

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Singularitäten in der komplexen Analysis

verfasst von | submitted by
Tanja Nowak BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2025

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 520 529 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Mathematik Unterrichtsfach Spanisch

Betreut von | Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Roland Donninger

Abstract

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Singularitäten in der komplexen Analysis, also Stellen, an denen eine komplexe Funktion nicht definiert ist. Um diese gut nachvollziehen zu können, starten wir zunächst mit einem kurzen Einblick in die komplexen Zahlen und deren wichtigsten Eigenschaften, lernen den Konvergenzradius von Potenzreihen kennen und mithilfe der Definition und Berechnung von Kurvenintegralen beweisen wir zwei wichtige Sätze der komplexen Analysis - den Cauchyschen Integralsatz sowie die Cauchysche Integralformel.

Im Kernteil der Arbeit lernen wir die drei Möglichkeiten für Singularitäten - Polstellen, hebbare sowie wesentliche Singularitäten - kennen und behandeln wichtige daraus resultierende Sätze. Bei Polstellen und dem daraus resultierenden Residuensatz verweilen wir länger, denn mithilfe dieses Satzes ist es möglich, unendliche reelle Integrale zu berechnen sowie die Lage von Nullstellen von Funktionen abzuschätzen. Wir beenden diese Arbeit schließlich mit einem leicht verständlichen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

This paper deals with singularities in complex analysis, i.e. points at which a complex function is not defined. In order to understand these well, we start with a brief insight into complex numbers and their most important properties, learn about the radius of convergence of power series and, with the help of the definition and calculation of curve integrals, we prove two important theorems of complex analysis - Cauchy's integral theorem and Cauchy's integral formula. In the main part of the work, we get to know the three possibilities for singularities - poles, removable and essential singularities - and deal with important resulting theorems. We will linger longer on polar points and the resulting residue theorem, as this theorem makes it possible to calculate infinite real integrals and estimate the position of zeros of functions. Finally, we conclude this work with an easy-to-understand proof of the fundamental theorem of algebra.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die komplexen Zahlen	1
1.2	Komplexe Funktionen	6
1.3	Kurvenintegrale	15
2	Singularitäten	24
2.1	Hebbare Singularitäten	24
2.2	Polstellen	26
2.3	Wesentliche Singularitäten	27
3	Der Residuensatz	29
3.1	Nullstellen und Pole	29
3.2	Residuen	32
3.3	Der Residuensatz	33
4	Anwendungen des Residuensatzes	37
4.1	Berechnung von unendlichen reellen Integralen	37
4.2	Zählen von Null- und Polstellen	39

1 Einleitung

1.1 Die komplexen Zahlen

Um später komplexe Funktionen und deren Singularitäten gut untersuchen zu können, müssen wir zunächst festhalten, was komplexe Zahlen sind, und ihre wichtigsten Eigenschaften nach Stein - Shakarchi [6], Bak - Newman [1] und Fischer - Lieb [4] kennenlernen. Wir starten so mit der Definition von komplexen Zahlen, einfachen Rechenregeln, dem Betrag einer komplexen Zahl und zu ihrer Polardarstellung.

Definition (Menge der komplexen Zahlen). Wir definieren die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ und nennen sie die *Menge der komplexen Zahlen*. Wir betrachten nun auf unserer neuen Menge $\mathbb{C}$ die beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \quad \text{und} \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)}\end{aligned}$$

wobei $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ entspricht dabei dem Vektor $(x, 0)$ in $\mathbb{C}$, diese können wir wie im Reellen bekannt addieren und subtrahieren. Wir definieren nun weiters eine nicht reelle Zahl i mit $i := (0, 1)$ und nennen sie *imaginäre Einheit*. Mithilfe dieser Einheit können wir nun jede beliebige komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ als $z = x + iy$ schreiben, welches die gebräuchliche Schreibweise von komplexen Zahlen ist.

Die Variable x nennen wir den Realteil von z und schreiben $x = \operatorname{Re}(z)$, y den Imaginärteil von z mit $y = \operatorname{Im}(z)$.

Die reellen Zahlen sind somit komplexe Zahlen, deren Imaginärteil gleich Null ist. Zahlen, die keinen Realteil haben, nennen wir imaginäre Zahlen. Die imaginäre Einheit i stellt eine besondere Zahl da, denn ihr Quadrat ist die negative Zahl -1 :

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$$

Aus dieser Rechnung ergibt sich, dass $i^2 = -1$ gilt, ein Zusammenhang, der im Reellen undenkbar wäre!

Auch geometrisch lassen sich komplexe Zahlen darstellen. Die Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entspricht dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der euklidischen Zahlenebene, die x -Achse ist hierbei die reelle Achse, die y -Achse die imaginäre.

Die Rechenregeln der Addition und Multiplikation können aus dem Reellen

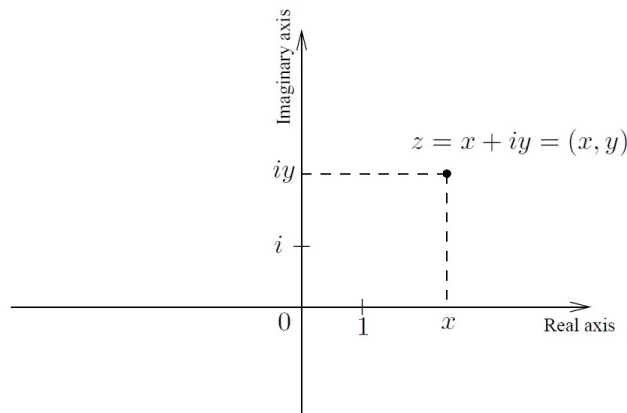


Abbildung 1: Die komplexe Ebene 6

übernommen werden. Seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
 z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) \\
 &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\
 &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \text{da } i^2 = -1
 \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Rechenregeln lassen sich schnell Kommutativität, Assoziativität sowie Distributivität der komplexen Zahlen beweisen, diese werden im Folgenden nicht erläutert.

Geometrisch gesehen entspricht die Addition von komplexen Zahlen der Addition entsprechender Vektoren im $\mathbb{R}^2$. Die komplexe Multiplikation funktioniert anders als ihr Äquivalent im Reellen und wird durch die Polarkoordinatendarstellung etwas später verdeutlicht. Wir kommen zunächst zu einer weiteren wichtigen Eigenschaft, die wir aus dem Reellen übertragen können, dem Betrag einer komplexen Zahl:

Definition (Betrag einer komplexen Zahl). Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir den *Betrag* $|z|$ von z mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geometrisch gesehen ist der komplexe Betrag, wie im $\mathbb{R}^2$, der Abstand der Zahl vom Ursprung.

Sehen wir uns die Eigenschaften von Imaginär- und Realteil für den Betrag $|z|$

einer komplexen Zahl z an:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| \text{ und } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|, \quad \text{da} \\ \operatorname{Re}^2(z) &\leq \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = |z|^2 \\ \operatorname{Im}^2(z) &\leq \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) = |z|^2 \end{aligned}$$

Lemma 1.1. Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(i). \quad |w + z| \leq |w| + |z|$$

$$(ii). \quad |wz| = |w| \cdot |z|$$

Beweis. Sei in beiden Beweisen $w = w_1 + iw_2$, $z = z_1 + iz_2$.

(i). $w + z = w_1 + z_1 + i \cdot (w_2 + z_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= \operatorname{Re}(w + z)^2 + \operatorname{Im}(w + z)^2 \\ &= (w_1 + z_1)^2 + (w_2 + z_2)^2 \\ &= w_1^2 + 2w_1z_1 + z_1^2 + w_2^2 + 2w_2z_2 + z_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|w| + |z|)^2 &= (\sqrt{w_1^2 + w_2^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2})^2 \\ &= w_1^2 + w_2^2 + 2\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2} + z_1^2 + z_2^2 \end{aligned}$$

Es gilt nun, $w_1z_1 + w_2z_2$ mit $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} (w_1z_1 + w_2z_2)^2 &= w_1^2z_1^2 + 2w_1z_1w_2z_2 + w_2^2z_2^2 \\ (\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \cdot \sqrt{z_1^2 + z_2^2})^2 &= w_1^2z_1^2 + w_1^2z_2^2 + w_2^2z_1^2 + w_2^2z_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2w_1z_1w_2z_2 &\leq w_1^2z_2^2 + w_2^2z_1^2, \quad \text{da } w_i, z_i \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |w + z|^2 &\leq (|w| + |z|)^2 \\ \Rightarrow |w + z| &\leq |w| + |z| \end{aligned}$$

(ii). $wz = (w_1 + iw_2) \cdot (z_1 + iz_2) = w_1z_1 - w_2z_2 + i \cdot (w_1z_2 + w_2z_1)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|wz|^2 &= \operatorname{Re}(wz)^2 + \operatorname{Im}(wz)^2 \\
&= (w_1 z_1 - w_2 z_2)^2 + (w_1 z_2 + w_2 z_1)^2 \\
&= w_1^2 z_1^2 - 2w_1 z_1 w_2 z_2 + w_2^2 z_2^2 + w_1^2 z_2^2 + 2w_1 z_2 w_2 z_1 + w_2^2 z_1^2 \\
|w|^2 |z|^2 &= (w_1^2 + w_2^2) \cdot (z_1^2 + z_2^2) \\
&= w_1^2 z_1^2 + w_1^2 z_2^2 + w_2^2 z_1^2 + w_2^2 z_2^2 \\
\Rightarrow |wz|^2 &= |w|^2 |z|^2 \Rightarrow |wz| = |w| \cdot |z|
\end{aligned}$$

□

Da wir nun den Betrag einer komplexen Zahl kennen, können wir die Polardarstellung komplexer Zahlen einführen. Wie bei der Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten im Reellen, benötigen wir für die eindeutige Darstellung einer Zahl in der komplexen Ebene die Länge des Abstands vom Ursprung sowie den Winkel, welchen dieser mit der positiven reellen Achse einschließt. Der Abstand vom Ursprung der Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist der Betrag $|z|$, oft auch mit r bezeichnet, den Winkel erhalten wir durch umformen der Winkelfunktionen und mit $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{r} & \Rightarrow x &= r \cdot \cos(\theta) \\
\sin(\theta) &= \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{r} & \Rightarrow y &= r \cdot \sin(\theta)
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $|z| = r$ für z

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$

Definition (Polardarstellung). Eine komplexe Zahl der Form $z = x + iy$ lässt sich mithilfe von Polarkoordinaten folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
z &= |z| \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z| \cdot e^{i\theta}, \quad \text{wobei} \\
e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta).
\end{aligned}$$

Die letzte Formel in der Definition ist die berühmte Euler-Formel. Mithilfe dieser Formel ergibt sich für den Winkel $\theta = \pi$ ein wahrlich erstaunliches

Ergebnis:

$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0$$

Potenziert man die irrationale eulersche Zahle e mit der imaginären Einheit i und der ebenfalls irrationalen Zahl π , erhält man eine ganze Zahl. Diese faszinierende Formel bringt uns in unserer Arbeit zwar nicht weiter, ich wollte sie dennoch keinem Leser vorenthalten.

