



MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Symmetriegruppen regulärer und semiregulärer Polyeder

verfasst von | submitted by
Rita Hutterer BEd BA

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 520 525 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Mathematik Unterrichtsfach Psychologie und
Philosophie

Betreut von | Supervisor:

Mag. Dr. Stefan Haller Privatdoz.

Kurzfassung

Diese Masterarbeit ist an der Schnittstelle von Geometrie und Gruppentheorie zu verorten. Nach einigen gruppentheoretischen Grundlagen erfolgt sowohl eine Klassifikation der Platonischen Körper als auch der Archimedischen Körper. An die Erarbeitung möglicher Eckenkonfigurationen basierend auf lokalen Kriterien schließen die Existenznachweise durch Konstruktionen an. Durch das Erarbeiten expliziter Isomorphismen zu Permutationsgruppen endlicher Mengen erfolgt eine detaillierte Beschreibung der Symmetriegruppen der Platonischen Körper. Beobachtungen zu ihrer Transitivität auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen ermöglichen den Übergang zu einer äquivalenten Definition anhand globaler Symmetrieeigenschaften. Für die Symmetriegruppen der Archimedischen Körper werden großteils Übereinstimmungen zu jenen ihrer Platonischen Ausgangskörper gefunden (Ausnahmen: Pseudorhombenkuboktaeder, Cubus Simus, Dodecaedron Simum). Untersuchungen zu ihrer Transitivität auf der Menge der Ecken führen zu einer Abspaltung uniformer Polyeder und streichen den Pseudorhombenkuboktaeder als Sonderfall heraus.

Abstract

This master's thesis is located at the interface of geometry and group theory. After some group theoretical basics, both Platonic solids and Archimedean solids are classified. The development of possible corner configurations based on local criteria is followed by proofs of existence using constructions. By working out explicit isomorphisms to permutation groups of finite sets, a detailed description of the symmetry groups of the Platonic solids is given. Observations on their transitivity on the set of vertices, edges and faces enable the transition to an equivalent definition based on global symmetry properties. The symmetry groups of the Archimedean solids are largely found to coincide with those of their corresponding Platonic solids (except: pseudo rhombic cuboctahedron, cubus simus, dodecaedron simum). Investigations into their transitivity on the set of vertices lead to a split-off of uniform polyhedra and emphasise the pseudo rhombic cuboctahedron as a special case.¹

¹Translated with www.DeepL.com/Translator (free version)

Vorwort

Die vorliegende Arbeit bildet den Schlussstein meines Masterstudiums für das Lehramt. Im Zentrum steht die Untersuchung der Symmetriegruppen regulärer und semiregulärer Polyeder, ein Thema, das sowohl eine tiefgehende Verbindung zwischen Geometrie und Gruppentheorie offenbart als auch durch die Ästhetik der behandelten Körper besticht. Die Wahl dieses Themas wurde durch mein Interesse an der anschaulichen Geometrie motiviert, die mir eine Tür zur abstrakten Gruppentheorie eröffnete. Besonders faszinierend ist für mich, wie sich abstrakte algebraische Strukturen in konkreten geometrischen Objekten widerspiegeln und dadurch voneinander profitieren können.

Ich danke Herrn Mag. Dr. Stefan Haller herzlich für die Betreuung dieser Arbeit und seine wertvollen Anregungen in erkenntnisreichen und gelegentlich auch amüsanten Sprechstunden. Mein Dank gilt außerdem meiner Familie, meinem Partner und meinen Freund*innen für ihre Unterstützung und Geduld während des Entstehungsprozesses dieser Arbeit.

Besonders hervorheben möchte ich meine Taufpatin, die mir die Schönheit der Mathematik bereits in meiner Kindheit in unzähligen gemeinsamen Bastelstunden nähergebracht hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Gruppentheoretische Grundlagen	5
2.1	Gruppen und Untergruppen	5
2.2	Homomorphismen zwischen Gruppen	12
2.3	Operationen von Gruppen auf Mengen	16
2.4	Die symmetrische Gruppe S_n	20
2.5	Die Gruppe der Isometrien $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$	29
2.6	Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$	38
3	Klassifikation der Platonischen Körper	47
3.1	Mögliche Eckenkonfigurationen	48
3.2	Existenznachweise durch Konstruktionen	49
4	Klassifikation der Archimedischen Körper	55
4.1	Mögliche Eckenkonfigurationen	57
4.2	Existenznachweise durch Konstruktionen	64
4.2.1	Durch Entecken	65
4.2.2	Durch Entecken und Entkanten	68
4.2.3	Cubus Simus und Dodecaedron Simum	74
5	Symmetriegruppen der Platonischen Körper	83
5.1	Symmetrien des Tetraeders	84
5.2	Symmetrien von Würfel und Oktaeder	90
5.3	Symmetrien von Dodekaeder und Ikosaeder	98
6	Symmetriegruppen der Archimedischen Körper	111
6.1	Abstammung vom Tetraeder	112
6.2	Abstammung vom Würfel	114
6.2.1	Durch Entecken	114
6.2.2	Durch Entecken und Entkanten	117
6.2.3	Pseudorhombenkuboktaeder	121
6.2.4	Cubus Simus	125
6.3	Abstammung vom Dodekaeder	127
6.3.1	Durch Entecken	127
6.3.2	Durch Entecken und Entkanten	129
6.3.3	Dodecaedron Simum	132
	Literaturverzeichnis	134

1 Einleitung

Im Vergleich zu den Platonischen Körpern bezeichnet Johannes Kepler die Archimedischen Körper als “in geringerem Maße perfekt” [14, S. 118]. Damit bezieht er sich auf die Tatsache, dass bei den Platonischen Körpern keine zwei Ecken, Kanten und Flächen voneinander unterschieden werden können, wohingegen dies bei den Archimedischen Körpern nur mehr für die Ecken der Fall ist. Die vorliegende Masterarbeit baut auf meine Bachelorarbeit zur Klassifikation der Platonischen Körper auf.¹ Darin kann aus verschiedenen Zugängen nachempfunden werden, dass es nur genau diese fünf Polyeder gibt, die folgende vier Kriterien erfüllen [17, S. 33]:

- (i). Der Polyeder ist konvex.
- (ii). Alle Seitenflächen sind reguläre Polygone.
- (iii). Alle Seitenflächen sind kongruent.
- (iv). An jeder Ecke treffen dieselbe Anzahl von Seitenflächen zusammen.

Lassen wir jedoch das Kriterium (iii) weg und erweitern somit unsere Definition dahingehend, dass wir auch verschiedene reguläre Polygone zulassen, treten wir in die spannende Welt der Archimedischen Körper ein. Gleichzeitig müssen wir auch das Kriterium (iv) dahingehend präzisieren, dass wir nun die gleiche zyklische Anordnung der Flächen um jede Ecke fordern. Die Archimedischen Körper bilden gemeinsam mit den Platonischen Körpern als Ausgangsbasis den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Da diese Polyeder schon seit der Antike studiert werden, überrascht es, dass von Branko Grünbaum im Jahr 2009 aufgedeckt wurde, dass viele Darstellungen zu diesem Thema gravierende mathematische und logische Fehler aufweisen [10]. Die Wurzeln dieser Fehler liegen in einer fortwährenden Verwirrung in der Terminologie, zu deren Aufklärung die vorliegende Arbeit beitragen soll. Während es bei den Platonischen Körpern nämlich keinen Unterschied macht, ob sie anhand der lokalen Betrachtung an jeder Ecke oder anhand globaler Symmetrieeigenschaften definiert werden, macht dies bei den Archimedischen Körpern sehr wohl einen bedeutenden Unterschied. Diesbezügliche Ungenauigkeiten führen zu Inkonsistenzen hinsichtlich der Angabe, ob sich die Anzahl der Archimedischen Körper auf 13 oder 14 beläuft [10].

Den Kern dieser Arbeit bildet demnach die an der Schnittstelle zwischen Gruppentheorie und Geometrie zu verortende Auseinandersetzung mit den Symmetriegruppen der Platonischen und Archimedischen Körper. Um auch für Studierende des Lehramts

¹Bei Interesse stelle ich meine unveröffentlichte Bachelorarbeit gerne per Mail zur Verfügung:
info@mathematikerleben.at.

1 Einleitung

ein bestmöglich in sich geschlossenes Werk vorlegen zu können, beginnen wir mit einigen gruppentheoretischen Grundlagen (Kapitel 2), die sich nach allgemeinen Betrachtungen auf das Ziel der Untersuchung der Symmetriegruppen von Polyedern fokussieren (z. B. [19]). Als nächstes folgt eine kurzgehaltene Klassifikation der Platonischen Körper (Kapitel 3), die im Unterschied zu jener in meiner Bachelorarbeit auf das gegenwärtige Ziel ausgerichtet ist. Dafür leiten wir zunächst alle möglichen Eckenkonfigurationen regulärer Polyeder mithilfe der Eulerschen Polyederformel aus einem lokalen Kriterium ab (z. B. [5]) und weisen dann deren Existenz durch Konstruktionen nach (z. B. [7]). Für den Nachweis der Eindeutigkeit verweisen wir auf den Starrheitssatz von Cauchy, dessen Beweis jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sein soll (siehe [24]). Daran knüpfen wir mit einer ausführlichen Klassifikation der Archimedischen Körper an (Kapitel 4). Dafür folgen wir zunächst [27], um mithilfe geschickt aufgestellter lokaler Bedingungen an die zyklische Sequenz der Seitengrade rund um eine Ecke auf eine Liste möglicher Eckenkonfigurationen zu kommen und weisen dann deren Existenz durch Ableitung aus den Platonischen Körpern nach (z. B. [11]). Wir stellen dabei fest, dass eine der gefundenen Eckenkonfigurationen auf zwei Arten realisierbar ist und öffnen damit die Tür zur näheren Auseinandersetzung mit dem diskussionsumwobenen Pseudorhombenkuboktaeder [10]. Einen weiteren Sonderfall stellen die beiden “schiefen” Archimedischen Körper Cubus Simus und Dodecaedron Simum dar, weil wir diese nicht wie alle anderen durch klassische Konstruktionen, sondern nur durch das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades erhalten.

Anschließend widmen wir uns einer detaillierten Beschreibung der Struktur der Symmetriegruppen der Platonischen Körper (Kapitel 5), wobei wir sowohl geometrisch argumentieren als auch die uns zur Verfügung stehenden Mittel der Gruppentheorie anwenden. Konkret weisen wir dabei jeweils nach einer geometrischen Beschreibung der Symmetrien explizite Isomorphismen zwischen den Symmetriegruppen der Platonischen Körper und den häufig als Vergleichsobjekte herangezogenen Permutationsgruppen endlicher Mengen nach (z. B. [8]). Dies machen wir bei jedem Platonischen Körper sowohl für seine Drehgruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien als auch für seine volle Symmetriegruppe inklusive der orientierungsumkehrenden Spiegelungen. Wir machen dabei die zentrale Beobachtung, dass alle Platonischen Körper auch die globale Eigenschaft der Transitivität ihrer Symmetriegruppen auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen erfüllen.

Aufbauend auf diesen Resultaten erfolgt eine Auseinandersetzung mit den Symmetriegruppen der Archimedischen Körper (Kapitel 6), bei der wir unser aus der bisherigen Arbeit erlerntes Wissen anwenden und unsere Ergebnisse mithilfe der Übersichtstabellen in [13] kontrollieren. Einerseits untersuchen wir dabei die Verträglichkeit der Konstruktionen mit den Symmetrien der Platonischen Ausgangskörper und andererseits überprüfen wir jeweils, ob das neu entstandene Objekt vielleicht noch weitere Symmetrien aufweist, die nicht von seinem Ausgangskörper abstammen. Für den Großteil der Archimedischen Körper erhalten wir dabei Übereinstimmungen mit den Symmetriegruppen ihrer Platonischen Ausgangskörper. Neben dem Pseudorhombenkuboktaeder stellen dabei nur Cubus Simus und Dodecaedron Simum eine Ausnahme dar, da diese durch ihre auf dem Festlegen

einer Orientierung auf den Seitenflächen des Ausgangskörpers basierenden Konstruktion nicht spiegelsymmetrisch, d. h. chiral, sind. Der Pseudorhombenkuboktaeder stellt sich bereits im Zuge der Konstruktion als Sonderfall heraus, wobei auch gleich eine mögliche Transitivität seiner Symmetriegruppe auf der Menge seiner Ecken ausgeschlossen werden kann. Im Gegensatz zu allen anderen Archimedischen Körpern erfüllt dieser diese globale Eigenschaft der (Ecken-)Uniformität nicht und ist somit als einziger Archimedischer Körper nicht auch ein uniformer Polyeder. In dieser Feststellung schließt sich der Kreis zum Ausgangspunkt dieser Arbeit als Beitrag zur Aufklärung der von Branko Grünbaum aufgedeckten terminologischen Verwirrung [10]. Für den Pseudorhombenkuboktaeder erarbeiten wir uns keine Permutationsdarstellung, sondern eine Beschreibung mithilfe der Symmetriegruppen eines anderen geometrischen Objekts (reguläres Polygon), das ebenfalls gerne als Vergleichsobjekt herangezogen wird.

Besonders spannend ist auch die Beobachtung, dass bei allen Archimedischen Körpern außer dem Kuboktaederstumpf und dem Ikosidodekaederstumpf sogar schon die Drehgruppe die Transitivität auf der Menge der Ecken sicherstellt, wohingegen dafür bei diesen aufgrund ihrer nicht symmetrischen Sequenzen orientierungsumkehrende Symmetrien notwendig sind. Dies macht zwar im Hinblick auf unsere Definition eines uniformen Polyeders keinen Unterschied, weil diese ohnehin die (volle) Symmetriegruppe verwendet, streicht aber erneut die Notwendigkeit eines achtsamen Umgangs mit definierenden Formulierungen hervor.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Um eine möglichst in sich geschlossene Arbeit zu gewährleisten, beginnen wir mit einigen gruppentheoretischen Grundlagen. Dies hat auch den Zweck, die in dieser Arbeit verwendeten Notationen festzulegen. Als Grundlage für dieses Kapitel dienen [19] und [8], wobei zusätzlich [1] für Unterkapitel 2.4, [6] und [22] für Unterkapitel 2.5 und [9] und [18] für Unterkapitel 2.6 herangezogen werden.¹

2.1 Gruppen und Untergruppen

Zuerst halten wir fest, was wir unter einer Gruppe verstehen:

Definition. [19, S. 17] (Gruppe). Es sei G eine nichtleere Menge mit einer inneren Verknüpfung

$$* : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a * b.$$

Es heißt $(G, \cdot)$ eine Gruppe, wenn:

- Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in G$ gilt

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

- Existenz eines neutralen Elements: Es existiert ein $e \in G$ mit

$$e * a = a = a * e \quad \text{für alle } a \in G.$$

Dabei heißt e neutrales Element von G .

- Jedes Element ist invertierbar: Zu jedem $a \in G$ existiert ein $a' \in G$ mit

$$a' * a = e = a * a'.$$

Dabei heißt a' Inverses von a .

G heißt kommutativ (abelsch), wenn

$$a * b = b * a \quad \text{für alle } a \in G.$$

¹Im Folgenden wird jeweils angegeben, welcher Quelle wir an entsprechender Stelle näher folgen. Wenn nicht anders angegeben, stammt ein dazugehöriger Beweis im Wesentlichen aus derselben Quelle. Um eine leichtere Lesbarkeit zu gewährleisten, werden die dortigen Ausführungen jedoch bei Bedarf durch Details ausgefüllt und implizite Zwischenschritte weitestgehend transparent gemacht.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Bemerkung. [19, S. 7, 9] Das neutrale Element ist eindeutig bestimmt, denn für zwei neutrale Elemente e und e' folgt $e = e * e' = e'$. Auch das Inverse a' von a ist eindeutig bestimmt. Wäre nämlich a'' ein weiteres Element mit $a'' * a = e = a * a''$, so erhält man

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''.$$

Bemerkung. [8, S. 4] In der vorliegenden Arbeit fassen wir, wenn nicht anders angegeben, die Verknüpfung als Multiplikation auf, also $a * b = a \cdot b$. Anstelle von $a \cdot b$ schreiben wir kurz ab . Weiters setzen wir, wie bei Multiplikationen üblich, $e = 1$. Für das Inverse von a schreiben wir a^{-1} anstelle von a' .

Als einfache Folgerungen aus den Gruppenaxiomen erhalten wir folgende beiden Eigenschaften von Gruppen:

Lemma 2.1.1. [19, S. 18] *Es sei $G = (G, \cdot)$ eine Gruppe.*

- (i). *Für $a, b, c \in G$ folgt aus $ac = bc$ stets $a = b$, und aus $ca = cb$ folgt ebenfalls $a = b$, d. h. in G gelten die Kürzungsregeln.*
- (ii). *Zu je zwei Elementen $a, b \in G$ gibt es genau ein $x \in G$ mit $ax = b$, nämlich $x = a^{-1}b$, und genau ein $y \in G$ mit $ya = b$, nämlich $y = ba^{-1}$, d. h. in G sind lineare Gleichungen eindeutig lösbar.*

Beweis. (i). Wir multiplizieren $ac = bc$ von rechts mit c^{-1} und erhalten $a = (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} = b$. Analog wird die zweite Kürzungsregel gezeigt.

- (ii). Aus $x = a^{-1}b \in G$ folgt $ax = a(a^{-1}b) = b$, also existiert eine Lösung. Aus $ax = b$ und $ax' = b$ folgt $ax = ax'$ und somit nach der Kürzungsregel $x = x'$, also ist diese Lösung eindeutig. Analog wird die Gleichung $ya = b$ behandelt.

□

Bemerkung. [19, S. 18] Wir werden später Abbildungen der Form

$$\lambda_a : G \rightarrow G, x \mapsto ax$$

betrachten, sogenannte Linksmultiplikationen. Diese sind nach Lemma 2.1.1 (ii) für jedes $a \in G$ bijektive Abbildungen von G auf G , sogenannte Permutationen.

Für uns ist wichtig angeben zu können, wie viele Elemente eine Gruppe hat:

Definition. [8, S. 28] (Gruppenordnung). Unter der Ordnung einer Gruppe G versteht man die Anzahl der Elemente von G . Wir schreiben dafür $\text{ord}(G)$. Hat G unendlich viele Elemente, so setzt man $\text{ord}(G) = \infty$.

Bemerkung. Für die Anzahl der Elemente in einer Menge M werden wir im Hinblick auf die Einheitlichkeit statt der sonst üblicheren Notation $|M|$ auch $\text{ord}(M)$ schreiben.

2.1 Gruppen und Untergruppen

Insbesondere sind für uns auch die sogenannten Untergruppen einer Gruppe G bedeutsam:

Definition. [8, S. 6] (Untergruppe). Sei G eine Gruppe und $U \subset G$ eine Teilmenge. U heißt Untergruppe von G , wenn gilt:

- Abgeschlossenheit: Mit $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$.
- Gruppenaxiome: U bildet mit der von G induzierten Verknüpfung

$$U \times U \rightarrow U, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

wieder eine Gruppe.

Wir schreiben dafür $U \leq G$.

Nützlich für den Nachweis dieser Bedingungen ist folgendes Kriterium:

Lemma 2.1.2. [8, S. 7] (Untergruppenkriterium). Eine Teilmenge $U \neq \emptyset$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$a, b \in U \Rightarrow ab^{-1} \in U.$$

Beweis. Ist U eine Untergruppe und sind $a, b \in U$, so gilt $b^{-1} \in U$ und somit $ab^{-1} \in U$, also ist die angegebene Bedingung notwendig. Sie ist auch hinreichend: Das Assoziativgesetz gilt in G , also auch in U . Da $U \neq \emptyset$, gibt es ein $a \in U$, also ist nach Voraussetzung $aa^{-1} = e \in U$, d. h. das neutrale Element liegt in U . Damit ist aber für jedes $b \in U$ nach Voraussetzung auch $eb^{-1} = b^{-1} \in U$, d. h. U enthält auch die Inversen. Schließlich ist U abgeschlossen, denn mit $a, b \in U$ ist

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in U.$$

□

Bemerkung. [8, S. 7] In jeder Gruppe G gibt es die trivialen Untergruppen $\{e\}$ und G .

Weiters beschäftigen wir uns mit bestimmten Teilmengen einer Gruppe, den sogenannten Erzeugendensystemen:

Definition. [19, S. 30-31] (Erzeugendensystem). Sei G eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine beliebige Teilmenge. Der Durchschnitt aller Untergruppen U von G die X enthalten,

$$\text{Erz}(X) := \bigcap_{X \subseteq U \leq G} U,$$

wird die von X erzeugte Untergruppe von G genannt. Dabei heißt X ein Erzeugendensystem der Gruppe G , wenn $\text{Erz}(X) = G$, wobei wir für X endlich von einer endlich erzeugten Gruppe G sprechen. Weiters heißt eine Gruppe G zyklisch, wenn es ein $a \in G$ gibt, so dass $G = \text{Erz}(a)$, d. h. wenn G von einem Element erzeugt wird.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Nach folgendem Lemma ist $\text{Erz}(X)$ eine Untergruppe von G :

Lemma 2.1.3. [19, S. 30] *Seien G eine Gruppe, I eine beliebige Indexmenge und $(U_i)_{i \in I} \leq G$ eine Familie von Untergruppen der Gruppe G . Dann gilt*

$$\bigcap_{i \in I} U_i \leq G,$$

d. h. der Durchschnitt jeder Familie von Untergruppen einer Gruppe G ist eine Untergruppe von G .

Beweis. Da $e \in U_i$ für jedes $i \in I$ gilt $e \in \bigcap_{i \in I} U_i =: U$, d. h. $U \neq \emptyset$. Sind $a, b \in U$ für jedes $i \in I$ so ist wegen $U_i \leq G$ nach dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2 auch $ab^{-1} \in U_i$ und somit gilt $ab^{-1} \in U$. $\square$

Bemerkung. [19, S. 30] $\text{Erz}(X)$ ist die kleinste Untergruppe von G , die X enthält, denn $X \subseteq \text{Erz}(X) \leq G$ und $\text{Erz}(X) \subseteq U$ für jede Untergruppe U von G , die X enthält.

Die Definition von $\text{Erz}(X)$ ist für die Bestimmung der erzeugten Untergruppe nicht gut geeignet. Durch den folgenden Darstellungssatz erhalten wir eine expliziere Beschreibung:

Theorem 2.1.4. [19, S. 31-32] (Darstellungssatz). *Für jede Teilmenge X einer Gruppe G besteht $\text{Erz}(X)$ aus allen endlichen Produkten von Elementen aus X und ihren Inversen X^{-1} , d. h.*

$$\text{Erz}(X) = \{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dabei ist $\text{Erz}(\emptyset) = e$. Ist G abelsch und $X = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ endlich, so vereinfacht sich diese Darstellung zu

$$\text{Erz}(X) = \{a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r} \mid a_1, a_2, \dots, a_r \in X, k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{Z}\},$$

speziell gilt für die von $a \in G$ erzeugte zyklische Untergruppe

$$\text{Erz}(a) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis. Durch wiederholte Anwendung des Untergruppenkriteriums aus Lemma 2.1.2 folgt, dass die Menge $V = \{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}, n \in \mathbb{N}\}$ in jeder Untergruppe, die X enthält, liegt. Somit liegt V aber auch in deren Durchschnitt, d. h. $V \subseteq \text{Erz}(X)$. Andererseits ist V nach dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2 bereits selbst eine Untergruppe, denn mit $u, v \in V$ mit $u = x_1 \cdot x_2 \cdots x_r$ und $v = y_1 \cdot y_2 \cdots y_s$ gilt auch

$$uv^{-1} = (x_1 \cdot x_2 \cdots x_r) \cdot (y_1 \cdot y_2 \cdots y_s)^{-1} = x_1 \cdot x_2 \cdots x_r \cdot y_s^{-1} \cdot y_2^{-1} \cdots y_1^{-1} \in V.$$

Wegen $X \subseteq V$ gilt also auch $\text{Erz}(X) \subseteq V$ und somit die Gleichheit $\text{Erz}(X) = V$. Die zweite Behauptung folgt aus der ersten, weil man wegen der Vertauschbarkeit gleicher Faktoren zu Potenzen zusammenfassen kann. Die dritte Behauptung folgt aus der zweiten. $\square$

2.1 Gruppen und Untergruppen

Neben der bereits definierten Ordnung einer Gruppe G ist für uns auch der Begriff der Ordnung eines Elements $a \in G$ bedeutsam:

Definition. [19, S. 32-33] (Elementordnung). Unter der Ordnung eines Elements $a \in G$ versteht man Ordnung der von a erzeugten zyklischen Untergruppe, d.h. $\text{ord}(a) := \text{ord}(\text{Erz}(X))$. Falls $\text{Erz}(X)$ unendlich ist, so setzt man $\text{ord}(a) = \infty$.

Das folgende Lemma ermöglicht uns die Ermittlung der (endlichen) Ordnung von Gruppenelementen:

Lemma 2.1.5. [19, S. 33] Seien G eine Gruppe mit neutralem Element e und $a \in G$. Falls $\text{ord}(a) \in \mathbb{N}$, dann ist $\text{ord}(a) = n$ mit der kleinsten natürlichen Zahl n für die $a^n = e$ gilt. Weiters gilt dann $\text{Erz}(a) = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

Beweis. Für $\text{ord}(a)$ endlich ist $\text{Erz}(a) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine endliche Menge. Dann gibt es Exponenten $i \neq j$, o.B.d.A. sei $i < j$, mit $a^i = a^j$ und wir erhalten somit $a^{j-i} = e$ (*). Dann liegt $j - i > 0$ in der Menge $\{k \in \mathbb{Z} \mid a^k = e\} \neq \{0\}$ und somit gibt es eine kleinste natürliche Zahl n mit $a^n = e$. Teilen wir ein beliebiges $m \in \mathbb{Z}$ durch n mit Rest r , d.h. $m = qn + r$ mit $0 \leq r < n$, dann sehen wir, dass jede beliebige Potenz $a^m = a^{qn+r} = (a^n)^q a^r = e^q a^r = a^r$ bereits in $\{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ liegt. Somit gilt

$$\text{Erz}(a) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

Da die ersten Potenzen a^i , $0 \leq i \leq n-1$, von a wegen der Minimalität von n alle von e verschieden sind und wegen (*) auch alle paarweise verschieden sind, gilt $\text{ord}(a) = \text{ord}(\text{Erz}(a)) = n$. $\square$

Unser erster wichtiger Satz wird der Satz von Lagrange 2.1.8 sein. Dieser besagt, dass eine endliche Gruppe mit n Elementen höchstens Untergruppen U haben kann, deren Ordnungen Teiler von n sind. Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir spezielle Teilmengen von G , die sogenannten Linksnebenklassen:

Definition. [19, S. 35] (Linksnebenklassen). Sei $U \leq G$ eine Untergruppe von G und $a \in G$. Dann heißt

$$aU := \{au \mid u \in U\}$$

die linke Nebenklasse von a bezüglich U .

Bemerkung. Analog können auch sogenannte Rechtsnebenklassen Ua von a bezüglich U definiert werden. Für unsere Zwecke reicht jedoch die Betrachtung der Linksnebenklassen aus.

Zwei Nebenklassen aU und bU können gleich sein, ohne dass ihre sogenannten Repräsentanten a und b gleich sind [19, S. 35]:

Lemma 2.1.6. [19, S. 35-36] Für $U \leq G$ und $a, b \in G$ gilt:

- (i). $aU = U \Leftrightarrow a \in U$.
- (ii). $aU = bU \Leftrightarrow a^{-1}b \in U$.
- (iii). $aU \cap bU \neq \emptyset \Leftrightarrow aU = bU$.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. (i). Wegen $e \in U$ nach Definition einer Untergruppe folgt aus $aU = U$ direkt auch $ae = a \in U$. Ist umgekehrt $a \in U$, dann gelten $aU \subseteq U$ und $a^{-1}U \subseteq U$. Also gilt auch $a(a^{-1}U) = U \subseteq aU$ und damit ist $aU = U$.

(ii). Wir multiplizieren $aU = bU$ von links mit a^{-1} und erhalten die äquivalente Darstellung $U = a^{-1}bU$. Nach (i) ist dies gleichbedeutend mit $a^{-1}b \in U$.

(iii). Sind die Nebenklassen gleich, ist ihr Durchschnitt natürlich nicht leer. Ist umgekehrt $c \in aU \cap bU$, dann gibt es $u, u' \in U$ mit $c = au = bu'$. Unter Multiplikation von links mit a^{-1} und von rechts mit u'^{-1} folgt nach dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2

$$a^{-1}b = uu'^{-1} \in U$$

und damit $aU = bU$ nach (ii). □

Die Linksnebenklassen $aU, a \in G$, liefern eine Partition von G , d. h. sie zerlegen G in nichtleere disjunkte Teilmengen [19, S. 36]:

Lemma 2.1.7. [19, S. 36] *Sei $U \leq G$. Dann gilt*

(i). $G = \bigcup_{a \in G} aU$, wobei zwei Nebenklassen aU, bU entweder disjunkt oder gleich sind.

(ii). $\text{ord}(aU) = \text{ord}(U)$ für jedes $a \in G$.

Beweis. (i). Wegen $U \leq G$ gilt $e \in U$ und mit der Definition der Linksnebenklassen erhalten wir $a = ae \in aU$. Also liegt jedes $a \in G$ in einer Linksnebenklasse, weshalb $G = \bigcup_{a \in G} aU$ gilt, d. h. G ist eine Vereinigung seiner Linksnebenklassen. Nach Lemma 2.1.6 sind zwei Nebenklassen entweder disjunkt oder gleich.

(ii). Die Abbildung $U \rightarrow aU, u \mapsto au$ ist wegen der ersten Kürzungsregel aus Lemma 2.1.1 (i) eine Bijektion und somit gilt $\text{ord}(aU) = \text{ord}(U)$. □

Bemerkung. [8, S. 28] Wir erhalten also eine Zerlegung der Gruppe G in Linksnebenklassen bezüglich U . Die Menge dieser Linksnebenklassen bezeichnen wir mit

$$G/U := \{aU \mid a \in G\}.$$

Bemerkung. [8, S. 28] Eine andere Sichtweise wäre es, die Linksnebenklassen bezüglich U auf G als Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf G aufzufassen:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in U,$$

d. h. zwei Gruppenelemente $a, b \in G$ stehen genau dann in Relation zueinander, wenn sie Repräsentanten derselben Linksnebenklasse von U in G sind bzw. in derselben Linksnebenklasse von U in G liegen. Dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt, folgt unmittelbar aus den Bedingungen einer Untergruppe:

2.1 Gruppen und Untergruppen

- Die Relation $\sim$ ist reflexiv, weil das neutrale Element e in der Untergruppe liegt, d. h.

$$a \sim a \Leftrightarrow a^{-1}a = e \in U.$$

- Die Relation $\sim$ ist symmetrisch, weil das Inverse jedes Untergruppenelements auch in der Untergruppe liegt, d. h.

$$\begin{aligned} a \sim b &\Leftrightarrow a^{-1}b \in U \\ &\Rightarrow (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}(a^{-1})^{-1} = b^{-1}a \in U \\ &\Leftrightarrow b \sim a. \end{aligned}$$

- Die Relation $\sim$ ist transitiv, wegen der Abgeschlossenheit der Untergruppe und der Assoziativität:

$$\begin{aligned} a \sim b \wedge b \sim c &\Leftrightarrow a^{-1}b \in U \wedge b^{-1}c \in U \\ &\Rightarrow (a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}(\underbrace{bb^{-1}}_e)c = a^{-1}c = a^{-1}c \in U \\ &\Leftrightarrow a \sim c. \end{aligned}$$

Dadurch folgt erneut, dass die Linksnebenklassen $aU, a \in G$, eine Partition von G liefern.

Für uns ist wichtig angeben zu können, wie viele verschiedene Linksnebenklassen eine Untergruppe U in G hat:

Definition. [8, S. 29] (Index von U in G). Für $U \leq G$ nennt man die Anzahl der Linksnebenklassen von U in G , d. h. der Elemente in G/U ,

$$\text{ind}(G : U) := \text{ord}(G/U)$$

den Index von U in G .

Nun stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um den bereits angekündigten Satz von Lagrange zu formulieren und zu beweisen. Dieser Satz stellt uns eine hilfreiche Beziehung zwischen der Ordnung einer Gruppe und den Ordnungen ihrer Untergruppen her. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung endlicher Gruppen G :

Theorem 2.1.8. [19, S. 38-39] (Satz von Lagrange). Für jede Untergruppe U einer endlichen Gruppe G gilt

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(U) \cdot \text{ind}(G : U).$$

Insbesondere sind $\text{ord}(U)$ und $\text{ind}(G : U)$ Teiler von $\text{ord}(G)$.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. Nach Lemma 2.1.7 (i) bilden die Linksnebenklasse aU , $a \in U$, eine Partition von G . Sei also $U, a_1U, a_2U, \dots, a_nU$ diese Zerlegung von G in Linksnebenklassen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\text{ord}(G) &= \text{ord}(U) + \text{ord}(a_1U) + \text{ord}(a_2U) + \dots + \text{ord}(a_nU) \\ &= \text{ord}(U) + \text{ord}(U) + \text{ord}(U) + \dots + \text{ord}(U) \\ &= \text{ord}(U) \cdot \text{ind}(G : U).\end{aligned}$$

Dabei geht in der zweiten Zeile ein, dass nach Lemma 2.1.7 (ii) alle Nebenklassen $\text{ord}(U)$ Elemente enthalten, und in der dritten Zeile die Definition des Index von U in G als Anzahl der Linksnebenklassen von U in G . $\square$

2.2 Homomorphismen zwischen Gruppen

Um die strukturbedingten Unterschiede von Gruppen untersuchen zu können, die von der Art der Beschreibung der einzelnen Gruppen unabhängig sind, benötigt man strukturverträgliche Abbildungen zwischen Gruppen, sogenannte Homomorphismen [19, S. 25]:

Definition. [8, S. 21] (Homomorphismus). Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ heißt Homomorphismus, wenn für all $a, b \in G$ gilt:

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b).$$

Im Fall $G = H$ nennen wir einen Homomorphismus auch Endomorphismus.

Bemerkung. [19, S. 25] Um zu verdeutlichen, wie Homomorphismen möglicherweise sehr unterschiedliche Verknüpfungen miteinander in Beziehung bringen, wurden hier ausdrücklich die verschiedenen Multiplikationszeichen angegeben. Unter einem Homomorphismus ist es also egal, ob man $a, b \in G$ zuerst in G verknüpft und dann nach H abbildet oder ob man zuerst nach H abbildet und anschließend dort verknüpft.

Besonders wichtig für unsere Zwecke sind bijektive Homomorphismen, sogenannte Isomorphismen:

Definition. [8, S. 21] (Isomorphismus). Zwei Gruppen G und H heißen isomorph, wenn es einen bijektiven Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ gibt. Wir schreiben dafür kurz $G \cong H$ und nennen φ einen Isomorphismus. Im Fall $G = H$ nennen wir einen Isomorphismus auch Automorphismus.

Bemerkung. [1, S. 32] Isomorphismen werden uns in der Anwendung auf die Symmetriegruppen dabei helfen, die strukturelle Gleichheit verschiedener Gruppen nachzuweisen. Sprechen wir also davon, dass zwei Gruppen "gleich" sind, meinen wir damit, dass ihre Elemente in derselben Art und Weise verknüpft werden. Vereinfacht gesprochen handelt es sich bei einem Isomorphismus also nur um eine Umbenennung der Gruppenelemente.

2.2 Homomorphismen zwischen Gruppen

Um die Bijektivität eines Homomorphismus nachzuweisen, werden wir seinen Kern und sein Bild betrachten:

Definition. [8, S. 21] (Kern und Bild). Seien G und H Gruppen, $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus und $e_H \in H$ das neutrale Element in H . Dann heißt

$$\text{Ker } \varphi := \{a \in G \mid \varphi(a) = e_H\} = \varphi^{-1}(\{e_H\})$$

der Kern² von φ und

$$\text{Im } \varphi := \varphi(G) \subseteq H$$

das Bild von φ .

Homomorphismen haben folgende Eigenschaften:

Lemma 2.2.1. [8, S. 21-22] Seien G und H Gruppen mit den neutralen Elementen e_G und e_H , $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus und $a \in G$. Dann gilt:

- (i). $\varphi(e_G) = e_H$, d. h. ein Homomorphismus bildet das neutrale Element auf das neutrale Element ab.
- (ii). $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$, d. h. die Bilder von Inversen sind die Inversen der Bilder.
- (iii). Ist $U \leq G$, so ist auch $\varphi(U) \leq H$, d. h. die Bilder von Untergruppen sind Untergruppen.
- (iv). Ist $V \leq H$, so ist auch $\varphi^{-1}(V) \leq G$, d. h. die Urbilder von Untergruppen sind Untergruppen.
- (v). Ist φ invertierbar, so ist auch $\varphi^{-1} : H \rightarrow G$ ein Homomorphismus.
- (vi). Sind $\varphi : G \rightarrow H$ und $\psi : H \rightarrow H'$ Homomorphismen, so ist auch ihre Verknüpfung $\psi \circ \varphi : G \rightarrow H'$ ein Homomorphismus.

Beweis. (i). Wegen der Definition eines Homomorphismus erhalten wir $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$. Durch Verknüpfen von links (oder rechts) mit $\varphi(e_G)^{-1}$ folgt die Behauptung.

(ii). Mit (i) und wegen der Definition eines Homomorphismus erhalten wir $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1})$. Durch Verknüpfen von links mit $\varphi(a)^{-1}$ folgt die Behauptung.

(iii). Ist $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b) \in \varphi(U)$ mit $a, b \in U$, so ist

$$a'(b')^{-1} = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) \in \varphi(U),$$

weil $ab^{-1} \in U$ nach dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2. Bei der zweiten Gleichheit geht (ii) ein und bei der dritten die Definition eines Homomorphismus.

²Oft wird stattdessen $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(e_H)$ geschrieben [19, S. 26]. Um zu betonen, dass es sich hierbei um das Urbild einer Menge bzw. genauer gesagt der trivialen Untergruppe handelt, bleiben wir bei der hier angeführten ausführlicheren Schreibweise.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

(iv). Für $a, b \in \varphi^{-1}(V)$ ist $\varphi(a), \varphi(b) \in V$. Damit erhalten wir

$$\varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \in V,$$

also $ab^{-1} \in \varphi^{-1}(V)$ und mit dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2 folgt die Behauptung. Bei der ersten Gleichheit geht die Definition eines Homomorphismus ein und bei der zweiten Gleichheit (ii).

(v). Ist φ invertierbar, so gibt es zu $a', b' \in H$ auch $a, b \in G$ mit $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ und $a = \varphi^{-1}(a')$, $b = \varphi^{-1}(b')$. Damit, und weil φ nach Voraussetzung ein Homomorphismus ist, erhalten wir

$$\varphi^{-1}(a'b') = \varphi^{-1}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(ab)) = ab = \varphi^{-1}(a')\varphi^{-1}(b'),$$

d. h. auch φ^{-1} ist ein Homomorphismus.

(vi). Für $a, b \in G$ gilt

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(ab) &= \psi(\varphi(ab)) = \psi(\varphi(a)\varphi(b)) = \psi(\varphi(a))\psi(\varphi(b)) \\ &= (\psi \circ \varphi)(a)(\psi \circ \varphi)(b).\end{aligned}$$

Dabei geht neben der Definition einer Verknüpfung von Abbildungen nur die Voraussetzung ein, dass φ, ψ Homomorphismen sind. D. h. die behauptete Transitivität ist gegeben. □

Bemerkung. [8, S. 21-22] Insbesondere folgt aus Lemma 2.2.1 (v), dass wenn φ ein Isomorphismus ist, auch φ^{-1} ein Isomorphismus ist und aus (vi), dass wenn φ, ψ Isomorphismen sind, auch ihre Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist.

Aus obenstehendem Lemma erhalten wir eine wichtige Eigenschaft des Kerns und des Bildes eines Homomorphismus:

Lemma 2.2.2. [19, S. 26] *Der Kern eines Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ ist eine Untergruppe von G und sein Bild ist eine Untergruppe von H .*

Beweis. Für den Kern gilt nach Definition $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\{e_H\})$. Da $\{e_H\} \leq H$ eine Untergruppe ist, folgt die Behauptung direkt aus Lemma 2.2.1 (iv). Für das Bild gilt nach Definition $\text{Im } \varphi = \varphi(G)$. Da G als eine Untergruppe ihrer selbst aufgefasst werden kann, folgt die Behauptung direkt aus Lemma 2.2.1 (iii). □

Nützlich für den Nachweis der Injektivität eines Homomorphismus ist nun folgendes Kriterium:

Lemma 2.2.3. [19, S. 26] (Injektivitätskriterium). *Ein Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$, wobei $e_G \in G$ das neutrale Element in G ist.*

2.2 Homomorphismen zwischen Gruppen

Beweis. Für $a \in \text{Ker } \varphi$ gilt $\varphi(a) = e_H = \varphi(e_G)$, wobei wir die zweite Gleichheit aus Lemma 2.2.1 (i) erhalten. Ist nun φ injektiv, so folgt $a = e_G$, d.h. $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$. Umgekehrt liefert $\varphi(a) = \varphi(b)$ nach Verknüpfung von rechts mit $\varphi(b)^{-1}$ für $a, b \in G$ mit Lemma 2.2.1 (ii) und wegen der Definition eines Homomorphismus

$$e_H = \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}),$$

d. h. $ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi$. Wegen der Voraussetzung $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$ folgt daraus $ab^{-1} = e_G$, d. h. $a = b$. $\square$

Mithilfe von Produkten kann man aus gegebenen Gruppen neue Gruppen konstruieren [8, S. 39]. Für uns ist dabei eine bestimmte Art bedeutsam, das sogenannte äußere direkt Produkt:

Definition. [8, S. 41] (Äußeres direktes Produkt). Seien G_1, G_2 Gruppen und $a_i, b_i \in G_i$ für $i = 1, 2$. Man nennt $G_1 \times G_2$ mit der Verknüpfung $*$, definiert durch

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (a_1 b_1, a_2 b_2),$$

äußeres direktes Produkt von G_1 und G_2 .

Diese komponentenweise definierte Verknüpfung hat folgende Eigenschaften:

Theorem 2.2.4. [8, S. 41] (Satz über das äußere direkte Produkt). Seien G_1, G_2 Gruppen. Für $G_1 \times G_2$ mit der oben definierten Verknüpfung $*$ gilt:

(i). $G_1 \times G_2$ ist eine Gruppe.

(ii). Für $i = 1, 2$ sind die Projektionen

$$\pi_i : G_1 \times G_2 \rightarrow G_i, (a_1, a_2) \mapsto a_i,$$

auf die erste bzw. zweite Komponente Homomorphismen.

(iii). Sei H eine beliebige Gruppe mit Homomorphismen $\varphi : H \rightarrow G_i$ für $i = 1, 2$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : H \rightarrow G_1 \times G_2$, sodass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & G_1 & & \\ & \nearrow \varphi_1 & \uparrow \pi_1 & & \\ H & \xrightarrow{\varphi} & G_1 \times G_2 & & \\ & \searrow \varphi_2 & \downarrow \pi_2 & & \\ & & G_2 & & \end{array}$$

kommutiert, d. h. für jedes $c \in H$ gilt $\varphi_i(c) = \pi_i(\varphi(c))$. Der Homomorphismus φ hat dabei folgende Gestalt: $\varphi(c) = (\varphi_1(c), \varphi_2(c))$.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. (i). Da das Assoziativgesetz in G_1 und G_2 gilt, folgt seine Gültigkeit in $G_1 \times G_2$ direkt aus der komponentenweisen Definition der Verknüpfung $*$. Seien $e_i \in G_i$ die neutralen Elemente und $a_i^{-1} \in G_i$ die Inversen von $a_i \in G_i$. Somit ist $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ neutrales Element und für die Inversen in $G_1 \times G_2$ gilt $(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1})$.

(ii). Für die Projektionen π_i gilt

$$\pi_i((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) = \pi_i(a_1 b_1, a_2 b_2) = a_i b_i = \pi_i(a_1, a_2) \pi_i(b_1, b_2),$$

wobei nur die Definitionen der Verknüpfung und der Projektionen eingehen. Somit erfüllen die beiden Projektionen die Definition eines Homomorphismus.

(iii). Für $c \in H$ gibt es wegen der Forderung $\varphi_i(c) = \pi_i(\varphi(c))$ nur die Möglichkeit $\varphi(c) = (\varphi_1(c), \varphi_2(c))$, d. h. $\varphi_i(c)$ muss die i -te Komponente von $\varphi(c)$ sein, weil π_i auf die i -te Komponente projiziert und die jeweils andere Komponente "vergisst". Diese Abbildung ist ein Homomorphismus, denn für $c_1, c_2 \in H$ gilt

$$\varphi(c_1 c_2) = (\varphi_1(c_1 c_2), \varphi_2(c_1 c_2)) = (\varphi_1(c_1) \varphi_1(c_2), \varphi_2(c_1) \varphi_2(c_2)) = \varphi(c_1) \varphi(c_2),$$

wobei nur bei der zweiten Gleichheit eingeht, dass φ_i für $i = 1, 2$ Homomorphismen sind. □

2.3 Operationen von Gruppen auf Mengen

In diesem Unterkapitel arbeiten wir auf eine Abzählformel hin, die uns in der Anwendung auf die Platonischen und Archimedischen Körper helfen wird, die Mächtigkeiten ihrer Symmetriegruppen zu ermitteln. Dafür betrachten wir bestimmte Abbildungen, sogenannte Operationen einer Gruppe auf einer Menge:

Definition. [8, S. 73] (Gruppenoperation). Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge $M \neq \emptyset$ ist eine Abbildung

$$\lambda : G \times M \rightarrow M, (a, x) \mapsto \lambda(a, x) =: \lambda_a(x)$$

mit folgenden beiden Eigenschaften

- (i). $\lambda_e(x) = x$ für jedes $x \in M$ und das neutrale Element $e \in G$.
- (ii). $\lambda_{ab}(x) = \lambda_a(\lambda_b(x))$ für alle $a, b \in G$ und $x \in M$.

Man bezeichnet Gruppenoperationen auch als Gruppenwirkungen.

Bemerkung. [8, S. 73-74] Anstelle von $\lambda_a(x)$ schreiben wir $a(x)$, d. h. wir fassen jedes Gruppenelement $a \in G$ als eine Bijektion

$$\lambda_a : M \rightarrow M, x \mapsto \lambda_a(x)$$

2.3 Operationen von Gruppen auf Mengen

auf. Bei dieser Abbildung wird also die erste Eintragung a von $\lambda(a, x)$ fixiert. Um die Bijektivität der Abbildung λ_a auf M nachzuweisen, verwenden wir die als Konsequenz folgende dritte Eigenschaft einer Gruppenoperation, dass $\lambda_{a^{-1}}$ die Umkehrabbildung von λ_a ist, d. h. dass $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$. Das bedeutet, dass die Umkehrabbildung der Inversion in der Gruppe entspricht und folgt unter Verwendung der Eigenschaft (ii) einer Gruppenoperation aus

$$\lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a \stackrel{(ii)}{=} \lambda_{a^{-1}a} = \lambda_e = \lambda_{aa^{-1}} \stackrel{(ii)}{=} \lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}}. \quad (2.3.1)$$

Dabei folgen die zweite und dritte Gleichheit wegen $a \in G$ aus der Definition einer Gruppe. Wegen Eigenschaft (i) einer Gruppenoperation gilt

$$\lambda_e = \text{Id}_M. \quad (2.3.2)$$

Kombinieren wir die Gleichungen (2.3.1) und (2.3.2) erhalten wir

$$\lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \text{Id}_M = \lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}},$$

d. h. λ_a ist bijektiv, also $\lambda_a \in \text{Bij}(M)$.

Die durch unsere neue Notation (a statt λ_a) verursachte Doppelbedeutung ($a \in G$ und $a \in \text{Bij}(M)$) ist jedoch unproblematisch, weil die unserer neuen Notation zugrundeliegende Abbildung von der Gruppe G in die Menge der Bijektionen von M , d. h.

$$\check{\lambda} : G \rightarrow \text{Bij}(M), a \mapsto \check{\lambda}(a) = \lambda_a,$$

wegen der aus Eigenschaft (ii) einer Gruppenoperation folgenden Gleichheit $\lambda_a \circ \lambda_b(x) = \lambda_{ab}(x)$ ein Homomorphismus ist.³ Diese Feststellung ist zentral, weil wir somit jede Gruppenoperation als Homomorphismus in die Bijektionen auffassen können. Wir hätten die Möglichkeit dieser Uminterpretation auch umgekehrt ausgehend vom Homomorphismus $\check{\lambda}$ nachweisen können, jedoch ist dies anhand der beiden Eigenschaften einer Gruppenoperation einfacher zu überprüfen.

Mit unserer neuen Notation lauten die beiden obigen Eigenschaften einer Gruppenoperation folgendermaßen:

$$e(x) = x \quad \text{und} \quad (ab)(x) = a(b(x)).$$

Die daraus als Konsequenz folgende dritte Eigenschaft $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$ lässt sich in der neuen Notation nicht anschreiben, da mit a^{-1} sowohl das Inverse des Gruppenelements $a \in G$ als auch die Umkehrabbildung von λ_a bezeichnet wird. Diese Doppelbedeutung ist jedoch wegen der oben nachgewiesenen Verträglichkeit unserer neuen Notation mit der Inversion unproblematisch.

³Wir greifen an dieser Stelle bereits auf Lemma 2.4.1 vor und verwenden, dass die Menge der Bijektionen von M eine Gruppe bilden. Diese Gruppe werden wir in Unterkapitel 2.4 als die sogenannte Permutationsgruppe kennenlernen.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Für uns bedeutsam sind sogenannte transitive Gruppenoperationen:

Definition. [8, S. 74] Eine Operation von G auf M heißt transitiv, wenn es zu $x, y \in M$ ein $a \in G$ gibt mit $a(x) = y$.

Unter der Operation einer Gruppe wird eine Menge in ihre sogenannten Bahnen partitioniert [8, S. 75]:

Definition. [8, S. 75] (Bahn). Operiert eine Gruppe G auf einer Menge M und ist $x \in M$, so heißt

$$G(x) := \{a(x) \in M \mid a \in G\} \subset M$$

die Bahn von x .

Lemma 2.3.1. [19, S. 85] Wenn die Gruppe G auf der Menge M operiert, ist die Menge $\{G(x) : x \in M\}$ aller Bahnen eine Partition von M , d. h.

- (i). $M = \bigcup_{x \in M} G(x)$,
- (ii). $G(x) \cap G(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow G(x) = G(y)$.

Beweis. (i). Wegen (i) in der Definition der Gruppenoperation gilt $x = e(x) \in G(x)$. Also liegt jedes $x \in M$ in einer Bahn von x , weshalb $M = \bigcup_{x \in M} G(x)$ gilt, d. h. M ist eine Vereinigung der Bahnen von x .

- (ii). Sind die Bahnen gleich, ist ihr Durchschnitt natürlich nicht leer. Ist umgekehrt $z \in G(x) \cap G(y) \neq \emptyset$, dann gibt es $a, b \in G$ mit $z = a(x) = b(y)$. Wenden wir die Umkehrabbildung a^{-1} an⁴, folgt mit (ii) in der Definition der Gruppenoperation und der Definition der Bahn von y

$$x = a^{-1}(b(y)) = (a^{-1}b)(y) \in G(y).$$

Es folgt $G(x) \subseteq G(G(y)) \subseteq G(y)$. Aus Symmetriegründen gilt auch $G(y) \subseteq G(x)$ und somit $G(x) = G(y)$. □

Bemerkung. [8, S. 75] Eine andere Sichtweise wäre es, die Bahnen $G(x)$ als Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf M aufzufassen:

$$x \sim_G y \Leftrightarrow \exists a \in G : a(x) = y,$$

d. h. zwei Mengenelemente $x, y \in M$ stehen genau dann in Relation zueinander, wenn sie in derselben Bahn $G(x)$ liegen bzw. Repräsentanten derselben Bahn sind. Dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt, folgt unmittelbar aus den Eigenschaften einer Gruppenoperation:

⁴Es ist hier die unproblematische Doppelbedeutung zu beachten: Wir schreiben a^{-1} sowohl für das Inverse des Gruppenelements $a \in G$ als auch für die Umkehrabbildung $\lambda_{a^{-1}}$ von λ_a (siehe Bemerkung nach der Definition einer Gruppenoperation). An dieser Stelle ist letzteres gemeint.

