

DIPLOMARBEIT

Titel der Diplomarbeit

Fächerübergreifender Unterricht
Mathematik-Physik am Beispiel der
trigonometrischen Funktionen

Verfasserin

Magdalena Klima

angestrebter akademischer Grad

Magistra der Naturwissenschaften (Mag.rer.nat)

Wien, im Jänner 2010

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 190 406 412

Studienrichtung lt. Studienblatt: Lehramt Mathematik, Physik

Betreuer: Dr. Andreas Ulovec

1 Vorwort

Diese Arbeit ist ein Versuch verschiedene Bereiche der Physik, von Schwingungen und Wellen, über Wechselstrom und technische Anwendungen, wie den Rundfunk, in Zusammenhang mit ihrem mathematischen Hintergrund zu bringen. Die Umsetzung dieses Ziels erfolgte durch Ausarbeitung von aufeinander abgestimmten Unterrichtsstunden, die mir in meinem zukünftigen Beruf als Lehrerin hoffentlich nützlich sein werden.

Da sich der Werdegang meiner Diplomarbeit über einen langen Zeitraum erstreckte, möchte ich mich vor allem bei meinem Betreuer Dr. Andreas Ulovec für seine Geduld und Hilfestellung bedanken. Großer Dank geht an meinen Ehemann, Thomas Klima, der mich während der Entstehung dieser Arbeit großartig unterstützt hat und mir mit Rat und Tat bei etwaigen Problemen mit diversen Computerprogrammen zur Seite stand. Selbstverständlich danke ich auch meinen Eltern, die mir erst das Studium ermöglicht haben.

Außerdem geht mein Dank auch an Theresia Stehlik, die sich die Mühe machte, die vorliegende Arbeit nach etwaigen Tippfehlern zu durchforsten.

Zu guter Letzt danke ich im Besonderen meinem Sohn Cornelius, der immer zur rechten Zeit geschlafen hat und so das Entstehen dieser Arbeit überhaupt ermöglichte.

Ich hoffe mit der vorliegenden Arbeit auch anderen Kolleg/innen einen Dienst erwiesen zu haben und wünsche nun viel Freude beim Lesen.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Lehrplanbezug	3
3	Unterrichtseinheiten	5
3.1	Harmonische Schwingungen	6
3.2	Winkelfunktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$	12
3.3	Die allgemeine Sinusfunktion	22
3.4	Überlagerung von Schwingungen	32
3.4.1	Überlagerung von Sinusfunktionen gleicher Frequenz . . .	33
3.4.2	Überlagerung von Sinusfunktionen fast gleicher Frequenz	55
3.4.3	Überlagerung mehrerer Schwingungen	62
3.5	Multiplikation von Sinusfunktionen	70
4	Zusammenfassung	85
5	Literaturverzeichnis	87
6	Lebenslauf	88

2 Lehrplanbezug

„Der Mathematikunterricht soll beitragen, dass Schülerinnen und Schüler ihrer Verantwortung für lebensbegleitendes Lernen besser nachkommen können. Dies geschieht vor allem durch die Erziehung zu analytisch-folgerichtigen Denken und durch die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen, die für viele Lebensbereiche grundlegende Bedeutung haben. Beim Erwerben dieser Kompetenzen sollen die Schülerinnen und Schüler die vielfältigen Aspekte der Mathematik und die Beiträge des Gegenstandes zu verschiedenen Bildungsbereichen erkennen.

Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.“¹

Dies sind die einleitenden Worte zum Lehrplan für das Unterrichtsfach Mathematik in der AHS und sie rechtfertigen fächerübergreifenden Unterricht, wenn darin von der Beschreibung der Strukturen unserer Umgebung die Rede ist und die Bedeutung von Mathematik in vielen Lebensbereichen herausgestrichen wird. Physik soll die Vorgänge in Natur und Technik erklären, was liegt also näher als diese beiden Fächer miteinander zu verknüpfen.

Der Lehrplan sieht im Physikunterricht der sechsten Klasse die Beschäftigung mit Schwingungen und Wellen vor, damit die Schüler/innen Vorgänge aus der Akustik verstehen und Wellen als Mittel zur Informationsübertragung begreifen lernen. In der siebten Klasse soll dieses Wissen weiter vertieft werden. Diesen Forderungen wird in den Kapiteln Überlagerung von Schwingungen und Multiplikation von Schwingungen Rechnung getragen, da dort Unterrichtsstunden zur Schwebung und Nachrichtentechnik vorkommen.

„Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch eigene Tätigkeiten Einsichten gewinnen und so mathematische Begriffe und Methoden in ihr Wissenssystem einbauen.“²

Diese Forderung wird in den ausgearbeiteten Unterrichtsstunden durch Arbeitsblätter verwirklicht. Die Schüler/innen sollen Eigenschaften von Funktionen selbst-

¹ siehe [6]

² siehe [6]

ständig durch Interpretation der Graphen besagter Funktionen herausfinden, unterstützt werden sie hierbei vom Computerprogramm Derive. Dies trägt zum „Lernen mit technologischer Unterstützung“³ im Mathematikunterricht bei. Ebenfalls regt der Bau eines Radioempfängers zum individuellen Lernen an.

Der Lehrstoff der sechsten Klasse sieht im Mathematikunterricht die Beschäftigung mit Winkelfunktionen vor, die, wie bereits der Titel verrät, die Grundlage dieser Arbeit bilden und deshalb wurde der Großteil der Unterrichtsstunden für die sechste Klasse AHS entworfen. Das letzte Kapitel allerdings, die Multiplikation von Sinusfunktionen, ist für die siebte Klasse vorgesehen, da für das Verständnis der darin enthaltenen Nachrichtentechnik Physikkennntnisse der siebten Klasse benötigt werden.

³siehe [6]

3 Unterrichtseinheiten

In den ersten beiden Unterrichtseinheiten geht es um den Zusammenhang der Winkelfunktion Sinus mit einer Kreisbewegung. Grundlegende Begriffe wie zum Beispiel Schwingungsdauer, Frequenz und Amplitude sollen hierbei im Physikunterricht definiert werden, damit dann in den Mathematikstunden die harmonische Schwingung mit der Funktion $y = \sin x$ in Zusammenhang gebracht werden kann.

Die Durchführung der zwei Unterrichtsstunden ist für die sechste Klasse der AHS gedacht, dabei handelt es sich bei der ersten Stunde um eine Physikeinheit und die zweite ist als Mathematikstunde konzipiert. Anregungen zu den Stunden wurden [2], [3] und [4] entnommen.

3.1 Harmonische Schwingungen

Thema: harmonische Schwingung

Lernziel: In dieser Unterrichtseinheit sollen die Schüler/innen mit den grundlegenden Begriffen, die zur Beschreibung einer Schwingung nötig sind, vertraut gemacht werden, d.h. sie sollen nach der Stunde in der Lage sein Schwingung zu definieren, wissen, dass eine harmonische Schwingung einer Kreisbewegung entspricht und das Weg-Zeit-Diagramm einer solchen erkennen, damit in der folgenden Mathematikstunde dessen Eigenschaften studiert werden können.

Lehrziel: Die Funktion Sinus soll den Schüler/innen mit Hilfe eines praktischen Beispiels, nämlich dem Federpendel, nahegebracht werden.

Ablauf:

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-07	Vorstellung des Themas Motivation, Beispiele für Schwingungen und Anwendungen	Lehrervortrag Gruppenarbeit
08-11	Def. Schwingung insbes. harmonische	Lehrervortrag
12-14	Demonstration Federpendel	Lehrervortrag
15-20	Bewegung des Federpendels	Einzelarbeit
21-25	Begriffserklärung (Frequenz, Schwingungsdauer)	Lehrervortrag
26-31	Weg-Zeit-Diagramm Federpendel	Einzelarbeit
32-38	Formel für Frequenz	Schülerversuch
39-50	Zusammenhang harmonische Schwingung mit Kreisbewegung	Lehrervortrag

Zu Beginn der Stunde wird die Beschäftigung mit dem Thema Schwingungen motiviert, warum wurde bzw. wird diese Bewegungsform überhaupt untersucht, welche praktischen Anwendungen sind den Schüler/innen bekannt?

Dazu stellt die Lehrperson zuerst den Inhalt der Unterrichtseinheit vor und beauftragt die Schüler/innen dann selbstständig Beispiele oder Anwendungen für Schwingungen zu sammeln. Das Ideensammeln kann entweder in Zweiergruppen oder im Klassenverband erfolgen, wobei die Ergebnisse an der Tafel von der Lehrer/in festgehalten werden.

Beispiele für Schwingungen:

Feder, Pendel in Uhr, Saiten eines Musikinstruments, Boote am Wasser, Schwingungen von Luftmolekülen → Schallwellen, Schwingungen des elektrischen Stroms → Wechselstrom, Schwingkreise, Schwingquarze, etc.

Weiters spielt eine Form der Schwingungen eine besondere Rolle, nämlich die harmonische Schwingung. Aus ihr können alle periodischen Bewegungen zusammengesetzt werden, dies geschieht bei der sogenannten Fourier-Analyse, wie der französische Mathematiker Jean-Baptiste de Fourier im 19. Jahrhundert beweisen konnte.

Die Lehrperson gibt den Schüler/innen sodann eine genaue Definition von Schwingungen und erklärt danach den Begriff harmonische Schwingung, dies sollten die Schüler/innen auch notieren:

Definition: „Eine Schwingung tritt auf, wenn die stabile Gleichgewichtslage eines Systems leicht gestört wird.“⁴

Leicht lässt sich diese Definition mit folgendem Versuch illustrieren:

Man nehme ein Lineal, dass mit einer Hand am Tisch festgehalten wird und zu einem Großteil die Tischkante überragt. Nun wird die den Tisch überragende Seite des Lineals mit der anderen Hand hinuntergedrückt, um dann plötzlich losgelassen zu werden, das Lineal schwingt. Das Bewegen durch die Hand war hierbei die Störung der Gleichgewichtslage.

In dieser Unterrichtsstunde geht es um eine sehr häufig auftretende und wichtige Form der Schwingung, nämlich die harmonischen Schwingung. Was versteht man nun darunter?

Einfachstes Beispiel dafür ist ein Federpendel. Es ist dies die Bewegung eines Gegenstandes, der an einer Feder befestigt ist und reibungsfrei und ungedämpft schwingen kann; diese Anordnung wird auch harmonischer Oszillator genannt. Einfachstes Beispiel dafür ist ein Federpendel.

Die Schüler/innen sollen sich überlegen, welche Kraft auf die Masse, die an der Feder befestigt ist, wirkt und welchem Gesetz sie folgt:

Solange sich das System in Ruhe befindet heben sich Gewichtskraft und Feder-

⁴siehe [4] Tipler S. 423

kraft auf. Wird die Feder gedehnt und dann losgelassen, bewegt sich die an der Feder befindliche Masse auf Grund ihrer Trägheit über die Gleichgewichtslage hinaus. Aber auf den Pendelkörper wirkt die Federkraft F , die dem Hooke'schen Gesetz gehorcht:

$$F = -k * y$$

wobei k die Federkonstante bezeichnet und y der momentanen Auslenkung entspricht. Das Minus in der Formel zeigt an, dass es sich um eine rücktreibende Kraft handelt. Der Pendelkörper wird also von der Feder gebremst und wieder zurückgezogen, wobei er wegen der Trägheit über die Gleichgewichtslage hinauschießt. Nun wiederholt sich der Vorgang, das Federpendel schwingt.

Dabei ist es sinnvoll, wenn die Lehrperson die Überlegungen der Schüler/innen zu diesem Bewegungsvorgang zusammenfasst und falls nötig an einem schwingenden Federpendel noch einmal demonstriert.

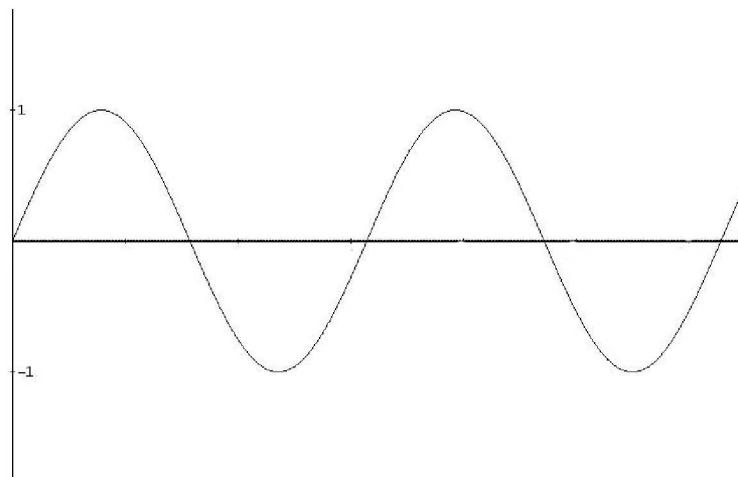
Im nächsten Unterrichtsschritt werden Begriffe erklärt, die zu einer einfacheren Beschreibung einer Schwingungsbewegung nötig sind:

- Elongation y beschreibt die momentane Auslenkung
- Amplitude A beschreibt die maximale Auslenkung
- Schwingungsdauer T ist jene Zeit, die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt
- Frequenz f [Hertz = Hz] ist die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde.
Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer und Frequenz:

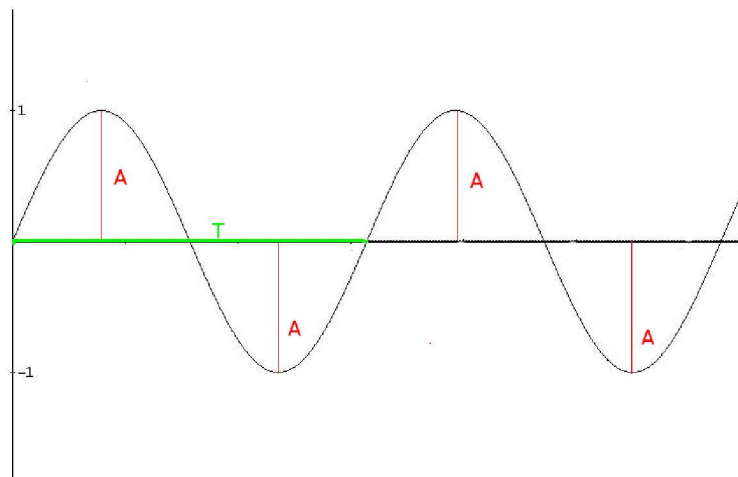
$$f = \frac{1}{T}$$

Nun wird das Weg-Zeit-Diagramm eines Federpendels aufgenommen:

Dazu zeichnet ein schwingendes Federpendel an einer vorbeilaufenden Papierrolle seinen Weg auf. Dabei ergibt sich folgendes Bild:



Die Schüler/innen erhalten eine Kopie des Graphen des Weg-Zeit-Diagramms des Federpendels und müssen selbstständig Amplitude und Schwingungsdauer einzeichnen:



Nun gibt die Lehrperson den Hinweis, dass die Eigenschaften der Funktion, nämlich der Sinusfunktion, im Mathematikunterricht näher besprochen werden.

Im nächsten Schritt wird untersucht von welchen Faktoren die Frequenz und somit auch die Schwingungsdauer einer harmonischen Schwingung abhängen. Dazu werden folgende Versuche von den Schüler/innen durchgeführt. Man benötigt zwei Federpendel mit unterschiedlichen Federkonstanten und zwei Gewichte verschiedener Masse. Nach dem Anbringen der Pendelkörper werden die Pendel ausgelenkt und ihre Frequenz gemessen. Dann vertauscht man die Gewichte und beobachtet wiederum mit welcher Frequenz die Pendel bei einer Störung schwingen. Das Ergebnis des Experiments legt nahe, dass die Frequenz mit steigender Federkonstanten wächst und mit zunehmender Masse fällt.

Hängt die Frequenz auch von der Amplitude ab? Der zweite Versuch liefert die Antwort auf diese Frage:

Zwei Federpendel mit derselben Federkonstanten und zwei gleichen Massen werden unterschiedlich stark ausgelenkt und zur gleichen Zeit losgelassen, trotzdem erreichen beide die Gleichgewichtslage zur selben Zeit. Das bedeutet, dass die Frequenz nicht von der Amplitude abhängt. Wichtig ist diese Unabhängigkeit zum Beispiel bei Musikinstrumenten, denn wäre die Frequenz abhängig von der Amplitude, so würde sich zum Beispiel die Tonhöhe ändern, wenn man eine Klaviertaste stärker oder schwächer anschlägt.

Diese Erkenntnisse lauten als Formel zusammengefasst:

$$f = \frac{1}{2\pi} * \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Zum Abschluss wird noch der Zusammenhang zwischen harmonischen Schwingungen und der gleichförmigen Kreisbewegung besprochen, wobei die Grundlagen der Rotationsbewegung bei den Schüler/innen als bekannt vorausgesetzt werden.

Die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn entspricht einer harmonischen Schwingung. Um den Schüler/innen dies zu veranschaulichen betrachtet man im Unterricht folgende Animation, siehe [5]:

die Projektion eines Punktes, der eine gleichförmige Rotation durchläuft, vollführt dieselbe Bewegung wie ein Federpendel, also wird auch das Weg-Zeit-Diagramm

des rotierenden Punktes dem des Federpendels entsprechen, man erhält wieder die sogenannte Sinusfunktion. Nachgerechnet wird dies in einer darauffolgenden Mathematikstunde.

Den Abschluss der Stunde bildet ein Vergleich der einander entsprechenden Größen bei Kreisbewegung und harmonischer Schwingung, siehe [3], Seite 222:

	Kreisbewegung	harmonische Schwingung
A	Radius	Amplitude
T	Umlaufdauer	Schwingungsdauer
ω	Winkelgeschwindigkeit	Kreisfrequenz

3.2 Winkelfunktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$

Thema: Einführung der Winkelfunktion Sinus

Lernziel: Anknüpfend an die Physikstunde sollen die Schüler/innen selbstständig den Zusammenhang zwischen einer Kreisbewegung und der Funktion Sinus herleiten. Anschließend werden die Eigenschaften der Winkelfunktion besprochen.

