

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Die Mathematik hinter dem Klang der Querflöte und der
Sopranblockflöte

verfasst von | submitted by

Sophie Böltner BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UT 196 070 057 UA

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Lehramtsstudium Master Unterrichtsfach
Musikerziehung Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abriss

In der vorliegenden Masterarbeit wird untersucht, wie sich die Klangfarbe eines Querflötentons von jener eines Sopranblockflötentons unterscheidet und wie sich dies mathematisch beschreiben lässt. Für die Bearbeitung dieser Fragestellung werden nach einer theoretischen Einführung in die physikalischen und mathematischen Grundlagen von Schallwellen und musikalischen Tönen die Wellengleichung anhand einer beidseitig eingespannten Saite hergeleitet und mithilfe der Methode nach d'Alembert und der Methode der Trennung der Variablen gelöst. Anschließend werden die Tonerzeugung sowie die baulichen Eigenschaften beider Flöten detailliert betrachtet, sodass in weiterer Folge die Wellengleichung für die schwingende Luftsäule hergeleitet und gelöst werden kann. Den mathematischen Kern dieser Arbeit umfasst die Fourieranalyse, die die theoretische Grundlage für die Erstellung des Frequenzspektrum eines Tons bildet. Mit deren Hilfe werden Flötentöne als Klangspektrum dargestellt und hinsichtlich ihrer Obertöne untersucht.

Die Analyse der selbst eingespielten Flötentöne c^2 , g^2 und e^3 zeigt, dass Querflötentöne im Vergleich zur Sopranblockflöte ein tendenziell weniger ausgeprägtes Obertonspektrum aufweisen, was sich mit der Wahrnehmung des weichen, runden Klangs deckt. Das Spektrum der Sopranblockflöte zeigt hingegen deutlichere Obertonanteile mit einer Dominanz der ungeraden Harmonischen, was sich im charakteristisch hellen Klang der Sopranblockflöte äußert.

Abstract

This master's thesis investigates how the timbre of a flute tone differs from that of a soprano recorder tone and how this can be described mathematically. To answer this question, a theoretical introduction to the physical and mathematical principles of sound waves and musical tones is first given and then the wave equation is derived using a string fixed at both ends and solved using d'Alembert's method and the method of separation of variables. The sound production and the structural characteristics of both flutes are then analysed in detail so that the wave equation for the vibrating air column can be derived and solved. The mathematical core of this work consists of the Fourier analysis, which forms the theoretical basis for the creation of the frequency spectrum of a tone. With its help, flute tones are represented as a sound spectrum and analysed with regard to their overtones.

The analysis of the self-recorded flute tones c^2 , g^2 and e^3 shows that flute tones tend to have a less pronounced overtone spectrum compared to the soprano recorder, which is consistent with the perception of the soft, round sound. The spectrum of the soprano recorder, on the other hand, shows clearer overtones with a dominance of odd harmonics, which is expressed in the characteristically bright sound of the soprano recorder.

Danksagung

Dankbarkeit zu zeigen ist ein Leichtes, wenn man – so wie ich – während der Entstehung dieser Masterarbeit auf so viel Unterstützung zählen durfte.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith, der mich mit seiner fachlichen Expertise, seiner Geduld und seinem konstruktiven Feedback durch alle Phasen der Arbeit begleitet hat. Seine Anregungen trugen wesentlich zur Klarheit und zur Qualität dieser Masterarbeit bei.

Von ganzem Herzen danke ich meinen Eltern Martha und Erwin Böltner, die mir in allen Lebenslagen den Rücken stärken und durch ihre Unterstützung das Studium erst ermöglicht haben. Durch alle Höhen und Tiefen des Studiums und während der Erstellung dieser Arbeit begleitete mich auch meine große Schwester Antonia, die stets ein offenes Ohr und aufmunternde Worte bereithielt.

Herzlichen Dank an Raphael Schatz und Antonia Böltner für das Korrekturlesen.

Danke auch an meine Kolleg:innen am BG/BRG Schwechat für die motivierenden Gespräche.

Letztlich möchte ich mich bei meinen Studienkolleg:innen bedanken, die wesentlich dazu beigetragen haben, dass mir die Studienzeit als eine schöne in Erinnerung bleibt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Schall, Töne und Klänge	3
2.1	Harmonische Schwingungen	3
2.1.1	Der einfache harmonische Oszillator	3
2.1.2	Die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung	4
2.1.3	Was ist ein Ton?	7
2.2	Wellen	9
2.3	Harmonische Wellen	10
2.3.1	Laufende Wellen	11
2.3.2	Stehende Wellen	18
2.4	Zusammenfassung der Gleichungen	21
3	Die Wellengleichung	23
3.1	Die Wellengleichung einer schwingenden Saite	23
3.1.1	Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen	27
3.1.2	Lösungsmethode nach d'Alembert	29
3.1.3	Randbedingungen	31
3.1.4	Anfangsbedingungen	32
3.1.5	Lösung durch Trennung der Variablen	35
3.2	Harmonische Wellen als Lösung der Wellengleichung	43
3.2.1	Laufende Wellen als Lösung der Wellengleichung	43
3.2.2	Stehende Wellen als Lösung der Wellengleichung	44
4	Die Querflöte und die Blockflöte	45
4.1	Aufbau der Querflöte	45
4.2	Aufbau der Blockflöte	46
4.3	Tonbildung	47
4.4	Schwingende Luftsäulen	48
4.4.1	Wellengleichung der schwingenden Luftsäule	49
4.4.2	Lösung der Wellengleichung für die Querflöte	50
4.4.3	Offene Pfeifen mit umgekehrt konischer Mensur	53
5	Fourieranalyse	57
5.1	Mathematische Grundlagen der Fourieranalyse: Der Raum L^2 und orthogonale Funktionen	57
5.1.1	Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen	57

Inhaltsverzeichnis

5.1.2	Orthonormalbasen	59
5.2	Trigonometrische Reihen und Fourierreihen	62
5.2.1	Eigenschaften der Fourierkoeffizienten	69
5.2.2	Beispiele von Fourierreihen	71
5.3	Konvergenz der Fourierreihe	77
5.3.1	Approximation im quadratischen Mittel	78
5.3.2	Exkurs: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	81
5.3.3	Punktweise Konvergenz	82
5.3.4	Gleichmäßige Konvergenz	85
5.4	Folgerungen für die Signalanalyse	87
5.5	Anwendung der Fourieranalyse auf die Wellengleichung der Querflöte	88
6	Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen	91
6.1	Signale und Spektren	91
6.1.1	Diskrete Fouriertransformation und Fast Fourier Transformation	93
6.2	Methodik	93
6.2.1	Wahl des Tons	93
6.2.2	Aufnahmesituation und Software	94
6.3	Analyse der Klangspektren	95
6.3.1	Theoretische und subjektive Erwartungen	95
6.3.2	Spektrale Analyse der Töne c^2 , g^2 und e^3	96
6.3.3	Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Klangspektren	101
7	Zusammenfassung und Ausblick	103

1 Einleitung

Musik war von klein auf ein großer Bestandteil meines Lebens und meine musikalische Laufbahn begann mit der Sopranblockflöte – einem Instrument, das als Einsteigerinstrument weit verbreitet ist, jedoch ein sehr ambivalentes Image trägt: Einerseits ist die Sopranblockflöte durch die einfache Spielweise und die preiswerte Anschaffung leicht zugänglich, andererseits überzeugt der Klang nicht immer. Später wechselte ich zur Querflöte, die in der klassischen Musik fest etabliert ist und deren Klang häufig als „rein“ oder „elegant“ wahrgenommen wird. Im Studium festigte sich meine Freude am Musizieren, wobei auch das Mitwirken im Musikverein in meiner Heimat mein Interesse an der Querflöte nachhaltig prägte. Ergänzend dazu regten mehrere Lehrveranstaltungen im Bereich der Akustik mein Interesse an den physikalischen und mathematischen Grundlagen von Musik an. Vor diesem Hintergrund und durch meine Fächerkombination Mathematik und Musik lag es nahe, eine musikbezogene Fragestellung mithilfe der Mathematik zu beantworten, um diese beiden Fachrichtungen miteinander zu verbinden. Aufgrund dessen ist die zentrale Fragestellung dieser Arbeit: „Wodurch unterscheidet sich die Klangfarbe eines Querflötentons von jener eines Sopranblockflötentons und wie lässt sich dies mathematisch erklären?“

Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst die Grundlagen harmonischer Schwingungen und Wellenbewegungen erläutert. Anschließend wird auf die Wellengleichung und ihre Lösung eingegangen sowie der Aufbau und die Tonerzeugung von Querflöte und Sopranblockflöte im Detail betrachtet. Den mathematischen Kern bildet die Fourieranalyse, mithilfe derer im abschließenden Kapitel selbst eingespielte Flötentöne analysiert und deren Klangspektren verglichen werden.

Teile der vorliegenden Masterarbeit behandeln die gleichen Themen wie meine Bachelorarbeit mit dem Titel „Die Fourieranalyse und ihre Anwendung in der Akustik“, die ich im Rahmen meines Mathematik-Lehramtsstudiums verfasst habe. Insbesondere wurde in der Bachelorarbeit ein Ton physikalisch beschrieben sowie die mathematische Grundlage der Fourieranalyse erläutert und deren Anwendung in der Akustik allgemein betrachtet. In dieser Masterarbeit wird das Thema der Fourieranalyse präzisiert und weitergeführt, jedoch mit einem spezifischen Fokus auf die weiteren mathematischen Aspekte, die die Tonerzeugung in der Querflöte und der Sopranblockflöte beeinflussen. Direkte Übernahmen von Textpassagen wurden vermieden, jedoch wurde ein Teil der Literatur, die ich bereits bei der Bachelorarbeit genutzt hatte, für die Recherche verwendet, wodurch es zu Überschneidungen im Aufbau kommt.

2 Schall, Töne und Klänge

Der Klang eines Instruments bezeichnet die von diesem Instrument erzeugten Töne, die über Schallwellen das Ohr erreichen. Damit folglich genau verstanden werden kann, was mathematisch gesehen Töne, Klänge und Geräusche genau sind, bedarf es, zunächst in die Materie der Akustik, der Lehre vom Schall, einzutauchen und die Grundlagen zum Verständnis über harmonische Schwingungen und Wellen zu legen.

2.1 Harmonische Schwingungen

Bei einer an beiden Seiten eingespannten, schwingenden Saite führen die einzelnen Punkte auf der Saite harmonische Schwingungen aus, die sich als Schallwellen im Raum ausbreiten und von uns Menschen hörbar sind. Daher kann gesagt werden, dass Schwingungen die Bewegung eines Punktes um eine Gleichgewichtslage beschreiben und lokal sind. Wellen hingegen entstehen durch die Ausbreitung von Schwingungen und breiten sich in einem Medium aus. [1, S. 57]

2.1.1 Der einfache harmonische Oszillator

Das einfachste Modell zur Darstellung von harmonischen Schwingungen ist der **einfache harmonische Oszillator**, bei dem eine Masse an einer vertikal aufgehängten Feder hängt. Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, wird keine Kraft auf die Masse ausgeübt. Wird nun das Objekt um eine Länge x aus der Ruhelage herausbewegt, wirkt die Feder eine Kraft F auf die Masse aus, die proportional zur Auslenkung ist. Durch das *Hooke'sche Gesetz* ergibt sich folgender Zusammenhang zur Beschreibung der Federkraft F :

$$F = -k_F \cdot x, \quad (2.1.1)$$

wobei k_F die Federkonstante ist und die Steifheit bzw. Elastizität der Feder angibt. Das Minuszeichen zeigt an, dass F entgegen der Auslenkungsrichtung aus der Ruhelage gerichtet ist; die Kraft ist also rücktreibend. Je größer die Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage ist, desto stärker wirkt die Federkraft F in die entgegengesetzte Richtung. [31, S. 414] Aufgrund der Massenträgheit kommt die Masse nicht in der Ruhelage zum Stillstand, sondern bewegt sich darüber hinaus, womit eine Schwingung um die Gleichgewichtslage entsteht. Wenn Reibung vorhanden ist, kommt diese harmonische Schwingung schließlich zum Stillstand - man spricht dabei von einer gedämpften Schwingung. Das Pendant dazu ist die für die Berechnungen wichtige ungedämpfte Schwingung bei Reibungsfreiheit. [10, S. 39]

In Abbildung 2.1 signalisiert die gestrichelte Linie die Ruhelage. Wird die Masse beispielsweise um die Höhe x angehoben und ausgelenkt, wirkt die Federkraft F nach unten, die Masse schwingt um x unter die Gleichgewichtslage und anschließend wieder nach oben: Es entsteht eine harmonische Schwingung.

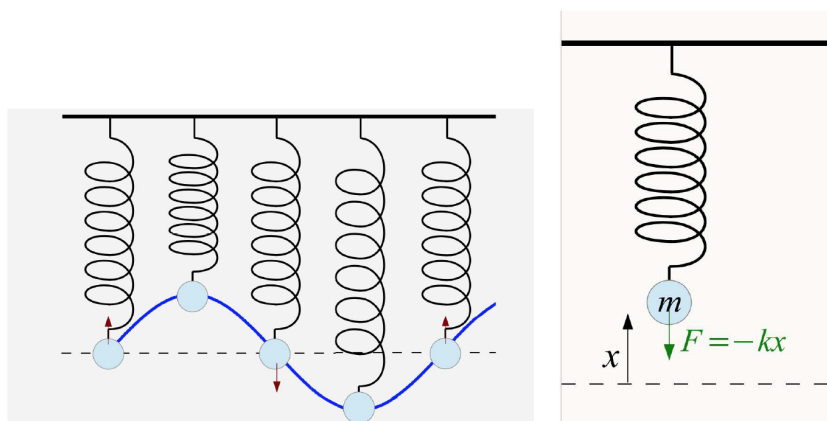


Abbildung 2.1: Einfacher harmonischer Oszillator [10, S. 39]

2.1.2 Die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung

Damit in weiterer Folge Berechnungen durchgeführt und Aussagen über die Töne in der Musik getroffen werden können, wird in diesem Abschnitt das *Hooke'sche Gesetz* mit dem *2. Newton'schen Gesetz* kombiniert, um eine Bewegungsgleichung (Differentialgleichung 2. Ordnung) anschreiben zu können. Es wird anschließend gezeigt, dass eine als gegeben betrachtete sinusförmige Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$ eine mögliche Lösung dieser Differentialgleichung ist. Deren Parameter werden im gegebenen Kontext anschaulich erklärt. Wenn nicht anders angegeben, folgen die Erklärungen den Ausführungen von Paul A. Tipler und Gene Mosca. [31, S. 414f]

Bei Kombination des *Hooke'schen Gesetzes* (2.1.1) mit dem *2. Newton'schen Gesetz*

$$F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1.2)$$

(Kraft ist Masse mal Beschleunigung) ergibt sich die Gleichung

$$-k_F \cdot x = m \cdot a_x.$$

Durch Äquivalenzumformungen und die Anschrift der Beschleunigung als die zweite Ableitung der Ort-Zeit-Funktion $x(t)$ lässt sich diese Bewegungsgleichung anschreiben als:

$$a_x = -\frac{k_F}{m} x \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_F}{m} x = 0 \quad (2.1.3)$$

2.1 Harmonische Schwingungen

In Abbildung 2.1 kann bereits eine sinusoidale Bewegung der Masse erkannt werden. Soll nun der Ort x der Masse zu einem bestimmten Zeitpunkt t bestimmt werden, kann dies durch die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung $x(t)$ erfolgen:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta). \quad (2.1.4)$$

In Kapitel 3.2 wird deutlich, dass eine harmonische Schwingung die Wellengleichung löst und diese deshalb hier bereits verwendet werden darf.

Die **Amplitude** A gibt die maximale Auslenkung aus der Ruhelage an; $(\omega t + \delta)$ wird **Phase** der Schwingung genannt und die **Phasenkonstante** δ gibt die Phase bei $t = 0$ an. Wenn nur ein schwingendes System vorliegt, kann immer $\delta = 0$ gesetzt werden. Weiters ist es aufgrund des Zusammenhangs $\cos(\omega t + \delta) = \sin(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2})$ redundant, ob $x(t)$ als Sinus- oder Kosinusfunktion angeschrieben wird.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Gleichung 2.1.4 eine Lösung der Bewegungsgleichung 2.1.3 ist. Dafür wird die Ort-Zeit-Funktion $x(t)$ mithilfe der Kettenregel zweimal nach der Zeit differenziert, um die Beschleunigungsfunktion der harmonischen Bewegung zu erhalten:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot A \sin(\omega t + \delta) \quad (2.1.5)$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot A \cos(\omega t + \delta) \quad (2.1.6)$$

Mit $x = A \cos(\omega t + \delta)$ (siehe 2.1.4) kann nun diese Gleichung zum Beschleunigungsgesetz der harmonischen Schwingung umgeschrieben werden:

$$a_x = -\omega^2 \cdot x. \quad (2.1.7)$$

Schreibt man nun die Bewegungsgleichung 2.1.3 zu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = -\frac{k_F}{m} x$$

um und setzt sie mit Gleichung 2.1.7 gleich, ergibt sich

$$\begin{aligned} -\omega^2 x &= -\frac{k_F}{m} x && \Leftrightarrow \\ \omega &= \sqrt{\frac{k_F}{m}} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

und die Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$ ist eine mögliche Lösung der Gleichung.

Die Parameter A und δ können aus der Anfangsbedingung $t = t_0$ und durch Einsetzen in $x = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$ berechnet werden. Sei dazu $t = 0$. Daraus folgt die Anfangslage

$$x_0 = A \cdot \cos(\delta)$$

sowie die Anfangsgeschwindigkeit (siehe 2.1.5)

$$v_{x,0} = -\omega \cdot A \cdot \sin(\delta).$$

Mithilfe der Gleichungen der Anfangslage und -geschwindigkeit können im Anschluss die Amplitude A und die Phasenkonstante δ berechnet werden.

Zur weiteren Betrachtung der Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung wird folgende Definition eingeführt:

Definition 2.1.1 (Periodische Funktionen). [17, S. 321]

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit der Periode $T > 0$ oder kurz *T-periodisch*, falls gilt:

$$f(t + T) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.1.9)$$

Nachdem der Kosinus die Periode 2π hat, gilt $\omega T = 2\pi$, woraus $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgen.

Der Parameter ω wird die **Kreisfrequenz** genannt und ist in $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ beziehungsweise nur s^{-1} angegeben, wobei s für die Zeit in Sekunden steht.

Im Modell des harmonischen Oszillators bedeutet die T -Periodizität einer Funktion, dass die Masse T Sekunden benötigt, um eine vollständige Schwingung auszuführen. Daher wird T auch **Schwingungsdauer** oder **Schwingungsperiode** genannt. Der reziproke Wert $\nu = \frac{1}{T}$ wird **Frequenz** genannt und gibt die Anzahl der vollständigen Schwingungen pro Sekunde an. Die Einheit der Frequenz ist **Hertz (Hz)**.

Insgesamt ergibt sich also für die Ort-Zeit-Funktion $x(t)$

$$x(t) = A \cdot \cos\left(2\pi \frac{1}{T}t + \delta\right)$$

und aufgrund von

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi\nu \quad \Leftrightarrow \\ \nu &= \frac{1}{2\pi}\omega \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

und $\omega = \sqrt{\frac{k_F}{m}}$ (2.1.8) folgt schließlich die Frequenz des Federschwingers in Abhängigkeit von der Federkonstante k_F und der Masse m :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_F}{m}}. \quad (2.1.11)$$

Die Gleichung zeigt, dass die Frequenz und somit auch die Schwingungsdauer von lediglich der Federkonstante und der Masse, nicht jedoch von der Amplitude A , also der maximalen Ausdehnung aus der Gleichgewichtslage, abhängt. Was diese Erkenntnis in der Musik bedeutet, wird im nächsten Kapitel thematisiert.

2.1.3 Was ist ein Ton?

Ein Ton lässt sich – im Gegensatz zu einem Geräusch – als eine Schwingung der Luft darstellen, die (annähernd) periodische Grundmuster aufweist. Dabei wird zwischen der allgemein verwendeten und der physikalischen Terminologie unterschieden: In der Akustik versteht man unter einem (reinen) Ton eine einzige sinusförmige Schwingung, während hier der Ton im musikalischen Sinne als Klang bezeichnet wird. Dabei handelt es sich um eine periodische Schallwelle, die sich aus einem Grundton und mehreren Obertönen zusammensetzt. Geräusche sind auch Schallwellen, die jedoch nichtperiodisch sind. [31, S. 506f]

Die Grundform eines reinen Tones kann durch die Formel der harmonischen Schwingung

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

(siehe 2.1) angegeben werden. Wir schreiben diese Gleichung mit $\omega = 2\pi\nu$ um und erhalten

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi\nu t + \delta).$$

Aus dieser Formel lassen sich zwei musikalische Parameter leichter ablesen. Die Amplitude A gibt die **Lautstärke** des Tons an und ν bezeichnet die Frequenz, also die **Tonhöhe**. Der Kammerton a^1 wird meist mit 440 Hz angegeben und das menschliche Ohr kann Frequenzen zwischen 20 Hz und 20 000 Hz aufnehmen. [26, S. 6ff] [6, S. 8]

Bemerkung. Die im Abschnitt 2.1.2 gefundene Gleichung $\nu = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k_F}{m}}$ bedeutet im Kontext der Musik, dass es in der Theorie keinen Unterschied macht, wie laut ein Ton gespielt wird: Die Frequenz, also die Tonhöhe, bleibt dieselbe. Da jedoch in der Praxis Musikinstrumente fast nie exakt harmonische Schwingungen erzeugen, kann eine Abhängigkeit der Tonhöhe von der Lautstärke des gespielten Tons festgestellt werden. Diese ist jedoch minimal und kann zum Beispiel bei Blasinstrumenten mit der Lippenspannung des Spielers oder der Spielerin korrigiert werden. [31, S. 418]

Ein Ton im musikalischen Sinne kann durch folgende Definition beschrieben werden:

Definition 2.1.2 (Basismodell eines (musikalischen) Tons). [26, S. 8]

Ein (musikalischer) Ton ist die Überlagerung (= Summe) einer gewissen, theoretisch unendlichen Folge von Einzelschwingungen x_n , $n \in \mathbb{N}^*$, wobei x_n die n -fache Frequenz einer gegebenen Grundschwingung ω besitzt.

Dies lässt sich mithilfe der sogenannten **Spektraldarstellung** auf folgende Weise darstellen:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right], \quad (2.1.12)$$

wobei der erste Summand x_1 die Fundamentale, also die Grundschwingung ist, deren Tonhöhe gehört wird, und die Anteile x_n mit $n > 1$ die Obertöne bzw. n -ten Harmonischen des musikalischen Tons sind. Der erste Oberton entspricht dabei der zweiten Harmonischen, der zweite Oberton der dritten Harmonischen usw. – im Allgemeinen gilt daher: n -ter Oberton = $(n + 1)$ -te Harmonische.

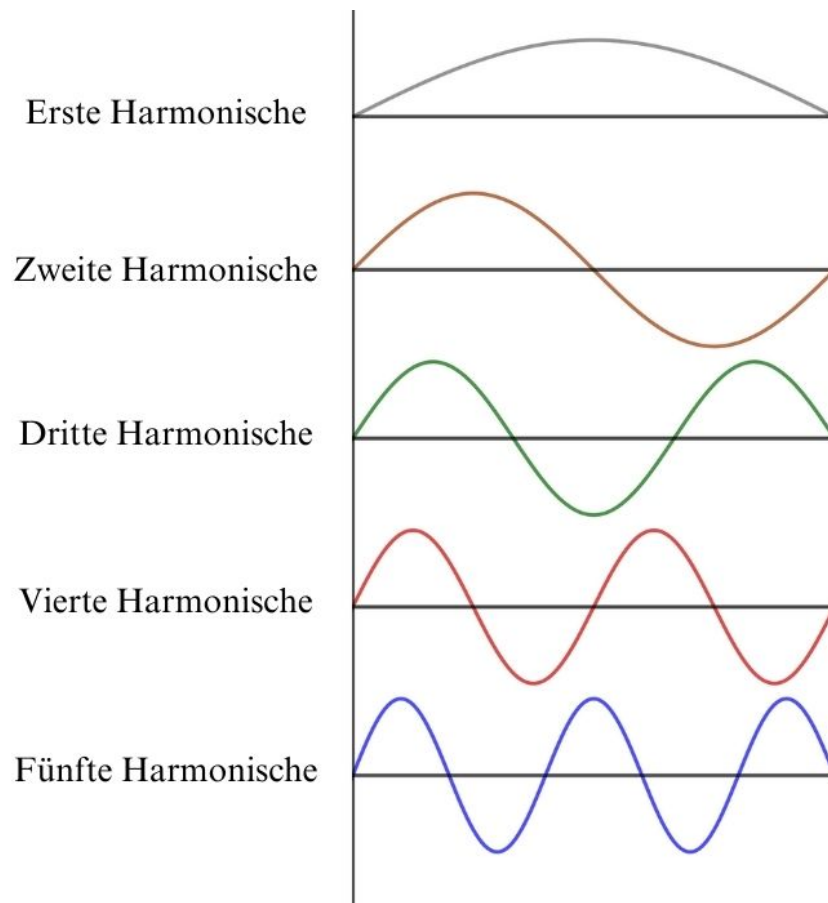


Abbildung 2.2: Die ersten fünf Harmonischen einer Schwingung, eigene Darstellung mit GeoGebra

Der Grund für den unterschiedlichen Klang der Töne von verschiedenen Instrumenten bei gleicher Tonhöhe ist die **Klangfarbe**. Wenn ein Ton gespielt wird, treten neben der Grundschwingung auch die Obertöne in unterschiedlichen relativen Intensitäten, also Lautstärken, auf. Diese unterschiedlichen **Obertonspektren** bzw. **Spektren** sind je nach Bauart und Spielweise eines Instruments unterschiedlich. [31, S. 507] In Abbildung 2.2 werden die ersten fünf Harmonischen einer Grundschwingung gezeigt, wobei die erste Harmonische gleichzeitig die Grundschwingung, also die Fundamentale, ist. Die n -te Harmonische schwingt mit der n -fachen Frequenz der Fundamentalen.

Die Harmonischen schwingen im ganzzahligen Verhältnis

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : \dots$$

und für einen Grundton mit der Grundfrequenz ν erhält man eine Obertonreihe mit den Obertönen der Frequenzen $2\nu, 3\nu, 4\nu, \dots$ [20, S. 61] Durch die Unterteilung einer gespannten Saite in den Verhältnissen $1 : 2, 2 : 3, 3 : 4$, usw. erklingt die Oberton- bzw.

Naturtonreihe, die in Abbildung 2.3 mit dem Grundton C dargestellt ist. Die Frequenzen verhalten sich reziprok zu den Verhältnissen der Unterteilung der Saite, das heißt eine halbierte Saite schwingt mit der doppelten Frequenz als die ganze Saite.

Die in Abbildung 2.3 fettgedruckten Zahlen zeigen die sogenannten „ekmelischen Töne“, deren exakte Tonhöhen im geläufigen Notenbild nicht darstellbar sind. Sie klingen etwas tiefer als notiert. [15, S. 512]

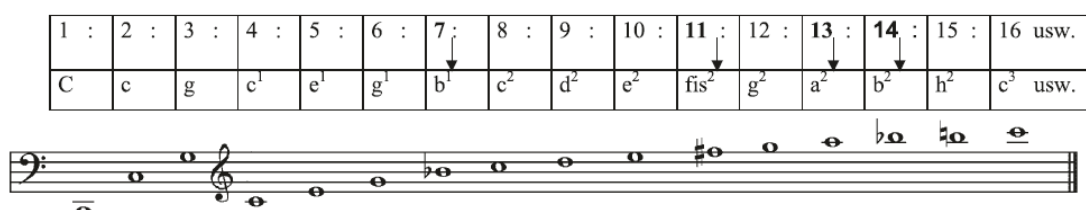


Abbildung 2.3: Obertonreihe mit dem Grundton C [15, S. 512]

2.2 Wellen

Schallwellen können sich in Gasen, Flüssigkeiten und Festkörpern ausbreiten; das für das Hören von Klängen wichtigste Medium ist jedoch die Luft. Sie besteht aus endlich vielen Luftmolekülen, die sich ununterbrochen bewegen und aneinanderstoßen. Dabei erreichen sie bei Raumtemperatur und unter normalen Konditionen eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 450 – 500 m/s. Der geringe mittlere Abstand von $6 \cdot 10^{-8}$ m und die große Anzahl der Teilchen in der Luft resultieren im Luftdruck. Wenn nun ein Objekt vibriert, wird die Luft abwechselnd komprimiert und dekomprimiert. Diese lokale Störung der Ruhelage breitet sich in Schallgeschwindigkeit (ca. 343 m/s) im Raum aus - nicht jedoch die einzelnen Moleküle. [6, S. 1f] Diese führen im Falle der harmonischen Welle lokal harmonische Schwingungen aus. [31, S. 464]

Generell lassen sich mechanische Wellen in zwei Arten unterteilen: transversale und longitudinale Wellen.

Transversalwellen werden solche genannt, deren Störung der Ruhelage normal zur Ausbreitungsrichtung der Welle ist, wobei Wellenberge und -täler entstehen. Beispiele für transversale Wellen sind Wasserwellen oder das Zupfen einer auf beiden Enden eingespannten Saite: Die Verformung der Saite an einer Stelle wirkt sich aufgrund der Wechselwirkung der Teilchen unmittelbar auf die benachbarten Segmente aus und es entsteht eine Welle, die sich in Richtung der gespannten Saite vor- und zurückbewegt. Jeder Punkt auf der Saite führt harmonische Schwingungen im rechten Winkel zur Ausbreitungsrichtung der Welle aus. Die Abbildung 2.4 zeigt die Verformung einer Feder senkrecht zur horizontalen Ausbreitung der Welle.

Longitudinalwellen werden jene Wellen genannt, bei denen die Ruhelage eines Mediums in Ausbreitungsrichtung gestört wird. Anstatt der Wellenberge und -täler, wie sie bei transversalen Wellen gefunden werden können, breitet sich der Bewegungsimpuls



Abbildung 2.4: Transversale Welle auf einer Feder [31, S. 456]

durch Komprimierung und Ausdehnung des Mediums aus. Ein Beispiel dafür ist Schall, der sich in longitudinalen Wellen dreidimensional in der Luft ausbreitet. [31, S. 456ff] Die Abbildung 2.5 zeigt die lokale Verdichtung (blau) sowie die lokale Ausdehnung (rot) einer Feder.

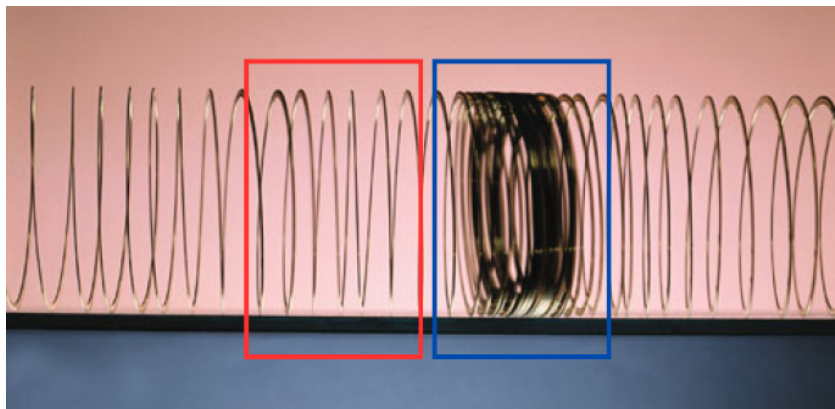


Abbildung 2.5: Longitudinale Welle auf einer Feder [31, S. 457]

2.3 Harmonische Wellen

Harmonische Wellen sind jene, bei denen die Luftmoleküle lokal harmonische Schwingungen ausführen. Durch den Zusammenstoß mit benachbarten Teilchen werden diese ebenfalls zum Schwingen gebracht, weshalb sich die Welle fortpflanzen kann. Solche Wellen können durch eine Sinus- oder Kosinusfunktion beschrieben werden. [31, S. 464]

2.3.1 Laufende Wellen

Am anschaulichen Beispiel einer an beiden Seiten fixierten Saite lässt sich leicht nachvollziehen, dass die einzelnen Punkte auf der Saite mit der Frequenz ν auf und ab schwingen. In der Zeit einer Schwingungsdauer $T = \frac{1}{\nu}$ bewegt sich die Welle um eine Wellenlänge λ fort, woraus sich die Wellengeschwindigkeit

$$v = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda \quad (2.3.1)$$

ergibt. Dadurch kann die Sinusfunktion

$$u(x) = A \cdot \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right) \quad (2.3.2)$$

beschreiben werden, wobei durch den Faktor 2π sichergestellt wird, dass der Wert der Funktion bei einer Veränderung von x um eine Wellenlänge gleich bleibt. Dabei beschreibt A die **Amplitude**, λ die **Wellenlänge** und δ die Phasenkonstante, die bei einer einzelnen Welle, wie auch schon bei der Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung (2.1.4) null gesetzt werden kann. Die Wellenlänge λ ist das räumliche Pendant zur Periode $T := \frac{2\pi}{\omega}$ (siehe 2.1.10). Da der Faktor $\frac{2\pi}{\lambda}$ immer mit der Ortsvariable x zusammenhängt, wird eine eigene Größe k mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

eingeführt. Sie wird auch **Wellenzahl** bzw. **Kreiswellenzahl** genannt. [31, S. 464] Sie gibt die Anzahl der Wellen auf einer Strecke der Länge 2π an. [20, S. 32] Die Abbildung 2.6 zeigt eine Sinusfunktion mit den beschriebenen Parametern.