Geometrisch wird die Polardarstellung einer komplexen Zahl in Abbildung 2 veranschaulicht:

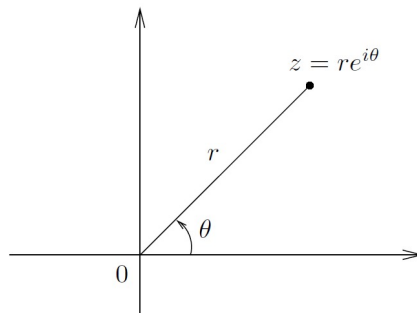


Abbildung 2: Die Polardarstellung einer komplexen Zahl 6

Definition (komplex konjugierte Zahl). Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\bar{z} := x-iy$ *komplex konjugierte Zahl* von z .

Geometrisch betrachtet entspricht die komplex konjugierte Zahl $\bar{z}$ einer Spiegelung von z entlang der reellen Achse.

Kommen wir nun von arithmetischen und geometrischen Eigenschaften von komplexen Zahlen zur Konvergenz komplexer Zahlenfolgen:

Definition (Konvergenz). Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen komplexen Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : \quad |z_n - z| < \varepsilon$$

Wir schreiben dann für den Grenzwert: $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Diese Definition ist bis auf die Zahlenmenge ident mit jener im Reellen. Was nun neu dazukommt, ist die Konvergenz der entsprechenden Real- und Imaginärteile einer komplexen Folge.

Lemma 1.2. *Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Grenzwert $z \in \mathbb{C}$, falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$$

Da es von einigen Folgen schwierig ist, den Grenzwert zu berechnen, und wir diese Folgen dennoch auf ihre Konvergenz untersuchen können wollen, brauchen wir ein weiteres Werkzeug, mit welchem wir von gewissen Folgeeigenschaften bereits auf deren Konvergenz schließen können - Cauchyfolgen.

Definition (Cauchyfolge). Eine komplexe Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N : \quad |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Proposition 1.3 (Satz von Cauchy). *Jede Cauchyfolge konvergiert und jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Dann gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$ und somit sind $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Da

$$\begin{aligned} |z_n - z_m| &\leq |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| + |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \\ &= |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| + |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z_m)| \end{aligned}$$

ist auch $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

Umgekehrt: Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. dann gilt

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| &\leq |z_n - z_m| \\ |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(z_m)| &\leq |z_n - z_m| \end{aligned}$$

und nach der Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ konvergieren $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und nach Definition auch $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

1.2 Komplexe Funktionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir komplexe Funktionen nach Freitag - Busam [5], Stein - Shakarchi [6] sowie Fischer - Lieb [4], wir starten mit stetigen Funktionen. Die Definition der stetigen komplexen Funktionen ist wenig überraschend jener in der reellen Analysis sehr ähnlich. Später werden wir holomorphe Funktionen sowie Potenzreihen und ihre Eigenschaften kennenlernen, welche sich schon mehr von ihren Verwandten im Reellen unterscheiden.

Definition (komplexe Funktion). Sei U eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir *komplexe Funktion*.

Definition (Stetigkeit). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in U \text{ mit } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Eine Funktion f heißt *stetig* auf einer Menge U , falls sie in jedem Punkt von U stetig ist.

Wie im Reellen sind Summen und Produkte stetiger komplexer Funktionen stetig, ebenso wie die Zusammensetzung komplexer stetiger Funktionen. Außerdem ist eine komplexe Funktion, ähnlich wie komplexe Folgen, genau dann stetig, wenn ihr Real- und Imaginärteil stetige Funktionen sind.

Beispiel. (i). Komplexe Polynomfunktionen $p : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq n$, sind stetig.

(ii). Die komplexe Betragsfunktion $f : U \rightarrow [0, \infty), f(z) = |z|$ ist stetig.

Im weiteren Verlauf der Arbeit bezeichnet die Menge U immer eine offene Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Gehen wir nun über zur Differenzierbarkeit von komplexen Funktionen, diese ist, wie wir gleich sehen werden, im Komplexen viel stärker als im Reellen:

Definition (komplexe Differenzierbarkeit). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Die Funktion f heißt *komplex differenzierbar* oder *holomorph in einem Punkt* $z_0 \in \mathbb{C}$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{C}$$

existiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

und nennen $f'(z_0)$ *Ableitung von f in z_0* .

Die Funktion f heißt *holomorph auf U* , wenn sie in jedem Punkt von U holomorph ist.

Da h hier eine beliebige komplexe Zahl sein kann, ist die Definition der komplexen Differenzierbarkeit viel stärker als im Reellen, da sich die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von vielen verschiedenen Richtungen an die entsprechende Stelle annähern kann! Eine weitere Eigenschaft, die holomorphe komplexe Funktionen von differenzierbaren reellen unterscheidet, ist, dass jede holomorphe Funktion unendlich oft

komplex differenzierbar ist und durch eine Potenzreihenentwicklung dargestellt werden kann. Mehr dazu in der nächsten Proposition, die wir nicht beweisen werden.

Proposition 1.4. *Jede holomorphe Funktion ist analytisch, das heißt, jede holomorphe Funktion kann als Potenzreihe in der Nähe jedes Punktes entwickelt werden.*

Somit sind die Begriffe *holomorph* und *analytisch* im komplexen synonym verwendbar. Ein weiterer wichtiger Begriff ist jener der ganzen Funktion, welche im Folgenden definiert wird.

Definition (Ganze Funktion). Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *ganz*, wenn f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar, also holomorph, ist.

Beispiel. (i). Die Identität $f(z) = z$ ist holomorph mit $f'(z) = 1$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0 + h - z_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

(ii). Allgemein hat eine Potenzfunktion $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung $f'(z) = nz^{n-1}$.

(iii). Die komplex konjugierte Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist hingegen nirgends holomorph:

Wir wählen für h zwei spezielle Nullfolgen $\frac{1}{n}$ und $\frac{i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_0 + \frac{1}{n}) - f(z_0)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{z_0 + \frac{1}{n}} - \bar{z}_0}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_0 + \frac{1}{n} - \bar{z}_0}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{aber} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_0 + \frac{i}{n}) - f(z_0)}{\frac{i}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{z_0 + \frac{i}{n}} - \bar{z}_0}{\frac{i}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}_0 + \frac{i}{n} - \bar{z}_0}{\frac{i}{n}} = -1. \end{aligned}$$

Um nicht nur Polynomfunktionen, sondern auch Exponentialfunktionen und trigonometrische Funktionen im Komplexen untersuchen zu können, ist der Begriff der Potenzreihe hilfreich. Wie auch im Reellen möglich, definieren wir die trigonometrischen Funktionen über Potenzreihen und werden sehen, dass diese Funktionen holomorph sind.

Definition (Potenzreihe). Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit } a_k, z \in \mathbb{C}$$

wobei a_k die Koeffizienten der Potenzreihe sind.

Definition (Konvergenz von Potenzreihen). Eine Potenzreihe *konvergiert*, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen mit $s_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ konvergiert. Eine Potenzreihe *divergiert*, wenn sie nicht konvergiert.

In anderen Worten bedeutet das, dass eine Potenzreihe genau dann konvergiert, falls ihr Limes existiert. Sehen wir uns als Beispiel die geometrische Reihe an:

Beispiel (geometrische Reihe). (i). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, wie auch im Reellen, gegen $\frac{1}{1-z}$.

(ii). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert beispielsweise bei $z = 1$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

somit hat s_n keinen Limes und divergiert.

Korollar 1.5. Falls eine Potenzreihe konvergiert, bilden ihre Reihenglieder eine Nullfolge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergiert} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| |z|^k = 0$$

Beweis. Da $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert, ist die Summe s_n der Partialsummen nach Proposition [1.3](#) eine Cauchyfolge und es existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N , sodass für alle $m, n > N$ folgendes gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt für $n > m$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k z^k \right| < \varepsilon,$$

und mit $n = m + 1$ erhalten wir

$$\left| \sum_{k=n}^n a_k z^k \right| = |a_n| |z|^n < \varepsilon.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| |z|^n = 0$$

und somit ist unser Beweis fertig. $\square$

Die bewiesene Implikation gilt tatsächlich nur in eine Richtung - umgekehrt gilt nicht für alle Nullfolgen, dass die zugehörige Reihe konvergiert! Das zeigt

beispielsweise die harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, obwohl $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Definition (absolute Konvergenz). Eine Potenzreihe konvergiert *absolut*, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z|^k$ konvergiert, das heißt, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k$$

existiert.

Als nächstes folgt der Zusammenhang zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz. Der Beweis ist jenem von Korollar 1.5 ähnlich:

Proposition 1.6. *Sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.*

Beweis. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent, konvergiert die Summe s_n der Partialsummen und bildet nach Proposition 1.3 eine Cauchyfolge, für welche nach Definition gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N : \quad \left| \sum_{k=0}^n |a_k| |z|^k - \sum_{k=0}^m |a_k| |z|^k \right| < \varepsilon.$$

O.B.d.A. wählen wir nun $n \geq m$ und erhalten

$$\left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| |z|^k \right| < \varepsilon.$$

Durch Anwenden der Dreiecksungleichung erhalten wir für die Differenz die folgende Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=0}^m a_k z^k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k z^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k z^k| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| |z|^k < \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Cauchyfolge ist und somit konvergiert. $\square$

Da wir nun die Konvergenz von Potenzreihen untersuchen können, besitzen wir alle nötigen Kenntnisse für einen neuen Begriff, welcher in den nächsten Kapiteln eine zentrale Rolle spielen wird - der Konvergenzradius von Potenzreihen. Starten wir hierfür zunächst mit einer Definition, welche uns gleich zum wichtigen Zusammenhang zwischen dem Konvergenzradius und der Konvergenz einer Potenzreihe führt.

