (q_{i,J})_{i=1}^N$.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit $q_{i,J} \geq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ und $q_{i,J} = 1$ für alle $i \in J$.

Sei $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus J$. Für ein $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ beschreibt $p_{i,k}$ die Wahrscheinlichkeit in einem Schritt vom Zustand i nach k zu gelangen.

Nach Satz 13 gilt daher

$$q_{i,J} = \sum_{k=1}^N p_{i,k} \cdot q_{k,J}$$

und daher

$$(p \cdot x)_i = x_i.$$

4 Markov-Ketten

Für jedes $i \in J$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $n = 0$ im Zustand J zu sein mit $q_i(0) := 1$. Weiters definieren wir die Wahrscheinlichkeit zu einem Zeitpunkt n im Zustand J zu sein mit $q_i(n) := 0$.

Für $i \notin J$ definieren wir die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $n = 0$ im Zustand J zu sein mit $q_i(0) := 0$.

Allgemein sei $q_i(n)$ die Wahrscheinlichkeit zu einem Zeitpunkt n das erste Mal im Zustand J zu sein, wenn man im Zustand i gestartet ist.

Dies bedeutet gleichzeitig, dass man zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, n-1$ nicht im Zustand J gewesen ist.

Daraus folgt für jedes $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$q_{i,J} = \sum_{n=0}^{\infty} q_i(n).$$

Das bedeutet die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i aus in J zu landen ist gleich der Wahrscheinlichkeit zu irgendeinem Zeitpunkt n das erste Mal im Zustand J zu sein.

Für ein beliebiges $i \notin J$ ist $p_{i,k}$ die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i aus in einem Schritt im Zustand k zu landen. Von k aus erreicht man mit Wahrscheinlichkeit $q_k(n-1)$ den Zustand J das erste Mal in $(n-1)$ Schritten.

Daher gilt

$$q_i(n) = \sum_{k=1}^N p_{i,k} \cdot q_k(n-1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus J$.

Das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit von Zustand i aus nach J zu gelangen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit von einem Zustand i nach k und weiters von k in $(n-1)$ Schritten zum Zustand J zu gelangen.

Sei x ein Spaltenvektor und $x_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, $x_i = 1$ wenn $i \in J$ und $(p \cdot x)_i = x_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus J$.

Durch Induktion nach n wird gezeigt, dass

$$x_i \geq \sum_{k=0}^n q_i(k)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ gilt.

Sei $n = 0$, dann ist $x_i = 1 \geq 1 = q_i(0)$ für $i \in J$. Das bedeutet, zum Zeitpunkt $n = 0$ ist man mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 im Zustand J angelangt, wenn man in $i \in J$ startet.

Sei $x_i \geq 0 = q_i(0)$ für $i \notin J$. $0 = q_i(0)$ muss gelten, da für $i \notin J$, die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $n = 0$ schon im Zustand J zu sein, unmöglich, also gleich 0 ist.

Sei nun $n \geq 1$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Für jedes $i \in J$ ist

$$\sum_{k=0}^n q_i(k) = 1 \leq x_i.$$

Im Fall $i \notin J$ ist dann

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{l=1}^N p_{i,l} \cdot \underbrace{x_l}_{\geq \sum_{k=0}^{n-1} q_l(k)} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{l=1}^N p_{i,l} \cdot q_l(k)}_{q_i(k+1)} = \\ &= q_i(0) + \sum_{k=1}^n q_i(k) = \sum_{k=0}^n q_i(k). \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x_i \geq \sum_{k=0}^n q_i(k)$$

und deswegen ist

$$x_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} q_i(k).$$

Und da

$$x_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} q_i(k) = q_{i,J}$$

gilt

$$x_i \geq q_{i,J}.$$

Das bedeutet, dass $(q_{i,J})_{i=1}^N$ der kleinste Spaltenvektor $(x_i)_{i=1}^N$ mit den geforderten Eigenschaften ist. $\square$

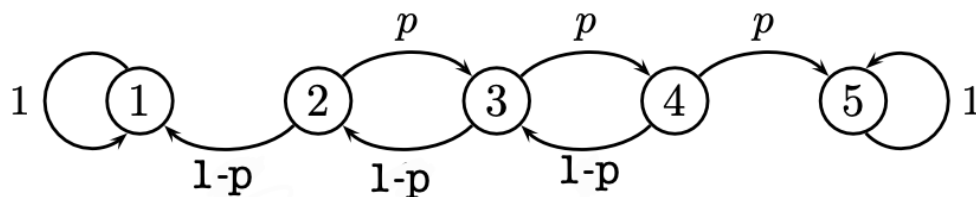


Abbildung 4.5: Übergangsgraphen (Universität Bielefeld o.D.)

Bemerkung. Dieser Satz ist besonders interessant, falls i ein absorbierender Zustand ist. Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition 14.

Definition 22. Es sei p eine stochastische Matrix mit dem Zustandsraum $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Man nennt eine nichtleere Menge $J \subseteq S$ *absorbierend*, falls $q_{i,k} = 0$ für alle $i \in J$ und $k \in S \setminus J$.

Ein Zustand $i \in S$ heißt *absorbierender Zustand*, falls $\{i\}$ absorbierend ist.

Beispiel 31. Wir betrachten folgenden Übergangsgraphen, den wir als Matrix mit dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ darstellen:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $1 - p = q$. Durch den Graphen beziehungsweise die Matrix ist zu erkennen, dass es zwei absorbierende Zustände gibt, nämlich den Zustand 1 und 5.

Wir betrachten in diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeiten in den absorbierenden Zustand $u = 5$ zu gelangen.

Bereits festzustellen ist, dass der Zustand 1 nicht verlassen werden kann, somit auch der Zustand $u = 5$ niemals vom Zustand 1 aus erreicht werden kann und damit die Wahrscheinlichkeit $q_1 = 0$ ist.

Weiters gilt $q_5 = 1$, da der Zustand $u = 5$ absorbierend ist.

Es gilt also

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ q_5 &= 1 \end{aligned}$$

Wir stellen nun ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0, \\ q_2 &= p \cdot q_3 + q \cdot q_1 = p \cdot q_3 \\ q_3 &= p \cdot q_4 + q \cdot q_2 = p \cdot q_4 + pq \cdot q_3, \\ q_4 &= p \cdot q_5 + q \cdot q_3 = p + pq \cdot q_4 + pq^2 \cdot q_3, \\ q_5 &= 1 \end{aligned}$$

Durch Umformen der entsprechenden Gleichungen erhält man die Lösungen

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{p^3}{1 - 2pq} \\ q_3 &= \frac{p^2}{1 - 2pq} \\ q_4 &= \frac{p - p^2 + p^3}{1 - 2pq}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst wurde also

$$p \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

berechnet.

4 Markov-Ketten

Betrachten wir ein Beispiel mit konkreten Zahlenwerten.

Beispiel 32. Gegeben ist die folgende Matrix mit dem Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Durch die Matrix ist zu erkennen, dass es vier absorbierende Zustände gibt, nämlich Zustand 1, 2, 3 und 4.

Wir betrachten in diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeiten in den absorbierenden Zustand $u = 1$ zu gelangen.

Bereits festzustellen ist, dass der Zustand 1, 2, 3 und 4 nicht verlassen werden kann, was zu den folgenden Wahrscheinlichkeiten, in den Zustand $u = 1$ zu gelangen, führt.

$$q_1 = 1$$

$$q_2 = 0$$

$$q_3 = 0$$

$$q_4 = 0$$

Durch die Multiplikation erhalten wir

$$p \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5}{5} \end{pmatrix}$$

Wir setzen nun die eben berechneten Wahrscheinlichkeiten ein

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1+0+0+0+q_5}{5} \end{pmatrix}$$

und lösen für q_5 die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} q_5 &= \frac{1+q_5}{5} \\ q_5 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = q$$

folgt.

Aus diesem Vektor kann also die Absorptionswahrscheinlichkeit von den Zuständen 1,2,3,4 und 5 in den absorbierenden Zustand $u = 5$ zu gelangen, abgelesen werden. Zum Beispiel ist die Absorptionswahrscheinlichkeit ausgehend von dem Zustand 5 in den absorbierenden Zustand 1 zu gelangen $\frac{1}{4}$, also 25%.

Beispiel 33. Wir betrachten einen klassischen Münzwurf, wobei Kopf und Zahl geworfen werden können. Kommt die Münze auf der Seite des Kopfes zu liegen, so ist das Ziel des Spiels erreicht und es wird nicht noch einmal geworfen. Kommt die Münze auf der Seite der Zahl zu liegen, so wird noch einmal geworfen.

4 Markov-Ketten

Gegeben ist also die folgende Matrix mit dem Zustandsraum $S = \{K, Z\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Durch die Matrix ist zu erkennen, dass der erste Zustand Kopf absorbierend ist, da, wenn die Münze Kopf zeigt, das Ziel schon erreicht ist und nicht weiter geworfen wird.

Wir betrachten in diesem Beispiel die Absorptionswahrscheinlichkeiten zu $u = K$ zu gelangen.

Wir erhalten die Wahrscheinlichkeit

$$q_K = 1.$$

Durch die Multiplikation erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_K \\ q_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_K \\ \frac{q_K + q_Z}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen die eben berechnete Wahrscheinlichkeit für q_K ein

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+q_Z}{2} \end{pmatrix}$$

und lösen für q_Z die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} q_Z &= \frac{1 + q_Z}{2} \\ q_Z &= 1 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = q_i$$

folgt. Dieses Ergebnis bedeutet, dass ausgehend vom Zustand Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 der absorbierende Zustand Kopf erreicht wird.

5 Black Jack

Der Ursprung des Glücksspiels Black Jack geht in das 16. Jahrhundert zurück. Im Laufe des 20. Jahrhundert gewann das Spiel mehr an Beliebtheit, damals war es noch unter dem Namen *twenty-one*, zu Deutsch *Einundzwanzig* verbreitet (Taylor 2021).

5.1 Wichtige Begriffe

Zu Beginn werden einige wichtige Begriffe geklärt, die im Zusammenhang mit Black Jack immer wieder auftreten.

- **Black Jack:** Unter dem Titel des Spiels ist die höchste Kartenkombination zu verstehen. Sie setzt sich aus einem Ass und entweder einer 10, einem Buben, einer Dame oder einem König zusammen. Diese Kombination schlägt jede andere.
- **Box:** Die halbkreisförmig angeordneten Boxen befinden sich auf einem Black Jack Tisch und stellen das Spielfeld dar.
- **Boxinhaberinnen und Boxinhaber:** So werden die Spielerinnen und Spieler bezeichnet. Weiters gibt es sogenannte stehende Mitspielende. Die Entscheidungskraft liegt jedoch nur bei den Boxinhaberinnen und Boxinhabern.
- **Dealerin oder Dealer:** Die Croupière oder der Croupier wird als Dealerin oder Dealer bezeichnet.
- **Teilen:** Besitzen die ersten beiden Karten denselben Wert, so ist es möglich diese zu teilen und mit zwei Einsätzen weiterzuspielen.
- **Verdoppeln:** Nach Erhalt der ersten beiden Karten, kann der Einsatz verdoppelt werden. Danach bekommt man nur noch eine weitere Karte ausgeteilt.
- **Stand-Off:** Hiermit bezeichnet man den Fall des Punktegleichstands, also einem Unentschieden.
- **Versicherung:** Erhält die Bank als erste Karte ein Ass, so ist es möglich eine Versicherung gegen ein drohendes Black Jack der Dealerin oder des Dealers zu setzen.
- **Bust:** Das Über- oder Verkaufen, beim Erreichen von mehr als 21 Punkten, wird als Bust bezeichnet.

