

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Entwicklung konzeptuellen Wissens zum Gleichungslösen
mithilfe geeigneten didaktischen Materials

verfasst von | submitted by
Lena Promberger BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 500 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Bewegung und Sport Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Assoz. Prof. Mag. Mag. Dr. Christoph Ableitinger
Privatdoz.

Abstract

Gleichungen stellen für Schüler:innen eine Herausforderung dar. Variablen, Bedeutungsveränderungen von Symbolen und Schreibweisen und die Objektvorstellung kommen hinzu. Wie könnte der Mathematikunterricht neu gestaltet werden, um dieser Problematik entgegenzuwirken? Anhand von einer Untersuchung wird überprüft, ob das didaktische Lernmaterial „Knack die Box“ einerseits hilft, den Einstieg in die Algebra für Lernende zu erleichtern und andererseits ob durch das Ablösen vom Material, abstraktes algebraisches Denken forciert werden kann.

Die Einleitung gibt einen Überblick darüber, weshalb das Gleichungslösen für Lernende eine Herausforderung darstellt und welche Bedeutung algebraische Konzepte im Alltag haben. Im ersten Kapitel werden die Unterschiede zwischen Arithmetik und Algebra herausgearbeitet, die damit verbundenen Bedeutungsveränderungen analysiert und die zentrale Rolle der Variable wird beleuchtet.

Das zweite Kapitel widmet sich der Weiterentwicklung des Algebraunterrichts, insbesondere der verstärkten Einbindung interaktiver und kooperativer Lernmethoden wie Peer-Learning. Im dritten Kapitel stehen die allgemeinen Schwierigkeiten im Bereich der Algebra sowie spezifische Herausforderungen beim Gleichungslösen im Fokus. Kapitel 4 behandelt die verschiedenen algebraischen Denkhandlungen sowie didaktische Leitlinien für einen erfolgreichen Algebraunterricht.

Der aktuelle Forschungsstand zu diesem Thema wird in Kapitel 5 zusammengefasst. Ab dem sechsten Kapitel rückt meine eigene Untersuchung zum Thema Gleichungslösen mit dem didaktischen Hilfsmaterial „Knack die Box“ an einer Mittelschule in den Mittelpunkt. Zunächst wird das Forschungsanliegen erläutert, gefolgt von der methodischen Vorgehensweise. Anschließend werden die Ergebnisse präsentiert, interpretiert und ein Fazit wird daraus gezogen.

Im Literatur-, Abbildungs- und Tabellenverzeichnis sind die verwendeten Quellen nachzulesen, im Anhang sind die ausgefüllten Arbeitsblätter der einzelnen Gruppen sowie die Transkripte der jeweiligen Videoaufnahmen einzusehen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Der Einstieg in die Schul-Algebra	5
1.1 Unterschiede von Arithmetik und Algebra	5
1.1.1 Bedeutungsveränderung von Symbolen und Schreibweisen	6
1.1.2 Prozess vs Objekt	8
1.2 Die Rolle der Variable	9
1.2.1 Aspekte des Variablenbegriffs	9
1.2.2 Grundvorstellungen zu Variablen	10
1.2.3 Fehlverständnis von Variablen	14
2 Mathematikunterricht neu denken	17
2.1 Interaktiv-kooperatives Lernen	19
2.2 Peer-learning	21
2.3 Auswirkungen kooperativer Lernmethoden	22
3 Typische Lernschwierigkeiten in der Algebra bzw. beim Gleichungslösen	23
3.1 Schwierigkeiten in der Algebra	23
3.2 Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen	25
4 Grundlagen des Gleichungsverständnisses und algebraischen Denkens	29
4.1 Was sind Gleichungen?	29
4.2 Algebraische Denkhandlungen	30
4.2.1 Grundsätze für den Algebraunterricht	32
4.2.2 Schritte des Algebra-Lernens	33
4.3 Lernmodell zum Gleichungsbegriff	34
5 Forschungsstand	37
5.1 Early Algebra	38
5.2 Digitale Technologien im Algebraunterricht	39
5.3 Perspektivenwechsel	40
5.4 Modellbasierte Ansätze zum besseren Verständnis von Gleichungen	43
5.4.1 „Knack Die Box“	43
5.4.2 Waage-Modell	44
5.4.3 Falt- bzw. Streifenmodell	46
6 Forschungsanliegen	49

7	Methodische Herangehensweise	51
7.1	Datenerhebung	51
7.1.1	Allgemeines zur Proband:innengruppe	51
7.1.2	„Knack die Box“- Arbeitsblätter	52
7.1.3	Beschreibung des Settings	56
7.1.4	Durchführungsmodalitäten	57
7.2	Datenauswertung	58
8	Ergebnisse	59
8.1	Allgemeine Ergebnisse	59
8.2	Ergebnisse der Gruppen zu den einzelnen Aufgaben	61
8.2.1	Punkteübersicht der Gruppen je Aufgabe	61
8.2.2	Ergebnisse basierend auf der Videoanalyse	61
8.3	Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen	67
9	Interpretation	91
9.1	Der Einstieg in die Algebra durch das Lernmaterial „Knack die Box“ . . .	91
9.2	Ablösung hin zum abstrakteren algebraischen Arbeiten	95
9.3	Limitationen der Studie	99
9.3.1	Probleme bei der Durchführung	100
9.3.2	Relativierung der Ergebnisse	101
10	Fazit	103
	Literaturverzeichnis	104
	Abbildungsverzeichnis	111
	Tabellenverzeichnis	113
	Anhang	115

Einleitung

Es gibt viele Untersuchungen, die belegen, dass die elementare Schulalgebra zu Verständnisschwierigkeiten bei Schüler:innen führt (Akinwunmi, 2012; ETH Zürich, 2020; Malle, 1993; Schiffer, 2019). Auch ich konnte bei meinem Masterpraktikum an einer Mittelschule in Niederösterreich feststellen, dass das Lösen von algebraischen Aufgaben viele Jugendliche vor große Herausforderungen stellt. Diese Schwäche wurde mir auch bei meinen Nachhilfeschüler:innen bewusst und beschäftigt mich bis heute.

Der Variablenbegriff stellt für viele Schüler:innen ein Rätsel dar. Laut Malle (1993) haben die Hälfte der Schulabgänger:innen Probleme im Umgang mit Variablen bzw. Gleichungen. Malle (1993) und Van Amerom (2002) bekriteln, dass die Algebra oft als ein vorgegebenes und festes mathematisches Thema mit strengen Regeln präsentiert wird, das kaum Raum für eigene Beiträge bietet. Sie fanden in Interviews zur elementaren Algebra, bei denen es vorrangig darum ging, einfache Gleichungen aufzustellen bzw. zu interpretieren, heraus, dass die meisten Proband:innen daran scheiterten.

In der Regel wird der traditionelle Algebraunterricht mit der Vermittlung syntaktischer Regeln eingeleitet. Rosnick und Clement (1980) betiteln diese Vorgehensweise auch als „Learning without Understanding“. Die Lernenden haben wenig Freude an der symbolischen Sprache, da sie dabei keinen Bezug zur Realität sehen (Van Amerom, 2002). Jedoch wäre es unerlässlich, dass Schüler:innen die Grundsätze der Algebra verstehen und die Semantik an Bedeutung gewinnt.

Um Lernenden das Verständnis und die Anwendung grundlegender Algebra zu erleichtern, wäre es erforderlich, die didaktischen Herangehensweisen zu optimieren. Im modernen Mathematikunterricht sollten die Schüler:innen die Möglichkeit bekommen, die Algebra selbstständig zu entdecken (Van Amerom, 2002).

Vollrath und Roth (2012) gehen in „Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe“ unter anderem auf die Grundmuster des Lehrens ein. „Mathematik darbieten“, „mathematisch handeln lassen“ und „Mathematik erarbeiten“ stehen dabei im Fokus. Das Dargebotene soll bei den Schüler:innen akustische und optische Reize auslösen, die zu entsprechenden Denkanstößen führen. Wenn dies gelingt, findet Kommunikation statt und dies wäre als zielführend anzusehen. Mathematisch handeln lassen birgt das Prinzip der Selbsttätigkeit und ist wohl eines der wichtigsten Unterrichtsprinzipien. Wird Mathematik erarbeitet, kommt dies einem fragend-entwickelten Unterrichtsgespräch gleich. Das heißt die Frage der Lehrkraft soll bei den Schüler:innen Denkprozesse auslösen und Spielraum bieten, um eigene Ideen zu generieren. Angemessene Sozialformen auszuwählen und

situativ angepasst alternierend einzusetzen ist dabei ein Qualitätsmerkmal und wird den Lernenden den Einstieg in die Algebra erleichtern.

Die Studie von Khasawneh et al. (2023) mit dem Titel „Examining the effect of inquiry-based learning versus traditional lecture-based learning on students’ achievement in college algebra“ unterstreicht diese Grundmuster des Lehrens und zeigt klare Empfehlungen auf, wie moderner Algebraunterricht gestaltet werden könnte. Inquiry-Based Learning wird dabei größte Bedeutung zugesprochen, da so kritisches Denken, Problemlösungsfähigkeiten und die Fähigkeit zur Zusammenarbeit gefördert werden. Diese Studie empfiehlt, konstruktivistisches Lernen, motivationsfördernden Technologieeinsatz, differenzierte Unterrichtszugänge und entsprechende Sozialformen einzusetzen, um Mathematik positiv zu besetzen und mit Inquiry-Based Learning den Erfolg in der Algebra zu steigern.

Reale Anwendungen algebraischer Konzepte sind zudem lernförderlich und bereiten auf die Zukunft vor. Basiswissen aus der Schulalgebra wird in höheren Klassen vorausgesetzt. Auch in einigen Studienrichtungen sowie Berufen sind Kenntnisse im Bereich der elementaren Algebra unbedingt notwendig. Ein mathematisches Fachbuch zu lesen oder eine Aus- und Weiterbildung im Bereich der Mathematik sind ohne Algebra unmöglich (Malle, 1993).

Die elementare Algebra hat für alle Menschen bedeutendes Potenzial im Alltag. Leider wissen viele nicht, welch praktisches Tool ihnen in ihrem Leben entgeht, wenn die Schulalgebra nicht beherrscht wird. Malle (1993) meint, dass große Teile der Bevölkerung in ihrem Leben Algebra anwenden, ohne sich dessen bewusst zu sein. So werden im Alltag von Elektriker:innen Gleichungen verwendet, um den Zusammenhang zwischen Spannung (U), Stromstärke (I) und Widerstand (R) in elektrischen Schaltungen zu verstehen und zu berechnen. Alle Lehrpersonen benötigen ebenfalls algebraische Skills, um zum Beispiel Prozentsätze in einer Klasse auszurechnen, wenn es um eine vergleichbare Darstellung von Noten geht. Steuerberater:innen wenden algebraische Grundkenntnisse für die Berechnung der Lohnsteuer an und Ärzt:innen benötigen grundlegendes Wissen für die Berechnung von Brutto- bzw. Nettohonorar (Malle, 1993). Auch wenn solche Berechnungen heutzutage KI-unterstützt ablaufen, sollten alle Anwender:innen das Ergebnis nachvollziehen können.

Malle (1993) hat kritisch angemerkt, dass Gleichungen zu interpretieren oder aufzustellen in der Sekundarstufe nicht im Vordergrund stünden. Viel zu sehr läge das rezepthafte Umformen von Gleichungen im Fokus. Auch die strikte Trennung zwischen Syntax und Semantik wurde von Malle kritisiert. Folgende Aussage wird daraus gezogen: „Der Kalkül wird als Kunst für sich, abgehoben von jeglicher inhaltlichen Bedeutung, behandelt“ (Malle, 1993, S. 15).

Im aktuellen österreichischen Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schulen wird

jedoch schon eine andere Gewichtung vorgenommen. In den ersten beiden Schulstufen der Sekundarstufe 1 liegt bereits das Augenmerk auf dem Aufstellen und Interpretieren einer Gleichung zu vorgegebenen Texten. Der Semantik kommt hierbei schon eine große Rolle zu. Erst in der siebten Schulstufe ist von Äquivalenzumformungen die Rede. Die Förderung der Eigenständigkeit und der Selbsttätigkeit wird in den didaktischen Grundsätzen des Lehrplans unterstrichen. Fehler sollten in konstruktiver Weise aufgegriffen und diskutiert werden, um sie schließlich als Lernchance verstehen zu können. Durch Individualisierung und Differenzierung sollen Lehrpersonen auf die jeweiligen Stärken der Schüler:innen eingehen. Die entsprechenden Sozialformen bzw. ein gut gewählter Technologieeinsatz sind dazu förderlich (BKA, 2024).

Somit unterstreicht der derzeitige Lehrplan Malles einstige Forderung (1993), nicht nur rezeptartig umzuformen, sondern durch bewusste Regelanwendung einfache Umformungen begründen zu können und aus der Ursache der Fehler der Schüler:innen eine Lernchance zu entwickeln.

Blomberger und Marxer (2017) machen darauf aufmerksam, dass Lernende zuerst das notwendige Variablenverständnis erlangen müssen, bevor Terme zusammengefasst und deren Werte berechnet werden können. Wird nicht auf das individuelle Tempo bzw. auf das momentane Kompetenzniveau eingegangen, kann die Weiterbeschäftigung mit algebraischen Denkweisen blockiert werden. Auch Linn und Eylon (2006) weisen darauf hin, dass Lernende neu erarbeiteten Stoff unbewusst ablehnen, wenn sie mit konzeptuellen Fehlvorstellungen zu kämpfen haben. Diese müssen unbedingt aufgegriffen und thematisiert werden, um Lernzuwachs garantieren zu können.

Die Computeralgebra kann heutzutage komplexe Umformungen für uns erledigen. Daher ist es umso wichtiger, dass die Schulalgebra ihren Fokus auf Einfaches und Grundsätzliches beschränkt. Damit ist das Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen gemeint. Auch einfache Ausdrücke umzuformen und die jeweiligen Umformungsschritte zu begründen, gehört zu den grundlegenden Anforderungen. Diese Vorgehensweisen geraten durch die Computeralgebra nicht in Gefahr. Gewisse elementaralgebraische Kenntnisse müssen vorausgesetzt werden, um vernünftig Mathematik zu betreiben sowie auch Computeralgebrasysteme sinnvoll einzusetzen (Malle, 1993).

Durch die zunehmende Digitalisierung soll der Fokus der Schulalgebra umso mehr auf kreatives Denken, Darstellen und Interpretieren, Problemlösen und Kommunizieren, Argumentieren und Anwendungsaufgaben gelegt werden (Malle, 1993). Das habe ich auch als Lehrkraft in meinem Masterpraktikum versucht umzusetzen, denn ich hege eine Vorliebe für aktives, handlungsorientiertes Lernen, bei dem die Vermittlung von Wissen durch praktische Erfahrungen und die Möglichkeit, Gelerntes selbst zu erforschen, im Vordergrund stehen. In diesem Zusammenhang bin ich auf das Lernmaterial „Knack die Box“ gestoßen.

Inhaltsverzeichnis

Anhand dieses Spiels können Schüler:innen versuchen, den Variablenbegriff selbst zu entdecken und die passende Lösung von Gleichungen durch Probieren zu finden. Selbstverständlich kann anhand dieses Beispiels lediglich ein erster Einblick in die Formelsprache der Algebra gewonnen werden. Die Verwendung der algebraischen Symbolsprache sollte nicht auf die Darstellung von Gleichungen beschränkt bleiben, sondern auch zur Ermittlung von anderen Zusammenhängen eingesetzt werden.

Mithilfe meiner Untersuchung „Knack die Box“ mit Schüler:innen einer 5. Schulstufe möchte ich einerseits untersuchen, ob der Einstieg in die Algebra von „Knack die Box“ wirklich profitieren kann und andererseits, ob sich eine Ablösung vom Material hin zum abstrakteren algebraischen Arbeiten aus Schüler:inneninteraktionen rekonstruieren lässt.

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

1.1 Unterschiede von Arithmetik und Algebra

Arithmetik und Algebra verfolgen unterschiedliche Intentionen. Während die Arithmetik numerische Aufgaben in den Vordergrund stellt, wird nach Hefendehl-Hebeker und Rezat (2015) der Algebra die Leitidee „Symbol und Formalisierung“ zugeordnet. Das arithmetische System legt den Fokus hauptsächlich auf Zahlen und Rechnungen, wohingegen das algebraische Zeichensystem umfassender ist und arithmetische Darstellungen als einen Teilbereich einschließt (Fischer, 2009).

Die Behauptung, die Algebra sei eine Verallgemeinerung der Arithmetik, muss jedoch mit Blick auf die spezifischen Charakteristika der Algebra zurückgewiesen werden. Dies lässt sich anhand der Unterschiede in den verwendeten Symbolen und Schreibweisen belegen, die beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra eine wesentliche Veränderung der Bedeutung erfahren (Schiffer, 2019). Darauf wird im Abschnitt 1.1.1 „Bedeutungsveränderung von Symbolen und Schreibweisen“ eingegangen.

Der Begriff Arithmetik bezeichnet im schulischen Kontext das Rechnen mit konkreten Zahlen in den Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Dabei werden Unbekannte lediglich in den Formulierungen berücksichtigt, ohne dass mit ihnen operiert wird. Demgegenüber umfasst die Schulalgebra das Rechnen und Operieren mit Unbekannten in Gleichungen sowie im Kontext von Funktionen. Im Rahmen dessen werden Variablen eingeführt und mit ihnen Operationen durchgeführt (Schiffer, 2019).

Neben der Schilderung der Unterschiede ist es erforderlich, die Trennlinie zwischen den beiden Bereichen Arithmetik und Algebra zu beschreiben. Diese Grenze wird nach Herscovics und Linchevski (1994) als „cognitive gap“ bezeichnet. Der „cognitive gap“ beschreibt dabei die Unfähigkeit der Lernenden, spontan und intuitiv an und mit Unbekannten zu operieren. Die Abgrenzung ist sowohl für Lehrpersonen wichtig, um den Unterricht entsprechend anzupassen als auch für Schüler:innen, um das Verständnis zu fördern (Herscovics & Linchevski, 1994).

Der Versuch, eine Abgrenzung zwischen Arithmetik und Algebra zu finden, ist allerdings kein triviales Problem. Manche Menschen neigen dazu, überall Algebra zu sehen und behaupten, dass Kinder, die eine Aufgabe mit fehlendem Summanden wie $4 + [] = 9$ lösen, Algebra betreiben, da der Platzhalter als eine Unbekannte betrachtet werden kann.

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

Natürlich kann diese Aufgabe auch mit rein arithmetischen Mitteln wie dem Zählverfahren oder einer Umkehroperation gelöst werden. Andererseits finden wir Pädagog:innen, die behaupten, dass Algebra ohne Vorkenntnisse der ganzen Zahlen nicht eingeführt werden kann (Herscovics & Linchevski, 1994).

Mit dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra vollzieht sich nicht nur eine signifikante Veränderung in der Bedeutung der verwendeten Symbole und Schreibweisen (Malle, 1993). Denn zusätzlich zur Bedeutungsänderung der Symbole gibt es auch bei der Konkatenation, also dem Aneinanderreihen von Symbolen, Veränderungen bei der Einführung der Algebra (Schiffer, 2019).

1.1.1 Bedeutungsveränderung von Symbolen und Schreibweisen

Bedeutungsveränderung der Konkatenation

Die Bedeutungsveränderung von Zeichen und Schreibweisen äußert sich zum einen in der Konkatenation (Nebeneinanderreihung von Buchstaben bzw. Zahlen).

In der Arithmetik wird die Aneinanderreihung immer als implizite Addition interpretiert. Nehmen wir das Beispiel der Zahl 34 (vierunddreißig). Dabei werden 4 Einer und 3 Zehner zusammengezählt. Das wird im Sprachgebrauch durch das Bindewort „und“ deutlich. In der gemischten Zahlschreibweise verhält es sich ähnlich. Am Beispiel $3\frac{2}{3}$ kann dies nachvollzogen werden. In diesem Fall ergibt sich die Addition aus der Zahl 3 und $\frac{2}{3}$. In der Algebra wird dies entweder als implizite Multiplikation wie in ab oder $4b$ oder als eine Kombination aus beidem wie in $34a$ verstanden (Malle, 1993; Schiffer, 2019). In der Didaktik der Schulmathematik wird diese Bedeutungsveränderung von Zeichen und Schreibweisen eine wesentliche Rolle spielen, da ansonsten die Grundlagen der elementaren Algebra für die Schüler:innen kaum zu bewältigen sind und viele Verständnisunklarheiten auftauchen.

Beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra sind sowohl die Operationszeichen als auch das Gleichheitszeichen von einer Bedeutungsveränderung betroffen.

Bedeutungsveränderung der Operationszeichen

In der Arithmetik werden Operationszeichen als „Aktionszeichen“ dargestellt, als Anregung um entsprechend zu handeln. Mit $5 + 4$ oder $\sqrt{9}$ wird in der Arithmetik dazu aufgerufen, die beiden Summanden 5 und 4 zu addieren bzw. die Wurzel aus 9 zu ziehen (Malle, 1993).

Solche Vorgehensweisen sind in der Algebra wie z.B. bei $a + 4$ oder $\sqrt{b}$ nicht möglich. In der Algebra werden Operationszeichen zu Bestandteilen eines Zahlnamens, da oft kein numerisches Ergebnis zu erwarten ist. Der Rechenausdruck $a + 4$ bezeichnet beispielsweise eine unbestimmte Zahl, die man erhält, wenn man zur unbestimmten Zahl a die Zahl 4 addiert (Malle, 1993).

In der Arithmetik spielt die Bedeutung der Operationszeichen keine so große Rolle, da die jeweilige Rechenoperation ohnehin immer realisierbar ist und ein numerisches Ergebnis berechnet werden kann. Die algebraische Deutung der Operationszeichen ist für das Verständnis der elementaren Algebra immens wichtig. Dadurch lassen sich typische Schwierigkeiten, wie z.B. $a + 4$ nicht als Endergebnis anzusehen, reduzieren. Oftmals versuchen Schüler:innen in ihrer „Verzweiflung“ an dieser Stelle weiterzurechnen und es entstehen wiederum „Aktionsfehler“. Aus $a + 4$ entsteht beispielsweise $4a$ (Malle, 1993).

Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens

In der Arithmetik wird der Fokus auf die Aufgabe-Ergebnis-Deutung gelegt, wobei das Gleichheitszeichen als Zuweisungszeichen interpretiert wird. Oft steht links des Gleichheitszeichens die Aufgabe und rechts ein numerisches Ergebnis (Fischer, 2009; Malle, 1993).

In der Algebra herrscht jedoch eine Bedeutungsveränderung des Gleichheitszeichens. Eine Gleichung wie $a + d = c \cdot b$ kann nicht als Aufgabe und Ergebnis interpretiert werden (Malle, 1993). Nach Winter (1982) kann das Gleichheitszeichen in der Algebra auf drei unterschiedliche Arten interpretiert werden. An der Gleichung $a + d = c \cdot b$ werden die drei Bedeutungen aufgezeigt.

- Numerische Gleichheit: Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens wird dieselbe Zahl ausgedrückt. $a + d$ und $c \cdot b$ besitzen das gleiche unbestimmte Ergebnis.
- Gleichheit der Endzustände: Mit verschiedenen Rechenoperationen wird derselbe Endzustand erreicht. Wird in diesem Fall a und d addiert, so erhält man dasselbe Ergebnis, wie wenn c mit b multipliziert wird.
- Gleichheit der Wirkungen: Die Erzielung der gleichen Wirkung kann auf unterschiedlichen Wegen erfolgen. Das Addieren der Summe von a und d zu einer Zahl liefert das gleiche Ergebnis wie das Hinzufügen des c -fachen von b zu dieser Zahl.

Aus diesen drei Auffassungen kann man schließen, dass in der Algebra das Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen auftritt. Gleichungen dieser Art können nicht nur von links nach rechts sondern in beide Richtungen gelesen werden. Ein wesentliches Ziel des Algebraunterrichts muss folglich darin bestehen, die Fähigkeit des zweiseitigen Lesens von Formeln bzw. Gleichungen zu vermitteln. Durch bloßes Umformen sowie einfachen Gleichungen, bei denen die Lösung erraten werden kann, wird das genannte Ziel nicht erreicht (Malle, 1993).

Die Annahme, dass das Gleichheitszeichen lediglich als Appell zur Berechnung dient, ist nur begrenzt zulässig. Diese Grundvorstellung sollte in der Volksschule oder spätestens vor dem Arbeiten mit Gleichungen durch die Grundvorstellung Gleichheitszeichen als Vergleichszeichen ersetzt werden. Wird beim Gleichungsumformen nicht nur zwischen

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

den beiden umgeformten Termen sondern auch am Anfang von jeder Zeile ein Gleichheitszeichen gesetzt, kann erkannt werden, dass die unbedingt notwendige algebraische Grundvorstellung noch nicht ausgereift ist (Roth & Vom Hofe, 2023).

Winter (1982) setzt sich für eine stärkere „Algebraisierung“ im Arithmetikunterricht ein, da selbst in der Volksschule, die Aufgabe-Ergebnis-Deutung beispielsweise bei Zerlegungen ihr Limit erreicht. Er zählt auf eine Steigerung der arithmetischen Kompetenz der Lernenden und ein besseres Verständnis.

Auch Kieran (1990, S. 99) macht mit seinem Zitat „Thus, beginning algebra students experience difficulty in representing formal mathematical methods because in elementary school they do not make explicit the procedures they use in solving arithmetic problems“ deutlich, dass das Wissen von arithmetischen Beziehungen und Strukturen notwendig ist, um sich in der elementaren Algebra zurechtzufinden.

1.1.2 Prozess vs Objekt

Wie schon erwähnt, zeichnet sich die Arithmetik hauptsächlich durch das numerische Operieren aus. In der Algebra treten symbolische Ausdrücke mit einer Zweideutigkeit auf - sowohl als Ausdruck als auch als Resultat eines operativen Vorgangs. In diesem Zusammenhang muss darauf hingewiesen werden, dass eine solche Zweideutigkeit auch in der Arithmetik möglich ist. So lässt sich zum Beispiel $\frac{2}{3}$ als Rechenaufforderung 2 dividiert durch 3 verstehen, es kann aber auch als Ergebnis (Objekt) verstanden werden. Dennoch kann diese Zweideutigkeit hauptsächlich der Algebra zugeordnet werden.

Der Term $c + d$ kann folgendermaßen interpretiert werden. Einerseits steht der Ausdruck für den Vorgang der Addition von c und d andererseits auch für die Summe von c und d . Dass es in der Algebra oft keine klare Unterscheidung zwischen dem Prozess und dem Objekt gibt, wurde dies von Sfard und Linchevski (1994) als das Prozess-Produkt-Dilemma bezeichnet.

Malle (1993, S. 110) nennt dieses Phänomen die Handlungs-Beziehungs-Konvention: „Ein algebraischer Ausdruck kann sowohl eine Rechenhandlung als auch eine Beziehung zwischen Zahlen (Größen) bedeuten.“

Die Deutung symbolischer Darstellungen stellt eine Herausforderung in der elementaren Algebra dar, da diese vielfältiger ausgelegt ist als in der Arithmetik. Es ist von essentieller Bedeutung, dass Lernende Terme bzw. Gleichungen nicht lediglich als Beschreibung oder Anweisung für eine Rechenoperation betrachten, sondern auch als Objekt interpretieren, welches weiteren Transformationen unterliegen kann. Dieser Perspektivenwechsel wird als „Verdinglichung“ bezeichnet und erfordert ein hohes Maß an kognitiver Leistung. Die Bezeichnung „procept“ wird für verschiedene Sichtweisen verwendet, die sowohl auf mathematische Terme als auch auf andere Objekte angewendet werden können. Es besteht die Notwendigkeit, die Unterschiede in der Denkweise von Schüler:innen zu berücksichtigen.

tigen, die sich entweder rein prozedural oder objektorientiert äußern. Obgleich beide Sichtweisen sowohl für algebraische als auch für arithmetische Terme von Relevanz sind, besteht das Problem, dass algebraische Objekte keine festen Darstellungen aufweisen, die mit ihrer Identität verknüpft sind. Die Ziele von Transformationen in der Algebra sind nicht unmittelbar ersichtlich, weshalb eine Differenzierung zwischen reinen Umformungen und sinnvollen Transformationen vonnöten ist. Die Bedeutung eines algebraischen Begriffs ist nicht deckungsgleich mit seiner Interpretation. So repräsentieren beispielsweise die Ausdrücke $2(x + 3)$ und $2x + 6$ dasselbe Objekt, jedoch mit unterschiedlichen Strukturen (Fischer, 2009).

1.2 Die Rolle der Variable

Eine Besonderheit in der elementaren Algebra ist der Umgang mit Variablen. Malle (1993) betont, dass Variablen meistens nur verwendet und nicht definiert werden, da der Variablenbegriff zu vielseitig und komplex ist. Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt eine Auseinandersetzung mit der Vielseitigkeit von Variablen, die einerseits als Stärke der Variablen zu werten ist, andererseits jedoch von vielen Lernenden als Herausforderung wahrgenommen wird (Akinwunmi, 2012).

Mithilfe von Variablen lassen sich allgemeingültige Gesetze und Gleichungen aufstellen, sowie auch funktionale Zusammenhänge beschreiben. Der Einsatz von Variablen erlaubt eine kontextfreie, allgemeine Darstellung, wodurch ein einfaches, regelgeleitetes Operieren ermöglicht wird (Schiffer, 2019). Variablen verstehen und mit ihnen Operationen auszuführen sind essenzielle Grundlagen für die weiterführende Mathematik.

Heutzutage wird in der elementaren Algebra der Variablenbegriff mit der Buchstabenvariable gleichgesetzt. Diese Tatsache war in der Vergangenheit nicht gegeben. In den Anfängen der Algebra wurden sogenannte Wortvariablen benutzt (Schiffer, 2019). Auch im Alltag werden Variablen bei Unterhaltungen verwendet wie z.B. „Ding“, „Sache“, „ein“ usw. (Malle, 1993). Viele Jahre griff die Mathematik auf Wortvariablen, wie „Haufen“, „Menschen“, „Tage“, zurück (Akinwunmi, 2012). Über Abkürzungen aus dem Lateinischen entwickelten sich die Wortvariablen zu Buchstabenvariablen, die einige Vorteile mit sich bringen. Gleichungen werden somit übersichtlicher, kürzer und verständlicher (Malle, 1993).

1.2.1 Aspekte des Variablenbegriffs

Malle (1993) unterscheidet drei Aspekte des Variablenbegriffs:

- Gegenstandsaspekt: In diesem Fall bezeichnet der Terminus „Variable“ eine unbekannte bzw. unbestimmte Zahl oder Größe.
- Einsetzungsaspekt: Die Variable fungiert als Platzhalter für Zahlen, die an dieser Stelle eingesetzt werden dürfen.

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

- Kalkülaspekt: Die Variable stellt ein Zeichen ohne weiterer Bedeutung dar, mit dem nach bestimmten Rechenregeln operiert werden darf.

Diese drei Variablenaspekte lassen sich auf Terme und Gleichungen übertragen (Malle, 1993). Da es in der vorliegenden Arbeit um das Gleichungslösen geht, werden die drei Aspekte in Bezug auf Gleichungen genauer erläutert.

Unter dem Gegenstandsaspekt findet sich eine Gleichung wie $a + b = 6$ als Aussage über bekannte sowie unbekannte Zahlen.

Der Einsetzungsaspekt verdeutlicht eine Gleichung wie $a + b = 6$, die wahr oder falsch sein kann, wenn für die Variablen a und b Zahlen eingesetzt werden.

Der Kalkülaspekt betrachtet Gleichungen als bloße Zeichenreihen, mit denen regelhaft operiert werden darf und deren Bedeutung keine Rolle spielt (Malle, 1993).

Eine Vielzahl an Beispielen belegt, dass eine Eingrenzung des Variablenbegriffs auf einen der genannten Aspekte nicht möglich ist. Weiters ist bekannt, dass die genannten Aspekte in enger Verbindung zueinander stehen. In vielen Fällen ist es erforderlich, mehrere Aspekte gleichzeitig zu berücksichtigen (Malle, 1993).

Um sich dem Variablenbegriff weiter anzunähern, ist es unerlässlich, sich zunächst mit entsprechenden Grundvorstellungen vertraut zu machen (Weigand et al., 2022).

1.2.2 Grundvorstellungen zu Variablen

Nach Weigand et al. (2022) gibt es drei Grundvorstellungen, die dem Variablenbegriff zugeordnet werden.

- Grundvorstellung der Variablen als Unbestimmte bzw. allgemeine Zahl

Die Variable stellt eine allgemeine Zahl dar. Buchstabenvariablen als Unbestimmte bezeichnen nicht festgelegte Zahlen oder Größen. Diese Grundvorstellung erlaubt es, beispielsweise das Kommutativgesetz der Multiplikation in seiner allgemeinen Form darzustellen. In vielen Bereichen der Mathematik werden Variablen als Unbestimmte verwendet, wie zum Beispiel in der Geometrie für Flächeninhaltsformeln oder in der Stochastik um den Erwartungswert zu berechnen (Weigand et al., 2022).

- Grundvorstellung der Variablen als unbekannte Zahl

Eine Variable fungiert als Platzhalter für eine Zahl, deren exakter Wert nicht bekannt ist. Durch Umformungen kann der genaue Wert berechnet werden. Als Beispiel kann jede lineare Gleichung genannt werden, deren Unbekannte durch ordnungsgemäße Umformungen berechnet wird (Weigand et al., 2022).

- Grundvorstellung der Variablen als Veränderliche

Eine Variable als Veränderliche kann auf zwei unterschiedliche Arten aufgefasst werden. Beim Simultanaspekt kann die Veränderliche gleichzeitig alle Zahlen aus einem bestimmten Bereich annehmen, während beim Veränderlichenaspekt die möglichen Werte einer Variable nicht gleichzeitig, sondern nacheinander in einer Reihenfolge auftreten (Weigand et al., 2022).

Jeder Grundvorstellung der Variablen lassen sich die drei Aspekte des Variablenbegriffs von Malle (1993) zuordnen. Diese Tatsache wird in der nachfolgenden Abbildung veranschaulicht.

Handlungen Grundvorstellungen	Zahlen einsetzen (Einsetzaspekt)	Rechnen (Kalkülaspekt)	Beschreiben (Gegenstands- oder Objektaspekt)
Variable als unbestimmte Zahl	Für die Unbestimmte können Zahlen eingesetzt werden.	Ein Ausdruck mit unbestimmten Zahlen kann umgestellt werden (z. B. eine Formel in der Geo- metrie).	Ein Sachverhalt wird mithilfe von unbestimmten Zahlen beschrieben (Flächeninhalt in der Geometrie, Kommutativität von Rechenoperationen).
Variable als unbekannte Zahl	Für die unbekannte Zahl werden Zahlen ein- gesetzt, bis – etwa bei einer Gleichung – eine wahre Aussage entsteht.	Ein Ausdruck mit einer Unbekannten kann regelgeleitet umgeformt werden, um die Unbekannte zu bestimmen.	Ein Sachver- halt wird mithilfe einer Unbekannten beschrieben (Gleichung).
Variable als Veränderliche	Werte können ein- gesetzt werden, etwa um systematisch Änderungen in den Blick zu nehmen.	Zu einem x -Wert kann der zugehörige y -Wert ermittelt werden und umgekehrt.	Situationen, in denen zwei Größen in Beziehung stehen, können beschrieben werden (Funktionen).

Abbildung 1.1: Darstellung der Grundvorstellungen samt der drei Variablenaspekte (Weigand et al., 2022)

Die Schüler:innen stehen vor der Herausforderung, die unterschiedlichen Auffassungen richtig zu deuten und sich danach orientieren zu können. So gibt es verschiedene Gedankenansätze eine Gleichung zu lösen, bei denen jeweils einer der genannten Aspekte hervorgehoben wird (Malle, 1993).

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

Welche Zahl ergibt um 3 vermehrt und anschließend verdoppelt 10?

Sofern die Aufgabe algebraisch gelöst wird, wird folgende Gleichung aufgeschrieben:

$$\begin{aligned}2(x + 3) &= 10 \\x + 3 &= 5 \\x &= 2\end{aligned}$$

Der Gedankengang kann jedoch sehr verschieden sein. Im Folgenden werden drei Denkansätze präsentiert, wobei jeweils ein anderer Variablenaspekt im Vordergrund steht (Malle, 1993).