Lehrziel: In dieser Unterrichtsstunde üben die Jugendlichen Beweisen und Begründen und erhalten außerdem die Möglichkeit zu erfahren, dass sich „viele Naturphänomene mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen lassen.“⁵

Ablauf:

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Wiederholung der Ergebnisse des Physikunterrichts	Schüler-Lehrerinteraktion
06-26	Herleitung von Kreisbewegung	Einzelarbeit
27-30	Vergleich der Ergebnisse	Schüler-Lehrerinteraktion
31-45	Eigenschaften der Sinusfunktion $\triangleq$ Sinusfunktion	Zweiergruppen
46-50	Vergleich der Arbeitsblätter	Schüler-Lehrerinteraktion

Den Stundenbeginn stellt eine Wiederholung des im Physikunterricht Besprochenen dar, dabei wird vor allem auf die noch zu klärenden Eigenschaften der in der Physikstunde erhaltenen Sinusfunktion und die fehlende Herleitung des Zusammenhangs zwischen gleichförmiger Rotation und deren Projektion hingewiesen um eine Brücke zu der vorausgegangenen Stunde zu schlagen.

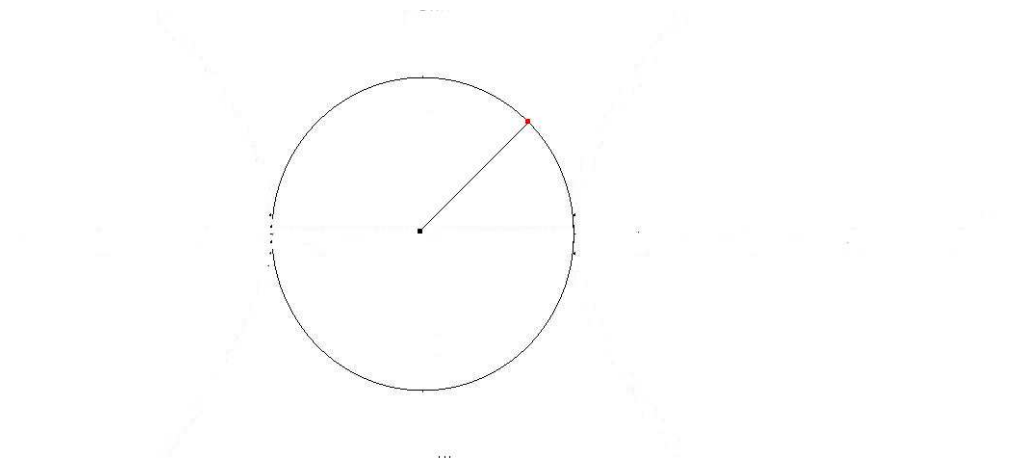
Nach erfolgter Mitarbeitsüberprüfung erhalten die Schüler/innen ein Bild der in der Physikstunde gezeigten Animation und den Arbeitsauftrag mit Hilfe der bekannten Definition des Sinus eines Winkels als Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck den vom rotierenden Punkt zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit zu finden, also als Funktion $y(t)$ zu beschreiben.

⁵siehe [6]

Arbeitsblatt:

Kreisbewegung und Sinus

Folgendes Bild wurde in der Physikstunde gezeigt:



Auftrag:

Leite die Beziehung zwischen Rotation und Sinus her! Beantworte dazu folgende Fragen!

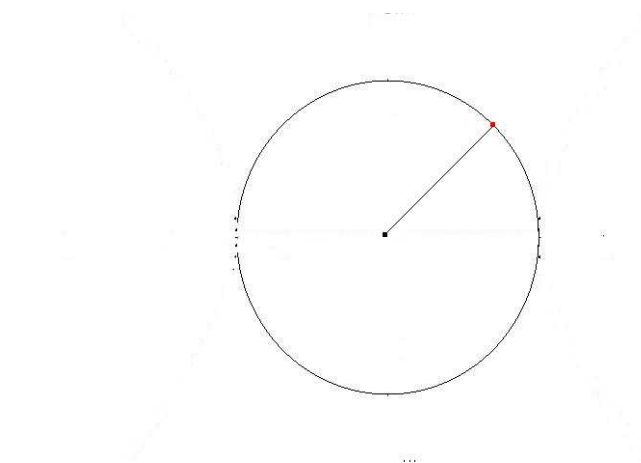
Annahme: Zur Zeit $t = 0$ soll auch der Winkel α Null sein.

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem zurückgelegten Weg y und dem Radius A ?
Hinweis: Erinnere dich an die Beziehungen zwischen Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck und ergänze die Skizze passend!
2. Wovon hängt y ab, bzw. womit ändert sich der vom Punkt zurückgelegte Weg?
3. Drücke den Winkel mit Hilfe der Kreisfrequenz aus!

Lösung zum Arbeitsblatt:

Kreisbewegung und Sinus

Folgendes Bild wurde in der Physikstunde gezeigt:



Auftrag:

Leite die Beziehung zwischen Rotation und Sinus her! Beantworte dazu folgende Fragen!

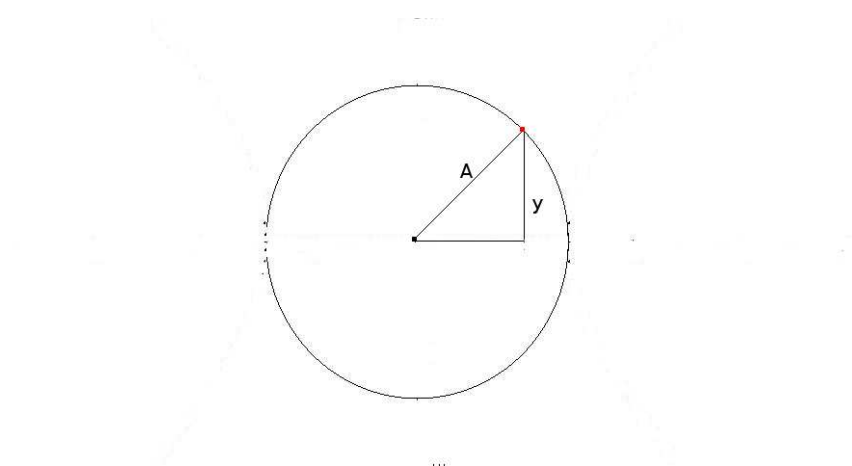
Annahme: Zur Zeit $t = 0$ soll auch der Winkel α Null sein.

1. *Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem zurückgelegten Weg y und dem Radius A ?*

Hinweis: Erinnere dich an die Beziehungen zwischen Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck und ergänze die Skizze passend!

Lösung:

Zuerst wird die Skizze verändert, indem man den Radius und den gesuchten Weg y einzeichnet.



So erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem folgende Beziehung gilt:

$$\sin \alpha = \frac{y}{A}$$

Oder umgeformt:

$$y = A * \sin \alpha$$

2. *Wovon hängt y ab, bzw. womit ändert sich der vom Punkt zurückgelegte Weg?*

Lösung:

Der Weg y ist abhängig von der Zeit, d.h. man erhält die Funktion:

$$y(t) = A * \sin \alpha$$

3. *Drücke den Winkel mit Hilfe der Kreisfrequenz aus!*

Lösung:

Der Punkt bewegt sich mit einer gewissen Geschwindigkeit, nämlich der Winkelgeschwindigkeit ω mit

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega * t$$

Nun muss man die Ergebnisse nur mehr verbinden, also α einsetzen und erhält somit den Zusammenhang zwischen der Rotation und der Funktion Sinus:

$$y(t) = A * \sin (\omega * t)$$

Nachdem die Arbeitsblätter verglichen wurden, weist die Lehrperson noch daraufhin, dass der Fall für $t = 0$ und $\alpha \neq 0$ in einer der folgenden Stunden besprochen werden wird und nun die Eigenschaften der Sinusfunktion diskutiert werden.

Da die Funktion durch Rotation eines Punktes zu Stande kommt und der Punkt nicht nur eine sondern auch mehrere Umdrehungen durchführen kann, das Argument also nicht im Standardintervall $[0;360]$ Grad liegen muss, handelt es sich um eine sogenannte reelle Funktion, die nicht bijektiv ist, da einem Funktionswert verschiedene Winkel zu Grunde liegen können. Die Schüler/innen sollen dies anhand einiger Beispiele selbst überprüfen:

$$\begin{aligned}\sin(40) &= \sin(40 + 360) = \sin(400) \approx 0,64279 \\ \sin(20) &= \sin(20 + 720) = \sin(740) \approx 0,34202\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft der Sinusfunktion nennt sich Periodizität, die wie folgt definiert wird:

Definition:

Eine nicht-konstante Funktion f heißt periodisch mit der Periode p , wenn

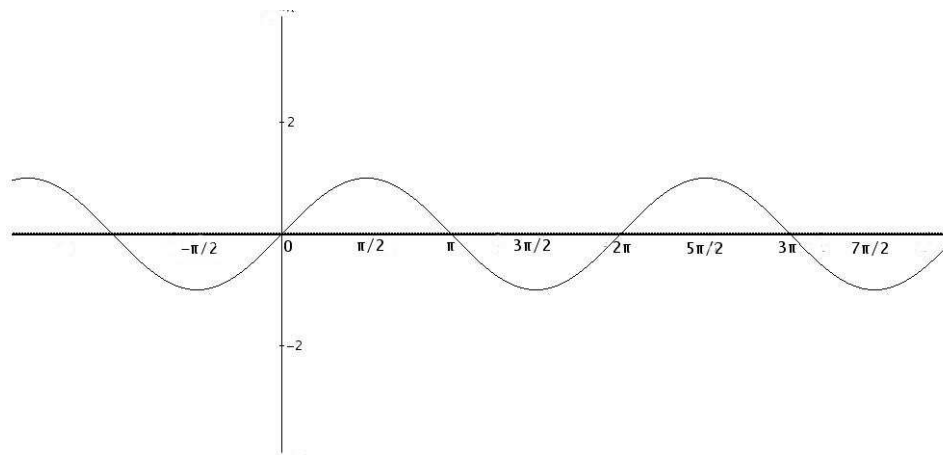
$$\forall x \in D : f(x + p) = f(x) \text{ gilt.}$$

Welche Eigenschaften weißt die Funktion noch auf? Die Schüler/innen erarbeiten diese in Zweiergruppen anhand folgenden Arbeitsblattes:

Arbeitsblatt:

Eigenschaften der Sinusfunktion

Beantworte anhand des Graphens der Sinusfunktion folgende Fragen:

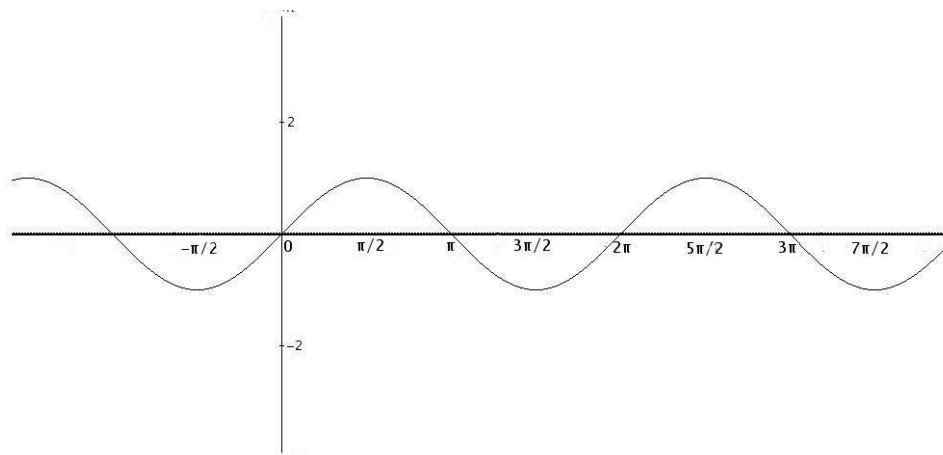


- Für welche Zahlen ist $\sin(x)$ definiert? Wie lautet die Wertemenge der Funktion?
- Gib alle Nullstellen an!
- Wo befinden sich die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Funktion? Versuche sie auch allgemein anzuschreiben!
- In welchen Intervallen ist $\sin(x)$ monoton fallend bzw. monoton steigend? Handelt es sich um Monotonie im strengen Sinn? Formuliere auch wieder allgemein!
- Nenne die kleinste Periode, auch primitive Periode genannt, der Funktion!
- In welchen Bereichen ist die Funktion bijektiv?

Lösung zum Arbeitsblatt:

Eigenschaften der Sinusfunktion

Beantworte anhand des Graphens der Sinusfunktion folgende Fragen:



- *Für welche Zahlen ist $\sin(x)$ definiert? Wie lautet die Wertemenge der Funktion?*

Lösung:

Für alle reellen Zahlen, Definitionsmenge $D=\mathbb{R}$
Wertemenge: $[-1;1]$

- *Gib alle Nullstellen an!*

Lösung:

Die Nullstellen befinden sich bei $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- *Wo befinden sich die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Funktion? Versuche sie auch allgemein anzuschreiben!*

Lösung:

Hochpunkte: $H_1 = (\frac{\pi}{2}/1), H_2 = (\frac{5\pi}{2}/1), \dots$

allgemein: $H = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi/1), k \in \mathbb{Z}$

Tiefpunkte: $T_1 = (\frac{3\pi}{2}/-1), T_2 = (\frac{7\pi}{2}/-1), \dots$

allgemein: $T = (\frac{-\pi}{2} + 2k\pi/-1), k \in \mathbb{Z}$

- *In welchen Intervallen ist $\sin(x)$ monoton fallend bzw. monoton steigend? Handelt es sich um Monotonie im strengen Sinn? Formuliere auch wieder allgemein!*

Lösung:

streng monoton fallend: $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}], \dots$

allgemein: $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

streng monoton steigend: $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}], \dots$

allgemein: $[\frac{-\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$

- *Nenne die kleinste Periode, auch primitive Periode genannt, der Funktion!*

Lösung:

2π

- *In welchen Bereichen ist die Funktion bijektiv?*

Lösung:

In den Monotoniebereichen.

In der vorhergehenden Unterrichtseinheit wurde zwar die Funktion Sinus eingeführt, die Schüler/innen erhielten jedoch bei der Herleitung derselben die Funktion $y(t) = A \sin(\omega * t)$, deren Klärung noch aussteht. Dies wird in den folgenden Mathematikstunden geschehen. Die Form- und Lageänderungen des Graphen der Sinusfunktion beim Übergang zu ihrer allgemeinen Form soll von den Schüler/innen selbstständig durch Ausprobieren gefunden werden.

Anregungen zu diesem Kapitel wurden [3] entnommen.

3.3 Die allgemeine Sinusfunktion

Thema: Klärung der Form- und Lageänderung des Graphen der allgemeinen Sinusfunktion

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach diesen beiden Unterrichtseinheiten die Unterschiede zwischen den Graphen der Funktionen $\sin x$ und $y = A \sin (bx + c)$ erklären können.

Lehrziel: Das Interpretieren von Funktionsgraphen wird in den Unterrichtsstunden geübt, außerdem vertiefen die Schüler/innen ihre Kenntnisse mit dem Computerprogramm Derive.

Ablauf:

erste Unterrichtsstunde:

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-15	Phase	Lehrervortrag
16-20	Erteilen des Arbeitsauftrags	Lehrervortrag
21-55	Interpretation der Graphen	Gruppenarbeit

zweite Unterrichtsstunde:

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-30	Arbeitsaufträge bearbeiten	Gruppenarbeit
31-55	Präsentation der Ergebnisse	Kurzreferate

Mit Hilfe der folgenden Arbeitsaufträge erarbeiten sich die Schüler/innen in Zweiergruppen Schritt für Schritt die allgemeine Sinusfunktion, dabei verwenden sie das Computerprogramm Derive. Die gewonnenen Erkenntnisse werden zum Abschluss der zweiten Stunde in maximal fünfminütigen Kurzreferaten von zufällig ausgewählten Gruppen vorgetragen. Zu Beginn der Stunde steht die noch ausstehende Erklärung des Begriffs Phase.

Unter der Annahme, dass zur Zeit $t = 0$ auch der Winkel α Null sein soll, wurde die Funktion hergeleitet, die eine harmonische Schwingung beschreibt, nämlich $y = A * \sin (\omega t)$. Falls nun zum Zeitpunkt $t = 0$ der Winkel α nicht Null sondern zum Beispiel ϕ ist, so verändert sich die Funktion zu:

$$y = A * \sin (\omega t + \phi)$$

$\omega t + \phi$ wird hierbei die Phase genannt, ϕ ist die Phasenkonstante.

Man sagt auch die Funktion $y = A * \sin (\omega t + \phi)$ ist um ϕ phasenverschoben gegenüber der Funktion $y = A * \sin (\omega t)$.

$$y = A * \sin(x)$$

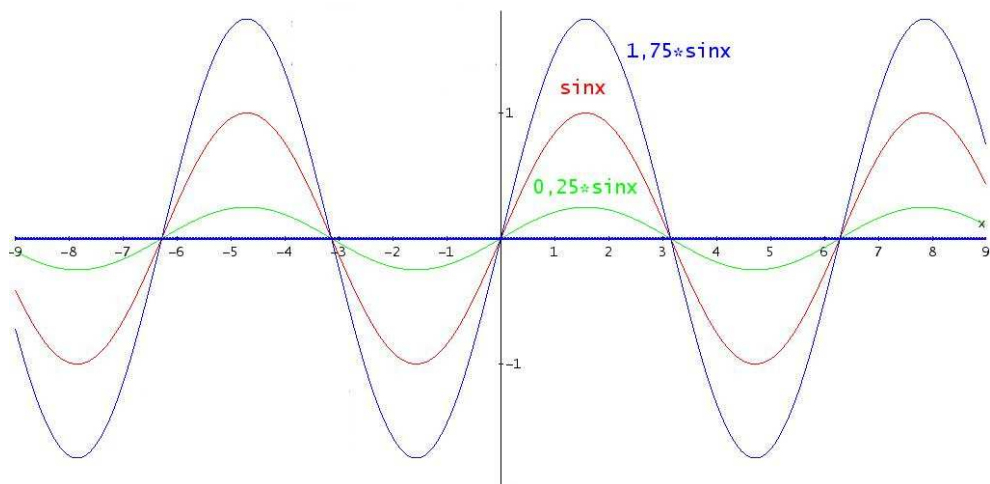
1. Zeichne zuerst die Funktion $f(x) = \sin(x)$!
2. Definiere dann $y = A * \sin(x)$. Füge im Graphikfenster einen Schieberegler ein und verändere A!
3. Verändert sich die Periode der Funktion, wenn A geändert wird?
4. Wie verändert sich der Graph der Funktion im Vergleich zu dem der Sinusfunktion, wenn die Amplitude $A < 1$ oder $A > 1$ gewählt wird?