2.3 Operationen von Gruppen auf Mengen

- Das neutrale Element $e \in G$ erfüllt nach Eigenschaft (i) $e(x) = x$, also ist die Relation $\sim_G$ reflexiv.
- Für $x \sim_G y$ gibt es ein $a \in G$ mit $a(x) = y$. Mit den Eigenschaften einer Gruppenoperation erhalten wir $a^{-1}(y) = a^{-1}(a(x)) \stackrel{(ii)}{=} (a^{-1}a)(x) = e(x) \stackrel{(i)}{=} x$. Wegen $a^{-1} \in G$ gilt somit auch $y \sim_G x$, also ist die Relation $\sim_G$ symmetrisch.
- Für $x \sim_G y$ und $y \sim_G z$ gibt es $a, b \in G$ mit $a(x) = y$ und $b(y) = z$. Mit der Eigenschaft (ii) einer Gruppenoperation erhalten wir $(ab)(x) = a(b(x)) = z$. Wegen der Abgeschlossenheit einer Gruppe ist $ab \in G$ und somit gilt auch $x \sim_G z$, also ist die Relation $\sim_G$ transitiv.

Dadurch folgt erneut, dass die Bahnen $G(x)$ eine Partition von M liefern.

Bemerkung. [8, S. 75] Ist die Operation von G auf M transitiv, gibt es nur eine Bahn, d. h. es kann jeder Punkt in jeden anderen transportiert werden. Im Allgemeinen geht das nicht. Als Beispiel dafür betrachten wir für $x \in M$ und $g \in G$ die triviale Wirkung $g(x) = x$, bei der jedes $x \in M$ eine eigene einelementig Bahn hat.

Um Aussagen über die Mächtigkeiten der Bahnen treffen zu können, benötigen wir bestimmte Untergruppen von G , sogenannte Stabilisatorgruppen:

Definition. [8, S. 75] (Stabilisatorgruppe). Ist $N \subset M$, so heißt

$$\text{Sta}_G(N) := \{a \in G \mid a(N) = N\} \subset G$$

die Stabilisatorgruppe von N bezüglich der Operation von G auf M .

Lemma 2.3.2. [8, S. 75] *Die Stabilisatorgruppe von N bezüglich der Operation von G auf M ist eine Untergruppe von G , d. h. $\text{Sta}_G(N) \leq G$.*

Beweis. Seien $a, b \in \text{Sta}_G(N)$, d. h. $a(N) = N$ und $b(N) = N$. Formen wir den zweiten Ausdruck auf $N = b^{-1}(N)$ um und setzen in den ersten Ausdruck ein, erhalten wir $N = a(N) = a(b^{-1}(N)) = (ab^{-1})(N)$. Also ist $ab^{-1} \in \text{Sta}_G(N)$, d. h. das Untergruppenkriterium nach Lemma 2.1.2 ist erfüllt. $\square$

Nun stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um die bereits angekündigte Abzählformel zu formulieren und zu beweisen. Dieses sogenannte Bahn-Lemma nutzt die Tatsache, dass eine Menge unter der Operation einer Gruppe in disjunkte Bahnen zerlegt wird (siehe Lemma 2.3.1) und gibt uns somit eine gute Möglichkeit zur Abzählung der Elemente in einer Gruppe [8, S.75]:

Lemma 2.3.3. [8, S.75-76] (Bahn-Lemma). *Operiert eine endliche Gruppe G auf einer Menge M und ist $x \in M$, so gilt*

$$\begin{aligned} \text{ord } G(x) &= \text{ind}(G : \text{Sta}_G(x)), \text{ d. h.} \\ \text{ord}(G) &= (\text{ord } G(x)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(x)). \end{aligned}$$

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. Wir setzen $U := \text{Sta}_G(x)$. Nach Lemma 2.3.2 gilt somit $U \leq G$. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\mu : G(x) \rightarrow G/U, a(x) \mapsto aU$$

bijektiv ist. Für $a, b \in G$ ist

$$\begin{aligned} a(x) = b(x) &\Leftrightarrow a^{-1}(a(x)) = a^{-1}(b(x)) \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} (a^{-1}a)(x) = (a^{-1}b)(x) \\ &\stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} x = (a^{-1}b)(x) \Leftrightarrow a^{-1}b \in U \Leftrightarrow aU = bU, \end{aligned}$$

also ist μ wohldefiniert und injektiv. Dabei wird bei der ersten Äquivalenz von links mit a^{-1} gewirkt, bei der zweiten und dritten werden die Eigenschaften einer Gruppenoperation angewendet, bei der vierten geht die Definition der Stabilisatorgruppe von x ein und bei der fünften wird Lemma 2.1.6 (ii) angewendet. Für jedes $aU \in G/U$ gibt es offensichtlich ein $a(x) \in G(x)$ mit $\mu(a(x)) = aU$, wodurch auch die Surjektivität von μ gegeben ist. Also ist μ eine bijektive Abbildung und somit haben wir nachgewiesen, dass in der Bahn von x gleich viele Elemente sind, wie die Stabilisatorgruppe von x Linksnebenklassen in G hat, d. h.

$$\text{ord } G(x) = \text{ind}(G : U). \quad (2.3.3)$$

Wegen $U \leq G$ gilt zudem nach dem Satz von Lagrange 2.1.8

$$\text{ord}(G) = \text{ord}(U) \cdot \text{ind}(G : U). \quad (2.3.4)$$

Setzen wir nun die Gleichung (2.3.3) in die Gleichung (2.3.4) ein erhalten wir die Behauptung. $\square$

2.4 Die symmetrische Gruppe S_n

Ursprünglich beschäftigte sich die Gruppentheorie mit der Untersuchung von Permutationsgruppen [19, S. 27]. Erst die Axiomatisierung des Gruppenbegriffs durch Arthur Cayley im Jahr 1854 ermöglichte die Untersuchung abstrakterer Gruppen [19, S. 17, 27]. In diesem Unterkapitel werden wir jedoch sehen, dass jede endliche Gruppe als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe auffassbar ist.

Bei einer Permutation handelt es sich um das Umordnen oder Vertauschen der Elemente einer beliebigen Menge X :

Definition. [1, S. 26] (Permutation). Bei einer Permutation handelt es sich um eine bijektive Abbildung $\sigma : X \rightarrow X$ einer beliebigen Menge X auf sich selbst. Dabei nennen wir $\sigma^{-1} : X \rightarrow X$ inverse Permutation und $\epsilon : X \rightarrow X, x \mapsto x$ für alle $x \in X$ identische Permutation.

Die Menge aller Permutationen einer Menge X bildet zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen die sogenannte Permutationsgruppe S_X [1, S. 26]:

Lemma 2.4.1. [19, S. 19] Für jede nichtleere Menge X bildet $S_X = \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow X \text{ bijektiv}\}$ zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen $\circ$ eine Gruppe, die sogenannte Permutationsgruppe.

Beweis. [1, S. 26] Seien $\sigma_i : X \rightarrow X$ mit $i = 1, 2, 3$ Permutationen. Dann ist auch ihre Verknüpfung $\sigma_1 \circ \sigma_2 : X \rightarrow X$ mit $\sigma_1 \circ \sigma_2(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$ wieder bijektiv und somit eine Permutation. Die Verknüpfung von Abbildungen ist wegen $(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3(x) = (\sigma_1(\sigma_2(\sigma_3(x)))) = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3)(x)$ assoziativ und die identische Permutation $\epsilon : X \rightarrow X, x \mapsto x$ für alle $x \in X$ ist offensichtlich das neutrale Element. Weil jede Permutation σ eine Bijektion ist, hat sie ein eindeutig bestimmtes Inverses $\sigma^{-1} : X \rightarrow X$, das wieder eine Permutation ist und $\sigma^{-1} \circ \sigma = \epsilon = \sigma \circ \sigma^{-1}$ erfüllt. $\square$

Bemerkung. Im Zuge der Definition einer Gruppenoperation in Unterkapitel 2.4 haben wir mithilfe einer Abbildung von der Gruppe G in die Menge der Bijektionen von M eine Abbildung $G \rightarrow \text{Bij}(M), a \mapsto \lambda_a$ eingeführt. Statt der dort notdürftig vorgegriffen eingeführten Schreibweise $\text{Bij}(M)$ schreiben wir also von nun an S_M .

Somit definieren wir:

Definition. [19, S. 19] (Symmetrische Gruppe S_n). Für eine endliche Menge $X = \{1, \dots, n\}$ nennen wir die Permutationsgruppe $(S_X, \circ)$ symmetrische Gruppe von X . Statt S_X schreiben wir in diesem Fall S_n und bezeichnen auch die Gruppe kurz mit S_n .

Bemerkung. [19, S. 19, S. 107-108] Bekanntlich gilt $\text{ord}(S_n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$. Durch unsere vorausgegangene Auseinandersetzung mit Gruppenoperationen können wir uns nun davon überzeugen, indem wir die Operation der Gruppe S_n auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ betrachten. Dabei gibt es nur eine Bahn $S_n(n) = \{1, \dots, n\}$ mit $\sigma \in S_n$, weil es sich um eine transitive Gruppenoperation handelt, und somit gilt $\text{ord } S_n(n) = n$. Weiters gilt $\text{Sta}_{S_n}(n) = S_{n-1}$, weil jede Permutation, die n fest lässt, nur mehr eine Permutation von $\{1, \dots, n-1\}$ und somit ein Element aus S_{n-1} ist. Mit dem Bahn-Lemma 2.3.3 erhalten wir also $\text{ord}(S_n) = (\text{ord } S_n(n)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{S_n}(n)) = n \cdot \text{ord}(S_{n-1})$. Da diese Rekursionsgleichung jener der Faktoriellen entspricht, erhalten wir durch Induktion nach n , dass $\text{ord } S_n = n!$.

Für $\sigma \in S_n$ führen wir statt der Schreibweise als 2-reihige Matrix, bei der das Bild $\sigma(i)$ von $i \in \{1, \dots, n\}$ unter i steht

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

eine kompaktere Schreibweise ein, die sogenannte Zykelschreibweise [19, S. 19]:

Definition. [19, S. 105-106] (Zyklus). Eine Permutation $\sigma \in S_n$ heißt Zyklus der Länge l oder l -Zyklus, wenn es paarweise verschiedene $a_1, a_2, \dots, a_l \in I_n := \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, sodass

- (i). $\sigma(a_k) = a_{k+1}$ für $k = 1, \dots, l-1$,
- (ii). $\sigma(a_l) = a_1$,
- (iii). $\sigma(x) = x$ für $x \in I_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Wir schreiben dafür $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_l)$. Der einzige Zyklus der Länge 1 ist die Identität $\text{Id} = (1) = \dots = (n)$. Zyklen $(a_1 a_2)$ der Länge 2 heißen Transpositionen. Man nennt Zyklen $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_l)$ und $\tau = (b_1 b_2 \dots b_m)$ elementfremd, wenn $\{a_1, a_2, \dots, a_l\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_m\} = \emptyset$.

Bemerkung. [19, S. 106] Offenbar gilt $(a_1 a_2 \dots a_l) = (a_2 \dots a_l a_1) = \dots = (a_l a_1 \dots a_{l-1})$.

Die Verknüpfung zweier Permutationen ist im Allgemeinen nicht kommutativ und es gilt, wie bei Abbildungen üblich, “rechts vor links” [8, S. 12-13]. Wir veranschaulichen dies an einem Beispiel:

Beispiel. [8, S. 12] In Zweizeilenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In Zykelschreibweise:

$$(132) \circ (12) = (23)$$

$$(12) \circ (132) = (13)$$

Durch dieses Beispiel wird auch die Kompaktheit der Zykelschreibweise im Vergleich zur Matrixschreibweise verdeutlicht. Für Zyklen gelten folgende Rechenregeln:

Lemma 2.4.2. [19, S. 106-107] (Rechenregeln für Zyklen).

- (i). Sind σ und τ elementfremde Zyklen, so ist $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, d. h. die Zyklen sind vertauschbar.
- (ii). $(a_1 a_2 \dots a_l) = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{l-1} a_l)$, d. h. jeder l -Zyklus ist das Produkt von $l - 1$ Transpositionen.
- (iii). $\text{ord}(a_1 a_2 \dots a_l) = l$, d. h. die Ordnung eines l -Zyklus ist l .
- (iv). $(a_1 a_2 \dots a_l)^{-1} = (a_l a_{l-1} \dots a_1)$, d. h. die Inversion kehrt die Richtung um.

Beweis. (i). Seien $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_l)$ und $\tau = (b_1 b_2 \dots b_m)$ elementfremde Zyklen, d. h. $\{a_1, a_2, \dots, a_l\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_m\} = \emptyset$. Es gilt

$$\begin{aligned} a \in \{a_1, a_2, \dots, a_l\} &\Rightarrow \sigma \circ \tau(a) = \sigma(a) = \tau \circ \sigma(a), \\ b \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\} &\Rightarrow \sigma \circ \tau(b) = \tau(b) = \tau \circ \sigma(b), \\ x \notin \{a_1, a_2, \dots, a_l\} \cup \{b_1, b_2, \dots, b_m\} &\Rightarrow \sigma \circ \tau(x) = x = \tau \circ \sigma(x), \end{aligned}$$

und somit gilt $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

- (ii). folgt durch direktes Nachrechnen.

(iii). Ist $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_l)$, so gilt offenbar $\sigma^l = \text{Id}$, also gilt $\text{ord}(\sigma) \leq l$. Für $r < l$ gilt andererseits $\sigma^r(a_1) = a_{r+1} \neq a_1$, d. h. $\sigma^r \neq \text{Id}$, also gilt auch $\text{ord}(\sigma) \geq l$ und somit $\text{ord}(\sigma) = l$.

(iv). folgt aus $(a_1 a_2 \dots a_l) \circ (a_l a_{l-1} \dots a_1) = \text{Id}$.

□

Wir wenden nun die in Lemma 2.3.1 nachgewiesene Tatsache, dass eine Menge unter der Operation einer Gruppe in disjunkte Bahnen zerlegt wird, auf eine Permutation $\sigma \in S_n$ an und stellen dabei fest, dass jede Permutation als Produkt elementfremder Zyklen darstellbar ist [8, S. 78]:

Lemma 2.4.3. [8, S. 78-79] (Zyklenzerlegung einer Permutation). *Für $n \in \mathbb{N}$ ist jedes $\sigma \in S_n$ Produkt paarweise elementfremder Zyklen. Diese Produktdarstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.*

Beweis. Wir betrachten die von einer Permutation $\sigma \in S_n$ erzeugte zyklische Gruppe

$$G := \text{Erz}(\sigma) = \{\sigma^r \mid r \in \mathbb{Z}\} \leq S_n$$

und ihre Operation auf $M = \{1, \dots, n\}$. Nach Lemma 2.3.1 gibt es dann eine Partition

$$M = G(i_1) \cup G(i_2) \cup \dots \cup G(i_m)$$

in $m \leq n$ Bahnen, wobei $i_j \in G(i_j)$ für $j = 1, \dots, m$ ein beliebiger Repräsentant ist. Ist $G(i)$ eine dieser endlichen Bahnen, so gibt es dazu $r, l \in \mathbb{Z}$, o.B.d.A. $l > 0$, mit

$$\sigma^r(i) = \sigma^{r+l}(i), \text{ also } i = \sigma^l(i).$$

Ist $l \in \mathbb{N}$ minimal gewählt, so folgt, dass

$$G(i) = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{l-1}(i)\} \text{ mit } \text{ord } G(i) = l.$$

Zu dieser Bahn gehört der l -Zyklus

$$\sigma_i = (i, \sigma(i), \dots, \sigma^{l-1}(i)).$$

Insgesamt erhält man m elementfremde Zyklen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ der Längen $l_1, l_2, \dots, l_m$ mit $l_1 + l_2 + \dots + l_m = n$ und nach Konstruktion gilt somit

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m.$$

Hat man umgekehrt eine solche Darstellung der Permutation als Verknüpfung elementfremder Zyklen, muss diese wiederum auch zu den Bahnen passen, d. h. auch die Eindeutigkeit ist gegeben. □

Lemma 2.4.4. [19, S. 109] *Jede Permutation $\text{Id} \neq \sigma \in S_n$ ($n \geq 2$) kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden, d. h. S_n wird von den Transpositionen erzeugt.*

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. [8, S. 79] Nach Lemma 2.4.3 ist $\sigma \in S_n$ darstellbar als ein Produkt von Zyklen und nach Lemma 2.4.2 ist jeder dieser Zyklen wiederum ein Produkt von Transpositionen. $\square$

Bemerkung. [19, S. 110] Bei derartigen Darstellungen ist im Allgemeinen keine Eindeutigkeit gegeben und die Faktoren sind im Allgemeinen nicht disjunkt.

Im Folgenden werden wir noch eine besondere Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n kennenlernen, die sogenannte alternierende Gruppe A_n . Dafür benötigen wir das sogenannte Signum einer Permutation:

Definition. [19, S. 110] (Signum). Für $\sigma \in S_n$ nennt man

$$\text{sign } \sigma := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

das Signum (oder Vorzeichen) einer Permutation σ .

Bemerkung. [8, S. 24-25] Anschaulich gesprochen basiert das Signum auf der Anzahl der Fehlstände in der Permutation, d. h. der Anzahl der durch die Permutation hervorgerufenen Vertauschungen zweier Elemente: In der Folge $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ liegt ein Fehlstand vor, wenn $i < j$, aber $\sigma(i) > \sigma(j)$. In der obenstehenden Formel sind die Faktoren im Nenner immer positiv und im Zähler negativ bei jedem Fehlstand, sonst positiv. Ist k die Gesamtanzahl der Fehlstände über alle Paare i, j mit $i < j$, so ist $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$, wobei das Maximum $\binom{n}{2}$ für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

auftritt. Damit können wir die obenstehende Formel vereinfachen zu $\text{sign } \sigma := (-1)^k$.

Für das Signum gelten folgende Regeln:

Lemma 2.4.5. [19, S. 110] (Regeln für das Signum).

- (i). Die Abbildung $\text{sign} : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$, $\sigma \mapsto \text{sign } \sigma$ ist ein Homomorphismus von S_n in die multiplikative Gruppe $\{+1, -1\}$.
- (ii). Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\text{sign } \tau = -1$.
- (iii). Falls σ in s Transpositionen zerlegt wird, gilt $\text{sign } \sigma = (-1)^s$.
- (iv). Für jeden l -Zyklus $\sigma \in S_n$ gilt $\text{sign } \sigma = (-1)^{l-1}$.

Beweis. (i). Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \text{sign } \sigma \cdot \text{sign } \tau, \end{aligned}$$

d. h. sign ist ein Homomorphismus. Dabei wird der Bruch in der zweiten Zeile mit $\tau(j) - \tau(i)$ erweitert und

$$\prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} = \text{sign } \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i},$$

weil der rechte und der linke Term bis auf die durch τ permutierte Reihenfolge der Faktoren gleich sind und sich etwaige dadurch verursachte negative Vorzeichen im Nenner gegenseitig aufheben mit den dabei ebenso im Zähler entstehenden negativen Vorzeichen. Durch das Aufspalten des Produkts aus der Definition in die Produkte des Zählers und des Nenners erhalten wir

$$\text{sign}(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} \sigma(j) - \sigma(i)}{\prod_{i < j} j - i} = \frac{\prod_{i < j} \pm(j - i)}{\prod_{i < j} j - i} = \pm 1,$$

d. h. $\text{sign } \sigma \in \{+1, -1\}$ für jedes $\sigma \in S_n$.

- (ii). Sei $\tau = (rs)$ eine Transposition mit $r \neq s$, d. h. $\tau(r) = s, \tau(s) = r$ und $\tau(t) = t$, $\forall t \neq r, s$, und sei o.B.d.A. $r < s$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{sign } \tau &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \frac{\tau(s) - \tau(r)}{s - r} \cdot \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq r, s}} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n \frac{\tau(j) - \tau(s)}{j - s} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n \frac{\tau(j) - \tau(r)}{j - r} \\ &= \frac{r - s}{s - r} \cdot 1 \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n \frac{j - r}{j - s} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n \frac{j - s}{j - r} = -1. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit kommt dadurch zustande, dass der Nenner des erstens Faktors positiv ist während sein Zähler negativ ist und die beiden Produkte sich aufgrund ihrer gleichen Anzahl an Faktoren gegenseitig wegekürzen.

- (iii). Sei $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$ mit Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$. Da sign nach (i) ein Homomorphismus ist und weil nach (ii) gilt $\text{sign}(\tau_i) = -1, i = 1, \dots, n$, erhalten wir $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s) = \text{sign}(\tau_1) \cdots \text{sign}(\tau_s) = (-1)^s$.

Weiters sehen wir hiermit erneut, dass $\text{sign } \sigma \in \{+1, -1\}$ für jedes $\sigma \in S_n$, weil nach Lemma 2.4.4 jede Permutation als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann.

- (iv). folgt mit (iii) aus Lemma 2.4.2 (ii). □

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Damit erhalten wir:

Lemma 2.4.6. [8, S. 25] *Der Kern des Signums $\text{Ker}(\text{sign}) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign } \sigma = +1\}$ ist eine Untergruppe von S_n .*

Beweis. Die Abbildung $\text{sign} : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$ ist nach Lemma 2.4.5 (i) ein Homomorphismus und der Kern dieses Homomorphismus ist nach Lemma 2.2.2 eine Untergruppe von S_n . $\square$

Nach Lemma 2.4.5 (iii) haben genau jene Permutationen, die in eine gerade Anzahl von Transpositionen zerlegt werden können, das Vorzeichen $+1$ und jene, die in eine ungerade Anzahl von Transpositionen zerlegt werden können, das Vorzeichen -1 [19, S. 111]. Folglich definieren wir:

Definition. [19, S. 111] (Gerade und ungerade Permutationen). Man nennt eine Permutation $\sigma \in S_n$ gerade, wenn $\text{sign } \sigma = +1$ und ungerade, wenn $\text{sign } \sigma = -1$.

Nun stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um wie bereits angekündigt die alternierende Gruppe A_n definieren zu können:

Definition. [8, S. 25] (Alternierende Gruppe A_n). Für den Kern

$$\text{Ker}(\text{sign}) = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign } \sigma = +1\} =: A_n \leq S_n,$$

d. h. die Menge A_n der geraden Permutationen aus S_n , nennen wir $(A_n, \circ)$ alternierende Gruppe vom Grad n , $n \geq 2$. Wir bezeichnen auch die Gruppe kurz mit A_n .

Für die Anzahl der Elemente der alternierenden Gruppe A_n gilt Folgendes:

Lemma 2.4.7. [19, S. 111] *Für $n \geq 2$ gilt $\text{ord}(A_n) = \frac{1}{2}n!$.*

Beweis. Nach Lemma 2.4.6 gilt $A_n \leq S_n$. Mit dem Satz von Lagrange 2.1.8 erhalten wir

$$\text{ord}(S_n) = \text{ord}(A_n) \cdot \text{ind}(S_n : A_n). \quad (2.4.1)$$

Um zu zeigen, dass A_n nur zwei verschiedene Linksnebenklassen bezüglich S_n hat, konstruieren wir eine Abbildung $\chi : S_n/A_n \rightarrow \{+1, -1\}$, $\sigma A_n \mapsto \text{sign}(\sigma)$, d. h. χ ordnet jeder Linksnebenklasse von A_n in S_n das Vorzeichen ihres Repräsentanten zu, und weisen nach, dass es sich hierbei um eine bijektive Abbildung handelt. Für $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ ist

$$\sigma_1 A_n = \sigma_2 A_n \Leftrightarrow \sigma_1^{-1} \sigma_2 \in A_n \Leftrightarrow \text{sign}(\sigma_1^{-1} \sigma_2) = +1 \Leftrightarrow \text{sign}(\sigma_1) = \text{sign}(\sigma_2),$$

also ist χ wohldefiniert und injektiv. Bei der ersten Äquivalenz geht Lemma 2.1.6 (ii) ein, bei der zweiten die Definition von A_n und die dritte ergibt sich, weil das Signum nach Lemma 2.4.5 (i) ein Homomorphismus ist. Die Surjektivität von χ folgt, weil $\text{Id} \in S_n$ mit $\text{sign}(\text{Id}) = +1$ und für $n \geq 2$ (nach Definition) existiert auch eine Transposition $\tau \in S_n$ für die nach Lemma 2.4.5 (ii) $\text{sign } \tau = -1$ gilt. Da die Menge der Linksnebenklassen von A_n in S_n also bijektiv auf eine zweielementige Menge abgebildet werden konnte, gilt $\text{ind}(S_n : A_n) = 2$. Die Behauptung folgt somit wegen $\text{ord}(S_n) = n!$ aus der Gleichung (2.4.1).

2.4 Die symmetrische Gruppe S_n

Alternativ ist auch ein Abzählargument möglich: Die symmetrische Gruppe S_n wirkt transitiv auf $\{+1, -1\}$ (über das Signum). Nach Definition der alternierenden Gruppe gilt $\text{Sta}_{S_n}(+1) = A_n$. Wegen $\text{ord}(S_n) = n!$ folgt die Behauptung nun direkt mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3. $\square$

Lemma 2.4.8. [19, S. 111] *Für $n \geq 2$ wird A_n von den Dreierzyklen erzeugt.*

Beweis. [8, S. 79] Für jedes $\sigma \in A_n$ gilt nach Definition $\text{sign } \sigma = +1$. Da nach Lemma 2.4.5 (ii) für jede Transposition $\text{sign } \tau = -1$ und nach Lemma 2.4.4 jede Permutation als Produkt von Transpositionen geschrieben werden kann, muss $\sigma \in A_n$ Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen sein, d. h. A_n wird erzeugt von Produkten der Form $(ab) \circ (cd)$ mit $a \neq b$ und $c \neq d$:

$$\text{Erz } A_n = \{(ab) \circ (cd) \mid 1 \leq a < b \leq n, 1 \leq c < d \leq n\}.$$

Es genügt also jedes Produkt von zwei Transpositionen als Produkt von Dreierzyklen darzustellen. Hierbei müssen wir unterscheiden, ob diese beiden Transpositionen elementfremd sind oder nicht: Sind a, b, c, d paarweise verschieden, dann ist $(ab) \circ (cd) = (acb) \circ (acd)$. Ist $d = a$ und $c \neq b$, dann ist $(ab) \circ (ca) = (acb)$. Ist $d = a$ und $c = b$, dann ist $(ab) \circ (ab) = \text{Id}$. $\square$

Eingangs haben wir folgendes Resultat bereits angekündigt, das insbesondere auch aus historischer Sicht erwähnenswert erscheint:

Theorem 2.4.9. [8, S. 74] (Satz von Cayley). *Jede Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe einer Permutationsgruppe S_G .*

Für diesen Satz geben wir zwei Beweise. Der erste Beweis ist ausführlicher und erlaubt uns durch grundlegende Überlegungen ein gutes Verständnis für die vorliegende Tatsache zu erlangen:

Beweis. [19, S. 27] Wir konstruieren eine Abbildung

$$\lambda : G \rightarrow S_G, a \mapsto \lambda_a,$$

die die Gruppe G auf Permutationen ihrer eigenen Elemente abbildet. Dabei wählen wir

$$\lambda_a : G \rightarrow G, x \mapsto ax,$$

weil wir aus der Bemerkung nach Lemma 2.1.1 bereits wissen, dass Linksmultiplikationen λ_a bijektiv sind, d. h. $\lambda_a \in S_G$. Wir wollen nun also zeigen, dass das Bild $\lambda(G)$ eine Untergruppe von S_G ist und weiters, dass G isomorph zu $\lambda(G)$ ist, d. h.

$$G \cong \lambda(G) \leq S_G.$$

Für beides benötigen wir, dass λ wegen

$$\lambda_a \circ \lambda_b(x) = a(b(x)) = (ab)(x) = \lambda_{ab}(x) \quad \text{für alle } a, b, x \in G$$

2 Gruppentheoretische Grundlagen

ein Homomorphismus ist. Somit und weil nach Lemma 2.2.1 (iii) die Bilder von Untergruppen (wir fassen G hier auf als eine Untergruppe ihrer selbst) wieder Untergruppen sind, ist $\lambda(G) \leq S_G$. Um nun auch noch nachzuweisen, dass die Gruppe G isomorph zu ihrem Bild $\lambda(G)$ ist, reicht es zu zeigen, dass der Homomorphismus λ injektiv ist, weil die Surjektivität auf sein Bild nach Definition automatisch gegeben ist. Dazu sei $a \in G$ mit $\lambda_a = Id$ gegeben. Dann gilt $a = \lambda_a(e) = Id(e) = e$, d. h. $\text{Ker}(\lambda) = \{e\}$. Nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 ist λ somit injektiv und wir haben damit gezeigt, dass $G \cong \lambda(G)$. $\square$

Der zweite Beweis ist kompakter und erlaubt uns unser Vorwissen zu Gruppenoperationen anzuwenden und dabei ein elementares Beispiel für eine Gruppenoperation kennenzulernen:

Beweis. [8, S. 74-75] Eine Gruppe G wirkt wegen ihrer Assoziativität auf sich selbst durch Multiplikation, d. h. $\lambda : G \times G \rightarrow G, \lambda(a, b) = ab$. Wegen der Bemerkung nach der Definition einer Gruppenoperation bekommen wir dadurch einen Homomorphismus $\lambda : G \rightarrow S_G$.⁵ Dann bleibt nur noch zu zeigen, dass dieser Homomorphismus injektiv ist, indem man analog zu oben nachweist, dass sein Kern trivial ist. Wegen der Injektivität von λ ist dann die Isomorphie der Gruppe G zu ihrem Bild $\lambda(G)$ in den Bijektionen bereits nachgewiesen. $\square$

Bemerkung. [19, S.27] Somit ist auch jede Gruppe der endlichen Ordnung n zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n isomorph.

Man kann dieses Resultat nun entweder so sehen, dass durch die abstrakte Formulierung des Gruppenbegriffs eigentlich gar nichts Neues dazugewonnen wurde [19, S. 27], oder so, dass die kompliziertesten Situationen der Gruppentheorie innerhalb der symmetrischen Gruppen auftreten können [8, S. 75]. Jedenfalls steht fest, dass es zu mühsam wäre, die jeweiligen isomorphen Untergruppen in den üblicherweise riesigen symmetrischen Gruppen S_n mit $\text{ord } S_n = n!$ aufzusuchen [19, S. 27]. Bei unserer anstehenden Untersuchung der Symmetriegruppen der Platonischen und Archimedischen Körper werden wir jedoch feststellen, dass hier Isomorphismen zu vollen symmetrischen bzw. alternierenden Gruppen nachweisbar sind.

⁵Wir verzichten an dieser Stelle auf die Schreibweise mit dem Hatschek, damit die Parallelität zu Beweis 1 gegeben ist. Dies ist jedoch unproblematisch, weil es sich bis auf eine unterdrückte Bijektion um dieselbe Abbildung handelt (siehe Bemerkung nach der Definition einer Gruppenoperation).

2.5 Die Gruppe der Isometrien $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist diese Arbeit an der Schnittstelle zwischen Gruppentheorie und Geometrie zu verorten. Bisher haben wir uns neben der abstrakten Definition des Gruppenbegriffs auch bereits mit den historischen Anfängen der Gruppentheorie als Untersuchung von Permutationsgruppen beschäftigt. In den nächsten beiden Unterkapiteln wird nun endlich die Bedeutung der Gruppentheorie für die Geometrie sichtbar, indem wir den Symmetriehalt von Polyedern im $\mathbb{R}^n$ als Gruppen abstands-erhaltender Bijektionen, sogenannter Isometrien (auch: Bewegungen), mathematisch einfangen [6, S. 178].

Allem voran definieren wir also unsere Abstandsfunktion im $\mathbb{R}^n$ und machen die Menge $\mathbb{R}^n$ damit zu einem metrischen Raum [6, S. 157]:

Definition. [6, S. 157] (Abstand zweier Punkte, Euklidische Metrik). Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ nennen wir

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

den (Euklidischen) Abstand der Punkte x und y . Die Funktion $d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Weiter heißt $(\mathbb{R}^n, d)$ der Euklidische Raum der Dimension n .

Um die zentralen Eigenschaften des Abstands nachzuweisen und uns davon zu überzeugen, dass die n -dimensionale Euklidische Metrik d tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist, verwenden wir das Euklidische Skalarprodukt und die Euklidische Norm:

Definition. [6, S. 158-159] (Euklidisches Skalarprodukt und Norm). Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\langle x, y \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i y_i$$

und nennen die Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Weiters heißt die Zahl

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

die Norm (Länge) von x .

Bemerkung. Wir erinnern uns im Folgenden an einige zentrale Eigenschaften des Skalarprodukts und der Norm. Für das Skalarprodukt gilt mit $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ [21, S. 388]:

- (i). $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positive Definitheit),
- (ii). $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symmetrie),
- (iii). $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ und $\langle tx, y \rangle = t\langle x, y \rangle$ (Linearität in der ersten Variable)
und
- (iv). $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$ und $\langle x, ty \rangle = t\langle x, y \rangle$ (Linearität in der zweiten Variable).

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Weiters gilt für die Norm mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ [21, S. 386]:

- (i). $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positive Definitheit),
- (ii). $\|tx\| = |t|\|x\|$ (Homogenität) und
- (iii). $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Bemerkung. [26, S. 124] Mit den Eigenschaften des Skalarprodukts aus der vorhergehenden Bemerkung folgt:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle \stackrel{(iii)}{=} \langle x, x - y \rangle - \langle y, x - y \rangle \stackrel{(iv)}{=} \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\stackrel{(ii)}{=} \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Durch Umstellen nach dem Skalarprodukt erhalten wir die sogenannte Polarisierungsidentität, die wir später benötigen werden:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2). \quad (2.5.1)$$

Bemerkung. [21, S. 386] Zwischen der Norm und dem Abstand besteht folgender zentraler Zusammenhang: Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = d(x, y).$$

Setzen wir $y = 0$ erhalten wir, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\| = d(x, 0)$.

Somit folgt mit den Eigenschaften der Norm, dass die n -dimensionale Euklidische Metrik d tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ist:

Lemma 2.5.1. [21, S. 382] (Eigenschaften des Abstands). Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i). $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positive Definitheit),
- (ii). $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie) und
- (iii). $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Beweis. (i). folgt direkt aus der positiven Definitheit der Norm.

- (ii). folgt aus der Homogenität der Norm: $d(x, y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

- (iii). folgt aus der Dreiecksungleichung der Norm: $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

□

2.5 Die Gruppe der Isometrien $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Im vorherigen Unterkapitel haben wir die Permutationsgruppe S_X als Menge aller bijektiven Abbildungen einer Menge X auf sich selbst kennengelernt. Nun interessieren wir uns für besondere Bijektionen von $\mathbb{R}^n$ auf sich selbst, nämlich jene, die Abstände erhalten:

Definition. [6, S. 162] (Euklidische Isometrie). Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt (Euklidische) Isometrie auf $\mathbb{R}^n$, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ (Abstandstreue). Man bezeichnet Isometrien auch als Bewegungen.⁶

Bemerkung. Mit dem zentralen Zusammenhang zwischen der Norm und dem Abstand können wir die Forderung der Abstandstreue auch folgendermaßen umformulieren: $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

Die Isometrien bilden ebenfalls mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Untergruppe der Permutationsgruppe, die sogenannte Isometriegruppe:

Definition. [6, S. 162] (Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$). Für die Menge

$$\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{f \in S_{\mathbb{R}^n} \mid f \text{ ist eine Isometrie}\} \subseteq S_{\mathbb{R}^n}$$

nennen wir $(\text{Isom}(\mathbb{R}^n), \circ)$ Isometriegruppe des $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben dafür kurz $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung. Es handelt sich hierbei um eine Untergruppe der Permutationsgruppe $S_{\mathbb{R}^n}$, weil $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \subseteq S_{\mathbb{R}^n}$ und für $f, g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ gilt $f \circ g^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Ersteres gilt nach Definition und zweiteres, weil für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

- aus $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ durch Einsetzen von $g^{-1}(x)$ für x und $g^{-1}(y)$ für y folgt $d(x, y) = d(g(g^{-1}(x)), g(g^{-1}(y))) = d(g^{-1}(x), g^{-1}(y))$ und
- aus $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ durch Einsetzen von $g(x)$ für x und $g(y)$ für y folgt $d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y)) = d(x, y)$.

Die Behauptung folgt nun mit dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2.

Beispiel. Folgende Abbildungen sind Beispiele für Isometrien des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$:

- eine Verschiebung (auch: Translation) um einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$,
- eine Drehung um einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ oder um eine Gerade im $\mathbb{R}^3$,
- eine Spiegelung an einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ oder an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$.

In Unterkapitel 2.3 haben wir gesehen, dass jede Operation einer Gruppe G auf einer Menge M als eine Äquivalenzrelation auf M aufgefasst werden kann. Lassen wir nun also die Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ auf der Menge $\mathbb{R}^n$ operieren, erhalten wir unseren Kongruenzbegriff für Figuren im $\mathbb{R}^n$:

⁶Es ist zu beachten, dass es sich hierbei nicht nur um alltagssprachliche (orientierungserhaltende, "starre") Bewegungen (Verschiebungen, Drehungen) handelt, sondern auch (orientierungsumkehrende) Spiegelungen umfasst sind.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Definition. [6, S. 163] (Kongruenz). Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ heißen A und B kongruent, falls $A \sim_{\text{Isom}(\mathbb{R}^n)} B$, d. h. falls ein $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ existiert, sodass $f(A) = B$.

Bemerkung. [6, S. 163] Anschaulich gesprochen können wir uns Kongruenz im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ so vorstellen, dass zwei Figuren A und B kongruent sind, wenn sie durch einfaches oder wiederholtes Verschieben, Drehen und (orthogonales) Spiegeln zur Deckung gebracht werden können. Da von unserem Kongruenzbegriff auch (orientierungsumkehrende) Spiegelungen umfasst sind, werden dabei auch Figuren miteinander identifiziert, die nicht durch alltagssprachliche (orientierungserhaltende, “starre”) Bewegungen (Verschiebungen, Drehungen) ineinander übergeführt werden können. Beispielsweise sind demnach ein linker und ein rechter Schuh kongruent.

Eine besonders hilfreiche Feststellung ist, dass Isometrien sogenannte affine Abbildungen sind:

Definition. [3, S. 491] Sei A eine $m \times n$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Verschiebungsvektor. Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax + b$ wird affine Abbildung genannt.

Eine affine Abbildung setzt sich also zusammen aus einer linearen Abbildung $x \mapsto Ax$ und einer Verschiebung (Translation) $x \mapsto x + b$. Im Fall einer Isometrie handelt es sich bei ihrem linearen Anteil um eine Isometrie, die den Nullpunkt festhält, welche mithilfe einer orthogonalen Matrix A dargestellt werden kann [22, S. 101-102]:

Theorem 2.5.2. [6, S. 165, 167] (Fundamentalsatz über Isometrien im $\mathbb{R}^n$). Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Isometrie des $\mathbb{R}^n$, dann existiert eine orthogonale Matrix $A \in O_n$ und ein Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x) = Ax + b$. Umgekehrt ist jede Abbildung dieser Form eine Isometrie.

Bemerkung. [26, S. 127-128] Für den Beweis des Fundamentalsatzes verwenden wir die Darstellung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$. Damit $b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden, verlangen wir nur, dass für $i, j = 1, \dots, n$ gilt

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} = 1 & \text{falls } i = j \\ = 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases},$$

denn diese Bedingung garantiert die lineare Unabhängigkeit von $b_1, \dots, b_n$ und aus der linearen Algebra wissen wir, dass n linear unabhängige Vektoren automatisch eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden.⁷ Wir erinnern uns nun: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, b_i \rangle b_i, \quad (2.5.2)$$

denn es existieren Skalare s_i , $i = 1, \dots, n$, mit $v = \sum_{i=1}^n s_i b_i$ und wegen $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{i,j}$ gilt

$$\langle v, b_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n s_j b_j, b_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle s_j b_j, b_i \rangle = \sum_{j=1}^n s_j \langle b_j, b_i \rangle = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n s_j \underbrace{\langle b_j, b_i \rangle}_{=0} + s_i \underbrace{\langle b_i, b_i \rangle}_{=1} = s_i.$$

⁷ δ_{ij} wird als Kronecker-Delta bezeichnet.

2.5 Die Gruppe der Isometrien $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

Beweis. [26, S. 152-153] Wir betrachten die Abbildung $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(x) = f(x) - f(0)$. Weil f eine Isometrie ist, ist offensichtlich auch g eine Isometrie. Da für g somit $g(0) = 0$ gilt, ist g eine Isometrie, die den Nullpunkt festhält. Im Folgenden zeigen wir, dass dann eine orthogonale Matrix A mit $g(x) = Ax$ existiert.

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|g(x)\| = \|x\|, \quad (2.5.3)$$

denn $\|g(x)\| = d(g(x), 0) = d(g(x), g(0)) = d(x, 0) = \|x\|$, wobei bei der dritten Gleichheit eingeht, dass g eine Isometrie ist. Weiters gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|g(y) - g(x)\| = \|y - x\|, \quad (2.5.4)$$

denn $\|g(y) - g(x)\| = d(g(y), g(x)) = d(y, x) = \|y - x\|$, wobei bei der zweiten Gleichheit eingeht, dass g eine Isometrie ist.

Mithilfe der Polarisierungsidentität aus Gleichung (2.5.1) und den Gleichungen (2.5.3) und (2.5.4) erhalten wir für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle g(x), g(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad (2.5.5)$$

denn

$$\begin{aligned} \langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(y) - g(x)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y - x\|^2) = \langle x, y \rangle, \end{aligned}$$

d. h. Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, erhalten das Skalarprodukt.

Wir bezeichnen mit $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $g(e_1), \dots, g(e_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, denn nach Gleichung (2.5.5) gilt $\langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Stellen wir nun den Vektor $v = g(x)$ bezüglich der Orthonormalbasis $b_i = g(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, dar, erhalten wir unter Verwendung von Gleichung (2.5.5) für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \langle g(x), g(e_i) \rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle g(e_i) = Ax, \quad (2.5.6)$$

d. h. Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, sind linear und somit darstellbar als Multiplikation mit einer Matrix A . Dabei ist $A = (g(e_1), \dots, g(e_n))$ jene Matrix, deren i -te Spalte der Vektor $g(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, bildet. Da die Spalten von A eine Orthonormalbasis bilden, gilt $A^T A = E_n$ und daher ist A eine orthogonale Matrix.⁸

Nun berücksichtigen wir auch noch eine etwaige Verschiebung aus dem Nullpunkt um den Vektor b . Dafür setzen wir $b = f(0)$ und aus dem Vorausgegangenen folgt nun auch $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

⁸Wir bezeichnen mit A^T die transponierte Matrix von A und mit E_n die n -dimensionale Einheitsmatrix.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Gilt umgekehrt $f(x) = Ax + b$, erhalten wir durch direktes Nachrechnen

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|Ax + b - (Ay + b)\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

d. h. f ist abstandstreu. Dabei geht bei der vorletzten Gleichheit ein, dass für eine orthogonale Matrix A gilt $\|Av\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.⁹ Weiters ist eine abstandstreue Abbildung automatisch injektiv. Zudem gilt

$$Ax + b = y \Leftrightarrow Ax = y - b \Leftrightarrow x = A^{-1}(y - b)$$

und weil A als orthogonale Matrix invertierbar ist mit $A^{-1} = A^T$ gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ ein $x \in \mathbb{R}^n$, wodurch auch die Surjektivität von f gegeben ist. Also ist f bijektiv und abstandstreu und somit eine Isometrie. $\square$

Bemerkung. [6, S. 165-166] Wir bemerken an dieser Stelle, dass in diesem Beweis die von einer euklidischen Isometrie geforderte Bijektivität nicht gebraucht wird. Dieser Beweis zeigt also, dass abstandstreue Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ automatisch bijektiv sind und wir somit die Forderung der Bijektivität in unserer Definition einer Isometrie weglassen könnten. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass dies eine Besonderheit von Isometrien im $\mathbb{R}^n$ ist und für Isometrien im Allgemeinen nicht gilt.

Mithilfe dieser Darstellung beweisen wir nun einige zentrale Eigenschaften von Isometrien, die wir später benötigen werden:

Lemma 2.5.3. (Isometrien und Geraden). *Isometrien bilden Geraden auf Geraden ab und bewahren die Anordnung von Punkten auf Geraden.*

Beweis. Seien $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) = \mathbf{A}x + b$, wobei $\mathbf{A} \in O_n$ und $b \in \mathbb{R}^n$, und A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden mit $B = A + t(C - A)$, $t \in (0, 1)$, d. h. B liegt im Inneren der Strecke $\overline{AC}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(B) &= f(A + t(C - A)) \\ &= (\mathbf{A}A + b) + t\mathbf{A}(C - A) \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

$$\begin{aligned} &= f(A) + t((\mathbf{A}C + b) - (\mathbf{A}A + b)) \\ &= f(A) + t(f(C) - f(A)), \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

wobei wir in der vorletzten Zeile den Kunstgriff des gleichzeitigen Hinzufügens und wieder Abziehens von b verwenden. Da A, B, C paarweise verschieden sind, sind auch $f(A), f(B), f(C)$ paarweise verschieden. Aus (2.5.7) erkennen wir bereits, dass Geraden von Isometrien auf Geraden abgebildet werden, denn diese Gleichung gilt auch für allgemeines $t \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{A}(C - A)$ ist wegen der Invertierbarkeit von $\mathbf{A}$ vom Nullvektor verschieden und somit der Richtungsvektor der Bildgeraden. Aus (2.5.8) erfahren wir, dass es sich dabei um die Gerade durch $f(A)$ und $f(C)$ handelt. Somit liegen $f(A), f(B), f(C)$ wieder auf einer Geraden und wegen $t \in (0, 1)$ liegt $f(B)$ im Inneren der Strecke $f(A)f(C)$, d. h. auch die Anordnung wird bewahrt. $\square$

⁹Dies gilt, weil $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T Ax = \langle A^T Ax, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, wobei wir verwenden, dass mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ für das Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x^T y$ und für die Transposition $(Ax)^T = x^T A^T$ gilt.

Bemerkung. Aus dem obenstehenden Beweis erkennen wir, dass diese Eigenschaft sogar für eine affine Abbildung f gilt. Es ist also nicht notwendig zu fordern, dass f eine Isometrie ist, d. h. die Matrix $\mathbf{A}$ muss nicht orthogonal sein.

Damit erhalten wir weiters:

Lemma 2.5.4. *Isometrien bilden parallele Geraden auf parallele Geraden ab.*

Beweis. Seien $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ und g, h zwei parallele Geraden mit den Richtungsvektoren v, w . Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $v = \lambda w$. Aus Gleichung (2.5.7) erkennen wir, dass der Richtungsvektor der Bildgeraden durch Multiplikation mit der Matrix $\mathbf{A}$ entsteht. Wegen $\mathbf{A}v = \mathbf{A}(\lambda w) = \lambda \mathbf{A}w$ sind auch die Bildgeraden $f(g), f(h)$ mit den Richtungsvektoren $\mathbf{A}v, \mathbf{A}w$ parallel. $\square$

Weiters ist für uns wichtig, dass Isometrien Teilungsverhältnisse von Strecken bewahren:

Lemma 2.5.5. (Isometrien und Teilungsverhältnisse). *Sei $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Liegt ein Punkt B im Inneren der (orientierten) Strecke $\overline{AC}$ und teilt diese im Verhältnis $\frac{d(A,B)}{d(B,C)}$, dann liegt $f(B)$ im Inneren der (orientierten) Strecke $\overline{f(A)f(C)}$ und teilt diese im selben Verhältnis.*

Beweis. Aus Lemma 2.5.3 folgt, dass die Bildpunkte $f(A), f(B), f(C)$ ebenfalls in angegebener Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Da nach der Definition einer Isometrie $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$ und $d(f(B), f(C)) = d(B, C)$ gilt, erhalten wir für Teilungsverhältnis der Bildpunkte ebenfalls

$$\frac{d(f(A), f(B))}{d(f(B), f(C))} = \frac{d(A, B)}{d(B, C)}.$$

Alternativ können wir auch schon aus Gleichung (2.5.8) auf die Behauptung schließen, weil der Parameter $t \in (0, 1)$ das Teilungsverhältnis repräsentiert und durch Anwenden von $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ erhalten bleibt. $\square$

Im Beweis des Fundamentalsatzes über Polyeder 2.6.3 haben wir gesehen, dass eine Isometrie, die den Nullpunkt festhält, mithilfe einer orthogonalen Matrix A dargestellt werden kann. Die Menge der orthogonalen Matrizen bildet mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe, die sogenannte orthogonale Gruppe O_n :

Definition. [8, S. 13] (Orthogonale Gruppe O_n). Für $n \in \mathbb{N}$ sei Mat_n die Menge der $n \times n$ -Matrizen über $\mathbb{R}^n$. Wir nennen

$$O_n := \{A \in \text{Mat}_n \mid A^T A = E_n\}$$

die n -dimensionale orthogonale Gruppe.

Bemerkung. [6, S. 168] Die Gruppe O_n repräsentiert alle Isometrien, die den Nullpunkt festhalten. Es handelt sich hierbei tatsächlich um eine Gruppe, weil das Assoziativgesetz bei allen Matrizen gilt, also insbesondere auch bei den orthogonalen Matrizen. Das neutrale

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Element ist die Einheitsmatrix E_n , die bekanntlich orthogonal ist. Nach Definition ist A^T linksinvers. Aus der linearen Algebra wissen wir aber, dass für $A, B \in \text{Mat}_n$ mit $AB = E_n$ auch $BA = E_n$ folgt und somit ist A^T auch rechtsinvers. Also ist für jedes $A \in O_n$ auch $A^T = A^{-1} \in O_n$. Auch das Produkt zweier orthogonaler Matrizen $A, B \in O_n$ ist wieder orthogonal, denn $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = E_n$.

Bemerkung. Für $A \in O_n$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationssatz $+1 = \det(E_n) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A) \det(A)$. Daraus folgt $\det(A) \in \{+1, -1\}$, d. h. die Determinante einer orthogonalen Matrix kann nur entweder den Wert $+1$ oder den Wert -1 annehmen.

Die Determinante $\det : O_n \rightarrow \{+1, -1\}$ ist ein Homomorphismus, dessen Kern die sogenannte spezielle orthogonale Gruppe SO_n bildet [8, S. 24]:

Definition. [8, S. 24] (Spezielle orthogonale Gruppe SO_n). Wir nennen

$$SO_n := \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\} \leq O_n$$

die n -dimensionale spezielle orthogonale Gruppe.

Bemerkung. [6, S. 168] Die Gruppe SO_n ist nach Lemma 2.2.2 eine Untergruppe von O_n und repräsentiert alle orientierungserhaltenden ("spiegelungsfreien") Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, also alle Drehungen (Rotationen). Demnach wird SO_n auch als Drehgruppe (Rotationsgruppe) bezeichnet. Es handelt sich hierbei tatsächlich um einen Homomorphismus, weil nach dem Determinantenmultiplikationssatz (ohne Beweis) die Determinante eines Produkts von Matrizen gleich dem Produkt ihrer Determinanten ist.

Die Matrizen in $O_n \setminus SO_n$ haben alle Determinante -1 . Nach dem Determinantenmultiplikationssatz liegt das Produkt zweier Elemente von $O_n \setminus SO_n$ immer in SO_n , weshalb $O_n \setminus SO_n$ keine Gruppe bildet.

Wir erhalten dadurch eine Einteilung der Isometrien in positive (orientierungserhaltende) und negative (orientierungsumkehrende) Isometrien [22, S.106-107]:

Definition. [6, S. 167] (Positive und negative Isometrien). Wir nennen eine Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = Ax + b$ positiv (orientierungserhaltend), falls $\det(A) = +1$ gilt. Gilt dahingegen $\det(A) = -1$, nennen wir f negativ (orientierungsumkehrend).

