

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Fourier-Transformation in der Wechselstromtechnik:
Anwendung komplexer Zahlen und die Faltung in der
Signalverarbeitung

verfasst von | submitted by
Daniel Bauer BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 518 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Katholische Religion Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Dipl.-Phys. Dr. Volker Branding Privatdoz.

Abstract

Der erste Teil dieser Masterarbeit widmet sich der Einführung und Anwendung komplexer Zahlen in der Wechselstromtechnik. Nach einem historischen Überblick werden die mathematischen Grundlagen der komplexen Zahlen detailliert erläutert, einschließlich ihrer Definition, algebraischen Eigenschaften und Rechenoperationen. Es wird aufgezeigt, wie komplexe Zahlen durch ihre kartesische und polare Darstellung vielfältige Möglichkeiten zur Lösung mathematischer und technischer Probleme bieten. Besonderes Augenmerk liegt auf der geometrischen Interpretation in der Gaußschen Zahlenebene, der Verwendung der imaginären Einheit sowie der Bedeutung der Eulerschen Formel. Diese Grundlagen werden genutzt, um ihre Anwendung in der Wechselstromtechnik, etwa bei der Analyse von Schwingungen und elektrischen Signalen, zu veranschaulichen. Praktische Beispiele demonstrieren, wie komplexe Zahlen eine effiziente Lösung technischer Fragestellungen ermöglichen. Im zweiten Teil der Arbeit liegt der Fokus auf der Fourier-Transformation, die eine fundamentale Methode zur Analyse und Verarbeitung von Signalen darstellt. Nach einer Einführung in die mathematischen Grundlagen der Integralrechnung werden die Definition, Eigenschaften und Rechenregeln der Fourier-Transformation detailliert behandelt. Ein zentrales Anwendungsgebiet ist dabei die Faltung. Sie beschreibt die Wechselwirkung zweier Signale und ist essenziell für die Analyse linearer Systeme. In diesem Zusammenhang werden praktische Beispiele aus der Signalverarbeitung vorgestellt. Besonders das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem wird als bedeutende Konsequenz der Fourier-Analyse diskutiert, da es die Grenzen der digitalen Signalverarbeitung definiert.

Abstract (English)

The first part of this master's thesis focuses on the introduction and application of complex numbers in alternating current (AC) technology. Following a historical overview, the mathematical foundations of complex numbers are thoroughly explained, including their definition, algebraic properties, and operations. The discussion highlights how complex numbers, through their Cartesian and polar representations, offer diverse approaches to solving mathematical and technical problems. Special emphasis is placed on the geometric interpretation within the Gaussian plane, the use of the imaginary unit, and the significance of Euler's formula. These foundational concepts are applied to illustrate their relevance in AC technology, particularly in the analysis of oscillations and electrical signals. Practical examples demonstrate how complex numbers facilitate efficient solutions to technical challenges. In the second part of this thesis, the focus is on the Fourier transformation, which is a fundamental method for analyzing and processing signals. Following an introduction to the mathematical foundations of integral calculus, the definition, properties, and computational rules of the Fourier transformation are examined in detail. A key area of application is convolution, which describes the interaction of two signals and is essential for the analysis of linear systems. In this context, practical examples from signal processing are presented. Particular attention is given to the Nyquist-Shannon sampling theorem, which is discussed as a significant consequence of Fourier analysis, as it defines the limits of digital signal processing.

Danksagung

Der Zeitraum, in dem diese Arbeit geschrieben wurde, war neben der Unterrichtszeit in der Schule und den Renovierungsarbeiten aufgrund des Hochwassers im Herbst 2024 sehr ereignisreich und somit auch nicht immer einfach für mich.

Ich möchte mich daher an dieser Stelle sehr herzlich für die Unterstützung und Begleitung bei meiner Arbeit bedanken.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern, Helga und Johannes. Ihr habt es mir ermöglicht, meinen Traum zu erfüllen. Angefangen bei der Absolvierung der Höheren Technischen Lehranstalt bis hin zu meinem Studium habt ihr mich begleitet und mir Kraft gegeben.

Mein Dank gilt auch meiner Schwester Judith, meiner Oma Anna, sowie meinen langjährigen Studien*kolleginnen. Ihr alle habt mich auf unterschiedliche Weise unterstützt und mein Leben positiv geprägt.

In der schwierigsten, aber auch schönsten Phase meines Studiums möchte ich mich bei einer ganz besonderen Person bedanken, meiner Partnerin Christina. Immer dann, wenn ich ein offenes Ohr zum Reden gebraucht habe, konnte ich zu dir kommen. Deine Unterstützung bedeutet mir sehr viel, und dafür bin ich dir unendlich dankbar.

Ein weiterer Dank gebührt meinem ehemaligen Klassenvorstand Prof. Martin Panzer. Bei dir möchte ich mich für die Bereitstellung der Fachliteratur aus dem Bereich der Elektrotechnik bedanken.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meinem Betreuer Herrn Dipl.-Phys. Dr. Volker Branding Privatdoz. bedanken. Er war gleich zu Beginn bei unserem ersten Gespräch von meiner Idee begeistert und hat mich jederzeit tatkräftig unterstützt. Ich kannte ihn bereits ein paar Jahre, da ich bei ihm auch meine Bachelorarbeit geschrieben habe. Die vorangegangene Zusammenarbeit mit ihm war so großartig, dass ich auch unbedingt diese Arbeit bei ihm schreiben wollte. Heute kann ich sagen, dass ich diese Entscheidung in keinsten Weise bereut habe.

Danke.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik	3
2.1	Die komplexen Zahlen	3
2.1.1	Kurzer historischer Abriss	3
2.1.2	Motivation für die Erweiterung der Menge der reellen Zahlen . . .	3
2.1.3	Der Körper der komplexen Zahlen	5
2.1.4	Die imaginäre Einheit	9
2.1.5	Polardarstellungen einer komplexen Zahl	10
2.1.6	Rechenoperationen auf der Menge der komplexen Zahlen	16
2.1.7	Gleichungen mit komplexen Koeffizienten	27
2.2	Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik	28
2.2.1	Vorüberlegungen	28
2.2.2	Grundlagen der Elektrotechnik	30
2.2.3	Wechselstromgrößen in der Elektrotechnik	33
2.2.4	Darstellungsformen komplexer Größen in der Wechselstromtechnik	37
2.2.5	Beispiele	38
3	Die Fourier-Transformation	47
3.1	Vorüberlegungen aus der Integralrechnung	47
3.2	Grundlagen der Fourier-Transformation	50
3.2.1	Distributionen – die Dirac-Funktion	53
3.2.2	Rechenregeln der Fourier-Transformation mit einfachen Beispielen	55
3.3	Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung	63
3.3.1	Entladevorgang eines Kondensators	64
3.3.2	Nyquist-Shannon-Abtasttheorem	66
3.3.3	Faltung kontinuierlicher Signale	73
4	Zusammenfassung	83
	Literaturverzeichnis	85

1 Einleitung

Zu Beginn dieser Einleitung möchte ich darlegen, wie ich zu dem Thema inspiriert und motiviert wurde, welche Ziele ich mit dieser Masterarbeit verfolge und welchen Sinn und Zweck ich sowohl für mich selbst als auch für die Leserschaft darin sehe. Während meiner Schulzeit entwickelte ich eine besondere Faszination für mathematische Konzepte. In der Höheren Technischen Lehranstalt für Biomedizin und Gesundheitstechnik lernte ich zum ersten Mal die komplexen Zahlen kennen. Die Art und Weise, wie sie in verschiedenen Kontexten eingesetzt werden, und die Eleganz der mathematischen Beziehungen haben mein Interesse nachhaltig geweckt und mich dazu bewegt, tiefer in die Materie einzutauchen. Im Unterrichtsgegenstand Biomedizinische Signalverarbeitung (kurz: BMSV) faszinierte mich die Anwendung der komplexen Zahlen bei der Verarbeitung medizinischer und elektrischer Signale, welche mit der Fourier-Transformation näher untersucht wurden. In meiner Schulzeit begegnete ich der Fourier-Transformation erstmals im Kontext der Signalverarbeitung. Die Möglichkeit, zeitabhängige Signale in ihre Frequenzkomponenten zu zerlegen, erschien mir nicht nur faszinierend, sondern auch von enormer praktischer Relevanz. Diese Methode ist entscheidend für viele Anwendungen in der Elektrotechnik, von der Audioverarbeitung bis zur Bildanalyse. Die Vorstellung, dass komplexe Zahlen eine zentrale Rolle in der mathematischen Beschreibung dieser Transformation spielen, hat mich motiviert, die zugrunde liegenden Prinzipien näher zu erforschen.

Um Transparenz zu gewährleisten und unrealistische Erwartungen zu vermeiden, möchte ich an dieser Stelle klarstellen, dass der Schwerpunkt dieser Arbeit zwar nicht auf didaktischen Analysen oder deren Legitimation liegt, sondern auf einer tiefgreifenden mathematischen Auseinandersetzung mit komplexen Zahlen und der Fourier-Transformation, wobei ich einzelne Anwendungsbeispiele aus dem Studium sowie auch aus dem Schulunterricht anführen möchte.

Dieses Einleitungskapitel schließt mit einem Überblick über die spannende Welt der komplexen Zahlen und der Fourier-Transformation in der komplexen Wechselstromtechnik. Welche Anwendungen existieren, bei denen komplexe Zahlen eine zentrale Rolle spielen und wie sie zur Analyse und Verarbeitung von Signalen beitragen? Die Fourier-Transformation ermöglicht es, zeitabhängige Signale in ihre Frequenzkomponenten zu zerlegen. Diese Technik ist nicht nur für die Signalverarbeitung von Bedeutung, sondern auch für die Analyse von Schwingungen in verschiedenen physikalischen Systemen. Es ist sofort ersichtlich, wie komplexe Zahlen in diesem Zusammenhang eine wichtige Rolle spielen, da sie die Darstellung von Schwingungen und deren mathematische Behandlung erheblich erleichtern.

Darüber hinaus werden in der Elektrotechnik häufig digitale Signalverarbeitungssysteme eingesetzt, die auf den Prinzipien der Fourier-Transformation basieren. Die Möglichkeit, Signale zu filtern, zu analysieren und zu modifizieren, eröffnet somit zahlreiche

1 Einleitung

Anwendungsmöglichkeiten. Eine Möglichkeit ist die Faltung.

Somit lässt sich diese Arbeit in zwei Hauptteile gliedern. Nach einer ausführlichen Einführung und Anwendung der komplexen Zahlen in Kapitel 2 folgt im dritten Kapitel die Schwerpunktlegung auf der Fourier-Transformation. Dabei werden spezifische Beispiele präsentiert, die illustrieren, dass einfache mathematische Konzepte nicht gleichbedeutend mit trivialen Anwendungen sind. Insbesondere werde ich auf die praktischen Implikationen und Herausforderungen eingehen, die sich bei der Anwendung dieser mathematischen Konzepte in realen technischen Szenarien ergeben. Gleich am Beginn dieser Arbeit möchte ich anmerken, dass in dieser Arbeit die Variable j anstatt i für die imaginäre Einheit verwendet wird. In der Elektrotechnik und Signalverarbeitung wird diese Schreibweise bevorzugt.

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Dieses Kapitel thematisiert die Grundlagen der komplexen Zahlen sowie deren Anwendung bei Filtern in der komplexen Wechselstromtechnik. Die Darstellungen einzelner komplexer Zahlen wurden mit der Mathematik-Software „GeoGebra“, online abrufbar unter <https://www.geogebra.org/>, erstellt.

2.1 Die komplexen Zahlen

Anfangen mit einem kurzen historischen Überblick sollen die komplexen Zahlen aus mengentheoretischer Sicht behandelt werden.

2.1.1 Kurzer historischer Abriss

Der erste Mathematiker, der eine Abhandlung über komplexe Zahlen verfasste und darin (unter der Annahme der reellen Zahlen) eine Definition dieser Zahlen gab, war Caspar Wessel (1745–1818). 1799 veröffentlichte er eine Arbeit in der Königlich Dänischen Akademie. Diese Veröffentlichung war seine einzige mathematische Arbeit, da er kein Mitglied der Akademie war. In dieser Arbeit stellte er die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen vor, die er während seiner trigonometrischen Vermessung Oldenburgs entwickelte. Es ist sicher, dass komplexe Zahlen zu dieser Zeit bereits verwendet wurden. Dank dieser genialen mathematischen Idee war Wessel der Erste, der eine exakte Landkarte Dänemarks erstellte. Leider fand seine Arbeit in der mathematischen Gemeinschaft kaum Beachtung, weshalb die geometrische Interpretation im Jahr 1806 von dem Schweizer Jean Robert Argand (1768–1822) wiederentdeckt und 1831 von Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855) weiterentwickelt wurde. Interessanterweise wiederholte Gauß 1824 auch Wessels Triangulierung von Oldenburg. Was also sind diese mysteriösen Zahlen, die Mathematiker so lange beschäftigt haben? (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 339)

2.1.2 Motivation für die Erweiterung der Menge der reellen Zahlen

Im Laufe der Schulzeit werden schrittweise verschiedene Zahlenbereiche eingeführt. Zunächst lernt man die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, also die Zahlen, die beim Zählen verwendet werden: $\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$. Schnell stellt sich jedoch heraus, dass diese Menge nicht ausreicht, zum Beispiel bei der Subtraktion. So ist die Lösung von $3 - 5$ keine natürliche Zahl. Um solche Probleme zu lösen, werden die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ eingeführt, die auch negative Zahlen umfassen: $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$. Bei der Division ganzer Zahlen stellt man fest, dass

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

man auch diesen Bereich verlassen kann. Daher wird die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definiert, die alle Brüche umfasst und somit die Ergebnisse von Divisionen abdeckt. Allerdings entstehen durch Operationen wie das Ziehen von Quadratwurzeln manchmal Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar sind und somit nicht zu den rationalen Zahlen gehören. Um auch solche Zahlen zu erfassen, wird die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eingeführt. Jede reelle Zahl lässt sich auf der sogenannten Zahlengeraden (siehe Abbildung 2.1) darstellen, die durch reelle Zahlen lückenlos abgedeckt werden kann. (vgl. Kortemeyer, 2020, S. 1)

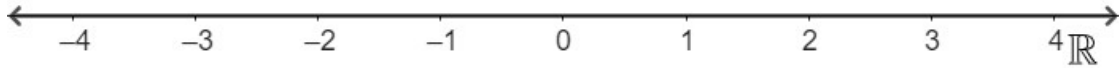


Abbildung 2.1: Zahlengerade der reellen Zahlen

Bisher haben wir folgende Zahlenmengen kennengelernt:

- $\mathbb{N}$ = die Menge der natürlichen Zahlen $\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ = die Menge der ganzen Zahlen $\{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$
- $\mathbb{Q}$ = die Menge der rationalen Zahlen $\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- $\mathbb{I}$ = die Menge der irrationalen Zahlen, also jener Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können
- $\mathbb{R}$ = die Menge der reellen Zahlen, wobei $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

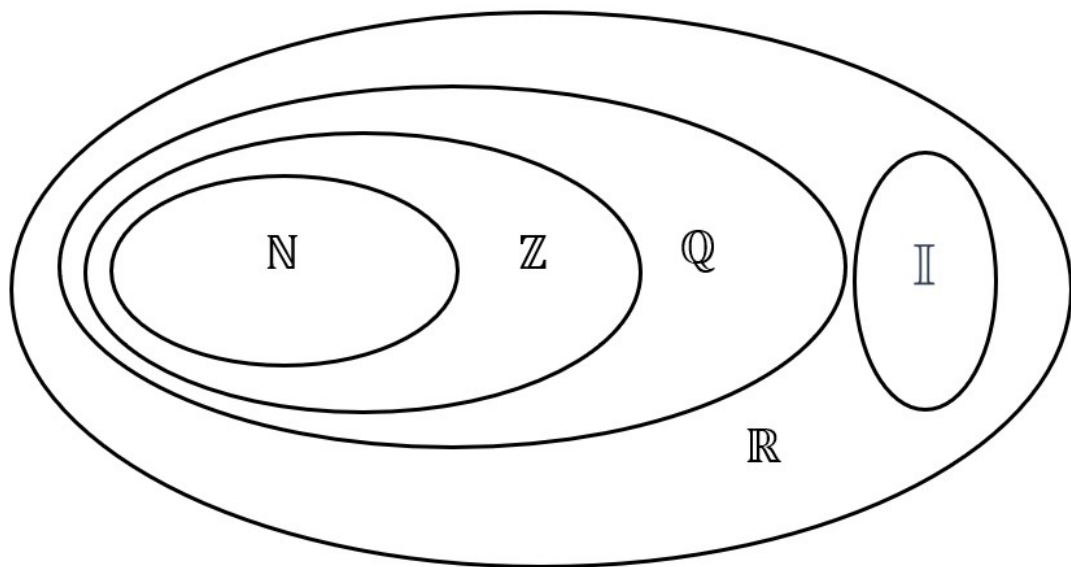


Abbildung 2.2: Darstellung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ und $\mathbb{R}$

Seit dem 5. Jahrhundert nach Christus weiß man, dass die Menge der rationalen Zahlen nicht ausreicht, um die Gleichung

$$x^2 = 2$$

zu lösen. Hippasos von Metapont entdeckte aufgrund der Länge des Einheitsquadrates die Irrationalität von $\sqrt{2}$. Daher liefert die obige Polynomgleichung aus dem Satz des Pythagoras keine rationale Lösung. Es war also notwendig, schon sehr früh auf die reellen Zahlen zurückzugreifen. Die Mathematik kennt jedoch auch quadratische Gleichungen, die auf der Menge der reellen Zahlen nicht lösbar sind. Die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \tag{2.1.1}$$

kann beispielsweise mit der obigen Einschränkung nicht gelöst werden, da $\sqrt{-1}$ kein Element der reellen Zahlen ist.

Es ist bekannt, dass Girolamo Cardano (1501–1576) bei der Entwicklung der Formeln zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen dritten und vierten Grades auf komplexe Zahlen stieß. Er lehnte sie jedoch ab, da er sie als „zu subtil und somit nutzlos“ (Schichl & Steinbauer, 2012, S. 338) betrachtete. Auch Leonhard Euler (1707–1783) war mit komplexen Zahlen vertraut und führte 1748 in seiner berühmten Arbeit „Introductio in analysin infinitorum“ (deutsch: Einführung in die Analyse des Unendlichen) das Symbol i als Bezeichnung für die imaginäre Einheit ein, in der auch die berühmte Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

erstmalig erschien. Diese Formel trägt bis heute Eulers Namen. (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 339)

2.1.3 Der Körper der komplexen Zahlen

Zu Beginn definieren wir die Menge der komplexen Zahlen als das kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst.

Definition 1 (Körper). Eine Menge K mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt Körper, falls

- (i). $(K, +, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist,
- (ii). $(K \setminus \{0\}, +, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist und
- (iii). die Distributivgesetze gelten.

Definition 2 (Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$). Es sei $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, wobei für die beiden Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ auf der Menge $\mathbb{C}$ folgende Definitionen gelten:

- (i). $(a_1; a_2) + (b_1; b_2) := (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
- (ii). $(a_1; a_2) \cdot (b_1; b_2) := (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

Die oben definierte Menge $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist die Menge der komplexen Zahlen.

Im nächsten Satz soll gezeigt werden, dass diese Menge auch ein Körper ist. (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 339 ff.)

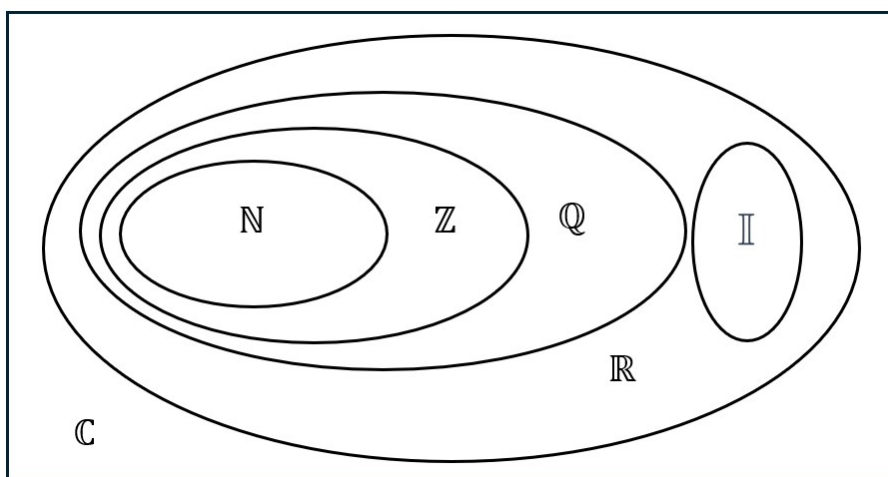


Abbildung 2.3: Darstellung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Satz 2.1.1 (Körper $\mathbb{C}$). Es seien $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ und $c = (c_1; c_2)$. Für den Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ gelten:

- (i). $\forall a, b \in \mathbb{C} : a + b = b + a$ (Kommutativgesetz bezüglich der Addition),
- (ii). $\forall a, b \in \mathbb{C} : a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz bezüglich der Multiplikation),
- (iii). $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz bezüglich der Addition),
- (iv). $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz bezüglich der Multiplikation),
- (v). $\forall a, b, c \in \mathbb{C} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz),
- (vi). $\forall a \in \mathbb{C} : a + 0 = a$ (Existenz des Nullelements),
- (vii). $\forall a \in \mathbb{C} : a + (-a) = 0$ (Existenz des inversen Elements bezüglich der Addition),
- (viii). $\forall a \in \mathbb{C} \exists a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) \in \mathbb{C} : a \cdot a^{-1} = (0; 1)$, wobei $a \neq (0; 0)$ (Existenz des inversen Elements bezüglich der Multiplikation),

(ix). $\forall a \in \mathbb{C} : a \cdot 1 = a$, wobei $1 := (1; 0) \in \mathbb{C}$ (Existenz des Einselements bezüglich der Multiplikation).

Beweis. Um zu zeigen, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, müssen die oben angeführten Körperaxiome bewiesen werden.

(i). Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$ und $b = (b_1; b_2)$:

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2) = (b_1 + a_1; b_2 + a_2) = \\ &= (b_1; b_2) + (a_1; a_2) = b + a. \end{aligned}$$

(ii). Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$ und $b = (b_1; b_2)$:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_1; a_2) \cdot (b_1; b_2) = (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) = \\ &= (b_1 \cdot a_1 - b_2 \cdot a_2; b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_1) = (b_1; b_2) \cdot (a_1; a_2) = b \cdot a. \end{aligned}$$

(iii). Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ und $c = (c_1; c_2)$:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a_1; a_2) + ((b_1; b_2) + (c_1; c_2)) = (a_1; a_2) + (b_1 + c_1; b_2 + c_2) = \\ &= (a_1 + b_1 + c_1; a_2 + b_2 + c_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2) + (c_1; c_2) = \\ &= (a + b) + c. \end{aligned}$$

(iv). Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ und $c = (c_1; c_2)$:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (a_1; a_2) \cdot (b_1 \cdot c_1 - b_2 \cdot c_2; b_1 \cdot c_2 + b_2 \cdot c_1) = \\ &= (a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_1 \cdot b_2 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_1; \\ &\quad a_1 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot c_1 + a_2 \cdot b_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_2 \cdot c_2) = \\ &= (a_1, a_2) \cdot ((b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)) = (a \cdot b) \cdot c. \end{aligned}$$

(v). Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$ und $c = (c_1; c_2)$:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a_1; a_2) \cdot ((b_1; b_2) + (c_1; c_2)) = (a_1; a_2) \cdot (b_1 + c_1; b_2 + c_2) = \\ &= (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot c_1 - a_2 \cdot c_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot c_2 + a_2 \cdot c_1) = \\ &= (a_1; a_2) \cdot (b_1; b_2) + (a_1; a_2) \cdot (c_1; c_2) = a \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

(vi). Es sei $0 := (0; 0)$ das Nullelement von $\mathbb{C}$. Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$:

$$a + 0 = (a_1; a_2) + (0, 0) = (a_1 + 0; a_2 + 0) = (a_1; a_2) = a.$$

(vii). Es sei $-a := (-a_1; -a_2)$. Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$:

$$a + (-a) = (a_1; a_2) + (-a_1; -a_2) = (a_1 - a_1; a_2 - a_2) = (0, 0) \stackrel{(vi)}{=} 0.$$

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

(viii). Es sei $a^{-1} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}; \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right)$ das inverse Element von $a = (a_1; a_2)$ bezüglich der Multiplikation. Dann gilt nach Definition 2:

$$a \cdot a^{-1} = (a_1; a_2) \cdot \left(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}; \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) = \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}; \frac{-a_1 a_2 + a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right) = (1; 0).$$

(ix). Es sei $1 := (1; 0)$ das Einselement von $\mathbb{C}$. Nach Definition 2 gilt für $a = (a_1; a_2)$:

$$a \cdot 1 = (a_1; a_2) \cdot (1; 0) = (a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0; a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 0) = (a_1; a_2) = a.$$

□

Satz 2.1.2 (Rechenregeln im Körper $\mathbb{C}$). Es sei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper der komplexen Zahlen. Weiters seien $a = (a_1; a_2)$ und $b = (b_1; b_2) \in \mathbb{C}$. Dann gelten

(i). $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \quad \forall a, b \neq 0,$

(ii). $(-a)^{-1} = -(a^{-1}) \quad \forall a \neq 0,$

(iii). $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ (Nullteilerfreiheit),

(iv). Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat eine eindeutige Mengenlösung $x = a^{-1} \cdot b$ in $\mathbb{C}$ für $a \neq 0$.

Beweis. Es seien $a = (a_1; a_2)$ und $b = (b_1; b_2) \in \mathbb{C}$.

(i). In Gruppen gilt: $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. Da nach Definition 1 $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, +, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, gilt $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \quad \forall a, b \neq 0$.

(ii). $(-a)^{-1} = ((-1) \cdot a)^{-1} = (-1)^{-1} \cdot a^{-1} = -1 \cdot a^{-1} = -(a^{-1})$

(iii). Aus $a = 0, b = 0$ folgt, dass $a \cdot b = 0$ und die Implikation wäre gezeigt.

$\forall a \neq 0 \in \mathbb{C} \exists a^{-1}$, sodass $a \cdot a^{-1} = 1$ (Satz 2.1.1 (viii).)

Nun gilt: $b = b \cdot 1 \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (viii)}}{=} b \cdot (a \cdot a^{-1}) \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (iv)}}{=} (b \cdot a) \cdot a^{-1} \stackrel{\text{nach Voraussetzung}}{=} 0 \cdot a^{-1} = 0$. Gleiches gilt ebenso für $b \neq 0$.

(iv). Da $a \neq 0$ existiert ein a^{-1} , sodass $a \cdot a^{-1} = 1$ (Satz 2.1.1 (viii).).