Vorgehensweise

Zuerst gibt man in die Kommandozeile $f := \sin(x)$ ein. Dann wählt man mit Window ein neues 2D Graphikfenster aus. Mit dem Befehl Insert Plot wird der Graph von f gezeichnet. Im nächsten Schritt definiert man laut Angabe $y = A * \sin(x)$. Danach wird im Graphikfenster über den Button Insert der Schieberegler geöffnet. Hier benennt man die Variable, in diesem Fall A, und wählt den minimalen und maximalen Wert, sowie die Anzahl der Abstufungen. Nun kann A verändert und die dazugehörigen Graphen betrachtet werden.

Lösung

1. siehe Vorgehensweise
2. siehe Vorgehensweise
3. Die Änderung von A hat keinen Einfluss auf die Periode.
4. Ist $A < 1$ so wird die Funktion in y Richtung gestaucht, bei $A > 1$ gestreckt.



$$y = \sin(b x)$$

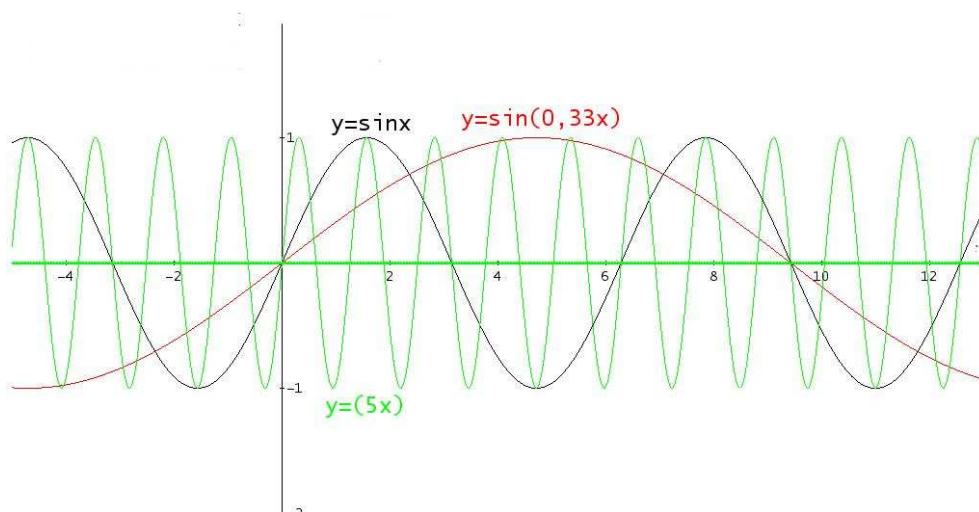
1. Zeichne zuerst die Funktion $f(x) = \sin(x)$!
2. Definiere dann $y = \sin(b x)$. Füge im Graphikfenster einen Schieberegler ein und verändere b !
3. Verändert sich die Periode oder Amplitude A der Funktion, wenn b geändert wird?
4. Wie verändert sich der Graph der Funktion im Vergleich zu dem der Sinusfunktion, wenn $b < 1$ oder $b > 1$ gewählt wird?

Vorgehensweise

Die Vorgehensweise ändert sich im Vergleich zur vorigen Arbeitsaufgabe nur dahingehend, dass der Schieberegler statt A nun b genannt wird. Die Eingabe ist identisch zur vorher gestellten Aufgabe.

Lösung

1. siehe Vorgehensweise
2. siehe Vorgehensweise
3. Wird b verändert, so hat dies keinen Einfluss auf die Amplitude A , wohl aber ändert sich die Periode.
4. Ist $b < 1$ so wird die Funktion in Richtung der x -Achse gestreckt, bei $b > 1$ gestaucht.



$$y = \sin(x + c)$$

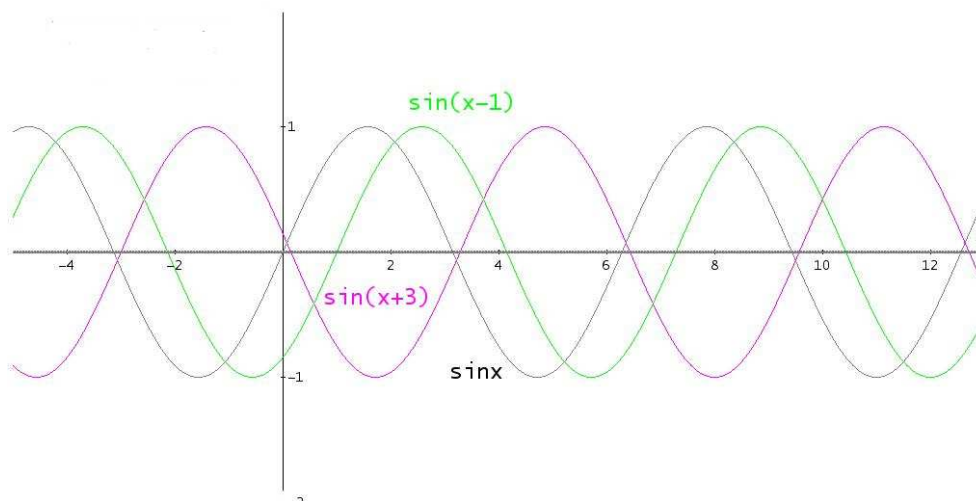
1. Zeichne zuerst die Funktion $f(x) = \sin(x)$!
2. Definiere dann $y = \sin(x + c)$. Füge im Graphikfenster einen Schieberegler ein und verändere c !
3. Verändern sich die Periode oder Amplitude der Funktion?
4. Wie verändert sich der Graph der Funktion im Vergleich zu dem der Sinusfunktion, wenn $c < 0$ oder $c > 0$ gewählt wird?

Vorgehensweise

Siehe Vorgehensweise von Arbeitsauftrag zu $y = A * \sin(x)$ oder $y = \sin(b x)$.

Lösung

1. siehe Vorgehensweise
2. siehe Vorgehensweise
3. Die Änderung von c hat weder Einfluss auf die Periode, noch auf die Amplitude.
4. Wird $c < 0$ gewählt so verschiebt sich die Funktion in Richtung der x-Achse nach rechts, für $c > 0$ nach links.



$$y = A * \sin (bx + c)$$

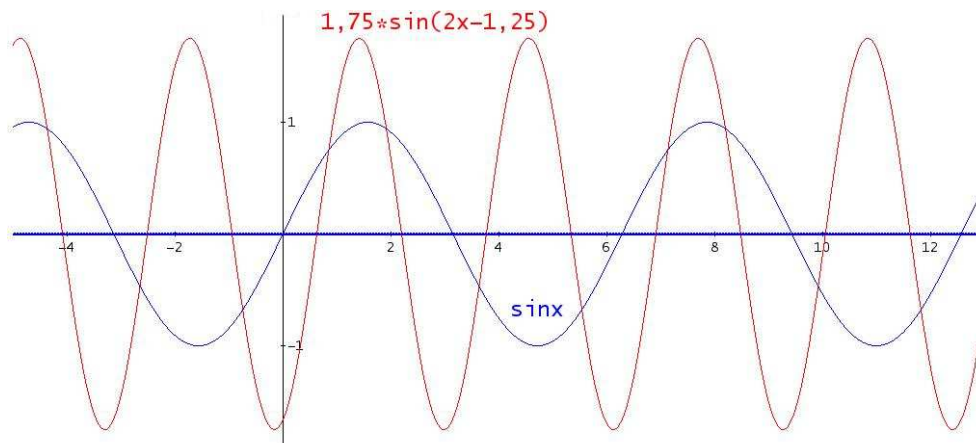
1. Zeichne zuerst die Funktion $f(x) = \sin(x)$!
2. Definiere dann $y = A * \sin (bx + c)$. Füge im Graphikfenster einen Schieberegler ein und verändere A, b und c!
3. Verändere A, b und c und beschreibe, was die Veränderung bewirkt hat!

Vorgehensweise

Zuerst gibt man in die Kommandozeile $f := \sin(x)$ ein. Dann wählt man mit Window ein neues 2D Graphikfenster aus. Mit dem Befehl Insert Plot wird der Graph von f gezeichnet. Nun definiert man die Schieberegler A, b und c und fügt danach den Graphen der allgemeinen Sinusfunktion ein.

Lösung

1. siehe Vorgehensweise
2. siehe Vorgehensweise
3. Wird A verändert, so ändert sich die Amplitude der Funktion, die Änderung von b bewirkt eine Stauchung oder Streckung der Funktion in Richtung der x-Achse und c verändert die Phase, wie in den obigen Aufgaben bereits festgestellt wurde.



3.4 Überlagerung von Schwingungen

In den vorangegangenen Unterrichtsstunden wurde die harmonische Schwingung unter anderem aus der Kreisbewegung hergeleitet. Und im Zuge dessen die allgemeine Sinusfunktion im Mathematikunterricht erörtert. Nun sollen die gewonnenen Begriffe anhand ihrer Anwendungen konkretisiert werden. Zuerst lernen die Schüler/innen Wechselstrom als Beispiel einer harmonischen Schwingung kennen, um mit Hilfe des Drehstroms die Überlagerung von Sinusfunktionen kennenzulernen.

Im Mathematikunterricht sollen die Schüler/innen dann das notwendige Rüstzeug für die Überlagerung von Schwingungen erhalten, um alle nun folgenden Themen auch im mathematischen Kontext verstehen zu können. Den Abschluss bildet die Fourieranalyse zusammen mit ihren Anwendungen, zum Beispiel in der Nachrichtentechnik.

3.4.1 Überlagerung von Sinusfunktionen gleicher Frequenz

In der folgenden Physikstunde wird von den Schüler/innen das Überlagern von Sinusfunktionen am Beispiel des Drehstroms geübt, damit in der nachfolgenden Mathematikstunde das Überlagern der Funktionen vertieft werden kann, um zu den Begriffen konstruktive- bzw. destruktive Interferenz und Auslöschung zu gelangen.

Thema: Wechselstrom und seine Anwendungen

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtseinheit den Zusammenhang zwischen Wechselstrom und der Sinusfunktion angeben und Funktionen graphisch addieren können.

Lehrziel: Die Schüler/innen sehen, dass ein abstraktes, mathematisches Modell in der Natur vorkommt und in der Technik erfolgreich angewandt werden kann.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-20	Einstieg Wechselstrom	fragend-entwickelnder Unterricht
21-30	Begriffserklärung	Lehrervortrag
31-50	Beispiel Drehstrom	Einzelarbeit

Die Lehrperson stellt zu Beginn der Physikstunde folgende Frage:

„In den letzten Stunden haben wir uns mit Schwingungen, besser gesagt mit harmonischen Schwingungen beschäftigt. In der heutigen Stunde werden wir uns mit Wechselstrom und einer speziellen Anwendung desselben, dem Drehstrom, befassen. Warum hat Wechselstrom wohl überhaupt etwas mit Schwingungen zu tun?“

Darauf antworten die Schüler mit ihren Ideen, die angestrebte Antwort ist folgende:

„Der Zusammenhang zwischen Wechselstrom und Schwingungen ist in der Erzeugung des Stroms begründet. Um Strom zu gewinnen, muss man eine Spule in einem Magnetfeld bewegen. Prinzipiell gibt es dafür mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel könnte die Spule im Magnetfeld auf und ab bewegt oder gedreht werden. Aus bautechnischen Gründen hat man sich für die Drehung entschieden.“

Ist dieser Umstand festgestellt, richtet sich die Lehrer/in an die Klasse und stellt folgende Frage:

„Welche Funktion erhält man bei einer Drehbewegung?“

Die richtige Antwort lautet:

„Die Sinusfunktion.“

Nun wird das Thema formal an der Tafel erfasst. Dazu schreibt eine Schüler/in die Formel für die allgemeine Sinusfunktion an die Tafel und gemeinsam werden die entsprechenden Parameter für das in Europa übliche 230V Wechselstromnetz gesucht.

$$\begin{aligned}y &= A \cdot \sin(bx + c) \\U(t) &= U_s \cdot \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

$U_s \dots$ Amplitude $230V \cdot \sqrt{2} \approx 325V$

$\omega \dots$ Kreisfrequenz $2\pi \cdot 50Hz \approx 314Hz$

$\varphi \dots$ Phase

Die Lehrperson erklärt noch kurz, warum die Spitzenspannung nicht 230V, sondern 325V beträgt. Bei den 230V handelt es sich um den sogenannten „Effektivwert“, der folgendes ausdrückt:

„Der Effektivwert entspricht der Spannung, die eine Gleichspannung der gleichen Leistung hätte. Über den Effektivwert lassen sich also Gleich- und Wechselstrom leistungsmässig vergleichen.“

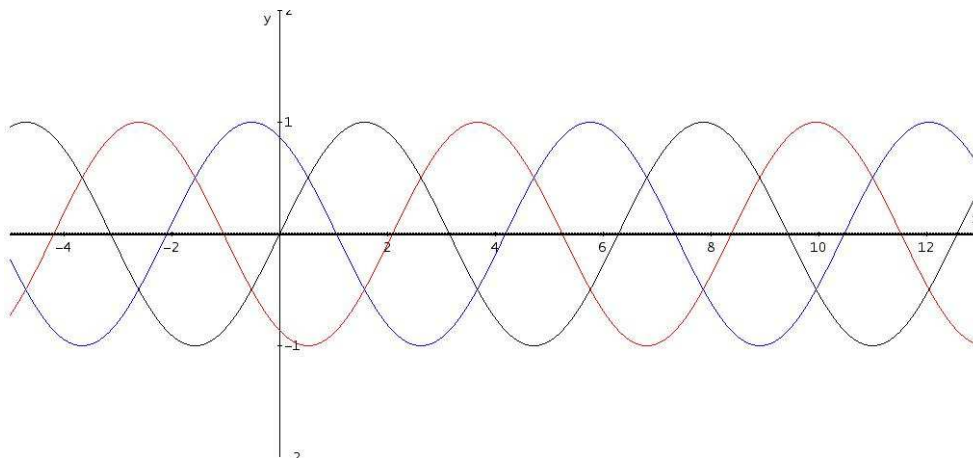
Zu der Frage, warum gerade 230V verwendet werden, passt folgende Geschichte:

„Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts hatte sich in Europa noch kein Standard zur Stromversorgung gebildet, zum Beispiel hatte Grossbritannien ein Netz mit 240V, auf dem Festland hingegen waren grössteils 220V üblich. Als man sich einigen wollte, wählte man 230V, da diese Spannung auch innerhalb einer gängigen 10%igen Toleranz liegt und somit keine Geräte umgebaut werden mussten.“

Eine Anwendung des Wechselstroms ist zum Beispiel der Drehstrom. Dieser wird erzeugt, indem man einen Magneten zwischen drei Spulen, die jeweils um 120 Grad versetzt sind, dreht.

Die Schülerinnen erhalten daraufhin die Aufgabe, die drei entstehenden Sinusfunktionen in ein Koordinatensystem zu zeichnen, zum Beispiel mit Hilfe eines Computerprogrammes, und sich die Summe der Funktionswerte anzusehen, indem sie die y-Werte punktweise addieren.

Man erhält folgendes Bild:



Das Aufaddieren der y-Werte liefert zu jedem Zeitpunkt Null. Für die praktische Anwendung bedeutet dies, dass die Rückleitung zum Kraftwerk eingespart werden kann. Weiteres dazu wird in der siebenten Klasse besprochen.

Nun folgt die Mathematikstunde zur Überlagerung zweier Sinusfunktionen.

Thema: Überlagerung zweier Schwingungen

Lernziel: Nach dieser Unterrichtseinheit sollen die Schüler/innen wissen, welche Funktion aus der Addition zweier Sinusfunktionen resultiert.

Lehrziel: Das Arbeiten mit Funktionen wird ebenso vertieft, wie der Umgang mit dem Computerprogramm Derive.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Erteilen des Arbeitsauftrags	Lehrervortrag
06-40	Arbeitsauftrag bearbeiten	Gruppenarbeit
41-50	Vergleich der Ergebnisse	Schüler-Lehrerinteraktion

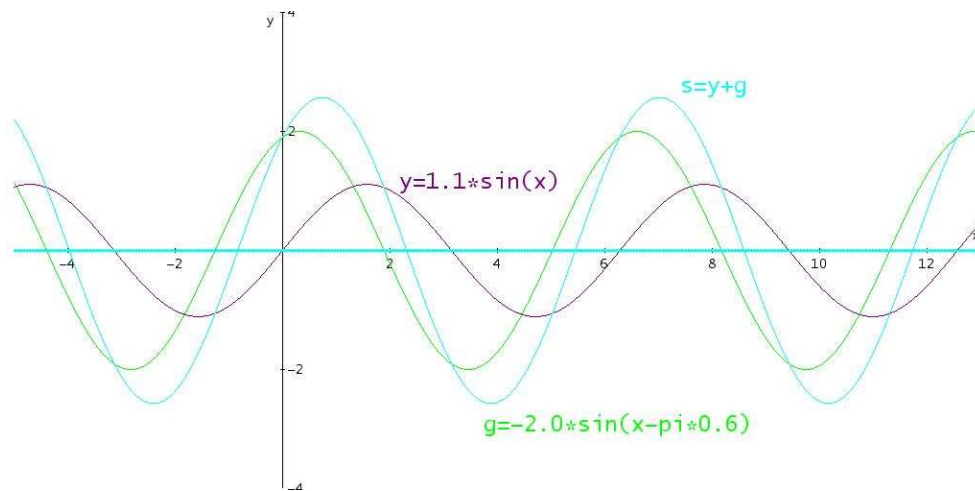
Folgende Aufgabe wird von den Schüler/innen in Zweiergruppen am PC mit Hilfe des Computerprogramms Derive bearbeitet:

Zu Beginn werden zwei allgemeine Sinusfunktionen der gleichen Frequenz, $y = a \cdot \sin(x)$ und $g = b \cdot \sin(x + \pi \cdot c)$, gezeichnet und überlagert. Was bewirkt eine Veränderung der Phase und der Amplitude?

