

MASTERARBEIT | MASTER'S THESIS

Titel | Title

Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden im
Unterricht der Sekundarstufe 1 und 2

verfasst von | submitted by

Dr.rer.nat. Egbert Althammer BEd

angestrebter akademischer Grad | in partial fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Education (MEd)

Wien | Vienna, 2024

Studienkennzahl lt. Studienblatt | Degree
programme code as it appears on the
student record sheet:

UA 199 514 520 02

Studienrichtung lt. Studienblatt | Degree
programme as it appears on the student
record sheet:

Masterstudium Lehramt Sek (AB) Unterrichtsfach
Informatik Unterrichtsfach Mathematik

Betreut von | Supervisor:

Univ.-Prof. Mag. Dr. Johann Humenberger

Kurzfassung

Das Thema Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden ist ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts sowohl in der Sekundarstufe 1 als auch in der Sekundarstufe 2. Es verbindet die Analysis und die Geometrie, zwei große Bereiche der Mathematik, sowie die elementare und höhere Mathematik und hat eine hohe Komplexität, z.B. weil die Beweise teilweise die Integralrechnung in mehreren Dimensionen voraussetzen. Diese Arbeit widmet sich diesem Thema und hat zum Ziel, den Ist-Zustand für die Unterrichtssituation zu erheben sowie Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation aufzuzeigen.

Dies geschieht durch die Beschreibung der vorhandenen Methoden, Sätze, geometrischen, elementaren und analytischen Beweise und anschaulichen Darstellungen betreffend die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden, die Darstellung zum Lehrplanbezug, eine Zusammenstellung der konkreten Ausführung im Unterricht anhand einer ausgewählten Sammlung von aktuellen Schulbuchreihen und die Gegenüberstellung der drei genannten Punkte.

Die beiden Hauptergebnisse dieser Arbeit sind die Vorstellung eines neuen, elementaren Beweises für die Volumenformel eines Drehkegels bzw. einer Pyramide, der sich ausschließlich auf den Satz von Cavalieri sowie elementare Überlegungen stützt, sowie das Aufzeigen von Verbesserungspotentialen für die Unterrichtssituation auf der Basis des Ist-Zustandes.

Abstract

The topic of volume calculation of circular cones and pyramids is an important part of mathematics lessons in both secondary level 1 and secondary level 2. It combines the analysis and the geometry, two major areas of mathematics, as well as the elementary and higher mathematics and is highly complex, e.g. because the proofs sometimes require integral calculus in several dimensions. This thesis is dedicated to this topic and aims to assess the current teaching situation and to identify potential for improvement for the teaching situation.

This is done by describing the existing methods, the theorems, the geometric, elementary and analytical proofs and the illustrative representations concerning the volume calculation of circular cones and pyramids, by presenting the curriculum reference, by compiling the concrete implementation in the classroom based on a selected collection of current schoolbook series and by comparing the three points mentioned.

The two main results of this thesis are the presentation of a new, elementary proof for the volume formula of a circular cone or a pyramid, which is based exclusively on Cavalieri's theorem and elementary considerations, as well as the identification of potential for improvement for the teaching situation based on the current situation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Motivation und Überblick	7
1.2	Forschungsfrage	8
1.3	Ziel und Zweck	8
1.4	Abgrenzung.....	8
1.5	Inhalt	9
2	Hauptteil.....	10
2.1	Mathematische Grundlagen	10
2.1.1	Definitionen	10
2.1.1.1	Drehzylinder.....	10
2.1.1.2	Prisma.....	11
2.1.1.3	Drehkegel.....	12
2.1.1.4	Pyramide.....	13
2.1.2	Volumenformeln	14
2.1.2.1	Drehzylinder.....	14
2.1.2.2	Prisma.....	14
2.1.2.3	Drehkegel.....	14
2.1.2.4	Pyramide.....	14
2.2	Geschichte der Volumenberechnung	15
2.2.1	Guldinsche Regel für das Volumen	15
2.2.2	Indivisiblenrechnung nach Cavalieri	17
2.3	Grundlegende Sätze	23
2.3.1	Satz von Fubini	23
2.3.2	Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge	24
2.4	Beweise der Volumenformel.....	24
2.4.1	Geometrische Beweise	24
2.4.1.1	Erster geometrischer Beweis für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide	25
2.4.1.2	Zweiter geometrischer Beweis für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide	25
2.4.2	Elementare Beweise	26
2.4.2.1	Neuer, elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels	26
2.4.2.2	Neuer elementarer Beweis für die Volumenformel einer Pyramide.....	33
2.4.2.3	Elementare Plausibilitätsbetrachtung für die Volumenformel einer rechteckigen Pyramide	39
2.4.2.4	Elementarer Beweis für die Volumenformel einer rechteckigen Pyramide.....	41

2.4.2.5	Elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels bzw. einer Pyramide	41
2.4.3	Analytische Beweise	42
2.4.3.1	Analytischer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels	42
2.4.3.2	Analytischer Beweis für die Volumenformel einer Pyramide	43
2.5	Anschauliche Darstellungen	44
2.5.1	Ein Würfel setzt sich aus drei quadratischen Pyramiden zusammen	44
2.5.2	Umgießen von Wasser aus einer Form eines Drehkegels in eine Form eines Drehzylinders	45
2.6	Umsetzung in der Schule	47
2.6.1	Lehrplan der Sekundarstufe 1	47
2.6.1.1	1. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper	47
2.6.1.2	2. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper	47
2.6.1.3	3. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper	47
2.6.1.4	4. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper	48
2.6.2	Lehrplan der Sekundarstufe 2	48
2.6.2.1	8. Klasse – Kompetenzmodul 7	48
2.6.3	Exzerpt von aktuellen Schulbuchreihen	49
2.6.3.1	Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“	49
2.6.3.1.1	1. Klasse	49
2.6.3.1.2	3. Klasse	50
2.6.3.1.3	4. Klasse	53
2.6.3.1.4	8. Klasse	55
2.6.3.2	Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“	57
2.6.3.2.1	1. Klasse	57
2.6.3.2.2	3. Klasse	58
2.6.3.2.3	4. Klasse	60
2.6.3.3	Schulbuchreihe „Lösungswege“	62
2.6.3.3.1	8. Klasse	62
2.6.4	Qualitativer Vergleich der drei Schulbuchreihen	64
2.6.4.1	Lehrplanbezug	64
2.6.4.2	Lernziele	65
2.6.4.3	Definitionen und Sätze	65
2.6.4.4	Veranschaulichung	65
2.6.4.5	Übungsaufgaben	65
2.6.4.6	Technologie	66
2.6.4.7	Zusammenfassung	66

2.6.5	Praktische Umsetzung im Unterricht – Mathematisches Projekt.....	66
2.6.5.1	Motivation.....	66
2.6.5.2	Didaktischer Rahmen	67
2.6.5.3	Einbettung im Unterricht.....	68
2.6.5.4	Planung.....	68
2.6.5.4.1	Aufgabe 1 – Prinzip von Cavalieri	68
2.6.5.4.2	Aufgabe 2 – Volumen von Kegeln, Kugeln und Zylindern.....	69
2.6.5.4.3	Aufgabe 3 – Volumen von Pyramiden	69
2.6.5.4.4	Reflexionsfragen	70
2.6.5.5	Ablauf.....	70
2.6.5.6	Protokoll zum Herunterladen	71
2.6.5.7	Ergebnisse	72
2.6.5.7.1	Erstes ausgewähltes Protokoll der Schülerinnen und Schüler.....	72
2.6.5.7.2	Zweites ausgewähltes Protokoll der Schülerinnen und Schüler.....	76
2.6.5.8	Zusammenfassung.....	79
2.7	Ist-Zustand für die Unterrichtssituation	79
2.8	Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation.....	82
2.8.1	Durchführung der Volumenberechnung.....	82
2.8.2	Beweisen der Volumenberechnung.....	82
2.8.3	Veranschaulichung der Volumenberechnung	83
2.8.4	Zusammenfassung.....	84
3	Schluss	85
3.1	Beantwortung der Forschungsfrage	85
3.2	Zusammenfassung.....	85
3.3	Ausblick.....	86
	Abbildungsverzeichnis.....	87
	Tabellenverzeichnis.....	87
	Literaturverzeichnis	88

1 Einleitung

1.1 Motivation und Überblick

Angeregt durch persönliches Interesse am Thema Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden, hervorgerufen durch meine Begeisterung für die Mathematik und fasziniert durch den Faktor $\frac{1}{3}$, der in den entsprechenden Formeln vorkommt und der in Beziehung zum Faktor $\frac{1}{2}$ gesetzt werden kann, der in den Formeln für die entsprechenden ebenen geometrischen Flächen, z.B. dem Dreieck, vorkommt, habe ich mich während des jetzigen Studiums näher mit dieser Materie beschäftigt, sowohl im Rahmen der Unterrichtspraxis, als auch bei den Vorlesungen und Übungen.

Von diesen Tätigkeiten greife ich in dieser Arbeit zwei Aspekte heraus. Erstens habe ich einen neuen, elementaren Beweis auf der Basis des Satzes von Cavalieri entdeckt, der möglicherweise im schulischen bzw. universitären Kontext eingesetzt werden kann, und zweitens habe ich im Rahmen der Unterrichtspraxis ein praxisorientiertes mathematisches Projekt zum Thema Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden an einer Schule durchgeführt. Die Ausführungen zum ersten Punkt finden sich in den Kapiteln 2.4.2.1 und 2.4.2.2, und eine Beschreibung des zweiten Punktes finden sich im Kapitel 2.6.5.

Darüber hinaus habe ich mich mit der Geschichte der Mathematik zu diesem Thema beschäftigt. Auch hier sind zwei relevante Aspekte in dieser Arbeit dabei. Der erste ist die Guldinsche Regel für das Volumen, die im aktuellen schulischen bzw. universitären Kontext nicht gelehrt wird, und der zweite ist der Satz von Cavalieri, wobei hier schnell klar wird, warum dieser Satz im Unterricht nur erwähnt und nicht bewiesen wird, weil die entsprechenden Ausführungen sehr aufwändig sind. Die Behandlung der beiden Punkte findet sich im Kapitel 2.2.

Als weiteren Punkt ist mir wichtig zu betonen, wie groß die Unterschiede in der Komplexität der Volumenberechnung in Bezug auf die Flächenberechnung sind. Allein schon die Frage, wie sich das Volumen bei Streckung eines Körpers ändert, dessen Kanten nicht rechtwinklig aufeinander stehen, z.B. eines Drehkegels, ist mathematisch nicht trivial zu beantworten. Dagegen lässt sich das Verhältnis der Flächeninhalte bei ähnlichen Dreiecken durch einfachste elementare Betrachtungen berechnen. Die Überlegungen zu diesem Thema finden sich im Kapitel 2.4.2.3.

Da das Thema Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden ein wichtiger Bestandteil des Mathematikunterrichts sowohl in der Sekundarstufe 1 als auch in der Sekundarstufe 2 ist, nimmt dieser Aspekt eine zentrale Rolle in dieser Arbeit ein. Dieses Thema ist sehr wertvoll, da es praxisnahe ist, die Analysis und die Geometrie, zwei große Bereiche der Mathematik, sowie die elementare und höhere Mathematik verbindet und eine hohe Komplexität hat, z.B. weil die Beweise teilweise die Integralrechnung in mehreren Dimensionen voraussetzen und daher erst in der Sekundarstufe 2 durchgeführt werden können. Für mich stellt sich daher die Frage, ob es insbesondere in der Sekundarstufe 1 Verbesserungspotentiale zum Ist-Zustand für die Unterrichtssituation gibt. Um diese Frage zu beantworten, sollen die relevanten mathematischen Ergebnisse für dieses Thema den aktuellen Unterrichtsmaterialien gegenübergestellt werden. Diese Ausführungen finden sich in den Kapiteln 2.7 und 2.8.

Es sollen auch Ergebnisse der höheren Mathematik in diese Arbeit einfließen. Das sind die grundlegenden Sätze für die Volumenberechnung wie z.B. der Satz von Fubini. Die Ausführungen dazu finden sich im Kapitel 2.3.

Summa summarum sind diese genannten Punkte aus meiner Sicht Stoff genug für eine umfangreiche Arbeit, wie sie nun vorliegt.

An dieser Stelle komme ich nun zur Forschungsfrage, die dieser Arbeit zugrunde liegt, und die durch diese Arbeit beantwortet werden soll.

1.2 Forschungsfrage

Wie kann die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden im Unterricht der Sekundarstufen 1 und 2 auf verschiedenen Schulstufen durchgeführt, bewiesen und veranschaulicht werden?

1.3 Ziel und Zweck

Die Ziele dieser Arbeit sind die folgenden:

1. Erheben des Ist-Zustandes für die Unterrichtssituation durch
 - a. Beschreibung der vorhandenen Methoden, Sätze, Beweise und anschaulichen Darstellungen betreffend die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden
 - b. Darstellung des Bezugs zum aktuellen Lehrplan
 - c. Zusammenstellung der konkreten Ausführung im Unterricht anhand einer ausgewählten Sammlung von aktuellen Schulbuchreihen
 - d. Gegenüberstellung der drei genannten Punkte
2. Aufzeigen von Verbesserungspotentialen für die Unterrichtssituation unter Einbeziehung der oben genannten Forschungsfrage

Diese Arbeit richtet sich an eine vielfältige Leserschaft, wodurch der Zweck der Ausführungen dieser Arbeit mannigfaltig sein kann. Für den mathematisch Interessierten kann ein Zweck dieser Arbeit sein, das Wissen über dieses Thema zu vertiefen und zu festigen. Für den Unterrichtenden an einer Schule kann diese Arbeit Anregungen für die Verbesserung bzw. Präzisierung des Unterrichts geben, sowie mögliche Inhalte von vertiefenden mathematischen Projekten im Unterricht aufzeigen. Für die Studierenden an der Universität kann die Arbeit eine wertvolle Grundlage für die Prüfungsvorbereitung bzw. für eine Seminararbeit sein. Ein Unterrichtender an der Universität kann das eine oder andere Ergebnis dieser Arbeit durchaus in den mathematischen Vorlesungen, Übungen oder Seminaren einfließen lassen.

1.4 Abgrenzung

Diese Arbeit behandelt die geometrischen Körper Drehkegel und Pyramiden. Die Überlegungen, die in dieser Arbeit angestellt sind, richten sich hinsichtlich dieser beider Arten von geometrischen Körpern aus. Diese Überlegungen lassen sich teilweise auf schiefe Kegel, allgemeine Kegel und schiefe Pyramiden übertragen. An den relevanten Stellen in dieser Arbeit wird explizit auf diesen Umstand hingewiesen.

Die Arbeit behandelt keine allgemeinen Rotationskörper, wie z.B. die Kugel und den Torus. Für diese Art von geometrischen Körpern sind die Ergebnisse dieser Arbeit nicht relevant.

1.5 Inhalt

Der Hauptteil deckt die folgenden Bereiche ab:

1. Mathematische Grundlagen mit den Definitionen und Volumenformeln der behandelten geometrischen Körper, siehe Kapitel 2.1
2. Wichtige Aspekte aus der Geschichte der Volumenberechnung, siehe Kapitel 2.2
3. Grundlegende Sätze für die Volumenberechnung, siehe Kapitel 2.3
4. Geometrische, elementare und analytische Beweise der Volumenformel der behandelten geometrischen Körper, siehe Kapitel 2.4
5. Anschauliche Darstellungen für das Volumen der behandelten geometrischen Körper, siehe Kapitel 2.5
6. Umsetzung in der Schule mit dem Lehrplan, aktuellen Schulbuchreihen und einem Beispiel aus der eigenen Erfahrung, siehe Kapitel 2.6
7. Ist-Zustand für die Unterrichtssituation als Ergebnis der Gegenüberstellung der vorher erwähnten Aspekte, siehe Kapitel 2.7
8. Verbesserungspotentiale auf Basis des Ist-Zustandes für die Unterrichtssituation, siehe Kapitel 2.8

Der Schluss rundet die Arbeit mit der Beantwortung der Forschungsfrage, einer Zusammenfassung und einem Ausblick ab. Siehe dazu das Kapitel 3.

Die Abbildungen der geometrischen Körper sind mit GeoGebra erstellt.

2 Hauptteil

2.1 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen dieser Arbeit beschrieben. Diese bestehen aus den Definitionen und Volumenformeln der betrachteten geometrischen Körper Drehzylinder, Prisma, Drehkegel und Pyramide.

2.1.1 Definitionen

Die folgenden Definitionen für Drehzylinder, Prisma, Drehkegel und Pyramide beinhalten die für diese Arbeit notwendigen Begrifflichkeiten.

2.1.1.1 Drehzylinder

Definition: Ein Drehzylinder, oder auch Zylinder oder gerader Kreiszylinder genannt, ist eine Fläche, deren Punkte von einer festen Gerade, der Achse, denselben Abstand r haben. Da eine solche Fläche unendlich ausgedehnt ist, werden sie normalerweise mit zwei parallelen Ebenen der Distanz h beschnitten, sodass ein geometrischer Körper entsteht.

Für ein Beispiel eines Drehzylinders siehe Abbildung 2-1.

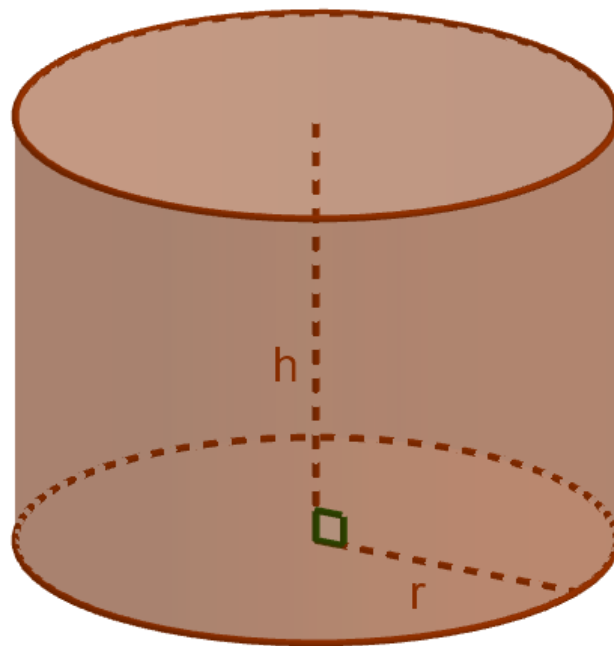


Abbildung 2-1 Drehzylinder

Sind die Schnittebenen senkrecht zur Achse, entsteht ein senkrechter (oder gerader) Kreiszylinder mit Radius r und Höhe h . Die Schnittflächen senkrecht zur Achse werden als Grundfläche bzw. Deckfläche bezeichnet. Beide Flächen sind Kreise, die zueinander kongruent und parallel sind.

Die Bezeichnung „Drehzylinder“ kommt daher, dass ein gerader Kreiszylinder auch als ein Körper, der durch Rotation einer zur Achse parallelen Strecke erzeugt wird, gedacht werden kann.

Durch Verschiebung der Deckfläche parallel zur Grundfläche entsteht ein schiefer Kreiszylinder. Ist die Grundfläche kein Kreis, wird von einem allgemeinen Zylinder gesprochen.

Als Alternative zur obigen Definition existiert die folgende Definition: ein Drehzylinder ist ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung eines Kreises entlang einer normal zu dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht. Steht die Gerade nicht normal auf die Ebene, entsteht ein schiefer Kreiszylinder. Diese Definition ist von der Definition eines Prismas abgeleitet, die im folgenden Kapitel beschrieben ist.

2.1.1.2 Prisma

Definition: Ein Prisma ist ein geometrischer Körper, der durch Parallelverschiebung eines ebenen Polygons entlang einer nicht in dieser Ebene liegenden Geraden im Raum entsteht.

Das gegebene Polygon wird als Grundfläche bezeichnet, die gegenüberliegende Seitenfläche als Deckfläche. Grundfläche und Deckfläche sind zueinander kongruent und parallel. Der Abstand zwischen Grundfläche und Deckfläche heißt Höhe h des Prismas.

Ist das Polygon regelmäßig, d. h. sind die Kanten gleich lang und liegen die Ecken auf einem Kreis, so heißt das Prisma regelmäßig. Erfolgt die Parallelverschiebung des Polygons senkrecht zur Grundfläche, wird von einem geraden Prisma gesprochen, ansonsten von einem schiefen Prisma.

Für ein Beispiel eines geraden quadratischen Prismas siehe Abbildung 2-2.

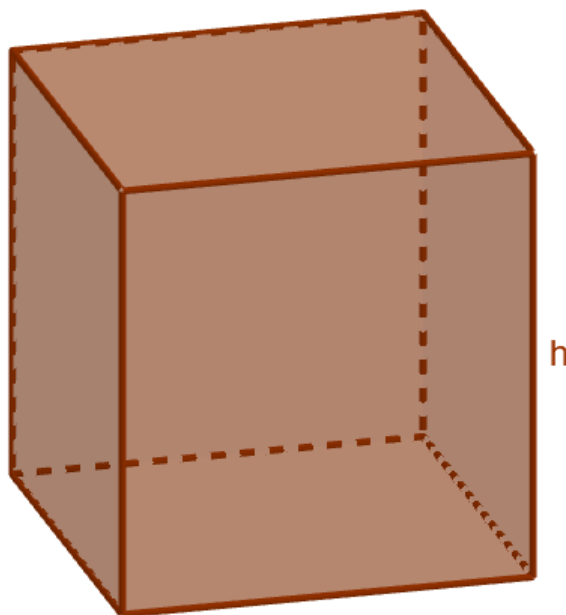


Abbildung 2-2 Gerades quadratisches Prisma

Für ein Beispiel eines geraden regelmäßigen fünfseitigen Prismas siehe Abbildung 2-3.

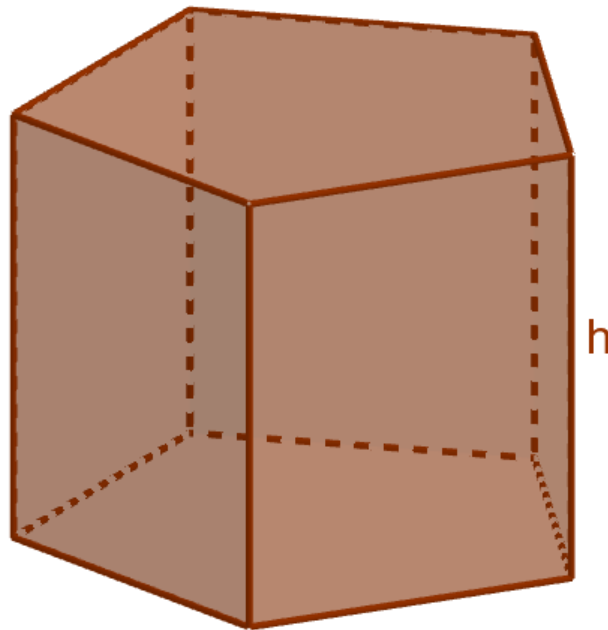


Abbildung 2-3 Gerades regelmäßiges fünfseitiges Prisma

2.1.1.3 Drehkegel

Definition: Ein Drehkegel, oder auch Kegel bzw. gerader Kreiskegel genannt, ist ein geometrischer Körper, der durch einen Kreis und einen Punkt, der auf der Normalen durch den Kreismittelpunkt außerhalb der Ebene dieses Kreises liegt und der mit den Punkten des Kreises geradlinig verbunden ist, entsteht. Der Kreis wird Grundkreis, der Punkt außerhalb des Kreises Spitze genannt.

Für ein Beispiel eines Drehkegels siehe Abbildung 2-4.

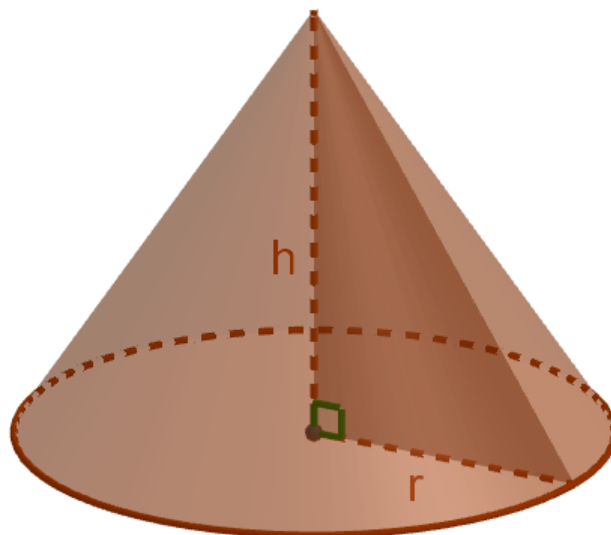


Abbildung 2-4 Drehkegel

Der Radius r des Kegels entspricht dem Radius des Grundkreises. Die Höhe h des Kegels ist der Abstand der Spitze vom Mittelpunkt des Grundkreises. Die Gerade durch den Mittel-

punkt des Grundkreises und die Spitze wird Achse des Kegels genannt. Sie steht bei einem Drehkegel senkrecht zum Grundkreis.

Die Bezeichnung „Drehkegel“ deutet darauf hin, dass es sich um einen Rotationskörper handelt. Er entsteht durch Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner beiden Katheten.

Steht die Achse nicht senkrecht zum Grundkreis, so wird von einem schiefen Kreiskegel gesprochen. Ist die Grundfläche kein Kreis, wird von einem allgemeinen Kegel gesprochen.

2.1.1.4 Pyramide

Definition: Eine Pyramide ist ein geometrischer Körper, dessen Kanten aus den Kanten eines ebenen Polygons, die Grundfläche genannt wird, und den Verbindungsstrecken der Ecken des Polygons mit einem außerhalb der Ebene der Grundfläche gelegenen Punkt, der Spitze der Pyramide genannt wird, bestehen. Der Kreis wird Grundkreis, der Punkt außerhalb des Kreises Spitze genannt.

Im bekanntesten Fall ist das Polygon ein Quadrat und die Spitze ein Punkt senkrecht über dem Mittelpunkt des Quadrates. In diesem Fall entsteht eine gerade quadratische Pyramide (siehe Abbildung 2-5).

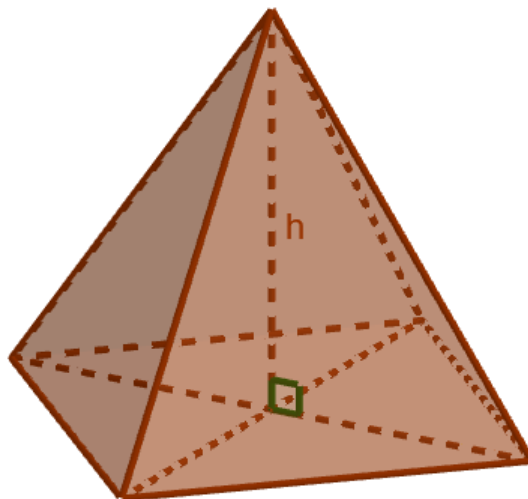


Abbildung 2-5 Gerade quadratische Pyramide

Ist das Polygon regelmäßig, d. h. sind die Kanten gleich lang und liegen die Ecken auf einem Kreis, so heißt die Pyramide regelmäßig. Ist der Lotfußpunkt der Spitze der Mittelpunkt des gedachten Kreises, so heißt die Pyramide gerade. Alle anderen regelmäßigen Pyramiden heißen schief. Für ein Beispiel einer geraden regelmäßigen fünfseitigen Pyramide siehe Abbildung 2-6.