Nun gilt: $a \cdot x = b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot a \cdot x = a^{-1} \cdot b \Leftrightarrow 1 \cdot x = a^{-1} \cdot b$

Angenommen $\exists x, y \in \mathbb{C} : a \cdot x = b, a \cdot y = b \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y$

$\Rightarrow a \cdot x - a \cdot y = 0 \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (v)}}{\Rightarrow} a \cdot (x - y) = 0 \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

□

2.1.4 Die imaginäre Einheit

In Definition 2 wurden die Elemente der Menge der komplexen Zahlen als Paare definiert. Diese Elemente sind Binome der Form $a + bx$. Dabei gilt jedoch, dass die Variable x kein Element der reellen Zahlenmenge ist. Im Kapitel 2.1.2 haben wir die Gleichung 2.1.1 kennengelernt, die auf der Menge der reellen Zahlen nicht lösbar ist, da das Quadrat einer reellen Zahl immer größer gleich 0 sein muss und somit nicht negativ sein kann. Mithilfe der komplexen Zahlen können wir nun eine Lösung für diese Gleichung finden. Die Lösung dieser Gleichung bezeichnen wir mit der Variable j . Es gilt also, dass $j = \sqrt{-1}$ beziehungsweise $j^2 = -1$. Die Variable j ist daher kein Element der reellen Zahlenmenge. Da $j \notin \mathbb{R}$, folgt die Eindeutigkeit dieser Elemente. (vgl. Malle, 2006, Teil 3: S. 51) Wir werden den Beweis für die Eindeutigkeit der komplexen Zahlen mithilfe eines Satzes (Satz 2.1.4) in diesem Abschnitt nachholen. Um die Schreibweise zu vereinfachen, definieren wir zuvor das Paar $(0; 1)$.

Definition 3 (Imaginäre Einheit). Für das Paar $(0; 1)$ gelte die Bezeichnung $j := (0; 1) \in \mathbb{C}$ und nennen j die imaginäre Einheit.

Bemerkung. Mithilfe von Satz 2.1.1 können wir die besondere Eigenschaft von j nachweisen.

$$j^2 = j \cdot j = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0) = -1$$

Die imaginäre Einheit j spielt in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eine wichtige Rolle, da sich durch Addition und Multiplikation reeller Zahlen mit j jede beliebige komplexe Zahl erzeugen lässt. Reelle Zahlen zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Imaginärteil 0 ist. (vgl. Müller-Fonrara, 2007, S. 80)

Bemerkung (Potenzen der imaginären Zahl). Für die Potenzen der imaginären Zahl gilt, dass

$$j^{4k} = 1, j^{4k+1} = j, j^{4k+2} = -1 \text{ und } j^{4k+3} = -j \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Mithilfe der vollständigen Induktion können diese Annahmen sehr einfach bewiesen werden.

Wir haben bereits nachgerechnet, dass $j^2 = -1$. Jedes Element $a := (a_1; a_2)$ der Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann nach Definition 2 als $(a_1; a_2) = (a_1; 0) + a_2(0; 1)$ oder komponentenweise durch $(a_1; a_2) = a_1 + ja_2$ geschrieben werden. (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 343)

Bemerkung. Die Reihenfolge der Komponenten a und b einer komplexen Zahl ist bestimmend. Aus diesem Grund wird auch von einem geordneten Paar $(a; b)$ gesprochen, wobei die Summenschreibweise in der Fachliteratur gebräuchlicher ist.

In der folgenden Definition wird diese Notation zusammengefasst.

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Definition 4 (Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen). Es sei $z = (a; b)$. z kann auch geschrieben werden als

$$z = a + bj$$

und wir bezeichnen a als den Realteil und b als den Imaginärteil von z . Wir schreiben $a = \Re(z)$ und $b = \Im(z)$. Die Darstellung $z = a + bj$ wird auch „kartesische Form“ genannt. (vgl. Proß & Imkamp, 2023, S. 127)

Bemerkung. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Jede komplexe Zahl kann als

$$z = a + bj = (a; b)$$

dargestellt werden.

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned} z = a + bj &= (a; 0) + (0; 1) \cdot (b; 0) = (a; 0) + (0; b) = \\ &= (a; 0) + (0 \cdot b + 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (a, 0) + (0, b) = (a; b). \end{aligned}$$

□

Wir können die Zahlen aus Definition 2 nun wie folgt anschreiben.

Definition 5 (Die komplexen Zahlen). Die Menge der komplexen Zahlen wird somit definiert als

$$\mathbb{C} = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}, j^2 = -1\}.$$

Satz 2.1.3 ($\mathbb{C}$ ist ungeordnet). Es gibt keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein geordneter Körper ist.

Beweis. Angenommen, es gäbe eine Ordnungsrelation $\leq$, die alle notwendigen Eigenschaften aufweist. Dann gilt jedenfalls $-1 < 0 < 1$. Wegen $j \neq 0$ und $-1 = j^2 > 0$ existiert keine solche Ordnungsrelation. Daraus folgt, $\mathbb{C}$ ist ein ungeordneter Körper.

□

2.1.5 Polardarstellungen einer komplexen Zahl

Komplexe Zahlen können offensichtlich als Elemente von $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ interpretiert und somit als Punkte in der Ebene dargestellt werden. Diese Sichtweise geht auf Wessel, Argand und Gauß zurück. Auch die Darstellung mit Polarkoordinaten, bei der Länge und Winkel verwendet werden, basiert auf dieser geometrischen Interpretation. In der komplexen Ebene können wir daher Polarkoordinaten einführen, das heißt, anstelle der kartesischen Koordinaten werden der Abstand zum Ursprung und der Winkel zur

2.1 Die komplexen Zahlen

positiven x-Achse zur Beschreibung der Punkte genutzt. Mit dieser Beschreibung lässt sich jede komplexe Zahl $0 \neq z = a + bj$ als

$$z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \quad (\text{goniometrische Form})$$

schreiben. Der Winkel φ wird dabei auf das Intervall $[-\pi; \pi[$ eingeschränkt. Der Radius lässt sich mithilfe des Satzes von Pythagoras durch

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

berechnen. Der Winkel φ kann über

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} \quad (r \neq 0)$$

oder auch über

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

ermittelt werden. Allerdings liefert diese Gleichung für den Winkel keine eindeutige Lösung: Zunächst muss der Winkel so bestimmt werden, dass er im Bereich $[-\pi; \pi[$ bleibt, also einen vollen Kreis nicht überschreitet. Zudem ist der Tangens in diesem Intervall weder injektiv noch überall definiert; er ist nur auf dem Bereich $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ eindeutig definiert. Die Umkehrfunktion des Tangens, der Arcustangens, ist daher als Funktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ definiert. Für $x = 0$ ist $\frac{b}{a}$ nicht definiert, weshalb wir eine Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von a und b treffen müssen, um festzulegen, in welchem Quadranten der Punkt $(a; b)$ mit $a \neq 0$ liegt. In der folgenden Definition sollen diese Überlegungen zusammengefasst werden.

Definition 6 (Betrag und Polardarstellung der komplexen Zahlen). Sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$, dann definieren wir den Betrag einer komplexen Zahl durch

$$|z| = r := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Der Winkel φ in der Polardarstellung mit

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{mit } \varphi \in [0; 2\pi)$$

wird das Argument von z genannt und ist bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Für die Koeffizienten a und b gilt daher

$$a = r \cdot \cos \varphi, \quad b = r \cdot \sin \varphi.$$

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Der Winkel φ kann entweder mit dem arccos oder dem arctan wie folgt berechnet werden:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \text{oder}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \left(\frac{b}{a} \right), & \text{für } x > 0 \\ \arctan \left(\frac{b}{a} \right) + \pi, & \text{für } x < 0, y > 0 \\ \arctan \left(\frac{b}{a} \right) - \pi, & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} .$$

In Satz 2.1.3 wurde bereits gezeigt, dass ein direkter Vergleich der Größe, wie er bei reellen Zahlen möglich ist, für komplexe Zahlen nicht funktioniert. Dennoch lässt sich über den Abstand eines komplexen Punktes zum Ursprung in der Gauß'schen Zahlenebene eine Art Maß für die Größe komplexer Zahlen definieren. (vgl. Müller-Fonrara, 2007, S. 81)

Bemerkung (Darstellung einer komplexen Zahl als Vektor). Jede komplexe Zahl

$z = a + bj = (a; b)$ lässt sich auch als Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vom Ursprung ausgehend darstellen.

In der Gauß'schen Zahlenebene wird jede komplexe Zahl, und damit auch jede reelle Zahl, durch einen Punkt repräsentiert. Der Realteil a bildet dabei die x-Koordinate (Abszisse) und der Imaginärteil b die y-Koordinate (Ordinate) des Punktes, der der komplexen Zahl $z = (a; b)$ zugeordnet ist. (vgl. Müller-Fonrara, 2007, S. 80) Die folgende Abbildung zeigt die Darstellung einer komplexen Zahlen $z = a + bj$ in der Gauß'schen Zahlenebene, benannt nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß.

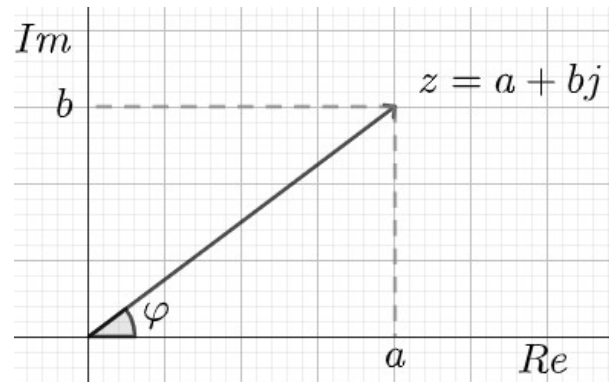


Abbildung 2.4: Darstellung der Komponentenform der komplexen Zahl $z = a + bj$ in der Gauß'schen Zahlenebene

Die Variable r stellt dabei die Länge dar und der Ausdruck $\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$ muss daher Länge 1 haben. Tatsächlich gilt

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \quad (\text{trigonometrischer Pythagoras})$$

Dieser Term stellt somit einen Einheitsvektor dar. (vgl. Malle, 2006, Teil 3: S. 57)

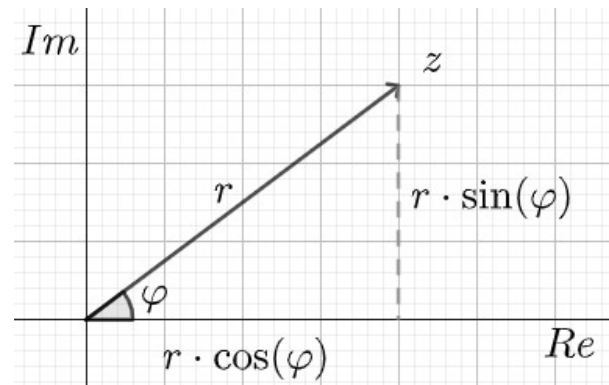


Abbildung 2.5: Darstellung der Polarform einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene

Die geometrische Darstellung ist eindeutig: Jeder Punkt in der Gauß'schen Zahlenebene entspricht genau einer komplexen Zahl z , und umgekehrt steht jede komplexe Zahl z für einen eindeutigen Punkt in dieser Ebene. (vgl. Müller-Fonrara, 2007, S. 80) In Abbildung 2.5 wird die komplexe Zahl als Vektor in der Polarform $z = r \cdot (\cos \phi + j \cdot \sin \phi)$ dargestellt.

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Beispiel 1 (Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene). Gesucht ist die Darstellung der komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2j$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2 + j$, $z_4 = -1 - 2j$ und $z_5 = -j$ als Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene.

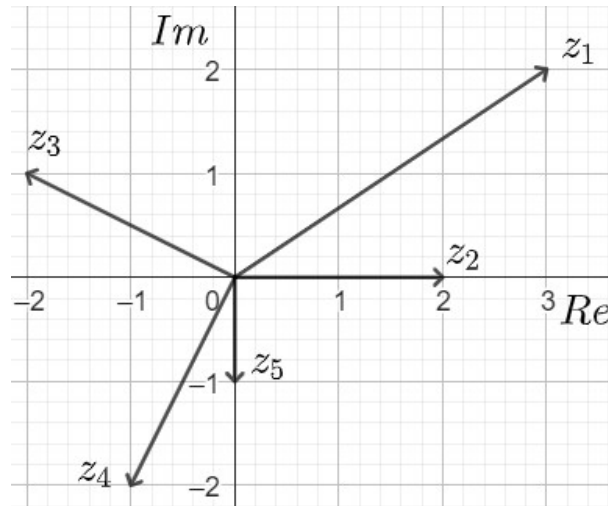


Abbildung 2.6: Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene

Wie man in Abbildung 2.6 gut erkennen kann, liegen die reellen Zahlen auf der sogenannten Realachse, die der bekannten Zahlengeraden aus dem Bereich der reellen Zahlen entspricht, während rein imaginäre Zahlen entlang der Imaginärachse liegen. Daher lässt sich eine komplexe Zahl geometrisch als Vektor oder als gerichteter Pfeil interpretieren.

Satz 2.1.4 (Eindeutigkeit der komplexen Zahlen). Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$ gilt

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c, \quad b = d \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Beweis (indirekt). Für $b \neq d$ gilt

$$a - c = dj - bj = (d - b) \cdot j,$$

woraus nach Division durch $(d - b)$

$$j = \frac{a - c}{d - b} \text{ folgt.}$$

Nach Definition 3 ist $j \notin \mathbb{R}$ und kann somit nicht durch Division auf $\mathbb{R}$ erhalten werden. $\nexists$

□

Bemerkung. Nach Satz 2.1.4 haben tatsächlich alle komplexen Zahlen $z \neq 0$ eine eindeutige Darstellung.

Definition 7 (Trigonometrische Form einer komplexen Zahl). Es seien r und φ die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z , dann gilt

$$z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi).$$

Der Term $\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$ wird auch Richtungsfaktor von z genannt.

Notation: Statt $z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$ können wir auch kurz $z = (r, \varphi)$ schreiben. In der Elektrotechnik wird auch sehr häufig die Schreibweise $z = r \angle \varphi$ verwendet. Im Abschnitt 2.1.2 sind wir bereits kurz auf die Eulersche Formel zu sprechen gekommen. Wir erheben diese besondere Formel nun zur Definition.

Definition 8 (Eulersche Formel). Sind r und φ die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z mit $z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$, dann gilt

$$z = r \cdot e^{j \cdot \varphi},$$

wobei der Ausdruck $e^{j \cdot \varphi}$ gegeben ist durch

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi.$$

Die Eulersche Formel gehört zu den grundlegendsten und auch berühmtesten Formeln der Mathematik. Für die Herleitung dieser Formel möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen. (vgl. Proß & Imkamp, 2023, S.159, vgl. Malle, 2006, Teil 3, S. 226) Die Schreibweise mit der Exponentialfunktion ist weitaus kürzer und wird bei Anwendungen im Vergleich zur trigonometrischen Form einer komplexen Zahl bevorzugt.

Bemerkung. Die komplexe Exponentialfunktion, welche in der Eulerschen Formel ihre Anwendung findet, ist periodisch mit der Periode 2π , da

$$e^{j \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi)} = \cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + j \cdot \sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi = e^{j \cdot \varphi} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bemerkung (Umrechnung zwischen den einzelnen Formen für komplexe Zahlen). Es sei z eine komplexe Zahl mit $z = a + bj$, dann beschreiben die folgenden Ausdrücke dieselbe Zahl:

- (i). $z = a + bj$,
- (ii). $z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$,
- (iii). $z = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$.

Beweis. Es sei z eine komplexe Zahl.

(i). = (ii).: Nach Definition 6 gelten $a = r \cdot \cos \varphi$ und $b = r \cdot \sin \varphi$.

(ii). = (iii).: Nach Definition 8 gilt $e^{j \cdot \varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$. Multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit r , so erhält man die Behauptung.

Da nun (i). = (ii). und (ii). = (iii)., folgt schlussendlich (i). = (iii).

□

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Beispiel 2 (Umrechnung zwischen den Darstellungsformen). Es sei $z = 3 + 4j$. Wir erhalten für den Betrag der komplexen Zahl

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und für den Winkel

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ.$$

Somit kann die komplexe Zahl z auch geschrieben werden als

$$z = 5 \cdot (\cos(53,13^\circ) + j \cdot \sin(53,13^\circ)).$$

Mit der Schreibweise nach Euler erhält man

$$z = 5 \cdot e^{j \cdot 53,13^\circ}.$$

Mithilfe der Polarkoordinaten können wir nun ein paar Potenzen der imaginären Zahl j nachrechnen.

Beispiel 3 (Potenzen von j).

$$\begin{aligned} j &= (1; 90^\circ) = 1 \cdot (\cos(90^\circ) + j \cdot \sin(90^\circ)) = 1 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = 1 \cdot (0 + j \cdot 1) = j \\ j^2 &= (1; 180^\circ) = 1 \cdot (\cos(180^\circ) + j \cdot \sin(180^\circ)) = 1 \cdot e^{j \cdot \pi} = 1 \cdot (-1 + j \cdot 0) = -1 \\ j^3 &= (1; 270^\circ) = 1 \cdot (\cos(270^\circ) + j \cdot \sin(270^\circ)) = 1 \cdot e^{j \cdot \frac{3\pi}{2}} = 1 \cdot (0 + j \cdot (-1)) = -j \\ j^4 &= (1; 360^\circ) = 1 \cdot (\cos(360^\circ) + j \cdot \sin(360^\circ)) = 1 \cdot e^{j \cdot 2\pi} = 1 \cdot (1 + j \cdot 0) = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Für die Berechnungen aus dem Bereich der Elektrotechnik ist die Vereinfachung

$$\frac{1}{j} = -j$$

vorteilhaft.

Man kann an dieser Stelle sehr einfach nachweisen, dass diese Gleichheit tatsächlich stimmt. Es gilt

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{-j^2} = -\frac{j}{1} = -j.$$

2.1.6 Rechenoperationen auf der Menge der komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt werden die vier Grundrechnungsarten sowie einige spezielle Operationen im Bereich der komplexen Zahlen zusammengefasst.

Die Addition und Subtraktion komplexer Zahlen erfolgt komponentenweise, indem die Realteile und Imaginärteile separat addiert beziehungsweise subtrahiert werden. Die

Multiplikation komplexer Zahlen basiert auf dem Ausmultiplizieren zweier Binome und die Division komplexer Zahlen wird durch Multiplikation mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners durchgeführt, um den Imaginärteil im Nenner zu eliminieren. Auch Potenzen komplexer Zahlen können mithilfe der Polarform effizient berechnet werden. Diese Operationen bilden die Grundlage für die algebraische Bearbeitung komplexer Zahlen und sind entscheidend für das Verständnis weiterführender mathematischer Konzepte, die auf komplexen Zahlen basieren. Bei den einzelnen Beispielen in diesem Kapitel habe ich mich vorrangig von den Werken von Timischl & Kaiser (2012) sowie Kopp (2006) inspirieren lassen.

Satz 2.1.5 (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit komplexen Zahlen). Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$ zwei komplexen Zahlen, dann gelten

- (i). $z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d) \cdot j \in \mathbb{C}$,
- (ii). $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot j \in \mathbb{C}$,
- (iii). $\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \in \mathbb{C} \quad (z_2 \neq 0)$.

Beweis. (i). Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$. Dann gilt

$$z_1 + z_2 = a + bj + c + dj = a + c + bj + dj \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (v)}}{=} (a + c) + (b + d) \cdot j.$$

(ii). Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bj) \cdot (c + dj) = ac + bcj + adj + bdj^2 \stackrel{j^2 = -1}{=} \\ &= ac + bcj + adj - bd \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (v)}}{=} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc) \cdot j. \end{aligned}$$

(iii). Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj) \cdot (c - dj)}{(c + dj) \cdot (c - dj)} \stackrel{j^2 = -1}{=} \frac{ac + bcj - adj + bd}{c^2 + d^2} \stackrel{\text{Satz 2.1.1 (v)}}{=} \\ &= \frac{ac + bd + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

□

Der vorherige Satz hat gezeigt, dass die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient von zwei komplexen Zahlen wieder eine komplexe Zahl ist. (vgl. Malle, 2006, Teil 3: S. 53 ff.)

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Beispiel 4 (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier komplexer Zahlen). Es seien $z_1 = 3 + j$ und $z_2 = 1 + 2j$ zwei komplexe Zahlen. Man berechne die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten der beiden Zahlen.

$$(i). \quad z_1 + z_2 = 3 + j + 1 + 2j = (3 + 1) + (j + 2j) = 4 + 3j$$

$$(ii). \quad z_1 - z_2 = 3 + j - (1 + 2j) = (3 - 1) + (j - 2j) = 2 - j$$

$$(iii). \quad z_1 \cdot z_2 = (3 + j) \cdot (1 + 2j) \stackrel{j^2 = -1}{=} (3 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + (3 \cdot 2 + 1 \cdot 1)j = 1 + 7j$$

$$(iv). \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + j}{1 + 2j} = \frac{(3 + j)(1 - 2j)}{(1 + 2j)(1 - 2j)} \stackrel{j^2 = -1}{=} \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{1^2 + 2^2} + \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 3}{1^2 + 2^2}j = 1 - j$$

Die Darstellung der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene erfolgt nach den Regeln der Vektorrechnung. (vgl. Timischl & Kaiser, 2012, S. 181)

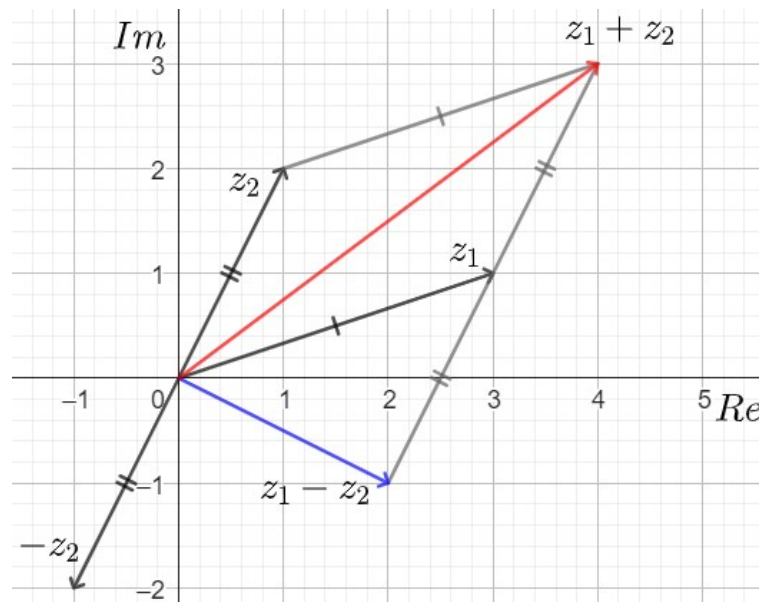


Abbildung 2.7: Darstellung der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene

Im Punkt (iii). des Beweises von Satz 2.1.5 wurde der Bruch $\frac{a+bj}{c+dj}$ mit dem Term $c - dj$ erweitert, damit der Nenner reellwertig wird. Diese Form der Multiplikation soll nun zur Definition erhoben werden. (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 345)

Definition 9 (Konjugiert komplexe Zahl). Es sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$. Wir definieren die zu z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ als

$$\bar{z} := a - bj.$$

Wie bereits gezeigt, gilt weiters

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

In Abbildung 2.8 sind die komplexe Zahl $z = a + bj$ und ihre konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - bj$ dargestellt. Die komplexe Zahl wurde geometrisch betrachtet an der reellen Achse gespiegelt.

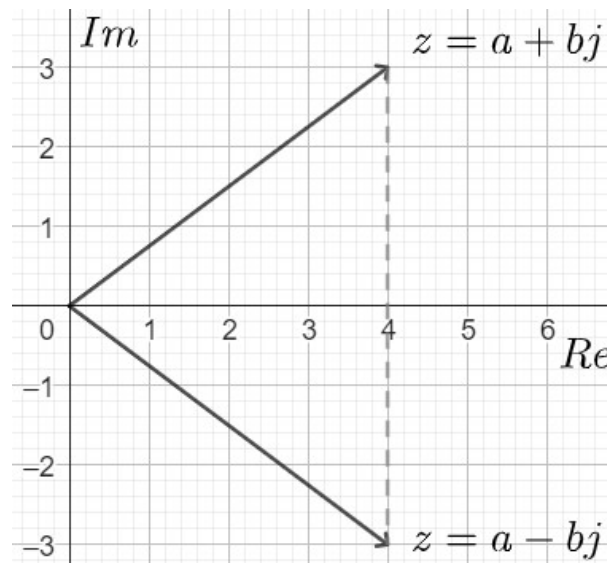


Abbildung 2.8: Darstellung der konjugiert komplexen Zahl

Bemerkung. In der Elektrotechnik ist die Bezeichnung z^* für die konjugiert komplexe Zahl üblich, da etwa der komplexe Widerstand (siehe Kapitel 2.2.3) mit $\underline{Z}$ angegeben wird.

Beispiel 5. Man berechne den Real- und Imaginärteil, die konjugiert komplexe Zahl sowie den Betrag von $z_1 = 3 + j$, $z_2 = -3 - 2j$, $z_3 = 4$ und $z_4 = 6j$.

z	$\Re(z)$	$\Im(z)$	z^*	$ z $
$z_1 = 3 + j$	3	1	$3 - j$	$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$
$z_2 = -3 - 2j$	-3	-2	$-3 + 2j$	$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
$z_3 = 4$	4	0	4	$\sqrt{4^2} = 4$
$z_4 = 6j$	0	6	$-6j$	$\sqrt{6^2} = 6$

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Bemerkung. Mit Satz 2.1.5 haben wir gezeigt, dass die vier Grundrechnungsarten auch für die komplexen Zahlen gelten. Es seien $z_1 = r_1(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi}$ und $z_2 = r_2(\cos \psi + j \cdot \sin \psi) = r_2 \cdot e^{j \cdot \psi}$ zwei komplexe Zahlen in der Polardarstellung, dann gelten

- (i). $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi + \psi) + j \cdot \sin(\varphi + \psi)) = r_1 r_2 \cdot e^{j \cdot (\varphi + \psi)},$
- (ii). $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi - \psi) - j \cdot \sin(\varphi - \psi)) = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j \cdot (\varphi - \psi)}$ mit $r_2 \neq 0.$

Durch Ausmultiplizieren und Anwenden der Additionstheoreme der Winkelfunktionen können die Gleichheiten der obigen Bemerkung bewiesen werden. In der angeführten Fachliteratur können die Additionstheoreme nachgelesen werden. (vgl. Bartsch, 2015, S. 138 f., vgl. Malle, 2006, Teil 1, S. 241 f.)

