

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Kurzsichtig handeln, langfristig gewinnen. Wie man mit Mathematik und Logik die richtige Entscheidung fällt.

verfasst von | submitted by
Tamara Dragic BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree programme code as it appears on the student record sheet:

UA 199 520 525 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree programme as it appears on the student record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach Mathematik Unterrichtsfach Psychologie und Philosophie

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Peter Raith

Abriss

Die Spieltheorie findet nicht nur in der Mathematik ihren Platz. In verschiedenen alltäglichen Situationen, in denen man Entscheidungen treffen muss und in vielen Bereichen der Wissenschaft, kommt sie ebenso zum Einsatz. Ereignisse aus dem Alltag werden analysiert und in ein mathematisches Modell übersetzt, welches dann in der Spieltheorie zur Lösung des Problems führt. Da die Anwendung und Interpretation eines mathematischen Modells im Lehrplan verankert ist, stellt sich die Frage, ob es für Schüler gewinnbringend ist, im Mathematikunterricht die Spieltheorie zu behandeln. Durch verschiedene Aufgaben und Beispiele wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die Spieltheorie dazu beiträgt, den Unterricht anwendungsorientierter zu gestalten.

Abstract

Game theory doesn't just find its place in mathematics. It is also used in various everyday situations in which you must make decisions and in many areas of science. Events from everyday life are analyzed and translated into a mathematical model, which then leads to a solution to the problem in game theory. Since the application and interpretation of a mathematical model is anchored in the curriculum, the question arises as to whether it is beneficial for students to cover game theory in mathematics lessons. Through various tasks and examples, this thesis shows that game theory helps to make teaching more application oriented.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Motivation der Arbeit	5
1.2	Zielsetzung der Arbeit	6
1.3	Aufbau der Arbeit	6
2	Die Definition und Entwicklung der Spieltheorie	8
2.1	Die historische Entwicklung der Spieltheorie	8
2.2	Alltägliche Spiele	9
2.3	Eine grundlegende Definition	10
3	Grundlagen der Spieltheorie	11
3.1	Spiele in Normalform	11
3.2	Spiele in Extensivform	12
3.3	Strategien	17
3.3.1	Die reine Strategie	17
3.3.2	Die gemischte Strategie	18
3.3.3	Die kooperative Strategie	18
3.3.4	Die nicht-kooperative Strategie	18
3.3.5	Die dominante Strategie	18
3.4	Einige topologische Begriffe	20
3.5	Das Nash-Gleichgewicht	23
3.5.1	Die Existenz des Nash-Gleichgewichts	25

4 Statische Spiele mit vollständiger Information	30
4.1 Spiele mit unproblematischen Gleichgewichten	30
4.2 Spiele mit problematischen Gleichgewichten	32
5 Statische Spiele mit unvollständiger Information	44
6 Dynamische Spiele mit vollständiger Information	47
6.1 Rückwärtsinduktion	47
6.2 Teilspielperfektion	48
6.3 Spiele mit imperfekter Information	50
7 Dynamische Spiele mit unvollständiger Information	53
8 Spiele ohne Informationen	59
8.1 Minimax-Regel	60
9 Nullsummenspiele	62
10 Kooperative Spiele	67
10.1 Koalitionsspiele	75
10.1.1 Der Shapley-Wert	75
11 Anwendungsbereiche der Spieltheorie	80
11.1 Das Gefangenendilemma	81
12 Spieltheorie im Unterricht	83
12.1 Rahmenbedingungen in der Praxis - der Lehrplan	83
12.2 Didaktische Überlegungen	84
12.3 Beispiele und Aufgaben für den Unterricht	84
13 Fazit	91
Literatur	92

1 Einleitung

1.1 Motivation der Arbeit

Spiele zu spielen ist keine große Wissenschaft und macht Kindern als auch Erwachsenen sehr viel Spaß, vor allem, wenn man dabei gewinnt. Um in einem beliebigen Spiel zu gewinnen, bedarf es einer guten Strategie. Doch ganz gleich, wofür man sich entscheidet, man spielt immer gegen mindestens einen Spieler und daher kann man eigentlich nie sicher wissen, wie die Spielsituation ausgehen wird und wie die anderen Parteien entscheiden werden. Hier kommt nun die Spieltheorie ins Spiel. Diese ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik, wird aber auch in anderen Wissenschaften genutzt.

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit der Analyse der strategischen Entscheidungsprozesse, wobei der Ausgang eines Spiels für den einzelnen Spieler nicht nur von seinem eigenen Handeln und seinen Entscheidungen abhängt, sondern ebenso auch davon abhängig ist, wie sich seine Mitspieler entscheiden werden.

Dabei spielt die Mathematik dahinter eine wichtige Rolle, denn viele Modelle und Konzepte sind mathematische Formulierungen. Es kommen unter anderem Optimierungen, Wahrscheinlichkeiten und die lineare Algebra zur Verwendung.

Da die Spieltheorie auf alltägliche Probleme angewendet werden kann, ist sie in der Praxis von großem Nutzen, denn strategische Interaktionen werden mathematisch vorhergesagt.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, die Spieltheorie zu erläutern und Beispiele für den Mathematikunterricht zu veranschaulichen. Dabei liegt das wesentliche Augenmerk auf die Verbindung von Mathematik und Gesellschaft. Es soll ein neuer Blick auf die Mathematik fallen und des weiteren Mathematiklehrkräfte anregen, falls im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt werden kann, dass die Spieltheorie für den Unterricht geeignet ist, diese auch im Unterricht einzusetzen. Dafür werden Beispiele erarbeitet und vorgestellt.

Die Arbeit soll daher einen Überblick über die Spieltheorie geben, indem sie die mathematischen Grundlagen erläutert und diese anwendet.

Ein besonderer Fokus liegt dabei auf das Nash-Gleichgewicht, verschiedene Spielarten mit deren Strategien und das Gefangenendilemma. Anhand dessen wird deutlich, dass die Spieltheorie sowohl theoretisch als auch praktisch einen zentralen Stellenwert im Alltag der Menschen hat.

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in zwölf Kapitel. Das mathematische Kernstück bilden dabei die Kapitel 3 bis 10. Zuerst wird es eine Definition der Spieltheorie geben. Insbesondere werden Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten von Glücksspielen und Geschicklichkeitsspielen beleuchtet, um in das Thema langsam einzusteigen. Daraufhin wird die Geschichte der Spieltheorie eingeführt. In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich die Spieltheorie im Laufe der Zeit entwickelt hat und welche offenen Fragen noch herrschen.

Im dritten Kapitel wird die Mathematik hinter der Spieltheorie dargelegt. Es gibt zwei Darstellungsformen der Spieltheorie, die Normal- und die Extensivform. Diese beiden Formen werden durch Definitionen und Sätze nähergebracht und mit Beispielen veranschaulicht. Weiters wird gezeigt, wie man verschiedene Strategien und vor allem Nash-Gleichgewichte finden kann, um daraufhin im elften Kapitel auf das Gefangenendilemma eingehen zu können, welches ein mathematisches Konfliktmodell darstellt. Ebenso wer-

den verschiedene Strategien erarbeitet, die für das Lösen eines strategischen Problems gebraucht werden.

Ab dem vierten Kapitel werden unterschiedliche Arten von Spielen diskutiert, unter anderem statische und dynamische Spiele. Es werden viele wichtige Konzepte erklärt, wie z.B. die Minimax-Regel, der Shapley-Wert und vieles mehr.

Das elfte Kapitel behandelt die Anwendungsbereiche der Spieltheorie, die sehr vielseitig sind. Hier wird auch das Gefangenendilemma angerissen.

Im letzten Kapitel, das insbesondere für Mathematiklehrpersonen interessant ist, stellt sich die Frage, ob und wie die Spieltheorie den Unterricht bereichern kann. Mithilfe von didaktischen Überlegungen und Beispielen wird dies diskutiert. Hierbei wird der Lehrplan analysiert und die Spieltheorie den zugehörigen Bereichen im Lehrplan zugeordnet.

Zum Schluss werden zwei Beispielaufgaben ausgearbeitet, die man im Unterricht mit den Schülern lösen kann.

2 Die Definition und Entwicklung der Spieltheorie

2.1 Die historische Entwicklung der Spieltheorie

Die Spieltheorie ist vom Mathematiker John von Neumann und vom Ökonomen Oskar Morgenstern mit dem Erscheinen ihres Buches „Theory of Games and Economic Behavior“ im Jahr 1944 begründet worden (vgl. [2], [3]). In diesem Werk sind grundlegende Konzepte der Spieltheorie, die die mathematische Grundlage für die Analyse von strategischen Entscheidungsprozessen bildet, entwickelt worden. Die Spieltheorie beschäftigt sich mit strategischen Spielen, an denen mehrere Personen beteiligt sind und das Ziel der Gewinn eines Spiels ist. Die Spieler müssen gut durchdachte Entscheidungen treffen und auch überlegen, wie der Gegner handeln könnte, um dadurch entsprechend den nächsten Schritt im Spiel entscheiden zu können.

Des weiteren ist das Nash-Gleichgewicht von John Nash im Jahr 1950 eingeführt worden. Es beschreibt eine Situation, in der kein Spieler das Interesse hat, seine gewählte Strategie ändern zu wollen, auch wenn er weiß, wie seine Gegner vorgehen werden. Nash hat für diese Arbeit sogar den Nobelpreis im Jahr 1994 erhalten und dadurch ist die Spieltheorie zu einem mathematischen Werkzeug, das man sich nun nicht mehr wegdenken kann, geworden.

Die Entwicklung der Spieltheorie ist in den nächsten Jahren auf viele verschiedene Bereiche angewendet worden. So findet sie Platz in der Biologie, der Politikwissenschaft und Informatik. Die heutigen Computermodelle und Algorithmen können dank der Spieltheorie heutzutage komplexe strategische Probleme lösen. (vgl. [2])

2.2 Alltägliche Spiele

Zunächst sollen Geschicklichkeits- und Glücksspiele diskutiert werden. Der Unterschied zu Geschicklichkeitsspielen und Glücksspielen ist, dass beim Ersteren Wettbewerbe zu verstehen sind, bei denen der Gewinner durch bestimmte überragende Fähigkeiten zum Sieg kommt. Beim Zweiteren kann man als handelnde Person wenig für sein Gewinn beitragen, da, wie es der Name schon sagt, das Glück entscheidet, ob man verliert oder gewinnt.

Das entscheidende Kernmerkmal der strategischen Spiele ist demnach eine Entscheidungssituation. Dies findet ebenso oft im Alltag statt. Jedes Mal, wenn zwei Personen miteinander agieren und eine Person etwas von der anderen Person möchte, führt jene ein strategisches Spiel. Ein Beispiel hierfür wäre das Umwerben eines Partners. Wenn ein Mann beispielsweise eine Frau auf ein Abendessen einladen möchte, überlegt er sich im Voraus, welche Aktionen seinerseits bestimmte Reaktionen ihrerseits auslösen könnten. Bei den Kartenspielen ist Poker ein bekanntes strategisches Spiel, mit einem kleinen Zufallselement, denn auch der geübteste Spieler kann verlieren, wenn er ungünstige Karten in der Hand hat. Jedoch können sie gut einschätzen, welche Konstellationen höhere Gewinnwahrscheinlichkeiten bringen und dadurch erfolgreich bluffen. Zusammenfassend lässt sich daher sagen, dass beim strategischen Spiel rationale Akteure in einer Interaktion stehen. (vgl. [2])

2.3 Eine grundlegende Definition

Die Spieltheorie beschäftigt sich mit Entscheidungsprozessen, bei denen mehrere Spieler am Werk sind. Unter einem Spiel versteht man eine Situation, bei der die Entscheidungen der Spieler ein Ergebnis beeinflussen können. Um eine Entscheidung treffen zu können, brauchen die Spieler Strategien. Diese entscheiden dann, wie ein Spieler auf die Handlungen seiner Gegenspieler antworten kann.

Das Ziel der Spieltheorie ist es, das optimale Entscheidungsverhalten der Spieler zu bestimmen. Spieler wählen ihre Entscheidungen demnach so, dass sie ihren Nutzen maximieren können. Dabei müssen sie berücksichtigen, wie sich die anderen Spieler entscheiden können. (vgl. [3])

3 Grundlagen der Spieltheorie

Der folgende Abschnitt behandelt die Spieltheorie im mathematischen Sinne. Es wird der Unterschied zwischen der Normalform und der extensiven Spielform gezeigt. Das sind zwei verschiedene Darstellungsarten.

3.1 Spiele in Normalform

In der Normalform treffen die Spieler gleichzeitig eine Entscheidung. Das kann formal durch die Menge der Spieler, deren Strategiemöglichkeiten und Auszahlungen, die von den Spielausgängen abhängen, beschrieben werden. (vgl. [3])

Definition. *Ein Spiel in Normalform wird durch ein $2n + 1$ - Tupel*

$G = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n; A_1, \dots, A_n; I)$ beschrieben, wobei Σ_i die Strategiemenge, also die Menge aller möglichen Strategien, die ein Spieler wählen kann, A_i die Auszahlungsfunktion von Spieler i und I die Menge aller Spieler bezeichnet. Dabei ist I eine endliche Menge mit n Elementen, für jedes i ist Σ_i eine endliche Menge, und $A_i : \prod_{j=1}^n \Sigma_j \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(vgl. [3], [6])

Spiele in Normalform haben demnach, wie man sieht, wenig formale Ansätze. Die Zugfolge und der Informationsstand der Spieler über die vorigen Spielabläufe werden daher nicht angegeben. Es gibt lediglich den Ansatz der Strategie und der Auszahlungsfunktion. Solche Spiele werden mit einer Matrix dargestellt und werden im weiteren Verlauf der Arbeit oft behandelt. (vgl. [3], [13])

Die Strategiemenge Σ_i in der Normalform hat als Elemente σ_i reine Strategien. Die Definition der reinen Strategien wird im Kapitel [3.3.1](#) erläutert. (vgl. [\[3\]](#))

Am geeignetsten ist diese Darstellung, wenn alle Spieler gleichzeitig ihre Strategien wählen müssen, ohne darüber Bescheid zu wissen, wie sich die anderen Spieler entscheiden werden. (vgl. [\[3\]](#))

Die möglichen Strategien aller Spieler werden als Strategiekombination $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Sigma := \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ bezeichnet. Dies gibt das Ergebnis an, das jeder Spieler anhand seiner Auszahlungsfunktion beurteilt. (vgl. [\[3\]](#))

Als typisches Beispiel für ein Spiel in Normalform wird das Gefangenendilemma herangezogen, das im vorletzten Kapitel erläutert wird. (vgl. [\[3\]](#))

3.2 Spiele in Extensivform

Spiele in Extensivform unterscheiden sich von der Normalform vor allem in ihrer Darstellungsform, bei dem die Spieler nun nacheinander Entscheidungen treffen und daher meistens Bescheid wissen, wie die Spieler davor gehandelt haben. Die Extensivform wird somit um die Zugfolge und den Informationsstand eines Spielers erweitert. Nun wird die Reihenfolge explizit dargestellt. Die Stufen des Spielablaufs zeigen, dass ein oder mehrere Spieler am Zug sind, wobei die einzelnen Spieler unterschiedliche Informationen zu den Zügen der anderen Spieler haben. Veranschaulicht wird dieses Modell durch einen Spielbaum, der einen Graphen aus Knoten und Kanten darstellt (siehe Abbildung [3.1](#)). (vgl. [\[3\]](#))

Die Knoten beschreiben die Entscheidungs- oder Endsituation und die Kanten die möglichen Handlungen, für die sich ein Spieler entscheiden kann. (vgl. [\[3\]](#))

Folgendes Beispiel soll dies anhand der Abbildung [3.1](#) illustrieren.

Zwei Unternehmen stellen zwei Arten von Kameras her. Unternehmen 1 beginnt mit der Herstellung und Unternehmen 2 folgt nach der Entscheidung vom ersten Unterneh-

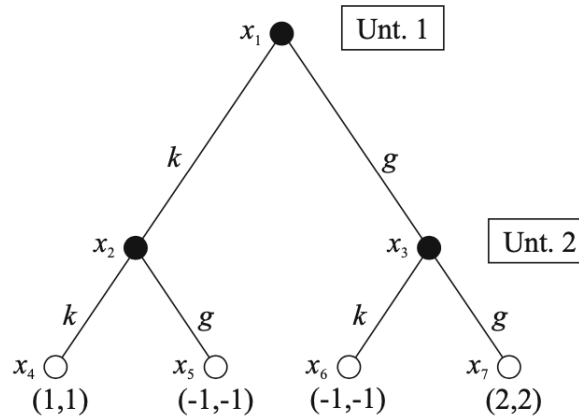


Abbildung 3.1: Spielbaum

men. Beide Unternehmen können jeweils nur zwei Entscheidungen treffen. Entweder sie erstellen Kameras mit großer Speicherkapazität (g) oder mit einer kleineren (k). Die Situationen können unterschiedlich verlaufen und dies wird durch die Endpunkte des Spielbaums, die als Auszahlungsvektoren zu verstehen sind, dargestellt. Wenn beide Unternehmen die gleiche Speicherkapazität wählen, erhalten sie eine höhere Auszahlung als bei einer Fehlkoordination, wobei die große Kapazität sich für beide mehr auszahlen würde.

Die Knotenmenge $K = \{x_1, \dots, x_7\}$ des Spielbaums enthält insbesondere die Menge der Endpunkte $Z = \{x_4, \dots, x_7\}$, die die Ausgänge des Spielverlaufs darstellen, und die Menge der Entscheidungsknoten $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. An diesen Knoten treffen die Spieler, wie der Name es schon verrät, Entscheidungen. Die Menge X kann nun weiter in die Menge $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ zerlegt werden. Die Menge P wird als Spielerzerlegung beschrieben und bezeichnet diejenigen Knoten, an denen der Spieler i gerade am Zug ist. So hat der Spieler, im obigen Beispiel, nach der Spielerzerlegung $P_1 = \{x_1\}$ zwei Elemente der Spielerzerlegung $P_2 = \{x_2, x_3\}$ zu wählen. (vgl. [3])

Nun kann es sein, dass die Spieler nicht wissen, wie sich ihre Gegenspieler entschieden haben. Im Spielbaum wird dies durch die Informationsmengen dargestellt.

$F_i = \{f_{i1}, \dots, f_{iK_i}\}$ wird als Informationspartition eines Spielers i bezeichnet und stellt die Zerlegung von P_i dar. Die in dieser Menge enthaltenen Elemente stehen für die Informationen, die der Spieler i , während er am Zug ist, hat. Hat f_{ik} ein Element, bedeutet dies, dass der Spieler alle Informationen der vorherigen Aktionen kennt und wenn es mehrere Elemente sind, kennt er die Züge von davor nicht. Im letzteren Fall kann der Spieler dann ebenso nicht seine Position im Spielbaum eindeutig bestimmen. In $F = \{F_1 \dots, F_n\}$ sind die Informationszustände jedes Spielers gegeben. Im obigen Beispiel hat man demnach $F_1 = \{f_{11}\}, F_2 = \{f_{21}, f_{22}\}$ mit $f_{11} = \{x_1\}, f_{21} = \{x_2\}, f_{22} = \{x_3\}$. Das bedeutet, dass der zweite Spieler über die Handlungen des ersten Spielers Bescheid weiß.

Betrachtet man nun die Abbildung [3.2](#) sieht man folgendes Szenario. Unternehmen 2 weiß nicht, welche Entscheidungen Unternehmen 1 trifft. Das zweite Unternehmen hat nun die Informationszerlegung $F_2 = \{f_{21}\}$ mit $f_{21} = \{x_2, x_3\}$. Das erste Unternehmen hat noch immer dieselbe Zerlegung. f_{21} erkennt man durch die strichlierte Linie in der Grafik. (vgl. [\[3\]](#))

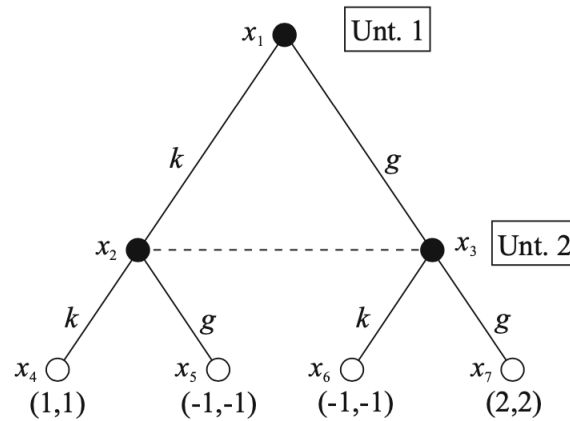


Abbildung 3.2: Spielbaum ohne Information über den Zug des anderen Spielers

Sei C_f die Aktionsmenge, die ein Spieler an der Informationsmenge f zur Verfügung hat. In der Abbildung [3.2](#) sieht man die Aktionsmengen der beiden Spieler durch $C_{f_{11}} = \{g, k\}$ und $C_{f_{21}} = \{g, k\}$. An jedem Knoten sind dem Spieler alle Handlungen der Menge C_f verfügbar, denn für die Knoten in der Informationsmenge f muss die Menge an Handlungen, die man wählen kann, gleich sein. Ansonsten weiß der Spieler, an welchem Knoten er sich befindet und dies wäre keine unvollkommene Information mehr. (vgl. [\[3\]](#))

Jeder Spielbaum hat einen Pfad. Dies stellt eine Folge von Wegen dar, die ein Spieler durch seine gewählten Handlungen gehen kann. Dieser Pfad beginnt im Startpunkt des Spielbaums und endet im Endpunkt $z \in Z$. Einem solchen Pfad wird ein Auszahlungsvektor, der aus den Auszahlungen der jeweiligen Spieler besteht, angesetzt. Diese Auszahlungsfunktion kann formal geschrieben werden als $A : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist ein Pfad vollendet, beschreibt $A_i(z)$ die Auszahlung von Spieler i . In dem Beispiel [3.2](#) sieht man demnach folgende Auszahlungen:

$$A(x_4) = (1, 1), A(x_5) = (-1, -1), A(x_6) = (-1, -1) \text{ und } A(x_7) = (2, 2). \text{ (vgl. [\[3\]](#))}$$

Beim Extensivformspiel kommen zuletzt noch die Zufallsspieler hinzu. Im oben erwähnten Beispiel kann es nun sein, dass die jeweiligen Unternehmen ihre Auszahlungen nicht kennen, da sie z.B. keine Erfahrungen mit bestimmten Produkten gemacht haben. In dem Fall nehmen sie Wahrscheinlichkeiten heran, die beispielsweise eine Studie bereitlegt. In der Abbildung [3.3](#) sieht man, dass die gewählten Aktionen mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 oder 0.8 vorkommen können. Der Zufallsspieler hat die Spielerzerlegung P_0 und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen p an den Knoten $x \in P_0$, also ist in dem Beispiel $P_0 = \{x_7\}$ und $p_{x_7} = \{0.2, 0.8\}$. (vgl. [\[3\]](#))

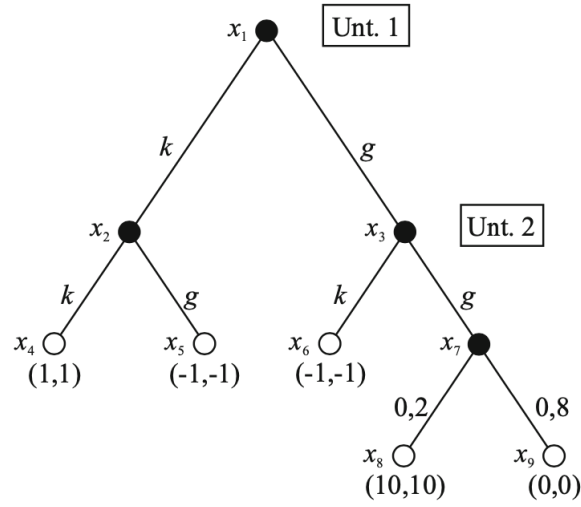


Abbildung 3.3: Spielbaum mit Zufallsspieler

Nun kann man mit Pr , die die Menge aller möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen eines Zufallsspielers ausdrückt, und I , die Spielermenge, das Extensivformspiel folgendermaßen definieren: (vgl. [3])

Definition. Ein Spiel in Extensivform ist durch das Tupel $\Gamma := (I, (K, \rightarrow), Z, P, \mathcal{F}, Pr, A)$ gegeben, wobei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ eine endliche Menge (die Spielermenge), $(K, \rightarrow)$ ein endlicher gerichteter Graph, $Z := \{x \in K : \text{es gibt kein } y \in K \text{ mit } x \rightarrow y\}$ (wird als Endknotenmenge bezeichnet), $P : K \setminus Z \rightarrow I \cup \{0\}$ (ordnet jedem Entscheidungsknoten einen Spieler zu), $\mathcal{F}$ eine Zerlegung von $K \setminus Z$ mit den Eigenschaften, dass für $F \in \mathcal{F}$ stets $P(f_1) = P(f_2)$ und $\text{card}\{y \in K : f_1 \rightarrow y\} = \text{card}\{f \in K : f_2 \rightarrow y\}$ für alle $f_1, f_2 \in F$ gilt, $Pr : \{x \in K : \exists y \in P^{-1}(0) \text{ mit } y \rightarrow x\} \rightarrow [0, 1]$ mit $\sum_{x: y \rightarrow x} Pr(x) = 1$ für alle $y \in P^{-1}(0)$ und $A : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion ist.

