

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Quaternionen als verallgemeinerte Zahlen

verfasst von | submitted by

Laura Ladner BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 520 529 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Mathematik Unterrichtsfach Spanisch

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Günther Hörmann

Abstract

Die Quaternionen, eine Erweiterung der komplexen Zahlen, spielen eine zentrale Rolle in unterschiedlichen Bereichen der Mathematik und Physik. In dieser Arbeit erarbeiten wir anknüpfend an die Algebra der komplexen Zahlen die Algebra $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Wir betrachten dabei unter anderem die Algebra $\mathbb{H}$ als euklidischen Raum. Der zentrale Aspekt dieser Arbeit ist es, die Quaternionen als verallgemeinerte Zahlen einzuführen.

Darüber hinaus stellen wir uns in der Arbeit die Frage, ob es nach den komplexen Zahlen und den Quaternionen noch weiter geht.

Den Abschluss der Arbeit bildet ein Bezug zur Schulmathematik und zur Verwendung von GeoGebra in Kombination mit den Hamiltonschen Quaternionen.

Quaternions, an extension of the complex numbers, play a central role in various areas of mathematics and physics. In this work, we develop the algebra of quaternions based on the algebra of complex numbers. Among other things, we consider the algebra as a Euclidean space. The central aspect of this work is to introduce quaternions as generalized numbers.

In addition, we ask ourselves the question of whether there is more after the complex numbers and the quaternions.

The paper concludes with a reference to school mathematics and the use of GeoGebra in combination with Hamilton's quaternions.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Allgemeine algebraische Grundlagen	5
3	Quaternionen als verallgemeinerte Zahlen	8
3.1	Die Algebra $\mathbb{H}$	8
3.1.1	Der imaginäre Raum von $\mathbb{H}$	10
3.1.2	Die Matrixalgebra $\mathcal{H}$	11
3.1.3	Produkte von Quaternionen	13
3.1.4	Fundamentalsatz der Algebra $\mathbb{H}$	14
3.2	$\mathbb{H}$ als euklidischer Raum	14
3.2.1	Die Konjugierung und Linearform Re	15
3.2.2	Das Skalarprodukt und seine Eigenschaften	16
3.2.3	Der Vier-Quadrate Satz	17
3.2.4	Die Gruppe S^3 und die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$	17
3.2.5	Quaternionen und orthogonale Gruppen	19
4	Die bedeutenden Entdeckungen Frobenius'	21
4.1	Die Hamiltonschen Tripel in Alternativ-Algebren	21
4.2	Satz von Frobenius	22
5	Ein Einblick in die Anwendung von Quaternionen	24
5.1	Rotationen	24
5.2	Vor- und Nachteile von Quaternionen	26
6	Wie geht es weiter?	27
6.1	Cayleysche Oktonionen	27
6.2	Allgemeine Informationen	27
6.3	Die Algebra $\mathbb{O}$	27
6.4	Der Acht-Quadrate-Satz	29
6.5	Die Einzigartigkeit der Cayley-Algebra	29
7	Didaktische Überlegungen für den Unterricht	30
7.1	Vorschläge zur Umsetzung im Unterricht	30
7.2	Quaternionen und GeoGebra	31
7.2.1	Fazit zum GeoGebra Einsatz	34
8	Resümee	36
9	Literaturverzeichnis	38

1 Einleitung

Die komplexen Zahlen, bestehend aus einem Realteil und einem Imaginärteil, sind ein zentraler Teil der Mathematik, und dies sowohl in der Schule als auch im Studium. Folgend könnte man sich die Frage stellen, ob es darüber hinaus auch noch Zahlen gibt, die wir betrachten können. Diese Frage kann mit einem simplen „Ja“ beantwortet werden, denn die Hamiltonschen Quaternionen liefern uns die Antwort darauf.

Die sogenannten Quaternionen gehen auf den Mathematiker Sir William Rowan Hamilton zurück, weshalb diese auch als Hamiltonsche Quaternionen betitelt werden. Ziel war es, eine Erweiterung der komplexen Zahlen zu finden, um Raumrotationen im Dreidimensionalen darstellen zu können. Lange Zeit beschäftigte sich William Rowan Hamilton mit der Frage, eine Multiplikation für reelle Tripel zu finden, welche gute Eigenschaften besitzt. In einem Brief kurz vor seinem Tode verstärkt er aber nochmals, dass es nicht möglich ist, diese zu multiplizieren: *No, I can only add and subtract them.* Nach sehr viel Anstrengung gelang ihm sein Durchbruch in der vierten Dimension. Sein restliches Leben widmete er von da an der Erforschung seiner Quaternionen.

Die Zahlenmenge der Quaternionen lässt sich auf der Definition der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aufbauen. Eine Struktur der Form $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ schaffte Hamilton nicht einzuführen. Allerdings konnte er eine algebraische Struktur im $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ einführen - die **Quaternionen**.

Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einleitenden Aspekten wie der Definition eines Körpers und dessen Axiomen sowie der Definition des Schiefkörpers.

Danach wird der Schwerpunkt im darauffolgenden Kapitel auf die Quaternionen selbst und deren Eigenschaften gelegt. Zum Schluss werden noch einige Anmerkungen zu einer möglichen Anwendung im schulischen Kontext ausgearbeitet und die wichtigsten Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst.

2 Allgemeine algebraische Grundlagen

Im Folgenden sollen einleitend fundamentale Definitionen im Hinblick auf die Arbeit mit den Quaternionen gegeben werden.

Hinweis: Das folgende Kapitel basiert größtenteils auf den Texten von [4], [5] und [11], die sich sehr ähneln und in der folgenden Arbeit kombiniert werden.

Definition 2.1:

Ein Gruppoid $(K, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ bezeichnet man als Körper, falls ebenfalls nachfolgende Eigenschaften zutreffen. Diese Eigenschaften bezeichnen wir als Körperaxiome:

Grundgesetze der Addition:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1. $\forall a, b \in K : a + b = b + a,$ | (Kommutativgesetz) |
| 2. $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c),$ | (Assoziativgesetz) |
| 3. $\exists 0 \in K : \forall a \in K : a + 0 = a,$ | (Existenz des Nullelements) |
| 4. $\forall a \in K : \exists (-a) \in K : a + (-a) = 0,$ | (Existenz des inversen Elements) |

Grundgesetze der Multiplikation

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. $\forall a, b \in K : ab = ba,$ | (Kommutativgesetz) |
| 2. $\forall a, b, c \in K : (ab)c = a(bc),$ | (Assoziativgesetz) |
| 3. $\exists 1 \in K : 1 \neq 0 \wedge \forall a \in K \setminus \{0\} : a1 = a,$ | (Existenz des Einselements) |
| 4. $\forall a \in K \setminus \{0\} : \exists a^{-1} \in K : aa^{-1} = 1,$ | (Existenz des inversen Elements) |

Distributivgesetz:

$$\forall a, b, c \in K : a(b + c) = ab + ac$$

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind für das Verständnis der folgenden Kapitel nicht unwesentlich. Sie sind unser Ausgangspunkt, von welchem aus wir die komplexen Zahlen einführen, welche wiederum unsere Basis für die Einführung der Quaternionen bilden. Aus diesem Grund benötigen wir für diese Arbeit die folgenden Definitionen.

Definition 2.2:

Wir bezeichnen den Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und der zweistelligen Relation $\leq$ als die Menge der **reellen Zahlen**, wenn folgende Axiome erfüllt werden:

- (R1) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper
- (R2) $\leq$ ist eine lineare Anordnung auf dem Körper K , welche mit $+$ und $\cdot$ verträglich ist.
- (R3) jede nichtleere Menge $M \subset K$, die nach unten beschränkt ist, hat ein Infimum in K .

Definition 2.3:

Wenn $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement ist, dann bezeichnen wir die Menge der Einheiten von R mit $R^\times$, wobei $R^\times = \{a \in R \mid a \text{ besitzt ein (multiplikatives) Inverses in } R\}$.

Wir bezeichnen einen Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 als Schiefkörper, falls gilt:

$$R^\times = R \setminus \{0\}.$$

Bemerkung: Ein kommutativer Schiefkörper ist demnach ein Körper.

Durch Erweiterung der bereits definierten Zahlenmenge $\mathbb{R}$ lässt sich die Zahlenmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden.

Definition 2.4:

Sei $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gelte:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) + (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1),\end{aligned}$$

dann bildet $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen Körper, den wir als die komplexen Zahlen bezeichnen.

Für das Verständnis von Kapitel 3 sind vor allem die folgenden beiden Definitionen überaus wichtig. Diese sind fundamental für die Arbeit mit Quaternionen.

Definition: 2.5:

Sei $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$, dann bezeichnen wir mit i die **imaginäre Einheit**.

Bemerkung: hier gilt: $i^2 = -1$

Definition 2.6: Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Infolgedessen können wir z auch wie folgt anschreiben:

$$z = x + iy.$$

x wird dann als **Realteil** und y als **Imaginärteil** von z bezeichnet.

Weiters erklären wir den Begriff der konjugiert komplexen Zahl mit folgender Definition.

Definition 2.7:

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ist $\bar{z} = x - iy = 2\operatorname{Re} z - z$ die sogenannte *konjugiert komplexe Zahl*.

Betrachten wir in diesem Zusammenhang einen Satz, den Fundamentalsatz der Algebra. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir den Fundamentalsatz der Algebra der Quaternionen als

Vergleich ebenfalls näher betrachten. Die notwendige Literatur dazu finden wir in [5].

Satz 2.1: *Fundamentalsatz der Algebra*

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

Es gibt dazu keinen rein algebraischen Beweis (da der Körper $\mathbb{C}$ aus einer Erweiterung von $\mathbb{R}$ konstruiert wird), jedoch einen, der Mittel der Analysis zur Hilfe nimmt. Wie es in [5] erwähnt wird, so nimmt man die Theorie der sogenannten holomorphen Funktionen zur Hilfe:

Sei nun

$$f := X^n + a_{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X] \text{ mit } n \geq 1.$$

Wenn $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt, dass $f(z) \neq 0$ dann ist $\frac{1}{f}$ holomorph in $\mathbb{C}$. Um fortzufahren verwenden wir die folgende Eigenschaft:

$$\exists R > 0, R \in \mathbb{R} \text{ mit: } \frac{1}{2} |z|^n \leq |f(z)| \leq \frac{3}{2} |z|^n \text{ für } |z| \geq R.$$

Es gilt:

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{2}{R^n} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

$|\frac{1}{f}|$ ist beschränkt auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Es gilt also Folgendes:

$$\frac{1}{f} \text{ ist holomorph und } |\frac{1}{f}| \text{ ist beschränkt in } \mathbb{C}.$$

Nach dem sogenannten Satz von *Liouville* ist $\frac{1}{f}$ konstant. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass $\deg f \geq 1$.

Bemerkung: Der sogenannte Satz von Liouville lautet laut [6] wie folgt:

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

3 Quaternionen als verallgemeinerte Zahlen

Anknüpfend an die komplexen Zahlen, widmen wir uns im folgenden Abschnitt den Hamiltonschen Quaternionen. Dafür sind neben der imaginären Einheit i zwei weitere imaginäre Einheiten (j , k) notwendig.