Definition (Konvergenzradius). Für jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ definieren wir den *Konvergenzradius* R mit

$$R := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

Insbesondere gilt hier $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.

Theorem 1.7. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 \leq R \leq \infty$. Dann ist die Reihe

(i). absolut konvergent, falls $|z| < R$

(ii). divergent, falls $|z| > R$.

Beweis. Wir definieren $L := \frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ und nehmen für (i) und (ii) an, dass $L \neq 0, L \neq \infty$.

(i). Sei $|z| < R$, also $L \cdot |z| < 1$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(L + \varepsilon) \cdot |z| < 1$ und nach der Definition des Limes superior gilt $|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq L + \varepsilon$ für alle k bis auf endlich viele. Daraus folgt:

$$|a_k||z|^k = (|a_k|^{\frac{1}{k}}|z|)^k \leq ((L + \varepsilon) \cdot |z|)^k = q^k,$$

wobei $|q| < 1$, und für die dazugehörige Reihe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} < \infty.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^n |a_k||z|^k$ ist somit beschränkt und monoton, also konvergent.

(ii). Sei $|z| > R$, also $L \cdot |z| > 1$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(L - \varepsilon) \cdot |z| > 1$ und laut $\limsup$ gilt $|a_k|^{\frac{1}{k}} \geq L - \varepsilon$ für unendlich viele k . Daraus folgt:

$$|a_k||z|^k = (|a_k|^{\frac{1}{k}}|z|)^k \geq ((L - \varepsilon) \cdot |z|)^k \geq q^k \geq 1$$

für unendlich viele k . Die Summe $\sum_{k=0}^n |a_k||z|^k$ kann nicht konvergieren, da nach Korollar 1.5 $|a_k||z|^k$ eine Nullfolge sein müsste, was im Widerspruch zu $|a_k||z|^k \geq 1$ für unendlich viele k steht.

(iii). Sei $L = 0$, also $R = \infty$.

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|a_k|^{\frac{1}{k}} > 0 + \varepsilon$ für endlich viele k , also gilt

$$\forall k \geq N_\varepsilon, N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_k|^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Es existiert also für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein $N_z \in \mathbb{N}$ mit $|a_k|^{\frac{1}{k}}|z| \leq \frac{1}{2}$ für alle $k \geq N_z$ und folglich:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k||z|^k = \sum_{k=0}^{N_z} |a_k||z|^k + \sum_{k=N_z+1}^{\infty} |a_k||z|^k.$$

Für die Summe von $N_z + 1$ bis k gilt schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{k=N_z+1}^n |a_k||z|^k &= \sum_{k=N_z+1}^n (|a_k|^{\frac{1}{k}}|z|)^k \leq \sum_{k=N_z+1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\sum_{k=N_z+1}^n |a_k||z|^k$ beschränkt und monoton ist und somit konvergiert die endliche und auch die dazugehörige unendliche Reihe.

(iv). Sei $L = \infty$, also $R = 0$.

Nach Definition ist $(|a_k|^{\frac{1}{k}})_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt, also auch $|a_k||z|^k =$

$(|a_k|^{\frac{1}{k}}|z|)^k, z \neq 0$ und kann keine Nullfolge sein.

Daher ist $\sum_{k=0}^{\infty}$ divergent für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und für $z = 0$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0$.

□

Der Satz gibt nur Auskunft, was bei $|z| < R$ und $|z| > R$ passiert. Für $|z| = R$ ist keine allgemein gültige Aussage möglich!

Beispiel. Wir wollen das Konvergenzverhalten der folgenden Summe untersuchen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Dazu müssen wir zunächst den Konvergenzradius berechnen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N_\varepsilon : k! \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^k.$$

Durch Invertieren gilt nun für alle $k \geq N_\varepsilon$

$$\frac{1}{k!} \leq \varepsilon^k,$$

und somit gilt auch für alle $k \geq N_\varepsilon$

$$\left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{1}{k}} \leq \varepsilon.$$

Unser ε war beliebig gewählt, somit gilt für den Grenzwert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} = 0$$

und wir erhalten einen Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k!} \right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$!

Anhand des Theorems [1.7](#) können wir feststellen, dass die Reihe aus dem vorigen Beispiel, welche die Potenzreihendarstellung der komplexen Exponentialfunktion beschreibt, sogar für alle komplexe Zahlen konvergiert.

Beispiel. (i). Betrachten wir die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Da $a_k = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich für den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} 1^{\frac{1}{k}}} = 1.$$

Für $|z| = 1$ erhalten wir die Folge $(|z|^k)_{k \in \mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$, die offensichtlich keine Nullfolge bildet, somit divergiert $\sum_{k=0}^{\infty}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(ii). Wir betrachten nun die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

Der Konvergenzradius der Folge $(\frac{1}{k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist nicht so leicht zu berechnen wie in (i), aber wir können ihn geschickt abschätzen. Aus (i) folgt zunächst, dass

$$\left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{k}} \leq 1^{\frac{1}{k}} = 1.$$

Weiters sehen wir, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N_\varepsilon : \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^k} \leq \frac{1}{k}$$

und durch Umformen erhalten wir

$$\underbrace{\frac{1}{1+\varepsilon}}_{\text{nahe } 1} \leq \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \leq 1.$$

Der Bruch $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ liegt sehr nahe bei 1 für beliebiges $\varepsilon > 0$, somit erhalten wir

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$$

und die Potenzreihe hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Je nachdem, wie wir unser z mit $|z| = 1$ nun wählen, konvergiert bzw. divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$.

Bei $z = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, welche divergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

bei $z = -1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe, welche konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

(iii). Als letztes Beispiel dieses Abschnitts sehen wir uns das Konvergenzverhalten folgender Potenzreihe an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Für den Konvergenzradius gilt analog zu (ii) $R = 1$, die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ können wir wieder geschickt abschätzen. Für alle $x \in [k, k+1]$ gilt

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(x-1)^2},$$

für alle $k \geq 2$ gilt

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2} \underbrace{\int_k^{k+1} dx}_{=1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx.$$

Für die dazugehörige Reihe folgt somit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{(x-1)^2} dx = 1 + \int_2^n \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{x-1} \right]_2^n = 1 - \left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) = 2 - \frac{1}{n-1} \leq 2\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Die Reihe konvergiert, da sie durch 2 beschränkt und monoton wachsend ist und für unsere zugehörige Potenzreihe mit $|z| = 1$ gilt wieder für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k^2} \right| \underbrace{|z|^k}_{=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ konvergiert absolut für $|z| = 1$ und ist somit auch konvergent.

Eine Potenzreihe kann demnach je nach Koeffizientenfolge bei $|z| = R$ konvergieren, divergieren bzw. sogar absolut konvergieren!

1.3 Kurvenintegrale

Komplexe Funktionen können nicht nur differenziert, sondern auch entlang von Kurven integriert werden. Mithilfe von Kurvenintegralen können wir später zwei äußerst relevante Sätze von Cauchy - den Integralsatz sowie die Integralformel - formulieren und beweisen. Wir beziehen uns in diesem Abschnitt auf die Werke von Stein - Shakarchi [6] und Fischer - Lieb [3].

Definition (Kurve). Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow U$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ nennen wir *Kurve*.

Die Definition schränkt γ nicht auf Kurven ein, wie wir sie im herkömmlichen Sinn verstehen würden, nämlich als Kreis, Parabel, etc. Mathematisch gesehen ist auch $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = i$, also ein einzelner Punkt, eine Kurve. Nun können wir uns das Kurvenintegral ansehen und mit dem Begriff der Stammfunktion schließlich solche Integrale auch berechnen:

Definition (Kurvenintegral). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &:= \int_a^b \operatorname{Re}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}[f(\gamma(t)) \gamma'(t)] dt\end{aligned}$$

und nennen es *Kurvenintegral von f entlang γ* .

Analog zu Riemann-Integralen im Reellen, existieren im Komplexen Rechenregeln für Kurvenintegrale. Wir werden einige dieser nun ohne Beweis formulieren, da sie für den weiteren Verlauf der Arbeit von großer Bedeutung sind.

Lemma 1.8 (Rechenregeln für Kurvenintegrale). *Seien f, g stetige Funktionen, γ eine beliebige Kurve und die Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

(i). *Es gilt:*

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) \, dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) \, dz + \beta \int_{\gamma} g(z) \, dz.$$

(ii). *Sei γ^- die Kurve γ mit umgekehrter Orientierung. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = - \int_{\gamma^-} f(z) \, dz.$$

(iii). *Die Kurven $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ ergeben zusammen die Kurve $\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{für } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{für } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz + \int_{\gamma_2} f(z) \, dz.$$

Wie im Reellen existiert auch im Komplexen in Verbindung mit Integralen der Begriff der Stammfunktion. Wir werden diesen im Folgenden einführen.

Definition (Stammfunktion). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ für die gilt:

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in U$$

heißt *Stammfunktion von f* .

Hier zwei Beispiele für Stammfunktionen:

Beispiel. (i). Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$ hat $F_1(z) = \frac{z^2}{2}$ als eine Stammfunktion.

(ii). Auch $F_2(z) = \frac{z^2}{2} + 3i$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$.

Mithilfe des Begriffs der Stammfunktion können wir nun Kurvenintegrale auch berechnen:

Theorem 1.9. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F . Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis. Unter Verwendung der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t))) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

□

Beispiel. $f(z) = z$, $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{\pi} f(e^{it}) \cdot ie^{it} dt = \int_0^{\pi} e^{it} ie^{it} dt \\ &= i \cdot \int_0^{\pi} e^{2it} dt = \left[i \cdot \frac{1}{2i} e^{2it} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot e^{2\pi i} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Korollar 1.10. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine geschlossene Kurve, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Beweis. Das Korollar folgt unmittelbar aus Theorem 1.9:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

□

Nachdem wir nun ein paar Beispiele zu Kurvenintegralen und Stammfunktionen gesehen haben, stellt sich nun die Frage, ob, so wie im Reellen, jede stetige komplexe Funktion eine Stammfunktion hat. Hierzu ein weiteres Beispiel:

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, ist bei 0 nicht definiert, also wählen wir die Kurve γ so, dass γ nicht durch 0 geht:

$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ (Einheitskreis). Da γ eine geschlossene Kurve ist, muss,

falls f eine Stammfunktion hat, nach Korollar 1.10 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ gelten, und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i \cdot e^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0$$

Die Funktion f hat somit keine Stammfunktion, also auch nicht jede stetige komplexe Funktion. Es stellt sich die berechnete Frage, wie man erkennen kann, ob eine komplexe Funktion eine Stammfunktion hat. Wenn wir Kurven γ finden, für die Korollar 1.10 gilt, so muss für f eine Stammfunktion existieren. Das Lemma von Goursat, welches wir gleich kennenlernen, sagt uns, dass eine holomorphe Funktion f , die auf einem Dreieck definiert ist, eine Stammfunktion hat.