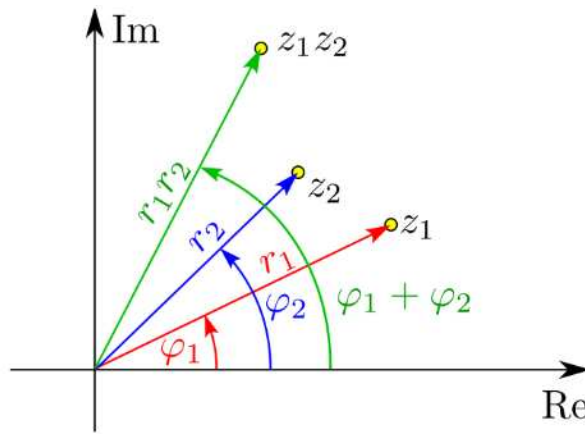


Abbildung 2.9: Geometrische Darstellung der Multiplikation in der Polarform
(Embacher, 2017, S. 13)

In Abbildung 2.9 sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = r_1 \cdot e^{j \cdot \varphi_1}$ und $z_2 = r_2 \cdot e^{j \cdot \varphi_2}$ sowie deren Produkt dargestellt. Man kann daran deutlich erkennen, dass die beiden Radien miteinander multipliziert und die Winkel addiert wurden. Nun ist es möglich, auch die komplexe Multiplikation in die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte oder Vektoren in der Ebene einzubeziehen. Gemeinsam mit der geometrischen Interpretation der Addition, wie in Abbildung 2.7 dargestellt, (als Aneinanderfügen von Vektoren) lässt sich somit die gesamte algebraische Struktur der Menge $\mathbb{C}$ geometrisch nachvollziehen. Diese Verbindung zwischen algebraischen und geometrischen Operationen – oder anders ausgedrückt, zwischen Berechnungen und grafischen Darstellungen – erweist sich in der Praxis als äußerst hilfreich. In den nächsten beiden Sätzen wollen wir nun einige Rechenregeln für die Beträge von komplexen Zahlen und konjugiert komplexen Zahlen zusammenfassen.

Satz 2.1.6 (Identitäten der konjugiert komplexen Zahl). Es seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen mit $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$ mit $z_1, z_2 \neq 0$. Dann gelten

- (i). $\bar{\bar{z}} = z$,
- (ii). $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- (iii). $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$,
- (iv). $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- (v). $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$,
- (vi). $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,
- (vii). $\Im(z) = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$.

Beweis. Es seien $z_1 = a + bj$, $z_2 = c + dj$, $\bar{z}_1 = a - bj$ und $\bar{z}_2 = c - dj$ komplexe Zahlen.

(i). Nach Definition 9 gilt $\bar{\bar{z}} = \overline{a + bj} = \overline{a - bj} = a + bj = z$.

(ii). Nach Definition 9 gilt

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a + bj + c + dj} = \overline{(a + c) + j(b + d)} = \\ &= (a + c) - j(b + d) = a + c - bj - dj = (a - bj) + (c - dj) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

(iii). Nach Definition 9 gilt

$$\begin{aligned}\overline{z_1 - z_2} &= \overline{a + bj - c - dj} = \overline{(a - c) + j(b - d)} = \\ &= (a - c) - j(b - d) = a - c - bj + dj = (a - bj) - (c - dj) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.\end{aligned}$$

(iv). Nach Definition 9 gilt

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a + bj) \cdot (c + dj)} \stackrel{\text{Satz 2.1.5}}{=} \overline{ac + bcj + adj - bd} = \\ &= \overline{(ac - bd) + j(bc + ad)} = (ac - bd) - j(bc + ad) = \\ &= ac - bd - bcj - adj \stackrel{j^2 = -1}{=} ac - adj - bcj + bdj^2 = \\ &= (a - bj) \cdot (c - dj) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.\end{aligned}$$

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

(v). Nach Definition 9 gilt

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{a+bj}{c+dj}\right)} = \overline{\left(\frac{(a+bj)(c-dj)}{(c+dj)(c-dj)}\right)} \stackrel{j^2=-1}{=} \overline{\left(\frac{ac+bcj-adj+bd}{c^2+d^2}\right)} = \\ &= \overline{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - j \cdot \frac{bc-ad}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd-bcj+adj}{c^2+d^2} \stackrel{j^2=-1}{=} \frac{(a-bj)(c+dj)}{(c-dj)(c+dj)} = \frac{\overline{a+bj}}{\overline{c+dj}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.\end{aligned}$$

$$(vi). \quad \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(a+bj + a-bj) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a = \Re(z).$$

$$(vii). \quad \frac{1}{2j}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2j}(a+bj - a-bj) = \frac{1}{2j} \cdot 2bj = b = \Im(z).$$

□

Satz 2.1.7 (Rechenregeln für Beträge komplexer Zahlen). Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$ zwei komplexe Zahlen und $z_1, z_2 \neq 0$. Weiters sei $r \in \mathbb{R}$ eine der beiden Polarkoordinaten einer komplexen Zahl. Dann gelten

$$(i). \quad |z| \geq 0, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,$$

$$(ii). \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$(iii). \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$(iv). \quad |z_1| = r,$$

$$(v). \quad |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

$$(vi). \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Beweis. Es seien $z_1 = a + bj$ und $z_2 = c + dj$ zwei komplexe Zahlen und $z_1, z_2 \neq 0$.

$$(i). \quad \text{Diese Eigenschaft folgt direkt aus Definition 9, da } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

$$\text{Für } a = b = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0, \text{ da } a^2, b^2 \geq 0.$$

$$(ii). \quad \boxed{\Rightarrow}$$

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= |(a+bj) \cdot (c+dj)| \stackrel{\text{Def. 6}}{=} \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2d^2} = \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2d^2}.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned} |a + bj| \cdot |c + dj| &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned}$$

 (iii). $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \left| \frac{a + bj}{c + dj} \cdot \frac{c - dj}{c - dj} \right| \stackrel{j^2 = -1}{=} \left| \frac{ac + bcj - adj + bd}{c^2 + b^2} \right| = \\ &= \left| \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \right| \stackrel{\text{Def. 6}}{=} \sqrt{\left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right)^2 + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)^2} \stackrel{(i)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}{(c^2 + d^2)^2}} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}}{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

$$\Leftarrow \frac{|a + bj|}{|c + dj|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}}{\sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}} \stackrel{(i)}{=} \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2}}{c^2 + d^2}.$$

Da jeweils die beiden Ausdrücke in (i). und (ii). übereinstimmen, sind die Gleichheiten gezeigt.

$$(iv). |z_1| \stackrel{\text{Def. 6}}{=} |r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)| \stackrel{\text{Def. 6}}{=} \sqrt{r^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}_{=1} = r$$

$$(v). |z_1 \cdot z_2|^2 \stackrel{\text{Def. 9}}{=} \overline{z_1 z_2} z_1 z_2 \stackrel{\text{Satz 2.1.6 (iv)}}{=} \overline{z_1} \overline{z_2} z_1 z_2 = \overline{z_1} z_1 \overline{z_2} z_2 \stackrel{\text{Def. 9}}{=} |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

- (vi). 1. Fall: Für $z_1 = z_2 = 0$ ist die Ungleichung erfüllt, da $0 \leq 0$.
 2. Fall: Für $z_1 = z_2 \neq 0$ ist die Ungleichung erfüllt, da $2 \leq 2$.
 3. Fall: $z_1 \neq z_2$

Da beide Seiten ungleich Null sind, darf quadriert werden und wir erhalten

$$z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 + z_2 \overline{z_2} \leq z_1 \overline{z_1} + 2 \cdot |z_1 z_2| + z_2 \overline{z_2}.$$

Durch die Subtraktion identischer Terme erhalten wir

$$z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \leq 2 \cdot |z_1 z_2|.$$

Nach Definition 9 folgt

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + a^2 + b^2 &\leq 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2(a^2 + b^2) &\leq 2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \\ a^2 + b^2 &\leq \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Diese Ungleichung ist aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion immer erfüllt und die Dreiecksungleichung ist somit gezeigt.

□

Satz 2.1.8 (Satz von de Moivre). Für die n -te Potenz ($n \in \mathbb{N}$) einer komplexen Zahl $z = (1; \varphi)$ mit Betrag 1 gilt:

$$z^n = (1; \varphi)^n = (1; n\varphi) = (\cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)).$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz mithilfe der vollständigen Induktion. Es sei $z = (1; \varphi)$, dann gilt

$$z^n = (1; \varphi)^n = (r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi))^n = r^n \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)^n.$$

Aus $r = 1$ folgt

$$z^n = (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)^n = \underbrace{(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \cdots (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Induktionsanfang: Die Aussage ist für $n = 0$ gültig, da

$$(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)^0 = 1 \quad \text{und} \quad (\cos(0 \cdot \varphi) + j \cdot \sin(0 \cdot \varphi)) = 1 + 0j = 1.$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$.

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)^{n+1} &= (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)^n \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \\ &= (\cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)) \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) \\ &= \cos(n\varphi) \cdot \cos(\varphi) + j \cdot \cos(n\varphi) \cdot \sin(\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ &\quad + j^2 \cdot \sin(n\varphi) \cdot \sin(\varphi) \\ &= \underbrace{\cos(n\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(n\varphi) \cdot \sin(\varphi)}_{=\cos(n\varphi+\varphi)} \\ &\quad + j \cdot \underbrace{(\sin(n\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(n\varphi) \cdot \sin(\varphi))}_{=\sin(n\varphi+\varphi)} \\ &= \cos((n+1)\varphi) + j \cdot \sin((n+1)\varphi) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung für $n + 1$. Gemeinsam mit dem Induktionsanfang ist der Satz von de Moivre für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

□

Bemerkung. Beim Beweis des Satzes von de Moivre wurden erneut die Additionstheoreme der Winkelfunktionen verwendet. (vgl. Bartsch, 2015, S. 138 ff.) Außerdem kann nach Definition 8 der Ausdruck $(r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi))^n$ auch geschrieben werden als

$$(r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi))^n = (e^{j \cdot \varphi})^n = e^{j \cdot n\varphi}.$$

Wir haben bereits in Satz 2.1.1 bewiesen, dass die komplexen Zahlen alle Körpereigenschaften wie auch die rationalen und reellen Zahlen erfüllen. In Punkt (viii). dieses Satzes haben wir auch bereits gezeigt, dass es ein Inverses bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$ gibt. Es muss also ein $z^{-1} \in \mathbb{C}$ geben, sodass gilt

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

Im folgenden Satz wollen wir nun das Inverse einer komplexen Zahl z bezüglich der Multiplikation bestimmen.

Satz 2.1.9 (Inverse komplexe Zahl bezüglich der Multiplikation). Es sei z eine komplexe Zahl mit $z = a + bj$, wobei beide Koeffizienten nicht gleichzeitig Null sind. Dann gilt

$$\forall z \exists z^{-1} \in \mathbb{C} : z \cdot z^{-1} = 1.$$

Beweis. Aus Definition 9 folgt, dass $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$. Da weiters a und b nicht gleichzeitig 0 sind, können wir durch $a^2 + b^2$ dividieren und erhalten

$$\frac{z \cdot \bar{z}}{a^2 + b^2} = 1.$$

Das multiplikative Inverse von z lautet daher

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}.$$

Für $a = b = 0$ existiert kein multiplikatives Inverses, da die Division durch 0 nicht durchführbar ist. Für $a = 0 \wedge b \neq 0$ gilt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{b^2}$ beziehungsweise umgekehrt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2}$ falls $a \neq 0 \wedge b = 0$.

□

Beispiel 6. Man berechne das multiplikativ Inverse zu $z = 1 + 2j$.

Nach Definition 9 ist die konjugiert komplexe Zahl von $z = 1 + 2j$ gegeben durch

$$\bar{z} = 1 - 2j.$$

Nach Satz 2.1.9 gilt weiters

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2j}{1^2 + 2^2} = \frac{1 - 2j}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j.$$

Zur Überprüfung multiplizieren wir nun unser Ergebnis mit der komplexen Zahl z und erhalten

$$z \cdot z^{-1} = (1 + 2j) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j \right) \stackrel{j^2 = -1}{=} \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j - \frac{2}{5}j + \frac{4}{5} = 1.$$

Unser Ergebnis ist somit tatsächlich das multiplikativ Inverse zu unserer Zahl z .

Satz 2.1.10 (Quadratische Gleichung). Jede Quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ ist über $\mathbb{C}$ lösbar. Für eine negative Diskriminante $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ sind die Lösungen

$$x_1 = z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-D}j \quad \text{und} \quad x_2 = z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{-D}j.$$

Der Beweis dieses Satzes würde über den Kernbereich dieser Arbeit hinausgehen. In der dazu passenden Literatur über die Funktionentheorie (Remmert & Schumacher, 2002) lässt sich der Fundamentalsatz der Algebra finden, der für den Beweis dieses Satzes notwendig ist. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nicht konstante Polynom auf der Menge der komplexen Zahlen mindestens eine Nullstelle besitzt. Die Koeffizienten eines solchen Polynoms können dabei auch komplexe Zahlen sein. (vgl. Schichl & Steinbauer, 2012, S. 347 ff.)

Beispiel 7 (Quadratwurzel einer komplexen Zahl). Gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $z = a + bj$ für $z^2 = -20 - 48j$?

Wir quadrieren $a + bj$ und setzen gleich:

$$(a + bj)^2 \stackrel{j^2 = -1}{=} a^2 + 2abj - b^2 = -20 - 48j.$$

Die Real- und Imaginärteile müssen auf beiden Seiten übereinstimmen:

$$a^2 - b^2 = -20 \wedge 2ab = -48.$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir

$$b = -\frac{24}{a}.$$

Setzen wir nun in die erste Gleichung für b ein, dann erhalten wir

$$a^2 - \left(-\frac{24}{a}\right)^2 = -20.$$

Im nächsten Schritt substituieren wir a^2 mit u , wobei $0 < u \in \mathbb{R}$, und erhalten eine quadratische Gleichung in u :

$$u - \frac{576}{u} + 20 = 0 \Rightarrow u^2 + 20u - 576 = 0.$$

Die quadratische Lösungsformel liefert für diese Gleichung zwei Lösungen in $\mathbb{R}$:

$$u_1 = 16 \quad \text{und} \quad u_2 = -36.$$

Aus $u = a^2$ folgt nun, dass $a = \pm\sqrt{u} = \pm 4$ und $b = \mp\frac{24}{a} = \mp 6$. Wir haben also ein $z_1 = a + bj = 4 - 6j$ und die dazugehörige Nebenzahl $z_2 = c + dj = -4 + 6j$ gefunden. Beide Quadrate dieser Zahlen liefern somit als Ergebnis $z^2 = -20 - 48j$.

2.1.7 Gleichungen mit komplexen Koeffizienten

Mithilfe der Vorüberlegungen können wir nun Gleichungen der Art $x^2 + 1 = 0$ lösen.

Beispiel 8 (Nullstelle(n) einer reellen Gleichung). Die Nullstellen der Gleichung $x^2 + 8x + 25 = 0$ berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 8x + 25 &= 0 \Leftrightarrow \\
 x^2 + 8x &= -25 \Leftrightarrow \\
 x^2 + 8x + 4^2 &= 4^2 - 25 \Leftrightarrow \\
 x^2 + 8x + 4^2 &= -9 \Leftrightarrow \\
 (x + 4)^2 &= -9 \Leftrightarrow \\
 x + 4 &= \pm\sqrt{-9} \Leftrightarrow \\
 x &= -4 \pm \sqrt{-9}.
 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass die Gleichung $x^2 + 8x + 25 = 0$ zwei komplexe Nullstellen hat, nämlich $x_1 = -4 + 3j$ und $x_2 = -4 - 3j$.

Wir haben in Beispiel 7 gesehen, dass die Quadratwurzel einer komplexen Zahl existiert. Außerdem sind auch alle weiteren Rechenoperationen, die auch in $\mathbb{R}$ erlaubt sind, auf der Menge der komplexen Zahlen durchführbar, da $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Die beiden Koeffizienten p und q einer quadratischen Gleichung dürfen auch komplexe Zahlen sein. Damit können wir nun in einem letzten Schritt quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten p und q lösen.

Beispiel 9 (Quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten). Gesucht sind alle Nullstellen der Gleichung $x^2 + (-1 + j)x + (5 + 11,5j) = 0$. Mithilfe der quadratischen Lösungsformel erhalten wir

$$\begin{aligned}
 x_{1;2} &= -\frac{-1+j}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1+j)^2}{4} - \left(5 + \frac{23}{2}j\right)} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - j \pm \sqrt{1 - 2j - 1 - 20 - 46j}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - j \pm \sqrt{-20 - 48j}\right).
 \end{aligned}$$

Im Beispiel 7 haben wir diese Wurzel bereits berechnet und erhalten

$$x_{1;2} = \frac{1}{2} \cdot (1 - j \pm (4 - 6j)).$$

Wir erhalten nun die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - j + 4 - 6j) = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}j$$

und

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - j - 4 + 6j) = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}j.$$

Wir überzeugen uns noch davon, dass auch der Satz von Vieta gilt:

$$(i). \quad x_1 + x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}j - \frac{3}{2} + \frac{5}{2}j = 1 - j = -p,$$

$$(ii). \quad x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}j\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}j\right) \stackrel{j^2=-1}{=} 5 + \frac{23}{2}j = q,$$

$$(iii). \quad (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}j\right) \left(x + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}j\right) \stackrel{j^2=-1}{=} x^2 + (-1 + j)x + \left(5 + \frac{23}{2}j\right).$$

Damit ist gezeigt, dass x_1 und x_2 die Gleichung erfüllen.

Die letzten beiden Beispiele sollen zeigen, dass auf der Menge der komplexen Zahlen jede quadratische Gleichung gelöst werden kann. Beim (Wurzel-)Satz von Vieta möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen. Dieser Satz wird bereits in der Schule hergeleitet und „bewiesen“ und bedarf daher keiner expliziten Formulierung und Beweisführung. (vgl. Malle, 2006, Teil 3: S. 56) Der folgende Abschnitt thematisiert eine praktische Anwendung der komplexen Zahlen in der Wechselstromtechnik.

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

2.2.1 Vorüberlegungen

Wir betrachten eine Sinusschwingung $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ als Ergebnis eines gleichförmig rotierenden Zeigers mit $A, \omega, t \in \mathbb{R}$ und $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$. Neu ist hierbei die Annahme, dass die Ebene, in der dieser Zeiger dargestellt wird, als Gauß'sche Zahlenebene interpretiert wird. Dieser Ansatz ist nützlich, da er es erlaubt, die Sinusschwingungen mit Hilfe der Rechenoperationen für komplexe Zahlen zu behandeln. Dies ist oft einfacher als das Rechnen mit klassischen Kreisfunktionen. In der Elektrotechnik wird diese Methode der komplexen Darstellung von Wechselstromgrößen als „symbolische Methode“ (Timischl & Kaiser, 2012, S. 197) bezeichnet. Sie ermöglicht es, zeitabhängige sinusförmige Größen durch zeitunabhängige Größen zu ersetzen, wie sie in Gleichstromkreisen verwendet werden. Voraussetzung hierfür ist, dass es sich um rein sinusförmige Wechselspannungen und -ströme mit gleicher Frequenz handelt. Diese Bedingung ist in elektrischen Netzwerken bei sinusförmigen Quellenspannungen gegeben. Wenn eine sinusförmige Wechselspannung $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$ mit einem Strom $i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$ an einem elektrischen Bauelement oder einer Gruppe von Bauelementen anliegt, lassen sich die Spannung und der Strom wie folgt in einer komplexen Form darstellen.

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_u)}$$

$$\underline{i}(t) = \hat{I} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi_i)}$$

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

Für die einzelnen Parameter dieser Schwingungen gelten dieselben oben angeführten Eigenschaften.

Diese Darstellung mit der Exponentialfunktion kennen wir bereits aus dem Abschnitt 2.1.5. Dabei stehen $\hat{U}$ und $\hat{I}$ für die Scheitelwerte (Amplituden) sowie φ_u und φ_i für die Nullphasenwinkel von Spannung und Strom. Das Verhältnis dieser Größen wird als „komplexer Widerstand“ des Bauelements bezeichnet. (vgl. Timischl & Kaiser, 2012, S. 198)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{I} \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

Der Ausdruck $e^{j\omega t}$ fällt weg, wodurch $\underline{Z}$ zeitunabhängig wird. Die auftretende Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom wird durch den Winkel $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ beschrieben. Der Betrag von $Z = |\underline{Z}|$ wird Scheinwiderstand oder Impedanz genannt. In Komponentenform zerfällt der komplexe Widerstand in den Realteil (Wirkwiderstand) und den Imaginärteil (Blindwiderstand) und wird als $\underline{Z} = R + j \cdot X$ geschrieben. Da sowohl die komplexen Größen, also Spannung $\underline{u}(t)$ und Strom $\underline{i}(t)$, in den Einheiten „Volt“ bzw. „Ampere“ angegeben werden und der Wert einer Potenz zur Basis e dimensionslos ist, ergibt sich auch für ihr Verhältnis, dem komplexe Widerstand, die Einheit „Volt pro Ampere“ oder „Ohm“. Wenn jedoch Einschaltvorgänge oder nicht-sinusförmige Stromverläufe modelliert werden sollen, reicht die beschriebene Transformation in die komplexe Ebene nicht aus. Hier kommt eine zusätzliche Methode, die sogenannte Laplace-Transformation, zum Einsatz. Hierfür möchte ich an dieser Stelle an die Fachliteratur verweisen. (vgl. Timischl & Kaiser, 2012, S. 198) Nach Definition 8 kann die reellwertige Sinusschwingung

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

in eine komplexe Funktion transformiert und als

$$\underline{y}(t) = A \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = A \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$

geschrieben werden. Dabei entspricht der Zeitwert $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ dem Imaginärteil der komplexen Darstellung. Eine Sinusfunktion kann durch die Beziehung

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

in eine Kosinusfunktion übergeführt werden. (vgl. Timischl & Kaiser, 2012, S. 197) Anhand eines kurzen Beispiels soll diese Beziehung nun verdeutlicht werden.

Beispiel 10. Man ermittle die komplexe Darstellung der Sinusschwingung

$$y(t) = 5 \cdot \sin\left(2t + \frac{4}{10}\right).$$

Durch Transformation in die komplexe Zahlenebene erhalten wir

$$\underline{y}(t) = 5 \cdot \cos\left(2t + \frac{4}{10}\right) + j \cdot 5 \cdot \sin\left(2t + \frac{4}{10}\right)$$

Nach Definition 8 kann dieser Ausdruck als

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

$$\underline{y}(t) = 5 \cdot e^{j \cdot \left(2t + \frac{4}{10}\right)}$$

geschrieben werden. Durch das Anwenden der Potenzgesetze können wir den Ausdruck in die komplexe Amplitude und in den Zeitfaktor aufspalten und erhalten dadurch

$$\underline{y}(t) = \underbrace{5 \cdot e^{j \cdot \frac{4}{10}}}_{\text{komplexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j \cdot 2t}}_{\text{Zeitfaktor}}.$$

Bei der Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene wird der Ausdruck $5 \cdot \cos\left(2t + \frac{4}{10}\right)$ auf der reellen und der Ausdruck $j \cdot 5 \cdot \sin\left(2t + \frac{4}{10}\right)$ auf der imaginären Achse eingezeichnet. Für die Länge des Vektors ergibt sich nach Definition 6 der Wert 5. Dieser Zeiger rotiert dabei mit einer Kreisfrequenz $\omega = 2$.

2.2.2 Grundlagen der Elektrotechnik

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Größen und Schaltungen aus der Elektrotechnik behandelt. Für die Erstellung der einzelnen Grafiken sämtlicher Bauteile und Schaltungen habe ich mit der Plattform „Visual Paradigm“, abrufbar unter <https://online.visual-paradigm.com/de/>, gearbeitet. Die elektrische Spannung bezeichnet den „Antrieb“ der Elektronen, also die Ursache für ihre Bewegung. Sie besteht zwischen zwei Körpern, wenn diese unterschiedlich elektrisch geladen sind. (vgl. Mašin & Grois, 2019, S. 68)

Definition 10 (Die elektrische Spannung). Die elektrische Spannung $U \in \mathbb{R}$ wird als Potentialunterschied definiert.

- (i). Formelzeichen: U
- (ii). SI-Basiseinheit: Volt [V]

Die Maßeinheit der Spannung wurde nach dem italienischen Physiker Graf Alessandro Volta benannt. In einem metallischen Leiter wird die Stromleitung durch sogenannte „freie Elektronen“ ermöglicht. Damit sich die Ladungsträger bewegen können, sind ein geschlossener Stromkreis und eine elektrische Spannung erforderlich. Die Spannung erzeugt eine Kraft auf die freien Ladungsträger, wodurch diese in Bewegung geraten und ein Stromfluss entsteht. Währenddessen bewegen sich die Ladungsträger in einem „elektrischen Strömungsfeld“. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2017, S. 17)

Definition 11 (Die elektrische Stromstärke). Als elektrische Stromstärke $I \in \mathbb{R}$ definieren wir die Bewegung elektrischer Ladungen.

- (i). Formelzeichen: I
- (ii). SI-Basiseinheit: Ampere [A]

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

Die Maßeinheit der Stromstärke wurde nach dem französischen Mathematiker und Physiker André-Marie Ampère benannt.

Definition 12 (Der elektrische Widerstand). Gegeben sei ein Stromkreis mit anliegender Stromstärke I und Spannung U . Wir definieren den Quotienten

$$R = \frac{U}{I}$$

als elektrischen Widerstand mit $R \in \mathbb{R}$.

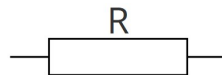


Abbildung 2.10: Schaltzeichen des elektrischen Widerstandes

Benannt nach Georg Simon Ohm wird der elektrische Widerstand in der Maßeinheit Ohm $[\Omega]$ angegeben. Die Formel $R = \frac{U}{I}$ trägt den Namen Ohmsches Gesetz. Der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung kann mathematisch als

$$U \sim I$$

geschrieben werden. Dies bedeutet, dass der Strom proportional zur Spannung ist. Der Proportionalitätsfaktor G wird in der Elektrotechnik als „Leitwert“ bezeichnet. Hierfür möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2017, S. 39 f.)

Beispiel 11 (Ohmsches Gesetz). Es soll der Strom berechnet werden, der bei einer anliegenden Spannung von 50 V durch einen Widerstand von 100Ω fließt.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{50 \text{ V}}{100 \Omega} = \frac{1}{2} \text{ A.}$$

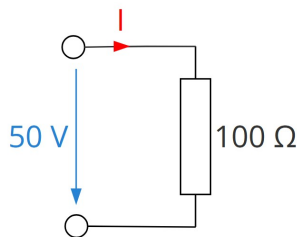


Abbildung 2.11: Widerstandsschaltung

In der Elektrotechnik werden zwei grundlegende Arten von Schaltungen unterschieden, die wir nun einzeln formal definieren werden.