Bemerkung: j und k sind so zu wählen, dass $1, i, j$ und k über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Im folgenden Abschnitt wird vor allem die Theorie aus [4], [8] und [11] verwendet.

3.1 Die Algebra $\mathbb{H}$

In den folgenden Zeilen wird der erste Zugang aus dem Werk [2] dargestellt.

Definition 3.1:

Wir bezeichnen $\alpha = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i + \alpha_3 \cdot j + \alpha_4 \cdot k = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ als *Quaternion* und $\mathbb{H}$ als die Menge der *Hamiltonschen Quaternionen*.

Bemerkung:

Die Addition von zwei Quaternionen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ kann wie folgt konstruiert werden:

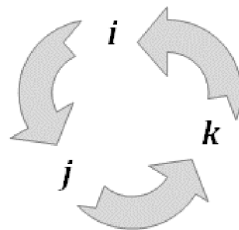
$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)i + (\alpha_3 + \beta_3)j + (\alpha_4 + \beta_4)k \text{ (assoziativ und kommutativ).}$$

Definition 3.2:

Die Multiplikation von zwei Quaternionen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ und $\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ wird definiert durch:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta := & (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3 - \alpha_4 \beta_4) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3)i \\ & + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_2 \beta_4 + \alpha_3 \beta_1 + \alpha_4 \beta_2)j + (\alpha_1 \beta_4 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_1)k. \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung aus [2] soll die Beziehung der imaginären Einheiten zueinander veranschaulichen, die sich aus obiger Multiplikation für die Spezialfälle $\alpha = i, \beta = j$, usw. ergibt:



In Anlehnung an die Definitionen des Körpers $\mathbb{C}$ sprechen wir auch beim Körper $\mathbb{H}$ von einem zweidimensionalen komplexen Vektorraum, wenn man eine Quaternion

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \in \mathbb{H}$ in der Form $\alpha = z + wj$ mit $z := \alpha_1 + \alpha_2 i$ und $w := \alpha_3 + \alpha_4 i \in \mathbb{C}$ schreibt.

Die Quaternionen erweitern die komplexen Zahlen auf eine vierdimensionale Struktur. Um mit ihnen sinnvoll arbeiten zu können, benötigen wir einige grundlegende Begriffe. Zunächst betrachten wir den Real- und Imaginärteil einer Quaternion.

Definition 3.3:

Sei $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \in \mathbb{H}$. Die reelle Zahl α_1 in der Darstellung von α nennt man den Realteil von α . Diesen bezeichnen wir mit $\text{Re}(\alpha)$. Als Imaginärteil von α bezeichnet man das geordnete Tripel reeller Zahlen $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ und dieses wird mit $\text{Im}(\alpha)$ bezeichnet.

Die nun folgende Definition schafft eine direkte Analogie zum imaginären Raum der komplexen Zahlen. Der Unterschied besteht nur darin, dass wir es nun mit drei voneinander unabhängigen Imaginäreinheiten (i, j, k) zu tun haben.

Definition 3.4:

Wir nennen die Menge aller Quaternionen mit trivialem Realteil

$\text{Im}(\mathbb{H}) := \{\alpha_2 \cdot i + \alpha_3 \cdot j + \alpha_4 \cdot k \mid \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{H}$ den Imaginärraum von $\mathbb{H}$.

Ebenfalls in Analogie zu den komplexen Zahlen, definieren wir im Folgenden die Konjugation und das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{H}$.

Definition 3.5:

Das zu $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \in \mathbb{H}$ konjugierte Quaternion $\bar{\alpha}$ definieren wir durch

$$\bar{\alpha} := \alpha_1 - \alpha_2 i - \alpha_3 j - \alpha_4 k.$$

Definition 3.6:

Wir definieren das euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \text{Re}(\alpha \cdot \bar{\beta}) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_4 \beta_4, \text{ wobei}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k, \beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k. \text{ Der Betrag } |\alpha| \text{ von } \alpha \text{ ist gegeben durch}$$

$$|\alpha| := \sqrt{\text{Re } \alpha \cdot \bar{\alpha}} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}.$$

Auf den folgenden Seiten soll nun als Vergleich ein anderer Zugang aus [4] dargestellt werden. Wir widmen uns dem Thema der Quaternionen aus verschiedenen Literaturen, um Unterschiede und Gemeinsamkeiten sichtbar zu machen und, vor allem, um die Quaternionen Schritt für Schritt besser zu verstehen.

Definition: 3.7

Wir verwenden im $\mathbb{R}^4$ der geordneten reellen Quadrupel die folgende Standardbasis:

$$e_1 := (1, 0, 0, 0), e_2 := (0, 1, 0, 0), e_3 := (0, 0, 1, 0), e_4 := (0, 0, 0, 1).$$

Dazu wird nun die sogenannte Hamiltonsche Multiplikation eingeführt. Sei e_1 das Einselement. Wir definieren die Multiplikationstabelle wie folgt (Hamiltonsche Bedingungen):

	e_2	e_3	e_4
e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	$-e_4$	$-e_1$	e_2
e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Bemerkung:

Diese Algebra, die hier konstruiert wird, bezeichnen wir ebenfalls als Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ und ihre Elemente als *Quaternionen*. Wir sehen übrigens, dass die Quaternionenalgebra nicht kommutativ ist, da $e_2 e_3 \neq e_3 e_2$ gilt. Dennoch ist die Algebra assoziativ und nur eine andere Notation für jene aus Definition 3.1, wenn wir $e := e_1, i := e_2, j := e_3$ und $k := e_4$ schreiben. Entsprechend folgt daraus:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -e, ij = -ji = k.$$

Alle weiteren Produkte erhalten wir aus der sogenannten Produktformel mittels der Darstellung $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \delta e_4$ im $\mathbb{R}^4$:

Die Produktformel lautet dann nämlich

$$\begin{aligned} & (\alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k) \cdot (\alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \delta' k) \\ &= (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta')e + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' + \delta\gamma')i \\ & \quad + (\alpha\gamma' - \beta\delta' + \gamma\alpha' + \delta\beta')j + (\alpha\delta' + \beta\gamma' - \gamma\beta' + \delta\alpha')k. \end{aligned}$$

und entspricht somit genau jener in Definition 3.2.

3.1.1 Der imaginäre Raum von $\mathbb{H}$

Um den imaginären Raum der Menge $\mathbb{H}$ genauer zu studieren, orientieren wir uns weiterhin an [4] und verwenden die Standardbasis e, i, j, k .

Der *Imaginärraum* von $\mathbb{H}$ ist also der dreidimensionale Untervektorraum $\text{Im } \mathbb{H} := \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ von $\mathbb{H}$. Die Elemente dieses Raumes bezeichnen wir als rein-imaginär. Es gilt $\mathbb{H} = \mathbb{R}e \oplus \text{Im } \mathbb{H}$ als direkte Summe von Vektorräumen.

Bemerkung: Die Gerade $\mathbb{R}e$ ist durch das Einselement e basisunabhängig definiert, weil das Einselement rein algebraisch eindeutig ist.

Damit auch $\text{Im } \mathbb{H}$ invariant definiert ist, betrachten wir dazu die Quaternion $x = \alpha e + \beta i + \gamma j + \delta k$. Diese Quaternion genügt ebenfalls der quadratischen Gleichung $x^2 = 2\alpha x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e$. Es gilt $x \in \text{Im } \mathbb{H}$, wenn $\alpha = 0$ ist. Daraus erhalten wir die folgende basisfreie Darstellung:

$$\text{Im } \mathbb{H} = \{ x \in \mathbb{H} : x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\} \}$$

Bemerkung: $\text{Im } \mathbb{H}$ ist keine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra der Menge $\mathbb{H}$.

Satz 3.1:

Es gilt $u^2 = -w e$ mit $w \geq 0$ und $uv + vu \in \mathbb{R}e$ für rein-imaginäre Quaternionen u und v .

Beweis:

Für $u = \beta i + \gamma j + \delta k$ gilt Folgendes:

$$u^2 = -(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)e \text{ mit } \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \geq 0.$$

Wegen $u, v, u + v \in \text{Im } \mathbb{H}$ folgt daraus $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2 \in \mathbb{R}e$.

Aufgrund der direkten Summe von Vektorräumen, die vorher behandelt wurde, können wir jede Quaternion x eindeutig wie folgt anschreiben:

$$x = \alpha e + u \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } u \in \text{Im } \mathbb{H}.$$

Hier ist αe der Realteil (skalare Anteil) beziehungsweise u der Imaginärteil (vektorielle Anteil) von x (vgl. Definitionen 3.3 und 3.4).

3.1.2 Die Matrixalgebra $\mathcal{H}$

Im Folgenden betrachten wir nun die Darstellung von Quaternionen mittels Matrizen.

Die Menge $\mathcal{C}$ aller reellen 2×2 Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von

$\text{Mat}(2, \mathbb{R})$. Die Abbildung $\alpha + \beta i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist dabei ein Isomorphismus der $\mathbb{R}$ -Algebren $\mathbb{C}$ und $\mathcal{C}$.

Satz 3.2: Die Menge $\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$ ist eine $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ mit dem

Einselement $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und wird als Hamiltonsche Algebra bezeichnet. Es gilt:

$$A^2 - (\text{Spur } A)A + (\det A)E = 0 \text{ mit } \text{Spur } A = 2 \text{ Re } w, \det A = |w|^2 + |z|^2.$$

Die Hamiltonsche Algebra ist eine assoziative Divisionsalgebra.

Bemerkung:

Die zweite Aussage ist der sogenannte Satz von Cayley.

In diesem Zusammenhang definieren wir zuerst den Begriff Divisionsalgebra.

Definition 3.8:

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt Divisionsalgebra, wenn für jedes $a \in V$, $a \neq 0$, die beiden Gleichungen $ax = b$ und $ya = b$ für alle $b \in V$ eindeutig in $\mathcal{A}$ lösbar sind.

Nun können wir im nächsten Schritt zumindest eine Beweisskizze für den Satz 3.2 geben (mehr Details können ebenfalls in [3] nachgelesen werden).

Beweisskizze:

Schnell kann durch direktes Nachrechnen gezeigt werden, dass $\mathcal{H}$ ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ ist, welcher abgeschlossen bzgl. der Matrizenmultiplikation ist. Als Nächstes können wir sagen, dass die Algebra $\mathcal{H}$ assoziativ ist, da auch $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ assoziativ ist.

Wir sehen auch $\text{Spur } A = w + \bar{w} = 2\text{Re}w$ sowie $\det \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = w \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot z = |w|^2 + |z|^2$.