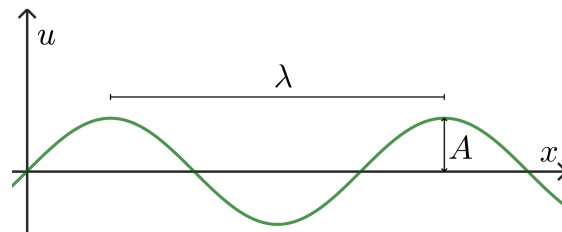


Abbildung 2.6: Sinusfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra nach [31, S. 463]

Definition 2.3.1 (Rechtslaufende harmonische Wellen). [20, S. 32]

Eine rechtslaufende harmonische Welle ist von der Form

$$u(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \theta)$$

mit $A, \omega, k > 0$ und $0 \leq \theta < 2\pi$.

Bemerkung. Die **Kreisfrequenz** $\omega = kv$ ergibt daraus, dass bei einer sich in positiver x -Richtung ausbreitenden Welle das x in Gleichung 2.3.2 durch $x - vt$ ersetzt werden muss, um die Fortbewegung der Welle zu signalisieren. [31, S. 464]

2 Schall, Töne und Klänge

Bemerkung. Linkslaufende harmonische Wellen können mit

$$u(x, t) = A \cdot \sin(\omega t + kx + \theta)$$

beschrieben werden.

Harmonische Schallwellen

Schallwellen breiten sich in der Luft und in Flüssigkeiten in Longitudinalwellen aus. Wie bereits in vorhergehenden Kapiteln sei die Auslenkung der Moleküle aus der Gleichgewichtslage als harmonische Schallwelle mit

$$s(x, t) = s_{\max} \cdot \sin(kx - \omega t)$$

gegeben. Dabei erfolgen die Auslenkungen der Luftmoleküle parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle, was mit der Umbenennung der Funktion und der Amplitude verdeutlicht wird. Diese Auslenkung in Richtung der Bewegungsrichtung führt zu periodischen Schwankungen der Luftdichte und des Luftdrucks. In einem Gas besteht eine direkte Proportionalität zwischen Druck und Dichte, sodass die Maxima des Drucks gleichzeitig die Dichtemaxima darstellen, welche jedoch nicht an den Punkten maximaler Teilchenauslenkung auftreten. Vielmehr ist die Druck- bzw. Dichtewelle p gegenüber der Auslenkungswelle s um $\frac{\pi}{2}$ rad ($= 90^\circ$) phasenverschoben.

Die Abbildung 2.7 zeigt in (a) die Auslenkung der Luftmoleküle u und in (e) den Luftdruck p zu einem festen Zeitpunkt t_0 . Dabei lässt sich erkennen, dass an jenen Punkten, an denen es keine Auslenkung gibt (z.B. $u(x_1) = u(x_3) = 0$), die Druckwelle ein Minimum bzw. Maximum besitzt. Im Punkt x_2 ist die Auslenkung maximal und die Druckwelle hat dort eine Nullstelle. Die Punkte in (b) zeigen einige Moleküle in Gleichgewichtslage vor dem Eintreffen der Schallwelle und die Pfeile repräsentieren die Richtung, in die sich die Moleküle bewegen werden, und in (c) lassen sich diese Luftmoleküle kurz nach der eingetroffenen Schallwelle erkennen. Abbildung (d) korreliert mit (e), indem die Schattierung die Dichte der Luftmoleküle repräsentiert. [31, S. 467]

Reflexion einer Welle

Betrachtet man einen laufenden Impuls auf einer an beiden Seiten fixierten Saite, zeigt sich, dass dieser am Ende der Saite reflektiert und sich als invertierter Impuls in die andere Richtung fortbewegt. Invertiert bedeutet, dass ein nach oben gerichteter Impuls bei der Rückrichtung nach unten zeigt und dass die Form in vertikaler Richtung gespiegelt ist. Dies kann in Abbildung 2.8 nachvollzogen werden.

Überlagerung laufender Wellen

Definition 2.3.2 (Superpositionsprinzip). [31, S. 488]

Wenn zwei oder mehr Wellen sich überlagern, ergibt sich die resultierende Welle als algebraische Summe der einzelnen Auslenkungen.

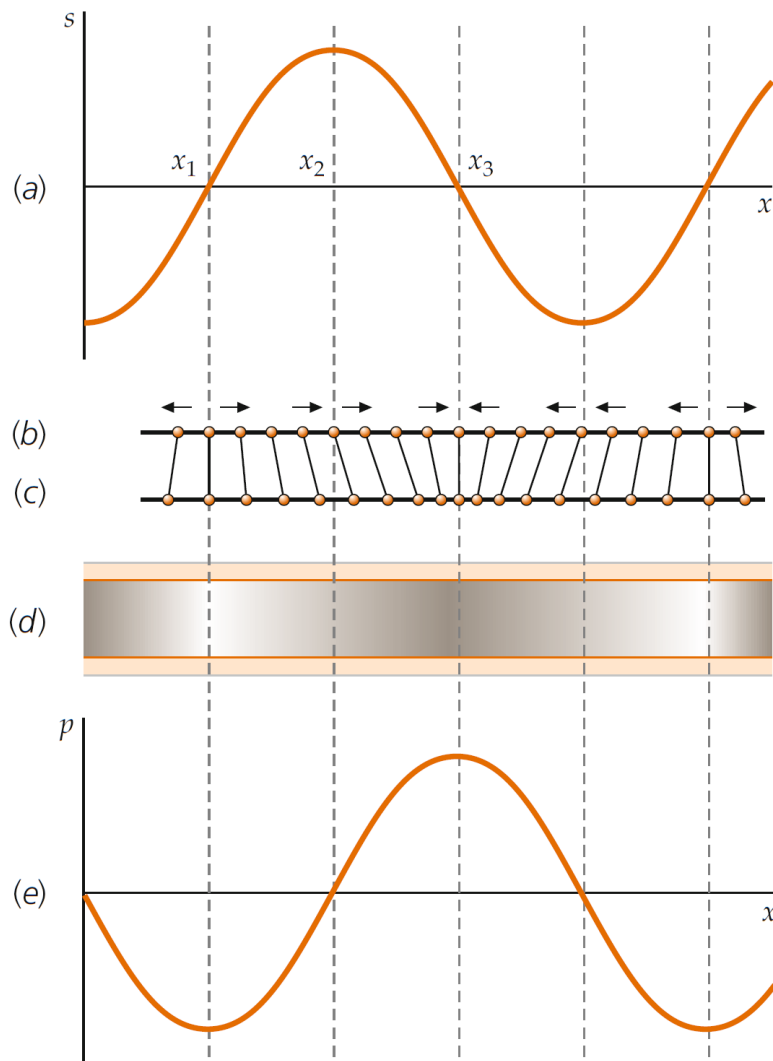


Abbildung 2.7: Zusammenhang zwischen der Auslenkungswelle (a) und der Druckwelle (e) [31, S. 467]

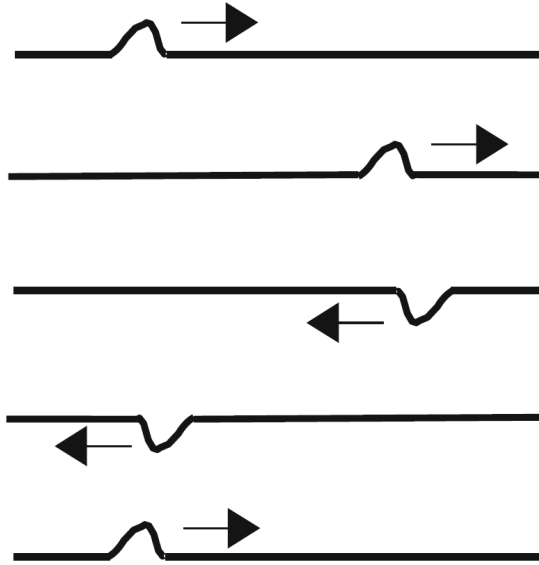


Abbildung 2.8: Reflexion eines Pulses an den Enden einer beidseitig eingespannten Saite [16, S. 62]

Dieses **Superpositionsprinzip** soll anhand eines Beispiels, in dem zwei harmonische Wellen übereinandergelagert werden, dargestellt werden. Dazu betrachten wir die beiden Wellen

$$u_1(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

und

$$u_2(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \theta).$$

Sie haben dieselbe Amplitude, Frequenz und Wellenzahl, jedoch eine unterschiedliche Phasenkonstante, wodurch sie sich an einem bestimmten Ort um die Phasendifferenz

$$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \theta) = \omega(t_2 - t_1) - \theta = \omega \Delta t - \theta$$

unterscheiden. Dies bedeutet, dass die zweite Welle die gleiche Auslenkung wie die erste um $\Delta t = \frac{\theta}{\omega}$ später erreicht. Zu einem bestimmten Zeitpunkt ist die zweite Welle um $\Delta x = \frac{\theta}{k}$ hinter der ersten. Die Rechnung dazu ist analog wie oben.

Die Überlagerung der beiden Wellen ergibt die sogenannte **Resultierende**. Diese lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$u_1 + u_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t) + A \cdot \sin(kx - \omega t + \theta) \quad (2.3.3)$$

Für die weiteren Rechnungen benötigen wir die Additionstheoreme, die hier gesammelt angeschrieben werden:

Theorem 2.3.1 (Additionstheoreme). [15, S. 133]

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $x-y = x+(-y)$

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y) \\ &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Daraus können wir

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin(x)\cos(y) \quad (2.3.4)$$

schließen. Setzen wir nun übergangsweise $x+y = \alpha$ und $x-y = \beta$, dann erhalten wir

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right). \quad (2.3.5)$$

[1, S. 41] In unserem Fall ist $\alpha = kx - \omega t$ und $\beta = kx - \omega t + \theta$, woraus folgt

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{kx - \omega t + kx - \omega t + \theta}{2} = kx - \omega t + \frac{\theta}{2}$$

und

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{kx - \omega t - kx + \omega t - \theta}{2} = -\frac{\theta}{2}.$$

Damit lässt sich mit $\cos(-\frac{\theta}{2}) = \cos(\frac{\theta}{2})$ die Gleichung 2.3.3 umschreiben zu:

$$u_1 + u_2 = 2A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\theta}{2}\right). \quad (2.3.6)$$

Bemerkung. Diese Gleichung entspricht der **Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude und Frequenz**. [31, S. 491] Die Abbildung 2.9 zeigt die Überlagerung zweier Wellen u_1 (grün) und u_2 (rot) als neue Welle $u = u_1 + u_2$ (blau).

Die Überlagerung zweier oder mehrerer Wellen wird **Interferenz** genannt. Dabei kann zwischen der konstruktiven und der destruktiven Interferenz unterschieden werden:

- **Konstruktive Interferenz** tritt auf, wenn beide Wellen in Phase sind. Dabei ist $\theta = 0$, weswegen die Amplitude $A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ in Gleichung 2.3.6 maximal wird. Die Amplitude der Resultierenden beträgt dann $2A$. (siehe Abbildung 2.10)
- Beträgt der Phasenunterschied zwischen den beiden Welle $\theta = 180^\circ (= \pi \text{ rad})$, dann fällt die Amplitude wegen $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ weg und die resultierende Welle verschwindet. Diese Überlagerung wird **destruktive Interferenz** genannt. (siehe Abbildung 2.11) [31, S. 491]

2 Schall, Töne und Klänge

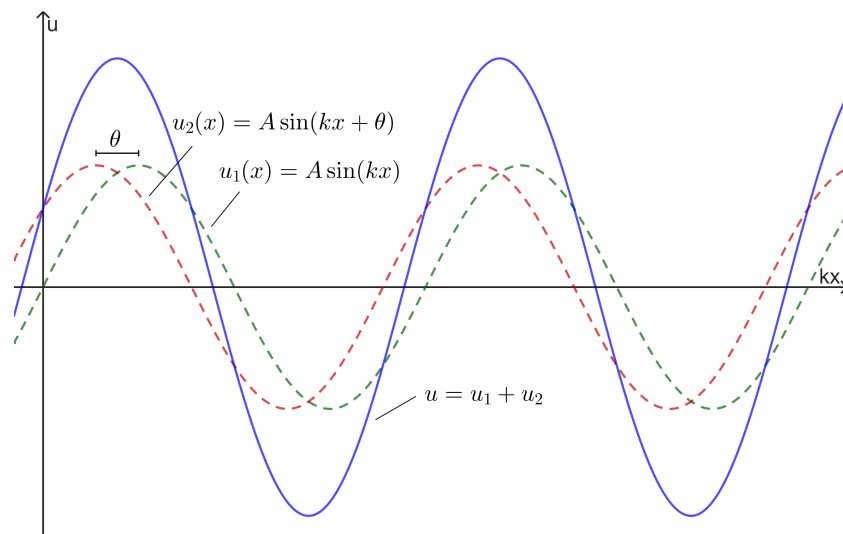


Abbildung 2.9: Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude und Frequenz mit $t = 0$, eigene Darstellung mit GeoGebra nach [31, S. 490]

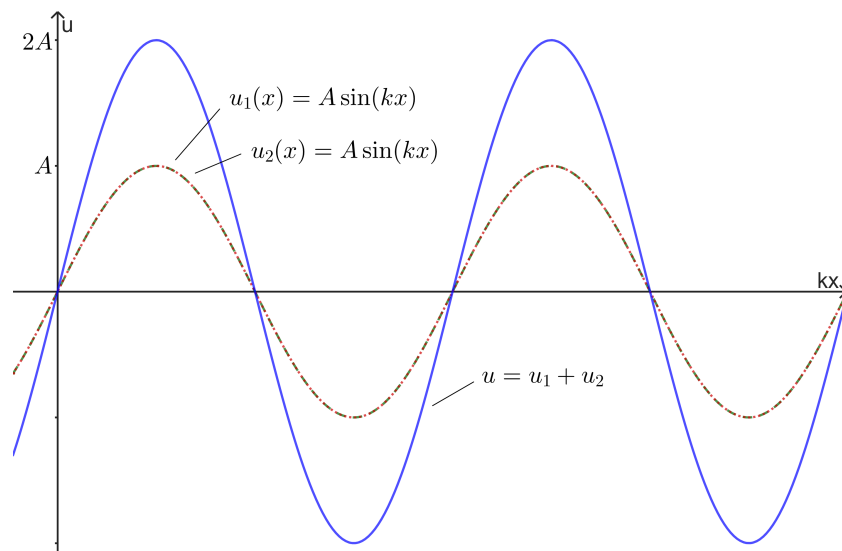


Abbildung 2.10: Konstruktive Interferenz, eigene Darstellung mit GeoGebra

Schwebungen

Als besondere Art von Interferenz ist in der Musik die **Schwebung** zu nennen. Wenn zwei Töne mit leicht unterschiedlichen Frequenzen ertönen, so hört man eine periodische Änderung der Lautstärke des Tons. [20, S. 78]

Seien

$$p_1(t) = p_{max} \sin(\omega_1 t) \quad \text{und} \quad p_2(t) = p_{max} \sin(\omega_2 t)$$

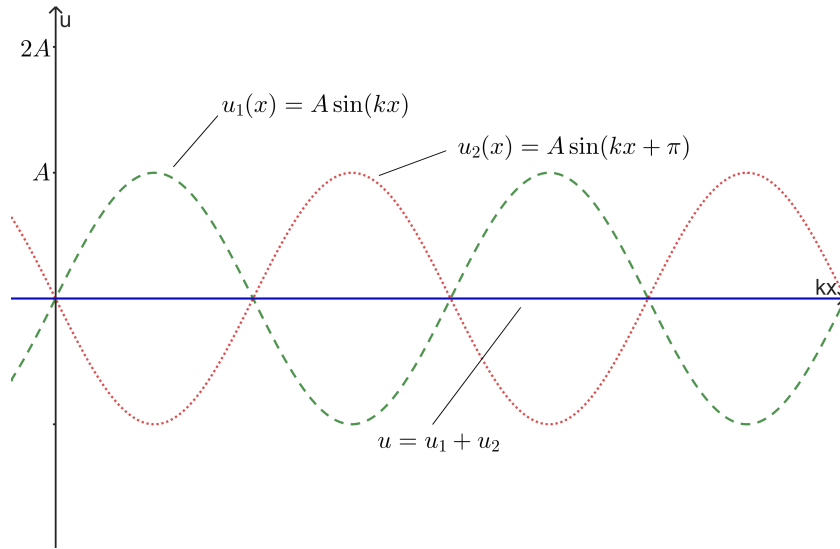


Abbildung 2.11: Destruktive Interferenz, eigene Darstellung mit GeoGebra

zwei Funktionen, die den Druck einer Schallwelle zu einem beliebigen, aber fixierten Punkt beschreiben. Die Überlagerung ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p_{max} \sin(\omega_1 t) + p_{max} \sin(\omega_2 t) \\
 &= p_{max} (\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) \\
 &\stackrel{(2.3.5)}{=} 2 p_{max} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right). \quad (2.3.7)
 \end{aligned}$$

Durch Umschreiben von $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} =: \langle \omega \rangle$ für die mittlere Kreisfrequenz und $\omega_1 - \omega_2 =: \Delta \omega$ für die Differenz der Kreisfrequenzen kann die Gleichung 2.3.7 umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= 2 p_{max} \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \sin(\langle \omega \rangle t) \\
 &= 2 p_{max} \cos\left(\frac{2\pi \Delta \nu}{2} t\right) \sin(2\pi \langle \nu \rangle t). \quad (2.3.8)
 \end{aligned}$$

Hier wurde im Umformungsschritt $\Delta \omega = 2\pi \Delta \nu$ und $\langle \omega \rangle = 2\pi \langle \nu \rangle$ gesetzt, wobei $\Delta \nu$ die Differenz der Schwingungsfrequenzen und $\langle \nu \rangle$ die mittlere Schwingungsfrequenz ist. Die Frequenz, mit der der Ton abwechselnd lauter und leiser wird, heißt Schwebungsfrequenz und ist gleich der Differenz der beiden Frequenzen der beiden Ursprungsquellen:

$$\nu_{Schwebung} = \Delta \nu.$$

2 Schall, Töne und Klänge

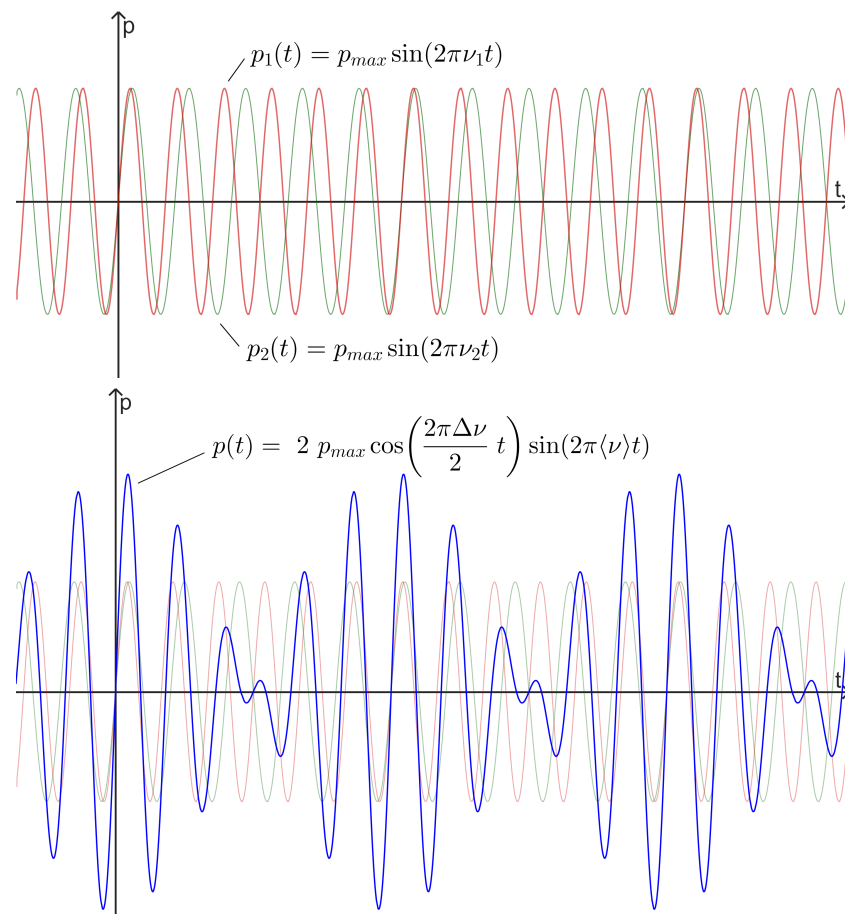


Abbildung 2.12: Zwei Wellen p_1 und p_2 mit ähnlichen Frequenzen ν_1 und ν_2 (oben) und ihre Resultierende p (unten), eigene Darstellung mit GeoGebra

Die Amplitude $2 p_{max} \cos\left(\frac{2\pi\Delta\nu}{2} t\right)$ verändert sich mit der Zeit, was das Auf- und Abschwellen des Tons erklärt. [31, S. 491f] In Abbildung 2.12 zeigt sich diese Lautstärkenänderung in der periodischen Veränderung der Amplitude.

Beispiel. Werden zwei Töne mit $\nu_1 = 440$ Hz und $\nu_2 = 442$ Hz gespielt, hören wir insgesamt einen Ton mit der Frequenz $\langle\nu\rangle = 441$ Hz, der zweimal pro Sekunde „pulsiert“ ($\nu_{Schwebung} = \Delta\nu = 2$ Hz).

2.3.2 Stehende Wellen

Es seien nun eine rechtslaufende

$$u_1(x, t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

und eine linkslaufende Welle

$$u_2(x, t) = A \cdot \sin(kx + \omega t)$$

in gleicher Phase gegeben. Die Überlagerung, das heißt die Addition der beiden in entgegengesetzte Richtungen verlaufenden Wellen liefert:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cdot \sin(kx - \omega t) + A \cdot \sin(kx + \omega t) \\ &\stackrel{(2.3.4)}{=} 2A \cdot \sin(kx) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Die **Wellenknoten**, also jene Stellen, bei denen sich die Punkte auf der Welle nicht bewegen, lassen sich finden, indem $\sin(kx) = 0$ gesetzt wird. Dies ist bei

$$kx = n\pi \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wenn nun $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ gesetzt wird, resultiert für die Knotenstellen

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Die **Wellenbäuche** sind die maximal bewegten Stellen der Welle. Dort muss $\sin(kx) = 1$ gelten, damit die Amplitude maximal wird. Dies ist der Fall bei

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

und in weiterer Folge gilt

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

[1, S. 67f] Die Abbildung 2.13 verdeutlicht die Wellenbäuche und Wellenknoten einer stehenden Wellen sowie den Abstand von einer halben Wellenlänge ($\lambda/2$) zwischen den Wellenbäuchen.

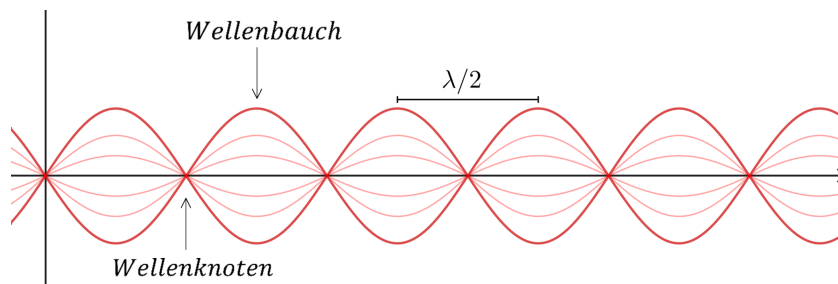


Abbildung 2.13: Stehende Welle als Überlagerung zweier laufender Wellen mit den Wellenknoten bei $x = n \frac{\lambda}{2}$ und Wellenbäuchen bei $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$, eigene Darstellung mit GeoGebra

Bei einer an beiden Enden eingespannten Saite treten solche stehenden Wellenfelder bei bestimmten Frequenzen auf. Diese heißen **Resonanzfrequenzen** der Saite und

das dazugehörige Wellenfeld **Schwingungsmode**. Die niedrigste davon heißt **Eigenfrequenz** ν_1 und erzeugt eine stehende Welle mit einem einzigen Schwingungsbauch, die auch Grundschiwingung, **erste Harmonische** oder **Fundamentale** genannt wird. Die **Oberschwingungen** entstehen bei Vielfachen der Eigenfrequenz ν_1 , z.B. $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, usw. Diese Resonanzfrequenzen werden auch **Obertöne** genannt (vgl. Abschnitt 2.1.3). In Abbildung 2.2 wurden bereits die ersten fünf Harmonischen dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass die n -te Harmonische genau n Schwingungsbäuche und $n+1$ Schwingungsknoten aufweist.

Der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ und der Saitenlänge ℓ lässt sich folgendermaßen erklären:

Bei der ersten Harmonischen ist die Länge ℓ der Saite gleich $\lambda_1/2$ (vgl. dazu Abbildungen 2.2 und 2.13). Die zweite Harmonische schwingt mit der doppelten Frequenz, wodurch auf der Länge ℓ eine Welle mit der Wellenlänge λ_2 entstehen kann. Es gilt daher $\ell = 2\frac{\lambda_2}{2} = \lambda_2$. Für die dritte Harmonische gilt in weiterer Folge $\ell = 3\frac{\lambda_3}{2}$. Dies lässt sich auf alle weiteren Harmonischen anwenden, weswegen für λ_n allgemein die **Bedingung für stehende Wellen bei einer beidseitig eingespannten Saite** gilt:

$$\ell = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mit dieser Bedingung und mit $v = \lambda\nu$ (siehe 2.3.1) folgt

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{2\ell}{n}} = n \frac{v}{2\ell} = n\nu_1 \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dies bedeutet wieder, dass, wie oben beschrieben, die Frequenz der n -ten Harmonischen das n -fache der Frequenz der Grundschiwingung ist. [31, S. 496f]

Stehende Schallwellen als schwingende Luftsäulen

Die Überlegungen, die im vorherigen Kapitel mithilfe der beidseitig eingespannten Saite angestellt wurden, lassen sich auf stehende Wellen, die in einer beidseitig offenen Röhre entstehen können, anwenden. Dabei wird von einer schwingenden Luftsäule gesprochen. Es sollte sich in Erinnerung gerufen werden, dass Schallwellen Longitudinalwellen sind und die Auslenkung der einzelnen Moleküle längs der Ausbreitungsrichtung der Welle ist.

Diese Luftsäule kann zu verschiedenen Schwingungsmoden angeregt werden, sodass stehende Wellen im Inneren der Röhre entstehen, welche durch Druckschwankungen mit der Luft außerhalb als Schallwelle weitergegeben wird. [16, S. 60]

In einer offenen Pfeife bleibt der Luftdruck an den offenen Enden annähernd gleich dem Umgebungsluftdruck, da sich die Moleküle direkt in der Außenluft verteilen können. Dies bedeutet, dass die Überdruckwelle in das Freie verläuft, wobei in ihrem Rücken ein Unterdruck entsteht, der am Rohrende reflektiert und sich wieder im Rohr in die entgegengesetzte Richtung als Druckwelle fortpflanzt. [20, S. 43]

Bemerkung. Die Annahme, dass bei schwingenden Luftsäulen an einem offenen Ende eines Rohres keine Druckschwankungen auftreten, ist idealisiert und nicht vollkommen richtig. An einem Röhrende könnte ohne jegliche Druckschwankung auch kein Schall nach außen dringen. [20, S. 123] Nichtsdestotrotz lassen sich mit dieser Annahme einerseits die Herleitung besser verstehen und andererseits genügend genaue Berechnungen anstellen.

2.4 Zusammenfassung der Gleichungen

Als Abschluss des Kapitels werden hier alle wichtigen Gleichungen und Bezeichnungen für Schwingungen und Wellen zusammengefasst:

Begriff	Mathematische Darstellung
Hooke'sches Gesetz	$F = -k_x \cdot x$
Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung	$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$
Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung (alternative Schreibweise)	$x(t) = A \cos(2\pi\nu t + \delta)$
Kreisfrequenz	ω
Schwingungsperiode	T
Frequenz	ν
Zusammenhang von ν und T	$\nu = \frac{1}{T}$
Zusammenhang von ν und ω	$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$
Wellenlänge	λ
Wellengeschwindigkeit	$v = \lambda\nu$
Kreiswellenzahl	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Rechtslaufende harmonische Wellen	$u(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \theta)$
Überlagerung laufender Wellen	$u(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(kx - \omega t + \frac{\theta}{2})$
Stehende Wellen	$u(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$

Tabelle 2.1: Formeln zur Schwingungslehre

3 Die Wellengleichung

Differentialgleichungen, deren Lösungen Wellenfunktionen $u(x, t)$ sind, werden **Wellengleichungen** genannt. Anhand einer an beiden Enden befestigten Saite kann diese nachvollziehbar im eindimensionalen Fall mit dem 2. *Newton'schen Axiom* hergeleitet werden. [31, S. 458]

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

In diesem Unterkapitel erfolgt die physikalische Herleitung, die jedoch mathematische Mängel aufweist.