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Definition 13 (Serienschaltung). Es seien $R_1, R_2, \dots, R_n \neq 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ elektrische Widerstände, dann kann der Gesamtwiderstand einer Serienschaltung mit

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

berechnet werden. Eine Serienschaltung hat weiters folgende Eigenschaften:

- (i). $\exists! I : I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \dots = \frac{U_n}{R_n}$.
- (ii). Der Gesamtwiderstand ist größer gleich als jeder einzelne Teilwiderstand, also $R_{ges} \geq R_k$.
- (iii). Die Spannungsabfälle U_k an den Teilwiderständen R_k sind proportional zu den Teilwiderständen.

Die Spannungen $U_1, U_2, \dots, U_n$ sind die jeweiligen Teilspannungen der oben angeführten Widerstände.

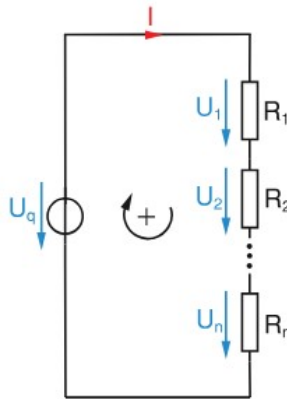


Abbildung 2.12: Serienschaltung elektrischer Widerstände (Deimel & Hasenzagl, 2017, S. 72)

In Abbildung 2.12 ist die sogenannte Quellenspannung der Spannungsquelle mit der gängigen Bezeichnung U_q dargestellt.

Definition 14 (Parallelschaltung). Es seien $R_1, R_2, \dots, R_n \neq 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ elektrische Widerstände, dann kann der Gesamtwiderstand einer Serienschaltung mit

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

berechnet werden. Eine Parallelschaltung hat weiters folgende Eigenschaften:

- (i). $\exists! U : U = R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 = \dots = R_n \cdot I_n$.

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

- (ii). Der Gesamtwiderstand ist kleiner gleich als jeder einzelne Teilwiderstand, also $R_{ges} \leq R_k$.
- (iii). Die Teilströme I_k durch die Teilwiderstände R_k sind indirekt proportional zu den Teilwiderständen.

Die Ströme $I_1, I_2, \dots, I_n$ sind die jeweiligen Teilspannungen der oben angeführten Widerstände.

Bemerkung (Parallelschaltung zweier Widerstände). Für eine Parallelschaltung aus zwei elektrischen Widerständen R_1 und R_2 gilt

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

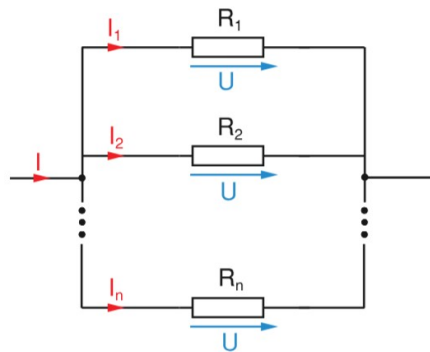


Abbildung 2.13: Parallelschaltung elektrischer Widerstände (Deimel & Hasenzagl, 2017, S. 78)

In der Elektrotechnik werden Spannungen in blau und Ströme in rot dargestellt. Mithilfe der Kirchhoffschen Gesetze können die Eigenschaften beider Schaltungen gezeigt werden. Dafür möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2017, S. 69 ff.)

Ein induktiver oder kapazitiver Widerstand lässt sich genauso einfach behandeln wie ein ohmscher Widerstand. Für den komplexen Ersatzwiderstand gelten bei Serien- oder Parallelschaltungen dieselben Regeln, wie sie aus Gleichstromkreisen bekannt sind.

2.2.3 Wechselstromgrößen in der Elektrotechnik

Die bekannten Formeln für Reihen- und Parallelschaltungen sowie die Kirchhoffschen Regeln lassen sich sinngemäß auch auf Wechselstromgrößen in komplexer Darstellung anwenden. Mithilfe von Zeigerbildern, welche im Abschnitt 2.2.4 behandelt werden, können Berechnungen einfach überprüft werden. Sie bieten zudem einen anschaulichen Überblick über die Spannungen und Ströme sowie deren Phasenlage. (vgl. Deimel &

Hasenzagl, 2021, S. 69) Der Scheitelwert $\hat{U}$ bezeichnet den maximalen Betrag, den eine Wechselgröße innerhalb einer Periode erreicht. Bei einer sinusförmigen Spannung tritt dieser Wert in jeder Periode zweimal auf: als positiver und negativer Maximalwert. Der Effektivwert einer Wechselgröße stellt hingegen einen zeitlich konstanten Mittelwert dar, der die gleiche Leistung erbringt wie eine gleichbleibende Größe mit gleicher Stärke. Da der Effektivwert im Gegensatz zur Wechselgröße nicht periodisch schwankt, wird er – analog zur Gleichstromtechnik – durch Großbuchstaben dargestellt. Ein Beispiel hierfür ist der Effektivwert der Netzspannung, welcher mit $U = 230 \text{ V}$ gegeben ist. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 46) Der Zusammenhang zwischen dem Scheitel- und Effektivwert soll in der folgenden Definition formalisiert werden.

Definition 15 (Scheitelwert und Effektivwert). Der Scheitelwert $\hat{U} \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U,$$

wobei U der Effektivwert der Spannung in der Maßeinheit [V] und $k_s = \sqrt{2}$ der Scheitelfaktor einer Sinusschwingung ist.

Beispiel 12 (Scheitelwert einer Spannung). Es soll der Scheitelwert der Spannung $U = 50 \text{ V}$ aus Beispiel 11 berechnet werden. Mit der obigen Formel erhält man

$$\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 50 \text{ V} \approx 70,71 \text{ V}.$$

Ohmsche, induktive und kapazitive Widerstände treten häufig gemeinsam auf und bilden zusammen einen Gesamtwiderstand, der mehr oder weniger stark von der Frequenz abhängt. Dieser wird als Scheinwiderstand oder Impedanz Z bezeichnet und ergibt sich aus dem ohmschen Gesetz, das mit komplexen Größen formuliert wird. Der Realteil der Impedanz, bekannt als Resistanz, entsteht durch den stets vorhandenen ohmschen Widerstand R . Induktivitäten und Kapazitäten tragen mit ihren Blindwiderständen zum Imaginärteil der Impedanz bei, der als Reaktanz X bezeichnet wird. Während Induktivitäten eine positive Reaktanz aufweisen, ist die Reaktanz bei Kapazitäten negativ.

Definition 16 (Impedanz). Es seien I die elektrische Stromstärke und U die elektrische Spannung, dann gelten

$$(i). \underline{I} = I \angle \varphi_I,$$

$$(ii). \underline{U} = U \angle \varphi_U.$$

Weiters gilt nach dem Ohmschen Gesetz, dass

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \angle \varphi_U}{I \angle \varphi_I} = \frac{U}{I} \angle \varphi_U - \varphi_I = Z \angle \varphi.$$

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

Die Impedanz kann additiv auch geschrieben werden als

$$\underline{Z} = R + j \cdot X = \underline{Z} \angle \varphi.$$

In der Elektrotechnik werden komplexe Größen, wie zum Beispiel die Spannung, der Strom oder Widerstand, mit einem Unterstrich gekennzeichnet. (vgl. Schmid, 2022, S. 309) Die Impedanzen komplexer Widerstände der grundlegenden Schaltelemente – ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand – sind nun wie folgt gegeben.

Definition 17 (Impedanz komplexer Widerstände). Mithilfe der Definition 16 lassen sich nun die einzelnen Impedanzen folgendermaßen bestimmen:

- (i). Impedanz eines Widerstandes: $\underline{Z}_R = R \angle 0^\circ$
- (ii). Impedanz einer Induktivität (Spule): $\underline{Z}_L = j \cdot \underline{X}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$
- (iii). Impedanz einer Kapazität (Kondensator): $\underline{Z}_C = j \cdot \underline{X}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$

Die Induktivität wird dabei in Henry [H] und die Kapazität in Farad [F] angegeben.

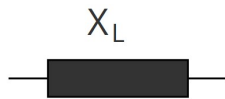


Abbildung 2.14: Schaltzeichen der Induktivität

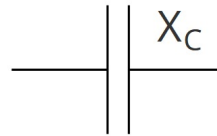


Abbildung 2.15: Schaltzeichen der Kapazität

Bemerkung. Für die mathematische und graphische Darstellung der Impedanz Z werden der ohmsche Widerstand und die Induktivität $(+\varphi)$ bzw. Kapazität $(-\varphi)$ als Reihenschaltung behandelt. Dabei eilt bei einer (idealen) Spule die Spannung dem Strom vor und beim (idealen) Kondensator ist der Strom voreilend. Diese Vor- bzw. Nacheilung der Spannung bewirkt das Vorzeichen des Winkels. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 70)

Die Geschwindigkeit v einer gleichförmigen Bewegung wird definiert als das Verhältnis des zurückgelegten Weges s und der dafür benötigten Zeit t . Analog dazu beschreibt die Winkelgeschwindigkeit ω bei einer gleichförmigen Drehbewegung in der Mechanik den Quotienten des überstrichenen Winkels α und der zugehörigen Zeit t . Betrachtet man eine Sinusschwingung als die Projektion eines rotierenden Zeigers und setzt für eine vollständige Umdrehung $\alpha = 2\pi$ die Periodendauer T in die Gleichung $\omega = \frac{\alpha}{t}$ ein, ergibt sich die in der Wechselstromtechnik und Schwingungslehre gebräuchliche Kreisfrequenz. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 47) Diese Überlegungen sollen nun zur Definition erhoben werden.

Definition 18 (Kreisfrequenz). Die Kreisfrequenz $\omega \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

wobei T die Periodendauer in der Maßeinheit [s] und $f \in \mathbb{R}$ an dieser Stelle die Frequenz, also der Kehrwert der Periodendauer in der Maßeinheit Hertz [Hz], ist.

Zu den zentralen Eigenschaften eines Vierpols, wie etwa bei Hoch- und Tiefpassfiltern, zählt das Verhältnis der komplexen Ausgangsspannung $\underline{U}_a$ und der komplexen Eingangsspannung $\underline{U}_e$. Dieses Verhältnis wird als Spannungs-Übertragungsfunktion $\underline{H}$ bezeichnet. Für sinusförmige Ein- und Ausgangssignale wird es mit $\underline{H}(j\omega)$ bezeichnet. Diese Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$ dient oft zur Beschreibung des Verhaltens frequenzabhängiger selektiver Vierpole, die als Filter bezeichnet werden. Solche Filter lassen nur bestimmte Frequenzbereiche durch oder blockieren sie, wie zum Beispiel Tiefpass oder Hochpass. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 134 f.) Im Abschnitt 2.2.5 werden einzelne Filter näher beleuchtet.

Definition 19 (Übertragungsfunktion). Die komplexe Übertragungsfunktion $\underline{H}(j\omega)$ eines Vierpols ist gegeben durch

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e},$$

wobei $\underline{U}_e$ die Eingangsspannung und $\underline{U}_a$ die Ausgangsspannung in der Maßeinheit [V] sind.

Bemerkung. Der Verhältnis von Ausgangs- und Eingangsspannung bei belastetem Ausgang R_L (Lastwiderstand) wird als Übertragungsfunktion bezeichnet. Die folgende Abbildung zeigt den klassischen Aufbau eines Vierpols.

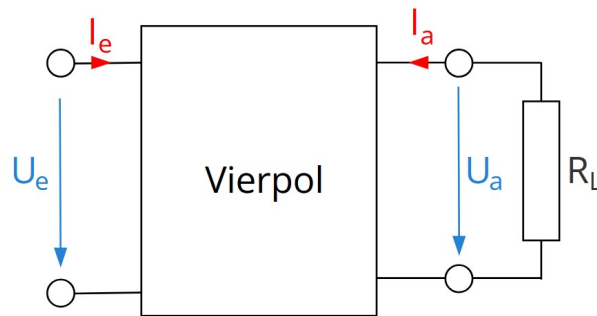


Abbildung 2.16: Darstellung eines Vierpols mit belastetem Ausgang

Unter Vierpolen versteht man Schaltungen, die jeweils zwei Eingangs- und Ausgangsklammern besitzen. Solche Vierpole werden allgemein als „Kasten“ dargestellt. (vgl. Beuth & Beuth, 2015, S. 97)

Definition 20 (Grenzfrequenz eines Filters). Für die Grenzfrequenz eines Filters gilt

$$\Re(\underline{H}(j\omega)) = \Im(\underline{H}(j\omega)).$$

Im speziellen Fall gelten für Hoch- und Tiefpässe 1. Ordnung

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{bzw.} \\ 20 \cdot \log|\underline{H}(\omega)| = -3 \text{ dB.}$$

Bei der Grenzfrequenz herrscht zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung eine Phasenverschiebung von 45° . Der Punkt ($f_g/45^\circ$) ist zugleich der Wendepunkt des Phasengangs.

2.2.4 Darstellungsformen komplexer Größen in der Wechselstromtechnik

In vielen technischen Anwendungen ist es notwendig, die Abhängigkeit komplexer Größen von einem bestimmten Parameter zu analysieren. Dabei gibt es zwei gängige graphische Darstellungsweisen, die von der gewählten mathematischen Repräsentation abhängen. Nutzt man die Komponentenform, lässt sich jede komplexe Zahl als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen. Die Verbindungslinie dieser Punkte bildet die Parameterkurve, die allgemein als Ortskurve bezeichnet wird. Möchte man hingegen speziell die Abhängigkeit des Betrags und des Phasenwinkels einer komplexen Zahl von der Frequenz darstellen, worauf auch der Fokus dieser Arbeit gelegt wurde, wird üblicherweise die Darstellungsform des Frequenzgangs gewählt. Hierbei werden Betrag und Phasenwinkel jeweils als Funktion der Frequenz in separaten Diagrammen aufgetragen. Üblicherweise verwendet man für Betrag und Frequenz eine logarithmische Skalierung, während der Phasenwinkel linear skaliert wird. Diese Form der Darstellung der Frequenzabhängigkeit einer komplexen Größe nennt man Bode-Diagramm. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 118)

Die Ortskurve

Bisher wurden zur graphischen Darstellung komplexer Größen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene verwendet, wobei stets ein fester Betriebszustand mit konstanten Parametern vorausgesetzt wurde. Jede komplexe Größe wurde dabei durch einen einzelnen Zeiger in der komplexen Zahlenebene repräsentiert. Ändert man jedoch einen Parameter, wie den Wert eines Bauteils oder die Frequenz f , verändert sich auch die Position des Zeigers. Bei einem variablen Parameter entsteht somit eine Vielzahl von Zeigern, deren Spitzen eine Kurve in der komplexen Ebene bilden. Diese Kurve wird als Ortskurve bezeichnet. Ortskurven bieten daher eine anschauliche Möglichkeit, das Verhalten komplexer Größen in Abhängigkeit von Parametern wie Frequenz, Amplitude oder Bauteilwerten graphisch darzustellen. Zur weiteren Vertiefung möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 118 ff.)

Das Bode-Diagramm – Amplituden- und Phasengang

Bei der graphischen Veranschaulichung der Frequenzabhängigkeit einer komplexen Größe ist folgende Darstellungsform gebräuchlich: Die Frequenzabhängigkeit von Betrag und Winkel der komplexen Größe wird in zwei getrennten Diagrammen mit linearen oder logarithmischen Skalen dargestellt. Diese Art der Darstellung wird allgemein als Frequenzgang bezeichnet. Im Detail unterscheidet man zwischen dem Betragsfrequenzgang, der die Frequenzabhängigkeit des Betrags einer komplexen Zahl veranschaulicht, und dem Winkelfrequenzgang, der die Frequenzabhängigkeit des Phasenwinkels darstellt. Eine besonders informative Variante des Frequenzgangs ergibt sich, wenn man eine logarithmische Skalierung für Betrag und Frequenz sowie eine lineare Skalierung für den Winkel wählt. Solche Darstellungen werden als Bode-Diagramme bezeichnet. Sie finden häufig Anwendung, um die Frequenzabhängigkeit von Übertragungsfunktionen, wie dem Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung $U_a : U_e$ eines Filters, über große Frequenzbereiche anschaulich darstellen zu können. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 129)

2.2.5 Beispiele

Abschließend werden in diesem Abschnitt ein zwei konkrete Beispiele aus der komplexen Wechselstromtechnik behandelt. Einige bekannte Beispiele sind 2-Draht-Leitungen, Verstärker und Filter. (vgl. Deimel und Hasenzagl, 2021, S. 134 ff.) Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den Hoch- und Tiefpass-Filtern 1.Ordnung. Inspiration für die in diesem Abschnitt angeführten Beispiele habe ich im Werk von Beuth & Beuth (2015, S. 97 ff.) gefunden. Die Autoren geben in ihrem gemeinsamen Werk eine ausführliche Übersicht über die unterschiedlichsten Teilbereiche in der Elektrotechnik. Für die Erstellung der einzelnen Grafiken sämtlicher Bauteile und Schaltungen habe ich erneut mit der Plattform „Visual Paradigm“, abrufbar unter <https://online.visual-paradigm.com/de/>, gearbeitet.

1. Tiefpass

Definition 21 (Tiefpass). Unter einem Tiefpass versteht man eine elektrische Schaltung, die nur tiefe Frequenzen f passieren lässt. Hohe Frequenzen werden gesperrt.

Beispiel 13 (RC-Tiefpass). Das RC-Glied besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator, welche in Serie geschaltet sind. Durch die beiden Ausgangsklemmen wurde aus dem Zweipol ein Vierpol. Die Spannung U_e ist die Eingangsspannung und U_a die Ausgangsspannung.

Gesucht ist das Verhalten des Tiefpasses, wenn am Eingang eine sinusförmige Spannung U_e bei unterschiedlichen Frequenzen angelegt wird.

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

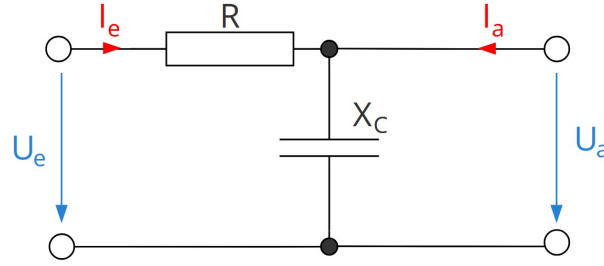


Abbildung 2.17: RC-Tiefpass

Bei tiefen Frequenzen hat der Kondensator einen großen Widerstand und bei hohen Frequenzen einen kleinen Widerstand. Daher gelten

(i). $U_a \approx U_e$ falls f sehr klein ist,

(ii). $U_a \approx 0$ falls f sehr groß ist.

Wir wollen diese Eigenschaft nun nachrechnen, sowie die Grenzfrequenz und das Bode-Diagramm ermitteln.

Der Eingang des Filters bildet eine Serienschaltung aus Widerstand und Kondensator, und am Ausgang befindet sich nur der Kondensator. Daher erhalten wir nach Definition 19 für die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1+j\omega RC}{j\omega C}} = \frac{1}{1+j\omega RC}.$$

Für den Betrag der Übertragungsfunktion muss nach Definition 6 konjugiert komplex erweitert werden und wir erhalten

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \cdot \frac{1-j\omega RC}{1-j\omega RC} \stackrel{j^2=-1}{=} \frac{1-j\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2} + \frac{-j\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2},$$

$$\begin{aligned} |\underline{H}(\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^2} + \frac{\omega^2 R^2 C^2}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\omega^2 R^2 C^2}{(1+\omega^2 R^2 C^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}. \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt führen wir eine Grenzwertbetrachtung für den Amplitudengang

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

durch, wobei wir den Widerstand und den Kondensator mit 1 annehmen.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1 \quad (\text{Durchlassbereich}) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{H}(\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega} \rightarrow 0 \quad (\text{Sperrbereich})\end{aligned}$$

In der zweiten Grenzwertbetrachtung ist die 1 vernachlässigbar. Weiters erhalten wir nach Definition 6 für den Phasengang

$$\varphi = \arctan \frac{\Im(\underline{H}(j\omega))}{\Re(\underline{H}(j\omega))} = \arctan \left(\frac{\frac{-\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \right) = \arctan(-\omega RC).$$

Um den Phasengang vollständig ermitteln zu können, müssen auch die Grenzwerte des Winkels betrachtet werden.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow 0} (\arctan(-\omega RC)) = \arctan 0 = 0^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\arctan(-\omega RC)) \rightarrow -\infty, \text{ also } -90^\circ\end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen beschreiben das Frequenzverhalten des Phasenwinkels eines RC-Glieds in der Wechselstromtechnik. Für niedrige Frequenzen ($\omega \rightarrow 0$) beträgt der Phasenwinkel 0° , während er für hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) gegen -90° strebt, was typisch für ein Tiefpassverhalten ist.

Bevor wir nun das Bode-Diagramm vollständig zeichnen können, müssen wir zu guter Letzt noch die Grenzfrequenz f_g ermitteln. Nach Definition 20 müssen wir den Betrag der Übertragungsfunktion dem Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gleichsetzen und auf f_g umformen. Damit erhalten wir für die Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Das Produkt RC wird in der Fachliteratur häufig mit τ bezeichnet.

$$f_g = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Bei einem Widerstand $R = 330 \, \Omega$ und einem Kondensator $C = 470 \, \text{nF}$ erhalten wir folgende Grenzfrequenz und folgendes Bode-Diagramm:

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot 330 \, \Omega \cdot 470 \cdot 10^{-9} \frac{\text{s}}{\Omega}} \approx 1\,026,14 \, \text{Hz}.$$

2.2 Anwendungsbeispiele aus der Wechselstromtechnik

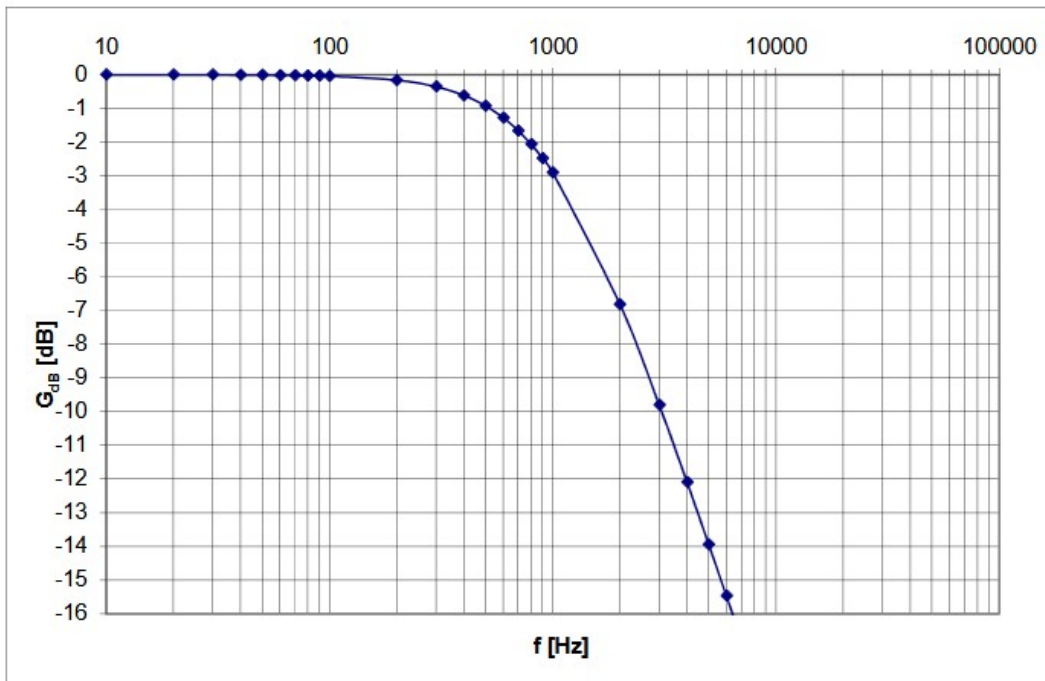


Abbildung 2.18: Amplitudengang vom RC-Tiefpass (Loullingen, S. 11)

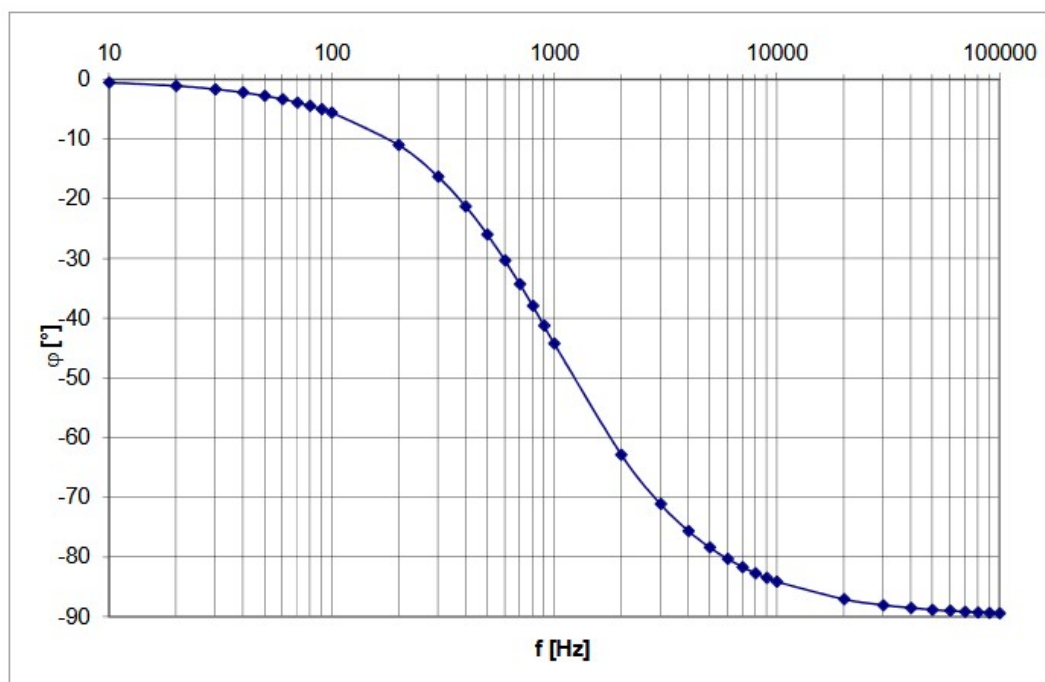


Abbildung 2.19: Phasengang vom RC-Tiefpass (Loullingen, S. 11)

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

In den beiden Abbildungen steht die Variable G_{dB} für die Übertragungsfunktion des Filters. Die x-Achse ist dabei jeweils logarithmisch und die y-Achse linear skaliert.

Bemerkung (Einheit Farad). Die Einheit Farad kann in SI-Einheiten als

$$1 \text{ F} = 1 \frac{\text{s}}{\Omega}$$

geschrieben werden. Im obigen Beispiel kürzt sich die Einheit Ohm heraus und es bleibt $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz}$ übrig.

