



MASTER THESIS | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Embodiment und mathematisches Denken. Psychomotorik im
Rahmen der Entwicklung mathematisch-operativer
Vorstellungen

verfasst von | submitted by
Yuanhui Blume M.Sc.

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Arts (MA)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 992 795

Universitätslehrgang lt. Studienblatt |
Postgraduate programme as it appears on
the student record sheet:

Universitätslehrgang Psychomotorik

Betreut von | Supervisor:

emer. Univ.-Prof. Mag. Dr. Otmar Weiß

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort.....	1
2	Einleitung	3
3	Embodiment: Verkörperlichte Kognition.....	5
3.1	Kognition	5
3.2	Embodiment: Verkörperlichte Kognition.....	6
3.2.1	Das Konzept Embodiment	6
3.2.2	Embodiment und Einbettung der Situiertheit	7
3.2.3	Embodiment beim „Kerzenproblem“	8
3.2.4	Embodiment und Handlungsvorstellung.....	9
3.3	Embodiment und Pädagogik.....	11
3.3.1	Embodiment und Pädagogik.....	11
3.3.2	Embodiment und phänomenologische Erziehungswissenschaft	11
3.3.3	Embodiment und das E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung	12
4	Psychomotorik: Bewegtes Lernen	13
4.1	Ursprünge und Entwicklung psychomotorischen Konzepts.....	13
4.2	Begriffe der Psychomotorik.....	15
4.2.1	Definitionen für Psychomotorik als Konzept.....	15
4.2.2	Definitionen für Psychomotorik als Allgemein-Begriff	16
4.2.3	Terminus „Psyche“ in der Psychomotorik.....	16
4.3	Menschenbild in der Psychomotorik	16
4.4	Ziele und Inhalte des psychomotorischen Einsatzes.....	17
4.4.1	Ziele des psychomotorischen Einsatzes	17
4.4.2	Inhalte des psychomotorischen Einsatzes	17
4.5	Bedeutungsdimensionen der Bewegungshandlung	18
4.6	Effizientes Lernen: Bewegtes Lernen	19
4.6.1	Das Körper-und-Lernen-Modell nach Moser (2016).....	20
4.6.2	Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept nach Voglsinger (2016)	21
4.7	Auswirkung des bewegten Lernens zum Erwerb numerischer Kompetenzen	22
5	Mathematisches Denken	23
5.1	Was ist Mathematik?	23
5.2	Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen.....	25
5.3	Mathematisches Denken	26
5.3.1	Prozessbezogenes mathematisches Denken	28
5.3.2	Mathematikbezogene Informationsbearbeitung.....	31
5.3.3	Gedächtnismodelle	34
5.3.4	Inhaltsbezogenes Denken	38
5.3.5	Embodiment und mathematisches Denken.....	38

6	Entwicklung numerischer Kognition.....	39
6.1	Numerische Kognition	39
6.2	Entwicklung des Zahlbegriffs und der Zahlenverarbeitung	40
6.2.1	Erwerb der Zahlwortreihe nach Fuson (1988).....	40
6.2.2	Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel (1978)	43
6.2.3	Zahlaspekte – Komplexität des Zahlbegriffes	44
6.3	Kognitiv-entwicklungspsychologisches Modell arithmetischer Konzepte mit sechs Niveaus nach Fritz et al. (2018)	46
6.4	Das neurokognitive Triple-Code-Modell nach Dehaene (1992)	49
7	Ein Einsatz von Psychomotorik zur Entwicklung und zum Aufbau mathematisch-operativer Vorstellungen	51
7.1	Einstieg.....	51
7.1.1	Blinden Roboter führen.....	51
7.1.2	Blinden Roboter testen	52
7.1.3	Halbautomatischen Roboter steuern	52
7.2	Eine Vorbereitung zur Zahlen-Treppe und zum Zahlenstrahl	53
7.3	Operationen mit Plusroboter	54
7.3.1	Plusroboter auf der Zahlen-Treppe.....	54
7.3.2	Plusroboter auf dem Zahlenstrahl.....	55
7.3.3	Darstellungen vernetzen.....	55
7.4	Operationen mit Minusroboter	57
7.4.1	Minusroboter auf der Zahlen-Treppe	57
7.4.2	Minusroboter auf dem Zahlenstrahl	57
7.4.3	Darstellungen vernetzen.....	58
7.4.4	Plus- und Minusroboter synchron steuern	58
7.5	Operationen mit universalem Roboter	60
7.6	Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen	60
8	Diskussion	61
8.1	Erkenntnisse aus der Praxis.....	61
8.2	Anmerkungen.....	62
8.3	Antworten auf Forschungsfragen	63
9	Zusammenfassung	65
	Literaturverzeichnis	70
	Abbildungsverzeichnis.....	75
	Tabellenverzeichnis.....	76
	Kurzfassung	77
	Abstract.....	78

1 Vorwort

In meinem Motivationsschreiben zum Universitätslehrgang Psychomotorik hatte ich folgende Fragen gestellt:

1. Welche Mechanismen gibt es für die Zusammenhänge zwischen motorischer und kognitiver Entwicklung in verschiedenen Lebensabschnitten? Verändern sich diese Mechanismen nach Bewegungsförderung?
2. Wie werden die Zusammenhänge zwischen motorischer und kognitiver Entwicklung wissenschaftlich dargestellt? Können diese Zusammenhänge unter verschiedenen Aspekten sowohl quantitativ als auch qualitativ dargestellt werden?
3. Wie kann ich die Erkenntnis über die Zusammenhänge zwischen motorischer und kognitiver Entwicklung in der Vermittlung der mathematischen Kompetenz anwenden? Wie begründe und praktiziere ich bewegten Mathematikunterricht?
4. Wie kann ich den Zusammenhang zwischen motorischer und frühkindlicher Entwicklung theoretisch und praktisch vermitteln? Wie kann ich Auszubildenden verschiedene Bewegungserlebnisse anbieten, damit sie diesen Zusammenhang bewusst erleben können?
5. Welche Wirkung und Nebenwirkung hat Bewegungsförderung in Bezug auf die Gesundheit? Welche Bewegungsförderung eignet sich für welche Zielgruppe?

Diese Fragen entstanden einerseits aus meinen Tätigkeiten als Lehrkraft für (Elementare) Mathematik und Bewegungserziehung sowie als Lerntherapeutin im Bereich Mathematik (für 1. – 12. Jahrgangsstufe) andererseits aus meinen Erfahrungen als Praktizierende und als Kursleiterin mit leibzentrierten Ansätzen, wie Taijiquan, Qigong und Meditation in Bewegung und Stille. Ich persönlich profitiere sehr von diesen leibzentrierten Ansätzen, sowohl gesundheitlich als auch kognitiv, im Studium wie im Berufs- und Privatleben.

Mit diesen Fragen war ich in das Studium Psychomotorik gestartet. Durch die inspirierenden Veranstaltungen mit einer ausgewogenen Kombination von Theorie und Praxis sowie durch den vielfältigen und bereichernden Austausch mit Vortragenden und Mitstudierenden habe ich umfangreiche theoretische Kenntnisse sowie vielfältige Handlungsfähigkeit und Handlungsfertigkeit gewonnen. Das Nachdenken wurde angeregt. Meine eigene Praxis wurde reflektiert und mit neuen Impulsen erweitert.

Auf die Frage Nummer 5 antwortete unmittelbar das Modul 5 des Studiums: Psychomotorische Tätigkeitsfelder in der Frühförderung und im Kindergarten, in der Volksschule und Sekundarstufe, mit Erwachsenen sowie im Alter. In meinem Berufspraktikum habe ich psychomotorischen Einsatz in meinen Tätigkeitsfeldern mit Erwachsenen und Alten in Bezug auf die Gesundheit integriert und positive Erfahrungen gesammelt.

Die vorliegende Arbeit ist eine Antwort auf die Fragen Nummer 1 – 4. Die Zusammenhänge zwischen Motorik und Kognition werden unter den Theorien von Embodiment und von Psychomotorik betrachtet. Der Begriff „Kognition“ wird hier auf mathematisches bzw. numerisches Denken begrenzt.

Eine wissenschaftliche Arbeit neben den Beruf und Alltagsleben zu schreiben, verlangt Vieles, nicht nur von mir, sondern auch von meinen Mitmenschen.

An dieser Stelle bedanke ich mich von ganzem Herzen bei ALLEN, die mich während des Studiums und des Erstellens dieser Arbeit fachlich und persönlich unterstützt haben.

Mein herzlicher Dank gilt allen Vortragenden des Studiums (unter anderem an Frau Prof. Dr. Renate Zimmer, Herrn Prof. Dr. Klaus Fischer und Frau Prof. Dr. Christina Reichenbach) für die vielfältige inspirierte Fachimpulse, an Herrn Univ.-Prof. Mag. Dr. Otmar Weiß als Leiter dieses wunderbaren Universitätslehrgangs und als mein Betreuer für die Themenfindung und die Freiheit des wissenschaftlichen Arbeitens.

Mein herzlicher Dank gilt auch allen Mitstudierende für den bereichernden Austausch und motivierende Unterstützung sowohl fachlich als auch in der persönlichen Begegnung.

Mein aufrichtiger Dank geht an das „SKD staatlich anerkannte Fachschule für Sozialpädagogik“. Dem Kollegium danke ich für das Verständnis und die Unterstützung, den Auszubildenden für ihre Offenheit bei psychomotorischen Einsätzen im Mathematikunterricht.

Bei Herrn Dr. Michael Methlagl bedanke ich mich besonders herzlich für die kompetente und freundliche Unterstützung zur Erstellung meiner Masterarbeit.

Bei meinem Ehemann Christian bedanke ich mich von ganzem Herzen für die meditative und einfühlsame Musik, für das Verständnis und den Humor, für die Aufmerksamkeit und die Geduld, für die Ehrlichkeit und die Offenheit, für die aufrichtige Zuneigung und die permanente Unterstützung in allen Lebensbelangen.

Zu guter Letzt danke ich allen bekannten und unbekannten Personen, die an der Rettung des Lebens meines Ehemanns und an seinem Überleben bei einer akuten lebensgefährlichen Krankheit beteiligt waren. Dank ihres großartigen Einsatzes kommt diese Arbeit jetzt zu einem glücklichen Ende. Vielen Dank!

2 Einleitung

Über kognitive Entwicklung hat Bruner (1988, S. 21) herausgefunden:

„Auffällige Akzentverschiebungen ereignen sich im Verlaufe der Entwicklung der Darstellungsfunktion (representation). Zuerst kennt das Kind seine Umwelt hauptsächlich durch die gewohnheitsmäßigen Handlungen, die es braucht, um sich mit ihr auseinanderzusetzen. Mit der Zeit kommt dazu eine Methode der Darstellung in Bildern, die relativ unabhängig vom Handeln ist. Allmählich kommt dann eine neue und wirksame Methode hinzu, die sowohl Handlung wie Bild in die Sprache übersetzt, woraus sich ein drittes Darstellungssystem ergibt. Jede dieser drei Darstellungsmethoden, die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische, hat ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren. Jede prägt das geistige Leben des Menschen in verschiedenen Altersstufen, und die Wechselwirkung ihrer Anwendungen bleibt ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen.“

Diese Erkenntnis von Bruner wird als E-I-S-Prinzip genannt. Dabei steht „E“ für Enaktiv (handlungsmäßig), „I“ für Ikonisch (bildhaft) und „S“ für Symbolisch. Man kann sich etwas auf drei verschiedenen Wegen erschließen: Durch das eigene Tun, durch bildliches Vorstellen und indem man auf einer symbolischen Ebene agiert (Bruner, 1988, S. 27). Jede Form der Darstellung unterstützt „das symbolische Operieren, die Strukturierung von Bildern und die Ausführung motorischer Handlungen“ (Bruner, 1988, S. 33). Die drei Darstellungssysteme bestehen nebeneinander. „Ein jedes kann aber auch zum Teil in das andere übersetzt werden, und gerade dies liefert eine wichtige Triebkraft für die geistige Entwicklung“ (Bruner, 1988, S. 33). Als treibende Kraft zur kognitiven Entwicklung nennt Bruner (1988, S. 24): „die äußeren Anstöße und die Reifungsprozesse“.

Handlungsfreie Vorstellungen basieren auf Schemata von Handlungen (Bruner, 1988, S. 41). „Wenn man die betreffende Handlung ausführt, so vollziehen sich wichtige sensorische Rückkopplungsprozesse“ (Bruner, 1988, S. 27). Handlung ist ein Zusammenspiel von Körper, Sinneswahrnehmung und Bewegung. „Die Wechselwirkung Kognition – Körper ist zirkulär-kausal“ (Tschacher, 2017, S. 31). Im Embodiment wird der Körper als Medium betrachtet und in der Psychomotorik die Bewegung.

Mit dem Begriff „Embodiment“ werden Körper und Leib als ein zentrales Thema der kognitiven Entwicklung, somit auch den Lernprozessen, betrachtet. Bewegung und Sinneswahrnehmung sind ganzheitlich und untrennbar mit der Psyche (Gefühl und Emotion) verbunden (Hille, 2020, 87ff.). Um diesen ganzheitlichen Aspekt praktisch wirksam zu machen, hat sich die Psychomotorik entwickelt und leistet einen wichtigen Betrag zur Entwicklung der Persönlichkeit (Reichenbach, 2010, S. 9 – 12). Die Sensomotorik, das Zusammenspiel von Sinneswahrnehmung und Bewegung und das kognitive Lernvermögen, die Lern- und Gedächtnisleistung, beeinflussen sich gegenseitig (Brägger, 2020, 76). Dazu erklären Brägger (2020, S. 77): „Eine wichtige Rolle spielt dabei die Skelettmuskulatur: Werden die Muskeln in müheloser Weise, im funktionalen Wechsel von Spannung und Entspannung, bewegt, senden sie Weckimpulse an das Zentralnervensystem, womit sowohl Wachheit als auch das kognitive Lernvermögen größer werden.“ Hier ist zu betonen: „Es geht nicht um Bewegung der Bewegung willen, sondern um relevante zum Gegenstand [des Lernens, d. Verf.] passende Bewegung“ (Hille, 2020, S. 89).

Das mathematische Denken bzw. das numerische Denken unterscheidet sich durch Zahlen und Zahlenverarbeitung deutlich von anderen Gebieten der Kognition. Um numerische Kompetenz zu erwerben, spielt die mathematisch-operative Vorstellung eine zentrale Rolle. Daraus ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- *Welche Rolle spielt das Konzept Embodiment im mathematischen Denken?*
- *Wie kann Psychomotorik zur Entwicklung und zum Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen eingesetzt werden?*

In vorliegender Arbeit wird versucht, diese Fragen zu beantworten. Im Kapitel 3 wird zuerst Embodiment definiert und anhand des Kerzenproblems erklärt, die Erkenntnisse über Handlungsvorstellung dargestellt, sowie mit Embodiment und Pädagogik abgeschlossen. Das Kapitel 4 widmet sich der Psychomotorik: Ursprünge, Entwicklung, Definitionen, Menschenbild, Zielen und Inhalte. Es folgen Bedeutungsdimensionen der Bewegungshandlung und bewegtes Lernen als effizientes Lernen sowie deren Auswirkungen zum Erwerb numerischer Kompetenzen. Im Kapitel 5 wird mathematisches Denken in den Dimensionen, prozessbezogenes und inhaltbezogenes Denken sowie als dritte Dimension mathematikbezogene Informationsbearbeitung bzw. basale Kompetenzen für mathematisches Lernen dargestellt. Darüber hinaus werden Gedächtnismodelle vorgestellt. Im Kapitel 6 wird numerische Kognition durch Erwerb der Zahlwortreihe, Zählprinzipien, Zahlaspekte, 6-Niveaus-Modell und Triple-Code-Modell veranschaulicht. Das Kapitel 7 zeigt den praktischen Einsatz von Psychomotorik zur Entwicklung und zum Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen. Darauf folgen Erkenntnisse aus der Praxis und Antworten auf die Forschungsfragen im Kapitel 8. Die Zusammenfassung im Kapitel 9 schließt diese Arbeit ab.

3 Embodiment: Verkörperlichte Kognition

3.1 Kognition

Nach Myers und DeWall (2023, S. 808) ist Kognition „Gesamtheit der geistigen [mentalen, d. Verf.] Aktivitäten im Zusammenhang mit Denken, Wissen, Erinnern und Kommunizieren“. Bei Kognition „handelt es sich einerseits um Prozesse der Verarbeitung von Reizen, die bewusst oder unbewusst vonstatten gehen können. Andererseits [...], um, d. Verf.] das Bearbeiten von internen, nicht direkt reizabhängigen Strukturen“ (Storch, Cantieni, Hütter & Tschacher, 2017, S. 149). Einige kognitive Prozesse und Strukturen werden in Tab. 3-1 aufgelistet. Wobei jede kognitive Struktur dynamisch betrachtet werden soll.

Tab. 3-1: Kognition

Kognition (Gesamtheit der geistigen/mentalen Aktivitäten)	
Kognitive Prozesse (Verarbeitung von Reizen, bewusst oder unbewusst) • Wahrnehmen • Konzentrieren • Erkennen • Bilden von Begriffen • Denken • Sich etwas vorstellen • Schlussfolgern • Planen • Problemlösen • Erinnern • ...und viel mehr	Kognitive Strukturen (Bearbeiten von Strukturen, intern und nicht direkt reizabhängig) • Wissen • Kategorien • Begriffe • Gedächtnis • Einstellungen • Meinungen • ...und viel mehr

Quelle: Myers & DeWall (2023, S. 808); Storch et al. (2017, S. 149). Eigene Darstellung.

„Intelligenz wird oft als eine Eigenschaft von Kognition angesehen“ (Storch et al., 2017, S. 149). Intelligenz ist „die Fähigkeit, aus Erfahrung zu lernen, Probleme zu Lösen und Wissen einzusetzen, um sich an neue Situationen anzupassen“ (Myers & DeWall, 2023, S. 807).

Kognitionswissenschaft ist interdisziplinär und hat Überlappungsbereiche mit Anthropologie, Künstlicher-Intelligenz-Forschung, Linguistik, Neurowissenschaften, Philosophie und Psychologie (Walter, 2016, S. 422). Die Entwicklung dieser verschiedenen Wissenschaften beeinflussen sich gegenseitig.

Kognition ist traditionell der zentrale Begriff in Bezug auf Wahrnehmung, Körper/Leib, inneren Zuständen, Handlung und weiteren Modalitäten. Die Informationen aus/zu verschiedenen Modalitäten müssen durch kognitive Fähigkeiten verarbeitet/übersetzt werden, und zwar in linearen Verbindungen. Dagegen wird Kognition nach Embodiment als Prozesse

der intelligenten Vernetzung der verschiedenen Modalitäten gesehen. Diese entscheidenden Unterschiede werden in Abb. 3-1 veranschaulicht (Rieger & Wenke, 2017, S. 775).

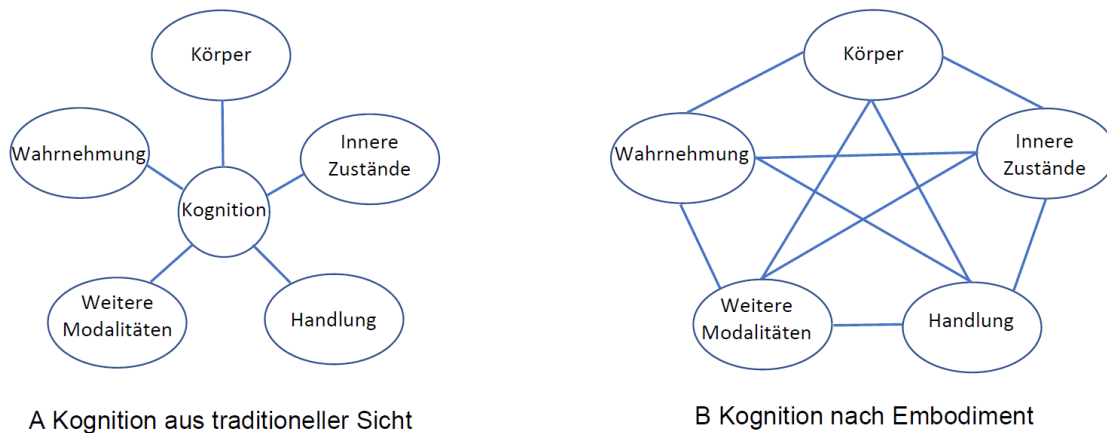


Abb. 3-1: Kognition und Embodiment (mod. n. Rieger & Wenke, 2017, S. 775, Abb. 21.2)

3.2 Embodiment: Verkörperlichte Kognition

3.2.1 Das Konzept Embodiment

„Die Bedeutung der sensomotorischen Interaktion des menschlichen Körpers für die Kognition ist in der Verkörperungstheorie in Kognitionswissenschaft und Philosophie [...] anerkannt“ (Mombaur, 2017, S. 137). „Der Begriff Embodiment (Verkörperung) bezeichnet ein grundlegendes Konzept der neueren Kognitionswissenschaft“ (Etzel Müller, Fuchs & Tewes, 2017, S. 8).

„Unter Embodiment (deutsch etwa ‚Verkörperung‘) verstehen wir, dass der Geist (also: Verstand, Denken, das kognitive System, die Psyche) mit- samt seinem Organ, dem Gehirn, immer in Bezug zum gesamten Körper steht [Einbettung erster Ordnung, d. Verf.]. Geist/Gehirn und Körper wie- derum sind in die restliche Umwelt eingebettet [Einbettung zweiter Ord- nung, d. Verf.]. Das Konzept Embodiment behauptet, dass ohne diese zweifache Einbettung der Geist/das Gehirn nicht intelligent arbeiten kann“ (Tschacher, 2017, S. 15).

Das Konzept Embodiment versteht sich bewusst als Gegenmodell zum Modell kognitiver Informationsverarbeitung (Rieger & Wenke, 2017, S. 774). „Die Reziprozität bzw. Bidirekti- onalität [eine wechselseitige Einflussnahme, d. Verf.] zwischen Geist und Körper wird durch

Embodiment in den Vordergrund gestellt“ (Tschacher & Storch, 2017, S. 118). Das Schema des Konzepts Embodiment wird in Abb. 3-2 dargestellt. Um die wechselseitige Einflussnahme zwischen Seele (also: Geist, Bewusstsein, Denken, Kognition, Psyche) und Leib (also: Materie Körper mit Gehirn) zu veranschaulichen, wird das Taiji-Symbol verwendet. Meines Erachtens nach stehen Geist und Körper in Bezug auf Bewusstsein sowie Kognition in einem polaren – nicht dualen! – Verhältnis. Die wechselseitigen Einflussnahmen von Geist, Gehirn, Körper und Umwelt werden durch die Doppelpfeile verdeutlicht.

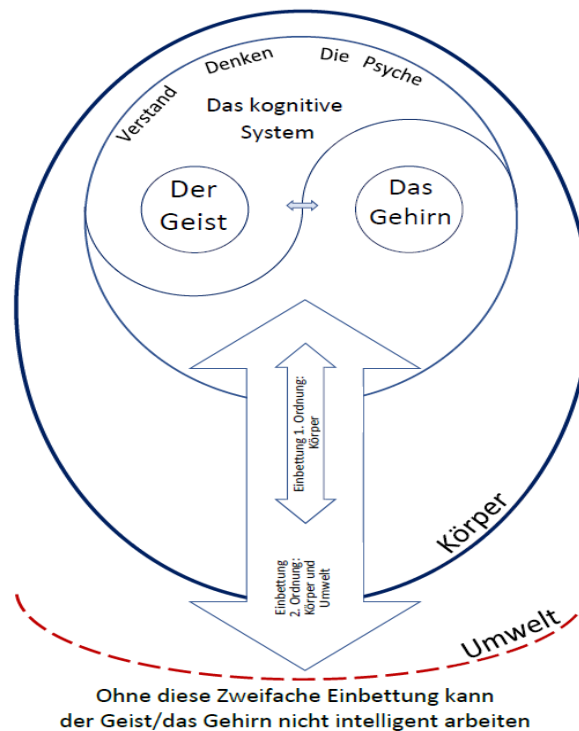


Abb. 3-2: Schema des Konzepts Embodiment (Tschacher, 2017, S. 15. Eigene Darstellung)

3.2.2 Embodiment und Einbettung der Situiertheit

Nach Embodiment ist Kognition einerseits verkörperlicht und andererseits situativ. Durch die Einbettung 1. Ordnung des Geists/Gehirns im gesamten Körper sind die eigenen Körperzustände (zum Beispiel: Körperausdruck, -haltung, -spannung; oder innere Zustände wie Gefühle, Affekt, Emotion) Bestandteil der Kognition. Dadurch beeinflusst der Körper die Bildung von kognitiven Mustern/Schemata. Mit der Einbettung 2. Ordnung des Geists/Gehirns und des Körpers als Gesamtheit in der Umwelt sind konkrete Situationen (Umweltzustände) auch Bestandteil der Kognition. Damit fließt die konkrete Situation auch in der Bildung von kognitiven Mustern/Schemata ein (Tschacher, 2017, S. 31). Kognitives Muster/Schema ist „kognitive Struktur, mit der Informationen geordnet und erklärt werden“ (Myers & DeWall, 2023, S. 818). „Die Wechselwirkung Kognition – Körper ist zirkulär-

kausal. Der Körper wirkt als Kontrollparameter auf die Kognition ein und verursacht so die Bildung von kognitiven Mustern“ (Tschacher, 2017, S. 31).

Um diese zweifache Einbettung und Situiertheit nach Embodiment zu veranschaulichen, betrachten wir das Kerzenproblem.

3.2.3 Embodiment beim „Kerzenproblem“

Das vom Gestaltpsychologen Karl Duncker entwickelte Kerzenproblem ist ein kognitiver Leistungstest für funktionale Fixierung (Spektrum, o.J.)¹. Angeblich in Zusammenhang mit einem Experiment zum Sehvermögen lagen eine Packung Streichhölzer, eine kleine Kerze und eine Schachtel mit Reißnägeln auf einem Tisch bereit (Abb. 3-3).



Abb. 3-3: Materialien für das Kerzenproblem (Eigenes Foto)

Im Test werden Probanden aufgefordert, im Dunkeln die Kerze brennend so an einer an der Wand hängenden Korkplatte zu befestigen, dass das Wachs nicht auf den Boden tropft (Spektrum, o.J.)¹.

Um dieses Problem lösen zu können, benötigen Probanden folgende kognitive Muster, die durch körperliche und umweltliche Erfahrungen gebildet wurden:

- Muster zum Anzünden und Aufstellen einer Kerze (Einbettung im Körper)
- Muster zu Funktionsmöglichkeiten der Reißnägeln (Einbettung in der Umwelt)
- Muster zu Anwendungsmöglichkeiten einer Schachtel (situierete Einbettung)

Da die Schachtel hier als Behälter für Reißnägeln vorgegeben ist, müssen die Probanden neue kognitive Muster zu Anwendungsmöglichkeiten der Schachtel bilden, die zur Lösung

¹ Spektrum (o. J.): Kerzenproblem. Zugriff am 26.05.2024 unter <https://www.spektrum.de/lexikon/psychologie/kerzenproblem/7708>

des Problems beitragen. Statt gewöhnlich als Behälter kann die Schachtel in dieser Situation als Podest dienen. Eine mögliche Lösung (Abb. 3-4) ist, die Schachtel mit Hilfe der Reißnägeln an die Korkplatten-Wand zu heften und als Podest für die Kerze zu benutzen (Spektrum, o.J.)¹.



Abb. 3-4: Eine Lösung für das Kerzenproblem (Eigenes Foto)

Anhand dieses Beispiels ist deutlich zu erkennen, dass Intelligenz, die Fähigkeit, sich auf neue Anforderung kognitiv einstellen zu können, nur durch zweifache Einbettung des Geists/Gehirns, im gesamten Körper und mit dem gesamten Körper in der Umwelt, sowie situationsbezogen möglich ist (Tschacher, 2017, S. 15, S. 31).

3.2.4 Embodiment und Handlungsvorstellung

Aus der Sicht von Embodiment sind Handlungsvorstellungen multimodale, dynamische Phänomene. Sie basieren auf bewussten Simulationen (Rieger & Wenke, 2017, S. 809). „Simulation [ist ein erneutes, d. Verf.] Erleben von motorischen und körperlichen Zuständen oder Ereignissen, ohne tatsächlichen sensorischen Input oder tatsächliche Handlungsausführung. Simulation kann in allen Modalitäten stattfinden“ (Rieger & Wenke, 2017, S. 810). Und das Erleben von motorischen und körperlichen Zuständen oder Ereignissen wurde durch Erfahrung gewonnen (Rieger & Wenke, 2017, S. 809).