(Casinos Austria 2023)

5.2 Spielbeschreibung

Das Spiel Black Jack wird mit bis zu sieben Spielerinnen und Spielern gespielt. Diese platzieren sich gegenüber der Dealerin bzw. des Dealers auf einem halbrunden Tisch, jede Mitspielerin und jeder Mitspieler bei einer Box (Bewersdorff 2018).

Es ist zu beachten, dass es beim Black Jack Spielen nur auf die eigenen und auf die Karten der Bank ankommt, ob man gewinnt oder nicht. Die Mitspielenden haben für einen selbst keine weitere Bedeutung, da alle Spielerinnen und Spieler gegen die Bank spielen (Taylor 2021).

Bei einem Black Jack Spiel werden zumeist sechs Kartendecks mit je 52 Karten verwendet. Das Spiel beginnt, indem die Dealerin oder der Dealer jeder mitspielenden Person eine Karte offen austeilt. Beim Austeilen beginnt sie oder er an der sogenannten First Base, das ist die Person, die an ihrer oder seiner linken Seite sitzt. Sie oder er selbst nimmt sich auch eine Karte bevor nochmals jede Mitspielerin und jeder Mitspieler eine zweite Karte erhält. Auch diese liegt mit dem Wert nach oben auf (Blackjack Winner o.D.).

Die Karten in einem Kartendeck zählen verschiedene Punktwerte von 2 bis 11. Es gibt einerseits Karten mit einem bestimmten Kartenwert, dieser kann 2 bis 10 Punkte zählen, und andererseits Karten mit einem bestimmten Bild, diese zählen ebenfalls 10 Punkte. Karten, die den Wert 10 zählen sind der Bube, die Dame oder der König. Einen Sonderfall bildet das Ass, dieses kann je nach Situation einen oder 11 Punkte zählen (Casinos Austria 2023).

Haben die spielenden Personen ihre ersten beiden Karten erhalten, haben sie nun folgende Möglichkeiten:

- Mit dem Befehl Hit kann die Person eine weitere Karte anfordern.
- Mit dem Befehl Stand kann die Person stehen bleiben, das bedeutet sie möchte keine weitere Karte ausgeteilt bekommen.
- Mit den Befehlen Split, Verdoppeln oder Versichern kann die Person spezielle Spielverläufe einleiten.

(Casinos Austria 2023)

Abhängig ist die Entscheidung zwischen diesen Möglichkeiten von dem Wert, der durch die beiden ersten Karten bereits erreicht wurde und die Karten, die die Bank erhalten hat.

Das Ziel des Spieles ist es mit Hilfe von zwei oder mehr Spielkarten eine Punkteanzahl zu erreichen, die näher an 21 liegt, als die Punktezahl der Bank.

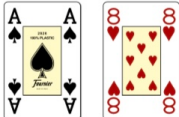
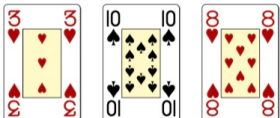
	Ass + Bild, Ass + 10: Black Jack, das ist die höchste Kartenkombination Ace + face card, ace + 10: Black Jack, this is the highest card combination
	Dame + 5 + 3 = 18 Queen + 5 + 3 = 18
	Bube + 6 + 1 = 17 Jack + 6 + 1 = 17
	Ass + 8 = 9 oder 19 Ace + 8 = 9 or 19
	3 + 10 + 8 = 21 3 + 10 + 8 = 21

Abbildung 5.1: Kartenkombinationen (Casinos Austria 2023)

Wichtig ist, dass der Wert 21 nicht übertroffen werden darf, da man sonst als verkauft gilt (Casinos Austria 2023).

Die Dealerin bzw. der Dealer muss, nachdem die Mitspielenden ihre Entscheidungen getroffen haben, eine zweite Karte ziehen. Hier gibt es eine zusätzliche Regel zu beachten, sie oder er muss, bis der Wert 16 erreicht ist, weitere Karten ziehen, ab dem Erreichen des Werts 17 darf sie oder er keine weitere nehmen.

Erreicht die Bank einen Wert der 21 übersteigt, so haben alle Mitspielerinnen und Mitspieler, die sich nicht überkauft haben, gewonnen.

Tritt dieser Fall nicht ein, so gewinnen nur jene Boxinhaberinnen und Boxinhaber, deren Wert der Karten näher an 21 ist als der der Bank. In dieser Situation gewinnt man seinen Einsatz 1 : 1 zurück. Kommt es zu einem Stand-Off, weil die Bank und die oder

5 Black Jack

der Mitspielende den gleichen Wert haben, so behält die Person den Einsatz (Blackjack Winner o.D., Casinos Austria 2023).

Es können drei besondere Situationen beim Austeilen der ersten beiden Karten eintreten:

- Erreicht eine Spielerin oder ein Spieler bereits mit den ersten beiden Karten den Wert 21, so nennt man dies ein Black Jack. Dies kann, wie in der Abbildung 5.1 verdeutlicht, einerseits durch ein Ass und einen Buben, eine Dame oder einen König erreicht werden oder andererseits durch ein Ass und die Karte 10. Tritt ein Black Jack ein, so wird der Gewinn im Verhältnis 3 : 2 ausbezahlt, vorausgesetzt die Bank hat kein Black Jack erreicht.
- Erreicht die Bank ein Black Jack aber keine weitere mitspielende Person, so gewinnt die Bank diese Runde und das Spiel wird beendet, ohne, dass eine Spielerin oder ein Spieler eine weitere Entscheidung treffen kann.
- Erhält die Dealerin bzw. der Dealer als erste Karte ein Ass, so haben alle Mitspielenden die Möglichkeit sich gegen ein möglicherweise eintretendes Black Jack zu versichern. Nimmt man diese Versicherung an und erhält die Bank als nächstes eine Karte, die 10 Punkten wert ist, wodurch sie ein Black Jack erreicht, wird der Einsatz im Verhältnis 2 : 1 ausbezahlt.

(Taylor 2021)

Da es in diesen Fällen immer um das Erreichen des Black Jacks mit den ersten beiden Karten geht, betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, dass diese Situation tatsächlich eintritt.

Um ein Black Jack zu erreichen wird ein Ass und eine Karte, die mit 10 Punkten gezählt wird, gebraucht. Die Wahrscheinlichkeit ein Ass zu erhalten ist

$$P(\text{Ass}) = \frac{1}{13}$$

und die Wahrscheinlichkeit einer Karte mit 10 Punkten ist

$$P(10 \text{ Punkte Karte}) = \frac{4}{13}.$$

Es ist nun möglich als erste Karte ein Ass und dann eine 10 Punkte Karte zu erhalten oder in der genau umgekehrten Reihenfolge.

Daraus ergibt sich

$$P(\text{Black Jack}) = \frac{1}{13} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{8}{169} \approx 0,0473.$$

Das bedeutet mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,73 Prozent erreicht man ein Black Jack.

Die Tabelle 5.1 bietet einen Überblick über die Gewinnsituation zwischen Spielerinnen und Spieler sowie der Bank.

Spieler*in	< 17	17	18	19	20	21	> 21	Blackjack
Bank								
17	-1	0	1	1	1	1	-1	1,5
18	-1	-1	0	1	1	1	-1	1,5
19	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1,5
20	-1	-1	-1	-1	0	1	-1	1,5
21	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1	1,5
> 21	1	1	1	1	1	1	-1	1,5
Blackjack	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0

Tabelle 5.1: Überblick Gewinnsituation (Monka et al. 1999)

5.3 Entscheidungen treffen

Die Frage, die sich die Boxinhaberinnen und Boxinhaber also stellen müssen, ist, nehme ich noch eine weitere Karte oder bleibe ich bei meinem aktuellen Punktestand stehen. Um diese Frage zu beantworten, muss ein wesentlicher Faktor nochmal betont werden. Die Dealerin bzw. der Dealer und somit die Bank, gewinnt immer, wenn eine oder einer der Mitspielenden einen Wert über 21 erreicht. Intuitiv lässt sich also vermuten, dass eine defensivere Spielweise klüger ist (Bewersdorff 2018).

Mathematisch gesehen sind alle Kartenwerte gleichwahrscheinlich, nämlich treten sie mit

$$p = \frac{1}{13}$$

auf.

Als Sonderfall ist der Kartenwert 10 zu betrachten, dieser tritt mit

$$p = \frac{4}{13}$$

auf.

Hier ist bereits eine Ungenauigkeit zu betrachten, denn die Gleichwahrscheinlichkeit kann eigentlich nur angenommen werden, wenn es einen unendlich großen Stapel an Karten gibt. Da uns aber eine durchschnittlich optimale Strategie interessiert, ist diese Annahme vertretbar (Bewersdorff 2018).

Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Punktesummen

Wir werden anhand eines Beispiels erarbeiten, wie die bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können. Der Aufwand ist extrem, weshalb hierfür oft Simulationen verwendet werden.

Beispiel 34. Die Spielerin oder der Spieler hat die beiden Karten Herz 8 und Karo 10 ausgeteilt bekommen. Insgesamt haben die beiden Karten einen Wert von 18. Die Bank besitzt als erste Karte, die Herz Dame, hat also bereits einen Wert von 10 Punkten erreicht.

Die Frage lautet, soll die Boxinhaberin bzw. der Boxinhaber noch eine Karte nehmen oder bei dem Wert 18 stehen bleiben, wenn die Dealerin bzw. der Dealer einen Wert von 10 aufweist?

Vermutlich wird die Spielerin bzw. der Spieler bei so einem hohen Wert, der nah an 21 liegt, stehen bleiben und keine weitere Karte nehmen.

Wir erläutern nun die beiden möglichen Entscheidung der spielenden Person:

- Betrachten wir zuerst den Fall, dass die Spielerin bzw. der Spieler keine weitere Karte nimmt. In diesem Fall verliert sie oder er, wenn die Bank mit der nächsten Karte einen Wert von 19, 20 oder 21 erreicht, da sie somit näher an 21 ist als die spielende Person mit ihrem Wert von 18.

Wir werden nur den Fall betrachten, wie die Bank es schafft den Wert 19 zu erreichen und bereits an diesem einen Fall sehen, wie aufwendig die händische Berechnung dieser bedingten Wahrscheinlichkeit ist.

Die Möglichkeiten den Wert 19 mit weiteren Karten zu erreichen, wenn die Startkarte einen Wert von 10 aufweist, sind in Tabelle 5.2 abgebildet.

Zu beachten ist, dass beispielsweise der Fall der Kartenkombination $5 - 2 - 2$ nicht möglich ist, da bei dem Wert $10 + 5 + 2 = 17$ die Dealerin bzw. der Dealer laut Regel keine Karte mehr aufnehmen darf und somit der Fall $5 - 2 - 2$ nie eintreten kann.

Neben der tabellarischen Darstellung der Möglichkeiten den Wert 19 zu erreichen, kann auch ein sehr komplexes Baumdiagramm angefertigt werden, das in Abbildung 5.2 zu sehen ist.