Beim ersten Gedankengang wird der Gegenstandsaspekt betont, indem die Gleichung durch inhaltliche Vorgehensweise gelöst wird (Malle, 1993).

Die gesuchte Zahl wird mit x gekennzeichnet. Es muss gelten:

$$2(x + 3) = 10$$

Das Doppelte der Zahl $x + 3$ ergibt 10, daher gilt:

$$(x + 3) = 5$$

Die Zahl x um 3 vermehrt ergibt 5. Dadurch ist:

$$x = 2$$

Beim zweiten Gedankengang liegt der Fokus auf dem Einsetzungsaspekt (Malle, 1993). Durch Einsetzung in den Platzhalter x muss eine wahre Aussage erzeugt werden:

$$2(x + 3) = 10$$

Da die obige Aussage äquivalent zur folgenden Aussage ist, müssen die beiden Gleichungen die gleiche Lösungsmenge besitzen:

$$(x + 3) = 5$$

Durch Äquivalenzumformungen erhält man folgenden Wert für x :

$$x = 2$$

Somit enthält die Lösungsmenge die Zahl 2:

$$L = \{2\}$$

Beim dritten Gedankengang wird der Kalkülaspekt in den Vordergrund gestellt. Dieser Aspekt bezeichnet das regelgeleitete Gleichungslösen (Malle, 1993).

Es wird folgende Gleichung mit der gesuchten Zahl x aufgestellt:

$$2(x + 3) = 10$$

Unter Berücksichtigung der Regel, dass eine Division auf beiden Seiten einer Gleichung durch eine von null verschiedene Zahl zulässig ist, lässt sich Folgendes ableiten:

$$(x + 3) = 5$$

Folglich wird der Grundsatz verwendet, dass man auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl subtrahieren darf und man erhält:

$$x = 2$$

Die gesuchte Zahl ist somit 2.

Es wird in keinem der drei Denkanstöße beschrieben, warum welche Schritte vollzogen werden. Es liegt nahe, dass der erste Gedankengang der nachvollziehbarste ist, da dieser durch rein arithmetische Überlegungen zustande kommt. Malle (1993) betont, dass Lernende diesen Lösungsansatz am häufigsten wählen, da er für Einsteiger:innen in die Schulalgebra am logischsten erscheint.

Die Gefahr dabei liegt in einem Fehlverständnis der Variablen. Um dies zu verhindern, ist eine strukturierte Herangehensweise erforderlich. Strukturiert bedeutet in diesem Falle ein didaktisches Vermitteln der Variablenaspekte vom Einfachen hin zum Schwierigen.

Die Studie von Küchemann (1978) zeigt, dass die Variable zuerst als unbestimmte Zahl, dann als unbekannte Zahl und schließlich als Veränderliche gelehrt werden soll, da diese Reihenfolge im Anspruchsniveau ansteigend ist. Der Schritt mit der größten Herausforderung für die Lernenden ist, die Variable als Veränderliche zu sehen (Bruder et al., 2015).

Allerdings widersprechen Specht und Plöger (2011) dieser Erkenntnis. Die beiden sind der Meinung, dass sich die unterschiedlichen Gesichtspunkte des Variablenverständnisses nicht rangmäßig entwickeln. Die in Kapitel 1.2.1 und 1.2.2 dargestellten Variablenaspekte nach Malle (1993) sowie die Grundvorstellungen nach Weigand et al. (2022) können als zielführend erachtet werden. Allerdings besteht die Möglichkeit, dass die unterschiedlichen Sichtweisen zu einem Fehlverständnis führen (Specht & Plöger, 2011).

Ein mögliches Fehlverständnis bei Lernenden könnte in einer Vermischung mathematischer Begriffe und Konzepte aus verschiedenen Theorien oder Modellen liegen, was die Differenzierung erschwert. Auch eine fehlerhafte Interpretation der Reihenfolge könnte eine Rolle spielen: So könnte die Annahme, dass das Verständnis von Variablen stets linear entwickelt werden muss, zu einer Blockade führen, wenn bestimmte Aspekte nicht in

der vorgesehenen Reihenfolge begriffen werden. Zudem können Missverständnisse über den Zweck von Variablen entstehen, wenn unterschiedliche Sichtweisen widersprüchlich wirken und Lernende so die zugrunde liegenden Gemeinsamkeiten übersehen. Schließlich könnte auch die Komplexität von Variablen unterschiedlich eingeschätzt werden: Eine Überschätzung der Komplexität oder Vernachlässigung wesentlicher Aspekte kann die Folge sein, wenn sich Schüler:innen auf vereinfachte Perspektiven konzentrieren. Folgend werden weitere Fehlverständnisse von Variablen diskutiert.

1.2.3 Fehlverständnis von Variablen

Im folgenden Kapitel werden Auffassungsschwierigkeiten und Verständnisfehler in Bezug auf Variablen behandelt. Vielen Lernenden ist nicht bewusst, dass Variablen für Zahlen stehen. Malle (1993) verdeutlicht an einem Beispiel, dass einige Kinder in der Buchstabenwelt maßlos überfordert sind, da sie keine Grundvorstellung von Variablen haben oder diese mit eigenen Bedeutungsinterpretationen versehen (Bruder et al., 2015; Malle, 1993).

Gabler und Ufer (2019) weisen darauf hin, dass eine mögliche Ursache für Defizite im Verständnis von Variablen und mathematischen Konzepten in einer Überbetonung des Formalen liegen kann. Diese Überbetonung kann dazu führen, dass Lernende sich zu sehr auf formale Regeln und Symbole konzentrieren, ohne ein tiefes Verständnis für die zugrunde liegenden Konzepte zu entwickeln. Dies kann insbesondere bei der Lösung von Textaufgaben problematisch sein, da die Lernenden möglicherweise Schwierigkeiten haben, die Verbindung zwischen den formalen mathematischen Ausdrücken und den realen Situationen, die sie darstellen, herzustellen. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass ein übermäßiger Fokus auf formale Aspekte der Mathematik das Verständnis der Lernenden beeinträchtigen kann. Dies kann zu Missverständnissen und Schwierigkeiten beim Lösen von Aufgaben führen.

Drijvers (2003) bestätigt diese Sichtweise und sieht hier großen Verbesserungsbedarf. Das reine Wiedergeben von Strukturen und klaren Schemata, sprich das schablonenhafte Wiederholen, stellt ein Problem dar. Lehrende greifen jedoch oft gerne auf diese Art des Übens zurück, da es eine einheitliche Vorgehensweise darstellt und Zeit spart. Somit gehen aber exploratives Erarbeiten und Individualisieren verloren.

Wenn das Rechnen im Mathematikunterricht dominiert, bleibt wenig Raum für die Interpretation von Variablen und es kommt zu sogenannten Deutungsfehlern.

Einigen Schüler:innen ist nicht klar, dass $a + b$ das Gleiche wie $a + c$ ausdrückt. Sie sind der Meinung, dass verschiedene Symbole unterschiedliche Bedeutungen haben. Des Weiteren werden Buchstaben mitunter auch als Nummerierung von Aufgaben betrachtet. Mit dem Ausdruck $2a$ ist nicht der erste Unterpunkt von Aufgabe 2 gemeint, sondern der Rechenausdruck $2 \cdot a$. Darüber hinaus ist zu beobachten, dass Buchstaben als Abkürzungen für Namen interpretiert werden. Damit ist gemeint, dass a z.B. für Apfel steht oder

z mit den Zahlen zehn oder zwei assoziiert wird. Schließlich besteht die Gefahr, dass Buchstaben anhand ihrer Position im Alphabet angesehen werden. So würde $a = 1$ und $z = 26$ sein (Specht & Plöger, 2011).

Lehrkräfte verwenden bei ihren Erklärungen häufig die Vorstellung, dass Algebra eine Art Kurzschrift sei. Diese Auffassung von Variablen als Abkürzungen erweist sich jedoch in der Praxis als problematisch. In einigen Ländern ist die „fruit salad algebra“ eine beliebte Einführung in die Algebra. Im Rahmen der „fruit salad algebra“ erlernen Schüler:innen die Vereinfachung von Rechenausdrücken wie $5a + 2b - 3a + b = 2a + 3b$. Dies erfolgt durch die Anwendung eines spezifischen Denkprozesses: „Zu 5 Äpfeln werden 2 Bananen hinzugefügt, anschließend werden 3 Äpfel weggenommen und dann kommt noch eine weitere Banane hinzu, das ergibt 2 Äpfel und 3 Bananen“ (Arcavi et al., 2017).

Selbst wenn die Variablen nicht als Früchte bezeichnet werden, ist dies immer noch eine „fruit salad algebra“ die fälschlicherweise lehrt, dass Buchstaben in der Algebra für Objekte stehen und nicht für Zahlen (z.B. die Anzahl der beteiligten Objekte). In diesem Kontext werden die unsichtbaren Multiplikationszeichen nicht berücksichtigt. Die Reduktion der Algebra auf die Vereinfachung einiger Ausdrücke, wie sie in der sogenannten „fruit salad algebra“ vorgenommen wird, ist weder eine vielversprechende Strategie zur Einführung, noch stellt sie einen adäquaten Zugang zur Algebra dar. Unterrichtstechniken, die eine falsche Botschaft vermitteln, sollten unabhängig von ihrer kurzfristigen Effektivität vermieden werden. Die Fähigkeit, die Konzepte der Algebra in einem neuen Licht zu betrachten, ist von größerer Bedeutung als die schnelle Aneignung von Wissen durch Manipulation. Die Fehlvorstellung, Buchstaben als Objekte zu betrachten, kann für Lernende während ihrer gesamten Algebra-Laufbahn ein Hindernis beim Aufstellen von Gleichungen darstellen (Arcavi et al., 2017).

Das Ziel des Unterrichts muss es sein, Fehlverständnisse aufzugreifen, zu reflektieren, zu diskutieren und sie so als Ausgangspunkte von Lernprozessen zu nutzen. Dies wird auch bei Vollrath (2003) als konkretes Bildungsziel für den Algebraunterricht definiert:

„Die Schüler sollen mit Variablen und Termen grundlegende Ausdrucksmittel der Algebra kennenlernen, diese „Formelsprache“ verstehen und richtig verwenden. Mithilfe dieser Sprache sollen sie Zusammenhänge in der Mathematik, aber auch in wichtigen Anwendungsbereichen wie Naturwissenschaften, Technik und Sozialwissenschaften angemessen beschreiben und verstehen können. Insbesondere sollen sie in dieser Sprache kommunizieren und argumentieren können“ (Vollrath, 2003, S. 14).

Im Rahmen des modernen Unterrichts zum Lösen von Gleichungen werden die Problemlösungsprozesse in den Vordergrund gestellt. Diese lassen sich in drei Hauptphasen unterteilen: Strukturierung, Planung und Durchführung. Die Phasen geben den Lernenden eine eindeutige Orientierung und unterstützen sie dabei, einen systematischen Ansatz für das Lösen von Gleichungen zu entwickeln. Ein wesentlicher Aspekt des Un-

1 Der Einstieg in die Schul-Algebra

terrichts besteht zudem im Vergleich unterschiedlicher Lösungsansätze. Dieser Ansatz fördert nicht nur das Verständnis der formalen mathematischen Sprache, sondern auch die Fähigkeit der Lernenden, verschiedene Ansätze zu bewerten und den geeignetsten auszuwählen. Dieser Vorgang wird als flexibles Gleichungslösen bezeichnet (Hämmerle, 2023).

Den Klassengesprächen kommt hierbei eine Schlüsselrolle zu: Sie bieten den Lernenden die Gelegenheit, ihre Lösungswege vorzustellen, die Vor- und Nachteile unterschiedlicher Vorgehensweisen zu erörtern und sich gegenseitig zu lehren. Neben der Förderung des Austauschs tragen diese interaktiven Elemente auch zu einem tiefergehenden Verständnis der zugrunde liegenden Konzepte bei. Der Fokus des modernen Gleichungsunterrichts liegt demnach nicht nur auf der Vermittlung mathematischer Techniken des Umformens, sondern auch auf der Förderung der Entwicklung von Kompetenzen, die es den Schüler:innen ermöglichen, mathematische Probleme flexibel und reflektiert zu bearbeiten (Hämmerle, 2023).

2 Mathematikunterricht neu denken

Mathematik ist ein allgegenwärtiger Bestandteil unserer Umwelt, den wir täglich, wenn nicht sogar stündlich, nutzen. Dies beginnt beim Blick auf die Wettervorhersage und endet beim Abwiegen der Zutaten für das Abendessen. Dazwischen finden sich zahlreiche weitere Beispiele, wie etwa das Schreiben des Datums, das Ablesen der Uhrzeit oder der morgendliche Kauf von Kaffee (England, 2021).

Wilhelm und Andelfinger (2021) beleuchten in ihrer Arbeit innovative Ansätze für einen Mathematikunterricht, der über die reine Vermittlung von Fachwissen hinausgeht. Der Fokus liegt auf der Förderung einer Unterrichtskultur, in der sowohl die Wertschätzung der Lernenden als auch des Unterrichtsgegenstandes eine zentrale Rolle einnimmt. Das übergeordnete Ziel besteht darin, nicht nur mathematische Kompetenzen zu entwickeln, sondern auch gesellschaftlich relevante Werte wie Achtsamkeit, Verantwortung und Selbstwirksamkeit zu vermitteln.

Ein achtsamer Mathematikunterricht zielt darauf ab, Emotionen wie Neugier, Freude und Faszination zu fördern und gleichzeitig die Angst vor Mathematik zu reduzieren. Durch die Wertschätzung der individuellen Fähigkeiten der Lernenden wird eine positive Beziehung zur Mathematik aufgebaut (Wilhelm & Andelfinger, 2021).

Die Mathematik wird als Instrument zur Bewältigung globaler Probleme wie Nachhaltigkeit, Umweltschutz und soziale Gerechtigkeit gesehen. Daher wird Mathematik nicht nur zur Lösung mathematischer Probleme eingesetzt, sondern auch, um über gesellschaftlich relevante Themen nachzudenken und einen Standpunkt zu vertreten. Um die Bedeutung der Mathematik für den Alltag und die Zukunft der Lernenden zu verdeutlichen, soll der Unterricht lebensnahe Kontexte berücksichtigen. Durch offene und differenzierte Aufgabenstellungen können individuelle Stärken und kreative Problemlösungsstrategien gefördert werden (Wilhelm & Andelfinger, 2021).

Bruder et al. (2015) weisen im Handbuch der Mathematikdidaktik darauf hin, wie wichtig der Realitätsbezug im Mathematikunterricht ist. Sie betonen, dass Schüler:innen nicht nur Angewandte Mathematik lernen sollen, sondern dass es unerlässlich ist, Mathematik selbst anwenden zu können. Die Beherrschung der Formeln der Zinseszinsrechnung garantiert zum Beispiel noch keine Kompetenz in der Anwendung dieser auf neue Problemstellungen, wie beispielsweise den Vergleich verschiedener Finanzierungsangebote oder die Analyse von Überschuldungsprozessen. Die Kompetenz des Anwendens von Mathematik auf die reale Welt kann nur durch eigene Aktivitäten und das eigene Tun erworben werden. Somit wird das „Mathematikbild“ der Schüler:innen geprägt und sie

können in Zukunft verantwortungsbewusst und kritisch agieren.

Mathematik ist im Alltag unverzichtbar und im Unterricht sollte dies sichtbar gemacht werden. Das bloße Kennen und Nutzen von Formeln reicht nicht aus. Es geht viel mehr um die flexible Anwendung von Mathematik in verschiedenen Kontexten. Die Zielsetzung besteht in der Erkenntnis und dem Verständnis der Rolle der Mathematik in der Welt. Die Schüler:innen sollen die Kompetenz erwerben, mathematische Urteile abgeben und begründen zu können sowie Mathematik sinnvoll anzuwenden. Schließlich soll einerseits das Verständnis für Alltagsmathematik und andererseits das Verständnis für mathematische Denk- und Arbeitsweisen sowie für Mathematik als Kulturgut erreicht werden. Um dies zu gewährleisten, ist es nötig, an der Qualität und nicht an der Quantität der ausgewählten Übungsaufgaben zu feilen. Da für Schüler:innen Aufgaben oft zu künstlich kreiert erscheinen und sie diese mit ihren realen Lebenswelten nicht in Verbindung bringen können, führt dies zu Diskrepanzen. Im Unterricht müssen daher geeignete Probleme aus dem Schüler:innenalltag als solche identifiziert und schüler:innengerecht aufbereitet werden (Reiss & Hammer, 2021).

Mink et al. (2009) betonen, dass die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten ein erklärtes Ziel des Mathematikunterrichts sein muss. Sie unterstreichen die Tatsache, dass Lehrkräfte darauf abzielen sollten, die Schüler:innen dahingehend zu befähigen, komplexe und vielfältige Probleme zu lösen, wie sie im Alltag auftreten, und nicht nur die Ausführung von arithmetischen Prozeduren zu gewährleisten.

Ein erfolgreicher Mathematikunterricht ist summa summarum dadurch gekennzeichnet, dass er lehrreich, unterhaltsam, diskursiv und nützlich ist. Dabei wird der Entwicklung kritischen Denkens und Selbstwirksamkeitserfahrungen besondere Bedeutung beigemessen (Wilhelm & Andelfinger, 2021).

Die Förderung der Selbstwirksamkeit - des Vertrauens der Lernenden in ihre Fähigkeit, Herausforderungen zu bewältigen - ist ein wesentlicher Aspekt eines achtsamen Mathematikunterrichts. Studien weisen darauf hin, dass eine hohe Selbstwirksamkeit eng mit Motivation, wirksamen Lernstrategien und einem nachhaltigen Erwerb von Fähigkeiten verknüpft ist. Im Gegensatz dazu führt eine geringe Selbstsicherheit häufig zu einem Rückgang des Engagements und des Lernerfolgs. Durch offene und differenzierte Aufgabenstellungen, die Erfolgserlebnisse ermöglichen, kann das Selbstvertrauen gefördert werden. Das Durchhaltevermögen wird durch besonders komplexe Problemlöseaufgaben gestärkt, die den Lernenden eine direkte Erfahrung ihrer Selbstwirksamkeit ermöglichen. Unterstützt wird dieser Prozess durch eine positive Grundhaltung der Lehrkraft, hohe Erwartungen und gezieltes Feedback, z.B. durch Reflexionsfragen wie „Was hast du heute gelernt?“ Die Förderung von Selbstbewusstsein kann ebenfalls durch die Vermittlung von Freude und Begeisterung im Unterricht erfolgen. Dies kann beispielsweise durch die Bearbeitung innovativer oder faszinierender Aufgabenstellungen erreicht werden. Auf diese Weise wird Mathematik nicht nur als Fach, sondern auch als Mittel zur Lösung

realer Probleme gesehen (Wilhelm & Andelfinger, 2021).

2.1 Interaktiv-kooperatives Lernen

Interaktion

Das „aufeinander bezogene Handeln zweier oder mehrerer Personen“ wird als Interaktion bezeichnet. In der Folge wird eine „Wechselbeziehung zwischen Handlungspartner:innen“ beschrieben (Duden online, 2024). Die Interaktion kann sowohl mündlich als auch non-verbal erfolgen. Dieser wechselseitige Einfluss ist nicht immer bewusst und zielgerichtet, sondern kann auch unbewusst und unbeabsichtigt sein. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgt eine Fokussierung auf die Interaktionen der Kinder untereinander. Soziale Einflüsse spielen beim mathematischen Lernen von Kindern eine wichtige Rolle. Dies wird deutlich, wenn man die Art und Weise betrachtet, in der die an einer Interaktion beteiligten Personen während der Arbeit an einer Aufgabe kommunizieren und ihre Interpretationen mathematischer Ereignisse koordinieren (Korten, 2020).

Kooperation

Kooperation bezeichnet das absichtliche gemeinsame Handeln von zwei oder mehr Personen zur Erreichung eines gemeinsamen Ziels. In der deutschen Sprache existiert eine Vielzahl an Synonymen für das Verb „kooperieren“. Dazu zählen unter anderem die Begriffe „zusammenwirken“, „zusammenarbeiten“ sowie „kollaborieren“ (Duden online, 2024). Folglich muss es sich bei Kooperation um eine gezielte Form der Interaktion handeln, die auf spezifische Aufgaben ausgerichtet ist. Dieser Austausch kann auf verbale oder nonverbale Weise erfolgen. Dabei können die Informationen auf unterschiedliche Weise übermittelt werden, beispielsweise durch verbale Äußerungen, Handlungen am Material oder Bild sowie in der Symbolsprache der Mathematik (Korten, 2020).

Die Methode des interaktiv-kooperativen Lernens als gemeinsame Lernaktivität erlaubt eine vertiefte Analyse der Unterrichtsstruktur, wobei konkrete Merkmale von Lernaktivitäten in den Blick genommen werden. Im Mittelpunkt steht die Kooperation und das Ziel, eine anspruchsvolle Aufgabe gemeinsam zu lösen. Die vorliegende Lernmethode des interaktiv-kooperativen Lernens fußt auf der aktiven Zusammenarbeit von Lernenden. Es verbindet soziale Interaktionen mit kooperativen Abläufen, um kollektiv neues Wissen zu generieren. Diese Methode basiert auf der Annahme, dass Lernen ein sozialer Prozess ist, der durch den Austausch von Perspektiven, Argumenten und gegenseitige Unterstützung bereichert wird. Das interaktiv-kooperative Lernen ist durch drei Hauptmerkmale gekennzeichnet: Erstens bildet die Interaktion als zentraler Bestandteil den Fokus, wobei Dialoge, Diskussionen und gegenseitiger Austausch eine wesentliche Rolle spielen. Die Tiefe des Lernens wird durch transaktive Prozesse wie das Aufgreifen und Weiterentwickeln von Ideen anderer gefördert. Zweitens ist die Zusammenarbeit im Team von entscheidender Bedeutung. Innerhalb der Gruppe entsteht eine positive Interdependenz, da der individuelle Erfolg mit dem der Gruppe verknüpft ist und jedes

Mitglied aktiv zur Zielverwirklichung beiträgt. Die Generierung von Wissen erfolgt in einem dritten Schritt durch kollaborative Wissenskonstruktion, bei der bereits vorhandene Informationen in ihrer Gültigkeit hinterfragt und miteinander verknüpft werden. Dieser Lernprozess wird durch Reflexion und wechselseitige Rückmeldungen gefördert (Jurkowski, 2010).

Das interaktiv-kooperative Lernen bringt zahlreiche Vorteile mit sich. Zu den Vorteilen zählen ein vertieftes Verständnis durch Diskussionen und Perspektivenwechsel, die Förderung sozialer Kompetenzen wie Kommunikation und Konfliktbewältigung sowie eine Stärkung der Selbstregulation, da Lernende Verantwortung für ihren eigenen Beitrag übernehmen. Für die erfolgreiche Umsetzung dieser Methode sind bestimmte Bedingungen notwendig: Deutliche Strukturen und Rollen, wie etwa die Vergabe von Aufgaben als Moderator:in oder Schreiber:in, machen die Kooperation einfacher und unterstützen umfassendere Erfahrungen durch Rollentausch. Die Verwendung von Materialien wie Kooperationsskripte oder Reflexionsfragen, die als Leitfäden für die Bearbeitung der Aufgaben dienen, kann die Motivation der Lernenden zur Vertiefung ihrer Einsichten fördern (Jurkowski, 2010).

Transaktive Interaktionen, wie Argumentationen („Ich denke, das ist richtig, weil ...“), Klärungen („Was genau meinst du mit ...?“) oder Erweiterungen („Das erinnert mich an ...“), fördern die kognitive Elaboration und vertiefen die Auseinandersetzung mit den Inhalten. Auch soziale Kompetenzen wie Perspektivenübernahme, Kommunikationsfähigkeit und Konfliktlösung sind von entscheidender Bedeutung. Das Konzept des interaktiv-kooperativen Lernens wird durch verschiedene theoretische Perspektiven gestützt: Die kognitive Elaboration betont tiefere Verarbeitungsprozesse durch Diskussionen und Erklärungen, während die soziokulturelle Perspektive Lernen als gemeinschaftlichen Prozess in sozialen Kontexten sieht. Die motivationale Perspektive betont, dass die Verantwortung für die Gruppe das Engagement der Lernenden erhöht, während die kollektive Informationsverarbeitung die Integration individueller Beiträge zu einem umfassenderen Verständnis hervorhebt (Jurkowski, 2010).

Das übergeordnete Ziel dieser Lernform besteht darin, die Lernenden zur aktiven Interaktion und zum wechselseitigen Lernen zu befähigen. Soziale Interaktion bildet dabei den Kern des Prozesses, da sie es den Lernenden ermöglicht, sowohl ihre eigenen Kenntnisse zu erweitern als auch voneinander zu profitieren (Korten, 2020). Die Betonung der Interaktion der Schüler:innen im Unterricht führt zu einer Veränderung des Unterrichts, wobei sich dieser vom lehrer:innenzentrierten hin zu schüler:innenspezifischen Lern- und Arbeitsphasen entwickelt (Naujok et al., 2008).

Interaktiv-kooperatives Lernen wird in der Praxis durch Methoden wie Gruppenpuzzles, Streitgespräche oder gemeinsames Lösen von Problemen realisiert. Lehrkräfte nehmen dabei eine unterstützende Rolle ein, moderieren die Gruppeninteraktion und tragen zu einer positiven Arbeitsatmosphäre bei. Trotz ihrer Vorteile bringt diese Methode Her-

ausforderungen mit sich, wie ein Ungleichgewicht in der Beteiligung einzelner Mitglieder, fehlende soziale Kompetenzen oder den hohen Planungsaufwand für Lehrkräfte. Wenn es klare Strukturen, gezielte Unterstützung und eine Stärkung sozialer Kompetenzen gibt, bietet interaktiv-kooperatives Lernen dennoch ein effektives Modell zur Förderung von Wissen und sozialen Kompetenzen (Jurkowski, 2010).

2.2 Peer-learning

Während kooperativer Lern- und Arbeitsphasen erfolgt eine Differenzierung zwischen der Analyse von Lernprozessen im Zusammenhang mit Inhalten und der Analyse sozialer Beziehungen, wie beispielsweise die „peer-culture“. Soziale Beziehungen werden im Rahmen der Unterrichtsgestaltung lediglich als ein Aspekt unter vielen berücksichtigt, wobei der Fokus auf inhaltsbezogenen Prozessen liegt. Die Kooperation von Lernenden stellt eine Verknüpfung von inhaltsbezogenem Lernen und sozialen Prozessen dar. Soziale Beziehungen und Lernen stehen in einer wechselseitigen Beziehung zueinander (Naujok et al., 2008).

Der Begriff „peers“ bezeichnet Personen, die sich hinsichtlich ihres Alters sowie ihrer sozialen Stellung ähneln. In Bezug auf die Begriffe „peer-group“ und „peer-culture“ ist die Altersgleichheit essenziell. Soziale Beziehungen zwischen Gleichaltrigen sind von subjektiver Relevanz und spielen im Alltag eine bedeutende Rolle. Diese Bindungen beschränken sich nicht nur auf Freundschaften, sondern umfassen auch alle Personen, die miteinander interagieren. In Schulen entwickelt sich insbesondere eine „peer-culture“, die von verschiedenen Faktoren beeinflusst wird. Dazu zählen unter anderem die institutionellen Rahmenbedingungen, beispielsweise die Aufteilung in Alterskohorten, sowie die Dynamik sozialer Beziehungen (Breidenstein, 2008).

Webb (1989) behandelt in ihrem Werk „peer interaction and learning in small groups“ die Grundlagen des peer-learning, das im Unterschied zum interaktiv-kooperativen Lernen weniger streng strukturiert ist und stark von den Teilnehmer:innen selbst abhängt. Es wird auch als Lernen durch Interaktion unter Gleichaltrigen bezeichnet. Das heißt, hierbei handelt es sich um eine Methode, bei der Lernende direkt voneinander lernen. Als zentrale Merkmale werden der Austausch von Perspektiven, das Lernen durch Beobachtung, das Bewerten von Problemlösungsstrategien anderer und die Möglichkeit Wissen durch Erklärungen zu festigen, angesehen. So können unterschiedliche Fähigkeiten und Erfahrungen innerhalb einer Gruppe genutzt werden, um ein gemeinsames Verständnis zu entwickeln.

Der Erfolg von peer-learning ist abhängig von der Qualität der Interaktionen. Von besonderer Relevanz sind elaborierte Erklärungen, die das Verständnis vertiefen, sowie die Fähigkeit der Teilnehmer:innen, Fragen zu stellen und relevante Rückmeldungen zu geben. Die Gruppenzusammensetzung ist ein weiterer entscheidender Faktor, da heterogene Gruppen oft vielfältigere Perspektiven bieten, während homogene Gruppen eine

stärkere Fokussierung auf ein gemeinsames Ziel ermöglichen können (Webb, 1989).

2.3 Auswirkungen kooperativer Lernmethoden

Empirische Studien belegen, dass der Austausch mit Kolleg:innen nicht nur die fachlichen Kompetenzen, sondern auch soziale Fähigkeiten wie Kommunikation, Zusammenarbeit und Konfliktlösung fördert. Es lässt sich somit ableiten, dass es sich um eine effektive Methode handelt, um sowohl akademisches als auch persönliches Wachstum zu unterstützen (Webb, 1989; Gillies & Ashman, 2000).

Die empirische Studie von Gillies und Ashman (2000) über die Auswirkungen von kooperativem Lernen zeigt, dass die sozialen Kompetenzen, das Selbstkonzept und die Leistungen von Schüler:innen, insbesondere von leistungsschwächeren Kindern, durch aktive Zusammenarbeit positiv beeinflusst werden. Webb (1989) betont, dass sowohl die Qualität der Interaktionen innerhalb der Gruppe als auch die Prozessstrukturierung entscheidende Faktoren für die Effektivität kooperativen Lernens sind. Im Gegensatz dazu erweisen sich informelle Gruppenarbeiten ohne klare Rollen und methodische Vorgaben häufig als ineffektiv.

In ihrem Artikel „Promoting relational equity and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach“ untersucht Boaler (2008) die Auswirkungen innovativer Lernmethoden im Mathematikunterricht auf die sozialen und akademischen Ergebnisse von Schüler:innen. Ein zentrales Element des Erfolgsmodells war der Fokus auf kooperative Lernmethoden und mehrdimensionale Bewertungskriterien. Diese Maßnahmen ermöglichten es den Schüler:innen, auf vielfältige Weise zum Unterricht beizutragen und Erfolgserlebnisse zu erfahren. Die Lehrer:innen setzten bewusst Maßnahmen ein, um das Verantwortungsbewusstsein der Lernenden füreinander zu stärken, z.B. durch Gruppenarbeiten, bei denen alle Gruppenmitglieder für das Verständnis der Aufgaben verantwortlich waren. Darüber hinaus wurden unterschiedliche Perspektiven und Denkweisen geschätzt und aktiv gefördert.

Die Ergebnisse legen nahe, dass dieser innovative Ansatz nicht nur die akademische Leistung verbessert, sondern auch soziale Kompetenzen und gerechte Interaktionen im Klassenzimmer fördert. Boaler (2008) postuliert, dass derartige Methoden nicht nur der Vermittlung von Fachwissen, sondern auch der Förderung einer gerechteren Gesellschaft dienen können.

Ein zentraler Aspekt hierbei ist die Kommunikation. Studien zeigen, dass strukturierte Ansätze, die den Austausch und das Verbalisieren von Gedanken fördern, besonders wirksam sind (Gersten et al., 2009; Webb, 1989). Das heißt, auch im Mathematikunterricht spielt Sprache eine essentielle Rolle, sei es beim Analysieren und Verstehen oder beim Kommunizieren und Reflektieren.

3 Typische Lernschwierigkeiten in der Algebra bzw. beim Gleichungslösen

3.1 Schwierigkeiten in der Algebra

Didaktisch gute und innovative Ansätze ermöglichen den Lernenden einen besseren Zugang zu algebraischen Konzepten. Aktuelle Studien (Van Amerom, 2002; Falle, 2005a) zeigen, dass Schüler:innen beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra signifikante Schwierigkeiten erleben, insbesondere aufgrund der formalen Methodik und des raschen Einführungstempos. Laut Schiffer (2019) entwickeln Lernende in ihrer Analyse häufig eine empirisch-gegenständliche Auffassung von Algebra, die im Widerspruch zur formal-abstrakten Sichtweise der Lehrkräfte steht. Diese Diskrepanz kann zu Missverständnissen und Lernschwierigkeiten führen.

Die Hauptprobleme der Schüler:innen liegen in der Schulalgebra vor allem beim Arbeiten mit Variablen sowie beim Übersetzen von natürlicher in symbolische, formale Sprache und umgekehrt (Schiffer, 2019).

Sfard und Linchewski (1994) kamen zu dem Ergebnis, dass Lernende algebraische Ausdrücke als Prozesse und nicht als Objekte auffassten, wodurch es für sie nicht möglich war, mit ihnen zu operieren. Die beiden Autorinnen postulieren, dass das Verständnis eines Inhalts oder Begriffs als Objekt des mathematischen Gebietes eine notwendige Voraussetzung dafür darstellt, mit diesem mathematisch agieren zu können. Aus diesem Grund arbeiten zahlreiche Schüler:innen „um die Unbekannte herum“ und lösen Gleichungen mit einer Variable durch Umkehroperationen oder Zahleneinsetzen. Diese Grenze zwischen arithmetischem und algebraischem Denken wird von Herscovics und Linchevski als „cognitive gap“ bezeichnet. In diesem „Gap“ sehen sie die Unfähigkeit der Schüler:innen, spontan mit Unbekannten Operationen durchzuführen.

Auch Rosnick und Clement (1980) stellten damals schon große Schwierigkeiten beim Aufstellen sowie Interpretieren von Gleichungen fest. Ein typisches Beispiel hierfür ist die „Studenten-Professoren-Aufgabe“:

Es sei S die Anzahl der Studenten und P die Anzahl der Professoren an einer Universität. Auf einen Professor kommen 6 Studenten. Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

Lediglich 60 % der Versuchspersonen waren imstande, die Aufgabe korrekt zu bewältigen. Diejenigen, die die Aufgabe nicht korrekt ausgeführt haben, begingen alle denselben Fehler (Rosnick & Clement, 1980).

3 Typische Lernschwierigkeiten in der Algebra bzw. beim Gleichungslösen

Statt die richtige Gleichung

$$S = 6P$$

aufzustellen, notierten sie:

$$P = 6S$$

Dieser beliebte Fehler wird als Umkehrfehler bezeichnet. Der Umkehrfehler manifestiert sich insbesondere bei einer Überbetonung des Kalküls und tritt vor allem dann auf, wenn ein Text in eine Formel oder Gleichung übersetzt wird. Die Anschrift des Malpunktes veranschaulicht den Heranwachsenden die Gleichung präziser und es kommt zu einer geringeren Fehlerquote. Die befragten Personen waren nicht willens, ihren Fehler einzugestehen, und beharrten auf ihrem Ergebnis. Auch nach der Darlegung diverser Erklärungsversuche gefolgt von einem Beispiel derselben Art konnte keine Verbesserung der erzielten Resultate beobachtet werden (Malle, 1993).

In ihrer Untersuchung stellten Rosnick und Clement (1980) die These auf, dass der Fehler durch die Formulierung des Textes bedingt sei. Wie in zahlreichen anderen Fällen auch werden Variablen falsch gedeutet und „Studenten“ mit dem Buchstaben S abgekürzt und P als Kurzschreibweise für „Professor“ verwendet. Die beiden kamen jedoch zum Schluss, dass die Formulierung in Bezug auf den Umkehrfehler keine Relevanz aufweist.

Eine Möglichkeit, diesen Fehler zu vermeiden, besteht darin, die Bedeutung der Variablen für die Anzahl der Studierenden bzw. die Anzahl der Professoren hervorzuheben. Auch die Beziehung „Das Sechsfache der Anzahl der Professoren entspricht der Anzahl der Studierenden“ zu verbalisieren, hilft den Lernenden (Weigand et al., 2022, S. 287).