Rieger und Wenke (2017, S. 782) stellen fest: „während der Ausführung [einer Handlung, d. Verf.] findet eine Aktualisierung der Repräsentationen im motorischen Gedächtnis bzw. interner Modelle statt, was in einer adäquateren Vorstellung resultiert.“ Durch viele Gemeinsamkeiten auf Verhaltensebene und auf neuronaler Ebene sind Handlungsvorstellung und Handlungsausführung verknüpft. Die Eigenschaften der Handlungen, das persönliche Vorwissen zu einer Handlung und situative Faktoren (z. B.: Körperhaltung, willentliche Veränderung, Instruktionen, Umgebung) beeinflussen die zeitliche Übereinstimmung von vorgestellten und ausgeführten Handlungen. Bei vorgestellten Handlungen werden hemmende

Mechanismen aktiviert, um tatsächliche Bewegungen zu verhindern, und es gibt keine Rückmeldung von Körper und Umgebung. Dadurch kann das Arbeitsgedächtnis bei vorgestellten Handlungen höher belastet werden, als bei ausgeführten Handlungen. Bei Vorstellungen von hoch automatisierten Handlungen wird „die Aufmerksamkeit auf Aspekte der Bewegung gerichtet, die normalerweise außerhalb der bewussten Kontrolle liegen“ (Rieger & Wenke, 2017, S. 809).

„Eine stark ausgeprägte Vorstellungsfähigkeit zeichnet sich dadurch aus, dass Vorstellungen leichter generiert, aufrechterhalten und kontrolliert [...] werden können“ (Rieger & Wenke, 2017, S. 781). Die Vorstellungsfähigkeit einer Person hängt von ihrem Vorwissen über die vorgestellte Handlung ab. Experten in einer Handlung (z. B.: Schachmeisterinnen und -meister) können ihre intern bereits vorhandenen kognitiven Muster/Schemas bei Handlungsvorstellung nutzen. Dies begründet, warum Experten meistens eine bessere Vorstellungsfähigkeit haben als Novizen (Rieger & Wenke, 2017, S. 782).

Bei geringfügiger Abweichung von bekannter Handlung „kann es vorkommen, dass diese nicht mehr angemessen vorgestellt werden können“ (Rieger & Wenke, 2017, S. 782). Ein Beispiel ist der Einsatz der Schachtel beim Kerzenproblem im Abschnitt 3.2.3 „Es gibt Hinweise, dass Personen Fertigkeitswissen von bekannten Handlungen verwenden, um sich unbekannte Handlungen vorzustellen“ (Rieger & Wenke, 2017, S. 782).

Die Kenntnisse über Handlungsvorstellungen werden hier zusammengefasst:

Infotafel 3-2: Handlungsvorstellungen

- a) Eine geeignete Handlungsausführung kann die Entwicklung der entsprechenden Handlungsvorstellung unterstützen, also von Handlung zur Vorstellung;
- b) Wegen der Hemmung von tatsächlichen Bewegungen belastet eine Handlungsvorstellung das Arbeitsgedächtnis mehr als die Handlungsausführung;
- c) Bei Vorstellung von hoch automatisierten Handlungen kann die Aufmerksamkeit um weitere Aspekte erweitert werden;
- d) Mit internen bereits bestehenden kognitiven Mustern/Schemata kann die Vorstellungsfähigkeit verbessert werden;
- e) Vermutlich kann eine unbekannte Handlung mit Fertigkeitswissen von bekannten Handlungen vorgestellt werden.

Quelle: Rieger & Wenke (2017, S. 782 – 810). Eigene Darstellung.

Diese Kenntnisse über Handlungsvorstellung werden in vorliegender Arbeit in der Praxis umgesetzt, um mathematisch-operative Vorstellungen nachhaltig aufzubauen. Von Handlung zur Vorstellung (Rieger & Wenke, 2017, S. 782) kann auch als ein pädagogisches Prinzip betrachtet werden.

3.3 Embodiment und Pädagogik

Die Bedeutung des Körpers wandelt sich allmählich in der pädagogischen Praxis.

3.3.1 Embodiment und Pädagogik

„In Deutschland ist die Arbeitszeit von Lehrkräften seit 1873 fast unverändert über das sogenannte Deputatmodell organisiert“ (Rackles, 2023, S. 3). Ebenfalls im 19. Jahrhundert entwickelten sich die Grundlagen der modernen Pädagogik aus idealistischen und rationalistischen Traditionen. Diese können „als Versuche der Domestizierung wilder, tierischer und damit unkultivierter Impulse des Kindes gelesen werden“ (Draguhn, 2017, S. 394). Die Pädagogik blendet das Organische des Lernenden weitgehend aus. Die Faktizität des Biologischen wird tendenziell negiert oder gar aktiv bekämpft (Draguhn, 2017, S. 394). Aus dieser Tradition entstand „Disembodied school“ (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 231): Der Lernprozess wird reduziert auf den Erwerb von Fähigkeiten, die sofort im Arbeitsmarkt einsetzbar und einfach durch standardisierte Tests bewertbar sind, ohne Berücksichtigung von Körper und Leib (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 230f.).

3.3.2 Embodiment und phänomenologische Erziehungswissenschaft

Die Schlüsselrolle des Körpers bzw. des Leibs in Bezug auf Bildung kann theoretisch mit Phänomenologie und Embodied Cognitive Science begründet werden (Francesconi & Tarozzi, 2019). „Phänomenologie ist [...] die Beschreibung dessen, wie uns etwas erscheint sowie der Versuch der Klärung dessen, warum etwas uns so und nicht anders erscheinen kann“ (Wehrle, 2022, S. 2). In der Phänomenologie ist Körper der objektive Körper als Objekt und Leib der lebendige Körper als Subjekt (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 232). Husserl (1952, S. 158) betrachtet den Leib als den „Nullpunkt“ aller Orientierungen. „Alle Dinge mir gegenüber [...] sind alle ‚dort‘ – mit Ausnahme eines einzigen, eben des Leibes, der immer ‚hier‘ ist“ (Husserl, 1952, S. 159). Der „‘Umschlagspunkt‘ zwischen kausalem und konditionalem Vorgang“ ist im Leib verankert (Husserl, 1952, S. 160). Der Leib ist das Bindeglied „zwischen den Erfahrungen, die mit der Außenwelt gemacht werden, und den Erlebnissen, die am eigenen Leib perzipiert werden“ (Breuer, 2019, S. 80). Brinkmann, Türstig und Weber-Spanknebel (2019, S. 3) unterstreichen dies:

„Der Leib ist das Medium der Erfahrung, das allererst eine zeitliche, räumliche und soziale Orientierung ermöglicht im Hier und Jetzt, oben und unten, rechts und links, früher und später. Der Leib stellt den medialen Umschlagspunkt dar, wobei seine eigene Medialität nicht unmittelbar wahrgenommen und erkannt werden kann“.

Der Körper bzw. der Leib dient im Bereich Bildung als Ort der sensiblen Wahrnehmung, als Feld der gelebten Erfahrung (Erlebnis) und als Medium für intersubjektive Beziehung und Kommunikation (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 233f.).

In phänomenologischer Erziehungswissenschaft wird das „Lernen als vorreflexiver Erfahrungsprozess“ (Breuer, 2019) betrachtet. Der Lernprozess findet im Erfahrungsprozess statt und wird in der Lebenswelt erweitert. „Lern- und Erziehungsprozesse lassen sich so als Verkörperung in einem interkorporalen Antwortgeschehen beschreiben“ (Brinkmann, 2019, S. 151). „Pädagogisches Verstehen [ist, d. Verf.] wesentlich Fremdverstehen“ (Lipnitz, 2019, S. 11). Brinkmann (2019, S. 154) stellt fest: „Fremd-Verstehen ist in phänomenologischer Perspektive leiblich bzw. zwischen-leiblich (interkorporal) strukturiert. [...] Fremd-Verstehen fungiert als Antwortgeschehen vor Anderen und materialisiert sich in performativen Verkörperungen“.

Embodied Cognitive Science ist das Ergebnis der Begegnung zwischen Phänomenologie und Kognitionswissenschaft (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 236). Einige Forschungen und Studien in Embodied Cognitive Science, die von Francesconi und Tarozzi (2019, S. 240) genannt werden, zeigen, dass körperliche Bewegung sowohl Gesundheit und Fitness fördert, als auch das Lernen erleichtert. Um besseren Lernerfolg zu erzielen, wird Handlungsorientiertes Lernen mit körperlichen Aktivitäten vorgeschlagen.

3.3.3 Embodiment und das E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung

Nach Bruner (1988, S. 21 - 53) findet die kognitive Entwicklung in Vernetzung der drei Repräsentationen/Darstellungen statt: Enaktiv (E) werden Handlungen real durchgeführt oder gedanklich vorgestellt, z. B.: Andrea (6 J.) hatte zum Geburtstag drei Bücher von Mama und zwei Bücher von Papa bekommen. Ikonisch (I) werden passende Bilder gezeichnet, z. B.: Andrea zeichnete ein Bild von Mama mit drei Büchern und Papa mit zwei. Symbolisch (S) wird eine Gesetzmäßigkeit mit fachspezifischen Symbolen dargestellt, z.B. erzählte Andrea im Kindergarten anderen Kindern von den Geschenken zum Geburtstag und schrieb dabei $3 + 2 = 5$. Um die Kognition nachhaltig zu entwickeln, soll die Vernetzung der verschiedenen Darstellungen dynamisch und spiralförmig bewusst thematisiert werden. Die Sprache spielt beim Erfassen der Repräsentationen und beim Wechsel von Darstellungen eine zentrale Rolle. Der gebende, nehmende, fühlende, zeichnende und schreibende Körper/Leib ist das Medium für das E-I-S-Prinzip. Der Name des E-I-S-Prinzips entsteht aus den Anfangsbuchstaben der jeweiligen Repräsentation. Nach dem E-I-S-Prinzip sind die Handlungen bzw. Handlungsvorstellungen ein Bestandteil der kognitiven Entwicklung. Dies bestätigt die Ansicht des Konzepts Embodiment, dass Geist/Gehirn nur mit zweifacher Einbettung im Körper und in der Umwelt intelligent arbeiten kann (Tschacher, 2017, S. 15).

4 Psychomotorik: Bewegtes Lernen

In diesem Kapitel wird deutsche und österreichische Psychomotorik in verschiedenen Aspekten betrachtet: die Ursprünge und Entwicklung, die Begriffe, das Menschenbild, die Ziele und Inhalte sowie die Auswirkung auf das Lernen. Bewegtes Lernen als effizientes Lernen sowie seine Wirkung auf den Erwerb numerischer Kompetenz schließen dieses Kapitel ab.

4.1 Ursprünge und Entwicklung psychomotorischen Konzepts

Das psychomotorische „Konzept entwickelt sich [...] prozesshaft aus verschiedenen Ideen, Erfahrungen und Theoremen, die zusammengefasst, geordnet und weiterentwickelt werden“ (Fischer, 2024, S. 11). Der Entwicklungsweg des psychomotorischen Konzepts ist praxisbezogen (Praxeologisch). Nach primären Erfahrungen und Praxisfeld wird versucht, psychomotorische Theoreme zu entwickeln, um „eine Stimmigkeit des Theorie-Praxis-Verhältnisses herzustellen und das eigene fachliche Handeln zu begründen“ (Hölter, 1998; zit. n. Fischer, 2024, S. 11). „Das ursprüngliche Konzept der psychomotorischen Übungsbehandlung von Kiphard und Hünnekens nimmt [...] Anleihen bei der Leibeserziehung und Gymnastikbewegung, der Sinnes- und Bewegungsschulung und der rhythmischen Erziehung“ (Fischer, 2024, S. 11).

Zu den bedeutenden Vertretern der Leibeserziehung und Gymnastikbewegung zählen:

- *François Delsarte* (1811–1871): französischer Schauspielpädagoge, Sprecherzieher, Musiker, Sänger, Komponist und Bewegungspädagoge;
- *Bess Mensendieck* (1864–1958): amerikanische Ärztin, Wegbereiterin der Krankengymnastik „Mensendieckgymnastik“;
- *Elsa Gindler* (1885–1961): Wegbereiterin der „konzentrativen Bewegungstherapie“;
- *Karl Luitpold Gaulhofer* (1885–1941): Österreicher Turnpädagoge, mit „Natürliches Turnen“ (Reichenbach, 2010, S. 14 - 16, 26).

Reichenbach (2010, S. 21 - 26) nennt als Vertreter der Sinnes- und Bewegungsschulung:

- *Jean Marc Gaspard Itard* (1774–1838): französischer Arzt, Bedeutung der Sinnes- und Bewegungserziehung, Erziehung des Wolfskindes Victor von Aveyron;
- *Edouard Seguin* (1812–1880): französischer Pädagoge und Mediziner, Schüler von Itard, Wegbereiter der Diagnostik, Konzept der „Physiologischen Erziehung“;
- *Maria Montessori* (1870–1952): ital. Ärztin: Sinnes- und Bewegungsschulung;
- *Karl Bartsch* (19. / 20. Jh.): „Geistig-orthopädische Übungen“;
- *Gustav Lesemann* (19. / 20. Jh.–1973): Konzept „Entwicklungsorientierte Hilfen“;
- *Heinz Löwnau* (20. Jh.): Kinder- und Jugendpsychiater, Therapeutischer Zugang „Leibeserziehung als heilpädagogische Maßnahme“.

Bekannte Vertreter der rhythmischen Erziehung sind:

- *Emile Jaques-Dalcroze* (1865–1950): österreichischer Musikpädagoge, Entwicklung der „rhythmischen Gymnastik“, Schule von Hellerau;
- *Rudolf Bode* (1881–1970): Schöpfer der „Ausdrucks-Gymnastik“, Vater der „rhythmischen Gymnastik“;
- *Hinrich Medau* (1890–1974): Musiker und Lehrer, schuf heutige Form der deutschen Gymnastik;
- *Elfriede Feudel* (1881–1966): Volksschullehrerin, Schülerin von Jaques-Dalcroze, Bedeutung der Musik als Element der Erziehung, Schulung der Sinnesorgane;
- *Charlotte Pfeffer* (1881–1970): eine der ersten deutschen Schülerinnen von Jaques-Dalcroze, „Psychomotorische Erziehung“;
- *Mimi Scheiblaue* (1891–1968), Schweizerin, Schülerin von Jaques-Dalcroze, Lehrerin für Klavier und Rhythmik, „Heilpädagogische Rhythmik“;
- *Marianne Frostig* (1906–1985), geborene Österreicherin, die einen Großteil ihres Lebens in den USA verbrachte, Betonung der Wechselwirkung zwischen Lern- und Wahrnehmungsfähigkeit (Reichenbach, 2010, S. 16 - 20, 26).

Ernst „Jonny“ Kiphard (1923 – 2010), der Gründungsvater der deutschen Psychomotorik übernahm den Begriff „Psychomotorik“ von Charlotte Pfeffer. „Der Verdienst Kiphard’s ist es, die vielfältigen Ursprünge der Psychomotorik und die unterschiedlichen Anregungen zusammengeführt, integriert und neu systematisiert zu haben“ (Reichenbach, 2010, S. 25).

Bei Entwicklung von psychomotorischen Konzepten für verschiedene Lebensspannen und verschiedenes Klientel waren zahlreiche Experten beteiligt (Reichenbach, 2023, S. 206):

- „Hünnekens/Kiphard (1960): Psychomotorische Übungsbehandlung
- Göllnitz (1963): Rhythmisch-psychomotorische Bewegungstherapie
- Eggert (1975): Psychomotorisches Training
- Schling (1981): Handlungsorientierte Mototherapie
- Volkamer/Zimmer (1972, 1984, 2004): Kindzentrierte Mototherapie
bzw. Kindzentrierte Psychomotorische Therapie
- Seewald (1992, 2007): Verstehender Ansatz
- Eggert/Lütje-Klose (1994/2005): Sonderpädagogische Psychomotorik
- Balgo (1998): Systemisch-konstruktivistische Psychomotorik
- Hölter (1993, 2012): Bewegungstherapie mit Erwachsenen

- Eisenburger (1999, 2012): Psychomotorik für alte Menschen
- Pütz/Rösner (2015, 2017): Von 0 auf 36
- u. v. m.“ (Reichenbach, 2023, S. 206)

Psychomotorische Theoreme basieren auf zahlreichen Theorien und Konzepten, unter anderen aus entwicklungspsychologischer Theorie, konstruktivistischer Erkenntnistheorie, gesundheitswissenschaftlichen Konzepten wie Salutogenese und Resilienz, neurowissenschaftlichen Erkenntnissen über exekutive Funktionen sowie sportwissenschaftlicher und bildungswissenschaftlicher Theorie (Kuhlenkamp, 2022, S. 46).

Die vielfältigen Ursprünge und Entwicklungen des psychomotorischen Konzepts erschwert eine einheitliche und allgemeingültige Definition für Psychomotorik.

4.2 Begriffe der Psychomotorik

Reichenbach (2010, S. 10) stellt fest: „Bis heute fehlt jedoch eine einheitliche Definition dessen, was unter dem Begriff ‚Psychomotorik‘ allgemeingültig zu verstehen ist.“ Sie übernahm ein Glossar von Seewald und differenziert Psychomotorik als

- Konzept der Entwicklungsförderung;
- Begriff, der die Einheit von motorischen und psychischen Prozessen bezeichnet;
- Begriff der (Sport-)Motorikforschung
- entwicklungsorientierter Begriff (Reichenbach, 2010, S. 11f.)

Darüber hinaus stellt Reichenbach (2010, S. 11) je zwei häufige gebrauchte Definitionen für Psychomotorik als Konzept und für Psychomotorik als Allgemein-Begriff vor.

4.2.1 Definitionen für Psychomotorik als Konzept

Definition nach Kiphart 1989: „Psychomotorik kennzeichnet eine ganzheitlich-humanistische entwicklungs- und kindgemäße Art der Bewegungserziehung“ (Kiphart, 1989; zit. n. Reichenbach, 2010, S. 11).

Definition nach Eggert und Lütje-Klose 2005: „Unter Psychomotorik können eine Reihe von verschiedenen pädagogisch-therapeutischen Methoden verstanden werden, die alle von der Möglichkeit ausgehen, motorische, kognitive, soziale und schulische Lernprozesse und therapeutische Zielsetzungen bei Kindern durch systematische Beeinflussung der Bewegung/Motorik zu fördern“ (Eggert & Lütje-Klose, 1994/2005; zit. n. Reichenbach, 2010, S. 11).

4.2.2 Definitionen für Psychomotorik als Allgemein-Begriff

Definition nach Hünnekens und Kiphart 1960: „Mit dem Begriff Psychomotorik wird die enge wechselseitige Verknüpfung von psychischen Vorgängen mit motorischen Phänomenen betont“ (Hünnekens & Kiphart, 1960/1985; zit. n. Reichenbach, 2010, S. 12).

Definition nach Zimmer (2022, S. 22): „Der Begriff ‚psychomotorisch‘ kennzeichnet die funktionelle Einheit psychischer und motorischer Vorgänge, die enge Verknüpfung des Körperlich-Motorischen mit dem Geistig-Seelischen.“

Der Begriff „Psychomotorik“ wird in der vorliegenden Arbeit einerseits als Allgemein-Begriff im Sinne von Definitionen nach Hünnekens und Kiphart 1960 und Zimmer 2022 verwendet, weil diese mit dem Konzept des Embodiments übereinstimmen, andererseits wird der Begriff als Konzept im Sinne von Definition nach Eggert und Lütje-Klose 2005 verwendet, da hier das psychomotorische Konzept als „Bewegtes Lernen“ interpretiert wird.

4.2.3 Terminus „Psyche“ in der Psychomotorik

Der Terminus „Psyche“ in der Psychomotorik weist „ausdrücklich auf den Anteil des Wahrnehmens, Erlebens, Fühlens und Denkens bei Bewegungshandlungen“ (Zimmer, 2022, S. 19) hin und macht die Notwendigkeit deutlich, „Bewegungshandlungen immer als ganzheitliche Äußerungen des Menschen zu betrachten“ (Zimmer, 2022, S. 19).

4.3 Menschenbild in der Psychomotorik

Bei einem Menschenbild „handelt es sich um Annahmen über das Wesen des Menschen, die aus philosophischen oder auch naturwissenschaftlichen Überzeugungen abgeleitet werden“ (Zimmer, 2022, S. 26). Die vorgestellten Definitionen (Abschnitte 4.2.1 und 4.2.2) zeigen, dass Psychomotorik sowohl als Konzept als auch als Allgemein-Begriff auf einem humanistischen Menschenbild basiert.

„Im humanistischen Menschenbild stehen der Mensch und seine Würde im Mittelpunkt. Es wird davon ausgegangen, dass der Mensch im Grunde gut, fähig und bestrebt ist, sein Leben selbst zu bestimmen (Autonomie) und seinem Leben/Handeln Sinn und Ziel zu geben. Der Mensch wird als Körper-Seele-Geist-Einheit betrachtet (Ganzheitlichkeit). Dabei ist der Mensch sozial und gesellschaftlich bezogen (Interdependenz)“ (Kuhlenkamp, 2022, S. 50).

Diesem humanistischen Menschenbild folgen Ziele und Inhalte der Psychomotorik.

4.4 Ziele und Inhalte des psychomotorischen Einsatzes

4.4.1 Ziele des psychomotorischen Einsatzes

Fischer (2024, S. 19) nennt das übergreifende Ziel des psychomotorischen Einsatzes: „den Menschen anzuregen, sich handelnd seine Umwelt zu erschließen, um seinen Bedürfnissen entsprechend auf sie [seine Umwelt, d. Verf.] einwirken zu können“. Dies wird auch als Handlungskompetenz bezeichnet und ist auf die Ganzheit der Persönlichkeit gerichtet.

Zimmer (2022, S. 22f.) beschreibt ausführlich die Ziele der psychomotorischen Förderung:

- die Eigenständigkeit des Kindes zu fördern, um zum selbstständigen Handeln anzuregen;
- durch Erfahrungen in der Gruppe zu einer Erweiterung der Handlungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit beizutragen;
- die Selbstwahrnehmung zu stärken;
- dem Klienten Gelegenheiten zu geben, die eigenen Ressourcen zu erfahren und sich als kompetent und selbstwirksam zu erleben.

Diese Ziele sind auf den Einsatz von Psychomotorik bei Erwachsenen übertragbar.

4.4.2 Inhalte des psychomotorischen Einsatzes

Aus im Abschnitt 4.4.1 genannten Zielen ergeben sich die drei Inhaltsfelder der Psychomotorik: Körper-Erfahrungen/Selbst-Erfahrungen, um Ich-Kompetenz/Selbst-Kompetenz zu fördern; Material-Erfahrungen/Sach-Erfahrungen, um Sach-Kompetenz zu lernen; Sozial-Erfahrungen, um Sozial-Kompetenz aufzubauen (Zimmer, 2022, S. 23ff.; Fischer, 2024, S. 20f.).

Während des psychomotorischen Einsatzes werden „vielfältige Wahrnehmungs- und Bewegungserfahrungen in Handlungssituationen vermittelt“ (Fischer, 2024, S. 19).

„Die Körperlichkeit des Kindes ist das Zentrum seiner Persönlichkeit, der Dreh- und Angelpunkt seiner Existenz. Handeln schließt immer die körperliche Bewegung mit ein. Im Bewegungshandeln lernt das Kind seinen Körper kennen, mit ihm umzugehen, ihn einzusetzen und auf die Umwelt einzuwirken. Die Orientierung am eigenen Körper ist die Basis jeder Orientierung im Raum. Zugleich ist der Körper der Spiegel psychischen Erlebens; über seinen Körper erlebt das Kind seine Befindlichkeit und bringt seine Gefühle und Bedürfnisse zum Ausdruck“ (Fischer, 2024, S. 20).

Diese Kenntnis über die Körperlichkeit gilt ohne Einschränkung bei allen Altersgruppen. Deswegen sind Körper-Erfahrungen/Selbst-Erfahrungen der Schlüssel zum Erfahren von Selbstwirksamkeit (Zimmer, 2022, S. 23).

Die Material-Erfahrungen/Sach-Erfahrungen werden durch Auseinandersetzung mit der räumlich-gegenständlichen Umwelt gesammelt und beeinflussen die kognitiv-emotionalen Entwicklungsimplicationen. „Der Umgang mit Materialien wird zum Medium der Erkenntnisgewinnung“ (Fischer, 2024, S. 20). Zu diesem Zweck eignen sich besonders Materialien, die die Selbstständigkeit und Kreativität anregen. Es werden Alltagsmaterialien bevorzugt, um eine sinnvolle Verbindung zum Alltag zu stiften (Fischer, 2024, S. 20f.).

Die sozialen Kompetenzen, wie kommunizieren, kooperieren, Rücksicht nehmen, Verantwortung tragen, Einfühlungsvermögen zeigen, sich durchsetzen können und viel mehr, können nur in Interaktion mit anderen Menschen erworben werden. Psychisch erlebbare Zustände, wie Wagnis und Abenteuerlust, können pädagogisch im Sinne der Stärkung von Selbst- und Sozialerfahrung sowie Selbstwertgefühl (Anerkennung in der Gruppe) genutzt werden. „Die Erfahrungen gemeinsam durchlebter Abenteuersituationen erweisen sich [...] als persönlichkeitsstärkende Lebenshilfe“ (Fischer, 2024, S. 21).

Die Trennung von Wahrnehmungs- und Bewegungserfahrungen in Körper-, Material- und Sozial-Erfahrungen ist nur in den theoretischen Analysen möglich. In der Praxis wird ein Erfahrungsfeld gegenüber anderen Erfahrungsfeldern hervorgehoben.

4.5 Bedeutungsdimensionen der Bewegungshandlung

Nach psychomotorischem Verständnis ist eine Bewegungshandlung mehr als reine körperliche Aktivität (Kuhlenkamp, 2022, S. 69) und wird als Verwirklichungsmöglichkeit der Persönlichkeit betrachtet (Fischer, 2024, S. 19f.). Fischer (2024, S. 49ff.) analysiert die Bewegungshandlung theoretisch in fünf Bedeutungsdimensionen:

1. *Die impressive und expressive Bedeutung der Bewegungshandlung:*

„Bewegungsaktivität vermittelt Erfahrungen über alle Sinne. [...] Ganzheitliche Körpererfahrungen [sind, d. Verf.] sehr stark emotionelle und vorreflexive Prozesse. [...] Bewegungshandlungen [...], bieten, d. Verf.] Chance und Möglichkeit, Gefühle und persönliche Themen über Körper und Bewegung auszudrücken und auszuleben“ (Fischer, 2024, S. 49).

2. *Die explorative Bedeutung der Bewegungshandlung:*

Eine Kernaufgabe der Bewegungsaktivität ist, Wahrnehmungserfahrungen zu ermöglichen. Über Bewegungshandlung/-spiel werden Entdeckersinn verfolgt und Erfahrungen gesammelt, wie sich verlieren, mit der Aufgabe eins sein und individuelle

Lösungswege finden. Dies ist die „Grundlage für die Entwicklung von Kreativität und Fantasie wie für ausdauerndes Üben“ (Fischer, 2024, S. 49f.).

3. *Personale/psychisch-emotionale/kognitive Bedeutung der Bewegungshandlung:*

Die eigene Person wird in Bewegung erlebt. Bewegung dient als elementares Medium, um Erkenntnisse (wie physikalische Zusammenhänge) und Handlungskompetenz (wie Planungskompetenz) zu gewinnen. In Bewegung werden psychische Zustände (wie Neugier, Spannung, Aufregung, Anstrengung, Enttäuschung) erlebt, eigenes Gefühl verarbeitet und die Persönlichkeit erweitert (Fischer, 2024, S. 50).

4. *Die Sozial-kommunikative Bedeutung der Bewegungshandlung:*

Bewegung als Medium ist die Basis sowohl für soziale Erfahrung als auch für soziale Beziehung. „Bewegungssituationen in der Gruppe sind ein ideales Kommunikations- und Lernfeld“ (Fischer, 2024, S. 50). Im Aushandlungsprozess (wie Abstimmung über Rollen, Partnerschaften und Regeln) werden Sozialkompetenzen (wie Leistungsfähigkeiten und Hilfsbereitschaft) entwickelt (Fischer, 2024, S. 50f.).

5. *Die instrumentelle und produktive Bedeutung der Bewegungshandlung:*

Bewegung kann in allen Lebensbereichen sowohl instrumentell mit Werkzeugcharakter (wie greifen, erreichen, festhalten) als auch funktional (wie Treppen steigen, Radfahren) eingesetzt werden (Fischer, 2024, S. 51).

Bewegung als Medium kann in drei Bereichen betrachtet werden:

- zur Entwicklungsförderung und Persönlichkeitsentwicklung
- zur Gesundheitsförderung
- zum Lernen (Kuhlenkamp, 2022, S. 73ff.)

Im Folgenden wird Bewegung als Medium zum Lernen näher beschrieben.