Nun benötigen wir ein Kriterium aus [4], das wie folgt lautet:

Folgende Aussagen über eine endlich-dimensionale Algebra A sind äquivalent:

1. A ist eine Divisionsalgebra.
2. A ist nullteilerfrei.

Durch Beachtung dieses Kriteriums können wir nun einsehen, dass $\mathcal{H}$ eine Divisionsalgebra ist. Seien $A, B \in \mathcal{H}$ und $AB = 0$. Daraus folgt, dass $\det A \cdot \det B = 0$ gilt. Also gilt jedenfalls $\det A = 0$ oder $\det B = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\det A = 0$. Wegen $A \in \mathcal{H}$ ist

$A = \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}$ mit $w, z \in \mathbb{C}$, somit $0 = |w|^2 + |z|^2$, also $w = z = 0$, daher $A = 0$. Aus diesen Zeilen folgt nun die Behauptung.

Um zu zeigen, dass die Algebra $\mathbb{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra ist, benötigen wir vorerst den folgenden Satz.

Lemma 3.1:

Ist A eine assoziative Divisionsalgebra, so ist $G := A \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation in A eine Gruppe. Das neutrale Element von G entspricht dem Einselement von A .

E wurde bereits definiert. Sei $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ und $K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt nun, dass $\mathcal{H} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet. Man kann sehen, dass die Menge $\{E, -E, I, -I, J, -J, K, -K\}$ eine nicht-kommutative Untergruppe in $\mathcal{H}$ bildet. Alle Elemente der genannten Menge ohne $\pm E$ besitzen die Ordnung 4.

Bemerkung: Diese Gruppe wird in der Literatur als (endliche) Quaternionengruppe bezeichnet.

Satz 3.3:

Sei $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$ und $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma - \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix}$. Diese Abbildung ist ein $\mathbb{R}$ -Algebra-Isomorphismus. Für diese gilt Folgendes:

$$\begin{aligned} F(e_1) &= E, \\ F(e_2) &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I, \\ F(e_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} = J, \\ F(e_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = K. \end{aligned}$$

Beweisskizze:

F ist eine $\mathbb{R}$ -lineare und bijektive Abbildung. Nun bleibt zu zeigen, dass $F(e_\mu)F(e_\nu) = F(e_\mu e_\nu)$ für $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ (siehe [2]). Da die Matrizen E, I, J, K die F -Bilder von e_1, e_2, e_3, e_4 und diese denselben Multiplikationsregeln folgen, ist dies ersichtlich.

Es gelten $I^2 = J^2 = -E, IJ = -JI = K$. Mittels des Assoziativgesetzes erhält man zum Beispiel $K^2 = (IJ) = (-JI) = -IJ^2I = I^2 = -E$.

Da $\mathcal{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra ist, trifft das folgende Lemma aus [4] zu.

Wir bezeichnen die nicht-kommutative Gruppe als Quaternionengruppe. Da laut Lemma 3.1 folgt, dass $\mathcal{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra ist, folgt mit Satz 3.3, dass auch die Hamiltonsche Algebra $\mathbb{H}$ eine assoziative Divisionsalgebra ist.

3.1.3 Produkte von Quaternionen

Im Folgenden betrachten wir das Quaternionenprodukt, das Vektorprodukt und das Skalarprodukt etwas näher. Seien $u = \beta i + \gamma j + \delta k$ und $v = \rho i + \sigma j + \tau k$. Dazu betrachten wir die Produktformel von S. 7, Definition 3.8.

Nach der Produktformel gilt: $uv = -(\beta\rho + \gamma\sigma + \delta\tau)e + (\gamma\tau - \delta\sigma)i + (\delta\rho - \beta\tau)j + (\beta\sigma - \gamma\rho)k$.

Lassen wir das Vorzeichen außen vor, so handelt es sich beim skalaren Teil um das kanonische euklidische Skalarprodukt und beim vektoriellen Teil von uv um das Vektorprodukt $u \times v$. Daraus erhalten wir folgende Darstellung: $uv = -\langle u, v \rangle e + u \times v$, wobei $u, v, u \times v \in \text{Im } \mathbb{H}$. (*)

Unter Verwendung dieser Aussage folgt nun direkt aus (*) :

$$u \times v = \frac{1}{2} (uv - vu) \text{ und } \langle u, v \rangle e = -\frac{1}{2} (uv + vu) \text{ für alle } u, v \in \text{Im } \mathbb{H}.$$

3.1.4 Fundamentalsatz der Algebra $\mathbb{H}$

Wir beschreiben nun den Fundamentalsatz der Algebra für Quaternionen aus [4]. Dort finden wir sowohl den Satz als auch eine mögliche Beweisführung.

Satz 3.4:

Sei p ein Polynom über $\mathbb{H}$ vom Grade $n > 0$ der Form $m + q$, wobei m ein Monom vom Grad n und q ein Polynom vom Grad $< n$ ist. Dann ist die Abbildung $p: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ surjektiv, speziell hat p Nullstellen in $\mathbb{H}$.

Bemerkung: Wir können den Beweis von $\mathbb{C}$ nicht auf $\mathbb{H}$ übertragen.

Hinweis: Die Beweisskizze zu diesem Satz kann in [4] nachgelesen werden.

Um nun auf den folgenden Seiten die Algebra $\mathbb{H}$ noch genauer zu untersuchen und weitere Eigenschaften zu entdecken, betrachten wir die genannte Algebra nun als euklidischen Vektorraum. Dabei werden grundlegende Konzepte wie beispielsweise das Skalarprodukt oder die Norm näher betrachtet. Abermals ist hier die Literatur aus [4] unsere Hauptquelle.

3.2 $\mathbb{H}$ als euklidischer Raum

Sei V ein reeller Vektorraum. Wir nennen eine Bilinearform $V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$, ein Skalarprodukt, wenn diese symmetrisch und positiv definit ist. Es gilt:

$$\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle \text{ (Symmetrie) und } \langle x, x \rangle > 0 \text{ für } x \neq 0 \text{ (positive Definitheit).}$$

Wir nennen V gemeinsam mit dem Skalarprodukt einen *Euklidischen Vektorraum*.

Definition 3.9:

Als (euklidische) Länge oder Norm von $x \in V$ bezeichnen wir die Zahl $|x| := +\sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$. Weiters heißen zwei Vektoren x und y orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.

In diesem Kontext versuchen wir ein Skalarprodukt für die Algebra $\mathbb{H}$ der Quaternionen zu finden, welches noch dazu gut mit der Multiplikation in $\mathbb{H}$ harmoniert.

Im Beispiel wissen wir, dass in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ $\langle w, z \rangle = \operatorname{Re}(w\bar{z})$ gerade das Standard-Skalarprodukt ergibt.

Im Laufe der folgenden Zeilen werden wir einsehen können, dass wir so etwas auch analog für die Menge $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ erhalten können.

Seien $x = \alpha e + \beta i + \gamma h + \delta k$ und $x' = \alpha' e + \beta' i + \gamma' j + \gamma' k$ zwei Quaternionen, dann können wir das folgende kanonische Skalarprodukt einführen (siehe auch Definition 3.6.):

$$\langle x, x' \rangle := \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \delta\delta' \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, dass e, i, j, k eine Orthonormalbasis von $\mathbb{H}$ bilden. Aufgrund des kanonischen Skalarproduktes wissen wir, dass die Länge $|x|$ von x durch

$$|x|^2 := \langle x, x \rangle = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \text{ gegeben ist.}$$

3.2.1 Die Konjugierung und Linearform Re

Nach Abschnitt 3.1.1 wissen wir, dass jede Quaternion als $x = \alpha e + u$ mit $u \in \text{Im } \mathbb{H}$ dargestellt werden kann. In Anlehnung an $\mathbb{C}$ betrachten wir nun die $\mathbb{R}$ -lineare Konjugation.

$$\mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}, x \mapsto \bar{x} := \alpha e - u.$$

Bemerkung: $\bar{\bar{x}} = x$

Infolgedessen gilt $\mathbb{R}e = \{x \in \mathbb{H} | \bar{x} = x\}$, $\text{Im } \mathbb{H} = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\}$, wobei die Gerade $\mathbb{R}e$ die Fixpunktmenge darstellt. Außerdem gilt die Längentreue

$$|\bar{x}| = |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{H}.$$

In diesem Kontext benötigt man auch die Multiplikationsregel, welche aus der Produktformel aus Definition 3.8 folgt:

$$\overline{xy} = \bar{y} \cdot \bar{x}.$$

Weiter wird die Realteilbildung in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ simuliert. Dazu führen wir eine $\mathbb{R}$ -Linearform ein, die wie folgt lautet: (vgl. auch Definition 3.3)

$$\text{Re}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \text{Re}(x) := \alpha, \text{ wenn } x = \alpha e + u, u \in \text{Im } \mathbb{H}.$$

Bemerkung: für Re gelten die Eigenschaften $\text{Re}(e) = 1$ und $\text{Kern Re} = \text{Im } \mathbb{H}$.

Nehmen wir nun Definition 3.5 zur Hand so ergibt sich

$$x + \bar{x} = 2\text{Re}(x)e \text{ und } \text{Re}(\bar{x}) = \text{Re}(x).$$

Weiter erhalten wir aus der quadratischen Gleichung der Definition 3.1.1 nun folgende Gleichung:

$$x^2 = 2\text{Re}(x)e - |x|^2 e.$$

Da $(x, y) \mapsto \text{Re}(xy) - \text{Re}(yx)$ bilinear ist gilt $\text{Re}(xy) = \text{Re}(yx)$, weil dies für e, i, j, k zutrifft.

3.2.2 Das Skalarprodukt und seine Eigenschaften

In Definition 3.6 haben wir bereits das Skalarprodukt mittels e, i, j, k von $\mathbb{H}$ definiert. Ebenfalls dazu gibt es eine Darstellung mittels der Konjugierung. Wir betrachten nun die sogenannte *Inversenregel*:

$$x\bar{x} = \bar{x}x = \langle x, x \rangle e \text{ und spezieller } x^{-1} = |x|^{-2}\bar{x} \text{ f\"ur } x \neq 0.$$

Anstatt die Variable x zu verwenden, nehmen wir nun $x + y$ und wir erhalten aus der Inversenregel durch Auflösen der Klammern den folgenden Ausdruck:

$$\langle x, y \rangle e = \frac{1}{2} (x\bar{y} + y\bar{x}).$$

Daraus können wir dann direkt das sogenannte *Orthogonalitätskriterium* ableiten:

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x\bar{y} = -y\bar{x} \Leftrightarrow x\bar{y} \in \text{Im}\mathbb{H}.$$

Eine weitere Ähnlichkeit zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ sehen wir anhand der Betrachtung des jeweiligen Skalarprodukts. In $\mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt durch $\text{Re}(w\bar{z})$ gegeben. Analog dazu gilt für $\mathbb{H}$ die Formel:

$$\langle x, y \rangle = \text{Re}(x\bar{y}) = \text{Re}(\bar{x}y) \text{ und spezieller } \langle x, e \rangle = \text{Re}(x).$$

Diese Formel kann man einfach aus der Produktformel aus Definition 3.2 ablesen.

Die folgende Produktregel ist von Bedeutung, weil sie eine besonders schöne Verträglichkeit der Norm mit der Multiplikation zeigt, die ähnlich zu jener von Betrag und Multiplikation für komplexe Zahlen ist.