Eine Wellenfunktion $u(x, t)$ beschreibt die Auslenkung einer Welle aus der Ruhelage an der Stelle x und zum Zeitpunkt t . Die Länge eines Segments sei $\Delta x \neq 0$ und F die Spannkraft der Saite. Es wird vorausgesetzt, dass die Auslenkung Δu klein ist, woraus folgt, dass der Winkel θ zwischen der Saite und der Horizontalen ebenfalls klein ist. Letztlich beschreibt μ die eindimensionale Massedichte der Saite. [6, S. 89] [31, S. 462]

Um das 2. *Newton'sche Axiom* ($F = m \cdot a$) anwenden zu können, müssen diese Größen zuerst berechnet werden:

- Die **Masse** m berechnet sich mit:

$$m = \mu \Delta x \quad (3.1.1)$$

- Die **Beschleunigung** a errechnet sich aus der zweiten partiellen Ableitung der Auslenkungsfunktion $u(x, t)$ nach der Zeit:

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.1.2)$$

- Die **Kräfte** F_{x_1} und $F_{x_1+\Delta x}$ wirken an den beiden Enden des Saitensegments und deren Richtungen werden durch die jeweiligen Winkel $\theta(x)$ bzw. $\theta(x+\Delta x)$ definiert. Der Index 1 bei den Kräften F_{x_1} und $F_{x_1+\Delta x}$ dient der besseren Unterscheidung zwischen der an der Stelle x_1 ansetzenden Kraft F_{x_1} im Gegensatz zur horizontalen Komponente $\sum F_x$ der Gesamtkraft. Es gilt $|F_{x_1}| = |F_{x_1+\Delta x}| = |F|$. Für die horizontale Komponente der Gesamtkraft gilt:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= |F_{x_1+\Delta x}| \cos \theta(x + \Delta x) - |F_{x_1}| \cos \theta(x) \\ &= |F| (\cos \theta(x + \Delta x) - \cos \theta(x)) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

3 Die Wellengleichung

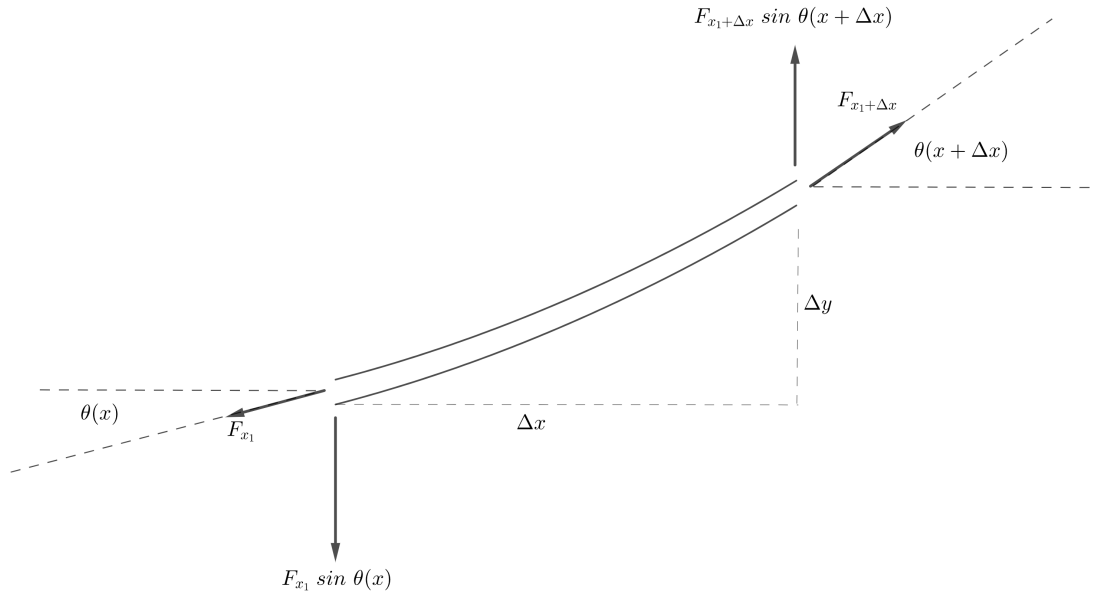


Abbildung 3.1: Skizze eines Segments einer schwingenden Saite; eigene Darstellung mit GeoGebra nach [6, S. 85]

Der letzte Rechenschritt ergibt sich mit $\cos \theta \approx 1$ für kleine Winkel θ .

Mit dem Zusammenhang $\sin \theta \approx \tan \theta$ für kleine Winkel θ folgt für die vertikale Komponente der Gesamtkraft

$$\begin{aligned} \sum F_y &= |F_{x_1+\Delta x}| \cdot \sin \theta(x + \Delta x) - |F_{x_1}| \cdot \sin \theta(x) \\ &= |F| \cdot (\sin \theta(x + \Delta x) - \sin \theta(x)) \\ &\approx |F| \cdot (\tan \theta(x + \Delta x) - \tan \theta(x)). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Der Tangens ($\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$) beschreibt die Steigung der Auslenkungsfunktion der Saite an der Stelle x . Diese soll nun mit S bezeichnet werden:

$$S := \tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x). \quad (3.1.4)$$

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\tan \theta(x + \Delta x) - \tan \theta(x)}{\Delta x}$$

gibt daher die Änderung der Kurvensteigung im Abschnitt Δx an. Wir nehmen an, dass die Saite ideal gespannt ist und es keine plötzlichen Verformungen, wie zum Beispiel

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

Knicke, gibt. Durch diese Annahme können wir darauf schließen, dass sowohl die Auslenkungsfunktion $u(x, t)$ als auch die erste Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ stetig sind und keine Sprungstellen aufweisen und in weiterer Folge den Limes $\Delta x \rightarrow 0$ anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Es folgt daher für $\sum F_y$ (3.1.3):

$$\begin{aligned} \sum F_y &\stackrel{(3.1.3)}{\approx} |F| \cdot (\tan \theta(x + \Delta x) - \tan \theta(x)) \\ &= |F| \cdot \Delta S \\ &= |F| \cdot \Delta x \frac{\Delta S}{\Delta x} \\ &\stackrel{(3.1.5)}{\approx} |F| \cdot \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Hier wurde im dritten Schritt mit $\Delta x \neq 0$ erweitert. Für die Gesamtkraft $F = \sum F_x + \sum F_y$ gilt daher insgesamt

$$\boxed{F = |F| \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (3.1.6)$$

Da nun alle Größen des *Newton'schen Axioms* bestimmt wurden, können sie hier zusammengefügt werden. Mit $\Delta x \neq 0$ und den Gleichungen 3.1.1, 3.1.2 und 3.1.6 ergibt sich das 2. *Newton'sche Gesetz* $F = m \cdot a$ daher mit

$$\begin{aligned} |F| \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \mu \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & | : \Delta x \\ |F| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

und somit die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{|F|}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.1.7)$$

Definition 3.1.1 (Wellengleichung). [28, S. 53]

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Eine Funktion $u : A \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto u(x, t)$ erfüllt die eindimensionale Wellengleichung, wenn

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (3.1.8)$$

für alle Punkte im Inneren von A gilt.

3 Die Wellengleichung

Beispiel. Für die schwingende Saite gilt in der Wellengleichung $c = \sqrt{\frac{|F|}{\mu}}$.

Beispiel. Eine Welle der Form $u(x, t) = f(x - vt)$ mit einer Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und einer Konstanten $v > 0$ ist rechtslaufend, wobei die Funktion f die Gestalt der Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ zeigt. Zum Zeitpunkt $t > 0$ ist die Welle um die Strecke vt nach rechts verschoben. [20, S. 30]

Es wird nun dargestellt, dass jede beliebige zweimal stetig ableitbare Funktion der Form $f(x - vt)$ mit der Wellengeschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ die Wellengleichung erfüllt:

Für die Differentiation nach x bzw. t wird zunächst substituiert:

$$\eta := x - vt \Rightarrow f(x - vt) = f(\eta)$$

Mithilfe der Kettenregel ergeben sich die ersten Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = f' \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}=1} = f'$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = f' \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}=-v} = -v \cdot f'.$$

Nochmaliges Differenzieren mit Anwendung der Kettenregel ergibt die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} = f''$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -v \cdot \frac{\partial f'}{\partial t} = -v \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \cdot \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=-v} = v^2 \cdot f''$$

Zusammen folgt dann:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \iff \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Setzt man $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ in die Gleichung ein, erhält man wieder die Wellengleichung 3.1.7.

Durch Spiegelung am „rechten“ Ende der Saite ergibt sich eine linkslaufende Welle $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}(x, t) = f(x + vt).$$

Die Rechnung kann analog durchgeführt werden und liefert dasselbe Ergebnis. [31, S. 462f][20, S.30]

3.1.1 Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

Die beiden in den nächsten Unterkapiteln vorgestellten Lösungsmethoden enthalten Überlegungen, die sich aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und dessen Folgerungen herleiten lassen. Damit diese nachvollziehbar und mathematisch schlüssig sind, werden die zugrunde liegenden Konzepte zuvor gefestigt.

Definition 3.1.2 (Grenzwert von Funktionen). [14, S. 90]

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. Gibt es ein $\eta > 0$ mit $(x_0 - \eta, x_0) \subset D$, dann gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset D : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Der Ausdruck $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ ist der linksseitige Grenzwert von f am Punkt x_0 .

2. Gibt es ein $\eta > 0$ mit $(x_0, x_0 + \eta) \subset D$, dann gilt für $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset D : |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Der Ausdruck $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ heißt rechtsseitiger Grenzwert von f am Punkt x_0 .

3. Wenn die Ausdrücke $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ definiert sind und übereinstimmen, wird

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

geschrieben. Dabei ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ der Grenzwert von f am Punkt x_0 .

Satz 3.1.1 (Satz von Rolle). [27, S. 101] Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und im Inneren des Intervalls differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist f konstant, so ist nichts mehr zu zeigen, da $f'(x) = 0$ ist.

Für eine nichtkonstante Funktion f folgt aus der Stetigkeit im Intervall $[a, b]$, dass die Funktion mindestens ein lokales Minimum oder Maximum in einem Punkt $\xi \in (a, b)$ hat. Sei zum Beispiel ein lokales Minimum im Punkt ξ , dann gilt $f(x) \geq f(\xi)$ in $[a, b]$ und in weiterer Folge $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$ in $(\xi, b]$ und $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$ in $[a, \xi)$. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (a, b) existieren auch die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{x \searrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0$ und $\lim_{x \nearrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0$, womit $f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0$ gilt. [27, S. 101] □

Satz 3.1.2 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). [14, S. 146] Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) , dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3 Die Wellengleichung

Beweis. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, dann entspricht der oben genannte Satz dem Satz von Rolle (3.1.1 und wir müssen nichts mehr beweisen.

Für $f(a) \neq f(b)$ betrachten wir die Funktion

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Diese Funktion ist stetig in $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Durch Einsetzen erkennt man, dass $g(a) = f(a) = g(b)$ ist, weshalb mit dem Satz von Rolle ein $\xi \in (a, b)$ existiert, sodass $g'(\xi) = 0$ ist. Gemeinsam mit der Ableitung

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

folgt der gewünschte Ausdruck

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Satz 3.1.3 (Monotoniesatz). [14, S. 147] *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Dann gilt:*

1. $f'(x) \geq 0, \quad x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ ist monoton steigend
2. $f'(x) > 0, \quad x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend

Analoge Aussagen gelten für (streng) monoton fallende Funktionen.

Beweis. Zu 1.: ($\Leftarrow$) Sei f monoton steigend. Dann gilt $f(x+h) \geq f(x)$ für $h > 0$. Daraus folgt, dass für alle $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

gilt.

($\Rightarrow$) Sei $f'(x) \geq 0$ für $x \in (a, b)$. Es ist zu zeigen, dass $f(x_2) \geq f(x_1)$ für alle $x_2 > x_1$ gilt. Indirekt angenommen gibt es $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in (a, b)$, sodass $f(x_2) < f(x_1)$. Mit dem Mittelwertsatz auf die Einschränkung von f auf $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ erhalten wir ein $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Da $x_2 > x_1$ und $f(x_2) < f(x_1)$ ist, gilt $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $f'(\xi) \geq 0$ für $x \in (a, b)$ steht.

Zu 2.: Der Beweis erfolgt analog wie die „Hinrichtung“ von 1. □

Korollar 3.1.1 (Folgerung aus dem Mittelwertsatz). [14, S. 148] *Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls differenzierbar ist. Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, dann ist f konstant.*

Beweis. Aus dem Monotoniesatz 3.1.3 folgt aus $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dass f sowohl monoton steigend, als auch monoton fallend ist. Daraus folgt, dass f konstant sein muss. □

3.1.2 Lösungsmethode nach d'Alembert

Mit dem Finden von Wellenfunktionen der Form $f(x + vt)$ und $g(x - vt)$ können bereits alle Lösungen der Wellengleichung gefunden werden, was der folgende Satz von d'Alembert beweist:

Satz 3.1.4 (Satz von d'Alembert). [20, S. 30] Sei $c > 0$ und sei $I = (a, b)$ ein Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Sei $u : (0, +\infty) \times I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die Wellengleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ löst. Dann gibt es zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : (-b, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct), \quad x \in I, t > 0,$$

gilt. Die Funktionen f und g sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Im Beweis findet der Vertauschbarkeitssatz von Schwarz Anwendung, der hier zwar angeschrieben, jedoch nicht bewiesen wird:

Satz 3.1.5 (Vertauschbarkeitssatz von Schwarz). [17, S. 27] Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.1.9)$$

Beweis vom Satz von d'Alembert. Zunächst werden die Argumente der Funktionen f und g substituiert:

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2c}. \quad (3.1.10)$$

Die Funktion $\tilde{u}$ ist nun gegeben durch

$$\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x, t).$$

Es folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \xi}}_{=\frac{1}{2c}} + \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \xi}}_{=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

3 Die Wellengleichung

und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \eta}}_{=-\frac{1}{2c}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2c} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \eta}}_{=\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \eta}}_{=-\frac{1}{2c}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \eta}}_{=\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \underbrace{\frac{1}{4c} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}}_{\stackrel{(3.1.5)}{=} 0} + \frac{1}{4c} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 &= \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 &= \frac{1}{4} \underbrace{\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)}_{3.1.8} = 0.
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (3.1.12)$$

Der nächste Schritt ist die schrittweise partielle Integration der Gleichung $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \int \underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta)}_{=0} d\eta = h(\xi). \quad (3.1.13)$$

Dadurch, dass die zweite Ableitung von $\tilde{u}(\xi, \eta)$ gleich 0 ist, ist deren Stammfunktion eine konstante Funktion h , die jedoch im Allgemeinen noch von ξ abhängt.

Es soll nun deren Stammfunktion durch Integration gefunden werden. Wegen des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gilt:

$$\tilde{u}(\xi, \eta) = \int h(\xi) d\xi = f(\xi) + g(\eta), \quad (3.1.14)$$

wobei $g(\eta)$ die Integrationskonstante ist, welche von η abhängt.

Bei fixiertem ξ kann mit der Umformung

$$g(\eta) = \tilde{u}(\xi, \eta) - f(\xi)$$

die Eindeutigkeit von g bis auf eine additive Konstante erkannt werden. Analog kann ebenfalls die Eindeutigkeit von f bei fixiertem η gesehen werden. Die Rücksubstitution ergibt wiederum

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct). \quad (3.1.15)$$

[20, S. 30ff]

□

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

Im anschaulichen Kontext der schwingenden, an beiden Seiten befestigten Saite kann die Gleichung 3.1.15 als Superposition von zwei in entgegengesetzte Richtungen laufende Wellen mit gleicher Geschwindigkeit c gesehen werden. [6, S. 87]

3.1.3 Randbedingungen

Von einer **Randbedingung** wird gesprochen, wenn Bedingungen auf dem Rand ∂D eines Definitionsbereichs vorgegeben sind. Dabei wird zwischen einer **Dirichlet-Bedingung** $u(x) = f(x)$ auf ∂D oder einer **Neumann-Bedingung** $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x)$ auf ∂D unterscheiden. Dies gilt auch, wenn die Funktion noch von der Zeit abhängt. Es kann beispielsweise $u(x, t) = f(x)$ für alle $t \geq t_0$ gelten. Weiters heißt die Randbedingung **homogen**, wenn $f = 0$ ist. [2, S. 1099]

Sei $u(x, t)$ die Auslenkungsfunktion, die die Wellengleichung löst, und sei die Länge der Saite mit ℓ gegeben. Dann ist für $x = 0$ oder $x = \ell$ die Auslenkung $u(x, t)$ der Saite mit $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ gegeben. Dies bedeutet, dass beide Enden der Saite fixiert sind.

- Sei zuerst $x = 0$. Dann ist für alle $t \geq 0$

$$0 = f(ct) + g(-ct).$$

Mit der Umschreibung $g(\lambda) = -f(-\lambda)$ für einen beliebigen Wert λ folgt

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct),$$

was bedeutet, dass die Welle im Punkt $x = 0$ gespiegelt wird und als invertierte Welle in die entgegengesetzte Richtung weiter verläuft. (siehe Abbildung 2.8)

- Für $x = \ell$ gilt $u(\ell, t) = 0$ und man erhält für alle $t \geq 0$

$$0 = f(\ell + ct) - f(-\ell + ct) \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell + ct) = f(-\ell + ct),$$

sodass für alle λ gilt:

$$f(\lambda) = f(\lambda + 2\ell). \quad (3.1.16)$$

[6, S. 88f]

Bemerkung. Gleichung 3.1.16 lässt sich leicht mit $\lambda = -\ell + ct$ überprüfen.

Damit kann der Satz von d'Alembert (3.1.4) um die folgende Erkenntnis erweitert bzw. präzisiert werden:

Satz 3.1.6 (Satz von d'Alembert - Erweiterung). *Die allgemeine Lösung für die Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

lautet

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

3 Die Wellengleichung

Lösungen, die die Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ erfüllen, sind von der Form

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct), \quad (3.1.17)$$

wobei $f(\lambda) = f(\lambda + 2\ell)$ für alle λ gilt. [6, S. 89]

Bemerkung. Die Funktion $f(\lambda) = f(\lambda + 2\ell)$ ist 2ℓ -periodisch.

3.1.4 Anfangsbedingungen

Definition 3.1.3 (Anfangsbedingungen). [2, S. 1099]

Von einer Anfangsbedingung spricht man, wenn Bedingungen der Form

$$u(x, t_0) = f(x)$$

und/oder

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = g(x)$$

eventuell auch an höhere Ableitungen zu einem Zeitpunkt t_0 gestellt werden.

Eine an beiden Seiten fixierte Saite wird zu Beginn der Schwingung $t = 0$ angeregt. Dabei müssen die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \ell) \quad (\text{Anfangsauslenkung})$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, \ell) \quad (\text{Anfangsgeschwindigkeit})$$

erfüllt werden, wobei die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auch die Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ erfüllen. Das heißt

$$f(0) = f(\ell) = 0$$

und

$$g(0) = g(\ell) = 0.$$

Mit dem Reflexionsprinzip, wie es in Abbildung 2.8 dargestellt ist, erweitern wir den Definitionsbereich für x auf ganz $\mathbb{R}$.

Dazu werden im ersten Schritt die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ auf $-\ell \leq x \leq \ell$ definiert, indem

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{und} \quad g(-x) = -g(x).$$

festgelegt wird. Dadurch entstehen ungerade Funktionen, für die $f(-\ell) = -f(\ell) = f(\ell)$ bzw. $g(-\ell) = -g(\ell) = g(\ell)$ gilt. Wir können somit auf alle Werte $x \in \mathbb{R}$ ausdehnen, indem wir eine 2ℓ -Periodizität festlegen, sodass $f(x + 2\ell) = f(x)$ bzw. $g(x + 2\ell) = g(x)$ gilt. Mit dieser 2ℓ -Periodizität sowie den Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ sind die Voraussetzungen erfüllt, um den Satz von d'Alembert (3.1.6) für die Lösung der Wellengleichung zu verwenden.

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ sei gegeben durch:

$$u(x, t) = h(x + ct) - h(-x + ct). \quad (3.1.18)$$

Setzen wir $t = 0$ ein, erhalten wir:

$$f(x) = u(x, 0) = h(x) - h(-x). \quad (3.1.19)$$

Um $g(x)$ zu berechnen, leiten wir zunächst $u(x, t)$ nach t ab, indem wir die Kettenregel anwenden:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \cdot h'(x + ct) - c \cdot h'(-x + ct) = c \cdot (h'(x + ct) - h'(-x + ct))$$

Setzen wir wieder $t = 0$ ein, erhalten wir:

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c \cdot (h'(x) - h'(-x)). \quad (3.1.20)$$

Um die Funktion $h(x)$ zu bestimmen, integrieren wir diese Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^x g(z) \, dz &= c \cdot \int_0^x (h'(z) - h'(-z)) \, dz \\ &= c \cdot \left(\int_0^x h'(z) \, dz - \int_0^x h'(-z) \, dz \right) \end{aligned}$$

Für den nächsten Umformungsschritt substituieren wir $w = -z$ und $dw = -dz$, womit sich ebenfalls die Grenzen anpassen. Außerdem bringen wir $c \neq 0$ aus Gründen der besseren Lesbarkeit auf die linke Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_0^x g(z) \, dz &= \int_0^x h'(z) \, dz - \int_0^x h'(-z) \, dz \\ &= \int_0^x h'(z) \, dz - \left(- \int_0^{-x} h'(w) \, dw \right) \\ &= \int_0^x h'(z) \, dz - \int_{-x}^0 h'(w) \, dw \\ &= h(x) - h(0) - (h(0) - h(-x)) \\ &= h(x) + h(-x) - 2h(0) \\ &= h(x) + h(-x). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Im Kontext der beidseitig eingespannten Saite ist auch anschaulich klar, dass $f(0) = 0$ gilt, also dass die Saite an den Enden keine Auslenkung hat. Daraus folgt mit Gleichung 3.1.19, dass $h(0) = 0$ gilt, wodurch der Ausdruck $2h(0)$ im letzten Umformungsschritt wegfällt.

3 Die Wellengleichung

Um $h(x)$ zu erhalten, addieren wir die Gleichung 3.1.19 auf beiden Seiten und formen sie um:

$$\begin{aligned} h(x) - h(-x) + h(x) + h(-x) &= f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz \\ \Leftrightarrow 2h(x) &= f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz \\ \Leftrightarrow h(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(z) dz \right) \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

Setzen wir nun diese Gleichung in 3.1.18 ein und verwenden

$$\int_{-x}^0 g(z) dz = - \int_0^x g(z) dz \quad (3.1.23)$$

für die ungerade Funktion $g(z)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{x+ct} g(z) dz \right) - \frac{1}{2} \left(f(-x + ct) + \frac{1}{c} \int_0^{-x+ct} g(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) - f(-x + ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(z) dz - \int_0^{-x+ct} g(z) dz \right) \\ &\stackrel{(3.1.23)}{=} \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \left(\int_0^{x+ct} g(z) dz + \int_{x-ct}^0 g(z) dz \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz. \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

[6, S. 91f], [2, S. 1102f]

Damit wurde die Lösung $u(x, t)$ der Wellengleichung mit der Anfangsauslenkung $f(x)$ und der Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$ gefunden und wir können den folgenden Satz schreiben.

Satz 3.1.7 (D'Alembert'sche Lösung der Wellengleichung in einer Dimension). [2, S. 1102] *Ist $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R})$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

genau eine Lösung. Diese ist gegeben durch

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz.} \quad (3.1.25)$$

3.1.5 Lösung durch Trennung der Variablen

Eine weitere Lösungsmethode bietet der „Separationsansatz“ beziehungsweise die Methode der „Trennung der Variablen“. Bevor diese in diesem Abschnitt behandelt wird, benötigen wir folgende Definition:

Definition 3.1.4 (Sinus und Kosinus hyperbolicus). [2, S. 123]

Sei $x \in \mathbb{R}$. Die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus sind gegeben durch:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (3.1.26)$$

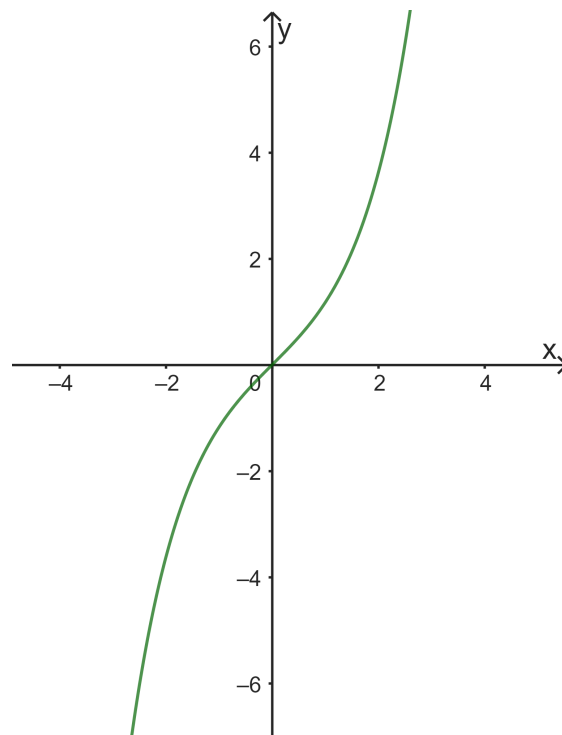


Abbildung 3.2: Graph der sinh-Funktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

Die Abbildung 3.2 zeigt den Graphen der hyperbolischen Sinusfunktion. Es sei insbesondere auf $\sinh(x) > 0$ für $x > 0$ hingewiesen.

3 Die Wellengleichung

Mit der Methode der Trennung der Variablen soll das folgende Anfangsrandwertproblem gelöst werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & (x, t) &\in (0, \ell) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & x &\in (0, \ell) \\ u(0, t) &= u(\ell, t) = 0, & t &\in (0, +\infty)\end{aligned}$$

Dabei beschreibt $u(x, 0) = f(x)$ den Zustand der Welle zu Beginn und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit.

Der Separationsansatz

$$u(x, t) = v(t)w(x)$$

liefert eingesetzt in die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(v(t)w(x)) &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v(t)w(x)) && \Leftrightarrow \\ v''(t)w(x) &= c^2 v(t)w''(x) && \Leftrightarrow \\ \frac{v''(t)}{v(t)} &= c^2 \frac{w''(x)}{w(x)}, && \text{wenn } v(t) \neq 0, w(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann nur gelten, wenn beide Seiten konstant sind. Es gelte also

$$\frac{v''(t)}{v(t)} =: c^2 \gamma, \quad \frac{w''(x)}{w(x)} =: \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Somit ergeben sich die beiden linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

$$v''(t) = c^2 \cdot \gamma \cdot v(t) \tag{3.1.27}$$

und

$$w''(x) = \gamma \cdot w(x). \tag{3.1.28}$$

Exkurs: Lösung der linearen Differenzialgleichung $f'' = \alpha f$

Es wird hier nun allgemein die Lösung einer linearen Differenzialgleichung erklärt, welche im Anschluss wieder in den Kontext der Wellengleichung mit dem Lösungsansatz $u(x, t) = v(t)w(x)$ gestellt wird: Gegeben ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$f'' = \alpha f \tag{3.1.29}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

1. Fall: $\alpha < 0$: Es sei eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit:

$$g(x) := f\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right)$$

Für die erste und zweite Ableitung gilt mit der Kettenregel:

$$g'(x) = f'\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}$$

und

$$g''(x) = f''\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \underbrace{f''\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right)}_{=\alpha \cdot u} = -f\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right) = -g(x).$$

Satz 3.1.8. Eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^2$ erfüllt $g''(x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Durch Ableiten von g kommen wir zum gewünschten Ergebnis:

$$g'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \quad \Rightarrow \quad g''(x) = -c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x) = -g(x).$$

($\Rightarrow$) Setze

$$h(x) := g(x) - (g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x)), \quad (3.1.30)$$

dann erhalten wir durch Ableiten

$$h'(x) = g'(x) - (-g(0) \sin(x) + g'(0) \cos(x))$$

und

$$\begin{aligned} h''(x) &= \underbrace{g''(x)}_{=-g(x)} - (-g(0) \cos(x) - g'(0) \sin(x)) \\ &= -g(x) + g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x) \\ &= -(g(x) - (g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x))) \\ &= -h(x) \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Durch Einsetzen von 0 in die Funktion erhalten wir

$$h(0) = g(0) - (g(0) \cdot 1 + g'(0) \cdot 0) = 0 \quad (3.1.32)$$

und

$$h'(0) = g'(0) - (-g(0) \cdot 0 + g'(0) \cdot 1) = 0 \quad (3.1.33)$$

Setze $r(x) := h(x)^2 + h'(x)^2$.

Die Ableitung mit der Kettenregel ergibt

$$r'(x) = 2h(x)h'(x) + 2h'(x) \underbrace{h''(x)}_{\stackrel{3.1.31}{=}-h(x)} = 0$$

3 Die Wellengleichung

und wegen Korollar 3.1.1 (Folgerung aus dem Mittelwertsatz) existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $r(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, woraus folgt

$$c = r(0) = \underbrace{h(0)^2}_{3.1.32} + \underbrace{h'(0)^2}_{3.1.33} = 0.$$

Mit $c = 0$ folgt also

$$0 = r(x) = h(x)^2 + \underbrace{h'(x)^2}_{\geq 0} \geq h(x)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h(x)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 0, \forall x.$$

Rückeingesetzt in 3.1.30 ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= g(x) - (g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x)) \\ \Rightarrow \quad g(x) &= \underbrace{g(0)}_{c_1} \cos(x) + \underbrace{g'(0)}_{c_2} \sin(x) \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

□

Wir haben also für

$$g(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}x\right) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g\left(\sqrt{|\alpha|}x\right)$$

gezeigt, dass für f mit $\alpha < 0$ gilt:

$$\boxed{f(x) = g\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) = c_1 \cos\left(\sqrt{|\alpha|}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{|\alpha|}x\right)} \quad (3.1.35)$$

2. Fall: $\alpha > 0$:

Satz 3.1.9. Sei $\beta \in \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt $g'(x) = \beta \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c \cdot e^{\beta x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. ($\Leftarrow$) Durch Ableiten von $g(x)$ erhalten wir:

$$g'(x) = \beta \cdot c e^{\beta x} = \beta \cdot g(x).$$

($\Rightarrow$) Setze $h(x) := g(x)e^{-\beta x}$.

Die Ableitung mit der Kettenregel und der Produktregel ergibt

$$h'(x) = g'(x)e^{-\beta x} + (-\beta)g(x)e^{-\beta x} = e^{-\beta x} \underbrace{(g'(x) - \beta g(x))}_{=0} = 0$$

und nach Korollar 3.1.1 $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mit $h(x) = g(x)e^{-\beta x}$ folgt daraus

$$g(x) = c \cdot e^{\beta x}.$$

□

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

Wir setzen nun

$$g_1(x) := f'(x) - \sqrt{\alpha} \cdot f(x) \quad (3.1.36)$$

$$g_2(x) := f'(x) + \sqrt{\alpha} \cdot f(x) \quad (3.1.37)$$

und leiten die Funktionen ab:

$$g_1'(x) = \underbrace{f''(x)}_{\stackrel{3.1.29}{=} \alpha \cdot f(x)} - \sqrt{\alpha} \cdot f'(x) = -\sqrt{\alpha} \cdot \left(f'(x) - \sqrt{\alpha} \cdot f(x) \right) = -\sqrt{\alpha} \cdot g_1$$

Nach Satz 3.1.9 existiert ein $d_1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$g_1 = d_1 \cdot e^{-\sqrt{\alpha}x}. \quad (3.1.38)$$

Für g_2 folgt:

$$g_2'(x) = \underbrace{f''(x)}_{\stackrel{3.1.29}{=} \alpha \cdot f(x)} + \sqrt{\alpha} \cdot f'(x) = -\sqrt{\alpha} \cdot \left(f'(x) + \sqrt{\alpha} \cdot f(x) \right) = -\sqrt{\alpha} \cdot g_2$$

Mit Satz 3.1.9 folgt wiederum, dass $\exists d_2 \in \mathbb{R}$:

$$g_2 = d_2 \cdot e^{\sqrt{\alpha}x}. \quad (3.1.39)$$

Um wieder auf die gewünschte Funktion $f(x)$ zu gelangen, subtrahieren wir g_1 von g_2 :

$$g_2(x) - g_1(x) = 2\sqrt{\alpha} \cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot g_2(x) - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \cdot g_1(x) \\ &= \underbrace{\frac{d_2}{2\sqrt{\alpha}}}_{:=c_1} \cdot e^{\sqrt{\alpha}x} + \underbrace{\left(-\frac{d_1}{2\sqrt{\alpha}}\right)}_{:=c_2} \cdot e^{-\sqrt{\alpha}x} \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Insgesamt folgt also für $\alpha > 0$:

$$\boxed{f(x) = c_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}} \quad (3.1.41)$$

3. Fall: $\alpha = 0$:

In diesem Fall gilt für die Gleichung 3.1.29 $f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nach Korollar 3.1.1 existiert ein $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass $f'(x) = c_1$ und aus dem Mittelwertsatz 3.1.2 folgt wiederum, dass $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{f(x) = c_1 x + c_2}. \quad (3.1.42)$$

3 Die Wellengleichung

Die Lösung im Kontext der Wellengleichung

Aufgrund der soeben gezeigten Lösungen ergeben sich in unserem Kontext folgende Funktionen, die als Lösung infrage kommen:

Für die Differenzialgleichung $v''(t) = c^2 \cdot \gamma \cdot v(t)$ kann $\alpha = c^2 \cdot \gamma$ gesetzt werden, was zu folgenden Gleichungen führt:

- $c^2\gamma < 0$:

$$v(t) = c_1 \cos(c\sqrt{|\gamma|}t) + c_2 \sin(c\sqrt{|\gamma|}t) \quad (3.1.43)$$

- $c^2\gamma > 0$:

$$v(t) = c_1 e^{c\sqrt{\gamma}t} + c_2 e^{-c\sqrt{\gamma}t} \quad (3.1.44)$$

- $c^2\gamma = 0$:

$$v(t) = c_1 t + c_2 \quad (3.1.45)$$

Für $w''(x) = \gamma \cdot w(x)$ und $\alpha = \gamma$ ergibt sich:

- $\gamma < 0$:

$$w(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\gamma|}x) + c_2 \sin(\sqrt{|\gamma|}x) \quad (3.1.46)$$

- $\gamma > 0$:

$$w(x) = c_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}x} \quad (3.1.47)$$

- $\gamma = 0$:

$$w(x) = c_1 x + c_2 \quad (3.1.48)$$

Mit den Randbedingungen $w(0) = w(\ell) = 0$ folgt:

1. Fall: $\gamma < 0$:

$$0 = w(0) = c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

und

$$\begin{aligned} 0 = w(\ell) &= \underbrace{c_1}_{=0} \cdot \cos(\sqrt{|\gamma|}\ell) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{|\gamma|}\ell) = c_2 \cdot \sin(\sqrt{|\gamma|}\ell) \\ &\Leftrightarrow c_2 = 0 \vee \sin(\sqrt{|\gamma|}\ell) = 0 \end{aligned}$$

3.1 Die Wellengleichung einer schwingenden Saite

1. Fall: $c_2 = 0$: Es folgt

$$w(x) = 0 \cdot \cos(\sqrt{|\gamma|}\ell) + 0 \cdot \sin(\sqrt{|\gamma|}\ell) = 0,$$

was zu einem Schwingungsstillstand führen würde.