(vgl. [3])

Für ein $F \in \mathcal{F}$ ist die Aktionsmenge C_F eine endliche Menge, die gleich viele Elemente wie $\{y \in K : f \rightarrow y\}$ für jedes $f \in F$ hat.

Jede Kombination der reinen Strategien entspricht einem Pfad im Spielbaum und die Kombination der gemischten Strategien (Definition folgt im nächsten Unterkapitel) entspricht einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Pfaden, die zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Endpunkten führt. Diesen Kombinationen kann man dann auch Auszahlungen zuordnen. (vgl. [3])

3.3 Strategien

Eine Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ beschreibt einen vollständigen Spielplan, bei dem sich die Spieler überlegen, wie die Gegenspieler handeln könnten und anhand dessen ihre eigenen Spielzüge planen. (vgl. [6]) Sie besteht aus einem Vektor $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. (vgl. [13]) Ein Spieler i hat die Möglichkeit sich für eine von endlich vielen reinen Strategien $\sigma_i \in \Sigma_i$ aus seiner Strategiemenge zu entscheiden. (vgl. [4])

In einer Strategiemenge sind alle Strategien vorhanden, die ein Spieler besitzt. Sind alle Strategien bekannt, so wählt der Spieler diejenige Strategie aus, die die höchste Auszahlung verspricht. Hingegen sind Strategiekombinationen alle Strategien von einem Spieler kombiniert mit jeder Strategie des anderen Spielers. (vgl. [6]) Im Verlauf eines Spiels macht ein Spieler mehrere Spielzüge. An den Entscheidungsknoten eines Spielbaums muss er dann eine Entscheidung treffen. Dafür überlegt er sich eine Strategie, die er plant und dann durchführt. Diese Handlungen können dann zum Erfolg führen oder nicht. Er wägt demnach ab, welche Möglichkeit die günstigere für ihn ist. (vgl. [4])

3.3.1 Die reine Strategie

Eine reine Strategie ist eine eindeutige Handlungsoption, für die sich ein Spieler immer wieder entscheidet. Mathematisch versteht man reine Strategien als Elemente einer endlichen, diskreten Strategiemenge $\sigma_i \in \Sigma_i$. (vgl. [3], [4]) Die Menge der reinen Strategien ist ein Sonderfall der gemischten Strategien. (vgl. [12])

3.3.2 Die gemischte Strategie

Wählt der Spieler durch Zufall aus der Menge der reinen Strategien, spricht man von einer gemischten Strategie. Diese ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die reinen Strategien. Dabei wird einem Spieler i zu seinen reinen Strategien σ_i eine Wahrscheinlichkeit $p_i \geq 0$ zugeordnet. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist dabei immer gleich 1. Um die Menge der gemischten Strategien von den reinen zu unterscheiden, wird q_i für die gemischten Strategien verwendet. Eine gemischte Strategie q_i von Spieler i ordnet demnach jeder reinen Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ eine Wahrscheinlichkeit $q_i(\sigma_i)$ zu: (vgl. [4], [13])

$$q_i : \Sigma_i \longrightarrow [0, 1] \quad (3.1)$$

$$\sigma_j \mapsto q_i(\sigma_j), \quad (3.2)$$

wobei $\sum_{\sigma_j \in \Sigma_i} q_i(\sigma_j) = 1$. Setze $Q_i := \{q : \Sigma_i \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{\sigma \in \Sigma_i} q(\sigma) = 1\}$. (vgl. [14]) Wie wir später sehen werden, ist Q_i eine konvexe und kompakte Menge, wodurch die Existenz von mindestens einem Nash-Gleichgewicht gezeigt werden kann. (vgl. [4], [12])

3.3.3 Die kooperative Strategie

Bei kooperativen Strategien sprechen sich die Spieler miteinander ab. Sie gehen demnach bindende Verträge miteinander ein. (vgl. [5])

3.3.4 Die nicht-kooperative Strategie

Bei der nicht-kooperativen Strategie spielen alle Spieler gegeneinander und gehen daher keine bindende Verträge ein. (vgl. [5]) Dabei hat kein Spieler vor, seine Strategie zu ändern. (vgl. [4])

3.3.5 Die dominante Strategie

Eine Strategie heißt dominant für einen Spieler i , wenn sie ihm den höchsten Nutzen im Vergleich zu allen anderen Strategien bringt. Dabei ist nicht wichtig, wie sich die

Gegenspieler entscheiden. Für einen Spieler i setzen wir

$$\Sigma_{-i} := \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \in \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_{i-1} \times \Sigma_{i+1} \times \dots \times \Sigma_n\} \quad (3.3)$$

Falls $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \in \Sigma_{-i}$ und $\sigma_i \in \Sigma_i$, dann sei

$(\sigma_i, \sigma_{-i}) := (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$. (vgl. [13]) Eine dominante Strategie wird daher definiert als:

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}, \forall \sigma'_i \in \Sigma_i. \quad (3.4)$$

Desweiteren kann man dominante Strategien in strikt und schwach unterteilen. Eine strikt dominante Strategie σ_i bringt die größte Auszahlung für einen Spieler i und eine Abweichung der Strategie führt zu keiner besseren Auszahlung: (vgl. [4])

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad \forall \sigma'_i \in \Sigma_i \text{ mit } \sigma'_i \neq \sigma_i, \quad (3.5)$$

wobei σ'_i eine alternative Strategie des Spielers i beschreibt. Ein Spieler wird sich demnach immer für so eine Strategie entscheiden. (vgl. [12])

Eine schwach dominante Strategie σ_i hat ein Spieler, wenn er bei jeder Strategiekombination einen gleich hohen oder größeren Nutzen hat als seine Gegenspieler und daher nicht kooperieren muss. Bei dieser Strategie hat der Spieler aber mehrere dominante Strategien zur Verfügung: (vgl. [4])

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad (3.6)$$

und

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}), \quad (3.7)$$

für mind. ein $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$. (vgl. [12])

Kann jeder Spieler $i \in I$ eine dominante Strategie σ_i wählen, so ist $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

ein Gleichgewicht, wie es später im Gefangenendilemma zu sehen sein wird. Im Gegensatz dazu ist eine dominierte Strategie die schlechtere Wahl, da alle anderen Strategien, unabhängig von den Gegenspielern, die bessere Entscheidung sind: (vgl. [13])

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \leq A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad (3.8)$$

Diese kann man wieder in strikt und schwach unterteilen. (vgl. [4])

Bei einer strikt dominierten Strategie σ_i hat ein Spieler i immer eine echt niedrigere Auszahlung, ganz gleich wie sich sein Gegenspieler entscheidet, im Vergleich zu einer alternativen Strategie σ'_i :

$$A_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < A_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}. \quad (3.9)$$

Solche Strategien werden von rationalen Spielern nie gewählt. (vgl. [12])

3.4 Einige topologische Begriffe

Um das Nash-Gleichgewicht zu erklären und daraufhin die Existenz zu beweisen, müssen einige Voraussetzungen und Definitionen gegeben sein, die hier zusammengefasst werden sollen, um einen genauen Überblick zu bekommen. Daher beschäftigt sich dieses Unterkapitel mit topologischen Begriffen für Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$.

Definition 1. *Eine Menge M heißt konvex, wenn jede Verbindungslinie zwischen zwei Elementen der Menge auch in der Menge enthalten ist.*

Nun sollen die ε -Kugeln definiert werden.

Definition 2. *Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$. Dann bezeichnen wir mit $B(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < \varepsilon\}$ die ε -Kugel mit Radius ε um x .*

Damit sollen jetzt offene und abgeschlossene Mengen sowie die Konvergenz definiert werden.

Definition 3. Eine Menge M heißt offen, falls es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B(x, \varepsilon) \subseteq M$ gilt.

Definition 4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^d$ und $a \in \mathbb{R}^d$. Wir sagen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a (und schreiben $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow a$), falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Definition 5. Eine Menge M heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass $a \in M$.

Zuletzt werden die Definitionen von kompakt erläutert.

Definition 6. Eine Menge M heißt kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung von M gibt.

Definition 7. Eine Menge M heißt folgenkompakt, falls es zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M eine Teilfolge gibt, die gegen ein Element aus M konvergiert.

Nachdem in metrischen Räumen eine Menge genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist, werden wir hier nur mit dem Begriff *folgenkompakt* arbeiten.

Satz 8. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Für den Beweis muss noch erwähnt werden, dass in $\mathbb{R}^d$ jede Cauchyfolge konvergiert.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ folgenkompakt. Angenommen M wäre nicht beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n| > n$. Offensichtlich hat diese Folge keine konvergente Teilfolge, womit wir einen Widerspruch erhalten. Also ist M beschränkt.

Jetzt sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M , die gegen ein $x \in \mathbb{R}^d$ konvergiert. Weil M folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dieser Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = y \in M$. Andererseits folgt aus $x_n \rightarrow x$, dass $x_{n_k} \rightarrow x$, und deshalb muss $x = y$ gelten. Da $y \in M$, ist auch $x \in M$, wodurch gezeigt ist, dass M abgeschlossen ist.

Es bleibt zu zeigen, dass jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ auch folgenkompakt ist. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ beschränkt und abgeschlossen, und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine

Folge in M . Zunächst kann man M mit endlich vielen Kugeln mit Radius 1 überdecken. Deshalb gibt es ein $y_1 \in \mathbb{R}^d$, sodass in $M \cap B(y_1, 1)$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Insbesondere gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in M \cap B(y_1, 1)$.

Jetzt werden wir mit Induktion zeigen, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $y_k \in \mathbb{R}^d$ gibt, sodass in $M \cap \bigcap_{j=1}^k B(y_j, \frac{1}{j})$ unendlich viele Folgenglieder liegen, und es ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ und $x_{n_k} \in M \cap \bigcap_{j=1}^k B(y_j, \frac{1}{j})$ gibt. Der Induktionsanfang wurde oben gemacht. Jetzt nehmen wir an, dass $k > 1$ und diese Aussage für $k-1$ gilt. Man kann $M \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} B(y_j, \frac{1}{j})$ durch endlich viele Kugeln mit Radius $\frac{1}{k}$ überdecken. Daher gibt es ein $y_k \in \mathbb{R}^d$, sodass in $M \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} B(y_j, \frac{1}{j}) \cap B(y_k, \frac{1}{k}) = M \cap \bigcap_{j=1}^k B(y_j, \frac{1}{j})$ unendlich viele Folgenglieder liegen. Somit gibt es auch insbesondere ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$ und $x_{n_k} \in M \cap \bigcap_{j=1}^k B(y_j, \frac{1}{j})$. Dadurch erhalten wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \in M \cap \bigcap_{j=1}^k B(y_j, \frac{1}{j})$. Wir zeigen jetzt, dass das eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{K} < \varepsilon$. Jetzt seien $k, I \geq K$. Es gilt daher $x_{n_k}, x_{n_I} \in B(y_K, \frac{1}{K})$. Somit ist $|x_{n_k} - x_{n_I}| \leq |x_{n_k} - y_K| + |y_K - x_{n_I}| < \frac{2}{K} < \varepsilon$. Also ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Nachdem in $\mathbb{R}^d$ jede Cauchyfolge konvergiert, gibt es ein $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Da M abgeschlossen ist, muss $x \in M$ gelten. Wir haben also eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gefunden, die gegen ein Element aus M konvergiert. Damit ist M folgenkompakt. $\square$

Satz 9. *Es sei Q_i die Menge der gemischten Strategien des Spielers i . Dann ist Q_i konvex und kompakt.*

Beweis. Sind $q_1, q_2 \in Q_i$ und ist $t \in [0, 1]$, dann ist $(tq_1 + (1-t)q_2)(\sigma) = tq_1(\sigma) + (1-t)q_2(\sigma) \in [0, 1]$ für jedes $\sigma \in \Sigma_i$. Weiters ist $\sum_{\sigma \in \Sigma_i} (tq_1 + (1-t)q_2)(\sigma) = t \sum_{\sigma \in \Sigma_i} q_1(\sigma) + (1-t) \sum_{\sigma \in \Sigma_i} q_2(\sigma) = t + (1-t) = 1$. Deshalb ist $tq_1 + (1-t)q_2 \in Q_i$ und Q_i ist daher konvex.

Ist $q \in Q_i$, dann ist $\sum_{\sigma \in \Sigma_i} q(\sigma)^2 \leq m$, wobei m die Anzahl der Elemente von Σ_i ist. Daher ist Q_i beschränkt. Jetzt sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Q_i mit $q_n \rightarrow q$. Fixiere ein $\sigma \in \Sigma_i$. Weil $q_n(\sigma) \in [0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $q(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(\sigma) \in [0, 1]$. Außerdem ist $\sum_{\sigma \in \Sigma_i} q(\sigma) = \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Sigma_i} q_n(\sigma) = 1$. Somit ist $q \in Q_i$ und deshalb ist Q_i abgeschlossen. Nach Satz 8 ist Q_i kompakt. $\square$

3.5 Das Nash-Gleichgewicht

Die beste Antwort eines Spielers bezeichnet eine Strategie, mit der dieser Spieler entweder die gleiche Auszahlung oder eine höhere im Vergleich zu seinen Gegenspielern bekommt. Ein Gleichgewicht sind Strategiekombinationen, die für die Spieler die bestmögliche Lösung darstellen. Das bedeutet, dass unter keinen Umständen der Spieler seine Wahl der Strategie ändern möchte. Es ist also die beste Antwort aller Spieler. (vgl. [6])

Das Nash-Gleichgewicht beschreibt somit einen Zustand, bei dem es der Spieler nicht notwendig hat, seine Strategie zu ändern, da er dadurch keinen Vorteil erzielt. (vgl. [8])

Um ein Gleichgewicht zu bestimmen, geht man davon aus, dass alle Spieler die beste Antwort wählen werden. (vgl. [6])

Bei einem nicht-kooperativen Spiel mit i Spielern bezeichnet $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ die Menge der Strategien. Ein Spieler muss nun seine gewählte Strategie nach ihrem Nutzen $u_i(x)$ durch eine stetige Nutzungsfunktion

$$u_i : \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

beurteilen. Wie bei 3.3 bezeichnen wir mit $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \in \Sigma_{-i}$ die Strategiekombinationen ohne diejenige des Spielers i , und wir nehmen an, dass die anderen Spieler an dieser Strategiekombination σ_{-i} festhalten. Damit Spieler i nun die beste Lösung erhält, muss er nun den Nutzen maximieren

$$\max_{\sigma_i \in \Sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}). \quad (3.11)$$

Nun kommt das Nash-Gleichgewicht ins Spiel. Zunächst definiere $\Sigma := \prod_{i=1}^n \Sigma_i$. Man nennt

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_i^*, \dots, \sigma_n^*) \in \Sigma \quad (3.12)$$

ein *Nash-Gleichgewicht*, falls

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma, \sigma_{-i}^*) \quad \forall \sigma \in \Sigma_i \quad \forall i \in I. \quad (3.13)$$

Das bedeutet, dass es für keinen Spieler eine Strategie von größerem Nutzen gibt.

σ_i^* ist die beste Lösung des Spielers i zu den Strategien der übrigen Spieler σ_{-i}^* . (vgl. [7])

Satz 10. *In strikt dominanten Strategien ist eine Lösung ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht.*

(vgl. [3])

Beweis. Der Beweis folgt aus der Definition der strikt dominanten Strategie. $\square$

(vgl. [3])

Um die Theorie zu veranschaulichen, folgt nun ein Beispiel zu den Gleichgewichten.

In der Abbildung unten sieht man folgendes. Die Auszahlungen von Spieler 1 sieht man in der Matrix immer auf der linken Seite oben stehen und die Auszahlungen von Spieler 2 sieht man immer rechts unten. In diesem Spiel ist das Gleichgewicht die Strategie {unten, rechts} also {4,4}, denn die Spieltheorie besagt, dass jeder rationale Spieler immer die beste Antwort wählen und daher seine Strategie nie ändern wollen würde. Würde nun der Spieler 1 seine Strategie von *unten* zu *oben* ändern, würde er eine Auszahlung von 0 statt 4 bekommen. Was noch zu erkennen ist, ist, dass beide Spieler auch zur Strategie {oben, links} wechseln wollen würden und dadurch die doppelte Auszahlung, nämlich 8 bekommen würden. Doch was geschieht dann bei dem Spieler 1? Hier sieht man, dass der Spieler 1 auf die Strategie *unten* wechseln wollen würde, da 10 höher ist als 8. Daher ist das kein Gleichgewicht, denn bei einem solchen, haben die Spieler kein Interesse, ihre Strategie ändern zu wollen. (vgl. [6])

		Spieler 2	
Spieler 1		links	rechts
	oben	8 8	0 10
	unten	10 0	4 4

Abbildung 3.4: Spiel

Wir haben hier das Nash-Gleichgewicht für reine Strategien definiert. Es kann auch für gemischte Strategien definiert werden. Dazu muss man in der obigen Definition nur Σ_i durch Q_i und Σ durch Q ersetzen, wobei $Q := \prod_{i=1}^n Q_i$.

Nun sei (I, Σ, A) ein Spiel mit n Spielern, wobei Σ für die reinen Strategien steht. Wie oben betrachten wir dafür die gemischten Strategien Q . Für ein $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q$ ist dann $\prod_{i=1}^n q_i(\sigma_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Strategiekombination $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Setze $q(\sigma_1, \dots, \sigma_n) := \prod_{i=1}^n q_i(\sigma_i)$. Als erwarteter Auszahlungsvektor ergibt sich daher

$$U(q) = \sum_{\sigma \in \Sigma} q(\sigma) A(\sigma). \quad (3.14)$$

3.5.1 Die Existenz des Nash-Gleichgewichts

In den nachfolgenden Kapiteln wird zu sehen sein, dass einige Spiele ein oder mehrere Nash-Gleichgewichte haben können. Ebenso gibt es Spiele, die kein Nash-Gleichgewicht haben. Um die Existenz des Nash-Gleichgewichts zu beweisen, wird nun der Existenzsatz von Nikaido-Isoda dargelegt, der auf den Fixpunktsatz von Kakutani basiert. Für die Grundlage dieses Beweises, braucht man die Beste-Antwort-Funktion. (vgl. [5])

Kennt ein Spieler i eine Strategiekombination $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i} := \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_{i-1} \times \Sigma_{i+1} \times \dots \times \Sigma_n$ von seinen Mitspielern, dann würde er aus seiner Strategiemenge Σ_i die bestmögliche, wenn σ_{-i} vorhanden ist, auswählen. Falls die bestmögliche Strategie s_i existiert, schreiben wir:

$$s_i \succeq_i |_{\sigma_{-i}} \sigma_i \text{ für alle } \sigma_i \in \Sigma_i, \quad (3.15)$$

falls $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ für alle $\sigma_i \in \Sigma_i$ gilt. (vgl. [5])

Durch die Nutzungsfunktion u_i für den Spieler i kann man [3.15](#) so formulieren, dass s_i ein Maximierer ist:

$$\max u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad (3.16)$$

sodass $\sigma_i \in \Sigma_i$. (vgl. [5])

σ_{-i} ist fest vorgegeben. $\mathcal{S}_i(\sigma_{-i})$ bezeichnet dabei die Menge aller Optimallösungen in [3.16](#) (vgl. [5])

Bei den beiden oben genannten Formeln, [3.15](#) und [3.16](#), kann man Σ_i durch Q_i ersetzen.

Definition 11. Die Abbildung $\sigma_{-i} \mapsto \mathcal{S}_i(\sigma_{-i})$ ist die beste Antwort des Spielers i auf die Strategiekombination σ_{-i} seiner Mitspieler. Die zusammengesetzte Abbildung $\sigma \mapsto \mathcal{S}(\sigma)$ mit $\mathcal{S}(\sigma) := \mathcal{S}_1(\sigma_{-1}) \times \cdots \times \mathcal{S}_m(\sigma_{-m})$ von Q in die Potenzmenge $\mathcal{P}(Q)$ wird als Beste-Antwort-Funktion bezeichnet.

(vgl. [5])

Um nun den Fixpunktsatz von Kakutani zu formulieren, müssen noch einige Begriffe erklärt werden.