Lemma 1.11 (Lemma von Goursat). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $T \subset U$ ein Dreieck, dessen Inneres ebenfalls in U liegt. Dann gilt*

$$\int_T f(z) dz = 0.$$

Beweis. Sei $T^{(0)}$ unser initiales Dreieck mit positiver Orientierung, $d^{(0)}$ der Durchmesser und $u^{(0)}$ der Umfang von $T^{(0)}$. Nun konstruieren wir in $T^{(0)}$ vier neue flächengleiche Dreiecke $T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, T_3^{(1)}$ und $T_4^{(1)}$, indem wir die drei Seiten von $T^{(0)}$ halbieren und die Mittelpunkte verbinden. Diese vier Dreiecke sind ebenfalls positiv orientiert und in Abbildung 3 dargestellt.

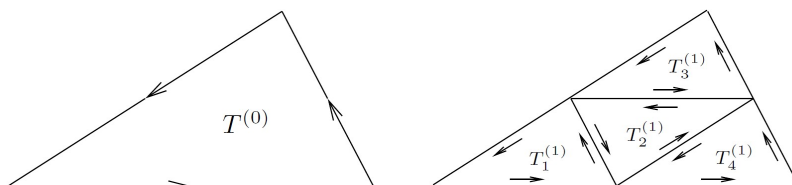


Abbildung 3: Das Dreieck $T^{(0)}$ und seine Teilung 6

Für das Kurvenintegral über $T^{(0)}$ erhalten wir dank der Aufhebungen, die sich durch Integrieren über dieselbe Seite in unterschiedliche Richtungen ergeben

$$\int_{T^{(0)}} f(z) dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z) dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z) dz$$

und somit existieren j , für die gilt

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{T_j^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

Wir wählen nun ein Dreieck, welches die Ungleichung erfüllt, und nennen es $T^{(1)}$, mit Durchmesser $d^{(1)}$ und Umfang $u^{(1)}$. Für $d^{(1)}$ und $u^{(1)}$ gilt $d^{(1)} = \frac{d^{(0)}}{2}$, $u^{(1)} = \frac{u^{(0)}}{2}$. Wir wiederholen nun den Vorgang und teilen $T^{(1)}$ analog zu $T^{(0)}$ in vier kleinere Dreiecke, und wenn wir diesen Prozess fortführen, erhalten wir eine Folge von Dreiecken

$$T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(n)}, \dots$$

für die gilt

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right|$$

und

$$d^{(n)} = 2^{-n} d^{(0)}, \quad u^{(n)} = 2^{-n} u^{(0)},$$

wobei $d^{(n)}$ dem Durchmesser von $T^{(n)}$ entspricht und $u^{(n)}$ dem Umfang.

Sei $\tau^{(n)}$ das Innere des Dreiecks $T^{(n)}$ inklusive seinem Rand. Dann können wir feststellen, dass unsere Konstruktion zu einer Folge verschachtelter Mengen

$$\tau^{(0)} \supset \tau^{(1)} \supset \dots \supset \tau^{(n)} \supset \dots$$

führt, deren Durchmesser gegen 0 geht und es existiert ein Punkt z_0 , der in allen abgeschlossenen Dreiecken $\tau^{(n)}$ vorkommt. Da f holomorph in z_0 ist, gilt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)(z - z_0),$$

mit $r \rightarrow 0$, wenn $z \rightarrow z_0$. Die Konstante $f(z_0)$ und die lineare Funktion $f'(z_0)(z - z_0)$ haben jeweils eine Stammfunktion und somit erhalten wir nach Korollar 1.10

$$\begin{aligned} \int_{T^{(n)}} f(z) dz &= \underbrace{\int_{T^{(n)}} f(z_0) dz}_{=0} + \underbrace{\int_{T^{(n)}} f'(z_0)(z - z_0) dz}_{=0} + \int_{T^{(n)}} r(z)(z - z_0) dz \\ &= \int_{T^{(n)}} r(z)(z - z_0) dz \end{aligned}$$

Da der Wert z_0 innerhalb von $\tau^{(n)}$ liegt und z am Rand $T^{(n)}$, gilt $|z - z_0| \leq d^{(n)}$ und wir erhalten durch geschicktes Abschätzen

$$\left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(n)} u^{(n)},$$

mit $\varepsilon_n = \sup_{z \in T^{(n)}} |r(z)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$\left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon_n 4^{-n} d^{(0)} u^{(0)},$$

dies führt uns zu

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| \leq 4^{-n} \left| \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \leq \varepsilon_n d^{(0)} u^{(0)},$$

und mit $n \rightarrow \infty$ ist die Aussage bewiesen, da dann $\varepsilon_n \rightarrow 0$. $\square$

Mithilfe des Lemmas von Goursat können wir nun elegant die Existenz von Stammfunktionen auf einer Kreisscheibe beweisen:

Lemma 1.12. *Eine holomorphe Funktion, die auf einer offenen Kreisscheibe definiert ist, hat auf dieser auch eine Stammfunktion.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass unsere Kreisscheibe D im Ursprung ihren Mittelpunkt hat und betrachten einen Punkt $z \in D$. Wir verbinden den Ursprung nun mit z , indem wir eine stückweise glatte Kurve konstruieren, die zunächst horizontal von 0 nach $\tilde{z}$, mit $\tilde{z} = \operatorname{Re}(z)$, verläuft und dann vertikal von $\tilde{z}$ nach z . Die Kurve ist von 0 nach z orientiert und wir nennen sie γ_z , wie in Abbildung 4 ersichtlich.

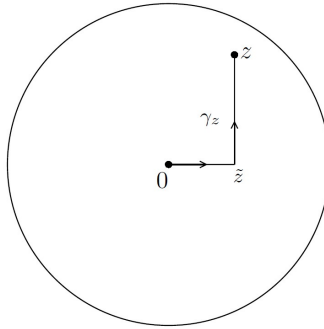


Abbildung 4: Die Kurve γ_z 6

Wir definieren eine Stammfunktion F mit

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

die Wahl von γ_z erlaubt eine eindeutige Definition. Wir behaupten nun, dass F holomorph auf D ist und dass $F'(z) = f(z)$.

Um das zu zeigen, fixieren wir $z \in D$ und wählen $h \in \mathbb{C}$ so, dass $z + h$ ebenfalls in D liegt. Dann betrachten wir die Differenz

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_z} f(w) dw.$$

Die Funktion f wird in dieser Gleichung zunächst in ursprünglicher Richtung entlang von γ_{z+h} integriert und schließlich, aufgrund des Vorzeichens, in entgegengesetzter Richtung entlang von γ_z , wie in Abbildung 5 (a) dargestellt. Da f im ersten Segment vom Ursprung weggehend in beide Richtungen integriert wird, fällt dieses Teilstück weg und wir erhalten die Kurve in (b). Nun vervollständigen wir die Form, wie in (c) gezeigt, zu einem Rechteck und einem Dreieck und erhalten, indem wir zunächst das Rechteck in zwei Dreiecke zerlegen, mithilfe des Lemmas von Goursat 1.11 eine einzige Linie, die z mit $z+h$ verbindet und in (d) gezeigt wird.

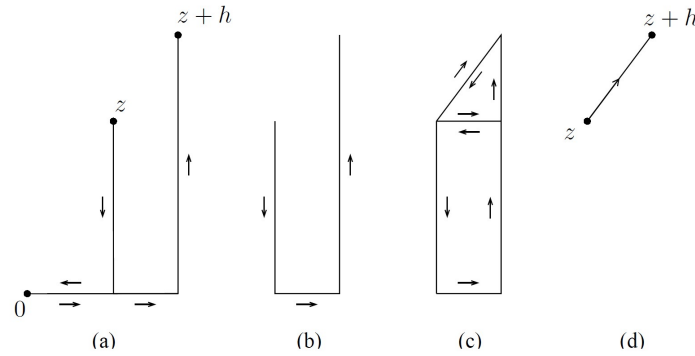


Abbildung 5: Die zu integrierenden Kurven γ_z und γ_{z+h} 6

Aus den Auslöschungen der Abbildung erhalten wir

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(w) dw,$$

wobei η die Linie von z nach $z+h$ bezeichnet. Da f holomorph und somit stetig in z ist, können wir

$$f(w) = f(z) + r(w)$$

schreiben, wobei $r(w) \rightarrow 0$ ($w \rightarrow z$). Daraus ergibt sich

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\eta} f(z) dw + \int_{\eta} r(w) dw = f(z) \int_{\eta} dw + \int_{\eta} r(w) dw.$$

Einerseits hat die Zahl 1 die Stammfunktion w , also ist der Wert des ersten Integrals nach Theorem 1.9 h , andererseits gilt folgende Abschätzung:

$$\left| \int_{\eta} r(w) dw \right| \leq \sup_{w \in \eta} |r(w)| |h|.$$

Da das Supremum gegen 0 geht, wenn $h \rightarrow 0$, können wir aus der letzten

Gleichungskette folgern, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Dadurch beweisen wir, dass F eine Stammfunktion für f auf der Kreisscheibe ist. $\square$

Dieses Lemma sagt uns, dass jede holomorphe Funktion, zumindest lokal auf einer Kreisscheibe, eine Stammfunktion hat. Der bereits angekündigte Cauchy-Integralsatz gibt nun eine weitere wichtige Eigenschaft von auf Kreisscheiben holomorphen Funktionen.

