

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Planen, Steuern und Kontrollieren im Mathematikunterricht.
Metakognition im Lehr- und Lernprozess

verfasst von | submitted by
Lena Taisser BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 520 523 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Mathematik Unterrichtsfach Physik

Betreut von | Supervisor:

ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. Stefan Götz

Zusammenfassung

Unter Metakognition wird das Nachdenken und Reflektieren über die eigenen Denkprozesse verstanden, das im Mathematikunterricht vor allem bei der Aufgabenbearbeitung eine zentrale Rolle spielt und sich positiv auf die Lernleistung der SchülerInnen auswirkt. Die vorliegende Masterarbeit beleuchtet umfassend die theoretischen Grundlagen der Metakognition und geht näher auf die Frage ein, inwiefern der Einsatz metakognitiver Strategien im Mathematikunterricht gelingen und gefördert werden kann. Dazu werden Aufgaben aus den vier Kompetenzbereichen des österreichischen Mathematiklehrplans für die Sekundarstufe 1 analysiert und konkrete Umsetzungsmöglichkeiten für den Schulunterricht vorgestellt. Die Ergebnisse zeigen, dass Aufgaben mit multiplen Lösungsansätzen und Modellierungscharakter besonders geeignet sind, um SchülerInnen zum metakognitiven Arbeiten zu motivieren. Darüber hinaus wird deutlich, dass die gezielte Unterstützung durch die Lehrkraft sowie die Berücksichtigung individueller Lernvoraussetzungen entscheidend für die Wirksamkeit der eingesetzten Fördermaßnahmen sind.

Abstract

Metacognition is understood as thinking and reflecting on one's thought processes, which plays a central role in mathematics lessons, especially when working on tasks. In addition, it has a positive effect on students' learning performance. This master's thesis provides an extensive exploration of the theory of metacognition and examines how the use of metacognitive strategies in maths lessons can be reached and promoted. Therefore, tasks based on the four competence areas of the Austrian mathematics curriculum for lower secondary schools are analysed and implementation options for school lessons are presented. The results show that tasks with multiple solution approaches and modeling characters are particularly suitable for motivating students to work metacognitively. Furthermore, results indicate that support from the teacher and consideration of individual learning requirements are necessary for the effectiveness of the assistance measures.

Inhaltsverzeichnis

1	METAKOGNITION	1
1.1	Metakognition und Kognition	4
1.2	Metakognitive Strategien	6
1.2.1	Exekutiver bzw. prozeduraler Aspekt: Planen, Steuern und Kontrollieren	6
1.2.2	Deklarativer Aspekt: Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen	11
1.2.3	Motivationaler Aspekt	13
1.3	Metakognitive Techniken	13
2	METAKOGNITION IM MATHEMATIKUNTERRICHT	18
2.1	Metakognition im Lehr- und Lernprozess	18
2.2	Metakognition bei der Aufgabenbearbeitung	23
2.3	Metakognition beim Problemlösen und Modellieren	24
2.3.1	Modellierungsaufgaben als Problemlöseaufgaben	25
2.3.2	Modellierung im Lehr- und Lernprozess	27
2.3.2.1	Der Modellierungsprozess anhand des Modellierungskreislaufes	28
2.3.2.2	Modellierungskompetenzen und Metakognition	30
2.3.2.3	Schwierigkeiten bei der Modellierung	34
2.3.2.4	Konstruktion und Auswahl von Modellierungsaufgaben	35
2.3.2.5	Förderung von Modellierungskompetenz	37
2.3.2.6	Modellierungsaufgabe: Stunt auf dem Heißluftballon	39
2.4	Auslöser und Auswirkungen metakognitiven Verhaltens	50
2.5	Praktische Anwendungen von Metakognition im Schulunterricht	54
3	FÖRDERUNG METAKOGNITIVER KOMPETENZ	79
4	CONCLUSIO UND AUSBLICK	88
5	LITERATURVERZEICHNIS	89

1 Metakognition

Der Ursprung der Metakognition liegt im Bereich der kognitiven Entwicklungspsychologie unter dem Begriff *Metagedächtnis* und wird seit den 1970er Jahren im Zusammenhang mit kognitiven Prozessen analysiert (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 425). Die drei Hauptgebiete der metakognitiven Forschung sind die Entwicklungspsychologie, die experimentelle und kognitive Psychologie sowie die Bildungspsychologie. Aufgrund der Tatsache, dass es zu diesem Konzept viele verschiedene Arbeiten mit unterschiedlichen Schwerpunkten gibt, die je nach Forschungsgebiet variieren, sind zahlreiche Definitionen zum Begriff *Metakognition* vorhanden, die sich aber im Kern alle auf die Reflexion und Kontrolle des eigenen Denkens beziehen (vgl. Krüger 2022, S. 5 f.). Dieser Grundgedanke geht auch aus der Definition von Flavell (1976) hervor, der den Begriff der Metakognition von Beginn an geprägt hat (vgl. Sjuts 2016, S. 195 f.). Weinert (1994, S. 193) beschreibt Metakognition bspw. wie folgt:

„Dabei versteht man unter Metakognition im allgemeinen jene Kenntnisse, Fertigkeiten und Einstellungen, die vorhanden, notwendig oder hilfreich sind, um beim Lernen oder Denken (implizite wie explizite) Strategieentscheidungen zu treffen und deren handlungsmäßige Realisierung zu initiieren, zu organisieren und zu kontrollieren.“

Aus dieser Erklärung geht bereits hervor, dass Metakognition verschiedene Komponenten umfasst, die sich auf die Kenntnisse, Fertigkeiten sowie auf die Einstellungen beziehen (vgl. Krüger 2022, S. 6). Daraus ergeben sich im Rahmen der Definition von Metakognition drei Aspekte, die für den erfolgreichen Einsatz metakognitiver Fähigkeiten wesentlich sind. Zum einen der *exekutive* bzw. *prozedurale* Aspekt, der sich nach Kaiser (2018, S. 33) auf die Beherrschung universell einsetzbarer Strategien des Planens, Steuerns und Kontrollierens sowie den zielführenden Umgang mit metakognitiven Techniken bezieht, und zum anderen den *deklarativen* Aspekt, worunter das Verfügen über grundlegendes, transferfähiges Wissen zur Verarbeitung von textuell, bildlich oder numerisch präsentierten Informationen verstanden wird (vgl. Kaiser 2018, S. 33). Darüber hinaus bedarf es der

Bereitschaft und Offenheit, Erfahrungen im Umgang mit metakognitiven Strategien zu sammeln, was den dritten, *motivationalen* Aspekt darstellt (vgl. Sjuts 2016, S. 197).

Metakognitive Strategien als Teil des exekutiven bzw. prozeduralen Wissens sind wichtige Komponenten des selbstregulierten Lernens (vgl. Ehret 2017, S. 82). Unter selbstreguliertem Lernen wird allgemein die Selbststeuerung des Lernprozesses in Abhängigkeit von der Lernmotivation verstanden. Die SchülerInnen entscheiden selbst, welche kognitiven, metakognitiven und volitionalen Strategien sie zur Bearbeitung ihrer Aufgaben heranziehen müssen, und reflektieren diese entsprechend. Erfüllen die Lernenden diese Anforderung, so werden ihnen Kompetenzen im Bereich der Selbstregulation zugeschrieben. Insbesondere bei der Steuerung des eigenen Verhaltens in Bezug auf bestimmte Aufgabenstellungen ist prozedurales Wissen erforderlich (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 426 f.). Das Planen, Steuern sowie Kontrollieren kann den eigenen Lernprozess positiv beeinflussen und zur erfolgreichen Bearbeitung komplexer Aufgaben beitragen (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 424). Durch das Festlegen der eigenen Ziele zu Beginn des Arbeitsprozesses werden die SchülerInnen aktiv in das Lernen miteinbezogen und nehmen dadurch ihr Handeln und Tun bewusster wahr (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 427).

So konnten zahlreiche Studien, wie etwa Azevedo (2009), Hattie (2009) oder Kaiser et al. (2015a), zeigen, dass metakognitives Lernen sowie Lehren den Lernerfolg der SchülerInnen steigern. Kaiser (2018) und sein Team haben im Rahmen der Forschungsprojekte KLASSIK und mekoFUN empirisch nachgewiesen, dass Erwachsene, die mithilfe metakognitiver Strategien unterrichtet wurden (Versuchsgruppe), eine 5,5-fach höhere Chance hatten, Aufgaben auf einem höheren Leistungsniveau zu bearbeiten als TeilnehmerInnen des herkömmlichen Unterrichts (Vergleichsgruppe). Auch bei geringqualifizierten Testpersonen konnten signifikante Fortschritte in der Aufgabenbewältigung festgestellt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 34).

In Abb. 1 ist deutlich zu erkennen, dass in allen drei Versuchsgruppen, d. h. bei Menschen mit einem Sonder-/Förderschulabschluss, einem Hauptschulabschluss oder einem Mittleren/Höheren Schulabschluss, eine Steigerung der Effektstärke in Bezug auf die Informationsverarbeitungskompetenz zu verzeichnen

ist. Die Effektstärke gibt an, inwiefern eine pädagogische Maßnahme, in diesem Fall der Einsatz metakognitiver Strategien, zu einer positiven Beeinflussung des Leistungsniveaus führt. Dabei gelten Effekte ab 0,4 für die Praxis als relevant. Vor allem die TeilnehmerInnen mit einem Hauptschulabschluss erreichen überdurchschnittliche Ergebnisse. Die Lernenden aus der Vergleichsgruppe mit herkömmlichem Unterricht zeigten kaum eine Verbesserung im Bezug auf ihr Problemlösevermögen (Effektstärke unter 0,4). Fazit dieses Projekts ist, dass metakognitive Rahmenbedingungen innerhalb der Lernumgebung zu einer signifikanten Erhöhung des Leistungsniveaus der TeilnehmerInnen beitragen. Darüber hinaus lassen sich aus den Ergebnissen relevante Implikationen für die Praxis ableiten. Im herkömmlichen Unterricht liegt der Fokus viel stärker auf der Vermittlung einzelner Inhalte sowie der Reproduktion und dem Auswendiglernen von Wissensbausteinen, viel weniger auf der Reflexion des eigenen Tuns und Handelns. Zudem wird der gezielte Einsatz bestimmter Lernstrategien und -techniken vernachlässigt, wodurch metakognitive Prozesse in den Hintergrund treten (vgl. Kaiser 2018, S. 35 ff.).

Lernfortschritte in Maßnahmen der Grundbildung

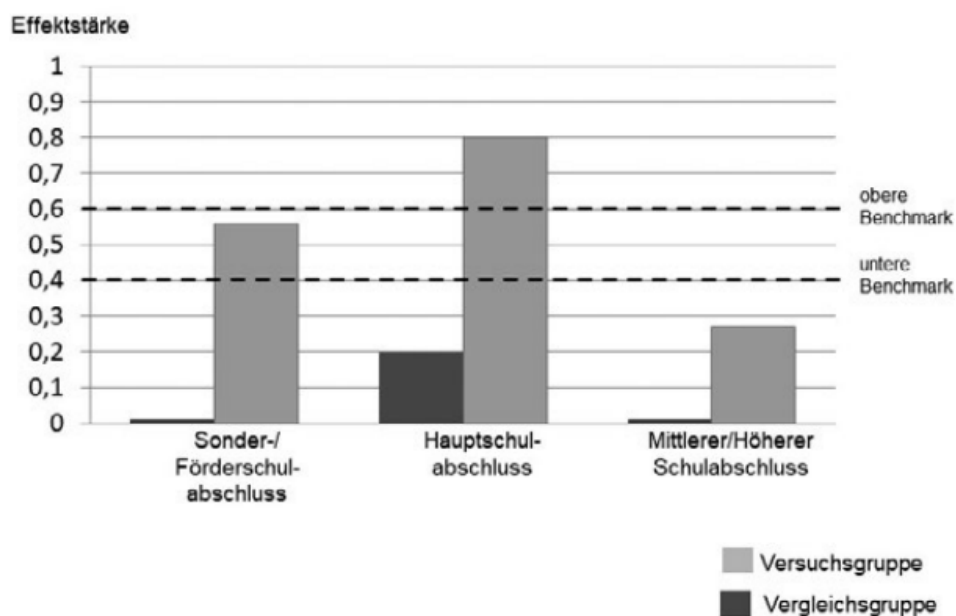


Abbildung 1: Informationsverarbeitungskompetenz. Ergebnisse des Projekts mekoFUN (Kaiser 2018, S. 34)

Um erklären zu können, wie metakognitive Lernprozesse das Leistungsniveau der Lernenden positiv beeinflussen können, müssen die im Gehirn ablaufenden Informationsverarbeitungsprozesse beleuchtet werden. Dabei interagiert das Kurzzeitgedächtnis mit dem Langzeitgedächtnis, wo im *episodischen* Gedächtnis

Informationen auf Basis von Erfahrungen und Erlebnissen gespeichert werden. Im sogenannten *semantischen* Gedächtnis werden alle Strategien und Regeln zur Informationsverarbeitung gespeichert. Das Kurzzeitgedächtnis nimmt alle visuellen, akustischen und haptischen Reize auf, die dann an das Langzeitgedächtnis weitergeleitet werden. Dort wird überprüft, ob bereits passende Wissens Elemente vorhanden sind. Dazu gehören Faktoren des metakognitiv-deklarativen Wissens und des Aufgabenwissens. Anschließend werden alle Informationen abgerufen, die für die Verknüpfung der bereits bekannten und der neu erworbenen Elemente relevant sein können. Diese erarbeiteten Informationen führen dann zu weiteren Handlungen, die als neues Element in das Langzeitgedächtnis aufgenommen werden können. Als Beispiel sei hier das Aufheben eines am Boden liegenden Gegenstandes genannt. Die meisten dieser Prozesse laufen unbewusst und routinemäßig ab. Es kann aber auch vorkommen, dass Prozesse aufgrund der aufgenommenen Informationen unterbrochen oder sogar abgebrochen werden. Insbesondere bei widersprüchlichen oder für die Person problematischen Informationen kann die Metakognition unterstützend wirken. Des Weiteren kann sie bei der Planung, Steuerung und Kontrolle der Informationsverarbeitung helfen. Im Langzeitgedächtnis werden diese Elemente gespeichert, die dann für textliche, bildliche und numerisch dargestellte Informationen benötigt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 38 f.).

1.1 Metakognition und Kognition

Die zahlreichen Definitionsversuche und Forschungsschwerpunkte machen die Komplexität der *Metakognition* deutlich. Daher ist es besonders wichtig, metakognitive Tätigkeiten von anderen mentalen Aktivitäten, wie der Kognition, abzugrenzen (vgl. Krüger 2022, S. 15 f.). Metakognition kann dabei als übergeordneter Begriff der Kognition verstanden werden (vgl. Ehret 2017, S. 72). Im Gegensatz zu metakognitiven Prozessen sind jene im Bereich der Kognition an eine konkrete Situation gebunden und beziehen sich jeweils auf die vorliegende Aufgabe. Allgemeine Denkprozesse, wie das Planen, Steuern oder Kontrollieren, sind situationsunabhängig und können daher zur Metakognition gezählt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 47).

Die Unterscheidung zwischen Metakognition und Kognition lässt sich auch auf die bei einer Aufgabenbearbeitung gewählte Strategien anwenden. Strategien im Allgemeinen sind Handlungsmuster, die bewusst eingesetzt werden, um eine bestimmte Aufgabe zu lösen. Sie können je nach Aufgabenformat flexibel verwendet werden. Kognitive Strategien sind gegenstandsbezogen und auf einen bestimmten Wissensbereich beschränkt (vgl. Kaiser 2018, S. 48). Darüber hinaus dienen sie der Informationsverarbeitung sowie der Informationsspeicherung und in weiterer Folge der Informationsanwendung. Mögliche Handlungen kognitiver Strategien sind bspw. das Wiederholen, Organisieren und Elaborieren. Dazu zählen das Aktivieren und Reflektieren von Vorwissen, das Herstellen von Analogien, das Markieren wichtiger Inhalte, das Ziehen von Schlussfolgerungen sowie das Skizzieren von Begriffsnetzen mit der Einteilung in Ober- und Unterbegriffe (vgl. Ehret 2017, S. 79 f.). Metakognitive Strategien sind von den kognitiven Strategien kaum zu trennen, da sie bei ihrer Auswahl sowie beim sinnvollen Einsatz helfen (vgl. Kaiser 2018, S. 48). Metakognitive Strategien unterstützen bzw. sichern einen variablen sowie kritischen und reflektierten Umgang mit kognitiven Strategien (vgl. Krüger 2022, S. 12).

Es gibt eine Vielzahl kognitiver Strategien, die in Verbindung mit den vorgegebenen Leitfragen bei der Aufgabenbewältigung hilfreich sein können. Tab. 1 zeigt einen Ausschnitt möglicher kognitiver Strategien (linke Spalte) mit passenden Leitfragen (rechte Spalte), die zum metakognitiven Arbeiten anregen sollen.

Strategie	Leitfragen
<i>Zuordnungsstrategie – Beziehungen herstellen</i>	Welche Teile der Informationen lassen sich einander zuordnen? Welche Beziehungen lassen sich zwischen ihnen herstellen?
<i>Ersetzungsstrategie</i>	Welche Begriffe/Teilinformationen kann ich ersetzen (durch andere Begriffe, Beispiele, Sachverhalte)?
<i>Zerlegungsstrategie (oder Differenzierungsstrategie)</i>	In welche Teile (Teilschritte, Teilelemente) lassen sich die Informationen/lässt sich die Aufgabenstellung zerlegen?
<i>Gruppierungsstrategie, Ordnen</i>	In welche Gruppen/Klassen lassen sich die gegebenen Informationen ordnen?
<i>Kontrastierungsstrategie</i>	Welche Aspekte lassen sich den hier gegebenen gegenüberstellen? In welche Teilelemente lässt sich die Aufgabe ausdifferenzieren? Stehen diese stimmig oder konträr zueinander?
<i>Darstellungsform wechseln</i>	In welche andere Darstellungsform könnte ich die Informationen, die Aufgabenstellung übertragen (Grafik, Text, Tabelle, Schaubild)?

Tabelle 1: Tabelle kognitiver Strategien bei Problemlöseaufgaben (Kaiser 2018, S. 49)

1.2 Metakognitive Strategien

Die Differenzierung zwischen exekutivem bzw. prozeduralem und deklarativem Wissen ist die erste Unterscheidung metakognitiver Strategien (vgl. Ehret 2017, S. 77). Die exekutive bzw. prozedurale Komponente bezieht sich, wie bereits erwähnt, auf das allgemeine Handeln, wie das Planen, Steuern und Kontrollieren der ablaufenden Denkprozesse. Der deklarative Aspekt hingegen beschreibt das metakognitive Wissen, welches Wissen über die eigene Person, Aufgabe und Strategie beinhaltet (vgl. Kaiser 2018, S. 53 f.). Der dritte Bereich der metakognitiven Strategien umfasst die Motivation sowie das Gespür, die richtigen Strategien entsprechend einzusetzen (vgl. Krüger 2022, S. 10).

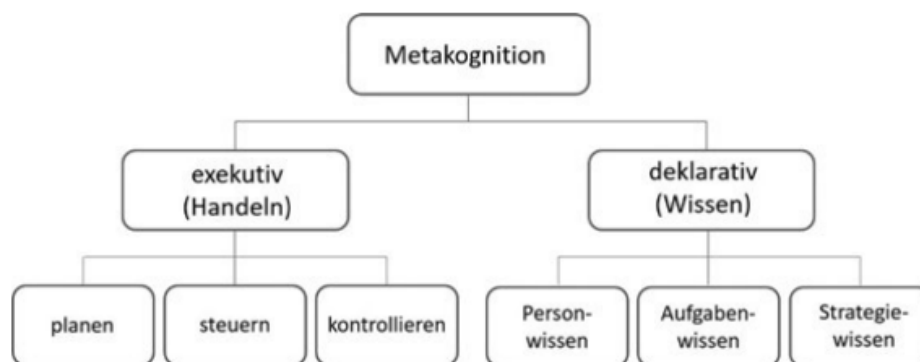


Abbildung 2: Der exekutive und deklarative Aspekt der Metakognition (Kaiser 2018, S. 54)

1.2.1 Exekutiver bzw. prozeduraler Aspekt: Planen, Steuern und Kontrollieren

Metakognition kann als wichtige Unterstützung bei komplexen Informationsverarbeitungsprozessen angesehen werden. Wird diese Fähigkeit bewusst und strategisch eingesetzt, kann Metakognition als eine Art Coach angesehen werden, der den Denkprozess in Form von Fragen unterstützt. Dabei ist es wichtig, zunächst die vorliegenden Informationen bzw. die Art der Aufgabe zu analysieren, um sie in die passenden Kategorien, in *neu* oder *bekannt*, einzuordnen. Dadurch werden bereits genutzte Strategien zur Aufgabenbewältigung aktiviert oder auch nicht. Können Aufgaben mit routinierten Handlungen bearbeitet werden, ist der Einsatz metakognitiver Strategien nicht notwendig. Wird eine Aufgabe jedoch komplexer, so müssen metakognitive Fähigkeiten aktiviert werden und die drei

Strategien des Planens, Steuerns und Kontrollierens kommen zum Einsatz. (vgl. Kaiser 2018, S. 40).

Zu Beginn der Aufgabenbearbeitung steht der Planungsprozess mit der Zielsetzung und Festlegung der einzelnen Arbeitsschritte zur Zielerreichung im Fokus. Dies kann in Form eines kurzen Handlungsplans festgehalten werden. Dabei können die einzelnen Strategien ausgewählt und in einem weiteren Schritt in der richtigen Reihenfolge notiert werden. Wichtig ist, dass bei der Bearbeitung immer die vorhandenen Ressourcen und das eigene Leistungsniveau im Auge behalten werden, um zu einer optimalen Lösung zu gelangen. Das zu Beginn gesetzte Ziel kann in kleinere Teilziele unterteilt werden. So wird durch die erfolgreiche partielle Bearbeitung die Motivation aufrechterhalten und die Überwachung des Arbeitsprozesses erleichtert (vgl. Krüger 2022, S. 13). Zudem wird ein unüberlegtes und vorschnelles Ausprobieren verschiedener Lösungswege verhindert (vgl. Kaiser 2018, S. 40 f.). Klauer (2000) unterscheidet hinsichtlich der Zielsetzung im Rahmen der Planungsstrategie zwischen primären und sekundären Zielen. Dabei beziehen sich die primären Ziele in der Regel auf die Planungsziele. Ein Beispiel hierfür wäre, die vorliegende Arbeit zu bewältigen. Die Effizienzziele als sekundäre Ziele beschreiben das möglichst effiziente Lösen, bspw. in einer bestimmten Zeit bei Prüfungen oder mit möglichst wenig Hilfsmitteln (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 426).

Anschließend erfolgt die Steuerung der geplanten Arbeitsschritte und der Einsatz kognitiver Strategien, wie das Hervorheben oder Vergleichen und das In-Beziehung-Setzen der gegebenen Informationen. In dieser Phase kann es auch vorkommen, dass geplante Handlungen verändert oder optimiert werden müssen, um das gewünschte Ergebnis zu erreichen (vgl. Kaiser 2018, S. 41). Der Steuerungsprozess, der während des gesamten Bearbeitungsprozesses stattfinden muss, soll mögliche Differenzen zwischen dem Ist- und dem Soll-Zustand aufzeigen, um eventuelle Anpassungen hinsichtlich der zu verwendenden Strategien oder Informationen vorzunehmen (vgl. Krüger 2022, S. 13). Dabei ist der Ist-Zustand der aktuelle Zustand im Arbeitsprozess und der Soll-Zustand das primäre Ziel der Aufgabe (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 426).

Nach erfolgreicher Steuerung kommt die Kontrollstrategie zur Anwendung. Diese Strategie fordert die Lernenden auf, die bisher vorliegenden Ergebnisse nicht ohne Weiteres als richtig oder vollständig anzusehen, sondern zu prüfen, ob alle für die Aufgabenbewältigung wichtigen Informationen tatsächlich berücksichtigt wurden. Darüber hinaus soll in der Aufgabenstellung bewusst nach Informationen gesucht werden, die nicht zum Ergebnis passen. Wird keine solche Information gefunden, kann der Denkprozess erfolgreich abgeschlossen werden (vgl. Kaiser 2018, S. 40 f.). In dieser Phase werden auch die Ergebnisse kritisch bewertet und die angewandten Strategien auf ihre Effizienz reflektiert. Abgeschlossen wird diese Phase mit der Gewinnung neuer Erkenntnisse bzw. der Ableitung von Schlussfolgerungen für weiter anstehende Aufgaben. Diese abschließende Reflexion stellt im Grunde den wichtigsten Teil des Bearbeitungsprozesses dar, da sie zu einer Verbesserung des eigenen Lernprozesses und Erweiterung des Wissensspektrums führen kann (vgl. Krüger 2022, S. 13 f.).

Demnach stellt der exekutive Aspekt nach Kaiser (2018, S. 53) bzw. das prozedurale Wissen nach Ehret (2017, S. 78) das *know-how*-Wissen dar, welches den zweiten Aspekt, das deklarative Wissen, erst wirksam werden lässt. Ohne das prozedurale Wissen kann eine sinnvolle Reflexion und Weiterentwicklung der eingesetzten Techniken nicht stattfinden (vgl. Ehret 2017, S. 78). Für eine erfolgreiche Aufgabenbewältigung mithilfe der prozeduralen Metakognition können u. a. die Methoden des Lauten Denkens (Abschnitt 2.1) oder ein schriftliches Protokollieren des eigenen Denkens und Handelns hilfreich sein (vgl. Sjuts 2016, S. 198).



Abbildung 3: Zusammenfassung der Aufgaben der metakognitiven Strategien: Planen, Steuern und Kontrollieren (Kaiser 2018, S. 42)

In Abb. 3 sind nochmals alle Schritte stichwortartig zusammengefasst. Aus dieser Abbildung geht auch hervor, dass die einzelnen Prozesse nicht wie oben beschrieben hintereinander ablaufen, sondern auch ineinander übergehen und verkürzt angewendet werden können (vgl. Kaiser 2018, S. 42).

Um den Unterschied zwischen einem Arbeitsprozess mit und ohne den Einsatz metakognitiver Strategien deutlich zu machen, werden zwei Ausschnitte aus den Protokollen zweier SchülerInnen gezeigt. Lernender 1 (L1) wendet bei der Bearbeitung des Beispiels keine metakognitiven Strategien an, Lernende 2 (L2) hingegen schon. Die Aufgabe besteht darin, die Diagramme in Abb. 4 zu interpretieren (vgl. Kaiser 2018, S. 42).