2. Fall: $\sin(\sqrt{|\gamma|}\ell) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|\gamma|}\ell = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|\gamma|} = \frac{k\pi}{\ell}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt:

$$w_k(x) = c_2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad (3.1.49)$$

2. Fall: $\gamma > 0$:

$$0 = w(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2$$

und

$$\begin{aligned} 0 = w(\ell) &= c_1 e^{\sqrt{\gamma}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma}\ell} \\ &= c_1 e^{\sqrt{\gamma}\ell} - c_1 e^{-\sqrt{\gamma}\ell} \\ &= c_1 \left(e^{\sqrt{\gamma}\ell} - e^{-\sqrt{\gamma}\ell} \right) \\ &= c_1 \cdot 2 \cdot \frac{e^{\sqrt{\gamma}\ell} - e^{-\sqrt{\gamma}\ell}}{2} \\ &\stackrel{(3.1.26)}{=} 2 \cdot c_1 \cdot \sinh(\sqrt{\gamma}\ell) \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

Der Ausdruck $\sinh(\sqrt{\gamma}\ell)$ ist > 0 für $\gamma > 0$. Daraus folgt

$$c_1 = 0 = c_2,$$

was wiederum zu einem Schwingungsstillstand führt:

$$w(x) = 0.$$

3. Fall: $\gamma = 0$:

$$0 = w(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

und

$$0 = w(\ell) = c_1 \cdot \ell \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0, \text{ wegen } \ell \neq 0.$$

Dies führt wieder zu einem Schwingungsstillstand:

$$w(x) = 0.$$

3 Die Wellengleichung

Insgesamt ist daher nur der Fall $\gamma < 0$ relevant, woraus mit $c > 0$ (siehe Definition der Wellengleichung 3.1.1) folgt, dass $c^2\gamma < 0$ sein muss, woraus folgt, dass

$$v(t) = c_1 \cdot \cos(c\sqrt{|\gamma|}t) + c_2 \cdot \sin(c\sqrt{|\gamma|}t)$$

gilt. Mit $\sqrt{|\gamma|} = \frac{k\pi}{\ell}$, $k \in \mathbb{Z}$ sowie $\tilde{A}_k := c_1$ und $\tilde{B}_k := c_2$ folgt

$$v_k(t) = \tilde{A}_k \cdot \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + \tilde{B}_k \cdot \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \quad (3.1.51)$$

Insgesamt erhalten wir also eingesetzt in die Funktion $u(x, t) = v(t)w(x)$

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= v_k(t)w_k(x) \\ &= \left[\tilde{A} \cdot \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + \tilde{B} \cdot \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right] \cdot c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \end{aligned} \quad (3.1.52)$$

Aufgrund der Linearität der Differenzialgleichung sind auch Summen der Funktionen $u_k(x, t) = v_k(t)w_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ Lösungen der homogenen Differenzialgleichung. Ebenso können wir wegen des Produkts $A_k := \tilde{A}_k \cdot c_2$ und $B_k := \tilde{B}_k \cdot c_2$ setzen, wodurch c_2 wegfällt und wir insgesamt erhalten:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right] \quad (3.1.53)$$

Diese Darstellung wird auch **Fourierreihe** genannt, welche gemeinsam mit der Konvergenz der Reihe im Kapitel 5 näher beleuchtet wird. Solche Reihen sind Lösungen der partiellen Differenzialgleichung, wenn sie zweimal stetig differenzierbare Funktionen repräsentieren und gliedweise differenzierbar sind. [2, S. 1100]

Für die Anfangsbedingungen berechnen wir zunächst die erste Ableitung nach der Zeit t mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[-A_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[B_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) - A_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right] \end{aligned}$$

Für den Zeitpunkt $t = 0$ gilt dann:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad (3.1.54)$$

und

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left(B_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{ck\pi}{\ell} 0\right)}_{=1} - \underbrace{A_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell} 0\right)}_{=0} \right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k \cdot \frac{ck\pi}{\ell} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad (3.1.55)
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Aus der Gleichung 3.1.54 lassen sich bei gegebenem $f(x)$ die sogenannten Fourierkoeffizienten A_k und B_k berechnen. So gelangt man zu einer speziellen Lösung der Differenzialgleichung. [2, S. 1100f.]

3.2 Harmonische Wellen als Lösung der Wellengleichung

3.2.1 Laufende Wellen als Lösung der Wellengleichung

Die harmonische Welle $u(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \theta)$ löst die Wellengleichung 3.1.8. Dafür müssen die jeweiligen zweiten Ableitungen und die Konstante c gefunden werden.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \omega A \cos(-\omega t + kx - \theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \omega^2 A \sin(-\omega t + kx - \theta)$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -k A \cos(-\omega t + kx - \theta)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = k^2 A \sin(-\omega t + kx - \theta).$$

Setzt man nun in die Wellengleichung 3.1.8 ein, erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 \omega^2 A \sin(-\omega t + kx - \theta) &= c^2 \cdot k^2 A \sin(-\omega t + kx - \theta) \\
 \omega^2 &= c^2 \cdot k^2.
 \end{aligned}$$

Da $\omega > 0$, $k > 0$ und $A > 0$ gelten, ist für passende Werte x und t der Ausdruck $A \sin(-\omega t + kx - \theta) \neq 0$ und es kann durch diesen Term dividiert werden. Aus der letzten Zeile $\omega^2 = c^2 \cdot k^2$ folgt mit $c = \frac{\omega}{k}$, dass

$$u(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \theta)$$

eine Lösung der Wellengleichung ist.

3.2.2 Stehende Wellen als Lösung der Wellengleichung

Neben laufenden Wellen können auch stehende Wellen als Überlagerung zweier laufender Wellen als Lösung der Wellengleichung in Betracht gezogen werden. So kann auch hier der Satz von d'Alembert angewendet werden.

Beispiel (Stehende Wellen). Die Funktion

$$u(x, t) = A \sin(\omega t) \sin(kx)$$

ist eine stehende harmonische Welle, die die Wellenknoten bei $x_z = \frac{2\pi z}{k}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ hat.

Hier gilt $u(x_z, t) = 0$.

Die Funktion $u(x, t)$ wird in die Form $u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct)$ gebracht:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A \cdot \sin(\omega t) \sin(kx) \\ &\stackrel{(3.2.2)}{=} A \cdot \frac{1}{2} (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) \\ &= \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx) - \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Damit kann der Satz von d'Alembert (3.1.17) angewendet werden. Die Funktion

$$u(x, t) = \frac{A}{2} \cos(\omega t - kx) - \frac{A}{2} \cos(\omega t + kx)$$

löst somit die Wellengleichung. [20, S. 33]

Bemerkung. In der obigen Rechnung (3.2.1) wurde der Zusammenhang

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y)) \tag{3.2.2}$$

verwendet. [2, S. 131]

4 Die Querflöte und die Blockflöte

Die Querflöte und die Blockflöte sind beides Holzblasinstrumente – genauer gesagt Schneidetoninstrumente. Dabei entsteht der Ton, indem ein Luftstrom auf eine Kante trifft und dort gespalten wird, was in weiterer Folge dazu führt, dass die Luftsäule im Inneren des Rohres zum Schwingen gebracht wird. Ergänzend zu den soeben erläuterten Aspekten wird in diesem Kapitel zunächst die Bauart der beiden Instrumente dargestellt, um eine Grundlage für die darauffolgende Beschreibung der Entstehung des Tons zu schaffen. Anschließend wird die Wellengleichung für offene Pfeifen mit zylindrischer Bohrung, wie es bei der Querflöte der Fall ist, thematisiert und erste Aussagen zum Obertonspektrum getroffen. Diese Ergebnisse werden abschließend für die Blockflöte, die eine umgekehrt konische Mensur hat, abgeleitet.

4.1 Aufbau der Querflöte

Die Querflöte gehört zur Familie der Holzblasinstrumente und wird seit dem 20. Jahrhundert in der Regel aus Metall – meist aus Neusilber oder Sterling-Silber, aber auch aus 14-karätigem Gold oder einer Platin-Legierung – gefertigt. Obwohl bis zum Ende des 19. Jahrhunderts Holz das vorherrschende Material war, gibt es heutzutage nur mehr wenige Instrumente aus Holz, wie zum Beispiel die Piccoloflöte.

Die Querflöte, auch als „Große Flöte“ bekannt, unterscheidet sich von anderen Instrumenten des Sinfonieorchesters durch ihre akustisch fundierte Konstruktion, welche auf der Arbeit von Theobald Böhm, einem Münchner Flötisten und Erfinder, basiert, der 1846 eine zylindrische Bohrung entwickelte. Im Vergleich dazu hatten frühere Querflöten, wie sie im Barock und in der Renaissance verwendet wurden, eine umgekehrt konische Bohrung und einfache Klappen oder Grifflöcher. Die moderne Böhm-Flöte ist insgesamt 65–67 cm lang und besteht aus drei Teilen: dem Kopfstück mit dem ca. 12,5 mm großen Mundloch, das sich 7 cm vom oberen Ende befindet, dem Mittelstück mit den meisten Klappen und dem Fußstück. Das Mittel- und Fußstück bilden einen Zylinder mit einem Innendurchmesser von 18–19 mm; das Kopfstück weist ein parabolisches Profil auf, das sich dort, wo das Rohr von einem mit Metall besetzten Stimmkork verschlossen wird, um etwa 2 mm verjüngt.

Der normale Tonumfang der Querflöte reicht von c^1 bis c^4 , wobei dieser mithilfe eines um 4–5 cm längeren Fußstücks mit einer zusätzlichen Klappe für den kleinen Finger um den Ton h erweitert werden kann.

Gepolsterte Klappendeckel ermöglichen einen Durchmesser von etwa 13 mm für die Tonlöcher, die entsprechend des Durchmessers der Bohrung so gewählt werden müssen. Die Platzierung der Tonlöcher erfolgt strikt nach dem akustischen Prinzip der tempe-

rierten Stimmung. Aufgrund des kleineren Mundlochdurchmessers und dessen teilweiser Abdeckung durch die Lippen ist der Abstand zwischen den Tonlöchern und dem Stimmkorken allerdings um etwa 35 mm reduziert.

Ein weiteres besonderes Charakteristikum der Querflöte ist das Prinzip des Überblaus. Dabei werden die Töne e^2 bis c^3 wie das um eine Oktave tiefere Register gegriffen, während der Musiker oder die Musikerin überbläst, indem er oder sie die Lippen, die Kieferhaltung oder beides verändert. [4, S. 261ff] [8, S. 173]

4.2 Aufbau der Blockflöte

Blockflöten gehören zur Familie der Kernspaltflöten. Bei dieser Flötenart wird der Luftstrom in einem Kanal zwischen der Außenwand und einem Block, auch Kern genannt, auf die Kante des Labiums gerichtet, wo er gebrochen wird, sodass die Luft im Inneren der Röhre in Schwingung gebracht wird. Mit der Abbildung 4.1 lässt sich leicht nachvollziehen, wie die Luft durch den Windkanal präzise auf die Labiumkante gelenkt und gespaltet wird.

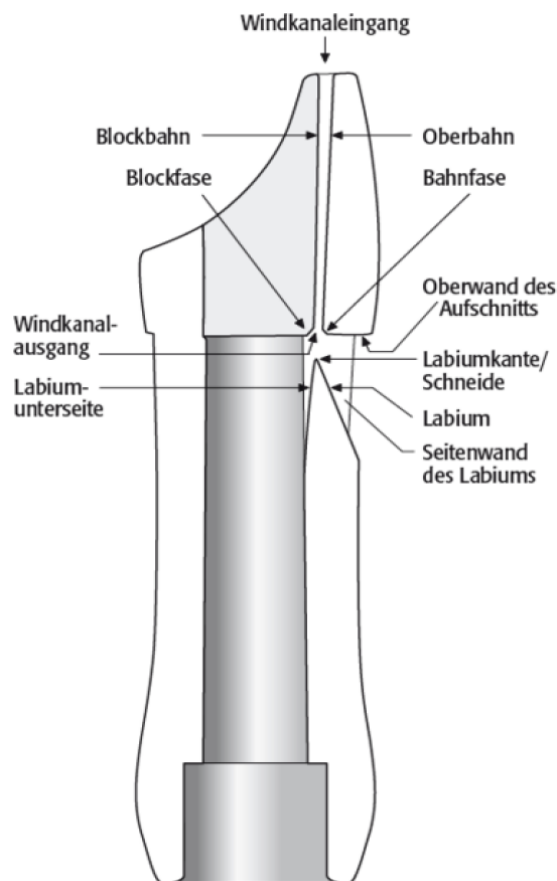


Abbildung 4.1: Querschnitt des Kopfstücks der Blockflöte [21]

Aufgrund der schnabelähnlichen Form des Kopfstücks wird es auch „Schnabel“ und die Blockflöte in weiterer Folge „Schnabelflöte“ genannt. Die fixe Bauweise des Kopfstücks ermöglicht ein erleichtertes Anblasen der Töne, da keine spezielle Technik erforderlich ist. Lediglich die Stärke des Luftstroms muss kontrolliert werden, da bei zu schwachem Blasen kein eindeutiger Ton gebildet werden kann und der Ton bei zu starkem Blasen überblasen wird und damit um ein bestimmtes Intervall höher klingt.

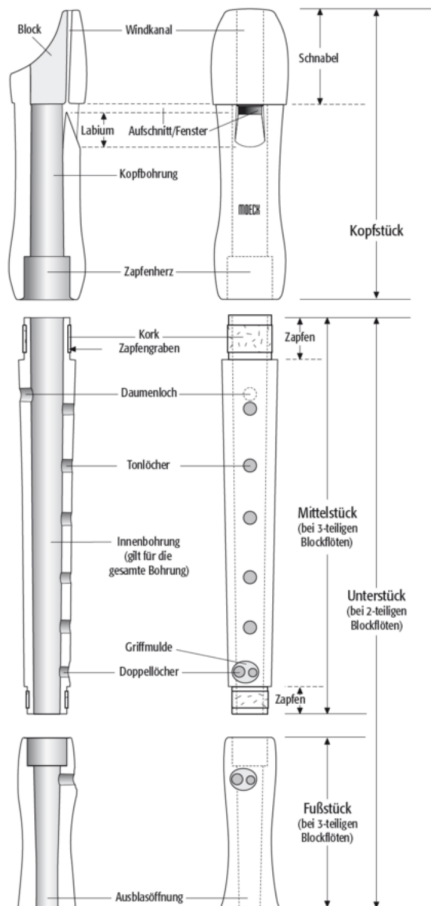


Abbildung 4.2: Aufbau einer Blockflöte mit barocker Griffweise [21]

Blockflöten bestehen aus drei Teilen, dem Schnabel (Kopfstück), Mittel- und Fußstück, wobei die kleineren Größen, also Sopran- und Altblockflöte, oftmals nur aus zwei Stücken bestehen. Hier sind das Mittel- und das Fußstück in einem gebaut. Auf dem Mittelstück befinden sich 7 Grifflöcher auf der Vorderseite und ein Daumenloch zum Überblasen auf der Rückseite, wobei die untersten beiden Löcher unterschiedliche Ausführungen haben können: In der sogenannten barocken Griffweise sind diese doppelt gebohrt, damit chromatische Töne leichter gespielt werden können. Diese Bauweise erfordert jedoch einen Gabelgriff, um die Quarte über dem Grundton – also im Falle der Sopranblockflöte das f^2 – spielen zu können. Bei der deutschen Griffweise sind die unteren beiden Löcher einfach gebohrt, sodass der Spieler oder die Spielerin durch teilweises Verdecken der Löcher die gewünschten Töne spielen kann. Die Notwendigkeit des Gabelgriffs entfällt hier.

Heute sind vier Lagen gebräuchlich: Sopran-, Alt-, Tenor- und Bassblockflöte, wobei die Sopranblockflöte einen Tonumfang von c^2 bis c^4 hat und zirka 30,5 cm lang ist. Seit der Renaissance wurde die davor vorherrschende zylindrische Bohrung der Blockflöte durch eine nach unten verengende konische Bohrung ersetzt. [4, S. 31f] [8, S. 164ff] In Abbildung 4.2 wird diese umgekehrt konische Mensur im Mittel- und Fußstück sowie die doppelt gebohrten Löcher besonders deutlich.

4.3 Tonbildung

Was Querflöten und Blockflöten miteinander verbindet, ist die Tonbildung mit dem Prinzip des Schneide- bzw. Kantentons. Hierbei wird der Luftstrom aus einem Spalt auf eine Kante gerichtet, wodurch es aufgrund der kurzzeitigen Verdichtung der Luftteilchen an einer Seite – zum Beispiel außerhalb des Flötenrohres – zu einem Überdruck

4 Die Querflöte und die Blockflöte

kommt. Die nachströmenden Luftteilchen weichen auf die Seite mit geringerem Widerstand aus, erzeugen dort ebenfalls einen Überdruckimpuls und kehren dann zur anderen Seite zurück. Dieser Prozess wiederholt sich, sodass außerhalb und innerhalb des Flötenrohres abwechselnde, periodische Überdruckimpulse entstehen. [33, S. 105f] Dieses Hin- und Herbewegen des Luftstroms kann in Abbildung 4.3 einer Airjet-Simulation gesehen werden.

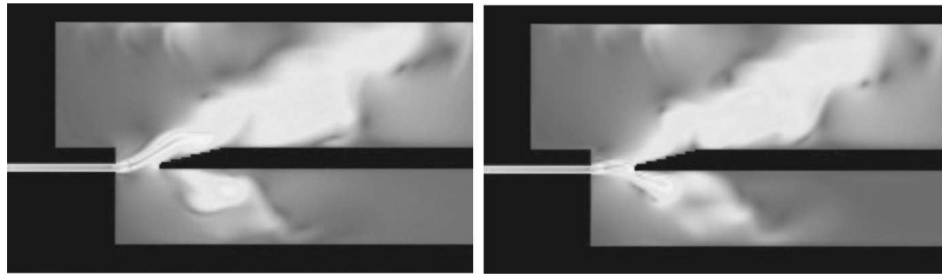


Abbildung 4.3: Entstehung einer Schwingung in Schneidetoninstrumenten [33, S. 106]

Während bei den Blockflöten der Abstand zwischen dem Ende der Kernspalte und dem Labium und somit auch der Winkel, mit dem die Luft auf die Kante trifft, fixiert sind, sind diese Parameter bei der Querflöte variabel, was entscheidend für die Intonation und die Klangfarbe ist. [29, S. 67] Eine weitere Eigenschaft ist die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Strömungsgeschwindigkeit. Je schneller die Luft auf die Kante trifft, desto höher steigt der Ton. [33, S. 106]

Die erzeugten Überdruckimpulse breiten sich in allen Holzblasinstrumenten in der Röhre in Richtung des offenen Endes aus und werden am ersten offenen Tonloch zu einem Großteil reflektiert. Wenn die Frequenz der Anregung stimmt, entsteht dabei eine stehende Welle, also ein Ton. Die Tonhöhe wird durch das Öffnen und Schließen der Tonlöcher verändert, wobei bei schrittweisem Öffnen der Löcher die Länge der schwingenden Luftsäule reduziert wird und dadurch der Ton höher klingt. Möchte der Flötist oder die Flötistin noch höhere Töne spielen, so überbläst er oder sie. Dabei wird die Strömungsgeschwindigkeit der Luft so erhöht, dass die zweite Resonanz angeregt wird und der Ton um eine Oktave höher klingt. [33, S. 107]

4.4 Schwingende Luftsäulen

Wie bereits im Kapitel 2 geschrieben, wird in der Akustik zwischen transversalen und longitudinalen Schallwellen unterschieden. Im Falle der Flöten handelt es sich in der Röhre und auch in der Umgebung um longitudinale Wellen. Wenn die Luft, die sich im Rohr befindet, zum Schwingen gebracht wird, spricht man von einer Pfeife. Bei einer Flöte kann an beiden Rohrenden Luft entweichen, weshalb sie unter die Kategorie der **offenen Pfeifen** fällt. Die Eigenschaften von harmonischen Schallwellen wurden bereits im Kapitel 2.3.1 geklärt. Dieses Hintergrundwissen wird nun im Folgekapitel angewandt, indem die Wellengleichung der schwingenden Luftsäule hergeleitet und an die offene

Pfeife angepasst wird. Zugunsten der Übersichtlichkeit und Verständlichkeit wird die Herleitung jedoch mathematisch unpräziser sein.

4.4.1 Wellengleichung der schwingenden Luftsäule

Sei ein an der linken Seite ($x = 0$) verschlossenes Rohr mit zylindrischer Bohrung mit dem Querschnitt q (in cm^2) und mit dem Rohrabschnitt der Länge ℓ , das mit dem Intervall $0 \leq x \leq \ell$ (in cm) dargestellt wird, gegeben. Die Masse der Luft im Inneren des Rohrs ist mit m (in g) und das Volumen des Gases beim Druck p_0 (in dyn/cm^2) mit V_0 (in cm^3) gegeben. Das Volumen V_0 berechnet sich mit $V_0 = \ell \cdot q$ und die Dichte ρ_0 wird mit

$$\rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

beschrieben.



Abbildung 4.4: Rohr mit zylindrischer Bohrung; eigene Darstellung mit GeoGebra nach [25, S. 84]

Wenn nun eine Kraft k auf den Querschnitt an der rechten Seite des Rohres wirkt, verschiebt er sich um a und das Volumen ändert sich zu $V = V_0 + \Delta V$ mit $\Delta V = a \cdot q$. Ebenfalls ändert sich der Druck zu $p = p_0 + \Delta p$. Es wird angenommen, dass die Zustandsänderung langsam, also isotherm erfolgt, weshalb das *Boyle-Mariotte'sche Gesetz* gelten kann:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \quad (4.4.1)$$

Mit den obigen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} (p_0 + \Delta p) \cdot (V_0 + \Delta V) &= p_0 \cdot V_0 \\ p_0 \cdot \Delta V + V_0 \cdot \Delta p + \Delta p \cdot \Delta V &= 0 \quad | : V_0 \\ \frac{p_0 \cdot \Delta V}{V_0} + \Delta p + \frac{\Delta p \cdot \Delta V}{V_0} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Der Ausdruck $\frac{\Delta p \cdot \Delta V}{V_0}$ kann für $\Delta V \rightarrow 0$ vernachlässigt werden, wodurch 4.4.2 umgeschrieben werden kann zu

$$\Delta p = -\frac{p_0}{V_0} \cdot \Delta V, \quad (4.4.3)$$

was die Druckänderung beschreibt. Dadurch wirkt auf die linke Seite des Rohrs die Kraft $q \cdot \Delta p$, die gleich groß wie die an der rechten Seite des Rohres wirkenden Kraft k ist und

4 Die Querflöte und die Blockflöte

in die entgegengesetzte Richtung wirkt. Es gilt daher $k = -q \cdot \Delta p$, womit folgt:

$$k = -q \cdot \Delta p = q \cdot \frac{p_0}{V_0} \cdot \Delta V = q \cdot p_0 \cdot \frac{a \cdot q}{\ell \cdot q} = q \cdot p_0 \cdot \frac{a}{\ell}. \quad (4.4.4)$$

Somit erhalten wir mit $\varepsilon := p_0$ das *Hooke'sche Gesetz für Gase*:

$$k = \varepsilon \cdot q \cdot \frac{a}{\ell}. \quad (4.4.5)$$

Sei nun die Funktion $u(x, t)$, wie auch schon im Kapitel 3.1, die Auslenkung einer Welle aus der Ruhelage an der Stelle x und zum Zeitpunkt t . Dann gilt auch hier die Wellengleichung (3.1.8)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit $c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$. Da diese Wellengleichung nur das lokale Verhalten der Luft beschreibt, gilt sie auch in zylindrisch gebohrten Rohren, die an den Enden offen oder geschlossen sind. [25, S. 84f]

4.4.2 Lösung der Wellengleichung für die Querflöte

Wie bereits im Kapitel 2.3.2 beschrieben, befindet sich am offenen Ende einer Röhre ein Druckknoten bzw. ein Wellenbauch der Auslenkungswelle, da sich die Luft (annähernd) ungehindert in die Umgebungsluft verteilen kann. Die Druckwelle, die mit $p(x, t)$ beschrieben wird, ist am offenen Ende des Rohrs gleich null. Gleichzeitig befinden sich dort Schwingungsbäuche der Auslenkungswelle, da die Luftmoleküle an diesen Stellen ihre maximale Bewegung ausführen. In Abbildung 4.5 werden die Druckwellen sowie die Auslenkungswellen für die Fundamentale (a) und die ersten beiden Obertöne (b) und (c) in einem zylindrischen Rohr, das an beiden Seiten offen ist, gezeigt. Es lassen sich hier jeweils an den Rohrenden die Druckknoten und die Schwingungsbäuche der Auslenkungswelle sowie die Schwingungsknoten der ersten drei Harmonischen erkennen.

Die maximale Bewegung der Luftmoleküle an den Enden des Rohrs führen zu den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0.$$

Mit dem Separationsansatz $u(x, t) = v(t) \cdot w(x)$ soll nun die Wellengleichung mit den gegebenen Randbedingungen gelöst werden. [25, S. 94]

Durch Trennung der Variablen erhalten wir die Bedingungen

$$w'(0) = 0 \quad \text{und} \quad w'(\ell) = 0.$$

Wir nutzen die Erkenntnisse von Kapitel 3.1.5, setzen

$$w''(x) = \gamma \cdot w(x)$$

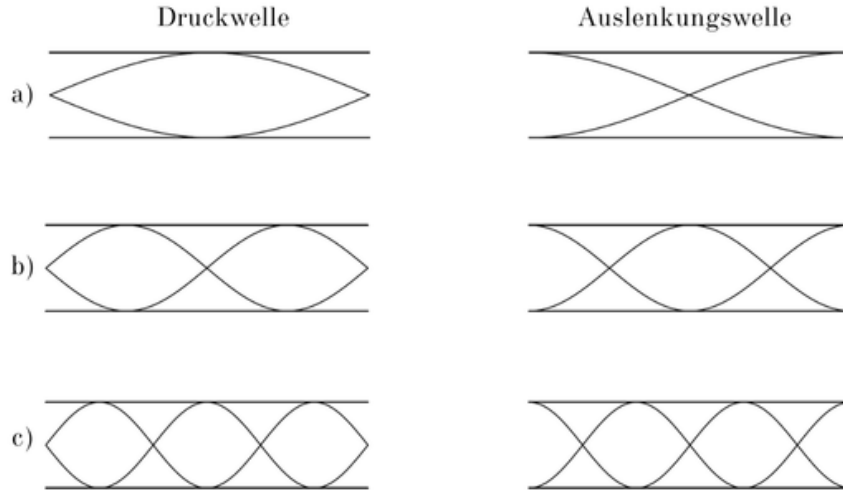


Abbildung 4.5: Druck- und Auslenkungswellen im zylindrischen Rohr [6, S. 100]

und erhalten als eine mögliche Lösung (siehe 3.1.46)

$$w(x) = A \cdot \cos(\sqrt{|\gamma|x}) + B \cdot \sin(\sqrt{|\gamma|x}).$$

Als nächstes wird die Ableitung mithilfe der Kettenregel berechnet:

$$w'(x) = -A\sqrt{|\gamma|} \sin(\sqrt{|\gamma|x}) + B\sqrt{|\gamma|} \cos(\sqrt{|\gamma|x})$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen $w'(0) = 0$ und $w'(\ell) = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = w'(0) &= A\sqrt{|\gamma|} \sin(0) + B\sqrt{|\gamma|} \cos(0) \\ &= B\sqrt{|\gamma|} \end{aligned}$$

$$\gamma < 0 \Rightarrow B = 0.$$

und

$$\begin{aligned} 0 = w'(\ell) &= A\sqrt{|\gamma|} \sin(\sqrt{|\gamma|\ell}) + B\sqrt{|\gamma|} \cos(\sqrt{|\gamma|\ell}) \\ &\stackrel{B=0}{=} A\sqrt{|\gamma|} \sin(\sqrt{|\gamma|\ell}) \\ \Leftrightarrow \sin(\sqrt{|\gamma|\ell}) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{|\gamma|} = \frac{k\pi}{\ell}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Lösung lautet daher

$$w_k(x) = A_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Analog lösen wir die Zeitfunktion $v(t)$. Dazu nutzen wir wieder die Ergebnisse (3.1.51) aus Kapitel 3.1.5 und erhalten die Lösung

$$v_k(t) = B_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + C_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right). \quad (4.4.6)$$

4 Die Querflöte und die Blockflöte

Die Gesamtlösung $u(x, t) = v(t)w(x)$ lautet also

$$u_k(x, t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \left[B_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + C_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.4.7)$$

Die Eigenschwingungen, die mit der Gleichung 4.4.7 für offene Pfeifen beschrieben werden, unterscheiden sich von den Eigenschwingungen der an beiden Seiten befestigten schwingenden Saite (3.1.52) lediglich im Faktor $\cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$. Dieser ist ortsabhängig, was bedeutet, dass sich diese beiden Gleichungen nur in der Gestalt unterscheiden; die Frequenzen sind gleich. [25, S. 94]

Diese können wir berechnen, indem wir

$$2\pi\nu_k = \frac{ck\pi}{\ell} \quad (4.4.8)$$

setzen. Für den Faktor c benötigen wir die *Formel von Laplace*:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p_0}{\rho_0}} \quad (4.4.9)$$

Hier beschreibt κ das Verhältnis der spezifischen Wärme eines Gases bei konstantem Volumen und jener bei konstantem Druck. Bei Luft gilt $\kappa = 1,4$ und bei gegebenen p_0 und ρ_0 lässt sich so die Schallgeschwindigkeit von ca. $c = 331$ m/s ermitteln. Dies entspricht ungefähr dem Wert von ca. $c = 343$ m/s, der für die Schallgeschwindigkeit in der Luft bei ca. 20 °C angenommen wird. Der errechnete Wert lässt sich nun in Gleichung 4.4.8 einsetzen:

$$\begin{aligned} 2\pi\nu_k &= \frac{331 \cdot k \cdot \pi}{\ell} \\ \Leftrightarrow \nu_k &= \frac{331 \cdot k}{2\ell} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Der Ausdruck ν_k gibt die Frequenz der k -ten Harmonischen in Hz an, weshalb es Sinn macht ab nun ν_n mit $n \in \mathbb{N}$ für die n -ten Harmonischen zu schreiben..