Beispiel. Wir berechnen nun die Determinanten der Matrizen einiger Isometrien des $\mathbb{R}^2$ und des $\mathbb{R}^3$:

- Eine Drehung um den Winkel α an einem Punkt im $\mathbb{R}^2$ können wir durch folgende Drehmatrix darstellen

$$D_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det(D_{\mathbb{R}^2}) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = +1$$

handelt es sich dabei um eine positive Isometrie.

2.5 Die Gruppe der Isometrien $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$

- Eine Drehung um den Winkel α an einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ können wir durch eine Drehmatrix der folgenden Gestalt darstellen

$$D_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

da wir diese als eine Drehung um den Winkel α in der Ebene, die normal auf die Geraden steht, auffassen können. Durch Entwicklung nach der ersten Spalte bzw. Zeile erhalten wir

$$\det(D_{\mathbb{R}^3}) = 1 \cdot \det(D_{\mathbb{R}^2}) = +1,$$

d. h. es handelt sich auch hierbei um eine positive Isometrie.

- Eine Spiegelung an einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ können wir durch eine Spiegelmatrix der folgenden Gestalt darstellen

$$S_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(S_{\mathbb{R}^2}) = -1$ handelt es sich dabei um eine negative Isometrie.

- Eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ können wir durch eine Spiegelmatrix der folgenden Gestalt darstellen

$$D_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

da wir das Koordinatensystem geschickt so legen können, dass zwei Richtungen in der Ebene liegen und die dritte orthogonale dazu steht. Durch Entwicklung nach der ersten Spalte bzw. Zeile erhalten wir

$$\det(S_{\mathbb{R}^3}) = 1 \cdot \det(S_{\mathbb{R}^2}) = -1,$$

d. h. es handelt sich auch hierbei um eine negative Isometrie.

- Dahingegen können wir eine Spiegelung an einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ als eine Drehung um $180^\circ = \pi$ in der Ebene, die normal auf die Geraden steht, auffassen, weshalb es sich dabei um eine positive Isometrie handelt.
- Die Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^2$ können wir analog als eine Drehung um $180^\circ = \pi$ am Ursprung auffassen, weshalb es sich dabei ebenfalls um eine positive Isometrie handelt.

2 Gruppentheoretische Grundlagen

- Die Punktspiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ können wir durch folgende Matrix darstellen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

welche eine negative Determinante aufweist und somit eine negative Isometrie ist.

2.6 Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$

Wenn wir in dieser Arbeit von Polyedern (auch: Körpern) sprechen, meinen wir damit immer konvexe Polyeder. Um diesen intuitiven Begriff mathematisch präzise zu fassen, ist etwas Vorarbeit notwendig. Wir beginnen mit der Definition einer konvexen Menge:

Definition. [9, S. 8] (Konvexe Menge). Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in K$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Bemerkung. [18, S. 10] Eine konvexe Menge K enthält also für je zwei (verschiedene) Punkte $x, y \in K$ auch einen bestimmten Teil der Gerade durch x und y , nämlich $\overline{xy} = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Diesen Teil nennen wir die (abgeschlossene) Strecke zwischen x und y . Unter dem Inneren einer Strecke verstehen wir $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 < \lambda < 1\}$.

Eine zentrale Eigenschaft konvexer Mengen ist, dass der Durchschnitt beliebiger konvexer Mengen ebenfalls konvex ist:

Lemma 2.6.1. [9, S. 8] Seien I eine beliebige Indexmenge, $K_i \subset \mathbb{R}^n$ und $(K_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Mengen. Dann ist ihr Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} K_i$ ebenfalls konvex.

Beweis. Seien $x, y \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Nach Definition des Durchschnitts ist dann $x \in K_i$ und $y \in K_i$ für alle $i \in I$. Wegen der Konvexität von K_i gilt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_i$ für alle $i \in I$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Zu zeigen ist, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Nach Definition des Durchschnitts ist das aber eben genau dann der Fall, wenn $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K_i$ für alle $i \in I$. $\square$

Somit können wir die sogenannte konvexe Hülle einer Menge X definieren als kleinste konvexe Menge, die X enthält:

Definition. [9, S. 14] (Konvexe Hülle). Die konvexe Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt von allen konvexen Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$, die X enthalten, d. h.

$$\text{Conv}(X) := \bigcap_{X \subseteq K} K.$$

Bemerkung. Nach Lemma 2.6.1 ist die konvexe Hülle als Durchschnitt konvexer Mengen selbst auch wieder eine konvexe Menge.

2.6 Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$

Bemerkung. Die konvexe Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist größer oder gleich groß wie X , da nach Definition $X \subseteq \text{Conv}(X)$ gilt. Falls X selbst eine konvexe Menge ist, gilt sogar $\text{Conv}(X) = X$, denn X ist dann bereits eine konvexe Menge, die X enthält und da die konvexe Hülle die kleinste solche Menge ist, muss X bereits mit ihr übereinstimmen.

Aus den beiden obenstehenden Bemerkungen folgt, dass eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann konvex ist, wenn $\text{Conv}(X) = X$ gilt. Wir können konvexe Mengen X also mithilfe ihrer konvexen Hülle charakterisieren. Eine nützliche Feststellung ist nun, dass die konvexe Hülle einer Menge X als Menge aller sogenannten Konvexkombinationen von Punkten aus X darstellbar ist:

Definition. [18, S. 11] (Konvexkombination). Für $x_i \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ nennen wir $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ eine Konvexkombination von $x_i \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. Bei einer Konvexkombination handelt es sich also um eine spezielle Art der Linearkombination, bei der die Koeffizienten nicht negativ sind und sich zu 1 aufsummieren.

Bemerkung. [18, S. 11] Eine konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ enthält nach Definition für je zwei Elemente $x, y \in K$ auch deren Konvexkombination $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in K$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Durch Induktion nach der Anzahl n der an der Konvexkombination beteiligten Elemente lässt sich nachweisen, dass eine konvexe Menge sogar alle Konvexkombinationen ihrer Elemente enthält. Dabei setzen wir voraus, dass eine Konvexkombination von n Elementen in K liegt (Induktionsvoraussetzung) und zeigen, dass dann auch eine Konvexkombination von $n + 1$ Elementen in K liegt (Induktionsschritt). Dazu schreiben wir die Konvexkombination von $n + 1$ Elementen durch entsprechendes Herausheben als eine Konvexkombination von zwei Teilen um. Für $\lambda_{n+1} \neq 1$ und $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \neq 0$ erhalten wir so

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= \lambda \underbrace{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n \right)}_{=y} + (1 - \lambda) x_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei $y \in K$ nach Induktionsvoraussetzung als Konvexkombination von n Elementen und somit $x \in K$ nach Definition als Konvexkombination zweier Elemente aus K .

Damit können wir die konvexe Hülle $\text{Conv}(X)$ beschreiben als Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus X :

Lemma 2.6.2. [18, S. 12] Für jede Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ besteht die konvexe Hülle $\text{Conv}(X)$ aus allen Konvexkombinationen von $x_i \in X$, $i = 1, \dots, k$, d. h.

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid x_i \in X, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}.$$

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Beweis. Da $X \subseteq \text{Conv}(X)$, liegen laut der obenstehenden Bemerkung alle Konvexkombinationen von Elementen aus X in $\text{Conv}(X)$. Umgekehrt betrachten wir zwei Konvexkombinationen $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ und $y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_l y_l$, wobei $x_i, y_i \in X$. Dann ist

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda \lambda_k x_k + (1 - \lambda)\mu_1 y_1 + \dots + (1 - \lambda)\mu_l y_l$$

mit $0 \leq \lambda \leq 1$ eine andere Konvexkombination von Elementen aus X . Also ist die Menge der Konvexkombinationen von Elementen aus X selbst eine konvexe Menge. Da diese X enthält und die konvexe Hülle die kleinste solche Menge ist, muss sie bereits mit ihr übereinstimmen. $\square$

Um nun auch noch den intuitiven Begriff eines Eckpunkts mathematisch präzise fassen zu können, charakterisieren wir diese als sogenannte *extremale Punkte*:¹⁰

Definition. [9, S. 17] (Extremaler Punkt). Sei $K \in \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in K$ heißt *extremaler Punkt* von K , wenn für $y, z \in K$, $0 < \lambda < 1$ und $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ folgt $x = y = z$. Wir bezeichnen die Menge aller extremalen Punkte von K mit $\text{Ext}(K)$.

Bemerkung. Ein extremaler Punkt von K liegt also nicht im Inneren einer von K beinhalteten Strecke.

Nun stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um den intuitiven Begriff eines Polyeders mathematisch präzise zu fassen:¹¹

Definition. [9, S. 31] (Polyeder). Ein Polyeder P ist eine kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit endlich vielen extremalen Punkten, d. h. $\text{Ext}(P)$ ist eine endliche Menge. Weiters wird $V(P) := \text{Ext}(P)$ die Menge der Eckpunkte von P genannt.

Äquivalent dazu können wir einen Polyeder als konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten beschreiben, nämlich genau der Menge seiner Eckpunkte:

Theorem 2.6.3. [9, 2.4.5], [2, 3.3.1(c)] (Fundamentalsatz über Polyeder).

- (i). Ist X eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, dann ist $\text{Conv}(X)$ ein Polyeder.
- (ii). Ist P ein Polyeder, dann gilt $\text{Conv}(V(P)) = P$.

Beweis. (i). Um nachzuweisen, dass $\text{Conv}(X)$ ein Polyeder ist, müssen wir nach Definition zeigen, dass $\text{Conv}(X)$ eine kompakte (beschränkte und abgeschlossene) konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit endlich vielen extremalen Punkten ist:

- $\text{Conv}(X)$ ist offensichtlich konvex (siehe Bemerkung nach der Definition der konvexen Hülle).

¹⁰Genaugenommen ist eine Ecke ein spezieller extremaler Punkt, nämlich ein sogenannter exponierter Punkt [9, S. 17]. Da bei einem Polyeder die extremalen Punkte aber ohnehin genau mit den exponierten Punkten übereinstimmen und diese Charakterisierung von Ecken für unsere Zwecke ausreichend ist, verzichten wir an dieser Stelle auf das Einführen weiterer Konzepte und verweisen dafür auf [9, S. 17].

¹¹Ein Polyeder kann auch als beschränkter Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume definiert werden. Dies ist jedoch für unsere Zwecke weniger hilfreich.

2.6 Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$

- Da X eine endliche Menge ist, existiert ein Radius $R > 0$, sodass X in dem Ball $B_R(0)$ liegt, d. h. $X \subseteq B_R(0)$. Da ein Ball eine konvexe Menge ist und $\text{Conv}(X)$ nach Definition die kleinste konvexe Menge ist, die X enthält, muss auch $\text{Conv}(X) \subseteq B_R(0)$ gelten. Also ist $\text{Conv}(X)$ beschränkt.
- Wir betrachten eine Folge $y_k \in \text{Conv}(X)$ und nehmen an, dass diese Folge gegen y konvergiert, d. h.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y.$$

Um die Abgeschlossenheit von $\text{Conv}(X)$ nachzuweisen, ist zu zeigen, dass der Grenzwert y ebenfalls in der konvexen Hülle von X liegt, d. h. $y \in \text{Conv}(X)$. Da $y_k \in \text{Conv}(X)$ lässt sich y_k für $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ folgendermaßen als Konvexkombination schreiben

$$y_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} x_i,$$

wobei $\lambda_{k,i} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} = 1$. Wir betrachten nun die Folgen $\lambda_{k,i}$ genauer. Da es sich dabei für jedes $i = 1, \dots, n$ um eine Folge im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ handelt, sind alle Folgen $\lambda_{k,i}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt also jede dieser Folgen $\lambda_{k,i}$ (mindestens) eine konvergente Teilfolge. Wir gehen zu einer gemeinsame Teilfolge über, für die alle Folgen $\lambda_{k,i}$ gleichzeitig konvergieren, d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k,i} = \mu_i$, siehe hierzu [9, 2.3.4]. Somit gilt

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i.$$

Da im Grenzübergang die beiden Bedingungen für $\lambda_{k,i}$ erhalten bleiben, gilt auch $\mu_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. Die Folge y_k konvergiert also gegen eine Konvexkombination und dieser Grenzwert y liegt somit ebenfalls in der konvexen Hülle von X . Also ist $\text{Conv}(X)$ abgeschlossen.

- Um nun auch noch nachzuweisen, dass $\text{Conv}(X)$ nur endlich viele extremale Punkte hat, zeigen wir, dass $\text{Ext}(\text{Conv}(X)) \subseteq X$ gilt. Dazu betrachten wir ein $x \in \text{Ext}(\text{Conv}(X))$ und weisen nach, dass $x \in X$ gilt. Wir können x als Konvexkombination von $x_i \in X$ schreiben, d. h. $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, 2, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Ist $\lambda_i = 1$ für ein i , dann gilt $x \in X$. Wir können also o.B.d.A. $0 < \lambda_1 < 1$ annehmen und x als Konvexkombination von $y = x_1 \in X \subseteq \text{Conv}(X)$ und $z = \frac{1}{1-\lambda_1} \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i \in \text{Conv}(X)$ schreiben, also $x = \lambda_1 y + (1 - \lambda_1)z$. Wegen der Extremalität von x folgt daraus $x = y$ und wegen $y \in X$ muss somit auch $x \in X$ gelten.
- (ii). Der zweite Teil des Fundamentalsatzes über Polyeder ist ein Spezialfall des Satzes von Krein-Milman (für endlich viele extremale Punkte). Für einen Beweis verweisen wir auf [2, 3.3.1(c)] bzw. [9, 2.4.5]. $\square$

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Nun betrachten wir noch einen wichtigen Punkt eines Polyeders P , seinen sogenannte Schwerpunkt $S(P)$:

Definition. [18, S. 12] Seien $v_1, \dots, v_n$ die Eckpunkte eines Polyeders P . Dann nennen wir den Punkt

$$S(P) := \frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

den Schwerpunkt von P .

Bemerkung. [18, S. 12] Der Schwerpunkt $S(P)$ eines Polyeders ist also definiert als eine Konvexkombination seiner Eckpunkte $v_1, \dots, v_n$, denn $S = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n} > 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Im Fundamentalsatz über Isometrien im $\mathbb{R}^n$ 2.5.2 haben wir festgestellt, dass es sich bei Isometrien um affine Bijektionen handelt. Folgendes Lemma gibt uns Aufschluss über die Verträglichkeit affiner Abbildungen mit den in diesem Unterkapitel behandelten Konzepten:

Lemma 2.6.4. [18], [9] Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung der Form $f(x) = Ax + b$ mit einer $n \times n$ -Matrix A und einem Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^n$.

(i). Für $x_i \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i),$$

d. h. eine affine Abbildung bewahrt Konvexkombinationen.

(ii). Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, ist auch $f(K)$ eine konvexe Menge, d. h. eine affine Abbildung bildet konvexe Mengen auf konvexe Mengen ab.

(iii). Für $X \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\text{Conv}(f(X)) = f(\text{Conv}(X)),$$

d. h. das Bilden der konvexen Hülle ist mit der affinen Abbildung verträglich.

(iv). Ist f bijektiv und K eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\text{Ext}(f(K)) = f(\text{Ext}(K)),$$

d. h. eine affine Bijektion bildet extremale Punkte auf extremale Punkte ab.

(v). Ist f bijektiv und P ein Polyeder, dann ist auch $f(P)$ ein Polyeder, d. h. eine affine Bijektion bildet Polyeder auf Polyeder ab. Weiters gilt

$$V(f(P)) = f(V(P)),$$

d. h. eine affine Bijektion bildet Eckpunkte auf Eckpunkte ab, sowie

$$S(f(P)) = f(S(P)),$$

d. h. das Bilden des Schwerpunkts ist mit der affinen Abbildung verträglich.

2.6 Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$

- Beweis.* (i). Folgt durch direktes Nachrechnen: $\sum \lambda_i f(x_i) = \sum \lambda_i (Ax_i + b) = \sum \lambda_i Ax_i + b \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1} = (\sum \lambda_i Ax_i) + b = A \sum \lambda_i x_i + b = f(\sum \lambda_i x_i)$.
- (ii). Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in f(K)$. Dann gibt es $x, y \in K$ mit $\tilde{x} = f(x)$ und $\tilde{y} = f(y)$. Unter Verwendung von (i) erhalten wir damit $\lambda \tilde{x} + (1 - \lambda) \tilde{y} = \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \stackrel{(i)}{=} f(\underbrace{\lambda x + (1 - \lambda)y}_{\in K}) \in f(K)$.
- (iii). Nach Lemma 2.6.2 lässt sich die konvexe Hülle einer Menge X als Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus X darstellen. Da Konvexkombinationen nach (i) mit affinen Abbildungen verträglich sind, folgt die Behauptung.
- (iv). Wir zeigen die Behauptung, indem wir gegenteilig nachweisen, dass nicht-extremale Punkte auf nicht-extremale Punkte abgebildet werden, d. h. $f(K \setminus \text{Ext}(K)) = f(K) \setminus \text{Ext}(f(K))$. Für $x \in K \setminus \text{Ext}(K)$ gibt es eine nicht-triviale Konvexkombination $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ zweier verschiedener Punkte $x_1 \neq x_2 \in K$ mit $0 < \lambda < 1$. Da affine Abbildungen nach (i) Konvexkombinationen bewahren und f injektiv ist, ist $f(x) = \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ auch eine nicht-triviale Konvexkombination zweier verschiedener Punkte $f(x_1) \neq f(x_2) \in f(K)$ und somit kein extremaler Punkt von $f(K)$. Also gilt $f(K \setminus \text{Ext}(K)) \subseteq f(K) \setminus \text{Ext}(f(K))$. Umgekehrt wenden wir dies auf die (affine) Umkehrabbildung f^{-1} von f und die nach (ii) konvexe Menge $f(K)$ statt K an und erhalten $f^{-1}(f(K) \setminus \text{Ext}(f(K))) \subseteq K \setminus \text{Ext}(K)$. Dies gibt uns nach Anwenden von f auch die umgekehrte Inklusion $f(K) \setminus \text{Ext}(f(K)) \subseteq f(K \setminus \text{Ext}(K))$.
- (v). Sei P ein Polyeder. Da P konvex ist, ist nach (ii) auch $f(P)$ konvex. Wegen der Kompaktheit von P ist $f(P)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge ebenfalls kompakt. Da P endlich viele extremale Punkte hat, hat auch $f(P)$ nach (iv) nur endlich viele extremale Punkte. Somit ist $f(P)$ ein Polyeder. Weiters folgt die zweite Behauptung direkt aus (iv), da die Menge der Eckpunkte von P genau mit den extremalen Punkten von P übereinstimmt. Schließlich folgt die dritte Behauptung direkt aus (i), da der Schwerpunkt als Konvexkombination seiner Ecken definiert ist. $\square$

Nun stehen uns endlich alle Mittel zur Verfügung, um den Symmetriegehalt von Polyedern im $\mathbb{R}^n$ mithilfe von Isometrien mathematisch einzufangen [6, S. 178]:

Definition. [23, S. 231] (Symmetriegruppe). Sei P ein Polyeder. Für die Menge

$$\text{Sym}(P) := \{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(P) = P\} \leq \text{Isom}(\mathbb{R}^n),$$

d. h. die Menge aller Isometrien, die den Polyeder auf sich selbst abbilden, nennen wir $(\text{Sym}(P), \circ)$ Symmetriegruppe des Polyeders P . Wir schreiben dafür kurz $\text{Sym}(P)$.

Bemerkung. Es handelt sich hierbei um eine Untergruppe der Isometriegruppe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, weil $\text{Sym}(P) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ und für $f, g \in \text{Sym}(P)$ gilt $f \circ g^{-1} \in \text{Sym}(P)$. Ersteres gilt nach Definition und zweiteres, weil

2 Gruppentheoretische Grundlagen

- aus $g(P) = P$ durch Anwenden von g^{-1} auf beiden Seiten folgt $P = g^{-1}(g(P)) = g^{-1}(P)$ und
- aus $g(P) = P$ durch Anwenden von f auf beiden Seiten folgt $f \circ g(P) = f(g(P)) = f(P) = P$.

Die Behauptung folgt nun mit dem Untergruppenkriterium aus Lemma 2.1.2.

Durch unsere äquivalente Beschreibung eines Polyeders P aus dem Fundamentalsatz über Polyeder 2.6.3 als konvexe Hülle seiner Eckpunkte bekommen wir eine für uns sehr praktische Beschreibung der Symmetriegruppe eines Polyeders als Menge aller Isometrien, die seine Eckpunkte auf seine Eckpunkte abbilden:

Lemma 2.6.5. *Für die Symmetriegruppe eines Polyeders P mit Eckpunkten $V(P)$ gilt*

$$\text{Sym}(P) = \{f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \mid f(V(P)) = V(P)\}.$$

Darüber hinaus gilt $f(S(P)) = S(P)$ für jedes $f \in \text{Sym}(P)$.

Beweis. Sei $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Zuerst setzen wir $f(P) = P$ voraus. Da f nach dem Fundamentalsatz über Isometrien 2.5.2 eine affine Bijektion ist, erhalten wir nach Lemma 2.6.4 (v) direkt $f(V(P)) = V(f(P)) = V(P)$. Umgekehrt setzen wir $f(V(P)) = V(P)$ voraus. Durch unsere äquivalente Beschreibung eines Polyeders als konvexe Hülle seiner Eckpunkte aus dem Fundamentalsatz über Polyeder 2.6.3 (ii) und nach Lemma 2.6.4 (iii) erhalten wir dann $f(P) = f(\text{Conv}(V(P))) = \text{Conv}(f(V(P))) = \text{Conv}(V(P)) = P$. Darüber hinaus erhalten wir für den Schwerpunkt $S(P)$ nach Lemma 2.6.4 (v) direkt $f(S(P)) = S(f(P)) = S(P)$, da $f \in \text{Sym}(P)$ und somit $f(P) = P$. $\square$

Eine wichtige Eigenschaft der Symmetriegruppe eines Polyeders $\text{Sym}(P)$ ist also, dass sie den Schwerpunkt $S(P)$ eines Polyeders P bewahrt. Bei unserer anstehenden Untersuchung der Symmetriegruppen der Platonischen und Archimedischen Körper erleichtern wir uns damit die Arbeit, indem wir ihren Schwerpunkt jeweils im Ursprung fixieren. Dann liegt nämlich auch der Schwerpunkt der Bildpunkte im Ursprung und alle Symmetrien sind darstellbar als Multiplikationen mit einer orthogonalen Matrix $A \in O_n$:

Lemma 2.6.6. *Sei P_0 ein Polyeder mit Schwerpunkt im Ursprung, d. h. $S(P_0) = 0$. Dann gilt*

$$\text{Sym}(P_0) = \{A \in O_n \mid A(P_0) = P_0\} \leq O_n.$$

Beweis. Sei $f \in \text{Sym}(P_0)$. Nach dem Fundamentalsatz über Isometrien 2.5.2 ist f darstellbar als $f(x) = Ax + b$, wobei $A \in O_n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 2.6.5 gilt $f(S(P_0)) = S(P_0)$ und wegen $S(P_0) = 0$ folgt daraus $f(0) = 0$. Damit erhalten wir $0 = f(0) = A \cdot 0 + b = b$, d. h. der Verschiebungsterm b fällt weg. Alle Elemente in $\text{Sym}(P_0)$ sind also lineare Abbildungen der Form $f(x) = Ax$ mit $A \in O_n$. Die andere Inklusion gilt offensichtlich.

2.6 Symmetriegruppen von Polyedern im $\mathbb{R}^n$

Wegen der Gleichheit zu einer Gruppe handelt es sich bei der neuen Beschreibung von $\text{Sym}(P_0)$ automatisch auch um eine Gruppe. Zu zeigen bleibt nun, dass es sich dabei um eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe O_n handelt. Dafür überprüfen wir, ob die Gruppenoperation von $\text{Sym}(P_0)$, also die Verknüpfung von Abbildungen, der Gruppenoperation von O_n , also der Multiplikation von Matrizen, entspricht. Wir betrachten dafür zwei Elemente aus $\text{Sym}(P_0)$ mit $f(x) = Ax$ und $\tilde{f}(x) = \tilde{A}x$ und berechnen deren Verknüpfung $(f \circ \tilde{f})(x) = A\tilde{A}x$. Daraus erkennen wir sofort, dass die Verknüpfung von Abbildungen genau durch die Multiplikation von Matrizen gegeben ist. $\square$

3 Klassifikation der Platonischen Körper

Die Beliebtheit der Platonischen Körper wurzelt in ihren als besonders ästhetisch empfundenen Symmetrieeigenschaften. Vereinfacht gesprochen weist ein Platonischer Körper die “größtmögliche” Symmetrie auf, da keine zwei Ecken, Kanten und Flächen voneinander unterschieden werden können. Bei den Platonischen Körpern handelt es sich um sogenannte reguläre Polyeder. Wie auch ursprünglich üblich, definieren wir diese wie folgt anhand der lokalen Betrachtung an jeder Ecke:

Definition. [12, S. 446] (Regulärer Polyeder - lokales Kriterium). Ein konvexer Polyeder ist regulär, wenn alle Seitenflächen kongruente reguläre Polygone¹ sind und an jeder Ecke immer dieselbe Anzahl von Seitenflächen (bzw. Kanten) zusammentreffen.

Bevor wir uns näher mit den Symmetrien dieser Polyeder auseinandersetzen, zeigen wir in diesem Kapitel, dass es genau die unten aufgelisteten fünf Platonischen Körper gibt [7, Buch XI, Definitionen]. Wir bezeichnen die Platonischen Körper dabei mit dem sogenannten Schläfli-Symbol $\{p, q\}$, wobei p die Anzahl der Ecken des verwendeten Polygons und q die Anzahl der an einer Ecke zusammenstoßenden Polygone angibt [4, S. 14]:

- Der Tetraeder $\{3, 3\}$ wird von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt.
- Der Hexaeder (auch: Würfel) $\{4, 3\}$ wird von sechs kongruenten Quadraten begrenzt.
- Der Oktaeder $\{3, 4\}$ wird von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt.
- Der Ikosaeder $\{3, 5\}$ wird von zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt.
- Der Dodekaeder $\{5, 3\}$ wird von zwölf kongruenten regulären Fünfecken begrenzt.

Wir leiten dafür zunächst alle möglichen Eckenkonfigurationen regulärer Polyeder aus der Eulerschen Polyederformel ab, wobei wir den Darstellungen in [5, S. 196] und [17, S. 76-77] folgen. Anschließend weisen wir die Existenz der so gefundenen Polyeder durch Konstruktion nach, wobei wir der Darstellung in Euklids Elementen [7, Buch XIII, §13-17] folgen.²

Später werden wir die Beobachtung machen, dass die so gefunden Körper auch alle folgende stärkere Definition anhand globaler Eigenschaften erfüllen:

¹Ein reguläres Polygon ist ein Polygon, das sowohl gleichseitig als auch gleichwinklig ist.

²Dieses Kapitel greift zentrale Erkenntnisse meiner Bachelorarbeit erneut auf, wodurch inhaltliche Überschneidungen gegeben sind. Für eine ausführliche Auseinandersetzung mit verschiedenen historischen Zugängen zur Klassifikation der Platonischen Körper ist auf ebendiese Arbeit zu verweisen.

Definition. [10, S. 90] (Regulärer Polyeder - globales Kriterium). Ein konvexer Polyeder ist regulär, wenn die (volle) Symmetriegruppe des Polyeders jeweils transitiv auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen wirkt, d. h. wenn sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen jeweils nur eine Bahn unter den Symmetrien des Polyeders bilden.

Bemerkung. [10, S. 90] Genaugenommen ist bei einem regulären Polyeder sogar die noch striktere Bedingung der Transitivität auf den sogenannten Flaggen gegeben. Eine Flagge ist ein Tripel bestehend aus einer Fläche, einer Kante und einer Ecke, die alle zusammentreffen.

3.1 Mögliche Eckenkonfigurationen

In diesem Unterkapitel wenden wir die Eulersche Polyederformel (ohne Beweis) an, um alle möglichen Eckenkonfigurationen regulärer Polyeder zu erhalten.³

Theorem 3.1.1. [17, S. 66] (Eulersche Polyederformel). *Seien E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen eines konvexen Polyeders, dann gilt $E - K + F = 2$.*

Wir folgen nun [5, S. 196] und [17, S. 76-77] und betrachten einen regulären Polyeder nach dem lokalen Kriterium mit E Ecken, K Kanten und F Flächen, wobei die Anzahl der an jeder Ecke zusammenstoßenden p -Ecke mit q bezeichnet wird.

Dann gilt $pF = 2K$, denn es gibt insgesamt F solche p -Ecke, wobei an jeder Kante zwei von ihnen zusammentreffen. Durch Umformen erhalten wir:

$$F = \frac{2K}{p}. \quad (3.1.1)$$

Weiters gilt $qE = 2K$, denn an jeder Ecke E treffen q Kanten zusammen, wobei jede Kante K zwei Ecken verbindet. Durch Umformen erhalten wir:

$$E = \frac{2K}{q}. \quad (3.1.2)$$

Setzen wir die Gleichungen (3.1.1) und (3.1.2) in die Eulersche Polyederformel 3.1.1 ein, erhalten wir:

$$\frac{2K}{q} - K + \frac{2K}{p} = 2. \quad (3.1.3)$$

Durch Umformen auf K erhalten wir folgenden Ausdruck für K in Abhängigkeit von p und q :

$$K = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}. \quad (3.1.4)$$

Wir wissen, dass K und $2pq$ als Anzahlen beide positiv sind. Damit die Gleichung (3.1.4) wahr ist muss also auch der Nenner positiv sein. Durch den Kunstgriff des gleichzeitigen

³Dieses Unterkapitel orientiert sich eng am Kapitel 4.3 meiner Bachelorarbeit.

Hinzufügens und wieder Abziehens von 4 kann dieser Nenner folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 2(p+q) - pq &= 2p + 2q - pq = 4 + 2p + 2q - pq - 4 \\ &= 4 - (pq - 2p - 2q + 4) = 4 - (p-2)(q-2) \end{aligned}$$

Folglich muss $(p-2)(q-2) < 4$ gelten. Weiters muss $p \geq 3$ gelten, damit es sich überhaupt um Polygone handelt, und ebenfalls $q \geq 3$, damit überhaupt Ecken gebildet werden können. Diese Voraussetzungen werden nur von den eingangs dargestellten fünf Möglichkeiten für $\{p, q\}$ erfüllt.

Bemerkung. [17, S. 77-78] [5, S. 17] Wir bemerken an dieser Stelle, dass es in diesem kombinatorischen Beweis genaugenommen gar nicht notwendig ist, einen regulären Polyeder zu fordern, weil weder eingeht, dass die Seitenflächen kongruent sind, noch dass sie überhaupt reguläre Polygone sind. Ausreichend ist die wesentlich schwächere Forderung, dass bei einem konvexen Polyeder alle Flächen dieselbe Anzahl von Seiten haben und an allen Ecken gleich viele davon zusammenstoßen. Wir erhalten dann aus obenstehendem Beweis analog, dass es für einen derartigen Polyeder nur fünf kombinatorische Möglichkeiten gibt. Diese fünf Arten von konvexen Polyedern haben dann jeweils dieselben Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen wie einer der fünf Platonischen Körper.

3.2 Existenznachweise durch Konstruktionen

Da das Ableiten möglicher Eckenkonfigurationen natürlich noch keine Garantie für deren Realisierbarkeit ist, weisen wir nun die Existenz der fünf Platonischen Körper durch Konstruktionen nach. Wir folgen dabei im Wesentlichen [7, Buch XII, §13-17], jedoch führen wir die Konstruktionen nicht so explizit aus wie Euklid. Dabei orientieren wir uns an den vereinfachten Formulierungen von [12, S. 439-441] und nutzen wie auch dort sogenannte Dualitäten aus, um uns die Arbeit zu erleichtern:⁴

Bemerkung. [8, S. 398-399] (Dualitäten bei den Platonischen Körpern). Den Dualkörper eines gegebenen Körpers erhalten wir als konvexe Hülle seiner Flächenmittelpunkte. Der Fundamentalsatz über Polyeder 2.6.3 stellt sicher, dass es sich dabei um einen Polyeder handelt. Dadurch werden die Anzahlen der Flächen und Ecken vertauscht, während die Anzahl der Kanten gleich bleibt. Eine Besonderheit der Platonischen Körper ist, dass der Dualkörper eines Platonischen Körpers selbst wieder ein Platonischer Körper ist. Dabei gelten folgende Dualitäten:

- Der Tetraeder ist zu sich selbst dual.
- Würfel und Oktaeder sind zueinander dual.
- Dodekaeder und Ikosaeder sind zueinander dual.

⁴Dieses Unterkapitel beleuchtet das Kapitel 2.1 meiner Bachelorarbeit aus einer neuen Perspektive und geht bei der Konstruktion des Dodekaeders einen alternativen Weg.

3 Klassifikation der Platonischen Körper

Weiters ziehen wir für den Dodekaeder zusätzlich [8, S. 396-397] heran und vereinfachen uns seinen Existenznachweis durch das Angeben und Überprüfen expliziter Koordinaten für die Eckpunkte.

Um den Tetraeder $\{3, 3\}$ zu konstruieren, beginnen wir mit einem gleichseitiges Dreieck ABC . In dessen Mittelpunkt errichten wir eine Senkrechte auf die Ebene des Dreiecks ABC . Jeder Punkt auf dieser Senkrechten ist gleich weit von den Eckpunkten A, B, C entfernt. Wir wählen nun einen Punkt D auf dieser Senkrechten, für den $|DA| = |AB|$ gilt. Verbinden wir die Eckpunkte des Dreiecks ABC nun mit diesem neuen Punkt D , erhalten wir den gesuchten von vier kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper, bei dem an jeder Ecke drei davon zusammenstoßen.

Um den Würfel $\{4, 3\}$ zu konstruieren, beginnen wir mit einem Quadrat $ABCD$. Durch jeden Punkt A, B, C, D errichten wir eine Senkrechte auf die Ebene des Quadrats $ABCD$. Auf der Senkrechten durch den Punkt A finden wir den Punkt A' , der eine Seitenlänge des Quadrats $ABCD$ entfernt liegt, und verbinden diese beiden Punkte. Analog finden wir auch die Punkte B', C', D' in gleicher Höhe über der Ebene des Quadrats $ABCD$ und verbinden auch diese entsprechend. Verbinden wir nun auch noch die Punkte A', B', C', D' , erhalten wir ein weiteres Quadrat $A'B'C'D'$, das parallel zum Quadrat $ABCD$ liegt. So erhalten wir den gesuchten von sechs kongruenten Quadraten begrenzten Körper, bei dem an jeder Ecke drei davon zusammenstoßen. Alternativ können wir für die Eckpunkte des Würfels auch ganz leicht explizite Koordinaten angeben und wir erhalten den Würfel dann als konvexe Hülle seiner Eckpunkte, d. h. $W = \text{Conv}(\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\})$.

Um den Oktaeder $\{3, 4\}$ zu konstruieren, gehen wir von seinem bereits konstruierten Dualkörper, dem Würfel, aus. Wie bereits in der Bemerkung am Beginn dieses Unterkapitels festgehalten, erhalten wir den Oktaeder als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Würfels. Mit den oben angegebenen Koordinaten für den Würfel ergibt sich der entsprechende Oktaeder als $O = \text{Conv}(\{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\})$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^3$ bezeichnen. Geometrisch betrachtet verbinden wir an jeder Ecke des Würfels die Mittelpunkte der drei an einer Ecke zusammentreffenden Quadrate zu einem Dreieck. Da diese Mittelpunkte gleich weit voneinander entfernt sind, sind die entstehenden Dreiecke gleichseitig und kongruent und wir erhalten den gesuchten von acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper, bei dem an jeder Ecke vier davon zusammenstoßen.

Die Konstruktion des Dodekaeders $\{5, 3\}$ gestaltet sich etwas aufwändiger, weshalb wir mit expliziten Koordinaten für die Eckpunkte arbeiten werden. Dabei folgen wir [8, S. 396-397] und benötigen dafür allem voran den Goldenen Schnitt:

Bemerkung. [8, S. 396] Der Goldene Schnitt $\Phi \in \mathbb{R}$ ist festgelegt durch die Bedingung

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi - 1}{1},$$

d. h. $\Phi^{-1} = \Phi - 1$. Durch entsprechendes Umformen erhalten wir $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, was $\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ergibt. Wir wählen

$$\Phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Wir gehen auch hier wieder von dem bereits konstruierten Würfel aus. Die acht Eckpunkte des Würfels sind o.B.d.A. wie oben gegeben durch $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Auf die Seitenflächen dieses Würfels setzen wir sechs “Walmdächer”, wodurch die zusätzlichen zwölf Eckpunkte des Dodekaeders entstehen, siehe Abbildung⁵ 3.1.

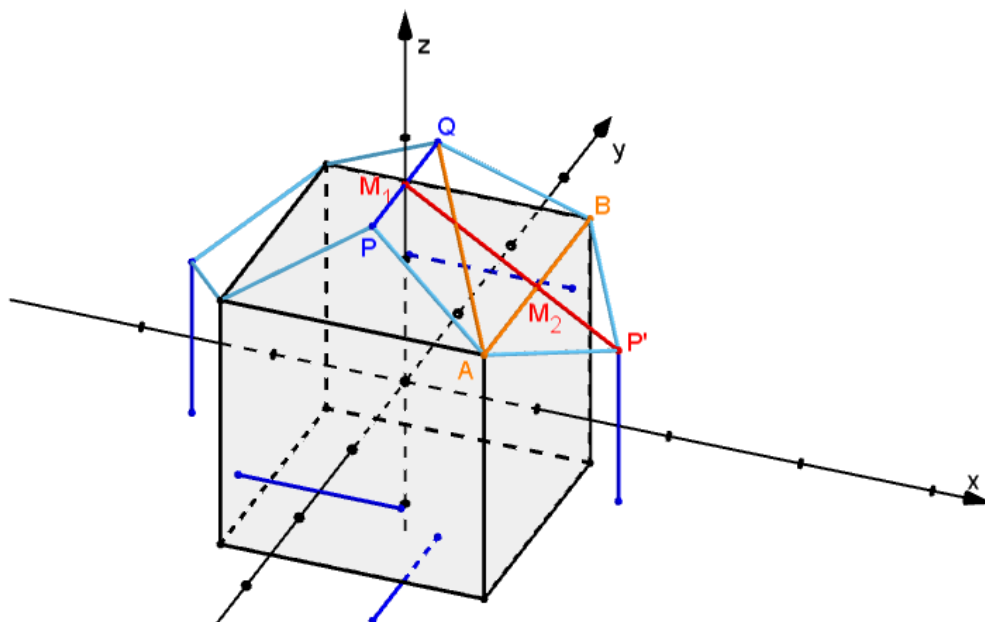


Abbildung 3.1: Konstruktion des Dodekaeders: Errichten der “Walmdächer” (blau) auf den Seitenflächen des Würfels. Eigene Darstellung nach [8, S. 397].

Um die Koordinaten dieser Punkte festzulegen, betrachten wir das auf die obere Seitenfläche des Würfels aufgesetzte Walmdach und stellen folgende zwei Bedingungen für die beiden Endpunkte dieses “Walmdachfirsts” mit $P = (0, -a, b)$ $Q = (0, a, b)$ auf:

- (i). Die Seitenlängen des Fünfecks müssen alle gleich sein. Wir erhalten die erste Bedingung also durch Gleichsetzen der Länge des “Firsts” (dunkelblau) mit der Länge einer weiteren Fünfeckkante (hellblau). Wir wählen hierfür $\|PQ\| = \|AP\|$ mit $A = (1, -1, 1)$:

$$-3a^2 - 2a - b(2 - b) + 3 = 0. \quad (3.2.1)$$

- (ii). Die zu einem Fünfeck gehörenden Punkte müssen in einer Ebene liegen. Dazu genügt es zu zeigen, dass der Mittelpunkt des “Firsts” $M_1 = (0, 0, b)$, der Mittelpunkt der ursprünglichen Würfelkante $M_2 = (1, 0, 1)$ und der Endpunkt des anschließenden “Firsts” $P' = (b, 0, a)$ auf einer Geraden liegen (rot). Daraus erhalten wir die zweite Bedingung:

$$b(2 - b) = a. \quad (3.2.2)$$

⁵Alle eigenen Darstellungen in dieser Arbeit wurden mit GeoGebra Classic 5 erstellt.

3 Klassifikation der Platonischen Körper

Zusätzlich muss $b > 1$ gelten, damit der “First” wirklich auf den Würfel aufgesetzt wird und weiters $0 < a < 1$, damit die Länge des “Firsts” kürzer als die ursprüngliche Würfelkante ist (die nun der Fünfeckdiagonale entspricht). Setzen wir nun (3.2.2) in (3.2.1) ein, erhalten wir durch entsprechendes Umformen

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung $0 < a < 1$ ergibt sich daraus $a = \Phi^{-1}$. Setzen wir dies zurück in (3.2.2) ein, bekommen wir $b = \Phi$ unter Berücksichtigung der Zusatzbedingung $b > 1$. Aus Symmetriegründen erhalten wir daraus die Koordinaten der gesuchten zusätzlichen zwölf Eckpunkte des Dodekaeders:

$$(0, \pm\Phi^{-1}, \pm\Phi), (\pm\Phi, 0, \pm\Phi^{-1}), (\pm\Phi^{-1}, \pm\Phi, 0).$$

Um uns von der Regularität der entstehenden Fünfecke zu überzeugen, bleibt nur noch nachzuweisen, dass die drei verschiedenen Typen von Winkeln gleich groß sind. Wir wählen hierfür die Winkel $\angle AP'B$, $\angle APQ$ und $\angle PAP'$. Dafür genügt es zu zeigen, dass die entsprechenden Diagonalen (orange) $\overline{AB}$, $\overline{AQ}$ und $\overline{PP'}$ dieselbe Länge haben, d. h. dass $\|AB\| = \|AQ\| = \|PP'\|$. Da die Diagonale $\overline{AB}$ der ursprünglichen Würfelkante entspricht, gilt nach Konstruktion $\|AB\| = 2$. Mit $A = (1, -1, 1)$ und $Q = (0, \Phi^{-1}, \Phi)$ erhalten wir auch $\|AQ\| = \sqrt{2\Phi^2 - 2\Phi + 2} = 2$ und mit $P = (0, -\Phi^{-1}, \Phi)$ und $P' = (\Phi, 0, \Phi^{-1})$ analog $\|PP'\| = 2$. Die Gleichheit der Winkel $\angle AP'B$, $\angle APQ$ und $\angle PAP'$ folgt nun aus dem Kosinussatz.

Nach dem Fundamentalsatz über Polyeder 2.6.3 ist die konvexe Hülle der ursprünglichen acht Würfecken zusammen mit den angegebenen zwölf Endpunkten der “Walm-dachfirste” ein Polyeder. Diesen nennen wir Dodekaeder, d. h. es gilt

$$D = \text{Conv}(\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm\Phi^{-1}, \pm\Phi), (\pm\Phi, 0, \pm\Phi^{-1}), (\pm\Phi^{-1}, \pm\Phi, 0)\}).$$

Geometrisch betrachtet erhalten wir aus diesen 20 Eckpunkten den gesuchten von zwölf kongruenten regulären Fünfecken begrenzten Körper, bei dem an jeder Ecke drei davon zusammenstoßen.

Um den Ikosaeder $\{5, 3\}$ zu konstruieren, gehen wir von seinem soeben konstruierten Dualkörper, dem Dodekaeder, aus. Wie bereits in der Bemerkung am Beginn dieses Unterkapitels festgehalten, erhalten wir den Ikosaeder als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Dodekaeders. Geometrisch betrachtet verbinden wir an jeder Ecke des Dodekaeders die Mittelpunkte der drei an einer Ecke zusammentreffenden Fünfecke zu einem Dreieck. Da diese Mittelpunkte gleich weit voneinander entfernt sind, sind die entstehenden Dreiecke gleichseitig und kongruent und wir erhalten den gesuchten von zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzten Körper, bei dem an jeder Ecke fünf davon zusammenstoßen.

Nach unserem Nachweis der Existenz der fünf Platonischen Körper drängt sich nun auch noch die Frage nach der Eindeutigkeit dieser durch Konstruktion gefundenen Körper auf.⁶ Um die Möglichkeit auszuschließen, dass diese verformt werden könnten, verweisen wir auf den Starrheitssatz von Cauchy:

⁶Die folgenden Überlegungen orientieren sich eng an jenen in Kapitel 2.2 meiner Bachelorarbeit.

Theorem 3.2.1. [24, S. 386] (Starrheitssatz von Cauchy). *Sind die zugehörigen Flächen zweier konvexer Polyeder im $\mathbb{R}^3$ kongruent und in gleicher Weise benachbart, so sind auch die Polyeder kongruent.*

Im $\mathbb{R}^2$ ist eine ähnliche Behauptung offensichtlich falsch, da jedes Polygon, außer ein Dreieck, Verformungen zulässt, bei denen die Kantenlängen dieselben bleiben, die Winkel sich aber ändern [24, S. 386]. Weiters ist zu betonen, dass der Starrheitssatz von Cauchy nur für konvexe Polyeder gilt.⁷ Als anschauliches Beispiel hierfür verweisen wir auf einen (konvexen) Ikosaeder und einen (nicht-konvexen) “eingedrückten” Ikosaeder [17, S. 48], siehe Abbildung 3.2.



Abbildung 3.2: “Eingedrückter” Ikosaeder. Eigene Darstellung nach [17, S. 48].

Die zugehörigen Flächen dieser beiden Polyeder sind zwar kongruent und in gleicher Weise benachbart, jedoch ist der “eingedrückte” Ikosaeder nicht konvex und somit auch nicht kongruent zum Ikosaeder. Für einen Beweis des Starrheitssatzes von Cauchy verweisen wir auf [24, S. 386-393]. Für Ecken, an denen genau drei Seitenflächen zusammenstoßen, gibt es aber auch ein schönes elementargeometrisches Starrheitsargument:

Lemma 3.2.2. [12, S. 443] *Wenn an einer Ecke E eines Polyeders drei Seitenflächen mit den Winkeln α , β und γ zusammentreffen, dann sind die drei Winkel zwischen den Seitenflächen eindeutig durch α , β und γ festgelegt.*

Beweis. Wir betrachten drei Punkte A, B, C auf den drei an der Ecke E zusammentreffenden Kanten, die gleich weit, o.B.d.A. 1 Einheit, von E entfernt sind. Für die folgenden Überlegungen fixieren wir das Dreieck AEB . Lassen wir nun das Dreieck AEC um die Strecke $\overline{AE}$ rotieren, beschreibt der Punkt C einen Kreis auf der Einheitssphäre mit Mittelpunkt E . Analog lassen wir das Dreieck BEC um die Strecke $\overline{BE}$ rotieren, wodurch der Punkt C ebenfalls einen Kreis auf der Einheitssphäre mit Mittelpunkt E beschreibt. Die beiden so entstandenen Kreise schneiden einander somit im Punkt C (bzw. auch dessen Spiegelung an der Ebene des Dreiecks AEB). Daraus folgt, dass die drei Winkel zwischen den Seitenflächen eindeutig durch α , β und γ festgelegt sind. $\square$

⁷Ein Überblick über flexible (nicht-konvexe!) Polyeder findet sich in [24, S. 395-411].

3 Klassifikation der Platonischen Körper

Somit haben wir ein weiteres Argument für die Starrheit von Tetraeder, Würfel und Dodekaeder gefunden. Für vier oder mehr an einer Ecke zusammentreffende Seitenflächen funktioniert dieses Argument aber offensichtlich nicht. Während sich bei [12, S. 445] auch ein elementargeometrisches Argument für die Starrheit des Oktaeders finden lässt, bleibt uns beim Ikosaeder nur der Verweis auf den Starrheitssatz von Cauchy.

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Lassen wir die Forderung der Kongruenz aller Seitenflächen wegfallen und erlauben somit das Vorkommen verschiedener regulärer Polygone, gehen wir von den regulären zu den semiregulären Polyedern über. Wie auch hier ursprünglich üblich, definieren wir diese wieder anhand der lokalen Betrachtung an jeder Ecke [10, S. 91]:

Definition. [12, S. 460] (Semiregulärer Polyeder¹ - lokales Kriterium). Ein konvexer Polyeder ist semiregulär, wenn alle Seitenflächen reguläre Polygone sind und die zyklische Anordnung der Flächen um jede Ecke gleich ist.

Bemerkung. [10, S. 91] Wir erinnern uns an dieser Stelle daran, dass von unserem Kongruenzbegriff aus Kapitel 2.5 auch (orientierungsumkehrende) Spiegelungen umfasst werden. Wir lernen in diesem Kapitel nämlich zwei “schiefe” semireguläre Polyeder (Cubus Simus und Dodecaedron Simum) kennen, in deren Konstruktion die Orientierung eingeht. Dadurch sind sie genaugenommen jeweils in zwei “verschiedenen” Versionen realisierbar, die wir unter unserem Kongruenzbegriff jedoch jeweils als “gleich” betrachten werden.

Bemerkung. [27, S. 117] Die zyklische Anordnung der Flächen um eine Ecke bzw. die Eckenkonfiguration werden wir im Folgenden mithilfe der sogenannten zyklischen Sequenz $S = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ darstellen. Dabei bezeichnen $p_1, p_2, \dots, p_q$ die in zyklischer Reihenfolge angeordneten Seitengrade² der an jeder Ecke zusammentreffenden Seitenflächen. Dabei sind sowohl zyklische Vertauschungen als auch Spiegelungen der Sequenz als gleich zu betrachten. Die Anzahl q der an jeder Ecke zusammentreffenden Seitenflächen entspricht somit der Länge der Sequenz S . Weiters verstehen wir unter einem Segment einer zyklischen Sequenz S ein Tripel aufeinanderfolgender Zahlen in S , wobei auch wieder gespiegelte Segmente als gleich betrachtet werden.

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von den sogenannten Archimedischen Körpern, bei denen aus historischen Gründen die Platonischen Körper, die die abgeschwächte Forderung natürlich auch wieder erfüllen, sowie die beiden unendlichen Familien der regelmäßigen Prismen und Antiprismen, ausgeschlossen werden [10, S. 91]:

Definition. [10, S. 91] (Archimedischer Körper). Ein semiregulärer Polyeder, der weder regulär ist noch zu den regelmäßigen Prismen oder Antiprismen gehört, wird Archimedischer Körper genannt.

¹Branko Grünbaum [10, S. 91] setzt die Begriffe “semiregulär” und “uniform” gleich und bezeichnet damit jene Polyeder, die das später angeführte globale Kriterium erfüllen. In dieser Arbeit verwenden wir die Bezeichnung “semiregulär” jedoch mangels anderer Begrifflichkeiten für alle Polyeder, die dieses lokale Kriterium erfüllen, auch für die später unter dem Begriff “archimedisch” ausgeschlossenen Prismen, Antiprismen und Platonischen Körper.

²Als Seitengrad bezeichnen wir die Anzahl der Seiten eines Polygons, z. B. ein p -Eck hat den Grad p .

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Im Gegensatz zu den Platonischen Körpern macht es bei den Archimedischen Körpern einen bedeutenden Unterschied, ob diese lokal oder global definiert werden [27]. Obwohl in der Literatur häufig von 13 Archimedischen Körpern gesprochen wird, gibt es neben den Prismen, Antiprismen und Platonischen Körpern genau 14 Körper, die das lokale Kriterium erfüllen [27]. Eine Auflistung der semiregulären Polyeder inklusive ihrer Eckenkonfigurationen ist in Tabelle 4.1 zu finden.