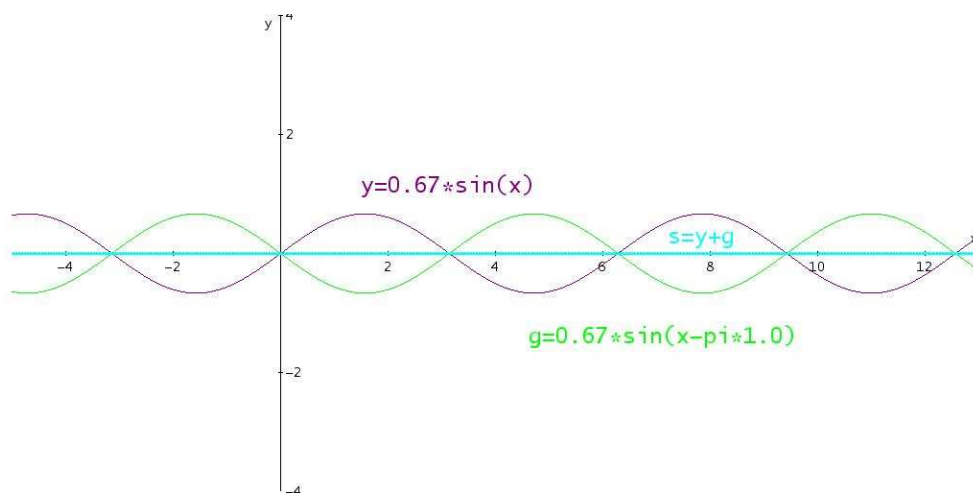
Lösung:

Der erste Schritt ist das Definieren der beiden Funktionen in Derive. Durch Eingabe der Summe von y und g werden diese überlagert. Im Graphikfenster werden die entsprechenden Schieberegler definiert, und schlussendlich können Amplitude und Phase verändert werden.

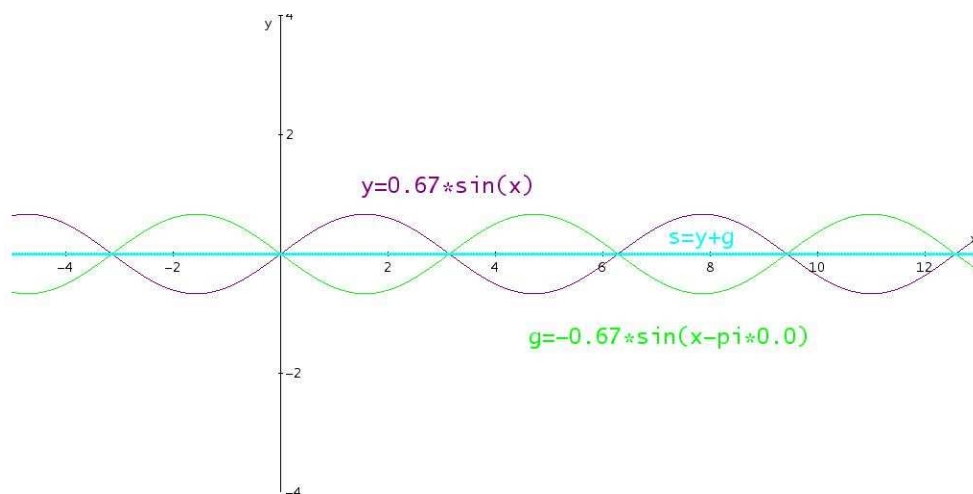
Wählt man zum Beispiel die Amplituden und Phasen wie folgt, ergibt sich:



In diesem Fall hat sich die Amplitude der resultierenden Funktion vergrößert, die Periode ist aber gleich geblieben. Dies lässt sich aus der obigen Graphik nicht sofort ablesen, die Schüler/innen können diese Tatsache überprüfen, indem sie zum Beispiel die Phase der beiden Funktionen so verändern, dass die Nulldurchgänge zusammenfallen.



Bei gleicher Amplitude der zwei Funktionen und einer Phasenverschiebung von π erhält man durch Addition die Nullfunktion, sie löschen sich aus.



Ebenfalls zur Auslöschung kommt es, wenn die beiden Schwingungen zwar nicht phasenverschoben sind, dafür aber gleich große Amplituden mit entgegengesetztem Vorzeichen haben.

Die Erkenntnisse der vorhergehenden Mathematikstunde sollen nun im Physikunterricht auf das Kapitel harmonische Wellen angewandt werden, insbesondere spielen die Begriffe konstruktive und destruktive Interferenz eine wichtige Rolle.

Anregungen zu diesen Unterrichtseinheiten wurden [2] und [4] entnommen.

Thema: harmonische Wellen

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach der Unterrichtseinheit die Begriffe harmonische Welle, konstruktive und destruktive Interferenz erklären können.

Lehrziel: Das in der Mathematikstunde gewonnene Wissen soll auf das Kapitel harmonische Wellen übertragen und angewandt werden, damit die Schüler/innen lernen auf Grund mathematischer Modelle Vorhersagen für verwandte Themen zu treffen.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-10	Wiederholung und Einführung ins Thema	fragend-entwickelnder Unterricht
11-19	Begriffserklärung	Lehrervortrag
20-35	Überlagerung	Lehrervortrag und Einzelarbeit
36-50	Interferenz	Lehrervortrag

Zu Beginn der Unterrichtsstunde sollen die Schüler/innen eine kurze Zusammenfassung der in der vorhergehenden Mathematikstunde erfahrenen Erkenntnisse in Bezug auf Überlagerung geben, zum Beispiel, unter welchen Bedingungen es zur Auslöschung der beiden Schwingungen kam, wann sie sich verstärkten etc.

Anschließend gibt die Lehrperson das Thema der Physikstunde bekannt, nämlich harmonische Wellen, insbesondere deren Überlagerung, auch Superposition genannt, und Interferenz.

Um überhaupt von der Überlagerung zweier harmonischer Wellen sprechen zu können, muss der Begriff harmonische Welle erst erklärt werden.

Die Schüler/innen werden nun aufgefordert Beispiele für ihnen bekannte Wellen zu liefern, damit danach gemeinsam überlegt werden kann, was eine Welle ausmacht. Folgende Wellen könnten von den Schüler/innen genannt werden:

Materiewellen, Erdbebenwellen und Wasserwellen, Druckwellen, insbesondere Schallwellen, elektromagnetische Wellen, im Speziellen Licht, Funkwellen.

Alle Wellen haben gemeinsam, dass sie sich nicht nur mit der Zeit, sondern auch mit dem Ort ändern, man kann sich eine Welle also als sich ausbreitende Schwingung vorstellen. Eine harmonische Welle entsteht durch die Ausbreitung einer harmonischen Schwingung und wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$y(x, t) = A * \sin(kx - \omega t)$$

wobei A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und k die Wellenzahl ist. Diese Funktion hängt gleichermaßen vom Weg x und der Zeit t ab, es handelt sich um eine Funktion in zwei Variablen.

Danach müssen auch noch einige Begriffe definiert werden, die später bei der Interferenz eine Rolle spielen, nämlich die Wellenlänge λ , die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c , und der Gangunterschied d .

Definition: „Die Wellenlänge λ ist der Abstand zweier benachbarter Wellenberge oder Verdichtungen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist die Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenberg oder eine Verdichtung in der Fortpflanzungsrichtung verschiebt.“⁶

Definition: „Der Gangunterschied d zweier harmonischer Wellen der gleichen Wellenlänge gibt den Abstand in Bruchteilen der Wellenlänge an, um den die erste Welle vor der zweiten herläuft.“⁷

Um zwei Wellen zu überlagern, werden an der Überlagerungsstelle die Auslenkungen der Einzelwellen addiert. Mathematisch betrachtet ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= A * \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= A * \sin(kx - \omega t + d) \\ y_1 + y_2 &= A * \sin(kx - \omega t) + A * \sin(kx - \omega t + d) \end{aligned}$$

⁶siehe [2] Sexl S. 115

⁷siehe [2] Sexl S. 117

Um die beiden Funktionen addieren zu können, benötigt man das trigonometrische Additionstheorem:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin (\alpha + \beta)$$

Diese Formel gibt die Lehrperson den Schüler/innen an und dann erhalten sie die Aufgabe in die Formel einzusetzen und soweit als möglich zu vereinfachen. Die Interpretation des Ergebnisses erfolgt im Plenum.

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= 2 A \cos \frac{1}{2} (k x - \omega t - k x + \omega t - d) * \\ &\quad * \sin \frac{1}{2} (k x - \omega t + k x - \omega t + d) \\ y_1 + y_2 &= 2 A \cos \left(\frac{1}{2} (-d) \right) \sin \frac{1}{2} (2 k x - 2 \omega t + d) \\ y_1 + y_2 &= 2 A \cos \left(\frac{1}{2} (-d) \right) \sin \left(k x - \omega t + \frac{1}{2} d \right) \\ y_1 + y_2 &= 2 A \cos \left(\frac{1}{2} d \right) \sin \left(k x - \omega t + \frac{1}{2} d \right) \end{aligned}$$

Die erhaltene Gleichung zeigt, dass die Überlagerung zweier harmonischer Wellen wieder eine harmonische Welle ergibt mit der Amplitude $2 A \cos \left(\frac{1}{2} d \right)$.

Treffen zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz aufeinander und überlagern sich dabei, so erzeugen sie ein sichtbares Intensitätsmuster. Dieses Phänomen wird Interferenz genannt. Beispiele dafür sind Überlagerung von Wasserwellen, die Entstehung der Farben auf einer Seifenblase und das Newton'sche Farbenglas, oder Hologramme. Diese Beispiele werden in einer der darauffolgenden Physikstunden besprochen.

Die Schüler/innen sollen sich zum Abschluss der Stunde noch anhand der vorhin erhaltenen Gleichung überlegen, wann sich zwei Wellen verstärken, wann also konstruktive Interferenz und wann destruktive, also Auslöschung, auftritt.

Ist d gleich Null, so wird $\cos(\frac{1}{2} d) = 1$ und die Amplitude beträgt $2A$, die Wellen verstärken sich also in diesem Fall. Auslöschung kann nur dann auftreten, wenn $\cos(\frac{1}{2} d) = 0$ wird, der Cosinus hat eine Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$, daher muss $d = \pi$ sein. Wellen löschen einander somit bei einem Phasenunterschied von 180 Grad aus.

Bei dieser Gelegenheit kann noch einmal auf die in der vorangegangenen Mathematikstunde erhaltenen Bilder der Überlagerungen hingewiesen werden.

Anknüpfend an die vorangegangene Physikstunde werden in der folgenden Mathematikeinheit praktische Aufgaben zur Überlagerung von Wellen gerechnet. Anregungen zu dieser Unterrichtseinheit wurden [4] entnommen.

Thema: Rechnerische Überlagerung zweier Wellen

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtseinheit Umkehraufgaben zur Überlagerung zweier Wellen lösen können.

Lehrziel: In dieser Unterrichtseinheit wird das Lösen von trigonometrischen Gleichungen ebenso trainiert, wie das Arbeiten mit Formeln.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-10	Wiederholung	Lehrer-Schülerinteraktion
11-15	Arbeitsauftrag	Lehrervortrag
16-36	Lösen der Aufgaben	Zweiergruppen
37-50	Vergleich der Ergebnisse	Plenum

Zu Beginn der Stunde wiederholen die Lehrperson und die Schüler/innen gemeinsam die wichtigsten Ergebnisse der vorigen Physikstunde, vorallem sollten die Gleichung der harmonischen Welle und die darin vorkommenden Größen und die Gleichung der Überlagerung zweier harmonischer Wellen gleicher Frequenz und Amplitude noch einmal erwähnt werden, da diese Formeln für die Mathematikstunde eine Schlüsselrolle spielen.

Die Lehrperson erklärt den Schüler/innen im Anschluss daran das Ziel der Unterrichtsstunde, nämlich dass die in der Physikstunde gewonnenen Kenntnisse rechnerisch umgesetzt werden, und erteilt den Arbeitsauftrag. Diese Aufgabe wurde [4], Seite 505 entnommen.

Überlagerung zweier Wellen

Gegeben sind zwei harmonische Wellen mit derselben Frequenz, Wellenlänge und Amplitude, die sich in die gleiche Richtung bewegen. Berechne

1. die Amplitude der resultierenden Welle, wenn die Amplitude der beiden Wellen 4 cm und der Gangunterschied $\frac{\pi}{2}$ beträgt!
2. den Gangunterschied, bei welchem die Amplitude der resultierenden Welle 4 cm entspricht!

Lösung

1. Im Physikunterricht wurde folgende Formel als Amplitude der resultierenden Welle erhalten, nämlich:

$$2 A \cos \left(\frac{1}{2} d \right)$$

Nun muss nur noch eingesetzt werden:

$$A = 2 * 4 * \cos \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) = 8 * \cos \frac{\pi}{4} = 5,66cm$$

2. Wieder verwendet man den erhaltenen Ausdruck der resultierenden Amplitude und erhält mittels Einsetzen folgende Gleichung:

$$4 = 2 * \cos \left(\frac{1}{2} d \right)$$

$$\frac{1}{2} = \cos \left(\frac{d}{2} \right)$$

$$d = 120 \text{ Grad}$$

Außerdem gibt es noch folgende Lösung:

$$-4 = 2 * \cos \left(\frac{1}{2} d \right)$$

$$-\frac{1}{2} = \cos \left(\frac{d}{2} \right)$$

$$d = 240 \text{ Grad}$$

In der darauffolgenden Physikeinheit werden noch Beispiele aus der Optik für Interferenz besprochen, um den Schüler/innen die Vielseitigkeit des Themas bewusst zu machen und außerdem einen Einstieg für die Beschäftigung mit Optik im Physikunterricht zu liefern. Vorausgesetzt werden die Grundkenntnisse der Optik aus der Unterstufe, insbesondere der Begriff Reflexion. Anregungen wurden [2] entnommen.

Thema: Farben dünner Schichten

Lernziel: Die Schüler/innen sollen anhand von Versuchen Interferenzerscheinungen sehen und deren Entstehung begründen können.

Lehrziel: In dieser Unterrichtseinheit wird „in vielfältigen Zusammenhängen gelernt, um neu erworbene Kenntnisse in vielfältigen Anwendungen zu festigen und damit über den Unterrichtsanlass hinaus abzusichern.“⁸

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Vorstellung des Themas	Lehrervortrag
06-10	Angabe Versuch 1	Lehrervortrag
11-15	Versuchsdurchführung	Gruppenarbeit
16-20	Vergleich der Beobachtungen	Lehrer-Schüler-Interaktion
21-25	Angabe Versuch 2	Lehrervortrag
26-36	Versuchsdurchführung	Gruppenarbeit
37-47	Erklärung des Phänomens	Lehrervortrag
48-50	Anwendungen und Beispiele	Lehrervortrag

Die Lehrperson gibt den Schüler/innen zu Beginn der Unterrichtseinheit das Thema der Stunde bekannt:

„In der heutigen Stunde beschäftigen wir uns mit Interferenzerscheinungen, genauer mit Farben dünner Schichten. Dazu werden wir zwei Versuche durchführen und im Anschluss daran den beobachteten Erscheinungen auf den Grund gehen. Zum Abschluss überlegen wir uns weiters einige Anwendungen und weitere Beispiele dieses Phänomens.“

Bei der Durchführung der Versuche arbeiten die Schüler/innen in Gruppen zu je zwei Personen zusammen.

⁸siehe [6]

Versuch 1:

Für die Gruppen stehen Seifenblasen zur Verfügung. Die Schüler/innen erhalten den Auftrag die Seifenblasen zu beobachten und das Ergebnis ihrer Beobachtungen festzuhalten und dann im Klassenverband zu besprechen.

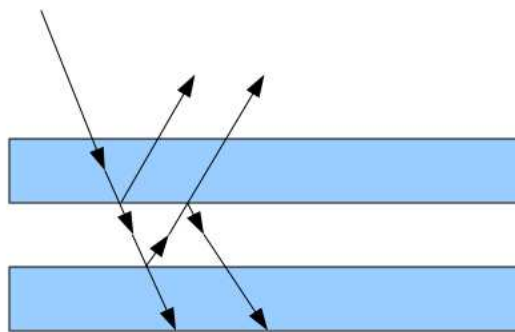


Die Schüler/innen sollten folgende Beobachtung machen, nämlich dass die Seifenblasen in prächtigen und verschiedenen Farben schillern, obwohl die Seifenlauge farblos ist. Das Entstehen dieser Farben könnte mit der Dicke der dünnen Seifenhaut in Zusammenhang stehen. Zur Überprüfung dieser Annahme wird ein weiterer Versuch durchgeführt.

Versuch 2:

Eine schwach gewölbte Sammellinse wird auf eine ebene Glasplatte gelegt und senkrecht mit weißem Licht beleuchtet. Zwischen der Platte und der Linse befindet sich eine dünne Luftschicht und diese bewirkt wieder das Auftreten von Farben, diesmal kann man allerdings konzentrische, farbige Ringe beobachten. Diese Versuchsanordnung stammt von Newton und wird deshalb auch als Newton'sches Farbenglas bezeichnet.

Wie lässt sich das Entstehen der Farben nun erklären? Dahinter steckt die Interferenz von zwei Lichtwellen. Trifft ein Lichtstrahl auf das Glas der Linse, so wird ein Teil dieses Strahls reflektiert, der größere Teil tritt in die Luftschicht unter Brechung ein und wird wieder zum Teil reflektiert, der andere Teilstrahl tritt ebenfalls unter Brechung aus.



Die beiden reflektierten Strahlen besitzen einen Gangunterschied, der abhängig von der Wellenlänge Auslöschung oder Verstärkung bei ihrer Interferenz hervorruft. Beträgt der Unterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge löschen sich die Strahlen aus. Verstärkung tritt hingegen bei geradzahligem Vielfachen der halben Wellenlänge auf.