Theorem 1.13 (Cauchyscher Integralsatz). *Sei $f : D_R \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf der Kreisscheibe $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Dann gilt für jede geschlossene Kurve $\gamma_R : [0, 2\pi] \rightarrow D_R, \gamma_R(t) = Re^{it}$:*

$$\int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 0$$

Beweis. Da die Funktion f holomorph auf der Kreisscheibe D_R ist, hat f nach Lemma 1.12 eine Stammfunktion. Somit können wir Korollar 1.10 anwenden und der Satz ist bewiesen. $\square$

Der Cauchysche Integralsatz gilt nicht nur für Kreisscheiben, sondern auch für allgemeinere Gebiete, dazu mehr in einem späteren Abschnitt. Kommen wir nun zum letzten und bedeutendsten Satz dieses Kapitels - der Cauchyschen Integralformel.

Theorem 1.14 (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, die Kreisscheibe $D \subseteq \mathbb{C}$. Sei γ der Rand von D , dann gilt $\forall z \in D$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

Beweis. Wir wählen ein festes $z \in D$ und betrachten die Modellkurve $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ in Form eines Schlüssellochs, die den Punkt z auslässt und in Abbildung 6 gezeigt wird.

Die Variable δ gibt die Breite des Korridors an, ε den Radius des kleinen Kreises mit Mittelpunkt z . Da die Funktion $F(w) = \frac{f(w)}{(w-z)}$ abgesehen vom Punkt $w = z$ holomorph ist, gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz 1.13

$$\int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} F(w) \, dw = 0.$$

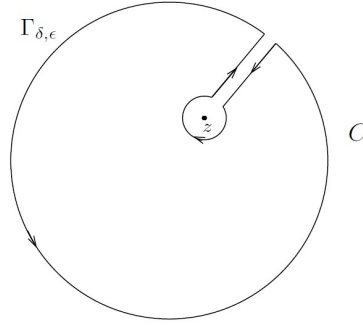


Abbildung 6: Die verwendete Modellkurve $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ 6

Wir lassen nun den Korridor kleiner werden, also $\delta \rightarrow 0$, und aufgrund der Stetigkeit von F löschen sich im Grenzwert die Integrale auf beiden Seiten des Korridors aus. Es bleiben zwei Kurven übrig, der große Kreis C mit positiver Orientierung und ein kleiner Kreis $C_\varepsilon : [0, 2\pi] \rightarrow D$, $C_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{-it}$, der negativ orientiert ist. Das Integral über dem kleinen Kreis können wir folgendermaßen schreiben:

$$F(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} + \frac{f(z)}{w - z},$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite beschränkt ist und da f holomorph ist, geht das Integral des Terms über C_ε gegen 0, falls $\varepsilon \rightarrow 0$. Für den restlichen Beweis reicht es zu sehen, dass

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{w - z} dw &= f(z) \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{w - z} dw \\ &= -f(z) \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{-it}}{\varepsilon e^{-it}} dt \\ &= -f(z) 2\pi i. \end{aligned}$$

Im Grenzwert erhalten wir

$$0 = \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i f(z),$$

was zu beweisen war. Der Kreis C entspricht in diesem Fall der Kurve γ als dem Rand der Kreisscheibe D . □

Diese bemerkenswerte Formel sagt uns nun, dass eine holomorphe Funktion im Inneren einer Kreisscheibe bereits vollständig durch ihre Werte am Rand bestimmt ist!

2 Singularitäten

Nachdem wir nun die wichtigsten Eigenschaften von komplexen Zahlen, Folgen und Funktionen kennen, können wir uns endlich dem Kernthema dieser Arbeit widmen - den Singularitäten von holomorphen Funktionen, in anderen Worten, Definitionslücken dieser Funktionen, die an jeder anderen Stelle holomorph sind. Auf den nächsten Seiten werden wir festlegen, welche Arten von Singularitäten holomorphe Funktionen haben können und Eigenschaften kennenlernen, die Funktionen an diesen Stellen haben (können). Wir halten uns vorrangig an Stein - Shakarchi [6], sowie an Bak - Newman [1] und Fischer - Lieb [3]. Bevor wir aber tatsächlich über Singularitäten sprechen können, noch ein paar grundlegende Definitionen:

Definition (punktierte Umgebung). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $U(z_0)$ eine Umgebung von z_0 . Wir definieren die *punktierte Umgebung* $\dot{U}(z_0)$ von z_0 mit:

$$\dot{U}(z_0) := U(z_0) \setminus \{z_0\},$$

also die Umgebung des Punktes ohne den Punkt selbst.

Definition (isolierte Singularität). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$. Dann hat die Funktion f in z_0 eine *isolierte Singularität*.

Zur Veranschaulichung hier ein paar Beispiele:

- Beispiel.* (i). Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$ hat im Ursprung eine Singularität. Diese lässt sich leicht beheben, indem man $f(0) = 0$ definiert und f ist somit auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.
- (ii). Die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{z}$ hat ebenfalls im Ursprung eine Singularität, g ist jedoch nicht stetig bzw. holomorph fortsetzbar in $z_0 = 0$, da $|g(z)|$ unendlich groß wird, je näher z an z_0 kommt. Die Funktion g hat, wie wir später sehen werden, eine sogenannte Polstelle in z_0 .
- (iii). Auch $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \exp(1/z)$ hat im Ursprung eine Singularität, da h von rechts an z_0 kommend unendlich groß wird, linksseitig aber gegen Null geht.

Die drei genannten Beispiele entsprechen den drei Arten von isolierten Singularitäten, die existieren und wir im Folgenden kennenlernen werden.

2.1 Hebbare Singularitäten

Definition (hebbare Singularität). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine *hebbare Singularität* in z_0 , falls eine holomorphe

Funktion $g : U(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \dot{U}(z_0).$$

Einfacher gesagt hat eine Funktion f eine hebbare Singularität in z_0 , falls wir f in z_0 so definieren können, dass f auf ganz $U(z_0)$ holomorph wird. Im obigen Beispiel hat die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z$ eine hebbare Singularität in $z_0 = 0$, da man eine Funktion $g(z) = z$ auf ganz $\mathbb{C}$ definieren kann und $f(z) = g(z)$. Eine solche Singularität können wir auch als „Scheinsingularität“ bezeichnen.

Kommen wir nun zum ersten wichtigen Resultat dieser Arbeit - dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Er gibt Auskunft darüber, unter welchen Voraussetzungen eine isolierte Singularität behoben werden kann.

Theorem 2.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Sei $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f hat bei z_0 genau dann eine hebbare Singularität, falls f beschränkt ist.*

Beweis. Es handelt sich hier nur um ein lokales Problem, wir wählen eine Kreisscheibe D mit Mittelpunkt z_0 und der geschlossenen Kurve γ als Rand. Folgendes gilt es zu zeigen: wenn $z \in D, z \neq z_0$, dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (2.1)$$

Wenn obige Formel stimmt, dann ist f auf ganz D holomorph, also auch in $z_0 \in D$.

Sei $z \in D, z \neq z_0$ und wir verwenden die Modellkurve aus Abbildung 7

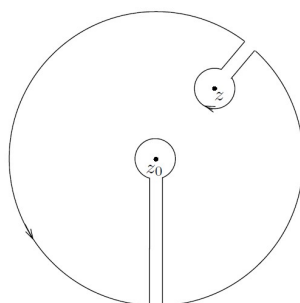


Abbildung 7: Die verwendete Modellkurve für unseren Beweis 6

Da die Seiten der Korridore jeweils unterschiedlich orientiert sind, löschen sie sich, wenn sie beliebig schmal werden, im Grenzwert aus, und es gilt, wenn

$z \rightarrow z_0 \neq z$:

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma_{\varepsilon_0}} \frac{f(w)}{w-z} dw = 0.$$

Die Kurven $\gamma_{\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow D$, $\gamma_{\varepsilon}(z) = z + \varepsilon e^{-it}$ und $\gamma_{\varepsilon}(z_0) = z_0 + \varepsilon e^{-it}$ sind negativ orientierte Kreise. Nachdem γ geschlossen ist, hat das erste Integral den Wert 0, für das zweite gilt nach dem Beweis von [1.14](#) und $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{f(w)}{w-z} dw = -2\pi i \cdot f(z).$$

Für das dritte Integral nehmen wir an, dass f beschränkt ist. Da ε klein ist, gilt $z \neq z_0$ und

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon_0}} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq C_{\varepsilon}.$$

Falls $\varepsilon \rightarrow 0$, ist unsere Behauptung bewiesen, und somit gilt auch die Gleichung 2.1. $\square$

Der Riemannsche Hebbarkeitssatz gilt nur im Komplexen! In der reellen Analysis ist nicht jede differenzierbare beschränkte Funktion mit Definitionslücke als differenzierbare Funktion fortsetzbar, wie das nächste Beispiel zeigt.

Beispiel. Wir betrachten die Vorzeichenfunktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die Funktion f hat in $x_0 = 0$ eine isolierte Singularität, ist auf ganz $\mathbb{R}$ bis auf x_0 differenzierbar und in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ beschränkt. Trotzdem lässt sich f nicht stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, da die Funktion im Nullpunkt springt. Im Komplexen müsste die Funktion nach dem Hebbarkeitssatz [2.1](#) in x_0 eine hebbare Singularität haben, also stetig und sogar differenzierbar in den Nullpunkt fortsetzbar sein.

2.2 Polstellen

Nachdem wir nun die erste Möglichkeit einer Singularität kennengelernt haben, stellt sich die Frage, wodurch sich die beiden anderen Arten auszeichnen. Wir schneiden in diesem Abschnitt die zweite Art von Singularitäten - Polstellen - nur kurz an, um später wesentliche Singularitäten definieren zu können. Polstellen und spannende Sätze, mit denen man Polstellen analysieren kann, behandeln wir dann sehr ausführlich im dritten Kapitel "[Der Residuensatz](#)".

Definition (Polstelle). Sei $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f hat eine *Polstelle in z_0* , falls gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

Anders gesagt hat f eine Polstelle bzw. einen Pol in z_0 , falls der Betrag der Funktionswerte von f nahe z_0 unendlich groß wird, also unbeschränkt ist. Im ersten Beispiel des Abschnitts hat die Funktion $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{1}{z}$ in $z_0 = 0$ eine Polstelle, denn je näher z an z_0 kommt, desto größer wird der Betrag der Funktionswerte.

2.3 Wesentliche Singularitäten

Da wir nun die ersten beiden Arten von Singularitäten kennen, fällt es uns leicht, die noch fehlende Art der Definitionslücken - wesentliche Singularitäten - zu definieren.