Anteile der Bevölkerung ohne Bildungsabschluss
Zahlenangaben in Tausendern

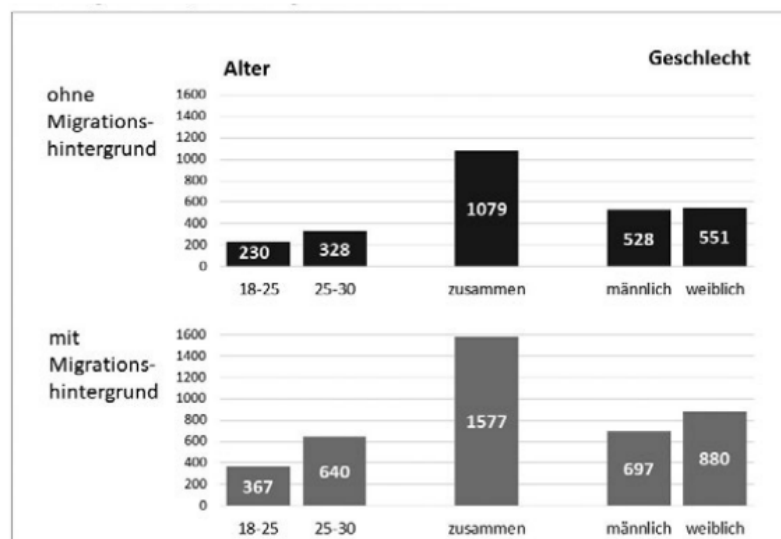


Abbildung 4: Anteile der Bevölkerung ohne Bildungsabschluss (Kaiser 2018, S. 43)

L1:

„Da geht es um den Bildungsabschluss. Links steht was zum Alter und rechts was zum Geschlecht. In der Mitte ist ein Balken, der zusammen heißt. Das ist auch der größte Balken, vermutlich ist das dann die Zahl, wenn man alles zusammenzählt. Dann hätten 1 079 Menschen ohne Migrationshintergrund keinen Bildungsabschluss und 1 577 mit Migrationshintergrund. So groß ist der Unter-

schied ja gar nicht ... Bei den Menschen mit Migrationshintergrund sind die Unterschiede zwischen den Balken irgendwie größer, zum Beispiel beim Geschlecht. Und insgesamt scheinen es mehr zu sein. Ja.“ (Kaiser 2018, S. 43).

L2:

„Hm, das sieht auf den ersten Blick etwas kompliziert aus. Am besten lese ich mal zuerst die Überschrift, um zu wissen, worum es geht. [...] Jetzt schaue ich mir mal den Aufbau der Grafik an, ehe ich mich um die Zahlen kümmere, und sehe, ob es da irgendwelche Regelmäßigkeiten oder Zusammenhänge gibt. [...] Insgesamt haben beide Grafiken fünf Balken, die beschriftet sind. Die Balken unter der Kategorie Alter mit vermutlichen Altersangaben, die unter Geschlecht mit männlich – weiblich und der Balken in der Mitte mit zusammen. Vermutlich ist das dann der Gesamtwert – aber das werde ich mir gleich noch genauer anschauen. [...] Da dort zusammen steht, müsste das dann ja die Zahl sein, die sich ergibt, wenn man alles zusammenzählt ... Halt, aber das kann nicht stimmen ... dafür ist die Zahl zu klein. Ich sehe, dass das die Zahl ist, die sich aus den beiden Geschlechtern ergibt. [...] Aber wie passt das dann mit dem Alter? Das verstehe ich noch nicht ganz. [...] Ich vergleiche das jetzt mal mit den Zahlen aus der unteren Grafik, da diese ja gleich aufgebaut ist. Auch hier ist es so [...]. [...] Hmm, wie könnte ich das lösen, was ist denn der Unterschied zwischen den Kategorien?“ (Kaiser 2018, S. 43 f.).

Eine Analyse der beiden Lösungen hebt die metakognitiven Merkmale deutlich hervor. L1 beginnt mit der Beschreibung der Graphik ohne konkrete Überlegungen und arbeitet im weiteren Verlauf sehr ungenau und ohne seine Aussagen zu überprüfen. Zudem fehlt die Begründung des Vorgehens zur Bewältigung der Aufgaben und es werden während des Bearbeitungsprozesses keine inhaltlichen Fragestellungen verfolgt. Bei L2 ist im Vergleich zu L1 ein systematisches, planvolles und kontrolliertes Vorgehen zu erkennen, was auf ein bereits im Vorfeld stattgefundenes Training metakognitiver Strategien zurückzuführen ist. (vgl. Kaiser 2018, S. 45 f.). Konkrete Aussagen lassen sich auch den drei Hauptstrategien (Planen, Steuern und Kontrollieren) zuordnen (Kaiser 2018, S. 45):

Planen: *„Am besten lese ich mal zuerst die Überschrift, um zu wissen, worum es geht ...“*

Steuern: *„Aber wie passt das mit dem Alter? Das verstehe ich noch nicht ganz. Die Zahlen passen da ja gar nicht rein [...] Ich vergleiche das jetzt mal mit den Zahlen aus der unteren Grafik, da diese ja gleich aufgebaut ist.“*

Kontrollieren: *„Da dort zusammen steht, müsste das dann ja die Zahl sein, die sich ergibt, wenn man alles zusammenzählt ... halt, aber das kann nicht stimmen [...] Ich sehe, dass das die Zahl ist, die sich aus den beiden Geschlechtern ergibt. [...]“*

Es wird deutlich, dass die Anwendung metakognitiver Strategien einen erheblichen Zeitaufwand mit sich bringt. Trotzdem wird dieser Faktor in gewisser Weise durch ein vorschnelles und unreflektiertes Ausprobieren nichtzielführender Lösungen kompensiert (vgl. Kaiser 2018, S. 47).

Zusammenfassend lassen sich also einige Merkmale von metakognitiv trainierten Personen festhalten (vgl. Kaiser 2018, S. 46):

- Sie überlegen sich vor Beginn der Aufgabenbearbeitung, wie sie am besten vorgehen.
- Sie sind in der Lage, Unklarheiten zu erkennen und diese während der Bewältigung durch die Suche nach relevanten Informationen zu beseitigen.
- Sie überprüfen ihre Lösung mit den entsprechenden Informationen oder verwerfen ihre Lösung, wenn Informationen nicht passen.
- Sie verfolgen eine explizite Vorgehensweise, die sich auch auf die einzelnen Schritte, Unklarheiten und Lösungen bezieht.

1.2.2 Deklarativer Aspekt: Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen

Wie in Abb. 2 dargestellt, umfasst der deklarative Aspekt das Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen.

Unter dem Personenwissen wird das Wissen über das eigene Denken, Lernen und Arbeiten verstanden (vgl. Kaiser 2018, S. 53). Dieses Wissen ist somit die Voraussetzung für die Selbsteinschätzung der eigenen Stärken und Schwächen.

Da diese Kompetenz von vielen äußeren und situativen Faktoren beeinflusst wird, kann sie je nach Aufgabenstellung variieren (vgl. Ehret 2017, S. 77). Dennoch bildet das Wissen um die eigenen Fähigkeiten die Grundlage für die Entscheidung bezüglich der Vorgehensweise und der einzelnen Schritte während des Arbeitsprozesses (vgl. Ehret 2017, S. 78). Dabei wird nach Flavell (1979) zwischen dem *intraindividuellen*, *interindividuellen* und *universellen* Wissen unterschieden. Das Wissen über die eigene Person, also über die eigenen Interessen und Fähigkeiten, fällt unter das *intraindividuelle* Wissen. Bezieht sich das Wissen auf mehrere Individuen, so spricht man von *interindividuellem* Wissen, bei dem Vergleiche zwischen diesen hergestellt werden. Das *universelle* Wissen definiert das allgemeine Wissen über das Denken aus psychologischer Sicht (vgl. Krüger 2022, S. 7).

Das Wissen über textliche, ikonische oder numerische Informationen, die in einer Aufgabe vorkommen, zählt zum Aufgabenwissen, das je nach persönlicher Einschätzung unterschiedlich bewertet wird (vgl. Kaiser 2018, S. 53). Das Aufgabenwissen umfasst das Wissen über die verschiedenen Aufgabenformate und deren Anforderungen. Es beinhaltet das Wissen über den richtigen, d. h. lösungsorientierten Umgang mit den gegebenen Aufgabenstellungen (vgl. Krüger 2022, S. 7).

Das Strategiewissen bezeichnet das Wissen über metakognitive und kognitive Strategien, die bei der Informationsverarbeitung eingesetzt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 53). Das deklarative Wissen wird demnach auch als sogenanntes *know-that* verstanden, da das Strategiewissen die Voraussetzung für erfolgreiches Handeln, wie das Planen, Steuern und Kontrollieren, darstellt (vgl. Ehret 2017, S. 77). Dabei liegt der Fokus auf dem Erkennen der Unterschiede der vorhandenen Strategien und auf dem Erlernen, welche davon wie und wann am sinnvollsten eingesetzt werden müssen (vgl. Krüger 2022, S. 8). Beim Strategiewissen kommt es insbesondere darauf an, dass die SchülerInnen in der Lage sind, zu entscheiden, ob die von ihnen gewählten Lösungsstrategien zur Bewältigung der Aufgabe beitragen bzw. wie effizient bestimmte Handlungsschritte während des Arbeitsprozesses sind (vgl. Sijts 2016, S. 198).

Entscheidend für den Einsatz von deklarativem Wissen ist das Verständnis über metakognitive Strategien, die eine Einschätzung des zu erreichenden Ziels mit-

hilfe des vorhandenen Wissens ermöglichen. Erst das Bewusstmachen und Verknüpfen des Personen-, Aufgaben und Strategiewissens erlaubt ein erfolgreiches Bearbeiten von komplexen Anforderungen (vgl. Ehret 2017, S. 78 f.).

1.2.3 Motivationaler Aspekt

Zum exekutiven bzw. deklarativen Aspekt kommt zusätzlich die motivationale Metakognition hinzu. Diese beschreibt die Motivation und allgemein die Einstellung zum Einsatz metakognitiver Strategien bei der Aufgabenbewältigung (vgl. Krüger 2022, S. 10 f.).

Inwieweit metakognitive bzw. kognitive Strategien eingesetzt werden, hängt stark von den motivationalen Voraussetzungen der Lernenden ab, die einerseits durch die eigene Lernbereitschaft und andererseits durch äußere Faktoren beeinflusst werden (vgl. Ehret 2017, S. 82 f.). Ist die Bereitschaft zum Einsatz seitens der Lernenden nicht gegeben, kann es der Lehrkraft durch geeignete Arbeitsmaterialien gelingen, diese Voraussetzungen zu aktivieren. Des Weiteren bedarf es einer Sensibilität der SchülerInnen bezüglich der Einschätzung ihres eigenen Leistungsniveaus, was in weiterer Folge bei der Entscheidung über die richtige Vorgehensweise unterstützend wirkt (vgl. Sjuts 2016, S. 198).

1.3 Metakognitive Techniken

Unter metakognitiven Techniken werden bestimmte Handlungen verstanden, die auf metakognitiven Strategien des Planens, Steuerns und Kontrollierens beruhen und flexibel auf unterschiedliche Aufgabenformate anwendbar sind. Diese Techniken können allein oder in der Gruppe bzw. während eines Bearbeitungsprozesses (*in actione*) oder nach einem solchen (*post actione*) eingesetzt werden. Daraus ergeben sich verschiedene Umsetzungsmöglichkeiten, die je nach Verwendungskontext variieren. Während des Arbeitsprozesses können die Aufgaben allein bspw. mithilfe eines Leitfragenkatalogs bearbeitet werden oder in einer Gruppe, in der sich zwei Problemlöser gegenseitig befragen und Strategien überlegen, oder in Form einer Tutor-Tutee-Beziehung. Im Anschluss an den Bearbeitungsprozess eignet sich besonders ein Lerntagebuch oder ein Portfolio, das zur

eigenständigen Reflexion der verwendeten Strategien und der Arbeitsweise anregt. Als kooperative Methode kann ein sogenanntes reflektierendes Gespräch durchgeführt werden, in dem über das eigene Handeln gesprochen wird und mögliche metakognitive Strategien bewusst gemacht sowie für andere Lernende offengelegt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 54 f.).

Aufgrund der möglichen Techniken wird daher laut Krüger (2022) zwischen *individueller* und *sozialer* Metakognition unterschieden, wobei sich die Forschung in den letzten Jahren verstärkt auf letztere konzentriert hat. Dabei ist festzustellen, dass vor allem die unbewussten Denkprozesse der Metakognition die Grundlage für die Weiterentwicklung von der *individuellen* hin zur *sozialen* Metakognition darstellen. Hier sind vor allem Prozesse der exekutiven bzw. prozeduralen Metakognition, der Überwachung und Kontrolle betroffen. Die daraus resultierenden Ergebnisse im Bereich des metakognitiven Wissens und Könnens sowie der metakognitiven Empfindungen aktivieren den Einsatz metakognitiver Strategien im weiteren Verarbeitungsprozess (vgl. Krüger 2022, S. 18 ff.).

Die soziale Ebene der Metakognition bildet sich einerseits durch eigene persönliche Erfahrungen und andererseits durch Erfahrungen, die in kooperativen Methoden durch die Interaktion mit den PartnerInnen gemacht werden. Unter *sozialer* Metakognition werden daher alle Techniken verstanden, die in Partner- oder Gruppenarbeit durchgeführt werden können, wie z. B. die weiter unten beschriebene Technik des Tutor-Tutee-Gesprächs (vgl. Krüger 2022, S. 18 ff.). Soziale Metakognition ist dabei nicht als Zusammenschluss der metakognitiven Fähigkeiten aller Gruppenmitglieder zu verstehen. Metakognitive Kompetenzen können nur dann genutzt werden, wenn sie zunächst der Gruppe vorgestellt und auch in weiterer Folge von ihr angenommen werden. Je effektiver die Gruppe arbeitet, desto intensiver wendet sie sowohl individuelle als auch gemeinsam erarbeitete Strategien an. Zudem ist es wichtig, dass die Gruppe als Ganzes ein Verständnis für die vorliegende Aufgabe entwickelt und nicht nur jedes einzelne Mitglied für sich. Dies bedeutet, dass die Vorgehensweise als Gruppe diskutiert, sinnvoll und effektiv geplant und auch durchgeführt wird. Gleichzeitig bedarf es aber auch eines Verständnisses für die Vorschläge der anderen Mitglieder, einer wertschätzenden Kommunikation untereinander und einer ständigen Kontrolle

des Bearbeitungsprozesses (vgl. Vorhölter 2021, S. 320). Insbesondere bei dieser Technik kann es bspw. bei der Durchführung eines Modellierungsprozesses in der Gruppe immer wieder zum Fall der metakognitiven Blindheit kommen. Diese besagt, dass einzelne Mitglieder während des Bearbeitungsprozesses zwar ein Problem bemerken, es ihnen aber nicht gelingt, die anderen davon zu überzeugen, dass andere oder zusätzliche Schritte notwendig sind (vgl. Vorhölter 2021, S. 321). Hierbei steht also die kooperative und kommunikative Zusammenarbeit innerhalb der Gruppe im Vordergrund, die zu einer erfolgreichen Bearbeitung metakognitiv notwendiger Aufgaben, wie bspw. bei Modellierungsaufgaben (Abschnitt 2.3.2), führen kann (vgl. Vorhölter 2021, S. 320). Denn die SchülerInnen erhalten durch die gegenseitige Unterstützung schneller eine Lösung und können so die Motivation zur Weiterarbeit aufrechterhalten. Bei der Bearbeitung von komplexeren Aufgabenstellungen kann die Steuerung durch die Lehrperson oder auch durch technische Hilfsmittel erfolgen (vgl. Krüger 2022, S. 18 ff.).

Grundlage aller metakognitiven Techniken ist die Technik der Selbstbefragung (vgl. Kaiser 2018, S. 57). Der Grund hierfür ist, dass die Lernenden anhand vorgegebener Leitfragen metakognitiv arbeiten und somit die drei Aspekte des Planens, Steuerns und Kontrollierens stets im Blick behalten und zielgerichtet umsetzen. Dabei können die verschiedenen metakognitiven Techniken bzw. ihr Erlernen durch die Methode des Lauten Denkens (Abschnitt 2.1) unterstützt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 57). Abb. 5 zeigt mögliche Fragestellungen für den Einsatz bei komplexen Aufgabenstellungen (vgl. Kaiser 2018, S. 56).

Wichtig zu erwähnen ist, dass diese Leitfragen nicht in der exakt vorgegebenen Reihenfolge abgearbeitet werden müssen. Wie bereits in Abb. 3 ersichtlich, können sich die drei Schritte des exekutiven Aspekts (Planen, Steuern und Kontrollieren) überschneiden und auch (zyklisch) wiederholen, sodass der Fragenkatalog als Hilfestellung und weniger als verbindliche Vorgabe zu verstehen ist (vgl. Kaiser 2018, S. 56 f.).

Die Tutor-Tutee-Technik ist eine kooperative Technik, die als Unterstützung während des Bearbeitungsprozesses im Tandem eingesetzt werden kann. Dabei übernimmt eine Person die Rolle des Coaches der Metakognition, die andere Person befasst sich mit der konkreten Bearbeitung der Aufgabe und übernimmt den Part der Kognition. Auch hier können die in Abb. 5 dargestellten Leitfragen

helfen. Wichtig ist dabei, dass Fragen, wie z. B. *Wie kannst du das genauer beschreiben?* oder *Worauf zielst du genau ab?* an die Aufgabenbearbeitenden gestellt werden, um den metakognitiven Lernprozess zu aktivieren und dann zu optimieren (vgl. Kaiser 2018, S. 59).

Planungsaspekt - Wie kann ich in einigen kurzen Sätzen formulieren, was die Aufgabe mir abverlangt? - Wie kann ich mein Arbeitsziel definieren? - Welche konkreten (Einzel-)Ziele strebe ich an? - Vor welche Schwierigkeiten sehe ich mich auf den ersten Blick gestellt? - In welchen Schritten will ich die Aufgabe nun angehen? - Wie beginne ich? Steuerungsaspekt - Welche Informationen lassen sich bereits der Fragestellung zur Aufgabe entnehmen? - Welche Informationen müssen (aus den vorhandenen Materialien) erarbeitet werden? - Sind meine ursprünglich geplanten Bearbeitungsschritte nach wie vor passend? Wo muss ich noch modifizieren? - Welche Schwierigkeiten bleiben danach noch für die Bearbeitung der Aufgabe zu bewältigen? - Wie lassen sich die Informationen zu einer (Teil-)Lösung verarbeiten? - Wie werde ich danach weiter vorgehen, wie sehen meine nächsten Arbeitsschritte/-strategien aus? Kontrollaspekt - Habe ich alle in der Aufgabe und den Arbeitsmaterialien enthaltenen Informationen berücksichtigt? - Gibt es noch meiner Lösung widersprechende Elemente in der Aufgabe? - In welcher Form fasse ich meine Lösung konkret zusammen? - Ist die Lösung vollständig? Woran lässt sich das überprüfen? - Kann ich mit meiner Lösung die Aufgabenbearbeitung als abgeschlossen betrachten? - In welchem Bezug steht die Lösung zu meinen ursprünglichen Bearbeitungszielen? - In welcher Beziehung steht das Ergebnis zu meinem bisherigen Wissen auf dem angesprochenen Gebiet?
--

Abbildung 5: Leitfragen zur Abdeckung metakognitiver Strategien (Kaiser 2018, S. 56)

Zur Reflexion des eigenen Lernverhaltens kann nach der Bearbeitung der Aufgabe ein Lerntagebuch angefertigt werden, in dem nochmals über das eigene Handeln und Tun nachgedacht wird und wichtige Erkenntnisse oder auch erfolgreiche Strategien festgehalten werden. Aber auch das Notieren von weniger gut gelungenen Handlungsschritten ist für die Weiterentwicklung des eigenen Lernprozesses von großer Bedeutung und trägt zur Verbesserung zukünftiger Problemlösungsansätze bei. Das Lerntagebuch kann bereits vorab mit *Wie-* und *Was-*Fragen gestaltet werden, um die Bereiche der Kognition (*Was*) und der Metakognition (*Wie*) abzudecken. Die nachfolgende Liste zeigt mögliche kognitive bzw. metakognitive Fragen, die im Lerntagebuch beantwortet werden können (vgl. Kaiser 2018, S. 61 f.):

Kognitive Fragen:

- *Was habe ich gelernt?*
- *Was fiel mir leicht/schwer?*
- *Was habe ich noch nicht verstanden?*

Metakognitive Fragen:

- *Wie bin ich vorgegangen?*
- *Wie bin ich mit Schwierigkeiten umgegangen?*
- *Wie habe ich überprüft, ob mein Arbeitsergebnis richtig war?*

2 Metakognition im Mathematikunterricht

Wie bereits in Kapitel 1 ausführlich erklärt, versteht man unter Metakognition nach Kaiser (2018) allgemein die Fähigkeit, über die eigenen Denkprozesse nachzudenken. Auf schulischer Ebene bedeutet dies, dass die SchülerInnen ihre kognitiven Prozesse bei der Bearbeitung einer Aufgabe im Blick haben (vgl. Kaiser 2018, S. 31). Für eine optimale Ausprägung der mathematischen Kompetenzen in Bezug auf die Informationsverarbeitung ist die Metakognition notwendig, die durch Reflexion und den Einsatz kognitiver Strategien die Lernenden bei der Erschließung und Verarbeitung aller relevanten Informationen unterstützt (vgl. Kaiser 2018, S. 33). Laut Ehret (2017, S. 79) kann daher die metakognitive Kompetenz als Voraussetzung für den Wissenserwerb gesehen werden und den Lernprozess der SchülerInnen positiv beeinflussen. Durch die Einführung metakognitiver Prozesse im Unterricht verlagert sich die Lernaktivität viel mehr auf die SchülerInnen-Seite und lernrelevante Fähigkeiten, wie die Kontrollorientierung, Lernzuversicht und Selbstwirksamkeit werden gefördert (vgl. Kaiser 2018, S. 37). Je stärker die Metakognition ausgeprägt ist, desto besser können diese Strategien bei Problemlöse- oder Modellierungsaufgaben eingesetzt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 31).

2.1 Metakognition im Lehr- und Lernprozess

Im Mathematikunterricht spielen neben Zahlen, Begriffen und Beweisen auch Darstellungen und Vorstellungen bestimmter Informationen eine zentrale Rolle. Darstellungen repräsentieren extern Inhalte und können in sprachlicher Form, wie bei Textaufgaben, oder in nicht-sprachlicher, symbolischer Form, wie bei Diagrammen, auftreten. Vorstellungen hingegen sind interne Repräsentationen, die auf eigenen Grundvorstellungen von konkreten mathematischen Begriffen oder Operationen beruhen. Dabei werden nach vom Hofe und Blum (2016, S. 230 f.) unter Grundvorstellungen mentale Repräsentationen mathematischer Begriffe verstanden, die auf individuellen Auffassungen dieser beruhen bzw. von der mathematical community akzeptiert werden. Hierzu können auch Modellvorstellungen gezählt werden, die als mentale Modelle zur Unterstützung des Denkprozesses gesehen werden (vgl. Sijts 2016, S. 199).

Damit Metakognition im Unterricht wirksam werden kann, sind Unterrichtsgespräche und geeignete Unterrichtsmaterialien erforderlich. Dadurch wird der Einsatz metakognitiver Aktivitäten gefördert. Der Unterricht muss von der Lehrkraft so gestaltet werden, dass den SchülerInnen die Möglichkeit gegeben wird, über ihren eigenen Bearbeitungsprozess nachzudenken (klassische Metakognition) und sich in weiterer Folge mit ihren MitschülerInnen über ihre Handlungen auszutauschen und diese zu reflektieren (soziale Metakognition). Dadurch können einerseits metakognitive Strategien herausgearbeitet werden, die bei zukünftigen Problemstellungen herangezogen werden können und andererseits kann eine Förderung und Erweiterung des eigenen Wissensspektrums erreicht werden (vgl. Sjuts 2016, S. 199).

Um metakognitive Lehr- und Lernaktivitäten in Unterrichtsgesprächen beobachten zu können, kann das Kategoriensystem von Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) hilfreich sein. Dieses enthält vier Kategorien: *Planung*, *Monitoring*, *Reflexion* und *Diskursivität*. Die Kategorie *Planung* umfasst die Organisation der Vorgehensweise im Unterrichtsgespräch. Die Kontrolle der Lehr- und Lernprozesse und die Selbstkontrolle können dem *Monitoring* zugeordnet werden. Die Kategorie *Reflexion* umfasst das Nachdenken und das Festhalten von Wissen über das Geschehen und über Zwischenergebnisse. Die Kategorie *Diskursivität* bezieht sich auf eine nachvollziehbare Argumentation und die Einhaltung von Gesprächsregeln. Dabei geht es vor allem darum, die im Unterrichtsgespräch vorkommenden Aussagen und Argumente präzise zu formulieren und mit theoretischen Inhalten zu verknüpfen. Zur besseren Übersicht und zur leichteren Analyse einzelner Sequenzen des Unterrichtsgesprächs können die klassifizierten Aktivitäten auf einem Kategorienstrahl festgehalten werden, um auch im weiteren Verlauf metakognitive Aktivitäten seitens der Lehrenden und Lernenden zu dokumentieren (vgl. Sjuts 2016, S. 199 f.).

Im Rahmen des Kategoriensystems wird auch die Bedeutung von Darstellungen und Vorstellungen sichtbar. In der Planung geht es vor allem darum, welche Darstellungen, d. h. welche Formel, welche Grafik oder welcher Term für die Bearbeitung der Aufgaben am geeignetsten erscheinen. Diese werden in der anschließenden Reflexion auf ihre Adäquatheit überprüft und mit den (Fehl-)Vorstellungen in Beziehung gesetzt (vgl. Sjuts 2016, S. 200).

Die Nützlichkeit des vorgestellten Kategoriensystems beruht vor allem darauf, dass es Hinweise auf metakognitive und diskursive Aktivitäten gibt, was gerade in Unterrichtsgesprächen von besonderer Wichtigkeit ist, sofern präzise und stringent dabei gearbeitet wird (vgl. Sijts 2016, S. 200).