4.6 Effizientes Lernen: Bewegtes Lernen

Bei effizientem Lernen „handelt [es, d. Verf.] sich dabei um eine Konkretisierung des ganzheitlichen Lernens (Lernen mit mehreren Sinnen), die als *Wiener Schule der Psychomotorik* bezeichnet werden kann“ (Ullmann & Gräsel, 2016). Weiß, Voglsinger und Stuppacher (2016, S. 9) fordern im Rahmen psychomotorischer Lehr- und Lernmethoden, dass „die Gestaltung einer anregenden und sinnstiftenden Umwelt sowie emotionale Sicherheit [...] gewährleistet werden sollen“, und betonen: „Alles, was in Bewegung oder verbunden mit einer Bewegung gelernt wird, bleibt leichter und länger im Gedächtnis. Erst wenn es in den Sinnen ist, ist es im Gedächtnis“ (Weiß, Voglsinger & Stuppacher, 2016, S. 9).

Zum bewegten Lernen werden im Folgenden zwei Modelle vorgestellt.

4.6.1 Das Körper-und-Lernen-Modell nach Moser (2016)

In Anlehnung an Moser (2016, S. 23, Abb. 1) werden Körper und Bewegung in Abb. 4-1 im Zentrum verschiedener Lernbereiche und -prozesse dargestellt. Nach Bedeutungsdimensionen der Bewegungshandlung in Abschnitt 4.5 sind Körper und Bewegung Basis der vier grundlegenden Lernbereiche: Motorisches Lernen, Emotionelles Lernen, Kognitives Lernen und Soziales Lernen. Diese vier Grundlernbereiche sind die Grundlage der Lernprozesse zur Entwicklung von Selbstdarstellung und -regulation (mit mehr Bezug auf soziales Leben) sowie Selbstbild und Identität (mit mehr Bezug auf psychisches Erleben). Das individuelle persönliche Lernen ist eingebettet in einen konkreten Kontext und eine soziokulturelle Umwelt: Kontextuelles Lernen und Kulturelles Lernen (Moser, 2016, S. 23ff.).

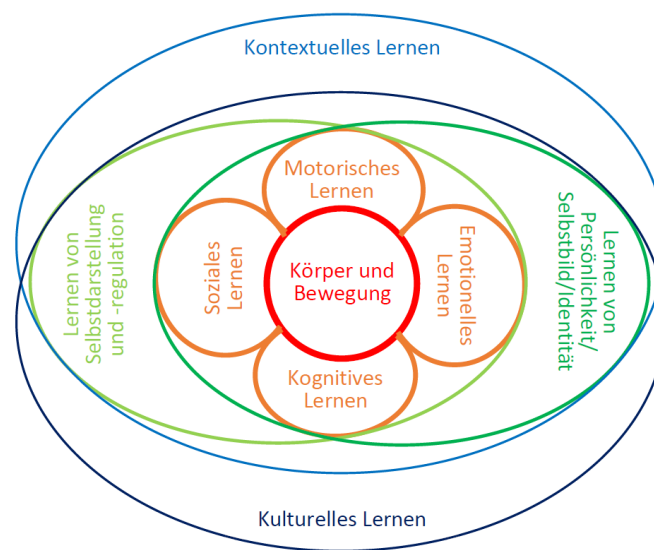


Abb. 4-1: Körper und Bewegung im Zentrum verschiedenen Lernbereiche und -prozesse
(in Anlehnung an Moser, 2016, S. 23, Abbildung 1)

„Hier stehen allerdings Körper und Bewegung als ganzheitliche Phänomene und das Lernen als psychosozialer Prozess im Vordergrund. [...] Lernen findet nicht nur durch Sprache und (kognitive) Informationsverarbeitung statt, sondern auch durch ganzheitliches körperliches Erleben und Handeln, das von historischen, soziokulturellen und materiellen Voraussetzungen und Kontexten beeinflusst wird“ (Moser, 2016, S. 25).

Das Körper-und-Lernen-Modell nach Moser stimmt mit dem Konzept Embodiment überein: Ein Lernprozess kann nur durch zweifache Einbettung im Körper und in der Umwelt erfolgreich sein.

4.6.2 Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept nach Voglsinger (2016)

Dem humanistischen Menschenbild (Abschnitt 4.3) zufolge strebt der Mensch nach Autonomie, Ganzheitlichkeit (Körper-Seele-Geist-Einheit) und soziale Interdependenz (wechselseitige Abhängigkeit). Ziele und Inhalte des psychomotorischen Einsatzes (Abschnitt 4.4) sind Unterstützung dieser Bestrebungen des Menschen durch Bewegung als Medium (Abschnitt 4.5). Um diese in der Praxis umzusetzen, versucht Voglsinger (2016, S. 51) in seinem Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept „einen praxisnahen Rahmen zu beschreiben, der als metatheoretischer Überbau für alle didaktischen und methodischen Überlegungen bei der Gestaltung von Lernprozessen dienen kann“.

Abb. 4-2 stellt das Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept schematisch dar. „‘Bewegung‘ auf der Ebene der Körperlichkeit wird im Sinne von motorischen Fähigkeiten und Fertigkeiten als ‚sich bewegen‘ interpretiert und steht für Aktivität und Handlungsfähigkeit“ (Voglsinger, 2016, S. 53). Die Ebene der Seele (Psyche) „umfasst das ‚bewegt sein‘ mit den Bereichen der Emotion und Motivation“ (Voglsinger, 2016, S. 54). Auf der Ebene der Kognition kommt „das ‚Bewegte Denken‘ [...] vor allem in der Kreativität und Flexibilität zum Ausdruck“ (Voglsinger, 2016, S. 56). Auf der Ebene der sozialen Aspekte steht „‘Aufeinander-Zubewegen‘ [...] für Dialog und Kommunikation“ (Voglsinger, 2016, S. 58). Die Trennung dieser Ebenen hat eher einen analytischen Charakter. der Begriff „Bewegung“ in Bezug auf menschliches Sein soll ganzheitlich verstanden werden. „‘Bewegtes Lernen‘ und ‚Bewegtes Denken‘ [...] stehen in einem engen Wechselbezug zueinander“ betont Voglsinger (2016, S. 60).

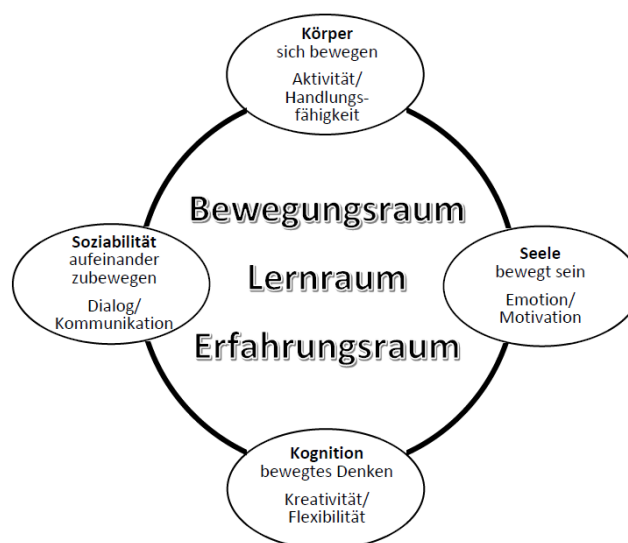


Abb. 4-2: Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept
(mod. n. Voglsinger, 2016, S. 52, Abbildung 1)

4.7 Auswirkung des bewegten Lernens zum Erwerb numerischer Kompetenzen

Bewegtes Lernen wird zum Erwerb numerischer Kompetenzen bewusst oder unbewusst eingesetzt. Zum Erwerb der Zahlwortreihe (Abschnitt 6.2.1) und Zählkompetenz (Abschnitt 6.2.2) in verschiedenen Kulturkreisen werden die Finger auf unterschiedliche Weisen verwendet. Zur Auswirkung des (fingerbasierten) bewegten Lernens auf den Erwerb numerischer Kompetenzen gibt es zahlreiche Studien.

Während der Kopfrechnung nach einer fingerbasierten Intervention haben Artemenko et al. (2022) in ihren Studien mit Erstklässlern eine Aktivierung im sensomotorischen Kortex beobachtet. Ihre Deutung war, dass fingerbasiertes Zählen, Mengendarstellung auf 10er-Basis und Berechnen Spuren im Gehirn hinterlassen.

Domahs, Moeller, Huber, Willmes und Nuerk (2010) legen nahe, dass die Finger-Zählen-Gewohnheit über ein bestimmtes Entwicklungsstadium hinaus die Struktur der Zahlenverarbeitung, wie Zahlenvergleich im Erwachsenenalter, beeinflusst. Damit unterstreichen sie „embodied numerosity“: Die Zahlendarstellung der Erwachsenen basiert auf (fingerbasierten) körperlichen Erfahrungen.

Zur Feinmotorik gehören Fingermotorik und Graphomotorik. Fingeragnosie ist die Fähigkeit, die Finger ohne visuelle Kontrolle identifizieren und voneinander unterscheiden zu können. Nach der Analyse von 32 relevanten empirischen Arbeiten zum Zusammenhang zwischen Feinmotorik, Fingeragnosie und frühen mathematischen Fähigkeiten (wie Zahlwortreihe und Zählen, Zahlgröße verstehen, Zahlraumvorstellung sowie Rechnen) fanden Roesch, Bahnmüller, Barrocas und Moeller (2022, S. 152) heraus, dass „bessere Feinmotorik bzw. Fingeragnosie mit besseren mathematischen Fähigkeiten einhergingen und sich die spätere Mathematikleistung zumindest teilweise anhand früherer Feinmotorik bzw. Fingeragnosie vorhersagen ließ.“ Für die Praxis vermuten Roesch et al. (2022, S. 155), „dass sich eine Förderung spezifischer Aspekte der Feinmotorik [...] und Fingeragnosie in Kombination mit einer fingerbasierten mathematischen Förderung [...] positiv auf frühe mathematische Fähigkeiten auswirken könnte, da dies ein leichteres und erfolgreiches Verwenden der Finger zum Zählen, Mengendarstellen und Rechnen ermöglicht.“

In „Bewegtes Lernen numerischer Kompetenzen“ ziehen Dackermann, Fischer, Cress, Nuerk und Moeller (2016, S. 107f.) „eine positive Bilanz für die Wirksamkeit verkörperlichter numerischer Trainings“, sowohl für Trainingseffekte als auch für Transfereffekte. Körperliche Bewegung wie „Gehen auf dem Zahlenstrahl“ hat positiven Einfluss [...] auf räumlich-numerische Assoziationen. Das „Gehen auf dem Zahlenstrahl“ wird im Kapitel 7 beschrieben. Im Folgenden wird mathematisches Denken dargestellt.

5 Mathematisches Denken

In diesem Kapitel wird Mathematik über die Geschichte der Mathematik hinweg als Wissenschaft von Mustern und Strukturen vorgestellt. Anschließend werden mathematisch-prozessbezogenes Denken und mathematikbezogene Informationsbearbeitung beschrieben.

5.1 Was ist Mathematik?

Die Geschichte der Mathematik ist ein Teil der Kulturgeschichte der Menschheit (Wußing, 2008, S. 1). Durch eine stetige Entwicklung über Jahrtausende hinweg bietet die Mathematik nützliche Werkzeuge und Hilfsmittel für alle Wissenschaften, besonders für Informatik, Naturwissenschaften und Technik, und erleichtert das Alltagsleben. Mathematik ist eine eigenständige Wissenschaft und „Schlüssel zum Verständnis der Welt“ (Loos, Sinn & Ziegler, 2022, S. 4ff.), obwohl der Begriff „Mathematik“ nicht eindeutig zu definieren ist.

„Genauso wie bei vielen anderen Erscheinungsformen des Lebens (Philosophie, Musik, Liebe) kann Mathematik nicht eindeutig definiert werden.

Jede Definition wäre entweder nichtssagend oder zu einengend. Man kann aber versuchen, Mathematik von verschiedenen Seiten zu beleuchten. Dabei offenbaren sich überraschende und tiefe Einblicke in das Wesen der Mathematik“ (Beutelspacher, 2009, S. 3).

Die Antwort auf die Frage „Was ist Mathematik?“ hat sich im Laufe der Zeit mehrmals verändert (Devlin, 2002b, S. 2). „Die Definition der Mathematik wechselt. Jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker innerhalb einer Generation formuliert eine Definition, die seinen Fähigkeiten und seinen Einsichten entspricht“ (Davis & Hersh, 1981, S. 4).

Bis ca. 500 v. Chr. war Mathematik die Lehre von Zahlen. Über ca. 2400 Jahren hinweg entwickelte sich die Mathematik zum Ende des 19. Jahrhunderts zur „Lehre von Zahlen, geometrischen Formen, Bewegungen, Veränderungen, des mehrdimensionalen Raums und der Methoden, die bei deren Untersuchung eingesetzt wurden“ (Devlin, 2002a, S. 20ff.; Devlin, 2002b, S. 2f.). Im Verlauf des 20. Jahrhunderts entwickelte sich die Mathematik zu einer eigenständigen Wissenschaft und der Inhalt der Mathematik nahm rapide zu. Viele neue Bereiche kamen dazu und manche alte Bereiche haben sich aufgespalten (Loos et al., 2022, S. 18ff.; Devlin, 2002b, S. 4f.). Eine Auflistung der einzelnen Bereiche würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Eine sehr kurze Übersicht der Entwicklung der Mathematik wird in Tab. 5-1 dargestellt. Nach der Wissensexplosion wird Mathematik sich als eine eigenständige Wissenschaft neu definieren (Loos et al., 2022, S. 18).

Tab. 5-1: Übersicht Inhalt der Mathematik

	Inhalt der Mathematik	Anmerkung
Bis 500 v. Chr.	Die Lehre • von den Zahlen (Arithmetik)	anwendungsorientiert, rezepthaft
Von 500 v. Chr. bis 300 n. Chr.	Die Lehre • von den Zahlen (Arithmetik) und • von geometrischen Formen (Geometrie)	Griechische Mathematik, logisches Denken (deduktive Wissenschaft); Euklid: Die Elemente
9. – 17. Jh.	Algebra und modernen mathematischen Notation beginnen allmählich zu entstehen	Arabische Einflüsse
17. Jh.	Die Lehre • von den Zahlen, • von geometrischen Formen, • von Bewegungen, • von Veränderungen und • des mehrdimensionalen Raums	Differential- und Integralrechnung (Analysis); Lösen von nichtstatischen Problemen
18. / 19. Jh.	Die Lehre • von den Zahlen, • von geometrischen Formen, • von Bewegungen, • von Veränderungen, • des mehrdimensionalen Raums und • der Methoden, die bei deren Untersuchung eingesetzt wurden	Der Beginn der modernen Mathematik; Mathematik beginnt, sich zu einer eigenständigen Wissenschaft zu entwickeln.
20. Jh.	Mathematische Wissensexplosion	Moderne Mathematik, Mathematik als eine eigenständige Wissenschaft

Quelle: Devlin (2002a, S. 20ff.); Devlin (2002b, S. 2f.); Loos, Sinn & Ziegler (2022, S. 17f.); Davis & Hersh (1981, S. 3). Eigene Darstellung.

5.2 Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen

In „Muster der Mathematik“ formuliert Devlin (2002b, S. 5):

„In den letzten zwanzig Jahren ist eine Definition aufgekommen, der wohl die meisten heutigen Mathematiker zustimmen würden: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte „Muster“ – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Innern.“

In Verlauf des Buchs nennt Devlin (2002b, S. 5ff.) Muster und Strukturen oft gleichzeitig. Shapiro (2000, S. 257 - 289) beschreibt die Mathematik als Wissenschaft der Strukturen.

Muster und Struktur in Bezug auf Mathematik werden meistens auf verschiedene Eigenschaften gerichtet: Muster ist auf äußere Erscheinung gerichtet und Struktur auf inneren Zusammenhang (Schulte-Wißing, 2020, S. 8 - 21).

Um den Unterschied von Muster und Struktur zu veranschaulichen, liefert Schulte-Wißing (2020, S. 19f.) folgendes Beispiel:

Betrachten wir das Muster und die Struktur folgender Zahlenfolge

233, 244, 255, 266, 277, 288, 299.

Das Muster (äußere Erscheinung): Alle Hunderte stellen sind mit gleicher Ziffer „2“; Zehner und Einer sind mit derselben Ziffer „33, 44, ..., 99“.

Die Struktur (innerer Zusammenhang): Die nachfolgende Zahl ist um elf mehr.

Nun wird diese Zahlenfolge fortgeführt:

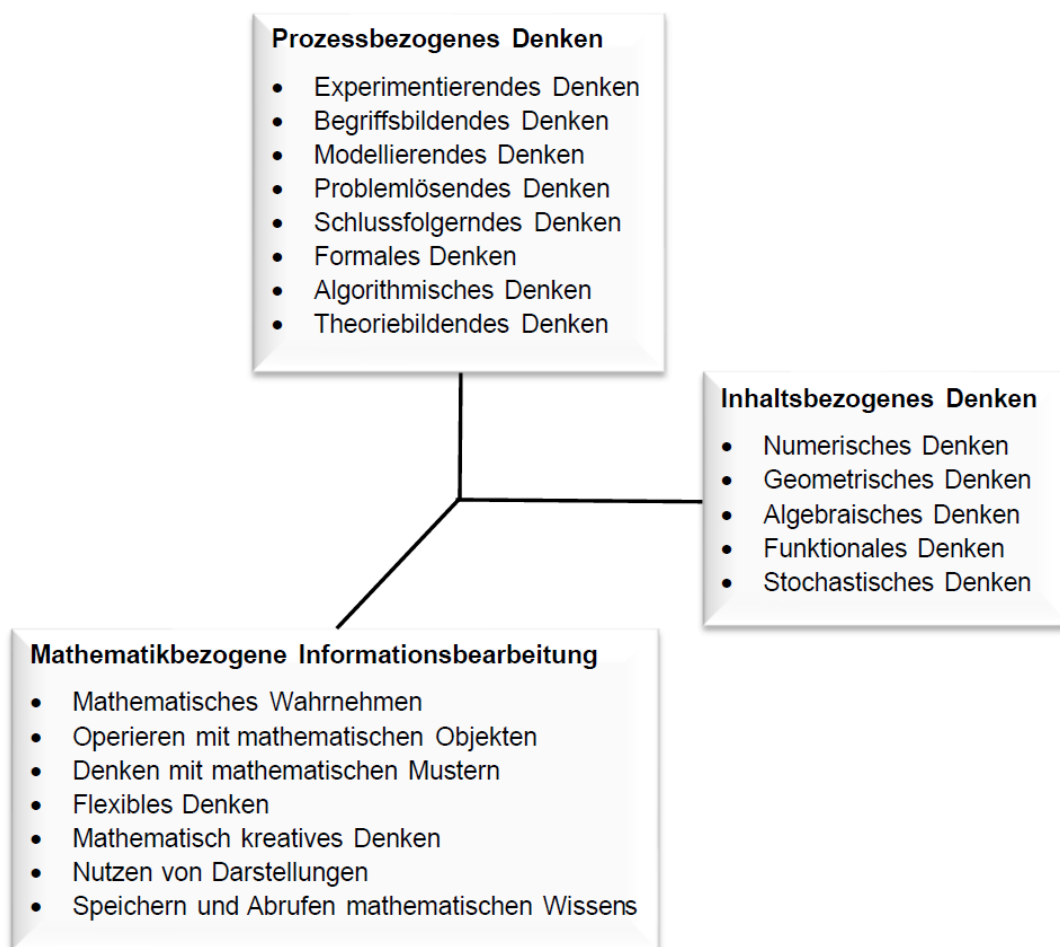
310, 321, 332, 343, 354

Ihre Struktur (um elf mehr) ist erhalten. Aber das Muster hat sich verändert: Zehner und Einer haben nicht mehr die gleiche Ziffer, sondern sind verschieden (Schulte-Wißing, 2020, S. 19f.).

Mathematik als Wissenschaft von Mustern und Strukturen findet Zustimmung in der frühen mathematischen Bildung und Fachmathematik sowie in der Mathematikdidaktik (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 8; Ulm & Zehnder, 2020, S. 20 - 23; Schulte-Wißing, 2020, S. 8 - 21). Die Autorin der vorliegenden Arbeit schließt sich dieser Auffassung an, da die mathematisch-operative Vorstellungen, die in dieser Arbeit bearbeitet werden, hauptsächlich im Bereich der Sekundarstufe liegen.

5.3 Mathematisches Denken

Ulm und Zehnder (2020, S. 3f.) differenzieren das mathematische Denken in der Sekundarstufe in verschiedene Facetten und klassifizieren diese in drei Dimensionen: prozessbezogenes Denken, inhaltsbezogenes Denken und mathematikbezogene Informationsbearbeitung. Eine modifizierte Darstellung des vereinfachten und idealisierten Modells von mathematischem Denken zeigt Abb. 5-1.



*Abb. 5-1: Facetten mathematischen Denkens in der Sekundarstufe
(mod. n. Ulm & Zehnder, 2020, S. 3, Abb. 1.1)*

Analog werden die bedeutsamen Kompetenzbereiche des mathematischen Denkens in der frühen Kindheit auch in drei Dimensionen zusammengefasst: Prozessbezogene Kompetenzen, inhaltsbezogene Kompetenzen und basale Kompetenzen für mathematisches Lernen (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 22 - 49). Eine Veranschaulichung zeigt Abb. 5-2. Die prozessbezogenen Kompetenzen sind die Basen des prozessbezogenen Denkens. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen sind die Basen des inhaltsbezogenen Denkens. Die basalen Kompetenzen für mathematisches Lernen sind Basen der mathematikbezogenen Informationsbearbeitung. Meiner Meinung nach hängt die Entwicklung des mathematischen Denkens eng mit den Entwicklungen der basalen Kompetenzen und der mathematikbezogenen Informationsbearbeitung zusammen. Durch die mathematikbezogene Informationsbearbeitung werden die wechselseitigen Einflussnahmen von Geist, Gehirn, Körper und Umwelt nach dem Konzept Embodiment im Abschnitt 3.2.1 in Gang gesetzt.

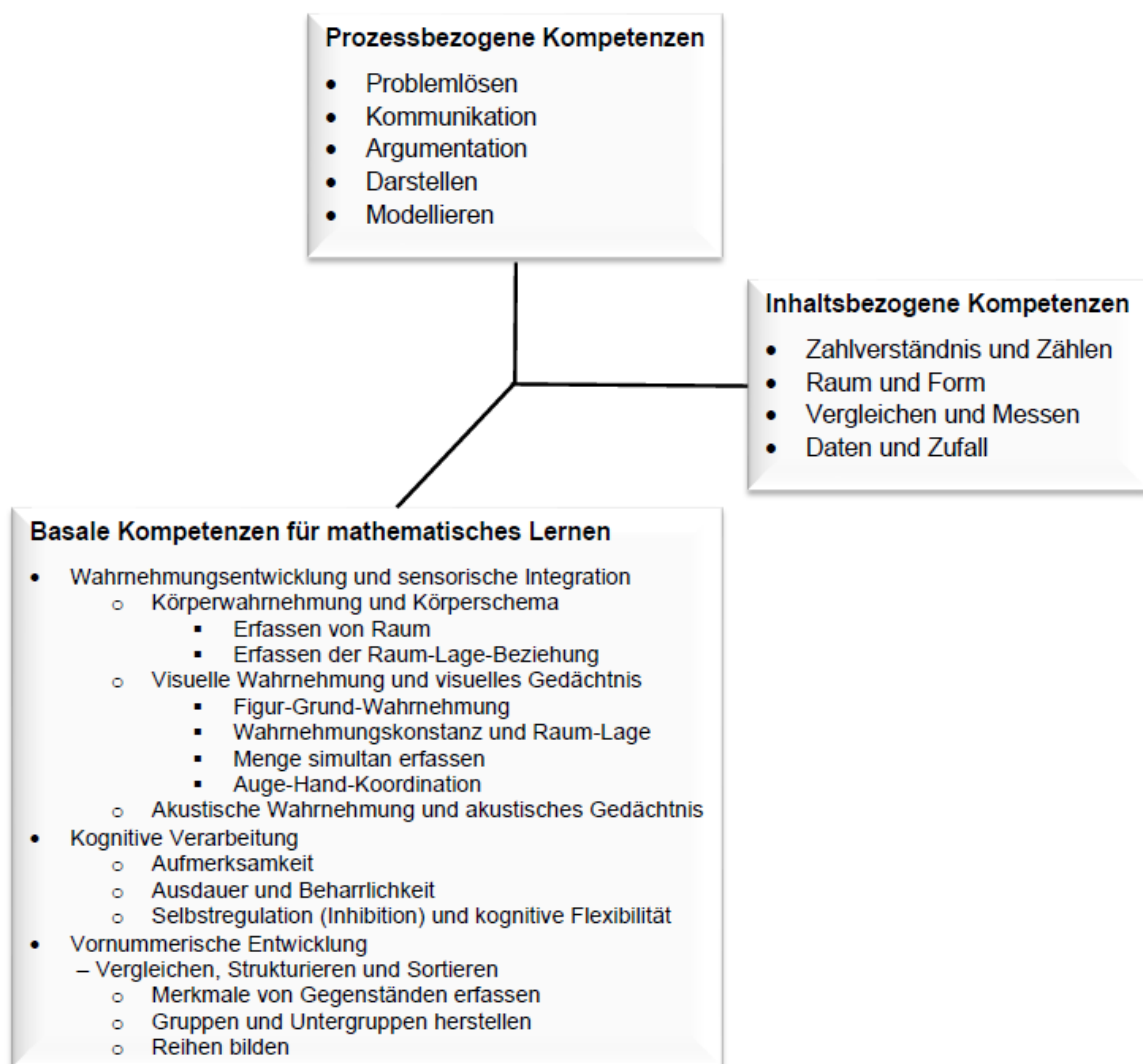


Abb. 5-2: Bedeutsame Kompetenzbereiche des mathematischen Denkens in der frühen Kindheit.
(Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 22 – 49. Eigene Darstellung)

5.3.1 Prozessbezogenes mathematisches Denken

Das Prozessbezogene mathematische Denken ist unabhängig vom jeweiligen mathematischen Inhalt (Ulm & Zehnder, 2020, S. 4). Seine verschiedenen Facetten sind vernetzt. „Sie können bei der Beschäftigung mit Mathematik nebeneinander oder miteinander verwoben verlaufen“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 18). Diese werden folgendermaßen charakterisiert:

5.3.1.1 Experimentierendes Denken

Es wird mit mathematischen Objekten experimentiert, um gewählte Themenfelder zu erforschen und dadurch Erkenntnisse zu gewinnen. Es kann mit realen Gegenständen und Zeichnungen durchgeführt werden, wenn damit die mathematische Abstraktion unterstützt wird. Fehler, Irrwege und Rückschritte sind normale Erscheinung beim Erkunden von mathematischen Ereignissen. Dadurch können neue Kenntnisse gewonnen werden. Experimentierendes Denken spielt eine Schlüsselrolle beim „forschenden Lernen“. Beispiele untersuchen, Beobachtungen strukturieren, Vermutungen aufstellen und überprüfen (ggf. modifizieren) gehören zu diesen Prozessen (Ulm & Zehnder, 2020, S. 4f.).

5.3.1.2 Begriffsbildendes Denken

Begriffsbildendes Denken ist der Prozess der Entwicklung von Verständnis für einen mathematischen Begriff. „Begriffe verdichten und ordnen Erkenntnisse, sie sind Grundlage für sprachliche Kommunikation und Werkzeuge des Denkens“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 5).

Die mathematischen Begriffe können gruppiert werden:

- Begriffe für Objekte, z. B. Kreis, Durchmesser, Umfang, Primzahl,
- Begriffe für Eigenschaften von Objekten, z. B. punktsymmetrisch, irrational,
- Begriffe für Relationen zwischen Objekten, z. B. „ist Teiler von“, „ist die Ableitungsfunktion von“, die Kreiszahl π („ist das Verhältnis zwischen dem Umfang eines Kreises und dessen Durchmesser“),
- Begriffe für Prozesse zum Umgang mit Objekten, z. B. „geteilt durch“, „eine lineare Gleichung lösen“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 5).

Ein mathematischer Begriff kann sowohl durch Abstrahieren von konkreten Beispielen als auch durch Spezifizieren eines Oberbegriffs gebildet werden. Dabei ist wichtig, Grundvorstellungen zu einem Begriff zu entwickeln. Mit Grundvorstellungen werden der Begriffsinhalt und seine mathematische Bedeutung erfasst. Dadurch kann „man mit dem Begriff verständnisvoll umgehen und ihn anwenden“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 7). Die Grundvorstellungen zu einem Begriff entwickeln sich durch sinnhaltige Beschäftigung und Erfahrung mit Aspekten des Begriffs (Ulm & Zehnder, 2020, S. 5ff.). Diese Erfahrungen können durch das Experimentieren mit mathematischen Objekten gesammelt werden.

5.3.1.3 Modellierendes Denken

„Modellierendes Denken bezeichnet die Gesamtheit der spezifischen Denkprozesse, die zum Durchlaufen eines Modellierungskreislaufs erforderlich sind“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 7). Ein Modellierungskreislauf (Abb. 5-3) startet mit einem realen Problem. Durch das Vereinfachen, Mathematisieren, mathematische Bearbeiten, Interpretieren und Validieren, sowie über Reales Modell, Mathematisches Modell, Mathematisches Resultat und Reales Resultat schließt sich der Kreis (Ulm & Zehnder, 2020, S. 7f.). Hier wird deutlich: „Die Mathematik ist eine objektive Realität, die weder subjektiv noch physikalisch ist. Sie ist eine ideale (d. h. nicht physikalische) Realität, die objektiv (also außerhalb des Bewußtseins jeder Einzelperson) ist“ (Davis & Hersh, 1981, S. 434).