Definition (wesentliche Singularität). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und die Funktion $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine *wesentliche Singularität in z_0* , falls z_0 weder eine hebbare Singularität noch Polstelle von f ist.

Die im Beispiel zu Beginn des Kapitels genannte Funktion $h(z) = \exp(\frac{1}{z})$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Nähert sich z von rechts kommend an z_0 , wird h unendlich groß, von links kommend geht die Funktion gegen 0. Sie ist also weder holomorph in den Nullpunkt fortsetzbar noch geht der Betrag von allen Funktionswerten gegen unendlich, somit muss z_0 eine wesentliche Singularität sein.

Während holomorphe Funktionen sich in der Nähe von Polstellen oder hebbaren Singularitäten recht übersichtlich verhalten, ist das Verhalten von holomorphen Funktionen nahe einer wesentlichen Singularität unregelmäßiger, was im nächsten Satz ersichtlich wird - unserem zweiten großen Ergebnis. Davor machen wir aber noch einen kurzen Exkurs in die Topologie und die Dichte von Mengen nach Ballmann [2].

Definition (Dichte Menge). Eine Menge $C \subseteq \mathbb{C}$ liegt *dicht* in $\mathbb{C}$, falls jede Umgebung $U(z) \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ mindestens einen Punkt von C enthält.

In anderen Worten liegt eine Teilmenge dann dicht in einem Raum, wenn wir jeden Punkt des Gesamtraumes beliebig genau durch einen Punkt aus der Teilmenge annähern können. Mithilfe dieser Definition können wir nun den Satz von Casorati-Weierstraß formulieren:

Theorem 2.2 (Satz von Casorati-Weierstraß). Sei $f : \dot{U}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion f hat genau dann eine wesentliche Singularität in z_0 , falls in jeder Umgebung $\dot{U}(z_0)$ das Bild von f dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Beweis. Nehmen wir an, dass das Bild von f nicht dicht in $\mathbb{C}$ liege, dann existieren ein $w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, sodass für alle $z \in \dot{U}(z_0)$ gilt

$$|f(z) - w| > \varepsilon.$$

Somit können wir auf $\dot{U}(z_0)$ die Funktion g mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

definieren, die auf $\dot{U}(z_0)$ holomorph und mit $\frac{1}{\varepsilon}$ beschränkt ist. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz [2.1](#) hat g in z_0 eine hebbare Singularität.

Da wir f als

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

schreiben können, gilt für

- $g(z_0) \neq 0$: f hat in z_0 eine hebbare Singularität,
- $g(z_0) = 0$: f hat in z_0 eine Polstelle.

Somit kann f in diesem Fall keine wesentliche Singularität haben, was die Aussage beweist. $\square$

In anderen Worten sagt uns der Satz von Casorati-Weierstraß, dass man eine komplexe Zahl in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität durch die umliegenden Funktionswerte beliebig genau annähern kann.

3 Der Residuensatz

Wir kennen nun die Eigenschaften von Funktionen nahe hebbarer und wesentlicher Singularitäten - um diese Arbeit abzurunden, werden wir nun, wie bereits angekündigt, Polstellen sehr ausführlich untersuchen. Wir werden schnell sehen, dass Polstellen die “schönsten” Singularitäten sind, da man daraus viele nützliche Sätze und Anwendungen herleiten kann, welchen wir uns im Rest dieser Arbeit widmen werden. Wir referenzieren in diesem Abschnitt Stein-Shakarchi [6] sowie Fischer-Lieb [4].

3.1 Nullstellen und Pole

Wir starten augenscheinlich banal mit der Definition einer komplexen Nullstelle und überraschenden Eigenschaften von holomorphen Funktionen nahe diesen. Die Definition einer komplexen Nullstelle unterscheidet sich nicht von jener im Reellen.

Definition (Nullstelle). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir sagen f hat eine *Nullstelle* bei z_0 , falls $f(z_0) = 0$.

Bei nichttrivialen holomorphen Funktionen sind Nullstellen isoliert, das heißt, falls f holomorph auf U ist und $f(z_0) = 0$ für einige $z_0 \in U$, dann existiert eine Umgebung $U(z_0)$, sodass für alle z innerhalb der entsprechenden punktierten Umgebung $\dot{U}(z_0)$

$$f(z) \neq 0$$

gilt. In anderen Worten dürfen Nullstellen nicht beliebig nahe nebeneinander liegen.

Wir können nun die Eigenschaften von Funktionen nahe einer Nullstelle untersuchen:

Lemma 3.1. *Sei f holomorph auf U mit einer Nullstelle in $z_0 \in U$ und f nicht-verschwindend. Dann existiert eine Umgebung $U(z_0) \subset U$, eine nicht-verschwindende Funktion $g : U(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit:*

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad \forall z \in U(z_0).$$

Beweis. Wir betrachten eine kleine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 . Die Funktion f hat dort die Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Da $f(z) \neq 0$ nahe z_0 , gibt es ein kleinstes $n \in \mathbb{N}$, sodass der Koeffizient $a_n \neq 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^n \underbrace{[a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots]}_{:=g(z)} = (z - z_0)^n g(z). \end{aligned}$$

Die Funktion g ist holomorph und $g(z) \neq 0$ nahe z_0 . Um nun noch die Eindeutigkeit von n zu beweisen, nehmen wir an, es gelte:

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

mit $h(z) \neq 0$. Wählen wir nun $m > n$, erhalten wir durch Division

$$g(z) = (z - z_0)^{m-n} h(z)$$

und das ergibt $g(z_0) = 0$ ($z \rightarrow z_0$), einen Widerspruch zu $f(z_0) = 0$. Bei $m < n$ gilt Gleiches für $h(z_0) = 0$ und somit muss $m = n$ und $g = h$ gelten, und auch die Eindeutigkeit ist bewiesen. $\square$

Der Satz sagt anders formuliert aus, dass jede holomorphe Funktion bei einer Nullstelle immer nur so stark wächst wie ein Polynom verschwindet. Die Funktion f hat in diesem Fall eine n -fache Nullstelle bei z_0 bzw. hat die Nullstelle die Vielfachheit n . Die folgende Definition erklärt, was das bedeutet.

Definition (Vielfachheit einer Nullstelle). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer Nullstelle $z_0 \in C$. Die *Vielfachheit* der Nullstelle gibt an, wie oft die Funktion in z_0 differenzierbar ist, bis sie ganz verschwindet, also bis $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Eine Nullstelle mit Vielfachheit 1 heißt *einfache Nullstelle*.

Sehen wir uns nun ein ähnliches Lemma an, welches für Polstellen gilt. Um dieses einfacher beweisen zu können, formulieren wir zunächst einen Zusammenhang zwischen Null- und Polstellen, bei welchem wir auf einen Beweis verzichten.

Lemma 3.2. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einer Umgebung $\dot{U}(z_0)$. Die Funktion f hat genau dann eine Polstelle in $z_0 \in U$, wenn die Funktion $\frac{1}{f}$ in z_0 eine Nullstelle hat und dort holomorph ist.

Lemma 3.3. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf eine Polstelle $z_0 \in U$. Dann existiert in einer Umgebung $U(z_0) \subset U$ eine nicht-verschwindende Funktion $h : U(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit:

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z).$$

Beweis. Nach den Lemmata [3.1](#) und [3.2](#) gilt:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \cdot g(z),$$

wobei g holomorph und nicht verschwindend in $U(z_0)$ ist. Mit $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ erhalten wir

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{h(z)}$$

und durch Umformen der letzten Gleichung ist das Lemma bereits bewiesen. $\square$

Dieses Lemma sagt nun aus, dass jede holomorphe Funktion bei einer Polstelle immer nur so stark wie ein Polynom verschwindet. Die Funktion f hat in diesem Fall eine n -fache Polstelle bei z_0 bzw. hat die Polstelle die Ordnung n .

Definition (Ordnung einer Polstelle). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf eine Polstelle $z_0 \in U$. Die *Ordnung* der Polstelle gibt an, wie schnell die Funktionswerte nahe z_0 wachsen. Eine Polstelle mit Ordnung 1 heißt *einfache Polstelle*.

Durch den nächsten Satz werden wir den Begriff des Residuums kennenlernen. Dieser Begriff wird uns später zum Residuensatz, einem essentiellen Satz über die Eigenschaften von Polen, bringen.

Lemma 3.4. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit n -facher Polstelle in $z_0 \in U$, dann gilt:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z), \quad (3.1)$$

wobei G eine holomorphe Funktion in einer Umgebung $U(z_0)$ ist.

Beweis. Der Beweis folgt aus dem vorherigen Lemma. Die Potenzreihenentwicklung der Funktion h ist gegeben durch

$$h(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Somit ergibt sich durch Lemma [3.1](#) und nach Umbenennen der Koeffizienten im letzten Schritt die zu beweisende Formel:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{h(z)}{(z - z_0)^n} \\ &= \frac{b_0}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{b_2}{(z - z_0)^{n-2}} + \dots \\ &= \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + G(z). \end{aligned}$$

$\square$

3.2 Residuen

Die Formel (3.1) aus dem letzten Lemma des vorherigen Abschnittes wird auch *Hauptteil* der Funktion f bei einer Polstelle z_0 genannt. Viel wichtiger als das ist jedoch das bereits angekündigte Residuum, welches in dieser Formel dem Koeffizienten a_{-1} entspricht und wir folgendermaßen definieren:

Definition (Residuum). Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine bis auf isolierte Singularitäten holomorphe Funktion und γ ein beliebiger Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in U$. Dann nennen wir

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z_0) dz_0$$

das *Residuum* von f in z_0 .

Der Ausdruck $f(z_0)$ in der vorherigen Definition entspricht dem vorher benannten Hauptteil von f aus Formel (3.1).

Mithilfe der Formel für das Residuum können wir später in vielen Fällen die Berechnung von Kurvenintegralen vereinfachen. Sehen wir uns also an, wie wir das Residuum, in Abhängigkeit von der Ordnung der Polstelle, relativ einfach berechnen können.