Satz 3.5: Die sogenannte Produktformel lautet wie folgt:

$$|xy| = |x||y|.$$

Beweis:

Mit der Inversenregel, dem Wissen aus 3.1.3, dem Assoziativgesetz und weiterer zweimaliger Anwendung der Inversenregel folgt:

$$|xy|^2 e = \langle xy, xy \rangle e = (\bar{x}\bar{y})(xy) = \bar{y}(\bar{x}x)y = \langle x, x \rangle \bar{y}y = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle e = |x|^2 |y|^2 e.$$

3.2.3 Der Vier-Quadrate Satz

Hierfür verwenden wir die Literatur aus [4] und [9]. Aus der Produktregel von IH können wir den sogenannten Vier-Quadrate-Satz ableiten. Dieser wurde im 18. Jahrhundert von Euler entdeckt. Seine Bemühungen steckte er in einen vollständigen Beweis für den von Fermat ausgesprochenen Satz, dass *jede natürliche Zahl Summe von vier Quadraten natürlicher Zahlen ist*. Den ersten vollständigen Beweis fand aber Lagrange 1770, weshalb wir den Satz auch als Satz von Lagrange bezeichnen können.

Satz 3.6:

Jede natürliche Zahl n lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen darstellen.

Die Aussage kann wie folgt nachgewiesen werden:

Mit der Multiplikationsformel und der Produktregel folgt, dass für alle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \delta'^2) \\ &= (\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \delta\delta')^2 + (\alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\delta' - \delta\gamma')^2 \\ & \quad + (\alpha\gamma' + \gamma\alpha' + \delta\beta' - \beta\delta')^2 + (\alpha\delta' + \delta\alpha' + \beta\gamma' - \gamma\beta')^2. \end{aligned}$$

Dies ist der sogenannte Vier-Quadrate-Satz.

Euler reduzierte dadurch seinen Satz auf die Primzahlen: Sind nämlich zwei natürliche Zahlen jeweils als Summe von vier Quadraten darstellbar, dann gemäß Vier-Quadrate-Satz auch deren Produkt. Außerdem ist jede natürliche Zahl natürlich ein Produkt von Primzahlen.

Der gesamte Beweis des Satzes von Lagrange kann in weiterführender Literatur wie zum Beispiel Harald Scheid, Zahlentheorie . 3 Auflage, Spektrum Verlag 2003 [dort in Satz 15 Abschnitt IV, 5] nachgelesen werden.

3.2.4 Die Gruppe S^3 und die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$

Betrachten wir nun die Menge aller 2×2 Matrizen mit komplexen Einträgen, also den nicht-kommutativen Ring $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$. Aus [4] und [10] erhalten wir jene Informationen, welche für das folgende Unterkapitel fundamental sind.

Definition 3.10:

Als S^3 bezeichnen wir eine Gruppe $S^3 := \{\alpha \in \mathbb{H} \mid |\alpha| = 1\}$. Dabei handelt es sich um die Menge aller Quaternionen vom Betrag 1.

Sei nun die folgende Aussage aus [4] erwähnt:

Die Menge S^3 der Quaternionen der Länge 1 ist bezüglich der Multiplikation in der Zahlenmenge $\mathbb{H}$ eine Untergruppe der folgenden multiplikativen Gruppe:

$$\mathbb{H}^\times := (\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Wir führen hier auch noch den Begriff der speziellen unitären Gruppe ein.

Definition 3.11:

Wir definieren die unitäre Gruppe $U(2)$ als:

$$U(2) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A \cdot \overline{A}^t = E\}.$$

Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)(\mathbb{C})$ ist dann gegeben durch:

$$SU(2) := \{A \in U(2) \mid \det(A) = 1\}.$$

Es gilt $SU(2) \subseteq \mathcal{H}$, wie wir kurz zeigen: Zu allererst bemerken wir schnell, dass für eine beliebige

Matrix $A = \begin{pmatrix} w & -z \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ gilt, dass $A\overline{A}^T = \det(A) \cdot E$ ist.

Daraus folgt: $\{A \in \mathcal{H} : \det A = 1\} \subset SU(2)$. Weiters sei $B := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$.

Dann gilt $B \cdot \overline{B}^T = E$ und somit $B^{-1} = \overline{B}^T$. Andererseits gilt wegen $\det(B) = 1$ auch:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Infolgedessen muss $\delta = \overline{\alpha}$ und $\gamma = -\overline{\beta}$ sein, weshalb $B \in \mathcal{H}$ gelten muss. Insgesamt also $SU(2) = \{A \in \mathcal{H} \mid \det A = 1\} \subseteq \mathcal{H}$. Aus den vorhergehenden Zeilen ergibt sich recht mühelos der folgende Satz:

Satz 3.7: Isomorphiesatz.

Der Isomorphismus $F: \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}$ aus Satz 3.3 bildet die Gruppe S^3 aller Quaternionen mit Länge 1 isomorph auf die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ ab.

Beweis:

Es bleibt nur noch zu bemerken, dass $|w|^2 = \det F(w)$ gilt und daher $F(S^3) = \{A \in \mathcal{H} \mid \det A = 1\} = SU(2)$.

3.2.5 Quaternionen und orthogonale Gruppen

Hamilton versuchte viele Jahre eine algebraische Struktur zu finden, mit welcher man die euklidische Geometrie des $\mathbb{R}^3$ besser verstehen kann. Wir haben bereits in dieser Arbeit interessante Entdeckungen gemacht und zwar, dass die Struktur einer Divisionsalgebra im $\mathbb{R}^4$ realisiert werden kann. Ebenfalls haben wir uns mit den spannenden Zusammenhängen der Quaternionenmultiplikation und dem Skalarprodukt beschäftigt. Nun zeigt sich, dass man mit rein-imaginären Quaternionen aber auch Drehungen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ als Quaternionenmultiplikation elegant beschreiben kann. Wir beginnen nun mit einigen Definitionen.

Definition 3.12:

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Weiters sei $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ das Skalarprodukt und die Norm $x \mapsto |x|$. Folgend heißt eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ *orthogonal* falls gilt:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für } x, y \in V.$$

Die Menge aller orthogonalen linearen Abbildungen $f: V \rightarrow V$ bezeichnen wir als $O(V)$.

Bemerkung: Jede orthogonale lineare Abbildung ist längengetreu, d.h.: $|f(x)| = |x|$ für $x \in V$.

Weiter ist jede orthogonale Abbildung bijektiv und auch die Umkehrabbildung wieder orthogonal.

Für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ ist die Determinante definiert mittels der Determinante der zugehörigen Matrix A bezüglich einer Basis von V (und von dieser Wahl unabhängig). Ist f orthogonal, dann gilt $A^t = A^{-1}$ und daher $1 = \det(A^t A) = \det A^t \cdot \det A = (\det A)^2 = (\det f)^2$, daher $\det f = \pm 1$ für $f \in O(V)$.

Sei nun auch die folgende Definition angemerkt.

Definition 3.13:

Wir definieren eine Untergruppe der orthogonalen Abbildungen wie folgt:

$$SO(V) = O^+(V) := \{f \in O(V) : \det f = +1\}.$$

Bemerkung: $O^-(V) := \{ f \in O(V) : \det f = -1 \}$ ist die Nebenklasse der Spiegelungen.

Mit [4] erarbeiten wir nun auch den folgenden Satz:

Satz 3.8:

Der Erzeugungssatz für orthogonale Gruppen. $O(V)$ wird von ihren Spiegelungen erzeugt und die Abbildungen $f \in SO(V)$ sind Produkte aus einer geraden Anzahl k an Spiegelungen, wobei gilt:

$$k \leq \dim V.$$

Für die Gruppe $O(\mathbb{H})$ gilt nun der sogenannte Satz von Cayley, den wir unten als Satz 3.9 formulieren.

Wir betrachten dazu die Abbildungen $\mathbb{H} \mapsto \mathbb{H} \ x \mapsto axb$ und $x \mapsto a\bar{x}b$ mit $a, b \in \mathbb{S}^3$. Aufgrund der Produktformel gemäß Satz 3.5 sind diese Abbildungen orthogonal. Nun zeigt sich: Dies sind bereits alle orthogonalen Abbildungen in $\mathbb{H}$.

Wir bezeichnen die Abbildung $x \mapsto axa$ mit $a \in \mathbb{S}^3$ mit p_a und zitieren einen wichtigen Erzeugungssatz aus [4].

Satz 3.9:

Jede orthogonale Abbildung $f \in SO(\mathbb{H})$ ist ein Produkt aus höchstens vier Abbildungen $p_a, a \in \mathbb{S}^3$. Die Gruppe $O(\mathbb{H})$ wird von den Abbildungen $x \mapsto axa$ mit $a \in \mathbb{S}^3$ und der Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ erzeugt. Aus diesem Satz folgt nun der Satz von Caley, dessen Formulierung so lautet:

Satz 3.10:

Sei $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ eine orthogonale Abbildung. Zu einer jeden solchen Abbildung gibt es zwei Quaternionen $a, b \in \mathbb{S}^3$ mit der Eigenschaft:

$$(1) f(x) = axb, \text{ falls } f \in O^+(\mathbb{H}) \text{ bzw. } (2) f(x) = a\bar{x}b, \text{ falls } f \in O^-(\mathbb{H}).$$

Beweis:

(1) Es gilt für $f \in O^+(\mathbb{H})$, dass $f = p_{a_1} \circ \dots \circ p_{a_4}$ mit $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{S}^3$. Setzt man nun $a := a_1 a_2 a_3 a_4$ und $b := a_4 a_3 a_2 a_1$, dann folgt $a, b \in \mathbb{S}^3$ und weiters $f(x) = axb$.

(2) Sei $f \in O^-(\mathbb{H})$ und dafür gilt $f \circ s_e \in O^+(\mathbb{H})$ mit $s_e(x) := -\bar{x}$. Es folgt $f(-\bar{x}) = f \circ s_e(x) = cxb$ mit $b, c \in \mathbb{S}^3$ nach (1). Nun sehen wir $f(x) = a\bar{x}b$ wobei $a := -c$ ist.

4 Die bedeutenden Entdeckungen Frobenius'

In Anknüpfung an die zuvor verfassten Seiten, beschäftigen wir uns nun kurz mit der Existenz von nullteilerfreien $\mathbb{R}$ -Algebren. Im 19. Jahrhundert glaubte man, nach Erfindung der Quaternionen und Oktonionen, noch weitere Algebren dieser Art erfinden zu können. Dass dies nicht der Fall ist, war relativ schnell klar. Einem bedeutenden Mathematiker namens Frobenius gelang es erstmals einen Satz für die Einzigartigkeit der $\mathbb{R}$ -Algebren finden. Er zeigte, was vielen zuvor nicht gelang, und zwar, dass es nur drei reelle endlich-dimensionale und assoziative Divisionsalgebren gibt (abgesehen von Isomorphie). Diese nennen sich: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Man kann also sagen, hätte Hamilton den Satz von Frobenius schon gekannt, hätte er sich viele Jahre der Suche nach dreidimensionalen assoziativen Divisionsalgebren gespart.