9	45	36	3A5	27	25	2A6	2AA5
63	423	333	3A23	243	223	2A33	2AA23
54	4A4	324	3AA4	234	22A4	2A24	2AAA4
5A3	4AA3	32A3	3AAA3	23A3	22AA3	2A2A3	2AAAA3

Tabelle 5.2: Dealer*in erreicht 19 (1. Karte: 10)

Wir wenden im Baumdiagramm die Multiplikationsregel an, um die Wahrscheinlichkeit eines Weges zu berechnen. Aufgrund der besseren Übersicht wurden die einzelnen Wege nicht mit der passenden Wahrscheinlichkeit beschriftet.

Beispielsweise erhalten wir für die Kartenabfolge $10 - 2 - 1 - 3 - 3$ die Wahrscheinlichkeit:

$$P(10 - 2 - 1 - 3 - 3) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \approx 0,0000350.$$

Um die Wahrscheinlichkeit $P(\text{Dealer*in } 19 | 1. \text{ Karte } 10)$ zu berechnen, müssen alle Äste im Baumdiagramm berechnet werden. Alle mit einem, zwei, ... , sechs Knoten können zusammengefasst werden und wir erhalten:

$$\begin{aligned} P(\text{Dealer*in } 19 | 1. \text{ Karte } 10) &= \frac{1}{13} + 5 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^3 + 10 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^4 \\ &\quad + 5 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^5 + \left(\frac{1}{13}\right)^6 \approx 0,11142. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Bank mit der 1. Karte 10, den Wert 19 erreicht, beträgt 11,142% (Taylor 2021).

An dieser Stelle verlassen wir für einen Augenblick unser Beispiel und fassen in der Tabelle 5.3 alle möglichen bedingten Wahrscheinlichkeiten zusammen. Diese werden aus *Bewersdorff* (2018) und *Monka et al.* (1999) entnommen.

Abwägen zwischen Gewinn- und Verlustchancen

Betrachten wir die Tabelle 5.3 genauer, so erkennt man, dass bei bestimmten ersten Karten der Bank, die Wahrscheinlichkeit einen Wert über 21 zu erreichen, sehr groß ist.

5 Black Jack

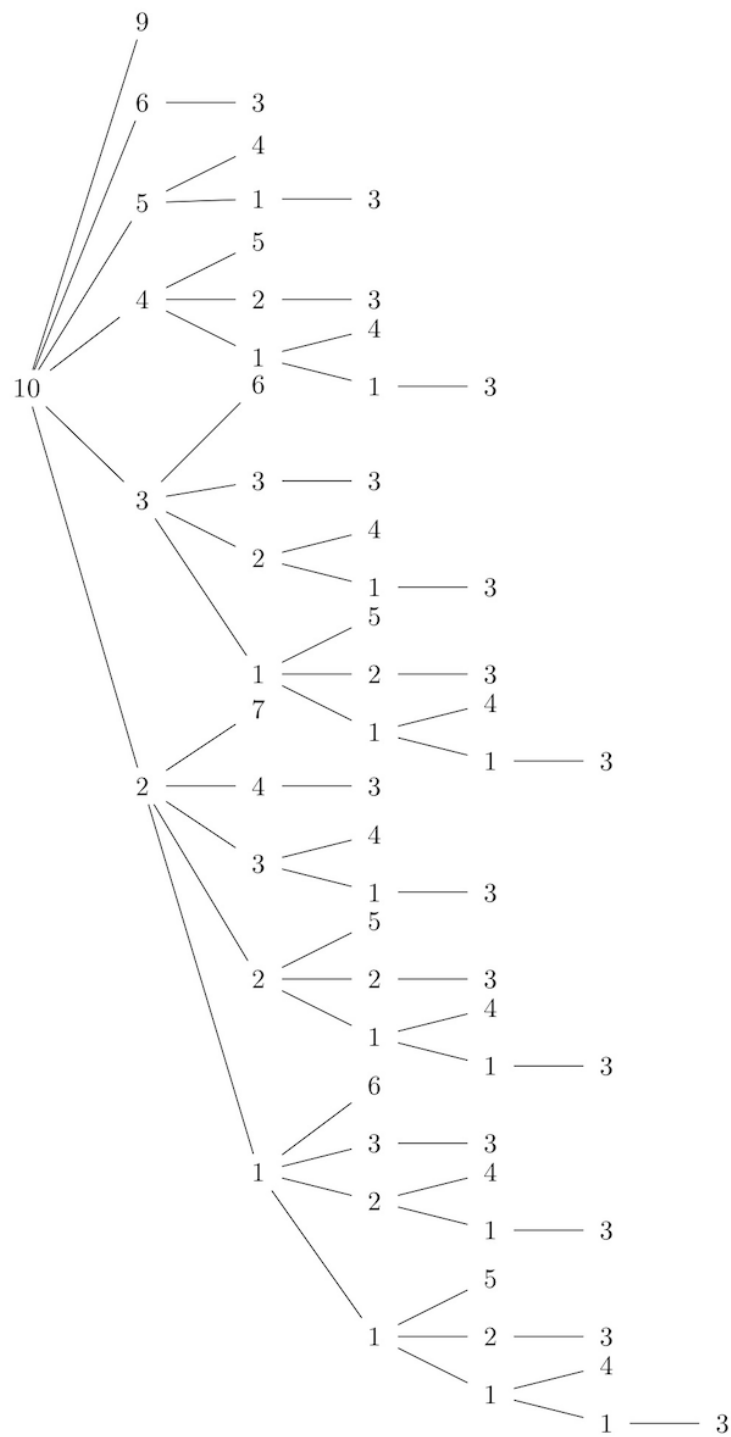


Abbildung 5.2: Dealer*in erreicht 19 (1. Karte: 10) (Taylor 2021)

Beispielsweise

$$P(\text{Dealer*in} > 21 | 1. \text{ Karte Ass}) = 0,1153$$

5.3 Entscheidungen treffen

Bankergebnis	17	18	19	20	21	> 21	Blackjack
1. Karte							
Ass	0,1308	0,1308	0,1308	0,1308	0,0539	0,1153	0,3077
2	0,1398	0,1349	0,1297	0,1240	0,1180	0,3536	0
3	0,1350	0,1305	0,1256	0,1203	0,1147	0,3739	0
4	0,1305	0,1259	0,1214	0,1165	0,1112	0,3945	0
5	0,1223	0,1223	0,1177	0,1131	0,1082	0,4164	0
6	0,1654	0,1063	0,1063	0,1017	0,0972	0,4232	0
7	0,3686	0,1378	0,0786	0,0786	0,0741	0,2623	0
8	0,1286	0,3593	0,1286	0,0694	0,0694	0,2447	0
9	0,1200	0,1200	0,3508	0,1200	0,0608	0,2284	0
10, B, D, K	0,1114	0,1114	0,1114	0,3422	0,0345	0,2121	0,0769

Tabelle 5.3: Bedingte Wahrscheinlichkeiten des Bankergebnis zur ersten Karte

und im Gegensatz dazu

$$P(\text{Dealer*in } > 21 | 1. \text{ Karte } 6) = 0,4232.$$

Wir wollen nun die Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten berechnen. Ist dieses Ergebnis positiv, so kann die Spielerin bzw. der Spieler davon ausgehen, in dieser bestimmten Spielsituation in Erwartung zu gewinnen. Ist der Wert negativ, so erwartet man einen Verlust. Anhand eines Beispiels wird der Rechengvorgang erläutert.

Beispiel 35. Wir greifen ein weiteres Mal das *Beispiel 34* auf.

Die Dealerin bzw. der Dealer hat als erste Karte die Herz Dame gezogen und somit den Wert 10 erreicht. Wir betrachten nun verschiedene Punktesummen der Spielenden.

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat weniger als 17 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die spielende Person nur, wenn sich die Bank verkauft. Aus der Tabelle

5.3 kann die Wahrscheinlichkeit abgelesen werden.

$$P(\text{Dealer*in} > 21 | 1. \text{ Karte } 10) = 0,2121$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit

$$1 - 0,2121 = 0,7879$$

gibt an, dass die Spielerin bzw. der Spieler verliert, nämlich genau dann, wenn sich die Bank nicht verkauft. Die Differenz zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit ergibt

$$0,2121 - 0,7879 = -0,5758.$$

Diese Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass die Spielerin bzw. der Spieler von ihrem bzw. seinem Einsatz in Erwartung 57,58% verliert.

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat 17 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die spielende Person dann, wenn sich die Bank verkauft. Weder einen Gewinn noch einen Verlust erleidet sie, falls die Dealerin bzw. der Dealer ebenfalls eine Punktesumme von 17 erreicht. Unter Beachtung dieses Zusatzfalls erhalten wir:

$$0,2121 - 0,7879 + 0,1114 = -0,4644$$

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat 18 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die spielende Person, wenn sich die Bank verkauft oder eine Punktesumme von 17 erreicht. Es ergibt sich somit:

$$0,2121 + 0,1114 - (0,1114 + 0,3422 + 0,0345 + 0,0769) = -0,2415$$

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat 19 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die spielende Person, wenn sich die Bank verkauft oder eine Punktesumme von 17 oder 18 erreicht. Es ergibt sich somit:

$$0,2121 + 0,1114 + 0,1114 - (0,3422 + 0,0345 + 0,0769) = -0,0187$$

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat 20 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die spielende Person, wenn sich die Bank verkauft oder eine Punktesumme von 17, 18 oder 19 erreicht.

$$0,2121 + 0,1114 + 0,1114 + 0,1114 - (0,0345 + 0,0769) = 0,4349$$

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat 21 Punkte erreicht. In diesem Fall gewinnt die

5.3 Entscheidungen treffen

spielende Person immer, außer die Bank hat ein Black Jack erreicht.

$$0,2121 + 0,1114 + 0,1114 + 0,1114 + 0,3422 - 0,0769 = 0,8116$$

(Monka et al. 1999)

In der Tabelle 5.4 sind alle Differenzen zwischen den Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten angegeben.

Punktesumme Spieler*in	< 17	17	18	19	20	21
1. Karte Bank						
Ass	- 0,7995	- 0,6387	- 0,3771	- 0,1155	+ 0,1461	+ 0,3307
2	- 0,2928	- 0,1530	+ 0,1217	+ 0,3863	+ 0,6400	+ 0,8820
3	- 0,2522	- 0,1172	+ 0,1483	+ 0,4044	+ 0,6503	+ 0,8853
4	- 0,2110	- 0,0805	+ 0,1759	+ 0,4232	+ 0,6611	+ 0,8888
5	- 0,1672	- 0,0449	+ 0,1997	+ 0,4397	+ 0,6705	+ 0,8918
6	- 0,1537	+ 0,0117	+ 0,2834	+ 0,4960	+ 0,7040	+ 0,9028
7	- 0,4754	- 0,1068	+ 0,3996	+ 0,6160	+ 0,7732	+ 0,9259
8	- 0,5106	- 0,3820	+ 0,1059	+ 0,5938	+ 0,7918	+ 0,9306
9	- 0,5432	- 0,4232	- 0,1832	+ 0,2876	+ 0,7584	+ 0,9392
10, B, D, K	- 0,5757	- 0,4643	- 0,2415	- 0,0187	+ 0,4349	+ 0,8117

Tabelle 5.4: Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit (Monka et al. 1999)

Zusätzliche Karte - ja oder nein?

Beispiel 36. Fortsetzung Beispiel 34

Zurück zu folgender Situation:

Die Spielerin oder der Spieler hat die beiden Karten Herz 8 und Karo 10 ausgeteilt bekommen. Insgesamt haben die beiden Karten einen Wert von 18. Die Bank besitzt als Karte, die Herz Dame, hat also einen Wert von 10 Punkten erreicht.