Definition 12. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann nennt man eine Abbildung $f : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ eine Punkt-Menge-Abbildung.

(vgl. [5])

Wir betrachten das Spiel $\Gamma = (I, \Sigma, A)$, wobei I aus m Elementen besteht, für $i = 1, \dots, m$ die Menge Σ_i aus n_i Elementen besteht, und A der Vektor der Auszahlungs-

funktion A_i der einzelnen Spieler ist. Wie zuvor betrachten wir dann die gemischten Strategien Q . Es ist dann $Q_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$. Aus der Definition 11 folgt nun, dass die Funktion $\Phi(\sigma) := \mathcal{S}(\sigma)$ jedem Punkt $\sigma \in Q$ die Teilmenge $\mathcal{S}(\sigma) \in \mathcal{P}(Q)$ zuordnet, mit $Q \subseteq \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$. Man nennt Φ die Beste-Antwort-Funktion. (vgl. [5])

Definition. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Punkt-Menge-Abbildung $f : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ heißt abgeschlossen, wenn für je zwei konvergente Folgen $\{x_k\} \mapsto x$ in X und $\{y_k\} \mapsto y$ in $\mathbb{R}^m$ mit $y_k \in f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, dass $y \in f(x)$.

(vgl. [5])

Mit diesem Wissen kann man nun den Fixpunktsatz von Kakutani formulieren. Dieser wird nicht bewiesen, da er nur für das Verständnis vom eigentlichen Beweis von Nikaido-Isoda dient.

Satz 13. (Fixpunktsatz von Kakutani)

Sei X eine nichtleere, konvexe und kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die Abbildung $f : X \mapsto \mathcal{P}(X)$ sei abgeschlossen und die Mengen $f(x)$ sind für alle $x \in X$ nichtleer und konvex. Dann hat die Abbildung f einen Fixpunkt, demnach existiert ein $x^* \in X$ mit $x^* \in f(x^*)$.

(vgl. [5])

Jetzt wollen wir zeigen, dass ein Nash-Gleichgewicht ein Fixpunkt der Beste-Antwort-Funktion ist. (vgl. [5])

Satz 14. Es ist $\sigma^* \in Q$ genau ein Nash-Gleichgewicht, wenn $\sigma^* \in \mathcal{S}(\sigma^*)$ gilt.

Beweis. Sei σ^* ein Nash-Gleichgewicht. Es gilt für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$, dass σ_i^* ein Maximierer von $\max u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$ ist, sodass $\sigma_i \in Q_i$. Das bedeutet, dass $\sigma_i^* \in \mathcal{S}_i(\sigma_{-i}^*)$ und daher $\sigma^* \in \mathcal{S}(\sigma^*)$ ist. Umgekehrt sei $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*) \in \mathcal{S}(\sigma^*)$. Dann gilt $\sigma_i^* \in \mathcal{S}_i(\sigma_{-i}^*)$ für jedes i . Es ist daher $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma, \sigma_{-i}^*)$ für jedes $\sigma \in Q_i$ und für jedes $i \in I$, also ist σ^* ein Nash-Gleichgewicht. $\square$

(vgl. [5])

Jetzt muss man nur noch beweisen, dass Φ die Voraussetzungen des Satzes von Kakutani erfüllt. Hierfür benötigt man noch folgende Definition. (vgl. [5])

Definition. *D sei eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^p$. Eine Funktion $g : D \mapsto \mathbb{R}$ ist quasikonkav auf D , wenn für alle $x, y \in D$ gilt:*

$$g(x) \leq g(y) \implies g(x) \leq g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

(vgl. [5])

Satz 15. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ konvex und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine quasikonkave Funktion. Dann ist $D^* := \{x^* \in D : g(x^*) \geq g(x) \forall x \in D\}$ eine konvexe Teilmenge von D .*

(vgl. [5])

Beweis. Falls $D^* = \emptyset$ muss man nichts zeigen. Seien $x^*, y^* \in D^*$. Dann gilt $g(x^*) = g(y^*)$. Für $\lambda \in (0, 1)$ folgt wegen der Quasikonkavität von g , dass $g(x^*) \leq g(\lambda x^* + (1 - \lambda)y^*)$. Andererseits ist $g(x^*) \geq g(\lambda x^* + (1 - \lambda)y^*)$, da $x^* \in D^*$. Deshalb ist $g(x^*) = g(\lambda x^* + (1 - \lambda)y^*)$, also ist $\lambda x^* + (1 - \lambda)y^* \in D^*$. $\square$

(vgl. [5])

Mit dieser ganzen Vorarbeit kann man nun einen Spezialfall des Existenzsatzes von Nikaido-Isoda darlegen. Letzterer handelt in der allgemeinen Form über allgemeinere Spiele, die in dieser Arbeit nicht behandelt werden.

Satz 16. *(Existenzsatz von Nikaido-Isoda)*

Es sei $\Gamma := (I, \Sigma, A)$ ein Spiel in Normalform und Q seien die dazugehörigen gemischten Strategien. Dann hat das Spiel ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.

(vgl. [5])

Beweis. Definiere die Punkt-Menge-Abbildung $\Phi : Q \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ durch $\Phi(q) := \mathcal{S}(q) := \mathcal{S}_1(q_{-1}) \times \cdots \times \mathcal{S}_m(q_{-m})$. Die in (3.14) definierte Auszahlungsfunktion ist stetig und linear. Nachdem nach Satz 9 die Menge Q_i kompakt ist (offensichtlich ist Q_i auch nichtleer), sind für jedes $i \in I$ die nach (3.16) definierten Mengen $\mathcal{S}(Q_{-i})$ nichtleer und abgeschlossen. Außerdem ist $\mathcal{S}(Q_{-i})$ als Teilmenge der beschränkten Menge Q_i auch beschränkt. Somit folgt aus Satz 8, dass für jedes $i \in I$ die Menge $\mathcal{S}(Q_{-i})$ kompakt ist. Wegen der Linearität von U ist U_i quasikonkav für jedes $i \in I$. Nach Satz 15 ist für jedes $i \in I$ die Menge Q_i konvex. Daher ist die Menge $\mathcal{S}(q)$ als kartesisches Produkt der Mengen $\mathcal{S}(Q_{-i})$ nichtleer, kompakt und konvex.

Jetzt sei (q_k) eine Folge in Q mit $q_k \rightarrow q$ und (s_k) eine Folge mit $s_k \rightarrow s$ und $s_k \in \Phi(q_k)$. Dann gilt $U_i(s_{k,i}, q_{k,-i}) \geq U_i(q, q_{k,-i})$ für alle $q \in Q_i$ und alle $i \in I$. Für $k \rightarrow \infty$ und weil U stetig ist, ergibt sich $U_i(s_i, q_{-i}) \geq U_i(q, q_{-i})$ für alle $q \in Q_i$ und alle $i \in I$. Daher ist s_i für jedes $i \in I$ eine Lösung von (3.16). Also ist $s_i \in \mathcal{S}(Q_{-i})$ für alle $i \in I$, und deshalb $s \in \mathcal{S}(q) = \Phi(q)$. Somit ist Φ abgeschlossen. Nach dem Fixpunktsatz von Kakutani (Satz 13) gibt es ein $q^* \in Q$ mit $q^* \in \Phi(q^*) = \mathcal{S}(q^*)$. Aus Satz 14 folgt jetzt, dass q^* ein Nash-Gleichgewicht ist. $\square$

(vgl. [5])

4 Statische Spiele mit vollständiger Information

Nun werden verschiedene Arten von Spielen erarbeitet. Begonnen wird in diesem Kapitel mit den einfachen Spielen, in denen alle Spieler gleichzeitig und nur ein einziges Mal ihren Zug durchführen. Dies sind sogenannte statische Spiele. Zudem kennen alle Spieler ihre eigenen Auszahlungen und die ihrer Mitspieler. Daher hat man in dem Fall ein Spiel mit vollständiger Information. So weiß ein Spieler, dass, wenn er seine beste Strategie Σ gefunden hat, dass auch die anderen Spieler davon Bescheid wissen. Jedoch kann die Wahl der besten Antwort auch ein Problem darstellen. Es kann sein, dass es zwar möglich ist, die beste Antwort zu bestimmen ist, diese aber sehr ungünstig für die Spieler ist. Dann kann es wiederum sein, dass die beste Antwort nicht einmal bestimmbar ist, da es auch mehrere Gleichgewichte geben kann und die Lösung dann nicht eindeutig wäre. Dies soll nun näher betrachtet werden. (vgl. [6])

4.1 Spiele mit unproblematischen Gleichgewichten

Spiele mit unproblematischen Gleichgewichten sind es dann, wenn sie eindeutig sind und effiziente Strategiekombinationen besitzen. Das bedeutet, dass es nur ein Gleichgewicht besitzt und es keine bessere Strategie Σ gibt, bei der mindestens ein Spieler eine bessere Auszahlung, aber insgesamt keiner der Spieler eine schlechtere Auszahlung bekommen könnte. Ein effizientes Gleichgewicht besteht daher aus effizienten Strategiekombinationen.

Des Weiteren gibt es auch Spiele mit einem Gleichgewicht dominanter Strategien. Die

Strategiekombination enthält hier jeweils die dominante Strategie jedes Spielers und stellt die beste Antwort dar. Ist dies der Fall in einem Spiel, dann ist dieses Gleichgewicht auch das einzige in diesem Spiel und daher ein Nash-Gleichgewicht. Daraus folgt, dass jedes Gleichgewicht dominanter Strategien ebenfalls ein Nash-Gleichgewicht ist, aber nicht umgekehrt.

Ein anderes Beispiel für statische Spiele mit vollständiger Information sind diejenigen mit einem Gleichgewicht iterativer Dominanz. Bei einem solchen Gleichgewicht hat man dominierte Strategien, sprich eine Strategie mit geringerer Auszahlung, die von einer anderen Strategie dominiert wird. Diese Strategien sind demnach so schlecht, dass sie kein rationaler Spieler wählen würde. Eine solche Strategie wird aus der Strategiemenge gestrichen, sodass eine bestimmte Strategiekombination übrig bleibt und man das Gleichgewicht leichter bestimmen kann. Da man wiederholt Strategien streicht, ist dieses Verfahren iterativ. Führt man dies bis zum Ende durch, bekommt man das einzige Gleichgewicht dieses Spiels, das wiederum ein Nash-Gleichgewicht ist. Wichtig zu erwähnen ist, dass durch das Streichen dominierter Strategien das Gleichgewicht nicht verloren geht.

Doch wie soll ein Spieler handeln, wenn er weder Gleichgewichte dominanter Strategien noch iterativer Dominanz hat? Dafür soll das unten angeführte Beispiel eingeführt werden. (vgl. [6])

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 4	1 1
	mitte	4 2	2 7
	unten	3 6	3 1

Abbildung 4.1: Gleichgewichte finden

Hier sieht man, dass keiner der beiden Spieler eine dominante Strategie und auch keine dominierte Strategie besitzt. Aufgrund dessen gibt es kein Gleichgewicht dominanter oder iterativer Dominanz, denn die Spieler könnten sich wie folgt umentscheiden. Spieler 1 würde von Σ_{unten} (3) zu Σ_{mitte} (4) und schlussendlich zu Σ_{oben} (5) wechseln, wenn Spieler 2 Σ_{links} wählt. Wählt Spieler 2 Σ_{rechts} würde er von Σ_{oben} (1) zu Σ_{mitte} (2) und dann zu Σ_{unten} (3) wechseln. Genau so würde Spieler 2 seine Strategie von Σ_{rechts} (1) zu Σ_{links} (4 bzw. 6) wechseln, wenn der Spieler 1 Σ_{oben} bzw. Σ_{unten} wählt und von Σ_{links} (2) zu Σ_{rechts} (7), falls Spieler 1 Σ_{mitte} wählt. Das Ganze kann man sich auch bildlich mit Pfeilen vorstellen und dann sieht man sofort, dass bei der Strategiekombination {oben, links} kein Pfeil hinausführt und dies somit ein Nash-Gleichgewicht darstellt. Dieses Gleichgewicht ist demnach unproblematisch, da es effizient ist. Es gibt nämlich keine andere Strategiekombination, in der sich ein Spieler verbessern könnte ohne, dass sich die Strategie seines Mitspielers verschlechtern würde.

Man erkennt aber, dass in dem Fall nicht alle Spieler ihre höchstmögliche Auszahlung bekommen. Die höchste Auszahlung für Spieler 2 wäre nämlich bei der Strategiekombination {mitte, rechts} mit 7. Jedoch ist klar, dass dann der Spieler 1 die Strategie Σ_{unten} und nicht Σ_{mitte} wählt und dann hätte Spieler 2 nur mehr die Auszahlung 1.

Diesen Fall erlebt man auch oft im alltäglichen Leben. Der Supermarkt ist hierfür das beste Beispiel. Die höchste Auszahlung für den Kunden wäre, die Ware geschenkt zu bekommen und die höchste Auszahlung für den Supermarktbetreiber, wenn er für hohe Preise Waren anbietet, die der Kunde nicht haben möchte. So läuft es aber nicht und daher sind Menschen daran gewöhnt, nicht immer ihre höchste Auszahlung bekommen zu können. (vgl. [6])

4.2 Spiele mit problematischen Gleichgewichten

Problematische Gleichgewichte sind nicht eindeutig und nicht effizient. Das bedeutet, dass es mehrere Gleichgewichte gibt bzw. dass diese ineffizient sind. Wie ist nun bei mehreren Gleichgewichten vorzugehen?

Im ersten Fall gibt es nur ein effizientes Gleichgewicht und die restlichen sind ineffizient.

Hier entscheidet man sich selbstverständlich für das effiziente Gleichgewicht.

Ein weiterer Fall wäre, dass es mehrere effiziente Gleichgewichte gibt. Die Lösung ist nur dann bestimmbar, wenn eine Kommunikation zwischen den Spielern stattfindet und einer von ihnen seine Strategie Σ nennt. Dann kann sich der andere Spieler für die beste Antwort entscheiden. Komplizierter wird es, wenn die Kommunikation zwischen den Spielern nicht mehr reicht, da z.B. ein Interessenskonflikt besteht. Dazu folgt dann bei dem Kapitel der kooperativen Spieltheorie mehr.

Betrachtet wird nun ein Fall, in dem zwar nur ein Gleichgewicht existiert, dieses aber ineffizient ist. Hier gehört auch das Gefangenendilemma dazu, das genauer im Kapitel 11.1 behandelt wird. Zur Veranschaulichung dieses Falls wird nun ein Beispiel, das ein gesellschaftliches Problem anspricht, gezeigt. (vgl. [6])

		Spieler 2	
Spieler 1		Fahrrad	Auto
	Fahrrad	6 6	2 7
	Auto	7 2	3 3

Abbildung 4.2: Umweltproblem

Beide Personen haben das Ziel, bequem zur Arbeit zu kommen und dabei auf die Umwelt zu achten. Sie können also zwischen dem *Fahrrad* und dem *Auto* wählen. Wie der Abbildung 4.2 zu entnehmen ist, ist es beiden Spielern lieber, dass der andere das *Fahrrad* wählt und damit auf die Umwelt achtet, aber er selber mit dem *Auto* fährt. Die Strategiekombination {Auto, Auto} ist demnach eine dominante Strategie, da es für den Einzelnen bei den anderen Strategien keine bessere Auszahlung gibt. Würde Spieler 2 das *Fahrrad* wählen (Auszahlung 6 bzw. 2), dann würde Spieler 1 das *Auto* wählen, da er bei dieser Strategie Σ eine bessere Auszahlung bekommen würde, und zwar 7 statt 6. Selbes gilt auch umgekehrt. Würde aber Spieler 1 das *Auto* wählen (mit Auszahlung 7 bzw. 3), so würde das der Spieler 2 auch machen, damit seine Auszahlung die bestmögliche Antwort ist, nämlich 3 anstelle von 2. Diese Strategien Σ wären individuell betrachtet, die

bessere Wahl, aber kollektiv betrachtet, wäre es besser, wenn beide das *Fahrrad* wählen würden. Dieses Beispiel kann man auf die allgemeine Gesellschaft projizieren, denn viele denken so, wie es in dem Beispiel gezeigt worden ist. Sie behaupten, dass einer allein an der Umwelt nichts ändern würde. Genau so handeln aber viele Millionen Menschen und das macht sehr wohl einen Unterschied auf die Umwelt aus.

Anhand der Spieltheorie, kann man also gesellschaftliche Probleme aufzeigen, die allgemein gültig sind. (vgl. [6])

Nun gibt es auch Spiele, die kein Gleichgewicht haben. Ein Beispiel hierfür soll zeigen, wie man solche Spiele analysieren kann. (vgl. [6])

		Spieler 2	
		Kopf	Zahl
Spieler 1	Kopf	-1 +1	+1 -1
	Zahl	+1 -1	-1 +1

Abbildung 4.3: Spiel ohne Gleichgewicht

Ziel dieses Spiels ist es für Spieler 1, dass beide Münzen verschiedene Symbole zeigen, während es das Ziel für Spieler 2 ist, dass sie gleich sind. Dabei spielen beide Spieler gleichzeitig, da es ein statisches Spiel sein soll.

In diesem Beispiel sieht man, dass keine Strategiekombination zu einem Gleichgewicht führt, da man wieder Pfeile von der kleineren Zahl zur größeren Zahl pro Strategie einzeichnen könnte und dann sieht, dass aus jeder Strategiekombination ein Pfeil hinausführt. Das bedeutet dann, dass sich der Spieler umentscheiden würde und dies stellt kein Gleichgewicht dar. Nun kommt der Zufall ins Spiel.

Da die Spieler nun ihre Entscheidung nicht mehr selbstständig treffen, sondern sie dem Zufall überlassen, müssen die erwarteten Auszahlungen maximiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* bzw. für *Zahl* beträgt jeweils 0,5. Da ein Spielplan immer vollständig sein muss, ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten pro Spieler 1. (vgl. [6])

Beide Spieler werfen also ihre Münze und beide bekommen beispielsweise *Kopf*. Die Wahrscheinlichkeit für *Kopf* beträgt $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$. Das bedeutet, dass Spieler 1 verlieren würde. Alle anderen Kombination betragen ebenfalls eine Wahrscheinlichkeit von 0,25.

Die erwartete Auszahlung von Spieler 1 ist somit:

$$E(A_{\text{Spieler1}}) = 0,25 \cdot (-1) + 0,25 \cdot 1 + 0,25 \cdot 1 + 0,25 \cdot (-1) = 0$$

Analog ist die Auszahlung für Spieler 2. Das bedeutet, dass ihre erwartete Auszahlung Null beträgt und sie weder gewinnen noch verlieren. Dies stellt gemischte Strategien Q dar, da für eine Entscheidung ein Zufallsmechanismus zum Einsatz kommt. Bei reinen Strategien Σ ist dies nicht der Fall. Daher sind gemischte Strategien Q reine Strategien Σ , denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet worden ist. Eine einzelne Wahrscheinlichkeit darf dabei nicht kleiner als Null und nicht größer als 1 sein.

Wie kann man nun bei gemischten Strategien Q das Gleichgewicht bestimmen? Dafür wird folgendes Beispiel herangezogen. Die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers Q_{Kopf} zu wählen wird mit k_1 und die Wahrscheinlichkeit Q_{Zahl} zu wählen demnach mit $1 - k_1$ beschrieben. Analog beschreibt für den zweiten Spieler die Wahrscheinlichkeit k_2 , dass Q_{Kopf} und $1 - k_2$, dass Q_{Zahl} gewählt wird. Nun beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategiekombination $\{\text{Kopf}, \text{Kopf}\}$ gewählt wird, $k_1 \times k_2$.