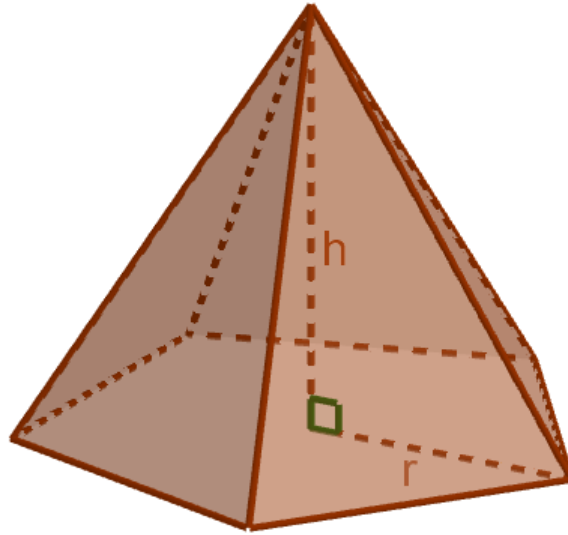


Abbildung 2-6 Gerade regelmäßige fünfseitige Pyramide

Eine Pyramide, deren Grundfläche ein allgemeines Polygon ist, das einen Umkreis hat, heißt dann gerade, wenn der Lotfußpunkt der Spitze mit dem Umkreismittelpunkt des Polygons zusammenfällt, sonst heißt die Pyramide schief. Für konvexe Polygone ohne Umkreis sowie konkave Polygone werden die Attribute „gerade“ bzw. „schief“ nicht verwendet.

2.1.2 Volumenformeln

Die Volumenformeln der betrachteten geometrischen Körper sind im Folgenden zusammengefasst.

2.1.2.1 Drehzylinder

Die Formel für das Volumen eines Drehzylinders Z mit dem Radius r und der Höhe h lautet:

$$V_Z = \pi r^2 h \quad (2-1)$$

2.1.2.2 Prisma

Die Formel für das Volumen eines Prismas P mit der Grundfläche G und der Höhe h lautet:

$$V_P = Gh \quad (2-2)$$

2.1.2.3 Drehkegel

Die Formel für das Volumen eines Drehkegels K mit dem Radius r und der Höhe h lautet:

$$V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (2-3)$$

2.1.2.4 Pyramide

Die Formel für das Volumen einer Pyramide P mit der Grundfläche G und der Höhe h lautet:

$$V_P = \frac{1}{3} Gh \quad (2-4)$$

Diese Volumenformeln gelten auch für die schiefen und allgemeinen Formen der betrachteten Körper.

2.2 Geschichte der Volumenberechnung

In diesem Kapitel werden zwei wichtige Aspekte aus der Geschichte der Volumenberechnung vor der Anwendung der Infinitesimalrechnung betrachtet. Diese sind die Guldinsche Regel für das Volumen sowie die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri.

2.2.1 Guldinsche Regel für das Volumen

Die Guldinsche Regel für das Volumen (Sonar, 2016 S. 208) ist eine Regel aus der Geometrie, die Folgendes besagt.

Guldinsche Regel für das Volumen: Das Volumen V eines Rotationskörpers R , der durch das Drehen einer Fläche (Rotationsfläche) um eine Achse (Rotationsachse) entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt A der Rotationsfläche und dem Weg, den der Schwerpunkt S der Fläche beim Drehen um die Rotationsachse zurücklegt. Der Weg entspricht dem Umfang des Kreises, dessen Radius r der Abstand des Schwerpunkts S von der Rotationsachse ist:

$$V_R = A \cdot 2\pi r \quad (2-5)$$

Diese Regel wird auch „Zweite Guldinsche Regel“ (Bronstein, et al., 1981 S. 369 f.) benannt, weil sich die erste Guldinsche Regel auf die Berechnung der Mantelfläche eines Rotationskörpers bezieht.

Die Regel ist benannt nach dem Schweizer Mathematiker Paul Guldin (1577 – 1643), der sie im 17. Jahrhundert entwickelte. Sie wird oft verwendet, um das Volumen von komplexen Rotationskörpern wie Kegeln, Zylindern oder Kugeln zu berechnen.

Die Guldinsche Regel ist ein wichtiges Konzept in der Analysis, da sie es ermöglicht, Volumina von Rotationskörpern zu berechnen, wenn der Flächeninhalt der Rotationsfläche und deren Schwerpunktabstand von der Rotationsachse bekannt ist.

Um die Guldinsche Regel allgemein zu beweisen, ist die Anwendung der Integralrechnung und der Satz von Fubini, der im Kapitel 2.3.1 beschrieben wird, notwendig. Das Volumen V eines Rotationskörpers R , dessen Rotationsfläche A durch die Funktion $f(x)$ beschrieben ist, und in den Grenzen von a und b um die x -Achse gedreht wird, ergibt sich zu $V_R = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Andererseits berechnet sich die y -Koordinate y_S des Schwerpunkts S der Rotationsfläche A zu $y_S = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_a^b \int_0^{f(x)} y dy dx = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{f^2(x)}{2} dx$. Dadurch, dass y_S dem r in der Guldinschen Regel (2-5) entspricht, ergibt sich das Gewünschte: $V_R = A \cdot 2\pi r = A \cdot 2\pi \frac{1}{A} \int_a^b \frac{f^2(x)}{2} dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. $\square$

Nun wird die Guldinsche Regel zur Berechnung des Volumens eines Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h angewandt (Sonar, 2016 S. 209 f.). Ein Drehkegel entsteht durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel im Ursprung, der ersten Kathete, die die Länge h hat und auf der x -Achse liegt und der zweiten Kathete, die die Länge r hat und auf der y -Achse liegt, um die x -Achse (siehe Abbildung 2-7).

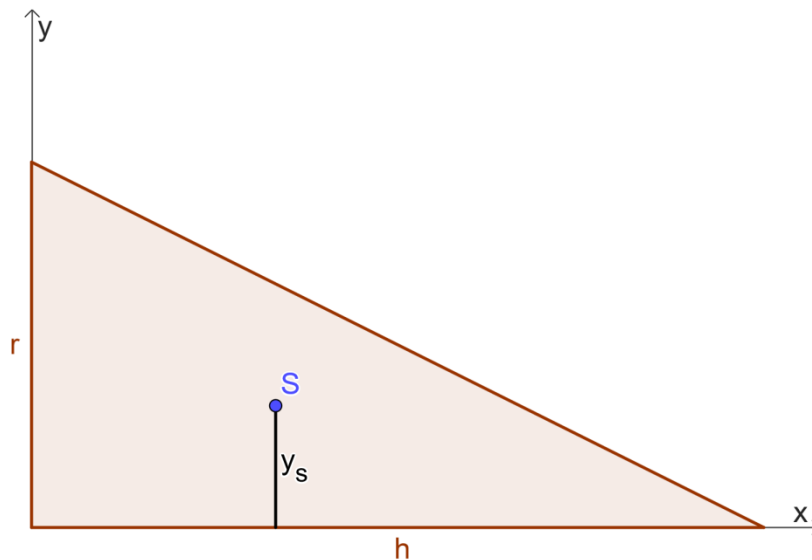


Abbildung 2-7 Anwendung der Guldinschen Regel

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt

$$A = \frac{1}{2}rh.$$

Der Schwerpunkt S des Dreiecks (siehe Abbildung 2-7) hat die y -Koordinate y_s , die dem Durchschnitt der y -Koordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks entspricht,

$$y_s = \frac{r}{3}.$$

Damit ergibt sich für den Schwerpunktsweg l_s um die x -Achse

$$l_s = 2\pi y_s = \frac{2}{3}\pi r.$$

Nach der Guldinschen Regel hat damit der Drehkegel das Volumen

$$V = A \cdot l_s = \frac{1}{2}rh \cdot \frac{2}{3}\pi r = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

was der Volumenformel (2-4) entspricht.

Angeichts der Tatsache, dass die Berechnung des Schwerpunkts bei komplexen Rotationsflächen nichttrivial ist und die Formel (2-5) nicht intuitiv einleuchtend ist, ist verständlich, dass die Guldinsche Regel nicht mehr im schulischen Kontext verwendet wird. Die Volumenberechnung wurde durch die sogenannte „Scheibchenmethode“ ersetzt: Summe der Volumina dünner Scheiben mit Dicke Δx und Querschnitt $A(x)$. Das entspricht auch der wichtigen Grundvorstellung "Produktsumme" bei Integralen. Für die entsprechenden analytischen Beweise siehe das Kapitel 2.4.3.

Eine Methode, die im schulischen Kontext verwendet wird, ist die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri, die im folgenden Kapitel beschrieben wird.

2.2.2 Indivisiblenrechnung nach Cavalieri

Die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri ist eine Methode der infinitesimalen Geometrie, die vom italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) im 17. Jahrhundert entwickelt wurde. Die Methode basiert auf der Idee, dass geometrische Körper aus unendlich vielen Indivisiblen (unendlich dünne Schichten) bestehen, deren Dicke vernachlässigbar klein ist.

Cavalieri verwendete diese Idee, um Volumina von Körpern zu berechnen. Seine Methode besteht darin, die Volumina zweier Körper zu vergleichen, indem sie in unendlich kleine Elemente zerlegt werden und diese Elemente miteinander verglichen werden. Wenn die Elemente in beiden Körpern proportional zueinander sind, dann sind auch die Volumina der Körper proportional zueinander.

Cavalieris Methode wurde später von anderen Mathematikern, wie etwa Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz, weiterentwickelt und wurde schließlich zur Grundlage der Infinitesimalrechnung und der Integralrechnung.

Es ist jedoch zu beachten, dass die Indivisiblenrechnung von Cavalieri keine streng formalisierte mathematische Methode ist und aufgrund ihrer unsicheren logischen Grundlagen Kritik erfahren hat. Daher wurde sie durch rigorosere Methoden wie die Infinitesimalrechnung abgelöst.

Der wichtigste Aspekt der Indivisiblenrechnung ist der sogenannte Satz von Cavalieri, der auch Prinzip von Cavalieri genannt wird.

Satz von Cavalieri: Wenn zwei Körper durch alle Schnitte von parallelen Ebenen in gleicher Höhe die gleichen Schnittflächen aufweisen, dann haben sie das gleiche Volumen.

In der Abbildung 2-8 wird dieser Satz illustriert. Zwei Prismen, ein gerades und ein schiefes, haben in jeder Höhe die gleichen Schnittflächen A_i , $0 \leq i \leq n$. Aus diesem Grund haben die beiden Körper das gleiche Volumen.

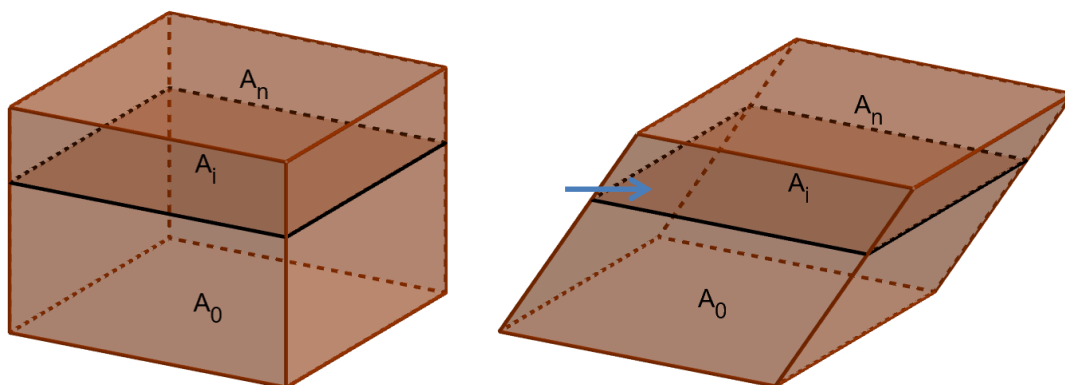


Abbildung 2-8 Illustration des Satzes von Cavalieri mit Prismen

In der Abbildung 2-9 wird der Satz von Cavalieri mit Bierdeckeln illustriert. Im linken Bild sind 50 Bierdeckel zu einem geraden Prisma gestapelt, im mittleren Bild zu einem schiefen Prisma und im rechten Bild gewunden gestapelt. Die drei Körper haben die gleiche Höhe, nämlich 50-mal die Höhe eines Bierdeckels und in jeder Höhe die gleichen Schnittflächen, also haben sie laut des Satzes das gleiche Volumen. Da alle drei Körper aus denselben Bierdeckeln bestehen, haben sie definitiv das gleiche Volumen.



Abbildung 2-9 Illustration des Satzes von Cavalieri mit Bierdeckeln

Der Satz von Cavalieri ist ein wichtiger Satz der Integralgeometrie und der Differentialgeometrie, und er hat Anwendungen in vielen Bereichen der Mathematik und der Physik, zum Beispiel in der Geometrie, der Analysis, der Mechanik und der Optik. Er ist ein wichtiger Meilenstein in der Geschichte der Geometrie und der Mathematik, und er hat dazu beigetragen, neue Methoden und Techniken zu entwickeln, um komplexe geometrische Probleme zu lösen.

In (Sonar, 2016 S. 212 f.) erfolgt eine weitere Formulierung des zuvor erläuterten Satzes von Cavalieri sowohl für Körper als auch für ebene Flächen und eine Herleitung von $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, n \geq 1$ unter der Verwendung des Satzes von Cavalieri.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit sind in dieser Arbeit die in (Sonar, 2016) verwendeten hochgestellten Indizes in Klammern gesetzt, um sie von Potenzen zu unterscheiden, z.B.: $l_i^1 \rightarrow l_i^{(1)}$.

Satz von Cavalieri: Ist E eine ebene Figur und R eine räumliche mit zugehörigen Indivisiblen l (Linien) und e (ebene Fläche), dann sind zwei ebene Flächen E_1 mit Indivisiblen $l^{(1)}$ und E_2 mit Indivisiblen $l^{(2)}$ (flächen)gleich, wenn $\sum_i l_i^{(1)} = \sum_i l_i^{(2)}$ gilt. Zwei räumliche Figuren R_1 mit Indivisiblen $e^{(1)}$ und R_2 mit Indivisiblen $e^{(2)}$ sind (volumen)gleich, wenn $\sum_i e_i^{(1)} = \sum_i e_i^{(2)}$ gilt.

Die in diesem Satz verwendeten Summen, z.B. $\sum_i l_i^{(1)}$ sind keine gewöhnlichen Summen, sondern im Sinne von Cavalieri als Summen von äquidistanten Indivisiblen zu betrachten, wobei i aus irgendeiner Indexmenge stammt.

Zuerst beschreibt (Sonar, 2016 S. 215 f.) den Fall für $n = 1$, also $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$. Er erstellt ein Dreieck DCB , das aus den Indivisiblen l_i besteht und setzt es in Beziehung zu einem Rechteck $ADCB$ mit den Indivisiblen a . l_0 entspricht dabei a (siehe Abbildung 2-10).

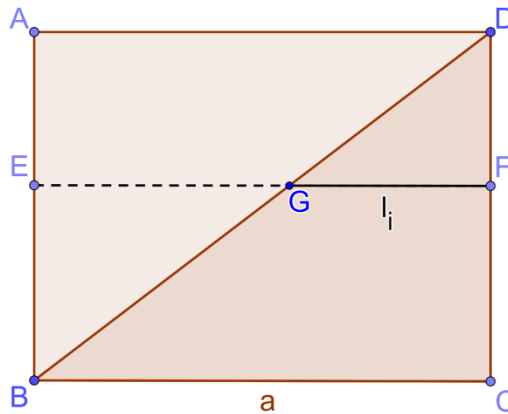


Abbildung 2-10 Dreieck und Rechteck mit Indivisiblen

Wenn die Indivisiblen der beiden ebenen Flächen jeweils summiert und in Beziehung gesetzt werden, entsteht der Ausdruck $\frac{\sum_i l_i}{\sum_i a}$. Da der Flächeninhalt des Dreiecks der Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks entspricht, ergibt sich

$$\frac{\sum_i l_i}{\sum_i a} = \frac{1}{2}.$$

Der Satz von Cavalieri wird nun für den Fall $n = 2$, also $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ illustriert.

Die in der Abbildung dargestellten Indivisiblen l_i des Dreiecks sowie die Indivisiblen a des Rechtecks werden quadriert, in Cavalierischer Manier summiert und in Beziehung gesetzt.

Das Ergebnis $\frac{\sum_i (l_i)^2}{\sum_i a^2}$, das in (Sonar, 2016 S. 216) in der Gleichung (5.8) mit

$$\frac{\sum_i (l_i)^2}{\sum_i a^2} = \frac{1}{3}$$

angegeben wird, wird ebendort als gegeben vorausgesetzt, allerdings nicht bewiesen. (Sonar, 2016 S. 216 f.) beweist in Folge den Fall für $n = 5$.

Um diese Aussage für $n = 2$ zu beweisen, ist die Vorgangsweise analog zu (Sonar, 2016 S. 216 f.).

Es gilt die algebraische Beziehung

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (2-6)$$

Dazu wird das Parallelogramm $ACGQ$ (siehe Abbildung 2-11) betrachtet. Das Parallelogramm wird durch die Diagonale QC in zwei kongruente Dreiecke ACQ und CGQ zerlegt. Wird nun weiter durch die Verbindungen der gegenüberliegenden Seitenmitten zerlegt, wie rechts in Abbildung 2-11 illustriert wird, so entstehen vier kongruente Parallelogramme $ABMD$, $BCHM$, $DMNQ$ und $MHGN$.

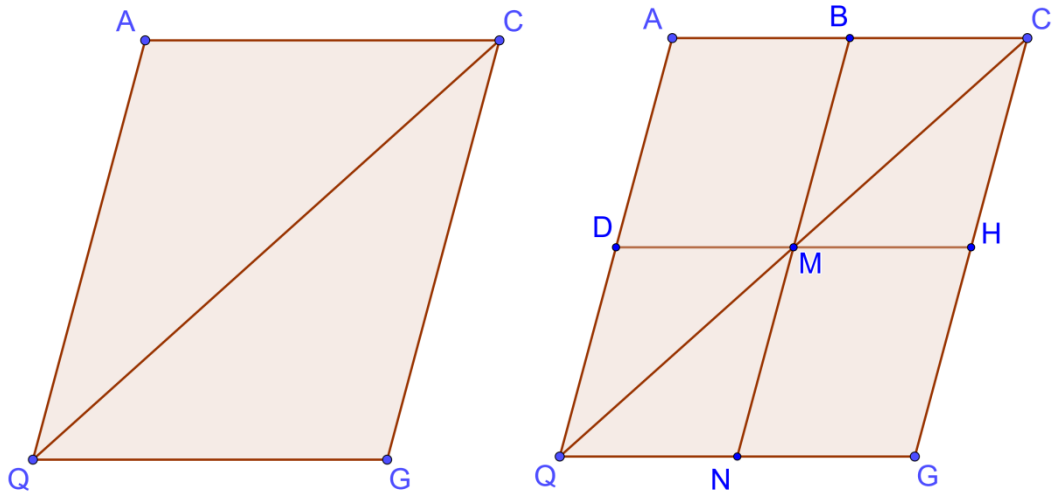


Abbildung 2-11 Zerlegung eines Parallelogramms

In einem letzten Schritt wird das Parallelogramm noch weiter durch die Strecken RV und $R'V'$, die parallel zu DH liegen und von DH gleich weit entfernt sind, zerlegt (siehe Abbildung 2-12). Die Länge der Strecke RS sei a , die von ST sei b . Dann ergibt sich für das Parallelogramm $ACHD$ mit Hilfe der Formel (2-6)

$$\sum_{ACMD} (a+b)^2 + \sum_{CHM} (a-b)^2 = 2 \sum_{ABMD} a^2 + 2 \sum_{BCM} b^2$$

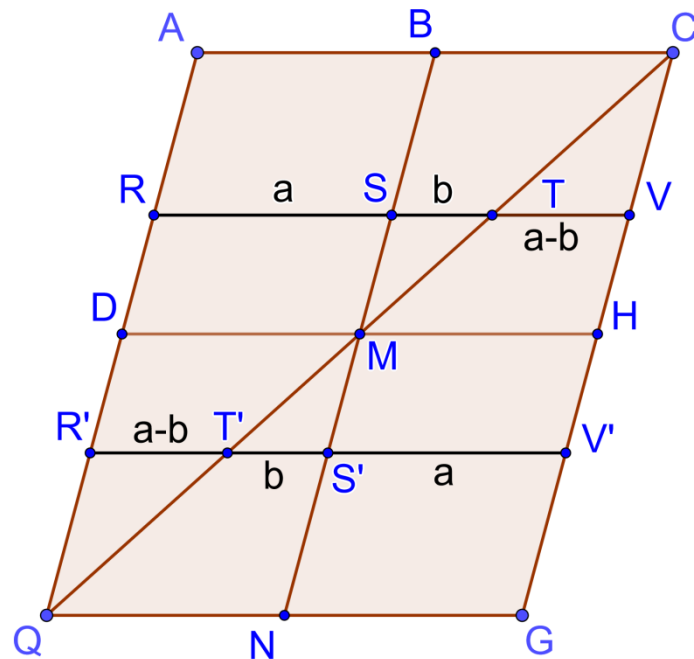


Abbildung 2-12 Fortgesetzte Zerlegung eines Parallelogramms

Und für $DHGQ$ entsprechend

$$\sum_{MHGQ} (a+b)^2 + \sum_{DMQ} (a-b)^2 = 2 \sum_{MHGN} a^2 + 2 \sum_{QMN} b^2$$

Da $ABMD$ und $MHGN$ sowie BCM und QMN flächengleich sind, also, wenn die „Summationen“ für $ACHD$ und $DHGQ$ links und rechts addiert werden:

Links:

$$\sum_{ACMD} (a+b)^2 + \sum_{CHM} (a-b)^2 + \sum_{MHGQ} (a+b)^2 + \sum_{DMQ} (a-b)^2 = \sum_{ACGQ} ((a+b)^2 + (a-b)^2)$$

Rechts:

$$2 \sum_{ABMD} a^2 + 2 \sum_{BCM} b^2 + 2 \sum_{MHGN} a^2 + 2 \sum_{QMN} b^2 = 2 \sum_{ABNQ} a^2 + 4 \sum_{BCM} b^2$$

Da die Streckenlängen $\overline{RT} = a+b$ (der Punkt T wandert entlang der Strecke CQ) und $\overline{TV} = a-b$ entsprechen, folgt daraus, entsprechend der Gleichung (5.9) in (Sonar, 2016 S. 217),

$$\sum_{ACGQ} ((\overline{RT})^2 + (\overline{TV})^2) = 2 \sum_{ABNQ} a^2 + 4 \sum_{BCM} b^2.$$

Nun sind ACG und CQG flächengleich, also

$$\sum_{ACQ} (\overline{RT})^2 = 2 \sum_{CGQ} (\overline{TV})^2$$

und analog zu Formel (5.10) in (Sonar, 2016 S. 217):

$$\sum_{ACGQ} ((\overline{RT})^2 + (\overline{TV})^2) = 2 \sum_{ACQ} (\overline{RT})^2$$

Die Vorgangsweise im Folgenden weicht jetzt mangels Vorannahmen von der Beweisführung in (Sonar, 2016) ab.

Analog zu Gleichung (5.12) in (Sonar, 2016 S. 218) wird die folgende Annahme getroffen:

$$\sum_{BCM} b^2 = m \sum_{BCHM} a^2 = \frac{m}{2} \sum_{BCGN} a^2,$$

wobei m noch zu bestimmen ist.

Da die Streckenlänge $\overline{AC} = 2a$ entspricht, folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{ACGQ} ((\overline{RT})^2 + (\overline{TV})^2) &= 2 \sum_{ACQ} (\overline{RT})^2 \\ &= 2 \sum_{ABNQ} a^2 + \frac{4m}{2} \sum_{BCGN} a^2 \\ &= (2 + 2m) \sum_{ACGQ} a^2 \\ &= \frac{2 + 2m}{4} \sum_{ACGQ} (\overline{AC})^2 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das

$$\sum_{ACQ} (\overline{RT})^2 = \frac{2+2m}{8} \sum_{ACGQ} (\overline{AC})^2.$$

Andererseits ist, wegen dem Flächenverhältnis von BCM zu ACQ von 1:4 und da die Streckenlänge $\overline{ST} = b$ (der Punkt S wandert entlang der Strecke BM) entspricht (siehe Abbildung 2-12):

$$\sum_{ACQ} (\overline{RT})^2 = 16 \sum_{ACQ} (\overline{ST})^2 = 16 \sum_{BCM} b^2 = 8m \sum_{BCGN} a^2 = 4m \sum_{ACGQ} a^2 = m \sum_{ACGQ} (\overline{AC})^2$$

Daraus folgt durch Vergleich der Koeffizienten in den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{2+2m}{8} = m.$$

Durch Lösen dieser Gleichung ergibt sich $m = \frac{1}{3}$.

Daraus folgt

$$\sum_{ACQ} (\overline{RT})^2 = \frac{1}{3} \sum_{ACGQ} (\overline{AC})^2$$

oder, nur anders angeschrieben,

$$\frac{\sum_i (l_i)^2}{\sum_i a^2} = \frac{1}{3}.$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich z.B. das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnen, deren Seitenlänge a entspricht. Der Faktor $\frac{1}{3}$ entspricht dem Verhältnis der Indivisiblen der Pyramide $(l_i)^2$ zu den Indivisiblen des Prismas a^2 (siehe Abbildung 2-13).

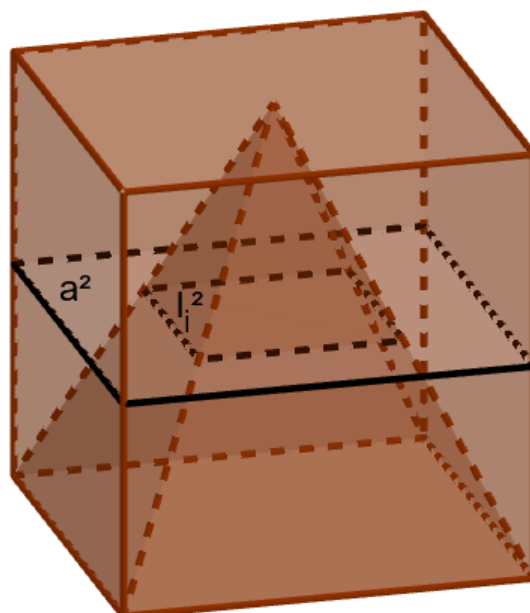


Abbildung 2-13 Pyramide versus Prisma

Die Illustration des Satzes von Cavalieri in der angegebenen Form ist sehr aufwändig und daher im schulischen Kontext nicht relevant. Der Satz von Cavalieri selbst wird, allerdings ohne Beweis, ebendort verwendet. Im folgenden Kapitel wird der Satz von Fubini erläutert, der die exakte Grundlage für den Satz von Cavalieri darstellt.

2.3 Grundlegende Sätze

In diesem Kapitel werden zwei grundlegende Sätze für die Volumenberechnung beschrieben. Das sind der Satz von Fubini sowie der Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

2.3.1 Satz von Fubini

Der Satz von Fubini (Heuser, 2008 S. 450) ist ein fundamentales Ergebnis der Analysis, das besagt, dass das Integral einer Funktion über ein Produkt von Intervallen gleichbedeutend ist mit der iterierten Integration der Funktion über jedes Intervall einzeln. Er lautet wie folgt.

Satz von Fubini: I_x und I_y seien kompakte p -dimensionale bzw. q -dimensionale Intervalle und I bedeute das ebenfalls kompakte $(p + q)$ -dimensionale Produktintervall $I_x \times I_y$. Ist die Funktion f auf I R-integrierbar und existiert $g(y) := \int_{I_x} f(x, y) dx$ für jedes feste $y \in I_y$, so ist g auf I_y R-integrierbar, und es gilt

$$\int_I f(x, y) d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy.$$

Der Satz von Fubini ist ein sehr wichtiges Ergebnis der Analysis, da er es ermöglicht, das Doppelintegral auf eine einfache Art und Weise zu berechnen und somit viele Probleme der Analysis und der Physik zu lösen. Er wurde nach dem italienischen Mathematiker Guido Fubini (1879 – 1943) benannt.

Für den Beweis des Satzes von Fubini für ein zweidimensionales Intervall I siehe z.B. (Heuser, 2008 S. 448 f.).