Die Frage lautet, soll die Boxinhaberin bzw. der Boxinhaber noch eine weitere Karte nehmen oder bei dem Wert 18 stehen bleiben, wenn die Dealerin bzw. der Dealer einen Wert von 10 aufweist?

Vermutlich wird die Spielerin bzw. der Spieler bei so einem nahen Wert an 21, stehen bleiben und keine weitere Karte nehmen.

Wir können nun aus der Tabelle 5.3 die weiteren Wahrscheinlichkeiten ablesen, um den Fall, dass die Spielerin bzw. der Spieler keine weitere Karte nimmt, zu berechnen.

In diesem Fall verliert sie oder er, wenn die Bank mit der nächsten Karte einen Wert von 19, 20, 21 oder direkt ein Black Jack erreicht, da sie somit näher an 21 ist als die spielende Person mit ihrem Wert von 18:

$$P(\text{Dealer*in } 19 | 1. \text{ Karte } 10) \approx 0,1114,$$

$$P(\text{Dealer*in } 20 | 1. \text{ Karte } 10) \approx 0,3422,$$

$$P(\text{Dealer*in } 21 | 1. \text{ Karte } 10) \approx 0,0345.$$

und

$$P(\text{Dealer*in Black Jack} | 1. \text{ Karte } 10) \approx 0,0769.$$

Addieren wir nun diese Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} &P(\text{Dealer*in } 19 | 1. \text{ Karte } 10) + P(\text{Dealer*in } 20 | 1. \text{ Karte } 10) \\ &\quad + P(\text{Dealer*in } 21 | 1. \text{ Karte } 10) \\ &\quad + P(\text{Dealer*in Black Jack} | 1. \text{ Karte } 10) \approx 0,5676 \end{aligned}$$

so ergibt dies 56,76%, dass die Spielerin bzw. der Spieler verliert, wenn sie oder er keine weitere Karte mehr nimmt.

- Betrachten wir den Fall, dass die Spielerin bzw. der Spieler eine weitere Karte anfordert.

Wir werden nun die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten vom Anfordern einer weiteren Karte beleuchten.

Allgemein, kann die Spielerin bzw. der Spieler mit je einer weiteren Karte die Werte 19, 20 und 21 erreichen. Mit je 10 Karten überkauft sich die spielende Person.

Zusammengefasst ergibt das:

Endsumme	19	20	21	> 21
Vorsumme				
18	$\frac{1}{13} = 0,0769$	$\frac{1}{13} = 0,0769$	$\frac{1}{13} = 0,0769$	$\frac{10}{13} = 0,7692$

Tabelle 5.5: Endsummen in Abhängigkeit der Vorsumme 18

Verlustwahrscheinlichkeit bei einer weiteren Karte

Die Spielerin bzw. der Spieler verliert,

- wenn sie oder er sich überkauft. Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = 0,7692.$$

- wenn sie oder er 19 Punkte erreicht, die Bank aber einen Wert von 20, 21 oder ein Black Jack erreicht.

Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot (0,3422 + 0,0345 + 0,0769) = 0,03489.$$

- wenn sie oder er 20 Punkte erreicht, die Bank aber einen Wert von 21 oder ein Black Jack erreicht.

Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot (0,0345 + 0,0769) = 0,008569$$

- wenn sie oder er 21 Punkte erreicht, die Bank aber ein Black Jack erreicht.

Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot 0,0769 = 0,005915$$

In Summe ergibt sich eine Verlustwahrscheinlichkeit von

$$P(\text{Verlust}) = 0,7692 + 0,03489 + 0,008569 + 0,005915 \approx 0,818574.$$

Gewinnwahrscheinlichkeit bei einer weiteren Karte

Die Spielerin bzw. der Spieler gewinnt,

- wenn sie oder er 19 Punkte erreicht, die Bank aber einen Wert von 17, 18 oder > 21 .

Die geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot (0,1114 + 0,1114 + 0,2121) = 0,03345.$$

- wenn sie oder er 20 Punkte erreicht, die Bank aber einen Wert von 17, 18, 19 oder > 21 .

Die geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot (0,1114 + 0,1114 + 0,1114 + 0,2121) = 0,04202.$$

- wenn sie oder er 21 Punkte erreicht, die Bank aber einen Wert von 17, 18, 19, 20 oder > 21 .

Die geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{13} \cdot (0,1114 + 0,1114 + 0,1114 + 0,3422 + 0,2121) = 0,06835.$$

In Summe ergibt sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von

$$P(\text{Gewinn}) = 0,03345 + 0,04202 + 0,06835 = 0,14382.$$

Wir vergleichen nun die beiden relevanten Ergebnisse:

- Mit einer Wahrscheinlichkeit von 56,76% verliert die Spielerin bzw. der Spieler, wenn sie oder er keine weitere Karte mehr fordert.
- Mit einer Wahrscheinlichkeit von 81,86% verliert die Spielerin bzw. der Spieler, wenn sie oder er eine weitere Karte fordert.

Diese Berechnung hat unsere intuitive Vermutung, keine Karte mehr zu nehmen, bestätigt (Taylor 2021).

Die Conclusio für unser Beispiel und somit die spezielle Spielsituation, dass eine Spielerin bzw. ein Spieler mit den beiden Karten Herz 8 und Karo 10 sowie die Bank mit einer Herz Dame, lautet, dass es besser ist keine weitere Karte anzufordern und bei dem Wert 18 stehen zu bleiben.

Wir möchten nun nochmals genauer auf die Gewinn- und Verlustchance eingehen, wenn eine weitere Karte genommen wird.

Es ist erkennbar, dass die Verlustwahrscheinlichkeit deutlich höher ist, als die Gewinnwahrscheinlichkeit. Berechnet man die Differenz von Gewinn- und Verlustchance so ergibt sich

$$0,14382 - 0,818574 = -0,674754.$$

Das bedeutet, ist die erste Karte der Bank eine mit dem Wert 10 und hat die Spielerin bzw. der Spieler bereits 18 Punkte erreicht, so werden in Erwartung 67,47% der Spiele verloren werden, sollte man eine weitere Karte anfordern. Dadurch ist die Strategie, keine weitere Karte zu nehmen, die bessere.

Die Tabelle 5.6 bietet einen Überblick über die Differenzen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten abhängig von der 1. Karte der Bank und der Vorsumme der spielenden Person.

Für die einfachere Berechnung wird jedes Ass mit dem Wert 1 gezählt (Monka et al. 1999).

5.4 Besondere Regeln

Im folgenden werden drei Regeln des Black Jack Spiels näher erläutert. Hierfür werden *Casinos Austria* (2023) und *Monka et al.* (1999) herangezogen.

• Splitten

Erhält die Spielerin bzw. der Spieler zu Beginn zwei Karten mit dem gleichen Wert, können diese geteilt werden. Diese beiden gleichwertigen Karten werden als Paar bezeichnet und bilden die Möglichkeit mit jeder der beiden Karten ein neues, unabhängiges Spiel zu beginnen. Für das zweite neu begonnene Spiel muss ein zusätzlicher Einsatz gesetzt werden.

Hierbei ist noch eine Zusatzregeln zu beachten. In einem gesplitteten Spiel kann mit einem Ass und einer 10-wertigen Karte nur der Wert 21 erreicht werden, nicht aber ein Black Jack.

Die Vorteile des Teilens sind je nach Kartenwert der beiden Anfangskarten unterschiedlich. Betrachtet man beispielsweise die Situation, dass die anfänglichen

Vorsumme Spieler*in 1. Karte Bank	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0,2353	- 0,2534	- 0,3078	- 0,3622	- 0,4167	- 0,4711	- 0,5362	- 0,6225	- 0,7292	- 0,8553
3	0,2589	- 0,2337	- 0,2912	- 0,3487	- 0,4063	- 0,4638	- 0,5317	- 0,62	- 0,7281	- 0,855
4	0,2831	- 0,2135	- 0,2742	- 0,3349	- 0,3957	- 0,4563	- 0,527	- 0,6175	- 0,727	- 0,8548
5	0,3074	- 0,1933	- 0,2573	- 0,3214	- 0,3855	- 0,4495	- 0,523	- 0,6152	- 0,7261	- 0,8545
6	0,3337	- 0,1706	- 0,2357	- 0,3008	- 0,3660	- 0,4311	- 0,5089	- 0,6076	- 0,7227	- 0,8538
7	0,2315	- 0,2534	- 0,2937	- 0,3341	- 0,3745	- 0,4149	- 0,4835	- 0,5912	- 0,7155	- 0,8519
8	0,1753	- 0,3079	- 0,3455	- 0,3831	- 0,4209	- 0,4585	- 0,506	- 0,5911	- 0,7137	- 0,8515
9	0,1139	- 0,2688	- 0,4039	- 0,4390	- 0,4742	- 0,5094	- 0,5537	- 0,6165	- 0,7157	- 0,8509
10, B, D, k	0,0061	- 0,4446	- 0,4772	- 0,5099	- 0,5426	- 0,5752	- 0,6164	- 0,6747	- 0,7503	- 0,8606

Tabelle 5.6: Differenz Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit bedingt zur 1. Karte der Bank und der Vorsumme der Spieler*in

Karten jeweils den Wert 8 haben. Zusammen würde sich der Wert 16 ergeben, der nur beim Ziehen eines Ass beziehungsweise einer Karte mit den Werten 2, 3, 4 oder 5 nicht zum Überkaufen führt. Durch das Splitten beginnt die Spielerin bzw. der Spieler zwei neue Spiele mit dem Wert 8, der eine deutlich verbesserte Ausgangssituation liefert.

Mathematische Betrachtung

Wie bereits in den vorigen Kapitel gezeigt, ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens und Verlierens von der Punktesumme der Spielerin bzw. des Spielers und der ersten Karte, die die Bank bekommen hat, abhängig.

Alle bereits berechneten Differenzen zwischen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit können den Tabellen entnommen werden, wobei hier das Splitten der Karten noch nicht berücksichtigt wurde.

Für unsere Überlegungen benennen wir die Differenzen zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der nicht geteilt wurde, mit X .

Da bei unseren jetzigen Betrachtungen das Teilen erlaubt ist, müssen wir auch jene Differenzen der Gewinn- und Verlustchancen beachten, wenn die Spielenden ihr Kartenpaar splitten und mit jeder der beiden Karten ein neues Spiel beginnen. Für unsere Überlegungen benennen wir diese Differenzen mit Y .

Hierfür erweitern wir die Tabelle 5.6 (Bewersdorff 2018).