Ebenso wird der durchgehende Strahl beim Übergang von Glas zu Luftschicht einmal an der Oberseite und der Unterseite der Luftschicht reflektiert. Dadurch erhalten die Strahlen wiederum einen Gangunterschied. Da der zweite Strahl zweimal am Luft-Glas-Übergang reflektiert wird, erhält er einen Gangunterschied von einer Wellenlänge, das bedeutet, dass Auslöschung und Verstärkung auch abhängig von der Schichtdicke sind.

Bei einer Dicke von $0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, \dots$ wird das reflektierte Licht ausgelöscht und das durchgehende verstärkt und bei einer Dicke von $\frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4}, \dots$ tritt das umgekehrte Phänomen auf, das reflektierte Licht wird verstärkt und das durchgehende ausgelöscht.

Je dicker der Luftkeil zwischen den Schichten ist, umso schneller wechseln die

Farben ab und liegen schließlich so dicht zusammen, dass das Auge sie nicht mehr unterscheiden kann.

Anwendung findet diese Interferenzerscheinung zum Beispiel beim Entspiegeln oder der Reflexverminderung von Brillen und optischen Geräten. Auf das Glas wird hierbei eine dünne Schicht eines geeigneten Materials mit einem Brechungsquotienten zwischen dem des Glas und Luft, zum Beispiel 1,38, aufgedampft. So löschen sich der an der Schicht und der an dem Glas reflektierte Strahl fast vollständig aus.

In der vorhergehenden Physikeinheit wurde ein Beispiel zur Überlagerung von Wellen besprochen, nämlich die Farben dünner Schichten, bei denen es sich um Interferenzerscheinungen handelt. Die folgende Physikunterrichtsstunde hat eine Anwendung von Interferenz zum Thema und zwar Hologramme. Die Informationen über Holographie wurden [7] entnommen.

Thema: Hologramme

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtsstunde die Entstehung eines Hologramms erklären und sie als Anwendung einer Interferenzerscheinung deuten können.

Lehrziel: Durch den Lehrinhalt dieser Unterrichtsstunde soll den Schüler/innen eine Anwendung der Überlagerung von Wellen gezeigt werden, um ihnen den Facettenreichtum dieses Naturphänomens zu verdeutlichen und ihr Interesse für Physik zu wecken.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-07	Einstieg	Lehrer-Schüler-Interaktion
08-15	Grundidee der Holographie	Lehrervortrag
16-26	Realisierung	Lehrervortrag
27-40	Arbeitsblatt	Einzelarbeit
41-50	Zusammenfassung	Lehrer-Schüler-Interaktion

Zu Beginn der Unterrichtsstunde motiviert die Lehrperson das Thema Holographie mittels folgender Frage:

„Wie entsteht ein Photo?“

Vereinfacht kann das Entstehen einer analogen Photographie folgendermaßen erklärt werden:

Ein einzelner Objektpunkt O wird durch ein optisches System, nämlich Sammellinsen, in einem Bildpunkt fokussiert und ein lichtempfindlicher Film an dieser Stelle geschwärzt.

„Welche Information geht hierbei verloren?“

Die räumliche Information geht verloren, da das komplexe dreidimensionale Wellensystem eines bestimmten Objektes in ein zweidimensionales Schwärzungsmu-

ster verwandelt wird, welches keine Richtungsinformation mehr enthält.

Es gibt allerdings auch Abbildungen, die die gesamte Information speichern, dieser „ganze“ Abbildungsvorgang wird holographisch genannt, da das griechische Wort holos im Deutschen ganz bedeutet. Das bedeutet, dass für ein Hologramm das gesamte Wellensystem aufgezeichnet und später für die Betrachter rekonstruiert wird.

Nun erklärt die Lehrperson den Schüler/innen die Grundidee eines Hologramms, damit sich die Schüler/innen später selbst die Aufzeichnungs- und Rekonstruktionsvorgänge erarbeiten können.

Im wesentlichen entsteht ein Hologramm wie bereits oben erwähnt aus folgenden zwei Stufen, nämlich der Aufzeichnung und der Rekonstruktion. Wie kann nun die Richtungsinformation des Wellensystems, die sogenannte Objektwelle, gespeichert werden? Dazu wird die Richtung der Objektwelle in Bezug auf ein ausgezeichnetes, bekanntes Wellensystem, die Referenzwelle bestimmt. Hierfür werden Referenz- und Objektwelle überlagert, sie interferieren also miteinander. Die Amplituden werden überlagert und so entsteht eine neue Amplitudenstruktur, die von der Zeit unabhängig ist, da sie als Schwärzungsmuster auf einem Film aufgezeichnet werden kann.

Findet konstruktive Interferenz statt, so verdoppelt sich die Amplitude und der Film wird geschwärzt. Bei destruktiver Interferenz ergibt sich Amplitude Null und es findet keine Filmschwärzung statt, der Film bleibt weiß. Werte dazwischen treten als verschiedene Grauabstufungen auf. Somit kann die gesamte Information gespeichert werden.

Wie kann ein solches Interferenzmuster ausgelesen werden?

Die Lehrperson erklärt den Schüler/innen:

Zum Auslesen des Schwärzungsmusters kommt Beugung ins Spiel. Trifft eine Welle auf ein Beugungsgitter, so entsteht eine neue Welle, dies zur Wiederholung.

Die durch Interferenz entstandene Schwärzungsstruktur kann als Beugungsgitter aufgefasst werden. Beugt man die Referenzwelle an diesem Gitter, so erhält man die frühere Objektwelle, sie wurde dadurch rekonstruiert.

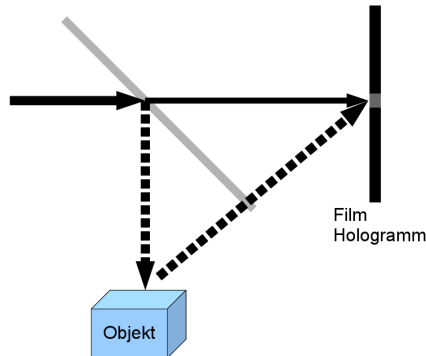
Die soeben beschriebene Methode stammt von Gabor und wurde von ihm um 1947 entwickelt.

Nun sollen sich die Schüler/innen selbstständig damit befassen, wie ein Hologramm in der Praxis hergestellt wird.

Arbeitsblatt:

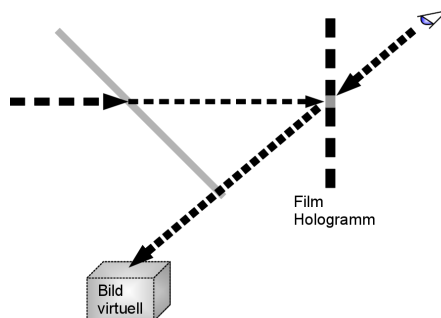
Das Hologramm

Wie kann ein Hologramm in der Praxis realisiert werden?



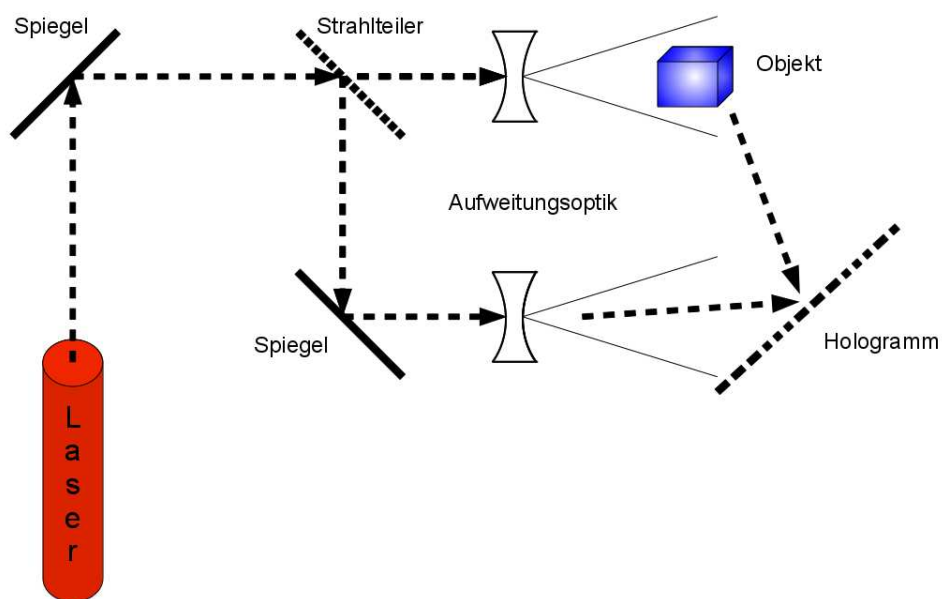
Eine ebene Welle wird durch einen halbdurchlässigen ebenen Spiegel, einen sogenannten Strahlteiler, in zwei kohärente Wellensysteme aufgespalten. Kohärenz bedeutet, dass die von Atomen abgestrahlten Wellenzüge gleichzeitig, ohne Gangunterschiede und in derselben Frequenz ausgesandt werden.

Ein Wellensystem trifft auf dem Film auf, ohne mit dem Objekt in Berührung gekommen zu sein, dies ist die Referenzwelle. Das zweite System wechselwirkt mit dem Objekt und gelangt erst danach zur Filmebene. Dort interferieren die beiden Wellen miteinander und bilden so das Schwärzungsmuster auf dem Film. Dieses Muster ist mit freiem Auge nicht zu erkennen, sondern wird erst durch ein Mikroskop sichtbar.



Das Hologramm wird in Aufnahmeposition gebracht und von der Referenzwelle beleuchtet, die Objektwelle wird dabei abgeblendet. Somit ergibt sich ein virtuelles Bild des Objekts, das der Beobachter durch das transparente Hologramm hindurch betrachten kann. Der Betrachter kann das Bild aus verschiedenen Richtungen besehen, es kann mit Photoapparat oder Videokamera aufgezeichnet werden, oder mit einer Lupe vergrößert werden. Das ebenfalls entstandene reelle Bild ergibt keinen räumlichen Eindruck.

Die nachfolgende Abbildung zeigt den Aufbau eines modernen Holographieexperiments. Betrachte das Bild und beschreibe anschließend den Strahlengang:



Zum Abschluss der Unterrichtsstunde besprechen die Lehrperson und die Schüler/-innen im Klassenverband den Strahlengang und Aufbau eines Holographieexperiments und fassen die Grundidee noch einmal zusammen:

Im Prinzip ist ein Hologramm ein auf Film aufgezeichnetes Schwärzungsmuster, das durch Interferenz von Objekt- und Referenzwelle entsteht. Die Richtungsinformation wird als Kontrast codiert und ist so auf einer zweidimensionalen Photoplatte speicherbar. Die Rekonstruktion der Objektwelle erfolgt durch Beugung der Referenzwelle am Hologramm.

3.4.2 Überlagerung von Sinusfunktionen fast gleicher Frequenz

In der folgenden Physikeinheit soll ein weiteres Phänomen für die Interferenz zweier Schallwellen, deren Frequenz sich nur ein wenig unterscheidet, besprochen werden. Der Zugang zum Thema wird durch Experimente geschaffen, damit in der nachfolgenden Mathematikunterrichtsstunde der theoretische Hintergrund zur Überlagerung zweier Wellen fast gleicher Frequenz besprochen werden kann. Anregungen zu dieser Stunde und den Versuchen wurden [2] und [4] entnommen.

Thema: Schwebung

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtsstunde das Phänomen Schwebung definieren können.

Lehrziel: Die Schüler/innen lernen eine weitere Form der Interferenz kennen und erfahren so von der Komplexität und Vernetzung der einzelnen Themen untereinander. Der Zugang mittels Schülerexperimenten soll das Interesse der Jugendlichen wecken.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-10	Vorstellung Thema	Lehrervortrag
11-36	Schülerexperimente	Gruppenarbeit
37-50	Interpretation	Lehrer-Schüler Gespräch

Die Lehrperson stellt den Schüler/innen das Thema der Unterrichtsstunde vor:

„In der heutigen Stunde geht es um Interferenz zweier Wellen, die fast gleiche Frequenz aufweisen. Das dabei entstehende Phänomen nennt man Schwebung. Dazu werden in Gruppen zu je vier Personen Versuche durchgeführt, über die ein Protokoll erstellt werden soll.“

Nun werden die Angaben zu den Versuchen ausgeteilt, die Vierergruppen bestimmt und etwaige Fragen zu den Versuchen geklärt, danach begeben sich die Schüler/innen zu den einzelnen Stationen und beginnen zu arbeiten.

Schwebung

Führt folgende Versuche durch und protokolliert die Ergebnisse!

1. Ihr benötigt zwei Stimmgabeln gleicher Frequenz. An eine der beiden wird ein kleines Gewicht angebracht. Schlagt nun die Stimmgabeln an und beschreibt das Gehörte. Was ändert sich, wenn das Gewicht an verschiedenen Stellen angebracht wird?
2. Versucht die a-Saite einer Gitarre mit Hilfe einer Stimmgabel passender Frequenz zu stimmen!

Hinweis: Die gewünschte Saite ist die zweitdickste der Gitarre!

ad 1. Schlägt man die beiden Stimmgabeln an, so hört man einen Ton, der lauter und wieder leiser wird. Verändert man nun die Position des Gewichts, so ändert sich auch die Frequenz der Stimmgabel und das An-und Abschwellen des Tons wird mit unterschiedlicher Geschwindigkeit wahrgenommen.

Nach Beendigung der Versuche erfolgt nun eine Interpretation des Gehörten und Klärung der notwendigen Begriffe.

Die Schüler/innen erzählen kurz, welche Beobachtungen sie bei den beiden Versuchen machen konnten und die Lehrperson gibt einen Input zum theoretischen Hintergrund.

Bei den Versuchen konnte ein periodisches An- und Abschwellen der Lautstärke festgestellt werden. Dieses Phänomen nennt man Schwebung und die Frequenz des An- und Abschwellens wird Schwebungsfrequenz genannt. Je ähnlicher die Frequenzen der beiden Wellen sind, umso kleiner ist die Schwebungsfrequenz. Diese Tatsache war für das Stimmen der Gitarrensaite wichtig. Die Begründung dafür wird in der Mathematikstunde ebenso wie das Aussehen der resultierenden Welle geliefert.

Die folgende Mathematikstunde vertieft das im Physikunterricht erworbene Wissen über Schwebung, indem die resultierende Welle genauer untersucht wird. Die Arbeitsaufgabe stammt teilweise von [2] Seite 113.

Thema: Überlagerung von Sinusfunktionen fast gleicher Frequenz

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtseinheit wissen, welche Charakteristik die resultierende Schwingung bei der Überlagerung zweier fast gleichfrequenter Schwingungen hat.

Lehrziel: In dieser Unterrichtsstunde wird das Herleiten von mathematischen Sachverhalten und die Interpretation von Graphen geübt.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Wiederholung	Lehrer-Schüler Gespräch
06-45	Ausführung der Arbeitsaufträge	Gruppenarbeit
45-50	Zusammenfassung	Lehrervortrag

Zu Beginn der Mathematikstunde erinnert die Lehrperson an die vorhergehende Physikstunde und lässt die Schüler/innen noch einmal den Begriff Schwebung definieren. Danach werden die Arbeitsaufgaben verteilt, die in Zweiergruppen zu lösen sind. Die Ergebnisse werden von den Schüler/innen in Form von Kurzreferaten in der folgenden Mathematik- oder Physikeinheit vorgetragen, auf diese Referate wird hier allerdings nicht weiter eingegangen.

Überlagerung zweier fast gleichfrequenter Schwingungen

Gegeben sind zwei fast gleichfrequente Schwingungen

$$y_1 = A * \sin(f_1 * t)$$

$$y_2 = A * \sin(f_2 * t)$$

1. Berechne $y_1 + y_2$! Wie lauten Frequenz und Amplitude der resultierenden Schwingung? Welche Unterschiede ergeben sich im Vergleich mit den Ausgangsschwingungen?
2. Zeichne y_1 , y_2 und $y_1 + y_2$ mit Hilfe von Derive! Ändere die Frequenzen und beschreibe das Resultat! Wie ändert sich $y_1 + y_2$, wenn die Differenz der Frequenzen größer wird?
3. Wähle nun unterschiedliche Amplituden für y_1 und y_2 ! Wie ändert sich die resultierende Welle?

Die Vorgehensweise sollte den Schüler/innen aus den vorangegangenen Unterrichtsstunden bekannt sein.

Lösung

ad 1:

Mit Hilfe des Additionstheorems erhält man:

$$y_1 + y_2 = 2A \sin \frac{f_1 t + f_2 t}{2} \cos \frac{f_1 t - f_2 t}{2}$$

Die Frequenz f der resultierenden Schwingung ist das Mittel der Ausgangsfrequenzen und lautet:

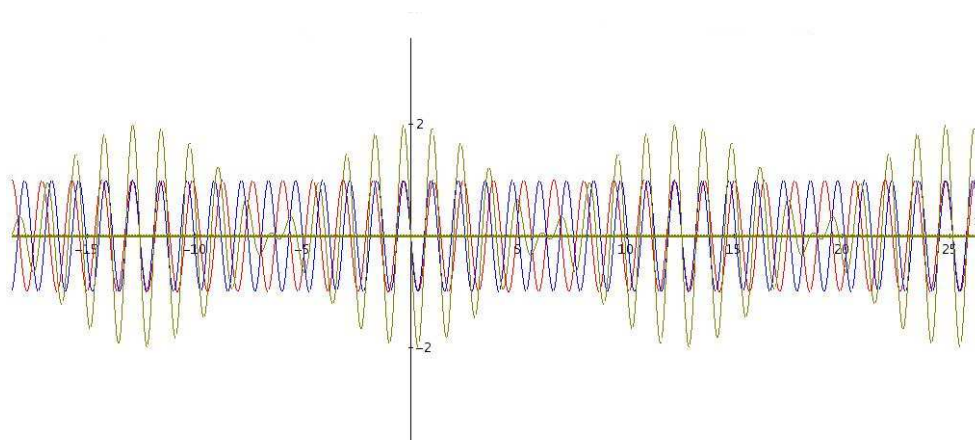
$$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

Die Amplitude A_{1+2} der resultierenden Schwingung ist nun zeitabhängig:

$$A_{1+2} = 2A \cos \frac{f_1 t - f_2 t}{2}$$

ad 2:

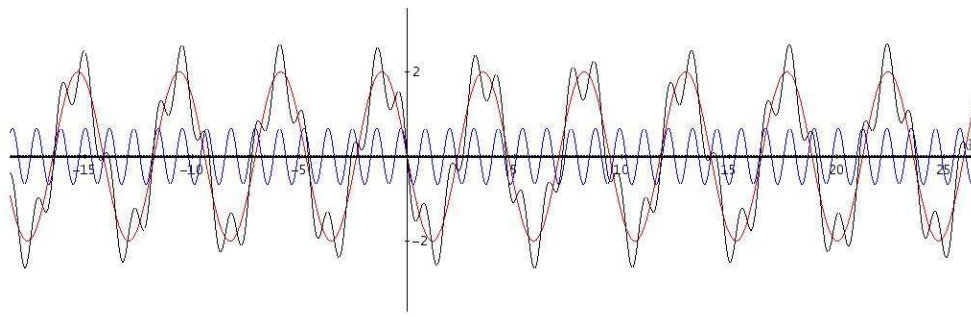
Bild von y_1 , y_2 und $y_1 + y_2$:



Ändert man Frequenzen der beiden Ausgangsschwingungen, so ändert sich ebenfalls die Schwebungsfrequenz. Je größer die Differenz der beiden Frequenzen, umso schneller schwingt die Amplitude der resultierenden Schwingung.

ad 3:

Es kommt nicht länger zu Auslöschung, die Amplitude der resultierenden Welle wird niemals Null:



Zum Abschluss der Unterrichtseinheit kommt die Lehrperson noch einmal auf die in der Physikstunde offengebliebene Frage zu sprechen, warum die Schwebungsfrequenz bei ähnlichen Frequenzen geringer wird.