Der Satz von Fubini ist, zusammen mit dem Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge (siehe Kapitel 2.3.2) und der daraus resultierenden Möglichkeit, dreidimensionale Volumina als Integrale von Querschnittflächeninhalten entlang einer Achse zu definieren bzw. zu berechnen, außerdem eine theoretische Grundlage des Satzes von Cavalieri: für das Volumen V eines Körpers K , z.B. eines Drehkegels, wird die Querschnittsflächenfunktion $A(z)$ entlang der z -Achse (zwischen zwei festen z -Werten) integriert. Daher ist klar: Wenn bei zwei Körpern K_1 und K_2 für alle z die Querschnittflächen flächengleich sind, d.h. $A_1(z) = A_2(z) \forall z$ gilt, dann haben sie gleiches Volumen, denn es wird dann ja dieselbe Funktion integriert. Dabei können $A_1(z)$ und $A_2(z)$ selbst wieder mittels Integralen berechnet werden (in x - bzw. in y -Richtung). Im Beispiel des Drehkegels ist das nicht nötig, weil die betrachteten Querschnittflächen Kreise sind, für die es bekannte Flächenformeln gibt.

2.3.2 Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge

Aus dem Satz von Fubini folgt ganz unmittelbar noch der

Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge: Ist die Funktion f wie im Satz von Fubini auf $I := I_x \times I_y$ $\mathbb{R}$ -integrierbar und existiert $\int_{I_x} f(x, y) dx$ für jedes $y \in I_y$ und $\int_{I_y} f(x, y) dy$ für jedes $x \in I_x$, so gilt

$$\int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) dx \right) dy = \int_I f(x, y) d(x, y).$$

Die obigen Voraussetzungen sind gewiss dann erfüllt, wenn f stetig auf I ist.

Das bedeutet, dass das Doppelintegral berechnet werden kann, indem zuerst das Integral über eine Variable (z.B. x) und dann das Integral über die andere Variable (z.B. y) berechnet wird. Oder umgekehrt: das Doppelintegral kann auch berechnet werden, indem zuerst das Integral über die andere Variable (y) und dann das Integral über die erste Variable (x) berechnet wird.

Durch mehrfache Anwendung des letzten Satzes ergibt sich der für die Praxis des Integrierens so wichtige

Satz: Ist f stetig auf $I := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$, so gilt

$$\int_I f(x_1, \dots, x_p) d(x_1, \dots, x_p) = \int_{a_p}^{b_p} \left(\dots \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_p) dx_1 \right) dx_2 \dots \right) dx_p,$$

oder kürzer, unter Fortlassung der Klammern:

$$\int_I f(x_1, \dots, x_p) d(x_1, \dots, x_p) = \int_{a_p}^{b_p} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_p) dx_1 dx_2 \dots dx_p.$$

Die Reihenfolge der Integration darf hierbei beliebig vertauscht werden.

Bezogen auf die Volumenberechnung von Körpern mittels Integralen bedeutet dies, dass immer dasselbe Ergebnis herauskommt (eben das eindeutige Volumen), egal in welche Richtung zuerst integriert wird (Querschnittflächeninhalte berechnet, z.B. in Ebenen parallel zur x - y -Ebene auf Höhe z) bzw. zum Schluss integriert wird (z.B. entlang der z -Achse).

2.4 Beweise der Volumenformel

In diesem Kapitel werden geometrische, elementare und analytische Beweise für die Volumenformel eines Drehkegels, einer geraden Pyramide bzw. in manchen Fällen einer quadratischen bzw. rechteckigen Pyramide vorgestellt. Bei den einzelnen Beweisen auf mögliche Erweiterungen auf allgemeinere geometrische Körper hingewiesen.

2.4.1 Geometrische Beweise

Im Folgenden werden zwei geometrische Beweise für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide vorgestellt.

2.4.1.1 Erster geometrischer Beweis für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide

Für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide gibt es einen geometrischen Beweis, der im Folgenden durchgeführt wird.

Drei quadratische Pyramiden P_1 , P_2 und P_3 ergeben zusammen einen Würfel W (siehe Abbildung 2-14).

Der Würfel W hat die Seitenlängen a und daher das Volumen $V_W = a^3$. Die drei Pyramiden P_i , $1 \leq i \leq 3$ haben jeweils die folgenden Abmessungen: Seitenlängen a und Höhe a , Grundfläche $G = a^2$.

Die drei Pyramiden P_i haben also gleiche Dimensionen und sind außerdem kongruent, da die Spitze jeweils lotrecht über einem Eckpunkt der Grundfläche liegt. Damit ist auch ihr Volumen identisch.

Da die Summe der Volumina der drei Pyramiden P_i dem Volumen des Würfels W entspricht, ergibt sich $3V_{P_i} = V_W = a^3$. Daraus ergibt sich $V_{P_i} = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}Gh$, was der Volumenformel (2-4) entspricht. $\square$

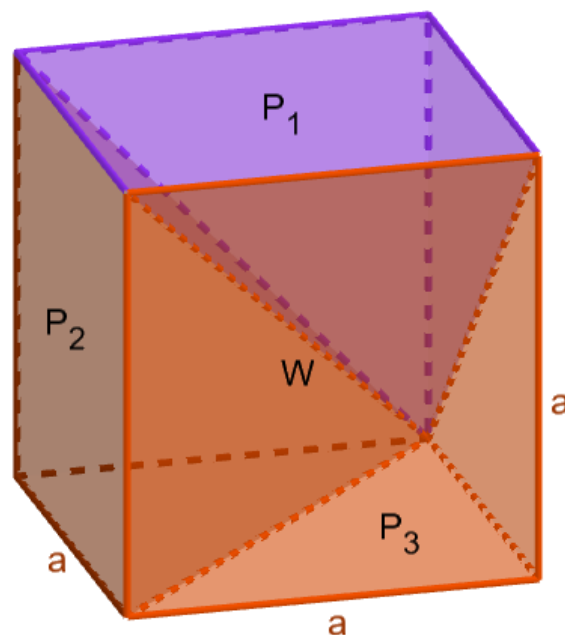


Abbildung 2-14 Drei volumengleiche rechteckige Pyramiden ergeben einen Quader

Der Beweis ist auf Pyramiden mit quadratischer Grundfläche beschränkt, da sie sonst nicht in einen Würfel eingeschrieben werden können.

2.4.1.2 Zweiter geometrischer Beweis für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide

Für die Volumenformel einer quadratischen Pyramide gibt es einen geometrischen Beweis (Hasibeder, et al., 2019 S. 238), der im Folgenden durchgeführt wird.

Ein Würfel W mit der Seitenlänge $2h$ wird in sechs regelmäßige quadratische Pyramiden zerlegt, deren Grundkanten ($2h$) doppelt so lang sind wie ihre Höhen (h) (siehe Abbildung 2-15, hier ist eine Teilpyramide P eingezeichnet). Jede Teilpyramide hat dieselbe

Grundfläche G , die jeweils einer Seitenfläche des Würfels W entspricht. Die Spitzen der Teilpyramiden fallen mit dem Mittelpunkt des Würfels W zusammen. Damit ergibt sich unmittelbar:

$$V_P = \frac{1}{6} \cdot V_W = \frac{1}{6} \cdot G \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} Gh,$$

was der Volumenformel (2-4) entspricht. $\square$

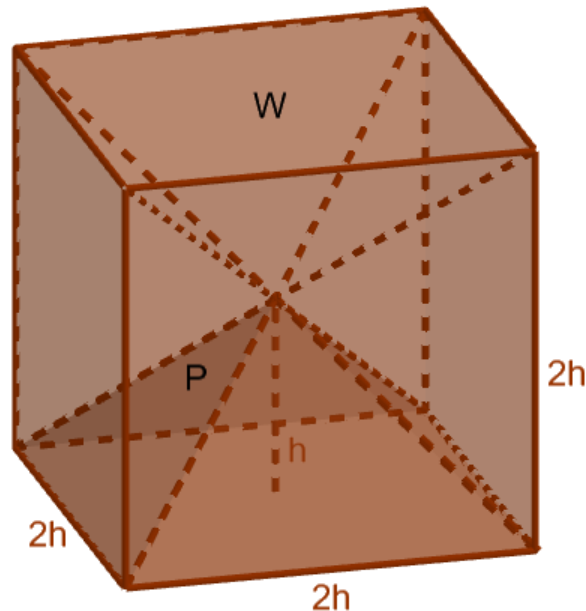


Abbildung 2-15 Sechs volumengleiche quadratische Pyramiden ergeben einen Würfel

Der Beweis ist auf Pyramiden mit quadratischer Grundfläche beschränkt, da sie sonst nicht in einen Würfel eingeschrieben werden können.

2.4.2 Elementare Beweise

Die folgenden Beweise sind insofern „elementar“, als für ihre Anwendung keine Integralrechnung notwendig ist. Sie basieren auf dem Satz von Cavalieri, dessen formaler Beweis allerdings Integralrechnung verwendet.

2.4.2.1 Neuer, elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels

Im Folgenden wird ein neuer, elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels durchgeführt. Dieser Beweis wurde erstmals am 23. Jänner 2019 niedergeschrieben und ist ebenfalls für die Volumenformel einer Pyramide anwendbar. Den Beweis für die Volumenformel einer Pyramide wird im nachfolgenden Kapitel durchgeführt.

Der Grund, warum in dieser Arbeit zuerst der Beweis für den Drehkegel und dann der für die Pyramide angeführt wird, ist der, dass der Beweis ursprünglich für den Drehkegel ausgedacht worden ist. Grundsätzlich könnte auf eine eigene Behandlung des Drehkegels sogar ganz verzichtet werden, wenn die Pyramiden vorher behandelt werden. Drehkegel können ja durch regelmäßige Pyramiden beliebig genau approximiert werden, wenn die Anzahl der Ecken der Grundfläche gegen unendlich geht, sodass sich die Volumenformel für Pyramiden in natürlicher Weise auf Drehkegel überträgt. Siehe dazu z.B. das Schulbuch „Das ist Mathematik 4“ (Hasibeder, et al., 2020 S. 223)!

Die Ausgangslage ist, dass die existierenden Beweise auf der Infinitesimalrechnung basieren bzw. sich die geometrischen sich nur für bestimmte Pyramiden (z.B. rechteckige Pyramiden), nicht aber für Drehkegel eignen. Dieser Beweis stützt sich ausschließlich auf den Satz von Cavalieri sowie elementare Überlegungen.

Dazu wird ein Drehkegel K mit dem Radius r und der Höhe h betrachtet (siehe Abbildung 2-16).

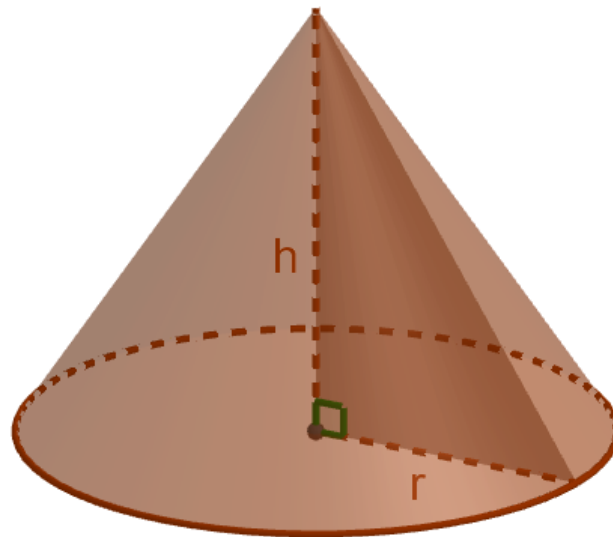


Abbildung 2-16 Drehkegel

Wenn dieser Drehkegel K vertikal in einzelne horizontale Schichten geteilt wird (siehe Abbildung 2-17), ergeben sich kreisförmige Scheiben (näherungsweise sind das Zylinder), deren Grundflächen A_K abhängig von der Höhe z die folgende Größe haben:

$$A_K(z) = r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi \quad (2-7)$$

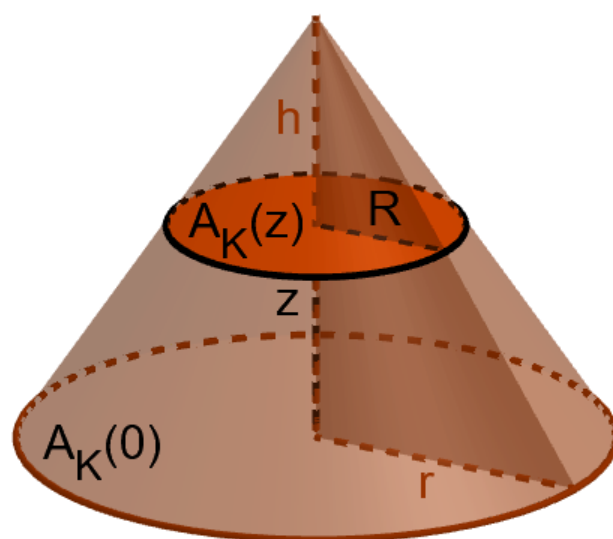


Abbildung 2-17 Drehkegel in Schichten

Herleitung: der Radius R der Kreisscheibe ergibt sich aus dem Strahlensatz: $h : r = (h - z) : R$. Daraus ergeben sich $R = r \frac{h-z}{h} = r \left(1 - \frac{z}{h}\right)$ und $A_K(z) = R^2 \pi = r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi$.

Das Problem ist, dass diese Flächen keinen linearen, sondern einen quadratischen Verlauf abhängig von z haben, und daher nicht mit elementaren Methoden „aufsummiert“ werden können.

Durch eine Veränderung des Drehkegels kann dies erreicht werden.

Der Drehkegel K wird in der Höhe $\frac{h}{2}$ durchgeschnitten, der obere, halbe Drehkegel – genannt HK – von K abgetrennt und um die entstandene Schnittfläche gespiegelt, die der Grundfläche von HK entspricht, sodass die Spitze des gespiegelten Kegels – genannt HKG – auf der Grundfläche G_K von K zu liegen kommt. Dieser gespiegelte und dadurch umgedrehte Kegel HKG befindet sich vollständig innerhalb der unteren Hälfte des Drehkegels K , der die Form eines Drehkegelstumpfes hat. Der Drehkegel HKG wird nun aus dem Drehkegelstumpf ausgeschnitten, und der so erhaltenen Körper wird KSA genannt (siehe Abbildung 2-18).

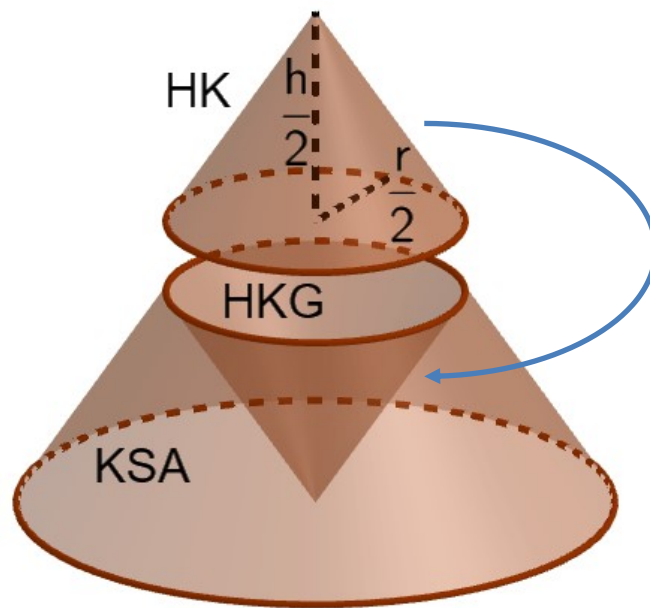


Abbildung 2-18 Drehkegelstumpf, aus dem der gespiegelte obere Drehkegel ausgeschnitten wird

Nun werden die einzelnen Schichten von KSA betrachtet, die aus kreisringförmigen Scheiben bestehen (siehe Abbildung 2-19). Die Flächen dieser Schichten ergeben sich zu

$$A_{KSA}(z) = r^2 \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^2 \pi. \quad (2-8)$$

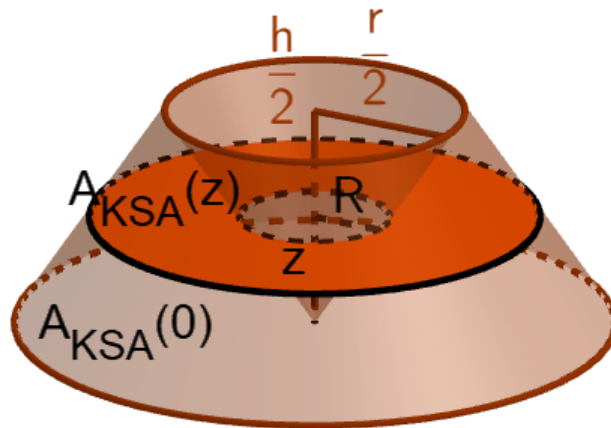


Abbildung 2-19 Drehkegelstumpf in Schichten

Herleitung: der Radius R der Kreisscheibe des umgedrehten halben Kegels HKG ergibt sich aus dem Strahlensatz: $\frac{h}{2} : \frac{r}{2} = z : R$. Daraus ergeben sich $R = r \frac{z}{h}$ und $A_{HKG}(z) = R^2 \pi = r^2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \pi$.

Werden die Flächen der beiden Kreise subtrahiert, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 A_{KSA}(z) &= A_K(z) - A_{HKG}(z) \\
 &= r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi - r^2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 \pi \\
 &= r^2 \left(1 - \frac{2z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \pi \\
 &= r^2 \left(1 - \frac{2z}{h}\right) \pi.
 \end{aligned}$$

Die Querschnittsflächen von KSA haben einen linearen Verlauf in Abhängigkeit von z , im Gegensatz zu denen von K , die einen quadratischen Verlauf in Abhängigkeit von z haben.

Die Flächen $A_{KSA}(z)$ entsprechen Rechtecken mit den Seitenlängen $a = r\pi$ und $b(z) = r \left(1 - \frac{2z}{h}\right)$. Das ist offensichtlich, weil $A_{KSA}(z) = r^2 \left(1 - \frac{2z}{h}\right) \pi = r\pi \cdot r \left(1 - \frac{2z}{h}\right) = a \cdot b(z)$ ist.

Wenn diese Rechtecke als Querschnittsflächen eines Körpers in der Höhe z gedacht werden, wobei $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ ist, ergibt sich ein neuer Körper NK mit den Abmessungen $a = r\pi$, $b(0) = r$, $b(z) = r \left(1 - \frac{2z}{h}\right)$, $b\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ und $c = \frac{h}{2}$, der einem liegenden dreiseitigen Prisma entspricht (siehe Abbildung 2-20).

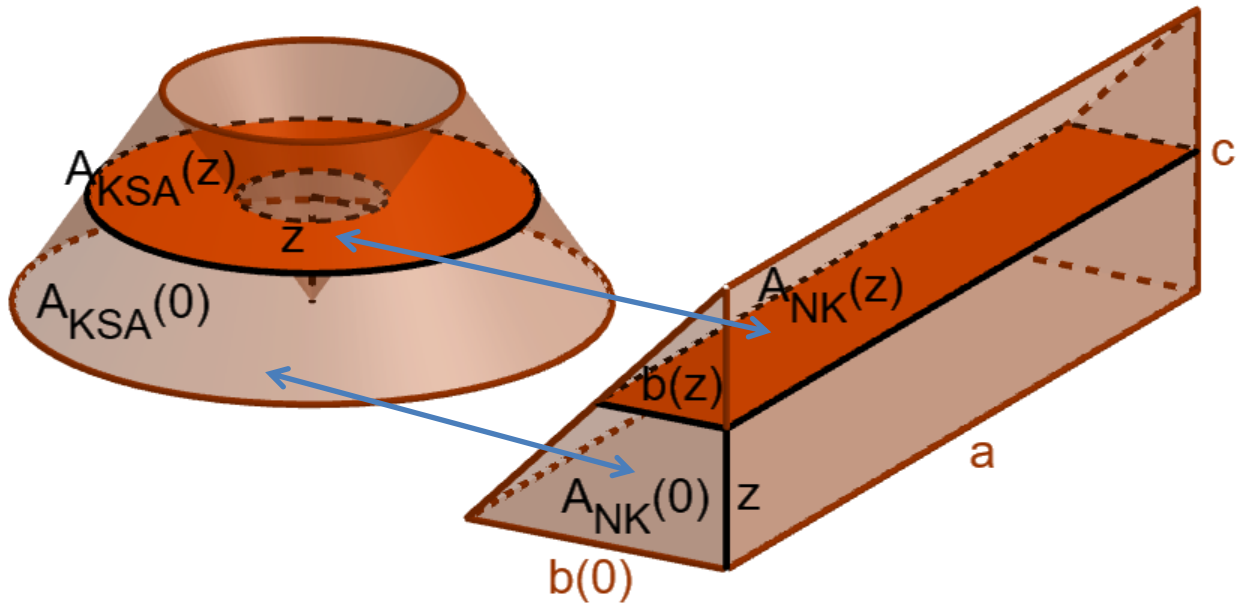


Abbildung 2-20 Transformation des ausgeschnittenen Drehkegelstumpfes in ein dreiseitiges Prisma

Da $A_{KSA}(z) = A_{NK}(z)$, $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ gilt, folgt mit der Anwendung des Satzes von Cavalieri die Volumengleichheit der beiden Körper, also $V_{KSA} = V_{NK}$.

Das Volumen V_{NK} ergibt sich wie folgt. Der Körper NK kann auch als ein dreiseitiges Prisma PR mit der Grundfläche $G_{PR} = \frac{1}{2} b(0) \cdot c = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{h}{2} = \frac{rh}{4}$ und Höhe $h_{PR} = a = r\pi$ aufgefasst werden. Daraus errechnet sich das Volumen $V_{NK} = V_{PR} = G_{PR} h_{PR} = \frac{1}{4} \pi r^2 h$.

Alternativ ergibt sich das Volumen V_{NK} , wenn der Körper NK als schräg abgeschnittener und dadurch halbiertes Quader Q betrachtet wird. Der Quader Q hat die Seitenlängen a , $b(0)$ und c . Damit errechnet sich das Volumen $V_{NK} = \frac{1}{2} V_Q = \frac{1}{2} a \cdot b(0) \cdot c = \frac{1}{2} r\pi \cdot r \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \pi r^2 h$.

Als dritte Möglichkeit kann der Durchschnitt der Flächen $A_{KSA}(z)$ berechnet werden, der sich aufgrund des linearen Verlaufs zu $\overline{A_{KSA}} = \frac{1}{2} \left(A_{KSA}(0) + A_{KSA}\left(\frac{h}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} (r^2\pi + 0) = \frac{1}{2} \pi r^2$ ergibt.

Der Körper NK mit dieser konstanten Querschnittsfläche und Höhe $\frac{h}{2}$ hat das Volumen $V_{NK} = \frac{1}{2} \pi r^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \pi r^2 h$.

Wegen der Volumengleichheit von KSA und NK folgt

$$V_{KSA} = \frac{1}{4} \pi r^2 h. \quad (2-9)$$

Um nun V_K zu ermitteln, wird noch V_{HK} benötigt. Da der Körper KSA durch zweimalige Subtraktion des halben Drehkegels HK vom Drehkegel K entsteht (siehe Abbildung 2-18), gilt $V_{KSA} = V_K - 2V_{HK}$, oder umgeformt $V_K = V_{KSA} + 2V_{HK}$.

Da es mit elementaren Methoden nicht möglich ist, das Volumen von V_{HK} aus V_K zu ermitteln, wird ein anderer Weg gewählt. Das zuvor für K beschriebene Verfahren wird analog auf HK angewandt (siehe Abbildung 2-21).

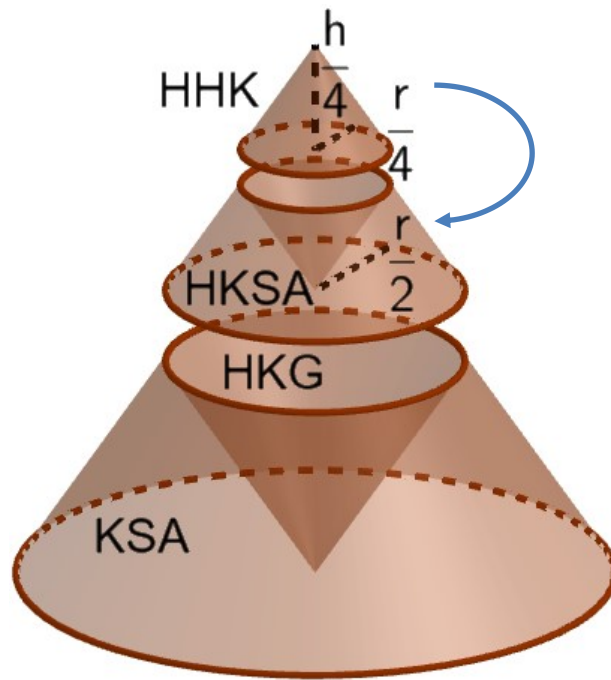


Abbildung 2-21 Anwendung des Verfahrens auf HK

Da der Drehkegel HK die Höhe $\frac{h}{2}$ und den Radius $\frac{r}{2}$ hat, ergibt sich das Volumen des durch zweimalige Subtraktion des halben Drehkegels HHK mit der Höhe $\frac{h}{4}$ und den Radius $\frac{r}{4}$ ermittelte Körper $HKSA$ analog zur Formel (2-9) zu

$$V_{HKSA} = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{h}{2} = \frac{1}{32}\pi r^2 h.$$

Daraus ergibt sich nun:

$$V_K = V_{KSA} + 2V_{HK} = V_{KSA} + 2V_{HKSA} + 4V_{HHK} = \frac{1}{4}\pi r^2 h + \frac{1}{16}\pi r^2 h + 4V_{HHK}.$$

Beachte, dass der Wert des zusätzlichen Summanden genau $\frac{1}{4}$ des ersten Summanden beträgt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $V_{HKSA} = \frac{1}{32}\pi r^2 h = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 h = \frac{1}{8}V_{KSA}$ ist und $HKSA$ zweimal summiert wird. Die beiden Faktoren bilden zusammen den Faktor $\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$.

Wenn das Verfahren nun auf HHK usw. angewandt wird, entstehen die weiteren Summanden $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}\pi r^2 h = \frac{1}{64}\pi r^2 h$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64}\pi r^2 h = \frac{1}{256}\pi r^2 h$ usw.

Wird das Verfahren nun n -mal angewendet, ergeben sich die Summanden zu einer geometrischen Reihe mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ sowie den 2^n -mal zu ergänzenden n -fach halbierten Drehkegel $H \dots HK$ wie folgt:

$$\begin{aligned} V_K &= \frac{1}{4}\pi r^2 h + \frac{1}{16}\pi r^2 h + \frac{1}{64}\pi r^2 h + \frac{1}{256}\pi r^2 h + \dots + \frac{1}{4^n}\pi r^2 h + 2^n V_{H \dots HK} \\ &= \pi r^2 h \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} + 2^n V_{H \dots HK} \end{aligned}$$

Aus der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (2-10)$$

ergibt sich mit $q = \frac{1}{4}$

$$V_K = \pi r^2 h \cdot \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} + 2^n V_{H \dots HK} = \pi r^2 h \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + 2^n V_{H \dots HK}.$$

Wächst n über alle Grenzen, geht der letzte Faktor des ersten Summanden gegen 1 und der letzte Summand verschwindet, weil die Volumina der n -fach halbierten Drehkegel $H \dots HK$ in Summe beliebig klein werden, woraus sich

$$V_K = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ergibt, was der Volumenformel (2-3) entspricht. $\square$

Dieser Beweis ist auf schiefe Kegel erweiterbar. Die Spiegelung von HK muss als Punktspiegelung am Mittelpunkt des Grundkreises von HK erfolgen, sodass die Spitze von HK mit dem Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels übereinstimmt. Alternativ ist es möglich, den schiefen Kegel mit Hilfe des Satzes von Cavalieri in einen Drehkegel zu transformieren. Der Beweis lässt sich außerdem auf allgemeine Kegel, deren Grundfläche z.B. eine Ellipse ist, erweitern.