Das Teilen des Paares ist von Vorteil, wenn folgende Zusammenhänge gelten:

- (i). Y und X sind positiv und $2 \cdot Y$ ist größer als X :

Falls

$$X > 0, Y > 0$$

gilt

$$2 \cdot Y > X.$$

- (ii). Y ist positiv und X ist negativ:

$$Y > 0, X < 0.$$

- (iii). Y und X sind negativ und der Absolutwert von $2 \cdot Y$ ist kleiner als X :

Falls

$$X < 0, Y < 0$$

5 Black Jack

Summe Spieler*in	4	5	6	7	8	9	10
1. Karte Bank							
Ass	- 0,4829	- 0,5006	- 0,5183	- 0,5224	- 0,4441	- 0,3532	-0,2513
2	- 0,1149	- 0,1282	- 0,1408	- 0,1092	- 0,0218	+ 0,0744	+ 0,1825
3	- 0,0826	- 0,0953	- 0,1073	- 0,0766	+ 0,0080	+ 0,1013	+ 0,2061
4	- 0,0494	- 0,0615	- 0,0729	- 0,0430	+ 0,0388	+ 0,1290	+ 0,2305
5	- 0,0124	- 0,0240	- 0,0349	- 0,0073	+ 0,0708	+ 0,1580	+ 0,2563
6	+ 0,0111	- 0,0012	- 0,0130	+ 0,0292	+ 0,1150	+ 0,1960	+ 0,2878
7	- 0,0883	- 0,1194	- 0,1519	- 0,0688	+ 0,0822	+ 0,1719	+ 0,2569
8	- 0,1593	- 0,1881	- 0,2172	- 0,2106	- 0,0599	+ 0,0984	+ 0,1980
9	- 0,2407	- 0,2666	- 0,2926	- 0,2854	- 0,2102	- 0,0522	+ 0,1165
10, B, D, K	- 0,3439	- 0,3662	- 0,3887	- 0,3714	- 0,3071	- 0,2181	- 0,0536

Tabelle 5.7: Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit (Bewersdorff 2018)

gilt

$$|2 \cdot Y| < |X|.$$

Beispiel 37. Die ersten beiden Karten, die der Spielerin oder dem Spieler ausgeteilt wurden, haben jeweils den Wert 8, während die Bank eine Karte mit dem Wert 9 erhalten hat.

Die Differenz X , also jener Unterschied der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der die spielende Person ihre Karten nicht aufteilt, beträgt

$$X = -0,5094$$

also $-50,94$ Prozent.

Dieser Wert kann aus der Tabelle 5.6 abgelesen werden.

Die Differenz Y , also jener Unterschied der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der die spielende Person ihr Kartenpaar aufteilt und zwei neue Spiele startet, beträgt

$$Y = -0,2102$$

also $-21,02$ Prozent.

Dieser Wert kann aus der Tabelle 5.7 abgelesen werden.

Da X und Y negativ sind, müssen wir die Eigenschaft (iii), also

$$X < 0, Y < 0$$

dann gilt

$$|2 \cdot Y| < |X|$$

überprüfen.

Es folgt durch Einsetzen der Werte $Y = -21,02$ und $X = -50,94$

$$\begin{aligned} |2 \cdot -21,02| &< |-50,94| \\ 42,04 &< 50,94. \end{aligned}$$

In dieser Situation ist es von Vorteil das anfängliche Kartenpaar zu splitten, wobei die Spielerin bzw. der Spieler auch durch das Aufteilen mit $42,04$ Prozent den gesetzten Einsatz verliert.

Beispiel 38. Die ersten beiden Karten, die der Spielerin oder dem Spieler ausgeteilt wurden, haben jeweils den Wert 4, während die Bank eine Karte mit dem Wert 7 erhalten hat.

Die Differenz X , also jener Unterschied der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der die spielende Person ihre Karten nicht aufteilt, beträgt

$$X = +0,0822$$

also $+8,22$ Prozent.

Dieser Wert kann aus der Tabelle 5.7 abgelesen werden.

Die Differenz Y , also jener Unterschied der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der die spielende Person ihr Kartenpaar aufteilt und zwei neue Spiele startet, beträgt

$$Y = -0,0883$$

also $-8,83$ Prozent. Dieser Wert kann aus der Tabelle 5.7 abgelesen werden.

5 Black Jack

Da nun der Wert von Y negativ und der Wert von X positiv ist, tritt keiner der Fälle (i), (ii) und (iii) ein. In dieser Situation ist es also besser, das anfängliche Kartenpaar nicht aufzuteilen.

Die Tabelle 5.8 gibt einen Überblick, wann das Kartenpaar geteilt werden soll.

Paare	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10*
1. Karte Bank										
Ass	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	T	-	-	-	-	-	T	T	T	-
3	T	-	-	-	-	T	T	T	T	-
4	T	T	T	-	-	T	T	T	T	-
5	T	T	T	-	-	T	T	T	T	-
6	T	T	T	-	-	T	T	T	T	-
7	T	T	T	-	-	-	T	T	-	-
8	T	-	-	-	-	-	-	T	T	-
9	T	-	-	-	-	-	-	T	T	-
10, B, D, K	T	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelle 5.8: Teilen - ja oder nein? (Monka et al. 1999)

• Verdoppeln

Bei der Regel des Verdoppelns ist es für die Spielenden möglich ihren Einsatz zu verdoppeln, wenn ein Kartenwert von 9, 10 oder 11 vorliegt. Hat man sich für das Verdoppeln entschieden, wird einem nur noch eine weitere Karte ausgeteilt.

Betrachtet man beispielsweise die Situation, dass die anfänglichen Karten einen Wert von 4 und 7 hatten, so ist der Gesamtwert 11 eine gute Ausgangssituation um zu verdoppeln. Abhängig ist diese Entscheidung natürlich auch von der ersten Karte der Bank, da beispielsweise bei einem Ass der Bank das Erreichen eines Black Jacks einkalkuliert werden muss.

Mathematische Betrachtung

Wie bereits bei der Überlegung zum Splitten erwähnt, ist die Punktesumme der Spielerin bzw. des Spielers und der Wert der ersten Karte der Bank für die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit ausschlaggebend.

Für unsere Überlegungen bezeichnen wir mit der Differenz X , jenen Unterschied der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit, bei der die spielende Person ihren Einsatz nicht verdoppelt.

Auf die genauen Berechnungen dieser Differenzen wird hier nicht näher eingegangen, die Werte werden aus *Monka et al.* (1999) übernommen.

Vorsumme Spieler*in	9	10	11
1. Karte Bank			
Ass	-0,4576 / - 0,3532	- 0,3126 / - 0,2513	- 0,2698 / - 0,2087
2	0,0355 / 0,0744	0,1795 / 0,1825	0,2352 / 0,2383
3	0,0604 / 0,1013	0,2047 / 0,2061	0,2589 / 0,2603
4	0,0910 / 0,1290	0,2305 / 0,2305	0,2831 / 0,2831
5	0,1216 / 0,1581	0,2563 / 0,2563	0,3074 / 0,3074
6	0,1585 / 0,1960	0,2878 / 0,2878	0,3337 / 0,3337
7	0,0521 / 0,1791	0,1962 / 0,2569	0,2315 / 0,2921
8	- 0,0133 / 0,0983	0,1433 / 0,1979	0,1753 / 0,2300
9	- 0,1505 / - 0,0522	0,0722 / 0,1165	0,1139 / 0,1583
10, B, D, K	- 0,2923 / - 0,2181	- 0,0809 / - 0,0526	0,0061 / 0,034

Tabelle 5.9: Verdoppeln - Differenzen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit (Monka et al. 1999)

5 Black Jack

Mit der Differenz Y , wird jener Unterschied bezeichnet, bei dem der Einsatz verdoppelt wird und somit nur noch eine weitere Karte an die Spielerin bzw. den Spieler ausgegeben wird.

Die Werte dieser Differenzen können aus den Tabellen 5.6 und 5.7 abgelesen werden.

Das Verdoppeln des Einsatzes ist von Vorteil, wenn folgender Zusammenhang gilt:
Falls

$$X > 0, Y > 0$$

dann gilt

$$2 \cdot Y > X.$$

Beispiel 39. Die Spielerin bzw. der Spieler hat zwei Karten mit dem Wert 4 und 7 erhalten. Die Bank hat eine Karte mit dem Wert 7 erhalten.

Da die Spielerin bzw. der Spieler einen insgesamten Wert von 11 erreicht hat, entscheidet sie oder er sich den Einsatz zu verdoppeln und somit nur noch eine weitere Karte zu bekommen.

Die Differenz Y beträgt

$$Y = 0,2315$$

also 23,15 Prozent.

Entscheidet sich die Spielerin bzw. der Spieler gegen das Verdoppeln, so kann aus der Tabelle 5.9 die Differenz

$$X = 0,2921$$

also 29,21 Prozent abgelesen werden.

Diese Werte bedeuten nun, die spielende Person erhält in Erwartung 29,21 Prozent des Einsatzes, wenn sie den Einsatz nicht verdoppelt, hingegen 23,15 Prozent, wenn sie den Einsatz verdoppelt.

Wir überprüfen oben genannte Eigenschaft:

$$X > 0, Y > 0$$

dann gilt

$$2 \cdot Y > X$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 23,15 &> 29,15 \\ 46,30 &> 29,15. \end{aligned}$$

In dieser Situation ist es also von Vorteil den Einsatz zu verdoppeln.

Beispiel 40. Die Spielerin bzw. der Spieler hat die Karten mit dem Wert 4 und 5 erhalten. Die Bank hat eine Karte mit dem Wert 7 erhalten.

Da die Spielerin bzw. der Spieler einen insgesamten Wert von 9 erreicht hat, entscheidet sie oder er sich den Einsatz zu verdoppeln und somit nur noch eine weitere Karte zu bekommen.

Die Differenz Y beträgt

$$Y = 0,0521$$

also 5,21 Prozent.

Entscheidet sich die Spielerin bzw. der Spieler gegen das Verdoppeln, so kann aus der Tabelle 5.9 die Differenz

$$X = 0,1719$$

also 17,19 Prozent abgelesen werden.

Da

$$X > 0, Y > 0$$

gilt

$$2 \cdot Y > X$$

somit

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5,21 &> 17,19 \\ 10,42 &> 17,19. \end{aligned}$$

Hier ist zu erkennen, dass die Ungleichung zu einer falschen Aussage führt, somit in dieser Situation das Verdoppeln nicht empfehlenswert ist.

Die Tabelle 5.10 fasst zusammen, in welchen Situationen das Verdoppeln sinnvoll ist.

- **Versicherung**

Die Möglichkeit des Versicherns tritt genau dann ein, wenn die Bank als erste Karte ein Ass erhält. Da sie somit die Möglichkeit auf ein Black Jack hat, bekommen

Vorsumme Spieler*in	9	10	11
1. Karte Bank			
Ass	-	-	-
2	-	D	D
3	D	D	D
4	D	D	D
5	D	D	D
6	D	D	D
7	-	D	D
8	-	D	D
9	-	D	D
10, B, D, K	-	-	-

Tabelle 5.10: Verdoppeln - ja oder nein? (Monka et al. 1999)

die Spielerinnen und Spieler, nach dem Austeilen ihrer zweiten Karte, die Option, gegen dieses drohende Black Jack eine Versicherung abzuschließen.

Als Einsatz muss mindestens die Hälfte bis maximal das Doppelte des ursprünglichen Einsatzes getätigt werden.

Erhält die Bank als zweite Karte nun tatsächlich einen Buben, eine Dame, einen König oder eine Karte mit dem Wert 10 und erzielt somit ein Black Jack, bekommen alle Spielenden, die sich versichert haben, ihren ursprünglichen Einsatz und den Einsatz der Versicherung zurück. Erzielt die Bank kein Black Jack, so kassiert die Bank alle Versicherungseinsätze ein.

Mathematische Betrachtung

Wir nehmen an, dass die Versicherung die Hälfte des ursprünglichen Einsatzes beträgt. Folgende Situationen können nun eintreten:

- Die Spielerin bzw. der Spieler hat eine Versicherung abgeschlossen.
 - Die Bank erhält ein Black Jack: Die bzw. der Spielende erhält sowohl den Einsatz als auch die Versicherung zurück.
 - Die Bank erhält kein Black Jack: Die bzw. der Spielende muss seine Versicherungssumme an die Bank abtreten.
- Die Spielerin bzw. der Spieler hat keine Versicherung abgeschlossen.
 - Die Bank erhält ein Black Jack: Die bzw. der Spielende verliert den Einsatz.
 - Die Bank erhält kein Black Jack: Die bzw. der Spielende verliert ihren bzw. seinen Einsatz nicht.