2. Hochpass

Definition 22 (Hochpass). Unter einem Hochpass versteht man eine elektrische Schaltung, die nur hohe Frequenzen f passieren lässt. Tiefe Frequenzen f werden gesperrt.

Beispiel 14 (RL-Hochpass). Das RL-Glied besteht aus einem Widerstand und einer Spule, welche in Serie geschaltet sind. Durch die beiden Ausgangsklemmen wurde aus dem Zweipol ein Vierpol. Die Spannung U_e ist die Eingangsspannung und U_a die Ausgangsspannung.

Gesucht ist das Verhalten des Tiefpasses, wenn am Eingang eine sinusförmige Spannung U_e bei unterschiedlichen Frequenzen angelegt wird

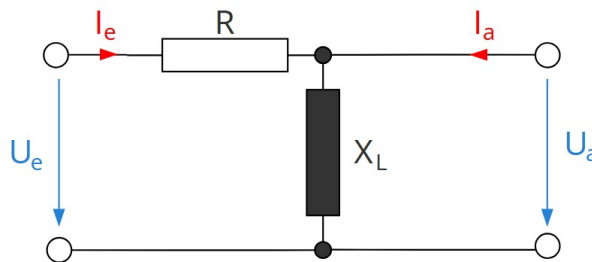


Abbildung 2.20: RL-Hochpass

Bei tiefen Frequenzen hat die Spule einen kleinen Widerstand und bei hohen Frequenzen einen großen Widerstand. Daher gelten

- (i). $U_a \approx U_e$ falls f sehr groß ist,
- (ii). $U_a \approx 0$ falls f sehr klein ist.

Wir wollen diese Eigenschaft nun nachrechnen, sowie die Grenzfrequenz und das Bode-Diagramm ermitteln.

Der Eingang des Filters bildet eine Serienschaltung aus Widerstand und Spule und am Ausgang befindet sich nur die Spule. Daher erhalten wir nach Definition 19 für die

Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}.$$

Für den Betrag der Übertragungsfunktion muss nach Definition 6 konjugiert komplex erweitert werden und wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} = \frac{j\omega RL + (\omega L)^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \\ &= \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{j\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}, \\ |\underline{H}(\omega)| &= \sqrt{\left(\frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^4 L^4}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^2 R^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega^4 L^4 + \omega^2 R^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2(\omega^2 L^2 + R^2)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt führen wir eine Grenzwertbetrachtung für den Amplitudengang durch, wobei wir den Widerstand und die Spule mit 1 annehmen.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} |\underline{H}(\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{0}{1} = 0 \quad (\text{Sperrbereich}) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{H}(\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2}} = 1 \quad (\text{Durchlassbereich})\end{aligned}$$

Weiters erhalten wir nach Definition 6 für den Phasengang

$$\varphi = \arctan \frac{\Im(\underline{H}(j\omega))}{\Re(\underline{H}(j\omega))} = \arctan \left(\frac{\frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}}{\frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}} \right) = \arctan \left(\frac{R}{\omega L} \right).$$

Um den Phasengang vollständig ermitteln zu können, müssen auch die Grenzwerte des Winkels betrachtet werden.

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\arctan \left(\frac{R}{\omega L} \right) \right) \rightarrow \infty, \text{ also } 90^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{R}{\omega L} \right) \right) \rightarrow 0, \text{ also } 0^\circ\end{aligned}$$

Bevor wir nun das Bode-Diagramm vollständig zeichnen können, müssen wir zu guter

2 Komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

Letzt noch die Grenzfrequenz f_g ermitteln. Nach Definition 20 müssen wir den Betrag der Übertragungsfunktion dem Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gleichsetzen und auf f_g umformen. Damit erhalten wir für die Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{R}{2\pi L}.$$

Der Quotient $\frac{R}{L}$ wird in der Fachliteratur häufig mit τ bezeichnet.

$$f_g = \frac{1}{2\pi\tau}.$$

Bei einem Widerstand $R = 220 \, \Omega$ und einem Kondensator $L = 22 \, \text{mH}$ erhalten wir folgende Grenzfrequenz und folgendes Bode-Diagramm:

$$f_g = \frac{220 \, \Omega}{2\pi \cdot 22 \cdot 10^{-3} \, \Omega\text{s}} \approx 1\,591,55 \, \text{Hz}.$$

In den folgenden beiden Abbildungen steht die Variable G_{dB} erneut für die Übertragungsfunktion des Filters. Die x-Achse ist dabei jeweils logarithmisch und die y-Achse linear skaliert.

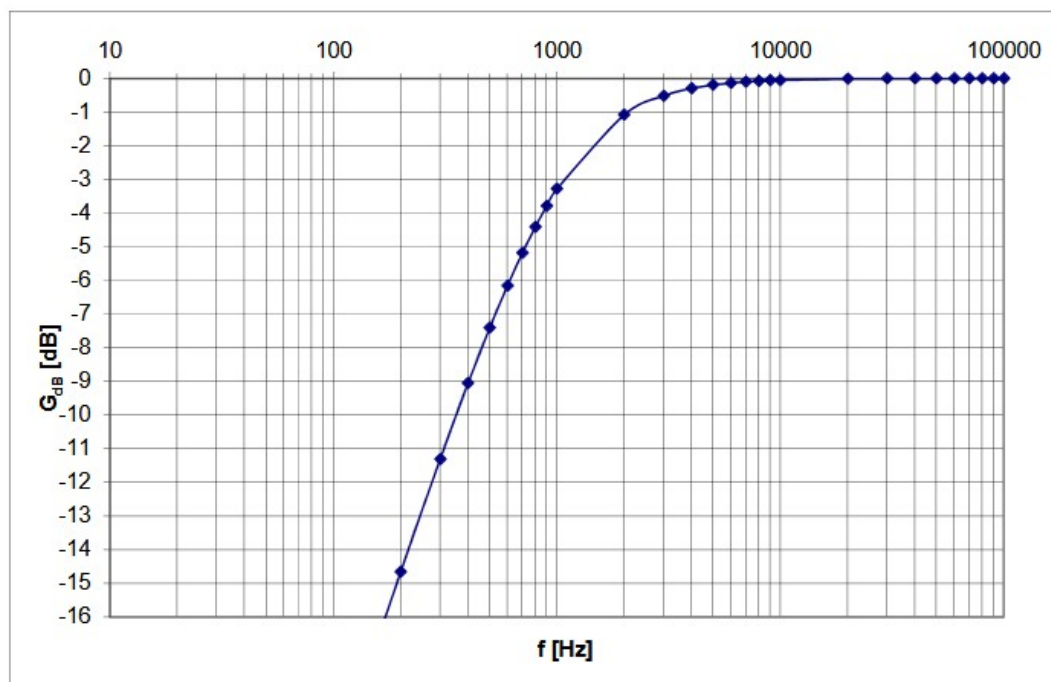


Abbildung 2.21: Amplitudengang vom RL-Hochpass (Loullingen, S. 9)

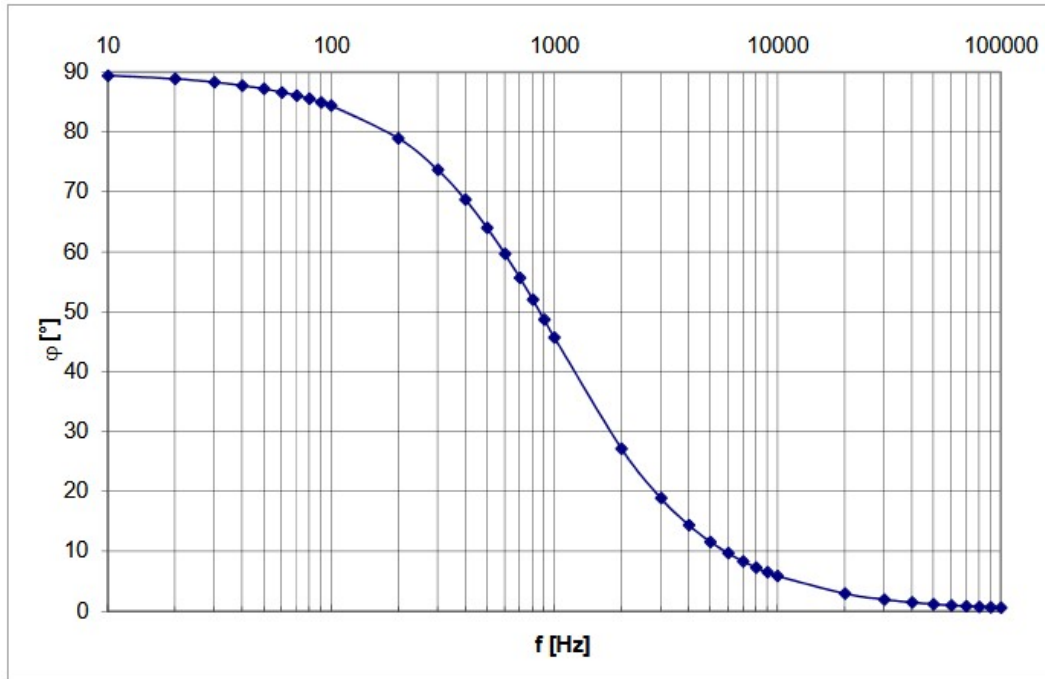


Abbildung 2.22: Phasengang vom RL-Hochpass (Loullingen, S. 9)

Bemerkung (Einheit Henry). Die Einheit Henry kann in SI-Einheiten als

$$1 \text{ H} = 1 \Omega \text{s}$$

geschrieben werden. Im obigen Beispiel kürzt sich die Einheit Ohm heraus und es bleibt $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz}$ übrig.

Abschließend möchten wir in diesem Teil der Arbeit noch jene offene Frage beantworten, warum der Winkel φ den Wert $\pm 45^\circ$ annimmt, wenn für die Frequenz $f = f_g$ gilt.

Betrachten wir zunächst den Tiefpass und ermitteln den Grenzwert für $f \rightarrow f_g$ mit $\omega = 2\pi f$:

$$\lim_{f \rightarrow f_g} \varphi = \lim_{f \rightarrow f_g} (\arctan(-2\pi f RC)) = \arctan\left(-2\pi RC \cdot \frac{1}{2\pi RC}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ.$$

Nun möchten wir uns noch den Grenzwert für $f \rightarrow f_g$ mit $\omega = 2\pi f$ beim Hochpass ermitteln:

$$\lim_{f \rightarrow f_g} \varphi = \lim_{f \rightarrow f_g} \left(\arctan\left(\frac{R}{2\pi f L}\right) \right) = \arctan\left(\frac{\frac{R}{2\pi L}}{\frac{R}{2\pi L}}\right) = \arctan(1) = 45^\circ.$$

Für R , C und L alle ungleich Null, existieren die jeweiligen Quotienten.

3 Die Fourier-Transformation

Die mathematischen Bestimmungen der Integralrechnung sind für das Verständnis der Fourier-Transformation grundlegend. Zunächst wird in diesem Kapitel das Konzept der Stammfunktion eingeführt, wobei eine Funktion $F(t)$ als Stammfunktion einer komplexwertigen Funktion $f(t)$ definiert wird, wenn ihre Ableitung $F'(t)$ gleich $f(t)$ ist. In einem nächsten Schritt wird auf die Bedingungen der Stetigkeit und Integrierbarkeit eingegangen, wonach eine Funktion $f(t)$, die auf einem Intervall $[a; b]$ stetig ist, auch integrierbar sein wird.

Darüber hinaus werden die wesentlichen Eigenschaften von Integralen komplexwertiger Funktionen erläutert. Dazu gehört die Additivität, die besagt, dass das Integral einer Summe von Funktionen der Summe der Einzelintegrale entspricht. Die Homogenität ermöglicht es, eine Konstante aus dem Integral herauszuziehen. Ein zentraler Bestandteil des Kapitels ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser besagt zum einen, dass die Ableitung eines bestimmten Integrals wieder die ursprüngliche Funktion ergibt. Zum anderen kann ein bestimmtes Integral durch die Differenz einer Stammfunktion mittels Einsetzen der Grenzen nach dem Integrieren berechnet werden.

Abschließend werden verschiedene Methoden zur Berechnung von Integralen komplexwertiger Funktionen vorgestellt, darunter die partielle Integration, die stückweise Integration, die Potenzregel sowie die Integration trigonometrischer und exponentieller Funktionen, bis hin zum Satz von Fubini. Nach einer ausführlichen Thematisierung der Fourier-Transformation werden diese Formalisierungen anhand von Beispielen – vorwiegend aus den Bereichen der Wechselstromtechnik und der Signalverarbeitung von Signalen – angewendet. Für diesen Teil der Arbeit wird das Wissen über die komplexen Zahlen aus Kapitel 2 benötigt, da sie eine zentrale Rolle bei der Darstellung und Berechnung der Fourier-Transformation spielen und insbesondere für die Interpretation der komplexen Exponentialfunktion unerlässlich sind.

Die Graphen der einzelnen Funktionen, welche in diesem Teil der Arbeit behandelt werden, wurden mit der Mathematik-Software „GeoGebra“, online abrufbar unter <https://www.geogebra.org/>, erstellt.

3.1 Vorüberlegungen aus der Integralrechnung

Voraussetzung für alle weiteren Abschnitte dieser Arbeit sind die Grundlagen der Integral- und Differentialrechnung in einer Variablen, welche in diesem Abschnitt kurz angeführt werden. Ich beziehe mich bei den einzelnen Definitionen und Sätzen vorwiegend auf das Werk „Analysis II“ von Griesel.[12] Gleich zu Beginn möchte ich anmerken, dass ich bewusst auf die Beweise der einzelnen Sätze verzichtet habe, da diese über den Kerninhalt

3 Die Fourier-Transformation

dieser Arbeit hinausgehen würden.

Definition 23 (Stammfunktion). Es sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt mit $[a; b] \subset \mathbb{R}$. $F(t)$ heißt Stammfunktion von $f(t)$, falls

$$F'(t) = f(t).$$

Satz 3.1.1 (Stetigkeit & Integrierbarkeit). Falls $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a; b] \subset \mathbb{R}$ stetig ist, so ist f auf $[a; b]$ integrierbar.

Hierbei ist an dieser Stelle anzumerken, dass die Monotonie der einzelnen Funktionen auf einem Intervall $[a; b]$ bei allen in dieser Arbeit angeführten Beispielen erfüllt ist.

Satz 3.1.2 (Additivität und Homogenität des Integrals). Es seien $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ integrierbar, dann gelten

$$(i). \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \text{ (Additivität),}$$

$$(ii). \forall c \in \mathbb{R} : \int_a^b c f(t) dt = c \int_a^b f(t) dt \text{ (Homogenität).}$$

Wir haben schon „gezeigt“, dass stetige Funktionen integrierbar sind, jedoch ist die Berechnung eines bestimmten Integrals oft aufwendig. Hierfür kann der folgende Satz hilfreich sein.

Satz 3.1.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a; b] \subset \mathbb{R}$ stetig. Weiters sei F eine Stammfunktion von f . Dann gelten

$$(i). \forall x \in [a; b] : \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x),$$

$$(ii). \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Notation: Wir schreiben $F(t)|_a^b$ für $F(b) - F(a)$.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht mit (ii). die Berechnung des bestimmten Integrals. Dazu genügt es, eine beliebige Stammfunktion F von f zu finden. Das bestimmte Integral ergibt sich dann aus der Differenz der Funktionswerte $F(b)$ und $F(a)$. (vgl. Griesel, 1974, S. 38)

Die folgenden Sätze behandeln einige grundlegende „Formeln“ der Integration.

Satz 3.1.4 (Partielle Integration). Es seien $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a; b] \subset \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = (f(t) \cdot g(t))|_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) dt.$$

3.1 Vorüberlegungen aus der Integralrechnung

Satz 3.1.5 (Stückweise Integration). Es sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[a; b] \subset \mathbb{R}$ stetig und $c \in [a; b]$ mit $a < c < b$, dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Satz 3.1.6 (Potenzregel). Es seien $f(t) = t^n$ mit $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b t^n dt = \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Satz 3.1.7 (Winkelfunktionen). Es seien $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos(t)$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{C}$ gelten

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(nt) dt &= -\left. \frac{\cos(nt)}{n} \right|_a^b = \frac{-\cos(nb) + \cos(na)}{n}, \\ \int_a^b \cos(nt) dt &= \left. \frac{\sin(nt)}{n} \right|_a^b = \frac{\sin(nb) - \sin(na)}{n}. \end{aligned}$$

Satz 3.1.8 (Exponentialfunktion). Es seien $f(t) = e^t$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_a^b e^{nt} dt = \left. \frac{e^{nt}}{n} \right|_a^b = \frac{e^{nb} - e^{na}}{n}.$$

Satz 3.1.9 (Satz von Fubini). Es sei $[a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $[a; b], [c; d] \subset \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_c^d \int_a^b f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x; y) dy dx.$$

Dieser Satz erlaubt unter bestimmten Voraussetzungen das Vertauschen der Reihenfolge der Integrationen in mehrfachen Integralen. Wir werden diesen Satz in Kapitel 3.3.3 beim Beweis des Faltungssatzes benötigen.

Die Fourier-Transformation basiert auf Integralen und erfordert insbesondere Kenntnisse über die Stetigkeit und Integrierbarkeit von Funktionen. Die Regeln zur Berechnung von Integralen, insbesondere die Lineareigenschaften und der Hauptsatz der Differential- und

Integralrechnung, sind essenziell für die mathematische Herleitung und Anwendung der Fourier-Transformation.

3.2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Dieser Abschnitt befasst sich mit den fundamentalen Aspekten der Theorie über die Fourier-Transformation. Der Hauptfokus liegt darauf, wie eine bestimmte Funktion (auch als „Signal“ bezeichnet) als eine fortlaufende Überlagerung von harmonischen Schwingungen dargestellt werden kann. Die Abhandlung beleuchtet die zentralen Charakteristika der Fourier-Transformation und führt in das Konzept der Distributionen ein. Diese Distributionen, auch als verallgemeinerte Funktionen bekannt, werden zusammen mit ihren Fourier-Transformierten erläutert. (vgl. Embacher, S. 1) Zentral für diesen Abschnitt ist eine grundlegende Einführung in die mathematischen Prinzipien der Fourier-Transformation, welche anschließend mit besonderem Augenmerk auf die Analyse und Darstellung von Signalen angewendet werden. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Herleitung und konkrete Thematisierung sowie die Vertiefung der Fourierreihen über das Ziel dieser Arbeit hinausgehen würden und ich auch aus diesem genannten Grund auf die angeführte Fachliteratur verweisen möchte. Beginnen wir nun mit zwei allgemeinen Definitionen.

Definition 24 (Gerade und ungerade Funktionen). Eine Funktion heißt gerade, falls

$$f(-t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Eine Funktion heißt ungerade, falls

$$f(-t) = -f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Jede allgemeine Funktion lässt sich in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen, unabhängig davon, ob f periodisch ist. (vgl. Butz, 2011, S. 33 f.)

Definition 25 (Fourier-Transformation). Die Abbildung $\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}$ heißt Fourier-Transformation von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, wobei f absolut auf $\mathbb{R}$ integrierbar ist. Die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ von f ist definiert durch

$$\mathcal{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Die Variable ω steht bei der transformierten Funktion für die Kreisfrequenz. Die Fourier-Transformation liefert somit eine frequenzabhängige Funktion.

Bemerkung. Für die spätere Anwendung in der Wechselstromtechnik ist folgende Beschränkung ausreichend: Wir können bei unseren Überlegungen von Funktionen f ausgehen, welche auf der Menge der reellen Zahlen periodisch definiert sind. Daher gilt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

3.2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Außerdem gehen wir von der Annahme aus, dass die Fourierreihe von f an jeder beliebigen Stelle $t \in \mathbb{R}$ gegen $f(t)$ konvergiert.

Die Fourier-Transformation beschreibt eine Abbildung, bei der einer Funktion f ihre Fourier-Transformierte zugewiesen wird. Es gilt also

$$f \mapsto \hat{f}.$$

Die Umkehrabbildung der Fourier-Transformation wird als inverse Fourier-Transformation bezeichnet. Darunter versteht man also jene Abbildung, die einer Funktion f ihre inverse Fourier-Transformation zuordnet, also

$$\hat{f} \mapsto f.$$

Wirft man an dieser Stelle einen genaueren Blick auf die obige Definition, erkennt man, dass es dabei nicht nur um einzelne Werte der Funktionen $f(t)$ und $\hat{f}(\omega)$ geht, sondern um die Funktionen in ihrer Gesamtheit. Die Fourier-Transformation und ihre inverse Transformation sind Abbildungen zwischen Funktionenräumen und damit abstraktere Konzepte als die bekannten Abbildungen zwischen Zahlenmengen. Weiters können wir in der obigen Definition daher auch $\mathcal{F}(f)$ anstatt $\mathcal{F}$ schreiben. Dies hat wiederum zur Folge, dass man $\hat{f}(\omega)$ auch in der Form $(\mathcal{F}(f))(\omega)$ oder kürzer $\mathcal{F}(f)(\omega)$ schreiben kann. Die inverse Fourier-Transformation wird mit $\mathcal{F}^{-1}$ bezeichnet. Es gilt also

$$\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto f.$$

Die Literatur kennt an dieser Stelle auch die Schreibweise

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

für $\hat{f}(\omega)$, um etwaige Verwechslungen zu vermeiden. Eine weitere in der Praxis häufig verwendete Schreibweise, bei der beide Variablen t (für f) und ω (für $\hat{f}$) vorkommen, bezieht sich ebenfalls auf die Funktionen in ihrer Gesamtheit und stellt sich wie folgt dar:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \hat{f}(\omega).$$

Das Symbol $\circ\!\!-\!\!\bullet$ wird auch Korrespondenzsymbol genannt. Die Schreibweise verdeutlicht, dass die Funktionen f und $\hat{f}$, dargestellt durch die Terme $f(t)$ und $\hat{f}(\omega)$, zueinander gehören und miteinander „korrespondieren“. Diese Darstellung ist nicht nur übersichtlich, sondern erleichtert auch das Schreiben. (vgl. Embacher, S. 5 f.)

Aus diesem Zusammenhang zwischen $f(t)$ und $\hat{f}(\omega)$ folgt

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f(t))] = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}(f(t))] = f(t).$$

3 Die Fourier-Transformation

Definition 26 (Rücktransformation). Für die Rücktransformation einer Funktion $\hat{f}$ gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

wobei $\hat{f}$ die Fourier-Transformierte von f ist.

Bemerkung. Die Formeln für die Hin- und Rücktransformation sind nicht symmetrisch: Bei der Hintransformation steht ein Minuszeichen im Exponenten und bei der Rücktransformation steht ein Pluszeichen im Exponenten, zudem gibt es einen Faktor $\frac{1}{2\pi}$ vor dem Integral. Diese Asymmetrie hat einige Mathematiker dazu veranlasst, alternative Definitionen einzuführen, z. B. einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ sowohl vor der Hin- als auch Rücktransformation. Dies ist jedoch insofern problematisch, da dadurch die Definition des Mittelwertes

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

verfälscht würde. Eine korrekte, aber wenig verbreitete Notation stammt von Weaver (1894–1978). Bei seiner Definition der Fourier-Transformation wurden die Hin- und Rücktransformation zwar symmetrisiert, allerdings handelt man sich viele Faktoren der Form 2π im Exponenten ein. Die Handhabung dieser Vorfaktoren ist also eine Frage der Definition. (vgl. Weiß, S. 38)

In der folgenden Bemerkung werden jene notwendigen Kriterien angeführt, die für die Durchführung der Fourier-Transformation entscheidend sind. (vgl. Weiß, S. 39)

Bemerkung (Kriterien der Fourier-Transformation). Für die Fourier-Transformation müssen die folgenden Kriterien erfüllt sein:

- (i). Eine Funktion $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ muss absolut integrierbar sein. Es muss also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

- (ii). $f(t)$ muss stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar sein, also ihre Ableitung $f'(t)$ muss stetig sein.

- (iii). Sollte $f(t)$ Sprungstellen besitzen, so dürfen diese keine Polstellen sein, also der Grenzwert von links und rechts muss existieren.

- (iv). Falls $t = t_n$ eine Sprungstelle ist, so gilt

$$f(t_n) = \frac{f(t_n - 0) + f(t_n + 0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t_n} d\omega.$$

3.2.1 Distributionen – die Dirac-Funktion

Wir wollen nun zum Beginn in diesem Abschnitt zeigen, dass die Rücktransformation wieder zur Ausgangsfunktion führt, wobei wir $f(t) = 1$ annehmen. (vgl. Butz, 2011, S. 36)

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t) \end{aligned}$$

Die Gleichheit des zweiten und dritten Ausdrucks folgt direkt aus Definition 26. Außerdem dürfen wir nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen. Für den obigen „Beweis“ sind jedoch zwei Vorüberlegungen notwendig, die wir nun in einer Definition zusammenfassen.

Definition 27 (Dirac-Funktion bzw. Distribution). Es sei $a \in \mathbb{R}$. Die δ -Funktion ist definiert als

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{a \rightarrow \infty} f_a(t) \quad \text{mit} \\ f_a(t) &= \begin{cases} a & \text{für } -\frac{1}{2a} \leq t \leq \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $a = 0$ gilt $f_a(t) = 0$ für $(-\infty; \infty)$. Umso kleiner der Ausdruck $\pm \frac{1}{2a}$ wird, also um größer a wird, desto schmaler und höher ist die Rechteckfunktion.

Weiters sind bezüglich der Fourier-Transformation folgende Eigenschaften gegeben

- (i). $\delta(t) \circ \bullet 1$,
- (ii). $\delta(t - a) \circ \bullet e^{-j\omega a}$,
- (iii). $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$,
- (iv). $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt$ bzw. $\delta(\omega - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - a)t} dt$.

Die δ -Funktion ist streng genommen eine Distribution und keine gewöhnliche Funktion, wird aber dennoch als δ -Funktion bezeichnet. Sie ist überall null, außer an der Stelle, an der ihr Argument null ist – dort nimmt sie unendlich große Werte an. (vgl. Butz, 2011, S. 34) Aus physikalischer Sicht repräsentiert sie ein Signal, das der oben beschriebenen (zwar mathematisch ungenauen, aber hilfreichen) Vorstellung entspricht. Eine um $a \in \mathbb{R}$

3 Die Fourier-Transformation

verschobene Deltafunktion, dargestellt als $\delta(t - a)$, entspricht einem unendlich schmalen und unendlich hohen Peak an der Position $t = a$. Analog zur obigen Bemerkung gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - a)dt = f(a),$$

wobei $f(t)$ eine beliebige Funktion ist. Ein derartiges Signal wird auch als „Dirac-Impuls“ bezeichnet. (vgl. Embacher, S. 30) In der Literatur lassen sich auch die Bezeichnungen „Dirac-Distribution“ und (Diracsche) Dirac-Funktion, benannt nach dem Physiker Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), finden.