Aufgrund der Bedeutsamkeit dieses Satzes, soll dieser nun im Folgenden genauer diskutiert werden. Dazu verwenden wir [4].

4.1 Die Hamiltonschen Tripel in Alternativ-Algebren

Da das Multiplikationsverhalten der Basisquaternionen i, j, k essentiell für die allgemeine Theorie von Algebren von Bedeutung ist, soll die Wichtigkeit durch eine Definition aus [4] besonders hervorgehoben werden.

Definition 4.1: Die Elemente u, v, w einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement e nennt man *Hamiltonsches Tripel*, wenn die folgenden neun Bedingungen gelten:

$$u^2 = v^2 = w^2 = -e, w = uv = -vu, u = vw = -wv, v = wu = -uw.$$

Diese bezeichnen wir als Hamilton-Bedingungen.

Um einen Satz für die Existenz dieser Tripel anzusteuern, benötigen wir zuerst folgenden Begriff. Wir betonen hierzu vorab noch, dass wir in diesem Kapitel wie in [4] Algebren allgemein nicht als assoziativ voraussetzen wollen.

Definition 4.2:

Eine $\mathbb{R}$ -Algebra $\mathcal{A}$ heißt *alternativ*, falls für alle $v, w \in V$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$v(vw) = v^2w \text{ und } (vw)w = vw^2$$

Insbesondere sind assoziative Algebren immer alternativ.

Definition 4.3:

Wir definieren $\text{Im } \mathcal{A} := \{x \in \mathcal{A} \mid x^2 \in \mathbb{R}e \text{ und } x \notin \mathbb{R}e \setminus \{0\}\}$.

Wichtig in diesem Zusammenhang ist es ebenfalls, auf die Existenz der Hamiltonschen Tripel hinzuweisen. Dies gelingt uns mit dem folgenden Satz.

Satz 4.1:

Sei $\mathcal{A}$ eine alternative, nullteilerfreie Algebra mit dem Einselement e und es sei U ein zweidimensionaler Untervektorraum von $\text{Im}\mathcal{A}$. Daher gibt es zu jedem Element $u \in U$ mit $u^2 = -e$ ein $v \in U$, sodass u, v, uv ein Hamiltonsches Tripel bilden.

Beweisskizze:

In [4] Kapitel 8, §1, wird gezeigt:

Es existiert ein $v \in U$ mit $v^2 = -e$ und $uv = -vu$. Nun ist $\mathcal{A}$ alternativ und daher sind für $u, v, w := uv$ die Hamiltonschen Bedingungen erfüllt. Zum Beispiel folgt zunächst:

$uw = v(uv) = -v(vu) = -v^2u = u$ und $wv = (uv)v = uv^2 = -u$. So zeigt man auch

$wu = v = -uw$. Folgend bleibt nur noch zu zeigen, dass $w^2 = -e$ gilt. Wegen

$uw^2 = (uw)w = uw = -u$ folgt $v(w^2 + e) = 0$ und daher weiter $w^2 = -e$ aufgrund der Nullteilerfreiheit.

4.2 Satz von Frobenius

Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass außer den reellen Zahlen, den imaginären Zahlen und den Quaternionen keine anderen komplexen Zahlen in dem oben definierten Sinne existieren. (G. Frobenius 1877)

Aufbauend auf den bisherigen Konzepten und Methoden lässt sich der Satz von Frobenius ableiten, weshalb wir diesem ein eigenes Unterkapitel widmen werden.

Damit wir den vorhin erwähnten und bewiesenen Satz zur Existenz der Hamiltonschen Tripel anwenden können, benötigen wir einen zweidimensionalen Untervektorraum des Imaginärtraumes $\text{Im}\mathcal{A}$.

Zunächst führen wir eine grundlegende Definition ein und formulieren einige wichtige Lemmata.

Das sogenannte *Unabhängigkeitslemma* lautet wie folgt:

Lemma 4.1:

Sind $u, v \in \text{Im}\mathcal{H}$ linear unabhängig, dann sind es auch e, u und v .

Dieses Lemma ist für die weitere Arbeit fundamental.

Beweisskizze:

Würde das Unabhängigkeitslemma nicht gelten, dann könnte man die Annahme aufstellen, dass $v = \alpha e + \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Mit 3.2.1 würden wir eine Darstellung $2\alpha\beta u = v^2 - \alpha^2 e - \beta^2 u^2 \mathbb{R}e$ erhalten. Also gilt $\alpha\beta = 0$. Da aber wegen der linearen Unabhängigkeit von u und v weder $\alpha = 0$ noch $\beta = 0$ sein kann, erhalten wir einen Widerspruch zur Aussage.

Definition 4.3:

Eine Algebra heißt *quadratisch*, wenn für jedes $x \in \mathcal{A}$ eine Gleichung der Form $x^2 = \alpha e + \beta x$ mit geeignetem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besteht.

Bemerkung: Jede endlich-dimensionale, alternative Algebra ist quadratisch.

Lemma von Frobenius.

Lemma 4.2:

Wenn $\mathcal{A}$ eine quadratische Algebra ist, dann ist $\text{Im}\mathcal{A}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{A}$ und es folgt:
 $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus \text{Im}\mathcal{A}$.

Beweisskizze:

Zuerst zeigen wir, dass $u, v \in \text{Im}\mathcal{A}$ stets $u + v \in \text{Im}\mathcal{A}$ impliziert. Wenn u und v linear abhängig sind (zum Beispiel $v = \alpha u$), dann ist $u + w = (1 + \alpha)u \in \text{Im}\mathcal{A}$ trivial. Seien also u und v linear unabhängig dann ist $\mathcal{A}$ quadratisch und deshalb gibt es Gleichungen

$$(u + w)^2 = \alpha_1 e + \beta_1(u + w); (u - v)^2 = \alpha_2 e + \beta_2(u - v) \text{ mit } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Nach Ausmultiplizieren und Addieren der Gleichungen erhalten wir:

$$(\beta_1 + \beta_2)u + (\beta_1 - \beta_2)v = 2u^2 + 2v^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)e \in \mathbb{R}e \text{ (da } u, v \in \text{Im}\mathcal{A}).$$

Weiter fahren wir mit dem Unabhängigkeitslemma 4.1 fort, aus welchem folgt, dass

$\beta_1 + \beta_2 = \beta_1 - \beta_2 = 0$ gilt. Also gilt auch $\beta_1 = \beta_2 = 0$, folglich nun $(u + v)^2 = \alpha_1 e \in \mathbb{R}e$. Aus dem Unabhängigkeitslemma folgt nun: $u + v \notin \mathbb{R}e$, also $u + v \in \text{Im}\mathcal{A}$.

Sei weiter $x \in \mathcal{A}$ und $x \notin \mathbb{R}e$ beliebig. Nun gilt $x^2 = \alpha e + 2\beta x$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Daraus erhalten wir $(x - \beta e)^2 = x^2 - 2\beta x = \beta^2 e = (\alpha + \beta + \beta^2 e) = (\alpha + \beta^2)e$. Es resultiert $x = \beta e + u$ mit $u := x - \beta e \in \text{Im}\mathcal{A}$, weil $x - \beta e \notin \mathbb{R}e$ gilt. Damit haben wir nun bewiesen, dass $\mathcal{A} = \mathbb{R}e + \text{Im}\mathcal{A}$ gilt. Aus der Tatsache, dass der Durchschnitt aus $\mathbb{R}e$ und $\text{Im}\mathcal{A}$ $\{0\}$ gilt, folgt nun $\mathcal{A} = \mathbb{R}e \oplus \text{Im}\mathcal{A}$.

Entlang dieses Weges könnten wir zu dem bedeutenden Satz von Frobenius gelangen. Wir überspringen weitere Details. Der Beweis dazu kann in [4] nachgelesen werden.

Satz 4.2:

Sei die Algebra $\mathcal{A} \neq 0$ eine nullteilerfreie, assoziative und quadratische Algebra. Dann können wir die folgenden drei möglichen Fälle unterscheiden:

- (1) Die Algebra $\mathcal{A}$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen)
- (2) Die Algebra $\mathcal{A}$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{C}$ (Körper der komplexen Zahlen)
- (3) Die Algebra $\mathcal{A}$ ist isomorph zum Körper $\mathbb{H}$ (Schiefkörper der Quaternionen)

5 Ein Einblick in die Anwendung von Quaternionen

Um nun etwas mehr auf den Einsatz der Hamiltonschen Quaternionen in der Mathematik einzugehen, widmen wir uns in diesem Kapitel der Rotation und dem dabei wichtigen Einsatz von Quaternionen. Die Literatur, die wir dazu benötigen, entnehmen wir aus [2] und [9]. Es sei erwähnt, dass es zwei unterschiedliche Möglichkeiten zur Darstellung der Rotationen gibt.

5.1 Rotationen

Ausgehend vom Satz von Euler gibt es zum einen die Möglichkeit die Rotation mit Eulerwinkeln zu beschreiben. Diese wird in der Literatur sehr häufig verwendet. Ursprünglich entwickelte er diese, um Differentialgleichungen zu lösen. Erst später wurden sie am Häufigsten für die Parametrisierung von Raumorientierungen verwendet. Zum anderen können wir auch die Quaternionen einsetzen, die ebenfalls auf dem Satz von Euler beruhen.

Definition 5.1:

Ein Quaternion ohne Realteil der Form $\alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ nennt man *Vektorquaternion*.

Satz 5.1:

Ist $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ ein Einheitsquaternion und v ein Vektorquaternion, so beschreibt die Abbildung

$$v \mapsto \alpha \cdot v \bar{\alpha}$$

eine Drehung um die durch $\alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ festgelegte Achse $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$.

Eine zugehörige 3×3 Rotationsmatrix würde dann wie folgt konstruiert werden:

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_4^2 & -2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 & 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4 \\ 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 & -2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_4 \\ -2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4 & 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3\alpha_4 & \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \alpha_4^2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist noch wichtig, die Frage nach dem Drehwinkel zu beantworten. Dazu benötigen wir einige Überlegungen aus [8]. Die Quaternion $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$, die die Drehung beschreibt, zerfällt funktionell in zwei einzelne Bestandteile. Diese teilt sich also in den Realteil α und den Vektorteil $\alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$. Sei also $r = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ ein normierter Vektor, welcher die Drehachse festlegt. Daraus folgt, dass $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$ gelte. Infolgedessen haben alle Einheitsquaternionen, welche zu dieser Drehachse gehören die folgende Form:

$$\alpha_{\beta, r} = \cos(\beta) + \sin(\beta)(\alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k).$$

Inbesondere ist der Realteil $\cos(\beta)$.