Für einen erfolgreichen Einstieg in das metakognitive Arbeiten ist es hilfreich, die dabei verbundenen Denkprozesse explizit zu machen (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 87). Im Lehr- und Lernkontext wird dazu die Methode des Lauten Denkens eingesetzt, die neben dem Planen, Steuern und dem Kontrollieren ein weiteres wichtiges Element der Metakognition darstellt. Die Aufgabe besteht darin, die Denkprozesse, die bei der Aufgabenbearbeitung im Kopf ablaufen, sprachlich zum Ausdruck zu bringen, um anschließend eine Analyse und in weiterer Folge eine Optimierung der Handlungen kommunikativ durchzuführen. Dies kann auf verschiedene Weise im Unterricht umgesetzt werden. Es besteht bspw. die Möglichkeit, dass die SchülerInnen ihre Gedanken zu einer bestimmten Aufgabenstellung im Klassenverband mündlich vorstellen oder in Einzelarbeit zunächst schriftlich formulieren und anschließend in einer Kleingruppe präsentieren. Dadurch wird ein Erkennen von metakognitiven Denkprozessen einerseits für die Person selbst und andererseits für die ZuhörerInnen ermöglicht, um diese entsprechend ihrer Funktion in den weiteren Bearbeitungsprozess aufzunehmen. So wird erreicht, das eigene Problemlöseverhalten auf metakognitiver Ebene zu erfassen und Stärken und Schwächen metakognitiver Strategien festzustellen (vgl. Kaiser 2018, S. 51). Vor allem für lernschwächere SchülerInnen, die noch am Anfang der metakognitiven Kompetenzentwicklung stehen, bietet sich diese Methode besonders gut an. Durch die verbale Kommunikation der einzelnen Handlungsschritte können auftretende Schwierigkeiten klar thematisiert werden, wobei Lehrpersonen oder MitschülerInnen Hilfestellungen anbieten können (vgl. Ehret 2017, S. 84 f.).

SchülerInnen beschäftigen sich dabei mit einfachen problemhaltigen Aufgaben, bei denen notwendige Informationen nicht bekannt sind und sie erst durch eine genaue und strategische Untersuchung der vorhandenen Inhalte zu einem Ergebnis kommen können. Solche Aufgaben sind nach Hohenstein und Lambert (2018, S. 87) bspw.:

- „Diagramme ohne Achsenbeschriftung, ohne Titel und/oder Legende,
- kurze Textauszüge ohne Überschrift und Angabe des Autors,
- Rätselaufgaben oder auch
- Knobelspiele.“

Abb. 6 zeigt eine Übungsaufgabe zur Einführung in das Laute Denken. Die SchülerInnen müssen trotz fehlender Überschrift und fehlender Beschriftung der x -Achse die notwendigen Informationen metakognitiv ermitteln. Da der Kontext nicht bekannt ist, muss keine eindeutige Lösung gefunden werden, vielmehr geht es um den Lösungsweg. Der Fokus soll dabei auf die Analyse der verwendeten metakognitiven sowie kognitiven Strategien gelegt werden (vgl. Kaiser 2018, S. 53).

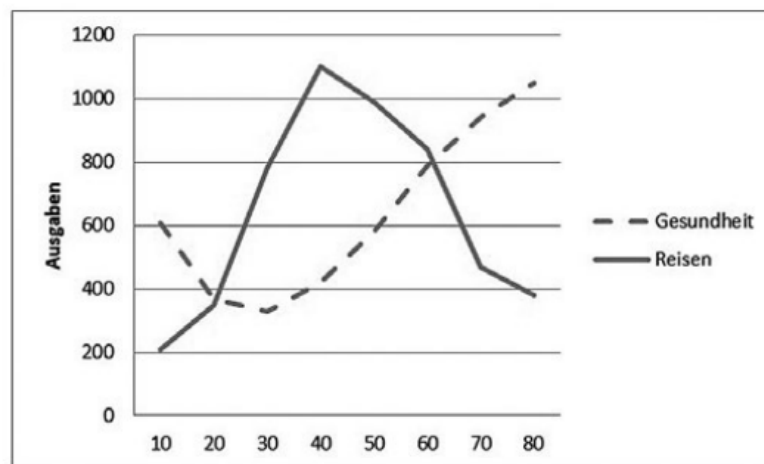


Abbildung 6: Beispiel für eine Übungsaufgabe zum Lauten Denken (Kaiser 2018, S. 52)

Durch die Verwendung derartiger Aufgaben bleiben der Spaß und die Motivation zur Bearbeitung aufgrund der Rätsel- und Denkelemente erhalten. Es ist ratsam, den Lernenden die Umsetzung der Methode des Lauten Denkens vorzustellen und ihnen als Lehrkraft als Vorbild für metakognitives Arbeiten zu dienen (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 87).

Um die Einführung des Lauten Denkens im Unterricht zu unterstützen, ist es hilfreich, den SchülerInnen immer wieder die Schritte des Planens, Steuerns und des Kontrollierens, die den Lernenden in Form einer P-S-K-Ampel (Abb. 7) präsentiert werden können, vor Augen zu führen. Sollte den SchülerInnen das laute

Denken anfangs schwerfallen, können die Gedanken auch aufgeschrieben werden oder im Nachhinein beschrieben werden (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 88). Auch auf diese Weise können die Denkprozesse und die Anwendung metakognitiver Strategien für die Lernenden bewusst und für die Lehrenden sichtbar gemacht werden. Der Vorteil dieser Variante ist, dass durch die Verschriftlichung eine längerfristige Reflexion des Bearbeitungsprozesses möglich ist und durch das erneute Lesen der niedergeschriebenen Gedanken eine neue Sichtweise auf den Arbeitsprozess entsteht, die die persönliche Entwicklung metakognitiver Kompetenzen fördert (vgl. Ehret 2017, S. 85 f.).

Um den Faktor der sozialen Metakognition zu unterstützen, kann das Laute Denken auch in Partnerarbeit durchgeführt werden. Wichtig dabei ist, dass für die SchülerInnen ein Rahmen geschaffen wird, in dem ausreichend Zeit und Vertrauen in der (Klassen-)Gruppe sowie ein konstruktiver Umgang mit Fehlern vorhanden sind. Auch kognitive und sprachliche Voraussetzungen seitens der Lernenden müssen gegeben sein, um die Methode erfolgreich anwenden zu können (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 88).



Abbildung 7: Die P-S-K-Ampel zur Anregung zum Planen, Steuern und Kontrollieren (Hohenstein & Lambert 2018, S. 90)

2.2 Metakognition bei der Aufgabebearbeitung

Bei der Bearbeitung vorgegebener Aufgaben ist die Anwendung metakognitiver Strategien nicht sichtbar. Erst durch die Verschriftlichung oder die Erläuterung des Vorgehens während der Bearbeitung wird das Denken und Handeln nachvollziehbar (Abschnitt 2.1). Dies erweist sich vor allem für weitere Aufgabebearbeitungen als sehr förderlich (vgl. Sijts 2016, S. 201).

Allein die Aufgabenstellung kann die Lernenden motivieren, metakognitiv zu arbeiten. Dazu bedarf es der notwendigen Kompetenz seitens der Lehrperson, die bei der Auswahl und Entscheidung über die Art der Aufgaben unterstützt. Sie muss sich die Frage stellen, inwiefern die Aufgabe gestaltet werden kann, sodass einerseits der Einsatz metakognitiver Strategien angeregt wird und andererseits die SchülerInnen dazu animiert werden, sich ihrer Handlungen während des Bearbeitungsprozesses bewusst zu werden (vgl. Sijts 2016, S. 201).

Bereits die Verwendung bestimmter Operatoren in der Aufgabenstellung führt dazu, dass die Aufgabe mit herkömmlichen Strategien nicht mehr lösbar ist und metakognitive Aktivitäten notwendig werden. Diese Operatoren fordern die Lernenden zum

- 1) Explizieren (bewusstes Sichtbarmachen der Handlungsschritte und Gedanken),
- 2) Variieren (Verwendung verschiedener Darstellungsformen und Lösungswege),
- 3) Formalisieren (Anschieben mathematischer Inhalte mit graphischen, schriftlichen oder symbolischen Darstellungen),
- 4) Analysieren (Überprüfung der Darstellungen und Rechenergebnisse auf ihre Richtigkeit und Aufstellen eigener Überlegungen)
- 5) Synthetisieren (intensive Auseinandersetzung mit Aufgaben abseits vom klassischen Bearbeiten (z. B. Berechnen))

auf, woraus sich wiederum verschiedene Teilaufgaben ergeben (vgl. Sijts 2016, S. 201). Tab. 2 zeigt mögliche Aufgabenstellungen zu den einzelnen Operatoren, die zur Erreichung der jeweiligen metakognitiven Kompetenz eingesetzt werden können.

Metakognitive Kompetenz	Operatoren	Mögliche Aufgabenstellung
Explizieren	Erläutern	Erläutere dein Vorgehen!
	Verschriftlichen	Schreibe auf, wie du gerechnet hast!
	Begründen	Begründe deine Antwort!
Variieren	Notieren	Notiere alle wesentlichen Informationen!
	Zeichnen	Fertige eine Skizze an und beschrifte sie!
	Übertragen	Übertrage deine Ergebnisse in ein Diagramm!
Formalisieren	Symbolisieren	Drücke die mathematische Aussage mithilfe mathematischer Symbole aus!
	Formulieren	Formuliere deine Überlegungen!
	Repräsentieren	Repräsentiere deine Lösung in einem Koordinatensystem!
Analysieren	Vergleichen	Vergleiche deine Ergebnisse mit der gegebenen graphischen Darstellung!
	Kommentieren	Kommentiere, welche der beiden Lösungen für dich richtig erscheint!
	Überprüfen	Überprüfe deine Lösung mit GeoGebra!
Synthetisieren	Ergänzen	Ergänze den gegebenen Lösungsansatz mit deinen Überlegungen!
	Fortsetzen	Setze die gegebene Lösung fort!
	Produzieren	Produziere zu der gegebenen Textaufgabe eine weitere Aufgabe mit der gleichen Aufgabenstellung in einem anderen Sachkontext!

Tabelle 2: Mögliche Aufgabenstellungen für metakognitives Arbeiten nach Sjuts (2016)

2.3 Metakognition beim Problemlösen und Modellieren

Für das Unterrichtsfach Mathematik ist ein eigenes Kompetenzmodell in Österreich vorhanden, das inhaltliche Kompetenzbereiche, wie *Zahlen und Maße*, *Variablen und Funktionen*, *Figuren und Körper* sowie *Daten und Zufall* mit den folgenden Prozessen verknüpft (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024):

- „Modellieren und Problemlösen
- Operieren (Rechnen und Konstruieren)
- Darstellen und Interpretieren
- Vermuten und Begründen“

Diese Prozesse müssen im Rahmen des Unterrichts und durch die eingesetzten Methoden und Arbeitsmaterialien abgedeckt werden.

Durch die angeführten Punkte wird deutlich, dass die Lernenden neben der Durchführung von Rechen- und Konstruktionsprozessen auch die Möglichkeit zum selbstständigen Problemlösen und Modellieren sowie zum Darstellen, Interpretieren und Begründen erhalten sollen (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Damit wird das Ziel verfolgt, ein nachhaltiges Verständnis für mathematische Inhalte zu entwickeln (vgl. Sjuts 2016, S. 202 f.).

2.3.1 Modellierungsaufgaben als Problemlöseaufgaben

Damit metakognitive Strategien zum Einsatz kommen können, braucht es Aufgabenstellungen, die die SchülerInnen kognitiv herausfordern (Tab. 2). Dies ist vor allem bei Problemlöseaufgaben der Fall. Unter Problemlösen versteht man die Fähigkeit, adäquate Lösungsstrategien zu entwickeln und in dem Individuum unbekannten Situationen anzuwenden. In diesen Zusammenhang ist auch das Herstellen von Zusammenhängen und der Transfer auf ähnliche Sachverhalte relevant. Von problemhaltigen Aufgaben spricht man also, wenn routinemäßige Lösungsstrategien nicht mehr ausreichen, um das vorliegende Problem zu lösen. Es müssen neue Ansätze entwickelt werden. Für ein erfolgreiches Problemlösen ist es wichtig, zunächst das Problem zu verstehen und die Aufgabenstellung zu erfassen. Anschließend müssen Strategien entwickelt werden, die eine Umsetzung und Kontrolle des Lösungsprozesses ermöglichen. Zum Schluss erfolgt eine Reflexion der Aufgabenbearbeitung, bei der vor allem das Argumentieren und Begründen des eigenen Tuns und Handelns im Vordergrund steht (vgl. Sjuts 2016, S. 203). Die Aufgabenstellung muss so konstruiert sein, dass auf planende, steuernde und kontrollierende Strategien (exekutiver bzw. prozeduraler Aspekt) sowie auf deklarative Wissens Elemente (deklarativer Aspekt) zurückgegriffen werden muss (Abb. 3). Problemhaltige Aufgaben sind daher laut Lehrplan ein Muss im Mathematikunterricht, um die SchülerInnen in ihrem Denkprozess kognitiv anzuregen und sie aufzufordern, metakognitive Strategien einzusetzen (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 70 f.).

Modellierungsaufgaben können als eine spezielle Art von Problemlöseaufgaben betrachtet werden, weil sie in den meisten Fällen auch neue Problemlösestrategien erfordern, um von einer realen Situation zu einer mathematischen Lösung zu gelangen. Aufgaben dieser Art können mithilfe routinemäßiger Lösungsansätze nicht mehr korrekt bearbeitet werden (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 429). Der Unterschied zwischen Problemlöse- und Modellierungsaufgaben liegt im Bereich der Zielsetzung und der Herangehensweise. Problemlöseaufgaben fokussieren sich dabei auf die Anwendung von Tricks, um eine konkrete Frage zu beantworten. Des Weiteren beziehen sie sich oft auf rein mathematische Problemstellungen, die weniger Bezug zur Realität haben als Modellierungsaufgaben. Deren Lösung basiert auf Anwendung bestimmter mathematischer Verfahren, ohne dabei ein Modell entwickeln zu müssen. Im Gegensatz dazu gehen Modellierungsaufgaben über rein mathematische Prozesse hinaus und zielen darauf ab, reale Phänomene in einem mathematischen Modell abzubilden. Modellieren erfordert demnach die Fähigkeit, mathematische Inhalte in einem iterativen Verfahren in realitätsbezogene Elemente (Abschnitt 2.3.2.1) zu übersetzen, zu vereinfachen, zu interpretieren und am Ende zu überprüfen (vgl. Kaiser & Sriraman 2006, S. 306 f.). Es lassen sich verschiedene Arten von Modellierungsaufgaben unterscheiden, die je nach Klassifikation andere Anforderungen stellen und unterschiedliche Lösungsprozesse erfordern (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 429).

Metakognition spielt bei beiden Aufgabentypen eine wichtige Rolle, doch bei Modellierungsaufgaben ist sie aufgrund des offenen Charakters, der realitätsnahen Problemstellungen und des bei der Bearbeitung zu durchlaufenden iterativen Modellierungsprozesses wesentlicher. Lernende werden dabei herausgefordert, ein hohes Maß an Selbstregulation sowie eine ausgeprägte Reflexionsfähigkeit über die getroffenen Annahmen, die Durchführungsschritte sowie über die erzielten Ergebnisse mitzubringen (vgl. Blum & Leiß 2007, S. 229). Aus diesem Grund wird der Fokus dieser Arbeit auf die Metakognition bei Modellierungsprozessen gelegt.

2.3.2 Modellierung im Lehr- und Lernprozess

In vielen Lehrplänen in und um Österreich gilt das mathematische Modellieren als eines der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts. Damit wird insbesondere das Ziel verfolgt, den Anwendungsbezug und die Alltagsvorstellungen in den Unterricht zu integrieren. Seit dem Symposium von Hans Freudenthal im Jahr 1967 stieg die Anzahl der zu diesem Thema durchgeführten Studien und gleichzeitig die Bedeutung von Modellierungsaufgaben. Darüber hinaus wird das Modellieren als wichtiges Lernziel verstanden, das das Erreichen der allgemeinen Kompetenzen (*Problemlösen, Operieren (Rechnen und Konstruieren), Darstellen und Interpretieren* sowie *Vermuten und Begründen*) unterstützt und bei der Vermittlung der inhaltlichen Lernziele (z. B. im Bereich *Arbeiten mit Variablen*: Formeln anwenden und interpretieren können) hilft (vgl. Krüger 2022, S. 22 f.). Ferner trägt die Kompetenz des mathematischen Modellierens zu den drei geforderten Grunderfahrungen des Mathematikunterrichts nach Winter (1995, S. 17) bei:

- (1) *„Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,*
- (2) *mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktive geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,*
- (3) *in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“*

Mathematisches Modellieren ist demnach die Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben mithilfe mathematischer Mittel, die beim Verstehen, Strukturieren und beim Lösen helfen. Da Modelle Aspekte der Realität meist in vereinfachter Form darstellen und je nach Fragestellung angepasst werden können, helfen sie auch bei der Lösung realer Probleme. Modelle bilden nur Teilaspekte der Realität ab, was aber nicht unbedingt als Nachteil in der Anwendung gesehen werden muss. Wichtig ist, dass das zur Verfügung stehende Modell vorab auf Adäquatheit, Zweckmäßigkeit und auf Widerspruchsfreiheit in Bezug auf die vorliegende Situation überprüft wird (vgl. Krüger 2022, S. 23 f.).

Aufgaben, die als offen, komplex und realitätsbezogen charakterisiert werden, bezeichnet man als Modellierungsaufgaben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben erfordert die Durchführung der Schritte des Modellierungskreislaufes (Abschnitt 2.3.2.1). Offene Aufgaben zeichnen sich dadurch aus, dass sie unterschiedliche Lösungswege und Lösungen zulassen. Durch die Offenheit ergibt sich für die SchülerInnen der Vorteil, dass sie die Aufgabe entsprechend ihrer vorhandenen Kompetenzen bearbeiten können, ohne dabei unter- bzw. überfordert zu werden. Darüber hinaus enthalten Modellierungsaufgaben Kontexte aus der Lebenswelt der Lernenden. Dadurch erfahren die SchülerInnen die Relevanz der Aufgaben, was wiederum die Motivation zur Bearbeitung steigert. Wichtig ist, dass bei der Auswahl der Aufgaben zwischen der *Schülerrelevanz* und *Lebensrelevanz* unterschieden wird. Schülerrelevant sind Aufgaben dann, wenn sie für die SchülerInnen eine aktuelle Bedeutung haben. Lebensrelevante Aufgaben weisen Inhalte auf, die für die Kinder und Jugendlichen eventuell erst in der Zukunft eine Rolle spielen werden. Durch die Einbeziehung relevanter Kontexte seitens der Lernenden wirken die Modellierungsaufgaben authentischer, was wiederum den Stellenwert der Mathematik außerhalb des Unterrichts erhöht. Diese Eigenschaft wird erfüllt, wenn die Aufgaben nicht im schulischen Kontext entwickelt wurden, sondern Situationen außerhalb des Unterrichts, z. B. Alltagssituationen, aufgreifen. Modellierungsaufgaben sind zudem problemhaltig, d. h. für das Finden von Lösungen muss der Modellierungskreislauf (Abschnitt 2.3.2.1) durchlaufen werden. Dies ist auch der Unterschied zu den sogenannten eingekleideten Aufgaben, bei denen der Schwerpunkt auf der Mathematik liegt und nicht auf dem Anwendungskontext. Außerdem müssen die SchülerInnen bei eingekleideten Aufgaben viel weniger Schritte bis zum Finden einer Lösung durchführen und beschränken sich hauptsächlich auf einfache Rechenoperationen (vgl. Krüger 2022, S. 30 ff.).

2.3.2.1 Der Modellierungsprozess anhand des Modellierungskreislaufes

Der Modellierungskreislauf unterstützt den Modellierungsprozess von der Problemstellung bis zur konkreten Lösung. Diese Unterstützung bezieht sich sowohl auf das Verständnis des Modellierens als auch auf die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben, was ebenso die Metakognition betrifft. Abb. 8 stellt einen solchen Modellierungskreislauf dar, der für die SchülerInnen auch metakognitiv hilfreich sein kann (vgl. Krüger 2022, S. 26).

Der Modellierungsprozess beginnt mit dem Verständnis des vorliegenden realen Problems, das dann zu einem realen Modell vereinfacht wird. Dabei werden wichtige Aspekte der realen Situation identifiziert und im Modell abgebildet. Im nächsten Schritt wird das reale Modell in ein mathematisches Modell übergeführt. Dieses wird mit mathematischen Operationen bearbeitet, was zu einer mathematischen Lösung führen kann. Die gefundene Lösung wird in einem weiteren Schritt bezüglich der gegebenen Situation realitätsbezogen interpretiert und überprüft. Je nach Bewertung kann es zu einem weiteren Durchlaufen des Modellierungskreislaufs kommen, der so lange wiederholt wird, bis eine adäquate Lösung gefunden wird (vgl. Krüger 2022, S. 27).

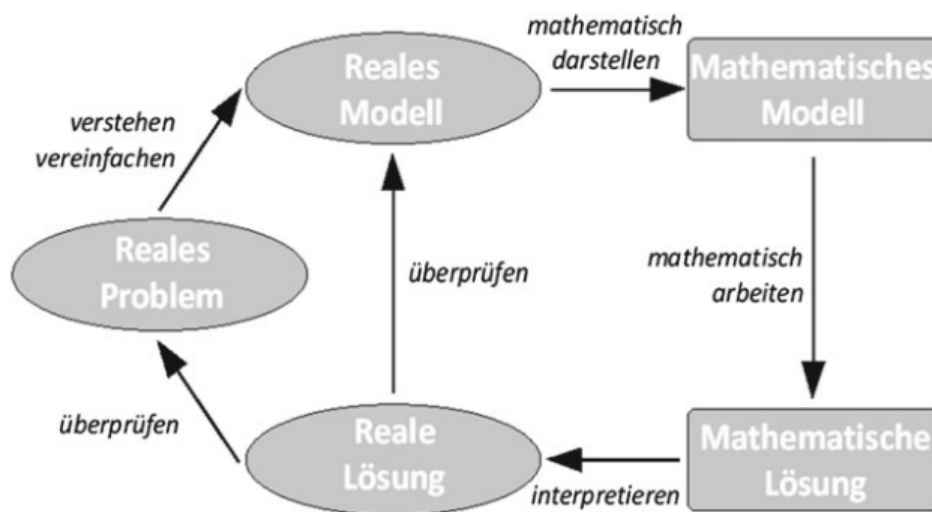


Abbildung 8: Modellierungskreislauf (Krüger 2022, S. 27)

Eine kurze Zusammenfassung der Modellierungsschritte geben Krug und Schukajlow (2020, S. 429) wie folgt:

- 1) „die Aufgabenstellung verstehen, geeignete realitätsbezogene Annahmen treffen, Situation strukturieren, idealisieren und so ein Realmodell konstruieren;
- 2) das Realmodell in ein mathematisches Modell transformieren;
- 3) mathematische Verfahren anwenden und ein mathematisches Resultat herleiten;

- 4) *dieses mathematische Resultat in der Realität interpretieren, unter den Gegebenheiten der Situation überprüfen und den Lösungsprozess darlegen.*“

Diese einzelnen Schritte sollen die SchülerInnen immer im Hinterkopf behalten, damit eine Modellierungsaufgabe erfolgreich bearbeitet werden kann. Dabei ist zu beachten, dass der Modellierungskreislauf in Abb. 8 zwar mit aufeinander aufbauenden Handlungen dargestellt ist, es aber während der Durchführung immer wieder zu einem Wechsel zwischen den einzelnen Phasen kommen kann (vgl. Brand & Vorhölter 2018, S. 121).

2.3.2.2 Modellierungskompetenzen und Metakognition

Die Erklärung des Modellierungskreislaufes macht deutlich, dass für eine erfolgreiche Umsetzung nicht nur Modellierungskompetenzen notwendig sind, sondern auch weitere Fähigkeiten eine Rolle spielen. Diese Erkenntnis führt auch dazu, dass bisher noch keine einheitliche Definition des Begriffs der Modellierungskompetenzen vorhanden ist. Aus der Unterscheidung zwischen Modellierungskompetenzen und Modellierungsfähigkeiten ergibt sich jedoch, dass erstere auch die Bereitschaft zum Modellieren umfassen (vgl. Krüger 2022, S. 28), was ebenso aus der Definition nach Maaß (2004, S. 35) hervorgeht:

„Modellierungskompetenzen umfassen die Fähigkeiten und Fertigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in Handlung umzusetzen.“

Im Rahmen der Modellierungskompetenz wird zwischen *globalen* Modellierungskompetenzen und *Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens* unterschieden. *Globale* Modellierungskompetenzen sind dabei jene Fähigkeiten, die zur Durchführung des gesamten Modellierungsprozesses notwendig sind (vgl. Krüger 2022, S. 28). Zu den *globalen* Modellierungskompetenzen zählen Kaiser und Schwarz (2006, S. 56):

- *„Kompetenz reale Probleme durch selbst entwickelte Beschreibungen (Modelle) zu bearbeiten;*
- *Kompetenz über Modellierungsprozesse zu reflektieren durch Aktivierung von Meta-Wissen;*

- *Einsicht in die Beziehungen zwischen Mathematik und Realität, insbesondere in Subjektivität von Modellierung;*
- *Soziale Kompetenzen wie Kompetenz zur Gruppenarbeit oder Kommunikationskompetenzen.“*

Die Metakognition gehört ebenfalls zu den globalen Modellierungskompetenzen, da sie die Lernenden bei der Reflexion des Modellierungsprozesses sowie bei der Planung, Überwachung und Regulation metakognitiver Strategien unterstützt (vgl. Krüger 2022, S. 30). Metakognitive Strategien sollen daher auch bei der Erkennung und Bewältigung auftretender Schwierigkeiten im Bearbeitungsprozess Hilfe leisten (vgl. Vorhölter 2021, S. 321). Vor allem die Reflexion der einzelnen Schritte hinsichtlich ihrer Angemessenheit ist in diesem Zusammenhang von großer Bedeutung, da auftretende Probleme während des Modellierens, insbesondere bei den Übergängen der Modellierungsschritte, rechtzeitig erkannt und durch Adaptierung der Handlungsstrategien gelöst werden können (vgl. Kaiser et al. 2015b, S. 370).