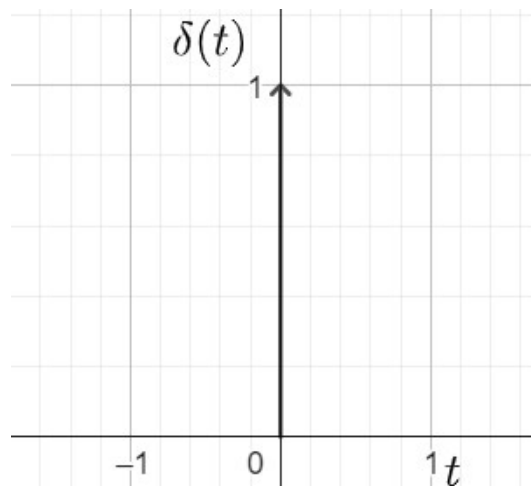


Abbildung 3.1: Dirac-Impuls

Ein Dirac-Impuls zum Zeitpunkt a wird manchmal symbolisch durch einen Pfeil dargestellt, um zu verdeutlichen, dass der Peak bei $t = a$ sowohl „unendlich hoch“ als auch „unendlich schmal“ ist. Die Bezeichnung $\delta(t - a)$ auf der zweiten Achse bezieht sich dabei auf die gesamte Dirac-Funktion und nicht nur auf einen einzelnen Punkt. In der obigen Abbildung 3.1 wurde die Variable $a = 0$ gesetzt. (vgl. Embacher, S. 30)

Neben der Dirac-Funktion existieren auch andere Distributionen, wobei die Dirac-Funktion lediglich die bekannteste ist. Mit dem Korrespondenzsymbol kann die Fourier-Transformation der Dirac-Funktion auch geschrieben werden als

$$\delta(t) \circ \longrightarrow 1.$$

Ein Dirac-Impuls enthält alle Kreisfrequenzen in gleichem Maße. Das bedeutet, dass im Frequenzbereich die Fourier-Transformierte des Dirac-Impulses konstant ist, was darauf hinweist, dass alle Frequenzkomponenten gleichmäßig vertreten sind. (vgl. Embacher, S. 30)

Der Dirac-Kamm, auch bekannt als Dirac-Stoß-Folge oder Schah-Funktion, ist eine periodische temperierte Distribution, die aus einer Reihe von Dirac-Funktionen besteht.

3.2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Aufgrund seiner kammähnlichen Struktur wird er häufig mit $\Delta_T(t)$ bezeichnet. Eine besondere Eigenschaft des Dirac-Kamms ist, dass er unter der Fourier-Transformation unverändert bleibt – seine Fourier-Transformierte ist ebenfalls ein Dirac-Kamm. [1]

In der Signalverarbeitung dient der Dirac-Kamm zur Modellierung von Abtastung und Periodisierung und bietet einen einheitlichen Rahmen zur Beschreibung von kontinuierlichen und diskreten Phänomenen wie Abtastung und Aliasing, wie wir im Abschnitt 3.3.2 sehen werden. Der mathematische Prozess der Abtastung lässt sich durch die Multiplikation einer Funktion mit dem Dirac-Kamm beschreiben. Dieses Konzept spielt eine zentrale Rolle in der Signaltheorie, da es eine elegante Behandlung von Abtast- und Alias-Effekten im Kontext der kontinuierlichen Fourier-Transformation ermöglicht. [1]

Wir wollen unsere Überlegungen nun zur Definition erheben.

Definition 28 (Dirac-Kamm). Für den Dirac-Kamm gilt

$$\Delta_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT),$$

wobei T eine Periode größer Null und $\delta(t)$ unsere bekannte Dirac-Funktion ist. Weiters gilt

$$\mathcal{F}(\Delta_T) = \frac{1}{T} \Delta_T,$$

da die Fourier-Transformierte des Dirac-Kamms wieder ein Dirac-Kamm ist.

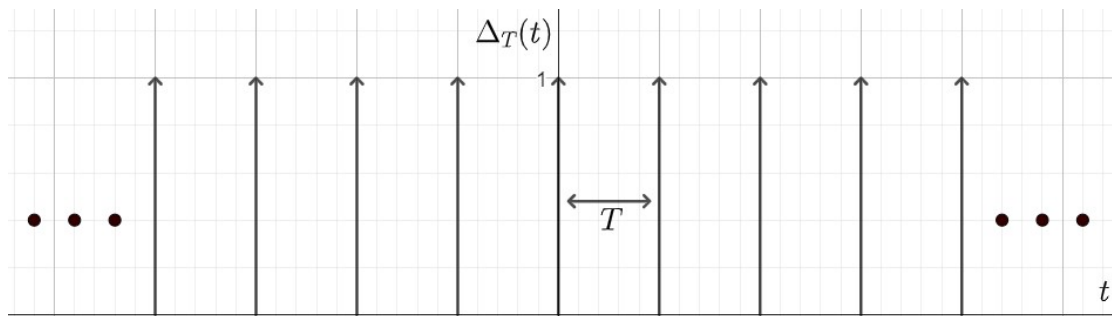


Abbildung 3.2: Dirac-Kamm

Wir werden im Abschnitt 3.3.2 beim sogenannten Nyquist-Shannon-Abtasttheorem auf diese Definition zurückkommen.

3.2.2 Rechenregeln der Fourier-Transformation mit einfachen Beispielen

Die Fourier-Transformation weist verschiedene Eigenschaften auf, die als Rechenregeln bei praktischen Berechnungen äußerst nützlich sind. Diese Eigenschaften ermöglichen es insbesondere, aus wenigen bekannten Fourier-Transformierten auf die Fourier-Transformierten vieler weiterer Funktionen zu schließen. Im Folgenden dürfen alle betrachteten Funktionen

3 Die Fourier-Transformation

auch komplexwertig sein. Ich orientiere mich in diesem Abschnitt vorwiegend an den Ausführungen aus dem Werk von Embacher zur Thematik der Fourier-Transformation.[11]

Satz 3.2.1 (Linearität). Es seien $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$, dann gelten

$$\begin{aligned} f(t) + g(t) &\circ\!\!\!\longrightarrow \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega), \\ c \cdot f(t) &\circ\!\!\!\longrightarrow c \cdot \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Beweis. Nach Definition 25 und Satz 3.1.2 (i). und (ii). folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot (f(t) + g(t)) e^{-j\omega t} dt = c \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \right) = c \cdot (\hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)).$$

□

Bemerkung. Auch die inverse Fourier-Transformation erfüllt die Bedingungen der Linearität.

Satz 3.2.2 (Verschiebungssatz). Es seien $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$f(t - a) \circ\!\!\!\longrightarrow e^{-ja\omega} \hat{f}(\omega),$$

wobei $f(t - a)$ die im Argument um a verschobene Funktion ist, also $t \mapsto f(t - a)$.

Beweis. Nach Definition 25 und Satz 3.1.2 (ii). gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-j\omega t} dt \stackrel{t=\tau+a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau+a)} d\tau = e^{-ja\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-ja\omega} \hat{f}(\omega).$$

□

Satz 3.2.3 (Ähnlichkeitssatz). Es seien $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt

$$f(b \cdot t) \circ\!\!\!\longrightarrow \frac{1}{|b|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right).$$

Beweis. Nach Definition 25 und Satz 3.1.2 (ii). gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(b \cdot t) e^{-j\omega t} dt \stackrel{t=\frac{\tau}{b}}{=} \frac{1}{|b|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{b}} d\tau = \frac{1}{|b|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right).$$

3.2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Aufgrund der Veränderung der Integralsgrenzen „von $-\infty$ bis ∞ “ zu „von ∞ bis $-\infty$ “ kommt es zu einem weiteren negativen Vorzeichen. Gemeinsam mit dem negativen Faktor $\frac{1}{b}$ wird dieses Vorzeichen zu $\frac{1}{|b|}$ zusammengefasst. (vgl. Embacher, S. 15)

□

Satz 3.2.4 (Spiegelung). Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

$$f(-t) \circ \bullet \hat{f}(-\omega).$$

Beweis. Nach Definition 25 und einer Substitution der Variable t zu $-\tau$ folgt die Behauptung.

□

Bemerkung. Satz 3.2.4 ist ein Spezialfall des Ähnlichkeitssatzes 3.2.3 für $b = -1$.

Im folgenden Satz werden wir eine Besonderheit der komplexen Zahlen aufgreifen. Wir werden nun die Fourier-Transformierte einer konjugiert komplexen Funktion betrachten. (vgl. Embacher, S. 17)

Satz 3.2.5 (Konjugiert komplexe Funktion). Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

$$\overline{f(t)} \circ \bullet \overline{\hat{f}(-\omega)},$$

wobei $\overline{f(t)}$ nach Definition 9 die konjugiert komplexe Funktion von $f(t)$ und $\overline{\hat{f}(-\omega)}$ die konjugiert komplexe Fourier-Transformierte von $\hat{f}(\omega)$ ist.

Beweis. Nach Definition 25 und 9, sowie Satz 2.1.6 (i). und (iv). gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-j\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt} = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

□

Bemerkung. Werden sowohl eine Funktion also auch ihre Fourier-Transformierte komplex konjugiert, so muss eine von ihnen im Argument gespiegelt werden. Es verändert sich somit das Vorzeichen der unabhängigen Größe. Im obigen Satz erhält die Variable ω nach der Transformation ein negatives Vorzeichen. (vgl. Embacher, S. 18)

3 Die Fourier-Transformation

Satz 3.2.6 (Vertauschungssatz). Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gelten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-t) &\circ\!\!\!\bullet f(\omega) \quad \text{und} \\ \hat{f}(t) &\circ\!\!\!\bullet 2\pi f(-\omega). \end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen von der Rücktransformationsgleichung in Definition 26 aus

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

und erhalten durch Substitution ($t = -\tau$)

$$f(-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega.$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit 2π erhalten wir

$$2\pi f(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega.$$

Nach der Umbenennung von ω in t sowie τ in ω erhalten wir schlussendlich

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

□

Bemerkung. Alle in diesem Abschnitt bisher angeführten Sätze gelten auch für die inverse Fourier-Transformation. Für deren explizite Formulierung sowie Beweisführung möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen.

Bevor wir die Fourier-Transformation eines Produktes zweier Funktionen bestimmen können, müssen wir zunächst den Satz von Plancherel – in dieser Arbeit ohne Beweis – formulieren. Für den Beweis dieses Satzes möchte ich an dieser Stelle auf die Fachliteratur verweisen.[13]

Satz 3.2.7 (Satz von Plancherel). Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Nach Definition 9 gelten $|f(t)|^2 = \overline{f(t)} \cdot f(t)$ und $|\hat{f}(\omega)|^2 = \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{f}(\omega)$.

3.2 Grundlagen der Fourier-Transformation

Satz 3.2.8 (Produktregel der Fourier-Transformation). Es seien $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-\omega)\hat{g}(\omega)d\omega.$$

Beweis. Nach dem Satz von Plancherel gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \cdot f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{f}(\omega)d\omega.$$

Daraus folgt für das Produkt $\overline{f(t)} \cdot g(t)$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \cdot g(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{g}(\omega)d\omega.$$

Nach Definition 26 und Satz 3.1.2 (ii). gilt weiters

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} \cdot g(t)dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)\overline{f(t)}e^{j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{g}(\omega)d\omega. \end{aligned}$$

Der Vertauschungssatz 3.2.6 liefert abschließend die oben angeführte Behauptung. □

Bevor wir uns nun einige Beispiele ansehen, formulieren wir in einem letzten Satz zwei weitere wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation. Auch bei diesem Satz habe ich bewusst auf die Beweisführung verzichtet, da diese aus den vorherigen Sätzen unmittelbar folgen. (vgl. Weiß, S. 49 f.)

Satz 3.2.9 (Weitere Eigenschaften der Fourier-Transformation). Es sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dann gilt

- (i). $f(t)$ eine gerade Funktion $\Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$ eine gerade Funktion,
- (ii). $f(t)$ eine ungerade Funktion $\Leftrightarrow \hat{f}(\omega)$ eine ungerade Funktion.

Die Funktion $\hat{f}(\omega)$ ist in (ii). eine rein imaginäre Funktion.

Für die angeführten Beispiele vereinfacht die folgende Überlegung das Einsetzen der Grenzen der jeweiligen Integrale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t.$$

3 Die Fourier-Transformation

Wir behalten uns diese Vereinfachung im Hintergrund und möchten anhand von Beispielen die Fourier-Transformierte einiger Funktionen berechnen.

Beispiel 15. Gesucht ist die Fourier-Transformierte von $f(x) = e^{-|t|}$.
Wir müssen also das Integral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt$$

lösen. Bei diesem Integral müssen wir die Fälle $t \geq 0$ und $t < 0$ aufgrund des Betrags von t voneinander unterscheiden und erhalten somit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt &\stackrel{\text{Satz 3.1.5}}{=} \int_{-\infty}^0 e^t e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt \quad t \text{ herausheben} \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{(-1-j\omega)t} dt \stackrel{\text{Satz 3.1.8}}{=} \left. \frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{(-1-j\omega)t}}{-1-j\omega} \right|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{1-j\omega} - \frac{1}{-1-j\omega} = \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1+j\omega + 1-j\omega}{(1-j\omega)(1+j\omega)} \stackrel{j^2=-1}{=} \\ &= \frac{1}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

Mit dem Korrespondenzsymbol kann der Zusammenhang durch

$$e^{-|t|} \circ \bullet \frac{1}{1+\omega^2}$$

angegeben werden. In Abbildung 3.3 sind die beiden Graphen der Funktionen dargestellt.

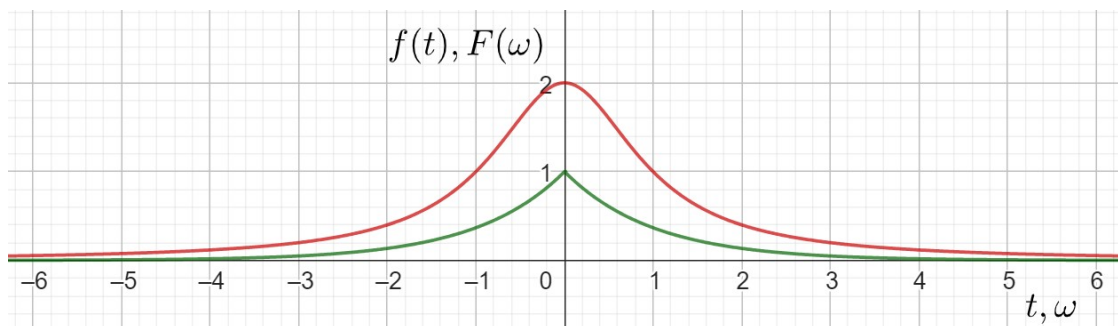


Abbildung 3.3: $f(t) = e^{-|t|}$ und $F(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$

Satz 3.2.10 (Fourier-Transformation einer geraden bzw. ungeraden Funktion). Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, dann gilt

- (i). f ist gerade $\Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$,
- (ii). f ist ungerade $\Leftrightarrow \hat{f}(\omega) = -2j \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$.

Beweis. Nach Definition 8 gilt, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \stackrel{\text{Satz 3.1.2}}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Für eine gerade bzw. ungerade Funktion f gilt nach Definition 24 $f(-t) = f(t)$ bzw. $f(-t) = -f(t)$. Für das Integral einer geraden Funktion bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Beim Integral in (ii). ist es genau umgekehrt.

□

Wir wollen uns diese Eigenschaft der Fourier-Transformation am Rechteckimpuls nun genauer ansehen.

Beispiel 16. Gesucht ist die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0).$$

Da $f(t)$ eine gerade Funktion ist, gilt nach Satz 3.2.10, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt = 0.$$

3 Die Fourier-Transformation

Daher erhalten wir ($\omega \neq 0$) für die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a 1 \cdot \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^a \cos(\omega t) dt \stackrel{\text{Satz 3.1.7}}{=} \\ &= 2 \cdot \left. \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right|_0^a \stackrel{\sin(0)=0}{=} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}.\end{aligned}$$

Für den Fall, dass $\omega = 0$ ist, erhalten wir

$$\hat{f}(\omega) = 2a,$$

da $\cos(0) = 1$ und $\int_0^a 1 dt = a$.

In Abbildung 3.4 sind die beiden Graphen für den Fall $a = 1$ der Funktionen dargestellt.

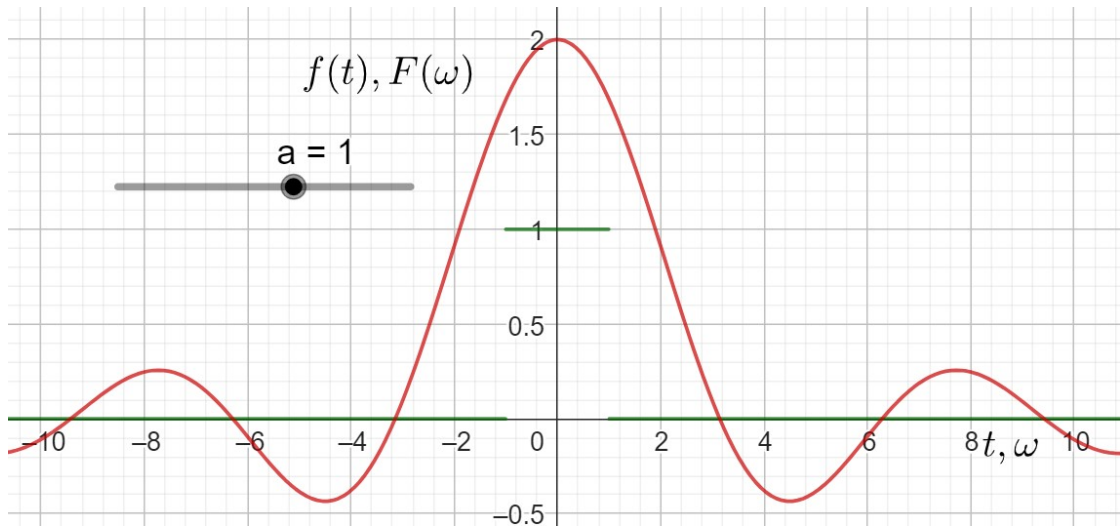


Abbildung 3.4: Rechteckimpuls

Alternativ kann nach Satz 3.1.8 die Fourier-Transformierte auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-a}^a 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-a}^a = \frac{e^{-j\omega a}}{-j\omega} - \frac{e^{-j\omega(-a)}}{-j\omega} = \\ &= \frac{e^{-j\omega a} + e^{j\omega a}}{-j\omega} = \frac{-2j \sin(\omega a)}{-j\omega} = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt dieser Umformung haben wir folgende Eigenschaft verwendet:

$$e^{-j\omega} - e^{j\omega} = 2j \sin(\omega).$$

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Die Reziprozität zwischen Zeit und Frequenz ist ein grundlegendes Prinzip der Fourier-Transformation. Sie besagt, dass eine Verkürzung der Signaldauer zwangsläufig zu einer Verbreiterung des Frequenzspektrums führt, wobei insbesondere die Spektraldichte $\hat{f}(\omega)$ merklich von null abweicht. Das Prinzip der Reziprozität von Zeit und Frequenz bedeutet, dass sich die Dauer eines Signals und sein Frequenzbereich gegenseitig beeinflussen. Wird ein Signal kürzer, breitet sich sein Frequenzspektrum weiter aus. Umgekehrt führt eine Begrenzung des Frequenzbereichs dazu, dass das Signal länger wird. Dieses Konzept ist besonders wichtig für die Übertragung und Analyse von Signalen. (vgl. Timischl & Kaiser, 2015, S. 217)

Bemerkung. Mithilfe einer Korrespondenztabelle kann diese Transformation schneller durchgeführt werden. Es gilt

$$\text{rect}\left(\frac{1}{T}\right) \circ \bullet T \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} = T \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

Für das Beispiel 16 gilt $T = 2a$ und wir erhalten nach dem Einsetzen

$$\text{rect}\left(\frac{1}{2a}\right) \circ \bullet 2a \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot (2a)}{2}\right)}{\frac{\omega \cdot (2a)}{2}} = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} = 2a \cdot \text{sinc}(\omega a).$$

Die sinc-Funktion ist dabei definiert durch

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Eine Korrespondenztabelle für die Fourier-Transformation listet typische Funktionen im Zeitbereich (z. B. Impuls-, Sprung- oder Sinusfunktionen) zusammen mit ihren entsprechenden Darstellungen im Frequenzbereich auf. Sie hilft dabei, die jeweilige Fourier-Transformierte schnell nachzuschlagen, ohne die Transformation jedes Mal neu berechnen zu müssen. Solche Tabellen sind besonders nützlich in der Signalverarbeitung und Systemtheorie, um das Verhalten von Signalen und Systemen effizient zu analysieren. Bei den einzelnen Fourier-Transformationen habe ich mich an der Korrespondenztabelle von Meyer orientiert.[19]

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Die Fourier-Transformation ist in vielen Anwendungen wichtig, weil sie es ermöglicht, Systeme und Signale nicht nur im Zeitbereich, sondern – oft einfacher – im Frequenzbereich zu analysieren. (vgl. Timischl & Kaiser, 2015, S. 216)

3.3.1 Entladevorgang eines Kondensators

Das Fourier-Integral sagt aus, dass die gleiche Information in der Fourier-Transformierten $\hat{f}(\omega)$ steckt wie in der ursprünglichen Funktion f . Wenn man nicht-periodische Signale mit der Fourier-Methode analysiert, tauchen auch negative „Frequenzen“ auf. Diese haben keine direkte physikalische Bedeutung. Man könnte sich darauf beschränken, nur mit positiven Frequenzen ($\omega \geq 0$) zu arbeiten, aber das würde die Berechnungen komplizierter machen. Ein ähnliches Beispiel gibt es in der Elektrotechnik: Man könnte auf die komplexe Darstellung von Wechselströmen verzichten, aber das würde die Rechnungen umständlicher machen. (vgl. Timischl & Kaiser, 2015, S. 214)

Wenn der Wert von $\hat{f}(\omega)$ in einem bestimmten Frequenzbereich hoch ist, bedeutet das, dass diese Frequenzen eine wichtige Rolle bei der Darstellung von f spielen. Deshalb nennt man das Fourier-Integral auch spektrale Zerlegung, und $\hat{f}(\omega)$ beschreibt das Spektrum der Funktion f . (vgl. Timischl & Kaiser, 2015, S. 214)

Die Größe $\hat{f}(\omega)$ kann dabei auf zwei Arten dargestellt werden. Wir erheben diese Überlegungen nun zur Definition.

Definition 29 (Amplitudendichte & Phasendichte). Es sei $\hat{f}(\omega)$ die Fourier-Transformierte von $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a; b] \in \mathbb{R}$, dann kann die Fourier-Transformierte geschrieben werden als

$$\hat{f}(\omega) = |\hat{f}(\omega)| \cdot e^{j\omega\varphi(\omega)},$$

wobei $\varphi(\omega)$ der Phasenwinkel von $\hat{f}(\omega)$ ist. Der Phasenwinkel ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt. Weiters nennen wir den Betrag von $\hat{f}(\omega)$, also $|\hat{f}(\omega)|$, die Amplitudendichte.

Für den Real- und Imaginärteil gilt

$$\begin{aligned}\Re(\hat{f}(\omega)) &= |\hat{f}(\omega)| \cdot \cos(\varphi(\omega)), \\ \Im(\hat{f}(\omega)) &= |\hat{f}(\omega)| \cdot \sin(\varphi(\omega)).\end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Darstellung des Real- und Imaginärteils kennen wir bereits aus dem Kapitel 2. Dort haben wir den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl in Definition 4 formalisiert und in Definition 8 bei der Eulerschen Formel angewendet.

Das folgende Beispiel ist eine Anwendung für das Zeitverhalten beim Entladen des Stromes eines Kondensators über einen Widerstand. Allgemein gilt für die Kondensatorspannung beim Entladen folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned}u_C(t) &= U_q \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \text{mit } \tau &= R \cdot C.\end{aligned}$$

Dabei ist $u_C(t)$ die Kondensatorspannung in [V], U_q die Gleichspannung in [V], R der ohmsche Widerstand in [Ω], C die Kapazität in [F] und τ die Zeitkonstante in [s]. Die Zeitkonstante τ wurde im folgenden Beispiel mit 1 angenommen. Bei diesen Parametern handelt es sich um reelle Zahlen. (vgl. Timischl & Kaiser, 2015, S. 215)

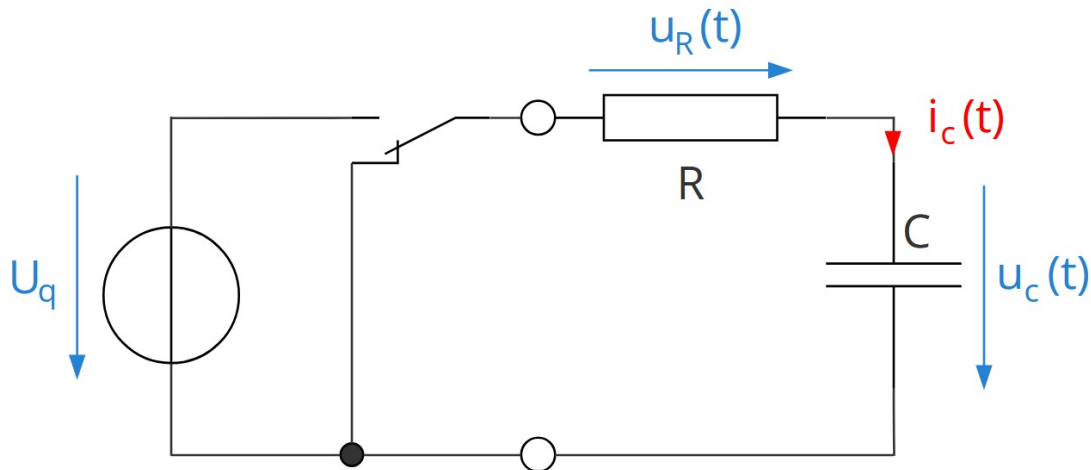


Abbildung 3.5: Entladen eines Kondensators

Wenn man den Kondensator von der Stromquelle trennt, dann gibt er die vorher gespeicherte elektrische Energie wieder ab. Die gespeicherte Ladung fließt über den Widerstand R aus dem Kondensator heraus, und dadurch sinkt die Spannung langsam ab. Die Spannung des Kondensators nimmt beim Entladen exponentiell ab und erreicht aufgrund der Eigenschaften der Exponentialfunktion erst nach einer Zeit $t \mapsto \infty$ den Wert Null. Dies entspricht ungefähr einer konstanten Spannung U zum Zeitpunkt $t = \tau$ wirkt. (vgl. Deimel & Hasenzagl, 2021, S. 283) Die Schaltung in Abbildung 3.5 wurde wieder mit der Plattform „Visual Paradigm“ erstellt.