Es ist auffällig, dass nur eine geringe Anzahl von Lernenden die erstellte Gleichung durch Einsetzen geeigneter Zahlenwerte einer Kontrolle unterzieht. Sollte das Resultat nicht den korrekten Werten entsprechen, besteht die Möglichkeit, die Variablen miteinander zu vertauschen. Dieser Vorgang kann als unreflektierter Mechanismus bezeichnet werden (Malle, 1993).

Auch Kieran (1989) bestätigt, dass Kinder vor allem Schwierigkeiten beim Erlernen der Bedeutung der Buchstaben, beim Übergang von arithmetischen zu algebraischen Konventionen und beim Erkennen und Verwenden von Strukturen haben.

Barzel und Holzäpfel (2017) haben Probleme bei der Aufstellung und Umformung von Termen aufgezeigt. Im Folgenden sollen die aus didaktischer Perspektive bedeutsamsten Aspekte erörtert werden. Bei Subtraktionstermen wird häufig die Reihenfolge der Variablen vertauscht, was auf eine wortwörtliche Übersetzung zurückzuführen sein kann. Zudem werden Koeffizienten und Exponenten, wie beispielsweise x^4 und $4x$, häufig verwechselt.

3.2 Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen

Des Weiteren wurde festgestellt, dass einige Kinder die Klammern nicht korrekt auflösen. So wird beispielsweise aus $7(b+4)$ der Term $7b+4$ gebildet. Noch dazu lässt sich beobachten, dass Lernende numerische Lösungen als notwendig erachten und daher keine Term-Lösungen akzeptieren. Ein weiterer häufiger Fehler ist das Weglassen von Teiltermen beim Ausmultiplizieren von Klammern. So wird aus der Produktdarstellung $(y+2) \cdot (y+5)$ die Ergebnisdarstellung y^2+10 . Bei korrekter Ausmultiplizierung von Klammern wird häufig versäumt, die Teilterme zusammenzufassen. Dies bedeutet, dass Rechenausdrücke wie beispielsweise $(y+2) \cdot (y+5) = y^2+2y+5y+10$ nicht weiter zusammengefasst werden (Barzel & Holzäpfel, 2017).

Einige Schüler:innen zeigen Schwierigkeiten bei der Anwendung mathematischer Konventionen. Dies äußert sich unter anderem darin, dass Koeffizienten nicht vor Variablen gesetzt werden oder dass bei Produkten mit Variablen noch das Multiplikationszeichen verwendet wird. Letzteres ist jedoch kein großes Problem, da es sogar zur Vermeidung von Übertragungsfehlern beitragen kann. Gelegentlich gibt es auch Unsicherheiten bei der Umrechnung von Termen, die einen Bruch als Koeffizienten enthalten. Der Zusammenhang $\frac{1}{3}b = \frac{b}{3} = b:3$ ist nicht allen klar (Barzel & Holzäpfel, 2017).

3.2 Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen

Die Bezeichnung „gleich“ birgt bereits eine Herausforderung in sich. Gemäß Wörterbuch bezeichnet „Gleichheit“ lediglich die Übereinstimmung in bestimmten Aspekten, während im allgemeinen Sprachgebrauch eine vollständige Deckungsgleichheit assoziiert wird. Diese Tatsache manifestiert sich häufig in der Differenzierung zwischen dem Begriffspaar „gleichen“ und „selben“. So wird etwa die Aussage „Wir saßen im gleichen Bus“ getroffen, wobei impliziert wird, dass alle Beteiligten sich in ein und demselben Fahrzeug befanden (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Auch im Kontext der Termumgebung manifestiert sich dieses Phänomen. Die Terme $3(a+4)$ und $3a+12$ sind in ihrer alltäglichen Erscheinungsform nicht identisch, da sie sich in ihrer visuellen Darstellung unterscheiden. Im mathematischen Sinne sind sie jedoch „gleich“, da hier die Gleichheit von Termen mit dem Begriff der Äquivalenz gleichgesetzt wird. Bei Einsetzung von Zahlen für die Variable a nehmen beide Terme den gleichen Wert an, sind jedoch nicht deckungsgleich (Barzel & Holzäpfel, 2011). Gemäß Fischer et al. (2010) werden solche Terme als „einsetzungsgleich“ oder „beschreibungsgleich“ bezeichnet.

Eine derart weitreichende Ausdifferenzierung der Sprache ist für den Unterricht nicht erstrebenswert. In diesem Zusammenhang lassen sich jedoch zwei Gesichtspunkte ausmachen. Einerseits können die divergierenden Perspektiven auf den Begriff „gleich“ für die Lernenden irreführend sein, andererseits sind mit dem Einsetzen und dem Beschreiben wesentliche verständnisfördernde Aktivitäten verknüpft, die dem Umformen von Gleichungen vorausgehen sollten (Barzel & Holzäpfel, 2011).

3 Typische Lernschwierigkeiten in der Algebra bzw. beim Gleichungslösen

- Das Einsetzen stellt eine wesentliche Handlung in sämtlichen Lernstufen dar, um eine wahrheitsgemäße Aussage zu gewinnen (Barzel & Holzäpfel, 2011).
- Die Beschreibung einer Situation unter der Verwendung von Termen, die eine gleichwertige Perspektive widerspiegeln, jedoch auf unterschiedliche Sichtweisen zurückgeführt werden können, resultiert in einer beschreibenden Gleichung (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Prediger (2008) erörtert die Problematik, die sich aus der Verwendung des Gleichheitszeichens ergibt. In der Mathematik wird das Gleichheitszeichen als Operationszeichen [$23 + 14 =$], Relationszeichen [$25 + 7 = 52 - 20$], als Setzung [$\varrho := (5 + \sqrt{4}) : 3$] oder beim Belegen einer Variablen [$a = 17$] verwendet.

Die Konzeption einer Gleichung ist untrennbar mit der Vorstellung von Variablen verbunden. Die unterschiedlichen Perspektiven, die Variablen einnehmen, veranschaulichen die potenziellen Herausforderungen, die beim Lernen entstehen können. Des Weiteren ist es für Schüler:innen von essenzieller Bedeutung, die Fähigkeit zu erlangen, situationsgerecht zwischen Term- und Äquivalenzumformungen zu unterscheiden. Der Umfang der erforderlichen mathematischen Kenntnisse variiert erheblich in Abhängigkeit von den angegebenen Größen. So kann beispielsweise die Fläche A eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden, indem die Längen der beiden Katheten a und b bekannt sind. Diese können folglich in die rechte Seite des Gleichheitszeichens eingesetzt und anschließend kann der Flächeninhalt ausgerechnet werden. Eine anspruchsvollere Aufgabe stellt die Bestimmung der zweiten Kathete b bei gegebenem Flächeninhalt A und der Seitenlänge der Kathete a dar. In diesem Fall ist es erforderlich, die Gleichung zunächst nach b umzustellen, bevor die Werte in die Gleichung eingesetzt werden können (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Die Studie von Falle (2005b) befasst sich mit der Untersuchung sprachlicher Ausdrucksweisen von Schüler:innen im Kontext algebraischer Fähigkeiten sowie der Korrelation dieser sprachlichen Merkmale mit dem algebraischen Verständnis. Die Untersuchung wurde an Lernenden der 8. und 9. Jahrgangsstufe an drei Schulen in Australien durchgeführt. Im Rahmen der Studie wurden die Jugendlichen zunächst gebeten, einen Test mit 40 algebraischen Aufgaben zu lösen. Anschließend wurden 33 Schüler:innen mit unterschiedlichen Erfolgsniveaus in Interviews befragt. Im Zuge der vorliegenden Studie wurden die Proband:innen ersucht, ihre Gedanken und Vorstellungen zu schildern, die sie hegen, wenn sie mit algebraischen Ausdrücken oder Gleichungen konfrontiert werden.

Die Aufgaben waren in Sets gruppiert, welche dem Schwierigkeitsgrad (DD: Average Degree of Difficulty) entsprechend angeordnet wurden. Die Schüler:innen waren unter anderem dazu aufgefordert, Terme zu vereinfachen, Gleichungen zu lösen oder allgemeine Regeln anzugeben (Falle, 2005b).

Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass Schüler:innen, die erfolgreich an der Studie teilnahmen, in der Lage waren, Gemeinsamkeiten der Gleichungen in einem Set zu erkennen.

3.2 Schwierigkeiten beim Umgang mit Gleichungen

Set 1: $3m + 8 + 2m - 5$ $5p - p + 1$ $2ab + 3b + ab$ $5a - 2b + 3a + 3b$ DD: -0.473	Set 2: $4 \times 5b$ $2ab \times a$ $4r \times 5t \times 3$ DD: -0.13	Set 3: $2(x + 5)$ $2(x + 4) + 3(x - 1)$ $2(x + 5) + 8$ DD: 1.013
Set 4a: $\frac{a}{5} + \frac{a}{10}$ $\frac{3p}{4} - \frac{p}{8}$ DD: 1.24	Set 4b: $\frac{4ab}{4b}$ $\frac{2}{a} \times \frac{3}{b}$ $\frac{2}{a^2} \times \frac{5a}{4}$ DD: 1.19	Set 5: $x + 5 = 7$ $2t - 23 = 49$ $5a - 4 = 2a + 8$ $x + (x + 2) = (x - 1) + 8$ $4(p + 3) = 32$ $4y = 20$ $10y = 5$ $ax = 5$ DD: 1.11
Set 6: $\frac{x}{4} = 12$ $\frac{x+3}{2} = 7$ $\frac{63}{x} = 180$ DD: 1.49	Set 7: $(6xy)^2$ $(x + y)^2$ $(a - b) + b$ $8p - 2(p + 5)$ DD: 2.99	

Abbildung 3.1: Darstellung der verschiedenen Sets (Falle, 2005b)

Zudem gaben sie häufiger allgemeine Antworten über die Einzelaufgaben des Sets und verwendeten sprachlich präzisere Ausdrücke. Bei Kindern mit geringeren Erfolgsquoten waren die Antworten häufig einfach und spezifisch, wobei die korrekte Anwendung der Regeln nicht gewährleistet war. Schließlich konnte ein Zusammenhang zwischen der Komplexität der Aufgaben und der Anzahl spezifischer Antworten festgestellt werden (Falle, 2005b).

Die Resultate legen nahe, dass sprachliche Merkmale wie die Fähigkeit, Regeln zu formulieren oder logische Zusammenhänge herzustellen, Aufschluss über das algebraische Verständnis von Lernenden geben können. Lehrkräfte können derartige Merkmale nutzen, um das Verständnis ihrer Schüler:innen besser einzuschätzen und gezielt zu fördern (Falle, 2005b).

Eine weitere Studie von Falle (2005a) zielt darauf ab, die Strategien, die erfolgreiche Schüler:innen beim Lösen von Gleichungen anwenden, zu erforschen, sowie die Auswirkungen dieser Strategien auf das Erlernen der Algebra zu untersuchen. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt auf der Gegenüberstellung der Unterschiede zwischen informellen, arithmetischen und formalen, algebraischen Ansätzen.

3 Typische Lernschwierigkeiten in der Algebra bzw. beim Gleichungslösen

An dieser Studie haben 25 Schüler:innen aus der 9. Klasse teilgenommen. Es wurde ein algebraischer Test mit 40 Aufgaben, darunter 12 Gleichungen durchgeführt. Im Anschluss wurden ausgewählte Lernende interviewt, um ihre Denkprozesse beim Lösen der Gleichungen zu analysieren (Falle, 2005a).

Es lässt sich beobachten, dass zahlreiche Schüler:innen informelle Strategien anwenden, deren Übertragbarkeit auf komplexere Gleichungen begrenzt ist. Einfache Gleichungen wie beispielsweise $3 \cdot a = 15$ werden durch das Erkennen der Multiplikation $3 \cdot 5 = 15$ oder sogar der Gegenoperation $15 : 3$ gelöst. Diese Vorgehensweise erweist sich jedoch als inadäquat bei Gleichungen wie beispielsweise $7 \cdot x = 9$, da hierbei nicht-ganzzahlige Lösungen resultieren. Die Lösungsfindung für Gleichungen mit einer Variable erweist sich mitunter als schwierig, insbesondere wenn Brüche involviert sind. Die Kompetenz, arithmetische Beziehungen in allgemeine algebraische Regeln zu transformieren, stellt eine wesentliche Voraussetzung für den Übergang von der Arithmetik zur Algebra dar (Falle, 2005a).

Es konnte festgestellt werden, dass auch Schüler:innen mit überdurchschnittlichen Leistungen in der Mathematik vermehrt auf arithmetische Rechenmuster zurückgreifen und algebraische Strukturen vermeiden. Diese Erkenntnis unterstreicht die Bedeutung der Entwicklung eines Verständnisses für algebraische Umformungen. Dies ist eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Lernenden die Gemeinsamkeit der Lösungswege der Gleichungen $3 \cdot a = 15$ und $7 \cdot x = 9$ verstehen. Um das algebraische Verständnis zu fördern, ist es empfehlenswert, dass Schüler:innen vermehrt mit vielfältigen und anspruchsvollen Aufgabenstellungen konfrontiert werden, welche ein algebraisches Denkvermögen voraussetzen (Falle, 2005a).

Auftretende Fehler sollten unbedingt benannt und diskutiert werden. Die Struktur der Terme und die Bedeutung der Variablen kann anhand verschiedener Darstellungen erklärt werden. Um falsche Umformungen zu erkennen, ist es hilfreich, konkrete Zahlenwerte zu verwenden. In Sachsituationen werden Fehler oft auf der Bedeutungsebene erkannt. Eine gute Fehlerbesprechung geht über die symbolische und syntaktische Ebene hinaus (Barzel & Holzäpfel, 2017).

4 Grundlagen des Gleichungsverständnisses und algebraischen Denkens

Der Umgang mit Gleichungen ist ein elementarer Bestandteil der Schulmathematik. Schüler:innen zeigen bereits bei einfachen Rechnungen oder Alltagssituationen eine intuitive Anwendung des Gleichheitsbegriffs, obwohl Gleichungen im schulischen Kontext noch gar nicht behandelt wurden. Das Gleichungslösen stellt ein Instrument zur Bewältigung inner- wie außermathematischer Problematiken dar (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass das Thema Gleichungen nach wie vor als anspruchsvoll zu behandeln gilt und einer sorgfältigen Auseinandersetzung bedarf.

In diesem Kontext spielen die Sinnstiftung sowie die Motivation eine wesentliche Rolle. Für Lehrkräfte ist es von hoher Relevanz, den Schüler:innen die praktischen Anwendungsmöglichkeiten von Gleichungen zu verdeutlichen, ohne dabei ausschließlich auf den späteren Mathematikunterricht zu verweisen. Des Weiteren ist das Verständnis ein entscheidender Faktor. Das erklärte Ziel besteht darin, Äquivalenzumformungen so zu erläutern, dass in Zukunft keine rezeptartigen Umformungen als Lösungsstrategien erforderlich sind. Schließlich ist der Aspekt der Nachhaltigkeit von entscheidender Bedeutung. Die Intention besteht hierin, Gleichungen so zu verdeutlichen, dass die Lernenden diese nachvollziehen und sich dadurch auch langfristig merken können (Barzel & Holzäpfel, 2017).

Es ist von essentieller Bedeutung, dass Kinder nicht nur die Fähigkeit zur Umformung von Gleichungen erlangen, sondern auch ein Verständnis für die Struktur von Gleichungen entwickeln. Dies umfasst sowohl das Aufstellen als auch die Interpretation von Gleichungen. Die Aussage, dass solange umzuformen ist, bis x links alleine steht und rechts nur Zahlen sind, ist als Hilfestellung für das Verständnis von Gleichungen unzureichend. Schüler:innen, denen die Bedeutung von Gleichungen bewusst ist und die wissen, dass das Umformen zur Lösung der Unbekannten führt, benötigen keine Merkhilfen (Barzel & Holzäpfel, 2011).

4.1 Was sind Gleichungen?

Gleichungen lassen sich als Ausdrucksformen definieren, die aus zwei Termen bestehen, welche durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Die gleichgesetzten Terme enthalten in der Regel Variablen. Die Berechnung der Werte der Variablen führt zu einer wahren oder falschen Aussage der Gleichung. Dies impliziert, dass Gleichheit

lediglich unter spezifischen Voraussetzungen gegeben ist. In der Mathematik werden Gleichungen sowohl zur Beschreibung von Sachverhalten als auch als heuristisches Instrument verwendet (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Mathematische Beziehungen können durch Gleichungen ausgedrückt und veranschaulicht werden. In diesem Kontext sind Formeln, geometrische oder naturwissenschaftliche Sätze zu nennen. Formeln umfassen alle diejenigen mathematischen Ausdrücke, die den Umfang oder den Flächeninhalt einer geometrischen Figur beschreiben. Ein Beispiel für einen geometrischen Satz ist der Satz des Pythagoras. Das zweite Newtonsche Gesetz stellt einen naturwissenschaftlichen Satz dar, der durch die Gleichung $F = m \cdot a$ ausgedrückt werden kann. Selbstverständlich kann auch ein mathematisches Objekt wie beispielsweise eine Ellipse oder eine Hyperbel durch eine Gleichung adäquat beschrieben werden (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Bei einer Betrachtung von Gleichungen als Heuristik besteht die Möglichkeit, inner- oder außermathematische Fragestellungen mithilfe des berechneten Werts der Variable zu beantworten. Dies bedeutet, dass Gleichungen als ein Werkzeug oder eine Methode betrachtet werden, um Probleme zu lösen oder Fragestellungen zu beantworten - sowohl innerhalb der Mathematik als auch in realen Kontexten. Es geht dabei weniger um die reine Anwendung von Rechenregeln, sondern um die Fähigkeit, Gleichungen flexibel einzusetzen, um Informationen zu gewinnen und Entscheidungen zu treffen. Gleichungen als Problemlösestrategien könnten zum Beispiel für folgende Fragestellungen angewendet werden: Welches Mietangebot ist günstiger? Oder: Wie lange muss gespart werden, um bei einem Zinssatz von 3% ein bestimmtes Kapital zu erreichen? Die Betrachtung von Gleichungen als Heuristik sowie ein flexibler Umgang damit stellen für die Mehrheit der Lernenden eine Herausforderung dar (Barzel & Holzäpfel, 2011).

4.2 Algebraische Denkhandlungen

Welche didaktischen Prinzipien und methodischen Ansätze sind geeignet, um das Begreifen und die Interpretation von Gleichungen zu fördern und dabei die individuellen Lernprozesse angemessen zu berücksichtigen und zu unterstützen?

Algebraisches Denken umfasst mehr als nur das Umformen von Termen und das Lösen von Gleichungen. Der Begriff beinhaltet eine Vielzahl von Denkhandlungen, darunter das Verallgemeinern und Abstrahieren, die in einem Lernprozess sichtbar gemacht werden sollten. Dadurch wird der Algebraunterricht für die Lernenden leichter zugänglich und gleichzeitig qualitativ hochwertiger gestaltet (Fischer et al., 2010).

Im Folgenden werden die allgemeinen menschlichen Denkhandlungen, die in der Algebra eine wichtige Rolle spielen, aufgelistet (Fischer et al., 2010, S. 2):

- Verallgemeinern: aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herleiten – das allen Gemeinsame erfassen

4.2 Algebraische Denkhandlungen

- Abstrahieren: weglassen bestimmter Merkmale zur Hervorhebung anderer Eigenschaften (die meist von allgemeinerem Interesse sind)
- Strukturieren: eine Struktur (lat. Bauart), d. h. eine Ordnung, in etwas hineinsehen oder schaffen; etwas gliedern
- Darstellen: Situationen, Muster, Zusammenhänge mit spezifischen Darstellungsmitteln erfassen/beschreiben
- Konstruieren: etwas Neues erzeugen aus Bestehendem
- Deuten und Umdeuten: in einer Darstellung Bedeutungen erkennen und zwischen Bedeutungen wechseln

Die beschriebenen Denkhandlungen bilden eine Grundlage für algebraisches Denken, reichen aber nicht aus, um Algebra spezifisch zu definieren, da sie auch in anderen Bereichen vorkommen. Diese Denkweisen, insbesondere das Abstrahieren und Verallgemeinern, spielen auch in der Biologie eine wichtige Rolle, z.B. bei der Klassifizierung von Lebewesen (Wheeler, 1996).

Ein wesentliches Charakteristikum der Algebra ist die Verwendung symbolischer Darstellungen. Allerdings bleibt die Liste der Denkhandlungen sehr abstrakt. Während Autoren wie Mason et al. (2005) die Auffassung vertreten, dass algebraisches Denken auch ohne Symbole existiert, wird diese Perspektive in der Literatur kontrovers diskutiert. Symbolische Darstellungen sind in der gesamten Mathematik weit verbreitet, beispielsweise in der Geometrie oder der Analysis. Die Abgrenzung des algebraischen Denkens vom mathematischen Denken im Allgemeinen erweist sich als schwierig.

Die Auflistung allein ist nicht hinreichend, um algebraisches Denken zu definieren, da ihr das Spezifikum der Algebra fehlt. Sie stellt jedoch einen nützlichen Ausgangspunkt zur Beschreibung grundlegender Denkhandlungen dar, die in der Algebra (und anderen Bereichen) eine Rolle spielen. Um die Charakteristik algebraischen Denkens präziser zu fassen, ist es erforderlich, diese Denkhandlungen um spezifische Denkweisen der Algebra zu ergänzen (Fischer et al., 2010).

Als spezifisch algebraische Denkhandlungen können genannt werden (Fischer et al., 2010, S. 2):

- Mathematisieren: außermathematische Situationen, Muster, Zusammenhänge mithilfe mathematischer Sprachmittel darstellen
- Interpretationsfreies, kalkülhaftes Umformen: Denkopoperationen zur Denkentlastung unabhängig von Interpretationen der Zeichen durch ausschließliche Beachtung festgelegter Regeln vollziehen

- Kalkül entwickeln: Findung von Regeln, die die Schematisierung inhaltlicher Denkschritte erlauben, um interpretationsfrei umformen zu können
- Wirkungen bei kleinen Veränderungen analysieren: lokales Variieren und Beobachten der Auswirkungen auf abhängige Größen

Die Ergänzung dieser spezifischen Denkhandlungen erlaubt eine klarere Charakterisierung des algebraischen Denkens. Es manifestiert sich in einer systematischen Auseinandersetzung mit symbolischen Darstellungen und Kalkülen. Des Weiteren ist die Analyse von Abhängigkeiten und deren Veränderung sowie die Entwicklung von Regeln und Methoden zur systematischen Manipulation von Gleichungen von Relevanz (Fischer et al., 2010).

Dies führt zu einer klareren Abgrenzung des algebraischen Denkens als eigenständiges Konzept von anderen mathematischen Denkweisen, wie sie beispielsweise in der Geometrie oder der Analysis vorkommen (Fischer et al., 2010).

4.2.1 Grundsätze für den Algebraunterricht

Sinnstiftung und Verständnis sollen die Leitlinie für den gesamten Algebraunterricht bilden. Der Aufbau von Variablen kann in unterschiedlichsten Kontexten erfolgen. Im ersten Schritt erfolgt die Einführung in die grundlegenden Konzepte der Variablen als allgemeine Zahl. Auch in Rechengesetzen finden sich Variablen, auf die eine bewusste Aufmerksamkeit gerichtet werden sollte. In diesem Kontext werden Variablen wie eine Zahl behandelt, wobei sie auch als Platzhalter fungieren können. Die Betrachtung von Gleichungen erlaubt die Annahme, dass zwei Terme als gleichwertig betrachtet werden können. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die jeweiligen Umformungsschritte. Variablen können auch im Alltag zur Aufstellung von Termen und Gleichungen verwendet werden (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Die Überprüfung der Korrektheit einer Gleichung durch Einsetzen stellt einen wesentlichen Schritt im Verständnisprozess dar (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Die Verwendung unterschiedlicher didaktischer Hilfsmittel (siehe Kapitel 5.4) ermöglicht es Schüler:innen, selbstständig zu erforschen und zu reflektieren, welche Idee sich hinter einer Gleichung verbirgt. Dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die Lernenden nicht überfordert werden und es nicht zu einer Überlastung des Denkvermögens kommt (cognitive overload). Für Kinder stellt es eine zusätzliche Herausforderung dar, wenn durch die Beschäftigung mit didaktischem Unterrichtsmaterial möglicherweise bestehende Fehlvorstellungen oder Irritationen forciert werden (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Steht bei der Einführung des Themas Gleichungen das Verstehen im Mittelpunkt, so wird nachhaltiges Lernen erreicht. Reflexionsmöglichkeiten und Gespräche über die Thematik sind ebenfalls von großer Bedeutung. Sie ermöglichen es, Schwierigkeiten frühzeitig

zu erkennen und entsprechend zu handeln. Die Verbalisierung und Interpretation einer Gleichung kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, wodurch den Schüler:innen kreative Lösungsansätze eröffnet werden. Dies fördert das Verständnis und trägt zu einer vertieften Auseinandersetzung mit dem Thema bei (Barzel & Holzäpfel, 2011).

4.2.2 Schritte des Algebra-Lernens

Erstens ist zu beachten, dass Kinder nicht länger mit dem Gleichheitszeichen als Rechenaufforderung zu konfrontieren sind. Das Gleichheitszeichen dient der Gegenüberstellung zweier Rechenausdrücke. Dabei spielt auch die visuelle Vorstellung eine wesentliche Rolle für das Verständnis. Auch einfache Rechnungen wie beispielsweise $5 \cdot 6 = 30$ sollen nicht stets derart notiert werden, dass links die Rechnung und rechts das Resultat aufgeführt werden. Die Kinder sollen lernen, dass die Gleichung $30 = 5 \cdot 6$ die exakt gleiche Rechnung ist wie die Aussage $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ (Stacey, 2011).

Zweitens ist die Aufstellung von Rechenausdrücken von entscheidender Bedeutung. Den Schüler:innen muss die Erkenntnis vermittelt werden, dass in der Algebra nicht immer ein Ergebnis zu erwarten ist. Die Darstellung von Zusammenhängen zwischen Zahlen und Operationen stellt einen wesentlichen Aspekt des Algebraunterrichts in der Schule dar. Überdies ist die Aufstellung von Rechenausdrücken zu realen Sachsituationen relevant. Kinder müssen in der Lage sein, natürliche Sprache in Terme zu übersetzen, sowie umgekehrt. Die Übersetzung von Sachaufgaben in Rechenaufgaben stellt bereits in der Volksschule eine wichtige Kompetenz dar. Die Anzahl der Gleichungen, welche eine Situation beschreiben, ist variabel und korreliert mit der Komplexität der Gegebenheit. Einige Gleichungen werden lediglich in Abhängigkeit des Kontextes differieren, während andere unterschiedliche mathematische Operationen nutzen werden (Stacey, 2011).

Im Rahmen des dritten Lernschritts erfolgt eine Nennung der ersten Wege zur Bestimmung einer Unbekannten. Bereits vor der Einführung in die elementare Algebra entwickeln Lernende Strategien zur Berechnung einer Unbekannten in einem Rechenausdruck. Die in der Volksschule erworbenen numerischen Fähigkeiten stellen eine wesentliche Vorerfahrung dar. In vielen Fällen wird die Umkehroperation zur Berechnung einer Lösung verwendet, wobei dies häufig auf intuitiver Basis geschieht. „Trial and Error“ stellt auch ein Lösungsverfahren dar. Dies impliziert die Annahme, dass die linke und die rechte Seite einer Gleichung denselben Wert haben müssen. In der praktischen Anwendung wird dieser Aspekt jedoch häufig nur unzureichend berücksichtigt, da der Fokus auf dem Umformen liegt. Des Weiteren werden auch inhaltliche beziehungsweise logische Schlussfolgerungen herangezogen, um die Unbekannte zu ermitteln. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn mit Modellen oder Situationen gearbeitet wird (Stacey, 2011).

Die Erfassung der Äquivalenz von Rechenausdrücken stellt den vierten Lernschritt dar. Die rein rechnerische Betrachtung muss um Termuntersuchungen erweitert werden. Die Öffnung des Blicks auf Operationen und ihre Beziehungen ist von essenzieller Bedeutung. Als Beispiel sei angeführt, dass Schüler:innen nach der Unbekannten in der Gleichung

$34 + 7 = 29 + []$ gefragt werden könnten. Der numerische Ansatz wird von den meisten Lernenden gewählt, wobei zunächst der Wert der linken Seite der Gleichung berechnet und anschließend in die Gleichung eingesetzt wird, um die Unbekannte zu ermitteln. Dies erfolgt durch die Gleichung $41 = 29 + []$. Lernende, welche den Rechenausdruck als Ganzes wahrnehmen, identifizieren relevante Beziehungen innerhalb der Rechenausdrücke. Anhand dieses Beispiels lässt sich erkennen, dass jene Kinder die Relation „29 um 5 kleiner als 34“ herstellen und folgern, dass das Ergebnis von „[]“ um 5 größer als 7“ sein muss. Das Resultat für die unbekannte Variable wäre demnach 12. Dieses Denken in Relationen stellt eine vielversprechende Grundlage für algebraische Ausdrücke wie „ $x + 4$ “ dar und fördert das Verständnis für die Regeln der Schulalgebra (Stacey, 2011).

Das Verständnis der Struktur algebraischer Ausdrücke stellt eine wesentliche Voraussetzung für die flexible Nutzung der Algebra dar. Algebraische Ausdrücke, die aus Kombinationen von Buchstaben, Zahlen und mathematischen Operationen bestehen, stellen mehr als nur abstrakte Symbole dar. Die Kenntnis der Operationen, zu denen unter anderem das Setzen von Klammern, die Ausführung von Multiplikationen, Divisionen, Additionen und Subtraktionen gehört, ist von gleicher Bedeutung wie die Kenntnis grammatikalischer Regeln in einer Sprache. Sie definieren die Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines algebraischen Ausdrucks. Unter der Voraussetzung, dass die Strukturen eines algebraischen Ausdrucks keine Beachtung finden, erweist sich die Algebra in sämtlichen Bereichen als anspruchsvoll. Der Aufbau eines Verständnisses für Strukturen kann durch die Verwendung von Flussdiagrammen gefördert werden. Die Flussdiagramme dienen der Veranschaulichung von Umformungsprozessen und deren Übersichtlichkeit. Außerdem können sie zur Lösung von Gleichungen herangezogen werden (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Im Folgenden wird der Lernschritt des systematischen Umformens von Gleichungen erörtert. Das intuitive Lösen von Gleichungen, wie es in der Volksschule geübt wurde, wird durch ein systematisches Verfahren ersetzt. Der Fokus liegt nicht länger auf numerischen Gleichungen, sondern ebenso auf solchen, die Variablen beinhalten. Obgleich beim Lösen von Gleichungen die Arithmetik im Vordergrund steht, müssen Schüler:innen mit Unbekannten ebenso wie mit Zahlen adäquat umgehen können. Die Durchführung der Operation auf beiden Seiten der Gleichung führt zu neuen Denkansätzen, die für die Algebra wichtig sind (Stacey, 2011).

4.3 Lernmodell zum Gleichungsbegriff

Der Gleichungsbegriff wird im Mathematikunterricht häufig schrittweise entwickelt. In einer intuitiven, handelnden Phase sollen die Grundlagen für die Begriffsbildung gelegt werden. Die Entwicklung mathematischen Denkens vollzieht sich dabei von intuitiven Vorstellungen über verschiedene Denkebenen hin zu immer abstrakteren Konzepten.

In Anlehnung an Vollrath (1984) habe ich versucht, ein Stufenmodell für Gleichungen wie folgt zu skizzieren:

1. Intuitives Begriffsverständnis:

- Die Schüler:innen sind in der Lage, Gleichungen als Ausdrücke mit einem Gleichheitszeichen zu deklarieren.
- Sie sind sich der Intention bewusst, dass beide Seiten der Gleichung den gleichen Wert aufweisen müssen.
- Die Lernenden entwickeln ein Gefühl für das Gleichgewicht und die Struktur einer Gleichung. Das heißt, sie erlangen ein Verständnis dafür, dass beide Seiten der Gleichung denselben Wert haben müssen.

2. Inhaltliches Begriffsverständnis:

- Die Schüler:innen können einfache Gleichungen aufstellen bzw. interpretieren.
- Die Bedeutung von Variablen in Gleichungen ist ihnen geläufig.
- Die Schüler:innen entwickeln erste Strategien zum Lösen von Gleichungen, etwa das „Wegnehmen“ gleicher Teile von beiden Seiten.
- Die Schüler:innen können Begriffe wie „Äquivalenzumformungen“, „Lösungsmenge“ oder „Ungleichungen“ beschreiben.

3. Integriertes Begriffsverständnis:

- Die Schüler:innen sind in der Lage, Gleichungen in unterschiedlichen Kontexten anzuwenden.
- Sie erkennen Zusammenhänge zwischen Gleichungen und anderen mathematischen Konzepten.
- Sie wissen, dass Gleichungen in komplexere mathematische Strukturen eingebettet werden, etwa im Kontext von Funktionen oder geometrischen Anwendungen.

4. Formales Begriffsverständnis:

- Die Schüler:innen können formale Operationen mit Gleichungen systematisch anwenden und begründen, wie z.B. das Lösen von Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen.
- Sie verstehen die Rolle und Bedeutung von mathematischen Begriffen wie „Lösungsmenge“ und „Definitions Menge“ und können diese korrekt anwenden.

4 Grundlagen des Gleichungsverständnisses und algebraischen Denkens

- Sie sind in der Lage, Gleichungen und deren Lösungsverfahren formal zu dokumentieren und ihre Lösungswege präzise zu begründen.

5. Strukturelles Begriffsverständnis:

- Die Schüler:innen sind in der Lage, Gleichungssysteme zu verstehen und entsprechende Lösungsmethoden anzuwenden.
- Sie können Gleichungen hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit in realen Situationen bewerten.

Dieses adaptierte Stufenmodell folgt der Logik von Vollraths Ansatz, indem es die schrittweise Entwicklung des Verständnisses von einem intuitiven Zugang bis hin zu einem formalen und strukturellen mathematischen Verständnis abbildet.

Analog zum Funktionsbegriff ist es von entscheidender Bedeutung, dass der Unterricht zu Gleichungen nicht voreilig auf einen rein formalen und korrekten Umgang abzielt, sondern zunächst angemessene Vorstellungen entwickelt. Dies entspricht der von Vollrath betonten Bedeutung von Grundvorstellungen vor der formalen Korrektheit.

Das hier vorgestellte Modell verdeutlicht, dass Gleichungen nicht lediglich als Instrument zur Lösung von Problemen zu betrachten sind. Vielmehr stellen sie zentrale Konzepte der Mathematik dar, die eine vielseitige Anwendung und Interpretation ermöglichen.

5 Forschungsstand

Das Gebiet des algebraischen Denkens wurde bereits ausgiebig erforscht und ist Gegenstand zahlreicher Publikationen. Die aktuelle Forschung zur Implementierung der Algebra im Mathematikunterricht betont die Relevanz eines frühen und fundierten Zugangs zu diesem Thema. Laut Studien ist das Verständnis von Mustern und Strukturen hilfreich für den Übergang zwischen Arithmetik und Algebra, da es als verbindendes Element fungiert. Darüber hinaus wird die Verwendung von didaktischen Hilfsmitteln und digitalen Medien sowie kooperativen Unterrichtsformen als förderlich für das Verständnis von Algebra und die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten erachtet. Im modernen Mathematikunterricht wird demnach Wert auf eigenständiges mathematisches Arbeiten und die Förderung flexibler Denk- und Arbeitsweisen gelegt, um ein vertieftes Verständnis für algebraische Konzepte zu erlangen.

Nach Weigand et al. (2022) sind die Betrachtung von Variablen als eigenständige Objekte und der regelgeleitete Umgang mit ihnen wichtige Schritte zum Variablenverständnis. Zwar sind Lernende oft in der Lage, Variablengleichungen umzuformen, jedoch operieren sie dabei nur mit vertrauten Zahlen, wie zum Beispiel durch Umkehroperationen oder Zahleneinsetzungen. Schüler:innen, die Variablen als eigenständige Objekte betrachten, entwickeln ein tieferes Verständnis dafür, dass diese nicht nur Platzhalter sind, sondern auch als Instrumente zur Darstellung von Beziehungen und zur Lösung von Gleichungen dienen. Ein derart orientierter Umgang leistet einen Beitrag zur Entwicklung systematischer Strategien, die in der Algebra und weiteren mathematischen Bereichen von grundlegender Bedeutung sind. Darüber hinaus wird die Relevanz der Mathematik für den Alltag und praktische Anwendungen deutlich, indem Variablen mit realen Situationen verknüpft werden. Dies resultiert in einer gesteigerten Motivation der Lernenden. Ein derartiges Verständnis fördert schließlich die geistige Flexibilität der Lernenden, sodass diese Variablen in verschiedenen Kontexten anwenden und kreative Lösungen für komplexe Probleme entwickeln können (Gabler & Ufer, 2020).