Ein Beweis für die Summenformel für geometrische Reihen (2-10) ist der folgende:

$$\begin{aligned} & (1 - q) \sum_{k=1}^n q^k \\ &= \sum_{k=1}^n q^k - q \cdot \sum_{k=1}^n q^k \\ &= \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=2}^{n+1} q^k \\ &= q - q^{n+1} \\ &= q(1 - q^n) \end{aligned}$$

Durch Division durch $(1 - q)$ ergibt sich aus der Gleichung des ersten und letzten Terms das Gewünschte. $\square$

Es gibt zwei geometrische Beweise für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3},$$

die ohne weitere Erklärung auskommen (siehe Abbildung 2-22).

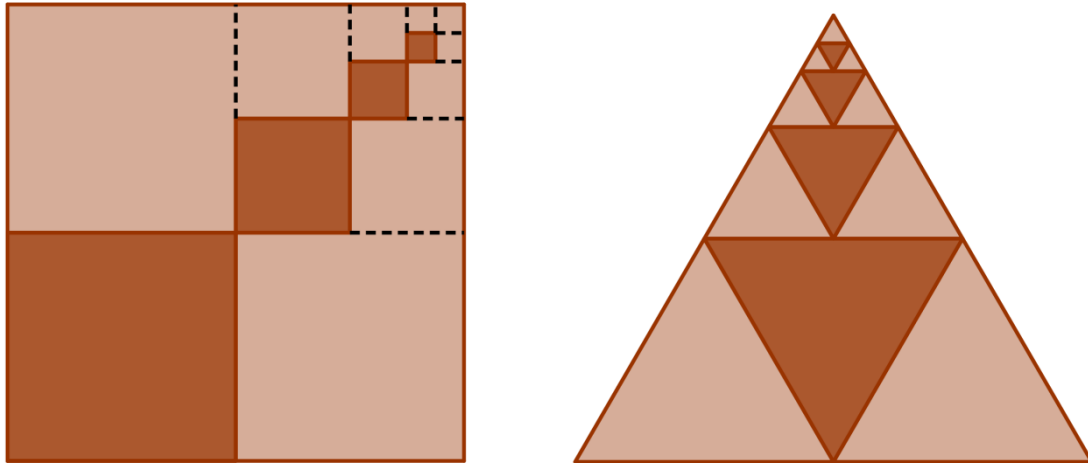


Abbildung 2-22 Zwei geometrische Beweise für die geometrische Reihe

Der erste Beweis ist in (Nelsen, 2016 S. 182) zu finden, der zweite Beweis in (Nelsen, 2016 S. 180). Diese Art von Beweisen wird auch „Beweise ohne Worte“ genannt.

2.4.2.2 Neuer elementarer Beweis für die Volumenformel einer Pyramide

Der im vorigen Kapitel vorgestellte Beweis kann auf eine Pyramide P mit der Grundfläche G_P und der Höhe h in analoger Weise übertragen werden.

Für den Beweis wird außerdem der Punkt M benötigt, der auf G_P liegt und die Eigenschaft hat, dass die von M ausgehenden Strecken zu allen Eckpunkten von G_P innerhalb von G_P liegen. Dieser ist notwendig, um das Ausschneiden der oberen Pyramide aus dem unteren Pyramidenstumpf durchzuführen.

Im Fall, dass G_P konkav ist, gibt es Fälle, bei denen ein solcher Punkt M nicht existiert (siehe Abbildung 2-23). Dann muss die Grundfläche G_P in Teilflächen geteilt werden, bei denen M existiert. Die Pyramide P setzt sich dann aus den durch die Teilflächen erzeugten Teilpyramiden zusammen, und der Beweis wird für die Teilpyramiden durchgeführt.

Im Beispiel, das in der Abbildung 2-23 zu sehen ist, gibt es offensichtlich keinen Punkt M , sodass die von M ausgehenden Strecken zu allen Eckpunkten der Grundfläche $ABCDEF$ innerhalb dieser Fläche liegen. Vom Punkt M aus liegen nur die Strecken zu B , C , D , E und F innerhalb der Grundfläche, zu A nicht. Wird der Punkt M in Richtung B verschoben, sodass die Strecke zu A innerhalb der Grundfläche zu liegen kommt, ergibt sich der Punkt M' , von dem aus die Strecke zu D nicht mehr innerhalb der Grundfläche liegt. Diese Grundfläche erfüllt somit die geforderte Eigenschaft nicht und muss daher z.B. entlang der Strecke g geteilt werden (siehe Abbildung 2-23).

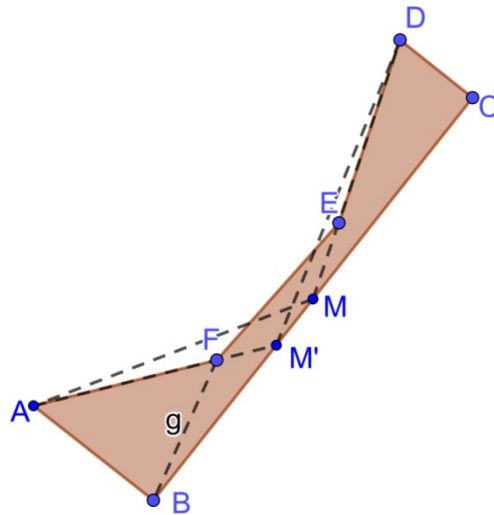


Abbildung 2-23 Zu teilende Grundfläche

Ein Beispiel einer Pyramide, die auf dieser Grundfläche fußt, ist in Abbildung 2-24 zu sehen. Diese müsste z.B. entlang der Fläche BFS geteilt werden, sodass sich zwei Teilpyramiden mit den Grundflächen ABF und $BCDEF$ ergeben. Bei der zweiten Teilpyramide ist die Grundfläche zwar immer noch konkav, es existiert allerdings ein Punkt M mit der gewünschten Eigenschaft (siehe Abbildung 2-23).

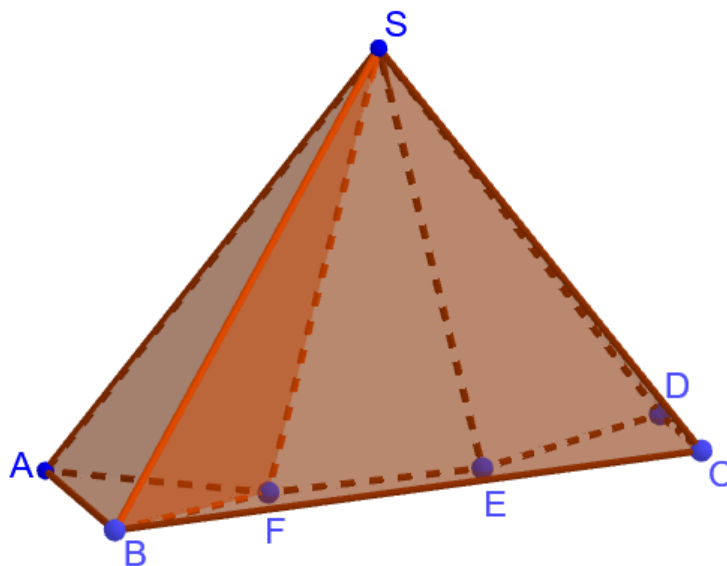


Abbildung 2-24 Zu teilende Pyramide

Als Beispiel für den Beweis wird eine gerade regelmäßige fünfseitige Pyramide P verwendet (siehe Abbildung 2-25).

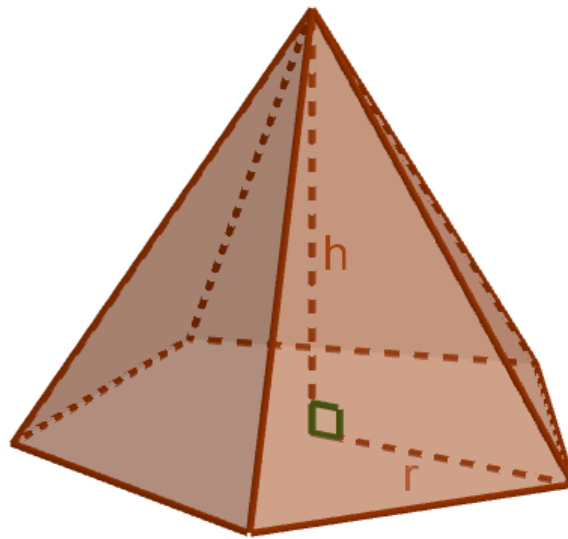


Abbildung 2-25 Gerade regelmäßige fünfseitige Pyramide

Die Ermittlung des Volumens der Pyramide P erfolgt in fünf Schritten:

- 1) Die Pyramide P wird in der Höhe $\frac{h}{2}$ durchgeschnitten, die obere halbe Pyramide – genannt HP – von P abgetrennt und derart um die entstandene Schnittfläche gespiegelt, die der Grundfläche von HP entspricht, sodass die Spitze der gespiegelten Pyramide – genannt HPG – auf der Grundfläche G_P von P zu liegen kommt und mit dem Punkt M zusammenfällt. Diese gespiegelte und dadurch umgedrehte Pyramide HPG befindet sich vollständig innerhalb der unteren Hälfte der Pyramide P , der die Form eines Pyramidenstumpfes hat. Nun wird die Pyramide HPG aus dem Pyramidenstumpf ausgeschnitten und der so erhaltene Körper PSA genannt (siehe Abbildung 2-26).

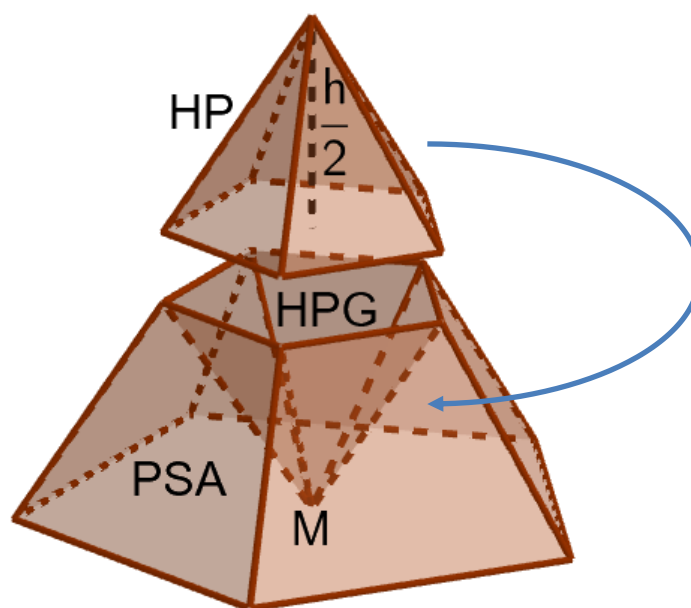


Abbildung 2-26 Pyramidenstumpf, aus dem die gespiegelte Pyramide ausgeschnitten wird

- 2) Die Querschnittsflächen $A_{PSA}(z)$, $0 \leq z \leq \frac{h}{2}$ von PSA werden unter Verwendung der Formel (2-7) wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 A_{PSA}(z) &= G_P(z) - G_{HPG}(z) \\
 &= G_P \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 - G_P \left(\frac{z}{h}\right)^2 \\
 &= G_P \left(1 - \frac{2z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right) \\
 &= G_P \left(1 - \frac{2z}{h}\right).
 \end{aligned}$$

Die Querschnittsflächen von PSA haben einen linearen Verlauf in Abhängigkeit von z , im Gegensatz zu denen von P , die einen quadratischen Verlauf in Abhängigkeit von z haben.

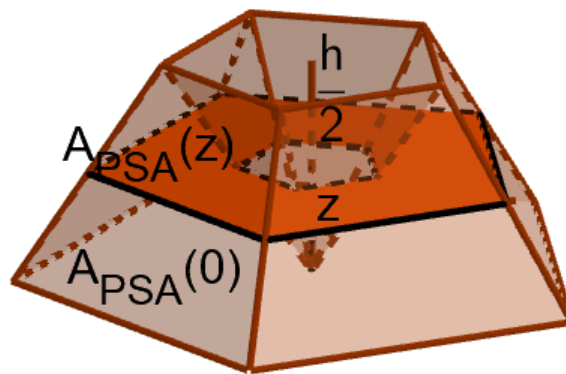


Abbildung 2-27 Pyramidenstumpf in Schichten

- 3) PSA wird in einen neuen Körper NK mit rechteckiger Grundfläche G_{NK} und flächengleichen Querschnittsflächen zu PSA transformiert. Dieser Körper hat die Form eines liegenden dreiseitigen Prismas mit den Abmessungen $a = \frac{G_P}{x}$, wobei x beliebig und $0 \leq x \leq G_P$ ist, $b(0) = x$, $b(z) = x \left(1 - \frac{2z}{h}\right)$, $b\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ und $c = \frac{h}{2}$ (siehe Abbildung 2-28). Aufgrund des Satzes von Cavalieri gilt $V_{NK} = V_{PSA}$.

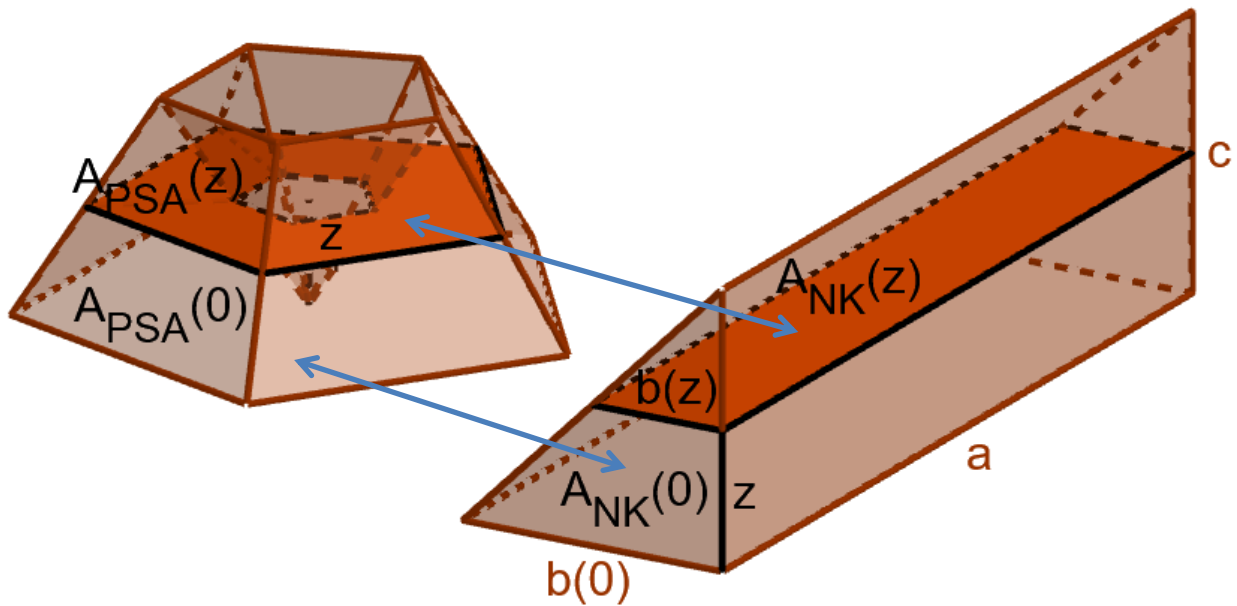


Abbildung 2-28 Transformation des ausgeschnittenen Pyramidenstumpfes in ein dreiseitiges Prisma

- 4) Das Volumen V_{NK} wird berechnet, indem der Körper NK als schräg abgeschnittener und dadurch halbiertes Quader Q betrachtet wird. Der Quader Q hat die Seitenlängen a , $b(0)$ und c . Damit errechnet sich das Volumen zu

$$\begin{aligned}
 V_{NK} &= \frac{1}{2} V_Q \\
 &= \frac{1}{2} a \cdot b(0) \cdot c \\
 &= \frac{1}{2} \frac{G_P}{x} \cdot x \cdot \frac{h}{2} \\
 &= \frac{1}{4} G_P h.
 \end{aligned}$$

Alternativ zu 3) und 4) kann auch der Durchschnitt der Flächen $A_{PSA}(z)$ berechnet werden, der sich aufgrund des linearen Verlaufs zu $\overline{A_{PSA}} = \frac{1}{2} \left(A_{PSA}(0) + A_{PSA}\left(\frac{h}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} G_P$ ergibt. Der Körper NK mit dieser konstanten Querschnittsfläche und Höhe $\frac{h}{2}$ hat das Volumen $V_{NK} = \frac{1}{2} G_P \frac{h}{2} = \frac{1}{4} G_P h$.

Wegen der Volumengleichheit von PSA und NK folgt

$$V_{PSA} = \frac{1}{4} G_P h.$$

- 5) Um nun V_P zu ermitteln, wird noch V_{HP} benötigt. Da der Körper PSA durch zweimalige Subtraktion der halben Pyramide HP von der Pyramide P entsteht (siehe Abbildung 2-26), gilt $V_{PSA} = V_P - 2V_{HP}$, oder umgeformt $V_P = V_{PSA} + 2V_{PK}$.

Die für P beschriebenen Verfahrensschritte (1) bis (4) werden analog auf HP angewandt (siehe Abbildung 2-29).

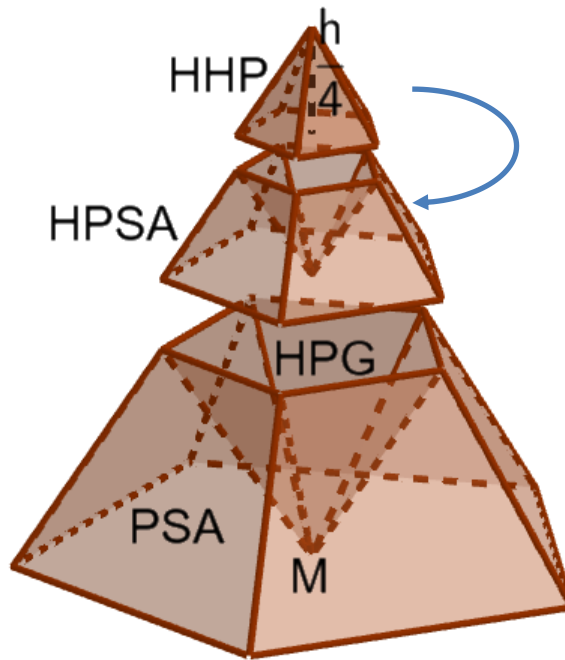


Abbildung 2-29 Anwendung des Verfahrens auf HP

Da die Pyramide HP die Höhe $\frac{h}{2}$ und die Grundfläche $\frac{G_P}{4}$ hat, ergibt sich das Volumen des durch zweimalige Subtraktion der halben Pyramide HHP mit der Höhe $\frac{h}{4}$ und der Grundfläche $\frac{G_P}{16}$ ermittelte Körper $HPSA$ zu

$$V_{HPSA} = \frac{1}{4} \frac{G_P}{4} \frac{h}{2} = \frac{1}{32} G_P h.$$

Daraus ergibt sich nun

$$V_P = V_{PSA} + 2V_{HP} = V_{PSA} + 2V_{HPSA} + 4V_{HHP} = \frac{1}{4} G_P h + \frac{1}{16} G_P h + 4V_{HHP}.$$

Beachte, dass der Wert des zusätzlichen Summanden genau $\frac{1}{4}$ des ersten Summanden beträgt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $V_{HPSA} = \frac{1}{32} G_P h = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} G_P h = \frac{1}{8} V_{PSA}$ ist und $HPSA$ zweimal summiert wird. Die beiden Faktoren bilden zusammen den Faktor $\frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$.

Wenn das Verfahren nun auf HHP usw. angewandt wird, entstehen die weiteren Summanden $\frac{1}{4} \frac{1}{16} G_P h = \frac{1}{64} G_P h$, $\frac{1}{4} \frac{1}{64} G_P h = \frac{1}{256} G_P h$ usw.

Wird das Verfahren nun n -mal angewandt, ergeben sich die Summanden zu einer geometrischen Reihe mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ sowie die 2^n -mal zu ergänzenden n -fach halbierten Pyramiden $H \dots HP$:

$$V_P = \frac{1}{4} G_P h + \frac{1}{16} G_P h + \frac{1}{64} G_P h + \frac{1}{256} G_P h + \dots + \frac{1}{4^n} G_P h + 2^n V_{H \dots HP} = G_P h \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} + 2^n V_{H \dots HP}$$

Aus der Summenformel für geometrische Reihen (2-10) ergibt sich mit $q = \frac{1}{4}$

$$V_P = G_P h \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{4}} + 2^n V_{H \dots HP} = G_P h \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) + 2^n V_{H \dots HP}.$$

Wächst n über alle Grenzen, geht der letzte Faktor des ersten Summanden gegen 1 und der letzte Summand verschwindet, weil die Volumina der n -fach halbierten Pyramiden $H \dots HP$ in Summe beliebig klein werden, woraus sich

$$V_K = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} G_P h = \frac{1}{3} G_P h$$

ergibt, was der Volumenformel (2-4) entspricht. $\square$

Dieser Beweis ist auf schiefe Pyramiden erweiterbar. Die Spiegelung von HP muss als Punktspiegelung am Mittelpunkt der Grundfläche von HP erfolgen, sodass die Spitze von HPG mit dem Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide übereinstimmt. Alternativ ist es möglich, die schiefe Pyramide mit Hilfe des Satzes von Cavalieri in eine gerade Pyramide zu transformieren.

2.4.2.3 Elementare Plausibilitätsbetrachtung für die Volumenformel einer rechteckigen Pyramide

Auf (Huber, 2009) findet sich eine anschauliche elementare Plausibilitätsbetrachtung für die Volumenformel einer rechteckigen Pyramide P .

Diese Plausibilitätsbetrachtung fußt auf der Annahme, dass ähnliche Pyramiden mit Ähnlichkeitsfaktor k einen Volumenfaktor von k^3 haben. Diese Annahme ist leicht mit Hilfe der Volumenformel für Pyramiden zu begründen, wenn diese schon bekannt ist. Da dies hier nicht der Fall ist, kann dieser Zugang nicht als "Beweis" gewertet werden.

Das Volumen der Pyramide P lässt sich mit diesem Verfahren ermitteln, indem P in Teilkörper aufgeteilt wird, deren Volumen bestimmt werden können. Das Volumen von P ergibt sich aus der Summe der Volumina dieser Teilkörper.

Dazu wird eine rechteckige Pyramide P mit den Seitenlängen a und b und der Höhe h betrachtet.

In die Pyramide P lässt sich ein Quader Q mit der Höhe $\frac{h}{2}$ einschreiben (siehe Abbildung 2-30, Q ist dort farblich sichtbar). Der Quader Q hat aufgrund des Strahlensatzes die Seitenlängen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$. Das Volumen des Quaders Q ergibt sich daher zu $V_Q = \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{abh}{8}$.

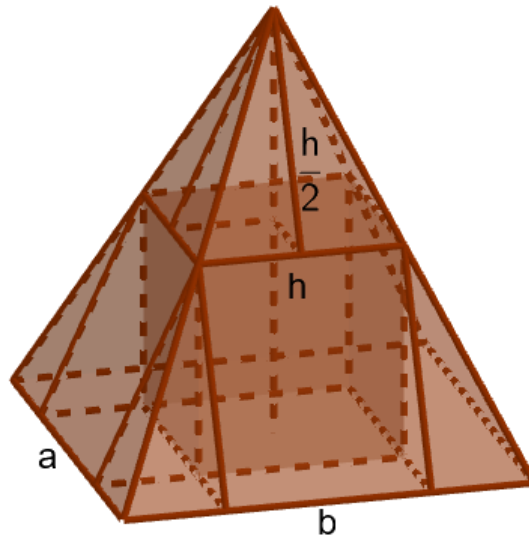


Abbildung 2-30 Einschreibung eines Quaders in eine rechteckige Pyramide

Oberhalb des Quaders Q ist eine Pyramide HP , die ähnlich zu P ist und die die halben Abmessungen, d.h. halbe Höhe und halbe Seitenlängen hat. Dann liegt nahe, dass $V_{HP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} V_P = \frac{1}{8} V_P$ ist.

Die unteren vier Eckstücke lassen sich zu einer Pyramide zusammensetzen, die der oberen Pyramide HP entspricht. Deshalb haben sie zusammen ebenfalls $\frac{1}{8}$ des Volumens der Pyramide P . Die vier dreiseitigen Prismen, die übrigbleiben, können jeweils paarweise zu zwei Quadern zusammengesetzt werden, wobei der erste Quader die Seitenlängen $\frac{a}{4}$ und $\frac{b}{2}$ und die Höhe $\frac{h}{2}$, und der zweite die Seitenlängen $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{4}$ und die Höhe $\frac{h}{2}$ hat. Beide Quader haben jeweils das halbe Volumen des Quaders Q und zusammen das gleiche Volumen wie Q .

Daraus kann die folgende Gleichung für das Volumen von P aufgestellt werden:

$$\text{Volumen von } P = 2 \cdot \text{Volumen von } HP + 2 \cdot \text{Volumen von } Q$$

oder als mathematische Formel ausgedrückt:

$$V_P = 2 \cdot \frac{1}{8} V_P + 2 \cdot \frac{abh}{8}$$

Daraus lässt sich V_P berechnen:

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{1}{4} V_P + \frac{abh}{4} \\ \frac{3}{4} V_P &= \frac{abh}{4} \\ V_P &= \frac{1}{3} abh \end{aligned}$$

Somit ist die Volumenformel für eine rechteckige Pyramide plausibel gemacht worden. Beachte, dass hier der Satz von Cavalieri nicht zur Anwendung kommt. Dafür ist die Annahme notwendig, dass $V_{HP} = \frac{1}{8} V_P$ sei, wodurch diese Plausibilitätsbetrachtung kein echter Beweis ist.

2.4.2.4 Elementarer Beweis für die Volumenformel einer rechteckigen Pyramide

Die im Kapitel 2.4.2.3 beschriebene Plausibilitätsbetrachtung wird zum Beweis, wenn das Volumen von V_{HP} mit Hilfe des iterativen Verfahrens, das im Kapitel 2.4.2.2 beschrieben ist, berechnet wird. Damit fällt nämlich die Annahme weg, dass $V_{HP} = \frac{1}{8}V_P$ sei.

2.4.2.5 Elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels bzw. einer Pyramide

In (Heuser, 2008 S. 650) findet sich ein Hinweis auf einen Beweis von Gile Persone de Roberval (1602 – 1675) für die Volumenformel eines Drehkegels. Es wird dort die Fläche F unter einer Parabel $y = x^2$ unter dem Intervall $I := [0, a]$ ($a > 0$) berechnet. Diese Berechnung lässt sich auf das Volumens eines Drehkegels bzw. einer Pyramide übertragen.

Das Intervall I wird durch die Punkte $x_k := k \left(\frac{a}{n}\right)$ ($k = 1, \dots, n$) in n gleiche Teile der Länge $\frac{a}{n}$ zerlegt. Die Rechteckssumme

$$R_n := \sum_{k=1}^n \frac{a}{n} x_k^2 = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^n k^2$$

ist eine Näherung für F . Anhand der Summenformel der n ersten Quadratzahlen wird R_n auf die Form

$$R_n := \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} \quad (2-11)$$

gebracht. Bei unbegrenzter Verfeinerung der Intervalleinteilung approximiert R_n die gesuchte Fläche F immer besser, und da die mit n behafteten Glieder auf der rechten Seite von (2-11) für große n fast nichts mehr zu R_n beitragen, ergibt sich $F = \frac{a^3}{3}$.