Beide Spieler haben jedoch unendlich viele Möglichkeiten, wie sie ihre jeweiligen Strategien Q wählen können und somit auch unendlich viele mögliche erwartete Auszahlungen haben. Daher kann man dieses Spiel nicht mehr in einer Matrixform, wie bisher, darstellen, sondern man braucht etwas Anderes. Jetzt kommt die Funktion ins Spiel. Die Strategien Q von Spieler 1 werden auf der x-Achse und die des Spielers 2 auf der y-Achse abgetragen. Auf der Suche nach Gleichgewichten muss nun beachtet werden, dass sowohl die Strategie Q von Spieler 1 als auch von Spieler 2 beste Antworten auf die gegnerische Strategie Q sein müssen. Da die besten Antworten die Auszahlung eines Spielers maximieren, müssen die Funktionen abgeleitet werden. Der Schnittpunkt beider Funktionen ergibt dann das Gleichgewicht dieses Spiels. Haben die Funktionen mehrere Schnittpunkte, so haben sie auch mehrere Gleichgewichte. (vgl. [6])

Die erwarteten Auszahlungen von Spieler 1 bzw. von Spieler 2 schauen nun wie folgt aus:
(vgl. [6])

$$E(A_{Spieler1}) = k_1 \times k_2 \times (-1) + k_1 \times (1 - k_2) \times 1 + (1 - k_1) \times k_2 \times 1 + (1 - k_1) \times (1 - k_2) \times (-1) \quad (4.1)$$

bzw.

$$E(A_{Spieler2}) = k_1 \times k_2 \times 1 + k_1 \times (1 - k_2) \times (-1) + (1 - k_1) \times k_2 \times (-1) + (1 - k_1) \times (1 - k_2) \times 1 \quad (4.2)$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen erhält man:

$$E(A_{Spieler1}) = 2k_1 + 2k_2 - 4k_1k_2 - 1 \quad (4.3)$$

bzw.

$$E(A_{Spieler2}) = 4k_1k_2 - 2k_1 - 2k_2 + 1 \quad (4.4)$$

Zunächst sollen die besten Antworten von Spieler 1 analysiert werden. Dafür werden 3 Fälle gezeigt. (vgl. [6])

1. Fall: Angenommen, die Wahrscheinlichkeit k_2 des Spielers 2 Q_{Kopf} zu wählen, ist gering mit $k_2 = 0,2$. Dann ist die erwartete Auszahlung von Spieler 1:

$$E(A_{Spieler1}) = 2k_1 + 2k_2 - 4k_1k_2 - 1 = 2k_1 + 0,4 - 0,8k_1 - 1 = 1,2k_1 - 0,6$$

Dies stellt eine steigende Funktion dar (siehe Abbildung 4.4). (vgl. [6])

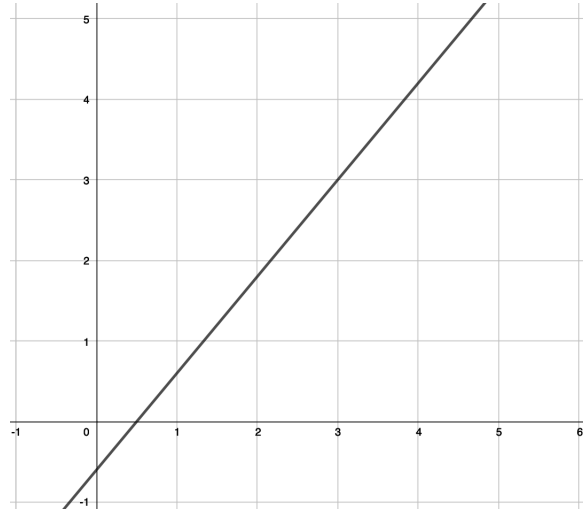


Abbildung 4.4: steigende Funktion

Es ist zu sehen, dass die Auszahlung von Spieler 1 steigt, wenn der Spieler seine Wahrscheinlichkeit k_1 für Q_{Kopf} erhöht. Daher sollte der erste Spieler den größtmöglichen Wert für k_1 wählen, nämlich 1. Das bedeutet, dass er mit Sicherheit Q_{Kopf} wählt, denn der Spieler 2 wählt nur mit geringer Wahrscheinlichkeit Q_{Kopf} . Spieler 2 wird also Q_{Zahl} wählen und da es das Ziel von Spieler 1 ist, unterschiedliche Symbole zu haben, ist es logisch für ihn, Q_{Kopf} zu wählen. (vgl. [6])

2. Fall: Angenommen, die Wahrscheinlichkeit k_2 des Spielers 2 Q_{Kopf} zu wählen, ist mittel mit $k_2 = 0,5$. Dann ist die erwartete Auszahlung von Spieler 1:

$$E(A_{Spieler1}) = 2k_1 + 2k_2 - 4k_1k_2 - 1 = 2k_1 + 1 - 2k_1 - 1 = 0$$

Dies stellt eine Nullfunktion dar (siehe Abbildung 4.5). (vgl. [6])

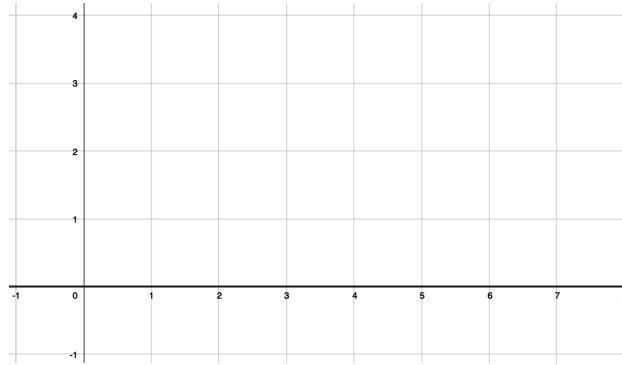


Abbildung 4.5: Nullfunktion

Dieser Fall zeigt, dass die Auszahlung von Spieler 1 immer Null ist, wenn Spieler 2 mit einer Wahrscheinlichkeit $k_2 = 0,5$ ins Spiel einsteigt. Daher ist es nicht von Bedeutung mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler 1 Q_{Kopf} oder Q_{Zahl} wählt. In diesem Fall wirft Spieler 2 seine Münze und lässt den Zufall entscheiden. (vgl. [6])

3. Fall: Angenommen, die Wahrscheinlichkeit k_2 des Spielers 2 Q_{Kopf} zu wählen, ist hoch mit $k_2 = 0,8$. Dann ist die erwartete Auszahlung von Spieler 1:

$$E(A_{Spieler1}) = 2k_1 + 2k_2 - 4k_1k_2 - 1 = 2k_1 + 1,6 - 3,2k_1 - 1 = -1,2k_1 + 0,6$$

Dies stellt eine fallende Funktion dar (siehe Abbildung 4.6). (vgl. [6])

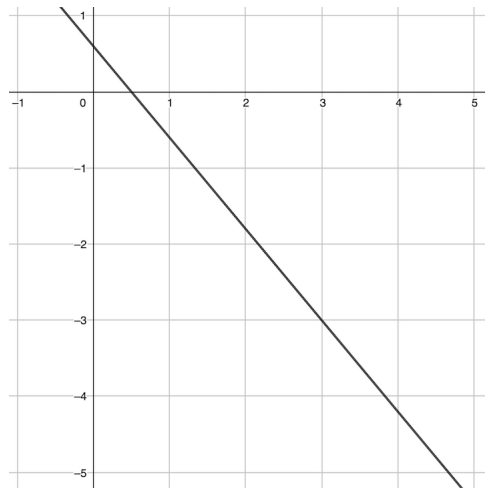


Abbildung 4.6: fallende Funktion

Im dritten Fall wählt der zweite Spieler mit hoher Wahrscheinlichkeit Q_{Kopf} und daher sollte der erste Spieler Q_{Zahl} nehmen. Die Wahrscheinlichkeit des Spielers 1 Q_{Kopf} zu wählen, ist daher $k_1 = 0$. (vgl. [6])

Diese Fälle kann man auch verallgemeinern. Wählt Spieler 2 mit einer Wahrscheinlichkeit $k_2 < 0,5 Q_{Kopf}$, dann sollte Spieler 1 mit hoher Wahrscheinlichkeit Q_{Kopf} wählen und er sollte Q_{Zahl} wählen, wenn der zweite Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit $k_2 > 0,5 Q_{Kopf}$ wählt. Wie in der Theorie oben erklärt, muss man nun die Ableitung der Funktion der erwarteten Auszahlung des Spielers 1 bilden: (vgl. [6])

$$\frac{dE(A_{Spieler1})}{dk_1} = 2 - 4k_2 \quad (4.5)$$

Diese Ableitung gibt an, wie sich die erwartete Auszahlung von Spieler 1 verändert, wenn die Wahrscheinlichkeit k_1 für Q_{Kopf} erhöht wird. (vgl. [6])

Für den ersten Fall bedeutet das, dass die Ableitung immer positiv ist.

$$2 - 4k_2 > 0 \quad (4.6)$$

genau dann, wenn $0 \leq k_2 < 0,5$.

Die erwartete Auszahlung für Spieler 1 steigt, wenn die Wahrscheinlichkeit k_1 erhöht wird. Er sollte daher den Wert $k_1 = 1$ wählen und Q_{Kopf} spielen. (vgl. [6])

Beim zweiten Fall ist die Ableitung Null und daher ist für die Wahrscheinlichkeit k_1 jeder Wert legitim, denn die erwartete Auszahlung hängt nicht von ihr ab. (vgl. [6])

$$2 - 4k_2 = 0 \quad (4.7)$$

genau dann, wenn $k_2 = 0,5$.

Zuletzt ist beim dritten Fall die Ableitung stets negativ.

$$2 - 4k_2 < 0 \quad (4.8)$$

genau dann, wenn $0,5 < k_2 \leq 1$.

Die erwartete Auszahlung des ersten Spielers fällt, wenn die Wahrscheinlichkeit k_1 erhöht wird. Er sollte demnach den Wert $k_1 = 0$ wählen und Q_{Zahl} spielen. (vgl. [6])

In der Abbildung [4.7](#) sind die Wahrscheinlichkeiten, die als Strategien Q interpretiert werden, eingetragen. Jeder Punkt im Diagramm ist daher eine Kombination von gemischten Strategien Q . Auf der waagrechten Achse sind die Wahrscheinlichkeiten für Q_{Kopf} von Spieler 1 eingetragen und auf der senkrechten, die von Spieler 2. Da die Strategien Q vollständig sind, weiß man automatisch, wenn sich Spieler 1 für eine Wahrscheinlichkeit für Q_{Kopf} entschieden hat, wie die Wahrscheinlichkeit für Q_{Zahl} lautet, da beide zusammen 1 bzw. 100 % ergeben.

Im ersten Fall wurde gezeigt, dass der erste Spieler die Wahrscheinlichkeit für Q_{Kopf} auf 1 setzen soll, wenn der Spieler 2 eine Wahrscheinlichkeit wählt, die kleiner ist als 0,5. Dies stellt im Koordinatensystem die senkrechte rote Linie rechts dar.

Der zweite Fall hat gezeigt, dass es ganz gleich ist, welche Wahrscheinlichkeit Spieler 1 für Q_{Kopf} wählt, wenn Spieler 2 eine Wahrscheinlichkeit von 0,5 für Q_{Kopf} wählt, also dem Zufall überlässt. Der erste Spieler kann also jede mögliche Wahrscheinlichkeit wählen und diese wird mit der waagrechten roten Linie dargestellt.

Der letzte Fall wird mit der linken senkrechten roten Linie dargestellt. Wenn Spieler 2 Kopf mit einer Wahrscheinlichkeit, die größer als 0,5 ist, wählt, sollte Spieler 1 Q_{Kopf} mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 wählen. Daraus folgt, dass er Q_{Zahl} wählen soll, mit einer Wahrscheinlichkeit von 1.

Analog funktioniert dies mit Spieler 2 und wird mit der schwarz strichlierten Linie dargestellt. (vgl. [6])

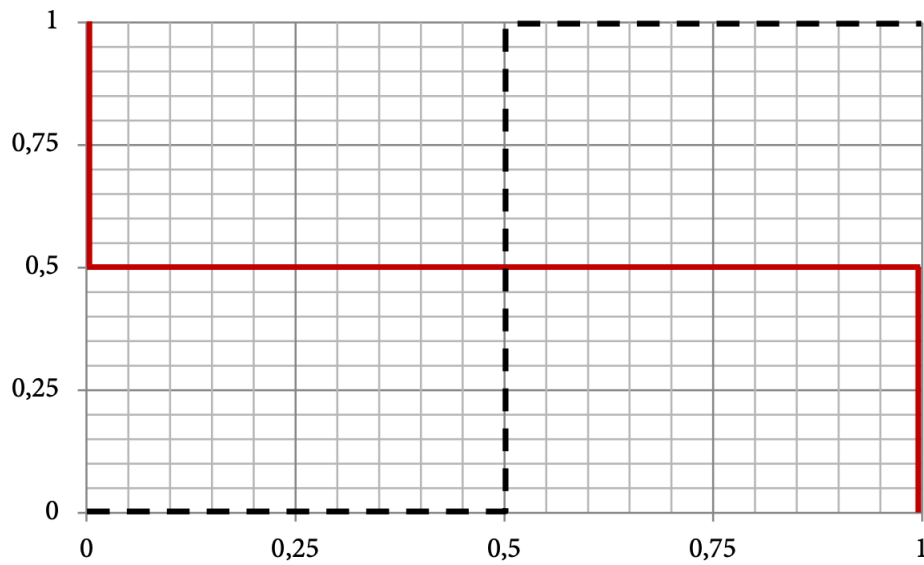


Abbildung 4.7: beste Antworten

Nun sieht man, dass sich die besten Antworten der beiden Spieler im Punkt $(0,5/0,5)$ schneiden. Das sind die gemischten Strategien $Q_{Spieler1} = \{0,5; 0,5\}$, die Wahrscheinlichkeit für Q_{Kopf} , und $Q_{Spieler2} = \{0,5; 0,5\}$, die Wahrscheinlichkeit für Q_{Zahl} . Diese Strategiekombination, also das jeweils beide Spieler mit einer 50 %-igen Wahrscheinlichkeit Q_{Kopf} bzw. Q_{Zahl} wählen, ist ein Gleichgewicht gemischter Strategien Q . Keiner der beiden Spieler würde nämlich seine Strategie Q ändern wollen und es ist gleichgültig, wie der Gegner handelt, wenn der andere mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % Q_{Kopf} bzw. Q_{Zahl} spielt. (vgl. [6])

Rechnerisch kann man das Gleichgewicht folgendermaßen finden. Dafür werden die Funktionen von oben herangezogen. Man bildet die Ableitung der erwarteten Auszahlungen. Die Auszahlungen der beiden Spieler lauten: (vgl. [6])

$$E(A_{Spieler1}) = 2k_1 + 2k_2 - 4k_1k_2 - 1 \quad (4.9)$$

$$E(A_{Spieler2}) = 4k_1k_2 - 2k_1 - 2k_2 + 1 \quad (4.10)$$

Bildet man nun die Ableitungen der beiden Funktionen, erhält man:

$$\frac{dE(A_{Spieler1})}{dk_1} = 2 - 4k_2 \quad (4.11)$$

$$\frac{dE(A_{Spieler2})}{dk_2} = 4k_1 - 2 \quad (4.12)$$

In dieser Ableitung kann man dann ablesen, wie sich die erwartete Auszahlung des ersten Spielers verändert, wenn er seine Wahrscheinlichkeit k_1 erhöht. Für den Fall, dass die Ableitung ungleich Null ist, bedeutet das, dass sich die Auszahlungen des Spielers verändern würden, wenn sich die Wahrscheinlichkeit für Q_{Kopf} erhöhen würde. Da es aber bei einem Gleichgewicht gemischter Strategien Q für keinen Spieler möglich ist auf seinen erwarteten Auszahlung einen Einfluss zu haben, muss man die Ableitung nun Null setzen. (vgl. [6])

$$\frac{dE(A_{Spieler1})}{dk_1} = 2 - 4k_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{dE(A_{Spieler2})}{dk_2} = 4k_1 - 2 = 0 \quad (4.14)$$

Dies ist der Fall, wenn $k_2 = 0,5$ bzw. $k_1 = 0,5$ ist. Das bedeutet, dass Spieler 2 für Q_{Kopf} eine Wahrscheinlichkeit von 0,5 wählen muss. Dies impliziert wiederum, dass Q_{Zahl} mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 gewählt wird. Daher lautet die beste gemischte Strategie Q von Spieler 2 bzw. von Spieler 1: (vgl. [6])

$$Q_{Spieler2} = \{0,5; 0,5\} \quad (4.15)$$

bzw.

$$Q_{Spieler1} = \{0,5; 0,5\} \quad (4.16)$$

Daher folgt daraus die Strategiekombination:

$$Q = \{Q_{Spieler1}; Q_{Spieler2}\} = \{\{0,5; 0,5\}; \{0,5; 0,5\}\} \quad (4.17)$$

Dies ist das Gleichgewicht der gemischten Strategien. (vgl. [6])

Alternativ kann man das Gleichgewicht auch mit einer Gleichung lösen.

Zu Beginn wurde erläutert, dass die Wahrscheinlichkeiten des zweiten Spielers für Q_{Kopf} k_2 und für Q_{Zahl} $(1 - k_2)$ lauten. Diese werden nun für die Berechnung herangezogen. Betrachtet werden jetzt die reinen Strategien Σ des ersten Spielers (siehe Abbildung 4.3). Wählt Spieler 1 die reine Strategie Σ_{Kopf} , dann schaut die erwartete Auszahlung des ersten Spielers wie folgt aus: (vgl. [6])

$$E(A_{Spieler1}(Kopf)) = k_2(-1) + (1 - k_2) \cdot 1 = 1 - 2k_2 \quad (4.18)$$

Für die reine Strategie Σ_{Zahl} , lautet die erwartete Auszahlung des Spielers 1:

$$E(A_{Spieler1}(Zahl)) = k_2 \cdot 1 + (1 - k_2)(-1) = 2k_2 - 1 \quad (4.19)$$

Da es aber für das Gleichgewicht gemischter Strategien Q keinen Unterschied macht, welche von den jeweiligen reinen Strategien Σ gewählt werden, müssen die Auszahlungen daher gleich sein. Somit gilt die Gleichung: (vgl. [6])

$$E(A_{Spieler1}(Kopf)) = E(A_{Spieler1}(Zahl)) \implies 1 - 2k_2 = 2k_2 - 1 \quad (4.20)$$

Wenn Spieler 2 nun für Q_{Kopf} $k_2 = 0,5$ wählt, ist diese Gleichung erfüllt. Daraus folgt, dass Q_{Zahl} ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit von 0,5 gewählt wird und das Gleichgewicht, wie oben, wurde gefunden. (vgl. [6])

Anhand dieses Beispiels sieht man, dass bei einer endlichen Anzahl von Spielern und einer endlichen Anzahl von Strategien Q stets ein Gleichgewicht existiert. Ist die Anzahl an Spielern bzw. Strategien Q jedoch zu groß, kann es sehr schwer werden, dieses Gleichgewicht zu finden. (vgl. [6])

5 Statische Spiele mit unvollständiger Information

Die nächste Art von Spielen, die nun behandelt wird, sind ebenso statische Spiele aber mit unvollständiger Information. Bei diesen kennen die Spieler die Auszahlungen der Gegner nicht und daher ist das Handeln derer mehr oder weniger zufällig, da sie nicht wissen, wie die anderen Spieler handeln werden. (vgl. [6])

Dies kommt im Alltag bei Firmen oft vor, denn sie wissen nicht, wie ihre Konkurrenten entscheiden werden. Jedes solcher Spiele hat bayesianisches Gleichgewicht, wie im Anschluss gezeigt wird.

Ein Beispiel soll diese Art von Spielen näher erläutern. Das Spiel nennt sich der Kampf der Geschlechter. Bei diesem Spiel geht es darum, dass zwei Partner unabhängig voneinander eine Entscheidung treffen müssen. Beide haben sich gern und wollen sich treffen. Der Frau ist es aber lieber sich zu einem *Konzert* zu verabreden als zum *Fußball*. Das herkömmliche Spiel mit zwei Nash-Gleichgewichten (siehe Abb. 5.1) wird so verändert, dass man nun nicht sofort das Gleichgewicht erkennt. Beim herkömmlichen Spiel sind die Gleichgewichte nämlich die Strategiekombinationen {Konzert, Konzert} und {Fußball, Fußball}. (vgl. [6], [11])

		Mann	
Frau		Konzert	Fußball
	Konzert	2 1	0 0
	Fußball	0 0	1 2

Abbildung 5.1: Kampf der Geschlechter - Standardspiel

In der Abbildung 5.2 sieht man folgende Änderungen:

Bei der Frau ändern sich die Auszahlungen nicht. Beim Mann hingegen schon, da er beispielsweise sauer auf die Frau geworden ist und sich nicht wirklich mit ihr treffen möchte. Er möchte aber weiterhin lieber zum *Fußball*, nur ohne die Frau. Deswegen ist seine höchste Auszahlung bei der Strategie $\Sigma_{\{Konzert, Fuball\}}$. In den reinen Strategien Σ gibt es für dieses Spiel nun kein Nash-Gleichgewicht. (vgl. [11])

		Mann	
Frau		Konzert	Fußball
	Konzert	2 0	0 2
	Fußball	0 1	1 0

Abbildung 5.2: Kampf der Geschlechter - modifiziertes Spiel

Das Problem ist nun, dass beide Spiele, das Standardspiel und das modifizierte, betrachtet werden. Die Frau weiß also nicht, wie der Mann entscheiden wird, da sie nicht weiß, ob er noch sauer ist oder nicht. Mit einer Wahrscheinlichkeit p ist der Mann nicht mehr sauer und möchte sich mit ihr treffen, so ist das erste Spiel zu betrachten. Ist der Mann aber noch sauer, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p$ der Fall ist, wird das zweite Spiel für die Analyse herangezogen. Wählt die Frau die Strategie $Q_{Konzert}$, dann würde der Mann im ersten Spiel auch das *Konzert* wählen. Im zweiten Spiel würde er sich aber für *Fußball* entscheiden. Kennt die Frau nun beide Wahrscheinlichkeiten, lauten

ihre Auszahlungen wie folgt: (vgl. [11])

$$A_{Frau}(K, KF) = p \cdot 2 + (1 - p) \cdot 0 = 2p \quad (5.1)$$

K steht hier für die Strategie Q der Frau und KF für die Strategien Q des Mannes der beiden Spiele. Je höher die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann nicht sauer ist und beim ersten Spiel bleibt, desto eher würde man die Strategie $Q_{Konzert}$ wählen.

Nun stellt sich noch die Frage, ob die Frau noch immer bei ihrer Strategie $Q_{Konzert}$ bleibt, obwohl der Mann vielleicht zum *Fußball* geht. Hierfür wird die Auszahlung der Frau bestimmt, wenn sie die Strategie $Q_{Fußball}$ wählen würde: (vgl. [11])

$$A_{Frau}(F, KF) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 1 = 1 - p \quad (5.2)$$

Daraus folgt, dass die Strategie $Q_{Konzert}$ die beste Antwort liefert, wenn $2p \geq 1 - p \Leftrightarrow p \geq 1/3$. Da die Strategie KF ebenso die beste Antwort auf K ist, bringt es dem Mann in keinem der beiden Spiele etwas, wenn er seine Strategie Q ändert. Daher ist (K,KF) ein bayesianisches Nash-Gleichgewicht. (vgl. [11])

6 Dynamische Spiele mit vollständiger Information

Dynamische Spiele sind Spiele, bei denen die Spieler nacheinander am Zug sind und die Auszahlungen der Mitspieler kennen. In diesem Kapitel werden nun Methoden vorgestellt, wie man bei diesen Spielen das Gleichgewicht finden kann. (vgl. [6])

6.1 Rückwärtsinduktion

Unter der Rückwärtsinduktion versteht man Spiele, bei denen die Spieler einer nach dem anderen ihre Spielzüge ausführen. Das bedeutet für den später ziehenden Spieler, dass er die jeweilige Strategie Q des anderen berücksichtigen kann. Hier muss der Spieler, der zuerst spielt, gut überlegen, welche Strategien Q der nächste Spieler wählt. Es wird also nicht vom Beginn des Spiels bis zum Ende analysiert, sondern das Ende wird zuerst betrachtet. Da die Reihenfolge der Analyse rückwärts verläuft, heißt die Methode Rückwärtsinduktion. Nun sind Darstellungen der Strategien Q bzw. Auszahlungen in einer Matrix nicht mehr sinnvoll, da der zeitliche Aspekt nicht gegeben ist. Wie bei Spielen in Extensivform kommt hier der Spielbaum zum Einsatz. Man beginnt daher vom Endpunkt des Spielbaums und arbeitet sich nach vorne. Dabei schaut man immer auf die Entscheidungsknoten, die zum selben Zeitpunkt gewählt werden können. (vgl. [6])

6.2 Teilspielperfektion

Ist es möglich, seine Mitspieler zu beeinflussen? Wie im alltäglichen Leben kann man mit Drohungen und Versprechungen Menschen dazu bringen, ihr Handeln zu überdenken. Damit arbeitet auch die Spieltheorie. (vgl. [6])

Definition. *Wenn eine Strategie Q eines Spielers teilspielperfekt ist, dann gibt es keine Spielzüge, die ihn in einem Entscheidungsknoten schädigen.*

(vgl. [6])

Aus der Definition folgt, dass ein Gleichgewicht teilspielperfekt ist, wenn alle Strategien Q in der jeweiligen Strategiekombination eines Gleichgewichts teilspielperfekt sind. (vgl. [6])

Mithilfe der Teilspielperfektion kann ein Spieler überprüfen, ob Versprechungen bzw. Drohungen tatsächlich umgesetzt werden. Das Spiel wird also in Teile zerlegt, das wie folgt vonstatten geht. Das Teilspiel fängt in einem Entscheidungsknoten an und geht so lange weiter bis man zu dem Endknoten gelangt, der von dem jeweiligen Entscheidungsknoten ausgeht. Der erste Entscheidungsknoten wird daher nicht dazugezählt. Für das bessere Verständnis wird das Finden eines teilspielperfekten Gleichgewichtes mittels Rückwärtsinduktion anhand eines Beispiels von Winter erklärt. (vgl. [6])

Bei diesem Spiel gibt es drei Spieler A, B und C, die jeweils die Strategie Q_{oben} oder Q_{unten} wählen können. Die Auszahlungen kann man bei den Endknoten ablesen. Die erste Auszahlung gehört zu Spieler A, die zweite zu Spieler B und die letzte zu Spieler C. Zum Beispiel, beim Endknoten K8 ist 5 die Auszahlung für A, 3 die Auszahlung für B und 8 die Auszahlung für C.