Sfard und Linchewski (1994) kommen in ihrer Studie zum Verständnis von Variablen bei Lernenden zu einem vergleichbaren Ergebnis. Da Schüler:innen die algebraischen Rechenausdrücke nicht als Objekte, sondern als Prozesse auffassten, konnten sie mit ihnen nicht arbeiten. Für Sfard und Linchewski ist es unverzichtbar, einen Inhalt oder Begriff als Objekt in der Mathematik zu betrachten, um mit ihm entsprechend operieren zu können. Die Schüler:innen in besagter Studie sahen sich vor allem beim Umgang mit Variablen als Unbekannte mit einer Schwierigkeit konfrontiert. Sfard und Linchewski (1994, S. 207-208) stellten an dieser Stelle fest: „When some of the letters play the role of parameters, the final result would have to be presented by means of a formula and not

a number. This must have seen unacceptable to those for whom an algebraic expression was still only a process.“

Weitere empirische Untersuchungen, darunter Sfard (1987) und Harper (1987), weisen darauf hin, dass Lernende, obwohl sie Variablen kennen, beim Lösen von Aufgaben häufig rhetorische Lösungsansätze bevorzugen oder die Aussagen nur mündlich korrekt zuweisen können.

Rezat (2019) erklärt, dass Operationen mit bekannten Größen zu Operationen mit Unbekannten, von Zahlen zu Symbolen und vom Speziellen zum Allgemeinen Herausforderungen für Schüler:innen bedeuten.

Die elementare Algebra selektiert auf unbewusste Weise die Lernenden, die über ein tiefgreifendes Verständnis verfügen, von den übrigen, die die Algebra lediglich als ein schwer fassbares Zusammenspiel von Buchstaben und Zahlen in Erinnerung behalten. Die Ursachen für Schwierigkeiten im Bereich der Algebra sind vielfältig. Neben externen Faktoren wie dem Lehransatz oder dem Image des Themenkapitels können auch intrinsische Schwierigkeiten eine Rolle spielen (Van Amerom, 2002). Diese wurden bereits in Kapitel 3 näher beschrieben.

Die Erkenntnis, dass Erwachsene ein negatives Bild von der Schulalgebra haben und dass viele Schüler:innen keinen Sinn darin sehen, lässt sich wie folgt begründen. Wird Schulalgebra als starrer, abstrakter Bereich der Mathematik mit wenig Bezug zur realen Welt unterrichtet, besteht die Gefahr, dass die Syntaktik und nicht die Semantik im Vordergrund steht. Die Literatur fordert eine moderne Unterrichtsdidaktik und die Förderung von Problemlösefähigkeiten. Um das Interesse zu wecken und Verständnislücken zu minimieren, gibt es Überlegungen, algebraisches Denken in den Arithmetikunterricht zu implementieren (Van Amerom, 2002; Bredow, 2023).

5.1 Early Algebra

In den 1990er Jahren wiesen Forscher:innen bereits darauf hin, dass Vorbereitungen auf die Algebra möglichst früh erfolgen sollten. Die Ergebnisse von Entwicklungsstudien legen nahe, dass selbst Siebenjährige die Logik von Gleichungen verstehen können, sofern sie sich auf das Denken über Mengen stützen (Carragher et al., 2019). Diese Aussage wird durch folgendes Beispiel untermauert:

Lukas hat 4 Birnen, und Anna hat 2 Birnen mehr als Lukas. Wie viele Birnen hat Anna?

Kinder denken zunächst über die Mengen nach: Lukas hat 4, also hat Anna $4 + 2$. Anschließend kann die Aufgabe in eine Gleichung umgewandelt werden:

$$x = 4 + 2,$$

wobei x die Anzahl von Annas Birnen darstellt. Das Ergebnis wäre

$$x = 6.$$

Das Verständnis beruht auf der Fähigkeit der Kinder, Mengen zu vergleichen und diese logischen Beziehungen anzuwenden.

Aus verschiedenen Untersuchungen von Kieran et al. (2016) geht hervor, dass sich frühes algebraisches Denken ohne entsprechende Hilfsmittel nicht von selbst entwickelt. Die Untersuchungen haben Erkenntnisse über Ansätze zur Entwicklung des frühen algebraischen Denkens von Schüler:innen geliefert, aber auch die Notwendigkeit der Unterstützung durch Lehrpersonen in diesem Bereich aufgezeigt.

Der Begriff „Early Algebra“ bezeichnet eine Reihe von charakteristischen Tätigkeiten, darunter das Analysieren von und das Arbeiten mit mathematischen Zusammenhängen, Mustern und arithmetischen Strukturen. Dabei wird jedoch nicht die algebraische Symbolsprache verwendet. Die Entwicklung und Nutzung digitaler Medien, die die Förderung des frühen algebraischen Denkens bei jungen Lernenden unterstützen können, stellt noch ein weniger erforschtes Gebiet dar (Kieran et al., 2016).

5.2 Digitale Technologien im Algebraunterricht

Es existieren jedoch bereits digitale Technologien, die - bei adäquater Anwendung - den Algebraunterricht effektiv unterstützen und fördern können. Diese digitalen Technologien lassen sich laut Weigand et al. (2022) in drei Kategorien unterteilen, wobei die Abgrenzung zwischen den Kategorien nicht immer eindeutig ist. Einerseits existieren inzwischen etablierte digitale Werkzeuge wie GeoGebra, TI-Nspire oder das Casio ClassPad. Diese Programme kombinieren ein Computeralgebrasytem (CAS) mit Funktionen wie Tabellenkalkulation, dynamischer Geometriesoftware (DGS) und grafischer Darstellung von Funktionen. Des Weiteren existieren Lehr- und Übungsprogramme, die Umformungen in einzelnen Schritten durchführen, jeden Schritt anzeigen und nützliche Hinweise zur Vorgehensweise geben. Als Beispiele können Anwendungen wie Photomath, Chegg Math Solver, Cymath, Mathway und Microsoft Math Solver angeführt werden. Schließlich ermöglichen erklärende und kommunikationsfördernde Medien wie Videos oder Lehr-Lern-Plattformen wie Moodle die Konzeption und Umsetzung von Lerneinheiten.

Jede dieser Kategorien kann den Lehr- und Lernprozess im Algebraunterricht bereichern - allerdings auf verschiedene Arten. Sie fördern das Verständnis mathematischer Zusammenhänge durch diverse Darstellungsformen, vor allem auf grafischer und numerischer Ebene. Individuelle Lernprozesse werden dabei speziell durch die interaktiven Elemente und die Option, zwischen unterschiedlichen Darstellungen zu wechseln, gefördert. Zudem bieten digitale Hilfsmittel die Möglichkeit, symbolische und numerische Berechnungen auszulagern. Dadurch wird der Blick auf rein algorithmische und kalkülorientierte Inhalte

eingeschränkt und es entsteht Platz für ein vertieftes Verständnis der zugrunde liegenden Konzepte. Nicht zuletzt bieten digitale Technologien eine leistungsstarke Unterstützung für die Modellierung und Simulation. Durch interaktive Erkundungen fördern Sie heuristisches und experimentelles Arbeiten, wodurch die Möglichkeiten zur Problemlösung erweitert werden (Weigand et al., 2022).

Bichler (2010) zeigt in seinem didaktischen Dreieck, dass digitale Technologien immer in Wechselbeziehung zu Schüler:innen, Lehrpersonen und den Lerninhalten zu sehen sind.

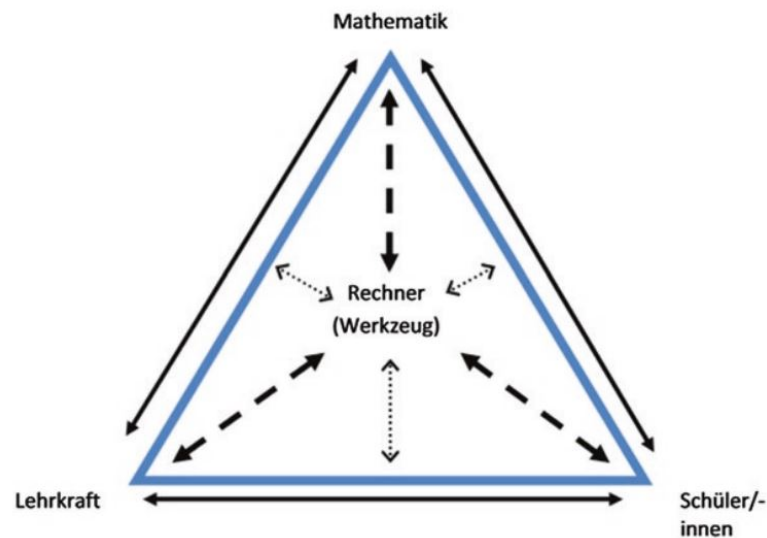


Abbildung 5.1: Das didaktische Dreieck beim Rechnereinsatz nach Bichler (2010)

5.3 Perspektivenwechsel

Carraher et al. (2019) meinen, dass es auch entwicklungsbedingte Einschränkungen beim Lernen gibt. Allerdings wird die Auffassung vertreten, dass die Schwierigkeiten der Schüler:innen durch die strikte Trennung zwischen Arithmetik und Algebra verstärkt und verlängert werden. Diese Trennung kann nicht durch eine langsame Überleitung mit angemessenen Programmen ausgeglichen werden. Stattdessen fordern sie, dass diese, wo möglich, von Anfang an integriert werden.

Es gibt eine Reihe von Argumenten, die dafür sprechen, arithmetische Operationen im frühen Mathematikunterricht als Funktionen zu behandeln. Es wurde bestätigt, dass Kinder aus der 3. Schulstufe bereits Addition und Subtraktion als additive Funktionen betrachten können und algebraische Notationen wie $n \rightarrow n + 3$ verstehen und anwenden können (Carraher et al., 2019).

Carraher et al. (2019) empfehlen, den Arithmetiklehrplan in algebraischer Form zu er-

stellen. Die Einführung der Frühalgebra eröffnet eine neue Perspektive auf die Vermittlung und Aneignung arithmetischer Kenntnisse und Fertigkeiten. Es geht nicht darum, Lehrpläne durch neue Themen zu ersetzen, sondern vielmehr darum, bereits etablierte Themen aus einer neuen Perspektive zu betrachten und zu vermitteln.

Auch Radford (2011) vertritt die Meinung, dass Arithmetik keine notwendige Voraussetzung für die Algebra darstellt. Die von ihm durchgeführte Untersuchung zur Verallgemeinerung von Mustern sowie der Erweiterung von Sequenzen mit Schüler:innen aus der zweiten Schulstufe kann als erfolgreich bewertet werden. Die Lernenden erzielten eine bemerkenswerte Erfolgsquote von 84 % bei der Aufgabenstellung, eine Sequenz zu erweitern, die auf der Addition einer unbekannten Zahl basierte. Die Kinder erarbeiteten Lösungsstrategien für die gestellten Aufgaben, welche auf der Identifikation von Mustern und der Anwendung von Regeln basierten. Dies demonstriert, dass Zweitklässler:innen in der Lage sind, algebraische Konzepte in einem praktischen Kontext anzuwenden. Obwohl die Lernenden imstande waren, algebraische Verallgemeinerungen vorzunehmen, manifestierten sich Schwierigkeiten, sobald es darum ging, diese zu quantifizieren. Dies demonstriert, dass die Schüler:innen sowohl algebraische als auch arithmetische Hürden überwinden mussten. Die Ergebnisse der Untersuchung lassen den Schluss zu, dass Schüler:innen der zweiten Klasse die Fähigkeit besitzen, grundlegende algebraische Konzepte zu verstehen und anzuwenden. Allerdings ist ersichtlich, dass sie weiterhin Unterstützung benötigen, um mit Zahlen und deren Beziehungen in algebraischen Ausdrücken und Gleichungen umzugehen.

Der aktuelle Lehrplan zeigt, dass Variablen als Platzhalter bereits in der Volksschule behandelt werden. Um vom arithmetischen zum algebraischen Denken zu gelangen, muss der Begriff der Variablen weiterentwickelt werden (BKA Österreich, 2024).

Lehrpersonen sollen sich den Variablenauffassungen nach Weigand et al. (2022) bewusst sein und diese je nach Aufgabentyp entsprechend thematisieren. Folglich können die Schwierigkeiten der Schüler:innen adäquat nachvollzogen und entsprechende Unterstützungsmaßnahmen bereitgestellt werden (Specht & Plöger, 2011).

Auch unterschiedliche Betrachtungsweisen können bei einer Aufgabenstellung eingenommen werden. Die von Malle (1993) vorgestellten drei Variablenaspekte – Gegenstandsaspekt, Einsetzaspekt und Kalkülaspekt – verdeutlichen den Umgang mit Variablen im Zuge der Bearbeitung einer Aufgabe. In Abhängigkeit zu dem jeweils dominierenden Aspekt können die Resultate einer Aufgabe divergieren. Unter Berücksichtigung des Kalkülaspektes lässt sich das Endergebnis mit $3a + 4b$ angeben, während nach dem Einsetzaspekt mit $a = 4$ und $b = 5$ das Ergebnis 32 lautet (Specht & Plöger, 2011).

Zusammengefasst legt Malle (1993) den Fokus auf die verschiedenen Perspektiven der Variablen, die bei einer Aufgabe eingenommen werden können. Weigand et al. (2022) hingegen klassifizieren in unterschiedliche Aufgabentypen.

Specht und Plöger (2011) sind sich einig, dass es keine Hierarchie der unterschiedlichen Facetten beim Variablenverständnis gibt. Frühhalgebra ist zu forcieren, es ist jedoch empfehlenswert, die Einführung nicht in einem Schritt, sondern gestaffelt vorzunehmen. Dabei ist es sinnvoll, die einzelnen Gesichtspunkte in den jeweils entsprechenden Klassenstufen zu behandeln und zu vertiefen.

Auch wenn die Einführung gestaffelt und behutsam den jeweiligen Altersstufen entsprechend vonstatten geht, ist darauf hinzuweisen, dass die Lernprozesse der einzelnen Schüler:innen sehr unterschiedlich sind. Deshalb kann die Variable als Veränderliche eingeführt werden, auch wenn die Variable als Unbestimmte noch nicht von allen Schüler:innen beherrscht wird. Die von Malle (1993) beschriebenen Aspekte von Variablen entwickeln sich ebenfalls in individueller Weise, sodass auch diese parallel behandelt werden können. Dieser Prozess erfolgt häufig unbewusst, da bei der Bearbeitung mehrschrittiger Aufgaben in der Regel mehrere Betrachtungsweisen erforderlich sind (Specht & Plöger, 2011).

Wie bereits erwähnt, erfordert die symbolische Sprache der Algebra, dass die Lernenden lernen, symbolische Ausdrücke auf eine neue Art und Weise zu betrachten. Im traditionellen Unterricht werden algebraische Ausdrücke wie Formeln oder Gleichungen sowie arithmetische Identitäten, die grundlegende mathematische Zusammenhänge universell beschreiben, den Schüler:innen häufig als fertige Erzeugnisse präsentiert. Van Amerom (2002, S. 10) plädiert für einen Unterrichtsansatz, der vom aktuellen Leistungsstand der Kinder ausgeht. Mit anderen Worten: „Lernen und Lehren von Algebra sollte auf Problemsituationen basieren, die zur Symbolisierung führen, und nicht auf einer vorgefertigten symbolischen Sprache.“

Für Kinder ist es wichtig, den Sinn und die Bedeutung von Variablen zu verstehen, um Algebra zu begreifen. Um etwas begreifen zu können, eignet sich der Einsatz didaktischer Hilfsmittel. Ein Beispiel für ein haptisches, didaktisches Lernmaterial ist „Knack die Box“. Es ermöglicht Lernenden durch aktives Tun Gleichungen zu „begreifen“. Hierbei wandelt sich der Fokus vom Handeln mit Zahlen hin zum Handeln mit unbekannten Größen. Lernende haben die Möglichkeit, die bewährten Regeln des Rechnens mit Zahlen auf eine neue Situation anzuwenden, in der ihnen Zahlen nicht bekannt sind. Diese unbekannten Werte werden durch Boxen dargestellt (Melzig, 2013).

Carraher et al. (2006) weisen aufgrund neuer Forschungsergebnisse darauf hin, dass der bereits beschriebene „cognitive gap“ durch bestimmte Lernangebote wie „Knack die Box“ vermieden werden kann. Melzig (2013) betont, dass die Box im Rahmen der Aufgabenstellung als Stellvertreter für Bohnenanzahlen, als Metapher und als material anchor für einen sich entwickelnden Variablenbegriff dienen kann. Daher hat das Lernmaterial „Knack die Box“ das Potenzial, eine sinnstiftende Rolle bei der Entwicklung einer tragfähigen Vorstellung von Variablen zu spielen.

5.4 Modellbasierte Ansätze zum besseren Verständnis von Gleichungen

5.4.1 „Knack Die Box“

„Knack die Box“ ist als didaktisches Hilfsmittel im Mathematikunterricht zur Förderung frühen algebraischen Denkens geeignet. Es soll das Gleichungslösen veranschaulichen. Im Rahmen dieses Modells erfolgt die Darstellung der Seiten einer Gleichung durch Alltagsgegenstände wie beispielsweise Streichhölzer oder Bohnen. Für die Variablen werden Behälter verwendet, in denen sich eine unbekannte Anzahl der zuvor genannten Objekte befindet. Dies können beispielsweise Streichholzschachteln oder farbige Boxen sein. Die Umsetzung des Modells ist unkompliziert und für Lernende schnell intuitiv nachvollziehbar. Daher eignet es sich in besonderem Maße für den Einsatz im Mathematikunterricht (Domokos et al., 2023).

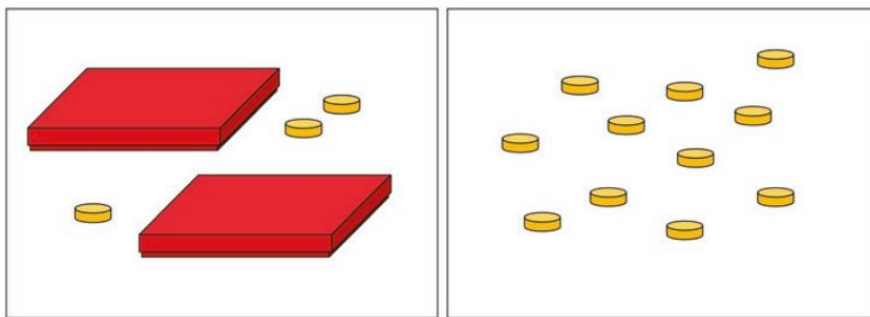


Abbildung 5.2: „Knack die Box“ - Modell (Weigand et al., 2022)

Das Lernmaterial „Knack die Box“ gibt den Kindern die Möglichkeit, konkret zu handeln und den Umgang mit Variablen zu „begreifen“. Die Box fungiert in diesem Fall als Platzhalter für eine unbekannte Größe und als Behältermetapher. Aus dem Volksschulunterricht sind die Grundrechenarten bekannt und die Lernenden können die arithmetischen Rechenregeln anwenden. Sie verstehen schnell, dass das Wegnehmen von Bohnen auf beiden Seiten einer Subtraktion gleichkommt. In diesem Sinne wird den Schüler:innen auch schnell klar, dass bei einer Anordnung von 2 Boxen = 10 Bohnen, 1 Box 5 Bohnen enthalten muss, was einer Division durch 2 auf beiden Seiten gleichkommt. So wird das arithmetische Grundwissen von den Kindern auf die konkreten Handlungen mit dem Lernmaterial übertragen und ein objektorientierter Umgang mit Variablen geübt (Akinwunmi, 2015).

Die Box gilt als Synonym für eine Variable als Unbekannte bei den Lernenden. Sie äußern sich dabei über die unbekannte Größe in verschiedenen Wortvariablen, wie zum Beispiel „Box“, „die Bohnen in der Box“ oder auch „die Anzahl der Bohnen in der Box“. Dies spielt eine wichtige Rolle für das Variablenverständnis (Akinwunmi, 2015).

5 Forschungsstand

Die Metasprache, die von den Lernenden während des Umgangs mit dem didaktischen Hilfsmaterial „Knack die Box“ verwendet wird, um arithmetische Strukturen auszudrücken und zu untersuchen, bildet die Basis für die Formelsprache (Malle, 1993).

Weigand et al. (2022) betonen ebenfalls, wie wichtig sprachliche Formulierungen hierbei sind. Zuerst werden inhaltliche Schritte verbal beschrieben und schließlich können sie in Form einer Gleichung ausgedrückt werden. Dies bedeutet eine Anlehnung an das Prinzip der fortschreitenden Schematisierung.

Dabei wird der Gegenstandsaspekt zur Anbahnung des Kalkülaspektes der Unbekannten genutzt, indem systematisch betrachtet wird, wie sich eine Handlung in der grafischen Darstellung auf die formelsprachliche Darstellung auswirkt. Auf diese Weise können Lernende erkennen, was eine Umformung in der Formelsprache bedeutet (Weigand et al., 2022).

Das Lernmaterial „Knack die Box“ kann beim Einstieg in das Thema Gleichungen behilflich sein, da es eine Visualisierung und ein besseres Verständnis des Themas ermöglicht. Die Verwendung von Bohnen und Boxen erlaubt eine anschauliche Darbietung von Situationen. Allerdings muss zuvor die Anzahl der Bohnen in einer Schachtel festgestellt werden, um eine Gleichung aufstellen zu können (Barzel & Holzäpfel, 2011). Die anschauliche Darstellung des Prinzips der äquivalenten Umformung erfolgt durch das Wegnehmen von Bohnen auf beiden Seiten. Dabei ist den Lernenden bewusst, dass das Gleichgewicht (die Gleichheit) erhalten bleiben muss, was eine grundlegende Voraussetzung für Äquivalenzumformungen ist (Weigand et al., 2022).

5.4.2 Waage-Modell

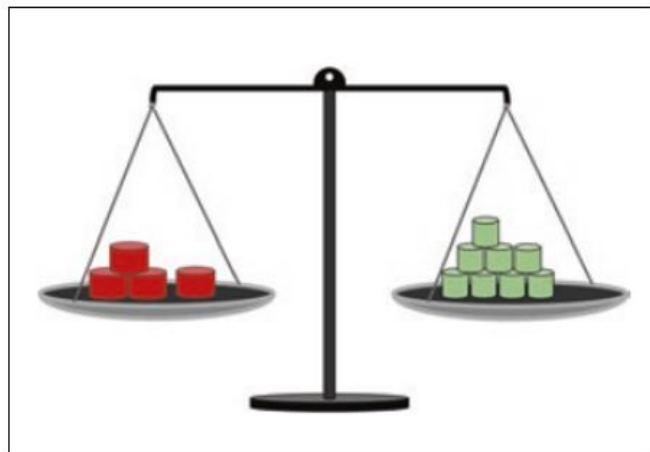


Abbildung 5.3: Waage-Modell (Weigand et al., 2022)

5.4 Modellbasierte Ansätze zum besseren Verständnis von Gleichungen

Im Rahmen des Waage-Modells erfolgt eine handlungsorientierte Erfassung des äquivalenten Umformens sowie eine bildhafte Veranschaulichung in Form einer Balkenwaage, bei der die Seiten der Gleichung (einschließlich der Variablen) als „Gewichte“ betrachtet werden (Domokos et al., 2023). Das Waage-Modell stellt ein weiteres Lernmaterial dar, welches dazu dient, Kindern Gleichungen auf anschauliche Weise zu vermitteln. So wie bei „Knack die Box“ wird beim Waage-Modell von der ikonischen zur formalsprachlichen Ausführung hingeführt. Wird bei „Knack die Box“ das Regelwerk klar vorgegeben (auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens liegen gleich viele Bohnen, in Boxen gleicher Farbe liegen gleich viele Bohnen), ergibt sich im Waage-Modell der Sinn aus der Sachsituation (die Waage muss in Balance sein). Dieser bildhafte Zugang vereinfacht Kindern und Jugendlichen, ein Verständnis für Gleichungen zu entwickeln (Weigand et al., 2022).

Das Waage-Modell erweist sich für Schüler:innen als hilfreich, um das Thema Gleichungen auf anschauliche Weise zu erfassen und die einzelnen Umformungsschritte besser nachvollziehen zu können. Die Interpretation der linken und rechten Seite des Gleichheitszeichens als Gewichte auf einer Balkenwaage erscheint naheliegend. Eine Äquivalenzumformung kann durchgeführt werden, wobei jedoch das ursprüngliche Gleichgewicht der Waage wiederhergestellt werden muss. Dies ist lediglich der Fall, wenn auf beiden Seiten die gleiche Rechenoperation durchgeführt wird. Obgleich das Waage-Modell international vielfach Gegenstand von Diskussionen ist, da die Jugend von heute keine Balkenwaagen mehr kennt, erweist es sich dennoch als tauglich, tragfähige Vorstellungen von Äquivalenzumformungen zu entwickeln. Selbstverständlich kann nur mit positiven Zahlen auf einer Balkenwaage gearbeitet werden, was wiederum zu Kritik führt. Barzel und Holzäpfel (2011) betonen, dass das Waage-Modell nachgewiesenermaßen syntaktische Fähigkeiten fördert und dem Gleichheitszeichen eine größere Bedeutung beimisst. In der Vergangenheit wurden bereits Versuche unternommen, negative Zahlen mithilfe von beispielsweise Heliumballons zu veranschaulichen. Diese Vorgehensweise führte jedoch nicht zum gewünschten Erfolg, sondern vielmehr zu zusätzlichen Irritationen. Um das Prinzip der Äquivalenzumformungen zu verstehen, erweist sich das Waage-Modell als sinnvoll. In diesem Kontext ist es von entscheidender Bedeutung, die Lernenden auf die Grenzen der Modelle aufmerksam zu machen. Allerdings konnte in der Praxis festgestellt werden, dass die Erweiterung um negative Zahlen keine Probleme verursacht (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Beide Modelle erleichtern den Einstieg in die Algebra, da sie den Weg von der enaktiven über die ikonische Darstellung zur Formelsprache ebnen. Beide Modelle vereint aber auch, dass sie Grenzen aufweisen. Diese liegen - wie bereits erwähnt - vor allem darin, dass nur mit positiven Zahlen gearbeitet werden kann. Ein weiterer Nachteil, der auf beide Ansätze zutrifft, ist jener, dass jeweils die Lösung der Aufgabe bekannt sein muss. Das heißt, dass Lehrende, die diese Hilfsmittel anwenden, immer Beispiele so kreieren müssen, dass die Regeln eingehalten werden und die Lösung für die Gleichung gewährleistet ist. Schüler:innen versuchen dann durch Befüllen der Boxen bzw. durch Verändern der Gewichte den richtigen Lösungsweg zu finden. Ansonsten könnte dies im

Modell in einer realen Umgebung nicht dargestellt werden (Weigand et al., 2022).

Die didaktischen Hilfsmittel „Knack die Box“ und das Waage-Modell sollen helfen, den Zugang und Umgang mit den verschiedenen Variablenbegriffen zu verstehen. Lernen wird damit die Möglichkeit gegeben, Muster und Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, zu beschreiben und zu verstehen. Schließlich ermöglicht ihnen diese Fähigkeit inner- und außermathematische Situationen mit Variablen zu deuten. Zuerst geht es dabei immer um den Gegenstands- und Einsetzungsaspekt und in weiterer Folge spielt auch der Kalkülaspekt und die fortschreitende Schematisierung eine Rolle (Weigand et al., 2022).

5.4.3 Falt- bzw. Streifenmodell

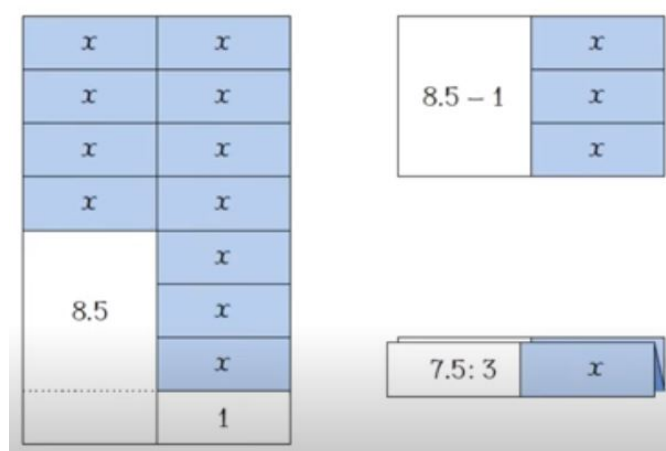


Abbildung 5.4: Falt- bzw. Streifenmodell (Barzel & Holzäpfel, 2011)

Auch beim Falt- bzw. Streifenmodell erfolgt eine Verdeutlichung der einzelnen Schritte bei den Äquivalenzumformungen. In einem ersten Schritt wird ein Blatt längs in der Mitte gefaltet, um die linke Seite der Gleichung von der rechten Seite zu trennen und jeweils durch eine Flächenbilanz zu veranschaulichen. In der Abbildung 5.4 wird die Gleichung $4x + 8,5 = 7x + 1$ visualisiert. Zuerst werden auf beiden Seiten des „Gleichheitszeichens“ für x entsprechend viele gleich große Streifen markiert. Das bedeutet vier gleich große Felder auf der linken Seite und sieben genauso große Flächen auf der rechten Seite. Die Größe der Streifen spielt dabei keine Rolle. Wichtig ist nur, dass auf der rechten Seite mindestens sieben solche Felder platziert werden können. Eventuelle Größen veranschaulichen den Rest auf beiden Seiten. In Abbildung 5.4 entspricht eine Fläche mit dem Wert von 8,5 dem nicht ausgefüllten Teil auf der linken Seite und auf der rechten Seite beträgt die restliche Fläche 1. Durch das nach hinten Wegfalten gleich großer Flächen kann die Gleichung gelöst werden. Das Ziel ist, dass das Blatt Papier so gefaltet wird, dass am Ende auf der einen Seite nur mehr ein einzelner Streifen x zu sehen ist und auf der anderen Seite lässt sich somit der Wert von x direkt ablesen. Durch horizontale Faltungen

5.4 Modellbasierte Ansätze zum besseren Verständnis von Gleichungen

wird an der Flächengleichheit rechts und links des Blatt Papiers nichts geändert (Barzel & Holzäpfel, 2011).

In dem gegebenen Beispiel (Abb. 5.4) werden zu Beginn die ersten vier Felder der Größe x auf beiden Seiten nach hinten gefaltet. Dadurch bleibt die Gleichung unverändert. Als nächster Schritt kann die untere Fläche der Größe 1 weggefaltet werden. Dadurch verkleinert sich auch die Fläche mit der Größe 8,5 um 1. Dies wird in der Abbildung 5.4 rechts oben dargestellt. Schließlich befinden sich auf der einen Seite der Gleichung drei Felder der Größe x und auf der anderen Seite eine Fläche mit dem Wert 7,5. Wird nun nur ein Streifen x betrachtet, das heißt, die anderen beiden Felder werden weggefaltet, so verkleinert sich die Fläche von 7,5 auf ein Drittel. Das Ergebnis von $7,5 : 3$ entspricht dem Wert von einem x . Somit ist $x = 2,5$ die Lösung der Gleichung (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Das Falt- bzw. Streifenmodell funktioniert in erster Linie nur für positive Koeffizienten. Weiters sind ganzzahlige Werte für x zu bevorzugen, da es ansonsten sehr aufwendig und unübersichtlich wird. In diesem Zusammenhang ist auch zu erwähnen, dass beim Faltmodell die Gefahr besteht, dass x lediglich als Fläche dargestellt wird oder dass die gesuchte Größe bekannt sein muss, um die geeigneten Faltabstände zu bestimmen (Barzel & Holzäpfel, 2011).

Aus eigener Erfahrung ist es für Schüler:innen oft nicht einfach, eine solche Darstellung für eine Gleichung selbstständig zu erstellen. Das „Knack die Box“-Modell und das Waage-Modell sind naheliegender und wesentlich übersichtlicher zu visualisieren. Nichtsdestotrotz können vorgefertigte Faltpapiere sehr gut parallel als Ergänzung, besonders für schwache Schüler:innen, eingesetzt werden. Das Teilen und Subtrahieren auf beiden Seiten der Gleichung wird bei diesem Modell von den Schüler:innen auf eine ganz andere Art und Weise enaktiv erlebt.

6 Forschungsanliegen

Da ich sowohl bei meinem Nachhilfeunterricht als auch in der Sommerschule und in meinen Masterpraktika die Erfahrung gemacht habe, dass die elementare Algebra vielen Kindern Schwierigkeiten bereitet, stellte ich mir die Frage, ob und wie es möglich sei, den Übergang von der Arithmetik zur Algebra zu erleichtern. Es gibt in der Literatur verschiedene didaktische Ansätze und Methoden, um diesen Übergang zu lindern und ein tieferes Verständnis für algebraische Konzepte zu fördern (Akinwunmi, 2012; ETH Zürich, 2020; Malle, 1993; Schiffer, 2019). In meiner Unterrichtspraxis wurde ich darauf aufmerksam, dass vor allem beim Gleichungslösen viele Schüler:innen Verständnisprobleme haben. Sie kennen oft nur das Umformen nach Rezept und können nicht benennen, warum sie welche Äquivalenzumformung durchführen. Noch dazu schreiben einige Kinder die durchzuführende Rechenoperation richtig auf, jedoch wissen sie nicht, dass diese auf beiden Seiten des Gleichheitszeichen durchzuführen ist, um die bestehende Gleichheit aufrecht zu erhalten. Den typischen Umkehrfehler, den Malle (1993) beim Aufstellen von Gleichungen beschreibt, konnte ich bereits öfter beobachten. Weiters war es für viele Kinder eine Herausforderung, vorgegebene Gleichungen zu interpretieren. Daher entschied ich mich für eine qualitative Untersuchung zum Thema Gleichungslösen, bei der ich mich in die Denkweise der Schüler:innen hineinversetzen kann. Mit dem Lernmaterial „Knack die Box“ sollen Schüler:innen den Variablenbegriff „begreifen“. Das Gleichungslösen soll damit einfacher und verständlicher werden.

Das führt mich zu meiner ersten Forschungsfrage:

- Inwiefern können Lernende beim Einstieg in die Algebra vom Lernmaterial „Knack die Box“ profitieren?

Die Untersuchung führte ich in einer Sportmittelschule (SMS) in Ebensee mit Kindern einer 5. Schulstufe durch. Die 5. Schulstufe wählte ich deshalb, da die Kinder bereits Erfahrung mit Symbolen als Platzhalter aus der Volksschule haben, jedoch noch keine Variablen kennen. Daher befinden sie sich genau im Übergang von Arithmetik zur Algebra und ich gehe mit jenen Autor:innen d'accord, die „Early Algebra“ forcieren.

Es bereitete mir große Freude das Lernmaterial „Knack die Box“ vorzubereiten. Mit Bohnen und Boxen durften jeweils zwei Kinder zum Thema Gleichungslösen zwei Arbeitsblätter lösen. Die beiden Arbeitsblätter (siehe Kapitel 7.1.2) wurden kindgerecht gestaltet und die zwei Regeln, die bei jeder Aufgabe zu beachten waren, gleich zu Beginn vermerkt. Die Aufgaben waren selbsterklärend gestaltet und methodisch vom „Einfachen“ zum „Schwierigen“ aufgebaut. Die Schüler:inneninteraktionen spielten eine wesentliche Rolle und ließen mich Rückschlüsse ziehen.

Meine zweite Forschungsfrage lässt sich wie folgt formulieren:

- Inwiefern lässt sich die Ablösung vom Material hin zum abstrakteren algebraischen Arbeiten aus Schüler:inneninteraktionen rekonstruieren?