Dieses Ergebnis lässt sich auf die Summation der Querschnitte der Drehkegels übertragen (siehe Formel (2-7)), die ebenso einer quadratischen Funktion entspricht, indem x^2 durch $\left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 = \frac{(1-z)^2}{h^2}$ ersetzt, der Faktor $\frac{1}{h^2}$ herausgezogen, a durch h ersetzt und der Faktor $r^2\pi$ ergänzt wird. Daraus entsteht die Funktion $y = (1 - z)^2$, die symmetrisch zur ursprünglichen Funktion ist und die gleiche Fläche F hat. Daraus ergibt sich

$$V = \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} r^2 \pi = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

was der Volumenformel (2-3) entspricht. $\square$

Für das Volumen einer quadratischen Pyramide wird der Faktor G statt dem Faktor $r^2\pi$ genommen. Daraus ergibt sich

$$V = \frac{1}{h^2} \frac{h^3}{3} G = \frac{1}{3} Gh,$$

was der Volumenformel (2-4) entspricht. $\square$

2.4.3 Analytische Beweise

Im Folgenden werden die bekannten, analytischen Beweise für die Volumenformel eines Drehkegels und einer Pyramide vorgestellt.

2.4.3.1 Analytischer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels

Das Volumen eines Drehkegels K mit dem Radius r und der Höhe h ergibt sich mittels Integral über die Querschnittsflächen $A_K(z) = r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi$, $0 \leq z \leq h$ (für die Herleitung siehe Formel (2-7)):

$$\begin{aligned} V_K &= \int_0^h A_K(z) \, dz \\ &= \int_0^h r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \pi \, dz \\ &= \frac{1}{3} r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 (-h) \pi \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h, \end{aligned}$$

was der Volumenformel (2-3) entspricht. $\square$

Einfacher wird die Berechnung, wenn der Drehkegel K umgedreht wird, sodass sich als Querschnittsflächen $A_K(z) = r^2 \frac{z^2}{h^2} \pi$, $0 \leq z \leq h$ ergeben:

$$\begin{aligned} V_K &= \int_0^h A_K(z) \, dz \\ &= \int_0^h r^2 \frac{z^2}{h^2} \pi \, dz \\ &= \frac{1}{3} r^2 \frac{z^3}{h^2} \pi \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h. \square \end{aligned}$$

Der Drehkegel K kann auch als Rotationskörper mit einer Geraden $g(x) = r \left(1 - \frac{x}{h}\right)$, $0 \leq x \leq h$ als Erzeugenden aufgefasst werden (siehe auch Abbildung 2-7). Damit ergibt sich für sein Volumen:

$$\begin{aligned} V_K &= \pi \cdot \int_0^h g^2(x) \, dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \frac{1}{3} r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^3 (-h) \Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h. \square \end{aligned}$$

Einfacher wird die Berechnung, wenn der Drehkegel K umgedreht wird, sodass sich als Gerade $g(x) = r \frac{x}{h}$, $0 \leq x \leq h$ ergibt:

$$\begin{aligned}
V_K &= \pi \cdot \int_0^h g^2(x) \, dx \\
&= \pi \cdot \int_0^h r^2 \frac{x^2}{h^2} \, dx \\
&= \pi \cdot \frac{1}{3} r^2 \frac{x^3}{h^2} \Big|_0^h \\
&= \frac{1}{3} \pi r^2 h. \square
\end{aligned}$$

2.4.3.2 Analytischer Beweis für die Volumenformel einer Pyramide

Das Volumen einer Pyramide P mit der Grundfläche G und der Höhe h ergibt sich mittels Integrals über die Querschnittsflächen $A_P(z) = G \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2$, $0 \leq z \leq h$ (für die Herleitung siehe Formel (2-7)):

$$\begin{aligned}
V_K &= \int_0^h A_P(z) \, dz \\
&= \int_0^h G \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \, dz \\
&= \frac{1}{3} G \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 (-h) \Big|_0^h \\
&= \frac{1}{3} Gh,
\end{aligned}$$

was der Volumenformel (2-4) entspricht. $\square$

Einfacher wird die Berechnung, wenn die Pyramide P umgedreht wird, sodass sich als Querschnittsflächen $A_P(z) = G \frac{z^2}{h^2} \pi$, $0 \leq z \leq h$ ergeben:

$$\begin{aligned}
V_K &= \int_0^h A_P(z) \, dz \\
&= \int_0^h G \frac{z^2}{h^2} \, dz \\
&= \frac{1}{3} G \frac{z^3}{h^2} \Big|_0^h \\
&= \frac{1}{3} Gh. \square
\end{aligned}$$

Die analytischen Beweise basieren auf der Integration eines quadratischen Polynoms, wodurch sich der Faktor $\frac{1}{3}$ ergibt. Analog dazu könnte man analytische Beweise für die Flächenberechnung z.B. eines Dreiecks aufstellen, die auf der Integration eines linearen Polynoms basieren, wodurch der Faktor $\frac{1}{2}$ zustande kommt.

2.5 Anschauliche Darstellungen

Im Folgenden werden zwei anschauliche Darstellungen, eine für das Volumen einer quadratischen Pyramide und zweite für das Volumen eines Drehkegels, gezeigt.

2.5.1 Ein Würfel setzt sich aus drei quadratischen Pyramiden zusammen

Aus drei kongruenten, schiefen quadratischen Pyramiden, deren Höhe gleich der Seitenkante ist und deren Spitze lotrecht über einer Ecke der Grundfläche steht, kann ein Würfel zusammengesetzt werden.

Die drei, aus einem Schaumstoffwürfel ausgeschnittenen Pyramiden, sollen in eine, aus Papier gebastelte Würfelform eingepasst werden (siehe Abbildung 2-31).

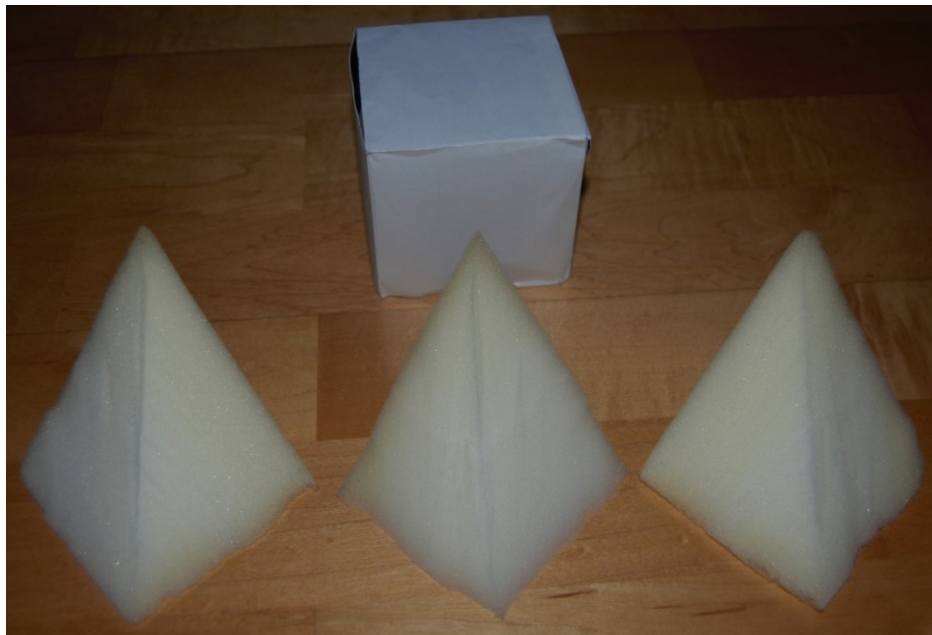


Abbildung 2-31 Drei quadratische Pyramiden passen in einen Würfel

Die erste Pyramide wird in den Würfel gelegt, und die anderen beiden Pyramiden zusammengelegt, sodass sie in den restlichen Hohlraum des Würfels passen (siehe Abbildung 2-32).

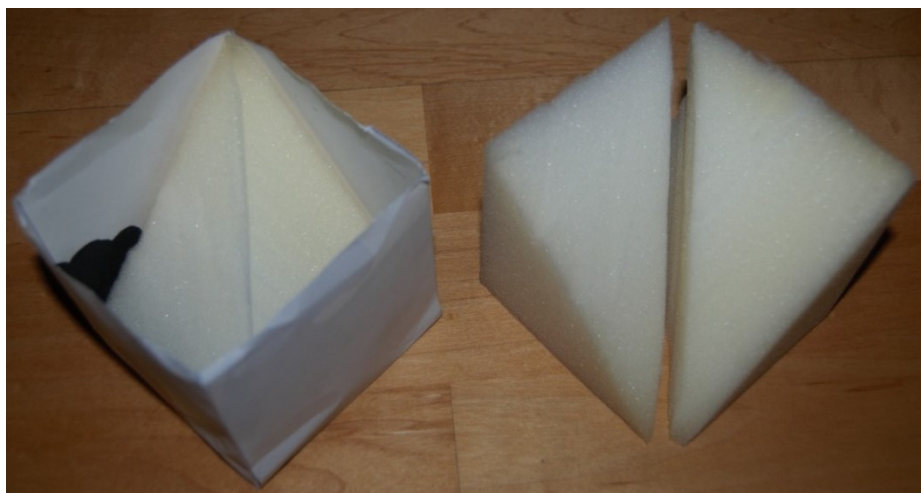


Abbildung 2-32 Eine quadratische Pyramide liegt im Würfel

Im letzten Schritt werden diese zwei Pyramiden in den Würfel gelegt, sodass der Hohlraum des Würfels vollständig ausgefüllt ist (siehe Abbildung 2-33).



Abbildung 2-33 Alle drei quadratischen Pyramiden liegen im Würfel

Somit ist demonstriert, dass das Volumen einer Pyramide genau einem Drittel des Volumens des Würfels beträgt. Für den dazugehörigen geometrischen Beweis siehe das Kapitel 2.4.1.1).

2.5.2 Umgießen von Wasser aus einer Form eines Drehkegels in eine Form eines Drehzylinders

Es werden Kunststoffformen für einen Drehkegel bzw. einen Drehzylinder mit gleicher Höhe bzw. Radius verwendet, um zu veranschaulichen, dass das Volumen des ersteren einem Drittel des letzteren entspricht. Dazu wird in einem ersten Schritt Wasser in die erste Form gefüllt, sodass sie bis oben mit Wasser gefüllt ist und dieses Wasser mittels eines Trichters in die zweite Form gegossen. Das Ergebnis ist in Abbildung 2-34 zu sehen. Die zweite Form ist nun zu einem Drittel mit Wasser gefüllt.



Abbildung 2-34 Ergebnis nach dem ersten Schritt beim Umfüllen des Wassers

Der zweite Schritt besteht in der Wiederholung des ersten Schrittes. Das Ergebnis ist in Abbildung 2-35 zu sehen. Die zweite Form ist nun zu zwei Dritteln mit Wasser gefüllt.



Abbildung 2-35 Ergebnis nach dem zweiten Schritt beim Umfüllen des Wassers

Der dritte Schritt besteht in einer weiteren Wiederholung des ersten Schrittes. Das Ergebnis ist in Abbildung 2-36 zu sehen. Die zweite Form ist nun vollständig mit Wasser gefüllt.



Abbildung 2-36 Ergebnis nach dem dritten Schritt beim Umfüllen des Wassers

Da diese Formen sehr exakt gefertigt sind, ist die Genauigkeit sehr groß, sodass die zweite Form nach dem dreimaligen Umgießen tatsächlich voll ist. Somit ist demonstriert, dass das Volumen eines Drehkegels genau einem Drittel des Volumens des Drehzylinders beträgt. Als Alternative zu Wasser kann auch z.B. feiner, rieselfähiger Sand verwendet werden.

2.6 Umsetzung in der Schule

In diesem Kapitel wird im ersten Teil der Lehrplan, der als Basis für die Umsetzung der Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden in der Schule dient, vorgestellt. Im zweiten Teil wird ein Exzerpt aus drei ausgewählten aktuellen Schulbuchreihen beschrieben. Im dritten Teil wird ein Beispiel der eigenen Erfahrung aus der Masterpraxis vorgestellt.

2.6.1 Lehrplan der Sekundarstufe 1

Der Lehrplan der Sekundarstufe 1 in Bezug auf den Kompetenzbereich 3 (Figuren und Körper) für die allgemeinbildenden höheren Schulen sieht wie folgt aus (siehe (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2024), Anlage 1). Der Lehrplan für die Mittelschulen ist wortgleich (siehe (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2024), Anlage 1). Im Lehrplan sind auch Präzisierungen der Kompetenzbeschreibungen angegeben, die hier auszugsweise als Unterpunkte zu den Kompetenzbeschreibungen wiedergegeben sind. Die für das Thema Volumenberechnung relevanten Kompetenzbeschreibungen sind mittels fatter Schrift hervorgehoben.

2.6.1.1 1. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit einfachen geometrischen Objekten in der Ebene arbeiten;
- Eigenschaften von Rechtecken beschreiben; Rechtecke und Figuren, die aus Rechtecken bestehen, konstruieren und maßstäblich darstellen; Formeln für den Umfang und den Flächeninhalt von Rechtecken begründen und anwenden;
- **Eigenschaften von Quadern beschreiben; Formeln für den Oberflächeninhalt und Rauminhalt von Quadern begründen und anwenden:**
 - Ermitteln von Rauminhalten von Quadern durch Zerlegen in passende Einheitswürfel;
 - Kennen, Anwenden und Begründen einer Formel für das Volumen eines Quaders; allenfalls Lösen entsprechender Umkehraufgaben;

2.6.1.2 2. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit kartesischen Koordinatensystemen arbeiten;
- achsensymmetrische Figuren sowie zueinander kongruente Figuren erkennen, konstruieren und ihre Eigenschaften nutzen;
- mit Dreiecken, besonderen Vierecken und ihren Flächeninhalten arbeiten:
 - allenfalls Konstruieren besonderer Punkte im Dreieck.

2.6.1.3 3. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit Vielecken und ihren Flächeninhalten arbeiten;
- Figuren zentrisch vergrößern bzw. verkleinern; ähnliche Figuren erkennen und nutzen;
- **räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln:**
 - Kennen und Beschreiben grundlegender Eigenschaften von geraden Prismen und von Pyramiden;
 - Skizzieren von Schrägrissen von geraden Prismen und von Pyramiden;
 - Berechnen von Oberflächeninhalten gerader Prismen;

- Kennen und Anwenden der Formeln für den Rauminhalt von geraden Prismen und von Pyramiden; allenfalls Begründen solcher Formeln;
- Bearbeiten von Sachaufgaben zu diesen Körpern, insbesondere Berechnen von Massen und Dichten;
- allenfalls untersuchen, wie sich Längenänderungen auf Oberflächen- und Rauminhalte auswirken.

2.6.1.4 4. Klasse – Kompetenzbereich 3: Figuren und Körper

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit dem pythagoräischen Lehrsatz arbeiten;
- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und Kreisteilen ermitteln;
- **Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln:**
 - Wiederholen und Festigen: Eigenschaften von Prismen und Pyramiden, Berechnen von Oberflächen- und Rauminhalten;
 - Beschreiben grundlegender Eigenschaften von Drehzylindern und Drehkegeln;¹⁰
 - Kennen und Anwenden von Formeln für die Berechnung von Oberflächen- und Rauminhalten von Drehzylindern und Drehkegeln; allenfalls Begründen solcher Formeln;
 - Lösen einfacher Umkehraufgaben, insbesondere durch Umformen von Formeln;
 - Lösen von Aufgaben in Sachsituationen, insbesondere Berechnen von Massen und Dichten.

2.6.2 Lehrplan der Sekundarstufe 2

Der Lehrplan der Sekundarstufe 2 in Bezug auf die Integralrechnung, die für die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden erforderlich ist, für die allgemeinbildenden höheren Schulen sieht wie folgt aus (siehe (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2024), Anlage 1). Die für das Thema Volumenberechnung relevanten Punkte des Kompetenzmoduls sind mittels fatter Schrift hervorgehoben.

2.6.2.1 8. Klasse – Kompetenzmodul 7

7. Semester

Grundlagen der Integralrechnung

- Das bestimmte Integral kennen und als Zahl „zwischen“ allen Ober- und Untersummen auffassen können sowie näherungsweise als Summe von Produkten auffassen und berechnen können:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x$$

- Größen durch Integrale ausdrücken können, insbesondere als Verallgemeinerungen von Formeln mit Produkten (z.B. für Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege)
- Den Begriff Stammfunktion kennen und anwenden können
- Bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln berechnen können

Anwendungen und Exaktifizierungen der Integralrechnung

- **Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen)**
- Die Hauptsätze (bzw. den Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung kennen; den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren erläutern können
- Das unbestimmte Integral kennen

Wie anhand des Lehrplans gut ersichtlich ist, werden der Volumenbegriff und die damit zusammenhängenden Formeln und Berechnungen in der 1., 3. und 4. Klasse sukzessive aufgebaut und vertieft. Erst in der 8. Klasse erfolgt eine Wiederaufnahme der Thematik im Rahmen der Integralrechnung.

2.6.3 Exzerpt von aktuellen Schulbuchreihen

Es werden drei aktuelle Schulbuchreihen „Mathematik verstehen“ (Sekundarstufe 1 und 2), „Das ist Mathematik“ (Sekundarstufe 1) und „Lösungswege“ (Sekundarstufe 2) beispielhaft für die aktuelle Umsetzung des Lehrplans vorgestellt. Das Exzerpt enthält Auszüge aus den relevanten Kapiteln der maßgeblichen Schulbücher mit der Angabe von Lernzielen, Definitionen, Sätzen, einer Veranschaulichung und Übungsaufgaben. Es enthält nur die Texte und weder Bilder noch Skizzen. Bei Beispielen mit Unterpunkten z.B. a), b), c) werden die Unterpunkte, bei denen sich nur die Zahlen ändern, weggelassen. Ebenso werden die Unterpunkte weggelassen, bei denen keine Volumenberechnung vorkommt.

2.6.3.1 Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“

2.6.3.1.1 1. Klasse

Schulbuch: „Mathematik verstehen 1“ (Salzger, et al., 2023)

Kapitel 11 „Quader und Würfel“, Seite 220 ff.:

Lernziele:

- Formel für das Volumen von Quadern und Würfeln kennen und anwenden können.

Kapitel 11.3 „Volumen von Quader und Würfel“, Seite 227 ff.

Definitionen:

- Berechnen des Volumens von Quader und Würfel
 - **Quader**
 - Grundflächeninhalt $G = a \cdot b$
 - **Volumen** $V = G \cdot h$, und daher $V = a \cdot b \cdot h$
 - **Würfel**
 - Grundflächeninhalt $G = a \cdot a$, Höhe $h = a$
 - Volumen $V = G \cdot h$, und daher $V = a \cdot a \cdot a$

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

11.57 Habibas Aquarium ist 50 cm lang, 40 cm breit und 30 cm hoch (1) Wie viel Liter Wasser fasst das Aquarium, wenn es zur Gänze gefüllt ist?

- Umkehraufgaben:

11.76 In einer rechteckigen Sandkiste mit einem Grundflächeninhalt von $2,25 \text{ m}^3$ werden 450 l Sand gleichmäßig verteilt. Wie hoch steht der Sand in der Sandkiste?

2.6.3.1.2 3. Klasse

Schulbuch: „Mathematik verstehen 3“ (Salzger, et al., 2022)

Kapitel 10 „Prisma und Pyramide“, Seite 230 ff.:

Lernziele:

- Eigenschaften von Prismen und Pyramiden erkennen und benennen können.
- Oberflächeninhalt, Volumen, Masse und Dichte von Gegenständen berechnen können, welche die Form eines Prismas oder einer Pyramide haben.

Kapitel 10.1 „Eigenschaften von Prismen“, Seite 230 ff.:

Definitionen:

- Eigenschaften von Prismen:
 - Ein **Prisma** ist ein geometrischer Körper, bei dem **Grund-** und **Deckfläche** zueinander **parallel** und **kongruente Vielecke** sind. Die Form der Grundfläche bestimmt die **Bezeichnung des Prismas** (z.B. dreiseitiges, quadratisches, fünfseitiges Prisma).
 - Die **Höhe** des Prismas ist der **Normalabstand** zwischen Grund- und Deckfläche.
 - Alle **Seitenkanten** eines Prismas sind **parallel** und **gleich lang**.
 - Die **Seitenflächen** bilden den **Mantel des Prismas**. Stehen die Seitenflächen normal zur Grundfläche, so spricht man von einem **geraden Prisma**, andernfalls heißt es **schief**. Bei einem geraden Prisma hat jede Seitenfläche die Form eines Rechtecks. Höhe und Seitenkanten sind bei einem geraden Prisma gleich lang.
 - Ist die Grundfläche eines geraden Prismas ein **regelmäßiges Vieleck** (z.B. ein gleichseitiges Dreieck, Quadrat, regelmäßiges Fünfeck) so nennt man es **regelmäßiges Prisma**.
 - **Quader** und **Würfel** sind **Sonderformen** eines Prismas.

Kapitel 10.3 „Volumen, Masse und Oberflächeninhalt von Prismen“, Seite 237 ff.:

Definitionen:

- Volumen eines Prismas:
 - Ist G der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe eines Prismas, so gilt für das **Volumen** eines **Prismas**: $V = G \cdot h$ (Volumen = Grundflächeninhalt mal Höhe).
 - Diese Formel gilt sowohl bei geraden als auch bei schiefen Prismen.

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

10.28 Berechne das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge a !

a) $a = 7 \text{ cm}$

10.29 Berechne das Volumen V eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und h !

a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$

b) $a = b = 5,3 \text{ cm}$, $h = 7 \text{ cm}$

10.30 Berechne das Volumen V eines regelmäßigen vierseitigen Prismas mit den Kantenlängen a , h !

a) $a = 3 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$

10.31 Berechne das Volumen V eines Prismas, dessen Grundfläche ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b ist und das die Körperhöhe h hat!

a) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $h = 7 \text{ cm}$

- Umkehraufgaben:

10.37 Berechne das fehlende Maß des Prismas! Beachte die Einheiten!

	a)	b)	c)	d)	e)
G	84 cm^2		$27,95 \text{ m}^2$		$3,24 \text{ m}^2$
h		$1,8 \text{ dm}$	50 cm	$1,5 \text{ m}$	
V	$1\,260 \text{ cm}^3$	$24,426 \text{ dm}^3$		$35\,520 \text{ dm}^3$	$15\,552 \text{ l}$

Kapitel 10.4 „Eigenschaften von Pyramiden“, Seite 247 ff.:

Definitionen:

- Eigenschaften von Pyramiden:
 - Eine **Pyramide** ist ein geometrischer Körper, dessen **Grundfläche** ein **Vieleck** ist. Die Form der Grundfläche bestimmt die Bezeichnung der Pyramide (z.B. dreiseitige, quadratische, fünfseitige Pyramide)
 - Die **Seitenflächen** einer Pyramide sind **Dreiecke**, sie schneiden einander in der Spitze der
 - Pyramide und bilden zusammen den **Mantel** der Pyramide.
 - Die **Höhe** der Pyramide ist der **Normalabstand** der Spitze zur **Grundfläche**.
 - Der Punkt, in dem die Höhe die Grundflächenebene schneidet, heißt **Fußpunkt** der Höhe.
 - Ist die Grundfläche einer geraden Pyramide ein **regelmäßiges Vieleck** (z.B. ein gleichseitiges Dreieck, Quadrat, regelmäßiges Fünfeck), so spricht man von einer **regelmäßigen Pyramide**. Ihre **Spitze** liegt dabei stets über dem **Umkreismittelpunkt** der **Grundfläche**.

Kapitel 10.6 „Volumen, Masse und Oberflächeninhalt von Pyramiden“, Seite 251ff.:

Definitionen:

- Volumen einer Pyramide:
 - Ist G der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe einer Pyramide, so gilt für das Volumen der Pyramide: $V = \frac{G \cdot h}{3}$ (Volumen = Grundflächeninhalt mal Höhe geteilt durch 3)

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

10.103: Berechne das Volumen V einer quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge a und der Pyramidenhöhe h !

a) $a = 5 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ cm}$

10.104: Wie groß ist das Volumen V einer geraden Pyramide mit der Höhe h , deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b ist? Berechne!

a) $a = 6 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$
- Umkehraufgaben:

10.108: Von einer quadratischen Pyramide kennt man das Volumen V und die Länge a der Grundkante. Berechne die Körperhöhe h !

a) $V = 125 \text{ cm}^3$, $a = 5 \text{ cm}$

10.109: Von einer quadratischen Pyramide kennt man das Volumen V und die Körperhöhe h . Berechne die Länge a der Grundkante!

a) $V = 324 \text{ cm}^3$, $h = 12 \text{ cm}$

Kapitel 10.7 „Scherungen“, Seite 257:

Eine Scherung einer Figur ist eine Verformung durch Verschiebung, die nichts am Flächeninhalt der Figur ändert. Dabei wird eine Seite fixiert, alle anderen Punkte der Figur werden parallel zu dieser Seite verschoben.

Eine Möglichkeit, das Volumen eines Körpers zu ermitteln, ist die Scherung im Raum. Ein Stapel von 30 Kärtchen zu einem Quader zusammengesetzt hat ein Volumen, das sich leicht mit dem Produkt aus Länge, Breite und Höhe ermitteln lässt. Verschiebt man nun alle 30 Kärtchen so, dass ein schiefes quadratisches Prisma entsteht, sollte auch für diesen Körper dasselbe Volumen gelten. Verdreht man nun alle 30 Kärtchen zu einem recht kunstvollen Körper, kann man sicher sein, dass auch hier das Volumen noch stets dasselbe ist wie bei dem Quader aus den 30 Kärtchen.

Bei einer Scherung entsteht durch das Verschieben der Kärtchen ein stufenförmiger Körper, dessen Volumen bei ganz exakter Betrachtung ein kleines bisschen von dem des Quaders abweicht. Je dünner aber die Kärtchen sind, desto genauer liegt das Ergebnis beim Volumen

des Quaders. Dahinter steckt das Prinzip von Cavalieri, benannt nach dem italienischen Mathematiker Bonaventura Cavalieri (1598–1674), das Folgendes besagt:

Zwei Körper K_1 und K_2 mit gleicher Höhe h haben das gleiche Volumen, wenn die Inhalte aller ebenen Schnittflächen miteinander übereinstimmen, die parallel zu einer vorgegebenen Ebene E in jeder Höhe z durchgeführt werden.

2.6.3.1.3 4. Klasse

Schulbuch: „Mathematik verstehen 4“ (Salzger, et al., 2023)

Kapitel 7 „Rotationskörper“, Seite 180 ff.:

Lernziele:

- Eigenschaften der Rotationskörper Drehzylinder, Drehkegel und Kugel kennen.
- Formeln für die Berechnung des Volumens und des Oberflächeninhalts von Drehzylinder, Drehkegel und Kugel herleiten und damit arbeiten können.

Kapitel 7.1 „Was ist ein Rotationskörper?“, Seite 180:

Definitionen:

- Rotationskörper:
 - Wird die Oberfläche eines Körpers durch Rotation (Drehung) einer erzeugenden Linie um eine Rotationsachse gebildet, spricht man von einem **Rotationskörper**. Dabei liegen Linie und Achse zunächst in einer Ebene.
 - Wichtige Rotationskörper sind **Drehzylinder**, **Drehkegel** und **Kugel**.

Kapitel 7.2 „Eigenschaften eines Drehzylinders“, Seite 181:

Definitionen:

- Eigenschaften eines Drehzylinders:
 - Einen geometrischen Körper mit zwei kongruenten und zueinander parallelen Kreisen als Grund- und Deckfläche nennt man **Zylinder**. (Anmerkung: diese Definition ist nicht korrekt, weil sie keine Aussage über den Bereich zwischen Grund- und Deckfläche trifft.)
 - Ist zudem die Schnittfläche durch die beiden Kreismittelpunkte ein Rechteck, spricht man von einem **geraden Zylinder** oder **Drehzylinder**.
 - Die **Erzeugende** der gekrümmten **Mantelfläche** steht genauso wie die **Höhe** des Drehzylinders **normal** zu Grund- und Deckfläche.
- Bemerkung:
 - Bei einem schiefen Zylinder ist die Schnittfläche durch die beiden Kreismittelpunkte ein Parallelogramm, aber kein Rechteck.
 - Es handelt sich um **keinen** Rotationskörper.