Die *Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens* unterstützen hingegen die Durchführung der einzelnen Modellierungsschritte. In diesem Zusammenhang unterscheiden Kaiser et al. (2015b, S. 369 f.) folgende Kompetenzen:

- a) *„Kompetenzen zum Verständnis eines realen Problems und zum Aufstellen eines realen Modells, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *nach verfügbaren Informationen zu suchen und relevante von irrelevanten Informationen zu trennen;*
 - *auf die Situation bezogene Annahmen zu machen bzw. Situationen zu vereinfachen;*
 - *die eine Situation beeinflussenden Größen zu erkennen bzw. zu explizieren und Schlüsselvariablen zu identifizieren;*
 - *Beziehungen zwischen den Variablen herzustellen;*
- b) *Kompetenzen zum Aufstellen eines mathematischen Modells aus einem realen Modell, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *die relevanten Größen und Beziehungen zu mathematisieren, genauer in mathematische Sprache zu übersetzen;*
 - *falls nötig, die relevanten Größen und ihre Beziehungen zu vereinfachen bzw. ihre Anzahl und Komplexität zu reduzieren;*

- *adäquate mathematische Notationen zu wählen und Situationen ggf. graphisch darzustellen;*
- c) *Kompetenzen zur Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb eines mathematischen Modells, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *heuristische Strategien anzuwenden wie Aufteilung des Problems in Teilprobleme, Herstellung von Bezügen zu verwandten oder analogen Problemen, Reformulierung des Problems, Darstellung des Problems in anderer Form, Variation der Einflussgrößen bzw. der verfügbaren Daten usw.;*
- d) *Kompetenzen zur Interpretation mathematischer Resultate in einem realen Modell bzw. einer realen Situation, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *mathematische Resultate in außermathematischen Situationen zu interpretieren;*
 - *für spezielle Situationen entwickelte Lösungen zu verallgemeinern;*
 - *Problemlösungen unter angemessener Verwendung mathematischer Sprache darzustellen bzw. über die Lösungen zu kommunizieren;*
- e) *Kompetenzen zur Infragestellung der Lösung und ggf. erneuten Durchführung eines Modellierungsprozesses, d. h. die Fähigkeiten,*
 - *gefundene Lösungen kritisch zu überprüfen und zu reflektieren;*
 - *entsprechende Teile des Modells zu revidieren bzw. den Modellierungsprozess erneut durchzuführen, falls Lösungen der Situation nicht angemessen sind;*
 - *zu überlegen, ob andere Lösungswege möglich sind, bzw. Lösungen auch anders entwickelt werden können;*
 - *ein Modell grundsätzlich in Frage stellen.“*

Obwohl die Metakognition für Modellierungsprozesse von großer Bedeutung ist, gibt es nur wenige Studien, die den Einfluss der Metakognition auf die Modellierungskompetenz und damit die Förderung der für das Modellieren wichtigen metakognitiven Kompetenzen untersuchen (vgl. Vorhölter et al. 2020, S. 190). Bisherige Forschungen konzentrierten sich eher auf die Entwicklung und Förderung von Teilkompetenzen und weniger auf den Einfluss der Metakognition hinsichtlich des Modellierens. Dies liegt sicherlich auch daran, dass Metakognition ein umfassendes Konzept ist, das in verschiedenen Bereichen unterschiedlich ausge-

prägt ist. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, wird zwischen metakognitiven Strategien (exekutiver bzw. prozeduraler Aspekt) und metakognitivem Wissen (deklarativer Aspekt) unterschieden. Darüber hinaus kann Metakognition sowohl im individuellen Prozess als auch in der Gruppe zum Einsatz kommen (vgl. Vorhölter 2021, S. 317 f.). Dies spielt u. a. eine Rolle bei der Frage, ob die Anwendung metakognitiver Strategien die Modellierungsleistung der SchülerInnen verbessert. Auch Schukajlow und Leiß (2011, S. 53), die zu den wenigen ForscherInnen gehören, die diesen Zusammenhang untersucht haben, sind jedoch zu keinem aussagekräftigen Ergebnis gekommen. Vorthölter et al. (2020, S. 201) untersuchten, inwiefern metakognitive Strategien den Modellierungsprozess unterstützen und fanden heraus, dass SchülerInnen bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben weniger Strategien hinsichtlich der Evaluierung und der Kontrolle und deutlich mehr Planungs- und Durchführungsstrategien einsetzen. Überraschend ist, dass die SchülerInnen bei der Aufforderung, mehrere Lösungen für die Aufgabe zu entwickeln, mehr Strategien der Planung und Kontrolle angewendet haben, als bei der expliziten Aufforderung, solche Strategien bei der Bearbeitung einzusetzen. Es konnte auch gezeigt werden, dass die Lernenden bei dieser Aufgabenstellung eher bereit waren, während und nach dem Bearbeitungsprozess Strategien der Reflexion und Bewertung zu verwenden (vgl. Vorhölter 2021, S. 321 f.).

Nichtsdestotrotz gehen viele WissenschaftlerInnen aufgrund ihrer Untersuchungen und der dabei durchgeführten Beobachtungen und Interviews davon aus, dass Metakognition einerseits wichtig für ein erfolgreiches Modellieren ist und andererseits auch die Entwicklung der Modellierungskompetenz durch diese positiv beeinflusst wird (vgl. Vorhölter 2021, S. 322).

Der Einsatz metakognitiver Strategien bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben kann mit unterschiedlichen Methoden gemessen werden. Im Gegensatz zur Metakognition wird beim Modellieren zwischen *Offline-* und *Online-Methoden* unterschieden. Wann welche Methode am sinnvollsten ist, ergibt sich aus dem zu messenden Bereich des metakognitiven Arbeitens. Wird die vorhandene bzw. erbrachte Leistung vor oder nach einem Handlungsschritt gemessen, so spricht man von der *Offline-Methode*. Bei der *Online-Methode* hingegen wird me-

takognitive Modellierungskompetenz direkt während des Arbeitsprozesses gemessen (vgl. Vorhölter 2021, S. 320 f.). Als Beispiel für eine *Online*-Methode kann bspw. das Laute Denken (Abschnitt 2.1) oder die Tutor-Tutee-Methode (Abschnitt 1.3) genannt werden. Für den Einsatz einer *Offline*-Methode eignen sich am besten das Portfolio oder das Lerntagebuch. Auf die genannten Messmethoden wurde bereits in Abschnitt 1.3 näher eingegangen.

2.3.2.3 Schwierigkeiten bei der Modellierung

Im Vergleich zu eingekleideten Aufgaben (S. 28) muss bei Modellierungsaufgaben der Modellierungskreislauf (Abb. 8) vollständig durchlaufen werden, was die Aufgabe komplexer und für die SchülerInnen kognitiv herausfordernder macht. Dies führt u. a. auch zu Schwierigkeiten bei der Modellierung. Probleme können bereits zu Beginn auftreten, d. h. beim Lesen und Verstehen der Aufgabenstellung. Daher ist es wichtig, den SchülerInnen durch den Einsatz von Modellierungsaufgaben deutlich zu machen, dass ein gründliches Lesen der Angabe notwendig ist, den Kontext und den Inhalt der Aufgabe richtig zu verstehen, denn dies wirkt sich in weiterer Folge positiv auf das Durchlaufen des Modellierungszyklus aus. Häufige Fehler beim Erstellen eines realen Modells entstehen bei der Vereinfachung des Problems, indem notwendige Wissens Elemente weggelassen werden. Aus diesem Grund werden dann falsche Annahmen getroffen. Des Weiteren besteht auch die Möglichkeit, dass SchülerInnen ein zu komplexes Modell aufstellen, was auf eine fehlende Vereinfachung der Situation zurückzuführen ist. Als Grund hierfür kann das Nichterkennen der Relevanz bestimmter Daten genannt werden (vgl. Krüger 2022, S. 33 f.).

Krug und Schukajlow (2015, S. 33) unterscheiden bei den auftretenden Fehlern zwischen *weichen* und *harten* Fehlern. Beim Auftreten von *weichen* Fehlern entspricht das Modell noch einigermaßen der Realität, was bei *harten* Fehlern nicht mehr der Fall ist. Beide Arten von Fehlern bieten jedoch die Chance, das Modell nochmals neu zu überdenken und den Modellierungskreislauf erneut zu durchlaufen. Das Bewusstwerden der Fehler bzw. die Anpassung des Modells hängt jedoch stark vom Vorwissen und der Motivation der SchülerInnen ab. Der richtige Umgang mit den Fehlern kann im Idealfall zu einer Weiterentwicklung des eigenen Lernprozesses führen (vgl. Krüger 2022, S. 34).

Auch bei der Anwendung der Mathematik, d. h. bei der Erstellung eines mathematischen Modells sowie bei der Durchführung mathematischer Operationen, können Fehler auftreten. Diese Fehler entstehen einerseits durch die Anwendung falscher Algorithmen, andererseits durch die Anwendung unpassender Rechenoperationen und/oder die (dabei) auftretenden Rechenfehler. Es kann sogar vorkommen, dass SchülerInnen den Modellierungskreislauf ohne Ergebnis beenden, weil es aufgrund der Komplexität des Modells nicht möglich ist, innermathematische Lösungen zu finden (vgl. Krüger 2022, S. 34).

Probleme können auch bei der Interpretation und Validierung des mathematischen Ergebnisses auftreten. Oft wird dem Reflexionsprozess keine so große Bedeutung beigemessen, was dazu führt, dass er ausgelassen oder oberflächlich behandelt wird. Die SchülerInnen interpretieren das Ergebnis so, dass es mit der Sachsituation übereinstimmt, ohne es vorher auf Plausibilität überprüft zu haben. Der Grund dafür wird in der fehlenden Kompetenz bzw. im fehlenden Bewusstsein in diesem Bereich gesehen (vgl. Krüger 2022, S. 34 f.).

Neben den Fehlern, die in den einzelnen Schritten des Modellierungskreislaufes auftreten, können sich auch Schwierigkeiten zeigen, die den gesamten Zyklus betreffen. Es besteht die Gefahr, dass einzelne Schritte vergessen werden, dass die Bearbeitung nicht zielgerichtet erfolgt, sodass der Überblick über das eigene Tun verloren geht, oder dass der Bezug zur Mathematik außer Acht gelassen wird. Hier bedarf es einer strikten Orientierung am Modellierungskreislauf sowie einer klaren Kommunikation bezüglich der einzelnen Aufgabenbereiche während der Modellierung (vgl. Krüger 2022, S. 35).

2.3.2.4 Konstruktion und Auswahl von Modellierungsaufgaben

Wichtig beim Einsatz von Modellierungsaufgaben ist die Berücksichtigung des individuellen Leistungsniveaus der Lernenden. Die SchülerInnen dürfen bei der Bearbeitung solcher Aufgaben weder unter- noch überfordert werden. Es muss also eine optimale individuelle Abstimmung der jeweiligen SchülerInnengruppen gefunden werden, da sonst die Gefahr besteht, dass bei zu einfachen Aufgaben metakognitive Strategien zur Lösung nicht benötigt werden und auf Routinehandlungen zurückgegriffen wird. Positiv ist, dass auch Lernende mit geringen Intelligenzwerten dennoch durch gezieltes Training in der Lage sind, metakognitive

Lernstrategien einzusetzen und diesbezüglich Lernerfolge zu erzielen (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 71 f.).

Ein weiterer wichtiger Punkt bei der Auswahl solcher Aufgaben ist es, auf die Relevanz der Problemstellungen für die SchülerInnen zu achten. Wenn die Aufgaben aus der Lebenswelt der Lernenden stammen, sind jene eher bereit, sich kognitiv anzustrengen, um die Aufgabe erfolgreich zu lösen. Sie zeigen sich auch aufgeschlossener, metakognitive Strategien und Techniken einzusetzen, um komplexe Aufgaben lösen zu können. Für den Unterricht bedeutet dies, dass durch das Angebot solcher Aufgaben der Einsatz von Metakognition im Lern- und Arbeitsprozess gefördert und trainiert werden kann (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 73).

Für Lehrpersonen kann eine Art Checkliste zur Beurteilung von Modellierungsaufgaben hilfreich sein, um eine geeignete Auswahl treffen zu können. Tab. 3 ist eine mögliche Vorlage, die hierfür verwendet werden kann, aber nicht so übernommen werden muss. Je nach Schulklasse kann sie individuell durch Ergänzungen oder Kürzungen angepasst werden. In der rechten Spalte kann bei der Analyse der vorliegenden Aufgabe angekreuzt werden, ob die Aussage zutrifft oder nicht. Kommt man zum Ergebnis, dass viele bis hin zu alle dieser Parameter erfüllt sind, dann handelt es sich um eine Aufgabe mit hohem Problemgehalt. Sind nur wenige angekreuzt, ist dies nicht der Fall. Wichtig ist, dass der Grad des Problemgehalts immer in Relation zum aktuellen Wissens- und Leistungsstand der Lerngruppe gesehen werden muss (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 74 f.).

Es kann auch vorkommen, dass es für eine Aufgabenstellung mehrere (multiple) Lösungen gibt. Je nachdem, wie die vorliegende Situation strukturiert und präzisiert wird, ergeben sich in Folge unterschiedliche Anwendungen mathematischer Verfahren, die zu verschiedenen Ergebnissen führen. Dabei können multiple Lösungen u. a. durch die Variation von realitätsbezogenen Annahmen, durch die Variation von mathematischen Lösungswegen oder durch beide genannten Variationen entstehen. Multiple Lösungen der ersten Art treten in den meisten Fällen bei offenen Aufgaben auf, da bei diesen in der Regel wichtige Informationen fehlen und kein bestimmter Lösungsweg vorgegeben ist. Um Modellierungsaufgaben erfolgreich bearbeiten zu können, sind vor allem Aspekte der prozeduralen

Metakognition, die der Planung und der Kontrolle wesentlich (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 430).

Der Einsatz von Aufgaben mit multiplen Lösungen bietet nicht nur eine Abwechslung in der Unterrichtsgestaltung, sondern führt auch zur Leistungssteigerung, wie die Ergebnisse aus der TIMS-Studie gezeigt haben. Durch die Beschäftigung mit solchen Aufgaben wird der Unterricht auch anspruchsvoller und die SchülerInnen erhalten durch das hier notwendige vernetzte Denken einen tieferen Einblick in die Mathematik. Durch das Konstruieren multipler Lösungen wird ein auf Verständnis basierendes Wissen gefördert, das auch in Situationen außerhalb des Unterrichts angewendet werden kann. Obwohl es auch KritikerInnen bezüglich des Umgangs mit multiplen Lösungen im Unterricht gibt, ist der lernfördernde Effekt im Rahmen der Metakognition und des selbstregulierten Lernens ein eindeutig überzeugendes Argument. Durch die Auseinandersetzung mit multiplen Lösungen werden die Lernenden vor allem dazu angeregt, Lösungsverfahren effektiver und variantenreicher einzusetzen, was zu einer Verbesserung der Selbstregulation beitragen kann (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 430 f.).

Hinweise auf und Orientierungspunkte für Problemhaltigkeit	trifft zu
Das Material thematisiert <i>Widersprüche</i> (z. B. gegensätzliche Standpunkte zu einem Thema) oder enthält <i>Spannungslagen</i> (z. B. Grafik mit sich überkreuzenden Linien, Balken mit extrem hoher und extrem tiefer Ausprägung).	
Beim Material ergänzen sich <i>verschiedene Präsentationsformen</i> wechselseitig, jede enthält im Vergleich zur anderen weitergehende Informationen.	
Das Material entwickelt <i>unterschiedliche Aspekte</i> eines Sachverhalts.	
Das Material enthält eine hohe <i>Informationsdichte</i> (viele Informationen – im Sinne von Aspekten des Themas – auf engem Raum).	
Das Material liefert kaum oder <i>nicht direkt erkennbare Anknüpfungspunkte für Sinnverstehen</i> (z. B. nur implizite Definitionen, keine Beispiele, keine Erklärung von Fachbegriffen ...).	
<i>Zentrale Informationen</i> für das Verständnis des Materials <i>fehlen</i> (z. B. Autor und seine zeitliche Einordnung, Quellenangabe, Legenden ...).	
Für das Verständnis des Materials ist eine <i>Übersetzungsleistung</i> erforderlich (z. B. Sprache aus Chatrooms oder Blogs in Alltagssprache; Wissenschaftssprache in Alltagssprache; Verbalisierung einer Grafik/eines Bildes ...).	
Das Material präsentiert sich eher <i>unstrukturiert</i> , d. h. der Betrachter ist aufgefordert, sich die Struktur (eines Textes, eines Bildes, von Zahlen) zu erarbeiten.	
Summe:	

Tabelle 3: Checkliste zur Einschätzung problemhaltiger Aufgaben (Hohenstein & Lambert 2018, S. 75)

2.3.2.5 Förderung von Modellierungskompetenz

Forschungen zur Förderung von Modellierungskompetenz konnten zeigen, dass Modellieren erlernbar ist und durch Förderungsmaßnahmen unterstützt werden

kann (vgl. Vorhölter 2020, S. 318). Dabei ergeben sich zwei Ansätze, der *holistische* und der *atomistische* Ansatz. Der *holistische* Ansatz verfolgt die Förderung der Modellierungskompetenz durch die vollständige Durchführung verschiedener Modellierungskreisläufe. Dabei soll das Aufgabenniveau an die SchülerInnen angepasst sein und sich im Verlauf des Kompetenzerwerbes steigern (vgl. Kaiser et al. 2015b, S. 371). Zur Beurteilung der Modellierungsleistung wird ein Bewertungsschema verwendet, das erst nach mehreren Durchführungen von Modellierungsaufgaben zu einem aussagekräftigen Ergebnis führt (vgl. Vorhölter 2021, S. 318 f.). Beim *atomistischen* Ansatz wird aus Zeitgründen auf eine vollständige Durchführung verzichtet und versucht, die Entwicklung der Modellierungskompetenz durch die separate Bearbeitung einzelner Schritte des Modellierungskreislaufs zu erreichen (vgl. Kaiser et al. 2015b, S. 371). Dabei kann ganz genau beobachtet werden, welche Teilkompetenzen umfassend erfüllt sind und welche nicht. Da insbesondere die Teilkompetenzen *Interpretieren und Überprüfen* nicht ohne die vorhergehenden Schritte *Verstehen und Vereinfachen* angewendet werden können, sind auch Aussagen über Zusammenhänge einzelner Kompetenzen möglich. Ein Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass dabei nicht festgestellt werden kann, ob die SchülerInnen in der Lage sind, einen gesamten Modellierungsprozess selbstständig durchzuführen (vgl. Vorhölter 2021, S. 319). Bezüglich der Effektivität der beiden Ansätze gibt es kein eindeutiges Ergebnis. Beide Ansätze verfolgen das Ziel, die Modellierungskompetenz langfristig aufzubauen (vgl. Kaiser et al. 2015b, S. 371). Die Studie von Brand und Vorhölter (2018, S. 125) zeigt jedoch auf, dass vor allem für leistungsschwächere Lernende der *holistische* Ansatz von Vorteil ist, da dieser den Lernenden eine individuelle und an ihre persönlichen Fähigkeiten angepasste Bearbeitung der Aufgabe ermöglicht und zudem nach Blomhøj und Jensen (2003, S. 28) als motivierender und authentischer empfunden wird.

Abseits des klassischen Einsatzes von Modellierungsaufgaben im Unterricht ist ebenso die Einführung von sogenannten Modellierungstagen oder Modellierungswochen möglich. Diese Umsetzungsmöglichkeit ist ein Beispiel für den *holistischen* Ansatz, bei dem die SchülerInnen die Chance erhalten, individuell oder in Gruppen Erfahrungen mit Modellierungsaufgaben zu sammeln, die zur Förderung der Modellierungskompetenz und zu einer Veränderung der Einstellung zur Mathematik beitragen sollen (vgl. Kaiser et al. 2015b, S. 378).

2.3.2.6 Modellierungsaufgabe: Stunt auf dem Heißluftballon

In diesem Abschnitt soll anhand einer Modellierungsaufgabe gezeigt werden, inwiefern metakognitive Strategien für eine erfolgreiche Bearbeitung genutzt werden können. Die ausgewählte Modellierungsaufgabe *Stunt auf dem Heißluftballon* (vgl. Herget et al. 2001, S. 32) eignet sich vor allem für den Einstieg in das Modellieren bzw. für die Thematisierung von Metakognition, da sie von der Aufgabenstellung her weniger komplex ist und die SchülerInnen so die Möglichkeit erhalten, den Modellierungsprozess besser kennenzulernen (vgl. Vorhölter et al. 2020, S. 193).

„Stunt auf dem Heißluftballon - Der 43-jährige Ian Ashpole stand in England auf der Spitze eines Heißluftballons. Die Luft-Nummer in 1.500 Meter Höhe war noch der ungefährlichste Teil der Aktion. Kritischer war der Start: Nur durch ein Seil gesichert, musste sich Ashpole auf dem sich füllenden Ballon halten. Bei der Landung strömte die heiße Luft aus einem Ventil direkt neben seinen Beinen aus. Doch außer leichten Verbrennungen trug der Ballonfahrer zum Glück keine Verletzungen davon. Wie viel Liter Luft befinden sich wohl in diesem Heißluftballon?“



Abbildung 9: Stunt auf dem Heißluftballon (Herget et al. 2001, S. 32)

Die Aufgabe der SchülerInnen ist es, durch Volumenberechnungen von Standardkörpern das Luftvolumen des abgebildeten Heißluftballons (Abb. 9) in Litern zu ermitteln. Das Herausfinden der Maße des Heißluftballons mithilfe der Körpergröße des Ballonfahrers als Maßstab kann als ein möglicher Lösungsweg angesehen werden. Für die Abschätzung des Volumens bedarf es eines geeigneten

Modells, für das z. B. eine Kugel oder eine Halbkugel mit einem Kegel herangezogen werden kann (vgl. Vorhölter et al. 2020, S. 193 f.).

Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, wird im Rahmen der metakognitiven Strategien zwischen dem exekutiven bzw. prozeduralen und dem deklarativen Aspekt der Metakognition unterschieden. Diese Aspekte werden nun im weiteren Verlauf dieses Abschnitts in Bezug auf die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe genauer dargestellt. Es ist wichtig zu betonen, dass sich beide Bereiche der Metakognition gegenseitig beeinflussen und ihre Anwendung für ein erfolgreiches Lösen entscheidend ist. Aufgrund der Tatsache, dass Modellierungsaufgaben im schulischen Kontext eine gute Möglichkeit zur Gruppenarbeit bieten, wird in den weiteren Ausführungen auch der Schwerpunkt auf die soziale Metakognition (Abschnitt 1.3) gelegt.

2.3.2.6.1 Einsatz im Unterricht

Bevor sich die SchülerInnen mit Modellierungsaufgaben beschäftigen, muss ihnen aufgezeigt werden, wie solche Aufgaben bearbeitet werden. Als unterstützende Maßnahme für die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben kann den Lernenden der Modellierungskreislauf (Abb. 8) erklärt und anhand eines Beispiels demonstriert werden. Vor allem bei der erstmaligen Bearbeitung von Modellierungsaufgaben kann er als Orientierungshilfe dienen, um die einzelnen Schritte nicht aus den Augen zu verlieren. Auch die P-S-K-Ampel, die in Abb. 7 dargestellt ist, kann bei der Umsetzung metakognitiver Strategien zur Unterstützung herangezogen werden.

Besonders wichtig ist die Kommunikation des Ziels von Modellierungsaufgaben vor Beginn der Bearbeitung. Den SchülerInnen soll vermittelt werden, dass es für eine Modellierungsaufgabe oft mehrere Lösungen gibt und dass bei dieser Art von Problemlöseaufgaben nicht das Ergebnis, sondern der durchlaufene Bearbeitungsprozess mit der Entwicklung eines geeigneten Modells entscheidend ist.

Darüber hinaus ist es wesentlich, die gewählte Modellierungsaufgabe an das Leistungsniveau und die Interessen der Lernenden anzupassen, um deren Motivation und Bereitschaft zur sorgfältigen Bearbeitung einer Aufgabe zu erhöhen.

Damit sich die SchülerInnen bei der Bearbeitung gegenseitig unterstützen und auch voneinander lernen können, kann die Modellierungsaufgabe in Gruppen bearbeitet werden. Insbesondere bei der Überlegung der Bearbeitungsstrategien wird sichergestellt, dass alle aus der Gruppe in den Modellierungsprozess einbezogen werden und die Aufgabe gemeinsam gelöst wird. Das bedeutet, dass jedes Gruppenmitglied eine festgelegte Rolle während des Bearbeitungsprozesses übernimmt, um die vorgegebene Aufgabe gemeinsam möglichst effektiv zu lösen. Diese Rollen können entweder individuell innerhalb der Gruppe abgestimmt oder bereits im Vorfeld von der Lehrkraft vorgegeben werden. So könnte bspw. ein Gruppenmitglied die wichtigsten Inhalte dokumentieren, ein anderes recherchiert relevante Informationen aus dem Schulbuch oder dem Internet. Ein weiteres Gruppenmitglied übernimmt das Berechnen mit dem Taschenrechner, während jemand anderes den Gesamtüberblick über den Modellierungsprozess behält und sicherstellt, dass die Gruppe strukturiert und zielorientiert arbeitet. Der Grund hierfür ist, dass nicht alle SchülerInnen über Modellierungskompetenz und metakognitives Wissen verfügen müssen, sondern es auf die gesamte Gruppenkompetenz ankommt. Dies kann aber nur dann funktionieren, wenn die Gruppenmitglieder miteinander kommunizieren und das gemeinsame Arbeiten im Vordergrund steht (vgl. Vorhölter et al. 2020, S. 193). Je nach Aufgabenstellung und Leistungsniveau ist es sinnvoll, die Gruppengröße und die Gruppenkonstellation jeweils neu zu bestimmen.

Die Lehrperson nimmt während der Bearbeitungsphase der Lernenden die Beobachtungsrolle ein und kann durch zusätzliche Fragestellungen (Abb. 5) die SchülerInnen zum Einsatz metakognitiver Strategien animieren.

2.3.2.6.2 Metakognitive Bearbeitung der Modellierungsaufgabe

Bei der Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe müssen die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufes berücksichtigt werden. Gleichzeitig werden die Lernenden dazu aufgefordert, metakognitives Wissen und metakognitive Strategien anzuwenden. Um den Bearbeitungsprozess einer Modellierungsaufgabe unter Berücksichtigung der Metakognition nachvollziehbar darzustellen, sind in der Tabelle sowohl für den exekutiven bzw. prozeduralen Aspekt (Planen, Steuern und Kontrollieren) als auch für den deklarativen Aspekt (Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen) mögliche fingierte Aussagen der Lernenden aus der Gruppe (L1

bis L4) kursiv dargestellt und mit den einzelnen Schritten des Modellierungsprozesses verknüpft. Zudem kommt durch das Verschriftlichen der Aussagen die Methode des Lauten Denkens zum Tragen.