Der tiefste Ton der Querflöte mit C-Fuß ist das c^1 , dessen Frequenz mit

$$\nu_{[c^1]} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{-9} = \frac{440}{(\sqrt[12]{2})^9} \approx 261,63 \text{ Hz} \quad (4.4.11)$$

berechnet werden kann. Diese Formel ergibt sich mit dem Wissen, dass das a^1 eine Frequenz von 440 Hz hat und das c^1 9 Halbtöne unter dem a^1 liegt. Der Faktor $\sqrt[12]{2}$ ergibt sich, indem eine Oktave, die mit der doppelten Frequenz schwingt, in 12 gleich große Stufen geteilt wird. Wir erhalten deshalb $\nu_{[c^1]} \approx 261,63$ Hz. Eingesetzt in 4.4.10 ergibt sich die Länge

$$\ell \approx 0,633 \text{ m}, \quad (4.4.12)$$

also ca. 63,3 cm, was ungefähr der Realität entspricht. [25, S. 95]

Formt man die Gleichung 4.4.8 mit ν_n , $n \in \mathbb{N}$ um zu

$$\nu_n = \frac{cn\pi}{2\ell}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.4.13)$$

lässt sich mit

$$\nu_n = n \cdot \frac{c\pi}{2\ell} = n \cdot \nu_1$$

leicht erkennen, dass sich die Tonhöhen gleich verhalten wie bei der schwingenden Saite. Sie stehen in den Verhältnissen

$$1 : 2 : 3 : \dots$$

zueinander. Dies bedeutet, dass alle Obertöne auftreten und bei offenen Pfeifen mit zylindrischer Bohrung, wie es auch die Querflöte ist, zuerst in die Oktave, dann in die darüberliegende Quint usw. überblasen werden kann (siehe „Naturtonreihe“, Kapitel 2.1.3). [25, S. 72]

Bemerkung. In der Realität entspricht die Querflöte dem Ideal der offenen Pfeife nicht, da der Luftstrom im Rohr erst über den Stimmkork im Kopfstück zum Anblasloch zurückgeleitet wird. An diesem Ende ist die Querflöte also nicht ganz offen, was sich dahingehend auswirkt, indem die geradzahlgigen Harmonischen ($2\nu, 4\nu, \dots$) nicht gleich stark ausgebildet sind, wie dies von einer offenen Pfeife zu erwarten wäre. Damit kann eine Parallele zu den geschlossenen Pfeifen (z.B. Klarinetten oder Oboen) gesehen werden, bei denen in der Theorie nur die ungeraden Harmonischen ($\nu, 3\nu, 5\nu, \dots$) mitschwingen. In der Realität sind jedoch auch die geradzahlgigen Harmonischen schwach zu hören. [25, S. 95]

4.4.3 Offene Pfeifen mit umgekehrt konischer Mensur

Wie bereits in Kapitel 4.2 beschrieben, handelt es sich bei einer Blockflöte um eine offene Pfeife mit umgekehrt konischer Mensur. Das heißt, dass die Luftsäule ein unvollständig verjüngter Kegel ist, der an seinem weiten Ende angeregt wird. In der Literatur wird bei konischen Röhren fast ausschließlich von geschlossenen Pfeifen, wie der Oboe gesprochen. Offene Pfeifen mit einer verjüngenden Mensur sind sehr wenig beschrieben. Einen physikalischen Ansatz für die Beschreibung der Welle bieten Neville Fletcher und Thomas Rossing in „The Physics of Musical Instruments“. [13] Wir betrachten zu Beginn die mechanische Eingangsimpedanz Z_{in} einer unendlich langen Saite, welche durch

$$Z_{in} = \frac{\tilde{f}(t)}{\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}}, \quad (4.4.14)$$

definiert ist. Hierbei ist $\tilde{f}(t) = Fe^{i\omega t}$ die transversale Kraft, die am linken Ende einer unendlich langen Saite wirkt, und $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}$ die Geschwindigkeit. Die Eingangsimpedanz gibt das Verhältnis zwischen diesen beiden Größen an. [13, S. 47]

4 Die Querflöte und die Blockflöte

Die Eingangsimpedanz Z_{in} eines unvollständigen (Luft-)Kegels kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$Z_{in} = \frac{i\rho c}{S_1} \cdot \frac{\sin(k\ell) \sin(k\theta_1)}{\sin(k(\ell + \theta_1))}. \quad (4.4.15)$$

Dabei beschreibt ρ die Dichte der Luft, c die Schallgeschwindigkeit, S_1 die Querschnittsfläche am Eingangsbereich des Rohres, ℓ die Rohrlänge und $k = \frac{\omega}{c}$ die Wellenzahl. Der Parameter θ_1 hängt von der Entfernung x_1 des offenen Endes zur abgeschnittenen Spitze des Kegels ab:

$$k\theta_1 = \tan^{-1}(kx_1) \quad (4.4.16)$$

Die Resonanzfrequenzen, bei denen die Luftsäule ideal angeregt wird, lassen sich durch die Nullstellen der Eingangsimpedanz bestimmen.

Wegen 4.4.16 und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ ist $k\theta_1 \ll \frac{\pi}{2}$ und $\sin(k\theta_1) \approx k\theta_1$. Da $\sin(k\theta_1)$ für $k\theta_1 \ll \frac{\pi}{2}$ niemals null wird (außer im trivialen Fall $k\theta_1 = 0$), dominieren die Nullstellen durch den Faktor $\sin(k\ell)$. Es gilt also

$$\sin(k\ell) = 0 \implies k\ell = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

woraus mit $k = \frac{\omega}{c}$ folgt:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}. \quad (4.4.17)$$

Diese Resonanzfrequenzen sind unabhängig von der Verjüngung und hängen nur von der Länge ℓ des Rohres ab. Somit sind die Resonanzfrequenzen dieselben wie jene eines zylindrischen Rohres mit derselben Länge ℓ . [13, S. 451f]

Die Impedanzmaxima treten dort auf, wo $\sin(k(\ell + \theta_1))$ verschwindet, was dazu führt, dass die Frequenzen der unteren Maxima höher sind als bei einem zylindrischen Rohr. Dadurch liegen diese Frequenzen näher an einem der benachbarten Minima, statt genau dazwischen.

Ein Vorteil dieser Form der Impedanzkurve bei einem konischen Instrument gegenüber einem zylindrischen besteht darin, dass es eine stabilere Tonhöhe bei wechselndem Blasdruck hat. Diese Kurve kann in Abbildung 4.6 nachvollzogen werden. Die asymmetrische Form der unteren Resonanzen trägt dazu bei, dass die Tonhöhe weniger absinkt, wenn der Blasdruck kleiner wird. Ein weiterer praktischer Vorteil könnte in der Bauweise liegen: Um ein Instrument optimal abzustimmen, muss der Durchmesser der Bohrung an verschiedenen Stellen genau angepasst werden und während dies bei einer zylindrischen Bohrung nur durch aufwendige manuelle Nachbearbeitung möglich ist, erlaubt eine konische Bohrung eine einfachere Umsetzung dieser Anpassungen. Die benötigten Variationen können direkt in das Werkzeug für die Endbearbeitung integriert werden, was die Herstellung erleichtert und eine gleichbleibende Qualität der Instrumente sicherstellt. [13, S. 452]

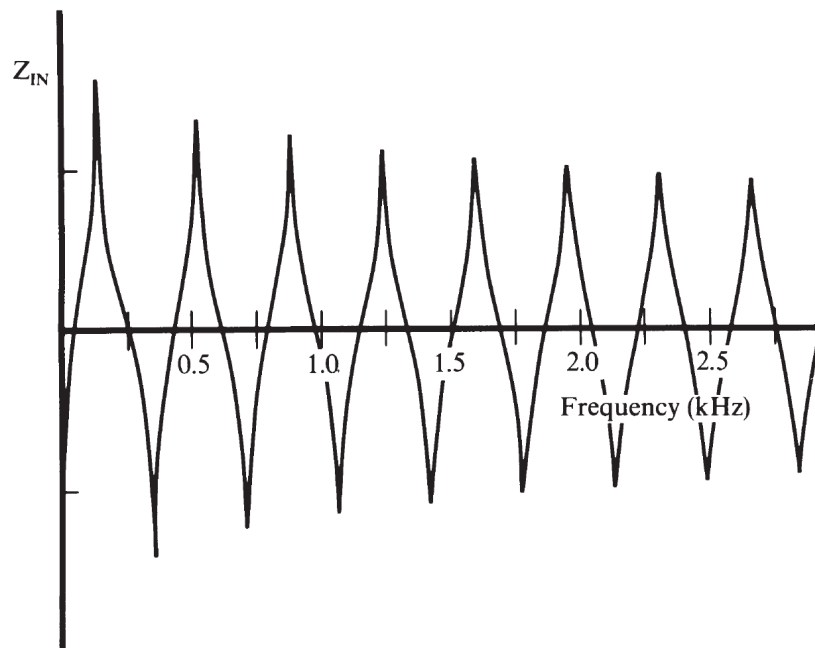


Abbildung 4.6: Eingangsimpedanz am größeren Ende einer offenen Pfeife mit umgekehrt konischer Mensur [13, S. 452]

5 Fourieranalyse

Die Fourieranalyse ist ein mathematisches Verfahren zur Zerlegung beliebiger Funktionen in eine Summe harmonischer Schwingungen. Sie basiert auf den Arbeiten von Jean-Baptiste Fourier, der erkannte, dass periodische Funktionen als Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen dargestellt werden können, was insbesondere bei der Lösung der Wellengleichung eine fundamentale Rolle spielt. Mathematisch betrachtet ermöglicht sie die Darstellung von Funktionen $f(x)$ als Reihenentwicklung der Form $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, wobei die Koeffizienten a_k und b_k über Integrale berechnet werden. Diese sogenannten Fourierkoeffizienten geben beispielsweise Auskunft über die Intensität der einzelnen Frequenzanteile eines Klangs, was bei der objektiven Unterscheidung der Klangfarbe eines Tons zweier Instrumente entscheidend ist.

5.1 Mathematische Grundlagen der Fourieranalysis: Der Raum L^2 und orthogonale Funktionen

In diesem Unterkapitel werden die theoretischen Grundlagen für die nachfolgende Behandlung von Fourierreihen gelegt. Zunächst wird der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen L^2 behandelt, wobei auf eine ausführliche Darstellung der Maßtheorie verzichtet wird, um die Konzepte anschaulich und zugänglich zu halten. Auch wenn der L^2 -Raum formal auf dem Lebesgue-Integral basiert und streng genommen als Raum von Äquivalenzklassen messbarer Funktionen definiert ist, beschränkt sich diese Arbeit auf Funktionen, die auf kompakten Intervallen definiert und mindestens stückweise stetig sind. Für solche Funktionen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral überein, so dass das Riemann-Integral zur Veranschaulichung und Durchführung aller notwendigen Rechnungen ausreicht. Letztlich wird das Wissen über Basisinhalte der linearen Algebra, konkret über Vektorräume, vorausgesetzt. Für eine Vertiefung in dieses Thema sei auf Christian Karpfingers „Höhere Mathematik in Rezepten“ [19] verwiesen.

5.1.1 Der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

Definition 5.1.1 (L^2 -Raum). [12, S. 74]

Eine Menge $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (kurz: L^2) heißt Menge der quadratintegrierbaren Funktionen über den reellen Zahlen. Analog dazu ist $L^2(\mathbb{C}, dx)$ die Menge der quadratintegrierbaren komplexwertigen Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

quadratisch integrierbar, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion, dann schreibt man auch:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Ohne Einschränkung können wir das Intervall $[-\pi, \pi]$ der Länge 2π für unsere Funktionen festlegen. Durch die Substitution $x \mapsto f(\frac{T}{2\pi}x)$ kann jede T -periodische Funktion in eine 2π -periodische Funktion überführt werden. [17, S. 322]

Definition 5.1.2 (L^2_π -Raum). [17, S. 334]

Der Raum $L^2_\pi(\mathbb{R}) := L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$ bezeichnet die Menge aller reellwertigen, 2π -periodischen und quadratintegrierbaren Funktionen. Es gilt:

$$L^2_\pi = \left\{ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Analog dazu wird $L^2_\pi(\mathbb{C}) := L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ definiert.

Falls nicht anders angegeben, wird mit L^2_π nun immer $L^2_\pi(\mathbb{C})$ gemeint.

Bemerkung. Funktionen $f \in L^2_\pi(\mathbb{R})$ können als Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ aufgefasst werden, wenn sie periodisch fortgesetzt werden. Diese periodischen Fortsetzungen sind nicht quadratintegrierbar. [23, S. 183]

Definition 5.1.3 (Skalarprodukt und L^2 -Norm in $L^2_\pi(\mathbb{C})$). [23, S. 183]

Seien $f, g \in L^2_\pi(\mathbb{C})$. Das Skalarprodukt wird definiert als

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

wobei $\overline{g(x)}$ die konjugiert komplexe Funktion von $g(x)$ ist. Die induzierte L^2 -Norm lautet

$$\|f\|_2^2 := \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Definition 5.1.4 (Skalarprodukt und L^2 -Norm in $L^2_\pi(\mathbb{R})$). [17, S. 334]

Seien $f, g \in L^2_\pi(\mathbb{R})$. Das Skalarprodukt wird dann definiert als

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Die induzierte Norm berechnet sich mit

$$\|f\|_2^2 := \langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

5.1 Mathematische Grundlagen der Fourieranalysis: Der Raum L^2 und orthogonale Funktionen

Analog zu den Definitionen 5.1.1 bis 5.1.4 kann die folgende Definition getroffen werden:

Definition 5.1.5 (Die Menge L_π). [27, S. 270]

Die Menge aller 2π -periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $[-\pi, \pi]$ integrierbar sind, heißt L_π . Für sie gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx < \infty$$

und die L^1 -Norm ist definiert durch:

$$\|f\|_1 := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx.$$

Definition 5.1.6 (Vollständigkeit und Banachraum). [2, S. 1174]

Als **vollständig** oder als **Banachraum** bezeichnet man einen normierten Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert.

Definition 5.1.7 (Hilbertraum). [9, S. 349f]

Ein komplexer Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, der in der induzierten Norm vollständig ist, heißt **Hilbertraum**.

Bemerkung. Der Raum L_π^2 ist ein Hilbertraum. (Eigentlich müsste man Äquivalenzklassen von quadratisch integrierbaren Funktionen betrachten, wobei f und g in derselben Äquivalenzklasse liegen, falls $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ Lebesgue-Maß 0 hat.)

Bemerkung. Der Vektorraum $C([a, b])$ aller reellen stetigen Funktionen auf $[a, b]$ ist nur ein Skalarproduktraum, auch Prä-Hilbertraum oder Vektorraum mit innerem Produkt genannt. Das Skalarprodukt lautet $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx$. Dieser Vektorraum ist nicht vollständig, weshalb für die Fourieranalyse meist $L^2([a, b])$ verwendet wird. [23, S. 170]

5.1.2 Orthonormalbasen

Der Raum L_π^2 enthält alle Funktionen $\epsilon_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\epsilon_n(x) := e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Sie bilden eine orthonormale Familie $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, wie in der nachfolgenden Berechnung nachvollzogen werden kann.

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_m, \epsilon_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} \, dx \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Satz 5.1.1 (Orthonormalbasis). [23, S. 186] Die Familie $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bildet eine Orthonormalbasis von L_π^2 .

Definition 5.1.8 (Euler'sche Formel). [2, S. 298]

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

Aus der Euler'schen Formel lassen sich die folgenden Gleichungen durch Addition bzw. Subtraktion der konjugiert komplexen Funktion $e^{-ix} := \cos(x) - i \cdot \sin(x)$ und anschließender Division durch 2 bzw. $2i$ berechnen:

$$\begin{aligned} \bullet \cos(kx) &= \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \\ \bullet \sin(kx) &= \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \end{aligned}$$

Es liegt daher nahe, dass auch $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ orthogonal aufeinander stehen. Dies wird im folgenden Lemma festgehalten:

Lemma 5.1.1 (Nützliche Integrale und Orthogonalitätsrelationen). [32, S. 408]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \in \mathbb{N}^* \\ 2\pi & \text{für } k = 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \, dx = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad (5.1.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx = \begin{cases} \pi & \text{für } k = n \quad (k, n \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{für } k \neq n \quad (k, n \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad (5.1.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx = 0 \text{ für } k, n \in \mathbb{N} \quad (5.1.4)$$

Beweis. Die Gleichungen 5.1.1 und 5.1.2 ergeben sich mit einfacher Integration. Mit den Additionstheorem für Kosinus (siehe 2.3.1) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2\pi\delta_{kn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-n)x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx \\ 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+n)x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx, \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{für } k \neq n \end{cases}$$

das Kronecker-Delta bezeichnet. Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\pi\delta_{kn} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx \quad \Leftrightarrow \\ \pi\delta_{kn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx \end{aligned}$$

Die Subtraktion ergibt

$$\begin{aligned} 2\pi\delta_{kn} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx \quad \Leftrightarrow \\ \pi\delta_{kn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx, \end{aligned}$$

womit 5.1.3 gezeigt wurde. Mit dem Additionstheorem für Sinus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin((k+n)x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) \, dx \\ 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin((k-n)x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) \, dx \end{aligned}$$

Sowohl Addition als auch Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefern das Ergebnis

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx = 0.$$

□

Die Gleichungen 5.1.3 und 5.1.4 entsprechen dem Skalarprodukt für den Vektorraum $C([-\pi, \pi])$ aller reellwertigen und stetigen Funktionen auf diesem Intervall. Wir berechnen nun das L^2 -Skalarprodukt sowie die L^2 -Norm für $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$ mit $k, n \in \mathbb{N}^*$, sodass wir ein orthonormales und vollständiges System (= Orthonormalbasis) in L^2_π erhalten:

- Skalarprodukt

$$\langle 1, \cos(kx) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(kx) \, dx \stackrel{(5.1.1)}{=} 0 \quad (5.1.5)$$

$$\langle 1, \sin(kx) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) \, dx \stackrel{(5.1.2)}{=} 0 \quad (5.1.6)$$

$$\langle \cos(kx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(nx) \, dx \stackrel{(5.1.3)}{=} 0 \quad (5.1.7)$$

$$\langle \sin(kx), \sin(nx) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(nx) \, dx \stackrel{(5.1.3)}{=} 0 \quad (5.1.8)$$

$$\langle \sin(kx), \cos(nx) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \stackrel{(5.1.4)}{=} 0 \quad (5.1.9)$$

- L^2 -Norm

$$\|1\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1|^2 \, dx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} [x]_{-\pi}^{\pi}} = 1 \quad (5.1.10)$$

$$\|\sin(kx)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(kx)|^2 dx} \stackrel{5.1.3}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.1.11)$$

$$\|\cos(kx)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(kx)|^2 dx} \stackrel{5.1.3}{=} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (5.1.12)$$

- Normierung der Funktionen $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$

$$\begin{aligned} \|\sqrt{2}\sin(kx)\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sqrt{2}\sin(kx)|^2 dx} \\ &= \sqrt{\frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\pi} \pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\|\sqrt{2}\cos(kx)\|_2 = 1$$

Daraus folgt, dass die Funktionen

$$\{1, \sqrt{2}\sin(x), \sqrt{2}\cos(x), \sqrt{2}\sin(2x), \sqrt{2}\cos(2x), \dots, \sqrt{2}\sin(nx), \sqrt{2}\cos(nx), \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

eine Orthonormalbasis in $L^2_{\pi}(\mathbb{R})$ bilden. [23, S. 188]

Bemerkung. Eine Eigenschaft, die aus der Kenntnis der Orthonormalbasen $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ von $L^2_{\pi}(\mathbb{C})$ bzw. $\{1, \sqrt{2}\sin(nx), \sqrt{2}\cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ von $L^2_{\pi}(\mathbb{R})$ folgt, ist, dass alle Funktionen $f \in L^2_{\pi}$ als Linearkombination mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{C}$ bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \dots \in \mathbb{R}$ darstellbar sind. [17, S. 198]

5.2 Trigonometrische Reihen und Fourierreihen

In diesem Abschnitt wird die Darstellung periodischer Funktionen mithilfe trigonometrischer Reihen behandelt. Es werden die Begriffe der Fourierkoeffizienten und Fourierreihe eingeführt. Dabei wird sich – wie auch schon im vorherigen Abschnitt – auf 2π -periodische Funktionen beschränkt.

Weiters werden Fragen der Konvergenz erst im nächsten Abschnitt behandelt, weshalb in diesem Kapitel zunächst die theoretischen Grundlagen dargestellt werden, ohne auf diese Überlegungen einzugehen.

Definition 5.2.1 (Trigonometrische Reihe). [17, S. 322]

Eine trigonometrische Reihe ist eine unendliche Reihe der Gestalt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit reellen Koeffizienten $a_k, k \in \mathbb{N}$ und $b_k, k \in \mathbb{N}^*$.

Mit der Definition 5.2.1 ist genauer genommen die **reelle** trigonometrische Reihe gemeint, da die Koeffizienten reell sind.

Mit der Euler'schen Formel (5.1.8) und den Folgerungen für $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ kann in die Definition der trigonometrischen Reihe (siehe 5.2.1) eingesetzt und berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cdot \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \cdot \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cdot \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} - ib_k \cdot \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k - ib_k) \cdot \frac{e^{ikx}}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + ib_k) \cdot \frac{e^{-ikx}}{2}. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} c_k &:= \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^* \\ c_{-k} &:= \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^* \\ c_0 &:= \frac{a_0 - ib_0}{2} = \frac{a_0}{2} \quad \text{mit } b_0 := 0, \end{aligned}$$

so folgt für die **komplexe** Form der trigonometrischen Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}$$

mit den komplexen Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$. [32, S. 411f]

Der Ausdruck $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ beschreibt dabei den Grenzwert der Partialsummen

$$\sum_{k=-m}^n \quad \text{für } m \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

[27, S. 269]

5 Fourieranalyse

Bemerkung. Mit den Umrechnungsformeln

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{und} \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^*$$

kann von der komplexen auf die reelle Form umgerechnet werden.

Definition 5.2.2 (Trigonometrisches Polynom). [2, S. 1165]

Ein trigonometrisches Polynom vom Grad n ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$.

Bemerkung. Analog ist die reelle Darstellung eines trigonometrischen Polynoms eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbb{R}$$

und den Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Bevor weitere Berechnungen durchgeführt werden, sei hier ein Lemma angeführt, das die Integration über Intervalle mit der Länge 2π behandelt:

Lemma 5.2.1. Jedes Intervall $[a, b]$ mit der Länge $b - a = 2\pi$ wird als Periodenintervall bezeichnet.

(i) Die 2π -periodische Funktion f ist durch ihre Einschränkung auf ein Periodenintervall $[a, b]$ und sogar auf $[a, b)$ oder $(a, b]$ eindeutig bestimmt.

(ii) Ist f über jedes kompakte Intervall $[a_1, b_1]$ integrierbar, so gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = \int_{a_1 + k \cdot 2\pi}^{b_1 + k \cdot 2\pi} f(x) dx.$$

(iii) Für jedes Periodenintervall $[a, b]$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

[32, S. 406]

Beweis. Zu (i): Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ kann die Periodizität der Funktion genutzt werden, um zu schreiben:

$$f(x) = f(x - k \cdot 2\pi).$$

5.2 Trigonometrische Reihen und Fourierreihen

Damit stellt sich die Frage, ob es möglich ist, für ein gegebenes x ein entsprechendes Argument $x - k \cdot 2\pi$ im Intervall $[a, b]$ zu finden. Diese Bedingung führt zur Ungleichung

$$a \leq x - k \cdot 2\pi < b = a + 2\pi.$$

Formt man diese Ungleichung um, erhält man die Schranke für k :

$$k \leq \frac{x - a}{2\pi} < k + 1.$$

Aus der Definition der Gauß-Klammer folgt

$$k = \left\lfloor \frac{x - a}{2\pi} \right\rfloor,$$

womit $f(x)$ durch $f(x - k \cdot 2\pi)$ mit diesem k eindeutig festgelegt ist.

Da $f(a) = f(a + 2\pi) = f(b)$ ist, gilt dasselbe auch für die halboffenen Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$.

Zu (ii): Aufgrund der Periodizität von f gilt für jedes ganze k , dass $f(x) = f(x + k \cdot 2\pi)$. Durch die Substitution $t = x + k \cdot 2\pi$ ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x + k \cdot 2\pi) dx = \int_{k \cdot 2\pi}^{(k+1) \cdot 2\pi} f(t) dt.$$

Dies zeigt, dass f über jedes Intervall der Form $[k \cdot 2\pi, (k+1) \cdot 2\pi]$ integrierbar ist. Da jedes beliebige Intervall $[a_1, b_1]$ als Vereinigung solcher Teilintervalle dargestellt werden kann, ist f auch über diese Intervalle integrierbar. Durch die gleiche Umformung erhält man

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x + k \cdot 2\pi) dx = \int_{a_1 + k \cdot 2\pi}^{b_1 + k \cdot 2\pi} f(t) dt,$$

was bedeutet, dass die Integrale über beliebige Intervalle ebenfalls nur von der Periodizität von f abhängen und sich entsprechend verschieben lassen.

Zu (iii): Es kann angenommen werden, dass a im Intervall $[0, 2\pi)$ liegt. Dies folgt aus der Tatsache, dass es gemäß Eigenschaft (i) stets eine ganze Zahl k_a gibt, sodass $a + k_a \cdot 2\pi$ in $[0, 2\pi)$ liegt. In Kombination mit der zuvor gezeigten Eigenschaft (ii) folgt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a + k_a \cdot 2\pi}^{b + k_a \cdot 2\pi} f(x) dx.$$

Speziell für den Fall $a \in [0, 2\pi)$ kann das Integral von 0 bis 2π wie folgt in zwei Teilbereiche zerlegt werden:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2\pi} f(x) dx.$$

Unter Anwendung der bereits gezeigten Eigenschaft (ii) kann das zweite Integral weiter umgeschrieben werden als

$$\int_a^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx.$$

Zusammengefasst ergibt sich somit

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Es soll nun herausgefunden werden, welche Funktionen durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden können und wie die entsprechenden Koeffizienten a_k und b_k bzw. c_k gewählt werden müssen. Dazu sei zuerst die umgekehrte Richtung mit dem folgenden Satz gezeigt:

Satz 5.2.1. [32, S. 408] Gilt für eine Funktion f in $[0, 2\pi]$ mit gleichmäßiger Konvergenz¹ auf diesem Intervall die Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

dann folgt für die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{für } k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{für } k \geq 1.$$

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz ist die Funktion f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig, da sie als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen gegeben ist. Ebenfalls können aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz die Summen und Integrale vertauscht werden.

Um die gewünschte Gleichung zu zeigen, multipliziert man die Reihenentwicklung von $f(x)$ mit $\cos(kx)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ fest ist, und integriert gliedweise. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist das Produkt der beiden stetigen Funktionen $f(x)$ und $\cos(kx)$ ebenfalls stetig. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right) \cos(nx) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \right) \end{aligned}$$

¹Erklärungen zur gleichmäßigen bzw. punktwisen Konvergenz werden im Kapitel 5.3 gegeben.

5.2 Trigonometrische Reihen und Fourierreihen

Für $n = 0$ folgt mit den Gleichungen 5.1.1, 5.1.3 und 5.1.4:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} 2\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cdot 0 + b_k \cdot 0) \\ &= a_0 \pi. \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ folgt mit den Gleichungen 5.1.1, 5.1.3 und 5.1.4:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\underbrace{a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) \, dx}_{=0, \text{ wenn } k \neq n} + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot 0 + a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(nx) \, dx \\ &= a_n \pi. \end{aligned}$$

Es folgt daher

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = a_n \pi \quad (5.2.1)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \quad (5.2.2)$$

Die zweite Gleichung erhält man mit den gleichen Voraussetzungen durch Multiplikation mit $\sin(nx)$ und es kann wegen $n \geq 1$ direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(nx) \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(nx) \, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(nx) \, dx \right) \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot 0 + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(nx) \, dx \\ &= b_n \pi. \end{aligned}$$

Es folgt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Bemerkung. Mit dem Satz 5.2.1 wurde gezeigt, dass, wenn eine Funktion als trigonometrische Reihe gegeben ist und diese Reihe gleichmäßig in $[0, 2\pi]$ konvergiert, die Koeffizienten a_k und b_k in der gegebenen Form berechnet werden können. Es ist wichtig zu verstehen, dass der Satz nicht aussagt, dass eine beliebige 2π -periodische Funktion als eine trigonometrische Reihe mit soeben genannten Koeffizienten dargestellt werden kann. Dies wird erst zu einem späteren Zeitpunkt geklärt.

Definition 5.2.3 (Fourierkoeffizienten). [17, S. 324]

Für jedes $f \in L_\pi$ heißen die komplexen Zahlen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad (5.2.3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad \text{für } k \in \mathbb{N}^* \quad (5.2.4)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \quad (5.2.5)$$

die **Fourierkoeffizienten** von f .

Definition 5.2.4 (Fourierreihe). [27, S. 270]

Für jedes $f \in L_\pi$ heißt die trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit den Fourierkoeffizienten a_k und b_k die von f erzeugte **Fourierreihe**. Dafür wird kurz

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

geschrieben. Die n -te Partialsumme ist

$$s_n(x|f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (5.2.6)$$

und mit den Euler'schen Formeln folgt die äquivalente Darstellung der von f erzeugten Fourierreihe

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

mit den Fourierkoeffizienten c_k .

Im Folgenden wird eine Definition gegeben, die es erlaubt, auch komplexwertige Funktionen zu integrieren. Dies dient lediglich der Vollständigkeit in Bezug auf die Fourieranalysis; für den Kontext dieser Masterarbeit reichen in den meisten Fällen reellwertige Funktionen aus. Nichtsdestotrotz lassen sich die meisten Berechnungen leichter mit der Exponentialfunktion e^{ikx} anstellen.

Definition 5.2.5 (Riemann-Integrierbarkeit komplexer Funktionen). [9, S. 152]

Seien $a < b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn Real- und Imaginärteil Riemann-integrierbar sind. Ist also eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = g + i \cdot h$ mit reellwertigen integrierbaren Funktionen g und h gegeben, so definiert man

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx + i \int_a^b h(x) \, dx.$$

Bemerkung. Diese Definition erlaubt die Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten c_k , die in der Definition 5.2.3 bereits vorweggenommen wurde.

5.2.1 Eigenschaften der Fourierkoeffizienten

Definition 5.2.6 (Gerade bzw. ungerade Funktion). [17, S. 325]

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **gerade**, falls

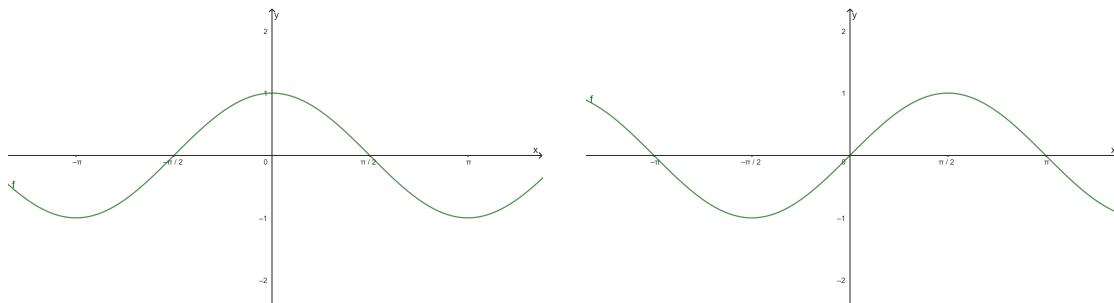
$$f(-x) = f(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, und **ungerade**, falls

$$f(-x) = -f(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiel. Während die Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ eine gerade Funktion ist, handelt es sich bei der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ um eine ungerade Funktion.



(a) $f(x) = \cos(x)$ als Beispiel für eine gerade Funktion

(b) $f(x) = \sin(x)$ als Beispiel für eine ungerade Funktion

Abbildung 5.1: Sinus und Kosinus als Beispiele für gerade und ungerade Funktionen, eigene Darstellung mit GeoGebra

Lemma 5.2.2 (Symmetrische Integration gerader und ungerader Funktionen). [17, S. 325] Sei $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{C}$ eine gerade Funktion, dann gilt:

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

5 Fourieranalyse

Sei $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{C}$ ungerade, so gilt:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

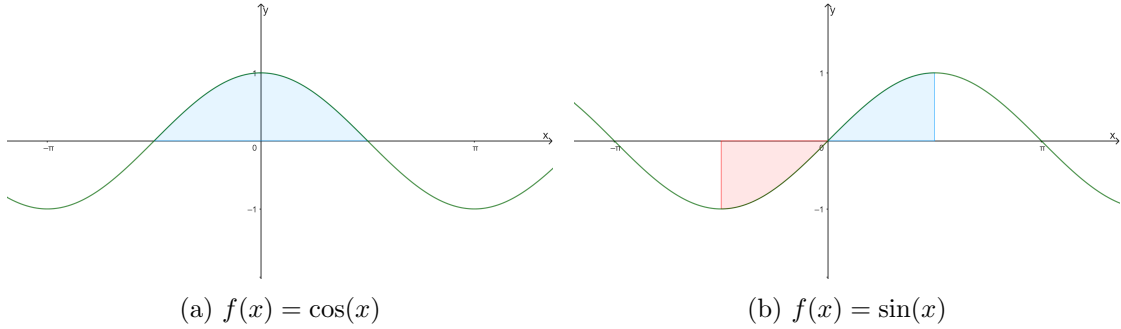


Abbildung 5.2: Integral über das symmetrische Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit den blauen positiven Flächenanteilen und den roten negativen Flächenanteilen, eigene Darstellung mit GeoGebra

Bemerkung. Anhand der Abbildung 5.2 lassen sich die Gleichungen im Lemma 5.2.2 leicht nachvollziehen.