Die Kinder sollten bei der Bearbeitung erkennen, dass es nicht vorrangig um das Lernmaterial geht, sondern um die mathematische Strukturerkennung. Dazu müssen sie Boxen als Stellvertreter für Bohnenanzahlen sehen, die Anzahl der Bohnen als Darstellungsmittel für Zahlen betrachten und sich von der Forderung der Aufgabenstellung, die konkreten Boxen tatsächlich zu füllen, lösen. Diese Umdeutungsprozesse, die aus abstrakten Prozessen bestehen, werden zum Teil durch Interaktionen zwischen den Schüler:innen angeregt und müssen sich in der sozialen Interaktion bewähren. Auf diese Weise stellen die Boxen eine abstrakte Darstellung der Variablen dar (Melzig, 2013).

Die empirische Untersuchung meiner Arbeit trägt dazu bei, die Umdeutungsprozesse mathematischer Repräsentationen aus epistemologischer Perspektive zu beleuchten. Dabei wird der Frage nachgegangen, wie der Wechsel von konkreten Handlungen zu anpassungsfähigen, mathematischen Operationen erfolgt. Zudem wird analysiert, welche Schritte der Verallgemeinerung und Abstraktion im Lernprozess sichtbar werden. Besonders interessant ist, in welchem Ausmaß die Zusammenarbeit und der Austausch zwischen den Lernenden diese Umdeutungsprozesse fördern können.

7 Methodische Herangehensweise

7.1 Datenerhebung

7.1.1 Allgemeines zur Proband:innengruppe

Meine Untersuchung habe ich an der Sportmittelschule Ebensee durchgeführt. Die Schule liegt im Salzkammergut in der kleinen Gemeinde Ebensee am Traunsee. In dieser ländlichen Schule unterrichten 31 Lehrer:innen. Insgesamt besuchen 212 Schüler:innen, verteilt auf 13 Klassen, die SMS Ebensee. Der Schwerpunkt der Schule liegt eindeutig im sportlichen Bereich. Neben den Regelklassen gibt es pro Schulstufe eine Sportklasse. Hierfür ist das Bestehen einer praktischen Aufnahmeprüfung erforderlich.

Die Schule verfügt über eine exzellente Infrastruktur und ist von atemberaubender Landschaft und hohen Bergen umgeben. In der näheren Umgebung befinden sich mehrere Sportstätten, die regelmäßig genutzt werden. Auch das Skigebiet Feuerkogel ist vor Ort nutzbar. Im Sommersemester stehen Schwimmen und Leichtathletik im Mittelpunkt, während in den Wintermonaten die Präferenz auf den Wintersportarten liegt.

Im Anschluss an eine ausführliche Besprechung zu meiner Untersuchung zum Gleichungslösen mit „Knack die Box“ mit dem Direktor der Schule sowie den Klassenvorständen der ersten Klassen und den Mathematiklehrpersonen verfasste ich einen Elternbrief, in welchem ich mein Vorhaben sowie die damit verbundenen Rahmenbedingungen darlegte und die Eltern bzw. Erziehungsberechtigten der Kinder um ihr Einverständnis bat.

Der Elternbrief wurde in den drei ersten Klassen (1a, 1b, 1s) ausgeteilt. 20 Unterschriften der Erziehungsberechtigten gewährleisteten, dass ich ihr Kind filmen und die Resultate des Arbeitsprozesses für meine Untersuchung verwenden durfte. Selbstverständlich wurde in dem Elternbrief vermerkt, dass die Video- und Tonaufnahmen ausschließlich zur schriftlichen Transkription dienten (siehe Anhang). Auch die Namen der Schüler:innen wurden in meiner Masterarbeit abgeändert und die Videos nach erfolgter Analyse und Transkription gelöscht.

Im Rahmen der Untersuchung verbrachte ich insgesamt zehn Stunden an der Schule, sodass alle 20 Schüler:innen die Möglichkeit hatten, an der Studie teilzunehmen und mich bei der Datenerhebung zu unterstützen. Die Bearbeitung der Arbeitsblätter erfolgte stets in Partner:innenarbeit. Die Bearbeitungszeit für die Aufgabenblätter betrug 50 Minuten. Die Auswahl derjenigen Kinder, die gemeinsam ein Arbeitsblatt bearbeiten

sollten, erfolgte per Zufallsprinzip. Es wurde jedoch darauf geachtet, dass die beiden Kinder aus der gleichen Klasse stammten, da dies ansonsten zu einer erschwerten Administration geführt hätte.

Im gleichen Zeitraum wurde, wie in meinem Vorgespräch mit den unterrichtenden Lehrkräften besprochen, im Rahmen des Mathematikunterrichts das Thema Gleichungen behandelt. In Übereinstimmung mit den Vorgaben des Lehrplans wurde den Schüler:innen das Aufstellen und die Interpretation einfacher Gleichungen sowie das Finden von Lösungen einfacher Gleichungen vermittelt.

7.1.2 „Knack die Box“ - Arbeitsblätter

Meine beiden Arbeitsblätter gestaltete ich folgendermaßen:

Zu Beginn des Arbeitsblattes (siehe Abb. 7.1 und 7.2) wurden zwei Regeln festgehalten, welche bei jeder Aufgabe zu berücksichtigen sind.

Im Rahmen der ersten Aufgabe erlernen die Schüler:innen die Umsetzung des Konzepts der Gleichheit durch das Nachlegen des vorgegebenen Bildes mit Boxen und Bohnen. Die Lernenden müssen die Erkenntnis gewinnen, dass sich in Boxen gleicher Farbe die gleiche Anzahl an Bohnen befinden muss. Die Frage nach der möglichen Anzahl der Bohnen in den blauen Boxen erfordert von den Lernenden, logisch zu denken, erste Schlussfolgerungen zu ziehen und mögliche Werte systematisch zu prüfen.

Die zweite Aufgabe zielt darauf ab, dass die Lernenden in der Lage sind, die in Aufgabe 1 erlernten Prinzipien auch auf andere Farbkategorien (rote Boxen) zu übertragen. Im Rahmen des vorliegenden Beispiels wird die Anwendung der Regeln unabhängig von der Farbe oder der spezifischen Konstellation trainiert.

Die dritte Aufgabe erfordert Kreativität und Eigenständigkeit. Schüler:innen sollen eigene Aufgaben gestalten, wobei sie zwischen einfachen und schwierigeren Anordnungen unterscheiden. Durch das Erstellen eigener Beispiele wird überprüft, ob die Kinder die Regeln verstanden haben und auf neue Konstellationen anwenden können. Somit wird eine Transferleistung erwartet. Des Weiteren wird durch die Erstellung einfacher und komplexer Aufgaben eine Förderung der Differenzierungsfähigkeit erzielt, wodurch die Lernenden die Kompetenz erlangen, verschiedene Schwierigkeitsgrade zu unterscheiden.

Die vierte Aufgabe erfordert die Fähigkeit zum systematischen Denken. Die Schüler:innen evaluieren die potenziellen Optionen zur Befüllung der Boxen mit Bohnen. Dies erfordert von den Lernenden die Erkenntnis, dass in vielen Fällen mehrere Lösungen zulässig sind, solange die vorgegebenen Regeln eingehalten werden. Die tabellarische Darstellung ermöglicht eine übersichtliche Erfassung diverser Lösungen sowie einen adäquaten Vergleich.

Im Rahmen der fünften Aufgabe erfolgt eine Verknüpfung mit dem Bereich der Al-

gebra. Die Schüler:innen erlangen die Kompetenz, die Boxenanordnungen als visuelle Repräsentationen von Gleichungen zu verstehen. Die Übersetzung der Anordnungen in Gleichungen trägt zu einer vertieften Verständnisbildung algebraischer Ausdrücke bei. Des Weiteren wird durch das Ergänzen der fehlenden Boxenanordnung die Problemlösekompetenz der Lernenden gefördert.

Das zuletzt angeführte Beispiel betrifft die Anwendung und Reflexion. Die Schüler:innen wenden ihr Wissen an, um die exakte Anzahl der Bohnen in den Boxen zu bestimmen. In Abhängigkeit von der Komplexität der Aufgabenstellung können die Lernenden durch visuelles Denken oder durch systematisches Ausprobieren zur Lösung gelangen. Die Aufgabe fungiert als Brücke zum algebraischen Lösen von Gleichungen, ohne auf visuelle Hilfsmittel zurückzugreifen.

In einer zusammenfassenden Betrachtung lässt sich feststellen, dass die Aufgaben in ihrer Schwierigkeit und Komplexität aufeinander aufbauen. Die Aufgabenstellungen 1 und 2 zielen primär auf die Förderung des Regelverständnisses ab. Die dritte Aufgabe erfordert eigenständiges Denken sowie die Fähigkeit, Gelerntes auf neue Situationen zu übertragen. Das Abstraktionsvermögen wird in den Aufgaben 4 und 5 geschult. Die sechste Aufgabe zielt auf die Förderung der algebraischen Denkweise und Problemlösekompetenz ab.

Durch diese Progression wird der Übergang von konkreten Handlungen (Bohnen legen) zu abstrakten mathematischen Operationen (Gleichungslösen) systematisch begleitet.

Name: _____



Beachtet die folgenden Regeln bei jeder Aufgabe!

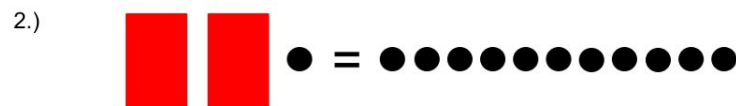
REGELN:

- Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens liegen gleich viele Bohnen.
- In Boxen gleicher Farbe liegen gleich viele Bohnen.



- Legt mit leeren Boxen und Bohnen das obige Bild nach. Füllt die Boxen mit Bohnen. Beachtet dabei die Regeln!
- Wie viele Bohnen können in den blauen Boxen liegen?

Antwort:



- Legt mit leeren Boxen und Bohnen das obige Bild nach. Füllt die Boxen mit Bohnen. Beachtet dabei die Regeln!
- Wie viele Bohnen können in den roten Boxen liegen?

Antwort:

- 3.) Legt und zeichnet zwei weitere Boxenanordnungen, bei denen jeweils 3 Bohnen in den Boxen sind. Verwendet für jede Anordnung Boxen mit derselben Farbe.

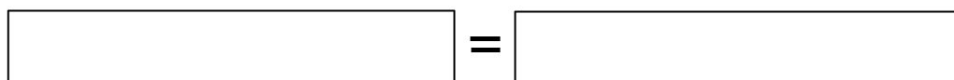
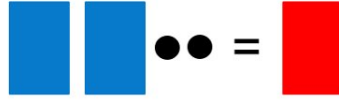


Abbildung 7.1: 1. Seite des Arbeitsblattes

4.)



- a) Legt mit leeren Boxen und Bohnen das obige Bild nach. Füllt die Boxen mit Bohnen. Beachtet dabei die Regeln!
- b) Gibt es mehrere Möglichkeiten die Boxen zu füllen? Diese Tabelle hilft euch, eure Ergebnisse übersichtlich aufzuschreiben:

Anzahl der Bohnen in einer blauen Box									
Anzahl der Bohnen in einer roten Box									

5.) Jede Boxenanordnung kann in eine Gleichung übersetzt werden.

- a) Welche Gleichung gehört zu welcher Boxenanordnung?
- b) Zeichnet die fehlende Boxenanordnung.

A	+ 4 = 2 · + 3
B	2 · =
C	3 · + 1 = 7
D	2 · = + 2

6.) Wie viele Bohnen gehören in jede Box? Findet die Lösung!

Vielleicht kennt ihr die Lösung auf den ersten Blick oder ihr verwendet Boxen und Bohnen als Hilfsmittel.

= 14
 Ergebnis: =

= 9
 Ergebnis: =

3 · = 9
 Ergebnis: =

7.1.3 Beschreibung des Settings

Zu Beginn jeder Unterrichtsstunde wurden zwei Kinder einer Klasse nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Im Anschluss begleitete ich die beiden in einen separaten Raum, in dem ich einen Tisch, die Boxen, die Bohnen, das Arbeitsblatt sowie eine Videokamera vorbereitet hatte. Das Setting war ansprechend und kann als lernförderliche Umgebung beschrieben werden.



Abbildung 7.3: Lernförderliche Umgebung in der Schule

Die beiden Lernenden nahmen nebeneinander Platz. Die beiden Arbeitsblätter, welche gemeinsam bearbeitet werden sollten, befanden sich vor ihnen. Noch dazu befanden sich auf dem Tisch Bohnen, rote und blaue Boxen sowie ein laminiertes Gleichheitszeichen. Den Lernenden wurden zwei Bleistifte sowie ein roter und ein blauer Stift zur Verfügung gestellt. Der Arbeitsprozess wurde mit einer Kamera aufgezeichnet, um die Interaktionen der Beteiligten sowie die dabei ablaufenden Denkprozesse besser nachvollziehen und analysieren zu können. Ich nahm gegenüber der Schüler:innen Platz, um sie aufmerksam zu beobachten und mir etwaige Auffälligkeiten zu notieren. Das gesamte Setting ist in der nachfolgenden Skizze zusammengefasst:

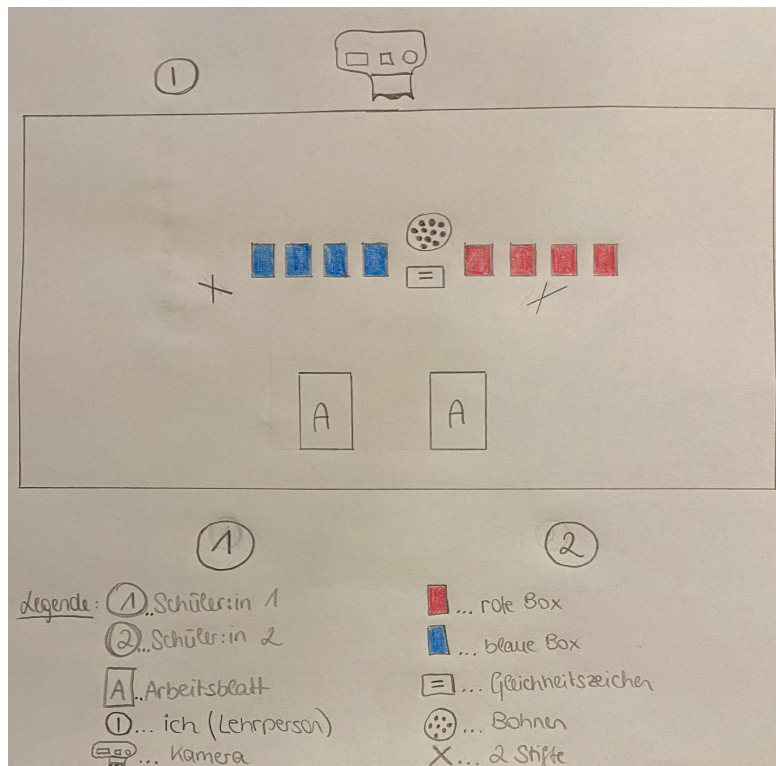


Abbildung 7.4: Skizze des Settings

7.1.4 Durchführungsmodalitäten

Jedes Schüler:innenpaar hatte 50 Minuten Zeit, um die Arbeitsblätter zu bearbeiten. Zu Beginn erklärte ich den Schüler:innen kurz, dass es um das Lösen von Gleichungen geht. Dabei knüpfte ich an ihr Vorwissen aus der Volksschule an und machte ihnen mit der Frage „2 plus wie viel ist 10?“ deutlich, dass sie auch in der Volksschule schon einfache Gleichungen gelöst haben. Ihre Aufgabe war es nun, die sechs Aufgaben auf den Arbeitsblättern mit Bohnen und Boxen zu lösen. Ich betonte nochmals, dass die beiden eingangs auf dem Arbeitsblatt notierten Regeln bei jeder Aufgabe einzuhalten seien. Außerdem bat ich die Schüler:innen so laut wie möglich zu sprechen, damit ich ihre Gedankengänge anhand der Video- und Tonaufnahmen nachvollziehen konnte. Schließlich wies ich darauf hin, dass die Angaben klar und deutlich formuliert seien, aber dennoch eine sorgfältige Lesenotwendigkeit gegeben war.

Ich vermied es, Fragen zu beantworten. Sofern mir die Kinder eine Frage stellten, antwortete ich mit Aussagen wie „Lest euch die Angabe noch einmal genau durch“ oder „Achtet auf die beiden Regeln“. Das heißt, ich versuchte mit meiner Hilfestellung ihr eigenes Denken anzuregen und nicht vorwegzunehmen. Allerdings konnte meine kurze Erklärung nicht alle Schüler:innen gleichermaßen erreichen, sodass bei Aufgabe 1 eine

zusätzliche Hilfestellung erforderlich war. Es war interessant zu beobachten, wie unterschiedlich die Kinder mit dem Lernmaterial „Knack die Box“ interagierten. Bei einigen der Zweierteams konnte ich eine Steigerung ihrer Lernfortschritte während der Bearbeitung der Arbeitsblätter feststellen. Bei anderen Teams hingegen hatte ich den Eindruck, dass sie keine nennenswerten Fortschritte während des Lernprozesses machten. Diejenigen Schüler:innen, die über ein ausgeprägtes mathematisches Verständnis verfügten, konnten die Aufgaben schneller lösen als die übrigen Teilnehmer:innen.

Die vorliegende Studie basiert auf Video- und Tonaufzeichnungen, die sich als geeignete Grundlage erweisen. Die Aufzeichnungen erlauben nicht nur die Erfassung der verbalen Äußerungen der Lernenden, sondern auch die Dokumentation ihres Umgangs mit dem Material sowie ihre Gestik und Körpersprache im Interaktionsprozess.

7.2 Datenauswertung

Die Auswertung der Videoaufnahmen inklusive Tonaufnahmen und der ausgefüllten Arbeitsblätter erlaubt nun eine Annäherung an die Denkweise der Schüler:innen, sodass ihre Gedanken nachvollzogen werden können. Allerdings erweisen sich einige Videos als zu wenig aussagekräftig, um in die Studie miteinbezogen zu werden. Die betreffenden Videos wurden aufgrund zu leisen Sprechens oder einer überaus zurückhaltenden und daher kaum artikulierten Ausdrucksweise ausgeschlossen. Zwei Gruppen konnten nicht analysiert werden, da die Anforderungen des Arbeitsblattes deren Kompetenzen überstiegen. Folglich werden lediglich fünf Videos, d.h. fünf Zweierteams, einer näheren Analyse unterzogen und transkribiert. Dabei handelt es sich um die Gruppen 1, 2, 6, 7 und 9. Aufgrund der Auswertung dieser Videos ist es möglich, die beiden Forschungsfragen zu beantworten, die Ergebnisse zu präsentieren und im Anschluss zu interpretieren.

Die Zusammensetzung der Teams erfolgte zufällig, mit dem Ziel, eine ausgewogene Verteilung der Teilnehmenden zu gewährleisten. Gruppe 1 setzt sich aus Fritz und Paul zusammen und ist eine rein männliche Gruppe. Gruppe 2, bestehend aus Magda und Vicky, stellt ein rein weibliches Team dar. Die sechste Gruppe, Tobi und Sepp sowie Gruppe 7, bestehend aus Max und Moritz, sind weitere männliche Duos. In Gruppe 9 bilden Pia und Lea eine ausschließlich weibliche Arbeitsgemeinschaft. Die Namen der Teilnehmenden sind fiktiv und die Ergebnisse somit anonymisiert.

Die Teams spiegeln damit eine klare Geschlechterverteilung wider: Während die Gruppen 1, 6 und 7 ausschließlich männlich besetzt sind, gibt es in den Gruppen 2 und 9 nur weibliche Teilnehmende.

Die übrigen Teams – Gruppe 3, 4, 5, 8 und 10 – wurden nicht in die engere Auswahl aufgenommen. In der vorliegenden Beschreibung finden die Zusammensetzungen dieser Teams daher keine Berücksichtigung.

8 Ergebnisse

8.1 Allgemeine Ergebnisse

Das nachfolgende Säulendiagramm veranschaulicht die Punkteanzahl, die die fünf Zweerteams der ersten Klassen der NMS Ebensee bei der Bearbeitung der beiden Arbeitsblätter zum Lernmaterial „Knack die Box“ erzielen konnten. Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass zwei Schüler:innpaare die maximale Punkteanzahl von 17,5 Punkten erreichten.

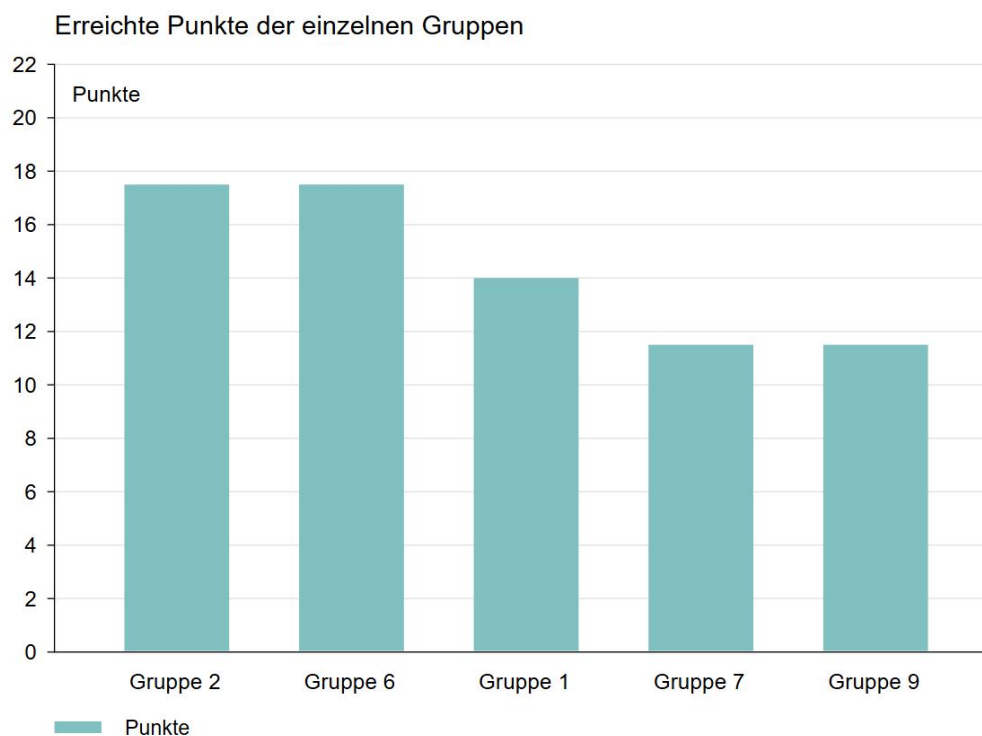


Abbildung 8.1: Erreichte Punkte der einzelnen Gruppen

Das Lernmaterial „Knack die Box“ soll den Lernenden den Einstieg in die Algebra erleichtern. Für die Schüler:innen ging es darum, in Teamarbeit die Grundvorstellung der Variablen als Unbekannte anzubahnen und schließlich ein Verständnis für Gleichungen zu erlangen. Hierbei ging es um einen spielerischen Zugang ohne Notendruck.

8 Ergebnisse

Um die Schüler:innenleistungen objektiv und vergleichbar auszuwerten zu können, war es notwendig, den Aufgaben Punkte zuzuordnen. Die Punktevergabe ermöglichte eine systematische Analyse des individuellen Lernfortschritts sowie möglicher Unterschiede zwischen Schüler:innen oder Gruppen. Im Rahmen der Untersuchung wurden die erbrachten Leistungen quantifiziert und in Beziehung zueinander gesetzt. Dies erfolgte mittels einer Punktbewertung, wodurch Muster im Lernprozess sichtbar wurden. Der Aufbau des Arbeitsblattes, von Reproduktion über Transfer bis hin zu Reflexion, ermöglichte es schließlich in der Folge auf die Entwicklung der Grundvorstellung der Schüler:innen von Variablen als Unbekannten sowie auf den Grad ihres Verständnisses von Gleichungen zu schließen. Darüber hinaus ermöglichte die Punktevergabe eine standardisierte Dokumentation der Ergebnisse sowie die Durchführung von Vergleichen zwischen verschiedenen Gruppen oder Testzeitpunkten. Da es sich um eine wissenschaftliche Untersuchung handelte, war eine solche systematische Erfassung erforderlich, um belastbare Aussagen über die Wirksamkeit des Lernmaterials „Knack die Box“ treffen zu können.

Die erreichten Punkte in Abhängigkeit von der Zeit werden in folgendem Streudiagramm dargestellt.

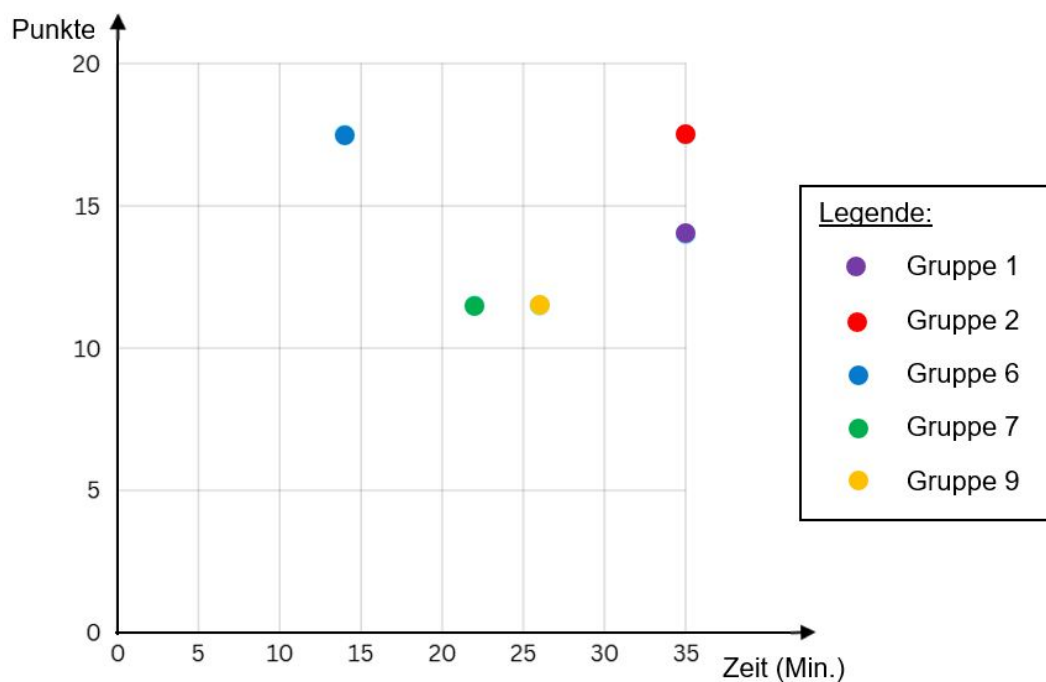


Abbildung 8.2: Erreichte Punkte in Abhängigkeit der benötigten Zeit in Minuten

8.2 Ergebnisse der Gruppen zu den einzelnen Aufgaben

Die nachfolgende Tabelle präsentiert die Resultate der Gruppen hinsichtlich ihrer Punktverteilung pro Aufgabe in strukturierter und übersichtlicher Form. Sie erlaubt einen unmittelbaren Vergleich der erreichten Punkte zwischen den Gruppen und demonstriert, welche Gruppe in welcher Aufgabe eine besonders gute oder weniger gute Leistung erbracht hat. Die Angabe der maximalen Punktzahlen in Klammern veranschaulicht zudem die Schwierigkeit jeder Aufgabe und deren Gewichtung. Dies erleichtert die Nachvollziehbarkeit der Bewertungslogik und zeigt auf, ob bestimmte Aufgaben einen größeren Einfluss auf das Gesamtergebnis hatten.

8.2.1 Punkteübersicht der Gruppen je Aufgabe

Gruppe/Aufgabe	1 (2)	2 (2)	3 (2)	4 (4.5)	5 (4)	6 (3)	Gesamt
Gruppe 1	2	2	0	3	4	3	14
Gruppe 2	2	2	2	4.5	4	3	17.5
Gruppe 6	2	2	2	4.5	4	3	17.5
Gruppe 7	2	2	0	4.5	1	2	11.5
Gruppe 9	1	1	2	0.5	4	3	11.5

Tabelle 8.1: Ergebnisse der Gruppen für die einzelnen Aufgaben (maximale Punktzahlen in Klammern)

Die Gesamtergebnisse der einzelnen Gruppen sind in der finalen Spalte evident, was eine unmittelbare Evaluation ihrer Gesamtleistung ermöglicht. Dadurch wird es möglich, Gruppen mit ähnlichen oder abweichenden Ergebnissen auf einen Blick zu identifizieren. Die transparente Darstellung der erreichten Punkte in Bezug auf die maximal möglichen Punktzahlen erlaubt eine objektive Einschätzung der Gruppenleistungen und bietet eine solide Grundlage für die Analyse von Stärken und Schwächen.

Die tabellarische Form gewährleistet eine kompakte und leicht verständliche Darstellung, die ohne zusätzlichen Text oder Erklärungen einen schnellen Blick auf die Resultate ermöglicht. Die Interpretation dieser Ergebnisse erfolgt in Kapitel 9.

8.2.2 Ergebnisse basierend auf der Videoanalyse

Gruppe 1

Im Rahmen der ersten Aufgabe wurde die Anzahl der Bohnen in den Boxen durch Fritz mittels Abtippen ermittelt. Es sei darauf hingewiesen, dass bei der ersten Aufgabe die

8 Ergebnisse

Mitglieder der ersten Gruppe die Bohnen in die Boxen legten und diese wiederholt verschlossen. In einigen Momenten war die Anzahl der Bohnen in den Boxen nicht mehr bekannt. Bei der zweiten Aufgabe wurden die Boxen bereits offen gelassen und bei der vierten wurden die Bohnen schließlich auf den Boxen platziert.

Bei der dritten Aufgabe stellte das sinnerfassende Lesen ein Problem dar. Der Ausdruck „bei denen jeweils 3 Bohnen in den Boxen sind“ bereitete den Lernenden Schwierigkeiten. Fritz ist sich dieser Problematik bewusst und adressiert sie, indem er einräumt, nicht der Beste in Deutsch zu sein.

Es konnte beobachtet werden, dass Fritz bei der vierten Aufgabe die Erkenntnis gewann, dass er lediglich eine gerade Anzahl an Bohnen auf beiden Seiten der Gleichung hinzufügen kann. Dies ist dadurch bedingt, dass die Bohnenanzahl auf der einen Seite der Gleichung auf zwei Boxen aufgeteilt werden muss. Darüber hinaus wurde seitens der beiden die Suche nach neuen Herausforderungen artikuliert. Es wurde zum Ausdruck gebracht, dass die ständige Zugabe von lediglich zwei Bohnen auf jeder Seite als monoton empfunden wurde. Mit zunehmender Anzahl der verwendeten Bohnen stieg auch die Schwierigkeit des Zählens. Die Gruppe entwickelte die Idee, die Bohnen auf den Boxen in ein 4x4-Raster aufzulegen, um die Anzahl der Bohnen schneller berechnen zu können.

Bei der ersten Aufgabe von Unterpunkt 6 wurde eine Umkehroperation zur Lösung herangezogen. Die Lösungen aller Teilaufgaben von Aufgabe 6 waren korrekt und die Probe wurde von Fritz intuitiv im Kopf vorgerechnet.

Fritz und Paul kooperierten ausgesprochen gut und agierten als effektives Team. Fritz zeigte ein dominierendes Verhalten und erteilte Anweisungen. Pauls Beiträge umfassten die Einbringung von Vorschlägen sowie die Einbeziehung in die Aufgabenlösung und Ergebniserfassung. Durch gegenseitige Erklärungen wurde die eigenständige Fehlererkennung der beiden gefördert.

Nach einer Zeitspanne von 32 Minuten hatten die beiden Probanden Schwierigkeiten, sich auf die Aufgaben zu konzentrieren und verfolgten stattdessen andere Gedanken. Einerseits wurde durch die Verwendung von Fragen eine Ablenkung herbeigeführt, andererseits zog Fritz Grimassen in die Videokamera. Nach einer Zeit von 35 Minuten wurde seitens der beiden die Beendigung der Bearbeitung verkündet.

Gruppe 2

Magda nahm in der Interaktion mit Vicky eine dominante Position ein. Sie erteilte Anweisungen und bestimmte somit den Gesprächsverlauf. Vicky hingegen hatte nur wenige Möglichkeiten zur Interaktion und war in der Regel passiv. Magda formulierte gegenüber Vicky die Anfrage, ob diese eine Aufgabe probieren möchte. Magda stellte zwar die Frage, setzte jedoch unmittelbar darauf ihre eigene Vorgehensweise fort. Während der Bearbeitung der beiden Arbeitsblätter fragte Magda ihre Partnerin sechsmal, ob sie die jeweilige

8.2 Ergebnisse der Gruppen zu den einzelnen Aufgaben

Aufgabe verstanden habe. Nach einer gewissen Zeit zeigte Vicky Anzeichen von Unmut über ihre Partnerin. Obwohl Magda den Zettel und das Lernmaterial an sich nahm, blieb Vicky wachsam. In wiederholten Intervallen korrigierte Vicky Magdas Vorgehen oder erläuterte ihr die Bedeutung der gegebenen Angabe.

Zu Beginn des Arbeitsprozesses hat Magda die zehn Bohnen der Anordnung auf die zu verwendenden drei blauen Boxen verteilt. Sie schaute verwirrt und erkannte, dass dies nicht ganz richtig sein konnte, da eine Bohne übrig blieb. Bei der dritten Aufgabe wurden die Boxenanordnungen aufgelegt, was zum Erfolg führte. Es war interessant zu beobachten, dass die beiden betonten, dass die erste Anordnung der Boxen die schwierigere und die zweite die einfachere sei. Die vierte Aufgabe wurde zunächst falsch angegangen, aber Magda und Vicky erkannten den Fehler selbst und begannen von vorne. Bei Aufgabe 6 hat Magda anfangs sofort an eine Umkehroperation gedacht. Die restlichen Aufgabenstellungen löste sie alleine richtig. Am Ende kehrten sie zu Aufgabe 4 zurück. Aufgrund der getätigten Aussagen (siehe Transkript) war zu erkennen, dass eine Ablösung vom Material stattgefunden hat und somit ein Lernfortschritt erzielt wurde. Vicky und Magda ließen bei jeder Aufgabe die Boxen halb offen, was ihnen eine gute Übersicht ermöglichte.

Nach einer Bearbeitungszeit von circa 35 Minuten beendeten Vicky und Magda ihre Tätigkeit ohne die Kontrolle der Arbeitsblätter in Erwägung zu ziehen.

Gruppe 6

Zu Beginn verteilten Tobi und Sepp den gesamten Bohnenvorrat auf die Boxen wie Gruppe 2. Auch diese Gruppe arbeitete durchgehend mit halboffenen Boxen. Bei der zweiten Aufgabe sah Tobi das Ergebnis sofort. Tobi und Sepp erwähnten auch, welche Boxenanordnung bei Aufgabe 3 schwieriger sei. Bei Aufgabe 4 legte Tobi nur die erste Anordnung auf, löste dann die ganze Tabelle allein im Kopf. Sepp sah ihm verblüfft zu.

Tobi hatte die meiste Zeit das Arbeitsblatt und den Stift vor sich, während Sepp sich um die Boxenanordnungen kümmerte. Tobi bestimmte bei diesem Zweierteam, was zu tun war. Er erteilte Instruktionen wie: „Du zeichnest...ich kann nicht zeichnen.“ Sepp war der ruhigere von beiden. Die Aufgaben 1, 2, 4 und 6 übernahm Tobi. Sepp kümmerte sich um die Aufgaben 3 und 5. Diese Gruppe tauschte sich kaum gemeinsam über die Aufgaben aus und zeigte insgesamt die geringste Interaktion. Tobi übernahm eine sehr aktive Rolle, während Sepp eher zurückhaltend blieb. Die Aufgaben wurden relativ strikt aufgeteilt, sodass klar war, wer welche erledigte.

Die beiden Arbeitsblätter wurden in 14 Minuten ohne Fehler richtig gelöst. Dieses Team war das Schnellste. Zum Schluss haben sie sich gegenseitig auf die Schultern geklopft, gelacht und waren stolz aufeinander.

Gruppe 7

Max und Moritz versuchten zunächst die Aufgabe 1 im Kopf zu lösen, ohne die Anordnung aufzulegen. Da sie jedoch zu keinem plausiblen Ergebnis kamen, wies die Lehrperson darauf hin, die Boxenanordnung exakt wie auf dem Arbeitsblatt nachzulegen. Interessanterweise legten sie bei den ersten beiden Boxen die Bohnen in die Schachtel und verschlossen diese wieder. Bei der dritten blauen Box aus Aufgabe 1 hingegen legten sie die Bohnen auf die Box.