Kapitel 7.3 „Volumen und Oberflächeninhalt des Drehzylinders“, Seite 182 ff.:

Definitionen:

- Volumen des Drehzylinders:
 - Für das **Volumen V eines Drehzylinders** mit dem Radius r und der Höhe h gilt:
$$V = r^2\pi h$$

Veranschaulichung:

- Diese erfolgt durch ein Prisma mit einer 24-eckigen Grundfläche. Durch Erhöhung der Anzahl der Ecken nähert sich die Grundfläche einem Kreis an. Es wird daher die Annahme getroffen, dass die Volumenformel für ein Prisma auch zutrifft, wenn die Grundfläche kein n -Eck, sondern ein Kreis ist. Es wird auf einen Beweis mit Hilfe der höheren Mathematik verwiesen.

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

7.08 Berechne das Volumen V des geraden Prismas mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h !

a) $G = 80 \text{ cm}^2$; $h = 7 \text{ cm}$

7.09 Berechne das Volumen V des Drehzylinders mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h !

a) $G = 45 \text{ m}^2$; $h = 6,5 \text{ m}$

7.10 Berechne das Volumen V des Drehzylinders mit dem Radius r und der Höhe h !

a) $r = 5 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$

7.11 Aus Beton soll eine drehzylinderförmige Säule mit einem Durchmesser von 80 cm und einer Höhe von 3,5 m hergestellt werden. Wie viel Kubikmeter Beton sind dafür nötig?

- Umkehraufgaben:

7.17 Eine drehzylinderförmige Schachtel hat ein Volumen von 9050 cm^3 und einen Radius von 12 cm. Berechne die Höhe h der Schachtel!

Kapitel 7.4 „Eigenschaften eines Drehkegels“, Seite 188:

- Eigenschaften eines Drehkegels:
 - Einen geometrischen Körper mit einem Kreis als Grundfläche, einer Spitze und einer gekrümmten Mantelfläche nennt man **Kegel**.
 - Ist zudem die Schnittfläche durch die Spitze und den Kreismittelpunkt ein gleichschenkeliges Dreieck, spricht man von einem **geraden Kegel** oder **Drehkegel**.
 - Die **Erzeugende** der gekrümmten **Mantelfläche** ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den **Katheten Radius** und **Höhe**.
- Bemerkung:
 - Bei einem schiefen Kegel ist die Schnittfläche durch die beiden Kreismittelpunkte ein allgemeines Dreieck, aber kein gleichschenkeliges.
 - Es handelt sich um **keinen** Rotationskörper.

Kapitel 7.5 „Volumen und Oberflächeninhalt des Drehkegels“, Seite 189 ff.:

Definitionen:

- Volumen des Drehkegels:
 - Für das **Volumen V eines Drehkegels** mit dem Radius r und der Höhe h gilt:

$$V = \frac{r^2 \pi h}{3}$$

Veranschaulichung:

- Diese erfolgt analog zum Volumen der Pyramide: Das Volumen V jeder Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h lässt sich mit der Formel $V = \frac{G \cdot h}{3}$ berechnen. Wenn nun die Grundfläche kein n -Eck, sondern ein Kreis ist, gilt diese Formel ebenso. Dies lässt sich mit Hilfe der höheren Mathematik beweisen.

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

7.62 Berechne das Volumen V der geraden Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h !

a) $G = 53 \text{ cm}^2$; $h = 12 \text{ cm}$

7.63 Berechne das Volumen V des Drehkegels mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h !

a) $G = 29 \text{ m}^2$; $h = 20,1 \text{ m}$

7.64 Berechne das Volumen V des Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h !

a) $r = 6 \text{ cm}$; $h = 7 \text{ cm}$

7.65 Ein drehkegelförmiges Bleistück hat einen Durchmesser von 3,5 cm und eine Höhe von 4,2 cm. Berechne das Volumen V dieses Bleistücks!

7.66 Das rechtwinkelige Dreieck hat die Kathetenlängen $x = 2 \text{ cm}$ und $y = 3 \text{ cm}$. Es rotiert um die Kathete a) x , b) y . Berechne das Volumen V eines so entstehenden Rotationskörpers!

2.6.3.1.4 8. Klasse

Schulbuch: „Mathematik verstehen 8“ (Malle, et al., 2020)

Kapitel 2 „Einige Anwendungen der Integralrechnung“, Seite 26 ff.:

Lernziele:

- Integrale als Flächeninhalte deuten und Flächeninhalte durch Integrale beschreiben können.
- Integrale als Weglängen deuten und Weglängen durch Integrale beschreiben können.
- Integrale als Volumina deuten und Volumina durch Integrale beschreiben können.
- Integrale als Arbeit deuten und Arbeit durch ein Integral beschreiben können.
- Integrale von Änderungsraten deuten und ermitteln können.

Grundkompetenz für die schriftliche Reifeprüfung:

- Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können.
- Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $\int k \cdot f(x)dx$ und $\int f(k \cdot x)dx$, bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können.
- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können.

Kapitel 2.3 „Volumina“, Seite 36 ff.:

Satz:

- Es sei K ein Körper und $A(z)$ der Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe z (mit $a \leq z \leq b$). Falls die Querschnittsflächenfunktion A stetig ist, gilt für das Volumen $V(K)$ des Körpers: $V(K) = \int_a^b A(z) dz$
- Merke: Das **Volumen** ist das **Integral des Querschnittsflächeninhalts nach der Höhe**.

Übungsaufgaben:

- Herleitung von Formeln

2.57 Leite die Volumenformel $V = \frac{G \cdot h}{3}$ für eine Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h her!

Bemerkung: Die Formel $A = \frac{c \cdot h}{2}$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks kann auf elementare Weise aus der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks gewonnen werden.

Eine analoge elementare Herleitung der Formel $V = \frac{G \cdot h}{3}$ für das Volumen einer Pyramide ist aber nicht möglich. Diese Formel kann man nur mit infinitesimalen Methoden herleiten, d.h. mit Methoden, denen Grenzprozesse zugrunde liegen (wie mittels Integration).

2.58 Leite die Formel $V = \frac{r^2 \pi h}{3}$ für das Volumen eines Kreiskegels mit dem Radius r und der Höhe h her!

Satz:

- Es sei f eine reelle Funktion mit $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$. Dreht sich der Graph der Funktion f um eine Koordinatenachse, dann gilt für das Volumen des entstehenden Rotationskörpers
 - bei Drehung um die x-Achse: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$
 - bei Drehung um die y-Achse: $V = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

2.63 Der Graph der Funktion f rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

a) $f(x) = \frac{1}{3}x, 0 \leq x \leq 5$

b) $f(x) = \frac{3}{5}x + 2, 1 \leq x \leq 5$

2.6.3.2 Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“

2.6.3.2.1 1. Klasse

Schulbuch: „Das ist Mathematik 1“ (Aue, et al., 2023)

Abschnitt M „Quader und Würfel“, Seite 256 ff.:

Kapitel 3 „Rauminhalt (Volumen)“, Seite 263 ff.:

Kapitel 3.3 „Berechnen des Rauminhalts eines Quaders“, Seite 266 ff.:

Definitionen:

- Rauminhalt (Volumen) von Quader und Würfel
 - **Rauminhalt des Quaders**
 - $V = a \cdot b \cdot c$
 - **Kurzsprechweise:** Volumen = Länge mal Breite mal Höhe
 - **Rauminhalt des Würfels**
 - $V = a \cdot a \cdot a$
 - **Kurzsprechweise:** Volumen = Kante mal Kante mal Kante
- Man kann auch schreiben:
 - $V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$
 - **Kurzsprechweise:** Volumen = Grundfläche mal Höhe

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

1085: Berechne den Rauminhalt des Quaders!

a) $a = 6 \text{ cm}, b = 9 \text{ cm}, c = 12 \text{ cm}$

- Umkehraufgaben:

1097: Von einem Quader sind der Rauminhalt V und der Inhalt der Grundfläche G gegeben.

1) Gib eine Formel für die Berechnung der Höhe h an!

2) Berechne die Höhe des Quaders!

a) $V = 1\,536 \text{ cm}^3, G = 96 \text{ cm}$

Lernziele: Ich kann ...

- Schrägriss und Netz von Quader und Würfel zeichnen.
- den Inhalt der Oberfläche von Quader und Würfel berechnen.
- Raummaße umrechnen.
- Rauminhalte von Quadern berechnen.
- den Rauminhalt zusammengesetzter Körper berechnen.
- verschiedene Ansichten zusammengesetzter Körper zeichnen.

2.6.3.2.2 3. Klasse

Schulbuch: „Das ist Mathematik 3“ (Hasibeder, et al., 2019)

Abschnitt K „Körper“, Seite 222 ff.:

Kapitel 1 „Prisma“, Seite 224 ff.:

Kapitel 1.1: „Eigenschaften von Prismen“, Seite 224 ff.:

Definitionen:

- Eigenschaften von Prismen
 - **Prismen** werden von zwei **kongruenten Vielecken** begrenzt, die zueinander **parallel** liegen (Grundfläche und Deckfläche). Die **Seitenkanten** sind alle **gleich lang** und zueinander **parallel**; beim geraden Prisma stehen sie normal zur Grundfläche.
 - Wenn die Grundfläche eines geraden Prismas ein **regelmäßiges Vieleck** ist, wird es **regelmäßiges Prisma** genannt. **Quader** und **Würfel** sind regelmäßige Prismen.
 - Der **Abstand** zwischen Grund- und Deckfläche wird **Höhe des Prismas** genannt.

Kapitel 1.4 „Oberfläche und Volumen“, Seite 229 ff.:

Definitionen:

- Volumen des Prismas
 - $V = G \cdot h$
 - **Kurzsprechweise:** Volumen des Prismas = Grundfläche mal Höhe

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

936 Wie groß sind im gegebenen Prisma 1) das Volumen?

a) Zündholzschachtel: $a = 5,3 \text{ cm}$, $b = 3,4 \text{ cm}$, $c = 1,5 \text{ cm}$

b) Pfeiler mit quadratischer Grundfläche: $a = 62 \text{ cm}$, $h = 1,84 \text{ m}$

c) Würfelförmiger Baustein: $a = 7,4 \text{ cm}$

- Umkehraufgaben:

940 Die Grundkanten eines quaderförmigen Behälters sind 45 cm und 37 cm lang. Wie hoch muss der Behälter sein, wenn er 33 300 cm³ fassen soll?

Kapitel 3 „Pyramide“, Seite 235 ff.:

Kapitel 3.1 „Eigenschaften und Netze“, Seite 235 ff.:

Definitionen:

- Eigenschaften von Pyramiden:
 - Je nachdem, ob die Grundfläche der Pyramide ein Dreieck, Viereck, Fünfeck usw. ist, spricht man von einer **dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen** usw. **Pyramide**.
 - Die **Seitenflächen** der Pyramide sind **Dreiecke** und werden jeweils von zwei Seitenkanten und einer Grundkante begrenzt. Die Seitenflächen schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt, **der Spitze S der Pyramide**.
 - Den Abstand der Pyramidenspitze S von der Grundfläche nennt man die **Höhe der Pyramide**. Der Punkt F wird **Fußpunkt der Höhe** genannt. Er ist der Schnittpunkt der Normalen auf die Grundfläche durch die Spitze S mit der Grundfläche bzw. mit der Ebene der Grundfläche.
 - **Bemerkung:** Wenn der Fußpunkt der Höhe in der „Mitte“ der Grundfläche liegt, spricht man von einer geraden Pyramide. Ansonsten handelt es sich um eine „schiefe“ Pyramide.
 - Regelmäßige Pyramiden: man spricht von einer regelmäßigen Pyramide, wenn die Grundfläche der Pyramide ein regelmäßiges Vieleck ist (z.B. ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat, ein regelmäßiges Fünf- oder Sechseck usw.) und der Fußpunkt der Höhe in den Umkreismittelpunkt der Basis fällt.

Kapitel 3.2 „Oberfläche und Volumen“, Seite 238 f.:

Definitionen:

- Rauminhalt (Volumen) der Pyramide
 - $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
 - **Kurzsprechweise:** Volumen = $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe

Veranschaulichung:

- Wir zerlegen einen Würfel mit der Seitenlänge $2h$ in sechs kleine (regelmäßige vierseitige) Pyramiden, deren Grundkanten ($2h$) doppelt so lang sind wie ihre Höhen (h). Jede Teilpyramide hat dieselbe Grundfläche G , die jeweils einer Fläche des Würfels entspricht. Die Spitzen der Teilpyramiden fallen mit dem Mittelpunkt des Würfels zusammen. Damit ergibt sich unmittelbar:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6} \cdot G \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{G \cdot h}{3}$$

- Man kann beweisen: Die gefundene Formel gilt für alle Pyramiden, gleichgültig welches Vieleck die Grundfläche ist und gleichgültig, wo der Fußpunkt F der Höhe liegt.

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

974 Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide kennt man die Länge der Grundkante a und die Körperhöhe h . Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide?

a) $a = 120 \text{ mm}$, $h = 80 \text{ mm}$

- Umkehraufgaben:

985 Von einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide kennt man das Volumen und die Länge der Grundkante a . Berechne die Körperhöhe h !

a) $V = 400 \text{ cm}^3$, $a = 10 \text{ cm}$

Lernziele: Ich kann...

- von Prismen Schrägrisse erstellen, sowie Schnittebenen zeichnen und berechnen.
- das Netz von Prismen und Pyramiden zeichnen.
- bei Prisma und Pyramide verschiedene Längen mit dem Satz des Pythagoras, sowie die Oberfläche bzw. Mantelfläche berechnen.
- das Volumen von Prismen und Pyramiden berechnen.
- die Masse von Körpern berechnen.

2.6.3.2.3 4. Klasse

Schulbuch: „Das ist Mathematik 4“ (Hasibeder, et al., 2020)

Abschnitt J „Zylinder, Kegel und Kugel“, Seite 216 ff.:

Kapitel 1 „Zylinder“, Seite 218 ff.:

Definitionen:

- Rauminhalt (Volumen) des Zylinders
 - $V = G \cdot h$
 - Kurzsprechweise: **Volumen = Grundfläche mal Höhe**
 - Weil $G = \pi \cdot r^2$ ist, folgt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Veranschaulichung:

- Die geometrische Form eines Zylinders erinnert an ein gerades Prisma. Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, dass die Grundfläche eines Prismas ein Vieleck, die des Zylinders aber eine Kreisfläche ist. In der Figur rechts ist in den Zylinder ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma eingezeichnet. Würde man regelmäßige 7-, 8-, 9- ... n -seitige Prismen einzeichnen, bekäme man immer genauere Näherungswerte für das Volumen des Zylinders.
- Der Rauminhalt des Prismas mit Grundfläche G und Höhe h beträgt $V = \text{Grundfläche mal Höhe} = G \cdot h$.
- Auf Grund obiger Überlegungen können wir vermuten, dass auch für den Rauminhalt des Zylinders gilt: $V = \text{Grundfläche mal Höhe}$. Dabei ist die Grundfläche ein Kreis mit dem Flächeninhalt $G = \pi \cdot r^2$.

- **Bemerkung:** Ganz korrekt müssten wir „Drehzylinder“ schreiben. Ein solcher entsteht, wenn sich eine zur Drehachse parallele Strecke um diese Achse dreht, wie die Säulen beim Karussell auf dem Bild. Da wir jedoch keine anderen Zylinder kennenlernen, schreiben wir „Zylinder“, meinen aber immer „Drehzylinder“!

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

959 Eine Regentonne hat die Form eines oben offenen Zylinders mit einem Durchmesser von 1,10 m und einer Höhe von 2,20 m.

a) Wie viel Hektoliter enthält die Tonne, wenn sie vollgefüllt ist?

- Umkehraufgaben:

969 Eine Firma möchte zylinderförmige Gläser mit einem Fassungsvermögen von 0,25 Liter herstellen.

Der Durchmesser soll 6 cm betragen. Wie hoch muss das Glas mindestens sein?

Kapitel 2 „Kegel“, Seite 223 ff.:

Kapitel 2.1 „Volumen des Kegels“, Seite 223 ff.:

Definitionen:

- Rauminhalt (Volumen) des Kegels
 - $V = \frac{G \cdot h}{3}$
 - Weil $G = \pi r^2$ ist, folgt: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
 - Kurzsprechweise: **Volumen = Grundfläche mal Höhe durch 3**
- **Hinweis:** Wie beim (Dreh-)Zylinder müssten wir auch beim Kegel mathematisch gesehen immer „Drehkegel“ schreiben. Welche Linie dreht sich dabei um eine Achse? (Bei einem zugehörigen Experiment kann dir ein eingestochener Zirkel gut helfen.) Wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, schreiben wir auch hier einfach kürzer „Kegel“ und meinen immer „Drehkegel“!

Veranschaulichung:

- Die geometrische Form eines Kegels erinnert an eine regelmäßige Pyramide. Man kann einem Kegel eine regelmäßige n-seitige Pyramide einschreiben. Ihr Rauminhalt liefert einen Näherungswert für das Volumen des Kegels. Ähnlich wie bei Zylinder und Prisma können wir vermuten, dass die Formel für das Volumen der Pyramide $V = \frac{G \cdot h}{3}$ auch für den Kegel gilt.
- Der Unterschied ist, dass die Grundfläche der Pyramide ein Vieleck, die des Kegels ein Kreis ist.
- Erst mit Hilfe von Methoden der höheren Mathematik kann man beweisen, dass unsere Vermutung auch tatsächlich stimmt.

Übungsaufgaben:

- Volumenberechnung:

973 Berechne das Volumen des Kegels, dessen Radius und Höhe gegeben sind!

a) $r = 2 \text{ cm}$, $h = 3 \text{ cm}$

- Umkehraufgaben:

991 Von einem Kegel kennt man das Volumen und die Höhe h bzw. den Basiskreisradius r .

Berechne 1) die fehlende Größe!

a) $V = 1\,183 \pi \text{ cm}^3$, $h = 21 \text{ cm}$

Lernziele: Ich kann...

- die Oberfläche und das Volumen eines Zylinders berechnen.
- die Oberfläche und das Volumen eines Kegels berechnen.
- die Oberfläche und das Volumen einer Kugel berechnen.
- bei Zylinder, Kegel und Kugel Umkehraufgaben lösen.

2.6.3.3 Schulbuchreihe „Lösungswege“

2.6.3.3.1 8. Klasse

Schulbuch: „Lösungswege 8“ (Freiler, et al., 2018)

Abschnitt „Integralrechnung“, Seite 6 ff.:

Kapitel 3 „Weitere Anwendungen der Integralrechnung“, Seite 52 ff.:

Kapitel 3.1. „Volumenberechnungen“, Seite 53 ff.:

Lernziele:

- Das Volumen eines Körpers mit Hilfe der Integralrechnung berechnen können
- Das Volumen von Rotationskörpern berechnen können

Grundkompetenz für die schriftliche Reifeprüfung:

- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Satz:

- Volumina von Körpern mit bekannter Querschnittsfläche:
 - Ist $A(z)$ der Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Körpers in der Höhe z ($a \leq z \leq b$) und A stetig in $[a; b]$, dann gilt für das Volumen V des Körpers in $[a; b]$:
$$V = \int_a^b A(z) dz$$

Veranschaulichung:

- Im vorigen Kapitel wurden schon Anwendungen eines bestimmten Integrals erarbeitet. Dabei wurde das Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten der Form $f(x) \cdot \Delta x$ interpretiert. Diese Interpretation kann auch zur Berechnung des Volumens eines Körpers verwendet werden.
- Man kann für die Volumenberechnung wie folgt vorgehen:
 - Man unterteilt die Höhe des Körpers in n gleich große Intervalle der Länge Δz .
 - Anschließend wird in jedem Intervall eine Zwischenstelle z gewählt und die Querschnittsfläche $A(z)$ betrachtet.
 - Mittels $A(z) \cdot \Delta z$ wird das Volumen des jeweiligen durch die Unterteilung entstandenen Prismas berechnet. Dies ist eine Annäherung an das tatsächliche Volumen im jeweiligen Intervall.
 - Wird nun die Summe der einzelnen Volumina berechnet, erhält man eine Annäherung an das Körpervolumen durch $V \approx \sum A(z) \cdot \Delta z$. Lässt man die Intervalle immer kleiner werden, entsteht eine Summe von Produkten, deren Grenzwert wieder zum bestimmten Integral und somit zum exakten Volumen des Körpers führt.

Satz:

- **Volumina von Rotationskörpern:**
 - Für das **Volumen** eines Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen einer Funktion f mit $f(x) = y$ entsteht gilt:
 - **Drehung um die x -Achse ($a \leq x \leq b$):** $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$
 - **Drehung um die y -Achse ($c \leq y \leq d$):** $V = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$

Veranschaulichung:

- Rotation um die x -Achse
 - Rotiert der Graph einer Funktion f mit $y = f(x)$ in $[a; b]$ um die x -Achse, so kann der Flächeninhalt der Querschnittsfläche an jeder Stelle x durch einen Kreis beschrieben werden, dessen Radius der Funktionswert an der Stelle x ist. Es gilt daher: $A = r^2 \pi \Rightarrow A(x) = f(x)^2 \pi = y^2 \pi$
 - Für das Volumen des Drehkörpers in $[a; b]$ folgt: $V = \int_a^b A(x) dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$
- Rotation um die y -Achse
 - Rotiert der Funktionsgraph nun um die y -Achse, so ist die Querschnittsfläche von y abhängig. Für den Radius des Kreises der Höhe y gilt daher $r = f^*(y) = x$, wobei f^* die Umkehrfunktion von f ist: $A = r^2 \pi \Rightarrow A(y) = f^*(y)^2 \pi = x^2 \pi$
 - Für das Volumen des Rotationskörpers ($c \leq y \leq d$) folgt: $V = \int_c^d A(y) dy = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$

Übungsaufgaben:

- Herleitung von Formeln:

150. a) Leite die Formel für das Volumen eines Zylinders mit der Höhe h und dem Radius r mit Hilfe der Integralrechnung her. Beachte, dass die Querschnittsfläche konstant ist!

b) Leite die Formel für das Volumen eines Kegels mit der Höhe h und dem Radius r her. Stelle dafür die Funktionen $r(z)$ (für den Radius) und $A(z)$ (für die Querschnittsfläche) auf!

- Volumenberechnung:

153. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn sich der Graph der Funktion f im gegebenen Intervall um die gegebene Achse dreht.

a) $f(x) = 2; [-3; 2]; x$ -Achse

b) $f(x) = -4; [-3; 2]; x$ -Achse

c) $f(x) = 4x; [0; 5]; y$ -Achse

d) $f(x) = -2x; [2; 5]; x$ -Achse

e) $f(x) = 2x + 1; [2; 5]; y$ -Achse

2.6.4 Qualitativer Vergleich der drei Schulbuchreihen

In diesem Kapitel wird ein qualitativer Vergleich der drei zitierten Schulbuchreihen „Mathematik verstehen“, „Das ist Mathematik“ und „Lösungswege“ anhand der folgenden Kriterien aufgestellt:

- Lehrplanbezug
- Lernziele
- Definitionen und Sätze
- Veranschaulichung
- Übungsaufgaben
- Technologie

2.6.4.1 Lehrplanbezug

Alle drei Schulbuchreihen bauen auf dem derzeit gültigen Lehrplan auf.

Bei „Mathematik verstehen 1“ (Salzger, et al., 2023 S. II) steht der folgende Text:

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung vom 2. März 2023, GZ 2022-0.223.916, gemäß § 14 Absatz 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch an Mittelschulen und an allgemeinbildenden höheren Schulen – Unterstufe für die 1. Klasse im Unterrichtsgegenstand Mathematik (Lehrplan 2023) geeignet erklärt.

Bei „Das ist Mathematik 1“ (Aue, et al., 2023 S. II) steht der folgende Text:

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung vom 24. April 2023, Geschäftszahl: 2022-0.227.362, gemäß § 14 Abs. 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch an Mittelschulen und an allgemeinbildenden höheren Schulen – Unterstufe für die 1. Klasse im Unterrichtsgegenstand Mathematik (Lehrplan 2023) geeignet erklärt.

Bei „Lösungswege 8“ (Freiler, et al., 2018) steht der folgende Text:

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Bildung und Frauen vom 24. Mai 2017, BMB GZ 5.018/0140-IT/3/2016, gemäß § 14 Absatz 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für die 8. Klasse an allgemeinbildenden höheren Schulen – Oberstufe im Unterrichtsgegenstand Mathematik geeignet erklärt.

Bei den weiteren Schulbüchern aus den drei Schulbuchreihen stehen analoge Texte.

2.6.4.2 Lernziele

Alle drei Schulbuchreihen enthalten eine Auflistung von Lernzielen. Diese sind im Exzerpt im Kapitel 2.6.3 bei jedem Schulbuch aufgelistet.

Der Unterschied ist, dass in der Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ die Lernziele unter der jeweiligen Kapitelüberschrift und in der Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ die Lernziele am Schluss des jeweiligen Kapitels unter der Rubrik „Wissensstraße“ stehen. Bei der Schulbuchreihe „Lösungswege“ stehen die Lernziele sowie die Grundkompetenzen für die schriftliche Reifeprüfung unter der Überschrift jedes Unterkapitels.

2.6.4.3 Definitionen und Sätze

Alle drei Schulbuchreihen enthalten umfangreiche Definitionen und Sätze. Diese sind im Exzerpt im Kapitel 2.6.3 bei jedem Schulbuch aufgelistet. Die Definitionen und Sätze sind in den Schulbuchreihen farblich hinterlegt und entweder mit „Definition“ bzw. „Satz“, mit einem bestimmten Symbol bzw. Text oder einer spezifischen Überschrift gekennzeichnet:

- Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 1: Hinterlegung in hellem Orange und mit einem „!“ gekennzeichnet
- Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 2: Hinterlegung in hellem Orange und mit „Definition“ bzw. „Satz“ gekennzeichnet
- Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“: Hinterlegung in hellem Rot und mit einer Überschrift z.B. „Pyramide“ bzw. „Rauminhalt (Volumen) der Pyramide“ gekennzeichnet.
- Schulbuchreihe „Lösungswege“: Hinterlegung in hellem Gelb und mit dem Text „MERKE“ und mit einer Überschrift z.B. „Volumina von Körpern mit bekannter Querschnittsfläche“ bzw. „Volumina von Rotationskörpern“ gekennzeichnet

2.6.4.4 Veranschaulichung

Alle drei Schulbuchreihen enthalten eine Veranschaulichung für ausgewählte Definitionen und Sätze. Diese sind im Exzerpt im Kapitel 2.6.3 bei jedem Schulbuch aufgelistet. In manchen Fällen hat diese Veranschaulichung auch Beweischarakter. Im Schulbuch „Das ist Mathematik 3“ (Hasibeder, et al., 2019 S. 238) wird ein Beweis für die Volumenberechnung einer quadratischen Pyramide dargestellt. Dieser ist ebenso im Kapitel 2.4.1.2 detailliert beschrieben. Im Schulbuch „Lösungswege 8“ (Malle, et al., 2020 S. 56) wird ein Beweis für die Volumina von Rotationskörpern vorgestellt.

2.6.4.5 Übungsaufgaben

Alle drei Schulbuchreihen enthalten gut aufbereitete Übungsaufgaben zum Thema „Volumen“. Diese sind auszugsweise im Exzerpt im Kapitel 2.6.3 bei jedem Schulbuch aufgelistet. Die Schulbücher für die Sekundarstufe 1 enthalten Übungsaufgaben für die Volumenberechnung sowie Umkehraufgaben, die Schulbücher für die Sekundarstufe 2 enthalten Übungsaufgaben für die Herleitung von Formeln sowie Volumenberechnung.

In den beiden Schulbuchreihen für die Sekundarstufe 2 gibt es Kompetenzchecks für die schriftliche Reifeprüfung, z.B. in „Mathematik verstehen 8“ (Malle, et al., 2020 S. 49 ff.) bzw. in „Lösungswege 8“ (Freiler, et al., 2018 S. 78 f.).