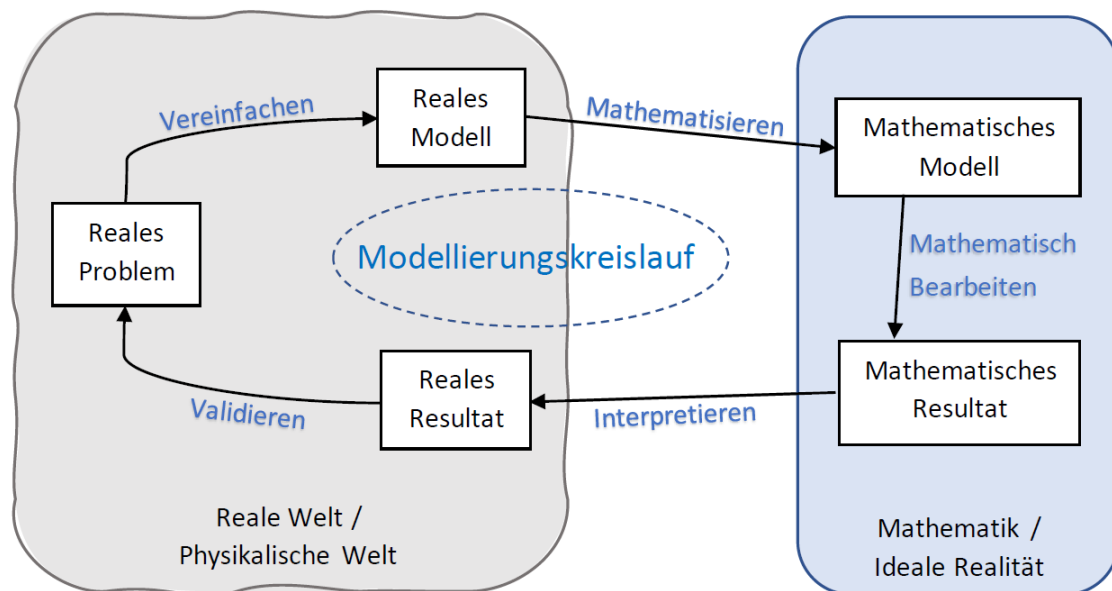


Abb. 5-3: Modellierungskreislauf (mod. n. Ulm & Zehnder, 2020, S. 7, Abb. 1.2;
Davis & Hersh, 1981, S. 434)

5.3.1.4 Problemlösendes Denken

„Problemlösendes Denken bezeichnet [...] kognitive Prozesse, die darauf abzielen, den Ausgangs- in den Zielzustand zu überführen und dabei die (personenspezifische) Barriere zu überwinden. [...] Der Begriff des Problems besitzt [...] eine stark individuelle Komponente“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 8). Zwar kann anhand der Analyse des Problems durch Planung, Reflexion und Selbstregulation mit heuristischen Strategien und Prinzipien versucht werden, einen Weg zu finden, um die Barriere zu überwinden. Das Lösen eines realen Problems lässt sich jedoch oft nicht schematisch abarbeiten. Um ein Problem zu lösen, sind Intuition und kreatives Denken gefragt (Ulm & Zehnder, 2020, S. 9ff.).

5.3.1.5 Schlussfolgerndes Denken

„Schlussfolgerndes Denken bedeutet, durch schlüssige [logische, d. Verf.] Gedankenführung Aussagen zu begründen“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 11). Es wird innerhalb und außerhalb der Mathematik angewendet, um das Verifizieren und Erklären einer Aussage, Kommunizieren (Wissen vermitteln), Entdecken neuer Ergebnisse und Herstellen der Zusammenhänge von Begriffen und Aussagen zu vollziehen (Ulm & Zehnder, 2020, S. 14f.).

5.3.1.6 Formales Denken

Formales Denken bezeichnet „den interpretationsfreien, regelhaften gedanklichen Umgang mit mathematischen Objekten“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 15). Durch die Unabhängigkeit der mathematischen Objekte von inhaltlichen Interpretationen und ihre Selbständigkeit wird die Mathematik zu einer eigenständigen Wissenschaft. Damit ist sie stark und effizient.

„Formales Denken ist [...] eine typisch mathematische Denkweise. Sie ermöglicht, mathematische Ergebnisse und Erkenntnisse durch die Anwendung von Regeln und Verfahren zu gewinnen. Die Gültigkeit der Resultate wird dabei innermathematisch dadurch gesichert, dass die Schritte zu den Ergebnissen auf als wahr anerkannten Aussagen basieren und sie aus der Anwendung von als korrekt angenommenen Schlussweisen resultieren. Jedes Rechenverfahren und auch jede mathematische Theorie gründen sich auf dieses Prinzip“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 15).

5.3.1.7 Algorithmisches Denken

Algorithmisches Denken ist eine Denkweise für den Umgang mit Algorithmen (Ulm & Zehnder, 2020, S. 16). „Ein Algorithmus ist eine endliche Folge von eindeutig bestimmten Elementaranweisungen, die den Lösungsweg eines Problems exakt und vollständig beschreiben“ (Ziegenbalg, Ziegenbalg & Ziegenbalg, 2016, S. 26). „Algorithmen ermöglichen es, komplexe, schwer überschaubare Probleme zu lösen, indem man einfachere, kleinere Schritte ausführt“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 15).

5.3.1.8 Theoriebildendes Denken

Durch experimentierendes, begriffsbildendes, modellierendes, problemlösendes, schlussfolgerndes, formales und algorithmisches Denken werden „Begriffe, Definitionen, Sätze, Beweise und Verfahren [...] gewonnen, systematisiert und zu einem schlüssigen Theoriegewebe vernetzt. Diese Theorie wird schriftlich dokumentiert und dabei ggf. bezüglich

Eleganz und Allgemeinheit optimiert sowie mit anderen Theorien verknüpft“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 18). Diese Denkweise beschreibt theoriebildendes Denken.

5.3.2 Mathematikbezogene Informationsbearbeitung

Mathematikbezogene Informationsbearbeitung basiert auf entsprechenden kognitiven Prozessen. Sie ist ein Bestandteil des mathematischen Denkens (Ulm & Zehnder, 2020, S. 19). Ihre verschiedenen Facetten werden zwar einzeln erläutert, sollen jedoch nicht isoliert betrachtet werden (Ulm & Zehnder, 2020, S. 31). Sie sind miteinander und mit den Aspekten des prozessbezogenen mathematischen Denkens verwoben.

5.3.2.1 Basale Kompetenzen für mathematisches Lernen

Beim Lernen „ist wichtig, genau wahrnehmen zu können, um zu unterscheiden, ob eine Information wesentlich ist oder nicht und worauf sich die Aufmerksamkeit richten soll. Das gilt auch für das mathematische Lernen“ (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 24). Deswegen gehören folgende Aspekte zu den basalen Kompetenzen für mathematisches Lernen:

- Körperwahrnehmung und Körperschema zum Erfassen von Raum und Raum-Lage-Beziehung
- Visuelle Wahrnehmung und visuelles Gedächtnis mit Figur-Grund-Wahrnehmung, Wahrnehmungskonstanz und Raum-Lage, Menge simultan Erfassen sowie Auge-Hand-Koordination
- Akustische Wahrnehmung und akustisches Gedächtnis
- Kognitive Verarbeitung mit den Bereichen Aufmerksamkeit, Ausdauer und Beharrlichkeit sowie Selbstregulation und kognitive Flexibilität
- Vornumerische Entwicklung: vergleichen, strukturieren und sortieren von Mengen, darunter Merkmale von Gegenständen erfassen, Gruppen und Untergruppen herstellen sowie Reihen bilden (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 24f.)

Die basalen Kompetenzen für mathematisches Lernen werden in Abb. 5-2 dargestellt. Im Folgenden werden mathematikbezogene Kompetenzen (Abb. 5-1) vorgestellt.

5.3.2.2 Mathematisches Wahrnehmen

Elementare Wahrnehmung über die Sinne und die Wahrnehmung der Lage und der Bewegung des eigenen Körpers im Raum sind Basis für den Gewinn von Informationen. Bei mathematischem Wahrnehmen werden die wahrgenommenen Informationen mit einer inhaltlichen mathematischen Bedeutung interpretiert. Das mathematische Wahrnehmen kann in der realen Welt durch eine „mathematische Brille“ (mathematische Sensibilität)

geschehen. Es ist wichtig für zwischenmenschliche mathematische Kommunikation und notwendig, um mathematische Strukturen zu erfassen (Ulm & Zehnder, 2020, S. 19).

„Beim mathematischen Wahrnehmen sind relevante Informationen in einer Situation herauszufiltern, mit mathematischem Vorwissen zu verknüpfen, gedanklich zu ordnen, um daraus Vorstellungen zum mathematischen Gehalt der Situation zu entwickeln. Derartige Prozesse können sowohl bewusst als auch unbewusst und intuitiv erfolgen. Auf Basis der Wahrnehmung können mathematikbezogene Emotionen entstehen“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 19).

Das mathematische Wahrnehmen kann stark von mathematikbezogenen Emotionen wie Matheangst beeinträchtigt werden. Für ein erfolgreiches Mathematiklernen ist wichtig, mathematisches Wahrnehmen mit positiven Emotionen zu verbinden.

5.3.2.3 Operieren mit mathematischen Objekten

Um Informationen zu gewinnen, können mathematische Objekte sowohl real-situativ als auch in der Vorstellung behandelt werden. Die Möglichkeiten, mit mathematischen Objekten zu operieren sind vielfältig. Beispiel: Die natürlichen Zahlen können ergänzt, zerlegt, halbiert, verdoppelt, addiert, faktorisiert, quadriert, ..., werden. Um zielführende Operationen zu finden, sind mathematisches Fachwissen und Erfahrung mit möglichen Operationen notwendig (Ulm & Zehnder, 2020, S. 20).

5.3.2.4 Denken mit mathematischen Mustern

Unter mathematischen Mustern sind hier auch mathematische Strukturen eingeschlossen. Mathematisches Muster sind effiziente Werkzeuge des mathematischen Denkens und entlasten das Arbeits- und Langzeitgedächtnis. Durch das Erwerben der Fähigkeit, Muster zu nutzen, können bessere Lernfortschritte erzielt werden (Ulm & Zehnder, 2020, S. 20 - 23).

5.3.2.5 Flexibles Denken

„Flexibilität beim mathematischen Denken bedeutet, nicht auf einen ‚Denkweg‘ festgelegt zu sein, sondern vielfältige Wege beim Denken einschlagen zu können“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 23). Flexibles Denken und vernetztes Wissen profitieren voneinander (Ulm & Zehnder, 2020, S. 25).

5.3.2.6 Mathematisch kreatives Denken

„Mathematisch kreatives Denken bezeichnet die gedankliche Entwicklung neuer mathematischer Ideen. Mathematische Kreativität ist die Fähigkeit einer Person zu mathematisch kreativem Denken“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 25). Aus absoluter Kreativität entsteht eine Idee neu für die Menschheit. Und aus relativer Kreativität ist die Idee neu für das Individuum. Im Folgenden ist mit „Kreativität“ die relative (persönliche) Kreativität gemeint. Kreativität kann sich auf Prozess, Produkt, Person und Umwelt (Umgebung) beziehen und durch Originalität differenziert werden. Eine unkonventionelle Idee wird als originell bezeichnet (Ulm & Zehnder, 2020, S. 25f.). „Mathematisch kreatives Denken kann in allen Facetten prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Denkens [...] auftreten“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 26).

5.3.2.7 Nutzen von Darstellungen

„Darstellungen geben Denkanstöße, mit Darstellungen werden Gedanken entwickelt, konkretisiert, geordnet, fixiert, dokumentiert und kommuniziert“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 28). Mathematische Sachverhalte können auf verschiedenen Repräsentationsebenen dargestellt werden:

- Real-situative Ebene: Bewusste Gestaltung der Realsituation, um Prozesse des mathematischen Denkens zu erfahren;
- Ikonische Ebene: Anfertigung einer Skizze der Realsituation und Abstrahieren über Zwischenstufen bis zum Funktionsgraph, um mathematische Muster (Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen) zu entdecken und herauszuarbeiten;
- Symbolische Ebene: Das Präzisieren und Verallgemeinern mit verbal-symbolischer oder mathematisch-symbolischer Darstellung (Ulm & Zehnder, 2020, S. 28ff.).

Flexibles Wechseln zwischen Darstellungen sowohl auf einer Repräsentationsebene als auch auf verschiedenen Ebenen ist essenziell für die Entwicklung des mathematischen Denkens (Ulm & Zehnder, 2020, S. 28). Dies stimmt mit dem E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung nach Bruner überein, siehe Kapitel 2 und Abschnitt 3.3.3.

5.3.2.8 Speichern und Abrufen mathematischen Wissens

„Wissen stellt einen relativ dauerhaften Inhalt des Gedächtnisses dar, dessen Bedeutung durch soziale Übereinkunft festgelegt ist. Von Wissen eines bestimmten Menschen ist in der Regel nur die Rede, wenn er Überzeugung von der Gültigkeit dieses Wissens hat“ (Gruber & Stamouli, 2021, S. 32). Mathematisches Wissen ist allgemeines Wissen und wird durch mathematisches Denken erworben, organisiert, vernetzt, weiterentwickelt, gespeichert und abgerufen (Ulm & Zehnder, 2020, S. 30). Das Speichern mathematischen Wissens und das Abrufen gespeicherten mathematischen Wissens (Vorwissen) sind die Basen

sowohl für die Anwendung von mathematischem Wissen als auch für die Vernetzung und Weiterentwicklung von verschiedenen Aspekten mathematischen Denkens. Das Speichern und Abrufen mathematischen Wissens sind in der Gedächtnisforschung eingebettet.

5.3.3 Gedächtnismodelle

Das menschliche Gedächtnis kann nach der Zeitspanne der Speicherdauer zwischen drei modalen Komponenten differenziert werden: Sensorisches Gedächtnis, Arbeitsgedächtnis und Langzeitgedächtnis (Buchner & Brandt, 2017, S. 402f.). In Abb. 5-4 wird dieses modale Gedächtnismodell schematisch dargestellt.

Das sensorische Gedächtnis ist „Schnittstelle zwischen Wahrnehmung und Gedächtnis, an der Information für sehr kurze Zeit in einem ‚reizspezifischen‘ Format vorliegen soll“ (Buchner & Brandt, 2017, S. 430). Da Information entsprechend gespeichert werden soll, werden die Komponenten des sensorischen Gedächtnisses als sensorische Register bezeichnet (Buchner & Brandt, 2017, S. 427). Wegen der sehr kurzen Dauer der Bereithaltung von reizspezifischer Information ist das sensorische Gedächtnis auch als Ultrakurzzeitgedächtnis bekannt (Renkl, 2021, S. 8).

Arbeitsgedächtnis ist „Struktur zur kurzfristigen Speicherung und Manipulation von Information. Am besten untersucht sind Arbeitsgedächtnisstrukturen für phonologische und visuelle [-räumliche, d. Verf.] Reizformate. Einer zentralen Exekutive werden Kontrollprozesse im Sinne eines Aufmerksamkeitssystems zugeordnet“ (Buchner & Brandt, 2017, S. 429). Im phonologischen Subsystem werden akustische und artikulatorische Informationen verarbeitet. Im visuell-räumlichen Subsystem werden visuelle Wahrnehmung und Vorstellungen verarbeitet. Im episodischen Puffer wird Information manipuliert, verknüpft und in einem multimodalen Code (Modul) repräsentiert. Die zentrale Exekutive

- vergibt Prioritäten für die Informationsverarbeitung,
- unterbricht bei Bedarf Routineprozesse,
- überwacht nichtroutinisierte Prozesse,
- vergleicht Handlungsergebnisse mit Handlungszielen,
- fügt Informationen aus verschiedenen Quellen zu einer einheitlichen episodischen Repräsentation zusammen,
- kontrolliert die Subsysteme,
- und vieles mehr (Buchner & Brandt, 2017, S. 425).

Diese zusammenhängenden Tätigkeiten können den Gegenstand des Bewusstseins bilden (Buchner & Brandt, 2017, S. 424f.).

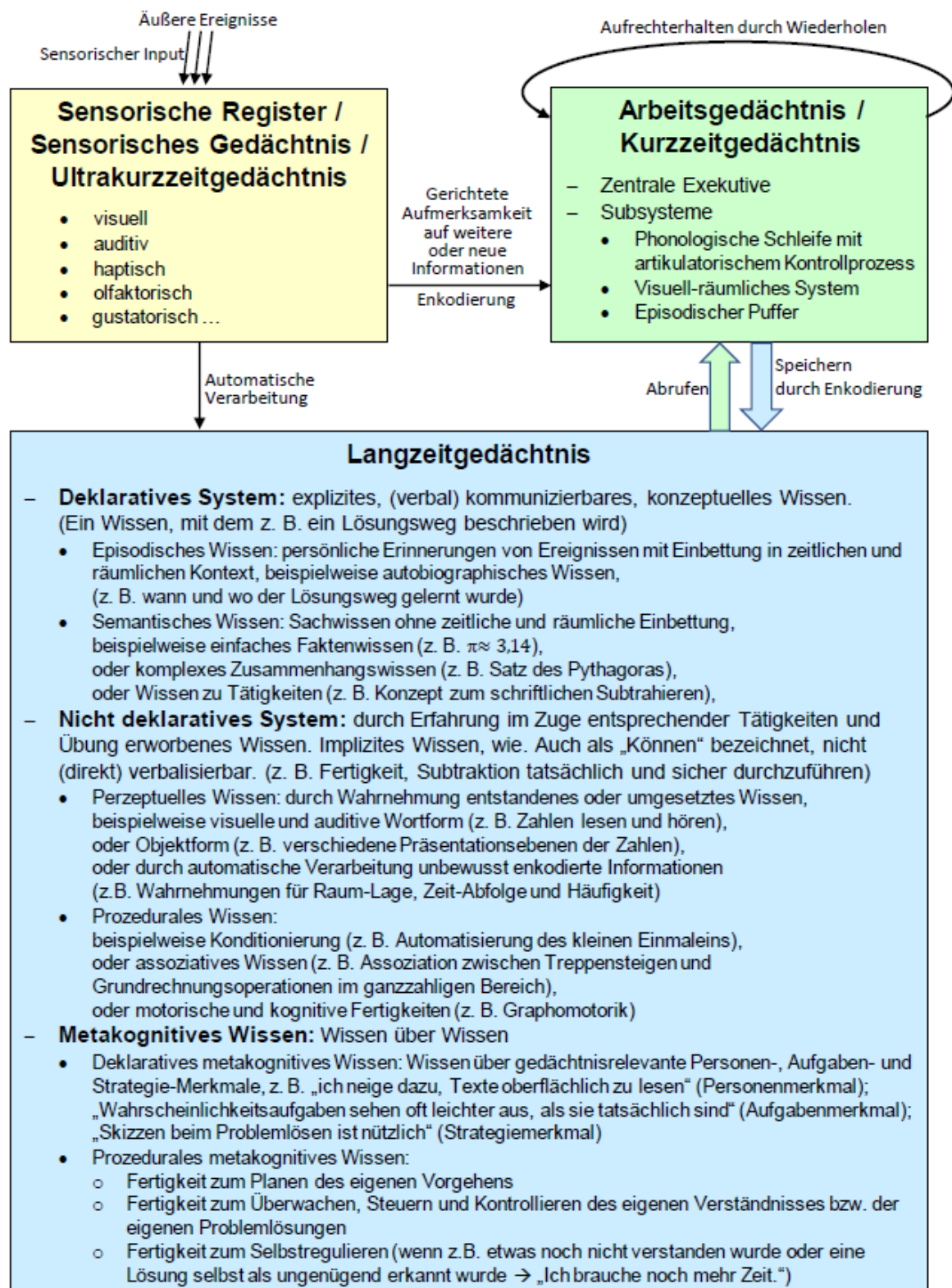


Abb. 5-4: Schematische Darstellung des modalen Gedächtnismodells

(mod. n. Buchner & Brandt, 2017, S. 403, Abb. 12.1; Myers & DeWall, 2023, S. 360, Abb. 9.5; Renkl, 2021, S. 4f.; Ulm & Zehnder, 2020, S. 30)

Langzeitgedächtnis ist „Struktur zur dauerhaften Speicherung von Information“ (Buchner & Brandt, 2017, S. 430) und wird empirisch zwischen deklarativem und nicht deklarativem System unterteilt. Deklaratives Gedächtnis umfasst verbal leicht kommunizierbares Wissen über Fakten sowie Ereignisse und wird als „Wissen, dass“ bezeichnet. Es kann weiter zwischen episodischem und semantischem Wissen differenziert werden. Episodisches Wissen ist die in zeitlichen und räumlichen Kontext eingebettete persönliche Erinnerung von Ereignissen. Semantisches Wissen ist allgemeingültiges Sachwissen. Am Anfang eines Lernprozesses wird deklaratives Wissen flexibel und speziell erworben. Beispielsweise werden durch das Experimentieren mit mathematischen Objekten mathematische Begriffe gebildet. Durch erfolgreiche Bewältigung der Lernsituationen und durch ausgedehnte Übungen entstehen (unbewusst) prozedurale Fertigkeiten. Diese Fertigkeiten sind „Wissen, wie“, aber sie sind schwer mit Worten zu fassen. Sie werden als nicht deklaratives (nondeklaratives) Wissen klassifiziert und umgangssprachlich als „Können“ bezeichnet. Nicht deklaratives Wissen wird zwischen perzeptuellem und prozeduralem Wissen differenziert. Perzeptuelles Wissen basiert auf Wahrnehmung oder auf automatischer Verarbeitung. Durch die Umwandlung des deklarativen Wissens in das leistungstärkere prozedurale Können werden der Kapazitäts- und Zeitaufwand beim Bearbeiten von Faktenwissen reduziert (Buchner & Brandt, 2017, S. 405ff.; Myers & DeWall, 2023, S. 359ff.; Renkl, 2021, S. 4f.; Gruber & Stamouli, 2021, S. 33f.; Ulm & Zehnder, 2020, S. 30).

Im Langzeitgedächtnis wird auch metakognitives Wissen gespeichert. Metakognitives Wissen umfasst Wissen über Wissen und kann zwischen deklarativem und prozeduralem metakognitivem Wissen differenziert werden (Renkl, 2021, S. 5).

In diesem dreiteiligen Gedächtnismodell gibt es folgende Annahmen:

- Die äußeren Reize werden von sensorischen Registern flüchtig aufgenommen, und gelangen, je nach Vorwissen, entweder durch automatische Verarbeitung unbewusst ins Langzeitgedächtnis, oder sie lösen eine bewusste Enkodierung im Arbeitsgedächtnis aus. Enkodierung ist „Verarbeitung von Informationen zur Eingabe in das Gedächtnissystem, z. B. durch Herstellen eines Bedeutungszusammenhangs“ (Myers & DeWall, 2023, S. 359ff.; Renkl, 2021, S. 8).
- Im Arbeitsgedächtnis werden Informationen bewusst enkodiert. Diese Informationen können auch aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden. Der zu verarbeitende Inhalt wird durch Wiederholen aufrechterhalten. Dabei steuert die zentrale Exekutive die fokussierte Aufmerksamkeit (Myers & DeWall, 2023, S. 359f.).
- Die enkodierten Informationen werden idealerweise abrufbereit und dauerhaft im Langzeitgedächtnis gespeichert (Myers & DeWall, 2023, S. 359).

Die Trennung von Arbeits- und Langzeitgedächtnis im modalen Gedächtnismodell ist empirisch umstritten. Ein vielversprechender Ansatz ist das Embedded-Processes-Modell (Eingebettete-Prozesse-Modell). Es geht vom Langzeitgedächtnis aus und fokussiert auf die Funktionen des Arbeitsgedächtnisses. In diesem Modell (Abb. 5-5) wird das Arbeitsgedächtnis als kognitiver Prozess der Informationsbearbeitung im Langzeitgedächtnis eingebettet und umfasst „alle aktivierten Gedächtniselemente innerhalb und außerhalb des Fokus der Aufmerksamkeit. Hier können Verknüpfungen zwischen diesen Elementen hergestellt werden, die später im Langzeitgedächtnis gespeichert werden können“ (Buchner & Brandt, 2017, S. 426). Es wird angenommen, dass der Fokus der Aufmerksamkeit mehr durch Kapazität und aktiviertes Gedächtnis als durch Zeit begrenzt ist. Die Aktivierung von Information wird durch die zentrale Exekutive gesteuert (Buchner & Brandt, 2017, S. 425ff.). Das modale Arbeitsgedächtnismodell hilft uns, die Struktur des Arbeitsgedächtnisses zu verstehen und das Embedded-Processes-Modell dessen Funktionsweise.

Das Erwerben, Speichern und Abrufen von Wissen sind zentrale Ziele des Lernens. Mit Gedächtnismodellen können wir den Lernprozess besser verstehen und effiziente Lernstrategien entwickeln, z. B.: bewegtes Lernen (Lernen durch Bewegung mit psychomotorischen Einsätzen, siehe Kapitel 7). „Alles, was in Bewegung oder verbunden mit einer Bewegung gelernt wird, bleibt leichter und länger im Gedächtnis. Erst wenn es in den Sinnen ist, ist es im Gedächtnis“ (Weiß, Voglsinger & Stuppacher, 2016, S. 9).

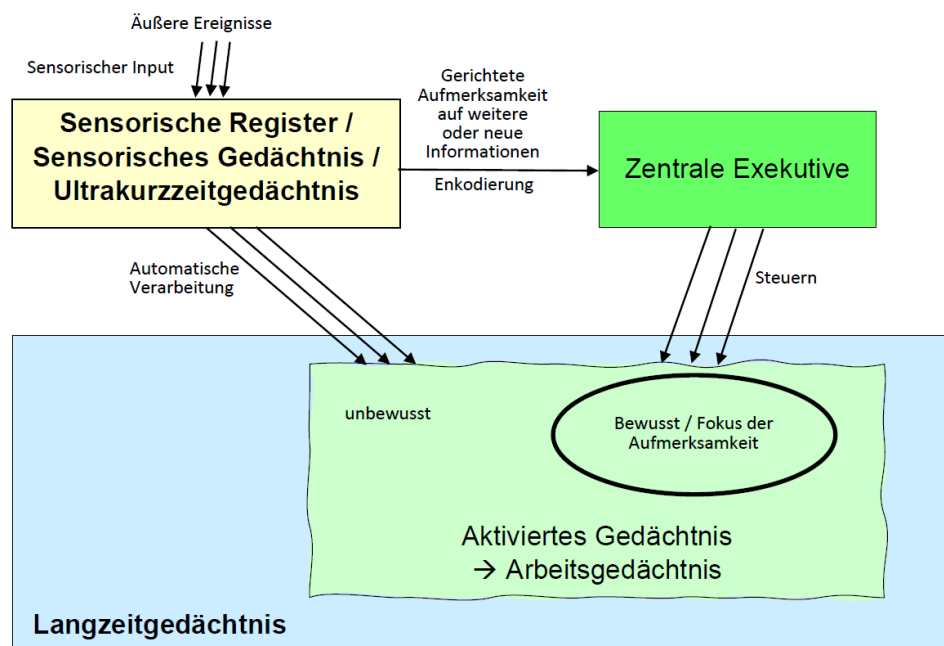


Abb. 5-5: Embedded-Processes-Modell (mod. n. Buchner & Brandt, 2017, S. 403, Abb. 12.1, S. 425ff.; Myers & DeWall, 2023, S. 360, Abb. 9.5)

5.3.4 Inhaltsbezogenes Denken

Die Inhalte des mathematischen Denkens von der frühkindlichen Bildung bis zum Schulabschluss sind im entsprechenden Bildungsstandard und Rahmenplan vorgeschrieben. In Abb. 5-1 werden beispielweise die Teilgebiete der Mathematik in der Sekundarstufe aufgelistet. „Numerisches/geometrisches/algebraisches/funktionales/stochastisches Denken bezeichnet jeweils Denkweisen, die typisch für den Umgang mit mathematischen Objekten aus dem Bereich der Zahlen/Geometrie/Algebra/Funktionen/Stochastik sind“ (Ulm & Zehnder, 2020, S. 32). Das inhaltsbezogene mathematische Denken wird nachhaltig nur durch Vernetzung mit dem prozessbezogenen Denken und der mathematikbezogenen Informationsbearbeitung erworben (Ulm & Zehnder, 2020, S. 32).