Zyklische Sequenz	Bezeichnung
(3, 3, 3)	Tetraeder
(4, 4, 4)	Hexaeder (Würfel)
(5, 5, 5)	Dodekaeder
(4, 4, n)	n -seitiges Prisma, $n \geq 3, n \neq 4$
(3, 6, 6)	Tetraederstumpf
(4, 6, 6)	Oktaederstumpf
(5, 6, 6)	Ikosaederstumpf
(3, 8, 8)	Hexaederstumpf
(3, 10, 10)	Dodekaederstumpf
(4, 6, 8)	Kuboktaederstumpf (Großer Rhombenkuboktaeder)
(4, 6, 10)	Ikosidodekaederstumpf (Großer Rhombenikosidodekaeder)
(3, 3, 3, 3)	Oktaeder
(3, 3, 3, n)	n -seitiges Antiprisma, $n \geq 4$
(3, 4, 3, 4)	Kuboktaeder
(3, 5, 3, 5)	Ikosidodekaeder
(3, 4, 4, 4)	(Kleiner) Rhombenkuboktaeder und Pseudorhombenkuboktaeder
(3, 4, 5, 4)	(Kleiner) Rhombenikosidodekaeder
(3, 3, 3, 3, 3)	Ikosaeder
(3, 3, 3, 3, 4)	Cubus Simus ³ (Abgeschrägter (oder “schiefer”) Hexaeder)
(3, 3, 3, 3, 5)	Dodecaedron Simum (Abgeschrägter (oder “schiefer”) Dodekaeder)

Tabelle 4.1: Die semiregulären Polyeder [12, S. 462].

Wir werden sehen, dass die zyklische Sequenz (3, 4, 4, 4) auf zwei Arten realisierbar ist, wobei der sogenannte Pseudorhombenkuboktaeder zwar das lokale Kriterium erfüllt und somit zu den Archimedischen Körpern gezählt werden muss, das folgende globale Kriterium jedoch nur von den anderen 13 Körpern erfüllt wird, die deshalb auch als sogenannte uniforme Polyeder bezeichnet werden:

³Wir verwenden wie [25, S. 60] sowohl hier als auch in der nächsten Zeile die lateinische Bezeichnung, um einer Verwechslung mit dem Hexaederstumpf bzw. dem Dodekaederstumpf vorzubeugen.

Definition. [10, S. 91] (Uniformer Polyeder - globales Kriterium). Ein konvexer Polyeder ist uniform, wenn alle Seitenflächen reguläre Polygone sind und die (volle) Symmetriegruppe des Polyeders transitiv auf der Menge der Ecken wirkt, d. h. wenn alle Ecken nur eine Bahn unter den Symmetrien des Polyeders bilden.

Bemerkung. Da bei den regulären Polyedern die Transitivität der Symmetriegruppe auf der Menge der Ecken ebenso gegeben ist, handelt es sich bei diesen auch um uniforme Polyeder. Die Regularität ist also eine stärkere Forderung als die (Ecken-)Uniformität, weil für die Regularität zusätzlich auch die Transitivität der Symmetriegruppe auf der Menge der Kanten und der Menge der Flächen gegeben sein muss. Vereinfacht gesprochen müssen bei einem uniformen Polyeder nur mehr alle Ecken, und nicht mehr wie bei den regulären Polyedern auch alle Kanten und Flächen, voneinander ununterscheidbar sein.

Branko Grünbaum [10] deckt auf, dass der Pseudorhombenkuboktaeder als 14. Archimedischer Körper wegen einer weit verbreiteten Ungenauigkeit bei der Unterscheidung zwischen dem lokalen und dem globalen Kriterium oft vergessen wird. Auch kommt es vor, dass der Pseudorhombenkuboktaeder wie bei [5, S. 91-92] nachträglich aus ästhetischen Gründen ausgeschlossen wird, weil es genau die globale Uniformität der anderen 13 Archimedischen Körper ist, die als besonders “schön” empfunden wird und den Pseudorhombenkuboktaeder auf unangenehme Weise unter ihnen herausstechen lässt.

Bevor wir uns näher mit den Symmetrien dieser Polyeder auseinandersetzen, leiten wir in diesem Kapitel zunächst alle möglichen Eckenkonfigurationen semiregulärer Polyeder ab. Anschließend weisen wir die Existenz der so gefundenen Polyeder durch Konstruktionen nach.

4.1 Mögliche Eckenkonfigurationen

In diesem Unterkapitel leiten wir alle möglichen Eckenkonfigurationen semiregulärer Polyeder aus drei Bedingungen ab. Als Grundlage dafür ziehen wir [27] heran, wobei uns auch [12, S. 461-462] als Ergänzung dient. Vorab brauchen wir noch das sogenannte Winkeldefizit:

Definition. [5, S. 186] (Winkeldefizit). Unter dem Winkeldefizit D verstehen wir jenen Winkel, um den die Summe der Innenwinkel an einer Ecke kleiner als 2π ist.

Mithilfe des Winkeldefizits können wir eine wichtige Eigenschaft konvexer Ecken beschreiben, woraus wir später die zentrale numerische Einschränkung möglicher Eckenkonfigurationen bekommen werden:

Lemma 4.1.1. *An jeder Ecke eines konvexen Polyeders ist das Winkeldefizit positiv, d. h. es gilt $D > 0$.*

Beweis. Der wesentliche Punkt für den Nachweis dieser Behauptung ist folgendes Resultat zur Monotonie des Umfangs kompakter konvexer Teilmengen der Einheitssphäre, siehe hierzu [15, Proposition 1.3]: Sind K und L zwei kompakte konvexe Teilmengen der Einheitssphäre und gilt $K \subseteq L$, dann gilt auch $P_K \leq P_L$. Dabei bezeichnet P_K den

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Umfang (Perimeter) von K und P_L jenen von L . Insbesondere ist der Umfang jeder kompakten konvexen Teilmenge der Einheitskugel strikt kleiner als 2π .

Sei nun A ein Eckpunkt eines konvexen Polyeders. Wir betrachten die Einheitskugel S mit Mittelpunkt A . O.B.d.A. sei der Polyeder so groß, dass alle anderen Eckpunkte außerhalb von S liegen. Die Seitenflächen des Polyeders, die bei A zusammentreffen, schneiden S in Großkreisbögen, die ein konvexes sphärisches Polygon auf S begrenzen. Der Umfang dieses Polygons stimmt mit der Summe der bei A zusammentreffenden Flächenwinkel überein. Da der Umfang strikt kleiner als 2π ist, muss das Winkeldefizit positiv sein. $\square$

Nun stehen uns alle Mittel zur Verfügung, um die bereits angesprochenen drei Bedingungen zu formulieren und nachzuweisen:

Lemma 4.1.2. [27, S. 117] *Ist die zyklische Sequenz $S = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ die Eckenkonfiguration eines semiregulären Polyeders, dann gilt:*

- (i). $q \geq 3$ und $p_i \geq 3$ für $i = 1, \dots, q$, d. h. die Länge von S ist mindestens 3 und alle Seitengrade müssen auch mindestens 3 sein,
- (ii). folgende zentrale numerische Einschränkung:

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i} > \frac{q}{2} - 1,$$

- (iii). für jeden ungeraden Seitengrad p in der zyklischen Sequenz S muss in S ein Segment b, p, b vorkommen.⁴

Beweis. (i). Für $q \leq 2$ können keine Ecken gebildet werden und ein konvexes Polygon hat mindestens 3 Seiten.

- (ii). Die zentrale numerische Einschränkung möglicher Eckenkonfigurationen erhalten wir daraus, dass nach Lemma 4.1.1 an einer konvexen Ecke $D > 0$ gilt. Vorab benötigen wir jedoch eine Formel für die Ermittlung des Winkeldefizits D . Nach dem Innenwinkelsatz beträgt die Summe der Innenwinkel eines konvexen p -seitigen Polygons $(p-2)\pi$ [5, S. 183].⁵ Da wir somit für die Größe eines Innenwinkels eines regulären p -Ecks $\frac{(p-2)\pi}{p}$ erhalten, gilt an einer Ecke mit $S = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ für die

⁴Es ist zu beachten, dass diese Bedingung nicht bedeutet, dass der betrachtete ungerade Seitengrad p unmittelbar von zwei gleichen Seitengraden b umgeben sein muss. Diese Forderung würde nämlich bedeuten, dass jede Fläche mit ungeradem Grad p rundherum ausschließlich von Flächen mit demselben Grad b umgeben sein muss, was wiederum bedeuten würde, dass b gleich p sein müsste und somit die ganze Sequenz ausschließlich von derselben ungeraden Zahl gebildet werden müsste. Dahingegen bedeutet diese Bedingung nur, dass für jeden ungeraden Seitengrad p an irgendeiner Stelle in S ein Segment b, p, b vorkommen muss. Dabei muss p aber nicht ungleich b sein. Weiters müssen auch die zu mehrfach vorkommenden gleichen ungeraden Seitengraden p gehörenden Segmente b, p, b weder überschneidungsfrei noch überhaupt verschieden voneinander sein.

⁵Der Innenwinkelsatz folgt direkt daraus, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck π beträgt, weil jedes konvexe p -seitige Polygon durch seine Diagonalen in $p-2$ Dreiecke zerteilt werden kann.

Summe aller Innenwinkel $\sum_{i=1}^q \frac{(p_i-2)\pi}{p_i}$. Nach Definition erhalten wir nun folgende Formel für das Winkeldefizit

$$D = 2\pi - \sum_{i=1}^q \frac{(p_i-2)\pi}{p_i}.$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus $D > 0$ durch entsprechendes Umformen.

- (iii). [27, S. 119-120] Wir nehmen nun eine andere Sichtweise auf die zyklische Sequenz S rund um eine Ecke ein, indem wir daraus eine Seitenfläche mit Seitengrad p herausgreifen und die Seitengrade $b_1, \dots, b_p$ der angrenzenden Flächen an den Kanten dieses p -Ecks betrachten, siehe dazu Abbildung 4.1. An dieser Stelle ist hervorzuheben, dass es von der Wahl der p -eckigen Seitenfläche abhängt, welche $b_i, 1 \leq i \leq p$, rundherum auftreten, d. h. rund um ein herausgegriffenes p -Eck müssen nicht alle Segmente aus S vorkommen.⁶

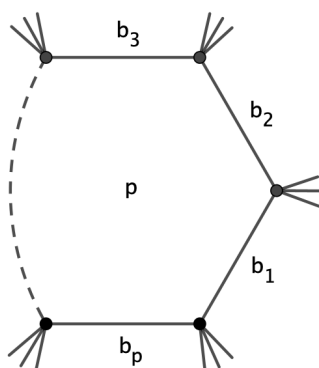


Abbildung 4.1: p -Eck mit angrenzenden b_i -Ecken mit $1 \leq i \leq p$: Die drei Striche an den Ecken deuten etwaige weitere Flächen in der zyklischen Sequenz S rund um eine Ecke an. Eigene Darstellung nach [27, S. 119].

Das b_i -Eck, das p -Eck und das b_{i+1} -Eck sind dann aufeinanderfolgende Flächen, die einen gemeinsamen Eckpunkt umgeben. Also muss die zyklische Sequenz S für unser herausgegriffenes p in S ein Segment b_i, p, b_{i+1} enthalten. Da dies für $1 \leq i \leq p$ gilt, wobei b_{p+1} offensichtlich wieder gleich b_1 ist, erhalten wir, dass die zyklische Sequenz S für unser herausgegriffenes p in S die Segmente $b_1, p, b_2; b_2, p, b_3; \dots; b_{p-1}, p, b_p; b_p, p, b_1$ enthalten muss. Dabei ist zu beachten, dass diese Segmente nicht unbedingt verschieden voneinander sein müssen und auch $b_i = p$ möglich ist.

⁶Wir betrachten hierzu als Beispiel den Cubus Simus mit der Eckensequenz $(3, 3, 3, 3, 4)$. Beim Cubus Simus gibt es sowohl Dreiecke, die ausschließlich an andere Dreiecke angrenzen als auch Dreiecke, die neben anderen Dreiecken auch an ein Quadrat angrenzen. Ein analoges Beispiel stellt der Dodecaedron Simum mit der Eckensequenz $(3, 3, 3, 3, 5)$ dar.

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Wir setzen nun voraus, dass kein Segment b, p, b in S vorkommt und zeigen, dass p unter dieser Voraussetzung gerade sein muss. Damit weisen wir indirekt nach, dass bei ungeradem p ein Segment b, p, b in S vorkommen muss. Wir unterscheiden dabei drei Fälle nach der Anzahl der verschiedenen Segmente von S bei denen p in der Mitte steht, d. h. die von der Form x, p, y sind:

Fall 1: Zunächst betrachten wir den Fall, dass p in nur genau einem Segment b_1, p, b_2 mittig vorkommt. Wegen der Voraussetzung muss $b_1 \neq b_2$ gelten. Damit p in nur genau einem Segment vorkommt, müssen die Seitengrade abwechselnd gleich b_1 und b_2 sein. Also muss p in diesem Fall gerade sein.

Fall 2: Weiters betrachten wir den Fall, dass p in genau zwei verschiedenen Segmenten b_1, p, b_2 und b_2, p, b_3 mittig vorkommt. Wegen der Voraussetzung muss $b_1 \neq b_2$ und $b_2 \neq b_3$ gelten. Damit diese beiden Segmente tatsächlich verschieden sind, muss auch $b_1 \neq b_3$ gelten. Damit p in nur genau diesen beiden Segmenten vorkommt, muss jedenfalls jedes zweite Segment gleich b_2 sein, dazwischen können sowohl b_1 als auch b_3 auftreten.⁷ Also muss p auch in diesem Fall gerade sein.

Fall 3: Schließlich betrachten wir noch den Fall, dass p in mindestens drei verschiedenen Segmenten mittig vorkommt. Wir zeigen nun anhand eines Minimalbeispiels, dass dies ohne ein Segment b, p, b aufgrund eines Widerspruchs zur Konvexität gar nicht möglich ist. Damit p in mindestens drei verschiedenen Segmenten vorkommt, muss p in S mindestens dreimal vorkommen und in S müssen mindestens zwei andere Seitengrade b, b' verschieden voneinander und verschieden von p vorkommen. Da wegen der Bedingung (i) jeder Seitengrad mindestens 3 sein muss, können wir das Winkeldefizit D mit

$$\frac{1}{2\pi}D = 1 - \frac{q}{2} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i}$$

maximieren, indem wir in unserer Sequenz $p = 3$ dreimal vorkommen lassen und $b = 4$ und $b' = 5$ als die beiden anderen Elemente in S wählen.⁸ Unser Minimalbeispiel ist also die Sequenz $(3, 4, 3, 5, 3)$ mit $q = 5$. Für das Winkeldefizit dieser Sequenz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi}D = 1 - \frac{5}{2} + \sum_{i=1}^5 \frac{1}{p_i} = 1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{20} < 0,$$

⁷Es ist hier wieder hervorzuheben, dass b_1 und b_2 dabei nicht rund um jedes p -Eck auftreten müssen, solange das jeweils andere an irgendeiner Stelle in der Sequenz vorkommt. Es könnte also z. B. auch sein, dass rund um ein herausgegriffenes p -Eck immer nur b_1 und b_2 abwechselnd auftreten, solange rund um irgendein anderes p -Eck ein Segment b_2, p, b_3 auftritt.

⁸Dies lässt sich durch eine elementare geometrische Überlegung begründen: Der 60° -Winkel eines gleichseitigen Dreiecks liefert unter den regulären Polygonen den kleinstmöglichen Beitrag zur Summe der Winkel an einer Ecke und somit den größtmöglichen Beitrag zum Winkeldefizit. Analog liefert der 90° -Winkel des Quadrats den zweitgrößten und der 108° -Winkel des regulären Fünfecks den drittgrößten möglichen Beitrag zum Winkeldefizit an einer Ecke.

4.1 Mögliche Eckenkonfigurationen

d. h. das Winkeldefizit ist negativ.⁹ Das ist aber nach Lemma 4.1.1 an einer konvexen Ecke nicht möglich. Da unser Minimalbeispiel das Winkeldefizit D maximiert, gilt für jede von Fall 3 umfasste Sequenz $D \leq -\frac{1}{20}$ und somit ist Fall 3 ohne ein Segment b, p, b gar nicht möglich.

Da unter der Voraussetzung, dass kein Segment b, p, b in S vorkommt, p in Fall 1 und 2 gerade sein muss und Fall 3 auf einen Widerspruch zur Konvexität führt, haben wir indirekt nachgewiesen, dass für jedes ungerade p in S ein Segment b, p, b vorkommen muss.

□

Nun leiten wir alle möglichen Eckenkonfigurationen semiregulärer Polyeder aus den in Lemma 4.1.2 aufgelisteten drei Bedingungen ab und folgen dabei eng [27, S. 121-123]. Wir betrachten vier verschiedene Fälle nach der Länge q der Sequenz S bzw. der Anzahl der an einer Ecke zusammenstoßenden Seitenflächen:

Fall 1: Für $q = 3$ lautet die Bedingung (ii)

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} > \frac{1}{2}, \quad (4.1.1)$$

und aus Bedingung (iii) folgt, dass wenn S einen ungeraden Seitengrad p beinhaltet, die anderen beiden Seitengrade gleich sein müssen und zwar entweder gleich zu p oder gerade. Damit erhalten wir:

- (i). Für $3 \in S$ gilt $S = (3, x, x)$ wegen Bedingung (iii), wobei $x = 3$ oder gerade, und wegen (4.1.1) muss $x < 12$ gelten. Somit erhalten wir:

$(3, 3, 3)$	Tetraeder,
$(3, 4, 4)$	dreieckiges Prisma,
$(3, 6, 6)$	Tetraederstumpf,
$(3, 8, 8)$	Hexaederstumpf und
$(3, 10, 10)$	Dodekaederstumpf.

⁹Alternativ zu unserer Überlegung anhand eines Minimalbeispiels ist auch folgende formale Abschätzung des Winkeldefizits möglich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}D &= 1 - \frac{q}{2} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i} = 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{2} \right)}_{\leq 0} \\ &\leq 1 + 3 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{5}{2} + \underbrace{\frac{2}{p}}_{\leq \frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b'}}_{\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \\ &\leq 1 - \frac{5}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{20} < 0. \end{aligned}$$

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

(ii). Sei nun $3 \notin S$. Kommt 4 mindestens zweimal vor, erhalten wir

$$(4, 4, n) \quad n\text{-seitiges Prisma,}$$

wobei die drei Bedingungen für jedes $n \geq 3$ erfüllt sind. Dabei erhalten wir insbesondere für $n = 4$ auch

$$(4, 4, 4) \quad \text{Hexaeder (Würfel).}$$

Kommt 4 genau einmal vor, müssen die beiden anderen Seitengrade gerade sein. Für $6 \in S$ muss wegen (4.1.1) der dritte Seitengrad < 12 sein. Somit erhalten wir:

$$(4, 6, 6) \quad \text{Oktaederstumpf,}$$

$$(4, 6, 8) \quad \text{Kuboktaederstumpf und}$$

$$(4, 6, 10) \quad \text{Ikosidodekaederstumpf.}$$

Für $6 \notin S$ muss der zweitgrößte Seitengrad ≥ 8 sein. Da dann aber wegen (4.1.1) für den dritten Seitengrad < 8 gelten müsste, haben wir bereits alle möglichen Eckenkonfigurationen gefunden, in denen 3 oder 4 vorkommt.

(iii). Sei nun $3 \notin S$ und $4 \notin S$. Für $5 \in S$ gilt $S = (5, x, x)$ wegen Bedingung (iii), wobei $x = 5$ oder gerade, und wegen (4.1.1) muss $x < 6\frac{2}{3}$ gelten. Somit erhalten wir:

$$(5, 5, 5) \quad \text{Dodekaeder und}$$

$$(5, 6, 6) \quad \text{Ikosaederstumpf.}$$

Für $5 \notin S$ müssen alle Seitengrade ≥ 6 sein, was jedoch (4.1.1) widerspricht. Somit haben wir bereits alle möglichen Eckenkonfigurationen für $q = 3$ gefunden.

Fall 2: Für $q = 4$ lautet die Bedingung (ii)

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} > 1. \quad (4.1.2)$$

Damit erhalten wir:

(i). Kommt 3 in S mindestens dreimal vor, erhalten wir

$$(3, 3, 3, n) \quad n\text{-seitiges Antiprisma,}$$

wobei die drei Bedingungen für jedes $n \geq 3$ erfüllt sind. Dabei erhalten wir insbesondere für $n = 3$ auch

$$(3, 3, 3, 3) \quad \text{Oktaeder.}$$

- (ii). Kommt 3 in S genau zweimal vor, können diese wegen Bedingung (iii) in S nicht nebeneinander stehen und die anderen beiden Seitengrade müssen gleich sein. Also gilt $S = (3, x, 3, x)$, wobei $x \geq 4$, und wegen (4.1.2) muss $x < 6$ gelten. Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} (3, 4, 3, 4) & \text{Kuboktaeder und} \\ (3, 5, 3, 5) & \text{Ikosidodekaeder.} \end{array}$$

- (iii). Kommt 3 in S genau einmal vor, müssen die beiden angrenzenden Seitengrade gleich sein und außerdem gerade, weil sonst der vierte Seitengrad eine weitere 3 sein müsste. Also gilt $S = (3, y, x, y)$, wobei y gerade ist. Für $y \geq 6$ müsste wegen (4.1.2) gelten $x < 3$, was Bedingung (i) widerspricht. Also muss $y = 4$ sein und somit $S = (3, 4, x, 4)$ gelten. Wegen (4.1.2) muss dann $x < 6$ gelten. Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} (3, 4, 4, 4) & \text{Rhombenkuboktaeder und Pseudorhombenkuboktaeder und} \\ (3, 4, 5, 4) & \text{Rhombenikosidodekaeder.} \end{array}$$

- (iv). Für $3 \notin S$ müssen alle Seitengrade ≥ 4 sein, was jedoch (4.1.2) widerspricht. Somit haben wir bereits alle möglichen Eckenkonfigurationen für $q = 4$ gefunden.

Fall 3: Für $q = 5$ lautet die Bedingung (ii)

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} > \frac{3}{2}. \quad (4.1.3)$$

Damit erhalten wir:

- (i). Kommt 3 in S mindestens viermal vor, ist die Bedingung (iii) automatisch erfüllt.¹⁰ Also gilt $S = (3, 3, 3, 3, x)$ und wegen (4.1.3) muss $x < 6$ gelten. Somit erhalten wir:

$$\begin{array}{ll} (3, 3, 3, 3, 3) & \text{Ikosaeder,} \\ (3, 3, 3, 3, 4) & \text{Cubus Simus und} \\ (3, 3, 3, 3, 5) & \text{Dodecaedron Simum.} \end{array}$$

- (ii). Kommt 3 in S höchstens dreimal vor, muss der zweitkleinste Seitengrad ≥ 4 sein. Wegen (4.1.3) kann 3 aber auch nicht weniger als dreimal vorkommen. Da dann aber ebenfalls wegen (4.1.3) für den fünften Seitengrad < 4 gelten müsste, haben wir bereits alle möglichen Eckenkonfigurationen für $q = 5$ gefunden.

¹⁰Man überzeuge sich davon durch Ausprobieren bei $S = (3, 3, 3, 3, x)$: Für die zweite und die dritte Drei wählt man das Segment b, p, b , wo die jeweilige Drei selbst in der Mitte steht. Für die erste und die vierte Drei wählt man die jeweils rechts bzw. links übrigen drei Dreier als Segment b, p, b .

Fall 4: Für $q \geq 6$ und wegen $p_i \geq 3$ nach Bedingung (i) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^q \frac{1}{p_i} \leq \frac{q}{3} \leq \frac{q}{2} - 1, \quad (4.1.4)$$

was Bedingung (ii) widerspricht. Somit sind sechs oder mehr Seitenflächen an einer Ecke gar nicht möglich und wir haben bereits alle möglichen Eckenkonfigurationen semiregulärer Polyeder gefunden. Eine übersichtliche Auflistung ist in Tabelle 4.1 zu finden.

4.2 Existenznachweise durch Konstruktionen

Wie wir bereits angemerkt haben, ist das Ableiten möglicher Eckenkonfigurationen natürlich noch keine Garantie für deren Realisierbarkeit. In diesem Unterkapitel weisen wir somit die Existenz der 14 Archimedischen Körper durch Konstruktionen nach. Wir beginnen dabei jeweils mit einem Platonischen Ausgangskörper und konstruieren die Eckpunkte des entsprechenden Archimedischen Körpers auf dessen Kanten bzw. Seitenflächen. Dabei unterscheiden wir zwei Vorgehensweisen [16]:¹¹

- (i). Entecken (auch: Abstumpfen der Ecken): Beim Entecken schneiden wir sämtliche Ecken des Ausgangskörpers in gleichem Maße ab. Die Schnittebene steht dabei normal auf die Verbindungslinie von Eckpunkt und Mittelpunkt des Ausgangskörpers. Ein Spezialfall ist das Entecken bis zur Kantenmitte.
- (ii). Entkanten (auch: Abstumpfen der Kanten): Beim Entkanten schneiden wir sämtliche Kanten des Ausgangskörpers in gleichem Maße ab. Die Schnittebene steht dabei normal auf die Verbindungslinie von Kantenmittelpunkt und Mittelpunkt des Ausgangskörpers. Das Entkanten liefert nur in Kombination mit dem Entecken semireguläre Polyeder.

Dies ist bei allen Archimedischen Körpern durch klassische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal möglich, nur nicht bei den beiden “schiefen” Archimedischen Körpern Cubus Simus und Dodecaedron Simum. Hierbei wird das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades notwendig sein. Als Grundlage für dieses Kapitel ziehen wir [11] heran und als Ergänzung dazu dienen uns [25, S. 49-63] und [12, S. 463].

¹¹Bei [11] wird zwischen diesen Vorgehensweisen keine Unterscheidung getroffen und bei [25] wird vom Zusammenwirken zweierlei bzw. dreierlei Formkräften gesprochen. Da es mir aber durchaus sinnvoll erscheint, eine unterschiedliche Qualität in der Vorgehensweise auch in der Bezeichnung widerzuspiegeln und wir bei der Strukturierung durch die angesprochenen Formkräfte nicht darüber hinweg kommen würden, uns genauer mit dem Rhombendodekaeder und dem Rhombentricontaeder auseinanderzusetzen, habe ich mich dazu entschieden, mich mit den Bezeichnungen der Vorgehensweisen und somit der Strukturierung dieses Kapitels an der angegebenen populärwissenschaftlichen Quelle zu orientieren.

4.2.1 Durch Entecken

Zuerst widmen wir uns jenen Archimedischen Körpern, die durch Entecken der Platonischen Körper entstehen. Dazu konstruieren wir jeweils die Eckpunkte des entsprechenden Archimedischen Körpers auf den Kanten eines Platonischen Ausgangskörpers, indem wir das Teilungsverhältnis der Kante explizit angeben. Wir prüfen dabei die in [25, S. 2-3] angegebenen Verhältnisse durch elementare geometrische Überlegungen nach, die dort dem Publikum überlassen werden. Für eine Beschreibung der Körper ziehen wir zusätzlich [25, S. 49-51] zu Rate.

Um den Tetraederstumpf ausgehend vom Tetraeder, den Oktaederstumpf ausgehend vom Oktaeder und den Ikosaederstumpf ausgehend vom Ikosaeder zu erhalten, betrachten wir vorab ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge in drei Teile mit den Längen a, b, a geteilt wird, siehe Abbildung 4.2. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{2a+b},$$

woraus wir direkt erkennen, dass $a = b$ gelten muss und das Teilungsverhältnis somit $1 : 1 : 1$ beträgt. Wir betrachten dieses Dreieck nun jeweils als Seitenfläche des entsprechenden Ausgangskörpers. Die Seitenlänge nach dem Entecken beträgt dann also $\frac{1}{3}$ der Ausgangslänge.

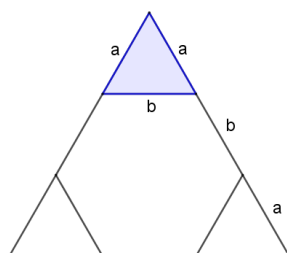


Abbildung 4.2: Zu den Konstruktionen von Tetraederstumpf, Oktaederstumpf und Ikosaederstumpf: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : 1 : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 2].

Wir konstruieren die Ecken des Tetraederstumpfs, indem wir die Kanten des Tetraeders im Verhältnis $1 : 1 : 1$ teilen. Da auf den Seitenflächen des Tetraeders somit kongruente reguläre Sechsecke entstehen und unter den Ecken kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein kommen, erhalten wir den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 6, 6)$ als konvexe Hülle der Teilungspunkte.

Weiters konstruieren wir die Ecken des Oktaederstumpfs, indem wir die Kanten des Oktaeders im Verhältnis $1 : 1 : 1$ teilen. Da auf den Seitenflächen des Oktaeders wieder kongruente reguläre Sechsecke entstehen und unter den Ecken kongruente Quadrate zum Vorschein kommen, erhalten wir den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(4, 6, 6)$ als konvexe Hülle der Teilungspunkte.

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Schließlich konstruieren wir die Ecken des Ikosaederstumpfs, indem wir die Kanten des Ikosaeders im Verhältnis $1 : 1 : 1$ teilen. Da auf den Seitenflächen des Ikosaeders wieder kongruente reguläre Sechsecke entstehen und unter den Ecken kongruente regelmäßige Fünfecke zum Vorschein kommen, erhalten wir den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(5, 6, 6)$ als konvexe Hülle der Teilungspunkte.

Um den Hexaederstumpf zu erhalten, starten wir mit dem Hexaeder. Wir konstruieren die Ecken des Hexaederstumpfs, indem wir die Kanten des Hexaeders in drei Teile mit den Längen a, b, a teilen, siehe Abbildung 4.3. Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = a\sqrt{2},$$

woraus wir direkt erkennen, dass das Teilungsverhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$ beträgt. Da auf den Seitenflächen des Hexaeders somit kongruente reguläre Achtecke entstehen und unter den Ecken kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein kommen, erhalten wir den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 8, 8)$ als konvexe Hülle der Teilungspunkte.

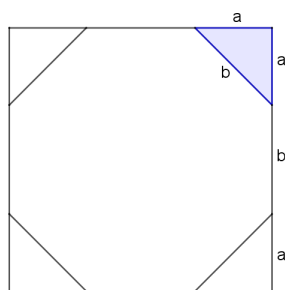


Abbildung 4.3: Zur Konstruktion des Hexaederstumpfs: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : \sqrt{2} : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 2].

Um den Kuboktaeder zu erhalten, können wir in gleicher Weise mit dem Hexaeder oder mit dem Oktaeder starten. Wir konstruieren dabei jeweils die Ecken des Kuboktaeders, indem wir die Kanten des Ausgangskörpers in der Mitte teilen. Das Teilungsverhältnis beträgt also $1 : 1$, siehe Abbildung 4.4.

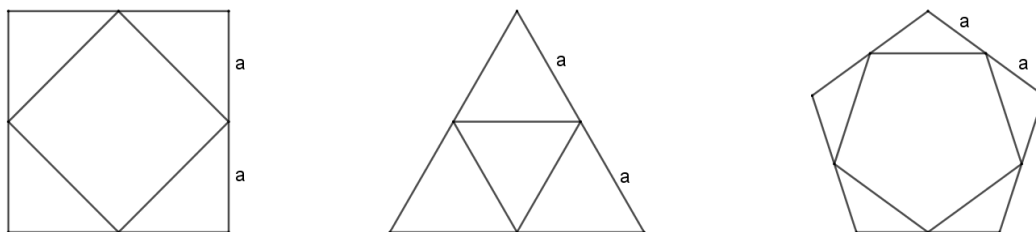


Abbildung 4.4: Zur Konstruktion des Kuboktaeders (links und in der Mitte) und des Ikosidodekaeders (rechts und in der Mitte): Das Teilungsverhältnis beträgt jeweils $1 : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 2-3].

Gehen wir vom Hexaeder aus, entstehen auf dessen Seitenflächen kongruente Quadrate und unter den Ecken kommen kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein. Gehen wir vom Oktaeder aus, entstehen auf dessen Seitenflächen kongruente gleichseitige Dreiecke und unter den Ecken kommen kongruente Quadrate zum Vorschein. In beiden Fällen erhalten wir somit den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 4, 3, 4)$, der auch als Durchschnitt von Hexaeder und Oktaeder aufgefasst werden kann.

Um den Ikosidodekaeder zu erhalten, können wir in gleicher Weise mit dem Ikosaeder oder mit dem Dodekaeder starten. Wir konstruieren dabei jeweils die Ecken des Ikosidodekaeders, indem wir die Kanten des Ausgangskörpers in der Mitte teilen. Das Teilungsverhältnis beträgt also $1 : 1$, siehe Abbildung 4.4. Gehen wir vom Ikosaeder aus, entstehen auf dessen Seitenflächen kongruente gleichseitige Dreiecke und unter den Ecken kommen kongruente reguläre Fünfecke zum Vorschein. Gehen wir vom Dodekaeder aus, entstehen auf dessen Seitenflächen kongruente reguläre Fünfecke und unter den Ecken kommen kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein. In beiden Fällen erhalten wir somit den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 5, 3, 5)$, der auch als Durchschnitt vom Ikosaeder und Dodekaeder aufgefasst werden kann.

Um schließlich auch noch den Dodekaederstumpf zu erhalten, starten wir mit dem Dodekaeder. Wir konstruieren die Ecken des Dodekaederstumpfs, indem wir die Kanten des Dodekaeders in drei Teile mit den Längen a, b, a teilen, siehe Abbildung 4.5. Vorab erinnern wir uns, dass für die Länge der Diagonale d eines regulären Fünfecks mit Seitenlänge x gilt $d = \Phi x$. Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{a}{2a + b} = \frac{b}{d} = \frac{b}{\Phi(2a + b)},$$

woraus wir durch entsprechendes Umformen erhalten, dass $b = \Phi a$ gelten muss und das Teilungsverhältnis somit $1 : \Phi : 1$ beträgt. Da auf den Seitenflächen des Dodekaeders somit kongruente reguläre Zehnecke entstehen und unter den Ecken kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein kommen, erhalten wir den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 10, 10)$ als konvexe Hülle der Teilungspunkte.

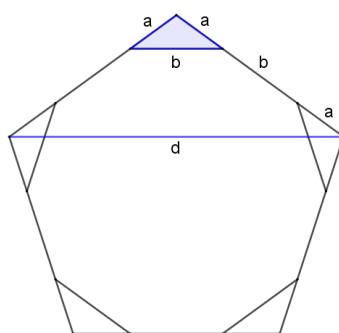


Abbildung 4.5: Zur Konstruktion des Dodekaederstumpfs: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : \Phi : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 3].

4.2.2 Durch Entecken und Entkanten

Nun widmen wir uns jenen Archimedischen Körpern, die durch eine Kombination von Entecken und Entkanten der Platonischen Körper entstehen. Dazu konstruieren wir jeweils die Eckpunkte des entsprechenden Archimedischen Körpers auf den Seitenflächen eines Platonischen Ausgangskörpers.

Um den Rhombenkuboktaeder zu erhalten, starten wir mit dem Hexaeder und prüfen wieder das in [11, S. 2] angegebene Verhältnis unter Zuhilfenahme von [25, S. 56-58] und [12, S. 463] nach.¹² Wir konstruieren die Ecken des Rhombenkuboktaeders auf den Seitenflächen des Hexaeders, indem wir die Kanten des Hexaeders in drei Teile mit den Längen a, b, a teilen und zwar wieder wie beim Hexaederstumpf im Verhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$. Die dadurch entstehenden Punkte verbinden wir aber diesmal durch Parallelen zu den Hexaederkanten, siehe Abbildung 4.6.

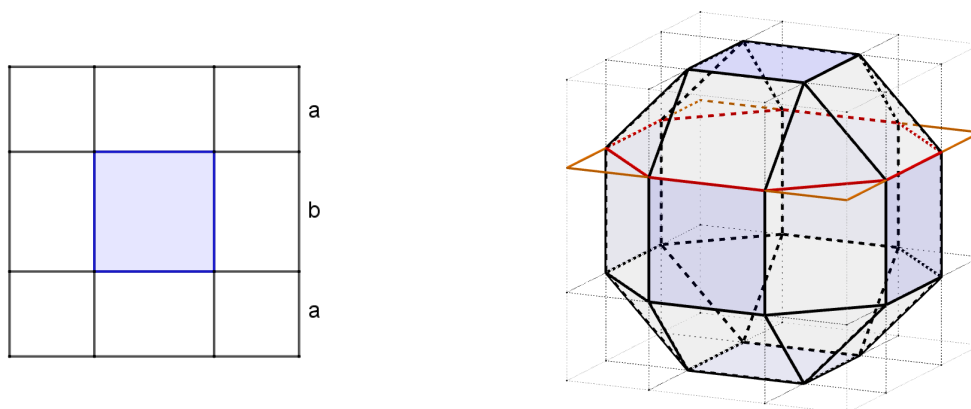


Abbildung 4.6: Zur Konstruktion des Rhombenkuboktaeders: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : \sqrt{2} : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 2] und [12, S. 463].

Auf den Seitenflächen des Hexaeders erhalten wir somit kleinere Quadrate. Verbinden wir nun deren Ecken, entstehen unter den ursprünglichen Hexaederecken gleichseitige Dreiecke und unter den Kantenmitten verbleiben dadurch Quadrate. Dies folgt, weil jede Seite der kleineren Quadrate einen Teil eines Achtecks (rot) bildet und diese Achtecke wegen dem ursprünglichen Teilungsverhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$ regulär sind (siehe Hexaederstumpf

¹²Wir wählen hier den Hexaeder als Platonischen Ausgangskörper, da sich dadurch die schönste Konstruktion des Rhombenkuboktaeders ergibt. Es wäre aber auch möglich, den Rhombenkuboktaeder ausgehend vom Oktaeder zu konstruieren [11, S. 11-12]. Nahe liegt somit die Vermutung, dass man den Rhombenkuboktaeder auch ausgehend vom Kuboktaeder durch Entecken (bis zur Kantenmitte) erhalten kann. Dies ist jedoch nicht direkt möglich, weil durch Entecken des Kuboktaeders immer Rechtecke entstehen und nie Quadrate [25, S. 57]. In [20, S. 20-22] findet sich ein Beweis dafür, dass es aber eine Abbildung gibt, die den so entstehenden Zwischenkörper in den Rhombenkuboktaeder überführt. Im Kontext dieser Arbeit ist dieser Weg jedoch unpassend, weil dabei undurchsichtig bleibt, warum durch die dazwischengeschaltete Abbildung keine Symmetrien verloren gehen.

bzw. Abbildung 4.3).¹³ Somit haben wir bereits einen Körper mit der Eckensequenz $(3, 4, 4, 4)$ erhalten. In Abbildung 4.6 ist erkennbar, dass dieser Körper neben einem “äquatorialen Band” bestehend aus acht Quadraten auch noch zwei weitere derartige “meridiale Bänder” aufweist.

Trennen wir nun die obere “Kappe” des Rhombenkuboktaeders entlang des bereits angesprochenen Achtecks (rot) ab und drehen diese um 45° , erhalten wir wieder einen semiregulären Polyeder mit der Eckensequenz $(3, 4, 4, 4)$ [12, S. 463], siehe Abbildung 4.7. Dieser ist jedoch offensichtlich nicht kongruent zum Rhombenkuboktaeder, weil durch das Verdrehen der oberen “Kappe” die beiden “meridialen Bänder” bestehend aus acht Quadraten verschwinden. Wir bezeichnen diesen Körper als Pseudorhombenkuboktaeder und stellen fest, dass es also zwei Realisierungen der aus dem lokalen Kriterium abgeleiteten zyklische Sequenz $(3, 4, 4, 4)$ gibt, die somit beide zu den Archimedischen Körpern gehören. Das globale Kriterium erfüllt der Pseudorhombenkuboktaeder jedoch nicht und ist somit kein uniformer Polyeder [10, S. 91-92]: Während dieser Körper zwar noch das “äquatoriale Band” bestehend aus acht Quadraten aufweist, sind die beiden “meridialen Bänder” jedoch wie bereits angemerkt nicht mehr vorhanden. Demnach ist dieses “äquatoriale Band” ausgezeichnet und muss unter den Symmetrien des Körpers invariant bleiben, was die Transitivität seiner Symmetriegruppe auf den Ecken ausschließt.

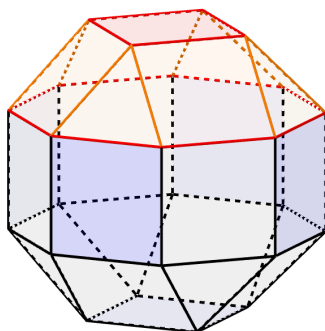


Abbildung 4.7: Zur Konstruktion des Pseudorhombenkuboktaeders. Eigene Darstellung nach [10, S. 92].

Um den Rhombenikosidodekaeder zu erhalten, starten wir mit dem Dodekaeder und folgen dabei [11, S. 12-13], wobei wir jedoch an ausgewiesener Stelle eine schöne Abkürzung nehmen, und ziehen zusätzlich [25, S. 59] heran.¹⁴ Wir konstruieren die Ecken des Rhombenikosidodekaeders auf den Seitenflächen des Dodekaeders, indem wir die Kanten des Dodekaeders im Verhältnis $1 : 1 : 1$ teilen. Die dadurch entstehenden Punkte verbinden wir wieder durch Parallelen zu den Dodekaederkanten, siehe Abbildung 4.8.

¹³Die Idee zur Betrachtung dieses Achtecks entstammt der analogen Vorgehensweise von [11, S. 11], dort jedoch ausgehend vom Oktaeder.

¹⁴Wie beim Rhombenkuboktaeder könnte man auch den Rhombenikosidodekaeder ausgehend vom Dualkörper des Dodekaeder, dem Ikosaeder, konstruieren [11, S. 11-12]. Anzumerken ist, dass man auch den Rhombenikosidodekaeder nicht ausgehend vom Ikosidodekaeder durch Entecken (bis zur Kantenmitte) erhalten kann, weil durch Entecken des Ikosidodekaeders ebenso immer Rechtecke

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

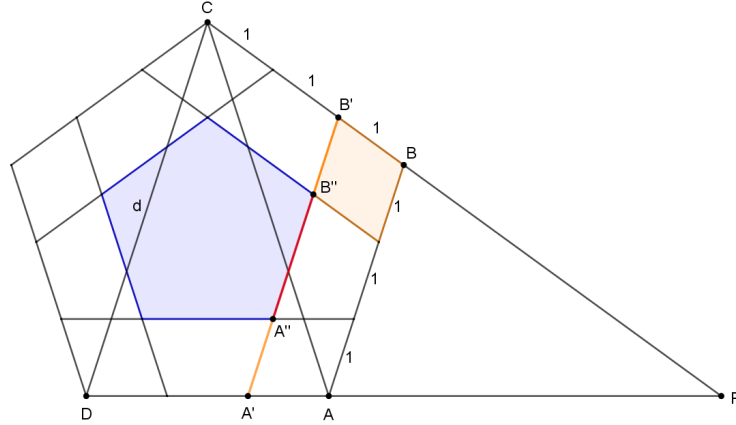


Abbildung 4.8: Zur Konstruktion des Rhombenikosidodekaeders: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : 1 : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 13].

Auf den Seitenflächen des Dodekaeders entstehen somit kleinere reguläre Fünfecke. Verbinden wir nun deren Ecken, entstehen unter den ursprünglichen Dodekaederecken Dreiecke und unter den Kantenmitten verbleiben dadurch Vierecke. Jede Seite $\overline{A''B''}$ der kleineren Fünfecke bildet nun einen Teil eines Zehnecks (rot), siehe Abbildung 4.9.¹⁵ Dieses Zehneck wird von einem Fünfeck (orange) mit der Seite $\overline{A'B'}$ umschlossen. Beim Dodekaederstumpf haben wir festgestellt, dass das Teilungsverhältnis auf den Seiten eines regulären Fünfecks für das Entstehen regulärer Zehnecke $1 : \phi : 1$ beträgt (siehe Abbildung 4.5).

Um nachzuweisen, dass dieses Zehneck regulär ist, genügt es also zu zeigen, dass die Strecke $\overline{A'B'}$, durch die Punkte A'' und B'' im Verhältnis $1 : \phi : 1$ geteilt wird. Dazu argumentieren wir wie [11, S. 13] mithilfe eines durch Verlängerung der Seiten des Fünfecks gefundenen Punkts P und dadurch entstehender ähnlicher Dreiecke, siehe Abbildung 4.8. Offensichtlich gilt $|AB| = 3|BB'|$ und wegen den ähnlichen Dreiecken ABP und ACD ($\angle ADC$ und $\angle PAB$ sind als Stufenwinkel gleich groß und weil die Dreiecke gleichschenkelig sind, sind bereits alle Winkel gleich groß) erhalten wir $|PB| = d = \Phi|AB|$.

entstehen und nie Quadrate [25, S. 59]. In [20, S. 26] findet sich jedoch eine Anleitung für eine Abbildung, die den so entstehenden Zwischenkörper in den Rhombenikosidodekaeder überführt. Dieser Weg ist jedoch wieder wegen seiner Undurchsichtigkeit in Bezug auf die Erhaltung der Symmetrien im Kontext dieser Arbeit unpassend.

¹⁵Mit der Betrachtung dieses Zehnecks weichen wir nun bedeutend von [11, S. 12-13] ab und gehen hier einen schönen Weg in Analogie zu unserer Argumentation beim Rhombenkuboktaeder. Im Unterschied dazu betrachten diese nämlich das von B'' und zwei weiteren Ecken des Rhombenikosidodekaeders gebildete Dreieck und weisen dessen Gleichseitigkeit nach. Ein Vorteil unserer Vorgehensweise ist, dass wir nur ein Teilungsverhältnis einer unmittelbar durch die Konstruktion auf der Seitenfläche des Dodekaeders entstehenden Strecke überprüfen müssen. Weiters tritt die Frage nach der Existenz eines „Pseudorhombenikosidodekaeders“ in natürlicher Weise auf. Der Nachteil, dass dieses Zehneck auf den ersten Blick nicht so leicht erkennbar ist, sei jedoch fairerweise auch ausgewiesen.

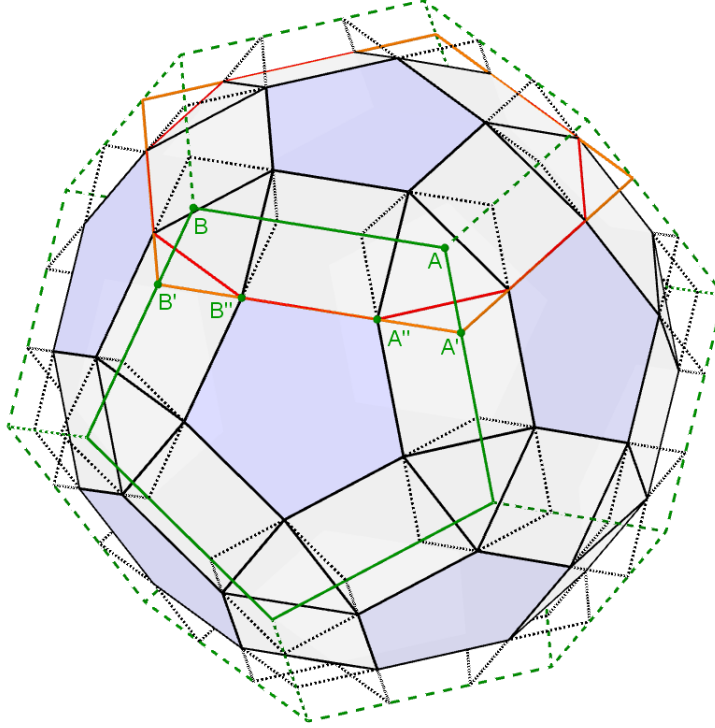


Abbildung 4.9: Zur Konstruktion des Rhombenikosidodekaeders: Das rote Zehneck mit der Seite $\overline{A''B''}$ wird vom orangenen Fünfeck mit der Seite $\overline{A'B'}$ umschlossen. Das grüne Fünfeck ist eine ursprüngliche Seitenfläche des Dodekaeders, auf der die Ecken des Rhombenikosidodekaeders wie in Abbildung 4.8 konstruiert wurden. Eigene Darstellung.

Nach dem Strahlensatz gilt

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|PB| + |BB'|}{|PB|}$$

und entsprechendes Umformen liefert

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \left(1 + \frac{|BB'|}{|PB|}\right) \cdot |AB| = \left(1 + \frac{|BB'|}{\Phi|AB|}\right) \cdot |AB| \\ &= \left(1 + \frac{1}{3\Phi}\right) \cdot 3|BB'| = (2 + \Phi)|BB'|. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $|A''B''| = |A'B'| - 2|B'B''|$ und wegen $|BB'| = |B'B''|$ als Seiten einer Raute erhalten wir daraus

$$|A''B''| = (2 + \Phi)|BB'| - 2|BB'| = \Phi|BB'|,$$

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

woraus wir direkt erkennen, dass das Teilungsverhältnis der Strecke $\overline{A'B'}$ tatsächlich $1 : \Phi : 1$ beträgt. Folglich ist das angesprochene Zehneck (rot) regulär und alle Kanten des Rhombenkuboktaeders sind gleich lang. Somit haben wir bereits den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 4, 5, 4)$ erhalten.

An dieser Stelle drängt sich die Frage auf, warum es nicht in Analogie zum Rhombenkuboktaeder auch einen “Pseudorhombenikosidodekaeder” gibt, der durch Abtrennen der oberen “Kappe” entlang des in der Konstruktion verwendeten Zehnecks und anschließender Verdrehung um 36° entsteht. Der Grund dafür ist, dass sich dadurch die Eckensequenz bei den zu diesem Zehneck gehörenden Ecken zu $(3, 4, 4, 5)$ ändern würde und es sich somit schon nicht mehr um einen semiregulären Polyeder nach dem lokalen Kriterium handeln kann.

Um den Kuboktaederstumpf zu erhalten, starten wir mit dem Hexaeder und prüfen wieder das in [11, S. 2] angegebene Verhältnis unter Zuhilfenahme von [25, S. 58-59] nach.¹⁶ Wir konstruieren die Ecken des Kuboktaederstumpfs auf den Seitenflächen des Hexaeders, indem wir die Kanten des Hexaeders in fünf Teile mit den Längen a, b, c, b, a teilen, siehe Abbildung 4.10.

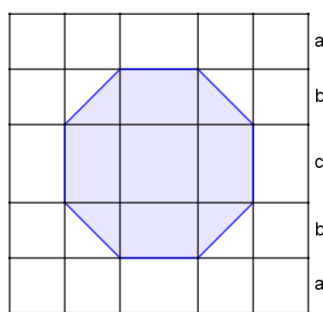


Abbildung 4.10: Zur Konstruktion des Kuboktaederstumpfs: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : 1 : \sqrt{2} : 1 : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 2].

Damit auf den Seitenflächen des Hexaeders kongruente reguläre Achtecke entstehen, erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = 2b^2 \Leftrightarrow c = b\sqrt{2}.$$

¹⁶Entgegen der aus der Bezeichnung entspringenden Annahme ist es nicht möglich, den Kuboktaederstumpf durch Entecken des Kuboktaeders zu erhalten, weil - wie wir bereits beim Rhombenkuboktaeder bemerkt haben - durch Entecken des Kuboktaeders immer Rechtecke entstehen und nie Quadrate [25, S. 59]. Kepler begründet die Bezeichnung als Kuboktaederstumpf damit, dass diese Körper große Ähnlichkeit aufweisen und durch Verzerren ineinander übergeführt werden können [14, Buch II, Proposition XXVIII]. Es wäre jedoch auch möglich, den Kuboktaederstumpf ausgehend vom Oktaeder zu konstruieren, siehe hierzu [11, S. 12].

Damit unter den Kanten des Hexaeders kongruente Quadrate zum Vorschein kommen, erhalten wir wieder mit dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = 2a^2 \Leftrightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Daraus erkennen wir, dass das Teilungsverhältnis $1 : 1 : \sqrt{2} : 1 : 1$ beträgt. Unter den Ecken kommen somit kongruente reguläre Sechsecke zum Vorschein und wir erhalten den gesuchten Körper mit der Eckensequenz (4, 6, 8).