Beispiel 17. Gesucht ist die Fourier-Transformierte von

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Da für $t < 0$ die Funktion $f(t) = 0$ gilt, können wir die untere Grenze des Fourier-Integrals auf 0 festlegen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt &\stackrel{-t \text{ herausheben}}{=} \int_0^{\infty} e^{-t(1+j\omega)} dt \stackrel{\text{Satz 3.1.8}}{=} \\ &= \left. \frac{e^{-t(1+j\omega)}}{-1-j\omega} \right|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-1+j\omega} = 0 - \left(-\frac{1}{1+j\omega} \right) = \frac{1}{1+j\omega}. \end{aligned}$$

3 Die Fourier-Transformation

Für die Darstellung der Fourier-Transformierten müssen wir noch die Amplitudendichte ermitteln:

$$|\hat{f}(\omega)| = \frac{|1|}{|1 + j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}.$$

In Abbildung 3.6 sind die beiden Graphen der Funktionen dargestellt.

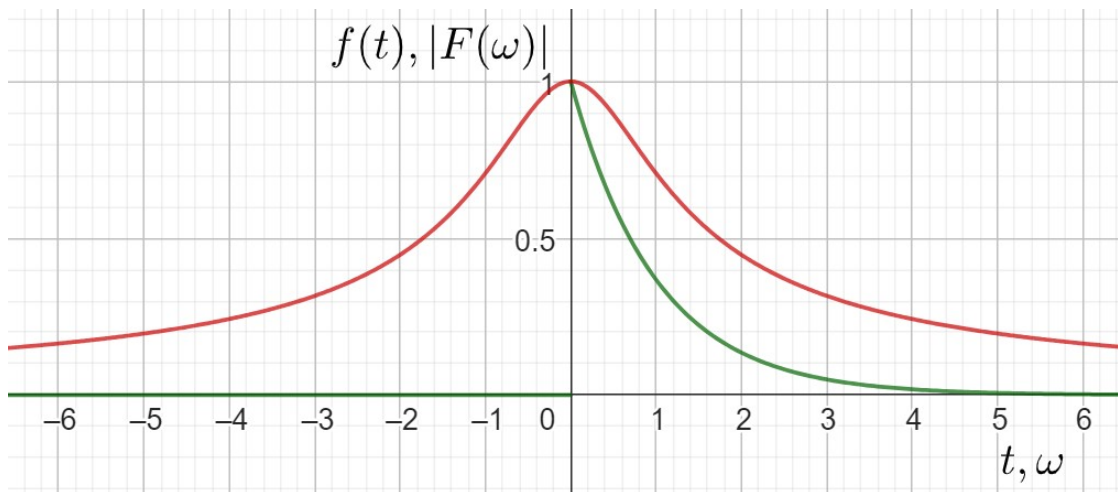


Abbildung 3.6: $f(t) = e^{-t}$ und $|F(\omega)| = |\mathcal{F}(f)(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$

3.3.2 Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

In meiner Schulzeit an der Höheren Technischen Lehranstalt für Biomedizin und Signalverarbeitung habe ich zum ersten Mal vom Nyquist-Shannon-Abtasttheorem gehört. In diesem Abschnitt beziehe ich mich auf meine Unterlagen aus meiner Schulzeit sowie auf den Eintrag auf Wikipedia.[3]

Das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem und die Fourier-Transformation sind eng miteinander verbunden, da das Abtasttheorem eine direkte Anwendung der Fourier-Transformation auf diskrete Signale ist.

Aus einem analogen Signal kann ein digitales Signal durch eine Abtastung mit konstantem Abstand zu den Zeitpunkten $T_A, 2T_A, 3T_A, \dots$ (kurz nT_A mit $n \in \mathbb{Z}$) gewonnen werden. Die Rekonstruktion des Originalsignals ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Bei einem analogen Signal muss beispielsweise der Frequenzgehalt beschränkt sein. Üblicherweise ist bei technischen Signalen oder Systemen die obere Frequenzgrenze bekannt. Sollte dies nicht der Fall sein, kann mithilfe einer Filterung der Frequenzgehalt bestimmt werden.

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Betrachtet man nicht die Abtastfrequenz f_A sondern ihren Kehrwert T_A (Abtastintervall) mit

$$T_A = \frac{1}{f_A},$$

so erhält man die Ungleichung

$$T_A < \frac{1}{2 \cdot f_g},$$

wobei f_g die Grenzfrequenz des Signals ist.

Kurz gesagt: Die Abtastfrequenz muss mindestens dem Doppelten der höchsten Signalfrequenz entsprechen. Wurde diese Bedingung beim Abtasten eingehalten, so ergibt sich für das größtmögliche Abtastintervall die folgende Beziehung:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_A) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT_A}{T_A}\right).$$

Die sinc-Funktion ist dabei definiert durch

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Bemerkung. Die obige Gleichung für das größtmögliche Abtastintervall bedarf an dieser Stelle einer kurzen Erklärung:

- (i). Die sinc-Funktion ist im Frequenzbereich ein Tiefpass. (siehe dazu Definition 2.2.5)
- (ii). Die unendliche Summe besitzt die Eigenschaft, dass die Abtastzeitpunkte miteinbezogen werden müssen.
- (iii). Die Multiplikation in der obigen Summe entspricht einer Faltung. (siehe dazu Kapitel 3.3.3)

Diese Rekonstruktionsgleichung wurde im Jahre 1949 von Claude Shannon (1916–2001) formuliert. Dabei trägt die halbe Abtastfrequenz den Namen „Nyquist-Frequenz“, benannt nach Harry Nyquist (1889–1976). Es gilt also

$$f_N = \frac{f_A}{2},$$

wobei f_N die Nyquist-Frequenz ist. Aus der Nyquist-Frequenz folgt, dass sich der Frequenzbereich eines Signals bei gegebener Abtastfrequenz f_A nur auf den Frequenzbereich von $-f_N$ bis f_N erstrecken kann. Falls die Abtastfrequenz zu niedrig ist, überlagern sich sämtliche Spektralkomponenten, und das ursprüngliche Signal kann nicht mehr eindeutig wiederhergestellt werden. Man spricht an dieser Stelle von „Aliasing“. Bei einem Verlust von Informationen kann das Originalsignal nicht vollständig rekonstruiert werden.

3 Die Fourier-Transformation

Beispiel 18. Das Signal

$$f(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

mit $A = 2$ und $f_0 = \frac{1}{2}$ Hz soll abgetastet werden. Frequenzen werden in Hertz [Hz] angegeben. Dabei gilt $1 \text{ [Hz]} = 1 \text{ [s}^{-1}\text{]}$, wobei [s] die Maßeinheit der Zeit t ist.

- (a). Man ermittle das abzutastende Signal.
- (b). Man ermittle das Abtastsignal $\delta(t)$ mit einer Abtastfrequenz $f_A = \frac{3}{2}$ Hz und den Abtastzeitpunkten $t_n = nT_A$ für $n \in \{-5; -4; \dots; 4\}$.
- (c). Man ermittle das abgetastete Signal $f_{abg}(t)$ mit $f_{abg}(t_n) = f(t_n) \cdot \delta(t_n)$.
- (d). Man ermittle das Frequenzspektrum des abzutastenden Signals von $f(t)$.
- (e). Man ermittle das Frequenzspektrum des Abtastsignals $\delta(t)$.
- (f). Man ermittle das Frequenzspektrum des abgetasteten Signals $f_{abg}(t)$.

Lösung:

Mithilfe von „GeoGebra“ wurden die Graphen der nachfolgenden Funktionen erstellt.
(a).

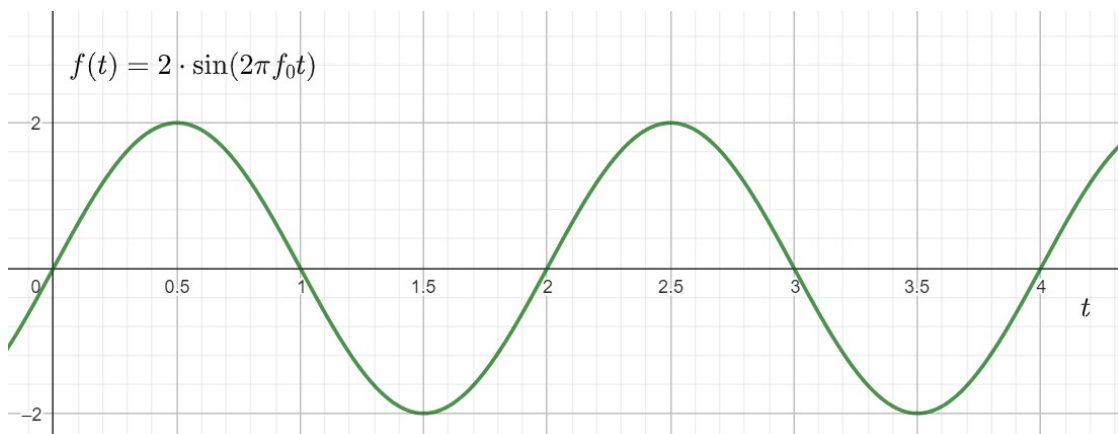


Abbildung 3.7: Abzutastendes Signal $f(t)$

(b). Mithilfe der δ -Funktion aus Definition 27 kann unsere Funktion $f(t)$ zu den angegebenen Zeitpunkten abgetastet werden. Hierfür ist der Dirac-Kamm aus Definition 28 erforderlich. (vgl. Sager, 2012, S. 111 ff.)

Es gilt

$$T_A = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Wir erzeugen also einen Dirac-Kamm mit einer Periode $T_A = \frac{2}{3}$ s. Dazu erhalten wir für $t_n = nT_A$ folgende Wertetabelle:

n	$t_n = nT_A$
-5	$-5 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{10}{3}$
-4	$-4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8}{3}$
-3	$-3 \cdot \frac{2}{3} = -2$
:	:
4	$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Diese Wertetabelle liefert somit einen Dirac-Kamm $\delta(t_n)$, der zu den Zeitpunkten t_n gegen ∞ strebt. Diese Eigenschaft wird in Abbildung 3.8 mit Pfeilen dargestellt.

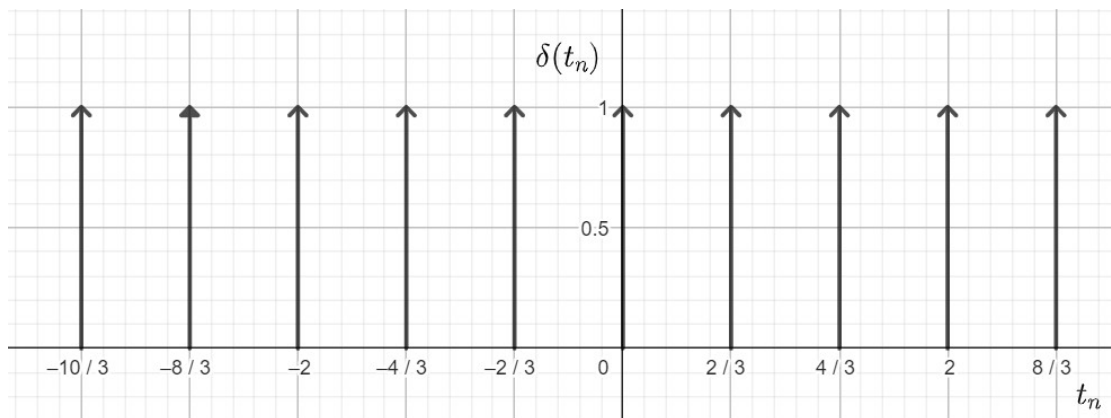


Abbildung 3.8: Abtastsignal $\delta(t_n)$

(c). Nach dem Einsetzen der angegebenen Werte erhalten wir

$$f(t) = 2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}t\right).$$

3 Die Fourier-Transformation

Weiters nehmen wir an, dass $\delta(t_n) = 1$. Wir erhalten für $f_{abg}(t_n) = f(t_n) \cdot \delta(t_n)$ folgende Wertetabelle mit $s_{abg}(0) = 0$:

t_n	$f_{abg}(t_n) = f(t_n) \cdot \delta(t_n)$
$-\frac{10}{3}$	$2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)\right) \approx 1,73$
$-\frac{8}{3}$	$2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)\right) \approx -1,73$
$-\frac{6}{3}$	$2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{6}{3}\right)\right) = 0$
$:$	$:$
$\frac{8}{3}$	$2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}\right) \approx 1,73$

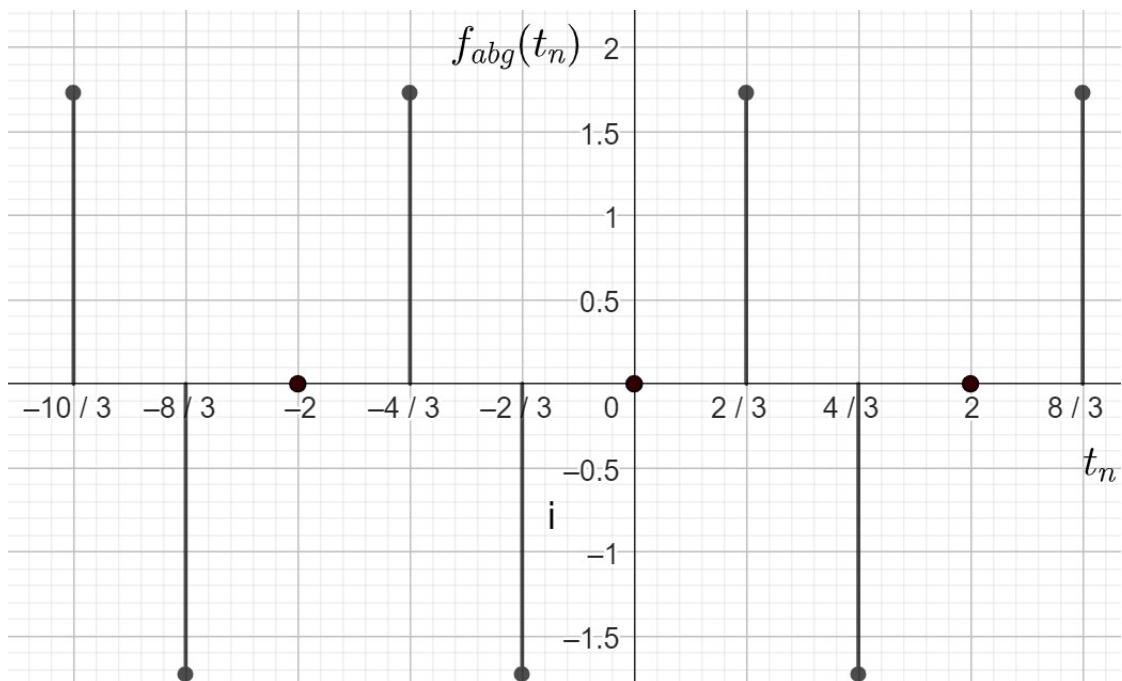


Abbildung 3.9: Abgetastetes Signal $f_{abg}(t_n)$

(d). Um das Frequenzspektrum von $f(t)$ zu erhalten, müssen wir die Fourier-Transformierte unserer Funktion $f(t)$ ermitteln. Wir transformieren also vom Zeitbereich in den Frequenzbereich.

$$f(t) \circ \bullet \hat{f}(f)$$

Die Variable f in $\hat{f}(f)$ steht für die Frequenz. Da es sich bei unserem Beispiel um eine Sinus-Kurve handelt, müssen wir das komplexe Fourier-Integral nicht lösen und können

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

das Frequenzspektrum direkt graphisch darstellen. Die Funktion

$$f(t) = 2 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{2}t\right)$$

hat eine Periode von $T = 2$ s, da $f_0 = \frac{1}{2}$ Hz.

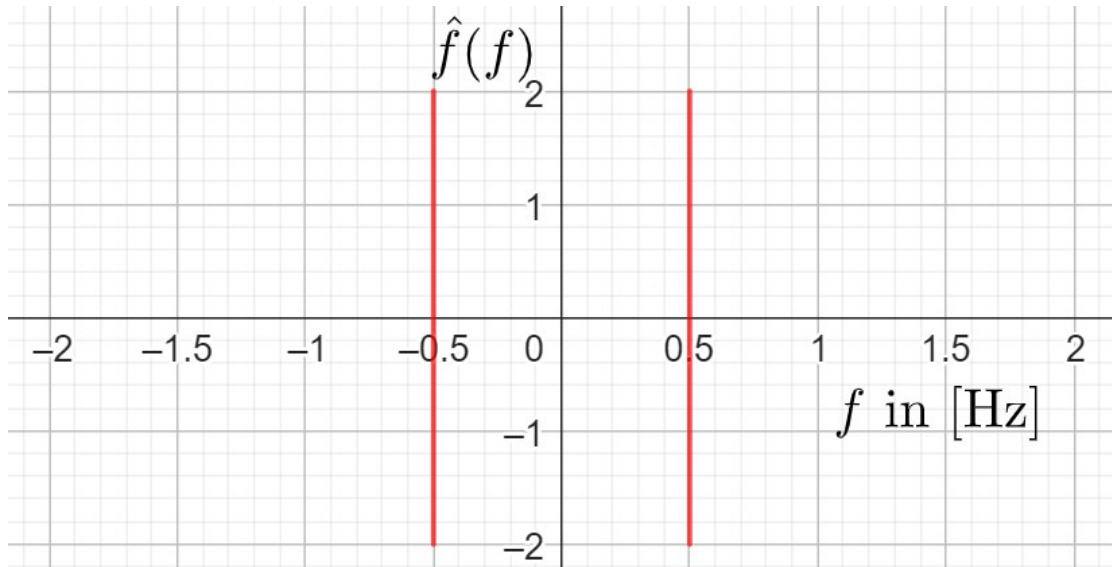


Abbildung 3.10: Frequenzspektrum von $f(t)$

(e). Um das Frequenzspektrum der δ -Funktion zu erhalten, müssen wir von dieser Funktion die Fourier-Transformierte ermitteln. Dabei gilt nach Definition 27, dass

$$\delta(t) \circ \bullet 1.$$

Da wir mit einer Frequenz $f_A = \frac{3}{2}$ Hz abtasten, erhalten wir somit einen Dirac-Kamm mit Periode $T = n f_A$ (mit $n \in \mathbb{Z}$) und einer Amplitude von 1. Die Variable f in $\delta(f)$ steht erneut für die Frequenz.

3 Die Fourier-Transformation

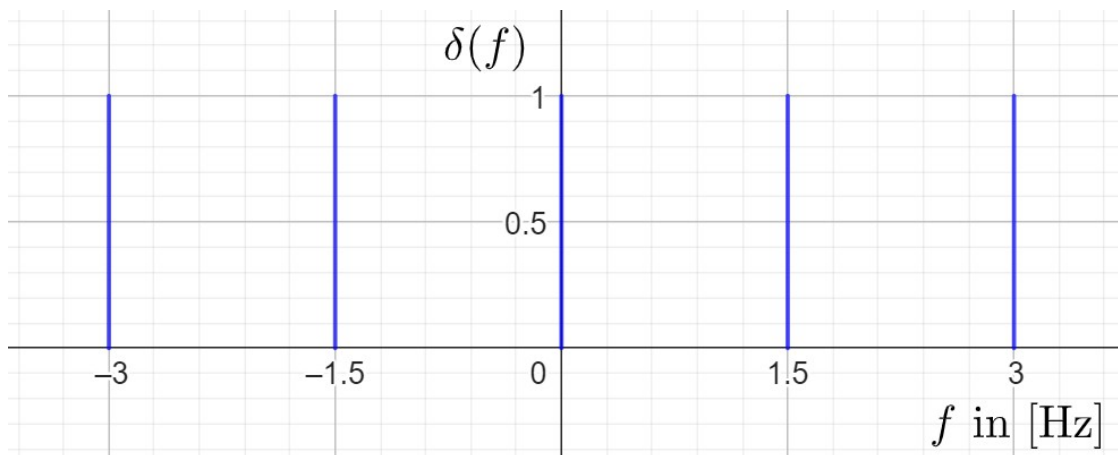


Abbildung 3.11: Frequenzspektrum von $\delta(t)$

(f). In einem letzten Schritt müssen wir noch die Fourier-Transformierte von s_{abg} ermitteln. Da wir bereits das Frequenzspektrum von $f(t)$ und $\delta(t)$ kennen, genügt es, beide Frequenzspektren in einem Diagramm darzustellen.

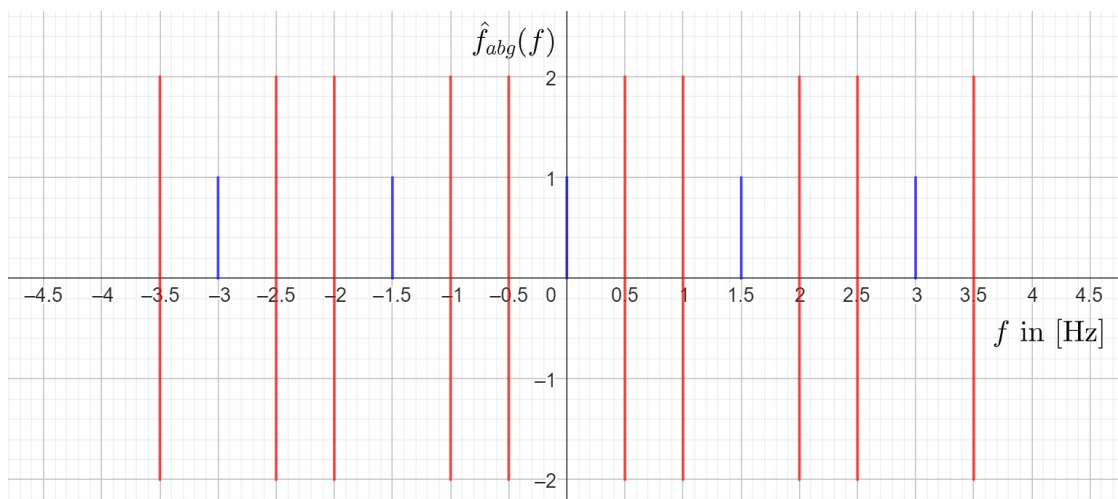


Abbildung 3.12: Frequenzspektrum von $f_{abg}(t)$

Da es zu keiner Überschneidung der Spektrallinien gekommen ist, gibt es auch kein Aliasing und die Rekonstruktion des Signals ist somit möglich.

Die Lehr- und Forschungseinheit für Nachrichtentechnik der TU München bietet auf ihrer Website einige Applets unter anderem zur dynamischen Visualisierung des Abtasttheorems an. Dieses Applet ist abrufbar unter https://www.lntwww.de/lnt_applets/sampling/index.html.

3.3.3 Faltung kontinuierlicher Signale

Die Faltung zweier Funktionen f und g beschreibt einen Operator, der die Werte von f mit denen von g gewichtet und mittelt. Sie ist ein zentrales Werkzeug der Analysis und dient unter anderem dazu, Funktionen zu glätten, indem sie deren Differenzierbarkeit verbessert. In der Signalverarbeitung wird die Faltung beispielsweise zur Berechnung gleitender Mittelwerte eingesetzt. Diese fungieren als Filter, der dazu dient, verrauschte Signale zu glätten und so deren Auswertung zu erleichtern. (vgl. Hirn & Weiß, 2018, S. 128) Ich möchte an dieser Stelle anmerken, dass ich bewusst auf die Beweisführung mancher Sätze verzichtet habe und aus diesem Grund auf das angeführte Werk von Sager (Kapitel 3, S. 57 ff.) verweisen möchte.

Definition 30 (Faltung). Es seien $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a; b] \in \mathbb{R}$ zwei messbare Funktionen. Die Faltung, auch genannt Konvolution, $f * g$ der beiden Funktionen wird durch

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

definiert, falls dieses Integral existiert.

Im folgenden Satz wollen wir drei elementare Eigenschaften der Faltung betrachten. (vgl. Sager, 2012, S. 57 f.)

Satz 3.3.1 (Eigenschaften der Faltung). Falls das Integral für drei Funktionen f, g und h in Definition 30 existiert, dann gelten

- (i). $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ (Kommutativität),
- (ii). $((f * g) * h)(t) = (f * (g * h))(t)$ (Assoziativität),
- (iii). $(f * [g + h])(t) = (f * g)(t) + (f * h)(t)$ (Distributivität).

Satz 3.3.2 (Faltung mit dem Dirac-Impuls). Es seien $\delta(t)$ die Dirac-Funktion und $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a; b] \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(f * \delta)(t) = f(t).$$

Die Faltung einer Funktion f mit dem Dirac-Impuls ergibt wieder die ursprüngliche Funktion f .

Beweis. Da die δ -Funktion gerade ist, gilt

$$\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t).$$

Daraus folgt bereits nach dem Einsetzen in das Faltungsintegral die Behauptung.

□

3 Die Fourier-Transformation

Satz 3.3.3 (Eigenschaften des Dirac-Impulses bzgl. der Faltung). Es seien $\delta(t)$ die Dirac-Funktion und $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $[a; b] \in \mathbb{R}$, dann gelten

- (i). $f(t) * \delta(t - \tau) = f(t - \tau)$,
- (ii). $f(t - \tau) * \delta(t - t_0) = f(t - \tau - t_0)$.

Satz 3.3.4 (Faltungssatz im Zeitbereich). Wenn $f(t) \circ \bullet \hat{f}(\omega)$ und $g(t) \circ \bullet \hat{g}(\omega)$, dann gilt

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

Beweis. Nach Definition 25 und 30 erhalten wir ein doppeltes Integral und es gilt

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Nach dem Satz von Fubini dürfen wir die Reihenfolge der Integration vertauschen und erhalten dadurch

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) d\tau.$$

Da $f(\tau)$ von t nicht abhängig ist, darf es als Faktor vor das zweite Integral gesetzt werden (Satz 3.1.2 (ii).) und wir erhalten

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) d\tau.$$

Im nächsten Schritt können wir für $t - \tau = s$ mit $ds = d\tau$ schreiben und erhalten nach Definition 25 und Satz 3.1.2 (ii). für das rechte Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \cdot e^{-j\omega(s+\tau)} ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \cdot e^{-j\omega s} \cdot e^{-j\omega\tau} ds = \hat{g}(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}.$$

Insgesamt erhalten wir nach dem Einsetzen und erneuter Anwendung von Definition 25 und Satz 3.1.2 (ii).

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \hat{g}(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \hat{g}(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

□

Die Fourier-Transformierte einer Faltung im Zeitbereich ist also gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der gefalteten Funktionen. (vgl. Embacher, S. 21)

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Satz 3.3.5 (Faltungssatz im Frequenzbereich). Wenn $f(t) \circ \bullet \hat{f}(\omega)$ und $g(t) \circ \bullet \hat{g}(\omega)$, dann gilt

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi} \cdot (\hat{f} * \hat{g})(\omega).$$

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes geht man zu Beginn von der inversen Fourier-Transformation aus und führt nahezu denselben Beweis wie im Zeitbereich durch. (vgl. Sager, 2012, S. 59)

□

Die Fourier-Transformierte eines Produkts zweier Funktionen ist gleich der Faltung der Fourier-Transformierten, multipliziert mit dem Faktor $\frac{1}{2\pi}$. (vgl. Embacher, S. 21)

Beispiel 19 (Faltung zweier Rechteckfunktionen). Man ermittle die Faltung $h(t) = f(t) * g(t)$.