Der Grund liegt in der Formel für die Schwebungsfrequenz $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$, da bei kleinerem f_1 und f_2 auch die halbierte Summe kleiner ausfällt.

3.4.3 Überlagerung mehrerer Schwingungen

Den Abschluss des Kapitels Überlagerung von Schwingungen bildet die Überlagerung mehrerer Sinusschwingungen. In der folgenden Mathematikeinheit zeigen die Schüler/innen, dass durch Überlagerung von harmonischen Schwingungen ein Rechtecksignal angenähert werden kann, sie befassen sich also mit harmonischer Synthese oder auch Fourier Synthese genannt. In der nachfolgenden Physikstunde wird der Hintergrund der Synthese und auch der Begriff der harmonischen Analyse erklärt. Die Arbeitsaufgabe der Mathematikstunde wurde [2] Seite 113 entnommen.

Thema: Überlagerung mehrerer Schwingungen zu einem Rechtecksignal

Lernziel: Die Schüler/innen sollen lernen, dass eine periodische Wellenform aus ihren harmonischen Anteilen konstruiert werden kann.

Lehrziel: Mit „technologischer Unterstützung“⁹ erarbeiten sich die Schüler/innen selbstständig die Grundidee der harmonischen Synthese und bereiten so den Grundstock für die folgende Physikstunde vor.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-07	Vorstellung Thema	Lehrervortrag
08-10	Erteilen des Arbeitsauftrags	Lehrervortrag
11-39	Bearbeiten der Aufgabe	Gruppenarbeit
40-50	Vergleich der Ergebnisse	Lehrer-Schüler-Interaktion

Die Lehrperson stellt den Schüler/innen das Thema der Unterrichtsstunde vor:

„Wir beschäftigen uns heute mit Fourier-Synthese oder auch harmonische Synthese genannt. Die Grundidee der Synthese ist schnell erklärt, man kann eine periodische Funktion oder Wellenzug aus ihren harmonischen Anteilen zusammensetzen. Fourier-Synthese wird sie nach dem französischen Mathematiker und Physiker Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) genannt, der das mathematische Rüstzeug dafür entwickelte.

Ihr werdet heute ein Rechtecksignal aus Sinusfunktionen annähern. Anwendung findet die harmonische Synthese zum Beispiel bei der elektronischen Musikerzeugung. Um den Klang eines Instruments möglichst authentisch wiederzugeben, müssen auch die Obertöne berücksichtigt werden.“

⁹laut [6]

Nun werden die Arbeitsanweisungen ausgeteilt und die Schüler/innen lösen die Aufgabe in Zweiergruppen.

Überlagerung zu einem Rechtecksignal

Gegeben sind folgende Funktionen:

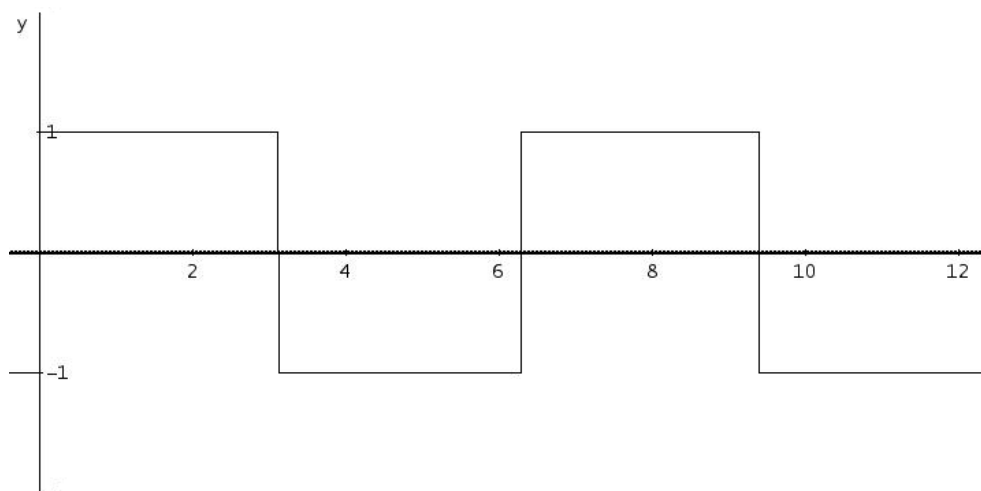
$$y_1(t) = \sin(t)$$

$$y_3(t) = \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t)$$

$$y_n(t) = \sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \dots + \frac{1}{n} \sin(nt)$$

Zeige, dass sich durch Überlagerung von Sinusfunktionen ein Rechteckssignal annähern lässt. Dazu zeichne $y_1(t)$, $y_3(t)$, $y_{11}(t)$, $y_{17}(t)$ und $y_{27}(t)$! Vergleiche mit dem gegebenen Rechtecksignal, welche Unterschiede erkennt man?

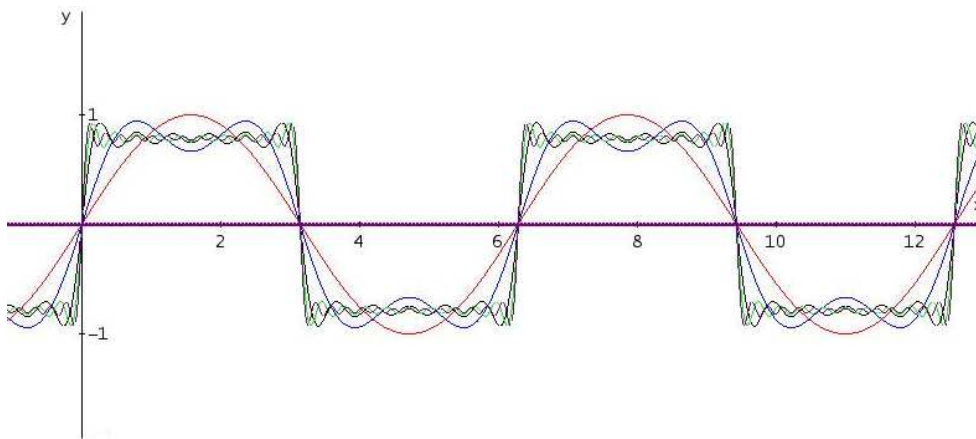
Rechtecksignal:



Nachdem die Schüler/innen die Aufgabe bearbeitet haben, wird die erhaltene Graphik verglichen und die Schüler/innen beschreiben den Unterschied zum Rechtecksignal:

Lösung

Durch Zeichnen der Sinusfunktionen erhält man folgendes Bild:



Im Unterschied zum Rechtecksignal sind die waagrechten Anteile der Funktionen nicht orthogonal zu den Senkrechten, höhere Grade lassen die Flanken steiler werden und verringern die Welligkeit der waagrechten Anteile. Außerdem beobachtet man ebenfalls ein Überschwingen des Rechtecksignals.

Die Lehrperson weist die Schüler/innen auf die folgende Physikstunde hin, in der das Thema der harmonischen Analyse behandelt und der Begriff Harmonische erläutert werden wird.

In der folgenden Physikeinheit wird das Thema der letzten Mathematikstunde aufgegriffen und weiter vertieft. Die Schüler/innen lernen den Satz von Fourier kennen, erfahren Genaueres über die Harmonischen und es wird die harmonische Analyse vorgestellt. Anregungen zu dieser Unterrichtsstunde wurden [2] und [4] entnommen.

Thema: Harmonische Analyse

Lernziel: Die Schüler/innen sollen in dieser Unterrichtsstunde die große Bedeutung harmonischer Schwingungen und Wellen erfassen und die harmonische Analyse kennenlernen.

Lehrziel: Den Schüler/innen wird an konkreten Beispielen die Anwendung von harmonischer Analyse nahegebracht. So sollen sie mit Hilfe moderner Medien, wie dem verwendeten Computerprogramm, die Wellen als Grundlage der Akustik verstehen.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Wiederholung	Lehrer-Schüler-Gespräch
06-11	Satz von Fourier	Lehrervortrag
12-16	harmonische Analyse	Lehrervortrag
17-50	Analyse Musikinstrumente	Demonstration

Zu Beginn der Unterrichtsstunde wird der Inhalt der vorhergehenden Mathematikeinheit besprochen. Die Schüler/innen berichten über ihre Beschäftigung mit Überlagerung von Sinusschwingungen zu einem Rechtecksignal. Die Lehrperson legt dabei besonderes Augenmerk auf die Erwähnung des Namensgebers der harmonischen Synthese, nämlich Fourier, um eine Brücke zum ersten Teil der Physikstunde zu schlagen.

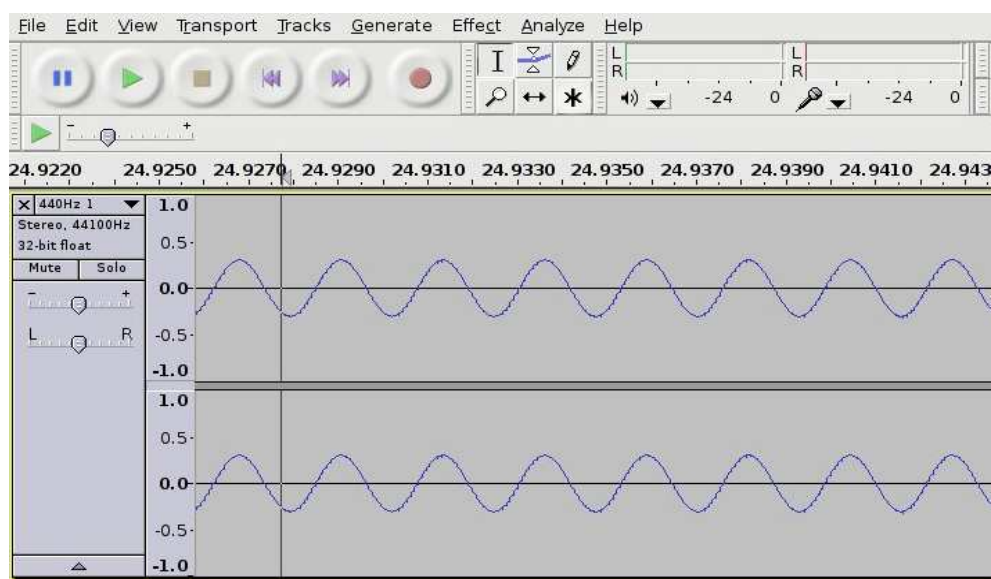
Die Lehrperson erklärt den Schüler/innen die Bedeutung der harmonischen Wellen und Schwingungen und lässt sie den Satz von Fourier festhalten:

„Wie ihr in der vergangenen Mathematikstunde selbst probieren konntet, lassen sich durch Überlagerung harmonischer Schwingungen alle periodischen Funktionen beliebig genau annähern. Dies ist die Aussage des Satzes von Fourier und in ihm steckt auch die Bedeutung der harmonischen Wellen, da sie die Bausteine komplizierter Wellen sind. Deren Eigenschaften kann man durch Untersuchung ihrer Bausteine herausfinden.“

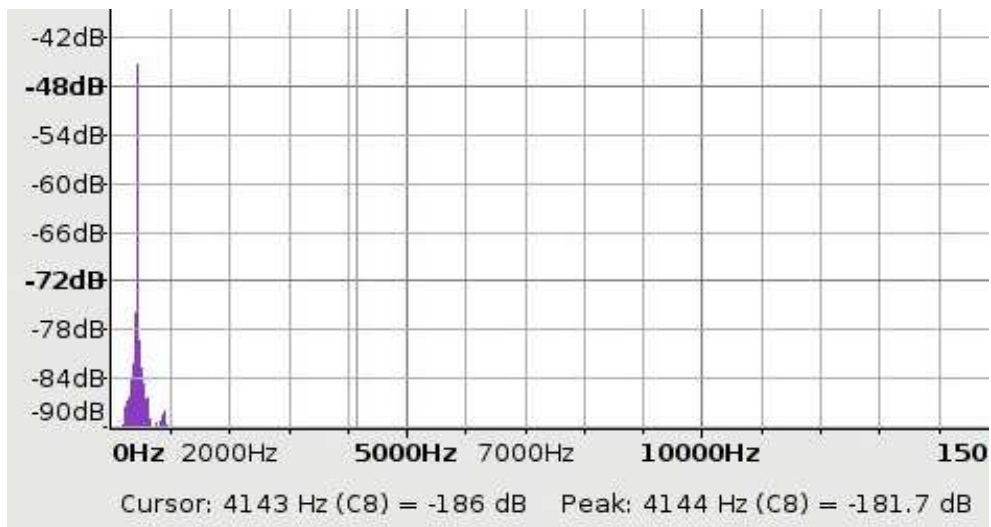
Ein Weg die Bausteine der Wellen, die sogenannten Harmonischen näher zu untersuchen, stellt die harmonische Analyse dar. Mit ihrer Hilfe können Wellen in ihre einzelnen Anteile zerlegt werden und man kann untersuchen, in welcher Intensität die einzelnen Anteile vorkommen. Diese Intensitätsverteilung nennt man auch das Fourier-Spektrum, oder kurz Spektrum.

Um den Schüler/innen die harmonische Analyse vorzuführen, verwendet die Lehrperson das Computerprogramm Audacious. Mit diesem Programm können die Wellenformen verschiedener Töne betrachtet und analysiert werden.

Zuerst wird der Ton einer Stimmgabel analysiert. Hierfür wird eine Stimmgabel mit 440 Hz angeschlagen und mittels Mikrophon aufgenommen. Durch Betätigen des Knopfes „Aufnehmen“ erhält man die Darstellung der Schallwelle:

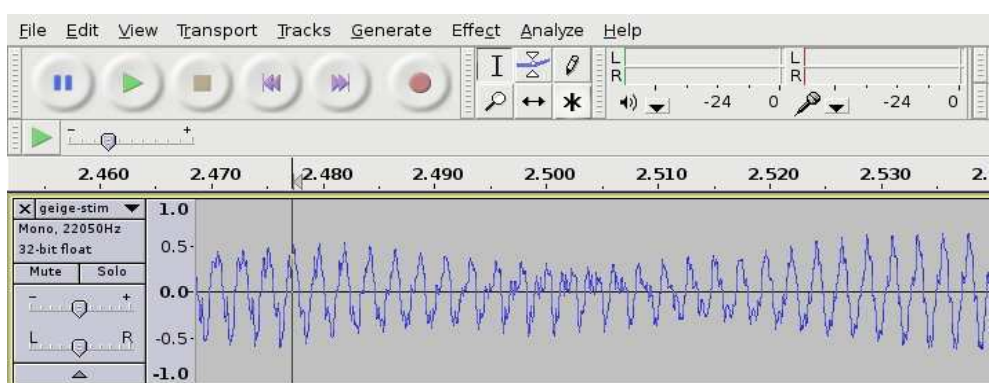


Nun soll das Spektrum der Schallwelle herausgefunden werden. Dazu drückt man den Knopf „Analyze“ und wählt den Befehl „Plot Spectrum“. Es ergibt sich folgendes Bild:

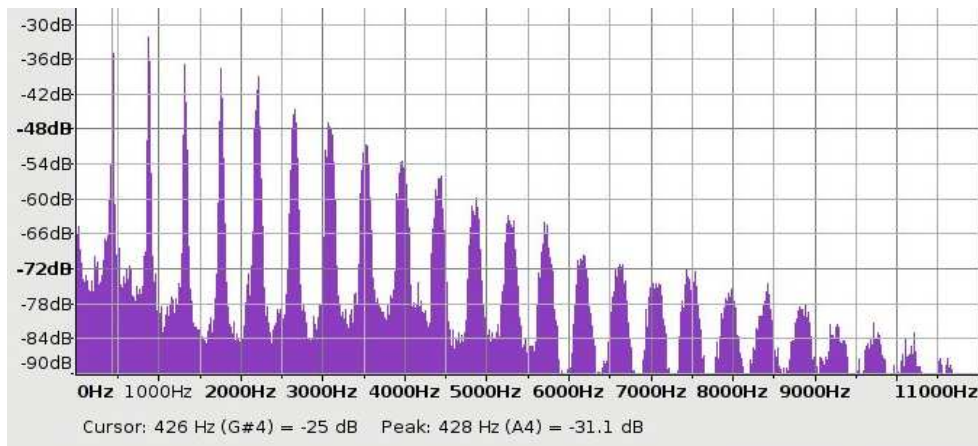


Die Schüler/innen sollen das erhaltene Spektrum interpretieren. Die Graphik zeigt, dass der Ton der Stimmgabel aus einem reinen Sinus besteht, es ist nur eine Harmonische zu sehen.