Satz 5.2.2 (Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen). [17, S. 325] Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L_\pi$ eine gerade Funktion. Dann ist $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $a_k = 0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der direkten Berechnung der Fourierkoeffizienten mit der Definition 5.2.3. Weiters ist das Produkt zweier geraden oder zweier ungeraden Funktionen eine gerade Funktion und das Produkt einer ungeraden und einer geraden Funktion ist ungerade.

Sei zuerst f eine gerade Funktion. Die Fourierkoeffizienten lauten dann:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \underbrace{f(x) \cos(kx)}_{\text{gerade}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(kx) dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin(kx)}_{\text{ungerade}} \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei nun f ungerade. Die Fourierkoeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos(kx)}_{\text{ungerade}} \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin(kx)}_{\text{gerade}} \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx. \end{aligned}$$

□

Satz 5.2.3 (Linearität der Fourierkoeffizienten). [17, S. 325] Für alle $f, g \in L_\pi$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und für die Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ gilt die Linearitätseigenschaft:

$$c_k(\lambda f + \mu g) = \lambda c_k(f) + \mu c_k(g), \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition der Fourierkoeffizienten und der Linearität des Integrals. □

5.2.2 Beispiele von Fourierreihen

Beispiel (Dreiecksfunktion). Sei eine Funktion $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{\pi}|x| + 1$ gegeben. Es gibt genau eine 2π -periodische Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die identisch zu f auf $[-\pi, \pi)$ ist. Sie lautet

$$\tilde{f}(x) := f(x - 2k\pi) = -\frac{1}{\pi}|x - 2k\pi| + 1 \quad \text{mit } x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

5 Fourieranalyse

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird nachfolgend $f = \tilde{f}$ gesetzt. [17, S. 326]
 Eine Dreiecksfunktion wird durch die 2π -periodische Fortsetzung der im Intervall $[-\pi, \pi)$ definierten Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}|x| + 1$$

gegeben.

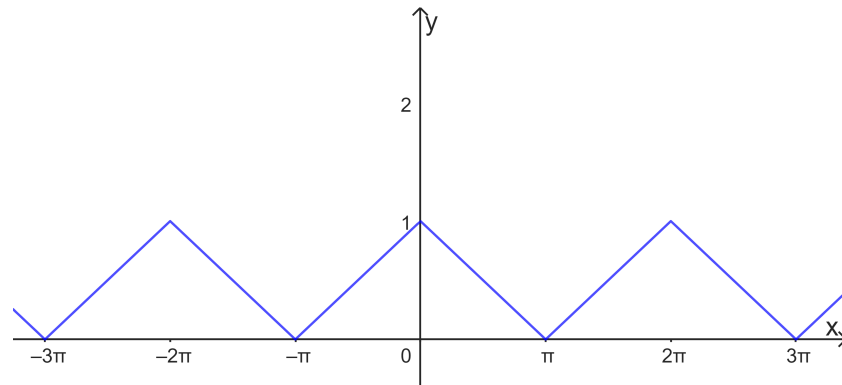


Abbildung 5.3: Graph der Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

Die Funktion f ist gerade, weshalb aus Satz 5.2.2 $b_k = 0$ folgt. Für a_k erhält man:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi}|x| + 1 \right) \cos(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi}x + 1 \right) \cos(kx) \, dx && (|x| = x, \forall x \geq 0) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi}x \cdot \cos(kx) + \cos(kx) \right) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \cos(kx) \, dx + \int_0^\pi \cos(kx) \, dx \right) && (\text{Linearität des Integrals}) \end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht werden die beiden Integrale $\int_0^\pi x \cdot \cos(kx) \, dx$ und $\int_0^\pi \cos(kx) \, dx$ hier einzeln berechnet. Dabei werden die beiden Integrale

$$\int \cos(kx) \, dx = \frac{\sin(kx)}{k} \quad \text{und} \quad \int \sin(kx) \, dx = -\frac{\cos(kx)}{k}$$

benötigt. Mit partieller Integration mit der allgemeinen Regel $\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

5.2 Trigonometrische Reihen und Fourierreihen

erhält man mit $u := x$ und $v' := \cos(kx)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi x \cdot \cos(kx) \, dx &= \left[x \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \, dx \\
 &= \frac{\pi \sin(k\pi)}{k} - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kx) \, dx \\
 &= \frac{\pi \sin(k\pi)}{k} - \frac{1}{k} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi \sin(k\pi)}{k} - \frac{1}{k} \left(\frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right) \\
 &= \frac{\pi \sin(k\pi)}{k} - \frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Für $\int_0^\pi \cos(kx) \, dx$ folgt:

$$\int_0^\pi \cos(kx) \, dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^\pi = \frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(0)}{k} = 0$$

Für a_k folgt also weiter:

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \cos(kx) \, dx + \int_0^\pi \cos(kx) \, dx \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \sin(k\pi)}{k} - \frac{1 - \cos(k\pi)}{k^2} \right) \right] \\
 &= -\frac{2}{k\pi^2} \left(\pi \sin(k\pi) - \frac{1 - \cos(k\pi)}{k} \right) \\
 &= \frac{2}{k\pi^2} \left(\frac{1 - \cos(k\pi)}{k} - \underbrace{\pi \sin(k\pi)}_{=0(k \in \mathbb{Z})} \right) \\
 &= \frac{2 - 2 \cos(k\pi)}{k^2 \pi^2}.
 \end{aligned}$$

Um in die n -te Partialsumme

$$s_n(x|f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

zu erhalten, werden die einzelnen a_k ($k \in \mathbb{N}$) einzeln berechnet:

$$a_0 = \frac{2 - 2 \cos(0\pi)}{0^2 \pi^2} = \frac{0}{0}.$$

Dies ist ein ungültiger Wert, weshalb wir a_0 mit der ursprünglichen Form ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi} \cdot x + 1 \right) \cos(0x) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{x}{\pi} + 1 \right) \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{x}{\pi} \right) \, dx + \int_0^\pi 1 \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^\pi + \left[x \right]_0^\pi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Für a_1 gilt:

$$a_1 = \frac{2 - 2 \cos(1\pi)}{1^2 \pi^2} = \frac{2 - 2 \cdot (-1)}{\pi^2} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Die 1. Partialsumme lautet also:

$$s_1(x|f) = \frac{1}{2} + \frac{4 \cos(x)}{\pi^2}. \quad (5.2.7)$$

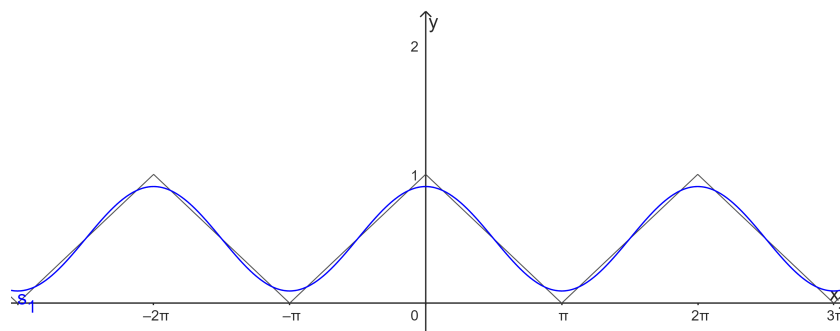


Abbildung 5.4: Die 1. Partialsumme s_1 der Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

Die 2. Partialsumme berechnet sich mit a_2 :

$$a_2 = \frac{2 - 2 \cos(2\pi)}{2^2 \pi^2} = \frac{2 - 2 \cdot 1}{4\pi^2} = 0$$

Daraus folgt, dass die 2. Partialsumme gleich der ersten ist:

$$s_2(x|f) = s_1(x|f) = \frac{1}{2} + \frac{4 \cos(x)}{\pi^2}. \quad (5.2.8)$$

5.2 Trigonometrische Reihen und Fourierreihen

Für die 3. Partialsumme berechnet man analog a_3 :

$$a_3 = \frac{2 - 2 \cos(3\pi)}{3^2 \pi^2} = \frac{2 - 2 \cdot (-1)}{9 \pi^2} = \frac{4}{9 \pi^2}$$

Daraus ergibt sich die 3. Partialsumme:

$$s_3(x|f) = \frac{1}{2} + \frac{4 \cos(x)}{\pi^2} + \frac{4 \cos(3x)}{9 \pi^2} \quad (5.2.9)$$

Anhand der ersten drei Partialsummen lässt sich vermuten, dass die k -ten Reihenglieder mit $k \in \mathbb{N}_g^*$ alle verschwinden. Da $\cos(k\pi)$ zu $(-1)^k$ umgeschrieben werden kann, ergibt sich die Behauptung. Die allgemeine Form der Partialsummen für ungerade k lautet dann:

$$s_n(x|f) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^n \frac{4 \cos(kx)}{k^2 \pi^2}. \quad (5.2.10)$$

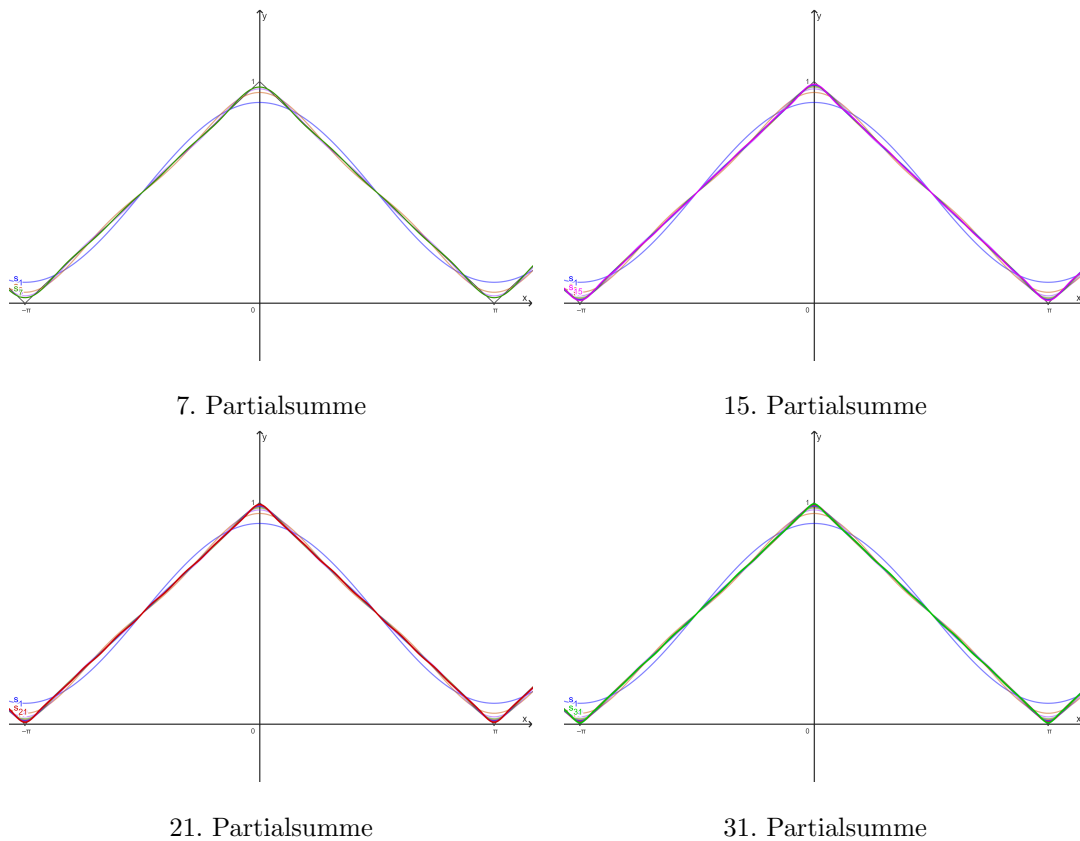


Abbildung 5.5: Die 7., 15., 21. und 31. Partialsumme für die Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

5 Fourieranalyse

In Abbildung 5.5 werden die 7., 15., 21. und 31. Partialsumme der Dreiecksfunktion dargestellt. Bei genauer Betrachtung kann erkannt werden, dass sich mit größerem n die Partialsummen immer mehr an die Ausgangsfunktion annähern.

Beispiel (Sägezahnfunktion). Ein Beispiel einer ungeraden, 2π -periodisch fortgesetzten Funktion ist die Sägezahnfunktion

$$f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \quad (5.2.11)$$

[19, S. 830]

Da f ungerade ist, ist $a_k = 0, k \in \mathbb{N}$. Mit 5.2.2 folgt mit partieller Integration:

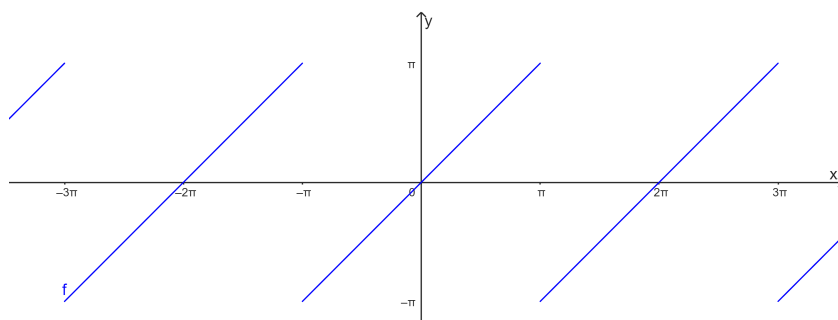


Abbildung 5.6: Graph einer Sägezahnfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(kx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\left[-\frac{x \cos(kx)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(kx)}{k} \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi \cos(k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi \cos(k\pi)}{k} \right) \\ &= -\frac{2 \cos(k\pi)}{k} \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

Die Formel für die n -te Partialsumme für die Sägezahnfunktion lautet also:

$$s_n(x|f) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx), \quad x \in [-\pi, \pi) \quad (5.2.12)$$

Die 5., 8., 11. und 15. Partialsumme und eine immer bessere Annäherung an die Sägezahnfunktion können in Abbildung 5.7 erkannt werden.

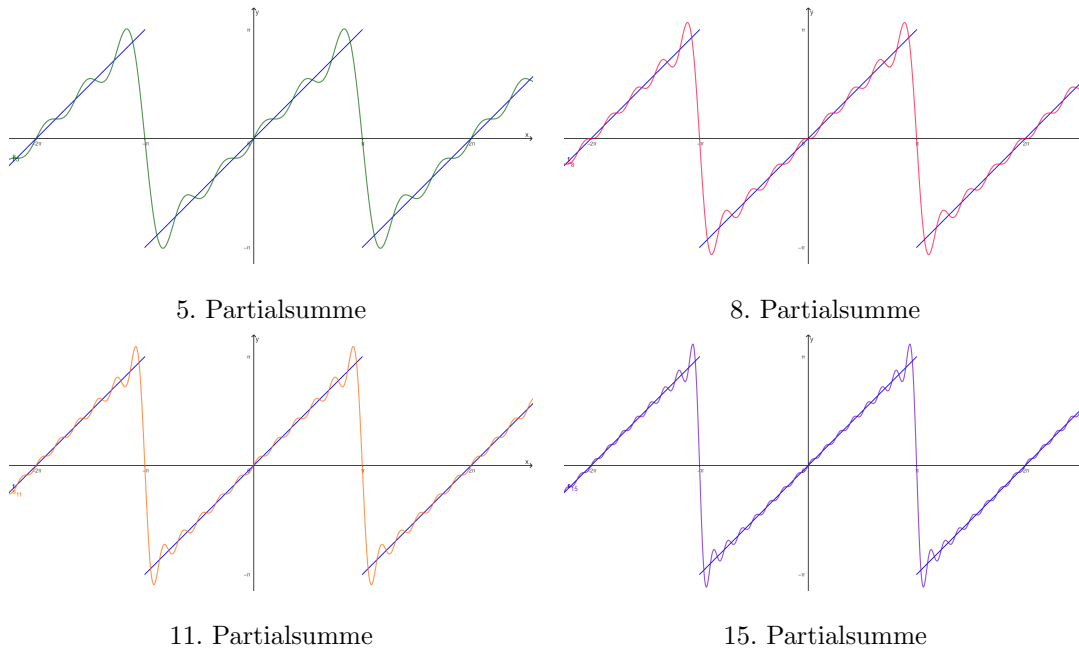


Abbildung 5.7: Die 5., 8., 11. und 15. Partialsumme für die Sägezahnfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra

5.3 Konvergenz der Fourierreihe

In diesem Unterkapitel wird untersucht, unter welchen Bedingungen und in welchen Konvergenzbegriffen eine Fourierreihe ihre Ursprungsfunktion gut beschreibt. Der Fokus liegt dabei auf der L^2 -Konvergenz der quadratintegrierbaren Funktionen, welche im Kapitel 5.1.1 beschrieben wurden. Ergänzend dazu werden weitere klassische Konvergenzbegriffe, wie die gleichmäßige und die punktweise Konvergenz sowie das Gibbs-Phänomen, das Grenzen der Fourieranalyse aufzeigt, kurz behandelt. Zugunsten der Anschaulichkeit richtet sich hierbei die Aufmerksamkeit eher auf einzelne zentrale Konvergenzsätze als auf eine vollständige formale Herleitung. Diese Betrachtungen legen das mathematische Fundament für die spätere Klanginterpretation und Spektralanalyse der Töne der Querflöte und der Blockflöte, welche im Kapitel 6 behandelt wird. Dafür sei auf Rolf Walter [32, S. 422ff] verwiesen.

In diesem Kapitel sei

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

5 Fourieranalyse

das n -te Fourierpolynom mit den reellen bzw. komplexen Fourierkoeffizienten a_k und b_k bzw. c_k und

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \right) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{ikx}$$

das n -te trigonometrische Polynom mit den Koeffizienten α_k, β_k und γ_k .

5.3.1 Approximation im quadratischen Mittel

Satz 5.3.1 (Minimaleigenschaft der Fourier-Koeffizienten). [32, S. 424] Sei $f \in L^2_\pi$ und $n \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt:

$$\|f - T_n\|_2 \geq \|f - F_n\|_2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a_k = \alpha_k$ und $b_k = \beta_k$ bzw. $c_k = \gamma_k$ für alle $-n \leq k \leq n$.

Für den Beweis werden folgende Zusammenhänge, die sich direkt aus der Hilbertraumtheorie (siehe 5.1.1) ergeben, gebraucht. Sie werden hier noch einmal in kompakter Art und Weise aufgezeigt:

- Die Familie $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bildet eine Orthonormalbasis in $L^2_\pi(\mathbb{C})$.
- Für die komplexen Fourierkoeffizienten gilt: $c_k = \langle f, \epsilon_k \rangle$ für $f \in L^2_\pi$. [27, S. 272]
- $\langle \epsilon_k, \epsilon_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = l \\ 0, & \text{wenn } k \neq l \end{cases}$
-

$$\|F_n\|_2^2 = \left\langle \sum_{k=-n}^n c_k \epsilon_k, \sum_{l=-n}^n c_l \epsilon_l \right\rangle = \sum_{k,l=-n}^n c_k \overline{c_l} \langle \epsilon_k, \epsilon_l \rangle = \sum_{k=-n}^n c_k \overline{c_k} \delta_{kk} = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Hier wurde in der letzten Umformung $|z|^2 = z\overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$ verwendet.

Beweis. Für das n -te trigonometrische Polynom gilt:

$$\begin{aligned}
 \|f - T_n\|_2^2 &= \langle f - T_n, f - T_n \rangle \\
 &= \langle f, f \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle f, T_n \rangle + \langle T_n, T_n \rangle \\
 &= \|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \left\langle f, \sum_{k=-n}^n \gamma_k \epsilon_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^n \gamma_k \epsilon_k, \sum_{k=-n}^n \gamma_k \epsilon_k \right\rangle \\
 &= \|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} \langle f, \epsilon_k \rangle + \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 \\
 &= \|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=-n}^n \overline{\gamma_k} c_k + \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 \\
 &= \|f\|_2^2 - 2 \sum_{k=-n}^n \operatorname{Re}(\overline{\gamma_k} c_k) + \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 \\
 &\stackrel{(*)}{=} \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k - \gamma_k|^2
 \end{aligned}$$

Die letzte Umformung $(*)$ erschließt sich mit $|z|^2 = z\bar{z}$ und $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ und

$$\begin{aligned}
 |c_k - \gamma_k|^2 &= (c_k - \gamma_k)(\overline{c_k} - \overline{\gamma_k}) \\
 &= c_k \overline{c_k} - c_k \overline{\gamma_k} - \overline{c_k} \gamma_k + \gamma_k \overline{\gamma_k} \\
 &= |c_k|^2 - (c_k \overline{\gamma_k} + \overline{c_k} \gamma_k) + |\gamma_k|^2 \\
 &= |c_k|^2 - (c_k \overline{\gamma_k} + \overline{c_k \overline{\gamma_k}}) + |\gamma_k|^2 \\
 &= |c_k|^2 - 2 \operatorname{Re}(c_k \overline{\gamma_k}) + |\gamma_k|^2
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Äquivalenzumformungen ergibt sich die Behauptung. Analog gilt für das n -te Fourierpolynom:

$$\|f - F_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

Daraus folgt

$$\|f - F_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^n |c_k - \gamma_k|^2 = \|f - T_n\|_2^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $c_k = \gamma_k$ für $-n \leq k \leq n$ gilt. $\square$

[27, S. 272]

Satz 5.3.2 (Besselsche Ungleichung). [27, S. 272] Für $f \in L_\pi^2$ gilt:

$$\|F_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2. \quad (5.3.1)$$

5 Fourieranalyse

Beweis. Die Ungleichung folgt mit der letzten Zeile des Beweises 5.3.1 und

$$\|f - F_n\|_2^2 \geq 0.$$

□

Bemerkung. Analog zu 5.3.1 schreibt man wegen $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (5.3.2)$$

Satz 5.3.3 (Monotoniekriterium für Reihen). [2, S. 252] *Ist eine Reihe durch $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ gegeben und existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $n \geq n_0$ gilt und gibt es eine Schranke $C > 0$ mit*

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq C \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

dann konvergiert die Reihe.

Bemerkung. Die Reihe

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \right)$$

hat nichtnegative reelle Summanden $|c_k|^2$ und ist mit der Besselschen Ungleichung durch $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ nach oben beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium für Reihen konvergiert diese Reihe. Das heißt aber auch, dass die Folge der Fourierkoeffizienten c_k eine Nullfolge sein muss, was der nächste Satz von Riemann und Lebesgue aussagt.

Satz 5.3.4 (Satz von Riemann - Lebesgue). [17, S. 330] *Seien c_k mit $k \in \mathbb{Z}$ Fourierkoeffizienten einer Funktion. Dann gilt:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{-k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0.$$

Bemerkung. Die beiden Sätze 5.3.1 und 5.3.2 zeigen, dass unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad $\leq n$ das Fourierpolynom F_n die beste Approximation an f im quadratischen Mittel liefert.

Es stellt sich nun die Frage, ob man beliebig genaue Approximationen periodischer Funktionen durch Fourierpolynome erreichen kann. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber:

Satz 5.3.5 (Vollständigkeitssatz). [20, S. 66] *Für jede Funktion $f \in L_{\pi}^2$ gilt*

$$\|f - F_n\|_2 \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Für den Beweis sei an dieser Stelle auf Karpfinger [19, S. 67ff] verwiesen.

Bemerkung. Aus dem Vollständigkeitssatz folgt die Gleichheit der Besselschen Ungleichung. Diese Gleichung wird **Parsevalsche Gleichung** genannt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (5.3.3)$$

5.3.2 Exkurs: Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 5.3.1 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen). [2, S. 1139]

Sei (f_n) eine Folge von Funktionen und f eine weitere Funktion mit $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Man spricht von **punktweiser Konvergenz**, falls für alle $x \in D$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Von **gleichmäßiger Konvergenz** spricht man, falls gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Beispiel. Ein Beispiel, das den Unterschied zwischen diesen beiden Konvergenzarten besonders gut zeigt, umfasst die Folge (f_n) , $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = x^n.$$

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert daher gegen die Funktion punktweise.

Die gleichmäßige Konvergenz ist hier nicht gegeben, denn egal, wie groß n gewählt wird, existiert immer ein $x_0 < 1$, sodass

$$f_n(x_0) > 0,9$$

gilt. Daraus folgt, dass

$$\max_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| > 0,9$$

ist und die Funktionenfolge nicht gleichmäßig gegen f konvergieren kann. Die Abbildung 5.8 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

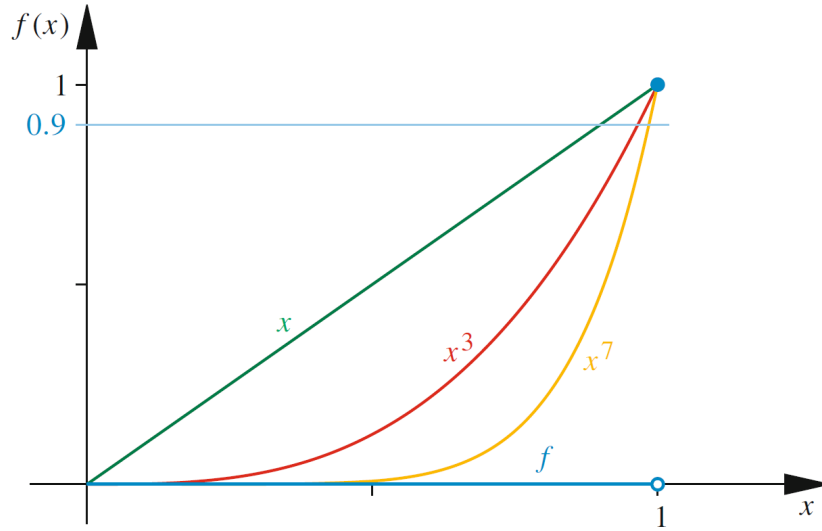


Abbildung 5.8: Punktweise, aber keine gleichmäßige Konvergenz der Polynome x^n gegen die Funktion f [2, S. 1140]

5.3.3 Punktweise Konvergenz

In diesem Abschnitt reicht es, dass die Funktionen $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ im Intervall $[-\pi, \pi]$ integrierbar sind. Es gilt also $f \in L_\pi$.

Definition 5.3.2 (Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen). [17, S. 329]

Eine komplexwertige Funktion $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt differenzierbar in einem Punkt $x \in D$, wenn dort Real- und Imaginärteil ableitbar sind. Die Ableitung $f'(x)$ ist dann

$$f'(x) := (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

Die Funktion f ist differenzierbar auf D , falls sie in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.

Definition 5.3.3 (Stückweise differenzierbare Funktionen). [32, S. 446][2, S. 1150]

Eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stückweise differenzierbar, wenn es eine Zerlegung x_j mit $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ von $[-\pi, \pi]$ gibt, sodass f' auf jedem Intervall (x_{j-1}, x_j) existiert und sich stetig auf $[x_{j-1}, x_j]$ fortsetzen lässt.

Definition 5.3.4 (Links- und rechtsseitige Grenzwerte). [2, S. 1148]

Eine Funktion $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stückweise stetig, falls es eine Zerlegung x_j mit $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ von $[-\pi, \pi]$ gibt, sodass sich $f|_{(x_{j-1}, x_j)}$ stetig auf $[x_{j-1}, x_j]$ fortsetzen lässt. Es existieren dann die links- und rechtsseitigen Grenzwerte an jeder Stelle $\tilde{x} \in (-\pi, \pi)$, wobei gilt:

$$f_+(\tilde{x}) = \lim_{x \searrow \tilde{x}} f(x) \quad \text{und} \quad f_-(\tilde{x}) = \lim_{x \nearrow \tilde{x}} f(x) \quad (5.3.4)$$

5.3 Konvergenz der Fourierreihe

Bemerkung. Falls f in $\tilde{x}$ stetig ist, so gilt

$$f_+(\tilde{x}) = f_-(\tilde{x}) = f(\tilde{x}).$$

Satz 5.3.6 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe). [2, S. 1150] *Sei $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion, dann konvergiert die Fourierreihe von f mit den Fourierkoeffizienten c_k punktweise und es gilt*

$$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$.

Bemerkung. Falls f an der Stelle x stetig ist, dann gilt

$$\frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} = f(x).$$

Die Fourierreihe von f konvergiert also an diesen Stellen punktweise gegen die Funktion.

Zusammenfassend kann man also festhalten:

- Falls eine Funktion f in x stetig ist, dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = f(x).$$

- An den Unstetigkeitsstellen x_j mit $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ ist der Wert der Fourierreihe $F(x)$ genau das arithmetische Mittel zwischen linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert von f an der Stelle x_j :

$$F(x_j) = \frac{f_+(x_j) + f_-(x_j)}{2}$$

Beispiel. Die 2π -periodisch fortgesetzte Sägezahnfunktion (siehe 5.2.11) ist im Intervall $(-\pi, \pi)$ stückweise stetig differenzierbar und hat Unstetigkeitsstellen bei $x = (2k - 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

An den Unstetigkeitsstellen x_j sind die einseitigen Grenzwerte

$$f_+(x_j) = -\pi \quad \text{und} \quad f_-(x_j) = \pi$$

und die Fourierreihe konvergiert dort gegen das arithmetische Mittel

$$\frac{f_+(x_j) + f_-(x_j)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0.$$

Im Intervall $(-\pi, \pi)$ konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen f . Es gilt also (siehe Gleichung 5.2.12):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x = (2k - 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

In Abbildung 5.9 erkennt man leicht, dass die Partialsummen an den Unstetigkeitsstellen $(2k - 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ den Wert 0 annehmen.

5 Fourieranalyse

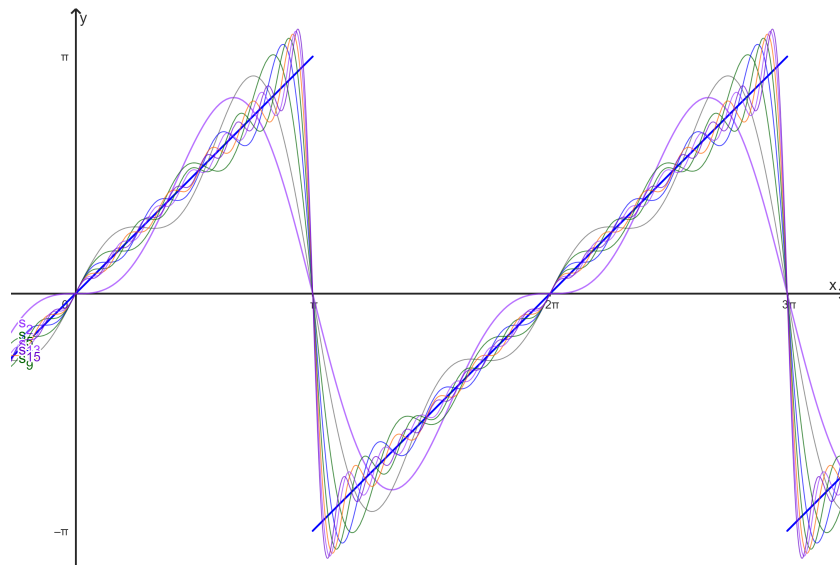


Abbildung 5.9: Die Fourierreihe konvergiert in den Stetigkeitsstellen gegen die Sägezahnfunktion und in den Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte. Eigene Darstellung mit GeoGebra

Gibbs-Phänomen

Bei den Unstetigkeitsstellen in Abbildung 5.9 lassen sich signifikante Über- und Unterschwingungen der Partialsummen erkennen, die auch bei größeren n nicht verschwinden. Dieses Phänomen wird als **Gibbs-Phänomen** bezeichnet (siehe Abbildung 5.10). Hierbei schwingen die Graphen der Partialsummen um zirka 18% der halben Sprunghöhe über beziehungsweise unter die zu approximierende Funktion. [19, S. 847]

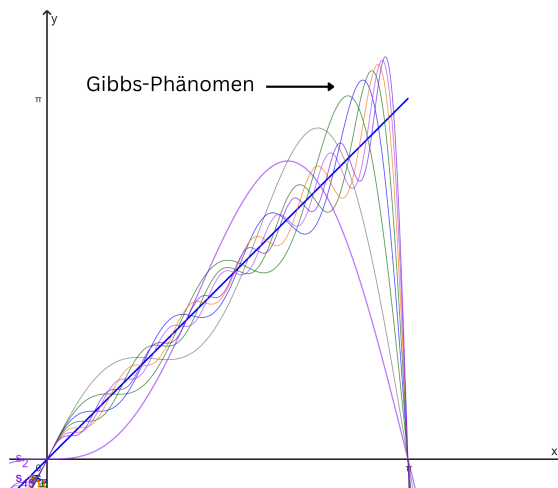


Abbildung 5.10: Das Gibbs-Phänomen, eigene Darstellung mit GeoGebra

5.3.4 Gleichmäßige Konvergenz

In diesem Abschnitt ist $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^2_\pi(\mathbb{C})$ und es soll untersucht werden, für welche Funktionen f die Fourierreihe F_n gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert. Es soll also gelten:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [-\pi, \pi]} |F_n(x) - f(x)| = 0.$$

Dieses Unterkapitel folgt dem Aufbau nach Pöschel ([23, S. 194ff]). Für eine detaillierte Auseinandersetzung mit der Konvergenz von Fourierreihen sei wiederum auf Rolf Walter ([32]) verwiesen.