Proposition 3.5 (Berechnen von Residuen). *Sei die Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf ihre isolierten Singularitäten.*

(i). *Hat f eine einfache Polstelle in z_0 , so gilt für das Residuum*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

(ii). *Hat f eine Polstelle n -ter Ordnung in z_0 , so gilt für das Residuum*

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z).$$

Beweis. (i). Nach Lemma 3.4 und mit $n = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z) \\ (z - z_0)f(z) &= a_{-1} + G(z)(z - z_0) \end{aligned}$$

Durch Bilden des Grenzwertes kommen wir schnell auf das Residuum:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

(ii). Nach Lemma 3.4 und geschicktem Erweitern gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (z - z_0)^n f(z) &= \\ \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} (a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + G(z)(z - z_0)^n) \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzwert $z \rightarrow z_0$ hat dieser den Wert $a_{-1}(n-1)!$ und die Proposition ist bewiesen. $\square$

Beispiel. Die komplexen Funktionen f, g und h sind jeweils holomorph bis auf ihre isolierten Singularitäten und wir berechnen die Residuen an genau diesen Stellen z_0 .

(i). $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z - z_0}$

$$\text{res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} (z - z_0) = 1$$

(ii). $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, g(z) = \frac{1}{z^3}, z_0 = 0$

$$\text{res}_0(g) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3} (z - 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} = 0$$

(iii). $h : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}, h(z) = \frac{1}{z^4 - 1}, z_0 = i$

$$\begin{aligned} \text{res}_i(h) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^4 - i^4} (z - i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{(z^2 + i^2)(z^2 - i^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cancel{z - i}}{(z^2 + i^2)(\cancel{z + i})} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^3 + iz^2 + i^2z + i^3} = \frac{1}{4i^3} = \frac{i}{4} \end{aligned}$$

3.3 Der Residuensatz

Hier folgt der dritte sehr wichtige Satz, der mit isolierten Singularitäten zu tun hat - der Residuensatz. Er sagt aus, dass wir Kurvenintegrale rein durch die Ermittlung der Residuen der dazugehörigen Funktion berechnen können. Bevor wir dieses großartige Ergebnis für beliebige Kurven und mehrere Polstellen beweisen können, starten wir mit zwei Lemmata, bei welchen zunächst über einen Kreis und nur eine Polstelle integriert wird. Somit wird der Beweis des Residuensatz selbst nicht mehr aufwändig sein.

Lemma 3.6. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf eine Polstelle $z_0 \in U$ und

$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ ein Kreis, der z_0 beinhaltet. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0}(f).$$

Beweis. Wir wählen für den Beweis wie bereits beim Hebbarkeitssatz 2.1 eine Modellkurve, diesmal in Form eines Schlüssellochs (Abbildung 8).

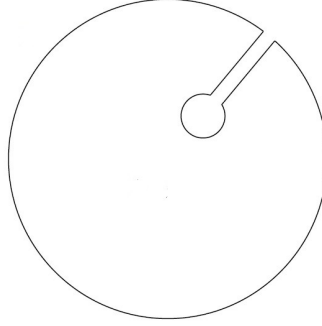


Abbildung 8: Die Schlüsselloch-Modellkurve 6

Die Polstelle z_0 ist der Mittelpunkt des kleinen Kreises $\gamma_{\varepsilon} : [0, 2\pi] \rightarrow U$, $\gamma_{\varepsilon}(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ und liegt somit außerhalb der Kurve. Lassen wir die Breite des Korridors nun beliebig klein werden, gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z) dz.$$

Nach der Cauchyschen Integralformel 1.14 gilt für die konstante Funktion $f(z) = a_{-1}$ an der Stelle z_0 :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{a_{-1}}{z - z_0} dz = a_{-1}$$

und für $n > 1$ gilt für die Ableitung

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} dz = 0.$$

Nach Lemma 3.4 gilt für f nahe z_0 auch

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z),$$

wobei g holomorph ist. Der Cauchysche Integralsatz 1.13 sagt uns dann, dass

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} G(z) dz = 0$$

und schließlich folgt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = a_{-1},$$

womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

Mit dem erfolgreichen Beweisen dieses Lemmas ist die meiste Arbeit für den Residuensatz getan - es folgen nur mehr die Verallgemeinerung auf mehrere Polstellen und beliebige Kurven.

Lemma 3.7. *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf die Polstellen $z_1, z_2, \dots, z_N \in U$ und sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ ein Kreis der $z_1, z_2, \dots, z_N$ beinhaltet. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k}(f).$$

Beweis. Im Gegensatz zum vorherigen Beweis verwenden wir hier eine Modellkurve mit mehreren Schlüssellochern, jeweils eines pro Polstelle, wie in Abbildung 9 dargestellt:

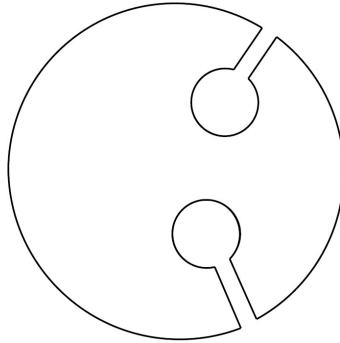


Abbildung 9: Die Mehrfachschlüsselloch-Modellkurve 6

Wir lassen nun jeden Korridor beliebig schmal werden und erhalten so im Grenzwert eine Äquivalenz zwischen dem Integral über dem großen Kreis und der Summe der Integrale über die kleinen Kreise. Somit ist das vorherige Lemma 3.6 anwendbar und wir sind fertig. $\square$

Jetzt haben wir alle notwendigen Vorschritte geschafft und können den schon oft genannten Residuensatz endlich formulieren.

Theorem 3.8 (Residuensatz). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph bis auf die Polstellen $z_1, z_2, \dots, z_N \in U$ und $\gamma : U \rightarrow U$ eine beliebige Kurve die $z_1, z_2, \dots, z_N$ beinhaltet. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{res}_{z_k}(f).$$

Beweis. Um diesen Satz zu beweisen, wählen wir ein passendes Schlüsselloch zur gegebenen Kurve, sodass der Sachverhalt, wie im Beweis von Lemma 3.7 auf kleine Kreise um die Polstellen herum vereinfacht werden kann. Durch Anwenden von Lemma 3.6 ist das Theorem so bewiesen. $\square$

4 Anwendungen des Residuensatzes

Wir widmen uns im letzten großen Kapitel dieser Arbeit nun den Anwendungen des Residuensatzes. Am praxisrelevantesten und eventuell sogar für die Schule interessant ist sicherlich die Berechnung von unendlichen reellen Integralen, welche mithilfe dieses Resultates möglich ist. Deshalb werden wir uns diese Anwendung vom Residuensatz zuerst anhand von mehreren Beispielen ansehen. Fachlich widmen wir uns später zwei weiteren spannenden Sätzen, mit welchen wir die Anzahl der Null- sowie Polstellen einer Funktion berechnen können, abschließend sehen wir uns einen anschaulichen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra an, welchen wir mithilfe des Residuensatzes und daraus folgenden Resultaten herleiten können. Inhaltlich halten wir uns in diesem Kapitel an Stein-Shakarchi [6], Bak-Newman [1] und Fischer-Lieb [4].

4.1 Berechnung von unendlichen reellen Integralen

Der Residuensatz macht es uns, wie bereits angekündigt, möglich, unendliche reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

zu berechnen. Die Grundidee und gleichzeitige Schwierigkeit besteht darin, f in die komplexe Ebene fortzusetzen und geeignete Kurven γ_R zu finden, sodass gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

Dann reicht es, die Residuen für die Polstellen von f auszurechnen um $\int_{\gamma_R} f(z) \, dz$ zu berechnen.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \pi.$$

Dazu betrachten wir die dazugehörige komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$ und wandeln sie geschickt um:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}.$$

Unser komplexes f hat die Polstellen i und $-i$, die Kurve γ_R wählen wir als Halbkreis mit Radius R in der oberen Halbebene, siehe Abbildung [10].

Wir berechnen nun das Residuum von f an der Polstelle i , da $i \in \gamma_R$, und

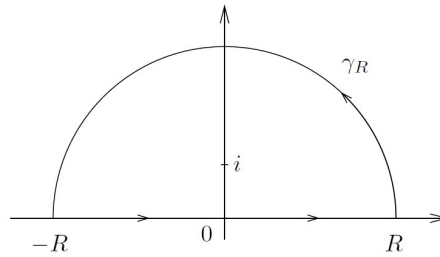


Abbildung 10: Die Modellkurve für unser Beispiel 6

erhalten

$$\operatorname{res}_i(f) = \lim_{z \rightarrow i} \cancel{(z-i)} \cdot \frac{1}{(z+i)\cancel{(z-i)}} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Für sehr große R gilt nach dem Residuensatz 3.8

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_i(f) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

In diesem Beispiel würden wir das gleiche Ergebnis erhalten, wenn wir einen Halbkreis in der unteren Halbebene von $\mathbb{C}$ und das Residuum der Polstelle $-i$ verwendet hätten.

Beispiel. Wir wollen zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Wir betrachten dazu wieder die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$ und schreiben sie gleich passend um:

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2} = \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2}.$$

Die Funktion f hat in i und $-i$ je eine zweifache Polstelle, wir betrachten wie im vorherigen Beispiel die obere Halbebene und verwenden wieder die Modellkurve aus Abbildung 10. Für das Residuum von f an der Polstelle i erhalten wir mit Satz 3.5

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i(f) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z-i)^2} \frac{z^2}{(z+i)^2 \cancel{(z-i)^2}} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z \cdot (z+i)^2 - z^2 \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cancel{2z^2} + 2zi - \cancel{2z^2}}{(z+i)^3} = \frac{2i^2}{(2i)^3} = \frac{2i^2}{8i^3} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

und für große R gilt nach dem Residuensatz [3.8](#)

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{res}_i(f) = \pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}.$$

Da nur $\int_0^\infty f(x) dx$ zu berechnen war, haben wir den Wert des Integrals im letzten Schritt halbiert. Auch hier wäre wieder die Integration über die untere Halbebene und die Polstelle $-i$ möglich gewesen.

4.2 Zählen von Null- und Polstellen

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit sehen wir uns nun, wie ebenfalls bereits angekündigt, Resultate an, welche sich mit der Anzahl von Null- und Polstellen komplexer Funktionen beschäftigen. Um die nächsten Sätze sinnvoll formulieren zu können, benötigen wir zunächst eine weitere Definition, nämlich die einer meromorphen Funktion.

Definition (meromorphe Funktion). Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, falls sie auf ganz U holomorph ist bis auf isolierte Polstellen $z_1, z_2, \dots, z_k \in U$.