5.3.5 Embodiment und mathematisches Denken

Die Dimension der basalen Kompetenzen in früher Kindheit und die Dimension der mathematikbezogenen Informationsbearbeitung im Allgemeinen heben die Bedeutung der Sinneswahrnehmungen hervor. Sinneswahrnehmung ist nur durch Körper und Leib sowie Bewegung möglich. Das heißt: Mathematisches Denken, als ein spezielles Gebiet der Kognition, basiert notwendigerweise auf Körper- und Bewegungserfahrungen. Dies entspricht dem Konzept Embodiment. Dies wird bei der Vermittlung des mathematischen Denkens leider oft vernachlässigt!

Um Embodiment in der Entwicklung der inhaltsbezogenen Kompetenzen des mathematischen Denkens fassbar zu machen, werden im nächsten Kapitel Teilgebiete des numerischen Denkens, Erwerb der Zahlwortreihe, Zählprinzipien und Zahlenaspekt sowie zwei Zahlenverarbeitungsmodelle, genauer betrachtet.

6 Entwicklung numerischer Kognition

6.1 Numerische Kognition

Zahlen und Grundrechenoperationen sind die Grundlage des Mathematischen Denkens. Alle Denkprozesse, um Zahlen zu verstehen und zu verarbeiten sowie mit dem Ausführen von Rechenoperation zu tun haben, gehören zur Numerischen Kognition (Landerl, Vogel & Kaufmann, 2022, S. 11f.). Die Zahlenverarbeitung umfasst: (a) einen besonderen Aspekt der Realität, Größe bzw. Mächtigkeit, mit Zahlen darzustellen; (b) Zahlen als Objekte spezifischer Denkprozesse und (c) dass Zahlen in verschiedenen Formaten repräsentiert werden können. Mit diesen drei Aspekten der Zahlenverarbeitung unterscheidet sich die numerische Kognition deutlich von anderen Gebieten der Kognition (Noël, 2000, S. 495). In Abb. 6-1 wird numerische Kognition schematisch dargestellt.

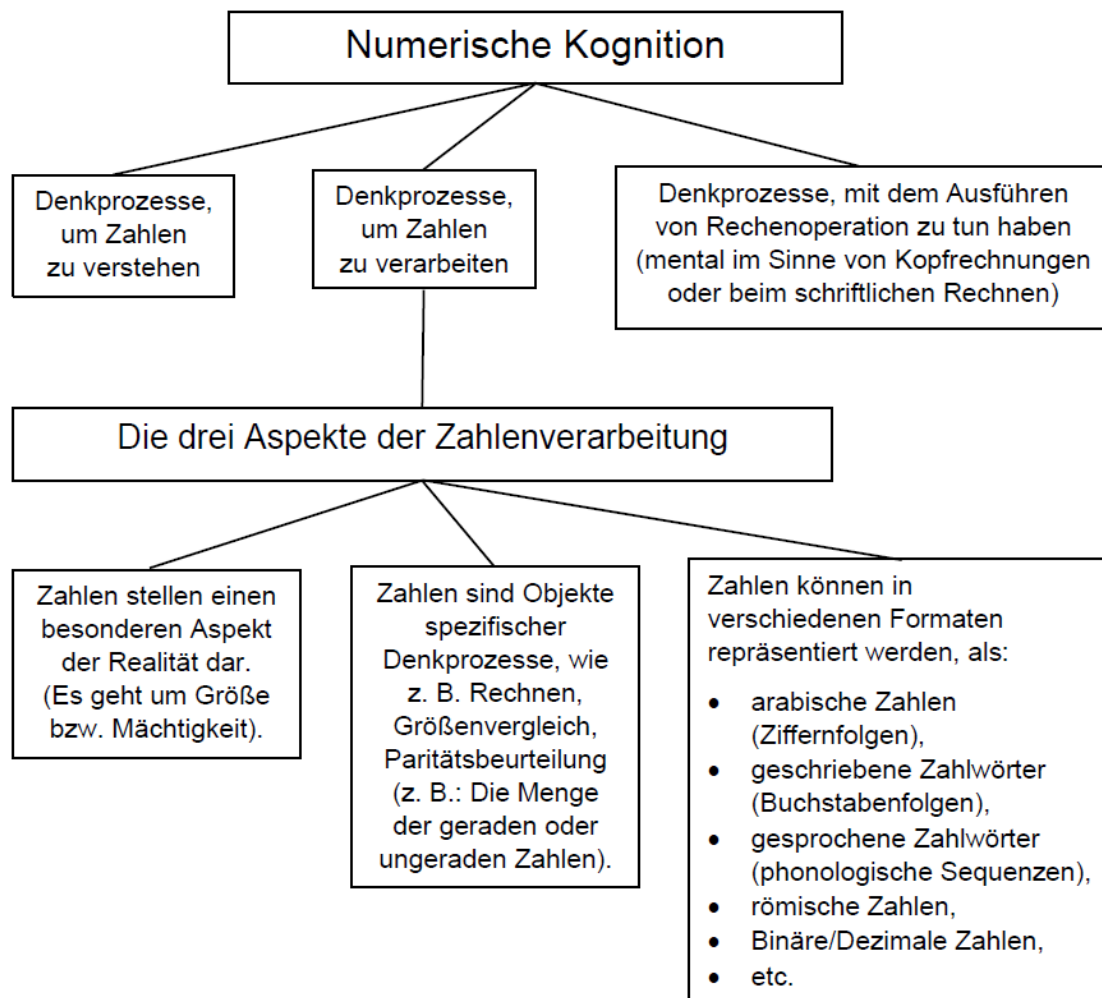


Abb. 6-1: Numerische Kognition (Landerl et al., 2022, S. 11f.; Noël, 2000, S. 495. Eigene Darstellung.)

6.2 Entwicklung des Zahlbegriffs und der Zahlenverarbeitung

Der Erwerb des Zahlbegriffs ist die zentrale Aufgabe der frühen mathematischen Bildung. Obwohl wir von Geburt an intuitiv mit kleinen Mengen bis Anzahl 3 umgehen können, ist die Entwicklung des Zahlbegriffs doch recht komplex (Dehaene, 2011, S. 237 - 278). Nach entwicklungspsychologisch orientierten Modellen erwerben die Kinder zuerst Zahlwortreihe und Zählkompetenz.

6.2.1 Erwerb der Zahlwortreihe nach Fuson (1988)

Fuson (1988, S. 45 - 55) hat das Erwerben der englischen Zahlwortreihe bei Kindern systematisch beschrieben. Dies ist auch auf andere Sprachen mit ihren jeweiligen Eigenheiten übertragbar. Die Kinder erwerben die Zahlwortreihe auf fünf Ebenen (in fünf Schritten):

Ebene I *Zahlwortreihe als Ganzheit (string level)*: Die Zahlenwörterfolge wird als eine ganze Zeichenkette aufgefasst.

Ebene II *Unflexible Zahlwortreihe (unbreakable list level)*: Die einzelnen Zahlwörter werden zwar als abgrenzbare Einheiten wahrgenommen, aber das Kind muss immer mit der „eins“ beginnen, um die richtige Zahlwörterfolge abzurufen.

Ebene III *Teilweise flexible Zahlwortreihe (breakable chain level)*: Die Kinder können an einer beliebigen Zahl mit dem Zählen beginnen und an einer anderen Stelle den Zählprozess zu beenden.

Ebene IV *Flexible Zahlwortreihe (numerable chain level)*: Die Zahlwörter selbst sind zu zählbaren Einheiten geworden.

Ebene V *Vollständig reversible Zahlwortreihe (bidirectional chain level)*: Die Kinder können von einer beliebigen Zahl aus sowohl vorwärts als auch rückwärts zählen.

Diese fünf Ebenen zum Erwerben von Zahlwortreihe werden in Tab 6-1 genauer beschrieben. Der Pfeil „→“ bedeutet „vorwärts zählen“ und „←“ rückwärts zählen.

Tab. 6-1: Fünf Ebenen zum Erwerb der Zahlwörterreihe

	Ebene und Beispiele	Beschreibung
I	<i>Zahlwortreihe als Ganzheit (string level)</i> „12345...“→	Anfangs fassen die Kinder die Zahlwörterfolge „eins-zweidreivierfünf...“ – ähnlich wie ein Gedicht z. B. „AllemeineEntchen“. – als eine ganze Zeichenkette auf. Die Kinder sind noch nicht in der Lage, die einzelnen Zahlwörter als abgrenzbare Einheit wahrzunehmen. Die Zahlwörterfolge kann noch nicht für das Auszählen von Mengen eingesetzt werden.

II	<i>Unflexible Zahlwortreihe</i> (<i>unbreakable list level</i>) 1 – 2 – 3 – 4 – 5 ... →	Die einzelnen Zahlwörter werden zwar als abgrenzbare Einheiten wahrgenommen (eins, zwei, drei, vier, fünf, ...). Aber das Kind muss immer mit der „eins“ beginnen, um die richtige Zahlwörterfolge abzurufen. [Dieses Phänomen wird auch bei Erwachsenen im Prozess des Lernens von chinesischer Zahlwörterfolge beobachtet, d. Verf.]
III	<i>Teilweise flexible Zahlwortreihe</i> (<i>breakable chain level</i>) 5 – 6 – 7 – 8 4 ← 5 → 6 9 – 8 – 7 – 6	Die Kinder können an einer beliebigen Zahl der von ihnen beherrschten Zahlwörterfolge mit dem Zählen beginnen und an einer anderen Stelle den Zählprozess zu beenden, z. B.: fünf, sechs, sieben acht. Die Vorgänger und Nachfolger der Zahlen können bestimmt werden, z. B.: vor der fünf kommt vier und nach der fünf sechs. Die Fähigkeit rückwärts zu zählen, entwickelt sich, z. B.: neun, acht, sieben, sechs.
IV	<i>Flexible Zahlwortreihe</i> (<i>numerable chain level</i>) Zähle von der Zahl fünf drei Schritte weiter: (fünf), sechs, sieben, acht.	Die Zahlwörter selbst sind zu zählbaren Einheiten geworden. Die Kinder können von einer Zahl m um eine vorgegebene Zahl n von Schritten weiterzuzählen. Zum Beispiel Zähle von der Zahl fünf drei Schritte weiter: (fünf), sechs, sieben, acht. Das Weiterzählen, um eine vorgegebene Anzahl von Schritten, ist eine Zählstrategie zur Lösung von Additionsaufgaben.
V	<i>Vollständig reversible Zahlwortreihe</i> (<i>bidirectional chain level</i>) ← (n-1) – (n) – (n+1) →	Die Kinder können aus ihrer beherrschten Zahlwörterfolge von einer beliebigen Zahl beginnend zügig sowohl vorwärts als auch rückwärts zählen. Durch das Rückwärtszählen können erste Subtraktionsaufgaben zählend gelöst werden.

Quelle: Fuson (1988, S. 45 – 55); Gasteiger (2011, S. 7); Matheinklusive mit PIKAS (o. J.). Eigene Darstellung.

Das Erwerben von Zahlwortreihe hängt eng mit Entwicklung der Sprache zusammen und wird von der Kultur beeinflusst (Fuson, 1988, S. 56). Im deutschsprachigen Raum gibt es ein typisches Phänomen: Der Zahlendreher. Der Zahlendreher ist die Inversion (Umdrehung) von Einer und Zehner beim gesprochenen Zahlwort (Summer, 2023, S. 16).

Die Inversionsregeln der Zahlensprechweise im Deutschen

Im Deutschen wird es grundsätzlich von links nach rechts geschrieben und gelesen, mit einer Ausnahme in der Zahlwortreihe. Die Zahlen werden zwar mit arabischen Ziffern von links nach rechts geschrieben, aber beim Zahlenlesen spricht man in verdrehter Abfolge. Zum Beispiel: Die Zahl 56789 wird im Deutschen von links nach rechts in arabischen Ziffern geschrieben, aber statt nach stellenwertgerechter Zahlensprechweise *fünzigsechstausendsiebenhundertachtzigneun* spricht man *sechsendfünfzigtausendsiebenhundertneunundachtzig*. Die Ziffer 5/6/7/8/9 in Zahl 56789 ist an die 1./2./3./4./5. Position des visuell-räumlichen Systems (arabische Zahl), aber an die 2./1./3./5./4. Position der phonologischen Schleife nach Inversionsregeln, siehe Tab. 6-2.

Tab. 6-2: Beispiel Zahl 56789

Die arabischen Ziffern der Zahl 56789:	5	6	7	8	9
Die Positionen im visuell-räumlichen System (arabische Zahl 56789, von links nach rechts):	1.	2.	3.	4.	5.
Die Positionen in phonologischer Schleife im Deutschen (nach Inversionsregeln der Zahlensprechweise - <i>sechsendfünfzigtausendsiebenhundertneunundachtzig</i>):	2.	1.	3.	5.	4.
Die Positionen in phonologischer Schleife (nach stellenwertgerechter Zahlensprechweise):	1.	2.	3.	4.	5.

Quelle: In Anlehnung an Summer (2023, S. 16). Eigene Darstellung.

Diese Inversionsregeln der Zahlensprechweise im Deutschen verursacht eine höhere Belastung des Arbeitsgedächtnisses (siehe Abb. 5-4 im Abschnitt 5.3.3). Da die Positionen der Ziffern von Zahlen im visuell-räumlichen System (arabischen Zahlen) und in phonologischer Schleife (deutscher Zahlensprechweise) meistens unterschiedlich sind, benötigt es mehr Kapazität in der zentralen Exekutive (Kontrollprozesse), um zwischen geschriebenen (gelesenen) arabischen Zahlen und gesprochenen deutschen Zahlen korrekt zu transkodieren. Bei höherer Auslastung des Arbeitsgedächtnisses besteht die Gefahr, dass die Inversionsregeln der Zahlensprechweise nicht beachtet werden kann. Die visuell-räumliche Reihenfolge wird dann phonetisch direkt übernommen. Damit werden die Ziffern für Zehner und Einer vertauscht. Daraus entsteht der Zahlendreher. Das Phänomen Zahlendreher tritt sowohl bei Kindern als auch bei Erwachsenen auf. Der Zahlendreher ist ein Stolperstein und Fehlerquelle beim Mathematiklernen (Summer, 2023, S. 16 - 20).

Die Autorin der vorliegenden Arbeit schließt sich der Forderung des Vereins Zwanzigeins e. V. (<https://zwanzigeins.jetzt/>) an, eine stellenwertgerechte Zahlensprechweise im Deutschen neben der Zahlensprechweise mit Inversionsregeln einzuführen, um das Erwerben und den Gebrauch der deutschen Zahlwortreihe zu erleichtern.

6.2.2 Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel (1978)

Neben dem Erwerb der Zahlwortreihe, müssen Kinder noch die Zählkompetenzen beherrschen, um eine Menge von Elementen korrekt abzählen zu können. Gelman und Gallistel (1986, S. 77 - 82) fassen diese Kompetenzen in fünf Zählprinzipien zusammen:

1. *Das Prinzip der Eins-zu-eins-Zuordnung (the one-one principle)*: Beim Abzählen wird jedem zu zählendem Element genau ein Zahlwort zugeordnet. Kein Element darf doppelt gezählt werden oder vergessen werden.
2. *Prinzip der stabilen Zahlwortabfolge (the stable-order principle)*: Beim Abzählen bleibt die Reihenfolge der Zahlwörter, die Konvention der jeweiligen Sprache entsprechenden, konsistent.
3. *Kardinalprinzip (the cardinal principle)*: Beim Abzählen gibt das zuletzt genannte Zahlwort die gesamte Anzahl (Kardinalität oder Mächtigkeit) der zu zählenden Menge an. Das heißt: Auf die Frage: „Wie viele?“ soll mit dem zuletzt genannten Zahlwort beantwortet werden. Das Kardinalprinzip basiert auf den beiden ersten Prinzipien.
4. *Abstraktionsprinzip (the abstraction principle) – Prinzip der Irrelevanz des Zählinhalts*: Mit den ersten drei Prinzipien kann alles gezählt werden, zum Beispiel: Stühle, Personen, Töne, Farben, Lichtsignale, geometrische Figuren und mehr. Zahlen (Anzahlen) stellen einen besonderen Aspekt der Realität dar. Beim Abzählen werden Objekte mental klassifiziert und als Zahl (Anzahl) erfasst.
5. *Prinzip der Irrelevanz der Zählabfolge (the order-irrelevance principle)*: Beim Abzählen können die zu zählenden Elemente in beliebiger Reihenfolge gezählt werden. Dabei muss das Eins-zu-eins-Zuordnungsprinzip genau angewendet werden und es ergibt sich das korrekte Ergebnis (Gelman & Gallistel, 1986, S. 77 – 82; Landerl et al., 2022, S. 64f.; Krauthausen, 2018, S. 48f.).

Die ersten drei Prinzipien behandeln die Regeln „Wie man zählt“. Das vierte Prinzip definiert das Zählbare, also „Was man zählen kann“. Das fünfte Prinzip verbindet die ersten vier Prinzipien (Gelman & Gallistel, 1986, S. 77).

Das Erwerben von Zahlwortreihen ist die Basis, um das Prinzip der Eins-zu-eins-Zuordnung und das Prinzip der stabilen Abfolge der Zahlwörterfolge zu beherrschen. Das Beherrschen dieser beiden Prinzipien ist die Voraussetzung, um das Kardinalprinzip zu verstehen. Das Verständnis des Kardinalprinzips ist die Grundlage der Zahlenverarbeitung. Leider ist es aber besonders schwer festzustellen, ob dieses Verständnis beim Kind vorhanden ist (Landerl et al., 2022, S. 65). Um diese Schwierigkeit zu verstehen muss die Komplexität des Zahlbegriffs systematisch betrachtet werden.

6.2.3 Zahlaspekte – Komplexität des Zahlbegriffes

Mit Zahlaspekten werden die Bedeutungen der Zahlen klassifiziert. Die Bedeutung einer Zahl hängt von ihrer Verwendung ab (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 29). Krauthausen (2018, S. 43) stellt fest: „Um den Zahlbegriff in seiner Ganzheit zu erfassen, [...] ist es nötig, den Aspektreichtum der Zahlen aufzugreifen, zu systematisieren und zu vertiefen.“ Zu den Aspekten des Zahlbegriffs zählen: Kardinalzahlaspekt inklusiv geometrischer Aspekt, Ordinalzahlaspekt inklusiv relationaler Aspekt, Maßzahlaspekt, Operatoraspekt, Rechenzahlaspekt, Kodierungsaspekt inklusiv narrativer Aspekt (Krauthausen, 2018, S. 43f.). Eine Übersicht über diese Aspekte des Zahlbegriffs wird in Tab. 6-3 dargestellt.

Tab. 6-3: Aspekte des Zahlbegriffs

Zahlaspekte - Bedeutung	Beispiele	Frage	Operation / Anmerkung
Kardinalzahlaspekt - Die Zahl steht für eine Anzahl von Elementen einer Menge. (Geometrischer Aspekt)	1 Apfel 2 Gongschläge 7 Zahlen (Dreieck, Viereck)	Wie viel?	Addition: vereinigen, zusammenlegen. Subtraktion: wegnehmen, Unterschied berechnen, ergänzen.
Ordinalzahlaspekt - Zählzahl: Folge der natürlichen Zahlen, die beim Zählen durchlaufen werden. - Ordnungszahl: Die Zahl gibt den Rangplatz bzw. die Position eines Elements in einer geordneten Reihe. (Relationaler Aspekt - Mit Zahlen werden Beziehungen zwischen anderen Zahlen abgegeben. → Räumlich-geometrische Beziehung von Zahlen → Innere/mentale Zahlengerade/Zahlenstrahl)	„eins, zwei, drei, vier, fünf, ...“ „zehn, neun, acht, sieben, ...“ „Ich bin der Fünfte im Wartezimmer“ (Die Zahl 4 ist um 1 mehr als Zahl 3 und um 1 weniger als Zahl 5. Auf Zahlengerade ist 4 rechts von 3 und links von 5. Auf Zahlengerade sind 3, 4, 5 von links nach rechts geordnet.)	An welcher Stelle?	Addition: weiterzählen. Subtraktion: rückwärts zählen. Anmerkung: Nummerierungsaspekt (z. B.: Kapitel 3) und Skalenzahlaspekt (z. B.: Einträge auf Zahlengerade) gehören zum Ordinalzahlaspekt
Maßzahlaspekt - Zahlen werden in Verbindung mit einer Einheit für Größenangaben benutzt.	2 m 3 kg 5 € 20 min	Wie lang? Wie schwer? Wieviel kostet es? ...	Addition: Aneinanderlegen entsprechender Repräsentanten. Subtraktion: Abtrennen entsprechender Repräsentanten, Unterschied

Operatoraspekt - Die Zahl bezeichnet die Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs. (Iterationsaspekt)	fünfmal schlafen bis zu den Ferien Doppelt so alt wie ich (dreimal durchlaufen)	Wie oft? Wievielmals so viel ...? Wie oft noch?	Addition: hintereinander ausführen, nacheinander vervielfachen. Subtraktion: Umkehroperator von Addition, wie oft noch?
Rechenzahlaspekt - Algebraischer Aspekt: $(\mathbb{N}, +)$ [Natürliche Zahlen mit Rechenoperationen] ist eine algebraische Struktur mit bestimmten Eigenschaften. - Algorithmischer Aspekt: Rechnen als „Ziffernmanipulation“ nach festgelegten Regeln.	Kommutativität/ Assoziativität $(9 + 87) + 13 = 9 + (87 + 13)$ 3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ $27 \cdot 23$ $= (25 + 2) \cdot (25 - 2)$ $= (25)^2 - (2)^2$ $= 625 - 4$ $\begin{array}{r} 628 \\ +563 \\ \hline 1191 \end{array}$	Welches Ergebnis?	Rechnen mit Ziffern (schriftliche Rechenverfahren) statt Rechnen mit Zahlen (halbschriftliche Strategien)
Kodierungsaspekt - Die Zahl (eine Kombination von Ziffern) bezeichnet ein Objekt. (Narrativer Aspekt - Symbolische Bedeutung von Zahlen in Religion, Märchen und Kulturen, die eine besondere Bedeutung haben oder Glück bzw. Unglück bringen.)	PLZ: 17489 Personal-ID Farbschlüsselnummer (Dreieinigkeit in Christentum Freitag, der 13. In China ist die 8 eine Glückszahl und die 4 eine Unglückszahl.)	Wie lautet ...?	In der Schulmathematik macht es keinen Sinn, mit Kodierungszahlen (Kodierungsziffern) zu rechnen. Operationen mit Kodierungsziffern spielen eine wichtige Rolle in der Kryptografie, um Informationen zu verschlüsseln oder die Korrektheit zu prüfen.

Quelle: mod. n. Krauthausen (2018, S. 43ff., Tab. 2.1); Stiftung Kinder forschen (2023, S. 29).

Die Aspekte des Zahlbegriffs sind nicht immer trennscharf und disjunkt, zum Beispiel kann eine Maßzahl wie „3 kg“ auch als das Dreifache eines Kilogramms (Operatoraspekt) gedeutet werden (Krauthausen, 2018, S. 44).

Der Zahlbegriff ist komplex und umfasst nach Krauthausen (2018, S. 45):

- strukturelles Wissen über Zahlen (Syntax): Zählzahlaspekt, algebraischer Aspekt und algorithmischer Aspekt;
- die Fähigkeit, Zahlen anzuwenden (Semantik): Quantität (Kardinalzahlaspekt), Rangplatz (Ordnungszahlaspekt, Nummerierungsaspekt, Skalenzahlaspekt), Vervielfachungsmaß (Operatoraspekt, Maßzahlaspekt, Iterationsaspekt);
- die Fähigkeit, Zahlen (Ziffern) darzustellen: Darstellungsaspekt, Kodierungsaspekt.

Die Aspekte des Zahlbegriffs unterstützen die Denkprozesse, um Zahlen zu verstehen und sind Grundlage für Denkprozesse, um Zahlen zu verarbeiten (siehe Abb. 6-1). Die Entwicklung der Zahlenverarbeitung ist individuell unterschiedlich und basiert auf sehr unterschiedliche Komponenten. Deswegen „gibt es bisher kein allgemein anerkanntes Modell der Entwicklung der Zahlenverarbeitung und des Rechnens“ (Landerl et al., 2022, S. 94). Aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht haben Fritz, Ehler und Leutner (2018) ein Entwicklungsmodell arithmetischer Konzepte mit sechs Niveaus für das Vorschul- und Grundschulalter vorgestellt und durch drei eigene Studien mit Vier- bis Achtjährigen validiert. „Der Zahlbegriff ist erst dann vollständig erworben, wenn die Konzepte [Aspekte, d. Verf.] der Ordinalität (Niveau II), der Kardinalität (Niveau III) und die Beziehung zwischen diesen beiden Konzepten hergestellt sind (Niveau V)“ (Fritz et al., 2018, S. 17).

6.3 Kognitiv-entwicklungspsychologisches Modell arithmetischer Konzepte mit sechs Niveaus nach Fritz et al. (2018)

Fritz, Ehler und Leutner (2018, S. 13) gehen davon aus:

„Mit dem Spracherwerb (ab 2,0 bis 2,6 Jahren) beginnen die Kinder, Mengenvergleiche auch sprachlich zu beschreiben und mit Begriffen wie viel, mehr, wenig zu kennzeichnen. [...] ab einem Alter von 3 bis 4 Jahren; Kinder verstehen, dass etwas ‚mehr‘ wird, wenn etwas hinzugefügt, und ‚weniger‘, wenn etwas weggenommen wird. [...] Erst dann, wenn Zählprozesse sicher beherrscht werden, wird das Konzept des Vermehrens und Verminderns mit Zahlen verbunden.“

Aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht erklären Fritz et al. (2018, S. 7, 14-18) ein Modell zum Erwerb grundlegender arithmetischer Konzepte mit 6 Niveaus:

Niveau I *Zählzahl*: Auf diesem Niveau beherrschen Kinder sichere Zahlwortkenntnisse und können Mengen präzise aus- und abzählen. Außerdem sind sie in der Lage, eine kleine Anzahl (bis 4) simultan erfassen. Dies ist ein „bedeutsamer Prädiktor für den Erwerb mathematischer Kompetenzen“ (Fritz et al., 2018, S. 14). Vom Erwerb der Zahlwortreihe² über das Beherrschen der Zählprinzipien³ bis zum Verstehen des Zählzahlaspekts⁴ ist es ein langwieriger Prozess.

² Siehe Abschnitt 6.2.1 Erwerb der Zahlwortreihe nach Fuson (1988)

³ Siehe Abschnitt 6.2.2 Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel (1978)

⁴ Siehe Abschnitt 6.2.3 Zahlaspekte – Komplexität des Zahlbegriffes

Niveau II *Ordinaler Zahlenstrahl*: Auf diesem Niveau wird ein mentaler Zahlenstrahl als ordinale Repräsentation der Zahlwortreihe aufgebaut, obwohl die Zahlenstrahlrepräsentation in Bezug auf die Skalierung der Einträge noch sehr unpräzise ist. Die Kinder können die Positionen der Zahlen auf ihrem mentalen Zahlenstrahl grob einschätzen und damit die Zahlen miteinander vergleichen oder Vorgänger und Nachfolger bestimmen. Das einfache Addieren (zusammenfügen) und Subtrahieren (wegnehmen) können mit Materialien oder mit Hilfe der Finger zählend gelöst werden (Fritz et al., 2018, S. 14f.). Der mentale Zahlenstrahl ist vielmehr noch logarithmisch bzw. multi-linear skaliert, also größere Zahlen liegen enger beieinander. Mit zunehmendem Alter und Erfahrungen wird die Skalierung des mentalen Zahlenstrahls allmählich linear. Das Vorhandensein der mentalen Zahlenstrahlvorstellung ist der Indikator zur Beurteilung des Zahlenverständnisses (Nuerk, Moeller, Klein, Willmes & Fischer, 2011, S. 12f.).

Niveau III *Kardinalität und Zerlegbarkeit*: Aus diesem Niveau erwerben Kinder Kenntnisse zum Kardinalzahlaspekt und Wissen über Zusammenfügung und Aufteilung von Mengen (z. B.: Zehnerzerlegung auf konkreten handelnden Repräsentationen). Sie wissen, dass die nachfolgende Zahl immer um 1 mehr ist. Sie beginnen den Zusammenhang zwischen Teilmengen und Gesamtmenge (3 und 5 sind zusammen 8) zu verstehen. Die strukturierten Mengen können quasi-simultan erfasst werden. Das Subtrahieren wird durch Ergänzungsstrategien (von einer Teilmenge bis zur Gesamtmenge zählen) gelöst (Fritz et al., 2018, S. 14f.).

„Der Erwerb des *Kardinalzahlkonzepts* [*Kardinalzahlaspekts*, d. Verf.] gilt als zentral in der Entwicklung der arithmetischen Konzepte, d.h. die Einsicht, dass ein Zahlwort auch für eine Menge mit einer bestimmten Anzahl steht. Dieses Konzept kann nur aus der Zählerfahrung heraus entwickelt werden. Es erfordert die gedankliche Integration von Zählzahl und Anzahl der bis dahin gezählten Objekte“ (Fritz et al., 2018, S. 15).