Als zweites Beispiel wird die Schallwelle der a-Saite einer Geige präsentiert. Die Vorgehensweise entspricht der des ersten Beispiels. Die Schallwelle der Violinensaite entspricht jenem Bild:

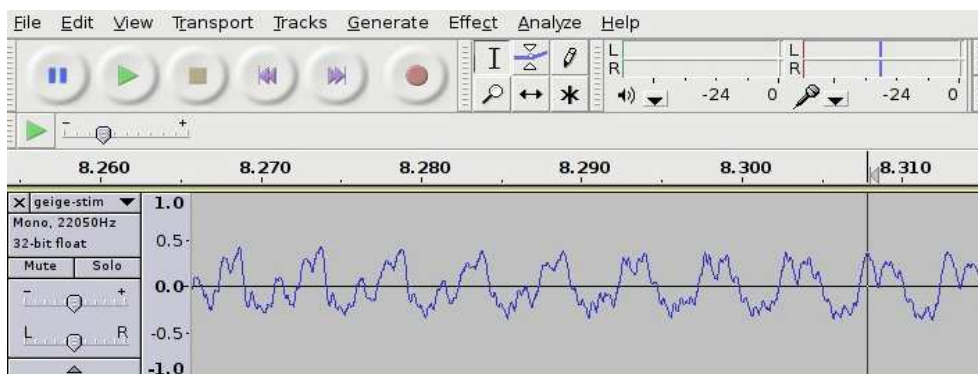


Man erhält das folgende Spektrum:

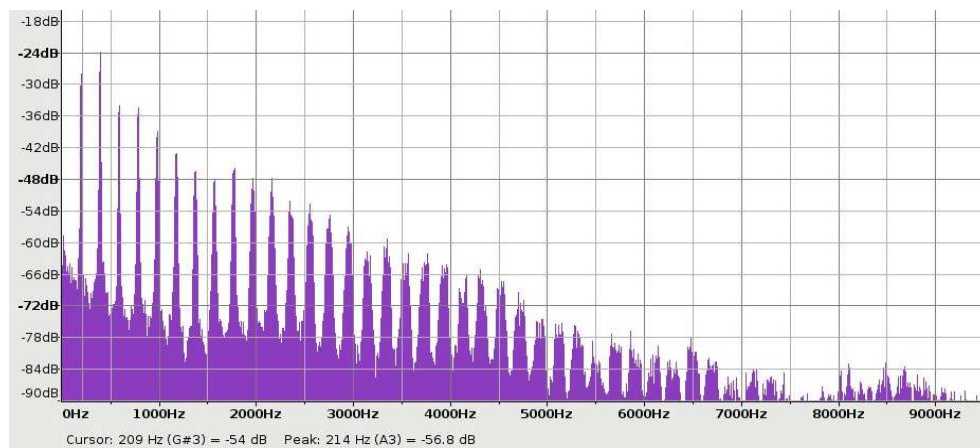


Im Unterschied zum Spektrum der Stimmgabel erkennt man deutlich, dass der Klang der Violine sich aus dem Grundton und den Obertönen zusammensetzt. Die einzelnen Harmonischen wirken in unterschiedlich starken Anteilen zusammen.

Zum Abschluss wird die g-Saite der Geige analysiert. Zuerst betrachten die Schüler/-innen die Schallwelle:



Und danach wird wiederum das Spektrum erzeugt:



3.5 Multiplikation von Sinusfunktionen

Während die Unterrichtsstunden der Kapitel Harmonische Schwingungen, Winkelfunktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$, Die allgemeine Sinusfunktion und Überlagerung von Schwingungen für die sechste Klasse AHS konzipiert wurden, richtet sich dieses Kapitel an die siebten Klassen.

Am Anfang steht eine Mathematikeinheit zum Thema Multiplikation von Sinusfunktionen, um den theoretischen Hintergrund für die folgenden Physikeinheiten über das Radio und den Rundfunk vorzubereiten, in denen die Amplitudenmodulation eine wichtige Rolle spielen wird. Ideen zu dieser Einheit lieferten [2], [3], [4], [8] und [9].

Thema: Multiplikation von Sinusfunktionen

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach dieser Unterrichtseinheit die Formel für die Multiplikation zweier Sinusfunktionen kennen und die Eigenschaften der durch die Multiplikation entstehenden Funktion beschreiben können.

Lehrziel: In dieser Mathematikstunde wird das Anwenden von Formeln und das Interpretieren von Graphen geübt.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Vorstellung Thema	Lehrervortrag
06-10	Erklärung der Formel	Lehrervortrag
11-19	Interpretation des Graphen	Lehrer-Schüler-Interaktion
20-30	Beispiel	Einzelarbeit
31-46	Vergleich und Interpretation der Ergebnisse	Lehrer-Schüler-Gespräch
47-50	Ausblick	Lehrervortrag

Zum Einstieg in die Mathematikstunde erzählt die Lehrperson den Schüler/innen das Thema der Einheit und gibt den Ablauf der Unterrichtsstunde bekannt:

„Wir beschäftigen uns heute mit der Multiplikation zweier Sinusfunktionen. Zuerst werden wir die Formel, mit deren Hilfe die beiden Funktionen multipliziert werden können, genauer betrachten und danach die Eigenschaften des dabei entstehenden Graphen untersuchen, um im Anschluss die Formel an einem konkreten Beispiel zu probieren.“

Die Schüler/innen notieren nun besagte Formel:

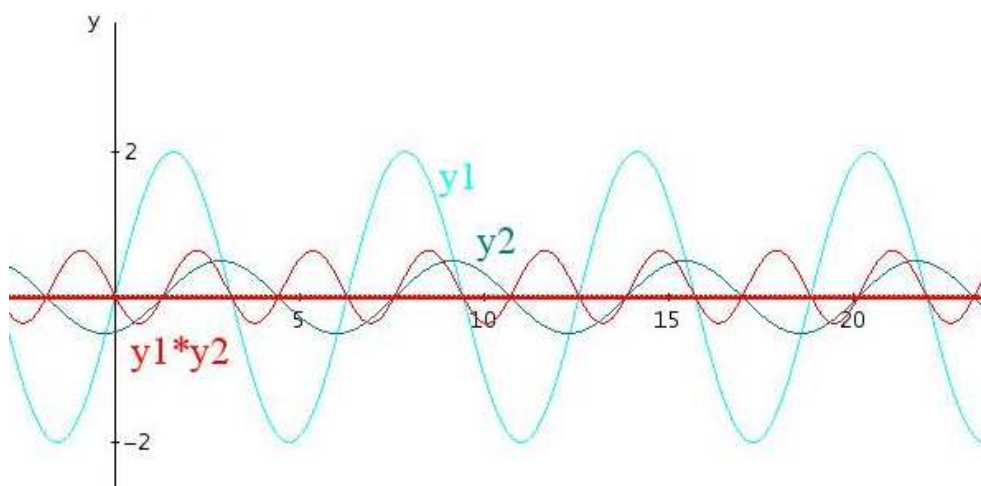
$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta))$$

Für den allgemeineren Fall $y_1 = a \sin x$ und $y_2 = b \sin (x + c)$ verändert sich die Formel zu:

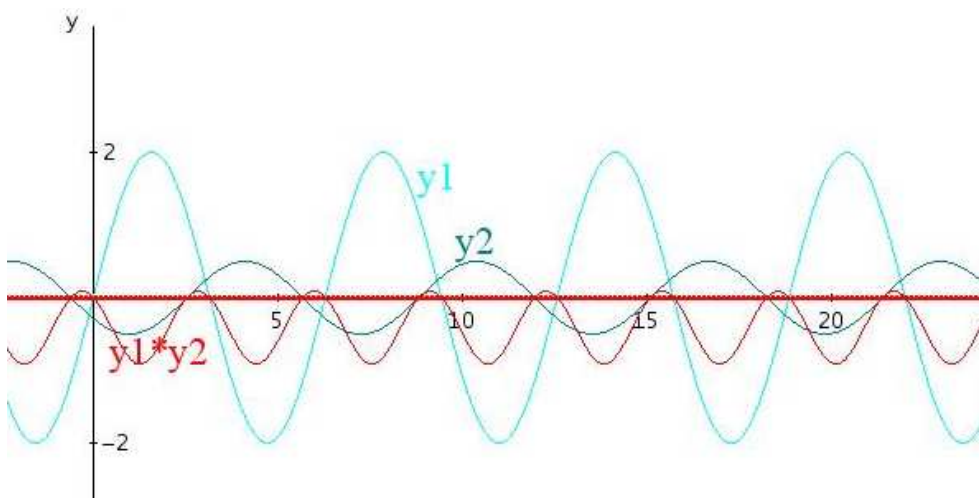
$$y_1 \cdot y_2 = \frac{ab}{2} \cos x - \frac{ab}{2} \cos (2x + c)$$

Nun wird der bei der Multiplikation entstehende Graph analysiert. Zur Demonstration verwendet die Lehrperson das Computerprogramm Derive. Zuerst werden die Funktionen y_1 , y_2 und deren Produkt definiert. Nach dem Öffnen eines neuen Graphikfensters müssen Schieberegler für die Variablen a , b und c installiert werden. In folgender Graphik wurden jene Einstellungen gewählt:

$$a = 0,50 \quad b = 2 \quad c = 5$$



Die Interpretation des Graphen wird von den Schüler/innen diskutiert. Man erkennt, dass der Graph der resultierenden Funktion die doppelte Frequenz der Ausgangsfunktionen hat. Änderungen der Amplituden verändern auch die Amplitude von $y_1 \cdot y_2$. Die Wahl der Phase bewirkt eine Verschiebung der Funktion in Richtung y-Achse, zum Beispiel verschiebt sich die Funktion mit $c = 3,75$ in die negative y-Richtung, wobei sich der Abstand zur x-Achse periodisch vergrößert und verkleinert:



Das Erlernte soll nun von den Schüler/innen selbstständig an einer Arbeitsaufgabe erprobt werden.

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$u_S(t) = \hat{u}_S \cdot \sin(\omega_S t)$$

$$u_T(t) = \hat{u}_T \cdot \sin(\omega_T t)$$

Berechne:

$$u_{AM}(t) = (\hat{u}_T + \hat{u}_S \cdot \sin(\omega_S t)) \sin(\omega_T t)$$

Lösung:

Zuerst multipliziert man die Klammer aus und erhält:

$$u_{AM}(t) = \hat{u}_T \sin(\omega_T t) + \hat{u}_S \cdot \sin(\omega_S t) \sin(\omega_T t)$$

Nun findet die Formel zur Multiplikation zweier Sinusfunktionen Anwendung:

$$u_{AM}(t) = \hat{u}_T \sin(\omega_T t) + \frac{1}{2} \hat{u}_S \cdot [\cos(\omega_S t - \omega_T t) - \cos(\omega_S t + \omega_T t)]$$

Bei den angegebenen Funktionen handelt es sich um ein Audiosignal und ein reines Sinussignal, den Träger, siehe weiter unten. Der Ausdruck $u_{AM}(t)$ ist ein sogenanntes amplitudenmoduliertes Signal, wie es zur Informationsübertragung verwendet wird.

Was bedeutet nun amplitudenmoduliert?

Die Amplitude einer ausgesandten Welle wird abhängig von der Zeit verändert. Ein bekanntes Beispiel dafür ist die Schwebung. Im vorigen Beispiel ist die Ausgangsschwingung, der sogenannte Träger, $\hat{u}_T \sin(\omega_T t)$. Die Ausdrücke $\frac{1}{2} \hat{u}_S \cdot \cos(\omega_S t - \omega_T t)$ und $\frac{1}{2} \hat{u}_S \cdot \cos(\omega_S t + \omega_T t)$ werden Seitenbänder genannt.

Detailliertere Informationen dazu werden in der kommenden Physikeinheit gegeben, in der es sich um den Rundfunk dreht.

Die folgende Physikstunde beschäftigt sich mit Rundfunk. Anknüpfend an die vorangegangene Mathematikeinheit wird das Prinzip eines Radiosenders erklärt und die Funktionsweise der dabei stattfindenden Informationsübertragung näher beleuchtet.

Thema: Rundfunk

Lernziel: Nach dieser Unterrichtsstunde sollen die Schüler/innen erklären können, wie Rundfunk funktioniert und die Vor- und Nachteile von amplitudenmodulierten Radiowellen anführen können.

Lehrziel: Die Schüler/innen sollen erfahren, dass Physik und Mathematik in ihrer Lebenswelt eine wichtige Rolle spielen und hierfür ist das überall präsente Radio ein gutes Beispiel.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-07	Wiederholung	Gruppenarbeit
08-26	Radiosender und Empfänger	Lehrervortrag
27-38	Informationsübertragung	Lehrer-Schüler-Gespräch
39-45	Vor- und Nachteile	Einzelarbeit
46-50	Ausblick	Lehrervortrag

Zu Anfang des Unterrichts lässt die Lehrperson die Schüler/innen die Erkenntnisse der vorangegangenen Mathematikstunde wiederholen, indem in Zweiergruppen über das Thema der letzten Stunde gesprochen wird. Daran anknüpfend erklärt die Lehrperson den Schüler/innen die Funktionsweise von Radiosender und Empfänger anhand der Darstellung in [8], Seite 121:

„Wie in der Mathematikstunde bereits angesprochen wurde, wird zur Aussendung von Rundfunkwellen die Amplitude einer Trägerwelle durch eine Schwingung verändert. Bei der Trägerwelle handelt es sich um eine Welle mit hoher Frequenz, die von einem Schwingkreis erzeugt wird. Das Tonsignal, welches übertragen werden soll, zum Beispiel Musik oder Sprache, wird durch ein Mikrophon in eine niederfrequente Wechselspannung umgewandelt.

Zu Beginn der Radiotechnik wurde als Mikrophon ein Lautsprecher verwendet. Durch Schallwellen wird die Lautsprechermembran in Schwingungen versetzt, an deren Rückseite sich eine kleine Spule befindet. Diese Spule bewegt sich auf Grund der Schwingungen in einem durch einen Permanentmagneten erzeugten Magnetfeld, wodurch nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert wird.

Diese Spannung verändert sich im Rhythmus der Schallwelle und so entsteht die niederfrequente Wechselspannung.

Heute werden Kondensatormikrophone verwendet. Zwei geladene Metallplatten bilden einen Kondensator. Eine der beiden Platten wird durch Schallwellen in Schwingung versetzt, dadurch ändert sich der Plattenabstand und somit auch die Kapazität des Kondensators, also auch die Spannung und wieder entsteht Wechselspannung.

Die niederfrequente Wechselspannung verändert die Amplitude des Trägersignals, diese Schwingung wird nun von der Sendeantenne ausgestrahlt.

Die Antenne des Empfängers wird durch eintreffende Signale in Schwingung versetzt. Sie empfängt nicht nur ein Radioprogramm, sondern wird von vielen Frequenzen heimgesucht. Die gewünschte Frequenz erhält man mittels eines Schwingkreises, der durch das eintreffende Signal in Resonanz versetzt wird. Das Ausschauen des Senders erfolgt über die einstellbare Kapazität des Kondensators im Schwingkreis. Das ursprüngliche Tonsignal filtert ein Spitzenwertgleichrichter, bestehend aus Diode und Kondensator, heraus, welches dann nur mehr verstärkt werden muss.“

Nun wird noch einmal die in der Mathematikstunde erhaltene Formel betrachtet:

$$u_{AM}(t) = \hat{u}_T \sin(\omega_T t) + \frac{1}{2} \hat{u}_S \cdot [\cos(\omega_S t - \omega_T t) - \cos(\omega_S t + \omega_T t)]$$

Die Schüler/innen sollen nun herausfinden, in welchen Teilen der Formel noch die Information über das ursprüngliche Tonsignal steckt.

Wie in der Mathematikstunde erwähnt ist der erste Teil, $\hat{u}_T \sin(\omega_T t)$, der Träger mit Frequenz $f = \frac{\omega_T}{2\pi}$. In ihm steckt keine Information über das Tonsignal. Der zweite Teil $\frac{1}{2} \hat{u}_S \cdot [\cos(\omega_S t - \omega_T t) - \cos(\omega_S t + \omega_T t)]$ enthält noch die Sendefrequenz $f_S = \frac{\omega_S}{2\pi}$. Die Information steckt also in den Seitenbändern, ebenso wie die Trägerfrequenz, die im gesamten Signal enthalten ist.

Die Lehrperson erklärt den Schüler/innen, dass der Sender somit nicht nur eine Frequenz ausstrahlt, sondern ein Frequenzband, bestimmt durch Trägerfrequenz und die Seitenbänder, mit folgender Bedingung:

$$f_T - f_s \leq f \leq f_s + f_T$$

Mit dieser Ungleichung wird die Breite des Sendesignals festgelegt. Damit das Frequenzband nicht zu breit wird, beträgt die Breite eines Seitenbandes maximal 4500 Hz. Die Bandbreite muss beschränkt sein, weil der Bereich zur Mittelwellen Übertragung zwischen 500 kHz und 1500 kHz liegt.

Nun sollen sich die Schüler/innen Vor- und Nachteile dieser Art von Radioübertragung in Einzelarbeit überlegen und danach im Klassenverband besprechen.

Oben wurde die Tatsache besprochen, dass die Breite des Frequenzbandes eingeschränkt ist. Für Musikübertragungen bräuchte es aber auch höhere Frequenzen als 4500 Hz. Somit leidet die Qualität der Übertragung.

Ein Vorteil ist die große Reichweite der Sender. Die Radiowellen bringen Teilchen in der Ionosphäre zum Schwingen, so werden die ausgesandten Strahlen entweder absorbiert, oder zur Erde reflektiert und dadurch können weite Distanzen überbrückt werden. Ohne Reflexion beläuft sich die Reichweite auf 300 km und mit der Reflexion in der Ionosphäre kann mehrere tausend Kilometer weit gesendet werden.

In der nächsten Physikstunde können sich die Schüler/innen selbst von den Vor- und Nachteilen ein Bild machen, da sie in Eigenregie einen Radioempfänger bauen und testen dürfen.

Die folgende Physikstunde vertieft das Thema der vorigen durch praktische Anwendung des Gelernten.