Wir betrachten wieder unsere Rechteckfunktion aus Beispiel 16

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dazu definieren wir eine weitere Rechteckfunktion mit

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach dem Faltungssatz im Zeitbereich gilt

$$\mathcal{F}[(f * g)(t)] = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega),$$

woraus nach Anwendung der inversen Fourier-Transformation

$$(f * g)(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)]$$

folgt. Wir erhalten nach Anwendung von Satz 3.1.3 und 3.1.8 für die Fourier-Transformierte von $f(t)$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_2^4 1 e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_2^4 = \frac{e^{-j4\omega} - e^{-j2\omega}}{-j\omega} = \\ &= e^{-j3\omega} \cdot \frac{-2j \sin(\omega)}{-j\omega} = e^{-j3\omega} \cdot \frac{2 \sin(\omega)}{j\omega} \end{aligned}$$

3 Die Fourier-Transformation

und für die Fourier-Transformierte von $g(t)$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_1^3 1e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_1^3 = \frac{e^{-j3\omega} - e^{-j\omega}}{-j\omega} = \\ &= e^{-j2\omega} \cdot \frac{-2j \sin(\omega)}{-j\omega} = e^{-j2\omega} \cdot \frac{2j \sin(\omega)}{j\omega}.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt dieser Umformung haben wir erneut folgende Eigenschaft verwendet:

$$e^{-j\omega} - e^{j\omega} = 2j \sin(\omega).$$

Wir bilden nun das Produkt unserer beiden transformierten Funktionen und erhalten nach der Anwendung des Potenzgesetzes

$$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega) = \left(e^{-j3\omega} \cdot \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \right) \cdot \left(e^{-j2\omega} \cdot \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} \right) = e^{-j5\omega} \cdot \frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2}.$$

Im letzten Schritt müssen wir das Produkt rücktransformieren und erhalten

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j5\omega} \cdot \frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2} \cdot e^{j\omega(t-5)} d\omega.$$

Der Ausdruck $\frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2}$ steht für die Faltung zweier Rechteckfunktionen mit

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{4 \sin^2(\omega)}{\omega^2} \right) = \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 - t & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Durch den Ausdruck $t - 5$ im Exponenten der Exponentialfunktion verschiebt sich diese Dreieckfunktion und wir erhalten schlussendlich

$$h(t) = \begin{cases} t - 3 & \text{für } 3 \leq t \leq 5 \\ 7 - t & \text{für } 5 \leq t \leq 7 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Unser Ergebnis ist somit eine Dreieckfunktion (siehe Abbildung 3.15), die ihre Spitze bei $t = 5$ hat.

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung



Abbildung 3.13: Rechteckfunktion $f(t)$



Abbildung 3.14: Rechteckfunktion $g(t)$

In den Abbildungen 3.13 und 3.14 sind die beiden Funktionen dargestellt, die miteinander gefaltet werden.

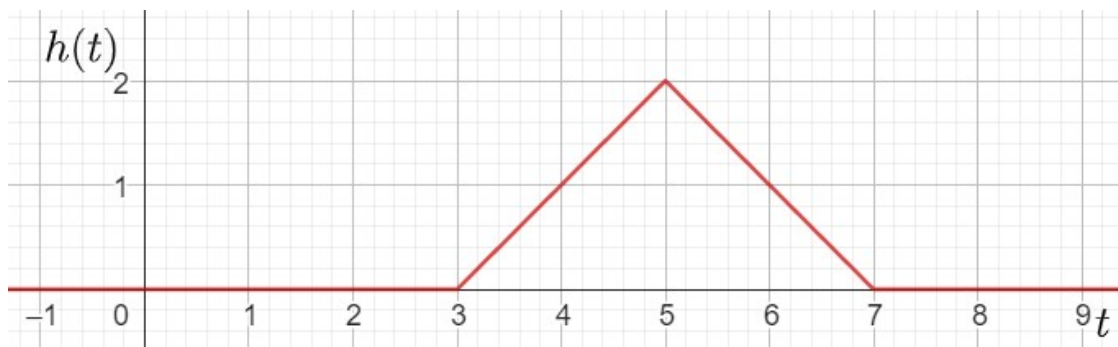


Abbildung 3.15: Dreieckfunktion $h(t) = f(t) * g(t)$

Wir haben in diesem Beispiel gesehen, dass die Faltung zweier Rechteckfunktionen eine Dreieckfunktion liefert. Weiters hat das Beispiel gezeigt, dass man eine Faltung im Zeitbereich effizient berechnen kann, indem man zuerst beide Funktionen Fourier-transformiert, ihre Spektren anschließend miteinander multipliziert und schließlich die inverse Fourier-Transformation davon berechnet.

Die Faltung zweier Funktionen kann nicht nur rechnerisch, sondern auch graphisch bestimmt werden, indem eine der Funktionen gespiegelt, verschoben und ihr Überlappungsbereich mit der anderen Funktion integriert wird. Dieser Aussage soll nun im letzten Bereich dieser Arbeit nachgegangen werden. Wir verwenden dazu wieder unsere beiden Rechteckfunktionen aus dem vorigen Beispiel.

Graphische Faltung

Wir erinnern uns kurz an das Faltungsintegral, welches durch

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

gegeben ist. Für die graphische Faltung orientieren wir uns am „Rezept“ von Dr. Merten Joost von der Universität Koblenz. (vgl. zusätzlich Butz, 2011, S. 48 f.)

- (i). Zunächst wird die unabhängige Variable angepasst, die zur Beschreibung des Eingangssignals und der Impulsantwort verwendet wird. Dazu wird t durch τ ersetzt, sodass $f(t)$ und $g(t)$ zu $f(\tau)$ und $g(\tau)$ werden. Diese Änderung ist notwendig, da t bereits den Zeitpunkt bezeichnet, für den das Ausgangssignal berechnet wird.
- (ii). Anschließend wird die Impulsantwort an der y-Achse gespiegelt, wodurch sie zu $g(t - \tau)$ wird.
- (iii). Danach wird die gespiegelte Impulsantwort um t verschoben, sodass sich der Ausdruck in $g(t - \tau)$ verändert.

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

- (iv). Das Eingangssignal $f(\tau)$ wird mit der gespiegelten und verschobenen Impulsantwort $g(t - \tau)$ verknüpft, indem beide Funktionen miteinander multipliziert werden.
- (v). Um den Wert des Ausgangssignals $h(t)$ an einer bestimmten Stelle t zu berechnen, wird dieses Produkt für alle τ integriert, und zwar über den gesamten Bereich von $-\infty$ bis ∞ .

Beispiel 20 (Graphische Faltung). Wir verwenden in diesem Beispiel die uns bekannten Rechteckfunktionen

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt in den Abbildungen 3.13 und 3.14. Bei der graphischen Faltung gehen wir nach dem obigen Rezept vor. Wir spiegeln die Funktion $g(t)$ und verändern dabei jeweils die Argumente beider Funktionen, sodass wir $f(\tau)$ und $g(-\tau) = g(\tau)$ erhalten (siehe Abbildung 3.16). Wir nennen diesen Zeitpunkt $t = 0$. In den folgenden Diagrammen ist der Graph der Funktion f blau und der Graph von g grün dargestellt.

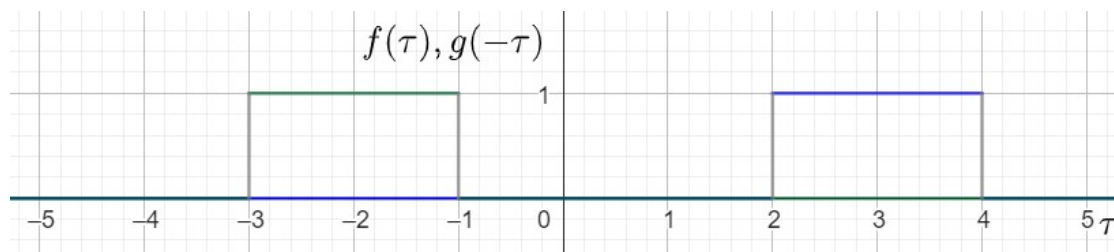


Abbildung 3.16: Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 0$

Im zweiten Schritt müssen wir die Funktion g schrittweise nach rechts verschieben, bis zum Zeitpunkt $t = 4$, damit sich die Graphen überlappen (siehe Abbildung 3.17). Die entstandene Fläche bezeichnen wir mit A_2 .

3 Die Fourier-Transformation

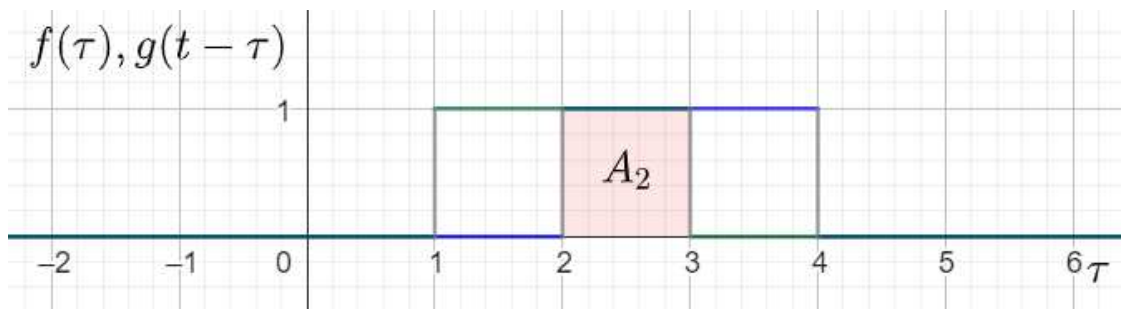


Abbildung 3.17: Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 4$

Diesen Vorgang wiederholen wir nun solange, bis sich die Graphen nicht mehr überlappen. Dabei betrachten wir die Flächen A_3 und A_4 zu den Zeitpunkten $t = 5$ (siehe Abbildung 3.18) und $t = 6$ (siehe Abbildung 3.19). Zum Zeitpunkt $t = 5$ gilt $f(\tau) = g(-\tau)$.

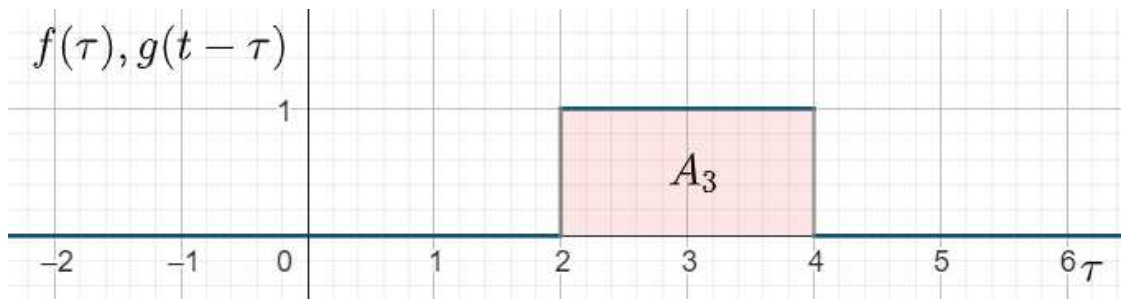


Abbildung 3.18: Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 5$



Abbildung 3.19: Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 6$

Ab dem Zeitpunkt $t = 7$ überlappen sich die Graphen nicht mehr.

3.3 Anwendungen in der Wechselstromtechnik & Signalverarbeitung

Im nächsten Schritt müssen wir die einzelnen Flächen mithilfe des bestimmten Integrals aus Satz 3.1.3 berechnen und erhalten folgende Ergebnisse:

$$(i). \quad t \leq 3: A_1 = \int_{-\infty}^2 f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^2 0 \cdot 0 \, d\tau = 0,$$

$$(ii). \quad t = 4: A_2 = \int_2^3 f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_2^3 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_2^3 = 3 - 2 = 1,$$

$$(iii). \quad t = 5: A_3 = \int_2^4 f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_2^4 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_2^4 = 4 - 2 = 2,$$

$$(iv). \quad t = 6: A_4 = \int_3^4 f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_3^4 1 \cdot 1 \, d\tau = \tau \Big|_3^4 = 4 - 3 = 1,$$

$$(v). \quad t \geq 7: A_5 = \int_4^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_4^{\infty} 0 \cdot 0 \, d\tau = 0.$$

Zwischen den einzelnen Zeitpunkten nimmt die Fläche linear zu bzw. ab. Wir können diese Punkte nun in ein zweidimensionales Koordinatensystem einzeichnen, indem wir den Wert des Integrals als y-Koordinate betrachten (siehe Abbildung 3.20) und erhalten dadurch unsere bekannte Dreiecksfunktion $h(t)$.

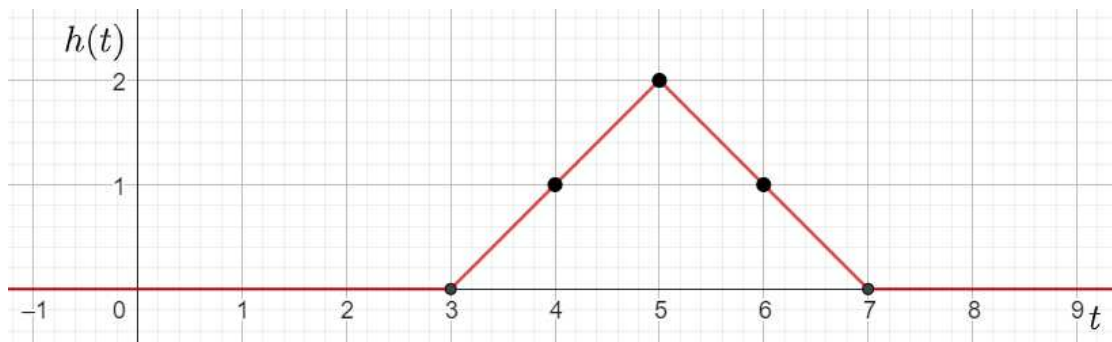


Abbildung 3.20: Graphische Faltung

Bemerkung. Anstelle des Integrals hätte man die Fläche auch mit der Formel für das Rechteck berechnen können.

Die Faltung zweier Funktionen ist ein fundamentaler Begriff in der Signalverarbeitung und Analysis. Sie beschreibt, wie eine Funktion durch eine andere moduliert wird. Graphisch entspricht die Faltung zweier Funktionen, wie wir soeben abschließend gesehen haben – einer Überlagerung der beiden Funktionen, wobei eine der Funktionen gespiegelt und verschoben wird, während das Integral über deren Produkt gebildet wird. Dies führt oft zu einer Dreiecks- oder Trapezform, wenn zwei Rechteckfunktionen gefaltet werden. Rechnerisch bedeutet das, dass anstelle der oft komplizierten Faltungsberechnung im Zeitbereich eine einfache Multiplikation der Fourier-Transformierten der Funktionen

3 Die Fourier-Transformation

durchgeführt werden kann, was in vielen Anwendungen wie der Signalverarbeitung, der Systemanalyse und der Bildverarbeitung genutzt wird. Die Rücktransformation dieses Produktes führt zurück in den Zeitbereich und ergibt das erwartete Faltungsergebnis. Somit bietet die Fourier-Transformation eine leistungsfähige Methode, um Faltungsoperationen effizient zu berechnen, insbesondere, wenn diskrete oder kontinuierliche Systeme analysiert werden.

4 Zusammenfassung

Die Arbeit zeigt auf, dass die Fourier-Transformation nicht nur ein mathematisches Werkzeug ist, sondern eine fundamentale Rolle in der technischen Praxis spielt. Besonders im Bereich der digitalen Signalverarbeitung ermöglicht sie effiziente Berechnungen und eine gezielte Modifikation von Signalen. Die Kombination aus komplexen Zahlen, Fourier-Transformation und Faltung stellt somit eine leistungsstarke Methodik dar, die in zahlreichen technischen und wissenschaftlichen Disziplinen Anwendung findet. Diese Arbeit beleuchtet die Rolle komplexer Zahlen in der Wechselstromtechnik sowie die Fourier-Transformation (FT) und ihre Anwendung in der Signalverarbeitung. Dabei wurde aufgezeigt, dass komplexe Zahlen eine fundamentale Grundlage für die Beschreibung und Analyse elektrischer Schaltungen bieten. Besonders in der Wechselstromtechnik ermöglichen sie eine präzisere und effizientere Darstellung von Schwingungsvorgängen, wodurch komplizierte Berechnungen vereinfacht werden.

Ein zentraler Fokus lag auf der Fourier-Transformation, die als essenzielles Werkzeug zur Analyse und Verarbeitung von Signalen dient. Neben den mathematischen Grundlagen und Rechenregeln wurde insbesondere die Faltung als eine ihrer bedeutendsten Anwendungen betrachtet. Sie ermöglicht die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Signalen und bildet die Grundlage für viele Anwendungen in der digitalen Signalverarbeitung. Das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem wurde als Schlüsselkonzept diskutiert, das die theoretischen Grenzen der Digitalisierung von Signalen definiert. Doch diese Arbeit verdeutlicht auch, dass die Fourier-Transformation weit mehr Potenzial birgt, als in dieser Arbeit behandelt wurde. Ihre Anwendungen erstrecken sich über zahlreiche Disziplinen – von der Bildverarbeitung über die Quantenmechanik bis hin zur künstlichen Intelligenz. Insbesondere moderne Methoden wie die Wavelet-Transformation oder die Anwendung der Fourier-Analyse in nichtstationären Systemen zeigen, dass das Konzept stetig weiterentwickelt und angepasst wird. Ein weiterer Aspekt, der das Anwendungsspektrum der Fourier-Transformation erweitert, ist ihre Definition auf dem L^1 -Raum, auch genannt Lebesgue-Raum. (vgl. Hirn & Weiß, 2018, S. 154 ff.) Die klassische Fourier-Transformation wird oft im Kontext quadratintegrierbarer Funktionen $L^2(\mathbb{R})$ betrachtet, wo die Hausdorff-Young-Ungleichung ein Thema ist. (vgl. Blümlinger, 2022, S. 80 ff.) Die Erweiterung auf $L^1(\mathbb{R})$ bietet eine breitere Perspektive für Anwendungen in der Signal- und Systemtheorie. Diese Formulierung erlaubt es, Signale mit nicht notwendigerweise endlicher Energie, aber wohldefinierten Integraleigenschaften, zu analysieren und liefert dadurch eine größere Flexibilität in der praktischen Anwendung. Zu guter Letzt können mithilfe der Fourier-Transformation auch partielle Differentialgleichungen, beispielsweise die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, untersucht werden.

Darüber hinaus spielt die mehrdimensionale Fourier-Transformation eine essenzielle Rolle in vielen Bereichen, insbesondere in der Bildverarbeitung und der Physik. In der

4 Zusammenfassung

zweidimensionalen Variante wird sie beispielsweise zur Filterung und Kantenextraktion in digitalen Bildern eingesetzt. In der Quantenmechanik ermöglicht die mehrdimensionale Fourier-Analyse eine Darstellung von Wellenfunktionen im Impulsraum. Die Fast-Fourier-Transformation (FFT) ist ein Algorithmus, der die diskrete Fourier-Transformation (DFT) besonders effizient berechnet. Diese Transformation ermöglicht die Zerlegung eines zeitdiskreten Signals in seine Frequenzkomponenten und damit eine detaillierte Frequenzanalyse. Die FFT ist dabei kein eigenständiges mathematisches Konzept, sondern ein Algorithmus zur schnellen Berechnung der diskreten Fourier-Transformation. Sie findet in den Ingenieurwissenschaften, den Naturwissenschaften und der angewandten Mathematik vielfältige Anwendungsmöglichkeiten.[2] Diese Erweiterungen zeigen, dass die Fourier-Transformation nicht nur auf zeitabhängige Signale beschränkt ist, sondern ein fundamentales Konzept zur Analyse räumlicher und physikalischer Systeme darstellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Dirac-Kamm. <https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Kamm>. Eingesehen zuletzt am 28.01.2025.
- [2] Schnelle Fourier-Transformation. <https://lmy.de/FSpKz>. Eingesehen zuletzt am 06.03.2025.
- [3] Nyquist-Shannon-Abtasttheorem. <https://de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem>. Eingesehen zuletzt am 28.01.2025.
- [4] Bartsch, H.-J. *Kleine Formelsammlung Mathematik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 6. Auflage, 2015.
- [5] Beuth, K. & Beuth, O. *Bauelemente. Elektronik 2*. Vogel Buchverlag, Würzburg, 20. Auflage, 2015.
- [6] Blümlinger, M. *Analysis 3*. 2022. URL: <https://www.asc.tuwien.ac.at/blue/ANA3-22-12.pdf>. Eingesehen zuletzt am 12.02.2025.
- [7] Butz, T. *Fouriertransformation für Fußgänger*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 7. Auflage, 2011.
- [8] Deimel, F. & Hasenzagl, A. *Grundlagen der Elektrotechnik 1*. VERITAS-VERLAG, Linz, 3. Auflage, 2017.
- [9] Deimel, F. & Hasenzagl, A. *Grundlagen der Elektrotechnik 2*. VERITAS-VERLAG, Linz, 4. Auflage, 2021.
- [10] Embacher, F. *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*. Skripten für technische Studiengänge, 2017. URL: <https://lmy.de/eGgaf>. Eingesehen zuletzt am 04.11.2024.
- [11] Embacher, F. *Fouriertransformation: Einführung*. Skripten für technische Studiengänge, 2023. URL: <https://lmy.de/WQLad>. Eingesehen zuletzt am 30.01.2025.
- [12] Griesel, H. *Analysis II. Unterrichtshefte zur Mathematik von heute. Heft 0.5*. Hermann Schrödel Verlag KG, Hannover, 3. Auflage, 1974.
- [13] Hirn, A. & Weiß, C. *Analysis – Grundlagen und Exkurse. Mehrdimensionale Integralrechnung und ihre Anwendungen*. Springer-Verlag GmbH, Deutschland, 2018.
- [14] Kopp, B. *Der große Mathematik Überblick. Erfolgreich bis zur Matura*. G&G Verlag, Wien, 1. Auflage, 2006.

- [15] Kortemeyer, J. *Komplexe Zahlen. Eine Einführung für Studienanfänger*innen*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2020.
- [16] Loullingen, C. *4. Passive elektronische Filter*. Claude Loullingen. URL: <https://lmy.de/WuoVP>. Eingesehen zuletzt am 20.12.2024.
- [17] Malle, H. *Handbuch Mathematik*. Bassermann Verlag, 2. Auflage, 2006.
- [18] Mašin, C. & Grois, G. *Physik verstehen 3*. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, Wien, 1. Auflage, 2019.
- [19] Meyer, M. *Signalverarbeitung*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 3. Auflage, 2000.
- [20] Müller–Fonrara, R. & Scholl, W. *Mathematik verständlich*. Bassermann Verlag, 2007.
- [21] Proß, S. & Imkamp, T. *Brückenkurs Mathematik für den Studieneinstieg. Grundlagen, Beispiele, Übungsaufgaben*. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2. Auflage, 2023.
- [22] Remmert, R. & Schumacher, G. *Funktionentheorie 1*. Springer Verlag, Berlin, 5. Auflage, 2002.
- [23] Sager, H. *Fourier-Transformation. Beispiele, Aufgaben, Anwendungen*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 1. Auflage, 2012.
- [24] Schichl, H. & Steinbauer, R. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum, 2. Auflage, 2012.
- [25] Schmid, A. *Mathematik für Ingenieurwissenschaften: Grundlagen. Von Vektoren und Matrizen über komplexe Zahlen zur Differential- und Integralrechnung*. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2. Auflage, 2022.
- [26] Timischl, W. & Kaiser, G. *Ingenieur-Mathematik 2*. E. Dorner, 1. Auflage, 2012.
- [27] Timischl, W. & Kaiser, G. *Ingenieur-Mathematik 4*. E. Dorner, 2. Auflage, 2015.
- [28] Weiß, R. *Gleichmäßige Konvergenz – Fourier-Reihen – Fourier-Transformation*. 2023. <https://www.dr-reinhard-weiss.de/> Eingesehen zuletzt am 30.01.2025.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zahlengerade der reellen Zahlen	4
2.2	Darstellung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ und $\mathbb{R}$	4
2.3	Darstellung von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{IR}$, und $\mathbb{C}$	6
2.4	Darstellung der Komponentenform der komplexen Zahl $z = a + bj$ in der Gauß'schen Zahlenebene	13
2.5	Darstellung der Polarform einer komplexen Zahl in der Ebene	13
2.6	Darstellung komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene	14
2.7	Darstellung der Addition und Subtraktion komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene	18
2.8	Darstellung der konjugiert komplexen Zahl	19
2.9	Geometrische Darstellung der Multiplikation in der Polarform	20
2.10	Schaltzeichen des elektrischen Widerstandes	31
2.11	Widerstandsschaltung	31
2.12	Serienschaltung elektrischer Widerstände	32
2.13	Parallelschaltung elektrischer Widerstände	33
2.14	Schaltzeichen der Induktivität	35
2.15	Schaltzeichen der Kapazität	35
2.16	Darstellung eines Vierpols mit belastetem Ausgang	36
2.17	RC-Tiefpass	39
2.18	Amplitudengang vom RC-Tiefpass	41
2.19	Phasengang vom RC-Tiefpass	41
2.20	RL-Hochpass	42
2.21	Amplitudengang vom RL-Hochpass	44
2.22	Phasengang vom RL-Hochpass	45
3.1	Dirac-Impuls	54
3.2	Dirac-Kamm	55
3.3	1. Beispiel	60
3.4	2. Beispiel – Rechteckimpuls	62
3.5	Entladen eines Kondensators	65
3.6	3. Beispiel	66
3.7	Abzutastendes Signal $f(t)$	68
3.8	Abtastsignal $\delta(t_n)$	69
3.9	Abgetastetes Signal $f_{abg}(t_n)$	70
3.10	Frequenzspektrum von $f(t)$	71
3.11	Frequenzspektrum von $\delta(t)$	72
3.12	Frequenzspektrum von $f_{abg}(t)$	72

Abbildungsverzeichnis

3.13	Rechteckfunktion $f(t)$	77
3.14	Rechteckfunktion $g(t)$	77
3.15	Dreieckfunktion $h(t) = f(t) * g(t)$	78
3.16	Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 0$	79
3.17	Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 4$	80
3.18	Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 5$	80
3.19	Graphische Faltung zum Zeitpunkt $t = 6$	80
3.20	Graphische Faltung	81