Niveau IV *Enthaltensein und Klasseninklusion*: Auf diesem Niveau erwerben Kinder das Teil-Teil-Ganze-Konzept und die grundlegenden mathematischen Vorstellungen, dass eine Zahl (Anzahl) als zusammengesetztes Ganzes begriffen oder auf verschiedenweis in kleinen Zahlen zerlegt werden kann, z. B.: $5 = 5 + 0 = 4 + 1 = 3 + 2$ usw., sowie eine größere Anzahl alle kleine Anzahlen inkludiert, z. B.: Eine Klasse mit der Anzahl (Mächtigkeit) 5 enthält alle Klassen mit den

Anzahlen (Mächtigkeiten) 4, 3, 2, 1. Mengen werden allmählich von konkreten Repräsentationen in der Vorstellung durch Symbole (Zahlwort, arabische Ziffern) repräsentiert. Die Zahlen können auch auf einem Abschnitt des Zahlenstrahls gezeichnet werden. Eine Aufgabe wie „gib mir 5 Bausteine, 3 davon sollen rot sein“ kann gelöst werden (Fritz et al., 2018, S. 16f.; Landerl et al., 2022, S. 100).

Niveau V *Relationalität*: Eine Beziehung (Relation) zwischen zwei Zahlen kann durch einen Abschnitt auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden. Damit können die Differenzen zwischen zwei Mengen präzise bestimmt werden. Auf diesem Niveau können Kinder von einer beliebigen Zahl aus um eine bestimmte Anzahl von Zählritten weiter- oder zurückzählen. Die Niveau V und Niveau VI sind „notwendige Voraussetzung [-en, d. Verf.] für das Verständnis der Multiplikation und Division sowie des Stellenwertkonzepts“ (Fritz et al., 2018, S. 17).

Niveau VI Zahlen gleichmächtig bündeln: Auf diesem Niveau sind Kinder in der Lage, eine Zahl in verschiedenen gleichmächtigen Teilmengen zu zerlegen (z. B.: Die Zahl 12 kann in 2 Sechserbündel, 3 Viererbündel, 4 Dreierbündel und 6 Zweierbündel zerlegt werden) und dies auf dem Zahlenstrahl mit Abschnitten gleicher Größe bzw. gleichen Abständen darzustellen (Fritz et al., 2018, S. 18).

Die Tabellen Tab. 6-4 und Tab. 6-5 fassen die Bedeutung der Entwicklungsniveaus für verschiedene arithmetische Aspekte sowie für Rechenoperationen zusammen.

Tab. 6-4: Bedeutung der einzelnen Entwicklungsniveaus für verschiedene arithmetische Aspekte

	Zahlrepräsentation (was bedeutet eine Zahl?)	Größenvergleich	Stellenwert	Zahlaspekt
I	Resultat von Zählprozessen	Eins-zu-Eins-Zuordnung	---	Zählzahl-aspekt
II	Position auf dem mentalen Zahlenstrahl	Auftreten in Zahlwortreihe	---	Ordinalzahl-aspekt
III	Mächtigkeit einer Menge	Anzahl der Elemente	---	Kardinal-zahlaspekt
IV	Determinierte Beziehung von Teilen und Ganzem	---	Dezimal Zerlegen ($24 = 20 + 4$ $= 10 + 10 + 4$)	---
V	Abstand zwischen zwei Zahlen	---	Gleicher Abstand zwischen Zehnerzahlen	Relations-zahlaspekt
VI	Zahlen als Bündeleinheiten	---	Bündel als dezimale Einheiten	---

Quelle: Fritz, Ehlert und Leutner (2018, S. 19, Tab. 1)

Tab. 6-5: Bedeutung der Entwicklungsniveaus für Rechenoperationen

	Entwicklungsniveau	Addition/Subtraktion	Multiplikation/Division
I	Zählzahl	---	Gerechtes Verteilen mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung
II	Ordinaler Zahlenstrahl	Weiter-/Rückwärtszählen	Zählen in Zweierschritten
III	Kardinalität und Zerlegbarkeit	Zusammenfügen/Aufteilen von Mengen	Grundvorstellungen (räumlich-simultan/zeitlich-sukzessiv) der Multiplikation als wiederholte Addition
IV	Enthaltensein und Klasseninklusion	Identifizierung von Teilen und Ganzem	Flexibles Aufteilen einer Menge in Teilmengen
V	Relationalität	Weiter-/Zurückgehen um eine bestimmte Anzahl	---
VI	Zahlen gleichmächtig bündeln	---	Ein-/Aufteilen in gleichgroße Bündel

Quelle: Fritz, Ehler und Leutner (2018, S. 19, Tab. 1)

Neben diesem kognitiv-Entwicklungspsychologischen Modell mit 6 Niveaus ist das neurokognitive Triple-Code-Modell nach Dehaene für die Zahlenverarbeitung einflussreich.

6.4 Das neurokognitive Triple-Code-Modell nach Dehaene (1992)

Die Zahlenverarbeitung bei Erwachsenen findet nach dem Triple-Code-Modell von Neurowissenschaftler Dehaene (1992, S. 31- 34) in drei interagierenden Modulen (Codes) statt:

- Das Modul für verbal-phonologische Zahlenform verarbeitet gesprochene und geschriebene Zahlwörter (z. B.: /seks/ - sechs) und gehört zur allgemeinen Sprachverarbeitung. Wegen phonologischer Schleife (Abb. 5-4) beim Auswendiglernen wird das Faktenwissen wie das 1x1 in diesem Code verarbeitet.
- Das Modul für visuelle Zahlenform ist zuständig für Lesen und Schreiben von arabischen Zahlen, Rechenoperationen mit mehrstelligen Zahlen, Größenvergleich.
- Das Modul für analoge Größenrepräsentation wird auch als mentale Zahlengerade oder Zahlensinn bezeichnet. Es ist zuständig für simultanes Erfassen von Größe bzw. Anzahl (Mächtigkeit), Schätzen, Größenvergleich und approximatives Rechnen. Es ist ein Teil von vorsprachlichem System des arithmetischen Denkens.

Das Triple-Code-Modell wird in Abb. 6-2 anschaulich dargestellt.

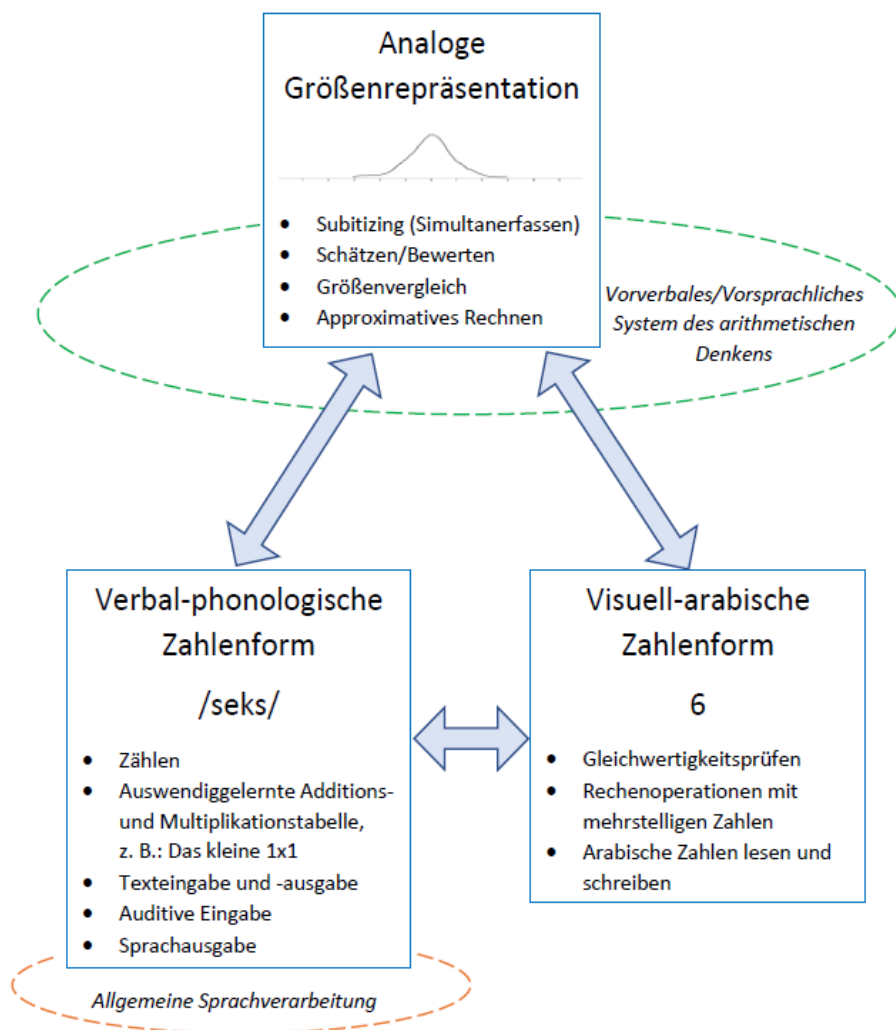


Abb. 6-2: Triple-Code-Modell nach Dehaene (mod. n. Dehaene, 1992, S. 31, Fig. 5)

Die Metaanalyse von Arsalidou, Pawliw-Levac, Sadeghi und Pascual-Leone (2018, S. 245, Fig. 3) zeigt, dass verschiedene Codes des Triple-Code-Modells verschiedene Hirnareale aktivieren.

Die Entwicklung der mentalen Zahlengerade ist essentiell, sowohl im kognitiv-entwicklungspsychologischen Modell als auch im neurokognitiven Triple-Code-Modell. Dehaene, Piazza, Pinel und Cohen (2003, S. 498) heben die räumliche Aufmerksamkeit in der Zahlenverarbeitung hervor. Alibali und Nathan (2012, S. 274) belegen, dass körperlich-räumliche Erfahrungen (embodied knowledge) ein integrierter Bestandteil des mathematischen Denkens und somit der mathematischen Lernprozesse sind. Die körperlich-räumliche Erfahrungen können durch Psychomotorik systematisch und effizient erworben werden.

Im Folgenden wird eine psychomotorische Serie mit Bewegungsspielen zur Entwicklung des mentalen Zahlenstrahls und mathematisch-operativer Vorstellungen vorgestellt.

7 Ein Einsatz von Psychomotorik zur Entwicklung und zum Aufbau mathematisch-operativer Vorstellungen

In diesem Kapitel wird ein praktischer Einsatz von Psychomotorik zur Entwicklung und zum Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellung vorgestellt. Diese psychomotorischen Spiele wurden als eine Serie im Mathematikunterricht zur Entwicklung, zum Aufbau und zum Vertiefen von Grundrechenarten mit ganzen Zahlen erprobt. Die Ideen entstanden aus eigener Praxis, dem Praxisteil des Psychomotorik Studiums und aus folgender Literatur:

- Müller und Ziermann (2021): *Bewegtes Lernen im Fach Mathematik: Klassen 5 bis 10/12: Didaktisch-methodische Anregungen* (3., aktualisierte Auflage).
- Lensing-Conrady (2015): *Mathe bewegt! Vom Körperraum zum Zahlenraum*.
- Köckenberger (2016): *Bewegtes Lernen: Lesen, Schreiben, Rechnen mit dem ganzen Körper in Kita, Schule und Therapie. "Die Chefstunde"*. (8., völlig überarbeitete Aufl.).
- Beigel (2019): *Beweg dich, Schule! Eine "Prise Bewegung" im täglichen Unterricht der Klassen 1 bis 13* (5., Überarbeitete und erweiterte Aufl.).

Die Bewegungsspiele werden den Lerninhalten angepasst, weiterentwickelt und im Folgenden einzeln beschrieben, damit sie einzeln für die Praxis übernommen werden können.

7.1 Einstieg

Zum Einstieg werden folgende 3 Bewegungsspiele eingeführt. Sie dienen zum Ankommen, eigenen Körper wahrnehmen, den Raum wahrnehmen, Vertrauen zueinander entwickeln und zur Einstimmung für die Lerninhalte.

7.1.1 Blinden Roboter führen

Materialien: ohne

Raum: Bewegungsraum

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise durch den Raum

Anleitung: Eine Person geht mit geschlossenen Augen als blinder Roboter und die andere Person führt sie. Der blinde Roboter wird langsam durch den Raum geführt. Dabei legt die Führungsperson ihre Hände von hinten auf die Schultern des Roboters und steuert ihn so durch den Raum (Beigel, 2019, 143f.; Lensing-Conrady 2015, S. 98 ff.).

Hinweise: Die Führungsperson gibt dem blinden Roboter durch das Umfassen der Schultern Sicherheit.

7.1.2 Blinden Roboter testen

Materialien: ohne

Raum: Bewegungsraum

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise durch den Raum

Anleitung: Eine Person geht mit geschlossenen Augen als blinder Roboter und die andere testet die Programmierung mit Klopfen auf dessen Körper. Der blinde Roboter geht selbstständig durch den Raum. Änderungen werden ihm durch Klopfimpulse vermittelt (Brönnimann et al., 2014, S. 58).

Hinweise: Vorher Programmbefehle vereinbaren, z. B.: einmal auf den Rücken klopfen bedeutet vorwärtsgehen, zweimal bedeutet rückwärts, einmal auf die linke Schulter entspricht einmal nach links, rechte Schulter einmal nach rechts, einmal auf den Kopf stoppt den Roboter. Der Führungsperson geht hinter dem blinden Roboter, gibt ihm entsprechende Steuerbefehle und achtet die Sicherheit des blinden Roboters.

7.1.3 Halbautomatischen Roboter steuern

Materialien: ohne

Raum: Bewegungsraum

Raumformen: offen

Sozialformen: Gruppenweise durch den Raum

Anleitung: Zwei Personen spielen die Robotik-Ingenieure. Die restlichen Personen spielen die halbautomatischen Roboter, die mit offenen Augen nur geradeaus vorwärts und rückwärts gehen können. Wenn ein halbautomatischer Roboter ein Hindernis trifft, bleibt er stehen und gibt ein Alarmsignal. Jeder Roboter entscheidet selbst, wie lange er alarmiert. Wenn nicht rechtzeitig ein Ingenieur kommt, geht der Roboter kaputt und legt sich auf den Boden. Die Robotik-Ingenieure sollen durch Steuerung des Roboters mit Klopfimpulsen vermeiden, dass der Roboter auf ein Hindernis trifft (Brönnimann et al., 2014, S. 58).

Hinweise:

Die Robotik-Ingenieure können alle halbautomatischen Roboter gleichzeitig durch die Beleuchtung steuern. Wenn z. B. das Licht eingeschaltet wird, starten alle gleichzeitig und wenn das Licht ausgeschaltet wird, bleiben alle still stehen.

Die Steuerungsbefehle, nur für vorwärts und rückwärts, sollen vorab vereinbart werden. z. B. bedeutet einmal auf den Rücken klopfen vorwärtsgehen, zweimal rückwärts.

Achtung: Dieses Bewegungsspiel eignet sich nicht für sensible Person, da es während des Spiels sehr laut werden kann.

7.2 Eine Vorbereitung zur Zahlen-Treppe und zum Zahlenstrahl

Nach dem Einstieg wird im Raum eine Zahlen-Treppe (Köckenberger, 2016, 217): aufgebaut oder das Treppenhaus zu einer Zahlen-Treppe umfunktioniert. Bei der Gestaltung einer eigenen Zahlen-Treppe sollen alle Stufen gleichhoch sein, siehe Abb. 7-1. Wenn es möglich ist, soll an der linken Seite der Zahlen-Treppe eine Wand sein. Einerseits sorgt man so für Sicherheit, andererseits kann die Zahlen-Treppe vom Raum aus nur als nach rechts aufsteigend betrachtet werden. Damit wird die Entwicklung des mentalen Zahlstrahl unterstützt, siehe Abb. 7-2. Die Stufen werden mit positiven und negativen ganzen Zahlen nummeriert. Die Zahlenkarten sollen in Aufwärtsrichtung links auf die Stufen gelegt werden, damit sind die Zahlen, von Zahlen-Treppe aus betrachtet, nach rechts immer aufsteigend, siehe Abb. 7-3. Danach soll jede Person mehrmals auf der Zahlen-Treppe auf und ab, vorwärts und rückwärts gehen, um den Bewegungsablauf einzuüben und Risiko zu vermeiden.



Abb. 7-1: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 1
(Foto d. Verf.)



Abb. 7-2: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 2
und zum Zahlenstrahl (Foto d. Verf.)



Abb. 7-3: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 3
(Foto d. Verf.)

Nach Gestaltung einer Zahlen-Treppe wird auch ein Zahlenstrahl vorbereitet.

Neben der Wand wird ein Zahlenstrahl auf dem Boden (Müller & Ziermann, 2021, S. 55f.) aufgezeichnet oder mit Seil und Wäscheklammern dargestellt. Dabei soll der Zahlenstrahl so dicht neben der Wand sein, dass der Zahlenstrahl nur von einer Seite betrachtet werden kann. Die Skala auf dem Zahlenstrahl soll von links nach rechts größer werden. Am rechten Ende des Zahlenstrahls wird ein Pfeil nach rechts hingelegt oder gezeichnet, ein Beispiel siehe Abb. 7-4.

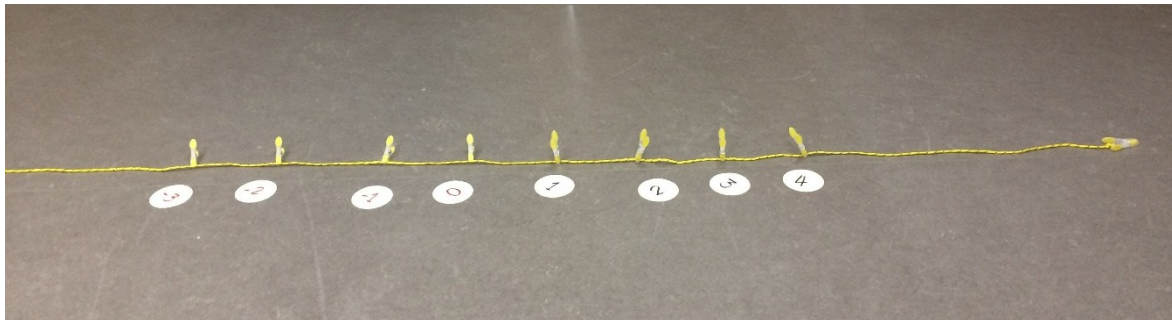


Abb. 7-4: Vorbereitung zum Zahlenstrahl (Foto d. Verf.)

Nach der Vorbereitung zur Zahlen-Treppe und zum Zahlenstrahl kommen verschiedene Roboter zum Einsatz.

7.3 Operationen mit Plusroboter

7.3.1 Plusroboter auf der Zahlen-Treppe

Materialien: rote Kappe für jeden Plusroboter, Zahlen-Treppe, Zahlenkarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Stifte und Papier

Raum: Zahlen-Treppe

Sozialformen: Partnerweise auf Zahlen-Treppe

Anleitung: Eine Person mit roter Kappe steht als Plusroboter auf der Zahlen-Treppe, z. B. auf Stufe 0. Ihr Körper und Gesicht sind treppenaufwärts gewandt. Die andere Person zeigt als Protokollant dem Plusroboter eine Zahl auf einer zufällig gezogenen Zahlenkarte und notiert dies als Plusaufgabe. Wenn die Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht der Plusroboter vorwärts 3 Stufen die Zahlen-Treppe aufwärts. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht der Plusroboter rückwärts 5 Stufen die Zahlen-Treppe abwärts (Müller & Ziermann, 2021, S. 67).

Hinweise: Vorher das Rückwärtsgehen auf Zahlen-Treppe üben, um Risiko zu minimieren.

7.3.2 Plusroboter auf dem Zahlenstrahl

Materialien: rote Kappe für jedem Plusroboter, Zahlenstrahl auf dem Boden, Zahlenkarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Stifte und Papier

Raum: Zahlenstrahl

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise auf dem Zahlenstrahl

Anleitung: Eine Person mit roter Kappe steht als Plusroboter auf dem Zahlenstrahl, z. B. auf Skala 0. Ihr Körper und Gesicht sind dem Pfeil des Zahlenstrahls zugewandt. Die andere Person zeigt als Protokollant dem Plusroboter eine Zahl auf einer zufällig gezogenen Zahlenkarte und notiert dies als Plusaufgabe. Wenn die Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht der Plusroboter 3 Schritte vorwärts auf dem Zahlenstrahl zu den größeren Zahlen hin. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht der Plusroboter 5 Schritte rückwärts auf dem Zahlenstrahl zu den kleineren Zahlen hin (Lensing-Conrady 2015, S. 147 – 150).

Hinweise: Vorher das Rückwärtsgehen üben, um Risiko zu minimieren.

7.3.3 Darstellungen vernetzen

Materialien: Stifte und kariertes Papier

Raum: offen

Raumformen: offen

Sozialformen: Einzel, Partnerweise, Gruppenweise

Anleitung: Die Plusaufgaben aus Abschnitt 7.3.1 und Abschnitt 7.3.2 werden bildhaft dargestellt und mit einer Rechengeschichte ergänzt.

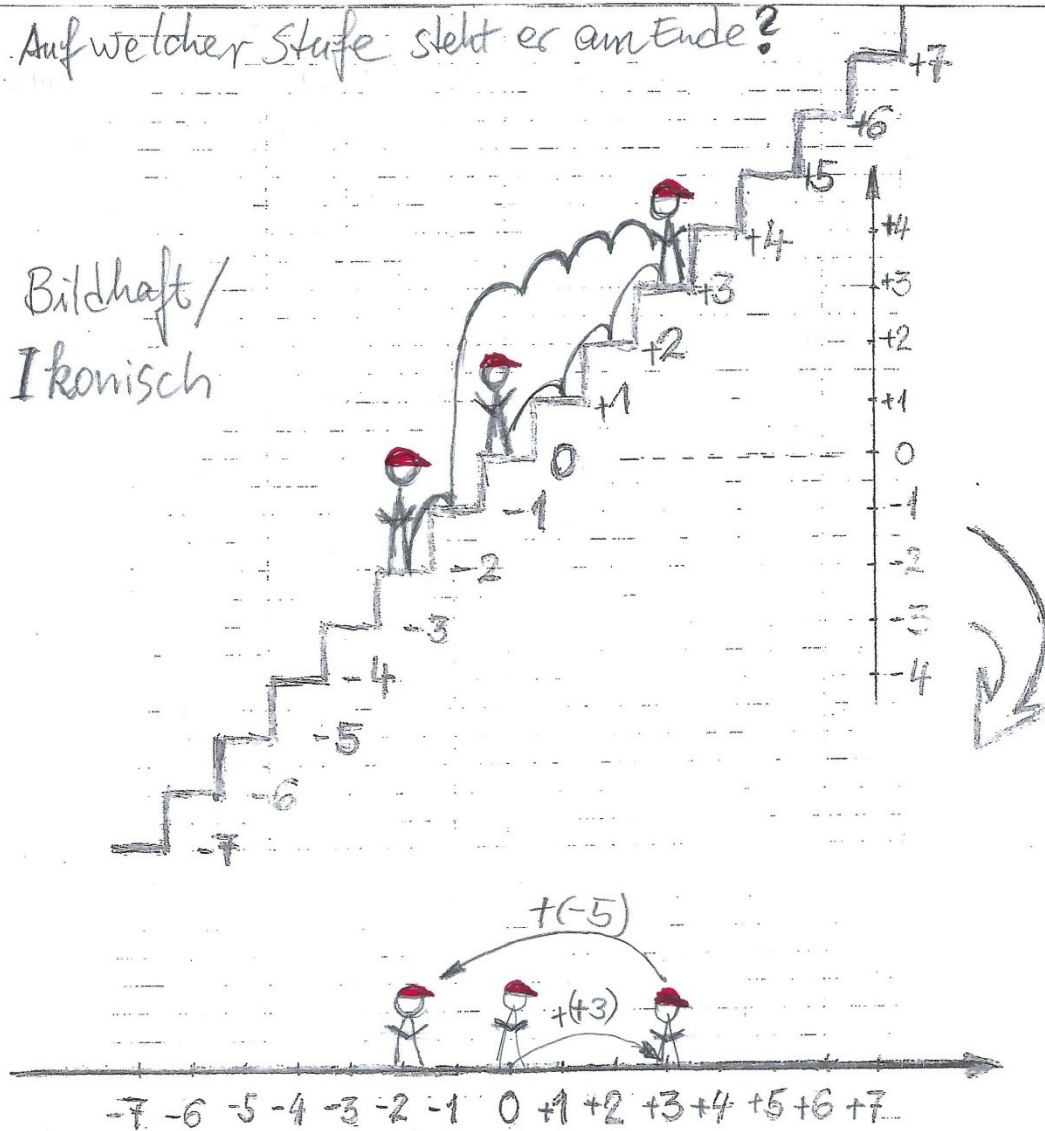
Variation: In einer 4er-Gruppe gibt es vier Rollen: Eine Person spielt den Plusroboter (Repräsentant für Handlungsebene/enaktiv), eine zeichnet (bildhaft/ikonisch), eine erzählt die Rechengeschichte (Sprache) und eine protokolliert (symbolisch). Jede Person stellt mit ihrem Repräsentanten eine Aufgabe für die anderen. Diese übersetzen diese Aufgabe in ihre eigenen Repräsentanten. (Für Auszubildende in der Berufsschule kann so das E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung nach Bruner theoretisch und praktisch eingeführt werden.)

Ein Beispiel: Die Person, die den Plusroboter spielt, fängt an und steht auf der Stufe 0. Ihr Körper und Gesicht sind treppenaufwärts gerichtet. Sie geht zuerst 3 Stufen vorwärts und danach 5 Stufen rückwärts. Die anderen Personen übersetzen diese Aufgabe in Ihre eigenen Repräsentanten: Rechengeschichte, bildhafte und symbolische Darstellungen. Abb. 7-5 zeigt eine nachgezeichnete Gruppenlösung.

Der Additionsroboter Adi steht am Anfang auf der Stufe 0. Körper und Gesicht sind aufwärts gerichtet. Er geht 3 Stufen vorwärts und 5 Stufen rückwärts.

Auf welcher Stufe steht er am Ende?

Bildhaft/
Ikonisch



Mathematische Sprache (symbolisch):

$$0 + (+3) + (-5) = -2$$

Abb. 7-5: Vernetzung der Darstellungen bei einer Additionsaufgabe mit ganzen Zahlen
(Eigene Darstellung)

7.4 Operationen mit Minusroboter

7.4.1 Minusroboter auf der Zahlen-Treppe

Materialien: blaue Kappe für jeden Minusroboter, Zahlen-Treppe, Zahlenkarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Stifte und Papier

Raum: Zahlen-Treppe

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise auf Zahlen-Treppe

Anleitung: Eine Person mit blauer Kappe steht als Minusroboter auf der Zahlen-Treppe, z. B. auf Stufe 0. Ihr Körper und Gesicht sind treppenabwärts gewandt. Die andere Person zeigt als Protokollant dem Minusroboter eine Zahl auf einer zufällig gezogenen Zahlenkarte und notiert dies als Minusaufgabe. Wenn die Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht der Minusroboter vorwärts 3 Stufen die Zahlen-Treppe abwärts. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht der Minusroboter rückwärts 5 Stufen die Zahlen-Treppe aufwärts (Müller & Ziermann, 2021, S. 67).

Hinweise: Vorher das Rückwärtsgehen auf Zahlen-Treppe üben, um Risiko zu minimieren.

7.4.2 Minusroboter auf dem Zahlenstrahl

Materialien: Blaue Kappe für jedem Minusroboter, Zahlenstrahl auf dem Boden, Zahlenkarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Stifte und Papier

Raum: Zahlenstrahl auf dem Boden

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise auf dem Zahlenstrahl

Anleitung: Eine Person mit blauer Kappe steht als Minusroboter auf dem Zahlenstrahl, z. B. auf Skala 0. Ihr Körper und Gesicht sind dem Pfeil des Zahlenstrahls abgewandt. Die andere Person zeigt als Protokollant dem Minusroboter eine Zahl auf einer zufällig gezogenen Zahlenkarte und notiert dies als Minusaufgabe. Wenn die Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht der Minusroboter 3 Schritte vorwärts auf dem Zahlenstrahl zu den kleineren Zahlen hin. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht der Minusroboter 5 Schritte rückwärts auf dem Zahlenstrahl zu den größeren Zahlen hin (Lensing-Conrady 2015, S. 147 – 150).

Hinweise: Vorher das Rückwärtsgehen üben, um Risiko zu minimieren.

7.4.3 Darstellungen vernetzen

Materialien: Stifte und kariertes Papier

Raum: offen

Raumformen: offen

Sozialformen: Einzel, Partnerweise, Gruppenweise

Anleitung: Die Minusaufgaben aus Abschnitt 7.4.1 und Abschnitt 7.4.2 werden bildhaft dargestellt und mit einer Rechengeschichte ergänzt.