Abbildung 8.3: Videostandbild

Spannend war auch die Diskussion, als Moritz die Frage las und darauf hinwies, dass dort „können“ und nicht „müssen“ stand. Mit seinem Einwand könnte er angedeutet haben, dass es nicht um eine zwingende Bedingung (eine bestimmte Anzahl an Bohnen), sondern um eine Möglichkeit (eine maximale Anzahl an Bohnen) ging. In mathematischen oder logischen Kontexten können derartige sprachliche Nuancen signifikante Auswirkungen auf die Lösungsstrategie haben. Aufgabe 2 wurde zuerst falsch gelöst. Moritz hat jedoch den Fehler bei der Kontrolle der Arbeitsblätter gefunden. Bei der dritten Aufgabe initiierte Moritz den Prozess stets mit dem Zeichnen der Bohnen und fügte erst im Anschluss die Boxen hinzu. Allerdings wurde die Angabe nicht sinngemäß interpretiert. Die Korrektheit der beiden Boxenanordnungen ist unter der Voraussetzung gegeben, dass in die blaue Box jeweils zwei Bohnen und in die rote jeweils eine Bohne gelegt werden. Gemäß der Angabe sollten sich jedoch in jeder Box drei Bohnen befinden. Außerdem bemerkte Max, dass eine zusätzliche, schwierigere Aufgabe erstellt werden musste.

Bei Aufgabe 4 wurde von den beiden unmittelbar erfasst, dass die Boxen unterschiedliche Farben aufwiesen. Es wurde beobachtet, dass Max und Moritz in die beiden blauen Boxen keine Bohnen füllten. Dies war in der gegebenen Angabe begründet. „Legt mit leeren Boxen und Bohnen...“ Zu Beginn war den beiden nicht klar, wie die Tabelle korrekt auszufüllen sei. Nach einer kurzen Hilfestellung seitens der Lehrperson löste Moritz die restlichen Aufgaben im Kopf, wobei er fortwährend laut vor sich hin redete. Die fünfte Aufgabe stellte für beide eine signifikante Herausforderung dar. Die Ursache war eine unzureichende Interpretation der Angabe, die dazu führte, dass die beiden die Gleichungen lösten, jedoch Schwierigkeiten hatten, die Lösungen korrekt zuzuordnen. Des Weiteren wurde die Anordnung der Boxen, die es zu zeichnen galt, fehlerhaft gelöst. Bei Aufgabe 6 wurden die ersten beiden Tasks korrekt gelöst, während der dritte fehlerhaft war.

8.2 Ergebnisse der Gruppen zu den einzelnen Aufgaben

Moritz zeigte ein Verhalten, das als nervös und unruhig beschrieben werden könnte. Er las alle Angaben mit lauter Stimme und versuchte, die gestellten Aufgaben allein zu lösen. Sein Partner unterstützte ihn, allerdings gab Moritz die Kommandos und erläuterte in hoher Lautstärke seine Vorgehensweise. Max zählte stets laut mit, beispielsweise beim Auflegen der Bohnen.

Nach einer Arbeitszeit von 22 Minuten beendeten Max und Moritz die Bearbeitung der Arbeitsblätter und überprüften die Ergebnisse. Dabei wurde ein Fehler identifiziert und korrigiert.

Gruppe 9

Zu Beginn der Untersuchung zeigten Pia und Lea ein zurückhaltendes Verhalten, das im Verlauf der Zeit jedoch eine deutliche Zunahme an Mut aufwies. Die beiden Teilnehmerinnen arbeiteten im Team sehr gut zusammen und meisterten jede Aufgabe gemeinsam. Auffallend war die kontinuierliche Abwechslung der beiden beim Zeichnen und Aufschreiben der Ergebnisse sowie ihr konstruktives Miteinander. Die Probandinnen legten bei allen Aufgaben die Bohnen in die Boxen und verschlossen diese wieder. Darüber hinaus konnte eine Tendenz zur Bildung von Zweier- bzw. Dreierschritten bei der Zählung festgestellt werden.

Obwohl das Ergebnis der ersten beiden Aufgaben korrekt ermittelt wurde, erfolgte die Dokumentation des Resultats in fehlerhafter Form. Die beiden Schülerinnen zählten die Anzahl der Bohnen in allen blauen bzw. roten Boxen zusammen und dokumentierten das Ergebnis auf dem Arbeitsblatt. Bei der zweiten Aufgabe gelangten Pia und Lea zu der Erkenntnis, dass die Gleichung nur dann stimmen würde, wenn sie noch zehn Bohnen auf die beiden Boxen verteilen würden. Daraus schlossen sie, dass in jede Box fünf Bohnen gehören müssten und überprüften diese Hypothese. Bei der dritten Aufgabe wurde den beiden unmittelbar klar, dass in jeder Box drei Bohnen enthalten sein mussten und dass sie nur Boxen gleicher Farbe verwenden durften. Zudem wurde die Konzeption einer simpleren und einer komplexeren Aufgabe verinnerlicht.

Bei Aufgabe 4 ist ein Muster erkennbar: Pia und Lea gingen ähnlich vor wie bei den Aufgaben 1 und 2. Allerdings bemerkten sie schnell, dass diese Vorgehensweise nicht korrekt sein konnte, da in Boxen unterschiedlicher Farbe auch unterschiedliche Anzahlen an Bohnen zulässig waren. Die Videoanalyse zeigte jedoch, dass die Angabe an dieser Stelle nicht genau gelesen wurde, weshalb die Zahlen in der Tabelle nicht stimmten. Ein Ergebnis war jedoch zufällig korrekt. Außerdem wurde beobachtet, dass die beiden nach jedem Versuch die Boxen vollständig entleerten und jedes Mal neu befüllten. Die fünfte Aufgabe wurde vorerst übersprungen, da die Mädchen nicht wussten, wie sie diese angehen sollten. Bei der letzten Aufgabe begannen Lea und Pia mit dem zweiten Aufgabenbereich. Hier konnte beobachtet werden, dass Pia noch nicht mit der Schreibweise einer Gleichung vertraut war, da sie das Ergebnis in die Box hineinschreiben wollte.

8 Ergebnisse

Die restlichen Aufgabenstellungen wurden alle korrekt gelöst. In Bezug auf den fünften Aufgabenbereich, der anfänglich Schwierigkeiten bereitete, wurde nach einer kurzen Hilfestellung seitens der Lehrperson den beiden die Bewältigung der Aufgabe deutlich erleichtert. Infolgedessen wurde auch diese Aufgabe ohne Fehler gelöst.

Nach einer Zeitspanne von 26 Minuten beendeten die Schülerinnen die Bearbeitung der Arbeitsblätter, ohne eine Überprüfung vorzunehmen.

Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede der Gruppen

Während der Bearbeitung der ersten Aufgabe zeigte sich, dass jede Gruppe Unterstützung benötigte. Die sechste Gruppe war lediglich auf die Beantwortung einer Detailfrage angewiesen, während die anderen Gruppen genauere Erläuterungen und vor allem die Gruppen 2 und 9 den meisten Support brauchten. In der Folge wurde eine erneute Erklärung der beiden Regeln durchgeführt, die bei jeder Aufgabe zu befolgen waren. Mittels gezielter Fragen wurde sichergestellt, dass die Gruppen die beiden Regeln verstanden und mit dem Lernmaterial arbeiten konnten.

Bei der ersten Aufgabe war besonders auffällig, dass drei der fünf Gruppen – genauer gesagt, die Gruppen 1, 2 und 6 – die Bohnen aus der Anordnung entnehmen wollten, um mit diesen die Boxen zu befüllen. An dieser Stelle wurde seitens der Lehrperson interveniert, um die Spielregeln zu verdeutlichen.

Die Gruppen 1, 2 und 6 haben bei den ersten beiden Aufgaben einen vollständigen Satz als Antwort verfasst. Gruppe 7 und 9 dokumentierten lediglich die Anzahl der in den Boxen befindlichen Bohnen.

Bei der dritten Aufgabe wurden ebenfalls divergierende Herangehensweisen beobachtet. Die Boxenanordnung wurde von den Gruppen 1, 6 und 7 nicht aufgelegt. Demgegenüber folgten Gruppe 2 und 9 der Anweisung der Aufgabenstellung. An dieser Stelle möchte ich anmerken, dass sich Gruppe 1, 6 und 7 ausschließlich aus männlichen Teilnehmern zusammensetzten. Gruppe 2 und 9 waren durch Mädchen besetzt.

Die eigenständige Überprüfung der Aufgaben erfolgte durch die Gruppen 1, 6 und 7. Die Gruppen 2 und 9 unternahmen keine derartigen Kontrollen.

Variablen sind nicht nur auf Buchstaben als Stellvertreter beschränkt, sondern können in verschiedenen Formen auftreten – beispielsweise als Wörter oder andere Zeichen (Akinwunmi, 2012). Besonders interessant sind in diesem Zusammenhang die Begriffe, die für „Box“ bzw. „Bohne“ verwendet wurden. Diese sogenannten Wortvariablen dienen in der Mathematik dazu, mathematische Objekte zu repräsentieren. Alle Gruppen, die an der Untersuchung teilnahmen, verwendeten verschiedene Synonyme.

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

Folgende Termini wurden im Zusammenhang mit dem Begriff „Box“ verwendet:

- „Kästchen“
- „hineinlegen“
- „Schachtel“
- „Blaue“
- „Rote“
- „Ding(s)“
- „Packung“

Für das Wort „Bohne“ wurden folgende Synonyme verwendet:

- „Pünktchen“
- „Punkterl“
- „Kuglerl“
- „Punkt“

Die Verwendung von Zahlen bzw. Summen zur Erfassung der jeweiligen Bohnenanzahl konnte in sämtlichen Gruppen beobachtet werden. Zudem wurden in allen Gruppen zahlreiche Aufgabenstellungen laut vorgelesen. Darüber hinaus wurde festgestellt, dass die Teilnehmer:innen laut mitzählten, wenn sie die Bohnen auflegten oder in die Box legten.

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

Die Auswertung der Daten basiert auf einer gezielten Kategorisierung, die eine strukturierte Analyse im Hinblick auf die beiden Forschungsfragen ermöglicht. Die zentralen Inhalte dieser Fragen dienten als Orientierungsrahmen für die Entwicklung der Kategorien. Dabei wurde überlegt, welche Aspekte besonders relevant für die Beantwortung der Forschungsfragen sind. Sowohl theoretische Grundlagen als auch methodische Überlegungen wurden in diesen Prozess einbezogen, um eine nachvollziehbare und fundierte Ergebnisauswertung zu gewährleisten.

Die definierten Kategorien bilden die Grundlage für die systematische Analyse. Im Kontext des Einstiegs in die Algebra ist insbesondere das „Erkennen von Beziehungen“ eine essenzielle Fähigkeit. Da die Untersuchung auf Partner:innenarbeit mit didaktischen Hilfsmitteln fokussiert ist, spielen zudem die Kategorien „Kommunikation von Ideen“,

„Fehler erkennen und korrigieren“, „Kooperation“ und „Hilfestellung“, eine zentrale Rolle. Für jede dieser Kategorien werden zwei aussagekräftige Beispiele ausgewählt, die durch Transkriptausschnitte und eine detaillierte Analyse ergänzt werden.

Die zweite Forschungsfrage untersucht, inwieweit sich Schüler:innen vom konkreten Material lösen und abstraktes algebraisches Denken entwickeln können. Hierzu wurden die Kategorien „Abstraktion vom Material“, „Verallgemeinerung von Strategien“, „Logische Schlussfolgerungen“ und „Übertragung auf algebraische Konzepte“ definiert. Auch in diesem Bereich werden pro Kategorie zwei relevante Beispiele analysiert, um aufzuzeigen, inwiefern sich die Lernenden zunehmend von der anschaulichen Darstellung hin zu einem abstrakten Verständnis bewegen.

Durch die strukturierte Kategorisierung, die exemplarische Darstellung ausgewählter Transkriptausschnitte sowie die entsprechenden Analysen ist eine fundierte Beantwortung der Forschungsfragen gewährleistet. Dies erlaubt es, sowohl individuelle Denkprozesse als auch kooperative Lernstrategien differenziert zu betrachten und deren Bedeutung für den algebraischen Lernprozess herauszuarbeiten.

Kategorie „Erkennen von Beziehungen“

Bsp. 1: Gruppe 2 bearbeitet Aufgabe 2

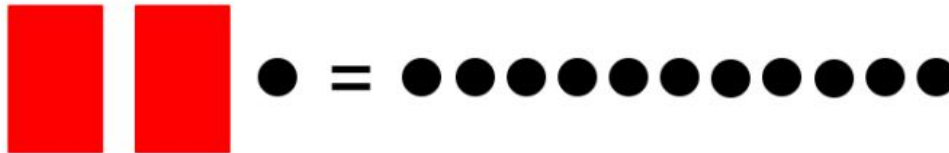


Abbildung 8.4: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 2

Transkript

07:50 **Magda** liest 2)b) vor.

08:15 **Vicky**: Wenn da elf sind, müssten dort auch elf sein.

08:20 **Magda**: Warte einmal, wo ist denn das einzelne hin? Wir haben ja eins gehabt, wo ist denn das jetzt hin?

08:28 **Vicky**: Das hast du hierher gegeben. (Vicky legt die Bohne zurück.)

08:30 **Magda**: Wirklich? Aso, hoppala.

08:35 **Magda**: Da müssen wir jetzt wahrscheinlich, da ... wir müssen da fünf reinlegen und dann haben wir elf.

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

08:49 **Magda:** Ja!

08:50 **Vicky:** Aber da ist auch eine. (Vicky zeigt auf die einzelne Bohne.)

08:55 **Magda:** Ja, eh. Sind fünf, äh zehn insgesamt und elf und da haben wir auch elf. Also fünf hinschreiben.

09:05 **Vicky** schreibt die Antwort auf.

Analyse

Die ausgewählte Stelle des Transkripts passt gut zur Kategorie „Erkennen von Beziehungen“, da die Schüler:innen logische Zusammenhänge zwischen Mengen herstellen und Abhängigkeiten erkennen. Vicky stellt zunächst fest, dass die Anzahl der Bohnen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich sein muss („Wenn da elf sind, müssten dort auch elf sein.“) und zeigt damit ein Verständnis für das Gleichsetzen der Kardinalität von Mengen. Magda überlegt daraufhin, wie viele Bohnen noch hinzugefügt werden müssen, um diese Gleichheit herzustellen. Während sie mit beiden Händen jeweils eine Bohne in die Boxen gibt, wird ihr klar, dass fünf die richtige Lösung sein müsste.

Vicky bemerkt anschließend, dass sich noch eine einzelne Bohne außerhalb der Boxen befindet, woraufhin Magda ihren Lösungsweg erneut erklärt. Dieser Austausch verdeutlicht, dass die Schüler:innen sich aktiv mit den Zahlenbeziehungen auseinandersetzen. Schließlich gibt Magda die explizite Anweisung, fünf als Lösung aufzuschreiben, und Vicky hält das Ergebnis schriftlich fest.

Das Material „Knack die Box“ unterstützt diesen Prozess, indem es eine haptische und visuelle Darstellung mathematischer Zusammenhänge ermöglicht. Die Schüler:innen können den Einstieg in die Algebra nicht nur abstrakt erfahren, sondern auch durch das konkrete Befüllen der Boxen mit Bohnen erleben und überprüfen. Fehler werden unmittelbar sichtbar und können durch gemeinsames Überlegen korrigiert werden. Darüber hinaus fördert das Material kooperatives Lernen, indem die Schüler:innen ihre Überlegungen diskutieren, reflektieren und sich gegenseitig bei der Lösungsfindung unterstützen.

In dieser Szene wird besonders deutlich, wie das Hindeuten auf die Boxen und die Bohnen Magda dabei hilft, ihre Denkweise zu verdeutlichen und Vicky das Verständnis erleichtert. Die explizite Verbalisierung und Veranschaulichung der Überlegungen trägt zu einem vertieften Verständnis von Mengen- und Zahlenbeziehungen bei und stärkt nachhaltig das konzeptuelle Wissen über das Lösen von Gleichungen.

Bsp. 2: Gruppe 6 bearbeitet Aufgabe 2

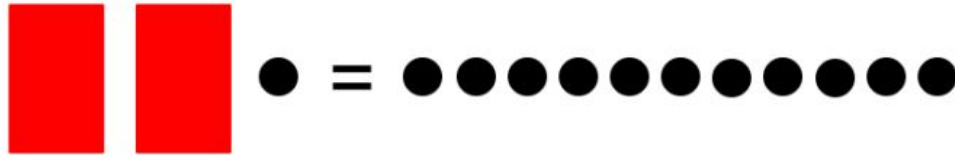


Abbildung 8.5: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 2

Transkript

02:50 **Tobi** und **Sepp** lesen die Angabe für Aufgabe 2.

02:57 **Tobi**: Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf Bohnen.

03:20 **Tobi**: Wir müssen zusammenbringen, dass da ... ist eh easy! In eine Box gehören fünf rein. Na, des gibt's nicht, Die sind so rutschig. Fünf, da gehören fünf ein. Dann sind beide gleich viel.

Analyse

Auch diese Stelle des Transkripts passt gut zur Kategorie „Erkennen von Beziehungen“. Tobi beginnt, indem er die Anzahl der Bohnen bestimmt und insgesamt elf Bohnen zählt. Anschließend überlegt er, wie die Bohnen auf die beiden roten Boxen aufgeteilt werden müssen, um eine Gleichheit herzustellen. Noch bevor er die Bohnen tatsächlich verteilt, erkennt er intuitiv die Lösung: In jede Box müssen fünf Bohnen gelegt werden, damit sich auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Anzahl an Bohnen befindet.

Nachdem Sepp die Boxenanordnung vorbereitet hat, überprüfen die beiden Tobis Vermutung, indem sie jeweils fünf Bohnen in die Boxen legen. Während dieses Prozesses wird ihnen klar, dass Tobis Annahme korrekt ist. Dies zeigt besonders, dass vor allem Tobi das Prinzip des Gleichsetzens von Mengen verstanden hat und Beziehungen zwischen den Zahlen erkennt.

Diese Szene zeigt besonders gut, wie das Material die Schüler:innen dabei unterstützt, Beziehungen zwischen Zahlen zu erkennen und ihre Lösungsstrategien zu überprüfen. Durch die Kombination aus eigenständigem Denken, haptischer Erfahrung und gemeinsamer Reflexion wird auch in diesem Fall das konzeptuelle Wissen über das Lösen von Gleichungen nachhaltig gestärkt.

Kategorie „Kommunikation von Ideen“

Bsp. 1: Gruppe 1 bearbeitet Aufgabe 4

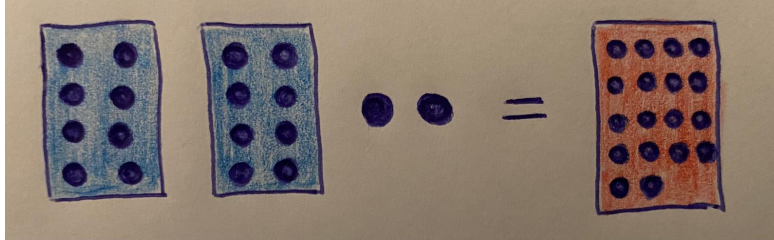


Abbildung 8.6: Besondere Anordnung der Bohnen von Aufgabe 4

Transkript

- 21:25 **Paul** Das sind dann sechzehn in einer roten Box und acht in einer blauen.
- 21:30 **Fritz:** Sechzehn. Warte, das kann man ja 4x4 auflegen. (Beide legen 4x4 Bohnen auf der roten Box auf.)
- 21:45 **Fritz:** Das sind nicht sechzehn. Sechzehn und zwei sind achtzehn (Paul zählt nach und stimmt ihm zu.)

Analyse

Der gegebene Transkriptausschnitt zeigt eine Interaktion zwischen zwei Schülern, in der sie ihre Überlegungen austauschen und ihre Lösung schrittweise überprüfen. Paul nimmt zunächst an, dass sich sechzehn Bohnen in der roten Box und acht in der blauen Box befinden. Fritz hinterfragt diese Aussage und zählt die Bohnen nach. Nach den ersten vier gezählten Bohnen schlägt er vor, die Bohnen in einem 4x4-Raster anzuordnen.

Die Idee, 4x4 Bohnen aufzulegen, wird kommuniziert und sofort ausgeführt. Diese optisch einfach nachvollziehbare Variante hilft den Schülern Struktur in ihr Denken zu bringen und die Anzahl der Bohnen sofort im Blick zu haben.

Gemeinsam legen die beiden Schüler 4x4 Bohnen auf die rote Box (siehe Abbildung 8.6). Anschließend überprüft Fritz das Ergebnis erneut und stellt fest, dass die Gesamtzahl nicht sechzehn beträgt. Er korrigiert Paul: „4x4 ist sechzehn, plus zwei sind achtzehn.“ Paul zählt noch einmal nach und bestätigt die Korrektur. Während des gesamten Prozesses äußern beide Schüler ihre Überlegungen laut und passen ihre Strategie basierend auf den beobachteten Ergebnissen an.

Bsp. 2: Gruppe 2 bearbeitet Aufgabe 1

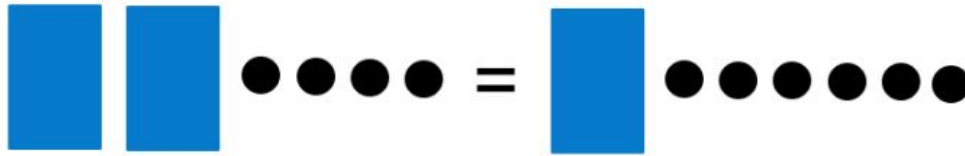


Abbildung 8.7: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 1

Transkript

- 03:40 **Magda:** Dann legen wir da zwei rein und dann da wieder zwei und da wieder zwei, da wieder zwei und da wieder zwei, dann da wieder zwei, ...
- 04:05 **LP:** Zählen müsst ihr auch mal!
- 04:10 **Magda:** Zehn, zwölf, ... alle miteinander?
- 04:15 **LP:** Legt mal in jede Box eine Bohne rein und dann zählt, wie viele Bohnen ihr insgesamt habt.
- 04:20 **Vicky:** Es sollen ja gleich viele da sein, Magda.
- 04:40 **Magda** legt in jede Box eine Bohne.
- 04:45 **LP:** Wie viele Bohnen befinden sich auf der linken Seite?
- 04:50 **Magda:** Sechs.
- 04:52 **LP:** Und auf der rechten?
- 04:53 **Magda:** Sieben.
- 04:55 **Magda** legt eine Bohne in eine blaue Box auf der linken Seite.
- 04:58 **LP:** Wenn du in eine blaue Box zwei Bohnen reinlegst, musst du in alle blauen Boxen zwei Bohnen reinlegen. Lest euch noch einmal die Regeln durch.
- 05:10 **Magda** und **Vicky** lesen sich die Regeln erneut durch.
- 05:30 **Magda** legt in jede blaue Box eine zweite Bohne.
- 05:50 **Magda:** Und jetzt stimmt es. Das sind acht und das sind auch acht.

Analyse

Auch der vorliegende Transkriptausschnitt kann der Kategorie „Kommunikation von Ideen“ zugewiesen werden, da die Schülerinnen aktiv ihre Überlegungen kundtun und Lösungswege gemeinsam erörtern. Zu Beginn legt Magda die Bohnen systematisch in die Boxen, während sie ihr Vorgehen verbal beschreibt. Ihre Äußerung lässt den Schluss zu,

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

dass sie die Regeln noch nicht vollständig verstanden hat. Die Probandin beabsichtigt anfänglich, den kompletten Bohnenvorrat gleichmäßig auf die Boxen zu verteilen.

Die Lehrperson (LP) greift in die Interaktion ein, indem sie auf die Notwendigkeit des Zählens hinweist („Zählen müsst ihr auch mal!“), was die Schülerinnen zur Überprüfung ihrer Anordnung anregt. Magda beginnt daraufhin mit dem Zählen, wobei sie unsicher wirkt („Zehn, zwölf, ... alle miteinander?“).

Vicky betont, dass die Anzahl der Bohnen in allen drei Boxen gleich sein soll. Diese Interaktion zeigt, dass die Schülerinnen ihre Strategien gemeinsam hinterfragen und überarbeiten. Gemäß den Anweisungen der Lehrperson sowie von Vicky nimmt Magda eine erneute Überprüfung der Verteilung vor und passt diese entsprechend an.

Die Lehrkraft greift ein weiteres Mal ein, indem sie präzise Fragen stellt („Wie viele Bohnen befinden sich auf der linken Seite?“). Mit diesen Fragen wird Magdas Blick auf die Mengenverhältnisse gelenkt. Als Magda eine Unstimmigkeit bemerkt (sechs Bohnen auf der linken, sieben auf der rechten Seite), ändert sie ihre Strategie und korrigiert die Verteilung.

Magda wird von der Lehrperson darauf hingewiesen, dass die zu Beginn beschriebenen Regeln für alle Aufgaben gelten. Dies führt dazu, dass die Schülerinnen die Regeln erneut lesen und ihre Vorgehensweise überdenken. Am Ende legt Magda in jede blaue Box eine zweite Bohne und stellt fest, dass die Verteilung nun ausgeglichen ist („Und jetzt stimmt es. Das sind acht und das sind auch acht.“).

Insgesamt verdeutlicht der Transkriptausschnitt den aktiven Austausch von Ideen und die fortlaufende Anpassung der Lösungsstrategien durch die Schülerinnen. Die Lehrkraft spielt dabei eine unterstützende Rolle, indem sie den Reflexionsprozess der Schülerinnen durch gezielte Hinweise und Fragen anregt. Der Dialog macht deutlich, auf welche Weise Kommunikation mathematische Denkprozesse fördern kann und wie Fehler im Rahmen des Lernprozesses dazu dienen können, eine korrekte Lösung zu finden.

Kategorie „Fehler erkennen und korrigieren“

Bsp. 1: Gruppe 1 bearbeitet Aufgabe 4

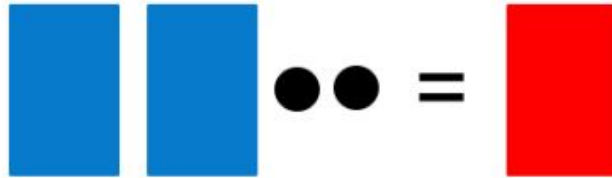


Abbildung 8.8: Aufgabe 4 - Boxenanordnung mit unterschiedlichen Farben

Transkript

- 15:30 **Fritz** und **Paul** lesen die Angabe und die Regeln noch einmal durch.
- 15:45 **Fritz**: Ach so! Es sind ja verschiedene Farben. Dann können wir eh noch eine reingeben.
- 15:55 **Fritz**: Fertig, es ist ja nicht die gleiche Farbe.
- 16:00 **Fritz**: Anzahl der Boxen in der blauen ...
- 16:03 **Paul**: Du meinst wohl Anzahl der Bohnen in einer blauen Box.
- 16:05 **Fritz**: Ich bin nicht gut in Deutsch.

Analyse

Diese Szene zeigt, wie sinnerfassendes Lesen das Verständnis der Aufgabenstellung verbessert. Durch das erneute Lesen erkennt Fritz einen wichtigen Zusammenhang, den er zuvor übersehen hat. Zudem wird deutlich, wie Fehler im Team erkannt und korrigiert werden: Paul stellt die unpräzise Formulierung von Fritz richtig, wodurch die mathematische Aussage klarer wird. Dies zeigt die Bedeutung von kooperativem Lernen und präziser Sprache im mathematischen Kontext.

Ein weiteres interessantes Detail ist die Bemerkung von Fritz, dass er „nicht gut in Deutsch“ sei. Dies deutet darauf hin, dass sprachliche Unsicherheiten das mathematische Arbeiten beeinflussen können. Hier wird deutlich, dass sinnerfassendes Lesen und sprachliche Ausdrucksfähigkeit eng mit dem Erkennen und Korrigieren von Fehlern verbunden sind. Schüler:innen, die Schwierigkeiten mit der Sprache haben, könnten möglicherweise auch Probleme beim Erfassen mathematischer Zusammenhänge entwickeln. Insgesamt wird klar, dass genaues Lesen und gegenseitige Korrektur das Verständnis und die Lösungsfindung wesentlich fördern.

Bsp. 2: Gruppe 9 bearbeitet Aufgabe 3



Abbildung 8.9: Aufgabe 3 - Videostandbild von Gruppe 9

Transkript

09:10 **Pia:** Dann tun wir eine rote Box dazu?

09:12 **Lea:** Ja. Nein, wir dürfen ja keine rote Box ... es müssen ja alle in der gleichen Farbe sein.

09:18 **Pia:** Eine blaue wieder?

09:19 **Lea:** Ja. Wieder drei.

Analyse

Diese Szene zeigt deutlich, wie Fehler im gemeinsamen Lernprozess erkannt und korrigiert werden. Pia schlägt vor, eine rote Box hinzuzufügen, woraufhin Lea zunächst zustimmt, dann jedoch ihren Irrtum bemerkt und sich selbst korrigiert. Sie verweist darauf, dass laut Aufgabenstellung alle Boxen die gleiche Farbe haben müssen.

Pia nimmt die Korrektur direkt auf und fragt gezielt nach einer blauen Box als Alternative. Lea bestätigt dies und ergänzt, dass sie drei blaue Boxen für ihre Boxenanordnung verwenden sollten. Dieser Austausch zeigt eine konstruktive Zusammenarbeit, bei der Fehler nicht nur erkannt, sondern auch gemeinsam korrigiert werden. Durch die sofortige Reflexion und Anpassung ihrer Vorgehensweise vermeiden sie eine falsche Lösung und stellen sicher, dass sie der Aufgabenstellung korrekt folgen.

Besonders auffällig ist, dass der Fehler nicht von einer außenstehenden Person, sondern innerhalb der Gruppe selbst korrigiert wird. Dies unterstreicht die Bedeutung von kooperativem Lernen, bei dem Schüler:innen ihre eigenen Denkprozesse reflektieren und sich gegenseitig unterstützen. Der Dialog zeigt zudem, wie wichtig genaues Lesen und das Prüfen von Regeln für den mathematischen Lernprozess sind.

Kategorie „Kooperation“

Bsp. 1: Gruppe 1 bearbeitet Aufgabe 4 und 5

Transkript

19:40 **Paul** trägt das Ergebnis in das Arbeitsblatt ein.

19:50 **Paul**: So, ich will jetzt auch mal.

19:52 **Fritz**: Passt!

20:00 **Paul**: Überall können wir ja zwei dazugeben.

...

26:23 **Paul**: Wollen wir uns abwechseln, dass ich jetzt B mache und du dann C?

Analyse

In dieser Zweiergruppe kann eine hervorragende Zusammenarbeit beobachtet werden. Die beiden wechseln sich nicht nur beim Befüllen der Boxen mit Bohnen und beim Aufschreiben der Ergebnisse ab, sondern unterstützen sich auch aktiv im Denkprozess. Sie erklären einander ihre Lösungswege, stellen Fragen und diskutieren über verschiedene Herangehensweisen an die Aufgabenstellungen. Dabei zeigt sich, wie wertvoll Kooperation für den Lernprozess ist: Durch das gegenseitige Erklären und Begründen können sie ihre eigenen Gedanken klarer formulieren und Missverständnisse gemeinsam klären.

Besonders bemerkenswert ist die harmonische Arbeitsweise der beiden. Sie übernehmen nicht strikt getrennte Aufgaben, sondern arbeiten gemeinsam an jeder Aufgabe, hören einander zu und entwickeln ihre Lösungsstrategien im Austausch. Nicht nur das mathematische Verständnis wird durch diese Form der Kooperation gefördert, sondern auch soziale Kompetenzen wie Kommunikation, Kompromissbereitschaft und gegenseitiges Vertrauen gestärkt.

Durch die Kooperation im Lernprozess werden neue Denkwege eröffnet, da der Austausch mit anderen Perspektiven stattfindet. Besonders beim Lösen von Gleichungen kann das gemeinsame Nachdenken über verschiedene Herangehensweisen zu einem vertieften Verständnis führen. Durch gegenseitige Unterstützung und Wissensaustausch profitieren beide Lernenden gleichwertig voneinander und entwickeln über die Zeit ein sicheres Fundament in der Mathematik.

Bsp. 2: Gruppe 9 bearbeitet Aufgabe 2, 3 und 4

Transkript

05:08 **Lea:** Magst du schreiben?

...

11:25 **Pia:** Wir brauchen einen blauen Stift. (Pia zeichnet zwei blaue Boxen.)
Magst du? Zeichnest du die Bohnen?

...

19:30 **Pia:** Ich hab gerade geschrieben, du bist wieder dran. Das sind vierzehn und das sind sechzehn. Wieder ausleeren.

Analyse

Die beiden Mädchen aus Gruppe 9 zeigen eine bemerkenswerte Zusammenarbeit. Sie sind sichtlich froh, eine Partnerin zu haben, mit der sie sich austauschen können. Kein Ergebnis wird voreilig notiert - stattdessen wird jede Idee erst gemeinsam besprochen, reflektiert und gegebenenfalls angepasst. Diese Herangehensweise verdeutlicht, wie sehr sie auf Kooperation setzen, um ein fundiertes Verständnis der Aufgaben zu entwickeln.

Bemerkenswert ist ihr stets respektvoller und bedachter Umgang miteinander. Sie schenken einander Raum für Ideen und nehmen Vorschläge ernst. Sie entwickeln ihre Lösungsstrategien im Dialog und hinterfragen die einzelnen Schritte kritisch, anstatt isoliert zu arbeiten. So entsteht ein produktiver Austausch, der nicht nur das mathematische Verständnis fördert, sondern auch wichtige soziale Kompetenzen wie Kommunikation, aktives Zuhören und gemeinsames Entscheidungsfinden stärkt.

Besonders positiv zu beobachten ist, dass sie abwechselnd verschiedene Rollen übernehmen - mal ist eine für das Zeichnen zuständig, mal für das Schreiben oder das Überprüfen der Ergebnisse. Durch diese flexible Rollenverteilung wird deutlich, dass sie sich im Lernprozess als gleichwertige Partnerinnen betrachten und einander unterstützen.

Diese Form der Zusammenarbeit zeigt auf, welchen hohen Wert kooperatives Lernen für die Entwicklung mathematischer Konzepte hat. Beide können nicht nur ihre individuellen Fähigkeiten stärken, sondern auch ein vertieftes Verständnis für das Lösen von Gleichungen entwickeln, indem sie sich ständig austauschen, gemeinsam reflektieren und ihre eigenen Überlegungen überprüfen. Diese Gruppe arbeitet strukturiert und respektvoll - ein Musterbeispiel für eine erfolgreiche Kooperation im Lernprozess.

Kategorie „Hilfestellung“

Bsp. 1: Gruppe 1 bearbeitet Aufgabe 4

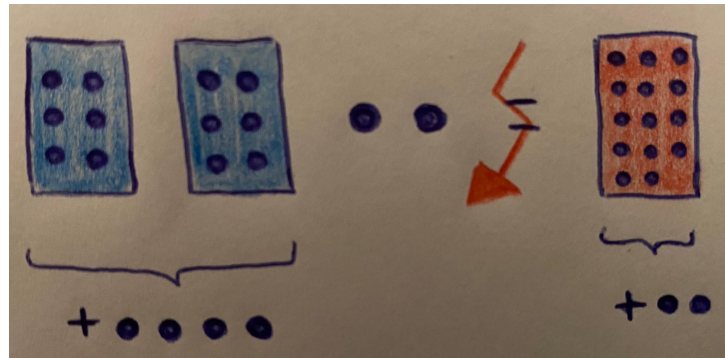


Abbildung 8.10: Aufgabe 4 - Hinzugabe unterschiedlicher Bohnenanzahlen

Transkript

- 22:00 **Paul:** Dann haben wir sechzehn in einer roten Box.
- 22:10 **Fritz:** Aber es müssen ja gleich viele sein. Wir können nicht da vier dazugeben und da zwei. Das muss ja gleich sein.
- 22:25 **Paul:** Hier haben wir eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht in einer blauen Box und achtzehn in einer roten Box.
- 22:40 **Fritz:** Warte ... wie viele sind da jetzt drin?
- 22:42 **Paul:** Acht.
- 22:45 **Fritz:** Acht mal zwei ist sechzehn und zwei ist achtzehn, also stimmt es.