Begonnen wird nun beim Spieler C, da er als letzter am Zug ist. Folgende Züge würde Spieler C nicht wählen, da die Auszahlung gering ist: Nach dem Entscheidungsknoten K4 wird er CU nicht wählen, da 2 weniger ist als 8. Nach K5 wird er CU wählen, nach K6 wird er CO wählen und nach K7 wird er sich ebenfalls für CO entscheiden. Dies kann

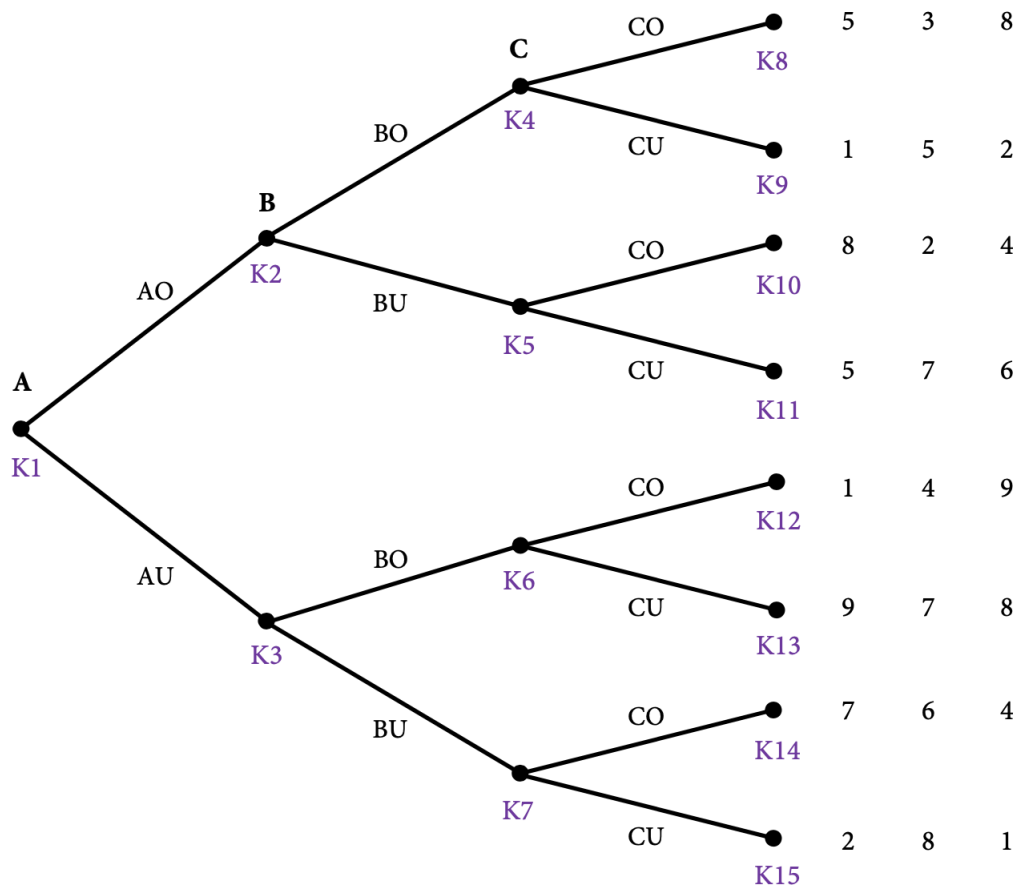


Abbildung 6.1: teilspielperfektes Gleichgewicht mit Rückwärtinduktion

man mit wenn, dann-Formulierungen angeben: Wenn K4, dann CO, wenn K5, dann CU, wenn K6, dann CO und wenn K7, dann CO.

Dasselbe wird nun für die anderen beiden Spieler fortgesetzt. Für Spieler B erhält man daher: Wenn K2, dann BU und wenn K3, dann BU. Wie kommt man darauf? Man muss nun folgenden Pfad beachten. Beim Knoten K4 wählt C den Zug CO, daher kommt für B nur der Pfad in Frage, der im Knoten K8 endet bzw. wenn C beim Entscheidungsknoten K5 ist und CU wählt, kommt nur der Pfad für B infrage, der im Endknoten K11 endet. Das bedeutet, man schaut jetzt nur auf diese beiden Wege. Beim ersten Weg hat B die Auszahlung 3 und beim zweiten die Auszahlung 7. Daher ist BU die richtige Wahl.

Für Spieler A ist der Zug AU optimal. Damit hat man das teilspielperfekte Gleichge-

wicht gefunden und das Spiel endet im Knoten K14. Jedoch sieht man, dass das kein effizientes Gleichgewicht ist, da die drei Spieler im Endknoten K13 höhere Auszahlungen bekommen würden. Eine Lösung für dieses Problem wäre somit auch das Eingehen in bindende Verträge. (vgl. [6])

Um nun zurück zu den Drohungen und Versprechungen zu kommen, wird nun untersucht, wann eine Drohung glaubwürdig sein kann. Eine Drohung ist nur dann glaubwürdig, wenn sie teilspielperfekt ist. Um das zu erreichen, müssen die Spieler ihre Auszahlungen bzw. ihre Spielzüge verändern, da Drohungen, die nicht teilspielperfekt sind, für rational denkende Menschen keinen Sinn haben. Wichtig dabei ist, dass der Gegenspieler die Drohung und ihre Glaubwürdigkeit kennt. (vgl. [6])

6.3 Spiele mit imperfekter Information

Bisher sind Spiele mit perfekter Information behandelt worden. Das sind Spiele, bei denen nur ein Spieler am Zug ist und alle Spieler die Züge der anderen kennen. Nun werden Spiele diskutiert, bei denen mehrere Spieler gleichzeitig am Zug sind und die Spieler nicht wissen, wie die anderen handeln. Das sind Spiele mit imperfekter Information. (vgl. [6])

Dafür wird nun folgende Situation betrachtet, in der mehrere Spieler gleichzeitig ihren Zug ausführen. In diesem Spiel spielen drei Spieler, Spieler 1, Spieler 2 und Spieler 3, gleichzeitig.

Die Auszahlung von Spieler 1 liest man immer oben links ab, von Spieler 2 in der Mitte und von Spieler 3 unten rechts. (vgl. [6])

Mithilfe der Rückwärtsinduktion wird das Spiel nun gelöst. Spieler 2 und 3 sollten Q_{oben} und Q_{links} wählen, wenn Spieler 1 Q_{hoch} wählt. Wählt Spieler 1 hingegen Q_{tief} , dann müssten Spieler 2 und 3 Q_{unten} und Q_{rechts} wählen. Jedoch bekommt Spieler 1, wenn er Q_{hoch} wählt eine Auszahlung von 3 und wenn er Q_{tief} wählt, bekommt er eine höhere Auszahlung, nämlich 4. Daher wählt Spieler 1 die Strategie Q_{tief} . (vgl. [6])

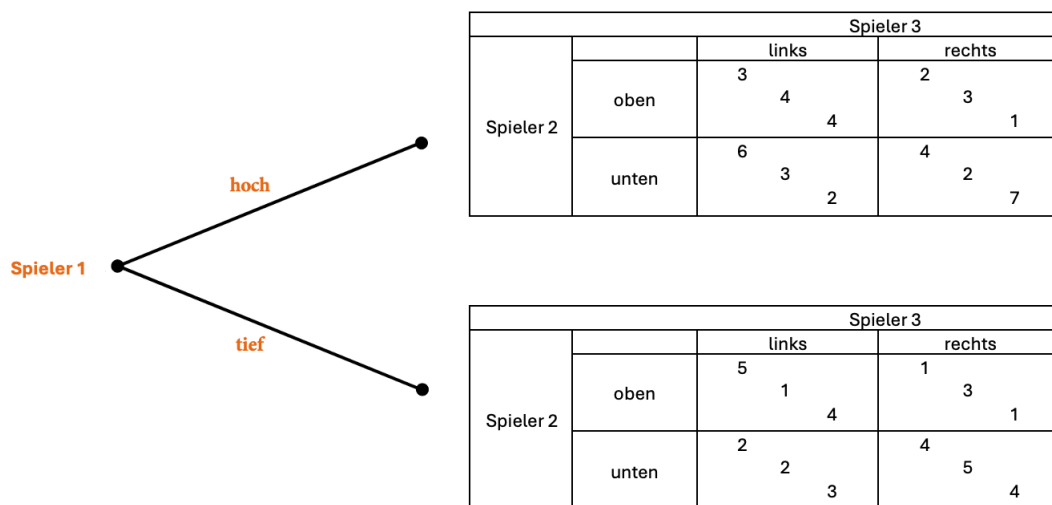


Abbildung 6.2: Spiel mit imperfekter Information

Somit hat das Spiel das teilspielperfekte Gleichgewicht {tief; oben falls hoch, unten falls tief; links falls hoch, rechts falls tief}. (vgl. [6])

In der nächsten Situation spielen nun zwei Spieler nacheinander, aber einer der beiden Spieler erhält keine Information über die vorangegangenen Züge des anderen. (vgl. [6])

Spieler 1 beginnt und Spieler 2 ist danach am Zug. Wenn der zweite Spieler dran ist, weiß er aber nicht, wie Spieler 1 gehandelt hat. Die gestrichelte Linie im Spielbaum deutet diese Ungewissheit an. (vgl. [6])

Angenommen die Spieler erhalten folgende Auszahlungen:

- im Endknoten $K4$ erhält Spieler 1 die Auszahlung 4 und Spieler 2 die Auszahlung 6
- im Endknoten $K5$ erhält Spieler 1 die Auszahlung 6 und Spieler 2 die Auszahlung 5
- im Endknoten $K6$ erhält Spieler 1 die Auszahlung 5 und Spieler 2 die Auszahlung 7
- im Endknoten $K7$ erhält Spieler 1 die Auszahlung 5 und Spieler 2 die Auszahlung 4

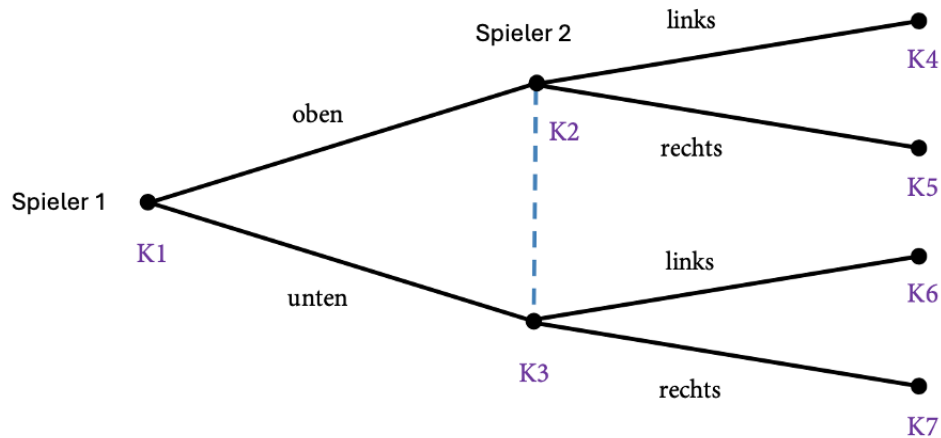


Abbildung 6.3: weiteres Spiel mit imperfekter Information

Jetzt würde Spieler 2 im Entscheidungsknoten $K2$ und $K3$ die Strategie Q_{rechts} streichen. Daher würde er die Strategie Q_{links} wählen, obwohl er nicht weiß, in welchem der beiden Knoten er sich befindet. Dasselbe Wissen hat auch Spieler 1 und deswegen ist es für ihn besser, die Strategie Q_{unten} zu wählen. Das Gleichgewicht lautet demnach $\{\text{unten, links}\}$. (vgl. [6])

7 Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

In diesem Kapitel werden dynamische Spiele mit unvollständiger Information behandelt. Wie schon erwähnt sind dynamische Spiele jene, bei denen die Spieler nacheinander spielen. Der Unterschied zwischen vollständiger und unvollständiger Information ist lediglich, dass die Spieler bei unvollständiger Information die Auszahlungen der anderen Mitspieler nicht kennen. Nun müssen die Spieler das Verhalten der Gegner genau beobachten. Um das Gleichgewicht zu ermitteln, müssen die Spieler daher die Wahrscheinlichkeiten einschätzen, mit denen die anderen Spieler ihre Strategien Q begründen würden. (vgl. [6])

Ein Beispiel soll dies wieder verdeutlichen.

Gespielt wird ein Spiel mit zwei Spielern A und B. Spieler A wählt zwischen den Zügen *oben* oder *unten*. Danach wählt Spieler B Q_{links} oder Q_{rechts} . Spieler B kann zwar sehen, welche Strategie Q Spieler A gewählt hat, er weiß aber nicht, welche Auszahlungen Spieler B kriegt, wenn er Q_{links} bzw. Q_{rechts} wählt. Nun gibt es auch unterschiedliche Typen in Spielen mit unvollständiger Information. Jede mögliche Auszahlungsfunktion steht für einen bestimmten Typen. In diesem Spiel gibt es für den Spieler B den Typ 1 und Typ 2. Für den Spieler A ist es aber zufällig, welcher Typ nun spielt. Der Zufall wird daher auch im Spielbaum dargestellt und dieser entscheidet, ob Spieler B Typ 1 oder Typ 2 ist. (vgl. [6])

In der Abbildung [7.1](#) ist dieser Spielbaum dargestellt. Die einzige Information, die dem Spieler B vorliegt, ist, dass er entweder in einem der Entscheidungsknoten $K4$ oder $K5$ oder in einem der Entscheidungsknoten $K6$ oder $K7$ ist. Die Informationsmenge, die dem Spieler B vorliegt, sind nicht unterscheidbare Entscheidungsknoten. Er weiß zwar, dass er sich in einem von ihnen befindet, aber nicht in welchem. Spieler B hat in diesem Fall zwei Informationsmengen, $\{K4, K5\}$ und $\{K6, K7\}$. Gekennzeichnet wird dies im Spielbaum mit den strichlierten Linien.

Hat Spieler 1 Q_{unten} gespielt, so ist der Spieler B in der Informationsmenge $\{K4, K5\}$ und sollte der Spieler 1 Q_{oben} spielen, so ist der Spieler B in der Informationsmenge $\{K6, K7\}$. Wichtig zu erwähnen ist, dass einer der vier Entscheidungsknoten von Spieler B zeitgleich gewählt wird. (vgl. [6])

Nun geht es ans Lösen dieses Spiels.

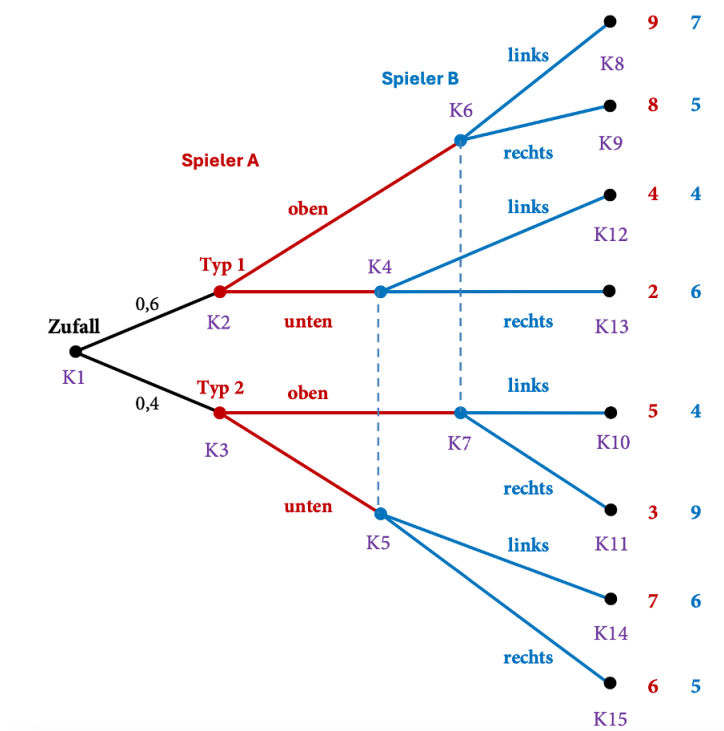


Abbildung 7.1: dynamisches Spiel mit unvollständiger Information

Eine Rückwärtsinduktion funktioniert bei diesem Spiel nicht. Angenommen Spieler B wäre im Entscheidungsknoten $K6$, dann würde man mit der Rückwärtsmethode die Strategie Q_{rechts} streichen können, da hier die Auszahlung kleiner ist als Q_{links} . Aber der Spieler B weiß nicht, ob er sich im Knoten $K6$ oder im Knoten $K7$ befindet. Würde er also Q_{rechts} streichen, so würde er das auch im Knoten $K7$ machen und hier wäre aber Q_{rechts} die bessere Strategie. Der Spieler weiß demnach nicht, welche Strategie Q , ob Q_{links} oder Q_{rechts} , er wählen soll, da er nicht sagen kann, in welchem Entscheidungsknoten er sich befindet. Daher funktioniert die Rückwärtsinduktion nicht. (vgl. [6])

Ist der Spieler A vom Typ 1, so sieht man, dass er mit der Strategie Q_{oben} mindestens die Auszahlung 8 bekommen würde und mit der Strategie Q_{unten} maximal 4. Daher würde er die dominante Strategie Q_{oben} wählen. Beim Typ 2 ist die dominante Strategie jedoch Q_{unten} . Beide Spieler erkennen das. Aufgrunddessen kann Spieler B daraus schließen, dass er im Entscheidungsknoten $K5$ ist, wenn Spieler A Q_{unten} spielt und im Knoten $K6$, wenn Spieler A Q_{oben} wählt.

Der Typ 1 wählt also immer Q_{oben} und deswegen ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $p(Typ\ 1\ und\ oben) = 0,6$, nämlich genau so groß wie für die Wahrscheinlichkeit $p(Typ\ 1)$. Analog geht das für den Typ 2. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit für Q_{unten} beträgt $p(Typ\ 2\ und\ unten) = 0,4$. (vgl. [6])

Mithilfe der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses unter der Bedingung, dass das Eintreten eines anderen Ereignisses bekannt ist, kann man nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der Typ 1 gespielt hat, wenn der Spieler B Q_{oben} gewählt hat. (vgl. [6])

$$p(Typ\ 1 \mid oben) = \frac{p(Typ\ 1\ und\ oben)}{p(oben)} = \frac{0,6}{0,6} = 1 \quad (7.1)$$

Das beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B im Entscheidungsknoten $K6$ ist,

wenn Spieler A Q_{oben} gespielt hat. Der Spieler B kann demnach mit 100 %-iger Sicherheit sagen, dass er nicht $K7$ wählen wird, wenn Spieler A Q_{oben} gewählt hat. Analog funktionieren die Schlussfolgerungen mit der Strategie Q_{unten} . Der Spieler B befindet sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 im Entscheidungsknoten $K5$, wenn Spieler A Q_{unten} wählt.

Im Knoten $K6$ wählt Spieler B auf jeden Fall Q_{links} , da die Auszahlung höher ist und im Knoten $K5$ wählt er aufgrund der höheren Auszahlung ebenso Q_{links} .

Nun kann die Rückwärtsinduktion angewendet werden und man kommt zu dem Entschluss, dass Spieler B immer Q_{links} wählen sollte, ganz gleich, ob Spieler A Q_{oben} oder Q_{unten} spielt. (vgl. [6])

Um das Gleichgewicht zu bestimmen, werden nun die Erkenntnisse zusammengefasst, um einen besseren Überblick über das Spiel zu haben.

Spieler A wählt die Strategie Q_{oben} , wenn er vom Typ 1 ist und er wählt Q_{unten} , wenn er vom Typ 2 ist.

Spieler B wählt immer Q_{links} , da er sicher annehmen kann, dass er sich im Entscheidungsknoten $K6$ befindet, wenn Spieler A vom Typ 1 ist und im Knoten $K5$, wenn er vom Typ 2 ist. (vgl. [6])

Die Auszahlungen von Spieler A vom Typ 2 werden jetzt vertauscht. Anstelle der Auszahlung 5 für die Strategiekombination (oben, links), wird nun 7 genommen und statt der Auszahlung 3 für die Strategiekombination (oben, rechts), hat man jetzt 6. Statt der Auszahlung 7 für die Strategiekombination (unten, links) nimmt man nun 5 und anstelle der Auszahlung 6 für die Strategiekombination (unten, rechts) hat man jetzt 3.

Durch diese Änderung ist für Spieler A die Strategie Q_{oben} nun immer eine dominante Strategie. Daher weiß Spieler B, dass Spieler A, ganz gleich welcher Typ er ist, niemals die Strategie Q_{unten} wählen würde. Jetzt weiß Spieler B aber nicht mehr, in welchem Entscheidungsknoten, ob $K6$ oder $K7$, er sich befindet, wenn Spieler A Q_{oben} spielt. Im Knoten $K6$ wäre es besser, wenn er Q_{links} wählt und im Knoten $K7$ Q_{rechts} . Dieses

Problem wird wieder mit der bedingten Wahrscheinlichkeit gelöst. Spieler B interessiert es nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler A vom Typ 1 ist. Dies wird, um eine bessere Übersicht zu bekommen, in einer Matrix dargestellt. (vgl. [6])

		Zug		
Spieler A		oben	unten	Gesamt
	Typ 1	0,6 p(Typ 1 und unten)	0 p(Typ 1 und unten)	0,6
	Typ 2	0,4	0	0,4
	Gesamt	1 p(oben)	0 p(unten)	1

Abbildung 7.2: bedingte Wahrscheinlichkeiten

Da der Spieler A niemals Q_{unten} wählen würde, sind diese Wahrscheinlichkeiten gleich 0. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sich Spieler B im Knoten $K6$ befindet, wenn Spieler A Q_{oben} gewählt hat, lautet: (vgl. [6])

$$p(Typ\ 1 \mid oben) = \frac{p(Typ\ 1\ und\ oben)}{p(oben)} = \frac{0,6}{1} = 0,6 \quad (7.2)$$

Der Spieler B ist demnach mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,4 im Knoten $K7$.