In der Tabelle 5.11 werden, ausgehend von einem Einsatz von $1E$ und einem Einsatz von $0,5E$, die eben beschriebenen Ausgangsmöglichkeiten visualisiert.

	Black Jack	kein Black Jack
Versicherung: (Einsatz: 1, Versicherung: 0,5)	0	$-\frac{1}{3}$
keine Versicherung: (Einsatz: 1, Versicherung: 0)	-1	0

Tabelle 5.11: Ausgangsmöglichkeiten bei einer Versicherung

Die Wahrscheinlichkeit, nachdem die 1. Karte ein Ass war, ein Black Jack zu erhalten, liegt bei

$$P(\text{Black Jack} | 1. \text{ Karte Ass}) = \frac{4}{13}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, nachdem die 1. Karte ein Ass war, kein Black Jack zu erhalten, liegt bei

$$P(\text{kein Black Jack} | 1. \text{ Karte Ass}) = \frac{9}{13}.$$

Der Erwartungswert des erhaltenen Gewinns bei einer abgeschlossenen Versicherung kann wie folgt berechnet werden

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{13} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{9}{13} = \left(-\frac{3}{13}\right)$$

5 Black Jack

Dieser Wert gibt an, dass bei einer abgeschlossenen Versicherung in Erwartung 23,08 Prozent des Einsatzes an die Bank abgegeben werden.

Der Erwartungswert des erhaltenen Gewinns, wenn keine Versicherung abgeschlossen wird, kann wie folgt berechnet werden

$$E(X) = -1 \cdot \frac{4}{13} + 0 \cdot \frac{9}{13} = \left(-\frac{4}{13}\right)$$

Dieser Wert gibt also an, dass bei keiner abgeschlossenen Versicherung in Erwartung 30,77 Prozent des Einsatzes an die Bank abgegeben werden.

Diese Werte lassen darauf schließen, dass es sinnvoller ist eine Versicherung gegen ein drohendes Black Jack der Bank abzuschließen. Jedoch muss bei dieser Entscheidung der gesetzte Einsatz genauer beleuchtet werden.

Beispiel 41. Eine Spielerin setzt einen Einsatz von 10€ und versichert sich, nachdem die Bank als erste Karte ein Ass erhalten hat, mit weiteren 5€. Der Erwartungswert ihres Gewinnes wird durch

$$15 \cdot (-0,2308) = -3,462$$

berechnet.

Ein anderer Mitspieler setzt ebenfalls einen Einsatz von 10€, versichert sich in der angegebenen Situation jedoch nicht. Der Erwartungswert seines Gewinns wird durch

$$10 \cdot (-0,3077) = -3,077$$

berechnet.

Der Spieler, der keine Versicherung wählt, weist einen geringeren Verlust auf.

Beispiel 42. Ein Spieler setzt einen Einsatz von 500 € und versichert sich, nachdem die Bank als erste Karte ein Ass erhalten hat, mit weiteren 250€. Der Erwartungswert seines Gewinnes wird durch

$$750 \cdot (-0,2308) = -173,10$$

berechnet.

Eine andere Mitspielerin setzt ebenfalls einen Einsatz von 500€, versichert sich in der angegebenen Situation jedoch nicht. Der Erwartungswert ihres Gewinns wird durch

$$500 \cdot (-0,3077) = -153,85$$

berechnet.

Die Spielerin, die keine Versicherung wählt, weist einen geringeren Verlust auf.

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

Das Spiel Black Jack weist Strukturen einer Markov-Kette auf (Wakin & Rozell 2004). Wie im Kapitel 4 definiert, besagt die *Markov-Eigenschaft*, dass nur der gegenwärtige Zustand für die Zukunft relevant ist, die vergangenen Zustände spielen keine Rolle mehr (Meintrup & Schäffler 2005).

Übetragen wir diese Eigenschaft nun auf Black Jack, so bedeutet es, dass nur die gegenwärtige Punktesumme der Karten für die zukünftige Entscheidung von Bedeutung ist.

Die vergangenen Punktesummen hingegen spielen keine Rolle.

Beispiel 43. Hat eine Spielerin oder ein Spieler den Wert 15 erreicht, so ist für die Wahrscheinlichkeit, dass sie oder er im nächsten Zug den Wert 18 erreicht irrelevant, ob sich der Wert 15 beispielsweise aus den Karten $6-7-2$ oder aber $9-6$ zusammengesetzt hat (Wakin & Rozell 2004).

Entscheidung der Bank

Für unsere weiteren Überlegungen ist es wichtig, nochmal zu betonen, dass sich die Dealerin bzw. der Dealer an eine vorgegebene Regel halten muss. Sie oder er muss bis einschließlich zu dem Wert 16 weitere Karten ziehen und darf ab dem Wert 17 keine weitere anfordern (Casinos Austria 2023).

Die folgende Markov-Kette hat einen endlichen Zustandsraum

$$S = \{A, 2, 3, \dots, BJ, \bar{u}\}$$

mit 29 Elementen. Damit man die Übergangsmatrix p erhält, legen wir zuerst eine Tabelle, die in Abbildung 5.3 dargestellt ist, an (Wakin & Rozell 2004).

In dieser Tabelle wird zur besseren Übersicht mit x die Wahrscheinlichkeit von $x = \frac{1}{13}$ und mit „–“ die Wahrscheinlichkeit 0 gekennzeichnet.

In den Zeilen und Spalten sind mit $\overline{10}$ jene vier Karten gemeint, die den direkten Wert 10 aufweisen. Darunter fallen der Bube, die Dame, der König und die Karte 10.

Ist hinter den Zahlen ein A vermerkt, so sind damit jene Kombinationen gemeint, die ein Ass enthalten, das mit dem Wert 11 gezählt wird. In diesem Fall werden die Zahlen auch als *soft* bezeichnet, beispielsweise wird 13A auch *soft* 13 genannt (Dear & Drezner o.D.).

Anhand ausgewählter Beispiele wird nun erläutert, wie die Tabelle angelegt wurde:

- **Startwert: Kartenwert 3**

- (i). $A, 2, 3$: Es kann durch das Ziehen einer weiteren Karte kein Wert, der kleiner oder gleich 3 ist, erreicht werden.

$$p = 0$$

- (ii). 4: Der Wert 4 kann nicht erreicht werden, da zwar $3 + A = 4$ gilt, aber in diesem Fall das Ass als 11 gezählt wird.

$$p = 0$$

- (iii). $5, 6, \dots, 12$: Durch das Ziehen einer weiteren Karte mit den Werten $2, \dots, 9$ können die genannten Zahlen erreicht werden.

$$p = \frac{1}{13}$$

- (iv). 13: Durch das Ziehen der vier Karten, die den Wert 10 haben, kann 13 erreicht werden.

$$p = \frac{4}{13}$$

- (v). 14A: Durch das Ziehen eines Ass kann der Wert 14A erreicht werden.

$$p = \frac{1}{13}$$

- (vi). $15, \dots, \ddot{u}$: Diese Werte können nicht durch das Ziehen einer weiteren Karte erreicht werden.

$$p = 0$$

- **Startwert: Kartenwert 13**

- (i). $A, 2, \dots, 13, 13A$: Es kann durch das Ziehen einer weiteren Karte kein Wert, der kleiner oder gleich 13 ist, erreicht werden.

$$p = 0$$

- (ii). $14, 15, \dots, 21$: Durch das Ziehen einer weiteren Karte mit den Werten $1, \dots, 8$ können die genannten Zahlen erreicht werden.

$$p = \frac{1}{13}$$

- (iii). Black Jack: Es kann kein Black Jack durch das Ziehen einer weiteren Karte erreicht werden.

$$p = 0$$

- (iv). Überkaufen: Durch das Ziehen einer weiteren Karte mit den Werten 9 oder 10 wird ein Wert größer als 21 erreicht und die Bank verkauft sich.

$$p = \frac{5}{13}$$

• **Startwert: Kartenwert 13A**

- (i). $A, 2, \dots, 11$: Es kann durch das Ziehen einer weiteren Karte kein Wert, der kleiner oder gleich 11 ist, erreicht werden.

Da der Wert 13A durch $A+2$ erreicht wird, würde, wenn man als nächste Karte eine mit dem Wert 8 bekommt, die Kombination $A + 2 + 8$ vorliegen. Das Ass wird als 11 gewertet und der Wert 21 wird erreicht, nicht wie fälschlicherweise angenommen werden könnte, der Wert 11.

$$p = 0$$

- (ii). $12, 14A, 15A, 16A, 17, 18, \dots, 21$: Diese Werte können durch das Ziehen einer Karte mit dem Wert 9, $A, 2, 3, \dots, 8$ erreicht werden.

$$p = \frac{1}{13}$$

Um den Wert 12 zu erhalten, müsste die Abfolge $A + 2 + 9$ lauten, wobei das Ass hier als 1 gezählt wird.

Um den Wert 18 zu erhalten, müsste die Abfolge $A + 2 + 6$ lauten, wobei das Ass hier als 11 gezählt wird.

- (iii). 13: Durch das Ziehen einer weiteren Karte mit dem Wert 10, kann der Wert 13 erreicht werden.

$$p = \frac{4}{13}$$

- (iv). Black Jack, Überkaufen: Es kann weder ein Black Jack erreicht werden, noch kann sich die Bank durch das Ziehen einer weiteren Karte überkaufen.

$$p = 0$$

Der Wert 13A kann neben der Kartenkombination $A + 2$ auch durch $A + A + A$ erreicht werden. Wir verwenden für unsere Überlegungen aber stets $A + 2$.

5 Black Jack

Aus der Abbildung 5.3 kann bereits eine wichtige Eigenschaft abgelesen werden:

Da die Bank ab dem Wert 17 keine weiteren Karten nehmen darf, ergibt sich für die Werte 17, 18, 19, 20 und 21 sowie für das Erreichen eines Black Jacks und dem Überkaufen die Wahrscheinlichkeit 1 wieder in diesen Zuständen zu landen (Wakin & Rozell 2004). Nach Definition 14 handelt es sich dabei um absorbierende Zustände, die nicht mehr verlassen werden können (Meintrup & Schäffler 2005).

Mit Hilfe der Einträge der Tabelle kann die folgende Übergangsmatrix p nun erzeugt werden.

$$p = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe dieser Matrix möchten wir weitere Berechnungen des Black Jack Spiels erläutern.