Variation: In einer 4er-Gruppe gibt es vier Rollen: Eine Person spielt den Minusroboter (Repräsentant für Handlungsebene/enaktiv), eine zeichnet (bildhaft/ikonisch), eine erzählt die Rechengeschichte (Sprache) und eine protokolliert (symbolisch). Jede Person stellt mit ihrem Repräsentanten eine Aufgabe für die anderen. Diese übersetzen diese Aufgabe in ihre eigenen Repräsentanten.

Ein Beispiel: Die Person, die Minusroboter spielt, fängt an und steht auf der Stufe 0. Ihr Körper und Gesicht sind Treppenabwärts gerichtet. Sie geht zuerst 3 Stufen vorwärts und danach 5 Stufen rückwärts. Die anderen Personen übersetzen diese Aufgabe in Ihre eigenen Repräsentanten: Rechengeschichte, bildhafte und symbolische Darstellungen. Abb. 7-6 zeigt eine nachgezeichnete Gruppenlösung.

7.4.4 Plus- und Minusroboter synchron steuern

Materialien: rote bzw. blaue Kappe für jeden Plus- bzw. Minusroboter, Zahlen-Treppe, Stifte und Papier

Raum: Zahlen-Treppe

Raumformen: offen

Sozialformen: 4er-Gruppe auf der Zahlen-Treppe

Anleitung: In einer 4er-Gruppe gibt es vier Rollen: Eine Person mit roter Kappe spielt den Plusroboter, eine mit Blauer spielt den Minusroboter, eine programmiert und eine zeichnet. Plus- und Minusroboter stehen auf der gleichen Stufe, z. B. Stufe 0. Körper und Gesicht vom Plusroboter sind treppenaufwärts gewandt und vom Minusroboter treppenabwärts. Die Person, die programmiert, schreibt separate Befehle für Plus- und Minusroboter so, dass Plus- und Minusroboter synchron gehen. Für den Plusroboter z. B. $0 + (+3) + (-5)$ und für den Minusroboter $0 - (-3) - (+5)$. Plus- und Minusroboter gehen nach den Befehlen. Die 4. Person zeichnet dies auf einem Zahlenstrahl auf, über dem Zahlenstrahl für den Plusroboter und darunter für den Minusroboter (Abb. 7-7).

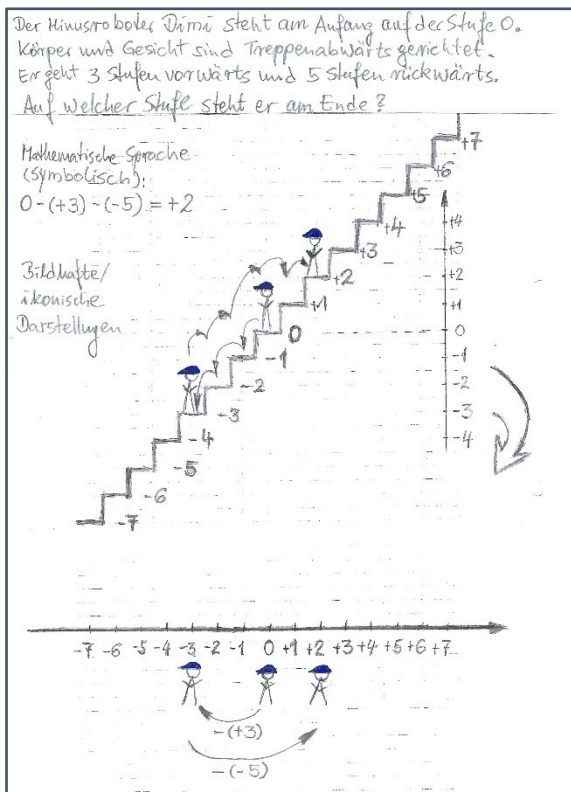


Abb. 7-6: Vernetzung der Darstellungen bei einer Subtraktionsaufgabe (Eigene Darstellung)

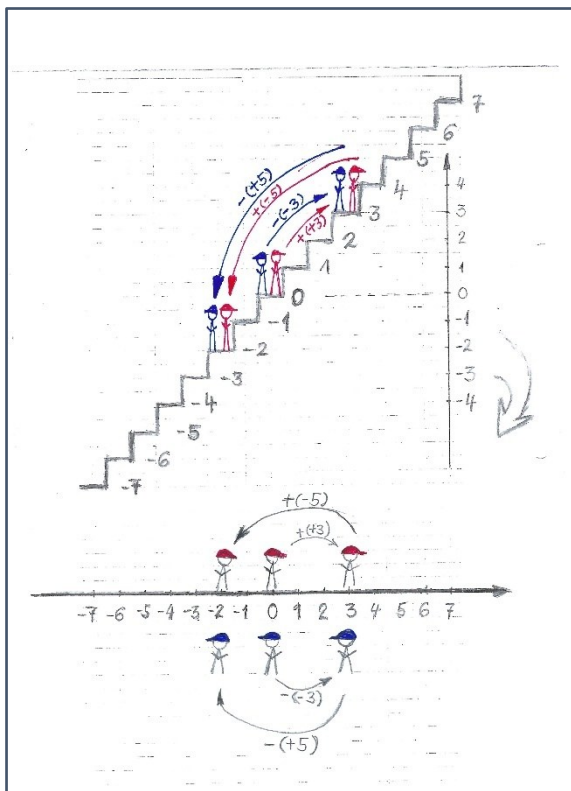


Abb. 7-7: Plus- und Minusroboter synchron steuern (Eigene Darstellung)

7.5 Operationen mit universalem Roboter

Materialien: rote und blaue Kappe, Zahlen-Treppe, Zahlenkarten mit positiven und negativen ganzen Zahlen, Stifte und Papier, ein Spielwürfel mit Plus- und Minuszeichen

Raum: Zahlen-Treppe

Raumformen: offen

Sozialformen: Partnerweise auf Zahlen-Treppe

Anleitung: Eine Person steht als universaler Roboter auf der Zahlen-Treppe, z. B. auf Stufe 0. Vor jeder Ziehung von Zahlenkarten spielt sie einmal den Plus-Minus-Würfel:

- Wenn der Würfel Pluszeichen zeigt, trägt sie die rote Kappe und spielt den Plusroboter. Ihr Körper und Gesicht sind treppenaufwärts gewandt. Wenn ihr eine Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht sie vorwärts 3 Stufen die Zahlen-Treppe aufwärts. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht sie rückwärts 5 Stufen die Zahlen-Treppe abwärts.
- Wenn der Würfel Minuszeichen zeigt, trägt sie die blaue Kappe und spielt Minusroboter. Ihr Körper und Gesicht sind treppenabwärts gewandt. Wenn die Zahl größer als 0 ist, z. B. +3, dann geht sie vorwärts 3 Stufen die Zahlen-Treppe abwärts. Wenn die Zahl kleiner als 0 ist, z. B. -5, dann geht sie rückwärts 5 Stufen die Zahlen-Treppe aufwärts.

Die andere Person zeigt als Protokollant dem universalen Roboter eine Zahl auf einer zufällig gezogenen Zahlenkarte und notiert dies als Aufgabe. Die Aufgabe soll auch bildhaft dargestellt werden. Vor jeder neuen Zahl wirft der universale Roboter den Plus-Minus-Würfel und verhält sich danach entsprechend (Müller & Ziermann, 2021, S. 67).

Hinweise: Vorher das Rückwärtsgehen auf Zahlen-Treppe üben, um Risiko zu minimieren. Die vorhandenen Kenntnisse von Plus- und Minusroboter (Abschnitte 7.3 und 7.4) sollen überprüft werden. Der universale Roboter kann nur bei sicherem Umgang mit Plus- und Minusroboter erfolgreich eingeführt werden.

7.6 Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen

Um mathematisch-operative Vorstellungen zu entwickeln und aufzubauen, werden die Handlungen und die bildhaften Darstellungen allmählich durch Rechengeschichten (Sprache) ersetzt. Schließlich werden die Aufgaben nur noch auf der symbolischen Ebene mit Zahlen und mathematischen Symbolen bearbeitet. Die entsprechenden Handlungen und bildlichen Darstellungen werden in der Vorstellung durchgeführt. Dadurch ist das Mathematiklernen sinnvoll und führt zum sicheren Erfolg.

8 Diskussion

In diesem Kapitel werden die Erkenntnisse aus der Praxis vorgestellt und diskutiert. Die Fragestellungen in der Einleitung werden beantwortet.

8.1 Erkenntnisse aus der Praxis

Die Umsetzung und Evaluierung des im vorherigen Kapitel vorgestellten Konzepts sind nicht Teil dieser Arbeit. Die Erkenntnisse aus der Praxis fließen aber hier ein, auch wenn diese keine wissenschaftliche Evaluierung des Konzeptes darstellen. Sie dienen lediglich als Ideengeber für weitere Arbeiten zu diesem Thema.

Das im Kapitel 7 vorgestellte Konzept wurden nach psychomotorischen Prinzipien mehrmals in verschiedenen Klassen einer Berufsschule durchgeführt. Alle Auszubildenden haben mindestens den Realschulabschluss. Die meisten Auszubildenden beginnen die Ausbildung unmittelbar nach der mittleren Reife. Manche Auszubildende waren schon Jahrzehnte im Beruf. Die Altersspanne liegt zwischen 16 und 60. Einige Auszubildende hatten keine positiven Erfahrungen im Mathematiklernen und waren unsicher im Umgang mit dem Zahlenstrahl und beim Rechnen mit negativen Zahlen. Um der Unsicherheit etwas entgegenzusetzen und um die Freude am Mathematiklernen zu wecken, habe ich eine Serie von Roboterspielen im Mathematikunterricht eingeführt. Die Einstiegsspiele, den blinden Roboter führen, den blinden Roboter testen und den halbautomatischen Roboter steuern, hatten die Auszubildenden aktiviert. Sie hatten dabei viele körperliche, räumliche und soziale Erfahrungen gesammelt. Sie spielten als Roboter kreativ und hatten viel gelacht. Diese positive Vorerfahrung und Stimmung hatten den Übergang zum Mathematiklernen erleichtert. Die Operationen mit Plus- und Minusroboter konnten schnell eingeführt werden. Die Vernetzung von verschiedenen Darstellungen wurden problemlos begriffen und umgesetzt. Dadurch konnte das E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung nach Bruner sowohl theoretisch als auch praktisch anschaulich eingeführt werden. Durch die handlungsmäßigen und bildhaften Darstellungen konnten mentale kognitive Muster, z. B. der mentale Zahlenstrahl, entstehen. Die mathematisch-operativen Vorstellungen konnten einerseits entwickelt und aufgebaut werden, waren andererseits leichter abrufbar und konnten damit für kreatives Problemlösen angewendet werden, siehe Infotafel 3-2.

Viele Auszubildende hatte ein größeres Aha-Erlebnis, als sie selbst die Plus- und Minusroboter synchron steuern sollten. Dabei wurden der Zusammenhang zwischen Operationen mit Plusroboter, z. B. $0 + (+3)$ bzw. $(+3) + (-5)$ und Operationen mit Minusroboter, z. B. $0 - (-3)$ bzw. $(+3) - (+5)$ plötzlich erkannt. Die mathematischen Symbole sind sinnhaft und lebendig geworden. Durch die Erfahrungen auf der Zahlen-Treppe und auf dem

Zahlenstrahl wurde mathematische Sachkompetenz erworben und vertieft. Außerdem wurde die Ich-Kompetenz durch die Bewegungserfahrung auf der Zahlen-Treppe und auf dem Zahlenstrahl erweitert. Partner- und Gruppenarbeit verstärkten die Sozial-Kompetenz. Das Mathematiklernen wurden mit positiven Emotionen verankert. Dadurch wurde die Persönlichkeit ganzheitlich gefördert und erweitert. Die Erkenntnisse aus der Praxis zeigten:

- Die Auszubildenden hatten eine positive Erfahrung beim Mathematiklernen und die Sinnhaftigkeit der Mathematik erlebt.
- Die Auszubildenden hatten Sicherheit im Umgang mit dem Zahlenstrahl und beim Rechnen mit negativen Zahlen erworben. Diese Sicherheit konnte ein halbes Jahr später noch beobachtet werden.
- Die Auszubildenden hatten das E-I-S-Prinzip zur kognitiven Entwicklung nach Bruner durch Vernetzung der handlungsmäßigen, bildhaften und symbolischen Darstellungen praktisch erworben.
- Die Auszubildenden konnten ihre mathematisch-operativen Vorstellungen durch geeignete Bewegungsspiele entwickeln, aufbauen und in den Alltag integrieren.
- Die Auszubildenden erfuhren eine effiziente Lernmethode: bewegtes Lernen.

8.2 Anmerkungen

Die im Kapitel 7 vorgestellten Roboterspiele basieren auf der ordinalen Zählstrategie, siehe Tab. 6-1 IV und V sowie Tab 6-3 Ordinalzahlaspekt.

Die Zahlen-Treppe kann vielfältig zum Erwerb der Zahlwortreihe (Abschnitt 6.2.1), der Zählprinzipien (Abschnitt 6.2.2) und Zahlaspekte (Abschnitt 6.2.3) benutzt werden.

Diese Roboterspiele können weitergeführt werden, zum Beispiel:

- Plusroboter mit Zählwerk für wiederholte Addition als Multiplikation
- Minusroboter mit Zählwerk für wiederholte Subtraktion als Division (Aufteilen)
- universaler Roboter mit Zählwerk für vier Grundrechenarten
- u.s.w.

Der Zahlenstrahl auf dem Boden kann auf zwei Dimensionen erweitert und für die Entwicklung der Vorstellung von funktionalen Zusammenhängen eingesetzt werden.

„Beim Rechnen sollte er [der Zahlenstrahl, d. Verf.] nicht verwendet werden, da er zum Zählen in Einerschritten verleitet. Für das Rechnen sollte nur auf den leeren Zahlenstrahl - also den Rechenstrich - zurückgegriffen werden“ (Primakom, o. J.).

Durch Zahlen-Treppe wird das Mathematiklernen mit dem Treppensteigen im Alltag verbunden. Mathematik ist überall, auch beim Treppensteigen.

8.3 Antworten auf Forschungsfragen

In der Einleitung (Kapitel 2) wurden folgenden Fragen gestellt:

- *Welche Rolle spielt das Konzept Embodiment im mathematischen Denken?*
- *Wie kann Psychomotorik in Entwicklung und Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen eingesetzt werden?*

Rolle des Konzepts Embodiment im mathematischen Denken

Bruner (1988, S. 21) hat herausgefunden, dass menschliche Kognition durch (a) aktive Handlungen, (b) Darstellung der Handlungen in Bildern und (c) Übersetzung sowohl der Handlungen als auch der Bilder in Sprache (Symbol) entwickelt. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen treibt die Kognition zur Weiterentwicklung (Bruner, 1988, S. 33). Die aktive Handlung sowohl in der Realwelt als auch in der Vorstellung ist ein Bestandteil der kognitiven Entwicklung. Menschliches Handeln basiert auf Körper, Sinneswahrnehmung und Bewegung. „Die Wechselwirkung Kognition – Körper ist zirkulär-kausal“ (Tschacher, 2017, S. 31). Nach dem Konzept Embodiment kann Geist/Kognition nur durch zweifache Einbettung, (1) im gesamten Körper und (2) mit dem gesamten Körper in der Umwelt, intelligent arbeiten (Tschacher, 2017, S. 15).

Mathematisches Denken ist ein spezielles Gebiet der Kognition. Mathematik wird hier als Wissenschaft von Mustern und Strukturen betrachtet (Devlin, 2002b, S. 5ff.; Shapiro, 2000, S. 257 - 289) und in drei Dimensionen klassifiziert: (a) prozessbezogenes Denken, (b) inhaltsbezogenes Denken und (c) mathematikbezogene Informationsbearbeitung bzw. basale Kompetenzen für mathematisches Lernen (Ulm und Zehnder 2020, S. 3f.; Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 22 - 49). Die Aspekte der basalen Kompetenzen und mathematikbezogenen Informationsbearbeitung sind die Fundamente für das Mathematiklernen (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 23). Somit ist das sensomotorische Wahrnehmen der Ausgangspunkt zur Entwicklung des mathematischen Denkens (Ulm und Zehnder 2020, S. 19).

Fazit:

- Die aktive Handlung sowohl in der Realwelt als auch in der Vorstellung ist ein Bestandteil der Entwicklung des mathematischen Denkens.
- Mathematisches Denken, als ein spezielles Gebiet der Kognition, kann nach dem Konzept Embodiment nur durch zweifache Einbettung, (1) im gesamten Körper und (2) mit dem gesamten Körper in der Umwelt, intelligent arbeiten.
- Der Ausgangspunkt zur Entwicklung des mathematischen Denkens ist das sensomotorische Wahrnehmen. Dies soll beim Mathematiklernen berücksichtigt werden.

Psychomotorik in Entwicklung und Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen

Psychomotorik fördert die Handlungskompetenz und die Persönlichkeitsentwicklung (Fischer, 2024, S. 19; Zimmer, 2022, S. 22f.). Eine Bewegungshandlung ist mehr als reine körperliche Aktivität (Kuhlenkamp, 2022, S. 69) und wird als Verwirklichungsmöglichkeit der Persönlichkeit betrachtet (Fischer, 2024, S. 19f.). Bewegung als Medium kann zur Förderung des Lernens eingesetzt werden (Kuhlenkamp, 2022, S. 73ff.).

Bei effizientem Lernen „handelt [es, d. Verf.] sich dabei um eine Konkretisierung des ganzheitlichen Lernens (Lernen mit mehreren Sinnen), die als *Wiener Schule der Psychomotorik* bezeichnet werden kann“ (Ullmann & Gräsel, 2016). „Alles, was in Bewegung oder verbunden mit einer Bewegung gelernt wird, bleibt leichter und länger im Gedächtnis. Erst wenn es in den Sinnen ist, ist es im Gedächtnis“ (Weiß, Voglsinger & Stuppacher, 2016, S. 9).

Mit Zahlen und Zahlenverarbeitung unterscheidet sich die numerische Kognition deutlich von anderen Gebieten der Kognition (Noël, 2000, S. 495). Zur Zahlenverarbeitung ist die Entwicklung der mentalen Zahlengerade essentiell (Fritz et al., 2018; Dehaene, 1992). Dehaene et al. (2003, S. 498) heben die räumliche Aufmerksamkeit in der Zahlenverarbeitung hervor. Alibali und Nathan (2012, S. 274) belegen, dass körperlich-räumliche Erfahrungen (embodied knowledge) ein integrierter Bestandteil des mathematischen Denkens und somit der mathematischen Lernprozesse sind.

Die wichtige Erkenntnis über Handlungsvorstellungen ist: Eine geeignete Handlungsausführung kann die Entwicklung der entsprechenden Handlungsvorstellung unterstützen (Rieger & Wenke, 2017, S. 782). Die körperlich-räumlichen Erfahrungen können durch Einsatz von Psychomotorik systematisch und effizient erworben werden. Diese Handlungserfahrungen können die Entwicklung und der Aufbau des mentalen Zahlenstrahls und der mathematisch-operativen Vorstellungen unterstützen. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen treibt die Kognition zur Weiterentwicklung (Bruner, 1988, S. 33). Zu diesem Zweck wird ein Einsatz von Psychomotorik im Kapitel 7 beschrieben. Die Erkenntnisse aus der Praxis zeigten positive Wirkungen und können als Ideengeber für weitere Arbeiten zu diesem Thema dienen.

Weitere Forschungsfrage

Es ergibt sich eine interessante Frage für die weitere Forschung: Wie kann der Einsatz von Psychomotorik im Kapitel 7 für verschiedene Altersgruppen angepasst, erweitert, umgesetzt und evaluiert werden, um das Mathematiklernen effizient und sinnvoll zu gestalten.

9 Zusammenfassung

Diese Arbeit setzt sich mit kognitiver Entwicklung der mathematisch-operativen Vorstellungen auseinander. Dabei werden grundlegende Informationen über kognitive Entwicklung, Embodiment als verkörperte Kognition, Psychomotorik als bewegtes Lernen, mathematisches Denken und Entwicklung numerischer Kognition dargestellt. Anschließend werden geeignete Bewegungsspiele zur Entwicklung der mathematisch-operativen Vorstellungen erläutert und diskutiert. Damit werden folgende Forschungsfragen beantwortet:

- *Welche Rolle spielt das Konzept Embodiment im mathematischen Denken?*
- *Wie kann Psychomotorik in Entwicklung und Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen eingesetzt werden?*

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist kognitive Entwicklung. Bruner (1988, S. 21) hat durch Studien herausgefunden, dass menschliche Kognition durch (a) aktive Handlungen, (b) Darstellung der Handlungen in Bildern und (c) Übersetzung sowohl der Handlungen als auch der Bilder in Sprache (Symbol) entwickelt. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungen treibt die Kognition zur Weiterentwicklung (Bruner, 1988, S. 33). Diese Erkenntnis von Bruner wird als E-I-S-Prinzip genannt. Dabei steht „E“ für Enaktiv (handlungsmäßig), „I“ für Ikonisch (bildhaft) und „S“ für Symbolisch. Die aktive Handlung sowohl in der Realwelt als auch in der Vorstellung ist ein Bestandteil der kognitiven Entwicklung.

Menschliches Handeln basiert auf Körper und Bewegung. „Die Wechselwirkung Kognition – Körper ist zirkulär-kausal“ (Tschacher, 2017, S. 31). Nach Embodiment kann Geist/Kognition nur nach zweifacher Einbettung, im gesamten Körper und mit dem gesamten Körper in der Umwelt, intelligent arbeiten (Tschacher, 2017, S. 15). Das Konzept Embodiment versteht sich bewusst als Gegenmodell zum Modell kognitiver Informationsverarbeitung (Rieger & Wenke, 2017, S. 774). Die wechselseitige Einflussnahme „zwischen Geist und Körper wird durch Embodiment in den Vordergrund gestellt“ (Tschacher & Storch, 2017, S. 118). Die Bildung von kognitiven Mustern/Schemata werden von der zweifachen Einbettung des Geistes und von der konkreten Situation beeinflusst (Tschacher, 2017, S. 31). Dies wird anhand des „Kerzenproblems“ veranschaulicht. Aus der Sicht von Embodiment sind Handlungsvorstellungen multimodale, dynamische Phänomene. Diese basieren auf bewussten Simulationen (Rieger & Wenke, 2017, S. 809). Die wichtige Erkenntnis über Handlungsvorstellungen ist: Eine geeignete Handlungsausführung kann die Entwicklung der entsprechenden Handlungsvorstellung unterstützen (Rieger & Wenke, 2017, S. 782).

Von Handlung zur Vorstellung (Rieger & Wenke, 2017, S. 782) kann auch als ein pädagogisches Prinzip betrachtet werden. Die Bedeutung des Körpers/des Leibs wandelt sich allmählich in der pädagogischen Praxis: von „Disembodied school“ (Francesconi & Tarozzi,

2019, S. 231) bis zur bewegten Schule (Brägger, Hundeloh, Posse und Städtler, 2020). Husserl (1952, S. 158) betrachtet den Leib als den „Nullpunkt“ aller Orientierungen. Der „‘Umschlagspunkt‘ zwischen kausalem und konditionalem Vorgang“ ist im Leib verankert (Husserl, 1952, S. 160). Der Körper bzw. der Leib dient im Bereich Bildung als Ort der sensiblen Wahrnehmung, als Feld der gelebten Erfahrung (Erlebnis) und als Medium für intersubjektive Beziehung und Kommunikation (Francesconi & Tarozzi, 2019, S. 233f.). Der Körper und der Leib sind auch das Medium für die handlungsmäßige, bildhafte und symbolische Darstellungen des E-I-S-Prinzips zur kognitiven Entwicklung nach Bruner.

Sinneswahrnehmung und Bewegung stehen beim psychomotorischen Einsatz im Vordergrund. Die vielfältigen Ursprünge und Entwicklungen des psychomotorischen Konzepts erschwert eine einheitliche und allgemeingültige Definition für Psychomotorik. Sie kann deshalb sowohl als Konzept als auch als Begriff definiert werden (Reichenbach, 2010, S. 10f.). Psychomotorik basiert auf einem humanistischen Menschenbild: Einheit und Ganzheit von Geist/Kognition, Seele/Psyche und Körper (Kuhlenkamp, 2022, S. 50). Sie fördert die Handlungskompetenz und die Persönlichkeitsentwicklung (Fischer, 2024, S. 19; Zimmer, 2022, S. 22f.). In der Psychomotorik gibt es drei Inhaltsfelder: (a) Körper- bzw. Selbst-Erfahrungen, um Ich- bzw. Selbst-Kompetenz zu fördern; (b) Material- bzw. Sach-Erfahrungen, um Sach-Kompetenz zu lernen; (c) Sozial-Erfahrungen, um Sozial-Kompetenz aufzubauen (Zimmer, 2022, S. 23ff.; Fischer, 2024, S. 20f.). Eine Bewegungshandlung ist mehr als reine körperliche Aktivität (Kuhlenkamp, 2022, S. 69) und wird als Verwirklichungsmöglichkeit der Persönlichkeit betrachtet (Fischer, 2024, S. 19f.).

Die Bewegungshandlungen haben fünf Bedeutungsdimensionen: (a) impressive und expressive, (b) explorative, (c) personale/psychisch-emotionale/kognitive, (d) sozial-kommunikative, (e) instrumentelle und produktive Bedeutungen (Fischer, 2024, 49ff.). Bewegung als Medium kann zur Förderung der Persönlichkeitsentwicklung, der Gesundheit und des Lernens eingesetzt werden (Kuhlenkamp, 2022, S. 73ff.).

Bei effizientem Lernen „handelt [es, d. Verf.] sich dabei um eine Konkretisierung des ganzheitlichen Lernens (Lernen mit mehreren Sinnen), die als *Wiener Schule der Psychomotorik* bezeichnet werden kann“ (Ullmann & Gräsel, 2016). Weiß, Voglsinger und Stuppacher (2016, S. 9) fordern im Rahmen psychomotorischer Lehr- und Lernmethoden, dass „die Gestaltung einer anregenden und sinnstiftenden Umwelt sowie emotionale Sicherheit [...] gewährleistet werden sollen“, und betonen: „Alles, was in Bewegung oder verbunden mit einer Bewegung gelernt wird, bleibt leichter und länger im Gedächtnis. Erst wenn es in den Sinnen ist, ist es im Gedächtnis“ (Weiß, Voglsinger & Stuppacher, 2016, S. 9). Moser (2016) hat in seinem Körper-und-Lernen-Modell Körper und Bewegung ins Zentrum verschiedener Lernbereiche und -prozesse gestellt. Voglsinger (2016) begründet, dass ein

Bewegungsraum gleichzeitig ein Erfahrungsraum und Lernraum ist. Die positiven Auswirkungen des Bewegten Lernens zum Erwerb numerischer Kompetenzen werden von zahlreichen empirischen Studien belegt (Artemenko et al., 2022; Domahs et al., 2010; Roesch et al., 2022; Dackermann et al., 2016).

Mathematisches Denken ist ein spezielles Gebiet der Kognition. Mathematik wird hier als Wissenschaft von Mustern und Strukturen betrachtet (Devlin, 2002b, S. 5ff.; Shapiro, 2000, S. 257 - 289) und in drei Dimensionen klassifiziert: (a) prozessbezogenes Denken, (b) inhaltsbezogenes Denken und (c) mathematikbezogene Informationsbearbeitung bzw. basale Kompetenzen für mathematisches Lernen (Ulm und Zehnder 2020, S. 3f.; Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 22 - 49). Prozessbezogenes Denken umfasst experimentierendes, begriffsbildendes, modellierendes, problemlösendes, schlussfolgerndes, formales, theoriebildendes Denken. Numerisches, geometrisches, algebraisches, funktionales und stochastisches Denken gehören zu inhaltsbezogenem Denken in der Sekundarstufe. Zu mathematikbezogener Informationsbearbeitung zählen das mathematische Wahrnehmen, Operieren mit mathematischen Objekten, Denken mit mathematischen Mustern, das flexible Denken, mathematisch-kreative Denken, Nutzen von Darstellungen sowie Speichern und Abrufen mathematischen Wissens (Ulm und Zehnder 2020, S. 3f). Die basalen Kompetenzen für mathematisches Lernen haben folgende sechs Aspekte: (a) Körperwahrnehmung und Körperschema, (b) Visuelle Wahrnehmung und visuelles Gedächtnis. (c) Akustische Wahrnehmung und akustisches Gedächtnis, (d) Kognitive Verarbeitung, dazu gehören Aufmerksamkeit, (e) Ausdauer und Beharrlichkeit sowie Selbstregulation und kognitive Flexibilität, (f) Vornumerische Entwicklung (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 24f.). Die Aspekte der basalen Kompetenzen und mathematikbezogenen Informationsbearbeitung sind die Fundamente für Mathematiklernen (Stiftung Kinder forschen, 2023, S. 23). Somit ist das sensorische Wahrnehmen Ausgangspunkt zur Entwicklung des mathematischen Denkens (Ulm und Zehnder 2020, S. 19). Dies soll beim Mathematiklernen berücksichtigt werden.