1) Vom realen Problem zum realen Modell

Nach Einteilung der Gruppen ist es zu Beginn Aufgabe der SchülerInnen, sich genauer mit der Aufgabenstellung zu beschäftigen, um das reale Problem zu verstehen und, wenn nötig, zu vereinfachen. Dabei wird das Ziel der Aufgabenbearbeitung vereinbart, die notwendigen Informationen werden aus dem Text bzw. den Abbildungen (Bilder, Graphiken oder Diagramme) herausgefiltert und bereits mögliche Bearbeitungsschritte zur Erreichung des Zieles festgelegt.

Modellierungsschritt	Metakognitive Strategie	Aussagen der Lernenden
Verstehen und Vereinfachen	Planen	L1: „Ich würde vorschlagen, dass wir uns einmal die Aufgabe durchlesen und schauen, was wir dabei machen müssen!“
	Planen Personen- und Aufgabenwissen	L2: „Ich glaube wir müssen ausrechnen, wie viel Liter Luft sich in dem abgebildeten Heißluftballon befinden. Habt ihr das auch so verstanden?“ L1 und L3: „Ja!“ L4: „Ja, genau! Da ist unser Ziel!“ L3: „Aber wie soll das funktionieren? Aus dem Text haben wir nur einen Wert, das sind die 1 500 m.“ L4: „Mhmm, kann sein, dass wir noch weitere Informationen aus der Abbildung finden können.“ L1: „Ich glaube nicht, dass wir mit den 1 500 m was

Verstehen und Vereinfachen		L2: „Also haben wir dann für die Breite bzw. hier für den Durchmesser 28,8 m und für die Höhe 27,9 m.“ L1: „Wir können noch eine Skizze ergänzen!“
----------------------------	--	--

Tabelle 4: Metakognitive Strategien zum Modellierungsschritt "Verstehen und Vereinfachen"

2) Vom realen zum mathematischen Modell

Der nächste Modellierungsschritt besteht darin, das vereinfachte reale Modell in ein mathematisches Modell überzuführen. Jedes Gruppenmitglied bringt seine Überlegungen zur effizientesten und sinnvollsten Strategie ein. Diese werden in weiterer Folge entsprechend den individuellen Stärken und Schwächen in der Gruppe zur Bearbeitung verteilt. Dabei kann es auch vorkommen, dass bereits festgelegte Bearbeitungsschritte verworfen werden müssen, weil sie für das vorliegende mathematische Modell nicht geeignet sind.

Modellierungsschritt	Metakognitive Strategie	Aussagen der Lernenden
Mathematisch darstellen	Planen Steuern Aufgabenwissen	L1: „Jetzt müssen wir uns nur überlegen, welcher mathematische Körper für den Heißluftballon am besten passt. Wir müssen ja das Volumen ausrechnen.“
	Planen Steuern Personen- und Strategiewissen	L2: „Am einfachsten wäre eine Kugel, da wüsste ich auch die Volumenformel!“ L3: „Ich bin der Meinung, dass die Volumenberechnung mit einer Kugel zu ungenau wäre, vielleicht finden wir noch andere Körper, mit denen wir die Form des Heißluftballons gut anpassen könnten...“

Mathematisch darstellen	Planen Steuern Personen- und Aufgabenwissen	L4: „Mir fällt noch Würfel, Zylinder, Kegel oder Pyramide ein...“ L1: „Wie findet ihr die Idee, wenn wir oben eine Halbkugel und für unten einen Kegel nehmen. Ich glaube, das würde am besten passen!“ L4 und L3: „Das ist eine gute Idee!“ L2: „Wir können die Berechnungen einmal durchführen und dann schauen, ob der Wert realistisch ist. Ich mache auch gleich eine Skizze für das mathematische Modell.“
-------------------------	---	---

Tabelle 5: Metakognitive Strategien zum Modellierungsschritt "Mathematisch darstellen"

3) Vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung

Ziel dieses Schrittes ist es, mit den vorhandenen Informationen zu einer mathematischen Lösung zu gelangen. Mathematische Rechenschritte werden durchgeführt, auf ihre Richtigkeit überprüft und gegebenenfalls überarbeitet, um mögliche Fehler bereits vor der Interpretation und Ergebniskontrolle am Ende des Modellierungsprozesses zu erkennen. Dabei ist es wichtig, dass alle Gruppenmitglieder den Prozess begleiten und sich gegenseitig unterstützen.

Modellierungsschritt	Metakognitive Strategie	Aussagen der Lernenden
Mathematisch arbeiten	Steuern Aufgaben- und Personenwissen	L2: „Weiß wer von euch die Formeln für die Volumenberechnung einer Halbkugel und eines Kegels?“ L1: „Für eine Kugel wäre es ja $V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$, dann können wir einfach für eine Halbkugel das Ergebnis durch zwei rechnen!“

Mathematisch arbeiten	Steuern Aufgaben- und Personenwissen	L2: „Also wäre das dann einfach $V_{Halbkugel} = \frac{4}{6} \cdot r^3 \cdot \pi$. Und für den Kegel?“ L3: „Die weiß ich leider nicht!“ L4: „Ich auch nicht! Ich kann aber im Internet nachschauen!“ L4: „Da steht $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$. Dann brauchen wir noch die Werte für r und h.“ L1: „Gut also r können wir uns aus dem Durchmesser ausrechnen, weil ja $d = 2 \cdot r$ gilt, das wären dann ... 14,4 m. Aber wie kommen wir auf die Höhe des Kegels?“ L3: „Wir wissen ja, dass die Gesamthöhe des Heißluftballons 27,9 m ist. Laut unserer Skizze müssten wir nur den Radius der Halbkugel abziehen, also rechnen wir einfach $27,9 - 14,4$. Dann haben wir eine Höhe von 13,5 m.“ L4: „Klingt logisch. Setzen wir einmal in unsere Formeln ein und rechnen die beiden Volumina aus.“ L1: „Ich gebe das einmal in den Taschenrechner ein ... Für das Volumen der Halbkugel kommt 6 253,830265 und für das Volumen für den Kegel 2 931,482937 raus.“ L2: „Ich würde auf zwei Nachkommastellen runden...“
------------------------------	--	--

		L1: „Gute Idee, warte, dann haben wir 6 253,83 und 2 931,48...“ Aber welche Einheit?“
--	--	---

Tabelle 6: Metakognitive Strategien zum Modellierungsschritt "Mathematisch arbeiten"

4) Von der mathematischen zur realen Lösung

Der Schwerpunkt liegt hierbei auf dem Aspekt der Kontrolle. Die Gruppe fragt sich, ob alle wichtigen Informationen in ihrer Lösung berücksichtigt wurden und ob die Lösung in Bezug auf das eingangs definierte Aufgabenziel vollständig ist. Die Lernenden interpretieren ihr Ergebnis im Aufgabenkontext.

Modellierungsschritt	Metakognitive Strategie	Aussagen der Lernenden
Interpretieren	Kontrollieren Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen	L3: „Das müsste ja m^3 sein, weil unsere Werte in m waren und das Volumen immer Kubik ist.“ L1: „Ah ja!“ L2: „Würde ich auch sagen!“ L4: „Gut dann brauchen wir noch das Gesamtvolumen. Da rechnen wir einfach die beiden Werte zusammen. Dann haben wir $9\,185,31\,m^3$.“ L1: „Jetzt sind wir fertig!“ L3: „Warte, die Frage war ja, dass wir ausrechnen sollen, wie viel Liter in den Heißluftballon passen, also müssen wir das Ergebnis nochmals umwandeln. Dann, glaube ich, haben wir es!“ L1: „Also m^3 in l...“ L3: „Ja, genau!“

Interpretieren	Kontrollieren Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen	L4: „Kann es sein, dass der Umrechnungsfaktor hier 1 000 ist?“ L1: „Ich bin mir nicht sicher!“ L3: „Ich auch nicht, wir können einfach nachschauen!“ L3: „Da steht 1 m^3 sind 1 000 l, dann müsste das für unser Ergebnis 9 185 310 l sein, oder?“ L2: „Ja, wir müssen mal 1 000 rechnen.“ L4: „Das heißt, unsere Antwort für dieses Beispiel lautet: Im Heißluftballon befinden sich 9 185 310 l Luft.“ L2: „Genau, ich glaube wir haben nun alles für die Bearbeitung des Beispiels berücksichtigt!“ L1: „Denke ich auch!“
----------------	---	--

Tabelle 7: Metakognitive Strategien zum Modellierungsschritt "Interpretieren"

5) Von der realen Lösung zum realen Problem

Abschließend wird die reale Lösung dahingehend überprüft, wie kompatibel sie mit der Realität ist und mit anderen Werten verglichen. Zur Unterstützung kann die Gruppe auch in Unterrichtsmaterialien oder im Internet recherchieren. Wenn die Gruppe feststellt, dass ihr Ergebnis nicht realistisch ist, muss der Modellierungskreislauf erneut durchlaufen werden, wobei möglicherweise das verwendete mathematische Modell angepasst werden muss oder andere Informationen verwendet werden müssen.

Modellierungsschritt	Metakognitive Strategie	Aussagen der Lernenden
Überprüfen	Kontrollieren Personenwissen	L3: „Ich weiß nicht, ich finde, das ist ein sehr großer Wert, kann das überhaupt stimmen?“
	Kontrollieren Aufgaben- und Strategiewissen	L2: „Ich kann das überhaupt nicht einschätzen, ich habe keinen Vergleichswert.“ L1: „Schauen wir einfach im Internet nach, ob wir zu dieser Fragestellung etwas finden!“ L4: „Hier steht, dass gängige Größen zwischen 3 000 und 10 000 m ³ liegen und dass der Wert auch je nach Größe und Anzahl der beförderten Personen variieren kann.“ L3: „Dann passt das also doch. Wir gehen also davon aus, dass dies ein Ballon für mehrere Personen ist!“ L1, L2 und L4: „Genau!“

Tabelle 8: Metakognitive Strategien zum Modellierungsschritt "Überprüfen"

Es ist wichtig zu erwähnen, dass der Modellierungszyklus in den meisten Modellierungsprozessen nicht so chronologisch abläuft, wie in diesem Beispiel illustriert. Gelegentlich sind auch sogenannte Mini-Zyklen notwendig, in denen zwischen den Modellierungsschritten gewechselt wird (vgl. Vorhölter 2021, S. 318). Anhand der Tabellen wird jedoch deutlich, wie durch die Methode des Lauten Denkens die Aspekte der Metakognition (Planen, Steuern und Kontrollieren sowie Personen-, Aufgaben- und Strategiewissen) zur Anwendung kommen.

2.4 Auslöser und Auswirkungen metakognitiven Verhaltens

Krüger (2022, S. 60) unterscheidet hinsichtlich der Auslöser metakognitiven Verhaltens zwischen den *internen* und *externen* Faktoren. Zu den *internen* Faktoren zählen metakognitives Wissen, metakognitive Empfindungen und Sensitivität. Extern wird der Einsatz metakognitiver Strategien im schulischen Kontext durch die MitschülerInnen, die Lernumgebung und die LehrerInneninterventionen beeinflusst. Metakognitives Verhalten kann sich dabei positiv auf den Arbeitsprozess und die Lernleistung auswirken, was wiederum einen positiven Einfluss auf die emotionale Stärkung der Kinder und Jugendlichen hat (vgl. Krüger 2022, S. 61). Diese Faktoren werden nun genauer beleuchtet.

Der Einsatz metakognitiver Strategien wird vor allem durch fehlendes metakognitives Wissen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben ausgelöst. Dies ist insbesondere bei Modellierungsaufgaben der Fall, da hier, wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben, viele verschiedene Schritte zur erfolgreichen Lösung notwendig sind, die weit über das herkömmliche Operieren hinausgehen. Dabei können auch viele Schwierigkeiten auftreten, die durch die Anwendung von metakognitiven Strategien teilweise vermieden werden können (vgl. Krüger 2022, S. 37 f.). Laut Goos (1998, S. 226) sind Auslöser, die zum Einsatz metakognitiver Strategien führen:

- „*Lack of progress (Fehlender Fortschritt)*“
- *Detection of an error (Entdecken eines Fehlers)*
- *Anomalous result (Anormales Resultat)*“

Das Ausbleiben von Fortschritten während des Bearbeitungsprozesses führt dazu, dass die angewandte Strategie auf ihre Angemessenheit überprüft und in weiterer Folge verworfen oder adaptiert wird. Darüber hinaus können wichtige Informationen für den weiteren Arbeitsprozess gewonnen werden. Die Schritte der exekutiven bzw. prozeduralen Metakognition, des Überprüfens und Kontrollierens kommen bei der Entdeckung eines Fehlers bzw. eines auffälligen Ergebnisses zum Einsatz (vgl. Krüger 2022, S. 37).

Neben den auftretenden Schwierigkeiten während des Modellierens können auch persönliche Eigenschaften und Erfahrungen der SchülerInnen als Anregung zum Einsatz metakognitiver Strategien gesehen werden, die unter den metakognitiven Empfindungen, wie etwa die Motivation, fallen. Flavell und Wellman (1977) sprechen in diesem Zusammenhang auch von der *Sensitivität*, die notwendig ist, um sich der eigenen verfügbaren kognitiven Möglichkeiten bewusst zu werden. Dies ist insbesondere für die effektive Durchführung des Überwachungs- und Kontrollprozesses von wichtiger Bedeutung, was in weiterer Folge zur Auslösung metakognitiver Strategien führt. Inwieweit das eigene Individuum zur Anwendung von Metakognition beiträgt, hängt nach Efklides (2002, S. 182) von den kognitiven Fähigkeiten, der Persönlichkeit, dem eigenen Selbstkonzept und von den individuellen Faktoren, wie bspw. dem Geschlecht ab. Es zeigt sich, dass Männer im Vergleich zu Frauen selbstbewusster und zufriedener mit ihren Leistungen sind, auch wenn diese auf gleichem oder sogar niedrigerem Niveau liegen als bei den Frauen. Aus den vorhandenen Ressourcen und der vorliegenden Arbeit ergibt sich somit eine Reaktion, die individuell variiert und zu einem unterschiedlichen Einsatz metakognitiver Strategien führt (vgl. Krüger 2022, S. 39 f.). Mögliche Eigenschaften seitens der Lernenden, die nach Borkowski (1996, S. 396) bei der Selbstregulation unterstützen und zum Einsatz von Metakognition im Arbeitsprozess führen, sind:

- *„knows a large number of learning strategies;*
- *understands when, where, and why these strategies are important;*
- *selects and monitors strategies wisely and is extremely reflective and planful;*
- *adheres to an incremental view regarding the growth of mind;*
- *believes in carefully deployed effort;*
- *is intrinsically motivated and task-oriented and has mastery goals;*
- *does not fear failure – in fact, realizes that failure is essential for success hence, is not anxious about tests but sees them as learning opportunities;*
- *has concrete, multiple images of “possible selves”, both hoped for and feared selves in the near and distant future;*
- *knows a great deal about many topics and has rapid access to that knowledge;*

- *has a history of being supported in all of these characteristics by parents, schools, and society at large.*"

Diese persönlichen und motivationalen Einstellungen haben einen Einfluss u. a. auf die Aufgabenbearbeitung und das metakognitive Wissen, was wiederum den Einsatz metakognitiver Strategien beeinflusst (vgl. Krüger 2022, S. 41).

Die soziale Metakognition (Abschnitt 1.3) kann als externer Auslöser metakognitiver Strategien angesehen werden. Durch gegenseitiges Fragenstellen während des Bearbeitungsprozesses sowie durch die Aufforderung in der Gruppe, bestimmte metakognitive Handlungsschritte anzuwenden, kann die Einsatzhäufigkeit von Metakognition erhöht werden. Vor allem leistungsheterogene Gruppen zeigen im Vergleich zu leistungshomogenen einen vermehrten Einsatz metakognitiver Strategien. Zudem haben leistungsstarke SchülerInnen einen großen Einfluss auf ein metakognitives Arbeiten. Ebenso besteht die Möglichkeit, durch die Gestaltung der Lernumgebung sowie durch Interventionen seitens der Lehrperson, etwa durch geeignete Fragestellungen und Unterstützungsmaßnahmen, den Einsatz metakognitiver Prozesse zu fördern (vgl. Krüger 2022, S. 42 ff.). Durch die Auswahl geeigneter Aufgabenstellungen (z. B. Modellierungsaufgaben) wird für die Lernenden eine Lernumgebung geschaffen, in der metakognitive Handlungen für eine erfolgreiche Bearbeitung notwendig sind (vgl. Krüger 2022, 60 f.).

Dass der Einsatz von Metakognition das Lernverhalten und die Lernleistung positiv beeinflusst, konnte bereits 1971 von Flavell festgestellt werden und wurde auch in den letzten Jahren durch mehrere Studien bestätigt. Hattie (2009, S. 188 ff.) hat in seiner empirischen Metastudie drei Faktoren der Metakognition herausgearbeitet. Diese Faktoren, die Auswirkungen auf die kognitiven Leistungen haben, beziehen sich auf metakognitive Strategien, (meta)kognitive und affektive Fähigkeiten sowie auf die Verbalisierung von Denkprozessen und Selbstbefragung. Wie bereits in Abschnitt 2.3.2.2 erwähnt, kann metakognitives Arbeiten auch die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben erleichtern und bei der Bewältigung auftretender Schwierigkeiten unterstützen. Der Grund hierfür ist, dass metakognitives Wissen die SchülerInnen bei Herausforderungen emotional stärkt und die Bereitschaft, mathematische Probleme zu lösen, erhöht bzw. aufrechter-

hält (vgl. Krüger 2022, S. 56 f.). Bereits Maaß (2004) versuchte durch ihre Untersuchungen im Rahmen des Lehrens und Lernens mathematischer Modellierung, Zusammenhänge zwischen metakognitivem Wissen und der Modellierungskompetenz aufzudecken. Durch ihre Forschungen konnte sie feststellen, dass SchülerInnen das Wissen über den Modellierungsprozess als Teil des metakognitiven Wissens ausbauen konnten. Sie zeigten Grundkenntnisse im mathematischen Modellieren auf und konnten ein tieferes Verständnis hinsichtlich des Modellierungsprozesses entwickeln. Die Ergebnisse aus Concept Maps und SchülerInnen-Interviews zeigten, dass Schwächen beim Modellieren auf Fehlvorstellungen des metakognitiven Wissens zurückzuführen sind. Andererseits konnten auch positive Konnexe festgestellt werden. SchülerInnen mit einer überdurchschnittlichen Modellierungskompetenz weisen ebenso ein hohes metakognitives Wissen auf. Zudem konnten auch die Lernenden selbst einen positiven Effekt des metakognitiven Wissens auf die Durchführung des Modellierungskreislaufes beobachten (vgl. Krüger 2022, S. 42).

Weitere Untersuchungen haben jedoch auch gezeigt, dass nicht immer ein positiver Zusammenhang zwischen der Metakognition und dem Leistungsniveau bestehen muss. Als Grund hierfür kann die Tatsache genannt werden, dass bei Aufgaben, bei denen die Lernenden nicht über ausreichende Lösungsstrategien verfügen oder auf Strategien zurückgreifen, die bereits unbewusst eingesetzt werden, metakognitive Strategien erfolglos oder sogar hinderlich für den Bearbeitungsprozess sind. Hasselhorn (1992, S. 50 ff.) konnte in diesem Zusammenhang drei Ursachen identifizieren, warum Metakognition nicht immer zu einer Leistungsverbesserung führen muss. Die erste Ursache liegt in der Unvollständigkeit der Metakognition. Aus Kapitel 1 geht deutlich hervor, wie facettenreich Metakognition ist und je nach Anwendungsbereich unterschiedlich konzeptualisiert werden kann. Daher können in empirischen Studien nicht alle Bereiche der Metakognition untersucht werden. Dadurch kann es passieren, dass Schwächen in einem nicht untersuchten Bereich bestehen, wodurch keine Verbindung zwischen Metakognition und Lernverhalten erkannt wird. Der zweite Bereich ist die Motivation. Es zeigt sich, dass bei fehlender Motivation das Lernverhalten nicht optimal geplant werden kann. Bisher mangelt es an theoretischen Grundlagen, die erklären, unter welchen motivationalen Bedingungen Lernenden ihre Lernstrategien bestmöglich einsetzen können. Hasselhorn hat auch das (fehlende)

Vorwissen seitens der SchülerInnen als mögliche Ursache angesehen. Wenn die Lernenden nicht über ausreichendes Vorwissen zu den zu behandelnden Inhalten verfügen, können sie nicht feststellen, ob die vorhandenen Strategien sie bei der erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe unterstützen hätten können. Die genannten Ursachen weisen darauf hin, dass der Einfluss der Metakognition auf das Leistungsniveau folglich nur unter bestimmten Bedingungen positiv zu bewerten ist (vgl. Krüger 2022, S. 58 f.).

In Abb. 10 sind die möglichen Auslöser sowie die Auswirkungen metakognitiven Verhaltens noch einmal übersichtlich dargestellt.

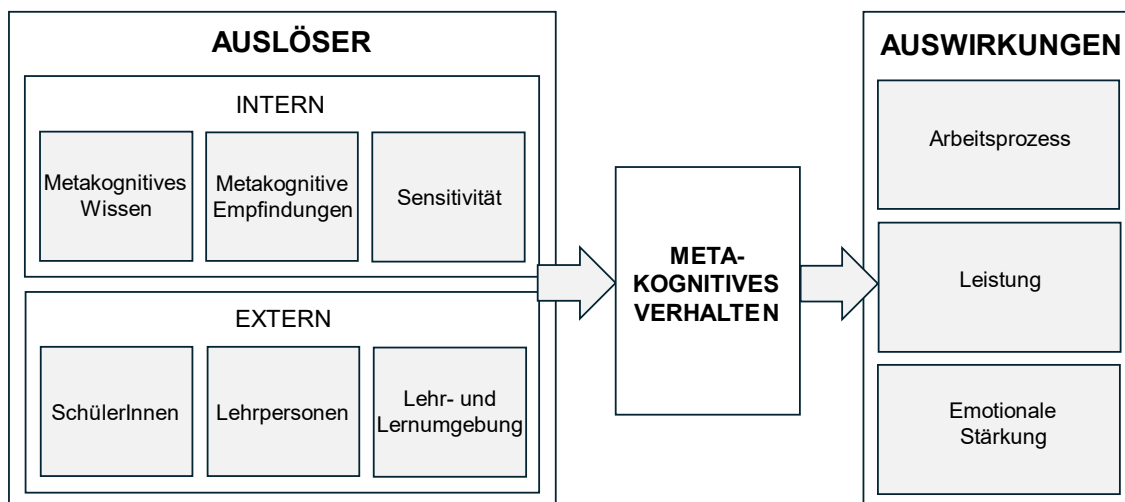


Abbildung 10: Übersicht möglicher Auslöser und Auswirkungen metakognitiven Verhaltens in Anlehnung an Krüger (2022, S. 60)

2.5 Praktische Anwendungen von Metakognition im Schulunterricht

Die Bearbeitung von Aufgaben spielt im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle, da sie die Lernenden beim Aufbau und bei der Festigung inhaltlicher Kompetenzen unterstützt und gleichzeitig das Bewusstsein für das eigene Lernen und Denken stärkt. Gerade dabei kommt es nicht selten zu Fehlern oder falschen Herangehensweisen. Es ist wichtig, diese zu erkennen und infolge zu korrigieren. Dies erfordert Fähigkeiten hinsichtlich der Planung, Steuerung und Kontrolle von

Denk- und Handlungsprozessen. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, werden darunter metakognitive Kompetenzen verstanden. Durch den Einsatz metakognitiver Strategien kann eine Weiterentwicklung des eigenen mathematischen Verständnisses sowie der Erwerb hilfreicher Vorgehensweisen für zukünftige Problemstellungen erreicht werden (vgl. Sjuts 2019, S. 227 ff.). Sjuts (2019, S. 228) betont, dass eine Förderung des mathematischen Problemlösens sowie des metakognitiven Arbeitens nicht nebenbei im Unterricht geschieht. Es bedarf der Intervention durch die Lehrkraft, die sich neben konkreten Anweisungen auch auf die Auswahl geeigneter Aufgaben bezieht. Bei Aufgaben, die zu schnellem und fehlerhaftem Arbeiten verleiten, kann Metakognition ebenfalls unterstützend wirken.

Im weiteren Verlauf des Abschnittes werden verschiedene Aufgaben vorgestellt, die sich auf die vier im österreichischen Lehrplan für Mathematik vorgesehenen inhaltlichen Kompetenzbereiche beziehen (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024):

- *„Zahlen und Maße*
- *Variablen und Funktionen*
- *Figuren und Körper*
- *Daten und Zufall“*

Die Aufgaben wurden einerseits aus Lehrbüchern (Sjuts 2007 und Sjuts 2019) sowie aus Schulbüchern (Mathematik verstehen 1 und Mathematik verstehen 4) entnommen bzw. adaptiert und andererseits eigens erstellt. Nachfolgend werden mögliche Umsetzungsmöglichkeiten der ausgewählten Aufgaben vorgestellt und erläutert, inwiefern Metakognition bei der Aufgabenbearbeitung unterstützend wirken kann. Darüber hinaus soll durch die ausführliche Behandlung dieser aufgezeigt werden, dass man als Lehrkraft metakognitives Arbeiten mühelos in den regulären Unterricht integrieren kann, ohne dabei aufwendige Unterrichtsvorbereitungen oder spezielle Projekte, wie z. B. Modellierungstage (Abschnitt 2.3.2.5), planen zu müssen. Außerdem soll deutlich gemacht werden, dass Metakognition auch bei gängigen Unterrichtsmethoden wie der Partnerarbeit, dem Gruppenpuzzle oder der Kopfübung zum Einsatz kommen kann.