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\overline{10}$	11	12	12A	13	13A	14	14A	15	15A	16	16A	17	18	19	20	21	BJ	ü
A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	x	x	x	-	4x	-
2	-	-	-	x	x	x	x	x	x	x	-	x	4x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	x	x	x	x	x	x	-	x	x	-	4x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	x	x	x	x	x	-	x	x	-	x	-	4x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	x	x	x	x	-	x	x	-	x	-	x	-	4x	-	-	x	-	-	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	-	-	-	x	x	x	-	x	x	-	x	-	x	-	x	-	4x	-	x	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	x	x	-	x	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	4x	x	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	4x	x	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	4x	x	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	4x	x	-	-	-
$\overline{10}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	4x	-	x	-	-
11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	4x	x	-	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	x	x	x	x	-	-	4x
12A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4x	-	-	-	x	-	x	-	-	-	-	x	x	x	x	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	x	x	x	-	-	5x
13A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	4x	-	-	x	-	x	-	x	x	x	x	x	-	-	-
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	x	x	x	-	-	6x
14A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	4x	-	-	x	-	x	x	x	x	x	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	x	x	x	-	-	7x
15A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	4x	-	-	-	x	x	x	x	-	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	x	x	x	-	-	8x
16A	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x	-	x	-	x	-	x	-	4x	-	x	x	x	x	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-
BJ	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-
ü	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

Abbildung 5.3: Überlegung Übergangsmatrix Black Jack

Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Punktesummen

Seien $\pi_j(n) := P(X_n = j)$ die Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ im Zustand $j \in S$ zu sein, und definieren wir den Zeilenvektor $\pi(n)$ als $\pi(n) := (\pi_1(n) \quad \pi_2(n) \quad \dots \quad \pi_N(n))$. Dann folgt aus Satz 12 und Satz 13, dass $\pi(n) = \pi(0) \cdot p^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Mit diesem Wissen zeigen wir nun eine weitere Möglichkeit die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Bank, unter Berücksichtigung ihrer 1. erhaltenen Karte, zu berechnen.

Wir wählen zur einfacheren Berechnung $n = 5$ und erhalten mit Hilfe von Excel und dem Berechnungsprogramm „Matrix calculator“ die Matrix p^5 .

Eine Abbildung der Matrix p^5 ist hier zu sehen:

[illegible]

Abbildung 5.4: Matrix p^5

Anhand von ausgewählten Beispielen wird die genauere Berechnung gezeigt.

Beispiel 44. Die Spielerin oder der Spieler hat die beiden Karten Herz 8 und Karo 10 ausgeteilt bekommen. Insgesamt haben die beiden Karten einen Wert von 18.

Die Bank besitzt als erste Karte die Herz Dame, hat also bereits einen Wert von 10 Punkten erreicht.

Uns interessieren nun die Wahrscheinlichkeiten, mit der die Bank einen Wert größer-gleich 17 erreicht.

Dafür benötigen wir den Zeilenvektor $\pi(0)$ und die Übergangsmatrix p^5 . Der Zeilenvektor, wenn die erste Karte der Bank einen Wert von 10 hat, lautet

$$\pi(0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

da die Ziffer 1 an jener Position stehen muss, die den Kartenwert 10 in der Matrix symbolisiert und dies ist an der 11. Position.

Es folgt nun durch das Einsetzen in die Formel

$$\pi(n) = \pi(0)p^n$$

$$\pi(5) = \pi(0)p^5$$

und somit

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot p^5 =$$

$$(\dots; 0, 11142; 0, 11142; 0, 11142; 0, 34219; 0, 03450; 0, 07692; 0, 21210).$$

Die Eintragungen dieses Zeilenvektors geben die gesuchten Wahrscheinlichkeiten an.

Beispielsweise bedeutet der Wert 0,34219, dass die Bank mit einer Wahrscheinlichkeit von 34,216 Prozent den Wert 20 erreicht, wenn ihre erste Karte 10 Punkte wert ist.

Diese Wahrscheinlichkeiten haben wir bereits in der Tabelle 5.3 berechnet und zusammengefasst.

Beispiel 45. Die Spielerin oder der Spieler hat die beiden Karten Herz 10 und Karo 10 ausgeteilt bekommen. Insgesamt haben die beiden Karten einen Wert von 20. Die Bank besitzt als erste Karte eine mit dem Wert 9.

- Kartenwert 21
- Black Jack
- überkaufen

In der Abbildung 5.3, sowie in der Matrix, sind diese Zustände an den Wahrscheinlichkeiten $\frac{13}{13} = 1$ entlang der Hauptdiagonale erkennbar.

Beispiel 46. Gegeben ist die Matrix p mit dem Zustandsraum

$$S = \{A, 1, 2, \dots, 10, \bar{10}, 11, \dots, 19, 20, 21, \text{BJ}, \ddot{\text{u}}\}.$$

[illegible]

5 Black Jack

Anhand von ausgewählten Beispielen berechnen wir nun die Absorptionswahrscheinlichkeiten.

- (i). Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit in den absorbierenden Zustand $u = \text{BJ}$ zu gelangen.

Die Zustände des Kartenwerts 17, 18, 19, 20, 21, BJ und überkaufen können nicht verlassen werden. Es ergeben sich also folgende Wahrscheinlichkeiten, in den Zustand $u = \text{BJ}$ zu gelangen:

$$\begin{aligned} q_{17} &= 0 \\ q_{18} &= 0 \\ q_{19} &= 0 \\ q_{20} &= 0 \\ q_{21} &= 0 \\ q_{\text{BJ}} &= 1 \\ q_{\ddot{u}} &= 0 \end{aligned}$$

Außerdem kann ein Black Jack nur ausgehend von einem Ass oder einer Karte, die den Wert 10 hat, erreicht werden. Deshalb können einige weitere Wahrscheinlichkeiten bereits bestimmt werden:

$$\begin{aligned} q_2 &= 0 \\ q_3 &= 0 \\ &\vdots \\ q_{10} &= 0 \\ q_{11} &= 0 \\ &\vdots \\ q_{16\text{A}} &= 0 \end{aligned}$$

Durch die Multiplikation der Matrix p mit dem Spaltenvektor q erhält man folgende Matrix:

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

$$p \cdot \begin{pmatrix} q_A \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_{12A}+q_{13A}+q_{14A}+q_{15A}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+4q_{BJ}}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+4q_{12}+q_{13A}+q_4+q_5+q_6+q_7+q_8+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+4q_{13}+q_{14A}+q_5+q_6+q_7+q_8+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+q_{13}+4q_{14}+q_{15A}+q_6+q_7+q_8+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}+4q_{15}+q_{16A}+q_7+q_8+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+4q_{16}+q_{17}+q_8+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+4q_{17}+q_{18}+q_9}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+4q_{18}+q_{19}}{13} \\ \frac{q_{11}+q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+4q_{19}+q_{20}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+4q_{20}+q_{21}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+4q_{20}+q_{BJ}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+4q_{21}}{13} \\ \frac{q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+4q_{\ddot{u}}}{13} \\ \frac{4q_{12}+q_{13A}+q_{14A}+q_{15A}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}}{13} \\ \frac{q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+5q_{\ddot{u}}}{13} \\ \frac{q_{12}+4q_{13}+q_{14A}+q_{15A}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}}{13} \\ \frac{q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+6q_{\ddot{u}}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+4q_{14}+q_{15A}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}}{13} \\ \frac{q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+7q_{\ddot{u}}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+4q_{15}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}}{13} \\ \frac{q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+8q_{\ddot{u}}}{13} \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+4q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}}{13} \\ q_{17} \\ q_{18} \\ q_{19} \\ q_{20} \\ q_{21} \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix}$$

5 Black Jack

Zur besseren Übersicht werden nur einzelne Zeilen der Matrix herausgenommen.

$$p \cdot \begin{pmatrix} q_A \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_{12A}+q_{13A}+q_{14A}+q_{15A}+q_{16A}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+4q_{BJ}}{13} \\ \frac{q_{10}+q_{11}+4q_{12}+q_{13A}+q_4+q_5+q_6+q_7+q_8+q_9}{13} \\ \vdots \\ \frac{q_{12}+q_{13}+q_{14}+q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+4q_{q20}+q_{BJ}}{13} \\ \vdots \\ q_{17} \\ \vdots \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix}$$

Durch das Einsetzen der bereits bestimmten Wahrscheinlichkeiten erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{0+0+0+0+0+0+0+0+0+4 \cdot 1}{13} \\ \frac{0+0+4 \cdot 0+0+0+0+0+0+0+0}{13} \\ \vdots \\ \frac{0+0+0+0+0+0+0+0+0+4 \cdot 0+1}{13} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{13} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

Aus diesem Vektor können nun die Wahrscheinlichkeiten, in den absorbierenden Zustand $u = \text{BJ}$ zu gelangen, abgelesen werden.

Der Wert $q_A = \frac{4}{13}$ bedeutet beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,77 Prozent ein Black Jack erreicht wird, wenn die erste Karte ein Ass war.

Diese Wahrscheinlichkeiten decken sich mit jenen, die wir in unserer Matrix bestimmt haben, da ein Black Jack nur mit zwei Karten erreicht werden kann und deshalb die Wahrscheinlichkeit ein Black Jack in einem Schritt zu erhalten, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, ein Black Jack in n -Schritten zu erhalten.

- (ii). Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit in den absorbierenden Zustand $u = 18$ zu gelangen.

Die Zustände des Kartenwerts 17, 18, 19, 20, 21, BJ und überkaufen können nicht verlassen werden. Es ergeben sich also folgende Wahrscheinlichkeiten, in den Zustand $u = 18$ zu gelangen:

$$q_{17} = 0$$

$$q_{18} = 1$$

$$q_{19} = 0$$

$$q_{20} = 0$$

$$q_{21} = 0$$

$$q_{\text{BJ}} = 0$$

$$q_{\ddot{u}} = 0$$

Durch die Multiplikation der Matrix p mit dem Spaltenvektor q erhält man die bereits zuvor angegeben Matrix.

Zur besseren Übersicht nehmen wir einige Zeilen der Matrix heraus.

$$p \cdot \begin{pmatrix} q_A \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{q_{15}+q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+6q_{\ddot{u}}}{13} \\ \vdots \\ \frac{q_{16}+q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+7q_{\ddot{u}}}{13} \\ \vdots \\ \frac{q_{17}+q_{18}+q_{19}+q_{20}+q_{21}+8q_{\ddot{u}}}{13} \\ \vdots \\ q_{17} \\ q_{18} \\ q_{19} \\ q_{20} \\ q_{21} \\ q_{BJ} \\ q_{\ddot{u}} \end{pmatrix}$$

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

Durch Einsetzen der bereits bestimmten Wahrscheinlichkeiten erhält man

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{q_{15}+q_{16}+0+1+0+0+0+0}{13} \\ \vdots \\ \frac{q_{16}+0+1+0+0+0+0}{13} \\ \vdots \\ \frac{0+1+0+0+0+0}{13} \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und Teile des daraus resultierenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} & \vdots \\ q_{14} &= \frac{q_{15} + q_{16} + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0}{13} \\ q_{15} &= \frac{q_{16} + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0}{13} \\ q_{16} &= \frac{0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0}{13} \\ q_{18} &= 1 \end{aligned}$$

5 *Black Jack*

Durch lösen der Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned}q_{16} &= \frac{1}{13} \\q_{15} &= \frac{\frac{1}{13} + 1}{13} = \frac{14}{169} \\q_{14} &= \frac{\frac{14}{169} + \frac{1}{13} + 1}{13} = \frac{196}{2197} \\&\vdots\end{aligned}$$

und führt man diese Berechnungen weiter fort, erhält man den folgenden Vektor:

5.5 Berechnungen mit Markov-Ketten

$$q = \begin{pmatrix} \frac{48536}{371293} & \frac{50042}{371293} & \frac{48420}{371293} & \frac{46745}{371293} & \frac{3491}{28561} & \frac{39452}{371293} & \frac{51161}{371293} & \frac{133418}{371293} & \frac{44553}{371293} & \frac{41371}{371293} & \frac{41371}{371293} & \frac{41371}{371293} & \frac{38416}{371293} & \frac{56057}{371293} & \frac{2744}{28561} & \frac{54019}{371293} & \frac{196}{2197} & \frac{51983}{371293} & \frac{14}{169} & \frac{49961}{371293} & \frac{1}{13} & \frac{47962}{371293} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus diesem Vektor können nun die Wahrscheinlichkeiten, in den absorbierenden Zustand $u = 18$ zu gelangen, abgelesen werden.