Um den Ikosidodekaederstumpf zu erhalten, starten wir mit dem Dodekaeder und folgen dabei eng [11, S. 13-14] und ziehen zusätzlich [25, S. 59] heran.¹⁷ Wir konstruieren die Ecken des Ikosidodekaederstumpfs auf den Seitenflächen des Dodekaeders, indem wir die Kanten des Dodekaeders in fünf Teile mit den Längen a, b, c, b, a teilen, siehe Abbildung 4.11.

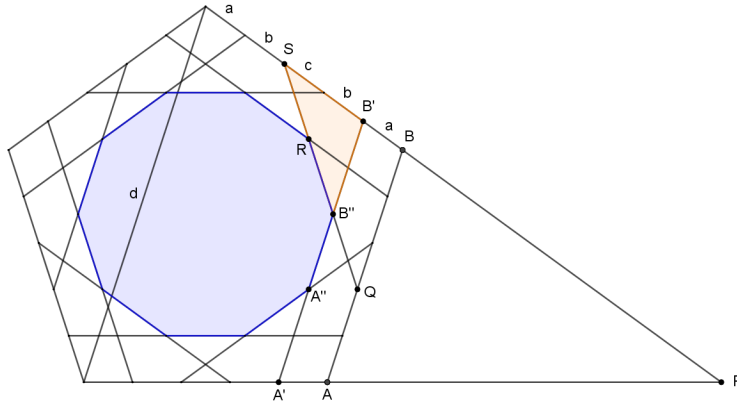


Abbildung 4.11: Zur Konstruktion des Ikosidodekaederstumpfs: Das Teilungsverhältnis beträgt $1 : 1 : 1 : 1 : 1$. Eigene Darstellung nach [11, S. 13].

Dazu argumentieren wir in Analogie zu unserer Konstruktion des Rhombenikosidodekaeders mithilfe eines durch Verlängerung der Seiten des Fünfecks gefundenen Punkts P und dadurch entstehender ähnlicher Dreiecke, siehe Abbildung 4.11. Offensichtlich gelten $|AB| = 2a + 2b + c$ und $|BS| = a + b + c$ und wegen den ähnlichen Dreiecken erhalten wir wieder $|PB| = d = \Phi|AB|$. Nach dem Strahlensatz gilt

$$|A'B'| : |AB| = (|PB| + |BB'|) : |PB|$$

¹⁷In Analogie zum Kuboktaederstumpf ist es auch nicht möglich, den Ikosidodekaederstumpf durch Entecken des Ikosidodekaeders zu erhalten, weil - wie wir bereits beim Rhombenikosidodekaeder bemerkt haben - durch Entecken des Ikosidodekaeders immer Rechtecke entstehen und nie Quadrate [25, S. 59]. Kepler begründet die Bezeichnung als Ikosidodekaederstumpf wieder damit, dass diese Körper große Ähnlichkeit aufweisen und durch Verzerren ineinander übergeführt werden können [14, Buch II, Proposition XXVIII]. Es wäre jedoch auch möglich, den Ikosidodekaederstumpf ausgehend vom Ikosaeder zu konstruieren, siehe hierzu [11, S. 12].

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

und entsprechendes Umformen liefert

$$\begin{aligned} |A'B'| &= \left(\frac{\Phi|AB| + a}{\Phi|AB|} \right) \cdot |AB| = \frac{a}{\Phi} + |AB| \\ &= a\Phi - a + 2a + 2b + c = a\Phi + a + 2b + c. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $|A''B''| = |A'B'| - 2|B'B''|$ und wegen $|B'B''| = b + c$ als Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks erhalten wir daraus

$$|A''B''| = a\Phi + a + 2b + c - 2(b + c) = a\Phi + a - c.$$

Weiters gilt nach dem Strahlensatz

$$\begin{aligned} |QS| : |BS| &= d : |AB| \quad \Leftrightarrow \quad |QS| = \Phi(a + b + c) \quad \text{und} \\ |B''Q| : |QS| &= a : |BS| \quad \Leftrightarrow \quad |B''Q| = a\Phi. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $|B''R| = |QS| - 2|B''Q|$. Setzen wir hier die beiden vorhergehenden Gleichungen ein, erhalten wir daraus

$$|B''R| = \Phi(a + b + c) - 2a\Phi = \Phi(b + c - a).$$

Die Punkte B'' und R bilden mit vier weiteren Eckpunkten des Ikosidodekaederstumpfs ein Sechseck. Dieses Sechseck ist nur genau dann regulär, wenn die Strecke SQ durch die Punkte B'' und R im Verhältnis $1 : 1 : 1$ geteilt wird (siehe Ikosaederstumpf bzw. Abbildung 4.2). Dies ist genau dann der Fall, wenn $|B''R| = |B''Q|$ gilt, was gleichbedeutend ist mit $b + c = 2a$. Zusätzlich ist das Zehneck mit den Punkten A'' , B'' und R nur genau dann regulär, wenn $|A''B''| = |B''R|$ gilt, was gleichbedeutend ist mit $a = c$. Somit muss $a = c = b$ gelten und das Teilungsverhältnis der Dodekaederkante beträgt also $1 : 1 : 1 : 1 : 1$. Da auf den Seitenflächen des Dodekaeders somit kongruente reguläre Zehnecke entstehen und unter den Ecken kongruente reguläre Sechsecke zum Vorschein kommen, verbleiben dadurch unter den Kantenmitten kongruente Quadrate und wir erhalten den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(4, 6, 10)$.

4.2.3 Cubus Simus und Dodecaedron Simum

Wie bereits in den einleitenden Worten dieses Kapitels angesprochen, ist es nicht möglich, die beiden "schiefen" Archimedischen Körpern Cubus Simus und Dodecaedron Simum durch klassische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu erhalten [11].¹⁸ Wir werden diese beiden Körper nun durch das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades bekommen und folgen in unserem Vorgehen dabei eng [11].

Um den Cubus Simus zu erhalten, starten wir mit dem Hexaeder und platzieren kleinere Quadrate auf dessen Seitenflächen, die wir (auf allen Seitenflächen gleich) leicht entweder nach links oder nach rechts rotieren. Je nachdem für welche Richtung wir

¹⁸In [11] finden sich Anleitungen, wie man diese beiden Archimedischen Körper durch Papierfalten konstruieren kann.

uns hier entscheiden, bekommen wir zwei “verschiedene” Versionen des Cubus Simus, die wir unter unserem Kongruenzbegriff jedoch jeweils als “gleich” betrachten werden (Spiegelbilder). Einen Polyeder, den wir nicht durch Drehung (oder Verschiebung) mit seinem Spiegelbild zur Deckung bringen können und der somit nicht spiegelsymmetrisch ist, bezeichnen wir als chiral. Wie in Abbildung 4.12 erkennbar, haben wir uns für die leichte Rotation der kleineren Quadrate nach links entschieden. Wir verbinden nun die Ecken der kleineren rotierten Quadrate so, dass jeder Eckpunkt zu einem Quadrat und vier Dreiecken gehört.

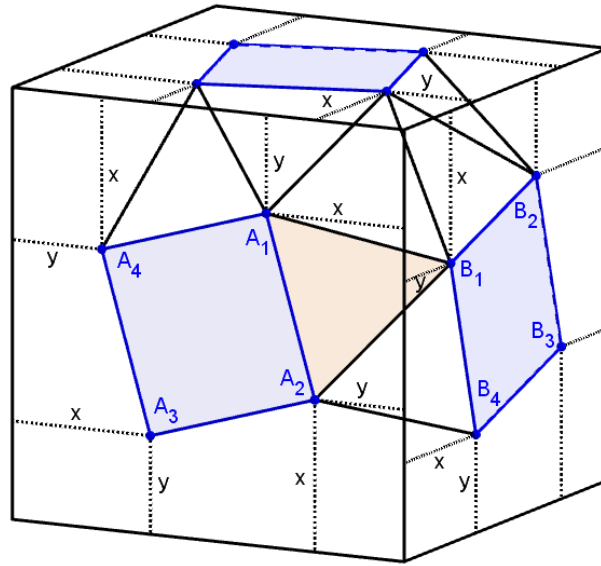


Abbildung 4.12: Zur Konstruktion des Cubus Simus. Eigene Darstellung nach [11, S. 4].

Wir normieren die Kantenlänge des Hexaeders o.B.d.A. auf 1 Einheit und bezeichnen mit x, y die Abstände des Eckpunkts A_1 von den Kanten des Hexaeders, wobei o.B.d.A. $x \geq y$ gelten soll. Diese Abstände x, y müssen dann für alle Ecken des Cubus Simus gleich sein. Wir fokussieren uns auf das orange markierte Dreieck $A_1A_2B_1$, denn wenn dieses gleichseitig ist, müssen bereits alle Kanten des Cubus Simus gleich lang sein. Mit dem Satz des Pythagoras stellen wir folgende drei Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} |A_1A_2|^2 &= (x - y)^2 + (1 - x - y)^2, \\ |A_1B_1|^2 &= (x - y)^2 + x^2 + y^2 \quad \text{und} \\ |A_2B_1|^2 &= (1 - 2x)^2 + y^2 + y^2. \end{aligned}$$

Da das Dreieck $A_1A_2B_1$ gleichseitig sein muss, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$|A_1A_2|^2 = |A_1B_1|^2 \quad \text{und} \quad |A_1A_2|^2 = |A_2B_1|^2.$$

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $(x - y)^2 + x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy$, was durch entsprechendes Umformen

$$1 - 2x - 2y + 2xy = 0 \quad (4.2.1)$$

ergibt. Aus der zweiten Gleichung erhalten $x^2 - 2xy + y^2 + 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy = 1 - 4x + 4x^2 + 2y^2$, was durch entsprechendes Umformen

$$y = x - x^2 \quad (4.2.2)$$

ergibt. Setzen wir nun (4.2.2) in (4.2.1) ein, erhalten wir die gesuchte kubische Gleichung

$$2x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Bevor wir diese Gleichung mithilfe des Computer Algebra Systems (CAS) von GeoGebra lösen, überlegen wir uns, wie viele reelle Lösungen sie hat. Dazu bilden wir die Ableitung und formen durch quadratische Ergänzung entsprechend um auf

$$6 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{4}{3} > 0.$$

Die Ableitung ist also strikt positiv und unsere kubische Gleichung muss somit genau eine reelle Lösung haben. Diese finden wir nun (näherungsweise)¹⁹ mit GeoGebra CAS:

$$x \approx 0,352201129$$

$$y \approx 0,228155494.$$

Somit haben wir die Position der kleineren rotierten Quadrate auf den Seitenflächen des Hexaeders festgelegt und die Gleichseitigkeit der vier zu jeder Ecke des Quadrats gehörenden Dreiecke sichergestellt. Somit haben wir bereits den gesuchten Körper mit der Eckensequenz (3, 3, 3, 3, 4) erhalten.

Um den Dodecaedron Simum zu erhalten, starten wir mit dem Dodekaeder und platzieren kleinere Fünfecke auf dessen Seitenflächen, die wir wieder (auf allen Seitenflächen gleich) leicht entweder nach links oder nach rechts rotieren. Je nachdem für welche Richtung wir uns hier entscheiden, bekommen wir wieder zwei "verschiedene" Versionen des Dodecaedron Simum, die wir unter unserem Kongruenzbegriff jedoch jeweils als "gleich" betrachten werden (Spiegelbilder). Wie in Abbildung 4.13 erkennbar, haben wir uns für die leichte Rotation der kleineren Fünfecke nach links entschieden. Wir verbinden nun die Ecken der kleineren rotierten Fünfecke so, dass jede Ecke zu einem Fünfeck und vier Dreiecken gehört.

¹⁹Für den exakten Wert ermittelt mithilfe der Cardanischen Formel verweisen wir auf [11, S. 5].

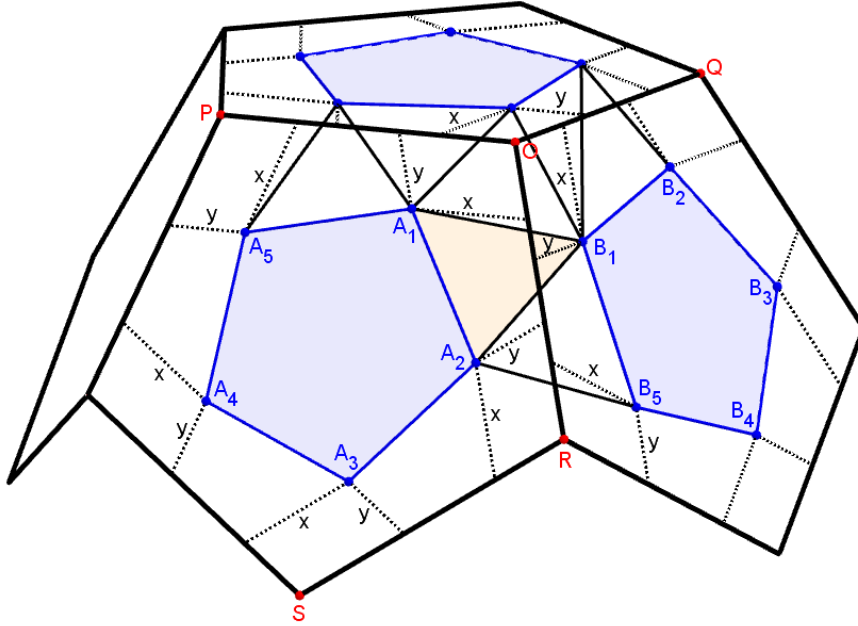


Abbildung 4.13: Zur Konstruktion des Dodecaedron Simum. Eigene Darstellung nach [11, S. 8].

Wir normieren die Kantenlänge des Dodekaeders o.B.d.A. auf 1 Einheit. Da die Vektoren $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ und $\vec{OR}$ dadurch alle die Länge 1 haben und weiters alle Winkel bei O die gleiche Größe $\angle POQ = \angle POR = \angle QOR = 108^\circ$ haben, erhalten wir mithilfe der vektoriellen Winkelformel für die Skalarprodukte

$$\langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle = \langle \vec{OP}, \vec{OR} \rangle = \langle \vec{OQ}, \vec{OR} \rangle = \cos 108^\circ = -\frac{1}{2\Phi}, \quad (4.2.3)$$

wobei wir im letzten Schritt den Kosinussatz im Dreieck bestehend aus zwei Seiten des Fünfecks mit der Länge 1 und dessen Diagonale mit der Länge Φ angewendet und $\Phi^2 = 2 - 2\cos 108^\circ$ dann nach dem Einsetzen von $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ entsprechend umgeformt haben.

Wir verbinden den Eckpunkt A_1 des Dodecaedron Simum durch Strecken mit den Längen x, y derart mit den Kanten OP und OR des Dodekaeders, sodass sich ein Parallelogramm mit dem Punkt O ergibt, wobei o.B.d.A. $x \geq y$ gelten soll. Diese Abstände x, y müssen dann für alle Ecken des Dodecaedron Simum gleich sein. Da die Diagonale $\vec{PS}$ der Seitenfläche des Dodekaeders die Länge Φ hat und parallel zu $\vec{OR}$ ist erhalten wir

$$\vec{OS} = \vec{OP} + \Phi \cdot \vec{OR}$$

und weiters

$$\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} = \vec{OP} + (\Phi - 1) \cdot \vec{OR},$$

wobei wir bei zweiterem bereits ersteres eingesetzt haben.

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Wir fokussieren uns wieder auf das orange markierte Dreieck $A_1A_2B_1$, denn wenn dieses gleichseitig ist, müssen bereits alle Kanten des Dodecaedron Simum gleich lang sein. Mit den bereits aufgestellten Gleichungen erhalten wir folgende Koordinaten ausgehend von O für diese Ecken des Dodecaedron Simum:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} &= x \cdot \overrightarrow{OP} + y \cdot \overrightarrow{OR}, \\ \overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{OR} - x \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{RS} = y \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - x - y + y\Phi) \cdot \overrightarrow{OR} \quad \text{und} \\ \overrightarrow{OB_1} &= x \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{OQ}.\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Seitenlängen des betrachteten Dreiecks $A_1A_2B_1$ unter Verwendung dieser Koordinaten und erhalten nach dem Einsetzen des Werts für die Skalarprodukte aus (4.2.3)

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{A_1A_2}\|^2 &= \|(y - x) \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - x - 2y + y\Phi) \cdot \overrightarrow{OR}\|^2 \\ &= (3 - \Phi)x^2 + (3 - \Phi)y^2 + (4 - 3\Phi)xy - (3 - \Phi)x - (3 - \Phi)y + 1, \\ \|\overrightarrow{A_1B_1}\|^2 &= \|-x \cdot \overrightarrow{OP} + (x - y) \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{OQ}\|^2 \\ &= (1 + \Phi)(x^2 + y^2 - xy) \quad \text{und} \\ \|\overrightarrow{B_1A_2}\|^2 &= \|y \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - 2x - y + y\Phi) \cdot \overrightarrow{OR} - y \cdot \overrightarrow{OQ}\|^2 \\ &= 4x^2 + 3y^2 + 4(1 - \Phi)xy - 4x + 2(\Phi - 1)y + 1,\end{aligned}$$

wobei wir jeweils zuerst die Norm als Skalarprodukt umgeschrieben haben, um anschließend die Eigenschaften des Skalarprodukts anzuwenden, und schließlich nach dem Einsetzen von $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ geschickt umgeformt haben.

Da das Dreieck $A_1A_2B_1$ gleichseitig sein muss, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$|A_1A_2|^2 = |A_2B_1|^2 \quad \text{und} \quad |A_1B_1|^2 = |A_2B_1|^2,$$

woraus wir durch entsprechendes Umformen

$$y^2 = -\Phi x^2 + \Phi x - \Phi y + xy \quad \text{und} \quad (4.2.4)$$

$$(\Phi - 2)y^2 = (3 - \Phi)x^2 - 4x + 1 + (5 - 3\Phi)xy + 2(\Phi - 1)y \quad (4.2.5)$$

bekommen. Setzen wir nun (4.2.4) in (4.2.5) ein, erhalten wir

$$y = \frac{(4 - 2\Phi)x^2 + (\Phi - 5)x + 1}{(4\Phi - 7)x + 1 - \Phi}. \quad (4.2.6)$$

Setzen wir (4.2.6) wieder zurück in (4.2.5) ein und formen entsprechend um, bekommen wir folgende faktorisierte Form einer Gleichung vierten Grades:

$$((25\Phi - 41)x^3 + (30 - 17\Phi)x^2 - 5x + \Phi) \cdot x = 0.$$

Da sich für $x = 0$ jedoch $y = -\Phi$ ergibt, wodurch der Punkt A_1 nicht auf der Seitenfläche des Dodekaeders liegen würde, muss $x \neq 0$ gelten und wir erhalten die gesuchte kubische Gleichung

$$(25\Phi - 41)x^3 + (30 - 17\Phi)x^2 - 5x + \Phi = 0.$$

Bevor wir diese Gleichung mithilfe von GeoGebra CAS lösen, überlegen wir uns, wie viele reelle Lösungen sie hat. Dazu bilden wir die Ableitung und formen durch quadratische Ergänzung entsprechend um auf

$$\underbrace{(75\Phi - 123)}_{<0} \left(x - \frac{17\Phi - 30}{75\Phi - 123} \right)^2 - \underbrace{5 - \frac{1}{9} \left(\frac{30 - 17\Phi}{41\Phi - 25} \right)^2}_{<0} < 0.$$

Die Ableitung ist also strikt negativ und unsere kubische Gleichung muss somit genau eine reelle Lösung haben. Diese finden wir nun (näherungsweise)²⁰ mit GeoGebra CAS:

$$\begin{aligned} x &\approx 0,3944605378 \\ y &\approx 0,2604339436. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Position der kleineren rotierten Fünfecke auf den Seitenflächen des Dodekaeders festgelegt und die Gleichseitigkeit der vier zu jeder Ecke des Fünfecks gehörenden Dreiecke sichergestellt. Somit haben wir bereits den gesuchten Körper mit der Eckensequenz $(3, 3, 3, 3, 5)$ erhalten.

Anschließend an die Konstruktionen von Cubus Simus und Dodecaedron Simum drängt sich die Frage nach einem “Tetraedron Simum” auf. Starten wir mit dem Tetraeder und platzieren kleinere Dreiecke auf dessen Seitenflächen, die wir wieder (auf allen Seitenflächen gleich) leicht entweder nach links oder nach rechts rotieren, werden wir diesmal durch entsprechendes Verbinden der Ecken jeweils denselben bereits bekannten Körper erhalten: den Ikosaeder, siehe Abbildung 4.14. Da bei der “Simus-Konstruktion” jede Ecke des entstehenden Körpers zu einer kleineren rotierten Fläche auf dem Ausgangskörper und vier weiteren Dreiecken gehört, muss dabei ausgehend vom Tetraeder ein Körper mit der Eckensequenz $(3, 3, 3, 3, 3)$ entstehen. Wenn wir nun also bei der “Simus-Konstruktion” ausgehend vom Tetraeder eine Lösung finden, muss es sich dabei bereits um den Ikosaeder handeln.

Wir führen nun also die “Simus-Konstruktion” ausgehend vom Tetraeder durch. Dazu normieren wir die Kantenlänge des Tetraeders o.B.d.A. auf 1 Einheit. Da die Vektoren $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$ und $\vec{OR}$ dadurch alle die Länge 1 haben und weiters alle Winkel bei O die gleiche Größe $\angle POQ = \angle POR = \angle QOR = 60^\circ$ haben, erhalten wir mithilfe der vektoriellen Winkelformel für die Skalarprodukte

$$\langle \vec{OP}, \vec{OQ} \rangle = \langle \vec{OP}, \vec{OR} \rangle = \langle \vec{OQ}, \vec{OR} \rangle = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}. \quad (4.2.7)$$

²⁰Für den exakten Wert ermittelt mithilfe der Cardanischen Formel verweisen wir wieder auf [11, S. 9].

4 Klassifikation der Archimedischen Körper

Wir verbinden den Eckpunkt A_1 des “Tetraedron Simum” durch Strecken mit den Längen x, y derart mit den Kanten OP und OR des Tetraeders, sodass sich ein Parallelogramm mit dem Punkt O ergibt, wobei o.B.d.A. $x \geq y$ gelten soll. Diese Abstände x, y müssen dann für alle Ecken des “Tetraedron Simum” gleich sein. Weiters gilt

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}. \quad (4.2.8)$$

Wir fokussieren uns wieder auf das orange markierte Dreieck $A_1A_2B_1$, denn wenn dieses gleichseitig ist, müssen bereits alle Kanten des “Tetraedron Simum” gleich lang sein. Unter Verwendung von Gleichung (4.2.8) erhalten wir folgende Koordinaten ausgehend von O für diese Ecken des “Tetraedron Simum”:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} &= x \cdot \overrightarrow{OP} + y \cdot \overrightarrow{OR}, \\ \overrightarrow{OA_2} &= \overrightarrow{OR} - x \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{RP} = y \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - x - y) \cdot \overrightarrow{OR} \quad \text{und} \\ \overrightarrow{OB_1} &= x \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{OQ}. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die Seitenlängen des betrachteten Dreiecks $A_1A_2B_1$ unter Verwendung dieser Koordinaten und erhalten nach dem Einsetzen des Werts für die Skalarprodukte aus (4.2.7)

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{A_1A_2}\|^2 &= \|(y - x) \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - x - 2y) \cdot \overrightarrow{OR}\|^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3xy - 3x - 3y + 1, \\ \|\overrightarrow{A_1B_1}\|^2 &= \|-x \cdot \overrightarrow{OP} + (x - y) \cdot \overrightarrow{OR} + y \cdot \overrightarrow{OQ}\|^2 \\ &= x^2 + y^2 - xy \quad \text{und} \\ \|\overrightarrow{B_1A_2}\|^2 &= \|y \cdot \overrightarrow{OP} + (1 - 2x - y) \cdot \overrightarrow{OR} - y \cdot \overrightarrow{OQ}\|^2 \\ &= 4x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 2y + 1, \end{aligned}$$

wobei wir jeweils zuerst die Norm als Skalarprodukt umgeschrieben haben, um anschließend die Eigenschaften des Skalarprodukts anzuwenden.

Da das Dreieck $A_1A_2B_1$ gleichseitig sein muss, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$|A_1A_2|^2 = |A_2B_1|^2 \quad \text{und} \quad |A_1B_1|^2 = |A_2B_1|^2,$$

woraus wir durch entsprechendes Umformen

$$y^2 = x^2 - x + y + xy \quad \text{und} \quad (4.2.9)$$

$$3x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5xy + 1 = 0 \quad (4.2.10)$$

bekommen. Setzen wir nun (4.2.9) in (4.2.10) ein, erhalten wir

$$y = \frac{4x^2 - 5x + 1}{1 - 6x} = \frac{(x - 1) \cdot (4x - 1)}{1 - 6x}. \quad (4.2.11)$$

Setzen wir (4.2.11) wieder zurück in (4.2.10) ein und formen entsprechend um, bekommen wir folgende Gleichung:

$$\frac{4x^2 + 2x - 1}{(6x - 1)^2} \cdot (x - 1) \cdot x = 0.$$

Da sich für $x = 0$ jedoch $y = 1$ und für $x = 1$ umgekehrt $y = 0$ ergibt, wodurch der Punkt A_1 nicht in der Seitenfläche des Tetraeders liegen würde, muss $x \neq 0$ und $x \neq 1$ gelten. Da wir auch den Nenner weglassen dürfen erhalten wir somit die Gleichung

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Mithilfe von GeoGebra CAS finden wir zwei Lösungen dieser Gleichung, wovon eine wegen ihrer Negativität ausgeschlossen werden kann. Somit gilt

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\Phi - 1}{2} \approx 0,3090169944$$

$$y = \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{2 - \Phi}{2} \approx 0,1909830056.$$

Wir haben also bei der “Simus-Konstruktion” ausgehend vom Tetraeder eine eindeutige Lösung gefunden, bei der es sich wegen der Eckensequenz $(3, 3, 3, 3, 3)$ nur um den Ikosaeder handeln kann. Obwohl wir bei der Konstruktion mit dem Festlegen einer Orientierung auf den Seitenflächen des Tetraeders gestartet sind, ist hierbei spannenderweise wider Erwarten kein chiraler Polyeder entstanden. Wir stellen also fest, dass durch eine Konstruktion, die die Orientierung verwendet, nicht schon automatisch ein chiraler Polyeder entstehen muss.

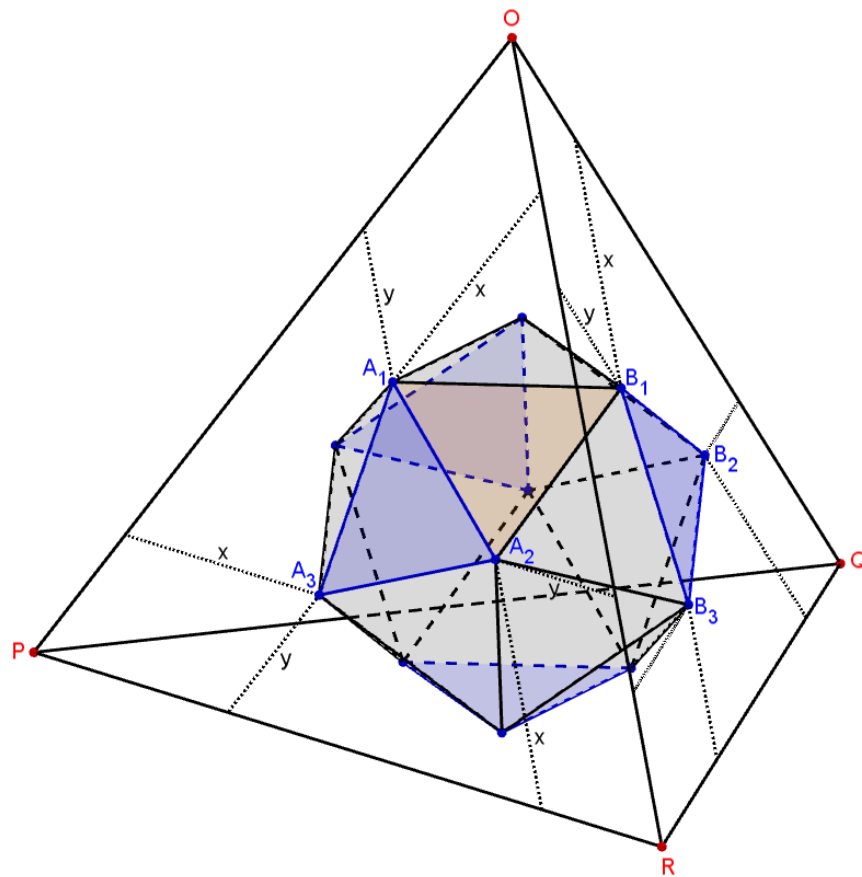


Abbildung 4.14: Zur Frage nach einem “Tetraedron Simum”. Eigene Darstellung.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Wir werden nun die Struktur der Symmetriegruppen der in Kapitel 3.2 durch Konstruktion gefundenen Platonischen Körper mithilfe der uns zur Verfügung stehenden Mittel der Gruppentheorie untersuchen. Am Ende von Kapitel 2.4 haben wir festgestellt, dass jede endliche Gruppe als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe S_n aufgefasst werden kann (Satz von Cayley 2.4.9). Während es im Allgemeinen zu mühsam wäre, isomorphe Untergruppen in den üblicherweise riesigen symmetrischen Gruppen aufzusuchen, werden bei unserer Untersuchung ausschließlich Isomorphismen zu vollen symmetrischen bzw. alternierenden Gruppen auftreten. Dadurch erhalten wir einerseits eine konkrete Beschreibung der Symmetriegruppen der Platonischen Körper durch die häufig als Vergleichsobjekte herangezogenen symmetrischen Gruppen und andererseits auch eine anschauliche geometrische Interpretation der auftretenden symmetrischen und alternierenden Gruppen.

Wie bereits am Ende von Kapitel 2.5 angekündigt, fixieren wir den Schwerpunkt der im Folgenden untersuchten Polyeder jeweils im Ursprung, damit alle Symmetrien als Multiplikationen mit einer orthogonalen Matrix A darstellbar sind. Wir unterscheiden dabei zwischen der (vollen) Symmetriegruppe eines Polyeders P_0

$$\text{Sym}(P_0) = \{A \in O_n \mid A(P_0) = P_0\} \leq O_n$$

und dessen Drehgruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien

$$\text{Sym}_+(P_0) = \{A \in \text{Sym}(P_0) \mid \det(A) = +1\} \leq SO_n.$$

Zwei zueinander duale Körper haben offensichtlich sowohl dieselbe Drehgruppe als auch dieselbe Symmetriegruppe.¹ Deshalb werden wir vorab die Symmetrien des zu sich selbst dualen Tetraeders untersuchen und anschließend anhand der Symmetrien des Würfels auf jene des Oktaeders schließen und schließlich anhand der Symmetrien des Dodekaeders auf jene des Ikosaeders. Wir folgen dabei im Wesentlichen [8, S. 85-98], schmücken diese sehr knappen Darstellungen jedoch umfassend aus und teilen die dort sehr kompakt formulierten Theoreme jeweils auf zwei Teile und ggf. weitere vorangestellte Lemmata auf. Ergänzend dazu ziehen wir auch [12, S. 469-475], [22, S. 133-138] und [1, S. 32-41] zu Rate.

¹Wie wir in Kapitel 3.2 gesehen haben, entsteht ein Dualkörper als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Ausgangskörpers, d. h. beim Bilden des Dualkörpers werden die Rollen von Flächen und Ecken vertauscht. Da eine Symmetrie des Ausgangskörpers seine Flächenmittelpunkte permutiert, handelt es sich dabei auch um eine Symmetrie der konvexen Hülle der Flächenmittelpunkte des Ausgangskörpers, d. h. des Dualkörpers. Umgekehrt können wir dieses Argument ebenso auf den Dualkörper anwenden, da der Dualkörper des Dualkörpers (bis auf einen Streckungsfaktor) wieder der Ausgangskörper ist.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Zur Veranschaulichung der (Dreh-)Symmetrien empfehlen wir wie [22, S. 138] transparente Platonische Körper mit Löchern für Stäbe an den Eckpunkten, Kantenmittelpunkten und Flächenmittelpunkten. Für die in Abbildung 5.1 dargestellten Modelle wurden transparente Kunststoffplatten aus Polystyrol mit einer Dicke von 2 mm verarbeitet. Um das Erkennen der Zusammenhänge zwischen diesen Körpern zu unterstützen, wurde die Kantenlänge des Tetraeders gleich lang wie die Diagonale der Seitenfläche des Würfels gewählt und die Kantenlänge des Würfels gleich lang wie die Diagonale der Seitenfläche des Dodekaeders. Zudem sind Markierungen mit abwischbaren Markern auf den Modellen möglich.

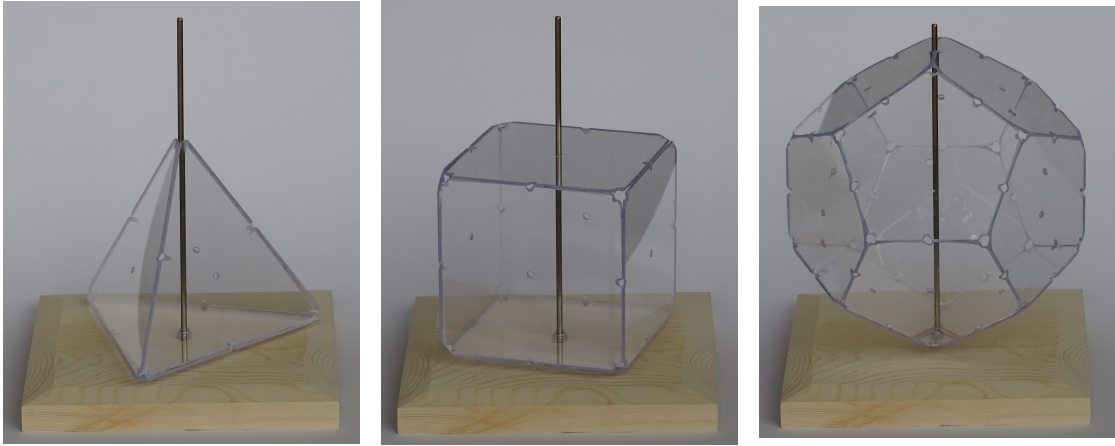


Abbildung 5.1: Modelle zur Veranschaulichung der (Dreh-)Symmetrien der Platonischen Körper. Eigene Darstellung nach [22, S. 138].

5.1 Symmetrien des Tetraeders

Wir betrachten im Folgenden einen Tetraeder mit in beliebiger Reihenfolge durchnummerierten Ecken $v_i, i = 1, \dots, 4$, siehe Abbildung 5.2. Ein Tetraeder hat insgesamt sieben Drehachsen, die sich in zwei Typen unterteilen lassen:

- Die vier Drehachsen, die jeweils durch einen Eckpunkt und den gegenüberliegenden Flächenmittelpunkt verlaufen, bezeichnen wir als Drehachsen vom Typ a. Wir bezeichnen die Drehungen an diesen Achsen um die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ mit a_{ijk} , wobei die Indizes ijk die Nummern der Ecken jener Fläche in zyklischer Reihenfolge² beginnend mit der kleinsten Zahl³ angeben, durch deren Flächenmittelpunkt die jeweilige Drehachse verläuft. Da der Tetraeder bei den Drehungen an diesen Achsen um den Winkel $3 \cdot \frac{2\pi}{3}$ wieder in seine Ausgangsposition übergeht, gilt $\text{ord}(a_{ijk}) = 3$.

²Mit der Angabe der Nummern der Ecken in zyklischer Reihenfolge meinen wir, dass die Indizes ijk auch festlegen, in welche Richtung gedreht wird: Die Drehung a_{ijk} bildet die Ecke v_i auf die Ecke v_j ab, während v_j auf v_k und v_k auf v_i abgebildet wird.

³Damit stellen wir sicher, dass jede Drehung einen eindeutigen Repräsentanten in unserer Notation hat.

- Die drei Drehachsen, die jeweils durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten verlaufen, bezeichnen wir als Drehachsen vom Typ b. Wir bezeichnen die Drehungen an diesen Achsen um den Winkel π mit $b_{ij|kl}$, wobei die Indizes ij und kl jeweils die Nummern der an den Kanten anliegenden Ecken in aufsteigender Reihenfolge angeben, durch deren Mittelpunkte die jeweilige Drehachse verläuft. Wegen $b_{ij|kl}^2 = e$ gilt $\text{ord}(b_{ij|kl}) = 2$.

Alle sieben Drehachsen verlaufen durch den Schwerpunkt des Tetraeders. Weiters hat ein Tetraeder sechs Spiegelebenen, die jeweils durch eine Kante und den gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt verlaufen, siehe Abbildung 5.2. Auch diese Spiegelebenen verlaufen durch den Schwerpunkt des Tetraeders. Wir bezeichnen die Spiegelungen an diesen Ebenen mit s_{ij} , wobei die Indizes in aufsteigender Reihenfolge die Nummern der Ecken an jener Kante angeben, durch deren Mittelpunkt die Spiegelebene verläuft. Im Gegensatz zu allen anderen Platonischen Körpern ist die Punktspiegelung am Ursprung keine Symmetrie des Tetraeders, weil dieser keine parallel gegenüberliegenden Seitenflächen hat [8, S. 91].

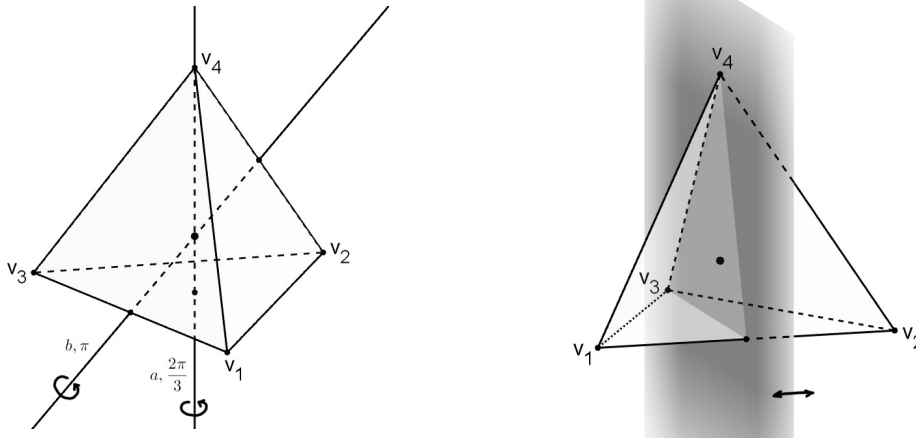


Abbildung 5.2: Symmetrien des Tetraeders: An Achsen vom Typ a (hier: a_{123}) drehen wir um Vielfache von $\frac{2\pi}{3}$ und an Achsen vom Typ b (hier: $b_{13|24}$) um Vielfache von π (links). Die eingezeichnete Spiegelebene wird mit s_{12} bezeichnet (rechts). Eigene Darstellung nach [1, S. 34] und [8, S. 90].

Die beiden Gruppen

$$\text{Sym}(T) := \{A \in O_3 \mid A(T) = T\} \quad \text{und} \\ \text{Sym}_+(T) := \text{Sym}(T) \cap SO_3$$

bezeichnen wir als Tetraedergruppen [8, S. 89]. $\text{Sym}_+(T)$ bezeichnen wir auch als die Drehgruppe des Tetraeders und bei $\text{Sym}(T)$ sprechen wir von seiner (vollen) Symmetriegruppe.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Unsere Konstruktionen der Platonischen Körper in Kapitel 3.2 haben wir ausgehend von ihrer Definition anhand des lokalen Kriteriums gemacht. Wir haben dort bereits angekündigt, dass die so gefundenen Körper auch eine stärkere Definition anhand des globalen Kriteriums der Transitivität ihrer Symmetriegruppen auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen erfüllen werden. Für den Tetraeder folgt dies unmittelbar aus der obenstehenden geometrischen Beschreibung seiner Symmetrien. Betrachten wir beispielsweise die Drehungen vom Typ a, können wir dadurch eine ausgewählte Ecke auf jede andere Ecke transportieren. Analog können wir durch diese Drehungen eine ausgewählte Kante auf jede andere Kante abbilden und eine ausgewählte Fläche auf jede andere Fläche. Wir machen also die Beobachtung, dass sogar schon unter $\text{Sym}_+(T)$ sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen jeweils nur eine Bahn bilden und bemerken somit:

Bemerkung. [10, S. 91] Die Tetraedergruppen wirken transitiv auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen des Tetraeders, d. h. sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen bilden jeweils nur eine Bahn unter seinen Symmetrien.

Für eine geeignete Beschreibung der Tetraedergruppen wollen wir vorab herausfinden, wie viele Elemente diese umfassen [8, S. 89-90]. Die Anzahl der Elemente in der Drehgruppe des Tetraeders, d. h. die Ordnung von $\text{Sym}_+(T)$, erhalten wir durch eine einfache geometrische Überlegung: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Tetraeder auf ein aufgezeichnetes Dreieck zu stellen? Da ein Tetraeder aus vier Dreiecken besteht und wir jedes auf drei Arten auf das aufgezeichnete Dreieck stellen können, erhalten wir

$$\text{ord}(\text{Sym}_+(T)) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Für einen formalen Nachweis steht uns das Bahn-Lemma 2.3.3 zur Verfügung. Da die Drehgruppe $\text{Sym}_+(T) =: G_+$ transitiv auf der Menge $V(T)$ der Ecken des Tetraeders operiert, gilt für eine Ecke $v \in V(T)$

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(v)) = 4 \cdot 3 = 12,$$

wobei die Bahn $G_+(v)$ die vier Ecken des Tetraeders umfasst und die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ einer Ecke v aus jenen drei Drehungen vom Typ a besteht, die v fixieren.

Für die (volle) Symmetriegruppe des Tetraeders $\text{Sym}(T) := G$ erhalten wir durch eine analoge Überlegung

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(v)) = 4 \cdot 6 = 24,$$

wobei die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ neben den drei Drehungen vom Typ a, die v fixieren, auch noch die drei Spiegelungen an den Ebenen, die jeweils durch eine an v angrenzende Kante verlaufen und v somit fixieren, enthält.

Nun suchen wir nach einer Permutationsdarstellung der Tetraedergruppen [8, S. 90]. Da sich die Symmetriegruppe eines Polyeders nach Lemma 2.6.5 als Menge aller Isometrien, die seine Eckpunkte auf seine Eckpunkte abbilden, beschreiben lässt und der Tetraeder vier Ecken hat, erhalten wir für die Tetraedergruppen jedenfalls Isomorphismen zu

5.1 Symmetrien des Tetraeders

Untergruppen von S_4 . Da beim Tetraeder alle Paare von Ecken durch eine gemeinsame Kante verbunden und somit gleichberechtigt sind, ist es vielversprechend, direkt bei der Betrachtung seiner Ecken zu bleiben [8, S. 91]. Es ist also das Naheliegendste, jede Symmetrie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Tetraeders erstmal als eine Bijektion auf der vierelementigen Menge seiner Eckpunkte V aufzufassen. Wir betrachten somit folgende Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \text{Sym}(T) &\rightarrow \text{Bij}(V) \\ g &\mapsto g|_V,\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

wobei $g|_V : V \rightarrow V$ die Einschränkung von g auf V bezeichnet. Diese Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist ein Homomorphismus, weil die Einschränkung einer Komposition die Komposition der Einschränkungen ist, d. h. $(g \circ f)|_V = g|_V \circ f|_V$.

Da wir $\text{Sym}(T)$ aber nicht mit $\text{Bij}(V)$ sondern mit S_4 identifizieren wollen, bilden wir nun folgende Konjugation von $g|_V$ mit der Bijektion $v : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow V, i \mapsto v_i$, die eine (beliebige) Nummerierung der Eckpunkte festlegt,

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}(T) &\rightarrow S_4 \\ g &\mapsto v^{-1} \circ g|_V \circ v.\end{aligned}$$

Diese Abbildung macht genau das, was wir möchten, denn sie ordnet zunächst jeder Zahl $i = 1, \dots, 4$ durch die Abbildung v einen Eckpunkt v_i zu, bildet dann v_i durch die Abbildung $g|_V$ auf einen anderen Eckpunkt $g(v_i)$ ab und die Abbildung v^{-1} sagt uns schließlich, welcher Zahl dieser neue Eckpunkt entspricht, d. h. $(\varphi(g))(i) = v^{-1}(g(v(i))) = v^{-1}(g(v_i))$. Wenden wir die Bijektion v auf diese Gleichung an, erhalten wir folgende Formel für den Bildpunkt des Eckpunkts v_i unter der Symmetrie $g \in \text{Sym}(T)$:

$$g(v_i) = v_{(\varphi(g))(i)}.$$

Da die symmetrische Gruppe S_4 auch wie $\text{Sym}(T)$ genau 24 Elemente hat, ist folgendes Resultat bereits naheliegend:

Theorem 5.1.1. (Permutationsdarstellung der Tetraedergruppen - Teil 1). [8, S. 90] [12, S. 472] *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}(T) &\rightarrow S_4 \\ g &\mapsto v^{-1} \circ g|_V \circ v.\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Gruppe (aller) Symmetrien des Tetraeders ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 . Zudem gilt für $g \in \text{Sym}(T)$

$$\text{sign}(\varphi(g)) = \det(g).\tag{5.1.2}$$

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Beweis. Zunächst überzeugen wir uns davon, dass es sich bei der Abbildung φ um einen Homomorphismus handelt. Unter Verwendung der Tatsache, dass $\tilde{\varphi}$ ein Homomorphismus ist (siehe (5.1.1)), erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\varphi(g \circ f) &= v^{-1} \circ (g \circ f)|_V \circ v = v^{-1} \circ g|_V \circ f|_V \circ v \\ &= v^{-1} \circ g|_V \circ v \circ v^{-1} \circ f|_V \circ v = \varphi(g) \circ \varphi(f),\end{aligned}$$

wobei wir bei der Gleichheit am Zeilenwechsel durch einen Kunstgriff $v \circ v^{-1} = e$ dazwischenschalten. Somit ist nachgewiesen, dass auch φ ein Homomorphismus ist.

Nun bleibt noch die Bijektivität von φ nachzuweisen. Wegen $\text{ord}(\text{Sym}(T)) = 24 = \text{ord}(S_4)$ würde es dafür eigentlich genügen, nur entweder die Injektivität oder die Surjektivität von φ zu überprüfen. Wir zeigen jedoch trotzdem beides, um ein besseres Verständnis von φ zu erlangen. Da nur $E_3 \in O_3$ alle Ecken des Tetraeders invariant lässt, gilt $\text{Ker } \varphi = \{E_3\}$. Somit ist φ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv. Nach Lemma 2.4.4 wird S_4 von den Transpositionen erzeugt. Um nachzuweisen, dass φ surjektiv ist, genügt es somit, jede Transposition (ij) durch ein Element aus $\text{Sym}(T)$ darzustellen. Wir betrachten dazu die sechs Spiegelungen s_{ij} an den Ebenen, die durch eine Kante und den gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt verlaufen. Wie in Abbildung 5.2 erkennbar, vertauscht jede der sechs Spiegelungen s_{ij} genau die beiden Ecken an jener Kante, durch deren Mittelpunkt die Spiegelebene verläuft, während sie alle anderen Eckpunkte unverändert lässt, also gilt $\varphi(s_{ij}) = (ij)$. Somit liegen alle $\binom{4}{2} = 6$ Transpositionen von S_4 im Bild von φ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. Demnach ist φ ein bijektiver Homomorphismus, d. h. ein Isomorphismus.

Zudem überzeugen wir uns von der Gültigkeit der Gleichung (5.1.2) für $g \in \text{Sym}(T)$. Da das Signum nach Lemma 2.4.5 (i) ein Homomorphismus ist und $\text{Sym}(T)$ von den Spiegelungen s_{ij} erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese Gleichung für $g = s_{ij}$ gilt.⁴ Wegen $\varphi(s_{ij}) = (ij)$ gilt nach Lemma 2.4.5 (ii) $\text{sign}(\varphi(s_{ij})) = -1$. Da auch die Determinante einer Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ negativ ist, d. h. $\det(s_{ij}) = -1$ gilt, ist die Gleichung (5.1.2) für alle $g \in \text{Sym}(T)$ erfüllt. $\square$

Um nun auch noch eine Permutationsdarstellung der Drehgruppe des Tetraeders zu finden, schränken wir die Definitionsmenge unserer Abbildung auf $\text{Sym}_+(T)$ ein. Da die alternierende Gruppe A_4 auch wie $\text{Sym}_+(T)$ genau 12 Elemente hat, ist folgendes Resultat bereits naheliegend:

Theorem 5.1.2. (Permutationsdarstellung der Tetraedergruppen - Teil 2). [8, S. 90] [12, S. 472] [22, S. 134] [1, S. 33-34] *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\varphi_+ : \text{Sym}_+(T) &\rightarrow A_4 \\ g &\mapsto v^{-1} \circ g|_V \circ v.\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Drehgruppe des Tetraeders ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 .

⁴Wenn zwei Homomorphismen $\varphi : G \rightarrow H$ und $\psi : G \rightarrow H$ auf einem Erzeugendensystem X , übereinstimmen, sind sie bereits gleich. Beweis: Für $g \in G$ mit $g = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ gilt $\varphi(g) = \varphi(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdots \psi(x_n) = \psi(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n) = \psi(g)$.

5.1 Symmetrien des Tetraeders

Beweis. Die Abbildung φ_+ ist als Einschränkung von φ immer noch ein Homomorphismus. Weiters ist φ_+ als Einschränkung einer injektiven Abbildung injektiv.⁵ Um nachzuweisen, dass φ_+ surjektiv ist, müssen wir uns einerseits davon überzeugen, dass tatsächlich nur Elemente von A_4 im Bild von φ_+ liegen und andererseits auch davon, dass wirklich ganz A_4 von der Abbildung getroffen wird. Ersteres folgt sofort mithilfe der Gleichung (5.1.2), denn für $g \in \text{Sym}_+(T)$ gilt nach Definition $\det(g) = +1$ und wegen $\text{sign}(\varphi_+(g)) = \det(g) = +1$ gilt $\varphi_+(g) \in A_4$.

Um uns von Zweiterem zu überzeugen, genügt es, jeden Dreierzyklus durch ein Element aus $\text{Sym}_+(T)$ darzustellen, da A_4 nach Lemma 2.4.8 von den Dreierzyklen erzeugt wird. Wir betrachten dazu die Drehungen an den Achsen vom Typ a. Wie in Abbildung 5.2 erkennbar, transportieren die Drehungen a_{ijk} um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ jede Ecke an jener Fläche, durch deren Flächenmittelpunkt die Drehachse verläuft, auf die jeweils nächste dieser Ecken in Drehrichtung bzw. a_{ijk}^2 um den Winkel $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ auf die jeweils übernächste, während der Eckpunkt, durch den die Drehachse verläuft, unverändert bleibt. Es gilt also $\varphi(a_{ijk}) = (ijk)$. Also liegen alle $2 \cdot \binom{4}{3} = 8$ Dreierzyklen von A_4 im Bild von φ_+ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. Somit ist auch φ_+ ein bijektiver Homomorphismus, d. h. ein Isomorphismus. $\square$

Um nun auch noch eine vollständige explizite Beschreibung der 24 Symmetrien des Tetraeders zu erhalten, überlegen wir uns, wie wir die verschiedenen Symmetrien des Tetraeders als Hintereinanderausführung von Spiegelungen darstellen können. Dabei bezeichnen wir mit c_{ijkl} die durch Drehspiegelungen entstehenden Vertauschungen aller vier Ecken. Dabei bezeichnen die Indizes $ijkl$ die Ecken des Tetraeders in zyklischer Reihenfolge beginnend mit der kleinsten Zahl. Man überzeuge sich mithilfe der Definitionen am Beginn dieses Unterkapitels davon, dass gilt

$$\begin{aligned} a_{ijk} &= s_{ij} \circ s_{jk}, \\ b_{ij|kl} &= s_{ij} \circ s_{kl}, \\ c_{ijkl} &= s_{ij} \circ s_{jk} \circ s_{kl}. \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass φ die Spiegelungen auf die Transpositionen abbildet, d. h. $\varphi(s_{ij}) = (ij)$, erhalten wir daraus unter Verwendung der Tatsache, dass φ ein Homomorphismus ist,

$$\begin{aligned} \varphi(a_{ijk}) &= \varphi(s_{ij}) \circ \varphi(s_{jk}) = (ij) \circ (jk) = (ijk), \\ \varphi(b_{ij|kl}) &= \varphi(s_{ij}) \circ \varphi(s_{kl}) = (ij) \circ (kl), \\ \varphi(c_{ijkl}) &= \varphi(s_{ij}) \circ \varphi(s_{jk}) \circ \varphi(s_{kl}) = (ij) \circ (jk) \circ (kl) = (ijkl). \end{aligned}$$

Während wir uns bereits oben überlegt haben, dass wir durch die Drehungen vom Typ a die Dreierzyklen von S_4 bekommen, machen wir nun die Beobachtung, dass wir die Produkte der Transpositionen von S_4 durch die Drehungen vom Typ b erhalten und die Viererzyklen

⁵Wegen $\text{ord}(\text{Sym}_+(T)) = 12 = \text{ord}(A_4)$ würde dies eigentlich schon genügen, um auf die Bijektivität von φ_+ zu schließen. Zum Zweck des Erlangens eines besseren Verständnisses von φ zeigen wir jedoch trotzdem auch noch ihre Surjektivität.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

von S_4 durch Drehspiegelungen. Unsere Erkenntnisse sind zusammengefasst in Tabelle 5.1 dargestellt. Zusätzlich ergänzen wir dabei auch gleich mithilfe der Rechenregeln für Zyklen aus Lemma 2.4.2 (iii) jeweils die Ordnung der Elemente von S_4 und mithilfe der Rechenregeln für das Signum aus Lemma 2.4.5 jeweils deren Signum.