Es soll gezeigt werden, dass die Fourierreihe einer 2π -periodischen, stetigen Funktion f , deren Ableitung stückweise stetig ist und die $f(-\pi) = f(\pi)$ erfüllt, gleichmäßig gegen f konvergiert. Wir nehmen daher an, dass f eine Stammfunktion einer stückweise stetigen Funktion g ist:

$$f'(x) = g(x).$$

Aufgrund der stückweisen Stetigkeit der Funktion g ist $g \in L^2_\pi$.

Lemma 5.3.1. Sei $g \in L_\pi$ stückweise stetig und f stetig und eine periodische Stammfunktion von g , für die $f(-\pi) = f(\pi)$ gilt. Die Fourierreihe der Funktion f besitzt die Fourierkoeffizienten c_k und jene der Funktion g besitzt die Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_k$. Dann gilt:

$$c_k = \frac{\tilde{c}_k}{ik}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

und $\tilde{c}_0 = 0$.

Beweis. Die Funktion f ist 2π -periodisch, weshalb $f(-\pi) = f(\pi)$ gilt. Weiters ist f eine Stammfunktion von g und es folgt:

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{i0x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi} [f(x)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0.$$

Für $k \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{e^{-ikx}}_{=\left(\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right)'} dx \\ &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \frac{e^{-ikx}}{ik} dx \\ &= \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\tilde{c}_k}{ik} \end{aligned}$$

□

5 Fourieranalyse

Satz 5.3.7 (Absolute und gleichmäßige Konvergenz in L^2_π). [23, S. 195] *Sei f eine stetige, 2π -periodische Funktion mit $f(-\pi) = f(\pi)$. Ist die Funktion f eine Stammfunktion von $g \in L^2_\pi$, wobei g stückweise stetig ist, dann konvergiert die Fourierreihe F_n von f absolut und gleichmäßig gegen f .*

Beweis. Für die Klassen L_π und L^2_π gilt $L^2_\pi \subset L_\pi$, weswegen das Lemma 5.3.1 angewendet werden kann. Aus diesem Lemma folgt für $k \neq 0$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k e^{ikx}| &\leq |c_0| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |c_k e^{ikx}| \\ &\leq |c_0| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |c_k| \cdot \underbrace{|e^{ikx}|}_{=1} \\ &\leq |c_0| + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{|\tilde{c}_k|}{|k|} \\ &\leq |c_0| + \sqrt{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |\tilde{c}_k|^2} \sqrt{\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2}} \\ &\leq \|f\|_1 + 2\|f'\|_2. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang $|e^{ikx}| = 1$ in der zweiten Zeile ergibt sich direkt aus $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$:

$$|e^{ikx}| = \sqrt{\cos^2(kx) + \sin^2(kx)} = 1.$$

In der letzten Umformung wurden folgende Zusammenhänge benutzt, um die gewünschte Abschätzung zu erhalten:

•

$$|c_0| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\leq 1} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx}_{=\|f\|_1} \leq \|f\|_1$$

• Parsevalsche Gleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\tilde{c}_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \|g\|_2^2 = \|f'\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} |\tilde{c}_k|^2 \leq \|f'\|_2^2$$

•

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} \leq 2$$

Die Partialsummen konvergieren daher absolut und gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ und es folgt daraus, dass die Fourierreihe F_n gleichmäßig gegen f konvergiert. [23, S. 194f] $\square$

Die Funktion f hat als Stammfunktion von $g \in L^2_\pi$ folgende Eigenschaften:

- f hat die Periode 2π .
- f ist stetig.
- f ist stückweise stetig differenzierbar, da g an bestimmten Stellen unstetig sein kann.

Damit kann der Satz 5.3.7 mit dem folgenden Korollar präzisiert werden.

Korollar 5.3.1. [23, S. 196] *Sei die Funktion f periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar und gilt $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann konvergiert die Fourierreihe F_n der Funktion absolut und gleichmäßig gegen f .*

Beispiel. Die 2π -periodisch fortgesetzte Dreiecksfunktion $f(x) = -\frac{1}{\pi}|x| + 1$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und stückweise stetig differenzierbar. Daher konvergiert die Fourierreihe $F_n(x)$ absolut und gleichmäßig gegen $f(x)$. Es gilt dann:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^n \frac{4 \cos(kx)}{k^2 \pi^2}.$$

5.4 Folgerungen für die Signalanalyse

In der Signalanalyse wird jede Funktion $f \in L^2_\pi(\mathbb{C})$ als ein „Signal mit endlicher Energie im Intervall $[-\pi, \pi]$ “ beschrieben. Führt man sich die Spektraldarstellung eines Klangs (siehe Kapitel 2, Gleichung 2.1.12)

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \right]$$

beziehungsweise die reelle Form der Fourierreihe

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

wieder vor Augen, wird mit der Parsevalschen Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

intuitiv klar, dass die Gesamtenergie des Signals additiv in die einzelnen Bestandteile, also in die gewichteten harmonischen Schwingungen, zerlegt werden kann. [17, S. 336] Im musikalischen Kontext bedeutet dies, dass sich ein Klang durch seine Obertöne analysieren lässt. Die Fourierkoeffizienten quantifizieren dabei die Ausprägung der einzelnen Harmonischen. [25, S. 127] Mit diesem Wissen wird im Kapitel 6 das Signal eines Querflöten- bzw. Blockflötentons analysiert und miteinander verglichen.

5.5 Anwendung der Fourieranalyse auf die Wellengleichung der Querflöte

Wir haben im Kapitel 3 durch die Methode der Trennung der Variablen eine Fourierreihe als Lösung der Wellengleichung erhalten:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right].$$

Mithilfe dieser Gleichung und den Ergebnissen des Kapitels „Fourieranalyse“ sollen nun Berechnungen für die Wellengleichung der Querflöte angestellt werden:

Beispiel. Es sei folgendes gegeben:

- Rohrlänge ℓ
- Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right]$$

- Randbedingungen

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0$$

- Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k \frac{ck\pi}{\ell} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

Da in den Anfangsbedingungen nur Sinus vorkommt und $\sin\left(-\frac{k\pi x}{\ell}\right) = -\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ gilt, genügt es, nur über die positiven natürlichen Zahlen aufzusummieren, um auch positive Koeffizienten zu erhalten, die für die Spektralanalyse eines Tons wichtig sind. Die Restriktion auf $\mathbb{N}^*$ ist auch sinnvoll, da die Obertöne die positiven Vielfachen der Grundfrequenz sind. In den obigen Gleichungen kann jetzt also überall $\sum_{k=1}^{+\infty}$ gesetzt werden.

5.5 Anwendung der Fourieranalyse auf die Wellengleichung der Querflöte

Für die Querflöte mit der Länge $\ell \approx 0,633$ m (siehe 4.4.12) und mit einer Schallgeschwindigkeit von $c \approx 343$ m/s folgt daher für die Anfangsbedingungen

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{0,633}\right)$$

und

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cdot \frac{343 \cdot k\pi}{0,633} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{0,633}\right).$$

Da die Funktion hier aufgrund der physikalischen Gegebenheiten des Querflötenrohrs auf $[0, \ell]$ definiert ist, lauten die Fourierkoeffizienten

$$A_k = \frac{2}{0,633} \int_0^{0,633} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{0,633}\right)$$

und

$$\begin{aligned} B_k \cdot \frac{343 \cdot k\pi}{0,633} &= \frac{2}{0,633} \int_0^{0,633} g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{0,633}\right) \\ \Leftrightarrow B_k &= \frac{2}{343 \cdot k\pi} \int_0^{0,633} g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{0,633}\right). \end{aligned}$$

Falls die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, also die Form und Anfangsgeschwindigkeit der Welle für ein $t = 0$ gegeben ist, können die Fourierkoeffizienten auch explizit berechnet werden.

6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen

In den vorhergehenden Abschnitten wurde einerseits auf die Theorie hinter Tönen und Klängen sowie auf die Fourieranalyse, die essentiell für die Erstellung eines Frequenzspektrums ist, eingegangen. Andererseits wurden der Aufbau und die Tonbildung der Querflöte und der Sopranblockflöte sowie die Wellengleichung dieser beiden Instrumente behandelt. Dieses Kapitel soll eine praktische Anwendung dieser Konzepte zeigen, indem mithilfe der Spektralanalyse gezeigt wird, inwiefern sich der Klang der beiden Flöten voneinander unterscheidet.

6.1 Signale und Spektren

Definition 6.1.1 (Signal in der Akustik). [24, S. 4]

Ein **Signal** beschreibt einen zeitlichen Verlauf einer beobachteten Größe, wie zu Beispiel des Schalldrucks, welche für den Betrachter oder die Betrachterin relevante Informationen enthält.

In der Mathematik entspricht das Signal einer reell- oder komplexwertigen Funktion nach der Zeit und in diesem Abschnitt werden zeitkontinuierliche analoge Signale beleuchtet, welche mit einem Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) diskretisiert werden können.

Wir betrachten die reelle Fourierreihe und kombinieren sie mit der Ort-Zeit-Funktion der harmonischen Schwingung (siehe 2.1.4):

$$F_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) \right).$$

Zwischen der Kreisfrequenz der Grundschwingung ω und der Frequenz ν besteht der Zusammenhang $\omega = 2\pi\nu$. Ebenso genügt bei physikalischen Experimenten die Aufsummierung über eine endliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, da bei der Signalverarbeitung hohe Frequenzen stark gedämpft werden. Sie spielen für die Analyse eines Instrumentenklangs keine signifikante Rolle, da das menschliche Gehör nur Frequenzen bis zirka 20 000 Hz wahrnehmen kann.

Wir führen die Größen

$$\rho_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \delta_k = \tan^{-1} \left(\frac{a_k}{b_k} \right)$$

6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen

ein, um die Fourierreihe nur mit Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Phasen darstellen zu können und erhalten gemeinsam mit $\omega = 2\pi\nu$:

$$F_n(t) = \rho_0 + \sum_{k=1}^n \rho_k \sin(2\pi k\nu t + \delta_k).$$

[11, S. 443f] Die neuen Koeffizienten ρ_k , $k \in \mathbb{N}^*$ können wegen $\rho_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ nur positiv sein. Sie sind die Amplituden der Fourierreihe. Die Konvergenz der Fourierreihe ist für die meisten periodischen Signale in der Praxis gegeben, sodass ihr Verhalten mittels der Fourierreihe erfasst werden kann. [18, S. 2f]

Werden nun die Grundfrequenz mit f_1 und alle Vielfachen davon mit $f_k = k \cdot f_1$, $k \in \mathbb{N}^*$ bezeichnet, so kann das Signal auch mit dem Amplituden- und Phasenspektrum vollständig beschrieben werden. Die Abbildung 6.1 zeigt links den kontinuierlichen Graphen eines periodischen Signals $F(t)$ mit der Periode T und daneben die beiden korrelierenden Spektren, welche dasselbe Signal $F(t)$ beschreiben. [11, S. 444]

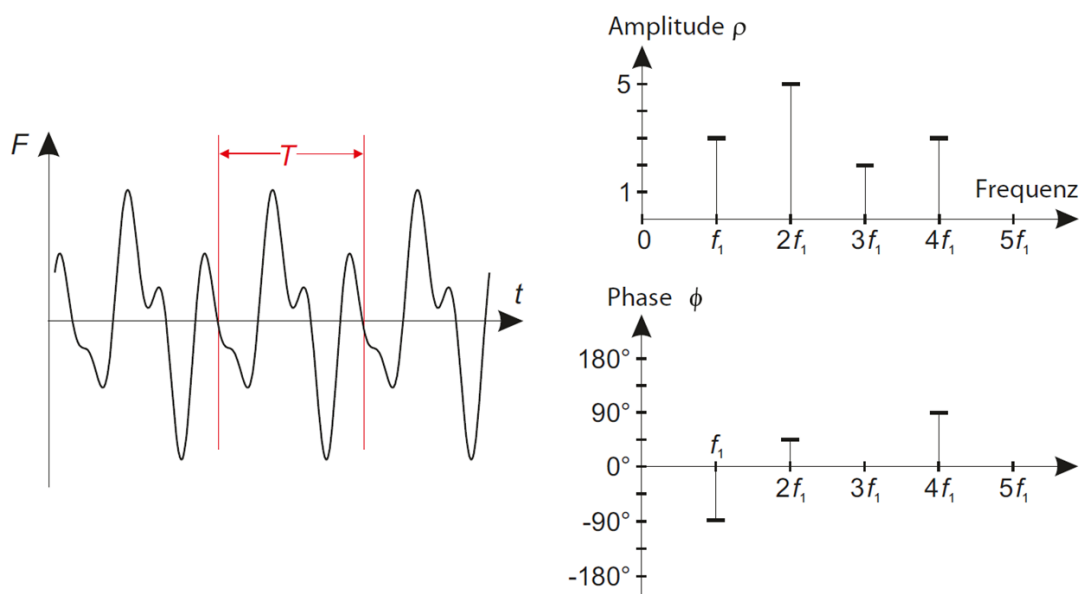


Abbildung 6.1: Graph eines zeitkontinuierlichen Signals und das Amplituden- und Phasenspektrum [11, S. 443f]

Um die Klangfarbe eines Instruments zu beschreiben, genügt es, das Amplitudenspektrum zu betrachten, da dieses die Verteilung und die Intensität der Obertöne zeigt. Sie sind der Grund dafür, dass verschiedene Instrumente bei gleicher Grundfrequenz unterschiedlich klingen.

6.1.1 Diskrete Fouriertransformation und Fast Fourier Transformation

Ein Ton, den ein Instrument erzeugt, ist ein kontinuierliches analoges Signal. Damit davon ein Klangspektrum mithilfe einer digitalen Software erstellt werden kann, wird dieses zuerst mithilfe eines Analog-Digital-Wandlers (A/D-Wandlers) in ein zeitdiskretes digitales Signal umgewandelt. [22]

Mithilfe der Fouriertransformation kann ein Signal, das einen zeitlichen Verlauf anzeigt, in eine Funktion „transformiert“ werden, die im Frequenzbereich operiert. [17, S. 345] Für die zeitdiskreten digitalen Signale wird dafür die sogenannte „Diskrete Fouriertransformation“ (DFT) angewendet. Der Grundgedanke der DFT ist, die Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion, deren Werte an N Stellen bekannt sind, zu bestimmen. Dabei ist statt dem zeitkontinuierlichen Signal $x(t)$ mit der Periode T das zeitdiskrete $x[nT_s]$ gegeben, wobei $T_s = T/N$ die Abtastperiode der Diskretisierung und $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ist. Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten wird nun das Integral mithilfe einer Summe angenähert:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-ik\omega t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x[nT_s] e^{-ik\omega nT_s} T_s \quad (6.1.1)$$

Der Algorithmus, der diese Berechnungen ermöglicht, lautet „Fast Fourier Transformation“ (FFT). [18, S. 12f]

Für die genauere Betrachtung der Fouriertransformation sowie die mathematischen Grundlagen sei hier auf Karpfinger [19] verwiesen.

6.2 Methodik

Zur Analyse der Unterschiede in der Klangfarbe der Querflöte und der Sopranblockflöte sind einige Parameter in der Wahl des Tons und der Einstellung in der Software zu beachten, um ein aussagekräftiges und objektives Ergebnis zu erzielen. Diese werden in diesem Unterkapitel vorgestellt.

6.2.1 Wahl des Tons

Um ein möglichst breites Spektrum in der Klanganalyse zu erreichen, werden unterschiedliche Tonhöhen analysiert. Die Wahl der Tonhöhen wird dabei davon beeinflusst, welche absoluten Tonhöhen von beiden Flöten gespielt werden können. Ebenso werden auch Töne gespielt, bei denen beide Instrumente überblasen, um eventuelle Veränderungen im Klangbild betrachten zu können. Unter Einbeziehung dieser Überlegungen fiel die Wahl der Tonhöhen auf c^2 , g^2 und e^3 . Da die Sopranblockflöte um eine Oktave höher klingt als sie notiert wird, werden hier die Töne c^1 , g^1 und e^2 gespielt.

6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen

Es wird erwartet, dass die Töne folgende Grundfrequenzen haben, wenn die Flöten auf den Kammerton $a^1 = 440$ Hz gestimmt wurden (siehe 4.4.11):

$$\nu_{[c^2]} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^3 \approx 523 \text{ Hz} \quad (6.2.1)$$

$$\nu_{[g^2]} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{10} \approx 784 \text{ Hz} \quad (6.2.2)$$

$$\nu_{[e^3]} = 440 \cdot (\sqrt[12]{2})^{19} \approx 1\,319 \text{ Hz} \quad (6.2.3)$$

6.2.2 Aufnahmesituation und Software

Die Flötenaufnahmen, die in dieser Arbeit analysiert werden, wurden von der Verfasserin auf den eigenen Instrumenten selbst eingespielt. Es handelt sich dabei um eine Sopranblockflöte der Marke „Mollenhauer“ mit deutscher Griffweise sowie um eine Querflöte der Marke „AZUMI“ (Modell AZ1000RE). Beide Flöten sind in Abbildung 6.2 dargestellt.



Abbildung 6.2: Verwendete Instrumente: Querflöte (AZUMI) und Sopranblockflöte (Mollenhauer), eigene Darstellung

Die Aufnahmen erfolgten in einem ruhigen, jedoch nicht schallisolierten Raum, wobei darauf geachtet wurde, Hintergrundgeräusche zu minimieren. Als Aufnahmegerät diente das USB-Studiomikrofon „the t.bone SC 420 USB“ welches ein Großmembran-Mikrofon mit Supernierencharakteristik ist. Um die Klänge der Flöten möglichst verlustfrei analysieren zu können, wurden die Aufnahmen im unkomprimierten WAV-Format mit einer Abtastrate von 44,1 kHz und einer Bittiefe von 16 Bit gespeichert. [30] Die zu analysierenden Audioaufnahmen sind auf der Plattform „Zenodo“ frei zugänglich. [7] Die digitale Nachbearbeitung, die die Normalisierung der Tonspuren umfasste, und die Frequenzanalyse wurden mit der freien Software *Audacity* (Version 3.7.3) durchgeführt. [3] Hierbei wurde bei allen Tonspuren der Zeitbereich von 2 s bis 5 s gewählt, um die Analyse auf eine möglichst konstante Tonphase zu beschränken. Übergangsbereiche, wie die Einschwing- und die Abklingphase, wurden dabei gezielt ausgeschlossen.

Die Frequenzanalyse eines Ausschnitts einer Tonspur, die in Abbildung 6.3 dargestellt ist, zeigt einige Einstellungen, die hier erläutert werden:

- Die Einstellung „Spektrum“ bei „Algorithmus“ zeigt an, dass *Audacity* für die Spektralanalyse die FFT (Fast Fourier Transformation) verwendet.

- Mit „Größe“ kann die Anzahl der Frequenzteilungen von 128 bis 131 072 eingestellt werden. Je größer diese Zahl gewählt ist, desto präziser können die Frequenzen bestimmt werden. Für die Analyse der Aufnahmen wurde eine Größe von 32 768 gewählt, um ein möglichst genaues Bild darstellen zu können.
- Für die „Funktion“ können unter anderem „Rechteck-“, „Bartlett-“, „Hamming-“ oder „Hann-Fenster“ ausgewählt werden. Wie es auch das Benutzerhandbuch von *Audacity* vorschlägt, wurde in dieser Arbeit das „Hann-Fenster“ ausgewählt. Es bestimmt, wie der gewählte Audioabschnitt für die Frequenzanalyse gewichtet wird. Während ein längeres Fenster eine präzisere Frequenzauflösung liefert, ist bei einem kürzeren Fenster die Zeitauflösung besser, wobei hier jedoch die Frequenzauflösung eingeschränkt ist.
- Mit „Achse“ lässt sich eine lineare oder logarithmische Darstellung der horizontalen Frequenzachse einstellen. Zur Verdeutlichung der Obertöne als Vielfache der Grundfrequenz wurde hier die Lineardarstellung gewählt. [3]
- Die y -Achse zeigt den Pegel in Dezibel (dB) an, was bedeutet, dass die Lautstärke der einzelnen Frequenzanteile eines Klangs angegeben wird.

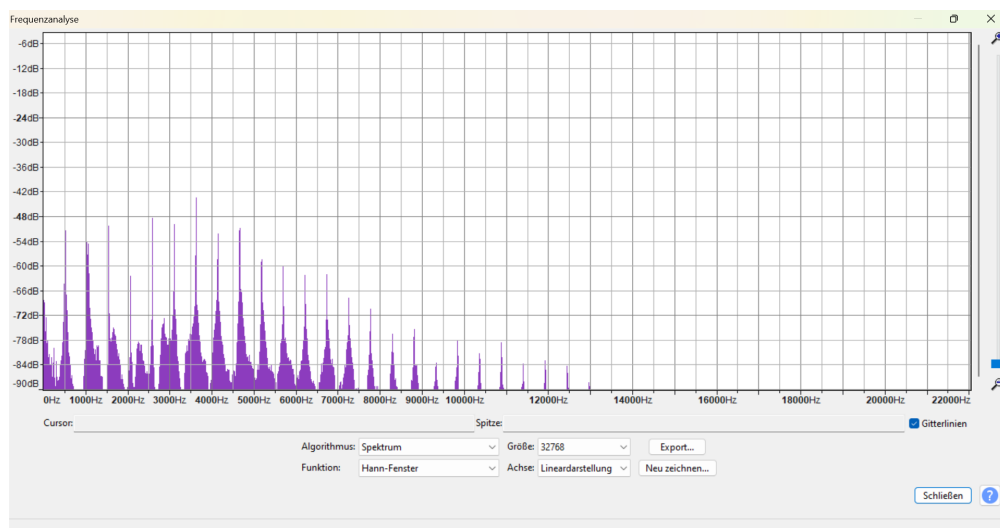


Abbildung 6.3: Beispiel der Darstellung in *Audacity*

6.3 Analyse der Klangspektren

6.3.1 Theoretische und subjektive Erwartungen

Gemäß der Ausführungen in den Kapiteln 4.4.2 und 4.4.3 wird erwartet, dass die Klangspektren beider Instrumente alle Obertöne, also alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz bis zu einer gewissen Frequenz, aufweisen. Weiters ist beim Ton der Querflöte

6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen

aufgrund des Nichterfüllens des Ideals einer offenen Pfeife anzunehmen, dass die Harmonischen gerader Ordnung, also der 1., 3., ... Oberton, weniger stark ausgebildet sind als jene ungerader Ordnung.

Der Klang der Querflöte lässt sich subjektiv mit den Adjektiven weich, rund und warm beschreiben, was auf ein schwach ausgeprägtes Obertonspektrum hindeutet. Im Gegensatz dazu kann der Ton der Sopranblockflöte vor allem in den höheren Tonlagen als hell, klar bis hin zu schrill bezeichnet werden. Es ist daher zu erwarten, dass die Obertöne höherer Ordnung stärker ausgebildet sein werden als jene der Querflöte.

6.3.2 Spektrale Analyse der Töne c^2 , g^2 und e^3

In den folgenden Abbildungen 6.4 sind die Klangspektren der Töne c^2 , g^2 und e^3 , die mit der FFT im Programm *Audacity* erstellt wurden, übersichtlich zusammengefasst. In den folgenden Absätzen werden die Spektren für die jeweiligen Klänge einzeln miteinander verglichen, sodass Aussagen zu den klanglichen Unterschieden und Gemeinsamkeiten getroffen werden können.

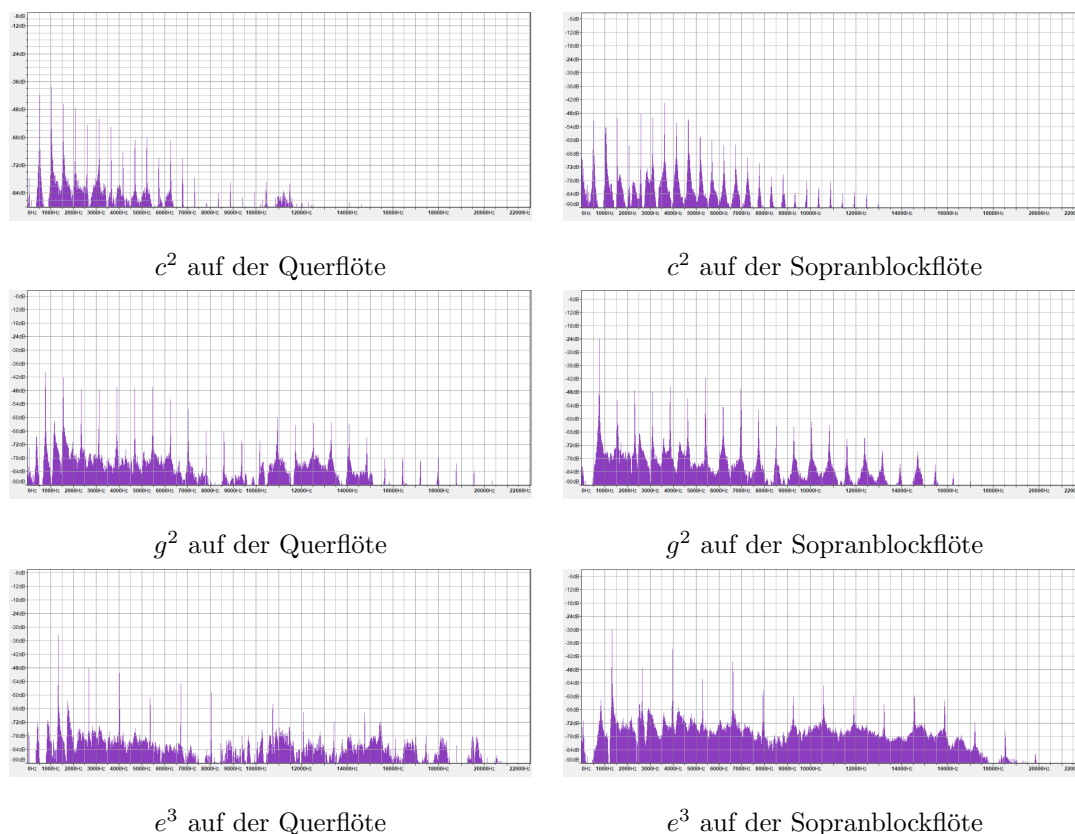
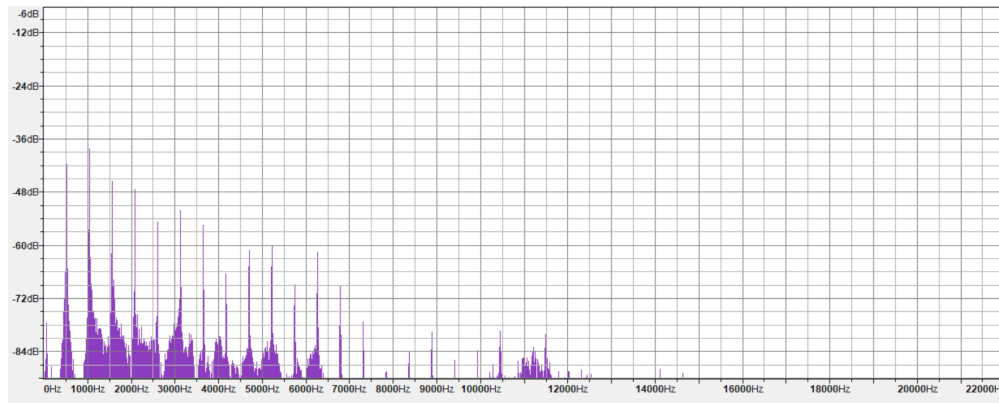


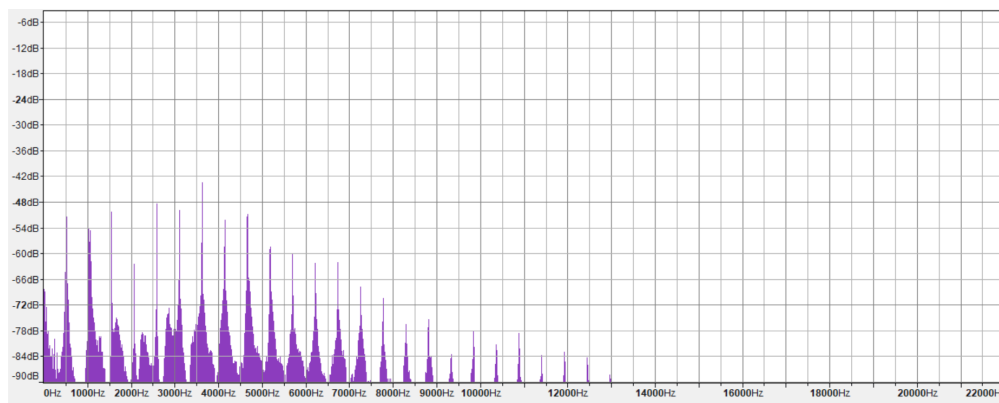
Abbildung 6.4: Klangspektren der Töne c^2 , g^2 und e^3 auf der Querflöte (links) und auf der Sopranblockflöte (rechts)

Spektralanalyse des Tons c^2

Der erste Klang, der analysiert wird, ist der Ton c^2 , der den Grundton der Sopranblockflöte darstellt. In Abbildung 6.5 werden die Klangspektren der Querflöte und der Sopranblockflöte angeführt.



Klangspektrum der Querflöte



Klangspektrum der Sopranblockflöte

Abbildung 6.5: Klangspektren des Tons c^2 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte

Das Frequenzspektrum der Querflöte zeigt, dass die unteren Harmonischen stark ausgebildet sind, wobei der erste Oberton etwas mehr gewichtet ist als der Grundton. Weitere deutliche Peaks sind bis ca. 6.000 Hz – 7.000 Hz erkennbar und danach zeigen sich nur schwache Spitzen. In der Audioaufnahme lassen sich Frequenzen um 11.000 Hz analysieren, die vermutlich jedoch keinen Einfluss auf den wahrgenommenen Klang haben und eher als Rauschen zu interpretieren sind.

Im Sopranblockflötenspektrum sind die Spitzen sehr deutlich bis ca. 10.000 Hz – 11.000 Hz zu erkennen; darüber hinaus ergeben sich einzelne Frequenzspitzen. Im unteren Frequenzbereich sind die Obertöne balancierter, wobei jedoch das deutliche Herausragen der 7. Harmonischen zu beachten ist. Sie übersteigt die Amplitude der Grundfrequenz und

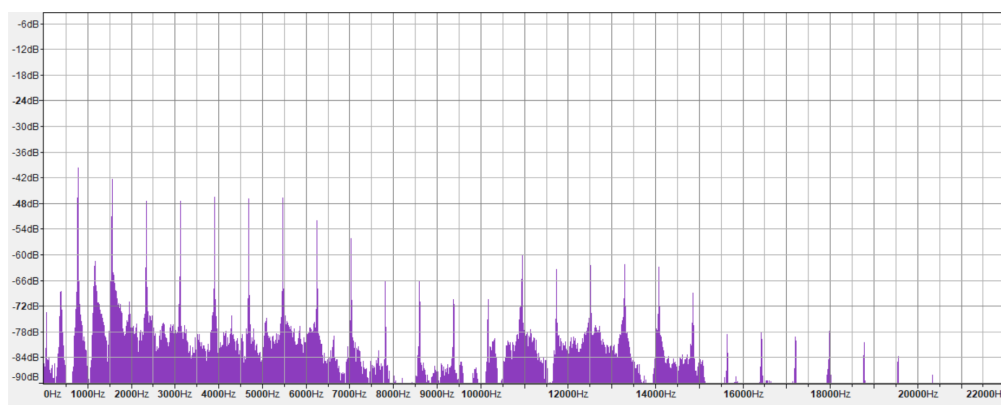
6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen

trägt mit den weiteren stark ausgeprägten Obertönen zu einem hellen Klangcharakter bei.