Der Wert $q_{15} = \frac{14}{169}$ bedeutet beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 8,28 Prozent der Wert 18 erreicht wird, wenn der Startwert 15 war.

Das Zustandekommen dieser Wahrscheinlichkeit kann wie folgt erklärt werden. Ausgehend vom Wert 15 kann der Wert 18 durch das Ziehen einer weiteren Karte mit dem Wert 3 erreicht werden. Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(\text{Kartenwert } 3) = \frac{1}{13}.$$

Die zweite Möglichkeit den Wert 18 zu erreichen ist, ein Ass und eine Karte mit dem Wert 2 zu ziehen. Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P(\text{Ass und Kartenwert } 2) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}.$$

Diese Überlegungen führen uns zu folgender Rechnung

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{169} = \frac{14}{169}$$

und damit zur vorher berechneten Wahrscheinlichkeit $q_{15} = 8,28\%$.

Der Wert $q_{14} = \frac{196}{2197}$ bedeutet beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 8,92 Prozent der Wert 18 erreicht wird, wenn der Startwert 14 war.

Das Zustandekommen dieser Wahrscheinlichkeit kann gleichermaßen erläutert werden, ist jedoch komplexer als im vorigen Fall q_{15} .

Ausgehend vom Wert 14 kann der Wert 18 durch das Ziehen einer weiteren Karte mit dem Wert 4 erreicht werden. Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(\text{Kartenwert } 4) = \frac{1}{13}.$$

Die zweite Möglichkeit den Wert 18 zu erreichen ist, ein Ass und eine Karte mit dem Wert 3 oder zweimal eine Karte mit dem Wert 2 zu ziehen.

$$\begin{aligned} P(\text{Ass und Kartenwert } 3) &= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169} \\ P(\text{Kartenwert } 2 \text{ und Kartenwert } 2) &= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169} \end{aligned}$$

Die dritte Möglichkeit den Wert 18 zu erreichen ist, zweimal ein Ass und dann eine

Karte mit dem Wert 2 zu ziehen. Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P(\text{Ass, Ass und Kartenwert 2}) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{2197}.$$

Diese Überlegungen führen zu folgender Rechnung

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{169} + \frac{1}{169} + \frac{1}{2197} = \frac{196}{2197}$$

und damit zur vorher berechneten Wahrscheinlichkeit $q_{14} = 8,92\%$.

Die Einträge des Vektors decken sich mit den zuvor berechneten Einträgen in der Tabelle 5.3.

Zusammenfassung

Die vergangenen Seiten sollen ein Bewusstsein für die Komplexität des Spiels Black Jack geschaffen haben. Der Zufall, die Vielfalt und die Ungewissheit, Faktoren, die bei Black Jack allgegenwärtig sind, und dazu führen, dass Spielerinnen und Spieler immer wieder in das Kasino gehen. Beim Spiel gegen die Bank müssen die Spielenden selbst entscheiden, ob sie eine weitere Karte anfordern oder nicht. Wir haben Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten berechnet und abgewogen, um Entscheidungen treffen zu können, die nicht von Emotionen geleitet sind, sondern nach klaren Regeln getroffen werden.

Bei den genaueren stochastischen Betrachtungen wurden zu Beginn die bedingten Wahrscheinlichkeiten mühsam und langwierig mit Hilfe der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung berechnet. So konnten wir entscheiden, ob es als Spielerin oder Spieler sinnvoll ist eine weitere Karte anzufordern oder nicht. Entscheidend ist, dass jede Spielsituation individuell betrachtet werden muss, da es stets relevant ist, welche Karten die Bank hat und welche man selbst gerade besitzt.

Daraus folgend entpuppten sich die Markov-Ketten als nützliches und effizientes Werkzeug für die Berechnungen. Die Markov-Eigenschaft konnte in Black Jack wiedergefunden werden, denn stets ist nur die aktuelle Punkteanzahl für die zukünftigen Spielentscheidungen relevant. Mit Unterstützung von Computerprogrammen konnten die notwendigen Matrizen berechnet werden, sodass aus Zeilenvektoren einfacher und schneller die interessanten und relevanten Wahrscheinlichkeiten abgelesen werden konnten.

Mit den Absorptionswahrscheinlichkeiten wurde eine weitere Berechnungsmöglichkeit angegeben, der die absorbierenden Zustände einer Markov-Kette zu Grunde liegen.

5 *Black Jack*

Abschließend ist zu sagen, dass die Markov-Ketten und Absorptionswahrscheinlichkeiten effiziente Berechnungsmöglichkeiten für das Spiel Black Jack darstellen. Die dadurch erhaltenen Wahrscheinlichkeiten sind die Grundlage, um im Spiel die besten Entscheidungen zu treffen und am Ende als Siegerin bzw. Sieger nach Hause zu gehen.

Literaturverzeichnis

Bewersdorff, J. (2018): *Glück, Logik und Bluff. Mathematik im Spiel - Methoden, Ergebnisse und Grenzen*. 7. Aufl. Springer Spektrum, Wiesbaden.

Blackjack Winner (o.D.): *Blackjack Regeln für Anfänger einfach erklärt*. <https://www.blackjack-winner.de/blackjack-regeln/> (aufgerufen am 02.01.2024).

Bosch, K. (2010): *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 82 Beispielen und 73 Übungsaufgaben mit vollständigem Lösungsweg*. 10. Aufl. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden.

Casinos Austria (2023): *Black Jack*. <https://www.casinos.at/spiel/black-jack> (aufgerufen am 02.01.2024).

Devlin, K. (2009): *Pascal, Fermat und die Berechnung des Glücks. Eine Reise in die Geschichte der Mathematik*. Verlag C. H. Beck oHG, München.

Gebhardt, I.; Korte, S. (2018): *Glücksspiel. Ökonomie, Recht, Sucht*. 2. Aufl. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Georgii, H.-O. (2015): *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 5. Aufl. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Henze, N. (2008): *Stochastik für Einsteiger. Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. 7. Aufl. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.

Hofbauer, F. (2018/19): *Stochastik. Eine Vorlesung für das Lehramtsstudium*.

Kemeny, J. G.; Snell, J. L. (1960): *Finite Markov Chains*. Van Nostrand, Princeton.

Kütting, H.; Sauer, M. (2014): *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin.

Meintrup, D.; Schäffler, S. (2005): *Stochastik. Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin.

Literaturverzeichnis

Monka, M.; Tiede, M.; Voß, W. (1999): *Gewinnen mit Wahrscheinlichkeit. Statistik für Glückssitter*. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Hamburg.

Oloff, R. (2017): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Maßtheorie*. Springer-Verlag, Berlin.

Stocker, U. M.; Waldmann, K.-H. (2013): *Stochastische Modelle. Eine anwendungsorientierte Einführung*. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin.

Taylor, D. G. (2021): *Games, Gambling, and Probability. An Introduction to Mathematics*. 2. Aufl. Taylor & Francis Group, Boca Raton.

TU Clausthal (o.D.): *Würfelsimulator*. <https://www.mathematik.tu-clausthal.de/interaktiv/simulation/wuerfelsimulator> (aufgerufen am 08.07.2024).

Universität Bielefeld (o.D.): *Kapitel 5. Das wichtigste über Markov-Ketten*. <https://www.math.uni-bielefeld.de/~dluz/lehre/SoSe24/Skript/K5.pdf> (aufgerufen am 04.02.2025).

Wakin, M. B.; Rozell, C. J. (2004): *A Markov Chain Analysis of Blackjack Strategy*. <https://scholarship.rice.edu/handle/1911/20431> (aufgerufen am 14.07.2023).

Wolfseher, C. (o.D): *Kombination mit Wiederholung – Herleitung der Formel*. <https://www.katharinengymnasium.de/wolf/web/material/kombinationmitwiederholung.pdf> (aufgerufen am 04.02.2025).

Abbildungsverzeichnis

Alle Abbildungen, die in der Arbeit nicht zitiert wurden, sind von der Autorin selbst erstellt.

Abbildung 2.1: Durchschnitt $A \cap B$	Seite 5
Abbildung 2.2: Vereinigung $A \cup B$	Seite 5
Abbildung 2.3: Differenz $A \setminus B$	Seite 6
Abbildung 2.4: Gegenereignis $\Omega \setminus B$	Seite 6
Abbildung 2.5: Baumdiagramm - einmaliges Würfeln	Seite 11
Abbildung 2.6: 0 – 1 – Folge	Seite 25
Abbildung 2.7: Bedingte Wahrscheinlichkeit	Seite 27
Abbildung 2.8: Stochastische Unabhängigkeit	Seite 29
Abbildung 2.9: Baumdiagramm - Urne	Seite 30
Abbildung 3.1: Baumdiagramm - Force majeure	Seite 36
Abbildung 4.1: Einführungsbeispiel	Seite 37
Abbildung 4.2: Übergangsgraphen - ABCD	Seite 46
Abbildung 4.3: Übergangsgraphen - Teilchen	Seite 47
Abbildung 4.4: Übergangsgraphen - ABCDEF	Seite 52
Abbildung 4.5: Übergangsgraphen	Seite 56
Abbildung 5.1: Kartenkombinationen	Seite 63
Abbildung 5.2: Dealer*in erreicht 19 (1. Karte 10)	Seite 68

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 5.3: Überlegungen Übergangsmatrix Black Jack	Seite 91
Abbildung 5.4: Matrix p^5	Seite 92

Tabellenverzeichnis

Alle Tabellen, die in der Arbeit nicht zitiert wurden, sind von der Autorin selbst erstellt.

Tabelle 2.1: $n = 50$	Seite 8
Tabelle 2.2: $n = 500$	Seite 9
Tabelle 2.3: $n = 1000$	Seite 9
Tabelle 2.4: Augensumme - zweimaliges Würfeln.....	Seite 19
Tabelle 4.1: Übergangsmatrix	Seite 39
Tabelle 4.2: Wahrscheinlichkeiten	Seite 40
Tabelle 4.3: Übergangsmatrix	Seite 45
Tabelle 4.4: Übergangsmatrix	Seite 48
Tabelle 5.1: Überblick Gewinnsituation	Seite 65
Tabelle 5.2: Dealer*in erreicht 19 (1. Karte 10).....	Seite 67
Tabelle 5.3: Bedingte Wahrscheinlichkeit des Bankergebnis zur ersten Karte	Seite 69
Tabelle 5.4: Differenz zwischen Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit	Seite 71
Tabelle 5.5: Endsummen in Abhängigkeit der Vorsumme 18	Seite 73
Tabelle 5.6: Differenz Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten bedingt zur 1. Karte der Bank und der Vorsumme der Spieler*in	Seite 76
Tabelle 5.7: Differenz der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit	Seite 78
Tabelle 5.8: Teilen - ja oder nein?	Seite 80
Tabelle 5.9: Verdoppeln - Differenzen der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten	Seite 81

Tabellenverzeichnis

Tabelle 5.10: Verdoppeln - ja oder nein?	Seite 84
Tabelle 5.11: Ausgangsmöglichkeiten bei einer Versicherung	Seite 85