1) Zahlen und Maße

Aufgabe 1:

„Ein Händler kauft eine Ware für 6 Euro, verkauft sie dann für 7 Euro, kauft sie dann für 8 Euro zurück und verkauft sie daraufhin für 9 Euro. Wie groß ist sein Gewinn?“ (Sjuts 2019, S. 232)

Die erste Aufgabe, die dem Inhaltsbereich *Zahlen und Maße* zuzuordnen ist, kann zum Thema *Ganze Zahlen addieren* am Ende der 6. Schulstufe bzw. zu Beginn der 7. Schulstufe eingesetzt werden und bezieht sich auf die Kompetenzbereiche *Modellieren und Problemlösen* und *Operieren* (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Diese Aufgabe eignet sich gut als Einzelarbeit, bei der die Methode des Lauten Denkens (Abschnitt 2.1) herangezogen wird, wodurch die SchülerInnen zum Einsatz metakognitiver Strategien animiert werden. Die Lernenden notieren gegen Ende der Unterrichtsstunde ihre ersten Lösungsvorschläge und verschriftlichen als Hausübung ihre Vorgehensweise sowie Gedanken dazu. Um eine schnelle Auswertung in der Klasse zu ermöglichen, kann dies als Multiple-Choice-Frage online ausgewertet werden. Nach der ersten Phase kann die Lehrperson die SchülerInnen auch auffordern, ihre Lösung zu begründen, bevor in der nächsten Unterrichtsstunde nochmals Bezug zur Aufgabe genommen wird. Durch die Präsentation einiger Lösungsvorschläge seitens der Lernenden im Plenum erhalten sowohl die Lehrperson als auch die MitschülerInnen Einblick in die Herangehensweise und die Denkprozesse.

Die meisten SchülerInnen werden beim erstmaligen Lösen die Antwort 1 Euro nennen, ohne sich Notizen oder Rechnungen als Hilfestellung gemacht zu haben. Sjuts (2019, S. 232 f.) schreibt, dass der Grund dafür in der Reduktion von vier Vorgängen auf drei liegt, da man beim ersten Mal 1 Euro Gewinn, dann 1 Euro Verlust und dann wieder 1 Euro Gewinn macht. Dies geht auch aus den in der Abb. 11 dargestellten SchülerInnenlösungen hervor. Beide Lernenden erkennen zwar die Zahlenveränderungen in der Aufgabenstellung, können jedoch nicht alle Vorgänge des Gewinns und Verlusts richtig interpretieren. Es bedarf der Modellierungskompetenz, den Kauf bzw. Verkauf in eine korrekte mathematische Sprache zu übersetzen (vgl. Sjuts 2007, S. 36).

1€, weil er nach dem 1. Verkauf hat er 1€ Gewinn, beim nach dem 2. Kauf hat er 0€ und bekommt dann beim 1€ mehr, als der Preis, für den er es beim 2. Mal verkauft hat.

1€. Er hat erst einen Gewinn von 1€.

Dann hat er einen Verlust von 1€.

Dann hat er nochmal einen Gewinn von 1€, damit gleicht er den Verlust.

Abbildung 11: Falsche SchülerInnenlösungen zu Aufgabe 1 aus Zahlen und Maße (Sjuts 2007, S. 36)

Erst die Aufforderung, die Aufgabenstellung genauer zu betrachten und die Handlungsschritte schriftlich auszuführen, führt zur richtigen Antwort von 2 Euro Gewinn (vgl. Sjuts 2019, S. 232 f.). In Abb. 12 ist ein möglicher richtiger Lösungsvorschlag zu sehen. Neben der Verschriftlichung des Lösungsvorschlags (Lautes Denken) stellt der Schüler die Lösungen auch tabellarisch und mithilfe eines Terms dar.

Rechnung:
- 6€ Verlust 6€
+ 7€ Gewinn 1€
- 8€ Verlust 7€
+ 9€ Gewinn 2€
 $(-6+7)+(-8+9)$

Am Anfang verliert er 6€. Indem er die Ware für 7€ verkauft, macht er 1€ Gewinn. Wenn er sie für 8€ wieder kauft, hat er 1€ Verlust. Verkauft er jedoch für 9€, hat er insgesamt 2€ Gewinn.

Abbildung 12: Richtiger Schülervorschlag zu Aufgabe 1 aus Zahlen und Maße (Sjuts 2007, S. 40)

Um mehr als das Sichtbarmachen der Gedanken seitens der SchülerInnen durch die Aufgabenstellung zu erreichen, kann durch eine Ergänzung der Aufgabe auch das Verständnis von Verlust und Gewinn im Zusammenhang mit den Thema *Ganze Zahlen* gefördert werden. So wird deutlich, dass das Aufdecken von Denkprozessen mit der Anregung von Verstehensprozessen verbunden werden kann, was metakognitives Arbeiten voraussetzt (vgl. Sjuts 2007, S. 44 ff.). Durch die Verwendung konkreter Operatoren (Tab. 2) in den einzelnen Aufgabenstellungen kann sichergestellt werden, dass die Aufgaben nicht mehr mit bekannten Strategien lösbar sind und metakognitive Aktivitäten notwendig werden. Abb. 13 zeigt, wie die Aufgabenstellungen für die Hausübung lauten könnten.

Arbeiten mit Ganzen Zahlen: Gewinn und Verlust

Ein Händler kauft eine Ware für 6 Euro, verkauft sie dann für 7 Euro, kauft sie dann für 8 Euro zurück und verkauft sie daraufhin für 9 Euro.

a) Bestimme, wie groß sein Gewinn ist! Verschriftliche dazu deine Überlegungen und begründe deine Antwort!

b) Stelle deine Lösung mit einer Tabelle oder mithilfe eines Terms (Rechnung) dar!

c) Luca ist zum Ergebnis von 1 Euro gekommen und erklärt dazu:
„Zuerst hat er einen Gewinn von 1 Euro, danach einen Verlust von 1 Euro und daraufhin einen Gewinn von 1 Euro. Also hat er insgesamt einen Gewinn von 1 Euro.“
Kommentiere, warum Lucas Ergebnis falsch ist, und verdeutliche ihm seine Fehlvorstellungen! Schreibe einen kurzen Text für ihn!



Abbildung 13: Mögliche Aufgabenstellungen zu Aufgabe 1 aus Zahlen und Maße in Anlehnung an Sjuts (2007)

Aufgabe 2:

„Du überholst den zweiten. Welchen Platz hast du dann?“ (Sjuts 2019, S. 234)

Die zweite Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Zahlen und Maße* kann bspw. zur Wiederholung des Themas *Natürliche Zahlen ordnen* in der 5. Schulstufe der Sekundarstufe 1 eingesetzt werden und zielt auf die Kompetenz des Vermutens und Begründens ab (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Die Aufgabe kann in Einzel- oder Partnerarbeit als Einstieg oder Abschluss der Unterrichtsstunde bearbeitet werden. Damit die Kontrolle der SchülerInnenlösungen für die Lehrperson unkompliziert abläuft, können die Lernenden ihre Lösung auf ein kleines Kärtchen schreiben, das nach einem Signalton in die Höhe gehalten wird. So können die richtigen Lösungen auf einen Blick erkannt werden.

Für die SchülerInnen wird die Aufgabe zunächst sehr einfach erscheinen, doch besteht hier besonders die Gefahr, vorschnell als Lösung den 1. Platz zu nennen. Erst bei erneutem Nachdenken wird klar, dass es nur der 2. Platz sein kann (vgl. Sjuts 2019, S. 234 f.).

Auch hier kann der Einsatz metakognitiver Strategien Abhilfe schaffen. Insbesondere die drei Aspekte der exekutiven bzw. prozeduralen Metakognition (Abschnitt 1.2.1) sind dabei gefragt. Mithilfe einer kurzen Anleitung seitens der Lehrperson können die SchülerInnen zum metakognitiven Arbeiten animiert werden. Mögliche Fragen, die die Lehrperson den SchülerInnen stellen kann, zeigt Abb 5. Folgende Anweisungen, die auf das Planen, Steuern und Kontrollieren abzielen, können bei dieser Aufgabe von der Lehrkraft (L) wie folgt lauten:

Schritt 1 – Planen

L: *„Lies dir die Aufgabenstellung genau durch und überlege dir, was deine Aufgabe ist! Die Fragestellung hilft dir dabei!“*

Schritt 2 – Steuern

L: *„Nun filtere wichtige Begriffe bzw. Informationen aus der Aufgabenstellung heraus, die dir für das Erreichen der Lösung helfen können! Notiere sie dir oder markiere sie farbig im Text! Auch eine kurze Skizze kann dir bei der Lösung helfen. Überlege nun, welchen Platz man erreicht hat!“*

L: *„Bevor du deine Lösung auf das Kärtchen notierst, überlege dir nochmals, ob deine Lösung mit den in der Aufgabenstellung vorkommenden Informationen Sinn macht und in einem Wettkampf realistisch wäre!“*

Interessant wäre es auch, die Aufgabe in zwei Phasen zu bearbeiten, wobei sich diese durch den Einsatz metakognitiver Strategien bzw. durch die Interventionen der Lehrkraft unterscheiden. Dadurch kann den SchülerInnen die Wichtigkeit metakognitiven Arbeitens auch bei weniger komplexen Aufgaben bewusst gemacht werden und sie erkennen zugleich, dass ein zweimaliges Nachdenken über Lösungen zum Erfolg führen kann.

Ziel der Beschäftigung solcher Aufgabenstellungen ist es, dass durch das immer wieder gleiche Vorgehen während des Bearbeitungsprozesses die einzelnen Schritte (Planen, Steuern, Kontrollieren) bei den SchülerInnen verankert werden, sodass diese auch bei zukünftigen Problemstellungen angewendet werden können. So wird erreicht, dass auch ohne Interventionen seitens Lehrkraft metakognitiv gearbeitet wird.

2) Variablen und Funktionen

Aufgabe 1:

„Gegeben ist die Gleichung $x + x = x^2$. Welche Werte kannst du für x einsetzen?“

Die erste Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Variablen und Funktionen* kann in der 7. Schulstufe zum Thema *Rechnen mit Termen und Potenzen* behandelt werden, wobei hier vor allem die Kompetenzen *Vermuten und Begründen* im Vordergrund stehen (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Die Aufgabe kann im Plenum bearbeitet werden, indem die Lehrperson in Form eines SchülerInnen-LehrerIn-Gesprächs die Lernenden nach ihren Ergebnissen befragt und sie gemeinsam darüber diskutieren. Dies hat zur Folge, dass dadurch die metakognitive Technik des Lauten Denkens zum Einsatz kommt, wodurch sich die MitschülerInnen mögliche Lösungsstrategien für künftige Aufgabenstellungen mitnehmen können.

Aufgrund der in den Schulbüchern häufig vorkommenden Definition einer Variablen als Platzhalter für eine Unbekannte geht man intuitiv davon aus, dass man für x jede beliebige reelle Zahl einsetzen kann. Dass hierbei auch eine Gleichung gegeben ist, die ebenfalls erfüllt werden muss, wird von den meisten außer Acht gelassen. Das Gleichheitszeichen weist bereits darauf hin, dass nach Einsetzen der gefundenen Zahl für x beide Seiten zum gleichen Ergebnis führen müssen. Dieser Denkfehler wird wegen des fehlenden Kontrollprozesses am Ende oft nicht entdeckt. Allein das Ausprobieren unterschiedlicher reeller Zahlen kann zeigen, dass die Lösung nicht willkürlich gewählt werden darf, sondern die Gleichung als Lösung nur $x = 0$ oder $x = 2$ zulässt.

Aus den bisherigen Ausführungen wird deutlich, dass durch metakognitives Arbeiten mögliche Fehlerquellen reduziert werden können. In dieser Aufgabe spielen vor allem die Strategie des Planens und Kontrollierens eine wesentliche Rolle, wie das folgende SchülerInnen(S)-LehrerIn(L)-Gespräch zeigen soll. Aus dem fiktiven Gesprächsverlauf geht, wie bereits zu Abb. 3 geschrieben, hervor, dass die einzelnen metakognitiven Strategien nicht immer zyklisch und der Reihe nach erfolgen müssen, sondern sich auch überschneiden können.

L: *„Lest auch die Aufgabe genau durch, filtert wichtige Informationen aus der Aufgabenstellung heraus und überlegt euch, was man für x einsetzen kann!“*

Ein Schüler zeigt auf.

S: *„Das ist ja voll einfach! Ich kann für die Variable x jede beliebige Zahl einsetzen, sodass die Gleichung erfüllt ist!“*

Der Schüler war zwar in der Lage, wichtige Informationen, wie *Variable* und *Gleichung* aus der Aufgabenstellung zu bestimmen und diese in seiner Lösung einzubauen, liefert jedoch ein falsches Ergebnis. Nichtsdestotrotz hat er bereits metakognitive Strategien im Bereich des Planes verwendet. Aufgrund des fehlerhaften Ergebnisses versucht die Lehrperson durch Fragen nach den Begriffsdefinitionen, den Schüler zum richtigen Ergebnis hinzuführen.

L: *„Du hast gesagt, dass x eine Variable ist. Weißt du, wie eine Variable definiert ist?“*

S: „Ich habe mir gemerkt, dass die Variable Platzhalter für eine Zahl ist, die erst ermittelt werden muss.“

L: „Richtig! Und welche Eigenschaft hat eine Gleichung?“

Eine Schülerin zeigt auf.

S: „Naja, durch das Gleichheitszeichen weiß ich, dass eine Gleichung nur dann erfüllt ist, wenn nach Einsetzen einer Zahl für x auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis rauskommt!“

L: „Gut! Wir wissen nun, dass man nicht jede beliebige Zahl für x einsetzen kann. Ich muss also eine Zahl finden, die die Gleichung erfüllt!“

Eine Schülerin zeigt auf. Aus ihrer Antwort gehen sowohl Strategien des Steuerns als auch des Kontrollierens hervor.

S: „1 können wir schon ausschließen, weil wenn ich für $x = 1$ einsetze, so kommt auf der linken Seite 2 und auf der rechten 1 raus, was die Gleichung nicht erfüllt.“

Ein weiterer Schüler meldet sich. Auch er steuert und kontrolliert seinen Lösungsprozess.

S: „Wenn ich 2 einsetze, dann ist die Gleichung erfüllt, weil ich nach Einsetzen $4 = 4$ stehen habe!“

L: „Genau, $x = 2$ ist eine mögliche Lösung! Die Frage ist, gibt es noch eine weitere Zahl, die man für x einsetzen kann? Wie kann ich das herausfinden? Helfen uns dabei die Rechenregeln für Terme?“

Eine Schülerin kennt die bekannten Rechenregeln und zeigt auf. Das Nennen dieser Regeln kann als Planungsstrategie angesehen werden. Die weiteren Arbeitsschritte (Vereinfachen der Gleichung) fallen unter die Anwendung der Steuerungsstrategie.

S: „Wir können die Gleichung vereinfachen, indem wir auf der linken Seite $x + x$ zu $2 \cdot x$ zusammenfassen.“

L: „Komm gleich zur Tafel und notiere deinen Vorschlag!“

Das Notieren der bereits gefundenen Informationen sowie der Rechenschritte unterstützt die Lernenden in ihrem Denken und Tun. Auch lernschwächere SchülerInnen können durch die visuelle Darstellung den weiteren Handlungsschritten während des Bearbeitungsprozesses gut folgen.

S: „Also wir haben die Gleichung $x + x = x^2$ und das ist gleich $2 \cdot x = x^2$.“

L: „Gut, wie machen wir jetzt weiter?“

Ein Schüler zeigt auf.

S: „Kann ich nicht x^2 auf die andere Seite bringen?“

Die Lehrperson nickt und wendet ihren Blick zur Schülerin und gibt in weiterer Folge Anweisungen zum genauen und systematischen Arbeiten.

S: „Also, dann einfach $2 \cdot x - x^2$?“

L: „Aufpassen, da fehlt noch etwas, es muss weiterhin eine Gleichung bleiben!“

S: „Ah, es fehlt das Gleichheitszeichen und 0!“

L: „Ja, so jetzt müssen wir einen Trick anwenden, um auf unsere Lösungen zu kommen! Wir sehen, dass x in beiden Termen vorhanden ist.“

S: „Herausheben!“, schreit ein Schüler heraus.

L: „Genau! Was ist unser Ergebnis, wenn wir x herausheben?“

Der Schüler antwortet gleich und die Schülerin schreibt an der Tafel mit.

S: „Dann haben wir $x \cdot (x - 2) = 0$.“

Damit die Kontrollstrategie zum Einsatz kommt, gibt die Lehrperson den SchülerInnen konkrete Hinweise.

L: „Jetzt sind wir mit dem Rechnen fertig, wir müssen jetzt nur noch überlegen, welche Zahl darf ich noch für x einsetzen, $x = 2$ haben wir bereits durch Ausprobieren gefunden!“

Eine Schülerin meldet sich zaghaft.

S: „Noch 0?“

L: „Wie kannst du vorgehen, wenn du dir sicher sein möchtest, dass 0 auch eine Lösung ist?“

S: „Wie vorher in die Gleichung einsetzen?“

L: „Ja, du machst die Probe, probiere es einmal!“

Die Schülerin schaut konzentriert zur Tafel.

S: „Ja stimmt, auf beiden Seiten kommt 0 heraus, weil eine Multiplikation mit 0 immer 0 ergibt!“

L: „Genau, wie lautet nun unsere Antwort auf die Fragestellung?“

Die Schülerin schreibt die Antwort an die Tafel und schließt damit den Bearbeitungsprozess mithilfe metakognitiver Fähigkeiten erfolgreich ab.

S: „Für x dürfen wir 0 oder 2 einsetzen.“

Ziel eines solchen SchülerInnen-LehrerIn-Gesprächs ist es, den SchülerInnen aufzuzeigen, wie bei der Aufgabenbearbeitung konkret vorgegangen wird, um den Bearbeitungsprozess sorgfältig und strukturiert durchzuführen sowie die einzelnen Handlungsschritte zu steuern, zu kontrollieren und zu reflektieren. Auf diese Weise können metakognitive Fähigkeiten trainiert und verinnerlicht werden, ohne dass sie explizit von der Lehrkraft erwähnt werden. Wichtig ist, dass die Lernenden die drei Schritte (Planen, Steuern und Kontrollieren) beim Lösen von Aufgaben, sei es als Übung in der Schule, bei der Hausübung, sei es bei mündlichen und schriftlichen Prüfungen, im Hinterkopf behalten und bewusst anwenden.

Aufgabe 2:

„Zwei Schwestern sind zusammen 35 Jahre alt. Ihr Altersunterschied beträgt sieben Jahre. Wie alt ist die jüngere der beiden Schwestern?“ (Salzger et al. 2023b, S. 85)

Die zweite Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Variablen und Funktionen* kann in der 8. Schulstufe zum Thema *Aufstellen von Linearen Gleichungen* eingesetzt werden. Neben den inhaltlichen und metakognitiven Kompetenzen werden auch die Kompetenzbereiche *Modellieren und Problemlösen* sowie *Operieren und*

Konstruieren gefördert (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Die Aufgabe kann entweder in Einzelarbeit bspw. zur Überprüfung des inhaltlichen Verständnisses im Unterricht oder zur Festigung als Hausübung bearbeitet werden. Durch das Verschriftlichen der einzelnen Arbeitsschritte und das Ausführen der Rechenschritte kommt die Methode des Lauten Denkens (Abschnitt 2.1) zum Tragen. So erhält die Lehrperson beim Durchsehen der SchülerInnenenergebnisse Einblick in ihre Denkprozesse und kann bei auftretenden Schwierigkeiten in den darauffolgenden Unterrichtsstunden Unterstützung leisten.

Da es sich im Vergleich zu Aufgabe 1 um eine komplexere Aufgabenstellung handelt, können sich durch eine ungenaue und vorschnelle Aufgabenbearbeitung schnell Fehler einschleichen, die zu einem falschen Ergebnis führen. Mögliche Fehlerquellen liegen im Bereich einer unklaren Variablenzuordnung (wenn z. B. $x - 7$ statt $x + 7$ für das Alter der älteren Schwester und nicht der jüngeren angenommen wird), dem Ignorieren wichtiger Informationen aus der Aufgabenstellung (Altersunterschied wird nicht berücksichtigt), es passieren Fehler beim Umformen der aufgestellten Gleichung oder es wird vergessen, Ergebnisse auf Plausibilität zu prüfen (Durchführen einer Probe).

Durch das Planen der Arbeitsschritte im Voraus, das Steuern währenddessen und das Kontrollieren am Ende (Strategien des exekutiven bzw. prozeduralen Aspekts der Metakognition) kann mithilfe der erforderlichen inhaltlichen Kompetenzen das richtige Ergebnis von 14 Jahren erzielt werden, was in den folgenden Zeilen als mögliche SchülerInnenlösung dargestellt ist.

Schritt 1 (Planen): Aufgabenstellung ermitteln und Informationen finden

- Beide Schwestern sind zusammen 35 alt.
- Der Altersunterschied beträgt 7 Jahre.
- Ich muss das Alter der jüngeren Schwester herausfinden.

Schritt 2 (Steuern): Variablen definieren

- x sei das Alter der jüngeren Schwester.
- Da der Altersunterschied 7 Jahre beträgt, muss das Alter der älteren Schwester $x + 7$ sein. Sie muss älter sein, daher wird x mit 7 addiert.

Schritt 3 (Steuern): Gleichung aufstellen und lösen

- Da die Summe ihres Alters 35 Jahre ist, gilt: $x + x + 7 = 35$
- Vereinfachen der Gleichung: $2x + 7 = 35$
- Subtrahieren 7 von beiden Seiten: $2x = 28$
- Dividiert durch 2 rechnen: $x = 14$

Schritt 4 (Kontrollieren): Ergebnis prüfen

- Für die Probe setze ich 14 in die Gleichung ein:

$$x + x + 7 = 35$$

$$14 + 14 + 7 = 35$$

$$35 = 35 \checkmark$$

- Daraus ergibt sich folgende Antwort: Die jüngere Schwester ist 14 Jahre alt.

Wenn die SchülerInnen schon mehr Erfahrungen im Bereich des metakognitiven Arbeitens gesammelt haben, ist es nicht notwendig, die Gedanken im Detail aufzuschreiben. Die Lernenden besitzen bereits die Fähigkeit, diese im Kopf bewusst ablaufen zu lassen und kommen dadurch ebenfalls zur richtigen Lösung.

3) Figuren und Körper

Aufgabe 1:

„Ein Würfel hat ein Volumen von 72 cm^3 . Wie groß ist die Seitenlänge a , wenn du das Volumen verdreifachst?“

Die Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Figuren und Körper* lässt sich bereits in der 5. Schulstufe zum Thema *Würfel und Quader* einsetzen und kann den Ausbau der Kompetenzen *Modellieren und Operieren* unterstützen (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Durch Überlegen und Ausprobieren einer geeigneten Seitenlänge kann das Arbeiten mit Wurzeln umgangen werden. Um jedoch das Arbeiten mit Formeln und Wurzeln zu vertiefen, empfiehlt sich ein Einsatz erst in der 7. oder 8. Schulstufe, was in Form von PartnerInnenarbeit umgesetzt werden kann. Wichtig für den Lernprozess der SchülerInnen ist es, dass die Aufgabe in zwei Phasen bearbeitet wird, wobei sich die Lernenden bereits in Phase 1 intensiver mit der Aufgabenstellung auseinandersetzen und versuchen, ein richtiges Ergebnis zu finden. Erst in Phase 2 kommen

metakognitive Strategien zum Einsatz, die entweder durch Interventionen seitens der Lehrperson Schritt für Schritt angeleitet bzw. den SchülerInnen in Form der P-S-K-Ampel präsentiert werden (vgl. 4) *Daten und Zufall* (Aufgabe 2) bzw. Abb. 7). Dies kann die Lehrkraft in Abhängigkeit von den vorhandenen (meta)kognitiven Fähigkeiten der Lernenden entscheiden.

Die Schwierigkeit dieser Aufgaben liegt nicht in der Komplexität der Aufgabe, sondern zum einen im Finden aller wichtigen Informationen aus der Aufgabenstellung und zum anderen im Abschluss des Bearbeitungsprozesses, der mit einer Kontrolle der Lösung verbunden ist. Durch den Einsatz metakognitiver Strategien, insbesondere des Planens und Kontrollierens, können diese Schwierigkeiten vermieden und die richtige Lösung $a = 6 \text{ cm}$ kann gefunden werden.

Wie die Bearbeitung der SchülerInnen ohne (Bearbeitungsphase 1) bzw. mit (Bearbeitungsphase 2) Metakognition durchgeführt werden kann, wird in Abb. 14 bzw. Abb. 15 dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{geg. : } & V = 72 \text{ cm}^3 \\ & V_{\text{neu}} = ? \\ & a_{\text{neu}} = ? \\ \\ & V_{\text{neu}} = 3 \cdot 72 = 216 \text{ cm}^3 \\ & a_{\text{neu}} = \sqrt{216} \approx \underline{\underline{14,7 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

Abbildung 14: Phase 1 - Bearbeitung ohne metakognitive Strategien (eigene Darstellung)

Betrachtet man die beiden Phasen genauer, so zeigen sich Unterschiede allein in der Struktur der Aufgabenbearbeitung. Phase 1 mag auf den ersten Blick als die effizientere Lösungsvariante erscheinen, aber wie Abb. 14 zeigt, ist unreflektiertes und wenig strukturiertes Arbeiten aufgrund der Fehleranfälligkeit nicht unbedingt schneller. Statt der Kubikwurzel wurde nämlich die Quadratwurzel aus 216 berechnet. Dies erfordert ein erneutes Durcharbeiten des Beispiels. Wird jedoch bereits vor Beginn des Lösens die Aufgabenstellung genau studiert und

werden konkrete Arbeitsschritte überlegt, so können mögliche Fehlerquellen vorab erkannt und verhindert werden. Außerdem ist ein systematisches Arbeiten inkl. einer abschließenden Überprüfung gewährleistet, was aus den einzelnen Schritten in Abb. 15 besonders deutlich wird.

- 1) Das Volumen $V = 72 \text{ cm}^3$ soll verdreifacht werden, ich muss dann die neue Seitenlänge a_{neu} bestimmen.
allgemeine Formel: $V = a^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{V} = a$
- 2) $V = 72 \text{ cm}^3$
 $V_{\text{neu}} = 3 \cdot V = 3 \cdot 72 = 216 \text{ cm}^3$
 $a_{\text{neu}} = \sqrt[3]{V_{\text{neu}}}$
 $a_{\text{neu}} = \sqrt[3]{216} = \underline{\underline{6 \text{ cm}}}$
- 3) Probe:
 $V = a^3$
 $216 = 6^3$
 $216 = 216 \checkmark$

A: Wenn das Volumen verdreifacht wird, dann muss $a = 6 \text{ cm}$ sein.