Im Knoten $K6$ wählt Spieler B aufgrund der höheren Auszahlung die Strategie Q_{links} und im Knoten $K7$ wählt er Q_{rechts} .

Die erwartete Auszahlung von Spieler B, wenn er Q_{links} wählt, beträgt, mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6, 7, denn die Wahrscheinlichkeit von 0,6 ist jene von Typ 1 und damit die Wahrscheinlichkeit für den Entscheidungsknoten $K6$. Im Knoten $K7$ ist er mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,4 und erhält die Auszahlung 4, wenn er Q_{links} wählt. Daher ist die erwartete Auszahlung für Q_{links} insgesamt: $E(B_{links}) = 0,6 \cdot 7 + 0,4 \cdot 4 = 5,8$. Wählt Spieler B Q_{rechts} , so beträgt seine erwartete Auszahlung: $E(B_{rechts}) = 0,6 \cdot 5 + 0,4 \cdot 9 = 6,6$.

Daher sollte Spieler B Q_{rechts} spielen. (vgl. [6])

Der Vollständigkeit halber nimmt man nun an, dass Spieler B sich sicher ist, dass Spieler A vom Typ 1 ist, wenn er nun doch nicht rational denkt und die Strategie Q_{unten} wählt. Dies muss geschehen, da sonst der Spielplan von Spieler B nicht vollständig durchdacht worden wäre und daher keine Strategie Q darstellen würde. Wenn Spieler B also annimmt, dass der Spieler A von Typ 1 ist, wenn er Q_{unten} spielt, so wählt er im Knoten $K4$ Q_{rechts} . Damit ist das Gleichgewicht eines dynamischen Spiels mit unvollständiger Information gefunden worden. Spieler A wählt die Strategie Q_{oben} , sowohl wenn er von Typ 1, als auch, wenn er von Typ 2 ist. Spieler B wählt die Strategie Q_{rechts} , wenn Spieler A Q_{oben} spielt und er wählt ebenfalls Q_{rechts} , wenn Spieler A Q_{unten} spielen sollte. (vgl. [6])

8 Spiele ohne Informationen

Bisher wurden Spiele mit vollständiger oder unvollständiger Information behandelt. Im ersteren kennen die Spieler die Auszahlungen der Gegner und im letzteren kennen sie die Auszahlungen nicht. Sie kennen höchstens die Wahrscheinlichkeiten der Auszahlungen und können dann damit fortfahren. Wenn man aber nun nichts über die Auszahlungen der Mitspieler weiß, muss man anders agieren. Zur Illustration wird folgendes Beispiel herangezogen: (vgl. [6])

		Spieler 2	
Spieler 1		links	rechts
	oben	4 ?	5 ?
	unten	1 ?	3 ?

Abbildung 8.1: Spiel ohne Informationen

Der Spieler 1 kennt die Auszahlungen von Spieler 2 nicht und kann daher keine Schlüsse darüber ziehen, wie Spieler 2 handeln könnte. Nun ist es unmöglich, Gleichgewichte zu ermitteln, da man die besten Antworten des zweiten Spielers nicht weiß und keine Strategie Q aufstellen kann.

Die Analyse dieses Spiel funktioniert nur beim ersten Spieler. Dieser hat eine dominante Strategie, nämlich die Strategie Q_{oben} . Daher sollte er diese Strategie wählen. So einfach zu lösen ist das Spiel aber nur, wenn eine dominante Strategie, wie in diesem Fall, existiert. Falls keine dominante Strategie vorhanden ist, muss er sich an einigen anderen Regeln bedienen. Diese werden nun näher beleuchtet. (vgl. [6])

8.1 Minimax-Regel

Die Minimax-Regel besagt, dass ein Spieler das Minimum seiner Auszahlungen maximieren soll. Folgendes Beispiel soll diese Theorie nun erklären:

Die drei Strategien in Abbildung 8.2 sind Q_{oben} , Q_{mitte} und Q_{unten} . Die minimalste Auszahlung der Strategie Q_{oben} beträgt 0, die der Strategie Q_{mitte} beträgt 2 und die kleinste Auszahlung von Q_{unten} ist 1. Von diesen Auszahlungen ist 2 das Maximum. Daher sollte der Spieler die Strategie Q_{mitte} wählen. Diese Regel macht jedoch nur Sinn, wenn sich die höchsten Auszahlungen nicht allzu drastisch voneinander unterscheiden. (vgl. [6])

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 ?	0 ?
	mitte	3 ?	2 ?
	unten	1 ?	3 ?

Abbildung 8.2: Minimax-Regel

Der Gegenpart dieser Methode wäre die Maximax-Regel. Hier wird die Strategie Q gewählt, die die maximale Auszahlung maximiert (siehe Abb. 8.3). Folgt man dieser Regel, so müsste man die Strategie Q_{oben} wählen, da sie von den höchsten Auszahlungen (500, 3, 300) das Maximum ist.

Die minimalen Auszahlungen (0, 2, 1) unterscheiden sich hier nämlich kaum und sind daher unbedeutsam. (vgl. [6])

		Spieler 2	
Spieler 1		links	rechts
	oben	500 ?	0 ?
	mitte	3 ?	2 ?
	unten	1 ?	300 ?

Abbildung 8.3: Maximax-Regel

Unterscheiden sich jedoch auch die minimalen Auszahlungen drastisch, wie in Abb. [8.4](#), so sind beide Regeln keine gute Wahl der Entscheidungsfindung. Zwar ist in diesem Spiel noch immer die Strategie Q_{oben} nach der Maximax-Regel, diejenige, die gewählt werden sollte, aber es ist zu erkennen, dass die Maxima sich nicht wirklich großartig voneinander unterscheiden, die Minima hingegen schon. Daraus kann man schließen, dass die Minimax-Regel zu pessimistisch und die Maximax-Regel zu optimistisch ist. Bei der Minimax-Regel beachtet man nämlich die hohen Auszahlungen, die möglichen wären, nicht, während man bei der Maximax-Regel die niedrigen Auszahlungen riskiert. Der individuelle Spieler könnte diesem Problem entgegenwirken, indem er den Bereich der Auszahlungen eingrenzt. Dies ist jedoch nicht verallgemeinerbar. (vgl. [6])

		Spieler 2	
Spieler 1		links	rechts
	oben	500 ?	-10 000 ?
	mitte	400 ?	100 ?
	unten	200 ?	300 ?

Abbildung 8.4: beide Regeln im Vergleich

9 Nullsummenspiele

Unter Nullsummenspielen versteht man in der Spieltheorie folgendes. Der Gewinn eines Spielers ist der Verlust des anderen Spielers. (vgl. [6]) Addiert man die Auszahlungen der Spieler, so erhält man immer Null. Da sich die Spieler eigentlich immer gegenseitig schaden wollen, ist es sinnvoll mit der Minimax-Regel vorzugehen. (vgl. [4])

Definition. Ein Nullsummenspiel ist ein Spiel $\Gamma := (I, \Sigma, A)$, so dass für jede Strategie $\sigma_i \in \Sigma_i$ die Auszahlungssumme $\sum_{i \in I} a_i(\sigma_i) = 0$ ist.

(vgl. [6])

Um ein Nullsummenspiel zu lösen, muss nun der Begriff des Sattelpunktes einer Funktion definiert werden, da die zwei eng miteinander verknüpft sind. Jedoch benötigt man nun eine Definition, die von der üblichen Definition abweicht. Nicht jeder Sattelpunkt im üblichen Sinn muss ein Sattelpunkt nach dieser Definition sein. (vgl. [6])

Definition. Sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion mit zwei Variablen x und y . Dann ist der Punkt $(x^*, y^*) \in X \times Y$ ein Sattelpunkt der Funktion f , falls gilt:

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y \quad (9.1)$$

(vgl. [6])

Satz 17. Sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion mit zwei Variablen x und y und seien $(x^*, y^*), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ Sattelpunkte der Funktion f . Dann sind auch $(x^*, \tilde{y})$ und $(\tilde{x}, y^*)$ Sattelpunkte von f und es gilt:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x^*, y^*) = f(x^*, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, y^*) \quad (9.2)$$

(vgl. [6])

Beweis. Beide Punkte sind Sattelpunkte, daher erhält man:

$$f(x^*, \tilde{y}) \leq f(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq f(\tilde{x}, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, \tilde{y})$$

Da die beiden äußeren Werte dieser Ungleichung dieselben sind, folgt:

$$f(x^*, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(\tilde{x}, y^*) = f(x^*, y^*)$$

$(\tilde{x}, y^*)$ ist ein Sattelpunkt von f , denn es gilt für beliebiges $(x, y) \in X \times Y$:

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) = f(\tilde{x}, y^*) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq f(\tilde{x}, y)$$

Analog gilt dies für $(x^*, \tilde{y})$. □

(vgl. [6])

Nun kann man Sattelpunkte von stetigen Funktionen auf kompakten Mengen mit einer min - max - Eigenschaft beschreiben. (vgl. [6])

Satz 18. Seien X und Y kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ bzw. $\mathbb{R}^{n_2}$ und sei $f : X \times Y \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $(x^*, y^*) \in X \times Y$ genau dann ein Sattelpunkt von f , wenn gilt:

$$\max_x \min_y f(x, y) = f(x^*, y^*) = \min_y \max_x f(x, y) \quad (9.3)$$

(vgl. [6])

Beweis. Sei $(x^*, y^*) \in X \times Y$ ein Sattelpunkt von f , dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y^*) &\leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y \\ &\implies \max_x f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq \min_y f(x^*, y) \\ &\implies \min_y \max_x f(x, y) \leq f(x^*, y^*) \leq \max_x \min_y f(x, y) \end{aligned}$$

Da aber allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \max_x f(x, y) &\geq f(\tilde{x}, y) \text{ für alle } \tilde{x} \in X \text{ und } y \in Y \\ &\implies \min_y \max_x f(x, y) \geq \min_y f(\tilde{x}, y) \text{ für alle } \tilde{x} \in X \\ &\implies \min_y \max_x f(x, y) \geq \max_x \min_y f(x, y) \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ansätzen folgt [9.3](#).

Die Gültigkeit von [9.3](#) wird vorausgesetzt:

$$\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y)$$

Setze $F(x) := \min_y f(x, y)$ und $G(y) := \max_x f(x, y)$ und seien x^* und y^* Punkte, an denen das Maximum von F bzw. das Minimum von G angenommen werden. Dann gilt:

$$\max_x \min_y f(x, y) = F(x^*) = \min_y f(x^*, y) \leq f(x^*, y^*)$$

$$\min_y \max_x f(x, y) = G(x^*) = \max_x f(x, y^*) \geq f(x^*, y^*)$$

Daraus folgt:

$$\max_x f(x, y^*) = f(x^*, y^*) = \min_y f(x^*, y)$$

und daraus folgt

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

□

(vgl. [6])

Mit diesem Wissen kann man jetzt zum Nullsummenspiel übergehen. In dieser Arbeit werden Zweipersonen-Nullsummenspiele behandelt.

Sei ein Zweipersonen-Nullsummenspiel gegeben durch

$$\Gamma = ((1, 2), \Sigma_1 \times \Sigma_2, (a_1, a_2)),$$

wobei $a_2 := -a_1$ gilt und die Auszahlungsfunktion darstellt. Diese setzt man nun $a := a_1 = -a_2$. Statt der Strategiemenge $\Sigma_1 := \{\sigma_1^i | i = 1, \dots, p\}$ bzw. $\Sigma_2 := \{\sigma_2^j | j = 1, \dots, n\}$ schreibt man diese nun kurz mit $\Sigma_1 := \{1, \dots, p\}$ bzw. $\Sigma_2 := \{1, \dots, n\}$. Die Auszahlungsfunktion a wird durch die $(p \times n)$ -Matrix dargestellt und ist die Auszahlungsmatrix dieses Spiels:

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, p; j=1, \dots, n}$$

mit $a_{i,j} := a(i, j)$. Dabei sind A die Auszahlungen von Spieler 1 und $-A$ die Auszahlungen von Spieler 2. Durch diese Angabe sind solche Spiele eindeutig festgelegt, denn die Zeilenindizes geben die Strategiemenge von Spieler 1 an und die Spaltenindizes diejenigen von Spieler 2. (vgl. [6])

Satz 19. Sei Γ ein Zweipersonen-Nullsummenspiel. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

- a) (i^*, j^*) ist ein Nash-Gleichgewicht von Γ
- b) (i^*, j^*) ist ein Sattelpunkt der Funktion a
- c) Es gilt: $\max_i \min_j a_{ij} = a_{i^*j^*} = \min_j \max_i a_{ij}$.

Beweis. Zuerst soll die Äquivalenz a) $\iff$ b) bewiesen werden:

(i^*, j^*) sei ein Nash-Gleichgewicht

$$\iff a_1(i^*, j^*) \geq a_1(i, j^*) \forall i \wedge a_2(i^*, j^*) \geq a_2(i^*, j) \forall j$$

(nach der Definition des Nash-Gleichgewichts)

$$\iff a_1(i^*, j^*) \geq a_1(i, j^*) \forall i \wedge a_1(i^*, j^*) \leq a_1(i^*, j) \forall j \text{ (da } a_2 = -a_1)$$

$$\iff a_1(i, j^*) \leq a_1(i^*, j^*) \leq a_1(i^*, j) \forall i, \forall j \text{ (da } a = a_1)$$

(i^*, j^*) ist ein Sattelpunkt.

Nach dem Satz 18 ist (i^*, j^*) genau dann ein Sattelpunkt, wenn die Bedingung in c) erfüllt ist. □

(vgl. [6])

10 Kooperative Spiele

In diesem Kapitel werden erstmals Spiele behandelt, in denen bindende Verträge möglich sind. Bisher waren diese nicht erlaubt, denn bei den nicht-kooperativen Spielen ist es den Spielern nicht möglich, miteinander zu kommunizieren.

Zunächst sollte definiert werden, was bindende Verträge überhaupt sind. Darunter versteht man Verträge, die sich auf die Wahl der Strategien Q stützen. Die Spieler können demnach vereinbaren, welche Strategien Q sie verfolgen und dadurch die Auszahlungen bestimmen, die die jeweiligen Spieler somit erhalten werden. Das Ziel des Einzelnen ist es, immer seine Auszahlung zu maximieren. Wenn es nun aber nicht möglich ist, dass alle Spieler gleichzeitig ihre Auszahlungen maximieren, kommt es zu einem Konflikt. (vgl. [6])

Für die kooperative Spieltheorie gibt es einige Regeln, an die sich die Spieler halten sollten. Die erste Optimalitätsregel lautet, dass die Spieler nur solche Verträge eingehen sollen, die effiziente Auszahlungskombinationen beinhalten. Das bedeutet, dass es in der Verhandlungsmenge keine andere Auszahlungskombination gibt, die für einen Spieler besser und für den anderen schlechter wäre.

Die zweite Regel bzw. Forderung ist die nach der Vernünftigkeit. Die Spieler sind individuelle, rationale Wesen und sollten daher keinen Vertrag eingehen, mit dem sie schlechtere Auszahlungen bekommen würden als ohne bindenden Vertrag. (vgl. [6])

Wann ist nun ein Spieler in einer guten Verhandlungsposition? Zum einen ist er das, sobald es negative Folgen für den Gegner hätte, wenn seine Verhandlung nicht gelingen würde. Denn dann würde dieser Spieler eher der Verhandlung seines Mitspielers zustimmen. Zum

anderen ist dies der Fall, wenn man nicht viel verliert, sollte die Verhandlung scheitern. Das tritt ein, wenn der Spieler eine hohe Mindestauszahlung bekommen kann. (vgl. [6])

Ein weiteres Konzept, das angerissen werden muss, ist jenes der Verhandlungsmacht. Wenn ein Spieler mächtig ist, dann bedeutet das, dass er das Ergebnis der Verhandlung zu seinem Gunsten steuern kann und somit ein hohes Beeinflussungspotenzial besitzt. Die Summe der Machtfaktoren ist dabei genau so groß wie die Anzahl der Spieler. (vgl. [6])

Um nun ein kooperatives Spiel zu lösen, wurden von Nash vier Axiome postuliert. (vgl. [6])

A 1 (Effizienzaxiom). *Die Lösungen liegen auf dem effizienten Rand der Verhandlungsmenge.*

A 2 (Symmetrieaxiom). *Alle Spieler erhalten dieselbe Auszahlung, wenn alle Spieler in derselben Situation sind. Es gibt also keine Unterschiede bei den Auszahlungen der Spieler und auch keine Unterschiede in der Verhandlungsmacht.*

A 3 (Linearitätsaxiom). *Die Lösung ändert sich nicht, wenn der Nutzen der Spieler durch eine lineare Transformation verändert wird.*

A 4 (Unabhängigkeitsaxiom). *Die Verhandlungslösung hängt nicht von den vorher gestrichenen, nicht relevanten Alternativen ab. Somit hat eine Verkleinerung der Verhandlungslösung keinen Einfluss auf die Lösung, wenn die ursprüngliche Lösung in der Verhandlungsmenge vorhanden ist.*

Mithilfe von diesen Axiomen soll nun folgendes Spiel von Winter analysiert und gelöst werden:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 0	1 1
	unten	1 1	0 5

Abbildung 10.1: kooperatives Spiel mit Nash-Axiomen lösen

Grafisch schaut die Lösung wie folgt aus:

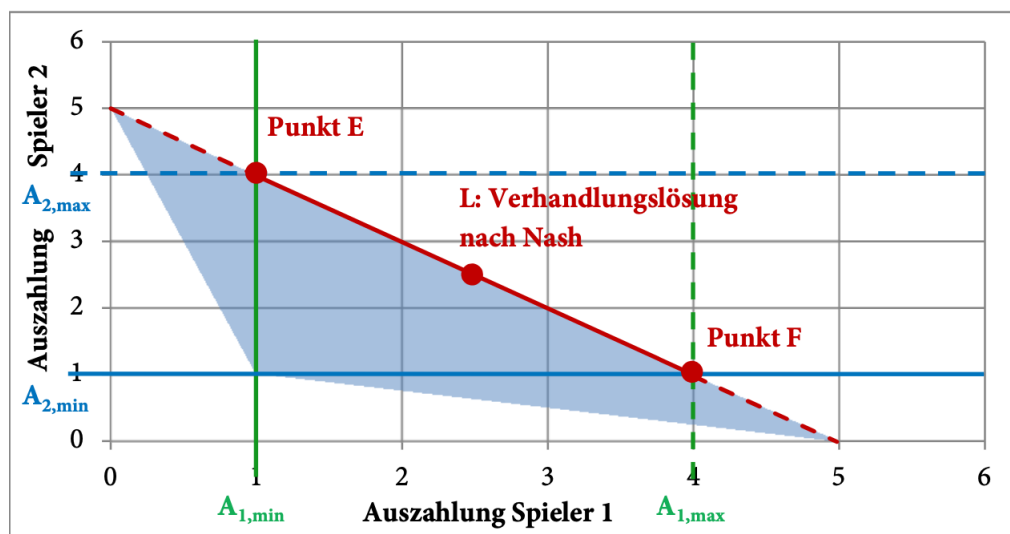


Abbildung 10.2: grafische Verhandlungslösung nach Nash

Man trägt die Auszahlungen in das Koordinatensystem ein. Die x-Achse stellt die Auszahlungen von Spieler 1 dar und die y-Achse, die von Spieler 2. Das dadurch entstandene Dreieck stellt die Verhandlungsmenge dar, in der die Auszahlungskombinationen erreicht werden können. Da die Spieler auch gemischte Strategien Q spielen können, muss man auch die möglichen Auszahlungskombinationen innerhalb dieses Dreieck berücksichtigen. Die Mindestauszahlung, die die beiden Spieler bekommen würden, ist 1. Gekennzeichnet wird dies durch eine senkrechte Linie $A_{1,min}$ bzw. eine waagrechte Linie $A_{2,min}$. Die daraus resultierenden maximalen Auszahlungen $A_{1,max}$ bzw. $A_{2,max}$ ergeben sich aus dem

Schnittpunkt der Mindestauszahlung und dem effizienten Rand der Verhandlungsmenge. Der Punkt E stellt dabei die hohe Verhandlungsmacht des Spielers 2 dar und der Punkt F, die von Spieler 1. In der Mitte dieser beiden Punkte befindet sich die Lösung und beide Spieler haben die gleiche Macht an diesem Punkt. Die Mindestauszahlung für beide Spieler ist 1 und die Maximalauszahlung 4. Addiert man die beiden und nimmt davon die Hälfte, da man die Lösung in der Mitte findet, erhält man 2,5. Somit würden beide Spieler eine Auszahlung von 2,5 bekommen. (vgl. [6])

Nun soll die Lösung rechnerisch mit der Methode von Nash berechnet werden.

Sei A_1 die Auszahlung von Spieler 1 und A_2 die Auszahlung von Spieler 2, unter der Bedingung, dass sich die beiden Spieler auf eine Strategie Q geeinigt haben. Die Differenz $A_1 - A_{1,min}$ zeigt an, um wie viel sich Spieler 1 bei einer Einigung besser stellt, als wenn sie sich nicht einigen würden. Analog gilt das für Spieler 2. Man multipliziert diese beiden Differenzen und bezeichnet das Produkt als $Z = (A_1 - A_{1,min})(A_2 - A_{2,min})$.

Diese Funktion wird nun maximiert. Dabei muss beachtet werden, dass die Auszahlungen nicht kleiner sein dürfen als die Mindestauszahlungen. Wenn das nämlich der Fall wäre, wäre dies nicht mit der individuellen Rationalität verträglich. Im vorhin erwähnten Beispiel beträgt die Mindestauszahlung beider Spieler 1. Das kann man nun in der Funktion einsetzen und erhält: $Z = (A_1 - 1)(A_2 - 1)$.

Die Werte für die Auszahlung müssen in der Verhandlungsmenge vorhanden sein, sonst wäre es nicht möglich die Auszahlung zu erhalten. Die Auszahlungskombination muss zudem auf dem effizienten Rand liegen. Im obigen Beispiel lautet die Funktion dafür: $A_2 = 5 - A_1$. Das kann man nun in die Funktion Z einsetzen und erhält: (vgl. [6])

$$Z = (A_1 - 1)(A_2 - 1) = (A_1 - 1)(5 - A_1 - 1) = 5A_1 - A_1^2 - 4 \quad (10.1)$$

Jetzt wird die erste Ableitung dieser Funktion gebildet, um das Maximum bestimmen zu können. Diese Funktion wird Null gesetzt. (vgl. [6])

$$\frac{dZ}{dA_1} = 5 - 2A_1 = 0 \quad (10.2)$$

Somit muss $A_1 = 2,5$ sein, damit die Gleichung erfüllt ist. Diesen Wert kann man nun in die Funktion des effektiven Randes einsetzen und erhält dann: $A_2 = 5 - A_1 = 5 - 2,5 = 2,5$.