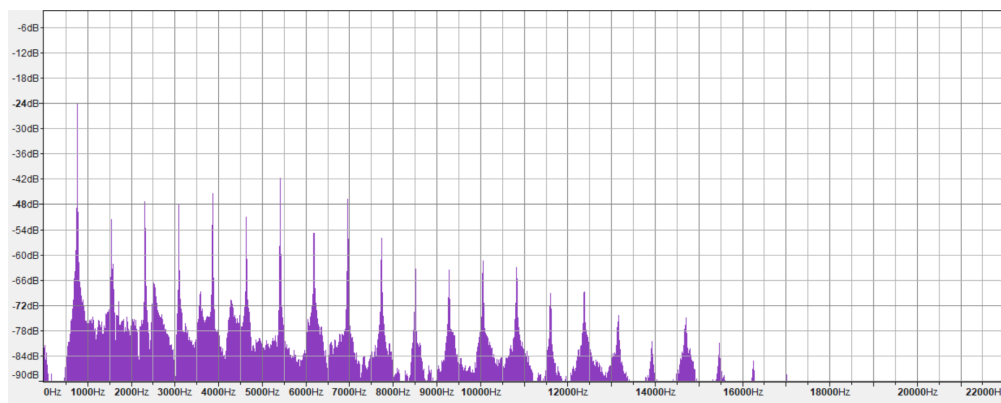
Insgesamt kann bei beiden Spektren eine Grundfrequenz von ca. 500 Hz – 520 Hz erkannt werden, was dem Ton c^2 entspricht. Die Obertöne befinden sich alle in diesem Abstand zueinander.

Spektralanalyse des Tons g^2

Der Ton g^2 wird auf der Querflöte überblasen; das heißt, dass das g^1 gegriffen wird, aber durch die Veränderung der Lippen- und/oder Kieferstellung die zweite Eigenfrequenz angeregt wird.



Klangspektrum der Querflöte



Klangspektrum der Sopranblockflöte

Abbildung 6.6: Klangspektren des Tons g^2 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte

Das Klangspektrum der Querflöte zeigt deutliche Peaks bis ca. 15 000 Hz, wobei die Frequenzen zwischen ca. 7 500 Hz und 10 500 Hz weniger ausgeprägt sind. Niedrigere Spitzen lassen sich ab 15 000 Hz bis ca. 19 000 Hz erkennen. Die Grundfrequenz liegt bei ca. 700 Hz – 800 Hz, was mit dem errechneten Wert von ca. 784 Hz gut übereinstimmt. Die erste Harmonische ist am stärksten ausgeprägt und die Obertöne im Bereich bis ca. 7 000 Hz zeigen eine ausgeglichene Verteilung. Es ist in diesem Spektrum der nicht unwesentliche Peak bei ca. 400 Hz hervorzuheben. Dieser markiert den Ton g^1 , der aufgrund des Überblasens im Gesamtklang mitschwingt, was auch in der Tonaufnahme gehört werden kann. Ebenso ist die deutliche Spitze bei ca. 1 200 Hz zu beachten, die die 3. Harmonische des „Pseudogrundtons“ g^1 markiert.

Im Klangbild der Sopranblockflöte fallen die soeben genannten Besonderheiten weg. Hier lässt sich der stärkste Peak bei der Grundfrequenz des gespielten Tons erkennen; die weiteren Harmonischen sind ebenfalls deutlich sichtbar. Bemerkenswert ist die große Amplitude des 6. Obertons, der der 7. Harmonischen entspricht. Sie trägt wesentlich zur Helligkeit des Sopranblockflötentons bei. Das Frequenzspektrum zeigt einen langsamen und ungleichmäßigen Abfall der Obertöne mit Spitzen bis ca. 15 000 Hz. Es ist erkennbar, dass die geraden Harmonischen tendenziell schwächer ausgebildet sind als die ungeraden.

Spektralanalyse des Tons e^3

Der letzte Ton, der analysiert wird, ist das e^3 . Auf der Querflöte wird dieser Ton in der linken Hand gleich wie das a^1 gegriffen; mit der rechten Hand werden zwei weitere Klappen gedrückt. Dies wird in der nachfolgenden Abbildung 6.7 deutlich gemacht. Dieser Zusammenhang wird in der Analyse des Klangspektrums der Querflöte (siehe Abbildung 6.8 oben) eine Rolle spielen. Auf der Sopranblockflöte wird das e^2 erzeugt, indem ein e^1 gegriffen und das Daumenloch nur teilweise bedeckt wird.

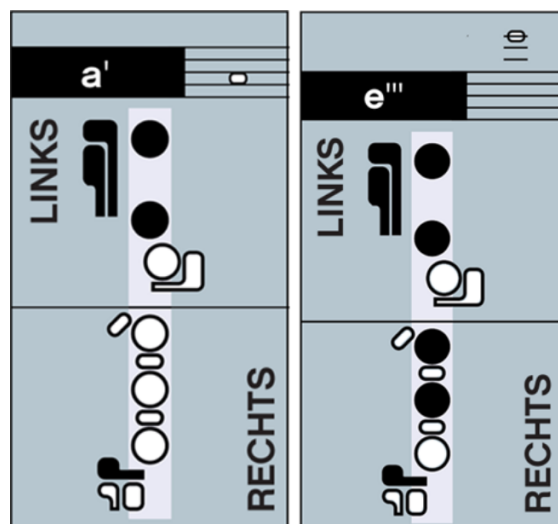
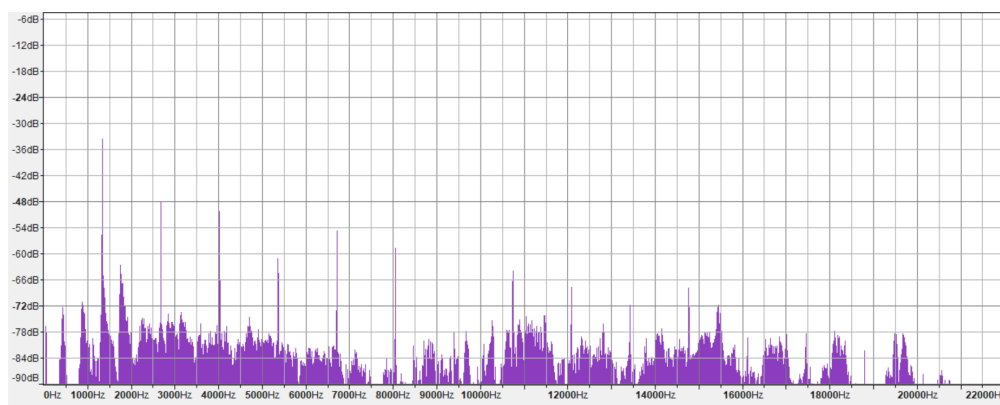
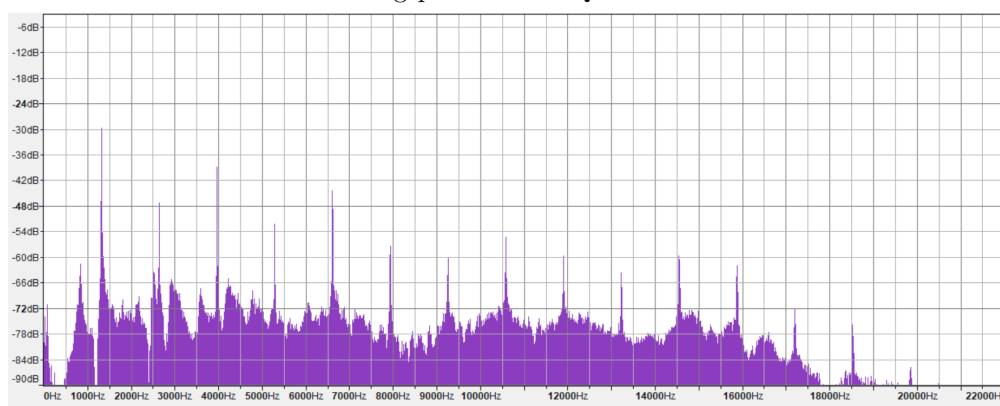


Abbildung 6.7: Die Griffe für a^1 und e^3 auf der Querflöte [5]

6 Spektralanalysen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen



Klangspektrum der Querflöte



Klangspektrum der Sopranblockflöte

Abbildung 6.8: Klangspektren des Tons e^3 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte

Das Frequenzspektrum des Tons e^3 auf der Querflöte zeigt einen deutlichen Peak bei ca. 1300 – 1500 Hz, was mit dem errechneten Wert von ca. 1319 Hz gut übereinstimmt. Die weiteren Harmonischen sind im Verhältnis weniger stark ausgeprägt und die 7. Harmonische verschwindet ganz im Grundrauschen des Klangs. Von ca. 10 000 Hz bis 20 000 Hz lässt sich ein „Rauschteppich“ erkennen, aus dem einzelne Spitzen heraustreten. Bemerkenswert sind die beiden breiteren Frequenzansammlungen unter der Grundfrequenz. Sie konzentrieren sich bei ca. 450 Hz und 850 Hz, was ungefähr den Tönen a^1 und a^2 entspricht. Dies kann einerseits darauf hindeuten, dass die Luftsäule auch in einer Frequenz schwingt, die mit dem a^1 -Griff (bzw. durch Überblasen dem a^2 -Griff) angeregt wird. Tatsächlich ist das e^3 der 2. Oberton von a^1 , was diesen Zusammenhang untermauert. Andererseits entstehen bei der Querflöte meist Anblasgeräusche, die durch die Resanzeigenschaften des Flötenrohrs geformt werden. Die nicht exakt definierten Spitzen deuten darauf hin, dass das Rauschen, das durch das Anblasen entsteht, durch den a^1 -Griff in diesen Frequenzen verstärkt wird.

Bei der Analyse des Sopranblockflötentons sticht der Rauschteppich ins Auge, der sich über die gesamte Frequenzspanne ausbreitet. Weiters lässt sich wieder die maximale Intensität beim Grundton e^3 erkennen. Die 3. und 5. Harmonische sind deutlicher ausgebildet als die restlichen Partialtöne, was auf einen hellen, scharfen Klang hinweist. Die Frequenzansammlung unter dem Grundton ist bei ca. 850 Hz – 900 Hz, was ungefähr dem a^2 entspricht. Es besteht jedoch keine Korrelation zwischen den beiden Griffen für a^2 und e^3 . Nichtsdestotrotz kann das Aufkommen dieser Frequenzen mit dem Anblasgeräusch beziehungsweise mit dem Mitschwingen dieser Resonanzen im Blockflötenrohr erklärt werden. Wie auch schon beim Ton g^2 sind die geraden Harmonischen bis ca. 8 000 Hz weniger stark ausgebildet als die ungeraden. Weiters sind die Obertöne höherer Ordnung auch deutlich zu erkennen.

6.3.3 Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Klangspektren

Insgesamt zeigen sowohl die Querflöte als auch die Sopranblockflöte im Klangspektrum eine deutlich ausgeprägte Grundfrequenz und klar ausgebildete untere Harmonische. Die Querflöte zeigt vor allem im unteren Frequenzbereich sehr starke erste bis dritte Harmonische und ein relativ rasches und gleichmäßiges Abfallen bis ca. 8 000 Hz – 9 000 Hz. Höhere Obertöne treten hier fallweise eher als Rauschen oder weniger stark ausgeprägt in Erscheinung. Auffällig ist das Mitschwingen der unteren Oktave beim Überblasen, das hier beim Ton g^2 deutlich gezeigt wird, und das Rauschen in einer bestimmten Frequenz bei hochfrequenten Tönen, wie zum Beispiel beim e^3 . Die Erwartung, dass die Harmonischen gerader Ordnung weniger stark ausgebildet sein werden, konnte hier nicht bestätigt werden; vielmehr zeigt sich kein bestimmtes Muster, mit welcher Intensität die Obertöne mitschwingen.

Im Vergleich zu den Erkenntnissen zum Klang der Querflöte sind bei der Sopranblockflöte die intensiveren und deutlicheren Obertöne über den gesamten Frequenzbereich bis teilweise weit über 10 000 Hz hervorzuheben. Es ist kein signifikanter Abfall der oberen Harmonischen zu erkennen, wie es beispielsweise bei der Querflöte der Fall ist. Insbesondere treten die ungeraden Harmonischen stärker hervor als die geraden und im Beispiel des Tons c^2 überragt der 7. Partialton die Intensität des Grundtons.

In Bezug auf den Klang bestätigt sich daher der Obertonreichtum und daher der helle, schneidende Klang der Sopranblockflöte. Im Vergleich dazu spiegelt das Klangspektrum der Querflöte, deren Klang im unteren Bereich als eher weich und rund und im oberen Bereich als strahlend empfunden werden kann, diesen Eindruck wider. Das Spektrum des eher tieferen Tons c^2 weist weniger signifikante Obertöne auf als beispielsweise das e^3 , wo vergleichsweise gleich starke Frequenzen (ca. -78 dB) bis über 20 000 Hz nachgewiesen werden konnten. Sowohl in der Querflöte als auch in der Sopranblockflöte können in der Aufnahme und in der Spektralanalyse Anblas- und Rauschkomponenten festgestellt werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, herauszufinden, inwiefern sich die Klangfarbe eines Querflötentons von der eines Sopranblockflötentons unterscheidet und wie sich dies mathematisch erklären lässt.

Zur Beantwortung dieser Leitfrage wurde zunächst geklärt, wie Klang entsteht und wie dieser mathematisch beschrieben werden kann. Als Grundlage jeder Tonerzeugung gelten harmonische Schwingungen, die mit der Ort-Zeit-Funktion

$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi\nu t + \delta)$$

beschrieben werden können. Dabei beschreibt A die Amplitude, also die Lautstärke eines reinen Tones, und ν die Frequenz, sprich die Tonhöhe. Da ein Klang eine Überlagerung von Einzelschwingungen mit der n -fachen Frequenz der Grundschiwingung ist, wird ein musikalischer Ton mit der Spektraldarstellung dargestellt:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cdot \cos(2\pi n\nu t) + B_n \cdot \sin(2\pi n\nu t)].$$

Die einzelnen Schwingungen mit der n -fachen Frequenz werden Obertöne oder n -te Harmonische genannt und ihre Amplituden geben das sogenannte Obertonspektrum oder Klangspektrum an, mithilfe dessen ein Klang präzise analysiert werden kann.

Da sich Schall in Longitudinalwellen ausbreitet, wird diese Wellenart gemeinsam mit den stehenden Wellen betrachtet, wobei sich letztere durch Interferenz zweier entgegengesetzt laufender Wellen bilden. Stehende Wellen treten ebenfalls als schwingende Luftsäulen in offenen Pfeifen, zu denen die Querflöte und die Blockflöte zählen, auf. Sie können zu verschiedenen Schwingungsmoden angeregt werden, sodass unterschiedliche Tonhöhen spielbar sind.

Die Herleitung der Wellengleichung einer beidseitig eingespannten Saite führt zur Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

welche mithilfe der Lösungsmethode nach d'Alembert und der Methode der Trennung der Variablen gelöst wurde. Die erste Lösungsmethode liefert die Lösung

$$u(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct)$$

für die Randbedingungen $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ sowie die Lösung

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(z) dz$$

7 Zusammenfassung und Ausblick

für die Wellengleichung mit den Anfangswerten $u(x, 0) = f(x)$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$. Die Methode der Trennung der Variablen ergibt die für die spätere Betrachtung der Fourieranalysis wichtige Lösung der Fourierreihe:

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \cdot \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right].$$

Sowohl die Querflöte als auch die Blockflöte sind Schneidetoninstrumente und ihr Ton entsteht durch periodische Überdruckimpulse, der die Luftsäule im Inneren des Rohres zum Schwingen bringt. Während die Querflöte eine zylindrische Mensur hat, weist die Blockflöte eine umgekehrt konische Bohrung auf. Es wurde herausgefunden, dass die Wellengleichung der an beiden Seiten eingespannten Saite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

auch für schwingende Luftsäulen gilt, wobei hier $c \approx 343$ m/s die Schallgeschwindigkeit in der Luft angibt. Die Lösung der Wellengleichung für das zylindrische Rohr führt wieder zur Gestalt der Fourierreihe:

$$u_k(x, t) = A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \left[B_k \cos\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) + C_k \sin\left(\frac{ck\pi}{\ell}t\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Betrachtung der offenen Pfeife mit umgekehrt konischer Bohrung zeigt, dass die Resonanzfrequenzen unabhängig von der Mensur sind und somit lediglich von der Rohrlänge ℓ abhängen. Daher ergibt sich, dass in beiden Instrumenten die Harmonischen in der Verhältnissen

$$1 : 2 : 3 : \dots$$

auftreten. Da die Querflöte aufgrund des Raums zwischen dem Stimmkork und dem Anblasloch nicht vollständig dem Ideal einer offenen Pfeife mit zylindrischer Bohrung entspricht, ist davon auszugehen, dass die geradzahigen Harmonischen gedämpft sind. Dies konnte in der Spektralanalyse der Querflötentöne jedoch nicht nachgewiesen werden. Vielmehr äußert das Spektrum der Sopranblockflöte diese Besonderheit.

Die Fourieranalysis bildet die Basis für die Spektralanalyse und die Theorie dahinter. Damit können vereinfacht gesagt stetige, periodische Funktionen als Summe von harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Intensitäten dargestellt werden:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Die Fourierkoeffizienten lassen sich mit den Formeln

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \text{ für } k \in \mathbb{N}^*$$

berechnen. Für komplexe Funktionen folgt die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

mit den komplexen Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Im Kontext der Klanganalyse zeigen die Fourierkoeffizienten die unterschiedlichen Ausprägungen der einzelnen Harmonischen eines Klangs. Dies wird mit der Parsevalschen Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

klar, die verdeutlicht, dass sich die Gesamtenergie eines Signals als Summe der Energien der einzelnen gewichteten harmonischen Schwingungen darstellen lässt, was bedeutet, dass ein Klang durch seine Obertöne präzise analysiert werden kann.

Dieses theoretische Wissen wird in der Spektralanalyse der Querflöten- und Sopranblockflötentöne genutzt und angewendet. Die Analyse der Klänge auf den Tonhöhen c^2 , g^2 und e^3 zeigt klare Grundfrequenzen und ausgeprägte untere Harmonische. Während die Klangspektren der Querflötenklänge tendenziell weniger Obertonintensität und das Mitschwingen tieferer Töne beim Überblasen zeigen, lässt sich bei den Sopranblockflötentönen ein reichhaltiges Obertonspektrum mit stärker ausgeprägten ungeraden Harmonischen erkennen. Dies bestätigt die klangliche Charakterisierung der beiden Flöten: Die Querflöte, deren Klang als rein und eher weich beschrieben wird, besitzt ein schwächer ausgeprägtes Obertonspektrum als die Sopranblockflöte, deren Klang als hell und teilweise schrill empfunden wird. Die Spektren zeigen beinahe alle ganzzahligen Vielfachen, was sich mit den Berechnungen der Verhältnisse der Harmonischen deckt.

Mathematisch lassen sich die Töne der beiden Flöten sowie ihre unterschiedlichen Klangspektren durch eine Fourierreihe als Lösung der Wellengleichung beschreiben, die den Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen bildet. Auf diese Weise spannt sich ein Bogen von der Wellengleichung als Beschreibung der schwingenden Luftsäule in offenen Pfeifen über die Fourieranalysis, die als mathematisches Werkzeug zur Zerlegung von Klängen in ihre Einzelschwingungen dient, bis hin zur Analyse der Klangspektren, die die Verteilung der Amplituden der einzelnen Obertöne sichtbar macht, wodurch die klanglichen Unterschiede zwischen der Querflöte und der Sopranblockflöte quantitativ und präzise erfasst werden können.

Ausblick

Aus den Ergebnissen dieser Arbeit ergeben sich eine Vielzahl an weiterführenden Fragestellungen: Einerseits lassen sich die Unterschiede zwischen der Querflöte und der

7 Zusammenfassung und Ausblick

Sopranblockflöte noch weiter beforschen. Dabei kann einerseits auf die unterschiedlichen Materialarten (Holz, Metall oder Kunststoff) eingegangen und untersucht werden, inwiefern das Material Einfluss auf das Obertonspektrum und damit auf den Klang hat. Andererseits liefert eine Untersuchung zur Intonation, Tonansprache oder Klangfarbe von zylindrischen im Vergleich zu konischen offenen Pfeifen Ergebnisse, die im Instrumentenbau angewandt werden können, um eine Optimierung in diesen Bereichen zu erzielen.

Um die Frage, warum sich in der historischen Entwicklung die Querflöte als Orchesterinstrument gegen die Blockflöte durchgesetzt hat, zu beantworten, können unter anderem Untersuchungen in Bezug auf die klangliche Mischfähigkeit mit anderen Orchesterinstrumenten zur Erlangung eines homogenen Orchesterklangs angestellt werden.

Abschließend zeigt diese Arbeit, wie mathematische Methoden wie die Fourieranalyse oder die Lösung der Wellengleichung wichtige Werkzeuge zum tieferen Verständnis musikalischer Instrumente und deren Klangeigenschaften beitragen können und somit eine Brücke zwischen den beiden Disziplinen Mathematik und Musik geschlagen werden kann.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einfacher harmonischer Oszillator [10, S. 39]	4
2.2	Die ersten fünf Harmonischen einer Schwingung, eigene Darstellung mit GeoGebra	8
2.3	Obertonreihe mit dem Grundton C [15, S. 512]	9
2.4	Transversale Welle auf einer Feder [31, S. 456]	10
2.5	Longitudinale Welle auf einer Feder [31, S. 457]	10
2.6	Sinusfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra nach [31, S. 463]	11
2.7	Zusammenhang zwischen der Auslenkungswelle (a) und der Druckwelle (e) [31, S. 467]	13
2.8	Reflexion eines Pulses an den Enden einer beidseitig eingespannten Saite [16, S. 62]	14
2.9	Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude und Frequenz mit $t = 0$, eigene Darstellung mit GeoGebra nach [31, S. 490]	16
2.10	Konstruktive Interferenz, eigene Darstellung mit GeoGebra	16
2.11	Destruktive Interferenz, eigene Darstellung mit GeoGebra	17
2.12	Zwei Wellen p_1 und p_2 mit ähnlichen Frequenzen ν_1 und ν_2 (oben) und ihre Resultierende p (unten), eigene Darstellung mit GeoGebra	18
2.13	Stehende Welle als Überlagerung zweier laufender Wellen mit den Wellenknoten bei $x = n\frac{\lambda}{2}$ und Wellenbäuchen bei $x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2}$, eigene Darstellung mit GeoGebra	19
3.1	Skizze eines Segments einer schwingenden Saite; eigene Darstellung mit GeoGebra nach [6, S. 85]	24
3.2	Graph der sinh-Funktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	35
4.1	Querschnitt des Kopfstücks der Blockflöte [21]	46
4.2	Aufbau einer Blockflöte mit barocker Griffweise [21]	47
4.3	Entstehung einer Schwingung in Schneidetoninstrumenten [33, S. 106]	48
4.4	Rohr mit zylindrischer Bohrung; eigene Darstellung mit GeoGebra nach [25, S. 84]	49
4.5	Druck- und Auslenkungswellen im zylindrischen Rohr [6, S. 100]	51
4.6	Eingangsimpedanz am größeren Ende einer offenen Pfeife mit umgekehrt konischer Mensur [13, S. 452]	55
5.1	Sinus und Kosinus als Beispiele für gerade und ungerade Funktionen, eigene Darstellung mit GeoGebra	69

5.2	Integral über das symmetrische Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit den blauen positiven Flächenanteilen und den roten negativen Flächenanteilen, eigene Darstellung mit GeoGebra	70
5.3	Graph der Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	72
5.4	Die 1. Partialsumme s_1 der Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	74
5.5	Die 7., 15., 21. und 31. Partialsumme für die Dreiecksfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	75
5.6	Graph einer Sägezahnfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	76
5.7	Die 5., 8., 11. und 15. Partialsumme für die Sägezahnfunktion, eigene Darstellung mit GeoGebra	77
5.8	Punktweise, aber keine gleichmäßige Konvergenz der Polynome x^n gegen die Funktion f [2, S. 1140]	82
5.9	Die Fourierreihe konvergiert in den Stetigkeitsstellen gegen die Sägezahnfunktion und in den Sprungstellen gegen das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte. Eigene Darstellung mit GeoGebra	84
5.10	Das Gibbs-Phänomen, eigene Darstellung mit GeoGebra	84
6.1	Graph eines zeitkontinuierlichen Signals und das Amplituden- und Phasenspektrum [11, S. 443f]	92
6.2	Verwendete Instrumente: Querflöte (AZUMI) und Sopranblockflöte (Mollenhauer), eigene Darstellung	94
6.3	Beispiel der Darstellung in <i>Audacity</i>	95
6.4	Klangspektren der Töne c^2 , g^2 und e^3 auf der Querflöte (links) und auf der Sopranblockflöte (rechts)	96
6.5	Klangspektren des Tons c^2 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte	97
6.6	Klangspektren des Tons g^2 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte	98
6.7	Die Griffe für a^1 und e^3 auf der Querflöte [5]	99
6.8	Klangspektren des Tons e^3 auf der Querflöte und auf der Sopranblockflöte	100

Literatur

- [1] Th. Altmeyer. *Die Physik der Schwingungen und Wellen*. Zugriff am: 12. Februar 2025. 2006. URL: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/materialien/materialaltmeyer/schwingungen_wellen.pdf.
- [2] Tilo Arens et al. *Mathematik*. 5. Auflage. [Berlin, Heidelberg]: Springer Spektrum, 2022. ISBN: 9783662643891.
- [3] Audacity. *Plot Spectrum*. Zugriff am 10. Mai 2025. 2025. URL: https://manual.audacityteam.org/man/plot_spectrum.html.
- [4] Anthony Baines. *Lexikon der Musikinstrumente*. [Stuttgart Kassel]: Metzler Bärenreiter, 1996.
- [5] Bastein Verlag. *Grifftabelle Querflöte*. Zugriff am 13. Mai 2025. URL: <https://www.bastein.de/media/pdf/6d/39/39/Bastein-Grifftabelle-Querfloete.pdf>.
- [6] Dave Benson. *Music: A mathematical offering*. [Cambridge]: Cambridge University Press, 2006.
- [7] Sophie Böltner. *Aufnahmen von Querflöten- und Sopranblockflötentönen (c2, g2 und e3)*. 2025. DOI: 10.5281/zenodo.15459854. URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.15459854>.
- [8] Ermanno Briner. *Reclams Musikinstrumentenführer: die Instrumente und ihre Akustik*. 3. Auflage. [Stuttgart]: Reclam, 1998. ISBN: 315010436X.
- [9] Anton Deitmar. *Analysis*. 3. Auflage. [Berlin]: Springer Spektrum, 2021. ISBN: 3-662-62858-9.
- [10] Monika Dörfler. *Mathematik im Alltag und in naturwissenschaftlichen Anwendungen. Vorlesungsskriptum SS2021*. [Wien], 2021.
- [11] Hans Joachim Eichler. *Das neue Physikalische Grundpraktikum*. 3. Auflage. Springer-Lehrbuch. [Berlin]: Springer Spektrum, 2016. ISBN: 9783662490235.
- [12] Thomas Filk. *Quantenmechanik (nicht nur) für Lehramtsstudierende*. 1. Auflage. [Berlin]: Springer Spektrum, 2019. ISBN: 9783662597361.
- [13] Neville H Fletcher. *The physics of musical instruments*. [New York, u.a.: Springer, 1991. ISBN: 0387969470.
- [14] Stefan Friedl. *Analysis 1: Fokussiert und farbig*. 1. Auflage. [Berlin]: Springer Spektrum, 2023. ISBN: 3-662-67359-2.
- [15] Georg Glaeser. *Der mathematische Werkzeugkasten: Anwendungen in Natur und Technik*. 5. Auflage. [Berlin Heidelberg]: Springer Spektrum, 2021. ISBN: 9783662632611.

- [16] Leon Gunther. *The Physics of Music and Color: Sound and Light*. 2nd ed. [Cham]: Springer Nature, 2019. ISBN: 3030192199.
- [17] Norbert Henze und Günter Last. *Mathematik für Wirtschaftsingenieure und naturwissenschaftlich-technische Studiengänge, Band 2*. 2. Auflage. [Karlsruhe]: Vieweg+Teubner Verlag, Springer Fachmedien, 2010. ISBN: 978-3-8348-1441-8.
- [18] Josef Hoffmann. *Signalverarbeitung in Beispielen: Verständlich erläutert mit Matlab und Simulink*. De Gruyter Studium. [Berlin]: De Gruyter, 2016. ISBN: 9783110471069.
- [19] Christian Karpfinger. *Höhere Mathematik in Rezepten: Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten*. 4. Auflage. [Berlin]: Springer Spektrum, 2022. ISBN: 3-662-63305-1.
- [20] Götz Kersting. *Die Mathematik hinter Musik und Klang*. [Frankfurt am Main]: Birkhäuser, 2023. ISBN: 978-3-031-31640-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-31640-1>.
- [21] Moeck Musikinstrumente + Verlag GmbH. *Blockflötenbegriffe – von Aufschnitt bis Zapfen*. Zugriff am 8. Mai 2025. Moeck Musikinstrumente + Verlag GmbH. 2025. URL: <https://www.moeck.com/de/service/faq/blockfloetenbegriffe-von-aufschnitt-bis-zapfen/>.
- [22] OptoMET GmbH. *Signalverarbeitung: Grundlagen, Techniken und Anwendungen*. Zugriff am 8. Mai 2025. n.d. URL: <https://www.optomet.com/de/wissen-technologie/signalverarbeitung/>.
- [23] Jürgen Pöschel. *Noch mehr Analysis*. [Wiesbaden]: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-658-05853-1.
- [24] Fernando Puente León und Holger Jäkel. *Signale und Systeme*. 6. Auflage. De Gruyter Studium. [München/Wien]: De Gruyter Oldenbourg, 2015. ISBN: 3-11-040386-2.
- [25] Manfred Reimer. *Der Klang als Formel: Ein mathematisch-musikalischer Streifzug*. 2. Auflage. [München]: De Gruyter, 2011. ISBN: 3486710850.
- [26] Karlheinz Schüffler. *Pythagoras, der Quintenwolf und das Komma*. 2. Auflage. [Wiesbaden]: Springer Spektrum, 2017. ISBN: 978-3-658-15185-0.
- [27] Norbert Steinmetz. *Analysis*. [Berlin]: Springer Spektrum, 2024. ISBN: 9783662680865. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-68086-5>.
- [28] Jan Swoboda. *Grundkurs partielle Differentialgleichungen: Eine Einführung für natur- und ingenieurwissenschaftliche Studiengänge*. 1. Auflage. essentials. Berlin: Springer Spektrum, 2023. ISBN: 9783662676448.
- [29] Charles Taylor. *Der Ton macht die Physik. Die Wissenschaft von Klängen und Instrumenten*. [Braunschweig/Wiesbaden]: Vieweg, 1994. ISBN: 3-528-06574-5.
- [30] Thomann GmbH. *the t.bone SC 420 USB Desktop-Set*. Zugriff am 10. Mai 2025. n.d. URL: https://www.thomann.de/at/the_t.bone_sc_420_usb_desktop_set.htm.

- [31] Paul A. Tipler und Gene Mosca. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Hrsg. von Jenny Wagner. 7. Auflage. [Berlin, Heidelberg]: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-642-54165-0.
- [32] Rolf Walter. *Einführung in die Analysis 3*. [Berlin]: Walter de Gruyter, 2009. ISBN: 978-3-11-020960-0.
- [33] Gregor Widholm. “Die Orchesterinstrumente”. In: *Musikalische Akustik*. Laaber-Verlag, 2014, S. 89–125.