2.6.4.6 Technologie

Die Schulbücher enthalten zum Teil eigene Abschnitte, die dem Thema „Technologie“ gewidmet sind und die Informationen zu den Software-Tools „GeoGebra“, „TI-Nspire“ sowie „Casio ClassPad II“ enthalten.

Diese sehen wie folgt aus:

- Die Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 1 enthält keine Abschnitte zu diesem Thema
- Die Schulbuchreihe „Mathematik verstehen“ für die Sekundarstufe 2 enthält mehrere kurze Abschnitte zu diesem Thema mit der Überschrift „Technologie kompakt“, siehe z.B. „Mathematik verstehen 8“ (Malle, et al., 2020 S. 48)
- Die Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ enthält umfangreiche Abschnitte zu diesem Thema, siehe z.B. „Das ist Mathematik 3“ (Hasibeder, et al., 2019 S. 260 ff.)
- Die Schulbuchreihe „Lösungswege“ enthält einen kurzen Abschnitt zum Thema Technologie, siehe „Lösungswege 8“ (Freiler, et al., 2018 S. 282 f.)

2.6.4.7 Zusammenfassung

Die Qualität der drei betrachteten Schulbuchreihen nach den vorgestellten Kriterien ist im Großen und Ganzen als gleich gut zu betrachten, weil alle gesetzlichen Grundlagen (Lehrplanbezug) erfüllt sind sowie die relevanten didaktischen (Lernziele, Übungsaufgaben) und mathematischen Aspekte (Definitionen, Sätze, Veranschaulichung) betrachtet werden.

Aus der Sicht der in dieser Arbeit vorgestellten Thematik ist die Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ hervorzuheben, weil dort ein Beweis für die Volumenberechnung von quadratischen Pyramiden dargestellt wird.

Ebenso widmet die Schulbuchreihe „Das ist Mathematik“ dem Thema „Technologie“ mehr Raum im Vergleich zu den anderen Schulbuchreihen.

2.6.5 Praktische Umsetzung im Unterricht – Mathematisches Projekt

Dieses Kapitel beschreibt die Motivation, den didaktischen Rahmen, die Einbettung in den Unterricht, die Planung, den Ablauf und die Ergebnisse des mathematischen Projekts, das ich im Rahmen der Masterpraxis durchführte.

2.6.5.1 Motivation

Die Motivation, das mathematische Projekt zum Thema Volumen von Prismen und Pyramiden, sowie Drehzylindern, Drehkegeln und Kugeln durchzuführen, war einerseits eine persönliche, weil mich die Thematik speziell interessiert, andererseits eine fachliche, weil mir einerseits die mangelnde theoretische Fundierung der Volumenformeln der Pyramiden bzw. Drehkegeln in der Sekundarstufe 1 schon als Schüler aufgefallen war. Außerdem hatte ich im Rahmen der Schulpraxis im Bachelorstudium bereits eine Unterrichtseinheit in einer 4. Klasse zu diesem Thema gehalten, die eine Kombination aus haptischen und theoretischen Elementen enthielt. Hier ging es unter anderem darum, den Verhältnissfaktor in der Volumenformel des Drehkegels bzw. des Zylinders empirisch durch Umschütten von Wasser zu ermitteln und dann das beobachtete Ergebnis mit dem exakten Verhältnissfaktor $\frac{1}{3}$ zu vergleichen.

Die weiteren Aufgaben waren unter anderem Umkehraufgaben für die Volumenberechnung durchzuführen. In dieser Unterrichtseinheit ermittelten alle Gruppen der Schülerinnen und Schülern ausnahmslos den richtigen Verhältnissfaktor. Damit war es naheliegend, das mathematische Projekt zu diesem Thema durchzuführen.

2.6.5.2 Didaktischer Rahmen

Dadurch, dass die Volumenformeln eines Drehkegels bzw. der Pyramide im Allgemeinen nicht mit elementaren, mathematischen Methoden begründbar sind, werden im Unterricht der Sekundarstufe 1 die Volumenformeln des Drehkegels $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ bzw. der Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$ nicht bewiesen. Erst in der Sekundarstufe 2 wird die Volumenformel des Drehkegels bzw. der Pyramide mit Hilfe der Integralrechnung bewiesen. Damit müssen die Schülerinnen und Schüler die Volumenformel meist in der dargestellten Form hinnehmen, oft ohne sie sich veranschaulichen bzw. in größere Zusammenhänge einbetten zu können. Das Ziel des mathematischen Projekts war daher, diese Mängel auszugleichen.

Um dies zu erreichen, war der Ansatz des mathematischen Projekts, durch Veranschaulichung von mathematischen Sachverhalten mittels Geometrie das Verständnis der Schülerinnen und Schüler zu erhöhen. Dazu gibt es in der Literatur einen guten Hinweis. (Bruder, et al., 2015) gehen im Kapitel 7 auf die Aspekte der Geometrie und Veranschaulichung im Mathematikunterricht ein und stellen ihre Wichtigkeit unter anderem als „Brückenfunktion zwischen Anschauung und Abstraktion“ dar. Ich nahm die Anregung auf und widmete einige Aufgaben im mathematischen Projekt diesem Aspekt. Durch angreifbare geometrische Körper sollten abstrakte mathematische Sachverhalte anschaulich gemacht werden.

Dass Schülerinnen und Schüler Probleme mit dem Beweisen haben, ist ebenso ein Faktum, wie die Literatur bestätigt. (Bruder, et al., 2015) gehen im Kapitel 7 auf die mangelnde Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit der Geometrie ein, z.B. die richtige Unterscheidung zwischen Voraussetzungen und Behauptungen. (Weigand, et al., 2009) gehen im Kapitel 2 ebenfalls auf die Beweiskompetenzen von Schülerinnen und Schüler ein und sagen, dass „Schüler und Schülerinnen Schwierigkeiten haben, Beweise selbst zu finden und durchzuführen“. Aus diesem Grund waren einige Aufgaben im mathematischen Projekt dergestalt, mathematische Sachverhalte, die in einer vorigen Aufgabe empirisch zu ermitteln waren, auch zu beweisen.

(Philipp, 2013) geht in ihrer Arbeit auf das „Experimentieren in der Mathematik“ ein. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen Mathematik und den Naturwissenschaften her, in den ja das Experimentieren eine zentrale Methode ist, neue Erkenntnisse zu gewinnen und zeigt, dass dies auch in der Mathematik eine bedeutende Rolle spielen kann. Aus diesem Grund waren einige Aufgaben im mathematischen Projekt als Experimente aufgebaut.

(Bruner, et al., 1971) schlagen das EIS-Prinzip vor, wobei EIS für enaktiv, ikonisch und symbolisch steht. Ein mathematischer Sachverhalt sollte möglichst in allen drei Darstellungsebenen – enaktiv, ikonisch, symbolisch – erfasst werden. Auf den Transfer zwischen den drei Repräsentationsmodi sollte ebenfalls besonderes Gewicht gelegt werden. Aus diesem Grund kommen diese drei Darstellungsebenen im mathematischen Projekt vor, enaktiv mittels angreifbarer geometrischer Körper, ikonisch mittels Bilder, die selbst gemacht werden bzw. vom Internet heruntergeladen werden sollen und symbolisch mittels den entsprechenden mathematischen Volumenformeln.

2.6.5.3 Einbettung im Unterricht

Im mathematischen Projekt zum übergeordneten Thema „Mathematik und Kunst“ ging es, wie schon erwähnt, um das Thema Volumen von Prismen und Pyramiden, sowie Drehzylindern, Drehkegeln und Kugeln. Dieses Projekt sollte laut Vorgabe mindestens einen halben Tag, d.h. vier Stunden dauern. Da an der Schule, an der ich hospitierte, bereits ein solcher Projektunterricht durchgeführt wurde, bat ich meine Mentorin, das mathematische Projekt in jenen zu integrieren, was sie auch ermöglichte.

Der Projektunterricht an der Schule hat die Bezeichnung NWL (Naturwissenschaftliches Labor), besteht aus den Fächern Mathematik, Biologie und Chemie und wird wöchentlich alternierend in den Fächern durchgeführt. Das NWL, in dem ich das mathematische Projekt durchführte, war das dritte in Mathematik und fand am Freitag, den 22. November 2019 in der 7. – 10. Stunde statt. Die Klasse war die 5A. Sie wurde in zwei Gruppen geteilt, die jeweils zwei Stunden unterrichtet wurden. Die erste und zweite Gruppe bestand aus jeweils 15 Schülerinnen und Schülern.

Der Lehrplanbezug des mathematischen Projekts ist wie folgt:

- 3. Klasse: Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können
- 4. Klasse: Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können

Daraus lässt sich ableiten, dass das gewählte Thema im NWL eine Wiederholung von Themen früherer Schulstufen darstellte. Das Ziel des NWL war eine Vertiefung und praktische Anwendung des Wissens und Könnens der Schülerinnen und Schüler.

2.6.5.4 Planung

Die Planung des mathematischen Projekts erfolgte in enger Abstimmung mit der Mentorin. Ich hospitierte beim 2. NWL, in dem es um die Berechnung des Flächeninhalts von Vierecken ging, und konnte damit einen Einblick in den Ablauf des NWL bekommen. Der Aufbau bestand aus einer schriftlichen Arbeitsanweisung, die von den Schülerinnen und Schüler im Unterricht in Form eines Protokolls ausgefüllt und entweder am Ende des Unterrichts bzw. zu Hause fertiggestellt und spätestens nach einer gewissen Frist in elektronischer Form abgegeben wurde.

2.6.5.4.1 Aufgabe 1 – Prinzip von Cavalieri

In der Aufgabe 1 ging es um die Demonstration des Prinzips von Cavalieri. Die drei Unteraufgaben lauteten:

- a. Führe eine Internetrecherche zum Prinzip von Cavalieri durch und fasse die wichtigsten Erkenntnisse zusammen! Gib die Quellen an!
- b. Demonstriere das Prinzip von Cavalieri für (annähernd) viereckige Prismen mittels der weißen „Bierdeckel“! Mache Fotos von den Ergebnissen!
- c. Fülle folgenden Lückentext aus: Das Prinzip von Cavalieri gilt nicht nur für Prismen, sondern z.B. auch für P_____, Z_____ und K_____. Finde dazu konkrete Beispiele im Internet, kopiere die Bilder hierher und gib die Quellen an!

Material: 100 Stück weiße „Bierdeckel“

Die Schülerinnen und Schüler sollten das Prinzip von Cavalieri kennenlernen, formulieren und mit den „Bierdeckeln“ demonstrieren (siehe Abbildung 2-37). Anschließend sollten sie weitere Anwendungsgebiete davon recherchieren und mittels Bilder belegen.

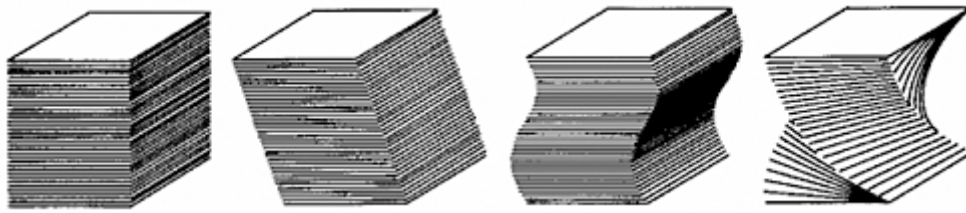


Abbildung 2-37: Demonstration des Prinzips von Cavalieri (Führer, 2006)

2.6.5.4.2 Aufgabe 2 – Volumen von Kegeln, Kugeln und Zylindern

In der Aufgabe 2 ging es um den Vergleich der Volumina von Kegeln, Kugeln und Zylindern. Die drei Unteraufgaben lauteten:

- Finde durch An- und Umfüllen von Wasser in die drei bereitgestellten Modelle eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinder die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper empirisch heraus! Du kannst auch eine Waage zum Abwiegen verwenden. Mache Fotos dieses Experiments!
- Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!
- * Wie kann man in diesem Fall das Prinzip von Cavalieri anwenden? Tipp: Betrachte eine Halbkugel und einen Kegel!

Material:

- Kunststoffmodelle: Drehzylinder, Kugel, Drehkegel
- Wasser
- Waage

Die Schülerinnen und Schüler sollten die Volumina von Kegeln, Kugeln und Zylindern vergleichen und die ermittelten Verhältnismerte der Volumina dieser geometrischen Körper durch einen mathematischen Beweis untermauern. In der dritten Unteraufgabe ging es darum zu beschreiben, dass, wenn aus einem Drehzylinder einen Drehkegel ausgeschnitten wird, der bestehende Restkörper aufgrund des Prinzips von Cavalieri gleiches Volumen wie eine Halbkugel hat.

2.6.5.4.3 Aufgabe 3 – Volumen von Pyramiden

In der Aufgabe 3 ging es um das Volumen von Pyramiden. Die drei Unteraufgaben lauteten:

- Welchen einfachen geometrischen Körper kann man aus den drei bereitgestellten Pyramiden erstellen? Mache Fotos!
- Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!
- * Denkst du, könnte man dieses Experiment auf etwas allgemeinere, geometrische Körper anwenden? Wenn ja, wie?

Material: drei Pyramiden aus Schaumstoff

Die Schülerinnen und Schüler sollten die drei Pyramiden aus Schaumstoff zu einem Würfel zusammensetzen (siehe Abbildung 2-38:) und den Verhältniswert der Volumina der Pyramiden und des Würfels durch einen mathematischen Beweis untermauern. In der dritten Unteraufgabe ging es darum, dieses Prinzip z.B. auf Quader zu erweitern.

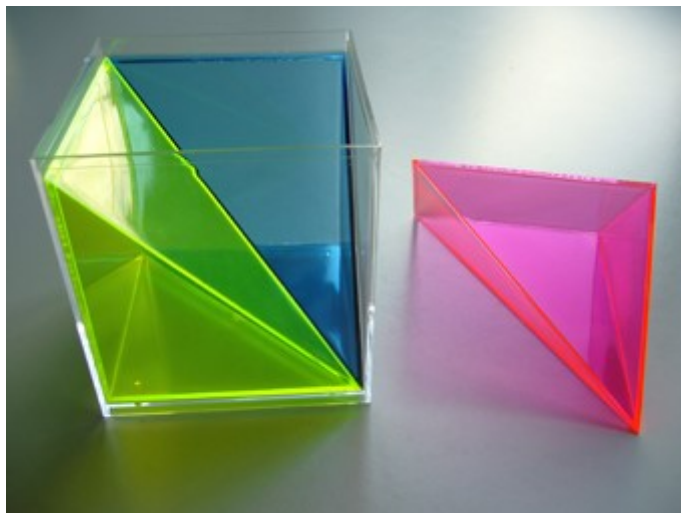


Abbildung 2-38: Volumen von Pyramiden (Vonesch, 2024)

Das Protokoll wurde als Word-Datei den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung gestellt. Die Beurteilung des Protokolls war wie folgt geplant. Für die Lösung jeder Aufgabe gab es jeweils maximal drei Punkte und für die richtige Abgabe des Protokolls als PDF-Datei einen weiteren Punkt, insgesamt also zehn Punkte. Es gab außerdem sogenannte Sternaufgaben, die mit einem * gekennzeichnet waren und deren Lösung Zusatzpunkte zu den erreichbaren zehn Punkten brachte.

2.6.5.4.4 Reflexionsfragen

Es gab zusätzlich drei Reflexionsfragen, die die Schülerinnen und Schüler beantworten sollten.

- Was war gut?
- Was war nicht so gut?
- Wo waren die Herausforderungen?

Die Antworten interessierten mich, um herauszufinden, wo die Schülerinnen und Schüler die größten Schwierigkeiten hatten, wo sie sich leichttaten und wo sie Spaß an der Sache hatten.

2.6.5.5 Ablauf

Der Ablauf des mathematischen Projekts war wie folgt. Die Schülerinnen und Schüler luden sich das Protokoll aus dem Internet herunter und begannen mit der Arbeit und arbeiteten in Zweiergruppen bzw. in Dreiergruppen am Protokoll. Die Mentorin und ich standen den Schülerinnen und Schüler beratend zur Seite, falls sie Fragen zu den Aufgaben hatten. Die Schülerinnen und Schüler konnten die drei Aufgaben vollständig während der Unterrichtszeit lösen. Die Arbeit machte ihnen sichtlich Spaß. Besonders das Erstellen der Fotos war für sie ein Highlight. Wobei sie Schwierigkeiten hatten, war das Formulieren der Beweise. Der Grund war, dass sie das laut eigenen Aussagen noch nie gemacht hätten.

Es gab insgesamt dreizehn Gruppen, einmal sechs und einmal sieben Gruppen. Jede Gruppe gab das ausgefüllte Protokoll per E-Mail ab. Ich bat die Schülerinnen und Schüler um Erlaubnis, die von ihnen ausgefüllten Protokolle in anonymisierter Form weiterverwenden zu dürfen, worin sie einwilligten.

2.6.5.6 Protokoll zum Herunterladen

Das Protokoll zum Herunterladen mit dem Namen „All about geometric bodies“ sah wie folgt aus:

Naturwissenschaftliches Labor / Mathe 3	5A – 2019/20
Name:	Versuchsdatum:
Gruppenmitglieder:	Erstellt am:

ALL ABOUT GEOMETRIC BODIES!

Aufgabe 1: Prinzip von Cavalieri:

- Führe eine Internetrecherche zum Prinzip von Cavalieri durch und fasse die wichtigsten Erkenntnisse zusammen! Gib die Quellen an!
- Demonstriere das Prinzip von Cavalieri für (annähernd) viereckige Prismen mittels der weißen „Bierdeckel“! Mache Fotos von den Ergebnissen!
- Fülle folgenden Lückentext aus: Das Prinzip von Cavalieri gilt nicht nur für Prismen, sondern z.B. auch für P_____, Z_____ und K_____. Finde dazu konkrete Beispiele im Internet, kopiere die Bilder hierher und gib die Quellen an!

Aufgabe 2: Volumen von Kegeln, Kugeln und Zylindern:

- Finde durch An- und Umfüllen von Wasser von Wasser in die drei bereitgestellten Modelle eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinder die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper empirisch heraus! Du kannst auch eine Waage zum Abwiegen verwenden. Mache Fotos dieses Experiments!
- Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!
- * Wie kann man in diesem Fall das Prinzip von Cavalieri anwenden? Tipp: Betrachte eine Halbkugel und einen Kegel!

Aufgabe 3: Volumen von Pyramiden:

- Welchen einfachen geometrischen Körper kann man aus den drei bereitgestellten Pyramiden erstellen? Mache Fotos!
- Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!
- * Denkst du, könnte man dieses Experiment auf etwas allgemeinere, geometrische Körper anwenden? Wenn ja, wie?

Reflexion zu den Aufgaben:

Welche Aufgaben haben mir gut/weniger gut/nicht gefallen? Warum?

Welche Aufgaben waren leicht, welche waren schwierig zu lösen? Warum?

Was waren die größten Herausforderungen?

2.6.5.7 Ergebnisse

Im Folgenden werden zwei ausgewählte Protokolle, die die Schülerinnen und Schüler abgaben, dargestellt. Im ersten ausgewählten Protokoll sind die selbst erstellten Fotos teilweise nicht aussagekräftig, besonders beim Experimentieren mit dem Wasser, weil hier die Zusammenhänge nicht ersichtlich sind. Bei einigen Bildern fehlen die Quellenangaben, sodass die Bilder aus Urheberrechtsgründen weggelassen werden. Die Beweise sind korrekt ausgeführt.

Im zweiten ausgewählten Protokoll sind die Fotos sehr aussagekräftig, besonders beim Experimentieren mit dem Wasser, weil hier die Zusammenhänge gut ersichtlich sind. Es fehlen die Internetrecherchen. Die Beweise sind teilweise nicht korrekt ausgeführt.

2.6.5.7.1 Erstes ausgewähltes Protokoll der Schülerinnen und Schüler

Das erste ausgewählte Protokoll der Schülerinnen und Schüler sah wie folgt aus:

Naturwissenschaftliches Labor / Mathe 3	5A – 2019/20
Name:	Versuchsdatum: 22.11.2019
Gruppenmitglieder:	Erstellt am: 22.11.2019

ALL ABOUT GEOMETRIC BODIES!

Aufgabe 1: Prinzip von Cavalieri:

- a. Führe eine Internetrecherche zum Prinzip von Cavalieri durch und fasse die wichtigsten Erkenntnisse zusammen! Gib die Quellen an!

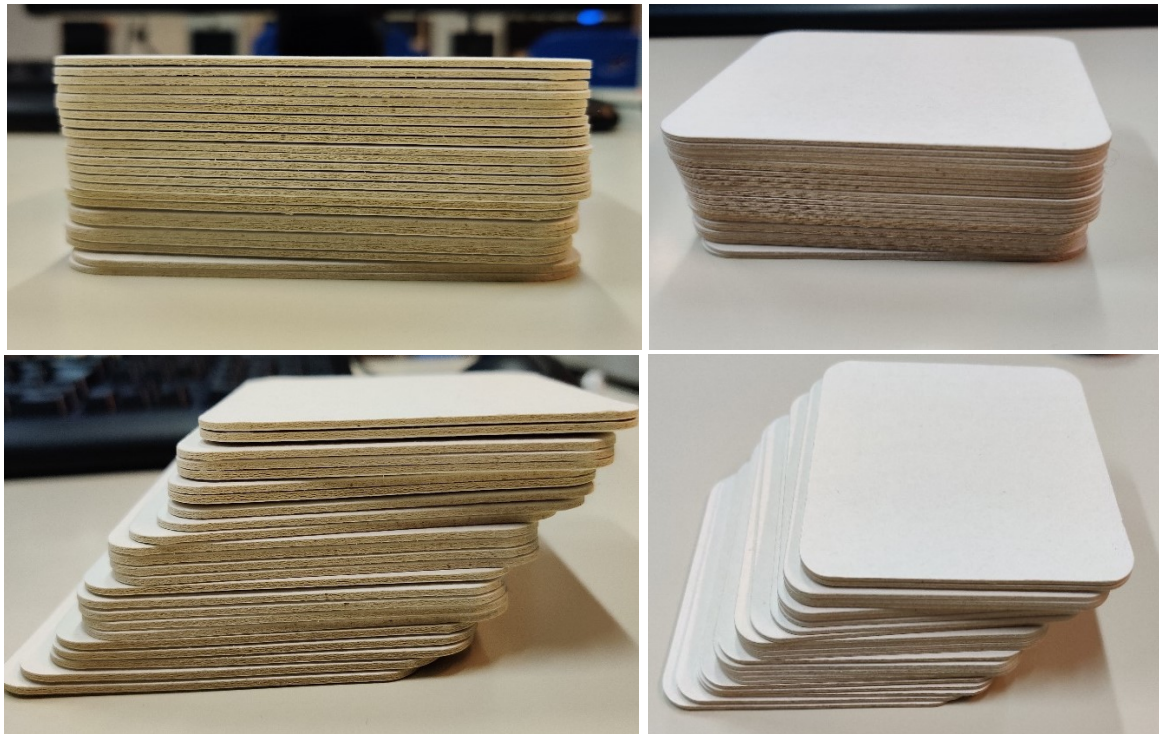
FRANCESCO BONAVENTURA CAVALIERI, ein Schüler GALILEIs, veröffentlichte 1629 das auf seinen Überlegungen beruhende Prinzip des Volumenvergleichs zweier Körper.

Liegen zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen und sind die Inhalte der Schnittflächen der Körper mit jeder zur Grundfläche parallelen Ebene einander gleich, so haben diese Körper auch das gleiche Volumen.

Mit dem Prinzip des Cavalieri kann man den Rauminhalt (das Volumen) zweier beliebiger Körper vergleichen. Das Prinzip wird bei der Herleitung vieler Volumenformeln verwendet, indem man das neue Problem auf Bekanntes zurückführt.

Link: <https://bit.ly/2OdkTrG> (Hoffmann, 2019)

- b. Demonstriere das Prinzip von Cavalieri für (annähernd) viereckige Prismen mittels der weißen „Bierdeckel“! Mache Fotos von den Ergebnissen und füge sie hier ein!



- c. Fülle folgenden Lückentext aus: Das Prinzip von Cavalieri gilt nicht nur für Prismen, sondern z.B. auch für Pyramide, Zylinder und Kegel. Finde dazu konkrete Beispiele im Internet, kopiere die Bilder hierher und gib die Quellen an!

(Anmerkung: vier Bilder aus Urheberrechtsgründen weggelassen)

Aufgabe 2: Volumen von Kegeln, Kugeln und Zylindern:

- a. Finde durch An- und Umfüllen von Wasser in die drei bereitgestellten Modelle eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinder die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper empirisch heraus! Du kannst auch eine Waage zum Abwiegen verwenden. Mache Fotos dieses Experiments und füge sie hier ein!

Kegel: 232 cm^3

Kugel: 474 cm^3

Zylinder: 716 cm^3



Das Volumen des Kegels ist ein Drittel von dem Volumen des Zylinders.

Das Volumen der Kugel ist $\frac{2}{3}$ des Volumens des Zylinders.

Das Volumen des Kegels und der Kugel ergibt das Volumen des Zylinders.

- b. Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln! Tipp: Überlegen, welche Größe du statt der Höhe h verwenden kannst, damit du die Variablen reduzieren kannst.

Volumen Kegel: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r$

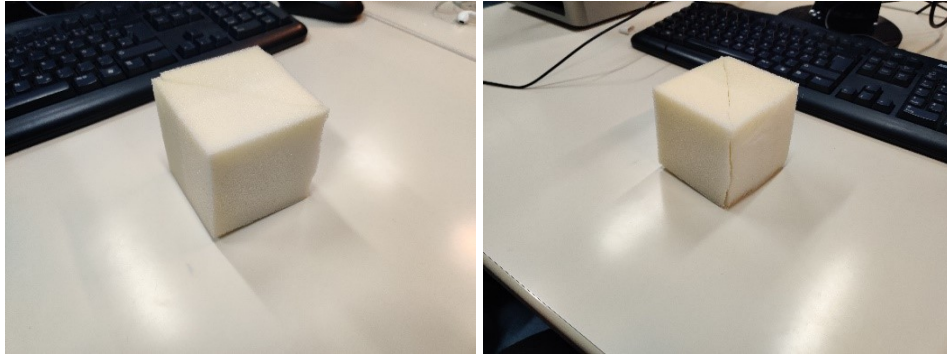
Volumen Kugel: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Volumen Zylinder: $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r$

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Ke}} + V_{\text{Ku}} &= V_{\text{Z}} \\
 \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r + \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi &= r^2 \cdot \pi \cdot 2r \\
 \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot 2 + \frac{4}{3} r^3 \pi &= r^3 \cdot \pi \cdot 2 \\
 \frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi r^3 &= 2 r^3 \pi && | \cdot 3 \\
 2 \pi r^3 + 4 \pi r^3 &= 6 r^3 \pi && | : 2 \\
 1 \cdot \pi r^3 + 2 \pi r^3 &= 3 r^3 \pi \\
 3 \pi r^3 &= 3 \pi r^3 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Volumen von Pyramiden:

- a. Welchen einfachen geometrischen Körper kann man aus den drei bereitgestellten Pyramiden erstellen? Mache Fotos!



- b. Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!

Volumen Würfel: $V = a^3$

Volumen Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot 3 = a^3$

Reflexion zu den Aufgaben:

Welche Aufgaben haben mir gut/weniger gut/nicht gefallen? Warum?

Uns haben die Aufgaben mit dem Wasser und dem Berechnen gut gefallen, weil etwas Kreativität vorhanden war und es sehr lustig war.

Welche Aufgaben waren leicht, welche waren schwierig zu lösen? Warum?

Aufgabe 1 war am leichtesten, weil am wenigsten zum Überlegen war.

Was waren die größten Herausforderungen?

Die größte Schwierigkeit war die Formel umformen, so dass es das Gleiche ergibt.