Um zu zeigen, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt, setzt man nun den erhaltenen Wert und die Randwerte in die Funktion Z ein. Es wäre hier $Z(2,5) = 2,25$ und bei den Randwerten $Z(1) = Z(4) = 0 < 2,25$ und daher ist bei $A_1 = 2,5$ wirklich ein Maximum.

Damit ist die Lösung nun auch rechnerisch gezeigt worden. (vgl. [6])

Zu bedenken sollte man aber, dass durch das Symmetrieaxiom die Differenz $A_1 - A_{1,min}$ bzw. $A_2 - A_{2,min}$ gleichmäßig bei der Maximierung der Funktion Z einbezogen werden muss. Daher gibt es in dem Spiel keine Macht, da kein Spieler den Wert der Differenz erhöhen kann. Will man also Machteffekte analysieren, muss man auf dieses Axiom verzichten. Daraus ergibt sich folgende Funktion, die nun gewichtete Differenzen hat: (vgl. [6])

$$Z_M = (A_1 - A_{1,min})^{M_1} (A_2 - A_{2,min})^{M_2} \quad (10.3)$$

Dabei sei M_1 bzw. M_2 die Macht von Spieler 1 bzw. Spieler 2. Diese dürfen nun nicht 1 sein, da sie sonst wieder gleich mächtig wären. Da zu Beginn schon erläutert worden ist, dass die Summe der Machtfaktoren nur so groß sein kann wie die Anzahl der Spieler, gilt bei diesem Spiel mit zwei Spielern: $M_1 + M_2 = 2$. Das kann man noch umformen und erhält daraufhin $M_2 = 2 - M_1$. Weiters soll auch $M_1 \geq 0$ und $M_2 \geq 0$ gelten. Dieses Ergebnis kann man jetzt auch in die Gleichung 10.3 einsetzen: (vgl. [6])

$$Z_M = (A_1 - A_{1,min})^{M_1} (A_2 - A_{2,min})^{2-M_1} \quad (10.4)$$

Diese Funktion soll jetzt maximiert werden. Dabei muss beachtet werden, dass $A_1 + A_2 =$

5 ist. Daher erhalten wir: $Z_M(A_1) = (A_1 - 1)^{M_1}(4 - A_1)^{2-M_1}$

Dafür muss man die partielle Ableitung bezüglich A_1 berechnen und nullsetzen, um das Extremum, also das Maximum zu bestimmen. (vgl. [6])

Die partielle Ableitung von $Z_M(A_1)$ schaut wie folgt aus: (vgl. [6])

Mit Hilfe der Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ setzen wir: $f(A_1) = (A_1 - 1)^{M_1}$ und $g(A_1) = (4 - A_1)^{2-M_1}$. Die Ableitungen sind:

$$f'(A_1) = M_1(A_1 - 1)^{M_1-1} \quad (10.5)$$

$$g'(A_1) = (2 - M_1)(4 - A_1)^{1-M_1} \cdot (-1) = -(2 - M_1)(4 - A_1)^{1-M_1} \quad (10.6)$$

Mit der Produktregel erhält man:

$$Z'_M(A_1) = M_1(A_1 - 1)^{M_1-1}(4 - A_1)^{2-M_1} - (2 - M_1)(A_1 - 1)^{M_1}(4 - A_1)^{1-M_1} \quad (10.7)$$

Um nun die kritischen Punkte zu finden, setzt man diese Ableitung gleich Null:

$$Z'_M(A_1) = 0.$$

$$M_1(A_1 - 1)^{M_1-1}(4 - A_1)^{2-M_1} = (2 - M_1)(A_1 - 1)^{M_1}(4 - A_1)^{1-M_1} \quad (10.8)$$

Man kann beide Seiten, falls $A_1 \neq 1$ bzw. $A_1 \neq 4$, durch $(A_1 - 1)^{M_1-1}(4 - A_1)^{1-M_1}$ dividieren und erhält dann:

$$M_1(4 - A_1) = (2 - M_1)(A_1 - 1) \quad (10.9)$$

Im weiteren Schritt löst man nach A_1 auf und erhält ein Extremum:

$$\begin{aligned}
M_1(4 - A_1) + (2 - M_1)(A_1 - 1) &= 0 \\
4M_1 - M_1A_1 + 2A_1 - 2 - M_1A_1 + M_1 &= 0 \\
4M_1 + M_1 - 2 &= A_1(2 - 2M_1) \\
A_1 &= \frac{4M_1 + M_1 - 2}{2 - 2M_1} \\
A_1 &= \frac{3M_1 + 2}{2} = \frac{3M_1}{2} + 1
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Offensichtlich ist $Z_M\left(\frac{3M_1}{2} + 1\right) \geq 0$. Für die Randwerte erhält man $Z_M(1) = Z_M(4) = 0 \leq Z_M\left(\frac{3M_1}{2} + 1\right)$. Somit hat man ein Maximum an der Stelle $A_1 = \frac{3M_1}{2} + 1$. (vgl. [6])

Nun wird auch die grafische Interpretation der Lösung gezeigt. Die Auszahlung der beiden Spieler hängt von der Mindestauszahlung und von der Maximalauszahlung ab. Die Differenz der beiden Auszahlungen wird mit $D_1 = A_{1,max} - A_{1,min}$ für den Spieler 1 bzw. $D_2 = A_{2,max} - A_{2,min}$ für den Spieler 2 angegeben. Betreffend der Lösung kriegt jeder Spieler seine Mindestauszahlung $A_{1,min}$ bzw. $A_{2,min}$ und einen Anteil der Differenz D_1 bzw. D_2 . Der Anteil ist direkt proportional zum Machtanteil, der wie folgt definiert wird: $M_1/(M_1 + M_2)$ für Spieler 1 bzw. $M_2/(M_1 + M_2)$ für Spieler 2. Die Auszahlung schaut dann folgendermaßen aus: (vgl. [6])

$$A_1 = A_{1,min} + \frac{M_1}{M_1 + M_2} D_1 \tag{10.11}$$

bzw.

$$A_2 = A_{2,min} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} D_2 \tag{10.12}$$

Da die Summe der Machtvariablen die Anzahl der Spieler sein soll, in dem Fall daher $M_1 + M_2 = 2$, kann man die Auszahlung auch angeben als: (vgl. [6])

$$A_1 = A_{1,min} + 0,5M_1D_1 \tag{10.13}$$

bzw.

$$A_2 = A_{2,min} + 0,5M_2D_2 \quad (10.14)$$

Angenommen der Spieler 1 hat eine Macht von 1,5 und Spieler 2 demnach 0,5. Dann erhält man: (vgl. [6])

$$A_1 = A_{1,min} + 0,5M_1D_1 = 1 + 0,5 \cdot 1,5 \cdot 3 = 3,25 \quad (10.15)$$

bzw.

$$A_2 = A_{2,min} + 0,5M_2D_2 = 1 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 3 = 1,75 \quad (10.16)$$

In der Abbildung [10.3](#) sieht man die Lösung dieses Spiels. Die Auszahlung für Spieler 1 beträgt 3,25 und für Spieler 2 beträgt sie 1,75. (vgl. [6])

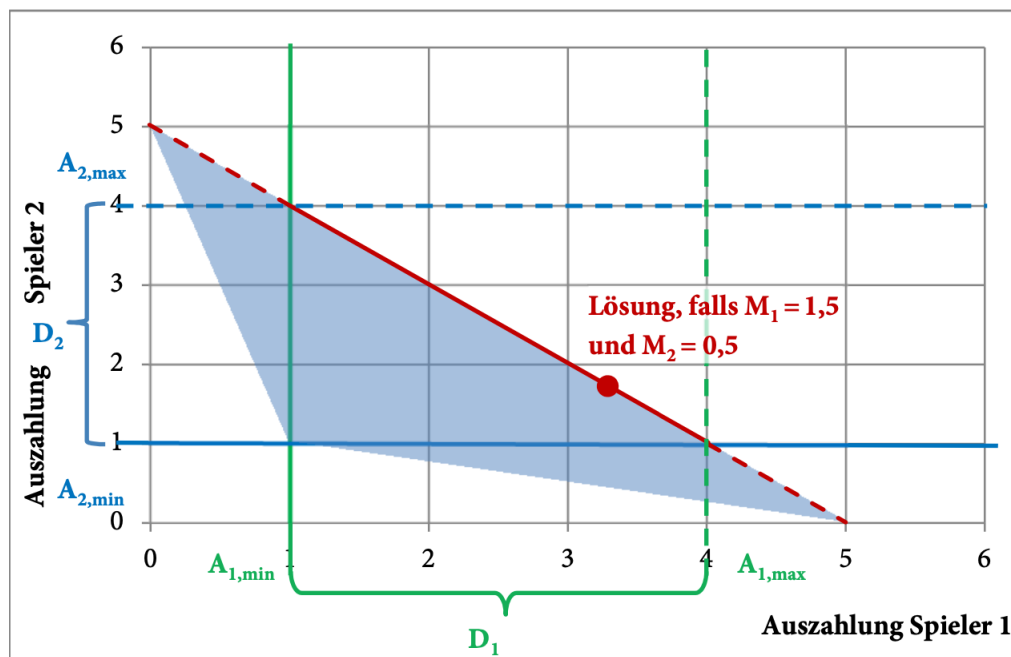


Abbildung 10.3: grafische Interpretation der Lösung

Sollte ein Spieler die komplette Macht haben, dann erhält er auch seine maximale Auszahlung und der Gegner dafür nur noch die Mindestauszahlung. (vgl. [6])

In der kooperativen Spieltheorie geht es also darum, dass sich die Spieler einigen können, wenn eine Auszahlungskombination zustande kommt, mit der mindestens ein Spieler gut abschneidet und der andere dabei aber nicht schlechter abschneidet, als er es bei der nicht-kooperativen Lösung machen würde. Daher werden immer effiziente Lösungen gefunden. (vgl. [6])

10.1 Koalitionsspiele

Bisher wurden Spiele behandelt, in denen jeder Spieler für sich selbst verhandelt. Nun sollen Spiele betrachtet werden, bei denen die Spieler Koalitionen eingehen können. (vgl. [6])

Unter Koalitionen K versteht man Teilmengen von Spielern, die sich vereinen. Es ist zulässig, dass die gesamte Spielermenge eine Koalition darstellt und dass kein Spieler eine Koalition eingeht. (vgl. [6])

Eine Koalitionsfunktion $w(K)$ ist eine Auszahlungsfunktion, die beschreibt, wie hoch die Auszahlung der jeweiligen Koalition ist. Diese Auszahlung ist eine gemeinsame Auszahlung, d.h. der Wert der Auszahlung muss dann auf die Spieler aufgeteilt werden. (vgl. [6])

10.1.1 Der Shapley-Wert

Der Shapley-Wert wurde nach dem Nobelpreisträger der Wirtschaftswissenschaften Lloyd S. Shapley benannt. Um diesen Wert zu verstehen, muss zunächst definiert werden, was der marginale Beitrag des Spielers ist. (vgl. [6])

Definition. *Der marginale Beitrag eines Spielers I ist eine zusätzliche Auszahlung, die eine bereits bestehende Koalition erhalten kann, wenn dieser Spieler in die Koalition aufgenommen wird.*

(vgl. [6])

Wenn ein Spieler zu mehreren Koalitionen hohe marginale Beiträge beitragen kann, dann ist er bei vielen Koalitionen beliebt und sollte daher hohe Auszahlungen bekommen. Der Shapley-Wert beschreibt nun ein Lösungskonzept, mit dem die Auszahlung von allen Spielern berechnet werden kann. Diese Auszahlung ist der Durchschnitt der marginalen Beiträge, die ein Spieler zu den Koalitionen beitragen kann. (vgl. [6])

Ein Beispiel soll dies nun näher erläutern.

Angenommen ein Spiel besteht aus drei Spielern A, B und C. Folgende Koalitionen K sind möglich: (vgl. [6])

- $K = \emptyset$
- $K = \{A\}$
- $K = \{B\}$
- $K = \{C\}$
- $K = \{A, B\}$
- $K = \{A, C\}$
- $K = \{B, C\}$
- $K = \{A, B, C\}$

Für dieses Beispiel werden nun folgende Werte für die Koalitionsfunktion $w(K)$ genommen: (vgl. [6])

- $K = \emptyset \Rightarrow w(K) = 0$
- $K = \{A\} \Rightarrow w(K) = 10$
- $K = \{B\} \Rightarrow w(K) = 5$
- $K = \{C\} \Rightarrow w(K) = 20$

- $K = \{A, B\} \Rightarrow w(K) = 18$
- $K = \{A, C\} \Rightarrow w(K) = 34$
- $K = \{B, C\} \Rightarrow w(K) = 28$
- $K = \{A, B, C\} \Rightarrow w(K) = 44$

Nun kann man sich die Einzelkoalitionen in der Koalitionskombination anschauen und daraus die Gesamtauszahlung der Koalitionskombination berechnen.

Die Einzelpersonenkoalitionen $\{A\}$, $\{B\}$ und $\{C\}$ bilden die Koalitionskombination $(\{A\}, \{B\}, \{C\})$ und wegen den Werten der Koalitionsfunktion ergibt sich für diese Koalitionskombination die Auszahlung $w(\{A\}) + w(\{B\}) + w(\{C\}) = 10 + 5 + 20 = 35$. Das bedeutet, wenn keiner eine Koalition mit den anderen Spieler eingeht, beträgt die Gesamtauszahlung 35. Die Gesamtauszahlung für jede mögliche Koalitionskombination wird nun hier aufgelistet: (vgl. [6])

- $\{A\}, \{B\}, \{C\} \Rightarrow 10 + 5 + 20 = 35$
- $\{A\}, \{B, C\} \Rightarrow 10 + 28 = 38$
- $\{B\}, \{A, C\} \Rightarrow 5 + 30 = 35$
- $\{C\}, \{A, B\} \Rightarrow 20 + 18 = 38$
- $\{A, B, C\} \Rightarrow 44$

Nun sieht man, dass die höchste Gesamtauszahlung erreicht wird, wenn alle drei Spieler eine Koalition eingehen. Jetzt stellt sich nur noch die Frage, wie die Gesamtauszahlung auf die drei Spieler aufgeteilt werden soll. Hier kommt dann der Shapley-Wert ins Spiel. Um den Shapley-Wert zu ermittelt, geht man wie folgt vor. Zunächst überlegt man sich, in welcher Reihenfolge die Spieler entscheiden können, in einer Koalition einzusteigen. In dem Fall gibt es bei drei Spielern sechs mögliche Reihenfolgen: (vgl. [6])

- A,B,C
- A,C,B
- B,A,C
- B,C,A
- C,A,B
- C,B,A

Nun wird der Shapley-Wert eines Spielers berechnet, beispielsweise von Spieler C. Dafür schaut man sich nun an, welche Spieler vor C dran sind, eine Entscheidung zu treffen. Angenommen diese bilden dann auch eine Koalition und haben folgende dazugehörige Koalitionsfunktionswerte: (vgl. [6])

- $A,B,C \Rightarrow \{A, B\} \Rightarrow w(\{A, B\}) = 18$
- $A,C,B \Rightarrow \{A\} \Rightarrow w(\{A\}) = 10$
- $B,A,C \Rightarrow \{A, B\} \Rightarrow w(\{A, B\}) = 18$
- $B,C,A \Rightarrow \{B\} \Rightarrow w(\{B\}) = 5$
- $C,A,B \Rightarrow \{A, B\} \Rightarrow w(\emptyset) = 0$
- $C,B,A \Rightarrow \emptyset \Rightarrow w(\emptyset) = 0$

Jetzt schreibt man die Menge aller Spieler vor C inklusive C auf. Diese bilden dann eine neue Koalition mit folgenden Werten der Koalitionsfunktion: (vgl. [6])

- $\{A, B, C\} \Rightarrow w(\{A, B, C\}) = 44$
- $\{A, C\} \Rightarrow w(\{A, C\}) = 34$
- $\{A, B, C\} \Rightarrow w(\{A, B, C\}) = 44$
- $\{B, C\} \Rightarrow w(\{B, C\}) = 28$

- $\{C\} \Rightarrow w(\{C\}) = 20$
- $\{C\} \Rightarrow w(\{C\}) = 20$

Nun kann man die marginalen Beiträge von Spieler C berechnen, indem man den Wert der Koalitionsfunktion ohne Spieler C vom Wert der Koalitionsfunktion mit Spieler C subtrahiert. (vgl. [6])

- $w(\{A, B, C\}) - w(\{A, B\}) = 44 - 18 = 26$
- $w(\{A, C\}) - w(\{A\}) = 34 - 10 = 24$
- $w(\{A, B, C\}) - w(\{A, B\}) = 44 - 18 = 26$
- $w(\{B, C\}) - w(\{B\}) = 28 - 5 = 23$
- $w(\{C\}) - w(\emptyset) = 20 - 0 = 20$
- $w(\{C\}) - w(\emptyset) = 20 - 0 = 20$

Den Shapley-Wert kann man nun berechnen, indem man den Durchschnitt aller marginaler Beiträge berechnet. Der Shapley-Wert SW_C von Spieler C lautet daher: (vgl. [6])

$$SW_C = \frac{26 + 24 + 26 + 23 + 20 + 20}{6} = 23,167 \quad (10.17)$$

Analog funktioniert das für die anderen beiden Spieler A und B. Der Shapley-Wert von Spieler A lautet $SW_A = 13,167$ und für Spieler B $SW_B = 7,667$. Addiert man nun die drei Shapley-Werte, so erhält man: $SW_A + SW_B + SW_C = 13,167 + 7,667 + 23,167 = 44$. Das ist eben der Wert der Koalitionsfunktion für die große Koalition, denn die Lösung vom Shapley-Wert schlägt immer effiziente Lösungsvorschläge vor, bei denen der größtmögliche Wert der Koalitionsfunktion erreicht werden kann. (vgl. [6])

11 Anwendungsbereiche der Spieltheorie

Die Spieltheorie wird vor allem in der Ökonomie genutzt. Das Management braucht sie für die Unternehmensstrategien, Optimierung und Anreize, die Märkte für die Konkurrenz, das Marktdesign, sowie die Effizienz und Regulierung. Bei Auktionen sorgt sie für eine effiziente Zuteilung von Ressourcen und faire Teilung. Ebenso finden Kontrollinstanzen, zum Beispiel beim Verbraucherschutz, Anwendung in der Spieltheorie. (vgl. [10])

Die Politik setzt in der Wirtschaft beispielsweise für internationale Handelsbeziehungen, Zölle, Inflation, Finanzkrisen und Steuern die Spieltheorie ein. Aber auch Entscheidungen in der Politik, wie die Wahlsysteme und diverse Abstimmungen basieren auf der Spieltheorie. Für die Gesetzgebung, durch kollektives Verhalten und Anreize bzw. Verbote werden ebenfalls spieltheoretische Ansätze angewendet. In Kriegen muss auch spieltheoretisch überlegt werden, wie am besten gehandelt werden soll. (vgl. [10])

In der Gesellschaft, vor allem in der Psychologie wird durch Kommunikation und Interaktion, bewusst oder unbewusst, die Spieltheorie genutzt. Aber auch in der Philosophie, in Fragen zur Rationalität, Moral und Freiheit hilft die Spieltheorie, Lösungen zu finden. In der Pädagogik wird durch die Erziehung und Interaktion mit den Kindern Spieltheorie angewendet. (vgl. [10])

Doch auch in vielen anderen Wissenschaften findet die Spieltheorie ihren Platz. In der Biologie und Medizin, vor allem in der Evolution von Genen wird sie genutzt. Zu guter letzt kommt noch die Informatik hinzu. Hier nützen vor allem die künstliche Intelligenz,

die Kryptowährung und vieles mehr die Spieltheorie. (vgl. [10])

Es ist zu sehen, dass die Spieltheorie sowohl theoretisch als auch praktisch dem Menschen dienen kann, da sie ist ein erklärendes als auch ein angewendetes Werkzeug ist. (vgl. [10])

11.1 Das Gefangenendilemma

Bei dem Gefangenendilemma geht es um zwei Verdächtige, gegen die keine ausreichende Beweise vorliegen. Der Staatsanwalt stellt ihnen ein Ultimatum. Entweder sie gestehen das Verbrechen oder sie gestehen es nicht. Wenn beide nicht gestehen, dann werden sie wegen minderer Delikte angeklagt und würden eine geringe Strafe bekommen. Gestehen beide, dann werden beide angeklagt, jedoch werden sie nicht die Höchststrafe bekommen. Wenn nun aber nur einer gesteht und der andere nicht, dann kommt der, der gestanden hat, frei und der andere bekommt die Höchststrafe. Somit stehen die beiden Verdächtigen vor einem strategischen Entscheidungsspiel.