Elemente von $\text{Sym}(T)$	Elemente von S_4	Anzahl	Ordnung	Signum
E_3	Id	1	1	+
Spiegelungen s_{ij}	(12), (13), (14), (23), (24), (34)	6	2	−
Drehungen a_{ijk}	(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)	8	3	+
Drehungen $b_{ij kl}$	(12) $\circ$ (34), (13) $\circ$ (24), (14) $\circ$ (23)	3	2	+
Drehspiegelungen c_{ijkl}	(1234), (1324), (1423), (1243), (1342), (1432)	6	4	−
Summe		24		

Tabelle 5.1: Explizite Beschreibung der 24 Symmetrien des Tetraeders [8, S. 81].

5.2 Symmetrien von Würfel und Oktaeder

Da Würfel und Oktaeder dual zueinander sind, haben sie sowohl dieselbe Drehgruppe als auch dieselbe Symmetriegruppe. Wir betrachten im Folgenden den bereits aus Kapitel 3.2 bekannten Würfel W mit den 8 Ecken

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (+1, +1, +1), & p'_1 &= -p_1, & p_2 &= (-1, +1, +1), & p'_2 &= -p_2, \\
 p_3 &= (-1, -1, +1), & p'_3 &= -p_3, & p_4 &= (+1, -1, +1), & p'_4 &= -p_4,
 \end{aligned}$$

siehe Abbildung 5.3. Der Schwerpunkt dieses Würfels liegt wie gewünscht im Ursprung. Ein Würfel hat insgesamt 13 Drehachsen, die jeweils durch seinen Schwerpunkt verlaufen und sich in drei Typen unterteilen lassen:

- Die drei Drehachsen, die jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen verlaufen, bezeichnen wir als Drehachsen vom Typ a. Diese Drehachsen entsprechen genau den drei Koordinatenachsen. Die Drehungen α an diesen Achsen um den Winkel $\frac{\pi}{2}$, sowie α^2 um π und α^3 um $\frac{3\pi}{2}$, sind Symmetrien des Würfels. Wegen $\alpha^4 = e$ gilt $\text{ord}(\alpha) = 4$.
- Die sechs Drehachsen, die jeweils durch die Mittelpunkte zweier diagonal gegenüberliegender Kanten verlaufen, bezeichnen wir als Drehachsen vom Typ b. Die Drehungen β an diesen Achsen um den Winkel π sind Symmetrien des Würfels. Wegen $\beta^2 = e$ gilt $\text{ord}(\beta) = 2$.

5.2 Symmetrien von Würfel und Oktaeder

- Die vier Drehachsen, die jeweils durch zwei diagonal gegenüberliegende Ecken verlaufen, bezeichnen wir als Drehachsen vom Typ c. Diese Achsen verlaufen durch die vier Raumdiagonalen des Würfels. Die Drehungen γ an diesen Achsen um $\frac{2\pi}{3}$ sowie γ^2 um $\frac{4\pi}{3}$ sind Symmetrien des Würfels. Wegen $\gamma^3 = e$ gilt $\text{ord}(\gamma) = 3$.

Weiters hat ein Würfel neun Spiegelebenen, die ebenfalls jeweils durch seinen Schwerpunkt verlaufen und sich in zwei Typen unterteilen lassen, siehe Abbildung 5.3:

- Die drei Spiegelebenen, die jeweils durch vier Kantenmittelpunkte verlaufen und die Drehachsen vom Typ a beinhalten, bezeichnen wir als Spiegelebenen vom Typ s. Diese Spiegelebenen entsprechen genau den drei Koordinatenebenen.
- Die sechs Spiegelebenen, die jeweils durch zwei diagonal gegenüberliegende Kanten verlaufen und je zwei Drehachsen vom Typ c beinhalten, bezeichnen wir als Spiegelebenen vom Typ t.

Auch die Punktspiegelung $-E_3$ am Ursprung ist eine Symmetrie des Würfels [8, S. 91].

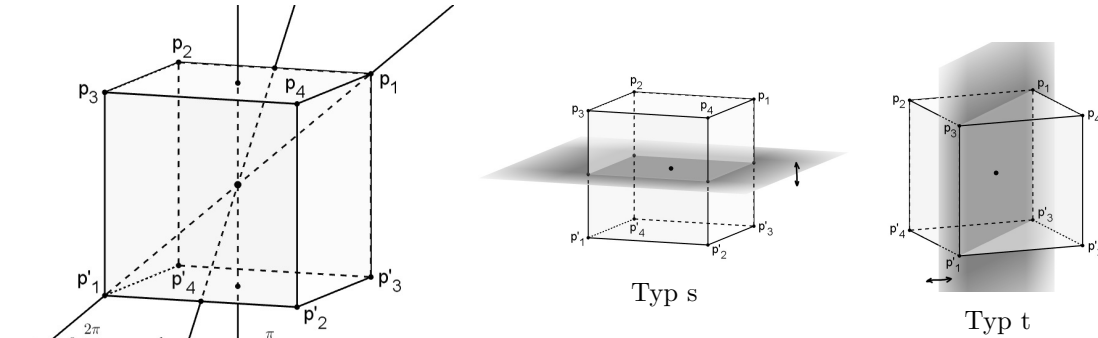


Abbildung 5.3: Symmetrien des Würfels. Eigene Darstellung nach [1, S. 39].

Die beiden Gruppen

$$\text{Sym}(W) := \{A \in O_3 \mid A(W) = W\} \quad \text{und} \\ \text{Sym}_+(W) := \text{Sym}(W) \cap SO_3$$

bezeichnen wir als Würfelgruppen [8, S. 91]. $\text{Sym}_+(W)$ bezeichnen wir auch als die Drehgruppe des Würfels und bei $\text{Sym}(W)$ sprechen wir von seiner (vollen) Symmetriegruppe.

Wir überlegen uns nun auch für den Würfel, dass dieser ebenfalls die stärkere Definition anhand des globalen Kriteriums erfüllt. Wie beim Tetraeder folgt dies für den Würfel auch wieder unmittelbar aus der obenstehenden geometrischen Beschreibung seiner Symmetrien. Betrachten wir beispielsweise die Drehungen vom Typ a, die den Drehungen an den Koordinatenachsen entsprechen, können wir damit eine ausgewählte Ecke auf jede andere Ecke transportieren. Analog können wir durch diese Drehungen eine ausgewählte Kante auf jede andere Kante abbilden und eine ausgewählte Fläche auf jede andere Fläche. Wir machen also die Beobachtung, dass sogar schon unter $\text{Sym}_+(W)$ sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen jeweils nur eine Bahn bilden und bemerken somit:

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Bemerkung. [10, S. 91] Die Würfelgruppen wirken transitiv auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen des Würfels, d. h. sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen bilden jeweils nur eine Bahn unter seinen Symmetrien. Dasselbe gilt auch für seinen Dualkörper, den Oktaeder.⁶

Für eine geeignete Beschreibung der Würfelgruppen wollen wir vorab herausfinden, wie viele Elemente diese umfassen [8, S. 91]. Die Anzahl der Elemente in der Drehgruppe des Würfels, d. h. die Ordnung von $\text{Sym}_+(W)$, erhalten wir wieder durch eine einfache geometrische Überlegung: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Würfel auf ein aufgezeichnetes Quadrat zu stellen? Da ein Würfel aus sechs Quadraten besteht und wir jedes auf vier Arten auf das aufgezeichnete Quadrat stellen können, erhalten wir

$$\text{ord}(\text{Sym}_+(W)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Für einen formalen Nachweis steht uns wieder das Bahn-Lemma 2.3.3 zur Verfügung. Da die Drehgruppe $\text{Sym}_+(W) =: G_+$ transitiv auf der Menge $V(W)$ der Ecken des Würfels operiert, gilt für eine Ecke $v \in V(W)$

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(v)) = 8 \cdot 3 = 24,$$

wobei die Bahn $G_+(p)$ die acht Ecken des Würfels umfasst und die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ einer Ecke v aus jenen drei Drehungen vom Typ c besteht, die v fixieren.

Für die (volle) Symmetriegruppe des Würfels $\text{Sym}(W) := G$ erhalten wir durch eine analoge Überlegung

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(v)) = 8 \cdot 6 = 48,$$

wobei die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ neben den drei Drehungen vom Typ c, die v fixieren, auch noch die drei Ebenenspiegelungen vom Typ t, die jeweils durch eine an v angrenzende Kante verlaufen und v somit fixieren, enthält.

Praktischerweise lassen sich alle Symmetrien des Würfels ganz einfach explizit durch Matrizen beschreiben. Der Grund dafür ist, dass unter einer Symmetrie des Würfels jeder seiner Flächenmittelpunkte auf einen anderen seiner Flächenmittelpunkte abgebildet werden muss. Bei unserem Würfel sind die sechs Flächenmittelpunkte nämlich genau durch die drei Standardeinheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ und ihre drei Gegenvektoren gegeben. Die Spalten der Matrix $A \in O_3$ werden also von $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ gebildet, wobei deren Reihenfolge durch die Bijektion $\pi \in S_3$ permutiert und unabhängig voneinander mit den Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\}$ versehen werden. Konkret lassen sich die 48 Symmetrien⁷ des Würfels in folgender Darstellung schreiben

$$A = (\epsilon_1 e_{\pi(1)}, \epsilon_2 e_{\pi(2)}, \epsilon_3 e_{\pi(3)}). \quad (5.2.1)$$

⁶Aus der Transitivität der Symmetriegruppe auf den Flächen des Würfels folgt sofort ihre Transitivität auf den Ecken des Oktaeders.

⁷Es gibt $2^3 = 8$ Möglichkeiten, die Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ zu wählen, und die Anzahl der Permutationen von S_3 erhalten wir durch $\text{ord}(S_3) = 3! = 6$. Insgesamt ergeben sich also $8 \cdot 6 = 48$ verschiedene Matrizen A .

5.2 Symmetrien von Würfel und Oktaeder

Dabei hängt es vom Vorzeichen der Determinante von A ab, ob es sich um eine orientierungserhaltende Symmetrie des Würfels handelt oder nicht. Es gilt

$$\det(A) = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot \text{sign}(\pi) = \pm 1,$$

wobei $A \in \text{Sym}_+(W)$, wenn $\det(A) = +1$.

Nun suchen wir nach einer Permutationsdarstellung der Würfelgruppen [8, S. 91]. Da sich die Symmetriegruppe eines Polyeders nach Lemma 2.6.5 als Menge aller Isometrien, die seine Eckpunkte auf seine Eckpunkte abbilden, beschreiben lässt und der Würfel acht Ecken hat, erhalten wir für die Würfelgruppen jedenfalls Isomorphismen zu Untergruppen von S_8 . Im Gegensatz zum Tetraeder sind beim Würfel aber nicht mehr alle Paare von Ecken durch eine gemeinsame Kante verbunden und somit nicht mehr gleichberechtigt [8, S. 91], wodurch wir vermuten, noch eine geschicktere Beschreibung der Würfelgruppen finden zu können. Der Trick liegt nun darin, die vier Raumdiagonalen des Würfels (enthalten in den Drehachsen vom Typ c) zu betrachten [8, S. 91]. Die vier Raumdiagonalen des Würfels fassen nämlich jeweils zwei diagonal gegenüberliegende Ecken zusammen und werden dadurch bei jeder seiner Symmetrien permutiert. Die Würfelgruppen wirken also auf seinen vier Raumdiagonalen und wir versuchen demnach, die Würfelgruppen mit S_4 zu identifizieren. Es ist wieder das Naheliegendste, jede Symmetrie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Würfels erstmal als eine Bijektion auf der vierelementigen Menge seiner Raumdiagonalen $\mathcal{D}$ aufzufassen. Wir betrachten somit folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_* : \text{Sym}(W) &\rightarrow \text{Bij}(\mathcal{D}) \\ g &\mapsto g|_{\mathcal{D}}, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

wobei $g|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ die Wirkung von g auf $\mathcal{D}$ bezeichnet.⁸ Diese Abbildung $\tilde{\varphi}_*$ ist ein Homomorphismus, weil wir in der Bemerkung nach der Definition einer Gruppenoperation festgestellt haben, dass wir jede Gruppenoperation als einen Homomorphismus in die Bijektionen auffassen können.

Da wir $\text{Sym}(W)$ aber nicht mit $\text{Bij}(\mathcal{D})$ sondern mit S_4 identifizieren wollen, bilden wir analog zur Vorgehensweise beim Tetraeder folgende Konjugation von $g|_{\mathcal{D}}$ mit der Bijektion $d : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathcal{D}, i \mapsto d_i$, wobei die Diagonale d_i durch die beiden diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte p_i und $p'_i = -p_i$ verläuft,

$$\begin{aligned} \varphi_* : \text{Sym}(W) &\rightarrow S_4 \\ g &\mapsto d^{-1} \circ g|_{\mathcal{D}} \circ d. \end{aligned}$$

Diese Abbildung macht auch hier wieder genau das, was wir möchten, denn sie ordnet zunächst jeder Zahl $i = 1, \dots, 4$ durch die Abbildung d eine Raumdiagonale d_i zu, bildet dann d_i durch die Abbildung $g|_{\mathcal{D}}$ auf eine andere Raumdiagonale $g(d_i)$ ab und die

⁸Wir verwenden hier wieder dieselbe Schreibweise wie beim Tetraeder, obwohl es sich dabei streng genommen nicht um eine Einschränkung handelt. Dies ist jedoch dadurch gerechtfertigt, dass wir geometrisch beobachtet haben, dass $g \in \text{Sym}(W)$ auf den Raumdiagonalen wirkt und $g|_{\mathcal{D}}$ soll diese Wirkung bezeichnen.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Abbildung d^{-1} sagt uns schließlich, welcher Zahl diese neue Raumdiagonale entspricht. Dies lässt sich auch folgendermaßen in Formeln ausdrücken:

$$g(d_i) = d_{(\varphi_*(g))(i)}.$$

Wie bei der Permutationsdarstellung der Tetraedergruppen ist auch diese Abbildung ein Homomorphismus. Diese Abbildung ist jedoch sicher nicht injektiv, weil $\text{Sym}(W)$ genau doppelt so viele Elemente wie S_4 hat. Wir untersuchen also zunächst den Kern der Abbildung φ_* :

Lemma 5.2.1. [8, S. 92-94] *Es gilt $\text{Ker}(\varphi_*) = \{\pm E_3\}$, d. h. die Identität E_3 und die Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$ sind die einzigen Symmetrien des Würfels, die seine Raumdiagonalen invariant lassen.*

Beweis. Wir verwenden hierbei die explizite Beschreibung der Symmetrien des Würfels durch die Matrizen A aus (5.2.1) und die am Anfang dieses Unterkapitels aufgelisteten Koordinaten der Eckpunkte unseres Würfels W . Damit ein $A \in O_3$ die Raumdiagonalen invariant lässt und somit $A \in \text{Ker}(\varphi_*)$ gilt, muss jeder Eckpunkt p_i , $i = 1, \dots, 4$, unter Multiplikation mit A entweder auf sich selbst p_i oder den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt $-p_i = p'_i$ abgebildet werden. Aus $A \cdot p_1 = \pm p_1$ folgt $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$, d. h. alle Vorzeichen müssen gleich sein. Deshalb und wegen $A \cdot p_2 = \pm p_2$ muss $\pi(1) = 1$ gelten, da die erste Koordinate von p_2 in ihrem Vorzeichen von der zweiten und dritten abweicht. Analog muss wegen $A \cdot p_3 = \pm p_3$ gelten, dass $\pi(3) = 3$, und wegen $A \cdot p_4 = \pm p_4$, dass $\pi(2) = 2$. Daraus folgt die Behauptung.⁹ $\square$

Da die Punktspiegelung $-E_3$ jedoch nicht in $\text{Sym}_+(W)$ liegt und diese auch wie S_4 genau 24 Elemente hat, schränken wir die Definitionsmenge der Abbildung φ_* auf $\text{Sym}_+(W)$ ein und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 5.2.2. (Permutationsdarstellung der Würfelgruppen - Teil 1). [8, S. 92-94] [22, S. 134-135] [1, S. 37-39] *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_+ : \text{Sym}_+(W) &\rightarrow S_4 \\ g &\mapsto d^{-1} \circ g|_D \circ d \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Drehgruppe des Würfels ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4 .

⁹Ein geometrisches Argument für die Gültigkeit dieser Behauptung lautet wie folgt: Damit die Raumdiagonalen invariant bleiben, muss jeder Eckpunkt p_i , $i = 1, \dots, 4$, entweder invariant bleiben oder auf den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkt $-p_i = p'_i$ abgebildet werden. Wird nun ein p_i mit $-p_i = p'_i$ vertauscht, müssen jedoch auch bereits alle anderen gleichermaßen vertauscht werden, weil bei einer Symmetrie benachbarte Ecken in benachbarte Ecken übergehen müssen. Also bleibt nur mehr die Identität E_3 oder die Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$.

5.2 Symmetrien von Würfel und Oktaeder

Beweis. Die Abbildung φ_+ ist als Einschränkung von φ_* immer noch ein Homomorphismus. Nun bleibt noch die Bijektivität von φ_+ nachzuweisen. Wegen $\text{ord}(\text{Sym}_+(W)) = 24 = \text{ord}(S_4)$ würde es dafür eigentlich wieder genügen, nur entweder die Injektivität oder die Surjektivität von φ_+ zu überprüfen. Wir zeigen jedoch trotzdem analog zur Vorgehensweise beim Tetraeder wieder beides, um ein besseres Verständnis von φ_+ zu erlangen. Aus Lemma 5.2.1 folgt direkt, dass nur $E_3 \in SO_3$ alle Raumdiagonalen des Würfels invariant lässt, d. h. $\text{Ker } \varphi_+ = \{E_3\}$. Somit ist φ_+ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv.

Nach Lemma 2.4.4 wird S_4 von den Transpositionen erzeugt. Um nachzuweisen, dass φ_+ surjektiv ist, genügt es somit, jede Transposition (ij) durch ein Element aus $\text{Sym}_+(W)$ darzustellen. Wir betrachten dazu die Drehungen β_{ij} an den sechs Drehachsen vom Typ b, wobei die Indizes in aufsteigender Reihenfolge die Nummern der Raumdiagonalen angeben, die die Ecken an jenen diagonal gegenüberliegenden Kanten verbinden, durch deren Mittelpunkte die Drehachsen verlaufen. Wie in Abbildung 5.3 erkennbar, vertauscht jede der sechs Drehungen β_{ij} genau die beiden Raumdiagonalen an jenen diagonal gegenüberliegenden Kanten, durch deren Mittelpunkte die Drehachse verläuft, während sie die beiden anderen Raumdiagonalen wieder in sich selbst überführt, also gilt $\varphi_+(\beta_{ij}) = (ij)$. Somit liegen alle $\binom{4}{2} = 6$ Transpositionen von S_4 im Bild von φ_+ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. Demnach ist φ_+ ein bijektiver Homomorphismus, d. h. ein Isomorphismus. $\square$

Wir haben nun durch die Betrachtung der Raumdiagonalen des Würfels bereits für die Drehgruppe des Würfels $\text{Sym}_+(W)$ einen Isomorphismus zur (gesamten) symmetrischen Gruppe S_4 erhalten. Nehmen wir nun im Übergang zur (vollen) Symmetriegruppe des Würfels $\text{Sym}(W)$ die Spiegelungen wieder dazu, stoßen wir erneut auf das Problem, dass die Abbildung $\varphi_* : \text{Sym}(W) \rightarrow S_4$ nicht injektiv ist. Die Abbildung φ_* ist jedoch ein Homomorphismus und aus der Bemerkung nach der Definition von SO_n (Kapitel 2.5) wissen wir bereits, dass auch die Determinante $\det : \text{Sym}(W) \rightarrow \{+1, -1\}$ ein Homomorphismus ist. Somit haben wir zwei Homomorphismen ausgehend von derselben Gruppe $\text{Sym}(W)$ in zwei verschiedene Gruppen S_4 und $Z_2 := \{+1, -1\}$ gefunden. Somit gibt es nach dem Satz über das äußere direkte Produkt 2.2.4 (iii) genau einen Homomorphismus in das direkte Produkt dieser beiden Gruppen, d. h. $\varphi : \text{Sym}(W) \rightarrow S_4 \times Z_2$ mit $\varphi(g) = (\varphi_*(g), \det(g))$ ist ein Homomorphismus. Wegen $\text{ord}(S_4 \times Z_2) = 24 \cdot 2 = 48 = \text{ord}(\text{Sym}(W))$ ist folgendes Resultat bereits naheliegend:

Theorem 5.2.3. (Permutationsdarstellung der Würfelgruppen - Teil 2). [8, S. 92-94]
Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}(W) &\rightarrow S_4 \times Z_2 \\ g &\mapsto (\varphi_*(g), \det(g))\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Gruppe (aller) Symmetrien des Würfels ist isomorph zum äußeren direkten Produkt der symmetrischen Gruppe S_4 und der zyklischen Gruppe Z_2 .

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Beweis. Wir haben uns bereits davon überzeugt, dass φ nach dem Satz über das äußere direkte Produkt 2.2.4 (iii) ein Homomorphismus ist. Damit $g \in \text{Ker}(\varphi)$ muss $\varphi(g) = (\text{Id}, +1)$ gelten. Nach Lemma 5.2.1 folgt aus $\varphi_*(g) = \text{Id}$, dass $g = \pm E_3$. Wegen $\det(g) = +1$ erhalten wir daraus $\text{Ker } \varphi = \{E_3\}$. Somit ist φ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv.¹⁰ Nun zeigen wir auch noch, dass φ surjektiv ist. Nach dem ersten Teil des Satzes erhalten wir durch die Elemente von $\text{Sym}_+(W)$ in der ersten Komponente von φ alle Elemente von S_4 , wobei wegen $\text{Sym}_+(W) = \text{Sym}(W) \cap SO_3$ in der zweiten Komponente für die Determinante immer $+1$ steht. Wegen

$$O_3 = SO_3 \cup SO_3 \cdot (-E_3)$$

gilt

$$\text{Sym}(W) = \text{Sym}_+(W) \cup \text{Sym}_+(W) \cdot (-E_3),$$

d. h. jedes orientierungsumkehrende Element $g \in \text{Sym}(W) \setminus \text{Sym}_+(W)$ lässt sich darstellen als Produkt eines Elements $g_+ \in \text{Sym}_+(W)$ und der Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$. Wegen $-E_3 \in \text{Ker}(\varphi_*)$ nach Lemma 5.2.1 gilt

$$\varphi(-E_3) = (\varphi_*(-E_3), \det(-E_3)) = (\text{Id}, -1),$$

und weil φ ein Homomorphismus ist, erhalten wir somit

$$\varphi(g) = \varphi(g_+ \cdot (-E_3)) = \varphi(g_+) \cdot \varphi(-E_3) = (\varphi_*(g_+), +1) \cdot (\text{Id}, -1) = (\varphi_*(g_+), -1),$$

d. h. durch die orientierungsumkehrenden Elemente von $\text{Sym}(W)$ erhalten wir also in der ersten Komponente von φ wieder alle Element von S_4 , jedoch steht diesmal in der zweiten Komponente immer -1 . $\square$

Um nun auch noch eine vollständige explizite Beschreibung der Symmetriegruppen des Würfels zu erhalten, überlegen wir uns zuerst exemplarisch anhand von Abbildung 5.3, welche Permutationen sich durch die dort dargestellten Lagen der Drehachsen und Spiegelebenen ergeben, siehe Tabelle 5.2.

Da die Zyklenstruktur unabhängig von der gewählten Achse ist [8, S. 97], machen wir die Beobachtung, dass wir durch die Drehungen α und α^3 die Viererzyklen von S_4 , durch die Drehungen α^2 die Produkte von Transpositionen, durch die Drehungen β die Transpositionen und durch die Drehungen γ und γ^2 die Dreierzyklen erhalten. Die Spiegelungen vom Typ s ergeben erneut die Produkte von Transpositionen und jene vom Typ t wieder die Transpositionen. Bei der Gesamtbilanz beschränken wir uns also auf $\text{Sym}_+(W)$, weil sich bei den Drehspiegelungen nur das Vorzeichen der Determinante ändert. Da es insgesamt drei Drehachsen vom Typ a, sechs vom Typ b und vier vom Typ c gibt, können wir bereits alle Elemente von S_4 explizit zuordnen und stellen unsere Erkenntnisse zusammengefasst in Tabelle 5.3 dar. Zusätzlich ergänzen wir dabei auch gleich wieder mithilfe der Rechenregeln für Zyklen aus Lemma 2.4.2 (iii) jeweils die Ordnung der Elemente von S_4 und mithilfe der Rechenregeln für das Signum aus Lemma 2.4.5 jeweils deren Signum.

¹⁰Wegen $\text{ord}(\text{Sym}(W)) = 48 = \text{ord}(S_4 \times Z_2)$ würde dies eigentlich schon genügen, um auf die Bijektivität von φ zu schließen. Zum Zweck des Erlangens eines besseren Verständnisses von φ zeigen wir jedoch trotzdem auch noch ihre Surjektivität.

5.2 Symmetrien von Würfel und Oktaeder

Bezeichnung	Drehwinkel	Permutation	Signum
Drehung α	$\frac{\pi}{2}$	(1234)	–
Drehung α^2	π	(13) $\circ$ (24)	+
Drehung α^3	$\frac{3\pi}{2}$	(1432)	–
Drehung β	π	(12)	–
Drehung γ	$\frac{2\pi}{3}$	(243)	+
Drehung γ^2	$\frac{4\pi}{3}$	(234)	+
Spiegelung Typ s	–	(13) $\circ$ (24)	+
Spiegelung Typ t	–	(24)	–

Tabelle 5.2: Explizite Beschreibung der in Abbildung 5.3 dargestellten Symmetrien des Würfels [8, S. 93].

Elemente von $\text{Sym}_+(W)$	Elemente von S_4	Anzahl	Ordnung	Signum
E_3	Id	1	1	+
Drehungen β (Anzahl der Achsen: 6)	(12), (13), (14), (23), (24), (34)	6	2	–
Drehungen γ und γ^2 (Anzahl der Achsen: 4)	(123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243)	8	3	+
Drehungen α^2 (Anzahl der Achsen: 3)	(12) $\circ$ (34), (13) $\circ$ (24), (14) $\circ$ (23)	3	2	+
Drehungen α und α^3 (Anzahl der Achsen: 3)	(1234), (1324), (1423), (1243), (1342), (1432)	6	4	–
Summe		24		

Tabelle 5.3: Explizite Beschreibung der 24 Drehsymmetrien des Würfels [8, S. 81, 93].

5.3 Symmetrien von Dodekaeder und Ikosaeder

Da auch Dodekaeder und Ikosaeder dual zueinander sind, haben sie analog zu Würfel und Oktaeder sowohl dieselbe Drehgruppe als auch dieselbe Symmetriegruppe. Wir betrachten im Folgenden den bereits aus Kapitel 3.2 bekannten Dodekaeder

$$D = \text{Conv}(\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm \Phi^{-1}, \pm \Phi), (\pm \Phi, 0, \pm \Phi^{-1}), (\pm \Phi^{-1}, \pm \Phi, 0)\}),$$

den wir in unserer Konstruktion ausgehend vom Würfel als konvexe Hülle der ursprünglichen acht Würfecken zusammen mit den zwölf Endpunkten der “Walmdachfirste” erhalten haben. Der Schwerpunkt dieses Dodekaeders entspricht jenem des Würfels und liegt somit wie gewünscht im Ursprung. Die beiden Gruppen

$$\begin{aligned} \text{Sym}(D) &:= \{A \in O_3 \mid A(D) = D\} \quad \text{und} \\ \text{Sym}_+(D) &:= \text{Sym}(D) \cap SO_3 \end{aligned}$$

bezeichnen wir als Dodekaedergruppen [8, S. 94]. $\text{Sym}_+(D)$ bezeichnen wir auch als die Drehgruppe des Dodekaeders und bei $\text{Sym}(D)$ sprechen wir von seiner (vollen) Symmetriegruppe.

Allem voran überlegen wir uns, welche Symmetrien des Würfels mit der Konstruktion verträglich sind und somit auf den Dodekaeder übertragen werden. Durch das Aufsetzen der “Walmdächer” wird auf den Würfel­flächen nämlich eine Richtung festgelegt, die unter diesen Symmetrien erhalten bleiben muss, siehe Abbildung 5.4. Diese Untergruppe von $\text{Sym}(W)$ bezeichnen wir mit $\text{Sym}(W, D)$ und weiters den Durchschnitt von $\text{Sym}(W, D)$ und $\text{Sym}_+(W)$ mit $\text{Sym}_+(W, D)$.

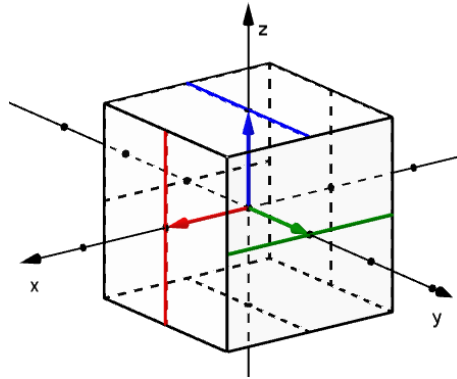


Abbildung 5.4: Verträglichkeit der Symmetrien des Würfels mit der Konstruktion des Dodekaeders. Eigene Darstellung.

Wir überlegen uns nun, welche Bedingungen wir zur Beschreibung der Elemente von $\text{Sym}(W, D)$ an die durch Matrizen angegebenen Symmetrien des Würfels aus (5.2.1) stellen müssen. Mit den Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und dem Signum der Permutation $\pi \in S_3$ gibt es dabei zwei Bestimmungsstücke, die eine Rolle spielen können. Da das Wechseln eines

5.3 Symmetrien von Dodekaeder und Ikosaeder

Vorzeichens $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ nur der Komposition mit einer Spiegelung an den Koordinatenebenen (Typ s) entspricht, wodurch die festgelegte Richtung ohnehin erhalten bleibt, kommt es auf diese Vorzeichen jedenfalls nicht an. Also bleibt nur noch die Betrachtung des Signums der Permutation $\pi \in S_3$, d. h. $\text{sign}(\pi)$.

Konzentrieren wir uns zunächst auf die Drehachsen vom Typ c, machen wir die Beobachtung, dass die Drehungen an diesen Achsen mit der Konstruktion des Dodekaeders verträglich sind. Das Signum der dazugehörigen Permutation $\pi \in S_3$ ist dabei immer $+1$, weil durch eine derartige Drehung immer alle drei Standardeinheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ bis auf ihre Vorzeichen zyklisch permutiert werden und es sich somit um die Dreierzyklen (und die Identität) von S_3 handelt. Jedes Element in $\text{Sym}(W)$ mit $\text{sign}(\pi) = +1$ kann daher als Produkt einer Drehung vom Typ c und (mehreren) Spiegelungen vom Typ s geschrieben werden. Diese Elemente liegen also alle in $\text{Sym}(W, D)$.

Nun müssen wir uns noch davon überzeugen, dass das die einzigen Elemente von $\text{Sym}(W)$ mit positivem Signum sind. Dazu konzentrieren wir uns auf die Ebenenspiegelungen vom Typ t und machen die Beobachtung, dass die Spiegelungen an diesen Ebenen nicht mit der Konstruktion des Dodekaeders verträglich sind. Das Signum der dazugehörigen Permutation $\pi \in S_3$ ist dabei immer -1 , weil durch eine derartige Spiegelung immer genau zwei der drei Standardeinheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ bis auf ihre Vorzeichen vertauscht werden und es sich somit um die Transpositionen von S_3 handelt. Jedes Element in $\text{Sym}(W)$ mit $\text{sign}(\pi) = -1$ kann daher als Produkt einer Spiegelung vom Typ t und (mehreren) Spiegelungen vom Typ s geschrieben werden. Keines dieser Elemente liegt also in $\text{Sym}(W, D)$.

Da dies alle Symmetrien des Würfels abdeckt folgt, dass die Verträglichkeit einer Symmetrie des Würfels mit der Konstruktion des Dodekaeders genau dann gegeben ist, wenn das Signum ihrer dazugehörigen Permutation $\pi \in S_3$ positiv ist, d. h.

$$\begin{aligned} \text{Sym}(W, D) = \{ A = (\epsilon_1 e_{\pi(1)}, \epsilon_2 e_{\pi(2)}, \epsilon_3 e_{\pi(3)}) \mid \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\}, \pi \in A_3 \}. \end{aligned}$$

Da es $2^3 = 8$ Möglichkeiten gibt, die Vorzeichen $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ beliebig zu wählen und $\text{ord}(A_3) = 3$ gilt, ergeben sich $8 \cdot 3 = 24$ Matrizen A , die diese Bedingungen erfüllen. Somit haben wir 24 Symmetrien des Dodekaeders gefunden, die direkt von seinem Ausgangswürfel abstammen, d. h. $\text{ord}(\text{Sym}(W, D)) = 24$. Die Hälfte davon weist zudem eine positive Determinante auf und liegt somit im Durchschnitt von $\text{Sym}(W, D)$ und $\text{Sym}_+(W)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \text{Sym}_+(W, D) &= \text{Sym}(W, D) \cap \text{Sym}_+(W) \\ &= \{ A = (\epsilon_1 e_{\pi(1)}, \epsilon_2 e_{\pi(2)}, \epsilon_3 e_{\pi(3)}) \mid \\ &\quad \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \{\pm 1\} \text{ mit } \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = +1, \pi \in A_3 \}. \end{aligned}$$

mit $\text{ord}(\text{Sym}_+(W, D)) = 12$.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Betrachten wir die Drehungen an den Würfelachsen vom Typ c (enthalten seine Raumdiagonalen) näher, stellen wir fest, dass diese jeweils transitiv auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen des Würfels wirken. Wegen der eindeutigen Zuordnung der zwölf Würfelkanten zu den zwölf Dodekaederflächen als Fünfeckdiagonalen wirkt $\text{Sym}_+(W, D)$ somit auch bereits transitiv auf den Flächen des Dodekaeders.

Bemerkung. Mit den vom Ausgangswürfel geerbten (Dreh-)Symmetrien ist also bereits die Transitivität der Symmetriegruppen des Dodekaeders auf seinen Flächen sichergestellt. Da der Ikosaeder als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Dodekaeders entsteht, folgt daraus auch sofort die Transitivität dieser Symmetriegruppen auf den Ecken des Ikosaeders.

Diese durch Konstruktion ausgehend vom Würfel vererbten Symmetrien sind aber nicht die einzigen Symmetrien des Dodekaeders. Wir werden nun bei der geometrischen Beschreibung seiner Symmetrien jeweils von den bereits bekannten Symmetrien ausgehen und alle weiteren daraus ableiten. Insgesamt hat ein Dodekaeder 31 Drehachsen, die jeweils durch seinen Schwerpunkt verlaufen und sich in drei Typen unterteilen lassen, siehe Abbildung 5.5.

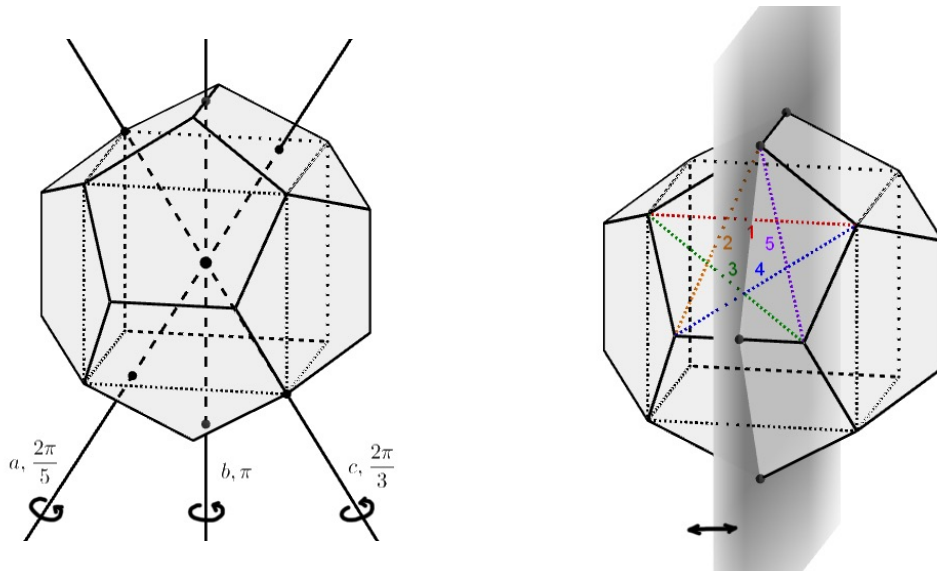


Abbildung 5.5: Symmetrien des Dodekaeders. Eigene Darstellung nach [8, S. 95].

Wir beginnen mit den sechs Drehachsen vom Typ a, die jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seitenflächen verlaufen. Da diese Drehachsen keine Entsprechungen zu Drehachsen des Ausgangswürfels haben, müssen wir uns erst davon überzeugen, dass eine Drehung α^n an einer dieser Achsen um ein Vielfaches n des Winkels $\frac{2\pi}{5}$ tatsächlich eine Symmetrie des Dodekaeders ist. Dafür stellen wir jene orthogonale Matrix A auf, die die Drehung des in Abbildung 5.6 rot markierten Fünfecks F um $\frac{2\pi}{5}$ beschreibt.

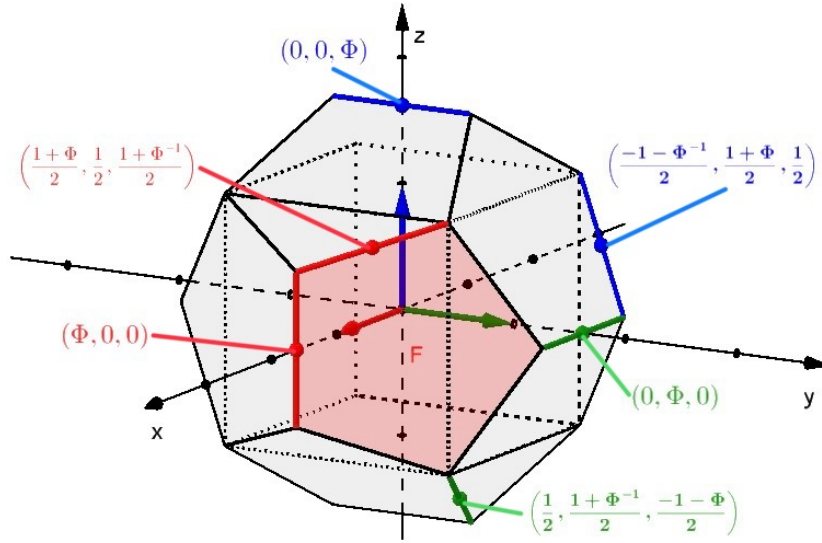


Abbildung 5.6: Drehung der rot markierten Dodekaederfläche F um $\frac{2\pi}{5}$. Eigene Darstellung.

Die Spalten der orthogonalen Matrix A werden dabei von den Bildern der drei Basisvektoren $(1, 0, 0)$ (rot), $(0, 1, 0)$ (grün) und $(0, 0, 1)$ (blau) gebildet. Um uns die Arbeit zu vereinfachen, verlängern wir diese Vektoren bis zum Mittelpunkt des entsprechenden “Firsts” und erhalten das Bild des entsprechenden Basisvektors im Wesentlichen durch die Koordinaten von dessen Bildpunkt unter dieser Drehung. Wir müssen den so ermittelten Spaltenvektor dann nur mehr durch seine Länge Φ dividieren, um die wir den entsprechenden Basisvektor zur Vereinfachung unserer Überlegung vorhin verlängert haben. In Abbildung 5.6 sind die den Basisvektoren zugeordneten “Firste” und ihre Bildkanten unter der betrachteten Drehung entsprechend in gleicher Farbe markiert.¹¹ Weiters sind in dieser Abbildung auch bereits die Koordinaten der entsprechenden Kantenmittelpunkte angegeben. Für die gesuchte Matrix A erhalten wir also

$$A = \frac{1}{2\Phi} \begin{pmatrix} 1+\Phi & 1 & -1-\Phi^{-1} \\ 1 & 1+\Phi^{-1} & 1+\Phi \\ 1+\Phi^{-1} & -1-\Phi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Phi} \begin{pmatrix} 1+\Phi & 1 & -\Phi \\ 1 & \Phi & 1+\Phi \\ \Phi & -1-\Phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalität der Matrix A kann durch Nachrechnen überprüft werden. Ebenfalls durch Nachrechnen stellen wir fest, dass unter Multiplikation mit A tatsächlich jeder Eckpunkt des Dodekaeders wieder auf einen seiner Eckpunkte abgebildet wird und es sich somit nach Lemma 2.6.5 um eine Symmetrie des Dodekaeders handelt. Die Drehungen α^n dieses ausgewählten Fünfecks F um Vielfache n von $\frac{2\pi}{5}$ erhalten wir nun direkt durch Multiplikationen mit $A^n =: R$.

¹¹Man überzeuge sich davon am besten durch entsprechende Markierungen auf einem Modell.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Da wir die Drehungen α^n aktuell nur für dieses ausgezeichnete Fünfeck F zur Verfügung haben, machen wir uns nun die Feststellung zu Nutze, dass $\text{Sym}_+(W, D)$ transitiv auf den Flächen des Dodekaeders wirkt. Wir bilden nun für $B \in \text{Sym}_+(W, D)$ die Konjugation BRB^{-1} , um diese Drehungen auch für jedes andere Fünfeck $F' = BF$ zu erhalten. Diese Konjugation macht genau das, was wir möchten, denn sie führt zunächst die Fläche F' durch Anwenden von B^{-1} in das ausgezeichnete Fünfeck F über, dreht dieses dann entsprechend durch Anwenden von R und bringt es schließlich durch Anwenden von B wieder an seinen ursprünglichen Platz zurück. Da durch diese Konjugation jeder Eckpunkt des Dodekaeders wieder auf einen seiner Eckpunkte abgebildet wird, handelt es sich bei den Drehungen α^n an den Drehachsen vom Typ a um Vielfache n des Winkels $\frac{2\pi}{5}$ nach Lemma 2.6.5 um Symmetrien des Dodekaeders. Wegen $\alpha^5 = e$ gilt $\text{ord}(\alpha) = 5$.

An dieser Stelle drängen sich bereits wichtige Zwischenbemerkungen zur Transitivität der Symmetriegruppen des Dodekaeders auf:

Bemerkung. Die Transitivität der Symmetriegruppen auf den Ecken ist beim Dodekaeder aus unserer Konstruktion nicht so offensichtlich wie bei den bisher behandelten Polyedern. Dieser weist nämlich mit den acht ursprünglichen Würfecken und den zwölf Endpunkten der “Walmdachfirste” zwei nach Konstruktion qualitativ verschiedene Typen von Ecken auf. Die orthogonale Matrix A stellt jedoch bereits eine Verbindung zwischen diesen beiden Bahnen qualitativ unterschiedlicher Ecken her und mit den bisher bekannten Symmetrien des Dodekaeders ist nun bereits der Nachweis der Transitivität der Symmetriegruppen auf den Ecken möglich: Seien $v, v' \in V(D)$, wobei $v \in F$ und $v' \in F'$. Dann gibt es ein $B \in \text{Sym}_+(D, W)$ mit $B(F) = F'$. Somit gilt $B^{-1}(v') \in F$. Für F gibt es nun ein $R \in \text{Sym}(D)$ mit $R(B^{-1}(v')) = (R \circ B^{-1})(v') = v$. Analoges gilt für die Transitivität der Symmetriegruppen des Dodekaeders auf seinen Kanten.

Somit erfüllt der Dodekaeder ebenfalls die stärkere Definition anhand des globalen Kriteriums:

Bemerkung. [10, S. 91] Die Dodekaedergruppen wirken transitiv auf der Menge der Ecken, der Kanten und der Flächen des Dodekaeders, d. h. sowohl alle Ecken, Kanten als auch Flächen bilden jeweils nur eine Bahn unter seinen Symmetrien. Dasselbe gilt auch für seinen Dualkörper, den Ikosaeder.¹²

Kommen wir nun zu den 15 Drehachsen vom Typ b, die jeweils durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten verlaufen. Jene drei dieser Drehachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender “Walmdachfirste” verlaufen, entsprechen den drei Drehachsen vom Typ a des Ausgangswürfels durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte bzw. den drei Koordinatenachsen, siehe Abbildung 5.5. Während jedoch beim Würfel jede Drehung an diesen Achsen um ein Vielfaches $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ des Winkels $\frac{\pi}{2}$ eine Symmetrie ist, liegt nur jede zweite dieser Drehungen (d. h. um den Winkel π bzw. 2π) in $\text{Sym}_+(W, D)$ und ist somit auch eine Symmetrie des Dodekaeders. Wir müssen uns nun auch noch davon überzeugen, dass jede Drehung um den Winkel π (bzw. 2π) an den übrigen zwölf Achsen, die nicht durch die Mittelpunkte gegenüberliegender “Firste”

¹²Aus der Transitivität der Symmetriegruppe auf den Flächen des Dodekaeders folgt sofort ihre Transitivität auf den Ecken des Ikosaeders.

verlaufen, eine Symmetrie des Dodekaeders ist. Da wir aber bereits festgestellt haben, dass die bisher bekannten Symmetrien des Dodekaeders transitiv auf seinen Kanten wirken, können wir wieder durch eine Konjugation zuerst jeden “Nicht-First” in einen “First” überführen, diesen dort dann drehen und den gedrehten “First” schließlich wieder an seinen ursprünglichen Platz zurückbringen. Da dadurch jeder Eckpunkt des Dodekaeders wieder auf einen seiner Eckpunkte abgebildet wird, handelt es sich bei den Drehungen β an den Drehachsen vom Typ b um den Winkel π nach Lemma 2.6.5 um Symmetrien des Dodekaeders. Wegen $\beta^2 = e$ gilt $\text{ord}(\beta) = 2$.

Schließlich betrachten wir noch die zehn Drehachsen vom Typ c, die jeweils durch zwei gegenüberliegende Ecken verlaufen. Jene vier dieser Drehachsen, die durch gegenüberliegende ursprüngliche Würfecken verlaufen, entsprechen genau den vier Drehachsen vom Typ c des Ausgangswürfels durch dessen Raumdiagonalen. Da die Drehungen γ an diesen vier Achsen um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und γ^2 um den Winkel $\frac{4\pi}{3}$ somit bereits in $\text{Sym}_+(W, D)$ liegen, müssen wir uns nur noch davon überzeugen, dass dies auch für die sechs Achsen durch gegenüberliegende Endpunkte von “Firsten” der Fall ist. Da wir aber auch bereits festgestellt haben, dass die bisher bekannten Symmetrien des Dodekaeders transitiv auf seinen Ecken wirken, können wir wieder durch eine Konjugation zuerst jeden “First-Endpunkt” in eine ursprüngliche Würfecke überführen, diesen dort dann drehen und schließlich auf den entsprechenden “First-Endpunkt” zurückbringen. Da dadurch jeder Eckpunkt des Dodekaeders wieder auf einen seiner Eckpunkte abgebildet wird, handelt es sich bei den Drehungen γ an den Drehachsen vom Typ c um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und γ^2 um den Winkel $\frac{4\pi}{3}$ nach Lemma 2.6.5 um Symmetrien des Dodekaeders. Wegen $\gamma^3 = e$ gilt $\text{ord}(\gamma) = 3$.

Weiters hat ein Dodekaeder 15 Spiegelebenen, die jeweils durch zwei gegenüberliegende Kanten und zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte verlaufen, siehe Abbildung 5.5. Jene drei dieser Spiegelebenen, die zwei gegenüberliegende “Walmdachfirste” beinhalten, entsprechen genau den drei Spiegelebenen vom Typ s des Ausgangswürfels durch jeweils vier Kantenmittelpunkte bzw. den drei Koordinatenebenen. Durch die Transitivität der bisher bekannten Symmetrien auf den Kanten können wir wieder durch eine Konjugation sicherstellen, dass auch die Spiegelungen an den übrigen zwölf Spiegelebenen Symmetrien des Dodekaeders sind. Wegen $-E_3 \in \text{Sym}(W, D)$ ist auch die Punktspiegelung am Ursprung eine Symmetrie des Dodekaeders.

Anschließend an diese Beschreibung der Symmetrien des Dodekaeders machen wir eine zentrale geometrische Beobachtung: Wir finden durch die Konstruktion ausgehend von dem gewählten Würfel genau einen eindeutigen Dodekaeder. Wie wir bereits angemerkt haben, entsprechen dabei die zwölf Würfelkanten jeweils genau einer Fünfeckdiagonale in jeder der zwölf Dodekaederflächen. Da jedes dieser Fünfecke jedoch fünf Diagonalen aufweist, vermuten wir, dass umgekehrt jeder dieser Diagonalen in eindeutiger Weise ein Würfel zuordenbar sein muss und dem Dodekaeder somit fünf derartige Würfel eingeschrieben werden können [8, S. 94-95]. Da wir jede Fünfeckdiagonale durch Drehungen vom Typ a in jene des Ausgangswürfels überführen können, wodurch der zugehörige Würfel bereits in eindeutiger Weise festgelegt ist, treten tatsächlich genau die fünf vermuteten eingeschriebenen Würfel auf. Also liegt in jedem Fünfeck des Dodekaeders als Diagonale genau eine Kante von jedem der fünf eingeschriebenen Würfel, siehe Abbildung 5.7.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

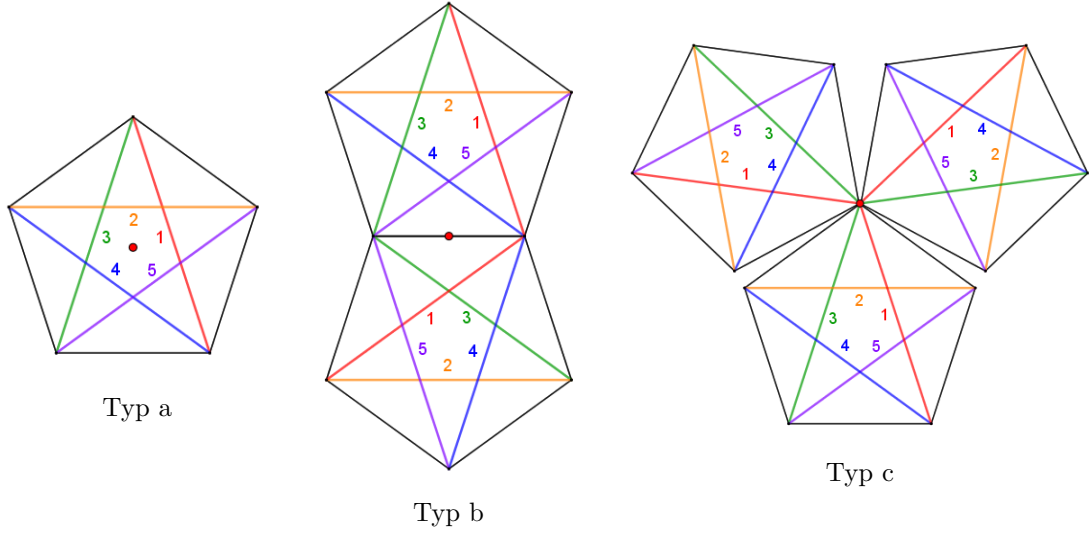


Abbildung 5.7: Explizite Beschreibung der Symmetrien des Dodekaeders: Die Durchstoßpunkte der jeweiligen Drehachsen sind in rot eingezeichnet. In jedem der Fünfecke liegt genau eine Kante von jedem der fünf eingeschriebenen Würfel. Eigene Darstellung nach [8, S. 96-97].