2.6.5.7.2 Zweites ausgewähltes Protokoll der Schülerinnen und Schüler

Das zweite ausgewählte Protokoll der Schülerinnen und Schüler sah wie folgt aus:

Naturwissenschaftliches Labor / Mathe 3	5A – 2019/20
Name:	Versuchsdatum: 22.11.2019
Gruppenmitglieder:	Erstellt am: 22.11.2019

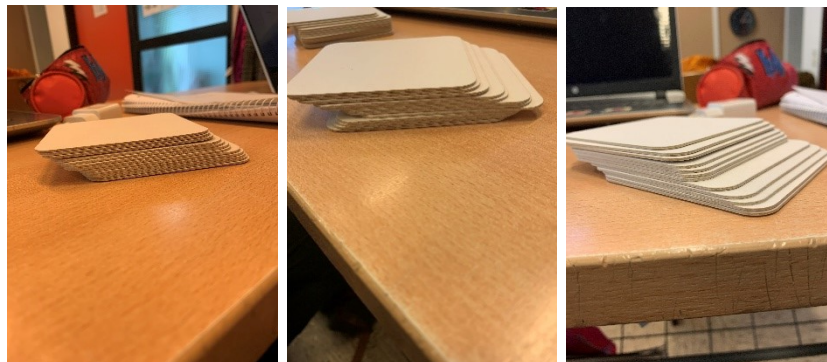
ALL ABOUT GEOMETRIC BODIES!

Aufgabe 1: Prinzip von Cavalieri:

- a. Führe eine Internetrecherche zum Prinzip von Cavalieri durch und fasse die wichtigsten Erkenntnisse zusammen! Gib die Quellen an!

→ Körper besitzen dasselbe Volumen, wenn jede Schnittfläche denselben Flächeninhalt hat.

- b. Demonstriere das Prinzip von Cavalieri für (annähernd) viereckige Prismen mittels der weißen „Bierdeckel“! Mache Fotos von den Ergebnissen und füge sie hier ein!



- c. Fülle folgenden Lückentext aus: Das Prinzip von Cavalieri gilt nicht nur für Prismen, sondern z.B. auch für Pyramide_____, Zylinder_____ und Kegel_____. Finde dazu konkrete Beispiele im Internet, kopiere die Bilder hierher und gib die Quellen an!

Aufgabe 2: Volumen von Kegeln, Kugeln und Zylindern:

- a. Finde durch An- und Umfüllen von Wasser in die drei bereitgestellten Modelle eines Kegels, einer Kugel und eines Zylinders die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper empirisch heraus! Du kannst auch eine Waage zum Abwiegen verwenden. Mache Fotos dieses Experiments und füge sie hier ein!



Der Kegel beträgt $\frac{1}{3}$ Volumen vom Zylinder



Der Kegel beträgt $\frac{1}{2}$ Volumen von der Kugel



Die Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ Volumen vom Zylinder.

→Der Zusammenhang zwischen den drei Körpern ist, dass die Summe des Volumens der Kugel und vom Kegel das Volumen des Zylinders entspricht.

- b. Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln! Tipp: Überlegen, welche Größe du statt der Höhe h verwenden kannst, damit du die Variablen reduzieren kannst.

$$\frac{r^2 \cdot \pi \cdot 2r}{3} + \frac{r^3 \cdot \pi \cdot 2r}{3} = \quad h = 2r$$

$$= \frac{2r^3 \cdot \pi}{3} + \frac{r^3 \cdot \pi \cdot 2r}{3} =$$

$$= \frac{2r^3 \cdot \pi + 4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} =$$

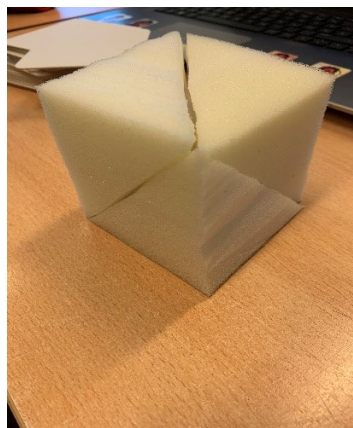
$$= \frac{6r^3 \cdot \pi}{3} = \quad \rightarrow \text{kürzen}$$

$$= 2r^3 \cdot \pi$$

Aufgabe 3: Volumen von Pyramiden:

- a. Welchen einfachen geometrischen Körper kann man aus den drei bereitgestellten Pyramiden erstellen? Mache Fotos!

→ Würfel



- b. Beweise die Beziehung zwischen den Volumina dieser Körper mittels der zugehörigen mathematischen Volumenformeln!

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = a^3$$

Reflexion zu den Aufgaben:

Welche Aufgaben haben mir gut/weniger gut/nicht gefallen? Warum?

→ Uns hat Aufgabe 2 am meisten Spaß gemacht, weil es eine Abwechslung von den anderen Aufgaben war.

Welche Aufgaben waren leicht, welche waren schwierig zu lösen? Warum?

→ Es gab keine schwierige Aufgabe.

Was waren die größten Herausforderungen?

→ Dass man manche Aufgaben beweisen musste.

2.6.5.8 Zusammenfassung

Es gab die meisten Schwierigkeiten beim Beweisen, was sich gut mit den Aussagen im Kapitel 2.6.5.2 deckt. Manche Gruppen machten gute Fotos, andere wieder weniger aussagekräftige. Da bräuchte es noch etwas mehr Übung. Insgesamt waren die Motivation und Arbeitsleistung der Schülerinnen und Schüler aus meiner Sicht hervorragend, und sie erreichten gute Ergebnisse. Die erzielten Punkte bewegten sich, bis auf wenige Ausnahmen, im Rahmen von sechs bis neun von zehn Punkten.

Anhand der Beantwortung der Reflexionsfragen wird ersichtlich, dass die Aufgabenstellungen teilweise herausfordernd waren, der Schwierigkeitsgrad angemessen war, und die Aufgabe 2 sichtlich Spaß machte.

2.7 Ist-Zustand für die Unterrichtssituation

Dieses Kapitel enthält eine Gegenüberstellung der Methoden, Sätze, Beweise und anschaulichen Darstellungen betreffend die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden, der Lehrplanbezug und der konkreten Ausführung in den Schulbüchern (siehe Tabelle 2-1).

Das Ergebnis dieser Gegenüberstellung ist die Erhebung des Ist-Zustandes für die Unterrichtssituation, wenn als Basis das für den Unterricht ausgewählte Schulbuch herangezogen wird.

Methode, Satz, Beweis bzw. anschauliche Darstellung	Lehrplanbezug	Konkrete Ausführung in den Schulbüchern
Guldinsche Regel für die Volumenberechnung eines Drehkegels (siehe Kapitel 2.2.1)	2. Klasse: allenfalls Konstruieren besonderer Punkte im Dreieck (siehe Kapitel 2.6.1.2) 4. Klasse: Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.4)	Nicht durchgeführt
Satz von Cavalieri (siehe Kapitel 2.2.2)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3) 4. Klasse: Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.4)	„Mathematik verstehen 3“ (Salzger, et al., 2022 S. 257) „Mathematik verstehen 4“ (Salzger, et al., 2023 S. 195)

Methode, Satz, Beweis bzw. anschauliche Darstellung	Lehrplanbezug	Konkrete Ausführung in den Schulbüchern
Geometrischer Beweis für die Volumenberechnung einer quadratischen Pyramide (siehe Kapitel 2.4.1.1)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	Nicht durchgeführt
Geometrischer Beweis für die Volumenberechnung einer quadratischen Pyramide (siehe Kapitel 2.4.1.2)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	„Das ist Mathematik 3“ (Hasibeder, et al., 2019 S. 238)
Neuer elementarer Beweis für die Volumenberechnung eines Drehkegels (siehe Kapitel 2.4.2.1)	4. Klasse: Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.4)	Nicht durchgeführt
Neuer elementarer Beweis für die Volumenberechnung einer Pyramide (siehe Kapitel 2.4.2.2)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	Nicht durchgeführt
Elementare Plausibilitätsbetrachtung für die Volumenberechnung einer rechteckigen Pyramide (siehe Kapitel 2.4.2.3)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	Nicht durchgeführt
Elementarer Beweis für die Volumenberechnung einer rechteckigen Pyramide (siehe Kapitel 2.4.2.4)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	Nicht durchgeführt

Methode, Satz, Beweis bzw. anschauliche Darstellung	Lehrplanbezug	Konkrete Ausführung in den Schulbüchern
Elementarer Beweis für die Volumenberechnung eines Drehkegels bzw. einer Pyramide (siehe Kapitel 2.4.2.5)	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3) 4. Klasse: Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.4)	Nicht durchgeführt
Analytischer Beweis für die Volumenberechnung eines Drehkegels (siehe Kapitel 2.4.3.1)	8. Klasse – Kompetenzmodul 7: Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen) (siehe Kapitel 2.6.2.1)	„Mathematik verstehen 8“ (Malle, et al., 2020 S. 38) „Lösungswege 8“ (Freiler, et al., 2018 S. 55)
Analytischer Beweis für die Volumenberechnung einer Pyramide (siehe Kapitel 2.4.3.2)	8. Klasse – Kompetenzmodul 7: Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können (insbesondere Flächeninhalte, Volumina, Weglängen, Geschwindigkeiten, Arbeit und Energie; allenfalls weitere physikalische Deutungen) (siehe Kapitel 2.6.2.1)	„Mathematik verstehen 8“ (Malle, et al., 2020 S. 38)

Methode, Satz, Beweis bzw. anschauliche Darstellung	Lehrplanbezug	Konkrete Ausführung in den Schulbüchern
Anschauliche Darstellung: ein Würfel setzt sich aus drei Pyramiden zusammen	3. Klasse: räumliche Objekte beschreiben und darstellen; Oberflächen- und Rauminhalte gerader Prismen und Rauminhalte von Pyramiden ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.3)	Nicht vorhanden
Anschauliche Darstellung: Umgießen von Wasser aus einer Form eines Drehkegels in eine Form eines Drehzylinders	4. Klasse: Drehzylinder und Drehkegel beschreiben; Oberflächen- und Rauminhalte ermitteln (siehe Kapitel 2.6.1.4)	Nicht vorhanden

Tabelle 2-1 Gegenüberstellung der Methoden, Sätze, Beweise und anschaulichen Darstellungen, dem Lehrplanbezug und der konkreten Ausführung in den Schulbüchern

Aus dieser Tabelle geht deutlich hervor, dass nur ein kleiner Teil der existierenden Methoden, Sätze Beweise und keine der anschaulichen Darstellungen in den ausgewählten Schulbüchern durchgeführt bzw. illustriert wird. Damit wird das maximal mögliche mathematische Spektrum durch die Schulbücher nicht abgedeckt. Im folgenden Kapitel werden Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation aufgezeigt.

2.8 Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation

Anhand der Forschungsfrage „Wie kann die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden im Unterricht der Sekundarstufen 1 und 2 auf verschiedenen Schulstufen durchgeführt, bewiesen und veranschaulicht werden?“ werden in diesem Kapitel Verbesserungspotentiale auf Basis des Ist-Zustandes für die Unterrichtssituation aufgezeigt.

2.8.1 Durchführung der Volumenberechnung

In der Sekundarstufe 1 kann die Volumenberechnung von Drehkegeln (4. Klasse) und Pyramiden (3. Klasse) anhand der Volumenformeln für diese geometrischen Körper durchgeführt werden.

In der Sekundarstufe 2 kann die Volumenberechnung von Drehkegel und Pyramiden (8. Klasse) mittels Integrals über die Querschnittsflächen durchgeführt werden. Die Drehkegel können überdies als Rotationskörper aufgefasst und das Volumen mit den Integrationsmethoden für Rotationskörper berechnet werden.

Hier gibt es keine Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation, da die entsprechenden Berechnungsmethoden im Lehrplan festgelegt sind und diese auch in den aktuellen Schulbüchern in dieser Form umgesetzt werden.

2.8.2 Beweisen der Volumenberechnung

In der Sekundarstufe 1 kann die Volumenberechnung durch geometrische bzw. elementare Beweise gezeigt werden, indem die entsprechenden Volumenformeln bewiesen werden. Die geometrischen Beweise gelten nur für quadratische Pyramiden (3. Klasse).

Die elementaren Beweise gelten teilweise für allgemeine Drehkegel (4. Klasse) und Pyramiden (3. Klasse), teilweise nur für rechteckige Pyramiden (3. Klasse), wobei vom letzteren eine einfachere Version als Plausibilitätsbetrachtung existiert. Die allgemeinen elementaren Beweise basieren auf dem Satz von Cavalieri, dessen Beweis wiederum nur mit Integrationsrechnung durchgeführt werden kann. Das ist der Grund, warum der Satz von Cavalieri in den aktuellen Schulbüchern der Sekundarstufe 1 erwähnt und nicht bewiesen wird.

Hier gibt es Verbesserungspotential für die Unterrichtssituation. Die elementare Plausibilitätsbetrachtung für rechteckige Pyramiden bzw. der Beweis als Erweiterung derselben könnte ohne weiteres in den Schulbüchern aufgenommen werden. Die elementaren Beweise für allgemeine Drehkegel bzw. Pyramiden könnten in den Schulbüchern zumindest skizziert werden.

In der Sekundarstufe 2 kann die Volumenberechnung gezeigt werden, indem die Volumenformeln der Drehkegel und Pyramiden (8. Klasse) durch Integrationsmethoden analytisch bewiesen werden.

Hier gibt es keine Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation, da die entsprechenden Beweismethoden im Lehrplan festgelegt sind und diese auch in den aktuellen Schulbüchern in dieser Form umgesetzt werden.

2.8.3 Veranschaulichung der Volumenberechnung

In der Sekundarstufe 1 kann die Volumenberechnung durch das Experiment, dass sich ein Würfel aus drei Pyramiden zusammensetzt (3. Klasse) bzw. durch Umgießen von Wasser bzw. feinem, rieselfähigen Sand aus einer Form eines Drehkegels in eine Form eines Drehzylinders (4. Klasse) veranschaulicht werden. Alternativ zur letzten Veranschaulichung sind auch andere Formen wie z.B. eine Pyramide und ein Prisma mit gleicher Grundfläche und Höhe möglich (3. Klasse).

Außerdem ist eine Veranschaulichung für den geometrischen Beweis für die Volumenberechnung einer quadratischen Pyramide denkbar, bei dem sich ein Würfel aus sechs quadratischen Pyramiden zusammensetzt (3. Klasse).

Diese Veranschaulichung kann helfen, die Volumenformeln besser zu verstehen bzw. zu verinnerlichen, weil es auf dieser Stufe keine vollumfänglichen Beweise für die Volumenformel gibt und somit Fragen offenbleiben.

Hier gibt es Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation, weil die aktuellen Schulbücher nicht auf diese Möglichkeit der Veranschaulichung eingehen. Es wäre z.B. denkbar, dass die Schulbücher einen Leitfaden zum Erstellen des erstgenannten Experiments anbieten bzw. Fotos vom Umgießen des Wassers von der einen Form in die andere Form zeigen. Die letztgenannte Veranschaulichung könnte eine Ergänzung des Beweises, der ja im Schulbuch „Das ist Mathematik 3“ (Hasibeder, et al., 2019 S. 238) durchgeführt wird, darstellen, indem z.B. ein Leitfaden für das Erstellen der sechs Pyramiden aus verschiedenen Materialien erstellt wird.

In der Sekundarstufe ist keine Veranschaulichung notwendig, weil die Beweise vollumfänglich durchgeführt werden können und somit keine offenen Fragen bleiben, die einer Veranschaulichung bedürfen.

2.8.4 Zusammenfassung

Für die Sekundarstufe 1 gibt es Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation für das Beweisen und die Veranschaulichung der Volumenberechnung, die sicherlich zum besseren Verständnis der Thematik für die Schülerinnen und Schüler beitragen kann. Für die Durchführung der Volumenberechnung gibt es keine Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation.

Für die Sekundarstufe 2 gibt es in allen drei genannten Punkten keine Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation.

3 Schluss

3.1 Beantwortung der Forschungsfrage

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Forschungsfrage „Wie kann die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden im Unterricht der Sekundarstufen 1 und 2 auf verschiedenen Schulstufen durchgeführt, bewiesen und veranschaulicht werden?“ (siehe Kapitel 1.2) wird folgendermaßen beantwortet.

Die Grundlage bildet der Lehrplan für die verschiedenen Schulstufen. Darauf aufbauend kann die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden mit den entsprechenden Volumenformeln in der Sekundarstufe 1 (4. Klasse für Drehkegel und 3. Klasse für Pyramiden) bzw. mit den entsprechenden Integrationsmethoden in der Sekundarstufe 2 (8. Klasse) durchgeführt werden.

Für das Beweisen der Volumenberechnung gelten ähnliche Kriterien: die vorgestellten geometrischen bzw. elementaren Beweise können, weil sie ohne direkte Verwendung der Integralrechnung auskommen, in der Sekundarstufe 1 (4. Klasse für Drehkegel und 3. Klasse für Pyramiden) angewendet werden. Die analytischen Beweise kommen, da sie auf der Integralrechnung basieren, in der Sekundarstufe 2 (8. Klasse) zur Anwendung.

Die Veranschaulichung der Volumenberechnung mit den beschriebenen Methoden kann für die Sekundarstufe 1 (4. Klasse für Drehkegel und 3. Klasse für Pyramiden) zum Einsatz kommen.

Auf Basis des Ist-Zustands für die Unterrichtspraxis werden Verbesserungspotentiale für die Sekundarstufe 1 im Hinblick auf die Beweise und Veranschaulichung der Volumenberechnung festgestellt. Ein breiterer Einsatz dieser beiden Punkte kann zum besseren Verständnis der Thematik für die Schülerinnen und Schüler beitragen.

3.2 Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt das Thema Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden im Unterricht der Sekundarstufe 1 und 2.

Die Arbeit besteht aus dem mathematischen Teil, der die Durchführung, die Beweise und die Veranschaulichung der Volumenberechnung behandelt, und dem Unterrichtsteil, der den Ist-Zustand für die Unterrichtssituation vorstellt und Verbesserungspotentiale aufzeigt.

Der mathematische Teil ist wie folgt aufgebaut.

Zuerst werden die mathematischen Grundlagen dieser Arbeit beschrieben. Diese bestehen aus den Definitionen und Volumenformeln der betrachteten geometrischen Körper Drehzylinder, Prisma, Drehkegel und Pyramide.

Dann werden zwei wichtige Aspekte aus der Geschichte der Volumenberechnung vor der Anwendung der Infinitesimalrechnung betrachtet. Diese sind die Guldinsche Regel für das Volumen sowie die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri. Der letztere Aspekt ist die Grundlage für viele elementare Beweise für die Volumenformel eines Drehkegel bzw. einer Pyramide.

Im Anschluss werden zwei grundlegende Sätze für die Volumenberechnung beschrieben. Das sind der Satz von Fubini sowie der Satz über die Vertauschung der Integrationsreihen-

folge. Die beiden Sätze bilden die Grundlage für die analytischen Beweise für die Volumenformel eines Drehkegels bzw. einer Pyramide.

Es werden bekannte geometrische, elementare und analytische Beweise für die Volumenformel eines Drehkegels, einer geraden Pyramide bzw. in manchen Fällen einer quadratischen bzw. rechteckigen Pyramide vorgestellt.

Außerdem wird ein neuer, elementarer Beweis für die Volumenformel eines Drehkegels durchgeführt. Dieser Beweis stützt sich ausschließlich auf den Satz von Cavalieri sowie elementare Überlegungen und ist ebenfalls für die Volumenformel einer Pyramide anwendbar.

Zwei anschauliche Darstellungen, eine für das Volumen einer quadratischen Pyramide und zweite für das Volumen eines Drehkegels werden gezeigt.

Der Unterrichtsteil ist wie folgt aufgebaut.

Zuerst wird der Lehrplan, der als Basis für die Umsetzung der Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden in der Schule dient, vorgestellt.

Dann wird ein Exzerpt aus drei ausgewählten aktuellen Schulbuchreihen beschrieben.

Im Anschluss wird ein Beispiel der eigenen Erfahrung aus der Masterpraxis vorgestellt.

Durch eine Gegenüberstellung der Methoden, Sätze, Beweise und anschaulichen Darstellungen betreffend die Volumenberechnung von Drehkegeln und Pyramiden, der Lehrplanbezug und der konkreten Ausführung in den Schulbüchern wird der Ist-Zustand für die Unterrichtssituation erhoben und auf Basis dessen Verbesserungspotentiale für die Unterrichtssituation aufgezeigt.

Die beiden wesentlichen Aspekte in dieser Arbeit sind die Vorstellung eines neuen, elementaren Beweises für die Volumenformel eines Drehkegels bzw. einer Pyramide, der sich ausschließlich auf den Satz von Cavalieri sowie elementare Überlegungen stützt, sowie das Aufzeigen von Verbesserungspotentialen auf Basis des Ist-Zustandes für die Unterrichtssituation.

An dieser Stelle danke ich meinem Betreuer der Masterarbeit Univ.-Prof. Mag. Dr. Hans Humenberger, der durch mehrmalige kritische Durchsicht sehr zur Qualität dieser Arbeit beigetragen hat.

3.3 Ausblick

Es ist wünschenswert, wenn die Ergebnisse dieser Arbeit, insbesondere die festgestellten Verbesserungspotentiale in die Erstellung von zukünftigen Schulbuchreihen einfließen, sowie eine Anwendung und kritische Diskussion der beiden neuen vorgestellten elementaren Beweise für Drehkegeln bzw. Pyramiden im schulischen bzw. universitären Rahmen stattfindet.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2-1 Drehzylinder	10
Abbildung 2-2 Gerades quadratisches Prisma	11
Abbildung 2-3 Gerades regelmäßiges fünfseitiges Prisma	12
Abbildung 2-4 Drehkegel	12
Abbildung 2-5 Gerade quadratische Pyramide	13
Abbildung 2-6 Gerade regelmäßige fünfseitige Pyramide	14
Abbildung 2-7 Anwendung der Guldinschen Regel	16
Abbildung 2-8 Illustration des Satzes von Cavalieri mit Prismen	17
Abbildung 2-9 Illustration des Satzes von Cavalieri mit Bierdeckeln	18
Abbildung 2-10 Dreieck und Rechteck mit Indivisiblen	19
Abbildung 2-11 Zerlegung eines Parallelogramms	20
Abbildung 2-12 Fortgesetzte Zerlegung eines Parallelogramms	20
Abbildung 2-13 Pyramide versus Prisma	22
Abbildung 2-14 Drei volumengleiche rechteckige Pyramiden ergeben einen Quader	25
Abbildung 2-15 Sechs volumengleiche quadratische Pyramiden ergeben einen Würfel	26
Abbildung 2-16 Drehkegel	27
Abbildung 2-17 Drehkegel in Schichten	27
Abbildung 2-18 Drehkegelstumpf, aus dem der gespiegelte obere Drehkegel ausgeschnitten wird	28
Abbildung 2-19 Drehkegelstumpf in Schichten	29
Abbildung 2-20 Transformation des ausgeschnittenen Drehkegelstumpfes in ein dreiseitiges Prisma	30
Abbildung 2-21 Anwendung des Verfahrens auf HK	31
Abbildung 2-22 Zwei geometrische Beweise für die geometrische Reihe	33
Abbildung 2-23 Zu teilende Grundfläche	34
Abbildung 2-24 Zu teilende Pyramide	34
Abbildung 2-25 Gerade regelmäßige fünfseitige Pyramide	35
Abbildung 2-26 Pyramidenstumpf, aus dem die gespiegelte Pyramide ausgeschnitten wird	35
Abbildung 2-27 Pyramidenstumpf in Schichten	36
Abbildung 2-28 Transformation des ausgeschnittenen Pyramidenstumpfes in ein dreiseitiges Prisma	37
Abbildung 2-29 Anwendung des Verfahrens auf HP	38
Abbildung 2-30 Einschreibung eines Quaders in eine rechteckige Pyramide	40
Abbildung 2-31 Drei quadratische Pyramiden passen in einen Würfel	44
Abbildung 2-32 Eine quadratische Pyramide liegt im Würfel	44
Abbildung 2-33 Alle drei quadratischen Pyramiden liegen im Würfel	45
Abbildung 2-34 Ergebnis nach dem ersten Schritt beim Umfüllen des Wassers	45
Abbildung 2-35 Ergebnis nach dem zweiten Schritt beim Umfüllen des Wassers	46
Abbildung 2-36 Ergebnis nach dem dritten Schritt beim Umfüllen des Wassers	46
Abbildung 2-37: Demonstration des Prinzips von Cavalieri (Führer, 2006)	69
Abbildung 2-38: Volumen von Pyramiden (Vonesch, 2024)	70

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2-1 Gegenüberstellung der Methoden, Sätze, Beweise und anschaulichen Darstellungen, dem Lehrplanbezug und der konkreten Ausführung in den Schulbüchern	82
---	----

Literaturverzeichnis

Aue, Vera, et al. 2023. *Das ist Mathematik 1.* [Hrsg.] Hans Humenberger. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2023.

Bronstein, Ilja N. und Semendjaew, Konstantin A. 1981. *Taschenbuch der Mathematik.* 20. Auflage. Stuttgart [u.a.] : Teubner, 1981.

Bruder, Regina, et al. 2015. *Handbuch der Mathematikdidaktik.* s.l. : Springer Spektrum, 2015.

Bruner, Jerome S., Olver, Rose R. und Greenfield, Patricia M. 1971. *Studien zur kognitiven Entwicklung.* Stuttgart : Klett, 1971.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung. 2024. Lehrplan der Mittelschule. [Online] 17. Juli 2024. [Zitat vom: 1. September 2024.] https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ms.html.

—. **2024.** Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen. [Online] 26. Juli 2024. [Zitat vom: 1. September 2024.] https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp/lp_ahs.html.

Freiler, Philipp, et al. 2018. *Lösungswege 8.* Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2018.

Führer, Lutz. 2006. *Heuristik und Geschichte der elementaren Volumenberechnung.* s.l. : mathematica didactica, 2006.

Hasibeder, Johannes, et al. 2019. *Das ist Mathematik 3.* [Hrsg.] Hans Humenberger. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2019.

—. **2020.** *Das ist Mathematik 4.* [Hrsg.] Hans Humenberger. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2020.

Heuser, Harro. 2008. *Lehrbuch der Analysis. 2, : mit 633 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen.* 14., akt. Aufl. Stuttgart : Teubner, 2008.

Hoffmann, Björn. 2019. <https://www.lernhelfer.de>. <https://www.lernhelfer.de>. [Online] Duden Learnattack GmbH, 1. Oktober 2019. [Zitat vom: 1. September 2024.] <https://bit.ly/2OdkTrG>.

Huber, Florian. 2009. OnlineMathe. [Online] 23. Februar 2009. [Zitat vom: 1. September 2024.] <https://www.onlinemathe.de/forum/Herleitung-der-Volumenberechnung-einer-Pyramide>.

Malle, Günther, et al. 2020. *Mathematik verstehen 8.* Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2020.

Nelsen, Roger B. 2016. *Beweise ohne Worte.* Deutschsprachige Ausgabe herausgegeben von Nicola Oswald. Berlin Heidelberg : Springer, 2016.

Philipp, Kathleen. 2013. *Experimentelles Denken: Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz.* Freiburg, Deutschland : Springer Spektrum, 2013.

Salzger, Bernhard, et al. 2023. *Mathematik verstehen 1*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2023.

Salzger, Bernhard, et al. 2022. *Mathematik verstehen 3*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2022.

—. 2023. *Mathematik verstehen 4*. Wien : Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG, 2023.

Sonar, Thomas. 2016. *3000 Jahre Analysis : Geschichte, Kulturen, Menschen*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer Spektrum, 2016.

Vonesch, Urs. 2024. mathpoint.ch. *mathpoint.ch*. [Online] 20. Juli 2024. [Zitat vom: 1. September 2024.] www.mathpoint.ch/17stereometrie/stereo.html.

Weigand, Hans-Georg, et al. 2009. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. s.l. : Spektrum Akademischer Verlag, 2009.