Beide Spieler ($i = 1, 2$) können zwischen zwei Strategien wählen, entweder *gesteht* der Spieler (σ_{i1}) oder er *gesteht nicht* (σ_{i2}). Dadurch entsteht eine Strategiekombination σ als Paar (σ_1, σ_2) mit insgesamt vier Kombinationen. Die Anzahl der Jahre, die sie im Gefängnis absitzen müssen, wird dadurch bestimmt, welche Strategie gespielt wird. Dies kann man in einer Bimatrix übersichtlich darstellen. (vgl. [4])

		Spieler 2	
Spieler 1		Nicht gestehen σ_{21}	Gestehen σ_{22}
	Nicht gestehen σ_{11}	1 Jahr für 1 1 Jahr für 2	10 Jahre für 1 3 Monate für 2
	Gestehen σ_{12}	3 Monate für 1 10 Jahre für 2	8 Jahre für 1 8 Jahre für 2

Abbildung 11.1: Gefangenendilemma

Folgende Spielregeln sind zu beachten. Die beiden Gefangenen müssen ihre Strategie Σ gleichzeitig wählen und wissen daher nicht, wie sich der andere entscheidet. Sie können auch nicht miteinander kommunizieren. Das Spiel ist demnach nicht-kooperativ. Die rationalste Strategie für den Einzelnen wäre zu *gestehen* und ins Gefängnis zu gehen. Zwar ist es offensichtlich, dass die Strategiekombination *nicht gestehen* für beide Gefangene die günstigere wäre, als dass sie *gestehen*. Jedoch wäre das individuell betrachtet kein schlaues Handeln, da der jeweilige Spieler nicht weiß, wie sich der andere entscheidet und im schlimmsten Fall die härteste Strafe bekommen könnte, wenn sein Gegenspieler *gesteht* und er *nicht*. Daher hat der Gefangene kein Interesse daran, von seiner Strategie Σ abzuweichen. (vgl. [4])

Bei der Kombination $(\sigma_{11}, \sigma_{21})$ ist dies nicht der Fall, denn angenommen der Spieler 2 wählt die Strategie σ_{21} , also *nicht gestehen*, dann wäre es für Spieler 1 von Vorteil, wenn er die Strategie σ_{12} wählt und *gesteht*. Genau so ist es für den ersten Spieler günstiger zu *gestehen* und sich für die Strategie σ_{12} zu entscheiden, wenn der zweite Spieler ebenfalls *gesteht*. Es ist zu erkennen, dass ganz gleich, wie sich der Spieler 2 entscheidet, individuell betrachtet, ist für den Spieler 1 die Option $\sigma_{gestehen}$, immer die bessere Wahl. Analog gilt das für den Spieler 2. Die Strategie $\sigma_{gestehen}$ ist hier eine strikt dominante Strategie, denn es gilt für jeden Spieler i , unabhängig von der Strategiewahl σ_{jk} des Spielers j : (vgl. [4])

$$u_i(\sigma_{i2}, \sigma_{jk}) > u_i(\sigma_{i1}, \sigma_{jk}) \quad (11.1)$$

Die rationale Lösung für das Gefangenendilemma ist daher die Wahl der strikt dominanten Strategie. Ein Gleichgewicht in den dominanten Strategien stellt die Kombination $(\sigma_{12}, \sigma_{22})$ dar, da keiner der beiden Spieler Interesse hat, seine Strategie zu ändern. (vgl. [4])

12 Spieltheorie im Unterricht

Die Spieltheorie ist ein gutes mathematisches Teilgebiet, um den Schülern den Alltagsbezug der Mathematik zu vermitteln. Oft wird im Mathematikunterricht nach dem Sinn hinter einigen Aufgaben gefragt. Nun kann im Unterricht gezeigt werden, wieso Mathematik so wichtig ist und wo man sie überall hat und braucht. In diesem Kapitel wird nun untersucht, wie die Lehrperson die Spieltheorie mithilfe des Lehrplans in ihrem Unterricht umsetzen kann. Es werden didaktisch überlegte Gedanken diskutiert und zuletzt mögliche Aufgaben für den Mathematikunterricht zum Thema Spieltheorie beschrieben.

12.1 Rahmenbedingungen in der Praxis - der Lehrplan

Im Lehrplan für Mathematik wird die Spieltheorie zwar nur für das Wahlpflichtfach erwähnt, dies bedeutet aber nicht, dass man sie nicht im regulären Unterricht behandeln kann. Ab der 5. Klasse AHS ist es möglich, anhand von Beispielen, die Spieltheorie den Jugendlichen näher zu bringen. (vgl. [9])

Die Lernziele *Verbalisieren*, *Interpretieren*, *Modellieren* und *Experimentieren*, die für die neunte Schulstufe AHS erarbeitet werden sollen, können nämlich mithilfe der Spieltheorie erreicht werden. Man hat ein reales Problem, das in der Spieltheorie die Wahl der Strategien darstellt. Nun versucht man das in ein mathematisches Modell umzusetzen, das die gewählte mathematische Strategie darstellt und anschließend wird diese Strategie mathematisch angewendet und analysiert. Anhand dessen kann man daraus Erkenntnisse aus der realen Problemsituation erwerben. Des weiteren kann nun die gewählte Strategie in ihrem Erfolg beurteilt werden und in der nächsten Runde ggf. verbessert werden. Dies

stellt den bekannten mathematischen Modellierungskreislauf dar. (vgl. [9])

Durch die Spieltheorie regt man bei den Schülern das kritische Denken an, das ebenfalls im Lehrplan erwähnt wird. Ebenso können anwendungsorientierte Aufgaben mithilfe von der Spieltheorie erarbeitet werden und durch fächerübergreifenden Unterricht die Spieltheorie auf andere Bereiche übertragen. Hier bieten sich unter anderem Geografie, Informatik, Psychologie und Ethik an. (vgl. [9])

12.2 Didaktische Überlegungen

Damit die Schüler und Schülerinnen mit der Spieltheorie etwas anfangen können, müssen sie folgendes Vorwissen besitzen. Um das Nash-Gleichgewicht ermitteln zu können ist das Lösen von Gleichungssystemen notwendig und sie sollten wissen, was die relative Häufigkeit ist. Das Lösen von linearen Gleichungssystemen erlernen die Schüler und Schülerinnen in der vierten Klasse der allgemeinbildenden höheren Schule. Für die Spiele in der Extensivform müssen die Jugendlichen mit Baumdiagrammen umgehen können und dies wird in der 6. Klasse erlernt.

Was jedoch anzumerken ist, ist der Fakt, dass die Wochenstunden ziemlich knapp sind und der Lehrplan einiges an Stoff beinhaltet, der zu erarbeiten ist. Daher wird es sich zeitlich wohl eher nicht ausgehen das Thema anzureißen. Des weiteren kommt hinzu, dass die Schüler die Grundkompetenzen für die Matura beherrschen sollten und darauf der Fokus in der Oberstufe liegen sollte. Für das Wahlpflichtfach und demnach für die interessierten Jugendlichen bleibt die Spieltheorie aber eine gute Möglichkeit, um den Realitätsbezug in der Mathematik zu zeigen. (vgl. [9])

12.3 Beispiele und Aufgaben für den Unterricht

Wie im vorigen Unterkapitel erwähnt, bietet sich das Wahlpflichtfach dafür an, die Spieltheorie zu behandeln. Daher folgen nun einige Aufgaben und Beispiele für diesen Unterricht.

Am besten steigt man in die Thematik mit dem Guessing Game ein, denn bei diesem Spiel können beliebig viele Spieler i mit $i \geq 2$ mitspielen und ist deswegen gut für eine Schulklasse geeignet. Dabei wählen die Spieler eine natürliche Zahl zwischen 2 und 100 aus. Gewonnen hat die Person, die am nächsten an $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes aller gewählten Zahlen ist.

Für dieses Spiel brauchen die Jugendlichen nur zu wissen, was der Mittelwert ist und diesen erlernt man schon in der Unterstufe. Lösen könnte man das Spiel folgendermaßen. Angenommen, alle Spieler wählen die Zahl 100. Dann wäre $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes 67 und daher sollte keiner eine Zahl wählen, die größer ist als 67. Wählen nun alle die Zahl 67, dann wäre $\frac{2}{3}$ des Mittelwertes 45. Setzt man nun dieses Verfahren fort, erhält man die Folge $< 100, 67, 45, 30, 20, 13, 9, 6, 4, 3, 2 >$. Nun erkennt man, dass es sinnvoll wäre, die Zahl 2 zu wählen, damit alle gewinnen können. (vgl. [9])

Jedoch ist anzumerken, dass die Schüler eher nicht auf diese mathematische Lösungsstrategie kommen werden. Dennoch ist dieses Spiel ein guter Einstieg in die Spieltheorie, da wichtige Elemente der Spieltheorie in diesem Spiel vorkommen: die Schüler und Schülerinnen suchen nach einer Strategie und überlegen sich, wie ihre Gegenspieler handeln könnten. (vgl. [9])

Ein weiteres, gutes anwendungsorientierte Spiel wäre das Schwarzfahrerspiel. Diese Situation wird nämlich vielen Schülern bekannt vorkommen.

Ein Fahrgast fährt täglich mit der Straßenbahnlinie D. Dabei kann er jedes Mal entscheiden, ob er *schwarzfahren* will oder sich doch lieber ein Ticket *kauft*. Ebenso kann der Kontrolleur entscheiden, ob er genau in dieser Straßenbahn *kontrollieren* möchte oder *nicht*. Dieses Spiel wird nun in einer Matrix dargestellt. Wie könnte man nun die Einträge wählen? Die Einträge könnten die Geldmenge repräsentieren, die bezahlt, gespart oder kassiert werden. Da in solchen Situation aber die Emotionen auch eine Rolle spielen, werden in dieser Matrix die Werte des subjektiven Nutzen eingetragen.

Wenn der Fahrgast *schwarzfährt* und der Kontrolleur *kontrolliert*, muss der Fahrgast eine Strafe zahlen und dies stellt für ihn eine ärgerliche Situation dar. Hingegen ist dieser Fall für den Kontrolleur gut, da er kassieren kann.

Fährt der Fahrgast hingegen *schwarz* und der Kontrolleur *kontrolliert nicht*, so kann sich der Fahrgast am gesparten Geld erfreuen, der Kontrolleur hat dafür seine Chance zum Kassieren verpasst.

Zahlt der Fahrgast für die Fahrt und der Kontrolleur *kontrolliert*, nimmt der Gast das so hin, für den Kontrolleur hat das aber nichts gebracht.

Wenn der Kontrolleur aber *nicht kontrolliert*, der Fahrgast aber ein Ticket *gekauft* hat, dann ärgert es den Gast, da er sich das Geld hätte sparen können. (vgl. [9])

		Kontrolleur	
Fahrgast		kontrolliert	kontrolliert nicht
	fährt schwarz	-8 3	1 -2
	zahlt	0 -1	-1 0

Abbildung 12.1: Schwarzfahrerspiel

Es ist zu sehen, dass immer einer von den beiden unzufrieden wäre. Wie lässt sich dieses Problem aber lösen? (vgl. [9])

Nun könnte man die Schüler fragen, wie sie weiter vorgehen würden und sammelt Ideen, bis dann hoffentlich folgender Einwand kommen würde.

Man könnte überlegen, wie oft man bis jetzt tatsächlich *kontrolliert* worden ist. Angenommen, der Fahrgast kennt die relative Häufigkeit q der Kontrolle in dieser Straßenbahnlinie. Diese wird nun als Wahrscheinlichkeit genommen, die angibt, wie wahrscheinlich es ist, dass der Fahrgast *kontrolliert* wird. Die erwarteten Auszahlungen vom Fahrgast werden mit E_F angegeben. (vgl. [9])

Bei der Strategie $Q_{\text{schwarzfahren}}$ bekommt er mit einer Wahrscheinlichkeit von q eine Auszahlung von -8 und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - q$ eine Auszahlung von 1. Daher beträgt die erwartete Auszahlung: (vgl. [9])

$$E_F = -8 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 9q \quad (12.1)$$

Bei der Strategie Q_{zahlen} beträgt die erwartete Auszahlung vom Fahrgast:

$$E_F = 0 \cdot q - 1 \cdot (1 - q) = q - 1 \quad (12.2)$$

Die Auszahlungen stellen lineare Funktionen dar. Die x-Achse stellt dabei die Wahrscheinlichkeit q dar und die y-Achse die Auszahlungen vom Fahrgast. (vgl. [9])

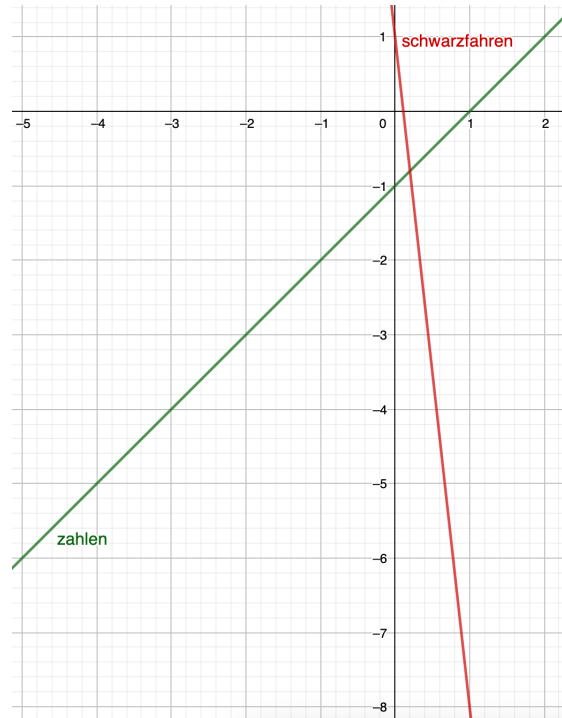


Abbildung 12.2: Auszahlungen des Schwarzfahrerspiels

Ist q kleiner als 0,2, ist die Gerade *schwarzfahren* über der Geraden *zahlen*. Daher ist in diesem Bereich der Erwartungswert für $Q_{\text{schwarzfahren}}$ größer und dadurch ist $Q_{\text{schwarzfahren}}$ für den Fahrgast in dem Fall die beste Antwort. Im Punkt $q = 0,2$ haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt und daher sind die beiden Erwartungswerte gleich. Das bedeutet, dass keine der beiden Strategien die bessere ist. Wenn aber der Kontrolleur öfters als jedes fünfte Mal *kontrolliert*, also $q > 0,2$, dann ist die Strategie Q_{zahlen} die beste Antwort, weil die Auszahlungen höher sind. (vgl. [9])

Analog kann man die Auszahlungen für den Kontrolleur darstellen.

Die relative Häufigkeit p beschreibt die Wahrscheinlichkeit des *Schwarzfahrens*. Die erwartete Auszahlung für den Kontrolleur, wenn er *kontrolliert*, beträgt: (vgl. [9])

$$E_K = 3 \cdot p - 1 \cdot (1 - p) = 4p - 1 \quad (12.3)$$

Kontrolliert der Kontrolleur *nicht*, so beträgt die erwartete Auszahlung für ihn:

$$E_K = -2 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = -2p \quad (12.4)$$

Man erkennt wieder zwei lineare Funktionen. Auf der x-Achse ist die Wahrscheinlichkeit p dargestellt und auf der y-Achse die Auszahlungen des Kontrolleurs. (vgl. [9])

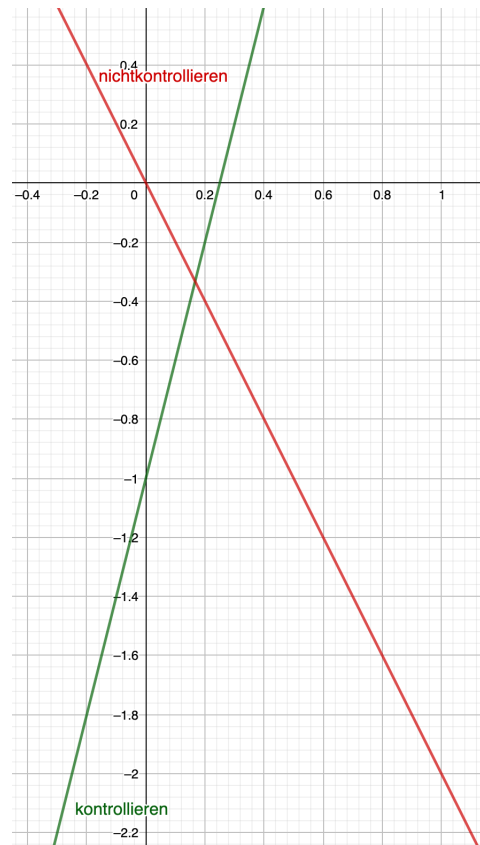


Abbildung 12.3: Auszahlungen des Kontrolleurs

Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist bei $p = \frac{1}{6}$. Ist $p < \frac{1}{6}$, dann zahlt es sich für den Kontrolleur nicht aus zu *kontrollieren*. Führt der Fahrgast jedoch häufiger als jedes sechste Mal *schwarz*, dann sollte er *kontrollieren*. Wenn $p = \frac{1}{6}$, dann ist es ganz gleich, ob er *kontrolliert* oder *nicht*. (vgl. [9])

Da man jeweils einen Schnittpunkt bei beiden Grafiken erkennen kann, ist dieser das gesuchte Nash-Gleichgewicht, also bei $(p, q) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{5})$. (vgl. [9])

In reinen Strategien Σ hat es keine Lösung gegeben, da keiner der beiden mit der gewählten Strategie zufrieden wäre und sie sie im Nachhinein ändern wollen würden. In gemischten Strategien Q , die mit einer Wahrscheinlichkeit einhergehen, findet man aber ein Gleichgewicht. (vgl. [9])

Diese Aufgabe eignet sich vor allem, um die Unterschiede in den Strategien aufzugreifen und zu zeigen, dass nur, weil es keine Lösung in den reinen Strategien Σ gibt, es nicht bedeutet, dass dies auch der Fall in gemischten Strategien Q ist.

Des weiteren können die Schüler sehen, wie man alltägliche Gedanken und Situation in der Mathematik lösen kann.

13 Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es, herauszufinden, ob die Spieltheorie im Mathematikunterricht eingesetzt werden kann. Es ist durchaus möglich die Spieltheorie im Mathematikunterricht zu behandeln. Jedoch muss man bedenken, dass die Lehrkräfte ohnehin Zeitdruck haben, den vorgegebenen Lehrstoff umzusetzen. Sollte es sich also zeitlich ausgehen, können Mathematiklehrkräfte das Thema mit den Schülern anreißen. Dabei ist wichtig, dass die Jugendlichen Vorwissen zu Gleichungssystemen besitzen. Ansonsten eignet sich dieses Kapitel für das Wahlpflichtfach und demnach für interessierte Schüler. Durch die Spieltheorie kann man der Klasse die Mathematik hinter verschiedensten Alltagssituationen zeigen.

Die Arbeit hat viele Arten der Spiele diskutiert, unter anderem statische und dynamische Spiele. Das kann dann nochmal unterteilt werden in vollständige Information oder unvollständige Information. Bei statischen Spielen haben die Spieler einen einzigen Zug zur Verfügung und müssen ihn gleichzeitig ausführen. Bei vollständiger Information wissen die Spieler, wie die anderen handeln und welche Auszahlungen daraus resultieren können. Bei unvollständiger Information haben sie darüber keine Kenntnis. Bei dynamischen Spielen hingegen, spielen die Spieler nacheinander. Liegen nun vollständige Informationen vor, so wissen die Spieler, welchen Zug der Mitspieler gewählt hat und bei unvollständigen wissen sie das eben nicht.

Mithilfe der Mathematik kann man daher die richtige Entscheidung im Leben treffen. Das wurde anhand etlicher Beispiele gezeigt. Jedoch ist zu bedenken, dass Menschen

keine Roboter sind. So können rational denkende Individuen durch ihre Gefühlslage beim Treffen ihrer Entscheidungen beeinflusst werden.

Ebenso wurde erläutert, in welchen alltäglichen Bereichen die Spieltheorie zum Einsatz kommt. Die Spieltheorie kann daher das alltägliche Leben erleichtern. Das könnte auch im Unterricht angerissen werden, damit die Schüler verstehen, dass die Mathematik im Alltag brauchbar ist. So ist gezeigt worden, dass man durch die Spieltheorie einen fächerübergreifenden Unterricht führen kann, denn die Spieltheorie findet sich in den Bereichen, wie z.B. Geschichte, Informatik, Ethik, Psychologie und Biologie wieder.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Spieltheorie ein gutes Werkzeug ist, um Entscheidungen zu treffen und das sollte man interessierten Schülern nicht vorenthalten.

Literatur

- [1] C. Ableitinger und H. Humenberger. Nash-Gleichgewicht und Minimax-Lösung - Gegenüberstellung zweier Konzepte der Spieltheorie. *Mathematica Didactica*, **33**: 58-78, 2010. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2010.1092>
- [2] J. Behnke. Entscheidungs- und Spieltheorie. 2. Aufl., Nomos. 2020.
- [3] S. Berninghaus, K. M. Ehrhart und W. Güth. Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie. 3. Aufl., Springer. 2010.
- [4] M. J. Holler, G. Illing und S. Napel. Einführung in die Spieltheorie. 8. Aufl., Springer. 2003.
- [5] M. Mendel. Einführung in die Spieltheorie. Theorie und Numerik strategischer Spiele [Vorlesungsskript]. Bergische Universität Wuppertal. 2009. <https://www2.math.uni-wuppertal.de/~mendel/skripten/spieltheorie.pdf>
- [6] S. Winter. Grundzüge der Spieltheorie. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das (Selbst-)Studium. 2. Aufl., Springer. 2015.
- [7] V. Shikhman. Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Springer. 2018.
- [8] U. Schäfer. Wie erklärt man ein Nash-Gleichgewicht. *Elemente der Mathematik*, **62**: 1-7, 2007.
- [9] C. Ableitinger und P. Hauer-Typelt. Spieltheorie im Schulunterricht - kann es das spielen?

- [10] M. Eisermann. Spieltheorie und ökonomisches Verhalten. Die mathematische Analyse von Konflikt und Kooperation [Vorlesungsskript]. Universität Stuttgart. 2022. <https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/Spieltheorie/Spieltheorie-A-2x4.pdf>
- [11] R. Schmidt. Spieltheorie [Vorlesungsskript]. Fernuniversität in Hagen. https://www.fernuni-hagen.de/wirtschaftswissenschaft/studium/download/leseproben/lp_31961.pdf
- [12] F. Bartholomae und M. Wiens. Spieltheorie. Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch. 2. Aufl., Springer. 2020.
- [13] E. Amann. Entscheidungstheorie. Individuelle, strategische und kollektive Entscheidungen. Springer. 2019.
- [14] W. Leininger und E. Amann. Einführung in die Spieltheorie [Vorlesungsskript]. Universität Dortmund. https://itp.uni-frankfurt.de/~hاناuske/new/HSK_2011/Projekte/html/spiele1_ws07_08_skript_Leininger.pdf

Abbildungsverzeichnis

3.1 Spielbaum	13
3.2 Spielbaum ohne Information über den Zug des anderen Spielers	14
3.3 Spielbaum mit Zufallsspieler	16
3.4 Spiel	25
4.1 Gleichgewichte finden	31
4.2 Umweltproblem	33
4.3 Spiel ohne Gleichgewicht	34
4.4 steigende Funktion	37
4.5 Nullfunktion	38
4.6 fallende Funktion	38
4.7 beste Antworten	41
5.1 Kampf der Geschlechter - Standardspiel	45
5.2 Kampf der Geschlechter - modifiziertes Spiel	45
6.1 teilspielperfektes Gleichgewicht mit Rückwärtinduktion	49
6.2 Spiel mit imperfekter Information	51
6.3 weiteres Spiel mit imperfekter Information	52
7.1 dynamisches Spiel mit unvollständiger Information	54
7.2 bedingte Wahrscheinlichkeiten	57
8.1 Spiel ohne Informationen	59
8.2 Minimax-Regel	60

8.3 Maximax-Regel	61
8.4 beide Regeln im Vergleich	61
10.1 kooperatives Spiel mit Nash-Axiomen lösen	69
10.2 grafische Verhandlungslösung nach Nash	69
10.3 grafische Interpretation der Lösung	74
11.1 Gefangenendilemma	81
12.1 Schwarzfahrsenspiel	86
12.2 Auszahlungen des Schwarzfahrspiels	88
12.3 Auszahlungen des Kontrolleurs	89