Für eine geeignete Beschreibung der Dodekaedergruppen wollen wir vorab herausfinden, wie viele Elemente diese umfassen [8, S. 94]. Die Anzahl der Elemente in der Drehgruppe des Dodekaeders, d. h. die Ordnung von $\text{Sym}_+(D)$, erhalten wir wieder durch eine einfache geometrische Überlegung: Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Dodekaeder auf ein aufgezeichnetes Fünfeck zu stellen? Da ein Dodekaeder aus zwölf Fünfecken besteht und wir jedes auf fünf Arten auf das aufgezeichnete Fünfeck stellen können, erhalten wir

$$\text{ord}(\text{Sym}_+(D)) = 12 \cdot 5 = 60.$$

Für einen formalen Nachweis steht uns wieder das Bahn-Lemma 2.3.3 zur Verfügung. Da die Drehgruppe $\text{Sym}_+(D) =: G_+$ transitiv auf der Menge $V(D)$ der Ecken des Dodekaeders operiert, gilt für eine Ecke $v \in V(D)$

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(v)) = 20 \cdot 3 = 60,$$

wobei die Bahn $G_+(v)$ die 20 Ecken des Dodekaeders umfasst und die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ einer Ecke v aus jenen drei Drehungen vom Typ c besteht, die eine Ecke v fixieren.

Für die (volle) Symmetriegruppe des Dodekaeders $\text{Sym}(D) := G$ erhalten wir durch eine analoge Überlegung

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(v)) = 20 \cdot 6 = 120,$$

wobei die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{G_+}(v)$ neben den drei Drehungen vom Typ c, die v fixieren, auch noch die drei Ebenenspiegelungen, die jeweils durch eine an v angrenzende Kante verlaufen und v somit fixieren, enthält.

Nun suchen wir nach einer Permutationsdarstellung der Dodekaedergruppen [8, S. 95]. Da sich die Symmetriegruppe eines Polyeders nach Lemma 2.6.5 als Menge aller Isometrien, die seine Eckpunkte auf seine Eckpunkte abbilden, beschreiben lässt und der Dodekaeder 20 Ecken hat, erhalten wir für die Dodekaedergruppen jedenfalls Isomorphismen zu Untergruppen von S_{20} . Diese ist aber mit über 2,4 Trillionen Elementen riesengroß. Da beim Dodekaeder jedoch wie beim Würfel nicht alle Paare von Ecken gleichberechtigt sind, vermuten wir auch hier noch eine geschicktere Beschreibung der Dodekaedergruppen finden zu können [8, S. 91]. Eine Möglichkeit wäre, die zehn Drehachsen vom Typ c zu betrachten, da diese jeweils zwei gegenüberliegende Ecken zusammenfassen und dadurch bei jeder seiner Symmetrien permutiert werden. Somit erhalten wir für die Dodekaedergruppen jedenfalls schon einmal Isomorphismen zu Untergruppen zur “kleineren” symmetrischen Gruppe S_{10} . Da diese mit über 3,5 Millionen Elementen jedoch immer noch riesig ist, überlegen wir weiter, ob es noch eine geometrisch rechtfertigbare Möglichkeit gibt, mehr als zwei Ecken zusammenzufassen. Dafür haben wir jedoch oben bereits eine zentrale geometrische Beobachtung gemacht: Die fünf dem Dodekaeder eingeschriebenen Würfel fassen jeweils acht Ecken des Dodekaeders zusammen. Dabei ist zu beachten, dass dies keine Partition der Ecken des Dodekaeders liefert, weil an jeder Ecke des Dodekaeders zwei Würfel zusammenfallen, siehe Abbildung 5.7. Da diese fünf Würfel bei jeder Symmetrie des Dodekaeders permutiert werden [8, S. 94-95], erhalten wir für die Dodekaedergruppen jedenfalls Isomorphismen zu Untergruppen der bedeutend kleineren symmetrischen Gruppe S_5 .

Die Dodekaedergruppen wirken also auf seinen fünf eingeschriebenen Würfeln und wir versuchen demnach, die Dodekaedergruppen mit S_5 zu identifizieren. Es ist wieder das Naheliegendste, jede Symmetrie $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Dodekaeders erstmal als eine Bijektion auf der fünfelementigen Menge seiner eingeschriebenen Würfel $\mathcal{W}$ aufzufassen. Wir betrachten somit folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_* : \text{Sym}(D) &\rightarrow \text{Bij}(\mathcal{W}) \\ g &\mapsto g|_{\mathcal{W}}, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

wobei $g|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ die Wirkung von g auf $\mathcal{W}$ bezeichnet.¹³ Diese Abbildung $\tilde{\varphi}_*$ ist ein Homomorphismus, weil wir in der Bemerkung nach der Definition einer Gruppenoperation festgestellt haben, dass wir jede Gruppenoperation als einen Homomorphismus in die Bijektionen auffassen können.

¹³Wie beim Würfel verwenden wir auch hier wieder diese Schreibweise, obwohl es sich dabei streng genommen nicht um eine Einschränkung handelt. Dies ist jedoch wieder dadurch gerechtfertigt, dass wir geometrisch beobachtet haben, dass $g \in \text{Sym}(D)$ auf den eingeschriebenen Würfeln wirkt und $g|_{\mathcal{W}}$ soll diese Wirkung bezeichnen.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Da wir $\text{Sym}(D)$ aber nicht mit $\text{Bij}(\mathcal{W})$ sondern mit S_5 identifizieren wollen, bilden wir analog zur Vorgehensweise bei Tetraeder und Würfel folgende Konjugation von $g|_{\mathcal{W}}$ mit der Bijektion $w : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathcal{W}, i \mapsto w_i$, die eine (beliebige) Nummerierung der eingeschriebenen Würfel festlegt,

$$\begin{aligned}\varphi_* : \text{Sym}(D) &\rightarrow S_5 \\ g &\mapsto w^{-1} \circ g|_{\mathcal{W}} \circ w.\end{aligned}$$

Diese Abbildung macht auch hier wieder genau das, was wir möchten, denn sie ordnet zunächst jeder Zahl $i = 1, \dots, 5$ durch die Abbildung w einen eingeschriebenen Würfel w_i zu, bildet dann w_i durch die Abbildung $g|_{\mathcal{W}}$ auf einen anderen Würfel $g(w_i)$ ab und die Abbildung w^{-1} sagt uns schließlich, welcher Zahl dieser neue Würfel entspricht. Dies lässt sich auch folgendermaßen in Formeln ausdrücken:

$$g(w_i) = w_{(\varphi_*(g))(i)}.$$

Wie bei der Permutationsdarstellung der Tetraeder- und Würfelgruppen ist auch diese Abbildung ein Homomorphismus. Auf den ersten Blick sieht es auch vielversprechend im Hinblick auf die Bijektivität der Abbildung aus, weil $\text{Sym}(D)$ genau gleich viele Elemente wie S_5 hat. Wir untersuchen nun jedoch den Kern der Abbildung φ_* :

Lemma 5.3.1. [8, S. 95-98] *Es gilt $\text{Ker}(\varphi_*) = \{\pm E_3\}$, d. h. die Identität E_3 und die Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$ sind die einzigen Symmetrien des Dodekaeders, die seine fünf eingeschriebenen Würfel invariant lassen.*

Beweis. Lässt ein $g \in \text{Sym}(D)$ die beiden Würfel w_i, w_j mit $i \neq j$ invariant, lässt sie auch ihren Durchschnitt $w_i \cap w_j$ invariant. Aus Abbildung 5.7 wird erkennbar, dass jedes Paar eingeschriebener Würfel genau zwei diagonal gegenüberliegende Ecken gemeinsam hat und somit in der entsprechenden Raumdiagonalen übereinstimmt. Also lässt g diese gemeinsame Diagonale von w_i und w_j invariant und aus Lemma 5.2.1 folgt somit, dass $g \in \{\pm E_3\}$. Auch die umgekehrte Inklusion gilt, weil jeder Würfel seinen Mittelpunkt im Ursprung hat. $\square$

Wegen ihrem zweielementigen Kern ist die Abbildung φ_* somit sicher nicht injektiv. Da wir nun aber wissen, dass zumindest zwei Symmetrien des Dodekaeders (Identität, Punktspiegelung am Ursprung) von derselben (identischen) Permutation dargestellt werden, $\text{Sym}(D)$ und S_5 jedoch gleich viele Elemente haben, kann diese Abbildung auch nicht surjektiv sein, weil zumindest eines der Elemente S_5 nicht getroffen wird. Wir vermuten nun, dass das nicht das einzige Element ist, was nicht getroffen wird. Diesbezüglich schafft folgende Formel Abhilfe:

Lemma 5.3.2. [8, S. 95-98] *Für $g \in \text{Sym}(D)$ gilt folgende Gleichung:*

$$\text{sign}(\varphi_*(g)) = +1,$$

d. h. das Bild von φ_* besteht nur aus Elementen von A_5 .

Beweis. Um unsere Argumentation analog zu jener für Gleichung (5.1.2) führen zu können, überzeugen wir uns vorab davon, dass $\text{Sym}(D)$ von den Ebenenspiegelungen erzeugt wird. Sei also G die von den Ebenenspiegelungen erzeugte Untergruppe von $\text{Sym}(D)$. Zu zeigen ist, dass $G = \text{Sym}(D)$ gilt. Da benachbarte Eckpunkte durch die Ebenenspiegelungen vertauscht werden können, wirkt G transitiv auf $V(D)$. Die Bahn $G(v)$ einer Ecke $v \in V(D)$ umfasst somit die 20 Ecken des Dodekaeders, d. h. $\text{ord } G(v) = 20$. Die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_G(v)$ einer Ecke v umfasst neben den Spiegelungen an den drei durch sie verlaufenden Spiegelebenen auch noch die drei durch Hintereinanderausführung von je zwei dieser Spiegelungen erzeugten Drehungen, d. h. $\text{ord } \text{Sta}_G(v) = 6$. Nach dem Bahn-Lemma 2.3.3 erhalten wir somit $\text{ord}(G) = (\text{ord } G(v)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(v)) = 20 \cdot 6 = 120$. Somit gilt aufgrund der Gleichheit ihrer Ordnungen bereits $G = \text{Sym}(D)$.

Da $\text{Sym}(D)$, wie wir gerade gesehen haben, von den Ebenenspiegelungen erzeugt wird und das Signum nach Lemma 2.4.5 (i) ein Homomorphismus ist, genügt es wieder zu zeigen, dass diese Gleichung für ebendiese gilt. Wie in Abbildung 5.5 erkennbar, vertauscht jede Ebenenspiegelung genau zwei Paare von Fünfeckdiagonalen (hier: (25) und (34)), während sie jene, die normal auf die Ebene steht (hier: (1)), unverändert lässt. Somit werden die Ebenenspiegelungen auf die $\frac{1}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 15$ Produkte von Transpositionen abgebildet. Da nach Lemma 2.4.5 (ii) das Signum einer Transposition -1 ist und das Signum nach (i) ein Homomorphismus ist, ist das Signum eines Produkts von Transpositionen $+1$. Also gilt die Gleichung für die Ebenenspiegelungen und somit für ganz $\text{Sym}(D)$. Somit liegen nur Elemente von A_5 im Bild von φ_* . $\square$

Für eine geeignete Permutationsdarstellung schränken wir also einerseits wegen Lemma 5.3.2 die Wertemenge der Abbildung φ_+ auf die alternierende Gruppe A_5 ein. Andererseits schränken wir wegen Lemma 5.3.1 bei dieser Abbildung auch die Definitionsmenge auf $\text{Sym}_+(D)$ ein, weil die Punktspiegelung $-E_3$ nicht in $\text{Sym}_+(D)$ liegt und $\text{Sym}_+(D)$ auch wie A_5 genau 60 Elemente hat. Nun überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 5.3.3. (Permutationsdarstellung der Dodekaedergruppen - Teil 1). [8, S. 95-98] [12, S. 475] [22, S. 135-136] [1, S. 39-40] *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_+ : \text{Sym}_+(D) &\rightarrow A_5 \\ g &\mapsto w^{-1} \circ g|_W \circ w \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Drehgruppe des Dodekaeders ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_5 .

Beweis. Die Abbildung φ_+ ist als Einschränkung von φ_* immer noch ein Homomorphismus. Nun bleibt noch die Bijektivität von φ_+ nachzuweisen. Wegen $\text{ord}(\text{Sym}_+(D)) = 60 = \text{ord}(A_5)$ würde es dafür eigentlich wieder genügen, nur entweder die Injektivität oder die Surjektivität von φ_+ zu überprüfen. Wir zeigen jedoch trotzdem analog zur Vorgehensweise bei Tetraeder und Würfel wieder beides, um ein besseres Verständnis von φ_+ zu erlangen. Aus Lemma 5.3.1 folgt direkt, dass nur $E_3 \in SO_3$ alle eingeschriebenen Würfel invariant lässt. Somit ist φ_+ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv. Da nach Lemma 5.3.2 tatsächlich nur Elemente von A_5 im Bild von φ_+ liegen und A_5 nach Lemma 2.4.8 von den Dreierzyklen erzeugt wird, genügt es für den Nachweis der Surjektivität von φ_+ , jeden Dreierzyklus durch ein Element aus $\text{Sym}_+(D)$ darzustellen.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Wir betrachten dazu die Drehungen γ an den zehn Drehachsen vom Typ c um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ und γ^2 an diesen Achsen um den Winkel $\frac{4\pi}{3}$. Dafür nehmen wir Abbildung 5.7 zu Typ c zu Hilfe und folgen eng der geometrischen Argumentation in [8, S. 97]. In dieser Abbildung sind zehn der 20 Ecken des Dodekaeders dargestellt, wobei jede genau einem Punkt einer der zehn Drehachsen entspricht. Wir erkennen somit, dass an jeder Dodekaederecke (z.B. der rot markierte Punkt) zwei Würfecken zusammenfallen (hier: Würfel 1 und 3). Da diese beiden Würfel beide auf der gemeinsamen Drehachse liegenden Ecken des Dodekaeders gemeinsam haben, bleiben sie bei den Drehungen an dieser Achse invariant, während die anderen drei Würfel entsprechend permutiert werden (hier: (2,5,4) bei Drehung um $\frac{2\pi}{3}$ und (2,4,5) bei Drehung um $\frac{4\pi}{3}$). Da in der Abbildung erkennbar ist, dass zu verschiedenen Ecken verschiedene Paare von Würfeln gehören und wir von jeder Achse wiederum zwei Dreierzyklen bekommen, erhalten wir so alle $2 \cdot \binom{5}{3} = 20$ Dreierzyklen von A_5 im Bild von φ_+ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. Somit ist φ_+ ein bijektiver Homomorphismus, d. h. ein Isomorphismus. $\square$

Im Übergang zur (vollen) Symmetriegruppe des Dodekaeders $\text{Sym}(D)$ stoßen wir nun erneut auf das Problem, dass die Abbildung $\varphi_{**} : \text{Sym}(D) \rightarrow A_5$ schon alleine wegen Lemma 5.3.1 nicht injektiv sein kann. Die Abbildung φ_{**} ist jedoch als Einschränkung von φ_* ein Homomorphismus und weil auch die Determinante $\det : \text{Sym}(D) \rightarrow \{+1, -1\}$ ein Homomorphismus ist, gibt es analog zur Vorgehensweise beim Würfel wieder nach dem Satz über das äußere direkte Produkt 2.2.4 (iii) genau einen Homomorphismus in das direkte Produkt dieser beiden Gruppen, d. h. $\varphi : \text{Sym}(D) \rightarrow A_5 \times Z_2$ mit $\varphi(g) = (\varphi_{**}(g), \det(g))$ ist ein Homomorphismus. Wegen $\text{ord}(A_5 \times Z_2) = 60 \cdot 2 = 120 = \text{ord}(\text{Sym}(D))$ ist folgendes Resultat bereits naheliegend:

Theorem 5.3.4. (Permutationsdarstellung der Dodekaedergruppen - Teil 2). [8, S. 95-98]
Die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \text{Sym}(D) &\rightarrow A_5 \times Z_2 \\ g &\mapsto (\varphi_{**}(g), \det(g))\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, d. h. die Gruppe (aller) Symmetrien des Dodekaeders ist isomorph zum äußeren direkten Produkt der alternierenden Gruppe A_5 und der zyklischen Gruppe Z_2 .

Beweis. Wir haben uns bereits davon überzeugt, dass φ nach dem Satz über das äußere direkte Produkt 2.2.4 (iii) ein Homomorphismus ist. Damit $g \in \text{Ker}(\varphi)$ muss $\varphi(g) = (\text{Id}, +1)$ gelten. Nach Lemma 5.3.1 folgt aus $\varphi_*(g) = \text{Id}$, dass $g = \pm E_3$. Wegen $\det(g) = +1$ erhalten wir daraus $\text{Ker } \varphi = \{E_3\}$. Somit ist φ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv.¹⁴ Nun zeigen wir auch noch, dass φ surjektiv ist. Nach dem ersten Teil des Satzes erhalten wir durch die Elemente von $\text{Sym}_+(D)$ in der ersten

¹⁴Wegen $\text{ord}(\text{Sym}(D)) = 120 = \text{ord}(A_5 \times Z_2)$ würde dies eigentlich schon genügen, um auf die Bijektivität von φ zu schließen. Zum Zweck des Erlangens eines besseren Verständnisses von φ zeigen wir jedoch trotzdem auch noch ihre Surjektivität.

5.3 Symmetrien von Dodekaeder und Ikosaeder

Komponente von φ alle Elemente von A_5 , wobei wegen $\text{Sym}_+(D) = \text{Sym}(D) \cap SO_3$ in der zweiten Komponente für die Determinante immer $+1$ steht. Wegen

$$O_3 = SO_3 \cup SO_3 \cdot (-E_3)$$

gilt

$$\text{Sym}(D) = \text{Sym}_+(D) \cup \text{Sym}_+(D) \cdot (-E_3),$$

d. h. jedes orientierungsumkehrende Element $g \in \text{Sym}(D) \setminus \text{Sym}_+(D)$ lässt sich analog zur Vorgehensweise beim Würfel wieder darstellen als Produkt eines Elements $g_+ \in \text{Sym}_+(W)$ und der Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$. Wegen $-E_3 \in \text{Ker}(\varphi_{**})$ nach Lemma 5.3.1 und weil φ ein Homomorphismus ist, erhalten wir somit

$$\varphi(g) = \varphi(g_+ \cdot (-E_3)) = \varphi(g_+) \cdot \varphi(-E_3) = (\varphi_{**}(g_+), +1) \cdot (\text{Id}, -1) = (\varphi_{**}(g_+), -1),$$

d. h. durch die orientierungsumkehrenden Elemente von $\text{Sym}(D)$ erhalten wir also in der ersten Komponente von φ wieder alle Element von A_5 , jedoch steht diesmal in der zweiten Komponente immer -1 . $\square$

Um nun auch noch eine vollständige explizite Beschreibung der Symmetriegruppen des Dodekaeders zu erhalten, überlegen wir uns zuerst exemplarisch anhand von Abbildung 5.7, welche Permutationen sich durch die dort dargestellten Lagen der Drehachsen (Durchstoßpunkte rot eingezeichnet) ergeben, siehe Tabelle 5.4. Dabei betrachten wir für die Spiegelung exemplarisch Abbildung 5.5. Mithilfe der Rechenregeln für das Signum aus Lemma 2.4.5 überprüfen wir auch gleich das positive Signum der auftretenden Permutationen.

Da die Zyklenstruktur unabhängig von der gewählten Achse ist [8, S. 97], machen wir die Beobachtung, dass wir durch die Drehungen α^n , $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, die Fünferzyklen von A_5 , durch die Drehungen β die Produkte von Transpositionen und durch die Drehungen γ und γ^2 die Dreierzyklen erhalten. Die Ebenenspiegelungen ergeben erneut die Produkte von Transpositionen. Bei der Gesamtbilanz beschränken wir uns also auf $\text{Sym}_+(D)$, weil sich bei den Drehspiegelungen nur das Vorzeichen der Determinante ändert. Da es insgesamt sechs Drehachsen vom Typ a, 15 vom Typ b und 10 vom Typ c gibt, können wir bereits alle Elemente von A_5 explizit zuordnen und stellen unsere Erkenntnisse zusammengefasst in Tabelle 5.5 dar. Zusätzlich ergänzen wir dabei auch gleich wieder mithilfe der Rechenregeln für Zyklen aus Lemma 2.4.2 (iii) jeweils die Ordnung der Elemente von A_5 und geben zum Zweck der Vollständigkeit auch erneut deren positives Signum an.

5 Symmetriegruppen der Platonischen Körper

Bezeichnung	Drehwinkel	Permutation	Signum
Drehung α	$\frac{2\pi}{5}$	(12345)	+
Drehung α^2	$\frac{4\pi}{5}$	(13524)	+
Drehung α^3	$\frac{6\pi}{5}$	(14253)	+
Drehung α^4	$\frac{8\pi}{5}$	(15432)	+
Drehung β	π	(15) $\circ$ (34)	+
Drehung γ	$\frac{2\pi}{3}$	(254)	+
Drehung γ^2	$\frac{4\pi}{3}$	(245)	+
Spiegelung	—	(25) $\circ$ (34)	+

Tabelle 5.4: Explizite Beschreibung der in Abbildung 5.7 bzw. Abbildung 5.5 dargestellten Symmetrien des Dodekaeders [8, S. 96-97].

Elemente von $\text{Sym}_+(D)$	Elemente von A_5	Anzahl	Ordnung	Signum
E_3	Id	1	1	+
Drehungen γ und γ^2 (Anzahl der Achsen: 10)	(123), (124), (125), (132), (134), (135), (142), (143), (145), (152), (153), (154), (234), (235), (243), (245), (253), (254), (345), (354)	20	3	+
Drehungen β (Anzahl der Achsen: 15)	(12) $\circ$ (34), (12) $\circ$ (35), (12) $\circ$ (45), (13) $\circ$ (24), (13) $\circ$ (25), (13) $\circ$ (45), (14) $\circ$ (23), (14) $\circ$ (25), (14) $\circ$ (35), (15) $\circ$ (23), (15) $\circ$ (24), (15) $\circ$ (34), (23) $\circ$ (45), (24) $\circ$ (35), (25) $\circ$ (34)	15	2	+
Drehungen α^n , $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ (Anzahl der Achsen: 6)	(12345), (12354), (12435), (12453), (12534), (12543), (13245), (13254), (13425), (13452), (13524), (13542), (14235), (14253), (14325), (14352), (14523), (14532), (15234), (15243), (15324), (15342), (15423), (15432)	24	5	+
Summe		60		

Tabelle 5.5: Explizite Beschreibung der 60 Drehsymmetrien des Dodekaeders [8, S. 98].

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

In Kapitel 4.2 haben wir die Archimedischen Körper ausgehend von den Platonischen Körpern konstruiert, indem wir die neuen Eckpunkte auf den Kanten (Entecken) bzw. Seitenflächen (Entecken und Entkanten) basierend auf der Ermittlung entsprechender Teilungsverhältnisse auf den Kanten festgelegt haben. Neben dem Sonderfall des Pseudorhombenkuboktaeders stellen nur die beiden “schiefen” Archimedischen Körper Cubus Simus und Dodecaedron Simum eine Ausnahme davon dar und konnten ausgehend von ihren Platonischen Stammkörpern nur durch das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades gefunden werden. In diesem Kapitel stellen wir uns nun die Frage, inwiefern unsere Konstruktionen mit den Symmetrien der Platonischen Ausgangskörper verträglich sind bzw. welche Symmetrien jeweils auf den neu entstandenen Archimedischen Körper übertragen werden. Weiters untersuchen wir auch, ob das neu entstandene Objekt vielleicht noch weitere Symmetrien aufweist, die nicht vom seinem Ausgangskörper abstammen, um schließlich eine Beschreibung der Symmetriegruppen aller Archimedischen Körper zu erhalten. Außerdem untersuchen wir jeweils die Transitivität der Symmetriegruppe auf der Menge der Ecken, um festzustellen, welche der (lokal definierten) Archimedischen Körper auch das globale Kriterium erfüllen und somit als uniforme Polyeder bezeichnet werden können.¹

Wir gliedern unser Kapitel dabei nach der Abstammung vom Tetraeder, Würfel und Dodekaeder, da wir die Symmetriegruppen in Kapitel 5 ausgehend von diesen Körpern beschrieben haben. In weiser Voraussicht haben wir auch bei der Auswahl der Konstruktionen für Kapitel 4.2 bereits darauf geachtet, wenn möglich von diesen und nicht ihren entsprechenden Dualkörpern auszugehen.² Wir wenden dabei unser aus der bisherigen Arbeit erlerntes Wissen an und kontrollieren unsere Ergebnisse mithilfe der Übersichtstabellen in [13].³

¹Für die Archimedischen Körper folgt bereits aus dem lokalen Kriterium, dass bei ihnen keine Transitivität der Symmetriegruppe auf den verschiedenartigen Flächen bzw. Kanten gegeben sein kann. Betrachten wir beispielsweise den Hexaederstumpf, kann es offensichtlich keine Symmetrie geben, die ein Dreieck in ein Achteck überführt. Dasselbe gilt für eine Kante zwischen zwei Achtecken und eine Kante zwischen einem Achteck und einem Dreieck.

²Nur den Oktaederstumpf und den Ikosaederstumpf haben wir aus Gründen der Einfachheit ausgehend von Oktaeder bzw. Ikosaeder konstruiert.

³In Tabelle II sind dort die (vollen) Symmetriegruppen der (konvexen) uniformen Polyeder gelistet. Der Eintrag 37 in Tabelle III beinhaltet jene des Pseudorhombenkuboktaeders (“elongated square gyrobicupola”). Die dort verwendete Notation für die Symmetriegruppen ist auf S. 180 erklärt.

6.1 Abstammung vom Tetraeder

Nur der Tetraederstumpf mit der Eckensequenz $(3, 6, 6)$ stammt vom zu sich selbst dualen Tetraeder ab. Wir bezeichnen diesen im Folgenden mit $A_{(3,6,6)}$. Bei seiner Konstruktion durch Entecken entstehen auf den vier Seitenflächen des Tetraeders kongruente reguläre Sechsecke und unter seinen vier Ecken kommen kongruente gleichseitige Dreiecke zum Vorschein, siehe Abbildung 6.1.

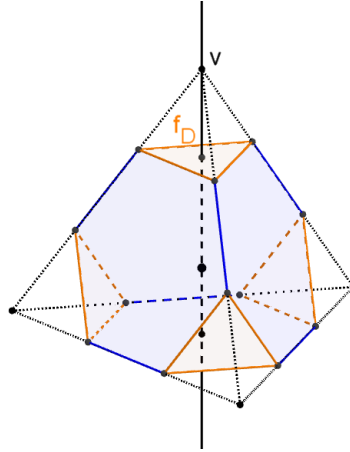


Abbildung 6.1: Tetraederstumpf: Konstruktion ausgehend vom Tetraeder durch Entecken. Eigene Darstellung.

Um die Ecken von $A_{(3,6,6)}$ auf den Kanten des Tetraeders zu erhalten, werden diese im Verhältnis $1 : 1 : 1$ geteilt. Die Menge dieser Teilungspunkte bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_{(3,6,6)}$. Da diese genau der Menge seiner Eckpunkte $V(A_{(3,6,6)})$ entspricht, können wir $A_{(3,6,6)}$ nach dem Fundamentalsatz über Polyeder 2.6.3 (ii) als konvexe Hülle von $\mathcal{T}_{(3,6,6)}$ auffassen, d. h.

$$A_{(3,6,6)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,6,6)}).$$

Die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,6,6)}$ bezeichnen wir mit $\text{Sym}(A_{(3,6,6)})$ und die Drehgruppe mit $\text{Sym}_+(A_{(3,6,6)})$. Es liegt die Vermutung nahe, dass diese Symmetriegruppen mit jenen des Tetraeders übereinstimmen. Wir überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.1.1. (Symmetriegruppen des Tetraederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,6,6)}$ stimmen mit jenen des Tetraeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} \text{Sym}(A_{(3,6,6)}) &= \text{Sym}(T) \quad \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,6,6)}) &= \text{Sym}_+(T). \end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,6,6)}) = \mathcal{T}_{(3,6,6)}$, d. h. $A_{(3,6,6)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Um dies nachzuweisen, zeigen wir zunächst, dass die Symmetrien des Tetraeders bei der Konstruktion aus Kapitel 4.2.1 auf $A_{(3,6,6)}$ übertragen werden. Diese basiert darauf, dass die Kanten des Tetraeders im Verhältnis $1 : 1 : 1$ geteilt werden. Wir betrachten also eine (orientierte) Kante $\overline{AB}$, die von $T_1 \in \mathcal{T}_{(3,6,6)}$ im Verhältnis $1 : 2$ und von $T_2 \in \mathcal{T}_{(3,6,6)}$ im Verhältnis $2 : 1$ geteilt wird. Ein $f \in \text{Sym}(T)$ bildet $A, B \in V(T)$ nach Lemma 2.6.5 auf $f(A), f(B) \in V(T)$ ab und weiters auch die (orientierte) Kante $\overline{AB}$ auf die (orientierte) Kante $\overline{f(A)f(B)}$. Somit werden wegen Lemma 2.5.3 auch die Teilungspunkte $T_1, T_2 \in \overline{AB}$ auf die Bildpunkte $f(T_1), f(T_2) \in \overline{f(A)f(B)}$ abgebildet. Wegen Lemma 2.5.5 folgt, dass auch die (orientierte) Kante $\overline{f(A)f(B)}$ von $f(T_1)$ im Verhältnis $1 : 2$ und von $f(T_2)$ im Verhältnis $2 : 1$ geteilt wird. Also teilen auch $f(T_1), f(T_2)$ die Kante $\overline{f(A)f(B)}$ im Verhältnis $1 : 1 : 1$ und es gilt $f(T_1), f(T_2) \in \mathcal{T}_{(3,6,6)}$. Somit bleibt die Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,6,6)}$ unter $\text{Sym}(T)$ invariant und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,6,6)})$. Also gilt $\text{Sym}(T) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,6,6)}) =: G$. Gehen wir auf beiden Seiten dieser Inklusion zu den Untergruppen mit Determinante $+1$ über, erhalten wir daraus direkt $\text{Sym}_+(T) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,6,6)}) =: G_+$.

Nun verwenden wir diese vom Tetraeder abstammenden Symmetrien, um jeweils die Gleichheit der beiden Gruppen durch ein Abzählargument nachzuweisen. Dafür steht uns wieder das Bahn-Lemma 2.3.3 zur Verfügung. Da $\text{Sym}_+(T)$ transitiv auf der Menge der vier Ecken des Tetraeders operiert, wirkt $\text{Sym}_+(T)$ transitiv auf der Menge der vier Dreiecksflächen von $A_{(3,6,6)}$. Die Bahn einer Dreiecksfläche f_3 von $A_{(3,6,6)}$ umfasst seine vier derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_3) = \text{ord } G(f_3) = 4$. Ihre Stabilisatorgruppe besteht höchstens aus den drei Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ am Mittelpunkt des Dreiecks. Da eine Drehachse vom Typ a des Tetraeders durch den Mittelpunkt des Dreiecks verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(T)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_3) = 3$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_3)) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,6,6)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die Spiegelungen an den drei Höhen der Dreiecksfläche dazu. Da diese genau von den drei entsprechenden Ebenenspiegelungen des Tetraeders kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_3)) = 4 \cdot 6 = 24.$$

Alternativ hätten wir auch verwenden können, dass $\text{Sym}_+(T)$ wegen ihrer Transitivität auf der Menge der vier Flächen des Tetraeders transitiv auf der Menge der vier Sechsecksflächen von $A_{(3,6,6)}$ wirkt. Die Bahn einer Sechsecksfläche f_6 von $A_{(3,6,6)}$ umfasst seine vier derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_6) = \text{ord } G(f_6) = 4$. Da an jede Sechsecksfläche alternierend Dreiecke abwechselnd mit Sechsecken angrenzen, besteht ihre Stabilisatorgruppe höchstens aus jeder zweiten der sechs Drehungen um $\frac{\pi}{3}$ am Mittelpunkt des Sechsecks, bei der eine Kante zwischen Sechseck und Dreieck wieder auf eine derartige Kante abgebildet wird (und ebenso für eine Kante zwischen zwei Sechsecken). Da eine Drehachse vom Typ a des Tetraeders durch den Mittelpunkt des Sechsecks verläuft, kommt tatsächlich jede zweite dieser Drehungen von $\text{Sym}_+(T)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_6) = \frac{6}{2} = 3$. Damit

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

erhalten wir erneut $\text{ord}(G_+) = 12$. Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,6,6)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die Spiegelungen an den drei Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte der Sechsecksflächen dazu, da durch die Spiegelungen an den drei an Achsen durch gegenüberliegenden Ecken verschiedenartige Kanten vertauscht werden. Da diese genau von den drei entsprechenden Ebenenspiegelungen des Tetraeders kommen, erhalten wir erneut $\text{ord}(G) = 24$.

Aufgrund der jeweiligen Gleichheit ihrer Ordnungen stimmen die entsprechenden Symmetriegruppen bereits wie behauptet überein. Zudem überzeugen wir uns noch davon, dass diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,6,6)}) = \mathcal{T}_{(3,6,6)}$ wirken. Wie wir bereits festgestellt haben, folgt die Transitivität von $\text{Sym}_+(T)$ auf der Menge der vier Dreiecksflächen von $A_{(3,6,6)}$ aus ihrer Transitivität auf der Menge der vier Ecken des Tetraeders. Somit erreichen wir bereits alle Dreiecksflächen. Nun konzentrieren wir uns auf eine Dreiecksfläche f_3 von $A_{(3,6,6)}$ und betrachten die dazugehörige Tetraederecke $v \in V(T)$, siehe Abbildung 6.1. Da $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(T)}(v)$ (enthält die drei Drehungen an der durch v verlaufenden Achse vom Typ a) transitiv auf den drei von v ausgehenden Kanten wirkt, wirkt diese Stabilisatorgruppe auch transitiv auf den drei Ecken von f_3 . Somit bilden sogar schon unter G_+ alle Ecken von $A_{(3,6,6)}$ nur eine Bahn. $\square$

6.2 Abstammung vom Würfel

Vom Würfel stammen insgesamt sieben Archimedische Körper ab: Hexaederstumpf, Kuboktaeder, Oktaederstumpf, Rhombenkuboktaeder, Pseudorhombenkuboktaeder, Kuboktaederstumpf und Cubus Simus. Wir gliedern dieses Unterkapitel nach unserer Vorgehensweise bei der Konstruktion ihrer Eckpunkte auf den Kanten (Entecken) bzw. Seitenflächen (Entecken und Entkanten) des Würfels. Die Sonderfälle Pseudorhombenkuboktaeder und Cubus Simus behandeln wir gesondert. Unsere Notationen rund um diese Archimedischen Körper wählen wir dabei analog zum Tetraederstumpf $A_{(3,6,6)}$.

6.2.1 Durch Entecken

Durch Entecken stammen vom Würfel der Hexaederstumpf, der Kuboktaeder und der Oktaederstumpf ab. Bei der Untersuchung ihrer Symmetriegruppen gehen wir wie beim Tetraederstumpf $A_{(3,6,6)}$ vor, da auch dieser durch Entecken konstruiert wird. Es liegt wieder die Vermutung nahe, dass ihre Symmetriegruppen mit jenen des Würfels übereinstimmen. Wir beginnen mit dem Hexaederstumpf $A_{(3,8,8)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,8,8)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.1. (Symmetriegruppen des Hexaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,8,8)}$ stimmen mit jenen des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} \text{Sym}(A_{(3,8,8)}) &= \text{Sym}(W) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,8,8)}) &= \text{Sym}_+(W). \end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,8,8)}) = \mathcal{T}_{(3,8,8)}$, d. h. $A_{(3,8,8)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Wie bei $A_{(3,6,6)}$ folgt mithilfe der Lemmata 2.5.3 und 2.5.5, dass unter $\text{Sym}(W)$ die durch das Teilungsverhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$ festgelegte Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,8,8)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,8,8)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,8,8)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,8,8)}) =: G_+$.

Nun verwenden wir diese vom Würfel abstammenden Symmetrien, um wieder mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 jeweils die Gleichheit der beiden Gruppen nachzuweisen. Da $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der acht Ecken des Würfels operiert, wirkt $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der acht Dreiecksflächen von $A_{(3,8,8)}$. Die Bahn einer Dreiecksfläche f_3 von $A_{(3,8,8)}$ umfasst seine acht derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_3) = \text{ord } G(f_3) = 8$. Ihre Stabilisatorgruppe besteht höchstens aus den drei Drehungen um $\frac{2\pi}{3}$ am Mittelpunkt des Dreiecks. Da die Drehachse vom Typ c des Würfels durch den Mittelpunkt des Dreiecks verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(W)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_3) = 3$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_3)) = 8 \cdot 3 = 24.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,8,8)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die Spiegelungen an den drei Höhen der Dreiecksfläche dazu. Da diese genau von den drei entsprechenden Ebenenspiegelungen vom Typ t des Würfels kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_3)) = 8 \cdot 6 = 48.$$

Aufgrund der jeweiligen Gleichheit ihrer Ordnungen stimmen die entsprechenden Symmetriegruppen bereits wie behauptet überein. Zudem überzeugen wir uns noch davon, dass diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,8,8)}) = \mathcal{T}_{(3,8,8)}$ wirken. Wie wir bereits festgestellt haben, folgt die Transitivität von $\text{Sym}_+(W)$ auf der Menge der acht Dreiecksflächen von $A_{(3,8,8)}$ aus ihrer Transitivität auf der Menge der acht Ecken des Würfels. Somit erreichen wir bereits alle Dreiecksflächen. Nun konzentrieren wir uns auf eine Dreiecksfläche f_3 von $A_{(3,8,8)}$ und betrachten die dazugehörige Würfecke $v \in V(W)$. Da $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(W)}(v)$ (enthält die drei Drehungen an der durch v verlaufenden Achse vom Typ c) transitiv auf den drei von v ausgehenden Kanten wirkt, wirkt diese Stabilisatorgruppe auch transitiv auf den drei Ecken von f_3 . Somit bilden sogar schon unter G_+ alle Ecken von $A_{(3,8,8)}$ nur eine Bahn. $\square$

Nun widmen wir uns dem Kuboktaeder $A_{(3,4,3,4)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,4,3,4)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.2. (Symmetriegruppen des Kuboktaeders). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,4,3,4)}$ stimmen mit jenen des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} \text{Sym}(A_{(3,4,3,4)}) &= \text{Sym}(W) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,4,3,4)}) &= \text{Sym}_+(W). \end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,4,3,4)}) = \mathcal{T}_{(3,4,3,4)}$, d. h. $A_{(3,4,3,4)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

Beweis. Mit dem einzigen Unterschied, dass auf jeder Kante des Würfels nur ein Teilungspunkt im Verhältnis 1 : 1 konstruiert wird, folgt erneut wie bei $A_{(3,6,6)}$ mithilfe der Lemmata 2.5.3 und 2.5.5, dass unter $\text{Sym}(W)$ die Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,4,3,4)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,4,3,4)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,4,3,4)})$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,4,3,4)})$. Die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen folgt mit genau denselben Abzählargumenten mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 wie bei $A_{(3,8,8)}$. Bei der Konstruktion von $A_{(3,4,3,4)}$ entstehen unter den acht Ecken des Würfels nämlich ebenso acht Dreiecksflächen, wobei eine Dreiecksfläche sowohl dieselbe Bahn als auch dieselben Stabilisatorgruppen aufweist wie bei $A_{(3,8,8)}$. Auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(3,4,3,4)}) = \mathcal{T}_{(3,4,3,4)}$ folgt deshalb mit demselben Argument wie bei $A_{(3,8,8)}$. $\square$

Schließlich kommen wir noch zum Oktaederstumpf $A_{(4,6,6)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(4,6,6)})$, den wir in Kapitel 4.2.1 aus Gründen der Einfachheit ausgehend vom Oktaeder konstruiert haben. Da wir jedoch in Kapitel 5.2 festgestellt haben, dass Würfel und Oktaeder als Dualkörper dieselben Symmetriegruppen aufweisen, überzeugen wir uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.3. (Symmetriegruppen des Oktaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(4,6,6)}$ stimmen mit jenen des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(4,6,6)}) &= \text{Sym}(W) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(4,6,6)}) &= \text{Sym}_+(W).\end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(4,6,6)}) = \mathcal{T}_{(4,6,6)}$, d. h. $A_{(4,6,6)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Da Oktaeder und Würfel als Dualkörper dieselben Symmetriegruppen aufweisen, folgt auch hier wie bei $A_{(3,6,6)}$ mithilfe der Lemmata 2.5.3 und 2.5.5, dass unter $\text{Sym}(W)$ die durch das Teilungsverhältnis 1 : 1 : 1 festgelegte Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(4,6,6)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(4,6,6)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(4,6,6)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(4,6,6)}) =: G_+$.

Nun verwenden wir diese vom Würfel abstammenden Symmetrien, um wieder mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 jeweils die Gleichheit der beiden Gruppen nachzuweisen. Da beim bilden des Dualkörpers die Rollen von Flächen und Ecken vertauscht werden, entsprechen den Flächenmittelpunkten des Würfels die Ecken des Oktaeders. Da $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Flächen des Würfels und somit auf der Menge der sechs Ecken des Oktaeders operiert, wirkt $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Quadratflächen von $A_{(4,6,6)}$. Die Bahn einer Quadratfläche f_4 von $A_{(4,6,6)}$ umfasst seine sechs derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_4) = \text{ord } G(f_4) = 6$. Ihre Stabilisatorgruppe besteht höchstens aus den vier Drehungen um $\frac{\pi}{2}$ am Mittelpunkt des Quadrats. Da eine Drehachse vom Typ a des Würfels durch den Mittelpunkt des Quadrats verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(W)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4) = 4$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_4)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(4,6,6)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die zwei Spiegelungen an den drei Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte des Quadrats und die zwei Spiegelungen an den drei Achsen durch gegenüberliegende Ecken des Quadrats dazu. Da diese genau von den jeweils zwei entsprechenden Ebenenspiegelungen vom Typ s und Typ t des Würfels kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_3)) = 6 \cdot 8 = 48.$$

Somit stimmen die entsprechenden Symmetriegruppen bereits wie behauptet überein. Zudem überzeugen wir uns noch davon, dass diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(4,6,6)}) = \mathcal{T}_{(4,6,6)}$ wirken. Wie wir bereits festgestellt haben, folgt die Transitivität von $\text{Sym}_+(W)$ auf der Menge der sechs Quadratflächen von $A_{(4,6,6)}$ aus ihrer Transitivität auf der Menge der sechs Ecken des Oktaeders. Somit erreichen wir bereits alle Quadratflächen. Nun konzentrieren wir uns auf eine Quadratfläche f_4 von $A_{(4,6,6)}$ und betrachten die dazugehörige Oktaederecke $v \in V(O)$. Da $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(W)}(v)$ (enthält die vier Drehungen um $\frac{\pi}{2}$ an der durch v verlaufenden Achse vom Typ a des Würfels) transitiv auf den vier von v ausgehenden Kanten wirkt, wirkt diese Stabilisatorgruppe auch transitiv auf den vier Ecken von f_4 . Somit bilden sogar schon unter G_+ alle Ecken von $A_{(4,6,6)}$ nur eine Bahn. $\square$

6.2.2 Durch Entecken und Entkanten

Durch Entecken und Entkanten stammen vom Würfel der Rhombenkuboktaeder $A_{(3,4,4,4)}$ und der Kuboktaederstumpf $A_{(4,6,8)}$ ab. Die Ecken dieser Körper erhalten wir nicht wie beim ausschließlichen Entecken auf den Kanten des Ausgangskörpers, sondern auf dessen Seitenflächen. Dazu werden zusätzlich Parallelen zu den ursprünglichen Kanten gezogen und deren Schnittpunkte ermittelt. Bei $A_{(3,4,4,4)}$ entspricht die dadurch entstehende Schnittpunktmenge $\mathcal{S}_{(3,4,4,4)}$ bereits seiner Eckpunktmenge, siehe Abbildung 4.6. Es gilt also

$$\mathcal{S}_{(3,4,4,4)} = V(A_{(3,4,4,4)}).$$

Bei $A_{(4,6,8)}$ handelt es sich bei der dadurch entstehenden Schnittpunktmenge $\mathcal{S}_{(4,6,8)}$ dahingegen um eine Obermenge seiner Eckpunktmenge, d. h. $\mathcal{S}_{(4,6,8)} \supseteq V(A_{(4,6,8)})$. Wählen wir daraus jedoch jene Schnittpunkte aus, die nicht auf den Diagonalen des Quadrats liegen, erhalten wir genau jene Teilmenge $\mathcal{S}_{(4,6,8)}^*$, die der Menge der Eckpunkte von $A_{(4,6,8)}$ entspricht, siehe Abbildung 4.10. Es gilt also

$$\mathcal{S}_{(4,6,8)}^* = V(A_{(4,6,8)}).$$

Es liegt wieder die Vermutung nahe, dass die Symmetriegruppen dieser Archimedischen Körper mit jenen des Würfels übereinstimmen. Wir beginnen mit dem Rhombenkuboktaeder $A_{(3,4,4,4)} = \text{Conv}(\mathcal{S}_{(3,4,4,4)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.4. (Symmetriegruppen des Rhombenkuboktaeders). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,4,4,4)}$ stimmen mit jenen des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(3,4,4,4)}) &= \text{Sym}(W) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,4,4,4)}) &= \text{Sym}_+(W).\end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,4,4,4)}) = \mathcal{S}_{(3,4,4,4)}$, d. h. $A_{(3,4,4,4)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Wie bei $A_{(3,6,6)}$ folgt mithilfe der Lemmata 2.5.3 und 2.5.5, dass unter $\text{Sym}(W)$ die durch das Teilungsverhältnis $1 : \sqrt{2} : 1$ festgelegte Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,4,4,4)}$ auf den Kanten des Würfels invariant bleibt. Um nun auf einer Seitenfläche des Würfels die Ecken von $A_{(3,4,4,4)}$ zu erhalten, werden durch diese Teilungspunkte Parallelen zu den Kanten des Ausgangskörpers gezogen und deren Schnittpunkte ermittelt. Nach Korollar 2.5.4 werden diese jedoch wieder auf entsprechende Parallelen mit entsprechenden Schnittpunkten abgebildet. Somit bleibt die Menge dieser Schnittpunkte $\mathcal{S}_{(3,4,4,4)}$ unter $\text{Sym}(W)$ invariant und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{S}_{(3,4,4,4)})$. Also gilt $\text{Sym}(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,4,4,4)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,4,4,4)}) =: G_+$.

Nun verwenden wir diese vom Würfel abstammenden Symmetrien, um wieder mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 jeweils die Gleichheit der beiden Gruppen nachzuweisen. Da $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Flächen des Würfels operiert, wirkt $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge jener sechs Quadratflächen von $A_{(3,4,4,4)}$, die auf den ursprünglichen Würfel Flächen entstanden sind.⁴ Die Bahn einer derartigen Quadratfläche f_4 von $A_{(3,4,4,4)}$ umfasst seine sechs derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_4) = \text{ord } G(f_4) = 6$. Ihre Stabilisatorgruppe besteht höchstens aus den vier Drehungen um $\frac{\pi}{2}$ am Mittelpunkt des Quadrats. Da eine Drehachse vom Typ a des Würfels durch den Mittelpunkt dieses Quadrats verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(W)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4) = 4$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_4)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,4,4,4)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die Spiegelungen an den zwei Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte des Quadrats und die Spiegelungen an den zwei Achsen durch gegenüberliegende Ecken des Quadrats dazu. Da diese genau von den jeweils zwei entsprechenden Ebenenspiegelungen vom Typ s und Typ t des Würfels kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_4)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_4)) = 6 \cdot 8 = 48.$$

Aufgrund der jeweiligen Gleichheit ihrer Ordnungen stimmen die entsprechenden Symmetriegruppen bereits wie behauptet überein. Zudem überzeugen wir uns noch davon, dass diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,4,4,4)}) = \mathcal{S}_{(3,4,4,4)}$ wirken. Hierzu

⁴Es handelt sich hierbei um die in Abbildung 4.6 blau markierte Quadrate.

müssen wir anders argumentieren als bei den bisher behandelten Körpern. Wie wir bereits festgestellt haben, folgt die Transitivität von $\text{Sym}_+(W)$ auf der Menge der sechs Quadratflächen von $A_{(3,4,4,4)}$, die auf den ursprünglichen Würfel­flächen entstanden sind, aus ihrer Transitivität auf der Menge der sechs Flächen des Würfels. Somit erreichen wir bereits alle derartigen Quadratflächen. Nun konzentrieren wir uns auf eine derartige Quadratfläche f_4 von $A_{(3,4,4,4)}$ und betrachten die dazugehörige Würfel­fläche f . Da die Mittelpunkte dieser beiden Quadrate übereinstimmen und ihre Seiten entsprechend parallel sind, wirkt $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(W)}(f)$ (enthält die vier Drehungen an der durch den gemeinsamen Mittelpunkt verlaufenden Achse vom Typ a) neben ihrer Transitivität auf den vier Ecken von f auch transitiv auf den vier Ecken von f_4 . Somit bilden sogar schon unter G_+ alle Ecken von $A_{(3,4,4,4)}$ nur eine Bahn. $\square$

Nun widmen wir uns dem Kuboktaederstumpf $A_{(4,6,8)} = \text{Conv}(\mathcal{S}_{(4,6,8)}^*)$. Wir haben bereits die Besonderheit festgestellt, dass es sich bei der Menge der im Zuge der Konstruktion entstehenden Schnittpunkte auf den Seitenflächen des Würfels um eine Obermenge der Eckpunkte des neuen Objekts handelt. Im Zuge des anstehenden Beweises werden wir eine weitere Besonderheit beobachten, nämlich dass bei $A_{(4,6,8)}$ im Unterschied zu allen bisher betrachteten Körpern nur seine volle Symmetriegruppe $\text{Sym}(A_{(4,6,8)})$ transitiv auf der Menge seiner Ecken wirkt, wohingegen diese unter der Wirkung seiner Drehgruppe $\text{Sym}_+(A_{(4,6,8)})$ in zwei Bahnen zerfällt. Hinsichtlich der Erfüllung des globalen Kriteriums spielt dies jedoch keine Rolle, weil dieses ohnehin die (volle) Symmetriegruppe verwendet. Wir überzeugen uns also von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.5. (Symmetriegruppen des Kuboktaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(4,6,8)}$ stimmen mit jenen des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(4,6,8)}) &= \text{Sym}(W) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(4,6,8)}) &= \text{Sym}_+(W).\end{aligned}$$

Zudem zerfällt $V(A_{(4,6,8)}) = \mathcal{S}_{(4,6,8)}^*$ unter der Wirkung von $\text{Sym}_+(A_{(4,6,8)})$ in zwei Bahnen, wohingegen $\text{Sym}(A_{(4,6,8)})$ transitiv auf dieser Menge wirkt. Somit erfüllt $A_{(4,6,8)}$ trotzdem das globale Kriterium und ist ein uniformer Polyeder.