Thema: Bau von Radio

Lernziel: Die Schüler/innen sollen in dieser Unterrichtsstunde lernen, eine Schaltung laut Schaltskizze zu bauen.

Lehrziel: Durch den praktischen Zugang, nämlich das eigenständige Bauen eines Empfängers, soll den Schüler/innen dessen Aufbau verständlich gemacht werden.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-07	Wiederholung	Schüler-Gespräch
08-10	Erteilen der Arbeitsaufgabe	Lehrervortrag
11-41	Bau des Empfängers	Gruppenarbeit
42-50	Zusammenfassung	Lehrer-Schüler-Gespräch

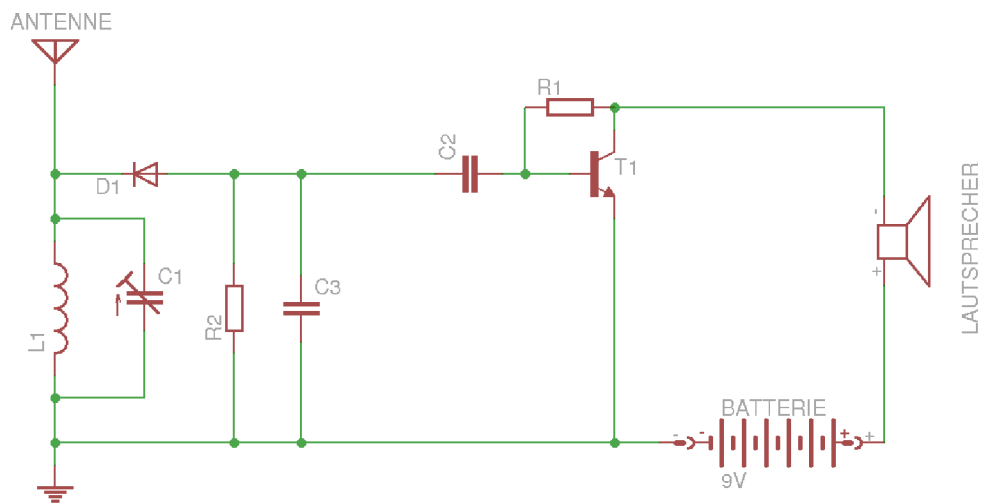
Den Anfang der Stunde beansprucht die Wiederholung des Gelernten über Rundfunk im Mittelwellenbereich. Die Schüler/innen sind aufgefordert ihrem/ihrer Sitznachbar/in die Funktionsweise des Radioempfängers zu erklären und sich gegenseitig über die Vor- und Nachteile dieser Art von Übertragung auszutauschen.

Danach erzählt die Lehrperson kurz, worum sich diese Physikstunde dreht, nämlich den Bau eines Radioempfängers und teilt danach die Arbeitsanweisungen aus, siehe unten.

Die Schüler/innen haben dreißig Minuten Zeit um jeweils zu dritt den Empfänger fertigzustellen, dann wird über den Erfolg des Bastelns diskutiert und die Fragen besprochen.

Bau eines Radioempfängers

Fertigt nach folgender Schaltskizze einen Radioempfänger mit Transistorverstärker an:

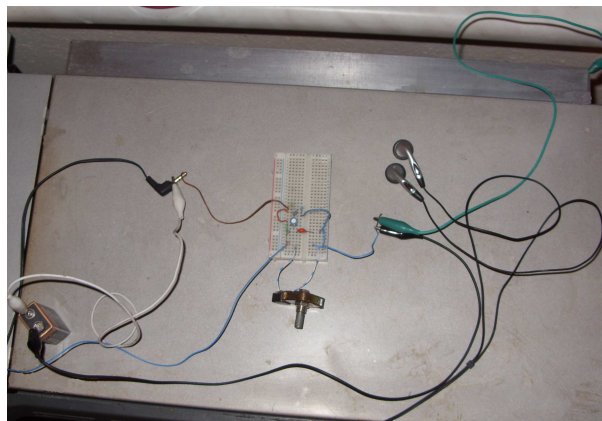


Bauteilangaben:

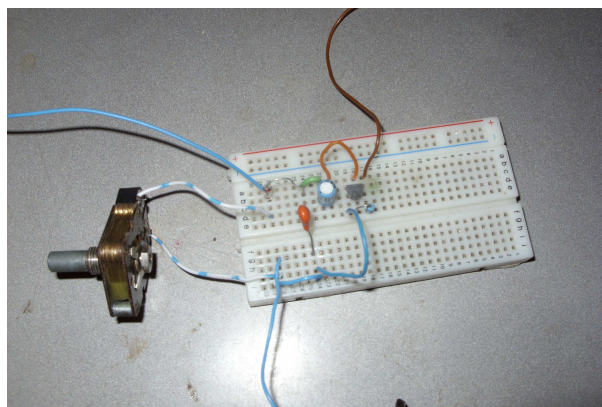
Antenne	Kabel
Erdung	Elektrogerät, Wasserleitung oder Heizkörper
L_1	Spule mit 180 nH
C_1	einstellbarer Kondensator von 100 pF-900 pF
D_1	Diode aus Germanium
R_2	Widerstand mit 16 k Ω
C_3	Kondensator mit 10 nF
C_2	Kondensator mit 1 μ F
R_1	Widerstand mit 360 k Ω
T_1	NPN-Transistor
Lautsprecher	Kopfhörer (von Schüler/innen mitgebracht)
Stromversorgung	Batterie mit 9V

Achtet beim Bau auf die Ausrichtung der Diode!

Nun werden die Empfänger gebaut, hier ein Bild des möglichen Aufbaus:



Und das Steckbrett im Detail:



Nachdem die Schüler/innen die Empfänger gebaut und getestet haben, diskutieren sie zusammen mit der Lehrperson über Erfahrungen und Ergebnis des Baus. Zum Beispiel könnten sie bemerkt haben, dass je länger das Kabel ausgerollt wird, umso mehr verbessert sich der Empfang. Ebenfalls merkwürdig ist das Überschneiden der Bänder der Sender, das sich im gleichzeitigen Hören zweier Radioprogramme äußert. Außerdem ist der Rundfunk über Mittelwelle sehr störanfällig,

was sich als Rauschen und Pfeifen bemerkbar macht. Die große Reichweite der Sender macht sich durch den Empfang überwiegend ausländischer Radioprogramme bemerkbar.

Zum Abschluss sollen sich die Schüler/innen die Antwort zu folgender Frage überlegen:

„Warum ist die Reichweite von Mittelwellensendern nachts sehr viel größer als tagsüber?“¹⁰

Die Schicht in der Ionosphäre, an welcher die Mittelwellensignale reflektiert werden, verschiebt sich in der Nacht in größere Höhen, weil auf Grund des fehlenden Sonnenlichts die Ionisation der Moleküle im unteren Teil der Ionosphäre geringer ausfällt. Dadurch werden die Signale aus größerer Höhe weiter reflektiert. Dies wird von den Sendern durch reduzierte Sendeleistung in der Nacht ausgeglichen.

Eine weniger Störanfällige Art zu senden stellen Signale mit Frequenzmodulation dar, von denen die nächste Physikstunde handeln wird.

¹⁰siehe [8] Seite 135, Übungsbeispiel 129

Nun folgt eine Physikeinheit, deren Inhalt sich um das Senden von Signalen mittels Frequenzmodulation dreht. Im Besonderen soll diese Stunde die wesentlichen Unterschiede zu amplitudenmodulierten Signalen aufzeigen und die Gründe darlegen, warum FM-Sender weniger stör anfällig sind. Informationen zu dieser Unterrichtsstunde wurden [8] entnommen.

Thema: Senden mittels frequenzmodulierten Signalen

Lernziel: Die Schüler/innen sollen nach der Physikstunde die Unterschiede zwischen amplitudenmodulierten und frequenzmodulierten Signalen erklären können.

Lehrziel: Diese Stunde soll verschiedenen Möglichkeiten der Informationsübertragung mittels Wellen aufzeigen.

Zeit [min]	Inhalt	Lehrmethode
00-05	Wiederholung	Lehrer-Schüler-Gespräch
06-10	Motivation	fragend-entwickelnder Unterricht
11-21	FM-Signale	Lehrer-Schüler-Gespräch
22-34	Unterschiede zu AM-Signalen	Einzelarbeit
35-44	Vor- und Nachteile	Lehrer-Schüler-Gespräch
45-50	Anwendungen	Lehrer-Schüler-Gespräch

Den Anfang der Stunde macht eine Wiederholung im Klassenverband, bei welcher besonders die Nachteile der amplitudenmodulierten Signale hervorgehoben werden, wie zum Beispiel die schlechte Qualität der empfangenen Signale, das Überschneiden der Bänder und die Störanfälligkeit.

Nach erfolgter Wiederholung versucht die Lehrperson das Thema der Unterrichtsstunde zu motivieren und stellt dazu folgende Frage:

„Welche Radioprogramme hört ihr?“

Nun sollen die Schüler/innen ihre liebsten Sender aufzählen und dann fragt die Lehrperson weiter:

„Und welche Frequenz haben diese Programme?“

Wieder antworten die Schüler/innen, zum Beispiel sendet Österreich 1 in Wien mit einer Frequenz von 92,0 MHz. Dann will die Lehrperson wissen, mit wel-

cher Radioeinstellung die Schüler/innen ihr Lieblingsprogramm hören können. Die richtige Antwort lautet FM.

Daraufhin erkundigt sich die Lehrperson, ob die Schüler/innen wissen, was FM bedeutet. FM bedeutet frequenzmoduliert, das heißt die Frequenz einer hochfrequenten Trägerwelle wird im Takt des zu übertragenden niederfrequenten Signals verändert, siehe Abbildung [8], Seite 122.

Die Frequenz der modulierten Welle wird durch die Veränderung zu:

$$\omega(t) = \omega_0 + a(t) \sin(\omega_1 t)$$

mit ω_1 als Signalfrequenz und $a(t)$ als Amplitude des niederfrequenten Signals.

Nun sollen die Schüler/innen mit den eben gegebenen Informationen die modulierte Welle anschreiben. Die Lösung lautet:

$$U(t) = U_0 \sin[(\omega_0 + a(t) \sin(\omega_1 t)) t]$$

Die Schüler/innen sollen sich jetzt überlegen, ob es sich bei dieser Welle um eine harmonische handelt, oder nicht. Die Antwort lautet nein, ein frequenzmoduliertes Signal ist keine harmonische Welle, da sich die Frequenz einer harmonischen Welle nicht mit der Zeit ändert, was beim frequenzmoduliertem Signal allerdings der Fall ist.

Wie kann man aus dem frequenzmoduliertem Signal wieder das ursprüngliche Signal herausfiltern? Man benötigt dazu sechs Seitenbänder, da das Spektrum des Signals nicht nur aus drei Intensitäten, wie bei der amplitudenmodulierten Welle, besteht, sondern viel breiter gefasst ist.

Nun erhalten die Schüler/innen die Aufgabe, die Unterschiede zwischen amplitudenmodulierten und frequenzmodulierten Signalen herauszuarbeiten. Folgende Denkanstöße können dabei gegeben werden:

- Was wird bei den einzelnen Signalen moduliert?
- Bei welchem der beiden Signale handelt es sich um eine harmonische Welle?
- Wo ist die Information des Signals enthalten?
- In welchem Frequenzbereich wird gesendet?

Mögliche Unterschiede:

- Was wird bei den einzelnen Signalen moduliert? Wie der Name schon sagt wird beim amplitudenmodulierten Signal die Amplitude der Trägerwelle verändert und beim frequenzmodulierten Signal verändert das zu übertragende Signal die Frequenz.
- Bei welchem der beiden Signale handelt es sich um eine harmonische Welle? Nur das amplitudenmodulierte Signal ist eine harmonische Welle.
- Wo ist die Information des Signals enthalten? Beim amplitudenmodulierten Signal ist die Information des zu übertragenden Signals in der Amplitude enthalten, beim frequenzmodulierten Signal liegt die gesamte Information in den Nulldurchgängen des Trägers.
- In welchem Frequenzbereich wird gesendet? Informationsübertragung findet bei AM-Sendern zwischen 500 kHz bis 1500 kHz und bei FM-Sendern von 88 MHz bis 108 MHz statt.

Die Überlegungen der Schüler/innen werden im Klassenverband besprochen und

danach wird über Vor- und Nachteile der Informationsübertragung mittels Frequenzmodulation diskutiert. Ein Vorteil liegt in der Störunempfindlichkeit dieser Sendeart. Störungen betreffen meist nur die Amplitude, die aber in jenem Fall keine Information enthält. Ein weiteres Plus sind die größeren Abstände zwischen den Frequenzbändern und das weitere Spektrum, die zusammen für gute Qualität bei der Übertragung sorgen. Einzig nachteilig sind der Mehraufwand für die technische Realisierung und die geringere Reichweite der Sender verglichen mit AM-Übertragung.

Zum Abschluss der Stunde überlegen sich die Schüler/innen zusammen mit der Lehrperson die Anwendungsgebiete von FM. Zum Beispiel als Radiosender im UKW Bereich, Verwendung findet diese Übertragungsart auch bei drahtlosen Mikrofonen und das Tonsignal beim Fernsehen wird mittels FM übertragen.

4 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Beispiele für fächerübergreifenden Unterricht der Lehrgegenstände Mathematik und Physik anhand der trigonometrischen Funktion Sinus.

Der erste Teil der Arbeit gibt in kurzer Form Auskunft über den Bezug der folgenden Unterrichtsstunden zum Lehrplan der sechsten und siebten Klasse AHS.

Darauf folgt das große Kapitel der Unterrichtsstunden. Der Abschnitt „harmonische Schwingungen“ besteht aus einer Physikstunde, in der der Begriff harmonische Schwingung definiert und mit Beispielen ausgestaltet wird. Danach folgt das Unterkapitel „Winkelfunktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ “, in welchem sich eine Mathematikstunde zur Einführung dieser Funktionen befindet. Dann werden im Abschnitt „Die allgemeine Sinusfunktion“ in zwei Mathematikeinheiten die Eigenschaften und Graphen dieser Funktionen mit Hilfe des Computerprogramms Derive erarbeitet.

Nun folgt das größte Kapitel über „Überlagerung von Schwingungen“. Zuerst wird die „Überlagerung von Sinusfunktionen gleicher Frequenz“ thematisiert. Hier folgt als erste Stunde eine Physikeinheit, in der Drehstrom als Anwendung der Überlagerung von Schwingungen besprochen wird. Danach wird in einer Mathematikstunde die Überlagerung zweier Schwingungen mit Hilfe von Derive geübt. Die nächste Einheit findet im Physikunterricht statt und behandelt den Begriff harmonische Wellen, insbesondere deren Überlagerung und Interferenz. Gefolgt wird diese von einer Mathematikstunde, in welcher anhand eines Beispiels die Überlagerung zweier Wellen rechnerisch geübt wird. Um Beispiele für Überlagerung in Natur und Technik zu besprechen, werden in der nächsten beiden Physikstunden zuerst die Farben dünner Schichten und danach die Funktionsweise von Holographie Experimenten erklärt.

Das darauffolgende Unterkapitel behandelt die „Überlagerung von Sinusfunktionen fast gleicher Frequenz“. Dieses beinhaltet eine Physikstunde zum Thema Schwebung und eine Mathematikstunde, in welcher der mathematische Hintergrund zur Überlagerung zweier Schwingungen besprochen wird.

Zum Abschluss des Blocks der Überlagerung von Schwingungen folgt noch die „Überlagerung von mehreren Schwingungen“. Zuerst werden in einer Mathematikeinheit mit Hilfe von Derive mehrere Schwingungen zu einem Rechtecksignal überlagert und danach in einer Physikstunde der Begriff harmonische Analyse besprochen und anhand des Programms Audacious die Analyse des Tons einer

Stimmgabel und des Klangs von Violonensaiten analysiert.

Den Abschluss der Arbeit bildet das Teilkapitel „Multiplikation von Sinusfunktionen“. In einer Mathematikstunde wird die Formel für die Multiplikation zweier Sinusfunktionen anhand eines Beispiels geübt, damit in der nachfolgenden Physikstunde der Rundfunk von Mittelwellen mit Hilfe amplitudenmodulierter Signale besprochen werden kann. Dann wird in einer weiteren Physikeinheit der Bau eines Radioempfängers erklärt und als letzte Unterrichtsstunde wird in Physik die Frequenzmodulation besprochen.

5 Literaturverzeichnis

- [1] Götz, Reichel, Müller, Hanisch: *Mathematik Lehrbuch 5*
öbvethpt, Wien 2004
- [2] Sexl, Raab, Streeruwitz: *Physik 2*
öbvethpt, Wien 1999
- [3] Schärf: *Mathematik 2 für HTL und Fachschulen*
R. Oldenbourg Verlag Wien 1998
- [4] Tipler, Mosca: *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*
Elsevier GmbH, München 2004
- [5] [www.mathe-online.at/lernpfade/harmonische Schwingung](http://www.mathe-online.at/lernpfade/harmonische_Schwingung)
Zugriff am 15.6.2009
- [6] www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.xml
Zugriff am 27.6.2009
- [7] Ebel, Gurker, Mantler, Wernisch: *PHYSIK*
Skriptum zur Einführung in die Physik WS 2004/2005
- [8] Sexl, Raab, Streeruwitz: *Physik 3*
öbvethpt, Wien 1999
- [9] www.elektroniktutor.de/signale/am.html
Zugriff am 24.10.2009

Alle Bilder der vorliegenden Arbeit wurden von mir selbst erzeugt.

6 Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Magdalena Klima, geb. Stehlik

Staatsangehörigkeit: Österreich

Geburtsdatum: 30.07.1985

Wohnort: Laab im Walde/NÖ

Ausbildung:

1991-1995: Besuch der Volksschule

1995-2003: Besuch des Gymnasiums in Perchtoldsdorf

Matura mit Auszeichnung

2003-2010: Studium Lehramt Mathematik und Physik an der Universität Wien

Berufserfahrung:

Ab Wintersemester 2003 Nachhilfe in den Gegenständen Mathematik und Physik, seit April 2005 Betreuung der fünften bis achten Klasse AHS in der Lernstube, Wien Hietzing.