Proposition 4.1 (Prinzip vom Argument). *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion und $\gamma : U \rightarrow U$ eine geschlossene Kurve, die die Null- und Polstellen von f nicht trifft. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathbb{N} - \mathbb{P},$$

wobei

$\mathbb{N} \dots$ Anzahl der Nullstellen von f innerhalb von γ

$\mathbb{P} \dots$ Anzahl der Polstellen von f innerhalb von γ

(mehrfache Null-/ Polstellen werden mehrfach gezählt).

Beweis. Der Quotient $\frac{f'}{f}$ ist holomorph bis auf die Null- und Polstellen von f . Wenn f eine n -fache Nullstelle in z_0 hat, gilt nach Lemma [3.1](#)

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z),$$

somit hat

$$\begin{aligned} f'(z) &= n \cdot (z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n \cdot g'(z) \\ &= (z - z_0)^{n-1} (n \cdot g(z) + (z - z_0) \cdot g'(z)) \end{aligned}$$

in z eine $n - 1$ -fache Nullstelle und für den Quotienten gilt:

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\cancel{(z-z_0)^{n-1}}(n \cdot g(z) + (z-z_0)g'(z))}{(z-z_0)\cancel{g(z)}} \\ &= \frac{n \cdot \cancel{g(z)}}{(z-z_0)\cancel{g(z)}} + \frac{\cancel{(z-z_0)}g'(z)}{\cancel{(z-z_0)}g(z)} = \frac{n}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.\end{aligned}$$

Nach der Definition des Residuums hat $\frac{f'}{f}$ eine einfache Polstelle mit Residuum n an jeder n -fachen Nullstelle von f . Wenn f eine n -fache Polstelle in z_0 hat, gilt wiederum nach Lemma [3.3](#)

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \cdot g(z)$$

und somit für den Quotienten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

also hat $\frac{f'}{f}$ nach Definition eine einfache Polstelle mit dem Residuum $-n$ an jeder Polstelle von f . Mit dem Residuensatz [3.8](#) folgt schließlich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} = \sum \operatorname{res} \left(\frac{f'}{f} \right) = \mathbb{N} - \mathbb{P},$$

was genau der Aussage des Satzes entspricht. $\square$

Wir können mithilfe des Prinzips vom Argument nun berechnen, wie viele Null- bzw. Polstellen eine Funktion besitzt. Sehen wir uns zur Veranschaulichung die Nullstellen einer Potenzfunktion an, bevor wir zu einem weiteren spannenden Resultat, dem Satz von Rouché, kommen.

Beispiel. Sei die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = z^n$, wobei n eine fixe natürliche Zahl ist, und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = e^{it}$. Wir wissen, dass f auf $\mathbb{C}$ keine Polstellen und eine n -fache Nullstelle hat, dies zeigen wir auch mithilfe von Proposition [4.1](#):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{nz^{n-1}}{z^n} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it} dt = \frac{n}{2\pi i} \cdot 2\pi i = n = \mathbb{N}$$

Theorem 4.2 (Satz von Rouché). *Seien die Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und der Kreis $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$. Falls für alle $z \in \gamma$*

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

dann gilt

$$\mathbb{Z}(f) = \mathbb{Z}(f + g),$$

also f und $f + g$ haben gleich viele Nullstellen (inklusive Vielfachheiten) innerhalb von γ .

Beweis. Wir definieren

$$f_t(z) = f(z) + t \cdot g(z) \quad \text{mit } t \in [0, 1].$$

Daraus ergibt sich $f_0 = f$ und $f_1 = f + g$. Wir bezeichnen weiters $\mathbb{N}_t$ die Anzahl der Nullstellen von f_t innerhalb von γ (inklusive Vielfachheiten), also muss $\mathbb{N}_t \in \mathbb{Z}$ sein. Nach Voraussetzung gilt $|f(z)| > |g(z)|$ für $z \in C$, also hat f_t keine Nullstelle am Kreis und nach dem Prinzip vom Argument [4.1](#) gilt

$$\mathbb{N}_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz.$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nun zeigen, dass $\mathbb{N}_t$ konstant ist. Wegen dem Zwischenwertsatz aus der reellen Analysis reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{N}_t$ stetig ist, denn wäre $\mathbb{N}_t$ nicht konstant, gäbe es nach dem Zwischenwertsatz ein $t_0 \in [0, 1]$ mit $n_{t_0} \notin \mathbb{Z}$, was laut Voraussetzung nicht sein darf. z.z.: $\mathbb{N}_t$ ist stetig. Der Quotient $\frac{f'_t(z)}{f_t(z)}$ ist in $t \in [0, 1]$ stetig, weil f und f' stetig sind und $f_t \neq 0$ nach Annahme. Daraus folgt, dass $\mathbb{N}_t$ ganzzahlig und stetig ist und somit konstant, woraus wiederum folgt, dass $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_1$. Dies ist genau die Aussage des Theorems, womit dieses bewiesen ist. $\square$

Mithilfe des Satzes von Rouché können wir recht schnell die Lage von Nullstellen holomorpher Funktionen abschätzen.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^5 + 4z + 2$.

Wir wissen nach dem Fundamentalsatz der Algebra, dass f , ein Polynom fünften Grades, im Komplexen fünf Nullstellen hat. Es gibt jedoch kein Verfahren, diese exakt zu berechnen. Der Satz von Rouché [4.2](#) hilft uns abzuschätzen, wo die Nullstellen von f liegen. Dazu teilen wir die Funktion f geschickt in zwei Funktionen mit $f = f_1 + f_2$ auf und wählen eine Kurve γ so, dass dort

$$|f_1(z)| < |f_2(z)|,$$

gilt. Weiters müssen wir wissen, wie viele Nullstellen f_1 im Inneren von γ hat. In diesem Beispiel wählen wir zwei Vergleichsfunktionen:

- (i). Für $|z| = 2$ ist der Term z^5 in unserem Polynom am größten, daher teilen

wir f in $f_1(z) = z^5$ und $f_2(z) = 4z + 2$ und erhalten

$$|f_1(z)| = |z^5| = 32$$

$$|f_2(z)| = |4z + 2| \leq 4|z| + 2 = 10.$$

Wählen wir für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ den Kreis $\gamma(t) = 2e^{it}$, gilt $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ und somit nach dem Satz von Rouché [4.2](#), dass f innerhalb des Kreises γ gleich viele Nullstellen hat wie f_2 , in diesem Fall fünf. Wir wissen also, dass alle Nullstellen von f kleiner als der Betrag von 2 sind.

- (ii). Um die Nullstellen nun genauer abschätzen zu können, wählen wir $|z|$ kleiner, nämlich $|z| < 1$. Für diesen Wert ist der Term $4z$ in f am größten, also setzen wir $f_1(z) = 4z$ und $f_2(z) = z^5 + 2$ und erhalten für die jeweiligen Beträge

$$|f_1(z)| = |4z| = 4$$

$$|f_2(z)| = |z^5 + 2| = |z^5| + 2 = 3.$$

Wir wählen $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ und da $|f_1(z)| > |f_2(z)|$ hat f wieder gleich viele Nullstellen wie f_1 , in diesem Fall eine.

Diese beiden einfachen Rechnungen sagen uns, dass eine Nullstelle von f betragsmäßig kleiner als 1 ist und dass sich der Betrag der anderen vier Nullstellen zwischen 1 und 2 befindet. Würden wir weitere Kurven γ wählen, könnten wir diese Abschätzung noch verbessern.

Eine weitere spannende Anwendung des Satzes von Rouché ist ein Beweis des berühmten Fundamentalsatzes der Algebra, welcher sehr ähnlich zum vorherigen Beispiel ist und dementsprechend sehr kurz gehalten werden kann. Dieser Beweis markiert den krönenden Abschluss dieser Arbeit, indem er schön zeigt, wie die komplexe Analysis mit der Algebra zusammenhängt.

Theorem 4.3 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante komplexe Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass p ein Polynom n -ter Ordnung mit Leitkoeffizient 1 ist:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

Wir wählen nun zwei Funktionen f und g so, dass $f + g = p$.

$$f(z) = z^n, \quad g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

Auf jeder geschlossenen Kurve γ gilt für genügend große R nach Lemma [1.1](#)

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + |a_{n-2}| \cdot |z|^{n-2} + \dots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \\ &\leq k \cdot R^{n-1} < R^n = |f(z)| \end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{C}$ konstant. Nach dem Satz von Rouché [4.2](#) folgt schließlich

$$\mathbb{N}(p) = \mathbb{N}(f + g) = \mathbb{N}(f) = n$$

□

Der Beweis zeigt sogar, dass jedes nicht konstante Polynom n -ten Grades n Nullstellen hat, wobei hier wieder die Vielfachheit mitgezählt wird.

Literatur

- [1] J. Bak und D.J. Newman. *Complex Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2010. URL: <https://books.google.at/books?id=MKPe1Q9k-nAC>.
- [2] W. Ballmann. *Einführung in die Geometrie und Topologie*. Mathematik Kompakt. Springer Basel, 2018. URL: <https://books.google.at/books?id=q-BeDwAAQBAJ>.
- [3] W. Fischer und I. Lieb. *Einführung in die Komplexe Analysis: Elemente der Funktionentheorie*. Bachelorkurs Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2011. URL: <https://books.google.at/books?id=PEnfNk7R6K8C>.
- [4] W. Fischer und I. Lieb. *Funktionentheorie: Komplexe Analysis in einer Veränderlichen*. vieweg studium; Aufbaukurs Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2005. URL: <https://books.google.at/books?id=Fo8PdY1Tv3AC>.
- [5] E. Freitag und R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013. URL: <https://books.google.at/books?id=JgmpBgAAQBAJ>.
- [6] E.M. Stein und R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003. URL: <https://books.google.at/books?id=esrTQgAACAAJ>.

Abbildungsverzeichnis

1	Die komplexe Ebene [6]	2
2	Die Polardarstellung einer komplexen Zahl [6]	5
3	Das Dreieck $T^{(0)}$ und seine Teilung [6]	18
4	Die Kurve γ_z [6]	20
5	Die zu integrierenden Kurven γ_z und γ_{z+h} [6]	21
6	Die verwendete Modellkurve $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ [6]	23
7	Die verwendete Modellkurve für unseren Beweis [6]	25
8	Die Schlüsselloch-Modellkurve [6]	34
9	Die Mehrfachschlüsselloch-Modellkurve [6]	35
10	Die Modellkurve für unser Beispiel [6]	38