Beweis. Mit dem einzigen Unterschied, dass auf jeder Kante des Würfels insgesamt vier Teilungspunkte im Verhältnis $1 : 1 : \sqrt{2} : 1 : 1$ konstruiert werden, folgt erneut mithilfe der Lemmata 2.5.3 und 2.5.5, dass unter $\text{Sym}(W)$ die Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(4,6,8)}$ auf den Kanten des Würfels invariant bleibt. Um nun auf einer Seitenfläche des Würfels die Ecken von $A_{(4,6,8)}$ zu erhalten, werden durch diese Teilungspunkte Parallelen zu den Kanten des Ausgangskörpers gezogen und deren Schnittpunkte ermittelt. Nach Korollar 2.5.4 werden diese jedoch wieder auf entsprechende Parallelen mit entsprechenden Schnittpunkten abgebildet. Somit bleibt die Menge dieser Schnittpunkte $\mathcal{S}_{(4,6,8)}$ unter $\text{Sym}(W)$ invariant. Da die geometrische Beschreibung des Auswahlverfahrens mit $\text{Sym}(W)$ verträglich ist, bleibt auch deren Teilmenge $\mathcal{S}_{(4,6,8)}^*$ unter $\text{Sym}(W)$ invariant und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{S}_{(4,6,8)}^*)$. Also gilt $\text{Sym}(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(4,6,8)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(4,6,8)}) =: G_+$.

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

Nun verwenden wir diese vom Würfel abstammenden Symmetrien, um wieder mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 jeweils die Gleichheit der beiden Gruppen nachzuweisen. Da $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Flächen des Würfels operiert, wirkt $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Achtecksflächen von $A_{(4,6,8)}$. Die Bahn einer derartigen Achtecksfläche f_8 von $A_{(4,6,8)}$ umfasst seine sechs derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_8) = \text{ord } G(f_8) = 6$. Da an jede Achtecksfläche alternierend Sechsecke abwechselnd mit Quadraten angrenzen, besteht ihre Stabilisatorgruppe höchstens aus jeder zweiten der acht Drehungen um $\frac{2\pi}{8}$ am Mittelpunkt des Achtecks, bei der eine Kante zwischen Achteck und Sechseck wieder auf eine derartige Kante abgebildet wird (und ebenso für eine Kante zwischen Achteck und Quadrat). Da eine Drehachse vom Typ a des Würfels durch den Mittelpunkt dieses Achtecks verläuft, kommt tatsächlich jede zweite dieser Drehungen von $\text{Sym}_+(W)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_8) = \frac{8}{2} = 4$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_8)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_8)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(4,6,8)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die vier Spiegelungen an den vier Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte des Achtecks dazu, da durch die Spiegelungen an den vier an Achsen durch gegenüberliegenden Ecken verschiedenartige Kanten vertauscht werden. Da diese genau von den jeweils zwei entsprechenden Ebenenspiegelungen vom Typ s und Typ t des Würfels kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_8)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_8)) = 6 \cdot 8 = 48.$$

Aufgrund der jeweiligen Gleichheit ihrer Ordnungen stimmen die entsprechenden Symmetriegruppen bereits wie behauptet überein. Nun widmen wir uns der Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(4,6,8)})$. Betrachten wir hierbei ausschließlich die Drehgruppe G_+ werden wir feststellen, dass dadurch zwei verschiedene Bahnen von Ecken entstehen, die ohne Zuhilfenahme einer Ebenenspiegelung nicht miteinander verbunden werden können. Der Würfel vererbt an $A_{(4,6,8)}$ die Transitivität von $\text{Sym}_+(W)$ jeweils auf den seinen Flächen entsprechenden Achtecken, auf den seinen Kanten entsprechenden Quadraten und auf den seinen Ecken entsprechenden Sechsecken. Nun konzentrieren wir uns nacheinander auf diese drei verschiedenen Flächenarten:

- Durch den Mittelpunkt eines Achtecks von $A_{(4,6,8)}$ verläuft eine Drehachse vom Typ a des Würfels mit einem Drehwinkel von $\frac{\pi}{2}$. Dadurch können wir also eine ausgewählte Ecke dieses Achtecks immer nur auf jede zweite seiner Ecken transportieren, bis sie wegen der geraden Eckenanzahl wieder an ihrer Ausgangsposition landet.
- Durch den Mittelpunkt eines Quadrats von $A_{(4,6,8)}$ verläuft eine Drehachse vom Typ b des Würfels mit einem Drehwinkel von π , wodurch eine ausgewählte Ecke dieses Quadrats ebenso immer nur auf jede zweite seiner Ecken transportiert werden kann, bis sie wegen der geraden Anzahl der Ecken des Quadrats wieder an ihrer Ausgangsposition landet.

- Durch den Mittelpunkt eines Sechsecks von $A_{(4,6,8)}$ verläuft eine Drehachse vom Typ c des Würfels mit einem Drehwinkel von $\frac{2\pi}{3}$, wodurch auch hier eine ausgewählte Ecke dieses Sechsecks ebenso immer nur auf jede zweite seiner Ecken transportiert werden kann, bis sie wegen der geraden Anzahl der Ecken des Sechsecks wieder an ihrer Ausgangsposition landet.

Somit können wir zwei an einer gemeinsamen Kante (egal ob zwischen Achteck und Quadrat, zwischen Achteck und Sechseck oder zwischen Quadrat und Sechseck) anliegende Eckpunkte von $A_{(4,6,8)}$ nicht durch Elemente von $\text{Sym}_+(W)$ miteinander vertauschen. Dadurch ergeben sich unter G_+ zwei getrennte Bahnen von Ecken.

Wir gehen also zur vollen Symmetriegruppe $\text{Sym}(W)$ über und betrachten eine Achtecksfläche f_8 von $A_{(4,6,8)}$. Wie wir bereits festgestellt haben, erreichen wir mit einer ausgewählten Ecke von $A_{(4,6,8)}$ durch die Drehungen an der durch den Mittelpunkt des Achtecks verlaufenden Achse vom Typ a des Würfels nur jede zweite Ecke. Schalten wir nun jedoch einmal eine entsprechende Ebenenspiegelung vom Typ s oder Typ t des Würfels dazwischen, erreichen wir auch noch alle anderen Ecken von f_8 . Somit wirkt $\text{Sym}(W)$ transitiv auf den acht Ecken von f_8 . Da wir bereits festgestellt haben, dass $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der Achtecke wirkt, bilden unter G alle Ecken von $A_{(4,6,8)}$ nur eine Bahn. $\square$

Bemerkung. An der zyklischen Sequenz $(4, 6, 8)$ fällt uns auf, dass diese nicht symmetrisch ist. Dadurch sind schon rein geometrisch zwei verschiedene Typen von Ecken unterscheidbar, nämlich jene mit positiver und jene mit negativer Orientierung. Diese verschiedenen Typen von Ecken müssen unter G_+ erhalten bleiben, weil diese die Orientierung nicht ändert. Somit gibt es mindestens zwei getrennte Bahnen von Ecken. Aus der obenstehenden geometrischen Beschreibung wird jedoch ersichtlich, dass diese nicht noch weiter zerfallen und es somit genau diese zwei Bahnen gibt. Da bei einer Ebenenspiegelung die Orientierung umgekehrt wird, werden diese beiden Typen von Ecken dadurch genau vertauscht und die beiden getrennten Bahnen werden im Übergang zu G somit zu einer einzigen Bahn verbunden. In Tabelle 4.1 fällt uns auf, dass $(4, 6, 10)$ die einzige weitere nicht symmetrische Sequenz ist. Somit wissen wir bereits, dass wir dieses Phänomen bei der Untersuchung des Ikosidodekaederstumpfs $A_{(4,6,10)}$ erneut beobachten werden.

6.2.3 Pseudorhombenkuboktaeder

Für den Pseudorhombenkuboktaeder $A_{(3,4,4,4)}^*$ haben wir bereits in Kapitel 4.2.2 ein geometrisches Argument betrachtet, das die Transitivität seiner Symmetriegruppe auf den Ecken ausschließt: Das "äquatoriale Band" muss unter den Symmetrien des Körpers invariant bleiben. Demnach erfüllt $A_{(3,4,4,4)}^*$ im Gegensatz zu - wie wir teilweise erst noch sehen werden - allen anderen Archimedischen Körpern nicht auch das globale Kriterium und ist somit kein uniformer Polyeder.

Schneiden wir den Körper nun entlang des "äquatorialen Bandes" mit einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Ebene, entsteht ein Achteck (rot), siehe Abbildung 6.2. Dieses Achteck muss von jeder Symmetrie des Körpers auf sich selbst abgebildet werden, weil

das “äquatoriale Band” unter den Symmetrien des Körpers invariant bleiben muss. Da jede Symmetrie des Körpers auf diesem Achteck wirkt, ist es naheliegend, ausgehend von der (vollen) Symmetriegruppe eines Achtecks eine Beschreibung der Symmetriegruppen von $A_{(3,4,4,4)}^*$ zu bekommen. Im Unterschied zu den bisherigen Beschreibungen von Symmetriegruppen erarbeiten wir uns hier also keine Permutationsdarstellung, sondern eine Beschreibung mithilfe der Symmetriegruppen eines regulären Polygons. Die (volle) Symmetriegruppe eines regulären n -Ecks, $n \geq 3$, wird als Diedergruppe D_n bezeichnet und enthält neben der Identität die $n - 1$ Drehungen um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ an seinem Mittelpunkt und die Spiegelungen an seinen Symmetrieachsen (und deren Kompositionen) [22, S. 120]. Für die Ordnung der Diedergruppe erhalten wir somit $\text{ord}(D_n) = 2n$.

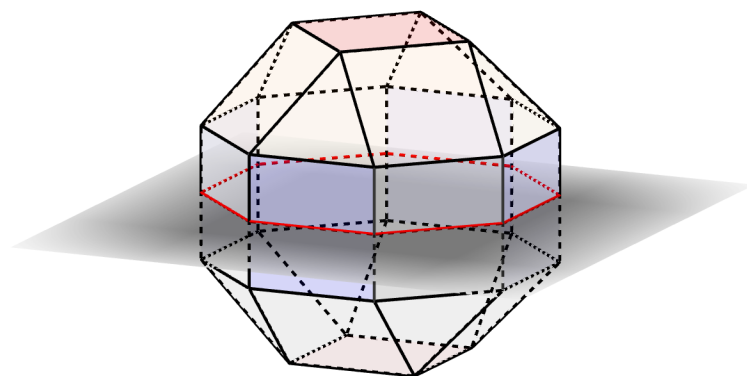


Abbildung 6.2: Pseudorhombenkuboktaeder: Entstehendes Achteck (rot) beim Schnitt mit einer Ebene entlang des “äquatorialen Bandes”. Eigene Darstellung.

Vorab listen wir auf, welche Symmetrien seines Ausgangskörpers der Pseudorhombenkuboktaeder trotz seiner verdrehten oberen “Kappe” noch aufweist.⁵ Wir beginnen mit den orientierungserhaltenden Drehsymmetrien:

- (i). Die Identität E_3 .
- (ii). Drei Drehungen α , α^2 und α^3 an der Achse vom Typ a des Würfels, die senkrecht auf das Achteck steht (Vierteldrehungen: um die Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$).
- (iii). Die Hintereinanderausführung einer Drehung α^2 an einer der beiden anderen Achsen vom Typ a des Würfels, die in der Ebene des Achtecks liegen, und einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ (ungerade Achteldrehungen) an der Achse vom Typ a, die senkrecht auf das Achteck steht.

⁵Es ist zu beachten, dass wir hierbei systematisch die Symmetrien des Würfels durchprüfen und dabei wiederholt dieselben Symmetrien von $A_{(3,4,4,4)}^*$ auftreten. Wie wir in der Bemerkung am Ende dieses Unterkapitels festhalten, gilt $\text{ord}(\text{Sym}_+(A_{(3,4,4,4)}^*)) = 8$ und $\text{ord}(\text{Sym}(A_{(3,4,4,4)}^*)) = 16$.

- (iv). Die Hintereinanderausführung einer Drehung β an einer der beiden anderen Achsen vom Typ b des Würfels, die in der Ebene des Achtecks liegen, und einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (ungerade Achteldrehungen) an der Achse vom Typ a, die senkrecht auf das Achteck steht.

In Übergang zur vollen Symmetriegruppen kommen noch folgende orientierungsumkehrende Symmetrien dazu:

- (v). Vier Ebenenspiegelungen an den Ebenen vom Typ s und Typ t des Würfels, die senkrecht auf das Achteck stehen.
- (vi). Die Hintereinanderausführung der Spiegelung an der Ebene vom Typ s des Würfels, in der das Achteck liegt, und einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (ungerade Achteldrehungen) an der Achse vom Typ a, die senkrecht auf das Achteck steht.
- (vii). Die Hintereinanderausführung der Punktspiegelung am Ursprung $-E_3$ und einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ (ungerade Achteldrehungen) an der Achse vom Typ a, die senkrecht auf das Achteck steht.

Auffallend dabei ist, dass die jeweils in Hintereinanderausführungen mit anderen Drehungen oder einer Spiegelung auftretenden ungeraden Achteldrehungen keine Symmetrien des Ausgangskörpers sind. Weiters ist zu bemerken, dass weder die Spiegelung an der Ebene vom Typ s des Würfels, in der das Achteck liegt, noch die ungeraden Achteldrehungen für sich allein genommen Symmetrien des neuen Objekts sind, aber ihre Kombinationen schon. Zudem stellen wir fest, dass keine der Drehungen an den Achsen vom Typ c des Würfels übertragen werden, weil diese durch die Verdrehung der oberen "Kappe" nun jeweils durch den Mittelpunkt eines Dreiecks und eines gegenüberliegenden Quadrats verlaufen.

Nun überzeugen wir uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.6. (Symmetriegruppen des Pseudorhombenkuboktaeders - Teil 1). *Es gibt eine isomorphe Abbildung*

$$\varphi : \text{Sym}(A_{(3,4,4,4)}^*) \rightarrow D_8.$$

d. h. die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,4,4,4)}^*$ ist isomorph zur (vollen) Symmetriegruppe eines regulären Achtecks.

Beweis. Da nur die Identität E_3 das Achteck invariant lässt, ist die Abbildung φ nach dem Injektivitätskriterium aus Lemma 2.2.3 injektiv. Das Achteck könnte sonst nur noch durch eine Spiegelung des Körpers an der Ebene des Achtecks invariant bleiben, jedoch ist dies wegen der verdrehten oberen "Kappe" keine Symmetrie von $A_{(3,4,4,4)}^*$.

Um die Surjektivität zu überprüfen, überlegen wir uns vorab, dass D_8 von zwei Spiegelungen verschiedenen Typs erzeugt wird. Ein Achteck weist zwei verschiedene Typen von Spiegelachsen auf, vier verlaufen durch gegenüberliegende Ecken und vier durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte. Führen wir je eine dieser Spiegelungstypen hintereinander aus, ist das Ergebnis eine Drehung um ein Vielfaches des Winkels $\frac{\pi}{4}$ am Mittelpunkt des Achtecks.

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

Somit genügt es, diese zwei Spiegelungen des Achtecks durch Symmetrien von $A_{(3,4,4,4)}^*$ zu realisieren. Betrachten wir die obenstehende Auflistung und überlegen, was dabei jeweils mit dem Achteck passiert, stellen wir fest, dass die Spiegelungen des Achtecks an den Achsen durch gegenüberliegende Ecken durch (iii) bzw. (iv) realisiert werden und jene an den Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte durch (v). Also liegt von jedem der beiden Typen von Spiegelungen mindestens eine⁶ im Bild von φ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. $\square$

Um nun auch noch eine Beschreibung der Drehgruppe von $A_{(3,4,4,4)}^*$ zu erhalten, überlegen wir uns, welche Symmetrien des Achtecks nun nicht mehr durch Symmetrien von $A_{(3,4,4,4)}^*$ realisierbar sind. In der obenstehenden Auflistung beobachten wir, dass die Spiegelungen des Achtecks an den Achsen durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte nur durch Ebenenspiegelungen von $A_{(3,4,4,4)}^*$ realisiert werden können und somit bei der Einschränkung auf die Drehgruppe wegfallen. Dahingegen können die Spiegelungen des Achtecks an den Achsen durch gegenüberliegende Ecken durch Hintereinanderausführungen von Drehungen von $A_{(3,4,4,4)}^*$ realisiert werden und bleiben somit bei der Einschränkung auf die Drehgruppe erhalten. Wählen wir nun jeden zweiten Eckpunkt des Achtecks und verbinden diese zu einem Quadrat, fällt auf, dass dadurch genau die richtigen Spiegelachsen wegfallen, während die weiterhin benötigten erhalten bleiben. Es ist somit naheliegend, durch die (volle) Symmetriegruppe eines Quadrats eine Beschreibung der Symmetriegruppen von $A_{(3,4,4,4)}^*$ zu bekommen. Wir überzeugen uns also von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.7. (Symmetriegruppen des Pseudorhombenkuboktaeders - Teil 2). *Es gibt eine isomorphe Abbildung*

$$\varphi_+ : \text{Sym}_+(A_{(3,4,4,4)}^*) \rightarrow D_4,$$

d. h. die Drehgruppe von $A_{(3,4,4,4)}^*$ ist isomorph zur (vollen) Symmetriegruppe eines Quadrats.

Beweis. Da die Abbildung φ injektiv ist, ist auch ihre Einschränkung φ_+ injektiv. Um die Surjektivität zu überprüfen, überlegen wir uns wieder vorab, dass auch D_4 von zwei Spiegelungen verschiedenen Typs erzeugt wird. Ein Quadrat weist zwei verschiedene Typen von Spiegelachsen auf, zwei verlaufen durch gegenüberliegende Ecken und zwei durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte. Führen wir je eine dieser Spiegelungstypen hintereinander aus, ist das Ergebnis eine Drehung um ein Vielfaches des Winkels $\frac{\pi}{2}$ am Mittelpunkt des Quadrats. Somit genügt es wieder, diese zwei Spiegelungen des Quadrats durch Symmetrien von $A_{(3,4,4,4)}^*$ zu realisieren. Wir haben bereits beobachtet, dass alle Spiegelungen des Quadrats von jenen des Achtecks an den Achsen durch gegenüberliegende Ecken abstammen. Wie wir bereits festgestellt haben, werden diese durch (iii) und (iv) aus der obenstehenden Auflistung realisiert. Also liegt von jedem der beiden Typen von Spiegelungen mindestens eine⁷ im Bild von φ_+ , wodurch die Surjektivität dieser Abbildung gezeigt ist. $\square$

⁶Es werden damit sogar schon alle Spiegelungen beider Typen realisiert.

⁷Es werden damit wieder sogar schon alle Spiegelungen beider Typen realisiert.

Bemerkung. Bei den beiden Beweisen in diesem Unterkapitel hätten wir auch wieder mit einem Abzählargument arbeiten können, jedoch muss man sich dabei vorab überlegen, dass die Symmetriegruppen von $A_{(3,4,4,4)}^*$ transitiv auf den acht Quadraten am “äquatorialen Band” wirken. Die Bahn eines derartigen Quadrats umfasst also 8 Elemente. Da an ein derartiges Quadrat je drei Quadrate und ein Dreieck angrenzen, können keine Drehungen in der Stabilisatorgruppe eines derartigen Quadrats sein. Neben der Identität liegt darin nur eine Ebenenspiegelung aus (v) der obenstehenden Auflistung, weil nur diese die ausgezeichnete Kante zwischen Quadrat und Dreieck erhält. Mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 erhalten wir also

$$\begin{aligned} \text{ord}(\text{Sym}(A_{(3,4,4,4)}^*)) &= 8 \cdot 2 = 16 = \text{ord}(D_8) \quad \text{und} \\ \text{ord}(\text{Sym}_+(A_{(3,4,4,4)}^*)) &= 8 \cdot 1 = 8 = \text{ord}(D_4). \end{aligned}$$

Wegen der Gleichheit der Ordnungen folgt die Behauptung bereits aus der Injektivität der jeweiligen Abbildung.

6.2.4 Cubus Simus

Wie bereits in den einleitenden Worten dieses Kapitels angesprochen, stellt der Cubus Simus $A_{(3,3,3,3,4)}$ eine Ausnahme dar, weil wir diesen nur durch das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades konstruieren konnten. Für die Untersuchung seiner Symmetriegruppen ist die Beobachtung zentral, dass wir bei der Konstruktion durch die Entscheidung, ob wir die kleinen Quadrate auf den Seitenflächen des Stammwürfels leicht entweder nach links oder rechts rotieren, eine Orientierung auf den Seitenflächen des Würfels festlegen, siehe Abbildung 4.12. Diese festgelegte Orientierung kann nur durch die orientierungserhaltenden Symmetrien des Würfels $\text{Sym}_+(W)$ bewahrt werden und die orientierungsumkehrenden Symmetrien des Würfels $\text{Sym}(W) \setminus \text{Sym}_+(W)$ sind daher sicher keine Symmetrien des neuen Objekts. Es liegt die Vermutung nahe, dass $A_{(3,3,3,3,4)}$ überhaupt keine Spiegelsymmetrien aufweist, d. h. chiral ist, und seine Symmetriegruppe mit der Drehgruppe des Würfels übereinstimmt. Wir überzeugen uns also von folgendem Resultat:

Theorem 6.2.8. (Symmetriegruppe des Cubus Simus). *Die Symmetriegruppe von $A_{(3,3,3,3,4)}$ stimmt mit der Drehgruppe des Würfels überein, d. h. es gilt*

$$\text{Sym}(A_{(3,3,3,3,4)}) = \text{Sym}_+(A_{(3,3,3,3,4)}) = \text{Sym}_+(W),$$

und $A_{(3,3,3,3,4)}$ ist somit ein chiraler Polyeder. Zudem wirkt seine Symmetriegruppe transitiv auf $V(A_{(3,3,3,3,4)})$, d. h. $A_{(3,3,3,3,4)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Die Konstruktion von $A_{(3,3,3,3,4)}$ aus Kapitel 4.2.3 basiert auf dem Festlegen der Abstände $x \leq y$ von den Kanten des Würfels. Diese Abstände bleiben gemäß der Definition einer Isometrie als abstandserhaltende Bijektion unter $\text{Sym}(W)$ erhalten. Jedoch gibt es an jedem Eckpunkt einer Seitenfläche des Würfels zwei mögliche Punkte mit den Abständen

$x \leq y$ von den an dieser Ecke anliegenden Kanten des Würfels. Die Entscheidung darüber, welcher davon in $V(A_{(3,3,3,3,4)})$ liegt, hängt von der vorab festgelegten Richtung ab, in die die kleinen Quadrate rotiert werden. Da diese Richtung jedoch nur unter $\text{Sym}_+(W)$ erhalten bleibt, bleibt $V(A_{(3,3,3,3,4)})$ nur unter $\text{Sym}_+(W)$ invariant und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(V(A_{(3,3,3,3,4)})) = A_{(3,3,3,3,4)}$. Also gilt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,3,3,3,4)}) =: G$ und somit auch $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,3,3,3,4)}) =: G_+$.

Nur weil eine Symmetrie nicht vom Stammkörper kommt, heißt es noch nicht, dass das neue Objekt keine weiteren Symmetrien mehr aufweist. Wir verwenden also diese vom Würfel abstammenden Symmetrien, um wieder mithilfe des Bahn-Lemmas 2.3.3 die Gleichheit dieser Gruppen nachzuweisen. Da $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs Seitenflächen des Würfels operiert, wirkt $\text{Sym}_+(W)$ transitiv auf der Menge der sechs rotierten Quadrate des Cubus Simus. Die Bahn eines rotierten Quadrats f_4 von $A_{(3,3,3,3,4)}$ umfasst seine sechs derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_4) = \text{ord } G(f_4) = 6$. Die Stabilisatorgruppe eines rotierten Quadrats besteht höchstens aus den vier Drehungen um $\frac{\pi}{2}$ am Mittelpunkt des Quadrats. Da eine Drehachse vom Typ a des Würfels durch den Mittelpunkt dieses Quadrats verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(W)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4) = 4$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_4)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_4)) = 6 \cdot 4 = 24.$$

Somit muss bereits $\text{Sym}_+(W) = G_+$ gelten.

Nun überlegen wir uns, ob für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,3,3,3,4)}$ bei der Stabilisatorgruppe des rotierten Quadrats noch etwas dazukommt. Einerseits haben wir bereits festgestellt, dass darin mindestens die vier Drehungen am Mittelpunkt des Quadrats sind. Andererseits hat ein Quadrat noch vier Spiegelsymmetrien, wobei zwei Spiegelachsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte verlaufen und zwei durch gegenüberliegende Ecken. In der Stabilisatorgruppe sind somit mindestens vier und höchstens acht Elemente. Eine Spiegelung in dem rotierten Quadrat müsste aber bereits von einer Spiegelung des Körpers kommen. Um uns durch ein geometrisches Argument davon zu überzeugen, dass dies bei $A_{(3,3,3,3,4)}$ nicht möglich ist, betrachten wir eine Achse durch den Mittelpunkt des rotierten Quadrats und den Mittelpunkt des Würfels. Diese verläuft auch durch den Mittelpunkt des gegenüberliegenden Quadrats (entspricht einer Achse vom Typ a beim Würfel durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte). Schauen wir von außen auf die Konstruktion, sind alle kleineren Quadrate auf den Seitenflächen des Würfels in die gleiche Richtung rotiert. Wenn wir aber nun aus der Perspektive des rotierten Quadrats entlang dieser Achse auf das gegenüberliegende Quadrat schauen, ist dieses genau in die entgegengesetzte Richtung rotiert und kann somit nicht durch eine Raumspiegelung bewahrt werden. Deshalb hat die Stabilisatorgruppe des rotierten Quadrats auch für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,3,3,3,4)}$ nur vier Elemente, d. h. $\text{ord } \text{Sta}_G(f_4) = 4$. Damit erhalten wir auch $\text{ord}(G) = 24$, wodurch bereits $\text{Sym}_+(W) = G$ und in weiterer Folge $G_+ = G$ gelten muss.

Zudem überzeugen wir uns noch davon, dass diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,3,3,3,4)})$ wirken. Hierzu müssen wir erneut anders argumentieren als bei den bisher behandelten Körpern. Wie wir bereits festgestellt haben, folgt die Transitivität von $\text{Sym}_+(W)$ auf der Menge der rotierten Quadrate von $A_{(3,3,3,3,4)}$ aus ihrer Transitivität auf der Menge der sechs Flächen des Würfels. Somit erreichen wir bereits alle rotierten Quadrate. Nun konzentrieren wir uns auf ein rotiertes Quadrat f_4 von $A_{(3,4,4,4)}$ und betrachten die dazugehörige Würfel­fläche f . Die Mittelpunkte dieser beiden Quadrate stimmen zwar überein, jedoch ist das kleine Quadrat um den Winkel φ rotiert. Die Stabilisatorgruppe $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(W)}(f)$ enthält neben der Identität die Drehungen um $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ an der durch ihren gemeinsamen Mittelpunkt verlaufenden Achse vom Typ a und wirkt transitiv auf den vier Ecken von f . Da dies genau mit Drehungen des kleinen Quadrats um $\varphi + \frac{\pi}{4}, \varphi + \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{3\pi}{2}$ an der durch den gemeinsamen Mittelpunkt verlaufenden Achse vom Typ a des Würfels übereinstimmt, wirkt $\text{Sta}_{\text{Sym}_+(W)}(f)$ auch transitiv auf den vier Ecken von f_4 . Somit bilden unter $G_+ = G$ alle Ecken von $A_{(3,3,3,3,4)}$ nur eine Bahn. $\square$

6.3 Abstammung vom Dodekaeder

Vom Dodekaeder stammen insgesamt sechs Archimedische Körper ab: Dodekaederstumpf, Ikosidodekaeder, Ikosaederstumpf, Rhombenikosidodekaeder, Ikosidodekaederstumpf und Dodecaedron Simum. Wir gliedern dieses Unterkapitel analog zum vorhergehenden über die Abstammung vom Würfel und wählen unsere Notationen weiterhin analog zum Tetraederstumpf $A_{(3,6,6)}$. Da hier großteils analoge Beweisführungen zu jenen der vorhergehenden Unterkapitel auftreten, verweisen wir wo möglich auf diese und behandeln nur etwaige Unterschiede näher.

6.3.1 Durch Entecken

Durch Entecken stammen vom Dodekaeder der Dodekaederstumpf, Ikosidodekaeder und Ikosaederstumpf ab. Es liegt wieder die Vermutung nahe, dass ihre Symmetriegruppen mit jenen des Dodekaeders übereinstimmen. Wir beginnen mit dem Dodekaederstumpf $A_{(3,10,10)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,10,10)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.1. (Symmetriegruppen des Dodekaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,10,10)}$ stimmen mit jenen des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(3,10,10)}) &= \text{Sym}(D) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,10,10)}) &= \text{Sym}_+(D).\end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,10,10)}) = \mathcal{T}_{(3,10,10)}$, d. h. $A_{(3,10,10)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Analog zu $A_{(3,6,6)}$ folgt, dass unter $\text{Sym}(D)$ die durch das Teilungsverhältnis $1 : \phi : 1$ festgelegte Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,10,10)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,10,10)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,10,10)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,10,10)}) =: G_+$.

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

Analog zu $A_{(3,8,8)}$ folgt die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Konstruktion von $A_{(3,10,10)}$ unter den 20 Ecken des Dodekaeders 20 Dreiecksflächen entstehen und somit $\text{ord } G_+(f_3) = \text{ord } G(f_3) = 20$ gilt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\text{ord}(G_+) &= (\text{ord } G_+(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_3)) = 20 \cdot 3 = 60 & \text{und} \\ \text{ord}(G) &= (\text{ord } G(f_3)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_3)) = 20 \cdot 6 = 120.\end{aligned}$$

Analog zu $A_{(3,8,8)}$ folgt auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(3,10,10)}) = \mathcal{T}_{(3,10,10)}$. $\square$

Nun widmen wir uns dem Ikosidodekaeder $A_{(3,5,3,5)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,5,3,5)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.2. (Symmetriegruppen des Ikosidodekaeders). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,5,3,5)}$ stimmen mit jenen des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(3,5,3,5)}) &= \text{Sym}(D) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,5,3,5)}) &= \text{Sym}_+(D).\end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,5,3,5)}) = \mathcal{T}_{(3,5,3,5)}$, d. h. $A_{(3,5,3,5)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Mit dem einzigen Unterschied, dass auf jeder Kante des Würfels nur ein Teilungspunkt im Verhältnis 1 : 1 konstruiert wird, folgt erneut wie bei $A_{(3,6,6)}$, dass unter $\text{Sym}(D)$ die Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(3,5,3,5)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(3,5,3,5)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,5,3,5)})$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,5,3,5)})$. Die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen folgt mit genau denselben Abzählargumenten wie bei $A_{(3,10,10)}$. Auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(3,5,3,5)}) = \mathcal{T}_{(3,5,3,5)}$ folgt mit demselben Argument wie bei $A_{(3,10,10)}$ bzw. analog zu $A_{(3,8,8)}$. $\square$

Schließlich kommen wir noch zum Ikosaederstumpf $A_{(5,6,6)} = \text{Conv}(\mathcal{T}_{(5,6,6)})$, den wir in Kapitel 4.2.1 aus Gründen der Einfachheit ausgehend vom Ikosaeder konstruiert haben. Da wir jedoch in Kapitel 5.3 festgestellt haben, dass Dodekaeder und Ikosaeder als Dualkörper dieselben Symmetriegruppen aufweisen, überzeugen wir uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.3. (Symmetriegruppen des Ikosaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(5,6,6)}$ stimmen mit jenen des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(5,6,6)}) &= \text{Sym}(D) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(5,6,6)}) &= \text{Sym}_+(D).\end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(5,6,6)}) = \mathcal{T}_{(5,6,6)}$, d. h. $A_{(5,6,6)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Da Ikosaeder und Dodekaeder als Dualkörper dieselben Symmetriegruppen aufweisen, folgt auch hier analog zu $A_{(3,6,6)}$, dass unter $\text{Sym}(D)$ die durch das Teilungsverhältnis $1 : 1 : 1$ festgelegte Menge der Teilungspunkte $\mathcal{T}_{(5,6,6)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{T}_{(5,6,6)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(5,6,6)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(W) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(5,6,6)}) =: G_+$.

Die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen folgt zwar analog zu $A_{(4,6,6)}$, jedoch handelt es sich bei den unter den Ecken des Ikosaeders entstehenden Flächen nicht um Quadrate sondern Fünfecke, weshalb wir die Abzählargumente hier noch einmal an diesen Unterschied anpassen. Da $\text{Sym}_+(D)$ transitiv auf der Menge der zwölf Flächen des Dodekaeders und somit auf der Menge der zwölf Ecken des Ikosaeders operiert, wirkt $\text{Sym}_+(D)$ transitiv auf der Menge der zwölf Fünfecksflächen von $A_{(5,6,6)}$. Die Bahn einer Fünfecksfläche f_5 von $A_{(5,6,6)}$ umfasst seine zwölf derartigen Flächen, d. h. $\text{ord } G_+(f_5) = \text{ord } G(f_5) = 12$. Ihre Stabilisatorgruppe besteht höchstens aus den fünf Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$ am Mittelpunkt des Fünfecks. Da eine Drehachse vom Typ a des Dodekaeders durch den Mittelpunkt des Fünfecks verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(D)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_5) = 5$. Damit erhalten wir

$$\text{ord}(G_+) = (\text{ord } G_+(f_5)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_5)) = 12 \cdot 5 = 60.$$

Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(4,6,6)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die fünf Spiegelungen an den Achsen durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt des Fünfecks dazu. Da diese genau von den entsprechenden Ebenenspiegelungen des Dodekaeders kommen, erhalten wir

$$\text{ord}(G) = (\text{ord } G(f_5)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_5)) = 12 \cdot 10 = 120.$$

Analog zu $A_{(4,6,6)}$ folgt auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(5,6,6)}) = \mathcal{T}_{(5,6,6)}$. $\square$

6.3.2 Durch Entecken und Entkanten

Durch Entecken und Entkanten stammen vom Dodekaeder der Rhombenikosidodekaeder $A_{(3,4,5,4)}$ und der Ikosidodekaederstumpf $A_{(4,6,10)}$ ab. Die Ecken dieser Körper erhalten wir wieder nicht wie beim ausschließlichen Entecken auf den Kanten des Ausgangskörpers, sondern auf dessen Seitenflächen, indem zusätzlich Parallelen zu den ursprünglichen Kanten gezogen und deren Schnittpunkte ermittelt werden. Bei $A_{(3,4,5,4)}$ entspricht die dadurch entstehende Schnittpunktmenge $\mathcal{S}_{(3,4,5,4)}$ wieder bereits seiner Eckpunktmenge, siehe Abbildung 4.8. Es gilt also

$$\mathcal{S}_{(3,4,5,4)} = V(A_{(3,4,5,4)}).$$

Bei $A_{(4,6,10)}$ handelt es sich bei der dadurch entstehenden Schnittpunktmenge $\mathcal{S}_{(4,6,10)}$ dahingegen wieder um eine Obermenge seiner Eckpunktmenge, d. h. $\mathcal{S}_{(4,6,10)} \supseteq V(A_{(4,6,10)})$. Wählen wir daraus jene Schnittpunkte aus, die durch das Schneiden der Parallelen durch die ersten Teilungspunkte mit jenen durch die dritten Teilungspunkte entstehen, erhalten

6 Symmetriegruppen der Archimedischen Körper

wir genau jene Teilmenge $\mathcal{S}_{(4,6,10)}^*$, die der Menge der Eckpunkte von $A_{(4,6,10)}$ entspricht, siehe Abbildung 4.11. Es gilt also

$$\mathcal{S}_{(4,6,10)}^* = V(A_{(4,6,10)}).$$

Es liegt wieder die Vermutung nahe, dass die Symmetriegruppen dieser Archimedischen Körper mit jenen des Dodekaeders übereinstimmen. Wir beginnen mit dem Rhombenikosidodekaeder $A_{(3,4,5,4)} = \text{Conv}(\mathcal{S}_{(3,4,5,4)})$ und überzeugen uns von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.4. (Symmetriegruppen des Rhombenikosidodekaeders). *Die Symmetriegruppen von $A_{(3,4,5,4)}$ stimmen mit jenen des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} \text{Sym}(A_{(3,4,5,4)}) &= \text{Sym}(D) & \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(3,4,5,4)}) &= \text{Sym}_+(D). \end{aligned}$$

Zudem wirken diese Symmetriegruppen transitiv auf $V(A_{(3,4,5,4)}) = \mathcal{S}_{(3,4,5,4)}$, d. h. $A_{(3,4,5,4)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Analog zu $A_{(3,4,4,4)}$ folgt, dass unter $\text{Sym}(D)$ die auf Basis des Teilungsverhältnisses $1 : 1 : 1$ und durch das Ziehen entsprechender Parallelen festgelegte Menge der Schnittpunkte $\mathcal{S}_{(3,4,5,4)}$ und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{S}_{(3,4,5,4)})$ invariant bleibt. Also gilt $\text{Sym}(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,4,5,4)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,4,5,4)}) =: G_+$.

Analog zu $A_{(3,4,4,4)}$ folgt die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Konstruktion von $A_{(3,4,5,4)}$ auf den zwölf Flächen des Dodekaeders zwölf Fünfecke entstehen und somit für ein Fünfeck f_5 gilt $\text{ord } G_+(f_5) = \text{ord } G(f_5) = 20$. Entsprechend ergibt sich für die Stabilisatorgruppen:

- Die Stabilisatorgruppe von f_5 besteht höchstens aus den fünf Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$ am Mittelpunkt des Fünfecks. Da eine Drehachse vom Typ a des Dodekaeders durch den Mittelpunkt dieses Fünfecks verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(D)$ und es gilt somit $\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_5) = 5$.
- Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,4,5,4)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die fünf Spiegelungen an den Achsen durch eine Ecke und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt des Fünfecks dazu. Da diese genau von den entsprechenden Ebenenspiegelungen des Dodekaeders kommen, gilt $\text{ord } \text{Sta}_G(f_5) = 10$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \text{ord}(G_+) &= (\text{ord } G_+(f_5)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_5)) = 12 \cdot 5 = 60 & \text{und} \\ \text{ord}(G) &= (\text{ord } G(f_5)) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_5)) = 12 \cdot 10 = 120. \end{aligned}$$

Auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(3,4,5,4)}) = \mathcal{S}_{(3,4,5,4)}$ folgt mit demselben Unterschied analog zu $A_{(3,4,4,4)}$. $\square$

Nun widmen wir uns dem Ikosidodekaederstumpf $A_{(4,6,10)} = \text{Conv}(\mathcal{S}_{(4,6,10)}^*)$. Dieser weist analoge Besonderheiten zum Kuboktaederstumpf $A_{(4,6,8)}$ auf. Wir haben bereits festgestellt, dass es sich auch hier bei der Menge der im Zuge der Konstruktion entstehenden Schnittpunkte auf den Seitenflächen des Dodekaeders um eine Obermenge der Eckpunkte des neuen Objekts handelt. Zudem haben wir in der Bemerkung nach der Behandlung von $A_{(4,6,8)}$ bereits vorausgesagt, dass auch bei $A_{(4,6,10)}$ aufgrund seiner nicht symmetrischen Sequenz nur seine volle Symmetriegruppe $\text{Sym}(A_{(4,6,10)})$ transitiv auf der Menge seiner Ecken wirkt, wohingegen diese unter der Wirkung seiner Drehgruppe $\text{Sym}_+(A_{(4,6,10)})$ in zwei Bahnen zerfällt. Wir überzeugen uns also von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.5. (Symmetriegruppen des Ikosidodekaederstumpfs). *Die Symmetriegruppen von $A_{(4,6,10)}$ stimmen mit jenen des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned}\text{Sym}(A_{(4,6,10)}) &= \text{Sym}(D) \quad \text{und} \\ \text{Sym}_+(A_{(4,6,10)}) &= \text{Sym}_+(D).\end{aligned}$$

Zudem zerfällt $V(A_{(4,6,10)}) = \mathcal{S}_{(4,6,10)}^*$ unter der Wirkung von $\text{Sym}_+(A_{(4,6,10)})$ in zwei Bahnen, wohingegen $\text{Sym}(A_{(4,6,10)})$ transitiv auf dieser Menge wirkt. Somit erfüllt $A_{(4,6,10)}$ trotzdem das globale Kriterium und ist ein uniformer Polyeder.

Beweis. Analog zu $A_{(4,6,8)}$ folgt, dass unter $\text{Sym}(D)$ die auf Basis des Teilungsverhältnisses $1 : 1 : \sqrt{2} : 1 : 1$ und durch das Ziehen entsprechender Parallelen festgelegte Menge der Schnittpunkte $\mathcal{S}_{(4,6,10)}$ invariant bleibt. Da die geometrische Beschreibung des Auswahlverfahrens hier ebenso mit $\text{Sym}(D)$ verträglich ist, bleibt auch deren Teilmenge $\mathcal{S}_{(4,6,10)}^*$ unter $\text{Sym}(D)$ invariant und in weiterer Folge auch deren konvexe Hülle $\text{Conv}(\mathcal{S}_{(4,6,10)}^*)$. Also gilt $\text{Sym}(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(4,6,10)}) =: G$. Daraus erhalten wir wieder direkt $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(4,6,10)}) =: G_+$.

Analog zu $A_{(4,6,8)}$ folgt die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Konstruktion von $A_{(4,6,10)}$ auf den zwölf Flächen des Dodekaeders zwölf Zehnecke entstehen und somit für ein Zehneck f_{10} gilt $\text{ord } G_+(f_{10}) = \text{ord } G(f_{10}) = 12$. Entsprechend ergibt sich für die Stabilisatorgruppen:

- Da an jedes dieser Zehnecke alternierend Sechsecke abwechselnd mit Quadraten angrenzen, besteht seine Stabilisatorgruppe höchstens aus jeder zweiten der zehn Drehungen um $\frac{\pi}{5}$ am Mittelpunkt des Zehnecks, bei der eine Kante zwischen Zehneck und Sechseck wieder auf eine derartige Kante abgebildet wird (und ebenso für eine Kante zwischen Zehneck und Quadrat). Da eine Drehachse vom Typ a des Dodekaeders durch den Mittelpunkt dieses Zehnecks verläuft, kommt tatsächlich jede zweite dieser Drehungen von $\text{Sym}_+(D)$ und es gilt somit $\text{ord Sta}_{G_+}(f_{10}) = \frac{10}{2} = 5$.
- Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(4,6,10)}$ kommen bei der Stabilisatorgruppe höchstens noch die fünf Spiegelungen an den Achsen durch gegenüberliegende Seitenmittelpunkte des Zehnecks dazu, da durch die fünf Spiegelungen an den Achsen durch gegenüberliegenden Ecken verschiedenartige Kanten vertauscht werden. Da diese genau von den entsprechenden Ebenenspiegelungen des Dodekaeders kommen, gilt $\text{ord Sta}_G(f_{10}) = 10$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\text{ord}(G_+) &= (\text{ord } G_+(f_{10})) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_{G_+}(f_{10})) = 12 \cdot 5 = 60 \quad \text{und} \\ \text{ord}(G) &= (\text{ord } G(f_{10})) \cdot (\text{ord } \text{Sta}_G(f_{10})) = 12 \cdot 10 = 120.\end{aligned}$$

Analog zu $A_{(4,6,8)}$ stellen wir fest, dass unter ausschließlicher Betrachtung der Drehgruppe G_+ zwei verschiedene Bahnen von Ecken entstehen, die ohne Zuhilfenahme einer Ebenenspiegelung nicht miteinander verbunden werden können. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Konstruktion von $A_{(4,6,10)}$ auf den Dodekaederflächen Zehnecke entstehen und nicht wie bei $A_{(4,6,8)}$ auf den Würfelflächen Achtecke. Durch den Mittelpunkt eines Zehnecks von $A_{(4,6,10)}$ verläuft aber ebenso eine Drehachse vom Typ a des Dodekaeders mit einem Drehwinkel von $\frac{2\pi}{5}$, wodurch eine ausgewählte Ecke dieses Zehnecks wieder immer nur auf jede zweite seiner Ecken transportiert werden kann, bis sie wegen der geraden Eckenanzahl wieder an ihrer Ausgangsposition landet. $\square$

6.3.3 Dodecaedron Simum

Wie bereits in den einleitenden Worten dieses Kapitels angesprochen, stellt der Dodecaedron Simum $A_{(3,3,3,3,5)}$ wie der Cubus Simus $A_{(3,3,3,3,4)}$ eine Ausnahme dar, weil wir diesen ebenfalls nur durch das algebraische Lösen einer Gleichung dritten Grades konstruieren konnten. Für die Untersuchung seiner Symmetriegruppen ist wieder die Beobachtung zentral, dass wir bei der Konstruktion durch die Entscheidung, ob wir die kleinen Fünfecke auf den Seitenflächen des Stammdodekaeders leicht entweder nach links oder rechts rotieren, eine Orientierung auf den Seitenflächen des Dodekaeders festlegen, siehe Abbildung 4.13. Diese festgelegte Orientierung kann nur durch die orientierungserhaltenden Symmetrien des Dodekaeders $\text{Sym}_+(D)$ bewahrt werden und die orientierungsumkehrenden Symmetrien des Dodekaeders $\text{Sym}(D) \setminus \text{Sym}_+(D)$ sind daher sicher keine Symmetrien des neuen Objekts. Es liegt wieder die Vermutung nahe, dass $A_{(3,3,3,3,5)}$ überhaupt keine Spiegelsymmetrien aufweist, d. h. chiral ist, und seine Symmetriegruppe mit der Drehgruppe des Dodekaeders übereinstimmt. Wir überzeugen uns also von folgendem Resultat:

Theorem 6.3.6. (Symmetriegruppe des Dodecaedron Simum). *Die Symmetriegruppe von $A_{(3,3,3,3,5)}$ stimmen mit der Drehgruppe des Dodekaeders überein, d. h. es gilt*

$$\text{Sym}(A_{(3,3,3,3,5)}) = \text{Sym}_+(A_{(3,3,3,3,5)}) = \text{Sym}_+(D),$$

und $A_{(3,3,3,3,4)}$ ist somit ein chiraler Polyeder. Zudem wirkt seine Symmetriegruppe transitiv auf $V(A_{(3,3,3,3,5)})$, d. h. $A_{(3,3,3,3,5)}$ erfüllt das globale Kriterium und ist somit ein uniformer Polyeder.

Beweis. Analog zu $A_{(3,3,3,3,4)}$ folgt, dass die durch diese Konstruktionsweise ermittelte Menge der Eckpunkte $V(A_{(3,3,3,3,5)})$ nur unter $\text{Sym}_+(D)$ invariant bleibt, was in weiterer Folge auch für deren konvexe Hülle $\text{Conv}(V(A_{(3,3,3,3,5)})) = A_{(3,3,3,3,5)}$ gilt. Also gilt $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}(A_{(3,3,3,3,5)}) =: G$ und somit auch $\text{Sym}_+(D) \subseteq \text{Sym}_+(A_{(3,3,3,3,5)}) =: G_+$.

6.3 Abstammung vom Dodekaeder

Analog zu $A_{(3,3,3,3,4)}$ folgt die jeweilige Gleichheit der beiden Gruppen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Konstruktion von $A_{(3,3,3,3,5)}$ auf den zwölf Flächen des Dodekaeders zwölf Fünfecke entstehen und somit für ein Fünfeck f_5 gilt $\text{ord } G_+(f_5) = \text{ord } G(f_5) = 12$. Entsprechend ergibt sich für die Stabilisatorgruppen:

- Die Stabilisatorgruppe von f_5 besteht höchstens aus den fünf Drehungen um $\frac{2\pi}{5}$ am Mittelpunkt des Fünfecks. Da eine Drehachse vom Typ a des Dodekaeders durch den Mittelpunkt dieses Fünfecks verläuft, kommen diese Drehungen tatsächlich alle von $\text{Sym}_+(D)$ und es gilt somit $\text{ord Sta}_{G_+}(f_5) = 5$.
- Für die (volle) Symmetriegruppe von $A_{(3,3,3,3,5)}$ kommt bei der Stabilisatorgruppe auch hier nichts mehr dazu, weil eine Spiegelung in dem rotierten Fünfeck aus einem analogen geometrischen Argument wie bei $A_{(3,3,3,3,4)}$ bereits von einer Spiegelung des Körpers kommen muss. Somit gilt auch $\text{ord Sta}_G(f_5) = 5$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\text{ord}(G_+) &= (\text{ord } G_+(f_5)) \cdot (\text{ord Sta}_{G_+}(f_5)) = 12 \cdot 5 = 60 & \text{und} \\ \text{ord}(G) &= (\text{ord } G(f_5)) \cdot (\text{ord Sta}_G(f_5)) = 12 \cdot 5 = 60,\end{aligned}$$

wodurch bereits $\text{Sym}_+(W) = G_+ = G$ gelten muss. Analog zu $A_{(3,3,3,3,4)}$ folgt auch die Transitivität der Symmetriegruppen auf $V(A_{(3,3,3,3,5)})$. $\square$

Literaturverzeichnis

- [1] Mark A. Armstrong. *Groups and symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] Dimitri P. Bertsekas. *Convex analysis and optimization*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.
- [3] Egbert Brieskorn. *Lineare Algebra und analytische Geometrie 1*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983.
- [4] Harold S. M. Coxeter. *Regular polytopes*. Methuen & Co. Lt., London, 1948.
- [5] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] Oliver Deiser. *Reelle Zahlen: Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2008.
- [7] Euklid. *Die Elemente*. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 235. Verlag Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 2015.
- [8] Gerd Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013.
- [9] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [10] Branko Grünbaum. An enduring error. *Elemente der Mathematik*, 64:89–101, 2009.
- [11] Urs Hartl and Klaudia Kwickert. Constructing the cubus simus and the dodecaedron simum via paper folding. *Geometriae Dedicata*, 166:1–14, 2013.
- [12] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and beyond*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] Norman W. Johnson. Convex polyhedra with regular faces. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:169–200, 1966.
- [14] Johannes Kepler. *The harmony of the world*. American Philosophical Society, Philadelphia, 1997.
- [15] Daniel A. Klain. Bonnesen-type inequalities for surfaces of constant curvature. *Advances in Applied Mathematics*, 39:143–154, 2007.
- [16] Christoph Pöppe. Neue Körper entdecken – durch Entecken, 2002. Spektrum der Wissenschaft. URL: <https://www.spektrum.de/alias/raeumliche-geometrie/neue-koerper-entdecken-durch-entecken/611500>.

- [17] David S. Richeson. *Euler's Gem: The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, Princeton, 2008.
- [18] Ralph T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton University Press, Princeton, 1972.
- [19] Christian Karpfinger und Kurt Meyberg. *Algebra*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2013.
- [20] Helene Keller und Karlhorst Meyer. Über reguläre und semireguläre Polyeder. *Mathematikinformation*, 59:3–43, 2013.
- [21] Hermann Schichl und Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2012.
- [22] Ilka Agricola und Thomas Friedrich. *Elementargeometrie: Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2015.
- [23] Max Hoffmann, Joachim Hilgert und Tobias Weich. *Ebene euklidische Geometrie: Algebraisierung, Axiomatisierung und Schnittstellen zur Schulmathematik*. Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2024.
- [24] Dmitry Fuchs und Serge Tabachnikov. *Ein Schaubild der Mathematik: 30 Vorlesungen über klassische Mathematik*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.
- [25] Paul Adam und Arnold Wyss. *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde*. Verlag Paul Haupt, Bern, 1984.
- [26] Sergei Treil. *Linear algebra done wrong*. Sergei Treil, Brown University, 2024.
- [27] Timothy R. S. Walsh. Characterizing the vertex neighbourhoods of semi-regular polyhedra. *Geometriae Dedicata*, 1:117–123, 1972.