Als zweites sei angemerkt, dass die Eigenwerte einer Drehmatrix (3×3) entlang der Drehachse gleich 1 sind. Aus der Tatsache, dass die Summe der Eigenwerte äquivalent zur Spur der Matrix sind, folgt laut [9], dass für eine Rotationsmatrix R gilt:

$$(1) \text{spur}(R) = 1 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 1 + 2\text{Re}(e^{i\varphi}) = 1 + 2\cos(\varphi).$$

Die Spur der oben dargestellten Rotationsmatrix R könnte auch durch Summation der Diagonalelemente abgelesen werden. Unter Verwendung der Relation $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ folgt in Verbindung mit der Summation folgt:

$$(2) \text{spur}(R) = 4a^2 - 1.$$

Kombiniert man nun beide Aussagen (1) und (2) so kommt man laut [9] auf die folgende Gleichung :

$$\cos(\varphi) = 2a^2 - 1.$$

Für die dritte Überlegung setzen wir das Additionstheorem für den Cosinus voraus:

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Mit $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ erhalten wir nochmals laut [9]:

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1.$$

Kombiniert man anschließend diese drei diskutierten Aussagen können wir eine Drehung um die Achse $r = (b, c, d)^T$ durch die Quaternion $p_{\alpha,r} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)(bi + cj + dk)$ erstellen.

Es gelte nun $a = \cos(\alpha)$ und für einen Drehwinkel φ folgt:

$$\cos(\varphi) = 2a^2 - 1 = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = \cos(2\alpha).$$

Daraus folgt nun ein weiterer Satz. Dieser lautet wie folgt:

Satz 5.2:

Sei ein normierter Vektor gegeben durch $r = (b, c, d)^T$. Weiter sei $p_{\alpha,r} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)(bi + cj + dk)$. $v \mapsto pv\bar{p}$ stellt eine Drehung um die r -Achse mit einem Winkel 2α dar.

Wir können also jede Drehung im $\mathbb{R}^3$ mithilfe einer entsprechenden Quaternion ausdrücken.

Bemerkung: Die Verknüpfung mehrerer Drehungen entspricht folgend der Quaternionenmultiplikation.

Um nun kurz theoretische Grundlagen zur Anwendung von Quaternionen zu diskutieren, werden im nun folgenden Unterkapitel die Vor- und Nachteile ihrer Verwendung diskutiert. Diese Aspekte sind für das Verständnis von Quaternionen keineswegs uninteressant.

5.2 Vor- und Nachteile von Quaternionen

In diesem Abschnitt werfen wir nun, wie bereits angekündigt, einen genaueren Blick auf die Vor- und Nachteile der Arbeit mit Quaternionen. Als Grundlage dient uns dabei die Literaturquelle [2].

Zwar sind Quaternionen ein mächtiges Werkzeug zur Darstellung von Rotationen im dreidimensionalen Raum, doch sie sind nicht die einzige Möglichkeit. Auch die Euler-Winkel stellen eine etablierte Methode dar. Genau das liefert uns den idealen Anlass, die Stärken und Schwächen der Quaternionen kurz hervorzuheben.

Ein klarer Vorteil der Quaternionen liegt in ihrer eindeutigen geometrischen Interpretation: Sie beschreiben eine Rotation durch einen Winkel um eine bestimmte Achse – kompakt, anschaulich und effektiv. Im Gegensatz zu Euler-Winkeln sind sie zudem unabhängig vom Koordinatensystem, was bedeutet, dass man sich nicht um Achsenreihenfolgen oder andere Konventionen kümmern muss.

Auch ihre praktische Handhabung überzeugt: Quaternionen lassen sich einfach miteinander kombinieren. Durch Multiplikation der beteiligten Quaternionen ergibt sich nämlich schnell die gesuchte Gesamtroation. Das macht sie nicht nur eleganter, sondern auch kompakter als die Arbeit mit Euler-Winkeln.

Allerdings gibt es auch Einschränkungen: Quaternionen kommen ausschließlich bei Rotationen zum Einsatz. Für andere Transformationen, wie beispielsweise Translationen, sind Matrizen nach wie vor die bessere Wahl. Hinzu kommt ein weiterer Nachteil: Trotz ihrer Vorteile sind Quaternionen in vielen Studienplänen kaum vertreten – was ihre Anwendung für viele Studierende schlichtweg erschwert.

6 Wie geht es weiter?

6.1 Cayleysche Oktonionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns nun näher mit der Frage, ob es nach den Hamiltonschen Quaternionen auch in höheren Dimensionen noch weitergeht. Die Antwort liefern uns die Cayleyschen Oktonionen, welche die Zahlenbereiche $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ enthalten, wie die Quaternionen und, darüber hinaus, auch die Zahlenmenge $\mathbb{H}$. Für dieses Kapitel wird die Literatur aus [8] verwendet.

6.2 Allgemeine Informationen

Während Hamilton seine Erkenntnisse zu den Quaternionen veröffentlichte, dauerte es nicht lange bis Joh Graves die Theorie der Cayleyschen Oktonionen veröffentlichte. Man spricht auch von den sogenannten Cayleyzahlen oder den Oktaven.

6.3 Die Algebra $\mathbb{O}$

Im Vergleich zu den Quaternionen, sollen nun in den folgenden Zeilen die Oktonionen anschaulich dargestellt werden.

Definition 6.1:

Wir definieren den 8-dimensionalen reellen Vektorraum wie folgt:

$$\mathbb{O} := \{\alpha = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot i_1 + \dots + \alpha_7 \cdot i_7 \mid \alpha_0, \dots, \alpha_7 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir bezeichnen $\alpha \in \mathbb{O}$ als *Oktonion* und $\mathbb{O}$ als die Menge der *Cayleyschen Oktonionen*.

Definition 6.2:

Die reelle Zahl α_0 bezeichnen wir als *Realteil* von α und wird mit $\text{Re}(\alpha)$ bezeichnet.

Das geordnete 7-Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_7)$ reeller Zahlen heißt *Imaginärteil* von α , welcher mit $\text{Im}(\alpha)$ bezeichnet wird.

Definition 6.3:

Die Menge $(\text{Im}) \mathbb{O} := \{\alpha_1 \cdot i_1 + \dots + \alpha_7 \cdot i_7 \mid \alpha_1, \dots, \alpha_7 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{O}$ aller Oktonionen mit trivialem Realteil bezeichnen wir als *Imaginärraum*.

Bemerkung: Die Addition zweier Oktonionen $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot i_1 + \dots + \alpha_7 \cdot i_7$ und

$\beta = \beta_0 + \beta_1 \cdot i_1 + \dots + \beta_7 \cdot i_7$ definieren wir durch:

$$\alpha + \beta := (\alpha_0 + \beta_0) \cdot 1 + (\alpha_1 + \beta_1) \cdot i_1 + \dots + (\alpha_7 + \beta_7) \cdot i_7 \text{ [sowohl assoziativ als auch kommutativ].}$$

Definition 6.4:

Wir definieren die Multiplikation zweier Oktonionen $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot i_1 + \dots + \alpha_7 \cdot i_7$ und $\beta = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot i_1 + \dots + \beta_7 \cdot i_7$ durch:

$$\alpha \cdot \beta := \sum_{l=0}^7 \sum_{m=0}^7 \alpha_l \beta_m \cdot i_l i_m.$$

Wichtig für die Multiplikation von $1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ und i_7 ist aber die folgende Multiplikationstabelle entnommen aus [7].

$\cdot$	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
1	1	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
i_4	i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
i_7	i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

Definition 6.5:

Eine nicht-triviale $\mathbb{R}$ -Algebra V bezeichnet man als *normiert* oder *Kompositionalalgebra*, wenn V ein Euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist, sodass Folgendes gilt:

$$|v \cdot w| = |v| \cdot |w| \text{ für alle } v, w \in V.$$

Bemerkung: Mehr zur Existenz für $\mathcal{O}$ kann in [8] nachgelesen werden.

6.4 Der Acht-Quadrate-Satz

Analog zum Vier-Quadrate-Satz der Algebra der Quaternionen, soll nun als Referenz der Acht-Quadrate-Satz der Oktonionen aus [4] veranschaulicht werden.

Für alle $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \in \mathbb{R}$ und alle $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5, \alpha'_6, \alpha'_7 \in \mathbb{R}$ lautet der Acht-Quadrate-Satz explizit:

$$\begin{aligned}
& (\alpha'_0 + \alpha'_1 + \dots + \alpha'_7)^2 \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_7)^2 \\
&= (\alpha'_0\alpha_0 - \alpha'_1\alpha_1 - \alpha'_2\alpha_2 - \alpha'_3\alpha_3 - \alpha'_4\alpha_4 - \alpha'_5\alpha_5 - \alpha'_6\alpha_6 - \alpha'_7\alpha_7)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_1 + \alpha'_1\alpha_0 + \alpha'_2\alpha_3 - \alpha'_3\alpha_2 + \alpha'_4\alpha_5 - \alpha'_5\alpha_4 - \alpha'_6\alpha_7 + \alpha'_7\alpha_6)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_2 - \alpha'_1\alpha_3 + \alpha'_2\alpha_0 + \alpha'_3\alpha_1 + \alpha'_4\alpha_6 + \alpha'_5\alpha_7 - \alpha'_6\alpha_4 - \alpha'_7\alpha_5)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_3 + \alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1 + \alpha'_3\alpha_0 + \alpha'_4\alpha_7 - \alpha'_5\alpha_6 - \alpha'_6\alpha_5 - \alpha'_7\alpha_4)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_4 - \alpha'_1\alpha_5 - \alpha'_2\alpha_6 - \alpha'_3\alpha_7 + \alpha'_4\alpha_0 - \alpha'_5\alpha_1 + \alpha'_6\alpha_2 + \alpha'_7\alpha_3)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_5 + \alpha'_1\alpha_4 - \alpha'_2\alpha_7 + \alpha'_3\alpha_6 - \alpha'_4\alpha_1 + \alpha'_5\alpha_0 - \alpha'_6\alpha_3 + \alpha'_7\alpha_2)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_6 + \alpha'_1\alpha_7 + \alpha'_2\alpha_4 - \alpha'_3\alpha_5 - \alpha'_4\alpha_2 + \alpha'_5\alpha_3 + \alpha'_6\alpha_0 - \alpha'_7\alpha_1)^2 \\
&+ (\alpha'_0\alpha_7 - \alpha'_1\alpha_6 + \alpha'_2\alpha_5 + \alpha'_3\alpha_4 - \alpha'_4\alpha_3 - \alpha'_5\alpha_2 + \alpha'_6\alpha_1 + \alpha'_7\alpha_0)^2
\end{aligned}$$

6.5 Die Einzigartigkeit der Cayley-Algebra

Mithilfe von [4] soll nun auf die Einzigartigkeit dieser Zahlenmenge kurz hingewiesen werden.

Satz von Zorn.

Satz 6.1:

Jede nullteilerfreie, alternative, quadratische reelle aber nicht assoziative Algebra A ist zur Cayley-Algebra isomorph.

Der Beweis zu diesem Satz findet sich abschließend in [4].