Analyse

Dieser Transkriptausschnitt verdeutlicht eine besondere Erkenntnis von Fritz. Er hat verstanden, dass eine Gleichung immer dann besteht, wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Bohnen - in diesem Fall vierzehn - vorhanden ist. Er erkennt zudem, dass es unmöglich ist, unterschiedliche Anzahlen hinzuzufügen, ohne das Gleichgewicht zu stören. („Wir können nicht da vier dazugeben und da zwei.“) Diese mentale Vorstellung einer Waage ist essenziell für das Verständnis des Gleichungslösens. Jede Veränderung - sei es das Hinzufügen oder Wegnehmen von Elementen - muss stets so erfolgen, dass die Balance erhalten bleibt. Besonders wichtig wird dieses Prinzip bei Äquivalenzumformungen: Nur wenn auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Veränderung vorgenommen wird, bleibt die Lösung gültig. Fritz zählt nach und stellt fest, dass sich nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich viele Bohnen befinden.

Bsp. 2: Gruppe 2 bearbeitet Aufgabe 6

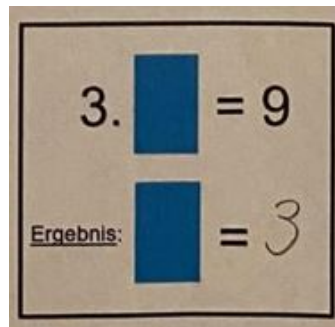


Abbildung 8.11: Schwierigkeiten mit der Notation bei Aufgabe 6

Transkript

31:20 **Vicky:** Wieso steht das da?

31:21 **Magda:** Das Ergebnis?

31:22 **Vicky:** Nein, das da.

31:23 **Magda:** Der Dreier?

31:24 **Vicky:** Ja.

31:25 **Magda:** Ja, dh. drei Boxen sind es. Dh, es sind drei Boxen.

Analyse

An diesem Transkriptausschnitt wird deutlich, dass Vicky zunächst Schwierigkeiten mit der Schreibweise „3 mal blaue Box“ hat und deren Bedeutung nicht auf Anhieb versteht. Erst durch Magdas Erklärung erkennt sie, dass damit drei einzelne blaue Boxen gemeint sind. Diese Fähigkeit, mathematische Notationen richtig zu interpretieren und in eine sinnvolle Vorstellung zu überführen, ist essenziell für das Verständnis von Gleichungen. Theoretisch wäre es auch möglich gewesen, drei blaue Boxen tatsächlich aufzuzeichnen. Im Rahmen dieser Aufgabe wird das Ziel verfolgt, den Schüler:innen die abstrakte Schreibweise von Gleichungen zu vermitteln und sie dahingehend zu motivieren, die Lösung auf den ersten Blick zu erkennen. Dadurch wird ein erster Schritt gemacht, um den Schüler:innen symbolische Darstellungen in der Algebra näherzubringen. Ein wesentlicher Aspekt dabei ist, dass mathematische Ausdrücke sowohl visuell wahrgenommen als auch gedanklich verarbeitet werden können. Dadurch wird ein vertieftes Verständnis für algebraische Zusammenhänge möglich.

Kategorie „Abstraktion vom Material“

Bsp. 1: Gruppe 2 bearbeitet Aufgabe 4

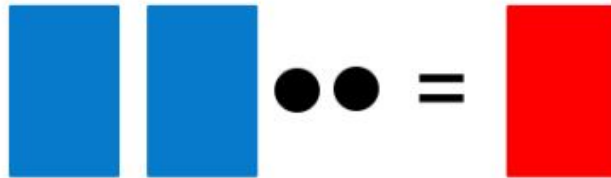


Abbildung 8.12: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4

Transkript

33:57 **Magda:** Dann haben wir da ... sieben und sechzehn. Dann müssen wir da wieder zwei reingeben, dann sind da achtzehn und da sind immer jeweils acht drinnen. Dann geben wir da wieder welche rein ... das sind dann neun und zwanzig. Verstehst?

34:15 **Vicky** leert die Bohnen aus der Box.

34:16 **Magda:** Nein, nein, du musst nicht wieder zählen, das wissen wir jetzt. Ich habe zwei reingegeben, ist egal. Dann haben wir ... dann legen wir da Bohnen rein. Dann haben wir zehn Bohnen jeweils drinnen und da auch nochmal zwei sind zweiundzwanzig Bohnen. Zehn und zweiundzwanzig (Magda notiert Ergebnis). Verstehst du es, Vicky?

34:37 **Vicky:** Mhm.

Analyse

Diese Szene veranschaulicht eindrucksvoll den schrittweisen Prozess, mit dem Magda und Vicky die Aufgabe lösen. Zu Beginn stützen sie sich stark auf das konkrete Material, indem sie die Bohnen in die Boxen legen und die Mengen durch physisches Nachzählen überprüfen. Dies zeigt, dass sie die Aufgabe noch nicht rein abstrakt lösen können, sondern die visuelle und haptische Unterstützung benötigen.

Magda übernimmt dabei eine führende Rolle und strukturiert das Vorgehen. Sie bestimmt die Anzahl der Bohnen, gibt klare Anweisungen und lenkt Vickys Aufmerksamkeit auf die entscheidenden Schritte. Auffällig ist, dass Magda eine bestimmte Systematik verwendet: Sie füllt die blauen Boxen stets mit jeweils einer Bohne und die rote Box mit zwei Bohnen. Während sie rechnet, verbalisiert sie ihre Gedanken laut, was sowohl ihr eigenes Verständnis festigt als auch Vicky Orientierung geben soll.

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

Ein Schlüsselmoment in der Szene ist der Moment, als Vicky die Bohnen aus der Box leert. Diese Handlung unterbricht den Prozess, was Magda sichtlich irritiert. Ihre aufbrausende Reaktion („Nein, nein, du musst nicht wieder zählen, das wissen wir jetzt. Ich habe zwei reingegeben, ist egal.“) deutet darauf hin, dass sie selbst den Übergang zu einer abstrakteren Denkweise bereits vollzogen hat, während Vicky noch unsicher ist. Magda wirkt in diesem Moment ungeduldig, da sie die Notwendigkeit des erneuten Nachzählens nicht mehr sieht.

Magda zeigt eine aktive Rolle, indem sie kontinuierlich die Arbeitsblätter und einen Stift in Anspruch nimmt und Vicky direkt instruiert. Es ist ein gewisses Ungleichgewicht in der Zusammenarbeit zu erkennen: Während Magda die führende Rolle übernimmt, bleibt Vicky zurückhaltend und folgt den Anweisungen ohne großen Widerspruch.

Auch die Gestik unterstützt diese Dynamik. Magda zeigt mit ihren Händen auf die Boxen, bewegt die Bohnen aktiv und setzt ihre Körpersprache ein, um ihre Erklärungen zu unterstreichen. Vicky hingegen bleibt eher passiv und führt die von Magda vorgegebenen Handlungen aus.

Insgesamt zeigt die Szene den Übergang von einer materialgestützten Lösung hin zu einer abstrakteren Denkweise, allerdings mit einer klaren Hierarchie zwischen den beiden Schülerinnen. Während Magda die Abstraktion bereits verinnerlicht hat, braucht Vicky noch die konkrete Unterstützung durch das Material. Magdas Ungeduld könnte ein Hinweis darauf sein, dass sie sich nicht ausreichend auf Vickys Lernprozess einlässt und eher ihren eigenen Fortschritt in den Vordergrund stellt.

Bsp. 2: Gruppe 6 bearbeitet Aufgabe 4

4.)



- Legt mit leeren Boxen und Bohnen das obige Bild nach. Füllt die Boxen mit Bohnen. Beachtet dabei die Regeln!
- Gibt es mehrere Möglichkeiten die Boxen zu füllen? Diese Tabelle hilft euch, eure Ergebnisse übersichtlich aufzuschreiben:

Anzahl der Bohnen in einer blauen Box									
Anzahl der Bohnen in einer roten Box									

Abbildung 8.13: Illustration der Aufgabenstellung 4

Transkript

09:10 **Tobi:** Darf ich den Stift? (Tobi liest Aufgabe 4 nochmals durch und füllt die Tabelle mittels Kopfrechnungen allein aus. Gelegt wird nur der erste Versuch.)

Analyse

In dieser Szene übernimmt Tobi die führende Rolle bei der Bearbeitung der Aufgabe. Zunächst legt Sepp die Boxenanordnung auf, anschließend füllt Tobi die Boxen mit Bohnen. Es wird jedoch lediglich eine einmalige Befüllung der Boxen vorgenommen. Sepp übergibt auf Tobis Frage den Stift. Nach erneutem Lesen der Aufgabenstellung füllt Tobi die gesamte Tabelle ohne weitere Nutzung des Materials und ausschließlich durch Kopfrechnen aus. Sepp verhält sich zurückhaltend und überlässt Tobi die Bearbeitung.

Während dieses Prozesses gibt es keine Interaktion zwischen den beiden. Sepp beobachtet Tobis Vorgehen und schaut ihm dabei zu. Tobis Gestik ist auf die Bearbeitung der Tabelle fokussiert: Er hält den Stift, notiert konzentriert die Ergebnisse und führt die Berechnungen im Kopf durch. Sepp zeigt keine aktive Beteiligung, sondern bleibt in einer beobachtenden Position.

Tobi kann sich ganz klar und ziemlich schnell vom Material lösen. Abstrakt zu denken stellt ihm kein Hindernis dar. Sepp überlässt das Kommando zwar Tobi und es kann nicht sicher festgestellt werden, dass auch er bereits den Schritt zur Abstraktion vom Material vollzogen hat, seine Körpersprache lässt aber die Vermutung zu.

Kategorie „Verallgemeinerung von Strategien“

Bsp. 1: Gruppe 7 bearbeitet Aufgabe 3

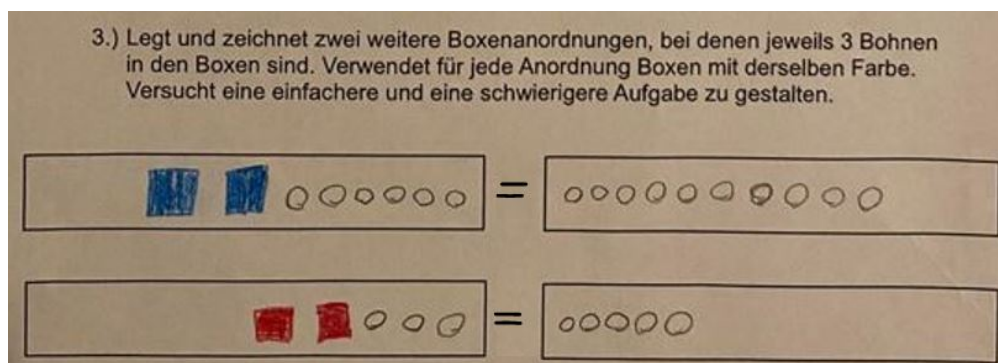


Abbildung 8.14: Ergebnis Aufgabe 3 von Gruppe 7

Transkript

07:05 **Moritz:** Dann machen wir mit Bleistift fünf Bohnen.

07:07 **Max:** Ja.

07:09 **Moritz:** Eins, zwei, drei, vier, fünf, dann haben wir zwei Boxen, haben wir fünf, dann können wir sagen, dass wir bei den zweien . . . in jede drei Bohnen reingeben. Dann haben wir da sechs drinnen und somit elf. Dann tun wir da, dann brauchen wir da . . .

07:30 **Max:** Zehn.

07:32 **Moritz:** Dann brauchen wir da . . . genau. Nein warte, das wäre dann blöd, weil wir das genauso haben und das wäre ja langweilig. Dann machen wir halt sechs. Dann tun wir bei der zwei rein, bei der auch, haben wir vier, haben wir zehn. Dann geben wir da zehn Bohnen hin.

08:00 **Max:** Wir müssen da noch die Boxen hinzeichnen.

08:05 **Moritz:** Eins, zwei . . . ja, passt.

Analyse

In diesem Transkriptausschnitt wird deutlich, dass die Kinder bei der Bearbeitung der Aufgabe ein vertrautes Muster verfolgen. Sie orientieren sich an bereits bekannten Strukturen, übersehen jedoch eine entscheidende Zusatzinformation aus der Aufgabenstellung: Jede Box soll drei Bohnen enthalten.

Moritz übernimmt in der Gruppe die führende Rolle und erklärt laut seine Vorgehensweise. Zu Beginn scheint er auf dem richtigen Weg zu sein, doch er zögert, elf Bohnen zu zeichnen, weil die Boxenanordnung in Aufgabe 2 ebenfalls elf Bohnen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens zeigt. Stattdessen entscheidet er sich, sechs Bohnen neben den Boxen zu platzieren, wobei er plötzlich in jede Box zwei Bohnen setzt. Diese Entscheidung führt dazu, dass er auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nur zehn Bohnen darstellen würde. Max bestätigt immer wieder die Aussagen von Moritz und fügt eigene Beiträge hinzu, etwa bei der Berechnung der gesamten Bohnenanzahl.

Trotz der verbalen Auseinandersetzung bleibt die Interaktion mit dem Material weitgehend passiv. Die Boxenanordnung wird nicht aufgelegt. Moritz beginnt sofort mit dem Zeichnen der Anordnung. Max beteiligt sich durch verbale Bestätigung und gibt Hinweise, wie zum Beispiel, dass noch Boxen eingezeichnet werden müssen („Wir müssen da noch die Boxen hinzeichnen.“).

Im Verlauf der Szene wird klar, dass die Kinder sich vor allem auf das Zeichnen der Boxenanordnungen konzentrieren, ohne die vollständige Aufgabenstellung noch einmal zu überprüfen. Dies führt dazu, dass sie die entscheidende Bedingung - dass in jeder Box drei Bohnen enthalten sein müssen - außer Acht lassen.

Bsp. 2: Gruppe 2 bearbeitet Aufgabe 3



Abbildung 8.15: Aufgabe 3 - Videostandbild von Gruppe 2

Transkript

- 13:05 **Magda:** Ja schau, wir müssen sowas wie da oben machen. Verstehst du es?
- 13:15 **Magda:** Also müssen wir da jetzt irgendeine Rechnung finden. Da sind jetzt zwölf Bohnen drinnen. Dann müssen wir da noch drei hinlegen.
- 13:25 **Magda:** Also haben wir dann...
- 13:40 **Magda:** Neun. Nein. Drei plus drei plus drei plus drei ist zwölf. Ja! Das müssen wir jetzt irgendwie aufzeichnen.
- 14:00 **Magda** überlegt und nimmt den Stift zur Hand.

Analyse

Die Gruppe beginnt die dritte Aufgabe, indem Magda zunächst die Anordnung der Bohnen legt und sie anschließend zeichnet. Dieser schrittweise Zugang zeigt eine aktive Auseinandersetzung mit dem Material.

Magda übernimmt die führende Rolle, äußert laut ihre Überlegungen und korrigiert sich selbst. Sie orientiert sich an vorherigen Aufgaben und sucht nach einer passenden Rechnung. Schließlich nimmt sie den Stift zur Hand, um ihre Lösung zu zeichnen.

Vicky bleibt hingegen passiv und beteiligt sich kaum, was sich auch gestisch zeigt. Während Magda aktiv mit dem Material arbeitet, wirkt Vicky abwesend. Die ungleiche Rollenverteilung könnte dazu führen, dass nicht beide gleichermaßen vom Lernprozess profitieren.

Kategorie „Logische Schlussfolgerungen“

Bsp. 1: Gruppe 6 bearbeitet Aufgabe 4



Abbildung 8.16: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4

Transkript

07:50 **Tobi** liest die Aufgabe 4 durch.

08:10 **Tobi**: Die können wir unterschiedlich füllen, da sie unterschiedliche Farben haben.

09:10 **Tobi**: Darf ich den Stift? (Tobi liest Aufgabe 4 nochmals durch und füllt die Tabelle mittels Kopfrechnungen allein aus. Gelegt wird nur der erste Versuch.)

Analyse

Tobi erkennt, dass die Boxen mit unterschiedlichen Bohnenanzahlen gefüllt werden können, da sie unterschiedliche Farben haben. Dies zeigt, dass er die zugrundeliegenden Regeln der Aufgabe verstanden und verinnerlicht hat. Er zieht daraus eine logische Schlussfolgerung, indem er eigenständig ableitet, dass verschiedene Verteilungen der Bohnenanzahlen möglich sind.

Tobi zeigt eine aktive Rolle und eine Präferenz für die Lösung von Problemen, wobei jedoch auch ein Mangel an Interaktion innerhalb der Gruppe festzustellen ist. Während Tobi eigenständig logische Schlüsse zieht, bleibt unklar, inwieweit Sepp aktiv in den Denkprozess einbezogen wird.

Bsp. 2: Gruppe 9 bearbeitet Aufgabe 4

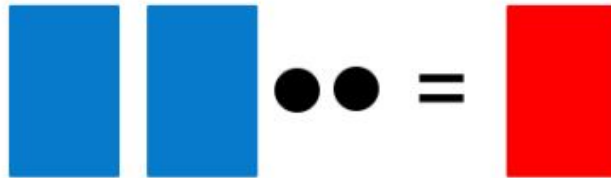


Abbildung 8.17: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4

Transkript

13:30 Auf Hinweis der LP lesen sich die **Pia** und **Lea** die Regeln nochmals durch.

13:40 **Lea**: Also, da müssen nicht gleich viele Bohnen drin sein. (Lea deutet auf die rote Box.)

13:44 **Pia**: Ach so, stimmt.

Analyse

In dieser Szene ziehen Pia und Lea eine logische Schlussfolgerung aus der Aufgabenstruktur, allerdings nicht völlig eigenständig. Erst auf den Hinweis der Lehrperson hin lesen sie die Regeln erneut durch. Dennoch zeigt sich, dass sie anschließend selbst zur richtigen Erkenntnis gelangen: Die Boxen müssen nicht gleich viele Bohnen enthalten, da sie unterschiedliche Farben haben.

Lea übernimmt hierbei die führende Rolle. Sie äußert die zentrale Erkenntnis, indem sie auf die rote Box deutet und feststellt, dass die Mengen variieren dürfen. Pia bestätigt diese Aussage kurz darauf mit einem Aha-Moment („Ach so, stimmt.“).

Gestisch wird deutlich, dass die Kinder aktiv mit dem Material arbeiten. Lea nutzt eine Zeigegeste zur Unterstützung ihrer Erklärung, was darauf hindeutet, dass sie sich sowohl verbal als auch visuell mit der Aufgabenstruktur auseinandersetzt. Pia zeigt zunächst keine eigene Initiative, sondern reagiert auf Leas Erkenntnis.

Kategorie „Übertragung auf algebraische Konzepte“

Bsp. 1: Gruppe 7 bearbeitet Aufgabe 4

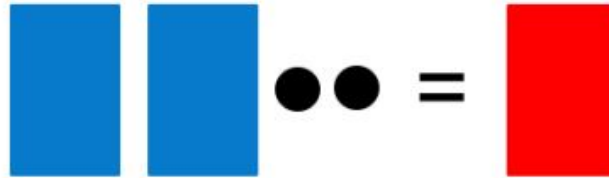


Abbildung 8.18: Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4

Transkript

17:14 **Moritz:** Zwei rote ist gleich eine blaue. Da könnten ... B haben wir schon.

17:32 **Max:** Vielleicht ... wäre es ja das. Was schreibst denn du da?

17:42 **Moritz:** Ah, ma. Dann haben wir noch C.

17:49 **Max:** Schreib es einfach da, schreib es drunter.

Analyse

In dieser Szene wird ersichtlich, dass Moritz und Max beginnen, die Aufgabe auf einer abstrakteren Ebene zu betrachten. Anstatt Variablen zu nutzen, beschreiben sie die Beziehungen zwischen den Boxen mithilfe ihrer Farben. „Zwei rote ist gleich eine blaue“ - diese Aussage zeigt, dass sie bereits ein algebraisches Grundprinzip anwenden: Sie setzen verschiedene Mengen zueinander in Relation und verwenden die Farben der Boxen als Platzhalter. Dies deutet darauf hin, dass sie sich dem Konzept der Variablen annähern, auch wenn sie noch nicht explizit algebraische Symbole verwenden.

Moritz scheint die treibende Kraft in dieser Gruppe zu sein. Max hingegen bleibt eher in der Rolle des Unterstützenden. Er hinterfragt das Vorgehen („Was schreibst denn du da?“) von Moritz und gibt praktische Hinweise, wie die Lösung notiert werden soll („Schreib es einfach da, schreib es drunter.“). Diese Interaktionen deuten darauf hin, dass Max zwar am Prozess beteiligt ist, sich jedoch weniger mit der inhaltlichen Übertragung auf eine algebraische Struktur auseinandersetzt als Moritz.

Gestisch zeigt sich, dass Moritz aktiv mit dem Material arbeitet und seine Überlegungen schriftlich festhält. Max gibt zwar verbale Anweisungen, scheint aber selbst weniger zu schreiben. Die ungleiche Rollenverteilung deutet darauf hin, dass Moritz den konzeptuellen Transfer stärker vollzieht, während Max sich mehr auf organisatorische Aspekte konzentriert.

Bsp. 2: Gruppe 9 bearbeitet Aufgabe 5

5.) Jede Boxenanordnung kann in eine Gleichung übersetzt werden.

- Welche Gleichung gehört zu welcher Boxenanordnung?
- Zeichnet die fehlende Boxenanordnung.

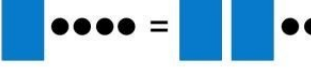
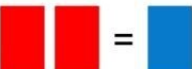
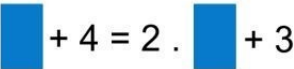
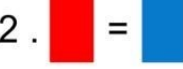
		C
		A
		B
A		
B		
C		

Abbildung 8.19: Ergebnis Aufgabe 5 von Gruppe 9

Transkript

24:30 **Lea:** Also, da sind vier. Dann ist es A.

24:40 **Pia:** Ja, weil eine Schachtel und vier Punkte ist gleich zwei Boxen plus drei. Also gehört da A her.

24:55 **Pia:** Da ist das da. Zwei, also zwei rote Boxen glaube ich ... magst du schreiben? B.

25:00 **Lea:** Okay, und jetzt müssen wir das noch machen.

Analyse

In dieser Szene wird deutlich, dass Pia und Lea beginnen, mathematische Beziehungen strukturiert auszudrücken. Besonders Pia formuliert eine Gleichheitsbeziehung zwischen zwei Termen („eine Schachtel und vier Punkte ist gleich zwei Boxen plus drei“), was einer frühen algebraischen Denkweise entspricht. Sie ersetzen konkrete Zahlen durch Begriffe wie „Schachtel“ und „Boxen“ und nutzen diese als Platzhalter für unbekannte Mengen. Dies zeigt, dass sie beginnen, mit symbolischen Darstellungen zu arbeiten, auch wenn sie noch keine Variablen im klassischen Sinne kennen.

Die Schülerinnen arbeiten aktiv mit den Abbildungen. Lea deutet zunächst auf eine Menge („Also, da sind vier“), bevor sie zur Schlussfolgerung „Dann ist es A“ kommt. Pia ergänzt die verbale Erklärung und gibt als nächste Anweisung, das Ergebnis schriftlich festzuhalten („Magst du schreiben?“).

8.3 Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Schülerinnen in dieser Szene eine zentrale Idee der Algebra anwenden: Sie setzen Mengen in Relation, formulieren eine Gleichung in natürlicher Sprache und verwenden Symbole zur Darstellung. Dies zeigt eine fortschrittliche Übertragung auf algebraische Konzepte, auch wenn die formale Symbolsprache noch nicht vollständig genutzt wird.

9 Interpretation

Die Resultate der Gruppen hinsichtlich der Forschungsfragen können wie folgt interpretiert werden. Die Auswertung der ausgefüllten Tabellen und Zeichnungen erlaubt Rückschlüsse auf den Lernerfolg der Schüler:innen. Die korrekte Lösung von Aufgaben (wie in Tabelle 8.1 ersichtlich) indiziert, dass den Lernenden das Lernmaterial hilfreich war. Die in der Fortführung der Tabelle (Aufgabe 4) sowie in abstrakteren Gleichungen (Aufgabe 5) vorgenommenen Verallgemeinerungen fungieren als Indikatoren für die erfolgreiche Ablösung vom Material. Auch die sechste Aufgabe zeigt, ob eine Ablösung stattfindet, da sie überprüft, ob die Lernenden ohne das physische Material (Bohnen und Boxen) zur Lösung gelangen.

9.1 Der Einstieg in die Algebra durch das Lernmaterial „Knack die Box“

Das Material eignet sich insbesondere für die anschauliche Einführung in die Algebra, indem es die Gleichverteilung von Objekten (Bohnen) und das Gleichsetzen der Kardinalität von Mengen veranschaulicht. Die Schüler:innen nutzen konkrete Objekte, um mathematische Konzepte greifbar zu machen.

Die vorteilhaften Aspekte für den Einstieg präsentieren sich wie folgt:

- Konkrete Darstellung von Gleichungen: Die Lernenden können mathematische Beziehungen durch physische Objekte begreifen.
- Visuelles Verständnis: Die Verwendung von Farbcodierung (beispielsweise rote und blaue Boxen) dient der Vereinfachung des Prinzips von Variablen.
- Systematische Herangehensweise: Die Tabellen (wie bei Aufgabe 4) fördern das Experimentieren und die Einsicht, dass es mehrere mögliche Lösungen geben kann.

Die Interpretation der Variablen als Unbekannte unterstützt das Verständnis dahingehend, dass sie als Platzhalter oder Repräsentant für eine noch unbekannte, aber bestimmbare Größe dient. In der Mathematikdidaktik existieren diverse etablierte Methoden, um diese Vorstellungen im Mathematikunterricht zu initiieren (Weigand et al., 2022).

„Knack die Box“ ist ein zentrales Beispiel. Das Lernmaterial „Knack die Box“ hebt Tätigkeiten am Material hervor, indem zwei Bohnenmengen systematisch miteinander

9 Interpretation

verglichen werden. Um die Grundvorstellung der Variablen als Unbekannte anzubahnen, werden ikonische, sprachliche und formelsprachliche Darstellungen systematisch verknüpft. Melzig (2013) vertritt die Auffassung, dass sprachliche Formulierungen eine entscheidende Rolle bei der Umdeutung der Box bzw. der in ihr enthaltenen Bohnen als Unbekannte spielen.

Die unterschiedlichen verwendeten Begriffe für „Box“ und „Bohne“ verdeutlichen, dass die Bezeichnungen nicht standardisiert sind und je nach Kontext, Person oder Situation variieren. Das lässt darauf schließen, dass sprachliche Formulierungen bei der Wahrnehmung und Interpretation der mathematischen Struktur eine wesentliche Rolle spielen. Die meisten Ausdrücke für „Box“, wie „Schachtel“, „Packung“ oder „Kästchen“, sind alltäglichen Ursprungs und beziehen sich nicht direkt auf die Mathematik. So bleibt die Box vorerst ein konkretes, physisches Objekt, das nicht unbedingt mit einer algebraischen Unbekannten verknüpft ist. Die Bezeichnungen „Blaue“ und „Rote“ sind besonders interessant, da sie auf eine farbliche Differenzierung hinweisen. Dies lässt darauf schließen, dass visuelle Merkmale für das Verständnis der Box von Bedeutung sein können.

Auch die Bezeichnungen für „Bohne“, wie „Pünktchen“, „Punkterl“, „Kuglerl“ oder „Punkt“, bieten interessante Einblicke. Sie weisen darauf hin, dass die Bohnen nicht nur als reale Objekte angesehen werden, sondern in gewisser Weise bereits abstrahiert werden. Vor allem die Ausdrücke „Punkt“ oder „Pünktchen“ könnten eine Verbindung zu mathematischen Notationen herstellen, indem sie die Bohnen als zählbare Einheiten oder symbolische Darstellungen einer Menge interpretieren. Das Wort „hineinlegen“ betont die Ebene der Handlung und könnte dazu beitragen, dass mathematische Vorgänge wie Addition oder Zunahme von Mengen besser nachvollzogen werden. Gleichzeitig impliziert es auch das Einsetzen von Werten, ähnlich wie beim Substituieren in eine Gleichung. Indem eine Menge physisch in eine Box gelegt wird, wird ein Prinzip sichtbar gemacht, das in der Algebra durch das Einsetzen von Zahlen für Variablen erfolgt. Diese Verbindung zwischen Handlung und abstrakter mathematischer Operation kann das Verständnis für grundlegende algebraische Konzepte fördern.

Die verschiedenen Bezeichnungen scheinen darauf hinzuweisen, dass die sprachliche Form der Begriffe das Verständnis der mathematischen Struktur beeinflusst. Während Begriffe wie „Schachtel“ oder „Kästchen“ die physische Dimension hervorheben, bieten abstraktere Begriffe wie „Punkt“ oder „Pünktchen“ eine größere Annäherung an mathematische Denkweisen. Dies verdeutlicht, dass Schüler:innen in Abhängigkeit von der genutzten Sprache auf verschiedenen kognitiven Ebenen agieren: Sie können entweder dabei bleiben, die Box als physisches Objekt zu betrachten oder den Schritt zur algebraischen Interpretation als Unbekannte wagen. Die Auswahl der Worte ist also entscheidend für die Umdeutung von alltagsnahen Gegenständen zu mathematischen Konzepten.

Auch die Zusammenarbeit in den Teams zeigt, dass den Kindern während der Bearbeitung bewusst wurde, was der Begriff „Gleichheit“ bedeutet. Durch Zählen und syste-

9.1 Der Einstieg in die Algebra durch das Lernmaterial „Knack die Box“

mathematisches Probieren erkannten sie, wann sich auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Bohnen befand. Zudem wurde allen Gruppen klar, dass in Boxen gleicher Farbe stets die gleiche Anzahl an Bohnen enthalten sein muss. Die Boxen fungierten als ein Hilfsmittel, um zu verdeutlichen, dass sie für spezifische Anzahlen an Bohnen stehen. Durch das Überprüfen dieser beiden Regeln konnten die Kinder sicherstellen, dass die Gleichung korrekt ist.

Korten (2020) stellte fest, dass soziale Einflüsse beim mathematischen Lernen von Kindern eine signifikante Rolle spielen. Diese These lässt sich durch die Analyse der fünf Videoaufnahmen bestätigen. Erklärungen und Hilfestellungen durch die zweite Person im Team führten zu besseren Ergebnissen. Lernen wird demnach als ein sozialer Prozess verstanden, der durch den Austausch von Perspektiven und gegenseitige Unterstützung bereichert wird.

Gemäß Jurkowski (2010) ist beim interaktiv-kooperativen Lernen der individuelle Erfolg eng mit dem der Gruppe verknüpft, und jedes Gruppenmitglied trägt aktiv zur Zielverwirklichung bei. Diese These kann jedoch nicht uneingeschränkt bestätigt werden, da in einigen Gruppen nicht alle Teammitglieder am Erfolg beteiligt waren. Insbesondere bei den Gruppen 2 und 7 ist eine solche Zusammenarbeit nicht zu beobachten. In diesen Gruppen übernahm eine Person die Hauptrolle, während die andere lediglich gelegentlich Ideen einbringen durfte. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass, wie von Jurkowski (2010) angemerkt, Herausforderungen wie Ungleichgewichte zwischen den Teammitgliedern, fehlende soziale Kompetenzen oder hoher Planungsaufwand für die Lehrkräfte auftreten können. Diese Probleme können jedoch durch klare Strukturen, gezielte Unterstützung und soziale Kompetenzen in Schach gehalten werden. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird das Ziel verfolgt, sich in die Denkweise der Kinder hineinzuversetzen und möglichst wenig einzugreifen. Im Falle eines signifikanten Bedarfs an Unterstützung erfolgte eine erneute Verweisung auf die bestehenden Regeln oder das präzise Lesen der Aufgabenstellung.

Das von mir erstellte Arbeitsblatt zum Thema Gleichungslösen mit dem Lernmaterial „Knack die Box“ begünstigt vor allem das sogenannte Peer-Learning, da die Aufgaben offen gestaltet sind und den Schüler:innen viel Freiraum in der Bearbeitung lassen. Es gibt keine festgelegten Rollen oder kooperative Strukturen, die für interaktiv-kooperatives Lernen typisch wären. Stattdessen entstehen spontane Interaktionen, bei denen sich die Lernenden gegenseitig unterstützen, Lösungen vergleichen und alternative Strategien diskutieren.

Die explorative Herangehensweise konstituiert ein wesentliches Merkmal des Arbeitsblattes. Die Lernenden erhalten den Auftrag, vorgegebene Boxenanordnungen zu ergänzen, eigene Lösungsansätze zu entwickeln und unterschiedliche Optionen zu untersuchen. Die Interaktion zwischen den Schüler:innen, die durch gegenseitige Erklärungen und die Überprüfung von Lösungsansätzen entsteht, wird als Peer-Learning bezeichnet. Dieser

9 Interpretation

Austausch findet informell und situativ statt, zum Beispiel wenn ein Kind eine Unsicherheit äußert oder eine alternative Lösung vorschlägt.

Ein weiteres Merkmal von Peer-Learning ist das Fehlen einer festen Rollenverteilung. Interaktiv-kooperatives Lernen sieht oft strukturierte Gruppenprozesse mit klaren Aufgaben für jedes Mitglied vor, während das Arbeitsblatt eine flexible Bearbeitung zulässt. Die Lernenden können entweder individuell oder in spontanen Gruppen arbeiten, ohne dass ihre Zusammenarbeit streng organisiert sein muss. Dadurch erfolgt der Austausch häufig auf einer gleichwertigen Ebene, was ein charakteristisches Merkmal des Peer-Learnings ist.

Darüber hinaus ermöglichen die Aufgaben sowohl individuelle als auch kollektive Lösungsansätze. Die Schüler:innen haben die Möglichkeit, eine Lösung eigenständig zu erarbeiten, sich gegenseitig zu unterstützen und ihre Überlegungen abzugleichen. Der hier beschriebene Lernansatz ist als niederschwellig zu bezeichnen, da er keine komplexen kooperativen Strukturen erfordert, sondern auf kurzen, informellen Interaktionen basiert.

Insgesamt wird deutlich, dass das Arbeitsblatt „Knack die Box“ vor allem Peer-Learning fördert, da es durch offene Aufgabenstellungen, individuelle Lösungsansätze und spontane Kooperation gekennzeichnet ist. Wenn klar definierte Gruppenrollen oder kooperative Methoden wie Think-Pair-Share in die Bearbeitung integriert würden, könnte das interaktiv-kooperative Lernen verstärkt werden. Der informelle Austausch unter den Lernenden steht in der aktuellen Form jedoch im Vordergrund, was zu einer zentralen Rolle des Peer-Learnings führt.

Boaler (2008) vertritt die Auffassung, dass kooperative Lernmethoden nicht nur der Vermittlung von Wissen, sondern auch der Förderung einer gerechteren Gesellschaft dienen können. Untersuchungen von Gersten et al. (2009) und Webb (1989) belegen, dass der Austausch und das Verbalisieren von Gedanken einen besonders hohen Effekt auf den Lernprozess haben. Die Videoauswertung ergab, dass alle Zweierteams voneinander profitierten und zahlreiche Aha-Momente erlebten. Es konnten insbesondere in den Gruppen 1, 6 und 9 die Beobachtungen gemacht werden, dass sich die Kinder gegenseitig unterstützten und sich in ihrem Handeln ergänzten.