Abbildung 15: Phase 2 - Bearbeitung mit metakognitiven Strategien (eigene Darstellung)

Aufgabe 2:

Berechne den Flächeninhalt eines Rechtecks mit der Länge von 10 cm und der Breite von 4 cm und gib ihn in Quadratmillimeter an! (vgl. Salzger et al. 2023a, S. 201)

Die zweite Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Figuren und Körper* eignet sich besonders gut in der 5. Schulstufe am Ende der Unterrichtseinheit zum Thema *Flächeninhalt von Rechtecken*. Aufgrund der geringen Komplexität der Aufgabe

kann sie als Kopfübung bearbeitet werden, wodurch die Anwendung der Flächeninhaltsformel trainiert wird und gleichzeitig Kopfrechenfähigkeiten gestärkt werden. Dabei müssen alle Denkprozesse im Kopf durchlaufen werden, ohne dass etwas notiert wird. Eine Umsetzungsmöglichkeit, die bereits in Aufgabe 2 aus dem Inhaltsbereich *Zahlen und Maße* erwähnt wurde, ist das Aufschreiben des Ergebnisses inkl. der richtigen Einheit auf einem Kärtchen, das anschließend hochgehalten wird. Die Lehrperson erhält dadurch einen guten Überblick über die von den SchülerInnen gefundenen Ergebnisse. Auch bei dieser Aufgabe können metakognitive Fähigkeiten den Bearbeitungsprozess unterstützen. Die Lehrperson kann die Lernenden durch konkrete Anweisungen zum Einsatz dieser motivieren. Bei dieser Aufgabe ist es besonders wichtig, dass sowohl der Planungs- als auch der Kontrollaspekt nicht vernachlässigt werden. Der Grund liegt darin, dass bei besonders einfachen Aufgabenstellungen oft wichtige Informationen, wie z. B. die Frage nach der Angabe des Flächeninhalts in Quadratmillimetern, im Bearbeitungsprozess nicht berücksichtigt werden. Viele SchülerInnen werden daher als Lösung $A = 40 \text{ mm}^2$ statt $A = 4\,000 \text{ mm}^2$ auf ihr Kärtchen schreiben, weil sie auf den Schritt des Umrechnens der Seitenlängen vergessen haben. Dies kann durch ein kontrolliertes und strukturiertes Arbeiten vermieden werden.

Derartige Fehler passieren auch häufig in Prüfungssituationen, woraufhin SchülerInnen schnell Punkte verlieren. Damit dies nicht mehr so häufig auftritt, müssen die Lernenden die einzelnen Strategien des metakognitiven Arbeitens verinnerlichen und bei der Aufgabenbearbeitung bewusst einsetzen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Lehrperson, die neben der Auswahl geeigneter Aufgaben auch durch ihre Vorbildfunktion metakognitive Fähigkeiten fördern kann. Weitere Fördermöglichkeiten werden im Kapitel 3 erläutert.

4) Daten und Zufall

Aufgabe 1:

„Lassen sich aus einer Gruppe von 8 Spielern mehr Mannschaften mit 6 Personen oder mehr Mannschaften mit 2 Personen bilden?“ (Sjuts 2019, S. 235)

Damit Metakognition auch im Inhaltsbereich *Daten und Zufall* zum Einsatz kommt, kann Aufgabe 1 von den SchülerInnen zum Thema *Kombinatorik* bearbeitet werden. Hier spielen vor allem Fähigkeiten im Bereich des Modellierens, Darstellens und Begründens eine wichtige Rolle (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Wann und in welcher Form das Beispiel im Unterricht umgesetzt wird, hängt von der jeweiligen Altersstufe ab. Bereits in der Sekundarstufe (SEK) 1 ist es möglich, die Aufgabe von den SchülerInnen bearbeiten zu lassen, wo sie mithilfe kombinatorischer Überlegungen und Aufzeichnungen möglicher Mannschaften zum Ergebnis kommen. In der SEK 2 kann der Binomialkoeffizient hilfreich für das Finden der Lösung sein. Diese Aufgabe bietet zudem eine gute Gelegenheit, die Bearbeitung innerhalb einer Gruppe durchzuführen. Damit wird eine Methode im Rahmen der sozialen Metakognition (Abschnitt 1.3) herangezogen, bei der sich die Schülerinnen gegenseitig unterstützen und motivieren sowie ihr persönliches Wissen über metakognitives Arbeiten einbringen können. Auch die Lehrperson kann in Form der P-S-K-Ampel (Abb. 7) oder vorgegebener Leitfragen (Abb. 5) Unterstützung während des Bearbeitungsprozesses leisten, vor allem wenn die Lernenden noch wenig Erfahrung mit Metakognition haben. Eine Präsentation der Ergebnisse inkl. einer Diskussionsrunde hinsichtlich der verwendeten Lösungsansätze bzw. Bearbeitungsstrategien erscheint für den weiteren Lernprozess der SchülerInnen und für die Weiterentwicklung ihrer metakognitiven Kompetenzen besonders wichtig. Die Lehrkraft kann durch geeignete Reflexionsfragen durch die Reflexionsrunde führen. Mögliche Fragen können bspw. wie folgt lauten:

- *Wie seid ihr vorgegangen?*
- *Sind während des Bearbeitungsprozesses Schwierigkeiten aufgetreten? Wenn ja, wie seid ihr damit umgegangen?*
- *Wie habt ihr überprüft, ob eure Ergebnisse richtig sind?*

Diese Aufgabe erfordert im Vergleich zu jenen aus dem Inhaltsbereich *Zahlen und Maße* ein gründlicheres Nachdenken. Die komplexere Aufgabenstellung verhindert bereits vorschnelle und falsche Antworten, setzt aber nicht voraus, dass man so immer zu einem richtigen Ergebnis kommt. Beim ersten Nachdenken über eine mögliche Lösung sind die meisten der Meinung, dass sich aufgrund der

kleineren Mannschaftsgröße aus einer Gruppe von 8 Personen mehr Zweierteams bilden lassen. Die Ursache für diese Begründung ist, dass die Mannschaftsbildungen mit 6 sowie mit 2 Personen nicht zusammen, sondern getrennt betrachtet werden. Erst eine sorgfältige Berechnung und Betrachtung der Gruppe aus 8 Personen als zwei Gruppen mit jeweils 6 und 2 Personen führt zur richtigen Lösung von $28 = \binom{8}{2} = \binom{8}{6}$ Möglichkeiten in beiden Gruppengrößen (vgl. Sijts 2019, S. 236).

Der Einsatz metakognitiver Strategien sorgt dafür, dass bereits im Vorfeld Überlegungen angestellt werden, wie die Aufgabe am besten gelöst werden kann und welche Darstellungsform dafür besonders geeignet erscheint. Damit wird der exekutive bzw. prozedurale Aspekt des Planens abgedeckt. Mögliche SchülerInnenaussagen (S1 bis S4 der SEK 1) in der Gruppe können wie nachfolgend lauten:

S1: *„Wir müssen herausfinden, mit welcher Gruppengröße man mehr Mannschaften aus 8 Personen bilden kann!“*

S3: *„Es gibt Gruppen aus 6 Personen und solche aus 2 Personen.“*

S4: *„Bevor wir mit unseren Überlegungen starten, würde ich zunächst an jede der 8 Personen eine Nummer (1 bis 8) oder einen Buchstaben (A bis H) vergeben, sodass wir den Überblick behalten, wer bereits in einer Gruppe zugeteilt wurde.“*

S2: *„Schreiben wir am besten auf, was wir schon wissen. Also wir haben A, B, C, D, E, F, G und H. Das sind unsere Personen, die wir nun in eine Gruppe von 6 Personen und im zweiten Schritt in eine Gruppe von 2 Personen einteilen müssen.“*

Vor Beginn der Durchführung konkreter Arbeitsschritte haben die SchülerInnen gemeinsam überlegt, was das Arbeitsziel ist, welche Informationen sie aus der Aufgabenstellung finden können und wie sie während des Bearbeitungsprozesses vorgehen möchten. Die Planungsstrategie wurde daher erfolgreich eingesetzt. Der Steuerungsaspekt bezieht sich auf das Finden von Lösungen aus den gegebenen Informationen sowie auf das Festlegen weiterer Arbeitsschritte. Sollte

es bereits hier zu Fehlern oder einer falschen Vorgehensweise in der Bearbeitung kommen, ist eine Anpassung der Handlungen erforderlich. Die Gruppe kann dabei bspw. wie folgt vorgehen:

S4: *„Starten wir mit der Fragenstellung bezüglich einer Gruppengröße von 6 Personen. Wir haben als erste Möglichkeit A, B, C, D, E und F, dann A, B, C, D, E und G, dann A, B, C, D, E und H, [...].“*

S2: *„Dann geht es weiter mit D, E, F, G, H und A, ...!“*

S3: *„Warte, ich glaube, diese Möglichkeit hatten wir bereits schon. Es ist ja egal, in welcher Reihenfolge die Personen vorkommen ...“*

S2: *„Ah genau, da hast du Recht! Dann sind wir also fertig!“*

S4: *„Es gibt also 28 Möglichkeiten, aus 8 Personen 6er Gruppen zu bilden.“*

Im Rahmen des metakognitiven Arbeitens ist es besonders wichtig, dass am Ende immer eine Kontrolle der gefundenen Lösungen stattfindet. Dabei geht es darum, dass die SchülerInnen nochmals darauf achten, ob alle wesentlichen Informationen zur Beantwortung der Frage herangezogen wurden und ob die Lösung diese beantwortet.

S1: *„Ich würde nochmals schauen, ob jede Möglichkeit auch nur einmal in unserer Liste vorkommt, sonst würde 28 nicht die richtige Lösung sein!“*

S2: *„Mir ist jetzt kein Fehler aufgefallen!“*

S4 und S3: *„Mir auch nicht!“*

S2: *„Gut, dann können wir uns die Möglichkeiten für eine Gruppengröße von 2 Personen überlegen.“*

Der Planungsschritt entfällt hier, da für die zweite Aufgabenbearbeitung die gleichen Voraussetzungen gelten und keine zusätzlichen Informationen für ein erfolgreiches Bearbeiten benötigt werden. Es wird gleich in die Steuerungsphase übergegangen.

S3: *„Wir haben A und B, A und C, A und D, A und E [...] und zum Schluss noch G und H.“*

S4: „Wenn wir keinen Fehler eingebaut haben, dann hätten wir auch hier 28 Möglichkeiten.“

S1: „Dass es bei unterschiedlichen Gruppengrößen gleich viele Möglichkeiten gibt, hätte ich nicht gedacht. Ich dachte, dass es bei einer 2er Gruppe viel mehr Möglichkeiten gibt.“

S2: „Kontrollieren wir sicherheitshalber nochmals alle Möglichkeiten von unserer Liste!“

S1: „Mir ist kein Fehler aufgefallen, es gibt also wirklich für beide Gruppengrößen gleich viele Möglichkeiten, nämlich 28!“

S4: „Ich glaube, ich weiß, warum das so ist. Wenn wir uns nämlich überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, 8 Personen in eine 6er Gruppe einzuteilen, dann bleiben immer 2 Personen übrig. Und bei einer 2er Gruppe immer 6 Personen. Schauen wir uns die erste mögliche Gruppe mit 6 Personen an, da haben wir A, B, C, D, E und F aufgeschrieben. Es bleiben also G und H übrig. Die letzte mögliche 2er Gruppe, die wir aufgeschrieben haben, war genau G und H. Und genauso ist es auch bei allen anderen Mannschaften. Das bedeutet also, dass jede Möglichkeit, eine 6er Gruppe zu bilden, immer mit einer 2er Gruppe verknüpft ist und umgekehrt.“

S1: „Das macht Sinn! Das heißt, es gäbe genauso viele Möglichkeiten, aus 8 Personen eine 3er bzw. 5er Gruppe zu bilden?“

S4: „Genau!“

Durch die genaue Beleuchtung dieser Aufgabe wird noch einmal deutlich, dass die SchülerInnen nur dann zum Einsatz metakognitiver Fähigkeiten kommen können, wenn es die Aufgabenstellung zulässt. Aufgabe der Lehrperson ist es daher, eine geeignete Auswahl zu treffen, denn es braucht auch im gewöhnlichen Mathematikunterricht ein gut organisiertes sowie strukturiertes Bearbeiten von Aufgaben. Dies kann vor allem durch das aktive Tun und Handeln den Lernenden erfahrbar gemacht werden.

Aufgabe 2:

„Eine faire Münze wird sechsmal geworfen (*W* Wappen, *Z* Zahl). Man ordne die Serien a) *WWWZZZ*, b) *ZWZWWZ*, c) *WWWWZW* nach ihrer Wahrscheinlichkeit.“ (Sjuts 2019, S. 236)

Aufgabe 2 aus dem Inhaltsbereich *Daten und Zufall* kann in der 8. Schulstufe als Vertiefung der Kompetenz *Die SchülerInnen können Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren (auch mithilfe von Baumdiagrammen)* (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024) behandelt oder in der 10. Schulstufe zum Thema *Wahrscheinlichkeiten* eingesetzt werden. Wichtige Kompetenzen sind dabei das Modellieren, Darstellen und Begründen (vgl. Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung 2024). Analog zur Aufgabe 1 kann diese ebenfalls in der Gruppe bearbeitet werden. Da zur Lösung des Beispiels Teilaspekte bearbeitet werden müssen, bietet sich die Methode *Gruppenpuzzle* an. Wie der Name schon sagt, steht hier das kooperative Arbeiten in der Gruppe im Vordergrund, wobei auch metakognitive Strategien zum Einsatz kommen. Für eine erfolgreiche Durchführung der Methode werden sogenannte ExpertInnengruppen benötigt, die sich mit einer Teilaufgabe beschäftigen und versuchen, diese gemeinsam zu lösen. Im nächsten Schritt werden die Gruppen so durchgemischt, dass jeder Teilaspekt durch eine Expertin oder einen Experten vertreten ist. Die Gruppe schließt nun die Bearbeitung der Aufgabe ab, indem sie die Ergebnisse interpretiert, überprüft und richtige Antworten auf die Fragenstellung findet. Dabei bringt jedes Gruppenmitglied seine Expertise aus der ersten Gruppe ein. Auch in dieser Phase können Strategien des exekutiven bzw. prozeduralen Aspekts, vor allem die der Steuerung und der Kontrolle, angewendet werden. Abschließend werden die einzelnen Ergebnisse im Plenum vorgestellt und gemeinsam diskutiert. Ein großer Vorteil dieser Methode ist die intensive Auseinandersetzung mit der Thematik, was gleichzeitig die Selbstständigkeit und das Selbstvertrauen stärkt. Zudem werden durch das Arbeiten in der Gruppe eine gute Zusammenarbeit und die gegenseitige Unterstützung gefördert und auch die Aufrechterhaltung der Motivation wird gewährleistet (vgl. Barzel et al. 2019, S. 96 ff.). Um bereits im Vorfeld abzuschätzen, welche Vorstellungen die SchülerInnen von der zu erwartenden Lösung haben, können erste Ergebnisse von der Lehrperson digital (z. B. Menti-Meter) oder

analog (z. B. Aufschreiben auf ein Kärtchen mit anschließendem Abgeben) gesammelt werden.

Da die Aufgabe stark zu intuitivem Schätzen der einzelnen Wahrscheinlichkeiten anregt, weichen die ersten Vorstellungen bei den meisten Lernenden stark von der tatsächlichen Lösung, dass alle drei Serien gleichwahrscheinlich sind, ab. Der Grund dafür ist, dass man die gegebenen Serien dahingehend untersucht, wie oft Unregelmäßigkeiten von Wappen (W) und Zahl (Z) auftreten bzw. wie groß die Anzahl dieser in den jeweiligen Serien ist. So wird davon ausgegangen, dass b) wahrscheinlicher als a) und a) wiederum wahrscheinlicher als c) ist. Erst die Betrachtung der Einzelwahrscheinlichkeiten führt zu einem korrekten Ergebnis (vgl. Sjuts 2019, S. 236 f.).

Wie nun konkret die Umsetzung des Gruppenpuzzles mit der vorliegenden Aufgabe erfolgen kann, wird nachfolgend gezeigt. Die vorgegebenen Anweisungen der Lehrperson (L) sollen einerseits auf eine erfolgreiche Durchführung der Methode abzielen und andererseits die Anwendung metakognitiver Strategien seitens der SchülerInnen forcieren.

Schritt 1 – Einführung

Materialien: Arbeitsblatt (AB) mit Aufgabenstellung, kleine Kärtchen, Schreibutensilien

L: „Auf eurem Arbeitsblatt findet ihr die Aufgabenstellung. Lest sie bitte gut durch und notiert kurz, welche Aufgabe ihr dabei verfolgen müsst! Ihr könnt auch wichtige Informationen farbig markieren.“

„Notiert nun auf dem kleinen Kärtchen, das ich euch gerade ausgeteilt habe, eure Vermutung und gebt es am Lehrertisch ab!“

„Nun starten wir mit der genauen Aufgabenbearbeitung. Wichtig für euch: Nicht jeder muss alle drei Möglichkeiten bearbeiten. Gruppe 1 beschäftigt sich mit a), Gruppe 2 mit b) und Gruppe 3 mit c). Jede Gruppe sammelt sich in einer Raumecke. Gruppe 1 hier, Gruppe 2 links hinten und Gruppe 3 dort.“

Jetzt gut aufpassen und sich seine eigene Zahl merken, wir starten mit dem Durchzählen!“

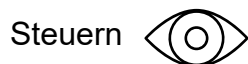
Schritt 2 – ExpertInnenrunde

Materialien: AB, Schreibutensilien, Taschenrechner

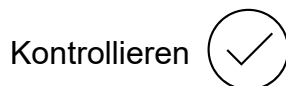
L: *„Jede Gruppe bildet nun mit den Gruppenmitgliedern ein ExpertInnenteam und bearbeitet ihre Teilaufgabe. Hilfreich während des Bearbeitungsprozess ist es, die einzelnen Fragen, die an der Tafel zu sehen sind, der Reihe nach abzuarbeiten. Für das Finden einer Lösung habt ihr 15 Minuten Zeit, dann tauschen wir die Gruppen durch.“*



- Wie lautet die Fragestellung für die vorliegende Aufgabe? Was müsst ihr tun?
- Welche Informationen könnt ihr aus der Aufgabenstellung herausfinden? Kommt ihr alle zu den gleichen Erkenntnissen?
- Wie möchtet ihr die Aufgabe bearbeiten? Notiert konkrete Schritte!



- Führt nun anhand eurer Überlegungen die Berechnungen durch!
- Kommt ihr mit euren vorher festgelegten Arbeitsschritten zu einem Ergebnis? Wenn nicht, überlegt euch eine neue Herangehensweise und startet nochmals neu!



- Habt ihr alle Informationen aus der Aufgabenstellung in die Bearbeitung mit-einbezogen?
- Habt ihr nochmals alle Arbeitsschritte auf Fehler kontrolliert? Ist euer Ergebnis realistisch?

Wichtig zu erwähnen ist, dass diese Leitfragen nur als Anregung dienen sollen und je nach Erfahrung mit Metakognition an das vorhandene Leistungsniveau der Lernenden angepasst werden müssen. Einen Überblick hinsichtlich möglicher Fragestellungen geben Abb. 3, Abb. 5 und Abb. 7. Die Bearbeitung der Teilaufgaben sowie der Gesamtaufgabe innerhalb der Einzelgruppen kann ähnlich zur vorherigen Aufgabe (S. 71-73) erfolgen.

Schritt 3 – Unterrichtsrunde

Materialien: AB, Schreibutensilien

L: *„Wir mischen nun die Gruppe durch. Jedes Gruppenmitglied geht zu einem Tisch, sodass an jedem Tisch drei SchülerInnen aus unterschiedlichen Gruppen sitzen.“*

„Eure Aufgabe ist es nun, eine gemeinsame Lösung entsprechend der Fragestellung aus unserer Aufgabe zu finden. Die Leitfragen an der Tafel helfen euch wieder dabei. Am besten präsentiert jeder seine Teilaufgabe und ihr besprecht die Vorgehensweise aus den einzelnen Gruppen. Wichtig ist, dass ihr euch als Gruppe auf eine Lösung einigt. Nach 10 Minuten treffen wir uns zu einer Präsentation der Ergebnisse im Plenum.“

Planen 

- Wie möchtet ihr nun weiter vorgehen? Überlegt euch gemeinsam die einzelnen Schritte!

Steuern 

- Kommt ihr mit euren vorher festgelegten Arbeitsschritten zu einem Ergebnis? Wenn nicht, überlegt euch eine neue Herangehensweise und startet nochmals neu!

Kontrollieren 

- Habt ihr nochmals alle Arbeitsschritte auf Fehler kontrolliert? Ist euer Ergebnis realistisch?

Materialien: AB

L: *„Jeder aus der Gruppe präsentiert nun seine Ergebnisse. Während der Präsentation sollen folgende Fragen beantwortet werden:*

- Wie seid ihr bei der Lösungsfindung vorgegangen?*
- Welche Schwierigkeiten/Probleme sind dabei aufgetreten? Wie habt ihr diese gelöst?*
- Welche inhaltlichen bzw. organisatorischen Erkenntnisse nehmt ihr für eine zukünftige Aufgabenbearbeitung mit?*

Die anderen hören gut zu und notieren gegebenenfalls offene Fragen oder Unklarheiten für die anschließende Diskussion!“

3 Förderung metakognitiver Kompetenz

Im herkömmlichen Schulunterricht erhalten die SchülerInnen a priori wenig Möglichkeiten, metakognitive Fähigkeiten z. B. bei der Aufgabenbearbeitung einzusetzen, da der Lernprozess vor allem durch die Lehrperson gesteuert wird. Wie in Abschnitt 2.5 gezeigt wurde, kann der Einsatz metakognitiver Strategien jedoch sehr gut in den Unterricht integriert werden. Zudem werden Ergebnisse aus Leistungssituationen (Schularbeiten) wesentlich stärker gewichtet als die (Weiter-)Entwicklung von ablaufenden Lernprozessen, was u. a. den Stellenwert von Metakognition im Schulunterricht mindert (vgl. Lauth et al. 2014, S. 343). Internationale Leistungsvergleichsstudien wie PISA haben jedoch gezeigt, dass prozedurales Wissen, verbunden mit metakognitiven Fähigkeiten, entscheidend für das Erreichen guter Leistungen ist. Leistungsstarke SchülerInnen verfügen im Vergleich zu leistungsschwachen SchülerInnen über mehr Kompetenzen, ihren Lernprozess zu planen und zu überwachen. Sie sind auch in der Lage, geeignete Lernstrategien aus ihrem Wissensrepertoire einzusetzen. Dies ist auch der Grund, warum Metakognition als Voraussetzung für selbstständiges Lernen angesehen wird (vgl. Herger 2011, S. 81 f.). SchülerInnen mit einer Lernschwäche schaffen dies hingegen nicht und sind daher auf eine gezielte Förderung angewiesen (vgl. Lauth et al. 2014, S. 343).

Bereits in den 1970er Jahren, zeitgleich mit dem Aufkommen der Metakognition, wurden Maßnahmen zum Training metakognitiver Kompetenzen entwickelt. Ziel war dabei, dass die SchülerInnen ihre Lern- und Denkprozesse eigenständig steuern sowie kontrollieren und im Lehrprozess ein strategisch gestalteter Unterricht gewährleistet ist. Auslöser für die Entwicklung entsprechender Fördermöglichkeiten war die Erkenntnis, dass Metakognition, wie bereits oben erwähnt, die Entwicklung selbstständigen Lernens wirksam unterstützt. In den Folgejahren zeigte sich jedoch, dass die vermittelten Lernstrategien nicht immer richtig auf vorliegende Situationen angewendet wurden. Auch stellten sich keine dauerhaften Erfolge ein. Die Ursachen dafür sah man in den individuellen Voraussetzungen der SchülerInnen und in den trainierten Strategien, die schulfremd waren und

stark vom Unterricht abweichen (vgl. Lauth et al. 2014, S. 344). Heutige Trainingsmaßnahmen setzen genau an diesen Punkten an, da sie (Lauth et al. 2014, S. 344):

- *„möglichst weitreichend in der Schule verankert werden (als ideal gilt die integrierte Vermittlung von Sachkenntnissen und zugehörigem metakognitiven Wissen);*
- *möglichst genau auf die einzelnen Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler (Vorwissen, Motivation, Metakognition, Lernstrategien, Intelligenz) abgestimmt werden;*
- *an das schon bestehende Wissen der Lernenden anknüpfen und sie dazu anregen, über ihr Lernen weiter nachzudenken;*
- *die Eigenverantwortung der Lernenden stärken (z. B. sich eigene Lernstrategien bewusst machen, verschiedene Lernstrategien bedenken, neue Strategien erproben).“*

Zur Förderung metakognitiver Kompetenzen können spezielle Trainingsprogramme eingesetzt werden, die sich hauptsächlich auf die in Abschnitt 1.3 vorgestellten Techniken stützen. Ziel des Einsatzes dieser Maßnahmen ist der Erwerb von metakognitivem Wissen, das Schritt für Schritt auch in Unterrichtssituationen eingesetzt wird. Um metakognitive Fähigkeiten zu trainieren, braucht es zu Beginn der Förderung Informationen über die Lernvoraussetzungen und das (strategische) Lernverhalten der einzelnen SchülerInnen. Dadurch können die Fördermaßnahmen konkret auf die Lernenden abgestimmt werden, um sie in ihrem Lernprozess zu unterstützen. Hilfreich sind dabei die Methode des Lauten Denkens, die im Abschnitt 1.3 näher vorgestellt wurde, und das metakognitive Interview. Letzteres unterstützt die Lehrperson nach Beenden der Aufgabe durch Reflexionsfragen, wie bspw. *Wie bist du vorgegangen?*, um die Denkprozesse der SchülerInnen besser zu verstehen (vgl. Lauth et al. 2014, S. 345).

Außerdem ist es wichtig, dass seitens der SchülerInnen ebenso das Wissen über das eigene Denken gefördert wird. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen. Eine Möglichkeit besteht darin, dass sich die Lernenden gegenseitig coachen. Ein leistungsstarkes und metakognitiv erfahrenes Kind unterstützt ein leistungsschwächeres und weniger erfahrenes Kind, indem Aufgaben gemeinsam

gelöst und über unterschiedliche Herangehensweisen diskutiert werden. Es können auch längerfristige Lernpartnerschaften gebildet werden, wobei hier darauf geachtet werden muss, dass sich beide SchülerInnen gut verstehen und wertschätzend miteinander umgehen. Nur so kann eine Weiterentwicklung der metakognitiven Fähigkeiten erreicht werden. In Lernkonferenzen tauschen sich die Lernenden in einer größeren Gruppe über eine bereits gelöste Aufgabe aus und präsentieren ihre Arbeitsschritte. Dadurch wird den Kindern und Jugendlichen deutlich gemacht, dass es mehrere Strategien zur erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe gibt. Diese können bei zukünftigen Problemstellungen hilfreich sein (vgl. Lauth et al. 2014, S. 345 f.).