7 Didaktische Überlegungen für den Unterricht

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns abschließend mit einer möglichen Einbettung des Themas in den Schulunterricht. Ziel ist es, mit einem zu Beginn festgelegten Lehrplan [1] einige Unterrichtsideen beziehungsweise Überlegungen zu entwickeln. Außerdem, soll mit GeoGebra die mögliche graphische Darstellung von Quaternionen in der Schule erarbeitet und diskutiert werden.

Möglicher Lehrplanbezug

Aufgrund der großen Breite an unterschiedlichen Schultypen und Zweigen, fokussieren wir uns in den folgenden Zeilen auf einen spezifischen Lehrplan. Für diese Arbeit wählen wir den Lehrplan einer Höheren Technischen Lehranstalt (HTL) mit der Spezialisierung auf Mechatronik. Wir betrachten hierbei den zweiten Jahrgang. Folgend ein Ausschnitt aus dem Lehrplan.

II. Jahrgang:
3. Semester – Kompetenzmodul 3:
Bildungs- und Lehraufgabe:
Die Schülerinnen und Schüler können im
Bereich Komplexe Zahlen und Geometrie
– die elementaren Rechenoperationen mit komplexen Zahlen durchführen und deren unterschiedliche Darstellungen zur Behandlung elektrischer Netzwerke anwenden.
Lehrstoff:
Komplexe Zahlen:
Komponentenform, Polarform, Exponentialform; elementare Operationen.

7.1 Vorschläge zur Umsetzung im Unterricht

Im Verlauf dieser Arbeit stellen wir uns die schwierige Frage, ob und in welcher Form die Beschäftigung mit erweiterten Zahlensystemen – insbesondere den Quaternionen – im schulischen Kontext sinnvoll und überhaupt möglich ist. Diese Fragestellung lässt sich auch sehr gut im Mathematikunterricht (hängt natürlich von der Schulform ab) thematisieren, insbesondere im Anschluss an die Behandlung der komplexen Zahlen. Wenn diese bereits im Unterricht eingeführt wurden, bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler gezielt zum Nachdenken anzuregen: Gibt es über die komplexen Zahlen hinaus noch weitere Strukturen? Was kommt danach?

Bevor jedoch die Quaternionen in den Fokus rücken, ist es didaktisch notwendig, zunächst ein solides Verständnis für die komplexen Zahlen sicherzustellen (wichtig: komplexe Zahlen sind nicht Teil eines jeden Lehrplans der Oberstufe, siehe HAK). Es muss klar sein, dass komplexe Zahlen eine zweidimensionale Struktur besitzen, die sich aus einem Realteil und einem Imaginärteil zusammensetzt, wie wir im theoretischen Teil dieser Arbeit kurz erarbeitet haben. Diese Zahlen lassen sich dann beispielsweise auch als Vektoren veranschaulichen. Hat sich dieses Verständnis gefestigt, kann ein erster Brückenschlag zu höheren Dimensionen erfolgen.

Im nächsten Schritt sollte den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht werden, dass es prinzipiell möglich ist, Zahlenräume mit mehr als zwei Dimensionen zu betrachten. An dieser Stelle

können die sogenannten Hamiltonschen Quaternionen eingeführt werden. Im Gegensatz zu den komplexen Zahlen, die nur einen Imaginärteil besitzen, bestehen Quaternionen aus einem Realteil und, wie wir nun wissen, aus drei voneinander unabhängigen Imaginärteilen, die üblicherweise mit i , j und k bezeichnet werden. Damit bewegen wir uns gedanklich in einen vierdimensionalen Raum – ein Konzept, das zwar schwer vorstellbar ist, sich aber mit geeigneten Visualisierungen zumindest teilweise erfahrbar machen lässt, wie wir später sehen werden.

Um das Verständnis zu fördern, empfiehlt es sich, schrittweise und anschaulich vorzugehen. Der Einstieg kann über die reellen Zahlen erfolgen, die als eindimensionale Struktur dargestellt werden. Im Anschluss daran folgt die Erweiterung zu den komplexen Zahlen in zwei Dimensionen. Aufbauend darauf kann durch geeignete Visualisierungen – etwa mit Hilfe von GeoGebra – ein erster Zugang zur Struktur der Quaternionen geschaffen werden. Besonders wichtig ist hierbei eine verständliche und intuitive Einführung der Rolle der drei Imaginärteile. Die Definition der Quaternionen (z.B. wie in Definition 3.1 angegeben) sollte ebenfalls sorgfältig erläutert werden. Gleichzeitig sollten die Rechenregeln und das Verhalten der Einheiten i , j und k systematisch besprochen und durch einfache Rechenbeispiele veranschaulicht werden.

Didaktisch sinnvoll erscheint es mir auch, die genannten Inhalte in eine Einheit zum Thema „Zahlensysteme im Wandel“ einzubetten, in der die Entwicklung von den natürlichen Zahlen über die reellen und komplexen Zahlen bis hin zu den Quaternionen nachvollzogen wird. Auf diese Weise entsteht ein roter Faden, der den Schülerinnen und Schülern hilft, die Bedeutung und Notwendigkeit der Erweiterung von Zahlensystemen im Laufe der Mathematikgeschichte zu verstehen. Dazu würde ich die Literatur aus [8] empfehlen.

7.2 Quaternionen und GeoGebra

GeoGebra ist ein praktisches Tool für den Mathematikunterricht. Egal ob Gleichungen oder Integrale – das Tool ist uns immer zur Hilfe. Ebenfalls bietet uns GeoGebra die Möglichkeit, Objekte im 3D darzustellen. Aus diesem Grund können wir die Quaternionen auch in GeoGebra anwenden. Ein Beispiel, wie das gehen könnte, soll nun in den folgenden Zeilen illustriert werden. Ausgewählt wurde ein Beispiel, welches man als Folge der komplexen Zahlen im Schulunterricht präsentieren und diskutieren könnte.

Wichtig ist, sich mit der 3D Funktion vertraut zu machen, denn diese benötigt man ansonsten im Schulalltag eher seltener.

Vorgehensweise:

Da wir uns bei Quaternionen im $\mathbb{R}^4$ befinden, müssen wir uns bei der Arbeit mit GeoGebra mit 2D beziehungsweise 3D zufrieden geben. Selbst wenn die Thematisierung der Quaternionen im Unterricht anfangs ein wenig zu komplex sein kann, bietet die Verbindung der Arbeit mit GeoGebra und der Arbeit mit Quaternionen einige Chancen.

Mithilfe von GeoGebra und der Thematisierung beziehungsweise dem Vergleich zwischen

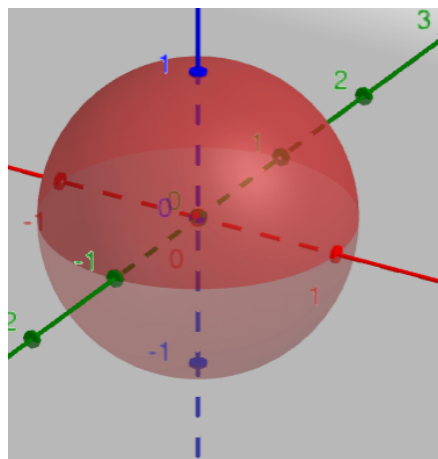
komplexen Zahlen und Quaternionen, können Schülerinnen und Schüler ihr algebraisches und geometrisches Verständnis verbessern.

Um ein Beispiel in GeoGebra anhand einer Kugel zu veranschaulichen, gibt es beispielsweise die Möglichkeit wie folgt vorzugehen:

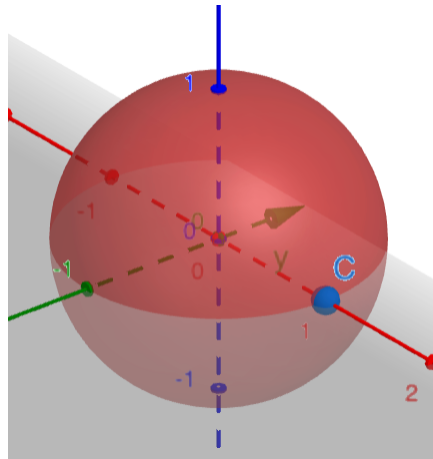
1. Schieberegler definieren
2. Kugel erstellen
3. Punkt auf dieser Kugel erstellen
4. Quaternion für die Rotation definieren
5. Konjugierte Quaternion erstellen/berechnen
6. Rotierten Punkt durch Quaternionenmultiplikation berechnen
7. Rotation des Punktes um die Kugel per Mausklick animieren

Ein konkretes Beispiel:

Die bereits genannten Schritte sollen nun anhand eines konkreten Beispiels näher erklärt werden. Zu allererst öffnen wir die GeoGebra 3D Funktion erstellen einen Schieberegler für den Winkel θ mit dem Befehl *Schieberegler*(0, 360, 1). Dies bedeutet, dass man den Winkel von 0 bis 360 Grad in einsprünge festlegen kann. Infolgedessen zeichnen wir eine Kugel mit Radius = 1 durch den Ursprung des Koordinatensystems. Dies könnte dann wie folgt aussehen:



Infolgedessen definieren wir einen Punkt C, welcher sich auf der Kugel befindet. Sei nun $C = (1, 0, 0)$ [Dieser Punkt kann genau so in GeoGebra in der Algebra Eingabezeile definiert und konstruiert werden].



Da es keine konkreten Befehle für Quaternionen in GeoGebra gibt, müssen wir uns schrittweise (und etwas unübersichtlicher) herantasten.

Wir fahren mit der Definition der Winkel fort. Dies sollte in der Eingabezeile wie folgt erfolgen: $s = \sin(\frac{\theta}{2})$ und $c = \cos(\frac{\theta}{2})$. θ steht dabei für den Winkel, der sich mit dem Schieberegler beliebig ändern lässt.

Bemerkung: Der Winkel θ wird halbiert, da er im folgenden durch die Drehung $v \rightarrow p\bar{v}p$ verdoppelt wird.

Für eine Drehung um die z-Achse folgt beispielsweise:

$$p = \cos(\frac{\theta}{2}) + 0i + 0j + \sin(\frac{\theta}{2})k .$$

Wir haben also eine Quaternion $q = (c, 0, 0, s)$, die wir in GeoGebra in einzelne Komponenten aufgliedern, um später damit weiterrechnen zu können.

Wir definieren: $q_0 = c, q_1 = 0, q_2 = 0$ sowie $q_3 = s$.

Infolgedessen müssen wir die Rotationsformel für Quaternionen anwenden, welche aus Satz 5.2 folgt: $pC\bar{p}$.

Dazu definieren wir wieder einzeln die Komponenten aus

$q_{konj} = (c, 0, 0, -s)$ folgt: $q_{k0} = c, q_{k1} = 0, q_{k2} = 0$ und $q_{k3} = -s$.

Statt den Punkt als Quaternion nun direkt zu verwenden, extrahieren wir die x-, y- und z-Komponenten des Punktes:

$p_x = x(P)$, $p_y = y(P)$ und $p_z = z(P)$. Dies gibt die Koordinaten des Punktes $P = (1, 0, 0)$, wobei $p_x = 1$, $p_y = 0$ und $p_z = 0$ sind.