Um das Verarbeiten, Speichern und Abrufen von Informationen zu verstehen, werden Gedächtnismodelle betrachtet. Das menschliche Gedächtnis wird nach dem modalen Gedächtnismodell anhand der Speicherdauer zwischen drei modalen Komponenten differenziert: Sensorisches Gedächtnis, Arbeitsgedächtnis/Kurzzeitgedächtnis und Langzeitgedächtnis (Buchner & Brandt, 2017, S. 402f.). Diese Trennung von Arbeits- und Langzeitgedächtnis im modalen Gedächtnismodell ist empirisch umstritten. Ein vielversprechender Ansatz ist das Embedded-Processes-Modell (Eingebettete-Prozesse-Modell). Es geht vom Langzeitgedächtnis aus und fokussiert auf die Funktionen des Arbeitsgedächtnisses. Es wird angenommen, dass der Fokus der Aufmerksamkeit mehr durch Kapazität und aktiviertes Gedächtnis als durch Zeit begrenzt ist. Die Aktivierung von Information wird durch die

zentrale Exekutive gesteuert (Buchner & Brandt, 2017, S. 425ff.). Das modale Arbeitsgedächtnismodell hilft uns, die Struktur des Arbeitsgedächtnisses zu verstehen und das Embedded-Processes-Modell dessen Funktionsweise.

Mit Zahlen und Zahlenverarbeitung unterscheidet sich die numerische Kognition deutlich von anderen Gebieten der Kognition. Die Zahlenverarbeitung umfasst: (a) einen besonderen Aspekt der Realität, Größe bzw. Mächtigkeit, mit Zahlen darzustellen; (b) Zahlen als Objekte spezifischer Denkprozesse und (c) dass Zahlen in verschiedenen Formaten repräsentiert werden können (Noël, 2000, S. 495). Die Entwicklung der numerischen Kognition fängt mit Erwerb der Zahlwortreihe an. Nach Fuson (1988, S. 45 - 55) wird die Zahlwortreihe auf fünf Ebenen (in fünf Schritten) erworben: (I) Zahlwortreihe als Ganzheit (string level); (II) Unflexible Zahlwortreihe (unbreakable list level); (III) Teilweise flexible Zahlwortreihe (breakable chain level); (IV) Flexible Zahlwortreihe (numerable chain level); (V) Vollständig reversible Zahlwortreihe (bidirectional chain level). Das Erwerben der Zahlwortreihe hängt eng mit Entwicklung der Sprache zusammen und wird von der Kultur beeinflusst (Fuson, 1988, S. 56). Im deutschsprachigen Raum gibt es ein typisches Phänomen: Der Zahlendreher. Der Zahlendreher ist die Inversion (Umdrehung) von Einer und Zehner beim gesprochenen Zahlwort. Der Zahlendreher ist ein Stolperstein und Fehlerquelle beim Mathematiklernen (Summer, 2023, S. 16 - 20).

Um eine Menge von Elementen korrekt abzählen zu können sollen fünf Zählprinzipien neben dem Erwerb der Zahlwortreihe beherrscht werden: (1) Prinzip der Eins-zu-eins-Zuordnung (the one-one principle); (2) Prinzip der stabilen Zahlwortabfolge (the stable-order principle); (3) Kardinalprinzip (the cardinal principle); (4) Abstraktionsprinzip (the abstraction principle) – Prinzip der Irrelevanz des Zählinhalts; (5) Prinzip der Irrelevanz der Zählabfolge (the order-irrelevance principle) (Gelman & Gallistel, 1986, S. 77 – 82; Landerl et al., 2022, S. 64f.; Krauthausen, 2018, S. 48f.). Das Verständnis des Kardinalprinzips ist die Grundlage der Zahlenverarbeitung. Leider ist es aber besonders schwer festzustellen, ob dieses Verständnis beim Kind vorhanden ist (Landerl et al., 2022, S. 65). Krauthausen (2018, S. 43) stellt fest: „Um den Zahlbegriff in seiner Ganzheit zu erfassen, [...] ist es nötig, den Aspektreichtum der Zahlen aufzugreifen, zu systematisieren und zu vertiefen.“ Zu den Aspekten des Zahlbegriffs zählen: Kardinalzahlaspekt inklusiv geometrischer Aspekt, Ordinalzahlaspekt inklusiv relationaler Aspekt, Maßzahlaspekt, Operatoraspekt, Rechenzahlaspekt, Kodierungsaspekt inklusiv narrativer Aspekt (Krauthausen, 2018, S. 43f.). Die Aspekte des Zahlbegriffs unterstützen die Denkprozesse, um Zahlen zu verstehen und sind Grundlage für Denkprozesse, um Zahlen zu verarbeiten. Zur Zahlenverarbeitung werden zwei Modelle vorgestellt: Kognitiv-entwicklungspsychologisches Modell arithmetischer Konzepte mit sechs Niveaus nach Fritz et al. (2018) und das neurokognitive Triple-Code-Modell nach

Dehaene (1992). Beide Modelle haben die Bedeutung des mentalen Zahlenstrahls betont. Die Entwicklung der mentalen Zahlengerade ist essentiell. Dehaene et al. (2003, S. 498) heben die räumliche Aufmerksamkeit in der Zahlenverarbeitung hervor. Alibali und Nathan (2012, S. 274) belegen, dass körperlich-räumliche Erfahrungen (embodied knowledge) ein integrierter Bestandteil des mathematischen Denkens und somit der mathematischen Lernprozesse sind. Diese körperlich-räumlichen Erfahrungen können durch Einsatz von Psychomotorik systematisch und effizient erworben werden.

Es wird eine Serie von Bewegungsspielen zur Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen durch psychomotorischen Einsatz vorgestellt. Die Ideen entstanden aus eigener Praxis, dem Praxisteil des Psychomotorik Studiums und aus Literatur: unter anderem Müller und Ziermann (2021), Lensing-Conrady (2015), Köckenberger (2016) und Beigel (2019). Die Leitfiguren dieser Serie sind Roboter. Blinder Roboter wird geführt und getestet. Halb-automatischer Roboter wird gesteuert. Plusroboter und Minusroboter gehen zuerst einzeln auf Zahlen-Treppe und Zahlenstrahl, dann werden sie synchron gesteuert. Dazu werden Aufgaben notiert, ein entsprechendes Bild gezeichnet und eine passende Rechengeschichte erfunden. Abschließend kommt der universale Roboter zum Einsatz.

Diese Roboterspiele wurden im Mathematikunterricht einer Berufsschule mit Jugendlichen und Erwachsenen (16 – 60 J.) durchgeführt. Erkenntnisse aus der Praxis zeigten positive Wirkungen. Die Sinnhaftigkeit der Mathematik wurde erlebt und konnte in den Alltag übertragen werden. Die Freude am Mathematiklernen wurde wieder geweckt. Der mentale Zahlenstrahl und mathematisch-operative Vorstellungen zum Rechnen mit ganzen Zahlen wurden entwickelt, erweitert, vertieft und gefestigt. Mit bewegtem Lernen ist Erwerb und Wiederholen des Fachwissens nachhaltiger als „körperloses“ Lernen.

Es ergibt sich eine interessante Frage für die weitere Forschung: Wie kann der Einsatz von Psychomotorik im Kapitel 7 für verschiedene Altersgruppen angepasst, erweitert, umgesetzt und evaluiert werden, um das Mathematiklernen effizient und sinnvoll zu gestalten.

Fazit: Diese Arbeit befasst sich mit dem Thema „Embodiment und mathematisches Denken. Psychomotorik im Rahmen der Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen“ und hat folgendes herausgearbeitet:

- (1) Das Konzept Embodiment mit Körper als Medium ist ein Bestandteil des mathematischen Denkens und somit der mathematischen Lernprozesse.
- (2) Psychomotorischer Ansatz mit Bewegung als Medium, z. B. bewegtes Lernen, ist ein effizientes Mittel zur Entwicklung und zum Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen.

Literaturverzeichnis

- Alibali, M. & Nathan, M. (2012). Embodiment in Mathematics Teaching and Learning: Evidence From Learners' and Teachers' Gestures. *Journal of the Learning Sciences*, 21(2), 247-286. <https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611446>
- Arsalidou, M., Pawliw-Levac M., Sadeghi, M. & Pascual-Leone, J. (2018). Brain areas associated with numbers and calculations in children: Metaanalyses of fMRI studies. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 30, 239-250. <https://doi.org/10.1016/j.dcn.2017.08.002>
- Artemenko, C., Wortha, S. M., Dresler, T., Frey, M., Barrocas, R., Nuerk, H.-C. & Moeller, K. (2022). Finger-Based Numerical Training Increases Sensorimotor Activation for Arithmetic in Children—An fNIRS Study. *Brain Sciences*, 2022, 12(5), 637. <https://doi.org/10.3390/brainsci12050637>
- Beigel, D. (2019). *Beweg dich, Schule! Eine "Prise Bewegung" im täglichen Unterricht der Klassen 1 bis 13: Gehirngerechtes Lernen nach Dorothea Beigel®* (5., Überarbeitete und erweiterte Aufl.). Dortmund: verlag modernes lernen.
- Beutelspacher, A. (2009). *"In Mathe war ich immer schlecht ..."* (5., aktualisierte Aufl.). Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Brägger, G. (2020). 4.1 Sensomotorisches Lernen. In G. Brägger, H. Hundeloh, N. Posse & H. Städtler (Hrsg.), *Bewegung und Lernen: Konzept und Praxis Bewegter Schule* (2. Aufl., S. 71-78). Weinheim: Beltz.
- Brägger, G., Hundeloh, H., Posse, N. & Städtler, H. (2020). *Bewegung und Lernen: Konzept und Praxis Bewegter Schule* (2. Aufl.). Weinheim: Beltz.
- Breuer, I. (2019). Lernen als vorreflexiver Erfahrungsprozess: die ontologische Praxis der Sinnkonstitution von Leib und Welt. In M. Brinkmann, J. Türistig & M. Weber-Spanknebel (Hrsg.), *Leib – Leiblichkeit – Embodiment. Pädagogische Perspektiven auf eine Phänomenologie des Leibes* (S. 77-91). Wiesbaden: Springer VS.
- Brinkmann, M. (2019). Pädagogisches (Fremd-)Verstehen. Zur Theorie und Empirie einer interkorporalen Ausdruckshermeneutik. In M. Brinkmann (Hrsg.), *Verkörperungen. (Post-)Phänomenologische Untersuchungen zwischen erziehungswissenschaftlicher Theorie und leiblichen Praxen in pädagogischen Feldern* (S. 131-158). Wiesbaden: Springer VS.
- Brinkmann, M., Türistig, J. & Weber-Spanknebel, M. (2019). Einleitung. In M. Brinkmann, J. Türistig & M. Weber-Spanknebel (Hrsg.), *Leib - Leiblichkeit - Embodiment. Pädagogische Perspektiven auf eine Phänomenologie des Leibes* (S. 1-17). Wiesbaden: Springer VS.
- Brönnimann, D., Lauber, S., Schluep, M., Hartmann, T., Kern, R., Wilhelm, C., Richard, T. & Steinmann, P. (2014). *J+S-Kindersport. Spielen*. Herausgeber: Bundesamt für Sport BASPO, Schweiz. Zugriff am 15.04.2025 unter: https://label.sihf.ch/media/1433/de_bro_kindersport_spielen_d_screen.pdf

- Bruner, J. S. (1988). Über kognitive Entwicklung. In J. S. Bruner, R. R. Olver & P. M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung: Eine kooperative Untersuchung am "Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität* (S. 21-53). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Buchner, A. & Brandt, M. (2017). Gedächtniskonzeptionen und Wissensrepräsentationen. In J. Müsseler & M. Rieger (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie* (3. Aufl., S. 401-434). Berlin Heidelberg: Springer.
- Dackermann, T., Fischer, U., Cress, U., Nuerk, H.-C. & Moeller, K. (2016). Bewegtes Lernen numerischer Kompetenzen. *Psychologische Rundschau*, 67 (2), 102-109. <https://doi.org/10.1026/0033-3042/a000302>
- Davis, P. J. & Hersh, R. (1981). *Erfahrung Mathematik* (2., korrigierter Nachdruck der sonderausgabe, deutsch, 1996 Ausg.). Basel, Boston; Berlin: Birkhäuser.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense: how the mind creates mathematics* (Revised and Updated Edition). Oxford: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20(3), 487-506. <https://doi.org/10.1080/02643290244000239>
- Devlin, K. (2002a). *Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können* (deutsche Ausg., 3. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.
- Devlin, K. (2002b). *Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur* (2. Aufl.). Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.
- Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K. & Nuerk, H.-C. (2010). Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition*, 116, 251-266. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.05.007>
- Draguhn, A. (2017). Die Relevanz des Biologischen. Verkörperung als Leitmotiv eines Dialogs zwischen Neurowissenschaft und Pädagogik. In G. Etzel Müller, T. Fuchs & C. Tewes (Hrsg.), *Verkörperung – Eine neue interdisziplinäre Anthropologie* (S. 387-398). Berlin/Boston: Walter de Gruyter.
- Etzel Müller, G., Fuchs, T. & Tewes, C. (2017). Einleitung: Verkörperung als Paradigma einer neuen Anthropologie. In G. Etzel Müller, T. Fuchs & C. Tewes (Hrsg.), *Verkörperung - Eine neue interdisziplinäre Anthropologie* (S. 1-30). Berlin/Boston: Walter de Gruyter.
- Fischer, K. (2024). *Einführung in die Psychomotorik* (5., durchgesehene Aufl.). München: Ernst Reinhardt.
- Francesconi, D. & Tarozzi, M. (2019). Embodied Education and Education of the Body: The Phenomenological Perspective. In M. Brinkmann, T. Johannes & W.-S. Martin (Hrsg.), *Leib – Leiblichkeit – Embodiment. Pädagogische Perspektiven auf eine Phänomenologie des Leibes* (S. 229-247). Wiesbaden: Springer VS.

- Fritz, A., Ehlert, A. & Leutner, D. (2018). Arithmetische Konzepte aus kognitiventwicklungspsychologischer Sicht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 39, 7-14. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-0131-6>
- Fuson, K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer.
- Gasteiger, H. (2011). *Mathematisches Lernen von Anfang an. Kompetenzorientierte Förderung im Übergang Kindertagesstätte - Grundschule. Handreichung für das Programm SINUS an Grundschulen*. Kiel. Zugriff am 14. März 2025 unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Gasteiger_Internet.pdf
- Gelman, R. & Gallistel, C. (1986). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, Massachusetts, and London, England: Harvard University Press.
- Gruber, H. & Stamouli, E. (2021). Intelligenz und Vorwissen. In E. Wild, & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (3., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl., S. 25-44). Berlin: Springer.
- Hille, K. (2020). 4.4 Embodiment: Lernen braucht Hand und Fuß. In G. Brägger, H. Hundeloh, N. Posse & H. Städtler (Hrsg.), *Bewegung und Lernen: Konzept und Praxis Bewegter Schule* (2. Aufl., S. 87-98). Weinheim: Beltz.
- Husserl, E. (1952). *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Zweites Buch: Phänomenologische Untersuchungen zur Konstitution*. (M. Biemel, Hrsg.) Tübingen: Max Niemeyer.
- Köckenberger, H. (2016). *Bewegtes Lernen: Lesen, Schreiben, Rechnen mit dem ganzen Körper in Kita, Schule und Therapie. "Die Chefstunde" (8. völlig überarbeitete Aufl.)*. Dortmund: verlag modernes lernen.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule (4. Aufl.)*. Berlin: Springer Spektrum.
- Kuhlenkamp, S. (2022). *Lehrbuch Psychomotorik (2. überarbeitete Aufl.)*. München: Ernst Reinhardt.
- Landerl, K., Vogel, S. E. & Kaufmann, L. (2022). *Dyskalkulie. Modelle, Diagnostik, Intervention (4., überarbeitete und erweiterte Aufl.)*. München: Ernst Reinhardt.
- Lensing-Conrady, R. (2015). *Mathe bewegt! Vom Körperraum zum Zahlenraum*. Dortmund: verlag modernes lernen.
- Lippitz, W. (2019). *Phänomene der Erziehung und Bildung. Phänomenologisch-pädagogische Studien*. Buchreihe Phänomenologische Erziehungswissenschaft, Bd. 7, Wiesbaden: Springer VS.
- Loos, A., Sinn, R. & Ziegler, G. M. (2022). *Panorama der Mathematik*. Berlin: Springer.
- Matheinklusiv mit PIKAS (o. J.). *Zahlaspekte beachten*. Zugriff am 14. März 2025 unter <https://pikas-mi.dzlm.de/inhalte/zahlvorstellungen-tragf%C3%A4hige-vorstellungen-aufbauen-zr-bis-100/hintergrund/zahlaspekte>

- Mombaur, K. (2017). Wie viel Intelligenz steckt in der Mechanik unseres Körpers? - Passiv-dynamische Roboter, menschliche Bewegungsstudien, mathematische Modelle und Kleists Marionettentheater. In G. Etzelmüller, T. Fuchs & C. Tewes (Hrsg.), *Verkörperung - Eine neue interdisziplinäre Anthropologie* (S. 137-160). Berlin/Boston: Walter de Gruyter.
- Moser, T. (2016). Körper und Lernen. In O. Weiß, J. Voglsinger & N. Stuppacher (Hrsg.), *Effizientes Lernen durch Bewegung: 1. Wiener Kongress für Psychomotorik* (S. 15-39). Münster, New York: Waxmann.
- Müller, C. & Ziermann, C. (2021). *Bewegtes Lernen im Fach Mathematik: Klassen 5 bis 10/12: Didaktisch-methodische Anregungen* (3., aktualisierte Aufl.). Baden-Baden: Academia.
- Myers, D. G. & DeWall, C. N. (2023). *Psychologie* (4., vollständig überarb. Aufl.). Berlin: Springer.
- Noël, M.-P. (2000). Numerical Cognition. In B. Rapp (Eds.), *A handbook of cognitive neuropsychology* (pp. 495-518). New York: Psychology Press.
- Nuerk, H.-C., Moeller, K., Klein, E., Willmes, K. & Fischer, M. (2011). Extending the Mental Number Line - A Review of Multi-Digit Number Processing. *Zeitschrift für Psychologie / Journal of Psychology*; Vol. 219(1), 3–22. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000041>
- Primakom (o. J.). *Hintergrund: Die Zahlenstrahl – ein lineares Anschauungsmaterial*. Zugriff am 15.04.2025. unter <https://primakom.dzlm.de/inhalte/zahlen-und-operationen/zahlraumerweiterung/hintergrund>
- Rackles, M. (2023). *Lehrkräftearbeitszeit in Deutschland - Veränderungsdruck und Handlungsempfehlungen*. Berlin: Expertise im Auftrag der Deutsche Telekom Stiftung. Zugriff am 10. Juli 2024 unter <https://www.telekom-stiftung.de/sites/default/files/files/Lehrkraeftearbeitszeit-Expertise.pdf>
- Reichenbach, C. (2010). *Psychomotorik*. München, Basel: Ernst Reinhardt.
- Reichenbach, C. (2023). Psychomotorik. In C., Reichenbach (Hrsg.), *Handbuch heilpädagogischer Konzepte und Methoden: Ein Leitfaden für die Praxis* (206-213). Stuttgart: Kohlhammer.
- Renkl, A. (2021). Wissenserwerb. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (3., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl., S. 3-24). Berlin: Springer.
- Rieger, M. & Wenke, D. (2017). Embodiment und Sense of Agency. In J. Müsseler & M. Rieger (Hrsg.), *Allgemeine Psychologie* (3. Aufl, S. 773-819). Berlin Heidelberg: Springer.
- Roesch, S., Bahnmueller, J., Barrocas, R. & Moeller, K. (2022). Feinmotorik, Fingergnosie und frühe mathematische Fähigkeiten: Ein Überblick. *Lernen und Lernstörungen*, 11 (3), S. 139-157. <https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000376>
- Schulte-Wißing, E.-M. (2020). *Kinder deuten Zahlenmuster. Epistemologische Analysen kindlicher Strukturattributionen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics. The philosophy of mathematics*. Oxford, New York: Oxford University Press.

- Stiftung Kinder forschen. (2023). *Mathematik ist machbar. Praxisnahe Bausteine für kreative Lernbegleitung*. Berlin. Zugriff am 06. März 2025 unter <https://campus.stiftung-kinder-forschen.de/totara/engage/resources/article/index.php?id=363&source=ct.orderbykey%3Deatured%26itemstyle%3Dnarrow>
- Storch, M., Cantieni, B., Hüther, G. & Tschacher, W. (2017). *Embodiment. - Die Wechselwirkung von Körper und Psyche verstehen und nutzen*. Bern: Hogrefe.
- Summer, A. (2023). *Die universelle Sprache der Mathematik – Fachdidaktische Aspekte mit dem Fokus auf die Primarstufe*. Wien/Krems. Zugriff am 15. März 2025 unter https://kphvie.ac.at/fileadmin/Dateien_KPH/Forschung_Entwicklung/PDF/av-summer-gesamt-online.pdf
- Tschacher, W. (2017). 1 Wie Embodiment zum Thema wurde. In M. Storch, B. Cantieni, G. Hüther & W. Tschacher (Hrsg.), *Embodiment - Die Wechselwirkung von Körper und Psyche verstehen und Nutzen* (S. 11-34). Bern: Hogrefe.
- Tschacher, W. & Storch, M. (2017). Grundlagen des Embodiment-Ansatzes in den Humanwissenschaften. *Motorik*, 40(3), 118-126.
- Ullmann, J. & Gräsel, E. (2016). Vorwort. In O. Weiß, J. Voglsinger & N. Stuppacher (Hrsg.), *Effizientes Lernen durch Bewegung: 1. Wiener Kongress für Psychomotorik* (S. 5). Münster, New York: Waxmann.
- Ulm, V. & Zehnder, M. (2020). *Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung*. Berlin: Springer Spektrum.
- Voglsinger, J. (2016). Bewegtes Lernen - bewegtes Denken. In O. Weiß, J. Voglsinger & N. Stuppacher (Hrsg.), *Effizientes Lernen durch Bewegung: 1. Wiener Kongress für Psychomotorik* (S. 41-63). Münster, New York: Waxmann.
- Walter, S. (2016). 47 Kognitionswissenschaft. In M. Kühler & M. Rüter (Hrsg.), *Handbuch Handlungstheorie - Grundlagen, Kontext, Perspektiven* (S. 422-429). Stuttgart: J. B. Metzler.
- Wehrle, M. (2022). *Phänomenologie: Eine Einführung*. Berlin: J.B. Metzler.
- Weiß, O., Voglsinger, J. & Stuppacher, N. (2016). Einleitung: Effizientes Lernen. In O. Weiß, J. Voglsinger & N. Stuppacher (Hrsg.), *Effizientes Lernen durch Bewegung: 1. Wiener Kongress für Psychomotorik* (S. 9-13). Münster, New York: Waxmann.
- Wußing, H. (2008). *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise - 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Ziegenbalg, J., Ziegenbalg, O. & Ziegenbalg, B. (2016). *Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima* (4., überarbeitete und erweiterte Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Zimmer, R. (2022). *Handbuch Psychomotorik (15. Gesamtaufl.)*. Freiburg, Basel, Wien: Herder.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 3-1: Kognition und Embodiment	6
Abb. 3-2: Schema des Konzepts Embodiment	7
Abb. 3-3: Materialien für das Kerzenproblem	8
Abb. 3-4: Eine Lösung für das Kerzenproblem	9
Abb. 4-1: Körper und Bewegung im Zentrum von Lernbereichen und -prozessen	20
Abb. 4-2: Bewegungsraum-Erfahrungsraum-Lernraum-Konzept	21
Abb. 5-1: Facetten mathematischen Denkens in der Sekundarstufe	26
Abb. 5-2: Bedeutsame Kompetenzbereiche des mathematischen Denkens in der frühen Kindheit.	27
Abb. 5-3: Modellierungskreislauf	29
Abb. 5-4: Schematische Darstellung des modalen Gedächtnismodells	35
Abb. 5-5: Embedded-Processes-Modell	37
Abb. 6-1: Numerische Kognition	39
Abb. 6-2: Triple-Code-Modell nach Dehaene	50
Abb. 7-1: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 1	53
Abb. 7-2: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 2	53
Abb. 7-3: Vorbereitung zur Zahlen-Treppe 3	53
Abb. 7-4: Vorbereitung zum Zahlenstrahl	54
Abb. 7-5: Vernetzung der Darstellungen bei einer Additionsaufgabe mit ganzen Zahlen	56
Abb. 7-6: Vernetzung der Darstellungen bei einer Subtraktionsaufgabe	59
Abb. 7-7: Plus- und Minusroboter synchron steuern	59

Tabellenverzeichnis

Tab. 3-1: Kognition	5
Infotafel 3-2: Handlungsvorstellungen	10
Tab. 5-1: Übersicht Inhalt der Mathematik	24
Tab. 6-1: Fünf Ebenen zum Erwerb der Zahlwörterreihe	40
Tab. 6-2: Beispiel Zahl 56789	42
Tab. 6-3: Aspekte des Zahlbegriffs	44
Tab. 6-4: Bedeutung der einzelnen Entwicklungsniveaus für verschiedene arithmetische Aspekte	48
Tab. 6-5: Bedeutung der Entwicklungsniveaus für Rechenoperationen	49

Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit dem Thema „Embodiment und mathematisches Denken. Psychomotorik im Rahmen der Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen“ und hat folgendes herausgearbeitet: (1) Das Konzept Embodiment mit Körper als Medium ist ein Bestandteil des mathematischen Denkens und somit der mathematischen Lernprozesse; (2) Psychomotorischer Ansatz mit Bewegung als Medium, z. B. bewegtes Lernen, ist ein effizientes Mittel zur Entwicklung und zum Aufbau der mathematisch-operativen Vorstellungen.

Beginnend mit der Einführung des E-I-S-Prinzips nach Bruner, wird die Bedeutung der aktiven Handlung (durchgeführt oder vorgestellt) zur kognitiven Entwicklung betont. Handlung ist ein Zusammenspiel von Geist/Kognition, Körper/Leib, Sinneswahrnehmung und Bewegung. Die wechselseitige Einflussnahme zwischen Geist/Kognition und Körper wird im Konzept Embodiment hervorgehoben. Der Geist/die Kognition kann nur durch zweifache Einbettung im Körper und in der Umwelt intelligent arbeiten. Kenntnisse über Handlungsvorstellung werden festgehalten. Durch das Konzept Embodiment wird körperlose Schule zu bewegter Schule. Sinneswahrnehmung und Bewegung steht beim psychomotorischen Einsatz in Vordergrund. Psychomotorik basiert auf Einheit und Ganzheit von Geist/Kognition, Seele/Psyche und Körper. Sie fördert die Handlungskompetenz und Persönlichkeitsentwicklung. Die Bewegungshandlungen werden analysiert und seine Bedeutungsdimensionen werden aufgelistet. Bewegtes Lernen wird als effizientes Lernen eingeführt. Mathematisches Denken wird als ein spezielles Gebiet der Kognition in drei Dimensionen differenziert. Prozessbezogenes Denken und Mathematikbezogene Informationsbearbeitung bzw. basale Kompetenzen für mathematisches Lernen werden kurz vorgestellt. Inhaltsbezogenes Denken wird auf Entwicklung der numerischen Kognition begrenzt. Es wird eine Serie zur Entwicklung mathematisch-operativer Vorstellungen durch psychomotorischen Einsatz beschrieben. Erkenntnisse aus der Praxis werden dokumentiert und diskutiert. Abschließend wird die Arbeit zusammengefasst.

Abstract

This thesis deals with the topic “Embodiment and mathematical thinking. Psychomotricity in the context of the development of mathematical-operative imagination” and has worked out the following: (1) Embodiment with the body as a medium is a part of mathematical thinking and thus of mathematical learning processes; (2) Psychomotricity approach with movement as a medium, e.g. learning in motion, is an efficient means of developing and building mathematical-operative imagination.

Starting with the introduction of the E-I-S principle according to Bruner, the importance of active action (performed or presented) for cognitive development is emphasized. Action is an interplay of mind/cognition, body, sensory perception and movement. The reciprocal influence between mind/cognition and body is emphasized in embodiment. The mind/cognition can only work intelligently through double embedding in body and in environment. Knowledge about the imagination of action is recorded. Through embodiment, disembodied school becomes school in motion. Sensory perception and movement are at the forefront of psychomotor activities. Psychomotricity is based on the unity and wholeness of mind/cognition, soul/psyche and body. It promotes action competence and personality development. The movement actions are analyzed and their dimensions of meaning are listed. Movement-based learning is introduced as efficient learning. Mathematical thinking is differentiated into three dimensions as a special area of cognition. Process-related thinking and mathematics-related information processing or basic competencies for mathematical learning are briefly introduced. Content-related thinking is limited to the development of numerical cognition. A series on the development of mathematical-operative imagination through psychomotor application is described. Findings from practice are documented and discussed. Finally, the work is summarized.