Kenntnisse über (meta)kognitive Kompetenzen sind also Voraussetzung dafür, dass diese durch eingesetzte Fördermaßnahmen ausgebaut werden können. Wie generell bei der Förderung vorzugehen ist, wird in den folgenden Zeilen erläutert.

Am Anfang der Förderung sollen Aufgaben ausgewählt werden, die metakognitive Strategien des Planens, Steuerns und Kontrollierens hervorrufen. Dabei ist es sinnvoll, das Aufgabenniveau langsam zu steigern und auf schulrelevante Aufgaben zu übertragen. In einem weiteren Schritt erklären Lernende, die bereits über metakognitive Kompetenzen verfügen, wie sie bei konkreten Aufgaben vorgehen und verbalisieren dabei ihre Gedanken und Handlungsschritte. Diese Rolle kann zu Beginn des Trainingsprozesses auch die Lehrkraft übernehmen, die durch lautes Denken und Handeln den SchülerInnen zeigt, wie sie erfolgreich eine Aufgabe bearbeiten können. So können die SchülerInnen ihr Strategiewissen erweitern und versuchen, neue Strategien bei ähnlichen Problemstellungen anzuwenden. Bei der Anwendung geht es aber nicht darum, vorgestellte Ansätze nachzuahmen, sondern die Kompetenz, den eigenen Lernprozess selbstständig zu gestalten, zu fördern. Abschließend wird in der Gruppe (Lernkonferenz) der Bearbeitungsprozess reflektiert und überlegt, bei welchen Aufgabenstellungen welche Lösungsansätze angewendet werden können (vgl. Lauth et al. 2014, S. 347 f.). Ebenso wichtig ist es, dass die SchülerInnen in der Lage sind, ihre metakognitiven Empfindungen während des Lernens zu berücksichtigen. Aufgabe der Lehrperson ist es, den Lernenden Selbststeuerungskompetenzen zu vermit-

teln, damit der Lernprozess strukturiert und reflektiert abläuft. Die Kinder und Jugendlichen können auch sogenannte Stopp-Regeln trainieren, die sie daran erinnern, vorliegende Informationen oder Arbeitsschritte noch einmal zu überdenken. In einem Lerntagebuch (Abschnitt 1.3) können auftretende Schwierigkeiten notiert und anschließend in der Klasse oder im Einzelgespräch mit der Lehrkraft besprochen werden (vgl. Lauth et al. 2014, S. 348 f.).

Da metakognitive Kompetenzen vermittelbar sind, kann die Förderung metakognitiver Kompetenz auch den Einsatz metakognitiver Strategien positiv beeinflussen (vgl. Krüger 2022, S. 44). Hinsichtlich des Strategieerwerbs, dessen Voraussetzung exekutives bzw. prozedurales und deklaratives Wissen ist, lassen sich drei Ebenen unterscheiden: die *Metastrategieebene*, die *Strategieebene* und die *Handlungsebene*. Sie können durch unterschiedliche Fördermaßnahmen unterstützt werden (vgl. Ehret 2017, S. 89).

Die Förderung der Ebene der Metastrategien bezieht sich auf die Reflexion der eingesetzten Strategien, die zur Weiterentwicklung der eigenen Handlungsstrategien beitragen soll. Die SchülerInnen werden dabei angehalten, neben dem Planen ihres Bearbeitungsprozesses auch zu bewerten, was gut und was weniger gut gelungen ist. Aufforderungen durch die Lehrperson können diesen Prozess unterstützen (vgl. Ehret 2017, S. 89).

Auf der Strategieebene findet eine direkte Förderung des Strategiewissens statt. Den Lernenden werden bestimmte Strategien zur erfolgreichen Bearbeitung von Aufgaben aufgezeigt und sie können sich so ein Repertoire für zukünftige Problemstellungen aneignen (vgl. Ehret 2017, S. 89).

Bei der Förderung der Handlungsebene geht es um die Anwendung der auf der Strategieebene vorgestellten Strategien, wobei die Lernenden metakognitives Handeln erfahren können. Dabei wird zwischen *direkter* und *indirekter* Förderung unterschieden (vgl. Ehret 2017, S. 89 f.), wobei laut Schuster et al. (2018, S. 428) Trainingsprogramme, die beide Arten der Förderung beinhalten, besonders effektiv sind. Bei der *direkten* Förderung werden den SchülerInnen Strategien des effektiven Lernens und Denkens explizit erklärt und es wird ihnen durch das Vorlegen adäquater Aufgaben die Möglichkeit gegeben, deren Anwendung zu üben.

Bei der *indirekten* Förderung hingegen werden die Lernenden durch die Lernumgebung und das eingesetzte Unterrichtsmaterial zum Einsatz nützlicher Strategien angeregt. Eine Möglichkeit zur indirekten Förderung stellen sogenannte *Prompts* dar, die die SchülerInnen zu bestimmten metakognitiven Handlungsschritten, z. B. zur Reflexion der Ergebnisse, auffordern sollen. Diese *Prompts* können sich dabei auf den Aspekt der exekutiven Kontrolle, auf das aufgabenspezifische Strategiewissen und auf den motivationalen-emotionalen Zustand beziehen und wirken sich positiv auf die Lernleistung der Lernenden aus (vgl. Krüger 2022, S. 44 f.). Fragen, wie bspw. *Wie kann die vorliegende Aufgabe gelöst werden?* oder *Wie hast du vor, bei der Aufgabenbearbeitung vorzugehen?* können in der ersten Phase des Planens gestellt werden (vgl. Krug & Schukajlow 2020, S. 429). Es hat sich gezeigt, dass sich indirekte Fördermaßnahmen vor allem bei älteren SchülerInnen und bei jenen mit höherem Leistungsniveau und Vorwissen positiv auswirken (vgl. Krüger 2022, S. 45).

Um konkrete Fördermöglichkeiten hinsichtlich des Aufbaus metakognitiver Kompetenz gezielt einsetzen zu können, bedarf es Informationen darüber, welche Modelle aufgrund der entwicklungsbedingten Voraussetzungen der Lernenden am besten geeignet und welche strukturellen Rahmenbedingungen im Unterricht bzw. seitens der Lehrperson erforderlich sind (vgl. Ehret 2017, S. 86).

Empirische Befunde zeigen, dass sich Fördermaßnahmen je nach Alter unterschiedlich stark auf die Bereiche des Strategiewissens auswirken. Deklaratives Wissen (Abschnitt 1.2.2) ist bereits im Kindergartenalter vorhanden und kann insbesondere im Alter von sechs bis zehn Jahren bis in die Sekundarstufe gesteigert werden. Metakognitive Kompetenz kann vor allem dann aufgebaut werden, wenn die Fähigkeit zum eigenen Handeln und Denken und die damit verbundene Reflexion gegeben ist. Kinder und Jugendliche zwischen zehn und sechzehn Jahren sind in der Lage, diesen Wechsel zwischen ihrem Tun und dem Hinterfragen zu vollziehen. Aber auch Drei- bis Fünfjährige können durch geeignete Situationen Erfahrungen mit der Anwendung metakognitiver Strategien machen (vgl. Ehret 2017, S. 86 f.). Ziel ist es, bei den Kindern ein Grundwissen über erfolgreiches und effizientes Lernen aufzubauen (vgl. Herger 2011, S. 81), das in Hinblick auf metakognitives Arbeiten in der Schule weiterentwickelt werden kann. Für beide

Aspekte der Metakognition (exekutiv bzw. prozedural und deklarativ) konnten dabei wissenschaftlich fundierte Ergebnisse gefunden werden (vgl. Ehret 2017, S. 86 f.). Die Forschungsergebnisse zeigen, dass die Förderung metakognitiver Strategien bei jüngeren Kindern zu besseren Erfolgen führt als bei Jugendlichen oder Erwachsenen. Dies bedeutet, dass Kinder bereits im Vorschulalter durch eine möglichst frühe und altersadäquate Förderung (meta)kognitive Erfahrungen machen können (vgl. Ehret 2017, S. 90).

Neben dem Alter müssen auch die kognitiven Voraussetzungen berücksichtigt werden. Es zeigt sich, dass beim Übergang von der Primar- in die Sekundarstufe SchülerInnen, die ein Gymnasium besuchen, über ein höheres Maß an metakognitivem Wissen verfügen als leistungsschwächere Lernende. Dieser Unterschied bleibt auch am Ende der Sekundarstufe bestehen. Für die Förderung bedeutet dies, dass neben den entwicklungspsychologischen Faktoren (Alter) auch andere Parameter (Leistung) berücksichtigt werden müssen. Wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt, können insbesondere bei den lernschwächeren SchülerInnen gezielte Fördermaßnahmen den Lernerfolg steigern (vgl. Ehret 2017, S. 87).

Darüber hinaus bedarf es für eine möglichst effektive und fachbezogene Förderung bestimmter Rahmenbedingungen in der Schule bzw. im Unterricht. So bieten bspw. Workshops eine gute Möglichkeit, den SchülerInnen Einblicke in metakognitives Arbeiten zu geben. Dies kann dann im Unterricht aufgegriffen und an geeigneten Aufgaben erprobt und trainiert werden (vgl. Lauth et al. 2014, S. 349). Dabei spielen die LehrerInnen eine wesentliche Rolle, denn um einen förderlichen und metakognitiven Unterricht gestalten zu können, müssen sie selbst über metakognitive Kompetenzen verfügen. Nur so können sie diese bei ihren SchülerInnen entwickeln und fördern. Der Erwerb dieser Kompetenzen kann durch mehrere Übungseinheiten und den Austausch von Praxis und Theorie in Form von Seminaren oder Coachings erfolgen (vgl. Hohenstein & Lambert 2018, S. 111). Besonders wichtig erscheint aber die persönliche Einstellung und Bereitschaft, metakognitiv zu unterrichten, denn dies beeinflusst im Wesentlichen die Motivation der SchülerInnen und in weiterer Folge die Wirksamkeit der eingesetzten Fördermaßnahmen (vgl. Schuster et al. 2018, S. 413 f.).

Abb. 16 zeigt wichtige Lernziele, die Lehrpersonen bei der Entwicklung metakognitiver Lehrkompetenz erreichen müssen. Diese lassen sich auch mit den in Abschnitt 2.5 vorgestellten Umsetzungsmöglichkeiten metakognitiven Arbeitens im Lehr- und Lernprozess in Verbindung bringen.

Lernziele für den Aufbau metakognitiver Lehrkompetenzen	
1	Ich kann bei Lernenden metakognitive Aktivitäten in schriftlichen und mündlichen Äußerungen identifizieren und ihnen deutlich machen, welches deklarative Wissen sie dabei genutzt haben.
2	Ich kann eine metakognitive fundierte Unterrichtsplanung erstellen und eine Aufgabe mit metakognitiven Impulsen (metakognitiven Techniken) verknüpfen.
3	Ich kann Aufgaben und Materialien aus meinem Arbeitsbereich auf ihre Problemhaltigkeit einschätzen und Aufgabenstellungen auf verschiedene Kompetenzniveaus auslegen.
4	Ich kann die deklarativen Wissens Elemente einer Aufgabe herausarbeiten und sie für den Aufbau des deklarativen Wissens von Lernenden nutzbar machen.

Abbildung 16: Lernziele für den Aufbau metakognitiver Lehrkompetenz in Anlehnung an Hohenstein & Lambert (2018, S. 111)

Bei genauer Betrachtung der praktischen Anwendungen von Metakognition wird deutlich, dass die Lernziele 2 und 3 in allen vorgestellten Beispielen aus Abschnitt 2.5 erfüllt werden. Die einzelnen Unterrichtsstunden bzw. -sequenzen werden durch didaktische Vorüberlegungen und konkrete Interventionen seitens der Lehrperson so geplant, dass metakognitive Aktivitäten ermöglicht werden. Es wird darauf geachtet, dass zur Bearbeitung Aufgaben eingesetzt werden, die mithilfe einer metakognitiven Technik, z. B. der des Lauten Denkens, die SchülerInnen zur Anwendung metakognitiver Strategien anregen. Bei Aufgabe 1 aus *Zahlen und Maße* (S. 56-58) können durch die Erweiterung der Aufgabenstellung unterschiedliche Kompetenzniveaus erreicht werden. In diesem Zusammenhang kann vor allem Tab. 2 hilfreich sein, die mögliche Operatoren in Bezug auf metakognitives Arbeiten vorstellt.

Lernziel 1 kann insbesondere dann erreicht werden, wenn die SchülerInnen ihre metakognitiven Aktivitäten mündlich oder schriftlich zum Ausdruck bringen. Wie die vorgestellten Beispiele aus Abschnitt 2.5 zeigen, kann dies sowohl in Einzelarbeit (vgl. 3) *Figuren und Körper* (Aufgabe 1, S. 66-68)) als auch in Gruppenarbeit (vgl. 4) *Daten und Zufall* (Aufgabe 1, S. 69-73)) erfolgen. Die Lehrperson

übernimmt dabei die Beobachtungsrolle und versucht, die Denk- und Handlungsprozesse der Lernenden zu erkennen und sie gegebenenfalls mit metakognitiven Impulsen zu unterstützen. Auch im Reflexionsprozess, d. h. in der abschließenden Plenumsrunde, in der die SchülerInnen über ihren Arbeitsprozess berichten, kann die Lehrkraft ihnen die bereits genutzten metakognitiven Wissensselemente im Hinblick auf zukünftige Problemstellungen vor Augen führen. In einem SchülerIn-LehrerIn-Gespräch, wie in Aufgabe 2 aus *Variablen und Funktionen* (S. 64-66) dargestellt, kann die Lehrperson währenddessen metakognitive Herangehensweisen identifizieren.

Durch den Einsatz der P-S-K-Ampel (vgl. 4) *Daten und Zufall* (Aufgabe 2, S. 74-78)) kann z. B. das Erreichen von Lernziel 4 gefördert werden. Ausgehend von der zu bearbeiteten Problemstellung ist die Lehrperson in der Lage, konkrete Fragestellungen zu formulieren, die den SchülerInnen beim metakognitiven Arbeiten sowie bei der Weiterentwicklung ihres Lernprozesses Unterstützung leisten sollen. Auch im SchülerIn-LehrerIn-Gespräch kann die Lehrperson durch geeignete Aufgabenstellungen bzw. Reflexionsfragen die Bewusstwerdung deklarativer Wissensselemente ermöglichen.

Die Entwicklung von Förderprogrammen wird von Untersuchungen ihrer Wirksamkeit auf die eigene Persönlichkeit sowie auf das Lernen begleitet. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Lernleistung sowie das Selbstvertrauen bei lernschwächeren SchülerInnen deutlich verbessert haben, da sie sich mehr Wissen bezüglich der Lernstrategien aneignen konnten. Als besonders hilfreich wird das gemeinsame Arbeiten in der Gruppe sowie das Reflektieren über den Arbeitsprozess empfunden. Dadurch konnten die Lehrpersonen auch eine Stärkung des sozialen Klassenklimas beobachten, was häufig in einer besseren Akzeptanz von SchülerInnen mit Lernschwierigkeiten mündet (vgl. Lauth et al. 2014, S. 349 f.). Hinsichtlich der Dauer der eingesetzten Maßnahmen konnte festgestellt werden, dass die SchülerInnen bei kürzeren Programmen das Interesse und die Motivation länger aufrechterhalten können, wobei ein intensiveres Training der Strategieanwendung nur bei längeren Programmen stattfinden kann (vgl. Schuster et al. 2018, S. 413). Darüber hinaus zeigen Forschungsergebnisse, dass Förder-

maßnahmen nur dann eine signifikante Weiterentwicklung metakognitiver Kompetenzen erzielen, wenn sie über einen längeren Zeitraum durchgeführt werden (vgl. Lauth et al. 2014, S. 350).

4 Conclusio und Ausblick

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Metakognition im Mathematikunterricht von großer Relevanz für die Verbesserung der Lernleistung und die Entwicklung des selbstregulierten Lernens ist. Die vorliegende Masterarbeit hat gezeigt, dass metakognitive Prozesse wie Planen, Steuern, Kontrollieren und Reflektieren durch gezielte Aufgabenstellungen und entsprechende Interventionen erfolgreich angeregt werden können. Eine entscheidende Rolle kommt dabei den Lehrenden zu, die durch die Schaffung adäquater Rahmenbedingungen den Einsatz metakognitiver Strategien verstärken und fördern können. Besonders bei jüngeren und lernschwächeren SchülerInnen sind individuell angepasste Fördermaßnahmen wirksam. Zudem kann durch eine längerfristige Integration in den Unterricht und den Einsatz kooperativer Methoden, wie etwa der metakognitiven Aufgabenbearbeitung in der Gruppe, eine nachhaltige Entwicklung metakognitiver Fähigkeiten erzielt werden. Die Auseinandersetzung mit ausgewählten Aufgaben auf Grundlage theoretischer Konzepte verdeutlicht, dass Metakognition sowohl in der Sekundarstufe 1 als auch in der Sekundarstufe 2 wirksam eingebettet werden kann.

Trotz der gewonnenen Erkenntnisse bleiben noch einige Aspekte offen, die Raum für vielfältige Forschungen bieten. So könnte u. a. die Wirksamkeit bestimmter Aufgabenformate, insbesondere von Modellierungsaufgaben, in Bezug auf die Förderung metakognitiver Kompetenz genauer untersucht werden. Zukünftige Studien könnten sich darauf konzentrieren, die vorgestellten Umsetzungsmöglichkeiten in der Praxis zu implementieren und deren Einfluss auf die Leistung und Motivation der SchülerInnen empirisch zu evaluieren. Darüber hinaus wäre es sinnvoll, den Einfluss von Metakognition auf verschiedene Altersgruppen oder spezifische mathematische Themenbereiche zu untersuchen, um konkretere Handlungsempfehlungen für die Unterrichtsgestaltung ableiten zu können.

Die praktische Implikation dieser Arbeit liegt vor allem darin, dass geeignete Seminare und Fortbildungen für LehramtsstudentInnen und Lehrkräfte angeboten werden sollten, um einen wertvollen Beitrag zur Entwicklung und Förderung metakognitiver Fähigkeiten im Lehr- und Lernprozess zu leisten.

5 Literaturverzeichnis

Print-Quellen

- Azevedo, R. (2009). Theoretical, conceptual, methodological, and instructional issues in research on metacognition and self-regulated learning: A discussion. In: *Metacognition and Learning*, 4(1), pp. 87-95.
<https://doi.org/10.1007/s11409-009-9035-7>
- Barzel, B., Büchter, A., & Leuders, T. (2019). *Mathematik Methode*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence. Conceptual clarification and educational planning. In: *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), pp. 123-139.
<https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). England: Horwood Publishing.
<https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Borkowski, J. G. (1996). Metacognition: Theory or chapter heading? In: *Learning and Individual Differences*, 8(4), pp. 391-402.
[https://doi.org/10.1016/S1041-6080\(96\)90025-4](https://doi.org/10.1016/S1041-6080(96)90025-4)
- Brand, S., & Vorhölter, K. (2018). Holistische und atomistische Vorgehensweisen zum Erwerb von Modellierungskompetenzen im Mathematikunterricht. In: Schukajlow, S. & Blum, W. (Hrsg.), *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren* (S. 119-142). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-20325-2>
- Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2007). Modelling Classroom Discussions and Categorising Discursive and Metacognitive Activities, In: *Proceedings of CERME 5*, pp. 1180-1189. <http://erme.site/wp-content/uploads/CERME5/WG8.pdf>

- Ehret, C. (2017). *Mathematisches Schreiben: Modellierung einer fachbezogenen Prozesskompetenz*. Wiesbaden: Springer Vieweg.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-18402-5>
- Efklides, A. (2002). Feelings as subjective evaluations of cognitive processing: How reliable are they? In: *Psychology: The Journal of the Hellenic Psychological Society*, 9, pp. 163-184. https://doi.org/10.12681/psy_hps.24059
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In: Resnick, L. (Ed.), *The Nature of Intelligence* (pp. 231-236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. In: *American Psychologist*, 34(10), pp. 906-911.
- Flavell, J. H., & Wellman, H. M. (1977). Metamemory. In: Kail, R. V., & Hagen, J. W. (Eds.), *Perspectives on the development of memory and cognition* (pp. 3-33). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Goos, M. (1998). I don't know if I'm doing it right or I'm doing it wrong! Unresolved uncertainty in the collaborative learning of mathematics. In: Kanes, C., Goos, M., & Warren, E. (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (pp. 225-232). Gold Coast: Mathematics Education Research Group of Australasia Publication.
- Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analysis relating to achievement*. London, New York: Routledge.
- Hasselhorn, M. (1992). Metakognition und Lernen. In: Nold, G. (Hrsg.), *Lernbedingungen und Lernstrategien: Welche Rolle spielen kognitive Verstehensstrukturen?* (S. 35-63). Tübingen: Narr. <https://doi.org/10.25656/01:2001>
- Herger, K. (2011). Förderung der Metakognition in der Schuleingangsstufe: Wichtigkeit aus Sicht der Lehrperson und Rahmenbedingungen zur Umsetzung. In: Vogt, F., Leuchter, M., Tettenborn, A., Hottinger, U., Jäger, M., & Wanneck, E. (Hrsg.), *Entwicklung und Lernen junger Kinder* (S. 81-92). Münster: Waxmann Verlag.

- Herget, W., Jahnke, T., & Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben*. Berlin: Cornelsen Verlag.
- vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(Supplement 1), pp. 225-254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>
- Hohenstein, K., & Lambert, A. (2018). Metakognitiv fundierte Bildungsarbeit. In: Kaiser, A., Kaiser, R., Lambert, A., & Hohenstein, K. (Hrsg.), *Metakognition: Die Neue Didaktik: Metakognitiv fundiertes Lehren und Lernen ist Grundbildung* (S. 69-112). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. <https://doi.org/10.13109/9783666702549.69>
- Kaiser, A., Kaiser, R., Lambert, A., & Hohenstein, K. (Hrsg.). (2015a). *Lernerfolg steigern: Metakognitiv fundiertes Lernen in der Grundbildung*. Bielefeld: wbv, Bertelsmann.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Greefrath, G. (2015b). Anwendungen und Modellieren. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357-383). Berlin Heidelberg: Springer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2006). Modellierungskompetenzen: Entwicklung im Unterricht und ihre Messung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 56-58). Hildesheim und Berlin: Franzbecker.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 38(3), pp. 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, R. (2018). Das Konzept Metakognition. In: Kaiser, A., Kaiser, R., Lambert, A., & Hohenstein, K. (Hrsg.), *Metakognition: Die Neue Didaktik. Metakognitiv fundiertes Lehren und Lernen ist Grundbildung* (S. 31-67). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. <https://doi.org/10.13109/9783666702549.31>

- Klauer, K. C. (2000). Planen im Alltag: Ein wissensbasierter Prozess. In: Möller, J., Strauß, B., & Jürgensen, S. M. (Hrsg.), *Psychologie und Zukunft. Prognosen, Prophezeiungen, Pläne* (S. 171-187). Göttingen: Hogrefe.
- Krug, A., & Schukajlow, S. (2015). Augen auf beim Modellieren: Fehler als Katalysatoren für das Modellierenlernen. In: *Mathematik lehren*, 191, S. 33-36.
- Krug, A., & Schukajlow, S. (2020). Entwicklung prozeduraler Metakognition und des selbstregulierten Lernens durch den Einsatz multipler Lösungen zu Modellierungsaufgaben. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2-3), S. 423-458. <https://doi.org/10.1007/s13138-019-00154-y>
- Krüger, A. (2022). *Metakognition beim mathematischen Modellieren: Strategieeinsatz aus Schülerperspektive*. Wiesbaden: Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-33622-6>
- Lauth, G. W., Grünke, M., & Brunstein, J. C. (Hrsg.) (2014). *Interventionen bei Lernstörungen: Förderung, Training und Therapie in der Praxis*. Göttingen: Hogrefe Verlag.
- Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht: Ergebnisse einer empirischen Studie*. Hildesheim: Franzbecker.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2023a). *Mathematik verstehen 1*. Wien: öbv-Verlag.
- Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., & Ulovec, A. (2023b). *Mathematik verstehen 4*. Wien: öbv-Verlag.
- Schukajlow, S., & Leiß, D. (2011). Selbstberichtete Strategienutzung und mathematische Modellierungskompetenz. In: *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik*, 32(1), S. 53-77. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0023-x>
- Schuster, C., Stebner, F., Wirth, J., & Leutner, D. (2018). Förderung des Transfers metakognitiver Lernstrategien durch direktes und indirektes Training. In: *Unterrichtswissenschaft*, 46, S. 409-435. <https://doi.org/10.1007/s42010-018-0028-6>

- Sjuts, J. (2007). Kompetenzdiagnostik im Lernprozess – auf theoriegeleitete Aufgabengestaltung und -auswertung kommt es an. In: *mathematica didactica*, 30(2), S. 33-52.
- Sjuts, J. (2016). Darstellungen und Vorstellungen und ihre Bedeutung für eine wirksame Metakognition beim Problemlösen und Begründen. In: *Teaching Mathematics and Computer Science*, 14(2), S. 195-220.
<https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0423>
- Sjuts, J. (2019). Fehlerhaftes und Falsches beim mathematischen Denken – Melioration durch Metakognition. In: Vásárhelyi, É. & Sjuts, J. (Hrsg.), *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein: Was wir aus Fehlern lernen können. Ervin Deák zu Ehren* (S. 227-241). Münster: WTM Verlag.
- Vorhölter, K., Krüger, A., & Wendt, L. (2020). Metakognition als Teil von Modellierungskompetenz aus der Sicht von Lehrenden und Lernenden. In: Greefrath, G. & Maaß, K. (Hrsg.). *Modellierungskompetenzen – Diagnose und Bewertung* (S. 189-218). Berlin: Springer Spektrum.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60815-9>
- Vorhölter, K. (2021). Metacognition in mathematical modeling: The connection between metacognitive individual strategies, metacognitive group strategies and modeling competencies. In: *Mathematical Thinking and Learning*, 25(3), pp. 317-334. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012740>
- Weinert, F. E. (1994). Lernen lernen und das eigene Lernen verstehen. In: Reusser, K., & Reusser-Weyeneth, M. (Hrsg.), *Verstehen: Psychologischer Prozess und didaktische Aufgabe* (S. 183-205). Bern: Huber.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 21(61), S. 37-46.

Online-Quelle

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2024). Lehrpläne der AHS. <https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>. [Letzter Zugriff: 31.12.2024].