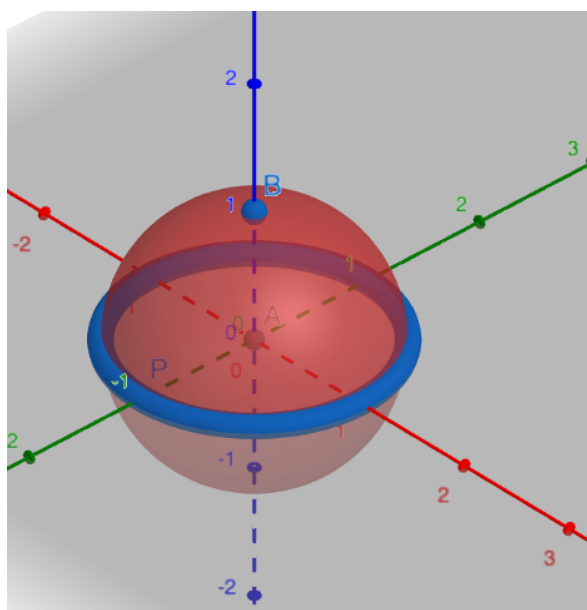
Die erste Multiplikation $q \cdot p$ kann mithilfe der Produktformel aus Kapitel 3 berechnet werden.

Folgend kann dieses Ergebnis aus den vorherigen Schritt dann einzeln wieder mit p_{konj} multipliziert werden. Dabei halten wir uns wieder an die Produktformel.

Führt man diese Menge an Multiplikationen durch, erhalten wir am Ende einen Punkt $P_{rot}(r_1, r_2, r_3)$.

Bemerkung: r_1, r_2 und r_3 stehen dabei für die Koordinaten des rotierenden Punktes. Wir können nun einfach den Punkt $P_{rot} = (r_1, r_2, r_3)$ in GeoGebra darstellen.

Als letzten Schritt können wir per Mausklick (rechte Maustaste) die Spur des Punktes aktivieren. Startet man dann noch die Animation des Winkels θ (ebenfalls per Mausklick auf den Schieberegler), so sieht man, wie der Punkt um die gezeichnete Kugel rotiert. Folgend betrachten wir in der Abbildung Abbildung die Spur des Punktes. Wir sehen nun in blauer Farbe eine mögliche, aber auch zeitaufwendige Veranschaulichung der Rotation des Punktes um die Kugel.



7.2.1 Fazit zum GeoGebra Einsatz

Aus persönlicher Sicht gestaltet sich der Einsatz von GeoGebra im Zusammenhang mit dem Thema Quaternionen als eher schwierig und nur bedingt hilfreich für das Verständnis dieser doch recht komplexen mathematischen Struktur. Ein zentrales Problem besteht meiner Meinung nach darin, dass GeoGebra keine spezifischen, direkt einsetzbaren Befehle für die Arbeit mit Quaternionen zur Verfügung stellt (anders wie beispielsweise bei der Arbeit mit Gleichungssystemen). Dadurch ist es nicht möglich, diese Zahlensysteme exakt und systematisch in der oftmals so unterstützenden Schulsoftware umzusetzen. Oftmals bleibt nur die Möglichkeit, bestimmte Aspekte der Quaternionen auf anschauliche Weise näherungsweise zu simulieren.

Auch wenn sich die für die Visualisierung notwendigen Berechnungen mit GeoGebra relativ zügig durchführen lassen, bleibt der gesamte Prozess insgesamt recht aufwendig und auch sehr unübersichtlich – insbesondere für Lernende, die mit der Thematik zum ersten Mal konfrontiert werden. Dies könnte ich durch genaue Auseinandersetzung mit der Visualisierung in GeoGebra

herausfinden.

Wie bereits erwähnt, ist der Nutzen von GeoGebra für das grundsätzliche Verständnis der Quaternionen eher gering einzuschätzen. Dennoch bietet es uns die Möglichkeit, zumindest im Rahmen kleiner Experimente mit der Theorie zu arbeiten, einen gewissen Reiz. Es kann durchaus spannend sein, sich spielerisch und explorativ mit der Theorie auseinanderzusetzen und dabei eigene Entdeckungen zu machen – sofern das nötige Vorwissen vorhanden ist (könnte eben für die Schule ein wenig problematisch sein).

Der Einsatz von GeoGebra im Kontext der Quaternionen erfordert nicht nur ein gutes mathematisches Grundverständnis, sondern auch Zeit und Geduld, was ihn für den regulären Unterrichtsgebrauch eher ungeeignet macht. Aus schulischer Perspektive betrachtet, erscheint der Aufwand, der mit einer solchen Implementierung verbunden ist, deutlich zu hoch. Die thematische Tiefe, die notwendige Abstraktion sowie die begrenzten technischen Möglichkeiten innerhalb von GeoGebra machen eine sinnvolle Integration in den gewöhnlichen Mathematikunterricht kaum realisierbar.

Aus meiner Sicht wäre die einzige praktikable und didaktisch sinnvolle Möglichkeit, eine bereits vollständig vorbereitete GeoGebra-Konstruktion – zum Beispiel die Rotation eines Punktes im Raum mithilfe von Quaternionen – im Unterricht zu präsentieren und kurz zu erläutern. Dabei könnte der Fokus auf der anschaulichen Darstellung und nicht auf der technischen Umsetzung liegen. Die Schülerinnen und Schüler eigenständig anleiten zu wollen, eine solche Konstruktion selbst Schritt für Schritt zu erstellen, wäre aus meiner Sicht zu anspruchsvoll und würde viele überfordern.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Einsatz von GeoGebra im Zusammenhang mit Quaternionen weniger als effektive Lernmethode, sondern eher als „nettes, ergänzendes Experiment“ für interessierte Lehrkräfte dienen kann, die sich vertiefend mit der Materie auseinandersetzen möchten. Als reguläres Unterrichtsmaterial ist es jedoch meiner Meinung nach nur sehr eingeschränkt einsetzbar.

8 Resümee

Quaternionen stellen ein ausgesprochen anspruchsvolles und vielschichtiges mathematisches Konzept dar. Aufgrund ihrer Komplexität finden sie im schulischen Alltag in der Regel keine praktische Anwendung. Stattdessen konzentriert sich der Mathematikunterricht üblicherweise auf das Gebiet der komplexen Zahlen, welche sich im zweidimensionalen Raum bewegen und somit wesentlich zugänglicher und anschaulicher sind. Die vertraute Darstellung komplexer Zahlen mit einem Realteil und einem Imaginärteil bietet einen guten Einstieg in die Welt der erweiterten Zahlenräume.

Trotzdem darf man die Bedeutung der Quaternionen nicht unterschätzen, denn sie stellen gewissermaßen eine Erweiterung beziehungsweise Fortsetzung der komplexen Zahlen dar. Der grundlegende Unterschied zwischen diesen beiden Zahlensystemen besteht hauptsächlich in der Anzahl der Imaginärteile: Während komplexe Zahlen nur über einen einzigen Imaginärteil verfügen, zeichnen sich Quaternionen durch gleich drei Imaginärteile aus, was ihre Struktur um einiges komplexer macht. Dadurch bewegen wir uns im Fall der Quaternionen nicht mehr im zweidimensionalen, sondern im vierdimensionalen Raum – einer Dimension, die für das menschliche Vorstellungsvermögen nur schwer greifbar ist.

Auch wenn der vierdimensionale Raum sich unserer direkten Anschauung eigentlich entzieht, gibt es praktische Einsatzmöglichkeiten für Quaternionen im dreidimensionalen Raum (siehe GeoGebra). Besonders im Bereich von Rotationen haben sich Quaternionen als überaus nützlich erwiesen. Herkömmliche Methoden zur Beschreibung von Drehungen, wie etwa die Euler-Winkel, die wir vorhin diskutiert haben, stoßen häufig an ihre Grenzen, insbesondere dann, wenn beispielsweise komplexe Bewegungsabläufe beschrieben werden sollen. In solchen Fällen können Quaternionen eine elegante und rechnerisch einfachere und effizientere Lösung bieten.

Darüber hinaus stellt sich die spannende Frage, ob es nach den Quaternionen noch weiter geht. Tatsächlich existieren mit den sogenannten Oktonionen, wie im Kapitel 6 diskutiert, noch höherdimensionale Strukturen, die in einem achtdimensionalen Raum definiert sind. Auch wenn diese Zahlenobjekte in der Mathematik und Physik eine eher theoretische Rolle spielen, zeigen sie doch, wie weit sich das Konzept erweiterter Zahlensysteme entwickeln lässt.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte außerdem festgestellt werden, dass Quaternionen im schulischen Kontext höchstens auf einer sehr theoretischen Ebene behandelt werden können. Zwar lassen sich ihre Eigenschaften durch Programme wie GeoGebra in Form einer schrittweisen Konstruktion anschaulich visualisieren, doch aus persönlicher Sicht erscheint es insgesamt als zu kompliziert und verwirrend, die Beschäftigung mit Quaternionen als verpflichtenden Unterrichtsinhalt zu verlangen. Die Inhalte übersteigen meiner Meinung nach das, was im regulären Schulbetrieb vermittelt werden soll.

Was dennoch eine Möglichkeit wäre, ist, solche Thematiken denjenigen Schülerinnen und Schülern näherzubringen, welche mit dem regulären Schulstoff ohnehin unterfordert sind. Damit könnte man also beispielsweise die Begabten auch herausfordern.

9 Literaturverzeichnis

- [1] Bundesministerium. *Lehrpläne Berufsbildende Schulen*.
<https://www.abc.berufsbildendeschulen.at/downloads>.
- [2] Dam, Erik & Koch, Martin & Lillholm Martin. *Quaternions, Interpolation and Animation*.
University of Copenhagen, 1998.
- [3] Du, P. (2020). *Understanding Quaternions*. Nova Science Publishers.
- [4] Ebbinghaus et al. *Zahlen*. 3. Auflage Springer-Verlag, 1992.
- [5] Fischer, Gerd. *Lehrbuch der Algebra*. 2. Auflage Vieweg + Teubner Verlag, 2011.
- [6] Fischer, Wolfgang & Lieb, Ingo. *Einführung in die Komplexe Analysis*. 1. Auflage Vieweg +
Teubner Verlag, 2010.
- [7] Koecher, Max. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. 4. Auflage Springer-Verlag, 1997.
- [8] Kramer, Jürg & Von Pippich, Anna-Maria. *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*.
2. Auflage Springer-Verlag, 2022.
- [9] Richter-Gebert, Jürgen Orendt, Thorsten. (2009). *Geometrie-Kalküle*. Springer-Verlag.
- [10] Schichl, Hermann & Steinbauer, Roland. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. 3. Auflage
Springer-Verlag, 2018.
- [11] Strampp, Walter & Janssen, Dörthe. *Höhere Mathematik*. 5. Auflage Springer-Verlag, 2021.
- [12] Voight, John. *Quaternion Algebras*. Springer-Verlag, 2021.