Melzig (2013) führte ihre Studie in drei siebten Klassen eines Gymnasiums durch. In diesem Fall sind den Proband:innen Variablen und lineare Gleichungen bereits bekannt. Die vorliegende Untersuchung wurde hingegen in einer fünften Schulstufe durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Untersuchung legen nahe, dass das Lernmaterial „Knack die Box“ bereits für Zehnjährige geeignet ist. Die als Platzhalter fungierenden Boxen werden mit Bohnen gefüllt, was dazu führt, dass die Schüler:innen erste Vorstellungen vom Variablenbegriff entwickeln. Der Begriff „Variable“ war den Kindern selbstverständlich noch nicht geläufig. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, eine Gleichung mit Symbolen statt Variablen zu formulieren. Zunächst erfolgt der Denkprozess der Kinder in Mengen

und mit Hilfe von Vergleichen. Die Auffassung von Kieran et al. (2016), dass Kinder beim frühen algebraischen Denken Unterstützung benötigen, wird von der vorliegenden Untersuchung bestätigt. Zunächst ist für viele nicht eindeutig ersichtlich, warum in Boxen mit identischer Farbgebung die Anzahl der Bohnen gleich sein muss. Die Tatsache, dass sich auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleiche Anzahl an Bohnen befinden muss, wurde von den Lernenden schneller erfasst. Die Visualisierung des Gleichheitszeichens veranschaulicht diesen Sachverhalt.

9.2 Ablösung hin zum abstrakteren algebraischen Arbeiten

Aus den Antworten und den Interaktionen geht hervor, dass die Schüler:innen in der Lage sind, sich vom Material zu lösen und abstrakter zu denken. Dies wird anhand der folgenden Beispiele veranschaulicht:

- **Argumentation und Systematik:** Das systematische Dokumentieren verschiedener Kombinationen durch die Schüler:innen in Aufgabe 4 zeigt, dass sie ein Verständnis für Variablen und deren Beziehungen haben.
- **Einsetzung bei abstrakteren Aufgaben:** Im Aufgabenbereich 5 (Zuordnung von Boxenanordnungen zu Gleichungen) wird evaluiert, ob die Schüler:innen in der Lage sind, das Konzept zu verallgemeinern.
- **Vertiefung und Flexibilisierung der algebraischen Denkweise:** Bei Aufgabe 6 wird evaluiert, ob die Lernenden in der Lage sind, komplexere Gleichungen durch logisches Schließen und Flexibilität in ihrem Denken zu lösen.

Das Material unterstützt den Übergang vom konkreten Denken, das beispielsweise durch die Benennung von konkreten Objekten wie Bohnen und Boxen repräsentiert wird, zum abstrakten Denken, das durch die Formulierung von Gleichungen charakterisiert ist. Es bietet eine eingängige Einführung in grundlegende Konzepte der Algebra. Zu den behandelten Themen zählen Gleichheit, Variablen und Beziehungen zwischen Werten. Auch die Wechselwirkung zwischen Lernenden ist von signifikanter Relevanz. Die Lernenden reflektieren über Regeln, erörtern Fehler und entwickeln systematische Strategien. Das Material erlaubt selbstständiges Arbeiten und bietet durch seine spielerische Aufmachung einen Anreiz. Gleichzeitig haben die Schüler:innen die Möglichkeit, ihre Resultate eigenständig zu kontrollieren.

Wie in Kapitel 1.2.3 erörtert wurde, erklären Mink et al. (2009) die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten zum entscheidenden Ziel des Mathematikunterrichts. „Knack die Box“ fördert sogenannte „problem solving skills“ und bereichert den Unterricht. Die Freude am Operieren mit dem Material, die Interaktion mit Peers und der Aufforderungscharakter, den das Material mit sich bringt führen zu Motivation. Wilhelm und Andelfinger (2021) beteuern, dass innovative Aufgabenstellungen Freude und Begeisterung im Unterricht auslösen können, was zur Förderung von Selbstbewusstsein führen

9 Interpretation

kann. Da das Lernmaterial „Knack die Box“ die sofortige Kontrolle, ob die Aufgaben richtig gelöst wurden, ermöglicht und das haptische Tun Freude bereitet, trägt dieser didaktische Ansatz zur Steigerung des Selbstbewusstseins der Schüler:innen bei. Als Beweis dafür können Tobi und Sepp aus Gruppe 6 angeführt werden. Sie arbeiteten völlig selbstständig und sehr interessiert an den vorliegenden Aufgaben und wollten die Problemstellungen so schnell wie möglich und richtig lösen. Ihre Selbstsicherheit stieg als sie die Aufgabenstellungen erfolgreich bearbeitet haben und sich stolz auf die Schultern klopfen und gratulierten.

In Gruppe 1 manifestiert sich die Abkehr vom konkreten Material hin zum abstrakten algebraischen Denken. Bei Aufgabe 1 wurden die Bohnen in die Boxen gelegt und diese wieder verschlossen. Bei der zweiten Aufgabe wurde ein weiterer Abstraktionsschritt erkennbar, da die Bohnen zwar in die Boxen gelegt, diese jedoch halboffen gelassen wurden. Somit war eine unmittelbare visuelle Bestimmung der Anzahl der enthaltenen Bohnen möglich. Bei Aufgabe 4 wurde die Instruktion dahingehend modifiziert, dass die Teammitglieder die Bohnen direkt auf die Boxen legten, da das Öffnen und Verschließen der Boxen als zu aufwendig empfunden wurde. Obwohl anfänglich zwei Bohnen neben die rote Box gelegt wurden, erachtete Fritz aus Intuition die Entscheidung als korrekt, da er die Vermutung hatte, dass er blaue bzw. rote Boxen mit unterschiedlichen Anzahlen befüllen würde. Nach dem erneuten Lesen der Regeln gelangte das Duo zu dem Schluss, dass seine ursprüngliche Hypothese korrekt war. Schließlich wurde der ursprüngliche Gedanke, stets nur zwei oder vier Bohnen zuzugeben, als zu trivial empfunden. In der Folge wurde die Anzahl der hinzugefügten Bohnen sukzessive gesteigert, bis die Boxen den erforderlichen Platz nicht mehr boten. Die übrigen Bohnen wurden schließlich über den Boxen abgelegt.

Darüber hinaus konnte die Beobachtung gemacht werden, dass eine Aufteilung der Bohnen auf zwei Boxen nur bei einer geraden Anzahl möglich ist. Des Weiteren war die Aussage von Paul bei der dritten Aufgabe, dass sie ja einfach Aufgabe 1 oder 2 umgekehrt aufzeichnen könnten, von besonderem Interesse. Die Idee, die linke und rechte Seite von Gleichungen zu vertauschen, erweist sich als vielversprechend. Allerdings ist in der Aufgabenstellung festgelegt, dass jeweils drei Bohnen in den Boxen sein sollen. Mit dieser Formulierung hatten die zwei Teilnehmer Probleme. Die beiden interpretierten die Aufgabe dahingehend, dass drei Boxen vorhanden seien, in denen sich jeweils eine Bohne befinde. Auch die Bemerkung von Fritz, die besagte, dass sich in jeder Box drei Bohnen befinden, führte nicht zur gewünschten Umsetzung.

In der zweiten Gruppe war ebenfalls eine Ablösung vom Material zu verzeichnen. Bei Aufgabe 3 konnte beobachtet werden, dass Magda die einfache bzw. schwierige Aufgabe richtig zuordnete. Zunächst legte sie die schwierigere und anschließend die einfachere Aufgabe auf und führte im Anschluss den Zeichenprozess durch. Magda erkannte bei der vierten Aufgabe unmittelbar, dass die Anzahl der Bohnen variieren durfte, da zwei unterschiedlich gefärbte Boxen in der Anordnung vorhanden waren. Die Äußerung „Ver-

stehst du es? So geht es immer weiter und weiter und weiter und weiter.“ veranschaulicht zudem Magdas Verständnis für die Thematik. Nach Zugabe einer gewissen Anzahl an Bohnen erfolgte anfänglich jedes Mal ein Nachzählen der Bohnen. Schließlich wurde die Anzahl der in die Boxen gelegten Bohnen als bekannt vorausgesetzt, da Magda der Meinung war, die korrekte Anzahl zu kennen. Sie verdeutlichte Vicky: „Nein, nein, du musst nicht wieder zählen, das wissen wir jetzt.“ Die Zuordnung der Boxenanordnungen zu den entsprechenden Gleichungen gelang den beiden ebenfalls mühelos. Magda konnte auch bei der letzten Aufgabe Vickys Frage richtig beantworten. Sie sagte, dass „drei mal Box“ für „drei Boxen“ steht. Diese Schritte stellen einen signifikanten Fortschritt in Richtung algebraischen Denkens dar, zumindest bei Magda. Die Kooperation im Team resultierte jedoch nicht in einem vergleichbaren Lernfortschritt bei Vicky. Vicky hatte kaum die Gelegenheit, sich zu äußern oder aktiv zu partizipieren, da Magda die Eigeninitiative ergriff.

Gruppe 6 zeichnete sich durch eine hohe Geschwindigkeit und mathematische Kompetenz aus. Zudem konnte eine deutliche Tendenz zur Abkehr vom Material hin zum abstrakteren algebraischen Denken beobachtet werden. Die zentrale Rolle in dieser Gruppe wurde von Tobi eingenommen. Bemerkenswert ist zudem die effektive Zusammenarbeit zwischen den beiden, die sich gegenseitig bei der Problemlösung unterstützten. Es wurde nur selten diskutiert, da eine hohe Übereinstimmung zwischen den Mitgliedern der Gruppe bestand. Ein weiterer Aspekt, der in diesem Zusammenhang als vorteilhaft zu bewerten ist, ist die Tatsache, dass die Mitglieder der beiden Gruppen über ein tiefgreifendes Verständnis ihrer individuellen Stärken und Schwächen verfügten und diese im Verlauf der Bearbeitung der Arbeitsblätter gezielt einsetzten. Tobi erkannte bei Aufgabe 2 auf den ersten Blick, dass in eine Box fünf Bohnen passen. Es wurde nicht davor herumprobiert und gezählt. Bei der vierten Aufgabe wurde die Boxenanordnung lediglich einmal mit Bohnen befüllt. Daraufhin reflektierte er für einen kurzen Augenblick und vervollständigte die gesamte Tabelle in seiner Gedankenwelt. Die Aufgabe wurde in weniger als einer Minute abgeschlossen. Im Gegensatz dazu benötigten die anderen Zweierteams für diese Aufgabe wesentlich länger, da jeder Versuch einzeln gelegt und anschließend kontrolliert wurde. Die Aufgaben des Skizzierens übernahm Sepp, da Tobi angab, über keine entsprechenden Fähigkeiten zu verfügen. Dies könnte jedoch auch als verpasste Lernchance gesehen werden. Seine Mimik veranschaulichte, dass auch Aufgabe 6 als sehr einfach zu bewältigen empfunden wurde. Er musste schmunzeln, als er die Aufgabenstellung las.

In der siebten Gruppe konnte noch keine Hinwendung zum algebraischen Denken festgestellt werden. Diese könnte insbesondere durch die Aufgaben 4, 5 und 6 identifiziert werden, jedoch waren genau diese Aufgaben fehlerhaft. Die Teilnehmer der Gruppe bewältigten einfache Aufgabenstellungen, wie die in Aufgabe 2, mit Bravour. Mit zunehmender Komplexität der Aufgabenstellungen kam es jedoch zu einer Zunahme von Fehlern und Verwirrungen. Bei der dritten Aufgabe wurde eine unzureichende Lesekompetenz festgestellt, was zu einer fehlerhaften Anordnung der Boxen führte. Die vierte Aufgabe führte bei den Probanden zu anfänglicher Verwirrung. Max und Moritz waren unsicher, wie die

9 Interpretation

Tabelle auszufüllen sei. Es ist jedoch festzuhalten, dass die beiden unmittelbar erkannten, dass sich in zwei verschiedenfarbige Boxen auch eine unterschiedliche Anzahl von Bohnen befinden darf. Da die beiden nicht besonders gut kooperierten, war manchmal ein Tipp der Lehrkraft notwendig. Durch den Hinweis der Lehrperson, wie die Tabelle auszufüllen sei, gelang es den Probanden, die restlichen Möglichkeiten im Kopf zu lösen. Bei der fünften Aufgabe stellte erneut sinnerfassendes Lesen ein Problem dar. Unmittelbar wurde mit der Berechnung der Lösung der ersten Boxenanordnung begonnen und anschließend wurde der Versuch unternommen, die richtige Lösung zuzuordnen. Es sei jedoch angemerkt, dass nicht die Zuordnung der entsprechenden Lösungen, sondern die Zuordnung der entsprechenden Gleichungen Gegenstand der Aufgabe war. Dies führte zu Verständnisschwierigkeiten, und Moritz vertrat die Auffassung, dass zwei mal Box darauf hindeute, dass sich in jeder Box zwei Bohnen befänden. Spätestens bei der von ihnen gezeichneten Boxenanordnung wurde eine falsche Vorstellungsweise bewusst (siehe Anhang). Bei der Bearbeitung der letzten Aufgabe wurde deutlich, dass ihre algebraische Denkweise noch nicht vollständig ausgereift ist. Sie kamen zu dem Schluss, dass drei mal Box, drei Bohnen und eine Box bedeutet. Die korrekte Interpretation lautet jedoch, dass drei mal Box für drei Boxen steht.

Gruppe 9 setzte sich aus sehr gewissenhaften, jedoch schüchternen Mädchen zusammen. Zu Beginn wurde in der Gruppe eine gewisse Zurückhaltung beobachtet, was darauf hindeutet, dass den Handlungen eine sorgfältige Überlegung vorausging. Bemerkenswert ist zudem das Teamwork in dieser Gruppe. Die Probandinnen erklärten einander gegenseitig ihre Vorgehensweisen bei der Bewältigung bestimmter Aufgaben. Dies veranschaulichte ihre mathematische Denkweise. Im Rahmen der Bearbeitung der Arbeitsblätter wurden die Bohnen bei jeder einzelnen Aufgabe in die Boxen gelegt und diese wieder verschlossen. Bei der zweiten Aufgabe wurde zunächst in jede rote Box eine Bohne gelegt. Lea kam darauf, dass fünf die richtige Lösung sein müsste. Nach Überprüfung des Ergebnisses wurde festgestellt, dass ihre Vermutung korrekt war. Auch Aufgabe 3 wurde von beiden erfolgreich gelöst. Es sei darauf hingewiesen, dass die beiden Mädchen, insbesondere Pia, in Kopfrechnen weniger geübt schienen, da ihnen das Zusammenrechnen der Bohnen im Kopf nicht besonders leichtfiel. An dieser Stelle erwies sich das Auflegen der Boxen als eine signifikante Hilfestellung. Bei der vierten Aufgabe wurde zu Beginn eine fehlerhafte Boxenanordnung festgestellt. Nach dem Hinweis der Lehrperson, die Regeln noch einmal zu lesen, kam es jedoch zur grundsätzlich richtigen Befüllung der Boxen. Allerdings resultierten Schwierigkeiten beim Verständnis der Aufgabenstellung, nicht nur bei dieser Aufgabe, in Fehlern bei den Ergebnissen. In der Tabelle wurde ein Resultat zufällig richtig eingetragen. Pia und Lea gaben nach jedem Versuch, die Boxen mit Bohnen zu füllen, alle Bohnen aus den Boxen und füllten sie erneut. Dies führte zu einem hohen Zeit- und Arbeitsaufwand. Aus Zeitgründen verwies die Lehrperson auf die nächste Aufgabe. Anfangs hatten sie große Probleme mit der Zuordnungsaufgabe. Sie waren sich unsicher, wie die Aufgaben zuzuordnen waren. Durch die Instruktion der Lehrkraft, die Gleichungen auf der rechten Seite den entsprechenden Boxenanordnungen auf der linken Seite zuzuordnen, konnten die Teilnehmenden die Aufgabe lösen und Fehler vermeiden.

Auch bei der sechsten Aufgabe war eine unmittelbare Visualisierung der Ergebnisse zu beobachten. Allerdings bestand bei Pia Unsicherheit bezüglich der Dokumentation des Ergebnisses. Zunächst beabsichtigte sie, das Ergebnis in die Box einzutragen, doch Lea wies sie darauf hin, dass dies nicht der korrekte Vorgang sei. Hier lässt sich eine Tendenz zum algebraischen Denken erkennen, jedoch ist die konkrete Ablösung vom Material noch nicht vollzogen.

9.3 Limitationen der Studie

Größe der Stichprobe und Auswahl der Testpersonen

Aufgrund der limitierten Anzahl teilnehmender Schüler:innen können die Resultate nicht ohne Weiteres generalisiert werden. Eine größere Stichprobe könnte jedoch differenziertere Erkenntnisse ermöglichen. Es besteht die Möglichkeit, dass die Ergebnisse durch individuelle Unterschiede, wie beispielsweise das Leistungsniveau oder soziale Dynamiken, beeinflusst wurden, da die Gruppen zufällig zusammengestellt waren.

Zeitliche Begrenzung

Aufgrund der zeitlichen Begrenzung der Studiendurchführung ist es möglich, dass nicht alle potenziellen Effekte des Lernmaterials erfasst werden konnten. Eine Untersuchung der langfristigen Auswirkungen auf das konzeptuelle Verständnis war nicht möglich.

Gesteuerte Voraussetzungen

Aufgrund diverser Faktoren, wie z.B. der Geräuschkulisse in manchen Unterrichtsstunden im Nebenraum, war eine vollständige Gewährleistung standardisierter Bedingungen nicht gegeben.

Persönliche Einschätzung

Subjektive Faktoren könnten die Beurteilung der Lernfortschritte beeinflussen, insbesondere wenn qualitative Beobachtungen eine Rolle spielen. Im Rahmen qualitativer Beobachtungen erweisen sich Aspekte wie das Verhalten der Lernenden, ihre Motivation, ihre aktive Teilnahme sowie ihre Einstellung zu den Aufgaben als relevante Faktoren. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Faktoren in hohem Maße von persönlichen Eindrücken oder der Perspektive der beobachtenden Person abhängen können, was zu einer eher subjektiven Beurteilung führen kann. In einem Modell wie „Knack die Box“, das darauf abzielt, kognitive und praktische Fähigkeiten zu entwickeln, könnte die subjektive Wahrnehmung von Engagement oder Problemlösungsstrategien daher eine maßgebliche Rolle bei der Einschätzung des tatsächlichen Lernfortschritts spielen.

Limitierte Übertragbarkeit der Ergebnisse

Die Studie wurde an einer bestimmten Mittelschule in Ebensee durchgeführt, weshalb die Ergebnisse nicht ohne Weiteres auf andere Schulen, Altersgruppen oder Bildungskontexte übertragen werden können.

Ressource und Individualisierung

Das vorliegende Lernmaterial „Knack die Box“ fokussiert auf spezifische Aspekte des Gleichungslösens und konnte daher nicht alle Facetten dieses Themengebiets erschöpfend behandeln. Es ist anzunehmen, dass einige Schüler:innen Schwierigkeiten hatten, sich mit dem Material in nur einer Unterrichtseinheit vertraut zu machen.

9.3.1 Probleme bei der Durchführung

Motivation der Schüler:innen

Die Ergebnisse könnten dadurch beeinflusst worden sein, dass nicht alle Schüler:innen in gleicher Weise motiviert waren, sich intensiv mit dem Lernstoff auseinanderzusetzen. In der zweiten Gruppe wurde beobachtet, dass Vicky von Magda genervt war, da diese versuchte, alle Aufgaben alleine zu erledigen. Die Motivation sank auch, wenn eine Aufgabenstellung nicht verstanden wurde und Unklarheiten darüber herrschten, wie die Aufgabe zu bearbeiten war, was in Gruppe 1 der Fall war. Bei den Probanden aus der Sportklasse (Gruppen 6 und 7) fiel zudem auf, dass sie besonders darauf bedacht waren, die Schnellsten zu sein.

Heterogenität der Lerngruppe

Eine einheitliche Analyse der Ergebnisse wurde durch die heterogenen Vorkenntnisse und Lernniveaus der Schüler:innen erschwert.

Videoaufnahme

Vor allem in den Gruppen 1 und 2 konnten starke Ablenkungen durch die Videokamera beobachtet werden. Da die Videoaufnahme mit einem Laptop unter Verwendung der Innenkamera erfolgte, hatten die Schüler:innen die Möglichkeit, sich während des gesamten Arbeitsprozesses selbst auf dem Bildschirm zu sehen. Dies führte dazu, dass die Schüler:innen ihren Blick wiederholt auf die eigene Darstellung richteten, anstatt sich vollständig auf die Aufgabe zu konzentrieren. Die Selbstwahrnehmung durch das Livebild führte bei einigen Kindern zu Ablenkungen, was wiederum zu Unterbrechungen im Arbeitsfluss und einer verminderten Fokussierung auf die eigentlichen Inhalte führte.

9.3.2 Relativierung der Ergebnisse

Die von mir durchgeführte Selektion geschlechterhomogener Gruppen hatte einen signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse. Obwohl auch gemischte Gruppen an meiner Untersuchung teilnahmen, wurden diese aufgrund mangelnder Kooperation bzw. zu großer Scheu voreinander nicht in die Auswertung einbezogen, da eine zuverlässige Auswertbarkeit nicht gewährleistet war. Daher flossen nur rein weibliche oder männliche Teams in die Analyse ein, was Auswirkungen auf die Übertragbarkeit der Ergebnisse hat. Es bestünde weiterer Forschungsbedarf, um die Voraussetzungen für heterogene Gruppen mit gemischten Geschlechtern zu ermitteln und die jeweiligen Lernerfolge zu dokumentieren.

Die Anwesenheit einer neuen Lehrperson könnte ebenfalls die Ergebnisse beeinflussen haben. Obwohl sie nicht aktiv in die Bearbeitung des Arbeitsblattes eingriff, könnte ihre bloße Präsenz das Verhalten der Schüler:innen gelenkt haben. Einerseits ist eine unterstützende oder motivierende Wirkung denkbar, andererseits ist nicht auszuschließen, dass sich einige Schüler:innen durch die neue Situation gehemmt oder abgelenkt gefühlt haben.

10 Fazit

Die vorliegende Masterarbeit liefert eine detaillierte Darstellung der Ergebnisse und Interpretation zum Gleichungslösen mit dem Lernmaterial „Knack die Box“ und kommt zur Schlussfolgerung, dass konzeptuelles Wissen zum Gleichungslösen mithilfe dieses Materials entwickelt werden kann. Die Ergebnisse wurden mit einschlägiger Fachliteratur verglichen, wodurch zentrale Erkenntnisse gewonnen werden konnten. Eine besonders interessante Bestätigung ergab sich in Bezug auf die Aussage von Carraher et al. (2019), dass selbst siebenjährige Kinder die Logik von Gleichungen erfassen können. Mein Forschungsvorhaben fokussierte bewusst auf Schüler:innen der fünften Schulstufe, um mich einerseits von Melzig (2013) abzugrenzen und andererseits zu erforschen, inwiefern „Knack die Box“ den Einstieg in die Algebra erleichtern kann.

Während meiner Literaturrecherche stieß ich auf eine zentrale didaktische Überlegung: Arithmetik und Algebra sollten nicht strikt getrennt werden. Vielmehr erscheint es sinnvoll, algebraische Konzepte von Anfang an in den Mathematikunterricht zu integrieren. Auch Radford (2011) vertritt die Ansicht, dass Arithmetik keine zwingende Voraussetzung für den Erwerb algebraischer Denkweisen ist. Diese Perspektive deckt sich mit meinen eigenen Erfahrungen als Lehrperson. Die Einführung algebraischer Strukturen sollte möglichst früh erfolgen, um einen sanften Übergang zu ermöglichen und den starken Abstraktionssprung in der siebten Schulstufe abzumildern. Kinder müssen den Sinn und die Bedeutung von Variablen verstehen - eine Fähigkeit, die sich bereits in jungen Jahren durch das Erkennen und Verallgemeinern von Mustern und Strukturen entwickeln lässt.

Die Untersuchung zeigte zudem, dass alle teilnehmenden Schüler:innen - unabhängig von ihrer individuellen Leistungsstärke - von den Aufgaben profitierten. Während einige Kinder bereits eine ausgeprägtere algebraische Denkweise zeigten, benötigten andere noch Unterstützung. Insbesondere leistungsschwächere Schüler:innen zogen Vorteile aus der Zusammenarbeit mit ihrer Partnerperson sowie aus dem haptischen Lernmaterial. Die grundlegende Vorstellung, dass Boxen befüllt werden können, war den Kindern bereits vertraut. Die Idee, dass Variablen für bestimmte Anzahlen stehen, war den an der Untersuchung teilnehmenden Kindern noch nicht geläufig. Durch die visuelle Darstellung mit Boxen konnte ihr Verständnis hierfür gezielt gefördert werden.

Ein auffälliger Befund war jedoch, dass einige Schüler:innen Schwierigkeiten mit den Aufgabenstellungen hatten. Das sinnerfassende Lesen stellte eine größere Hürde dar, was verdeutlicht, wie wichtig gezieltes Training in diesem Bereich ist. Ein Manko in der Lesekompetenz konnte gegebenenfalls von den Peers wettgemacht werden, was die Ef-

fektivität und die Bedeutung kooperativer Lernformen unterstreicht. Auch spezifische Aufgabentypen, wie das korrekte Ausfüllen von Tabellen oder Zuordnungsaufgaben, bereiteten einigen Schwierigkeiten. Darüber hinaus waren nicht alle Lernenden mit der korrekten Schreibweise der Lösung einer Gleichung vertraut.

Ein weiteres interessantes Beobachtungsergebnis ergab sich aus den Gesprächen der Kinder. Einige waren sich zu Beginn nicht bewusst, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob Bohnen in die Box oder neben die Box gelegt werden. Diese Differenzierung wurde jedoch im Laufe der Bearbeitung zunehmend klarer, sodass alle Teams die Regeln schließlich sicher anwenden konnten und somit einen klaren Lernerfolg zeigten.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass „Knack die Box“ ein vielversprechendes didaktisches Werkzeug darstellt, um Schüler:innen den Einstieg in die Algebra zu erleichtern. Es ermöglicht eine intuitive Annäherung an Variablen und fördert das allgemeine algebraische Verständnis. Gleichzeitig zeigt die Untersuchung, dass neben der mathematischen Kompetenz auch das Textverständnis eine entscheidende Rolle für den Lernerfolg spielt. Zukünftige Forschungen könnten sich daher verstärkt mit der Frage beschäftigen, wie sprachliche Unterstützung den Zugang zu algebraischen Konzepten weiter erleichtern kann.

Literaturverzeichnis

- [1] Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Springer Spektrum.
- [2] Akinwunmi, K. (2015). „Wie viele Plättchen brauchst du für mein Muster?“ *Plättchenmuster entdecken, beschreiben, erfinden*. Praxis Grundschule, 38(2), 24–29.
- [3] Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: ideas, insights, and activities*. IMPACT. Routledge.
- [4] Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). *Gleichungen verstehen* - In: mathematik lehren, 169, 2–7.
- [5] Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). *Strukturen als Basis der Algebra*. - In: mathematik lehren, 202, 2–8.
- [6] Bichler, E. (2010). *Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M³) am Gymnasium*. Dr. Kovač.
- [7] BKA Österreich. (2024). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen*. Abgerufen am 09.11.2024 unter <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>
- [8] Blomberg, J. & Marxer, M. (2017). *Wie aus Zahlen Variablen werden*. - In: mathematik lehren, 202, 14–19.
- [9] Boaler, J. (2008). *Promoting ‘relational equity’ and high mathematics achievement through an innovative mixed-ability approach*. British Educational Research Journal, 34(2), 167–194.
- [10] Bredow, F. (2023). *Mathematisches Argumentieren im Übergang von der Arithmetik zur Algebra*. Springer Spektrum.
- [11] Breidenstein, G. (2008). *Peer-Interaktion und Peer-Kultur* In: W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.): Handbuch der Schulforschung, 945–964.
- [12] Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H-G. (2015). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer Spektrum.

- [13] Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. & Earnest, D. (2006). *Arithmetic and algebra in early mathematics education*. Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87–115.
- [14] Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2019). *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions Plenary Presentation at PME-NA XXII, Tucson, AZ, October 7-10, 2000*.
- [15] Domokos, T., Larrain, M., Weith, L., Barzel, B., Dreher, A., Friesen, M. & Holzäpfel, L. (2023). *Handreichung zu den Materialien des Projekts MaCo – Grundlagen zu Variablen, Termen und Gleichungen*. Open Educational Resources.
- [16] Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Freudenthal Institute.
- [17] Duden online (2024). [Onlinewörterbuch]. Abgerufen am 01.12.2024 unter <https://www.duden.de/>.
- [18] England, L. (2021). *Looking for Learning: Maths through Play*. Featherstone.
- [19] ETH Zürich. (2020). *Null Bock auf Mathe!* Abgerufen am 27.10.2024 unter https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/gess/ifv/professur-lehr-und-lernforschung/Medien/FamilienSPICK_2.10.220%20Null%20Bock%20auf%20Mathe.pdf.
- [20] Falle, J. (2005a). *From Arithmetic to Algebra*. In: Clarkson u.a. (Hrsg.): Building Connections: Research, Theory and Practice. Conference proceedings of MERGA 28, 337–344.
- [21] Falle, J. (2005b). *Towards a Language-based Model of Students' Early Algebraic Understandings: Some Preliminary Findings*. University of New England.
- [22] Fischer, A. (2009). *Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassung von Fünftklässlern*. Journal für Mathematik-Didaktik 30, 3 – 29.
- [23] Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). *Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen*. Praxis der Mathematik in der Schule, 52 (33), 1-7.
- [24] Gabler, L. & Ufer, S. (2020). *Flexibilität im Umgang mit mathematischen Situationsstrukturen – Eine Vorstudie für die Entwicklung eines Förderkonzepts zum Lösen additiver Textaufgaben*. Journal für Mathematik-Didaktik, 42(1), 61–96.
- [25] Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). *Mathematics instruction for students with learning disabilities. A meta-analysis of instructional components*. Review of Educational Research, 79(3), 1201–1242.

- [26] Gillies, R. M. & Ashman, A. F. (2000). *The effects of cooperative learning on students with learning difficulties in the lower elementary school*. Journal of Special Education, 34, 19–27.
- [27] Hämmerle, C. S. (2023). *Flexibles Gleichungslösen im Klassengespräch unterstützen – der Beitrag des Vergleichens von multiplen Lösungswegen*. Journal für Mathematik-Didaktik, 44, 355–384.
- [28] Harper, E. (1987). *Ghost of Diophantus*. Educational Studies in Mathematics, 18, 75–90.
- [29] Hefendehl-Hebeker, L., Rezat, S. (2015). *Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung*. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, H-G. Weigand (Hrsg.): Handbuch der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum.
- [30] Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). *A cognitiv gap between Arithmetic and Algebra*. Educational studies in mathematics 27, 59 – 78.
- [31] Jurkowski, S. (2010). *Soziale Kompetenzen und Lernerfolg beim kooperativen Lernen*. Kassel University Press.
- [32] Khasawneh, E., Hodge-Zickerman, A., York, C. S., Smith, T. J., & Mayall, H. (2023). *Examining the effect of inquiry-based learning versus traditional lecture-based learning on students' achievement in college algebra*. International Electronic Journal of Mathematics Education, 18(1), em0724.
- [33] Kieran, C. (1989). *The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective*. In: S. Wagner & C. Kieran (Eds.): Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra (pp. 33-56). National Council of Teachers of Mathematics.
- [34] Kieran, C. (1990). *Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra*. In: A. Howson & J.-P. Kahane (Eds.): Mathematics and Cognition (pp. 96–112). Cambridge University Press.
- [35] Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Fong Ng, S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer International Publishing.
- [36] Korten, L. (2020). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht*. Springer Spektrum.
- [37] Küchemann, D. (1978). *Children's understanding of numerical variables*. Mathematics in School, 7(4), 23–26.
- [38] Linn, M. C. & Eylon, B. S. (2006). *Science Education: Integrating Views of Learning and Instruction*. In: P. A. Alexander & P. H. Winne (Eds.): Handbook of educational psychology (pp. 511–544). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- [39] Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

- [40] Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. Paul Chapman Publishing.
- [41] Melzig, D. (2013). *Die Box als Stellvertreter: Ursprüngliche Erfahrungen zum Variablenbegriff*. Fakultät für Mathematik: Duisburg-Essen.
- [42] Mink, D. V., Mason, L. & Fackler, J. (2009). *Strategies for Teaching Mathematics*. Shell Education.
- [43] Naujok, N., Brandt, B., Krummheuer, G. (2008). *Interaktion im Unterricht*. In: W. Helsper & J. Böhme (Hrsg.): *Handbuch der Schulforschung*, 779-799.
- [44] Prediger, S. (2008). „-nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ In: B. Barzel u.a. (Hrsg.): *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker, Franzbecker*, 89-99.
- [45] Radford, L. (2011). *Grade 2 Students’ Non-Symbolic Algebraic Thinking*. Springer.
- [46] Rezat, S. (2019). *Extensions of number systems: Continuities and discontinuities revisited*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University.
- [47] Reiss, K. & Hammer, C. (2021). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. (2. Aufl.). Springer Nature.
- [48] Rosnick, P. & Clement, J. (1980). *Learning without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions*. *Journal of Mathematical Behaviour*, 3(1), 3-27.
- [49] Roth, J. & Vom Hofe, R. (2023). *Grundvorstellungen unterrichten*. - In: *mathematik lehren*, 236, 8-11.
- [50] Schiffer, K. (2019). *Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra*. Springer Vieweg.
- [51] Sfard, A. (1987). *Two Conceptions of Mathematical Notions: Operational and Structural*. *Proceedings of Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, 3, 162–169.
- [52] Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). *The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra*. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2–3), 191–228.
- [53] Specht, B. & Plöger, H. (2011). *Das Kreuz mit dem x-Beliebigen*. *Der Mathematikunterricht*, 57(2), 4–15.
- [54] Stacey, K. (2011). *Eine Reise über die Jahrgänge. Vom Rechenausdruck zum Lösen von Gleichungen*. - In: *mathematik lehren*, 169, 8–12.

- [55] Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. CD- β Press, Center for Science and Mathematics Education.
- [56] Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Klett.
- [57] Vollrath, H.-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe*. (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
- [58] Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
- [59] Webb, N. M. (1989). *Peer interaction and learning in small groups*. International Journal of Educational Research, 13(1), 21–39.
- [60] Wheeler, D. (1996). *Backwards and forwards: Reflections on different approaches to Algebra*. In: N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.): *Approaches to Algebra*, 317-325. Kluwer Academic Publishers.
- [61] Weigand, H., Schüler-Meyer, A., Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra*. (4. Aufl.). Springer Spektrum.
- [62] Wilhelm, K. & Andelfinger, B. (2021). *Mathe - heute für morgen: achtsamer Unterricht*. - In: *mathematik lehren*, 227, 2-8.
- [63] Winter, H. (1982). *Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. *Mathematica didactica* 5(4), 185-211.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung der Grundvorstellungen samt der drei Variablenaspekte (Weigand et al., 2022)	11
3.1	Darstellung der verschiedenen Sets (Falle, 2005b)	27
5.1	Das didaktische Dreieck beim Rechnereinsatz nach Bichler (2010)	40
5.2	„Knack die Box“- Modell (Weigand et al., 2022)	43
5.3	Waage-Modell (Weigand et al., 2022)	44
5.4	Falt- bzw. Streifenmodell (Barzel & Holzäpfel, 2011)	46
7.1	1. Seite des Arbeitsblattes	54
7.2	2. Seite des Arbeitsblattes	55
7.3	Lernförderliche Umgebung in der Schule	56
7.4	Skizze des Settings	57
8.1	Erreichte Punkte der einzelnen Gruppen	59
8.2	Erreichte Punkte in Abhängigkeit der benötigten Zeit in Minuten	60
8.3	Videostandbild	64
8.4	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 2	68
8.5	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 2	70
8.6	Besondere Anordnung der Bohnen von Aufgabe 4	71
8.7	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 1	72
8.8	Aufgabe 4 - Boxenanordnung mit unterschiedlichen Farben	74
8.9	Aufgabe 3 - Videostandbild von Gruppe 9	75
8.10	Aufgabe 4 - Hinzugabe unterschiedlicher Bohnenanzahlen	78
8.11	Schwierigkeiten mit der Notation bei Aufgabe 6	79
8.12	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4	80
8.13	Illustration der Aufgabenstellung 4	81
8.14	Ergebnis Aufgabe 3 von Gruppe 7	82
8.15	Aufgabe 3 - Videostandbild von Gruppe 2	84
8.16	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4	85
8.17	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4	86
8.18	Illustration der Boxenanordnung von Aufgabe 4	87
8.19	Ergebnis Aufgabe 5 von Gruppe 9	88

Tabellenverzeichnis

8.1	Ergebnisse der Gruppen für die einzelnen Aufgaben (maximale Punktzahlen in Klammern)	61
-----	--	----

